MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

SZERKESZTIK ÉS KIADJÁK :

HUNYADY JENŐ, KŐNIG GYULA, KRUSPÉR ISTVÁN, SZILY KÁLMÁN, SZTOCZEK JÓZSEF ÉS WARTHA VINCZE,

MŰEGYETEMI TANÁROK.

MÁSODIK KÖTET.

BUDAPEST.
NYOMATOTT AZ ATHENAEUM R. TÁRS. NYOMDÁJÁBAN.
1877.

MŰEGYETEMI LAPOK.

II. KÖTET. 1877.

314.
2.

M. ACADEMIA'
KÖNYVTÁRA

A „Műegyetemi Lapok“ II. kötetének tartalma.

I.

(A szerző-nevek betürendje szerint.)

Abt Antal, A hullámmozgás gyorsasága lágy zsinegekben, 149.

Antolik Károly, Villanyos füstalakok, 71.

Bäumel Ede megoldja a 22, 27. és 11. számú feladatot, 92, 220, 306.

Berger Adolf megoldja a 29. számu feladatot, 189.

Czógler Alajos megoldja a 20. számu feladatot, 60.

Enneper A., Néhány határozott egészletről, 33.

B. Eötvös Loránd kitüzi a 29. számu feladatot, 96.

Farkas Gyula megoldja a 19. számú feladatot 59.

Fölser István, A másodrendü kúp- és hengerfelületek síkmetszései központi vetületben (1 táblával), 13.

Fröhlich Izor, A Grammeféle dynamo-elektrikus gép elméletéhez, 35, 161. — Különnemü fényrezgések összetétele, 129. — Az erély megmaradása elvének bevezetése a diffractió elméletébe, 228. — Nehány határozott egészletről, a diffractió elméletében, 301.

Grósz Lipót, Egy bonyolódott timsó-kristályról, 48.

Heller Ágost megismerteti Bessel »Abhandlungen II. és III. kötetét, 29.

Hunyady Jenö, Toldalék egy megelőző czikkhez, 82. — Apollonius feladatának megoldásához, 97. — A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének egy különös alakjáról, 225. — A conjugált átmérők négyzetes egyenlete, 305.

— — megismerteti *Clebsch* »Vorlesungen über Geometrie, 2-ter Theil. 88; *Salmon-Fiedler* »Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, 2-te Aufl. 156; *Reye*, Geometrie der Lage, 2-te Aufl. I. Abtheilung, 249.

— — kitüzi a 28, 31, 33. számu feladatot, 96, 192 és 256.

Klug Lipót megoldja a 34. számu feladatot, 312.

Kollár Dániel megoldja a 34. számu feladatot, 311.

Kont Gyula, A villanyosságok kiegyenlődése a szikrában, és a szigetelők oldalinfluentiája. (1 táblával). 19.

Koós Gábor, Cymophenolsulphonsav és Cymophenolsulphonsavassók, 76.

Kovács Ödön megismerteti az 1591-ik évi kolozsvári arithmetikát, 26.

König Gyula, Egy kiküszöbölési feladatról, 51. — A több ismeretlent tartalmazó elsőfoku congruentia-rendszer általános elmélete, 113. — A determinánsok szorzási tételének új levezetése, 271.

— — megismerteti *König*: Bevezetés a felsőbb algebrába I. köt. 31; *Riemann*, Gesammelte mathem. Werke und wissenschaftl. Nachlass, 54. — *Cayley*, An elementary treatise on elliptic functions, 126. — *Farkas*, A determinánsok elmélete, 188.

— — kitüzi a 32. számu feladatot, 192.

Kruspér István, A mérlegrúd meghajlása a teher alatt, 106.

Névtelen, megoldja a 23, 21, 25, 26. számu feladatokat 62, 158, 252, 253.

Papp József, Előadási kisérletek I—IV. 186.

Raussnitz Ignácz, megoldja a 32. számu feladatot, 308.

Réthy Mór, Adalékok a hőelmélet második főtételének levezetéséhez mechanikai elvekből, 1. — Észrevételek Szily K. a hőelméletben előforduló mennyiségek dynamikai jelentéséről irt dolgozatára, 135. — A propellercsavar elméletéhez, 257. — Clausius és Boltzmann thermodynamikai tételének általánositása, ha a potentiál a sebességnek is függvénye.

— — kitüzi a 27. számú feladatot, 96.

Scholtz Ágoston, A kúpszeleten fekvő hat pont és a hexagramm mysticum, 65. — Egy tétel a determinánsokról, 121. — A kúpszeleten fekvő hat pont és a Chasles-féle tétel, 280.

— — megoldja a 31, 33, 34. számu feladatokat 222, 284, 285, 310.

Schrader Károly megoldja a 19, 20, 32. számu feladatokat, 60, 62, 310.

Schuller Alajos, Előadási kisérletek: I—IV. 144 és V. 245. — Hőmennyiség-mérések, (1 táblával), 193. — Nyomás-szabályozó világító gáz számára, 299.

Simandl Samu megoldja a 30. számu feladatot, 190.

Szathmáry Ákos, Hangsebességi mérések Bosscha módja szerint, 242.

Szily Kálmán, Megemlékezés Poggendorffról, 83. — Válasz Réthy észrevételeire, 136. — D'Alembert elvének egy új alakja, és annak alkalmazása az elektrodynamikában, 289.

— — megismerteti egy mult századi köregyenesitőnket, 50; *Lejeune-Dirichlet*, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte 56; *Clausius* »Die mechanische Wärmetheorie, I. Band, 123.

— — kitűzi a 25, 26, 30, 34. számu feladatokat.

Than Károly, Vegyerélytani vizsgálatok, 178.

Vész Ármin János, Egy elsőrendű részletes különbzéki egyenlet egészelése, 78.

Wartha Vincze, Hőmennyiség-mérések (1 táblával) 193.

— — Kisebb közlemények, 53, 95.

Wohlrab Flóris megismerteti *Günther* Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. 214.

II.

Ismertetett munkák.

Lap

Bessel Fr. W., Abhandlungen II. und III. Band. (Heller Ágost) . 29

Cayley A., Treatise on elliptic functions (K. Gy.) 126

Clausius R., Die mechanische Wärmetheorie, I. Band (Sz. K.) . . 123

Clebsch A. Vorlesungen über Geometrie I. B. 2. Th. (H. J.) . . . 88

Farkas Gy. A determinansok elmélete, (K. Gy.) 188

Günther S. Vermischte Untersuchungen zur Geschichte d. math. Wissenschaften (W. F.) 214

König Gy. Bevezetés a felsőbb algebrába I. köt. (K. Gy.) 31

Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte (Sz. K.) . . 56

Reye Th., Geometrie der Lage, 2-te Aufl. I. Abth. (H. J.) 249

Riemann B., Gesammelte mathem. Werke (K. Gy.) 54

Salmon G.-Fiedler W., Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, 2. Aufl. (H. J.) 156

III.

Kitüzött és megoldott feladatok.

(A zárójelbe tett számok a már közzétett megoldásokra utalnak.)

Számelmélet: 28. — *Determinánsok*: 33. — *Végtelen sorok*: 32.

Mértan: 31, (222, 284.)

Mechanika és mathem. természettan: 25 (252), 26 (253), 27 (220), 29 (189), 30 (190), 34 (285).

IV.

Eddig még meg nem oldott feladatok.

Az I. kötetből:

13. sz. a 160. l.; 17. sz. a 224. l.; 18. sz. a 256. l.; 24. sz. a 316. l.

A II. kötetből:

28. sz. a 96. l.

Budapest, 1877. Nyomtatott az A t h e n a e u m r. társ. nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

II. kötet. 1877. 11. füzet.

ADALÉKOK A HŐELMÉLET MÁSODIK FŐTÉTELÉNEK LEVEZETÉSÉHEZ MECHANIKAI ELVEKBŐL.

Dr. Réthy Mór, kolozsvári egyetemi tanártól.

A hőelmélet második főtételének mechanikai elvekből való levezetésével egy évtized óta számos tudós foglalkozik. Dolgozataikat nem kell ismertetnem; utalhatok e helyett Szily Kálmánnak e tárgyról irt és a m. tud. Akadémiában előadott értekezéseinek históriai bevezetéseire; utalhatok továbbá Burbury és Nichols angol tudósoknak a »Phil. Mag.«-ban 1876. évi január- és május-havi füzeteiben közzétett újabb dolgozataira, a melyekből meggyőződhetünk, hogy mindazon vizsgálatok, melyek az ideig a szóban levő tárgyról megjelentek, még hézagosak. Azóta Szilytől a »M. L.« 6-ik és 8-ik füzetében két közlemény jelent meg, melyekben a szóban forgó tételnek új alapföltevéseken nyugvó levezetése nyujtatik. E levezetésre vonatkozó észrevételeimet a legközelebbi alkalommal szándékozom közzétenni.

Jelen közleményem czélja: egy részről megmutatni, hogy régibb alapfeltevéseket szabatosabban fejezve ki, mint az tudtommal eddigelé történt, a reájuk épített bizonyítás bizonyos pontig kifogástalanná válik; más részről czélja e ponton túl a feladatnak — meglehet még távol jövőben eszközlendő — végleges megoldásához új adattal járulni.

Vizsgálataim ugyanis azt mutatják, hogy:

$$\delta Q = -\int_{t_0}^{t_0+ni} \Sigma m(x'\delta x + \ldots) + \overline{T}\delta \log.(i\overline{T})^2$$

egyenletet *teljesen kifogástalan módon* lehet levezetni; úgy hogy e szerint a Boltzmann-Clausius-féle hőelméleti tétel:

$$\delta Q = T\delta \log.(i\overline{T})^2$$

bebizonyításának befejezése csakis attól függ, hogy sikerül-e a

$$\int_{t_0}^{t_0+i} \Sigma m(x'\delta x + \ldots)$$

elenyészését egyszerű és teljes általánossággal elfogadható, *thermophysikai* hypothesisből levezetni.

E mennyiség elenyészésének szükséges és elegendő föltételét tisztán *dynamikai* alakban nem nehéz kifejezni. Ugyanis Hamilton megmutatta, hogy ha a föltételi egyenletek olyan alakkal, s a működő erők olyan potentiállal birnak, a mely explicite sem időt, sem változó constansokat nem tartalmaz, akkor mindig létezik egy függvény W, a melynek partiális variatiója a pontrendszer coordinátái szerint annyi mint $\Sigma mx'\delta x$; e W függvény megoldását képezi egy bizonyos partiális differentiál-egyenletnek, s számértékére nézve mindig $= \int_{t_0}^{t} 2T dt$ azaz a test működése a t_0 kezdet-időtől a változó t időig. E tétel könnyen kiterjeszthető azon esetre, ha a működő erők potentiálja olyan constansokat is tartalmaz, a melyek az erélyközlés következtében változnak.*)

Ezt tekintetbe véve, a

$$\int_{t_0}^{t_0+i} \Sigma m(x'\delta x + \ldots)$$

elenyészik akkor és csakis akkor, ha a test működésének függvénye W *olyan alakra hozva*, hogy a Hamilton-féle *part. differentiál-egyenletet megoldja*, partialiter variálva a pontrendszer összes coordinatái szerint, e *partiális* variátió periodikus függvénye az időnek és pedig úgy, hogy a periodus akkora mint az eleven erő periodusa. Azonban ez igazság bármily érdekes legyen dynamikai szempontból, a physikusnak a mi kérdésünk körül közvetlenül keveset használ. Mert a működésnek nem teljes variátiójáról van szó, hanem partiális variátiójáról bizonyos változók szerint, a melyek a czélból hozattak a működés kifejezésébe, hogy e kifejezés egy igen bonyolódott differentiál-egyenlet megoldásává váljék. Egyszerűbben hangzik a tétel az esetben, ha a test pontjai szabad pontoknak tekinthetők (a mi különben a természetben mindig meg van engedve) és a működő erők ismét olyan potentiállal birnak, a mely az időt explicite nem tartalmazza.

Ekkor ugyanis ama W függvény a test sebességi potentiál-

*) Hamilton vizsgálatai ugyanis szóról-szóra ismételhetők ezen általánosabb esetben is. Lásd erre nézve Müller J. J. dolgozatát, Pogg. Annal. Bd. 152.

jának nevezhető. Azonban még mindig úgy hangzik a feltétel, hogy a sebességi potentiál *partiális variatiójának* kell periodikusnak lenni. Ámde e partiális variátió sokkal bonyolodottabb fogalom, semhogy physikai hypothésisnek alapjául szolgálhatna; már pedig, úgy hiszem, az a feladatunk, hogy a

$$\int_{t_0}^{t_0+i} \Sigma m(x'\delta x + \ldots)$$

elenyészését *thermo-physikai* hypothesisből vezessük le.

Jelen munkálatomban megkisértem egy ilyen *thermo-physikai* hypothesis fölállítását; e hypothésis a sebességi parallelogramm elvére emlékeztet, — elfogadható-e vagy sem, annak megitélését a physikai közönségre bizom; nekem plausibilisnek látszik.

I. Bizonyításom következő föltevésekre és definitiókra támaszkodik:

1.) A hőmozgást végző test tömegpontjai egymásra centrális erőkkel hatnak, s mozgásuk külső tömegektől háromféleképen befolyásoltatik; ugyanis hatnak a testre:

a) állandó tömegek centrális erőkkel, milyen pl. a föld tömege, a mely a test anyagpontjait Newton törvénye szerint vonzza;

b) időnként változó tömegek, a test egyes pontjaira gyakorolt huzás vagy nyomás által. (Ilyen pl. a légnyomás a testek felületén.) — E tömegeket *nyomó tömegeknek* fogjuk nevezni, és hatásukat külső nyomásnak.

Hatnak a testre végre:

c) időnként változó nagyságú s eleven erejű tömegek, a test tömegpontjaival való összeütközések által. E tömegeket a testtel érintkező *hőreservoir*nak fogjuk nevezni, s az összeütközések által történő erélyközlést hőközlésnek.

2.) A test pontjainak mozgása vagy szabad vagy kötött. Az utóbbi esetben fel fogjuk tenni, hogy a külső erők támadó pontjainak és a test egyéb pontjainak *coordinátái* között fenálló *kényszer-egyenletek* nem változnak az idő haladtával, nem még akkor sem, ha a hőállapot megváltozik.

3.) *A test hőállapotát változatlannak* fogjuk nevezni, ha erélyét (eleven erő és a centrális erők potentiáljának összege) sem a külső nyomás, sem a bele ütköző külső tömegek nem változtatják.

A test változatlan állapotában a külső erőket (nyomó tömegeket) állandóknak, s támadó pontjaikat nyugvásban fogjuk képzelni. Ép úgy

a testbe ütköző tömegeket s az összeütközés törvényeit is állandóknak és olyanoknak fogjuk képzelni, hogy az összeütközések a test egy pontjának erélyét se alterálják, vagy hogy a megszokott szólásmóddal éljek, a testet érintkezésben képzeljük egy vele egyenlő hőmérsékű reservoirral, — vagy ha jobban tetszik, a testet adiatherman burokkal képzeljük körülvéve.*)

A test hőállapotának megváltozását ekkor úgy fogjuk képzelhetni s úgy is fogjuk képzelni, hogy vagy a nyomó vagy az ütköző tömegek vagy mindketten megváltoznak, s a változás megtörténte után véges időn át ismét állandók maradnak. — Ha ugyanis a nyomás végtelen kevéssel megváltozik, akkor a nyomó erők támadó pontjainak egyensúlyi helyzete is megváltozván, változást fog szenvedni a test centrális erőinek potentiálja, tehát a test erélye is.

Ép úgy ha az ütköző tömegek s eleven erejük végtelen kevéssé megváltoznak, azaz ha a test végtelen kevéssel nagyobb vagy kisebb hőmérsékü reservoirral hozatik érintkezésbe, az összeütközések eredménye nem lesz ugyanaz mint előbb; a test erélye más lesz.

4.) Fölteszszük, hogy a hőállapot az imént leirt módon megváltoztatva, véges idő mulva ismét állandónak fog tekintethetni. — Hogy erre nézve legalább is *véges* időnek kell letelni, — az világos, miután a nyomó tömegek végesek, s e véges tömeg azon *végtelen kicsiny* erő által tolatnék elsőrendű végtelen kevéssel odébb, a melylyel az előbb egyensúlyozott nyomás nagyobbíttatott vagy kisebbíttetett; ép úgy véges időnek kell letelni addig is, mig a végtelen kevéssel különböző hőmérsékű reservoirból elsőrendű végtelen kevés erély (hőmennyiség) megy át a testbe s a hőegyensúly helyreáll.

5.) Fölteszszük, hogy állandó hőállapotban a test eleven ereje periodikus függvénye az időnek. Megengedjük, hogy ezen periodus, melyet i-nek nevezünk, változik az állapottal, de felteszszük, hogy a periodus értéke egy körfolyam elején ugyanaz mint végén, vagyis hogy értéke egy-ugyanaz, valahányszor a külső erők s az érintkező hőreservoir egy-ugyanaz.

---

*) Azon ellenvetés tehető, hogy a test ilyen állapotban, ilyen körülmények között tényleg soha sincs. Megengedjük. De ép úgy mondhatni, hogy soha pont egyenletes sebességgel nem mozog; ép úgy nem létezik a természetben egyenletesen gyorsuló mozgás sat. Mindamellett alkottunk magunknak abstractió által fogalmat az egyenletes és az egyenletesen gyorsuló mozgásról, s tagadhatlan, hogy e fogalmak alkotása fontos, sőt szükségszerű lépés volt a mechanikában. — Miért ne alkothatnánk magunknak ép így abstract fogalmat a változatlan hőállapotról?

6.) A test absolut hőmérséke aránylagos eleven erejének középértékével egy periodus tartamában.

E föltevések alapján azon eredményre jutunk, hogy a melegmennyiség δQ, a mely a testbe vezetendő arra nézve, hogy hőállapota végtelen kevéssel változzék:

$$\delta Q = \overline{T}\delta \log.(i\overline{T})^2 - \frac{1}{ni}\int_{t_0}^{t_0+ni} \Sigma m x'\delta x + \ldots,$$

hol i az eleven erő periodusa, T az absolut hőmérsékkel aránylagos közép eleven erő, n akármekkora egész szám, m a test akármelyik pontjának tömege, $x\ldots.$ e pont coordinátái, $x'\ldots.$ e pont sebességi componensei, tovább t_0 az idő kezdete; végre a

$$\int_{t_0}^{t_0+ni}\delta x \ , \ \int_{t_0}^{t_0+ni}\delta y \ , \ \int_{t_0}^{t_0+ni}\delta z$$

az m pont coordinátáinak különbségét jelentik, a melyek egyikét a pont az eredeti állapotban $t+ni$ időben, másikát pedig a megváltozott állapotban $t_0+n(i+\delta i)$ időben foglalta, illetőleg foglalta volna el.

A közlött melegmennyiség ezen kifejezéséből azután közvetlenül látható, hogy azonossá válik a Boltzmann-Clausius-féle tétellel, ha a test mozgása azon speciális tulajdonsággal bir, hogy a $\int_{t_0}^{t_0+ni}\delta x \ldots$ mennyiségek végtelen kicsinyek maradnak akkor is, ha az idő ni végtelen felé tart.

A 9.) egyenlet azonossá válik a Boltzmann-Clausius-féle tétellel akkor is, ha

$$\lim.\,\delta x = \lim.\, t\frac{k}{\pi}\varepsilon,\ \lim.\, t = \infty$$

hol $k < \pi$ és ε a δi-vel egyenlő rendű.

Még általánosabb eset az, a midőn csak

$$\lim.\,\Sigma m x'\delta x = \lim.\, t^{\frac{k}{\pi}}\varepsilon,\ \lim.\, t = \infty$$

Végezetül meg fogjuk mutatni, hogy a

$$\int_{t_0}^{t_0+ni}\Sigma m(x^1\delta x + \ldots)$$

mennyiség zérus akkor is, ha a pontrendszer mozgásáról föltehető, miszerint ugyanakkora végtelen kicsiny hőt és munkát *ugyanakkora gyorsasággal* közölvén a testtel egyik esetben mint a másikban, a közlés módjának kellő berendezése által (t. i. az által, hogy a rendelkezésre álló hő és munka kellőleg osztatik szét az egyes pontok között),

kieszközölhető, hogy egyugyanaz legyen a pontok véghelyzete, — akár előbb közöltetik az erély s azután hagyatik magára a test a *megváltozott hőállapotnak* megfelelő periodus tartamáig, — akár pedig megfordítva előbb hagyatik magára az *eredeti hőállapotnak* megfelelő periodus tartamáig s azután közöltetik az erély.*)

II.

A külső nyomó erők derékszögü componensei jelöltessenek X_1, X_2, X_3-mal, támadó pontjaik derékszögű coordinátái ξ_1, ξ_2, ξ_3-mal ezek tömege μ-vel; a test egyéb pontjainak coordinátái x_1, x_2, x_3-mal az idő t-vel.

A pontok között netalán fenálló kényszeregyenletek legyenek:

$$f_1(x_1, x_2, x_3 \ldots \xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3 \ldots \xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

mely egyenletek feltételeink értelmében se időt, se olyan állandót nem tartalmaznak, a mely értékét a hőállapottal megváltoztatná. — Jelöljük továbbá a pontok sebesség-componenseit $x_1' \ldots$, illetőleg $\xi_1' \ldots$-vel, gyorsulás-componenseit $x_1'' \ldots$, illetőleg $\xi_1'' \ldots$, a test eleven erejét T-vel, a működő centrális erők potentiálját U-val s a test erélyét E-vel.

Ez utóbbi mennyiségek kifejezése értelmezésünknél fogva ez lesz:

$$2T = \Sigma m x'^2 + \Sigma m \xi'^2$$
$$U = U(x_1, x_2, x_3 \ldots, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots) \qquad 1.)$$
$$E = T + U$$

s megjegyezzük, hogy a mi esetünkben, midőn a 3.) feltétel szerint a a támadó pontok nem mozognak, a T kifejezése leszen:

$$2T = \Sigma m x'^2 \qquad 1a.)$$

---

*) Nem mulaszthatom el e helyen azon megjegyzést tenni, hogy Müller (Pogg. Annal. 1874. Bd. 152) az ő ú. n. »actio elvének levezetésénél« p. 119, többek közt hallgatva föltételez egy az imént elmondotthoz hasonló feltevés *általános* megengedhetőségét is. Részemről kételkedvén e feltevés általános megengedhetőségében, már csak csak ezért sem fogadhatom el egyelőre Müller úr elvének általános érvényességét. E megjegyzést azért voltam bátor e helyen tenni, mert Müller úr, e tételnek alapján igen könnyű módon véli bebizonyíthatni a hőelmélet második főtételét. Bizonyításában azonban nagy tévedést követ el, midőn minden bebizonyítás nélkül azt állítja (130. lapon) hogy a

$$\Sigma p_i \varepsilon_i$$

összegben mindegyik p_i-hez ép annyi positiv mint negativ ε_i tartozik. — Hát ha a test pontjai szabad-pontok, mely esetben általában véve mindegyik ponthoz más meg más p — tehát mindegyik p-hez csak *egy* ε tartozik?

Tárgyaljuk a testet előbb változatlan hőállapotában.

Először is világos, hogy az eleven erő középértéke T meg a centrális erők potentiáljának középértéke U, együttvéve annyi mint a test erélye E.

Ha ugyanis az 1.) alatti egyenletek harmadikát dt-vel szorozzuk, s az eredményt két tetszés szerinti idő t_0 és t_1 között egészeljük, akkor álland:

$$\int_{t_0}^{t_1} E dt = \int_{t_0}^{t_1} T dt + \int_{t_0}^{t_1} U dt$$

Következésképp, tekintve hogy E a test állandó hőállapotában állandó, a baloldalon kijelentett egészelés véghezvitele s az egyenletnek $(t_1 - t_0)$-vali osztása után

$$E = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} T dt + \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} U dt$$

s ezt állítottuk.

Másodszor: A támadó pontokra hatnak egy részről az X_1, X_2, X_3 componensü külső erők, másrészről a $-\frac{\partial U}{\partial \xi_1}$, $-\frac{\partial U}{\partial \xi_3}$, $-\frac{\partial U}{\partial \xi_2}$ componensü centrális erők.

A test belső pontjaira pedig csakis a $-\frac{\partial U}{\partial x_1}$, $-\frac{\partial U}{\partial x_2}$, $-\frac{\partial U}{\partial x_3}$ componensü erők hatnak.

Ha tehát δx_1, δx_2, $\delta x_3 \ldots$ $\delta \xi_1$, $\delta \xi_2$, $\delta \xi_3 \ldots$ mennyiségek alatt a pontrendszer olyan végtelen kicsiny mozdulatainak projectioit értjük, a melyek az $f_1, f_2, \ldots$ kényszer-egyenletek által meg vannak engedve — tehát röviden virtualis mozdulatokat, akkor álland a d'Alembert-féle egyenlet értelmében:

$$\Sigma m x'' \delta x + \Sigma \mu \xi'' \delta \xi = -\Sigma \frac{\partial U}{\partial x} \delta x - \Sigma \frac{\partial U}{\partial \xi} \delta \xi + \Sigma X \delta \xi.$$

Következésképp, tekintve hogy esetünkben a támadó pontok nyugvásban lévén $\xi'' = 0$, s hogy az 1.) alatti egyenletek második szerint az U csakis az x és ξ mennyiségektől függ; egyenletünk így lesz irható:

$$\Sigma m x'' \delta x = -\delta U + \Sigma X \delta \xi \qquad 2.)$$

Gondoljuk már most a test hőállapotát végtelen kevéssé megváltoztatva, azaz változtassuk meg végtelen kevéssel a nyomó tömegeket, s az érintkező hőreservoirt váltsuk fel végtelen kevéssé különböző hőmérsékü reservoirral s várjunk mig a $\xi \eta \zeta$ támadó pontok végtelen ki-

csiny eltolatás s ingadozások után ismét nyugalomba jönnek, s a hőgyensúly helyreáll.

Az új állapotnak megfelelő periodust és közép eleven erőt jelöljük $i+\delta i$ illetőleg $T+\delta T$-vel, s tegyük feladatunkká a periodus és a közép eleven erő változásából kiszámítani a változás eszközlésére a testtel közlött hőmennyiséget. E célból összehasonlítjuk a test mozgás-állapotát t időben azzal a mozgás-állapottal, a melyben a test az időponthoz végtelen közeleső, de különben egyelőre határozatlan pillanatban lett volna, ha a hőállapot a régi marad vala.

Ugyanazon anyagi pont coordinátáinak különbségét a két helyzetben jelöljük δx_1, δx_2, δx_3-mal, illetőleg $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$, $\delta\xi_3$-mal, a test eleven erejének különbségét δT-vel, a potentiálét δU-val, végre az erélyét δE-vel, akkor az 1.) alatti egyenletből következik, miszerint

$$\delta E = \delta T + \delta U \qquad 3.)$$

hol

$$\delta U = \Sigma\frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \Sigma\frac{\partial U}{\partial \xi}\delta\xi \ .$$

Ámde a jobboldalon előforduló $\delta x, \delta\xi$ mennyiségek virtualis eltolások a szó közönséges értelmében, az okból, mert a kényszer-egyenletek, a melyek feltevésünk értelmében netalán fönállanak, nem változnak a hőállapot változásával.

Következésképen a 2.) alatti egyenlet a fennálló esetre alkalmazható.

Betéve a 2.)-ből a δU értéket a 3.)-dik egyenletbe, leszen:

$$\delta E = \delta T - \Sigma m x''\delta x + \Sigma X\delta\xi$$

Megjegyezzük itt, hogy $\Sigma X\delta\xi$ azon összes munka, a melyet a külső erők a testnek hőállapota változásakor adnak.

E munkát δS-vel jelölve, az imént felirt egyenlet következő alakot ölt:

$$\delta E = \delta S + \delta T - \Sigma m x''\delta x \qquad 3a.)$$

Ezen egyenletet dt-vel szorozva és t_0-tól t_{0+i}-ig egészelve, s meggondolva, hogy δE és δS mennyiségek az egészelésre nézve állandók leszen:

$$i\delta E = i\delta S + \int_{t_0}^{t_0+i}(\delta T - \Sigma m x''\delta x)dt$$

Vegyük már most tekintetbe, hogy a hőelmélet első feltétele szerint a hőállapot változására fordított erély annyi, mint a testre gyakorolt külső munka δS meg a közölt meleg δQ; akkor ezen egyenletből közvetetlenül foly miszerint

$$i\delta Q = \int_{t_0}^{t_0+i} (\delta T - \Sigma x''\delta x)dt$$

Ezennel kiszámítottuk azon hőmennyiséget, melyet szükséges volt a testbe bevezetni, arra nézve, hogy hőállapota végtelen kevéssé megváltozzék.

További feladatunk az egyenlet jobb oldalának átalakítására vonatkozik. Ugyanis:

$$\delta T - \Sigma mx''\delta x = \Sigma m(x'\delta x' - x''\delta x)$$

Ámde:

$$dx\delta x' - dx'\delta x = -d(x'\delta x) + \delta(x'dx)$$

mely értéket $i\delta Q$ kifejezésébe téve leszen:

$$i\delta Q = -\int_{t_0}^{t_0+i} \Sigma mx'\delta x + \int_{t_0}^{t_0+i} \delta \Sigma mx'dx$$

A δ variátiójel az utána álló mennyiség azon két értéke közötti különbséget jelentette, a melyek egyikével ezen érték a megváltozott hőállapotban t időpillanatban birt, s a melyek másikával az időponthoz végtelen közel eső pillanatban az eredeti hőállapotban birt volna.

Hogy a két időpont t és t_1 közötti különbség mekkora, az az eddigi következtetésekre nézve teljesen közönbös volt.

Állapítsuk már most meg a t és t_1 időpontokat egy φ segédvariabilis által úgy, hogy

$$t = i\varphi$$
$$t_1 = i_1\varphi$$

legyen. *) — Akkor:

$$dt = id\varphi$$

és

$$\int_{t_0}^{t_0+i} \delta \Sigma mx'dx = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+1} \delta \Sigma mx'^2 id\varphi.$$

mely utóbbi egészlet határai a hőállapottól független állandók lévén, a variátiojel az egészleti jel elébe tehető.

Azaz:

$$\int_{t_0}^{t_0+i} \delta \Sigma mx\,dx = \delta \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+1} \Sigma mx'id\varphi = \delta \int_{t_0}^{t_0+i} 2Tdt.$$

tehát tekintve, hogy:

$$\frac{1}{i}\int_{t_0}^{t_0+i} Tdt = \overline{T}$$

lészen:

*) Clausius, Pogg. Annal.

$$\int_{t_0}^{t_0+i} \delta \Sigma m x' dx = \delta(2i\overline{T})$$

Mely értéket a δQ 4.) alatti kifejezésébe betéve, lészen:

$$i\delta Q = -\int_{t_0}^{t_0+i} \Sigma m x' \delta x + \delta(2i\overline{T}) \qquad 5.)$$

A δQ ezen kifejezésére úgy jöttünk, hogy az 1.) harmadikát dt-vel szorozva s t_0 és $t_0 + i$ között egészelve, a nyert eredményből további következtetéseket vontunk. Ugyanezen következtetéseket tehettük volna az esetben is, ha a nevezett egyenletet t_0 és $t_0 + ni$ között egészeltük volna, hol n akármekkora egész szám lehet, s világos, hogy akkor az eredmény a következő leendett:

$$ni\delta Q = -\int_{t_0}^{t_0+ni} \Sigma m x' \delta x + \delta(2ni\overline{T})$$

Ezen egyenletet végezetül ni-vel osztva, leszen a keresett:

$$\delta Q = -\frac{1}{ni}\int_{t_0}^{t_0+ni} \Sigma m x' \delta x + \overline{T}\delta \log.(i\overline{T})^2$$

III.

Hogy a Boltzmann-Clausius-féle tétel érvényes legyen, arra nézve, ezek után a szükséges és elegendő feltétel tehát az, hogy:

$$\frac{1}{ni}\int_{t_0}^{t_0+ni} \Sigma m x' \delta x = 0$$

Áttérünk egyes esetek felsorolására s megvizsgálására, a midőn e feltétel megvan.

Először is fölemlítjük a Clausius és Boltzmann vizsgálataiból ismeretes azon esetet, a midőn a pontok pályái i idő alatt zárodnak s azonkivü e pontok sebessége ugyanaz e periodus, elején mint végén. Ez esetben ugyanis mind az x' mind a δx értéke ugyanaz levén a periodus elején mint végén, $\Sigma m x' \delta x$ is periodicus mennyiség és pedig periodusa$=i$. Ennélfogva:

$$\int_{t_0} \Sigma m x' \delta x = \int_{t_0}^{t_0+i} \Sigma m x' \delta x = \ldots = \int_{t_0}^{t_0+ni} \Sigma m x' \delta x$$

Másodszor emlékeztetünk a föltevéseink elsorolása közben kiemelt esetre; mely esetben szintén csaknem közvetlenül világos, hogy a szóban levő kifejezés elenyésző.

Végezetül megmutatjuk, hogy az elegendő és szükséges feltétel megvan akkor is, ha ugyanakkora végtelen kicsiny hőt és munkát *ugyanakkora gyorsasággal* közölvén a testtel egyik esetben mint másik esetben, a közlés módjának kellő berendezese által kieszközölhető, hogy egy-ugyanaz legyen a test pontjainak véghelyzete, — akár előbb közöljük a testtel az erélyt és azután hagyjuk magára a megváltozott hőállapotnak megfelelő $i+\delta i$ periodus tartamáig, akár pedig előbb hagyjuk magára az eredeti állapotának megfelelő i periodus tartamáig s az erélyt azután közöljük vele.

Annak megmutatására, hogy az elegendő és szükséges feltétel esetünkben csakugyan megvan, jelöljük az erélyközlésnek semmiképen sem végtelen kicsiny tartamát j-vel, s a közlésnek egy valamelyik tetszés szerinti időpontját t-vel.

A test m pontjának e tetszés szerinti időbeli coordinátáit jelöljük x_1, y_1, z_1-gyel abban az esetben, midőn *előbb* közöltetett a hő és munka a testtel s *azután* hagyatott magára, s jelöljük x_2, y_2, z_2-vel az ellenkező esetben; épúgy különböztessük egymástól az *1* illetőleg *2* index hozzáragasztása által az m pontnak mozgás-mennyiségeit is.

Összehasonlítva már most a test pontjainak helyzetét és mozgásállapotát az erélyközlés t pillanatában azzal a helyzettel és mozgásállapottal, a melyben ugyanazon pillanatban lett volna, ha az eredeti hőállapot megmarad vala; világos, hogy ugyanazon következtetések utján, *) a melyen a II. fejezet 3a.) egyenletéhez jutottunk, a mostan tárgyalt vizsgálatra vonatkozólag a következő két egyenletet nyerjük:

$$\delta E_1 = \delta S_1 + \delta T_1 - \Sigma m(x_1' \delta x_1 + \ldots)$$
$$\delta E_2 = \delta S_2 + \delta T_2 - \Sigma m(x_2' \delta x_2 + \ldots)$$

mely egyenleteket így is irhatni:

$$\alpha) \quad \delta E_1 = \delta S_1 + 2\delta T_1 - \frac{d}{dt} \cdot \Sigma m x_1' \delta x_1$$

$$\beta) \quad \delta E_2 = \delta S_2 + 2\delta T_2 - \frac{d}{dt} \cdot \Sigma m x_2' \delta x_2$$

Hasonlítsuk össze az α) és β) egyenleteket tagról tagra.

Mindenekelőtt világos, hogy a t idő alatt közlött hő és külső munka az első esetben ugyanaz levén mint a másodikban (miután a

*) Mégis van egy különbség. T. i. a mostani esetben, a midőn a hőállapot változik, a külső erők támadó pontjai mozognak. Ennélfogva a test eleven erejéhez a támadó pontok eleven ereje is kozzájárul. Ámde ez a járulék csak másodrendü végtelen kicsiny, miután a támadó pontok véges időben irván le végtelen kicsiny útat, sebességük csak végtelen kicsiny lehet.

közlés mindkét esetben feltevés szerint egyenlő gyorsasággal történik), lészen:

$$\gamma) \quad \delta S_1 = \delta S_2 ; \quad \delta E_1 = \delta E_2 .$$

A mi a két utolsó tagot illeti, ezek összehasonlítását csak azon esetre kell megejtenünk, ha az erély kellő szétosztása által a test egyes pontjai között kieszközölhettük, hogy a pontok helyzete ugyanaz, akár előbb közöltünk a testtel t idő alatt bizonyos hőt és munkát, s azután hagytuk magára $i+\delta i$ ideig, akár pedig elébb hagytuk volna magára i ideig s azután közöltük volna vele t idő alatt ugyanakkora hőt és munkát.

Világos; mert ha ez esetre szorítkozván csupán, megmutathatom, hogy a

$$\int_{t_0}^{t_0+i} \Sigma m x' \delta x = 0$$

akkor tekintetbe véve, hogy a 6.) egyenlet tagjai az egy

$$\frac{1}{ni} \int_{t_0}^{t_0+ni} \Sigma m x' \delta x$$

tagot kivéve, magától értetőleg függetlenek a hőállapot változás-módjától, rögtön azt fogjuk következtetni, hogy ez a tag is független tőle, tehát miután egy bizonyos közlésmód mellett zérusnak bizonyult be, mindig is zérus. Ámde ha az összehasonlítást a fönnevezett esetre ejtjük meg, akkor könnyen belátható okból $\delta U_1 = \delta U_2$. Valóban a

$$\delta U_1 = U_1 - U_1^0$$
$$\delta U_2 = U_2 - U_2^0$$

hol az U_1^0 U_2^0 a pontrendszer azon helyzetéhez tartoznak, a melyet az eredeti hőállapotban t illetőleg $t+i$ időben elfoglalt; mely helyzetek egymástól periodikus távolságra esvén, leszen $U_1^0 = U_2^0$. — A mi pedig U_1 és U_2 potentiálokat illeti, ezek ugyanazon hőállapothoz és olyan helyzetekhez tartoznak, hogy a test feltevés szerint az elsőnek megfelelő helyzetbe spontán (t. i. hő- és munka-közlés nélkül) átmenne és pedig a hőállapotnak megfelelő periodus tartama alatt; ennélfogva $U_1 = U_2$.

Könnyű már most megmutatni, hogy $\delta T_1 = \delta T_2$. Ugyanis γ) szerint $\delta E_1 = \delta E_2$. Ámde az imént megmutattuk, hogy $\delta U_1 = \delta U_2$. Következésképp a két egyenletet egymásból levonva leszen:

$$\delta(E_1 - U_1) = \delta(E_2 - U_2)$$

azaz:

$$\delta T_1 = \delta T_2$$

Az összehasonlítás ezek szerint azt eredményezte, hogy az α) és β) egyenletek első, második és harmadik tagja viszonyosan egyenlő; következéskép egyenlő a negyedik is. Azaz:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m(x'\delta x_1 + \ldots) = \frac{d}{dt}\Sigma m(x'\delta x_2 + \ldots)$$

mely egyenletet szavakba foglalva azon eredményre jöttünk, hogy a $\Sigma m(x^1\delta x + \ldots)$ ép olyan gyorsan nő az *1* erélyközléskor mint a *2* erélyközléskor.

Ámde akár az első akár a második erélyközlés elején δx, δy, δz zérus lévén, a $\Sigma m(x'\delta x + \ldots)$ értéke is zérus volt. — Következőleg az Σ értéke az erélyközlés végén ugyanazzá nő az egyik esetben mint a másikban; azaz:

$$\int^j \Sigma m(x'_1\delta x_1 + \ldots) = \int^j \Sigma m(x'_2\delta x_2 + \ldots) \qquad 11.)$$

Vegyük végezetül tekintetbe, hogy a $\int^j \delta x_1 \ldots$ és $\int^j \delta y_2$ különbségek a pontrendszer azon helyzeteire vonatkoznak, a melyeket az eredeti és a megváltozott hőállapotok elején illetőleg végén elfoglalt, — hogy tehát:

$$\int^j \delta x_1 = \int^{t_0} \delta x \ldots \qquad \int^j \delta x_2 = \int^{t_0+i} \delta x$$

Akkor a 11.) egyenlet így lesz irható:

$$\int^{t_0} \Sigma m(x'\delta x + \ldots) - \int^{t_0+i} \Sigma m(x'\delta x + \ldots)$$

s ez az, a mit be akartunk bizonyítani.

A MÁSODRENDŰ KÚP- ÉS HENGERFELÜLETEK SÍKMETSZÉSEI, KÖZPONTI VETÜLETBEN.

Fölser István, műegyetemi tanártól.

(Előterjesztetett a m. tud. Akadémia 1877. január 8-ikán tartott ülésén.)

— Egy kőnyomató I. táblával. —

I.

Ha valamely kúpfelületet a képsíkban K-ban fekvő nyoma N, továbbá a csúcspontja F által megadva képzelünk és ezen felületet egy síkkal S-el átmetszszük, akkor a metszési görbe M, az N görbével perspectiv collineár, az F pontot mint középpontot —, a K és S sík metszési vonalát s-et mint tengelyt —, a K síknak az F ponton keresztül az S síkkal párhuzamosan vezetett síkkal való metszésvonalát m-et —,

továbbá az S síknak az F ponton keresztül a K síkkal párhuzamosan vezetett síkkal való metszésvonalát n-et mint ellentengelyeket illetőleg.

Másodrendű kúpfelületeknél az M görbe mindég kúpszelet; még pedig vagy ellipsis, vagy parabola, vagy hyperbola, a szerint, a mint az m egyenes az N görbét vagy nem metszi, vagy érinti, vagy átmetszi; vagy a mi ugyanaz: a szerint, a mint az S sík irányvonala q, a kúp irányvonalát J-t [1]) vagy nem metszi, vagy érinti, vagy átmetszi.

A metszési görbe egyes pontjainak meghatározására, a kúpfelületet és az S síkot tetszőlegesen választott segédsíkokkal — leggyakrabban az F ponton keresztülmenő síkcsomagokkal (Ebenenbündel) vagy síksorokkal (Ebenenbüschel) — átmetszük, és a bennök fekvő metszési vonalak közös pontjait — az M vonal egyes pontjait — fölkeressük.

Parallelprojectióban a M metszési görbe — originális — és annak vetülete a K síkon — kép —, áffin-rokon síkgörbék —, tehát hasonnemű kúpszeletek tartoznak lenni; centrálprojectióban ellenben eme vonalak collineár-rokonságban állanak, tehát különnemű kúpszeletek is lehetnek. Ez utóbbi esetben t. i. bármelyik kúpszeletnek mint originálisnak vagy ellipsis, vagy parabola, vagy hyperbola felelend meg mint kép, a szerint, a mint a metsző sík distáncz-szeldéje r [2]), a kúp distáncz-szeldéjét [3]) vagy nem metszi, vagy érinti, vagy átmetszi; tehát a szerint, a mint az Fr sík az adott kúpfelületet —, vagy a mi ugyanaz: a szerint a mint az Fr sík irányvonala q^+ —, a kúp J irányvonalát vagy nem metszi, vagy érinti, vagy átmetszi.

Ugyanazon S síkra nézve a q és q^+ egyenesek mindég egyenlő irányuak; q megállapítja a sík állását [4]), q^+ annak distancz-szeldéjét, mindkettő együttesen véve tehát a sík térbeli helyzetét határozza meg.

A mondottakból kitünik, hogy a másodrendű kúpfelületek síkmetszéseinek meghatározásánál — miután a kúpszeletek mindegyikét originálisnak és képnek is gondolhatjuk és a három kúpszelet párosan véve 9 combinatiót enged —, 9 esetet —, sőt ha a körmetszést is tekintetbe vesszük, 16 esetet kell megkülönböztetnünk. [5])

---

[1]) Az iránykúp nyoma a K képsíkon.

[2]) A metsző-sík és distáncz-sík közös vonala.

[3]) Az adott kúp- és a distáncz-sík közös vonala.

[4]) A síknak végtelenben fekvő vonala.

[5]) Az egyenes vonalra vonatkozó feladatok egyszerűségök miatt kihagyattak. Könnyü belátni, hogy ezen esetekben a metsző sik vagy az F' ponton, vagy pedig a projectio-centrumon C-n tartozik keresztülmenni. Az első esetben mind az originális, mind a kép egyenes vonal leend; a második esetben a kép egyenes vonal, az originális pedig — a q egyenesnek az J vonalhozi helyzete szerint — vagy ellipsis, vagy parabola, vagy hyperbola.

A metsző sík helyzetének és az M metszési görbe képének M'-nek meghatározása a föntebbi 9 esetben — az imént kifejtett elvek szerint — semmi nehézséggel nem jár. Mindezen esetekben csak a q és q^+ egyeneseket kell a feladat feltételeinek megfelelőleg felvennünk, és az M' kúpszelet egyes pontjait, átmérőit, tengelyeit, érintőit és végérintőit a centrálprojectió tanai szerint meghatároznunk.

A constructiv kivitelt itt annyival inkább mellőzhetőnek véltem, miután ezen föladatok megfejtése, részletesen — habár más alapelvek szerint — tárgyalva: Dr. O. Schlömilch, Zeitschrift f. Mathematik u. Physik 1867-ki évfolyamában (E. Koutny, ebene Schnitte von Kegeln u. Zylindern d. zweiten Grades in d. Perspective) található.

Nem kevesebb érdeket nyújt azonban azon 7 eset tárgyalása, melyekben vagy az M metszési görbe, vagy annak M' képe, vagy pedig mindkettő egyidejűleg *kör* tartozik lenni.

A következő sorok az ezen tárgy körül tett vizsgálataim eredményeit, úgy vélekedem, a feladat sikeres és egyszerű megfejtését tartalmazzák.

II.

Valamely kúpfelület N nyoma (1. ábra) és J irányvonala hasonló és hasonló fekvésü görbék, a kúp csúcsának F-nek képét F'-et hasonlósági pontnak véve. Az F' pontból eme görbékhez vont érintők, a kúpfelület centrál-vetületének szegélyvonalait képezik.

Ha valamely másodrendü kúpfelületnek ilynemü előállításában, egy az N nyommal, $ABCDE$-vel, az F' középpontra nézve perspectiv collineár kúpszeletet, $A'B'C'D'E'$-t szerkesztünk, akkor ez utóbbi kúpszelet és a projectio-centrum C egy második kúpfelületet állapít meg, mely két kúp oly tulajdonságú, hogy az FC vonalon keresztül az F kúphoz érintőileg vezetett két sík, érintő síkjai leendenek a C kúpnak is. Ezen érintő-síkok szeldéi, az F' pontból az $ABCDE$-hez vont érintőkkel (az F kúp centrál-vetületének szegélyvonalaival) fognak összeesni.

A két kúpfelület átmetszése egy oly *negyedrendü görbe,* melynek a két közös érintősíkban fekvő pontjai — mivel a metszési görbe ágai ezen pontokban találkoznak — *kettős pontok* tartoznak lenni. Az ezen két kettős ponton keresztülvezetett síksor minden síkja a metszési görbének négy pontját tartalmazza; ezért ezen síksor bármely síkja, melyet a görbének egy ötödik pontján vezetünk keresztül, a görbének még végtelen sok pontját fogja tartalmazni; miből következik, hogy az F és C kúpok átmetszése két — az említett kettős pontokon keresztül menő — *síkgörbe,* azaz *két kúpszelet* tartozik lenni.

Tehát minden az $ABCDE$-vel a F' pontra nézve perspectiv collineár $A'B'C'D'E'$ kúpszelet, két az F kúpon fekvő $A_1B_1C_1D_1E_1$ és $A_2B_2C_2D_2E_2$ kúpszelettel perspectiv collineár C pontot mint középpontot, az $A_1B_1C_1D_1E_1$ és $A_2B_2C_2D_2E_2$ kúpszeletek síkjainak nyomait s_1-et és s_1'-et mint tengelyeket illetőleg. Az s_1 és s_1' nyomok az $A'B'C'D'E'$ és $ABCDE$ perspectiv collineár kúpszeletek két tengelyével azonosak, — mert két egy harmadik görbével ugyanazon tengelyre nézve perspectiv collineár görbe, egymásközt is perspectiv collineár ugyanazon tengelyre nézve — és ezért könnyen megszerkeszthetők.

A mondottakból következik:

Minden az F'' középpontra nézve az $ABCDE$-vel perspectiv collineár $A'B'C'D'E'$ kúpszelet, az F kúp két oly síkkal való átmetszési vonalainak képe gyanánt tekinthető, mely két sík s_1 és s_1' nyomai, és q_1 és q_1' irányvonalai, az $A'B'C'D'E'$ és $ABCDE$, illetőleg az $A'B'C'D'E'$ és $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5$ perspectiv collineár kúpszeletek collineátió-tenyelyeivel azonosak.

Az idom egyszerű megtekintéséből továbbá:

Minden az $ABCDE$-vel az F' pontra nézve ugyanazon módon perspectiv collineár, egymással pedig hasonló és hasonfekvésü $A'B'C'D'E'$ $A''B''C''D''E''$... kúpszeleteket (p. o. köröket) mint képeket illetőleg: a megfelelő originálisok síkjainak nyomai s_1, s_2..., egyenlő irányúak; síkjaik egyenlő képszélességüek [6]*), azaz: ily síkok oly sort alkotnak, melynek tengelye a distáncz-síkban fekszik.*

Minden az $ABCDE$-vel hasonló és hasonfekvésü kúpszelet-rendszerre nézve — a két perspectiv helyzetnek megfelelőleg — két ily tengelyt kell megkülönböztetnünk. Eme tengelyek valamennyi körre nézve, a distáncz-sík ugyanazon két r_k és r_k' vonalával azonosak.

Ezeket előre bocsátva, már áttérhetünk a metsző sík helyzetének meghatározására, az I. pontban elősorolt 7 esetben.

III.

A megfejtendő 7 feladatot két csoportba oszthatjuk, a melyek elseje azon eseteket tartalmazza, midőn a kép *kör*, az originális pedig vagy ellipsis, vagy parabola, vagy hyperbola; a második ellenben azon esetekből áll, melyekben az originális *kör*, a kép pedig vagy ellipsis, vagy parabola, vagy hyperbola.

Mindkét nembeli feladatok megfejtésénél ar I. és II. pontban kifejtett elvek lesznek irányadók.

---

[6]) Képszélesség alatt a nyomnak az irányvonaltóli távolát értvén.

Ezek szerint tehát az első csoporthoz tartozó feladatoknál, a metsző síkok a distancz-sík r_k vagy r'_k vonalán tartoznak keresztülmenni; állásaik és irányvonalaik pedig az r_k és r'_k vonalakkal egyenlő irányú, és vagy ellipsis, vagy kör, vagy parabola, vagy hyperbola szerint metsző parallel-síksorok állásaival, illetőleg irányvonalaival tartoznak azonosok lenni.

A második csoporthoz tartozó feladatoknál, a metsző síkok állásai és irányvonalai a kúpfelület *cyklikus* síkjainak állásaival, illetőleg irányvonalaival q^c- vagy $q^{c'}$-el tartoznak azonosak lenni; distáncz-szeldéi pedig, a cyklikus síkok irányvonalaival egyenlő irányú, oly síksorok tengelyeivel tartoznak összeesni, mely síksorok metszésvonalainak képei: vagy ellipsisek, vagy parabolák, vagy hyperbolák.

Az elősorolt feltételek közül *csak egynek* nem lehet mindég eleget tenni, midőn t. i. a metsző-sík distáncz-szeldéje az r_k vonalak egyikével, irányvonala pedig a q^c vonalak egyikével tartoznék összeesni; mert egy tetszőlegesen felvett kúpfelületnél sem az r_k, sem pedig az r'_k egyenesek a q^c vagy $q^{c'}$ egyenesekkel általában véve nem lesznek egyenlő irányuak. [7])

A megfejtés azonban mindég lehetséges oly kúpfelületeknél, melyeknél a képsík a kúpfelület egyik cyklikus síkjával egyenlő állású mivel ekkor az r_k, szintúgy a q^c venalak egyike a distancz-sík és képsík közös állásával összeesik; miből következik: *hogy a köralappal biró kúpfelületeknél mindig lehetségesek oly síkmetszések, melyek originálisai és képei egyidejüleg körök.*

A metsző síkok constructiv meghatározása — a föntebbi eseteknek megfelelőleg —, a 2-ik ábrában eszközöltetett. Ezen idomban C_1 a centrálpontot, D a distancz-kört, s_k és q_k egy az r_k vonalon keresztülmenő sík két fővonalát, b ennek képszélességét, q^c pedig a kúpfelület egyik cyklikus síkjának irányvonalát jelentik.

Az első csoportba eső feladatoknál — hol a kép kör tartozik lenni —, a metsző síkok q^a, q^v, q^h irányvonalai az első, illetőleg harmadik, illetőleg negyedik eset feltételeinek megfelelőleg választattak, és ezekből és a képszélességből, b-ből, a metszői síkok nyomai s^a, s^v, s^h meghatároztattak.

---

[7]) Ha a C projectio-centrum megadva nem volna, akkor azon föltételből: hogy a metszési görbe és képe egyidejüleg *kör* legyen, a collineátió-centrum (C) meghatározható. — Lásd »Műegyetemi Lapok« 1876. III. füzet. Fölser István, kúpszeletek központi vetületben.

A második csoportba eső feladatoknál — hol az *originális* kör tartozik lenni —, a q^+ irányvonalak, — melyek az I. pont szerint a metsző sík distáncz-szeldéjét állapítják meg —, az ötödik, illetőleg hatodik, illetőleg hetedik eset feltételeinek megfelelőleg választattak, és ezekből valamint a metsző síkok közös q' irányvonalából, a metsző síkok nyomai s_v, s_p, s_h meghatároztattak. [8])

Ha az F pontot a végtelen térben gondoljuk, akkor a kúpfelület alkotói egyenlő irányuak lesznek; tehát a kúpfelület hengerfelületbe, az I kúpszelet pedig egy pontba, a hengeralkotók közös F' iránypontjába fog átmenni; ezért a kúp- és hengerfelületek közt, sem azok előállítását, sem pedig a metsző síkok meghatározását illetőleg — a föntebbi esetekben — lényeges különbség nem létezhetik. [9])

A hengerfelületek jellemző sajátsága abban áll: hogy az N vonal és a hengerfelület síkmetszése mindig *affin rokonsáyban* állanak; miért is a feloldási esetek száma, a hengerfelületek különböző nemei szerint, következőleg módosul:

Az *elliptikus hengerfelületeknél* nyolcz eset lehetséges, ezek közöl öt a körre vonatkosik; a *parabolikus* és *hyperbolikus hengerfelületek* mindegyikénél pedig négy esetet különböztethetünk meg, ezek közül egy-egy a körre vonatkozik.

Jelen értekezésemben a metszési görbék graphikai meghatározását, — mivel ez az ábrák szerfölötti szaporítását tette volna szükségessé, de különben is a centrálprojectió tanai szerint könnyen eszközölhető lévén —, mindenütt mellőztem.

(Budapest, 1876. november 15-én.)

---

[8]) A levezetett igazságok constructiv alkalmazása semmi változást nem szenved és a perspectiv collineátio tanai szerint könnyen eszközölhető oly kúpfelületeknél is, melyeknél az F csúcsnak képe F', az N és J kúpszeleteken belül fekszik; azaz midőn az F' pont az N és J kúpszeletek közös *belső hasonlósági pontja*.

[9]) A hengerfelületeknél az Fr sík a hengeralkotókkal egy enlő irányú lévén a q^+ irányvonal az F' ponton tartozik keresztülmenni; mivel továbbá az r és s^+ egyenesek, a henger distáncz-szeldéjéhez, illetőleg az N görbéhez egyenlő helyzetűek: következik, hogy az M' görbének jellege, az s^+ egyenesnek az N görbéhezi helyzetétől függ, és hogy egy az N görbe ós F pont által adott hengerfelületnél az S sík helyzete, a q és s^+ egyenesek által lesz megállapítandó.

A VILLANYOSSÁGOK KIEGYENLŐDÉSE A SZIKRÁBAN ÉS A SZIGETELŐK OLDALINFLUENTIÁJA.

Kont Gyulától.

Előterjesztetett a m. tud. Akadémia 1876. okt. 9-iki ülésén.

— Egy kőnyomatú (II.) táblával —

A kisütés mechanikájára vonatkozó eredményes vizsgálatok daczára, nincs oly adatunk, melyre támaszkodva elég valószinü hypothesist alkothatnánk az ellentétes villanyosságok kiegyenlődéséről a villanyszikrában. Ezért a legujabb időben Schneebeli (Carl Rep. 1875. 6. füzet) és Peters (Pogg. Ann. 156. köt.) által tett kisérletek különös érdekkel birnak, a mennyiben ők az Antolik-féle alakok tanulmányozásakor oly alakokat nyertek, melyeken az ellentétes villanyosságok kiegyenlődő helyét a villanyszikrában látni vélik. Schneebeli megjelöli a pontot, melyben a villanyosságok kiegyenlődnének, Peters pedig e kiegyenlődő helyet a szikra hosszának középső harmadrészébe helyezi.

Ez az eredmény oly távol esik a villanyáramokról eddig alkotott fogalmainktól, hogy helyességét elismerve vagy a villanyáramokról alkotott fogalmainkat kellene megváltoztatni, vagy a villanyszikrát az áramok sorából kitörölni.

A kérdésnek ezen elméleti fontossága inditott arra, hogy a szikra villanyos állapotát megvizsgáljam. Ezt akkép tettem, hogy a szikrát szigetelő lemezeken csúsztattam el, s a szikra nyoma körül a szigetelő villanyos állapotát megvizsgáltam. Villanymutatóul a rendkivül érzékeny miniom- és kénporkeveréket használtam. Ekként a Lichtenberg-féle alakokhoz hasonló, de az eddig ismertektől lényegesen eltérő alakokat nyertem.

Ha sellakkal bevont üveglemezt a Holtz-féle villanygép széthúzott gömbjeihez körülbelül 5 milliméternyire közelitünk, ugy a gömbökön átcsapó szikrák igen gyakran a lemezen csúsznak el. Hogy ez csakugyan megtörtént-e, azt közvetetlenül a szikra menetéből lehet látni, valamint abból is, hogy a szikra fényesebb, és csattanása élénkebb, mint mikor csupán a levegőn csap át az elcsúszó szikra. Továbbá el nem törölhető nyomot hagy maga után, a mi nem más, mint a Riess-féle *lehelet-kép,* csakhogy a sellakon, valamint a többi lágy szigetelőkön, lehelet nélkül is, közvetetlenül látható. Ez a szikrának az a nyoma, melyet Antolik a bekormozott üvegről lemosni sem volt képes.

Miután a szikra a lapon elcsúszott, az említett porkeveréket közönséges vászonkendőn át hintettem a lapra. (Mousselinon, ha többszörösen vétetik is, sokkal nagyobb mennyiségü por ömlik ki, hogysem azt e gyenge villanyosság, mely a lapon marad, vonzásával rendezhetné.) A szikra nyomán villanyosság nem mutatkozik, hanem körülötte a por egészen szabályosan, mindig ugyanazon módon rendezkedik el: valamennyi képen (1-ső ábra) a nemleges sarkból kiinduló vörös ív mutatkozik, mely az igenleges sarkig húzódván, többnyire két ágra szakad; vele symmetrikusan egy másik gyengébb vörös ív fekszik a szikra nyomának tulsó oldalán. Ezen ívek mellett, nagyobb területet elfoglaló sárga, nem épen íveknek nevezhető terület van, több-kevesebb ágazattal, melyek a gyengébb vörös ív oldalán mindig tisztábban vannak kifejlődve, mint a másikon; a sárga terület is az ellenkező sarkig huzódik. Az egész kép tojásalaku.

Ha a sarkok egyikével szemközt a lap tulsó oldalára kis staniolodarabot ragasztunk, ugy a szikra élénkebb, és a keletkezett kép keskenyebb, a villanyosságok ugyanis jobban a szikra nyoma körül csoportosulnak.

Ezen alakok csak egyenletesen bevont lemezeken állanak elő. Én *csak* a Holtzféle géphez régebben készült lemezeken nyertem őket egészen tisztán.

A villanyosságnak ily módon való elterjedéséből azon következtetést vonom, hogy a villanyosságok nem a szikra egy pontjában, vagy kisebb helyén egyenlődnek ki, hanem hogy *a szikra tartama alatt az igenleges villanyosság a nemleges sarkhoz, és a nemleges villanyosság az igenleges sarkhoz áramlik.*

E következtetésemet két tapasztalatom hosszabb ideig elnyomta.

Az első az, hogy valamely szigetelővel közlött, vagy azon dörzsölés által ébresztett villanyosság oldalt sokkal erősebb influentiát idéz elő, mintsem Aepinus kisérletéből, a ki az üvegen ébreszthető influentiát felfedezte, következtetni lehetne; és Aepinusnak az üvegruddal tett kisérlete után, tudtommal, más kisérletek ezen irányban nem tétettek.

Ha ebonitlemezt lánggal való érintés által, villanyosságtól megtisztitunk, és két vagy három ujj alat rajta végig húzzuk, a ráhintett kén- és miniompor a dörzsölt helyeken nemleges villanyosságot mutat és a közbeeső helyeken igenlegest. (Némely lemezeken meg van forditva: a dörzsölt helyek éles sárga csikok, a közbeesők pedig vörösek.) Ugyanezt mutatják a sellakkal bevont üveglap, a szurok, a

spanyolviasz, csakhogy ezeken az ily módon ébresztett nemleges villanyosság, és igy az igenleges is, csekélyebb mint az ebonitlapon. Ha az ebonitlemez egyik végét rókafarkkal dörzsöljük, a dörzsölt helyen nemleges villanyosság van, és a lemez 2 egész 3-szor nagyobb többi felülete erős igenleges villanyossággal telik meg. *Általában mondhatjuk, hogy a villanyosság ép úgy influál a szigetelőkre, mint a vezetőkre, csakhogy a szigetelőkön a villanyosság elterjedése meg van akadályozva, és azért magán a szigetelőn ébresztett villanyosság nem terjedvén el az egész felületen, influál szomszédos részeire. E szerint a villanyozás hasonló a delejezéshez: valamint itt minden déli sarknak megfelelő északi sark származik, úgy ott is, minden igenleges villanyos réteg keletkezésénél, ennek megfelelő nemleges réteg keletkezik.*

Közbevetőleg megemlitem, hogy a Holtz-féle villanygép sarkainak gyakran tapasztalt fölcserélődése, hasonlóan történt megtöltések mellett, e tüneménynek tulajdonitható; minthogy e szerint könnyen megeshetik, hogy a dörzsölt ebonitlemez segitségével a géppel nagyobb mennyiségű igenleges villanyosságot közlünk, mint nemlegest. Talán ennek tulajdonitandó az is, hogy a gép gyakran a legjobb körülmények között sem jön tevékenységbe, mig a 2-dik, 3-ik próba után egyszerre megindul és kitünően működik. Ugyanis megtörténhetik, hogy a lemezzel egyenlő igenleges és nemleges villanyosságot vezetünk a gépbe. Megjegyzendő, hogy ez csak akkor történhetik, ha a lemez az asztalon (vezető aljazaton) dörzsöltetik, melynek condensáló hatása miatt *szabad*, nemleges és igenleges villanyossággal telik meg a lemez. (L. alább.)

Ezeket tapasztalva, meg kellett győződnöm, hogy a villanyszikrával nyert alakjaim jellemző részei nem tulajdonitandók-e az oldalinfluentiának? Ami igen könnyen sikerült azon általános szabály megállapitásával, hogy az influált villanyosságon a por mindig egyenletesen terjed el, tehát nem mutatja az igenleges vagy nemleges villanyosságot jellemző alakokat. Leirt alakjaimnál pedig az igenleges villanyosság a jellemző ágazatokat mutatja, valamint a nemleges ívek is éles kerek határokkal birnak.

Ennél sokkal nagyobb nehézséget gördített a következtetésem ellen a második kisérlet-sorozat.

Ha ugyanis a szigetelő lemezek, melyek felső felületein a szikra elsikamlik, alsó felületeit vezető lappal boritjuk, ugy a por egészen másképen rendezkedik el, mint mikor a lemez alsó felülete is a levegő által el van szigetelve. Itt két esetet kell megkülönböztetni, a szerint,

a mint a lemez az elektródgömböket érinti, vagy nem érinti. Mindakét esetben az előbbinél sokkal nagyobb mennyiségü villanyosságok tökéletesen el vannak egymástól választva, ugy, hogy e kisérletekből valóban ugy látszik, mintha a villanyosságok a szikra egy pontjában egyenlődnének ki.

Ha a lemez az elektródokhoz ér, ugy mindkét sark igen élesen határolt, bonyolódott rajzokat mutat. E rajzok kétfélék. Az elsőknél (2. ábra) az igenleges sark $^3/_4$ körivet képez, melynek sugara valamivel nagyobb az elektródokul használt gömbök sugarainál. E kör középpontjából szabályosan alkotott csillag terjed nem egészen a kör kerületéig, melyen túl kifelé sugárzó ágak terülnek el. A kör hiányzó negyedéből az igenleges villanyosság csatornaként vezet a nemleges villanyosság határáig, honnan azután vörös csatorna vezet a nemleges sarkhoz, mely az igenleges sark ezen alkotása mellett vele egyenlő körivet képez, melyen belül az igenleges csillaggal egyenlő területen kis vörös körlapok szorosan egymás mellett vannak.

Látszólag egyenlő módon áll elő a rajzok második neme. Ezeknél az igenleges sark sárga felületből áll, melyben nagyobb körsikok üresen maradtak (3. ábra); az ehhez tartozó nemleges sark vörös felületből áll, melyben a középpontból kiinduló bevájt csillag látható.

Hogy mikor áll elő az egyik, és mikor a másik rajz, azt meghatározni eddig még nem voltam képes, de azon reciprocitás, hogy *a nemleges sark az igenleges alakok jellegét mutatja, a midőn az igenleges sark nemleges villanyosságot jellemző köröket tartalmaz és megfordítva,* az kivétel nélkül egész határozottsággal látható. Sőt azon rendkivüli változatosság minden nemében, mely a képeket mindenek fölött jellemzi — mutatkozik a sarkoknak ilynemü kölcsönös változása.

Igy például azon sellaklemezeken, melyen az 1. ábra mutatkozott, ezen képek is eltérnek a spanyolviaszon vagy szurkon előállitott képektől; itt az emlitett körök (az igenleges itt is akkora, mint a nemleges) sokkal nagyobbak mint a többi lemezen, és a belül lévő csillag az igenleges sarknál igen egyszerü, szabályos és kicsiny; e csillaggal egyenlő területü egészen egyenletes és szabályos körlap mutatkozik a vörös körön belül. Az igenleges sarkon a kör kerületétől szabályosan kifelé ágazó nyulványok vannak, a nemlegesen befelé ágazók sokkal vékonyabbak és szövetalaku kisebb ágazatokat képező nyulványok mutatkoznak, melyek nem egészen az emlitett szabályos körig terjednek. Ha bármily felületen képezett alaknál a sárga ágak kevésbé vannak kifejlődve, ugy a vörösek hasonló mértékben elmaradnak.

Még azon alakokat kell leirnom, melyek akkor keletkeznek, ha a lemez a gömböket nem érinti. Itt ismét meg kell különböztetnem azon sellakkal bevont üveglemezt a többi szigetelőktől. Az elsőnél a kis csillag és az ennek megfelelő kis körsík hiányzik, a többi részek kevésbbé vannak kifejlődve, mint előbb, de az egész alak lényegében megmaradt. Nem ugy a spanyolviaszon és a szurkon, mely utóbbin különösen szépen mutatkoznak az alakok. Ha a szikra rövid és gyenge, ugy mást nem lehet látni, mint az igenleges sarkon egy sárga, és a nemlegesen egy vörös területet, melyek egymásfelé ágaznak. De ha a szikra hosszabb, ugy a legkülönbözőbb alakok mutatkoznak, melyeken a sarkok soha sincsenek kiképezve. Ezen alakok közül a 4. ábrában lerajzoltat érdemesnek tartom bemutatni. Mint a szélvészhajtotta por tünik elő különösen a sárga az igenleges sarkon, melytől távolabb szabályos félkör mutatkozik, melynek feltünő párja a nemleges sarknál is megvan. A nemleges sarknál azonkivül feltünő a párhuzamosan haladó 3 görbe; azonkivül a nemleges bemélyedt ágazatok nyoma is mutatkozik, melynek megfelelőleg az igenleges sarkon üres kör van, mely körül a sárga por oly alakot képez, mintha e körül keringett volna a szél.

Megemlitendő még, hogy a legtöbb képen, különösen az eboniton előállitottaknál, a sárga részek között vörös, a vörösek között pedig sárga por rakódott le; ugy, hogy ezeken is ugy látszik, mintha a nemleges villanyosság az igenleges sarkhoz, és az igenleges a nemlegeshez áramolnék, de ezt határozottan az oldalinfluentiának kell tulajdonitani, a mi néhány, e czélra tett kisérletből látható, melyeknél ily közbeeső részek más módon állittattak elő.

A födött (alsó oldalukon vezetővel ellátott) és a szigetelt lemezeken előálló képek közti feltünő különbség az alsó vezető condensáló hatásától származik.

Ha ugyanis szigetelő lemezhez villanyos testet, például igenleges villanyosságu gömböt közelitünk, ugy a lemez nemleges villanyossága kis szikrák alakjában a gömb igenleges villanyosságával kiegyenlődik; a lemezen tehát marad igenleges villanyosság. Ezen igenleges villanyosság oldalinfluentiának neveztem hatásánál fogva körülötte nemleges villanyosságot ébreszt, melyet ismét egy igenleges réteg követ, mely azonban csak igen erős villanyosságnál észlelhető. A lemez tulsó oldalán hasonlóan elhelyezett villányosságot találunk, az igenleges villanyosság alatt igenlegest, a nemleges alatt nemlegest.

Ha már most e lemezt vezetőre teszszük, ugy ebben kettős influ-

entia áll elő, t. i. a nemleges alatt, és az igenleges alatt is, ugy hogy mindkét neme a villanyosságnak a lemezen leköttetik. Ha most az előbbi villanyos sürüséggel biró gömböt ujra közelitjük a lemez előbbi helyéhez, ugy ismét képes belőle villanyosságot felvenni. E villanyos tulmány kis szikrák alakjában elszéled, a mint a lemezt a vezetőről leemeljük. Ugyan ez történik, ha a vezetőre tett szigetelő egyik végén dörzsölés által nemleges villanyosságot ébresztünk: az ébresztett nemleges, valamint az influált igenleges villanyosság nagyobb mennyiségü, mint mikor a lemez el van szigetelve. Ennek tulajdonitandó a következő meglepő tünemény: Ha a vezetőn nyugvó ebonitlemez egyik részét dörzsöljük, és az egész lemezt a porkeverékkel behintjük, azután a lemezt felemeljük, ugy a sárga por mohón szétröpittetik, a por ezen mozgása hosszabb ideig tart, és élénkebb lesz, ha alsó felületét ismét vezetővel érintjük, vagy felső felületéhez vezetőt közelitünk. A por ezen szétröpitése egészen azonos azon sziszegéssel, melyet hallunk, ha a porral be nem hintett ebonit-lemezt a dörzsölés után a vezető aljazattól eltávolitjuk. A sárga por ellökése, valamint a sziszegés számtalan szikra eredménye, mely a vezető aljazat által lekötött villanyosságnak a lemez fölemelése után való eloszlódásából származik.

Ugyanennek tulajdonitandó, hogy a Lichtenberg-féle alakok gyakran hosszabb ideig tartó változásokon mennek keresztül. A pornak ezen lassu mozgását, mely néha alig észrevehető, Biot molyoknak (apró kukaczoknak) tulajdonitotta; Bezold (Pogg. 144. pag. 358.) e mozgás okát a lemez felületén előforduló egyenlőtlenségben találja. — Ugy hiszem, hogy az itt adott magyarázat eléggé meggyőző.

Hogy ha azonban a dörzsölt szigetelő alá tett vezető élekkel vagy csúcsokkal bir, a tünemény igen érdekes változást szenved: az élekből ugyanis a dörzsölés által keletkezett villanyossággal ellentétes villányosság áramlik a szigetelőre. Igy például az asztalba 2—3 aczélélt vertem, ugy, hogy 1—2 milliméterrel az asztalból kiálljanak. Ha ezen élekre ebonit-lemezt fektettem és ezt erősen dörzsöltem, ugy az emlitett porkeverékkel való behintés után, az alsó felületen a vörös por között, az élek nyomaiból kiinduló erős sárga ágak mutatkoztak; és a felső felületen, a vörös por között, az élek képei vagy üresen maradtak, vagy erősebb dörzsölés után sárga porral voltak kirakva.

E tüneménynyel ismét a következőt magyarázom meg. Ha a Lichtenberg-féle alakokat alul vezetővel födött szigetelőkön, vagy oly szigetelőkön állitjuk elő, melyek belsejökben jobban vezetnek, mint

külsejökön (l. alább): ugy az igenleges kép középpontjában nemleges, a nemlegesen pedig igenleges jellegü alak származik; és pedig annál nagyobb mértékben, minél erősebb a töltés, melylyel az alakot előállitjuk, és minél csúcsosabb a vezető, melylyel a szikrát a szigetelőre vezetjük. (L. Bezold, Pogg. 144. köt.) Az alsó vezetőből ugyanis a felső vezetőével ellentétes villanyosság áramlik a szigetelőre, mely kiáramló villanyosság, mint láttuk, ha a kisérletre használt villanyosság elég erős, a szigetelőt áthatja. Nem szükséges e czélra, hogy az alsó vezető csúcsokkal vagy élekkel birjon, mint a dörzsölésnél, mert a villanyosság a legsimább lapról is áramlik hegyes test felé.

Ezzel egyszersmind a fönnebb leirt, födött lemezekkel tett kisérleteim, legalább nagyrészt meg vannak magyarázva. A sarkok képeinek reciprocitása e szerint csak azon igen természetes tulajdonságot mutatja, hogy, ha az alsó vezetőből az igenleges sarkhoz áramolhatott villanyosság, ugy a nemleges sark is elég erős volt e tünemény létesitésére. Ekkor az igenleges sark képében nemleges jellegü, és a nemleges sarkében igenleges jellegü kép származott. Ha az igenleges sarknál a körülmények nem voltak megfelelők arra, hogy az alsó vezetőből a szigetelőt átható villanyosság kiáramoljék, ugy e körülmények a nemleges sarknál is hiányoztak.

Ebből továbbá látható, hogy a vezetőnek általában nagy befolyása van a Lichtenberg-féle alakok keletkezésére; és Bezold azon feltünő törvénye, hogy a Lichtenberg-féle alakok terjedelme a vezető minőségétől függetlenek, csak azt mutatja, hogy a födő vezetőnek sokkal nagyobb befolyása van ezen alakok keletkezésére, mint a mekkorát a szigetelők fajlagos különbsége gyakorol.

Hogy a Lichtenberg-féle alakok minősége lényegesen függ a födetlen szigetelők minőségétől, ismeretes. Némely lemezeken vezető nélkül egyáltalában nem állanak elő, mint például üvegen és csillámon; mig szurkon és spanyolviaszkon, különösen ha vastag lemezeket használunk, az alakok alig különböznek ha a lemezek födve vannak, vagy ha födve nincsenek. E különbségek, melyek leirt kisérleteimre eléggé kiemelt befolyást gyakoroltak, kétségkivül a szigetelők kétféle — külső és belső — vezetőképességüktől származnak. Ugyanis az üveg, sellakkal ujonnan bevont üveglemez és a csillám, belsejökben jobban szigetelnek mint felületükön; a spanyolviaszk és különösen a szurok, belsejökben jobban vezetnek, mint felületükön: azért vastagabb lemezeknél a belső rész vezető gyanánt szolgálván, a képek szabályosak és tiszták.

Ennek tulajdonitandó, hogy a sellakkal bevont üvegen nyert képeim a felsorolt lemezek egyikén sem állottak elő, mert az elsők felületein a villanyosság szétterjed, az utóbbiak pedig a födött lemezek sorába tartoznak.

A tapasztaltakat összevetve, mondhatjuk, hogy csak azon alak jellemzi a szikra villanyos állapotát, melynél az igenleges villanyosság a nemleges sarkig, és a nemleges az igenleges sarkig huzódik.

Az 1591-ik évi kolozsvári arithmetika — E munkára a »Műegyetemi Lapok«-ban Szüts Béla hivta fel a figyelmet, midőn Maróthi »számvetésnek mestersége« czimű művéből az előljáró beszéd irodalomtörténeti érdekü részét e szakfolyóirat olvasóival közölte. Kitünt ebből, hogy a derék Maróthi ezt tartotta még 1743-ban is, — másfélszázaddal megjelenése után — a legjobb magyar számvetésnek, jobbnak az Onadi és a Tolvaj arithmetikáinál, pedig ezek 100 évvel utóbb láttak napvilágot.

E közlemény arra indította a kun-szent-miklosi ref. gymnasium buzgó igazgatóját, Kiss József urat, hogy a vezetése alatt álló intézet könyvtárában kutatást tegyen és az ott meglevő régi arithmetikákat átvizsgálja. Kutatásait csakugyan siker is koronázta, a mennyiben meglelte többek között az 1591-ki kolozsvári arithmetikának egy egész ép tiszta példányát. Kiss igazgató úr engem volt szives megbizni, hogy a kun-szent-miklosi példányt a »Műegyetemi Lapok« szerkesztőinek és Szinnyey József nagyérdemü bibliographunknak bemutassam.

Azt hiszem, e lapok olvasóit érdekelni fogja e munka tartalmának, műnyelvének és a benne előforduló régi mértékeknek rövid megismertetése.

Czimlapján ez áll:

»Magyar Arithmetica, azaz, számvetesnek tudománya. Most wyonnan az Frisiusnac Magyar Arithmeticayából soc wy és hasznos példáckal kiadatot. (Következik egy primitiv fametszet, mely egy kalmárbolt belsejét ábrázolja.) Colosvarat Christus Wrunknak születése után, az 1591.

Kis 8-adrét 116 számozatlan levél. A—P_4 = 14 1/2 iv.

Előszó nincs hozzá. A szöveg elején ez áll: »Az számvetesnec rövid és hasznos uta avagy módgya, melyből igen könnyen megtanolhattya az ki számvetesnek dolgaiban foglalatos akar lenni! A könyv legutolsó lapján, a Finis utáni vonás alatt ez áll:

Az keresztyen Iffiusagnac.

Eszt az kiczinded számvető könyveczkét ved io neuen. Az mennyire en az könyvekből tanulhattam vgy magyaráztam. Hogy ha az Isten valahonnét

oly embert támaszt, ki böuebben Magyar nyelure fordittya, én kész vagyok ahoz is fogni, és Nyomtatásban kiadni az te tanuságodra. Addéglan eszt megtanulhad és élhetz vélle. Megboczás penig az vétkekről, Mert én Magyar nem vagyoc. Isten éltessen. Typographus.

Octobernec 31. napján. 1591.

A czimlap szerint azt kellene gondolnunk, hogy ez a számtan nem volt egyéb, mint a magyar Frisiusnak (t. i. az 1577 és 1582-ben Debreczenben nyomtatott arithmetikának) uj és bővített kiadása. A dolog azonban nincs így. A munka terjedelme, egész beosztása, a szabályok fejtegetése, a műveletek magyarázata, a feladott és kidolgozott példák megválasztása tökéletesen elüt az állítólagos mintától, elannyira, hogy csak itt-ott találkozik némi emlékeztető a magyar Frisiusra. Azonkivül a szerző, a hol csak szerét teheti, keményen ostorozza a debreczeni arithmetikát mintegy éreztetni akarván művének fensőbbségét. Igy például:

1.) »Talán negyuen uttal olvastam által az fractionum additiot az régi Magyar Számvető könyvben, mégsem vehettem eszemben hogy mit akart az translator. Itilem penig hogy az Könynyomtató igen sleit számvető volt. Én azértan az Németből annyéra hoztam, hogy talám senki sem akadoz raita, hanem praeceptor nélkül is megtanolhattya az operationak formáját. Typographus.« (K. 6.).

2.) »Mondam azérton, hogy tellyességgel elhagyom it az régi Magyar Számuető Könyunec Regulait. És wyulon 4 kérdésben példákkal adom az operationac modgyát előbben.« (K. 7.)

3.) »Az réghi Magyar arithmeticának tanitása szerént igy kellene eszt csinálni.« (L. 2.)

4.) »Az illyen példát, az réghi Magyar arithmeticában az elmeiben megvetvén, operaltac non arte ipsa.« (L. 5.)

5.) »Látod eszt az exemplomot, mellyet az Regula Detriben irtac volt, az kie ez előt az Magyar Számvető könyvet irtác, hogy nem ide való, hanem az Multiplicatioban.« (G. 7.)

A két munka gondos egybevetése csakugyan arról győz meg, hogy a kolozsvári szerző összehasonlíthatlanúl jobb »számvető« volt, mint a debreczeni. A kolozsvári számtan a maga nemében és korához képest, azt lehet mondani, kitünő munkácska, holott a debreczeni meglehetős selejtes.

De ki volt az elemeztük munka szerzője? A typographus azt mondja, hogy ő irta a könyvet, s a hibákért mentegeti magát, mert ő nem magyar. Hogy hivták ezt a typographust? mi volt nemzetisége? Bárki lett légyen, annyi bizonyos, hogy a magyar nyelvet tökéletesen elsajátította; eszejárása, kifejezései, tréfái oly jó magyar zamatuak, hogy az 1591-iki számtan sokkal

szivesebben olvastatja magát, nem egy magyar ember mai számtani munkájánál. Még naivságai is legtöbbnyire kedélyesek. Úgy hiszem az olvasó szivesen vesz néhányat belölök:

32-t sokszorozván 5-tel, azt veti utána: »mellyet ha additio szerént sommáltál volna egybe, egy Tyukmony sültig sem érted volna végét benne. Ez okáért mondom, hogy az Multiplicatio az additionak ösvénye és által uttya.«

»Vészec két hüvelly Béczi kést 16 pénzen, vallyon ezer hüvellyel hogy vehetec. Igy csináld.... és tészen 80 ft. Nyoltzvan forinton vehed meg, hun még a szekérbér Erdélyig.«

»Vala egy főembernec egy szép Török lova, melly igen szép es io iaro vala, eszt keri vala egy nagyságos Wr. Az lovat hagya az főember 350 forinton. Az Wr itele magában, hogy igen nagy áron hatta volna. No monda az ember, én aiándékon adom oda, ilyen conditio alat, hogy czak az patkó szegeit megfizesd melly czak 24. Tudnia illik egy szegért 1 fillyért adgy, az másodikért 2 fillyért, az harmadikért 4 fillyért, az negyedikért 8 fillyért. Mindaddig mégy igy fellyeb és fellyeb az 24 szeget megfizeted. Ez az áru Wrnak felette igen iol tettszéc, ez kezét czapá vélle, magában itilvén hogy soha iob árosra nem talált volna, és hogy az iambor megczalatkozván, kárral atta volna lovát. Ez immár a kérdés, hany forintra ment az lonac az árra, czak szegeit megfizetvén: És mellyic czalta légyen meg az másikát.« stb.

A műszók legnagyobb része latin. Numeratio, additio, subtractio, subtrahendus, multiplicatio, multiplicálni, divisor, dividendus, quotiens, progressio stb. tarkázzák a magyar szöveget. Kora szokását követve, szerző egy cseppet sem haboz, a latin szókat magyarosan ragozni; purista hajlamok egyáltalában nem gyötrik. Maga, úgy látszik, egyetlenegy új szót nem csinált, és csakis a közkeletnek örvendő kifejezéseket vette fel művébe. Ez magyarázza meg, hogy az általam kiböngészett műszók lajstroma miért oly rövid. Az itt következő összeállításban a zárjel nélkül álló szók a kolozsvári arithmeticából valók, a zárjelbe mellejök irottak pedig a most használtak.

Álábhozni, apróra hozni (a tört nevezőjét megkisebbíteni); Bötü (számjegy), Darab (tört), darabra hozni (törtre változtatni), deréc somma (egész összeg), Egybe addalni, egyben adni, egyben summálni, egyben való számlálás, egyben hozni, egybe tudni, egy névre hozni (egyenlő nevezőjüvé változtatni); egyet üt (megegyez); egység, egyaránt való szám (egyenlő szám); egész, elegyes (vegyes); elosztandó (osztandó); észbe venni (megjegyezni); ezerni ezer, ezerszervaló ezer, Feles (páros); felét venni, feletlen (páratlan); felsokatulni, fellyülhaladni, Gradicz, Hamis, hazugszám, hozzáadni, Igazán sommálni, igyenesen, Kérdés, kettőztetni, kevesebb, kivegyed, kivonjad, kiered, kijö bellölo, kifeyteni, kissebbiteni, kimondhatandó (véges); kimondhatatlan (vég-

telen); kiemelni (kivenni); kihasználni; kóta (számjegy); középső, különbözni, különbség, Maradéc, megmivelni, megvetni (kiszámítani); meghaladni, megbizonyítani (megoldani); megkissebbités, mód (módszer); Nevező, nevezet, nulla, Olvasó (számláló); öregbic (nagyobb); összeadni, összeaddálni, összeszámlálni, Példa, plus, punct, Quota (kóta, számjegy); Rend (függélyes sor); Rész, Sokasítás (sokszorozás), somma, sommáld öszve, species, szám, számvetés, számvetés tudománya (számtan); számot vetni, számlálni, számtalan, számvetőmesterek, szántalan, szegdelni, szegdelt szám (tört); Tartás (tartalom); tart magában (foglal magában); több, töményezer (millió); Usura (kamat); vétkesen sommálni, vétség (hiba); vonás (linea); vonni, vony egy fél circalomot.

E munkában a következő mérték-egységekről történik említés:

Hosszmértékek: sing, vég (23—28 sing); bál (25 vég), méllyföld.

Ürmértékek: eitel, veder (8 eitel); köböl.

Súlymértékek: nehezék; magyar ferton (96 nehezék); magyar font (8 ferton); magyar mázsa (120 font); lót; német font (32 lót); német mázsa (100 német font).

Pénzegységek: magyar pénz; bécz ($^1/_3$ magyar pénz); fillyér ($^1/_2$ magyar pénz); magyar forint (100 magyar pénz, avagy 75 kraitzár) reinis vagy német forint (80 magyar pénz avagy 60 kraitzár); garas, selling, denar.

(Kovács Ödön.)

IRODALOM.

Bessel Friedr. Wilh. Abhandlungen, herausgegeben von R. Engelmann. In 3 2änden. II. u. III. Band. 4-edrét. Leipzig, Engelmann. 1876. Ára 40 m.

A »Műegyet. Lapok« első kötetében (l. pag. 88) ismertetve volt Bessel összegyüjtött értekezéseinek első része. Most, midőn aránylag rövid idő múlva a két utolsó kötettel már a teljes munka előttünk fekszik, kötelességünk az ismertetést ezekre is kiterjeszteni. Bessel életrajzi viszonyairól már az utolsó alkalommal történt említés, úgy hogy most csakis a két kötetben tartalmazott értekezés-gyüjteményről kell egyet-mást mondani.

A második kötetben találjuk Bessel dolgozatait az eszközök elméletéből, (26. szám) stellarastronomia (31. szám) és a mennyiségtan köréből (20. szám) Némileg meg lett változtatva az eredeti terv azáltal, hogy néhány eredetileg számba nem vett értekezés szintén fel lett véve. De ezen csekély bővítés nem szorúl igazolásra, általa Bessel tevékenységéről csak határozottabb képet nzerünk. Ide tartoznak az »Astronomische Untersuchungen«-ból vett értekezések.

A königsbergi megfigyelésekből származókat ezen csillagfigyelő intézet igazgatója Luther szivessége folytán volt lehetséges közölni. Különösen nagy érdekűek a második kötet első fejezetében azon értekezések, melyek a königsbergi observatorium Fraunhofer által szerkesztett nagy heliométerére vonatkoznak, u. m.:

»Vorläufige Nachricht von einem auf der Königsberger Sternwarte befindlichen grossen Heliometer.«

»Theorie eines mit einem Heliometer verbundenen Aequatorialinstruments.«

»Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte.«

A második fejezetből kiemeljük azon értekezeseket, melyek az álló csillagok parallaxisaira vonatkoznak.

»Ueber die Parallaxe von α Herculis.«

»Ueber die Parallaxen einiger Fixsterne aus Bradley'schen Beobachtungen.«

»Ueber den Doppelstern 61 Cygni.«

»Ueber die Parallaxe von 61 Cygni und μ Cassiopejae.«

»Bestimmung der Entfernung des 61. Sterns des Schwans.«

Végre:

»Fernere Nachricht von der Bestimmung der Entfernung des 61. Sterns des Schwans.« sat.

Ugyanezen fejezetben találjuk irodalmi nyomát még Bessel kezdeményezésének ujabb és tökéletesebb csillagmappák létesítésére vonatkozólag. A harmadik fejezet a tiszta mennyiségtan körébe való és nem foglal magában nagyobb jelentőségü értekezéseket.

Áttérünk az utolsó a harmadik kötet tartalmára. Ezen kötet ismét három fejezetből áll: Geodäsia (11. szám), Physika (17. szám) és Vegyesek (36. szám).

Mig a második kötét inkább kisebb terjedelmü értekezésekből áll, a harmadik három nagyszabású munkát tartalmaz, úgy mint:

»Gradmessung in Ostpreussen.«

»Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels«, és

»Analyse der Finsternisse.«

Az első ezek közt, t. i. a kelet-poroszországi fokmérés tulajdonképen Bessel és Baeyer közös munkálkodásának eredménye, és csak a másik munkatárs, Baeyer tábornok engedélyével, vagy talán jobban mondva, kivánsága folytán, a mennyire csak terjedelme engedte, majdnem csak teljesen fölvétetett Bessel értekezései közé. Ezen munka a könyvkereskedésben hiányzik, és így

e helyen való megjelenése csakugyan érezhető hiányt pótol. Kimaradtak csupán a számrészletek, sorok és táblák, a mennyiben nélkülözhetők, a mi különben több más értekezésnél is történt.

Ezen dolgozatot követik Bessel a föld alakjára és nagyságára vonatkozó értekezései, milyenek: »Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluss auf die Bestimmung der Figur der Erde« és a többiek.

A harmadik kötet második fejezete, melynek címe »Physika« nagyobbrészt Bessel híres ingamérései által van elfoglalva, s melyek »Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels« cím alatt a berlini Akadémia évkönyveiben jelentek meg először.

Az utolsó kötet harmadik fejezete a »vegyes« értekezések közt sok van, a mit szerzőjük tudományos jelentősége szempontjából bátran ki lehetett volna hagyni, de a mi más oldalról annál érdekesebb, a mennyiben belőle Bessel jellemének képét politikai s egyéb nézetei által lehet kiegészíteni. Ide tartozik néhány életrajzi vázlat, »Uebervölkerung« című értekezés és mások, melyek részben napilapokban jelentek meg. Az egész mű végét teszi Bessel összes irodalmi működésének összeállítása chronologicus rendben. Kívánatos volna még Bessel levelezésének közzététele, miután ez a csillagászat fejlődésére, különösen századunk első évtizedeiben, több mint egy tekintetben nagy fényt vetne.

Újból olvasóink figyelmébe ajánljuk a most már teljesen befejezett munkát, mely külső disze által is a nagy tudósnak méltó szellemi emlék.

(Heller Ágost.)

Dr. König Gyula, Bevezetés a felsőbb algebrába, I. kötet: Az algebrai analysis elemei. Budapest. 1876. Az Eggenberger-féle könyvkereskedés kiadása. (VIII, 268 l.)

Azon viszony következtében, melyben a fentebbi czím alatt megjelent munka szerzője a »Műegy. Lapok« szerkesztőségéhez áll, e munkának nem adhatjuk ugyan érdemleges ismertetését; de úgy hisszük, hogy olvasó-közönségünk azért szivesen veszi, ha a könyv irányát és tartalmát röviden megbeszéljük.

A mai mennyiségtan három egyenjogú részének, az algebra, geometria és függvénytannak tankönyvirodalma az utolsó időkben nagy lendületet nyert; és nem tagadhatni, hogy az utolsó 100 évnek a tudomány fejlődésében és továbbvitelében páratlan eredményű működése — bár elég későn — most már azon munkákban is visszatükröződik, melyek a kezdőknek első tájékoztatóúl

akarnak szolgálni. Legfényesebben sikerült ezen aránylag újabb keletű törekvés a geometriai részekben; az ú. n. differentiál és integrál számítási kézikönyvekben a mai függvénytani módszerek hasonló földolgozása nem haladt ugyan még annyira, de itt is elsőrangú tudósok régibb munkái mellett föl lehet említeni Hermite-nek művét, az új Cours d'Analyse de l'école polytechnique-t, mely valóban nélkülözhetetlen mindazok számára, kik a mathematikai tudományok rendszerével és szellemével akarnak megismerkedni, és nem elégednek meg avval, ha valami hosszúra nyúló függvény maximumát vagy egyik-másik furcsa alakú testnek köbtartalmát tudják kiszámítani.

Az algebrában is ott van Serret-nek általánosan elterjedt kézikönyve, az újabb mathematikai irodalom egyik legkiválóbb terméke, valamint az algebra egyes részeire vonatkozó elég terjedelmes, de azért mégis már inkább a monographia jellegét viselő számos más munka. De már a tanuló is észreveszi azon hézagot, mely a tisztán formális algebra elemeit, az e megszorításban jól elnevezett »betüszámtani« részt tárgyaló tankönyvek és a tudományos kérdéseket és tudományos módszereket rendszeresítő munkák közt fönáll. — E hézag a külföldi tudományos irodalomban tényleg megvan; és így a czímben említett munka mindenesetre jogosult kisérlet, melynek, ha már elismert minta nem volt választható, mindenesetre csak előnyére szolgálhat, hogy speciális hazai oktatásügyi viszonyainkra tekintettel volt.

Nem lehet elhallgatni, hogy a föladat, melyet a munka szerzője meg akart oldani, elég nehéz volt; csak az algebrai operatiók elmélete és az elsőfokú egyenletrendszerek ismerete van benne föltételezve (és tapasztalatilag az egyetemre kerülő hallgatóságnál az algebrának többi, a középtanodában előadandó részeire nem is igen lehet számítani); de mindemellett a mai tudományos kutatás szinvonaláig akarja eljuttatni az olvasót. Legjellemzőbbek talán e tekintetben a combinatorikára, számelméletre és az egyenleteken végzendő operatiókra vonatkozó részek, ámbár kétségkivül, ha ezt a könyvvel elérendő gyakorlati czél megengedte volna, ezeken még sokat lehetett volna bővíteni.

A munka a szerző előadásaiból keletkezett; és első sorban segédeszközének van szánva ezen előadásokhoz. Hogy azonban nem az előadásoknak reproductiója, a mondottakból is kitünik; előadás és tankönyv, ha ily túlságosan szoros rokonságban állanak, úgy véljük, csak egymásnak ártanak, de leginkább azon ügynek, melynek szolgálni mindkettő hivatva van.

Áttekintés végett ide csatoljuk még az első kötet fejezeteinek czímét:

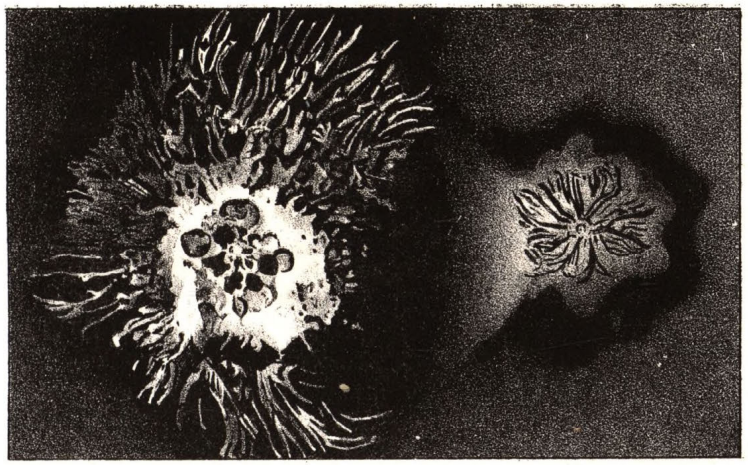
I. Az egész számok tulajdonságai, II. Láncztörtek elmélete. III. Kapcsolástan. IV. Képzetes számok. V. Egyenletek algebrai átalakítása. VI. Egyenletek a 4. fokig. VII. Végtelen sorok. VIII. A legfontosabb hatványsorok áttekintése. IX. Végtelen szorzatok és láncztörtek. (K. Gy.)

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

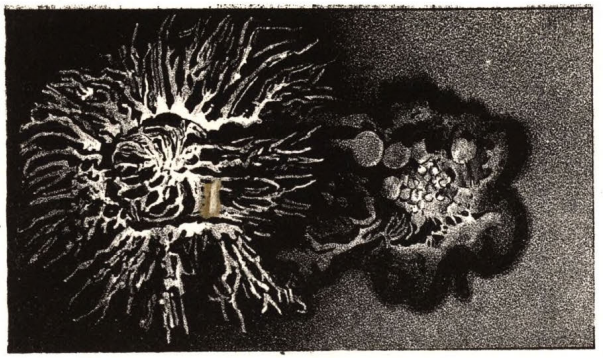
M. T. AKAD. KÖNYVTÁRA

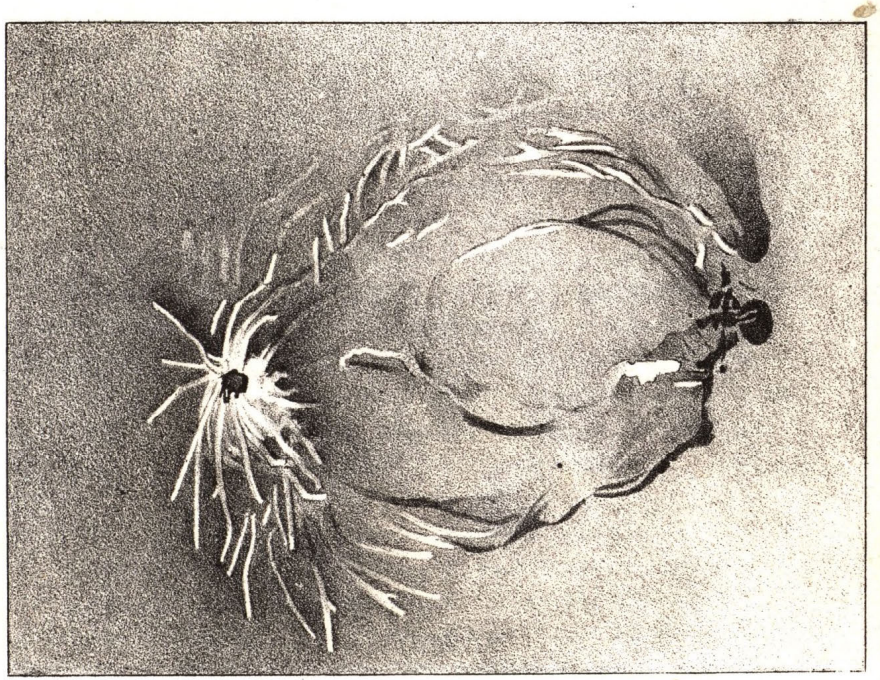
Kont. A villanyosságok kiegyenlődése a szikrában.

3. ábra.

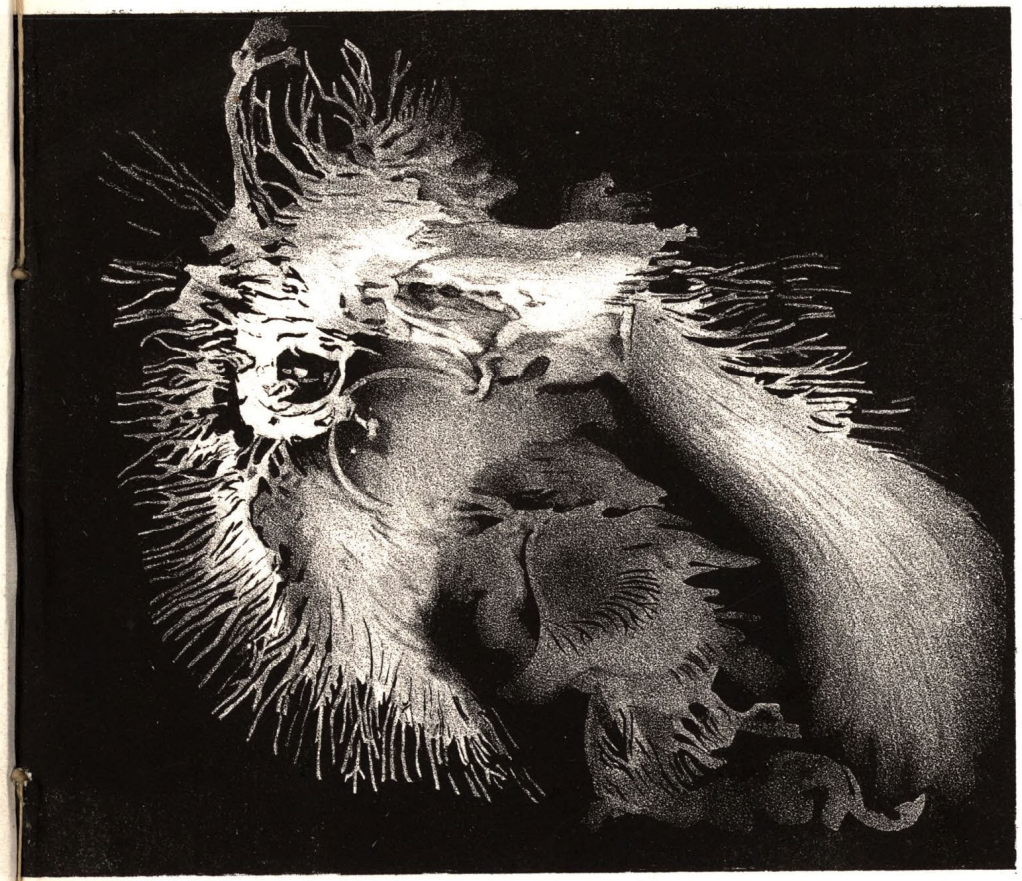


2. ábra.





1. ábra.

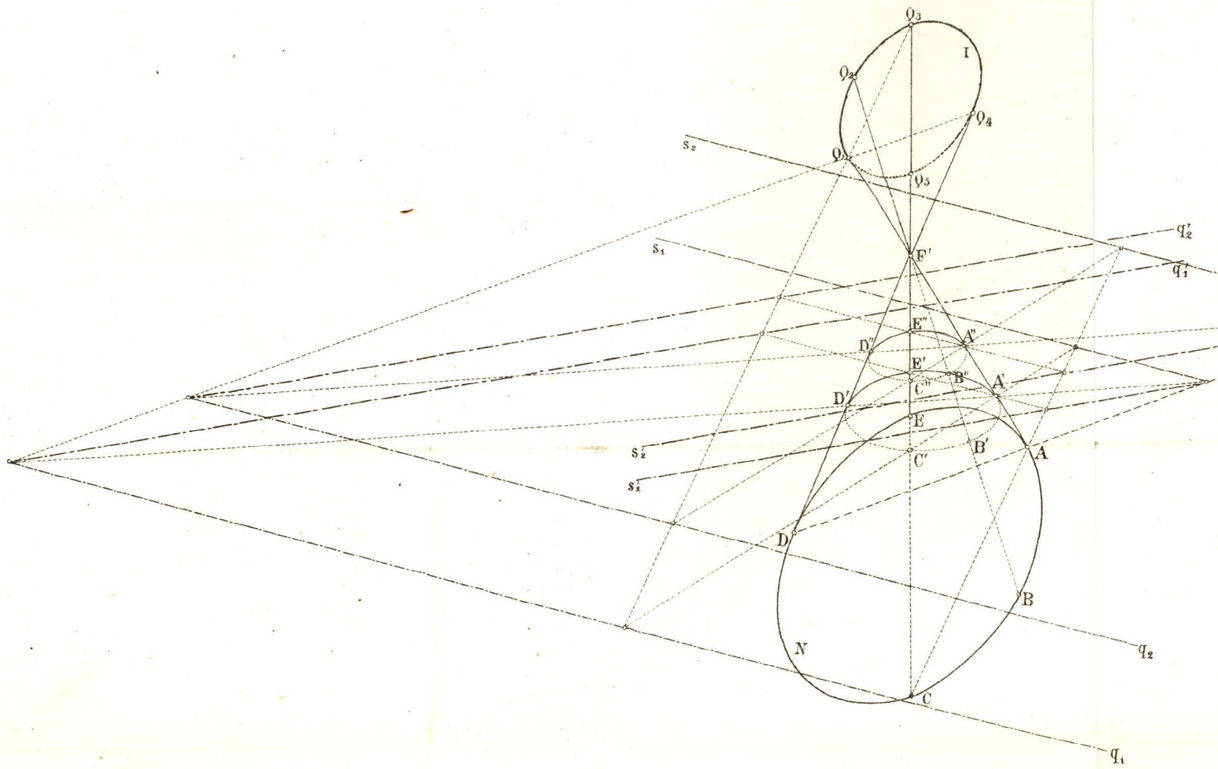


4. ábra.

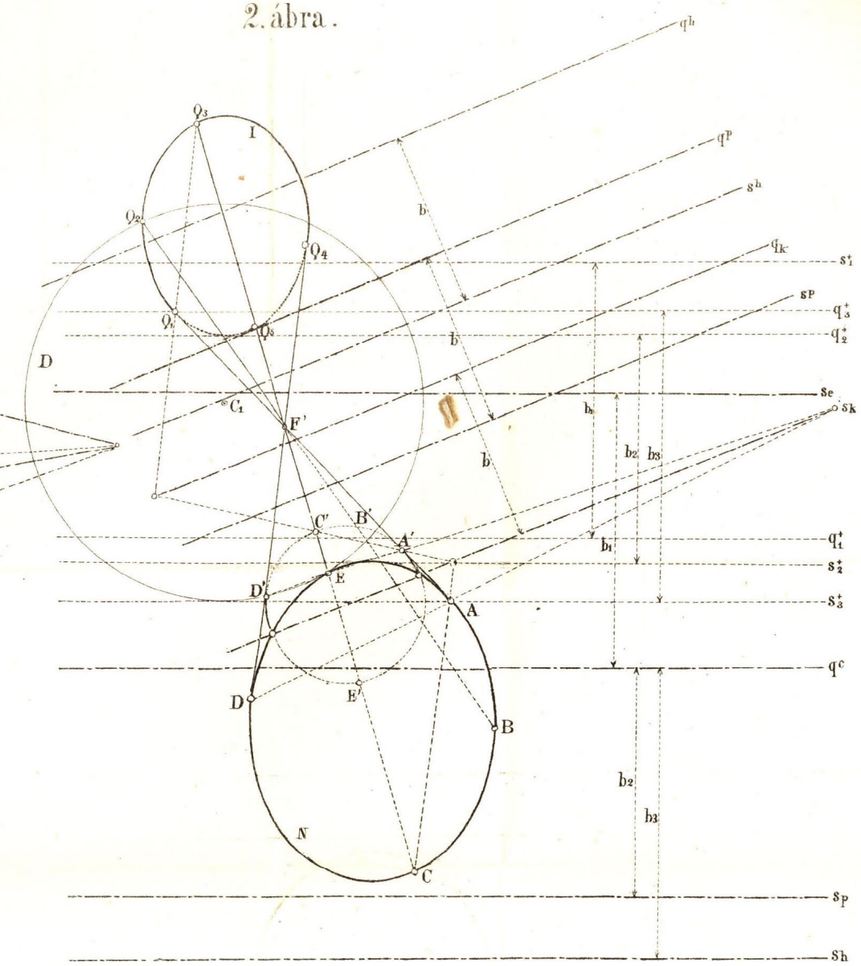
Ny. Pataki J. udv. könyvnyomdája Budapesten.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖ[illegible]A

1. ábra.



2. ábra.



Rajzolta Fölser István

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

II. kötet. **1877.** 12. füzet.

NÉHÁNY HATÁROZOTT EGÉSZLETRŐL. *)

Enneper A., göttingai egyetemi tanártól.

Legyen k és k' két valós, positiv mennyiség, a mely között fönnáll a $k^2+k'^2=1$ egyenlet. Ha azután

$$k' \operatorname{tang}. u. \operatorname{tang}. v = 1 \qquad 1.)$$

akkor tudjuk, hogy:

$$\frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = \frac{-dv}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 v}}. \qquad 2.)$$

Ezen az elliptikus integrálok elméletében előforduló, az 1.) egyenlet által kifejezett helyettesítés, a következő módon néhány határozott egészlet értékéhez vezet. Az 1.)-ből ugyanis:

$$k' \frac{1+a \sin^2 u}{1+a-(a+k^2) \sin^2 u} = \frac{1}{k'} \frac{1+a-(a+k^2) \sin^2 v}{1+a \sin^2 v}. \qquad 3.)$$

Legyen most már az

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left[k' \dfrac{1+a \sin^2 u}{1+a-(a+k^2) \sin^2 u}\right]}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} du \qquad 4.)$$

egészletben f egy tetszőleges függvény jellemző jele, mely véges és folytonos marad az u-nak minden az egészelési határokon belül fekvő értékére nézve. Ha itt az 1.) által kifejezett helyettesítést használjuk, akkor a 2.) és 3.) alatti egyenleteket tekintetbe véve, a 4.)-ből lesz:

*) A »Műegyetemi Lapok« számára beküldött német eredeti dolgozat után fordítva.

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left[\frac{1}{k'}\,\frac{1+a-(a+k^2)\sin^2 v}{1+a\sin^2 v}\right]}{\sqrt{1-k^2\sin^2 v}}\,dv.$$

Az egészelési változó jelölése közömbös: szabad tehát az utolsó egyenlet jobb oldalán v helyett u-t irni. Ekkor lesz:

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left[\frac{1}{k'}\,\frac{1+a-(a+k^2)\sin^2 u}{1+a\sin^2 u}\right]}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\,du. \qquad 5.)$$

Ha pedig a 4.) és 5.) egyenletek összegét képezzük és 2-vel osztunk, akkor lesz:

$$M = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left[k'\frac{1+a\sin^2 u}{1+a-(a+k^2)\sin n}\right] + f\left[\frac{1}{k'}\,\frac{1+a-(a+k^2)\sin^2 u}{1+a^2\sin u}\right]}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\,du. \qquad 6.)$$

Ha itt $f(x)=\log. x$ tétetik, akkor $M=o$, mert $\log. x+\log.\frac{1}{x}=0$.

Hasonlóképen $f(x)=$Arc. tang. x ezt adja: $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$. Ezen esetben:

$$M = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

A 6.) egyenletben tegyük M helyébe értékét a 4.)ből. Akkor e két föltevés $f(x)=\log.x$, $f(x)=$Arc. tang. x a következő figyelemre méltó eredményhez vezet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\left[k'\frac{1+a\sin^2 u}{1+a-(a+k^2)\sin^2 u}\right]}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\,du = 0 \qquad 7.)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{arc. tang.}\left[k'\frac{1+a\sin^2 u}{1+a-(a+k^2)\sin^2 u}\right]}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\,du = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 n}} \qquad 8.)$$

Ha még a-nak is speciális értéket adunk, akkor a 7.) és 8.) egyenletekből részint új, részint ismeretes eredményeket vezethetünk be. Az ujak közül a következőket akarom még fölhozni. Minthogy ugyanis $k'^2 = 1 - k^2$, következik:

$$\frac{k'}{1+k} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}$$

Legyen 7.) és 8.)-ban $a = k$ és szokásos rövidítés gyanánt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = K$$

akkor a következő eredményeket nyerjük:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log. \frac{1+k \sin^2 u}{1-k \sin^2 u} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = \frac{K}{2} \log. \frac{1+k}{1-k}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{arc. tang.} \left(\frac{1+k \sin^2 u}{1-k \sin^2 u} \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \right) \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = \frac{\pi}{4} K.$$

Hasonlókép egyszerü eredményeket nyerünk, ha a 7.) és 8.) alatti egészletekben $a = 0$ vagy $a = \infty$ értékeket vezetünk be.

(Göttinga, 1877. január.)

A GRAMME-FÉLE DYNAMO-ELECTRIKUS GÉP ELMÉLETÉHEZ.

Dr. Fröhlich Izor, egyetemi magántanártól.

A néhány évvel ezelőtt feltalált Gramme-féle gépek rövid idő alatt nagy elterjedést nyertek.

Előnyük éppen abban áll, hogy az általuk létrehozott folyamok folytonosak és egyirányuak, mig a többi gépek, melyek a mechanikai

*) Ezen tárgyalások kiindulási pontjául egy Dr. b. Eötvös Loránd egyetemi tanár úrral váltott eszmecsere szolgált.

munkát electrikus árammá alakítják át, csak rövid ideig tartó, de egymást gyorsan követő, ellentett inductió áramokat adnak.

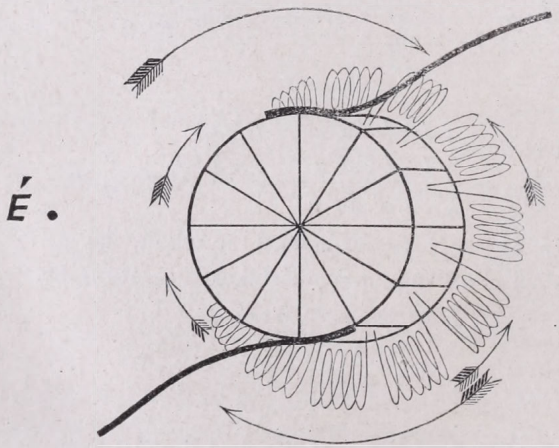
Daczára az emlitett elterjedésnek, úgy látszik, a GRAMME-féle gép használatánál föllépő folyamatok elméletileg még nem lettek kellően megvizsgálva.

Kisértsük meg tehát következőkben ezen, első pillanatra bonyolúltaknak látszó viszonyokat egyszerű tárgyalások segítségével kifejteni.

I.

Talán nem lesz felesleges először is a GRAMME gép szerkezetének alapelvét röviden megemlíteni.

Egy tengelye körül forgatható henger kerületére számos, elszigetelt sodronyokból készült tekercsek vannak erősítve, úgy hogy a tekercsek egyes csavarmenetei által bezárt felületek síkjai mind a henger tengelyén haladnak keresztül. Az egyes tekercs sodronyának kez-

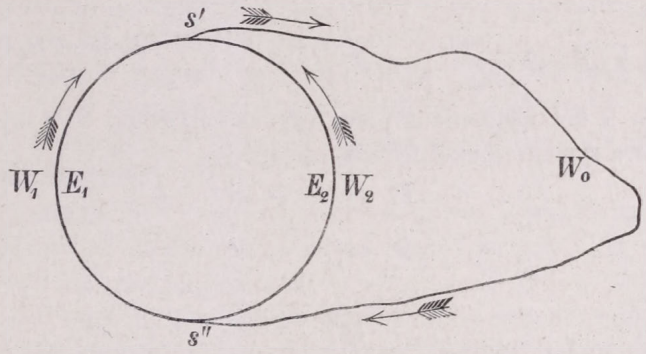


dete s a reá következő tekercs sodronyának vége egy fémből készült henger-sectorral vezetőleg van egybekapcsolva, ily sectorok száma a tekercsekével egyenlő s az egymásra következő sectorok közbeiktatott elszigetelő anyag által választatnak el egymástól. Ily módon az összes tekercsek egy egyszerű zárt vezetést képeznek.

Az így szerkesztett henger egy mágnes (vagy electromágnes, illetőleg még több mint *egy* electromágnes) polusai közé helyeztetik és mechanikai erők által forgásba hozatik. Az így keletkezett inducált folyamok irányát LENZ törvénye határozza meg, mely szerint valamely mágnes, (electromágnes vagy zárt electrikus folyam) által egy közelé-

ben mozgó vezetőben inducált folyam oly irányú, miszerint az említett erőforrás és a folyam közötti electrodynamikus hatás a vezető mozgását mindig meglassítani törekszik. Ez értelemben, ha nagy nyilak a henger forgatásának irányát jelölik, a kisebb nyilak az északi és déli polus által az azokhoz közel fekvő tekercsekben inducált folyamok irányát adják. Magától következik, hogy akármennyire is forgattassék a henger, a keletkező áramok összes intensitása egyenlő zérussal.

Azonban azonnal változnak e viszonyok, midőn a belső (sector) hengert vezetőleg érintő s', s'' sodronyok végei összekapcsoltatnak



Rögtön folyam elágazás áll be, melyet schematikusan következő úton tárgyalhatni: $s'as''$ jelelje az s 's'' vonal baloldalán fekvő tekercsek vezetését, $s'bs''$ ugyanazt a jobboldalon levő tekercsekre nézve és $s'cs''$ az »elvezetett« folyam útját; továbbá E_1, W_1, E_2, W_2 az ezekben támadó folyamok electromotorikus ereje s megfelelő vezetésük ellenállása, és W_0 az elvezető sodronyok ellenállása. Ha ezenkivül J_1 és J_2 az E_1 és E_2 által az összes vezetőkben támadó folyamok intensitása, akkor Kirchhoff törvényei szerint:

$$J_1 = \frac{E_1}{W_0 + \frac{W_0 W_2}{W_0 + W_2}}$$

$$J_2 = \frac{E_2}{W_0 + \frac{W_0 W_1}{W_0 + W_1}}$$

Legyen végre ${}_1J_0$ és ${}_1J_2$ az E_1 által W_0 és W_2-ben előidézett folyamágak intensitása: ${}_2J_0$ és ${}_2J_1$ ugyanaz E_2 és W_0 s W_1-hez tartozó vezetőkre nézve, úgy hogy:

$$J_1 = {}_1J_0 + {}_1J_2$$
$$J_2 = {}_2J_0 + {}_2J_1$$

Az itt keletkező folyamágak közül bennünket különösen a W_0-hez tartozó vezetőn keresztül ömlő áram érdekel, miután épen ez azon folyam, mely a gép alkalmazásánál használható. Ennek intensitása:

$$J_0 = {}_1J_0 + {}_2J_0$$

Amde:

$${}_1J_0 = {}_1J_2 \frac{W_2}{W_0} = (J_1 - {}_1J_0) \frac{W_2}{W_0} = J_1 \frac{W_2}{W_0 + W_2}$$

$${}_2J_0 = {}_2J_1 \frac{W_1}{W_0} = (J_2 - {}_2J_0) \frac{W_1}{W_0} = J_2 \frac{W_1}{W_0 + W_1}$$

és végre:

$$J_0 = {}_1J_0 + {}_2J_0 = J_1 \frac{W_2}{W_0 + W_2} = J_2 \frac{W_1}{W_0 + W_1} = \frac{E_1 W_2 + E_2 W_1}{W_0 W_1 + W_0 W_2 + W_1 W_2}$$

Ha a két magnetikus polus egyenlő erősségü, és a hengerhez viszonyítva symmetrikusan fekszik, akkor:

$$E_1 = E_2 = E$$

és

$$W_1 = W_2 = W$$

$$J_0 = \frac{2E}{W + 2W_0}$$

Miután pedig E az electromotorikus erő a henger körülforgásának számával egyenes arányban áll, az elvezetett folyam intensitása a körülforgások számával arányos. Ezen eredményt e napokban Hagenbach *) kisérletileg igazolta.

Ha végre az összekötő sodronyok rövidek és vastagok, úgy hogy ellenállásuk a tekercsek ellenállásához képest elhanyagolható, lesz:

$$J_0 = \frac{2E}{W}.$$

Lehehetetlen, a tekercsek ily csoportosítása mellett, oly elvezetést előállítani, melynél az elvezetett folyam intensitása nagyobb lenne.

II.

Az előbbiekben az inducált folyamok irányait Lenz törvényének alkalmazása által nyertük; de ezen tétel teljesen elégtelen a tekercsekben keletkező áramok electromotorikus erejének és irányának pontos meghatározására.

Faraday eszméi szerint egész biztossággal és teljes általánosságban fejezhető ki az inducált áramok törvénye. Midőn valamely zárt

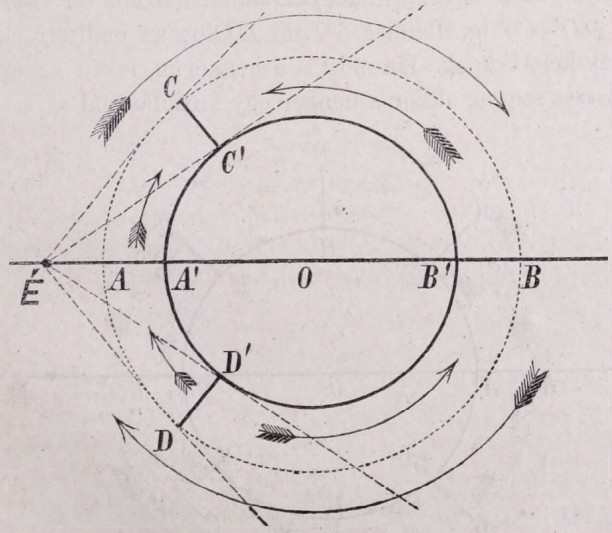
*) Carl's Repertorium, 1876. 4. füzet.

vezető magnetikus vagy electromagnetikus mezőben van, akkor az ezen mezőhöz tartozó erővonalak egy része a vezető által határolt felületen keresztül halad; ha most a magnetikus, illetőleg electromagnetikus erőforrás, vagy pedig a vezető, vagy végre mindkettő egyszerre mozgattatik: a vezetőben egy időelem alatt keletkező folyam electromotorikus ereje egyenes arányban áll az ezen idő alatt történő mozgás által előidézett változásával a vezetőn keresztül haladó erővonalak számának. A folyam iránya pedig attól függ, vajjon e szám növekszik vagy fogy, s vajjon a vezető által bezárt felület normalisa s az erővonalak iránya által képzett szög az első, illetőleg a negyedik, vagy a második, illetőleg a harmadik negyedben fekszik.

Vizsgáljuk meg ama legegyszerűbb esetet, midőn csak egyetlen egy magnetikus pont szolgál állandó erőforrás gyanánt. Helyzete azon síkban legyen, mely a tekercsek közepén megy keresztül és a henger tengelyére merőleges.

Válasszunk ki továbbá a tekercsek számos csavarmenetei közül egyetlenegyet és lássuk mily folyamok támadnak benne a hengei tengelye körül való egy forgatása alatt.

Az $É$ pontból kiinduló erővonalak teljes egyenletességgel terjednek szét mindenfelé; a vezetőn keresztülhaladó erővonalak száma tehát egyenesen arányos azon kúpszöggel, melyet a vezető által bezárt



felület az $É$ pontban képez. A vezető forgatása közben két oly helyzetet ér el, melyre nézve e kúpszög értéke a leghető legnagyobb, (e

helyzetekben azonban a vezető síkja mindaddig *nem* függélyes az *ÉAB* vonalra, mig *ÉA* távolság véges marad) és két más helyzetet (melyek az *É* pont s a tengelyen keresztül fektetett síkban fekszenek) melyre nézve e kúpszög egyenlő zérussal.

Felvéve tehát, hogy *CC'*, illetőleg *DD'* a vezető azon helyzetei, melyek a legnagyobb kúpszögeknek felelnek meg, továbbá, hogy a vezető síkjának normalisa függélyesen fölfelé van irányítva, midőn az *BB'* helyzetben van, akkor könnyű belátni, hogy midőn a vezető mozog:

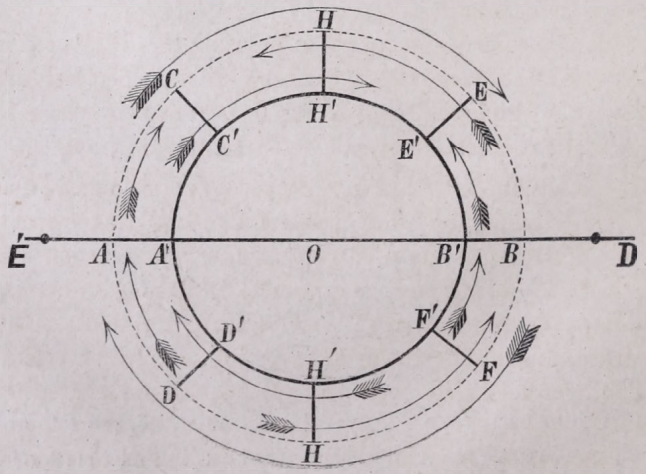
AA'-tól *CC'*-ig egy + irányú
CC'-től *BB'*-ig » — »
BB'-től *DD'*-ig » — »
DD'-től *AA'*-ig » + »

fog keletkezni. Továbbá az electromotorikus erő, mely támad:

DD'-től *AA'*-n keresztül *CC'*-ig $= + 2\mu K$
CC'-től *BB'*-n » *DD'*-ig $= - 2\mu K$,

hol *K* a vezetőnek említett legnagyobb kúpszögét, μ pedig a magnetikus polus (magnetikus) tömegét, electromagnetikus mértékben kifejezve, jelenti.

A vezető helyzete az *É*-hez viszonyítva tetszőleges lehet a mozgás kezdetén, egy teljes körülforgatás alatt e vezető az *AA'*, *CC'*, *BB'* és *DD'* helyzeteken keresztül haladva, előbbi helyébe tér vissza; tehát ez alatt a *DD'*- *CC'*-ig, illetőleg *CC'*-től *DD'*-ig az említett electromotorikus erők keletkeznek. Ha most *n* a hengeren fekvő egyes csavarmenetek összes száma, akkor a henger egy fordulásánál



DD' és CC'' között $+ 2\mu nK$
CC' és DD' között $- 2\mu nK$

electromotorikus erők inducáltatnak.

Helyezzünk most a henger másik oldalán, symmetrikusan az elsőhöz, egy második ellentett hatásu magnetikus polust. Ennek hatása a forgó tekercsekre teljesen hasonló a poluséhoz. Támad ugyanis (a D polus inductiója következtében):

EE' és FF'' között $- 2\mu nK$
FF' és EE' között $+ 2\mu nK$

electromotorikus erő.

Határozzuk meg a HH' sík jobboldalán és baloldalán levő tekercsekben keletkező electromotorikus erőt, feltéve, hogy mindkét polus egyszerre hat.

Jelezzük K_0-al azon kúpszöget, melyet az egyes csavarmenet HH' helyzetében az E', illetőleg D pontban képez, akkor a jobboldali tekercsekben:

$$- 2\mu n [K-(K-K_0)]$$
$$- 2\mu n [K-(K-K_0)]$$

azaz:

$$- 4\mu n K_0$$

és a baloldaliakban

$$+ 4\mu n K_0$$

az inducált electromotorikus erők mértéke.

Tehát a két félhengerben inducált folyamok intensitása egyes-egyedül csak azon kúpszög nagyságától függ, melyet a vezető egyes csavarmenete a HH' helyzetben képez.

Ezen K pedig változik, ha a polusok az $ÉD$ vonal mentében tolatnak el. Ki kell keresnünk tehát ezek számára oly helyzetet, hogy erre nézve K_0 legnagyobb legyen. Ez természetesen csak a belső henger sugárától és a vezető csavarmenetének alakjától függ.

Ha ez utóbbi kör, akkor e kúpszög elliptikus egészletek által fejezhető ki s annak az adott viszonyok között legnagyobb értéke Legendre táblái segítségével, közbeiktatás útján könnyen kiszámítható. Ha pedig a csavarmenet alakja más, egyenes számítás útján lehetetlen e kúpszöget meghatározni; ez esetben graphikai módszerem*) alkalmazása minden körülmények között fog czélhoz vezetni.

Eddig a keletkező számokat tárgyaltuk, mialatt a henger egy

*) Előterjesztetett a m. t. akadémia 1876. május 8-án tartott ülésén.

teljes körülforgást végzett; ha annak forgási szöge pedig általában φ, akkor a két félhengerben ez alatt

$$+ 2\mu n K_0 \frac{\varphi}{\pi}$$

és

$$- 2\mu n K \frac{\varphi}{\pi}$$

electromotorikus erők keletkeznek, mivel a tekercsek, illetőleg az egész vezetés a henger tengelye körül teljesen symmetrikusan van elhelyezve.

A valóságban ugyan a mozgás polusait nem lehet ily pontoknak tekinteni (a minőket $\acute{E}$ és D-ben fölvettünk), miután lehetetlen véges kiterjedésü ható tömegek helyébe oly pontokat helyettesíteni, melyeknek hatása a tőlük véges távolságban fekvő térnek minden pontjára nézve amazokéval teljesen egyenlő legyen. Mindazonáltal az amott föllépő viszonyok typusa teljesen hasonló a tárgyalt általános esetéhez.

Az inducált folyamok elvezetése a HH' és $H'H$ helyzeteknek megfelelő sectoroknál történik; akármily más két helyről vezetve el a folyamot, annak intensitása soha nem lehet nagyobb, de igenis kisebb.

Távolítsuk most el az $\acute{E}$ és D polusokat és gondoljuk a hengert a reá erősített tekercsekkel együtt egy homogen magnetikus vagy electromagnetikus mezőben elhelyezve. Akkor a vezető egyes csavarmenetén keresztülhaladó erővonalak száma egyenes arányban áll a menet felületének vetületével az egyensúlyi felületek síkjára. Jelelje F ezen, az egyes csavarmenet által bezárt felületet, γ a mező absolut intensitását, φ azon szöget, melyet a magnetikus erő iránya a horizontális síkkal képez, továbbá a henger tengelye merőleges e síkra, és az elvezetési helyeknek megfelelő HH' és $H'H$ síkok merőlegesek a φ szögletet tartalmazó síkra, akkor egy teljes körülforgatás alatt a két félhengerben:

$$+ 4nF\gamma \cos\varphi$$

és

$$- 4nF\gamma \cos\varphi$$

electromotorikus erők támadnak.

Ha most a forgási tengely vizszintesen és a φ szöget tartalmazó síkra merőlegesen fekszik, akkor a két félhengerben ugyancsak egy körülforgása alatt

$$+ 4nF\gamma \sin\varphi$$

$$- 4nF\gamma \sin\varphi$$

a keletkező electromotorikus erők

Az elvezetett folyam intenzitását e két esetre nézve J' és J''-vel jelölvén, lesz:

$$J' = \frac{8n\ F\gamma \cos\varphi}{w + 2w_0}$$

$$J'' = \frac{8n\ F\gamma \sin\gamma}{w + 2w_0}$$

Miből:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{J''}{J'}$$

és

$$\gamma = \frac{w + 2w_0}{8nF}\left[J'^2 + J''^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

(J' és J'' absolut electrdynamikus mértékben vannak adva.)

Ezen kifejezésekből tehát azonnal következik, hogy a Gramme-féle *tekercs-henger segítségével egy homogen magnetikus vagy electromagnetikus mezőt vizsgálva meg az elvezetett folyamok intenzitásából, a magnetikus erő iránya a mezőben és a mezőnek absolut intensitása határozható meg.*

Természetesen a következmény ép úgy érvényes a föld magnetizmusa homogen mezejére, mint bármely mesterségesen előállított magnetikus vagy electromagnetikus mezőre nézve.

A különbség az eddig e czélokra használatban lévő Weber-féle földinductor (a mesterséges mezők megvizsgálására ugyanazon készülék, de rendkivül kisebbített dimensiókkal alkalmaztatik) és Gramme tekercs-hengere között főleg abban áll, hogy az első csak egyes, rövid ideig tartó inductió áramokat szolgáltat, mig az utóbbiban folytonos és majdnem mennyiségtanilag pontosan állandó folyamok keletkeznek.

III.

Kapcsoljuk össze a Gramme gép elvezető sodronyai végét egy gálván folyam electrodjaival, úgy hogy a tekercsekben ömlő áramok a magnetikus polusokra electrodynamikus hatást gyakorolnak. Ennek következtében az előbb nyugvó henger forgásnak fog indulni és nehány másodpercz alatt állandó mozgást vesz fel (feltévén, hogy a hozzávezetett folyam intensitása azalatt állandó maradt).

Ily módon tehát ezen gépet állandó forgás létrehozására is lehetne használni.

Vizsgáljuk meg most közelebbről először is a jelenleg általános használatban lévő Helmholtz-féle rotatió-gép mozgását, azután pedig a Gramme-féle tekercs-hengernek az említett módon előidézett forgását.

Helmholtz gépe lényegében véve következő: egy függélyes forgatható tengely két oldalán két fekmentes, hengeralakú electromagnest visz, melyeknek megfelelő sodronyvége, illetőleg kezdete a tengely alja körül elhelyezett félköridomú, higanynyal telt, de egymástól nem vezetőleg elválasztott két vályúban mozoghat. A forgási tengelytől kellő távolságban két fekmentes (külső) electromágnes szilárdúl van erősítve, úgy hogy tengelyük iránya a függélyes tengelyen keresztül halad és arra merőleges.

Midőn most a szilárd és a forogható tekercseken keresztül két áram bocsáttatik, az electromágnesek közötti hatás a belső mágneseket forgásnak indítja. A hatás azonban csak akkor tetemes, ha a külső és belső electromagnesek polusai igen közel jutottak egymáshoz; de akkor egyidőben alúl a belső folyam megszakíttatik (mivel a sodronyvégek a vályukból kiléptek); és miután a belső tekercsek tétlenségük következtében kissé odább fordúltak, a folyam ellenkező irányban megy rajtuk keresztül. Az electromágnesek között működő hatás tehát úgyszólván egyszerű ismétlő lökésekből adódik össze, melyeket a belső tekercsek közönként szenvednek, midőn 180°-nyira fordúltak. Hogy e hatás csakugyan lökésszerű, arról könnyen meggyőződhetünk, ha a belső tekercsek mozgását figyelemmel kisérjük, midőn a forgás épen kezdődik.

Ezen gép mozgása tehát általánosan következőnek tekinthető: Valamely m tömegü pontra lökésenként működő erő hat; a mozgás surlódással megy végbe, mely a sebességgel egyenes arányban áll, a lökés mindig ismétlődik, ha az m pont egy bizonyos, állandó hosszaságú a útot futott meg.

Jelezze v az m pont sebességét, s az általa általában befutott tért, a azon úthosszat, melynek hátrahagyása után a lökés ismétlődik, $\frac{mc^2}{2}$ az egy lökésnek megfelelő munkát és σ a surlódás együtthatóját. Keressük először is a pont mozgását oly időtartam alatt, melyben az lökést *nem* szenved s csak a surlódásnak van alávetve. A mozgás egyenlete:

$$m\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\sigma v$$

vagy:

$$m\frac{\partial v}{\partial t} = -\sigma v$$

tehát:

$$\log. v = -\frac{\sigma}{m} t + \text{const.}$$

és

$$v = v_0 e^{\frac{\sigma}{m}(t_0 - t)}$$

midőn v_0 és t_0 egy közvetlenül egy lökés után beálló állapotra vonatkozik.

Ezen mozgási egyenlet addig helyes, mig az m pont, t_0-tól számítva, a útat nem futott meg. Hogy az arra szükséges $t_0 - t_1$ időt meghatározhassuk, tegyük:

$$a = s_0 - s_1 = \int_{t_0}^{t_1} v \partial t = v_0 \int_{t_0}^{t_1} e^{\frac{\sigma}{m}(t_0 - t)} \partial t$$

$$a = v_0 \frac{m}{\sigma} \left[t - e^{\frac{\sigma}{m}(t_0 - t_1)} \right]$$

ha tehát v_0 a pont sebessége közvetlenül egy lökés után t_0 időben, akkor az idő, $t_0 - t_1$, mely a következő lökésig elfoly és a sebesség v_1, melylyel a pont közvetlenül e következő lökés előtt bir, kifejeztetik:

$$e^{\frac{\sigma}{m}(t_0 - t_1)} = t - \frac{a\sigma}{v_0 m}$$

és

$$v_1 = v_0 - \frac{a\sigma}{m}$$

egyenletek által.

A mozgás akkor válik állandóvá (de *nem* egyenletessé) ha a mozgó m pont, a út hátrahagyása közben a surlódás következtében oly munka-mennyiséget veszit, mely az egy lökés által közlött eleven erővel egyenlő.

A munka pedig általában az erő szorozmánya az irányában történt eltolódással; tehát a surlódás által okozott munka-veszteség, a út lefutása közben:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sigma v \partial s = \sigma \int_{t_0}^{t_1} v^2 \partial t - \sigma v_0^2 \int_{t_0}^{t_1} e^{2\frac{\sigma}{m}(t_0 - t)} \partial t$$

(miután a lökés mindig m pont pályája *érintője* irányában hat.)

A jelölt műtéteket végezve, s az így eredő munkaveszteséget az egy lökésnek megfelelő eleven erővel egyenlőnek téve, lesz:

$$a\sigma \left[2 - \frac{a\sigma}{v_0 m} \right] = mc^2$$

$\left(\text{itt } e^{\frac{\sigma}{m}(t_0-t_1)}\right)$ helyébe már a fenn talált érték helyettesíttetett). Ebből következik:

$$v_{0m}\frac{m}{a\sigma}\left[2-\frac{mc^2}{a\sigma}\right]$$

mint a *legnagyobb sebesség*, melyet m pont elérhet; a következő lökést közvetlenül megelőző pillanatban e sebesség:

$$v_{1m}-v_{0m}-\frac{a\sigma}{m}\text{:ra}$$

szállott le. A következő pillanatban a lökés beállott s a sebességet ismét v_{0m}-ra emelte, ezután megint v_{1m}-ra száll le, hogy újra v_{0m}-re emelkedjék stb.

Látjuk tehát, hogy a mozgás állandósága mellett a sebesség nem egyenletes, hanem inkább, egy a úthossz lefutása közben mindig v_{0m}-tól $v_{0m}-\frac{a\sigma}{m}$-ig fogy.

Ha végre az időt akarjuk meghatározni, mely alatt ezen állandó mozgás közben a két lökés közötti a útköz futtatik meg, ez

$$e^{\frac{\sigma}{m}(t_0-t_{1m})}=1-\frac{a\sigma}{v_{0m}m}=1-\frac{a^2\sigma^2}{m^2}\,\frac{1}{2-\frac{mc^2}{a\sigma}}$$

által adatik.

Eddig csak egy egyetlen pont mozgásáról szólottunk; de az eddigi tárgyalások teljesen érvényesek egy véges kiterjedéssel biró súlyos testnek szilárd tengely körüli forgására is; itt csak a test összes tömegét m-et, a tengelytől R távolságnyira összpontosítottnak kell tekinteni, hol

$$R=\frac{\Sigma dmr^2}{\Sigma dm};$$

továbbá az említett készülék számára $a=\pi R$.

A megvizsgált mozgás egyenetlen volta leginkább tünik elő, midőn a benne előforduló sebességek legnagyobb és legkisebb értékeinek *viszonya* vétetik tekintetbe; ez:

$$\frac{v_{1m}}{v_{0m}}=\frac{v_{0m}-\frac{a\sigma}{m}}{v_{0m}}=1-\frac{a\sigma}{v_{0m}m}=\frac{\left(2-\frac{mc^2}{a\sigma}\right)-\frac{a^2\sigma^2}{m^2}}{2-\frac{mc^2}{a\sigma}}$$

Mennél közelebb e tört értéke az egyhez, annál egyenletesebb a mozgás; de ez teljes egyenletessé soha sem válhat, mig σ véges értékkel bir.

Tökéletesebb ilynemü Helmholtz-féle készüléknél a forgási tengely *hat* electromágnest visz, melyek tengelyei 60°-ot képeznek egymással, és melyeknek *hat* külső electromágnes felel meg. Képletünk ezen esetben is érvényes, csak hogy itt *a háromszor kisebb,* c^2 pedig *háromszor nagyobb;* tehát az eredő mozgás *kilenczszer egyenletesebb* mint a közönséges eszközök által létrehozott forgás.

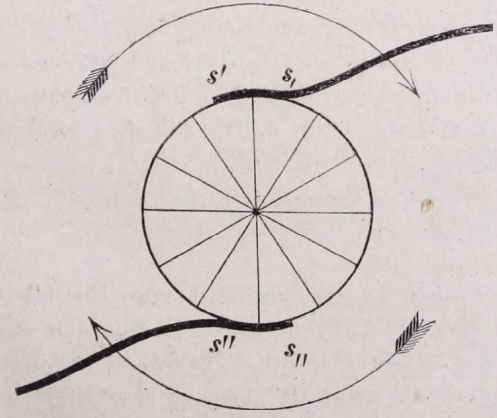
Daczára annak, hogy egy fél, (illetőleg egy hatod) körülforgásnak megfelelő idő (az állandó mozgásnál) ugyanaz, mindazonáltal *e szögek észrevehetőleg nem egyenletes szögsebességgel futtatnak meg.*

Lássuk, mily egyenletességet mutat a Gramme-gép tekercs-hengerének forgása, midőn rajta állandó galván áram megy keresztül.

Mindenekelőtt meg kell jegyeznünk, kogy e gépnél a folyam elvezetése vagy hozzávezetése nem történik tisztán *egy pontban érintő* sodronyvégek által, hanem inkább vékony fémsodronyokból álló nyalábok (seprők) segítségével, melyek egyszerre két vagy több fémsectort érintenek; ez által *a folyam* (akár be-, akár elvezettetik) *soha nem szenvedhet megszakítást;* tehát *a gyorsuló erők működése folytonos.*

Továbbá azon tekercsek, melyeknek *mindkét végét* (t. i. a megfelelő fémsectorokat) az egyes seprők érintik, önmagukban zárt vezetést képeznek, melyekben elágazás utján csak rendkivül csekély, valóban elenyésző, de állandó intensitású folyamok keletkeznek, melyeknek electrodynamikus hatását teljes jogosúltsággal állandónak lehet mondani.

A seprők pedig mindig úgy helyezhetők el, hogy az s'-től *s''*-ig, lletőleg $s_{,}$-től $s_{,,}$ig haladó áramok mindig *egyenlő számú* tekercseken



keresztül ömöljenek, (hogy t. i. midőn s'-et valamely fémsector elhagyja, azon pillanatban egy új sector érintse s''-t; hasonlókép $s_{,,}$ és $s_{,}$-re

nézve is); akkor pedig a két oldalon keresztül folyó áramok intensitása és megfelelő vezetőinek ellenállása teljesen egyenlő és állandó marad, mig a galván folyam, mely a gépet hajtja, állandóságát megtartja.

Csak electrodynamikus hatásuk a mellettük lévő magnetikus polusokra szenved egy kis, folytonos, igen rövid periodussal biró változást, mely azon időközben megy végbe, mialatt két, egymásra következő sectorok érintkezése a seprőkkel beáll.

Azonban e változás befolyása elenyésző csekély: először is mivel maga a hatás változása az egész, folytonos hatásnak csak igen kis részét képezi, azután pedig a változás periodusa rendkivül rövid időtartamú.

[Egy a m. k. egyetem physikai intézetében levő Gramme-féle gépnél a változás az egész hatásnak egy *ezredrészenél* kisebb volt, s annak periodusa körülbelül $\frac{1}{110}$ másodperczig tartott, midőn a gép *egy* Bunsen által hajtatott s körülbelül 3.5 körülforgást tett egy másodpercz alatt; a tekercsek száma 31 volt; a sebesség változása pedig e periodus folyamában az egész sebességnek egy milliomodrészét sem tette ki.]

Tehát az említett zavaró körülmény befolyása a henger forgásának egyenletességére csakugyan elenyésző csekély.

Megemlíthetjük továbbá még azt is, hogy a gép mágnese electromágnesek által is helyettesíthető s hogy *egy folyam elegendő ezen electromagneseket hatókká tenni és egyszersmind a henger tekercsein keresztül ömölvén, azt forgásba hozni.*

Ha a Gramme-féle dynamo-electrikus gép alapeszméje egy rotatiógép szerkesztésére használtatik fel, akkor ez a tekercs-hengernek oly forgást kölcsönöz, melynek egyenletessége különösen lassú, általában pedig minden forgási sebesség mellett a Helmholtz-féle gépet összehasonlíthatlanúl felülmúlja.

(Budapest, 1876. október 20.)

Egy bonyolódott timsó-kristályról. (Felolvastatott a »Természettudományi Társulat« 1876. deczember 13-án tartott szakülésén.)

A kalitimsó — mint ismeretes — igen egyszerü kristályokban szokott megjelenni, leggyakoribb alakja az oktaeder, ehez járúl olykor a hexaeder, mely annak csúcsait és a rhombos dodekaeder, mely éleit tompítja.

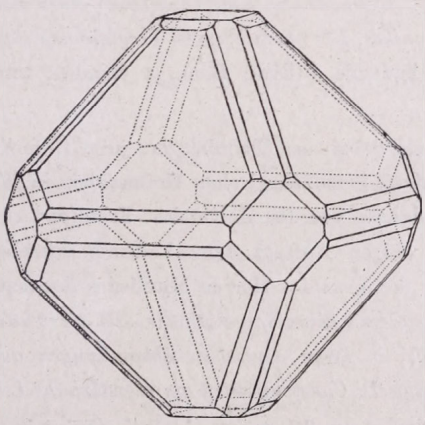
Ezt a legfölebb 3 alakból álló idomot találjuk az újabb munkákban,

mint pl. Rammelsberg »Kristallographische Chemie«-jében, úgyszintén Schrauf »Atlas«-ában; ezeken kivül más alakok a timsón nem észleltettek.

Annál érdekesebb azon körülmény, hogy ezen só átkristállizálásánál oly kristályokat nyertem, melyek lapokban annyira gazdagok, hogy egy jól kifejlődött kristályegyennél a tökéletes alakoknak lapszáma 74-re rúgna.

Mielőtt a complicáltabb kristályalakok megfejtéséről szólnék, elő fogom adni, miły módon állíttattak azok elő.

Dr. Wartha Vincze úr laboratoriumában a müegyetemen olajsavas timföldet állítottam elő, ehhez szükségem levén vegytiszta kalitimsóra, a kereskedésben előforduló kalitimsót a rátapadt tisztátlanságoktól megszabadítandó, átkristallizáltam, még pedig 150 gramm timsót $300^{cc.}$ destillált vizben gyengén melegítve feloldottam, az oldatot leszürtem és zárt helyre tettem; a kivált kristályok közül egynéhány magára vonta figyelmemet, ezeket Dr. Krenner József tanár úrnak bemutattam, kinek vezetése alatt azután a kristályokat a kir. József-müegyetem ásványtani szertárában megvizsgáltam. Ekkor azt találtam, hogy az oktaeder lapokon (mint a mellékelt ábrából látható) 6 — 6



lap fordul elő, melyek közül 3 váltakozó lap az oktaeder és rhomb-dodekaeder tehát 111 és 011 övében fekszik, a többi 3 pedig az oktaeder és hexaeder tehát 111 és 001 övébe esik. A goniométeren közelebb megvizsgálva találtam, hogy az előbbi 3 lapnak — mely helyzetéről itélve triakis-oktaeder — élszöge az oktaederrel 15° 46′ (számítás 15° 48′), a rhomb-dodekaederre 19° 27′ (szám. 19° 28′); ezen mérésekből kitünik, hogy ezen lapok csakugyan triakisoktaeder lapok, még pedig azon triakisoktaeder lapjai, melynél a lapoknak a tengelyekhez való viszonyuk 1 : 1 : 2, tehát Naumann jelzése szerint 2O, vagy Miller szerint 221. — A másik három lapnak, — mely az oktaeder és hexaeder övben fekszik és mely helyzetéről itélve deltoidhuszonnégyes — él-

szöge az oktaederrel 19° 32′ (szám. 19° 28′), a hexaederrel 35° 5′ (szám. 35° 16′). Ezen mérésekből szintén látható, hogy ezen 3 lap a deltoidhuszonnégyesnek lapja, még pedig azon deltoidhuszonnégyesé, melynél a lapoknak a tengelyhez való viszonyai 1 : 2 : 2, tehát Naumann szerint 202 vagy Miller jelzése szerint 211. Megjegyzendő, hogy az itt felsorolt értékek nem a valódi élszögek, hanem a pót- vagy kiegészitő szögek.

A mint látjuk, a kalitimsó complicáltabb kristályokban is fölléphet; hogy azonban minő körülmények azok, melyek befolyása alatt hasonló kristályok képződnek, azt ismételt kisérletek után sem voltam képes kipuhatolni.

Gross Lipót.

Egy múlt századi köregyenesítőnk. — A berlini akadémia múlt századi német kiadványaiban (Sammlung deutscher Abhandlungen 1790—1791. Anhang) egy magyar embernek is van egy mathematikai értekezése, a következő czímmel: *Beschreibung und Anwendung eines mathematischen Instruments für die Mechaniker, zur unmittelbaren Vergleichung der Circulbogen.* Von Paul Sipos. Az Akadémia titkára, Bode, a czímhez tett csillag alatt ímezt jegyzi meg:

Herr Sipos, ein gebohrner Sibenbürger, jetzt Hofmeister bey dem Sohn des Grafen von Teleki, Siebenbürgischen Hofkanzlers in Wien, ersuchte mich, als er vor einigen Jahren von der Universität Frankfurt zurück kam, und sich in Berlin aufhielt, obigen Aufsatz der Akademie vorzulegen. Nachdem dies geschehen, gingen die Vota der Herren Mitglieder der mathematischen Klasse dahin: *dass die Akademie diese Speculationen, als die Früchte eines trefflichen geometrischen Kopfs, in ihren deutschen Abhandlungen aufnehmen wolle, ohne jedoch dessen mechanische Constructionen als geometrische Lehrsätze zu betrachten.*

Az értekezést, mely 30 quart oldalból és 6 rajzlapon 15 ábrából áll, Sipos így kezdi:

Der Königl. Akademie habe ich hiemit die Ehre, ein, meines Wissens noch nicht bekanntes Instrument in Form eines Transporteurs, vorzulegen, wodurch, vermittelst einer leichten mechanischen Behandlung, Kreise oder Kreisbogen, entweder mit einander, oder mit einer geraden Linie in Vergleichung gebracht werden können. — Ich meyne hier keine Vergleichung der Circulbogen nach der Anzahl ihrer Grade, sondern nach ihrer Länge und eigentlichen Grösse und nenne daher dies in Fig. I. abgebildete Instrument *Isometer* oder *Gleichmesser*.

A Sipos-féle isometer csakugyan nem egyéb, mint egy sajátságos alko-

tású transporteur. Karima-vonala nem kör, mint a közönséges transporteurnél hanem egy csiga-vonal, melynek sarkegyenlete:

$$r = a \frac{\sin. \alpha}{\alpha}$$

hol a egy állandó hosszaság, r a transporteur kezdőpontjához húzott vezérsugár, az α pedig azon szöglet, mely az isometer széléhez hajlik.

E transporteur segedelmével Sipos valami 12, a kör egyenesitésére vonatkozó feladatot igen ügyesen old meg, s azután alkalmazza az általa isometrikusnak nevezett csigavonalat az ellipsis egyenesítésére, rectificatiójára.

Nevezetes, hogy a Sipos-féle csigavonal egyenlete tökéletesen ugyanaz, mint a homogén köriv tömegpontját meghatározó képlet. Érdekes az is, hogy ez a csigavonal nem megy a végtelenbe, (r-nek ugyanis a-nál nagyobb értéke nem lehet) valamint az, hogy az $r=o$ által jellemzett pontja a görbének végtelenül sokszoros pontja. A görbe graphikai előállítása különben nehézséggel nem jár.

Irt-e Sipos Pál ezenkivül még valami egyebet? (Sz. K.)

Egy kiküszöbölési föladatról, Azon egyenletrendszer megoldása, melyben $n-1$ egyenlet elsőfokú, egy pedig négyzetes, determinánsok segítségével végleges alakban előállítva található Baur egy értekezésében (Zeitschr. für Math. 14. Band); Combescure is tárgyalta e föladatot más módszerek segítségével a Borchardt-féle Journal 80-ik kötetében. Úgy hiszem, hogy mindemellett az itt közlendő módszer is igényelhet némi érdeket; a szükségelt végalakok itt lehető egyszerűek és teljesen készek; továbbá oly elvet rejtenek magukban, melyet talán magasabb eliminatió föladatokra is sikerül kiterjeszteni. — Legyen a tárgyalandó rendszer:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \varphi_3 x_3 + \ldots + \varphi_n x_n &= k_1 \\
a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n &= k_2 \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \ldots + a_{nn} x_n &= k_n
\end{aligned}$$

hol az a-k állandó mennyiségek, tehát az utolsó $n-1$ egyenlet elsőfokú, az elsőben pedig a φ-k az $x_1 \ldots x_n$ elsőfokú függvényei, tehát ez a másodfokú egyenlet. Képezzük ekkor az:

$$R = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \ldots\ldots, & \varphi_n \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots\ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

függvénydeterminánst. Ebben az i-edik oszlopot x_i-vel szorozva és hozzáadva

az 1-sö oszlop x_1-szeresét, a 2-ik oszlop x_2-szeresét sat., ép úgy mint az elsőfokú egyenlet-rendszernél, nyerjük, hogy:

$$Rx_i = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \ldots, & \varphi_{i-1}, & k_1, & \varphi_{i+1}, & \ldots, & \varphi_n \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{1,i-1}, & k_2, & a_{2,i+1}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{n,i-1}, & k_n & a_{n,i+1}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a mi, minthogy a jobb oldalon álló determináns mindenesetre az x-ek elsőfokú függvénye, így irható:

$$Rx_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + b_{i3}x_3 + \ldots + b_{in}x_n - l_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots n.)$$

vagy:

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + (b_{ii} - R)x_i + \ldots b_{in}x_n = l_i$$

Ebben az egyenletben az R-t nem mint az x-ek függvényét akarjuk tekinteni; ha meggondoljuk ugyanis, hogy az egyenletrendszer megoldása két gyökrendszert ád, látni azt is, hogy R ekkor két különböző értéket nyer. Ezeknek egyikét gondoljuk már most bevezetve az utoljára fölirt egyenletekbe. Akkor ezek közül pl. az első az eredeti rendszer vonalos alakjával együtt a következő *elsőfokú egyenletrendszert* adja az ismeretlenek meghatározására:

$$a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = k_2$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = k_n$$
$$(b_{11} - R)x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = l_1$$

a melyből minden ismeretlen ezen alakban:

$$\frac{p + qR}{m + nR}$$

kiszámítható, tehát két értéket nyer, ha R értéke ismeretes. Ezt pedig következőkép nyerjük. Kell ugyanis hogy az előbbi rendszerben nyert eredmények összhangzatban legyenek pl. a következő egyenlettel is:

$$b_{21}x_1 + (b_{22} - R)x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = l_2$$

de így $n+1$ egyenletünk van n ismeretlennel, mely csak akkor állhat fönn együtt, ha

$$\begin{vmatrix} a_{21}, \ldots\ldots\ldots, a_{2n}, k_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}, \ldots\ldots\ldots, a_{nn}, k_n \\ b_{11} - R, b_{12}, \ldots\ldots, b_{1n}, l_1 \\ b_{21}, b_{22} - R, \ldots, b_{2n}, l_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.)$$

a mi nem más, mint a kivánt *másodfokú egyenlet* R *számára.*

König Gyula.

Thermometercső hegyi kristályból. A legnagyobb gonddal és elővigyázattal készített üveg-thermométercső idővel megváltozik, hamis adatokat mutat. Szemben e körülménynyel Stein S., ki már 1875-ben a hegyi kristályt súlyok, hosszmértékek és gázcsapok előállítására ajánlotta, a »Berichte der deutschen chem. Gesellschaft« 19-dik számú f. é. füzetében jelenti, hogy sikerült neki hegyi kristályból a már említett tárgyakon kivül mérlegkarokat, osztályozott korongokat s végre még — a mi a legfontosabb — hőmérőket is szerkeszteni.

Az orvosok által bőr alatti injectiókra használt aczéltüket rendkivül finom fúrókészülékekkel szokták kifúrni. Efféle furót használnak most a kvarcz-thermometer csatornáinak kifúrására. Ha az megtörtént a cső nyilt végét, mely edényül szolgáland a higanynak, tágasabbra fúrják ki, és pedig minél tágasabbra, mert így több higanyt fogadhat be, s a készülék érzékenyebb lesz. Ennek az edénynek nyilásába kúpos kvarcz dugót köszörülnek be légmentesen, s a dugó kiálló végébe vaspeczket erősítenek. Ez a peczek arra való, hogy az edényt mágnes segítségével lehessen nyitni vagy zárni, akkor midőn a légszivattyú burája alatt higanynyal töltetik meg. Szabad levegőn e thermométer a légnyomás következtében zárva marad, a mit különben még egy külön e czélra beköszörült kvarcz-ék is biztosít. A hőmérő készítésére szolgáló kvarcz-pálcza úgy van kimetszve valamely ép kristályból, hogy se hosszában se széltében ne tágúljon. Változatlan és normál marad minden körülmények között. (W.)

Érzékeny lángok. A »Nature« XV. kötetében Ridout a következő, érdekes kisérletet közli. Ha 5 hüvelyk hosszú és $^5/_8$ hüxelyk átmérőjü üveg- vagy fémcső egyik végébe átfúrt parafa-dugót helyezünk és ez utóbbin át vékony nyilású üvegcsőt akképen vezetünk be, hogy a másik kiálló vége a gázvezetékkel függjön össze, akkor a finom cső végén kiömlő gáz meggyújtva nyugodtan ég, s a hang iránt rendkivül érzékeny lángot ad.

A belső, vékony nyilású cső állásától függ, vajjon a láng a zörej vagy a tiszta hangok iránt érzékenyebb-e. Ridout úr azt találta, hogy ha a nagy nyilás felett égő gázláng magassága $4^1/_2$ h. volt, a belső vékony csövet ide-oda tologatva, könnyen lehetett oly helyzetet találni, melyben a láng tiszta hangok iránt rendkivül érzékenynyé vált. Némely hangnál a láng két részre oszlik, s e tünemény addig mutatkozik, mig a hang szól. Az ily láng még 30—40 láb távolságból is megérzi a legkisebb csattanást vagy más egyéb zörejt. (W.)

IRODALOM.

Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung van R. Dedekind von H. Weber. Leipzig. 1876. B. G. Teubner (VIII., 426 l.)

Talán az összes német egyetemeken egy tanszéknek sincs oly fényes története, mint annak, melyet Gauss, Lejeune-Dirichlet, Riemann és Clebsch, foglalt el Göttingában. A dicsőség hagyománya füződött már s helyhez, mely a német mathemathikai iskola megalapítója, a »princeps mathematicorum« után, még három elsőrangú képviselőre tudott szert tenni; csak egy pár éve, hogy e dicsőség elmúlt; Clebsch kora halála óta két buzgóbb fiatal erő következett; mindkettő azonban maga is visszautasítaná a párhuzamot nagy tanár-elődjeikkel. A három közül csak Riemann neve van személyes kapcsolatban Gauss-éval; tanítványa volt, habár ő is csak a szó közönséges tág értelmében; szorosabb viszony, a mennyire tudjuk nem kötötte tanárához. Gauss előadásaiban a tudomány alkalmazott részeire szorítkozott; és így a fiatal Riemann (szül. 1826. szept. 17.) egy évi tartózkodás után a göttingai egyetemet a berlinivel cserélte föl. 47-től 49-ig maradt ott, hol Jacobi, Steiner és Dirichlet előadásai bő alkalmat nyújtottak a mathematikai tudományok legkülönbözőbb fejezeteivel megismerkedni. 49-ben husvétkor visszatért Göttingába, itt még philosophiával és physikával foglalkozott, míg 1851. november havában végre elkészíté tudori értekezését, mely, úgy hiszem, a Gauss-féle »Demonstratio nova etc.« című művel együtt az egyetlen, a tudományos productió ezen elsőszülöttjei közt, mely tudományunk classicus művei közé tartozik. Ismét 3 év telt el, mig Riemann a göttingai egyetemen mint magántanár habilitálhatta magát. — Kezdetben, úgy látszik, az előadások sok bajt okoztak neki. Még 56-ban a következő sorokat intézi bátyjához: »Előadásaimmal, t. i. a jelentkezők számával meg vagyok elégedve, különösen tekintetbe véve azt, hogy kevés új tanuló érkezett. Mathematikus nincs is köztük és így Dedekind és Westphal magánelőadásai nem is kerültek össze. Az első négy előadáson a hallgatók száma először 3, azután 5, a két utolsónál pedig 5 volt; de ezek közül egy talán csak hospitáns volt. Nagyon szeretem, hogy a hallgatók közül egy pár az első semesterekből való, nem pedig csak a hatodik és még későbbiből; ebben jelét látom annak, hogy előadásaim könnyebben érthetők lesznek. Mindamellett még nem állíthatom, hogy előadásom már biztosítva volna; mert én nálam még senkisem jelentkezett és így még mindig lehetséges, hogy a hallgató urak ott hagynak engem.« — — 57-ben lett végre rendkivüli tanár és két évvel később — Dirichlet halála után — rendes. Nem soká élvezhette új állását; már 62-ben fejlődő tüdőbaja

miatt Olaszországba kellett mennie, és midőn 63-ban Göttingába jött, két hónapi ottlét után, a gyorsan romboló betegség csakhamar visszatérni kényszeríté. Az 65/66-iki telet ujból Göttingában töltötte, de midőn a tavasz vége felé a Lago Maggiore partjaihoz ment, ott már a halál várta. A Selasca mellett fekvő Villa Pisoni-ban halt meg 1866. julius 20-ikán.

Rövid és csendes életpálya, mely mindössze 40 évet ölel át; de erélyes és hatásos tudományos munkálkodás ideje. Riemann nem is volt az az ember, ki sokat szeretett volna közzétenni. Összes munkái egy kötetet tesznek ki, és ennek is 426 lapjából csak 213 a szerző által kiadva; a többi halála után jelent meg; részben már a göttingai akadémia értekezéseiben, részben először e kötetben. — De e kötet egész könyvtárt képvisel az ebben lerakott eszmék gazdagsága és termékenysége által. Kevés ily »összes munkák« gyüjteménye van, mely úgy mint ez elejétől végig minden egyes lapon a teremtő, az alapvető tudomány bélyegét viselné.

Az egész gyüjtemény három részre oszlik, az első rész a Riemann maga által kiadott értekezéseket tartalmazza, a második a halála után eddig megjelenteket, a harmadik végre azokat, melyek e kötetben látnak először napvilágot.

Az első részbe tartoznak mindenekelőtt a függvénytani dolgozatok, ama merész fölfogású vizsgálatok, melyek egymagukban Riemann nevét halhatatlanná teszik; az ily ismertetés föladatánál kezdjük csak sajnálni a mathematika azon sajátságát, hogy eredményeit és módszereit a népszerű jellemzéshez nem lehet hozzáférhetőkké tenni! Az eredmények tudományos becséhez és messzevágó jelentőségéhez képest mily csekély az a kör, mely azt megismeri és élvezi. Ezen értekezések:

»Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, Inauguraldissertation.« — »Theorie der Abelschen Functionen.« — »Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen.« — »Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe darstellbaren Functionen.«

E részbe tartoznak azután több kisebb dolgozaton kivül még a következő értekezések az elméleti physika köréből, melyek azonban ép úgy mint az előbbiek, nem rövid kivonatolás, hanem csak alapos tanulmányozás tárgyai lehetnek.

»Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe.« — »Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen endlicher Schwingungsweite.« — »Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoids.«

A második rész tartalmából első sorban a következő két értekezés lesz kiemelendő.

»Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.«

»Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.«

Mindkettő a tudomány alapkérdéseit tárgyalja, mindkettő újsága által meglepő gondolatmenetben véghetetlen tért nyit a tudományos törekvésnek, oly irányban, melyet még előbb megteremteni kellett. E részben foglaltatik továbbá a mathematikai módszerek következetes és elegáns keresztülvitelének valódi mintaképe az

»Ueber die Fläche von kleinstem Inhalt bei gegebener Begrenzung« czimű értekezés; itt továbbá a »Mechanik des Ohres« és több más.

Az e kötetben először megjelent munkálatok közül két ifjukori kisérleten kivül legérdekesebb azon vázlat, mely a párizsi akadémia által kitüzött a melegterjedés elmélet köréből való pályakérdés megoldását adja. Riemann ezt azonban nem dolgozhatta ki; töredékes alakja miatt — a bebizonyitások teljesen hiányoznak — az akadémia a pályadijt ki nem adni határozta. A potential-elmélet körébe vágó több értekezés és az Abel-féle függvények elméletét fölvilágositó több előadási részlet zárja be a gazdag sorozatot.

A függelék bölcsészeti tartalmú töredékeket ad, melyek, ha talán épen a szorosan vett szakembert kevésbé érdeklik, bizonyára figyelemre méltók. Még a tudomány psychologiája szempontjából is, mert újból bizonyitják, hogy a tisztán bölcsészeti német speculatio mily nagy befolyással volt Riemann minden dolgozatára, még azokra is, melyek szakmájuknál fogva, úgy látszik, az ily befolyást kizárják. (K. Gy.)

Lejeune-Dirichlet, Gusztáv, »Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte.« Herausgegeben von Dr. F. Grube. Leipzig, B. G. Teubner, 1876. Nagy 8°; 183 lap, 25 ábráva a szövegben. — Ára: 4 márka.

Tehát elvégre megjelentek Dirichlet előadásai a potentiál-elméletről! Tizenhét éve, már, hogy kiadásukhoz készülnek! Alig borult a hant 1859 május elején a göttingai nagy mathematikusnak, Gauss méltó utódának sirjára, már junius 1-én azt irá Borchardt az általa szerkesztett »Journal für die reine und angewandte Mathematik« 57-ik kötetében, hogy Dirichlet előadásai »a távolság négyzetével visszás arányban működő erőkről«, gondos jegyzetek után szerkesztve és kiadva, *a potentiál-elméletnek legjobb tankönyvét fogják képezni.* Ugyane véleményt fejezte ki Heine, midőn 1861-ben a »Handbuch der Kugelfunctionen« czimű munkájában Borchardt eme nyilatkozatát ismétli. 1863 végén adta ki Dedekind, a mester egykori tanítványa s utóbb

barátja a Dirichlet-féle előadások közül az első kötetet »Vorlesungen über Zahlentheorie« czím alatt. Ennek előszavában Dedekind már kijelenti, hogy szándéka nemsokára egy második, kevésbé terjedelmes kötetet is kibocsátani, mely Dirichlet előadásait a távolság négyzetével visszásan működő erőkről fogja magában foglalni. Azonban év év után múlt, és Dedekind nem váltá be maiglan sem igéretét.

Végre a fiatalabb nemzedékből kellett valakinek vállalkozni a sokat igért és várva-várt előadások kidolgozására. Grube úr már nem hallgathatta Dirichlet előadásait: más füzetei után volt kénytelen dolgozni. Mint az előszóban mondja, elvül tüzte ki, az előadásokat lehető híven, minden pótlás, rövidítés vagy módosítás nélkül visszaadni s netáni észrevételeit vagy idézeteit, melyek szükségeseknek vagy kivánatosaknak látszottak, függelékképen közölni.

Maguk az előadások épen 10 nyomtatott ívre terjednek; Grube úr jegyzetei pedig, a kötet végén kisebb betükkel nyomatva, mintegy $1\,^1/_2$ ívnyi tért foglalnak el. Az előadások tartalma 7 fejezetre van osztva.

Az *első* fejezet a potentiál fogalmával és jellemző tulajdonságaival foglalkozik. Itt találjnk a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k,$$

Poisson-féle egyenlet szigorú bebizonyítását; és itt a Green-féle tétel tárgyalását. — A *második* fejezet a homogén ellipsoid vonzásával és potentiáljával foglalkozik. Érdekes benne a históriai bevezetés; maga a kérdés fájdalom igen hézagosan van tárgyalva. — A *harmadik* fejezet a felületi potentiálnak és a Laplace-féle tételnek

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+o} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-o} = -4\pi k$$

van szentelve. E fejezet históriai bevezetése, mint Grube úr a függelékben kimutatja, tévedésen alapszik. — A *negyedik* fejezet »Potentiál és gömbfüggvény« czímet visel. Ebben kifejti a potentiált a vezérsugár növekedő vagy csökkenő hatványai szerint értelmezi a gömbfüggvényt és megadja nevezetesebb tulajdonságait. — Az *ötödik*ben az elméletet a villanyosság tanának némely speciális feladatára alkalmazza. A *hatodik*ban általános tételeket és feladatokat fejteget, melyek a tömeggel bevont felületre állanak. — És végre a *hetedik* a magnetismusnak van szentelve.

Azt fölösleges is mondanunk, hogy a tárgyalás világos és szabatos, a módszer pedig tökéletesen szigorú. Hisz Dirichlet minden értekezését, minden publicatióját e tulajdonságok jellemzik legkiválóképen, elannyira, hegy ha szokásban volna, a mathematikusokat is, mint a fejedelmeket, kiváló tulajdon-

ságaik után melléknévvel megjelölni, Dirichlet méltán megérdemelné, mint talán senki más, a »szigoru« nevet.

Végezetre mondjuk el, minő álláspontot foglalnak el az időközben megjelent potentiál-elméletek Dirichlet előadásaival szemben. Tudnunk kell, hogy a Green és Gauss által megállapított elméletet ő vitte legelőször a kathedrára, ő tartott német egyetemen először előadást a potentiál-elméletről, valamint a partiál differentiál-egyenletekről is. Ő volt az elméletnek első rendszerbe foglalója. Előadási füzetei szerte szivárogtak a többi német egyetemekre is, és ma már alig van egyetem, melynek programmjában a potentiál-elmélet rendes helyet ne foglalna. Dirichlet előadásai befolyással voltak minden német tanárra és iróra, ki potentiál-elmélettel részletesen foglalkozott.

Ily körülmények között egyáltalában nem lehetne tehát csodálkoznunk, ha az időközben megjelent »önálló« munkák a Dirichlet-féle előadások közzétételét anachronismus színében tüntetnék elő. Tizenhét év a jelen század tudományában nagy idő! Megeshetett, hogy a mi 1860-ban a potentiál-elmélet legjobb tankönyvét képezte volna, ma már csak mint igen becses históriai emlék birhat érdekkel.

És csakugyan, ha a Grube úrtól kiadott »előadásokat« a mai *értekezés-irodalom* szinvonaláról akarnók megitélni, úgy nem egy tekintetben jelentékeny különbségeket lehetne constatálni amazok rovására. Ez az összehasonlítás azonban igen méltánytalan, sőt teljesen igazságtalan lenne. A kérdés csak az lehet, minő viszonyban állanak a most megjelent előadások a többi potentiál-elméletekhez, melyek szintúgy mint ez különálló munkaképen láttak napvilágot.

Rendszeres különálló munkákat a potentiál-elméletről tudtunkkal csak a német irodalam mutathat fel. Clausius 1859-ben, mindjárt Dirichlet halála után, adott ki egy füzetet adalékképen a mathematikai physikához »Die Potentialfunctionen und das Potentiál« czím alatt. melyből 1867-ben második bővített kiadás jelent meg. A korán elhunyt Beer, bonni rendkivüli tanártól barátja és egykori tanára Plücker. többek között, egy potentiál-elméletet is adott ki kiváló alkalmazással az elektrostatikára. Schlömilch »Der Attractionscalcül« czímű régiebb monographiájának, (1851), bár tárgyára nézve idevágó, semmi köze a potentiál-elmélethez. »Schwere, Elektricität und Magnetismus« czím alatt Riemann előadásait Hattendorf dolgozta fel és adta ki a múlt esztendőben. (Ismertetése a »Műegy. Lapok« 2-ik füzetében.)

Ha már most Dirichlet előadásait az imént említett munkákkal hasonlítjuk össze — már pedig csak ezekkel hasonlíthatjuk össze igazságosan — csakhamar meggyőződünk, hogy Grube-Dirichlet-vel az idézettek közül csupán Hattendorf-Riemann versenyezhet. Riemann utóda volt Dirichlet-nek a göttin-

gai tanszéken, geniális utódja a mélyen gondolkozó elődnek. Riemann örökségképen vette át Dirichlettől a potentiál-elméletről tartott előadásokat. Ily utódtól méltán várható, hogy az örökséget nem csak megőrizte, hanem tetemesen gyarapitotta is. Úgy is van.

Ha valaki tőlünk azt kérdezné, minő munkából tanulmányozza a potentiál-elméletet. azt válaszolnók neki: Dirichletéből, aztán Riemannéból,

(Sz. K.)

MEGFEJTETT FELADATOK.

19. Adva van valamely hatványsor,: $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ értéke: $f(x)$; mikép lehet az f függvény segítségével kifejezni azokat a sorokat, melyek az eredetiből keletkeznek, ha ennek csak minden p-dik tagját vesszük, tehát a következő alakban foglaltakat: $a_ix^i+a_{i+p}x^{i+p}+a_{i+2p}x^{i+2p}+\ldots$, hol i tetszőleges. (König.)

Megoldás Farkas Gyula, főgymnasiumi tanártól.

A probléma megoldását a következő képlet szolgáltatja:

$$a_ix^i+a_{i+p}x^{i+p}+a_{i+2p}x^{i+2p}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{p}\sum_{r=1,2,\ldots,p}\left[e^{(p-i)\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}\cdot r}f(x.e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}\cdot r})\right]$$

a hol e a természetes logarithmusok alapszáma. Mert:

$$e^{(p-i)\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}\cdot r}f(x.e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}\cdot r})=$$
$$e^{(p-i)\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}\cdot r}(a_0+a_1xe^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}\cdot r}+a_2x^2e^{2\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}\cdot r}+$$
$$+a_3x^3e^{3\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}\cdot r}+\ldots)$$

Ha ezen egyenlők másodikában r helyébe egymásután $1,2,\ldots,p$ lép akkor nyilván a fentebbi Σ értéke áll elő, s így nem nehéz belátni, hogy ennek $(k+1)$-edik tagja ez:

$$a_kx^k\sum_{r=1,2,\ldots,p}e^{(p-i+k)\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}\cdot r}=$$
$$a_kx^k\left(e^{(p-i+k)\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}}-e^{(p-i+k)\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}\cdot(p+1)}\right):\left(1-e^{(p-i+k)\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}}\right)$$

Itt a számláló mindig 0, a nevező pedig csak akkor, ha $k=i+np$,

a hol $n=0, 1, 2, \ldots$ Utóbbi esetben azonban az $a_k x^k$ melletti Σ minden tagja 1 értékével bírván, az összeg p. Ennélfogva a jelzett művelet folytán, $f(x)$-nek mindazon tagjai kiesnek, a melyek indexe nem $i+np$, a többiek pedig p-vel lesznek sokszorozva, és így a fent irt egyenlet csakugyan helyes.

E föladat megfejtését beküldötte még *Dr. Schrader Károly* úr.

---

20. Az A tömegpont körpályán állandó sebességgel mozog. Minő mozgást végez e tömegpont vonzása következtében a B tömegpont a körpálya középpontjának közelében, föltéve hogy ott az A által kifejtett vonzó erőt állandónak tekintjük. (B. Eötvös Loránd.)

Megoldás Czogler Alajos, szegedi főreáliskolai tanártól.

A derékszögü tengelyrendszert fektessük úgy, hogy a kezdőpont a kör középpontjába essék, az Y tengely pedig a kört ott messe, a hol az A pont a $t=0$ pillanatban van. Legyen a kör sugara r, úgy az állandó c sebességgel mozgó A pont coordinátái a $t=0$ időben lesznek:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = r$$

a tetszőleges t időben pedig:

$$x = r \sin\frac{ct}{r}, \quad y = r \cos\frac{ct}{r}.$$

ugyanennek sebességi componensei ugyanekkor:

$$\frac{dx}{dt} = c \cos\frac{ct}{r}, \quad \frac{dy}{dt} = -c \sin\frac{ct}{r} \qquad (1.$$

Jelöljük a B tömegpont coordinátáit a t pillanatban x_1 és y_1-gyel, úgy e pont mozgási egyenletei lesznek:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = P\cos\varphi, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = P\sin\varphi \qquad (2.$$

hol P az A által kifejtett vonzó erő a tömegegységre; φ pedig a P-nek irányszöge az X tengelylyel.

A (2.) egyenletekből meghatározhatjuk a B pont helyét és sebességét minden pillanatra, föltéve, hogy helye és sebessége egy pillánatban ismeretes. A $t=0$ pillanatban legyen:

$$x_1 = \alpha_1, \quad y_1 = \beta_1$$

sebességi componensei ugyanekkor legyenek egyenlők a semmivel.

Az idomból, melyet az olvasó szives lesz megszerkeszteni, látható, hogy

$$c\cos\varphi = \frac{dy}{dt}, \quad c\sin\varphi = \frac{dx}{dt}$$

és így:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{P}{c}\cdot\frac{dy}{dt} = -P\sin\frac{ct}{r},$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{P}{c}\cdot\frac{dx}{dt} = P\cos\frac{ct}{r}.$$

Egészelve és tekintetbe véve, hogy a B pont az időszámítás kezdetén nyugvásban van:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{Pr}{c}\left(\cos\frac{ct}{r} - 1\right)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{Pr}{c}\sin\frac{ct}{r} \qquad (3.$$

s ebből az eredő sebesség:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2} = 2\frac{Pr}{c}\sin\frac{ct}{2r}$$

vagy ha A keringési idejét (t. i. $\frac{2\pi r}{c}$-t) T-vel jelöljük:

$$v = 2\frac{Pr}{c}\sin\frac{\pi t}{T}$$

A (3.) egyenletek még egyszer egészelve:

$$x_1 - \alpha = -\frac{Pr^2}{c^2}\left(\frac{c}{r}t - \sin\frac{ct}{r}\right).$$

$$y_1 - \beta = \frac{Pr^2}{c^2}\left(1 - \cos\frac{ct}{r}\right).$$

vagy, ha még $\frac{Pr^2}{c^2} = R$ tétetik:

$$x_1 - \alpha = -R\left(\frac{2\pi t}{T} - \sin\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$y_1 - \beta = R\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{T}\right) \qquad (5.$$

A (4. és (5. alatti egyenletekből látjuk, hogy a B pont *cycloison periodikus sebességgel* mozog. Midőn $t=T$, $x=-2\pi R+\alpha$, $y=\beta$ és $v=0$; mig tehát az A pont a kört egyszer körülfutja, addig a B pont a cyclois egy ágát futja be; v a legnagyobb értékét $t=(2n+1)\frac{T}{2}$ időkben éri el, mikor is

$$v_{max.} = 2\frac{Pr}{m_1 c}.$$

Abban a különös esetben, midőn a B pontnak az x tengely irányában kezdeti sebessége van, melynek nagysága v legnagyobb értékének felét teszi, egyenleteink így alakulnak:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{Pr}{c}\cos\frac{ct}{r}.$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{Pr}{c}\sin\frac{ct}{r}.$$

az eredő sebessé: $v = \frac{Pr}{c}$, vagyis B sebessége a mozgás közben állandó marad; továbbá

$$x_1 - \alpha = R\sin\frac{ct}{r},$$

$$y_1 - (\beta + R) = -R\cos\frac{ct}{r};$$

A pálya egyenlete:

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - [\beta + R])^2 = R^2$$

tehát ez esetben B is körben mozog. Továbbá könnyen belátható, hogy

$$\frac{R}{r} = \frac{v}{c},$$

s azon idő τ, mely alatt B pont pályáját egyszer körülfutja, egyenlő az A pont keringési idejével, mert

$$\tau = \frac{2\pi R}{c} = \frac{2\pi r}{c} = T.$$

E föladat megfejtését beküldötte még *Dr. Schrader Károly* úr.

---

23. Vezettessék le elemi úton a physikai inga szögsebességének legnagyobb értékére szolgáló képlet, t. i,:

$$\frac{w_m^2}{2} = \frac{Mg \cdot s}{\Sigma m r^2}\sin^2\varepsilon$$

hol w_m a keresett szögsebesség, M az inga egész tömege, m az inga valamely pontjának tömege, r ugyanannak távola a forgástengelytől, s az inga tömegközéppontjának távola ugyanattól, ε pedig az inga középvonalának — a tömeg-középponttól a forgás-tengelyre bocsátott merőlegesnek — legnagyobb kihajlása a függélyestől. (Farkas Gyula.)

Megoldása Névtelentől.

Az m pontból az inga forgás-tengelyére bocsátott merőleges képezzen, az inga valamely közbenső állásában, a forgástengelyen átfektetett függőleges sikkal α szögletet, s e szöglet legnagyobb értéke, az t. i. mely az inga legszélső állásának felel meg, jelöltessék α_m-mel, s legyen a mondott közbenső állásban az m pont sebessége v, úgy az eleven erő elvénél fogva leszen:

$$\frac{mv^2}{2} = mgr(\cos.\alpha - \cos.\alpha_m)$$

vaoy pedig, ha az $\alpha_m - \alpha$ szögletet röviden φ-vel jelöljük

$$\frac{mv^2}{2} = mgr[\cos(\alpha_m - \varphi) - \cos\alpha_m]$$

és innen:

$$\frac{mv^2}{2} = mgr[\sin\varphi \sin\alpha_m - (1-\cos\varphi)\cos\alpha_m]$$

Ugyanily egyenlet fog állani a test minden pontjára. Összeadás útján kapjuk tehát:

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = \Sigma(mgr \sin\varphi \sin\alpha_m) - \Sigma[mgr(1-\cos\varphi)\cos\alpha_m]$$

Azonban g és az inga odább fordulásának szöge, φ, valamennyi pontra közös, s mint ilyen a Σ jel elé tehető:

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = g\sin\varphi\ \Sigma(mr\sin\alpha_m - g(i - \cos\varphi)\ \Sigma(mr\cos\alpha_m)$$

vagy még:

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = g\Sigma(mr\cos\alpha_m)\left[\sin\varphi.\frac{\Sigma mr\sin\alpha_m}{\Sigma mr\cos\alpha_m} + \cos\varphi - 1\right]$$

Tétessék:

$$\frac{\Sigma mr\sin\alpha_m}{\Sigma mg\cos\alpha_m} = \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi}$$

hol ψ egyelőre csak egy segédszöget jelentsen, úgy:

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = g\ \Sigma(mr\cos\alpha)\left[\frac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos\psi} - 1\right].$$

Jelentse w a minden pontra közös szögsebességet, úgy:

$$v = rw$$

és

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = \frac{w^2}{2}\Sigma mr^2$$

tehát:

$$\frac{w^2}{2} = g\frac{\Sigma(mr\cos\alpha_m)}{\Sigma mr^2}\left[\frac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos\psi} - 1\right].$$

Kérdezzük már most, φ-nek melyik értékére leszen w maximum? Nyilvánvaló akkor, midőn $\varphi=\psi$, mert a $\cos(\varphi-\psi)$ ebben az esetben a lehető legnagyobb, és így:

$$\frac{w_m^2}{2} = g\frac{\Sigma(mr\cos\alpha_m)}{\Sigma mr^2}\left[\frac{1}{\cos\psi} - 1\right].$$

Lássuk mit jelent voltaképen a ψ segédszög, melyet az imént bevezettünk. A föntebb adott értelmezés szerint, α_m jelenti a tetszőleges m pont legnagyob kihajlási szögét a tengelyen át fektetett függélyes síktől számítva, következésképp:

$$r \sin\alpha_m$$

az m pontnak legnagyobb vizszintes kitérése. A tömeg-középpont fogalmából következik tehát, hogy

$$\Sigma(mr \sin\alpha_m)$$

a tömeg-középpont legnagyobb vizszintes kitérése megszorozva az inga összes tömegével. Ez pedig, a feladatban foglalt jelölésekkel élve, annyi mint $Ms \sin\varepsilon$. És így:

$$\Sigma(mr \sin\alpha_m) = Ms \sin\varepsilon.$$

Ugyanekként elmélkedve, kitünik, hogy

$$r \cos\alpha_m$$

az m pont mélysége a tengelyen át fektetett vizszintes sík alatt, az inga legszélsőbb helyzetében; tehát

$$\Sigma(mr \cos\alpha_m) = Ms \,.\, \cos\varepsilon$$

vagyis a ψ segédszög nem egyéb, mint az inga középvonalának legnagyobb kihajlása a függőleges siktól. Ezeket tekintetbe véve, leszen:

$$\frac{w_m^2}{2} = \frac{Mg \,.\, s}{\Sigma mr^2}[1 - \cos\varepsilon].$$

q. e. d.

FÖLADATOK.

25. Az m tömegü anyagi pont az X tengely irányában valahol és valamikor rezgő mozgást követ. Hány adat szükséges arra, hogy ez a mozgás minden egyéb, az X tengely irányában egyebütt és egyébkor végbemenő egyszerü rezgő mozgástól teljesen meg legyen különböztetve. Más szóval, az X tengely irányában végbemenő egyszerü rezgő mozgásnak hány állapotjelzője van? s melyek lehetnek azok? (Szily.)

26. Az m tömegü anyagi pont az X tengely irányában egyszerü rezgő mozgást követ, melynek periodusa i. Mennyi erélyt kell vele közölni (elevenerő és végzett munka alakjában) az i idő elfolyása alatt, hogy az állapotjelzők egyenletes gyarapodással növekedve, ezen i idő alatt egy végtelen kis növekményre tegyenek szert. (Szily.)

Budapest, 1877. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

II. kötet. **1877.** 13. füzet.

A KÚPSZELETEN FEKVŐ HAT PONT ÉS A HEXAGRAMMUM MYSTICUM TÉTELE.*)

Scholtz Ágoston, budapesti ev. gymnáziumi igazgatótól.

1. Hat pont: *123456*, melyeknek homogén összrendezői: $x_i\ y_i\ z_i$ $(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$, ugyanazon kúpszeleten fekszik, ha

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & z_1x_1 & x_1y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & z_2x_2 & x_2y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3z_3 & z_3x_3 & x_3y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4z_4 & z_4x_4 & x_4y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5z_5 & z_5x_5 & x_5y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6z_6 & z_6x_6 & x_6y_6 \end{vmatrix} \qquad 1.)$$

determináns megsemmisül. [1])

Másrészről a Pascal-féle hexagrammum mysticum tétele [2]) szerint a kúpszelet hat pontja olyan hatszöget képez, melyben az átellenes oldalak metszéspontjai ugyanazon egyenesben fekszenek. Tudva van [3]), hogy e hat pont hatvan különböző hatszöget alkot. E hatszögek

*) Bemutattatott a m. tud. Akadémia 1877. február 5-ikén tartott ülésén.

[1]) E determináns származására nézve lásd a következő értekezést: »A kúpszeleten fekvő hat pont stb. Hunyady Jenőtől.« Értekezések a mathematikai tudományok köréből. Kiadja a m. tud. Akadémia. IV. köt. VI. szám. 1876.

[2]) E tételre vonatkozólag Poncelet (»Traité des prop. proj. des fig.« című művében I. köt. 105. lapon) ezeket mondja: »cette propriété .. a été énoncée, pour la première fois, par Pascal, dans son *Essai sur les Coniques.*« — Ugyanezt a címet adja az értekezésnek Steiner (»Syst. Entw. d. Abhängigkeit geom. Gestalten v. einander.« 150. lapon). — Chasles szerint *Essai pour les Coniques* az értekezés címe. Lásd Hunyady Jenő említett értekezését 2. l., 6) alatti jegyzet.

[3]) Steiner a Gergonne-féle Ann. d. Mathématiques XVIII. k. vagy »Jacob Steiner's Vorl. über synth. Geometrie. Zweiter Theil. Bearbeitet v. Schröter.« Az utolsó mű 133. lapján föl van sorolva a 60 hatszög.

egyike legyen *iklmnp* (ha *iklmnp* az *123456* számok bármely permutatiója), melyben az átellenes oldalak:

ik és *mn*
lm és *pi*
np és *kl*.

Ezen egyenesek homogén összrendezői:

$$\xi_{ik}\ \eta_{ik}\ \zeta_{ik} \quad \text{és} \quad \xi_{mn}\ \eta_{mn}\ \zeta_{mn}$$
$$\xi_{lm}\ \eta_{lm}\ \zeta_{lm} \quad \text{és} \quad \xi_{pi}\ \eta_{pi}\ \zeta_{pi}$$
$$\xi_{np}\ \eta_{np}\ \zeta_{np} \quad \text{és} \quad \xi_{kl}\ \eta_{kl}\ \zeta_{kl}$$

hol

$$\xi_{ik} = y_i z_k - y_k z_i, \quad \eta_{ik} = z_i x_k - z_k x_i, \quad \zeta_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$

stb. és az átellenes oldalok metszéspontjainak homogén összrendezői ime:

$$\eta_{ik}\zeta_{mn} - \eta_{mn}\zeta_{ik} \quad \zeta_{ik}\xi_{mn} - \zeta_{mn}\xi_{ik} \quad \xi_{ik}\eta_{mn} - \xi_{mn}\eta_{ik}$$
$$\eta_{lm}\zeta_{pi} - \eta_{pi}\zeta_{lm} \quad \zeta_{lm}\xi_{pi} - \zeta_{pi}\xi_{lm} \quad \xi_{lm}\eta_{pi} - \xi_{pi}\eta_{lm}$$
$$\eta_{np}\zeta_{kl} - \eta_{kl}\zeta_{np} \quad \zeta_{np}\xi_{kl} - \zeta_{kl}\xi_{np} \quad \xi_{np}\eta_{kl} - \xi_{kl}\eta_{np}$$

A Pascal-féle tétel szerint e pontok ugyanazon egyenesben fekszenek, a mi algebrai nyelven annyit tesz, hogy

$$\begin{vmatrix} \eta_{ik}\zeta_{mn} - \eta_{mn}\zeta_{ik} & \zeta_{ik}\xi_{mn} - \zeta_{mn}\xi_{ik} & \xi_{ik}\eta_{mn} - \xi_{mn}\eta_{ik} \\ \eta_{lm}\zeta_{pi} - \eta_{pi}\zeta_{lm} & \zeta_{lm}\xi_{pi} - \zeta_{pi}\xi_{lm} & \xi_{lm}\eta_{pi} - \xi_{pi}\eta_{lm} \\ \eta_{np}\zeta_{kl} - \eta_{kl}\zeta_{np} & \zeta_{np}\xi_{kl} - \zeta_{kl}\xi_{np} & \xi_{np}\eta_{kl} - \xi_{kl}\eta_{np} \end{vmatrix} \qquad 2.)$$

determináns megsemmisül.

Az előadottakból látjuk, hogy az 1.) és 2.) alatti determinánsok megsemmisülése analytikai föltételét fejezi ki ugyanannak a mértani ténynek: hogy az *123456* pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek. Ebből következik, hogy az említett determinánsok között bizonyos összefüggésnek kell fennállania. A jelen sorok feladata ezt az összefüggést kimutatni.

Fejtegetésünk eredménye a következő egyenlet lesz:

$$\varepsilon . S = \Delta_{iklmnp}. \qquad 3.)$$

Itt S az 1.) és Δ_{iklmnp} a 2.) alatti determinánst jelenti, ε pedig az igenleges vagy nemleges egységgel egyenlő a szerint, a mint *iklmnp* permutatióban az inversiók száma páros vagy páratlan.

A 3.) alatti egyenlet bebizonyításával a Pascal-féle tételt is bebizonyítjuk, még pedig a Steiner-től nyert általánosságban, mert a 3.) egyenlet mutatja, hogy S determináns megsemmisülése a másik determinánsnak a megsemmisülését is maga után vonja. A bizonyítás néhány determináns-egyenletre támaszkodván, czélszerűnek tartjuk, ez

egyenleteket előrebocsátani, oly alakban közölvén azokat, a milyenben a későbbi fejtegetésekben előfordulnak.

2. Rövidség kedvéért a következő jelöléseket használjuk:

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_l & y_l & z_l \\ x_n & y_n & z_n \end{vmatrix} = (iln)$$

és

$$\begin{vmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & 2y_i z_i & 2z_i x_i & 2x_l y_i \\ x_l^2 & y_l^2 & z_l^2 & 2y_l z_l & 2z_l x_l & 2x_l y_l \\ x_n^2 & y_n^2 & z_n^2 & 2y_n z_n & 2z_n x_n & 2x_n y_n \\ x_l x_n & y_l y_n & z_l z_n & y_l z_n + y_n z_l & z_l x_n + z_n x_l & x_l y_n + x_n y_l \\ x_n x_i & y_n y_i & z_n z_i & y_n z_i + y_i z_n & z_n x_i + z_i x_n & x_n y_i + x_i y_n \\ x_i x_l & y_i y_l & z_i z_l & y_i z_l + y_l z_i & z_i x_l + z_l x_i & x_i y_l + x_l y_i \end{vmatrix} = r$$

és azt állítjuk, hogy:

$$r = (iln)^4.$$

Állításunkat bebizonyítandók, az r determináns első sorát X_i, második sorát X_l, harmadik sorát X_n, az (iln) determinánsnak x_i, x_l, x_n elemeihez tartozó minor-determinánsaival szorozzuk s azután az első sor tagjaihoz hozzáadjuk az ötödik és hatodik sornak X_n, illetőle X_l-lel szorzott tagjait, a második sor tagjaihoz a hatodik és negyedik X_i, illetőleg X_n-nel szorzott tagjait, végre a harmadik sor tagjaihoz a negyedik és ötödik sornak X_l, illetőleg X_i-vel szorzott tagjait. Ekkép a következő egyenlethez jutunk:

$$X_i X_l X_n . r = \begin{vmatrix} x_i.(iln) & 0 & 0 & 0 & z_i.(iln) & y_i.(iln) \\ x_l.(iln) & 0 & 0 & 0 & z_l.(iln) & y_l.(iln) \\ x_n.(iln) & 0 & 0 & 0 & z_n.(iln) & y_n.(iln) \\ x_l x_n & y_l y_n & z_l z_n & y_l z_n + y_n z_l & z_l x_n + z_n x_l & x_l y_n + x_n y_l \\ x_n x_i & y_n y_i & z_n z_i & y_n z_i + y_i z_n & z_n x_i + z_i x_n & x_n y_i + x_i y_n \\ x_i x_l & y_i y_l & z_i z_l & y_i z_l + y_l z_i & z_i x_l + z_l x_i & x_i y_l + x_l y_i \end{vmatrix}$$

Az átalakított sorokból (iln) determinánst mint közös tényezőt kiemelvén és a hatodrendű determinánst harmadrendű determinánsok szorozatára bontván *), ered:

$$X_i X_l X_n . r = (iln)^3 . \begin{vmatrix} x_i & z_i & y_i \\ x_l & z_l & y_l \\ x_n & z_n & y_n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_l y_n & z_l z_n & y_l z_n + y_n z_l \\ y_n y_i & z_n z_i & y_n z_i + y_i z_n \\ y_i y_l & z_i z_l & y_i z_l + y_l z_i \end{vmatrix}$$

*) Lásd e fölbontást illetőleg: »Baltzer, Theorie und Anw. der Determinanten.« 4. kiadás. 4. §.

És mivel:

$$\begin{vmatrix} y_l y_n & z_l z_n & y_l z_n + y_n z_l \\ y_n y_i & z_n z_i & y_n z_i + y_i z_n \\ y_i y_l & z_i z_l & y_i z_l + y_l z_i \end{vmatrix} = -X_i X_l X_n \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} x_i & z_i & y_i \\ x_l & z_l & y_l \\ x_n & z_n & y_n \end{vmatrix} = -(iln),$$

áll a tételünk.

$$r = (iln)^4 \qquad 4.)$$

Legyenek továbbá $Y_i Y_l Y_n$ és $Z_i Z_l Z_n$ az (iln) determináns többi minorjai, akkor 4.) szerint helyes ez az egyenlet:

$$\begin{vmatrix} X_i^2 & Y_i^2 & Z_i^2 & 2Y_i Z_i & 2Z_i X_i & 2X_i Y_i \\ X_l^2 & Y_l^2 & Z_l^2 & 2Y_l Z_l & 2Z_l X_l & 2X_l Y_l \\ X_n^2 & Y_n^2 & Z_n^2 & 2Y_n Z_n & 2Z_n X_n & 2X_n Y_n \\ X_l X_n & Y_l Y_n & Z_l Z_n & Y_l Z_n + Y_n Z_l & Z_l X_n + Z_n X_l & X_l Y_n + X_n Y_l \\ X_n X_i & Y_n Y_i & Z_n Z_i & Y_n Z_i + Y_i Z_n & Z_n X_i + Z_i X_n & X_n Y_i + X_i Y_n \\ X_i X_l & Y_i Y_l & Z_i Z_l & Y_i Z_l + Y_l Z_i & Z_i X_l + Z_l X_i & X_i Y_l + X_l Y_i \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} X_i & Y_i & Z_i \\ X_l & Y_l & Z_l \\ X_n & Y_n & Z_n \end{vmatrix}^4 \qquad 5.)$$

vagy, mivel:

$$\begin{vmatrix} X_i & Y_i & Z_i \\ X_l & Y_l & Z_l \\ X_n & Y_n & Z_n \end{vmatrix} = (iln)^2,$$

végre:

$$R = (iln)^8, \qquad 6.)$$

hol R az 5.) alatti egyenlet baloldalán levő determinánst fejezi ki. A 6.) számú egyenlet a kijelentett determináns-egyenletek egyike. — Talán mondanunk sem kell, hogy mind a 4.), mind a $-X_i X_l X_n$-re vonatkozó egyenletek általánosíthatók.

3. A többi egyenleteket csoportosan közöljük és 7.)-tel jelöljük.

$$(iln).(\eta_{np}\zeta_{kl} - \eta_{kl}\zeta_{np}) = (pln).(kln).x_i + (pni).(kln).x_l + (pln).(kil).x_n$$
$$(iln).(\zeta_{np}\xi_{kl} - \zeta_{kl}\xi_{np}) = (pln).(kln).y_i + (pni).(kln).y_l + (pln).(kil).y_n$$
$$(iln).(\xi_{np}\eta_{kl} - \xi_{kl}\eta_{np}) = (pln).(kln).z_i + (pni).(kln).z_l + (pln).(kil).z_n$$

$$(iln).(\eta_{ik}\zeta_{mn} - \eta_{mn}\zeta_{ik}) = (kni).(mln).x_i + (kni).(mni).x_l + (kil).(mni).x_n$$
$$(iln).(\zeta_{ik}\xi_{mn} - \zeta_{mn}\xi_{ik}) = (kni).(mln).y_i + (kni).(mni).y_l + (kil).(mni).y_n$$
$$(iln).(\xi_{ik}\eta_{mn} - \xi_{mn}\eta_{ik}) = (kni).(mln).z_i + (kni).(mni).z_l + (kil).(mni).z_n$$

$$(iln(.(\eta_{lm}\zeta_{pi} - \eta_{pi}\zeta_{lm}) = (mln).(pil).x_i + (mil).(pni).x_l + (mil).(pil).x_n$$
$$(iln).(\zeta_{lm}\xi_{pi} - \zeta_{pi}\xi_{lm}) = (mln).(pil).y_i + (mil).(pni).y_l + (mil).(pil).y_n$$
$$(iln).(\xi_{lm}\eta_{pi} - \xi_{pi}\eta_{lm}) = (mln).(pil).z_i + (mil).(pni).z_l + (mil).(pil).z_n$$

Ezen egyenleteknek csak egyikét kell bebizonyítanunk, mert azok hasonló alakuak. Az elsőnek bebizonyítása végett kimutatjuk, hogy:

$$\begin{aligned}(iln).\eta_{np} &= (inp).Y_i + (lnp).Y_l\\ (iln).\zeta_{np} &= (inp).Z_i + (lnp).Z_l\\ (iln).\eta_{kl} &= (ikl).Y_i + (nkl).Y_n\\ (iln).\zeta_{kl} &= (ikl).Z_i + (nkl).Z_n\end{aligned} \qquad 8.)$$

Ugyanis:

$$(inp) = -(pni) = -\begin{vmatrix} y_p & z_p & x_p \\ y_n & z_n & x_n \\ y_i & z_i & x_i \end{vmatrix} = -y_p.Y_l - y_n.(z_i x_p - z_p x_i) - y_i.(z_p x_n - z_n x_p)$$

és

$$(lnp) = (pln) = \begin{vmatrix} y_p & z_p & x_p \\ y_l & z_l & x_l \\ y_n & z_n & x_n \end{vmatrix} = y_p.Y_i + y_l.(z_n x_p - z_p x_n) + y_n.(z_p x_l - z_l x_p).$$

Amazt Y_i, emezt Y_l-lel szorozván és a szorzatokat összeadván:

$$(inp).Y_i + (lnp).Y_l =$$

$$= (y_i Y_i + y_l Y_l).\eta_{np} + y_n.[z_p(x_i Y_i + x_l Y_l) - x_p.(z_l Y_i + z_l Y_l)].$$

Minthogy $x_i Y_i + x_l Y_l + x_n Y_n = o$ és $z_i Y_i + z_l Y_l + z_n Y_n = o$, az utolsó egyenlet jobboldalán levő $x_i Y_i + x_l Y_l$ és $z_i Y_i + z_l Y_l$ összegek $-x_n Y_n$, illetőleg $-z_n Y_n$ által helyettesíthetők. Ennek folytán a nevezett egyenlet a következővé válik:

$$(inp).Y_i + (lnp)Y_l = (y_i Y_i + y_l Y_l).\eta_{np} + y_n.Y_n.(z_n x_p - z_p x_n),$$

vagy:

$$(inp)Y_i + (lnp)Y_l = (y_i Y_i + y_l Y_l + y_n Y_n).\eta_{np} = (iln).\eta_{np}$$

mert:

$$y_i Y_i + y_l Y_l + y_n Y_n = (iln).$$

Hasonló módon győződhetünk meg a 8.) alatti csoportban levő egyenletek helyességéről.

Ezek után:

$$(iln).(\eta_{np}\zeta_{kl} - \eta_{kl}\zeta_{np}) = (pln).(kln)x_i + (pni).(kln).x_l + (pln).(kil).x_n$$

egyenletet következőképen bizonyítjuk:

$$(iln)^2.\begin{vmatrix} \eta_{np} & \eta_{kl} \\ \zeta_{np} & \zeta_{kl} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (inp).Y_i + (lnp).Y_l, & (ikl)Y_i + (nkl)Y_n \\ (inp).Z_i + (lnp).Z_l, & (ikl)Z_i + (nkl)Z_n \end{vmatrix} =$$

$$= (lnp).(nkl).\begin{vmatrix} Y_l & Y_n \\ Z_l & Z_n \end{vmatrix} + (inp).(nkl).\begin{vmatrix} Y_i & Y_n \\ Z_i & Z_n \end{vmatrix} + (lnp).(ikl).\begin{vmatrix} Y_l & Y_i \\ Z_l & Z_i \end{vmatrix}$$

és minthogy:

$$\begin{vmatrix} Y_l & Y_n \\ Z_l & Z_n \end{vmatrix} = (iln).x_i, \quad \begin{vmatrix} Y_n & Y_i \\ Z_n & Z_i \end{vmatrix} = (iln).x_l, \quad \begin{vmatrix} Y_i & Y_l \\ Z_i & Z_l \end{vmatrix} = (iln).x_n,$$

amaz egyenlet (iln) által osztható. Az osztás végrehajtása és a jobb oldalon előforduló determináns-symbolumokban a jelzőknek másképen való elrendezése után ered:

$$(iln).(\eta_{np}\zeta_{kl}-\eta_{kl}\zeta_{np}) = (pln).(kln)x_i+(pni).(kln)x_l+(pln).(kil)x_n.$$

4. A 6.) és 7.) alatt álló egyenletek segítségével a 3.) egyenletben kimondott tételünket aránylag egyszerűen bizonyítjuk. Ha $\varepsilon = +1$ vagy $=-1$ a szerint, a mint az *ilnmpk* permutatióban az inversiók száma páros vagy páratlan, akkor

$$\varepsilon . S = \begin{vmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & y_i z_i & z_i x_i & x_i y_i \\ x_l^2 & y_l^2 & z_l^2 & y_l z_l & z_l x_l & x_l y_l \\ x_n^2 & y_n^2 & z_n^2 & y_n z_n & z_n x_n & x_n y_n \\ x_m^2 & y_m^2 & z_m^2 & y_m z_m & z_m x_m & x_m y_m \\ x_p^2 & y_p^2 & z_p^2 & y_p z_p & z_p x_p & x_p y_p \\ x_k^2 & y_k^2 & z_k^2 & y_k z_k & z_k x_k & x_k y_k \end{vmatrix}$$

Ennek az egyenletnek baloldalát $(iln)^s$, jobb oldalát pedig R-rel szorozzuk, a mely mennyiségek a 6.) egyenlet szerint egyenlők. A szorzás eredménye:

$$\varepsilon . S.(iln)^3 = \begin{vmatrix} (iln)^2 & 0 & 0 & (mln)^2 & (pln)^2 & (kln)^2 \\ 0 & (iln)^2 & 0 & (mni)^2 & (pni)^2 & (kni)^2 \\ 0 & 0 & (iln)^2 & (mil)^2 & (pil)^2 & (kil)^2 \\ 0 & 0 & 0 & (mni)(mil) & (pni)(pil) & (kni)(kil) \\ 0 & 0 & 0 & (mil)(mln) & (pil)(pln) & (kil)(kln) \\ 0 & 0 & 0 & (mln)(mni) & (pln)(pni) & (kln)(kni) \end{vmatrix}$$

Innen lesz:

$$\varepsilon . S.(iln)^3 = (iln)^6 . \begin{vmatrix} (mni)(mil) & (pni)(pil) & (kni)(kil) \\ (mil)(mln) & (pil)(pln) & (kil)(kln) \\ (mln)(mni) & (pln)(pni) & (kln)(kni) \end{vmatrix}$$

vagy:

$$\varepsilon . S.(iln)^2 = \begin{vmatrix} (pln)(kln) & (pni)(kln) & (pln)(kil) \\ (kni)(mln) & (kni)(mni) & (kil)(mni) \\ (mln)(pil) & (mil)(pni) & (mil)(pil) \end{vmatrix}$$

Az utolsó egyenlet két oldalát:

$$(iln) = \begin{vmatrix} x_i & x_l & x_n \\ y_i & y_l & y_n \\ z_i & z_l & z_n \end{vmatrix}$$

determinánssal szorozván és a 7.) számú egyenletekre tekintettel lévén:

$$\varepsilon . S . (iln)^3 =$$

$$= \begin{vmatrix} (iln)(\eta_{np}\zeta_{kl} - \eta_{kl}\,\zeta_{np}) & (iln)(\zeta_{np}\xi_{kl} - \zeta_{kl}\,\xi_{np}) & (iln)(\xi_{np}\eta_{kl} - \xi_{kl}\,\eta_{np}) \\ (iln)(\eta_{ik}\zeta_{mn} - \eta_{mn}\zeta_{ik}) & (iln)(\zeta_{ik}\xi_{mn} - \zeta_{mn}\xi_{ik}) & (iln)(\xi_{ik}\eta_{mn} - \xi_{mn}\eta_{ik}) \\ (iln)(\eta_{lm}\zeta_{pi} - \eta_{pi}\,\zeta_{lm}) & (iln)(\zeta_{lm}\xi_{pi} - \zeta_{pi}\,\xi_{lm}) & (iln)(\xi_{lm}\eta_{pi} - \xi_{pi}\,\eta_{lm}) \end{vmatrix}$$

s megemlékezvén Δ_{iklmnp} determinánsnak a 2.) alatt közlött értékéről:

$$\varepsilon . S = \Delta_{iklmnp} \qquad 3.)$$

ε a fentebbiek szerint az igenleges vagy nemleges egységet jelenti a szerint, a mint az *ilmnpk* permutatióban előforduló inversiók száma páros vagy páratlan. Hogy ε értékét a 3.) egyenletben feltüntetett *iklmnp* permutatiótól tegyük függővé, csak rá kell utalni arra, hogy *iklmnp* és *ilnmpk* permutatiók különböző osztályba tartoznak, tehát ha ebben az inversiók száma páros, amabban páratlan s megfordítva. Szabad e szerint ε értékét ekképen is meghatároznunk: ε az igenleges vagy nemleges egység, a mint *iklmnp*-ben az inversiók száma páratlan vagy páros. Tételünket tehát minden részében bebizonyítottuk.

VILLANYOS FÜSTALAKOK.

Antolik Károly, aradi fögymnásiumi tanártól.

Ha füstfellegeket a dörzsvillanyosság hatása alá vetünk, meglepő tüneményeket kapunk, melyek — tudomásom szerint — eddigelé ismeretlenek. Minthogy azonban a füstalakok csak nyugodt felületű füstrétegeken állíthatók elő, az igényeknek megfelelőleg a következő készüléket szerkesztettem. (1. ábra.)

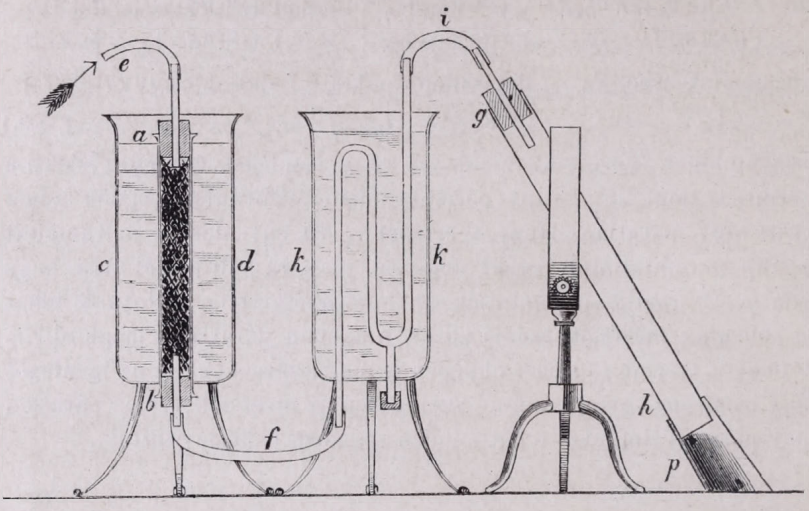
ab egy 30 cm. hosszú és 2·5 cm. átmérőjü vascső (pipa), mely kevés czukorral vegyített dohánynyal töltetik tele. (Azért választottam épen a dohányt, mivel a kisérletek hosszabb tartama folytán ez anyag füstjét egyebekénél elviselhetőbbnek találtam.)

cd pléhedény, mely *a*-ig vízzel töltetvén, hűtőül szerepel.

e kaucsuk csövön át egy fujtató segélyével a pipába levegő hajtatik, hogy abban a dohány folytonos égésben tartassék.

f kaucsuk cső *kk* hűtőbe szolgál, mely utóbbiból *i* cső vezet ki összeköttetésben a 4 cm. széles és 50 cm. hosszú *gh* üvegcsővel. A *gh* cső alsó nyilásához egy 15—20 cm. hosszúságú papirtölcsér *pp* van illesztve, melynek alsó lapított öble síma fekete asztalon nyugszik, erre bocsátván 1 cm. magasságú hasadékán keresztül a füstöt.

A *kk* hűtő czélja a füstöt lehetőleg hidegen tartani, mert ha az a papirtölcsérből melegen özönlik ki, emelkedő irányzatot vesz s szabálytalan hullámokká foszlik, melyek a kisérlethez nem alkalmasak.



A széles *gh* csőnek feladata egyenletes csöndességgel önteni az asztalra a füstöt, mit a papirtölcsér szélesre lapitott nyilása nagy mértékben előmozdit, úgy, hogy az asztalszín közvetetlen közelében levő hasadékán át a füst tej gyanánt ömlik el az asztalon.

Miután a készülék fel van állitva, a dohányt *a*-nál egy darabka taplóval meggyújtjuk s a tűz további élesztését, úgy a füst képezését a fújtatóra bizzuk. Nehány másodpercz múltán a füst csöndes és szabályos köralakú hullámokban folyik az asztalra s nyugodtan várja a teendő kisérleteket.

Ha most a működésbe hozott Holtz-féle géppel egy 50□cm. belső lemezfelületü leydeni palaczkot tevőleges villanyossággal egész a kisugárzásig megtöltetünk s azt körülbelül 1 méternyi magasságban a füstfelleg fölé tartjuk: *ez utóbbinak egész felülete egy pillanatra élesen körvonalozott, számtalan, kerek és elliptikus alakú gomolyokba szedődik. Az egész füstfelület sok concentricus körökbe válik, melyek ugyanannyi szabályosan szétágazó sugarakkal vannak áttörve.*

Ez a tünemény fénypontja. Már a következő pillanatban, mely valamivel tartósabb, a füstfelület a bárányfellegekhez hasonló alakokat tüntet fel. A fellegek száma a körülményekhez képest néhány ezerre tehető, nagyságuk pedig 1 és 2□cm. között váltakozik. A tüne-

mény fénypontja, mint említők, csak pillanatnyi tartamú (½—1 másodpercz), bár az egyes gomolyok elmosódott körvonalai részben tovább is láthatók s a behatás központjától lassanként a füstfelület széle felé terjeszkednek.

Ha az egyes fellegecskéket a kellő pillanatban sikerül jól szemügyre vennünk, *úgy minden egyes fellegecskén egy-egy berovást észlelünk,* mely az előbbit átmérőként szeli keresztül, de csakhamar elenyészik.

Az idomok alakulása a villanyos behatás középpontjától indul ki, s úgy látszik, *hogy közlött* és *nem indított* villanyosság eredménye, mert midőn a füstréteg fölé különböző távolságokban egy vékony üveglapot tartottam, annak alatta nem képződtek az idomok, hanem csak vetülete körül.

Az egész tünemény, úgy lehet, villanyos léghullámok gyöngéd rohamai által idéztetik elő, melyek mérhetetlen rövidségü időközökben terjednek a leydeni palaczktól a füstfelületig. E magyarázat mellett természetesen föl kell tennünk, hogy az említett léghullámok üres henger- vagy inkább üres és erősen megnyújtott kúp alakjával birnak, (mely feltevés különben a villanyosság természetével nem ellenkezik) továbbá hogy magukban a felhőcskékben a villanyosság megosztását idézik elő. Ily módon a tünemény könnyű szerrel indokolható volna, bár a magyarázat valósága iránt feltétlen kezességet vállalni nem lehet.

A concentricus körök eredetileg már a füstnek a papirtölcsérből való hullámos kiömlése alkalmával támadnak; mert jóllehet a tölcsérhez közelebb a füsttömeg egyöntetünek tünik fel, az egyes füsthullámok sajátos cohäsiója mindazonáltal úgylátszik továbbra is fenmarad. Ugyanis ha a megtöltött leydeni palaczkkal kis elővigyázat mellett a papirtölcsér nyilásához közeledünk, az egyes füsthullámokat egymástól elválaszthatjuk és tovább hajthatjuk. A szétágazó sugarak keletkezésének oka valószinüleg a füstfellegecskék, melyek utóbb irányosan egymásba folynak, szabályosabb elhelyezkedésében keresendő.

Az alakokat hosszabb ideig is fentarthatjuk, ha a leydeni palaczkot *lassan* a füstfelülethez közelítjük, azonban az első pillanat élesebb kinyomatú jellegét elvesztik, mindinkább elmosódnak és várakozásunknak meg nem felelnek; úgylátszik, hogy a már egyszer felhasznált füst nem alkalmas ujabb felhőcskék alakítására, mert bár azután is mutatkoznak a füstfelületen itt-ott egyes fellegcsoportok, azok sem oly tökéletesek, sem gyűrűs vagy szétágazó sugarakkal nem birnak.

Ezzel az első tüneméný ki volna merítve.

A *második* tüneményt az által idézzük elő, hogy a már gyengült leydeni palaczkot bizonyos határig közelítjük a füstfelülethez; *ekkor a felhöcskék kerek és elliptikus alakjukat kúszáltabban fodrozottal cserélik fel* (mint a kalaposok erősen szétfosztott gyapja). *Az egyes fellegecskék eléggé lassan feltornyosodnak, de csakhamar visszaomlanak önmagukba s csupán nyomokat hagynak maguk után.*

Megtörténhetik, hogy a felhőrétegekben mindkét tüneményt egyszerre szemlélhetjük, azonban ily alkalommal a második kevésbbé feltünő.

A fodros fellegecskék kissé maradandóbbak, kivált melyek a füstfelület szegélyéhez közelebb vannak; közben itt-ott szintén mutatkoznak a szétágazó sugarak.

Úgy vélem, hogy a fodrozott fellegecskék a villanyos indításnak következményei.

Ha végre a már meglehetősen kimerült palaczkot oly közel tartjuk a füsttömeghez, hogy belőle egyes szikra átpattoghat az asztalra, akkor az egész füsttömeg vájt gömb alakjában szerte fuvatik, a mi természetesen nem feltünő. Az útolsó mozzanat beállta előtt még észre lehet venni, hogy a füst az asztal szinén szemmel láthatólag fogy, minek okát abban kell keresnünk, hogy a füst szénrészecskei maradandóan az asztal felületéhez tapadnak.

Van azonban még egy *harmadik* tüneményünk, mely ha egyszer beállott, a kisérlet végéig folyamatban tartható. E tüneményt igen jól meg lehet figyelni. *Ugyanis szélesebb és élesen szegélyezett barázdák kigyóznak árnyszerüleg a füstrétegben tova, híven követve az utóbbi felett ingadozó leydeni palaczkot.*

Eleintén kevés, sokszor épen csak *egy* ilyen barázda tünik fel, később azonban szaporodnak, míg végre számuk sokasága a füstrétegben tökéletes zürzavart idéz elő. Ekkor a kisérletet abba hagyom s megtisztítom a leydeni palaczk gombját, hogy ismételt töltés után a kisérletet ujra kezdhessem.

A harmadik tünemény oda mutat, hogy a leydeni palaczk fejére porszemek rakodnak le, melyek hegyes felületek hatásának megfelelőleg működnek s a villanyos szelet támasztják.

A villanyos szél a palaczktól igen-igen finom kúpalakú sugarakban terjed szét, melyek rendkivül sima felülettel birhatnak, miután a barázdák szegélyei oly élesek; igen gyöngéd természetüeknek is kell a kúpalakú sugaraknak lenniök, *miután az általuk elöidézett barázdák*

gyakran alig mélyednek feléig a különben sem vastag füstrétegnek s ez alkalommal ágyukban az első tünemény fellegecskéit tüntetik fel, mely utóbbiak ilyenkor az egész barázdát betöltik.

Ha e barázdák feltetszésének alkalmával a palaczkot nyugodtan tartjuk, akkor a füstrétegben kisebb-nagyobb foltokat látunk csupán, melyek változatlanul megtartják helyzetöket még akkor is, ha a papirtölcsérből rohamosabban ömlik ki a füst. Hogy ha azonban csak két vagy három kúpalakú sugár mutatkozik: a palaczk ide-ode lengetése által könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az előidézett barázdák párhuzamosan kigyóznak egymás mellett.

A barázdák körvonalai több másodpercz folyamán láthatók maradnak, különösen a füstfelület szélein, hol a füst kevésbbé mozgékony. Itt még azt is meg kell jegyeznem, hogy e barázdák — ha egyszer előállottak — szélességökben mindinkább öregbednek, a mint t. i. a leydeni palaczk a füstfelülettől távolabb és távolabb tartatik. Absolut szélességök, úgy látszik, változatlan marad.

A füstréteg alá helyezett jó vezetők vagy lapok nem látszanak befolyásolni e tüneményeket.

Ha nemleges villanyossággal töltjük meg a leydeni palaczkot, ugyanazon tüneményeket idézhetjük elő, csakhogy akkor a palaczkot közelebb kell tartanunk a füstfelülethez.

Mind e tünemények bizonyítékául szolgálhatnának ama feltevésnek, hogy az égen látható bárányfelhők az ő alakjukat villanyossággal telt légáramlatoktól nyerik. Legyenek bár e légáramlatok tevőlegesen vagy nemlegesen villanyosak, mindenesetre közlőleg és indítólag fognak a körlég híg vízpáráira hatni még akkor is, ha tetemes magasságban vonulnak el a hatásuk alá eső párarétegek felett. A ritkább lég a villanyosság távhatását fokozza, úgy, hogy a bárányfelhők keletkezésök helyén több ideig nyugodtan maradnak, miután a légáramlatok kellő magasságban húzódnak el felettök.

E kisérleteket azért közlöm már most, fejlődésüknek első — jóformán még kezdetleges — szakában, mert előreláthatólag lassan lesznek tökélyesíthetők; mindenesetre jogosulatlan volna azokat ezennel bevégzettekül tekinteni.

(*Arad, 1877. febr. 3-án.*)

CYMOPHENOLSULPHONSAV ÉS CYMOPHENOLSULPHONSAVAS SÓK.

Dr. Koós Gábor, debreczeni reáliskolai tanártól.

A *cymolt*, — C_6H_3, CH_3, OH, C_3H_7, — mely a cymophenolsavhoz a kiinduló pontot képezi, Paterno G. szerint állítottam elő (780 gramm) kámfornak (265 gramm) kénnel s (100 gramm) vörös phosphorral kezelése által; a 48 órai gyönge hevítés közben származott 173—174° C. között forró cymolt a 233° C.-nál forró thyocymoltól elválasztván, a cymolból (5 rész) közönséges kénsavval (4 rész) s füstölgő kénsavval (4 rész) kezelés által előbb a *cymolsulphonsavat*, ebből a cymolsulphonsavas calciumot, majd a cymolsulphonsavas káliumot képeztem, melynek maró kálival olvasztása által nyertem 230° C.-nál forró, bagariabőr szagú, sürű, olajnemű *cymophenolt*.

A rendkivül fáradsággal, vizgőzzel párlás által előállított tiszta cymophenol vízfürdőben töménykénsavval kezelve, lassanként vöröses-barna szinű, egynemü folyadékká változik, a képződő *cymophenolsulphonsav* a fölös kénsavtól szénsavas ólommal keverés s gyönge melegítés által megszabadittatván, a megszürt — kénsavas ólomtól ment — folyadékból az ólmot kénhydrogénnel kiválasztván a sárgás folyadékot — zöld, vörös, vörösbarna szinváltoztatás közben — szörpsürüségig pároltam. A besürített folyadék egy része több mint három téli hónapon át zárt szekrényben állván, részben kristályos tömeggé változott, a midőn a kristályok a visszamaradt barna szörptől nagy gonddal megtisztíttattak, a barna szörp pedig a föntebb említett szörp fele részével cymophenolsulphonsavas bárium előállítására használtatott föl.

A *cymophenolsulphonsav* szörp oldatából összefüződött hosszukás nagy táblákban kristályodik; kristályai átlátszók, gyöngén violásrózsaszinüek, 50° C. körül vizöket vesztik s 62—63° C.-nál tökéletesen megolvadnak, a megolvadt tömeg górcsővel vizsgálva, lassanként rhombos oktaederekből álló kristályos tömeggé szilárdul, nedves levegőn azonban átlátszóságát veszti s vízfölvétel közben ágasbogas kristályokká rendezkedik. Hevítve 70—80° C. között, kezdetben violás, később kékes szint öltve, részben elbomlik. Vízben, alkoholban, aetherben könnyen oldható. Alkoholból s aetherből hajszálvékony hosszú tűkben kristályodik.

1.) A *kénsav fölött szárított* cymophenolsulphonsavból:

0.1189 gramm adott *0.1040* gramm $BaSO_4$-et, megfelel
0.04285 » SO_4-nak=*36.04*% *36.09*% helyett.

2.) *Levegőn szárított* kristályos cymophenolsulphonsavból:

0.2150 gramm adott *0.1899* gramm $BaSO_4$-et, megfelel
0.0778 » SO_4-nak=*36.18*% *36.09*% helyett.

A cymophenolsulphonsav kristályai e szerint két tömecs kristályvizet tartalmaznak:

$$C_{10}H_{14}SO_4 + 2H_2O.$$

Hetekig tartó szárítás által — kénsav fölött — sikerült a cymophenolsulphonsavat vízmentes állapotban előállítani, mint kékes-szürkés szinű átlátszóságát vesztett testet, ugyanis:

0. 2253 gramm sav adott .... *0.2242* gramm $BaSO_4$-et, megfelel
0.09238 » SO_4-nak = *41.00*% .... *41.74*% helyett
azaz: $C_{10}H_{14}SO_4$

Sói közül

A *cymophenolsulphonsavas bárium* vízben könnyen oldható, sürűdő vizoldatából bepárlásnál részint az edény falán, részint a folyadék felszinén kristályodik tűalakú kristályokból álló csomókban, melyek fehéres szinűek s kénsav felett szárítva — miután szárítóban már 80° C. körül, kékülés közben, bomlani kezdenek — négy tömecs kristályvizet tartalmaznak; ugyanis hevítésnél visszamaradt:

1.) *0.2553* gramm sóból .... *0.0892* gramm $BaSO_4$
2.) *0.2553* » » .... *0.0889* » »
3.) *0.2520* » » .... *0.0881* » »

melyek megfelelnek:

1.) *34.939*% 2.) *34.802*% 3.) *34.968*% $BaSO_4$-nak
átlagban *34.91*% $BaSO_4$-nak *34.932*% $BaSO_4$ helyett
vagy *20.53*% *Ba* -nak *20. 54*% *Ba* »

4.) *0.2737* gramm ezen sóból tartalmazott *0.0284* gramm H_2O-t
5.) *0.2778* » » » » *0.0287* » »

megfelel:

4.) *10.375*% H_2O-nak .... *10.79*% H_2O helyett
5.) *10.331*% » -nak .... *10.79*% » »

E szerint a cymophenolsulphonsavavas bárium vegyjele:

$$\left.\begin{matrix} C_{10}H_{13}SO_4 \\ Ba'' \\ C_{10}H_{13}SO_4 \end{matrix}\right\} + 4H_2O \text{ vagyis } (C_{10}H_{13}SO_4)_2Ba'' + 4H_2O$$

A *cymophenolsulphonsavas magnézium* vizben könnyen oldható; oldatából több hüvelyk hosszúságú hajszálvékony tűkben kristályodik. Szabad levegőn állandó, 100° C.-nál még bomlás nélkül szárítható.

Kénsav fölött szárított kristályaiból *0.6380* gramm adott *0.13175* gram phosphorsavas magnéziumot, mi megfelel *0.02848* gramm Mg.-nak=*4.46*% .... *4.48*% helyett.

0.0143 gramm cymophenolsulphonsavas magnézium tartalmazott *0.00145* gramm H_2O-et = *10.13*% .... *10.08*% helyett.

E szerint a cymophenolsulphonsavas magnézium chemiai jele:

$$(C_{10}H_{13}SO_4)_2 Mg + 3H_2O.$$

A *cymophenolsulphonsavas ezüst* vizben könnyen oldható, ritkított levegőben, kénsav fölött, szép átlászó tűkben kristályodik; kristályai azonban már napfényen bomlani kezdenek, 50—60° C. között pedig tökéletesen elbomlanak.

Kénsav fölött szárítva:

1.) *0.1610* gramm só adott .... *0.0497* gramm Ag Cl-t
= *0.03740919* gram Ag = *23.235*% .... *23.33*% helyett.

2.) *0.1336* gramm só adott .... *0.0410* gramm Ag Cl-t
= *0.030861* gramm Ag = *23.09*% .... *23.33*% helyett.

E szerint a cymophenolsulphonsavas ezüst chemiai jele:

$$C_{10}H_{13}AgSO_4 + 7H_2O.$$

A *cymophenolsulfonsavas mangánt* alig kristályodó tömegben nyertem, elemzésnél tisztátalannak bizonyult.

A *cymophenolsulphonsavas réz* mocskos zöld szinű mézganemü.

A cymophenolsulphonsav többi sóiról, a mennyiben időm engedi kisérleteimet tovább folytatom; alkalmilag később többet.

Debreczen, 1877. febr. 20.

EGY ELSŐRENDŰ RÉSZLETES KÜLÖNBZÉKI EGYENLET EGÉSZELÉSE.

Vész János Ármin, müegyetemi tanártól.

1. Az elsőrendű részletes különbzéki egyenletek általános alakja:

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R \qquad 1.)$$

*) Előadta a m. tud. Akadémia osztályülésén, 1877. márczius 5.

hol P, Q, és R az x, y és z függvényeit jelentik. Ezen egyenlet e másik kettőre válik szét:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

2. Ha a P, Q és R együtthatók állandók, akkor az oldás igen egyszerű; ered ugyanis:

$$\frac{z}{c} - \frac{x}{a} = f\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)$$

a hengerfelületek általános egyenlete.

3. Ha a fentebbi 1.) alatti egyenletben az együtthatók helyébe x, y, z iratik, akkor összesen hat részletes különbzéki egyenlet állhat elő, ugyanis:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z \qquad 2.)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = y \qquad 3.)$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = z \qquad 4.)$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = x \qquad 5.)$$

$$z\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = y \qquad 6.)$$

$$\text{és } z\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x \qquad 7.)$$

ezek közül a 2.) alatti, szét lévén benne a változók választva, rögtön egészelhető, és az egészleti egyenlet:

$$\frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

azon kúpfelületekhez tartozik, melyek csúcsa az összrendezők kezdőpontjában fekszik.

4. A 3.), 4.) és 7.) alatti egyenletek szintén eléggé egyszerűen oldhatók, és eredményezik rendre a következő egyenleteket:

$$z^2 - y^2 = f\left(\frac{z+y}{x}\right)$$

$$y^2 - x^2 = f\left(\frac{y+x}{z}\right)$$

$$z^2 - x^2 = f\left(\frac{z+x}{y}\right)$$

hasonnemű felületeket, melyek egymástól csakis tengelycsere által különböznek, és melyek jellemző vonalai egy menteléki hengernek metszései a kezdőponton keresztül menő síkok által.

5. Az 5.) alatti egyenletből következik:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x}$$

a 6.) alattiból pedig:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{y}$$

e két egyenlet alakjából pedig látható, hogy azok is hasonnemü felületekre vezetnek, melyeknél az X tengely maradván, az Y és a Z tengelyek fel vannak cserélve, miért is elegendő lesz az 5.) alatti egyenlet oldásával foglalkozni, az oldásból a 6.) alatti az említett úton rögtön felírható.

6. Az 5.) alatti egyenlet általánosabb alakban így fordulhat elő:

$$\beta\eta \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + \gamma.\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} = \xi \qquad 8.)$$

hol β és γ tetszőleges állandókat jelentenek. Hozzunk számításba η és ζ helyett új állandókat, melyek ezekkel a következő egyenletek által vannak kapcsolatban:

$$\eta = y\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta^2}}; \quad \text{és} \quad \zeta = \frac{z}{\sqrt[3]{\beta\gamma}}$$

akkor a helyettesítés végbevitele, és kellő rövidítés után, ha még ξ helyébe is x iratik, ered ismét az 5.) alatti egyenlet:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

vagy:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x} \qquad 9.)$$

úgy hogy ezen egyenletet feloldván, oldva lesz egyúttal a 8.) alatti egyenlet is.

7. A 9.) alatti egyenletekből következnek:

$$\begin{aligned} zdx - ydy &= 0 \\ xdy - zdz &= 0 \\ ydz - xdx &= 0 \end{aligned} \qquad 10.)$$

és e három egyenlet összeadásából ered:

$$(z-x)dx + (x-y)dy + (y-z)dz = 0 \qquad 11.)$$

MTA KÖNYVTÁR

egy három változó közti különbzéki egyenlet, mely az egészelhetőségi általános feltételnek eleget tevén, egészelhető. E czélra tekintsük a z-t állandónak, marad:

$$(z-x)dx + (x-y)dy = 0$$

melyben tévén x helyébe $z-u$

és y » $z-v$ értékeket, az e következő *egyenméretübe* megy át:

$$udu + (v-u)dv = 0$$

vagy a kiegészítő szorzó tekintetbe vételével:

$$\frac{udu + (v-u)dv}{u^2 - uv + v^2} = 0$$

az egészlet végbevitele után ered, ha mindjárt az u és v értékeket ismét x, y és z által fejezzük ki:

$$l(x^2+y^2+z^2-xy-xz-zy) + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc. tg. } \frac{2x-y-z}{(y-z)\sqrt{3}} = C_I \qquad 12.)$$

ha pedig a 11.) alatti egyenletben z helyett az x vagy az y értékeket tekintettük volna egyelőre állandókul, akkor eredtek volna:

$$l(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc. tg. } \frac{2y-z-x}{(z-x)\sqrt{3}} = C_{II} \qquad 13.)$$

$$l(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc. tg. } \frac{2z-x-y}{(x-y)\sqrt{3}} = C_{III} \qquad 14.)$$

8. A C_I, C_{II} és C_{III} értékek mindegyike eleget tesz ugyan a 11.) alatti egyenletnek, — a kitüzött egyenlet egészelésére azonban két ily érték együttesen a keresett felület *jellemző vonalául* nem tekinthető, miután azok egymástól csakis az állandók értékében különböznek, — miért is azok bármelyike helyett czélszerűbben mind a három összegét fogjuk tekintetbe venni, mint a jellemző vonalhoz tartozó egyik egyenletet, ezen összegelés által ered a következő részarányos egyenlet:

$$C_{IV} = l(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ arc. tg. } \frac{(x-y)^2(2z-x-y)+(y-z)^2(2x-y-z)+(z-x)^2(2y-x-z)}{3\sqrt{3}[x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)]} \qquad 15.)$$

9. Minthogy ezen egy egyenlet a jellemző vonal meghatározására elégtelen, vissza kell fordulnunk a kiindulási 10.) alatti egyenletekhez, és azokból még egy más teljes különbzéki egyenletet keresnünk; s valóban czélt érünk, ha azon egyenletek elsejét y-al, a másodikát z-vel,

az utolsót pedig x-el szorozzuk, s azután azokat mind összeadjuk, mely műtételek végbevitele után ered:

$$yzdx + xzdy + xydz = y^2dy + z^2dz + x^2dx \qquad 16.)$$

teljes különbzék, — egészelés által ered:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = C_V \qquad 17.)$$

mely egyenlet tehát szintén a jellemző vonalhoz tartozik.

10. A 15.) és 17.) alatti egyenleteket összefoglalva, megkapjuk végre az 5.) alatti egyenlet helyes egészletét, vagyis:

$$l(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)+$$
$$+\frac{3}{3\sqrt{3}}\text{arc. tg.}\frac{(x-y)^2(2z-x-y)+(y-z)^2(2x-y-z)+(z-x)^2(2y-x-z)}{3\sqrt{3}[x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)]}=$$
$$=f(x^3+y^3+z^3-3xyz) \qquad 18.)$$

mely egyenletben f egy tetszőleges függvényt képvisel. S valóban, ha ezen egyenletet részletesen különbzékeljük először x, azután y szerint, a nyert két egyenletből a tetszőleges f függvényt kiküszöböljük, kellő rendezés és a közös

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$$

szorzó elhagyása után ismét előáll az 5.) alatti egyenlet.

TOLDALÉK EGY MEGELŐZŐ CZIKKHEZ.

Hunyady Jenötöl.

A jelen füzet első czikkében a 7.) alatti determináns-egyenletek kikerülhetők, ha kimutatjuk, hogy Δ_{iklmnp} a következő determináns szorzása által

$$\begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \end{vmatrix} \qquad 1.)$$

ugyanazon alakra hozható, mint a minőre ott az $\varepsilon S(iln)^2$ mennyiség van hozva.

Legyen a szorzás eredménye:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad 2.)$$

hol

$$a_1 = \begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{ik} & \eta_{ik} & \zeta_{ik} \\ \xi_{mn} & \eta_{mn} & \zeta_{mn} \end{vmatrix} \quad \text{s a t.} \qquad 3.)$$

A 2.) alatti determinánsban előforduló elemek még továbbá redukálhatók, ha t. i. a 3.) alatti egyenletet megszorozzuk (ikn) determinánssal, úgy az egyenlő tényezők elhagyása után nyerjük, hogy

$$a_1 = (kni)(mln)$$

és ehhez hasonló módon, hogy

$$a_2 = (kni)(mni);\ a_3 = (kil)(mni)$$
$$b_1 = (mln)(pil);\ b_2 = (mil)(pni);\ b_3 = (mil)(pil)$$
$$c_1 = (pln)(kln);\ c_2 = (pni)(kln);\ c_3 = (pln)(kil)$$

Megjegyezvén még, hogy az 1.) alatti szorzó az adjungált determinánsok ismeretes tétele szerint

$$= (iln)^2$$

úgy az előbbieknél fogva találjuk, hogy

$$\Delta_{iklmnp}(iln)^2 = \begin{vmatrix} (kni)(mln) & (kni)(mni) & (kil)(mni) \\ (mln)(pil) & (mil)(pni) & (mil)(pil) \\ (pln)(kln) & (pni)(kln) & (pln)(kil) \end{vmatrix}$$

a melyet Scholtz úr következő egyenletével:

$$\varepsilon S(iln)^2 = \begin{vmatrix} (pln)(kln), & (pni)(kln), & (pln)(kil) \\ (kni)(mln), & (kni)(mni), & (kil)(mni) \\ (mln)(pil), & (mil)(pni), & (mil)(pil) \end{vmatrix}$$

összehasonlítva találjuk, hogy:

$$\varepsilon S = \Delta_{iklmnp}.$$

Megemlékezés Poggendorff-ról.*) — Most három éve, 1874. febr. 28-ikán ritka jubileumot ünnepeltek Berlin tudósai. Ekkor lett *ötven* éve, hogy Poggendorff az »Annalen der Physik und Chemie« szerkesztését 1824-ben átvette s félszázadon át szakadatlanúl egymaga vezette. A ritka esemény megünneplésére a berlini tudósok jubileumot rendeztek, melyen az ismeretes »Jubelband«-dal lepték meg a tisztelt öreget. Üdvözlő levelek és táviratok érkeztek Németország minden nagyobb városából, Angliából, Ausztria, Dán-, Holland-, Magyar-, Norvég-, Olasz-, Oroszország-, Svájcz-, Svédországból, me-

*) Fölolvastatott a természettudományi társulat szakülésén, márczius 21-én.

lyek mindannyian még sok számos esztendőt kivántak a veterán-szerkesztőnek. — Ez alkalommal tartott beszédét az ünnepelt férfiú a következő egyszerű, szép szavakkal rekesztette be: »Meddig vihetem még, ki lesz utódom — a jó ég tudja; annyit azonban fölfuvalkodás nélkül mondhatok, hogy ha majd egyszer utolsó órám ütni fog, szememet azzal a vigasztalással hunyhatom le, hogy ötvenéves működésem emléke túl fog élni engemet; hiszen ki kora legjobbjainak eleget tett, minden kornak élt.«

A szerencse-kivánatok, melyek a jubileumkor annyi szív mélyéből hangzottak fel, a remények, a buzgó óhajtások, hogy a már megjelent *százötven kötet* mellé még sok számos kötet csatlakozhassék, nem mehettek teljesedésbe. A természet változhatatlan rendje e soha nem nyugvó, mind fogytig tevékeny életnek is véget szabott. Poggendorff Annaljai maig is homlokukon viselik a régi nevet, de a szellem, mely őket megalkotá, az a soha nem lankadó szellem, mely őket ötvenhárom évig vezeté, elköltözött örökre.

Kötelességünknek tartom, tisztelt tagtársak, hogy mi magyar physikusok is lerójuk hálánk adóját az iránt a férfiú iránt, ki tudományunknak ötvenhárom éven át valóságos rabszolgája volt. A ki, nem áldozhatván a tudományért kinceseket, feláldozta azt, a mi néki legdrágább lehetett, az önálló buvárkodás tiszta örömeit, és cserébe fogadta érettök a szerkesztés soha meg nem szünő gondjait. Ő a magyar természettudományi társulatnak is 1858 óta külföldi tagja volt. Tegyünk le mi is egy egyszerű levelkét az ő távoli sírjára.

Johann Christian Poggendorff 1796. deczember 29-ikén született Hamburgban. Szülei korán elhaltak, serdülő gyermekkorában hagyták árvára. Igy nagyon is jókor meg kellett ismerkednie az élet nehéz küzdelmeivel. De ezek meg nem törék őt, sőt inkább megkeményíték akaratát s jellemét, és korán kifejleszték s megérlelék szellemi tehetségeit. Tizenhat éves korában egy gyógyszerész műhelyébe lép, hol is nyolcz hosszú esztendőt tölt el. Nappalai a szenvedő emberek szolgálatának, éjjelei a tanulmányoknak, nyelvek tanulásának és chemiai-physikai kisérletek tételének vannak szentelve. Végre üt a szabadulás órája. Huszonnégy éves korára megtakaríthat annyit, hogy régi vágyait megvalósíthatja. 1820-ban belép a berlini egyetembe s kizárólag a a physika tanulmányozására szenteli magát.

Berlin akkori physikusai, egynek kivételével, ma már jóformán ismeretlen nevek: Erman, Fischer, Schweigger, Seebeck és Tourte. Közülök csak az egy Seebeck tudott maradandó nevet kivívni. A nagy nemzedék, mely egy-két évtizeddel később a berlini egyetemet, Humboldt nagy tekintélyének és befolyásának aegise alatt, a német tudományosság középpontjává alakította, még ekkor nem lépett ki a működés terére. Magnus, Mitscherlich, a két Rose, maj-

dan a berlini egyetem és akadémia díszei, még akkoriban külföldi laboratoriumokban dolgoztak, ki Berzeliusnál Stockholmban, ki GayLussacnál Párisban.

Magyar ifjaink, kik most a berlini egyetemen megfordulnak és ott a tudományos élet hatalmas lüktetéseit tapasztalják, saját tudományos viszonyaink felett elkomorúlva, jövőnk felett gyakran majdnem kétségbeesve térnek vissza a hazába. Pedig nincs okuk reá. Hiszen még alig ötven éve, a porosz ifjak is, ha physikára vagy chemiára szentelék magukat, csak oly helyzetben voltak, mint most mi vagyunk. Azok is külföldre vándoroltak s azok is a külföldi tudományosság emlőin nőttek nagyra. Csak legyenek a mi visszatérő ifjaink Lejeune-Dirichletek, Magnusok, Mitscherlichek, Roséк és Wöhlerek; legyenek oly jó magyarok, mint ezek jó németek valának; fogjanak a honosítás munkájához oly kedvvel és buzgalommal, mint azok tevék; adjanak példát az utánok jövő nemzedéknek tollal, szóval és tettel, mint azok: úgy ők is megalapíthatják — a mint már részben meg is alapították — a budapesti iskolának hirét ép úgy, mint azok a berliniét.

Poggendorff alig lépett az egyetembe, csakhamar magára vonta tanárai figyelmét. Az öreg Erman a berlini tantermek díszének nevezte. Már 1821 ben, egy évvel Berlinbe jötte után, Oken »Isis«-ében egy értekezést tett közzé »Physisch-chemische Untersuchungen zur näheren Kenntniss des Magnetismus der Volta'schen Säule« czím alatt. Ebben megmutatja, hogy a galvánfolyam magnetikus hatása tetemesen sokszorozható, ha a drótot többszörösen körülvezetjük a tű körül. Ő tehát a galvanométer voltaképeni feltalálója. A gondolat különben, Oersted és Ampère nagy sensatiót keltett felfedezése után közel feküdött, de mégis kutató szellemről, éles elméről tanúskodott. Ez értekezése megszerezte Poggendorff-nak azt, a mi akkor Berlinben a legnyomósabb volt, t. i. megszerezte neki a mindenható befolyású Humboldt becsülését és barátságát. Ennek köszönhette, hogy a berlini Akadémiánál még jóformán mint tanuló observatori állást nyert, s hogy e minőségében gondtalanul folytathatta megkezdett vizsgálatait.

E csendes dolgozgatás azonban nem tarthatott sokáig. Egy váratlan esemény egészen más irányt adott életének. Gilbert, lipcsei tanár s az »Annalen der Physik und Chemie« czímü folyóirat szerkesztője, hirtelen meghalt 1824. márczius 7-én. Halála híre nagy sensatiót okozott Berlinben. Berlin fiatal tudósai, élükön Heinrich Rosé-val mindent megmozdítottak, hogy az Annalokat Berlinbe csalhassák. De kire bízzák a szerkesztést? Berlin akkori physikusai már koruknál fogva sem voltak alkalmasak. Ifjabb nemzedék, legalább a physikában, alig volt.

»Egyszer csak egy reggelen — így beszéli el maga Poggendorff — betoppan szobámba a jó Heinrich s felszólít, vegyem én át a szerkesztést.

Azt feleltem neki, hogy nem érzem magamat alkalmasnak, s nincs is a tudós világban hozzávaló tekintélyem. Nem hagyott föl vele, sőt annál inkább erősködött; megigérte nemcsak a maga segítségét, hanem Berzeliusét is és az akkoriban oly hatalmas Berzelius-féle iskoláét. Ez felbátorított legalább próbát tenni. Irtam az Annalok kiadójának, Barth könyvkereskedőnek Lipcsébe, és egyúttal fölkértem barátomat, Friedrich Hoffmannt, ki akkor Hallében magántanár volt, menne el Barthhoz és beszélne vele a dologról. Mind a kettő hatott és már márczius 18-án választ kaptam Barthtól, melyben hajlandóságát fejezi ki velem alkudozásba bocsátkozni, de egyszersmind óhajtását is velem személyesen megismerkedhetni. Ennek következtében Lipcsébe utaztam és mondhatom, hogy egy-két óra alatt a főbb pontokra nézve megegyeztünk. A dolgot azonban Leopold von Buch döntötte el, ki Barthhoz egy goromba levelet írt, melyben az ő darabos modorával demonstrálja, hogy nem lehet és nem szabad Barthnak mást választania mint engemet. Ilyen tromf ilyen tekintélytől nem tévesztette el hatását, s nem is volt fölösleges, mert más kérők is jelentkeztek, Brandes Boroszlóból, Kastner Erlangenből és Muncke Heidelbergából, és megingathatták volna Barthot. De ő hű maradt hozzám. Igy elkezdtem a munkát. Először befejeztem a Gilberttől megkezdett februári füzetet és hozzáigtattam az ő nevében még a márcziusit és aprilisit. A májusi füzetre, a második kötet első füzetére már a magam nevét tettem.«

Ez volt a döntő lépés Poggendorff életében; pályája felett a koczka el volt vetve!

Ámbár alig folyt le négy év egyetemi tanulmányainak megkezdése óta, mégis oly széles körü ismeretekkel, az itélő tehetségnek oly finomságával fogott egyszerre a munkához, hogy a teljes odaadás, a valódi enthusiasmus, melylyel magát hivatásának oda áldozá s a jó tapintat, melylyel az akkori vezértudósok támogatását biztosítani tudá, az Annaloknak egyszerre kiváló jelentőséget kölcsönöztek az időszakos folyóiratok sorában. A szerkesztés szakadatlan gondjai mellett is talált időt, hogy megkezdett buvárlatait, ha már többé nem is azzal a háborítatlan nyugalommal, mely minden nagy felfedezésnek előfeltétele, de mégis dicséretes sikerrel folytathassa. 1827-ben egy új készüléket talált fel (»Neues Instrument zum Messen der magnetischen Abweichung«), melyet nehány évvel utóbb Gauss magnetométer név alatt tett ismeretessé. Ugyanez időtájt jelentek meg tőle dolgozatok a fényrezgésekről az északi fényről, a gázok átszivárkodásának törvényéről, a chemiai vegyületek szétbontásáról, a ternär vegyületek elemei közti viszonyról s a t. — 1834-ben a berlini egyetem philosophiai doctori, 1844-ben pedig a königsbergai egyetem orvos-doctori oklevéllel tisztelte meg. 1834-ben a berlini egyetemre a physika rendkivüli tanárává neveztetett ki. 1839-ben a berlini tudományos akadémia

rendes tagjává választotta, s ezen idő óta nagyobb dolgozatai mind a berlini akadémia kiadványai közt láttak napvilágot. A galvanismus és elektricitás maradt továbbra is főtárgya; elektrochemia, thermo-elektricitás, galvánáramok erősségének mérése, a galván-polarisatió törvényei, ellenállás-mérések és több e térre tartozó készülék szerkesztése és módosítása foglalkoztatták leginkább. 1837-ben tevékeny részt vett a Liebig-féle »Handwörterbuch der Chemie« I. kötetének szerkesztésében. 1853-ban »Lebenslinien zur Geschichte der exacten Wissenschaften« czím alatt híresebb természetbuvárokról életrajzi vázlatokat adott ki. Ezt követte 1863-ban nagy encyclopaediai műve »Bibliographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften«, mely óriási munka nem kevesebb mint 15 évi előkészületet vett igénybe. E mű unikum a maga nemében: több mint 3000 lapon minden idő és minden nemzet mathematikusainak, physikusainak, chemikusainak, geologusainak és mineralogusainak életrajzi adatait és dolgozatainak czímeit foglalja magában. Kérdéses, vajjon fog-e egyhamar elég elszánt ember találkozni e mű bővitett és javított átdolgozására?

De bármily értékesek legyenek is Poggendorff kisérleti kutatásai és encyklopaediai munkálatai, mégis alárendelt szerepet játszanak ama monumentális vállalat mellett, melynek élete javát, lelke minden erejét áldozá. Az »Annalen der Physik und Chemie« 160 kötetében oly emlékoszlopot állított ő magának, melyet le nem dönthet semmi invasió, semmiféle viszontagság, s a mely állani fog mindaddig, míg csak ember természettannal foglalkozik. A physika egész nagy kerületei: az elektrodynamika, az inductio, a diamagnetismus, a thermochrose, a telegraphia, a photographia, a diffusió, a fluorescentia, a spectral-analysis, a mechanikai hőelmélet — mind az ő szerkesztése ideje alatt tárattak fel. A külföldi tudósok nagyobb jelentőségü dolgozatait mind ő maga fordította le az Annalok számára. Faraday hetvenhat Contributions-je egymaga két-három kötetet tölt be; Brewster és Regnault szintén egy-egy kötetet foglalnak el. Kiszámították, hogy az Annalok 160 kötetének mintegy $^1/_5$-ét, tehát vagy 32 kötetet magának a szerkesztőnek fordításai töltenek be. — Eleinte az Annalok terve úgy volt megállapítva, hogy magába fogja ölelni mind a physika, mind a chemia összes haladásait. Ez azonban lassanként teljes lehetetlenné vált, a mint az önálló kutatásra mind több és több alkalom kinálkozott. Lassanként külön chemiai folyóiratok támadtak, s az Annalok chemiai része mind jobban és jobban alászállt jelentőségében, úgy, hogy végre e folyóirat egészen physikai jellemet öltött magára.

Az ősz szerkesztő mult karácsonykor töltötte be 80-ik évét. Más, ilyen korban már rég nyugalmat élvez vagy talán már abba is beleunt; ő ellenben éppen a jelen évvel egy új vállalatot indított meg »Beiblätter zu den Annalen

der Chemie und Physik« czím alatt, melyben a külföldi dolgozatok kivonatos közlését és megismertetését igérte. Azonban már január második felében gyengélkedni kezdett. Pár napi betegeskedés után január 24-ikén, minden szenvedés nélkül elaludt örökre. A berlini egyetem és Akadémia teljes számmal megjelent a temetésén. Kikisérték az örök nyugodalomra azt, ki míg élt nyugodni nem tudott. Ő valóban azzal a megnyugvással hunyhatta le szemét, hogy *a ki kora legjobbjainak eleget tett, minden kornak élt.*

Szily Kálmán.

IRODALOM.

Alfred Clebsch, »Vorlesungen über Geometrie.« Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Ferdinand Lindemann. Mit einem Vorworte von Felix Klein. I. Bd. 2-ter Theil. Leipzig, B. G. Teubner. 1876. p. 497—1050.

E kézikönyv folytatását képezi a már bemutattuk első résznek.*) Három szakaszra oszlik. Az ötödik (itt az első) a harmadrendű és harmadosztályú vonalokra szorítkozik, a hatodik azt az összefüggést tárgyalja, mely egyfelől az algebrai görbék, másfelől pedig az Abel-féle függvények között fennáll. Végre a hetedik szakasz az úgynevezett *Connexek elméletét* foglalja magában

Az ötödik szakasz első öt fejezetében a 3-dik és 4-dik szakaszbeli általános elméletek a harr. adrendű és harmadosztályú görbék elméletére alkalmaztatnak.

E fejezetekben leginkább kitünnek Hesse-nek a harmadrendű vonalak forduló-pontjaira vonatkozó vizsgálatai. Az algebrai görbék általános elméletéből ismeretes, hogy mindazon pontok mértani helye, melyeknek egy adott algebrai görbére vonatkozó poláris kúpszeletei két egyenesbe fajulnak $3(n-2)$-edrendű görbe, hol is n az adott algebrai görbének rendszáma. Az előbb említett görbe az adott görbe Hesse-féle görbéjének neveztetik, és a covariansokat jellemző tulajdonsággal van felruházva.

Hesse görbéjének továbbá az a nevezetes tulajdonsága van, hogy az adott görbét a forduló pontokban metszi, úgy hogy ha a tekintetbe vett algebrai görbének nincsenek többszörös pontjai, úgy annak

$$3n(n-2)$$

forduló pontja van.

Ezt az általános eredményt a harmadrendű vonalak elméletében értékesítve, a következő tétel ered:

*) Lásd e lapok I. kötetét 57—60. ll.

»A harmadrendű vonal Hesse-féle görbéje megint harmadrendű, és a két görbe 9 átmetszési pontjában vannak az eredeti harmadrendű vonal fordulópontjai.«

Ebben a speciális esetben, a midőn az algebrai görbe harmadrendű, a hozzá tartozó szintén harmadrendű Hesse-féle görbének különös és igen nevezetes tulajdonságok felelnek meg. E két görbe 9 átmetszési pontja nem csak az eredeti görbének fordulópontja, hanem egyszersmind fordulópontja a Hesse-féle görbének is Ha továbbá

$$f = 0, \quad \Delta = 0,$$

a harmadrendű és a hozzá tartozó Hesse-féle görbe egyenletei, úgy a

$$kf + \lambda\Delta = 0$$

egyenletben kifejezett egyszerűen végtelen görbe-sereg forduló pontjai az $f=0$ görbe forduló pontjaival azonosak. E görbeseregben négy görbe van, mely három-három egyenessé fajul; az ezek által képezett 4 háromszög oldalain fekszenek a forduló pontok; mindenik háromszögön mind a kilencz.

Ez utóbbi megjegyzésben rejlik a harmadrendű vonalak forduló pontjainak meghatározásánál a dolog veleje. Az a kilenczed fokú egyenlet, melytől e feladat megoldása függ, algebrailag megoldható, még pedig vonalas egyenleteken kivül egy negyedfokú és két harmadfokú egyenlet megoldása által.

A szóban forgó egyenlet alapján Hesse, ki az imént említett tulajdonságokat fölfedezte, a kilenczedfokú egyenleteknek egy egész osztályát oldhatta meg algebrailag. [1])

Steiner — a világhirű geometra — rajongó hajlamának a mértani disciplinák iránt, végrendeletében is kifejezést adott; vagyonának jelentékeny részét a berlini tudományos akadémiának hagyományozta oly czélból, hogy időről-időre a geometriai tudományok köréből pályakérdést tüzzön ki. Úgy látszik, hogy az alapítvány alapszabályai, melyeket különben e sorok irója nem ismer, pályázók hiányában, már meglevő kitünő vizsgálatok szerzőinek rendelik a pályadíj kiadását. 1872-ben a díjat Hesse-nek [2]) adták ki kitünő geometriai buvárlataiért. E buvárlatok, melyekről a »Journal für die Mathematik« tudós szerkesztője, Borchardt mondja [3]), hogy Hesse nevét az elemző mértan történetében megörökítik — egyik fénypontját képezik Hesse-nek az imént röviden jellemzett vizsgálatai.

E szakasz 3-dik fejezete a harmadrendű görbék előállításával foglalkozik; felemlítjük közülök Grassmann, Chasles és Jonquiéres módszereit.

---

[1]) Crelle-Borchardt Journal für Math. XXXIV. köt. Algebraische Auflösung derjenisen Gleichungen 9-ten Grades etc. etc.

[2]) Monatsberichte der kön. preuss. Akad. zu Berlin. 1872, 549. l.

[3]) Crelle-Borchard Journal 80. köt., 345. l.

A 6-ik fejezetben szerző áttér azokra a harmadrendű vonalokra, melyeknek kettőspontja vagy visszatérő pontja van; ezekről a többi között kimutatja, hogy valamely telszőleges pontjuk koordinátáit egy változó parameter végszerű függvénye által lehet kifejezni.

A 7-dik fejezetben az előbbi eredményeket átviszi az általános harmadrendű vonalokra. Itt az tünik ki, hogy az ilyen görbének pontjai a változó paraméter elliptikai függvényei által fejezhetők ki. E felfedezés a harmadrendű görbék elméletében kitünő szerepet játszik, általa sok más elmélet felől új szempontokat nyerünk, és új problémák megoldására vezettetünk.

Igy a forduló pontok problemája valamint a harmadrendű vonal és egy másik görbe átmetszési pontjainak rendszere az imént előadott felfedezés alapján új megoldást nyer. Első analytikai megoldásukat találják itt még Steiner úgynevezett »Schliessungsproblem«-jei is. Mindezekről itt a hely szüke miatt nem szólhatunk, rá kell csak utalnunk e dústartalmú munkára.

A hatodik szakaszban az előbbi szakasz hatodik és hetedik fejezetében nyert pontok az n-ed rendű görbék elméletében tovább fejtetnek és általánosíttatnak. E vizsgálatok az algebrai görbék általános elméletét összefüggésbe hozzák az Abel-féle függvényekkel.

E vizsgálatokban czélszerű az algebrai görbék elméletébe a következő számot bevezetni:

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta - k,$$

hol n a görbe rendszáma, δ és k pedig a görbe kettőspontjainak és visszaforduló pontjainak száma. Az ekként meghatározott p szám pedig Clebsch-től a görbe nemének (Geschlecht der Curve) neveztetik. Ezek szerént különféle nemű görbékről szólhatunk, épen úgy, amint szokás különféle rendű és különféle osztályú görbékről szólani. Továbbá világos, hogy ha két algebrai görbe rendszáma különböző, úgy a nekik megfelelő p mégis egyenlő lehet. Ugyanez a p szám állapítja meg annak az Abel-féle függvénynek a rangját, mely a p-ed nemű algebrai görbével sajátságos összefüggésben áll.

A p-edik nemű algebrai görbe egyes pontjainak coordinátáit egy változó parameternek p-edik rangú Abel-féle függvényei által fejezhetjük ki. Igy tehát azoknál az algebrai görbéknél, melyeknél $p=0$ a pontok coordinátáit egy változó parameter algebrai függvényei által fejezhetjük ki. Azoknál az algebrai görbéknél pedig, melyeknél $p=1$, vagy $p=2$, az egyes pontok coordinátáit egy változó parameternek elliptikai vagy hyperelliptikai függvényei által fejezhetjük ki.

Ezeket az általános fejtegetéseket alkalmazásuk követi több az algebrai görbéknél előforduló elméletekre, és végül azon görbék tárgyalása következik, melyeknél $p=0, 1$ és 2. E szakaszban, valamint az előbbi ezt előkészítő hatodik és hetedik fejezetében kivétel nélkül Clebsch-től eredő vizsgálatokkal találkozunk, melyek első ízben a Crelle-Borchardt-féle »Journal für Mathematik« [4]) című folyóiratban tétettek közé. E dústartalmú és valóban bámulatos vizsgálatok végczéljukon kivül még különösen azért is kiválóan érdekesekké válnak, hogy az integrál-számítás alkalmazásának a mértanra egészen új tért nyitnak, a mennyiben, egyes problémáktól eltekintve, ezekben történt először, hogy az integrál-számítás a helyzet mértanára alkalmaztatott.

Poncelet franczia tábornok és nagy geometra özvegye nemeslelkü férjének utolsó akaratát teljesítendő 2500 frankot ád évenként a párizsi akadémiának, hogy ez összeggel az utolsó tiz évben megjelent legbecsesebb mü jutalmaztassék, az elméleti vagy alkalmazott mathematikai tudományok köréből. Első alkalommal a párizsi akadémia a Poncelet-díjat, a Liouville, Serret, Chasles, Bertrand és Combes urakból álló bizottság előterjesztésére, Clebschnek itélte oda összes mathematikai működéseért, de különösen az integrál-számítás alkalmazásáért az algebrai görbékre és felületekre. [6])

Az ismertetett munka utolsó szakaszában ismét egy Clebsch-től eredő elmélettel, az úgynevezett *Connexek elméletével* találkozunk, mely itt bővebben le nem irható algebrai vizsgálatokban veszi eredetét.

Ismételve kell köszönetet mondanunk Lindemann úrnak fáradozásaiért, melyek lehetségessé tették, hogy e nagy búvárnak, Clebsch-nek előadásaival megismerkedhettünk. Nem mellőzhetjük azonban hallgatással az úgynevezett sajtó-hibák jelentékeny számát (1045—1050. ll.), melyek gyakran a sajtóhibák megengedhető határát túllépve, helyreigazító és felvilágositó kis czikkekké növik ki magukat. (H. J.)

MEGFEJTETT FELADATOK.

22. Ha valamely pont körpályán állandó sebességgel mozog, úgy, a mint tudva van, a pont vetülete az egyenesen a végtelen kis tágasságú inga mozgását követi. Kérdés, minő görbén kell a pontnak állandó sebességgel mo-

[4]) 63 és 64. kötetében.

[5]) Comptes rendus des séances de l'acad. des sciences T. 66. 1868 I. sem. p. 739.

[6]) Ugyanott T. 68, 1869, II. p. 1361.

zogni, hogy vetülete az egyenesen a véges tágasságú inga mozgási törvényét kövesse? (Szily.)

Megoldás Bäumel Ede tanárjelölttől.

A mechanikából ismeretes, hogy a sebesség az ingánál:

$$v = \sqrt{2gl(\cos\xi - \cos\alpha)}$$

hol is v a ξ kihajlási szögnek megfelelő sebesség; α a kihajlás maximuma, l az inga hossza és g a nehézségi gyorsulás. A ξ illetőleg α szögletnek megfelelő ívet jelüljük x-vel illetőleg a-val, úgy:

$$\xi = \frac{x}{l} \quad \text{és} \quad \alpha = \frac{a}{l}$$

ennélfogva:

$$v = \sqrt{2gl\left(\cos\frac{x}{l} - \cos\frac{a}{l}\right)} \qquad 1.)$$

Legyen az ismeretlen pályán a pont állandó sebessége c, úgy:

$$c = \sqrt{2gl\left(1 - \cos\frac{a}{l}\right)} \qquad 2.)$$

Jelöljük azt a szöget, melyet a görbe érintője az X tengelylyel képez, φ-vel, úgy:

$$\text{tg.}\,\varphi = \frac{dy}{dx} \quad \text{és} \quad \cos\varphi = \frac{v}{c}$$

következtezéskép:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{v^2}}$$

tehát:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c^2 - 2gl\left(\cos\frac{x}{l} - \cos\frac{a}{l}\right)}{2gl\left(\cos\frac{x}{l} - \cos\frac{a}{l}\right)}}$$

c értékét 2.)ből helyettesítve és a rövidítéseket végrehajtva:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{x}{l}}{\cos\frac{x}{l} - \cos\frac{a}{l}}}$$

Behozva a félszögeket:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\frac{x}{2l}}{\sqrt{\cos^2\frac{x}{2l} - \cos^2\frac{a}{2l}}}$$

És ebből:

$$y = \int \frac{\sin\frac{x}{2l}\,dx}{\sqrt{\cos^2\frac{x}{2l} - \cos^2\frac{a}{2l}}} + \text{Const.}$$

vagy:

$$\frac{y}{2.l.i} = \int \frac{\sin\frac{x}{2l}\,\frac{dx}{2l}}{\sqrt{\cos^2\frac{a}{2l} - \cos^2\frac{x}{2l}}} + \text{Const.}$$

hol is $i=\sqrt{-1}$.

Integrálva:

$$\frac{y}{2.l.i} = \text{arc. cos}\,\frac{\cos\frac{x}{2l}}{\cos\frac{a}{2l}} + \text{Const.}$$

Mikor $x=a$ legyen $y=0$, úgy a Const.$=2\pi$-nek egész számú több- szörösével és így:

$$\cos\frac{y}{2.l.i} = \cos\frac{yi}{2l} = \frac{\cos\frac{x}{2l}}{\cos\frac{a}{2l}}$$

honnan:

$$\cos\frac{x}{2l} = \cos\frac{a}{2l}\cos\frac{yi}{2l} \qquad \text{I.)}$$

vagy:

$$\cos\frac{x}{2l} = \cos\frac{a}{2l}\left[\frac{e^{\frac{y}{2l}} + e^{-\frac{y}{2l}}}{2}\right] \qquad \text{II.)}$$

Hogy e vonalat megvitathassuk és menetét megismerhessük, oldjuk meg a II.) alatti egyenletet y szerint; találjuk, hogy:

$$e^{\frac{y}{2l}}\cos\frac{a}{2l} = \cos\frac{x}{2l} \pm \sqrt{\cos^2\frac{x}{2l} - \cos^2\frac{a}{2l}}$$

Innen látható, $y=0$ akkor, ha

$$x = 4kl\pi \pm a$$

hol k tetszőleges, positiv vagy negativ szám, és a mig x a

$$4kl\pi - a \quad \text{és} \quad 4kl\pi + a$$

értékek közé esik, y mindaddig valós; ha ellenben x a

$$4kl\pi + a \quad \text{és} \quad 4(k+1)l\pi - a$$

értékek közé esik, úgy y imaginär. A görbe tehát egymással összefüggetlen részekből áll, mely részek azonban a $\cos\frac{x}{2l}$ periodicitásánál fogva, tökéletesen congruensek egymás között.

Az y minden positiv értékének egy ugyanakkora negativ érték felel meg, vagyis a görbe az X tengely felett és alatt egészen symmetrikus. Kitünik ez a

$$\frac{y}{2l} = \log \frac{\cos\frac{x}{2l} \pm \sqrt{\cos^2\frac{x}{2l} - \cos^2\frac{a}{2l}}}{\cos\frac{a}{2l}} \qquad \text{III.)}$$

egyenletből, hol is a gyökjel előtti $+$ jel y-nak két egyenlő nagy, de ellenkező jegyű értéket ad. Könnyen meg lehet ugyanis győződni, hogy

$$\log \frac{\cos\frac{x}{2l} + \sqrt{\cos^2\frac{x}{2l} - \cos^2\frac{a}{2l}}}{\cos\frac{a}{2l}} = -\log \frac{\cos\frac{x}{2l} - \sqrt{\cos^2\frac{x}{2l} - \cos^2\frac{a}{2l}}}{\cos\frac{a}{2l}}$$

A görbe tehát az X tengely felett és alatt symmetrikusan terül el.

E görbének — a III.) alatti egyenletből azonnal szembe ötlik — végtelenbe nyuló ága nem lévén, kérdés, y hol éri el maximumát. Az I.) alatti egyenlet mutatja, hogy y akkor maximum vagy minimum, ha

$$\cos\frac{x}{2l}$$

minimum vagy maximum, vagyis, ha

$$\sin\frac{x}{2l} = 0$$

ha tehát

$$x = 4kl\pi$$

Az X tengely feletti és alatti legnagyobb kitérés meg van tehát adva a következő kifejezés által:

$$\frac{y_{max}}{2l} = \log \frac{1 \pm \sin \frac{a}{2l}}{\cos \frac{a}{2l}}$$

Mindezekből következik, hogy a görbe csupa congruens, egymástól különvált zárt karikákból áll, melyek az Y tengely szerint jobban meg vannak nyúlva mint az X tengely szerint, minthogy a

$$\log \frac{1 + \sin \frac{a}{2l}}{\cos \frac{a}{2l}}$$

mindig nagyobb az $\frac{a}{2l}$-nél.

Azon esetben, a midőn $a=0$ azaz az amplitud igen kicsiny, lesz:

$$\log \frac{1 + \sin \frac{a}{2l}}{\cos \frac{a}{2l}} = \frac{a}{2l}$$

és ekkor a görbe isolált végtelen kis sugarú körökből áll, melyek $4l\pi$ távolságban vannak egymástól.

Mint második szélső esetet felvehetjük azt, a hol

$$a = l\frac{\pi}{2}$$

vagyis a mikor az inga félkörben leng. Itt:

$$\frac{y_{max}}{2l} = \log(1+\sqrt{2})$$

Az y_{max} és a közti viszony:

$$\frac{y_{max}}{a} = \frac{4}{\pi} \log(1+\sqrt{2})$$

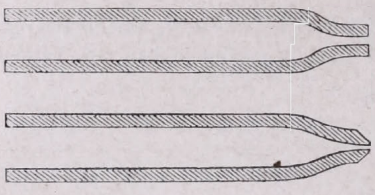
$$\frac{y_{max}}{a} = 1{\cdot}1222$$

A szerkesztőség levelezése.

F. D. úrnak. — *Az úgynevezett író-csövek készítéséről:* A registráló készülékeken nem csekély fontosságú az az író-cső, mely az eredményt papirszalagra rajzolja. Festékkel megtöltött szűk nyilású üvegcsövet szoktak e czélra használni, mert az ily csővel huzott vonal sokkal könnyebben észlel-

hető, mint az iróónnal készült rajz. Az ily csőnek előállítása azonban nem épen könnyű dolog, főleg ha azt kívánjuk, hogy alig észrevehető érintkezés mellett mégis egyenletesen, megszakadás nélkül ömöljék ki a szines folyadék. Leghelyesebben és legbiztosabban a következő módon járunk el: 4—5 milliméter átmérőjü és $1^1/_2$—2 mm. falvastagságú üvegcsövet akként huzunk ki a fúvó-lámpán, hogy capillaris cső keletkezzék ugyan, de a fal vastagsága körülbelül csak olyan maradjon, mint az eredeti csőé (1. rajz). Ezután a cső szük végét most már olajos kvarcz-köszörün kúpalakúra köszörüljük mindaddig, míg a 2-dik rajzon előtüntetett alak létrejön. (W.)

1. ábra.



2. ábra.

FÖLADATOK.

27. A mathematikai inga fölfüggesztési pontja vizszintes egyenesen szabadon mozoghat. Határoztassék meg az inga mozgása. (Réthy Mór.)

28. Gauss-Schuhmacher levelezésében a következő feladatot olvassuk:

Mily egész számú értékeket vehetnek fel valamely háromszögnek oldalai, hogy a körülirt kör sugara szintén egész szám legyen. (Közli: Hunyady.)

29. Állítsunk szigetelő alapra két elektrikus condensatort. Az egyiknek egymás felett álló lemezei legyenek A_1 és A_2, a másikéi B_1 és B_2. — Az A_1 és B_1 szigetelők nyelekkel vannak ellátva. Töltsük meg A_2 lemezt szabad elektricitással, e közben a felette álló A_1-t a földdel vezetőleg összekötvén.

A condensatorok szabad elektricitását következő eljárás szerint gyorsan szaporíthatjuk:

a) A_1-t szigetelő nyelén A_2-ről leemeljük s B_2-hez érintetjük, e közben B_1-t a földdel vezetőleg összekötvén. Ezután A_1-t A_2 fölé visszahelyezzük.

b) B_1-t szigetelő nyelén B_2-ről leemeljük s A_2-vel érintetjük, e közben A_1-t a földdel vezetőleg összekötvén. Ezután B_1-t B_2 fölé visszahelyezzük. E műtétet többször ismételhetjük.

Fejeztessék ki mennyiségtani alakban a szabály, mely szerint e műtétnek n-szeri ismétlése által az egyes condensatorok szabad elektricitását sokszorosítjuk; feltéve, hogy érintés közben A_1 lemez B_2-nek, B_1 pedig A_2-nek *összes* elektricitását átadja. (B. Eötvös Loránd.)

Sajtó-hiba.

A 23. feladat 3-ik sorában $\sin^2\varepsilon$ helyett $2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$-nek kell állania.

Budapest, 1877. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

II. kötet. 1877. 14. füzet.

APOLLONIUS FELADATÁNAK MEGOLDÁSÁHOZ.

Hunyady Jenötől.

Az Apollonius-ról elnevezett feladat így hangzik: »három adott körhöz kerestetik az őket érintő kör.«

E feladatot már Apollonius egy reánk fenn nem maradt értekezésben más hasonnemű feladatokkal együtt megoldotta. Viéte »Apollonius Gallus« czimű művében, mely 1600-ban jelent meg először, ugyanazon feladatok megoldását egészen önállóan tárgyalta. Viéte óta több kitünő mathematikus foglalkozott e feladat megoldásával.

Descartes e feladat megoldása felett Erzsébet herczegnővel (Frigyes pfalzi választó-fejedelem leányával) levelezett. E levelekben a feladatnak egy megoldását találjuk, s azt is kivehetjük az említett levelezésből, hogy Erzsébet herczegnő is talált megoldást, a melyről Descartes igen elismerően nyilatkozik. [1]) E problémával továbbá Newton [2]) is foglalkozott.

Skorzewska lengyel grófnő Holland-nak [3]) adta fel e problémát, és ez utóbbi, minthogy saját megoldása ki nem elégíté, Lambert-

[1]) Renati Descartes epistolae, pars tertia. Amstel. 1683 p. 286—301.

[2]) Arithmetica universalis T. I. Amstel. 1741. p. 273. Probl. XLVII. Lásd szintén Newton: Philosophiae naturalis principia mathematica. Editio Leseur et Jacquier T. I., Genevae 1739 p. 184, Lemma XVI.

[3]) Johann Heinrich Lambert's deutscher gelehrter Briefwechsel. Herausgegeben von Johann Bernoulli I. Bd., p. 308. XXXIII. Brief (29. Nov. 1769). A levél kelte el van hibázva, helyesen: 29. Nov. 1768. Továbbá p. 318. XXXV. Brief (19. März 1769.)

hez [4]) fordult, ki e feladatnak két megoldását közölte. Egy másik feloldás szerzője Oberreit. [5]) Ezen érdekes feladat megoldásáról továbbá Euler [6]) és Fuss [7]) is irtak értekezéseket.

Feladatunk, valamint az annak megfelelő tér-probléma, mely utóbbi Fermat-ban találta első megfejtőjét, szintén több értekezés tárgyát képezte a jelen században is. Közülök a következőket említjük fel. Carnot [8]) a probléma megfejtésére szolgáló utat jelölte ki és a hosszadalmas számítások kikerülése végett csak a végeredményt említette meg; továbbá Gauss [9]), Binet [10]), Gergonne, Plücker és Poncelet [11]) értekezéseit.

Legujabban és legkimerítőbben fejtette meg e feladatot Stoll [12]) úr. Mertens [13]) úr a megfejtést a determináns-elmélet segítségével végezte.

A probléma történetére vonatkozólag az általunk említett eredeti forrásokon kivül még Montucla [14]), Klügel [15]) és Chasles [16]) munkáit idézzük. Végre csak kötelességet teljesítünk, midőn kijelentjük, hogy e történelmi adatok teljességre igényt nem tartanak.

E sorokban Apollonius feladatának csak azon részével foglalkozunk, mely az érintő kör sugarának meghatározására vonatkozik.

---

[4]) Ugyanott p. 310—314, XXXIV. Brief, 11. Dec. 1768. Lásd szintén Lambert G. R. von Davisson-hoz czimzett, 1775. január 28-áról kelt levelét. Ugyanezen levélgyűjtemény IV. kötetében 424—426. ll.

[5]) Ugyanezen levelezés V. kötetében 254—256. ll.

[6]) Nova Acta Acad. Petropolitanae VI. köt. 95—101. ll.

[7]) Ugyanott 102—113. ll. Két feloldást tartalmaz.

[8]) Géometrie de Position. Art. 357.

[9]) Lásd Geometrie der Stellung von L. N. M. Carnot, übersetzt von Schumacher. II. Theil, 377. l., valamint Gauss Werke, IV. Bd., 399. l.

[10]) Journal dr l'école polyt. XVII-ième. Cahier, 115—119. ll.

[11]) Application d'analyse et de Géometrie, qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures. T. I. 30—41. ll.

[12]) »Zum Problem des Apollonius« czímű értekezésben. Clebsch: Mathem. Annalen. VI. köt. 613—632. ll.

[13]) Crelle-Borchardt: Journal für die reine u. angew. Mathem. LXXVII. köt., 102. l.

[14]) Histoire des mathématiques. I. köt., 263. l.

[15]) Mathematisches Wörterbuch 3-ter Theil, 134. l. és tovább, valamint szintén Supplemente zu Klügel's Wörterbuch von J. A. Grunert. I. Abth. 28. l. és tovább.

[16]) Aperçu historique Chap. II. §. 2.

A megfejtést determinánsok segítségével végezzük; különben megjegyezzük, hogy kiinduló pontunk, valamint az általunk követett út, Mertens úr megoldásáétól egészen eltérő.

---

1. Mielőtt a feladat megoldásához fognánk, előre kiemeljük, hogy a kérdéses feladatnak általában több megoldás felelhet meg. Ennek belátására az adott körökről felteszszük, hogy azok egymást ne messék és közülök egyik se keríttessék be a másika által.

Az adott körök helyzetéről, az előbb említett különös esetet szem előtt tartva, látjuk, hogy a keresett érintő kör érintheti a három adott kört:

a) Úgy, hogy a keresett kör a három adott kört kizárja, tehát mind a hármat kizárólag.

b) Úgy, hogy az érintő kör a három adott kört magába zárja, tehát mind a hármat bezárólag.

c) Kettőt kizárólag és egyet bezárólag.

d) Egyet kizárólag és kettőt bezárólag.

Miután a *c*) és *d*) alatti pontok közől mindegyik három megoldást foglal magában, látjuk, hogy a kiszemelt esetben a feladatnak nyolcz megoldása van.

2. A feladat megoldását azzal az esettel kezdjük meg, midőn a három adott körhöz az őket kizárólag érintő kör sugarát keressük, megjegyezvén, hogy a többi megoldások is ebből egyszerű módosítások által erednek.

Jelöljük az adott körök középpontjait *1*, *2* és *3*-mal, sugarait pedig r_1, r_2, r_3-mal, a keresett kör középpontját O-val és sugarát ϱ-val; továbbá az *1, 2, 3* pontok által meghatározott háromszög *23, 31, 12* oldalait a, b, c-vel, úgy az *1, 2, 3* és O pontokat egyenesek által összekötve, az *O123* teljes négyszög ered, melynek O csúcsában találkozó oldalai a következők:

$$O_1 = r_1 + \varrho$$
$$O_2 = r_2 + \varrho$$
$$O_3 = r_3 + \varrho$$

az ezeknek szemben fekvől oldalok pedig a, b, c.

A teljes négyszög e hat oldala között bizonyos összefüggés létezik, mely a jelen esetben a következő egyenlet által van kifejezve: [17])

---

[17]) Lásd a szerző értekezésében »A determinánsok a mértanban« »Műegyet. Lapok« I. köt. 236. lapon a (7.) alatti egyenletet.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (r_1+\varrho)^2, & (r_2+\varrho)^2, & (r_3+\varrho)^2 \\ 1 & (r_1+\varrho)^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & (r_2+\varrho)^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & (r_3+\varrho)^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.)$$

Ebből kapjuk meg némi átalakítás után a feladat megoldását.

Ha az itt előforduló determinánsban a ϱ^2-tel szorzott első sort és oszlopot a második sorból és oszlopból kivonjuk, úgy még továbbá:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\varrho^2 & r_1^2+2r_1\varrho, & r_2^2+2r_2\varrho, & r_3^2+2r_3\varrho \\ 1 & r_1^2+2r_1\varrho & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & r_2^2+2r_2\varrho & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & r_3^2+2r_3\varrho & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

és ha még az első sort és oszlopot rendre r_1^2, r_2^2, r_3^2-tel szorozzuk és azután a 3-dik, 4-dik, 5-dik sorból és oszlopból kivonjuk, úgy ered:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\varrho^2 & 2r_1\varrho & 2r_2\varrho & 2r_3\varrho \\ 1 & 2r_1\varrho & -2r_1^2 & \gamma & \beta \\ 1 & 2r_2\varrho & \gamma & -2r_2^2 & \alpha \\ 1 & 2r_3\varrho & \beta & \alpha & -2r_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

hol is rövidség kedvéért a következő jelöléseket használjuk:

$$\begin{aligned} a^2 - r_2^2 - r_3^2 &= \alpha \\ b^2 - r_1^2 - r_3^2 &= \beta \\ c^2 - r_1^2 - r_2^2 &= \gamma \end{aligned} \quad (2.)$$

Ha továbbá az előbbi determinánsban a 2-dik sort és oszlopot ϱ-val elosztjuk és $\frac{1}{\varrho} = r$-rel teszszük, úgy végre az (1.) alatti egyenletet a következő alakban nyerjük:

$$\begin{vmatrix} 0 & r & 1 & 1 & 1 \\ r & -2 & 2r_1 & 2r_2 & 2r_3 \\ 1 & 2r_1 & -2r_1^2 & \gamma & \beta \\ 1 & 2r_2 & \gamma & -2r_2^2 & \alpha \\ 1 & 2r_3 & \beta & \alpha & -2r_3^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.)$$

mely négyzetes egyenletből az érintő kör sugarát meghatározhatjuk.

A (3.) alatti egyenlet tehát a következő alakú lesz:

$$Mr^2 + 2Nr + P = 0 \quad (4.)$$

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

és ha ebben r ismét ϱ által fejeztetik ki, úgy ez a következőbe megy át:

$$P\varrho^2 + 2N\varrho + M = 0 \qquad (5.)$$

Az M, N, P együtthatók értékeit a (3.) és (4.) alatti egyenletek összehasonlításából nyerjük.

Ha a (3.) alatti egyenletben $r=0$ teszszük, úgy találjuk, hogy:

$$P = \begin{vmatrix} e & f & 1 & 1 & 1 \\ f & g & 2r_1 & 2r_2 & 2r_3 \\ 1 & 2r_1 & -2r_1^2 & \gamma & \beta \\ 1 & 2r_2 & \gamma & -2r_2^2 & \alpha \\ 1 & 2r_3 & \beta & \alpha & -2r_3^2 \end{vmatrix}, \qquad (6.)$$

megjegyezvén, hogy $e=f=0$ és $g=-2$. Ezen mennyiségeket csupán csak abból a czélból használjuk az illető számértékek helyett, hogy P-t szerintök differentiálhassuk. Továbbá találjuk, hogy

$$M = -\frac{\partial^2 P}{\partial e\,\partial g} \text{ és } N = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial f} \qquad (7.)$$

A (4.) alatti egyenletnek negativ discriminánsát megtaláljuk, ha a determináns-elmélet következő ismeretes tételéből [18]) indulunk ki:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial e} & \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial f} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial f} & \frac{\partial P}{\partial g} \end{vmatrix} = P\frac{\partial^2 P}{\partial e\,\partial g}$$

és innét az előbbi értékek tekintetbe vételével:

$$N^2 - MP = \frac{\partial P}{\partial e}\cdot\frac{\partial P}{\partial g} \qquad (8.)$$

4.) P, N, $\frac{\partial P}{\partial e}$ és $\frac{\partial P}{\partial g}$ értékeit még továbbá redukálhatjuk. Ha nevezetesen P-ben az r_1, r_2, r_3-mal szorzott 2-dik sort a 3-dik, 4-dik és 5-dik sorhoz adjuk, úgy:

$$P = -2\begin{vmatrix} 0 & C & B & 1 \\ C & 0 & A & 1 \\ B & A & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2D \qquad (9.)$$

megjegyezvén, hogy:

---

[18]) Lásd p. Baltzer: »Theorie und Anwendung der Determinanten.« 3-dik kiadás, §. 6, 3.

$$A = \alpha + 2r_2 r_3 = a^2 - (r_2 - r_3)^2$$
$$B = \beta + 2r_1 r_3 = b^2 - (r_1 - r_3)^2 \qquad (10.)$$
$$C = \gamma + 2r_1 r_2 = c^2 - (r_1 - r_2)^2$$

Ha pedig N-ben az r_1, r_2, r_3-mal szorzott első oszlopot a 2-dik, 3-dik és 4-ik oszlophoz adjuk, úgy a (10.) alatti jelölések megtartásával:

$$N = 2\begin{vmatrix} r_1 & 0 & C & B \\ r_2 & C & 0 & A \\ r_3 & B & A & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2E \qquad (11.)$$

Továbbá $\frac{\partial P}{\partial e}$-ben az r_1, r_2, r_3-mal szorzott első sort a 2-dik, 3-dik és 4-dik sorhoz adva, találjuk, hogy

$$\frac{\partial P}{\partial e} = -4ABC.$$

Végre $\frac{\partial P}{\partial g}$-ben az r_1, r_2, r_3-mal szorzott 4-dik sort és oszlopot az 1-ső, 2-dik, 3-dik sorhoz és oszlophoz adva, ered:

$$\frac{\partial P}{\partial g} = \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16T^2$$

ha az *123* háromszög területét T-vel jelöljük.

Ezeknél fogva tehát:

$$N^2 - MP - \frac{\partial P}{\partial e} \cdot \frac{\partial P}{\partial g} = 64T^2ABC$$

és az (5.) alatti egyenletből következik, hogy:

$$\varrho = \frac{-E \pm 4T\sqrt{ABC}}{D}.$$

5. Ha a kizárólag érintő kör sugarának meghatározása forog kérdésben, úgy az előbbiekben láttuk, hogy az (5.) alatti egyenlet vezet czélhoz. Áttérve már most a bezárólag érintő kör meghatározására, úgy könnyen belátható, hogy ez esetben a megoldás az előbbiből adódik ki, ha az r_1, r_2, r_3 mennyiségeknek az előjeleit megváltoztatjuk, azaz ha r_1, r_2, r_3 helyett $-r_1, -r_2, -r_3$-at teszünk. Lássuk tehát, hogy miként változik az (5) alatti egyenlet e helyettesitések által.

A (7) alatti egyenletek elseje mutatja, hogy M nem változik, va-

lamint a (10) alatti egyenletek, hogy az A, B, C mennyiségek sem változnak és ezért, amint a (9) alatti egyenletből kitünik, P sem, de a (11) alatti egyenletből látni, hogy N változik, a mennyiben ellenkező előjelü lesz. Igy tehát a bezárólag érintő kör sugarára nézve a következő egyenletet nyerjük:

$$P\varrho^2 - 2N\varrho + M = 0 \qquad (13.)$$

melyet az (5) alatti egyenlettel összehasonlítva találjuk, hogy

a) A két egyenletnek a gyökei egyidejüleg valósak, vagy képzetesek, miután discriminánsaik egyenlők.

b) Feltéve, hogy a két egyenletnek a gyökei valósak, úgy továbbá látjuk, hogy a gyökök absolut értékei egyenlők, de előjelben különbözők. Ha tehát ϱ_1 és ϱ_2 az (5) alatti egyenletnek a gyökei, úgy a (13) alatti egyenletnek a gyökei $-\varrho_1$ és $-\varrho_2$.

Ez utóbbi pontból következik, hogy ha az (5) alatti egyenletnek gyökei tevőlegesek, úgy a (13) alatti egyenletnek a gyökei nemlegesek; ha továbbá az elsőnek egy positiv és egy negativ gyöke van, úgy a másodiknak is egy negativ és egy positiv gyök felel meg; ha végre az elsőnek két negativ gyöke van, úgy a másodiknak két positiv gyöke lesz.

Miután a feladat természeténél fogva a negativ feloldások nem használhatók, azért az első esetben két kizárólag, a második esetben egy kizárólag és egy bezárólag, végre a harmadik esetben két bezárólag érintő kör létezik. Ezen állitás homlok egyenest ellenkezik ama feltevéssel, melyhez az elemző mértan legmodernebb tankönyvei is járulni látszanak, a mennyiben azok csak a középső esetet, a midőn t. i. egy kizárólag és egy bezárólag érintő kör létezik, vélik lehetségesnek. Az említett tankönyvek e tévedésére először Stoll[19]) ur figyelmeztette a mathematikusokat.

6. Az előbb említett tulajdonságokkal birnak azon négyzetes egyenletek is, a melyek közül az első arra az esetre vonatkozik, a midőn két kör kizárólag és a harmadik bezárólag érintetik, a másik pedig vonatkozik azon esetre, a midőn az első két kör bezárólag és a harmadik kizárólag érintetik.

Az értekezés elején említett nyolcz eset négy párt képez és mindegyik pár egymással bizonyos értelemben véve conjugált lesz. Ezen esetek csak is az r_1, r_2, r_3 sugarak előjeleiben különböznek, amint azt a következő táblázat mutatja:

---

[19]) Lásd a 12) alatti jegyzetben idézett értekezést.

$$
\begin{aligned}
&+ r_1 + r_2 + r_3 \\
&- r_1 - r_2 - r_3 \qquad \text{(I.)} \\
&- r_1 + r_2 + r_3 \\
&+ r_1 - r_2 - r_3 \qquad \text{(II.)} \\
&+ r_1 - r_2 + r_3 \\
&- r_1 + r_2 - r_3 \qquad \text{(III.)} \\
&+ r_1 + r_2 - r_3 \\
&- r_1 - r_2 + r_3 \qquad \text{(IV.)}
\end{aligned}
$$

A II, III és IV alatti pároknak megfelelő egyenletei, melyektől az érintő kör meghatározása függ, szintén oly tulajdonságúak lesznek, mint az I alatti párhoz tartozó egyenletek.

7. A feladat teljes megfejtésére kutatnunk kell továbbá, hogy hány valós megoldása lesz a feladatnak, az adott körök különféle helyzeténél.

Az előbb kitüzött czél elérésére az illető egyenletpárok negativ discriminását kell meghatároznunk, a mely az (I) alatti esetnek megfelelőleg a (12) alatti egyenlet szerint a következő:

$$64\,T^2\,A\,B\,C$$

vagy ha A, B, C értékeit helyettesitjük és az egészet Δ-val jelöljük

$$\Delta = 64T^2[a+r_2-r_3][a-(r_2-r_3)][b+r_1-r_3][b-(r_1-r_3)][c+r_1-r_2][c-(r_1-r_2)]$$

A (II,) (III) és (IV) alatti eseteknek megfelelő egyenletek negativ discriminánsait Δ_1, Δ_2, Δ_3-mal jelölvén, azokat Δ-ból az r mennyiségek előjeleinek kellő megváltoztatása által nyerjük, úgy hogy:

$$\Delta_1 =$$
$$= 64T^2[a+r_2-r_3][a-(r_2-r_3)][b-(r_1+r_3)][b+r_1+r_3][c-(r_1+r_2)][c+r_1+r_2]$$
$$\Delta_2 =$$
$$= 64T^2[a-(r_2+r_3)][a+r_2+r_3][b+r_1-r_3][b-(r_1-r_3)][c+r_1+r_2][c-(r_1+r_2)]$$
$$\Delta_3 =$$
$$= 64T^2[a+r_2+r_3][a-(r_2+r_3)][b+r_1+r_3][b-(r_1+r_3)][c+r_1-r_2][c-(r_1-r_2)]$$

Miután $64T^2$ mindig tevőleges, és feltéve, hogy

$$r_1 > r_2 > r_3$$

úgy látjuk, hogy a Δ mennyiségekben még hátralevő hat tényező közül három mindig tevőleges, így p. Δ-ban

$$(a+r_2-r_3)\,(b+r_1-r_3)\,(c+r_1-r_2)$$

Igy tehát, ha a Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3-ban előforduló tevőleges tényezők szorzatát λ, λ_1, λ_2, λ_3-mal jelöljük, úgy e mennyiségek értékeit a következőképen irhatjuk:

$$\Delta = \lambda\,[a-(r_2-r_3)][b-(r_1-r_3)][c-(r_1-r_2)]$$
$$\Delta_1 = \lambda_1[a-(r_2-r_3)][b-(r_1+r_3)][c-(r_1+r_2)]$$
$$\Delta_2 = \lambda_2[a-(r_2+r_3)][b-(r_1-r_3)][c-(r_1+r_2)]$$
$$\Delta_3 = \lambda_3[a-(r_2+r_3)][b-(r_1+r_3)][c-(r_1-r_2)]$$

Ismeretes, hogy ezen mennyiségek előjelétől függ az (I,) (II,) (III) és (IV) alatti eseteknek megfelelő egyenletekben a gyökök természete.

8. Két kör helyzete vagy olyan, hogy azok nem metszik egymást és egymáson kivül fekszenek, vagy érintik egymást és egymáson kivül fekszenek, vagy hogy metszik egymást, vagy érintik egymást és egyik a másikban fekszik, vagy végre nem metszik egymást és az egyik a másikban fekszik.

Ha az érintéstől eltekintünk, úgy az előbbiek szerint egy körpárra a következő három eset lehetséges: 1-ször A két kör egymáson kivül fekszik. 2-szor A két kör metszi egymást. 3-szor Az egyik a másikban fekszik.

Az adott három kör három körpárt képez és igy az előbbiek szerint, az érintés kizárásával, a három körpár egymáshoz való helyzetére nézve huszonhét eset lehetséges, a melyek közül többen ugyanazt az esetet adják, úgy hogy egészben véve csak tizenkét esetet kell megkülönböztetnünk. Ezeket a Δ mennyiségek előjelével és a kérdésben forgó valós feloldásaival együtt, a következő táblázatban állitjuk össze.

				Δ	Δ_1	Δ_2	Δ_3	f. sz.
1)	$a > r_2+r_3$	$b > r_1+r_3$	$c > r_1+r_2$	+	+	+	+	8
2)	$r_2-r_3 < a < r_2+r_3$	$b > r_1+r_3$	$c > r_1+r_2$	+	+	−	−	4
3)	$a < r_2-r_3$	$b > r_1+r_3$	$c > r_1+r_2$	−	−	−	−	0
4)	$r_2-r_3 < a < r_2+r_3$	$r_1-r_3 < b < r_1+r_3$	$c > r_1+r_2$	+	−	−	+	4
5)	$a < r_2-r_3$	$b > r_1+r_3$	$r_1-r_2 < c < r_1+r_2$	−	+	+	−	4
6)	$r_2-r_3 < a < r_2+r_3$	$r_1-r_3 < b < r_1+r_3$	$r_1-r_2 < c < r_1+r_2$	+	+	+	+	8
7)	$a < r_2-r_3$	$r_1-r_3 < b < r_1+r_3$	$r_1-r_2 < c < r_1+r_2$	−	−	+	+	4
8)	$a < r_2-r_3$	$b < r_1-r_3$	$r_1-r_2 < c < r_1+r_2$	+	−	−	+	4
9)	$r_2-r_3 < a < r_2+r_3$	$r_1-r_3 < b < r_1+r_3$	$c < r_1-r_2$	−	+	+	−	4
10)	$a > r_2+r_3$	$b < r_1-r_3$	$c < r_1-r_2$	+	+	+	+	8
11)	$r_2-r_3 < a < r_2+r_3$	$b < r_1-r_3$	$c < r_1-r_2$	+	+	−	−	4
12)	$a < r_2-r_3$	$b < r_1-r_3$	$c < r_1-r_2$	−	−	−	−	0.

Innét látjuk, hogy az 1. 6 és 10 esetben a mikor a három kör egymást kizárja, vagy mind a három egymást metszi, vagy két kör a harmadikban fekszik és egymást nem metszi a kérdéses feladatnak nyolcz valós megoldása van, holott még ellenben a 3.) és 12.) esetben

a mikor az egyik kör a másik kettőt kizárja, de ez utóbbiak közül az egyik a másikat magába zárja, vagy midőn az első körben a második és ebben ismét a harmadik fekszik, úgy a feladatnak nincsen valós megoldása. A hátralevő hét eset mindegyikének négy valós feloldás felel meg.

Az ezen problémának megfelelő feladat megoldása a gömbfelületen legközelebb az akadémiai értekezésekben fog megjelenni.

(Budapest, 1877. február 18-án.)

A MÉRLEGRÚD MEGHAJLÁSA A TEHER ALATT.

Kruspér Istvántól.

Ismeretes dolog, hogy a mérlegrúd túlsúly miatti elmozdulási szöge a nyugalmi állapotból — többek közt — attól a távolságtól is függ, mely a két végső él összekötő vonala és a középső él közt foglaltatik. Az elmélet azt tanitja, hogy a midőn e távolság $= 0$, vagy is a midőn a három él egy sikba esik, a mérlegrúd elmozdulási szöge kis és nagy megterhelésnél ugyan az marad. Ha a mérlegrúd olyan merev, hogy a teher alatt észrevehető meggörbülést nem szenved: az elmozdulási szög állandósága a mérlegnél csakugyan észrevehető is. De ha a mérlegrúd a teher alatt észrevehetőleg meggörbül, az elmozdulási szög nem maradhat állandó; mert ha a nevezett távolságot egy bizonyos megterhelésnél zérussá lehet is tenni, más tehernél a zérustól különböző fog lenni, és így a mérleg elmozdulási szöge is változni fog. Érdekesnek látszik észleletek által constatálni: vajjon van-e észrevehető meggörbülés valamely mérlegrúdon, és ha csakugyan van: mikép lehet a nagyságát az észleletekből meghatározni?

Általánosan ismert képletből indulok ki, mely az erőműtanban szokott levezettetni.

Legyen a mérlegrúd balkarjának hossza a, jobb karjának hossza b, hol a és b közel egyenlőknek gondoltatnak. A mérlegrúd súlya G, a két végső él összekötő vonalának távolsága a középső él alatt, üres serpenyőnél r, a mérlegrúd sulypontjának távolsága a középső él alatt, üres serpenyőnél r', a baloldali serpenyő sulya W, a jobboldali serpenyő sulya W'; ezek is csaknem egyenlőknek gondoltatnak.

Tegyünk a balserpenyőbe P, a jobbikba Q súlyt, melyek szintén

csaknem egyenlők. Ekkor a mérlegrúd meggörbül, s a végső éleket összekötő vonal a középső éltől lefelé Δr-rel távozik; hasonlóképen a mérlegrúd súlypontja is sülyed $\Delta r'$-el; vagyis r és r', $r+\Delta r$ és $r'+\Delta r'$ mennyiségekké változnak át. Ha most még P mellé egy kis p sulyocskát teszünk, a belserpenyő lebillen, s a végéleket összekötő vonal hajlásszögét a vizszinteshez α-nak nevezvén, az ismert egyenlet áll elő:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(P+p)a-Qb}{(P+Q+p+W+W')(r+\Delta r)+G(r'+\Delta r')}$$

Ezután tegyük a p sulyocskát Q mellé a jobb serpenyőbe, akkor lesz:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{Pa-(Q+p)b}{(P+Q+p+W+W')(r+\Delta r)+G(r'+\Delta r')}$$

Ez egyenleteket egymásból levonván, lesz.

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha' = \frac{p(a+b)}{(P+Q+p+W+W')(r+\Delta r)+G(r'+\Delta r')}$$

A tangensek különbségének a skálán az osztályrészeknek bizonyos u száma felel meg, ugy hogy, ha a skála egy osztály részének hosszát λ-val, a nyelv hosszát l-el jelöljük, állani fog ez a kifejezés:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha' = \frac{u\lambda}{l}.$$

Ennek helyettesitése, s az állandó tagoknak a változóktól való elkülönitése, és a törtek felfordítása által a következő egyenletre jutunk:

$$\frac{p(a+b)l}{\lambda}\,\frac{1}{u} = (P+Q)r + (P+Q+p+W+W')\Delta r + G\Delta r' + (W+W'+p)r + Gr'$$

Vegyük le a P és Q súlyokat a serpenyőkről; ekkor u más értéket fog felvenni, melyet u_0-val jelölünk, és Δr, és $\Delta r'$ zérussá válnak. Az egyenlet tehát ezzé alakúl:

$$\frac{p(a+b)l}{\lambda}\,\frac{1}{u_0} = (W+W'+p)r + Gr'$$

E két egyenletet egymásból levonván, lesz:

$$\frac{p(a+b)l}{\lambda}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u_0}\right) = (P+Q)r + (P+Q+p+W+W')\Delta r + G\Delta r'.$$

s ha még felteszszük, hogy $a=b$, $P=Q$, $W=W'$, és az egyenletet rendezzük, leszen:

$$r+\left(1+\frac{p+2W}{2P}\right)\Delta r + \frac{G}{2P}\Delta r' = \frac{pal}{\lambda P}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u_0}\right)$$

Ebben r, Δr, $\Delta r'$ ismeretlenek. A két utóbbit P-vel aránylagos-

nak lehet venni, tulajdonképen $P\cos\alpha$ azon erő, melynek hatása a mérlegrúd meggörbülését előidézi; de minthogy az α szög 2^0-ot meg nem halad, a cosinusát hiba nélkül 1-nek lehet venni. Ezen kivül Δr és $\Delta r'$ közt bizonyos összefüggés áll fenn, melyet következő módon lehet tekintetbe venni. A $\Delta r'$ értéke minden esetre a mérlegrúd alakjától függ; de gondoljuk, hogy a mérlegrúd egy anyagi egyenes vonal lenne, mely a súlyponton megyen keresztül. Ha most a vonal mind két vége P-vel terheltetik, közepén pedig feltámasztatik, a vonal egy kicsit meggörbül. Tegyük a görbült vonal helyett annak görbületi körét, s számitsuk a súlypont fekvését a körív szabálya szerint. Legyen a kör ív félhossza $= s$, a húr félhossza $= h$, a kősugár nagysága $= R$, az ív sulypontjának a körív csúcsától való távolsága $= z$, ekkor a mint az erőműtanból tudjuk:

$$s : h = R : R - z,$$

honnan következik

$$z = R\left(\frac{s-h}{s}\right)$$

Itt mind h, mind R ismeretlenek, és az ismeretes ív hosszában s-ben és a körív nyíl-hosszában, v-ben fejezendők ki. E végből elegendő pontossággal tehetjük

$$h = \sqrt{s^2 - v^2}$$

s minthogy r az s-hez képest igen kis mennyiség, elég közelitéssel lesz:

$$h = s\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{s^2}\right),$$

Hasonlókép elég közelítéssel áll ez az ismeretes mértani arány is:

$$s - h = \frac{1}{2}\frac{v^2}{s}$$

Helyettesítvén e kifejezéseket a fentebbi egyenletbe, lesz belőle

$$z = \frac{1}{4}v,$$

azaz: a sulypont távolsága a körvonal csúcspontjától egyenlő a nyílhossz negyed részével. Úgy de jelen esetben z nem más, mint $\Delta r'$ és v azonos Δr-rel; tehát feltéve, hogy a mérlegrúd egy homogen, parallelepipéd alakú, nehéz rúd által ábrázolható, lesz:

$$\Delta r' = \frac{1}{4}\Delta r.$$

E feltételnek a mérlegrudak ugyan ritkán fognak megfelelni, mert inkább hasonlitanak kettős pyramisból alkotott testhez, melyek alapjukkal össze vannak nőve. De ez esetben z mindig kisebb fog lenni az előbbinél. Az egyenes vonali alaknak megfelelő eset a legrosszabb, a legkedvezőtlenebb fog lenni. S ha még is ezt veszszük zsinórmértékül, ezt csak azért teszszük, hogy a hatás annál feltünőbb legyen. A kérdéses mennyiség igy is olyan kicsiny, hogy az a többi nagy mennyiségek mellett elhanyagolható is volna.

Tegyük tehát

$$\Delta r = \vartheta . P, \text{ és } \Delta r' = \frac{1}{4}\Delta r.$$

ekkor lesz:

$$r + (P + p + W + \frac{G}{8})\vartheta = \frac{pal}{\lambda P}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}\right)$$

Egy másik súlynál

$$r + (P' + p + W + \frac{G}{8})\vartheta = \frac{pal}{\lambda P'}\left(\frac{1}{u'} - \frac{1}{u_0}\right)$$

Ezeket egymásból levonván, lesz:

$$\vartheta = \frac{pal}{\lambda(P - P')}\left[\frac{1}{P}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}\right) - \frac{1}{P'}\left(\frac{1}{u'} - \frac{1}{u_0}\right)\right]$$

s ebből:

$$r = \frac{-pal}{\lambda(P - P')}\left[\frac{\left(P' + W + \frac{G}{8}\right)}{P}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}\right) - \frac{P + W + \frac{G}{8}}{P'}\left(\frac{1}{u'} - \frac{1}{u_0}\right)\right]$$

kol p mint a P és W mellett elenyésző mennyiség el van hagyva. ϑ nem lehet tagadó értékü, mert az felfelé való görbülésnek felelne meg, mi a dolog természetével ellenkezik. De 0 igen is lehet, ha nincs meggörbülés s ez akkor áll elő, ha

$$\frac{1}{P}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}\right) = \frac{1}{P'}\left(\frac{1}{u'} - \frac{1}{u_0}\right).$$

Küszöböljük ki ebből és az r egyenletéből az $\frac{1}{u'} - \frac{1}{u_0}$ mennyiséget, úgy erre a képletre jövünk

$$r = \frac{pal}{\lambda P}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}\right)$$

mely a görbülés nélküli mérlegrúd élvonalának távolságát szolgáltatja a középső éltől.

Mindezen képletek nem kívánnak más adatokat, mint a melyeket a mérlegről könnyen le lehet venni.

A ϑ és r meghatározásának pontosságát a következő képletekből lehet megitélni. A ϑ és r formulái következő alakok által ábrázolhatók

$$\vartheta = A(x-x'), \quad r = -A(Bx-B'x')$$

hol A, B, B' állandókat jelentenek

$$x = \frac{1}{P}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^0}\right), \quad x' = \frac{1}{P'}\left(\frac{1}{u'} - \frac{1}{u_0}\right), \quad u, u', u_0 \text{ hibákkal}$$

terhelt, független változó mennyiségeket ábrázolnak. Differentiáljuk az első képletet, akkor

$$d\vartheta = A(dx-dx'), \text{ vagy } \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dx-dx'}{x-x'}$$

továbbá:

$$dx = \frac{1}{P}\left(-\frac{du}{u^2} + \frac{du_0}{u_0^2}\right), \quad dx' = \frac{1}{P'}\left(-\frac{du'}{u'^2} + \frac{du_0}{u_0^2}\right)$$

ezeket helyettesítvén, lesz:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{du}{u}\cdot\frac{1}{uP}\cdot\frac{1}{x-x'} - \frac{du'}{u}\cdot\frac{1}{u'P'}\cdot\frac{1}{x-x'} + \frac{du_0}{u_0}\cdot\frac{1}{u_0}\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{P'}\right)\frac{1}{x-x'}$$

Hasonlóképen lesz:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{du}{u}\cdot\frac{P'+W+\frac{G}{8}}{Pu}\cdot\frac{1}{\left(P'+W+\frac{G}{8}\right)x-\left(P+W+\frac{G}{8}\right)x'} -$$

$$-\frac{du'}{u'}\cdot\frac{P+W+\frac{G}{8}}{P'u'}\cdot\frac{1}{\left(P'+W+\frac{G}{8}\right)x-\left(P+W+\frac{G}{8}\right)x'} +$$

$$+\frac{du_0}{u_0}\cdot\frac{1}{u_0}\left(\frac{P'+W+\frac{G}{8}}{P}-\frac{P+W+\frac{G}{8}}{P'}\right)\frac{1}{\left(P'+W+\frac{G}{8}\right)x-\left(P+W+\frac{G}{8}\right)x'}$$

E terjedelmesnek látszó képletek a gyakorlatban sokkal egyszerűbb alkalmazást nyernek, minthogy a ϑ és r kiszámitása közben előállott számok a képletekben előforduló tényezők legnagyobb részét már készen adják. Szolgáljon egy pár példa felvilágositásul:

1. Példa. Egy Deleuil-féle mérlegen következő 3 észlelést tettem:

$p = 0{\cdot}2\ gr.$	$P = 0$	$P_1 = 1000\ gr.$	$P_2 = 2000\ gr$	$P_3 = 3000\ gr.$
	$u_0 = 5{\cdot}7$	$u_1 = 6{\cdot}0$	$u_2 = 5{\cdot}8$	$u_3 = 5{\cdot}8$
	$u_0 = 6{\cdot}1$	$u_1 = 5{\cdot}6$	$u_2 = 5{\cdot}6$	$u_3 = 5{\cdot}4$
	$u_0 = 6{\cdot}1$	$u_1 = 6{\cdot}9$	$u_2 = 5{\cdot}9$	$u_3 = 5{\cdot}6$
közép:	$u_0 = 5{\cdot}97$	$u_1 = 5{\cdot}83$	$u_2 = 5{\cdot}77$	$u_3 = 5{\cdot}60$
középeltérés:	$\pm = 0{\cdot}18$	$\pm = 0{\cdot}16$	$\pm 0{\cdot}11$	$\pm 0{\cdot}13$

E mérlegnél az elmozdulási szögek különböző megterheltetésnél oly egyformák, hogy a különbségeket bizvást lehet az észlelési hibáknak tulajdonitni; s noha a rendszeres változásnak némi nyomait mutatják, de mégis csak olyan jelentéktelenek, hogy belőlök a görbülésre következtetni nem lehet. Ezek az észlelések egyszersmind világosan mutatják, hogy a végső élek összekötő vonala csaknem egészen a középső élen megy keresztül.

2. Példa. Egy 1 kil. terhelhetőségü mérlegen, de a melyen még szükségből 2 k.-ot is meg lehet mérni, 7 mérést tettem. A mérleg méretei ezek:

$a=188\,mm.$, $\lambda=1\,mm.$, $l=358\,mm.$, $W=275\,gr.$, $G=315\,gr.$

$p=0{\cdot}2\,gr.$	$P_0=0$	$P_1=500\,gr.$	$P_2=1000\,gr.$	$P_3=2000\,gr.$
	$u_0=15{\cdot}10$	$u_1=12{\cdot}05$	$u_2=9{\cdot}80$	$u_3=6{\cdot}80$
	15·25	11·90	10·05	6·75
	15·20	12·00	9·90	6.85
	15·15	11·85	9·50	7·10
	15·45	11·95	10·00	7·00
	15·20	12·05	9·80	6·80
	15·25	11·90	10·05	6·85
közép:	$u_0=15{\cdot}24$	$u_1=11{\cdot}96$	$u_2=9{\cdot}87$	$u_3=6{\cdot}88$
középeltérés:	$\pm$ 0·06	$\pm$ 0.05	$\pm$ 0·15	$\pm$ 0·10

Itt már az elmozdulási szög határozottan csökken, midőn a megterhelés növekszik, tehát a végső élek összekötő vonala a középső él alá esik, s talán a mérlegrúd is meggörbül. Ennek megitélése végett mindenek előtt a következő mennyiségeket kell kiszámitni:

$$\frac{1}{P_1}\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_0}\right)=0{\cdot}0000360\ldots x_1$$

$$\frac{1}{P_2}\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_0}\right)=0{\cdot}0000357\ldots x_2$$

$$\frac{1}{P_3}\left(\frac{1}{u_3}-\frac{1}{u_0}\right)=0{\cdot}0000399\ldots x_3$$

A két első különbsége oly csekély, hogy az egészen az észlelési hibák határai közé esik; sőt az észlelési hibák e mennyiségeket annyira megrontották, hogy a második kisebbé lett az elsőnél, holott a meggörbülés esetében annak nagyobbnak kellene lennie; 1 k. terheltetésig tehát a mérlegrúd meggörbülését nem lehet constatálni, de 2 k. ter-

heltetésnél már határozottan mutatkozik az, noha még ekkor is csekély marad.

Vegyük tehát $P = 2000$, $P = 1000$, $p = 0.2$ a számítás alapjául, akkor lesz:

$$\begin{array}{r} x = 0{\cdot}0000399 \\ x' = 0{\cdot}0000357 \\ \hline x - x' = 0{\cdot}0000042 \end{array}, \quad \theta = 0^{mm}{\cdot}000056, \quad r = 0^{mm}{\cdot}41$$

s a mérlegrúd meggörbülése $2k$-ra teszen $0^{mm}{\cdot}11$

$$\frac{du}{u} = \frac{0{\cdot}10}{6{\cdot}88} \text{ közel } \frac{1}{69}, \quad \frac{du'}{u'} = \frac{0{\cdot}15}{9{\cdot}87} \text{ közel } \frac{1}{66},$$

$$\frac{du_0}{u_0} = \frac{0{\cdot}06}{15{\cdot}24} \text{ közel } \frac{1}{254}.$$

Ezekből következik:

$$\frac{d\theta}{\theta} \; u \text{ szerint közel } \pm \frac{1}{4}.$$

$$\frac{d\theta}{\theta} \; u' \text{ szerint közel } \pm \frac{1}{3},$$

$$\frac{d\theta}{\theta} \; u_0 \text{ szerint közel } \pm \frac{1}{32},$$

Ugy szintén:

$$\frac{dr}{r} \; u \text{ szerint közel } \pm \frac{1}{22}.$$

$$\frac{dr}{r} \; u' \text{ szerint közel } \pm \frac{1}{9},$$

$$\frac{dr}{r} \; u_0 \text{ szerint közel } \pm \frac{1}{70}.$$

Próbaképen számitsuk ki a kevesebb mennyiségeket még egy más combinatióból, választván

$$P = 2000, \quad P = 500, \quad p = 0{\cdot}2;$$

ekkor:

$$\theta = 0^{mm}{\cdot}000038, \quad r = 0^{mm}{\cdot}46\text{-nak}$$

találtatik, mely eredmények az előbbiektől csak a várható hiba határai közt külömböznek.

Keressük még az r értékét azon feltevés mellett, hogy a mérlegrúd meg nem görbül; használjuk fel erre a két első megterheltetésnek megfelelő észleleteket, akkor:

$$P = 500\ gr.\text{-ból}\quad r = 0^{mm}{\cdot}480,$$

és

$$P = 1000\ gr.\text{-ból}\quad r = 0^{mm}{\cdot}488$$

eredményeket találunk.

Egy második próba végett oly adatokból számítván, melyek $p=0{\cdot}1$ túlsúlylyal tett észleletekből nyerettek, $\theta=0^{mm}{\cdot}000020$, $r=0^{mm}{\cdot}45$ találtatott, mely eredmények az előbbiekkel igen jól egyeznek.

A TÖBB ISMERETLENT TARTALMAZÓ ELSŐFOKÚ CONGRUENTIA-RENDSZER ÁLTALÁNOS ELMÉLETE.

König Gyulától.

I.

A »Disquisitiones arithmeticae«, Gauss ez alapvető munkája az egyetlen, mely az itt részletesen kifejtendő elméletet érinti. »E fejezet azonban,« — ezt olvassuk ott *) — »ha teljes szigorral akarnók a részleteket előterjeszteni, túlságos terjedelmet nyerne; minthogy azonban itt nem is feladatunk, hogy mindent kimerítsünk, hanem csak az, hogy a fontosabbakat előadjuk, jelenleg csak néhány megjegyzésre szorítkozom, és a dolog részletes tárgyalását fönntartom magamnak más alkalomra.« Gauss azonban e tárgyra többé soha sem tért vissza, és igy a számelméletnek aránylag elemi részében hézag maradt, mely eddig nincs betöltve. Igy történt, hogy a későbbi tan- és kézikönyvek (még Serret-é is) a Gauss által adottaknak reproductiójára szorítkoznak. Midőn ezeket saját tankönyvembe (»Bevezetés a felsőbb algebrába« 44 l.) fölvettem, részletesebben foglalkoztam e problémával, mely lényegére nézve a következő *két* föladatot foglalja magában: meghatározni a megoldás *lehetőségének* általános föltételét, és a lehetőség esetében meghatározni a különböző *gyökrendszert* és e gyökrendszerek *számát*. Gauss maga csak arra szorítkozott, hogy kimutassa miként lehet az egyszerűbb esetekben, ép úgy mint az egyenleteknél, az adott rendszerből oly congruentiát szerkeszteni, mely csak az egyik ismeretlent tartalmazza.

*) Carl Friedrich Gauss Werke, 1. Band pag. 27.

E föladatok általános megfejtése valóban keresztül is vihető minden elvi nehézség nélkül; a tárgyalás érdekét pedig még növeli az a figyelemre méltó analogia, mely közte és a lineár egyenletrendszer elmélete között fönnáll, különösen ha KRONECKER szerint tárgyaljuk ezt. (L. BALTZER kézikönyvét, 4-ik kiadás). Hogy a determinánsok elmélete e tárgyalásba belép, az a dolog természeténél fogva világos, és így e lapok egyszersmind ezeknek egy új alkalmazását adják.

Mielőtt azonban a részletes tárgyalást megkezdem, épen az alkalmazandó determinánsokra vonatkozólag akarok néhány megjegyzést előrebocsátani, mely nagyon egyszerű ugyan, de azért talán még sem fölösleges.

1. Ha e determinánsban:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{(I.)}$$

az elemek mindannyian egész számok, minden a determináns szétbontására vonatkozó képlet egyszerűen egész számok egyenlőségét állítja és igy mint tetszőleges modulusra vonatkoztatott congruentia is igaz marad. Igy p. a következők,

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$0 = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}$$

hol mint szokás, A_{rs} az a_{rs}-nek megfelelő (r-edik) sor és (s-edik) oszlop kihagyása által keletkezett $n-1$-ed fokú aldeterminánst jelenti. Világos továbbá, hogy ha csak D értéke *mod.* M az, a mi bennünket érdekel, szabad a kiszámítás alatt bármely számot egyszerűbb, de vele egymaradékú szám által helyettesíteni.

2. Egy második megjegyzés a D-ből nyerhető és x_kD értékét kifejező determinánsra vonatkozik. Ezt ugyanis ismeretes módon nyerhetni az által, hogy a k-dik oszlopot x_k-val szorozzuk, és ehhez a megfelelő sorokban az első oszlopnak x_1-gyel, a második oszlopnak x_2-vel szorzott tagjait s. a. t. hozzáadjuk, ez által a determináns értéke nem változván.

Ha még most az

$$u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$
$$u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$u_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n$$

jelzést bevezetjük, lesz

$$x_k D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1,k-1}, & u_1, & a_{1,k+1}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2,k-1}, & u_2, & a_{2,k+1}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{n,k-1}, & u_n, & a_{n,k+1}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{(II.)}$$

Az I. és II. alatti determinánsok a következőkben gyakran használandó egyszerű kapcsolatban állanak. T. i.

Ha az (I.)-nek minden (n—r)-ed fokú determinánsa eltünik, akkor ez a (II)-re nézve szintén bekövetkezik.

Képezzük ugyanis a (II)-nek valamely $(n-r)$-ed fokú aldeterminánsát. Ha ez az u-oszlopot nem tartalmazza, akkor ez az (I) megfelelő aldeterminánsával azonos, tehát vele együtt zérus. Ha pedig tartalmazza az u-oszlopot, akkor az u-k értékét figyelembe véve, és az aldeterminánst e polynom elemei szerint fölbontva, lesz ez

$$x_1 \mathfrak{A}_1 + x_2 \mathfrak{A}_2 + \ldots + x_n \mathfrak{A}_n$$

és rögtön meggyőződhetünk, hogy az $\mathfrak{A}$-k által jelölt mennyiségek nem mások, mint az (I.) determinánsból képezhető ugyancsak $(n-r)$ ed fokú aldeterminánsok. Ha pedig e föltétel szerint ezen együtthatók mindannyian eltünnek, a (II) aldeterminánsára nyert kifejezés is eltünik. Ismét alig szükséges hozzá tenni, hogy e tétel egyenlően érvényes, akár az algébra, akár a számelmélet szempontjából értjük a zérust.

---

3. Tulajdonképi vizsgálatunk tárgya most már a következő congruentia-rendszer: *)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &\equiv k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &\equiv k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n &\equiv k_n \end{aligned} \quad (mod.\ M) \quad \text{(1.)}$$

hol, az előbbiekhez képest, a baloldalon álló lineár függvényeket rövidség kedvéért alkalmilag $u_1, u_2, \ldots u_n$-nel jelöljük. A baloldali együtthatókból összeállított determináns, a rendszer determinánsa, úgy mint

*) A rendszer ugyanannyi egyenletet tartalmaz, a hány az ismeretlen. Ép úgy, mint az egyenleteknél látjuk majd a következőkből, hogy kevesebb egyenlet nem ád meghatározott föladatot, többnél pedig ez csak úgy lehetséges, ha a számfeletti egyenletek a többiek összeállításából származtathatók, azaz tulajdonképen csak n egyenlet van adva.

előbb, legyen D. A tárgyalás különböző eredményekre fog vezetni, a szerint mint D és M relativ törzsszám, vagy pedig D és M-nek közös osztója van, vagy végre D az M többese. Vizsgáljuk ez eseteket külön.

Első eset. A rendszer determinánsa és a modulus viszonylagos törzsszám. — Ekkor bármelyik x_i ismeretlen meghatározására a D determinánsnak

$$A_{1i},\ A_{2i},\ \ldots .,\ A_{ni}$$

által jelölt aldeterminánsait képezzük, ezekkel rendre megszorozzuk az 1-ső, 2-ik, ... n-ik congruentiát és összeadunk. A determinánsok ismert tulajdonságai alapján az eredmény:

$$Dx_i \equiv A_{i1}k_1 + A_{i2}k_2 + \ldots . + A_{in}k_n,\ (mod.\ M). \qquad (2.)$$

vagy rövidebben írva:

$$Dx_i \equiv K_i,\ (mod.\ M).$$

A jelen esetben, hol D és M relativ törzsszám, e congruentia mindig megoldható, és így minden x számára *egy* meghatározott értéket nyerünk. Az eddigiekből azonban csak azt tudjuk, hogy az (1.) minden lehető gyökrendszere a (2.)-ében is bennfoglaltatik, de megfordítva lehetséges volna, hogy a (2.) által adott gyökrendszer nem elégíti ki az (1.) alatti rendszert. Hogy ez nem áll, arról közvetetlenül meggyőződünk a (2.)-ből nyert x értékek helyettesítése által. Ezek a következők: *)

$$x_i \equiv D^{\varphi(M)-1}K_i,$$

hol $\varphi(M)$ az M-nél kisebb és ehhez viszonylagos törzsszámok számát jelenti. Ezeknek helyettesítése az (1.) alatti rendszer, mondjuk, r-edik egyenletében valóban helyes eredményt ád. Ez ugyanis:

$$D^{\varphi(M)-1}(a_{r1}K_1 + a_{r2}K_2 + \ldots . + a_{rn}K_n) \equiv K_r\ (mod.\ M).$$

Ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\begin{aligned} K_1 &= A_{11}k_1 + A_{12}k_2 + \ldots . + A_{1n}k_n \\ K_2 &= A_{21}k_1 + A_{22}k_2 + \ldots . + A_{1n}k_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_n &= A_{n1}k_1 + A_{n2}k_2 + \ldots . + A_{nn}k_n \end{aligned}$$

a zárjelben álló kifejezés, az A-k aldeterminánsa jellegét tekintetbe véve, nem más mint Dk_r; minthogy pedig Fermat tétele szerint $D^{\varphi(M)} \equiv 1\ (mod.\ M)$, az egész baloldalon álló kifejezés értéke valóban k_r lesz.

*) A Fermat-féle tétel mutatja, hogy valóban ezen x értékek a (2.) alatti congruentiák megoldásai.

Igy tehát ezen első esetben a (2.) alatt foglalt, egy-egy ismeretlent tartalmazó congruentiák adják az (1.) rendszernek teljes megoldását. *Az adott congruentia-rendszernek tehát, midőn a rendszer determinánsa és a modulus viszonylagos törzsszám, egyetlen egy gyökrendszer felel meg.*

Ha a modulus törzsszám, akkor D ehhez vagy relativ törzsszám, vagy pedig ennek többese, tehát congruens 0-sal; látni fogjuk, hogy ezen utóbbi esetben a congruentiák baloldalán álló lineár függvények nem függetlenek, és így az n congruentia vagy tulajdonképen csak $n-1$, vagy pedig egymásközt ellenmondó, és így kijelenthetjük, hogy *n független congruentiából álló rendszernek, ha a modulus törzsszám, egy és csak egy megoldása van.*

Most mindenekelőtt a $D \equiv 0 \pmod{M}$ feltétel jelentőségét akarjuk vizsgálni a congruentia-rendszerre nézve.

4. A *második esetünk* lesz az, hogy *a rendszer determinánsa a modulus többese,* azaz $D \equiv 0 \pmod{M}$. Midőn a rendszer determinánsa eltünik *mod. M,* meglehet, hogy ugyanez történik még a determinánsból képezhető *minden* $n-1, n-2, \ldots$ fokú aldeterminánsra nézve is Az ezeknél fennforgó viszonyoknak fontos szerepe lévén, ezeket általánosságban az által akarjuk pontosan megállapítani, hogy az m-edfokú aldeterminánsok legyenek az elsők, melyek közt *mod. M* a 0-től különbözők is találtatnak, mig az $m+1, m+2, \ldots$ fokúak mindannyian eltünnek. A legegyszerübb eset lesz $m=n-1$, hol D zérus ugyan, de már az A_{ik} által jelölt $n-1$-edfokú aldeterminánsok közt találtatnak a 0-tól különbözők. Az ily el nem tünő, m-edfokú aldeterminánsnak az ismeretlenek és congruentiák kellő rendezése után mindig vehetjük ezt:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m} \\ \ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mm} \end{vmatrix}$$

Ha ezt egy az eredeti determinánsból vett tetszőleges sor is p. az $m+1$ oszlop által $m+1$ fokúvá teszszük, akkor feltevésünk szerint ez

$$\begin{vmatrix} a_{12}, a_{12}, \ldots, a_{1m}, a_{1,m+1} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m}, a_{2,m+1} \\ \ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mm}, a_{m,m+1} \\ a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sm}, a_{s,m+1} \end{vmatrix}$$

mindig eltünik, bárminő értéke legyen s-nek $m+1$-től u-ig. De akkor az *1.* alatt kifejtett tétel értelmében 0-t kapunk még akkor is, ha az $m+1$-ső oszlopban az a mennyiségek helyébe az u-kat irjuk. Ha ezt megteszszük, ha továbbá tekintetbe veszszük azt, hogy s fölvehet minden értéket $m+1$-től n-ig, akkor nyerünk $n-m$ egyenletet, mely egymásután kifejezi az $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots$ és u_n-t az $u_1, u_2, \ldots u_n$ segítségével. Ezen egyenletek:

$$C_{s1}u_1 + \ldots + C_{sm}u_m + C_{ss}u_s \equiv 0$$
$$(s=m+1, \ldots, n)$$

hol az u_s együtthatója előbbi megállapodásunk szerint a 0-tól különbözők.

Látjuk tehát, hogy *az m-ed fokú aldeterminánsok lévén az elsők, melyek nem tünnek el mindannyian, az egyenletek közül csak m marad meg, mint egymástól független.* A többi lineár függvény az első m által kifejezhető. Ha az u-k helyébe az ő értékeiket teszszük: a k mennyiségeket, kell hogy az igy nyert alakzatok identitások legyenek Igy nyerjük tehát a congruentia-rendszer megoldhatására vonatkozó föltételeket, még pedig ha ezek ki vannak elégítve, csak m maradékegyenletet kell fölvennünk és igy az n ismeretlen közül $n-m$ értéke tetszőlegesen lesz megállapitható. Föladatunk igy át van alakitva egy másikba, mely már azért is egyszerűbb, mert a congruentiák és ismeretlenek száma kisebb; de a melyben még továbbá nem lehet $\equiv 0$ *mod. M*, hanem vagy relativ törzsszám ehhez, vagy pedig, és ez a végül tárgyalandó harmadik eset: M és D'-nek van közös osztója: δ.

5. Ha a rendszer determinánsának (D) *és a modulusának* (M) legnagyobb közös osztója δ legyen

$$D = D'\delta, \quad M = M'\delta$$

hol D' és M' már is viszonylagos törzsszámok.

Minden gyökrendszer, mely az adott congruentiákat megoldja *mod. M*, még minden oly modulusra nézve is ád megoldást, mely ennek tényezője, p. M-re nézve is. Igy tehát minden lehetséges gyökrendszer benn foglaltatik a következőkben,

$$x_1 \equiv \alpha_1, \; x_2 \equiv \alpha_2, \ldots, x_n \equiv \alpha_n \; (mod.\ M') \qquad (3.)$$

melyet nyerünk, ha az adott congruentiákat megoldjuk *mod. M'*. A congruentia-rendszer bármely megoldása *mod. M* szükségkép összeesik evvel, mihelyt a számokat csak *mod. M'* tekintjük, és igy egy tetszőleges gyökrendszer alakja a következő lesz:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\equiv \alpha_1 + y\,M' \\ x_2 &\equiv \alpha_2 + y_2 M' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &\equiv \alpha_n + y_n M' \end{aligned}\right\} (mod.\ M)$$

hol már egy maradékú értékeket nyerünk, ha valamely y az $\frac{M}{M'} = \delta$ többesével növekszik. Az y-ok meghatározása tehát csak *mod.* δ kívántatik meg és föladatunk meg van oldva, ha az ily meghatározást kivittük. Ez pedig ismét egy congruentia-rendszer megoldása által történik. Ha ugyanis ezen x értékeket az (I.) rendszerbe helyettesítjük, a következőket nyerjük

$$\left.\begin{aligned} M'(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n) &\equiv k_1 - a_{11}\alpha_1 - a_{12}\alpha_2 - \ldots - a_{1n}\alpha_n \\ M'(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n) &= k_2 - a_{21}\alpha_1 - a_{22}\alpha_2 - \ldots - a_{2n}\alpha_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M'(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n) &\equiv k_n - a_{n1}\alpha_1 - a_{n2}\alpha_2 - \ldots - a_{nn}\alpha_n \end{aligned}\right\} (mod.\ M)$$

Itt nemcsak a baloldalon lehet M'-vel osztani, de a jobb oldalon álló kifejezésekben is, hisz az α-k épen úgy lettek meghatározva, hogy ezek eltünjenek *mod.* M'. — Az M'-mel osztva, természetesen a modulust is, az y-ok meghatározására a következő congruentia-rendszert nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{n1}y_n &\equiv l_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n &\equiv l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n &\equiv l_n \end{aligned}\right\} (mod.\ \delta) \qquad (4.)$$

E (4.) alatti rendszer ismét egyszerűsítést foglal magában, a mennyiben a modulus kisebb és kevesebb törzsténvezőt tartalmaz, de egyszersmind át vezet a második esetre, mert itt ismét a determináns a modulusnak többese. A második esetnek megfelelő tárgyalás ismét kisebbíti a congruentiák számát, tehát ismét egyszerűbb alakokra vezet; míg a tárgyalás be van fejezve, mihelyt az első esetre akadunk, minek természetesen előbb-utóbb meg kell történie.

6. Az eddigiek a gyakorlati eljárásra szükséges útmutatást már magukban foglalják; tárgyaljuk az itt adott módszerek segítségével a Gauss által a »Disquisitiones«-ben adott példát. Legyen:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 5y + z &\equiv 4 \\ 2x + 3y + 2z &\equiv 7 \\ 5x + y + 3z &\equiv 6 \end{aligned}\right\} (mod.\ 12).$$

A rendszer determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 3, & 5, & 1 \\ 2, & 3, & 2 \\ 5, & 1, & 3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 8 & 10 & 3 \end{vmatrix} \equiv 4 \ (mod\ 12.)$$

A determináns és modulus legnagyobb közös osztója 4; megoldjuk tehát először a congruentiákat, mod. 3. Ha x, y, z helyett α, β, γ-t irunk és az együtthatókat egyszerűsítjük, lesznek ezek:

$$\left.\begin{aligned} 2\beta + \gamma &\equiv 1 \\ 2\alpha + \ldots + 2\gamma &\equiv 1 \\ 2\alpha + \beta + \ldots &\equiv 0 \end{aligned}\right\} (mod.\ 3)$$

És igy

$$\alpha \equiv 2, \quad \beta \equiv 2, \quad \gamma \equiv 0, \ (mod.\ 3.)$$

Igy tehát most

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 2 + 3\xi \\ y &\equiv 2 + 3\eta \\ z &\equiv 3\zeta \end{aligned}\right\} (mod.\ 12.)$$

Ezen értékeket az adott rendszerbe helyettesítve, lesz:

$$\left.\begin{aligned} 9\xi + 3\eta + 3\zeta &\equiv 0 \\ 6\xi + 9\eta + 6\zeta &\equiv 9 \\ 3\xi + 3\eta + 9\zeta &\equiv 6 \end{aligned}\right\} (mod.\ 12.)$$

Itt valóban mindenütt lehet osztani 3-mal és lesz:

$$\left.\begin{aligned} 3\xi + \eta + \zeta &\equiv 0 \\ 2\xi + 3\eta + 2\zeta &\equiv 3 \\ \xi + \eta + 3\zeta &\equiv 2 \end{aligned}\right\} (mod.\ 4.)$$

Itt a determináns:

$$\begin{vmatrix} 3, & 1, & 1 \\ 2, & 3, & 2 \\ 1, & 1, & 3 \end{vmatrix} \equiv 0, \ (mod.\ 4.)$$

Az A_{33} aldeterminány $\equiv 3$ lévén, megfelel a föltételnek és így kimondhatjuk, hogy:

$$\begin{vmatrix} 3, & 1, & u_1 \\ 2, & 3, & u_2 \\ 1, & 1, & u_3 \end{vmatrix} \equiv 0, \ (mod.\ 4),$$

vagyis, a mint a helyettesítés mutatja:

$$3u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 0 \ (mod.\ 4.)$$

Congruentia-rendszerünk tehát:

$$\left.\begin{aligned} 3\xi + \eta &\equiv -\zeta \\ 2\xi + 3\eta &\equiv 3-2\zeta \end{aligned}\right\} \quad (mod.\ 4.)$$

Evvel azonban már befejeztük a megoldást, mert itt a determináns $3.3-2.1=7$ relativ törzsszám a modulushoz. A ζ tetszőleges lévén, ξ, η, ζ-ra nézve négy gyökrendszert nyerünk, és így ugyanannyit az x, y, z-re is. Lesz:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3 \\ \xi &\equiv 3,\ 0,\ 1,\ 2 \\ \eta &\equiv 3,\ 3,\ 3,\ 3 \end{aligned}\right\} \quad (mod.\ 4.)$$

Ezt az előbb nyert x, y, z-be helyettesítve, lesz:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 2,\ 5,\ 8,\ 11 \\ y &\equiv 11,\ 11,\ 11,\ 11 \\ z &\equiv 3,\ 6,\ 9,\ 0 \end{aligned}\right\} \quad (mod.\ 12.)$$

Látni, hogy az η értékét nem lehetett volna tetszőlegesnek venni; ez mindig egy és ugyanaz. Ennek oka abban rejlik, hogy a ξ, η, ζ-ra vonatkozó congruentia rendszer determinánsából az η együtthatóinak kihagyása által nem lehet oly másodfokú aldeterminánst kapni, mely nem többese a modulusnak, és így η-t nem is lehet tetszőleges értéknek meghagyni. *)

Egy az itt adottól eltérő módszer, mely — különösen a gyökrendszerek számára vonatkozólag — elméletileg jobb áttekintést ad, gyakorlatilag pedig szintén igen kényelmes, — több, magasabb fokú congruentiákra vonatkozó alkalmazással együtt, — egy legközelebbi második közleménynek marad föntartva.

EGY TÉTEL A DETERMINÁNSOKRÓL.

Scholtz Ágoston, budapesti ev. gymnáziumi igazgatótól.

A kérdéses tételt

$$(\alpha\beta\gamma).(\alpha'\beta'\gamma')-(\alpha\beta\gamma').(\alpha'\beta'\gamma) = \begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta'} & \eta_{\alpha'\beta'} & \zeta_{\alpha'\beta'} \\ \xi_{\gamma\gamma'} & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} \qquad (1.)$$

*) Fölhasználom ezt az alkalmat, hogy »Bevezetés a felsőbb algebrába« című könyvem idevágó fejezetére nézve egy szükséges helyreigazítást közöljek. Az e tárgyra vonatkozólag adott példában (45 lap. 4 sor alulról) z helyett $-z$ olvasandó, és így a z-nek az utolsó sorban foglalt értékei szintén — előjellel veendők

egyenlet mondja ki, hol

$$(\alpha\beta\gamma) = \begin{vmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ x_\beta & y_\beta & z_\beta \\ x_\gamma & y_\gamma & z_\gamma \end{vmatrix} \text{ s. t. b.}$$

és

$$\xi_{\alpha\beta}=y_\alpha z_\beta - y_\beta z_\alpha, \quad \eta_{\alpha\beta}=z_\alpha x_\beta - z_\beta x_\alpha, \quad \zeta_{\alpha\beta}=x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha \text{ stb.}$$

Az (1.) alatti egyenlet helyességéről meggyőződünk, ha

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta\gamma) &= \xi_{\alpha\beta}\cdot x_\gamma + \eta_{\alpha\beta}\cdot y_\gamma + \zeta_{\alpha\beta}\cdot z_\gamma \\
(\alpha'\beta'\gamma') &= \xi_{\alpha'\beta'}\cdot x_{\gamma'} + \eta_{\alpha'\beta'}\cdot y_{\gamma'} + \zeta_{\alpha'\beta'}\cdot z_{\gamma'} \\
(\alpha\beta\gamma') &= \xi_{\alpha\beta}\cdot x_{\gamma'} + \eta_{\alpha\beta}\cdot y_{\gamma'} + \zeta_{\alpha\beta}\cdot z_{\gamma'} \\
(\alpha'\beta'\gamma) &= \xi_{\alpha'\beta'}\cdot x_\gamma + \eta_{\alpha'\beta'}\cdot y_\gamma + \zeta_{\alpha'\beta'}\cdot z_\gamma
\end{aligned}$$

alakban bontjuk fel e determinánsokat, és az első meg második szorzatából kivonjuk a harmadik és negyedik szorzatát, tekintettel lévén

$$\xi_{\gamma\gamma'} = y_\gamma z_{\gamma'} - y_{\gamma'} z_\gamma, \quad \eta_{\gamma\gamma'} = z_\gamma x_{\gamma'} - z_{\gamma'} x_\gamma, \quad \zeta_{\gamma\gamma'} = x_\gamma y_{\gamma'} - x_{\gamma'} y_\gamma$$

egyenletre.

Ha $(\alpha\beta\gamma)$ determináns valamely sora megegyezik $(\alpha'\beta'\gamma')$ determinánsnak valamely sorával, például $\alpha=\gamma'$, a fentebbi tételből lesz:

$$(\alpha\beta\gamma).(\alpha'\beta'\gamma') = \begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta'} & \eta_{\alpha'\beta'} & \zeta_{\alpha'\beta'} \\ \xi_{\gamma\gamma'} & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} \qquad (2.)$$

Ezt az egyenletet felhasználjuk:

$$\varepsilon . S = \Delta_{iklmnp}$$

tétel[1]) helyességének bebizonyítására. Az említett helyen[2]) bebizonyítottuk az:

$$\varepsilon . S . (iln)^2 = \begin{vmatrix} (pln)(kln) & (pni)(kln) & (pln)(kil) \\ (kni)(mln) & (kni)(mni) & (kil)(mni) \\ (mln)(pil) & (mil)(pni) & (mil)(pil) \end{vmatrix}$$

egyenletet. Már most (2.) szerint a következő egyenletek állíthatók föl:

$$(pln)(kln) = \begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{np} & \eta_{np} & \zeta_{np} \\ \xi_{kl} & \eta_{kl} & \zeta_{kl} \end{vmatrix}, \quad (pni).(kln) = \begin{vmatrix} \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{np} & \eta_{np} & \zeta_{np} \\ \xi_{kl} & \eta_{kl} & \zeta_{kl} \end{vmatrix},$$

$$(pln)(kil) = \begin{vmatrix} \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \\ \xi_{np} & \eta_{np} & \zeta_{np} \\ \xi_{kl} & \eta_{kl} & \zeta_{kl} \end{vmatrix},$$

[1]) »Műegyetemi Lapok«. 13. füzet, 66. lap.
[2]) U. o. 70. lap.

$$(kni)(mln) = \begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{ik} & \eta_{ik} & \zeta_{ik} \\ \xi_{mn} & \eta_{mn} & \zeta_{mn} \end{vmatrix}, \quad (kni)(mni) = \begin{vmatrix} \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{ik} & \eta_{ik} & \zeta_{ik} \\ \xi_{mn} & \eta_{mn} & \zeta_{mn} \end{vmatrix}$$

$$(kil)(mni) = \begin{vmatrix} \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \\ \xi_{ik} & \eta_{ik} & \zeta_{ik} \\ \xi_{mn} & \eta_{mn} & \zeta_{mn} \end{vmatrix}, \quad (mln)(pil) = \begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{lm} & \eta_{lm} & \zeta_{lm} \\ \xi_{pi} & \eta_{pi} & \zeta_{pi} \end{vmatrix},$$

$$(mil)(pni) = \begin{vmatrix} \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{lm} & \eta_{lm} & \zeta_{lm} \\ \xi_{pi} & \eta_{pi} & \zeta_{pi} \end{vmatrix}, \quad (mil)(pil) = \begin{vmatrix} \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \\ \xi_{lm} & \eta_{lm} & \zeta_{lm} \\ \xi_{pi} & \eta_{pi} & \zeta_{pi} \end{vmatrix}.$$

Ezen értékeket a (3.) egyenlet jobb oldalán levő determinánsba helyettesítvén, e determinánsban:

$$\begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \end{vmatrix} \text{ és } \begin{vmatrix} \eta_{np}\zeta_{kl} - \eta_{kl}\zeta_{np} & \zeta_{np}\xi_{kl} - \zeta_{kl}\xi_{up} & \xi_{ap}\eta_{kl} - \xi_{kl}\eta_{np} \\ \eta_{ik}\zeta_{mn} - \eta_{mn}\zeta_{ik} & \zeta_{ik}\xi_{mn} - \zeta_{mn}\xi_{ik} & \xi_{ik}\eta_{mn} - \xi_{mn}\eta_{ki} \\ \eta_{lm}\zeta_{pi} - \eta_{pi}\zeta_{lm} & \zeta_{lm}\xi_{pi} - \zeta_{pi}\xi_{lm} & \xi_{lm}\eta_{pi} - \xi_{pi}\eta_{lm} \end{vmatrix}$$

determinánsok szorzatát ismerjük fel; az utolsó determinánsok elseje $(iln)^2$, másodika Δ_{iklmnp}. Ennek folytán (3.)-ból $(iln)^2$ mennyiséggel való osztás után lesz:

$$\varepsilon . S = \Delta_{iklmnp}$$

IRODALOM.

R. Clausius, »Die mechanische Wärmetheorie.« Zweite umgearbeitete und vervollständigte Auflage des unter dem Titel »Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie« erschienenen Buches. Erster Band. nagy 8°. 388 lap, 32 a szöveg közé nyomott fametszettel. Braunschweig, Fr. Vieweg und Sohn 1876. Ára 8 márka.

1858-ban, nyolcz évvel Clausius első nagyobb értekezésének *) megjelenése után, Decher augsburgi polytechnikumi tanár a Dingler »Polytechn. Journal«-jában »Über das Wesen der Wärme« czím alatt egy dörgedelmes czikket tett közzé, melyben Clausius mathematikai fejtegetéseit az »analysis bántalmazásának«, »kontárkodásnak«, »esztelenségnek« titulázza, s melynek végén, miu-

*) »Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen.« Előadatott a berlini Akadémiában 1850 februárban, megjelent a Poggendorff-féle Annalok 1850 márcziusi és aprilisi füzeteiben.

tán nézete szerint a Clausius következtetéseinek tarthatatlanságát elegendőképen bebizonyította, így kiált föl: »ime ezek azok az eredmények, melyekkel az új hőelmélet alaptételét s a tapasztalattal való összeegyezését bebizonyítani akarják; ha azonban kellő világosságba helyeztetnek, azt mutatják, hogy Clausius úr sokat dicsért dolgozata, melyen ő és más physikusok mint biztosan kipróbált alapon tovább építkeztek, nem egyéb üres diónál; kivül sokat igér, de nincs reális tartalma.«

Erre Clausius a Dingler Journal 150-ik kötetében egy igen higgadt, de annál nagyobb súlyú leczkével szolgált a zsörtölödő öregnek. Szegény Decher azóta már végkép el van feledve; nevét csak egy roppant tudományosnak látszó, a valóságban azonban roppant unalmas, ronda mathesissel írt mechanika őrizi, mely a könyvtárak polczain, senkitől nem használva, szép csendesen porladoz. Clausius pedig, a kontárnak, az analysis bántalmazójának nevezett Clausius az újabb physikának, ma már senki sem tagadja, egyik legnagyobb érdemű fundátora!

Clausius hőelméleti értekezései három csoportra oszthatók. Egy részök az általános elmélet kifejtésére és a szorosan vett hőtani jelenségek körüli alkalmazásokra van rendelve. A második csoportbeliekben a hőelméletet az elektricitásra alkalmazza. A harmadikban a melegségnek nevezett molekuláris mozgások felől alkotott hypothesist tárgyalja.

Értekezései azonban nem ily szép rendben, egymásután csoportosítva jelentek meg a Poggendorff-féle Annalok köteteiben, hanem pêle-mêle, úgy a mint tanulmányai majd ebben, majd amabban az irányban új eredményekre vezették. Ez természetesen igen megnehezítette Clausius dolgozatainak tanulmányozását; az olvasónak már jó formán jártasnak kellett lenni az elméletben, hogy meg tudja magának határozni a sorrendet, melyben az értekezéseket legsikeresebben tanulmányozhatja. »Complet Poggendorff« sem találkozik minden városban. Clausius nagyhirű értekezéseit pedig minden physikus, sőt minden tudományos képzettségü technikus is akarta olvasni.

E bajon Clausius, mint olvasóink tudják, akként segített, hogy elszórtan megjelent értekezéseit, a fentebb kijelelt csoportokba osztva, 1864-ben egy jó vaskos kötetben is kiadta, mit sem változtatva az értekezések szövegén, legfölebb csillag alatt, vagy toldalékban függesztett hozzájok hosszabb-rövidebb megjegyzéseket a szöveg megvilágositása végett. E szerencsés gondolat a hőelméleti ismeretek szélesebb körökben való elterjedését, mondhatnám, népszerűsítését nagy mértékben előmozdította. Az Értekezések Gyüjteményét lefordították francziára, angolra, s az általános tetszés, melyet mindenütt aratott, nemcsak a hőelméletnek szerzett újabb meg újabb híveket, hanem magát a publicatiónak ezt a módját is igen megkedveltette. Nem sokára ezután Julius

Robert Mayer, Joule, Tyndall, Sir William Thomson és még többen mások követték Clausius példáját és szintily gyüjteményekbe foglalták előzetesen közétett értekezéseiket.

Már néhány évvel ezelőtt fogyatékán volt a Clausius Értekezéseinek első kiadása; másodikról kellett gondoskodni. Idő közben azonban a hőelmélet minden egyetemen és minden műegyetemen rendes tantárgygyá vált. Szükség lett tankönyvekre. Termett is elég, a mint ezt e Lapok irodalmi rovatában egy más alkalommal már előadtuk. Clausius mind a mellett arra határozta el magát, hogy értekezéseinek második kiadását tankönyv-formába önti át, hogy így a tanulmányozást még inkább megkönnyítse és itt-ott más physikusok dolgozatait is felhasználhassa. E tankönyv első kötete fekszik előttem. E kötetben Clausius a szorosan vett hőelméletet adja, t. i. a mennyire az a két főtételből lefejthető, alkalmazással a szorosan vett hőtani jelenségekre. Mindenekelőtt egy kis mathematikai bevezetést bocsát előre, melyben a mechanikai munkát és az erélyt értelmezi s a nem integrálható differentiál-egyenletek tárgyalását adja elő. A szorosan vett tananyagot 12 fejezetre osztja, és pedig a következő sorrendben:

1. A mechanikai hőelmélet első főtétele, vagyis a melegség és a munka egyenértékűségéről szóló tétel. 2. A tökéletes gázok tárgyalása. 3. A mechanikai hőelmélet második főtétele. 4. A második főtétel módosított formája, vagyis az alakulatok egyenértékűségéről szóló tétel. 5. A két főegyenlet átalakításai. 6. A mechanikai hőelmélet alkalmazása telített gőzökre. 7. Szilárd testek megömlése és elpárolgása. 8. Egynemű testek tárgyalása. 9. Az energia és entrópia meghatározása. 10. A vissza nem fordítható folyamatok. 11. A mechanikai hőelmélet alkalmazása a gőzgépre. 12. A hő- és fénysugarak összegyüjtése és hatásának határai. — Az utolsó, 13-dik fejezetben polémiáinak történetét adja elő.

Mindenesetre ritka tankönyv ez, nem csak azért, mert egy nagy tudós írta, hanem azért is, — a mi még ritkább — hogy majdnem az egész a szerző eredeti, önálló kutatásain alapszik; más buvároktól származó dolog alig van benne, el annyira hogy Clausius-nak, kevés híján, teljes joga lehetett volna e könyv homlokára azt irni, hogy »a mi e könyvben van, az mind egyenest tőlem való.« E tekintetben a physika majdani történetírójának is megbecsülhetetlen könyv lesz ez. Készen feldolgozva fogja találni mindazt, a mivel Clausius a hőelméletet gazdagította.

Hány kötetből fog az egész munka állani, és mi fog a második kötetben foglaltatni, sem a hirdetésből, sem az előszóból ki nem vehető.

(Sz. K.)

Arthur Cayley. »An elementary treatise on elliptic functions.« — Cambridge és London. 1876. (XII, 384 l.) Ára 18 márka.

A mathematikai irodalomban, hol a tankönyv és monographia közt fönnálló különbséget oly gyakran mellőzik, az oly tisztán a felsőbb tanitás érdekében írt munka, mint az, mely e sorokban ismertetendő, valóban ritka jelenség. Nemcsak az ő didaktikai következetessége által, melylyel egy pillanatig sem megy túl az előre kijelölt álláspontonon; de nem kevésbbé a szerző fényes neve által, kitől, mint a mathematikai búvárlat egyik legelső rangú képviselőjétől az ily jellegü munkát sem követelni, sem várni nem lehetett. Az angol egyetemeken a mathematika egyáltalában egészen más szerepet játszik, mint például nálunk vagy akár Németországban. Nem a »tanárjelölt« kenyértudománya, nem is, mint p. jelenleg leginkább Berlinben, nagyon kedvelt, de teljesen elszigetelt tanulmány, melyet az illető nem egy-két évre, de egész életére választ. Az angol egyetem, mely kenyértudományt nem ismer, a mathematikát az általános képzettség nélkülözhetetlen alkatrészének tartja, melyen mindenkinek keresztül kell mennie. (A minálunk örökké fölszinen lévő tanügyi politizálás és reformálási vágy mellett jó lesz megjegyezni, hogy itt csak tényt kivántam constatálni, sem dicsérni, sem ócsárolni, egyáltalában a rendszerről itélni nem akarok.) Igy a mathematika müvelése Angolországban tagadhatatlanul nagy külterjedelmet nyert, de a mellett bizonyos hagyományos formákban megmerevedvén, aligha tett már eleget az ily elméleti tanulmányok főszükségletének, hogy t. i. a tudományos fejlődéssel folytonos érintkezésben maradjon, s ennek számára a szükséges új erőket megteremtse. A dolog nem ment ugyan oly messze, mint máshol; de a reactio mégis bekövetkezett. Több éve már, hogy tart az áramlat, mely az angol egyetemek mathematikai oktatását az angol mathematikai búvárlat színvonalára kivánja emelni. Sok az, a mi ez irányban történt, és sok az olyan, a mi a távolabb állót is érdekli e mozzanatokban. Mig kell p. említeni e helyen, hogy a legujabb időkben a tan- és kézikönyv irodalomnak — nemcsak a tiszta mathematikai, de még a rokon mechanikai és physikai szakokban — mily jelentékeny része az angol.

A mi most már az elliptikus függvények elméletét illeti, tankönyvekben igaz a német és franczia irodalom hiányt nem szenved. Ott van Durège elemi, de nem fölötte következetes tankönyve; Briot és Bouquet munkája, melynek második kiadása a tárgy egészen új földolgozása, és a Liouville módszer alapján az elméletnek apró részletekig terjedő áttekintését szolgáltatja; ott legujabban Königsberger előadásai két kötetben, melyek megőrizve a hires tanár élőszóval való oktatásának előnyeit, a Riemann-féle elvekből indúl ki, utóbbi részeiben pedig kiválókép az elmélet algébrai részeire fordítja figyelmét. Ezekkel szemben a Cayley munkája egészen más álláspontot foglal el; nem új

mathematikai disciplinát kiván előadni, mely módszerei, gondolatmenete által külön helyet követelne a mathematikai tudományok rendszerében. Königsberger kézikönyve sem követel több előleges ismeretet, mint a mennyit a differentiál és integrál számitás elemei nyújtanak, de munkájában a tanulót új térre, új kilátási pontokhoz vezeti; — Cayley munkája az elliptikai függvényekről szóló tant bele vonja a differentiál és integrál számítás keretébe, ennek egy fejezetévé teszi ezt, új anyagot ád ugyan, de az előre kijelölt határokon sehol nem lép túl.

Előadási tervét a szerző egész határozottsággal kimondja az előszó első soraiban: »E tankönyv alapja Legendre munkája, a »Traité des fonctions elliptiques«; a Jacobi »Fundamenta nova« című műve, és az utóbbinak értekezései a Crelle-féle Journalban; aránylag keveset használtam Abel vizsgálatait, valamint a későbbi szerzőkét.« — E megszorítások következtében e munka nem adja az elliptikai függvények elméletét, mint az általános függvénytan részét; a képzetes úgyszólván csak mellékesen lép föl benne, és a complex mennyiségek általános földolgozásának korszakalkotó fontosságáról nem nyerünk tudomást, az integrátió kiterjesztése a változó képzetes értékváltozásaira meg sem lesz említve. A munka oly annyira elemi, hogy p. az úgynevezett összeadási tétel bebizonyítására fölhozott öt módszer közül egyetlen egy sincs, mely a tulajdonképen szóban forgó differentiál-egyenlet általános megoldását venné alapúl.

De a tárgy e megszorítása mellett a szerző csak annál lényegesebb sikerrel oldja meg azt a föladatet, melyet magának kitüzött. Az, a ki a differentiál és integrál-számítást már áttanulmányozta, e talajon otthonosnak fogja magát érezni; az ujság ingere által ösztönözve, de elvi nehézségek által sehol nem tartóztatva, behatolhat az új elmélet részleteibe, elsajátíthatja a tételek azon sorát, melyek — valamivel magasabb álláspontón — az ujabbkori algébrában és a mathematikai physikában ugyanazt a szerepet játszszák, mint a trigonometriai függvényekre vonatkozók az elemi részekben. Ha pedig már előbb elsajátított és megszokott módszerek segitségével magáévá tette ezt az új tananyagot, akkor ismét sokkal könnyebb lesz azt új álláspontból újra átvenni, és a Liouville, Weierstrass vagy Riemann által kijelölt új ösvényeken haladni.

Szóval: a kezdőnek, ki az elliptikus függvények elméletét kezdi tanulmányozni, most csak egy munkát lehet ajánlani, a Cayley-t; ezt vagy egészen, vagy legalább azon részeit kell átvennie, melyeket a szerző maga a tartalomjegyzék végén kijelöl. — De nem szabad azt hinni e tanulmány befejezte után, hogy most már a »sublimissimum« birtokában babérjainkon pihenhetünk. Az elliptikus függvények e részletes »trigonometriája« után, — meg kell még is-

merkedni azon általánosabb alapelvekkel, melyek e formula-gyüjteményekbe új életet lehelnek, és a melyekben a mathematika azon korszaka culminál, mely a folytonosság elvének megállapításával körülbelül harmadfél századdal ezelőtt kezdetét vette.

A tartalomról részletes referatumot adni, ez alkalommal nem lehet szándékunk; a 16 fejezetnek pedig egyszerüen czímét közölni, nem felelne meg czélunknak. Igy végül csak azt a kivánságot fejezem ki, hogy e munka nemsokára német fordítás által a mi köreinkhez is közelebb legyen hozva. A mennyivel kevésbé lehetett Cayley-től várni az ily elemi tankönyv megirását, annyival hálásabbak tartozunk lenni a kész ajándékért. A mathematikai oktatás érdekében kivánjuk, hogy azok közül, kik vele a tudományos buvárlat terén versenyezek, egyik másik ezen az új téren is kövesse őt. (K. Gy.)

A szerkesztőség levelezése.

Bécsből névtelenül a következő föladatot kaptuk: Adva van egy r sugarú kör. Ennek kerületén mozog egy pont állandó sebességgel; egyidejüleg elindúl a kör középpontjából egy másik pont, szintén állandó sebességgel és folyvást a kerületen járó pont felé tartva. Határoztassék meg e pont pályája.« A föladat az úgynevezett üldözési görbék problémájának egy specziális esete, melyre csak akkor lenne jogunk olvasóink figyelmét fölhivni, ha vagy a megoldás módszere, vagy pedig a talált görbe tulajdonságai annak különös érdeket kölcsönöznének. A megfejtésre nézve útmutatást adnak, többek között, a következő munkák: Thomson und Tait, »Handbuch der theoretischen Physik. (Német fordítás 30 l.) és Salmon-Fiedler Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven (354. l.) — Továbbá a Gergonne-féle Annalok 10-ik kötetében St. Laurent értekezése. (K. Gy.)

FÖLADAT.

30. Egy a nagy tengelyével függélyesen álló ellipsis homorú oldalán a kis tengely végéről feldobatik egy nehéz pont. Mekkorának kell lenni a feldobás sebességének, hogy a pont szabad visszaesésében az ellipsis középpontján menjen át? (Közli: Szily.)

Sajtó-hiba.

A 72-ik old. 11-ik sorában alulról *50* helyett *500*-nak kell állania.

Budapest, 1877. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

II. kötet. 1877. 15. füzet.

KÜLÖNNEMŰ FÉNYREZGÉSEK ÖSSZETÉTELE.

Fröhlich Izor, egyetemi magántanártól.

Előadásokban és kézikönyvekben egyaránt, alig vagy épen nem érintik a különböző periodusú fénymozgások összetételét. Csak annyit szokás mondani, hogy az ily rezgések együttes fellépésénél interferentia nem áll elő, s minden egyes rezgés változatlanúl megtartja intensitását az eredő mozgásban. Sőt még Fresnel *) is csak egy kis jegyzetben emlékszik meg e körülményről, s azon eredményre jő, hogy itt analóg tünemény áll elő, mint a különböző magasságú hangok interferentiájánál; csakhogy az így eredő mozgás lüktetései oly számosak, hogy a szemben folytonos hatás benyomását idézik elő.

Ezzel azonban még nincs bebizonyítva, hogy valamely éterrészecske két ilynemű rezgésnek egyszerre alávetve, az összetétel által (pl. az időegységben) oly mozgási erélyt fog nyerni, mely a két rezgés egyenkénti mozgási erélyének összegével egyenlő; továbbá ez még nem határozza meg az egyes színnem intensitását az összetétel után.

Megjegyzendő, hogy az emberi fül képes ugyan valamely összetett periodusú hangmozgást az egyes, egyszerű rezgésű mozgásokra felbontani, s ezen rezgések minden periodusát, sőt intensitását is felfogni és megkülönböztetni; de az emberi szemnek nincs ilyen felbontó képessége (a mint azt a complementär színek elmélete bizonyítja), s még az is kétséges, vajjon e szerv a combinatió-színnek mondható összetett rezgést is nem külön szín gyanánt fogná-e fel?

Midőn efféle rezgések összetételéről van szó, mindenekelőtt tekintetbe kell venni eredetüket. A hangrezgések összetételére nézve kö-

*) Oeuvres t. II. 46 és 146. l.

zömbös, akár egy, akár több forrásból erednek, mivel a rezgések a mozgás tovaterjedése irányában történnek és így semmiféle polarisatiójok sincs.

Különböző fényforrásokból eredő rezgések pedig általában nem interferálhatnak, mivel a polarisatio-viszonyaik egymást gyorsan követő, ugrásszerű változásokat szenvednek, melyek egymástól teljesen függetlenül mennek végbe, s az eredő intensitás (t. i. a sugár irányára merőleges felületegységre az időegység alatt eső mozgási erély) egyenlő az egyes rezgések intensitásának összegével. Ez egyaránt áll az egynemű és különnemű fényrezgések összetételére, föltéve hogy egymástól független eredetüek.

Vegyük fel, hogy a különböző periodusú fénymozgások *egy* rezgési középpontból erednek. E feltevés nemcsak nem helytelen, hanem igen valószinű is. Mert felvenni azt, hogy minden egyes hullámhossznak külön-külön felel meg egy rezgő éterrészecske mint mozgási középpont, annyit tenne, mint minden egyes hullámhossznak független eredetet tulajdonítani és feltételezni, hogy minden éterrészecske csak a lehető legegyszerűbb ingaszerű rezgést végezi és végezheti; ily esetben az imént említett okoknál fogva interferentia nem keletkezhetik. Ezenkivül még az is következnék, hogy közönséges fehér fényben csakugyan számtalan rezgési középpont lenne, még a legkisebb kiterjedésű fehér fényforrásban is.

Ámde a rezgő mozgás általános differentiál-egyenleteinek nemcsak *egy* particuláris megoldása van, a mely szerint a rezgő részecskék egyszerű, ingaszerű mozgást követhetnek, sőt ellenkezőleg: a legáltalánosabb lehetséges (azaz az egyenleteknek megfelelő) mozgás, melyet a rezgő részecskék végezhetnek, s mely Fourier tantételének alkalmazásával ezen differentiál-egyenletek megoldásából következik, nem egyéb mint számtalan ily egyes, különböző periodussal, amplituddal és phasissal biró ingaszerű rezgések összetétele. Elméletileg tehát teljesen jogositva vagyunk ily részecskéknek összetett periodikus mozgást tulajdonítani, sőt egyenesen kimondhatjuk, hogy csak igen kivételes esetben lehet az egy pontból eredő fény homogén. — Alig szükség említeni, hogy a legtöbb hangmozgás is ily összetett rezgésű.

Legyen tehát két különszínű, de egy központból eredő rezgés, mely különböző útakat futván meg, ismét találkozzék.

A két rezgésnek egymásra merőleges componensei:

$$u_1 = a_1 \sin.2\pi\left(\frac{t}{T_1} + \delta_{u_1}\right), \quad v_1 = b_1 \sin.2\pi\left(\frac{t}{T_1} + \delta_{v_1}\right)$$

$$u_2 = a_2 \sin.2\pi\left(\frac{t}{T_2} + \delta_{u_2}\right) \quad v_2 = b_2 \sin.2\pi\frac{t}{T_2}\left(+ \delta_{v_2}\right)$$

az összetett mozgás componensei.

$$U = u_1 + u_2, \quad V = v_1 + v_2$$

s az eredő intensitás:

$$J = C\int_0^1 \left[\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dt}\right)^2\right]dt$$

minthogy ismeretes, hogy az oly fény intensitása, mely két egymásra merőleges componensre bontható, egyenlő e componensek intensitásainak összegével.

Itt:

$$C = \frac{\sigma v}{2};$$

σ az éter sürűségét és v a rezgés tovaterjedési sebességét jelenti.

Ha még az alkotó két rezgésnek s componenseiknek intensitásaira is analóg jelölés használtatik, úgy:

$$i_{u_1} = C\int_0^1 \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 dt, \quad i_{v_1} = C\int_0^1 \left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2 dt$$

$$i_{u_2} = C\int_0^1 \left(\frac{du_2}{dt}\right)^2 dt, \quad i_{v_2} = C\int_0^1 \left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2 dt$$

és

$$i_1 = i_{u_1} + i_{v_1}, \quad i_2 = i_{u_2} + i_{v_1}.$$

Az eredő mozgás intensitása pedig:

$$J = C\int_0^1 \left(\frac{dU}{dt}\right)^2 dt + C\int_0^1 \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 dt$$

$$= i_1 + i_2 + 2C\int_0^1 \frac{du_1}{dt}\cdot\frac{du_2}{dt}\cdot dt + 2\int_0^1 \frac{dv_1}{dt}\cdot\frac{dv_2}{dt}\cdot dt$$

Az u_1 és u_2 értékeiből pedig következik:

$$\frac{du_1}{dt}\cdot\frac{du_2}{dt} = 4\pi^2\frac{a_1 a_2}{T_1 T_2}\left[\cos\frac{2\pi t}{T_1}\cos\frac{2\pi t}{T_2}\cos 2\pi\delta_{u_1}\cos 2\pi\delta_{u_1} + \right.$$

$$+ \sin\frac{2\pi t}{T}\sin\frac{2\tau t}{T_2}\sin 2\pi\delta_{u_1}\sin 2\pi\delta_{u_2} -$$

$$\left. - \cos\frac{2\pi t}{T_1}\sin\frac{2\pi t}{T_2}\cos 2\pi\delta_{u_1}\sin 2\pi\delta_{u_2} - \sin\frac{2\pi t}{T_1}\cos\frac{2\pi t}{T_2}\sin 2\pi\delta_{u_1}\cos 2\pi\delta_{u_2}\right]$$

Rövidség kedvéért tegyük:

$$\frac{T_1}{T_2} = c, \quad \frac{2\pi t}{T_1} = \varphi, \quad \frac{2\pi t}{T_2} = c\varphi; \quad \text{tehát: } dt = d\varphi \frac{T_1}{2\pi};$$

akkor az itt fellépő integrálok határozatlan értékei:

$$\int \cos\varphi \cos c\varphi d\varphi = \frac{\sin(1+c)\varphi}{2(1+c)} + \frac{\sin(1-c)\varphi}{2(1-c)};$$

$$\int \sin\varphi \sin c\varphi d\varphi = -\frac{\sin(1+c)\varphi}{2(1+c)} + \frac{\sin(1-c)\varphi}{2(1-c)};$$

$$\int \cos\varphi \sin c\varphi d\varphi = -\frac{\cos(1+c)\varphi}{2(1+c)} + \frac{\cos(1-c)\varphi}{2(1-c)};$$

$$\int \sin\varphi \cos c\varphi d\varphi = -\frac{\cos(1+c)\varphi}{2(1+c)} - \frac{\cos(1-c)\varphi}{2(1-c)}.$$

Jelentse ν_1 és ν_2 a két mozgásnál az időegység alatt végbemenő rezgések számát, s legyen a két rezgési idő oly viszonyban, hogy

$$n_1 T_1 = n_2 T_2$$

n_1 és n_2 alatt relativ primszámokat értvén, akkor ezen idő egyszersmind az összetett mozgás periodusa; legyen továbbá $m+\varepsilon$ az időegységben foglalt ily periodusok száma (hol m egész szám s ε egy netán előforduló törtet jelent).

Az egészelés határai t és φ-re nézve következők:

$$t = 1 = \nu_1 T_1 = \nu_2 T_2 \ldots \varphi = 2\pi\nu_1 = 2\pi\frac{\nu_2}{c}$$

$$t = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi = 0$$

Ámde mivel:

$$\nu_1 T_1 = \nu_2 T_2 = n_1(m+\varepsilon)T_1 = n_2(m+\varepsilon)T_2,$$

az integrált következő módon bonthatjuk el:

$$\int_0^{2\pi\nu_1} = \int_0^{2\pi n_1} + \int_{2\pi n_1}^{2\pi 2n_1} + \ldots + \int_{2\pi(m-1)n_1}^{2\pi m n_1} + \int_{2\pi m n_1}^{2\pi(m+\varepsilon)n_1}$$

$$= m\int_0^{2\pi n_1} + \int_0^{2\pi\varepsilon n_1} = m\int_0^{2\pi\frac{n_2}{c}} + \int_0^{2\pi\frac{n_2\varepsilon}{c}}$$

Az első integrál értéke zérus, a második integrál kiszámítása adja:

$$\int_0^1 \frac{du_1}{dt} \cdot \frac{du_2}{dt} dt =$$

$$= 2\pi \frac{a_1 a_2}{T_2} \left[\left(\frac{\sin 2\pi n_1 \varepsilon(1+c)}{2(1+c)} + \frac{\sin 2\pi n_1 \varepsilon(1-c)}{2(1-c)} \right) \cos 2\pi \delta_{u_1} \cos 2\pi \delta_{u_2} \ldots \right]$$

Ha pedig tekintetbe veszszük, hogy:

$$i_{u_1} = C \int_0^1 \left(\frac{du_1}{dt} \right)^2 dt = C \cdot \frac{2\pi^2 a_1^2}{T_1^2} = C \cdot 2\pi^2 a_1^2 \nu^2, \text{ stb.}$$

s hogy ν középértéke körülbelül *500* billió, úgy önmagától következik, hogy a fent talált integrál, melynek $\frac{1}{T_2} = \nu_2$ a tényezője, teljesen elenyészik a ν_2-t tartalmazó tagok irányában.

Teljesen hasonló kifejtés áll:

$$\int_0^1 \frac{dv_1}{dt} \cdot \frac{dv_2}{dt} dt$$

integrálra nézve is, az eredő mozgás intensitása tehát:

$$J = i_1 + i_2$$

egyenlő az alkotó mozgások intensitásának összegével.

Hátra volna még annak megvizsgálása, vajjon az egyes fénynemek intensitása szenvedett-e változást az eredő mozgásban, noha intensitásuk összege ugyanaz maradt.

Ez azonban közvetetlenül következik a függvényeknek kifejtéséből Fourier sora szerint, mert ez bizonyítja, hogy valamely függvényt egy, s csakis egyetlen egy módon lehet az ismert sinus és cosinus sorba kifejteni; más szóval, hogy valamely összetett mozgás csak is egyetlen egy módon tehető össze vagy bontható szét egyes, egyszerű, ingaszerű rezgésekre.

Az egyes szinek tehát az eredő mozgásban eredeti intensitásukat megtartják.

Eddig hallgatagon feltettük, hogy a közös rezgési középpont mozgása az egész idő folyamában folytonos; a valóságban azonban e föltevés csak igen rövid időre tekinthető helyesnek, miután egyéb körülmények arra kényszerítenek, hogy a természetes fény mozgásának időközönként hirtelen, lökés- vagy ütközésszerű változást tulajdonítsunk. Mindazonáltal könnyen bebizonyítható, hogy a talált eredmények még akkor is érvényesek.

Bevezetve a feltétet, mely szerint a rezgő részecske ütközése által annak mozgási erélye nem változik ugyan (mint a teljesen rugalmas testek ütközésénél), de igen is iránya; s hogy a két rezgés az ütközés után is oly módon megy végbe mint az előtt, lesz (ékezettel látva el az ütközés utáni állapotokra vonatkozó jeleket):

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dU'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV'}{dt}\right)^2 \ldots\ldots \quad \text{a)}$$

$$u_1' = a_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1} + \delta_{u_1}'\right), \quad v_1' = b_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1} + \delta_{v_1}'\right) \text{ stb.}$$

$$U' = u_1' + u_2', \qquad V' = v_1' + v_2'$$

Itt az ékezettel ellátott jelek egyszersmind egy új fekvésű $U'V'$ tengelyrendszerre vonatkoznak, melynek síkja azonban az előbbi UV síkkal összeesik.

Megtartva φ és $c\varphi$ előbbi jelentését, az a) alatti egyenlet kifejtése és rendezése a következő alakra vezet:

$$A_1 \cos^2\varphi + A_2 \sin^2\varphi + A_3 \sin\varphi \cos\varphi + A_4 \cos\varphi \sin c\varphi + A_5 \cos\varphi \cos c\varphi + A_6 \sin\varphi \sin c\varphi + A_7 \sin\varphi \cos c\varphi + A_8 \sin c\varphi \cos c\varphi + A_9 \sin^2 c\varphi + A_{10} \cos^2 c\varphi = 0.$$

Az a) alatti egyenlet az ütközés idejétől teljesen független; tehát az utolsó egyenlet is csak akkor érvényes minden időpontra nézve, ha egyenként:

$$A_1 = A_2 = A = \ldots = A_{10} = 0.$$

Ezen együtthatók pedig determinánsok alakjába foglalható függvényei a $\delta_{u_1} \ldots$, és $\delta_{u_1}' \ldots$ phasisoknak. Könnyű meggyőződni, hogy ezen egyenleteknek egy s csakis egyetlen egy megoldás felel meg, mely szerint:

$$\delta_{u_1} = \delta_{u_1}' \qquad \delta_{v_1} = \delta_{v_1}'$$
$$\delta_{u_2} = \delta_{u_2}' \qquad \delta_{v_2} = \delta_{v_2}'$$

azaz: az ütközés után végbemenő rezgések számára mindig oly fekvésű $U'V'$ tengelyrendszert lehet találni, melyre nézve a rezgés componensei minden tekintetben egyenlők az ütközés előtti componensekkel.

Minthogy pedig a fény intensitása független az UV tengelyrendszer fekvésétől (e mellett mindig feltételezve, hogy az UV sík a hullámfelülettel párhuzamos), a sebesség irányának ily lökésszerű változásai sem képesek ezen intensitásra befolyást gyakorolni, miből az eddigi eredmények helyessége még az efféle rezgésekre is következik.

Az előbbiek alapján tehát teljes szigorral bebizonyítottnak tekinthetjük e tételt: *különnemü fény, legyen az bármily eredetü s találkozzék bármely körülmények között, nem interferál, s az eredő fényben minden egyes fénynem eredeti intensitását változatlanúl megtartja.*

(Budapest, 1877. aprilis hó.)

ÉSZREVÉTELEK SZILY K. »A HŐELMÉLETBEN ELŐFORDULÓ MENNYISÉGEK DYNAMIKAI JELENTÉSÉRŐL« ÍRT DOLGOZATÁRA.

Dr. Réthy Mór, kolozsvári egyetemi tanártól.

Az idézett dolgozat fő tárgyát a hőelmélet második főtételének dynamikai elvekből való levezetése képezi, a következő két hypothesis alapján:

a) A test állapota akkor tekintendő változatlannak, ha térfogata. eleven ereje, potentiális erélye s a t. az időnek periodikus függvényei, és pedig úgy, hogy ez a periodus valamennyi függvényre ugyanaz.

b) Az absolut hőmérsék aránylagos a test közép eleven erejével.

E hypothesisek kétségkivül igen egyszerűek, s részemről nagy haladásnak tekinteném, ha a szóban lévő tételt ilyen egyszerű alapokra sikerülne fektetni. Véleményem szerint Szily dolgozata e czélt megközelíti, de nem éri el teljesen; a levezetésben nehány hézagot látok. E hézagok megjelölése képezi a jelen közlemény feladatát.

1.) A 242. lapon*) minden további vizsgálat nélkül egymás mellé állíttatik, hogy az m pont x.... coordinátája, és x'.... sebességi componense a dt idő alatt összesen

$$dx + \frac{\delta x \,.\, dt}{t_1 - t_0} \ldots . dx' + \frac{\delta x' \,.\, dt}{t_1 - t_0} \ldots .$$

változást szenved.

Minthogy a coordinátáknak az egyes dt időelemek alatti változása által minden egyéb meg van határozva, azért felfogásom szerint megvizsgálandó, hogy ama két rendbeli mennyiség egymás mellett megállhat-e?

2.) A 244. lapon álló $d\delta x = \delta dx$ egyenlet csak úgy állhat meg, ha a δ és a d egymástól független műtéteket jelentenek. Ámde a moz-

*) »Műegyetemi Lapok« I. köt. 6 és 8. füzet.

gás *legáltalánosabb zavarását* tekintve e két műtét, — miként már az ingamozgás egyszerű példája is eléggé mutatja, — nem független egymástól. Az egyenlet tehát legfölebb csak úgy állhat, ha a zavarás valamely *speciális* úton-módon történik.

E speciális zavarás létezése kimutatandó és megvizsgálandó, hogy a speciálizálás van-e befolyással a bebizonyítandó tétel általános voltára vagy sem, mivel megeshetik, hogy e speciálizálás teljesen megszabja az állapotváltozásnak ú. n. görbéjét, mely esetben az egész bizonyítás természetesen illusoriussá válnék.

3.) A 245. lapon az $\int_0^i \delta(2T dt)$ egyenlőnek tétetvén, $\delta(2i\overline{T})$-vel, ez utóbbi kifejezésben meglévő δi és $\delta\overline{T}$ mennyiségek a továbbiakban az i és $\overline{T}$ állapotjelzők azon *összes* változásainak tekintetnek, a melyeket e jelzők az erélyközlés következtében i idő alatt *tényleg* szenvednek.

Meg van-e ez engedve? Úgy találom, hogy csak föltételesen, t, i. csak akkor, ha a zavarás *egyenletesen* történik, úgy, hogy az állapotjelzők egyenlő idők alatt (harmadrendű kicsinyektől eltekintve) egyenlővel növekednek. E föltevés kétségkivül meg van engedve a hőmozgás esetében, s csak azt akartam megjegyezni, hogy a föltevés a bizonyításban szerepelvén, mint ilyen különösen kiemelendő.

4.) A 247. lapon a $\Sigma mx'\delta x$ szakaszosságot bizonyítva, Szily a) hypothesisét *kiterjeszti hallgatag az állapotváltozásra is.* Ugyanis hallgatva fölteszi, hogy a *dt idő alatti actio szakaszos* nemcsak a *változatlan* hőállapot esetében, hanem (harmadrendűektől eltekintve) akkor is, *ha az állapot véges idő alatt végtelen kicsinynyel* (egyenletesen) *változik.* Véleményem szerint ez a kiterjesztés lényegesen bonyolítaná az alapföltevést, s azért ha csak lehet mellőzendő.

(Kolozsvárt, 1877. január hóban.)

VÁLASZ A MEGELŐZŐ ÉSZREVÉTELEKRE.

Szily Kálmán-tól.

Réthy Mór némely pontban hézagosnak találja a levezetést, melyet a hőelmélet második főtételéről e Lapok I. kötetében közzétettem. Nem az állítások helyességében, hanem az érvek meggyőző erejében kételkedik. Azt kivánja, hogy némely érvemet fejezzem ki világosabban, fejtsem ki bővebben s biztosítsam a fölmerülhető ellenvetések ellen.

Én csak köszönettel tartozhatom neki e teljesen correct felszólalásért. Kívánságát is teljesen jogosultnak tartom. Mert ha a kérdésnek oly alapos ismerője, mint Réthy, valamely érvet commentár nélkül nem fogadhat el, úgy csakugyan fenn is kell forogni a szigorúbb bizonyítás szükségének.

Szóban forgó levezetésem egy általánosan ismert *tapasztalati tényen* és egy új — legalább a hőelméletben új — hypothesisen alapszik, mely azonban meggyőződésem szerint teljesen beleillik a testek szerkezetéről mai napság uralkodó felfogás keretébe. Hypothesisem t. i. ez:

A *változatlan állapotú* test térfogata, eleven ereje, *T*, potentiális erélye, *U*, összes erélye, *E*, s minden egyéb, *eddigelé állandónak tartott dynamikai tulajdonságai nem függetlenek az időtől, hanem az időnek periodikus függvényei és pedig akként, hogy ez a periodus, i, valamennyi tulajdonságra nézve egy és ugyanaz.* Én az állapot változatlanságát nem abban találom, hogy a test minden tulajdonsága *folytonfolyvást egy és ugyanaz* legyen, hanem igen is abban, hogy *minden tulajdonságának középértéke egy-egy i időszakban egy és ugyanaz.* Föltéteszem tehát, hogy a test állapota addig és csakis addig változatlan, míg a lüktetés időtartama *i* és az eddig állandóknak tartott tulajdonságok középértékei változatlanok.

Az alapúl vett tapasztalati tény pedig a következő:

Az erély mennyisége, mely egy megadott állapotváltozásra szükséges, nem függ az állapotváltozás *időbeli* viszonyaitól, tehát sem attól, hogy mikor kezdődik, meddig tart, sem attól, hogy a gyorsasággnak minő törvénye szerint megy végbe. 1 kilogramm víznek 0 fokról 1 fokra való hevítésére, állandó nyomás mellett, mindig és mindenkor ugyanannyi meleg szükséges, történjék a melegítés most vagy pedig utóbb, rövidebb vagy pedig hosszabb idő alatt, egyforma vagy pedig változó gyorsasággal. *Szóval, az állapotváltozásra szükséges erély az időbeli viszonyoktól független.**)

*) Erre a tapasztalati tényre nemcsak utóbbi közleményemben, hanem már előbb egyik akadémiai értekezésemben is hivatkoztam, ámbár a bebizonyítás folyamában nem emeltem ki azt, hogy az e tényre való hivatkozás okvetetlenül lényeges.

Réthy Mór volt az, szívesen elismerem, a ki már egy a múlt őszszel hozzám intézett magánlevelében figyelmeztetett arra, a mit itt észrevételei 3-ik pontjában emel ki, hogy t. i. levezetésem tényleg involválja az állapotváltozás gyorsaságának egyenletességét. Meggyőződvén Réthy észrevétele helyességéről, czélszerűnek láttam az e tényre való hivatkozásomat itt egész határozottsággal kidomborítani és Réthy úrnak nyilvánosan is megköszönni a szíves figyelmeztetést.

Ha tehát az a feladatom, a mit előbbi dolgozatomban magam elé tüztem, t. i. kiszámítani dynamikai elvek alapján az erélymennyiséget, melyet egy adott testtel közölni kell, hogy jelenlegi állapota egy megadott végtalen kis változást szenvedjen, vagyis jelenlegi állapotjelzői $i, \overline{T}, \overline{U}, \overline{E}$ etc. $i+\delta i, \overline{T}+\delta\overline{T}, \overline{U}+\delta\overline{U}, \overline{E}+\delta\overline{E}$-re etc. változzanak, úgy az állapotváltozás időbeli viszonyait egészen tetszés szerint választhatom. Előre is látható, hogy e számítás úgy üt ki legkönnyebben, ha

1.) az állapotváltozás kezdet-pillanatát mindjárt az időszámítás kezdetének veszem s ehhez képest o-val jelölöm;

2.) az időtartamot, mely alatt az állapotváltozás végbe megy, egyenlőnek veszem a test lüktetési idejével, i-vel;

3.) az állapotváltozás gyorsaságát egyenletesnek veszem fel, úgy, hogy egyenlő hosszúságú idők alatt az állapotjelzők változásai is egyenlők legyenek.

Igy tévén föl a problémát, az állapotváltozás egyenletes gyorsaságából (egy egyszerü arány alapján) azonnal következik, hogy az $i, \overline{T}\ldots.$ állapotjelzők dt idő alatt

$$\frac{\delta i \,.\, dt}{i}, \quad \frac{\delta\overline{T}.dt}{i}, \ldots\ldots$$

másodrendű kis mennyiséggel változnak. Az ezen változásokra szükséges erélymennyiséget, mely szintén csak másodrendű kicsiny lehet, jelöljük megfelelőleg

$$\frac{\delta Q.dt}{i}$$

vel. A feladat már most abban áll, meghatározni ezen másodrendű kicsiny erélymennyiségek összegét az állapotváltozás ideje alatt, vagyis kifejezni az

$$\int_o^i \frac{\delta Q.dt}{i} = \overline{\delta Q}$$

integrált a $\delta i, \delta\overline{T}\ldots.$ variátiók segedelmével.

A kiinduló egyenletet az erély megmaradásának elve szolgáltatja. A dt időelemben közlött erély egyenlő tartozik lenni az eleven erő változásával + a végzett munkával ugyanazon időelemben.

Számítsuk ki először is az időelemben végzett munkát, megtartva a másodrendü kicsiny mennyiségeket is, és csak a harmad- és magasabb rendű kis mennyiségeket hagyva el. Jelöljük a még változatlan állapotú test valamelyik m pontjára működő erőknek és a moz-

gás szabadságát korlátozó (tetszőleges) feltételi egyenletekből származó reactio-erőknek összesített componensét a derékszögű rendszer $X....$ tengelye szerint a tetszőlegesen választott t pillanatban $X....$vel, úgy a mozgás általános (LAGRANGE-féle) egyenletei értelmében:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = mx''.$$

A testtel a t időpillanat után következő dt időelem alatt $\frac{\delta Q.dt}{i}$ erélyt közölvén, az m pont *tényleg* bekövetkező *összes* elmozdulásának componenseit jelöljük $\partial x....$vel, úgy az e közben végzett összes munka, föltéve hogy az alatt $x''....$ nem változnék meg, annyi lenne mint:

$$-\Sigma m(x''\partial x + ...)$$

Ámde az elmozdulás közben az x'' is tényleg változást szenved. Jelöljük *összes* változását a ∂x elmozdulás alatt megfelelőleg $\partial x''$-vel. A tényleg végzett munka lesz tehát (harmadrendű kicsinyek elhagyásával) annyi mint:

$$-\Sigma m[(x'' + \frac{1}{2}\partial x'')\partial x + ...]$$

Az m pont elementáris elmozdulása, ∂x, két részből áll t. i. *1.*) a *spontán* elmozdulásból, mely a változatlan állapotban is létre jönne, s 2.) az *indukált* elmozdulásból, melyet a $\frac{\delta Q.dt}{i}$ erély felhasználása e pontnak juttat. E szerint a spontán elmozdulás componense $=dx$. Vagy ha még a másodrendű kicsinyeket itt is számításba akarjuk hozni;*) ugyanezt még ekként írhatjuk:

$$dx + \frac{1}{2}d^2x$$

Az indukált elmozdulás elemét, minthogy szükségképen másodrendü kicsiny, megfelelőleg $\frac{\delta x.dt}{i}$....vel jelölöm, úgy, hogy:

$$\partial x = (dx + \frac{1}{2}d^2x) + \frac{\delta x.dt}{i} \qquad a)$$

és a végzett munka e szerint:

$$-\Sigma m[(x'' + \frac{1}{2}\partial x'')(dx + \frac{1}{2}d^2x + \frac{\delta x.dt}{i}) + ...]$$

*) Szóban forgó dolgozatomban a spontán változásbeli másodrendű kicsiny mennyiségeket nem vettem figyelembe. A következőkből ki fog tünni, hogy a figyelembe vételök csakugyan nem is szükséges.

Valamint az elemi elmozdulás komponenseit két részből állónak gondoltam, ép így fogom fel a tetszőleges ξ mennyiség elemi változását, $\partial\xi$-t; s e szerint fölteszem, hogy:

$$\partial\xi = (d\xi + \frac{1}{2}d^2\xi) + \frac{\delta\xi . dt}{i}$$

Én e schema általános érvényességében egy perczig sem kételkedtem s minden habozás nélkül felírtam, hogy a sebességi componensnek, x'-nek, összes (spontán + indukált) változása a dt időelemben

$$\partial x' = (dx' + \frac{1}{2}d^2x') + \frac{\delta x' . dt}{i} \qquad b)$$

Ép így:

$$\partial x'' = (dx'' + \frac{1}{2}d^2x'') + \frac{\delta x'' . dt}{i}$$

a dt időben *végzett munka* lesz tehát, ha iménti kifejezésébe $\partial x''$ értékét helyettesítjük és a harmadrendű kicsinyeket elhagyjuk:

$$-\Sigma m[(x'' + \frac{1}{2}dx'')(dx + \frac{1}{2}d^2x + \frac{\delta x . dt}{i}) + \ldots.] \qquad I.)$$

Számítsuk ki már most *az elevenerő elementáris változását.* Ezt megkapjuk a következő egyenletből:

$$\partial T = \frac{1}{2}\Sigma m[(x' + \partial x')^2 - x'^2 + \ldots.]$$

$$= \Sigma m[x'(dx' + \frac{1}{2}d^2x' + \frac{\delta x' . dt}{i}) + \frac{1}{2}dx'^2 + \ldots.] \qquad II.)$$

E két erély-részletet (I. és II. alatt) összefoglalva, megkapjuk a dt időben kölcsönvett erélyt. Némi átalakítások és rövidítések után, származik: **)

$$\frac{\delta Q . dt}{i} = \Sigma m(x'\delta x' - x''\delta x + \ldots.)\frac{dt}{i}$$

És innen:

$$\int_0^i \delta Q . dt = \int_0^i \Sigma m(x'\delta x' - x''\delta x + \ldots)dt.$$

Es ebből már most kiszámítom a $\overline{\delta Q}$ értékét és találom, hogy:

---

*) E schemának az állapotjelzők elementáris változásai és a közlött erély is megfelelnek; csakhogy ezeknél a spontán változás zérus lévén, $d\xi$ és $d^2\xi$ elenyésznek.

**) Az I. kötetben megjelent dolgozatomban ez az egyenlet, mely az erély megmaradása elvéből különben önként is következik, képezte a kiinduló egyenletet.

$$i\delta Q = \int_0^i \delta(2Tdt) - \int_0^i \Sigma mx(x'\delta x + \ldots.) \qquad \text{III.)}$$

E levezetésre Réthy-nek két észrevétele van, t. i. az a kettő, melyet *1.*) és 2.) pontjában ad elő. Hadd szóljak előbb a 2.)-ről.

Réthy azt a kérdést veti föl, vajjon a δ és d nálam egymástól független műtételeket jelentenek-e, s következésképp van-e jogom a két müvelet sorrendjét fölcserélni? Én a dolgozatom megirásakor e jogot magától értetődőnek tartottam s a két művelet függetlenségét hallgatva supponáltam. Réthy figyelmeztetett arra e télen írt egyik levelében, hogy ezt mégis meg kellene közelebbről vizsgálni, és tisztán megmutatni, hogy a $d\delta() = \delta d()$. E bizonyítás felett egy hosszú levélváltás támadt közöttünk, melynek végeredménye az lett, hogy *a dolgozatomban szereplő d és δ művelet a kitüzött problemánál csakugyan a legcsekélyebb megszorítás, az általánosság legkisebb csorbítása nélkül fölcserélhető egymással.* Ez a bizonyítás azonban nem kizárólagos sajátom: kettőnktől van az, és így kettőnk neve alatt kell is megjelennie, — a mi legközelebb meg is fog történni.

R. másik észrevétele (t. i. az *1.*) alatt foglalt) arra vonatkozik, vajjon a ∂x és $\partial x'$-nek imént, a) és b) alatt fölírt értékei nem ellenkeznek-e egymással?

R.-nek annyiban tökéletes igaza van, hogy ezt csakugyan meg *kell* mutatni; de a mint azonnal látni fogjuk, könnyen meg is *lehet* mutatni.

Lássuk tehát. — A spontán elmozdulás időeleme, dt, az erélyközlés miatt, szintén változást szenved, melyet megfelelőleg $\frac{\delta t \,.\, dt}{i}$-vel jelölhetünk, úgy, hogy az időelem többé nem dt, hanem ∂t és pedig minthogy $d^2t = 0$,

$$\partial t = dt + \frac{\delta t \,.\, dt}{i}$$

Hasonlóképen, a sebességi komponens többé nem

$$x' = \frac{dx}{dt}$$

hanem:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{dx + \frac{1}{2}d^2x + \frac{\delta x \,.\, dt}{i}}{dt + \frac{\delta t \,.\, dt}{i}} = \frac{i(x' + \frac{1}{2}dx') + \delta x}{i + \delta t}$$

és a gyorsulás többé nem $\frac{dx'}{dt}$, hanem:

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{i(x' + \frac{1}{2}dx') + \delta x}{i + \delta t}\right)$$

És így:

$$\partial x' = \frac{i + \delta t}{i} \cdot d\left(\frac{i(x' + \frac{1}{2}dx') + \delta x}{i + \delta t}\right)$$

A kijelölt differentiálást végrehajtva és tekintetbe véve, hogy $d\delta x = \delta dx = \delta(x'dt)$, származik:

$$i\partial x' = i(dx' + \frac{1}{2}d^2x') + \delta x'dt + (x' - \frac{\partial x}{\partial t})d\delta t$$

A jobb oldal utolsó tagját, minthogy harmadrendű kicsiny, elhagyván, marad:

$$\partial x' = dx' + \frac{1}{2}d^2x' + \frac{\delta x' . dt}{i}$$

A közelebbi megvizsgálás is azt mutatja tehát, hogy a ∂x és $\partial x'$-nek az általános schema szerint fölirt értékei nemcsak hogy nem ellenkeznek egymással, hanem az egyik a másiknak szükségképi következménye.

Most még csak az bizonyítandó be, (s ez Réthy 4-ik és utolsó észrevétele), hogy:

$$\int_0^i \Sigma m(x'\delta x + \ldots.) = 0.$$

Gondolatmenetem, melylyel e kifejezés elenyészését bebizonyítani, vagy legalább plausibilissé tenni akarom, a következő:

Az *actio* a sebességi és elmozdulási componens szorozmányaiból alkotott összeget jelentvén, nyilvánvaló, hogy:

$$\Sigma m(x'\frac{\delta x . dt}{i} + \ldots.)$$

azon actiot jelenti, melyet a $\frac{\delta Q . dt}{i}$ erély dt idő alatt indukál a testben.

Jelöljük ezt megfelelőleg $\frac{\delta A . dt}{i}$-vel, úgy

$$\Sigma m(x'\delta x + \ldots.) = \delta A.$$

és

$$\int_0^i \Sigma m(x'\delta x + \ldots.) = (\delta A)_i - (\delta A)_0$$

Állítom már most, hogy $(\delta A)_i$ egyenlő $(\delta \mathbf{A})_0$-val, s ezt így bizonyítom be.

Gondoljunk magunknak egy testet. Állapota külső beavatkozás nélkül változatlan maradna határtalan időkig. Egy-egy lüktetés ideje, közép-térfogata, közép eleven ereje etc. folyvást egy és ugyanaz maradna, noha a momentán térfogat, momentán eleven erő etc., a test spontán változékonysága következtében, pillanatról pillanatra változnának s csak egy teljes időszak lejártával térnének vissza jelenlegi értékökre. A *0*-val jelölt időpillanathoz tartozó térfogat, eleven erő, etc. s az *i*-vel jelölt időpillanathoz tartozó térfogat, eleven erő, etc. tökéletesen egyformák lennének. E két időpillanatban a test momentán tulajdonságai is tökéletesen egyenlők lennének. De mi lenne mégis a különbség? A testet képező individuumok, az *egyes pontok* megváltoztathatták helyzetüket, sebességüket, gyorsulásukat, de csak úgy, hogy az *egész test* minden momentán tulajdonsága mégis változatlan maradjon. A test, mint egész, az ő létének tökéletesen ugyan abban a phasisában van; a különbség csak az, hogy a test *i* idővel korosabb lett, egyébként minden a régi.

Mi történik már most, ha a testtel egyszer a *0* időpillanatban és másszor az *i* időpillanatban ugyanannyi (dt) idő alatt, ugyanoly módon, ugyanannyi $\left(\frac{\delta Q.dt}{i}\right)$ erélyt közlünk. A test tulajdonságai megváltoznak mind a két esetben; és állítom, hogy egy-egy tulajdonság ugyanannyival változik, akár történik az erély inductiója most, vagy pedig *i* idővel később. *Ugyanaz a test, szakasztott ugyanazon momentán tulajdonságokkal, ugyanannyi idő lefolyása alatt, ugyanoly módon, ugyanannyi erélyt kapván, nincs rá ok, miért változzék meg ez vagy az a tulajdonság többel vagy kevesebbel most mint az elébb.* Ugyanazon okok, ugyanazon körülmények közt, ugyanazt a hatást szülik most, mint akár ezer év előtt, föltéve persze, hogy az ok és okozat közt fennálló függvény az időt explicite nem foglalja magában.

Ezt előre bocsátva, önként következik, hogy ugyanannyi erély, ugyanannyi idő alatt, ugyanazon testnek ugyanazon a phasisában ugyanannyi actiót fog indukálni, akár a *0* időpillanatban, akár az *i* időpillanatban közöltessék vele. A $\frac{\delta Q.dt}{i}$ erély által *dt* idő alatt indukál tactió annyi lesz mint:

$$\frac{(\delta A)_0 . dt_0}{i}$$

a dt_i idő alatt pedig:

$$\frac{(\delta A)_i . dt_i}{i}$$

Szükségkép állni kell tehát a következő egyenlőségnek:

$$\frac{(\delta A)_0 . dt_0}{i} = \frac{(\delta A)_i . dt_i}{i},$$

s minthogy $dt_0 = dt_i$, lesz:

$$\int_0^i \Sigma m(x' \delta x + \ldots.) = 0.$$

R. szerint ez a következtetés nem szigorú; szerinte az actio egy az állapotváltozásra vonatkozó mathematikai kifejezés, a melynek periodikus voltáról csak számoló úton lehet meggyőződni, tisztán logikai úton aligha.« Én ellenben azt hiszem, hogy ez csak egyszerű alkalmazása annak az elvnek, a mit a német »vom unzureichenden Grunde« kifejezéssel jelöl meg. Különben erre a kérdésre is vissza fogunk térni közösen publicálandó értekezésünkben.

ELŐADÁSI KISÉRLETEK.

Ezen czím alatt oly kisérletek rövid leirását akarjuk közölni, melyek czélja az illető tüneményt meggyőzőleg szemlélhetővé tenni, vagy a bemutatás sikerét jobban biztosítani, mint a hogy ezt a használatban lévő eljárások eddig engedték. A kisérleteknek a felfogás könnyítésére czélzó fontos hivatásuknál fogva, nemcsak eredeti, lényegesen új kisérleteket fogunk közölni, hanem olyanokat is, melyek vagy csak módosítások, vagy talán másutt már ismeretesek, de nálunk, noha czéljuknak jobban megfelelnek mint a szokásosak, még eddig nem használtattak.

Szerk.

I.

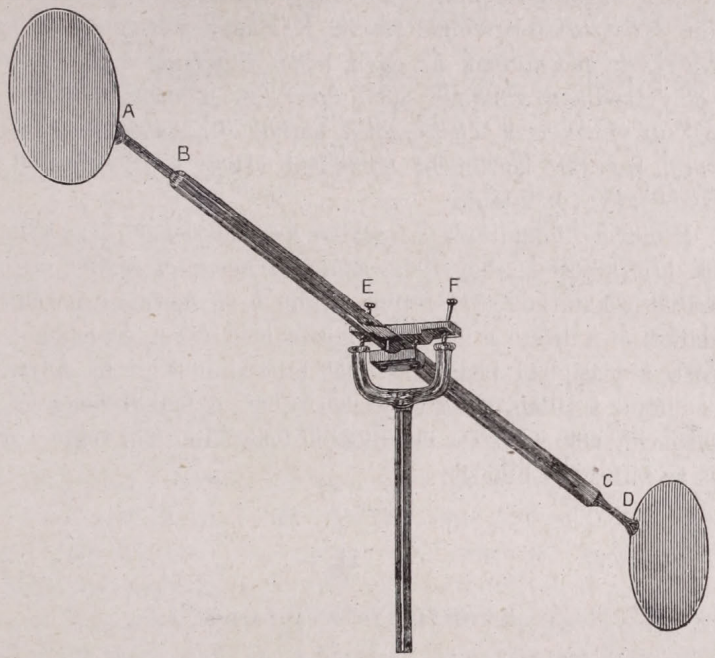
A VILLANYOS MÉRLEG MINT ELŐADÁSI ELEKTROSCOP. *)

Rendeltetése a villanyos vonzást és taszítást távolról is láthatóvá tenni.

Szerkezete, oly alakban, hogy kiki maga elkészíthesse, a következő: A mérleg rúdja AD vékonyfalú üvegcsőből áll, melynek végeit

*) Bemutattatott a Természettud. Társulat szakülésén, 1877. márcz. 21-én.

rövid, tömör üvegpálczák (*AB* és *CD*) képezik. Legvégső részeiken, *A*-nál és *D*-nél, az üveg tölcséralakú, s ott egy-egy köralakú papirle-



mez van hozzáragasztva. A rúd közepét két kivájt fadarab fogja körül, melyek csavarokkal vannak egymáshoz erősítve. Végül még a felső, hosszabbik fában két meghegyezett csavar *E* és *F* jár; e csavarok csúcsai támasz- és forgáspontokul szolgálnak. Alátámasztásukra legczélszerűbben kétágú villa-alakú üvegrúdat használunk, melynek végei kissé be vannak horpasztva.

Használat előtt úgy igazítjuk a mérleget, hogy vizszintes helyzetben állapodjék meg, és a mellett elég érzékeny legyen. Ez utóbbi körülményt már a lengések lassúságából megitélhetjük, és az által érhetjük el, hogy a meghegyezett csavarokat szükség szerint jobb vagy bal felé forgatjuk.

Helyesen felszerelt eszközön feltünően mutatkozik a villanyos vonzás, már akkor is, ha megdörzsölt üveg- vagy gyantarúddal felülről közeledünk az egyik természetes állapotú papirlemezhez. De még érzékenyebbé válik a mérleg akkor, ha a használatra szánt egyik lemezt megvillanyozzuk, például azáltal, hogy megdörzsölt üvegrúddal, vagy

megtöltött leydeni palaczk gombjával érintjük. Ilyenkor érzékenység tekintetében vetekedik az aranyleveles elektroscoppal, melyet azonban a kitérések nagysága tekintetében messze túlhalad. Tájékozásul a következő tapasztalatok szolgálhatnak. Érzékeny mérlegnek az egyensúlyi helyzete megváltozik az egyik lemez villanyozása által; mélyebben helyezkedik a villanyos oldal épen úgy, mintha nehezebbé vált volna. Oka ennek az a vonzás, mit a mérleg villanyossága az asztalra gyakorol. E zavaró körülmény elhárítása végett a villanyos mérleget magas állványra kell tenni.

Könnyen kimutathatjuk a szóban forgó mérleggel, hogy különböző testek érintkezése kétféle villanyosságot támaszt. E végből elszigetelt fémdrótot rókafarkon csúsztatunk végig, s egymásután közelítjük a rókafarkot és a drótot a mérleg villanyos lemezéhez. Az egyik esetben vonzást, a másikban pedig taszítást tapasztalunk; s ha folytonosan közel tartjuk a villanyos testet a mérleghez, a nélkül hogy ez utóbbit megérintenők, a kitérés mindinkább fokozódik, míg végre a mérleg rúdja az állványba ütközik.

II.

A KÉSLELTETETT FAGYÁSRÓL.*)

E tüneményt jól kiforralt vizzel, különösen pedig légmentesen elzárt vizzel, biztosan lehet ugyan megmutatni, hogy ha a hűtésnél arra ügyelünk, hogy az edénynek csak az a része érjen a hűtőkeverékbe, melyet a víz teljesen elborít; mindamellett a legtöbb esetben a késleltetett megdermedés előállítására mégsem a vizet, hanem az alkénessavas nátront szokták használni. Mert ez, kristály vizében megolvasztva, olvadási pontján alúl 30—40 fokkal lehülve, napokig is eltartható, anélkül hogy megszilárdúlna. E közben a rázkódások iránt úgyszólván egészen közönbös. Mihelyt azonban bármily parányi rész a meg nem olvasztott alkénessavas nátronkristályokból a szoba mérsékletéig lehűlt folyadékkal érintkezik, azonnal megindúl a kristályképződés; az egész tömeg megkövesül, s e közben 20—30 fokkal felmelegszik.**) Vízzel ily feltünő mértékben és ily könnyűséggel nem tudjuk a késleltetett fagyást szemlélhetővé tenni.

*) Bemutattatott a Természettud. Társulat szakülésén, 1877. márcz. 21-én.

**) A hőfok emelkedését Hoffmann szerint aether segítségével feltünővé tehetjük. Lásd a »Berichte der chem. Gesellschaft« 3-ik kötetében a 659. oldalt.

Azonban két körülmény könnyen előidézheti az eféle túltelített folyadéknak idő előtti megdermedését, t. i. a levegő tisztátalansága (a benne foglalt por) és a száradás. Ezek befolyását el kell hárítanunk, ha a kisérlet sikerét biztosítani akarjuk.

A port — melynek káros részeit úgy látszik mikroskopikus sókristályok képezik — visszatartja a gyapot, ha az edény nyilását, midőn a só, vizfürdőben történt megolvasztás után, forrásig hevíttetett, vele elzárjuk. De a párolgást meg nem akadályozza, s ezért száraz levegőben nem hat biztosan. Kaucsuk-dugó mindkét irányban biztosítékot ad, de eltávolítása sok esetben magával hozza a fagyás rögtöni megindultát. Kétségkívül legbiztosabb az edényt forralás közben beforrasztani. Csakhogy ilyen állapotban néha alig sikerül a folyadékot megdermeszteni, az alkénessavas nátron pl. hetekig megmarad híg állapotban, sem hűtés, sem rázás nem hat, s elvégre is magától kezdődik a megszilárdulás. Ilyenkor csak egy biztos mód marad hátra, t. i. a csövet ki kell nyitni, hogy szükség esetén kristálydarabot dobhassunk a folyadékba. — Ez utóbbi eljárás, daczára annak hogy kétségkivül érdekes eredményre vezet, a foganatosítás nehézségei miatt közönséges előadási kisérletre nem alkalmas. Végre még egy módot alkalmazhatunk, mely könnyen és mégis biztosan czélra vezet. Ez abban áll, hogy a folyadék felszinét olajréteggel óvjuk meg mind a portól, mind pedig a párolgástól; előbb rövid ideig forraljuk, hogy a levegő belőle eltávolodjék, és közvetetlenül utána annyi faolajat öntünk rá, hogy az egész fölület biztosan el legyen borítva. Az alkénessavas nátronnál ebben az állapotban úgylátszik csak 0° körül indúl meg magától a kristályodás; rendes szobamérsékletnél ez még nem észleltetett. De szándékosan könnyen megindíthatjuk a kristályodást. E végből nem kell egyebet tenni, mint egy megnedvesített kristálydarabot az olajra ejteni, hogy onnét további sülyedésével a sóig eljuthasson.

Megjegyzendő, hogy túltelített oldatok késleltetett kristályodását oly alakban is elő lehet állítani, hogy ez a vetitésre is alkalmas. E czélra például kénsavas czinkoldatot használhatunk, melyet legjobb beforrasztott próbacsőben készen tartani. A csövet párhuzamos üvegfalú, kénsavas czinkoldatot tartalmazó edénybe teszszük, s egy oldalról megvilágítjuk, másik oldalán pedig lencsét alkalmazunk, mely kellő távolságban képét állítja elő. Ezután megindítjuk a kristályképzést. Biztosan sikerül ez a cső felső, folyadékkal nem borított, de nedves részének enyhe melegítése által, csak az ott keletkező, jégvirághoz hasonló kristályokkal érintkezzék a folyadék. 50—60 foknál telített ol-

datban lassan egymásután keletkeznek a tűalakú kristályok, melyek szép csoportokat képezve, mind nagyobbra fejlődnek.

Megemlíthetjük még, hogy légmentesen elzárt vagy olajréteggel fedett, kristályvizökben megolvasztott testek vagy túltelített oldatok gyakran az első pillanatra meglepő magaviseletet tanusítanak. Egyes kristályokat látunk bennök keletkezni, melyek nem képesek a folyadék többi részét megszilárdulásra birni, pedig a folyadék nem vesztette el ebbeli tulajdonságát. Az ilyen kristályoknak más szerkezetük (más víztartalmuk) van, mint a megmaradó folyadéknak, s úgy viselkednek mint bármily más idegen, közönyös testek; kristályodásra indító ugyanis csak az olyan anyag szokott lenni, mely isomorph a képezendő kristályokkal.

III.

FÉNY- ÉS HŐ-ELNYELÉS KOROM ÁLTAL.

Ha napfény áll rendelkezésünkre, akkor a következő módon lehet kimutatni, hogy mennyire más hatást gyakorol a fény és hő az átlátszó testekben, mint az őket elnyelő anyagokban.

Homorú fémtükörnek gyújtópontjába tartjuk egy próbacsőnek alsó beforrasztott végét, mely kevés aethert vagy vizet tartalmaz. Ekkor még nem tapasztalunk közvetetlenül szembeötlő hatást. De ha most kevés kormot teszünk a folyadékba, a napfény behatása alatt csakhamar heves forrás áll be. Hasonló különbség mutatkozik fényes felületü, fehér papir és nem fényes, fekete papir között is. Az utóbbi a gyújtópontban azonnal meggyulad, a mi nem történik a fehér, fényes felületü testtel.

IV.

A FOLYADÉKOK BELSEJÉBEN URALKODÓ NYOMÁS ELŐTÜNTETÉSE.

Alig szükséges ugyan bizonyítgatni, hogy a folyadék mélyebb részeiben nagyobb a nyomás, mint a felsőbb rétegekben; mert mindenki belátja hogy a folyadék súlyánál fogva ép úgy nehezedik az alattas részekre, mint akár a szilárd test az aljazatára. E szempontból itélve, a következő kísérlet talán feleslegesnek látszhatik; de a kevés fáradságot igénylő kisérlet mindig megérdemli foganatosítását, ha t. i. valamely tételt általánosan ismert tapasztalatokkal hoz kapcsolatba,

és ha ezáltal a speculatiót nélkülözhetővé teszi. Mentse ki ez a felfogás az efféle, magukban véve aprólékos tárgyak közlését.

A folyadék-nyomás kimutatására egy általánosan ismert eszközt, az úgynevezett Cartesius-féle búvárt (vagy pedig rövid, fölül zárt s alúl kis nyilással biró üvegcsövet) használhatunk. Tudjuk erről, hogy a nyomás növekedtével alásüllyed, a nyomás csökkenésekor pedig ismét felszáll. A kisérlethez hosszú, alúl zárt és felül nyilt üvegcsövet megtöltünk vízzel, s a Cartesius-féle búvárt beléhelyezzük. Most úgy intézzük a dolgot, hogy a cső felső részében a búvár, például üvegcső segélyével elmerítve, magától ismét a felszínig emelkedjék; ellenben ha a cső alsó részébe letolatott, többé már ne térjen vissza, hanem az edény fenekére süllyedjen. Ez esetben legalább akkora nyomásnak, még pedig a folyadékoszloptól eredő nyomásnak van kitéve, mint a milyet kivülről kell a folyadék felszinére gyakorolnunk, hogy a búvár onnét alászállhasson.

A buvárnak kellő megtöltése csak egy pár perczet igényel. Azon kezdjük, hogy a víznél könnyebbre csináljuk, azután bele teszszük az említett, vagy valamely más alkalmas csőbe, a hol a víz felszinén kell maradnia. Most szájunkkal kiszívjuk a csőből a levegőt, a mit szükség esetén dugóval és abba illesztett csővel lehet megkönnyíteni. Szívás közben buborékok emelkednek a búvár nyílásából, annak megszüntével pedig mindinkább elmerül. Ha már csak kis része nyúlik ki a vízből, akkor megpróbáljuk, megfelel-e már czélunknak, s szükség szerint a szívást óvatosan ismételjük. Ezen eljárás kényelmesebbnek látszik, mint az, melyet K. L. Bauer közlött. (Pogg. Ann. Ergänzungsband 6· 332-ik oldal).

Schuller Alajos.

A HULLÁMMOZGÁS GYORSASÁGA LÁGY ZSINEGEKBEN.*)

Dr. Abt Antal, kolozsvári egyetemi tanártól.

1. visszapillantás a Weber-féle kisérleti eredményekre.

Savart és Seebeck kisérletei óta eléggé ismeretes, hogy a húrok transversalis rezgéseinél *észlelt* rezgési szám mindig nagyobb annál, melyet az Euler-féle képlet alapján tett számításból nyerünk, és hogy

*) Bemutattatott a m. tud. Akadémia ülésén, 1877. május 8-án.

e különbséget a húrok feszessége okozza. Ezen különbség annál nagyobb, minél vastagabb és minél rövidebb a húr, a mint ez a következő, Seebeck [1]) által a csak kis mértékben feszes húrokra elméleti úton levezetett képletből kitünik:

$$n = n_1\left(1 + \frac{r^2}{l}\sqrt{\frac{\varepsilon\pi}{P}}\right)$$

melyben n a feszes, n_1 a teljesen hajlékony húr rezgésszámát jelenti P feszítésnél; r a feszes húr félátmérőjét, l a hosszát és ε a rugalmassági modulust. A képletből továbbá kitünik, hogy $\frac{n}{n_1}$ az egységhez annál közelebb áll, minél kisebb $\frac{\varepsilon}{P}$.

Weber testvérek érdekes kisérletei [2]), melyek az Euler-féle képlet ($c = \sqrt{\frac{Plg}{p}}$, melyben c a terjedő hullám gyorsaságát, l a zsineg hosszát, p ennek súlyát és g a szabad esés gyorsulását jelenti,) meg vizsgálása végett egy pamutból készült lágy zsineggel tétettek, a legszebb összeegyezést tüntetik elő az észleleti és az elméleti eredmények között.

A zsineg, melynek hossza 16,058 méter, súlya pedig 52,612 grm. volt, egyik végével egy szilárdúl megerősített horoghoz, másikával pedig egy 30 centiméternyi átmérőjű és tengelye körül csekély surlódással forgó kerék kerületéhez volt odacsavarva.

A transversalis hullám egy gyenge, de gyors ütés által gerjesztetett, mely nehány hüvelyknyi távolságban a keréktől a zsinegre újjal gyakoroltatott. Az időt, mely alatt a hullám a zsinegen végig haladt és a kerékhez visszatért, hatvanad másodperczeket mutató órán észlelték.

A következő tábla mutatja az észlelt és az Euler-féle képletből kiszámított időt és ezeknek különbségét három különböző feszítő súlynál.

1. tábla.

Feszülés grammokban	*Észl. idő mp.-ekben*	*Kisz. idő mp.-ekben*	*Különbség*
610,5	0,766	0,767	+ 0,001
2027,5	0,413	0,421	+ 0,008
4226,4	0,271	0,291	+ 0,020

[1]) Dove, Repert. d. Physik. VIII. köt. Akustik. 35. l. — Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. 1846—47.

[2]) Wellenlehre auf Experimente gegründet. 460 l.

A legnagyobb eltérés tehát csak 0,02 másodpercz. Ezen összevágás az észlelet és az elmélet eredményei között valóban meglepő, és ezen meglepetésnek az észlelők is adtak kifejezést, egyúttal kijelentvén, hogy ezen megegyezés a legszebb bizonyíték mind az elmélet helyességére, mind a kisérleti módszer pontosságára nézve.

Habár a különbség az észlelt és a kiszámított idő között igen csekély, mégis feltünő, hogy ezen különbség a zsineg feszülésével növekedik. E körülmény még szembetünőbb, ha a hullámok gyorsaságát nem az idő, hanem az 1 másodpercz alatt befutott út hossza által kifejezzük, a mint az a következő táblázatban történt.

2. tábla.

Feszülés grammokban	*Észl. gyors. mp.-ekben*	*Kisz. gyors. mp.-ekben*	*Különbség*
610,5	43,361	43,483	— 0,122
2027,5	80 429	79,254	+ 1,175
4236,4	122,713	114,434	+ 8,279

A mig a legkisebb súlynál a különbség az észlelt eredménynek alig 0,3 százalékát teszi, addig a legnagyobb feszülésnél a különbség közel 7 százalékra rúg.

Minthogy a Weber testvérek által alkalmazott módszernél, a mint az egymással szembe állított egyes észleletek mutatják, igen nagy pontosság érhető el, azon gondolat támadt bennem, hátha ezen 7 százalékra menő különbség már nem észleleti hiba, hanem inkább abban keresendő, hogy a lágy zsineg is, ha erősen feszítve van, már nincs olyan körülmények között, milyenekre az Euler-féle képlet teljesen érvényes és alkalmazható. Hátha netalán a lágy zsinegek is, ha erősebben feszítvék, úgy viselkednek, mint a feszes húrok, hogy az észlelt gyorsaság nagyobb a kiszámoltnál.

Hogy eziránt tisztába jöjjek, elhatároztam magam, a Weber-féle kisérleteket különböző zsinegekkel és különböző feszítő súlyokkal végrehajtani.

2. az alkalmazott kisérleti módszer leirása.

Ezen kisérletekhez mindenek előtt egy olyan készülék szükséges, melylyel apró időközöket pontosan meg lehet mérni. E czélra egy Siemens gyárában készült villanyos időjelző-készüléket használtam, melylyel 0,01 másodperczeket biztosan meg lehet mérni. A készülék áll egy ingaórából és egy Morse-féle, két elektromágnessel ellátott villanyos

jelzőből. Mindegyik elektromágnes fölött van egy, a végén hegyes aczélpeczekkel ellátott emeltyű, és mivel az emeltyűk közvetetlenül egymás mellett fekszenek, az általuk egy és ugyanazon papirszalagon jelzett pontok két egymás mellett haladó, párhuzamos vonalon fekszenek. Az egyik elektromágnessel kapcsolatban álló vezeték össze van kötve az ingával, és ez által minden egyes ingásnál záratik. Egy másik villanyos teleptől jövő vezeték keresztülmegy a második elektromágnesen és egy kopogtatón, és ez utóbbi által tetszés szerint zárható és nyitható, úgy hogy ez által valamely tünemény lefolyásának tartamát (kezdetét és végét) pontosan jelezni lehet. A folytonos pontsorban az egyes térközök egy-egy ingalengés tartamát jelentik, melyet mikrométerek által könnyen lehet elaprózni. Ismervén az inga lengésidejét, könnyen meghatározhatjuk a tünemény kezdetét és végét jelző pontok egymástól való távolságának megfelelő időtartamot, vagyis a tünemény lefolyásának tartamát.

Az inga lengésideje egy jó órával és a villanyos jelzővel lett meghatározva két észleleti sorból: egyszer 720 másodpercz alatt a papirszalagon 945,34 ingás jeleztetett, más alkalommal 900 mp. alatt 1182 inga észleltetett; első észleletből a lengési idő 0,76162 mp., a másodikból 0,76142 mp.; a kettőből a középérték 0,7615 mp., mondhatni egy tizezred másodpercznyi pontossággal.

Ezen idő elaprózása pontos milliméter mértékkel történt, és pedig a parallaxis kikerülése végett legbiztosabban körző segélyével, oly módon, hogy a körző szárai közé vett távolok a mérővonalzón leolvastattak. Ezen mérést 1 vagy legalább 2 milliméternyi pontossággal lehet megtenni, a mi, minthogy az egyes közök legalább 1 centiméter hosszúk, 0,0076 illetőleg 0,0152 másodperczet jelent. A Weber testvérek által használt órával csak hatvanad vagyis 0,0166 másodperczeket lehetett észlelni.

A zsineg megerősítése hasonló módon történt, mint a Weber-féle kisérleteknél. Egyik vége egy szilárdul álló faoszlopba csavart horoghoz volt erősítve, a másik pedig egy az Atwood-féle eső gépről levett, igen nagy gonddal (Süss által) készített kerékhez, melynek átmérője 17 centiméter. A horoggal ellátott feszítő súlyok hajlékony, rövid selyemzsinegre függesztettek, mely a kerékről tetőirányosan lecsüngött, úgy hogy a feszítő súly emeltyűkarja mindig 87 milliméter volt. A zsineg feszülése, mely a feszítő súlylyal egyensúlyban állott, szinten érintőileg hatott a kerékre, de más emeltyűkarral. Ezen emeltyűkar mind annyiszor meg lett mérve és a két emeltyűkar viszonyából

a zsineg feszülése meghatározva. A zsineg két végpontja egyenlő magasságban volt megerősítve, a kifeszített zsineg tehát, mint az egyenlet felteszi, viziránvos, lehetőleg egyenes vonalat képezett. A kopogtató és a kerék állványa egy asztalhoz voltak erősítve, az utóbbi úgy, hogy a súlyokat tartó zsineg az asztal széle mellett szabadon lecsüngött.

A hullámgerjesztés újjal történt, ezzel rövid ütést gyakorolván a zsinegre, a keréktől két deciméternyi távolságban. Minden észlelés előtt begyakoroltatott az a tempó, melyben a hullám visszatérése a kerékhez ismétlődött, hogy így a kopogtatót a kellő időben lenyomni lehessen. Az első kopogtatás rendesen a hullám első, a második pedig a hullám ötödik, néha hetedik visszatérésénél történt, és mindannyiszor 10 vagy 12 észlelés tétetett; ezekből azután a középérték vétetett. Ezen eljárás pontosságáról legjobban tanúskodik a következő tábla, melynek számai egy 12,845 méter hosszú, 8,565 gramm súlyú igen hajlékony selyemzsinegre vonatkoznak; midőn a feszítő súly 195,3 grammot, az emeltyűkarok viszonyából kiszámított feszülés a zsinegben pedig 204,6 grammot tett.

Az észletek sora	*Idő, mely alatt a hullám egyszer visszatért*	*Az észletek sora*	*Idő, mely alatt a hullám egyszer visszatért*
1	0,4699	6	0,4722
2	0,4520	7	0,4907
3	0,4419	8	0,4658
4	0,4606	9	0,4712
5	0,4801	10	0,4593

A középérték 0,4664, a legnagyobb eltérés ettől csak 0,024 másodpercz.

3. KISÉRLETI EREDMÉNYEK.

A nyert eredményeket az alább következő táblákban állítottam össze. Ezen táblákban P a feszítő súlyt, P' a zsineg feszülését grammokban, J a hullám egyszeri visszatérése idejét másodperczekben, c pedig a terjedés gyorsaságát méterekben jelenti. Az utolsóelőtti rovat az észlelt és a kiszámított gyorsaság közötti különbséget, az utolsó rovat ezen eltérést százalékokban fejezi ki.

I. Kisérletek egy sodratlan, igen hajlékony, külön e czélra elkészített *selyemzsineggel,* melynek hossza 12,845 méter, súlya 8,565 gramm.

I. tábla.

P	*P'*	*J*	*Észlelt c*	*Kiszám. c*	*Kül.*	%
50,3	59,9	0,8336	30,818	29,679	+ 0,139	0,4
98,3	109,6	0,6277	40,924	40,146	+ 0,778	1,9
148,3	157,3	0,5311	48,374	48,095	+ 0,279	0,5
195,3	204,6	0,4664	55,081	54,852	+ 0,229	0,4
245,3	258,7	0,4152	61,873	61,676	+ 0,197	0,3
295,3	321,1	0,3737	68,745	68,713	+ 0,032	0,1
395,1	455,3	0,3314	77,236	81,824	— 4,588	5,9
594,9	619,8	0,2771	92,710	95,473	— 2,763	3,0
694,9	732,8	0,2679	95,894	103,809	— 7,915	8,0
996,3	1053,8	0,2319	110,780	124,487	—13,707	12

II. tábla.

Kisérletek egy sodratlan finom, külön e czélra elkészített *pamutzsineggel,* melynek hossza 20,729 méter, súlya 8,211 gramm.

P	*P'*	*J*	*Észlelt c*	*Kiszám. c*	*Kül.*	%
148	231,38	0,5545	74,766	75,683	— 0,917	1,2
245	286,20	0,4965	83,501	84,172	— 0,671	0,8
345	367,49	0,4529	91,541	95,380	— 3,839	4,0
445	489,66	0,3784	109,561	110,098	— 0,537	0,4
545	639,77	0,3372	122,948	125,703	— 2,755	2,2

III. tábla.

Kisérletek egy vastagabb, sodratlan, igen hajlékony, külön e czélra elkészített *pamutzsineggel,* melynek hossza 18,597 méter, súlya 50,755 gramm.

P	*P'*	*J*	*Észlelt c*	*Kiszám. c*	*Kül.*	%
594,9	709,0	0,7284	51,062	50,471	+ 0,591	1,1
996,3	1070,1	0,6091	61,064	62,006	— 0,942	1,5
1191,3	1233,8	0,5632	66,040	66,505	— 0,465	0,7
2000,0	2159,7	0,4258	87,351	88,190	— 0,739	0,8
3004,0	3141,0	0,3506	106,086	106,233	— 0,147	0,1
3994,0	4251,05	0,3064	121,390	123,587	— 2,197	1,8

IV. tábla.

Kisérletek egy finom (zongorához való) *aczélhuzallal*, melynek hossza 12,729 méter, súlya 1,106 gramm, átmérője 0,1225 millimeter.

P	*P'*	*J*	*Észlelt c*	*Kiszám. c*	*Kül.*	%
25,3	47,86	0,3383	75,253	73,494	+ 1,759	2,3
50,3	87,52	0,2578	94,872	99,384	— 4,512	4,7

V. tábla.

Kisérletek egy *rézhuzallal*, melynek hossza 12,808 méter, súlya 12,076 gramm, átmérője 0,3435 milliméter.

P	*P'*	*J*	*Észlelt c*	*Kiszám. c*	*Kül.*	%
295,3	338,0	0,4295	59,641	59,293	+ 0,348	0,6
644,9	775,1	0,2798	91,551	89,783	+ 1,768	2,0
996,3	1093,0	0,2405	106,511	106,621	— 0,110	0,1

VI. tábla.

Kisérletek egy *aczélhuzallal*, melynek hossza 12,729 méter, súlya 10,180 gramm, átmérője 0,3528 milliméter.

P	*P'*	*J*	*Észlelt c*	*Kiszám. c*	*Kül.*	%
295,3	611	0,2905	87,635	86,553	+ 1,082	1,2
694,9	1209	0,2290	111,170	121,752	—10,582	9,5
996,3	1605	0,2079	122,453	140,286	—17,833	14,5

A selyemzsinegnél, mint az I. tábla mutatja, a hat első meghatározásnál, mig t. i. a hullámozgás gyorsasága 70 méteren alól maradt, mindig nagyobb volt az észlelt gyorsaság mint a kiszámított, és a kettő közötti különbség csökkenő, úgy, a hogy a Seebeck-féle képlet kivánja. A többi négy kisérletnél a két gyorsaság különbsége nemle-

ges, mi annak tulajdonítandó, hogy a pontos észlelés ilyen nagyobb gyorsaságoknál és a zsineg csak ennyi hosszaságánál már igen nehéz. Ugyanezen körülmény forog fenn még a selyemzsinegnél jóval hosszabb két pamutzsinegnél is, mint a II. és III. táblából kitünik.

Azonban a rendkivüli csekély különbség az észlelt és kiszámított gyorsaság között, mely az I. tábla hat első észlelésénél és III. tábla valemennyi észlelésénél 2%-ra sem megy, valószinűvé teszi, hogy az általam gyanított különbség a lágy zsinegeknél nem létezik, hanem hogy ezekre kisebb és nagyobb feszüléseknél az elmélet teljesen alkalmazható.

Végre a IV. és V. tábla mutatja, gyengén feszített finom vas- és rézhuzal is jól alkalmazkodik az elmélet követelményeihez.

A VI. táblában előtüntetett nagyobb különbség megint a nagy gyorsaság és az ebből származó észleleti hiba rovására esik.

(*Kolozsvár, 1877. aprilis 28.*)

IRODALOM.

George Salmon, »Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen.« Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich. Zweite Auflage. Leipzig, B. G. Teubner, 1877, in 8. (XIV, 477). Ára 10 márk.

Az eredeti angol munkának 3-dik kiadása szintén csak most hagyta el a sajtót. A német fordítás első kiadása az eredeti munka első kiadása után készült, holott az előttünk fekvő második kiadásnál Fiedler úr nemcsak az eredeti munka második kiadásában történt változásokat és tetemes bővítéseket veheté tekintetbe, hanem egyszersmind az originális harmadik kiadásában előfordulókat is, miután Salmon úr szíves volt a fordítót a harmadik kiadásban előforduló változásokra figyelmeztetni.

Ha ez új kiadást az első német kiadással, mely 1863-ban hagyta el a sajtót, hasonlítjuk össze, úgy bátran állíthatjuk, hogy ez utóbbi egyszersmind egészen új könyv is, mi legnagyobbrészt onnét ered, hogy a benne előforduló algebrai alakok elmélete, a mathematikai buvárkodás eme legfiatalabb gyermeke, mely még korántsem érte el nagykorúságát, az utolsó 14 év alatt erőteljes ifjúvá fejlődött.

Az új kiadás huszonöt előadásra van felosztva, melyet öt toldalék és számos irodalmi jegyzet (464—77. ll.) követ, holott az első kiadás pusztán csak tizenöt előadásból áll.

A szóban forgó munka első tizenegy előadása a determinánsok elméletére és fontosabb algebrai alkalmazásaira szorítkozik, mely disciplinába a kezdő könnyed modorban vezettetik be, úgy hogy ezeket mindenkinek ajánl-

hatjuk, ki a modern algebrának e fontos fejezetébe bevezettetni kiván; ámbár nem tagadhatni, hogy a determináns-elméletet és különféle alkalmazásait egész teljességében csakis Baltzer úr »Theorie und Anwendung der Determinanten« című klassikus munkájában lelhetni. Salmon itt mellőzi a determinánsok alkalmazását a mértanra, mely különben ugyane szerző: »Conic sections« és »Analytic geometry of three Dimensions« című munkáiban, vagy ezeknek Fiedler által sajtó alá rendezett német átalakításaiban különféle helyeken szétszórva nagyon bőven érvényre jut; itt főleg az algebrai alkalmazásokra szorítkozik. Az erre vonatkozó fejezetekben az egyenletek elméletében igen fontos kiküszöbölési eredőket, a symmetrikus függvények, valamint a Sturm-Sylvester-féle függvények elméletét; továbbá két egyenlet közös gyökeinek, valamint egy egyenlet többszörös gyökeinek elméletét és az ezekkel szoros összefüggésben álló discriminánsok elméletét vezeti elénkbe.

Az utolsó tizennégy előadásban az algebrai alakok elméletével találkozunk, melyről noha már más alkalomból szólottunk *) mégis czélszerűnek véljük a következőket felemlíteni. Az idézett helyen a következőket mondtuk:

»Az algebrai alakok elmélete alatt az algebrai egész és egyméretű függvények elméletét értjük. Ha az ily függvényben, melyben a változók száma n legyen, az n változót más, új n változó egyméretű vonalos függvényei által pótoljuk, akkor az új n változóban szintén egy függvényt nyerünk, melynek az előbbi függvénynyel bizonyos közös tulajdonságai vannak. Azon tulajdonságok kipuhatolása, a melyek az ily helyettesítésnél nem változtak, az algebrai alakok elméletének főfeladata.«

Ezek szerint itt az eredeti függvénynek az átalakított függvény felel meg, mely az előbbiből az imént nevezett vonalos hellyettesítések segítségével nyeretett.

Képezzünk az eredeti függvény változóiból és együtthatóiból egy másik függvényt, a melyhez az átalakított függvény változóiból és együtthatóiból ugyanazt a függvényt képezzük, úgy ha e két egymással szemben álló függvény oly természetű, hogy azok csak a vonalos helyettesítés determinánsának valamely hatványában különböznek egymástól, akkor az az eredeti függvény covariánsa vagy invariánsa lesz, a mint az a változókat magában foglalja, vagy pusztán csak az együtthatóktól függ.

Cayley és Sylvester alapvető értekezésein kivül itt még különösen Aronhold, Clebsch, Gordan és Hermite dolgozatai vétettek különösen figyelembe.

Habár az algebrai alakok elméletéből leginkább csakis a binär alakokéra van a fősúly fektetve, melyek közöl különösen Hermite és Sylvester dolgozataira az ötödfokú binär alakokról akarunk figyelmeztetni, úgy mégis az utolsó előadásokban némileg tekintetbe vannak véve olyan alakok is, melyekben a változók száma nagyobb kettőnél.

Ezek után a valóban dús tartalmú munkát mindazok figyelmébe ajánlhatjuk, kik könnyedén, alaposan és lehetőleg gyorsan óhajtanak a magasabb algebrának alapvető és még fejlődésben levő mély tanaiba bevezettetni.

(H. J.)

---

*) Lásd e lapok I-ső köt. 59. lapon.

MEGFEJTETT FELADATOK.

21. Vannak-e számrendszerek, melyekben valamely adott a számot csupa *1*-esekkel lehet kiirni, és ha igen, minő alapszámokra vonatkozhatnak e számrendszerek?

Az a számot az x alapszámra vonatkoztatott számrendszerben csupa egyesekkel kiirottnak mondhatjuk, ha legáltalánosabb alakja a következő:

$$....111 \cdot 111....$$

hol a decimáltörtekkel analóg módon a pont utáni számok így olvasandók:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots$$

E szerint föladatunkba tartozóknak veszszük a tiszta törtszámokat is, melyeket, mint ez Angolországban szokás, zérus nélkül így lehet irni: $\cdot 111....$

Tárgyaljuk először azt az esetet, midőn az adott szám: *a egész szám.* Az hogy:

$$1....111 = a,$$

annyit jelent, hogy:

$$a = 1 + x + x^2 + ... x^{n-1}$$

mely egyenlet tehát úgy oldandó meg, hogy benne x és n (hol n azután az egyesek száma) positiv egész számú értéket nyerjenek. Ha az egyenletet így irjuk:

$$\frac{a-1}{x} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-2} = \textit{egész szám}$$

mint első föltételt nyerjük, hogy *x szükségkép az $a-1$ osztója,* a miből az is következik, hogy

$$x = a - 1, \quad n = 2$$

mindig egyik megoldása a föladatnak. De ekkor

$$a_1 = \frac{a-1}{x}$$

nem csak egész szám, de mint az előbbi képlet mutatja, az x számrendszerben ismét csupa egyessel irható; így tehát

$$a_2 = \frac{a_1 - 1}{x}$$

ismét egész szám, melyről ugyan e következtetést ismételve, ujból tudjuk, hogy csupa egyessel kiirható. Ez most már adott a mellett elégséges az x és n meghatározására. Az x lehető értékei csakis az $a-1$ osztói. Hogy meghatározzuk, melyek felelnek meg ezek közül, képezzük rendre a következő számokat:

$$\frac{a-1}{x} = a_1 \quad \frac{a_1-1}{x} = a_2, \quad \frac{a_2-1}{x} = a_3, \ldots \quad \frac{a_{r-1}-1}{x} = a_r$$

Hogy x megfeleljen, kell hogy ezek mind egész számok legyenek. De ez nem elég, mert az így nyert számok nem mások, mint azok, melyek egy, két, három, ... egyessel kevesebbet tartalmaznak. Igy tehát az a, a_1, a_2, a_3 .... egész számok sorában végre az egy egyesből állóhoz, az egységhez kell jutnunk. Még pedig könnyű látni, hogy e folyton kisebbedő számok sorában, véges számú ismétlés után vagy ezt, vagy pedig törtet kapunk. Ha végül $a_r = 1$, akkor az illető szám az x rendszerben $r+1$ egyessel írható.

Legyen p. $a=63$.

Akkor az $a-1=62=2.31$ osztói, (az egység nem jő tekintetbe). $2, 31, 62$. Most már:

$$\frac{63-1}{2} = 31; \quad \frac{31-1}{2} = 15, \quad \frac{15-1}{2} = 7, \quad \frac{7-1}{2} = 3, \quad \frac{3-1}{2} = 1$$

megfelel a föltételnek, a műveletek száma 5; tehát 63 a kettes rendszerben 6 egyessel lesz kiirható: 111111.... Továbbá:

$$\frac{63-1}{31} = 2, \quad \frac{2-1}{31} \text{ törtszám}$$

tehát 31 nem felel meg; végre:

$$\frac{63-1}{62} = 1$$

tehát 63 azon számrendszerben, melynek alapszáma 62, két egyessel irandó: 11

Az alapegyenletet így is írhatjuk:

$$a = \frac{1-x^n}{1-x}$$

És ebből:

$$(x-1)a + 1 = x^n$$

Az $a-1$ tényezői közül e képlet segítségével is könnyen történik a választás. Kell hogy az egygyel kisebbített tényező a-szorosa, hozzáadva még egyet, e tényező egész számú hatványai sorában előforduljon; ha az n-edik hatványnyal egyenlő, akkor az 1-es számjegyek száma, mely a kiirásra szükségeltetik, épen n.

Legyen p. $a=40$, tehát $a-1$ tényezői $3, 13, 39$, most már 81 a 3 negyedik hatványa, tehát 1111 a 3-as számrendszerben negyven; ha x továbbá 13, akkor $(13-1)40+1=481$ a 13 hatványai közt: $13, 160, 2197$ nem találtatik, tehát 13 nem felel meg; ellenben mint általában tudjuk, a 39 igen, és e számrendszerben a kiirás módja ez: 11.

Ha most már az *a törtszámú értékeire* megyünk át, ezek az illető számrendszerben véges vagy végtelen alakban fejezhetők ki.

A végtelen alak ez $\cdot\dot{1}$, vagyis:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots$$

a mi nem más, mint $\frac{1}{x-1}$; tehát az $\frac{1}{m}$ alakú törtek az $m+1$-re vonatkozó számrendszerben kifejezhetők végtelen sok egyes által.

A mi illeti végre a *véges alakban* való kifejezést; legyen $\frac{m}{n}$ a tört, hol számláló és nevező a lehető legkisebb számértékek, akkor $\frac{m}{n}$ kifejezhető az x számrendszerben egyesek által, ha:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^\nu}$$

vagy:

$$\frac{mx^\nu}{n} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{\nu-1}$$

kell tehát, hogy $\frac{mx^\nu}{n}$ egész szám legyen; minthogy m és n relativ törzsszám, ez csak úgy lehetséges, még tetszőleges ν mellett is, *ha x tartalmazza az n minden törzstényezőjét.* Legyenek ezek: $p, q, r, \ldots$ akkor az x általános alakja:

$$Kpqr, \ldots$$

hol K egyelőre tetszőleges egész szám. Igy még végtelen sok x maradna mint lehetséges; de ezeket könnyű véges számra reducálni. Látni ugyanis, hogy szükségkép:

$$\frac{m}{n} < \frac{2}{x}$$

mert különben a tört így kezdődnék: 2, tehát már nem egyessel és így:

$$x > \frac{2n}{m}$$

Az így megmaradt x-ekre nézve az előbbiekhez hasonlóan történik a vizsgálat; kell ugyanis hogy

$$x \cdot \frac{m}{n} - 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots = \frac{m_1}{n_1}$$

hasonló tulajdonságú számérték legyen. Ép úgy:

$$\frac{m_2}{n_2} = x\frac{m_1}{n_1} - 1, \quad x\frac{m_2}{n_3} = x\frac{m_2}{n_2} - 1, \text{ s. ú. t.}$$

míg végre e számok sorában a zérushoz jutunk.

Budapest, 1877. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

M. T. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

II. kötet. **1877.** 16. füzet.

A GRAMME-FÉLE DYNAMO-ELEKTRIKUS GÉP ELMÉLETÉHEZ.*)

Dr. Fröhlich Izor egyetemi magántanártól.

II.

Midőn a Gramme gép elvezető fémseprői az utoljára említett módon érintik a sectorhengert, a tekercshenger mozgása úgy tekinthető, mintha arra, a surlódáson kívül, egy hatalmas állandó erő és egy aránylag gyenge, periodikusan változó erő hatna.

Csak *egy* mozgó pontot véve fel, annak mozgási egyenlete, ily erők befolyása alatt, lesz:

$$M\frac{d^2s}{dt^2} = M\frac{dv}{dt} = A + B\sin^2\pi\frac{t}{T} - \sigma v;$$

itt M a pont tömege, v annak sebessége, A az állandó, $B\sin^2\pi\frac{t}{T}$ a változó gyorsuló erő, T egy periodus tartama, σ a surlódási együttható. A sinus azért fordul itt a négyzeten elő, mivel a változó erő nem lehet negativ, ha A a gyorsuló erő legkisebb értékét jelenti.

Az egyenlet így is irható:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\sigma}{M}v - \left(\frac{2A+B}{2M} - \frac{B}{2M}\cos 2\pi\frac{t}{T}\right) = 0;$$

tévén $\frac{2A+B}{2} = P,$

az egyenlet megoldása adja

$$v = e^{-\int\frac{\sigma}{M}dt}\left[C_1 + \int\left(\frac{P}{M} - \frac{B}{2M}\cos 2\pi\frac{t}{T}\right)dt\, e^{\int\frac{\sigma}{M}dt}\right]$$

*) Az első részt l. e lapok 12. füzetében, a 35. lapon.

A jelzett műtétek véghez vitele után lesz:

$$v = \frac{P}{\sigma} - \frac{B}{2} \cdot \frac{MT^2}{\sigma^2 T^2 + 2^2 \pi^2 M^2} \left[\frac{\sigma}{M} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \frac{2\pi}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right] + C_1 e^{-\frac{\sigma}{M} t}$$

és ebből:

$$s = \frac{P}{\sigma} t - \frac{B}{2} \frac{MT^2}{\sigma^2 T^2 + 2^2 \pi^2 M^2} \left[\frac{\sigma}{M} \cdot \frac{T}{2\pi} \sin 2\pi \frac{t}{T} - \cos 2\pi \frac{t}{T} \right] - C_1 \frac{M}{\sigma} e^{-\frac{\sigma}{M} t} + C_2$$

Az állandó mozgásnál okvetlenül szükséges, hogy minden T időszak elején és végén a sebesség ugyanaz legyen, s már ebből is folyik, hogy $C_1 = 0$. Ezenkívül az egy T időközben befutott út, a, állandó, és lenne:

$$a = s_{t_0+T} - s_{t_0} = \frac{P}{\sigma} T + C_1 \frac{M}{\sigma} \left(e^{-\frac{\sigma}{M} t_0} - e^{-\frac{\sigma}{M}(t_0+T)} \right)$$

miután T-nek is állandónak kell lennie, ismét következik

$$C_1 = 0$$

és

$$a = \frac{P}{\sigma} T$$

A C_2 állandó egy tetszőleges úthosszat jelent, pl. az egy T szakasz kezdetéig befutott utat; továbbá a t idő kezdetpontja ugyanazon T szakasz eleje. Ezekből végre lesz:

$$v = \frac{P}{\sigma} - \frac{B}{2} \cdot \frac{MT^2}{\sigma^2 T^2 + 2^2 \pi^2 M^2} \left[\frac{\sigma}{M} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \frac{2\pi}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right]$$

$$s - s_0 = \frac{P}{\sigma} t - \frac{B}{2} \cdot \frac{MT^2}{\sigma^2 T^2 + 2^2 \pi^2 M^2} \left[\frac{\sigma}{M} \frac{T}{2\pi} \sin 2\pi \frac{t}{T} - \cos 2\pi \frac{t}{T} \right]$$

A sebesség változó része tehát ugy tekinthető, mintha az két egyszerü rezgő mozgás összetételéből eredne.

A sebesség legnagyobb és legkisebb értékének meghatározása czéljából tétessék:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{M} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \frac{2\pi}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right) = 0;$$

ebből következik, ha t_{max} és t_{min} az emlitett értékeknek megfelelő idők:

$$tg\, 2\pi \frac{t_{max}}{T} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{M}{\sigma}$$

$$tg\, 2\pi \frac{t_{min}}{T} = -\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{M}{\sigma}.$$

Ez értékek helyettesitése által a sebesség határértékei folynak:

$$v_{max} = \frac{P}{\sigma} + \frac{B}{2} \frac{T}{(\sigma^2 T^2 + 2^2 \pi^2 M^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$v_{min} = \frac{P}{\sigma} - \frac{B}{2} \cdot \frac{T}{(\sigma^2 T^2 + 2^2 \pi^2 M^2)^{\frac{1}{2}}}$$

tehát a sebesség legnagyobb változása

$$v_{max} - v_{min} = \frac{B\,T}{(\sigma^2 T^2 + 2^2 \pi^2 M^2)^{\frac{1}{2}}}$$

s a középsebesség:

$$v_k = \frac{P}{\sigma}.$$

Helyettesitsünk most e képletekbe kisérleti adatokat.

Egy kisebbszerű Gramme-gép három Bunsen elem által hajtatott; egy később emlitendő eljárás és kisérlet után lett: $P = 0{\cdot}03$ kilogrmnyi súly, B körülbelül 0.01 P; a körülforgások száma egy másodpercz alatt 15 volt, tehát harmincz sector mellett: $T = \frac{1''}{450}$; v_k pedig a forgási tengelytől 100 mmnyi merőleges távolságban fekvő pontra vonatkoztatva, 9450 mmnyi-nek találtatott, végre ezen távolságnak megfelelő tömeg $M = 1$ kilogrm.

$$\sigma = \frac{P}{v} = \frac{0.03 \times 9806 \times 10^6}{(9450)} \cdot \frac{m}{t}$$

és:

$$\frac{B\,T}{(\sigma^2 T^2 + 2^2 \pi^2 M^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{0{\cdot}0003 \times 9806 \times 10^6 \frac{m\,l}{t^2} \frac{1}{450} t}{\left(\frac{0{\cdot}0009(9806)^2 10^{12}}{(9450)^2} \cdot \frac{m^2}{t^2} \cdot \frac{1}{(450)^2} t^2 + 10^{12} m^2 (6{\cdot}3)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$v_{max} - v_{min} = 0{\cdot}001 \frac{l}{t}.$$

(m, l, t a millimétert, milligrammot és másodperczet jelentik), tehát a sebesség legnagyobb változása egy ezredrész milliméter. Összehasonlitva e változást a középsebességgel, igen közelitőleg ered:

$$\frac{v_{max} - v_{min}}{v_k} = \frac{1}{10^7} = \text{egy tízmilliomodrész.}$$

Tehát a forgási sebesség változása ily gépeknél valóban elenyésző csekély.

De nem is szükséges, hogy a seprőknek ily, különben nem könnyen elérhető helyzetet adjunk; elegendő, ha azok a sectorhengert csak

igen kis kiterjedésü felülettel érintik; akkor a tekercsen keresztül ömlő folyam időközönként bezáródik és nyílik. A keletkező forgás tehát egy szakaszonként működő állandó erő hatásától ered.

A mozgás közelebbi tárgyalásánál két egyenletet kell felállitanunk; az egyik az erő müködésének ideje, T_1, alatt érvényes, a második pedig azon időre T_2, vonatkozik, melyben az erő megszünt; természetesen a mozgás egész tartama alatt a surlódás tekintetbe jő.

Ezen két egyenlet alakja:

$$1)\ M\frac{dv}{dt} = P - v\sigma$$

$$2)\ M\frac{dv'}{dt} = -v'\sigma$$

Az elsőnek megoldása:

$$v = e^{-\int \frac{\sigma}{M} dt}\left[C_1 + \int \frac{P}{M} e^{\int \frac{\sigma}{M} dt} dt\right]$$

A kifejezés kiszámitása adja:

$$v = \frac{P}{\sigma} + \left(v_0 - \frac{P}{\sigma}\right) e^{-\frac{\sigma}{M}t}$$

$$\text{és } s - s_0 = \frac{P}{\sigma}t - \left(v_0 - \frac{P}{\sigma}\right)\frac{M}{\sigma} e^{-\frac{\sigma}{M}t}$$

hol v_0 a sebesség T_1 időszak elején, s_0 ugyanezen időpontnak megfelelő úthossz; ezenkivül a t idők kezdete ugyancsak a T_1 elejével esik egybe. Ha a_1 és a_2 a T_1 és T_2 idők közben befutott utak, akkor az első kifejezhető:

$$s_1 - s_0 = a_1 = \frac{P}{\sigma} T_1 - \left(v_0 - \frac{P}{\sigma}\right)\left(e^{-\frac{\sigma}{M} T_1} - 1\right)\frac{M}{\sigma};$$

továbbá a T_1 időszak végén a pont sebessége:

$$v_1 = \frac{P}{\sigma} - \left(v_0 - \frac{P}{\sigma}\right)\left(e^{-\frac{\sigma}{M} T_1} - 1\right);$$

ez utóbbi egyszersmind a pont legnagyobb sebessége.

Kifejtve $e^{-\frac{\sigma}{M} T_1}$ tagot, s tekintetbe véve, hogy a hatványkitevő igen kicsiny, e képletek összevonása után ered:

$$a_1 = v_0\, T_1 \text{ és } T_1 = \frac{a_1}{v_0}$$

továbbá:

$$v_1 = \frac{P}{\sigma} - \left(v_0 - \frac{P}{\sigma}\right)\frac{\sigma}{M} T_1$$

A második időszakra vonatkozó mozgási egyenlet:

$$M\frac{dv'}{dt} = -v'\sigma$$

egészlete

$$v' = v_1 e^{-\frac{\sigma}{M}(t - T_1)}$$

v' felső jelzése épen csak a második szakasz sebességeinek megkülönböztetésére szolgál; v_1 az imént talált sebesség a T_1 végén, tehát a T_2 elején; az idő kezdetpontja változatlan maradt.

Továbbá:

$$s' = s_1 + \frac{M}{\sigma} v_1 \left(1 - e^{-\frac{\sigma}{M}(t - T_1)}\right)$$

A T_2 szakasz végén a sebesség, s az ezen idő alatt befutott út:

$$v_2' = v_1 e^{-\frac{\sigma}{M} T_2} = v_1 - a_2 \frac{\sigma}{M}$$

$$s_2' - s_1 = a_2 = v_1 \cdot \frac{M}{\sigma}\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{M} T_2}\right) = v_1 T_2$$

Az állandó mozgás feltéte: hogy a T_1 szakasz elején s a T_2 szakasz végén a pont ugyanazon sebességgel birjon, ezenkivül, hogy a pont mozgási erélyének növekedése a T_1 idő alatt egyenlő legyen a T_2 szakaszban végzett súrlódási munkával. Ezen feltételek alakjai:

$$v_2' = v_1 - a_2 \frac{\sigma}{M} = \frac{P}{\sigma} - \left(v_0 - \frac{P}{\sigma}\right)\frac{\sigma}{M}\frac{a_1}{v_0} - a_2 \frac{\sigma}{M} = v_0$$

és:

$$\sigma \int_{T_1}^{T_1 + T_2} v_1^2 e^{-\frac{2\sigma}{M}(t - T_1)} dt = (v_1^2 - v_0^2)\frac{M}{2}$$

Könnyen győződhetünk meg arról, hogy a két feltét ugyanazon eredményhez vezet, a mint az már a mozgás természetéből következik. Egyszerüség kedvéért az első feltétet fejtve ki, lesz:

$$v_2' = v_0 = \frac{P}{\sigma} - a_1 \frac{\sigma}{M} - a_2 \frac{\sigma}{M} + \frac{P}{M} \cdot \frac{a_1}{v_0};$$

ámde $\frac{P}{v_0} = \sigma$, s igy:

$$v_2' = v_0 = \frac{P}{\sigma} - a_2 \frac{\sigma}{M} = v_1 - a_2 \frac{\sigma}{M};$$

ebből másodrendü pontosságig:

$$v_1 = \frac{P}{\sigma}$$

$$\text{és} \quad v_0 = \frac{P}{\sigma} - a_2 \frac{\sigma}{M}$$

v_0 a legkisebb, v_1 a legnagyobb sebesség; különbségük:

$$v_1 - v_0 = a_2 \frac{\sigma}{M} = \frac{P}{M} T_2$$

A használt gépnél volt:

$$T_2 = \frac{1}{6{\cdot}5} T = \text{körülbelől } \frac{1''}{3000},$$

T az első kisérletre vonatkozván; ezenkivül P és M adatai is ugyanonnan ismeretesek, tehát:

$$v_1 - v_0 = 0{\cdot}1 \frac{l}{t}$$

azaz a sebesség változása legfeljebb egy tizedrész milliméter.

E változás viszonya a v_0-hoz:

$$\frac{v_1 - v_0}{v_0} = \frac{1}{10^5} = \text{egy százezredrész.}$$

Ha tehát ezen esetben a sebesség változása nem egészen oly rendkivül csekély, mint a megelőző vizsgálatban, az mégis csak a legkivételesebb esetekben lesz észrevehető. Mindezekből pedig eléggé kitünik fentebbi állitásunk helyessége, mely szerint a Gramme gép tekercsének forgása aránylag rendkivül egyenletes.

IV.*)

A Gramme gép kiválóan alkalmas az erély különböző alakjainak átalakitására.

Vizsgáljuk meg ez átalakulásoknál fellépő viszonyokat, még pedig oly módon, hogy azok szigorú elméleti megállapitása után, a theoretikus eredmények igazolására és gyakorlati alkalmazására szükséges állandókat kisérletileg határozzuk meg.

[Jegyezzük meg, miszerint a különben minden lépten-nyomon elkövethető hibák és tévedések kikerülése végett czélszerü az előforduló meghatározó részek méretére ügyelni, s azokat absolut mértékben kifejezni.]

*) E fejezet kisérleti része bemutattatott a m. Természettud. Társ. f. é. május 16-án tartott szakülésén.

1.)

Midőn a gép forgatása által folyam támad, következő összefüggés létezik az állandó forgást eszközlő külső erély E_k, a gép surlódási-munkája s a keletkezett folyam erélye E_f között (vonatkoztatva ezeket az időegységre):

$$E_k = \int_{t=0}^{t=1''} \sigma_1 v_1 \, d s + E_f$$
$$= \sigma_1 v_1^2 \, 1'' + E_f$$

A σ_1 és v_1 jelzései egy (első) gépre vonatkoznak; később egyszerre két gépet kell tárgyalnunk.

Ámde, ha r a forgási tengelytől való merőleges távola azon pontnak, melyre nézve a v_1 érvényes, továbbá n_1 a tekercs fordulatainak száma egy másodpercz alatt:

$$v_1 = 2 \pi n_1 r$$

s a surlódás munkája:

$$\sigma_1 v_1^2 \, 1'' = (2 \pi n_1)^2 \sigma_1 r^2 \, 1''$$

Figyelembe véve, hogy e munka állandó forgás mellett állandó, akármily érték is tétessék r helyébe (mi által egyszersmind σ_1 is vál tozik), kell hogy legyen:

$$(\sigma_1 r^2) = \text{állandó} = S_1$$

A folyamerélyt illetőleg, ez tisztán a vezetők melegitésére fordittatik, ha az elvezető sodronyok zárt (fémes) vezetéket képeznek. Ezen melegités mértéke:

$$\Sigma i^2 w \, . \, 1'';$$

az összeg minden egyes folyamágra nézve képezett $i^2 w$ szorzatok összeadásából ered; czélszerü az intenzitásokat a külső vezetőben (W_0) folyó áram intenzitására, J-re vonatkoztatni.*) Lesz:

$$\Sigma i^2 w = 2 \cdot \left(\frac{J}{2}\right)^2 W_g + J^2 W_0$$
$$= \frac{J_2}{2} W_1 ,$$

hol
$$W_g + 2 W_0 = W_1 ;$$

ebből tehát:
$$E_k = \left((2 \pi n_1)^2 S_1 + \frac{J^2}{2} W_1\right) 1''$$

*) L. e dolgozat első részét, hol azonban J_0 a W_0-ban folyó áram intenzitása.

A folyam ez esetben tisztán csak a tekercsekben keletkező elektromotorikus erőkből ered, tehát:

$$J_{g_1} = \frac{2\,E_{g_1}}{W_1},$$

E_{g_1} alatt a másodperczenként az első gép tekercsei egyik felében keletkező elektromotorikus erő és J_{g_1} az innen eredő áram intenzitása a W_0-ban.

Vezessünk be egy uj állandót, mely szerint:

$$E_{g_1} = 2\pi n_1 \varepsilon_1$$

tehát $2\pi\varepsilon_1$ = a tekercs egyik felében az egy teljes körülfordulás közben indukált elektromotorikus erő.

Ezeknek helyettesitése adja:

$$E_k = (2\pi n_1)^2 \left(S_1 + \frac{2\,\varepsilon_1^2}{W_1}\right) 1''$$

Ha az ily módon támadt áram ezenkivül még elektrolysist végez, pl. vizet bont fel: a folyam erélyének egy része potentialis erélylyé alakúl. Az időegységben szétbontott gázok mennyisége a folyam intenzitásával egyenesen arányos; az áram erélye:

$$E_f = \frac{J^2}{2} W_1 + JC.$$

A folyam, melynek intenzitása magnetikus mértékben = 1, egy percz alatt 0,560 mgrm vizet bont szét; a legujabb kutatások szerint*) egy kgrm hydrogén vizzé égésénél igen közel 34000 caloria keletkezik, tehát az emlitett folyam egy másodpercz alatt

0·00004685 caloriának megfelelő erélyt,

azaz 0·01985 kgrméternyi munkát

alakit át potentialis erélylyé.

Ezekből ered C méretére nézve elektromotorikus erő; s absolut mértékben:

$$C = 194{\cdot}6 \times 10^9 \frac{m^{\frac{1}{2}}\, l^{\frac{3}{2}}}{t^2}$$

Igen feltünő, hogy C értéke majdnem teljesen megegyezik az egy Grove-féle elemnek megfelelő elektromotorikus erő absolut értékével.

---

*) Dr. Than Károly jelentése e füzet 178. lapján.

Az erélyek összefüggése ez esetben:

$$E_k = 2\pi n_1 \left[2\pi n_1 \left(S_1 + \frac{2\varepsilon_1^2}{W_1} \right) + \frac{2\varepsilon_1}{W_1} \cdot C \right] \cdot 1''$$

A külső erély egy része használható potentialis erély alakjában lesz felhalmozva. Hasznossági tényezőnek mondhatjuk ezen erély viszonyát a gép forgatására felhasznált külső erélyhez:

$$H_1 = \frac{C\varepsilon_1}{\pi n_1 (S_1 W_1 + 2\varepsilon_1^2) + C\varepsilon_1}$$

Kitünik ebből, hogy a forgási sebesség csökkentésével növekszik ezen tényező, de egyszersmind fogy az összes folyam erély s megforditva; adott forgási sebesség mellett pedig a külső ellenállást lehetőleg csekélynek kell tenni. A C ismeretes, s ha még a gép állandói (mint azok következőkben meghatároztatnak) S_1 és ε_1, ezenkivül W_{g1} s a külső ellenállás W_0 ismeretesek: akkor az utóbbi két kifejezés teljesen elegendő, tetszőleges forgási sebesség mellett az átalakitott potentialis erély kiszámitására, illetőleg a gép hasznossági tényezőjének meghatározására.

Következnék most annak megvizsgálása, hogy az ily állandó sebességgel forgatott gépben keletkezett galván áram egy második Gramme-gépet hoz mozgásba, s ez ismét mechanikai munkát végez.

Erre nézve szükséges előbb azon egyszerüebb eset tárgyalása, melyben

2.)

A Gramme-gép egy állandó elektromotorikus erőből keletkezett folyam által forgattatik, s e mellett e folyamerély egy részét mechanikai erélylyé alakitja. Az elektromotorikus erő forrása egy galván telep; az összes folyamerély az elemekben történő vegyi változásokból ered. Ezen erély egyik része a vezetők melegítésére fordittatik s csak a megmaradó rész lesz mechanikai munkává, mely a gép surlódásának legyőzésére s egyéb munkák végzésére használtatik fel.

Ezentúl a második gép által végzett mechanikai munkát surlódási munka gyanánt hozzuk számitásba; erre teljesen jogositva vagyunk, mert pl. a közönséges gépek munkaképességének meghatározásánál a surló fék segitségével tulajdonképen csak a gép surlódási munkája méretik. E mellett természetesen a surlódást függetlenül változónak kell felvenni.

A folyam erély kifejezése:

$$E_f = \Sigma i^2 w \,.\, 1'' + \int_0^{1''} v_2^2 \sigma_2 \, dt$$

Joule törvénye folyadékokra is érvényes, tehát, tekintetbe véve, hogy $v_2 \sigma_2 = P$,

$$E_l = \left(\frac{J^2}{2} W_2 + P v_2\right) 1''$$
$$= \left(\frac{J^2}{2} W_2 + 2 \pi n_2 F\right) 1''$$

hol: $W_2 = W_{g2} + 2 W_0$ és $F = Pr_2 =$ a tekercshengerre gyakorlott *forgási momentum*, midőn a folyam intenzitása a W_0 vezetőben $= J$.

Oly gépeknél, melyek állandó külső mágnessel bírnak, igen gyenge intenzitások kivételével, felvehető:

$$F = \varphi_2 J;$$

ha pedig e külső mágnesek változó erősségű elektromágnesek:

$$F = \varphi_2 J f(J).$$

Itt φ_2 a gép egy állandója (az első esetben értéke [de *nem* mérete] egyenlő az $J = 1$-nél fellépő forgási momentummal), $f(J)$ pedig arányos az elektromágnesek által előidézett magnetikus mező intenzitásával.

A mechanikai erélylyé vált folyamerélyrész tehát:

$$2 \pi n_2 \varphi_2 J . 1''$$

illetőleg $2 \pi n_2 \varphi_2 J f(J) . 1''$

Ha (az első esetben) φ_2 állandó ismeretes, csak a W_0-on keresztül ömlő áram intenzitása s a gép fordulatainak száma egy másodpercz alatt szükséges, hogy a gép által végzett mechanikai munkát meghatározzuk.

A második esetben (rendesen nagyobb ily gépeknél) a $\varphi_2 f(J)$ szorzatot a megmért forgási momentumok egész sorából, az J intenzitások nagy számára nézve, kisérletileg kell meghatározni, hogy tetszőleges J-re nézve ezen szorzat értékét közbeiktatás utján lehessen kiszámitani.

A mozgó gép tekercsén keresztül ömlő áram ez esetben két elektromotorikus erőforrásból ered: az első a galván elemeké, a második a külső mágnesek inductiója a tekercsekben.

Jelezze E_b a telep *állandó* elektromotorikus erejét, E_{g2} a forgó gép tekercse egyik felében keletkező elektromotorikus erőt: továbbá J_b az E_b által az álló gépnél W_0-ban folyó áram intenzitását, hasonlóan J_{g2} a két E_{g2}-ből eredőt, akkor, tekintettel a folyamelágazás szabályaira:

$$J = J_b - J_{g2} = 2 \frac{E_b - E_{g2}}{W_2} = 2 . \frac{E_b - 2 \pi n_2 \varepsilon_2}{W_2}$$

hol ε_2 egy az előbbi ε_1 állandóval teljesen egyjelentőségű állandó; ebből lesz:

$$2\pi n_2 = \frac{J_b - J}{2\varepsilon_2} W_2 \quad \text{és} \quad \varepsilon_2 = \frac{J_b - J}{2.2\pi n_2} W_2$$

Ha a külső mágnesek ismét elektromágnesek, akkor az elektromotorikus erő állandójához az J-nek ugyanazon függvénye járul, mely a magnetikus mező intenzitását határozza meg, s

$$\varepsilon_2 f(J)$$

lép ε_2 helyébe.

Helyettesítve $2\pi n_2$ és F talált értékeit a folyamerély kifejezésébe, ez lesz:

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot J^2 W_2 \left(1 + \frac{\varphi_2}{\varepsilon_2} \cdot \frac{J_b - J}{J}\right) \cdot 1''$$

s ez mind állandó, mind változó magnetizatióval biró külső mágnesek-nél egyaránt érvényes.

Jegyezzük meg, hogy az elektromagnetikus gépek általános theoriája szerint*) ily átalakításoknál

$$E_f = \frac{1}{2} J^2 W_2 \left(1 + \frac{J_b - J}{J}\right) \cdot 1'';$$

e szerint volna: $\varphi_2 = \varepsilon_2$ s a hasznossági tényező $\frac{J_b - J}{J}$; azonban ez utóbbi kifejezések tisztán csak elméleti becscsel birnak, mivel ily gépeknél a sok zavaró körülmény valóságban egy az elméleti várakozások mögött messze elmaradó hasznossági tényezőt eredményez**).

Az ezen alkalommal a folyamerély számára levezetett kifejezés pedig azon előnynyel bir, hogy a benne előforduló állandók minden gépre nézve meghatározhatók, s hogy azok alapján a gép müködéséről, munkaképességéről stb. biztos itéletet alkothatunk.

Egyébiránt a Gramme-gépre nézve is könnyen bebizonyul az említett elméleti következtetés. Ugyanis állandó E_b-t tételezve fel, a legnagyobb mechanikai munka nyeretik a folyamból, ha $J(J_b - J)$ legnagyobb, tehát ha

$$J = \frac{J_b}{2};$$

akkor a mechanikai erélylyé átalakitott rész:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{J_b}{2}\right)^2 W_2 \cdot \frac{\varphi_2}{\varepsilon_2}$$

---

*) *Clausius*. Abh. üb. d. mech. Wärmetheorie. II. köt. 222 l. (régi kiadás).

**) Verdet, Oeuvres VIII. köt. 179 l.

Ámde: $\varphi_2 = 2 \cdot \frac{F_m}{J_b}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{J_b}{2 \cdot 2 \pi n_{2m}} W_2$

(az m jelző a mechanikai munka maximumára vonatkozik), s azok viszonya:

$$\frac{\varphi_2}{\varepsilon_2} = \frac{2 \pi n_{2m} F_m}{\frac{1}{2}\left(\frac{J_b}{2}\right)^2 W_2}.$$

A számláló oly mechanikai erély, mely az F_m forgási momentumot n_{2m} forgási sebességgel győzi le; a nevező folyammelegítési erély.

Ámde, ha a gép n_{2m} forgási sebességgel forgattatik, az inducált elektromotorikus erők a W_0-ban egy $\frac{J_b}{2}$ intenzitásu folyamot idéznek elő, mely ismét a tekercsre egy $F_m = \frac{J_b}{2} \varphi_2$ forgási momentumot gyakorol; a folyam fenntartására szükséges erély pedig $= 2 \pi n_{2m} F_m$; ez utóbbi pedig teljesen melegítésbe megy át, ha a vezeték önmagában zárt s elektrolysis nincs. De ezen melegités erélye $= \frac{1}{2}\left(\frac{J_b}{2}\right)^2 W_2$.

Ily módon a fentebbi viszony $\frac{\varphi_2}{\varepsilon_2}$ tulajdonképen egyazon erély két különböző alakjának viszonya; a számlálóban az erély mechanikai, a nevezőben pedig galván meghatározó részekben van kifejezve. Következnék tehát itt is $\varphi_2 = \varepsilon_2$; azonban e következtetés, mint már említve volt, csak elméleti jelentőségű.

Mindazonáltal a Gramme-gépnél az idézett zavaró körülmények nagy része nem is létezik, a többi csak kevés számú és aránylag kis befolyással bir, úgy hogy jogosan várhatni, miszerint e gép működése valóságban nem fog nagyon eltérni az elméleti eredményektől.

Gépünk hasznossági tényezője:

$$H_2 = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_2}{\varphi_2} \frac{J}{J_b - J}}$$

Állandó J_b mellett a gép legelőnyösebben működik, ha $J = \frac{J_b}{2}$*), akkor az általa végzett mechanikai munka (mint előbb is)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{J_b}{2}\right)^2 W_2 \frac{\varphi_2}{\varepsilon_2}$$

s a hasznossági tényező $\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_2}{\varphi_2}}$

*) Elméletileg ez a többi ily gépeknél is áll. *Jacoby* Pogg. Ann. LI. 370 l.

Az ε_2 és φ_2 állandók következő módon határoztattak meg kísérletileg:

A gép fogas kerekeinek eltávolitása után a tekercs átlyukasztott tengelyén egy vékony fémrúd erősíttetett meg, mely egy fonálon függő sárgaréz súly ($\frac{1}{2}$ klgrm) emeltyűkarja gyanánt szolgált. A géptől körülbelől 5 méternyire felállított galvanométer, mely a W_0 vezető egy részét képezte, az intenzitások mérését engedte meg; a W_0 körében ezenkivül három Bunsen elem, egy ellenállási készülék s egy commutátor volt becsatolva.

A folyam bezárása után a sárgaréz súly addig lett eltolva a fémrúdon, mig az annak megfelelő forgási momentum egyenlő, de ellenkező irányú volt a folyamokozta momentummal. Ekkor a súly nyugodtan függött a rúdon; pontosabb beállítás végett a gép kézütések által kis rázkódtatásba hozatott, hogy ez által a forgási momentumok egyenetlensége inkább előtűnjék. A rúd forgási momentumának tekintetbe vétele mellett, különböző intenzitások és folyamirányoknál tett számos mérésből eredett pl.:

$$\left.\begin{matrix} J = 60.796 \\ J = 34.528 \end{matrix}\right| \frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}}{t} \text{ mellett } \quad \left.\begin{matrix} F = 37252000 \times 9806 \\ F = 20987000 \times 9806 \end{matrix}\right| \frac{m l^2}{t^2};$$

ez adatok egyszersmind a fentebbi feltevés helyességét bizonyitják, mely szerint ily állandó külső mágneseknél F az intenzitással egyenesen arányos. E számok szerint ugyanis

az intenzitások viszonya	= 1,761
a forgási momentumok viszonya . .	= 1,775

A különbség teljesen az észlelési hibákból eredhet, minthogy ily nagy intenzitások mérésére tangensboussole használtatott, s a vezetők felmelegedése által okozott ellenállás-változások stb. nem engedék, de egyszersmind szükségtelenné is tették a pontosabb észlelést.

Ez adatokból ered φ_2 mint elektromotorikus erő:

$$\varphi_2 = 6009 \times 10^6 \frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}}}{t^2}$$

Az ε_2 meghatározására előbb a gép megakasztatott és J_b méretett; azután szabad forgásnak eredhetett az, úgy, hogy csak saját surlódását kellett legyőznie. Ekkor a forgások száma n_2 s a hozzátartozó J méretett; továbbá $W_2 = W_{g2} + 2\,W_0$ ellenállás közönséges módon határoztatott meg. A nyert eredmények:

$$\left.\begin{matrix} J_b = 60{\cdot}796 \\ J = 5{\cdot}301 \end{matrix}\right| \frac{m_2^{\frac{1}{2}} l_2^{\frac{1}{2}}}{t}, \quad n_2 = 14.80$$

$$W_2 = 2313000 \times 9705 \frac{l}{t},$$

következik ezekből, szintén mint elektromotorikus erő

$$\varepsilon_2 = 6698 \times 10^6 \frac{m_2^{\frac{1}{2}} l_2^{\frac{3}{2}}}{t^2}$$

s a két állandó viszonya : $\frac{\varphi_2}{\varepsilon_2} = 0{,}898 = 0.9.$

A Gramme-gép tehát igen közel felel meg a $\varphi_2 = \varepsilon_2$ elméleti követelménynek. A hasznossági tényező ezen gépre nézve

$$H_2 = \frac{J_b - J}{J_b - 0{\cdot}1\, J},$$

s midőn a gép legelőnyösebben működik :

$$\frac{1}{2{\cdot}1} = 47{\cdot}6\ \%,$$

azaz, állandó külső elektromotorikus erőt véve fel, a Gramme-gép legjobb esetben az összes folyamerélynek közel felét képes mechanikai erélylyé átalakítani. Az itt közlött J_b mellett a megvizsgált gép ez esetben 0·878 klgrmméternyi munkát végezne és végezett is, a mint ez nagyobb súlyok felemelésénél a gép által csakugyan igen közelítőleg helyesnek találtatott.

Ez alkalommal egyszersmind a gép tulajdonképeni surlódására is lehet következtetni; ugyanis az előbb, ε_2 meghatározásánál említett kisérletben a folyamerély mechanikai része tisztán a gép surlódásának legyőzésére fordíttatott. Miután

$$\sigma_2 = \frac{P}{v_2} = \frac{F}{2\,\pi\, n_2\, r^2},$$

$$\text{lesz} \quad \sigma_2\, r_2 = S_2 = \frac{2\,\varepsilon_2\,\varphi_2}{W_2} \cdot \frac{J}{J_b - J}$$

s az ismert adatokból: $S_2 = 567 \times 10^6 \frac{m\, l^2}{t^3}.$

Ezen S_2 csakis magának a gépnek surlódására vonatkozik; leszámítva annak munkáját, a folyamerélyből 45 % alakúl át használható mechanikai erélylyé.

3.)

Ezek után könnyü lesz azon eset megfejtése, melyben az első Gramme-gép forgatása által keletkezett folyam a második gép mozgatására s ez által mechanikai munka végzésére használtatik fel.

Az 1 gép állandó forgásának fenntartására szükséges külső erély egyik része ezen gép surlódásának legyőzésére fordíttatik, a második folyamerélylyé alakul. A forgásba hozott 2-dik gépben támadó s ellenkező irányú inductió áramok az 1-ső géptől eredő folyamintenzitást csökkentik; ezenkivül az összekapcsolt két gép két folyamelágazással biró vezetéket képez.

Ha ismét J a W_0-ban ömlő áram intenzitása, E_{g1}, E_{g2} a két gép tekercse egy-egy felében inducált elektromotorikus erők, akkor:

$$J = J_{g1} - J_{g2} = \frac{2\,(E_{g1} - E_{g2})}{W_{g1} + W_{g2} + 2\,W_0};$$

a nevezőt W_{12}-vel jelelve, s tekintettel arra, hogy:

$$E_{g1} = 2\,\pi\,n_1\,\varepsilon_1\,,\quad E_{g2} = 2\,\pi\,n_2\,\varepsilon_2$$

$$J = 2\cdot\frac{2\,\pi}{W_{12}}(n_1\,\varepsilon_1 - n_2\,\varepsilon_2).$$

Az erélyek összefüggését következő egyenlet fejezi ki:

$$E_k = \int_{t=0}^{t=1''} \sigma_1\,v_1^2\,dt + E_f = [\sigma_1\,v_1^2 + \Sigma\,i^2 w].\,1'' + \int_{t=0}^{t=1''} \sigma_2\,v_2^2\,dt$$

$$= [(2\,\pi\,n_1)^2\,S_1 + \Sigma\,i^2\,w + 2\,\pi\,n_2\,P_2].\,1''$$

A kifejezés első tagja teljesen független a folyamintenzitásoktól, mivel az 1-ső gép állandó forgásban tartatik; a második tagban jelzett összegezést, tekintettel a folyamelágazásra, véghez vive, s a harmadik tagot galván meghatározó részekben fejezve ki, lesz:

$$E_k = \left[(2\,\pi\,n_1)^2\,S_1 + \frac{1}{2}\,J^2\,W_{12} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi_2}{\varepsilon_2}\,J(J_{g1} - J)\,W_{12}\right] 1''$$

A hasznossági tényező pedig:

$$H_{12} = \frac{\frac{\varphi_2}{\varepsilon_2}\,J(J_{g1} - J)\,W_{12}}{(2\,\pi\,n_1)^2\,2\,S_1 + J^2\,W_{12} + \frac{\varphi_2}{\varepsilon_2}\,J(J_{g1} - J)\,W_{12}}$$

Ha a megelőző 2) rész vizsgálata alapján, állandó n_1 mellett, azon intenzitást keressük, melynél a keletkezett folyamerélyből a lehető legtöbb mechanikai munkát lehetne nyerni, ez:

$$J = \frac{Jg_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\,.\,2\,\pi\,n_1\,\varepsilon_1}{W_{12}};$$

ez esetben a hasznossági tényező:

$$\frac{\frac{\varphi_2}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_1^2}{2\,S_1\,W_{12} + \varepsilon_1^2 + \frac{\varphi_2}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_1^2}$$

Két, minden tekintetben egyenlő gépet véve föl, az ε, φ, S és W_g állandók ismeretesek lévén (ez utóbbira nézve találtatott:

$$W_g = 1350000 \times 9705 \left(\frac{l}{t}\right),$$

ezekből az egyes erélyek viszonyai következnek. Ha még ezenkivül $W_0 = 0$, azaz a két gép elenyésző ellenállású sodronyok által van vezetőleg egybekapcsolva, akkor az összes külső erélyből esik:

az 1-ső gép surlódásának legyőzésére . . 17.5% }
az összes, keletkező folyamerélyre . . . . 82.5 » }

részletesen pedig:

folyammelegítési munkára . . . . . 43.8 »
a folyamerély mechanikai részére . . . . 39.2 »

Ezen épen tárgyalt esetben az állandóan forgó első gépben keletkező állandó elektromotorikus erőkből támadó folyamerélynek absolut legnagyobb része alakúl át mechanikaivá; de ebből még korántsem következik, hogy a gép ez esetben legelőnyösebben működik. Az utóbbi beáll, ha

$$\frac{d H_{12}}{d J} = 0.$$

Ezen feltétet kifejtve és kiszámitva, ez végre következő, J-re nézve másodfoku egyenlethez vezet:

$$J^2 J_{g1} W_{12} + 2 J 2 S_1 (2 \pi n_1)^2 - J_{g1} 2 S_1 (2 \pi n_1)^2 = 0$$

Az előbbiek szerint pedig:

$$J = J_{g1} - J_{g2} = 2 \frac{2 \pi}{W_{12}} (n_1 \varepsilon_1 - n_2 \varepsilon_2)$$

$$\text{és } J_{g1} = 2 \frac{2 \pi n_1 \varepsilon_1}{W_{12}},$$

ez egyenlet feloldása adja az intenzitás azon értékét, melynél a gép legelőnyösebben dolgozik:

$$J_m = 2 \pi n_1 \left[-\frac{S_1}{\varepsilon_1} \pm \sqrt{\left(\frac{S_1}{\varepsilon_1}\right)^2 + \frac{2 S_1}{W_{12}}} \right] = 2 \frac{2 \pi \varepsilon_1}{W_1} (n_1 - n_2)$$

(ismét két egészen egyenlő gépet tételezve fel).

Ez esetben tehát nemcsak a megfelelő folyamintenzitást, hanem egyszersmind a második gép forgásának függését az elsőtől határozhatjuk meg.

Az ismert S_1, ε_1, $W_{12} = 2 W_{g1}$ állandókból következik:

$$J_m = \begin{cases} 2 \pi n_1 & 0{\cdot}1568 \text{ és} \\ -2 \pi n_1 & 0{\cdot}3260 \end{cases}$$

Ezen értékekből:

$$2\pi n_1\, 0{\cdot}1568 = 2\pi\, 0{\cdot}510\,(n_1 - n_2)$$
$$-2\pi n_1\, 0{\cdot}3260 = 2\pi\, 0{\cdot}510\,(n_1 - n_2)$$

azaz:

$$\left.\begin{aligned} 1)\ \frac{n_1 - n_2}{n_1} &= 0{\cdot}308 \\ 2)\ \frac{n_1 - n_2}{n_1} &= -0{\cdot}639 \end{aligned}\right\},$$

Kitűnik, hogy az alsó megoldás képtelenséget fejez ki, mert benne $n_2 > n_1$, s így csak a felső használható, melyből: $n_2 = 0{\cdot}692\, n_1 = 0{\cdot}7\, n_1$.

Helyettesítve ezeket H_{12} kifejezésébe, az összes, az 1-ső gép forgatására felhasznált erélyből esik:

az 1-ső gép surlódása legyőzésére . . 40.7 %
a folyam melegítési erélyére . . . 19.4 »
a folyam mechanikai erélyére . . . 39.8 »

Látjuk, hogy még ez esetben sem lehetett lényegesen több erélyt mechanikaivá alakitani, de mégis a surlódási és folyammelegítési viszonyok lényegesen változtak. Az első körülmény a gép állandóitól függ; kisebb S_1 mellett előnyösebb viszonyok várhatók.*)

Azonban mindezen aránylag előnyös viszonyok lényegesen változnak, midőn W_0 helyébe tetemesebb ellenállások lépnek: igy pl. két kézi Gramme-gép közé egy ellenállási készülék csatoltatott; ha azután az első gép kézzel gyorsan forgattatott, s e közben W_0 helyébe egymásután növekedő értékek csatoltattak be: a második gépnek eleinte igen sebes forgása csakhamar lassúdott, s körülbelől $W_0 = 15$ Siemens-egység mellett a folyam intenzitása már oly gyenge volt, miszerint nem volt képes a gépet mozgásba hozni, habár az első gép tekercse e mellett legalább is 35—40 körülforgást tett egy másodpercz alatt.

Ha tehát az első gép folyama által, tetemesebb távolban levő második gépet akarunk forgásba hozatni, s vele mechanikai munkát végeztetni, úgy az összekötő vezetőknek teljesen a submarin kábelek szerkezetével kellene birniok, hogy a folyamintenzitást tulságosan ne csökkentsék; de akkor kérdéses, vajjon a második gép által végzett mechanikai munka értéke helyes arányban áll-e a vezetés költségeihez.

*) A gép feltalálója egyetlen egy ily kisérleténél a mechanikaivá alakúlt rész a külső erélynek több mint felét tette; azonban egyetlen ily tökéletlen, semmi galván meghatározó részeket nem tartalmazó kisérlet alapján nem lehet e viszonyokat megitélni.

Az itt IV. alatt közlött vizsgálatok alapján következő eredményeket emelhetjük ki:

1) A Gramme-gép a galván folyamerélynek mechanikai erélylyé átalakítására minden, eddig ismert és megvizsgált elektromagnetikus és magneto-elektrikus gép között a legelőnyösebb; de azért még ez sem képes e tekintetben a gőzgéppel versenyezni, miután a galván áramok fenntartása elemek által összehasonlíthatlanul költségesebb mint a gőzgépek fütése.

2.) A Gramme-gépre vonatkozó, annak feltalálója és mások által tervezett alkalmazások, melyek szerint természeti erők (pl. folyóvizek, patakok, stb.) által hajtott gépek áramai sok kilométernyire levő más ily gépek hajtására és mechanikai munkák végzésére használtassanak fel; vagy, hogy ezen tetszőleges távolokba vezetett áramok segítségével víz bontassék szét, s a felbontott gázok alkalmas módon munkavégzésre fordíttatnának: mind e tervek kivitele csak előnytelen lenne a nagy vezetési ellenállást kerülő összeköttetés aránytalan költségei miatt.

3.) A Gramme-gép legczélszerűbb alkalmazása a természeti erők felhasználására talán az lenne, hogy általa a különben csak bizonyos helyen és intenzitással fellépő külső erély egy része mindenkor felhasználható potentiális erélylyé alakíttassék át és halmoztassék fel pl. szétbontott gázakban; a vizbontásnak (mert ezen folyamat legelőnyösebb volna) a gép közvetlen közelében kellene történnie, a szétbontott gázokat alkalmasan összegyüjthetni s egyszerű csővezetés által, a világító gázhoz hasonlóan elvezethetni, a nélkül, hogy azok erélyükből valamit vesztenének, vagy hogy e vezetés nagyobb költséggel járna. E gázok azután gáz- és egyéb motorok hajtására, fény előállítására, s közvetve számos munka végzésére fordíthatók.

(Budapest, 1877. junius 1-én.)

VEGYERÉLYTANI VIZSGÁLATOK.*)

Dr. Than Károly, egyetemi tanártól.

A testek vegyi erélyének lehetőleg szabatos kipuhatolása, mint már több alkalommal kifejeztem, a vegytudománynak legfontosabb feladatai közé tartozik. A vegytannak eddigi vívmányai közül azok, melyek a szabatosság czímére méltó igényt tarthatnak, Lavoisier óta főkép az

*) Előadatott a m. tud. Akadémia ülésén, 1877. május 8-án.

anyag mennyiségének viszonyaira vonatkoznak. A szokásos modorban való vizsgálatok a vegytanban csaknem mind erre támaszkodnak. Nézetem szerint ebből magyarázható, hogy maga a tudomány e viszonyok folytán sok tekintetben egyoldalúlag fejlődött, minek következménye lett, hogy ismereteink inkább terjedelemben, mint mélységben gyarapodtak. A testek vegyi erélyének lehető alapos tanulmánya nélkül nem remélhetjük, hogy a tudomány valaha az anyag vegytani lényegéről kritikailag is szigoru fogalmat és felvilágosítást szerezzen.

Ily tekintetek indítottak arra, hogy ezen különben igen sok kitartást igénylő irányban, kisérleti vizsgálatokkal foglalkozzam. E tekintetben különös buzdítás volt reám nézve Bunsen R. egykori tanáromnak nehány évvel ezelőtt tett abbeli kijelentése, hogy örömére fog szolgálni, ha új hőmérési módszerét ez irányban értékesíteném.

Ha létezik az egyes testek vegyi erélye között törvényszerü összefüggés, ugy ennek felismerésére egyelőre legtöbb kilátást nyujtanak a légalaku testek. Feladatom tehát abban összpontosult, hogy oly eljárást állapitsak meg, mely szerint a Bunsen-féle kitünő calorimetricus módszer felhasználásával lehetőleg szabatosan határozható meg a gázalaku testek vegyi erélye.

A módszer tanulmányának kedveért a durrlég égésmelegének meghatározását választottam és pedig zárt edényekben. A követett eljárás lényege abban állott, hogy egy kis üvegedényben lemért mennyiségü durrlég a Bunsen-féle jégcalorimeter kémcsövében (eprouvette) égettetett el, és az ekkép keletkezett meleg mennyisége megméretett — Kisérleteimnél a Bunsen-féle calorimeter, hogy a külső levegő melegétől teljesen meglegyen óva, egy jól szigetelő nagy jégszekrény-ben volt felállítva és ugy volt szerkesztve, hogy a capilláris cső magával a caloriméterrel egy darabból állott, tehát semmi dugaszköszörülés vagy csap közbe iktatva nem volt. A benfoglalt higany magában a calorimeterben és pedig vacuumban volt kifőzve, nem különben a viz is. — A capillaris cső kiálló része egy higanyszivattyúval volt összeforrasztva, melyen a caloriméterben létező feszély nagyságát tetszés szerint változtatni és félmilliméter pontossággal meghatározni lehetett. Maga a fagyasztás szintén egy milliméternyi vacuumban történt ugy, hogy a levegőnek legkisebb nyoma sem lehetett a calorimeter belsejében. Egyes kisérleteknél a nyomásnak csökkentése vagy növelése által az idegen befolyásoktól eredő olvadás és fagyás oly egyensulyba hozatott, hogy a higanyfonal több órán át állandóan ugyanazon helyen maradt.

A capillaris cső milliméter-osztályzata egy nagyító távcső mikrometerével olvastatott le, melyen a milliméter század részeit lehetett megbecsülni. Egy gramm-hőegység a nagy gonddal calibrirozott capillaris csőben 8—9 milliméternek felelt meg átlag. — Az ürmérési táblázat ugy volt szerkesztve, hogy a leolvasott osztályzatok megfelelő értékei a melegmennyiségeket közvetlenül gramm-hőegységekben fejezték ki.

A kisérletekhez használt durrlég 10%-os vegyi tiszta kénsavból elektrolysis által lett előállitva és vizmentes phosphorsav által szárittatott ki.

Az edényt, melyben az elégetés történt, hőeudiométernek nevezem. Ez egy kis üvegedényből állott, mely két végén lehetőleg rövid szárú capillaris csapokkal volt elzárható, felső végén pedig két igen vékony platinhuzal volt beleolvasztva a villanyszikra keresztül ütése végett. — Köbtartalma lehelőleg pontosan puhatolhatott ki.

Igen finom köszörülések által a hőeudiométer egyrészt a durrlégkészülékkel, másrészt egy kis kénsav-manométerrel volt összekötve.

Miután a durrlég többnyire két—négy óra tartama alatt átvezettetett, felső csapja elzáratott és egy éjen át állandó hőmérsékü szobában állott, reggel a napfelkelte előtt, pontosan ellenőrzött Geissler-féle normál hőmérőkön észleltetett a hőmérsék, és egy Perreaux-féle kathetométerrel $^1/_{50}$ m. m. pontossággal a feszély. Ekkor a hőeudiometer alsó csapja is elzáratott. Erre a hőeudiometer, előleges lehűtés után, a calorimeterbe vitetett. Itt addig állott, mig a calorimeter higanyfonala teljes nyugvásba jött, vagy egyes kisérleteknél igen lassu, de az időhöz viszonyitva teljesen egyenletes haladást mutatott. Ekkor a jégszekrényből kiálló és finom elszigetelt platinhuzalvezeték közvetitésével egy kis villanyszikra üttetett át a durrlégen; és most a higanyfonal mindaddig észleltetett, mig ismét teljesen a fennérintett egyensulyba jött, mire a keletkezett melegmennyiség a higanyfonal visszahuzódásán hőegységekben észleltetett. Ezen észleléseknél a leolvasás hibája az egész értéknek 0,0001 részét tette ki.

A hőeudiométer kivétetvén a calorimeterből, egyik csapja kifőzött higany alatt nyittatott fel. Ekkor minden esetben egy csekély mennyiségü gáz maradt hátra, mely az erdeti gáznak többnyire csak 0,3—0,6%-t tette ki. Külön kisérletek meggyőztek arról, hogy e gáz tiszta durrlég volt és csak onnét származott, hogy a capillaris csövekben foglalt durrlég nem égett el teljesen. E visszamaradt gáz mennyisége ép oly módon méretett meg, mint az eredeti gázé. Egyes kisérle-

teknél e mérések egy sajátszerü eudiometricus készülékkel eszközöltettek, melyet igen szabatos légelemzésekhez szerkesztettem. E készüléknél az eudiométer egyszersmind egy vacuum-szivattyút képez, ugy, hogy benne a gázok mennyisége tetszés szerinti feszély mellett mérhető meg. A készülék szerkezetéről egy más alkalommal lesz szerencsém jelentést tenni. — Ezeknél a méréseknél a kellő reductiók mellett a leolvasás hibája az egész értéknek 0,0002-ed részét sem haladta meg.

A gázmérések eredményének kiszámitásánál, a mérő eszközöknek, valamint a higanynak hőmérséke minden egyes esetben 0-ra vezettetett vissza. A normál térfogat kiszámitásához minden egyes gázra és hőmérsékre nézve a Regnault által meghatározott eredeti adatok használtattak fel.

A kivitelnél követett eljárás és nagyfontosságu elővigyázati szabályoknak, valamint a készülékeknek és a számitásoknak részleteit értekezésemben fogom bővebben közölni; ezen értesitésben csak a nyert eredmények rövid közlésére szorítkozom.

Hét kisérlet lett az emlitett módszerek szerint végrehajtva, melyek közöl a két első a szabatosság azon fokára, mint a többiek, nem tarthat igényt és pedig — ámbár eredményük nem igen különbözik a többitől — főleg azért nem, mert a gázmennyiségek meghatározásánál a higanyoszlopok és a barométer nem eléggé szabatos kathetométerrel olvastattak le, de leginkább azért nem, mert az el nem égett gázok mennyisége kifőzött viz felett lett meghatározva, mi által az értékek bizonytalanabbak lettek.

A durrlég égésmelegének eddigi meghatározásainál mindig elkövettetett az a hiba, hogy annak fogalma kellő szabatossággal nem volt megállapítva és ennek megfelelőleg a kisérletek kivitelénél a kezdet és végállapot physikai feltételeinek meghatározására vagy épen nem ügyeltek, vagy azt legalább a kivánatos pontossággal nem határozták meg. — Már pedig nyilván való az idevágó erőműtani tételekből, hogy minden oly anyagi részekből álló rendszerben, melyre külső erők befolyást nem gyakorolnak, ha pusztán a rendszerhez tartozó részecskék hatása folytán, a rendszerben foglalt erélymennyiség egy része alakját megváltoztatja, az erély mennyiségének ezen részletére nagyon lényeges befolyást gyakorolnak azon physikai feltételek, (térfogat, hőmérsék és feszély), melyek a testnek kezdet és végállapotát határozzák meg. E tévedés számos félreértésre adott alkalmat, és ugy szólván lehetetlenné teszi az egyes észlelők által meghatározott értékek összehasonlitását. Ennek elkerülése végett én a következőkben a

durrlég égesmelege vagy általánosabban a durrlég erélye alatt, mindig azon erélymennyiséget fogom érteni, mely keletkezik, ha a normál (100 Cel. hőmérsékü és 0,760 feszélyü) durrlég állandó térfogat mellett (zárt edényben) teljesen O°-u cseppfolyó vízzé alakul át. A végállapotban ily körülmények közt a keletkezett víz ugyan egy atmosphaerával kisebb nyomás alatt van mint kezdetben, de az ezen különbségnek megfelelő erélyveszteség oly véghetetlen csekély, mely az egész érték mellett teljesen elenyészik és a kisérleti módszerek mostani fejlettsége mellett a szabatosság csorbitása nélkül minden esetre elhanyagolható.

A kezdetben érintett okoknál fogva jelen kisérleteimnek feladata volt lehetőleg pontosan meghatározni a durrlég térfogati egységének erélyét vagyis égésmelegét zárt edényekben.

A fenn leirt módszer szerint, a külső hőmérsék és légnyomás ingadozása folytán, nem volt elkerülhető, hogy az egyes kisérleteknél a durrlég feszélye az elégetés előtt kissé ne különbözzék. Hogy az egyes kisérletek eredménye a fennebbi fogalomnak megfelelő, és az eredmények összehasonlíthatók legyenek a caloriméteren közvetlenül észlelt hőegységekhez, hozzá adatott az a csekély erélymennyiség d, mely a durrlégből kezdett állapotában azért hiányzott, mert a normálnál nagyobb térfogattal birt. Ezen érték hőegységekben a következő egyenlet szerint számittatott ki:

$$d = \frac{C_p - C_v}{\alpha} \cdot s(V - V_0)$$

hol C_p és C_v a durrlég közép fajmelegét jelentik, állandó feszély illetőleg állandó térfogat mellett, α a durrlég kiterjedési tényezője, s ugyancsak a durrlég térfogati egységének a sulya, V a hőeudiometer térfogata, V_0 pedig a durrlég normális térfogata.

Hasonló javítás volt szükséges az elégés után meg nem sürüdött vízgőz rejtett melegére nézve, r-re, mely szintén hőegységekben a mellékelt képlet szerint lett kiszámítva.

$$r = \frac{Vp}{p_0} s_1 \lambda$$

ebben V ismét a hőeudiometer térfogatát, p a O°-u telített vízgőz feszélyét, s_1 pedig térfogati egységének sulyát, λ elpárolgási melegét, p_0 egy légnyomás értékét jelentik. Ha az elégett durlég normál térfogatát köbcentiméterekben V_n-nel, az észlelt grammhőegységeket pedig C_1-gyel, a durrlég térfogati egységének erélyét pedig szintén grammhőegységekben e_v-el jelöljük, lesz:

$$e_v = \frac{C_1 + d + r}{V_n}$$

és $$e_v = \frac{C_1}{V_n} + \frac{p_0 s (C_p - C_v)(V - V_0) + \alpha p s_1 \lambda V}{\alpha p_0 V_n}.$$

Az egyenlet jobboldalának második tagját képező javítások számértéke soha sem tette ki a közvetlenül észlelt értéknek 0,5%-át.

Az így nyert eredmények következők:

Kisérleti szám:	e_v
1.	2,026126
2.	2,023689
3.	2,022684
4.	2,031761
5.	2,036845
6.	2,023322
7.	2,031638

Az utóbbi öt kisérlet középértéke

$$e_v = 2{,}02930.$$

Ezen kisérletekből következik, hogy

az egyes kisérlet középhibája . .	0,00608.
az egyes kisérlet valószinű hibája .	0,00410.
az eredmény középhibája	0,00184.

Az eredmény valószinü hibája az egész értéknek tehát legfeljebb 0,001 részét teszi ki.

Ezen eredmény szerint, midőn 1 köbcentiméter 0^0-u és 0,76 feszélyű durrlég zárt edényben ugyanoly hőmérsékü folyós vizzé ég el, 2,0293 grammhőegység meleg keletkezik.

Eddigelé csupán Th. Andrews határozta meg némileg hasonló körülmények között a durrlég égésmelegét.*) Négy kisérletének középtéke kissé eltér a fennebbi eredménytől, mert kisérleteit 20^0-nál hajtotta végre. Ha azonban a fönebbi elvek szerint és az azóta — a gázok kiterjedésére és sürüségére vonatkozó Regnault által pontosabban meghatározott értékeket használjuk, az ezen buvár által nyert eredmény

$$e_v = 2{,}02858.$$

tehát az egész érték csak 0,03 %-kal kisebb az általam találtnál. — Mig e tény egyrészt fényes bizonyíték Andrews kisérleteinek szabatossága mellett, másrészt kétségtelenül emeli a fönebb nyert számérték

*) Phil. Magaz. Ser. III. T. XXXII. Pag. 321.; és 1848-ban megjelent Poggendorf Annal Bd. LXXV. 27.

biztosságát, a mennyiben a két érték egymástól minden tekintetben eltérő módszerek által lett megállapítva.

A fönebbi adatokból a hydrogén és oxygénre nézve a Stass-féle paránysulyokat és a Regnault által meghatározott sürüségeket alapul véve, kiszámíthatjuk a hydrogén égésmelegét, mely a következő értékek által van kifejezve:

$e_{vh} = 33{,}982$ *h. e. Than*

$e_{vh} = 33{,}970$ *h. e. Andrews*

E szerint midőn 1 gramm 0°-foku és 0,76 feszélyü hydrogén a megfelelő mennyiségű oxygénnel zárt edényben egyesülvén, teljesen 0° foku vizzé alakul át, 33982 h. e. keletkezik.

E számok nem hasonlíthatók közvetlenül össze a hydrogénnek eddig leginkább használatban volt égésmelegeivel, mert ezek mindig állandó feszély melletti, azaz nyilt edényben történő elégésre vonatkoztak. De nem hasonlíthatók össze a fönnebbiek szerint azért sem, mert a gázok égés előtti hőmérséke nem 0°, hanem ennél rendesen magasabb volt, mely azonban többnyire elég szabatosan nem lett meghatározva, valamint a feszély sem, melylyel a gázok égés előtt birtak. Innét azon eltérések, melyek Favre, Silbermann, Thomsen s a régibb meghatározások közt léteznek, és a melyek már nem ritkán elég meddő vitára szolgáltattak alkalmat. Ha az állandó nyomás melletti égésmeleg — e_{ph} — már szabatosan meg volna határozva, ugy ezen érték és a fönebb talált közti különbség $e_{ph} - e_{vh}$ hőegységekben adná a befolyás értékét, melyet a légnyomás az égésmelegre gyakorol, mely értéknek az eddigi adatokból itélve, tevőlegesnek kell lennie.

Kétségtelen, hogy az általam kivitt méréseknél bár minden kitelhető gondot fordítottam rájok, az észlelési hibák leginkább a gázok feszélyének és hőmérsékének mérésénél követtettek el. Hogy ezeknek, valamint azon csekély correctióknak befolyását megitélhessem, egy ellenőrző kisérletet hajtottam végre, mely mindazon befolyásoktól teljesen független.

A módszer lényege a következőkből derül ki: egy oly eudiométert szerkesztettem, melynek capillaris csapja kinyitható vagy becsukható, midőn az a calorimeterben volt elhelyezve. E hőeudiométer finomul be volt köszörülve egy capillaris üvegcsőbe, mely oly hosszú volt, hogy a calorimeterből és a jégszekrényből kiért és végén egy két menetü Geissler-féle üvegcsappal volt ellátva. A csapnak egyik menete a durrlégkészülékkel, másika egy manométerül is szolgáló higanyszivattyúval volt kapcsolatban. Miután a hőeudiométer légüressé tétetett,

durrléggel lett megtöltve, és még két izben szivattyuzás által kiöblítetett durrléggel. Miután a hőmérséket felvette, mit a caloriméter állandó állása jelzett, a manométeren a feszély ugy szabályoztatott, hogy az 760 m. m. legyen. Ekkor a csap bezáratván, a durrlég villanyszikra által mint az előtt meggyújtatott és a hőegységek észleltettek. Az explosio által légüressé vált hőeudiométerbe ismét durrlég bocsáttatott és a feszélynek előbbi módon történt szabályozása után ujra meggyújtatott. Ezen műtétel addig ismételtetett, mig kellő mennyiségü viz gyült össze arra, hogy szabatosan megmérhető legyen.

Mint látható, e módszernél a durrlég kezdeti állapota tényleg mindig a normális, t. i. hőfoka mindig 0° Cels. és feszélye tényleg 760 m. m. Az elégett durrlég mennyiségének meghatározása pedig egyszerü mérlegelésre van visszavezetve, és a hőmérsék, feszély, barométer, térfogat s a többi észlelésétől teljesen független.

Ez utóbbi módszer szerint csak egy kisérletet hajthattam végre, miután a három hónapon át folyvást használt caloriméter capillaris csöve véletlenül eltört.

E kisérlet szerint a hydrogénnek égés melege állandó térfogat mellett 34,040 a különbség az egységül vett egész értéknek csak 0,0014 részét teszi ki és minden esetre kedvező ellenőrzési eredménynek tekinthető a fönebb nyert számra nézve. Mivel a viz mennyisége ez utóbbi kisérletnél még kissé igen csekély volt (mintegy 50 milligramm), ezen értéket még nem tekintem véglegesnek. Azonban ez utóbbi kisérletek kivitelénél szerzett tapasztalataim meggyőztek e módszer kitünő előnyeiről és följogosítanak azon reményre, hogy a kérdéses értéket általa oly biztossággal sikerül meghatároznom, mely szabatosság tekintetében a vegytanban eddig ismert értékek bármelyikével kiállhatja a versenyt.

Kisérleteim ez irányban folyamatban vannak. Midőn ezennel fentartom részemre a jogot, hogy e módszer szerint a durrlég és a fontosabb éléghető gázok erélykülönbségét meghatározzam, reménylem, hogy e vizsgálatok eredményéről, rövid idő mulva szerencsém lesz jelentést tenni.

Végre nem hagyhatom említés nélkül, hogy a kisérletek kivitelében Jovicza Sándor ur lényeges segítségemre volt.

ELŐADÁSI KISÉRLETEK.

Papp Józseftől, a debreczeni főreáliskola tanárától.

I.

Színes árnyék ernyőre vetítve.

A színes árnyék előállításának egy igen jó módját irja le Frick (Die phys. Technik. 4-ik kiadás. 302-ik oldal.) Még szebben előállítható következőleg: a heliostat nyilásába bele illő deszkácskára két, köralaku nyilást vágunk, körülbelől 3 cm. átmérővel, a lehető legközelebb egymás mellé. E nyilásokat 20—25 cm. gyujtótávolságú szemüveg-lencse párral befödjük, s azután az egyikre zöld, másikra veres színt átbocsátó üveglemezt erősítünk. Kék a sárgával szintén jól megfelel a czélnak. E színes üvegeket ugy kell össze válogatni, hogy a rajtuk keresztül menő fény erőssége lehetőleg egyenlő, s a két szin keveréke lehetőleg fehér legyen. Ha az igy összeállított készüléken keresztül jövő napfényt 3—6 méternyire a heliostattól fehér ernyőn felfogjuk, egy zöld és egy veres szinü, köralaku foltot kapunk, melyek egymást nagy részben fedik. Az árnyékot vető, legczélszerübben ágas bogas tárgyakat alkalmas állványon ugy állítjuk a heliostat és ernyő közé, hogy árnyékuk az ernyőnek arra a részére essék, hol a színes foltok egymást fedik. Fekete árnyékot csak ott nyerünk, hova egyik nyilásból sem jut fény, vagy pedig úgy, hogy ha az egyik nyilást egészen eltakarjuk. (Én a készülék összeállításához planconvex szemüveg-lencséket vettem, melyeket kanada-balzsammal a szines üveglemezekre tapasztván, ezeket erősítettem a nyilásokkal ellátott s a heliostáthoz alkalmazott deszkácskára). Ez az előállítási mód a Fricktől leirottnál annyiban jobb, hogy fényerőssége sokkal nagyobb; az árnyékok határai szép élesek; a fehér ernyőt nem szükség nagyon messze vinni a heliostattól, s igy e módszer kisebb teremben is alkalmazható. A lencsék gyujtótávolságainak alkalmas megválasztásával a tüneményt igen nagy alakban lehet előállítani.

II.

A hang visszaverődésének megfigyelése sík tükörrel.

Kisebb fajta orgona-sípot vagy más fuvós vagy vonós hangszert egyenlő erejű, tartós hangzásba hozván, a Wheatstone forgó tükrével, vagy egy zsinegre függesztett s forgásba hozott üveg-lappal szemközt

oly állást foglalunk el, hogy a hangszer indította hanghullámok, a forgó tükörről visszaverődve, a tükör felé fordított egyik fülünket érhessék. Ekkor a síp hangján kivül egy, a tükörből jövő s a tükör forgási sebességének megfelelőleg lüktető hangot fogunk észre venni. Ügyelnünk kell a tükör zajtalan forgására, nehogy zakatolásával a tüneményt zavarja, vagy épen fölismerhetetlenné tegye; ezért a zsinegre kötött üveg lap sok esetben inkább megfelel a czélnak. Minthogy a fülnek és sípnak a tükörtől való távolsága nagy nem lehet, a hangvisszaverődést egyidejüleg csak kevesen figyelhetik; azonban az eszközök könnyü megszerezhetősége minden egyes tanítványt képessé tesz a kisérlet utánzására.

III.

A nátrium-színkép megfordítása, vetítve.

A rendes módon, napfény, hosszú gyújtótávolságú lencse és flintüveg-hasáb segélyével lehetőleg erős fényü, de mégis lehetőleg éles szinképet vetünk az ernyőre; s a fényt, miután már a hasábot elhagyta ott, a hol még legtömörebben együtt van, nátriummal szinezett Bunsen-féle lángon szürjük át. Platin sodronyra olvasztott konyhasó-csep, világító gáz nem létében még a borszesz lángban izzitva is, kellő hatást fejt ki. Ezen összeállitásnál a nátriumos láng fénye, az ernyőt közvetlenül érhetvén, az odavetett szinkép fényerejét emeli és igy a napspectrum *D* vonalának helyén az absorptiobeli erős fekete vonalat még feltünőbbé teszi; ezért ez a berendezés előnynyel bir sok más felett.

IV.

Módositott fénytalálkozási tünemény, vetitve.

A Fresnel-féle tükörrel előállitott fénytalálkozási vonalak távolságának az alkalmazott fény hullám-hosszával való egybefüggése igen jól láthatóvá tehető a következőleg: sötét teremben az ismert egybeállitás szerint, fehér napfényt, Fresnel tükrét és rövid gyujtótávolságu lencsét használva, a lehető legnagyobb fényerővel, mégis lehetőleg élesen vetjük ernyőre a fénytalálkozási vonalakat; azután a lencse és ernyő között alkalmas állványon egy Amici-féle egyenesen irányozható, — valamely zsebspectroskópból kivett — fényelemző hasábot állitunk a fény utjába, ugy hogy a törő él a találkozási vonalak irányára merőleges legyen. Ekkor az ernyőn egy függélyesen álló spectrumot fogunk látni, hosszirányában átszelve a fénytalálkozási vona-

loktól, melyek a veresben távolabb állanak egymástól s a spectrum másik vége felé mind inkább közelednek. Hogy a Fresnel-féle tükörkisérletnél a találkozási vonalakat a legnagyobb fényerővel vetithessük, czélszerü a közönségesen használtatni szokott domboru lencse helyére egy rövid gyujtótávolságu s a fényhasadékkal egyközüleg állitott tengelyü Fresnel-féle henger lencsét alkalmazni. Ez esetben, ha a fényhasadékot, Fresnel tükrét és a hengerlencse tengelyét vizszintes állásba hozzuk és a hengerlencséből kiérkező fényt a függőleges él körül minimum-állásba hozott, közönséges flint üveghasábbal törjük meg s bontjuk szinelemeire, ugy az ernyőn felfogott spectrum az őt átszelő találkozási vonalakkal egyetemben vizszintes állásu s meglehetős nagy távolságban is jól látható. A kisérlet fekete tükörrel is szépen sikerül. Ha pedig a Fresnel-féle tükör külső felületét, valamely ezüstöző eljárás szerint, szép fényesen tükröző ezüst-réteggel vontuk be, fényerősség tekintetében semmi kivánni való sem marad. A Fresnel-féle tükör lemezeit előbb a Carl Repertoriumában (Rep. f. Exp. Physik és phys. Technik. 7-ik kötet. 182-ik oldal) közlött eljárás szerint ezüstöztem meg, azonban később a Martin-féle ezüstöző folyadék jobbnak bizonyult, mert az ez által nyert ezüstréteg sokkal inkább tapad az üveghez s kellőleg kicsiszolható.

IRODALOM.

Farkas Gyula. *A determinánsok elmélete.* Dr. Richard Baltzer »Theorie und Anwendung der Determinanten« czimü művének magyarázó megjegyzések kiséretében vázolt első szakasza. Bevezetőül Baltzer művébe. 1877. Kilián bizománya. (8°, 116. l.)

Baltzer munkájáról e helyen jelenleg ismertetést adni, valóságos anachronismus volna. A ki egyáltalában foglalkozott az algebrai vizsgálatok rövid idő alatt oly hatalmassá lett segédeszközével, a determinánsokkal, az szükségkép már forgatta Baltzernak e rövidre szoritott, de mégis majdnem teljes kézikönyvét. Hogy azonban nemcsak mint kézikönyv, de mint tankönyv is használható, legjobban bizonyitja az a körülmény, hogy a német eredetiből eddig már 4 kiadás jelent meg. Igaz — hogy szigoruan tudományos rendszere, és a rövidséget kiválóan kereső irálya itt-ott némi nehézségeket gördítenek a kezdő elé. Annál szerencsésebb gondolata volt tehát Farkas Gyulának, hogy midőn az ujabb mathematikai irodalom ezen alapmunkáját hazai irodalmunkba átülteti, annak néha-néha igen lakonikus magyarázó szövegét — tekintettel a mi oktatási viszonyainkra — helyenként kibőviti, és igy tanulmányozását lehetőleg

megkönnyiti. E bővitések és fölvilágositó megjegyzések szerencsés választása ugy hiszszük, valóban megfogják könnyiteni a tanulónak az első lépéseket, és igy jól fogja használni a füzetet még addig is, mig Baltzer munkájának második és nagyobb részét a determinánsok alkalmazását hasonló átdolgozásban nem birjuk.

Ezt annyival inkább óhajtanók, mert a fölosztás elméletre és alkalmazásra, megfelel ugyan a kézikönyvnek, de az oktatásban is első tanulmányozásban épen nem vihető keresztül. Talán ép ezen alkalommal pótolhatná a szerző még azon egyetlen hiányt is, a mely a német eredetivel szemben nekünk föltünt, hozzá csatolhatná ugyanis akkor azon történeti jegyzeteket, melyek Baltzer művének egy értékes részit teszik, és melyek a forditásból elmaradtak.

Megjegyezzük még, hogy jó magyarsága és csinos kiállitása is emelik a munka becsét. K. Gy.

MEGFEJTETT FELADATOK.

29. (L. a 96. lapon.)

Megoldás *Berger Adolf* urtól,
a budapesti tanárképző intézet tagjától.

Ha az egyik (M) condensátor alsó (A_2) lemezével bizonyos a mennyiségü, például + elektricitást közlünk, úgy ez a condensátor felső (A_1) lemezének természetes elektricitására a szigetelő rétegen keresztül megosztólag fog hatni, a negativ elektricitást maga felé vonván és a positivot eltaszitván. Ha az A_1 lemezt a földdel vezetőleg összekötjük, ugy a + elektricitása eltávoló dik és a — elektricitása szabad marad. Jelöljük e negativ elektricitás absolut mennyiségét a_1-gyel.

Ha most A_1-t B_2-vel megérintjük, ez az a_1 mennyiségü negativ elektricitás a második (N) condensátor alsó lemezébe, B_2-be megy át, és itt szintén megosztólag hat a felső lemeznek, B_1-nek természetes elektricitására, és köt benne, mondjuk, a_2 positiv elektricitást. A fönt levő negativ electricitás a földbe vezettetik.

B_1 megérintetvén A_2-vel, ez amattól átveszi az a_2 mennyiségü + positiv elektricitását és most már $a + a_2$ elektricitása fog lenni. Azonban a feladat végsorai értelmében: $a_2 = a_1 = a$; és igy az A_2 elektricitása az első indítás után $2\,a$ fog lenni.

Az indítás most ismétlődik. Az A_1 lemezben $2\,a_1$ negativ elektricitás köttetik meg; ez azután átmenvén B_2-be, az előbbről ott maradt a_1 elektricitást $3\,a_1$-re szaporitja. Ez pedig B_1-ben leköt $3a_2$ positiv elektricitást. B_1 megérintetvén A_2-vel, ez utóbbinak elektricitása $2\,a + 3\,a_2$ vagyis $5\,a$ fog lenni. És igy tovább.

Az elektricitás szaporodását a következő táblázat*) tünteti elő:

A_2	A_1	B_2	B_1
a	$-a$	$-a$	$+a$
$2a$	$-2a$	$-3a$	$+3a$
$5a$	$-5a$	$-8a$	$+8a$
$13a$	$-13a$	$-21a$	$+21a$
⋮	⋮	⋮	⋮

A sor általános alakja a következő lesz:

$$A_2 = a + a\left[n + \binom{n-1}{1}\binom{2}{1} + \binom{n-1}{2}\binom{2}{2} + \binom{n-2}{1}\binom{4}{1} + \binom{n-2}{2}\binom{4}{2}\right.$$
$$+ \binom{n-2}{3}\binom{4}{3} + \binom{n-2}{4}\binom{4}{4} + \binom{n-3}{1}\binom{6}{1} + \binom{n-3}{2}\binom{6}{2} + \binom{n-3}{3}\binom{6}{3}$$
$$+ \binom{n-3}{4}\binom{6}{4} + \binom{n-3}{5}\binom{6}{5} + \binom{n-3}{6}\binom{6}{6} + \cdots\cdots\cdots\cdots +$$
$$\left. + \binom{n-(n-2)}{1}\binom{2n-4}{1} + \binom{n-(n-2)}{2}\binom{2n-4}{2} + \binom{n-(n-1)}{1}\binom{2n-2}{1}\right]$$

30. (L. a 128. lapon.)

Megoldás: *Simandl Samu* urtól, *a trencséni alreáliskola igazgatójától.*

A feldobott pont függélyesen törekszik mozogni; ezt azonban gátolja az ellipsis szilárdsága. Igy a pont kényszerítve van az ellipsis homorú oldalán emelkedni föl. E kényszerből nyomás származik az ellipsis kerületére, mit az ugyan akkora ellen-nyomással viszonoz. E nyomás és ellennyomás mindenütt merőleges az ellipsisre és a nagysága, $\pm N$, valamely pontban:

$$N = \frac{m v^2}{\varrho} - mg \cos(\varrho, g)$$

hol is m a pont tömege; g a nehézségi gyorsulás; v a sebesség az illető pontban; ϱ ugyanott az ellipsis görbületi sugara; (ϱ, g) pedig az a szög, melyet a görbületi sugár ugyanott a súlyvonallal bezár.

A pont addig símul az ellipsis ívéhez, a mig a nyomás nagyobb a semminél. Ott a hol $N=0$, a pont elválik az ellipsistől és ezután, mint szabad pont, a nehézségi erő hatása alatt parabolikus pályát követ. Ez az elválási hely jellemezve van tehát a következő egyenlet által:

$$v^2 = \varrho g \cos(\varrho, g) \qquad (1.$$

Jelentse már most c a keresett kezdeti sebességet, úgy az eleven erő elvénél fogva

$$c^2 = v^2 + 2g\eta$$

*) Ha $a = 1$, úgy az első és utolsó rovatban álló kifejezések, vegyesen egymás után írva, a következő számsort adják:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ..... Szerk.

hol η az elválási és a feldobási hely közti niveau különbséget ábrázolja
És igy:

$$c^2 = g\,[2\,\eta + \varrho\cos(\varrho\, g)] \qquad (2.$$

Most már csuk η, ϱ és $(\varrho,\ g)$ értékét kell az adott feltételeknek megfelelőleg kiszámítani és a (2.-be helyettesíteni.

Vegyük az ellipsis kis (b) tengelye irányát X, nagy (a) tengelye irányát pedig Y koordináta tengelyül, és pedig akként, hogy a $+X$ az ellipsis középpontjától a feldobási hely felé, a $+Y$ pedig ugyanattól fölfelé irányuljon, és jelöljük az ellipsis érintőjének hajlás-szögét az X tengelyhez φ-vel, úgy az ellipsis minden pontján állani fognak a következő egyenletek:

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2 \qquad (3.$$

$$tg\,(\varrho, g) = -tg\,\varphi = -\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x}{b^2y} \qquad (4.$$

és ha az ellipsis íve s vétetik független változóul:

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} = \frac{a^4b^4}{(a^4x^2 + b^4y^2)^{3/2}} \qquad (5.$$

Jelöljük az elválási pont koordinátáit ξ- és η-val, ugy a (2) alatti egyenlet jobb oldala a (3), (4) és (5) tekintetbe vételével következő alakot ölti magára:

$$c^2 = g\,\eta\left(3 - \frac{a^2 - b^2}{a^4}\,\eta^2\right) \qquad (6.$$

Most még csak η ugy határozandó meg, hogy a $\xi\,\eta$ pontból v sebességgel és φ elevatio alatt kiinduló parabola a koordináták kezdő pontján vezessen át. Jelöljük e dobási parabola folyó koordinátáit x_1 és y_1-gyel, úgy az egyenlete:

$$y_1 - \eta = (x_1 - \xi)\,tg\,\varphi - \frac{(x_1 - \xi)^2 g}{2\,v^2\cos^2\varphi} \qquad (7.$$

És minthogy $x_1 = 0$ és $y_1 = 0$ eleget tartozik tenni a (7.) alatti egyenletnek, ξ és η között még a következő relatiót nyerjük:

$$\eta = \xi\,tg\,\varphi + \frac{\xi^2 g}{2\,v^2\cos^2\varphi}$$

a mi még, tekintetbe véve az (1), (3), (4) és (5) alatti értékeket, igy irható:

$$\eta = -\frac{a^2\xi^2}{b^2\,\eta} + \frac{a^4\xi^2}{2\,b^2\eta^3}.$$

vagy még, egyszerü átalakítások után:

$$\frac{\xi^2}{b^2} = \frac{2\,\eta^2}{a^2}$$

és minthogy:

$$\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{a^2} = 1$$

lesz :

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a, \xi = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot b$$

és :

$$c = \sqrt{\frac{8a^2 + b^2}{3\sqrt{3}\,a}} \cdot g$$

Körnél : $c = \sqrt{ag\sqrt{3}}$

FELADATOK.

31. Egy tetszőleges sík messe egy adott tetraéder hat élét az a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 pontokban, és az élek közepei legyenek k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, ugy a b pontok, melyek a tetraéder hat élén akként határoztatnak meg, hogy

$$a_1 k_1 = k_1 b_1,\ a_2 k_2 = k_2 b_2,\ a_3 k_3 = k_3 b_3,\ a_4 k_4 = k_4 b_4,$$
$$a_5 k_5 = k_5 b_5,\ a_6 k_6 = k_6 b_6,$$

legyen, úgy a b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 pontok szintén egy síkban fekszenek.

Feltéve továbbá, hogy az eredetileg választott sík akként változik, hogy egy állandó ponton megy keresztül, kerestessék meg, hogy ekkor a b pontok síkja miféle felületet fog beburkolni. (Hunyady).

32. A 190 lapon csillag alatt emlitett sor

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 .....

törvénye ez :

Kezdődik 1-gyel, és azután minden következő tag egyenlő a megelőző két tag összegével, az első 1 elé nullát gondolván megelőző tagnak.

Bizonyittassék be, hogy az

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{5}$$

egyenletben előforduló A_n és B_n összege egyenlő ama sor $n + 1$-edik tagjával, hol is n minden positiv egész számot jelenthet.

Vagy másképp fogalmazva, kivántatik az

$$f(n + 1) = f(n) + f(n - 1)$$

által megszabott számelméleti függvény meghatározása, a mely függvény az előbbi jelölésekben nem egyéb mint : $A_n + B_n$. (König).

A szerkesztőség levelezése.

A 28. feladatnak eddig beérkezett megoldásai nem helyesek.

(H. J.)

Budapest, 1877. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

II. kötet. 1877. 17. füzet.

HŐMENNYISÉG-MÉRÉSEK.*)

Schuller Alajos és dr. Wartha Vincze tanároktól.

I.

1. Bevezetés.

Midőn három évvel ez előtt arra határoztuk el magunkat, hogy a Bunsen-féle jégcalorimeter segítségével hőméréseket végzendünk, kiválóan azon megfontolás ösztönzött, hogy a vegyrokonság hő-egyenértékét, a vegyi erély mérfokát mindeddig még nem ismerjük eléggé, hogy ennélfogva nem is vehetjük a vegytani kutatásnak és a vegytan tárgyalásának alapjául.

Ez utóbbi körülménynek tulajdonítandó, hogy a vegytan még nem érte el a tudományosság azon magasabb színvonalát, melyre akkor vergődnék, ha tárgyalása mathematikai alapon történhetnék. A vegytan ily irányu haladásának, ugylátszik előfeltétele, hogy a vegyvonzással egyenértékü hőmennyiségek pontosan megállapíttassanak. A rendelkezésünkre álló adatok e tekintetben hiányosak, részint azért, mert a meghatározásoknál követett módszerek nem szolgáltattak elegendő pontosságot, részint pedig azért is, mert vegyülés közben rendesen más körülmények is okoznak hőfejlődést meg hőfogyasztást, nemcsak a vegyi vonzás. Ilyen körülmény például a halmazállapot megváltozása.

Miután a legtöbb esetben nem áll hatalmunkban közvetlenül azt a meleget megmérni, mely csupán a vegyülés következménye, azért nem elég a vegyülésnél fellépő összes hőmennyiséget meghatározni, hanem azon fölül még meg kell állapítani, hogy mennyi esik abból mellékes változásokra, mennyi a vegyülésre. Első feladatul tüztük ki magunknak a hydrogén és oxygén egyesülésekor föllépő meleget meg-

*) Felolvastatott a magy. tud. Akadémia 1877. jun. 11-én tartott szakülésében.

mérni, a mi azután szükségessé teszi, hogy a vízre vonatkozó többi adatokat,a fajmeleg változását,a két rejtett meleget stb.szintén megállapítsuk.

2. A calorimeter szerkezete.

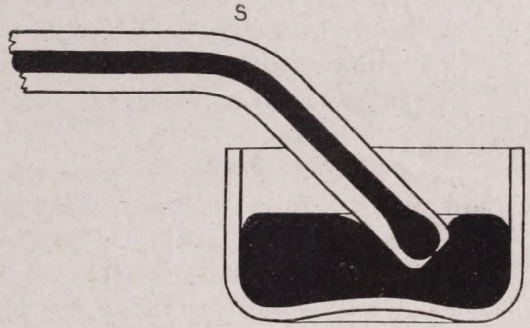
Alig fogtunk a megelőző munkálatokhoz, már is meggyőződtünk arról, hogy a Bunsen-féle jégcalorimeter eredeti alakjában nem felel meg czéljainknak. Részint azért, mert sok tiszta hóra vagy jégre lenne szükségünk, mit előnytelen viszonyaink között nem birnánk megszerezni, részint pedig azon oknál fogva, mert az osztályzatos calorimeternél csak kis hőmennyiségeket lehet megmérni s bizonyos határon túl nem lehet a pontosságot a melegség szaporítása által fokozni. A határt az osztályos csőbe férő higanyszál hosszának még biztosan megmérhető hanyadrésze szabja meg. Ezen hátrányokat elkerülni volt tehát első törekvésünk.

Eme két körülményhez képest két irányban tettünk változtatásokat. A tiszta hó szükségét az által kerültük el, hogy calorimeterünket (a mint az 1-ső ábra*) mutatja) tiszta jéggel *(J)* környezett vízbe *(V)* helyeztük, az edény körül pedig, melyben ez a védő víz és jég foglaltatik, minden oldalról, apróra tört, tisztátalan jeget *(j)* raktunk. Ez a külső jégburok meggátolja a tiszta vízből előállított jégréteg megolvadását, sőt inkább — a tisztátalanságok miatt hütő keverék gyanánt hatva — a réteg vastagodását okozza. De a körülzárt víz hőfoka ez alatt nem változhatik, és így a calorimeter közvetlen környezete mindig 0 fokú.

Nehezebben sikerült a feladat másik felét megoldani. Kezdettől fogva világos volt az, hogy a térfogat-változás közvetlen észlelését fel kell áldozni s helyette súlymérést kell végezni. Ennek eszközölhetése végett calorimeterünket az osztályos hajszálcső helyett rövid szük nyilásu szivócsővel *(S)* kellett ellátni, s a dolgot akkép kellett intézni, hogy két megmért higanyos edényke felváltva használtassék s a higanynyal telt szivócsőnek szabad vége mindig az egyik edényke higanyába érjen, kivéve azon rövid időt, a mely a kicserélésre szükséges. Csak az volt a kérdés, hogy a capillaritás okozta akadályokat mikép lehet elhárítani. A capillaritás már Bunsen calorimeterénél is kellemetlenséget okoz, befolyását azonban legalább részben elháríthatjuk, ha minden leolvasás előtt a csövet jól megrezzentjük, mindaddig, míg újabb rezzenések a higanyszál állásában nem okoznak változást. Attól kellett tartani, hogy hatása még sokkal károsabb lesz súly-calorimeterünknél, mert a mint a higanyos edényke a szivócső alul kivétetik, ez utóbbiban a higanynak azonnal kevéssé vissza kell

*) L. a mellékelt rajzlapon.

húzódnia, tehát nem csatlakozhatik a másik edény higanyához, habár a cső vége egészen el is meríttetik. De sikerült a hajcsövesség ezen hatását elkerülni az által, hogy a szívócsőnek szabadon álló végét*) a következő módon készítjük. A csövet előbb beolvasztjuk s félgömbben hagyjuk végződni, azután színes folyadékkal megtöltve, előbb durva, majd finom köszörükövön addig csiszoljuk, míg a félgömbnek legkülső része annyira le nem kopott, hogy körülbelül fél millimeternyi átmérőjü nyilás támadt.**)



A mellékelt idomban a higanyba merülő szívócső *(S)* vége kétszeres nagyságban van előtüntetve. A higanyos edényke eltávolítása után a csőben maradó higany szabad felülete azon síkba esik, melyet köszörülés által állítottunk elő, s így újabb bemerítésnél a külső és belső higany egymáshoz nagyon közel jutnak, tehát könnyen is csatlakoznak. Biztosság kedveért a csövet a higanyos edények kiváltása után minden egyes esetben gyönge ütés által megrezzentjük.

A higanyos edények gyors kicserélésének megkönnyítése végett a 2-dik rajzban ábrázolt tartó alkalmaztatott, mely akkép van felszerelve, hogy *A*-nál újjal lefelé nyomhatjuk s ez által eltávolíthatjuk a szívó csőtől *(S)* azt a higanyos edénykét, melybe amaz épen bele nyúlik; azután az egészet oldalt fordíthatjuk, ugyhogy a másik edény kerüljön a szívó cső vége alá, s végre a nyomás megszüntetése által a rúgó *(R)* hatása következtében, rendeltetése helyére juttathatjuk ezt a második higanyos edénykét.

3. A caloriméter tulajdonságai.

Az ekkép felszerelt caloriméter nevezetes állandóságot mutat, daczára annak, hogy tisztátalan jéggel tápláltatik. Belső jege folyto-

*) Másik vége a caloriméternek felfelé nyíló csövébe be van köszörülve, azon fölül viaszkkal be is van ragasztva.

**) Miután a tisztaság a higany és üveg tapadásának lényeges kelléke, azért a cső végét, minden szenny eltávolítása végett, olvasztott chlórsavas kálíba mártjuk, és lehülés után vizzel kimossuk és kiszáritjuk.

nosan olvad, s az óránként beszitt higanymenynyiségek egyenlők*) mindaddig, mig a környező víz tisztasága nem változik. Ingadozások, váltakozó olvadás és fagyás, nem tapasztalhatók. A mérséklet pedig a fagyasztás után egy, legfeljebb két óra alatt annyira kiegyenlítődik, hogy a méréseket meg lehet kezdeni, habár a jég vastagsága 20 vagy 30 millimétert meghalad. Annak a tartós fagyásnak, melyet Bunsen a fagyasztás után tapasztalt, nyomát sem észlelhettük, hanem ellenkezően, a hőfok kiegyenlítődése után, azonnal megindult az olvadás. Legkevesebb okunk sincs tehát feltételezni, hogy a calorimeter jege más állapotba menne át, a mire Bunsen tapasztalatai utalni látszottak, hacsak a tartós, egyenletes olvadásból nem akarnánk arra következtetni. De ennek kétségtelenül más oka van. Ugyanis a calorimeter belsejében, szerkezeténél fogva, a jég folyvást közel 300 mm. magasságu higanyoszlop nyomásának van kitéve, minek következtében olvadó pontja 0^0 alá esik. De calorimeterünk 0 fokú vízben áll, ennélfogva mint hidegebb test kivülről folytonosan melegszik, minek azután folytonos olvadás a következménye. E közben a térfogat-kisebbedés miatt, az idővel arányos higanymennyiséget szív magába.

Ezen felfogás helyessége már abból is kiviláglik, hogy különben változatlan körülmények között az olvadás annál gyorsabb, minél vastagabb a calorimeter jege, azaz minél vékonyabb az a vízréteg, mely a hőkicserélést eszközli. Mivel azonban egyéb körülmények is mérvadók lehetnek, azért czélszerünek láttuk, külön kisérlet által kétségtelenné tenni, hogy a nyomás eme hatása elégséges az említett tünemény magyarázatára. Erre a 3-dik rajzban ábrázolt eszközt használtuk. A lombikban kiforralt viz (V) és ugyanabból készített jég (J) foglaltatik. Oldalán üvegcső van hozzáforrasztva, melynek végébe hajszálcső (H) van illesztve (beköszörülve és beragasztva). A hajszálcső másik végén rövid kaucsuk cső és azon túl eléggé szűk üvegcső van alkalmazva, mely nagyobbára higanynyal van megtöltve. Igy felszerelve, a lombik minden oldalról tiszta jéggel vétetik körül. A kisérlet abban áll, hogy a (K) csövet egyszer függélyesen felfelé irányítjuk, más esetben pedig függélyesen lefelé állitjuk, s mind a kétszer megfigyeljük a lombikból a hajszálcsőbe érő higanyszálnak végét (M). Az első esetben a higanyszál folytonosan visszafelé halad, a mi folytonos olvadásra mutat, a másodikban pedig előre halad, s ez a tartós fagyást jelzi. A szál elmozdulása 12 óra alatt körülbelül 300 mm. volt, midőn közel 400

*) Lásd az első tabellát a 7-ik oldalon.

mm. magas higanyoszlop gyakorolta a nyomást, és a hajszálcső nyilása 0·33 négyszög mm. volt.

E szerint kétségtelen, hogy a calorimeter jegének folytonos olvadása azon nyomás következménye, mely a calorimeter belsejében uralkodik. E nyomás csökkentése által elháríthatjuk, sőt ellenkezővé is tehetjük a változást. Ugyanezt lehet elérni az által is, ha a calorimetert környező vízbe csekély mennyiségü konyhasót teszünk. Méréseinknél egyiket sem használtuk fel szándékosan, mert az egyenletes változás nem korlátozza a pontosságot; huzamos használat után azonban magától csökkent az olvadás. Ez onnét magyarázható, hogy idővel, a gyakori fagyasztásoknál, oldalt hulló részekből kevés konyhasó szivárgott a calorimeter körül levő vízbe, mely a chlór jelenlétét $Ag\ NO_3$ hozzáadása után csakugyan el is árulta. Az ilyen víznek eltávolítása és tiszta vízzel való helyettesítése után az olvadás ismét a régi fokot érte el.

4. Az egység megválasztása és meghatározása.

Hőegységnek a víz közép fajmelegét 0° és 100° között választottuk. Kényszerüségből hajlottunk ezen egység felé*), s végre azért fogadtuk el, mert ugy gyakorlati, mint elméleti szempontokból helyesebbnek tartjuk a szokásos egységnél. Ugyanis ez utóbbit, t. i. a víztömeg egységének 0°-tól 1°-ig való felhevítésére szükségelt melegséget nem lehet közvetlenül megszerezni, hanem csak kisérletek sora által lehet megállapítani, melyet mindannyiszor ismételni kell, valahányszor a hőmérések, új vivmányok alapján, az előbbinél nagyobb pontossággal eszközölhetők. Ahhoz fáradságos előmunkálatok és számos segédeszközök kivántatnak, melyekkel sokan nem rendelkeznek, a kik különben pontos hőmennyiségmérések tételére képesitve volnának. Oly körülmények ezek, melyeket egységül használandó mennyiségeknél nem szivesen látunk. Ha ellenben a víznek közép fajmelegét veszszük alapul, akkor bármikor képesek vagyunk az egységet ugyanazon pontossággal megjelölni, melyre az illető eljárás egyáltalában képes. E czélból egyéb nem kell, mint hogy azon melegség határoztassék meg, melyet 1 gr. viz 100°-tól 0°-ig történő lehülés közben veszit. **) Természetszerübbnek is tartjuk épen ezen hőfokokat közvet-

*) Lásd Dr. Friedrich Weber »Die spec. Wärmen der Elemente Kohlenstoff, Bor und Silicium.« Stuttgart, 1874, p. 16.

**) Meg kell emlitenünk, hogy ugyanezt az egységet a keverési módnál is alapul vehetjük, ha e czélból két mérést végzünk, az egyiknél 100° és a másodiknál pedig 0°-ú vizet tévén a calorimeterbe.

len kiindulási pontokul választani, mint bármely más velük csak közvetve összefüggőket, mivel a forró pont és a fagyó pont azon mérsékletek, melyeket aránylag csekély segédeszközökkel legpontosabban tudunk meghatározni, s melyek ugyis minden pontos hőmérésnek legalább közvetett kiindulási pontjait képezik. — Az új egység megválasztásába belenyugodhatunk, a nélkül, hogy attól kellene tartani, miszerint az eddigi eredmények ez által lényeges változást szenvednének, mert a legtöbb adatok kevésbbé pontosak, semhogy átszámításuk szükségesnek látszanék; hiszen még Regnault számai közt is gyakran egész perczenteket meghaladó eltérések mutatkoznak, melyeket elkerülni a keverési módszer alkalmazása mellett, ugy látszik, alig sikerül. Gyakorlati fontossága az új egységnek csak pontosabb eredményeknél mutatkozik, a milyeneket a jégcalorimeternek használata s különösen az itt leirt módosítása mellett lehet elérni.

A hőegységnek megjelölése szempontjából meg kell mérni azon higanymennyiséget, melyet a calorimeter besziv, midőn besejében ismeretes mennyiségü 100 fokú viz 0°-ra lehül.

Meghatározásánál, lényegben véve Bunsen útmutatása szerint, de saját tapasztalataink felhasználásával, a következőkép jártunk el.

Vékony falú, a mennyire lehet hosszú*) üvegedénykét 100°-nál jól kiforralt vízzel töltünk meg, akkép, hogy a beforrasztás után a víz felett csak alig észrevehető üreg maradjon. A megtöltés előtt is, utána is pontosan megmért edényt felhevítjük a víznek épen uralkodó forró pontjáig és azután a calorimeter csövébe ejtjük. Hasonlóan bánunk ismeretes tömegü üvegdarabbal is, melynek adatából kiszámítjuk, hogy a víz edénye egy maga milyen változást okozott volna. — Hogy ekközben a hőfok biztosan meghatározható legyen, a 4-ik rajzban előttüntetett, nagyobbára fémből álló hevitőt alkalmaztuk. Az egészet négy részből (*AB*,*C*, *DE*, és *F*) állónak tekinthetük.

A felső részhez (*AB*) van erősítve a hőmérő és a tartó (*T*), melynek gombját (*G*) ha megnyomjuk, a *T*-nél levő test, hosszirányával függélyes állásban, azonnal leesik. A gőz *A*-nál tódul be, azután *C* összekötő csövön áthaladva, *D*-nél jut a tulajdonképeni hevitőbe, melyet *E*-nél hagy el. *F* a hevitő alján végig csúsztatható falemezt ábrázol.

A műtételek sora a következő: körülbelül 15 perczczel a hőmérő megállapodása után, folytonos gőzfejlődés közben, a hevitőt a calorimeter nyilása fölé tartjuk, az egyik kézzel félre húzzuk az *F* lemezt;

*) Ezen elővigyázat mellett fölösleges az elsülyedést platina terhelvény által gyorsitani.

a másikkal pedig lehetőleg ugyanazon pillanatban lenyomjuk a gombot *(G)*. Ezután a hevítőt gyorsan eltávolítjuk és a calorimétert szokott módon befedjük.

Legjobban megbízható kisérleteink eredménye a következő:

I. Tábla.

Idő nap óra perez	*(A)* edényke súlya gr.	*(A)* edényke változása egész-ben	*(A)* edényke változása órán-ként	Megjegyzés	*(B)* edényke súlya gr.	*(B)* edényke változása egész-ben	*(B)* edényke változása órán-ként
Febr. 28 12h 29m	38·2412				36·7198		
						0·0048	0·0040
1h 40m	» »				36·7150		
		0·0061	0·0030				
3h 46m	38·2351			(V) 99°·65-nál be.	» »		
						1·1809	—
5h 13m	» »				35·5341		
		0·0051	0·0047				
6h 18m	38·2300			(V) kivétetett	» »		
						0·0453	0·0029
Márcz. 1. 9h 54m	38·3820			(V) 99°·7-nál be.	35·4888		
		1·1765	—				
10h 55m	37·2055				38·4457		
						0·0022	0·0022
11h 54m	» »				38·4435		
		0·0107	0·0036				
2h 55m	37·1948			2h 50m-kor ki.	» »		
						0·0057	0·0043
4h 16m	» »			(V) 99°·6 be.	38·4378		
		1·1788	—				
5h 15m	36·0160				» »		
						0·0038	0·0039
6h 12m	» »			(V) kivétetett	38·4340		
		0·0415	0.0030				
Márcz. 2. 8h 07m	35·9745				» »		
						0·0036	0·0032
9h 15m	» »			(V) 99°·95-nál be.	38·4304		
		1·1792	—				
10h 09m	34·7953				» »		
						0·0039	0·0039
11h 09m	» »			(V) kivétetett.	38·4265		
		0·0111	0.0037				
2h 09m	34·7842				» »		
						0·0086	0·0048
3h 57m	» »			(V) 99°·9-nél be.	38·4179		
		1·1812	—				
4h 57m	33·6030				» »		
						0·0051	0·0051
5h 57m	» »			(V) kivétetett.	38·4128		

E táblában foglalt adatokat illetőleg a következőket szükséges megjegyezni. A szoba hőfoka eme mérések ideje alatt 7·5° és 11° közt ingadozott. A mérleg valamivel melegebb, szintén fütetlen szobában állott, minek következtében a calorimétertől jövő, 5—6 fokú higanyos edényeket a mérés előtt 15—20 perczre a mérleg szekrényében kellett állani hagyni. Ezen elővigyázat mellett a harmadik deczimális még megbizható; a negyedik már nem az. — Az óránkénti változás egy óra alatt 0.001 grammnál többel alig változik; *) az innét származó bizonytalanság 1·17 gr. higanyhoz képes legfeljebb egy ezred rész. Ennél nagyobb hibát a hőfok megfigyelésében sem követhettünk el, mert 0·1fokot biztosan meglehetett becsülni.

Megjegyzendő még, hogy a táblában előforduló vastag vonások azon időket tüntetik elő, midőn a higanyos edénykék egyike más, tiszta higanyt tartalmazóval lett felcserélve.

A táblában előforduló *(V)* zárt víztartalmú üvegedénykét jelent.

Az üveg súlya 0·19158 gramm súlyával,

a víz pedig 0·72445 » »

egyenlőnek találtatott. A mérést igen finom Schickert-féle mérlegen levegőben eszközöltük, a súlyokat pedig, melyek Westphal-tól származnak, egymás közt összehasonlítottuk és a talált nagyon kis eltéréseket még számításba is vettük. A levegő befolyását számításba véve, azt találjuk, hogy a víz tömege 0·72530 gr.

A táblázatból kitalálhatjuk azon higany-mennyiségeket, melyeket a caloriméter beszitt, midőn az *(V)* vízedényt, az illető forró pontig felhevítve, belé ejtettük. Az óránkénti változások tekintetbe vételével a következő számokat találjuk:

99°·65-nál	1·1747	gr. Hg
99°·7 »	1·1740	» »
99°·6 »	1·1747	» »
99·95 »	1·1760	» »
99·9 »	1·1762	» »

100°-nak a következő értékek felelnek meg:

	1·1788	gr Hg
	1·1775	» »
	1·1794	» »
	1·1771	» »
	1·1774	» »
A középérték	1·1780	» »

*) Ebből azt is következtethetjük, hogy az általunk használt szívócső czéljának megfelel, a mennyiben nagy pontosságot enged elérni.

Ebből le kell vonni az üveg által okozott változást.

1 gramm 100°-tól 0°-ig lehülő üvegnek megfelel
0·30284 gr Hg., tehát
0·19158 gr.-nak 0·0580 » »

Marad a víz részére 1·1200 gr. Hg.

1 gr. víznek tehát 1·5442 gr. Hg. felel meg. Ennek századrészét
0·015442 gr. higanyt

veszszük a hőegység mértékének, ez felel meg a víz közép fajmelegének 0° és 100° között, mely Regnault mérései alapján, Bosscha számítása szerint, 1·011-szer nagyobb a szokásos egységnél.*)

5. Összehasonlítás.

Érdekes az itt talált eredményt más észlelők adataival összehasonlítani. Bunsen adataiból kiindulva

0·01541-et

találunk helyette. Ez a szám azonban, ugy látszik, hogy nem tart igényt egy ezredrész pontosságra, mert nincs megmondva, hogy a víz súlya légüres térre redukáltatott-e, pedig a levegő befolyása az egésznek ezred. részét meghaladja; de még a víz valódi és középfajmelege közti különbség sem vétetett tekintetbe, mert, habár a szövegben **) a hőegység az eddig szokásos módon van is értelmezve, a számításban mégis a középfajhő van alapul véve, mely már Regnault számítása szerint is 1·005-ször nagyobb amannál, most pedig 1·011-szeresnek vétetik. Más számot kell tehát az összehasonlításra keresni. Regnault adataiból szintén kiszámíthatjuk a hőegységünknek megfelelő higanyt, ha felhasználjuk Bunsennak a zerus fokú jég sűrűségére vonatkozó számértékét. A víz közép fajmelegének (0°—100°) megfelelő higanyt grammokban megadja a következő kifejezés

$$1{\cdot}011\,\frac{D_w - D_e}{D_w\,D_e}\,\frac{D_q}{L}$$

melyben

D_w = 0.99988 a 0°-ú víz abs. sűrűsége
D_e = 0·91674 a 0°-ú jég » »
D_q = 13·596 a 0°-ú higany » »

---

*) Regnaultnak a víz közép fajmelegére 0° és 100° között irányított közvetlen meghatározásai ezzel jól megegyező eredményeket 1·00709 és 1·0089 szolgáltattak. »Annales de Chimie et de Physique LXXIII.«

**) Pogg. Ann. CXLI. 1870. 2-dik és 19-dik oldal.

$L = 79{\cdot}25$ a jég olvadási melege a régi egységekben kifejezve. A helyettesítés után

0·01573 gr.-ot

találunk. Ez a szám a mi eredményünknél 0·00029-el nagyobb a mi az egésznek 0·018-ad részét teszi.

Ilyen nagy hibát méréseinknél nem lehetett elkövetnünk; azt sem lehet feltételezni, hogy Regnault számai enynyire hibásak volnának, ennélfogva ahhoz a következtetéshez jutunk, hogy a két egymástól lényegben eltérő eljárás különböző eredményekre vezet. Már Bunsen számai is arra látszottak utalni, mert az ezüst, zink, antimon, kadmium és kén fajmelegét körülbelül $^1/_{40}$-ed részszel kisebbnek találta, mint Regnault.

Próbaképen mi is meghatároztuk a zink fajmelegét s az általunk választott egységben kifejezve

0·0938-at

találtunk, holott Regnault száma

0·0956.

Az itt mutatkozó eltérés okát mindenekelőtt az egységek különféleségében kell keresnünk.

Az utóbbi számot 1·011-el osztva

0·0945-öt

találunk, a mi még mindig

0·0007-el

nagyobb, mint az általunk talált számérték.

Ez a különbség az egésznek több mint 7 ezredrészét teszi, tehát meghaladja kisérleteink hibahatárát. Eltünnék ez a különbség akkor, ha a víznek közép fajmelege az újabban kiszámított 1·011 helyett 1·018 volna. Különben Regnault számai talán nem is megbizhatók az ezredrészekben, mert a nagy experimentator maga 2—3 ezredrésznyi eltérést még megengedhetőnek tartott. Hogy mi okozhaja a szóban forgó eltérést a fajmelegek számértékei között, azt jelenleg annál kevesbbé lehet eldönteni, mivel a víz közép fajmelegének viszonyát a valódi fajmeleghez, melyet Regnault meghatározott, újabb kisérletek eredményei egészen kétségessé tették. A kérdés eldöntése végett meg kell majd vizsgálni a víz fajmelegének változását 0^0 és 100^0 között, mely munkát a jövő télen szándékozunk elvégezni.

Az új egységben kifejezett számértékek ez által nem fognak megváltozni, de megváltozik majd viszonyuk a régi értékekhez képest. Lehetséges, hogy a fajmelegekben most nyivánuló különbségek el fognak

tünni; de ha ez meg is történnék, még mindig maradna egy másik, sokkal nagyobb és valóban meglepő különbség, t. i. az, mely a hőegységnek megfelelő higany súlyában mutatkozik. Ezen eltérésnek következtében vele egyenlő hiba (közel 2%) nyilvánul a jég olvadási melegében is. Ez utóbbi számértékének feltalálására ezen egyenlet szolgál

$$L = \frac{D_w - D_e}{D_w \; D_e} \; \frac{D_q}{0{\cdot}015442}$$

mely szerint

$$L = 79{\cdot}86$$

míg Regnault száma (79·25) a mi egységünkben 78·39 lenne. Itt az eltérés annál nagyobb lesz, minél nagyobb a víznek közép fajmelege 0° és 100° között. Mi okozza ezt a fölötte nagy különbséget, azt egyelőre nem is sejthetjük. Szándékunk a jövőben ezt a kérdést is tüzetesen megvizsgálni.

6. A hydrogén égési melege.

A hydrogennek és oxigennek vízzé való egyesülésekor támadó hőmennyiséget az által mértük meg, hogy electrolytikus úton előállított oxigent hasonló eredetü hydrogenben a calorimeter belsejében elégettünk, megmértük az olvadás következtében beszitt higanyt és meghatároztuk az égés közben létrejött víznek a mennyiségét. Következzék itt a használt eszközöknek, a vízbontónak, a gáztárnak és az égetőnek a leirása és a végzendő műtételek felsorolása.

A vízbontónak az 5-ik rajzban előtüntetett módositását alkalmaztuk, melynek összeállításánál a legfőbb gondot arra fordítottuk, hogy a vízbontást huzamos ideig zavartalanul lehessen folytatni, és hogy e mellett az elkülönítve elvezetett gázok a mennyire lehet tiszták is legyenek. A vízbontó két üvegrészből (*AA*) áll, melyek egymástól likacsos agyaglemezazel (*D*) vannak elválasztva. Az agyaglemez előállítására villanyos elem czellájának a fenekét használjuk, melyet mindkét oldalon simára csiszolunk. A diaphragma közvetlen közelségében jobbra és balra egy-egy platin-lemez (*Pt*) van elhelyezve melyekhez kivülről kaucsuk csövek által elszigetelt, pecsétviaszkon (*P*) keresztül haladó drótok vezetnek. A szilárd összetartást két felhasitott, csavarokkal egymás felé szorított fémgyürü (*GG*) eszközli, a légmentességet pedig a diaphragma szélein, kevés, ömlesztett állapotban alkalmazott, viaszk biztositja. A vízbontót *B*, *B* csöveken keresztül csaknem egészen megtöltjük higitott tiszta kénsavval, s a melegedés elháritása végett vízzel környezzük. Az elvezető csövek (*EE* az 5-ik ábrában) akkép alakitvák, hogy az összekötő kaucsuk csövek (*C*, *C*)

lehetőleg biztosan zárjanak és e mellett ne érintkezzenek az elmenő gázokkal, hanem vékony vízréteg válaszsza el tőlük. Egyike ezen vezető csöveknek, t. i. az a melyen keresztül az oxygén áramlik, *R*-nél (6-dik ábra) vastag rézdróttal van körülvéve, melyet a vízbontás egész ideje alatt folyton gyöngén izzítunk. Azért történik ez, hogy az ozon közönséges oxigenné alakittassék át, mi által (hajlékony) kaucsuk összeköttetések alkalmazása lehetővé válik. Ezen elővigyázat nélkül az electrolytikus oxigen rövid időn átmarja a kaucsuk csöveket, azonfölül a gáz tisztaságának rovására, légnemü oxidatió termények is keletkezhetnek.

A gáztár, melynek átmetszetét a 6-ik rajzban láthatjuk, magas üveghengerben (*U*) két gázfelfogót (*F, F*) tartalmaz, melyek felső részükön kénsavval áztatott horzsakődarabokkal vannak megtöltve. A hengerben foglalt s a gázokat elzáró folyadék szintén kénsavhydrat, azért az alulról jövő gázbuborékok már szárítva érkeznek a felfogó csövekbe, (*F*) a honnét csak hosszas, kénsavval történő érintkezés után jutnak a csapokkal elzárható *H* és *O* csöveken keresztül rendeltetésük helyére: az égetőbe.

A 7-ik idom ábrázolja az égetőt, mely ismeretes hőfoknál elzárva, pontosan megméretik és azután 0 fokra lehütve, a calorimeterbe tétetik. Azután üveg- és kaucsuk-csövek segélyével összekötjük a gáztárnak *H* illetőleg *O* csövét az égetőnek *H;* meg *O;* csövével, s most mindenekelőtt gondoskodunk arról, hogy a kaucsuk-csövek légmentesen zárjanak. E czélból a kaucsuk-csövek végeire forró viaszkot csöpögtetünk, magukat a csöveket olajjal bekenjük. Azután jéggel borítjuk a vezető csöveknek a calorimeterhez közel álló részeit, hogy az átmenő gázok 0 fokra lehütve jussanak a calorimeter belsejébe. Ezen előkészületek után meginditjuk a gázfejlesztést, megnyítjuk az égetőnek felső szabadba nyiló csapját (*N*), s előbb rövid ideig oxygent hajtunk az égetőn keresztül, az oxygén csapjának elzárása után pedig az egetőt gondosan megtöltjük hydrogénnel, melynek csapját nyitva hagyjuk, de az *N* csapot elzárjuk. Ezután meghatározzuk a calorimeternek óránkint változását*) s időközben előkészítjük a gázok meggyujtására szolgáló villanygépet. Kisérleteinknél Holtz-féle villanygépet alkalmaztunk, melynek szikrái kevesebb meleget fejtenek, mint az indukáló gépek szikrái. A villanygép sarkait összekötjük az égető belsejébe vezető vékony platindrótokkal, melyek végei igen közel egymáshoz és csak kevéssel az oxygént szolgáltató nyilás (*n*) fölött állanak — Ha

*) Kivéve ha már előbb biztosan megállapíttatott volna.

megtörtént a higanyos edénykék kicserélése, azonnal megindítjuk a villanygépet, szikrákat gerjesztünk az égető belsejében s egyuttal megnyitjuk az oxygén csapjait. A külső, tisztátalan jégbe készített nyiláson keresztül észlelve pár pillanat mulva a szikrák violás fénye helyett sárgás fényt*) látunk jeléül annak, hogy a nagyobb nyomással betóduló oxygén már meggyúlladt és igy a szikrákra már többé szükség nincsen. Két-három óra mulva a keletkező viz ellepi az oxygént szólgáltató nyilást (*n*), s ennek bekövetkezése után rögtön elzárjuk az oxygén csapját, nemsokára utána a hydrogén csapját is. 30-40 percz lefolyása után kicseréljük a kisérletnél szerepelő nagyobbszerű higanyos edényt más, közönséges nagysággal; az utána következő időben pedig megmérjük az óránkinti változást. E közben kiveszszük a calorimeterből az égetőt is, gondosan megszáritjuk, és zárt állapotban megmérjük. Végre kiöntjük a bennfoglalt vizet,**) magát az égetőt pedig, kénsavtartalmu cső közvetitésével, Sprengel-féle higanyszivattyúval kötjük össze, melynek működése alatt az égetőben még megmaradt nedvesség rövid időn teljesen elpárolog. Ez után kevés levegőt hajtunk az égetőn keresztül, majd a mérleg szekrényébe teszszük s midőn annak hőfokát felvette, csapjait elzárjuk. A most következő mérésből minden egyes esetben kitünt,hogy az égető az előbbi műtételek sora alatt alig észrevehetően változott, a változás t. i. 0.0001 grammon alul maradt. A mérés Bosch-féle igen érzékeny mérlegen történt; az égetőnek egyensúlyozására hozzá hasonló eszköz alkalmaztatott a mérleg tulsó oldalán, és természetesen a felcserélés módja a szükséges ismétlésekkel alkalmaztatott.

7. A hydrogén égési melegére vonatkozó kisérleti adatok és számitások.

A II-ik és III-ik tabellában öt mérésnek az adatai vannak összeállitva. A II-ik a calorimeterre vonatkozó jegyzetek alapján, a III-ik a mérleg jegyzetei alapján készült.

*) Az oxygén lángját közelebbről megvizsgálva a meggyujtás után némi idő mulva nevezetes tüneményt tapasztalunk. A közönséges igen kis lángon kivül, még egy második gömbalaku, gyönge fényü kékes lángot láthatunk, mely sokkal nagyobb a másiknál, s mely ugy látszik, nem igen meleg, mert nem izzítja sem a vékony platindrótokat, sem pedig az azokat körülfogó vékony üvegcsöveket, habár a lángba beleérnek. Közelebbi megvizsgálását mielőbb megkezdjük.

**) Az égetésnél keletkező viz oxidáló anyagot nem tartalmaz, felismerhető benne a kénsav. Calorimetrikus összehasonlitásból kitünt, hogy a kénsav mennyisége nem haladja meg az egésznek 1—2 százezredrészét. Egy gramm gáz tehát 5°—6°-nál 0.00001 vagy 0.00002 gr. kénsavat visz magával.

II. Tábla.

Idő nap	óra	percz	(A) edény súlya gr.	változása egész-ben	változása órán-kint	Megjegyzés	(B) edény súlya gr.	változása egész-ben	változása órán-kint
Jan. 13.	11h	45m				1.	35.5544		
»	3h	02m	35·4664			gázok átvezetve	35.5381	0·0163	0·0050
»	3h	19m	35·4636	0·0028	—	3h 26m — meggyul-ladt	115·4513		
»	6h	29m	» »			6h 12m — elaludt	40·9695	74·4818	—
»	6h	57m	35·4000	0·0636	—		35·5380		
Jan. 14.	11h	42m					35·4957	0.0423	0·0025
Jan. 18.	10h	50m				2.	35·2506		
»	11h	25m	35·7557			gázok átvezetve	35·2401	0·0105	0 0175
»	12h	10m	35·7371	0·0186	—	2h 12m— meggyu-ladt	118 2550		
»	3h	30m	» »			3h 05m — elaludt	36·4601	81.7949	—
»	4h	00m	35·7072	0·0299	—	3h 45m — kivétetett	35·2401		
»	4h	30m					35·2268	0·0133	0·0266
Jan. 20.	8h	45m				gázok átvezetve	38·5225		
»	9h	45m	35·4319			3.	38·5049	0·0176	0·0176
»	10h	15m	35·3241	0·0078	0·0156	10h 16m —meggyu-ladt	118·5878		
»	1h	30m	» »			1h 10m — elaludt	36·9495	81 6383	—
»	2h	01m	35·2819	0·0322	—		38·5049		
»	2h	31m				2h 20m — kivétetett	38·4975	0·0074	0·0148
Jan. 24.	9h	38m	34·5373			4.			
»	10h	35m	34·5151	0·0222	0·0233	10h 36m —meggyuj-tatott	116·9851		
»	2h	20m	» »			1h 20m — elaludt	35·8739	8. 1115	—
»	2h	50m	34·5030	0·0121	0·0242				
Jan. 26.	9h	08m				5.	35·2903		
»	10h	10m	34·1341			gázok átvezetve	35·2630	0·0273	0·0264
»	10h	52m	34·1169	0·0172	0·0244	10h 53m—meggyu-ladt	115·3546		
»	2h	44m	» »			1h 35m — elaludt	34·0625	81 2921	—
»	3h	44m	34·0931	0·0238	0·0238				

III. Tábla.

Folyó szám	Mikor?	Hőfok az égető zárásakor	A mérés eredménye	A mérés alatt	
				a hőfok t	a légnyomás b
1	égetes előtt	12°	$G_1+G_l = G_2+2{\cdot}7126$	12°	748mm
	égetés után	0°	$G+G_1+G_h = G_2+3{\cdot}9711-G_i$	12°	751mm
	kiszáritás után	13°	$G_1+G_l = G_2+2{\cdot}7127$	13°	754mm
2	égetés előtt	13°	$G_1+G_l = G_2+2.7122$	11·5°	759mm
	égetés után	0°	$G+G_1+G_h = G_2+4{\cdot}0941-G_i$	12°	759mm
	kiszáritás után	12°	$G_1+G_l = G_2+2{\cdot}7122$	12°	760mm
3	égetés előtt	12°	$G_1+G_l = G_2+2{\cdot}7122$	12°	760mm
	égetés után	0°	$G+G_1+G_l = G_2+4{\cdot}09074=G_i$	11°	762mm
	kiszáritás után	10°	$G_1+G_l = G_2+2{\cdot}7122$	10°	763mm
4	égetés előtt	10°	$G_1+G_l = G_2+2{\cdot}7121$	10°	761mm
	égetés után	0°	$G+G_1+G^h = G_2+4{\cdot}0812=G_i$	11°	757mm
	kiszáritás után	11°	$G_1+G^l = G_2+2{\cdot}7120$	9·5°	755mm
5	égetés előtt	11°	$G_1+G_l = G_2+2{\cdot}7120$	9·5°	755mm
	égetés után	0°	$G+G_1+G_h = G_2+4{\cdot}0837$	8°	753mm
	kiszáritás után	9°	$G_1+G_l = G_2+2{\cdot}7121$	8·7°	763mm

G_1 jelenti az ür es égetőnek a súlyát levegőben.
G_2 az ellensúlyozónak sulyát levegőben.
G_l az égetőbe férő levegőnek súlya.
G_h az égetőbe férő hydrogennak súlya.
G_i 1 gramm (sárgaréz) által kiszoritott levegő súlya.
G az égésnél keletkező viz súlya légüres térben.

A II. tabellából az óránkénti változások tekintetbe vételével kiszámíthatjuk, hogy mennyi gramm higany *(Gq)**) szivatott a calorimeterbe az égés következtében. Belőle a következő számokat nyerjük :

Folyó szám	1.	2.	3.	4.	5.
Idő	$3^h\ 19^m$-tól $6^h\ 57^m$-ig	$12^h\ 10^m$-tól $4^h\ 00^m$-ig	$10^h\ 15^m$-től $2^h\ 01^m$-ig	$10^h\ 25^m$-tól $2^h\ 20^m$-ig	$10^h\ 52^m$-tól $2^h\ 44^m$-ig
G_q	74·5310	81·7368	81·6133	81·0227	81·1946

A III-ik tabellából megtudhajtuk, hogy hány gramm víz keletkezett minden egyes kisérletnél. E végből az »égetés előtt« és a »kiszárítás után« nyert egyenletek közép értékét levonjuk a közbenső egyenletből. Például az 1-ső esetben

$$G_1 + G_l = G_2 + 2{\cdot}71265$$

levonandó ebből

$$G + G_1 + G_l = G_2 + 3{\cdot}9712 - G_i$$

Ezáltal megnyerjük a keletkező víznek légüres térre vonatkozó súlyát :

$$G = (3.9712 - 2{\cdot}71265) + G_l - G_h - G_i$$

Az ezen egyenletbe tartozó illetőleg belőle kiszámítható mennyiségek a következők :

Folyó szám.	1.	2.	3.	4.	5.
Első tag	1·25855	1·38190	1·37854	1·36915	1·37165
G_l	0·01245	0·01263	0·01271	0·01270	0·01276
G_h	0·00088	0·00089	0·00089	0·00089	0·00089
G_i	0·00014	0·00014	0·00014	0·00014	0·00014
G	1·27008	1·39350	1·39022	1·38082	1·38348

*) A higany súlya sem itt, sem pedig a hőegység felkeresésénél nem reducáltatott a légüres térre, részint azért, mert a levegő befolyása csekély, de különösen azért sem, mert kicsinysége miatt minden kisérletnél egyenlőnek vehető, tehát az eredményből kiesik.

A higany hőfoka mindig 0 foknak vétetett, mert a calorimeter belsejébe jutva, ezt a mérsékletet veszi fel, ha eredetileg melegebb lett volna is.

Oszszuk el az előbbi összeállításban foglalt eredményeket (G_q) a G súlyú vízben levő hydrogen súlyával akkor az eredmény

$$\frac{G_q . 17{\cdot}96}{G . 2}$$

megadja azon higany súlyát, mely 1 gr. hydrogén elégésekor a calorimeterbe szivatnék; s ha végre ezt is elosztjuk 0·01544-el, megnyerjük az 1 gr. hydrogénnek elégésekor létesülő melegmennyiséget; b jelenti a feszélyt, mely alatt az égés végbement és a mely G_h kiszámításánál tekintetbe veendő.

Folyó szám.		1.	2.	3.	4.	5.
b^{mm}		762mm	772mm	776mm	771mm	765mm
Egy gramm hydrogen égése következtében	beszítt higany	526·965	526·729	527·174	526·921	527·024
	fejlődő melegség	34125·8	34110·4	34139·2	34122·9	34129·5

Elvileg véve, ez utóbbi számokat még kevéssé meg kell változtatnunk, mert az egyesülés különböző nyomások alatt történt. A felsorolt számokhoz t. i. hozzá kell még adni azt a meleget (illetőleg higanymennyiséget), a mely keletkezik, midőn 1 gramm hydrogént tartalmazó durranólég feszélye állandó hőfok mellett (0°), 760mm-től b^{mm}-ig növekedik. A szóban forgó hőegységek számát ezen egyenletből számíthatjuk ki.

$$M = A . P_0 V_0 \log \text{nat.} \frac{b}{760}$$

a hol $P_0 = 10033$ klgr.

$$A = \frac{1}{430} \text{ kgr. m. (a középfajmelegre vonatkoztatva.)}$$

és V_0 jelenti az 1 gr. hydrogént tartalmazó durranó légnek normális térfogatát. A reductió eredménye a következő:

Folyó szám.		1.	2.	3.	4.	5.	1, 2, 4, 5-ből a közép
Egy gramm hydrogen égése következtében	beszítt higany	526·980	526·829	527·303	527·010	527·064	526·971
	fejlődő melegség	34126·8	34116·9	34147·6	34128·7	34132·1	34126·1

A középérték kiszámításánál a 3-ik számu kisérlet eredményét kihagytuk, mert ezt nem tartjuk annyira megbizhatónak, mint a többieket. Ugyanis nem voltunk jelen az égés megszünési pillanatában, s meg lehet több perczczel később zártuk el a csapokat, mialatt kevés vízgőz kidiffundálhatott; azonfölül a mérlegelésnél is némi rendetlenségek tapasztaltattak, minek következtében félbeszakitottuk, és folytatását más napra hagytuk. Ellenben a többi méréseknél ilyen zavaró körülmények nem szerepeltek.

Meg kell még jegyeznünk, hogy a 4-ik kisérletnél az égető, belső felületén kormos papirral, az 5-dikben hasonlóan kormozott stanniollal volt körülvéve. Az eredmények azonban ez által nem változtak, miből következtethetjük, hogy a fény, mely a lángot láthatóvá teszi, jelentéktelen hőmennyiségnek felel meg.

Ha az itt talált eredményeket össze akarjuk hasonlitani más kisérletek adataival, akkor szem előtt kell tartanunk hogy a közönségestől eltérő egységet vettünk alapul, továbbá tekintettel kell lennünk arra is, hogy más észlelőknél mily körülmények közt, milyen hőfok és nyomás alatt történt az egyesülés. A mi az itt leirt kisérletek eredményét illeti, ez azon esetre vonatkozik, midőn a gázok normális viszonyokból kiindulva, 0 fokú vizzé egyesülnek. Ez esetben azt találtuk, hogy 1 gr. hydrogén égése következtében

526. 97 gr.

higany szivatik a caloriméter belsejébe, a caloriméternek átadott hőmennyiség pedig

34126 hőegység,

ha t. i. hőegység alatt értjük a viz közép fajmelegét 0^0 és 100^0 között

Erre az egységre vonatkozik Than tanár úrnak velünk személyesen közlött eredménye, azzal a különbséggel, hogy a hőegységnek megfelelő higany-mennyiség Bunsen szerint van felvéve. Zárt térben történő egyesülésnél 33937 találtatott. Ez a hőegységnek megfelelő higanymennyiségek viszonya

$$\frac{0{\cdot}01541}{0{\cdot}01544}$$ szerint redukálva

33867,

a mi 155 hőegységgel, vagyis az egésznek 0.0045-öd részével kisebb ami eredményünknél.

A többi adatok mind más egységre vonatkoznak. Átszámitásuk jelenleg nem történhetik biztonsággal, mert az egységek viszonya ké-

tes; sőt többet mondhatunk, maga a régi egység, melyre az adatok vonatkoznak, szigoruan véve nem ismeretes s helyette csakis theoretikus definitiót állíthatunk oda. Mert a legtöbb esetben a víz középfajmelege azon hőfok-határok közt szolgált egységül, mely hőfokkal a calorimeter a kisérlet elején és végén birt. Ez pedig nem ismeretes; Regnault kisérleteiből is csak bizonytalan következtetést vonhatunk rá, mert azok 100° és 200° közti mérsékletekre vonatkoznak, azonfölül abban a hibában is szenvednek, hogy egységük a víznek, 10° és 30° közt ingadozó határokra vonatkozó, közép fajmelege. Az ujabb kisérletek meg épen hihetetlen eredményekre vezettek; ennélfogva közelítő reductióval kell beérnünk, a mibe annál is inkább belenyugodhatunk, mert ugy látszik, valamennyi eddigi idevágó hőmennyiségmérés kevesbbé pontos, semhogy az ezredrészig pontos átszámitást igényelnének. Lássuk az egyes értékeket.

Favre és Silbermann [1]) a hydrogén melegfejtő képességét középszámban 34462-nek találták. A feszély 760^{mm}-nyi higanyoszlopnak felelt meg, az egyesülő gázok hőfoka 9° körül volt; a keletkező víz hőfokát pedig 6°-nak kell vennünk, mert már számításba van véve azon melegség, a mely a keletkező víznek 6° — 12°-ig való felhevitésére szükséges. Null foknál történő égésnél 8 hőegységgel többet — tehát 34470-et — várhatunk, mint az említett körülmények között. Az utóbbi számot oszszuk el $\frac{1{\cdot}011}{1{\cdot}0013}$ [2]), hogy a mi egységünkre legyen vonatkoztatva; továbbá vegyük alapúl a Stass-féle paránysúlyokat, akkor

34065

lesz az eredmény, a mi csak 61 hőegységgel, az egésznek közel 0.002-ed részével kisebb a mi eredményünknél. Ilyen összevágást várni nem lehetett, már csak azért sem, mert Favre és Silbermann egyes adatai közt sokkal nagyobb különbségek találkoznak.

Th. Andrews [3]) állandó térfogatban eszközölt égetésnél 33808-at talált. A nyomás 762 mm. körül volt; a hőfok pedig a kisérlet elején 20°, végén 22° volt. A hőfok-correctio alkalmazása által ama szám 95 egységgel szaporodván, 33903-á válik, a mi $\frac{1.011}{1{\cdot}0046}$-al osztva, és a Stass-féle paránysúlyokra vonatkoztatva

33613-at

[1]) »Annales de Chimie et de Physique« 3-iéme Serie XXXIV. 1852.

[2]) Boscha számitása szerint a viz fajmelege $Ct = 1 + 0{\cdot}00022.t$, Pogg. Ann. Jubelband. Wüllner adatai szerint még nagyobb volna. Wiedemann. Ann. I.

[3]) »Annalen d. Phys. u. Chemie.« Poggendorff LXXV. 1848.

eredményez. Már ez tetemesen kisebb mint az előbb felsoroltak bármelyike.

Jul. Thomsen utolsó eredménye[1]), 18°-ra és ismeretlen nyomásra vonatkozik; eredetileg 34103, 0°-ra reducálva pedig 34208, és a mi egységünkben kifejezve

33971.

Foglaljuk az eredményeket egy tabellába:

A hydrogén égési melege a víz közép fajmelegére (0°—100°) vonatkoztatva	A szerzők nevei és az évszám.
33613	Andrews 1845
33867	Than 1877
33971	Thomsen 1872
34065	Favre és Silbermann 1843
34126	Schuller és Wartha 1877

8. A chemiai erély kiszámitása.

Hogy azon hőmennyiséget megkaphassuk, a mely tisztán az oxygen és hydrogen egyesülésének következménye, arra szükséges, hogy az égési melegből, 34126-ból levonjuk azon melegmennyiségeket, a melyek a meghatározás alkalmával közreműködtek, a nélkül, hogy a vegyülés elkerülhetetlen következményei volnának.

A tárgy könnyü kezelésének szempontjából képzeljük, hogy az egyesitendő anyagok tökéletes gáz-állapotból kiindulva, az egyesülés után szintén gázalakú terményt adnak, s hogy e mellett a kezdeti és a végállapotban a hőfok és a térfogat ugyanaz. Azon melegség, mely ilyenkor keletkezik vagy fogyasztatik, tekintendő a chemiai erély mértékének.[2]) Mert valószinü,[3]) hogy tökéletes gázállapotban a vegyület lehülésekor épen annyi melegség szabadul ki, a mennyi az alkatrészeknek ugyanazon határok közt történő felhevítésére szükséges; miből ugyanazon valószinüséggel következik, hogy a kezdeti és a végállapot hőfokának egyenlősége mellett, a vegyülés következtében történő felhe-

[1]) Poggendorf Annalen 148. kötetében.

[2]) Magában foglalja még a tömecs szám változása következtében fellépő melegséget, mely a mi egységünkben közel 263-at tesz ki. Lásd »A. Neumann Thermochemie« p. 95.

[3]) Clausius Abhandlungen über die mech. Wärmetheorie.« 270.

vülés és az azt követő lehülés alkalmával szereplő melegmennyiségek összege zérus. A külső munka szintén elenyésző, mert a térfogat állandó, ennélfogva nem marad más, mint a chemiai eredetü melegség. E szerint a számításnál a tökéletes gázállapotból fogunk kiindulni s az erre vonatkozó adatokat Regnault észleleteiből veszszük. Az eredmény az adatok tökéletlensége miatt nem lehet nagyon megbízható, de az eddigieknél mégis jobb számot nyerhetünk, még pedig a következő módon :

Képzeljük a súlyegység hydrogént és a vízképzéshez szükséges oxygént 0^0-nál és 760^{mm} nyomás alatt. Hevítsük fel állandó nyomás alatt olyan hőfokig, melynél a vízgőz már állandó gáz gyanánt viselteték, például 225^0 86-ig, s jelöljük az e közben felhasznált melegmennyiséget M_1-el. Most eszközöljük a gázok egyesülését és vezessük el a vegyülés folytán fellépő melegmennyiséget E, oly formán, hogy a térfogat és hőfok ugyanaz legyen, mint az egyesülés előtt volt. A feszély ekkor csak $^2/_3$-a lesz az előbbinek, s hogy ismét helyreállitsuk a normális feszélyt, munkát kell kifejtenünk, melynek megfelelő melegmennyiséget, M_2, el kell vezetnünk, ha a mérséklet változását el akarjuk hárítani. Az M_2 kiszámítására szolgáló egyenlet

$$M_2 = APV \text{ log. nat. } \frac{P}{P_1}$$

a hol $\frac{P}{P_1} = {}^3/_2$, $A = \frac{1}{425}$, $P = 10333$ kgr. és V jelenti a gázkeverék térfogatát az illető hőfoknál. Végre hűtsük le a szóban forgó vízgőzt állandó feszély mellett 0^0-ig, s jelöljük az elvezetendő melegmennyiséget M_3-al. A hőfoknak előbbi megválasztása mellett Regnault kisérleti adataiból megtaláljuk M_3 értékét, mert a súlyegység 225·86 fokú vízgőz, 0^0-ra lehűtve, 700·43 hőegységet ad.[1])

Az imént képzelt átalakulások végeredménye az lesz, hogy ugyanannyi melegséget kapunk, mint a mennyi a hydrogénnek állandó nyomás alatt történő elégése és a terménynek 0^0-ra való lehütésekor keletkezik.[2]) E szerint

$$34126{\cdot}1 = -M_1 + E + M_2 + M_3$$

a honnét $E = 34126{\cdot}1 + M_1 - (M_2 + M_3)$ A mi esetünkben

$$M_1 = \frac{1162{\cdot}9}{1{\cdot}011} = 1150{\cdot}2$$

---

[1]) »Memoires de l'academie des sciences« XXVI. p. 175.

[2]) Feltéve, hogy nem fordíttatott munka az edény kit'gítására.

$$M_2 = \frac{301{\cdot}55}{1{\cdot}011} = 298{\cdot}2$$

$$M_3 = \frac{6235{\cdot}3}{1{\cdot}011} = 6167{\cdot}4$$

tehát

$$E = 28810{\cdot}7$$

Ez már most azon hőmennyiség, mely egyenértékü a hydrogénnek és oxygénnek vízzé való egyesülésekor szerepelő chemiai erélylyel.

IRODALOM.

Dr. Sigmund Günther, »*Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.*« Leipzig, Teubner, 1876.

A megbeszélendő munkának címe már számot ad arról, mit kelljen benne keresni. Nem rendszeres történelmi művel van dolgunk, hanem inkább egy értekezés-gyüjteménynyel, egy kötetével valamely mennyiségtan-történelmi folyóiratnak, melynek egyedüli munkatársa Günther volt. Az egyes értekezések közt a leglazább összefüggés sem létezik; minden fejezet egy önálló egészet képez.

Munkánk »Die geschichtliche Entwickelung der Lehre von den *Sternpolygonen* und *Sternpolyedern* in der Neuzeit« czimü fejezettel kezdődik.

Faust a küszöbön megálló Mephistophelesnek mondja: »Das *Pentagramma* macht dir Pein«; Pythagoras iskolája pedig szövetségüknek feltüntetésül választotta és használta a szabályos csillagötszöget, a »*pentalpha*«-t. Hasonló idomok előfordulnak a zsidók legrégibb sirkövein, s az egész középkoron át feltalálhatni elterjedésüket kéziratokban, érmeken és gemmákon. — Mysticus czafranggal leginkább az ötszög és a csillag-hatszög *) volt felczíczomázva. — A Platon iskolájához tartozók, maga Theophrastus Paracelsus, sőt Kastner állitása szerint sokan az ujabb korban is — az egészség jelképeül tartják a csillagötszöget, s neki bűverőt tulajdonitanak. — Astedius (1620) szintén leirja ezen idomot, »Jézus« nevének egyes betüit irva a csúcsokra, s kozzátéve, hogy Pythagoras ugyanezen czélra a görög »hygieia« szó betüit használta, miért is a görögök »Pythagoras *egészségé*«-

*) Ha n a sokszög oldalának száma, törzstényezőkre bontva $a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \ldots\ldots$ által kifejezhető, akkor $N = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \ldots\ldots$ számu sokszögfaj létezik Poinsot alapvető tétele szerint. Ha $n = 6$, ugy $N = 1$; mert a csillag-hatszög (az ugynevezett korcsma-czimer) tulajdonkép két egyenlő s egymásba illesztett egyenoldalu háromszög.

nek nevezték máskép ezen idomot, melyet a németek »Trudenfuss«-nak hivnak. Legtisztább fogalmat szerezhetünk e csillagsokszögeknek a mysticus daemonologiában való használatáról Kircher Athanáz »Arithmologiá«-jából (1665.), hol egy egész fejezet van a »magicus amulettek«-nek szentelve, melyek után ezen alakzatoknak számos jelentménye s az »ördögi művészet«-ben való alkalmazásuk soroltatik fel. Kircher-nek egy másik művében a harmadrendü csillaghétszög a bolygó napok symbolicus előtüntetésére használtatik; Kepler szintén foglalkozott a csillagsokszögekkel, s tudományos működése elején egy szabályos csillagidomu negyvenszöget rajzol egy az ecliptica csillagjegyeivel ellátott körbe, hogy egy schemában feltüntethesse Jupiter és Saturnus együttállásait. Kepler volt különben az első, ki az egyedül helyes és észszerü módszert alkalmazta a csillagsokszögek megjelölésére. Ő volt továbbá az, ki később foglalkozva a szögosztással, a csillagsokszögek első 15 rendjének analyticus és geometricus tárgyalására vezettetett. Keplernek ezen exact tudományos működése mellett még fel van hozva e sokszögeknek mystico-astrologiai alkalmazása is: »Mert Kepler, dacára annak, hogy oly magasan állt korszaka fölött, nem szakitott tökéletesen a csillagjóslással, bár az nála mégis lényegében más kifejezést talál, mint a minőt a közönséges ad.« Kepler t. i. hajlandó volt felvenni a csillagoknak »optico-harmonicus« hatását a lelki életre. Hogy kimutassa két csillagnak ezen hatását, a csillagidomokhoz fordult, s sorban előveszi a nyolcz-, tizenkét-, tiz- és ötszöget. Eredményeit Günther a következő tételben foglalja össze: »*Két csillag által a föld középpontjára kifejtett erő annál nagyobb, mennél magasabb fajszáma azon sokszögnek, melynek belső szögéül tekinthető a középponti szög.*«

A csillagsokszögeknek mysticus salakja már el van távolitva Dan Schwenter 1636. megjelent »Delicio phys. math.« czimü művében, melyben — s utána a mai napig megjelent büvészkönyvek mindegyikében — egy igen eredeti módon találnak alkalmazást a csillagsokszögek; e munkákban u. i. a következő feladat foglaltatik: »7 pénzdarab egy bizonyos mértani idomon akként tolandó tova és teendő le, hogy az eltolatás mindig egy egyenesen történjék, s ott kezdendő, hol még pénzdarab nem fekszik, és ugyanazon vonal végén mindenkor leteendő.« Ezen szabatosnak épen nem mondható föladat oda vág, hogy tulajdonképen egy szabályos csillag-nyolczszög irandó le egy folytonos vonással.

Mi pedig ezen idomokra vonatkozó tudományos felfedezéseket illeti, fölötte érdekesek a heidelbergai bölcsésznek, Ramus-nak felfedezései, kit — azon törekvésében, hogy felfedje Aristotelesnek tévedéseit, s hogy ennek okoskodásait ad absurdum vezesse — az aristotelesi logica elleni bírálatában szen-

vedélye oda ragadja, hogy megmutassa, miszerint azon bebizonyitás, melyet Euclides a háromszög szögeinek összegére vezet, épen nem képes helyt állani, mert — *a szabályos csillagötszög szögeinek összege szintén 180°*, mi által egészen önkénytelenül gyarapitá a csillagsokszögekről szóló tantételnek számát egy igen fontossal. Broscius pedig (1690.) Ramus ellenében lándzsát törve Aristoteles és Euclides mellett, kimutatja, hogy *minden páratlan oldalszámu csillagsokszögről áll Ramus theoremája.*

Azon férfiu, ki a csillagidomok, de még inkább a csillagpolyederek tana körül magának soha el nem évülő érdemeket szerzett: Poinsot vala. Egyik nevezetes tantételét már fennebb emlitök. Ő volt az, ki Kepler után először foglalkozott behatóbban ezen alakzatokkal.

A csillagsokszögek *területét* először Jacobi számitotta ki kielégitőleg.

Végül még Wiener (Ueber Vielecke u. Vielflache. Leipzig 1864.) müvére is figyelmeztet Günther, mely compendiosus alakban felvett mindent, mi azelőtt producáltatott, s azonfelül még ujat is tud mondani.

Munkánk második fejezete. »Die Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen in ihrer geschichtlichen Entwickelung« lényegében a

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{b_i}{a_1\, a_2 \ldots . a_{i-1}\, a_i} \quad (n = 1, 2, \ldots . , \infty)$$

sorral foglalkozik.

A harmadik fejezet »Das Newton'sche Parallelogramm und die Cramer-Puiseux'sche Regel. Ein Beitrag zur Geschichte der Functionstheorie.« Cantor e fejezetet — Günther munkájának megbirálásánál — a következő szavakkal jellemzi: »Egy $f(x, y) = 0$ egyenletből, melyben f egy rationalis algebrai függvényt jelent, egy $y = \Sigma a_n x^n$ egyenlet levezetendő, a melyben n rationalis értékekkel bir, melyeknek egymásutánja valamely törvénynek hódoljon, — ez az egyenletek elméletének általános feladata.« Newton már az ő »Methodus fluxionum«-ában egy empirikus eljárásmódot közölt azon feladatnak közelitő megoldására. — Alig jelent meg 1736-ban nyomtatásban a Newton-féle Parallelogramm, már is az iróknak egy egész serege fogott eljárásmódjának megmagyarázásához. Első alapos bebizonyitását Cramer adta »Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques« czimü művében; még részletesebb vala pedig az 1794. Kastner által közölt tárgyalás. Mindezek azonban tisztán historicus érdeküek, Puiseux alapvető és teljesen eredeti értekezésével szemben: »Recherches sur les fonctions algébriques« a »Journal des mathématiques« 1850. kötetében.

Érdekességénél és érthetőségénél fogva ismét részletesebben fogunk foglalkozni a 4. fejezettel, melynek czime: »Historische Studien über die magischen Quadrate.« E fejezet, mely 4 nyomtatott ivre terjed, igen kiváló része

az egész könyvnek, s annál érdekesebb, mert eddig majdnem ismeretlen dolgokkal is találkozunk ezen essayben.

A mik a mértanban a csillagidomok, azok a számtanban a »büvös négyzetek«; amint a »Trudenfuss«-szal találkozunk, a régi emlékeken, ugy bukkanunk ennek számelméleti »alter ego«-jára is, — a büvös négyzetre. Ezeknél a természetes számoknak egy sora akként iratik egy a sakktáblához hasonlóan mezőkre felosztott négyzetbe, hogy az egy sorban, vagy egy oszlopban, vagy végre egy átlóban álló számoknak összege mindig ugyanazon számot adja. Igy pl. Albrecht Dürer hires »Melancholia« czimü fametszvényén a következő büvös négyzettel találkozunk:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Valamint a »Pentagrammum mirificum«, ugy a büvös négyzet is nagy szerepet játszik az ördöngös tudományban, a caballistikában ép ugy, mint az astrologiában. Theophrastus Paracelsus a mellékelt ábrában előtüntetett

»Sigillum Saturni«-t, melynek villachi ólomból kell készülve lenni és hátsó lapján Saturnus isten képét viselni — a következő caballistikus tulajdonságokkal ruházza fel: Igen előnyösen hat a gyermekágyban, a lovast megóvja attól, hogy lovától kárt szenvedjen, stb. Theophrastus szintugy mint Agrippa, kik még mindig a Ptolemeusféle rendszer hivei, a Nap, Hold s a bolygók mindegyikének tulajdonitanak egy ilyen négyzetet, még pedig annál több mezejüt, mennél közelebb fekszik az illető bolygó földünkhöz.

Egész határozottsággal csak azt lehet kimutatni, hogy e négyzetek először az araboknál voltak találhatók, bár itt sem foglalkoztak velük a tulajdonképeni mathematikusok, hanem inkább az astrologusok. Az arabs találmány az akkori korizlésnek megfelelő mysticus zamatjának köszönheti egyedül, hogy szülőföldjéről, a legközelebbi szomszédokhoz, a kelet-római birodalomba eljutott, kiknél egy — valószinüleg K. u. a XV. században élt — Manuel Moschopulos nevü tudós eljárásmódokat irt össze, melyek szerint ily négyzetek készithetők. Szabályai, melyeket Günther első izben közöl eredeti görög szövegben, csak $(2n + 1)^2$ és $(4n)^2$ számu mezővel biró négyzetekre vonatkoznak. Szerzőnk fogalmazása szerint az első faju négyzetekre Moschopulos a következő két szabályt állitja fel:

Hogy egy Moschopulos értelmében vett büvös négyzetet nyerjünk, osszunk egy gömböt, (vagy egy más — deformatio által a gömbre visszavezethető — lapot) m számu délkör és ugyanannyi párhuzamos kör által m^2 számu

mezőre. Ha már most egy $(2n + 1)^2$ számu mezővel biró büvös golyót akarunk képezni, akkor

1) helyezzük el az 1-et egy tetszőleges mezőbe, s irjunk az átló irányában sorban az egymásra következő számokat az üres helyekre; ha pedig ily módon már — egy másik szám által — elfoglalt térbe ütköznénk, menjünk akkor a délkör irányában két helylyel feljebb, illetőleg lejebb, s folytassuk az eljárást a fennebb leirt módon. Vagy

2) tegyük ismét az 1-et egy tetszésszerinti mezőbe, s helyezzük sakklóugrás szerint a többi mezőkbe az egymásra következő számokat; ha egy már elfoglalt mezőhöz jutnánk, menjünk 4 helylyel tovább a délkör irányában.

Ezen két szabály szerint lett a következő két négyzet előállitva:

5	54	13	62	21	70	29	78	37
46	14	63	22	71	30	79	38	6
15	55	23	72	31	80	59	7	47
56	24	64	32	81	40	8	48	16
25	65	33	73	41	9	49	17	57
66	34	74	42	1	50	18	58	26
35	75	43	2	51	10	59	27	67
76	44	3	52	11	60	19	68	36
45	4	53	12	61	20	69	28	77

38	14	32	1	26	44	20
5	23	48	17	42	11	29
21	39	8	33	2	27	45
30	6	24	49	18	36	12
46	15	40	9	34	3	28
13	31	7	25	43	19	37
22	47	16	41	10	35	4

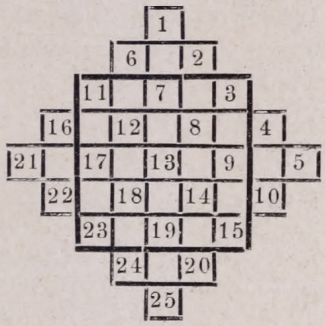
A $(4n)^2$ számú mezőből álló négyzetnek szerkesztési szabálya — mint azt Günther közli, — tökéletesen érthetetlen.

Günther Moschopulos ezen három szabályának helyességét be is bizonyitja — igaz, hogy elég hosszadalmasan és nehézkesen.

A XVI. században már nemcsak ismerték Moschopulos szabályait, hanem itt-ott már változtatásokat is mertek tenni — mint azt pl. a fentebb közölt Dürer-félénél látjuk, melynél a második oszlop a harmadikkal fel van cserélve, sőt hozzáfogtak oly négyzetek szerkesztéséhez is, melyek sem $(2n + 1)^2$, sem $(4n)^2$ mezővel nem birtak. A minden német szájon otthonos Ádám Riese (1559.) számtanában inkább tudományosan vannak tárgyalva e négyzetek: a páratlan mezejüek Moschopulos első szabálya szerint, a páros mezejüeknek nehánya pedig egész n eredeti módon. A XVI. századnak egyik jelentékeny algebristája: Stiefel szintén foglalkozott ezekkel és felállitott egy minden négyzet előállitására érvényes általános — de nehézkes szabályt.

Legtöbb érdemet szerzett magának a büvös négyzeteknek tana körül Bachet. Ő volt az, ki Moschopulosnak páratlan számu mezőre vonatkozó első szabályát átalakitotta egy a gyakorlatban sokkal inkább használható módszerbe, melyet szerzőnk »Terrassenmethode«-nek nevez. Módszere a következő: A mezőkre felosztott négyzetre alakitsunk uj négyzeteket, mezőket, melyeknek

száma azonban mindig 2-vel kisebbedjék. Ekként nyerjük a kivánt Terrasse-ot. Ebbe már most az eredeti négyzetnek egyik átlójával párhuzamosan irjuk be az egymásra következő számokat, mint azt alább láthatjuk. A kivánt büvös négyzet már most ekként keletkezik: azon számok, melyeknek már az eredeti négyzetben jutott hely, megmaradnak helyükön. De azok, melyek az eredeti négyzeten kivül feküsznek, fölülről lefelé, vagy megfordítva, illetve balról jobbra, vagy a körülményekhez képest jobbról balra tolatnak el annyi hely lyel, mint a mennyi az eredeti négyzetnek egyik sorában levő mezők száma.



11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

A mult század kezdete óta a jelesb mathematikusoknak egy egész sora foglalkozott ezen számnégyzetekkel, kik közt Euler, sőt maga Gauss is elő fordul. Általuk ezen alakzatoknak tudományos theoriája már ugyszólván — kimerittetett. De még most is, ha valaki szükségét érzi annak, hogy egy büvös négyzetet szerkeszszen, a gyakorlatban leghasznavehetőbb Moschopulos — Bachet-féle szabályokhoz kell folyamodnia.

Az előttünk fekvő mű V. fejezete: »Skizzen aus der Logarithmotechnik des 17. und 18. Jahrhunderts« tulajdonképen három tárgygyal foglalkozik. Az első a következő tételen fordul meg: »*A Neper-féle és a természetes logarok közti különbség egy elvi és egy gyakorlati; — elvi, a mennyiben Napier épen nem ismerte az »alap« fogalmát, — gyakorlati, a mennyiben az »alap«, melyre rendszerét egészen öntudatlanul alapitá, nem azonos e = 2·7182 .... számmal.*«

E fejezet második és harmadik §-a a III-nak nevezett Bernoulli Jánosnak a »partes proportionales« kiszámitása körül szerzett érdemeivel foglalkozik. Végre a negyedik §-ban a Gauss-ról elnevezett logaroknak alapgondolata a XVIII. század elejéig vezettetik vissza, midőn is az meglehetősen egyidejüleg: szülemlett meg J. Muschelius v. Moschau glatz-i orvos, és a baseli tudós Hermann fejében.

A következő VI. fejezet, »Zur Geschichte der jüdischen Astronomie im Mittelalter«, mely tulajdonkép C. v. Littrow egy állitásának megdöntése czéljából iratott, — szerző egy még egészen parlagon heverő térre lépett. Ezen

értekezés főleg az ujhold kiszámitására vonatkozik, és Schwartz nak egyik monographiájára támaszkodik.

Az utolsó »Quellenmässige Darstellung der Erfindungsgeschichte der Pendeluhr bis auf *Huyghens*« czimet viselő VII. fejezet átdolgozása a 3 évvel ezelőtt — a »Sitzungsberichte d. Erlanger phys.-med. Societät« 6. füzetében — megjelent értekezésnek ugyanezen tárgyról. Itt kimutatja, hogy csak Galilei, Jobst Bürgi és Hevelius tarthatnak eszme-elsőbbségre igényt.

Ez volna rövid vázlata azon értekezés-gyüjteménynek, melyet szerző egy kötetbe foglalt össze. Mindegyik értekezés szerző nagy szorgalmáról és olvasottságáról tesz tanuságot. *Dr. Wohlrab Flóris.*

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

27. (L. 13. füzet, 96. lap.)

Megoldás Bäumel Ede tanárjelölttől.

A vízszintes, a melyen a felfüggesztési pont mozog, vétessék X tengelyül; erre merőlegesen lefelé egy tetszőleges pontban az Y tengely. A felfüggesztési pont tömege legyen m_1, coordinátái valamely t pillanatban x_1 és o, minthogy ez az Y tengely irányában a feladat értelmében nem mozoghat. Az inga másik pontjának tömege m, coordinátái ugyancsak t pillanatban x és y. Az inga állandó hossza legyen l; φ pedig az a szög, melyet az inga a positiv Y tengelylyel képez. Jelentse végre R azt a reactio-erőt, mely az inga hosszának állandósága következtében az inga hossz-irányában föllép.

Igy a mozgási egyenletek a következők lesznek:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = R\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg + R\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -R\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.$$

Minthogy az inga hossza állandó, áll még a következő feltételi egyenlet is:

$$(x-x_1)^2 + y^2 = l^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4.$$

Ha 1.) és 3.)-t összeadjuk

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = o$$

Ezt $(m + m_1)$-gyel osztva és egyszer integrálva lesz

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mx + m_1x_1}{m + m_1}\right) = \text{const.} = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5.$$

Ez az egyenlet azt mondja, hogy a tömeg-középpont sebessége az X tengely irányában állandó.

Egy másik elsőrendü differentiális egyenletet kaphatunk a következő módon. A 4.) alattit differentiálva:

$$(x-x_1)\,(dx-dx_1)+ydy=o \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6.$$

Ha most 1.) 2.) és 3.)-at rendre megszorozzuk dx, dy, és dx_1-gyel, aztán összeadjuk és tekintetbe veszszük, hogy:

$$\sin\varphi=\frac{x-x_1}{l} \text{ és } \cos\varphi=\frac{y}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7.$$

akkor 6.) segitségével nyerjük a következőt:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}dx+m\frac{d^2y}{dt^2}dy+m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}dx_1=mgdy$$

Integrálva és az egészleti állandót mC^2-val jelölve:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+m_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2=2mgy+mC^2 \quad \ldots \quad 8.$$

Hogy most a lengési időt megkaphassuk, legjobb lesz x_1 x, és y-t φ függvényében kifejezni. E czélra szolgálnak az 5.) és 7.) alatti egyenletek. Ezekből lesz:

$$\frac{dx}{dt}=c+\frac{m_1 l\cos\varphi}{m+m_1}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dx_1}{dt}=c-\frac{ml\cos\varphi}{m+m_1}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=-l\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

Ez értékeket 8.)-ba behelyettesitve és $\frac{d\varphi}{dt}$ szerint megfejtve, lesz:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{(m+m_1)\,(A+2g\cos\varphi)}{(m_1+m\sin^2\varphi)\,l}} \quad \ldots\ldots \quad 9.$$

hol $$A=\frac{mC^2-(m+m_1)\,c^2}{ml}$$

A 9.)-ből látható, hogy $\frac{d\varphi}{dt}$ csak akkor válhat zérussá, ha a gyökjel alatt a számláló elenyészhetik, vagyis ha

$$A+2g\cos\varphi=o$$

$$\cos\varphi=-\frac{A}{2g}$$

Itt 3 esetet lehet megkülönböztetni és pedig:

a.) ha $A>2g$; ez esetben $\frac{d\varphi}{dt}$ sohasem lehet zérus, mert igy φ képzetessé válnék.

b.) ha $A = 2g$ ugy $\cos\varphi = -1$

vagyis $\varphi = \pi$ és $-\pi$.

E két állás, nyilvánvaló, egybecsik. A közönséges inga elméletéből ismeretes, hogy ez állás csak végtelen idő mulva éretik el.

c.) ha $A < 2g$, ugy két helyzet van, a mikor az egész inga csak az X tengely irányában halad.

A 9.) alatti egyenletből származó integrál, e két helyzetnek megfelelő határok közt véve, adja a lengési időt.

A pálya meghatározására szolgálnak az 5.) és 6.) alatti egyenletek; ha x_1 és $\frac{dx_1}{dt}$-t kiküszöböljük és egészeljük, leszen:

$$\frac{m + m_1}{m_1} x \pm \sqrt{l^2 - y^2} - c\frac{m+m_1}{m_1} t = \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10.$$

Látjuk, hogy ez egyenletben még az idő előfordul, ha ezt 9.) értelmében φ-vel, φ-t pedig 7.) segitségével y-nal fejezzük ki, nyerjük a pálya egyenletét. Egy specialis esetben, a midőn a tömegközéppont az X tengely irányában nem mozog, vagyis a mikor $c = o$, leszen

$$\left[\frac{m + m_1}{m_1} x - \text{const}\right]^2 + y^2 = l^2$$

ez pedig ellipsis, melynek középpontja az X tengelyben fekszik.

Föltéve, hogy $m_1 = \infty$, ingánk a közönséges köringára reducálódik.

---

31. szám. (L. 16. füzet, 192-ik lapon.)

Megoldás: Scholtz Ágoston, gymn. igazgatótól.

Az adott tetraédert válasszuk összrendezős tetraédernek. $\xi_1 = o, \xi_2 = o, \xi_3 = o, \xi_4 = o$ legyenek a csucsok egyenletei és $(\xi'_1\ \xi'_2\ \xi'_3\ \xi'_4)$ azon sik összrendezői, mely a tetraéder éleit az $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ pontokban metszi. E pontok egyenletei

$$\frac{\xi_2}{\xi'_2} - \frac{\xi_3}{\xi'_3} = o, \frac{\xi_3}{\xi'_3} - \frac{\xi_1}{\xi'_1} = o, \frac{\xi_1}{\xi'_1} - \frac{\xi_2}{\xi'_2} = o, \frac{\xi_1}{\xi'_1} - \frac{\xi_4}{\xi'_4} = o, \frac{\xi_2}{\xi'_2} - \frac{\xi_4}{\xi'_4} = o, \frac{\xi_3}{\xi'_3} - \frac{\xi_4}{\xi'_4} = o,$$

mert ezen egyenletek által kifejezett pontok a tetraédernek 23, 31, 12, 14, 24, 34 élein feküsznek, mint azt az egyenletek alakja mutatja és azonkivül a $(\xi'_1\ \xi'_2\ \xi'_3\ \xi'_4)$ sikon is feküsznek, mert e sik összrendezői a pontok egyenleteinek eleget tesznek. Azon megjegyzés alapján, hogy a $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ pontok a tetraéder éleit két részre osztják, melyeknek aránya a megfelelő $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ pontok által az éleken meghatározott részekből képezhető aránynak forditott értéke, a b pontok egyenletei az a pontokéiból közvetetlenül leirhatók: ugyanis a b pontok egyenletei

$$\xi_2'\xi_2 - \xi_3'\xi_3 = o,\ \xi_3'\xi_3 - \xi_1'\xi_1 = o,\ \xi_1'\xi_1 - \xi_2'\xi_2 = o,\ \xi_1'\xi_1 - \xi_4'\xi_4 = o,$$
$$\xi_2'\xi_2 - \xi_4'\xi_4 = o,\ \xi_3'\xi_3 - \xi_4'\xi_4 = o.$$

Minthogy ez utóbbi pontok egyenleteinek $\left(\frac{1\ 1\ 1\ 1}{\xi_1'\ \xi_2'\ \xi_3'\ \xi_4'}\right)$ összrendezők eleget tesznek, azért e pontok mind az $\left(\frac{1\ 1\ 1\ 1}{\xi_1'\ \xi_2'\ \xi_3'\ \xi_4'}\right)$ sikon feküsznek.

Ha már most az a pontokat tartalmazó sik $(x_1' x_2' x_3' x_4')$ ponton halad át, azaz összrendezői között $x_1'\xi_1 + x_2'\xi_2 + x_3'\xi_3 + x_4'\xi_4 = o$ egyenlet áll fenn, akkor a b pontok sikja

$$\frac{x_1'}{\xi_1} + \frac{x_2'}{\xi_2} + \frac{x_3'}{\xi_3} + \frac{x_4'}{\xi_4} = o \qquad 1.)$$

felületet burkolja be.

Hogy e felület egyenletét pont-összrendezőkben fejezzük ki[1]), azt a feltételi egyenletet kell felállítanunk, mely alatt egy tetszésszerinti

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 = o \qquad 2.)$$

pont az 1.) felületen fekszik. E végett legyenek $(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3\ \eta_4)$ a felület tetszőleges érintő sikjának összrendezői, melyek közt az 1) egyenletben kimondott kapcsolat van meg, vagyis

$$\frac{x_1}{\eta_1} + \frac{x_2'}{\eta_2} + \frac{x_3}{\eta_3} + \frac{x_4}{\eta_4} = o, \qquad 3.)$$

akkor:[2]) $$\frac{x_1'\xi_1}{\eta_1^2} + \frac{x_2'\xi_2}{\eta_2^2} + \frac{x_3'\xi_3}{\eta_3^2} + \frac{x_4'\xi_4}{\eta_4^2} = o \qquad 4.)$$

az $(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3\ \eta_4)$ érintősík érintőpontja. A 2.) egyenlet által kifejezett pont mindenesetre a felületen fekszik, ha az az érintőponttal összeesik. Ennek az összeesésnek a föltétele a 2.) és 4.) egyenletekből olvasható le és ekkép fejezhető ki:

$$\frac{x_1'}{\eta_1^2} : \frac{x_2'}{\eta_2^2} : \frac{x_3}{\eta_3^2} : \frac{x_4'}{\eta_4^2} = x_1 : x_2 : x_3 : x_4,$$

vagy: $$\frac{x_1'}{\eta_1} : \frac{x_2'}{\eta_2} : \frac{x_3'}{\eta_3} : \frac{x_4'}{\eta_4} = \sqrt{x_1' x_1} : \sqrt{x_2 x_2} : \sqrt{x_3' x_3} : \sqrt{x_4' x_4} \ldots \qquad 5.)$$

A 3.) és 5.) egyenletek egybevetéséből származik:

$$\sqrt{x_1' x_1} + \sqrt{x_2' x_2} + \sqrt{x_3' x_3} + \sqrt{x_4' x_4} = o,$$

a beburkolt felület egyenlete pont-összrendezőkben. A gyökjelektől megszabaditott egyenlet ez:

---

[1]) Az algebrai művelet ugyanaz, mint a reciprok feladatnál. Az utóbbira nézve lásd: Hunyady Jenő, A polus és a polárok stb. 20. lap és Salmon, A Treatise on the higher plane Curves. 2 kiadás. 72 lap.

[2]) Salmon, A Treatise on the analytic. Geometry of theree dimensions. 3. kiad. 96. lap. 129. szám.

$$[(x_1' x_1)^2 + (x_2' x_2)^2 + (x_3' x_3)^2 + (x_4' x_4)^2 - 2 x_2' x_3' x_2 x_3 - 2 x_3' x_1' x_3 x_1 - 2 x_1' x_2' x_1 x_2 - 2 x_1' x_4' x_1 x_4 - 2 x_2' x_4' x_2 x_4 - 2 x_3' x_4' x_3 x_4]^2 - 64 x_1' x_2' x_3' x_4' x_1 x_2 x_3 x_4 = o$$

vagy

$$[(x_1' x_1 - x_2' x_2)^2 + (x_3' x_3 - x_4' x_4)^2 - 2 (x_1' x_1 + x_2' x_2)(x_3' x_3 + x_4' x_4)]^2 - 64 x_1' x_2' x_3' x_4' x_1 x_2 x_3 x_4 = o$$

és ha az x összrendezők helyett az $x_1' x_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$, $x_2' x_2 = -y_1 + y_2 - y_3 - y_4$, $x_3' x_3 = -y_1 - y_2 + y_3 + y_4$, $x_4' x_4 = y_1 - y_2 - y_3 + y_4$ egyenletek által meghatározott y összrendezőket alkalmazzuk, akkor az egyenlet

$$y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2 - 2 y_1 y_2 y_3 y_4 = o$$

alakot ölt.

E felületet, felfedezője után, Steiner-féle felületnek nevezik. Legyen szabad irodalmából a következő értekezéseket felsorolnunk: Kummer, Über Flächen vierten Grades..., Crelle 64 köt. 66 lap. — Weierstrass, Note, ... u. o. 77. lap. — Schröter, Über die Steinersche Fläche... u. o. 79. l. — Cayley. Note sur la surface du quatrième ordre de Steiner. u. o. 172. lap. — Clebsch, Über die Steinersche Fläche, Crelle 67 köt. 1. lap. — Sturm, Über die römische Fläche von Steiner, Ann. d. Math. 3 köt. 76 lap. — Reye, Geometrie der Lage, II. rész. 209 lap.

Hozzáteszszük még, hogy a fentebbiben — a dualitás elve szerint — a következő feladatot is megfejtettük: Ha adott tetraéder élein keresztül egymást ugyanabban a (P) pontban metsző sikokat fektetünk, akkor azon sikok, melyek a tetraéder belső szögeit felező sikokkal ép akkora szögeket képeznek, mint amazok, ismét egy (P') ponton haladnak át: és ha P pont adott sikon fut végig, akkor P' pont bizonyos felületet ir le, melynek egyenlete pont-összrendezőkben

$$\frac{\xi_1'}{x_1} + \frac{\xi_2'}{x_2} + \frac{\xi_3'}{x_3} + \frac{\xi_4'}{x_4} = o,$$

sik-összrendezőkben

$$\sqrt{\xi_1' \xi_1} + \sqrt{\xi_2' \xi_2} + \sqrt{\xi_3' \xi_3} + \sqrt{\xi_4' \xi_4} = o,$$

$(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ a P pont által leirt sik összrendezőit jelentvén.

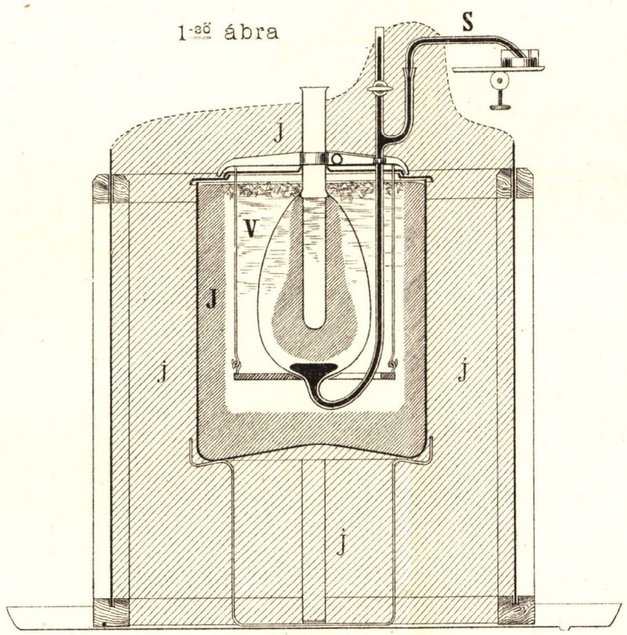
A szerkesztőség levelezése.

Ugyane föladatot Scholtz ur Descartes-féle coordinátákkal is megoldotta. Megoldását a jövő füzetre kellett hagynunk.

A jelen füzet első ívén a lapszámozás el van hibázva. 1—16 helyett teendő 193—208.

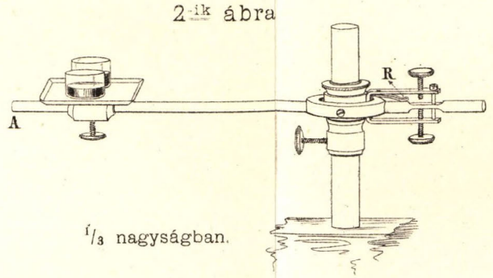
Buoapest, 1877. Nyomtatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

1-ső ábra

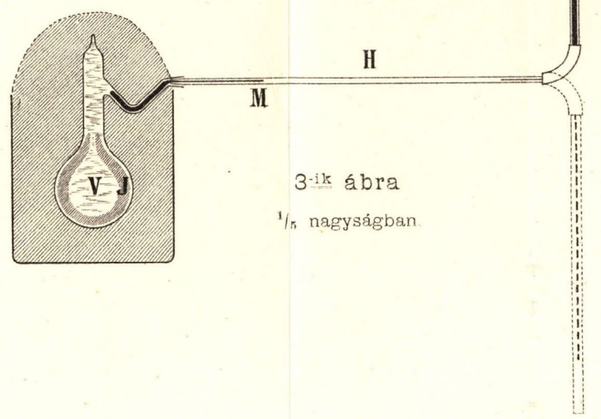


1/5 nagyságban.

2-ik ábra



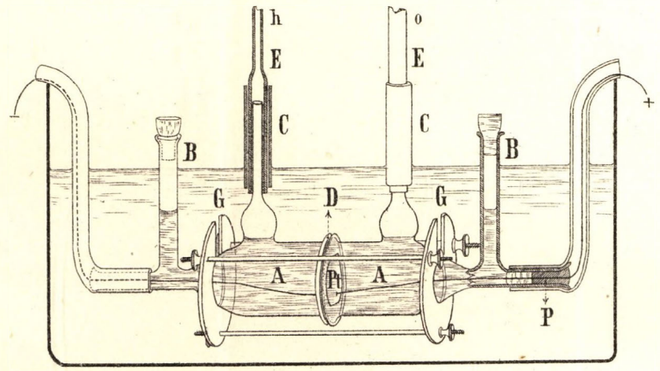
1/3 nagyságban.



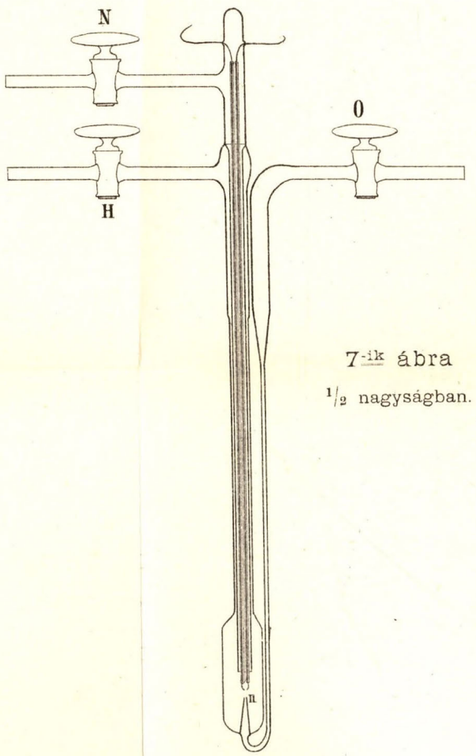
3-ik ábra

1/5 nagyságban.

5-ik ábra

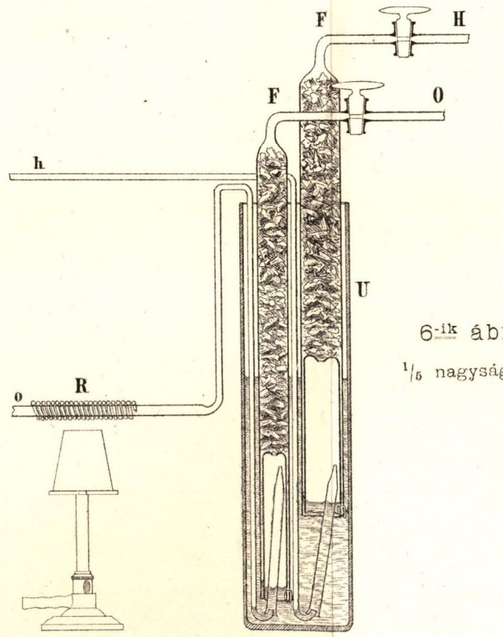


1/3 nagyságban.



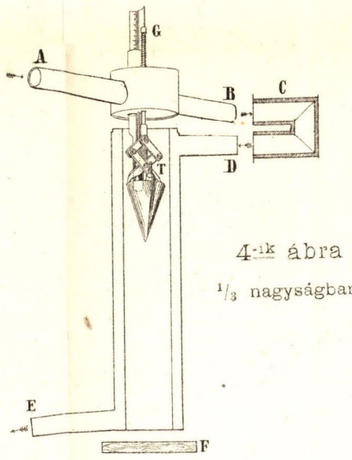
7-ik ábra

1/2 nagyságban.



6-ik ábra

1/5 nagyságban.



4-ik ábra

1/3 nagyságban.

Kőbe vésetett és nyomatott a m. kir. József-műegyetem vegyiparmütani laboratoriumában Budapesten.

M. T. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

II. kötet. **1877.** 18. füzet.

A KÚPSZELETEN FEKVŐ HAT PONT FELTÉTELI EGYENLETÉNEK EGY KÜLÖNÖS ALAKJÁRÓL.

Hunyady Jenőtől.

A Crelle-Borchardt Journal für Mathematik 83-dik kötetében következő czim alatt: »Über die verschiedenen Formen der Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen« közzétett értekezésem megjelenése után, Reye strassburgi egyetemi tanár szives volt velem közleni, hogy a kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletét egy uj alakban nyerjük, hogy ha Hesse tétele szerint kifejezzük, hogy a kúpszelet 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontjait két hármankénti csoportra oszthatjuk, mint p. 1 2 3 és 4 5 6, melyek egy másik kúpszeletre nézve két egyidejüleg conjugált háromszöget határoznak meg.

Jelöljük az 1 . . . . 6 pontok közül az i pont homogén viszonyösszrendezőit x_i, y_i, z_i-vel, úgy az i és k pontokat összekötő egyenes homogén összrendezőit ξ_{ik}, η_{ik}, és ζ_{ik}-vál jelölvén találjuk, hogy:

$$\left.\begin{aligned} \xi_{ik} &= y_i z_k - y_k z_i \\ \eta_{ik} &= z_i x_k - z_k x_i \\ \zeta_{ik} &= x_i y_k - x_k y_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(a.)}$$

végre legyen:

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} = (i\,k\,l) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(b.)}.$$

Ismeretes, hogy az 1 2 3 háromszög a

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{32}yz + 2b_{13}xz + 2b_{12}xy = 0 \quad (1)$$

kúpszeletre nézve conjugált háromszög, ha annak szögpontjai egymásnak conjugált harmonikus pólusai; ugyanez áll a 4 5 6 háromszögre is. —

Ennélfogva tehát az 1 2 3 és 4 5 6 háromszögek a következő feltételek mellett:

$$\left.\begin{aligned}
&x_2(b_{11}x_3+b_{12}y_3+b_{13}z_3)+y_2(b_{12}x_3+b_{22}y_3+b_{23}z_3)+\\
&\qquad+z_2(b_{13}x_3+b_{23}y_3+b_{33}z_3)=0\\
&x_3(b_{11}x_1+b_{12}y_1+b_{13}z_1)+y_3(b_{12}x_1+b_{22}y_1+b_{23}z_1)+\\
&\qquad+z_3(b_{13}x_1+b_{23}y_1+b_{33}z_1)=0\\
&x_1(b_{11}x_2+b_{12}y_2+b_{13}z_2)+y_1(b_{12}x_2+b_{22}y_2+b_{23}z_2)+\\
&\qquad+z_1(b_{13}x_2+b_{23}y_2+b_{33}z_2)=0\\
&x_5(b_{11}x_6+b_{12}y_6+b_{13}z_6)+y_5(b_{12}x_6+b_{22}y_6+b_{23}z_6)+\\
&\qquad+z_5(b_{13}x_6+b_{23}y_6+b_{33}z_6)=0\\
&x_6(b_{11}x_4+b_{12}y_4+b_{13}z_4)+y_6(b_{12}x_4+b_{22}y_4+b_{23}z_4)+\\
&\qquad+z_6(b_{13}x_4+b_{23}y_4+b_{33}z_4)=0\\
&x_4(b_{11}x_5+b_{12}y_5+b_{13}z_5)+y_4(b_{12}x_5+b_{22}y_5+b_{23}z_5)+\\
&\qquad+z_4(b_{13}x_5+b_{23}y_5+b_{33}z_5)=0
\end{aligned}\right\}\quad(2.)$$

az (1.) alatti kúpszeletre nézve egyidejüleg conjugált háromszögek lesznek. Ha pedig a (2.) alatti egyenletekből a b mennyiségeket kiküszöböljük, úgy a következő egyenletet nyerjük:

$$D=\begin{vmatrix}
x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3+y_3z_2 & z_2x_3+z_3x_2 & x_2y_3+x_3y_2\\
x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 & y_3z_1+y_1z_3 & z_3x_1+z_1x_3 & x_3y_1+x_1y_3\\
x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2+y_2z_1 & z_1x_2+z_2x_1 & x_1y_2+x_2y_1\\
x_5x_6 & y_5y_6 & z_5z_6 & y_5z_6+y_6z_5 & z_5x_6+z_6x_5 & x_5y_6+x_6y_5\\
x_6x_4 & y_6y_4 & z_6z_4 & y_6z_4+y_4z_6 & z_6x_4+z_4x_6 & x_6y_4+x_4y_6\\
x_4x_5 & y_4y_5 & z_4z_5 & y_4z_5+y_5z_4 & z_4x_5+z_5x_4 & x_4y_5+x_5y_4
\end{vmatrix}=0$$

mely Hesse tétele szerint kifejezi, hogy az 1 . . . . 6 pontok a kúpszeleten fekszenek.

A jelen sorok czélja annak kimutatása, hogy a D determináns a Scholtz úr »A kúpszeleten fekvő hat pont és a hexagrammum mysticum tétele« czimü értekezésének S determinánsától vagy Δ_{123456} determinánstól nem különbözik.

Czélunk elérésére a D determinánst a következővel szorozzuk meg:

$$\Theta=\begin{vmatrix}
\xi_{23}^2 & \eta_{23}^2 & \zeta_{23}^2 & \eta_{23}\zeta_{23} & \zeta_{23}\xi_{23} & \xi_{23}\eta_{23}\\
\xi_{31}^2 & \eta_{31}^2 & \zeta_{31}^2 & \eta_{31}\zeta_{31} & \zeta_{31}\xi_{31} & \xi_{31}\eta_{31}\\
\xi_{12}^2 & \eta_{12}^2 & \zeta_{12}^2 & \eta_{12}\zeta_{12} & \zeta_{12}\xi_{12} & \xi_{12}\eta_{12}\\
\xi_{56}^2 & \eta_{56}^2 & \zeta_{56}^2 & \eta_{56}\zeta_{56} & \zeta_{56}\xi_{56} & \xi_{56}\eta_{56}\\
\xi_{64}^2 & \eta_{64}^2 & \zeta_{64}^2 & \eta_{64}\zeta_{64} & \zeta_{64}\xi_{64} & \xi_{64}\eta_{64}\\
\xi_{45}^2 & \eta_{45}^2 & \zeta_{45}^2 & \eta_{45}\zeta_{45} & \zeta_{45}\xi_{45} & \xi_{45}\eta_{45}
\end{vmatrix}\quad\ldots\ldots\ldots(4.)$$

A szorzás eredménye a következő lesz:

$$D.\Theta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (256)(356) & (264)(364) & (245)(345) \\ 0 & 0 & 0 & (356)(156) & (364)(164) & (345)(145) \\ 0 & 0 & 0 & (156)(256) & (164)(264) & (145)(245) \\ (523)(623) & (531)(631) & (512)(612) & 0 & 0 & 0 \\ (623)(423) & (631)(431) & (612)(412) & 0 & 0 & 0 \\ (423)(523) & (431)(531) & (412)(512) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

azaz:

$$D.\Theta = \begin{vmatrix} (256)(356) & (264)(364) & (245)(345) \\ (356)(156) & (364)(164) & (345)(145) \\ (156)(256) & (164)(264) & (145)(245) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (235)(236) & (135)(136) & (125)(126) \\ (234)(236) & (134)(136) & (124)(126) \\ (234)(235) & (134)(135) & (124)(125) \end{vmatrix}$$

A jobb oldalon előforduló első determináns átalakitására czélszerű a következő jelöléseket használni:

$$(156) = a_1,\ (256) = a_2,\ (356) = a_3$$
$$(146) = b_1,\ (246) = b_2,\ (346) = b_3$$
$$(145) = c_1,\ (245) = c_2,\ (345) = c_3$$

melyek mellett az a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix} a_2\,a_3 & b_2\,b_3 & c_2\,c_3 \\ a_3\,a_1 & b_3\,b_1 & c_3\,c_1 \\ a_1\,a_2 & b_1\,b_2 & c_1\,c_2 \end{vmatrix}$$

és ha ebben az 1-ső, 2-dik és 3-dik sort $a_1\,b_1\,c_1$, $a_2\,b_2\,c_2$ és $a_3\,b_3\,c_3$-mal szorozzuk, azután pedig az 1-ső, 2-dik és 3-dik oszlopot $a_1\,a_2\,a_3$, $b_1\,b_2\,b_3$ és $c_1\,c_2\,c_3$-mal elosztjuk, úgy az a következő alakot veszi fel:

$$\begin{vmatrix} b_1\,c_1 & c_1\,a_1 & a_1\,b_1 \\ b_2\,c_2 & c_2\,a_2 & a_2\,b_2 \\ b_3\,c_3 & c_3\,a_3 & a_3\,b_3 \end{vmatrix}$$

A második determinánst pedig hasonlóképen átalakitva találjuk, hogy:

$$D.\Theta = -\begin{vmatrix} (145)(146) & (145)(156) & (146)(156) \\ (245)(246) & (245)(256) & (246)(256) \\ (345)(346) & (345)(356) & (346)(356) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (124)(134) & (124)(234) & (134)(234) \\ (125)(135) & (125)(235) & (135)(235) \\ (126)(136) & (126)(236) & (136)(236) \end{vmatrix} \quad (5).$$

Ha végre a Θ determinánst hasonlóképen alakitjuk át, mint Scholtz ur az idézett értekezésben az S determinánst átalakitja, úgy találjuk, hogy:

$$\Theta = -(123)^2 \begin{vmatrix} (145)(146) & (145)(156) & (146)(156) \\ (245)(246) & (245)(256) & (246)(256) \\ (345)(346) & (345)(356) & (356)(356) \end{vmatrix}$$

de mivel másrészt:

$$\begin{vmatrix} (124)(134) & (124)(234) & (134)(234) \\ (125)(135) & (125)(235) & (135)(235) \\ (126)(136) & (126)(236) & (136)(236) \end{vmatrix} = (123)^2 S = (123)^2 \Delta_{123456}$$

úgy az egyenlő tényezők elhagyása után az (5.) alatti egyenletből:

$$D = S = \Delta_{123456} \qquad (6.)$$

Végre még megjegyezzük, hogy azon feltételi egyenletet, melynél fogva hat pont a kúpszeleten fekszik, tizféleképen fejezhetjük ki a D alatti alakban, miután hat számot tizféleképen oszthatunk fel két hármankénti csoportra.

Budapesten, 1877. szeptember 14-kén.

AZ ERÉLY MEGMARADÁSA ELVÉNEK BEVEZETÉSE A DIFFRACTIÓ ELMÉLETÉBE.

Dr. Fröhlich Izor egyetemi magántanártól.

A diffractio, közelebbről pedig a fényelhajlitás eddigi theoriája, kiindulva Huyghens elvének többé-kevésbbé általánosított alakjából, meghatározza tetszőleges hullámfelület hatását valamely rajta kivül fekvő pontra. Fényforrásul egy pontot tételezve fel, az eredő mozgás kifejezése:

$$u = k \iint df \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + r_1}{\lambda}\right) + \delta\right];$$

k egy, a hullámfelületben magában végbe menő mozgásnak egy állandója, df a ható felület eleme, r_0 és r_1 annak távola a fénylő ponttól s a térben fekvő tetszőleges ponttól, λ a hullámhossz, T a rezgési idő, δ a kezdeti pházis.

Ezen mozgás amplitudja:

$$A = K\left[\left(\iint df \sin\frac{2\pi}{\lambda}(r_0 + r_1)\right)^2 + \left(\iint df \cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_0 + r_1)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

K nem identikus az előbbi k állandóval, mint azt alább látni fogjuk; annak tulajdonképeni jelentőségére és értékére eddig nem fordittatott elég figyelem.

Ezen képletek alkalmazása különböző alaku elhajlitó nyilásokra, a tér minden pontja számára az eredő fénymozgást s annak *relativ* amplitúdját adják.

Relativ amplitudját, mivel a fénymozgásnak az itt felhozott egyenleteken kivül, még az erély megmaradása elvének is meg kell felelnie.

Ez elv behozatala a diffractió elméletének eddigi eredményeit lényegükben nem változtatja ugyan, a mennyiben azok csak viszonylagosak, de azokat mégis tetemesen kiegésziti és szaporitja; különösen pedig az amplitúdot és intenzitást szigoruan meg engedi különböztetni.*)

Gondoljunk az elhajlitó nyilások mögött egy tetszőleges alakú ernyőt, mely az ezek által elhajlitott *összes* fényt felfogja; akkor a fenn idézett elvnél fogva első következmény lesz:

az ernyőre eső fénymozgások összes mozgási erélye (intenzitása) kisebb lehet ugyan az elhajlitó nyilásokon behatoló fényénél, de nagyobb soha sem.

Ezen tételnek ily módon való formulázására következő megfontolások vezettek:

Nincs ok felvenni, miszerint az elhajlitás processusa által, annak folyama alatt a mozgási erély észrevehetőleg változnék.

Nagy elhajlitási szöggel biró diffractiónál igen valószinü, hogy a keresztrezgésekben létező erély egy része hosszrezgések keletkeztetésére és fenntartására használtatik fel.

Az ú. n. láthatatlan fénynemek diffractió utján sem változtatják hullámhosszukat.

---

*) Az intenzitás alatt itt mindig az idő egység alatt a sugár irányára merőleges felület-egységre eső mozgási erély értetik; ez az optika tanai szerint:

$$A^2 V\sigma \frac{\pi^2}{T};$$

V a fény tovaterjedési sebessége, σ az aether supponált sűrűsége.

Ezentúl rövidség kedvéért tétetik:

$$V\sigma \frac{\pi^2}{T^2} = C.$$

Ha valamely fénymozgás intenzitásáról lesz szó, mely valamely véges kiterjedésü felületre esik, s annak különböző pontján különböző amplitúddal bir, az intenzitás a fénymozgás összes mozgási erélyét jelenti.

Jelölje $\mathfrak{A}$ az elhajlitó felületen az állandó, vagy annak mentében változó amplitudot, akkor e tétel symbolikus alakja (homogen fényt tételezve fel):

$$C\iint \mathfrak{A}^2\, df \geq C\iint A^2\, dF$$

Ezen egyenletbe az A fenn talált értéke helyettesittetik; az egyenlet kiszámitásából közvetlenül következik az eddig ismeretlen K s vele együtt A, mely igy $\mathfrak{A}$-val egyenméretüvé válik.

Az erély megmaradása elvének bevezetése által tehát a diffractió első alapegyenletéhez, mely Huyghens elvét tartalmazza, egy második, ép annyira jogosult, ép oly lényeges feltéti egyenlet járul, mely a beeső s az elhajlitott fény mozgási erélyének összefüggését szabályozó kapcsolatot fejezi ki.

Az utóbbi egyenlet felállitásánál azon, mindenesetre csak közelitő feltétet tartottuk meg, miszerint a fénymozgás a nyilások szélei által nem zavartatik; ezt annyival is inkább tettük, mert még a legáltalánosabb diffractio-elméletek is *) jobb hiányában e mellett maradtak.

Midőn ezen elvet egyes diffractió-tüneményekre szándékozunk alkalmazni, célunk kiválóan csak az lehet, segitségével egyszerű elhajlitási problemákat lehetőleg teljesen megfejteni, s az ily módon talált új eredményekre utalni.

Erre nézve például egy egyszerű, Schwerd-féle tüneményt választunk.

Legyen az elhajlitó nyilás egy derékszögü parallelogramm, melynek hossza és szélessége a és b. Vegyünk fel egy derékszögü tengelyrendszert, melynek kezdetpontja a nyilás közepébe essék, s melynek X és Y tengelye a és b-vel párhuzamos fekvésü.

A behatoló fény a Z tengely irányában terjed s a nyilás felületén $\mathfrak{A}$ állandó amplituddal és $\mathfrak{A} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right)$ alaku mozgással bir.

Ha most, a közönséges eljárás szerint, valamely az X és Y tengelylyel α és β szögletet képező irány számára az amplitudot keressük, ez:

---

*) Réthy Mór: A diffractió elméletéhez, a M. Ak. Ért. a math. tud. köréből. III. köt. V. sz.

$$A_k \sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\delta\right) = \mathfrak{A}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta}{\lambda}\right)+\delta\right]$$

$$A_k = \mathfrak{A}\, a\, b\, \frac{\sin\dfrac{\pi a\cos\alpha}{\lambda}}{\dfrac{\pi a\cos\alpha}{\lambda}} \cdot \frac{\sin\dfrac{\pi b\cos\beta}{\lambda}}{\dfrac{\pi b\cos\beta}{\lambda}};$$

a k jelző az amplitúdnak közönséges úton talált értékét jelöli.

Hogy azonban ezen eredmény nem lehet helyes, következőből tünik ki. Gondoljunk egy végtelen nagy félgömb felületet, melynek központja az elhajlító nyilás, s melynek belső oldalára a talált, véges amplitúddal biró elhajlitott fény esik; akkor ezen felületre az időegység alatt végtelen nagy mozgási erély esnék, mi nyilván egyenes ellentétben áll az erély megmaradása elvével s magával a tünemény természetével.

A további vizsgálatnál azon megszoritással fogunk élni, hogy az elhajlitási szögletek csak igen csekélyek, tehát nehány fokot túl nem haladók; szóval oly tüneményekmellett maradunk, melyek csak távcső segitségével észlelhetők tisztán.

Tegyük: $$\varphi = 90^0 - \alpha,\ \psi = 90^0 - \beta,$$

s ha φ és ψ igen kicsiny, akkor az amplitud az ismeretlen szorzóval, K-val ellátva, lesz:

$$A = \mathfrak{A}\, K\, a\, b\, \frac{\sin\dfrac{\pi a\varphi}{\lambda}}{\dfrac{\pi a\varphi}{\lambda}} \cdot \frac{\sin\dfrac{\pi b\psi}{\lambda}}{\dfrac{\pi b\varphi}{\lambda}}.$$

Az elhajlitott fény egy félgömb alaku, ϱ sugaru ernyőre esik, melynek középpontja a nyilás közepe; feltételezhetjük ugyanis, mint az a tünemény gyakorlati megfigyelésénél valóban történik, hogy közvetlenül a nyilás mögötti s ϱ gyujtó távolságú lencse a tünemény tiszta képét vetiti az ernyőre. Ezen ernyő felületi eleme: $\varrho^2\, d\varphi\, d\psi$, s igy az egész ernyőre eső erély:

$$\varrho^2\, C \int_{-\pi}^{+\pi} d\psi \int_{-\pi}^{+\pi} A^2\, d\varphi$$

Ámde φ és ψ-nek már csekély értékeinél az amplitudok rendkivül kicsinyek s ezek $\varphi = \frac{\pi}{2}$ és $\psi = \frac{\pi}{2}$ mellett valóban teljesen elenyé-

szők; ennélfogva szabad lesz minden észrevehető hiba nélkül (a következő egészlet megkönnyitése céljából) az egészleti határokat — ∞-től $+\infty$-ig kiterjeszteni.

Az erély megmaradásának elve szerint kellene tehát lennie:

$$C\mathfrak{A}^2ab=\varrho^2C\int_{-\infty}^{+\infty}d\psi\int_{-\infty}^{+\infty}A^2d\varphi=CK^2\varrho^2\mathfrak{A}^2a^2b^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi a\varphi}{\lambda}}{\frac{\pi a\varphi}{\lambda}}\right]^2d\varphi\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi b\psi}{\lambda}}{\frac{\pi b\psi}{\lambda}}\right]^2d\psi$$

Rövidség kedvéért tévén:

$$\frac{\pi a\varphi}{\lambda}=\omega;\ \frac{\pi b\psi}{\lambda}=\omega',$$

a meghatározandó egészletek alakja

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega.$$

Részletes egészelés utján lesz:

$$\int\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=-\frac{\sin^2\omega}{\omega}+\int\frac{2\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega;$$

a határozott egyenlet tehát:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin 2\omega}{\omega}d\omega=2.\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Mivel ezenkivül:

$$d\varphi=\frac{\lambda}{\pi a}d\omega;\ d\psi=\frac{\lambda}{\pi b}d\omega',$$

egyenletünk lesz:

$$C\mathfrak{A}^2ab=CK^2\varrho^2\frac{\lambda}{\pi a}\cdot\frac{\lambda}{\pi b}\cdot\pi.\pi\mathfrak{A}^2a^2b^2=\varrho^2\lambda^2K^2C\mathfrak{A}^2ab;$$

ezen összefüggésből tehát azonnal következik a K határozatlan állandónak értéke:

$$K=\frac{1}{\varrho\lambda};$$

azaz, az eredő amplitúd az ernyő tetszőleges pontján következő *helyes kifejezés* által lesz adva:

$$A=\mathfrak{A}\frac{ab}{\varrho\lambda}\cdot\frac{\sin\frac{\pi a\varphi}{\lambda}}{\frac{\pi a\varphi}{\lambda}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi b\psi}{\lambda}}{\frac{\pi b\psi}{\lambda}};$$

egyszersmind kitünik, hogy A ugyanazon természetü és méretü meghatározó része a mozgásnak, mint az eredeti amplitúd $\mathfrak{A}$.

Azon fénynél, mely semmi elhajlitást nem szenved, melyre nézve egyidejüleg

$$\varphi = o, \quad \psi = o,$$

az amplitúd korántsem egyezik meg az elhajlitó felületen végbe menő mozgás amplitudjával, $\mathfrak{A}$-val, mint azt a diffractio közönséges elmélete állitja, hanem ellenkezőleg, ezen egyenlőség csak akkor áll be, midőn

$$\varrho\lambda = ab;$$

ezen esetben pedig a tünemény egyes képeinek méretei az elhajlitó nyiláséval igen egyszerü viszonyban állanak. Egy ily kép kiterjedését szabályzó szögek nagysága :

$$\frac{\pi a \varphi_1}{\lambda} = \pi; \quad \frac{\pi b \psi_1}{\lambda} = \pi$$

által adatik; a kép kiterjedése pedig az X és Y tengely irányában, (t. i. annak hossza és szélessége):

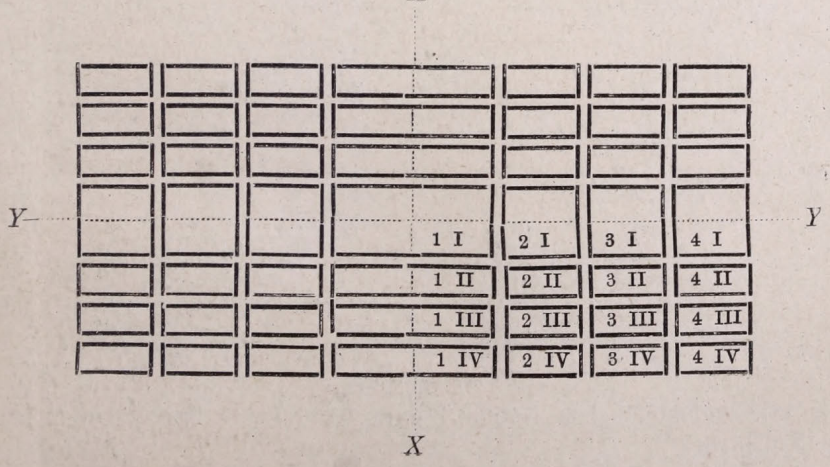
$$\varrho\varphi_1 \text{ és } \varrho\psi_1;$$

ámde itt:

$$\varrho = \frac{ab}{\lambda}; \quad \varphi_1 = \frac{\lambda}{a}, \quad \psi_1 = \frac{\lambda}{b};$$

tehát: $$\varrho\varphi_1 = b, \quad \varrho\psi_1 = a;$$

azaz, azon esetben, midőn az el nem hajlitott fény amplitudja egyenlő a nyiláson behatoló fényével, akkor egyszersmind az egyes elhajlitási képek alakja és kiterjedése teljesen egyenlő a nyiláséval, csakhogy az előbbiek fekvésüket illetőleg, egy derékszöggel el vannak forditva.



Ezen eredmények alapján könnyü lesz az ezen tüneménynél fellépő egyes elhajlitási képeknek megfelelő összes mozgási erélyt (intenzitást) meghatározni. A tünemény lényegét ábrázoló s itt mellékelt rajz tájékozásunkra fog szolgálni. Jegyezzük még csak azt meg, hogy a középső kép négy symmetrikusan fekvő, egyenlő kép érintkezéséből, ép úgy a középső függélyes és fekmentes vonal mentében elhelyezett képek symmetrikusan fekvő s szintén egyenlő két-két képből eredtek; itt mindig csak *egy* ily alapkép fog tekintetbe vétetni.

A $\varrho^2\, d\varphi\, d\psi$ felületelemre eső mozgási erély:

$$CA^2\varrho^2\, d\varphi\, d\psi = CK^2\mathfrak{A}^2\varrho^2 \frac{\lambda}{\pi a}\cdot\frac{\lambda}{\pi b}\cdot a^2b^2\, d\omega\, d\omega';$$

tehát az első képnek megfelelő intenzitás:

$$J_{1,1} = C\mathfrak{A}^2\frac{a\,b}{\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\omega'}{\omega'^2}\,d\omega'.$$

Ámde $C\mathfrak{A}^2\, a\, b$ nem egyéb, mint az elhajlitó nyiláson behatoló fény összes mozgási erélye; ezt röviden I-vel jelölve, lesz:

$$J_{1,1} = I\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\omega'}{\omega'^2}\,d\omega'$$

Hasonló módon képezhetők a többi képeknek megfelelő intenzitások kifejezései is; igy pl.

$$J_{1,II} = I\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2\omega'}{\omega'^2}\,d\omega'$$

$$J_{2,1} = I\frac{1}{\pi^2}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\omega'}{\omega'^2}\,d\omega'$$

általában pedig:

$$J_{\nu,\mu} = I\frac{1}{\pi^2}\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega\int_{(\mu-1)\pi}^{\mu\pi}\frac{\sin^2\omega'}{\omega'^2}\,d\omega'$$

Kitünik e kifejezésekből, hogy:

$$J_{\nu,\mu} = J_{\mu,\nu},$$

szóval: a diagonalishoz symmetrikusan fekvő képek egyenlő intenzitással birnak.

A fentebbi képletekben előforduló $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} d\omega$, $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} d\omega$ stb. határozott egészletek értékei mechanikai quadratura utján, a magasabb különbségek tekintetbe vételével gondosan lettek kiszámitva, s a mellékelt tábla első számrovatába összeállitva; a második számsor a $\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$ kifejezésnek egymásra következő maximumainak viszonylagos értékeit, a közönségesen úgynevezett fénymaximumokat tartalmazza.

$2.\int \frac{\sin^2 w}{\omega^2} d\omega$ határok között		Fénymaximumok
0 és π	$0{\cdot}791711.\pi$	$1{\cdot}000000$
π » 2π	$0{\cdot}047087.\pi$	$0{\cdot}047191$
2π » 3π	$0{\cdot}016465.\pi$	$0{\cdot}016480$
3π » 4π	$0\ 008336.\pi$	$0{\cdot}008342$
4π » 5π	$0{\cdot}005028.\pi$	$0{\cdot}005029$
5π » 6π	$0\ 003360.\pi$	$0{\cdot}003360$
6π » 7π	$0{\cdot}002404.\pi$	$0{\cdot}002404$
7π » 8π	$0{\cdot}001805.\pi$	$0\ 001805$
8π » 9π	$0{\cdot}001404.\pi$	$0{\cdot}001404$
9π » 10π	$0{\cdot}001123\ \pi$	$0{\cdot}001123$

A két számsor viszonylagos értékei mindinkább közelednek egymáshoz, a mint ez előre is látható, miután ω szög nagy értékeinél a határozott egészlet értékei is igen közel aránylagosak a $\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$-nek megfelelő legnagyobb értékeivel.

A táblázatban már nem foglalt határozott egészletek elég közelitőleg következő képlet által nyerhetők:

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2 (3{\cdot}14159\ldots)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ezen adatok segitségével tehát az egyes elhajlitási képeknek megfelelő mozgási erély, viszonyitva a beeső fényéhez, azonnal felkereshető; azok összege egyenlő az utóbbival, azaz:

$$I = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} J_{\nu,\mu}.$$

Vizsgálatainkat könnyen kiterjeszthetjük azon esetre is, melyben n számú ily egyszerü, egyenlő nyilás az X tengely mentében, egymáshoz párhuzamosan fekszik, ugy hogy központjaiknak távola egymástól egyenlő legyen (e).

Ha előbb A az egy nyilásnak megfelelő amplitúd volt, akkor a most keletkező mozgását A_n-nel jelöljük; ez utóbbi a diffractió közönséges elmélete szerint:

$$A_n = A \frac{\sin n \frac{\pi e \varphi}{\lambda}}{\sin \frac{\pi e \varphi}{\lambda}},$$

hol A már az előbbi amplitúdnak $\frac{1}{\varrho \lambda}$ szorzóval ellátott, helyes értékét jelenti.

Az erély megmaradásának elve pedig követeli:

$$n C \mathfrak{A}^2 a b = \varrho^2 C \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} A_n^2 d\varphi;$$

ω és ω' előbbi jelentőségét megtartva és $\frac{e}{a}$-t m-mel jelelve, ez egyenlet alakja:

$$n C \mathfrak{A}^2 ab = \varrho^2 C K^2 \mathfrak{A}^2 a^2 b^2 \frac{\lambda}{\pi a} \cdot \frac{\lambda}{\pi b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 n m \omega}{\sin^2 m \omega} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega'}{\omega'^2} d\omega'$$

$$= \varrho^2 \lambda^2 K^2 C \mathfrak{A}^2 \frac{a b}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 n m \omega}{\sin^2 m \omega} d\omega.$$

Tekintetbe véve, hogy K együttható ezen utolsó műtétek folyamában nem változott, mivel ez amúgy is már A kifejezésében foglaltatik: ezen utóbbi egyenlet csak ugy állhat meg, ha:

$$n \pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 n m \omega}{\sin^2 m \omega} d\omega;$$

azaz: *ha az erély megmaradásának elve helyes, akkor abból a határozott egészletnek következő értéke következik:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 n\,m\,\omega}{\sin^2 m\omega}\, d\omega = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\, d\omega = n\,\pi$$

Ezen érték helyessége azonban mennyiségtani uton is bebizonyitható, ugy hogy a fentebbi elvnek ezen logikai következtetése úgyszólván mathematikai szigorral bir.

A bizonyitást itt csak körvonalozzuk, minthogy annak kivitele nagy terjedelmü, de csekély érdekü mennyiségtani műtéteket igényel.

Mindenek előtt a nevezőben előforduló sinust kell eltávolitani, ez Moivre tétele segitségével lehetséges, melyet a második szorzó számlálójára alkalmazva, lesz:

$$\frac{\sin n\,m\,\omega}{\sin m\,\omega} = n\cos^{n-1} m\omega - \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{n-3} m\,\omega \sin^2 m\,\omega + \ldots$$

Az e sorban előforduló trigonometriai függvényeket, melyek az elsőnél magasabb hatványnyal birnak, az ivek többszöröseinek sinusai és cosinusai által kell kifejezni, s a sort négyzetre emelni; erre a benne ismét keletkezett négyzeteket az épen emlitett módon el kell tüntetni s csak azután lehet az igy átalakitott kifejezést az integrál alá hozni. Ekkor a nevezőben csak ω^2 áll; ha most részletesen egészeltetik, úgy hogy a nevezőben csak ω maradjon, akkor $-\infty$ és $+\infty$ határok között véve az első tagot, ez elesik; a második (részlet-) egészlet számlálójának minden tagja pedig az ω valamely sokszorosának sinusa gyanánt állitható elő, s akkor a határozott egészelés mindig lehetséges.

Az itt kijelölt mütétek gyakorlati kivitele hosszadalmas ugyan; de azok keresztülvitele meggyőz bennünket a fentebbi következtetés mennyiségtani helyességéről is.

Az utóljára tárgyalt esetet még általánosabbá lehet tenni, ha n' számu ily egyes nyilás-sort veszünk fel, melynek középvonalai e' távolságnyira esnek; a keletkező tüneménynél az erélyek összefüggése

$$nn'C\mathfrak{A}^2ab = C\mathfrak{A}^2abK^2\frac{\varrho^2\lambda^2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\cdot\frac{\sin^2 n\,m\,\omega}{\sin^2 m\,\omega}\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\omega'}{\omega'^2}\cdot\frac{\sin^2 n'm'\omega'}{\sin^2 m'\omega'}\,d\omega'$$

egyenlet által adatik; itt $m' = \frac{e'}{b}$.

Önmagából következik $K = \frac{1}{\varrho\,\lambda}$, minthogy ez a nyilások számától és azok helyzetétől egészen független; ezen körülmény arra figyelmez-

tet, hogyan lehet, a nyilásoknak különböző viszonylagos helyzetet adva, a fennt találthoz hasonló határozott egészletek értékéhez jutni.

Az egyes képekre eső mozgási erélyt analóg módon, mint azt előbb tettük, lehet meghatározni; erre nézve mindenek előtt n és n', m és m' ismeretére lenne szükség.

Bennünket azonban különösen azon képek intenzitása érdekel, melyekben a fény főmaximumai lépnek fel. Ily maximumok számára az $n\,m\,\omega$ szög értékei

$$\begin{aligned} &-\pi\text{-tól} \quad \pi\text{-ig} \\ \text{vagy } &(n-1)\,\pi \;\text{»}\quad (n+1)\,\pi\text{-ig} \\ \text{vagy } &(2\,n-1)\,\pi \;\text{»}\quad (2\,n+1)\,\pi\text{-ig stb. terjednek;} \end{aligned}$$

ebből következnek az ω szögnek határai ezen képekre vonatkozólag.

Ha csak az X tengely mentében fekvő ily főmaximumok vétetnek tekintetbe, ezeknek mozgási erélye rendre ($I = C\mathfrak{A}^2\,a\,b\,n\,n'$):

$$\omega = +\frac{\pi}{nm}$$

$$J_{\mu_1} = I\,\frac{1}{n\,\pi}\int_{\omega=-\frac{\pi}{nm}}^{\omega=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\cdot\frac{\sin^2 n\,m\,\omega}{\sin^2 m\,\omega}\,d\omega$$

$$J_{\mu_2} = I\,\frac{1}{n\,\pi}\int_{\omega=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}}^{\omega=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\cdot\frac{\sin^2 n\,m\,\omega}{\sin^2 m\,\omega}\,d\omega$$

. . . . . .

$$J_{\mu\nu} = I\,\frac{1}{n\,\pi}\int_{\omega=\frac{(\nu-1)n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}}^{\omega=\frac{(\nu+1)n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\cdot\frac{\sin^2 n\,m\,\omega}{\sin^2 m\omega}\,d\omega$$

A nyilások számának növekedtével ez egészletek határai is mindinkább közelednek egymáshoz; ha n tetemes (pl. 50-en túl), akkor az egészelési határok között $\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$ kifejezést igen nagy közelitéssel állandónak lehet venni, ω helyébe ezen határok középértékét helyettesitve.

A főmaximumokat tartalmazó képek összes intenzitása tehát:

$$J_{\mu_1} = I\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{\sin^2 0}{0^2}\int_{-\frac{\pi}{nm}}^{+\frac{\pi}{nm}}\frac{\sin^2 n\,m\,\omega}{\sin^2 m\,\omega}\,d\omega$$

$$J_{\mu_2} = I\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{m}}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}\int_{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}}^{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}}\frac{\sin^2 n\,m\omega}{\sin^2 m\,\omega}\,d\omega$$

. . . . . .

Azonban könnyü megfontolás arra vezet, hogy ezen itt fellépő határozott egészletek egyenlők, mert az egészelési jel alatt lévő periodikus kifejezés mindig ugyanazon értéket veszi fel, ha:

$$\omega = -\frac{\pi}{nm}, \frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}, \frac{2n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}\ldots\ldots$$

s ha

$$\omega = +\frac{\pi}{nm}, \frac{n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}, \frac{2n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}\ldots\ldots;$$

továbbá az egészelési határok különbsége mindenütt állandó s a nevezett kifejezés egyszerüen periodikus; szóval:

$$\int_{-\frac{\pi}{nm}}^{+\frac{\pi}{nm}} = \int_{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}}^{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}} = \int_{\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}}^{\frac{2n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}} = \text{stb.}$$

Hátra volna még $\int_{-\frac{\pi}{nm}}^{+\frac{\pi}{nm}}\frac{\sin^2 n\,m\,\omega}{\sin^2 m\,\omega}\,d\omega$ egészlet meghatározása, de ez épen nem jár nehézséggel, mivel $\omega = -\frac{\pi}{nm}$ és $\omega = +\frac{\pi}{nm}$ határok között az $m\,\omega$ szög szélső értékei $-\frac{\pi}{n}$ és $+\frac{\pi}{n}$; az előbbi megjegyzés értelmében tehát ezen egészelés határai között az $m\,\omega$ összeesik sinusával s így egészletünk lesz:

$$\int_{-\frac{\pi}{nm}}^{+\frac{\pi}{nm}} \frac{\sin^2 nm\omega}{m^2\omega^2}\, d\omega = n^2 \int_{-\frac{\pi}{nm}}^{+\frac{\pi}{nm}} \frac{\sin^2 nm\omega}{n^2 m^2 \omega^2}\, d\omega = \frac{n}{m} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2 \vartheta}{\vartheta^2}\, d\vartheta ;$$

ha tétetik : $\vartheta = nm\omega$;

ámde ezen utóbbi egyenlet már ismeretes.

Lesz tehát:

$$J_{\mu_1} = I \frac{1}{m} 0{\cdot}791711$$

$$J_{\mu_2} = I \frac{1}{m} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{m}}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2} 0{\cdot}791\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J_{\mu_\nu} = I \frac{1}{m} \frac{\sin^2 \nu \frac{\pi}{m}}{\left(\nu \frac{\pi}{m}\right)^2} 0{\cdot}791711$$

A mozgási erély, mely az *összes* ily főmaximumokat tartalmazó képekben lép fel:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} J_{\mu_\nu} = I \frac{1}{m} 0{\cdot}791711 \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left\{ \frac{\sin \nu \frac{\pi}{m}}{\nu \frac{\pi}{m}} \right\}^2$$

$$= I \frac{1}{m} 0{\cdot}791711 \left[1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left\{ \frac{\sin \nu \frac{\pi}{m}}{\nu \frac{\pi}{m}} \right\}^2 \right]$$

Ezen képeknek intenzitása különben egyenlő körülmények között m-mel forditva arányos, mivel pedig $m = \frac{e}{a}$ mindig nagyobb az egységnél, ugy ezen képek intenzitása is annál nagyobb, mennél keskenyebbek a nyilások között foglalt átlátszatlan részek.

Igy pl. ha $\frac{1}{m} = \frac{1}{3}$ vagy $\frac{2}{3}$, akkor általában lenne:

$$\sin^2 \nu \frac{\pi}{m} = \frac{3}{4}, \text{ és}$$

MAGY. AKAD. KÖNYVTÁRA

$$\sum J_{\mu\nu} = I\frac{1}{m}0{\cdot}791\ldots\left\{1+2\cdot\frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right]\right\};$$

vagy, $\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$ esetben a $\sin^2\nu\frac{\pi}{m}$ felváltva egyenlő az egységgel meg zérussal, továbbá:

$$\sum J_{\mu\nu} = I\frac{1}{2}0{\cdot}791711\left\{1+2\,\frac{4}{\pi^2}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right]\right\}\text{ stb.}$$

Ezen főképek intenzitásának viszonya az összes beeső fényéhez az előbbi kifejezések által teljesen meg van határozva; azok viszonya egymáshoz:

$$1:\frac{\sin^2\frac{\pi}{m}}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}:\frac{\sin^2 2\frac{\pi}{m}}{\left(2\frac{\pi}{m}\right)^2}:\frac{\sin^2 3\frac{\pi}{m}}{\left(3\frac{\pi}{m}\right)^2}\ldots\ldots$$

Alig szükséges emliteni, hogy ezen utóbbi vizsgálat különösen az u. n. rácsokra vonatkozik, még pedig olyanokra, melyeknél a nyílások között foglalt felületek fényre nézve teljesen áthatlanok.

Jegyezzük még csak azt meg, hogy eddigelé az észlelés a diffractió elméletének eredményeit csak *egy részben* igazolta: ugyanis az elhajlitott fénynek csak az *iránya* lett eddig megmérve. De ezen igazolás még elégtelen, minthogy az ép annyira fontos *intenzitásra* nézve az észlelési adatok teljesen hiányoznak.

Az e sorokban elméleti úton kifejtett intenzitási viszonyok kisérleti megvizsgálása czéljából jelenleg egy készüléket állitottam össze, melynek főalkatrésze egy kis heliométer; ezen észlelési mód kielégitő pontosságu adatokat látszik szolgáltatni, melyek az elmélet s a kisérlet eredményeinek összehasonlitását lehetővé fogják tenni.

Ez alkalommmal az erély megmaradása elvét a diffractió egyik legegyszerübb tüneményére alkalmaztuk. Könnyen lehet ez alkalmazást tetszőleges egyéb ily tüneményre kiterjeszteni; azonban az amplitúd kifejezése rendesen nem zárt alak, s az elv bevezetéséből eredő feltéti egyenlet tényleges kiszámitása, nem annyira nehéz, mint inkább hosszadalmas mennyiségtani kifejtésekhez vezet, melyek physikai érdekkel aligha birnak.

Budapest, 1877. október 1-én.

HANGSEBESSÉGI MÉRÉSEK *BOSSCHA* MÓDJA SZERINT.

Szathmáry Ákos tanárjelölttől.

Mersennetől napjainkig szerfelett sok kisérlet tétetett megmérni, mekkora a hang terjedési gyorsasága levegőben? Kezdetben, mivel a hang keletkezésének mechanismusát nem ismerték, természetesen csak direct észlelési módszereket alkalmaztak; később a kérdés megoldását a hanghullám hosszának és rezgési számának ismeretétől tették függővé.

Az indirect módszerek bárha igen sok érdekes körülményre vetnek világot, mindazonáltal kevesebbre becsülendők pontosság tekintetében a direct módszereknél, a minek oka abban rejlik, hogy azoknál végeredmények nyeréséhez okvetetlenül szorzási műveletek kivántatnak, még pedig oly nagy számokkal, hogy ezek által a mérésekben elkövetett észleleti hibák is tetemesen nagyobbodnak.

A direct módszerek hátránya pedig a szél befolyásának kiszámithatatlan volta, s azon körülmény, hogy az ilyen czélra választott, rendesen nagy észlelési terület különböző pontjain ugy a hőmérsék, mint a levegő vízgőz tartalma ugyanazon időben is különböző lehet. Igaz ugyan, hogy az előbb emlitett körülmény zavaró befolyásának elháritására főleg Moll és Van Beek nagy gondot forditottak, de miként ezt Van Rees kimutatta, elérhetetlen czélt tűztek maguk elébe.

Előnyösnek mutatkozik azon direct észlelési mód, melyet Bosscha ajánlott, s a mely lényegében a következő:

Bizonyos meghatározott intervallum szerint keltessék két rövid, de éles hang egyidejüleg ugy, hogy az észlelő a hangforrások mellett állván, mindkettő hangját egyszerre hallja. Erre az egyik hangforrás távolittassék mindaddig, mig a két hang ismét összecsni hallatszik, a mikor igen természetesen a hangforrások nem valóban egyidejüleg keltett, hanem felváltva egymást követő hangjai hallszanak egyszerre. Ezen hang koincidenciák által azt a távolságot, melyet a hullámmozgás az egymást követő hangok közötti intervallum alatt befut, meglehetvén állapitani, következőleg $c = \frac{s}{t}$ képlet szerint a hang terjedési gyorsasága is megállapitható.

Ezen elvet, czélszerünek és pontosságra alkalmasnak látván, azt a következő módon alkalmaztam:

Egy hat Bunsen-féle elemből álló telep 220 méter hosszu zárósodronyába két villamos csengőt igtattam be ugy, hogy míg az egyik

közvetlen a villamtelep mellett állott, addig a másik a hosszu sodrony közepébe volt becsatolva, hogy ez által az előbbi csengőhöz való távolának növelése vagy megapasztása szabadon történhessék. A vezeték egy részét egy pontosan ismert lengési idejü fém-inga képezte, a mely valahányszor verticalis irányba jött, mindannyiszor alsó végére forrasztott finom platina csúcsával egy alája helyezett, higanyos csészébe ért bele, a mely csésze a telep egyik sarkával lévén összeköttetésben, azt eszközölte, hogy azon pillanatban, midőn az inga nyugalmi helyzetén ment át, a két csengő egyszerre ütött egyet-egyet.

Ezen a módon állitottam egybe marcz. 25-én kora reggel a készüléket, a helybeli ev. ref. collegium kertjében, azonban a város zajának nem hitt nagyságu zavaró befolyása és az épen akkor támadt erős szél miatt egész estig tartó próbálgatásaim sikertelenek maradtak, ugyannyira, hogy kedvezőbb idő felhasználását határozván el, a készüléket szétbontottam. Erre nem soká oly szélcsend következett, minőt csak nyári estéken lehet észlelni; nem akarván a kinálkozó alkalmat elszalasztani, ismét összeállitottam a készüléket, s ugy az idő, mint az est, illetőleg éj csendes volta is kedvezvén, meggyőződésem szerint pontos eredményekre jutottam.

A kisérletnél előforduló mérések következőkép vitettek végbe:

A mi az inga lengési idejének meghatározását illeti, azt azon elv alapján eszközöltem, hogy a lengési idő és szám visszásan aránylanak egymáshoz. Mint ismert lengési idejü ingát, a kolozsvári egyetem természettani intézetének ingás óráját használtam, a melynek lengései, pontos meghatározások szerint 0·76152 mp. alatt történnek. A kisérleteimnél használt, és az egyetem tulajdonát képező inga bizonyos idő alatt végezett lengéseinek számát egy két elektromágnessel és ezeknek megfelelőleg egy papir-szalagra jegyző két szögecscsel ellátott Morse-féle jelzővel jegyeztettem fel oly módon, hogy a két villamdelejt két külön villamáram által hozattam müködésbe, s a két villam-áramba megszakitókul a már emlitett módon a két ingát igtattam be, miáltal az ingák minden egyes lengését a villam-delejek egy-egy ponttal jegyezték föl.

Ily módon ugyanazon hosszuságu papirszalagon, melyre az ismert lengésü óra 1244 pontot ütött, a kérdéses inga által 3200 pontot találtam följegyezve, s igy az általam használt óra ingájának lengési ideje: 0·2961 mp.

Az ide-oda mozgatott és az észlelő mellett nyugvó csengők egymástól való távolságát azon pillanatban, midőn ütéseiket egyidejüeknek

hallottam, a következőkép határoztam meg. A kisérlet kezdete előtt a nyugvó csengőt választván kiindulási pontul, egy 30 meter hosszu mérő-szalaggal egyenes irányban lemértem 90 meternyi távolságot, s innen folytatólag a mérő-szalagot a földre fektetvén oda erősitettem, mivel megközelitőleg tudtam, hogy koincidencia a két csengő 90 és egynehány meternyi távolságánál álland be. Szives segédkezőim, kik a csengők távolának változtatását eszközölték, általam az ütések összeesése pillanatában adott jelre a csengő alatt, a függő-ón irányába eső számot mindannyiszor följegyezték, a mely számok 90-hez adatván, a két csengő távolságát fejezték ki.

A kisérlet folyama alatti hőmérsék középértéke 6° *C* és a Dániel-féle nedv-merő harmatpontja 1·6° *C* volt.

Ilyen eljárások mellett, melyekből a módszer pontossága eléggé kitünik, azt találtam, hogy a hang

Sorszám	0·2961 mp. alatt metert halad	Sorszám	0·2961 mp. alatt métert halad	Sorszám	0·2961 mp. alatt métert halad
1	99·37	13	99·79	25	99·23
2	99·01	14	98·49	26	98·97
3	99·71	15	98·53	27	98·95
4	98·69	16	98·56	28	98·97
5	99·97	17	99·99	29	98·93
6	98·93	18	98·63	30	99·84
7	99·81	19	98·93		
8	99 87	20	99·71		
9	99·82	21	98·93	közép-	
10	98·96	22	98·93	érték	99·25
11	99·33	23	99·81		
12	99·89	24	99·01		

ennélfogva egy másodpercz alatt 6° *C*-nál 335·20 metert,

s innen, $V_0 = \frac{V}{\sqrt{1 + 0{\cdot}003665\,t}}$ képlet szerint számitva

0° *C* mellett

331·57 metert.

Ezen eredmény száraz levegőre vonatkoztatva $V_{sz} = V_n\sqrt{1-0{\cdot}38k}$ képlet szerint, melyben k a levegőben levő vizgőz feszültségének a megfelelő barometer álláshoz való viszonyát jelenti, a hang gyorsaságául 331·10 metert ad.

A barometer állása 0° *C*-ra reducálva 726·5 mm., a hygrometer adatai szerint számitott vizgőz feszélye pedig 5·0 mm. lévén, a jelen esetben

$$k = 0{\cdot}0069.$$

Az általam talált eredmény tehát a Regnault-félétől csak 0·4 méterrel különbözik.

Ezen módszer előnye abban rejlik, hogy a szél quantitativ ismeretlen befolyását a lehetőleg mérsékli, hogy könnyebben kivihető, mint a gyakrabban használt direct észlelési módszerek, s hogy kicsi területet igényelvén, ezen ugy a levegő vizgőz tartalma, mint a levegő mérséklete mindenütt egyenlő.

Hátrányául lehetne felhozni azt, hogy a pontosság nagyban függ az észlelő egyéniségétől, s ezt nem is lehet tagadni, de vajjon melyik kisérletnek nincs meg ez az árnyoldala? Eme balitélet ellenében a kisérlet azt mutatja, hogy hihetetlen pontossággal lehet meghatározni a csengők ütéseinek összeesését főleg akkor, ha az utócsengést újjunknak gyengén a csengőhöz való nyomása által elnémitjuk, s ha az észlelő melletti csengő hangját a lehetőleg gyöngévé teszszük, a kalapácsát szabályozó rugó megfeszitése által.

Növelni lehet ezen pontosságot azáltal is, hogy az ütéseket szabályozó inga hossza nagyobbnak választatik, a mikor aztán a zárósodrony hosszának is megfelelőleg nagyobbnak kell lenni.

A kisérlethez szükségelt kellékek rendelkezésemre bocsátásáért s szives utasitásaiért őszinte köszönetemet kell kifejeznem Abt Antal egyetemi tanár urnak.

Kolozsvárott, április hó 24-én.

ELŐADÁSI KISÉRLETEK.

V.

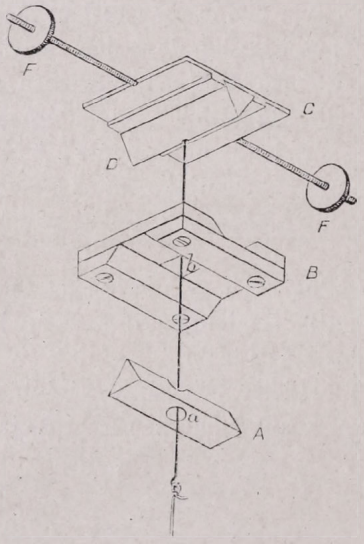
A Foucault-féle ingakisérlet.

Foucault a róla elnevezett kisérletet, melylyel a föld forgását szemlélhetővé tette, igen hosszu ingával hajtotta végre. Utána is mindig hosszu ingákat alkalmaztak e czélra, anélkül azonban, hogy ezáltal a kisérlet sikere biztositva lett volna. A nehézség, melylyel igen hosszu inga alkalmazása jár, s a siker bizonytalansága, mely még 5—6 méternyi hosszuságu ingánál is nyilvánulni szokott, oda hatottak,

hogy csak ritkán mutatják ezen egyszerü és mégis annyira meglepő kisérletet.

Az ingának a következőben részletezett felszerelése mellett, számos tapasztalatom szerint, az elhajlás mindenkor a helyes irányban történik, s a mellett a lengéseket tükrök segitségével nagyban lehet előtüntetni, miáltal lehetővé válik, a lengés sikjának a föld forgása miatt fellépő elhajlását 20—30 percz lefolyása alatt egyszerre 200—300 hallgató előtt szemlélhetővé tenni.

Az inga sodratlan zsinóron függő fél klgr. súlyú sárgaréz gömbből áll; alátámasztására pedig az 1-ső ábrában előtüntetett szerkezet szolgál:



1. ábra.

A aczél élet ábrázol, mely közvetlenül az asztalra — falhoz erősitett asztalra — tétetik, olyformán, hogy *a* nyilása az asztalnak kellő nagyságu nyilása fölé kerüljön.

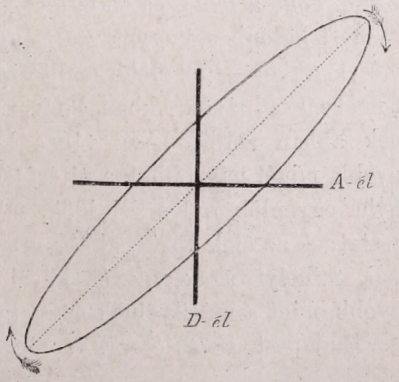
B négy darab tükör-üvegből készült szerkezet; a csavarokkal egymáshoz szoritott lemezek közös felülete szolgál a forgási élek alátámasztására, ugyanis *B* üveget ráfektetjük *A*-ra, és *D* élt ráteszszük *B*-re. Ez által az élek oly állásba jutnak, hogy egy sikban feküsznek.

D hasonló él mint *A*, azzal a különbséggel, hogy meggörbitett végü dróttal van ellátva, melyet az összeállitásnál *a* és *b* nyilásokon kell átdugni, olyformán, hogy lengés közben sehol se akadjon meg, és a melynek végére akasztjuk az inga gömbjével ellátott fonalat. *D* él azonkivül még egy kis fémlemezzel *C* van ellátva, melyhez a vetitő tükröt lehet hozzáerősiteni; a lemez szélein pedig két csavar van az élre merőleges irányban alkalmazva. Az ezeken járó anyacsavarok *FF* arra valók, hogy az egyik élre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot és vele együtt a lengési időt lehessen megváltoztatni, miáltal lehetővé válik a két élre vonatkozó lengési időket egyenlővé tenni. Ez a körülmény felette fontos a Foucault-féle ingakisérlet sikerére nézve, annyira, hogy azt hiszem, miszerint ennek elmulasztása okozza a legtöbb esetben a használatban lévő eszközök megbizhatatlanságát. Mert, ha azon

lengési idők, melyek két egymásra merőleges forgási tengelyekre vonatkoznak, nem egyenlők, akkor az inga mozgása minden más ok közbenjárása nélkül is folyton változik, még pedig mind a pálya alakja, mind a mozgás iránya változást szenved. Ha eredetileg sík mozgást végzett volna az ilyen inga, idővel mozgása elliptikussá válik, s a legnagyobb kitérések iránya is mindig más-más lenne. Az előbbi körülmény magában véve nagy bajt nem okozna, mert a legnagyobb kitérés irányát kevéssé elliptikus (csaknem egyenes) mozgásnál elég jól lehet kitűzni; de annál nagyobb bajt okoz a másik körülmény, akkor, midőn az ingával a föld forgását akarjuk kimutatni. Ennek elkerülése végett oda kell törekednünk, hogy az inga maradandóan sík mozgást végezzen; mert ha ezt elértük, akkor a két — egymásra merőleges tengelyekre vonatkozó — lengési idő egyenlő, és akkor a lengési sík iránya magától nem változik. Ami változást ez esetben tapasztalunk, azt bizvást az ingán kivül fekvő oknak, a föld forgásának tulajdonithatjuk.— Az *FF* csavaroknak kellő beállitása végett, a nyugodt ingát kampós végü dróttal elég gyorsan oldalt huzzuk, miáltal rendesen sikerül sík lengéseket előállitani. Legjobb, ha a lengés síkja az élekkel közel 45°-ú szögeket képez. Megvárjuk azután, mig a lengések maguktól elliptikusakká válnak, s megfigyeljük, hogy mily irányban mozog a gömb elliptikus pályáján.

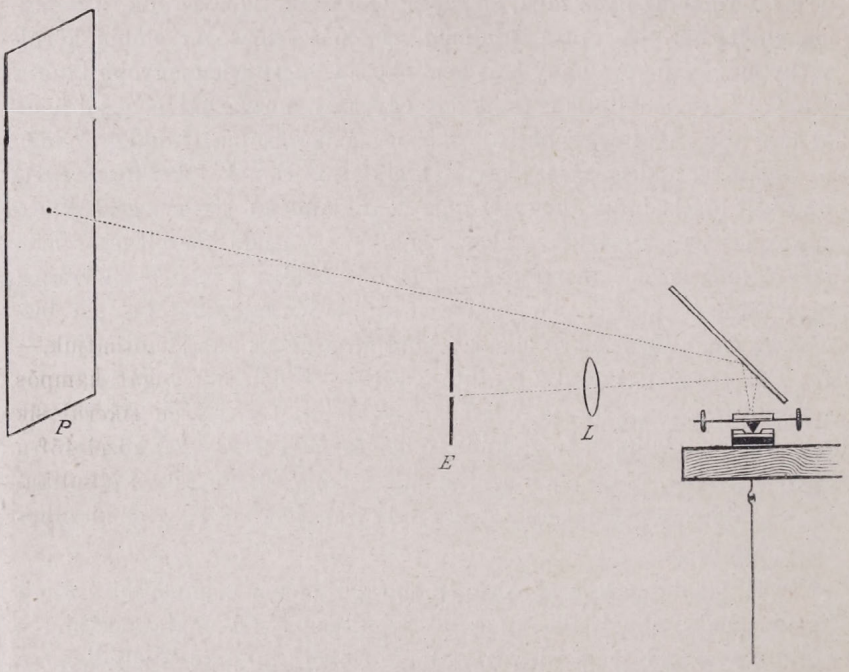
Ha azután a 2-ik ábrában előtüntetett módon megjelöljük a gömb haladásának irányát, akkor a nyilak azon tengely felé mutatnak, amely körül a gyorsabb lengések végeztetnek. Ebből azután megtudjuk, hogy a felső él körül történő lengéseket gyorsítani vagy lassítani kell-e? Amazt az *FF* csavarok közelitése, emezt eltávolitásuk eredményezi.

Részemre Parragh Zsigmond készített ilynemü ingákat, melyeken csak keveset kellett változtatni, hogy a lengések 1—2 óráig csaknem teljesen egyenesek maradjanak; előadási kisérletek tételére meg épen változtatás nélkül alkalmaztattak. — Ha a lengés síkjának látszólagos forgását nagyban akarjuk előtüntetni, akkor *C* lemezre tükröt fektetünk, s egy másik,



2. ábra.

jóval nagyobb tükröt állitunk föléje, akként, hogy az asztal lapjával körülbelől 45°-ú szöget képezzen. A fényforrás elé kerek nyilású ernyőt (*E*, 3-ik ábra) teszünk, s lencse (*L*) közvetitésével a nyilásnak képét állitjuk elő az észlelésre szánt lapon (*P*).



3. ábra.

Megjegyzendő, hogy legczélszerübb az ingát oly irányban megindítani, hogy a lengések sikja közel 45°-ot képezzen az élek irányával; mert különben, hogyha csaknem egyedül egy él körül történnek a lengések, akkor — az előbb emlitett beállitást feltételezve — a lengések nem maradnának síkban, hanem elliptikus mozgás állana elő. Oka ennek abban rejlik, hogy véges lengéseknél a lengés ideje annál nagyobb, minél nagyobbak a kitérések; ebből folyólag t. i. azon esetre, hogyha egyenlők a lengési idők, midőn egyenlő tágasságu lengések végeztetnek az élek körül, akkor *nem* lesznek egyenlők a lengések tartamai, mihelyt az egyik él körül történő lengés tágassága sokkal nagyobb, mint a másik élnek megfelelő lengéskitérése.

Budapest, 1877. szept. 4.

Schuller Alajos.

IRODALOM.

Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. Theodor Reye, Professor der Mathematik an der Universität Strassburg i. E. Zweite vermehrte Auflage. Erste Abtheilung. Mit fünf litographirten Figuren-Tafeln. Hannover. Carl Rümpler 1877 (XII. és 215 l.).

Midőn Poncelet »Traité des propriétés projectives des figures« című halhatatlan munkájában a geometriának azon tanait megalapitá, melyek a mai terminologia szerint ujabb mértannak neveztetnek, e munkában a geometriai idomok mindazon tulajdonságainak kutatását tüzé ki tárgyul, melyek az idomok bárminő centrál vetületeire szintén érvényesek. A geometriai idomok ezen tulajdonságait projectiv tulajdonságaiknak nevezé el. Az idomok projectiv tulajdonságai közé első sorban mindazon tulajdonságok tartoznak, melyek pusztán csak a helyzettől függenek, igy p. hogy a kör az egyenes által két pontban metszetik. E tulajdonság a körnek és az egyenesnek az előbbiek szerint minden centrál vetületére is fennáll, minthogy tudjuk, hogy a kúpszelet is az egyenes által két pontban metszetik. Ily módon a kör ismert tulajdonságaiból a kúpszeletek tulajdonságainak egész seregét hozhatjuk le. Az idomok projectiv tulajdonságai közé nem különben tisztán metrikus tulajdonságok is tartozhatnak, mint p. az anharmonikus viszony, melyről ismeretes, hogy a centrál projectio által nem változik.

Midőn igy Poncelet saját módszerei alapján a síkban elhelyezett idomokat vizsgálá, a térbe kellett mennie, hogy a vizsgálandó idomokat más síkra vetitse. A síkban elhelyezett idomok projectiv tulajdonságainak pusztán csak a síkra szoritkozó tárgyalását Steiner kezdeményezte, midőn az 1832-ben, tiz évvel Poncelet munkájának megjelenése után »Systematische Entwicklungen der Abhängigkeit der geometrischen Gestalten von einander« czimü úttörő munkájában, a pontsor és sugársor szerencsésen választott fogalmak megállapitása után, a pontban és egyenesben ismeré fel a sik egyenjogu elemeit s ezeket projective egymásra vonatkoztatva, két projectiv sugársor megfelelő sugarak metszés pontjai által, valamint két projectiv pontsor projectiv sugarai által eredményül a kúpszeletet nyeré.

Steiner ezen gondolatai képezik az általunk már idézett munkájának alapját, valamint a halála után Schröter ur által sajtó alá rendezett előadásainak is, melyekben azok teljes hatalmukkal fellépve, egész kiterjedésükben érvényre jutnak. Magában Franczia országban, a projectiv mértan szülőföldén, a geometriai tudományoknak ezen uj ága további kifejtését és kiképeztetését, különösen a még ma is élő nagy franczia geometrának Michel Chasles-nak köszöni, ki az uj tanokat, a német nyelv teljes ignorálása mellett, német vetély-

társától egészen függetlenül, első sorban az 1837-ben megjelent »Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles, qui se rapportent à la géométrie moderne«, czimü szellemdús munkájának számos jegyzeteiben (271—542 l.) és az azokat követő két nagy Mémoire-ban (575—848 l.), továbbá pedig »Géométrie supérieure« (1851), valamint legujabban »Traité des sections coniques« czimü munkáiban karolá fel.

Chasles és Steiner, az előbb felsorolt munkáikban az anharmonikus viszony által kifejezett metrikus relatio nagy jelentőségét felismervén, bőségesen alkalmazták elveik és tételeik kifejtéseiben, tekintetbe nem vévén, vajjon a kifejtendő elvek és tételek metrikus természetüek-e, vagy a helyzet geometriájába, azaz a mértannak abba a részébe tartoznak-e, mely az ő vizsgálatainál a mértani idomoknak csupán a helyzettől függő tulajdonságait veszi figyelembe.

Ezekkel ellentétben Staudt, az erlangeni egyetem tanára, »Geometrie der Lage« (1847) és »Beiträge zur Geometrie der Lage« (1856—60) czimü munkáiban a mértani idomoknak, pusztán csak a helyzetre vonatkozó tulajdonságait vizsgálta meg, elvei és tételei kifejtésénél a metrikus relátiók teljes kikerülése mellett, pusztán csak a helyzet geometriájába tartozó alapelvekből és tételekből indulván ki. Alapgondolatát mindenütt a legnagyobb consequentiával és a német tudósokat jellemző, nem ritkán egyoldaluságba eső rendszerességgel vitte keresztül.

Az ismertetendő munka szerzője, ki midőn az első kiadás első részét (1866-ban) sajtó alá rendezte, a zürichi polytechnikumon a »Geometrie der Lage« tanára volt, e munka czéljául — ha e kifejezéssel élnem szabad — Staudt előbb nevezett munkáinak népszerüsitését tüzte ki.

A szóban forgó tankönyv az idevágó ujabb tankönyvirodalom felett, melyek mindnyájan az előbb rövideden jellemzett eredeti forrásokban letett tanok feldolgozását és terjesztését tüzik czéljokul, és Gretschl »Organische Geometrie« czimü munkájának kivételével, csak a sík idomaival foglalkoznak, — az által tünik ki, hogy ezeken kivül a tér idomaira is kiterjeszkedik és ezeket hasonló könnyed modorban tárgyalja, mint a sikidomokat.

A munka második kiadásának, mely az elsőtől több pontban lényegesen eltér, fő javitását emeljük ki, midőn az előadásokhoz csatolt 161—215 lapokra terjedő, 213 szerkesztési feladatot és tantételt emlitjük fel.

A munka előttünk fekvő első része tizenöt előadásra oszlik fel, ezek közől az első három előadás az ujabb mértan sajátságos alapfogalmainak definitiójával és megállapitásával foglalkozik, melyek közől az első előadásban az ujabb mértan ugynevezett alapalakzatainak (Grundgebilde) mint pontsor,

sugársor, síksor (Ebenenbüschel), síkrendszer (ebene Systeme), sugárkéve (Strahlenbündel) és térrendszer (räumliche Systeme) fogalmaival találkozunk. A 4-dik előadás tulajdonképeni kiinduló pontját a harmonikus viszony definitiója képezi, mely a teljes négyszög ugynevezett harmonikus tulajdonsága segitségével adatván, tehát a teljes négyszög helyzeti tulajdonságában leli alapját. Innét kiindulva, a többi alapalakzatok harmonikus tulajdonságai következnek.

Az alap-alakzatok fogalmát adó első előadásban azok három osztályzatba hozatnak, a pontsor, sugársor és síksor az első osztályú alapzatokat (Grundgebilde erster Stufe), a síkrendszer és sugárkéve a másodosztályuakat, végre pedig a térrendszer a harmadosztályút alapitja meg. Az ötödik előadás az első osztályu alapalakzatok projectiv rokonságával foglalkozik. Ez előadást illetőleg ki kell emelnünk, hogy e második kiadásban a következő alapvető tétel Staudt által adott bebizonyitása: »Ha két projectiv alapalakzatban három elempár közös, ugy a többiek is közösek, azaz az alapalakzatok azonosak« Felix Klein megjegyzése folytán nem mutatkozván szigorúnak, az egy másik, Thomaetől eredő által pótoltatott.

A hatodik előadásban a kúpszeletek és másodrendü kúpfelületek állittatnak elő, mig a hetedik előadásban Pascal és Brianchon tételeiből további következtetések vonatnak. A nyolczadik előadás a pólus és polárisok elméletét adja a kúpszeletekre nézve, az annak mintegy folytatását képező 9-dik előadás pedig az átmérők és tengelyek tulajdonságait foglalja magában. Ez utóbbi előadásról még meg kell jegyeznünk, hogy az az új kiadásban a kúpszeletek egyenletét is elénkbe vezeti.

A 10. előadás az egyágu hyperboloid és hyperbolikus paraboloid előállitását tárgyalja, a 11-dik előadás pedig az elemi alakzatok projectiv rokonságával foglalkozik.

A 12-dik és 13-dik előadás az involutorikus alakzatokkal foglalkozik és azokat a kúpszeletek gyujtópontjai tulajdonságainak kifejtésére alkalmazza, a 14 dik előadás pedig a másodfokú feladatokat és a képzetes elemeket tárgyalja. Továbbá az utolsó, 15-dik előadás, a melynek tárgya csak a második kiadásban fordul elő, a másodfoku kúpfelületek főtengelyeit és symmetria-síkjait, továbbá azok focaltengelyeit és cyclicus síkjait foglalja magában, mig végre a már emlitett feladat gyüjteménynyel az ezen munka első része befejeztetik.

A dústartalmu munka, mely, mint már emlitettük, az ujabb tankönyvirodalom idevágó munkái felett, különösen tartalmának azon része által tünik ki, mely a térben elhelyezett idomokra vonatkozik, a szerző előtt lebegett czélnak

minden tekintetben megfelel. Mindazoknak figyelmébe ajánlható, kik Staudt »Geometrie der Lage« czimü munkájában kifejtett elméletekkel megismerkedni óhajtanak, annyival inkább, minthogy ennek előzetes olvasása lehetségessé teszi az eredetinek, Staudt legnagyobb következetességgel, de nehézkes modorban tartott klassikus munkájának sikeres tanulmányozását. *H. J.*

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

25. Az m tömegű anyagi pont az X tengely irányában valahol és valamikor egyszerű rezgő mozgást követ. Hány adat szükséges arra, hogy ez a mozgás minden egyéb, az X tengely irányában egyebütt és egyébkor végbemenő egyszerű rezgő mozgástól teljesen meg legyen különböztetve. Más szóval, az X tengely irányában végbemenő egyszerű rezgő mozgásnak hány állapotjelzője van? s melyek lehetnek azok? (Szily).

E feladat czélja: arra figyelmeztetni, hogy — valamint a *nyugvó* pont helyét a térben 3, egymástól független adattal, valamely síkban 2 adattal, valamely egyenesben 1 adattal, t. i. az ugynevezett helyhatározók, (koordináták) segedelmével tökéletesen meg lehet határozni, — ép ugy lehet a *mozgó* pontnak bizonyos, megadott törvény szerint végbemenő mozgását bizonyos számú, egymástól független adattal, mondjuk *mozgáshatározók* segedelmével teljesen meghatározni. Igy például a legegyszerűbb mozgásnak, t. i. az adott egyenes irányában végbemenő *egyenletes* mozgásnak 2 mozgáshatározója van, ú. m. 1.) a pont helye az egyenesen valamely t_0 pillanatban, 2) a pont állandó sebessége. Ép igy *az egyenletesen változó* mozgásnak, mely egy adott egyenesen megy végbe, 3 mozgáshatározója van, ú. m. 1.) a pont helye az egyenesen valamely t_0 pillanatban, 2.) a pont sebessége valamely t_0 pillanatban és 3.) a pont állandó gyorsulása.

A mi már most az adott egyenesen végbemenő *egyszerű rezgő mozgást* illeti, az előre bocsátottak után, könnyen belátható, hogy ennek a mozgásnak 4 mozgáshatározója van, ú. m. 1.) a pont helye az egyenesen valamely t_0 pillanatban, 2.) a pont sebessége valamely t_0 pillanatban, 3.) a rezgés tágassága (amplitúdja) és 4.) a rezgés ideje. A mozgáshatározókat különben többféleképen lehet választani, ép ugy, mint a nyugvó pont helyhatározóit a választott koordináta rendszerhez képest különféleképen adhatjuk meg. Az egyszerű rezgő mozgásnál meg lehetnek adva, például, 1.) az amplitúdon, 2.) a rezgésidőn kivül, 3.) a nyugalmi pont helye az egyenesen, 4.) a nyugalmi ponton való átmenet időpillanata.

Hogy ennél a mozgásnál csakugyan 4, egymástól független adat szükséges a mozgás teljes jellemzésére, világosan kitünik e mozgás differentiális egyenletéből is, mely igy hangzik:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{i^2}(x-\alpha),$$

hol az x koordináta a pontnak t időpillanatbeli távolát jelenti az X tengelyen valahol fölvett kezdőponttól; i a rezgés periodusa; α a nyugalmi helynek, — vagyis annak a helynek, hol a gyorsulás zérus — távola a kezdő ponttól. E differentiál egyenletben már két állandó van, u. m. i és α. Ha már most e másodrendű differentiál-egyenletet integráljuk, az eredménybe még két egészleti állandó lép be, ugy hogy az x koordináta időfüggvényében mindössze 4, egymástól független állandó fog előfordulni. Ez az időfüggvény, mint ismeretes, igy irható:

$$x - \alpha = a \cdot \sin\frac{2\pi}{i}(t-\tau),$$

hol a 4 állandó: a, i, α és τ, és a hol

a a rezgés amplitúdja,

i a rezgés periodusa,

α a nyugalmi hely távola a kezdőponttól,

τ a nyugalmi helyen való átmenet időpillanata.

A míg e mozgást semmi sem háborgatja, a, i, α és τ állandók maradnak, maguktól meg nem változnának soha. Arra, hogy valamelyik a 4 közül megváltozzék, erély kell, vagy elevenerő vagy végzett munka alakjában.

---

26. Az m tömegű anyagi pont az X tengely irányában egyszerű rezgő mozgást követ, melynek periodusa i. Mennyi erélyt kell vele közölni (elevenerő és végzett munka alakjában) az i idő elfolyása alatt, hogy a mozgáshatározók egyenletes gyarapodással növekedve, ezen i idő alatt végtelen kis növekményre tegyenek szert. (Szily).

Az a, i, α, τ mozgáshatározóknak az i idő lefolyása alatt *egyenletes gyarapodással* végbement végtelen kis növekményeit

$$\delta a,\ \delta i,\ \delta\alpha,\ \delta\tau$$

symbolumokkal jelölvén, a dt idő alatt végbement növekményeik lesznek:

$$\frac{\delta a \cdot dt}{i},\ \frac{\delta i \cdot dt}{i},\ \frac{\delta\alpha \cdot dt}{i} \text{ és } \frac{\delta\tau \cdot dt}{i}$$

E növekmények miatt, az

$$x - \alpha = a \sin\frac{2\pi}{i}(t-\tau) \qquad 1)$$

egyenlet értelmében, dt idő alatt az x-nek is lesz megfelelő, szintén másodrendü kicsiny növekménye, melyet

$$\frac{\delta x \cdot dt}{i}$$

symbolummal akarunk jelölni. Az itt szereplő δx értékét, a többi mennyiségek növekményeiben kifejezve, az 1.) egyenlet variálásából kaphatjuk meg. E variá-

lás közben vagy követhetjük Lagrange, Jacobi számitási modorát, a kik az ő dynamikáikban az időt mindig független változónak veszik, s következésképp az idő variatióját mindig zérussá teszik, vagy haladhatunk Hamilton nyomain, a ki a független változó megválasztásában nem köti meg a kezeit s következésképp nem is teszi fel azt a specialis esetet, hogy δt zérus legyen. Mi ezt az utóbbi, általánosabb számitási modort akarjuk követni.

Egyszerűbb irásmód kedveért, jelöljük a

$$\frac{2\pi(t-\tau)}{i}$$

kifejezést egyelőre egy betüvel, ψ-vel, úgy:

$$\delta x = \delta\alpha + \sin\psi \,.\, \delta a + a\cos\psi\,\delta\psi\,.$$

és igy a mozgó pontnak *a háborgatás okozta* elmozdulása a dt idő alatt:

$$\frac{\delta x \,.\, dt}{i} = (\delta\alpha + \sin\psi \,.\, \delta a + a\cos\psi\,\delta\psi)\frac{dt}{i}\,.$$

Minthogy pedig a pontnak gyorsulása a t pillanatban:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{i^2}(x-\alpha) = -\frac{4\pi^2 a}{i^2}\sin\psi.$$

a háborgatás következtében a pont által dt idő alatt végzett munka lesz:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\delta x dt}{i} = m\,.\,\frac{4\pi^2 a}{i^2}\sin\psi(\delta\alpha + \sin\psi\delta a + a\cos\psi\delta\psi)\frac{dt}{i}. \quad 2)$$

Mennyi lesz a pont eleven erejének a háborgatás okozta változása dt idő alatt? Jelöljük a pont sebességét x'-gyel és eleven erejét T-vel, ugy e változás, analóg jelölést követvén:

$$\frac{\delta T \,.\, dt}{i} = \frac{\delta\left(\frac{mx'^2}{2}\right).dt}{i}$$

vagy még:

$$\frac{\delta T \,.\, dt}{i} = \frac{mx'\,\delta x' \,.\, dt}{i}\,.$$

Az 1.) alatti egyenletből lesz:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{2a\pi}{i}\cos\psi\,.$$

továbbá:

$$\delta x' = \frac{2\pi}{i}\cos\psi\delta a - \frac{2a\pi}{i^2}\cos\psi\delta i - \frac{2a\pi}{i}\sin\psi\,.\,\delta\psi\,.$$

és igy az elevenerőnek a háborgatás okozta változása dt idő alatt:

$$\frac{\delta T.dt}{i} = m\,.\,\frac{2a\pi}{i}\cos\psi\left(\frac{2\pi}{i}\cos\psi\,.\,\delta a - \frac{2a\pi}{i^2}\cos\psi\,.\delta i - \frac{2a\pi}{i}\sin\psi\delta\psi\right)\cdot\frac{dt}{i} \quad 3)$$

A 2.) és 3.) alatti két erélyrészletet összeadván, megkapjuk a dt idő alatti háborgatásra szükséges erélyt, a mit megfelelőleg:

$$\frac{\delta Q \,.\, dt}{i}$$

kifejezéssel jelölvén, némi összevonás után lesz:

$$\frac{\delta Q.dt}{i} = m.\frac{4\pi^2 a}{i^3}\left[\sin\psi\delta\alpha + \delta a - \frac{a}{i}\cos^2\psi\,\delta i\right]dt. \qquad 4)$$

Az i idő elfolyása alatt a háborgatásra szükséges erélyt megkapjuk, ha ezen egyenletet o és i határok között integráljuk:

$$\int_o^i \frac{\delta Q.dt}{i} = m.\frac{4\pi^2 a}{i^3}\left[\delta\alpha\int_o^i \sin\psi dt + \delta a\int_o^i dt - \frac{a\delta i}{i}\int_o^i \cos^2\psi.dt\right].$$

Behelyettesitvén ψ helyébe annak értékét, u. m. a

$$\frac{2\pi(t-\tau)}{i}$$

kifejezést és tekintetbe vévén, hogy a, i és τ differentiálja zérus, leszen:

$$\int_o^i \frac{\delta Q.dt}{i} = m.\frac{4\pi^2 a}{i^3}\left(i\delta a - \frac{a}{2}\delta i\right) = m.\frac{2\pi^2}{i}\left(\frac{2iad a - a^2\delta i}{i^2}\right) =$$

$$= m.\frac{2\pi^2}{i}\delta\left(\frac{a^2}{i}\right). \qquad 5)$$

Jelöljük az egyes mennyiségeknek i idő alatti középértékét, akként, hogy az illető mennyiség fölé vizszintes vonást húzzunk, ugy:

$$\int_o^i \frac{\delta Q.dt}{i} = \delta\overline{Q}$$

és:

$$2\overline{T} = \int_o^i \frac{2Tdt}{i} = m.\frac{4a^2\pi^2}{i^3}\int_o^i \cos^2\psi.dt$$

vagy még:

$$2\overline{T} = m.\frac{2a^2\pi^2}{i^2}$$

és e szerint:

$$m.2\pi^2\frac{a^2}{i} = 2i\overline{T}$$

következésképp *a keresett erély* az 5.) értelmében:

$$\overline{\delta Q} = \frac{1}{i}\delta\left(2i\overline{T}\right). \qquad 6.)$$

Nevezzük a közlött erélynek és a periodus alatti közép-eleven erőnek viszonyát Clausiussal entrópia változásának és jelöljük δS-sel, úgy:

$$\delta S = \frac{\delta\overline{Q}}{T} = \delta\log\left(i\overline{T}\right)^2$$

Foglaljuk össze az eredményeket:

1.) Az egyszerű rezgő mozgás másodrendü végtelen kicsiny háborgatására dt idő alatt szükséges munka és elevenerő, külön-külön véve, (mint a 2. és 3. alatti egyenletek mutatják) 4 független változótól, u. m.: a, i, α és τ-tól függ.

2.) Az egyszerű rezgő mozgás másodrendü végtelen kicsiny háborgatására dt idő alatt szükséges erély (mint a 4. alatti egyenlet mutatja) már csak 3 független változótól, u. m. a, i és α-tól függ.

3.) Az egyszerü rezgő mozgás elsőrendü végtelen kicsiny háborgatására i idő alatt szükséges erély (mint az 5. vagy 6. alatti egyenlet mutatja) már csak 2 független változótól, u. m. i és $\frac{a^2}{i}$ vagy a mi egyre megy i és $i\,\overline{T}$ változóktól függ.

4.) Az egyszerü rezgő mozgás elsőrendü végtelen kicsiny háborgatására idő alatt szükséges entrópia-változás már csak 1 változótól, u. m. $i\,\overline{T}$-től függ.

FELADATOK.

33. Ha (i, k, l)-el a következő determinánst :

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

jelöljük, ugy bebizonyitandó, hogy :

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3 + y_3z_2 & z_2x_3 + z_3x_2 & x_2y_3 + x_3y_2 \\ x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 & y_3z_1 + y_1z_3 & z_3x_1 + z_1x_3 & x_3y_1 + x_1y_3 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2 + y_2z_1 & z_1x_2 + z_2x_1 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_1x_4 & y_1y_4 & z_1z_4 & y_1z_4 + y_4z_1 & z_1x_4 + z_4x_1 & x_1y_4 + x_4y \\ x_2x_4 & y_2y_4 & z_2z_4 & y_2z_4 + y_4z_2 & z_2x_4 + z_4x_2 & x_2y_4 + x_4y_2 \\ x_3x_4 & y_3y_4 & z_3z_4 & y_3z_4 + y_4z_3 & z_3x_4 + z_4x_3 & x_3y_4 + x_4y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(234)(341)(412)(123) \qquad H.\ J.$$

34. Határoztassék meg az

$$x = a_1 + c_1 t + \frac{p_1}{2} t^2$$

$$y = a_2 + c_2 t + \frac{p_2}{2} t^2$$

$$z = a_3 + c_3 t + \frac{p_3}{2} t^2$$

egyenletek által ábrázolt parabola síkjának, főtengelyének, csúcsának fekvése és paraméterének nagysága. *(Sz. K.)*

Budapest, 1877. Nyomtatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

II. kötet. 1877. 19. füzet.

A PROPELLER-CSAVAR ELMÉLETÉHEZ.

Réthy Mór, kolozsvári tudom. egyetemi tanártól.

Szerkeszszünk Archimédes-féle csavart és szeljük ki egy részét olyan véges hosszaságú, egyenes hengercső segélyével, a mely a csavarral közös tengelyü.

Kérdés, hogy e csavarrész (hajó alá propellerül szokott módon alkalmazva és tengelye körül forgatva) nagyobb erővel fogja-e a hajót hajtani, mint akármilyen más alaku s nagyságu felületnek

1.) ugyanazon határvonalak közötti része, és

2.) ugyanazon hengercső határai közötti része? föltéve, hogy az összehasonlitott felületek sebessége egyenlő.

Eme, gyakorlati tekintetben is érdekes kérdések közül az elsővel Szily foglalkozott legelőször és megmutatta[1]), hogy bizonyos föltételek mellett igennel kell válaszolnunk a föltett kérdésre; bizonyitása azonban nem teljes, abból az okból, mert a második variátió megvizsgálásánál csak egyenes konoidokkal hasonlitja össze a szemügyre vett Archimédes-féle csavart. A bizonyitást e tekintetben kiegészíti e közlemény irójának »a propeller- és peripeller-felületek elméletéhez« czimü dolgozata.[2])

A 2.) alatti kérdéssel e sorok irója foglalkozott először ugyancsak imént idézett dolgozatában és megmutatta, hogy a kérdésre határozottan nemmel kell válaszolnunk.

A jelen közlemény is ugyanezen két kérdéssel részletesebben foglalkozik; egyuttal megmutatja, minő változást kell eszközölni az Arch.-féle csavaron arra nézve, hogy előnyösebb propellerré váljék.

---

[1]) M. L. 2. füzete 41—49. l. Előadatott az Akad. 1875. okt. 11-ki ülésén.

[2]) Ért. a math. tud. köréből; magy. tud. Ak. 1876.

Szily megmutatta fennidézett dolgozatában, hogy a propeller nyomásának componense a haladás irányában (az ott használt jelölésekkel élve)

1.) $$P = \zeta \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{r_0}^{r_1} \frac{\left(u - w\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 r}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} dr\, d\varphi$$

hol a kettős egészlet által jelölt összegezés a propeller egész felületére kiterjed. Mielőtt e kettős egészlet maximumával foglalkoznánk, a következőket bocsátom előre. Az erő ezen kifejezése elméletileg véve épen nem pontos és csakis bizonyos gyakorlati határok között adja az erő közelített értékét. Azért, ha czélszerünek mutatkozik, kihagyhatjuk e kifejezésnek olyan tagjait, a melyek az összest kicsinységöknél fogva kevéssé befolyásolják.

Fejtsük ki az egészlet alatt álló négyzetet és oszszuk az egészletet három összegezendőre, ily módon:

$$P = u^2 A + u\, w\, B + w^2 C,$$

Ha a propeller az álló vizben u sebességgel halad, de nem forog, akkor, láthatjuk e kifejezésből, $P = u^2 A$; ha nem halad, de forog, akkor $P = w^2 C$; végezetül ha halad is forog is, akkor az összes erő és az imént láttuk két erő összege nem azonos s a középső tag a különbséget adja. E harmadik eset a gyakorlatban legfontosabb.

Azt állitjuk, hogy a gyakorlatban tekintetbe jövő esetekben az első tag elenyésző az egész összeghez képest. Valóban a gyakorlat terén, az aránylag kicsiny propeller-csavar gyors forgásával egy vagy több hajót egyenletesen hajtván, az összes erőt a viz ellenállása emészti fel a hajó vagy hajóknak a vizben álló részei mozgása ellenében (súrlódás, s a viztömegek mozgásba hozatala miatt); azon ellenállás pedig, a mely maga a propeller-szárny ellen tanusíttatnék, föltéve, hogy u sebességgel forgás nélkül mozogna, olyan arányban állván az összes ellenálláshoz, mint a propeller-csavar dimensiói az egész hajóéhoz, világos hogy elhanyagolható. Következésképen elhagyható az $u^2 A$ tag, a mely kisebb ezen elhanyagolható ellenállás értékénél is, miután a surlódást nem veszi számba. Marad tehát az erő kifejezéséből a második és harmadik tag, vagyis:

$$P = \zeta \int\int \frac{\left[w^2\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 - 2\, u\, w \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right] r}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} dr\, d\varphi$$

Összehasonlitva e képletet az 1.) alatti eredetivel, láthatni, hogy a számlálóban álló zárjeles mennyiségből itten az u^2 hiányzik. Könnyü tehát algebraice is kifejezni a föltételt arra nézve, hogy az utóbbi képlet érvényes legyen. Ugyanis az $\frac{u}{w}$ aránynak olyan kicsinynek kell lenni a $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$-hez képest, hogy négyzete az utóbbiéhoz képest elhanyagolható legyen. *Igy tehát kimondhatjuk, hogy az* $\frac{u}{w} : \frac{\partial z}{\partial \varphi}$ *arány a gyakorlatban tekintetbe jövő esetekben igen kicsiny.*

Hogy ne kelljen később okoskodásainkat kelletinél gyakrabban félbeszakitani, itt végezzük azon számitásokat, a melyekre később gyakran lesz szükségünk. Jelöltessék:

2.)
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \varrho\,, \qquad \frac{u}{w} = k$$
$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \pi\,, \qquad \zeta w^2 = A_1$$

s válaszszuk az erőegységet ugy, hogy $A_1 = 1$ legyen. Legyen továbbá

3.)
$$V = \frac{(\pi - k)^2 \cdot r}{1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}}\,.$$

Akkor:
$$P = \int\int V\, dr\, d\varphi$$

Már mostan ϱ és π szerinti deriválás által ered:

4.)
$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = -r\varrho(\pi - k)^2 s^{-2}$$
$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = +r(\pi - k)s^{-1} - r^{-1}\pi(\pi - k)^2 s^{-2}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = -r(\pi - k)^2 s^{-2} + 4r\varrho^2(\pi - k)^2 s^{-3}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho \partial \pi} = 2r\varrho(k - \pi)s^{-2} + 4r^{-1}\varrho\pi(\pi - k)^2 s^{-3}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} = rs^{-1} - r^{-1}(\pi - k)(5\pi - k)s^{-2} + 4r^{-3}(\pi - k)^2 s^{-3}$$

hol röviditésül tétetett:
$$s = 1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}$$

I. Kérdezzük mindenek előtt, nagyobb lesz-e az Arch.-féle csavar kiszelvényének hajtó ereje, mint akármilyen más felületnek *vele közös határvonalú* kiszelvényeé?

A hajtó erő első variátiója a jelen esetben:

$$5.) \qquad \delta P = -\iint \left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi}\right] \delta z \,.\, d\varphi\, dr$$

Ha már mostan az egészlet utáni zárjeles mennyiség kifejtésében behelyetteztetik az Arch.-féle felület egyenletének értelmében

$$z = a\varphi + b, \ldots \text{ (hol } a \text{ és } b \text{ állandók)}$$

tehát $\varrho = o$, $\pi = a$, akkor látható, hogy $\frac{\partial V}{\partial \varrho} = o$ és a $\frac{\partial V}{\partial \pi}$ csakis az r függvényévé válván, a zárjeles mennyiség értéke zérus, tehát $\delta P = o$. Igy tehát az összehasonlitás jelen körében az Arch.-f. csavar megfelel a max. min. *első* föltételének.

A *maximum* második föltétele az, hogy a nyomásnak második variátiója negativ legyen.

A második variátió kiszámitásánál a következők veendők tekintetbe. Először épugy, mint az első variátiónál, úgy itt is elesnek a határra vonatkozó részek: másodszor az 5.) alatti kifejezés, miként láttuk, zérussá lesz, az Arch.-f. csavar egyenlete által; harmadszor ugyanezen egyenlet által mind a V mind annak deriváltjai csupán az r függvényeivé válván, világos, hogy ez utóbbiak φ szerinti differentiáljai zérusok. Ezeket tekintetbe véve, könnyü számitások (partiális egészelések) után kijő:

$$\delta^2 P = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} (\delta z)^2 \, d\varphi \, dr$$

E variatióban az Arch.-féle csavar egyenletének értelmében teendő $\varrho = 0$, $\pi = a$, miáltal leszen most:

$$6.) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = -2(k-a)^2 r^5 (a^2 + r^2)^{-2}$$

honnan:

$$7.) \qquad \frac{d}{dr}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = -2(k-a)^2 (r^6 + 5a^2 r^4)(r^2 + a^2)^{-3}$$

és:

$$\frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = 8(k-a)^2 (r^2 - 5a^2)(r^2 + a^2)^{-4}$$

Az eredmény tehát az, hogy esetünkben:

$$8.) \qquad \delta^2 P = 4(k-a)^2 \int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{r^2 - 5a^2}{(r^2 + a^2)^4} (\delta z)^2 \, d\varphi dr$$

Ennek a mennyiségnek a $(\delta z)^2$ tetszés szerinti értéke és függvényalakja mellett *negativ*-nak kell lenni arra nézve, hogy az Arch.-f. csavar nyomása nagyobb legyen az összehasonlitottakénál. Következésképen erre nézve negativnak kell lenni az egészlet alatt álló $r^2 - 5a^2$ mennyiségnek a kiszelvény mindenik pontjában, — mivelhogy a többi szorzók mind positivok, részint definitiójuk, részint négyzetes voltuknál fogva. E föltétel megvan, mihelyt $r_1^2 - 5a^2$ negativ vagy zérus, mivelhogy r_1 a legnagyobb radius vector az egész kiszelvényben.

Vagyis a maximum elegendő és szükséges föltétele az, hogy

$$\frac{a}{r_1} \leqq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

legyen, mely föltételt másképen is kifejezhetünk.

Jelölve ugyanis α-val *annak a csavarvonalnak az emelkedése szögét*, a mely az Arch.-f. csavarfelületet az r_1 sugaru hengeren határolja, lészen:

$$tg\alpha = \frac{a}{r_1};$$

tehát a maximum föltétele egyszerüen az, hogy legyen:

$$\alpha \leqq arctg \frac{1}{\sqrt{5}}$$

azaz:

$$\alpha \leqq 24^\circ\ 5'\ 41'' \ldots .$$

Mielőtt ezek után az eredményt szavakba foglalnám, nem mulaszthatom el, hogy egy megjegyzést előre ne bocsássak. Ugyanis, mint minden maximum-minimum feladatnak, ugy a szóban lévőnek is *lehet* egynél több megoldása is, s hogy van-e vagy nincs, az első sorban attól függ, hogy az első derivált, illetőleg variátió elenyészését eszközlő egyenleteknek *egy* vagy *több* megoldásuk van-e. Már mostan, ha az analysis nehézsége miatt nem birjuk mind a megoldásokat megkapni, hanem csak egygyel kell beérnünk, a vizsgálat megejtése után csak annyit mondhatunk, hogy a szóban lévő maximális (-minimális) mennyiség az összehasonlitás bizonyos szükebb vagy tágabb körében legnagyobb (illetőleg legkisebb). Gondoljunk csak egy hullámalaku görbe vonalra; mindegyik hullámnak van egy legmagasabb s egy legmélyebb pontja; azaz a görbének több pontja van, melyek mindegyikéről elmondhatjuk, hogy az összehasonlitás bizonyos körében legmagasabb, illetőleg legmélyebb fekvésü. *Ezeket szem előtt tartva*, igy mondhatjuk ki eredményünket:

Ha a szegélyző külső csavarvonal emelkedése nem kisebb (közel) 24 foknál, akkor az Archimédes-féle csavar a vele közös határvonaluak között a legjobb propeller vagy legalább is egyike a legjobbaknak.

Épugy könnyü belátni, hogy ugyancsak az Arch. f. csavarnak kiszelvénye egyike a legrosszabb propellernek, mihelyt már a szegélyző belső csavaremelkedése is kisebb mint 24° .... Épugy, hogy se legjobb, se legrosszabb, ha a belső emelkedése nagyobb, de a külsőé kisebb mint 24° ....

Ezen eredmény különbözik a Szilyétől, és első tekintetre ellenmondásban áll vele. De az ellenmondás megszünik, ha tekintetbe veszszük, hogy Szily *csak* egyenes konoidokat hasonlitott össze az Arch.-féle csavarral, mig nálunk ilyen megszoritás nincs.

II. *Kérdés, milyen emelkedést kell adni az Arch.-f. csavarnak,* ha azt akarjuk, *hogy* az adott hosszuságu és sugaru kettős hengercső két köpenye és két alapja közötti *része jobb legyen propellernek, mint akármilgen más hajlásu Arch.-f. csavaré?*

Kiszámitva az Arch.-f. csavar nyomását, lészen ($z = a\varphi + b$ behelyettesítésével, t. i.):

$$P = \int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{(a-k)^2 r^2}{a^2 + r^2}\, d\varphi\, dr$$

s az itt kijelentett könynyü egészelések elvégzésével:

$$2P = (\varphi_1 - \varphi_0)(a-k)^2 \Big|_{r_0}^{r_1} [r^2 - a^2 \log(a^2 + r^2)]$$

Az a mennyiség, a melynek választása által a P-t lehetőleg nagygyá akarjuk tenni, nem egyéb, mint az a; az r_0, r_1 mennyiségek adottak s a k is annak tekintendő. Nem ugy a φ_1 és φ_0, mely mennyiségek kifejezendők az a és az adatok által. Ámde $z = a\varphi + b$ lévén, álland:

$$z_1 = a\varphi_1 + b \text{ és}$$
$$z_0 = a\varphi_0 + b$$

következésképp levonásuk után:

$$z_1 - z_0 = a(\varphi_1 - \varphi_0).$$

Úgy hogy:

9.) $$2P = (z_1 - z_0)\frac{(a-k)^2}{a} \Big|_{r_0}^{r_1} [r^2 - a^2 \log(a^2 + r^2)],$$

hol $z_1 - z_0$, miként a levezetés utolsó soraiból látható, a hengercső adott hosszaságát jelenti.

A maximum első föltétele az, hogy $\frac{\partial P}{\partial a} = 0$, a második föltétele, hogy $\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} < 0$ legyen.

A számitás általánosan elvégezve bonyolódott lévén, csak arra az esetre szoritkozunk, a midőn a $\frac{k}{a}$ tört oly kicsiny, hogy négyzete az egységhez képest elhanyagolható, — annál is inkább, mert miként a bevezetésben megmutattuk, ez a gyakorlat esete $\left[\text{ugyanis } k = \frac{u}{w} \text{ és } a = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right]$; aligha tévedünk, ha e tört fölső határát legfeljebb $\frac{1}{10}$-re becsüljük. — Azonkivül a hengercső belső sugara r_0 zérusnak fog vétetni.

Igy azután elhanyagolván a k^2-et, tévén $r_0 = 0$ és irván r_1 helyett r-t, végezetül kényelem szempontjából elhagyván az ugyis positiv $\frac{1}{2}(z_1 - z_0)$ tényezőt, — lészen:

$$P = (a - 2k)\left[r^2 - a^2 \log\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)\right]$$

Ebből rendezés után:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = (3a^2 - 4ak)\left\{\frac{r^2}{a^2 + r^2}\left[1 + \frac{r^2}{3a^2 - 4ak}\right] - \log\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)\right\}$$

Hogy a $\frac{\partial P}{\partial a} = 0$ egyenletet megfejthessük, az ismeretlen a szerint, igy járunk el:

$$\frac{1}{3a^2 - 4ak} = \frac{1}{3a^2}\left[1 - \frac{4}{3}\cdot\frac{k}{a}\right]^{-1} = \frac{1}{3a^2}\left[1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{k}{a} + \frac{16}{9}\cdot\frac{k^2}{a^2} + \cdots\right]$$

mely kifejtés érvényes, ha

$$\frac{3}{4} > \frac{k}{a} > -\frac{3}{4}.$$

Elhanyagolva az 1-nél magasabb hatványokat, lészen tehát behelyettezés és rendezés után:

$$10.)\quad \frac{\partial P}{\partial a} = \frac{3a^2 - 4ak}{3}\left\{\frac{r^2}{a^2 + r^2}\left[3 + \frac{r^2}{a^2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{k}{a}\cdot\frac{r^2}{a^2}\right] - 3\log\left[1 + \frac{r^2}{a^2}\right]\right.$$

Teszünk már mostan a nagy zárjelek közötti mennyiségben $\frac{r^2}{a^2}$ helyett x-et s megoldjuk x szerint az ugy eredő ezen egyenletet:

$$11.)\quad \frac{x(3+x)}{1+x} - 3\log(1+x) + \frac{4}{3}\cdot\frac{k}{a}\cdot\frac{x^2}{1+x} = 0.$$

Egyenletünk egyik gyöke $x = 0$ nem jöhet tekintetbe, mert akkor $a = \infty$, — vagyis, szóval az Arch.-féle csavar meridián síkká degenerálódnék. A második valós gyököt, — ha ugyan van, — a $\frac{k}{a}$ arány függvényének tekintvén, kifejtve gondoljuk ezen arány positiv hatványai szerint; ugy hogy:

$$x = A + B.\frac{k}{a} + \cdots$$

Ha $k = o$, akkor $x = A$. Ámde az egyenlet gyöke $k = o$ esetében, miként könnyü meggyőződni, közel 1, 82. Tehát:

$$A = 1, 82.$$

Továbbá a Mac-Laurin sora értelmében:

$$B = \left[\frac{\partial x}{\partial\left(\frac{k}{a}\right)}\right]_{k=0}$$

mely értéket az x-et defineáló, 11.) alatti egyenletünkből kiszámitva, lészen:

$$B = -8.$$

A keresett megoldás tehát, — eltekintve a $\frac{k}{a}$ magasabb hatványaitól:

12.) $$x = 1, 82 - 8\frac{k}{a}$$

hol:

13.) $$x = \frac{r_1^2}{a^2}$$

Ezzel a maximum-minimum megfejtését képező a meg van határozva mint a k és r_1 függvénye.

A második deriváltat az első derivált ezen alakjából képezzük:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \left(a^2 - \frac{4}{3}ak\right)\left\{\frac{x(3+x)}{1+x} - 3\log(1+x) + \frac{4}{3}\frac{kr^4}{a^5 + a^3r^2}\right\}$$

Tekintve, hogy ez zérus, lészen némi összevonás után:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} = -\frac{2x^2(3a-4k)}{3(1+x)^2}\left\{x - 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{k}{a}(5+3x)\right\}$$

mely kifejezés zárjelek közötti részébe betévén, az x-nek 12.) alatti értékét, eredményül kijő:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} = -\frac{2x^2(3a-4k)}{3(1+x)^2}\left(0,8 - \frac{k}{a}\right)$$

A jobb oldalon álló tényezők egytől egyig positivok lévén a $\frac{k}{a}$ azon határai között, a meddig a lefejtés érvényes volt, a második derivált határozottan negativ. Megfejtésünk tehát maximumhoz tartozik.

A 12.) és 13.) alattiakat egyesitve, következik, hogy:

$$\frac{r_1}{a} = \sqrt{1,82} - 4\frac{k}{r_1}.$$

Ebből látható, hogy minél nagyobb k, annál kisebb az $\frac{r_1}{a}$. Ámde

$$\frac{r_1}{a} = \operatorname{cotg} \alpha,$$

tehát növekedő haladó gyorsasággal [adott forgásbeli sebesség mellett] növekedik a legelőnyösebb Archimédes-féle csavar emelkedése is:

Ha pl. $k = o$, akkor $\frac{r_1}{a} = \sqrt{1,82}$, tehát

$$\alpha = 36^0\,30'$$

Ha $\frac{k}{r_1} = \frac{1}{10}$, akkor $\frac{r_1}{a} = 1$, tehát:

$$\alpha = 45^0 \left[\text{ez esetben tehát } \frac{k}{a} \text{ is épen } = \frac{1}{10}\right]$$

Gondoljuk még meg, hogy:

$$\frac{k}{r_1} = \frac{u}{w r_1},$$

azaz ezen arány nem egyéb, mint a csavar karimája akármely pontjának haladás és forgásbeli sebességei közötti arány. Akkor eredményünket igy foglalhatjuk szavakba:

Minél gyorsabban halad a hajó a csavarnak egyenlőn gyors forgása mellett, — azaz minél kisebb teherszállitásra van szánva, — annál nagyobbnak kell lenni a csavar emelkedésének. E szög $36^1/_2$ foktól 45^0-ig emelkedik, ha a szegélyző csavarvonal pontjainak két rendbeli gyorsasága közötti arány 0-tól $\frac{1}{10}$-ig nő.

III. Szerkeszszünk az imént előadottak szerint olyan Archimedesi csavart, a melynek emelkedése az adott körülmények között a legelőnyösebb. Akkor az I. alatt előadottak szerint ezen csavar hajtóereje nagyobb, mint akármilyen más alaku, vele közös határvonalu felületé. *Kérdés azonban, nagyobb-e a hajtóereje mindazon felületeknél is, a melyek határvonalai mások, habár ugyanazon hengercső palástjain és alapjain vannak is, mint az övéi?*

Az Arch.-féle csavart szegélyezik: B és K csavarvonalak a hengercső belső és külső palástján, továbbá A és F egyenesek az alsó és felső alapon. Hasonlitsunk vele össze:

1.) olyan felületeket, a melyek ugyanazon egyenesekkel szegélyeztetnek ugyan, de a hengercső palástjain nem a B és K, hanem e helyett tőlük végtelen kevéssé különböző más vonalakkal.

Kiszámitandók azt a különbséget, a melylyel az Arch.-féle csavarrészt a vele összehasonlitott, hajtóerő tekintetében, fölülmulja, forduljunk a Moigno-Lindelöff »Calcul des variations« munkának 83. lap 9. sz. a. álló képlethez, melyben jelölésünkhöz képest x és y helyett r és φ, továbbá P és Q helyett $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ és $\frac{\partial V}{\partial \pi}$ végezetül N helyett zérus teendő. Akkor lészen:

$$\delta P = -\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi}\right]\delta z\, d\varphi\, dr+\int_{r_0}^{r_1} dr\left|\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}-\frac{\partial V}{\partial \varrho}\frac{d\varphi}{dr}\right)\delta z\right|_{\varphi_0}^{\varphi_1}$$

14.)

$$+\left|\int_{r_0}^{r_1}\frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\, d\varphi\right|_{\varphi_0}^{\varphi_1}+\int_{r_0}^{r_1} dr\left|V\delta\varphi\right|_{\varphi_0}^{\varphi_1}+\left|\int_{r_0}^{r_1} V\delta r\, d\varphi\right|_{\varphi_0}^{\varphi_1}$$

Az egészletek kiszámitandók az Arch.-féle felület egyenletének s a határvonalakra vonatkozó föltételek felhasználásával. Vegyük sorra.

Az első egészlet, miként I. alatt láttuk, zérussá lesz az Arch.-f. csavar egyenlete által. A második egészletben álló menyiségek a szegélyző *egyenesekhez* tartoznak; ezek közösek lévén $\delta z = 0$, tehát az egészlet is. A harmadik egészlet a henger palástján lévő nem közös határvonalakhoz tartozván, itt a δz nem zérus; de a $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ az, miután ennek a ϱ egyik tényezője, mely pedig zérus; tehát ez az egészlet is zérus. A negyedik egészlet zérus, mert a közös *egyenes* ezekhez tartozván, benne a $\delta\varphi = 0$. Végül az utolsó is zérus, mert a henger palástjain lévő határvonalakhoz tartozik; itt pedig $\delta r = 0$.

Az első variátió tehát zérus, s igy az Arch. csavar megfelel a maximum első föltételének az összehasonlitás ezen tágabb körében is. Azonban elsietett dolog volna, ha az eddigi szerencsés vizsgálatoktól elcsábitva a 2-ik variátió terhes megvizsgálásától ez alkalommal felmentenők magunkat s egyenesen kimondanók, hogy az összehasonlitás jelen körében is legjobb az Arch. csavar. Ezzel, egyenesen kimondva, hibát követnénk el, valamint bevallom, hogy e hibát fennidézett akadémiai dolgozatomban magam is elkövettem.

Számitsuk tehát ki *a második variátiót.* Az első variátióból kihagyván azon tagokat, a melyek az iméntiek szerint elenyésznek már a szegélyző vonalakra tartozó föltételek miatt, marad:

$$\delta P = -\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi}\right]\delta z\, d\varphi\, dr + \int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left[\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right]\delta z\, d\varphi$$

Tekintve, hogy a zárjelek közötti mennyiségek, miként láttuk, zérussá lesznek az Arch. csavar egyenlete miatt, lészen a második variátió:

$$\delta^2 P = -\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\delta\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi}\right].\delta z\, d\varphi\, dr + \int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\delta\left[\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right].\delta z\, d\varphi$$

Elvégezvén a kijelentett variálásokat, s tekintve, hogy:

$$\delta z\,.\,\delta\varrho = \delta z\,\delta\frac{\partial z}{\partial r} = \delta z\frac{\partial \delta z}{\partial r}\text{, tehát}$$

$$\delta z\,.\,\delta\varrho = \frac{1}{2}\frac{d(\delta z)^2}{dr}\text{, s épugy:}$$

$$\delta z\,.\,\delta\pi = \frac{1}{2}\frac{d(\delta z)^2}{d\varphi};$$

lészen behelyettezés és részenként való integrálás után:

$$2\,.\,\delta^2 P = \int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left[\frac{d^2}{dr^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + 2\frac{d^2}{dr d\varphi}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\pi} + \frac{d^2}{d\varphi^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right].(\delta z)^2\, d\varphi\, dr$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left[\frac{d}{dr}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{d}{dr}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\partial\pi} + \frac{d}{d\varphi}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right].(\delta z)^2\, d\varphi$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left[\frac{d}{d\varphi}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + \frac{d}{d\varphi}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\partial\pi}\right].(\delta z)^2\, dr$$

$$+\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\frac{d(\delta z)^2}{dr}\, d\varphi + \int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}(\delta z)^2$$

Behelyettesitendő már mostan az Arch. csavar egyenlete, és tekintetbe veendők a határvonalakra vonatkozó föltételek. Vegyük az egészleteket sorra. Az *elsőt* kiszámitottuk már; értékét a 8.) képlet adja.

A *másodikra* nézve megjegyzendő, hogy $\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho \partial \pi} = 0$ és $\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}$ csakis az r függvénye lévén a zárjelek közötti második és harmadik tag kiesik; továbbá az első tag értékét a 7.) képlet adja. A *harmadik* egészlet tagonként zérus ugyanazon okból. A *negyedikben* előforduló tényező értékét a 6.) képlet adja. Végezetül az *utolsó* tulajdonképen kettős substitutió elenyészik azon okból, mert a δz értéke a szegélyző *közös* egyenesen zérus. Lészen tehát:

15.)
$$\frac{\delta^2 P}{(k-a)^2} = \int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{4(r^2 - 5a^2)}{(r^2+a^2)^4} (\delta z)^2 \, d\varphi \, dr$$

$$+ \int_{r_0}^{r_1} \frac{r^6 + 5a^2 r^4}{(r^2+a^2)^3} (\delta z)^2 \, d\varphi - \int_{r_0}^{r_1} \frac{r^5}{(r^2+a^2)^2} \frac{d(\delta z)^2}{dr} \, d\varphi$$

Az első egészletről tudjuk az I. alatti tárgyalásból, hogy maximum esetében határozottan negativ. A második egészletről első tekintetre mindjárt láthatni, hogy határozottan positiv; mig a harmadik — a szerint, hogy milyen az összehasonlitott felület alakja a szegélyző csavarszerü vonal közelében, — positiv avagy negativ egyaránt lehet. Következéskép tekintve, hogy az egyik egészletben előforduló $(\delta z)^2$ tökélyesen független a másikban előfordulótól, mondhatjuk, hogy a $\delta^2 P$ positiv és negativ egyaránt lehet. A P se nem maximum, se nem minimum.

Az Archimedesi csavar összehasonlitva olyan felületekkel is, a melyek a csavarvonalak helyett más görbétől szegélyezvék, nem mondható többé se a legjobb, se a legroszabb propellernek; nem is egyike a legjobbaknak vagy legroszabbaknak.

2.) Hasonlitsuk össze az Arch.-féle csavart végezetül olyan felületekkel, a melyek ugyanazon B és K csavarvonalaktól határoltatnak, de nem az A és F egyenesektől, hanem helyettük tőlük végtelen kevéssé különböző s a hengercső alapjain fekvő (A_1 és F_1) görbe vonalaktól.

Az első variátió kiszámitására ismét a 14.) képlet szolgál. A jobb oldalon lévő egészletek közül az első zérus az Arch.-f. csavar egyenlete miatt. *A második egészlet első része marad;* a második része zérus, miután a benne tényezőként előforduló $d\varphi$, a szegélyző egyenesekhez tartozván, $= 0$. A harmadik egészlet zérus két okból; először, mert $\frac{\partial V}{\partial \varrho} = 0$ az Arch.-f. csavar egyenlete miatt, — másodszor, mert a ha-

tárra vonatkozó feltételek miatt itten a $\delta z = 0$. *A negyedik egészlet marad.* Az utolsó végre zérus, mert a $\delta r = 0$, ugy mint elébb. Marad tehát :

$$\delta P = \int_{r_0}^{r_1} dr \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\frac{\partial V}{\partial \pi} \delta z + V \delta \varphi \right)$$

A δz *jelentése* itten ez: Az A (illetőleg F) szegély bármelyik A' pontján át egy egyenest vonva párhuzamosan a tengelyhez, ez egyenes éri az összehasonlitott felületet B' pontban ; a két pont közötti távolság $A'\ B' = \delta z$.

A $\delta \varphi$ jelentése ez : Az alap sikjában s az imént nevezett A' ponton átvont $r = \text{const.}$ coordináta kör vágja az összehasonlitott felület A_1 szegélyét A_1' pontban ; a köriv számitva A'-től A_1' felé $= + r . \delta \varphi$.

Ebből következik, hogy :

$$\delta z = - \frac{\partial z_1}{\partial \varphi} \delta \varphi ,$$

hol z_1 az összehasonlitott felület ordinátáját jelenti, s hol azért áll a — jegy, mert a δz a A' ponthoz tartozik, s ez okból az ív iránya A_1'-től az A' felé számitandó, azaz forditva, mint a hogy a $\delta \varphi$ definitiója szól.

Végezetül $z_1 = z + \delta z$ lévén, fölsőbb ranguaktól eltekintve

$$\delta z = - \pi \delta \varphi .$$

Mely értéket betéve, a variátió ezen alakot ölti :

16.) $$\delta P = \int_{r_0}^{r_1} dr \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[V - \pi \frac{\partial V}{\partial \pi} \right] \delta \varphi .$$

E variátiónak maximum-minimum esetében zérussá kellene válnia az Arch.-f. csavar által. A $\delta \varphi$, miként definitiójából látható, olyan függvénye az r-nek, melynek természete az összehasonlitott felület szegélyétől függ ; a $\delta \varphi$ tehát egészen önkényszerü függvény. Következésképen a δP csakis ugy lehetne zérus, ha a

$$V - \pi \frac{\partial V}{\partial \pi}$$

$= 0$ volna és pedig identice, — az r minden értékénél.

Ámde a 3.) és 4.) alatti képleteket s az Arch.-f. csavar egyenletét tekintetbe véve, a kérdéses kifejezés igy irható :

17.) $$\frac{r^5 (k - a)}{(a^2 + r^2)^2} \left[k + a + (3k - a) \frac{a^2}{r^2} \right] ,$$

mely kifejezés identice $=$ zérus csakis ugy lehetne, ha $k = a$, — a mi pedig ki van zárva, minthogy ez esetben $P = 0$ volna.

A δP tehát nem válik zérussá, *s így az Arch.-féle csavar nem a legjobb propeller az összehasonlítás jelen körében sem, s nem is a legrosszabb.*

IV. Az előző fejezetnek 15.) és 16. alatti képletei módot nyujtanak annak eldöntésére, milyen deformátiót kell az Arch.-féle csavaron eszközölni arra nézve, hogy nála előnyösebb propellert nyerjünk.

A 15.) alatti bonyolódott lévén, csak a 16.) alatti képletet veszszük vizsgálat alá. A jobb oldalon álló egészlet azt mutatván, mennyivel nagyobb a hajtó ereje az összehasonlitott felületnek az Arch.-féle csavarénál, csak az lesz megvizsgálandó, hogy ezen egészlet mikor positiv, s lehetőleg legnagyobb? A zárjelben levő mennyiség, miként a 17.) alatti értéke mutatja, tökéletesen meg van határozva az Arch.-f. csavar alakja és méretei által; látható, hogy a felület egy részen positiv, más részen negativ. Ebből következik, hogy a felső substitutiónak megfelelő $\delta\varphi_1$-nek positiv vagy negativ kell hogy legyen, a szerint, a mint a 17.) alatti érték positiv vagy negativ, — mig [az alsó substitutiónak megfelelő] $\delta\varphi_0$ ellenkezőképen választandó.

Ámde $a > k$; tehát a 17.) alatti érték positiv vagy negativ, a szerint, a mint:

$$a + k - (a - 3k)\frac{a^2}{r^2} \gtrless 0.$$

Ezen egyenlőtlenséget $\frac{a^2}{r^2}$ szerint megoldva az következik tehát az eddigiekből, hogy:

$$\delta\varphi_1 \gtrless 0 \text{ és } \delta\varphi_0 \gtrless 0$$

a szerint, a mint:

$$\frac{a^2}{r^2} \gtrless \frac{a+k}{a-3k}.$$

Már mostan, ha $r_0 = 0$, a II. fejezet szerint a legelőnyösebb Arch.-f. csavar emelkedése annál nagyobb, minél nagyobb a $\frac{k}{a}$ tört értéke s az emelkedés $36\,^1/_2{}^0$, ha $k = 0$, és 45^0, ha $\frac{k}{a} = \frac{1}{10}$. Eszerint tehát az egyenlőtlenség jobb oldala 1-től 1, 4-ig nő, ha a legelőnyösebb emelkedés $36\,^1/_2{}^0$-tól 45^0-ig nő. Következésképen az egyenlőtlenség baloldala az emelkedés e határai között mindig positiv az Arch. csavar kiszelvénye egy részén és negativ a másik részén; e két részt egy hengerfelület választja el, melynek sugara rövid számitás után az egész

kiszelvény sugarának r_1-nek 0,74 — 0,8-része. E hengeren belül tehát a $\delta\varphi_1$ positiv s kivüle negativ, — mig a $\delta\varphi_0$ forditva.

A számitás tehát azt mutatja, *hogy a legelőnyösebb emelkedésü Arch.-f. propeller-csavarnál is előnyösebbet nyerünk, ha a kiszelvény A és F (egyenes) szegélyeit hullámszerü s a henger alapján fekvő vonalokká görbitjük és pedig ugy, hogy az A szegély belső, mintegy* $^3/_{10}$*-e váljék a hullám (mondjuk) hegyévé s hátralévő* $^2/_{10}$*-e annak völgyévé, — mig az F-nek belső* $^3/_{10}$*-e épen ellenkezőleg a hullám völgyévé s hátralévő része annak hegyévé.*

A csavar ezen kiigazitása a gyakorlat emberének mindjárt első tekintetre előnyösnek fog feltünni; ezáltal ugyanis, — hogy rövid kifejezéssel éljek, — öblösebbé válik a propeller-csavar.

Kolozsvárt, 1877. julius 28.

A DETERMINÁNSOK SZORZÁSI TÉTELÉNEK UJ LEVEZETÉSE.

König Gyulától.

Ismeretes, hogy a determinánsok elméletéről szóló tankönyvekben, ép ugy, mint az e tárgyról tartott előadásokban a determinánsok szorzási tétele — alapvető fontossága mellett sincs direct uton, t. i. a művelet kivitele által bebizonyitva. Miután ugyanis a lineár egyenletrendszer átalakitásából vett kész eredmény föl van irva, ez egyszerüen igazoltatik a szorzatot ábrázoló determináns szétbontása által. E szétbontás nagyon egyszerü, de e mellett oly nehézkes, hogy 3-adfokúnál magasabb determinánsra vonatkozólag azt alig próbálná valaki kivinni; mig e szétbontás általános igazolása — előadásban szintén, ha csak lehet, kerülendő — combinatorikus meggondolások által történik. A következőkben a szorzási tételnek bebizonyitását akarom adni oly uton, mely az ily fontos, a theoria kezdetén szereplő tételnek egyedül megfelel; t. i. a feladatban megkivánt müveletnek direct kivitele által. Ilyen eddig még nem adatván, a dolog egyszerüsége daczára, az eljárást elég érdekesnek tartom a közlésre.

1. Feladatunk, a

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, \ldots b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}, b_{n2}, \ldots b_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánst, megszorozni a

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánssal, még pedig ugy, hogy a szorzat megint n-edfoku determináns legyen, melynek elemeibe az a és b elemek mindegyike csak első hatványon lépjen be.

Mindenek előtt egy pár jelzés definitióját adom. Legyen $D^{(i)}$ a D-ből az utolsó n—i sor és oszlop elhagyása által keletkezett determináns, azaz:

$$D^{(i)} = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1i} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{ii} \end{vmatrix}$$

tehát $D^{(n)}$ nem más, mint D maga, mig $D^{(1)} = a_{11}$, és $A_{rs}^{(i)}$ az e determinánsból az a_{rs} elemnek megfelelő sor és oszlop elnyomása által keletkező aldeterminánsok; ugy hogy az elsőrendü aldeterminánsokra vonatkozó tétel alapján a következő egyenletek álljanak:

$$a_{11} A_{1i}^{(i)} + a_{21} A_{2i}^{(i)} + \ldots + a_{i1} A_{ii}^{(i)} = 0$$
$$a_{12} A_{1i}^{(i)} + a_{22} A_{2i}^{(i)} + \ldots + a_{i2} A_{ii}^{(i)} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1i} A_{1i}^{(i)} + a_{2i} A_{2i}^{(i)} + \ldots + a_{ii} A_{ii}^{(i)} = D^{(i)}$$

2. Most már a Δ szorzását D-vel végezzük, de ugy, hogy Δ-t egymásután szorozzuk a következő mennyiségekkel:

$$D^{(1)}; \frac{D^{(2)}}{D^{(1)}}; \frac{D^{(3)}}{D^{(2)}}; \ldots\ldots; \frac{D^{(n)}}{D^{(n-1)}}.$$

Természetesen a végeredmény nem más mint szorzás $D^{(n)}$- vagyis D-vel.

A szorzást $D^{(1)}$ vagyis a_{11}-gyel végezzük az első soron. Lesz:

$$a_{11}.\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11}, & a_{11} b_{12} & \ldots \\ b_{21} & b_{22} & \ldots \\ b_{31} & b_{32} & \ldots \\ \vdots & & \ldots \\ \vdots & & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots \end{vmatrix} \qquad (1.)$$

3. Áttérünk most $D^{(2)}.\Delta$ képezésére. Ezt ugy teszszük, hogy az ép nyert $a_{11}\Delta$-t szorozzuk $D^{(2)}$-vel, és majd csak a végeredményt osztjuk a_{11}-gyel. A szorzás végrehajtása előtt még az a_{21}-gyel szorzott 2-ik sort adjuk hozzá az elsőhöz, és azután szorozzunk $D^{(2)}$-vel a második sor elemeinek szorzása által. Lesz:

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22}, & \dots \\ D^{(2)}b_{21}, & D^{(2)}b_{22}, & \dots \\ b_{31}, & b_{32}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \end{vmatrix}$$

Ha most megint az a_{12}-vel szorzott első sort a 2-ikhoz hozzáadjuk, hol mint tudjuk

$$D^{(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

lehet a második sor elemeiben a_{11}-gyel osztani és igy végül lesz:

$$D^{(2)}\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22}, \dots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21}, & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{22}, \dots \\ b_{31} & b_{32}, \dots \\ \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2}, \dots \end{vmatrix} \quad (2.)$$

4. Ebből az alakból ismét levezetjük $D^{(3)}\Delta$-t, ha, miután az első és második sor elemeihez hozzáadtuk az a_{31}, illetőleg a_{32}-vel szorzott 3-ik sor elemeit, a harmadik sor elemeit $D^{(3)}$-mal szorozzuk. Igy lesz:

$$D^{(3)}D^{(2)}\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}, a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}, \dots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}, a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}, \dots \\ D^{(3)}b_{31}, \quad D^{(3)}b_{32}, \dots \\ \dots \\ b_{n1}, \quad b_{n2}, \dots \end{vmatrix}$$

Ha most az $A^{(3)}_{31}$-mal szorzott első, és $A^{(3)}_{32}$-mal szorzott második sort a 3-ik sorból kivonjuk, ugy a következő egyenletek tekintetbevételével,

$$\begin{aligned} -a_{11}A^{(3)}_{31} - a_{12}A^{(3)}_{32} &= a_{13}A^{(3)}_{33} \\ -a_{21}A^{(3)}_{31} - a_{22}A^{(3)}_{32} &= a_{23}A^{(3)}_{33} \\ D^{(3)} - a_{31}A^{(3)}_{31} - a_{32}A^{(3)}_{32} &= a_{33}A^{(3)}_{33} \end{aligned}$$

hol még $A^{(3)}_{33} = D^{(2)}$, és a 3-ik sorban $D^{(2)}$-vel osztva, lesz:

$$D^{(3)}\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}, \dots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}, \dots \\ a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31}, & a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32}, \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (3.)$$

5. Ebből most már az általános képletet minden nehézség nélkül föl lehet irni. Lesz:

$$D^{(i)}\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + \ldots + a_{i1}b_{i1}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + \ldots + a_{i1}b_{i2}, & \ldots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{i2}b_{i1}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{i2}b_{i2}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1i}b_{11} + a_{2i}b_{21} + \ldots + a_{ii}b_{i1}, & a_{1i}b_{12} + a_{2i}b_{22} + \ldots + a_{ii}b_{i2}, & \ldots \\ b_{i+1,1}, & b_{i+1,2} & \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

mely, ha $i = 1, 2, 3, \ldots$ átmegy a levezetettekbe, és könnyüséggel általánosan igazolható.

Adjuk hozzá ugyanis az $a_{i+1,1}, a_{i+1,2}, \ldots a_{i+1,i}$-vel szorzott $i+1$-dik sort az első, második, ..., i-edik sorhoz, szorozzuk ezután az $i+1$-dik sort $D^{(i+1)}$-gyel és vonjuk ki ebből az $A^{(i+1)}_{i+1,1}$, $A^{(i+1)}_{i+1,2}, \ldots$ $A^{(i+1)}_{i+1,i}$-gyel szorzott $1, 2, \ldots$ i-edik sort, akkor ezen sorban még $D^{(i)}$-vel osztva nyerjük $D^{(i+1)}\Delta$ egészen analog alakját, a mivel a képlet általános érvénye be van bizonyitva.

Ez nem más, mint a legáltalánosabb szorzási képlet, mely egy i-ed és egy n-edfoku determináns szorzatát adja, és átmegy a közönségesbe, ha $i = n$.

CLAUSIUS ÉS BOLTZMANN THERMODYNAMIKAI TÉTELÉNEK ÁLTALÁNOSITÁSA, HA A POTENTIÁL A SEBESSÉGNEK IS FÜGGVÉNYE.

Dr. Réthy Mór, kolozsvári egyetemi tanártól.

Hogy a következő vizsgálatokat könnyebben meg lehessen érteni, röviden összefoglalom Weber-, Riemann- és Clausiusnak az általánositott potentiálra vonatkozó eredményeit.

I. A legpontosabb elektrostatikai mérések arról tanuskodnak, hogy két-két nyugvó elektrikus tömegpont Coulomb törvénye szerint vonzza avagy taszitja egymást. Ellenben Ampére és Faraday elektrodynamikus, elektromagnetikus stb. mérései világosan mutatják, hogy két-két mozgó elektrikus tömegpont nem a Coulomb-féle törvény szerint hat egymásra. Gauss 1835-ben és Weber, tőle függetlenül 1846-ban, e vonzásra nézve hypothetikus törvényeket állitottak föl, melyek közös jellege abban áll, hogy az erő nemcsak a relativ helyzet, hanem a relativ sebességtől is függ; mindkét törvény egyez Ampére elektrodynamikai méréseivel, de Faraday voltainduktió törvényei Weber mellett döntenek. Azóta Riemann[1]) és Clausius[2]) különböző törvényeket fedez-

---

[1]) Schwere, El. und Magn. 1876.
[2]) Borchardt Journal 1877.

tek föl két-két tömegpont vonzására nézve, a melyek mindegyike tökéletesen egyenjogú Weber törvényével, ugy hogy az eddigi tapasztalatok alapján lehetetlen eldönteni, melyik a vonzás igazi törvénye. De valamennyi egyez egy tulajdonságban: *az erőnek van potentiálja, — s e potentiál nemcsak a koordinátáknak, hanem a sebesség komponenseinek is függvénye.*

De mit értsünk ezen általánositott potentiál alatt? mi a definitiója?

Legyen a pontrendszer elevenereje T és a mozdulatlan ponttól reá ható erő potentiálja P.

Ha a potentiál csak a relativ helyzettől függ, akkor tudjuk, hogy

1.) $$dP = dT,$$

a mozgás akármelyik végtelen kicsiny dt időszakáról legyen bár szó. *Az 1.) egyenlet*, mely a *potentiál* definitiójául tekinthető ezen egyszerü esetben, *definitiójául szolgál akkor is, ha a P nemcsak a relativ helyzetnek, hanem a sebességnek is függvénye.*

Mi a vonatkozás az erő és a potentiál között?

Legyen először csak két pontról szó: az egyik mozdulatlan, a másik az összekötő egyenesben mozog x' változó sebességgel; a két pont távolsága egymástól legyen x, a mozgó pont tömege m és gyorsulása x''. Oszszuk a potentiált két részre: az egyik S legyen csak a relativ helyzet (x) függvénye, a másik D függjön a sebesség (x')-től is; az S-nek *statikai*, a D-nek *dynamikai potentiál* a neve. Igy tehát:

2.) $$P = S + D$$

lévén, az 1.) egyenlet igy irható:

$$dS + 2\,dD - dD = dT$$

vagy kifejtve:

$$2\,dD - \frac{\partial D}{\partial x}\,dx - \frac{\partial D}{\partial x'}\,dx' + \frac{\partial S}{\partial x}\,dx = mx'\,dx'$$

s mivelhogy:

$$d\left(\frac{\partial D}{\partial x'}\,x'\right) = \frac{\partial D}{\partial x'}\,dx' + d\left(\frac{\partial D}{\partial x'}\right)x' = \frac{\partial D}{\partial x'}\,dx' + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial D}{\partial x'}\right)dx$$

azért az egyenlet igy is irható:

$$d\left(2D - \frac{\partial D}{\partial x'}\,x'\right) + \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial D}{\partial x'} - \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x}\right]dx = mx''dx$$

Galilei óta mozgató erőnek nevezik a tömeg és a gyorsulás szorzatát. Tekintve tehát, hogy a jobb oldal nem egyéb, mint mx'' szorozva dx-szel, világos, hogy esetünkben a bal oldal osztva dx-szel, az erő legáltalánosabb kifejezését szolgáltatja. Már mostan Weber, Riemann és

Clausius potentiáljai egyeznek abban is, hogy a D a sebességnek quadratikus homogén függvénye. Ebben megegyezve mi is, egyszerübb alakot ölt fel egyenletünk: ugyanis ekkor

$$2D = \frac{\partial D}{\partial x'} dx';$$

következésképp:

3.) $$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial D}{\partial x'} - \frac{\partial D}{\partial x'} + \frac{\partial S}{\partial x} = mx''.$$

Ha tehát a potentiál dynamikai része a sebességnek quadratikus függvénye, akkor két pont egymást az összekötő egyenes irányában vonzza és pedig:

4.) $$X = \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial D}{\partial x'} - \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x}$$

nagysáyu erővel.

A 4.) alatti egyenlet az erő és a potentiál közötti vonatkozást adja, ha csak két pontról van szó, melyek egyike nyugszik, másika pedig az összekötő egyenes vonalban mozog. Ha akárhány pontról s akármilyen mozgásról van is szó, az összes pontrendszer potentiálja $S + D$, s az m tömegü (példaképen kiválasztott) pontnak derékszögü koordinátái x_1, x_2, x_3, akkor per definitionem ugyanezen egyenlet adja a pontra müködő összes erő X_i *komponensét* stb. Hogy e definitió belső ellenmondásra nem vezethet, az ki fog tünni a következőkből is.

II. Akár szabad a pontrendszer, akár nem, a D'Alembert-Lagrange-féle elv szerint:

$$\Sigma (mx'' - X)\, \delta x = 0,$$

föltéve, hogy δx virtualis eltolást jelent.

Mivelhogy $T = \Sigma m x'^2$, tehát:

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = mx'$$

és:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial x'} = mx''.$$

Ezen értéket betéve az mx''-be és a 4.) alatti értéket a X-ek helyett, kijő rögtön:

$$0 = \Sigma \left[\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial (T - D)}{\partial x'} + \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial x} \right] \delta x,$$

vagy más alakban:

5.) $$\Sigma \left[\frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial x} \right] \delta x\, dt = - \Sigma d \left(\frac{\partial (T - D)}{\delta x'} \right) \delta x.$$

Ha ezen egyenletben δx helyett a dt idő alatt valóban leirt út dx projectiója tétetik, akkor világos, hogy csak forditott rendben kellene végezni az eddigi számitásokat arra nézve, hogy kijőjjön a kiindulásunk pontjául szolgáló 1.) egyenlet; a 4.) egyenlet általánositása nem vezet tehát belső ellenmondásra semmi esetre sem. Más részről az 1.) egyenlet egészelése az energia elvét adja, mely szerint

$$P + E = T$$

hol E *állandót jelent; ez állandó neve a pontrendszer összes energiája.*

E szerint tehát addig, mig a pontrendszerre csakis az X erők hatnak, addig az összes energia

6.) $$E = T - D - S$$

változatlanul egyugyanaz. *E tétel az energia megmaradása elvének neveztetik.*

Mihelyt zavaró erők és körülmények lépnek föl, rögtön változni fog az energia; ha a zavar megszünik, ismét helyreáll az energia változatlanságának törvénye, de a pontrendszer, — mondjuk, a test — energiája most már más lesz. Föltéve, hogy a zavaró erők vagy kicsinyek voltak, vagy kevés ideig tartottak, kicsiny lesz az energia változása is; tegyük föl, hogy e változás, jelöljük δE-vel, végtelen kicsiny. Hogyan fejeztetik ki e δE a T, D és S-sel?

E czélból összehasonlitjuk a megváltozott energiáju testnek t időpillanatbeli állapotát azzal a mozgás állapottal, a melyben régi energiájával ugyanazon pillanatban vagy legalább ehhez közel eső pillanatban, minden zavar közbejötte nélkül megérkezett volna. Legyen a példaképen kiválasztott m tömegü pont x koordinátája és x' sebesség komponensei közötti különbség a nevezett két állapotban δx, illetőleg $\delta x'$; az egész test eleven ereje stb. közötti különbség δT stb. Ugy tökéletesen határozott értelemmel bir a 6.)-ból következő ezen egyenlet:

$$\delta E = \delta (T - D - S).$$

Ha a test gáz, mely pl. szilárd hengerbe van bezárva, akkor a szilárd részek is hatván a gázra, az erő potentiáljában szerepelni fognak az ő pontjaik koordinátái és sebességei is; de e pontok mozgása oly kicsiny a gáz pontjainak mozgásához képest, hogy *sebességüket* bátran *zérusnak*, s a *koordinátákat* rendesen *állandóknak* tekinthetjük. Ez utóbbit azonban csak *rendesen*, de *nem mindig*; ugyanis a szilárd részek akár hőmérsék, akár nyomás változás következtében tetemes mozgásokat végezhetnek, melyeket elhanyagolni természetesen nem szabad; tegyük tehát hozzá, hogy a *koordinátákat csak addig tekintjük állandóknak, mig a hőállapot nem változik.* Tagadhatatlan, hogy ezt

téve, távol vagyunk a physikai tárgyalás legnagyobb tökélyétől, nagyon távol; de visszaemlékezve azon közelitő módszerekre, a melyek tudományunk fejlődésében minden lépten-nyomon találhatók, elégedjünk meg ezen közelitéssel is, s lássuk mi következik egyenletünkből igy.

E példából világos, hogy általánosságban is czélszerü lesz megengedni, hogy a potentiálban olyan pontok koordinátái is szerepelnek, a melyek csak külső zavarok folytán mozdulnak meg, ellenben a zavartalan állapotban egyensúlyban tartatnak a reájuk ható belső és külső erők által; e pontok, — mondjuk, határpontok — koordinátáit ξ_1, ξ_2, ξ_3-mal fogjuk jelölni. Igy azután az előbbi egyenletből következik, hogy:

$$\delta E = \delta (T - D) - \Sigma \frac{\partial S}{\partial x} \delta x - \Sigma \frac{\partial S}{\delta \xi} \partial \xi$$

A jobb oldal utolsó tagja + jegygyel véve nem egyéb azon munkánál, melyet a belső erők végeznek a határpontok mozgása folytán, — ez tehát az u. n. külső és pedig a kifelé végzett munka. A kifelé végzett munka s a test energiájának összegét *a testtel közölt erélynek* nevezik. E szerint a testtel közölt erély

7.) $$\delta Q = \delta E + \Sigma \frac{\partial S}{\partial \xi} \delta \xi,$$

azaz:

8.) $$\delta Q = \delta (T - D) - \Sigma \frac{\partial S}{\partial x} \delta x.$$

E két egyenlet mindegyike Clausius thermodynamikai első főtételét fejezi ki csak különböző alakban. Az első alakból világos, hogy a δQ egyugyanaz, akárhogy és akármelyik pillanatban vétessenek is a fentebb körülirt δx és $\delta x'$ különbségek: ugyanis az E a zavartalan állapotban változatlan lévén, δE = constans, s a második tag is állandó. mivelhogy a zavartalan állapotban a külső erők nagysága s a határpontok helyzete változatlan.

III. A 8.) alatti egyenletet át fogjuk alakitani. Irva előbb igy:

$$\delta Q = 2 \delta (T - D) - \delta (T - D) - \sum \frac{\partial S}{\partial x} \delta x$$

és a második $\delta (T - D)$-t kifejtve, ered:

$$\delta Q = 2 \delta (T - D) - \sum \frac{\partial (T - D)}{\partial x'} \delta x' + \sum \left(\frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial x} \right) \delta x$$

Ámde:

$$d \delta x = \delta dx = \delta (x' dt) = \delta x' . dt + x' \delta dt,$$

és:

$$\sum \frac{\partial (T - D)}{\partial x'} x' = 2 (T - D);$$

következéskép:

$$\delta Q dt = 2\delta(T-D)dt + 2(T-D)\delta dt - \sum \frac{\partial(T-D)}{\partial x'} d\delta x + \\ + \sum \left(\frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial x}\right)\delta x dt.$$

Az utolsó tag helyett betéve a D'Alembert elvéből lehozott 5.) alatti értéket s azután a jobb oldal első két és utolsó két tagját összevonva, ered tehát:

$$\delta Q dt = \delta[2(T-D)dt] - d\sum \frac{\partial(T-D)}{\partial x'}\delta x.$$

Ezen egyenlet csak abban az egyben különbözik Boltzmann és Clausius megfelelő egyenletétől, hogy benne $T-D$ áll, mig B. és Cl.-nál T egyedül. Ha tehát ugyanazon föltevéseket teszszük ezen $T-D$-ről, a melyek a T-ről tétettek, akkor az ismert számitások és bizonyitások ismétlésével ered:

9.) $$\frac{\delta Q}{\mathfrak{T}} = \delta \log 2 i \mathfrak{T};$$

csakhogy az i itten a $(T-D)$ periodusa s a $\mathfrak{T}$ e $(T-D)$ középértéke, azaz:

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{i}\int_0^i (T-D)dt.$$

A 9.) egyenlet fejezi ki Boltzmann thermodynamikai tételének, az u. n. hőelméleti második főtételnek általánositását.

IV. Eddigi következtetéseinket ismert definitiók alapján, és tökéletesen számoló módszert követve vontuk. Nem lesz érdektelen az eredményekből, s különösen a 8) alattiból logikai, naturphilosophiai következményeket is vonni.

Közönségesen, Clausius szerint, úgy szokták kimondani a hőelmélet első főtételét, hogy a testtel közölt hő eleven erő gyarapitására, lazitási munkára s harmadszor külső munkára fordittatik, s e három összegével aequivalens; ugy hogy:

10.) $$\delta Q = \delta T - \Sigma X \delta x.$$

Lássuk, áll-e ezen egyenlet akkor is, ha a potentiál a relativ helyzeten kivül a sebességtől is függ. Látni való a 10.) és 8.) összehasonlitásából, hogy csak ugy állhatna, ha

$$\Sigma X \delta x = \delta D + \Sigma \frac{\partial S}{\partial x}\delta x$$

azaz:

$$\Sigma\left(X - \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial x}\right)\delta x = \Sigma \frac{\partial D}{\delta x'}\delta x'$$

volna. Világos pedig, hogy ezen egyenlet csak kivételesen lehet igaz; igaz pl. akkor, ha δx és $\delta x'$ a dt időben valóban létrejövő dx és dx'

változásokat jelentik; de nem igaz pl. már akkor sem, ha δx és $\delta x'$ momentán lökések által hozatnak létre, miután ez esetben $\delta x'$ arányos a lökés tartamával, mig δx a tartam quadratjával, — ez esetben tehát a baloldal végtelen kicsiny a jobbhoz képest, — a mi absurdum.

E szerint a hőelmélet első főtételének szokásos fölfogása nem volna többé igaz; az elven módositani kell. Hogy miként, azt mutatja épen a 8.) egyenlet maga. Ha ugyanis igy irjuk:

$$\delta Q = \delta T - \Sigma \frac{\partial S}{\partial x} \delta x - \delta D$$

akkor látni, hogy a jobboldal első tagja az eleven erő gyarapitására forditott, s a második tagja a statikai (külső és belső) erők ellenében végzett munka; a harmadik tag tehát nem lehet egyéb a dynamikai erők ellenében végzett munkánál. Ámde e munka

$$-\delta D = -\Sigma \frac{\partial D}{\partial x} \delta x - \Sigma \frac{\partial D}{\partial x'} \delta x'$$

látni való, két részre oszlik; *az elsőnek* tagjai δx-szel arányosak lévén, e *rész* szintén *lazitásra,* mig *a második rész,* tagjai a $\delta x'$ sebesség gyarapodásokkal lévén arányosak, *sebesség gyarapitására forditott munkának tekinthető.* Más szóval a dynamikai erő hasonlit a közönséges statikai erőhöz annyiban, hogy ellenállást fejt ki a lazitás ellenében, és hasonlit a tömeg vis inertiájához annyiban, hogy ellenállást fejt ki a sebesség változása ellenében.

A KUPSZELETEN FEKVŐ HAT PONT ÉS A CHASLES-FÉLE TÉTEL.

Scholtz Ágoston, gymnásiumi igazgatótúl.

1. Chaslesnek kérdéses tétele igy szól:

Ha 1 2 3 4 5 6 pontok ugyanazon kúpszeleten fekvő hat pont, akkor az *il, im, in, ip* sugárkéve projektiv a *kl, km, kn, kp* sugárkévével, (hol *i* és a többi betük tetszés szerint egy-egy pontját jelentik az 1 2 3 4 5 6 pontoknak).

Az *i k l m n p* pontok homogén koordinátái legyenek: $x_i\, y_i\, z_i$, $x_k\, y_k\, z_k$ stb., akkor az *il, im,* ... sugarakéi: $\xi_{il} = y_i z_l - y_l z_i$, $\eta_{il} = z_i x_l - z_l x_i$, $\zeta_{il} = x_i y_l - x_l y_i$ stb.

Legyen továbbá:

$$\xi_{il} \cdot x + \eta_{il} \cdot y + \zeta_{il} \cdot z = u \qquad \xi_{kl} \cdot x + \eta_{kl} \cdot y + \zeta_{kl} \cdot z = u'$$
$$\xi_{in} \cdot x + \eta_{in} \cdot y + \zeta_{in} \cdot z = v \quad \text{és} \quad \xi_{kn} \cdot x + \eta_{kn} \cdot y + \zeta_{kn} \cdot z = v',$$

akkor az i, illetőleg k csúcsú sugárkéve sugarait

$$u = o \qquad u' = o$$
$$v = o \qquad v' = o$$
$$u - \frac{(ilm)}{(inm)} \cdot v = o \text{ illetőleg } u' - \frac{(klm)}{(knm)} \cdot v' = o$$
$$u - \frac{(ilp)}{(inp)} \cdot v = o \qquad u' - \frac{(klp)}{(knp)} \cdot v' = o$$

egyenletek fejezik ki, melyekben (ilm) az

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_l & y_l & z_l \\ x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}$$

determinánst képviseli.

Ezek után Chaslesnek tételét

$$\frac{(ilm)}{(inm)} : \frac{(ilp)}{(inp)} = \frac{(klm)}{(knm)} : \frac{(klp)}{(knp)},$$

vagy:

1.) $\qquad D_{ik} = (ilm)(inp)(klp)(knm) - (ilp)(inm)(klm)(knp)$

tétetvén,

$$D_{ik} = o$$

egyenletben mondhatjuk ki analytikailag.

Hogy 1 2 3 4 5 6 pontok ugyanazon kúpszeletnek a pontjai, az

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & z_1x_1 & x_1y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & z_2x_2 & x_2y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3z_3 & z_3x_3 & x_3y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4z_4 & z_4x_4 & x_4y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5z_5 & z_5x_5 & x_5y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6z_6 & z_6x_6 & x_6y_6 \end{vmatrix} = S$$

determináns megsemmisülése is kifejezi. Az S és Δ_{ik} mennyiségeknek tehát egymástól függniök kell. Ez összefüggést

2.) $\qquad \varepsilon S = \Delta_{ik}$

egyenlet [1]) foglalja magában.

A 2.) egyenlet helyességének bebizonyitását néhány determinánstételből meritjük, azért e tételeket előrebocsájtjuk.

2.) E lapokban [2]) bebizonyitottuk

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma') - (\alpha\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma) = \begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta'} & \eta_{\alpha'\beta'} & \zeta_{\alpha'\beta'} \\ \xi_{\gamma\gamma'} & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix}$$

---

[1]) E jelentést l. a Műegyetemi Lapok 13. füzetében 66. lapon.

[2]) U. o. 14. füzet. 121. l.

tételt. Ha $\beta = \beta'$, akkor a jobb oldalon álló determináns két determináns szorzatává bontható. Teljesülvén ugyanis $\beta = \beta'$ egyenlet,

$$\begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta} & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ \xi_{\gamma\gamma'} & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_\beta} \cdot \begin{vmatrix} x_\beta . \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ x_\beta . \xi_{\alpha'\beta} & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ x_\beta . \xi_{\gamma\gamma'} & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_\beta} \cdot \begin{vmatrix} o & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ o & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ (\beta\gamma\gamma') & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(\beta\gamma\gamma')}{x_\beta} \cdot \begin{vmatrix} \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \end{vmatrix} .$$

A második determinánsban az első oszlop elemeihez hozzáadtuk a második és harmadik oszlopnak y_β, illetőleg z_β-val szorzott elemeit és tekintettel voltunk

$$x_\beta . \xi_{\alpha\beta} + y_\beta . \eta_{\alpha\beta} + z_\beta . \zeta_{\alpha\beta} = o$$
$$x_\beta . \xi_{\alpha'\beta} + y_\beta . \eta_{\alpha'\beta} + z_\beta . \zeta_{\alpha'\beta} = o$$
$$x_\beta . \xi_{\gamma\gamma'} + y_\beta . \eta_{\gamma\gamma'} + z_\beta . \zeta_{\gamma\gamma'} = (\beta\gamma\gamma')$$

egyenletekre. De

$$\begin{vmatrix} \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \end{vmatrix} = x_\beta . (\beta\alpha\alpha'),$$

azért:

3.) $$(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta\gamma') - (\alpha\beta\gamma')(\alpha'\beta\gamma) = (\beta\alpha\alpha')(\beta\gamma\gamma').$$

3. E lapok 13. füzetében[1])

4.) $$(iln)^2 . \varepsilon S = \begin{vmatrix} (mni)(mil) & (pni)(pil) & (kni)(kil) \\ (mil)(min) & (pil)(pln) & (kil)(kln) \\ (mln)(mni) & (pln)(pni) & (kln)(kni) \end{vmatrix}$$

egyenlethez jutottunk.

Azt állítjuk, hogy a 4.) egyenlet jobb oldalán levő determináns reciprok determinánsának egyik minorja az 1.) alatti D_{ik} mennyiségtől csak bizonyos tényező által különbözik. Jelöljük a 4.) egyenlet említett determinánsát Δ-vel, elemeit ekkép

$$(mni)(mil) = a_1 \qquad (pni)(pil) = b_1 \qquad (kni)(kil) = c_1$$
$$(mil)(mln) = a_2 \qquad (pil)(pln) = b_2 \qquad (kil)(kln) = c_2$$
$$(mln)(mni) = a_3 \qquad (pln)(pni) = b_3 \qquad (kln)(kni) = c_3$$

továbbá minorjait

$$b_2c_3 - b_3c_2 = \alpha_1 \qquad c_2a_3 - c_3a_2 = \beta_1 \qquad a_2b_3 - a_3b_2 = \gamma_1$$
$$b_3c_1 - b_1c_3 = \alpha_2 \qquad c_3a_1 - c_1a_3 = \beta_2 \qquad a_3b_1 - a_1b_3 = \gamma_2$$
$$b_1c_2 - b_2c_1 = \alpha_3 \qquad c_1a_2 - c_2a_1 = \beta_3 \qquad a_1b_2 - a_2b_1 = \gamma_3$$

végre reciprok determinánsát ∇ jellel, tehát

$$\nabla = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

[1]) A Műegyetemi Lapok 13. füzet 70. lapon.

akkor azt állitjuk, hogy

5.) $$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = c_1 \,.\, (iln)^2 \,.\, \Delta_{ik}\,.$$

A 3.) egyenlet szerint

$$(pln)\,(kil) - (pil)\,(kln) = (iln)\,(kpl)$$
$$(pni)\,(kln) - (pln)\,(kni) = (iln)\,(kpn)$$
$$(kln)\,(mil) - (kil)\,(mln) = (iln)\,(mkl)$$
$$(kni)\,(mln) - (kln)\,(mni) = (iln)\,(mkn).$$

Ezeknek folytán

$$\alpha_2 = (iln)\,(kni)\,(kpl)\,(pni)$$
$$\beta_2 = (iln)\,(kni)\,(mkl)\,(mni)$$
$$\alpha_3 = (iln)\,(kil)\,(kpn)\,(pil)$$
$$\beta_3 = (iln)\,(kil)\,(mkn)\,(mil).$$

Tehát

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = (iln)^2 \,.\, (kni)\,(kil) \,.\, [(kpl)\,(pni)\,(mkn)\,(mil) - (mkl)\,(mni)\,(kpn)\,(pil)],$$

vagyis:

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = (iln)^2\, c_1 \,.\, D_{ik},$$

az 5.) alatti egyenlet helyességét tehát bebizonyitottuk.

Ámde ismeretes az a tétel, hogy:

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = c_1 \,.\, \Delta\,,$$

azért 5.) szerint

6.) $$\Delta = (iln)^2 \,.\, D_{ik}\,.$$

Az 5.) és 6.) egyenletekből ered:

$$\varepsilon S = D_{ik}\,.$$

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

31. Egy tetszőleges sík messe egy adott tetraéder hat élét az a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 pontokban, és az élek közepei legyenek k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, ugy a b pontok, melyek a tetraéder hat élén akként határoztatnak meg, hogy

$$a_1k_1 = k_1b_1,\ a_2k_2 = k_2b_2,\ a_3k_3 = k_3b_3,\ a_4k_4 = k_4b_4,\ a_5k_5 = k_5b_5,$$
$$a_6k_6 = k_6b_6$$

legyen, ugy a b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 pontok szintén egy síkban fekszenek.

Feltéve továbbá, hogy az eredetileg választott sík akként változik, hogy egy állandó ponton megy keresztül, kerestessék meg, hogy ekkor a b pontok síkja miféle felületet fog beburkolni.

Második megoldás.

Scholtz Ágoston, gymn. igazgatótól.

Ugyanezt a feladatot még Cartesius-féle összrendezőkben akarjuk megfejteni. (Az első megoldást l. a 17-ik füzetben.)

Legyen $x_i\ y_i\ z_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$ a tetraéder négy csucsa és

$$ax + by + cz = 1 \qquad 1)$$

azon sík, mely a tetraéder éleit az a_ϱ $(\varrho = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ pontokban metszi. E pontok összrendezői

$$\frac{\Delta_i x_k - \Delta_k x_i}{\Delta_i - \Delta_k}, \quad \frac{\Delta_i y_k - \Delta_k y_i}{\Delta_i - \Delta_k}, \quad \frac{\Delta_i z_k - \Delta_k z_i}{\Delta_i - \Delta_k},$$

hol $\Delta_i = ax_i + by_i + cz_i - 1$ és hasonló alaku Δ_k. A megfelelő b_ϱ pontok összrendezői pedig:

$$\frac{\Delta_i x_i - \Delta_k x_k}{\Delta_i - \Delta_k}, \quad \frac{\Delta_i y_i - \Delta_k y_k}{\Delta_i - \Delta_k}, \quad \frac{\Delta_i z_i - \Delta_k z_k}{\Delta_i - \Delta_k}.$$

Ha

$$-\begin{vmatrix} m & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determinánsnak m_i szerinti al-determinánsát k_i-vel jelöljük, akkor b_ϱ pontok összrendezői eleget tesznek

$$\frac{k_1}{\Delta_1} + \frac{k_2}{\Delta_2} + \frac{k_3}{\Delta_3} + \frac{k_4}{\Delta_4} = o. \qquad 2)$$

egyenletnek. E pontok tehát a 2) sikon feküsznek. Megjegyezzük, hogy $k_i = o$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ a tetraéder oldalsikjainak egyenletei.

A beburkolt felület egyenletét megkapjuk, ha a, b, c mennyiségeket és λ állandó tényezőt a 2) és a következő egyenletekből kiküszöböljük.[1])

$$ax^1 + by^1 + cz^1 = 1 \qquad 3)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_1 x_1}{\Delta_1^2} + \frac{k_2 x_2}{\Delta_2^2} + \frac{k_3 x_3}{\Delta_3^2} + \frac{k_4 x_4}{\Delta_4^2} &= \lambda . x^1 \\ \frac{k_1 y_1}{\Delta_1^2} + \frac{k_2 y_2}{\Delta_2^2} + \frac{k_3 y_3}{\Delta_3^2} + \frac{k_4 y_4}{\Delta_4^2} &= \lambda . y^1 \\ \frac{k_1 z_1}{\Delta_1^2} + \frac{k_2 z_2}{\Delta_2^2} + \frac{k_3 z_3}{\Delta_3^2} + \frac{k_4 z_4}{\Delta_4^2} &= \lambda . z^1 \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

[1]) Schlömilch, Compendium d. höh. Analysis. I. rész. 138. l. 10) és 11) egyenletek.

Ez egyenletekben $(x^1 y^1 z^1)$ a szilárd pont, melyen az 1) sík áthalad. A 4) alatt álló egyenleteket sorban a, b, c mennyiségekkel szorozzuk, és a szorzott egyenleteket összeadjuk; ez után azután Δ_i értékét, valamint a 2) és 3) egyenleteket tekintetbe vévén, származik:

$$\frac{k_1}{\Delta_1^2} + \frac{k_2}{\Delta_2^2} + \frac{k_3}{\Delta_3^2} + \frac{k_4}{\Delta_4^2} = \lambda \qquad 5)$$

A 4) és 5) egyenletekből ered[1])

$$\frac{k_i}{\Delta_i^2} = \frac{\lambda}{D} \cdot k_i^1, \; (i = 1, 2, 3, 4) \qquad 6)$$

hol

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

és k_i^1 mennyiség k_i értékéből azáltal származik, ha ebben (x, y, z) változó összrendezők helyett az állandó $(x^1 y^1 z^1)$ összrendezőket irjuk. Végre 6)-ból származik:

$$\frac{k_i}{\Delta_i} = \sqrt{\frac{\lambda}{\Delta}} \cdot \sqrt{k_i^1 \, k_i}.$$

Ezeket belehelyettesitjük a 2)-be és $\sqrt{\frac{\lambda}{\Delta}}$ állandó tényezővel való osztás után kapjuk

$$\sqrt{k_1^1 \, k_1} + \sqrt{k_2^1 \, k_2} + \sqrt{k_3^1 \, k_3} + \sqrt{k_4^1 \, k_4} = o$$

egyenletet, a mi a beburkolt felület egyenlete.

---

34. (Lásd a 18. füzetben.)

Megoldás: Scholtz Ágostontól.

Az $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & p_1 \\ a_2 & c_2 & p_2 \\ a_3 & c_3 & p_3 \end{vmatrix}$ determinánst q-val jelölvén, szorozzuk az adott egyenleteket sorban e determináns minorjaival, ugyanis elébb

$$\frac{\partial q}{\partial a_1} = c_2 p_3 - c_3 p_2, \quad \frac{\partial q}{\partial a_2} = c_3 p_1 - c_1 p_3, \quad \frac{\partial q}{\partial a_3} = c_1 p_2 - c_2 p_1;$$

azután: $\frac{\partial q}{\partial c_1} = p_2 a_3 - p_3 a_2, \quad \frac{\partial q}{\partial c_2} = p_3 a_1 - p_1 a_3, \quad \frac{\partial q}{\partial c_3} = p_1 a_2 - p_2 a_1;$

végre: $\frac{\partial q}{\partial p_1} = a_2 c_3 - a_3 c_2, \quad \frac{\partial q}{\partial p_2} = a_3 c_1 - a_1 c_3, \quad \frac{\partial q}{\partial p_3} = a_1 c_2 - a_2 c_1$

determinánsokkal. E minorokkal szorzott egyenletek összege az első esetben

1.) $$\xi = q,$$

---

[1]) Baltzer, Theorie und Anw. d. Determinanten. 64. lap.

a második esetben

2.) $$\eta = q \cdot t,$$

a harmadik esetben

3.) $$\zeta = q \cdot \frac{t^2}{2},$$

hol: $$\xi = \begin{vmatrix} x & c_1 & p_1 \\ y & c_2 & p_2 \\ z & c_3 & p_3 \end{vmatrix}, \eta = \begin{vmatrix} x & p_1 & a_1 \\ y & p_2 & a_2 \\ z & p_3 & a_3 \end{vmatrix} \text{ és } \zeta = \begin{vmatrix} x & a_1 & c_1 \\ y & a_2 & c_2 \\ z & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Az 1.) egyenletben az idő nem fordulván elő, az a mozgó pont koordinátái között fennálló vonatkozást fejezi ki, melynek a koordináták a mozgás alatt minden pillanatban eleget tesznek és mivel ez az egyenlet a koordinátákra nézve első foku, ez az egyenlet a mozgó ponttól megfutott parabola síkjának egyenlete.

A 2.) és 3.) egyenletekből az időt kiküszöbölvén, ered:

4.) $$\eta^2 = 2q \cdot \zeta.$$

Ez egy másik vonatkozás a mozgó pont koordinátái között, melynek ezek a mozgás minden pillanatában eleget tesznek. Az analytikai geometria tanítja, hogy ez az egyenlet parabolikus hengerfelület egyenlete. Az 1.) alatt álló sik a 4.) alatt álló parabolikus hengerfelületet a mozgó pont által megfutott parabolában metszi, vagyis az egyesitett 1.) és 4.) egyenletek e parabolának egyenletei.

A 4.) egyenletből továbbá azt látjuk, hogy a

5.) $$\xi = q, \quad \eta = o$$

síkok által meghatározott egyenes a parabola átmérője és a

6.) $$\xi = q, \quad \zeta = o$$

egyenes a parabolát érinti azon pontban, melyben őt az 5.) átmérő metszi.

Az 5.) és 6.) egyenesek által bezárt szöget későbbi használat végett kiszámitjuk és (ω val jelölvén e szöget) ugy találjuk, hogy

7.)[1] $$\sin^2 \omega = \frac{(c_2 p_3 - c_3 p_2)^2 + (c_3 p_1 - c_1 p_3)^2 + (c_1 p_2 - c_2 p_1)^2}{(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \cdot (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}.$$

A parabola csúcsának koordinátáit jelöljük $x' y' z'$ betükkel. Ez értékeket behelyettesitvén 4.)-be, ered:

8.) $$\eta'^2 = 2q \cdot \zeta',$$

hol η' és ζ' determinánsok az η, illetőleg ζ determinánsok értékei abban az esetben, ha ezekben $x y z$ helyébe a csucs koordinátáit irjuk. A tengely egyenletét már most igy fejezhetjük ki:

9.) $$\xi = q, \quad \eta = \eta',$$

[1]) Salmon, A Treatise on the analytical Geometry of three dimensions. 28. l.

mert e két egyenlet az 5.) alatt kifejezett átmérővel párhuzamos egyenest állit elő, mely a csúcson megy keresztül. Ez pedig a parabola tengelye. A csucsérintő egyenletei ezek lesznek:

10.) $$\xi = q\,,\quad \eta'\eta = q(\zeta + \zeta')\,.$$

Minthogy a 9.) és 10.) alatt levő egyenesek egymásra merőlegesen állanak, kell hogy

$$\eta' = -\,q\,.\cos\omega$$

legyen. Ez érték tekintetbe vételével 8.) ból ζ' értékét kapjuk meg, nevezetesen

$$\zeta' = \frac{q}{2}\,.\cos^2\omega\,.$$

A tengelynek egyenletei tehát:

$$\xi = q\,,\quad \eta = -\,q\,.\cos\omega\,.$$

és a csucsnak koordinátáit

$$\xi' = q\,,\ \eta' = -\,q\,.\cos\omega\,,\ \zeta' = \frac{q}{2}\,.\cos^2\omega\,,$$

vagy:

$$\begin{aligned}
&(c_2p_3 - c_3p_2)\,x' + (c_3p_1 - c_1p_3)\,y' + (c_1p_2 - c_2p_1)\,z' = q\\
11.)\quad &(p_2a_3 - p_3a_2)\,x' + (p_3a_1 - p_1a_3)\,y' + (p_1a_2 - p_2a_1)\,z' = -\,q.\cos\omega\\
&(a_2c_3 - a_3c_2)\,x' + (a_3c_1 - a_1c_3)\,y' + (a_1c_2 - a_2c_1)\,z' = \frac{q}{2}\,.\cos^2\omega
\end{aligned}$$

egyenletekből számithatjuk ki. Ha figyelembe veszszük, hogy ez egyenletek, determinánsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_2p_3) & (c_3p_1) & (c_1p_2)\\ (p_2a_3) & (p_3a_1) & (p_1a_2)\\ (a_2c_3) & (a_3c_1) & (a_1c_2) \end{vmatrix} = q^2,$$

hol $(c_2p_3) = c_2p_3 - c_3p_2$ stb. és Δ determináns minorjai

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Delta}{\partial(c_2p_3)} = a_1.q,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial(c_3p_1)} = a_2.q,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial(c_1p_2)} = a_3.q,\\
&\frac{\partial\Delta}{\partial(p_2a_3)} = c_1.q,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial(p_3a_1)} = c_2.q,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial(p_1a_2)} = c_3.q,\\
&\frac{\partial\Delta}{\partial(a_2c_3)} = p_1.q,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial(a_3c_1)} = p_2.q,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial(a_1c_2)} = p_3.q,
\end{aligned}$$

ugy az egyenlő tényezők elhagyása után a 11.) egyenletekből ered:

$$x' = a_1 - c_1.\cos\omega + \frac{p_1}{2}.\cos^2\omega,$$

$$y' = a_2 - c_2.\cos\omega + \frac{p_2}{2}.\cos^2\omega,$$

$$z' = a_3 - c_3.\cos\omega + \frac{p_3}{2}.\cos^2\omega.$$

Hátra van még a parabola főparametere, melyet $2p$-vel jelölünk. Ennek értékéhez könnyen jutunk, ha tekintetbe veszszük, hogy a 4.) egyenlet szerint $2q$ a parabola parametere, midőn az átmérő ordinátáival ω szöget képez. Az analytikai mértan ugyanis kimutatja, hogy [1])

$$p = q.\sin^2\omega .$$

Foglaljuk össze az eredményeket:

1.) A pont által megfutott parabola sikja

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & c_1 & p_1 \\ y-a_2 & c_2 & p_2 \\ z-a_3 & c_3 & p_3 \end{vmatrix} = o$$

vagy kifejtve:

$$(c_2p_3-c_3p_2)(x-a_1)+(c_3p_1-c_1p_3)(y-a_2)+(c_1p_2-c_2p_1)(z-a_3)=o;$$

2.) A parabola tengelye

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & c_1 & p_1 \\ y-a_2 & c_2 & p_2 \\ z-a_3 & c_3 & p_3 \end{vmatrix} = o, \quad \begin{vmatrix} x+c_1.\cos\omega & p_1 & a_1 \\ y+c_2.\cos\omega & p_2 & a_2 \\ z+c_3.\cos\omega & p_3 & a_3 \end{vmatrix} = o,$$

vagy kifejtve:

$$(c_2p_3-c_3p_2)(x-a_1)+(c_3p_1-c_1p_3)(y-a_2)+(c_1p_2-c_2p_1)(z-a_3)=o$$

$$(p_2a_3-p_3a_2)(x+c_1.\cos\omega)+(p_3a_1-p_1a_4)(y+c_2.\cos\omega)+$$
$$+(p_1a_2-p_2a_1)(z+c_3.\cos\omega)=o;$$

3.) A parabola csúcsa:

$$x' = a_1 - c_1.\cos\omega + \frac{p_1}{2}.\cos^2\omega ,$$

$$y' = a_2 - c_2.\cos\omega + \frac{p_2}{2}.\cos^2\omega ,$$

$$z' = a_3 - c_3.\cos\omega + \frac{p_3}{2}.\cos^2\omega ,$$

és 4.) a parabola főparameterének fele:

$$p = q.\sin^2\omega .$$

Az ω szög sinusát a 7.) egyenlet alatt közöltük és

$$\cos\omega = \frac{c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3}{\sqrt{(c_1^2+c_2^2+c_3^2)(p_1^2+p_2^2+p_3^2)}}.$$

E föladatnak még egy másik megoldását is vettük Kollár Dániel tanárjelölt urtól. Minthogy az itt közlött megoldástól, a mi a módot illeti, lényegesen különbözik, szintén közölni fogjuk. *Szerk.*

---

[1]) Salmon, Conic Sections, 191. lap.

Budapest, 1877. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

II. kötet. 1877. 20. füzet.

A D'ALEMBERT ELVÉNEK EGY ÚJ ALAKJA, S ANNAK ALKALMAZÁSA AZ ELEKTRODYNAMIKÁBAN.

Szily Kálmántól.

E folyóirat 6-ik és 8-ik füzetében közzétett dolgozatomban[1]) egy dynamikai tételt bizonyitottam be, mely a következő esetre vonatkozik.

Legyen egy tetszőleges pontrendszer tetszőleges mozgásban. A mig vele kivülről erélyt nem közlünk vagy tőle el nem veszünk (bele értve az erélybe a netán végzett külső munkát is), a rendszer eme mozgása, melyet *spontán mozgás*-nak nevezek, háborítatlan marad. Képzeljük azonban, hogy e pontrendszerrel, a 0 időponttól számitott i idő elfolyása alatt, végtelen kis erélymennyiséget közlünk, és pedig akként, hogy a spontán mozgás jelzői, ezen i idő alatt *egyenletes gyarapodással növekedve,* végtelen kis növekményre tegyenek szert. Jelöljük a dt idő alatt közlött erélyt, (melyet az elfogadott szokás szerint, az eleven erő változásából és a végzett munkából alakitott összegnek tekintek)

$$\frac{\delta Q.dt}{i}$$

kifejezéssel, úgy ez, az iménti föltevés szerint, annyi mint:

$$\Sigma m\,(x'\,\delta x' - x''\,\delta x + y'\,\delta y' - y''\,\delta y + z'\,\delta z' - z''\,\delta z)\,\frac{dt}{i}$$

(hol is m a rendszer valamelyik pontjának tömegét, $x \ldots, x' \ldots$ és $x'' \ldots$ ugyane pontnak a spontán mozgáshoz tartozó koordinátáit, sebességi és gyorsulási komponenseit t időpillanatban, végre

$$\frac{\delta x.dt}{i} \ldots\ldots \text{ és } \frac{\delta x'.dt}{i} \ldots\ldots$$

a koordinátáknak és sebességi komponenseknek a dt idő alatti erélyközléstől származott *perturbatióit* jelentik.

[1]) A hőelméletben előforduló mennyiségek dynamikai jelentéséről, I. köt. pag. 165 és 239. V. ö. II-ik kötet pag. 135 és 136.

Jelöljük már most az egész i idő alatt közlött erélyt δQ-val, úgy az idézett tétel ezt mondja:

$$i \cdot \overline{\delta Q} = \delta (2 i \overline{T}) - \int_0^i \Sigma m (x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z)$$

hol is $\overline{T}$ a háboritatlan pontrendszernek ezen i idő alatti közép eleven erejét, és a substitutio-jel fölé és alá irt jelzők az utána következő mennyiségek i időbeli és 0 időbeli értékei közti különbséget ábrázolják.

A 19. füzet 274. lapján azonban Réthy Mór igen szépen megmutatja, hogy az eddigelé általánosan elfogadott föltevés, mely szerint a közlött erély egyenlő az elevenerő változásának és a végzett munkának összegével, csak addig engedhető meg, a mig a működő erők potentiálja tisztán statikai potentiál. Ha ellenben a működő erők potentiálja nem csupán a koordináták függvénye, hanem egyszersmind függvénye — még pedig másodrendű homogén függvénye — a sebességi komponenseknek (a mint ezt Gauss és Weber óta az elektricitás elméletében föltételezik), ugy a föntebbi tétel ily alakban jelenik meg:

$$i \overline{\delta Q} = \delta [2 i (\overline{T} - \overline{D})] - \int_0^i \Sigma \frac{\partial (T - D)}{\partial x'} \delta x$$

hol is D a dynamikai potentiál, vagyis a potentiálnak az a része, mely a sebességi komponenseket is, és pedig másodrendü homogén alakban, tartalmazza.

Réthynek ez a fontos észrevétele, melyet még a mult nyáron szives volt velem levélben közölni, és különösen az a meglepő következtetés, hogy e szerint *az erők munkája nem csupán a koordináták variatiójától, hanem a sebességi komponensek variatiójától is függ*, arra inditottak, hogy e kérdésnek, — hogy ugy mondjam — philosophiai oldalát az erély szempontjából vizsgálat tárgyává tegyem, és ha lehet, oly uj tárgyalási modort találjak, melynél a munka eddigi definitiója érintetlen marad.

I.

A dynamika mostani tárgyalásának sarkpontját az erő definitiója képezi. Az erő nagysága, ha szabad pontról van szó, egyenlőnek vétetik a pont tömegéből és gyorsulásából képezett szorozmánnyal. Ha a pont, vagy pontrendszer feltételi egyenleteknek van alávetve, ugy az erő nagysága rend szerint D'Alembert elvével határoztatik meg. Az ebben előforduló virtuális elmozdulások eleget tartoznak tenni a feltételi egyenleteknek; és ha ezekben az idő explicite is előfordulna, úgy az itt *állandónak tekintendő*.

A D'Alembertféle elv egy be nem bizonyitható, pusztán konventionális schémát állapít meg, mely »a mozgási egyenletek«-et minden egyes esetre megadja ugyan, de épen a schéma merevségénél fogva, az erő kifejezésére sokszor oly bonyolódott törvényeket kiván meg, melyek a mechanika czéljával — a természeti mozgásokat egyszerűen és lehetőleg teljesen leirni — nem igen férnek össze.

Különben is az ujabbkori vizsgálatok megmutatták, hogy a dynamikának voltaképeni sarkpontját nem az erő, hanem az erély fogalma képezi. Helyesebbnek látszik tehát, az erély definitiójából kiindulni és abból leszármaztatni az erő fogalmát, nem pedig, mint most történik, az erőéből az erélyét. Fejtegetéseinkben az itt kijelölt utat fogjuk követni, és mellőzni fogjuk azt a föltevést is, hogy az idő tekintessék független változónak.

* * *

Gondoljunk magunknak egy szabad pontot *tetszőleges* mozgásban. A független változó legyen valami φ mennyiség, melyről csak annyit tudunk, hogy növekedése minden körülmények között változatlan és egyenletes.

A független változónak valamely tetszőleges φ értékénél legyenek a mozgó pont koordinátái x, y, z és a sebességi komponensei egész általánosan x', y', z'. A független változó nőttével $x \ldots$ és $x' \ldots$ is folytonosan változnak; más szóval, mind a koordináták, mind pedig a sebességi komponensek *folytonos* függvényei a φ-nek. E 6 függvény teljesen meghatározza a pont mozgását.

E függvények száma abban az esetben, ha — mint általánosan el van fogadva és a mint a következőkben mi is fel fogjuk tételezni — a sebességi komponens az illető koordinátának az idő szerint vett első differentiál-quotiense által méretik, *4-re redukálódik*. Ha ugyanis

$$x' = \frac{dx}{dt}, \; y' = \frac{dy}{dt}, \; z' = \frac{dz}{dt}$$

úgy a mozgás teljes meghatározására csak a következő 4 függvény ismerete szükséges

$$x = f_1(\varphi); \quad y = f_2(\varphi); \quad z = f_3(\varphi) \quad \text{és} \quad t = f_4(\varphi). \qquad 1.)$$

A 3 első függvény meghatározza a pont helyét, a 4-ik pedig, kapcsolatban a 3 elsővel a pont sebességét. Ugyanis ekkor

$$x' = \frac{f_1'(\varphi)}{f_4'(\varphi)}; \; y' = \frac{f_2'(\varphi)}{f_4'(\varphi)}; \; z' = \frac{f_3'(\varphi)}{f_4'(\varphi)}$$

hol is az f_i' az f_i első deriváltját jelenti.

Különösen hangsúlyozom, hogy *az x, y, z és t, ha a pont szabad pont, teljesen függetlenek egymástól,* a mint ez az 1.) alatti egyenletekből világosan kitűnik.

Ha a pont nem is lenne szabad, hanem feltételi egyenleteknek

$$\psi(x, y, z, t) = 0, \ldots\ldots$$

alá is lenne vetve, azért a függvények száma nem csökken; mert a mennyivel kevesebb lett a szabadon változók és ezzel az f függvények száma, ugyanannyi ψ függvény járul hozzájok. — És így az n pontból álló rendszer mozgásának teljes meghatározására mindig $3n + 1$ függvény ismerete szükséges.

E mozgást, mely egy pontnál e 4 függvény, n pontnál pedig $3n + 1$ függvény által ekként teljesen jellemezve van, a pont vagy a pontrendszer *spontán mozgásá*-nak nevezem. Az $x \ldots$ és t vagy az $x' \ldots$ spontán változását, a $d\varphi$ változásnak megfelelőleg, megkapom tehát, ha az $f \ldots$ vagy az $f_1 : f_4 \ldots$ függvény első deriváltját $d\varphi$-vel sokszorozom. E spontán változásokat az illető mennyiség elé irt d betüvel jelölöm. *Ha a pont szabad pont, vagy a rendszer szabad rendszer, úgy a spontán elmozdulások* $dx \ldots\ldots$ *és a dt teljesen függetlenek egymástól; ha pedig feltételi egyenleteknek van alávetve, úgy a* $dx \ldots$ *és dt ezeknek eleget tartoznak tenni.*

Erély-nek nevezek minden okot, mely egy meglevő, különben tetszőleges mozgáson (a mozgáshatározó függvények tekintetében) változtatni képes. A mozgó anyagi pontnak is van tehát erélye, minthogy épen mozgásánál fogva képes egy más, meglevő mozgáson változtatni. A mig a pontrendszer mozgását jellemző $3n + 1$ függvény *alakja* állandóan ugyanaz, a pont erélye is állandó; arra, hogy e függvények bármelyikének alakja változást szenvedjen, kivülről erélyt kell a ponttal közölni, a külső erély-reservoir tartalmának szaporodása negativ közlésnek vétetvén.

Képzeljük már most, hogy a független változónak ama bizonyos φ értéke mellett, a mozgó ponttal végtelen kis erélymennyiség δQ közöltetik, vagyis hogy általában mind a koordináta-függvények, mind az időfüggvény és következéskép a sebesség-függvények is végtelen kis *alakváltozást* szenvednek. E $6n + 1$ függvény alakjának variatiójából származó végtelen kis növekményeket jelöljük az illető mennyiség elé irt δ betüvel.

A közlött erély δQ és a pontrendszer koordinátáinak és az időnek variatioi között az összefüggést ekként *defineálom*:

$$\delta Q = \delta K + \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + J\delta t \qquad 2.)$$

hol is a K, X_i, Y_i, Z_i és J mennyiségek a koordinátáknak, sebességi komponenseknek és az időnek véges értékű, különben tetszőleges függvényei lehetnek.

A K függvényt a *pontrendszer kinetikai energiájának*, az X_i..... együtthatót a rendszer i-dik pontjára az X... tengelylyel párhuzamosan működő *erőkomponens*nek, a

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + J\delta t$$

az *erők munkájának* nevezem. E szerint, *a közlött erély egyenlő az a közben végzett munkának és a kinetikai energia változásának összegével.*

Abban az esetben, a midőn az X_i.... erőkomponensek egy és ugyanazon V függvénynek az illető koordináta szerint vett partiális differentiális-quotiensei, továbbá J ugyanennek a V függvénynek az idő szerint vett partiális differential-quotiense és V csupán a koordinátáknak és az időnek függvénye, vagyis

$$X_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \ldots\ldots\ldots; \quad J = \frac{\partial V}{\partial t}$$

és így

$$\Sigma(X\delta x + \ldots\ldots) + J\delta t = \delta V$$

ebben az esetben azt mondjuk. *az erőknek van potentiáljok* és épen ezt a V függvényt nevezzük *potentiál*nak.

Ha a pontrendszerre csupa potentiálos erők működnek, úgy a 2.) alatti egyenlet így írható:

$$\delta Q = \delta K + \delta V = \delta(E) \ldots\ldots\ldots \quad 3.)$$

hol is E, t. i. a kinetikai energia és a potentiál összege, a pontrendszer *összes energiájá*nak neveztetik.

És minthogy most e differentiál-egyenlet integrálhatóvá lett

$$Q - Q_0 = E - E_0$$

vagyis a közlött erély egyenlő a pontrendszer energiájának változásával.

Alkalmazzuk most a 2.) alatti egyenletet a spontán mozgásra. Ennél

$$\delta K = dK, \quad \delta x_i = dx_i \ldots\ldots \delta t = dt$$

$$\text{és} \quad \delta Q = 0.$$

És így lesz, *a minden spontán mozgásra egyaránt érvényes egyenlet:*

$$dK + \Sigma(Xdx + \ldots\ldots) + Jdt = 0 \quad 4.)$$

Ez egyenlet, mint látni fogjuk, tökéletesen megteszi mindazokat a szolgálatokat, melyekre jelenleg D'Alembert elvét használjuk. Ez okból egyszerűen *a D'Alembertféle elv új alakjának* nevezem.

Ha ugyanis a 4.) alatti egyenletben a K csupán a koordinátáknak és az időnek lenne függvénye, ezek pedig (mint a szabad pontrendszernél van) egymástól teljesen függetlenek lennének, úgy ez az egyenlet rögtön szétválnék $3n + 1$ külön egyenletre, ú. m. a következőkre:

$$\left(X_i + \frac{\partial K}{\partial x_i}\right) dx_i = 0 \ldots\ldots, \left(J + \frac{\partial K}{\partial t}\right) dt = 0$$

De minthogy a K függvény a koordinátákon és az időn kivül a sebességi komponenseknek is függvénye, ez utóbbiak pedig ismét a koordinátáknak és az időnek függvényei, e szétválasztás $3n + 1$ külön egyenletre mindaddig nem foganatosítható, a míg a 4.) alatti egyenletet, speciális adatok alapján, olyan alakra nem sikerül hoznunk, hogy a benne most előforduló differentiálok egymástól függetlenek legyenek. Ha e szétválasztás többféle módon is megejthető, úgy közülök kiszemeljük azt a szétválasztási módot, mely az erő-komponensekre *a legegyszerübb* kifejezést adja. Az ekként nyert egyenletek lesznek aztán a pontrendszer mozgási egyenletei.

Mutassuk meg a 4.) alatti egyenletnek $3n + 1$ egyenletre való szétválását egyes specziális esetekben.

1.) Legyen valamely pontrendszer spontán mozgásánál K állandó, úgy azt mondjuk a pontrendszer *egyensúlyban van.*

Ez esetben $$dK = 0$$

és $$\Sigma(X dx + \ldots\ldots) + J dt = 0 \qquad 5.)$$

Ha ehhez még a pontrendszer szabad is, úgy $dx_i \ldots\ldots$ és dt függetlenek egymástól, következésképp

$$X_i = 0 \ldots\ldots \text{ és } J = 0$$

Ha ellenben a pontrendszer nem szabad, hanem alá van vetve, a

$$\psi_1(x_i, y_i, z_i \ldots\ldots t) = 0$$
$$\psi_2(x_i, y_i, z_i \ldots\ldots t) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

korlátozó egyenleteknek, úgy — Lagrange eljárása szerint — a ψ egyenleteket differentiáljuk és miután őket λ_1, λ_2 .... egyelőre ismeretlen függvényekkel megsokszoroztuk, hozzá adjuk az 5.) egyenlethez:

$$\Sigma\left[\left(X + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \ldots.\right) dx + \ldots.\right] + \left(J + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \ldots..\right) dt = 0$$

Igy most a $dx \ldots..$ és dt megint függetlenekké váltak, következésképp

$$\left.\begin{aligned} X_i + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \ldots\ldots\ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ \text{és} \quad J + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \ldots.. &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 6.)$$

Az első $3n$ egyenlet kifejezi az erőkomponenseket az egyensúly esetére. Az utolsó pedig meghatározza az J együtthatót. Látni való, hogy J csak akkor nem zérus, ha a feltételi egyenletekben az idő is előfordul, különben mindig elenyészik.

Szorozzuk meg a 6.) alatti egyenleteket rendre δx_i ..... és δt-vel, s adjuk őket aztán össze, úgy lesz:

$$\Sigma(X\delta x + \ldots\ldots) + J\delta t + \lambda_1\delta\psi_1 + \ldots\ldots = 0$$

De minthogy $\delta\psi_1 = 0$, $\delta\psi_2 = 0$ ..... ; az egyensúly feltétele még így is írható:

$$\Sigma(X\delta x + \ldots\ldots) + J\delta t = 0. \qquad 7.)$$

És tegyük fel, mint Lagrange teszi, hogy a feltételi egyenletekben az idő állandónak tekintetik, úgy $J = 0$ és a fennmaradó egyenlet

$$\Sigma(X\delta x + \ldots\ldots) = 0$$

kifejezi az úgynevezett virtuális sebességek elvét.

Ha tehát a pontrendszer egyensúlyban van, úgy a 2.) alatti egyenlet a 7.) alattival egybekapcsolva, mutatja hogy

$$\delta Q = \delta K \qquad 8.)$$

vagyis hogy a közlött erély egyenlő a kinetikai energia változásával.

2. Legyen a K függvény a pontrendszer eleven ereje : T vagyis

$$K = T = \Sigma\frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

hol is m minden pontra egy-egy külön állandó. Mi lesz most az erőkomponens legegyszerűbb kifejezése?

A 4.) egyenlet szerint most

$$\Sigma m\,(x'dx' + \ldots\ldots) + \Sigma(Xdx + \ldots\ldots) + Jdt = 0.$$

De minthogy

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt} \ldots\ldots$$

lesz:

$$\Sigma\left[\left(X + m\frac{dx'}{dt}\right)dx + \ldots\ldots\right] + Jdt = 0$$

Ha a pontrendszer szabad, úgy a dx_i .... dt függetlenek egymástól, és igy:

$$X_i = -m_i\frac{dx'_i}{dt} \ldots\ldots\ldots \qquad 9.)$$

és

$$J = 0.$$

A 9.) negativ jelétől eltekintve, ez Galilei óta az erő definitioja.

Ha a pontrendszer nem szabad, hanem ψ_1, ψ_2 ..... feltételeknek van alávetve, úgy ismét mint az előbb:

$$\left.\begin{aligned} X_i + m_i \frac{dx'_i}{dt} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \ldots\ldots &= 0 \\ J + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \ldots\ldots\ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 10.)$$

Szorozzuk meg a 10.) alatti egyenleteket rendre δx_i .... és δt-vel s adjuk őket össze, úgy lesz:

$$\Sigma(X\delta x + \ldots\ldots) + J\delta t = -\Sigma m\left(\frac{dx'}{dt}\delta x + \ldots\ldots\right) \qquad 11.)$$

És tegyük fel, mint Lagrange teszi, hogy a feltételi egyenletekben az idő állandónak tekintetik, úgy $J = 0$ és a fennmaradó egyenlet, a negativ jel hiján,

$$\Sigma(X\delta x + \ldots\ldots) = \Sigma m\left(\frac{dx'}{dt}\delta x + \ldots\ldots\right)$$

kifejezi D'Alembert elvét szokásos alakjában.

Kapcsoljuk össze a 2.) egyenletet 11.)-gyel, úgy

$$\delta Q = \delta T - \Sigma m\left(\frac{dx'}{dt}\delta x + \ldots\ldots\right) \qquad 12.)$$

vagyis ez esetben a közlött erély egyenlő az elevenerő változásának és a végzett munkának összegével.

Föltéve, hogy az erőknek potentiáljok van, úgy ez esetben

$$\delta Q = \delta T + \delta V \qquad 13.)$$

és

$$0 = dT + dV \qquad 14.)$$

hol is V csupán a koordináták és az idő függvénye; T pedig a sebességi komponensek pythagorási függvénye.

3.) Legyen a K függvény a sebességi komponenseknek másodrendű homogén függvénye, a koordinátáknak pedig tetszőleges függvénye. Ez a föltevés lényegében azonos az elektrodynamikában uralkodó erő-hypothesissel. Mi lesz most az erőkomponens legegyszerűbb kifejezése?

Ez esetben a 4.) alatti egyenlet igy alakitható át:

$$\Sigma(Xdx + \ldots) + 2\,dK - dK + Jdt = 0.$$

vagy minthogy K az x ... és x' ... függvénye

$$\Sigma(Xdx + \ldots) + 2dK - \Sigma\left(\frac{\partial K}{\partial x'}dx' + \ldots\right) - \Sigma\left(\frac{\partial K}{\partial x}dx + \ldots\right) + Jdt = 0.$$

A középen levő tagot ekként átalakitva:

$$\Sigma\left(\frac{\partial K}{\partial x'}dx' + \ldots\right) = \Sigma d\left(x'\frac{\partial K}{\partial x'}\right) - \Sigma\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial x'}\right)dx + \ldots\right]$$

De minthogy K mostani definitiójánál fogva

$$\Sigma\left(x'\frac{\partial K}{\partial x'}+\ldots\right)=2K$$

lesz még a helyettesités után:

$$\Sigma\left[\left(X+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial x'}\right)-\frac{\partial K}{\partial x}\right)dx+\ldots\right]+Jdt=0.$$

Ha a pontrendszer szabad, ugy $dx\ldots$ függetlenek egymástól, és

$$X_i=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial x_i'}\right)+\frac{\partial K}{\partial x_i} \qquad 15.)$$

. . . . . .

Tegyük fel, hogy ezek a most meghatározott X_i erők potentiális erők, ugy:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial x_i'}\right)+\frac{\partial K}{\partial x_i} \qquad 16.)$$

És hozzunk be K helyett egy másik D függvényt, melyet úgy defineálunk, hogy:

$$D=T-K$$

hol is T a pontrendszer eleven erejét jelentse.

Igy a

$$\frac{\partial K}{\partial x_i'}=mx_i'-\frac{\partial D}{\partial x_i'}$$

és:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial x_i'}\right)=m\frac{dx_i'}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial D}{\partial x_i'}\right)$$

továbbá:

$$\frac{\partial K}{\partial x_i}=-\frac{\partial D}{\partial x_i}$$

Helyettesitsük ezeket a 16.) egyenletbe:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=-m\frac{dx_i'}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial D}{\partial x_i'}\right)-\frac{\partial D}{\partial x_i}$$

honnan

$$m\frac{dx_i'}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial D}{\partial x_i'}\right)-\frac{\partial D}{\partial x_i}-\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

Ugyanezt az egyenletet ebben, vagy lényegileg mit sem különböző alakban megtaláljuk Gauss-Weber óta minden ujabb elektrodynamikában. Riemannál[1]) pl. tökéletesen ez az egyenlet fordul elő, csak azzal a különbséggel, hogy ő a V potentiált — S-sel jelöli.

Az elektrodynamikákban ezt az egyenletet abból a föltevésből vezetik le, hogy az elektrikus erők potentiálja nem csupán a koordináták függvénye, mint Coulomb tanította, hanem a sebességi komponenseké is. E föltevés végelemzésében arra a következtetésre vezet, hogy

[1]) Riemann-Hattendorf »Schwere, Elektr. und Magnetismus« pag. 327. Gl. (3.

az ilyen erők munkája nem csupán a koordináták variatióitól, hanem még a sebességi komponensek variatióitól is függ.

Ismeretesek azon számos peripetiák és controversiák, melyekre e föltevés vezetett. Én azt hiszem, hogy mindezek teljesen elkerülhetők lettek volna, ha a Weberféle törvény felállításakor a kinetikai energia általános fogalma már ismeretes. — A dolog t. i. mai szempontból így állott:

A tapasztalás azt mutatta, hogy az akkori dynamikának fundamentális egyenlete (a melyet föntebb 14-gyel jelöltünk) u. m.:

$$d(V + T) = 0$$

az elektrodynamikában *nem érvényes*. Az egyenletet e végből általánositani kellett, u. m.: vagy elejteni azt a kikötést, hogy a V csupán a koordináták függvénye, vagy pedig azt mondani, a T függvény az elektrodynamikában nem ugyanaz, mint a ponderodynamikában. E kettő között szabadon lehetett választani. Mind Gauss, mind Weber s mind azok, kik ekkoráig elektrodynamikai elméletet állitottak fel, az első utat választották. Elejtették a Newtoni potentiált, vagyis inkább megbővitették a dynamikai potentiállal. Közvéleménynyé vált, hogy a Newton törvényét az elektrodynamikában nem lehet használni. — A másik utat senki sem próbálta meg, senki sem jött arra a gondolatra, hogy a V helyett a T fogalmát kellene általánositani, s azt mondani: az elektrodynamikában a kinetikai energia ne vétessék egyenlőnek a sebességi komponensek pythagorási függvényével, hanem valami általánosabb függvénynyel, pl. a sebességi komponensek quadratikus homogén függvényével. Pedig ép oly jogos lett volna, azt a függvényt, melyet dynamikai potentiálnak neveztek el, nem V-hez, hanem T-hez számitani. Igy aztán az erő-törvény megmaradt volna a régi Newton-Coulombféle.

Én a föntebbiekben ez utóbbi utat követtem, s a T és $-D$ függvényeket összefoglalván s K betüvel jelölvén, az energia egyenletével ugyan arra az eredményre jöttem, mint az elektrodynamikában a dynamikai potentiál fogalmával jönnek.

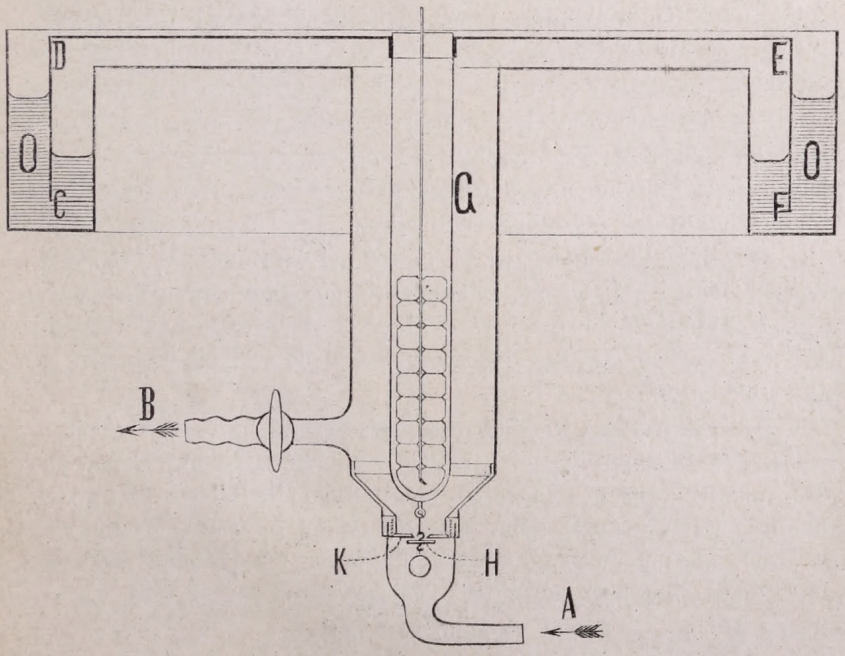
Természetes, hogy mind a kétféle felfogás egyenlően jogosult: az egyik vagy a másik mellett csak az dönthet, hogy melyik egyszerűbb?

A nagy kérdés azonban még mindig megoldására vár. A kinetikai energiának melyik alakja az, a mi az elektrodynamikai jelenségeknek legjobban megfelel?

NYOMÁS-SZABÁLYOZÓ VILÁGÍTÓ GÁZ SZÁMÁRA.

Schuller Alajostól.

Midőn világító gázzal állandó hőfokot kivánunk előállítani, hőfok-szabályozót, thermostatot szoktunk alkalmazni. Ily módon biztositjuk magunkat az iránt, hogy a felhevitett test hőfoka csak bizonyos szűk határok közt ingadozhatik; de valóban állandó hőfokot előállítani ilyen módon nem sikerül. Mert akár a gáznak nyomása vagy minősége, akár a kihülésnek gyorsasága változzék, mindenesetre meg kell változni a gázfogyasztásnak, tehát az azt szabályozó nyilásnak is, a mi feltételezi a thermoregulátor hőfokának maradandó emelkedését vagy csökkenését. E szerint világos, hogy a thermoregulátor czéljának annál inkább felelhet meg, a hőfok ingadozásait annál inkább szűk határok közé szoritja, minél kevésbbé változnak az imént emlitett tényezők. Ezen szempontból kiindulva, törekedtem az egyik, nagyságánál fogva legfontosabb befolyástól, a nyomás változásaitól eredő ingadozásokat elkerülni, a mi a következőben leirt nyomás-szabályzó segitségével sikerült. A mellékelt rajzban, — a fedő és az állvány elhagyásával — a főalkatrészek átmetszetben vannak előtüntetve.



CDEF rövid henger alakjával biró, vékony pléhből készült borító, mely a külső levegőtől folyadék által van elzárva; szélei t. i. olajba (*OO*) vagy más alkalmas folyadékba merülnek. A borító közepéhez üvegcső (*G*) van ragasztva, mely felül nyitva van, ellenben alul el van zárva s kampóban végződik. Az utóbbin függ egy vizszintes állású kis köralaku tükörüveg lemez (*H*) s ezen alul egy kis terhelő súly, mely az eszköz működése közben fellépő túlnyomás legyőzésére való. — Az edény, melynek gyűrűalaku részében az olaj foglaltatik, közepén vastagabb csővel áll összeköttetésben, melynek alsó szűkebb részéhez átlyukasztott tükör-üveg-lemez (*K*) van ragasztva. Azon alul üvegcső van, mely *A*-nál kaucsuk cső segítségével a gázvezető csövekkel köttetik össze.

Midőn *B*-nel a csap zárva van, s a világító gázt *A*-nál betódulni engedjük, akkor az eszköz belsejében a feszültség bizonyos fokig növekedik, mig a *DE* felületre gyakorolt egyoldalu nyomás következtében a *CDEF* borító emelkedni nem kezd; azontúl a *K* lemez felett lévő térben a feszültség nem fokozódhatik, mert nagysága a mozogható rész súlyától függ, melylyel egyenes arányban áll. A helyett, hogy a feszültség növekednék, a mozgékony rész felemelkedik, mindaddig, mig a *H* lemez a *K* lemez nyilását el nem zárja, s ezáltal a gáz további betódulását meg nem akadályozza. Ha már most *B*-nél a csapot megnyitjuk, akkor egy része a gáznak ki fog ömleni, anélkül azonban, hogy a feszültség észrevehető mértékben megváltoznék; ugyanis a borító most kis időn át sülyedni fog, mialatt rés támad *H* és *K* lemezek közt, melyen át a gáz betódul, s megakadályozza a további veszteséget, kipótolván a *B*-nek szenvedett veszteséget.

Az állandó feszültség, melylyel a *B*-nél kiáramló gáz bir, kisebb mint a betóduló gáztömegé, különben állandósága nem volna biztositva. Nagyságát bizonyos határok közt megváltoztathatjuk, azáltal, hogy a *G* csőben foglalt, drótra felfüzött ólomsulyokat szaporitjuk vagy csökkentjük.

Az érzékenység-, illetőleg a feszély állandósága tekintetébeu az eszköz annál tökéletesebb, minél nagyobb a borító átmérője (*DE*), minél vékonyabb lemezből áll a borítónak hengeralaku fala (*D* és *EF*), továbbá minél ritkább a folyadék (*OO*) és minél kisebb a *H* lemez átmérője. Az utóbbi körülmény annál fontosabb, minél nagyobb különbség van a betóduló és a kiömlő gáz feszélye között. Ezen különbség következtében a *H* lemezre felfelé irányuló erő működik, mely olyan hatást gyakorol, mintha a mozgó résznek a súlya kisebbittetnék. Tehát valami

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

kevéssel kisebb feszültség uralkodik a szabályzóban akkor, mikor a gázcsövekben a feszültség nagyobb. A rajzban előtüntetett viszonyok szemmel tartása mellett, a szóban forgó körülménynél fogva, a szabályzóban történő változás csak 0·001-részét teszi a gázcsövekben előforduló feszélyváltozásnak. Kevésbbé előnyös méretek esetében, midőn a K lemez nem olyan sokkal kisebb, mint a borító feneke, s különösen, mikor a gáz nyomása A-nál tetemes változásokat mutat, ezt a tényezőt azáltal hárithatjuk el, hogy a H lemezre terhelő suly helyett, olyan zárt üvegcsövet függesztünk, mely a kellő méretekkel birván, egy részével mindig vizben, még pedig a külső levegővel közlekedő vizben lóg; vagy pedig azáltal, hogy a H és K lemezeket függélyes állásban alkalmazzuk s az egész szerkezetet ennek megfelelően módositjuk.

NÉHÁNY HATÁROZOTT EGÉSZLETRŐL A DIFFRACTIÓ ELMÉLETÉBEN.

Dr. Fröhlich Izor egyetemi magántanártól.

E lapokban[1]) nem rég emlitettem egy módot, mely bizonyos határozott egészletek értékére vezet.

Közelebbi vizsgálatánál kitünt, miszerint ez tetemesen általánositható a függvények bizonyos csoportjára nézve.

Kiindulási pontul egy tetszőleges alakú, de sík nyilás szolgál, mely által egy Schwerd-féle diffractió jelenetet állitunk elő, melynek tiszta képét egy gömbhéjalaku ernyőre vetitjük.

Az elhajlitási szögre nézve semmiféle megszoritást nem teszünk; az elhajlitott fény mozgási erélye tehát kisebb a beeső fényénél.

Megtartva az idézett helyen megállapitott jelzéseket, A alatt ezentúl a φ- és ψ-nek oly függvényét értjük, mely következő feltételeknek tesz eleget:

$$A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta_1\right) = K \int\int \mathfrak{A}\, dF \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin\varphi \cos\psi + y \sin\psi}{\lambda}\right)$$

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos\psi\, d\psi = \alpha\, C\, \mathfrak{A}^2 F$$

Itt $\alpha < 1$; de minden egyenlő alakú, habár méretre nézve különböző nyilásra nézve ugyanazon értékü.

Vegyünk most n számu ily egyenlő, párhuzamos fekvésü, központjaikkal egymástól r távolnyira eső nyilást; legyen ϑ az ezen közpon-

[1]) Műegy. Lapok. II. köt. 228.

tokat összekapcsoló egyenes és a φ-k iránya által képezett szög, ugy, hogy a két szomszéd nyilásból eredő mozgások menetkülönbsége: $r(\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \sin\psi\sin\vartheta)$; akkor az erély megmaradása elve követeli:

$$n\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\cos\psi\, d\psi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\cos\psi \frac{\sin^2 n\pi\frac{r}{\lambda}(\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \sin\psi\sin\vartheta)}{\sin^2\pi\frac{r}{\lambda}(\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \sin\psi\sin\vartheta)} d\psi \ldots \text{I.}$$

Ezen egyenletben ϑ egy tetszőleges parameter, melylyel a mozgási erély semminemü összefüggésben nem áll; annak specialis értékei a fentebbi egészletet következő kettőre választják szét:

$$n\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\cos\psi\, d\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \frac{\sin^2 n\pi\frac{r}{\lambda}\sin\varphi\cos\psi}{\sin^2\pi\frac{r}{\lambda}\sin\varphi\cos\psi}\cos\psi d\psi \ldots \text{Ia.}$$

$$n\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\cos\psi\, d\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \frac{\sin^2 n\pi\frac{r}{\lambda}\sin\psi}{\sin^2\pi\frac{r}{\lambda}\sin\psi}\cos\psi\, d\psi \ldots\ldots \text{Ib.}$$

Másnemü ily egészletekre juthatunk következő eljárás által:

Két egyenlő, de különben szintén tetszőleges alakú nyilás az ernyő ugyanazon pontjában

$$A\sin 2\pi\frac{t}{T} + A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{p}{\lambda}\right)$$

alakú mozgást idéz elő, hol $p = r(\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \sin\psi\sin\vartheta)$.

Az eredő mozgás amplitudja:

$$A^2\left\{\left(1 + \cos 2\pi\frac{p}{\lambda}\right)^2 + \sin^2 2\pi\frac{p}{\lambda}\right\} = A^2\left\{2 + 2\cos 2\pi\frac{p}{\lambda}\right\},$$

ezen értéket, *ily alakjában*, az erély feltéti egyenletébe helyettesitve, s az erélyek összefüggését figyelembe véve, lesz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\cos 2\pi\frac{p}{\lambda}\cos\psi\, d\psi = 0. \qquad 2.)$$

Folytatva ezen eljárást három nyilásra, az amplitudot a kijelölt módon képezve azon megjegyzéssel, hogy benne a második tényező egész számból és $2\pi\frac{p}{\lambda}$ többszöröseinek cosinusaiból álljon, nyerjük az éppen talált egészlethez egészen hasonlót, csak azon különbséggel, hogy ebben $2p$ lép p helyébe.

Tetszőleges számu nyilásra terjesztve ki ezen tárgyalást, az általános egyenlet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos\psi \cos 2n\pi \frac{r}{\lambda}(\sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta + \sin\psi \sin\vartheta) d\psi = 0 \ldots \text{II.}$$

Ámde ezen egyenlet is független ϑ parameterétől, s igy keletkezik belőle:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos\psi \cos 2n\pi \frac{r}{\lambda} \sin\varphi \cos\psi \, d\psi = 0 \ldots\ldots \text{IIa.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos\psi \cos 2n\pi \frac{n}{\lambda} \sin\psi \, d\psi = 0. \ldots\ldots\ldots \text{II. b.}$$

Ezen utóbbi három egészletet egyenesen a 2.) alatti egyenletből nyerjük, ha ott az r távolságát n-szer nagyobbnak veszszük.

Egyszersmind kitűnik, miszerint nr, továbbá $nr\cos\vartheta$, $nr\sin\vartheta$ tetszőleges állandókat jelenthetnek s hogy a nyert egészletek n, r és ϑ physikai jelentőségétől egészen függetlenek.

Az A amplitud a φ és ψ változók függvénye; de benne ezeken kivül még parameterek is lépnek fel, melyek a függvény alakjára nincsenek ugyan befolyással, de melyektől A értéke lényegesen függ. Ezen parameterek a nyilás kiterjedésére vonatkozó méretek.

Változtassuk egy nyilásnak kiterjedését alakjának megtartása mellett, úgy, hogy minden vonalas határa egyenlő viszonyban, ε-szor változzék.

Az ez esetben keletkező mozgás amplitudja A_ε úgy nyerhető az A-ból, hogy az utóbbinak minden vonalas parameteréhez ε szorzó járúl, az eredő összefüggés pedig

$$\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos\varphi d\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A_\varepsilon^2 \cos\psi d\psi \ldots\ldots\ldots \text{III a.}$$

Igy pl. a körnél csak egy, a derékszögü egyenközénynél két, az egyenközénynél általában, s a háromszögnél három ily parameter fordúl elő stb.

Oly nyilásoknál, melyek kiterjedése egy irány mentében változtatható, a nélkül, hogy ez a többi parameterekre befolyást gyakorolna (mint pl. egyenközényeknél), az erély csak ε-szorosa az eredeti nyilásénak, s az A'_ε amplitudban csak az emlitett parameterhez járult az ε szorzó, a feltét tehát

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos \psi d\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A'^2 \cos \psi d\psi \quad \ldots\ldots \text{III.b.}$$

E tétel egy körsector alakú nyilásra is érvényes, melynek központi szöge ε-szor nagyobbodott, de e mellett még kisebb vagy legfeljebb egyenlő 2π.

Az I. és II. alatti egyenletek nem követelik az amplitúd K szorzójának ismeretét, miután azok csak egyenalakú nyilások vizsgálata mellett nyerettek; az utóbbi III. b. alatti egyenlet pedig csak akkor helyes, midőn az eredeti, és az ε-szorosan változtatott nyilásból szedett tüneményekben a beeső fény erélyének ugyanazon része lép fel az elhajlitott fény mozgásában, szóval, ha a kezdetben α-val jelzett állandó mindkettőre nézve ugyanaz. Ez utóbbi feltét teljesitve van, midőn a nyilások méretei a fényhullámhosszhoz képest igen nagyok, úgy, hogy az elhajlilott fény csak csekély elhajlitási szögnél bír véges amplitudal: akkor egyszersmind $\alpha = 1$.

Mindezen egyenleteknél az egészletek határai végtelenek, az összefüggések azonban helyesek maradnak ha e határok helyébe π és $-\pi$ lép, hiszen az A amplitúd sajátsága, hogy növekedő elhajlitási szöggel az gyorsan fogy s ez utóbbi határértékeknél is már elenyésző csekély.

Viszont pedig a φ- és ψ-nek bármily alakú függvényére nézve érvényesek ezen egyenletek. E függvény valamely reális alakú nyílás által előidézett mozgás amplitudját fejezi ki.

A felsoroltakkal még korántsem merítettük ki az ezen alapon feltalálható viszonyokat, de úgy hiszszük elégségesek a módszer ismertetésére.

Budapest, 1877. november hó.

A CONJUGÁLT ÁTMÉRŐK NÉGYZETES EGYENLETE.

Hunyady Jenőtől.

Binet, Cauchy sat. jöttek először ama négyzetes és köbös egyenletre, melyektől a kúpszeleteknél és a másodrendű felületeknél a főtengelyek problémája függ. A kúpszeleteknél a conjugált átmérők egy négyzetes egyenlettől függnek; ennek kifejtése képezi e sorok tárgyát.

Legyen a kúpszeletnek az orthogonál rendszerre vonatkoztatott egyenlete a következő:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad 1)$$

továbbá annak középpontja C-ben és húzzuk meg a kúpszeletnek két conjugált átmérőjét, melyek az X tengelyt A és B-ben messék s annak tevőleges irányával w és w' szögeket képezzenek; végre pedig legyen a két conjugált átmérő ACB hajlási szöge Θ, úgy

$$\Theta = w - w' \qquad 2)$$

Ismeretes, hogy a conjugált átmérők w és w' irányai között a következő egyenletben kifejezett összefüggés létezik:

$$\frac{\sin w'}{\cos w'} = -\frac{A\cos w + B\sin w}{B\cos w + C\sin w}, \qquad 3)$$

holis w és w' egymás között felcserélhetők, a mit legkönyebben belátunk, ha az egyenletet rendezzük és zérusra hozzuk.

Az előbbi egyenletet még így is írhatjuk:

$$-\frac{A\cos w + B\sin w}{\sin w'} = \frac{B\cos w + C\sin w}{\cos w'} = \frac{S}{\cos\Theta} \qquad 4)$$

a hol S egy változó paramétert jelent.

Ha továbbá ezen egyenletekbe w'-nak értékét a (2) alatti egyenletből behelyettesítjük, úgy a következő egyenletek származnak.

$$\left.\begin{aligned}(A - S)\sin\Theta\cos w + (B\sin\Theta + S\cos\Theta)\sin w = 0\\ (B\sin\Theta - S\cos\Theta)\cos w + (C - S)\sin\Theta\sin w = 0\end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

és ezekből $\cos w$ és $\sin w$ kiküszöbölése által következő négyzetes egyenletre jövünk:

$$\begin{vmatrix}(A - S)\sin\Theta & B\sin\Theta + S\cos\Theta\\ B\sin\Theta - S\cos\Theta & (C - S)\sin\Theta\end{vmatrix} = 0,$$

vagy

$$S^2 - (A + C)\sin^2\Theta . S + (AC - B^2)\sin^2\Theta = 0, \qquad 6)$$

melytől a conjugált átmérők problémája függ.

A (6) alatti egyenletbe Θ adott értékénél S-nek két érték felel meg, a melyeket az (5) alatti egyenletek egyikébe helyettesítve, a Θ hajlási szöget képező conjugált átmérők irányait nyerjük.

Az előttünk lévő négyzetes egyenlet megadja azon négyzetes egyenletet, melytől a főtengelyek problémája függ, ha t. i. Θ-t egyenlőnek teszszük 90 fokkal; ez esetben az a következőbe megy át:

$$S^2 - (A + C)S + AC - B^2 = 0 \qquad 7)$$

Ez egyenletről ismeretes, hogy annak mindig két valós gyöke van, holott a (6) alatti egyenletnek a gyökei nem mindig valósok. A nevezett egyenlet gyökei Θ bármely értékénél valósak, ha

$$AC - B^2 < 0.$$

azaz ha a kúpszelet hyperbola.

Ha ellenben

$$AC - B^2 > 0,$$

úgy a kúpszelet ellipsis és a (6) alatti egyenlet gyökei csak úgy lehetnek valósak, ha Θ a következő feltételnek van alávetve

$$\sin^2\Theta \geqq \frac{4(AC - B^2)}{(A + C)^2},$$

így tehát az ellipsisnél nem minden adott Θ-nak felelnek meg valós conjugált átmérők, hanem csak Θ azon értékeinél, melyek a fentebbi megszorításnak alá vannak vetve.

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

11. Adva lévén két másodfoku egyenlet két ismeretlennel legáltalánosabb alakjában, kerestessék azon föltétel, melynek ha eleget tesznek az egyenlet együtthatói, a rendszer megoldása csupán másodfoku egyenletek segitségével eszközölhető. (*König.*)

Megoldás: Bäumel Edétől.

Legyen a két másodfoku egyenlet két ismeretlennel a következő:

$$a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0$$
$$a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2c_2y + f_2 = 0$$

Ha ezen két egyenletből egyik ismeretlent pl. y kiküszöböljük, ugy x-re nézve egy negyedfoku egyenletet nyerünk, mely általában a következő alakban irható:

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

a hol:

$$a = \left(a_1 - \frac{2b_1b_2}{c_2} + \frac{2c_1b_2^2}{c_2^2} - \frac{c_1a_2}{c_2}\right)^2 + 4\left(\frac{b_1c_2 - c_1b_2}{c_2^2}\right)^2 (b_2^2 - a_2c_2)$$

$$4b = 4\left(a_1 - \frac{2b_1b_2}{c_2} + \frac{2c_1b_2^2}{c_2^2} - \frac{c_1a_2}{c_2}\right)\left(d_1 - \frac{b_1e_2}{c_2} - \frac{b_2e_1}{c_2} + \frac{2b_2c_1e_2}{c_2^2} - \frac{c_1d_2}{c_2}\right) -$$
$$- 8\left(\frac{b_1c_2 - c_1b_2}{c_2^2}\right)\left(\frac{e_1c_2 - e_2c_1}{c_2^2}\right)(b_2^2 - a_2c_2) - 8\left(\frac{b_1c_2 - c_1b_2}{c_2^2}\right)^2 (b_2e_2 - d_2c_2)$$

$$6c = 4\left(d_1 - \frac{b_1 e_2}{c_2} - \frac{b_2 e_1}{c_2} + \frac{2 b_2 c_1 e_2}{c_2^2} - \frac{c_1 d_2}{c_2}\right)^2 +$$

$$+ 2\left(a_1 - \frac{2 b_1 b_2}{c_2} + \frac{2 c_1 b_2^2}{c_2^2} - \frac{c_1 a_2}{c_2}\right)\left(f_1 - \frac{2 e_1 e_2}{c_2} + \frac{2 c_1 e_2^2}{c_2^2} - \frac{c_1 f_2}{c_2}\right) -$$

$$- 4\left(\frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{c_2^2}\right)^2 (e_2^2 - f_2 c_2) - 16\left(\frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{c_2^2}\right)\left(\frac{e_1 c_2 - e_2 c_1}{c_2^2}\right) \cdot$$

$$\cdot (b_2 e_2 - d_2 c_2) - 4\left(\frac{e_1 c_2 - e_2 c_1}{c_2^2}\right)^2 (b_2^2 - a_2 c_2)$$

$$4d = 4\left(d_1 - \frac{b_1 e_2}{c_2} - \frac{b_2 e_1}{c_2} + \frac{2 b_2 c_1 e_2}{c_2^2} - \frac{c_1 d_2}{c_2}\right)\left(f_1 - \frac{2 e_1 e_2}{c_2} + \frac{2 c_1 e_2^2}{c_2^2} - \frac{c_1 f_2}{c_2}\right) -$$

$$- 8\left(\frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{c_2^2}\right)\left(\frac{e_1 c_2 - e_2 c_1}{c_2^2}\right)(e_2^2 - f_2 c_2) - 8\left(\frac{e_1 c_2 - e_2 c_1}{c_2^2}\right)^2 (b_2 e_2 - d_2 c_2)$$

$$e = \left(f_1 - \frac{2 e_1 e_2}{c_2} + \frac{2 c_1 e_2^2}{c_2^2} - \frac{c_1 f_2}{c_2}\right)^2 - 4\left(\frac{e_1 c_2 - c_1 e_2}{c_2^2}\right)^2 (e_2^2 - f_2 c_2)$$

Feladatunk most oda irányul, ezen negyedfoku egyenletet másodfoku egyenlet segitségével felbontani. Erre nézve adott Dr. Dickmann József a Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht czimü folyóirat f évi 2-ik füzetében egy értekezést.

Értekezésének rövid tartalma a következő: A közönséges eljárás szerint az egyenletet felbontjuk egy ismeretlen mennyiség segitségével két négyzet különbségére, a mely ismeretlen mennyiség meghatározása egy harmadfoku egyenletre vezet.

Képezzük a következő különbséget:

$$(ax^2 + 2bx + c + \vartheta)^2 - a(ax^4 - 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e) =$$

$$= x^2(4b^2 - 4ac + 2a\vartheta) + 4(b\vartheta + bc - ad)x + (c + \vartheta)^2 - ae$$

Hogy most a jobb oldal négyzet legyen, kell, hogy:

$$(4b^2 - 4ac + 2a\vartheta)[(c + \vartheta)^2 - ae] = 4(b\vartheta + bc - ad)$$

a mely egyenlet ϑ meghatározására szolgál:

$$\vartheta^3 - (ea - 4bd + 3c^2)\vartheta + 2(ace + 2bcd - ad^2 - b^2 e - c^3) = 0$$

Itt előfordulhat több eset, a hol ϑ meghatározása könnyebben történhetik, u. m.

1.) Ha $2b^2 - 2ac + a\vartheta = 0$

$$b\vartheta + bc - ad = 0$$

Itt a következő feltételre jövünk

$$2\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 3\,\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a} + \frac{d}{d} = 0$$

2.) Ha $(c + \vartheta)^2 - ae = 0$

$$b\vartheta + bc - ad = 0$$

Ezen esetben:

$$\frac{d^2}{b^2} - \frac{e}{a} = 0$$

3.) Ha a ϑ meghatározására szolgáló egyenletet megtekintjük, azt látjuk, hogy a negyedfoku egyenlet akkor is könnyen oldható, ha vagy

$$ae - 4bd + 3c^2 = 0$$

vagy: $$ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = 0$$

Van azonban még két eset, melyek Dickmann értekezésében nem fordulnak elő, ugyanis:

1. Ha a negyedfoku egyenletben x^2-nek együtthatója oly két részre bontható szét, hogy:

$$am = 4b^2$$
$$e(6c - m) = 4d^2$$

a mely esetben a következő feltételre jövünk:

$$2b^2e + 2d^2a - 3ace = 0$$

2. Ha a negyedfoku egyenletet felbontjuk két másodfoku tényezőre

$$a(x^2 + mx + n)(x^2 + px + r) = 0$$

és ha m vagy $p = 0$.

Ha pl. $m = 0$, akkor:

$$p = \frac{4b}{a} \qquad\qquad p = \frac{4b}{a}$$
$$n + r = \frac{6c}{a} \qquad\qquad n = \frac{d}{b}$$
$$pn = \frac{4d}{a} \qquad\qquad r = \frac{eb}{ad}$$
$$nr = \frac{e}{a}$$

A feltétel tehát: $$\frac{d}{b} + \frac{eb}{ad} = \frac{6c}{a}$$

vagy: $$ad^2 + eb^2 - 6bcd = 0$$

---

32. (Lásd a 16-ik füzetben.)

Megoldás: Raussnitz Ignácz, I-ső éves müegyetemi hallgatótól.

Tegyük fel, $f(n) = [\varphi(n)]^{n-1}$, akkor állnia kell, hogy

$$[\varphi(n)]^n = [\varphi(n)]^{n-1} + [\varphi(n)]^{n-2} \ldots\ldots \qquad (\alpha)$$

Minthogy feladatunk lényegénél fogva $\varphi(n) = 0$ eset ki van zárva, ezen egyenlet

$$[\varphi(n)]^2 - [\varphi(n)] - 1 = 0 \text{ alakra is hozható.}$$

Ebből az következik, hogy $\varphi(n)$-nek csak két értéke, és pedig számbeli értéke lehet ugyanis $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ és $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, melyek (α)-ba helyettesitve az egyenlőséget igazolják, miért is

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \text{ és}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

Az első egyenletet ezek közül c_1- a második c_2-vel szorozva, hol c_1- és c_2 tetszés szerinti állandókat jelentenek és a két egyenletet össze dva lesz:

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} +$$

$$+ c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2},$$

a miből azt látjuk, hogy feladatunk legáltalánosabb megoldása

$$f(n+1) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \ldots\ldots \beta$$

Hogy c_1 és c_2 állandókat meghatározhassuk, tegyük egymásután $n = 0$, és $n = 1$, minek következtében kapjuk

$$f(1) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$$

$$f(2) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Miután a mi esetünkben $f(1) = 1, f(2) = 1$, a c_1 és c_2-őt

$1 = c_1 + c_2$

$1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ egyenletekből határozhatjuk meg.

Ugyanis

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Ezen értékeket (β)-ba helyettesitve, lesz:

$$f(n+1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Ha ezen kifejezés jobb oldalán a kijelölt műtéteket véghez viszszük, kapjuk, hogy

$$f(n+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{3}5 + \binom{n+1}{5}5^2 + \binom{n+1}{7}5^3 + \ldots\right]$$

Miután: $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$

$$f(n+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}5 + \binom{n}{3}5 + \binom{n}{4}5^2 + \binom{n}{5}5^2 + \ldots\right]$$

Azonban

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{2}5 + \binom{n}{4}5^2 + \ldots}{2^n} + \frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{3}5 + \binom{n}{5}5^2 + \ldots}{2^n}\sqrt{5},$$

amiből látjuk, hogy ha

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{5}$$

$$f(n+1) \quad = A_n + B_n .$$

Ugyan e föladatot Dr. Schrader Károly ur is megoldotta.

---

33. Lásd a 18. füzetben.

Megoldás: Scholtz Ágostontól.

Legyen $\xi_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$.

Szorozzuk a negyedik, ötödik és hatodik sort rendre $\xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12}$ mennyiségekkel és adjuk aztán a negyedikhez a második sornak ξ_{42} és a harmadik sornak ξ_{34}, továbbá

az ötödikhez a harmadik sornak ξ_{43} és az első sornak ξ_{14}, végre
a hatodikhoz az első sornak ξ_{41} és a második sornak ξ_{24}

mennyiségekkel szorzott elemeit. Ily átalakitás után, ha tekintjük, hogy

$$x_4 \cdot \xi_{23} + x_2 \cdot \xi_{34} + x_3 \cdot \xi_{42} = (423) \qquad \begin{matrix} y_4 \cdot \xi_{23} + y_2 \cdot \xi_{34} + y_3 \cdot \xi_{42} = 0 \\ z_4 \cdot \xi_{23} + z_2 \cdot \xi_{34} + z_3 \cdot \xi_{12} = 0 \end{matrix}$$

$$x_4 \cdot \xi_{31} + x_3 \cdot \xi_{14} + x_1 \cdot \xi_{43} = (431) \quad \text{és} \quad \begin{matrix} y_4 \cdot \xi_{31} + y_3 \cdot \xi_{14} + y_1 \cdot \xi_{43} = 0 \\ z_4 \cdot \xi_{31} + z_3 \cdot \xi_{14} + z_1 \cdot \xi_{43} = 0 \end{matrix}$$

$$x_4 \cdot \xi_{12} + x_1 \cdot \xi_{24} + x_2 \cdot \xi_{41} = (412) \qquad \begin{matrix} y_4 \cdot \xi_{12} + y_1 \cdot \xi_{24} + y_1 \cdot \xi_{41} = 0 \\ z_4 \cdot \xi_{12} + z_1 \cdot \xi_{24} + z_2 \cdot \xi_{41} = 0 \end{matrix}$$

a következő egyenlethez jutunk:

$$\xi_{23} \cdot \xi_{31} \cdot \xi_{12} \cdot A = \begin{vmatrix} x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3 + y_3z_2 & z_2x_3 + z_3x_2 & x_2y_3 + x_3y_2 \\ x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 & y_3z_1 + y_1z_3 & z_3x_1 + z_1x_3 & x_3y_1 + x_1y_3 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2 + y_2z_1 & z_1x_2 + z_2x_1 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_1(423) & 0 & 0 & 0 & z_1(423) & y_1(423) \\ x_2(431) & 0 & 0 & 0 & z_2(431) & y_2(431) \\ x_3(412) & 0 & 0 & 0 & z_3(412) & y_3(412) \end{vmatrix}$$

hol az A a feladatbeli determinánst jelöli. Az utolsó egyenletből ered:

$$\xi_{23}\,\xi_{31}\,\xi_{12} \cdot A = (123)\cdot(423)\,(431)\,(412)\cdot \begin{vmatrix} y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3 + y_3z_2 \\ y_3y_1 & z_3z_1 & y_3z_1 + y_1z_3 \\ y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2 + y_2z_1 \end{vmatrix} .$$

Minthogy pedig (Müegyetemi Lapok 13. füzet, 68. lap, fönt)

$$\begin{vmatrix} y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3 + y_3z_2 \\ y_3y_1 & z_3z_1 & y_3z_1 + y_3z_3 \\ y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2 + y_2z_1 \end{vmatrix} = -\,\xi_{23} \cdot \xi_{31} \cdot \xi_{12} ,$$

kapjuk ezt az egyenletet:

$$A = -\,(123)\,(423)\,(431)\,(412) .$$

34. (Lásd 18-ik füzet, 256. l.)

Második megoldás, Kollár Dániel tanárjelölttől.

Kinematikailag fölfogva az

$$x = a_1 + c_1 t + \frac{p_1}{2} t^2$$

$$y = a_2 + c_2 t + \frac{p_2}{2} t^2$$

$$z = a_3 + c_3 t + \frac{p_3}{2} t^2$$

egyenletek valamely mozgó pont *derékszögü koordinátáinak időfüggvényeit ábrázolják.* E mozgás, mindenik tengely szerint, *egyenletesen változó,* minthogy a gyorsulási komponensek

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_1 ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = p_2 ; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = p_3$$

állandók. Az eredő gyorsulás nagysága:

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \qquad 1.)$$

és iránycosinusai: $\frac{p_1}{p}, \frac{p_2}{p}, \frac{p_3}{p}$.

A sebesség t pillanatban:

$$v = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{1/2} = [(c_1 + p_1 t)^2 + (c_2 + p_2 t)^2 + (c_3 + p_3 t)^2]^{1/2}$$

tehát a sebesség az időszámitás kezdetén: c

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \qquad 2.)$$

és a sebesség iránycosinusai ugyanekkor:

$$\frac{c_1}{c}, \frac{c_2}{c}, \frac{c_3}{c}.$$

Kinematikailag fölfogva, a föladat tehát egyjelentésü ezzel: »A $t = 0$ pillanatban van egy pont az a_1, a_2, a_3 koordináták által meghatározott helyen; ugyanekkor sebessége a $\frac{c_1}{c}, \frac{c_2}{c}, \frac{c_3}{c}$ cosinusok által meghatározott irányban c; és működik reá a $\frac{p_1}{p}, \frac{p_2}{p}, \frac{p_3}{p}$ cosinusok által meghatározott irányban egy állandó gyorsitó erő: p. Kérdés, minő lesz a pálya?«

E probléma e szerint ugyanaz, mint a Föld szinéhez közel, ferdén eldobott nehéz pont mozgásának problemája. A pálya oly síkban fekszik, mely átmegy az eredő gyorsulás (p) és a kezdeti sebesség (c) irányán, továbbá az a_1, a_2, a_3 koordinátákkal biró ponton. A pályasík egyenlete tehát:

$$A_1 (x - a_1) + A_2 (y - a_2) + A_3 (z - a_3) = 0 \qquad 3.)$$

hol is:

$$A_1 = c_2 p_3 - c_3 p_2 ; \quad A_2 = c_3 p_1 - c_1 p_3 ; \quad A_3 = c_1 p_2 - c_2 p_1 \qquad 4.)$$

A pálya, mint a kinematikából ismeretes, oly parabola, melynek főtengelye párhuzamos a gyorsulás irányával, tehát a főtengely a koordináta-tengelyekkel oly szögeket zár be, melyeknek cosinusai rendre,

$$\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}},\quad \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}},\quad \frac{p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} \qquad 5.)$$

Jelentse φ azt a szöget, melyet a sebesség iránya a gyorsulás irányával bezár, úgy:

$$\cos\varphi = \frac{c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3}{cp} \qquad 6.)$$

és a gyorsulás irányára eső sebesség t időben:

$$c\cos\varphi + p\,t.$$

A parabola csúcsán a gyorsulás irányára eső sebesség $= 0$, tehát:

$$c\cos\varphi + p\,.\,T = 0 \qquad 7.)$$

hol is T azt az időt ábrázolja, mely alatt a pont a_1, a_2, a_3 helyzetéből a parabola csúcsára ér, és így a parabola csúcsának koordinátái:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + c_1 T + \frac{p_1}{2} T^2 \\ y_1 &= a_2 + c_2 T + \frac{p_2}{2} T^2 \\ z_1 &= a_3 + c_3 T + \frac{p_3}{2} T^2 \end{aligned}\right\} \qquad 8.)$$

hol is

$$T = -\frac{c\cos\varphi}{p} = -\frac{c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \qquad 9.)$$

A parabola félparametere, mint a kinematikából ismeretes,

$$\frac{c^2 \sin^2\varphi}{p}$$

vagy még:

$$\frac{c^2 \sin^2\varphi}{p} = \frac{c^2}{p} - \frac{(c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3)^2}{p^3}$$

és tekintetbe véve c és p 1.) és 2.) alatti értékeit, egyszerü átalakitás után,

$$^1/_2 \text{ parameter} = \frac{(c_2 p_3 - c_3 p_2)^2 + (c_3 p_1 - c_1 p_3)^2 + (c_1 p_2 - c_2 p_1)^2}{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{3/2}} \qquad 10.)$$

vagy még:

$$^1/_2 \text{ parameter} = \frac{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{3/2}} \qquad 11.)$$

A 3.) és 4.) alatti egyenletek meghatározzák a parabola síkját; 5.) a a főtengelye irányát; 8.) és 9.) a parabola csúcsának koordinátáit és 10.) a parabola paremeterét.

E feladatnak egy harmadik megoldását is vettük Klug Lipót főreáliskolai tanár urtól.

Budapest, 1877. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

MTA KÖNYVTÁRA

MAGYAR NEMZETI
MÚZEUM
KÖNYVTÁRA
BUDAPEST

OLNÁR MIHÁLY
EZELŐTT
BÓKA L.
KÖNYVKÖTŐ
UDAPESTEN