MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

SZERKESZTIK ÉS KIADJÁK:

HUNYADY JENŐ, KŐNIG GYULA, KRUSPÉR ISTVÁN, SZILY KÁLMÁN, SZTOCZEK JÓZSEF ÉS WARTHA VINCZE.

MŰEGYETEMI TANÁROK,

ELSŐ KÖTET.

BUDAPEST.
NYOMATOTT AZ ATHENAEUM R. TÁRS. NYOMDÁJÁBAN.
1876.

MŰEGYETEMI LAPOK.

I. KÖTET. 1876.

163.

M. ACADEMIA'
KÖNYVTÁRA

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

I. kötet. 1876. 1. füzet.

BEVEZETÉSÜL.

Körül tekintvén tudományos időszaki irodalmunkon, elég gazdagnak és virágzónak kell azt elismernünk; az egyes szakok érdekeiket képviselve találják, nem ritkán több folyóiratban; de annál föltünőbb és érezhetőbb a hézag, a melyet a »Műegyetemi Lapok« megindításával kivánunk betölteni. A m. t. akadémia ugyanis bő alkalmat nyujt kisebb-nagyobb önálló vizsgálatok folytatására és végleges kiadására; a természet-tudományok népszerüsitésére szánt folyóiratok elterjedése olyan, a mint azt néhány évvel ezelőtt még remélni sem mertük, vannak végre virágzó szaklapjaink, melyek részletesen foglalkoznak a technikai tudományok gyakorlati oldalával.

Oly szakközlöny azonban hiányzik, mely akár a tanügy, akár a tiszta tudomány, akár végre ennek alkalmazása érdekében, a mindezek alapját képező elméleti tudományokkal foglalkozik. Az e téren meglevő és nem szegényes élet sehol nem nyilvánul. Ez inditotta az alulirottakat arra, hogy a »Műegyetemi Lapok« kiadására egyesültek; erős meggyőződésük lévén, hogy íly szaklapra nem csak szükségünk van, hanem, a mi nálunk nem jár mindig együtt, közönsége is lesz.

E folyóirat nem lesz oly értekezések gyűjteménye, melyeket többé kevésbbé a véletlen hoz össze; hanem úgy kivánjuk azt szerkeszteni, hogy a hazai tudományos élet hű és részletes képét adja, egyszersmind gonddal kiséri az általános tudományos fejlődést, és igy mindkettőnek hirlapja és közvetitője lehessen.

E czélból hozunk közép terjedelmen túl nem menő, önálló czikkeket és kisebb közleményeket, melyek tárgyalják a napirenden lévő tudományos kérdéseket és ezeken mutatják a tárgyismeret és a módszerek haladását; tekintettel leszünk ezeknél arra, hogy olvasásuk ne

az összes szakirodalom ismeretét tételezze föl, hanem hogy megforditva ebbe bevezessenek és tájékoztatásul szolgáljanak. Ezekben még a hazai tudományos törekvések és az általok elért eredmények közvetetlen és gyors közzétételét fogjuk eszközölni. Bő irodalmi rovatban, a bibliographián kivül, az e téren föllépő fontosabb új jelenségek részletes ismertetését adjuk. Végre az egyetemi oktatás szükségei számára még egy utolsó rovatban föladattárt inditunk meg, melyben részint eredeti, részint a hasonló irányú külföldi lapokból vett kisebb, de önálló megfejtést igénylő problémák lesznek közölve; leginkább azért, hogy a beérkező megfejtések közlésével az e téren működőket egymáshoz közelebb hozzuk, működési irányukat ismertessük és igy hazai tudományunkba pezsgöbb életet hozzunk.

Szólunk pedig a vállalatban mindenek előtt pályatársainkhoz, kik tudományuk általános és hazai fejlődését gonddal kisérni kötelességüknek tartják, szólunk azon technikai szakemberekhez, kik a gyakorlat igényei közt az elmélet fontosságáról meg nem feledkeznek, hanem fönntartani kivánják a kettő összefüggését; szólunk végre haladottabb egyetemi hallgatóinkhoz, és a mennyiségtan és természettudományok minden barátjához, ki e tudományok mai állásáról tudomást kiván szerezni és e szakok önálló művelője akar lenni.

A »Müegyetemi Lapok« szerkesztősége.

ÚJ MÓDSZER
A CAPILLARITÁSI TÜNEMÉNYEK TANULMÁNYOZÁSÁRA.

B. Eötvös Loránd, egyetemi tanártól.

(Előterjesztetett a m. t. akadémia III-dik osztályának 1876. január 10-diki ülésén.)

A capillaritás tana folyadékok alakjával foglalkozik s igy feladata a geometria körébe esik. Ez okozta, hogy e téren az elmélet jóval megelőzte a kisérleti kutatást, úgy hogy ez utóbbi jóformán csak az elmélet által megállapitott tételek utólagos ellenőrzésével foglalkozik.

Laplace, Poisson, Gauss[1]) s a többiek, kik a capilláritás elméle-

[1]) *Laplace.* Théorie de l'action capillaire. Külön lenyomat a »Mécanique céleste« 10-dik részéből. Paris, 1806.

Gauss. Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibri. Gottingae, 1830. Újabban kiadva Gauss összes munkáinak 5-dik kötetében.

Poisson. Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris, 1831.

A. Beer. Mathematische Theorie der Elasticität u. Capillarität. Leipzig, 1869.

A. Mousson. Bemerkungen über die Theorie der Capillar-Erscheinungen. Poggendorff's Annalen 142. (Az elmélet elemi tárgyalása.)

tével foglalkoztak, bár különböző utakon, ugyanazon két alaptételhez jutottak.

Az első alaptétel súlyos folyadékokra nézve, melyek részben szilárd testekkel érintkezhetnek, de melyekre a nehézségen kivül egyéb külső erő nem hat, következő alakban fejezhető ki:

Legyenek x, y, z egy pontnak derékszögü összrendezői valamely folyadék szabad felületén, ϱ_1 és ϱ_2 a főgörbületi sugarak e pontban, x' y' z' egy másik pontnak összrendezői ugyanzon folyadék szabad felületén, ϱ'_1 és ϱ'_2 a főgörbületi sugarak az x' y' z' pontban, akkor az összrendező tengelyrendszer xy sikját viszintesen fektetve s a z tengelyt merőlegesen felfelé, tehát a nehézség irányával ellentett irányba állitva, lesz:

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\left(\frac{1}{\varrho'_1}+\frac{1}{\varrho'_2}\right)=\frac{2(z-z')}{a^2} \qquad 1)$$

hol a^2 egy a folyadék nemétől és hőmérsékétől függő mindig positiv állandót jelent s a görbületi sugarak positivoknak tekintetnek akkor, ha a folyadékból kifelé, negativoknak akkor, ha a folyadékba befelé vannak irányitva. [1])

A capillaritás elméletének *második alaptétele* azt mondja, hogy a szög, melyben a folyadék szabad felülete valamely szilárd test felületét metszi, csak ama folyadék és szilárd test nemétől s hőmérsékétől függ, tehát független a folyadék vagy szilárd test felületének alakjától.

E két tétel alapján számítás útján lehetséges a súlyos folyadékok alakját egyes észleletnek alávethető esetekben meghatározni. Ily esetek a következők: Folyadékok érintkezése egy függőlegesen álló sik lemezzel, folyadékok két párhuzamos sik lemez között, folyadékok hajcsövekben, vizszintes sík alapon s a t. A fentemlitett tételekből folyó számitások eredményei általában két állandót foglalnak magukban, az egyik a^2, a másik az állandó érintkezési szög. Ez állandók fordúlnak elő a folyadékok szabad felületének egyenletében, ez állandók határozzák meg a különböző körülmények közt keletkező folyadék-alakok méreteit (cseppek magassága, hajcsőben emelt folyadékoszlop magassága s i. t.) A

[1]) A görbe felületek elmélete arra tanít, hogy ϱ_1 alatt a görbe felület bármely normálmetszetének, ϱ_2 alatt pedig egy ez elsőre merőleges normálmetszetének görbületi sugarát értve $\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}$ független az első normálmetszet sikjának fekvésétől, úgy hogy az 1) alattl tétel akkor is áll, ha ϱ_1 és ϱ_2 nem a főgörbületi sugarakat, hanem a görbületi sugarakat két egymásra merőleges normálmetszetben jelentik.

capillaritási állandók meghatározására e szerint két lényegében különböző eljárási mód kinálkozik. Az első magának a szabad folyadékfelületnek pontos észlelete, a második a folyadékalakok főbb méreteinek lemérése. E második eljárás az, melyet eddig legtöbben követtek, s az elsőt tudtommal csak Quincke (Poggendorff's Annalen 105) kisértette meg, midőn higanycseppek alakját mikroskop segélyével törekedett pontosan meghatározni. Quincke e módszerét maga is hiányosnak mondja, s reá sulyt nem fektet. Pedig a szabad folyadékfelületnek pontos észlelése épen azon eredmények folytán lesz érdekes, melyekhez a hajcsövekben emelt folyadékoszlopok magasságának, cseppek méreteinek s i. t. lemérése vezetett.

Ez észleletekből t. i. nagy valószinűséggel következik. hogy az ugynevezett capillaritási állandók a folyadékfelület s szilárd test felületének görbületétől is függnek. A kérdésnek szigorú eldöntése s ez összefüggés tanulmányozása nézetem szerint, csak az elsőnek mondott eljárási mód által, tehát magának a folyadékfelület alakjának észlelése által lesz lehetséges.

A tárgynak ily megfontolása inditott jelen dolgozatom kivitelére, a következőkben egy új módszert fogok leirni, melynek segélyével lehetséges volt higanyra nézve a^2 állandót magának a higanyfelületnek észlelete alapján meghatározni.

Előre bocsátom az elméleti okoskodásokat, melyek e módszer alapjául szolgálnak.

Érintkezzék valamely súlyos folyadéknak nagy kiterjedésű felülete egy szilárd testnek függőlegesen állitott sik lapjával. E folyadékfelület a szilárd laptól nehány millimeternyire fekvő pontjaiban vizszintes siknak lesz tekinthető. A felület csak a szilárd lap közelében tér el a vizszintes siktól. — Számitásainkat egy derékszögű összrendező tengelyrendszerre vonatkoztatjuk, melynek xy sikja a folyadékfelület vizszintes részével összeesik, z tengelye pedig a nehézség erő irányával ellentett. A tengelyrendszer kezdetpontját a szilárd test sik felületébe helyezzük, s az x tengelyt erre merőlegesen a folyadék felé irányitjuk.

A folyadék felület sik részére nézve a fő görbületi sugarak végtelenek s igy az 1) alatti alapegyenletbe téve $z' = o$ egyszersmind:

$$\frac{1}{\varrho'_1} + \frac{1}{\varrho'_2} = o.$$

úgy hogy maga az alapegyenlet ez esetben következő alakot ölt:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2z}{a^2} \qquad 2)$$

Homorú folyadék felületre nézve a főgörbületi sugarak positivok s így z is positiv, tehát a felület a szilárd lap közelében felhajlik; domború folyadék felületre nézve a főgörbületi sugarak negátivok s így z negativ, tehát a felület a szilárdlap közelében lehajlik. Az első esetre például szolgálhat a viz érintkezése üveggel, a másodikra a higany érintkezése üveggel.

A folyadékkal érintkező sik lapot végtelennek tekintve, következik, hogy a folyadék felülete hengerfelület, melynek tengelye párhuzamos az y összrendező tengelylyel. Ennélfogva az egyik főgörbületi sugár végtelen, a másik pedig nem egyéb, mint azon sik görbének görbületi sugara, mely akkor keletkezik, midőn a hengerfelület a tengelyére merőleges $z\,x$ sik által metszetik. Ily sik görbének görbületi sugara:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dx^2}}$$

Ennek folytán a (2) egyenlet következőleg alakul:

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2z}{a^2}$$

Ez egyenletet egyszer fogjuk integrálni s e végből két oldalán dz-vel szorzunk.

Igy nyerjük:

$$\frac{\frac{dz}{dx}\,d.\frac{dz}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2z\,dz}{a^2}$$

tegyük:

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = u$$

akkor:

$$\frac{du}{2u^{\frac{3}{2}}} = \frac{2z\,dz}{a^2}.$$

Ez egyenlet két oldalán teljes differentiálok állván, az integrál közvetlenül kiszámitható:

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=\frac{z^2}{a^2}+C \qquad 3)$$

C alatt valamely állandót értve.

Jelöljük φ-vel a szöget, melyet a görbe vonalhoz $x\,z$ pontban húzott érintő az x tengelylyel képez, akkor:

$$\frac{dz}{dx}=tg\,\varphi$$

s így a (3) egyenlet:

$$-\cos\varphi=\frac{z^2}{a^2}+C$$

Ha $z=o$, akkor $\varphi=o$ s így az állandó értéke $C=-1$. E szerint:

$$-\cos.\varphi=\frac{z^2}{a^2}-1$$

$$z=\pm a\sqrt{1-\cos\varphi} \qquad 4)$$

Ha a positiv mennyiségnek tekintetik, akkor a felső előjel lesz használandó, homorú felület esetében; az alsó előjel domború felület esetében; mert az első esetben z positiv, a másodikban negativ.

A sik üveglappal érintkező higany szabad felületének egy pontjára nézve lesz:

$$z=-a\sqrt{1-\cos\varphi_1}$$

ugyane felületnek egy másik pontjára nézve:

$$z_2=-a\sqrt{1-\cos\varphi_2}$$

e szerint

$$z_1-z_2=a\left(\sqrt{1-\cos\varphi_2}-\sqrt{1-\cos\varphi_1}\right)$$

$$a=\frac{z_1-z_2}{\sqrt{1-\cos\varphi_2}-\sqrt{1-\cos\varphi_1}} \qquad 2)$$

Ez egyenlet arra szolgálhat, hogy segélyével a meghatároztassék. Az észleletnek e czélra a capillaris felület két pontjára nézve φ szöget és e két pont magasságkülömbségét (z_1-z_2) kell szolgáltatnia. E két pont a felületen tetszőlegesen választható s így ez úton lehetséges lesz kipuhatolni, vajjon a csakugyan állandó-e ugyanazon felület kölönböző részeiben.

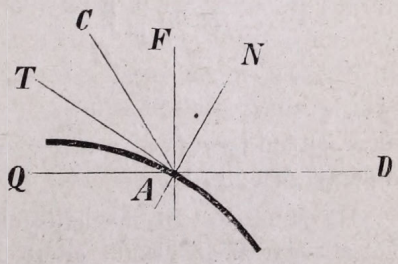
A kivánt észleleti adatok meghatározására következő módszert használtam.

Egy négyszögletes üvegdézsának egyik oldallapját lefaragva, helyébe planparallel üveglemezt tapasztottam. A gondosan kitisztitott

edény többször átszürt higannyal töltetett meg közel az edény karimájaig. A higany a sik üveglapot élesen kijelelt vizszintes egyenesben metszette. A capilláris felületre párhuzamos fénysugarak estek. A sugarak beesési sikja az üveglemezre merőleges sik volt.

E végre egy theodolit távcsövét használtam, melyről oculár lencsét eltávolitva, helyébe és pedig pontosan az objectiv lencse gyúpontjába keskeny és nem hosszú hasadékot helyeztem. A távcsőből ily berendezés mellett kieső sugarak kevéssé divergáltak vizszintes irányban, mely körülmény inkább kivánatos mint hátrányos. A görbe felület külömböző pontjaira esö sugarak külömböző irányokban verettek vissza a felület hajlása szerint az illető pontokban. A visszavert sugarak egy része vizszintes, e sugarak egy a felületen húzott vizszintes egyenes mentében veretnek vissza. A vizszintes irányban visszavert sugarak egy kathethometer távcsövén át észleltettek, mely magára a visszaverő felület távolára volt beállitva. Ily körülmények között a kathethometer távcsövén át fényes és élesen határolt vizszintes csikot lehetett látni s könnyü volt a fonál keresztet e csikra beállitani. Ez észlelet értekesitésére szükséges először, hogy az üveg lemez sikja függőlegesen álljon, másodszor, hogy a kathethometer optikai tengelye, az üveglemez normalisa és a theodolit optikai tengelye ugyanazon sikba vagy legalább párhuzamos függőleges sikokba essenek.

E két kelléknek következőleg teszünk eleget. Állitsuk mindenek előtt az üveglemezt merőlegesen a vizszintes kathethometer távcső optikai tengelyére, minek megitélésére az üveglemez elé fonal keresztet helyezünk s vizsgáljuk, valljon annak az üveglemez hátulsó oldallapjáról visszavert képe a kathethometer távcsövén át észlelve összeesik-e magával a fonálkereszttel. Ha ezt elértük, tudjuk hogy az üveglemez sikja függőleges s annak normalisa a kathethometer optikai tengelyével egy sikba esik. Hátra van még az, hogy a theodolit optikai tengelye e sikkal párhuzamos függőleges sikba helyeztessék. Ez megtörtént akkor, ha a kathethometer távcsövében föltünik a fent emlitett fényes csik, mely a capillaris felületen visszaverődés által keletkezik.



1. ábra.

Ha a kellékeknek eleget tettünk, akkor a theodoliton leolvasva a ψ szögletet, melyet távcsövének optikai tengelye a

függőlegessel képez, meghatározhatjuk ama szöget, melyet fentebb φ-vel jeleltünk. Az 1. ábra a beesési sikban, vagyis azon sikban van rajzolva, melyet előbb xz siknek mondottunk. A görbe vonal, egy része azon görbének, melyben az xz sik a capillaris felületet metszi. AT az érintő, AN a normalis a görbe azon A pontjában, mely az oda CA irányban eső sugarakat a vizszintes AD irányban veri vissza; $A\,F$ az A pontban emelt függőleges. Világos hogy:

$$\varphi = \sphericalangle\, QAT = FAN$$

Mivel pedig a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel:

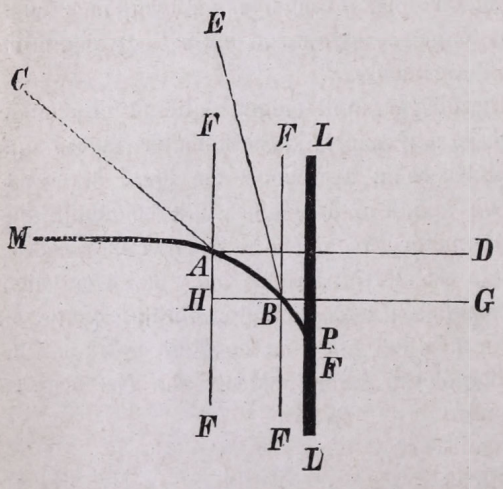
$$\sphericalangle\, CAD = 2\,[\sphericalangle\, CAF + \sphericalangle\, FAN]$$

tehát:

$$\frac{\pi}{2} + \psi = 2\,(\psi + \varphi)$$

$$\varphi = 45^{\circ} - \frac{\psi}{2} \qquad 6)$$

Ha ekként a capillaris felület két pontjára nézve ψ leolvasásából meghatároztuk φ_1 és φ_2 értékét, úgy hozzávéve a kathethometeren lemérhető $z_1 - z_2$ magasságot, meg lesznek az α kiszámitására szükséges adatok. Az észleletek menetének megvilágitására szolgáljon a 2-ik ábra. A rajz sikja a szilárd sikra merőleges xz sik, LL a szilárd lap átmetszete, FF és FF függőlegesek. CA irányban beeső sugarak AD-vizszintes egyenesben veretnek vissza. A theodoliton leolvassuk a $\psi = CAF$ szöget. A kathethometer optikai tengelyét AD egyenesbe toljuk, ekkor a távcsőben feltünő fényes csik a távcsőben kifeszitett fonalkereszt keresztezési pontja mögé esik.



2. ábra.

Ha ez megtörtént, meghajlitjuk a theodolit távcsövét, úgy, hogy abból a sugarak az elsőtől eltérő EB irányban esnek a capillaris felületre. Legyen B egy pont, mely ez esetben vizszintes irányban és

pedig BG egyenes mentében veri vissza a beeső párhuzamos sugarakat. A theodoliton leolvassuk $\psi_2 = EBF$ szöget. A kathethometer optikai tengelyét BG egyenesbe toljuk, s lemérjük $HA = z_1 - z_2$ magasságot. HA lemérése a kathethometeren mikrometer csavar által eszközölhető.

A kathethometer, melyet használtam Perreaux műhelyéből való volt s lehetővé tette $\frac{1}{200}$ millimeter lemérését: a theodolit gyanánt egy Starke és Kummer műhelyéből származó úgynevezett universalkészülék szolgált s azon a percznek harmada kényelmesen leolvasható volt. Ez útóbbi eszközt Aujeszky Lipót főreáltanodai tanár ur volt szives rendelkezésemre bocsátani.

Az előleges kisérletek, melyeket eddig végeztem, leginkább a módszer pontosságának kipuhatolására voltak irányitva. E kisérletek kivitelét illetőleg a fő érdem Pokorny Ottokar műegyetemi repetitor urat illeti, ki a fáradságos beállitásokat a kezdetlegesen összeállitott eszközön nagy türelemmel és ügyességgel végezte.

Itt közlöm 9 ily észleletnek eredményét. Ez észleletekhez kereskedésben előjövő higany szolgált, miután az higitott légenysavval kimosatott s többször egymásután átszüretett. A kisérletek egy napon s ugyanazon felületen eszközöltettek. Mint a 9 kisérletben a higany felületnek ugyanazon része használtatott; φ_1 értéke mindig közel 9^0, φ_2 értéke pedig közel 28^0 volt. A nyert értékek a-ra nézve:

2,415	2,411	2,468
2,407	2,468	2,476
2,498	2,420	2,420

Középérték $a = 2{,}442$

Ide csatolok még két e módszer szerint nyert értéket, melyet egy másik higany felületen tett észleletek szolgáltattak. Az első észleletnél volt $\varphi_1 = 6^0\ 56'$, $\varphi_2 = 25^0\ 16'$; a másodiknál $\varphi_1 = 7^0\ 7'$ és $\varphi_2 = 24^0\ 57'$. A kathethometer távcsövén nagyobb nagyitású tárgylencse volt alkalmazva, mint az előbb felsorolt 9 észleletnél. A nyert adatok:

$$a = 2{,}439$$
$$a = 2{,}435$$

Az egybehasonlitás könnyebbitésére itt közlöm a más észlelők által más módszerek alkalmazasával nyert értékeket:

Laplace	2,55	Poisson	2,55
Hagen	2,62—2,68	Béde	2,66
Danger	2,59	Desains	2,62—2,65
	Quincke	2,861—2,941.	

A jelentékeny eltérés ez eredmények között, úgy látszik onnét ered, hogy az észlelők különböző görbületü felületeket vizsgáltak.

Van-e befolyása a felület görbületének a értékére? e kérdésnek eldöntésére épen az itt körvonalozott módszer van hivatva.

AZ EGYENES VEZETÉSRŐL.

Nagy Dezső, müegyetemi tanártól.

A gépszerkezettannak sokáig egyik legérdekesebb feladata volt az egyenes vezetés, vagyis egy oly tisztán forgó mozgású rúdrendszer kitalálása, melynek valamelyik pontja egy egyenesben kénytelen mozogni.

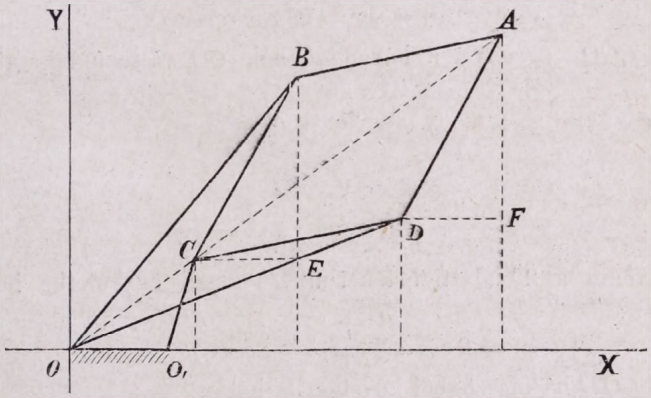
Már Watt foglalkozott e kérdéssel, és talált is oly szerkezetet, melylyel egy pontot — habár nem is mathematikai szigorúsággal, de a gyakorlati czélnak eléggé megfelelőleg — egyenesben lehetséges vezetni. E felfedezést bizvást nevezhetjük Watt egyik legnagyobb érdemének, melyet magának a gőzgép szerkezetének megállapitása körül szerzett.

Watt óta a legtehetségesebb férfiak próbálgatták a feladat szigorú megoldását és találtak is többféle szerkezetet, mely gyakorlatilag eléggé használható ugyan, de minthogy megint csak közelitő szerkezet volt, a kérdés mathematikai megfejtését nem adja. A gyakorlat t. i. elégségesnek találja a pontot oly görbe vonalban vezetni, melynek felhasznált része megközelitőleg egyenes.

Annyi sikertelen fáradozás után, a feladat már-már oly szinben tünt fel, hogy a pontos megfejtés talán lehetetlen is; és egyrészt ép e lehetetlenség látszata, másrészt tudata annak, hogy a meg nem fejthetést sem sikerült bebizonyitani, folyvást a felszinen tartotta e kérdést. Nem volt gépszerkezettani probléma, mely a hivatottakra, valamint a nem hivatottakra nagyobb csáberőt gyakorolt volna. Vagy bebizonyitani a megfejtés lehetetlenségét, vagy megmutatni az utat, melyen a megoldás sikerülhet — ezt az alternativát eldönteni mathematikusok és gépszerkesztők egyaránt érdekes kérdésnek tartották.

A kitartó munkásság végre is a positiv irányt vezette győzedelemre. Peaucellier franczia génie-kapitánynak sikerült végre egy szigorúan egyenesben vezető szerkezetet kitalálni. [1])

A Peaucellier egyenes vezetője, mint a mellékelt ábra mutatja, $ABCD$ rhombusból áll, melynek mind a négy szögpontja csukló szerkezettel van ellátva. A B és D pontok egyenlő hosszuságu $BO=DO=b$ rudakkal ugy vannak egy közös forgási ponthoz O-hoz erősitve. hogy e pont körül egy és ugyan azon kör kerületén mozoghatnak. A harmadik szögpontot C-t a CO_1 rud segélyével O_1 pont körül körben vezetvén, de ugy, hogy e kör átmenjen az O ponton is, az az $CO_1=OO_1=c$ legyen, ez esetben a negyedik szögpont A oly egyenesben mozog, mely az OO_1 irányra merőleges.



E mértanilag is érdekes problema bebizonyitását magam is megkisértettem és a következő egyszerü módra jutottam.

Az $AB=BC=CD=DA=a$ rhombust vonatkoztassuk egy derékszögü tengelyrendszerre, melynek X tengelye az OO_1 irányba esik; és vegyük O-t kezdőpontul; legyenek A, B, C és D pontok összrendezői x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4. A rhombus ismert tulajdonságainál fogva $\triangle CBE \cong \triangle DAF$, azaz $CE = DF$;

---

[1]) Peaucellier e fölfödözése, ámbár már 1864-ből való, a tudományos világ figyelmét csak tiz évvel később vonta magára, midőn Sylvester azt Angolországban bemutatta. Azóta az ily tagozatok (linkage) elmélete részletesebb tanulmányok tárgya lett, mint a melyeknek eredménye különösen kiemelendő a Hart által szerkesztett egyenes vezető. Ez, melyet fölfödözője a British association gyűlésén mutatott be, két ruddal kevesebbet tartalmaz, mint a Peaucellier szerkezete.

de

$$CE = x_2 - x_3$$

és

$$DF = x_1 - x_4,$$

miből következik:

$$x_1 = x_4 + x_2 - x_3 \qquad (1)$$

Az idomból kitünik, hogy A, C és O pontok folytonosan egy egyenesben fekszenek, melynek hajlásszögét az OX tengelyhez, azaz AOX szöget jelöljük α-val, a $BOC = DOC$ szöget pedig β-val. Az ábrából latható, hogy

$$x_4 = b \cos(\alpha - \beta)$$
$$x_2 = b \cos(\alpha + \beta)$$

tehát

$$x_4 + x_2 = 2b \cos\alpha \cos\beta \qquad (2)$$

A COO_1 egyenszáru háromszögből, CO változó hosszat ϱ-val jelölvén,

$$\varrho = 2c \cos\alpha$$

de

$$x_3 = \varrho \cos\alpha$$

tehát

$$x_3 = 2c \cos^2\alpha \qquad (3)$$

ezt, valamint a *2)* alatti értéket az *1)* alatti egyenletbe helyettesitve, lesz:

$$x_1 = 2\cos\alpha (b\cos\beta - c\cos\alpha) \qquad (4)$$

A COD háromszögből kővetkezik, hogy

$$\varrho^2 + b^2 - 2b\varrho\cos\beta = a^2$$

vagyis

$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 + \varrho^2}{2b\varrho}$$

és ide ϱ értékét helyettesitvén,

$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 + 4c^2\cos^2\alpha}{4bc\cos\alpha};$$

tegyük ezt a 4) alatti egyenletbe

$$x_1 = 2\cos\alpha\left(\frac{b^2 - a^2 + 4c^2\cos^2\alpha}{4c\cos\alpha}\right)$$

és a kellő röviditések után

$$x_1 = \frac{b^2 - a^2}{2c}$$

vagyis x_1 állandó, tehát a mértani hely egy az OY tengelyhez x_1 távolban huzott párhuzamos egyenes.

Ha ábránkban $CO_1 \lesseqgtr OO_1$ azaz a C pontot vezető rud hoszszát ugy választjuk, hogy a kör ne menjen át O ponton, akkor az A pont pályája kör, melynek sugara:

$$c\frac{b^2 - a^2}{d^2 - c^2}$$

hol

$$c = CO_1$$

és

$$d = OO_1.$$

E körnek középpontja OO_1 egyenesen fekszik és pedig: $d\frac{b^2 - a^2}{d^2 - c^2}$ távolságban O ponttól.

A NYOMÁS BEFOLYÁSA AZ ÉGÉSI TÜNEMÉNYEKRE.

Wartha Vinczétől.

Eddigelé csekély számu kisérleti adattal rendelkezünk, melyekből következtetéseket lehetne vonni arra nézve, hogy minő befolyást gyakorol az égésre azon nyomás, mely alatt ez történik.

1817-ben Davy a láng természetére vonatkozó klassikai értekezésében, errenézve a következőképen nyilatkozik [1]: »Bizonyos határok között az atmosphaerikus levegő ritkitása nem gyakorol befolyást a láng mérsékletére, valamint a nyomás növekedése sem. Rendkivül messzeható körülmény ez, hogy légkörünk minden oly magasságában vagy mélységében, melyben ember megélhet, ugyanazon viszonyok között történik az elégés.« Mas helyen azt mondja Davy [2]: »A láng fényének intensitása az atmosphaerában növekszik a levegő sürítésével és fogy annak ritkitásával.«

1841-ben Triger [3] franczia mérnök a Loire egyik homok szigetén pneumatikus fundátioval lévén elfoglalva, azt tapasztalta, hogy a 3·5 láb átmérőjü vascsőben, melyben munka közben 3 légkörü nyomás uralkodott, a közönséges gyertya sokkal nagyobb sebességgel égett el, mint a szabad levegőben, mely körülmény arra kényszeritette őt

---

[1]) Philosophcal Transactions for 1817. p. 65.

[2]) Ibid. p. 75.

[3]) Ann. de chimie et de physique, 3 Série, Tom. III, p. 234, 1841.

hogy az ott használandó gyertyákban a pamutbél helyett len-fonálbó készültet alkalmazzon. Amazok ugyanis egy negyed óra alatt leégtek és a közben kiállhatatlan füstöt árasztottak.

J. Le Conte [1]) »A napfény befolyása az égésre« czimü értekezésében a következőt mondja: Az égési folyamat késleltetik a levegő ritkitása által, valamint elősegittetik, ha ezt süritjük. Állitására vonatkozó kisérleti adatokat Le Conte azonban nem közöl, és azt a priori valószinűnek állitja oda.

Ezen előzmények után az 1859-dik év őszi idejében dr. E. Frankland [2]) dr. Tyndall társaságában hasonló iranyú kisérletekkel foglalkozott. A két angol buvár mindenek előtt czélúl kitűzte magának az égő gyertya óránkénti anyag fogyasztását megállapitani különféle nyomás alatt. E czélra megmászták a Mont-Blancot, és itt 14,000 láb magasságban, jól védett sátor alatt 0·5 foknyi mérséklet mellett elégettek hat darab stearin-gyertyát, melynek fogyasztása lenn a völgyben, Chamonixban már meg volt állapitva. Kisérleti eredményeik a következők:

Chamonix.	Mont Blanc.	Különbség.
Barometer állása 26·4″		
Hőmérseklet 21·5°C.	Hőmérséklet 0·5°C.	Százalékokban:
Fogyasztás egy óra alatt:	Fogyasztás egy óra alatt:	
I. . . . . 9·2 gramme	. . . . . 8·7 gramme	. . . . . 5·4 %
II. . . . . 9·9 »	. . . . . 9·5 »	. . . . . 5·0 »
III. . . . . 9·2 »	. . . . . 9·2 »	. . . . . 0·0 »
IV. . . . . 10·4 »	. . . . . 8·8 »	. . . . . 15·3 »
V. . . . . 9·5 »	. . . . . 9·3 »	. . . . . 2·1 »
VI. . . . . 9·2 »	. . . . . 9·0 »	. . . . . 2·1 »

Az átlagos stearinfogyasztás tehát (mellőzve a negyedik gyertyát, melylyel mint Frankland maga mondja, alkalmasint valami hiba történt):

Chamonixban: 9·4.
Mont-Blancon: 9·2.

Ezen kisérletből Frankland következteti, hogy a légnyomás változása a stearinfogyasztásra befolyást nem gyakorol, azonban maga közöl egy kisérletet, melyből kitünik, hogy 28·7 angol hüvelyk nyomás

---

[1]) Silliman's Journal of science and arts [2] XXIV. 317.
[2]) Philosophical transactions, Vol. 151 p. 629.

alatt egy spermacet-gyertya 7·85 grammot, 9 hüvelyknyi nyomás alatt pedig 9·1 grammot fogyasztott óránként. Frankland azonban e kisérletet elégtelennek tartja (unsatisfactory), és nem fektet reá sulyt. Frankland emlitett értekezésében közöl még kisérleteket, melyek vonatkoznak a láng fényének változására, továbbá pedig az elégés fokát illetőleg az égési termények meghatározására. A nyert eredményeket a következőkben foglalja össze:

I. Valamely gyertya vagy hasonló égő anyag égés közben való anyagfogyasztása észrevehető módon nem függ azon közeg nyomásától, a melyben az égés történik.

II. Helyesnek találta Davy állitását, mely szerint bizonyos határok között a levegő ritkitása vagy süritése észre vehető befolyást nem gyakorol a láng mérsékletére.

III. A közönséges láng fénye függ a közeg nyomásától, és pedig úgy, hogy a fényerő egyenes arányban áll a nyomás csökkenésével.

IV. Ezen tüneménynek oka abban rejlik, hogy a ritkított levegő részecskéinek könnyebb mozgékonyságánál fogva az oxygen tömecsei jobban tódúlhatnak a láng belsejébe.

V. Bizonyos határok között az égés annál tökéletesebb, minél ritkább a körül lévő közeg.

Mult év őszi idejében sikerült a budapesti összekötő vashid épitésével megbizott vállalkozó előzékenysége folytán a ritkán kinálkozó alkalmat felhasználnom, hogy a hid pillérei alapozásánál a Duna medrébe sülyesztett vasszekrények (caissonok) belsejében pontos kisérleteket tehessek arra nézve, hogy miként függ a stearin-gyertya óránkénti fogyasztása a közeg nyomásától.

Hat szál pontosan megmért stearin-gyertyát előbb a szabad levegőn égettem bizonyos ideig, megmérve a támadt súlykülömbségeket; azután csaknem kétszeres légköri nyomás (1·95 atmosph.) alatt a caisson belsejében, s a súlykülömbséget, illetőleg a stearin-fogyasztást itt is meghatároztam.

A süritett levegőben észlelt tüneményekről Szily Jenő állami mérnök úr, ki szives volt egy órán át a caissonban az égési tünemények megfigyelését magára vállalni, többek közt azt mondja, hogy a gyertyák 9—10, sőt 12 centiméter hosszú lánggal égtek és erősen füstöltek; világitó képességök csökkent és a láng veres sárgás szinüvé lett. A kisérletek számbeli eredményei a következők:

I. táblázat.

Folyó szám	A gyertya súlya a kisérlet előtt: A	A gyertya súlya a kisérlet után, 1 óra 1·95 légk. nyomásnál: B	Óránkénti fogyasztás A—B	Agyertya súlya 1 órai fogyasztás után a szabad levegőn. Temp. 18°C: C	B—C	(B—C) — (A—B)	Lángmagasság a caissonban	A láng magassága a szabad levegőn egy egy negyedóra után			Annyi %-el kevesebb fogyasztás benn mint künn
	Gramm.										
1	86·14	78·28	7·86	68·76	9·52	1·66	7—10—12 centimeter	5	5·5	5·5	17·4 %
2	95·38	86·57	8·81	76·57	9·94	1·13		4·5	5·5	6·0	11·4 »
3	102·45	94·46	7·99	85·28	9·48	1·19		4·6	5·0	5·5	13·0 »
4	98·65	89·43	9·22	80·09	9·34	0·12		4·5	5·5	5·5	1·3 »
5	95·44	86·73	8·71	76·25	10·48	1·77		6	5·5	5·5	16·9 »
6	97·09	87·98	9·11	77·28	10·70	1·59		4·5	5·5	5·5	14·9 »

A hármadik gyertyánál ismételtem a kisérletet és óránként 9·18 helyett 9·1 fogyasztást találtam.

Ezen kisérletekből határozattan kitünik, hogy Franklandnak az első pontban összefoglalt eredményei egész terjedelmükben helyesek nem lehetnek. Ezen állitás igazolására nem csak saját kisérleteim szolgálnak, hanem Franklandnak a spermacet gyertyával kivitt kisérlete is; általában mondhatjuk, hogy valamely gyertya vagy hasonló égő anyag égés közben való fogyasztása határozottan függ azon nyomástól, mely alatt történik az égés. Minél ritkább a közeg, a melyben a gyertya ég, annál nagyobb az óránkénti fogyasztás s megforditva minél nagyobb a nyomás, annál kisebb az. Mint az első táblázatból kitünik, a fogyaztás csökkenése az első gyertyánál elérte a 17·4%-ot, mig Frankland kisérleténél a spermacet gyertya 9″ nyomásnál 13·8%-al többet fogyasztott mint 28·7″ nyomásnál. Franklandnak a Mont Blanc tetején és Chamonixban véghez vitt méréseiből csak annyit lehet következtetni, hogy az általa választott magasság, illetőleg nyomás-differentia (körülbelül 30 m. m.) nem elegendő arra, hogy a tágasabb határok között tényleg létező különbség kimutattassék. Nézetem szerint a tüneményt a következő módon könnyen magyarázhatni. Minden chemiai vegyület bizonyos temperatura és bizonyos nyomás mellett dissociatiót szenved, ezen dissociatió temperaturája függvénye a nyomásnak, ha tehát a

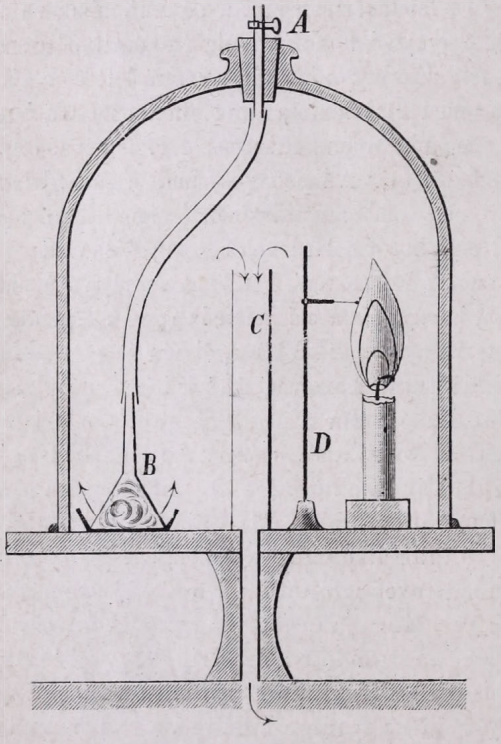
nyomás változik, akkor szükségképen változnia kell azon hőfoknak is, mely mellett kezdetét veszi a dissociatió. Ismeretes tény, hogy számos szerves test, mely a közönséges légnyomásnál destillátiónak alávettetik, e mellett felbomlik, míg ugyan azon test légritkitott vagy légüres retortában destillálva bomlás nélkül vezethető át gázalaku állapotba. Alig kell emlékeztetnem azon A. N. Hoffmann által felfedezett módjára a gőzsürüség meghatározásának, melynek alkalmazása mellett sikerült a barometer-ürben 185° temperaturánál a 196° mellett forró Toluidin es a 218°-nál forró Naphtalin gőz sürüségét biztosan meghatározni. Mint az a később leirt kisérletből ki fog tünni, sikerült 90 m. m. nyomás alatt stearin gyertya hosszabb ideig égő állapotban eltartani. A gyertya lángja felduzzadt, zöldes kék szinüvé lett és a kiválasztott koromnak nyomát sem tartalmazta; mig ellenben láttuk, hogy a caisson belsejében 2 atmosph. nyomás alatt és fölösleges oxygen jelenlétében füstölt a kormozó láng. Az első esetben a szénhydrogen dissociatiójának még nyoma sem mutatkozott, mig a második esetben oly nagy fokot ért el, hogy a sürü levegő oxygénje sem volt elegendő a kiválasztott szenet fölemészteni. Midőn a gyertya 90 m. m. nyomás alatt a légszivattyú burája alatt szintelen lánggal ég, akkor a bél végén fejlődő bomlási termények sokkal könnyebben és gyorsabban llanak el, mint akkor, midőn ugyan azon vegyületek két atmosphaera nyomásnak vannak kitéve. Ez esetben a legnagyobb része fel fog bomlani mocsárgázra és kiválasztott tiszta szénre. Az alkohol lángja, mely közönséges nyomás alatt alig látható, 18—19 atmosphaera nyomás alatt élénk brillant fényt áraszt, mint azt L. Cailletet [1]) kisérleteiből kitünik. Az ezen buvár által alkalmazott készülékben is az általam a caissonban nyert eredmények igazoltattak. Növekedő nyomásnál Cailletet észlelte, hogy a kék láng alja élénk világosságot áraszt, de csakhamar oly nagy mennyiségü korom füst keletkezik, hogy a készülék csapjai betömődnek; itt is csak a dissociátió hozza létre a tüneményt, mert mint Cailletet meggyőződött, ugyan azon levegő, a melyben nagy nyomás mellett a gyertya lángja sötét vörös szinü lett és nagymértékben füstölt, képes volt közönséges nyomás mellett egy másik gyertya égését a legtökéletesebben fentartani.

Hogy miért füstölög a láng nagyobb nyomás alatt, tehát akkor, midőn kevesebbet fogyaszt, mint akkor, midőn legritkitott térben szintelen lánggal ég, az abból magyarázható, hogy a gyertyaláng alakja ily

[1]) Ann. de chimie et physique. 5 Ser. Tom. 6.p. 429.

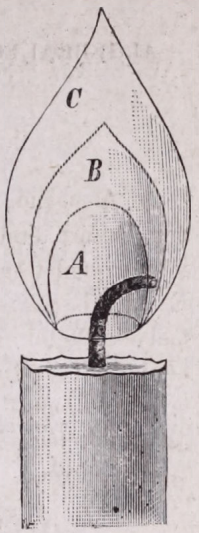
körülmények között a lehető legelőnytelenebb, és hogy szénenydus testek közönséges nyomás alatt is nagy mértékben füstölögnek, hacsak nem gondoskodunk a levegőnek minél nagyobb mértékben való hozzáféréséről; az Argand égetőjét csakis a szénenyben dus világító gáz tökéletes elégetése céljából szerkesztették.

Azon felette érdekes tünemény bemutatására, melyet észlelhetni akkor, midőn a stearin gyertya alacsony nyomás mellett a légszivattyu burája alatt ég, igyekeztem egy készüléket összeállitani, a mely *előadási kisérlet*képen is használható. Az 1. ábra mutatja a légszivattyu buráját, mely a hozzá tartozó tányéron légmentesen áll. Az A csappal szabályozható a levegő betódulása a bura belsejébe; a levegő kautschuk csövön a pamuttal kitöltött és finom fém hálóval befedett B tölcséren át juthat csak a burába; ezen berendezés szükségesnek mutatkozott rohamos légáramok elkerülése végett. Az égési termények a C-vel jelölt csöven vezettetnek el; 2—3″ magas stearingyertya darab aképen van parafához megerősitve, hogy lángjának széle a lehető legmagasabb ritkulás pillanatában a D-vel jelölt állványon megerősitett platin sodronyt érintse. Ha működésbe hozzuk a szivattyut, akkor csakhamar észrevesszük, miszerint a láng fényereje feltünően fogy, a láng felduzzad, a legbelső kék kup sapkaszerü alakot ölt és a béltől tökéletesen elvált, a mint ez a 2. ábrából kitünik, 90 m. m. nyomásnál a láng világító képessége tökéletesen megszünt és sötét szobában a most 3-szoros térfogattal biró



I. ábra.

láng 3 részből állónak látszik. A kékes zöld belső kup (a) ibolya kék burokkal (b) van körülvéve, mely ismét gyenge ibolya szinü, alig látható köpenyeggel (c) környeztetik. E köpenyeg gyenge szinénél fogva nappal alig látható, de láthatóvá tehető az által, hogy a már felemlitett platinsodrony végére lithion vagy nátronsógyöngyöt hozunk. Időközönként észrevehetni, hogy a láng belsejéből kitódúl finom szikra eső, mely eruptió leginkább a ritkulás legmagasabb fokánál, körülbelül 90 m. m.-nél fordul elő,



2. ábra.

Ezen kisérletekre E. S. Ritchie [1]) javitott szelepes légszivattyúját használtam. Viz szivatttyuval és a közönséges kéthengeres légszivattyúval a kisérlet nem akart sikerülni. Az elősoroltakból kitünik, hogy Franklandnak a 4. pontban foglalt állitása, miszerint t. i. a láng fényének fogyása abban rejlik, hogy a ritkitott levegő részecskéinek könnyebb mozgékonyságánál fogva az oxygen tömecsei jobban tódúlhatnak a láng belsejébe, nem valószinü s hogy a tüneménynek az oka egyszerüen abban rejlik, hogy a nyomás fogyásával a dissociatió temperatuurája emelkedik, vagy más szóval a stearin bomlási terményeiből annál kevesebb szén választathatik ki korom alakban, minél csekélyebb a nyomás, melynél az égés történik.

Végre még meg kell emlitenem, hogy Triger az értekezés elején felemlitett tapasztalatai ugy magyarázandók, hogy a csőben uralkodó valószinüleg magas temperatura mellett a fagyú gyertya egyszerüen leömlött, mig a túlságos korom kiválasztás Cailletet és a magam kisérleteivel megegyezik. Le Conte-nak mint a priori valószinünek oda állitott következtetése, hogy az égési folyamat késleltetik a levegő ritkitása által, ellenben elősegittetik annak süritése által, egyszerüen nem áll, mert a felsorolt kisérletekből következik, hogy Franklandnak az 5. pontban foglalt állitása, hogy: bizonyos határok között az égés annál tökéletesebb, minél ritkább a körül lévő közeg, tökéletesen helyes.

[1]) Dingler polyt. Journ. 190, p. 82.

AZ N-EDFOKU ALGEBRAI EGYENLETEK EGY ÁLTALÁNOS MEGFEJTÉSÉRŐL.

König Gyulától.

— Első közlemény. —

A m. tud. Akadémia 1875. okt. 11-én tartott ülésén egy eddig nem ismert tételt volt szerencsém beemutatni, mely az általános n-edfokú egyenlet egy bizonyos gyökének számára kész képletet szolgáltat. E lapokban az egyenletek azon tulajdonságait kívánom tárgyalni, melyek e tétel alapját teszik, s ezeknek segitségével magát az emlitett képletet levezetni. Végczélukon kivül e vizsgálatok talán még azért is érdekesek, mert ellentétben a modern algebrai kutatások legnagyobb részével, elég elemi alapon folynak. Az emlitett tétel maga a következő: Legyen:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

az adott egyenlet. Képezzük akkor a következő alakzatot:

$$\frac{1}{f(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\ldots$$

a mi, mint erre még visszatérünk, akár egyszerű osztás, akár recurrens sorok segitségével történhetik. *Olvassuk meg továbbá a jelváltozások* [1]) *számát, melyek e sorban az n-edik tagig bezárólag előfordulnak, és legyen e szám: w_n. Akkor az egyenlet egy gyöke (és pedig az, melynek absolut értéke* [2]) *legkisebb) adva van*

$$x = r\,(cos.\ \omega + i\,sin.\ \omega)$$

által, holis:

$$\frac{\omega}{\pi} = Lim.\left[\frac{w_n}{n}\right]_{n=\infty}$$

és

$$r = Lim.\left[\sqrt[n]{\alpha_n}\right]^{-1}_{n=\infty}$$

mig a gyökjel alatt álló mennyiség, valamint a gyök maga positiv értékkel veendő.

---

[1]) Két egymásután következő tagja a föntebbi sornak *jelváltozást* vagy *jelkövetkezést* ad, a mint a megfelelő α együtthatók előjele ugyanaz, vagy pedig ellenkező.

[2]) Minden képzetes (complex) számról ismeretes, hogy

$$r(cos.\ \omega + sin.\ \omega)$$

alakra hozható; ebben a kifejezésben a mindig positiv értékű r-et a szám absolut értékének nevezzük.

E tétel közvetetlenül alkalmazható, ha nincs a kapcsolt gyökökön kivül, az egyenletnek több oly gyöke, melyben r-nek ugyanazon értéke volna. Maga a tárgyalás azonban nemcsak ismertető jelt ad arra nézve, hogy ez a kivételes eset mikor fordúl elő, hanem könnyü szerrel szolgáltatja tételünk oly átalakitását, hogy ekkor is érvényes maradjon. Ezt a maga helyén majd részletesebben fejtegetjük.

Jelen első közleményben egy — különben szintén uj — de oly problemával foglalkozom, melynek talán nem látszik közvetetlenül összefüggése az eddig kijelölt kérdéssel, mely azonban valóban a fentebb előadott tétel nélkülözhetetlen alapja.

1.

E föladat a következő: *meghatározni* φ *értékét, ha e végtelen sorban:*

$$1, \cos.\varphi, \cos.2\varphi, \cos.3\varphi, \ldots\ldots$$

az egyes tagoknak csupán előjelei vannak adva.

Világos mindenek előtt az, hogy a φ értéke meghatározásánál a 2π többeseit mindenesetre mellőzni szükséges, sőt minthogy, ha φ-vel jelöljük a máris meghatározott értéket, $2\pi - \varphi$ épen úgy megfelel, előre kiszabhatjuk, hogy φ-nek 0 és π közt fekvő értékét akarjuk keresni. Ilyen tényleg van, még pedig *csakis egy*. Legyen tehát:

$$\begin{aligned}
&1, \cos.\varphi, \ldots\ldots, \cos.(\lambda_1 - 1)\varphi \text{ positiv},\\
&\cos.\lambda_1\varphi, \ldots\ldots, \cos.(\lambda_2 - 1)\varphi \text{ negativ},\\
&\cos.\lambda_2\varphi, \ldots\ldots, \cos.(\lambda_3 - 1)\varphi \text{ positiv},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

vagyis egész általánosságban:

$$\cos.\lambda_{m-1}\varphi, \ldots\ldots, \cos.(\lambda_m - 1)\varphi$$

előjele ugyanaz mint a

$$(-1)^{m-1}$$

hatványé. Akkor:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots.$$

positiv és folyton nagyobbodó számokat jelentenek, m pedig mutatja, hogy hány jelváltozás fordúl elő az adott sorban, ha ezt a $\cos.\lambda_m\varphi$ által adott tagig, tehát a $\overline{\lambda_m + 1}$-ikig vizsgáljuk.

Ebből a φ számára a következő egyenlőtlenségek sorát lehet lehozni. Mindenek előtt lesz:

$$0 < \varphi < \pi;$$

de ha $\cos.\varphi$ még positiv, akkor:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

ha továbbá *cos* 2φ szintén positiv, akkor nem csak az épen nyert föltétel értelmében:

$$0 < 2\varphi < \pi,$$

de még:

$$0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$$

Ily módon folytatva következtetéseinket, bármily szám legyen is λ_1, mindenesetre:

$$0 < (\lambda_1 - 1)\,\varphi < \frac{\pi}{2}; \qquad (1.)$$

de most *cos.* $\lambda_1 \varphi$ először negativ; mivel pedig φ értéke 0 és π közt fekszik ebből:

$$\frac{\pi}{2} < \lambda_1 \varphi < \frac{3\pi}{2}; \qquad (2.)$$

az (1.) és (2.)-ben foglalt föltételeket így is irhatjuk végre:

$$\frac{1}{2\lambda_1} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{1}{2(\lambda_1 - 1)}. \qquad (3.)$$

Tovább járva ezen az úton, lesz megint:

$$\frac{\pi}{2} < (\lambda_1 + 1)\,\varphi < \frac{5\pi}{2}$$

de minthogy *cos.* $(\lambda_1 + 1)\varphi$ negativ, szükebb határokat is ismerünk, vagyis:

$$\frac{\pi}{2} < (\lambda_1 + 1)\,\varphi < \frac{3\pi}{2};$$

ha még *cos.* $(\lambda_1 + 2)\varphi$ is negativ, akkor minthogy mindenesetre:

$$(\lambda_1 + 2)\,\varphi < \frac{5\pi}{2};$$

még a következő egyenlőség is áll:

$$\frac{\pi}{2} < (\lambda_1 + 2)\,\varphi < \frac{5\pi}{2}.$$

Igy jutunk el egészen $(\lambda_2 - 1)\varphi$-ig; a meddig t. i. az adott mennyiségek előjele nem változik, és lesz erre nézve:

$$\frac{\pi}{2} < (\lambda_2 - 1)\varphi < \frac{5\pi}{2}, \qquad (4.)$$

de más részről:

$$\frac{\pi}{2} < \lambda_2 \varphi < \frac{5\pi}{2},$$

ami ismét, *cos.* $\lambda_2\varphi$ megint positiv lévén, szűkebbre szorítható, akkor pedig:

$$\frac{3\pi}{2} < \lambda_2\varphi < \frac{5\pi}{2}. \qquad (5.)$$

A (4.) és (5.)-ből megint a föltétel oly alakja szerkeszthető, minő a (3.) t. i.:

$$\frac{3}{2\lambda_2} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{3}{(2\lambda_2 - 1)} \qquad (6.)$$

A következtetések ezen magában véve elég egyszerü menetét bármeddig folytathatjuk; és igy a $\frac{\varphi}{\pi}$ hányados számára a határértékek egy egész sorát nyerjük; képezési törvényük oly egyszerű, hogy igazolását itt bátran mellőzhetjük; ez különben könnyen megtörténik, ha az m-ről $\overline{m+1}$-re való következtetés ismert módszerét használjuk.

Az ily módon nyert egyenlőtlenségek (különben végtelen) sora e következő:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\lambda_1} &< \frac{\varphi}{\pi} < \frac{1}{2(\lambda_1 - 1)} \\
\frac{3}{2\lambda_2} &< \frac{\varphi}{\pi} < \frac{3}{2(\lambda_2 - 1)} \\
\frac{5}{2\lambda_3} &< \frac{\varphi}{\pi} < \frac{5}{2(\lambda_3 - 1)} \qquad (7.) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\frac{2m-1}{2\lambda_m} &< \frac{\varphi}{\pi} < \frac{2m-1}{2(\lambda_m - 1)} \\
\frac{2m+1}{2\lambda_{m+1}} &< \frac{\varphi}{\pi} < \frac{2m+1}{2(\lambda_{m+1} - 1)} \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Ha most a λ számok sora olyan, hogy valóban megfelel a φ valamely értékének, akkor e föltételek végtelen sora nemcsak hogy együttesen érvényes, de *az egymásután következő egyenlőtlenségek a* φ *értékét mindig szükebb határok közé szorítják.* Irjuk p. az utolsó előttit a következő alakban:

$$\frac{m}{\lambda_m} - \frac{1}{2\lambda_m} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{\frac{m}{\lambda_m} - \frac{1}{2\lambda_m}}{1 - \frac{1}{\lambda_m}}$$

Ebben m nem más, mint a jelváltozások száma a $\lambda_m + 1$-ik tagig, és igy mindenesetre

$$m < \lambda_m;$$

bármily értéke legyen is m-nek; e szerint mindenesetre $\frac{m}{\lambda_m}$ kisebb az egységnél. Minthogy pedig λ_m, a tagok száma, minden véges értéknél nagyobbá tehető, látjuk, hogy a $\frac{\varphi}{\pi}$ számára nyert *fölső* és *alsó* határ, ha λ_m mindinkább növekszik, mindig közelebb jut a $\frac{m}{\lambda_m}$ határértékéhez.

Ezt a hányadost még másképp is irhatjuk. Legyen t. i. a tagok száma $\lambda_{m+1} = n$, és jelöljük megfelelőleg a jelváltozások számát az első n tagban w_n-nel, ugy e hányados $\frac{w_n}{n}$ és lesz mint végeredmény:

$$\frac{\varphi}{\pi} = Lim. \left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty}$$

2.

Az előbbi czikkben tárgyalt probléma megoldása szigorú mathematikai tárgyalásban a φ értéke meghatározásának daczára sem tekinthető befejezettnek mindaddig, mig az erre nyert határkifejezésről kimutatva nincsen, hogy *az n növekedtével valóban egy meghatározott érték felé közeledik.*

Ez könnyen eszközölhető, midőn $\frac{\varphi}{\pi}$-nek értéke rational mennyiség, p. $\frac{a}{b}$, mely esetet először külön tárgyalunk. Akkor:

$$\varphi = \frac{a}{b}\,\pi$$

és tehát legalább:

$$2b\varphi = 2a\pi$$

a 2π többese, ha a φ többeseinek sorában már előbb ilyennel nem találkoztunk; igy tehát mindig:

$$cos.\ (2b + r)\varphi = cos.\ (r\varphi).$$

Ezen esetben tehát két oly tagnak, melynek helyszáma $2b$-vel különbözik, nemcsak előjele, de még értéke is egyezik. Az előjelek sora — úgy fejezhetjük ki röviden a tényállást — véges szakaszt mutat; mert legfölebb a $2b$-edik tag után ugyanazon előjelek lépnek föl ugyanazon sorrendben. Legyen most már a jelváltozások száma a $2b$-edik tagig: k', innét a $4b$-edikig ismét k; akkor általánosságban is a $2rb$-

edik tagtól a $2(r+1)b$-edig ugyanannyi k jelváltozás találkozik. Menjünk ezek után egy n-edik tagig, még pedig legyen:

$$n = 2bs + \beta$$

hol $\beta < 2b$, akkor a jelváltozások száma a tagok fölvett sorozatában:

$$w_n = sk + \alpha$$

hol $\alpha \leqq k$. Ebből:

$$\frac{w_n}{n} = \frac{sk + \alpha}{2bs + \beta}$$

Ebben az alakban n-nel együtt s is a végtelenbe növekszik; igy tehát a vizsgált határkifejezés értéke lesz:

$$Lim. \left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty} = \frac{k}{2b}$$

a miből látni, hogy ha $\frac{\varphi}{\pi}$ rational szám, a tárgyalt alak valóban *egy* meghatározott értékhez vezet. (Hogy $k = 2a$, azt is mutatja utolsó képletünk, a mi különben önállóan is elég egyszerűen volna bebizonyitható.)

Hogy most már a $\frac{\varphi}{\pi}$ rational értékeitől annak irrational értékeire mehessünk át, a következő tételt kell bebizonyitanunk.

Legyen φ-nek értéke bármely mennyiség 0 és π közt, ϑ pedig egy oly módon választott positiv mennyiség, hogy $\varphi + \vartheta$ még ugyanezen határok között fekszik, akkor a következő sorban:

$$1,\ \cos.(\varphi+\vartheta),\ \cos.2(\varphi+\vartheta),\ \cos.3(\varphi+\vartheta),\ \ldots\ldots$$

egy tetszőleges tagig soha kevesebb jelváltás nem fordúlhat elő, mint ezen sornak:

$$1,\ \cos.\varphi,\ \cos.2\varphi,\ \cos.3\varphi,\ \ldots\ldots$$

megfelelő tagjáig.

Menjünk p. a tagok sorában *cos.* $r\varphi$-ig, akkor $r\varphi$ mindenesetre a $\frac{\pi}{2}$ két páratlan többese közt fekszik:

$$(2k+1)\frac{\pi}{2} < r\varphi < (2k+3)\frac{\pi}{2},$$

mig a *cos.* $r\varphi$-ig előforduló jelváltozások száma akkor épen k. A kérdésben levő értékeket

$$0,\ \varphi,\ 2\varphi,\ 3\varphi,\ \ldots\ldots$$

osztályokba lehet sorozni, a mint 0 és $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ és $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ és $\frac{5\pi}{2}$ közt foglalnak helyet s. u. t.; és közvetetlenül láthatni, hogy jelváltozás csak

akkor történik, midőn egy ily érték-intervallumból a legközelebbibe megyünk át. Hogy pedig csakis a legközelebbibe léphetünk át, onnét következik, hogy φ-nek értéke mindig kisebb a π-nél. Az ily átlépések száma, és evvel együtt a jelváltozásoké épen k. Épen igy legyen azután:

$$(2k'+1)\frac{\pi}{2} < r(\varphi+\vartheta) < (2k'+3)\frac{\pi}{2};$$

akkor a $\varphi+\vartheta$ többesei szerint haladó sorban a *cos.* $r(\varphi+\vartheta)$ tagig előforduló jelváltozások száma k', és miután mindenesetre

$$r(\varphi+\vartheta) > r\varphi$$

látni, hogy az előbb kijelentett tételnek megfelelőleg valóban

$$k' \geqq k.$$

Legyen most már $\frac{\varphi}{\pi}$ valamely irrational mennyiség, akkor ismeretes dolog, hogy két rationál számértéket lehet meghatározni, mely amazt két tetszőlegesen közel határ közé szoritja, p.

$$\frac{a'}{b'} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{a''}{b''}$$

vagy rövidebben:

$$\varphi' < \varphi < \varphi'',$$

hol

$$\varphi' = \frac{a'}{b'}\pi$$

és

$$\varphi'' = \frac{a''}{b''}\pi.$$

Vizsgáljuk most már a három következő sort:

1, cos. φ', *cos.* $2\varphi'$, *cos.* $3\varphi'$, ...
1, cos. φ , *cos.* 2φ , *cos.* 3φ , ...
1, cos. φ'', *cos.* $2\varphi''$, *cos.* $3\varphi''$, ...

és jelöljük a jelváltozások számát, mely ezekben az n-edik tagig elő fordúl, megfelelőleg w'_n, w_n és w''_n-nel. Az épen lehozott tétel értelmében, miután φ és φ'' egymásutan a φ'-ből tetszőlegesen kicsiny, de positiv mennyiségek hozzáadása által keletkeznek:

$$w'_n \leqq w_n \leqq w''_n,$$

és igy evvel együtt:

$$\frac{w'_n}{n} \leqq \frac{w_n}{n} \leqq \frac{w''_n}{n},$$

bármi legyen n-nek értéke. Ha most már átmegyünk a határhoz, hol n értéke végtelen lesz, á következőket nyerjük:

$$Lim.\left(\frac{w'_n}{n}\right)_{n=\infty} = \frac{a'}{b'}$$

$$Lim.\left(\frac{w''_n}{n}\right)_{n=\infty} = \frac{a''}{b''}$$

minthogy t. i. ezek a $\frac{\varphi}{\pi}$ hányados rationál értékeire vonatkoznak; de ebből most még lehozható:

$$\frac{a'}{b'} \leq Lim.\left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty} \leq \frac{a''}{b''}$$

és igy, minthogy $\frac{a'}{b'}$ és $\frac{a''}{b''}$ egymáshoz tetszőlegesen közel hozhatók, kell hogy $\frac{w_n}{n}$ *szintén egy meghatározott értékhez közeledjék*, midőn n végtelen lesz, bármilyen legyen is a $\frac{\varphi}{\pi}$ hányados értéke.

3.

Az eddig nyert eredményeket egyik-másik irányban könnyen általánosithatjuk.

Könnyen látható ugyanis, hogy a φ meghatározására elégséges, ha az

$$1, \cos.\varphi, \cos.2\varphi, \cos.3\varphi, \ldots\ldots$$

sor előjeleit csak egy tetszőleges véges tagtól kezdve ismerjük, p. az m-ediktől. Ha eddig a k valóban előforduló jelváltozás helyett k' olvastunk, akkor w_n helyes értéke helyett a következőt nyerjük: $w_n + k - k'$. De miután $k - k'$ mindenesetre véges mennyiség, kell, hogy

$$Lim.\left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty} = Lim.\left(\frac{w_n + k - k'}{n}\right)_{n=\infty}$$

legyen, mi nem más, mint a föntebbi megjegyzés kifejezése.

Végre még minden nehézség nélkül be lehet bizonyitani, hogy a φ *meghatározására az*

$$1, \cos.\varphi, \cos.2\varphi, \cos.3\varphi, \ldots. \qquad (1.)$$

sor helyett a következő általánosabbat is lehet használni:

$$\cos.\alpha, \cos.(\alpha+\varphi), \cos.(\alpha+2\varphi), \cos.(\alpha+3\varphi), \ldots. \qquad (2.)$$

hol α-nak tetszőleges 0 és π közt fekvő értéke van.

Láttuk ugyanis, hogy az első sornak megfelelő értékeket

$$0, \varphi, 2\varphi, 3\varphi, \ldots\ldots, r\varphi$$

a következő intervallumokba sorolhatjuk:

$$0 \ldots \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \ldots \frac{3\pi}{2}, \ldots\ldots, (2k+1)\frac{\pi}{2} \ldots (2k+3)\frac{\pi}{2};$$

és hogy ekkor a jelváltozások száma az intervallumok számával, vagyis k-val, egyenlő.

De ugyanezt tehetjük a második sorban a *cos.* alatt előforduló értékekkel:

$$\alpha,\ \alpha+\varphi,\ \alpha+2\varphi,\ \alpha+3\varphi,\ \ldots\ldots,\ \alpha+r\varphi.$$

Itt is jelváltozás csak akkor történik, ha egy egy ily értéksorozatból a másikba megyünk, és itt is az átmenetnél szükségképen a legközelebbi intervallumba jutunk, mert a növekedés φ kisebb π-nél. A második sorban tehát a jelváltozások száma szintén egyenlő az ily módon keletkező intervallumok számával. Ez pedig az első sornak megfelelő számtól legfölebb egygyel különbözhetik. A π-nél kisebb α mennyiség hozzálépése által ugyanis eltünhetik az első, $0 \ldots \frac{\pi}{2}$; mig ellenkezőleg a végén egy hozzáléphet.

Ebből azonban következik, hogy akár az első, akár a második sorban veszszük a jelváltozásokat bármely tagig, a nyert szám legfölebb az egységgel nagyobbodhatik vagy kisebbedhetik. Ha tehát a második sort vesszük, lehet, hogy w_n helyett $w_n \pm 1$-et nyerünk, de ha n-t folyton növesztjük, e hiba végre eltünik, miután hiszen:

$$Lim. \left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty} = Lim. \left(\frac{w_n \pm 1}{n}\right)_{n=\infty}.$$

Azaz: a φ meghatározására az első sort mindenkor föl lehet cserélni az általánosabb másodikkal.

IRODALOM.

Waltenhofen, dr. a. professor der physik an der deutschen technischen hochschule zu prag, Grundriss der allgemeinen mechanischen physik. Für Studirende an Hochschulen und für Lehramtscandidaten. Leipzig. B. G. Teubner. 1875. (351 nagy nyolczadrétü lap, 142 a szöveg közé nyomott ábrával és betürendes tárgymutatóval.) Ára 8 mark.

Az elméleti vagy mathematikai physikának irodalma a mily gazdag monographiákban és dúsgazdag a folyóiratok hasábjain megjelenő értekezésekben, ép oly szegény rendszeres tankönyvekben, úgynevezett compendiumokban. E szembeötlő tény, az első pillanatra, annyival inkább meglepőnek látszhatik, mivel ma már alig van egyetem és műegyetem, melyen a mathematikai physikából, vagy legalább egyes fejezeteiből minden tanévben előadások ne tartatnának. Pedig e tény könnyen magyarázható. A mechanikai hőelmélet, most

20—25 éve, mondhatni az egész természettant új alapokra fektette; tételek, sőt elvek, melyeknek jelentését és jelentőségét előbb alig lehetett átlátni, egyszerre messzevágókká váltak; fejezetek, előbb egymástól egészen elszigeteltteknek látszók, a legszorosabb kapcsolatba füződtek össze. Minden physikus érezte, hogy »az erély megmaradásának elve«, ha egyszer *átjárja* a természettan minden rétegét, reformokat fog maga után vonni nemcsak a felfogásban, de még a tárgyalás modorában is. E penetratiora huzamosabb idő volt szükséges; addig nemcsak az irók, de még a tanárok is, hacsak a nehéz reformmű keresztülvitelébe tettleg bele vágni nem akartak, mintegy várakozó szerepre voltak utalva. Németországban az öreg Neumann, Angliában a fiatalabbik Thomson, s Franczia országban a hangya-szorgalmú Verdet törték meg a jeget, előbb a kathedrán, s a két utóbbi aztán az irodalomban is. A fiatal német physikusok Königsbergába sereglettek, hogy ott a mineralogia tanárától elméleti természettant hallgassanak, s előadásai után a maguk számára »előadási füzeteket« készitsenek. Kisebb-nagyobb ügyességgel berendezték maguk számára az előadás egymásutánját, s több vagy kevesebb önállósággal hozzájárultak a königsbergai eszmék kifejlesztéséhez, vagy legalább elterjesztéséhez. Igy történt ez Angliában és Franczia országban is. De minderre idő kellett.

1867-ben jelent meg a Thomson és Tait »Treatise on Natural Philosophy« czimü klasszikus becsü kézi könyvének I. kötete. Ebben volt először, s maig is utóléretlenül, feldolgozva a dynamika, a szilárdak és folyadékok statikája, a potential-elmélet, a rugalmasság elméletének nyugvástani része, folyvást szem előtt tartva az erély megmaradásának elvét. De Thomson munkája nem való kezdők kezébe; az egész oly magas mathematikai stilben van tartva, hogy még a német fordításra vállalkozó Wertheim sem tudott vele igazán boldogulni.

Nyomban utána 1868-ban indult meg a korán elhunyt Verdet munkáinak közzététele tanitványai által. Az 5 utolsó kötet (IV—VIII), melynek tartalma az École normale-on tartott Conférences de physique, a Lecons d'optique physique, és Théorie mécanique de la chaleur, remek monographiák gyüjteménye, melyeket nem lehet eléggé ajánlani a haladottabb kezdők számára.

A rákövetkező évben, 1869-ben jelent meg Briot »Théorie mécanique de la chaleur«-je, mely a szorosan vett hőelméleten kivül a villanyosság elméletét is tárgyalja, szakadatlan vonatkozásban az erély megmaradásával. Kitünő mü; méltán megérdemli, valamint a jól sikerült német fordítása is, a nagy elterjedést, melyet csakhamar kivivott.

Azonban, mind e művek, talán az egy Brioté kivételével, inkább kézi könyvek, vagy legalább vezérfonalak tanárok számára, mintsem tankönyvek

a szó szorosabb értelmében. Ily álláspontot foglalt el a Kirchhoff »Vorlesungen über mathematische Physik« czimü nagyobb müve is, melyből az első füzet még 1874-ben jelent meg, s melyről legközelebbi füzete közre bocsátásakor bővebb ismertetést fogunk adni.

Viktor von Lang, a bécsi egyetemen a természettan tanára kisértette meg legelőször egy szorosan vett tankönyv irását »Einleitung in die theoretische Physik» czimü művében. Közép iskolai tanárjelöltek igényeihez mérve elég bő anyagot vett fel müve keretébe; a kizárólag elemi mennyiségtani tárgyalási modor, melyet, ragaszkodva az Ausztriában akkoriban még fönállott tanár vizsgálati szabályzathoz, ex offo követendőnek tartott, csakhamar elavulttá tette a nagy szorgalommal irt könyvet. Az ugynevezett elemi levezetések: a differentiális és integrális számitásnak lappangó alkalmazása, s az operatióival járó előnyök szántszándékos mellőzése, legtöbb esetben élvezhetetlenek. Azóta Ausztriában is belátták, hogy a physikai tanárjelöltet a differentiális és integrális számitás ismeretétől fölmenteni nem szabad; s igy az új szabályzat megfosztotta Lang könyvét attól a kis közönségtől is, melynek szánva lett volna.

Egyetemi hallgatók és tanárjelöltek számára egy használható tankönyvet nyujtani, mely magában foglalja a mathematikai physika legfontosabb tanitételeit — ez volt a czél, mely Waltenhofen, a prágai német polytechnikum physikai tanára előtt lebegett, midőn a fentczimzett munkát megirta. Ő is szükségesnek itélte egy előre bocsátott mathematikai bevezetésben a physika tanulóját megbarátkoztatni az ugynevezett »felsőbb« menyiségtan alapfogalmaival és müveleteivel; s csak azután, midőn a differentiális és integrális számitás alaptételeit, 47 lapra szorítva, áttárgyalta, tér rá az első három fejezetben az elméleti mechanikára, aránylag legnagyobb terjedelmet adván földünk mechanikájának, kevesebbet az aerodynamikának s föltünő keveset a hydrodynamikának. A negyedik részben a mechanikai hő elméletet, s az öt ö tikben a potential-elméletet adja, némi csekélyke alkalmazással a villanyosság tanára. Egészen mellőzi a rugalmasság, a hang és a fény elméletét, azt hozván fel indokul, hogy az úgyis igen czélszerüen van megirva Wüllner Physikájának első kötetében. Irodalmi utalások csak nagy ritkán találhatók benne, legfölebb akkor, ha valamelyek osztrák physikusnak, Machnak, Pfaundlernek, Pierrenek, Schmidtnek holmi aprólékos észrevételét idézheti. Látszik az egészen, hogy specziális osztrák viszonyok lebegtek a szemei előtt, munkája irása közben. Irni akart egy könyvet, melyből az osztrák tanárjelöltek a tanári vizsgálatra szükséges tudnivalókat megtanulhatják. Ugy látszik, egészen figyelmen kivül hagyta azt, a mit nézetünk szerint, az ily tankönyv irójának egy perczre sem szabadna szem elől téveszteni, t. i. azt, hogy könyve

bevezetés legyen a magasabb tanulmányokra, mintegy előizelitő és utmutató az eredeti források fölkeresésére. Ilyesmit a munkában hiában keresnénk ; az önálló alakitó erő és magasabb szellem hiánya minden lépten-nyomon elárulja magát. Az itt beszivott levegő nem üdit, hanem tikkaszt, nem tüzel további munkára, hanem inkább a leczke-tudás büszkeségét gerjeszti föl.

Egy eltagadhatatlan érdeme azonban van, t. i. hogy eddigelé egyetlen tankönyv a maga nemében. Kezdőknek legelső tanulmányra ajánlható, föltéve, hogy a mint áthatoltak rajta, azonnal félreteszik és más szellemesebb, magvasabb dolog után látnak. *Sz. K.*

Hankel, Dr. Hermann, weil. prof. an der universitaet zu tübingen. — Die elemente der projectivischen geometrie in synthetischer behandlung. vorlesungen. Leipzig. B. G. Teubner. 1875. 256 nagy nyolczadrétü lap, 78 ábrával. Ára 7 mark.

Az előttünk fekvő munka, mely elhúnyt szerzőnek a tübingai egyetemen tartott előadásához irt füzete alapján lett kiadva, főczélja a projectiv mértan elemeibe bevezetni, a mi a szerzőnek rendszeres, correct és vonzó előadásánál fogva mindenütt fényesen sikerült.

A munka bevezetésében a szerző a modern geometria történeti fejlődését jellemzi rövid vázlatban, még pedig e fejlődés főbb momentumai oly ügyességgel vannak kiemelve, hogy még a kezdő is e tudományszak alapvető módszereiről helyes fogalmat nyerhet. Az első szakasz az anharmonikus viszony éz a haránt ok (Transversalen) elméletével foglalkozik, a második a dualitas elvével (Princip der Dualität). A harmadik szakaszban tárgyalja a szerző az egymásra projectiv vonatkoztatott pontsorokat (Punktreihen) és sugársorokat (Strahlenbüschel), továbbá az egymásra fektetett pont és sugársorokban a kettős pontokat és kettős sugarakat s a t. A negyedik szakasz az eddig tárgyalt elvek és módszerek alkalmazását adja az Apollonius feladataira, az ötödikben igen csinos modorban, még pedig tankönyvben először a dioptikára. A hatodik szakasz a kúpszeletek vizsgálatával ismét áttér a tiszta elméletre ; ezeket projectiv pont- és sugár-sorok segitségével származtatja és adja osztályozásukat valamint szerkesztésüket. E szakaszban különösen figyelmet érdemel a Pascal tétele, melylyel kapcsolatban nemcsak a német felfedezések, hanem az angol mathematikusok által nyert eredmények is tárgyaltatnak. Aztán azon tételek következnek, a melyek a kúpszelet pólusára és polárisára, az átmérőkre s a középpontra vonatkoznak. A kúpszeletek gyupontjainak tulajdonságai azonban a munkában teljesen hiányoznak. A hatodik szakaszban végre a sik pontrendszerek collineátiójának rövid vázlatát találjuk. *H. J.*

Jacob Steiner. Vorlesungen über synthetische geometrie. Erster theil : Die theorie der kegelschnitte in elementarer darstellung. Bearbeitet von dr

C. F. GEISER. Zweite Auflage. Leipzig. B. G. Teubner. 1875. (208 nagy nyolczadrétü lap, 141 ábrával.) Ára 6 mark.

Steiner kéziratait egyik rokona C. F. Geiser örökölte és ezekből H. Schröterrel együtt Steinernek a berlini egyetemen tartott két előadását a fentebb nevezett czim alatt rendezte sajtó alá. Az első rész most jelent meg második kiadásban és czéljánál fogva lényegesen nem térhet el az első kiadástól. A munka tartalmát teszik a kör és a kúpszeletek elemi tulajdonságai, geometriai modorban tárgyalva. *H. J.*

BIBLIOGRAPHIA. A havonként megjelenő uj szakmunkák jegyzékét a boritékon közöljük. E rovat vezetését Heller Ágost ur, a budapesti II. ker. áll. főreáltanoda tanára volt szives elvállalni.

FÖLADATOK.

1. Bizonyitassék be az elemző mértan segitségével, hogy ha valamely kúpszelet (ellipsis v. hyperbola) egyik F gyupontjából annak érintőjére merőlegest bocsátunk, melynek talppontja T legyen és ezen merőlegesben az R pontot úgy veszszük fel, hogy $FT = TR$, akkor az R pont, mértani helye kör. E kör középpontja a kúpszelet második F' gyupontjában van, sugara pedig a nagy tengely (vagy a valós tengely). (HUNYADY.)

2. Egy tetszőleges egész szám osztóit két osztályba lehet sorozni, a mint a bennük előforduló akár egyenlő, akár különböző törzstényezők száma páros vagy páratlan. Határoztassék meg az egy-egy osztályba tartozó osztók összege. (KÖNIG.)

3. Adva van négy gömb, melynek középpontja ugyanaz, sugaraik pedig: r_1, r_2, r_3, r_4. Egy szabályos tetraeder úgy helyezendő el, hogy minden szögpontja egy másik gömb felületén legyen. Határoztassék meg ebből a tetraeder számitás és szerkesztés utján.

A föladat azonban nem lehetséges a sugarak *minden* értékénél. Mi a föladat lehetőségének föltétele analytikai és mértani alakban? (KÖNIG.)

4. Bizonyittassék be, hogy az akárhányad rendü gyorsulás derékszögü alkotóinak négyzeteiből képezett összeg,

$$\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)^2$$

független a derékszögü koordináta-rendszer választásától. (SZILY.)

5. Miképen lehet valamely mérleg sulypontjának távolságát a középső éltől kisérlet utján meghatározni? (SCHULLER ALAJOS.)

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

I. kötet. **1876.** 2. füzet.

A GRAPHIKAI HÁROMSZÖGELÉS ÁLTAL FELVETT PONTOK ÖSSZRENDEZŐINEK MEGMÉRÉSE A SZELVÉNY-NÉGYSZÖGBEN.

Kruspér Istvántól.

Legyen a mérő asztalon egy szelvény-négyszög $ABCD$ a legnagyobb gonddal felrajzolva. Legyenek ennek keretében graphikai háromszögelés által felvett pontok, melyeknek összrendezőit kell a léptékkel megmérni. E czélra egy beosztott vonasz, s ehhez egy háromszög áll a mérnök rendelkezésére, melynek egyik befogó oldala noniussal van felszerelve. Ha ezen háromszög tökéletesen derékszögű volna, akkor a mérés igen egyszerű módon eszközöltetnék; t. i. a beosztott vonaszt az AB oldalra, a háromszöget a noniusos oldalával pedig a vonasz mellé fektetvén, eltolnók azt, míg a másik befogó előbb az A, azután a meghatározandó ponton menne keresztül, s a nonius állását mind a két izben leolvasván, a különbség adná a pont metszékét. Ugyanezt ismételnők a rendezőre nézve is azon különbséggel, hogy a vonaszt a BC oldalra kellene helyezni. De ha a háromszög két befogó oldala közt bezárt szög nem tökéletes derékszög, hanem attól ω-val különbözik, úgy, hogy a háromszög azon oldala, melynek a rendező irányában kellene esnie, A felé hátrahajlik: akkor a leolvasott metszék és rendező nem lesz az igazi, hanem attól a pontnak a szelvény négyszögében való fekvéséhez képest többé kevésbbé különbözik. Ha most a mérést a négyszög mind a négy oldalán ismételjük, akkor a metszékre és a rendezőre nézve két-két eredményt kapunk, melyekből az igazi értékeket következőképen lehet meghatározni.

Legyenek a szelvény oldalhosszai: $AB = CD = a$

$BC = DA = b$

a leolvasott hibás metszékek az AB oldalon: x_1
» » » » » CD » x_2
» » » rendezők » BC » y_1
» » » » » DA » y_2

az igazi metszék az AB oldalon A-tól B felé számitva: x, az igazi rendező AB-re merőlegesen y, akkor egy minden nehézség nélkül rajzolható ábra segélyével ezen mennyiségek és ω közt következő egyenleteket lehet felállitni:

1) $x = x_1 - y \operatorname{tg}.\omega$
2) $y = y_1 - (a - x) \operatorname{tg}.\omega$
3) $a - x = x_2 - (b - y) \operatorname{tg}.\omega$
4) $b - y = y_2 - x \operatorname{tg}.\omega.$

Ezen 4 egyenletben három ismeretlen van, u. m. x, y, ω, a feladat tehát túlhatározott, s az eredmények a mérési hibák következtében egy kissé különbözni fognak egymástól a szerint, a mint azok az egyenletek különböző combinatióiból találtatnak.

Adjuk össze először mind a négy egyenletet, akkor lesz.

$$a + b = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - (a + b) \operatorname{tg}.\omega.$$

melyből az ismeretlen összrendezők egészen kiesnek és igy csak az ω marad hátra. Ebből tehát $\operatorname{tg}.\omega$ értékét ki lehet számitani. Akárhol választunk a négyszög keretében egy pontot, annak megmért dőlt összrendezői egy ilyen egyenletre vezetnek, a nélkül, hogy a pontnak valóságos összrendezőit ismernünk kellene. Mennél több ilyen pontot választunk, annál biztosabban fogunk az eredményekből, a közép értéket véve, a $\operatorname{tg}.\omega$ ismeretére jutni. Ezen mennyiséget tehát előlegesen meghatározottnak tekinthetjük, és csak két ismeretlen marad hátra.

Az x és y meghatározása végett foglaljuk össze az 1) 2) egyenleteket, ezekből találjuk:

$$5) \quad x = \frac{x_1 - y_1 \operatorname{tg}.\omega + (a - x_1) \operatorname{tg}.\omega^2}{1 + \operatorname{tg}.\omega^2}$$
$$y = \frac{y_1 - (a - x_1) \operatorname{tg}.\omega}{1 + \operatorname{tg}.\omega^2}$$

Keressük x, y-t az 1) és 4) egyenletekből, akkor lesz:

$$6) \quad x = \frac{x_1 - (b - y_2) \operatorname{tg}.\omega}{1 + \operatorname{tg}.\omega^2}$$
$$y = \frac{b - y_2 + x_1 \operatorname{tg}.\omega}{1 + \operatorname{tg}.\omega^2}$$

Foglaljuk össze a 2) és 3) egyenleteket, akkor lesz:

$$7) \quad \begin{aligned} u &= \frac{a - x_2 + (b - y_1)\,\mathrm{tg}.\omega + a\,\mathrm{tg}\,\omega^2}{1 + \mathrm{tg}.\omega^2} \\ x &= \frac{y_1 - x_2\,\mathrm{tg}.\omega + b\,\mathrm{tg}.\omega^2}{1 + \mathrm{tg}.\omega^2} \end{aligned}$$

Végre a *3)* és *4)* egyenletekből következik:

$$8) \quad \begin{aligned} x &= \frac{a - x_2 + y_2\,\mathrm{tg}.\omega}{1 + \mathrm{tg}.\omega^2} \\ y &= \frac{b - y_2 + (a - x_2)\,\mathrm{tg}.\omega + b\,\mathrm{tg}.\omega^2}{1 + \mathrm{tg}.\omega^2} \end{aligned}$$

Az 1), 3) valamint a 2) és 4) egyenlet-combinatiokból nem találunk semmit, mert ha az egyik ismeretlent belőlük kiküszöböljük, a másik is kiesik. Igy tehát négyféle eredményt nyertünk, melyek közül mindegyik egyenlően jogosult. Ezekből tehát a közép értéket véve, lesz:

$$9) \quad \begin{aligned} x &= \frac{(a + x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)\,\mathrm{tg}.\omega + a\,\mathrm{tg}.\omega^2}{2\,(1 + \mathrm{tg}.\omega^2)} \\ y &= \frac{(b + y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)\,\mathrm{tg}.\omega + b\,\mathrm{tg}.\omega^2}{2\,(1 + \mathrm{tg}.\omega^2)} \end{aligned}$$

Ha a szöghiba ω csak igen kicsiny, akkor $\mathrm{tg}.\omega^2$ elhanyagolható a $\mathrm{tg}.\omega$ mellett, s elég pontossággal lesz:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + x_1 - x_2}{2} - \frac{y_1 - y_2}{2}\,\mathrm{tg}.w \\ y &= \frac{b + y_1 - y_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2}\,\mathrm{tg}.\omega \end{aligned}$$

Ugyanezen eredményre jutunk, ha a feladatot a legkisebb négyzetek elmélete szerint oldjuk meg, mely megoldás tudnivaló, hogy az ismeretlenek legvalószinübb értékeit szolgáltatja.

Ugyanis az *1) 2) 3) 4)* egyenleteket igy is lehet irni:

$$\begin{aligned} x + y\,\mathrm{tg}.\omega - x_1 &= 0 \\ -x\,\mathrm{tg}.\omega + y - y_1 + a\,\mathrm{tg}.\omega &= 0 \\ x + y\,\mathrm{tg}.\omega - a + x_2 - b\mathrm{tg}.\omega &= 0 \\ -x\,\mathrm{tg}.\omega + y - b + y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Hasonlitsuk össze ezen egyenleteket az általános képletekkel:

$$\begin{aligned} A\,x + B\,y - C &= 0, \\ A'x + B'\,y - C' &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

melyekből az x, y meghatározására következő egyenleteket kell alakitani:

$$10) \quad \begin{aligned} [A^2]\,x + [AB]\,y - [BC] &= 0 \\ [AB]\,x + [B^2]\,y - [BC] &= 0. \end{aligned}$$

akkor lesz $[A^2] = 2\,(1 + \text{tg}.\omega^2)$

$[AB] = 0$

$[B^2] = 2\,(1 + \text{tg}.\omega^2)$

$[AC] = -(x_1 - x_2 + a) + (y_1 - y_2)\,\text{tg}.\omega - a\,\text{tg}.\omega^2$

$[BC] = -(y_1 - y_2 + b) - (x_1 - x_2)\,\text{tg}.\omega - b\,\text{tg}.\omega^2$

s ha ezen értékeket a *10)* egyenletbe helyettesítjük, az x, y értékeire nézve tökéletesen a *9)* alatti képleteket nyerjük. A meghatározás súlya nem igen nagy ugyan az egyes észleletek súlyához képest, t. i.

$$2\,(1 + \text{tg}.\omega^2)$$

mind az x, mind az y-ra nézve, de az eredmények minden esetre a legjobbak azok közül, melyeket az adott méretekből nyerni lehet.

KÚPSZELETEK KÖZPONTI VETÜLETBEN.

Fölser István, müegyetemi tanártól.

(Két könyomatú táblával.)

I.

A KÚPSZELET KÉPE.

Ismeretes dolog, hogy bármely kúpszeletnek centralvetülete ismét kúpszelet, még pedig kerülék, vagy hajtalék vagy mentelék, a szerint, a mint az adott kúpszelet a distancz-síkot [1]) vagy nem metszi, vagy érinti, vagy átmetszi.

Ha az ily adott helyzetű kúpszeletet síkjával a tábla síkjába lefordítva képzeljük, akkor a kép és a lefordított kúpszelet két perspectiv helyzetű, collineár-rokon síkbeli rendszert ábrázol; a mely rendszerek egyikéből a collineatio központja, a collineatio tengelye és a két rendszer ellentengelyeinek segélyével — a centrál-projectio tanai szerint — a másik rendszerbeli kúpszeletnek egyes pontjait vagy társátmérőit, ez utóbbiakból pedig annak derékszögü tengelyeit is biztosan meghatározhatjuk.

---

[1]) Igy nevezvén a központon keresztül, a tábla síkjával párhuzamosan vezetett síkot.

Jelen értekezésem a kép két derékszögű tengelyének a collineár sendszerben fekvő, megfelelő (homolog) egyenes vonalak kijelölésére — tehát a két tengely direct meghatározására — egy egyszerű módrzert tárgyal; egyúttal rámutat azon előnyökre is, melyeket eme módszer alkalmazása által, más egyéb a kúpszeletekre vonatkozó feladatok megfejtésénél elérhetünk.

II.

A COLLINEATIO KÖZPONTJÁNAK EGY KÜLÖNÖS HELYZETE.

Minden *abcd* (1-ső ábra) kúpszeletnek végtelen sok, vele egy síkban fekvő, collineár-rokon kúpszelet felel meg, melyek mindannyian a collineatio központja (C), a collineatio tengelye D' és az ellentengelyek egyikének p. (V)-nek felvétele után, az adott kúpszeletből — vonalzó segélyével — megszerkeszthetők; és a mely kúpszeletek bármelyikének középpontja a másik síkbeli rendszer azon pontjának fog megfelelni, mely pont ez utóbbi rendszer kúpszeletének a (V) vonalra vett pólusát képezi.

Ha a collineatio tengelyét D'-t az *abcd* kúpszelet *cd* átmérőjével párhuzamosan veszszük fel és ha a *cd*-vel kapcsolt átmérőnek és eme rendszer ellentengelyének, (V)-nek metszésében, R-ben ez utóbbi vonalra merőlegest emelünk; akkor könnyen belátjuk, hogy minden az RS vonalban választott központot illetőleg, az *ab* átmérőnek és a (V) vonal pólusán, p ponton keresztül (V)-vel párhuzamosan vont mn húrnak, a collineár-rokon kúpszeletben egy derékszögű tengelypár fog megfelelni.

Tegyük fel továbbá a p pontban az mn húrra emelt merőlegesre $pm = pn$ darabot q-ig; kössük össze a-t q-val és vegyük fel a collineatio központját ez utóbbi vonalnak az RS vonallal való átmetszésében, (C')-ben, akkor a

$$(C)'mp \text{ és } (C)'m'p'$$

továbbá

$$(C')pq \text{ és } (C')a'p'$$

hasonló háromszögekből

$$pm : p'm' = (C')p : (C')p' = pq' : p'a',$$

honnét:

$$p'm' = p'a'$$

azaz: az *abcd*-vel *collineár-rokon kúpszelet kör leend.*

Ha tehát adva van egy tetszőleges helyzetű sík táblai átmetszése D' és annak hajlása a tábla síkjához; ha adva van továbbá a distancz

D, tehát az adott sík distancz-szeldéje [1]) (V) is; akkor az előbbiekben kifejtett elvek alapján, minden ezen síkban fekvő, és a distancz-szeldét nem metsző kúpszeletet illetőleg, könnyen meghatározható a központnak helyzete azon föltételből, *hogy az adott kúpszelet képe kör legyen.*

Könnyen belátható, hogy a szerint a mint az $mp = np$ darabot az mn húr egyik vagy másik oldalán q-ig vagy q_1-ig teszszük fel, — a kivánt föltételnek két a (V) vonalhoz symmetrikusan fekvő (C') és (C'') központ fog megfelelni. [2])

Azon különös esetben, midőn ab a (V) vonalra merőlegesen áll, azaz midőn ab és cd a kúpszelet két derékszögü tengelyével azonos, az ap és aq vonalok összeesvén, a leirt eljárás czélhoz nem vezet. De a

$$(C')\, Ra \text{ és } qpa$$

továbbá:

$$(C')\, Rp \text{ és } p'pr$$

hasonló háromszögekből

$$(C')R = pq.\frac{Ra}{pa} = h, \qquad 1)$$

és

$$p'r = (C')R.\frac{rp}{Rp} = h_1. \qquad 2)$$

A szóban forgó esetben tehát az 1) és 2) egyenletek szerint meg szerkesztett h és h_1 hoszszak segélyével fogjuk a (C'), illetőleg p' pontokat meghatározni. [3])

A most kifejtett elvek segélyével, egyenes vonalok és kúpszeletek átmetszését, sőt — bizonyos föltételek mellett — két kúpszeletnek átmetszési pontjait is könnyen megszerkeszthetjük.

Keressük fel p. két oly helyzetü axy (2-dik ábra) és $ABCD$ kúpszeletnek átmetszését, mely kúpszeletek az és AB átmérői egy és ugyanazon egyenesben feküsznek, míg az ezen átmérőkkel conjugált irányok párhuzamosak.

E végre vegyük fel a (V) és D vonalakat CD-vel párhuzamosan és keressünk egy oly helyzetü központot, melyre nézve az adott kúpszeletek egyikének, p. o. az axy hajtaléknak képe kör; akkor az $ABCD$

---

[1]) Az adott sík és a distancz-sík metszésvonala.

[2]) Magától értetik, hogy a qb és q_1b vonalak, az igy meghatározott (C') és (C'') pontokon tartoznak keresztül vinni.

[3]) Ezen eljárást a körre alkalmazván, könnyen találhatunk egy oly helyzetü centrumot, melyre nézve az adott kör képe ismét kör leend.

kerülék képe, $A'B'M'N'$ kerülék leend és világosan látjuk, hogy a kitűzött feladat megfejtése, az $a'b'm'n'$ körnek egy oly helyzetű $A'B'M'N$ kerülékkel való metszésére van visszavezetve, mely kerüléknek $A'B'$ tengelye a kör középpontján megy keresztül. Ez utóbbi feladat constructiv megfejtése, mint ismeretes — a vonalak megrajzolása nélkül könnyen eszközölhető.

Illeszszük ugyanis az adott L kúpszeletet egy M másodfokú felületre — p. henger vagy kúpra — az adott K kört pedig egy G gömbre oly módon, hogy M és G egymást K_1 K_2 körökben messék, és keressük fel a K körnek a K_1 K_2 vonalokkal való átmeszését. Ez utóbbi pontok az adott kúpszeleten feküdvén, a kivánt feltételnek eleget tesznek.

Niemtschik tanár úr — Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wissensch. 59. Bd. II. Abth. — a kúpszeletek átmetszését más alapelvek szerint igen részletesen tárgyalja. Úgy vélekedem, hogy az általam közölt általánosabb megoldás szerint az emlitett értekezésben alkalmazott hosszadalmas szerkesztések tetemesen egyerüsbithetők.

III.

A KÉP DERÉKSZÖGÜ TENGELYEI.

1-sö megoldás. Visszatérve a kitűzött feladat megfejtésére legyen *abcd* (3-ik ábra) egy kerülék, melyet sikjának táblai átmetszése D' körül a tábla síkjába leforditva képzelünk; (V) a leforditott distancz-szelde, (C) a collineatio központja.

Könnyen belátjuk, hogy bármely két a p poluson keresztül menő conjugált egyenes [1]) *1*, *2* és *3*, *4* oly tulajdonságú, hogy azok képei az adott kúpszelet képének derékszögű tengelyeit képezik; és ha ezen vonalaknak a (V) egyenessel való átmetszéseit α_1 és α'_1-el jelöljük, akkor bebizonyitható: hogy az $\alpha_1 R . \alpha'_1 R$ metszékek szorzata mindig állandó tartozik lenni.

E végre jelölje (C') azon központot, melyre nézve az adott kúpszelet képe kör leend; jelöljük továbbá az *ab*, *12* és *34* vonalaknak a D' vonallal való átmetszéseit r, s, t-vel, a (C') R és $p''r$ hosszakat pedig h és h_1-el — akkor a

$$R\ p\ \alpha_1 \text{ és } r\ p\ s,$$

továbbá az

$$R\ p\ \alpha'_1 \text{ és } r\ p\ t$$

hasonló háromszögekből következik:

---

[1]) melyek mindegyike a másiknak, az *abcd* kúpszeletre viszonyitott pólusát tartalmazza.

$$\alpha_1 R = sr \frac{pR}{pr} \text{ és } \alpha'_1 R = tr. \frac{pR}{pr},$$

honnét

$$\alpha_1 R \,.\, \alpha_1 R = tr \,.\, sr \left(\frac{Rp}{pr}\right)^2 = \left(h_1 . \frac{pR}{pr}\right)^2 = \left[(C')R\right]^2 = h^2 = const.$$

azaz: bármely két a p ponton keresztül menő conjugált egyenes vonal α_1 és α'_1 pontjai, egy olyan kör átmérőjének végpontjai leendnek, mely kör a (C') ponton megy keresztül.

Ha tehát tekintetbe veszszük, hogy azon két conjugált húrra nézve, mely húrok képei a kép derékszögű tengelyeivel azonosak $\alpha_1 (C)\alpha'_1 = 90^0$ tartozik lenni; következik: *hogy a kép két derékszögű tengelyének, az adott kúpszelet síkjában fekvő — megfelelő két conjugált egyenes vonal α_1 és α'_1 pontjai egy oly kör átmérőjének végpontjait képezik, mely kör a (C) és (C') pontokon megy keresztül.*

Az igy talált húrok segélyével, az $1'$, $2'$ és $3'$, $4'$ derékszögü tengelyek meghatározása könnyen eszközölhető.

2-dik megoldás. Azon esetben, ha az adott kúpszelet a (V) vonalat (4-ik ábra) e és f-ben átmetszi, — a (C') pont képzetes lesz; miért is az előbb közölt eljárás nem alkalmazható.

Ha azonban tekintetbe veszszük, hogy a p poluson keresztülmenő conjugált sugarak átmetszései (V) egyenessel egy oly involutorikus pontsort $\alpha\, \alpha_2\alpha_3\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ adnak, melynek kettős elemeit az e és f pontok képezik, és ha tekintetbe veszszük, hogy a (C) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ sugársor szintén involutorikus tartozik lenni; akkor könnyen beláthatjuk, hogy a feladat megfejtése, a (C) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha'\,\alpha'_2\alpha'_3$ sor derékszögű sugárpárjának meghatározására van visszavezetve.

E végre felezzük a $(C)\,e$ és $C\,f$ kettős sugarakból képezett szögeket és keressük fel a $(C)\,\alpha_1$ és $(C)\,\alpha'_1$ felező vonalaknak a (V) egyenessel való átmetszési pontjait, α_1 és α'_1-et; akkor az $\alpha_1 p$ és $\alpha'_1 p$ vonalak a kép derékszögü tengelyeinek megfelelő egyenesek lesznek.

Minden további, az axy hajtalék képének — a menteléknek — meghatározására vonatkozó szerkesztés, a mellékelt rajzból világosan látható és bővebb magyarázatot nem igényel.

Az ezen értekezésben foglalt elveket és alkalmazásukat már évek előtt közzétettem a tanárképezdében, a kúpszeletekről tartott nyilvános előadásaimban.

A PROPELLER-CSAVAR ELMÉLETÉHEZ.

Szily Kálmántól.

(Előadta a m. tud. Akadémia 1875 október 11-én tartott ülésén.)

»Propeller-csavarnak nevezik mai napság mindazokat a vízi hajtóműveket, melyek a hajó tatjára erősítve, a gerinczczel párhuzamos tengely körül forgattatnak. Valódi csavar-formája azonban csakis a Smith-féle szerkezetnek volt, melyet ez az Archimedes nevű gőzösén alkalmazott először; a többi úgynevezett csavarok vagy a Jonval-féle turbinához, vagy pedig a szélmalomkerékhez hasonlítanak inkább. A jelenlegi propeller-csavarok három- vagy négyszárnyúak; de vannak kétszárnyúak is.«

»A propeller-csavar szerkesztésére még mai nap sincs rationalis eljárásunk. A csavarszárnyak legjobb hatású alakját még nem tudjuk a mechanika törvényeiből levezetni.«

A szélmalomkerék-formájú csavar, Redtenbacher [1]) nyilatkozata szerint — tőle vettük a fentebbi sorokat is — mind elméleti, mind gyakorlati tekintetben többre becsülendő a közönséges csavarnál. Az elméleti elsőbbség szerinte abban állana, hogy a szélmalomkerék formájú csavarnál a nemző vonal forgatásának törvénye egészen tetszésünkre van bízva, s következésképen *talán úgy választható, hogy általa a legjobb hatású alakra tehetünk szert;* míg ellenben a közönséges csavarnál, a külső csavarjárat hajlás-szögén kivül, minden egyéb változhatatlanul meg van szabva.

Rühlmann új nagy művében [2]) a kérdéses tárgyról a következőket mondja:

»A mi a propellercsavarok jelenlegi alakját illeti, meghatározásukban, fájdalom, az elmélet egészen cserben hagy, a mint ez még a derék Redtenbacher idevágó dolgozataiból is kitünik. Innen van aztán, hogy majd minden propellercsavar-szerkesztőnek meg vannak a maga kedvencz-alakjai, melyek többé-kevésbbé empirikus szabályokon alapszanak.«

Pár év előtt Martin Lajos, a kolozsvári egyetem tanára, a m. tud. Akadémiában egy nagyobb értekezést olvasott fel, mely azzal a

[1]) Der Maschinenbau. Mannheim-Heidelberg. 1865. Band 3. S. 225—226.

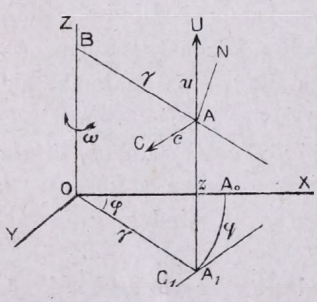
[2]) Allgemeine Maschinenlehre. Braunschweig, 1872. Vierten Bandes erste Abtheilung. S. 159.

kérdéssel foglalkozott, mily alak adandó a propellercsavarnak, hogy hatása lehető legjobb legyen. [1]) Az értekezés nekem is kiadatott bírálatra. Akarva nem akarva bővebben kellett a tárgygyal foglalkoznom; s minthogy számításaim eredménye a kérdésre, legalább elméleti szempontból, talán némi fényt deríthet, ezennel a nyilvánosság elé terjesztem.

A feladat, melyet magam elé tűztem, a következő:

Valamely felület, vízbe lévén merülve, szilárd irányú tengely körül egyenletes szögsebességgel forog és a tengelylyel párhuzamosan egyenletes sebességgel halad. A víz, ellenhatásánál fogva, a mozgó felület minden elemére nyomást gyakorol, melynek iránya mindenütt merőleges a felületre, nagysága pedig aránylagos az elem területével és a felület normálisába eső sebességnek négyzetével. *Adott határok között kerestetik az a felület, melynél a víz nyomásának a haladás irányára eső része maximum vagy minimum,* a surlódás és a viz kavargó mozgása nem vétetvén tekintetbe.

A keresett felület változatlan irányú tengely körül forogván, nyilvánvaló, hogy a helyhatározásra legczélszerűbb hengeres koordinátákat választani, még pedig akként, hogy a henger tengelye OZ egybeesik a forgás tengelyével. — Az A pont helyzete a térben teljesen meg van határozva, ha távolsága az XY síktól, vagyis z, továbbá távolsága a tengelytől, vagyis r és végre a hengeren mért távolsága a ZX siktól, vagyis az $A_0A_1 = q$ köriv hoszsza megadatnak. Legyen A-ban a keresett felület valamelyik eleme: df; ennek haladó sebessége, a nyugvó vízhez viszonyítva, u (= *constans*), forgó sebessége $c = rw$, hol w (= *constans*) a forgás szög sebességét jelenti; legyen végre v az elem sebességének az a része, mely a normális irányába esik. Megegyezvén abban, hogy a szögeket a szárak végpontjainak zárjelbe tétele által jelöljük, az elem sebessége vetítve a normális irányára, lesz:



$$v = u \,.\, cos\ (NU) + c \,.\, cos\ (NC), \qquad 1)$$

következésképp a normális nyomás a df felület-elemre:

$$dN = \zeta\, df, \qquad 2)$$

ζ levén az aránylagossági tényező.

[1]) Értekezések a mathem tudományok köréből, kiadja a m. tud. Akadémia III. kötet, VI. szám. (Hozzá van fűzve az akadémiai bírálók véleménye is.

Bontsuk fel e nyomást a három, egymásra merőleges AU, AC és AR irányokban komponenseire és jelöljük őket rendre dP, dQ és dR-rel, úgy

$$\frac{dP}{\cos(NU)} = \frac{dQ}{\cos(NC)} = \frac{dR}{\cos(NR)} = dN \qquad 3)$$

Tekintetbe véve, hogy a df felület-elem vetülete az XY síkra:

$$df \,.\, \cos(NZ) = dr \,.\, dq \qquad 4)$$

és az A pontban a köriv eleme dq az érintőbe, t. i. A_1 C_1 irányába esvén, a szögek cosinusai, melyeket a felület normálisa az AU, AC és AR egymásra merőleges irányokkal bezár, ismeretes képletek alapján, rendre:

$$\cos(NU) = \cos(NZ) = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 + 1\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cos(NC) = -\frac{\partial z}{\partial q} \,.\, \cos(NZ)$$

$$\cos(NR) = -\frac{\partial z}{\partial r} \cos(NZ).$$

A 3)-ban foglalt erőkomponensek még igy irhatók:

$$dP = \zeta\, v^2 .\, drdq.$$

$$dQ = -\zeta\, v^2 .\frac{\partial z}{\partial q} .\, dr \,.\, dq$$

$$dR = -\zeta\, v^2 .\frac{\partial z}{\partial q} .\, dr \,.\, dq$$

hol is:

$$v = \left(u - rw\frac{\partial z}{\partial q}\right)\left[\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + 1\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Vagy, ha a q köriv helyett a központi szöget, φ-t hozzuk be:

$$q = r \,.\, \varphi$$

és

$$dq = rd\varphi$$

leszen:

$$dP = \zeta\, v^2\, rdrd\varphi$$

$$dP = -\zeta\, v^2 \frac{\partial z}{\partial \varphi}\, drd\varphi \qquad 5)$$

hol is

$$dr = -\zeta\, v^2 .\frac{\partial z}{\partial r}\, rdrd\varphi$$

$$v = \frac{\left(u - w\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + 1}} \qquad 6)$$

A felület adott határai legyenek r_0, φ_0, z_0 és r_1, φ_1 és z_1, úgy a haladás irányába eső erőkomponens, az $\frac{u}{w}$ állandó viszonyt k betűvel jelölvén, még igy is irható [2]):

$$P = \zeta w^2 \int_{r_0}^{r_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\left(k - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 . r}{\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + 1} dr d\varphi \qquad 7)$$

Már most, e kettős integrálnak maximuma vagy minimuma keresendő.

A variatio-számitásból tudjuk, hogy az ily kettős integrálnak, mint ez

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{r_0}^{r_1} V dr d\varphi$$

maximuma vagy minimuma akkor állhat be, ha

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial \frac{\partial z}{\partial r}}\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \frac{\partial z}{\partial \varphi}}\right) = 0.$$

Minthogy a jelen esetben

$$V = \frac{\left(k - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 . r}{\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) + 1}$$

z-t kifejtve nem foglalja magában, marad:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial \frac{\partial r}{\partial z}}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \frac{\partial z}{\partial \varphi}}\right) = 0.$$

---

[1]) A hengeres koordináták helyett x, y, z derékszögü koordinátákat használván, a haladás irányába eső erőkomponens ily alakban lép föl:

$$P = \xi w^2 \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\left(k - y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy \qquad 7a)$$

Vagy, ha $\frac{\partial z}{\partial r}$ és $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ szerint a részletes differentiálást elvégezzük és helyettezzük,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{r\frac{\partial z}{\partial r}\left(k-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}{\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+1\right]^2}\right\}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\frac{r\left(k-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{k}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+1\right)}{\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+1\right]^2}\right\}=0.$$

Feladatunk vissza van tehát vezetve eme bonyolodott partiális differentiál-egyenlet megoldására. A megoldás, bármelyik eddig ismert módszert használnók is, valószinűleg elháríthatatlan mathematikai nehézségekkel járna. A reményről, hogy a kitüzött probléma általános megoldását ismerni fogjuk, legalább egyelőre le kell mondanunk.

Található azonban a differentiál-egyenletnek egy érdekes speciális megoldása, melynek úgy látszik a technikai gyakorlatra különös fontossága van. Redtenbacher t. i. egyenest abból a föltevésből indul ki, hogy a propellercsavar, tartozzék akár a közönséges csavarok, akár a szélmalomkerékformájú csavarok osztályába, mindig oly természetű, hogy a felület normálisa a két sebesség — forgó és haladó sebesség — irányán átfektetett sikba esik. Fogadjuk el mi is ezt a föltevést és lássuk, mire vezettetünk általa.

E föltevés, más szóval, annyit jelent, hogy a normális nyomás radiális komponense — amit előbb dR-rel jelöltünk — elenyészik. Legyen tehát

$$dR = \zeta v^2 . \frac{\partial z}{\partial r} . r dr d\varphi = 0.$$

E föltételnek nyilván való, hogy csak úgy felelhetünk meg, ha

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0 \qquad 9)$$

vagyis, ha z csupán φ-nek függvénye, r-től pedig egészen független. *Redtenbacher föltevése* tehát egyjelentésü azzal, hogy *a propellercsavar felülete az egyenes konoidok közül való.* Szabjuk tehát a feladatot ez értelemben szükebbre és tüzzük így ki: »Adott határok mellett kerestetik az a konoidfelület, melynél a viz nyomásának a haladás irányára eső része, valamennyi konoidfelület között, maximum vagy minimum.«

E kikötés mellett a differentiál-egyenlet könnyen integrálható. Ez esetben ugyanis, $\frac{\partial z}{\partial r}$ egyenlővé tétetvén semmivel, a differentiál-egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{r\left(k-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\frac{k}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}+1\right)}{\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2+1\right]}\right\}=0.$$

vagyis a nagy zárjelben levő kifejezés független φ-től, s igy csupán csak r függvénye. Tegyük tehát a zárjelben álló kifejezést egyenlőnek $f(r)$-rel és oldjuk meg az igy származott egyenletet $\frac{\partial z}{\partial\varphi}$ szerint, úgy szintén

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=F(r).$$

Differentiáljuk már most ezen egyenletet r szerint:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)=\frac{dF(r)}{dr}$$

De minthogy z független r-től, következik, hogy

$$F(r)=Constans=a,$$

tehát:

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=a$$

vagyis

$$z=a\varphi+b \qquad 10)$$

Az Archimedes-féle csavarfelület egyenlete. A konoidok között tehát csakis az Archimedes-féle csavarfelület oly tulajdonságú, hogy a haladás iranyába eső erőkomponens maximum vagy minimum lehessen.

Lássuk már most közelebbről, bekövetkezhetik-e csakugyan a maximális hatás és ha igen, a csavarfelületnek minő emelkedési szögénél történik az?

A haladás irányába eső erőkomponens mostani kifejezésében

$$P=\zeta w^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_0}\int_{r_1}^{r_0}\frac{r\left(k-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}{\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2+1}\,dr\,d\varphi \qquad 11)$$

k és $\frac{\partial z}{\partial\varphi}$ függetlenek r-től; következésképp az integratio r-re nézve, r_1 és és r_0 állandó határok között azonnal végrehajtható anélkül hogy $\frac{\partial z}{\partial\varphi}$ értékét ismerni kellene

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{r^3 dr}{r^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \frac{1}{2}\left[r^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 log\left[\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2\right]\right]_{r_0}^{r_1}$$

az alsó határt r-t tegyük megközelitőleg o-nak, úgy :

$$P = \frac{\zeta w^2}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(k - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\left[r_1^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 log\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + r_1^2}{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\right]d\varphi.$$

Jelöltessék $\frac{1}{r_1}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \eta$-val, és $\frac{k}{r_1} = \lambda$-val, úgy:

$$P = \zeta\frac{w^2 r_1^4}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(\lambda - \eta)^2\left(1 - \eta^2 log\frac{1+\eta^2}{\eta^2}\right)d\varphi.$$

A variatio számitásból ismeretes, hogy P akkor lesz maximum vagy miuimum, ha φ minden értékére φ_0 és φ_1 határok között

$$\frac{d^2V}{d\eta^2} \lessgtr o$$

hol

$$V = (\lambda - \eta)^2\left(1 - \eta^2 log\frac{1+\eta^2}{\eta^2}\right)$$

E functionak második differentiál-hányadosát kifejtve, lesz:

$$\frac{d^2V}{d\eta^2} = \frac{6\eta^4 - 6\lambda\eta^3 + \lambda^2\eta^2 + 9\eta^2 - 10\lambda + \eta 3\lambda^2 + 1}{(1+\eta^2)^2} - (6\eta^2 - 6\lambda\eta + \lambda^2 log)\frac{1+\eta^2}{\eta^2}$$

Hogy a hatás egy adott csavarnál maximum lesz-e vagy sem, attól függ, vajon e kifejezés értéke negativ-e vagy sem? Ugyanaz a csavar λ különböző értékéhez képest egyik esetben maximális hatású, másik esetben pedig minimális hatású lehet. Lássuk, például, milyennek kell lenni a csavarnak. hogy a hajó megindulásakor, mikor még $u = o$, tehát λ is$= o$, legjobb hatású legyen.

Ez akkor lesz, ha

$$\frac{6\eta^4 + 9\eta^2 + 1}{(1+\eta^2)^2} - 6\eta^2 log\frac{1+\eta^2}{\eta_2} < 0.$$

E kifejezés egyszerűebben így irható:

$$6\left(1 - \eta^2 log\frac{1+\eta^2}{\eta^2}\right) - \frac{5+3\eta^2}{(1+\eta^2)^2} < 0.$$

De

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = a$$

azon szög tangensét jelenti, melylyel a csavarvonal a távolság egységében emelkedik; r_1 sugarú hengeren pedig az emelkedés szöge α abból adódik ki, hogy

$$r_1 tg\,\alpha = \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{r_1}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \eta.$$

A behozott η mennyiség tehát a csavar külső karimáján levő emelkedési szög tangensét jelenti.

Ezt tekintetbe véve, a föntebbi kifejezés még így is írható:

$$6\,(1 + 2\,tg^2\,\alpha\, lognat\,.\,sin\,\alpha) - cos^2\,\alpha\,(3 + 2\,cos^2\,\alpha) < 0.$$

Kérdés már most: mikor, α-nak mely értékeinél lesz-e kifejezés posítiv és mikor negativ?

Próbálgatások után csakhamar meggyőzödhetünk, hogy mindaddig, mig

$$\alpha < 22^0\ 39'\ 27'',$$

$\frac{d^2V}{d\eta^2}$ positiv; mindaddig az Archimédes-féle csavarfelület minimális hatású, vagyis csekélyebb hatású, mint bármely más konoid felület ugyanazon $(r_0\ r_1)$, $(\varphi_0\ \varphi_1)$ és $(z_0\ z_1)$ határok között.

Mihelyt azonban

$$\alpha > 22^0\ 39'\ 27'',$$

$\frac{d^2V}{d\eta^2}$ negativ, ettől kezdve már az Archimédes-féle csavarfelület maximális hatású, vagyis jobb hatású mint bármely más konoidfelület ugyanazon $(r_0\ r_1)$, $(\varphi_0\ \varphi_1)$ és $(z_0\ z_1)$ határok között.

Megjegyzendő azonban hogy e számbeli érték csak arra az esetre vonatkozik, mikor λ és vele együtt a haladási sebesség semmi. Ha λ-nak a semmitől különböző értéke van, úgy ismét vissza kell térni a $\frac{d^2V}{d\eta^2}$ kifejezéshez; helyettezni bele λ adott értékét, s azután kiszámitani, hogy η mely értékénél lesz $\frac{d^2V}{d\eta^2} \lessgtr 0$.

Foglaljuk össze vizsgálódásaink eredményét:

1) A feladat: meghatározni azt a mértani felületet, melynél forogva haladó mozgása közben — a víz nyomásának a haladás irányába

eső erőkomponense a legnagyobb, oly bonyodalmas partiál-differentiálegyenletre vezet, melynek megoldása most még elháríthatatlan mathematikai nehézségekbe ütközik.

2) A konoidok között, ez értelemben véve legjobb hatású csupán csak az Archimédes-féle csavarfelület lehet; mivel közöttük csakis ez tesz eleget a maximum vagy minimum feltételének.

3) A konoidok között legjobb hatású csavarfelület emelkedési szöge függ a haladó és forgó sebesség viszonyától. Más-más emelkedést kellene adni a csavarnak a tengeren, le a folyamon és fel a folyamon.

4) A hajó megindulásakor álló vizen, mikor a haladó sebesség még semmi, a csavarfelület emelkedési szögének $22^{\circ}\ 39'\ 27''$-nél kisebbnek nem szabad lenni; mert különben a hatás nem hogy maximum, sőt inkább minimum fog lenni.

EGY RÉGI MAGYAR ÉSZLELET. — GUERICKE OTTO „Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica de Vacuo Spatio« czimű művében (Amsterdam, 1672) leirja a kézsmárki Frölich Dávidnak egy észleletét, melyet ez 1615-ben a szepesi Kárpátokban tett. Frölich elbeszélése Guericke ötödik könyvének 8-dik fejezetét képezi és szószerinti forditásban igy hangzik:

Frölich Dávidnak a magyarországi Kárpátokban tett észlelete, mely úgy látszik, nem jelentéktelen adatot szolgáltat a lég magasságának és a légrétegek alkatának megitélésére.

»Magyarország hegyei közt, mondja ő, első helyen áll a Kárpát-hegység; ez általános megnevezés alatt a sarmata hegység azon ága értetik, mely a magyarokat a ruthénoktól, lengyelektől, morváktól, sziléziaiktól és Ausztriának a Dunán innen fekvő részétől választja el. Ezen hegység legmagasabb csúcsai, melyek a felhőkön is túlemelkednek, Szepes megyében vannak, édes kedves szülőföldem környékén, melyet közönségesen Kézsmárknak (Caesareopolisnak) neveznek, és a mely várostól még e nevet is viselik: *kézsmárki hegység*, vagy pedig *hóhegység*, minthogy örökös hó födi azokat; a szlávok meg Tatrii- vagy Tarczal-nak nevezik, mivel tar-oknak s mintegy leboroltváltaknak látszanak.

E hegység zordonságra és meredekségre nézve sokkal fölülmúlja az olaszországi, svajczi és tyroli alpokat, miért is ugyszólván bejárhatatlan, s csakis a természet bámulói látogatják igen ritkán.

Urunk 1615-dik évének junius havában, még mint ifjú meg akarván kisérteni két iskolatársammal e hegység magasabb csúcsaira való feljutást, mi-

dőn a legközelebbi csúcs tetejét ügygyel-bajjal elértem, s azt hittem, hogy már a legmagasabb részen vagyok, hát egy más, még sokkal magasabb csúcs ötlött szemembe ; midőn pedig a roppant s könnyen megingatható szikladarabok közt (melyek egyikét ha helyéből elmozdítja az utas és a völgy felé hengeríti vagy taszítja, több száz meg száz mást ragad magával a mélységbe, és pedig oly robajjal, hogy attól félhet, nehogy az egész hegység összeomoljék, sőt eltemesse), folhatoltam, ismét egy más, magasabb csúcs tünt föl szemem előtt ; s igy még néhány csúcsot voltam kénytelen megmászni, melyek közül a következő mindig fölülmúlta az előbbit, mig végre életem koczkáztatásával a legmagasabbat elértem. Midőn a meredekebb tetőkről az alanti, roppant fákkal benőtt völgyekre letekinték, nem voltam képes mást, mint nagy sötétséget és valami kékest észrevenni, a mély levegőhöz hasonlítót, mint mikor azt mondják, hogy tiszta kék az ég ; nekem ugy látszott, hogy ha e hegyről leesném, nem a földre, hanem egyenesen az égbe jutnék. Ugyanis, a meredekség következtében a látható tárgyak körvonalai mindinkább elmosódnak és összefolynak. Midőn még ennél is magasabbra hágtam, mintha roppant sűrű felhők közé akadtam volna. Kibontakozva közülök, nehány óra mulva, midőn már a legmagasabb csúcstól nem voltam messzire, megnyugodván, letekintettem a magasból, és azon a helyen, hol előbb sűrű felhők között éreztem magamat, tömött fehér felhőket láttam mozogni ; alattok pedig nehány, sőt még több mérföldnyi távolságban is a Szepességnek kies tekintete tünt föl előttem. És láttam felhőket magasabban, alantabban és némelyeket egy távolságban a földszinétől. Ebből három következtetést vontam : 1) hogy a lég középső rétegének kezdetén akkor már túlhaladtam ; 2) hogy a felhők távolsága a földtől nem mindenütt egyenlő, hanem a nedvesség viszonyai szerint egy helyt nagyobb, más helyt kisebb ; 3) hogy a felhők a földtől való legkisebb távolsága sokkal csekélyebb, mint azt némely physikusok állitják, nevezetesen hogy az nem 72 német mérföld, hanem csak fél német mérföldnyi. Midőn a hegy legmagasabb csúcsára értem, ottan oly csöndes és finom levegőre találtam, hogy még hajam szálát sem érzém mozogni, holott az alsóbb részeken erős szelet tapasztaltam ; ebből azt következtettem, hogy a Kárpát-hegység legmagasabb csúcsa a hegy tövétől egy német mérföldnyire emelkedik, s eléri azt a légkört, hová a szelek nem jutnak el.

E magasságban elsütöttem a puskámat, mely kezdetben oly hangot adott, mintha egy fadarabocskát, vagy botocskát törtem volna szét ; kis idő mulva azonban hosszantartó moraj keletkezett, s a hegység alsóbb részeit, a völgyeket és erdőket betöltötte

Midőn a több éves havon át a völgybe leszállván, puskámat ujra elsütöttem, oly borzasztó dörej keletkezett, mely még a legnagyobb ágyú hangját is

felülmulta: attól kelle félnem, hogy az egész hegy velem együtt összedől. Tartott ez a hang egy félnegyed óráig, mindaddig, míg minden zúgba bele nem hatolt, a melyekhez a levegő minden oldalról hozzá csapódott. Ugyanis, a felsőbb rétegekben nem voltak ily üreges akadályok, miért is a hang majdnem nesz nélkül ütődött vissza, míg az alsóbb helyeken, közelebb levén a barlangok és völgyek, erősebben ütődött beléjök. E magas hegységekben még nyár közepén is havaz és fagy; mindannyiszor ugyanis, a mint ezt tapasztalatból tudom, valahányszor a lapályon eső esik. A különböző években esett havat szinéről és keményebb felső rétegeiről lehet fölismerni.«

Eddig tart Frölich leirása kárpáti észleletéről. Mai szemmel nézve, sok abban a fonákság és helytelen következtetés; hogy azonban a maga korában érdekes és fontos adaléknak tartatott a légkör ismeretéhez, kitünik a fejezet cziméből, mely magában foglalja Guericke itéletét Frölich észleletéről: »quae non parum facere videtur, ad judicium de Aëris sensibili altitudine et regionum ejus constitutione, ferendum.«

Közli: Fördős Géza.

A Szőlőczukor (dextrose) fajlagos forgató képessége. — Hoppe-Seyler a Fresenius-féle Zeitschrift für analytische Chemie 1875-ik évfolyamában (303 l.) e czím alatt egy értekezést közöl, melyben a szőlőczukor forgató képességének új meghatározása foglaltatik. Az e czélra használta czukrot diabetikus vizeletből állította elő, az oldatot tökéletesen szintelen, kemény kristályokból készitette, melyeknek elégetése után a hamúnak nyoma sem maradt hátra. A kisérletet a Wild-féle nagy készülékkel vitte véghez; eredményei a következők:

1.) A dextrose fajlagos forgató képessége, nátrium fény mellett észlelve, 56.°4-nek felel meg; a forgatás állandója $A'_D = 1773{\cdot}0$.

2.) Ezen állandók függetlenek az oldat töménységétől.

Nem lesz érdektelen a tábla közzététele, melyet ezen új állandó segítségével magamnak kiszámitottam, minthogy *ez* a Wild által régiebb adatok alapján kiszámitott és a polaristrobométerekhez mellékelt táblázattól lényegesen elüt.

Táblámat a következő képletből számitottam ki:

$$C = 1773 \cdot \frac{a}{L}$$

hol C az 1 liter folyadékban foglalt czukortartalmat grammokban adja ; α a leolvasott szög ; L pedig a használt cső hossza milliméterekben.

Forgási szög	L = 25 mm.	50 mm.	100 mm.	200 mm.
$\alpha = 1^0$	70·92	35·46	17·73	8·865
2	141·84	70·92	35·46	17·730
3	212·76	106·38	53·19	26·595
4	283·68	141·84	70·92	35·460
5	354·60	177·30	88·65	44·325
6	425·52	212·76	106·38	53·190
7	496·44	248·22	124·11	62·055
8	567·36	283·68	141·84	70·920
9	638·28	319·14	159·57	79·785
10	709·20	354·60	177·30	88·650

W. V.

Egy számelméleti játék. — Cantor a Schlömilch-féle »Zeitschrift« szeptemberi füzetében bemutat egy mathematikai játékot, mely hét — számokkal teleirt — kártyából áll ; e hét kártya képessé teszi birtokosát, hogy egy más valaki által gondolt számot, mely *0* és *101* közt fekhetik, kitaláljon. E czélból csak tudnia kell, hogy mely kártyákon lelte fel az illető a gondolt számot ; ha a megnevezett kártyák első helyén álló számokat összeadja, megnyeri a gondolt számot.

E játék régen ismeretes, úgy én magam is megtaláltam majdnem minden magikus könyvben, (vulgo : Zauberbüchlein). Az előirt eljárás mathematikai alapja pedig egyszerü ugyan, de elég érdekes arra, hogy azt itt röviden közöljük.

Mint emlitők, e játék hét kártyából áll, melyekre a *0* és *101* közt levő számok vannak felirva. E táblázatok berendezése olyan, hogy általán véve az r-ik táblában csak azon számok foglaltatnak, melyek 2^r-vel osztva $q \geqq 2^{r-1}$ maradékot adnak. Eszerint az r-ik táblán levő számokat rendre megnyerjük, ha a $k \,.\, 2^r + q$ képletben, hol

$$2^{r-1} \leqq q < 2^r,$$

k helyébe *0*, *1*, *2*, ... értékeket, q helyébe pedig a föltételeknek megfelelő számokat helyettesítünk, miből már is következik, hogy a kártyákon az első

helyet elfoglaló számok nem egyebek, mint 2-nek különböző hatványai; az r-ik tábla első helyén állván: 2^{r-1}. Mivel pedig másrészt minden egész szám 2-nek valamely hatványa, vagy pedig a 2 különböző hatványainak összege: következik 1) hogy a számelmélet jelzésében az $x \equiv q \pmod{2^r}$ valamenyi 0 és 101 közt fekvő számot szolgáltatja; 2) hogy egy és ugyanazon szám egy vagy több kártyán fog előfordulni a szerint, a mint az illető szám csak 2-nek egy bizonyos hatványára, mint modulusra nézve congruens egy a föltételnek megfelelő q-val, vagy pedig 2-nek különböző hatványaira nézve; pl. $32 = 2^5$ csak $\equiv 32 \pmod{2^6}$ lévén, csakis a VI. táblán fog előfordulni; míg ellenben e szám 54, mely $\equiv 2 \pmod{2^2} \equiv 6 \pmod{2^3} \equiv 22 \pmod{2^5} \equiv 54 \pmod{2^6}$ lévén, a II., III., V. és VI. kártyán lesz fellelhető; végre 3) ismervén valamely szám különböző rendü modulusait (osztóit) (*és ezeket ismerjük, midőn megmondják nekünk, hogy m e l y kártyákon lelték fel a gondolt számot*), világos, hogy az ezen kártyák legelső helyén előforduló számok (melyek mindig a megfelelő modulusok kettedrészei) egyszerü összeadása által nyerjük a gondolt számot.

Dr. Wohlrab Flóris.

Néhány végtelen sor összeadása elemi úton. —Vizsgálataink kiinduló pontját néhány véges sor szolgáltassa, mely a geometrikus haladványnak általánosítása gyanánt tekinthető. Ettől ugyanis csak annyiban különböznek, hogy az egymásután következő tagokban még bizonyos binomialis együtthatók fordulnak elő. E véges sorok alakja

$$S_m = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m}\alpha + \binom{m+2}{m}\alpha^2 + \ldots + \binom{m+n}{m}\alpha^n,$$

értékeik kiszámitására pedig a következő képlettel rendelkezünk:

$$(1-\alpha)\,S_m = S_{m-1} - \binom{m+n-1}{m}\alpha^n.$$

E képlet levezetése, mely különben elég egyszerü, megtalálható p. Baltzer »Elemente der Mathematik« czimü munkájában. (I. köt. 154. l.) Ugyane munkára utalhatunk, a binomialis együtthatók azon tulajdonságainak kifejtését illetőleg, a melyekre a következőkben szükségünk lesz.

Ha e sor a tagok száma, n, növekedésével végtelen sorrá lesz, először is ennek összetartása vizsgálandó. Összetartó lesz pedig, ha α helyett az ő absolut (előjelétől megszabaditott) értékét gondoljuk bevezetve, mihelyt:

$$\binom{m+n-1}{m}\alpha^{n-1} > \binom{m+n}{m}\alpha.$$

vagyis

$$1 < \frac{m+n}{n}\alpha,$$

a mi,ha n végtelen lesz, a következő összetartási föltételt adja:

$$\alpha < 1.$$

Ekkor pedig már a sor összetartásánál fogva:

$$\binom{m+n-1}{n}\alpha^n = 0.$$

Ennek következtében lesz:

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)\, S_m &= S_{m-1}, \\
(1-\alpha)\, S_{m-1} &= S_{m-2}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
(1-\alpha)\, S_2 &= S_1, \\
(1-\alpha)\, S_1 &= 1+\alpha+\alpha^2+\cdots\cdots \\
&= \frac{1}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Ezen összegeket egymással szorozva, lesz:

$$(1-\alpha)^m\, S_m = \frac{1}{1-\alpha},$$

tehát:

$$S_m = \frac{1}{(1-\alpha)^{m+1}} \qquad \text{(I.)}$$

Ezen eredményt felhasználva, a következő sornak is meghatározhatjuk az összegét:

$$S = \binom{m}{r} + \binom{m+1}{r+1}\alpha + \binom{m+2}{r+2}\alpha^2 + \cdots\cdots$$

Ha felteszszük azt, hogy m és r positiv egész számok, akkor ismeretes, hogy

$$\binom{m}{r} = \binom{m}{m-r},$$

ennélfogva továbbá:

$$S = \binom{m}{m-r} + \binom{m+1}{m-r}\alpha + \binom{m+2}{m-r}\alpha^2 + \cdots\cdots$$

szorozzuk S-et α^r-rel és adjuk hozzá mind a két oldalon ezt a kifejezést:

$$\binom{m-r}{m-r} + \binom{m-r+1}{m-r}\alpha + \ldots + \binom{m-1}{m-r}\alpha^{r-1}$$

akkor lesz:

$$\begin{aligned}
S\alpha^r + \binom{m-r}{m-r} + \ldots + \binom{m-1}{m-r}\alpha^{r-1} &= \binom{m-r}{m-r} + \binom{m-r+1}{m-r}\alpha + \ldots \\
\ldots + \binom{m-1}{m-r}\alpha^{r-1} + \binom{m}{m-r}\alpha^r + \binom{m+1}{m-r}\alpha^{r-1} + \ldots
\end{aligned}$$

A jobb oldal I. szerint:

$$\frac{1}{(1-\alpha)^{m-r+1}};$$

m helyett egyszerüen $m-r$ veendő és így:

$$S\alpha^r + \binom{m-r}{m-r} + \binom{m-r+1}{m-r}\alpha + \ldots + \binom{m-1}{m-r}\alpha^{r-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^{m-r+1}} \quad \text{(II.)}$$

Ezen képletből a sor összege adott m és r érték mellett kiszámitható.

Ha azon speciális esetet veszszük, a hol $r=1$, akkor a sor a következő:

$$\Sigma = \binom{m}{1} + \binom{m+1}{2}\alpha + \ldots$$

és

$$\alpha\Sigma + \binom{m-1}{m-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^m},$$

$$\alpha\Sigma = \frac{1}{(1-\alpha)^m} - 1$$

$$\Sigma = \frac{1-(1-\alpha^m)}{\alpha(1-\alpha)^m}$$

kifejtve:

$$\Sigma = \frac{1-\left[1-\binom{m}{1}\alpha + \binom{m}{2}\alpha^2 + \ldots + (-1)^{m-2}\binom{m}{m-1}\alpha^{m-2} + (-1)^m\binom{m}{m}\alpha^m\right]}{\alpha(1-\alpha)^m}$$

vagy

$$\Sigma = \frac{\binom{m}{1} - \binom{m}{2}\alpha + \ldots + (-1)^{m-2}\binom{m}{m-1}\alpha^{m-2} + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}\alpha^{m-1}}{(1-\alpha)^m}$$

A számláló a következő alakra hozható:

$$(1-\alpha)^{m-1} + (1-\alpha)^{m-2} + \ldots + (1-\alpha) + 1$$

Tehát:

$$\Sigma = \frac{(1-\alpha)^{m-1} + (1-\alpha)^{m-2} + \ldots + (1-\alpha) + 1}{(1-\alpha)^m}$$

és így végre

$$\Sigma = \frac{1}{(1-\alpha)} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} + \ldots + \frac{1}{(1-\alpha)^{m-1}} + \frac{1}{(1-\alpha)^m}$$

Bäumel Ede,
a középtanodai tanárképezde rendes tagja.

IRODALOM.

Schwere, Elektricitaet und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von Bernhard Riemann, bearbeitet von Karl Hattendorff. Hannover. Carl Rümpler. 1876. Egy kötet, 8-adrét. 358 l. Ára 8 m.

Németországban az egyetemi tanár elismerésre csak akkor számíthat, ha mint buvár a tudomány önálló fejlesztése által kitünik. Szónoki előadás, vagy szép irálylyal irt tan- vagy kézikönyv Németországban hires tanárrá senkit sem tesz, legalább a természettudományi szakokban. Jól tudja azt a tanuló, hogy a formailag esetleg gyenge előadás, melyet a tudomány önálló fejlesztőjétől hall, mélyebb igazságokat foglal magában, mint a szónokilag szép beszéd, melylyel leginkább az törekszik érdeket kelteni, ki gyengeségét a buvárlat terén ez által leplezni akarja. A buvár, fáradságos munkája mellett, könyvirásra időt nehezen talál s valóban ritka eset, hogy elsőrendü német tanár önálló értekezéseken kivül nagyobb kézikönyvet vagy tankönyvet irjon. Leginkább észrevehető ez a physikai tudományok terén.

A teljesen megbizható tankönyvek és kézikönyvek hiányát a német tanuló, tanára előadásainak gondos feljegyzése és kidolgozása által pótolja s füzeteiben ekként oly tudományos kincset gyüjt, mely reá nézve bármely nyomtatott munkánál becsesebb. Ha a tanulóból tanár lesz, akkor régi előadási füzeteit előveszi, s azok képezik előadásainak alapját. Nemzedékről nemzedékre így száll át a tudományos hagyomány s gyakran soká tart, mig az élőszóval hirdetett igazság nyomtatott könyvben megörökíttetik. Az idegen, ki először hall német egyetemi előadásokat, meg van lepetve, midőn észreveszi, mennyire eltérnek ez előadások a német tankönyvek szellemétől.

A német tudományosság rendkivüli fejlődése fényesen bizonyitja, mily helyes az elv, hogy a tanár legfőbb feladata a buvárlat legyen. Jogosan irigyelhetjük a tanulót, kit kora s körülményei ily buvárok vezetése alá helyeznek ; de sajnálnunk kell azokat, kik ily tanároktól hely vagy kor által elválasztva, közvetlen oktatásukban nem részesülhetnek. Az irott előadási füzet csak szük körben forog s ezért nagy annak érdeme, ki kitünő tanárának előadásait sajtó alá rendezi s azokat így az enyészettől megmentve lehetővé teszi, hogy a közvetlenül csak kevesek által élvezett oktatásban közvetve még a jövő nemzedék s távol nemzetek fiai is részt vegyenek. A mondottak eszünkbe jutnak, ha a szép könyvet kezünkbe veszszük, melylyel Hattendorff legujabban gazdagitá a physikai tudományok irodalmát. Szerzőnek egy régiebb műve a részletes differentiál-egyenletekről, melyet ugyancsak Riemann előadásai alap-

ján dolgozott ki, ez újabb munkának előre jó fogadtatást biztosit. A könyvben sok jót keresünk és sok jót találunk.

Nehézség, elektricitás és magnetismus, mint az elméletnek tárgyai szorosan összetartoznak. A jelenségek e három csoportját egy közös feltevés magyarázza, t. i. hogy a ható pontok távolságának négyzetével megforditva arányos vonzó és taszító erőkből erednek. Oly pont- vagy testrendszerek, melyekben ily erők működnek, az úgynevezett potentiál-elmélet tárgyát képezik. Ez az, a mivel a szóban forgó munka foglalkozik.

Nem bocsátkozhatunk a megelőző hasontárgyú művek kritikájába. A legfontosabbak ezek közül Green, Gauss, Clausius, Beer, Thomson, Maxwell munkái. Ezekkel szemben Hattendorff munkája különösen, a tárgynak gazdagsága s alaposság mellett, könnyen érthető előadási modora által tünik ki.

A munka mélyebb tanulmányozásra melegen ajánlható; s a kezdő, ki egy Waltenhofen művéhez hasonló könyvön áthatolt s azt Waltenhofen kritikusának utasitása szerint »azonnal félretette,« legjobban cselekszik, ha tanulmányait a most megbeszélt »szellemesebb és magvasabb« munka olvasásával folytatja. Eö. L.

Vorlesungen über geometrie von alfred clebsch. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Ferdinand Lindemann. Mit einem Vorworte von Felix Klein. Ersten Bandes erster Theil. Leipzig, Teubner 1875. Ára 11. 20 márk.

A fentebbi czím alatt megjelent kézikönyv eredetét azon nagyhirű előadásoknak köszöni, melyeket Clebsch, a mathematika egyik legkitünőbb német képviselője, életének utolsó éveiben a göttingai egyetemen tartott. Ezen előadásokat Dr. Lindemann úr rendezte sajtó alá, mely czélra saját jegyzetein kivül Clebsch előadási füzeteit, valamint néhány barátjának jegyzeteit is felhasználta, a mint azt a munkához csatolt előrajzból kivehetni.

A munka teljes áttekintést kiván adni az elemző mértani és a modern algebrai vizsgálatok mai álláspontjáról, ennélfogva Lindemann szükségesnek tartotta azon tárgyaknak felvételét is, melyeket Clebsch előadásaiban vagy nem vett tekintetbe, vagy a melyek csak Clebsch óta lettek továbbá kifejtve. Hogy mennyiben sikerült Lindemann-nak ezen általa kitűzött czélt elérni és hogy mily viszonyban áll a kérdésben forgó kézikönyv a hasonló irányú Salmon és Hesse-féle könyvekhez, arról majd csak a teljes munka megjelenése után szólhatunk.

Az első kötet első része, mely most hagyta el a sajtót, négy szakaszból áll. Első szakasz: Bevezetés. Pontsorok és sugársorok. Második szakasz: A másodrendü és másodosztályú görbék. Harmadik szakasz: Bevezetés az

algebrai alakok elméletébe. Negyedik szakasz: Az algebrai görbék általános elmélete.

Az első és második szakasz Clebschnek az 1871-ki nyári félévben tartott, következő című előadását: »Analytische Geometrie der Ebene« tartalmazza. Az első szakaszban először a pont összerendezők, azután pedig a vonal-összrendezők (Linien-coordinaten) képezik a kiinduló pontot. Ezeket követi az első esetben az egyenes, a másodikban pedig a pont tárgyalása. Nagyon helyes, hogy a kezdő ily módon már az elemekben megszokja, nemcsak a pontot, hanem az egyenest is *elem*nek tekinteni és igy már korán megbarátkozik azon nézettel, hogy a görbe vonalt nem csak a pont által képzelhetjük leirva, hanem egyszersmind egyenesek által beburkolva is. Az egyenesre és pontra vonatkozó főfeladatokat, a pont- és vonal összrendszerben már az elemző mértan elemeit tárgyaló compendiumoktól eltérőleg, lehető röviden kellett elvégezni, amint azt az egyetemi előadások természete megkivánja. Ezeket követik a pont- és sugár-sorok sat. Még különösen kiemelendő az V. fejezet, melyben a kúpszeletek projectiv pont- és sugár-sorok által állittatnak elé.

A kúpszeleteket tárgyaló második szakaszban a kiindulás alapját a kúpszeletek általános egyenlete adja homogén pontösszrendezőkben; az elmélet élén pedig a kúpszelet és az egyenes átmetszési pontjainak meghatározása áll, mely feladatból kiindulva, a polárisok elméletével találkozunk; ebből kitünik, hogy a kúpszelet síkjában az adott pontnak megfelel egy tökéletesen meghatározott egyenes mint poláris, és megforditva megfelel az adott egyenesnek egy tökéletesen meghatározott pont mint polus. Ha továbbá a metsző egyenes a végtelenbe távozik, akkor a szerint a mint a végtelenben fekvő egyenes a kúpszeletet két valós és különböző, vagy két valós de összeeső, vagy végre két képzetes pontban metszi, a kúpszelet vagy hyperbola, vagy parabola vagy pedig ellipsis. A kúpszeletek felosztása középpontiakra, vagy nem középpontiakra a végtelenben fekvő egyeneshez tartozó polus felkeresése által történik, végre a végtelenben fekvő pontoknak megfelelő polárisok által a kúpszelet átmérőire vezettetünk. Ez utóbbi kutatásokban a kúpszelet egyenlete orthogonál pont-összrendezőkben van felvéve. Ezeket követik a conjugált átmérőkre és főtengelyekre vonatkozó tulajdonságok sat. Különös említést érdemel ezen szakaszban a VII. és VIII. pont, a hol a kör és a kúpszeletek gyújtópontjai tárgyaltatnak.

A harmadik tisztán algebrai tartalmú szakasz tárgyát az algebrai alakok elméletének elemei képezik, a mennyiben azok később az algebrai görbék általános elméleténél alkalmazást nyernek. Czélszerű lesz talán, az e szakaszban tárgyalt feladatokat a következőkben jellemezni.

Az algebrai alakok elmélete alatt, az algebrai egész és egyméretü (homogén) függvények elméletét értjük. Ha azily függvényben, melyben a változók száma n legyen, az n változót más, új n változó egyméretü vonalos függvényei által pótoljuk, akkor az új n változóban szintén egy függvényt nyerünk, melynek bizonyos közös tulajdonságai vannak az előbbi függvénynyel. Azon tulajdonságok kipuhatolása, a melyek az ily helyettesítésnél nem változtak, az algebrai alakok elméletének főfeladata. A mondottak felvilágositására már a kúpszeletek analytikai elmélete is bőven nyujt példákat; ha meggondoljuk, hogy a kúpszelet nemét nem változtathatja azon körülmény, hogy minő összrendezőkre vonatkoztatjuk azt; vagy p. ha a kúpszelet egyenespárrá fajúl, az mindig bekövetkezik, bármily összrendezőkben fejezzük is ki egyenletét.

E vizsgálatok az elemző mértani kutatásoknak köszönik eredetüket; az elmélet kifejezésére az első alkalmat Hesse klassikus értekezései nyujtották, mai alakjukat pedig leginkább Cayley és Sylvester kitünő angol tudósoknak köszönik, kikhez későbben Aronhold és Clebsch, valamint utóbbi időben, Gordan is csatlakozott.

A negyedik szakasz végre az algebrai görbék általános elméletét tárgyalja. Ámbár a kúpszeleteknél magasabb rendü és osztályú görbék már az ókor mathematikusai által különféle problémák megoldására használtattak, az algebrai görbék általános elmélete mégis csak a nagy Newton következő czimü munkájában: »Enumeratio linearum tertii ordinis« (1706) alapitotta meg, a melyben az algebrai görbék más általános tulajdonságain kivül az egyenes vonalú átmérők tulajdonságait is találjuk. Az utána megjelent Maclaurin művében: »De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus« (1748), az algebrai görbék több nevezetes tulajdonságain kivül, egy az adott algebrai görbével szoros összefüggésben álló mértani helyet találunk, mely a mai terminologia szerint nem más mint az adott pont egyenes polárisa.

E gondolatot általánosítva, lehetséges azután az n-ed rendü algebrai görbéknél az egyenes polárison kivül 2-od, 3-ad .... $n-1$-ed fokú polárisokat megkülönböztetni, melyek szintén szoros kapcsolatban állanak az adott n-ed rendü görbével. E polárisok elmélete a negyedik szakasz kiindulási pontja, mely elmélettel összefüggésben tárgyaltatnak azután az algebrai görbék singularitásai sat. A characteristikák módszere szintén részletesen fejtegettetvén, talán nem árt, ha ezen ismertetés végén ennek tartalmát és föladatát röviden jellemezzük. Feltéve, hogy azon görbék, melyeknek rendszerét akarjuk vizsgálni, N mértani feltétel által volnának meghatározva, úgy hacsak $N-1$ feltételnek vetjük alá a kérdéses görbét, akkor e feltételeknek a görbéknek egy egész serege, azaz végtelen sok görbe fog megfelelni. Ter-

mészetes, hogy ha az $N—1$ feltételhez még egy feltétel járúl, akkor a rendszernek egy vagy több, de meghatározott véges számú görbéit nyerjük.

A görbék e rendszerére nézve különösen fontos a következő két szám:

1-ször. A rendszer azon görbéinek száma, melyek egy adott ponton mennek keresztül.

2-szor. A rendszer azon görbéinek száma, melyek egy adott egyenest érintenek.

E két számot értjük a rendszer characteristikái alatt és az elmélet megalapitója Chasles szerint μ és ν-vel jelöltetik. —

Nagy érdekkel várjuk e munka folytatását; mert az első résznek is minden lapja élénken tanúskodik Clebschnek nemcsak önálló és szellemes, de még új és járatlan irányba vezető gondolatmenetéről. S kell, hogy ez fokozott mértékben álljon a második részről, melynek egyik főtárgya lesz Clebschnek talán legfényesebb tudományos érdeme, t. i. a mértannak az elliptikus és Abel-féle függvényekkel való összekapcsolása.

Lindemann kidolgozása egészben véve szintén sikerült; ámbár, ha őszinték akarunk lenni, túlzott alapossággal több helyen egyes legujabbkori és nem épen jelentékeny értekezésből oly részleteket vett föl, melyek csorbát ejtenek Clebsch előadásainak egységén, és az egész munka átnézetét a tanulónak megnehezítik. *H. J.*

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

1. Bizonyíttassék be az elemző mértan segítségével, hogy ha valamely kúpszelet (ellipsis v. hyperbola) egyik F gyújtó pontjából annak érintőjére merőlegest bocsátunk, melynek talppontja T, és e merőlegesben az R pontot akkép választjuk, hogy $FT = TR$, akkor az R pont mértani helye kör. E kör középpontja a kúpszelet másik F_1 gyújtó pontja, sugara pedig a nagy tengely. (Hunyady.)

Első megoldás dr. Császár Károly tanártól.

Fejezzük ki az ellipsis és hyperbola tangensének távolságát valamely x_1, y_1 ponttól azon szög (ϑ) függvényében, melyet az x_1, y_1 ponttól a tangenshez vont merőleges az x-tengelylyel képez, a keresett egyenlet:

$$t = \sqrt{a^2 . \cos\vartheta^2 + b^2 . \sin\vartheta^2} - x_1 . \cos\vartheta - y_1 . \sin\vartheta;$$

e képletben (czélunkhoz képest) a jeleket azonképen választottuk meg, hogy a normalis positiv lesz, ha az x_1, y_1 pont a középponttal együtt a tangensnek ugyanazon oldalára esik.

Ha a fönnebbi egyenletbe a gyújtópont coordinátáit ($x_1 = e$ és $y_1 = 0$) helyettesítjük, a tangensnek távolságát a gyújtóponttól nyerjük, vagyis:

$$t = \sqrt{a^2 . \cos\vartheta^2 + b^2 . \sin\vartheta^2} - e . \cos\vartheta ;$$

a föladat szerint R pont távolsága a gyújtóponttól $2t$; ha tehát R pont mértani helyének meghatározása végett az F gyújtópontot a sarkösszrendezők kezdőpontjául, az x-tengelyt sarktengelyül veszszük és $\varrho = 2t$ radius vectorúl, a következő egyenletünk lesz:

$$\frac{\varrho}{2} = \sqrt{a^2 . \cos\vartheta^2 + b^2 . \sin\vartheta^2} - e \cos\alpha 4 ;$$

e kifejezést végszerüsítve és a nevezőt eltávolítva:

$$\varrho^2 + 4\varrho e . \cos\vartheta + 4e^2 . \cos\vartheta^2 = 4 (a^2 . \sin\vartheta^2 + b^2 . \sin\vartheta^2),$$

tekintetbe véve, hogy $a^2 - e^2 = b^2$ és $\cos\vartheta^2 + \sin\vartheta^2 = 1$, lesz:

$$\varrho^2 + 4\varrho e . \cos\vartheta = 4b^2 ;$$

az egyenlet mindkét oldalához $4e^2$-t adva és tekintetbe véve, hogy $b^2 + e^2 = a^2$, lesz:

$$\varrho^2 + 4\varrho e . \cos\vartheta + 4e^2 = 4a^2.$$

E kifejezés oly körnek sarkegyenlete, melynél a rendszer kezdőpontja a kúpszelet egyik gyújtópontjába esik, a kör középpontja pedig a tengelybe a kezdőponttól — 2e távolságnyira (tehát a másik gyújtópontban) fekszik, végre a kör félátmérője: 2a vagyis a nagy tengely.

Második megoldás Klug L., főreáltanodai tanártól Pozsonyban.

Az ellipsis gyújtóponti egyenlete derékszögü összrendezőkre vonatkoztatva, ha az ellipsis tengelyei az összrendező tengelyekkel összeesnek:

$$a^2y^2 + b^2 (x-c)^2 - a^2 b^2 = 0,$$

hol a, b a nagy és a kis tengelyt jelentik, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ pedig a gyújtópont távolát a középponttól. Az ellipsis ezen egyenletéből a hyperbola gyújtóponti egyenletet megkapjuk, ha abban b helyett $b\sqrt{-1}$-et tesszünk.

Ha tehát a tétel helyességét egy tetszőleges ellipsi-re bebizonyitjuk, az olyanra is érvényes lesz, melynek b tengelye képzetes, vagyis a hyperbolára.

Az érintő egyenlete egy x' y' pontban ily alakra hozható

$$a^2yy' + b^2 (x' - c) x - b^2 [(x' - c) + a^2] = 0.$$

A kezdőpontból ezen egyenesre bocsátott merőleges egyenlete

$$a^2y'x - b^2 (x' - c) y = 0.$$

E két egyenlet által meghatározott x, y jelenti a kezdőpontból (gyújtópontból) az érintőre bocsátott merőleges T talppontjának összrendezőit.

A keresett R pont összrendezői kétszer oly nagyok mint a T pontéi, tehát:

$$a^2yy' + b^2(x' - c)n - 2b^2[(x' - c)c + a^2] = 0,$$
$$a^2y'x - b^2(x' - c)y = 0$$

egyenletek által lesznek meghatározva.

Ha e két egyenletből az

$$a^2y'^2 + b^2(n' - c)^2 - a^2b^2 = o$$

segélyével az x', y'-et eliminálják, a következő egyenletet nyerjük:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 4cx - 4b^2) = 0.$$

Minthogy pedig $x^2 + y^2 = o$ faktor csak az összrendezők kezdőpontját jelenti, a keresett mértani hely:

$$x^2 + y^2 - 4cx - 4b^2 = 0.$$

Ez oly körnek egyenlete, melynek középpontja a másik gyújtópont, és melynek sugara $2a$, mert ha a talált egyenletbe x helyett $x + 2c$ teszünk, az ily alakot vesz föl:

$$x^2 + y^2 = 4a^2.$$

Ha az x helyett még az $x'y'$ változópont eliminátiója előtt helyettesítünk $x + 2c$-t, a kiküszöbölés egyszerűebben eszközölhető.

Egy harmadik megoldást vettünk még Winter József ur, a középtanodai tanárképezde r. tagjától, ki a bebizonyítást azon a kúpszeletek elméletéből ismert tételre alapítja, hogy a gyújtópontból az érintőkre vont merőlegesek talppontjainak mértani helye egy oly kör, melynek sugara a nagy tengely, középpontja pedig a kúpszelet középpontjával összeesik. *Szerk.*

---

2. Egy tetszőleges egész szám osztóit két osztályba lehet sorozni, a mint a bennük előforduló akár egyenlő, akár különböző történyezők száma páros vagy páratlan. Határoztassék meg az egy-egy osztályba tartozó osztók összege. (Kőnig.)

Megoldás Winter József, a középtanodai tanárképezde r. tagjától.

Legyen egy tetszőleges egész szám:

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots .$$

hol a, b, c, ... az N-ben foglalt törzsszámokat jelentik, α, β, γ, pedig mint kitevők, hányszoros előfordultukat mutatják. Akkor, mint tudjuk, [1]) az összes osztók összegét a következő képlet adja:

$$S = (1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta)(1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma)\ldots$$
$$= \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \cdot \ldots .$$

---

[1]) L. p. Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 17. l.

Ha ezen alakzatban a helyett $-a$-t, b helyett $-b$-t irunk, s u. t. könnyü látni, hogy a szorzat kifejtésében más különbség nincs, mint az, hogy bizonyos tagok negativ előjelt nyernek, és pedig minthogy

$$a^p b^q c^r$$

szorzatból

$$(-1)^{p+q+r} \ldots a^p b^q c^r \ldots$$

lesz, mindazon tagjai a szorzatnak nyernek negativ előjelt, melyben a tényezők száma páratlan. A szorzat maga tehát ez átalakitás után a föladat szerint két osztályba sorozott osztók összegeinek különbségét adja. Vagyis, ha a páros, illetőleg páratlan számu törstényezőkből álló osztók összegét S_2 és S_1-gyel jelöljük, lesz:

$$S_2 - S_1 =$$

$$= [1 - a + a^2 - \ldots + (-1)^\alpha a^\alpha] [1 - b + b^2 - \ldots + (-1)^\beta b^\beta] \cdot$$

$$[1 - c + c^2 - \ldots + (-1)^\gamma c^\gamma] \ldots,$$

hol az egyes szorzók geometrikus haladványok lévén:

$$S_2 - S_1 = \frac{1 \mp a^{\alpha+1}}{1 + 2} \cdot \frac{1 \mp b^{\beta+1}}{1 + b} \cdot \frac{1 \mp c^{\gamma+1}}{1 +} \ldots,$$

még pedig a fölső vagy alsó jel veendő, a mint a megfelelő α, β, ... páros vagy páratlan. Ha ehhez hozzá vesszük, hogy az összes osztók összege

$$S = S_2 + S_1,$$

tehát:

$$S_2 + S_1 = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \ldots.$$

akkor e két egyenletből S_1 és S_2 külön-külön meghatározható; ha ugyanis a két egyenletet összeadjuk, lesz:

$$2 S_2 = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \ldots.$$

$$+ \frac{1 + a^{\alpha+1}}{1 + a} \cdot \frac{1 + b^{\beta+1}}{1 + b} \cdot \frac{1 + c^{\gamma+1}}{1 + c} \ldots.$$

vagy ha kivonjuk egymásból, akkor:

$$2 S_1 = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \ldots.$$

$$- \frac{1 + a^{\alpha+1}}{1 + a} \cdot \frac{1 + b^{\beta+1}}{1 + b} \cdot \frac{1 + c^{\gamma+1}}{1 + c} \ldots.$$

Ezen egyenletekből tehát az első a páros, a második pedig a páratlan számú törstényezőket tartalmazó osztók összegét adja; a kettős jelekből a fölső veendő, ha az illető kitevő páros, az alsó pedig, ha páratlan.

Ha p.

$$N = 2^3.3^2.5 = 360,$$

a páros számu törzstényezőket tartalmazó osztók:

$$1, 4, 6, 9, 10, 15, 24, 36, 40, 60, 90, 360;$$

a páratlan számú törzstényezőket tartalmazó osztók pedig:

$$2, 3, 5, 8, 12, 18, 20, 30, 45, 72, 120, 180.$$

A fentebbi formulák szerint pedig, a mit ezen esetben könnyen lehet igazolni:

$$S = 1170,\ S_1 = 515,\ S_2 = 655.$$

FÖLADATOK.

6. Az $A\ B\ C$ háromszögben meghúzzuk a belszögeket felező egyeneseket, továbbá még három tetszőleges egyenest, mely a háromszög A, B, C csúcsain keresztül megy és egymást ugyanazon P' pontban metszi. Bizonyitassék be, hogy azon egyenesek, melyek a szögeket felező egyenesekkel a háromszög csúcsaiban ugyanazon szögeket képezik, mint az $A\ P$, $B\ P$ és $C\ P$ egyenesek, egymást szintén *egy* P pontban metszik. — Legyenek továbbá az $A\ B\ C$ háromszögben a $B\ C$, $C\ A$ és $A\ B$ oldalak egyenletei: $u = o$, $v = o$, $w = o$; ha a P pont a következő görbét írja le: $\alpha u^m + \beta v^m + \gamma w^m = o$, kérdés, mi lesz a P' pont mértani helye? (Hunyady.)

7. Két egyenes OA és OB a velök egy síkon levő OC függélyessel egyenlő (a) szöget képez; az OA egyenesen m_1, az OB-n m_2 tömegü súlyos pont mozog, úgy, hogy a két pont távolsága (l) állandó marad: határoztassék meg a súlyos pontok, illetőleg összekötő egyenesök mozgása.

(Közli Réthy Mór.)

Kérjük olvasóinkat, az első füzetben a következő sajtóhibákat helyre igazitani:

12. l. alúlról 5. sor: a zárjelben álló kifejezésből kimaradt: — $c \cos. \alpha$.
16. l. alúlról 5. sor: *30* helyett: *300*.
20. l. alúlról 3. és 14. sor: $\sin. \omega$ helyett: $i \sin. \omega$.
20. l. alulról 10. sor: $\sqrt[n]{\alpha_n}$ helyett: $\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_n}}$
25. l. alúlról 5. sor: k helyett: $k+1$.
26. l. felülről 4. sor: k helyett: $k+1$.

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

I. kötet. 1876. 3. füzet.

A KONENY SZINKÉPÉRŐL.

Lengyel Béla, egyetemi tanártól.

(Előterjesztette a m. tud. Akadémia 1876. márczius 6-kán tartott ülésén.)

(Egy könyomatu táblával.)

A gázok szinképeit illetőleg elég számos észlelés és következtetés található az irodalomban, de ezek részben egymásnak ellentmondók és kevés kivétellel csak arra alkalmasak, hogy a szinképi elemzés hitelét megingassák — legalább a gázokra nézve. Nem tartottam tehát fölöslegesnek a gázok szinképi vizsgálatával foglalkozni, különösen azért, mert eddig a vizsgálatokkal többnyire nem vegyészek foglalkoztak, kik nem lévén hozzászokva ama nagy nehézségek leküzdéséhez, melylyel valamely gáznak vegytiszta állapotban való előállítása jár: tiszta gázokkal vélték kisérleteiket csinálni, ha azokat ugy állitották elő, mint a nagy kézikönyvekben elő van irva. Ezen előállítási módok annyiban elég tiszta gázt adnak hogy a legtöbb vegyi kisérletnél a bennök foglalt fertőzmények észre nem vehetők, de e fertőzmények a szinképi elemzésben — hol milliomadrész elegendő a szinkép előállítására — nagy zavart okozhatnak. Ebben véltem okát találhatni annak, hogy a legtöbb buvár egy és ugyanazon gázra nézve, különböző nyomás és hőmérséknek megfelelőleg, többféle szinképet észlelt.

Észleléseimre először is a könenyt választottam, mint oly gázt, melynek egyszerű spectruma van és melyet legkönnyebben véltem tisztán előállíthatni. A köneny spectrumát eddig többen tanulmányozták. — Angström*) a köneny szinképét, melyet légköri nyomás alatt mutat, folytonosnak találta, a vörösben, zöldben és kékben azonban e spectrum

*) Poggendorf. Annalen d. Phys. u. Chem. XCIV.

legintensivebb. Plücker[1]) volt az első, ki a köneny szinképét, kisebb nyomások mellett tanulmányozta és ugy találta, hogy e gáz szinképe ily körülmények között három intensiv vonalból áll, melyek egyike a szinkép vörös részébe, másika a zöldbe és a harmadik a kék részbe esik. Később ugyan e buvár Hittorf társaságában[2]) a könenynek még egy másik szinképét észlelte és e spectrumról azt mondja, hogy a köneny tartalmu régi Geissler-csövekben mutatkozik némelykor.

E spectrum abban különbözik az elsőtől, hogy ebben az elsőben is mutatkozó intensiv vörös, zöld és kék vonalon kivül a natrium vonal közelében uj vonalak lépnek fel. Hogy e spectrum a könenyhez tartozik, az által constatáltatott, hogy egy $^1/_4$—$^1/_3$ hüvelyk átmérőjü Geissler-cső megtöltetett könenynyel és azután kiszivattyúztatott 5—10 millimeter feszélyig. — E cső szinképe nagyszámu, élesen határolt vonalakból állott, melyeket megszámlálni nem lehetett. Wüllner[3]) a maga kisérleteiből azt következteti, hogy a köneny 4 egymástól különböző szinképet mutat, ha a nyomást és a villanyáramot változtatjuk. Értekezésében igen kimerítően irja le az általa végbevitt kisérleteket és eredményöket és maga is feltünőnek tartja (511. lap.), hogy a köneny háromféle szinképet mutat a szerint, amint a nyomás és a villanyáram intensitása változik. Saját szavaival:.... »Man könnte glauben, dass es (a köneny harmadik szinképe, melyet ő észlelt először) ein Spectrum des Aluminiums wäre, aus dem die Elektroden der Röhre bestanden, oder des Quecksilbers, von welchem etwa Dämpfe in die Röhre hinüber destillirt wären, oder von Phosphor oder Schwefel, da das Gas mit Phosphorsäure oder Schwefelsäure getrocknet war, oder schliesslich, dass von dem Fett, mit welchem die Hähne leicht bestrichen waren, etwas verdampft und in die Röhre gekommen sei, somit dass die Linien zum Spectrum des Kohlenstoffs gehören.« — Mind e kérdések eldöntésére azonban nem tesz kisérleteket, csupán azzal igyekszik bizonyítani, hogy az általa észlelt spectrum a könenyé, hogy a széneny, kén, phosphor és higany spectrumai Plücker leirása szerint egészen mások. Emliti ugyan, hogy a phosphor és higany szinképével az állitólagos harmadik spectruma a könenynek nem téveszthető össze, mint arról kisérletek által meggyőződött, de hogy mi módon vitte ki e kisérleteket, arról nem tesz említést. Egyik későbbi

[1]) U. o. CIV.

[2]) Philosoph. transactions for 1865.

[3]) Poggendorf. Annal. d. Phys. u. Chemie. CXXXV.

értekezésében, melyben az aethylen szinképe van leirva[1]), Wüllner maga is kétségét fejezi ki a felett, hogy a könenynek ama sok vonalu szinképe vajjon nem valamely szénkönenyhez tartozik-e? Azonban később még is azt mondja, hogy mivel az aethylen szinképe növekvő ritkítás mellett másként változik mint a könenyé, ez utóbbinak szinképe nem identikus a szénkönenyével.

Sokan elfogadták azt, hogy egy és ugyanazon gáz különböző spectrumot adhat, ha különböző körülmények között idéztetik elő a szinkép; mások ellenben Wüllner kisérletei daczára azon nézet mellett maradtak, hogy ugyanazon gáz (egyszerü gáz) mindig ugyanazon spectrumot mutatja. Igy Angström[2]) a Plücker és különösen Wüllner által észlelt különféle köneny-spectrumokat a könenyben lévő fertőzményeknek tulajdonítja és idézi Berthelot[3]) egyik dolgozatát, melyben az acetylen szinképe van leirva és kimutatja, hogy a Berthelot által észlelt acetylen-vonalak azonosak a Plücker és Wüllner által észlelt 2-ik köneny-spectrum vonalaival. A. Schuster[4]) és G. Salet[5]) kisérleteik alapján Angström állításához csatlakoztak. — Wüllner azonban e buvárok kisérletei daczára, melyek valóban nem is teljesen döntők, fentartja állitását, hogy a köneny a körülményekhez képest különböző szinképet mutathat. Igy állanak jelenleg a köneny szinképére vonatkozó nézetek és valóban nehéz a létező kisérleti adatokból itéletet mondani a felett: vajjon melyik nézet a helyes. Ez indított arra, hogy a köneny szinképével kisérletileg behatóbban foglalkozzam, mert reméltem, hogy a rendkivüli nagy kiviteli nehézség daczára sikerülend a kérdést eldöntenem, vagy ha azt nem is, legalább a kisérleti adatokat szaporítanom.

Kisérleteimnél a Geissler-féle higany-légszivattyút használtam. E szivattyú két nagyobb szárító készülékkel van ellátva, melyek kisérleteimnél phosphorpentoxyddal (vizmentes phosphorsav) voltak meg töltve. A szivattyú végcsővére a Geissler-cső minden kisérletnél felforrasztatott és akkor, midőn a kivánt tüneményt legélénkebben mutatta, a benne foglalt gázzal leforrasztatott. Ezen eljárás nagyon fáradságossá tette ugyan a kisérleteket, mivel minden alkalommal egy-egy uj spectralcsövet kellett készítenem, de elkerülhetetlen szükséges volt azért,

[1]) U. o. CXLIV. 508. l.
[2]) Poggendorff. Annal. CXLIV. p. 300.
[3]) Compt. rend. LXVIII. 1546 l.
[4]) Rep. british associat. f. 1872.
[5]) Annal. d. chim. et d. phys. [4] XXVIII. 5.

mert csak ily módon hasonlíthattam össze directe az egyes kisérletek eredményét. — Az egész készüléken más összekötés mint felforrasztás vagy köszörülés nem fordult elő. A köszörülések és csapok tökéletes zárása végett velőzsir és fehér viaszból készített kenőcscsel voltak kevéssé megkenve. — Minden kisérlet előtt meggyőződtem arról, hogy a készülék légmentesen zár és pedig ugy, hogy este kiszivattyúztam a készüléket 1—2 millimeterre és igy állott a következő napig. Ha a manometer ugyanazon nyomást mutatta, akkor a készülék jól zárónak tekintetett. Kisérleteim közben, daczára ezen közönséges czélokra teljesen kielégítő próbának, azon gyanú támadt bennem, hogy ámbár a készülékbe a levegő valami láthatatlan kis repedésen nem tódulhat be, mert ezt a manometer is jelezné, mégis lehetséges, hogy rendkivül lassú diffusio utján levegő jut be a készülékbe, de oly rendkivüli kevés, a menynyit a higany-manometer nem érez meg, de a mely bőségesen elég arra, hogy a szinképet megváltoztassa. Ezen oknál fogva az előbb leirt próbát a következővel cseréltem föl: Este kiszivattyúztam a készülékből a gázt annyira, hogy a Ruhmkorff-féle nagyobb inductor villanyfolyama (levegőben 12—18 centimeter szikrát ad) három nagy Bunsen elemmel milyet Ruhmkorff ad gépeihez, gerjesztve nem hatolt többé át a Geissler csövön, ámbár ebben a sarkok távolsága csak 15 centimeter volt Azután igy állott a készülék 24 óráig és ezen idő lefolyása után ismét megkisértettem az inductor folyamát átüttetni a csövön, de ekkor is ugy mint 24 óra előtt a szikrák a csövön kivül csaptak át egyik vezető sodronytól a másikhoz. — E kisérlet által constatáltatott, hogy a készülékbe daczára annak, hogy ez alkalommal rajta 38 köszörülés volt, 24 óra alatt nem jut be annyi levegő sem, mennyi elég volna villanyáram vezetésére. — Azonban egy-egy kisérlet, ide nem számitva az előkészületeket, soha sem vett több időt igénybe mint 2 órát: ezen időtartamra tehát a készülék absolut légzárónak tekinthető.

A kisérletekhez használt spectralcsövek az ismeretes spectralcsövek alakjával birtak; vezető sarkok gyanánt platinsodronyt használtam, mely ugy volt a spectralcső végeibe beforrasztva, hogy a sodrony annyira mennyire a spectralcsőbe bevert vékony, de a spectral cső belsejében nyilt üvegcsővel volt körülvéve. — E szerkezetet azért használtam, mivel a platin tudvalevőleg Geissler-féle csövekben elpárolog és a csöveket bepiszkítja. E szerkezet mellett az elpárolgás és berakodás csak ama keskeny csőre szoritkozik. — A spectral csövek capillaris részének átmérője körülbelül $^1/_{10}$—2 millimeter között ingadozott.

A könenyt kezdetben viznek elektrolysise által állítottam elő,

mert azt hittem, hogy ezen az uton absolut tiszta könenyt lehet nyerni. — A köneny előállítására a következő készüléket állítottam össze: az elektrolysator A. (l. a mellékelt 3. táblát) egy alól beforrasztott, felül nyitott és finom köszörüléssel ellátott üvegcsőből állott, melybe oldalt platinlemez, alól pedig platin sodrony volt beforrasztva.

Az elektrolysator felső nyilásába egy csappal ellátott és derékszögben meghajtott cső *B* volt beköszörülve, mely ismét köszörülések által összeköttetésben állott a szárító-készülékkel *C*. E készüléket egy körülbelül két centimeter átmérőjü üvegcső képezte, melyre középen három nagyobb teke volt fúva. A szárítóhoz hozzá volt forrasztva a spectralcső *D*, oly állásban, hogy a szinképet észlelni lehessen, és egyszersmind a spectralcső hozzáforrasztatott a szivattyú végcsövéhez is. — A készülék ezen berendezése mellett lehetségessé vált az egész készüléket légüressé tenni, mielőtt a köneny fejlesztése megkezdetett volna.

A köneny fejlesztésére nem higított kénsavat használtam, mint az szokásos, mert attól tartottam, hogy kénsavgőz jut a spectralcsőbe, mi az észlelésben nagy zavart okozott volna; hanem használtam tömény sóoldatokat és pedig mindig chlór-fém oldatokat. A köneny fejlesztésére a következő előkészületek tétettek:

1. Igen szépen kristályodott mármarosi konyhasó háromszor átkristályosíttatván, platin-tégelyben megolvasztatott. Az így előállított konyhasó tömény-oldata használtatott a köneny előállítására. Később a konyhasót chlórbariummal helyettesítettem, mert ez könnyebben kristályosítható. A chlórbarium, melyet kisérleteimhez használtam, 5-ször volt átkristályosítva.

2. A chlórfémet lepárolt vizben oldottam fel, mely e czélra külön állíttatott elő egy üvegből lévő tiszta lepároló készülékben. A görebbe, melyből a lepárlás történt, higított kénsav és felmangansavas kalium adatott, hogy részint az ammon megköttessék, részint a szerves anyagok elpusztíttassanak. A lepárolgó viznek eleje és utolja elvettetett, csak a közbeeső részlet használtatott a kisérletekre.

3. A positiv sarkon kiváló éleny (chlór) megkötésére zinket használtam. Ezért a positiv sarkot zinkamalgamnak kellett képeznie. Minthogy az árubeli legtisztább zink is tartalmaz idegen anyagokat (arsen, kén, zsir) ennélfogva a zinkamalgamot nem lehetett az árubeli zinkből előállítani. A zinkamalgam előállítása a következő módon történt: A legtisztább árubeli zinket (zinklemez) feloldottam tiszta sósavban, a nyert oldatot besürítettem szörpsürűségre és belőle a zinket elektroly-

sis utján választottam ki úgy, hogy az mindjárt higanyban feloldódjék; tehát a batteria negativ sarkát higany képezte. 36 órai elektrolysis után annyi zinket tartalmazott a higany, hogy az amalgom higított sósavval lassan könenyt fejlesztett.

A készülék — miután minden elő volt készítve a kisérlet kiviteléhez — jól kitisztíttatott és következőképen töltetett meg: az elektrolysatorba előbb a tömény, jól kifőzött konyhasó oldat töltetett be és azután a zinkamalgam. Ha a megtöltést fordítva eszközöljük, megtörténhetik, hogy a zinkamalgam és üveg közé levegő szorúl, mely később a spectralcsőbe jut és a szinképet megváltoztatja. — A csappal ellátott derékszögben meghajtott csőbe közvetetlenül előbb kiizzított asbest helyeztetett el, hogy a köneny által mechanice magával ragadt nedvesség visszatartassék. A szárító-készülékbe Marquardt gyárából való vizmentes phosphorsav töltetett, mely légenysavval kifőzött és kitüzesített üveg-gyöngygyel volt keverve azon czélból, hogy a csövet el ne dugaszolja. Ezután a köszörülések megkenettek és az egész készülék összeillesztetvén, egyrészt reá, másrészt a szivattyúra felforrasztatott a már kész és jól kitisztított spectralcső.

A szinkép észlelésére egy Steinheil-féle spectrogoniometer szolgált, melynek szerkezete olyan, hogy egyszerre két fényforrás szinképét lehet észlelni és a mely kitünő osztályzattal ellátott limbussal bir, minélfogva pontos mérésekre is alkalmas. A szinképet adó prisma thallium-üvegből készült és 60°-nyi szögletü; később e prismát egy szénkénegprismával cseréltem föl, mely szinte 60°-nyi szögletü. — A szinképek vonalai soha sem mérettek meg, hanem az összehasonlítás két szinkép közt directe történt. E mód sokkal biztosabb, mivel itt nem csak a vonalak azonos helyzetéről, hanem egyszersmind azonos intensitásáról is meggyőződhetni.

Miután a gázfejlesztő készülék rendben volt, kiszivattyúztam a levegőt a készülékből annyira, hogy a spectralcső élénken mutassa a légeny szinképét. Ekkor beállítottam a szinképkészüléket és most a szivattyúzást folytattam, míg csak a villanyáram már-már nem hatolt át a csövön. — A kiszivattyúzásra nézve megjegyzem, hogy ennyire kiszivatytyúzni a készüléket csak akkor lehet, ha az elektrolysator a készülék többi részeitől csappal zárható el. Ha a készüléken nincs csap, akkor a viz oly gyorsan párolog az electrolysatorból, hogy a phosphorsav nem képes azt elég gyorsan elnyelni és így a vizgőz belejut a spectralcsőbe. Most megkezdődött a könenyfejlesztés. Elég volt egy pillanatra bezárni a folyamot, hogy annyi köneny fejlődjék, mennyi a szinképet vakító fénnyel mutassa.

E leirások után leghelyesebb lesz, ha a kisérleti naplót hagyom beszélni.

1-sö kisérlet az épen leirt készülékkel. Az electrolysator megtöltésére nem az általam később előállított anyagok használtattak, hanem a laboratoriumban levő tiszta anyagok. — A köneny folyvást légüres térbe ömlött, mi folytonos szivattyúzás és elektrolysis által volt elérhető. Miután ez 4—5 órán át tartott, a csőben a köneny 17 m. m. nyomás alatt leforrasztatott. A szinkép, mely kisérlet közben észlelhető volt a $H\alpha$ $H\beta$ $H\gamma$ vonalokon kivül, melyek igen intensivek voltak, még a narancsban és sárgában számos jól látható, a zöldben és kékben pedig gyengén látszó vonalakat mutatott. Szivattyúzás közben kisebb-nagyobb nyomásoknál egész 30 m. m.-ig erősebb-gyengébb villanyárammal mindig ugyanazon szinkép látszott intensivebben vagy gyengébben. Ugyanezen spectrum mutatkozik egy Geissler-nél készült, könenynyel megtöltött csövön, pedig e csőben aluminium képezi a sarkokat, miből következik, hogy a köneny három intensiv vonalán kivül látható többi vonal nem a sarkokhoz tartozik.[1]) — E szinkép Plücker és Wüllner által mint a köneny 2-ik szinképe van leirva.

2-ik kisérlet, ugyanazon körülmények között eszközölve. Az elektrolysator az általam előállított anyagokkal töltetett meg. A mutatkozó szinkép azonos volt az előbbivel és a nyomással és vilanyárammal ép úgy változott. — Összehasonlíttatván Geissler által készített különféle gázzal megtöltött spectralcsövek szinképével, kitünt, hogy az ammoniak spectrumával az általam előállított szinkép egyezik, mi azt gyaníttatá, hogy még mindig légenytartalmu a köneny, és a csőben a villanyosság behatása által ammonia keletkezik. Ez oknál fogva 3 napig folytattatott a könenyfejlesztés. Hogy ezen idő alatt a készülék zárt, bizonyítja az, hogy estétől reggelig az absolut vacuum, melyen a folyam nem ment át, nem változott. A szinkép 3 nap mulva is ugyanaz volt, minélfogva a köneny három vonalán kivül mutatkozó vonalak nem tartozhatnak az ammoniához, hanem vagy csakugyan a könenyéi, vagy a phosphorsavtól, vagy végre a zsirtől származnak. Ennek eldöntésére a vizmentes phosphorsavat tartalmazó tekék egyikét jól megmelegítettem, mi által a teke beltartalma egy kissé megbarnult.

A most mutatkozó szinkép oly brilláns volt, hogy azt nehéz volna leirni. Ama vonalak, melyek már előbb is láthatók voltak, majdnem

[1]) Plücker kimutatta, (Poggendorff Ann. CIV. 625), hogy kis nyomásoknál a sarkok spectruma nem jelenik meg a gáz spectrumában.

vakító intensitásuakká váltak és mellettök számos uj vonal mutatkozott azokon a helyeken, a hol előbb vonal nem volt ugyan látható, de hol az alap nem is volt egészen sötét; különösen a zöldben számos vonal mutatkozott ott, hol előbb az alap csak gyengén volt megvilágitva; hasonlóképen a kékben is tüntek fel vonalak és csikok, melyek azonban a légenyével nem estek össze. A spectrum ezen változása oda mutatott, hogy a köneny vonalain kivül látszó többi vonal a phosphorsavtól van. Megvizsgálván a phosphorsavat, azt találtam, hogy az jelentékeny mennyiségű phosphoros savat tartalmaz. A phosphoros sav tudvalevőleg illékony, és igy képzelhető, hogy légüres térben annyira illó, hogy a szinképben elárulja magát. Ez oknál fogva a következő kisérlethez a phosphorsavat külön előállitottam phosphornak nagyon nagy fölöslegü tiszta élenyben való elégetése által, és meggyőződtem róla, hogy az ily módon előállitott phosphorsav phosphoros savat nem tartalmaz; az ammoniakos ezüst oldatot ugyanis nem sziniti, még csak meg sem sárgul, hanem teljesen szintelen marad a folyadék hosszabb idejü főzés után is.

3-ik kisérlet ujonnan készült és jól kitisztított spectralcsővel eszközölve. A száritóba az általam előállított phosphorsav töltetett be. A többi körülmények most is változatlanok. — Az előbb észlelt spectrum most is mutatkozott. A köneny három vonala vakitó intensiv, mig a többi vonalak igen gyengék. Nyomás és villanyáram intensitásának változtatásával a szinkép intensitása is változik, de jellege nem.

4-ik kisérlet. Kivitele mint 3-nál, csakhogy a száritó készülék után egy cső metaphosphorral igtattatott be; ugyanily cső volt alkalmazva a spectralcső és szivattyu közé. E berendezés által reméltem elérni azt, hogy a phosphorsavpárák a metaphosphorsav által (mely egy kissé meg is volt nedvesitve) visszatartatnak. Csalódtam! — Az eredmény most is az volt mint 3 alatt.

5-ik kisérlet. A methaphosphorsavval megtöltött csöveket calciumoxyddal töltöttekkel cseréltem föl és igy eszközöltem a kisérletet ismét ujból készitett spectralcsővel. A köneny három vonala igen intensiven mutatkozott; a többi is igen élénk volt — élénkebb mint 3 és 4-nél, de a spectrum ugyanaz. Ha a spectralcsövet lámpával jól megmelegitettem, akkor a natrium és calcium vonalai tüntek elő,[1])

[1]) Wüllner észlelte (Poggendorff Ann. CXXXV. 175), hogy ha az inductor folyamába villanypalaczkot igtatunk be és a sarkok távolságát nagynak veszszük, a szinképben a natrium és calcium vonalai megjelennek.

ellenben az előbbi spectrum teljesen eltünt és oly mértékben kezdett ismét mutatkozni, a mily mértékben a natrium és calcium vonalai gyengültek, vagyis a mily mértékben az üveg lehült.

Ebből egyenesen következik, hogy ama szinkép, mely a köneny három vonalán kivül mutatkozik, nem az üvegtől ered, mert akkor annak megmelegítése által erősebben kellett volna mutatkoznia, nem pedig eltünnie.

Nyolcz millimeternyi feszélynél az inductorral egy nagyobb felületü villany-palaczk combináltatott. A szinkép ez által annyiban változott meg, hogy a köneny három ismeretes vonala megszélesedett és a többiek eltüntek, a mennyiben nem mint egyes csikok és vonalak mutatkoztak, hanem mint folytonos szinszalag; melyen a köneny megszélesedett vonalai látszottak. — Kizárván ismét a palaczkot, a nyomást lassanként emeltem és mintegy 30 millimeternyi feszélynél ugyanazon szinképet nyertem, mint 8 millimeternél leydeni palaczkkal, de az intensitas most kisebb volt. — Végül a nyomást ismét 3 m. m.-re csökkentve, a spectral-csövet leforrasztottam. E nyomás alatt mutatta legélénkebben ama bizonyos szinképet.

6-ik kisérlet. Ujonnan készitett spectralcsővel. A szárító készülékbe phosphorsav helyet frissen kiégetett calciumoxyd tétetett; a spectralcső és szivattyú közé a szivattyú felé nyiló higany-ventilt igtattam (1. ábra *a*), hogy a spectral csőbe a szivattyúból gázok vissza ne tódulhassanak. A calciumoxyd fehér márvány kihevitése által állittatott elő; savakban teljesen oldható volt pezsgés nélkül. A többi körülmények nem változtattak meg. E cső a leirt módon könenynyel megtöltve, ugyanazon spectrumot mutatta mint az előbbiek. Minthogy a kisérletnél a phosphorsav egészen ki volt hagyva, ama sok vonalu spectrum nem származhatik a phosphorsavtól, és miután az az 5-ik kisérlet szerint az üvegtől sem származik: vagy valóban a könenyhez tartozik, vagy pedig a zsiradék okozza, melylyel a köszörülések meg voltak kenve,.

7-ik kisérlet. Annak eldöntésére, vajjon a zsir ad-e szinképet és minőt, egy spectralcsővet készitettem, melyre oldalt egy kis tekés cső volt felforrasztva. A tekébe abból a kenőcsből egy borsó nagyságu darabka tétetett, melylyel a köszörüléseket szoktam kenni. E csővet, felforrasztván a szivattyúra, légüressé tettem, szivattyúzás közben a vizgőz szinképe mutatkozott, mi oda mutat, hogy a kenőcs jelentékeny mennyiségű nedvességet tartalmaz. Midőn végre hosszú szivattyúzás után sikerült a vizgőzt teljesen eltávolitani és a csővet annyira légüressé tenni,

hogy a folyam nem ment rajta keresztül, a tekében foglalt zsírt annyira melegítettem, hogy az épen megolvadt. — Azonnal előállott egy szinkép, melyben mindegyik vonal, melyeket a könenyben észleltem, jelen volt. A szinkép azonban gyengülni kezdett és lassanként a vonalak ismét eltüntek, oly mértékben, a minőben a zsír lehült. De előállottak ismét, ha a tekét ujból megmelegítettem. Miután ezt többször ismételtem és a tüneményt másoknak is megmutattam, hogy a netaláni csalódást elkerűljem, a zsírt annyira melegítettem fel, hogy az bomlani kezdett. Ekkor előállott ama szinkép, de olyan brillansan, hogy azt leirni sem lehet. Észlelhetők voltak benne a köneny vörös és zöld vonalai, melyek igen élénken látszottak, míg a kék kevésbé haladta meg intensitasra nézve szomszédjait. A köneny vörös vonalától kezdve egész a zöldig fényes csíkokkal és vonalakkal zsufolva van a szinkép, míg a zöldön túl szintén sok csík és vonal látszik ugyan, de többnyire gyengén, csupán egyesek élénkek. E szinképet a cső mai napig is mutatja. Összehasonlítva e szinképet az általam készített köneny tartalmu csövek szinképével kitünt, hogy a köneny szinképében egyetlen egy vonal vagy csík sincs, melynek folytatása a zsír szinképében meg ne volna, sőt azon csíkok és vonalak, melyek a köneny szinképében intensivebbek, a zsír szinképében is erősebb fényüek. A zsir szinképében fordultak elő azonban oly vonalak és csíkok, melyek a köneny szinképében hiányzottak; e csikok és vonalak azonban a szénsavhoz tartoznak és ezért nem mutatkoztak a köneny szinképében. Ezen észlelések után kivánatosnak látszott különféle gázok szinképeit egymással összehasonlítani annak eldöntése végett, hogy vajjon ama szinkép, melyet a zsír melegítése által kifejtett gázok mutatnak, előfordul-e más gázok szinképében is? E czélból összehasonlítottam különböző gázok szinképét úgy, hogy egyszerre két gáz szinképe volt észlelhető. Az összehasonlított gázok voltak: az általam előállított köneny, a zsírból kijövő gáz, a Geissler-nél készültek közül pedig: köneny, éleny, chlór, ammonia, aethyl-köneny, légeny, szénsav. Az összehasonlításból kitünt, hogy ama bizonyos szinkép, melyet a zsírból kifejlödő gázok és a köneny is mutat, mutatkozik a Geissler által készitett csövekben is mindig, ha a csőbe köneny vagy könenytartalmu gáz van beforrasztva. Legélénkebben (csakugy mint a zsírból kifejtett gáz) azonban az aethyl-köneny mutatta. Nem mutatkozott az éleny, chlórlégeny és szénsav szinképében. — Ezen észlelésekből csak e következtetést lehet vonni, hogy t. i. ama szinkép, melyet a köneny és könenytartalmu gázok mutatnak és mely azon a zsírból kifejtett gázok szinképével egyezik vagy

valamely szénkönenyhez tartozik és igy a könenyt magát tisztán, szénkönenyektől menten előállítani nem lehet, — vagy hogy ama szinkép csakugyan a könenyé. — Az azonban már az eddigi kisérletekből is határozottan következik, hogy a *könenynek csak egy szinképe van, melyből a körülményekhez képest egyes vonalak vagy vonalcsoportok eltünhetnek, de semmiféle körülmény között uj, addig nem látszó vonalak fel nem lépnek.* — Nagyon könnyü oly feszélyt adni a könenynek és oly villanyárammal hozni izzásba, hogy a szinképből a köneny kék vonala eltünjék. Ez történik magasabb feszélynél gyenge villanyárammal. — De azért azt hiszem nagyon helytelen volna a jelenség okát akár a villanyosság kisütési modjára, akár molecularis változásokra vissza vezetni akarni! — Sokkal egyszerűbb és természetesebb magyarázatot nyer e tünemény az által, hogy a könenynek aránylag nagy tömege nem jő kellőleg izzásba gyenge villanyáram által; bizonyítja ezt azon tény, hogy ugyanazon cső, mely a köneny kék vonalát nem mutatta, ha az inductorba csak egy Bunsen-elem volt beakasztva, ama vonalat igen élénken tüntette elő, ha egy elem helyett hárommal gerjesztetett a villanyosság. Ezzel azonban nem akarom azt mondani, mintha a villanyáram kisütési módjának semmi befolyása sem volna. — Meglehet hogy van. — Kisérleteim azonban nem voltak ilyen irányúak és ezért e tárgyhoz egyelőre nem szólhatok.

Annak eldöntése végett, hogy ama szinkép, mely a köneny vonalain kivül mindig észlelhető és a mely a szénkönenynek szinképével identikus, valóban szénkönenytől, mely fertőzmény gyanánt lehet a könenyben, vagy csakugyan magától a könenytől származik-e? — eszközöltem az alább következő kisérlet sorozatot. — És erre szükség volt, mert az eddigi kisérletekből egyátalában nem következik sem az egyik sem a másik nézet helyessége. Tekintve azt, hogy az összetett gázok villanyosság által bizonyos fokig fölbontatnak, könnyü volt a szénkönenyek szinképének azonosságát a könenyével abból magyarázni, hogy azok fölbontatván a csőben szabad köneny foglaltatik, mely ama bizonyos hozzátartozó szinképét mutatja. — Ezen felfogás szerint ama szinképnek csakugyan a könenyhez kell tartozni. — A másik felfogás, mely szerint ama szinkép nem a könenyhez, hanem az abban fertőzmény gyanánt előforduló szénkönenyhez tartozik, épen oly jogos, mert ha feltesszük, is, hogy a köneny absolut tiszta volt magában a spectralcsőben lehetett egy kis eltávolíthatatlan zsír vagy világító gáz égés terménye (világító gáz forraszcsövi lángjával készültek a csövek), mely fölösleges könenyben a villany áram által szénköneyt képezhetett; vagy a

könenynyel, végtelen kevés szénsav jutott be a spectral csőbe, hol fölösleges könenynyel a villanyosság behatása által szénköneny keletkezhetett belőle. Ez is feltehető volt, mert a folyadékból, melyből a köneny fejlődött, azt hiszem lehetetlen a feloldott szénsavat ugy eltávolítani, hogy abból annyi ne maradna vissza, mennyi a szinkép megváltoztatására elég.

Azon nézet, hogy a könenyben csakugyan fertőzmény gyanánt szénköneny foglaltatik és igy ama bizonyos szinkép nem a könenyé, hanem a fertőzményé, az által még inkább valószinüvé vált, hogy e szinképet némely cső alig láthatólag mutatja, míg más csövek, melyek ugyanazon körülmények között állíttattak elő, igen intensive mutatják. Ha e szinkép valóban a könenyé volna, úgy nem látható be annak oka, hogy ugyanazon körülmények között miért látszik egyszer erősen, máskor gyengén. Ezen utóbbi nézetet fogadva el alapul, kisérleteimet oda irányoztam, hogy a könenyt tisztán állíthassam elő. — Magától értetődik hogy a föntebbiek alapján kisérleteim kivitelénél teljesen kikerültem először is a köszörülések kenésére eddig használt zsírt és igy kénytelen voltam az elektrolysatort, szárító készüléket, spectralcsövet és higanyventilt, mely által a spectralcső a szivattyútól volt elkülönítve, egy darab üvegből készíteni. Ott tehát, hol eddig köszörülések által volt meg az összeköttetés, most az egyenesen az üvegrészek összeforrasztása által állíttatott helyre (l. 2-ik ábra.) —

Ily készülékkel eszközöltem a *8-ik kisérletet.* Az elektrolysator tömény chlórbarium oldattal, a szárító cső pedig tiszta phosphorpentoxyddal megtöltetvén, egymással és a már készen lévő, előbb tömény felmangansavas kalium-oldat és tömény kénsav elegyével kimosott és kiszárított spectralcsővel összeforrasztattak. Végül az egész készüléket a higanyventil közbeigtatásával felforasztottam a szivattyura.

E kisérlet ugyanazon eredményt adta mint az előbbiek.

9-ik kisérlet. Mivel a higany nem tapad az üveghez, azt véltem, hogy a szivattyuból, melyen zsirral kent köszörülések és csapok vannak, szénenytartalmu gázok a higanyventil daczára visza diffundálnak a spectralcsőbe. Ez okból a higanyventilt egy kénsavventillel cseréltem fel de egyszersmind a spectralcső és kénsavventil közé egy tekét igtattam be, mely frissen kiégetett calciumoxyddal volt megtöltve *(3-ik ábra).* — A könenyt pedig mielőtt a spectralcsőbe lépett volna, tömény kénsavon vezettem keresztül, melyben chrómsav volt feloldva, *(4-ik ábra)* innen frissen kiégetett calciumoxydon keresztül jutott a spectralcsőbe. — A készülék minden egyes része, mielőtt megtöltetett és összeállitta-

tott volna, nagyon gondosan tömény chameleonoldat és kénsav elegyével volt besimítva és megszárítva.

Mindennek daczára e kisérlet is ugyanazon eredményt adta, mint az előbbiek.

A 10-ik kisérlet épen ugy eszközöltetett mint *9.* Az előbbeni (9-ik) kisérletnél a készülék egyes részeinek összeforrasztása gázlánggal történt és igy meg azon egy lehetőség fennállott, hogy az égéstermények bejutottak a készülékbe és ezek okozzák, hogy a köneny vonalai mellett ama másik a szénkönenyeknek megfelelő szinkép is látszik. — E kisérletet tehát épen ugy vittem ki mint az előbbenit, azzal a különbséggel, hogy a készülék egyes részeit nem gázlánggal, hanem tiszta zink és kénsavból fejlesztett köneny lángjával forrasztottam össze. — De akkor is sajnálattal kellett tapasztalnom, hogy a mutatkozó szinképben meg vannak habár gyengén ama bizonyos vonalak.

A 11-ik kisérletnél magnesiumból tiszta hig kénsav által fejlesztett könenyt használtam. A készülék a köneny kifejlesztésére igen egyszerü volt: egy nagyobb átmérőjü vizszintesen fekvő csőre két tekét fújtam egymás mellé. Az egyik tekébe magnesium darabkák, a másikba pedig vizszintes állás mellett annyi hig kénsav töltetett, hogy az a cső kis emelése által átfolyt a magnesiumra. E készülék könenylánggal reá forrasztatott a szárítóra, melynek másik végén az uj spectralcső volt fel forrasztva. Miután a készülék teljesen légüressé tétetett, kifejlesztettem a könyenyt. — Az igy nyert köneny szinképe azonos volt az előbbiekkel.

E fáradságos és sok időt rabló kisérletek által tehát egy lépéssel sem jutottam közelebb czélomhoz: a könenyt absolut tiszta állapotban előállitani. — Már-már kezdett bennem azon meggyőződés gyökeret verni, hogy ama szinkép mégis a könenyhez és nem a fertőző szénkönenyhez tartozik. Azonban eddigi észleléseim alapján még egy — a fennálló körülmények között talán utolsó — mód kinálkozott, mely által még lehetségesnek látszott, a kérdést kisérletileg eldönteni. Föntebb említettem, hogy a különféle gázok szinképének összehasonlításánál kitünt, miszerint ama szinkép, melyet a hevített zsir előidéz, és mely azonos a szénkönenynek szinképével, továbbá azzal, melyet a köneny hol erősebben, hol gyengében mutat, csak oly gázokban mutatkozik, melyek könenytartalmuak, mig oly gázokban, melyek könenymentesek, nem észlelhető. (L. 74. l.) Feltehető volt tehát, hogy ha a könenyt fölösleges éleny jelenlétében sikerül a spectralcsőben vizzé alakítani és a keletkezett vizet phosphorpentoxyd által teljesen elnyeletni, akkor azon esetben, ha ama bizonyos szinkép valóban a könenyhez tartozik,

annak el kell tünnie, és az oxydatió és a viz elnyeletése után csupán az éleny szinképének kell mutatkoznia; mig ellenben, ha ama szinkép szénkönenytől ered, akkor az oxydátió és a viz elnyeletése után az éleny szinképén kivül még a szénsavénak is kell látszania. — Ebből kiindulva, egy kisérletet hajtottam végre, melyhez a következő készüléket állítottam össze:

Egy vizszintesen fekvő keskeny üvegcsőre merőlegesen lefelé függő, tekébe végződő csövet forrasztottam. A tekébe már előre tiszta kristályodott és előre megolvasztott chlorsavas kaliumot töltöttem be. A vizszintes cső egyik végére felforrasztottam a szárító-készüléket, mely ez alkalommal egy körülbelől 20 centm. hosszú és 1 centm. tág üvegcsőből állott és frissen előállíttott tiszta vizmentes phosphorsavval volt megtöltve. A szárító-cső után a spectralcső, azután egy kénsavventil, és végre a szivattyú következtek. Megjegyzem, hogy a szivattyúig a készülék egyes részei, mielőtt a tiszta anyagokkal megtöltettek volna, egyenként tiszta élenyáramban hosszabb ideig tüzesíttettek azon czélból, hogy a netalán bennök maradt szénenytartalmu anyagok eléghessenek. Magától értetődik, hogy ezen egyes részek mind összeforrasztás által köttettek össze egymással. A forrasztás könenylánggal történt.

A köneny fejlesztését ezúttal a Graham-féle könenynyel telített palladium-szalag melegítése által eszközöltem; mert reméltem, hogy a palladiumból melegítés által kijövő köneny absolut tiszta és így végre a tiszta köneny szinképét megláthatom. A palladium tudvalevőleg térfogatának mintegy 600-szorosát nyeli el könenyből és így elég könenyt nyel el aránylag nagyon kis darabka palladium, hogy a spectralcsövet kis nyomásoknál többször ki lehessen vele öbliteni. A palladium könenynyel telítése tiszta kénsavval megsavanyított viz elektrolysise által történt. A negativsarkot képezte a palladium. A telítés 5 órán át tartott. Miután a könenynyel telített palladium szalagot lepárolt vizzel teljesen lemostam és közönséges hőmérséknél megszárítottam, betoltam azt a még nyitva levő vizszintes csőbe és könenylánggal leforrasztottam. Most az egész készülék készen lévén a kisérletre, az egészet annyira a mennyire lehetett, kiszivattyúztam és azután a chlorsavas kalium megmelegítése által élenyt fejlesztettem benne és ily állapotban az egészet — kivévén azon részt, hol a palladium volt — még egyszer kitüzesítettem. Ez által meg akartam győződni arról, hogy vajjon előáll-e a szénsav spectruma vagy sem; más szóval, hogy ment-e a készülék szénenytartalmu anyagoktól. — A készülék ezektől csakugyan ment volt, mert a kitüzesítés után is csupán a tiszta éleny szinképe mu-

tatkozott. — Most újból kiszivattyúztam a készülékből a gázt a menynyire lehetett és a palladiumból könenyt fejlesztettem, annyit, hogy biztos legyek arról, miszerint az előbb benne maradt éleny teljesen kiüzetett. Megvallom, bizonyosnak hittem, hogy végre most a köneny szinképét ama sok vonaltól menten fogom látni, azonban most is mint eddig a köneny vonalain kivül amazok is és pedig igen intensive mutatkoztak. Áttértem tehát kisérletem második részének kivitelére: a könenynek élenyítésére. E czélból szivattyúzás és élenyfejlesztés által a készülékben a könenyt élenynyel cseréltem fel, miről meggyőződtem az által, hogy a gáz csak az éleny szinképét mutatta. Ekkor egy pillanatra megmelegítettem a palladiumot, miközben a villanyosság folytonosan keresztül járt a spectralcsövön, és észleltem a szinképet. — Később, midőn már a palladiumot vörös izzásig kelle hevítenem, hogy kiadja könenyének utolját, egyszerre megváltozott a szinkép; az éleny vonalai majdnem teljesen eltüntek és helyettük a köneny vörös és zöld vonala, továbbá 5 széles csík mutatkozott, melyekben Plücker leirásából azonnal reá ismertem mint a szénsavéira. — Ekkor a villanyfolyamot megszüntettem és az egészet állni hagytam, hogy a vizgőz elnyelessék a phosphorsav által. Ez rövid idő múlva megtörtént, és most oly spectrum mutatkozott, melyben a köneny vonalai teljesen hiányoznak, de annál intensivebbek a szénsavéi. — A spectrálcsövet ekkor leforrasztottam és összehasonlítottam spectrumát egy Geissler-nél készült és szénsavval töltött csővel. — A két szinkép vonalainak számára, helyzetére és intensitasára nézve teljesen megegyezett egymással és így kétségtelenné vált, hogy a köneny élenyítésénél szénsav is keletkezett.

Ez döntő bizonyíték arra, hogy a Plücker és Wüllner által észlelt és a köneny második szinképe gyanánt leirt vonalak valóban szénkönenyektől származnak, melyektől menten úgy látszik a könenyt legalább a közönséges módokon előállítani nem lehet.

Azonban ily lényeges kérdések felett, mint a minő az, hogy az egyszerű gázok mutathatnak-e különböző szinképeket vagy sem? dönteni csak akkor lehet, ha nagyobb számú észlelésből vonhatjuk következtetéseinket. Elhamarkodott lenne tehát a fönnebbi kisérlet alapján biztosan állítani, hogy a köneny mindig szénkönenynyel van fertőzve. Ez okból még nehány kisérletet eszközöltem, melyek kivitelére a készülék ugy volt berendezve, hogy a spectralcsőben tetszés szerint könenyt vagy élenyt, vagy mind a kettőt egyszerre lehett fejleszteni. A készülék egy darab üvegből állott, könenylánggal összeforrasztva. Az

élenyt mindig tiszta chlorsavas kaliumból fejlesztettem, mely a készülékre reáforrasztott kis tekéscsőben foglaltatott.

Az electrolysis által nyert köneny oxydatiója oly légritkított térben, milyen szükséges, hogy a szinkép intensive mutatkozzék, nem sikerült, mert lehetetlen volt készülékem berendezésénél fogva oly kevés könenyt fejleszteni, mely ki ne üzte volna a készülékbe előre belefejlesztett élenyt. Ha a villanytelep sarkát a szó szoros értelmében csak egy pillanatra érintettem is a vezető sodronynyal, már annyi köneny fejlődött, hogy az éleny szinképe teljesen eltünt és helyette a könenyé mutatkozott. Ez okból visszatértem a palladiumhoz és ezt használtam könenyfejlesztésre. A készülék szerkezete most is az volt, mint az előbbeni kisérletnél, csupán a palladium lemez után a csőbe összegöngyölített platinlemezt alkalmaztam. E lemez a kisérlet tartama alatt folyvást világosvörös izzásban tartatott azon czélból, hogy minden a mi oxydálható, oxydáltassék általa. — A palladium-lemezt, mielőtt azt könenynyel telítettem volna, huzamos ideig tüzesítettem a forraszcső előtt a láng élenyítő részében. — Magától értetődik, hogy a forraszcső lángja könenyláng volt. — Ezután telítettem a palladiumot könenynyel, mely tiszta kifőzött konyhasó-oldatból elektrolysis utján fejlesztetett. — Miután a könenynyel telített palladium helyére tétetett és a készülék beforrasztatott, az egészet légüressé tettem és a platinlemezt izzásba hoztam. Ekkor kifejlesztettem annyi élenyt, hogy a spectruma tisztán látszhassék, és most állni hagytam az egészet hosszabb ideig, miközben a platin folyvást izzásban volt. A palladium légüres térben tudvalevőleg lassanként elveszíti elnyelt könenyének egy részét, minélfogva azon a kisérlet sikerülésére nézve annyira lényeges feltétel, — hogy a köneny igen lassan fejlődjék — be volt tölve. — A kisérlet fényesen sikerült is, mert nemsokára a szinképben mutatkozott a szénsav narancs sávolya, ezt követte a vörös, zöld stb., míg mintegy $^3/_4$ óra mulva a szénsav spectruma teljesen előállott. Ha a spectralcsőből a szénsavat élenynyel kiüzzük, úgy, hogy ismét az éleny spectruma látszik, akkor a spectrumnak előbbeni változása is ismétlődik.

A kisérletet mindaddig lehet ismételni, mig csak a palladium könenyt fejleszt. — Eddigi tapasztalásom szerint a kisérlet 1—2 m. m.-nyi feszélynél legjobben sikerül.

AKAD. KÖNYVTÁR

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

I. kötet. **1876.** 4. füzet.

A MÉRLEGRŐL.

Schuller Alajos, műegyetemi tanártól.

I.

1. BEVEZETÉS.

A physikai mérések között kiváló szerepet játszanak a súlymeghatározások, nemcsak sokféle alkalmazásuknál fogva, hanem különösen a nagy pontosság miatt is, a melylyel eszközölhetők. Ez állítás helyességéről könnyen meggyőződhetünk, ha egy futólagos pillantást vetünk a természettanban rendelkezésünkre álló szabatos mérésekre.

Közöttük első sorban az időmérés ötlik fel. Az inga lengés idejének meghatározása *Borda* módszerével bámulatos pontosan eszközölhető. Ha ezt az ugynevezett »egybevágások« módszerét alkalmazzuk, (a később leirandó eljárás szerint) nagy fáradság nélkül elérhetjük, hogy az egyes egybevágások $\frac{1}{10}$ sőt $\frac{1}{20}$ másodperczre pontosak. Ennélfogva, egy óráig tartó észlelésnél az elkövetett hiba viszonyítva az egész időhöz:

azaz: $\frac{2\times 0{\cdot}1}{60.60}$ vagy $\frac{2\times 0{\cdot}05}{60.60}$

$\frac{1}{18{,}000}$ $\frac{1}{36{,}000}$.

A legrosszabb esetet tettük fel, midőn a kisérlet elején és végén előforduló hibák egymást öregbítik — ami lehetséges.

A lengési idő meghatározása eszerint az egésznek *36,000*-ed részéig pontosan eszközölhető. Ily pontosságot enged az egybevágások módja.

Az előadott kisérletekből következik és constatáltnak tekinthető :

1. A könenynek csak egy szinképe van, mely az ismeretes három vonalból áll.

2. A kis nyomás mellett mutatkozó szinkép két szinképből áll, melyek egyike a könenyé, másika — a sokvonalu — szénköneny valamely fajtájáé.

3. Tehát a könenynek PLÜCKER és WÜLLNER által észlelt 2-ik szinképe nem létezik.

4. A könenyt oly tiszta állapotban előállítani, hogy az alacsony nyomásnál se mutasson három vonalán kivül más szinképet, — legalább a közönségesen használt eljárások szerint nem lehet.

DESARGUES TÉTELE
A PERSPECTIV HÁROMSZÖGÖKRŐL.

Hunyady Jenőtől.

1. Két ugyanazon síkban fekvő abc és $a'b'c'$ háromszög perspectiv helyzetűnek, vagy perspectivnek neveztetik, ha a csúcsaikat összekötő aa', bb' és cc' egyenesek egymást ugyanazon pontban metszik.

Az itt elemző úton tárgyalandó *Desargues*-féle tétel a perspectiv háromszögeknek következő tulajdonságát jelenti ki:

»Ha az abc és $a'b'c'$ háromszögekben a szögpontokat összekötő aa', bb' és cc' egyenesek egymást ugyanazon pontban metszik, akkor a

$$bc \text{ és } b'c',\ ca \text{ és } c'a',\ ab \text{ és } a'b'$$

oldalpárok átmetszési pontjai ugyanazon egyenesen fekszenek.« *)

2. Legyenek x, y, z a sík tetszőleges pontjának egyméretű viszony-összrendezői (homogene Verhältniss-Coordinaten) és az a, b, c, a', b', c' pontok összrendezői pedig a következők:

$$a) \ldots . a_1, a_2, a_3, \qquad a') \ldots . a'_1, a'_2, a'_3,$$
$$b) \ldots . b_1, b_2, b_3, \qquad b') \ldots . b'_1, b'_2, b'_3,$$
$$c) \ldots . c_1, c_2, c_3, \qquad c') \ldots . c'_1, c'_2, c'_3,$$

*) Lásd PONCELET »Traité des propriétés projectives des figures« 2. ed. T. I, Art. 168.

a melyek közönséges összrendezőket jelenthetnek, ha z, a_3 s a t. egyenlők az egységgel.

Az abc és $a'b'c'$ háromszögekben az oldalak egyenletei a következők:

$$\begin{aligned}
bc) \ldots & \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0, \\
ca) \ldots & \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = 0, \\
ab) \ldots & \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = 0, \\
b'c') \ldots & \alpha'_1 x + \alpha'_2 y + \alpha'_3 z = 0, \\
c'a') \ldots & \beta'_1 x + \beta'_2 y + \beta'_3 z = 0, \\
a'b') \ldots & \gamma'_1 x + \gamma'_2 y + \gamma'_3 z = 0,
\end{aligned}$$

ha az

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (abc)$$

és

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix} = (a'b'c')$$

determinánsokban az a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i elemek együtthatóit α_i, β_i, γ_i, α'_i, β'_i és γ'_i-vel jelöljük.

A csúcsokat összekötő egyenesek egyenletei pedig a következők lesznek:

$$\begin{aligned}
aa') \ldots & (a_2 a'_3 - a_3 a'_2)x + (a_3 a'_1 - a'_3 a_1)y + (a_1 a'_2 - a_2 a'_1)z = 0 \\
bb') \ldots & (b_2 b'_3 - b_3 b'_2)x + (b_3 b'_1 - b'_3 b_1)y + (b_1 b'_2 - b_2 b'_1)z = 0 \\
cc') \ldots & (c_2 c'_3 - c_3 c'_2)x + (c_3 c'_1 - c'_3 c_1)y + (c_1 c'_2 - c_2 c'_1)z = 0
\end{aligned}$$

mely egyenesek egymást ugyanazon pontban metszik, ha:

$$\begin{vmatrix} a_2 a'_3 - a_3 a'_2 & a_3 a'_1 - a_1 a'_3 & a_1 a'_2 - a_2 a'_1 \\ b_2 b'_3 - b_3 b'_2 & b_3 b'_1 - b_1 b'_3 & b_1 b'_2 - b_2 b'_1 \\ c_2 c'_3 - c_3 c'_2 & c_3 c'_1 - c_1 c'_3 & c_1 c'_2 - c_2 c'_1 \end{vmatrix} = 0 \ldots . \quad (1.$$

A $(bc, b'c')$, $(ca, c'a')$, $(ab, a'b')$ pontok ugyanazon egyenesben fekszenek, ha

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 \alpha'_3 - \alpha_3 \alpha'_2 & \alpha_3 \alpha'_1 - \alpha_1 \alpha'_3 & \alpha_1 \alpha'_2 - \alpha_2 \alpha'_1 \\ \beta_2 \beta'_3 - \beta_3 \beta'_2 & \beta_3 \beta'_1 - \beta_1 \beta'_3 & \beta_1 \beta'_2 - \beta_2 \beta'_1 \\ \gamma_2 \gamma'_3 - \gamma_3 \gamma'_2 & \gamma_3 \gamma'_1 - \gamma_1 \gamma'_3 & \gamma_1 \gamma'_2 - \gamma_2 \gamma'_1 \end{vmatrix} = 0 \ldots . \quad (2.$$

Desargues tételének bebizonyítására tehát meg kell mutatni, hogy a 2) alatti egyenlet az 1) alattiból következik.

3. Jelöljük rövidség kedvéért az (1) és (2) alatti egyenletekben

előforduló determinánsokat, D és Δ-val, valamint azon harmadfokú determinánst, a mely az a, b, c, a', b', c' pontok közül három pontnak az összrendezői által képezhető, ugyanazon betükkel, a melyekkel a pontokat jelöljük, így p.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix} = (acc') \text{ s a t.}$$

végre pedig ehhez hasonlóan az α, β, γ mennyiségek által képezett determinánsokat. A kitüzött czél elérésére az (1) alatti egyenletben előforduló determinánst átalakítjuk az által, hogy azt a következő determinánssal megszorozzuk:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (aa'b)$$

és így találjuk, hogy

$$D \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & (aa'b) \\ (abb') & (a'bb') & 0 \\ (acc') & (a'cc') & bcc' \end{vmatrix} = (aa'b) \begin{vmatrix} (abb') & (a'bb') \\ (acc') & (a'cc') \end{vmatrix},$$

a honnét

$$D = \begin{vmatrix} (abb') & (a'bb') \\ (acc') & (a'cc') \end{vmatrix}. \qquad (3.$$

Hasonló módon alakithatjuk át Δ-t és találjuk, hogy

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\alpha\beta\beta') & (\alpha'\beta\beta') \\ (\alpha\gamma\gamma') & (\alpha'\gamma\gamma') \end{vmatrix}. \qquad (4.$$

A jobb oldalon előforduló determináns elemeit, melyek maguk is determinánsok, szintén átalakíthatjuk.

Ha $(\alpha\beta\beta')$-t (abc)-vel szorozzuk, akkor ered:

$$(\alpha\beta\beta')(abc) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (abc) & 0 & 0 \\ 0 & (abc) & 0 \\ (ac'a') & (bc'a') & (a'cc') \end{vmatrix} = (abc)^2 (a'cc')$$

és innét

$$(\alpha\beta\beta') = (abc)(a'cc')$$

Ha továbbá $(\alpha\gamma\gamma')$-t szintén (abc)-vel, valamint $(\alpha'\beta\beta')$-t, $(\alpha'\gamma\gamma')$-t $(a'b'c')$-vel szorozzuk, azt találjuk, hogy

$$(\alpha\gamma\gamma') = (a\,b\,c)\,(a'bb')$$
$$(\alpha'\beta\beta') = (a'b'c')\,(acc')$$
$$(\alpha'\gamma\gamma') = (a'b'c')\,(abb')$$

Ha pedig a (4 alatti egyenletben $(\alpha\beta\beta')$, $(\alpha\gamma\gamma')$, $(\alpha'\beta\beta')$ é $(\alpha'\gamma\gamma')$ értékeit helyettesítjük, akkor lesz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (abc)(a'cc') & (a'b'c')(acc') \\ (abc)(a'bb') & (a'b'c')(abb') \end{vmatrix} = (abc)\,(a'b'c') \begin{vmatrix} (a'cc') & (acc') \\ (a'bb') & (abb') \end{vmatrix}$$

vagy még:

$$\Delta = (abc)\,(a'b'c') \begin{vmatrix} (abb') & (a'bb') \\ (acc') & (a'cc') \end{vmatrix}.$$

és így a 3) alatti egyenletnél fogva:

$$\Delta = (abc)\,(a'b'c')\,D \qquad (5.$$

Ezen egyenletből világos, hogy ha $D=0$, akkor Δ is egyenlő zérussal, azaz hogy az 1) alatti egyenletből a 2) alatti szükségképen következik, és ez volt bebizonyítandó.

A TESTEK FAJHEVÉRŐL ÉS VALÓDI HŐFOGHATÓSÁGÁRÓL HERRMANN EMILtől, a selmeczi bányász- és erdész-akadémia r. k. tanárától a POGGENDORFF-féle Annalok utolsó (VII-ik) pótkötetében (1875) egy értekezés foglaltatik, melyet mint magyarországi terméket (de magyar nyelven meg nem jelentet)*) meg kell ismertetnünk e lapok olvasóival.

Kiinduló pontúl szolgál a Clausius-féle egyenlet (Abhandlungen. 2-ik kötet 20-ik lap):

$$\left[\frac{\partial c_v}{\partial v}\right]_T = AT\left[\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right]$$

hol a zárjel alá irt betű azt a mennyiséget jelöli, mely a partialis differentiálásnál állandónak tekintetik.

H. ez egyenletet integrált alakban írja, s az integratio állandóját, mely csakis T függvénye lehet, k betüvel jelöli; e szerint:

---

*) Az értekezés előbb magyarúl iratott meg, és szerzője által még 1875. márczius havában beküldetett a »Magyar Mérnök- és Épitész-egylet közlönyé«-nek fölvétel végett; a szerkesztőség azonban nem adhatta ki a tisztán elméleti érdekü dolgozatot a gyakorlatiabb irányú szaklapban. Innen a »Természettudományi Közlöny« szerkesztőségéhez vándorolt, bebocsáttatást kérve. Az ismeretterjesztő folyóirat még kevésbbé vehette föl. Igy történt, hogy a magyar szerzőtöl magyar földön írt értekezésnek (alkalmas hazai organumunk még nem lévén) külföldre kellett vándorolni, hogy napvilágot láthasson. *Szerk.*

$$c = k + AT \int \left[\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right]_v dv.$$

hol is c_v a fajhő állandó nyomásnál, k a hőfoghatóság; a kettő különbsége megadja azt a belső munkát, melyet a meleg 1^0-nyi mérséklet emeléskor a testben végez.

E jelölésekkel élve, a közlött melegmennyiség igy irható:

$$dQ = \left(k + AT \int \left[\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right]_v dv.\right) dT + A\,T \left[\frac{\partial p}{\partial T}\right]_v dv.$$

Az entropia pedig:

$$E = \int \frac{k\,dT}{T} + A \left\{ \int \left[\frac{\partial p}{\partial T}\right]_v dv. \right\}$$

És az energia:

$$U = \int k\,dT + A \left\{ \int \left(T \left[\frac{\partial p}{\partial T}\right]_v - p \right) dv. \right\}$$

a kapcsos zárjelekkel azt jelezvén, hogy az illető mennyiségek még adott határok között veendők.

H. ezen egyenleteket előbb az állandó gázokra azután a telített állapotra alkalmazza. A halmazat változásakor, az anyag szerinte két határállapoton megy át; az egyiket *előhevített* állapotnak, a másikat *telítettnek* nevezi. Előhevített a szilárd test vagy folyadék akkor, ha a legcsekélyebb hőközlés állandó kül nyomás mellett, a test egy részét megolvasztja, illetőleg elpárologtatja, miközben a származott folyadék, illetőleg gőz telített állapotba jut. Fölteszi, hogy *a mérséklet és a nyomás az előhevített állapotban is független a térfogattól;* fölteszi, hogy *a nyomás az előhevített állapotban levő testnél is épen az a függvénye a mérsékletnek, mint a telített állapotban.* Ezeket föltéve, megmutatja, hogy a hőfoghatóság az előhevített allapotban is ugyanaz, mint a telített állapotban, s ezzel bebizonyítottnak tartja Clausius hypothesisét a hő foghatóság változatlan volta felől.

Abból, hogy telített állapotban a nyomás és a mérséklet független a térfogattól, H. azt következteti, hogy

$$\left[\frac{\partial v}{\partial T}\right]_p = \pm \infty$$

s hogy e szerint a fajhő állandó nyomásnál: c_p szintén végtelen. E jelenségre kisérleti bizonyítékokat is talál. De la Roche és Bérard a túlhevített vizgőz fajhevére állandó nyomás mellett 0,847, ellenben Regnault növekedő túlhevítésnél 0,4811, majd 0,4808, majd 0,4796 hőegységet kaptak. H. szerint sokkal hihetőbb, hogy a gőz fajheve állandó nyomás mellett igen gyorsan válto-

zik, mint azt föltételezni, hogy oly kiváló experimentatorok annyira elütő számokat kapjanak.

Végül megkisérti a hőfoghatóságot több anyagra számbelileg is meghatározni. E mellett fölteszi, hogy k állandó, s hogy c_p a mérsékletnek quadratikus függvénye. Igy azt találja, hogy a hőfoghatóság például a

$$vizre = 1{,}06$$

tehát ugyanennyi a jégre és a vizgőzre is, hiszen k független a halmazattól. De ez teljes lehetetlen. A vizgőz fajheve állandó nyomás mellett körülbelöl $^1/_2$ hőegység, s ebben, mint tudva van, benne foglaltatik a hőfoghatóságon (a mérséklet-emelésre fordított részen) kivül még a külső és belső munka is. Hogy lehetne tehát a rész kétszer akkora mint az egész?

Szily Kálmán.

A »Nouvelles Annales« egy föladata. — Az említett folyóirat 1875-iki évfolyamában H. Laurent mint bebizonyitandót közli a következő érdekes tételt, hogy t. i. e *végtelen sornak*:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\frac{d}{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}+\ldots,$$

hacsak összetartó, értéke mindig az egység, bármilyen a 0-tól különböző értékhez közeledjenek is az a, b, c . . . állandók. E tétel nagyon egyszerüen vezethető le.

A sor összetartásának föltétele, hogy

$$lim\left(\frac{n}{(a+1)\ldots.(n+1)}:\frac{m}{(a+1)\ldots.(m+1)}\right)<1,$$

hol a zárjelben álló kifejezésnek csakis absolut értéke jön tekintetbe, vagyis:

$$lim\frac{1}{m\left(1+\frac{1}{n}\right)}<1,$$

a miből láthatni, hogy a sor p. mindig összetartó, ha az a, b, c . . . mennyiségek bárminő positiv határhoz közelednek.

Vizsgáljuk a sornak előbb véges számú tagját. S-sel jelölvén összegüket és közös nevezőre hozva, lesz:

$$S=\frac{a(b+1)\cdots(n+1)+b(c+1)\cdots(n+1)+c(d+1)\cdots(n+1)+\cdots+m(n+1)+n}{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\ldots\ldots(m+1)(n+1)}$$

A nevező az első tényező szerint két tagra felbontható és következő alakba megy át:

$$a(b+1)(c+1)\ldots.(n+1)+(b+1)(c+1)\ldots.(n+1), \qquad 1)$$

A második tag, első tényezője szerint, ismét két tagra felbontható, úgy hogy az 1) alatti kifejezés következőbe megy át:

$$a(b+1)(c+1)...(n+1)+b(c+1)(d+1)...(n+1)+(c+1)(d+1)...(n+1), \quad 2)$$

Amint látszik, most a harmadik tag ismét felbontható annak első tényezője szerint, miáltal egy 4-dik tagra jutunk, melylyel hasonlóan járunk el. Ez így folytatható, míg végre a következőt nyerjük.

$$a(b+1)(c+1)\ldots(n+1)+b(c+1)(d+1)\ldots(n+1)+$$
$$+c(d+1)(e+1)\ldots(n+1)+\ldots\ldots+m(n+1)+n+1.$$

Legyen rövidség okáért:

$$a(b+1)\ldots(n+1)+b\,(c+1)\ldots.\,(n+1)+c\,(d+1)\ldots.\,(n+1)+\ldots$$
$$\ldots+m\,(n+1)+n=M,$$

akkor tehát

$$S=\frac{M}{M+1}$$

Ha most S értékét a tagok számának végtelenbe való növekedésénél akarjuk meghatározni, akkor e kifejezésnek határára kell átmennünk; de mielőtt ezt tennők, oszszuk el még a számlálót és a nevezőt M-mel; lesz akkor:

$$S=\frac{1}{1+\frac{1}{M}}.$$

Ha pedig a föntebbi feltételek ki vannak elégítve, akkor $lim\left(\frac{1}{M}\right)=o$, tehát valóban:

$$S=1$$

Hogy a sor összetartása esetében $\frac{1}{M}$ határértéke a o, azt könnyű belátni. Következzék ugyanis az állandók sorában n után p, q, ..., akkor a sor maradéka a következő:

$$\frac{1}{(a+1)(b+1)\ldots(m+1)(n+1)}\left[\frac{p}{p+1}+\frac{q}{(p+1)(q+1)}\ldots.\right]$$

Itt az első tényező nem más mint $\frac{1}{M+1}$; a második pedig mindenesetre véges mennyiség; e maradék azonban a sor összetartásánál fogva mindenesetre eltünik és így kell, hogy legyen:

$$lim\left(\frac{1}{M+1}\right)=o,$$

ez csak akkor történhetik, ha M végtelen lesz. De ekkor, amint állítottuk, $\frac{1}{M}$ szintén eltünik.

Bein Károly.
a középtanodai tanárképezde r. tagja.

Megjegyzés Laurent tételéhez.. E tétel az idézett folyóiratban (1875. aug.) a föntebbi czikkben adott megszoritás nélkül van közzétéve, hogy t. i. az a, b, c . . . állandók egy a 0-tól különböző határértékhez közeledjenek. Hogy e megszorítás nélkül azonban a tétel nem mindig helyes, már a következő példából is láthatni.

Legyenek az a, b, c, d, . . . mennyiségek értékei, hol q positiv valódi törtet jelentsen:

$$q, q^2 q^3 \cdots$$

akkor a sor:

$$\frac{q}{1+q} + \frac{q^2}{(1+q)(1+q^2)} + \cdots + \frac{q^n}{(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^n)} + \cdots$$

Az összetartási föltétel ki van elégitve, mert:

$$\frac{\frac{q^{n+1}}{(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^n)(1+q^{n+1})}}{\frac{q^n}{(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^n)}} = \frac{q}{1+q^{n+1}} < 1$$

A sor értéke pedig mindenesetre nagyobbittatik, ha az egységnél mindig nagyobb nevező helyébe mint új nevezőt az egységet vezetjük be. E szerint a fölvett sor értéke kisebb mint a következőé:

$$q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{q}{1-q}$$

a mi maga ismét kisebb az egységnél, hacsak $q < \frac{1}{2}$.

A sor ugyanis összetartó lehet akkor is, midőn $\frac{1}{M}$ határértéke nem 0, és ez esetben a sor összege az 1-től különbözik.

König Gyula.

IRODALOM.

Bessel Friedr. Wilh. Abhandlungen, herausgegeben von R. Engelmann. In 3 Bänden. I. Band. I.) Bewegungen det körper im sonnensystem. II.) Sphaerische astronomie. 4-edrét. Leipzig, Engelmann. 1876. Ára 19 m.

Amint e füzetekben már több alkalommal mondva volt, azok a tudósok kik tényleg a tudomány továbbfejlesztésével sikerrel foglalkoznak, ritkán találnak időt és kedvet tudományos kézikönyvek irására. Geniusuk és szorgal-

muk gyümölcseit tudományos folyóiratokban szétszórva hagyják az utókorra, s ennek jut azután a föladat, az elhintett aranyszemeket egy helyre összehordani, hogy mindenkinek kozzáférhetők legyenek. A hálás utókor legtöbbnyire teljesíti is e kötelességet s örvendetes esemény gyanánt üdvözli mindig, valahányszor a tudomány egyik koryphäusának művei egybefoglalva jelennek meg.

Bessel századunk legnagyobb csillagászainak egyike és kétségtelenül a legsokoldalúbb csillagász e században. Nem oly nagyszabású mathemathikus mint Laplace, Gauss vagy Hansen, és a megfigyelési és számitási ügyesség és kitartás tekintetében is lehetnek méltó versenytársai; de nem találunk senkit, kiben e tulajdonságok annyira összpontosítva fordúltak volna elő, mint ő benne.

A három kötetre tervezett mű első kötete fekszik előttünk. Mint igen méltó bevezetést, Bessel rövid életrajzát — nagyobb részt önmaga által irva — és kedves mellékletül Bessel arczképét tartalmazza. Jelentékeny emberek arczképei mindig érdekesek. Bessel gyönyörű szép szemei alig sejtetnék a látásnak azt a nagy élességét, melynél fogva fiatal korában képes volt két oly közeli csillagot, mint ε és 5 Lyrae — $3\frac{1}{2}$ ív percz távolságban — segédszer nélkül egymástól elkülönítve, kettős csillagnak látni.

Bessel Frigyes Vilmos született 1784. jul. 22-én Mindenben, hol atyja alsórendű hivatalnok volt. A 13—14 éves fiú a mindeni gymnasiumban nem tudott sehogysem megbarátkozni a latin nyelvvel; annál nagyobb hajlama volt számítgatni, miért is a kereskedői pályára kivánt lépni. 1799-ben Brémában csakugyan beállott egy ottani tekintélyes és nagykereskedő házba inasnak, hol a kiváló hivatás a csillagászathoz elég különös módon tört útat magának. Bessel, midőn látta, hogy vagyontalansága mellett mily rosz kilátásokat nyujt brémai foglalkozása, hajó-cargador (kereskedelmi ügynök) akart lenni valamely tengerentúli telepítvényre kiküldött expeditiónál. Ez által a nautikára és közvetve a csillagászatra lett vezetve. Mint teljes autodidakta, Bessel a mathematika tanulmányozására lett utalva, midőn annak jelentőségét a csillagászatra belátta. Első dolgozatát az 1607-iki üstökös pályájáról Olbers-nek mutatta be, ki a fiatal kereskedősegédben felismervén a nagy tehetséget, átlépését a tisztán tudományos irányba lehetségessé tette. A fiatal tudós először Schröter lilienthali magáncsillagdájába ment (1806), onnét pedig (1810-ben) a königsbergai ujonnan felállított csillagászati observatoriumba mint igazgató és egyetemi tanár. Az itt átélt 36 évet sokoldalú kutatásaival töltötte ki. 1844-ben kezdett az a baj fejlődni, mely 1846 márczius 17-én, életének 62-ik évében elragadta.

Bessel első dolgozatai az üstökösök pályájára vonatkoztak, s ezen égi testek különben később is többször foglalkoztatták, mint p. az előttünk fekvő első kötetben foglalt értekezésben: »Beobachtungen über die physische Be-

schaffenheit des Halley'schen Cometen etc.« Lilienthalban, hol Bessel jó tükörtávcsövek felett rendelkezett, a Saturnus rendszerével kezdett behatóan foglalkozni. 1807-ben Olbers felszólítására hozzáfogott Bradley greenwichi megfigyeléseiből 1750-re egy csillagjegyzéket levezetni. E munka oly eredményekre vezetett, melyek sok tekintetben még ma is a csillagászati ismeretek sarkigazságait képezik.

Bessel idejéig a mérő-eszközöket csak úgy fogták fel, mint eszközöket bizonyos czél elérésére. Bessel a figyelés művészetét egy új szemponttal gazdagította. Szerinte a figyelés eszközei ép úgy a megfigyelés tárgyát képezik, mint maga a megfigyelendő tünemény. Minden eszközt úgyszólván individuumnak kell tekinteni, melynek egyéni sajátságai, hibái stb. vannak. Először azokat kell tanulmányozni, hogy a megfigyelés eredményeiből kiküszöbölhetők legyenek. Eme tökéletesen új szempont azóta nemcsak az astronomiában, hanem minden mérő természettudományban is alapvető igazságnak tekintetik. Ezen az úton sikerült Bessel-nek meglehetős gyarló eszközökkel pontos eredményekre szert tenni, és sikerült neki másfelől kitünő eszközöket tervezni, mint például az inga méréseinél használtakat.

Új korszakot képez a megfigyelés művészetében az az esemény is, hogy a Fraunhofer-féle heliométer 1829-ben Bessel kezе alá jútott. Fraunhofer eme mesteri műve Bessel-t új vizsgálatokra buzdította, különösen a kettőscsillagok kiváló mértékben érdekes problémái kezték foglalkoztatni. Ide tartozik a 61 Cygni távolságának megmérése, a Sirius és Procyon csillagok saját mozgásának vizsgálata. Kisebb fontosságúak Bessel tisztán mennyiségtani dolgozatai; ezeknél ő rendesen csak csillagászati czélokból indúlt ki. Sokkal fontosabbak a geodäsiába és a föld-ph sikájába vágó kutatásai Dolgozatai a fold sphäroid valódi alakjáról és a másodperczes inga hoszszáról classicus és mintaszerű vizsgálatok.

A mily rendben Bessel az egyes kérdésekhez fogott, melyeknek megoldására egy hosszú és tevékeny életet szentelt, abban a rendben követi Engelmann kiadása a fejlődés útját, és azonkivül az egyes értékezéseket szak szerint rendezi, a mi tetemesen megkönnyíti használatukat. Az egyes értekezések sorrendje tehát egyfelől szakszerinti, más oldalról pedig geneticus. E szerint 8 csoportot állított fel.

I. kötet:

1. A testek mozgása a naprendszerben, *2.* gömbi astronomia.

II. kötet:

3. Az eszközök elmélete, *4.* stellarastronomia, *5.* mennyiségtan.

III. kött:

6. Geodäsia, *7.* physika és *8.* vegyesek

Az elrendezés úgy történt, hogy minden egyes csoportban a dolgozatok lehetőleg azon rendben következzenek egymásra, a mint Bessel maga velök foglalkozott, hogy így e hatalmas elmének fejlődését némileg visszatükröztessék. Az egész kiadás nem lesz — és a meddig kormány vagy tudományos társulat nem vállalja el a kiadással járó költségeket — nem is lehet teljes kiadás. A jelen gyüjtemény kiadójának terve és czélja: az apróbb értekezések és a nagyobb dolgozatokból azt kiválasztani, a minek maradandó becse van. Ide tartoznak mindenek előtt a tiszta mennyiségtanból, a physikai és az elméleti csillagászatból való dolgozatok. Továbbá a gömbi astronomia, a stellarastronomia és az eszközök elméletébe vágó értekezések, valamint több dolgozat a geodaesia és physika köréből. Végre harmadik sorban azokat a munkálatokat vették tekintetbe, melyek vagy tiszta figyelési adatokat tartalmaznak, vagy nagyobb dolgozatok közt összekötő lánczszemekül szolgálnak. Egészen kizárattak szerzőnk népszerü müvei és előadásai — ezekhez úgy is könnyen hozzáférhetni — továbbá minden olyan számítási vagy észlelési eredmény, mely katalogus, táblák stb. alakjában megvan. Némely nagyobb dolgozat terjedelménél vagy azon körülménynél fogva hagyatott ki, mert külön kiadásban megjelent és még elég könnyen kapható.

A jelen első kötet már magában véve is egy egész sor rendkivül érdekes dolgozatot tartalmaz; közülök csak egy párnak a czimét említjük meg:

»Beobachtungen über die physische Beschaffenheit des Halley'schen Cometen und dadurch veranlasste Bemerkungen.«

»Bemerkungen über mögliche Unzulässlichkeit der die Anziehungen allein berücksichtigenden Theorie der Cometen.«

»Untersuchungen über den Planeten Saturn, seinen Ring und seinen vierten Trabanten« és a következők:

»Theorie des Saturnsystems.«

»Über die astronomische Strahlenbrechung.«

»Über Refraction.«

»Untersuchung der Grösse und des Einflusses des Vorrückens der Nachtgleichen« (pályakoszorúzott mű).

»Über die Neigung der Ebene des Saturnringes.«

»Über die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe«, és számos más.

Észrevételeinket a szóban forgó könyvről összefoglalva, örömmel üdvözöljük e gyüjteményt, mely egy olyan tudós müveit teszi könnyen hozzáférhetővé, ki lángelméje és sokoldalúsága miatt magasan emelkedik ki nehányadmagával századunk tudósai közül.

Heller Ágost.

J. TODHUNTER, AN ELEMENTARY TREATISE ON LAPLACE'S FUNCTIONS. LAMÉ'S FUNCTIONS, AND BESSEL'S FUNCTIONS. London, Macmillan and Co. 1875. Egy kötet 8-adrét. 348 l. Ára 10 sh. 6 d.

TODHUNTER neve egyike a legjobb hangzásuaknak az angol tankönyvirodalomban. Munkáinak sorozata átkarolja a mathematikai tudományok mindazon részeit, melyek hazájának egyetemi tanfolyamába állandóan vannak fölvéve. Mindannyian kitünően meg is felelnek czéljuknak, és ha Angolországon kivül nem igen terjedtek is el, az bizonyára nem tulajdonítható azon, egy első tankönyvben majdnem szükséges egyoldalúságnak, hogy a nehézségek eltakarása által a tanuló előtt még ott is merev, változatlan rendszer áll, hol a tudományos munka még javában foly, Hisz ez más ily munkákban még sokkal nagyobb mértékben van meg! Való az, hogy TODHUNTER, de még inkább WILNIAMSON a differentiál- és integrál-számításra vonatkozó munkáinak átültetése bármily continentális irodalomra nagy nyereség volna. (Csak az első van meg orosz fordításban.)

A most megjelent munka érdekét még emeli az is, hogy ez az első kisérlet, annak tartalmát ily elemi tankönyvben összeállítani. HEINE, NEUMANN és LOMMEL munkái ugyanis, melyek közül az első a LAPLACE-, a másik kettő a BESSEL-féle függvényekre vonatkozik, oly monographiák, melyek az értekezéstől csakis nagyobb terjedelmük által különböznek. Sőt még LAMÉ kitünő munkái is, ámbár franczia modorban irva, alig ajánlhatók első tanulmányozásra.

TODHUNTER e kötetéből, mely mint az integrálszámítás folytatása van gondolva, az olvasó könnyen sajátíthatja el mindazt, a mi ez alakzatok mathematikai elméletében alapvető, és aztán már könnyen tér át a tulajdonképeni függvénytani vizsgálatokra, vagy, a mi ez esetben fontosabb, a mathematikai physika azon kérdéseire, melyekhez a számítást csak e függvények bevezetése tette hozzáférhetővé. Ilyenek t. i. mind azon tárgyalások, melyek másodrendü partial-differentiálegyenletre vezetnek.

Ez pedig oly tere a mathematikai physikának, melyen még több nemzedék számára nyilik teendő. K. GY.

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

6. Az $A\ B\ C$ háromszögben meghúzzuk a belszögeket felező egyeneseket, továbbá még három tetszőleges egyenest, mely a háromszög A, B, C csúcsain keresztül megy és egymást ugyanazon P pontban metszi. Bizonyitassék be, hogy azon egyenesek, melyek a szögeket felező egyenesekkel a háromszög csúcsaiban ugyanazon szögeket képezik, mint az $A\ P$, $B\ P$ és $C\ P$

egyenesek, egymást szintén *egy* P' pontban metszik. — Legyenek továbbá az $A\ B\ C$ háromszögben a $B\ C$, $C\ A$ és $A\ B$ oldalak egyenletei: $u = o$, $v = o$ $w = o$; ha a P pont a következő görbét írja le: $\alpha u^m + \beta v^m + \gamma w^m = o$, kérdés, mi lesz a P' pont mértani helye? (Hunyady.)

Megoldás Scholtz Ágoston, főgymnasiumi-igazgató tanártól.

Legyenek a, b, c a P pontnak $u = o$, $v = o$, $w = o$ összrendezős háromszögre vonatkoztatott összrendezői, akkor AP, BP, CP egyenesek

$$\frac{v}{b} - \frac{w}{c} = o, \frac{w}{c} - \frac{u}{a} = o, \frac{u}{a} - \frac{v}{b} = o.$$

Azokat az egyeneseket pedig, melyek az $A\ B\ C$ háromszög belső szögeit felező egyenesekkel a háromszög csúcsaiban ugyanazon szögeket képezik,

$$bv - cw = o,\ cw - au = o,\ au - bv = o$$

egyenletek fejezik ki. Mert például az A csúcson keresztül menő $bv - cw = o$ egyenes AB $(w=o)$ oldallal épen akkora szöget képez, mint $\frac{v}{b} - \frac{w}{c} = o$ egyenes AC $(v=o)$ oldallal. És minthogy az utolsó egyenletek jobb oldalainak összege zéróval egyenlő, azért a nekik megfelelő egyenesek *egy* (P') pontban metszik egymást.

Az utolsó három egyenletből egyúttal azt látjuk, hogy P' pont összrendezői $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, tehát P pont összrendezőinek reciprok értékeivel egyenlők. Ebből következik: ha P pont az

$$\alpha u^m + \beta v^m + \gamma w^m = o$$

görbét írja le, akkor P' pont mértani helye:

$$\frac{\alpha}{u^m} + \frac{\beta}{v^m} + \frac{\gamma}{w^m} = o.$$

Helyén látom, néhány specialis esetet felhozni. Ha P pont $\alpha u + \beta v + \gamma w = o$ egyenesen fut végig P' pont helye:

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w} = o$$

azaz ABC háromszög körülirt kúpszelet. E kúpszelet a körülirt körré válik, ha AP, BP, CP egyenesek P pontnak minden fekvésében párhuzamosak, vagyis ha P a végtelen távol egyenesen fut végig. Mert ha λ, μ, ν betükkel jelöljük ABC háromszög szögeit, a végtelen távol egyenes:

$$\mu . \sin \lambda + v . \sin \mu + w . \sin \nu = o$$

s azért P' pont mértani helye ez esetben

$$vw \sin \lambda + wu \sin \mu + uv \sin \nu = o.$$

Ez pedig ABC háromszög körülirt kör egyenlete.

Hogy $m=1$ esetben P' pont mértani helye kúpszelet, tisztán mértani úton is bebizonyíthatjuk, hivatkozván a kúpszeletnek projectiv sugárkévékkel való származására. Legyen P_1, P_2, P_3, P_4 a P pontnak négy tetszőleges fekvése az egyenesen, melyet P pont befut és P_1', P_2', P_3', P_4' a P' megfelelő négy fekvése, akkor:

1.) $(A; P_1, P_2, P_3, P_4) = (B; P_1, P_2, P_3, P_4) = (C; P_1, P_2, P_3, P_4)$,

mert AP_i, BP_i, CP_i $(i = 1, 2, 3, 4 \ldots.)$ sugárkévék perspectivek:

2.)
$$(A; P_1' P_2' P_3' P_4') = (A; P_1 P_2 P_3 P_4)$$
$$(B; P_1' P_2' P_3' P_4') = (B; P_1 P_2 P_3 P_4)$$
$$(C; P_1' P_2' P_3' P_4') = (C; P_1 P_2 P_3 P_4),$$

mert az AP_i és AP_i'; BP_i és BP_i'; CP_i és CP_i' egyenesek által alkotott sugárkévék congruensek. Az 1.) és 2.) alatt álló egyenletekből ered:

$$(A; P_1' P_2' P_3' P_4') = (B; P_1' P_2' P_3' P_4') = (C; P_1' P_2' P_3' P_4'),$$

azaz P' mértani helye kúpszelet.

Egy második megoldást vettünk még Klug Lipót tanár úrtól, ki a föladatban kijelentett viszonyokra szorítkozva, ezeket hasonló úton vezeti le.

Szerk.

---

4. Bizonyíttassék be, hogy az akárhányadrendű gyorsulás derékszögű alkotóinak négyzeteiből képezett összeg

$$\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)^2$$

független a derékszögü koordináta-rendszer választásától. (Szily.)

E föladat megoldását és pedig teljesen megegyező úton beküldötték: Bäumel Ede, Klug Lipót, és Winter József urak.

Legyen $OXYZ$ és $O'X'Y'Z'$ két orth. rendszer; az utóbbinak kezdőpontja az előbbi rendszerre vonatkoztatva a, b, c összrendezők által adva; és használjuk a következő rövidítéseket:

$\cos(X'X) = \alpha_1$ $\quad \cos(X'Y) = \beta_1$ $\quad \cos(X'Z) = \gamma_1$
$\cos(Y'X) = \alpha_2$ $\quad \cos(Y'Y) = \beta_2$ $\quad \cos(Y'Z) = \gamma_2$
$\cos(Z'X) = \alpha_3$ $\quad \cos(Z'Z) = \beta_3$ $\quad \cos(Z'Z) = \gamma_3$

Az elemző térmértanból ismeretes, hogy ekkor többek között

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$
$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \qquad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0,$$
$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1, \qquad \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0.$$

Ha ezek után x, y, z egy pont coordinátái az első rendszerben, melynek a másik rendszerben x', y', z' felelnek meg, akkor tudjuk, hogy

$$x - \alpha = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'$$
$$y - \beta = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'$$
$$z - \gamma = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'$$

Hogy az xyz pontnak gyorsulását az $X'Y'Z'$ rendszerben kifejezve nyerjük, differentiáljuk ezen 3 utolsó egyenletet n-szer egymásután t szerint; akkor minthogy már az α, β, γ értékek állandók, lesz:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \alpha_1 \frac{d^n x'}{dt^n} + \alpha_2 \frac{d^n y'}{dt^n} + \alpha_3 \frac{d^n z'}{dt^n},$$
$$\frac{d^n y}{dt^n} = \beta_1 \frac{d^n x'}{dt^n} + \beta_2 \frac{d^n y'}{dt^n} + \beta_3 \frac{d^n z'}{dt^n},$$
$$\frac{d^n z}{dt^n} = \gamma_1 \frac{d^n x'}{dt^n} + \gamma_2 \frac{d^n y'}{dt_n} + \gamma_3 \frac{d^n z'}{dt^n}.$$

Ha már most ezeket négyzetre emeljük, összeadjuk, és a fentebb idézett egyenleteket tekintetbe veszszük, azt nyerjük, hogy:

$$\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)^2 = \left(\frac{d^n x'}{dt^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n y'}{dt^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n z'}{dt^n}\right)^2$$

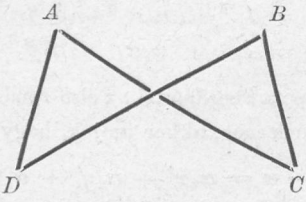
a mely egyenlet mutatja, hogy a kérdéses kifejezés a coordináta-rendszer áttétele következtében nem szenved változást.

FÖLADATOK.

8. Erősitsünk egy forgó korongra, a sugár mentében, hengeralakú egyenes csövet, melynek egyik vége A zárt, másik vége B nyilt legyen. A zárt vég a korong középpontjába essék, úgy, hogy forgatás közben B kört írjon le A körül, mint középpont körül. Ily körülmények között a középpontfutó erő módosítani fogja a lég nyomását a cső belsejében. Mily törvény szerint változik e nyomás A-tól B felé?

(B. Eötvös Loránd.)

9. Az $ABCD$ idomban, hol $AD=BC$ és $AC=BD$, húzzunk AB-hez egy párhuzamos vonalt, mely a négy oldalt a, b, c, és d pontokban metszi; ha



ezen négy pont közül egyet, például az a-t, forgási középpontnak veszszük és a hozzá harmadik pontot — c-t — egy oly körben vezetjük, mely az a ponton átmegy, akkor a közbe fogott b pont mértani helye egyenes. (Hart egyenes vezetőjének elve.) (Nagy Dezső.)

10. Egy félgömbalakú szilárd katlan sima belsejéhez támaszkodik egy adott (l) hosszaságú, adott (Q) súlyú homogén pálcza, a katlan síma karimájára dőlve s adott ($l-a$) hosszaságú részszel kinyúlva belőle. Mekkora a pálcza hajlása a vízszinteshez? és mekkorák a nyomások a támaszpontokra?

(Szily).

Kérjük olvasóinkat a 2-ik füzetben a következő sajtóhibákat helyreigazítani:

A 42-ik lapon a 2) egyenlet jobb fele legyen $\zeta v^2 df$.

» 43-ik » az 5) egyenletek másodikában és harmadikában a baloldal legyen dQ illetőleg dR.

» 43-ik » a 6) egyenlet nevezőjében $\frac{1}{r}$ helyett $\frac{1}{r^2}$ teendő.

» 44-ik » a V értékében $\frac{\partial z}{\partial r}$ helyett $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$ teendő.

» 44-ik » a 7a) egyenletben ξ helyébe ζ.

» 46-ik » a legfelső egyenlet nevezője négyzetre emelendő.

» 46-ik » a 11) egyenletben a határok fölcserélendők.

» 47-ik » a $\frac{d^2V}{d\eta^2}$ kifejezésben $10\lambda+\eta 3\lambda^2$ helyébe $10\lambda\eta+3\lambda^2$.

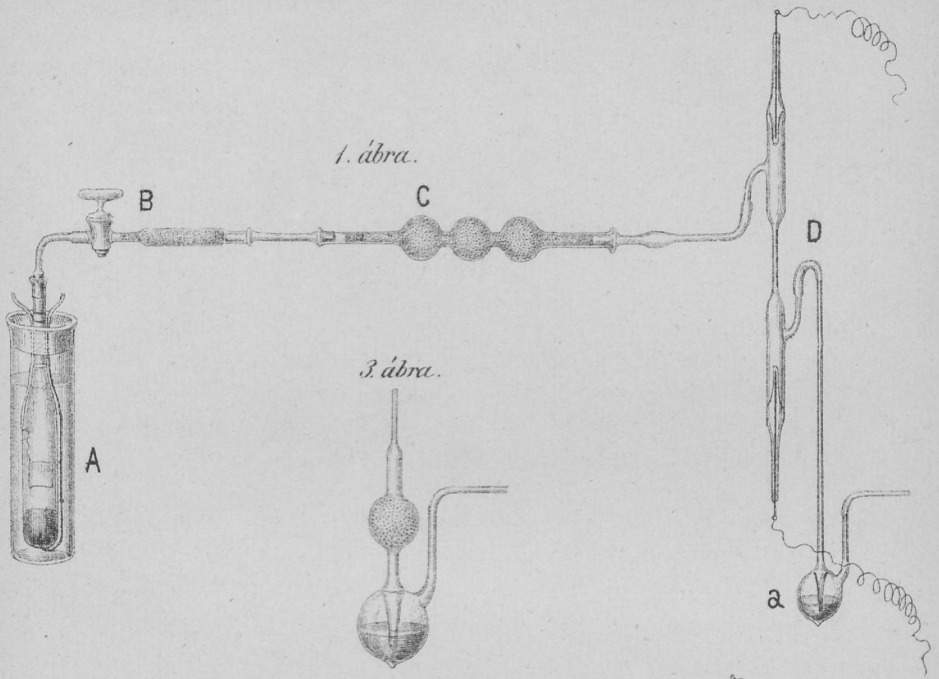
Az 53-ik » az utolsóelőtti képletben α helyett α^n.

» 53-ik » az utolsóban $<$ helyett $>$.

A 61-ik » a $\frac{\varrho}{2}$ értékében $\cos a4$ helyett $\cos\theta$

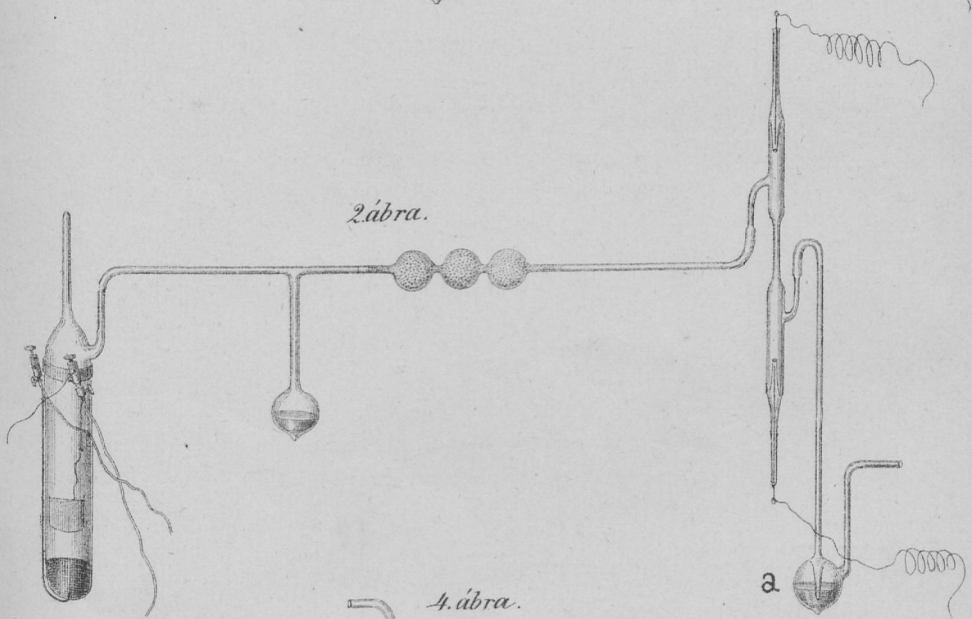
Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

1. ábra.

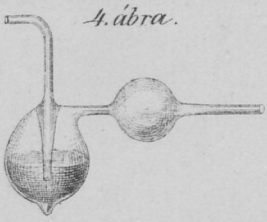


3. ábra.

2. ábra.



4. ábra.



Természet. ut. Dr. Thanhoffer L. 1876.

Lássuk, mily hőfok-változás okoz a lengési-időben $\frac{1}{36.000}$-résznyi változást? — Ebből majd megitélhetjük, hogy tényleg várhatunk-e ily pontosságot, és hogy a — rendesen elkerülhetetlen — hőfok-változás nem rontja-e el az eredményt? — Használjuk a következő jelöléseket. Legyen T a lengés tartama, dT a t^0 által okozott változása, l az inga áttett hossza, dl a t^0 által okozott változása; g a szabad esés gyorsulása;

akkor

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Innét

$$dT=\frac{\pi dl}{2\sqrt{gl}}$$

Legyen α az inga anyagának tágulási együtthatója, tehát:

$$dl = l\alpha t$$

akkor:

$$dT = \frac{\pi}{2\sqrt{gl}} l\alpha t$$

és a keresett hőfok:

$$t = \frac{2\,dT}{\pi\,\alpha T.}$$

Ha, mint szokás, másodperczes ingával dolgozunk, T annyi mint 1 vagy legalább közel 1, s

$$t = \frac{2\,dT}{\pi\alpha} = 0{\cdot}6364\,\frac{dT}{\alpha}$$

Tegyük fel, hogy az inga sárgarézből készült; úgy:

$$\alpha = 0{\cdot}000018$$

és mert

$$dT=0{\cdot}000027=\frac{1}{36.000}$$

azért:

$$t = 0{\cdot}6364.\frac{3}{2} = 0{\cdot}954.$$

Tehát körülbelül 1^0 C okoz a lengési időben olyan változást, a milyent az egybevágások módjával még észrevehetünk. Már némileg megfelelő helyiségekben is elérhető, hogy egy óra alatt a hőfok nem változik többel mint 1 fokkal; s így az említett pontosság elérése lehetséges, a nélkül, hogy azt a lehető legnagyobb elővigyázatot kellene alkalmazni, mely alapmeghatározásoknál elkerülhetetlen.

A térre vonatkozó mérések közül itt leginkább csak a hosszmérést kell figyelembe vennünk, mert a felület- és térfogat-meghatározások vagy hosszmérések vagy mérlegelés utján szoktak eszközöltetni.

Mióta a pontos hosszmérések górcsövek és csavarok segélyével történnek, azóta előbb nem gyanított pontosságot lehet elérni. A méter hosszának megállapításánál még a milliméternek ezredrészeire (a mikronra) is tekintettel akarnak lenni. Egy mikron a méternek milliomadik része; e szerint a méter megállapítása körülbelül *0·000001*-adrész pontossággal történik. — Megjegyzendő azonban, hogy ez csak külön felszerelés mellett, comparatorok segélyével és csak ugy érhető el, ha a hőfok pontosan tekintetbe vétetik. Mert például sárgaréznél már $\frac{1}{18}$ fok okoz egy mikron-nyi változást.

Egyéb tudományos czélú hosszmérések nem hajtatnak végre ily nagy pontossággal s például a kathetométerrel alig érhetünk el $\frac{1}{50,000}$-nél nagyobb pontosságot.

A szögmérések, lényegben véve, hosszmérésen alapúlnak, s így nem szükséges ezeket külön figyelembe venni.

Számos más, szabatos meghatározás alapszik az eddig felemlített müveleteken. Igy, a delejes és villanyos erők meghatározása hosszmérésen és időmérésen (illetőleg szögmérésen), a fény hullámhosszának megállapitása szög- és hosszmérésen; a hőfok- és hőmennyiség mérések térfogat meghatározásokon alapúlnak stb. De hátra van még a méréseknek egy nagy csoportja, a súlymérések vagy általánosabban a mérlegelések csoportja. A mérlegelésnél elérhető szabatosság meghaladja minden más közvetetlen meghatározás pontosságát.

Ugyanis aránylag könnyen lehet súlyméréseket az egésznek egy tiz milliomad részére pontosan végrehajtani. Sőt — ha csak a mérlegelés műtételét veszszük tekintetbe, nem törődvén azzal, hogy a test súlya idővel változik-e — a pontosságot még tovább is fokozhatjuk. E mellett a mérlegelés nem kiván sok időt és fáradságot, mert egy mérést 4—5 percz alatt elvégezhetünk, ha csupán az ezredrész grammokat (milligrammokat) kivánjuk pontosan, s 15—20 percz alatt biztosan elvégezhet jük a mérlegelést tized-milligrammokra pontosan.

Ezekhez járúl még az a körülmény is, hogy a mérlegelések sok esetben alkalmazhatók: mindenféle chemiai és physikai változások kimutatására, nevezetesen, a súlyok összehasonlitásán kivül, térfogat-mé-

résekre (fajsuly és gőzsürüség), kiterjedési együtthatók meghatározására hőfok-, hőmennyiség-, légnyomás-mérésre s még számos más esetekben.

Az említett okoknál fogva nem lesz fölösleges, ha figyelmünket ez alkalommal a mérlegelésekre irányítjuk.

2. ELNEVEZÉSEK

Az itt szóban forgó mérlegelések mind az ismeretes szerkezetű kétkarú mérlegre vonatkoznak.

A rajta végzett műtételt mérlegelésnek nevezzük. A súlymérés körülbelül ugyanazt jelenti; de hajlandók vagyunk súlymeghatározás vagy súlymérés alatt inkább a légüres térben eszközölt mérlegelést érteni, vagy a levegőben történő mérést *és* a szükséges számításokat, melyek által a — légüres térre vonatkozó — súlyt megállapítjuk; ezek összességét értjük a súlymérés alatt.

A »tömeg-mérés«-t nem használjuk, azért mert — habár rendesen a mérlegelés tömegek megállapítására használtatik — az általánosan elterjedt fogalmak szerint, a mérleg egyensúlyi állapota nem a tömegektől, hanem a forgási vagy statikai nyomatékok nagyságától függ; mert az egyenlő karú mérlegen közvetetlenül csak azt tapasztalhatjuk, hogy a felrakott két test súlya egyenlő, s a tömegek egyenlőségére csak ugy és csak annyiban következtethetünk, mert — s amennyiben tudjuk, hogy a súly a tömeggel függetlenül az anyagok minőségétől arányos.

3. A HELYES MÉRLEGELÉS ALAPFELTÉTELEI.

Hogy helyes mérlegelést lehessen eszközölni, arra nem elég a jó mérleg, hanem egyéb feltételeknek is teljesítve kell lenni. Szükséges ugyanis, hogy a mérleg alkalmas helyen legyen felállítva, és hogy helyesen kezeltessék.

A felállítást illetőleg nemcsak arra kell ügyelni, hogy szilárdan álljon, — ami fali asztalon könnyen elérhető — hanem különösen arra is súlyt kell fektetni, hogy ne melegedjék egyoldalúan, s ne álljon légáramban. Aki nem foglalkozott behatóan mérlegelésekkel, alig sejtheti, hogy mennyire érzékeny a jó mérleg a melegedés és légáram irányában. Ha kezünket egy pár másodperczig közel tartjuk az egyik csészéhez anélkül, hogy valamit megérintenénk, a kéz eltávolítása után rendszerint jelentékenyen más nyugalmi helyzetet találunk, mint azelőtt.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

Az ezen felhevülés és légáramlás okozta hatás csak lassan tünik el. — A mérleg egyik oldalán alkalmazott gyertya órákig tartó változást okozhat, mely a mérleg érzékenységét nem engedi érvényre jutni, mivel az eredmények folyton változnak.

A melegedés és a légáramok ezen jelentékeny befolyása miatt mindig nagy gondot kell a helyes megvilágításra fordítani. Ha gyertyát vagy lámpát kell használnunk, akkor lehetőleg távol — kevéssé oldalt — alkalmazzuk és lencse által vetjük fényét az osztályzatra; minél jobban van ez megvilágítva, annál pontosabban történhetik az észlelés.

Nyitott szekrénynél természetesen egyátalán nem várhatunk biztos eredményt. Nem ritkán tapasztalhatjuk, hogy a mérleg nyugalmi helyzete egészen más, mikor szekrénye nyitva vagy mikor zárva van. Ezért csak addig hagyjuk nyitva a mérleg szekrényét, míg a csészébe kell súlyokat rakni, ellenben, midőn a mérleg rúdján alkalmazzuk a legkisebb súlyokat »lovasok« alakjában, akkor zárt szekrénynél dolgozunk, ha a mérlegnek arra való kivülről kezelhető emelője van, különben pedig időközönként kinyitjuk a mérleget, valahányszor a lovast el kell tolni, de a nyugalmi helyzet megállapításának mégis zárt szekrény mellett kell történnie.

Hasonló figyelmet kell a mérleg minden részének tisztántartására és különösen a megakasztására fordítani. Minden finom mérleg megakasztó művel van ellátva, melyet egy kiálló gomb segélyével lehet kormányozni, s melynek a mérleget mindig alá támasztva kell tartania, kivévén csak a súlyok összehasonlítására és a nyugalmi helyzet megállapítására kivánt időt.

Mindezek a dolog természetéből folynak, s kétségkivül mindenki feltalálja a helyes módokat, ha elfogulatlanúl és kellő nyugodtsággal tanulmányozza a mérleg tulajdonságait: mégis hány mérés történik hibásan, csak azért mert az észlelő nem fordít elég gondot az említett körülményekre?

Hány észlelő irja fel a talált súlyt a negyedik tizedes jegyig s nem gondolja meg, hogy már a harmadik sem biztos, mert a megmérendő testet előbb ujjai közt tartotta, s az így támadt felfelé irányuló légáram miatt talán egy fél óráig mindig könnyebbnek látszik mint a milyen valóban.

4. A MÉRLEG ELSŐ KELLÉKE: A JÓSÁG.

Ha valamely mérleggel megbizható eredményre akarunk szert tenni, mindenekelőtt jóságáról kell meggyőződést szereznünk.

De mit követeljünk a mérlegtől, hogy jónak nevezhessük? Nem többet és nem kevesebbet mint azt, hogy adatai állandók legyenek, hogy bizonyos változatlan megterhelés mellett mindig ugyanazon nyugalmi helyzetre térjen vissza. Ha a mérleg e kelléknek megfelel, akkor rosznak nem nevezhetjük, bármilyen legyen is egyébként a szerkezete, mert akkor helyes mérlegelést végezhetünk rajta, csak a módot kell czélszerűen megválasztani. Ellenben, ha nyugalmi helyzete idővel változik, anélkül hogy a felrakott súlyokon változtattunk volna, akkor a mérleg rosz, adatai nem megbizhatók.

A mérlegnek ez a tulajdonsága feltételezi az eszköz szerkezetének szilárdságát, és a mérleg három élének párhuzamos voltát.

Valamely mérleg jóságának megvizsgálása abban áll, hogy időközönként többször egymásután észleljük a mutató nyugalmi helyzetét, mialatt a csészében súlyok foglaltatnak — természetesen úgy, hogy a 3. pontban felemlített káros körülmények elhárítva legyenek. Ez a mütétel, mely minden később meghatározásnál ismétlődik, mindenek előtt magára vonja figyelmünket.

5. A NYUGALMI HELYZET MEGÁLLAPÍTÁSA.

A következő két mód szokott használtatni: vagy megvárjuk a mérleg nyugalmi állapotát, és megnézzük, hogy a mutató az osztályzat melyik pontja előtt áll — illetőleg mely pont körül végez igen kis lengéseket — vagy lengés közben történik a meghatározás.

Az utóbbi eljárás kényelmesebb, gyorsabb és pontosabb; hátránya az előbbihez képest csak az, hogy számitani kell.

Ha lengés közben történik a nyugalmi helyzet meghatározása, akkor zsinórmértékül szolgáljon a szabály, hogy mindig páratlan számú leolvasásokat végezzünk, 3 vagy 5 vagy 7-et, — ezáltal a légellenállás befolyásától ment eredményt nyerünk. Ezen állítás szigorúan véve csak annyiban helyes, amennyiben a légellenállás minden egyes lengést csak kevessé csökkent — s ezért nem is szabad szerfelett nagy lengéseket használni. Elég, ha a lengések 4 és 6 osztályrész között ingadoznak, sőt kisebbek is lehetnek, de mindenesetre közel egyenlők legyenek valamennyi összetartozó meghatározásnál.

A nyugalmi helyzetet a leolvasásokból következőképen számitjuk ki.

A páratlan sorszámú meghatározásokból számtani közepet veszünk, ugyszinte a párosakból is, a nyert két adat közt középen van a nyugalmi helyzet. — *P.* Az eltéréseket az osztályzat zérus pontjától

számítván s a jobboldali leolvasásokat +, a baloldaliakat — jellel jelölvén, tegyük fel, hogy a következő kitéréseket jegyeztük volna fel:

1. — *4·5*	*2.* + *3·2*
3. — *4·3*	*4.* + *3·1*
5. — *4·0*	

akkor a számtani középértékek:

— *4·27* + *3.15.*

A nyugalmi helyzet középen van ezen két szám közt, *az ennek megfelelő leolvasást megkapjuk, ha a két szám algebrai összegét felezzük* t. i.

$$\frac{-4{\cdot}27 + 3{\cdot}15}{2} = -\frac{1{\cdot}12}{2} = -0{\cdot}56.$$

A nyugalmi helyzet eszerint *0·56* osztályrészszel esik a zérus ponttól balfelé, amint a negativ előjelből kitünik.

Törekedjünk most belátni, hogy az imént követett eljárás helyes eredményt ad-e? — Egyszerüség kedvéért képzeljük, hogy csak 3 észlelés történt és pedig:

1. — *4·5*	*2.* + *3·2*
3. — *4·3*	

Induljunk ki a második állásból + *3·2*. Mialatt a mutató eljut — *4·3*-ba, a közben mozgása csökken. Ha tudnók, hogy mennyivel, akkor azt hozzá kellene adni *4·3*-hoz, hogy a légellenállástól független eredményt nyerjünk. De az észlelés alapján kiszámitjuk a csökkenést, mely *két* lengésnek megfelel (*1*-től 2-ig és 2-től *3*-ig) ez nem más mint *4·5* — *4·3* = *0·2*. Tehát *0·1* lesz az egész lengésnek megfelelő csökkenés és igy —*4·3* helyett —*4·4*-et kellett volna észlelnünk. Azonban feltünik, hogy ugyanezen számot nyerjük egyszerüen azáltal is, ha —*4·5* és — *4·3* számtani közép értékét alkotjuk.

Meg van tehát az a lengés, mely ugy tekinthető, mintha légellenállás nélkül végeztetett volna s mely egyenértékü az adott két lengéssel. A kijavított lengés t. i. ez:

— *4·4* + *3·2*

Csak az a kérdés, miképp találhatjuk meg a közép állást. E végre képzeljük a lengéseket csökkentve mindaddig, míg a mutató az egyik oldalon épen csak a *0* pontig mehet, azon túl már ne menjen. Esetünkben *3·2* osztály résszel kell a mozgásnak mindkét oldalon kisebbedni, hogy ez el legyen érve. Akkor a kitérések lesznek:

$$-(4{\cdot}4 - 3{\cdot}2) \qquad +(3{\cdot}2 - 3{\cdot}2)$$

azaz:

$$-1{\cdot}2 \qquad +0.$$

Ha már most megvárnók, míg a nyugalmi állapot létrejő, akkor a két oldalon egyenlő fogyatkozásnak kellene mutatkoznia, a nyugalmi helyzet tehát $-1{\cdot}2$ és $+0$ közt középen, azaz -0.6-nál lesz.

Vegyük már most tekintetbe az előttünk a baloldalon álló számokat s irjuk őket így

$$-4{\cdot}4 + 3{\cdot}2$$

ez a mennyiség felezve adja a nyugalmi helyzetet

$$\frac{-4{\cdot}4 + 3{\cdot}2}{2} = -0{\cdot}6$$

tehát a nyugalmi helyzetet megkapjuk, ha a két (kijavított) kitérés algebrai összegét felezzük.

Azon esetre, ha a mérleg mozgása kevéssé csökken, a kijavított kitérések helyett két egymást követő leolvasást használhatunk.

A megfigyelés módját illetőleg, a kivánt pontosság szerint különféle eljárást követhetünk.

Az észlelő vagy közvetetlenül a mérleg előtt foglal helyet, vagy a távolból távcső segítségével észlel. Az utóbbi esetben vagy közvetetlenül az osztályzatra s az előttünk járó mutatóra irányítjuk a távcsövet, vagy pedig tükörleolvasást alkalmazunk. Ha t. i. a legnagyobb pontosságot kivánjuk elérni, akkor a mérleg rúdjára tükröt erősítünk, mely körülbelül merőleges a mérleg karjaira; a távcsövet a tükörre irányítjuk (a szekrény oldalán lévő párhuzamos lapú üvegen keresztül) s egy a távcső közelében lévő függélyes osztályzatnak visszatükrözött képét észleljük. A távcső vizszintes hajszála pótolja ez esetben a mutatót; s a nyugalmi helyzet itt is a kitérésekből számitás útján határoztatik meg.

A két utóbbi esetben a nagyobb pontosság részint annak tulajdonitandó, hogy az észlelés pontosabban történhetik, részint annak, hogy az észlelőből kisugárzó melegség nem okoz káros befolyásokat.

8. Borda és Gauss módszerei.

Borda módja szerint az egyik csészére a megmérendő testet teszszük, s a másikba addig rakunk nem számozott úgynevezett tára-súlyokat, mig a mutató nyugalmi helyzete 0-hoz el nem jut. Ezután levesz-

szük a megmérendő testet és számozott súlyokkal pótoljuk, mig ismét ugyanazon nyugalmi helyzetet el nem érjük. A számozott súlyok megkivántató összege egyenlő a megmérendő test súlyával, bármilyen a mérlegkarok hossza és az üres mérleg nyugalmi helyzete — feltéve, hogy a mérleg munka közben nem változott. Erről meggyőződhetünk, ha a számozott súlyokat ismét a megmérendő testtel pótoljuk.

Gauss módja szerint feltételezzük, hogy a mérleg karjai közel egyenlők, különben nem volna előnyösen alkalmazható. Ez azonban jelentéktelen megszorítás, mivel a pontos mérésekre szánt mérlegek mindig csaknem egyenlő karúak.

E mód lényege abban áll, hogy a megmérendő testet egyszer az egyik, azután a másik csészében mérjük meg, mindkét esetben addig rakván számozott súlyokat a másik csészébe, míg az üres mérleg nyugalmi állása helyre nem áll. A két eredmény mértani középarányosa megadja a keresett súlyt. Mert legyen G a megmérendő test súlya és l_1 a megfelelő kar az egyik állásban, továbbá jelöljük az egyensúlyozásra szükséges számozott súlyokat G_1-gyel, ennek a résznek karját pedig l_2-vel, úgy az ellensúlyi állapotban:

$$Gl_1 = G_1 l_2$$

A második mérésnél, midőn G az ellenkező oldalra tétetik, legyen G_2 az egyensúlyezásra kivántató súly, úgy

$$Gl_2 = G_2 l_1$$

szorozzuk a két egyenletet egymással

$$G^2 l_1 l_2 = G_1 G_2 l_1 l_2$$

tehát:

$$G = \sqrt{G_1 G_2}.$$

Sokkal egyszerűbb a számítás, ha a karok igen közel egyenlők. Akkor a mennyivel a testet az egyik oldalon nehezebbnek találjuk, annyivel könnyebbnek látszik a másik oldalon, mint a milyen valóban. Ennélfogva a két mérés számtani középarányosa szintén megadja a helyes súlyt. Ha ugyanis

$$G_1 = G(1+\alpha) \quad ; \quad G_2 = G(1-\alpha)$$

akkor

$$G_1 + G_2 = 2G, \quad ; \quad G = \frac{G_1 + G_2}{2}$$

Ez esetben használhatunk bármilyen nyugalmi helyzetet, nem szükséges az üres mérleg nyugalmi helyzetét felkeresni. Mert ha más nyugalmi helyzetet használunk, akkor G_1 és G_2 helyett G_1' és G_2' súlyokat

fogunk találni, de úgy, hogy G_1' annyival nagyobb G_1-nél, a mennyivel G_2' kisebb G_2-nél, tehát

$$G_1' = G_1 + A \quad ; \quad G_2' = G_2 - A$$

innét

$$G_1' + G_2' = G_1 + G_2$$

tehát G ismét ugyanazon értéket nyeri.

Ez az eljárás annyiban hátrányban áll Borda módjához képest hogy az utóbbi rövidebb, általánosabb és számítás nélkül szolgáltatja az eredményt. Azonban később még látni fogjuk, hogy a felcserélés módját kis változtatással előnyösebben használhatjuk, mint a tárázás módját.

Pontos meghatározásokra szánt mérlegtől az eddigi értelemben vett jóságnál még egyebet is kivánunk. Kivánjuk ugyanis, hogy a mérleg helyes legyen, azaz a karok hossza egyenlő vagy csak kevéssé különböző legyen, hogy az üres mérleg mutatójának nyugalmi helyzete az osztályzat 0-pontjánál vagy ahhoz közel legyen. Azonfelül a mérlegnek még egyéb tulajdonságai is legyenek; nevezetesen, a lengés tartama ne menjen bizonyos határon túl, hogy a mérleg bizonyos mértékben érzékeny legyen és hogy érzékenysége a különféle megterheléseknél közel egyenlő maradjon.

Tárgyaljuk e tulajdonságokat külön-külön.

9. A karok egyenlősége: a mérleg második főkelléke.

Karok alatt értjük a középső élre merőleges távolságokat, a szélső élek valamelyik pontjától a középső élig számítva. — E mellett feltételezzük, hogy az élek egymáshoz párhuzamosak, mert ez a mérleg egyik alapfeltétele.

A karok egyenlősége azért kivánatos, mert ezáltal a mérés megkönnyűl, csakis egy műtételre lévén szükség.

Ha t. i. megállapítottuk az üres mérleg nyugalmi helyzetét (az 5-ik pont szerint), ráteszszük a megmérendő P súlyú testet a mérlegnek egyik — rendesen a balkéz felé eső — csészéjére, s a másik csészébe annyi számozott súlyokat Q rakunk, hogy a mutató eredeti állását ismét visszafoglalja. Ezen helyzetben a mérleg rúdja az egyensúlyi állapotra nem gyakorol semmiféle befolyást — az élek súrlódásától eltekintve — mert maga is ebbe az állásba törekszik; tehát a felrakott súlyok egymásközt egyensúlyt tartanak. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha forgási vagy statikai nyomatékuk egyenlő:

$$Pl_1 = Ql_2$$

hol l_1 és l_2 a mérleg két karját jelenti.

Ha a két kar egyenlő $l_1 = l_2$, akkor szükségkép

$$P = Q$$

azaz a megmérendő test súlya P egyenlő a felrakott számozott súlyok összegével Q.

E szerint az olyan mérlegnél, melynek karjai egyenlők, egyetlen egy mérlegelés elégséges.

Eközben a mutató nyugalmi helyzete tetszőleges lehetett, csak egy és ugyanaz legyen a mérlegelésnél, mint mint mikor a mérleg nincs megterhelve. Kényelem tekintetéből és tévedések elkerülése végett czélszerű, ha a mutató — midőn a mérleg nincs megterhelve — az osztályzat 0-pontja előtt állapodik meg, mi alatt az osztályzat középső vonalát értjük. Ez az eredmény több tényezőtől függ s rendesen azáltal éretik el, hogy először a mérleg rúdja már magában is ehhez a helyzethez közel állapodik meg, hogy másodszor a csészék csaknem egyenlő súlyúak,*) tehát a csészékkel megterhelt mérleg nyugalmi helyzete szintén közel esik a 0-ponthoz, és hogy végre harmadszor a rúd végén alkalmazott futócsavarokon vagy a rúd közepén lévő szárnyas csavaron szükség szerint változtatunk mindaddig, míg a kívánt nyugalmi helyzetet előállítottuk.

10. MÉRÉS AZ EGYENLŐ KARÚ MÉRLEGEN.

Az egyenlő karú mérlegen történő mérés módozatát illetőleg meg kell még jegyeznünk, hogy nem czélszerű a lovasnak nevezett súlyt a mérleg karján ide s tova mozgatni, míg a régi nyugalmi helyzet helyreállíttatott, hanem már csak időkimélés tekintetéből is előnyösebb a lovast valamely jól választott osztályrészre tenni, s az ekkor mutatkozó eltérésből számítás útján következtetni az azt okozó súlyra. Legnagyobb mértékben áll ez akkor be, ha a mérlegen nincs a lovas mozgatására kívülről kezelhető emelő.

A következő eljárás biztosan czélhoz vezet. Arra az osztályrészre teszszük a lovast, hol a hatása még valamivel kisebb, semhogy az eredeti nyugalmi helyzetet visszaállítani képes lenne, — úgy azon-

*) E két tulajdonságot a mérleg kellékei között szokták fölemlíteni; pedig nem okvetetlenül szükségesek, csakis czélszerűek, amennyiben így a mérleg helyességének megvizsgálása megkönnyűl.

ban, hogy már a következő távolabbi osztályrészen elég vagy sok lenne. Ha megtaláltuk ezt az osztályrészt, a mi egy pár fölületes próba után sikerül, akkor meghatározzuk a nyugalmi helyzetet. Most bizonyos eltérést fogunk tapasztalni az üres mérleg nyugalmi helyzetétől, s keresnünk kell azt a súlyt, a mely ilyen nagy eltérést létesíthet, s hozzá kell azt adnunk a felrakott számozott súlyokhoz.

A leolvasott osztályrészeknek megfelelő súlyt megtalálhatjuk, ha tudjuk, hogy egy osztályrész nagyságú eltérés mekkora súlyt létesit; t. i. csak szorozni kell az osztályrészeket (n) az egy osztályrésznek megfelelő súlylyal (α), $n\alpha$ lesz a keresett súly, a mit a többihez hozzá kell adni.

Legyen például a nyugalmi helyzet

$$n = + 2{\cdot}8,$$

legyen:

$$\alpha = 0{\cdot}0003,$$

akkor

$$+ n\alpha = + 2{\cdot}8.\ 0{\cdot}0003 = + 0{\cdot}00084.$$

Csak az a kérdés, mikép lehet az α ismeretéhez eljutni. Legczélszerűbb, ha már előre meg van állapítva, hogy a különféle megterheléseknél milyen súlyok okoznak egy-egy osztályrész nagyságú elmozdúlást? Ha ennek hiányában volnánk, akkor még egy észlelést kell tennünk; t. i. a lovast egy osztályrészszel odább viszszük, meghatározzuk a nyugalmi helyzetet, és megnézzük, hogy eközben mennyivel változott. Ha például az új nyugalmi helyzet $-0{\cdot}5$ lenne, akker a lovas elmozdítása abban nyilvánult, hogy $+2{\cdot}8$-tól $-0{\cdot}5$-ig ment a mutató, azaz: hogy $3{\cdot}3$ osztályrészszel elmozdúlt. Az ezt okozó súly $0{\cdot}001$ gr.; de tudni akarjuk, hogy milyen súly billenti odább egy osztályrésszel; tehát a két mennyiséget el kell egymással osztani

$$\alpha = \frac{0{\cdot}001}{3{\cdot}3} = 0{\cdot}0003.$$

Czélszerű ezt az eljárást még akkor is alkalmazni, ha már ismerjük is a mérleg érzékenységét, mivel ez által oly adatot nyerünk, melyből a mérleg adatainak megbizhatóságára következtethetünk.

(Folytatása következik.)

COELESTIN ROMAGNÁ-BOL.

Schmidt Sándor, tanárjelölttől.

Ama szép kristályodott kének közül, melyek ujabb időben Romagnában fölfödöztettek, egyik példány a magyar nemzeti muzeum birtokába jutott. A kén igen sajátságos módon, itt-ott vékony kátrányos fátyollal van bevonva, a mely — ott, hol kellő vékony — szinjátszást (irisatiót) is mutat. A kén társaságában kis tökéletlen calcit kristályocskák láthatók, melyek szintén és pedig valamivel erősebb kátránytakaró által födetnek.

Ezen calcit-kristályok között Dr. Krenner József műegyetemi tanár úr apró, barnás, kátrányos mázzal bevont táblácskákat talált, melyeket ő coelestineknek ismert föl.

E lelhelyen coelestin eddigelé ismeretlen *) lévén, nevezett tanár úr megbizott ennek kristálytani megvizsgálásával. E vizsgálódásnak eredményét a következőkben adom elő.

Ha a kis kristálytáblácskákat aetherbe mártjuk, eltünik a beborító kátrány és látható, hogy e coelestin az átlátszó, színtelen, víztiszta válfajokhoz tartozik. A kristályok nem nagyok, hosszaságuk 2—4, szélességük 1—2 mm. közt ingadozik; a legnagyobb 6 mm. hosszú, 3 mm. széles, a legkisebb hossza pedig 1 és szélessége 0·5 mm. A lapok simák, többnyire igen jól vannak mind a két oldalon kifejlődve és általában jól, némely példányokon pedig kitünően tükröznek.

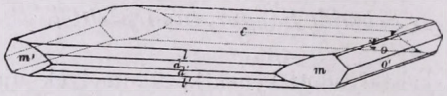
A kristályok táblásak, többnyire szabadok, de találni egymáshoz nőtteket is. A vizsgálatból kitünt, hogy e kristályokon a sziciliai fehér coelestinek táblás modificátióján előforduló alakok vannak, de föllép az igen tompa dóma ξ (*1 0 12*) is, mely Miller **) által fölfödözve, az úrvölgyi kék coelestinen ismeretes és a melyet Dr. Krenner szerint a solothurni coelestinek is mutatnak.

A kristályok fölállításánál Naumann-tól eltérőleg a hasadási

*) A Bombici bolognai tanártól származó példányunk függőjegyén ez áll: »Solfo in bellissimi cr. sul calcare concrezionato, finamente cr. (inverto) bituminifero. Romagna.« Coelestinről itt sem történik említés.

**) W. Phillips, Elem. Intr. to Mineralogy by H. J. Brooke and W. H. Miller London, 1852. 527. lap.

prismát függélyesen, a hasadási véglapot pedig vizszintesen vettem *), ezen fölvett állásban mutatja a mellékelt, általam szerkesztett ábra az egészen kifejlődött kristályt.



A kristályokon előforduló 6 alak Miller és Naumann jelzése szerint a következő:

	Miller.	Naumann.
Véglap	*c 0 0 1*	0P
Prisma	*m 1 1 0*	∞P
Makrodóma . . .	*l 0 1 4*	$\frac{1}{4}\bar{P}\infty$
» . . .	*d 0 1 2*	$\frac{1}{2}\bar{P}\infty$
Brachidóma . . .	*o 1 0 1*	$\breve{P}\infty$
» . . .	*ξ 1 0 12*	$\frac{1}{12}\breve{P}\infty$

A véglap dominál, és e szerint táblásak a kristályok, megnyúlva a nagyobb átló irányában. Legjobban fénylő lapok az *l* (*0 1 4*) és *o* (*1 0 1*) nemkülönben az *m* (*110*). A *c* (*1 0 0*) is tükrözik, hanem többnyire kevéssé háborgatva van. A ξ (*1 0 12*), ha előfordul, mint vékony sáv tompítja az *o* és *c* által képezett élt.

Alapmérésre az *o* (*1 0 1*) dóma és *m* (*1 1 0*) prismát vettem föl és 20-szoros repetitió után vett középértékben — kifejezve a lapnormálékkal képezett hajlásszög által — a következőket találtam:

oo'	(*1 0 1*) (*1 0 $\bar{1}$*)	75° 54' 23"
mm'	(*1 1 0*) (*1 $\bar{1}$ 0*)	104° 01' 40"

A többi lapok hajlásaira pedig a következő értékeket nyertem, egyúttal mellékjegyezvén a föntebbi alapmérés segélyével kiszámított szögértékeket:

			obs.	calc.
dd'	(*0 1 2*)	(*0 1 $\bar{2}$*)	101° 14' 30"	101° 14' 02"
dm	(*0 1 2*)	(*1 1 0*)	59° 50' 00"	59° 59' 44"
co	(*0 0 1*)	(*1 0 1*)	51° 51' 58"	52° 02' 48"
cξ	(*0 0 1*)	(*1 0 12*)	6° 09' 00"	6° 05' 55"
ξo	(*1 0 12*)	(*1 0 1*)	45° 50' 00"	45° 56' 53"
cl	(*0 0 1*)	(*0 1 4*)	22° 20' 46"	22° 18' 58"

*) *c* (*0 0 1*) autor tehát = ∞ P̆ ∞ Naumann } a Naumann-féle fölállítás
és *m* (*1 1 0*) autor » = ∞ P̄ ∞ Naumann } szerint.

Ezeken kivül számítás utján a következő szögértékek határoztattak meg:

oo''	(*1 0 1*)	($\bar{1}$ *0 1*)	*104° 05' 37''*
mm''	(*1 1 0*)	($\bar{1}$ *1 0*)	*75° 58' 20''*
ll'	(*0 1 4*)	(*0 1 4*)	*135° 22' 04''*
ll''	(*0 1 4*)	(*0* $\bar{1}$ *4*)	*44° 37' 56''*
dd''	(*0 1 2*)	(*0* $\bar{1}$ *2*)	*78° 45' 48''*
ξξ'	(*1 0 12*)	(*1 0* $\bar{12}$)	*167° 48' 10''*
ξξ''	(*1 0 12*)	($\bar{1}$ *0 12*)	*12° 11' 50''*
cd	(*0 1 1*)	(*0 1 2*)	*39° 22' 59''*
ξl	(*1 0 12*)	(*0 1 4*)	*23° 05' 35''*
ξd	(*1 0 12*)	(*0 1 2*)	*39° 46' 34''*
ξm	(*1 0 12*)	(*1 1 0*)	*86° 15' 03''*
ξa	(*1 0 12*)	(*1 0 0*)	*83° 54' 05''*
oa	(*1 0 1*)	(*1 0 0*)	*37° 57' 12''*
ol	(*1 0 1*)	(*0 1 4*)	*55° 19' 21''*
od	(*1 0 1*)	(*0 1 2*)	*61° 37' 01''*
om	(*1 0 1*)	(*1 1 0*)	*60° 58' 02''*
lb	(*0 1 4*)	(*0 1 0*)	*67° 41' 02''*
lm	(*0 1 4*)	(*1 1 0*)	*72° 35' 08''*
db	(*0 1 2*)	(*0 1 0*)	*50° 37' 01''*
dl	(*0 1 2*)	(*0 1 4*)	*17° 04' 01''*
mb	(*1 1 0*)	(*0 1 0*)	*37° 59' 10''*
ma	(*1 1 0*)	(*1 0 0*)	*52° 00' 50''*

Ha a romagnai coelestinről nyert emez adatokat összehasonlítjuk azon coelestinek méreteivel, melyek már megvizsgáltattak, akkor kitünik, hogy ez valamivel közelébb áll a dornbergi (jénai) coelestinhez, jóllehet alakja a sziciliai coelestinéhez hasonlít. Ez már kitünik a következő rövidke összeállításból is, melyben a dornbergi, sziciliai és úrvölgyi coelestinek szögértékei Auerbach*) vizsgálatából vétettek.

Romagna:	*104° 01' 40''*	*101° 14' 02''*	*75° 54' 23''*
Dornberg:	*104° 02' 00''*	*101° 11' 00''*	*75° 51' 46''*
Sicilia:	*104° 04' 00''*	*101° 11' 00''*	*75° 53' 42''*
Úrvölgy:	*104° 10' 00''*	*101° 11' 00''*	*75° 59' 44''*

E vizsgálatok a királyi József-műegyetem ásvány-földtani szertárának birtokában levő két távcsővel ellátott fényverődési szögmérővel (Reflexions-Goniometer) történtek.

*) Sitzungsberichte der math.-naturwissenschaftlichen Cl. der k. Akademie der Wissensch. Wien. 1869. LIX. Band. S. 549.

AZ N-EDFOKU ALGEBRAI EGYENLETEK EGY ÁLTALÁNOS MEGOLDÁSÁRÓL.

König Gyulától.

— Második (befejező) közlemény. —

4.

Az eddig fejtegetett határértékek elméletét az egyenletek általános megoldására alkalmazhatjuk az u. n. *recurrens sorok* segítségével. Mindenekelőtt összeállítjuk tehát az erre vonatkozó tételeket, a mennyiben a következő tárgyalásban ezekre szükség van.

Legyen

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

a tárgyalandó egyenlet; akkor ha $\frac{1}{f(x)}$ számára a sorkifejtés lehetőségét bebizonyítottuk, magának a sornak

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots$$

együtthatóit könnyű meghatározni. Kell ugyanis, hogy ekkor a sor szorzata $f(x)$-szel azonosan egyenlő legyen az egységgel. Ez csak úgy lehetséges, ha a szorzatban az x minden hatványának együtthatója 0, az x-től ment tag pedig egyenlő az egységgel. E föltételek a következő egyenleteket szolgáltatják.

$$\begin{aligned}
a_m\alpha_0 &= 1,\\
a_{m-1}\alpha_0 + a_m\alpha_1 &= 0,\\
a_{m-2}\alpha_0 + a_{m-1}\alpha_1 + a_m\alpha_2 &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\alpha_m &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_0\alpha_i + a_1\alpha_{i+1} + a_2\alpha_{i+2} + \ldots + a_{m-1}\alpha_{i+m-1} + a_m\alpha_{i+m} &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

a mely egyenletekből tehát $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ egymásután kiszámítható. Az α együtthatók ezen meghatározása megfelel az osztás tényleges kivitelének.

Lehet azonban az α együtthatókat még más alakban is előállítani, t. i. az egyenlet gyökei által kifejezve.

Legyen ugyanis az adott egyenlet gyöktényezőire bontva:

$$f(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m)$$

a mely alakban, mint ezentúl mindig, az egyenletnek gyökeit mind különbözőknek veszszük föl. Ismeretes ugyanis, hogy a netalán előforduló egyenlő gyököket elemi úton lehet eltávolítani az egyenletből. De akkor $\frac{1}{f(x)}$ fölbontható részlettörtekre, a mint ez p. a rational függvények egészelésénél történik és lesz

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{C_1}{x-\xi_1} + \frac{C_2}{x-\xi_2} + \ldots + \frac{C_m}{x-\xi_m}$$

a hol a C állandók értéke:

$$C_i = \frac{1}{f'(\xi_i)}.$$

Az $\frac{1}{f(x)}$ sorfejtését most már megkaphatjuk, ha a jobboldalon álló részlettörteket kifejtjük, a melyekből egyszerű geometrikus haladványokat nyerünk. Lesz ugyanis:

$$\frac{1}{x-\xi_i} = -\frac{1}{\xi_i}\,\frac{1}{1-\frac{x}{\xi_i}} = -\frac{1}{\xi_i} - \frac{x}{\xi_i^2} - \frac{x^2}{\xi_i^3} - \frac{x^3}{\xi_i^4} - \ldots$$

Ha e sort még C_i-vel szorozzuk, egymásután az

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

értékeket vezetjük be, és az így nyert alakokat összeadjuk az $\frac{1}{f(x)}$ értékét nyerjük, sor által kifejezve; de e sorban, eltérőleg az előbb nyert eredményektől, az együtthatók az egyenlet gyökeiből lesznek összeállítva. Különben könnyen képezhetők. Lesz az x^n együtthatója:

$$\alpha_n = -\frac{1}{f'(\xi_1)\xi_1}\,\xi_1^{-n} - \frac{1}{f'(\xi_2)\xi_2}\,\xi_2^{-n} - \ldots - \frac{1}{f'(\xi_m)\xi_m}\,\xi_m^{-n}$$

vagy rövidebben

$$\alpha_n = A_1\xi_1^{-n} + A_2\xi_2^{-n} + \ldots + A_m\xi_m^{-n}.$$

Ezen alakzatban még különösen kiemelendő, hogy *az A együtthatók kifejezései nem tartalmazzák az n-t, tehát bármely α kiszámításánál mindig ugyanazok maradnak.*

5.

Ezen utoljára nyert kifejezésből indul ki további vizsgálatunk Legyen most már a képzetes számok általános normál-alakjában:

$$\xi_j = r_j(\cos\omega_j + i\sin\omega_j),$$
$$A_j = M_j[\cos(-\eta_j) + i\sin(-\eta_j)] = M_j(\cos\eta_j - i\sin\eta_j).$$

Ha az egyenlet együtthatóit fölteszszük valósaknak, a mint ezt mindig szabad tenni, akkor az α együtthatóknak is valósaknak kell lenni. Ha tehát a ξ és A mennyiségek ez általános alakját helyettesítjük be, kell, hogy az i-vel, a képzetes egységgel szorzott rész eltünjék és igy lesz:

$$a_n = M_1 r_1^{-n} \cos(\eta_1 + n\omega_1) + M_2 r_2^{-n} \cos(\eta_2 + n\omega_2) + \ldots. \quad (1.)$$
$$+ M_m r_m^{-n} \cos(\eta_m + n\omega_m).$$

E kifejezésben a gyököket úgy gondoljuk elrendezve, hogy az r mennyiségek, a gyökök absolut értékei, növekedő sort képezzenek, tehát:

$$r_1 < r_2 < r_3 < \ldots. < r_m.$$

Azonkivül egyesitve legyenek a kapcsolt gyököknek megfelelő tagok. Ezeknek minden esetre az A-nak is kapcsolt értékei felelnek meg, tehát az M összes változása csak egy számbeli tényező hozzájöttében állhat. További vizsgálatunk már most azon föltevés mellett történjék, hogy *az említetteken kivül több gyök nincs, melyben* r-nek *ugyanazon értéke volna.*

Akkor egy meghatározott tagtól kezdve a jelváltások száma e két sorban:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots. \quad (2.)$$

és

$$\cos\eta_1, \cos(\eta_1 + \omega_1), \cos(\eta_1 + 2\omega_1), \cos(\eta_1 + 3\omega_1), \ldots. \quad (3.)$$

teljesen ugyanaz lesz.

Hogy ezt bebizonyíthassuk, irjuk α_n-t a következő alakban:

$$\alpha_n = M_1 r_1^{-n} \left(\cos(\eta_1 + n\omega_1) + \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \cos(\eta_2 + n\omega_2) + \ldots. \right.$$
$$\left. + \frac{M_m}{M_1} \left(\frac{r_1}{r_m}\right)^m \cos(\eta_m + n\omega_m) \right) \quad (4.)$$

Itt az első tényező, $M_1 r_1^{-n}$ mindig positiv mennyiség és igy a jelre vonatkozó vizsgálatoknál teljesen elhanyagolható.

Minhogy továbbá.

$$r_1 < r_2 < \ldots. < r_m,$$

mindig lehet egy oly n kitevőt meghatározni, hogy a (4.) alatt zárjelben foglalt tényezők a másodiktól kezdve, tehát összegük is kisebb legyen egy tetszőleges ε mennyiségnél: ha tehát $\cos(\eta_1 + n\omega_1)$, a jelt mellőzve, nagyobb ez ε-nél, α_n-nek az emlitett mennyiséggel egyenlő előjele lesz.

Most még csak azon eset vizsgálandó, midőn $\cos(\eta_1 + n\omega_1)$, egy tetszőleges kicsinynek fölvett ε mennyiségnél is kisebb lesz. Ez csak

akkor történhetik, midőn $\eta_1 + n\omega_1$, a $\frac{\pi}{2}$ egy páratlan többesétől p. $(2k+1)\frac{\pi}{2}$-től kevesebbel különbözik mint δ, a hol δ egy az ε-nal együtt eltünő mennyiség. De ω_1-nek a 0 és π között valami véges értéke lévén, kell, ha csak a δ eléggé kicsiny, hogy $\eta_1 + \overline{n-1}w_1$ a $(2k-1)\frac{\pi}{2}$ és $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ közti intervallumban, ellenkezőleg $\eta_1 + \overline{n+1}\omega_1$ pedig a $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ és $(2k+3)\frac{\pi}{2}$ közt feküdjék. Igy $\cos(\eta_1 + \overline{n-1}\omega_1)$ és $\cos(\eta_1 + \overline{n+1}\omega_1)$-nak ellenkező előjele lesz. Sem $\cos(\eta_1 + \overline{n-1}\omega_1)$ sem $\cos(\eta_1 + \overline{n+1}\omega_1)$ nem tartozhatnak a részletezett kivételes esethez; kell, hogy mindkettőnek határozott véges értéke legyen. A $\cos(\eta_1 + n\omega_1)$ ily módon a jelváltások számára egyáltalában befolyást nem gyakorolhat. A szomszédtagoknak előjele ellenkező, így tehát e tagoknál:

$$\alpha_{n-1},\ \alpha_n,\ \alpha_{n+1}$$

csak következő 4 combinatió lehetséges:

$$+\ \pm\ -\ \text{vagy}\ -\ \pm\ +,$$

melyek közől mindegyik *egy* jelváltást ad.

Összefoglalva az eddigieket, csakugyan látjuk hogy a 2.) és 3.) sor egy bizonyos véges tagtól kezdve egyenlő számú jelváltásokat mutat, s így azon ismert sor az ω_1 értékének meghatározására használható.

Ha e sorban a jelváltások számát ismét w_n-nel jelöljük, lesz:

$$\frac{\omega_1}{\pi} = \left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty}$$

Az r-nek értéke ily határ alakjában most már könnyen lehozható az α_n-nek 4.) alatti alakjából. M_1-nek ép úgy mint, mint a zárjelben álló kifejezésnek, véges értéke van és igy lesz: *)

$$mod\ \sqrt[n]{\alpha_n} = r_1^{-n}(1+\delta_1)(1+\delta_2),$$

hol δ_1 és δ_2 positiv vagy negativ mennyiségek, de olyanok, hogy végtelen n-nél eltünnek. Tehát:

$$r_1 = mod.\ \frac{1}{\left(\sqrt[n]{\alpha_n}\right)_{n=\infty}},$$

*) Ki vannak zárva az n-nek azon kivételes értékei, hol a zárjelben álló tényező tetszőleges kicsinynyé lehet; de ez ekkor $n+1$-nél nem történhetik. Igy tehát az n azon értékeit mondhatjuk kizárandóknak, a melyeknél $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$, a jelt mellőzve, nagyobb lesz egy tetszőlegesen fölvett nagy számértéknél.

hol a mod. jele csak annyit jelent, hogy α_n netaláni negativ előjele elhagyandó. (Az első közlemény bevezetésében e képlet jobb oldalán a számláló tévedésből elmaradt.)

6.

Végre még azon esetet kell tárgyalnunk, midőn oly gyökök fordúlnak elő az eredeti egyenletben, melyekben az absolut érték (r) ugyanaz a nélkül hogy a gyökök egyenlők vagy kapcsoltak volnának. Erre elég a következő helyettesités:

$$y = x - \delta$$

hol δ egy igen csekély valós mennyiség.

A vizsgálandó gyökök a képzetes számok közönséges sikbeli ábrázolásánál egy körön feküsznek, melynek középpontja az $x=o$ pont, mig a legközelebbi gyök egy oly körön fekszik, melynek sugara véges mennyiséggel nagyobb. Ha ama helyettesítés által δ-val eltoljuk a középpontot, az előbb egyenlő távolságban lévő pontok közül csak a kapcsolt értékűek lesznek egyenlő távolságban az uj középponttól. Ha tehát az ezeken keresztül menő kört veszszük, ez, ha csak δ eléggé kicsiny, a két kapcsolt gyökön kivül mást nem tartalmaz, és az igy átalakitott egyenlet máris alkalmas a gyökök meghatározására.

Azt is látni ebből, miért találkozunk a δ zérusértékénél határozatlansággal. Ha ugyanis képezzük az egyenletet és δ tetszőleges marad, a gyököknek igy nyert értéke a δ-nak szakadozó (discontinuirlich) függvénye, mely véges intervallumban, ugyanazon gyöknek értékét adja, de épen a $\delta=o$ értéknél rögtön más gyök értékére ugrik át.

A TESTEK FAJHEVÉRŐL ÉS VALÓDI HŐFOGHATÓSÁGÁRÓL irt értekezésemnek megbeszélése alkalmával, SZILY lehetetlenségnek mondja, hogy a hőfoghatóság nagyobb legyen, mint a fajhő állandó nyomás vagy térfogat mellett.

A túlhevített gőzök elmélete még nincsen annyira kifejtve, hogy a fajhevet tökéletes pontossággal ki tudnók számítani, de annyi kisérleti adat mégis áll rendelkezésünkre, a mennyi annak bebizonyítására szükséges, hogy a vizgőz fajheve állandó térfogat mellett okvetetlenül kisebb mint a valódi hőfoghatóság.

Sz. nem vonja kétségbe ezen egyenlet helyességét:

$$c = k + AT\int \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} dv.$$

mely a túlhevített vizgőzre — állításom szerint — igy irható:

$$c = 1{,}056 + AT\int \frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\, dv.$$

Hirn és Regnault kisérletei a következő adatokat szolgáltatják: a vizgőznek fajlagos térfogata állandóan $v = 1{,}74$ lévén, a nyomás és hőmérsék $p = 9771$ kilo $1\square^m$-re és $t = 98{,}5$ (Regnault kisérletei a telített gőzökről) továbbá

$p_1 = 10333^k$ $1\square^m$-re és $t = 118{,}5^0$
$p_2 = 10848^k$ $1\square^m$-re és $t = 138{,}5^0$ } (Hirn kisérletei a túlhevitett gőzökről).

Ezek alapján az első különbségi hányadosok:

$$\frac{\Delta p_0}{\Delta t_0} = \frac{562}{20} = 28{,}1 \text{ és } \frac{\Delta p_1}{\Delta t_1} = \frac{515}{20} = 25{,}75.$$

A második különbségi hányadosok:

$$\frac{\frac{\Delta p_1}{\Delta t_1} - \frac{\Delta p_0}{\Delta t_0}}{\Delta t_0} = \frac{25{,}75 - 28{,}1}{20} = -\frac{2{,}35}{20} = -0{,}1175.$$

Minthogy $\frac{\Delta\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)}{\Delta t}$ nem tökéletesen egyenlő $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$-vel, nem várhatjuk, hogy a vele kiszámított érték szám szerint tökéletes legyen, csakis igen nyers megközelítést szolgáltathat. Ha

$$\int\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right)dv \text{ helyébe } \frac{\Delta\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)}{\Delta t}\int dv = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)}{\Delta t}.v \text{ iratik, lesz:}$$

$$c = 1{,}056 - \frac{273 + 118{,}5}{424{,}6} \times 0{,}1175 \times 1{,}74 = 1{,}056 - 0{,}189$$

azaz:

$$c = 0{,}867 \text{ vagyis: } c < k.$$

Ebből világosan látható, hogy a hőfoghatóságnak okvetetlenül nagyobbnak kell lennie, mint a fajhőnek állandó térfogat mellett.

Sz. kérdésére: »*Hogy lehetne tehát a rész kétszer akkora mint az egész?*« a kisérletek egyszerű válasza a következő: *Minthogy az egésznek egyik része negativ, világos, hogy a tevőleges résznek nagyobbnak kell lennie az egésznél.*

Sz. nem vette tekintetbe, a mi különben nem ismeretlen előtte, hogy t. i. a táguló vizgőz *belső munkája negativ.*

Herrmann Emil.

Lehet-e a melegített vízgőz belső munkája negativ? E lapok márcziusi füzetében a 86-ik oldalon azt állítottam, hogy a vizgőz fajheve állandó nyomás mellett okvetetlenül nagyobb a hőfoghatóságánál, vagyis a mérséklet-emelésre fordított résznél; s állításomat azzal igazoltam, hogy a fajhőnek a melegitésen kivül még két más munkát is kell végeznie, t. i. munkát bent a vizgőz tömegében, midőn a molekülöket vonzódásuk daczára szélyelebb feszegeti és munkát kifelé, midőn a gőztömeget a külső nyomás ellenére kitágítja. Jelöljük a fajhevet állandó nyomás mellett c_p-vel, a hőfoghatóságot k-val, a belső munkát i-vel (interior), a külsőt e-vel (exterior), úgy

$$c_p = k + i + e.$$

levén, kérdezhető, hogy lehessen a rész k nagyobb mint az egész t. i. c_p?

Erre Herrman Emil t. barátom e lapok jelen füzetében azt feleli, hogy Sz. tévedett, mert »*nem vette tekintetbe*, *a mi különben nem ismeretlen előtte, hogy t. i. a táguló vizgőz belső munkája* (*i*) *nemleges.*«

Engedelmet kérek, de t. barátom határozottan téved, midőn azt állitja, hogy az aláhúzott tétel nem volt ismeretlen előttem. Teljesen ismeretlen volt biz az, sőt még most sem tudok vele egyáltalában megbarátkozni. Mert lássuk csak. »Lehet-e a belső munka változása, midőn a vizgőz mérsékletét állandó nyomás mellett 1 fokkal magasabbra emeljük, nemleges?« vagyis egy homogén légnemü testben, hol sem kristályodási áthelyezkedések, sem dissociátiobeli folyamatok nem következhetnek be, végezhet-e a közlött meleg nemleges munkát?

Ez csak akkor eshetnék meg, ha a belső munka egyik tényezője, t. i. vagy a molekülök közti belső erő, vagy a molekülök viszonylagos elmozdulása nemleges lehetne. Lehet-e a melegített, tehát *táguló* gőzben a molekülök viszonylagos elmozdulása nemleges, vagyis lehetséges-e az, hogy a gőz moleküljei összébb szoruljanak, midőn az egész tömeg tágul? Ez elképzelhetetlen! És lehetséges-e a másik föltevés, t. i. hogy a gőz-molekülök között müködő erő nemleges, tehát ne vonzó, hanem taszitó legyen. E föltevés homlok egyenest ellenkezik a mai gőz- és gáz-hypothesissel. A nyomást, melyet a légek az edény falaira gyakorolnak, ma már nem tulajdonítjuk, mint azelőtt, külön taszitó erőknek, hanem a mozgó légmolekülök szapora ütéseinek. A kalapács az ő egyéni természete szerint nem viseltetik antipathiával az üllő iránt, magától nem is taszigál rajta, csak mozgásában útját ne állja az. A taszitó erők egészen más természetüek. A mágnes sarka üldözi a gyülölt rokon-sarkot, eltaszitja magától, mihelyt csak közelébe ér. Ilyesmit ki tételezne fel a vizgőz-molekülökről? Az anyag — legalább a súlyamérhető anyag — mindig gravitál egymás felé; igy tesznek a súlyukmérhető molekülök is, csak egymás hatásgömbjén kivül ne essenek. Ha annyira elszéledtek, hogy az egyik már kivül esik a másik hatás-

gömbjén, akkor indifferensek lesznek, nem vonzzák, de nem is taszitják egymást. Igy képzeljük magunknak az ideális gázok belső állapotát. De azt a — hogy is mondjam — *ultraidealis* állapotot, melyben a súlyukmérhető gőzmolekülök, nemcsak hogy nem vonzódnak és nem is indifferensek, hanem plane taszitják egymást, ezt az állapotot a súlyamérhető anyag jellemző tulajdonságával, a gravitálással teljesen összeférhetetlennek tartom.

A táguló vizgőz belső munkájának egyik tényezője sem lehetvén nemleges, maga az egész szorozmány sem lehet nemleges.

Az efféle elméleti nézeteknek csak addig van azonban értékük és becsük, mig a tapasztalattal nem ellenkeznek. A legszebben kiczirkalmazott elmélet azonnal romba dől, mihelyt egyetlen egy *igaz* tapasztalat szembe száll vele.

H. úr igen helyesen cselekszik tehát, midőn mellőzve minden elméleti szemlélődést, kisérleti adatokkal igyekszik kimutatni tétele igazságát. Hivatkozik *Regnault* és *Hirn* kisérleti adataira s belőlök *számitás útján* csakugyan levezeti hogy i-nek okvetetlenül nemlegesnek kell lenni.

Teljesen elfogadom *Regnault* és *Hirn* kisérleti adatait, hisz bennök, mig jobbakkal nem rendelkezünk, kételkednünk nem szabad; elfogadom azt is, hogy 1 foknyi melegítésnél állandó térfogat mellett a belső munka analytikai kifejezése ez:

$$i = AT\int \frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\, dv \ldots . \qquad (1.$$

de nem fogadhatom el a számitási módot, melyet t. barátom e formula alkalmazásában követ. Kifogásom pedig ez:

Túlhevitett gőzöknél p nem csupán T függvénye, hanem v-től is függ; következésképp $\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$ sem független v-től. Midőn tehát a föntebbi általános formulát *túlhevitett* gőzökre akarjuk alkalmazni, nem szabad a $\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$ szorzót v-től függetlennek tekinteni és a v-re vonatkozó integráljel elé kitenni, a mint azt H. úr tette. Ez csak egyetlen egy esetben engedhető meg, ha t, i. p független v-től, vagyis ha a gőz *telitve* van. Az

$$i = AT\frac{d^2 p}{dT^2}\, v \qquad (2.$$

formula egyes egyedül telitett gőzökre lehet csak érvényes és egyáltalában nem érvényes túlhevített gőzökre, s e szerint Hirn kisérleti adatai nem is használhatók egy oly formulában, mely nem ő reájok vonatkozik.

Lássuk tehát, mit mond a 2.) alatti képlet i jeléről, tevőleges-e az vagy

nemleges? Nyilván való, hogy A, T, v tevőlegesek; kérdés alá csak a $\frac{d^2p}{dT^2}$ eshetik. Erre is megfeleltek már Regnault kisérletei. A $\frac{d^2p}{dT^2}$ tevőleges vagy nemleges jele t. i. attól függ, hogy a $p = f(T)$ feszültségi görbe domború vagy homorú oldalát fordítja e a T tengely felé. A Regnault által rajzolt görbe (a vigőz feszültségi görbéje) folytonfolyvást domború oldallal fordul a T tengely felé.* A H. által idézett *kisérleti adatok tehát határozottan arról tanuskodnak, hogy i*, a mint a jelenleg uralkodó elméleti nézetekből a priori is következik, *csakugyan tevőleges.* Számbeli értékét is könnyü egész szigorúsággal meghatározni. Legyen, a H. választotta példa szerint: $t = 98{\cdot}5$ vagyis $T = 371{\cdot}5$; tehát: $v = 1{\cdot}74$; $\frac{d^2p}{dT^2} = 0{\cdot}781$ (Clausius Abhandl. I, Pag 231.), úgy:

$$i = +\ 1{\cdot}188.$$

Különben meg kell jegyeznem, hogy a telitett gőzöknél sem c_p-nek, sem c_v-nek, tehát ennek az i-nek sincs valami helyes értelme. Igy például c_v azt jelentené, mennyi meleget kellene közölni 1 kgrm telített gőzzel, hogy se térfogata, se mennyisége ne változzék, de mérséklete 1 fokkal emelkedjék és mégis telítve maradjon. Világos, hogy ezt nem lehet teljesíteni.

Szily Kálmán.

IRODALOM.

Boussingault, membre de l'Académie des sciences. Études sur la transformation du fer en acier par la cémentation etc. — Paris. Gauthier-Villars, 1875. (131 nyolczadrétü lap 10 ábrával).

Mily meddő foglalkozás, mondja nem egy gyakorlati ember, midőn a tudományos búvárt oly irányú kisérletekkel látja foglalkozni, melyeknek közvetetlen eredményei látszólag nem állnak arányban a reájok áldozott sok idővel és fáradsággal. Tudományos rögeszmének tartja, ha a lelkiismeretes experimentator hónapokat áldoz, csakhogy oly hibaforrásokat elkerüljön, melyek a nyert eredményt talán csak ezred- vagy százezredrészében változtathatják meg. Hanem azután szó nélkül szedi föl a tudós útján elhintett gyöngyöket!

---

*) L. a párisi Akadémia »Mémoires«-jainak XXI-ik kötetét és Wüllner physikájának III-ik kötetében az 552-ik lapot.

Boussingault fent idézett tanúlmányait átolvasva, valószinűleg sok praktikus kohász sajnálkozással fogja kijelenteni, hogy az aczélnak czementálás útján való előállítására e kisérletek nincsenek befolyással; mert B. csakugyan nem javasol újabb módot, a régi eljárásnál kevesebb időt igénylőt és nem is ad útmutatást, hogy mikép lehetne e keresett aczélfajt olcsóbban előállítani. Micsoda gyakorlati értéke legyen tehát az afféle kisérleteknek, melyek nem a költség kisebbítése, sem pedig az időnyerés szempontjából tétettek? Igaz, B. nem ebben az irányban keresett eredményeket; ő csak azt tűzte ki magának feladatúl, hogy meg fogja vizsgálni az eddigelé majdnem rejtelmesnek nevezhető folyamatot, mely a finomított vertvasat, szilárd szén porába temetve, magas hőfok befolyása alatt, átalakítja aczéllá; ki fogja kutatni az esetleg jelenlévő tisztátlanságok — kén, phosphor, réz stb. — befolyását és tanulmányozza a mangan és silicium szerepét. — Ezek szerint B. azt az egyedül helyes elvet tartotta szem előtt, hogy először meg kell állapítani a tüneméy okát, mibenlétét s csak aztán lehet szó a módszer okszerű javításáról és előbbrevitéről.

Hónapokat áldozott oly analytikai eljárások felfedezésére, melyekkel elenyésző csekély nyomokban jelenlévő anyagok mennyiségét pontosan meg lehet határozni; s ezzel nagy szolgálatot tett az analytikai vegytannak is. — Eredményeit három csoportba foglalja: az elsőben — ez a legterjedelmesebb — a használta analytikai módszereket tárgyalja, u. m. a szén, silicium, kén, phosphor, mangan, vas, réz mennyileges meghatározását; a második kisérleti sort a svéd vasnak czement-aczéllá alakítására szentelte; a harmadik csoport pedig magában foglalja azokat a kisérleti eredményeket, melyek a tiszta vasnak tégelyekben véghezvitt czementálására vonatkoznak. Megállapítja a hevítés közben eltűnő szén és vas mennyiségét és okfürkésző magyarázatot ad e nevezetes tüneményről. Végre tárgyalja a szén behatásának módját a vertvasra éghető gázok közbenjárása nélkül.

B. munkáját melegen ajánljuk nemcsak a kohászok, hanem a vegyészek figyelmébe is. W. V.

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

3. Adva van négy gömb, melynek középpontja ugyanaz, sugaraik pedig: r_1, r_2, r_3, r_4. Egy szabályos tetraeder úgy helyezendő el, hogy minden szögpontja egy másik gömb felületén legyen. Határoztassék meg ebből a tetraeder számítás és szerkesztés utján.

A föladat azonban nem lehetséges a sugarak *minden* értékénél. Mi a föladat lehetőségének föltétele analytikai és mértani alakban? (König.)

Első megoldás Bäumel Ede, a középtanodai tanárképezde tagjától.

Legyen $KLMN$ a keresett tetraeder, O a gömbök középpontja, úgy, hogy:

$$OK = r_1,\ OL = r_2,\ OM = r_3,\ ON = r_4,$$

mig a tetraeder egyenlő éleit x-szel jelöljük. Minden tetraeder-él az O középponttal egy háromszöget ad, melynek O-nál való szöge következő legyen:

$$KOL = \alpha, \quad LOM = \beta, \quad MON = \gamma,$$
$$NOK = \delta, \quad KOM = \varepsilon, \quad LON = \varphi,$$

Ha végre az O pont körül egy gömböt irunk le, melynek sugara az egység, az OK, OL, OM, ON vonalak ezen egy $EFGH$ négyszöget adnak, melynek oldalai az α, β, γ, δ ivek; legyen végre még e gömbidomban a szögek:

$$GHE = A, \quad FHG = B, \quad EHF = C.$$

Akkor ismeretes trigonometrikus tételekből a következő tíz egyenlet állítható föl:

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - x^2}{2r_1r_2} \tag{1.}$$

$$\cos\beta = \frac{r_2^2 + r_3^2 - x^2}{2r_2r_3} \tag{2.}$$

$$\cos\gamma = \frac{r_3^2 + r_4^2 - x^2}{2r_3r_4} \tag{3.}$$

$$\cos\delta = \frac{r_4^2 + r_1^2 - x^2}{2r_4r_1} \tag{4.}$$

$$\cos\varepsilon = \frac{r_1^2 + r_3^2 - x^2}{2r_1r_3} \tag{5.}$$

$$\cos\varphi = \frac{r_2^2 + r_4^2 - x^2}{2r_2r_4} \tag{6.}$$

$$\cos A = \frac{\cos\varepsilon - \cos\gamma\cos\delta}{\sin\gamma\sin\delta} \tag{7.}$$

$$\cos B = \frac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\varphi}{\sin\gamma\sin\varphi} \tag{8.}$$

$$\cos C = \frac{\cos\alpha - \cos\varphi\cos\delta}{\sin\gamma\sin\delta} \tag{9.}$$

$$\cos A = \cos B\cos C - \sin B\sin C \tag{10.}$$

A (10.) igy alakítható át:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\cos A\cos B\cos C;$$

ha ebben a (7.) (8.) és (9.) egyenletekből $\cos A$, $\cos B$ és $\cos C$ értékeit helyettesítjük, lesz:

$$\frac{(\cos\varepsilon - \cos\gamma\cos\delta)}{(1-\cos^2\gamma)(1-\cos^2\delta)} + \frac{(\cos\beta - \cos\gamma\cos\varphi)}{(1-\cos^2\gamma)(1-\cos^2\varphi)} + \frac{(\cos\alpha - \cos\varphi\cos\delta)}{(1-\cos^2\varphi)(1-\cos^2\delta)} =$$
$$= 1 + 2\,\frac{(\cos\varepsilon - \cos\gamma\cos\delta)(\cos\beta - \cos\gamma\cos\varphi)(\cos\alpha - \cos\varphi\cos\delta)}{(1-\cos^2\gamma)(1-\cos^2\delta)(1-\cos^2\varphi)}$$

Itt pedig a cosinusoknak az első hat egyenletben adott értékeit fölhasználva, a kellő rövidítések és rendezések után a tetraeder élének (x) meghatározására a következő egyenletet nyerjük:

$$3x^8 - 2x^6(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2) + x^4(3r_1^4+3r_2^4+3r_3^4+3r_4^4-2r_1^2r_2^2-2r_2^2r_3^2- \\ -2r_3^2r_4^2-2r_4^2r_1^2-2r_1^2r_3^2-2r_2^2r_4^2)=0,$$

vagyis még x^4-gyel osztva:

$$x^4 - \frac{2}{3}x^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2) + (r_1^4+r_2^4+r_3^4+r_4^4) - \\ - \frac{2}{3}(r_1^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_3^2r_4^2+r_4^2r_1^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_4^2)=0.$$

Ezen egyenletben az utolsó tag még így is irható:

$$(r_1^2-r_2^2)^2+(r_1^2-r_3^2)^2+(r_1^2-r_4^2)^2+(r_2^2-r_3^2)^2+(r_2^2-r_4^2)^2+(r_3^2-r_4^2)^2$$

ez, mint 6 négyzet összege, mindig positiv, s e szerint az egyenlet, x^2 szerint megfejtve, vagy két positiv vagy pedig két képzetes gyököt ad. Az első esetben tehát x-nek is két positiv értékét találjuk, míg a második esetben x-nek is képzetes értéke lesz. A föladat lehetőségének föltétele tehát megkivánja, hogy az adott négyzetes egyenlet gyökei valósak legyenek. Megfejtve az egyenletet, lesz:

$$x^2 = \frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2}{3} \pm$$
$$\pm\sqrt{\left[\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2}{3}\right]^2 - (r_1^4+r_2^4+r_3^4+r_4^4) + \frac{2}{3}(r_1^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_3^2r_4^2+r_4^2r_1^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_4^2)},$$

vagy:

$$x^2 = \frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2}{3} \pm$$
$$\pm\frac{1}{3}\sqrt{8(-r_1^4-r_2^4-r_3^4-r_4^4+r_1^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_3^2r_4^2+r_4^2r_1^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_4^2)}$$

Ebből a keresett föltétel:

$$-r_1^4-r_2^4-r_3^4-r_4^4+r_1^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_3^2r_4^2+r_4^2r_1^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_4^2 > 0$$

Ez még a következő alakra vihető át:

$$[2r_4^2-(r_1^2+r_2^2+r_3^2)]^2<$$
$$<3(r_1+r_2+r_3)(r_1+r_2-r_3)(r_1-r_2+r_3)(-r_1+r_2+r_3)$$

melynek mértani értelmezése szembeötlő; mind a két oldalon ugyanis területek négyzetei állnak.

A baloldal okvetetlenül positiv, ennélfogva a jobboldalnak is positivnek kell lenni, a mi csak úgy lehet, ha:

$$r_1 + r_2 > r_3,$$
$$r_2 + r_3 > r_1,$$
$$r_3 + r_1 > r_2,$$

Az r-eket azonban az eredeti föltétel symmetrikus alakjának következtében föl is cserélhetjük egymással, és így még:

$$r_1 + r_2 > r_4 \text{ s. u. t.}$$

Tehát két sugár összegének mindig nagyobbnak kell lenni a harmadik és negyedik sugárnál.

Ha szerkesztés által akarjuk meghatározni a tetraeder éleit, akkor mindenek előtt keressük azon pontoknak mértani helyét, melyeknek a tetraeder 2 szögpontjától való távolságai állandó viszonyban vannak. Vegyük egyszerűsítés végett a coordinata-rendszert úgy, hogy az első pont a kezdőpontban (A), a második (B) pedig az x tengelyen feküdjék. Az utóbbbinak összrendezői: (x_1, o, o). Ha C a keresett mértani hely egyik pontja, akkor:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{r_1}{r_2}$$

vagyis:

$$AC = mr_1,$$
$$BC = mr_2,$$

de:

$$\overline{AC}^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$\overline{BC}^2 = (x-x_1)^2 + y^2 + z^2,$$

és így:

$$\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{(x-x_1)^2+y^2+z^2}$$
$$x^2(r_1^2-r_2^2) + y^2(r_1^2-r_2^2) + z^2(r_1^2-r_2^2) - 2r_1^2xx_1 + r_1^2x_1^2 = 0$$

vagy:

$$\left(x - \frac{r_1^2x_1}{(r_1^2-r_2^2)}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{r_1^2r_2^2x_1^2}{(r^2-r_2^2)^2}$$

Ebből látni, hogy a mértani hely egy gömb, melynek középpontja az x tengelyen, illetőleg $\overline{AB}$ egyenesen fekszik.

Vegyünk most már egy tetszőleges szabályos tetraedert, és erre nézve kerressünk oly O pontot, hogy

$$OA : OB : OC : OD = r_1 : r_2 : r_3 : r_4$$

Ez az előbbi szerint könnyen elérhető; vegyünk egy oldalt p. AD-t és keressük azon pontokat, a hol $\frac{OA}{OD} = \frac{r_1}{r_4}$; ezen pontok összesen egy gömböt képeznek, melynek középpontja az AD egyenesen fekszik, mely gömb különben elég könnyen szerkeszthető.

Ezen eljárást 3 oldalra nézve ismételjük; nyerünk akkor 3 gömböt, mely egymást két pontban metszi, ezek lesznek a keresett pontok, melyek, mint könnyű látni, a föntebbi föltételeknek valóban eleget tesznek.

Ezen pontok bármelyikét kössük most össze a fölvett tetraeder 4 csúcsával, és ezeken lemetszve (ugyanazon rendben) a négy adott sugár értékét a végpontok a keresett tetraedernek csúcspontjai lesznek, mint ezt az idomok hasonló volta közvetetlenül mutatja.

Második megoldás Hunyady Jenőtől.

A térnek tetszőleges öt pontja egymással összekötve tiz hosszat ád, ezen hosszak négyzetei közt egy egyenlet áll fönn, mely legkényelmesebben determináns alakjában irható, (L. p. Baltzer, Determinanten, 235 l.) Ha ily öt pontnak a tetraeder négy szögpontját, és a gömbök középpontját veszszük, az egyenlet, melyben x a tetraeder élének négyzetét jelenti, a következő alakot nyeri:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & x & x & x \\ 1 & r_2^2 & x & 0 & x & x \\ 1 & r_3^2 & x & x & 0 & x \\ 1 & r_4^2 & x & x & x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ha e determinánsban az első két oszlopot x-el szorozzuk és az utolsó négy sort x-el elosztjuk, egyenletünk a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_2^2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & r_3^2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & r_4^2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.$$

miből látni, hogy a kérdésben forgó feladat megfejtése a determináns alakban adott négyzetes egyenlet megoldásától függ. Erre nézve mindenekelőtt el kell döntenünk azt, hogy minő feltétel alatt vannak az 1) alatti egyenletnek valós gyökei; e czélból az előbbi egyenlet x hatványai szerint rendezve legyen a következő alakú:

$$Ax^2 + 2Bx + R = 0, \tag{2.}$$

ezen egyenlet gyökei valósak, hogy ha annak negativ discriminánsa nagyobb a zérusnál, azaz ha:

$$B^2 - AR > 0. \tag{3.}$$

Az 1) és 2) alatti egyenletek szerint

$$R = \begin{vmatrix} e & f & 1 & 1 & 1 & 1 \\ g & h & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_2^2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & r_3^2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & r_4^2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a mely determinánsban az e, f, g és h mennyiségek helyébe a zérus teendő, valamint ezek a következőkben is a differentiálás után zérus által pótolandók. Ezeket előre bocsátva találjuk, hogy

$$B = \frac{\partial R}{\partial f} = \frac{\partial R}{\partial g}, \quad A = -\frac{\partial^2 R}{\partial e\, \partial h}.$$

Minthogy pedig a determináns elmélet egy ismeretes tétele szerint

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial e} & \frac{\partial R}{\partial f} \\ \frac{\partial B}{\partial g} & \frac{\partial R}{\partial h} \end{vmatrix} = R\,\frac{\partial^2 R}{\partial e\, \partial h},$$

tekintetbe véve az előbbi értékeket, valamint azt is, hogy $\frac{\partial R}{\partial h} = 4$, a következőt nyerjük:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial e} & B \\ B & 4 \end{vmatrix} = -AR$$

és ismét

$$B^2 - AR = 4\,\frac{\partial R}{\partial e}. \tag{4.}$$

A (3) alatti feltétel tehát a következő által pótolható:

$$\frac{\partial R}{\partial e} > 0,$$

a melyben végre $\frac{\partial R}{\partial e}$ értékét helyettesitve:

$$\begin{vmatrix} 0 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ r_1^2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ r_2^2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ r_3^2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ r_4^2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (5.$$

feltétel által van kifejezve, hogy az (1) alatti egyenletnek gyökei valósak.

Az 5) alatti feltétel mértani magyarázatára azonban szükséges, a föltételben foglalt determináns átalakitása. Legyen e czélból:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= b\,c\,d, \\ r_2^2 &= a\,c\,d, \\ r_3^2 &= a\,b\,d, \\ r_4^2 &= a\,b\,c, \end{aligned} \qquad (6.$$

akkor a fentebbi feltétel a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix} 0 & bcd & acd & abd & abc \\ bcd & 0 & 1 & 1 & 1 \\ acd & 1 & 0 & 1 & 1 \\ abd & 1 & 1 & 0 & 1 \\ abc & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} > 0,$$

vagy ha az itt előforduló determinánsban a 2-ik, 3-ik, 4-ik és 5-dik sort és oszlopot rendre a, b, c, és d-vel szorozzuk, azután pedig az 1-ső sort és oszlopot $abcd$-vel elosztjuk, akkor:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & ab & ac & ad \\ 1 & ab & 0 & bc & bd \\ 1 & ac & bc & 0 & cd \\ 1 & ad & bd & cd & 0 \end{vmatrix} > 0,$$

a mely kifejezésben azon tetraeder köbtartalmának 288-szoros négyzetét ismerjük fel, melynek élei a következők:

$$\sqrt{ab},\ \sqrt{ac},\ \sqrt{ad},$$
$$\sqrt{cd},\ \sqrt{bd},\ \sqrt{bc},$$

megjegyezvén, hogy az egymásnak általellenében fekvő élek egymás alatt állanak. Ha a kérdéses éleket a (6) alatti egyenletek segitségével r_1, r_2, r_3, és r_4 által kifejezzük, ezek a következők:

$$\sqrt[3]{\frac{r_3^2\, r_4^2}{r_1\, r_2}},\quad \sqrt[3]{\frac{r_2^2\, r_4^2}{r_1\, r_3}},\quad \sqrt[3]{\frac{r_2^2\, r_3^2}{r_1\, r_4}},$$
$$\sqrt[3]{\frac{r_1^2\, r_4^2}{r_3\, r_4}},\quad \sqrt[3]{\frac{r_1^2\, r_3^2}{r_2\, r_4}},\quad \sqrt[3]{\frac{r_1^2\, r_4^2}{r_2\, r_3}}. \qquad (7.$$

E kifejezésekben az r_1, r_2, r_3, r_4 mennyiségek absolut számértékei értetnek s az igy eredő számok egy tetszőleges hossz-egységre vonatkoznak.

Ezeknél fogva az előbb talált feltétel következőképen fejezhető ki:

»Ha a (7) alatti élekből szerkesztet tetraeder köbtartalmának 288-szoros négyzete (tehát az egyszerü négyzete is) nagyobb a zérusnál, akkor a 2) alatti egyenletnek a két gyöke valós.«

Minthogy továbbá annak a feltétele, hogy hat adott élből a tetraeder lehetséges legyen, az hogy a térfogat négyzete nagyobb legyen e zérusnál és hogy az általellenben fekvő élek szorzatainak négyzetesgyökeiből háromszöget lehessen szerkeszteni, a kérdésben forgó tetraeder élei pedig az utóbbi feltételt mindig kielégitik, az előbb kifejezett tételt igy is mondhatjuk ki:

»Ha a (7) alatti élekből lehetséges tetraedert szerkeszteni, a 2) alatti egyenletnek a gyökei valósak, azaz az eredetileg tárgyalt föladatot mértanilag lehetséges.«

Más alkalommal a kérdésben forgó feltételnek talán még egy másik geometrikus magyarázatát is adjuk.

FÖLADATOK.

11. Adva lévén két másodfokú egyenlet két ismeretlennel legáltalánosabb alakjában; kerestessék azon föltétel, melynek ha eleget tesznek az egyenlet együtthatói, a rendszer megoldása csupán másodfokú egyenletek segítségével eszközölhető. (König.)

12. Adva van a következő, $2n$ ismeretlenre vonatkozó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
x_1 x_2 + x_3 x_4 + \ldots\ldots + x_{2n-1} x_{2n} &= A_1\\
x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2 + \ldots\ldots + x_{2n-1}^2 x_{2n}^2 &= A_2\\
\ldots\ldots\ldots

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

I. kötet. **1876.** 5. füzet.

AZ EHRENFRIEDERSDORFI PLINIAN.

Dr. Krenner József Sándor, müegyetemi tanártól.

(Előterjesztette a m. tud. Akadémia III-ik osztályának 1876. april 3-án tartott ülésén.)

Az 1846-dik évben BREITHAUPT *), támaszkodva saját és PLATTNER vizsgálataira, egy »új« ásványt írt le, az *egyhajlású arsenkovandot*, melyet az ó-classikus természetbuvár tiszteletére *Plinian* név alatt vezetett be a tudományba.

Ez ásvány lelhelyei BR. szerint: *Ehrenfriedersdorf* Szászországban, és *Szt.-Gotthard* Svájczban.

PLATTNER elemzéséből, mely szerint a *Plinian* alkata

kén 20·07
vas 34·46
arsen 45·46

tehát a $Fe\,S_2 + Fe\,As_2$ képletnek megfelelő, az tünt ugyan ki, hogy anyaga teljesen megegyez a *rhombos arsenkovand* anyagával, de a BREITHAUPT észlelte különfokú hasadás, a valamivel nagyobb tömöttség, és főleg a *monoklin alak* megkülönböztetik amattól a közönségesen ismert ásványtól.

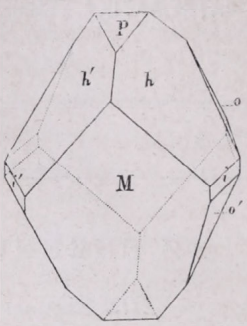
Ha BREITHAUPT morphologiai észlelései ez ásványt illetőleg helyesek, akkor csakugyan jogos volt az az állítása, hogy az *arsenvassulfid dimorphiája* be van bizonyitva. E tény az arsenvegyületekre nézve nem csekély fontosságú lenne.

A mellékelt ábra előtünteti az ásvány alakját; kis mása ez az

*) Poggendorff Ann. LXIX. 430.

eredeti képnek, melyet Breithaupt a *Plinian* kristályairól adott, s melyen az egyes lapoknak a következő szerepet tulajdonitja:

$i = \infty P$
$P = +P\infty$
$h = +P\frac{5}{3}$
$o = -2P3$
$M = \infty P\infty$



A lapok hajlásait következőkép adja:

$Mh = 134°20$ *)
$oh = 115°55$ *)
$oi = 117°33$
$oM = 103°15$ *)
$Ph = 146°0$
$PM = 51°36$
$hh = 119°0$
$ii = 118°30$

Ezekből csakugyan az következnék — nem is tekintve azt, hogy *M* és *P* szerint különböző foku a hasadás — hogy a Plinian eltérőleg az arsenkovandtól *egyhajlású*, és hogy az arsenkovand anyaga *dimorph.*

Breithaupt nézete azonban ellenzőre talált Rose-ban **) (1849) a ki »attól a gondolattól nem szabadulhatott« hogy a Plinian csak eltorzult arsenkovand, és a ki úgy nyilatkozik, hogy az általa tett vizsgálat »e gondolatot igazolni látszik«

Rose összehasonlitja Breithaupt-nak a Plinianon észlelt szögadatait azokkal, melyeket Mohs a rhombos arsenkovandnál talált, és a kettő között elegendő összhangzást talál, midőn ez utóbbi adatok alapján a

Plinian (Breithaupt)		Arsenkovand (Mohs)
h-ja	helyébe az	*g*-jét
M és *P*-je	„	*M*-jét
o-ja	„	*s*-ét

teszi. Azonban az ő figyelmét sem kerüli ki az eltérés, a mely a kettő közt itt-ott mutatkozik, és mely egy esetben egész 17° 16′ perczre rug. Megmérte továbbá a berlini kir. ásványtanban levő ehrenfriedersdorfi kristályokon az *M*-nek *P*-hez való hajlását, melyet a négy élre nézve 136° és 19′, 11′, 50′ és 40′ perczcnek talált.

---

*) Br. a csillagos értékekre fektette számításait..

**) Poggendorff Annalén. LXXVI. 85.

Rose mindezt megfontolva és még hozzá téve azt, hogy Breithaupt szerint a Plinian *M* és *P* szerint hasítható, az arsenkovand azonban az evvel (Rose által) analognak tartott *M* lapok szerint hasad, igy következtet: »*so glaube ich, dass man nicht berechtigt ist den Plinian als eine vom Arsenkiese verschiedene Mineralspecies zu betrachten.*«

Rose e nyilatkozatára Br. *) azzal felel, hogy előbb közlött adatait teljesen fentartja, és újra különösen hangsúlyozza, hogy a Plinian *monoklin arsenkovand.*

Az elsőben közlött észlelési értékeket változatlanul felsorolván, ismételve felhozza első értekezéséből azokat a megjegyzéseket is, melyek ezen ásványnak a dimorph kénnel való analogiájára vonatkoznak, és kimondja még egyszer azon kissé merész vélekedését, hogy a Plinian is magasabb hőfoknál képződhetett és rhombos társánál kevesebb rejtett meleget tartalmazhat.

Értekezésének végén mély elkeseredésének ad kifejezést, hogy reménye, miszerint Rose e tárgyra vonatkozó itéletét vissza fogja vonni, — a mire ő hiába várt — nem teljesedett. »Most már azt kérdezem« — folytatja Br. — hol van arsenkovand, a leirt határozottan hemirhomb (monoclin) kristály alakkal és két külön értékű, 128°24′ szerint egymást metsző hasadási iránynyal? ... Sok ásványbuvár ismerkedett meg Freibergában a Pliniannal, sőt olyanok is, kik Rose-hez közelebb állanak mint hozzám, de egyik sem kételkedett valódi természetében. Különös elégtételem van abban, hogy a párisi mineralogusok is, és itt legyen szabad Des Cloizeaux urat megneveznem, nézeteimet tökéletesen sajátjukká tették, különösen azóta, a mióta a Pliniannak egy ép példányát az Ecole imperiale des mines számára megszerezték.« És végül saját szavai:

»Es verletzt mich tief, dass Rose die Wahrheit nicht anerkennen will, und hat mir dies viel Leid verursacht, denn ich lege einen grösseren Werth auf die Bestimmung des in so mancher Beziehung sehr merkwürdigen Plinian's, als auf die irgend eines andern von mir charakterisirten Minerals.«

Rose erre nem válaszolt, és elgondolható, hogy hallgatása nem szüntette meg a bizonytalanságot, melyiköknek van hát igaza? Különösen az ásványtani kézikönyvek szerzőit ejtette e két ellentétes vélemény zavarba; két kitünő irányadó szaktudós és lelkiismeretes észlelő állt egymással szemben; nem is mertek—legalább az óvatosabbak

*) Berg- und Hüttenmännische Zeitung. XXV. 168.

az érdekes vitába bocsátkozni vagy színt vallani, hanem egyedül a két vélemény coordinált felsorolására szoritkoztak.

Mások ellenben mégis elfogadták Breithaupt nézeteit. Hisz Rose hallgatott, nem mondott ellent Br. utolsó nyilatkozatának, és még hozzá Des Cloizeaux és a többi párisi szaktudósok véleménye, a mire Breithaupt hivatkozott, mind sulyos érvek Breithaupt mellett. Igy például Frenzel is kitünően irt szászországi ásványlexiconjában Breithaupt véleményét a legujabb időben el fogadja. *)

A magyar arsenkovand vizsgálatával és revisiojával foglalkozván, egyuttal e vitás kérdést is tisztába akartam hozni.

A *Plinian* az ásványtárakban igen ritka jelenség, és csak kevés európai muzeum dicsekedhetik példányokkal. Van belőle nehány darab a freibergi gyüjteményben, kettő a drezdai királyi ásvány-galleriában (Zwinger-ben), egy Párisban, egy a berlini gyüjteményben, egy van v. Wattenwyl és egy igen szép darab Szandreczky gróf (Langenbielau Sziléziában) birtokában.

Átkutattam a magyar nemzeti muzeum ásványait, és csakugyan sikerült egy Ehrenfriedersdorfból származó wolframit darabon, gilbertit kéreg alatt, igen szép Plinian-kristályokat találnom. Vizsgálatukról a következőket közlöm. Kristályaink közől különösen egy tünteti ki magát nem ugyan nagysága által, minthogy hossza csak 3 mill., de ép és síklapú kifejlődése által. Ez a kis kristály tökéletesen oly külsejű, mintha Breithaupt ábrájához mintául szolgált volna. Egyedül az *i* alak hiányzik, melynek kétes létjogosultságáról e sorok folyamatában még bővebben lesz szó.

A nevezett Plinian-kristályokon egy kéttávcsöves goniométerrel controlálni akartam Br. szögadatait, és ha az eredmények elsorolásában hosszadalmasabb leszek, mentsen az ki, hogy a tárgy sokkal bonyodalmasabb, mint azt egyszerű külseje után itélve sejteni lehetne.

Breithaupt azt mondja, hogy kristályai nem voltak igen fényesek, úgy hogy kénytelen volt méréseit este (!) gyertyafénynél tenni. Az én kristályaim eléggé fényesek, sőt itt-ott a keresztfonalakat is visszatükrözik. Kitünő egyhajlású habitusuk van, ugy hogy pusztán a lapok elterjedései után itélve monoklineknek tarthatók. Világos azonban, hogy csakis a lapok hajlása a döntő.

1. Kezdjük mindenek előtt a *hh'* hajlással. Breithaupt szerint $hh' = 119°0'$; mig az én méréseim $120°53·6'$ perczet adtak, tehát $1°53·6$

*) A. Frenzel. Mineral-Lexicon für das Königr. Sachsen. Leipzig 1874.

a különbség. Ezen élszög értéke majd ugyanaz a nagyobb kristályaimnál is. Rose egészen helyesen állitja szembe Breithaupt adataival az arsenkovand $gg = 120°38'$ adatait Mohs után.

2. Az Mh szögérték Brfithaupt szerint $134°20'$, saját méréseim $135°36$ adtak, tehát a különbség $1°16'$. Megmértem ezenkivül: $Mh' = 135°26$, azonban a h' lap kevésbbé jó mint a h.

3. A Ph élszög Breithaupt szerint $146°0'$, én erre $135°25'$ kaptam, Ph' pedig $135°32$ adott; itt tehát $10°35$ és $10°28$ különbség igen tetemes. Rose, Breithaupt Mh és Ph szögértékeit összefoglalva hozza párhuzamba az arsenkovand Mg élszögével, melyre Mohs adatai alapján $136°3'$ *) számitott ki.

A Plinian h-ja tehát egyenlő $P\infty$ az arsenkovandon, M pedig azonos P-vel, és mindkettő azonos az utóbbi ∞P alakjával. Ez adatok a rendszer kérdésében döntenek; a Plinian kristályai tehát a rhombrendszer symmetriáját követik.

4. PM hajlása. Breithaupt szerint $PM = 51°36$. Ez természetesen csakis a hátsó M-re vonatkozik, minthogy a mellső M P-vel tompa szöget képez.

A mellső lapon lenne tehát PM Breithaupt szerint $128°24$, míg én $110°18'$-et kaptam. A különbség itt nem kevesebb mint $18°6$!

Rose a Breithaupt szerint $51°36$ foknyi szöget képező lapoknak az arsenkovand gg-jét véli szembeállithatni, minthogy gg Mohs szerint $59°22$. De Rose itt tévedett; g lapok nemfel elhetnek meg az egészen más helyzetű P és M lapoknak. Hisz Rose maga e lapokat egészen helyesen, mint fönt láttuk, hh'-val identificálta. Itt megemlithetem még, hogy Mohs adataiból $68°54'$ következnék gg-re.

5. Az oh élszög Breithaupt szerint $= 115°55'$. Kristályunknál az o lap sajátságos complicatiot mutat. E lap nem egészen sima, hanem vékony egymást keresztező barázdák szeldelik át, a mi neki dömöczközött külsőt ád. Nagyitásnál láthatni még egyéb rudimentszerű, apró, többnyire háromszöges lapocskákat is csillogni, melyek mint könnyen meg lehet győződni az oo' övébe esnek és 2 alakhoz tartoznak.

Rose azt hiszi, hogy Breithaupt oh szögértéke azonosítható a Mohsféle gs élszög értékével, minthogy Mohs adatai szerint $gs = 115°12$ *)

Azonban a kristályokon az $s = \frac{1}{2} P\infty$ lapot nem lehet felfedezni, hanem igenis láthatni az $\frac{1}{3}P\infty$ alakot, melyhez a fentemlitett csillogó lapocskák egy része tartozik. Ezekhez a h lap, méréseim szerint, $117°$

*) Rose számításába egy kis hiba csúszott be, minthogy Mohs adatai alapján utánaszámítva 135° 46-ot nyerünk.

**) Pontosan számitva 115°10'.

alatt hajlik; a különbség tehát $1°5'$. A tulajdonképeni o lapok — melyek kevésbbé csillognak mint az $\frac{1}{3}$ dóma laprudimentjei — hajlását a $P\infty$-hez középértékben $118°15$-nek lehet venni, a mi Breithaupt értékétől már nagyobb eltérést mutat.

Azonkivül megmértem oo' hajlását, mely egyremásra $146°$ fokot tesz, a mi annak a bizonyitéka, hogy o valóban $\frac{1}{4}P\infty$-nek felel meg. Én igen valószinűnek tartom, hogy Breithaupt a kis lapok villogását vette a tulajdonképeni o lap fénye helyett; az ily tévedés afféle kis kristálylapoknál, távcsővetlen goniometerrel dolgozva, könnyen előfordulhat.

6. Az oM élszög. — oM Breithaupt szerint $103°15'$. Rose ezen értékkel szemben a Mohs adataiból kiszámitott $Ms = 106°38$ *) hozza fel. Az előbbi pontban emlitettekből tudjuk, hogy s a Plinianon nem fordul elő, a csillogó laprudimentek pedig M-hez $102°50'$-czel hajolnak, a mi a fentebbi adathoz viszonyitva csak $0°25'$-nyi külömbséget ád. A valódi oM szög átlagosan $99°21'$.

Ebből is következik, hogy az uralkodó O lap $\frac{1}{4}P\infty$-nak felel meg. A csillogó laprudimentek pedig $\frac{1}{3}P\infty$ domához tartoznak.

Itt is ugyanazon véleményben vagyok, hogy Breithaupt a kis lapok erősebb csillogásait vette a szomszédos nagy lapé helyett.

Szükségesnek látom itt megjegyezni, hogy Breithaupt határozottan téved, midőn azt állitja, hogy P, h és o lapok egy övben fekszenek, minthogy a Ph övében nem o, hanem csakis az alapdóma $P\infty$ fekhet.

A Breithaupt emlitette i lapok — szerinte a prismalapok — egymással $61°30'$ szöget képeznek.

Ugyanő azt állitja, hogy $Phio$ lapok egy és ugyanazon övben fekszenek.

Hogy o nem fekhetik az övben, már kimutattuk. Lássuk, i megfelelhet-e azon tulajdonságoknak, melyeket Br. neki vindicál.

Tegyük fel, hogy i csakugyan a Ph övében fekszik, akkor minthogy i az M irányában az álló prismának szerepét játszsza, lapjainak a két oldal-véglappal is egy övben kell lenniök.

E két zóna a lapot tökéletesen meghatározza, és ha ezen övvonali viszonyokból számitás utján kikeressük annak helyzetét, kitűnik, hogy az korántsem felel meg az alapprismának ∞P-nek.

Breithaupt ezenkivül még oi szöget $117°33'$-nek mondja, a mi bizony semmivel sem teszi az i lapot lehetségeseb é.

---

*) Mohs adatainál a számitás voltaképen $106°50'$-et ad.

Ebből kitűnik az, a mit a bevezetésben érintettem, hogy az *i* lap Breithaupt adatai alapján lehetetlenség; lehetetlen kristálytani, sőt mértani tekintetben is, sőt akkor is lehetetlen, ha a rendszert illetőleg egészen Breithaupt álláspontját fogadjuk el.

Kristályaink előbb említett csillogó lapocskáinak második fele megegyez a $P\infty$ dómával, azonkivül még találni itt-ott a mellső lapoknak megfelelő párhuzamos hátsó párokat, de mindig csak rudimentszerűen kifejlődve. Ez az épen, a mi az egésznek látszólag egyhajlású jelleget kölcsönöz.

A mondottakból kitűnik, hogy a Plinian nem *monoclin*, hanem *rhombos* kristály, és hogy az csakugyan nem más, mint eltorzult, a makrodiagonalis szerint hosszabbított, táblás arsenkovand, melynek hátsó fele hiányosan fejlődött ki. Ebből természetesen következik, hogy az *arsenkovand anyaga nem dimorph.*

Hogy a kristályokon az efféle egyirányú tulságos kifejlődés még nem jogosít új species felállitására, az világos. Különben azt az arsenkovandot is, melyet Br. Eötvös Loránd Kokovánál fedezett fel, és mely ép úgy, mint a kobalttartalmú amerikai, a rövidebb tengely szerint, — vagy azt, melyet Felső-Bányán találtam és mely a főtengely szerint van megnyujtva, külön speciesnek kellene tartani.

A Plinian sem anyaga, sem alakjánál fogva az arsenkovandtól nem különbözvén, vele összeegyeztethető. Nevét a tankönyvekből ki kell küszöbölni.

A MÉRLEGRŐL.

Schuller Alajos, müegyetemi tanártól.

(Az első rész vége.)

11. A karhosszak csekély különbségének befolyása.

A mérleg karjainak egyenlőségét illetőleg még tekintetbe kell vennünk, hogy ez a tulajdonság többnyire csak közelítőleg van meg, hogy azonfelül időjártával észrevehető változások is mutatkozhatnak. Ez a körülmény nem okoz lényeges különbséget, ha — mint a legtöbb esetben történik — a mérlegelést nem viszszük a pontosság azon fokáig, melyre a mérleg képes volna. Mert, ha a mérleg jól van felállítva és jól kezeltetik, úgy rövid idő alatt bizonyosan nem mutatkoznak tetemes változások, különben szerkezeti hibája volna, s egyátalán nem adhatna megbízható eredményeket. A hosszakban levő változások

tehát nem gyakorolnak jelentékeny befolyást. Még csak az a kérdés, hogy a mérleg karjainak állandó hossz-különbsége minő hatású? Erre nézve könnyen belátható, hogy — mindaddig, míg a hosszak viszonya változatlan marad — az egyszerű mérés sokféle meghatározásoknál kielégítő, t. i. oly esetekben, midőn súlyok viszonyának megállapítása képezi a végczélt.

Mert ha az egyszerű mérésnél helyreállítjuk az üres mérleg egyensúlyi állását — úgyszinte, ha számítás útján keressük fel az erre kivántató számozott súlyokat (10-dik pont) — akkor mindenesetre áll, hogy a két nyomaték egyenlő

$$Pl_1 = Ql_2$$

a honnét

$$P = Q\frac{l_2}{l_1}$$

és, ha egy másik esetben azt találjuk, hogy

$$P_1 = Q_1\frac{l_2}{l_1}$$

akkor

$$\frac{P}{P_1} = \frac{Q}{Q_1},$$

tehát a megmérendő testek súlyviszonyát, $\frac{P}{P_1}$-et megkapjuk az illető számozott súlyok viszonya által.

Az ily tulajdonságú mérleggel beérjük a legtöbb vegyelemzésnél, és általában mindig, mikor csak súlyok vagy tömegek közti összefüggéseket akarunk megállapítani.

De bizonyos esetekben nem használhatjuk az efféle mérlegen egyszerű mérés által nyert adatokat, nevezetesen egy oly esetben sem, midőn a súlyokból következtetést akarunk vonni akár térfogatra, akár keresztmetszetre, vagy valamely fénytani tulajdonságra (pl. a polarisatió sik forgatására) vagy gőzsűrűségre, általában olyan esetekben nem, midőn a mérés eredményét valamely absolut számmal kell összefüggésbe hozni.

Különben természetes, hogy, ha csak lehet, egyenlő karú mérleget használunk, a mennyire ez a tulajdonság biztosan és felette nagy fáradság nélkül létesíthető, — s a mérlegek mostani tökéletes szerkezete mellett a legtöbb esetben megelégedhetünk a készítő által előállított hosszviszonnyal — emellett azonban maradnak mindig egyes esetek, melyekben a mérlegen elérhető legnagyobb pontosság kihasználása szükséges. Ily esetekben nem szabad elhanyagolni a karok közt mutatkozó

azon kis különbséget sem, mely a mérleg kijavításánál még megmaradt, vagy a mely csekély hőfokváltozások által munka közben keletkezik.

Ilyenkor a helyett, hogy a mérleget törekednénk kiigazítani, inkább a mérési mód helyes megválasztása által küszöböljük ki a mérleg hibáját. Két erre vezető módot már tárgyaltunk a 8-dik pontban. A harmadik, nézetünk szerint legczélszerűbb eljárás a következő.

12. PONTOS MÉRÉS A KARHOSSZAK KÜLÖNBSÉGÉNEK TEKINTETBE VÉTELÉVEL.

Midőn a mérleg karjai csaknem egyenlők, s a mérésnél nagy pontosságot akarunk elérni, akkor a megmérendő tárgyat először a balcsészébe teszszük s mindaddig változtatunk a jobb csészébe és a jobb karra helyezett súlyokon, míg a mutató nyugalmi helyzete a *0*-ponthoz közel nem esik. A pontos beállítást nem eszközöljük, ugyanis a lovast mindig csak egész osztályrészekkel viszszük tovább, de felkeressük a nyugalmi helyzetet. Ezután felcseréljük a tárgyat a súlyokkal, s — anélkül, hogy ez utóbbiakon változtatnánk — újra felkeressük a nyugalmi helyzetet. A felcserélés következtében mutatkozó változás a kettős súlykülönbségnek tulajdonítandó, ha tehát tudjuk, hogy milyen súly képes a mérleg mutatóját az első állásból a másodikba hozni, akkor felezés által megkapjuk a különbséget, mely a megmérendő test súlya és a felrakott számozott súlyok közt fennforog; hogy — melyik nagyobb a kettő közül, azt már a nyugalmi helyzetek megtekintése által is eldönthetjük, de azonfelül a számítás is megadja.

Jelöljük α-val azt a súlyt, mely a nyugalmi helyzetet egy osztályrészszel tovább viszi, (lásd a 10. és 14-dik pontot), s legyen m az első és n a második nyugalmi helyzet, akkor $m-n$ lévén a felcserélés közben létrejövő elmozdulás, $\frac{m-n}{2}\alpha$ lesz a súlyok különbsége, s ezt hozzá kell adni vagy le kell vonni a felrakott számozott súlyokhoz, aszerint, amint előjele + vagy —.

Ha például

$m=-0{\cdot}8$, tehát a megmérendő test látszólag könnyebb, mint a felrakott súlyok összege; ha továbbá

$n=-2{\cdot}2$, akkor a megmérendő test kétségtelenül nehezebb, mint a számozott súlyok összege.

A súlykülönbség: $\frac{-0{\cdot}8+2{\cdot}2}{2}\alpha = +0{\cdot}7\alpha$

s ha $\alpha=0{\cdot}0015$ gr., tehát $0{\cdot}7\alpha=0{\cdot}0010$, akkor a megmérendő test $0{\cdot}0010$ grammal többet nyom, mint a felrakott súlyok.

Az itt alkalmazott eljárás helyességét következőkép lehet indokolni. Azon feltevésből fogunk kiindúlni, — helyességéről könnyen meggyőződhetünk kisérlet által — hogy a mutató állandó elmozdulása arányos az azt okozó kis súlylyal. Ennélfogva, ha α az egy osztályrésznek megfelelő súly, és a mutató az m-edik, illetőleg az n-edik osztályrészen áll, akkor a O ponttól számitott eltéréseket okozó súlyok: $m\alpha$, illetőleg $n\alpha$.

Képzeljük ezen súlyokat a kellő oldalon alkalmazva, úgy, hogy a mutató eredeti — az üres mérlegre vonatkozó — állásába visszatérjen: akkor mondhatjuk, hogy a két oldalon föllépő forgási nyomatékok egymással egyenlők. Irjuk föl ezen egyenleteket mind a két mérésre vonatkozólag.

Legyen P a megmérendő test súlya, és Q a felrakott súlyok összege, jelöljük a köztük lévő különbséget p-vel, úgy hogy

$$P - Q = p.$$

Egyelőre ezt a mennyiséget keressük. Legyen továbbá l_1 és l_2 a mérlegkar hossza a bal, illetőleg a jobb oldalon, s a köztük mutatkozó kis különbség l, úgy hogy

$$l_1 - l_2 = l.$$

Az egyensúlyi állapotra vonatkozó egyenletek akkor ezek lesznek

$$Pl_1 = Ql_2 + \alpha m l_2$$
$$Ql_1 = Pl_2 + \alpha n l_2.$$

Emellett feltételeztetett, hogy a kiegyenlítő súlyok αm és αn mindkét esetben a jobb csészébe valók. De ez nem megszorítás, mert ha az egyik vagy mind a kettő a másik oldalra való volna, azt a negativ előjel majd megmutatja, az pedig, hogy akkor nem l_2, hanem l_1 lesz az emelő kar, elvileg ugyan helyes ellenvetés, de gyakorlati erővel nem bir, ha — mint itt feltételeztetik — a mérleg karjai csaknem egyenlők: mert αm és αn kis mennyiségek. Irjuk már most az egyenletet így:

$$Pl_1 - Ql_2 = \alpha m l_2$$
$$Ql_1 - Pl_2 = \alpha n l_2$$

és helyettesítsük be a következő értékeket:

$$l_1 = l_2 + l \quad , \quad P = Q + p$$

hanyagoljuk el a keletkező egyenletben azon tagokat, melyek két igen kis mennyiség szorzatát (pl) tartalmazzák, akkor azt találjuk, hogy

$$Ql + pl_2 = \alpha m l_2$$
$$Ql - pl_2 = \alpha n l_2$$

és ha az alsó egyenletet a felsőből kivonjuk:

$$2pl_2 = \alpha l_2 (m-n),$$

tehát:

$$p = \alpha \frac{m-n}{2},$$

és végre a keresett súly:

$$P = Q + \alpha \frac{m-n}{2},$$

Az eredmény alakja mutatja, hogy ezen eljárásnál nem kell az üres mérleg nyugalmi helyzetére tekintettel lenni, a mérlegelés eredménye attól független. Mert a két leolvasás különbsége $m-n$ ugyanaz marad, ha az osztályzat o pontját akárhol veszszük fel. Kitűnik ebből, hogy ha már ismerjük a mérleg érzékenységét (α), csak két nyugalmi helyzetet kell pontosan meghatározni, — a súlyok megválasztása csak megközelítőleg történik — s elég adatot nyerünk a pontos mérésre. Természetes, hogy a meghatározás fontossága szerint, az észleléseket egyszer vagy többször ismételjük, hogy ez által minél valószinűbb eredményt nyerhessünk.

13. A MÉRLEGEKNEK KEVÉSBBÉ LÉNYEGES TULAJDONSÁGAI.

Az előbbiben tárgyalt mérési módok a mérlegek két főtulajdonságán alapúlnak, melyek egyike a jóság vagy állandóság, a másik pedig a közel egyenlőkarúság. Egy harmadik kellék, hogy t. i. az üres mérleg nyugalmi helyzete 0-nál legyen (a csészék egyenlő súlyuak stb.) csak az egyszerű mérésnél lényeges, mely nem szolgáltatja a mérésnél elérhető legnagyobb pontosságot. Ezen tulajdonságokon kivűl a 9-dik pontban még mások is említtettek, melyek nem annyira a mérés pontossága, mint inkább annak gyors és kényelmes végrehajtása miatt kivánatosak. Foglalkozzunk ezekkel is röviden, a mennyire a hely szűke engedi.

A lengési időt illetőleg a mérleget úgy tekinthetjük, mint egy physikai ingát, tehát alkalmazhatjuk rá a physikai inga képletét:

$$t = \pi \sqrt{\frac{T}{G.\beta}}$$

t a mérleg egy lengésének tartama,
T tehetetlenségi nyomatéka (a középső élre vonatkoztatva),
G a rúd súlya és
β a súlypont távola a középső éltől.

Minél érzékenyebb a mérleg, annál kisebb β; innét van, hogy az érzékeny mérleg lassan mozog, lengése olyan, mint egy hosszú ingáé.

Mint minden ingánál, úgy a mérlegnél is — különben egyenlő körülmények között — a lengési idő független az anyag minőségétől; ellenben függ az alaktól, annál kisebb ugyanis a lengés tartama, minél rövidebb rudat alkalmazunk. A képletből felvilágosítást nyerünk az iránt is, hogy mikép változik a lengési idő a különféle megterheléseknél. Mivel azonban a levegőben történő méréseknél, a csészék alakja miatt, a légellenállás nagy hatással van a mérleg mozgására, s a lengési idő változásai úgysem nagy fontosságúak, azért e tárgygyal nem szükséges részletesebben foglalkoznunk.

Rendesen 10—20 másodpercz között ingadozik a mérlegek lengési ideje. A mérleg közepén alkalmazott kettős csavar segítségével változtathatunk rajta, de csak ugy, hogy vele együtt az érzékenység is megváltozik.

Az érzékenység fokának megitélésére az a legkisebb súly szokott használtatni, a melyet a mérleg a legnagyobb megterhelés mellett megérezni képes. Természetesen különböző lesz ez a legkisebb súly, a szerint, amint az észlelés módja különböző, s itt szabad szemmel történő közvetlen észlelés értendő. Innen van, hogy gyakran az olyan mérlegen mely a készitő szerint 0·001 gramra érzékeny, még ennek tizedrészét is biztosan lehet észlelni, ha élesebb megfigyelési módot alkalmazunk. — Ugy látszik, hogy a legtöbb esetben a készitők azt a súlyt közlik mint az érzékenység mértékét, a mely a legnagyobb megterhelés mellett még egy egész osztályrészszel viszi odább a mutatót. Még ez is bizonytalan adat; azonban ha körülbelül egyenlő osztályrészek alkalmaztatnak (ugyanazon műhelyben), akkor az egy osztályrésznek megfelelő súly elosztva a legnagyobb teherrel, csakugyan az érzékenység mértékeül szolgálhat. Igy például, ha valamely mérleg 1 kilogrammot bir el minden csészében, és a mellett még 0·001 gram egy osztályrészszel változtatja meg a mutató állását, akkor érzékenysége:

$$\frac{0{\cdot}001}{1000} = \frac{1}{1{,}000{,}000}$$

Elméletileg helyes mérlegnél az egy osztályrésznek megfelelő súly *a* minden megterhelésnél egyenlő lenne, tehát a nagyobb súlyok aránylag nagyobb pontossággal lennének megmérhetők mint a kisebbek. A gyakorlatban azonban egy kissé másként áll a dolog, részint azért, mert a készitő nem képes a három élt tökéletesen egy sikba helyezni, részint pedig azért, mert nem lehet egészen elkerülni a rúdnak meggörbülését, hacsak más tulajdonságokat nem akarunk feláldozni. Ezen körülmények miatt a különféle megterheléseknél különbözőnek találjuk az érzékeny-

séget, a szerint a mint az élek más-más állásban vannak egymáshoz képest. A jó szerkezetű mérleg kelléke e tekintetben, hogy érzékenysége lehetőleg keveset változzék. Elérhető ez az által, hogy a középső él kevéssel a szélső élek sikja alá helyeztetik, annyival t. i., hogy középmegterhelésnél a meggörbülés által mind a három él egy sikba jusson. — Ez a feltétel aránylag legkisebb gonddal szokott teljesítve lenni, elannyira, hogy az újabb szerkezetű mérlegeken nincsenek is javitó csavarok alkalmazva, melyek által ez élek magasságán változtatni lehetne.

Tekintettel ezen körülményekre czélszerűnek látszik, hogy előbb meghatároztassanak a különféle megterheléseknek megfelelő, egy osztályrésznyi elmozdulást létesitő súlyok (α), mielőtt a 10, 12 és 13-ik pontban tárgyalt mérési módokat alkalmaznók. Három, négy meghatározás rendesen elégséges. Minden egyes meghatározás akként történik, hogy a mérleget szükség szerint megterhelvén, nyugalmi helyzetét meghatározzuk, azután a felrakott súlyt 0·001 grammal megváltoztatjuk, és ismét észleljük a nyugalmi helyzetet. A két esetben mutatkozó különbség (n) megfelel 0·001 gramnak; oszszuk el ezen súlyt az osztályrészek számával (n)-nel, akkor megkapjuk az illető megterhelésnek megfelelő α-át.

Példa: Az üres mérleg nyugalmi helyzete -0.4
0·001 grammal megterhelve -1.55
a változás 1.15 oszt. rész,

tehát az üres mérlegnek megfelelő $\alpha = \frac{0.001}{1.15}$ gr., azaz

$$\alpha = 0.00087 \text{ gram.}$$

Épen igy találtattak a következő értékek is.

Megterhelés	α
100 gr.	0·00087
200 „	0·00110
500 „	0·00117

Innét kitűnik egyrészt, hogy a mérleg nincs helyesen kijavitva, és továbbá az is, hogy azon 4 meghatározás csakugyan elég, ha a negyedik tizedesig pontos mérést akarunk végezni, — s ennél nagyobb pontosság a szóban forgó mérlegen nem is érhető el.

A GALLIUM, EGY ÚJ ELEM. LECOQ DE BOISBOUDRAN franczia vegyész 1875. augusztus 27. napján a Pierrefitte-i bányában (Argelès völgyében Pyrenäekben) előforduló horgany-fénylében egy anyagot fedezett fel, mely sajátságos reactióiban az eddig ismert elemektől eltérvén, e vegyész által uj elemnek ismertetett föl,*) s melynek gallium nevett adott. Ezen anyag sajátságaira nézve eddig a következőket tudjuk.

A gallium, elektrolytikai uton kiválasztva, kemény és szilárd fém, mely nagy számú fényes pontocskákkal látszik behintve. Ezen pontocskák a górcső alatt mindannyi kristályoknak tünnek fel. Achat-pistillel dörzsölve alig fényesedik, ellenben erős nyomásnak alávetve igen szép politurát vesz fel. Szine fehérebb a platinánál. A kiválasztott gallium a levegőn nem igen oxydálodik, ép oly kevéssé hideg vagy meleg vizben való mosás, sőt 200 foknyi mérséklet alatt szárítva sem.

A fém előállításánál mindennek előtt szükséges, hogy az a horgany nagy túlmennyiségétől elválasztassék; azt pedig többféle uton lehet elérni.

1. Ha a horgany és gallium-chlor vegyületek keverékét szénsavas natron nal alávetjük az ugynevezett fractionált lecsapásnak, akkor a csapadék első részletével túlnyomólag a gallium és aránylag csekély horgany válik ki: mig a későbbi csapadékok a horganyt fölötte nagy túlmennyiségben tartalmazzák.

2. Mindkét anyag kénhydrogen által, eczetsavas ammonia és sok szabad eczetsav jelenléténél, kiválasztható; a kéncsapadék első részletei legnagyobb részt galliumot tartalmaznak, azonban csak ismételt fractió által sikerül a galliumot a horganytól elválasztani. LECOQ noha igen csekély gallium mennyiséggekkel dolgozott, csak hatszor ismételt kiválasztás után ért némileg czélt.

3. Ha a kénsavas vagy chlór vegyületek ammoniakos oldata eczetsavval elegyitettik, akkor az összes gallium fehér kocsonyás állapotban kiválik, mely csapadék eczetsav túlmennyíségével forralva sem oldódik. Hogy ezen kiválasztásnak jó sikere legyen, igen hig oldatot kell alkalmaznunk.

4. A gallium chlór- vagy kénsavas vegyülete ammonia által kiválasztható, mely csapadék azonban ammonia nagy túlmennyiségében részben feloldódik. Ha az oldhatatlan részét e csapadéknak sósavban feloldjuk és ujonnan ammonia túlmennyiségével kezeljük, akkor mind átmegy az oldatba.

Ezen emlitett reactiók bármelyikével lehet a galliumot keverékéből meglehetős tisztaságban előállitani. LECOQ azonban a gallium előállitásánál az elektrolytikai utat használta. E czélra szolgált a kénsavas galliumnak ammoniakos oldata, a melyen keresztül 2 platinlemez-elektrodon a villanyáramat bocsátván, a gallium a negativ sarkon kivált.

---

*) Comptes rendus 1875, p. 463, 969 és 1100, 1876. p. 168.

A galliumnak sajátlagos reactióját illetőleg első sorban kiemelendő: jellemző szinképe. Ha a spectralanalytikai vizsgálat az illékonyabb chlórvegyülettel történik, akkor már igen csekély mennyiségnek jelenléténél is egy könnyen észlelhető szép violaszinü vonal mutatkozik: a Ga_α, melynek hullámhossza $\lambda = 417$ milliomad millimeter, és egy másik Ga_β vonal, mely már nem annyira feltünő és melynek hullámhossza $\lambda = 403$ milliomad millimeter. Ezen szinkép a villanyszikra alkalmazásánál legszebben észlelhető. A gallium, a Bunsen-féle lángba tartva, ugyan azon vonalakat tünteti elő, de fényük sokkal gyengébb.

2. Sárga vérlúgsó hasonló csapadékot ád mint a higany t. i. a sósavval savitott oldatban fehér válmány keletkezik.

3. Cadmium lemez a gallium sósavas oldatával nem választ ki semmit, sőt forralás mellett sem.

4. A gallium chlór- és kénsavas vegyületéből eczetsavas ammonia hidegben nem választ ki semmit, ellenben hevitésnél azonnal csapadék keletkezik.

5. A kénsavas gallium oldata szárazságig elpárologtatva és a sótömeg mindaddig izzítva, mig kénsav gőzök fejlődnek, vizbeni oldhatóságát nem veszti.

6. A kénsavas gallium oldható alkoholban és, pedig 60 s. r. só 100 s. r. alkoholban.

7. Szénsavas baryt a gallium sókat könnyen kiválasztja.

8. A gallium képez kénsavas ammoniával egy timsót, mely hideg vizben oldható, a forralásnál az oldat azonban zavaros lesz; de ha az oldat eczetsavval megsavanyitattik, akkor a forralásnál is változatlan marad.

9. A galliumtimsó könnyen kristályodik koczka és oktaeder alakban, a melyek külső tekintetükre nézve is igen hasonlitanak a közönséges timsóhoz. Ezen kristályok a polarizált fényre nem hatnak (két nikol között indifferens magaviseletet mutatnak.)

10. Ammoniak túlmennyisége a galliumtimsót hasonlóan bontja fel, mint egyéb galliumsókat. Egy része az oxydnak kiválasztatik, egyrésze még oldva marad.

Ezek volnának az eddig ismert reactioi az ujonnan felfedezett fémnek; még megjegyzendő, hogy a gallium előtt fedezett fel utolsó fém az indium volt, melyet Richter E. és Reich F. Freiburgban felfedeztek. Ezen anyag szinte horgany-fényléből állittatott elé legelőször, és tulajdonaira nézve oly meglepő hasonlatosság uralkodik a *Ga* és *In* között, hogy első pillanatban arra a gyanúra vezettetünk, miszerint ezen két anyag talán egy és ugyan az. Különösen emlékeztet erre a két anyagnak kénhydrogen, kénammonium, szénsavas nátron és sárga vérlúgsó iránti magaviselete, sőt a láng viola szinitése szintén megerő-

*) Ann. d. Chem. u. Ph. Supplem. Bd. VIII. p. 133—229.

sit ezen gyanúban. Azonban a spectral vonalak pontos mérése által lehet csekély különbséget észre venni, mert a

Ga_α vonal hullám hossza 417
In_α » » » 455

továbbá az indiumkénsavas kalival nem ád timsót. Mindenesetre a gallium vegytani tulajdonainál fogva rendkivül közel áll a indiumhoz.

Végül még érdekes lesz felemliteni e helyen a *Ga* felfedezése és egy Pétervári tudósnak már jóval előbb közétett elméleti fejtegetései között fönnálló kapcsolatot. Mendelejeff ugyanis 1872-ben egy értekezést publikált »Ueber die periodische Gesetzmässigkeit der chemischen Elemente« czim alatt, a melyben az eddig ismert elemeket tömecssulyuk szerint rendezve, egy majdnem szabályosan növekedő sort állitott össze, a melyben a rokon anyagok csoportonként lettek elrendezve, a miáltal a sorozatban mutatkozó hézag könnyen felfedezhető, sőt a hézagba illő testnek fontosabb tulajdonai is még felfedeztetése előtt előre mondható. Mendelejeff összeállitásánál az aluminium és indium között ily hézagot talált. Táblázatának czélszerü berendezéséből ő következteté, hogy a hiányzó tag egy fém, melynek tömecssulya körülbelől 68 (Mendelejeff ezen anyagot ekaaluminiumnak nevezi) és fajsulya körülbelől 5·5 leend.

Az ekaaluminium sói kénhydrogen által le fognak választatni. A fém e levegőn nem igen könyen oxydálódik és igy mondja el egész sorát az ekaaluminium vegytulajdonainak, sőt még azon hitét is kifejezi, hogy ezen anyag hihetőleg spectralanalytikai uton fog felfedeztetni. Midőn Lecoq de boisboudran a gallium felfedezését és annak tulajdonait publikálta, Mendelejeff ezen testtel az általa constatált hézagot látta betöltve, annál is inkább mert a gallium tényleg azon tulajdonságokkal bir, a melyeket ő az ekaaluminiumra nézve jövendölt. Mennyiben áll Mendelejeff ezen okoskodása, azt azonban mindezek daczára még csak további búvárlatok fogják mutatni.

Dr. Pillitz Vilmos.

A villanyszikra sikamlásáról Antolik Károly kassai *) tanárnak a m. tud. akadémiának bemutatott, és a Poggendorf-Annalokban (151 és 152. kötet) megjelent két értekezése a czímben jelzett tárgyról általános érdekeltséggel fogadtatott, ugy, hogy már több értekezés tárgyaul szolgált, melyekről illő lesz e helyen röviden megemlékezni.

Antolik találmánya tudvalevőleg abban áll, hogy a villanyszikra útját bekormozott szigetelőre rajzoltatja. E rajzok előállitásuk módja szerint igen különbözők és valóban meglepők, complicált és mégis élesen körvonalazott

*) Jelenleg aradi

alakjaik miatt. Ezen alakok legfeltünőbbje azon kúpalaku nyúlvány, mely a szabályosan rajzolt czikczak-vonal két ága közt származik.

Az első pillanatban bizonyára sokan a kisütés mechanikájának tárt könyvét látták e rajzokban; — de annak elolvasása nem sikerült. Antolik maga megelégszik a sokféleképen változtatott kisérletek leirásával, anélkül hogy a rajzok magyarázatába bocsátkoznék.

Schuller Alajos, műegyetemünk tanára,*) mindjárt a tény megismerése után kimutatta, nemcsak, hogy a szikra átcsapása által megrezzent levegő mozgásának szerepe van e rajzok előidézésében (ez Antolik kisérleteiből is következik) hanem hogy majdnem kizárólag ennek, és hogy magának a villanyosságnak alig van némi csekély része benne.

Schuller ugyanis e rajzokat jellemző részeikkel nem villanyszikra által, hanem más módon állitotta elő. E célra a könnyen explodáló jodnitrogennel festette azon czikczak-vonalat, melyet Antolik a szikra vezetésére fémfestékkel rajzolt a kormozott lapra: a jodnitrogen explosiója a kormot tökéletesen azon törvény szerint söpörte el, mint a villanyszikra. A rajzokban mutatkozó különbségek csak onnan származtak, hogy a jodnitrogen nem explodált egyidejüleg az egész vonal hosszában, legalább nem oly rövid idő alatt, mint a mekkora a szikra tartama.

Ehhez csatlakozik a Pogg-Annalok 156. kötetében (1875. november 25.) megjelent értekezés Mach és Wosyká-tól melyben egyrészt az Antolik-féle alakok akustikai eredetét bebizonyítják és másrészt módot nyújtanak, melyszerint e rajzokat akustikai czélokra és időmérésre lehet használni.

Azon nézetből kiindulva, hogy Antolik kúpnyulványai a két oldalról jövő levegőhullámok találkozásából származnak, a szikra utjának mértani alakját megváltoztatták, megvizsgálandók, vajon az egyes esetekben, ezen elméletből következtetett különböző alakok származnak-e. A legegyszerübb kisérlet az volt, hogy a szikrát egyszer megtört vonalon vezették, melynél a két vonalból kiinduló hullámok az általuk képezett szöget felező vonalban találkoznak: csakugyan e vonal hosszában éles koromvonal származott. Ép ugy sikerült több ehhez hasonló kisérlet.

Különösen érdekesek azon kisérletek, melyeknél két egymástól különvált szikra csap át egymás mellett. Ekkor a koromvonal nemcsak a szikrák utjainak változtatása által, hanem a két kisütés időkülönbsége szerint is változtatható. Igy például két pontalaku szikrahely hyperbolikus koromvonalat ad, mely homorú részét a később átcsapott szikra felé fordítja. A *vonal ezen alakjaiból ki lehet számitani a két kisütés közt lefolyt időt.*

*) A m. t. akadémiában tett előterjesztése után, mely azonban eddig meg nem jelent.

A számos kisérletből még csak azt említjük, melynél a szikra átcsapásából keletkező hanghullámokat két részre szétágazó csőben vezették a kormozott lapra, miáltal a koromvonalak ép ugy származtak, mintha a cső nyilásainál csapott volna át két szikra, és pedig ugy, hogy a hosszabb ág végének később átcsapó szikra felelt meg, azaz a hyperbolikus vonal homorú oldala ez utóbbi nyilása felé volt fordítva.

A. Peters a Pogg. Annalok előbb idézett füzetében a szikra sikamlása által nyert oly rajzokat ir le, melyekből következtetni lehet, hogy a szikrában, hosszának körülbelül harmadrészében az ellentétes villanyosságok már ki vannak egyenlődve. E rajzokat Peters az által nyerte, hogy schellakkal bevont és hosszabb időn át szárított üveglapot bekormozott és a Holtz-féle villanygép széthuzott gombjaihoz tartott. A szikrák többnyire a lapon csúsztak, miáltal a jellemző rajzok előállottak. Ha az üveglap nem volt schellakkal bevonva, a rajzok azonosak voltak Antolik rajzaival, de ha schellakkal be volt vonva, ugy az igenleges sarkot a Lichtenberg-féle alakokhoz hasonló nyúlványok jellemezték, melyek a nemlegesen hiányoztak; a középső rész, mely a szikrának harmadát tette, a legvilágosabb és két párhuzamos sötétebb vonalat tartalmaz, mig a nemleges sarkból kiinduló harmadban számos sötét vonal található. Minthogy a középső harmad sem az igenleges, sem a nemleges harmad jellemző részeit nem mutatja, Peters azt következteti, hogy ezen út hosszában egyenlődnek ki az ellentétes villanyosságok.

E magyarázattal nem látszik egész megegyezni Schneebeli kisérlete (Carl »Repertorium« 1875. 6. füzet) a ki jelenti, hogy a kiegyenlődő *pontot*, melynek megkeresése Antolik kisérleteire vezette, megtalálta. Meglehet, hogy Peters kisérleteinél is a kiegyenlődés helye pontalakunak mutatkoznék, ha oly kis töltésekkel tétetnének, mint a milyennel Schneebeli dolgozott.

Azon fontos kérdés megvilágitására, hogy az ellentétes villanyosságok hogyan egyenlődnek ki a villanyszikrában én is tettem kisérleteket; ugyanis kén és miniumpor keverékével megvizsgáltam a szigetelőn elcsúszott szikra helyét. E kisérleteket Peters egyszerü módszere szerint tettem, t. i. a schellakkal bevont üveglapot egyszerüen a Holtz-féle villanygép gombjai mellett tartottam; ha a szikra a lapon csúszott, ugy el nem törölhető nyomot hagyott maga után, és a lapra hintett por szabályosan helyezkedett a szikra utja körül — de nem ugy, mint Peters és Schneebeli kisérleteiből várni lehetett, hanem, mondhatnám ellenkező módon.

A származott képen az igenleges és nemleges sark a Lichtenberg-féle alakoknak megfelelően igen szépen van kiképezve, de valamennyi képen a nemleges sarkból kiinduló vörös iv mutatkozott, mely majdnem egészen az igenleges sarkhoz huzódik. Ezen ivvel szemközt nagyobb területet elfoglaló sárga

ív, az ennek megfelelő ágazattal, az igenleges sarktól a nemlegesig huzódik. Némely képnél a sárga részben is az előbbihez hasonló, de keskenyebb vörös ív látható; valamint a vörös íven túl is néhány sárga ág terül el.

E képekből tehát ugy látszik, hogy az ellentétes villanyosságok nem a szikra bizonyos helyén egyenlődnek ki, hanem a nemleges villanyosság az igenleges sarkhoz, az igenleges pedig a nemleges sarkhoz áramlik.

E következtetés azonban korántsem mondható biztosnak, mivel a szigetelőre áramló villanyosság influentiája ott lényeges befolyást gyakorol, mely befolyást csak a szigetelők influentiájára vonatkozó tanulmányom befejeztével méltányolhatom. Kohn Gyula.

A malligand-féle ebullioskop. Az alkohol thermometrikus módon való meghatározása — mely szerint valamely szeszes folyadék forrpontjából közvetetlenül a keverék szesz-tartalmára következtethetni — már 1822-ben Gröning által javaslatba hozatott. Utána Brossard-Vidal ez eljárást ujolag ajánlotta és erjedt folyadékok megvizsgálására alkalmazta; készülékét — melyet ebullioskopnak nevezett — Conaty javitotta, Ure pedig egyszerüsítette. Lerebours és Serretau is szerkesztettek ebullioskopot melyet a bor alkohol-tartalmának meghatározására használtak. Végre Pohl J.*) bécsi müegyetemi tanár az utóbbiak által szerkesztett készüléket átalakitotta, úgy, hogy azzal a gyakorlott észlelő 0·1—0·2% biztonsággal meghatározhatta az erjedt folyadékok szesztartalmát.

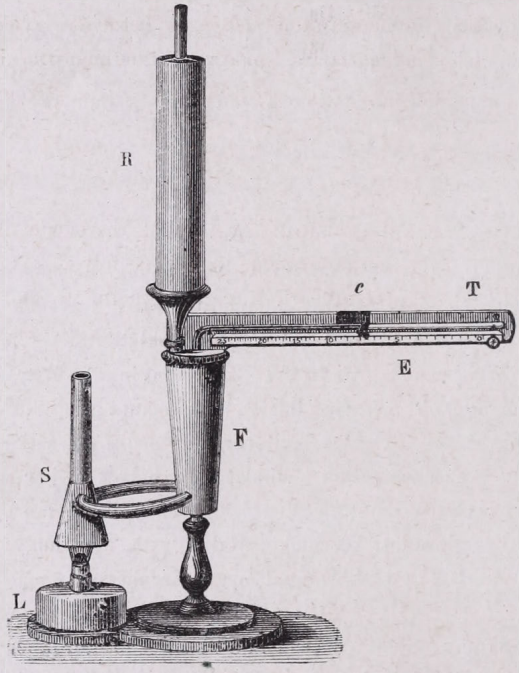
Az ebullioskop azonban sohasem talált szélesebb körökben alkalmazást, nem tudott gyakorlati eszközzé vergődni, mert az ilyennek főkelléke — az egyszerü gyors kezelés, a biztos leolvasás — nem volt meg. Legnagyobb hiánya az volt, hogy az alkohol-viz keverék forrpontjának szabatos megállapitása csak igen gyakorlott észlelőnek sikerült, mert a higanyszál egy ponton való megállapodása csak 10—16 másod perczig tartott, mely időtől kezdve a szeszpárák folytonos eltávolodása következtében a mérséklet mindaddig emelkedett, mig végre elérte a tiszta viz forrpontját.

Legujabban sikerült Malligand-nak Párisban az ebullioskop most elősorolt hiányain valóban geniális módon segiteni. Készüléket szerkesztett, mely nem csak néhány percz alatt biztos eredményeket szolgáltat, hanem a franczia akadémia itélete szerint legkitünőbb minden eddigelé ismert, az alkohol meghatározására szolgáló készülékek és eljárások között.

*) Denkschriften der math.-naturw. Classe der k. Akademie der Wissensch. in Wien. Bd. II. 1850.

Malligand készülékének szerkesztésénél a Vidal-féle elvből indult ki s a következő módon járt el:

A megvizsgálandó folyadék a főzőedénybe (*F*) tétetik, mely legmélyebb pontja közelében gyürü alakú csővel közlekedik; ennek végei azonban nem ugyanazon magasságban fekszenek. A cső, alatta álló lámpával (*L*) hevittetik



még pedig (*S*)-nél. Igy eléretik az, hogy a hevitett helyen fejlesztett alkohol gőzök a főző edényben foglalt folyadék-oszlop által folytonosan és mindaddig condensáltatnak, mig az egész tömeg egyenletes forrásba jön. A forralás közben elszálló alkoholos gőzök az R-hütőben condensáltatnk és a thermometer higányszála 10 perczig is marad egy és ugyanazon a helyen, és az alatt a leolvasást a legnagyobb kényelemmel és absolut biztossággal eszközölhetni.

Az eszköz oly módon van szerkesztve, hogy a thermometer mellett megerősitett skála (*E*), 0 °-tol 25 °-ig — mely az uralkodó légnyomáshoz képest beállitható — közvetetlenül térfogat-százalékokat ad. Minthogy kiderült az, hogy a készülék pontossága a concentratioval fogy, tanácsos magasabb fokú szeszes folyadékok megvizsgálásánál azokat 2—3-szoros viz mennyiséggel pontosan higitani.

A franczia akademia kiküldött egy bizottságot Thenard elnöklete alatt, mely Malligand készülékét behatóan megvizsgálta és az idevágó eredményeiről 1875. május 3-kán tartott ülésen jelentést is tett. (Compt. rendus. 1875. t. LXXX. 1114).

Hogy megállapitsák, vajjon Malligand készülékei egymással összehasonlitva, egybevágó eredményeket adnak-e vagy sem, több franczia borfaj egy részt az akademiai bizottság, másrészt a »chambre syndicale du commerce« által vizsgáltatott meg.

A mint látni, a fölötte pontos eredmények a következők:

	A »chambre syndicale« eredményei	Az akadém. bizottság eredményei	Különbség.
Vin du Cher, 1874	11,00	10,95	— 0,05
Vin de Montagne (Midi), 1874 . .	10,30	10,30	»
Vin de Roussillon, 1873	13,00	12,94	— 0,06
Vin de coupage, 1873	11,90	11,80	— 0,10
Vermouth (Noilly, Prat et C^{e}, . . .	17,65	17,60	— 0,05
Vin de Muscat Frontignan, 1872 .	12,75	12,69	— 0,06
Vin du Narbonnais, 1874 . . .	12,75	12,65	— 0,10
Vin blanc d'Entre-deux-mers, 1872 .	11,10	11,13	+ 0,03
Vin du bas Médoc, 1874	11,05	11,05	»
Vin de Bergerac, 1874	11,30	11,30	»
Vin de Tournus, 1874	9,65	9,65	»
Vin de Chinoh	11,05	11,05	»
N° 15. Narbonne supérieur, 1874 .	13,40	13,30	— 0,10
N° 16. Roussillon — 1874.	14,50	14,40	— 0,10
N° 17. Roussillon ordinaire, 1874.	13,95	13,90	— 0,05

Az összes kisérletek eredményei rövid kivonatban a következők:

1) A legtöbb szilárd oldható anyag észrevehető módon késlelteti az alkoholos folyadékok forrpontját, mig némely más e mérsékletet alábbszállitja.
2) E kétféle anyag majdnem minden borban jelen van.
3) Tökéletesen kiforrt asztali borokban e kétnemü anyag egy másra való hatása compensáltatik.
4) Czukor tartalmú boroknál mutatkozó anomáliák vizzel való hígitás által eltüntethetők.
5) A legroszabb körülmények között nagyobb hibát mint $^{1}/_{6}{}^{0}$-ot nem követhetni el; a legtöbb esetben az eredmény még $^{1}/_{2}{}^{0}$-ra biztos.
6) A müvelet gyors és biztos.

7.) A különféle készülékek eredményei egymás között összehasonlithatók.

8.) A Malligand-féle ebullioskop alkalmazása az eddigi, alkohol meghatározásra használt eljárások közül — a legkitünőbb.

A legujabb időben.*) Dr V. Grissmayer foglalkozott az emlitett készülékkel és a sör elemzésére való alkalmazhatóságát vizsgálta. Grissmayer azon eredményhez jutott, hogy az ebullioskop ugy a bor, mint a sör elemzésénél egyaránt kitünően alkalmazható.

A sör dextrin és protein-tartalma nincsen lényeges befolyással a keverék forrpontjára; az eljárás sokkal egyszerübb és nagyobb a destillatiónál és pontosabb a saccharometrikus eljárásnál.

Végre megjegyezzük hogy e készülék Párisban 150 frankon szerezhető meg. A müegyetem vegyipar-mütani laboratoriumában levő készülék kartársaimnak megtekintés végett mindenkor rendelkezésre áll.

Wartha Vincze.

IRODALOM.

Neumann, Dr. C., Professor an der Universität zu Leipzig, Vorlesungen über die mechanische theorie der waerme. Leipzig, B. G. Teubner. 1875. (240 nagy nyolczadrétü lap, 44 a szöveg közé nyomott ábrával.).

Ára 7 mark 20 fillér.

Ha valaki mintegy 15 évvel ezelőtt, az ötvenes évek végén, az akkoriban még új, de már nagy jövőt igérő mechanikai vagy dynamikai hőelméletet (thermodynamikát) tanulmányozni akarta, valóban roppant nehézségekkel kellett megküzdenie. Az alapvető értekezések — Carnot, Clapeyron, Mayer, Joule, Helmholtz, William Thomson, Clausius, Rankine, Kirchhoff, Reech, Hirn dolgozatai — angol, német, franczia tudományos folyóiratokban elszórtan jelentek meg; azok, melyek külön brochureökben látták napvilágot, már rég el voltak kapkodva; rendszeres kézikönyv pedig még teljességgel hiányzott. Más mód csakugyan nem volt, mint a »Fortschritte der Physik« akkoriban még pontosabban megjelenő évi utmutásai alapján hozzá férközni 5 vagy 6 szak folyóirat vagy társulati kiadvány 40 vagy 50 kötetéhez, s a tudás szomjától kölcsönzött erővel és türelemmel átvergődni ugyanannyi különböző szempontokból kiinduló és különböző eszejárású értekezésen. Vegyük még hozzá, hogy a fölfedezés útja rendesen tekervényes, s az alapvető értekezések, épen mivel új ösvényen járnak, legtöbbnyire homályosak és nehezen követhetők, ha mindezeket meggondoljuk, valóban lehetetlen tiszteletünket megvonnunk azon öregebb

*) Dingler 218. pag. 262,

szaktársaink tudományszeretetétől, kik a nélkül hogy a mesterek élő szavait hallhatták volna, az új tan igéit önerejükből magukévá tudták tenni, hogy annak idehaza hirdetőivé váljanak.

Mily máskép áll most a dolog! Derék populáris munkák egész serege — Tyndall, Helmholtz, Balfour-Stewart, Maxwell, Cazin, s. t. b. — nyujtja az első tájékoztatót; Reech, Clausius, Mayer, Joule dolgozatai külön kötetekben összegyűjtve és felvilágositó jegyzetektől kisérve közre vannak bocsátva; a többékevesbbé kimeritő kézikönyvek egész sora áll rendelkezésünkre, ú. m. (hogy csak a kezünk ügyébe esőket említsük):

Briot, Théorie mécanique de la chaleur, Paris 1869.

Combes, Exposé des Principes de la théorie mécanique de la chaleur. Paris 1863.

Dupré, Théorie mécanique de la chaleur, Paris 1869.

Grashof, Theoretische Maschinenlehre in vier Bänden. Erster Band, Mechanische Wärmetheorie. Leipzig 1872—1875.

Hirn, Exposition analytique et expérimentale de la théorie mécanique de la chaleur, Paris-Colmar 1862. (Új kiadása 1865-ben és 1875-ben.)

Hirn, Conséquences Philosophiques et métaphysiques de la thermodynamique. Paris 1868.

Krebs, Einleitung in die mechanische Wärmetheorie, Leipzig 1874.

Résal, Commentaire aux travaux publiés sur la chaleur considérée au point de vue mécanique. Paris 1861.

Röntgen, Die Grundlehren der mechanischen Wärmetheorie Jena 1871—1874.

Rühlmann (Richard), Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. Braunschweig 1873—1875. (Még befejezetlen.)

Saint-Robert, Principes de Thermodynamique, Turin 1865.

Tait, Sketch of Thermodynamics, Edinburgh 1868.

Verdet, Exposé de la théorie mécanique de la chaleur, Paris 1862.

Verdet, Théorie mécanique de la chaleur,, publiée par M. Prudhon et M. Violle, París 1868, 1870.

Zeuner, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, Freiberg 1860; tetemesen bővitett második kiadása, Leipzig 1866.

Most már csakugyan nem a kézi könyvek hiánya, hanem inkább a bősége ejt zavarba. Melyiket válaszszuk bevezetőül, mielőtt a forrás-értekezések tanulmányába fogunk? Briot, Verdet, Zeuner müvei valóban megérdemlik a nagy elterjedést, melyre nem sokára megjelenésök után szert tettek; Tait müve kiválóan érdekes históriai adatainál fogva, ámbár az angolok iránt nem mindig részrehajlatlan; Grashof-ét — bevezetése minden physikusra igen tanulságos—

a technikusok fogják különösen becsülni; s az addig megjelent 3 füzet után ítélve, Rühlmann-é lesz a legkimerítőbb.

Midőn valamely tudományágnak már oly terjedelmes kézikönyv irodalma van, mint a minő a mechanikai hőelméletnek németül, méltán támad egy új könyv megjelenésekor az a kérdés, volt-e rá szükség? vannak-e az anyag kiválasztásában és feldolgozásában haladást jelző tulajdonságai? szóval, volt-e a szerzőnek csakugyan valami mondani valója, vagy csak azt akarta megmutatni, hogy miként tudta mások gondolatait a maga számára assimilálni.

Neumann Károly, a königsbergai nagyhirü physikus fia, ki nevét több mathematikai és physikai értekezés, továbbá a »Theorie der elektrischen Kräfte« czimü müve s a »Mathematische Annalen« szerkesztése által jól ismertté tette, a mult év végén közrebocsátotta előadásait, melyeket előbb a tübingai, utóbb pedig a lipcsei egyetemen a hőelméletről tartott. Már előre is érdekessé teszi e müvet az a körülmény, hogy szerzője miként az előszavában olvassuk, a kidolgozásban leginkább apja königsbergai előadásait használta. Igaz, hogy jobb szerette volna az ember, ha az öreg Neumann maga dolgozta sajtó alá előadásait, nem pedig fia, kinek sajátságos irói egyéniségét alkalmasint kevesen fogják kedvelni, de azért igy is meglátszik rajta az öreg mester alkotó szelleme. Lássuk először is a mű tartalmát.

Az I. fejezet 21 lapon az erély megmaradásának elvét vagy axiomáját tárgyalja; azután a II-ik fejezetben 33 lapon a mechanikai hőelméletet a gázokra alkalmazza; a III-ikban 23 lapon a gázok körfolyamaival foglalkozik; és csak ezután, midőn a gázok elméletét letárgyalta, tér át a a IV ik fejezetben a tetszőleges anyagokra vonatkozó általános egyenletek felállítására, a minek 39 lapot szentel; az V-ik fejezetben 37 lapon az általános elméletet az elpárolgásra, a VI-ban 21 lapon a megolvadásra vagy megömlésre alkalmazza. A VII-ik és VIII-ik fejezet oly kérdéseket fejteget, melyekre az eddigi hőelméleti kézikönyvek vagy semmi vagy csak igen kevés gondot forditottak, itt t. i. az általános elméletet különböző anyagok *keverékére* alkalmazza. Szól ebben a gázkeverék feszültségéről, erélyéről és hőfoghatóságáról; meglehetős bőven foglalkozik a viz,- vizgőz- és gázból álló rendszerrel, két anyag mechanikai vagy chemiai egyesülésekor föllépő meleggel, a kénsav- és vizből álló rendszerrel, az elnyeléskor kiszabaduló meleggel különböző esetekben. E két fejezet 61 lapon aránylag a legterjedelmesebb. Az utolsó vagy IX-ik fejezetben igen röviden bánik el a szilárd és híg testekkel. A függelékben a Krönig-Clausius-féle gázelméletnek egy-két oldalt szentel.

E munka megjelenése tehát nem volt fölösleges; VII-ik és VIII-ik fejezetével eddig mindenesetre hézagot pótolt.

Föntebb már emlitettük, hogy Neumann Károly sajátságos irói egyéniség.

Valami különös felforgatott gondolatrend, a szokottól eltére jelölések és sajátságos keresettség jellemzik munkáit. Az olvasó, ha a tárgyat még nem ismeri, és ha komolyan tanulni akar belőle — alig tudja megszokni; kellemetlenül érzi magát; hol ez hol az bántja. A ki a tárgyat meg már ismeri, alig igazodik el benne; úgy látszik, mintha mind vadonat új egyenletekkel és kifejezésekkel találkoznék. Pedig hát a régiek, egytől egyig jó ismerősök, csakhogy valami szokatlan szabású, roszúl álló köntösben. Mily más egy Verdetnek elegans mathematikai stílje! Sz. K.

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

3. Adva van négy gömb, melyek középpontja ugyanaz, sugaraik pedig r_1 r_2 r_3 r_4. Egy szabályos tetraeder úgy helyezendő el, hogy minden szögpontja egy másik gömb felületén legyen. Határoztassék meg ebből a tetraeder számítás és szerkesztés útján.

A feladat azonban nem lehetséges a sugarak *minden* értékénél. Mi a feladat lehetőségének feltétele analytikai és mértani alakban? (König.)

Harmadik megoldás Vályi Gyula tanárképezdei tagtól Kolozsvártt.

Tegyük föl, hogy r oldalélű a_1 a_2 a_3 a_4 szabályos tetraeder a feladat feltételei szerint van a négy concentrikus gömbben elhelyezve. Állítsuk úgy a tetraedert, hogy a_2 a_3 a_4 lapja vizszintes legyen, a_1 szögpont ezen lap felett. Olyan coordinatarendszert válaszszunk, melynek kezdetpontja a gömbök közös centruma, xy lapja vizszintes, positiv z tengelye függélyesen felfelé, y tengelye a_2 a_3 oldaléllel párhúzamos, még pedig positiv ága oly irányú, hogy a_2 y-ja legnagyobb, positiv x tengelye oly irányú, hogy a_4 x-e legnagyobb legyen. A tetraeder szögpontjainak coordinatái ezen esetben:

$$a_1 \left| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{matrix} \right. \qquad a_2 \left| \begin{matrix} x_2 = x_1 - \frac{r\sqrt{3}}{6} \\ y_2 = y_1 + \frac{r}{2} \\ z_2 = z_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}r \end{matrix} \right.$$

$$a_3 \left| \begin{matrix} x_3 = x_1 - \frac{r\sqrt{3}}{6} \\ y_3 = y_1 - \frac{r}{2} \\ z_3 = z_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}r \end{matrix} \right. \qquad a_4 \left| \begin{matrix} x_4 = x_1 + \frac{r\sqrt{3}}{3} \\ y_4 = y_1 \\ z_4 = z_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}r \end{matrix} \right.$$

A négy szögpontra nézve feltétel szerint állanak ezen egyenletek:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2$$
$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = r_2^2$$
$$x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = r_3^2$$
$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = r_4^2$$

vagy:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2$$
$$\left(x_1 - \frac{r\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y_1 + \frac{r}{2}\right)^2 + \left(z_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}r\right)^2 = r_2^2$$
$$\left(x_3 - \frac{r\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{r}{2}\right)^2 + \left(z_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}r\right)^2 = r_3^2$$
$$\left(x_1 + \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + y_1^2 + \left(z_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}r\right)^2 = r_4^2$$

a négy egyenletből x_1 y_1 z_1-et kiküszöbölve:

$$3(r^4 + r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 + r_4^4) -$$
$$- 2(r^2r^2 + r^2r_2^2 + r^2r_3^2 + r^2r_4^2 + r_1^2r_2^2 + r_1^2r_3^2 + r_1^2r_4^2 + r_2^2r_3^2 + r_2^2r_4^2 + r_3^2r_4^2) = 0;$$

ez a feltételi egyenlet az öt mennyiség között, mint látjuk, symmetrikus.

Ha az

$$r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 + r_4^4 = s_4$$

és

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = s_2$$

jelöléseket bevezetjük, s tekintetbe veszszük, hogy:

$$2(r_1^2r_2^2 + r_1^2r_3^2 + r_1^2r_4^2 + r_2^2r_3^2 + r_2^2r_4^2 + r_3^2r_4^2) = s_2^2 - s_4$$

lesz az egyenlet:

$$3r^4 - 2s_2r^2 + 4s_4 - s_2^2 = 0,$$

és ebből

$$r = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(s_2 \pm 2\sqrt{s_2^2 - 3s_4})};$$

de csak a positiv valós értékeknek van geometriai jelentősége. Hogy r-nek legalább egy positiv valós értéke legyen, kell hogy

$$s_2^2 - 3s_4 \geqq 0$$

legyen; hogy két positiv valós értéke legyen, arra a feltétel:

$$4s_4 - s_2^2 \geqq 0;$$

ez a feltétel mindig teljesül, mert

$$4s_4 - s_2^2 =$$
$$= (r_1^2 - r_2^2)^2 + (r_1^2 - r_3^2)^2 + (r_1^2 - r_3^2)^2 + (r_4^2 - r_2^2)^2 + (r_2^2 - r_4^2)^2 + (r_3^2 - r_4^2)^2 \geqq 0,$$

így r-nek positiv valós értéke vagy kettő van, vagy egy sincs.

Kivételt képez az az eset, mikor r két positiv valós értéke egyenlő, ekkor:

$$s_2^2 - 3s_4 = 0.$$

Ez $r_1\ r_2\ r_3\ r_4$ között föltételez olyan összefüggést, milyen van a lapban három concentrikus kör sugara s azon szabályos háromszög oldala között, melynek minden szögpontja egy másik kör kerületén van.

Ezzel a fentebbi feladat szorosan összefügg, azért mellesleg megjegyzendő, hogy $r_1\ r_2\ r_3$ sugarak, s az ily módon beirt szabályos háromszög oldala (l) között ez a relatio áll fenn:

$$l^4 + r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 - (l^2r_1^2 + l^2r_2^2 + l^2r_3^2 + r_1^2r_2^2 + r_1^2r_3^2 + r_2^2r_3^2) = 0$$

vagy más alakban:

$$(2l^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)^2 -$$
$$- 3(r_1 + r_2 + r_3)(r_1 + r_2 - r_3)(r_1 - r_3 + r_3)(- r_1 + r_2 + r_3) = 0$$

melyből csak akkor nyerünk positiv valós értéket l számára, ha $r_1\ r_2\ r_3$ mint oldalakból háromszög szerkeszthető. Ha egy positiv valós érték van, akkor kettő is van, kivételt képez azonban itt az az eset, mikor a két positiv valós érték egyenlő.

Hogy r valós legyen, kell hogy legyen:

$$3s_4 - s_2^2 \leqq 0.$$

Ez ily alakra hozható:

$$(2r_4^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)^2 -$$
$$-3(r_1 + r_2 + r_3)(r_1 + r_2 - r_3)(r_1 - r_1 + r_3)(-r_1 + r_2 + r_3) \leqq 0$$

tehát $r_1\ r_2\ r_3$ sugarakhoz kell, hogy kapható legyen ezek concentricus köreibe beirható szabályos háromszög. Ha ennek oldala $= l_4$, akkor erre nézve mint említők:

$$(2l_4^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)^2 -$$
$$-3(r_1 + r_2 + r_3)(r_1 + r_2 - r_3)(r_1 - r_2 + r_3)(-r_1 + r_2 + r_3) = 0.$$

A két kifejezés összehasonlításából következik, hogy r_4-nek kisebbnek kell lenni, mint l_4 nagyobb, — és nagyobbnak kell lenni, mint l_4 kisebb positiv valós értéke, vagy egyenlő is lehet azok valamelyikével. Ha l_4 két positiv valós értéke egyenlő, akkor $r_4 = l_4$ szükségkép. Ugyan ilyen összefüggés van $r_1\ r_2\ r_3$ és l_3, $r_1\ r_3\ r_4$ és l_2, $r_2\ r_3\ r_4$ és l_1 között.

Hogy tehát $r_1\ r_2\ r_3\ r_4$ sugarakhoz a feladat feltételeinek megfelelő r tartozzék, következő feltételeknek kell teljesüluiök:

1. lehessen kapni három-három sugárhoz azok concentrikus köreibe beirható szabályos háromszöget. Ilyet, ha egyet igen, akkor általánosságban kettőt is lehet kapni.

2. Az így nyert háromszögek közül a nagyobbik oldalánál a negyedik sugárnak kisebbnek kell lenni, a kisebbik háromszög oldalánál azonban nagyobbnak, vagy egyenlő is lehet azok valamelyikével. Ha azonban a két nyert háromszög azonos, akkor a negyedik sugárnak egyenlőnek kell lenni ezen háromszög oldalával.

Geometriailag szerkeszthető r azon elv alapján, hogy r r_1 r_2 r_3 r_4 között symmetrikus egyenlet állván fönn, kettő közülök pl. r és r_4 felcserélhető. Képzeljük az r_1 r_2 r_3 sugarú concentrikus gömböket; r_1 gömbjének tetszés szerinti p_1 pontjából irjunk le r_4 sugárral gömböt; Ez metszi r_2 gömbjét általában egy körben. Ennek tetszés szerinti p_2 pontját választva, p_1 p_2-re szerkeszszünk szabályos háromszöget. Ezt p_1 p_2 körül megforgatva, a csúcs egy kört ir le, mely r_3 gömbjét két pontban metszi általában, például p_3 és p_3' pontokban. Ezek egyikét (p_3-at) választva p_1 p_2 p_3 háromszögre felül és alúl szerkeszszünk szabályos tetraedert. A csúcsokat a gömbök közös középpontjával összekötő egyenesek lesznek r keresett értékei. — A különös eseteket véve elő, lehet:

1. hogy a p_1 pontból leirt gömb r_2 gömbjét kivül vagy belül érinti, mi akkor történik, ha $r_4 = r_1 - r_2$ vagy $r_4 = r_1 + r_2$. Ekkor a p_1 p_2-re emelt szabályos háromszög csúcsa oly kört ir le, mely egészen az adott gömbökkel concentricus gömbfelületen fekszik, hogy tehát lehessen kapni r-t, r_3-nak ezen gömb sugarával egyenlőnek kell lenni;

2. megtörténhetik, hogy p_3 és p_3' pont összeesik, azaz a p_1 és p_2-re emelt szabályos háromszög csúcsa által leirt kör r_3 gömbjét érinti. Ekkor p_1 p_2 p_3 háromszög a gömbök közös centrumán átmenő lapban fog feküdni, s így a reá emelt két szabályos tetraeder csúcsai az adott gömbökkel concentrikus gömbön feküsznek, s csupán csak egy r értéket kapunk. Az 1.) alatt tárgyalt esetnél is ez a körülmény fordul elő.

---

8. Erősitsünk egy forgó korongra, a sugár mentében, hengeralakú egyenes csövet, melynek egyik vége A zárt, másik vége B nyilt legyen. A zárt vég a korong középpontjába essék, úgy, hogy forgatás közben B kört írjon le A körül, mint középpont körül. Ily körülmények között a középpontfutó erő módosítani fogja a lég nyomását a cső belsejében. Mily törvény szerint változik e nyomás A-tól B felé? (B. Eötvös Loránd.)

Megoldás Deregnyey Géza, végzett technikustól.

A feladat szelleméből következtetem, hogy a forgás függélyes tengely körül történik, s hogy már elérte stationär állapotát, s következésképen a hőmérsék a henger minden pontjában már ismét egyenlő.

A légben belső helyzeti erély nem lévén, az erély megmaradásának elvéből következik, hogy a *mozgási erély változása egyenlő és ellenkezű jegyű a végzett külső munkával.* Jelölje tehát a (nem épen szükségkép egyenes, sőt tetszőleges görbe szerint hajló) henger valamely pontjában u a forgási sebességet, p a nyomást, és v az ottani lég fajlagos térfogatát, úgy (a tömeg-egységre)

$$d\left(\frac{u^2}{2}\right) = -pdv.$$

A mérséklet az egész cső hosszában egyforma lévén, Gay-Lussac Mariotte törvényéből következik, hogy

$$dv = d\left(\frac{RT}{p}\right) = -RT\frac{dp}{p^2},$$

R a csőben levő gáz kétféle fajhevének munka-egységben kifejezett különbségét, T pedig az absolut hőmérséket jelenti. Lesz tehát:

$$d\left(\frac{u^2}{2}\right) = RTd(log.\ p).$$

Legyen B-ben, hol a légnyomás egyenlő a külnyomással p_0-sal, a sebesség u_0, úgy az egészelés után

$$\log.\frac{p}{p_0} = -\frac{u_0^2 - u^2}{2RT}$$

Ha a henger illető pontjának távolát a tengelytől x-szel, a B pont távolát a tengelytől x_0-sal, a körülforgások számát másodperczenkint n-nel és a $\frac{2n^2\pi^2}{RT}$ állandót $\frac{1}{\gamma^2}$-tal jelöljük,

$$\log.\frac{p}{p_0} = -\frac{x_0^2 - x^2}{\gamma^2},$$

honnan:

$$p = p_0\, e^{-\frac{x_0^2 - x^2}{\gamma^2}}$$

Ebből az egyenletből már most könnyen kiolvasható a nyomás változásának törvénye.

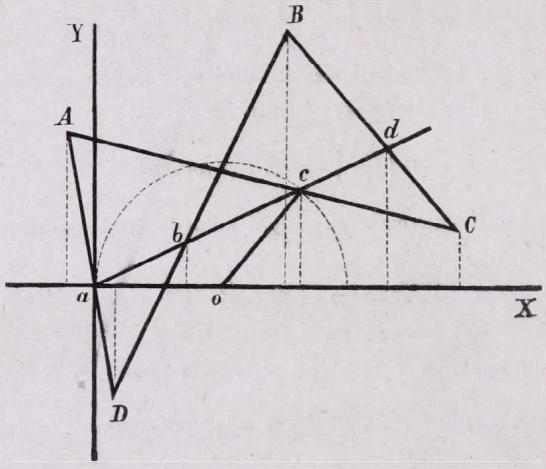
E föladat megfejtését beküldötte még *Simandl Samu* úr, a trencséni alreáltanoda igazgatója. *Szerk.*

---

9. Az $ABCD$ idomban, hol $AD=BC$ és $AC=BD$, húzzunk AB-hez egy párhuzamos vonalt, mely a négy oldalt a, b, c, és d pontokban metszi; ha ezen négy pont közül egyet, például az a-t, forgási középpontnak veszszük és a hozzá harmadik pontot — c-t — egy oly körben vezetjük, mely az a ponton átmegy, akkor a közbe fogott b pont mértani helye egyenes. (Hart egyenes vezetőjének elve.) (Nagy Dezső.)

Megoldás Detsényi Lajos, müegyetemi hallgatótól.

Legyen az adott idom $ABCD$-ben ábrázolva, húzzunk AB-vel — tehát DC-vel is — párhuzamosan $abcd$ egyenest, mely (a hasonlóságnál fogva)



az AD, AC, BD, BC egyeneseket mind, egyenlő pl. m arányban metszi; minélfogva

$$\frac{Aa}{aD} = \frac{Ac}{cC} = \frac{Bb}{bD} = \frac{Bd}{dC} = m$$

és az a, b, c, d pontek az $ABCD$ idom akármely helyzeténél egy egyenesben maradnak.

Vonatkoztassuk most az idomot egy orthogonal összrendszerre, melynek kezdőpontját a-ba helyezzük és x tengelyét úgy választjuk, hogy a c pont mértani helyének, tehát r sugarú körnek középpontján, o-n menjen keresztül; az y tengelyt pedig erre merőlegesen.

Legyenek az A, B, C, D pontok *metszékei* x_1, x_2, x_3, x_4, a b és c pontéi; x, illetőleg x_c. Az idomból kitűnik (mit könnyen be is lehet bizonyítani) hogy $ABCD$ egy körbe irt négyszög, melyről tudjuk, hogy

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{DC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

miből a föltevés szerint:

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC} \cdot \overline{DC} = \overline{AC}^2 \qquad \text{I.}$$

Tekintsük $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$-t; tudjuk ugyanis, hogy

$$x_1 + x_2 = \overline{AB} \cos. \alpha,$$

és

$$x_3 - x_4 = \overline{CD} \cos. \alpha,$$

tehát:

$$\overline{AB} = \frac{x_1 + x_2}{\cos. \alpha} \quad , \quad \overline{CD} = \frac{x_3 - x_4}{\cos. \alpha}$$

lévén, ebből nyerjük hogy:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{(x_1 + x_2)(x_3 - x_4)}{\cos.^2 \alpha} \qquad \text{II.}$$

De x_1, x_2, x_3 kifejezhető a többi metszékek által, t. i.:

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{Aa}{aD} = m,$$

miből:

$$x_1 = mx_4,$$

ép így:

$$\frac{x_2 - x}{x - x_4} = m,$$

tehát:

$$x_2 = mx - mx_4 + x$$

végre az:

$$\frac{x_1 + x_c}{x_3 + x_c} = m$$

egyenletből x_1 értékét tekintetbe véve:

$$x_3 = \frac{mx_4 + mx_c + x_c}{m}.$$

Ezeket az II. alatti egyenletbe téve.

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \frac{(mx_4 + mx - mx_4 + x)\dfrac{mx_4 + mx_c + x_c - mx_4}{m}}{\cos.^2 \alpha}$$

rendezve:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{x \cdot x_c (m + 1)^2}{m \cos.^2 \alpha}. \qquad \text{III.}$$

De

$$\frac{x_c}{ac} = \cos. \alpha$$

$$\frac{ac}{2r} = \cos. \alpha,$$

tehát: $x_c = 2r \cos.^2 \alpha,$

mi a III. egyenletbe helyettesítve:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{x \cdot 2r \cdot (m+1)^2}{m}$$

eredményt ad. Ezt ismét (I.)-ben fölhasználva, lesz:

$$\overline{AD}^2 + \frac{2rx\,(m+1)^2}{m} = \overline{AC}^2$$

melyből x értéke csupa állandó, adott mennyiségekben meghatározható. Lesz ugyanis:

$$x = \frac{(\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2)m}{2r(m+1)^2},$$

x értéke, mint b mértani helyének *metszéke*, állandó lévén, e mértani hely maga egy egyenes, még pedig egy az o-n és a-n keresztül menő x tengelyre merőleges egyenes.

Mig c tehát körben mozog, b egyenest fog leirni. Ha még m értékét tekintetbe vesszük, akkor:

$$\frac{m}{(m+1)^2} = \frac{\overline{Aa} \cdot \overline{aD}}{(\overline{Aa} + \overline{aD})^2}$$

és így az egyenes oly egyenlete, melyben csupán adott mennyiségek foglaltatnak, a következő:

$$x = \frac{(\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2)\ \overline{Aa} \cdot \overline{aD}}{2r\,(\overline{Aa} + \overline{aD})^2}$$

Egy második megfejtést vettünk még *Bäumel Ede* úrtól, a középtanodai tanárképezde tagjától. *Szerk.*

FÖLADATOK.

13. Kerestetik a gyújtópontok mértani helye azon másodrendű forgási felületekre nézve, melyek öt adott síkot érintenek. (Hunyady.)

14. Egy adott légtömeg, mely a deréklő irányában minden oldalról egyenlő nagyságú és a belső feszültségtől csak végtelen kevéssé különböző külső nyomásnak van alávetve, térfogatának a-szorosára tágúl ki:

1.) vagy állandó nyomással,

2.) vagy állandó mérséklettel,

3.) vagy állandó meleg-mennyiséggel.

Miként viszonylanak e három esetben a tágulás alatt végzett külső munkák egymáshoz s melyik közöttük a legnagyobb és melyik a legkisebb, föltéve hogy $a > 1$. (Szily.)

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

M. T. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

I. kötet. **1876.** 6. füzet.

A MÁSODRENDŰ FELÜLETEK KÖRMETSZÉSEINEK CONSTRUCTIV MEGHATÁROZÁSA.

Fölser István, műegyetemi tanártól

— Egy kőnyomatú (IV) táblával. —

I.

Ha valamely másodrendű felületet és egy ezen felülettel concentrikus gömböt a végtelenben fekvő síkkal átmetszve képzelünk, akkor a másodrendű felület három tengelyének irányai[1]), ugy a gömb végtelenben fekvő képzetes körét k-t, valamint a másodrendű felületnek a végtelenben fekvő síkkal való átmetszését K-t illetőleg, egy polárháromszögnek[2]) három csúcspontjait képezik; tehát a három tengely irányai-, a k kör és a K kúpszelet négy átmetszéspontjából képezett $ABCD$ négyszögnek három átlóspontjával E-, F-, G-vel — az AB, CD; AC, BD; BC, AD átellenes oldalpárok metszéspontjaival — fognak össze esni.

Azon hat párhuzamos síkrendszer, melyek állásai[3]) az AB, CD; AC, BD; BC, AD oldalak, — melyek tehát párosan véve a felület három tengelyével párhuzamosak —, *körökben* metszi a másodrendű felületet; minthogy az ezen síkokban fekvő metszési görbék conjugált átmérőiből képezett involutorikus sugársor derékszögű tartozik lenni.

Az $ABCD$ négyszög négy csúcspontja képzetes lévén következ-

---

[1]) Igy nevezvén az egyenes vonalnak a végtelenben fekvő pontját.

[2]) mely háromszögnek csúcspontjai az átellenes oldalaknak a kúpszeletre viszonyitott pólusaik képezik.

[3]) így nevezvén a síknak a végtelenben fekvő vonalát.

zik: hogy az említett hat párhuzamos síkrendszer közől csak egy pár lehet valós. Ezen két valós rendszerhez tartozó azon két sík, mely egyúttal a felület középpontján megy keresztül — a felület két *cyklikus* sikjának neveztetik és az *ABCD* négyszög harmonikus tulajdonságai folytán könnyen belátjuk, hogy ezen két *cyklikus* sík és a velök egy ugyanazon tengelyen keresztül menő két fősík — egy harmonikus sort fognak képezni.

A mondottakból következik, hogy *a másodrendü felületeket két párhuzamos síkrendszer által lehet körökben metszeni, és hogy eme rendszerek síkjai a felület egyik tengelyével mindannyian párhuzamosak —, a másik két tengelyhez pedig symmetrikus helyzetüek tartoznak lenni;* és továbbá:

A körmetszések párosan véve oly gömbökhöz tartoznak, mely gömbök középpontjai a másodrendü felület azon két tengelyében feküsznek, mely tengelyekhez az illető körmetszések síkjai symmetrikus helyzetüek.

Attérve a körmetszések constructiv meghatározására, a következőkből ki fog tünni: miszerint azt valamennyi másodrendű felületnél egy és ugyanazon eljárás szerint eszközölhetjük.

Igy az ellipsoidnál (1. ábra) és az egyfelületű hyperboloidnál (2. ábra) a cyklikus síkok és az azonban fekvő valós körmetszések meghatározására oly gömböket használunk, melyek az illető felülettel concentrikusak és melyek sugarai —, az ellipsoidnál a középnagyságú tengelylyel, a hyperboloidnál pedig a nagyobbik valós tengelylyel egyenlők.

Az elliptikus paraboloid —, (3. ábra) és a kétfelületű hyperboloid (4. ábra) körmetszéseit legegyszerűbben oly gömbök segélyével találhatjuk, mely gömbök középpontjait a paraboloidnál annak főtengelyében, a hyperboloidnál pedig annak valós tengelyében veszszük fel és mely gömbök sugarait az illető tengelyen keresztül vezetett nagyobb góczhurú fömetszésnek deréklőivel teszszük egyenlőkké.

A kúpszeletek poláris tulajdonságai folytán ugyanis könnyen belátjuk, hogy az *R*, *S* és *T* pontok mindig egy egyenesben feküsznek; miből továbbá következik: hogy a *P'Q* és *PQ'* vetítő síkok a gömböt és az illető másodrendű felület azonos síkgörbékben, az az *körökben* tartoznak átmetszeni.

Az egyenes elliptikus kúp- és az egyenes elliptikus hengernél követendő hasonnemű eljárás az 5-ik és 6-ik ábrából világosan látható és bővebb magyarázatot nem igényel

II.

Az előbbi pontban leírt eljárás a másodrendű felület tengelyeinek ismeretét föltételezi és nem alkalmazható, ha a felület két diametrál metszése-, vagy pedig három conjugált átmérője által van megadva.

A következőkből ki fog tünni, miszerint ezen esetben mindig fölkereshetjük azon három conjugált átmérőből képezett csoportot, mely csoport átmérői egymásra kölcsönösen merőlegesek. Ezen átmérők a felület három tengelyét képezik, és segélyökkel a cyklikus síkok vagy körmetszések meghatározása többé semmi nehézséggel nem jár.

Ugyanis minden másodrendű felületnél az ugyanazon S diametrklsikban fekvő d_1, d_2, d_3,... átmérő sorhoz tartozó conjugált, és az ezen átmérőkre merőlegesen álló diametrálsíkok, két projectiv síksort alkotnak, mely a síksorok tengelyeit az S diametrál síkkal conjugált és a reá merőlegesen álló átmérők képezik.

Eme síksorok homolog síkjainak metszésvonalai tehát egy másodrendű kúpfelületen K-n feküsznek, mely kúpfelület az adott másodrendű felülettel concentrikus, és melynek minden alkotója, az S diametralsíkban fekvő megfelelő átmérővel conjugált és ugyanerre merőlegesen is áll.

Szintugy egy másik S_1 diametrálsíkban fekvő δ_1, δ_2, δ_3 ..., átmérő sornak egy másik K_1 kúpfelület fog megfelelni, melynek minden alkotója az S_1 diametralsíkban fekvő megfelelő átmérővel conjugált és ugyanarra merőlegesen is áll.

Mivel pedig az S és S_1 diametrálsikok metszésvonalában egyesített két átmérőnek a két kúpfelületnek csak egy közös alkotója felelhet meg, kell hogy a két kúpfelület egymást ezen vonalban és — a kúpfelületek másodrendűek lévén — azonkivül még egy a alkotóban, vagy pedig három a, b, c alkotóban átmesse.

Az első esetben az a alkotónak az S és S_1 diametrálsíkokban fekvő megfelelő d_a és δ_a átmérők tehát egy oly síkot fogaak megállapítani, mely az a vonallal conjugált és reá merőlegesen áll. Az a kúpalkotó ezért a felületnek az egyik tengelyét képezendi; mig a d_a és δ_a átmérők sikjában fekvő diametrálmetszésnek két tengelye, a felületnek másik két b és c tengelyét fogja megadni.

A második esetben a K és K_1 kúpfelületek a, b, c metszésvonalai-, a másodrendű felület három tengelyével lesznek azonosak.

A két paraboloidnál, továbbá a hengerfelületeknél ezen három tengely közől csak az egyik fekszik a véges térben; de könnyen belátjuk hogy a felület bármely derékmetszésének — a felület párhuzamos átmérőiből képezett csomag derékmetszésének — két tengelyén keresztül a felület átmérőivel párhuzamosan vezetett két sík, a másodrendű felületnek a véges térben fekvő két fősíkját fogja megadni.[4])

A kifejtett elvek alkalmazàsa egy másodrendű kúpfelületen van előtüntetve, mely az $A_1B_1C_1D_1$ irányvonala (7. ábra) és az F csúcspontja által van megadva. A graphikai műtétek egyszerűsbítése végett a függlap az EF átmérőhöz párhuzamosan vétetett fel és a felületnek azon két $ABCD$ és $CDEF$ diametrálsíkja határozatott meg, melyek egyike vizszintes, a másik pedig függélyes helyzetű.

A felületnek az ezen két diametrálsíkban fekvő három AB, CD és EF conjugált átmérője közől tehát kettő a függlaphoz, kettő pedig a feklaphoz leend párhuzamos.

Az $ABCD$ és $CDEF$ diametrálsíkok átmérőinek az előbbiek szerint tehát két kúpfelület fog megfelelni, mely kúpok feknyomait az M és M_1 mentelékek képezik és mely kúpok metszésvonalait, az M és M_1 mentelékek S, S_1, S_2, S_3 metszéspontjainak az F ponttal való összeköttetéséből nyerjük.

Ezen vonalak egyike FS tehát a két diametralsík metszésének felelend meg, a többi három FS_1, FS_2, FS_3, pedig a felületnek három tengelyével leend azonos.

Az M hyperbola az $ABCD$ diametrálsík átmérőihez conjugált és az ezekre merőleges projectiv siksorok fekszeldéinek metszéseiből keletkezvén-, mértani helye leend azon két projectiv sugársor megfelelő sugarai metszéspontjainak, mely sorok középpontjait az E' és F' pontok képezik és mely sorok megfelelő sugarai —, az $ABCD$ diametralsíkban —, vagy az evvel párhuzamos $A_1B_1C_1D_1$ irányvonalban fölvett d_1, d_2, d_3 ..., átmérőkhöz conjugáltak illetőleg ezen átmérőkre merőlegesen állanak.

Ez oknál fogva az M hyperbola végérintői az $A_1B_1C_1D_1$ irányvonal tengelyeivel párhuzamosak tartoznak lenni.

Az M_1 hyperbola a $CDEF$ diametralsík $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ átmérőihez conjugált és az ezen átmérőkre merőleges két projectiv síksor fekszeldéinek metszéseiből keletkezvén, mértani helye leend oly két parallel sugársor megfelelő sugarai metszéspontjainak, mely sorok egyikének

[4]) A tengelyek meghatározására vonatkozó eme elveket Dr. W. Fiedler, »die darst. Geometrie« czimű müvéből vettem.

sugarai a CD vonalhoz párhuzamosak, a másikéi pedig a vetületi tengelyre merőlegesek. Az M_1 mentelék végérintői tehát ugyanezen két sor sugaraival lesznek párhuzamosak.

Az M hyperbolánál (a 7-ik ábrában) az E' és F'' pontokban vonható t és t' érintők, továbbá az A_1B_1 és a d_1 és d_2 átmérőknek megfelelő S, D_1 és D_2 pontok határoztattak meg.

Az M_1 hyperbolánál a $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ átmérőknek megfelelő pontok sorjában Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5-el jelöltettek.

Az S_1, S_2, S_3 metszéspontok biztosabb meghatározása végett az M és M_1 hyperbolák ily módon fölkeresett öt pontjából azok érintői, végérintői — Pascal tétele szerint —, a tengelyek és azok végpontjai — mint a bennök fekvő involutorikus sorok kettős elemei —, meghatároztattak és ezekből a kúpszeletek ismert módon megszerkesztettek.

Könnyü belátni hogy helyes szerkesztésnél az S_1 S_2 S_3 háromszögben az S_1F', S_2F'', S_3F'' vonalak az S_2S_3, S_1S_3, S_1S_2 oldalakra merőlegesen tartoznak állani; az az hogy az F' pont, az említett háromszög három magassági vonalának közös metszése tartozik lenni.

Minden további a cyklikus síkok és körmetszések meghatározására vonatkozó szerkesztés az I. pontban kifejtett módon — az 5. ábrában alkalmazott eljárás szerint — könnyen eszközölhető és ezért bővebb magyarázatot nem igényel.

(Budapest, 1876. aprilis.)

A HŐELMÉLETBEN ELŐFORDULÓ MENNYISÉGEK DYNAMIKAI JELENTÉSÉRŐL.

Szily Kálmántól.

A természettan egyik legfontosabb alapfogalma: a hőmérsék. Minden hőelméleti, sőt minden természettani mennyiség kapcsolatos vele. És mindamellett az egész természettanban nincs tán fogalom, mely oly határozatlan és oly homályos lenne, mint épen ez. Rationalis definitiója és mértéke mindekkoráig egyes-egyedül a hőelmélet második főtételén, ezen a sokat vitatott, de eddigelé még tisztába nem hozott tételen alapszik. Innen van az, hogy a hőelmélet második főtételének szigorú, kifogástalan megállapítása, tisztán dynamikai alapon nyugvó bebizonyítása nemcsak magát a hőelméletet, de az egész természettant is a legközvetetlenebbül érdekli.

Ujabb időben tettek is több rendbeli kisérletet levezetni a hőelmélet második főtételét, minden hőtani axioma vagy hypothesis nélkül, egyedűl mechanikai elvek vagy legalább tisztán mechanikai föltevések alapján. Boltzmann már 1866-ban egy a bécsi akadémia elé terjesztett és a »Sitzungsberichte« 53-ik kötetében megjelent értekezésében megmutatta, hogy oly anyagi rendszerre, melynek minden egyes pontja zárt pályában jár s a közben periodikus mozgást követ, föl lehet állítani egy dynamikai tételt, mely a hőelmélet második főtételével mind alakjára, mind jelentésére nézve, úgy látszik, azonos. — Clausius 1871-ben egy a Pogg. Ann. 142-ik kötetében megjelent értekezésében e tételt annyiban általánosította, a mennyiben bebizonyította, hogy nem is szükséges hozzá, hogy minden egyes pont zárt pályában járjon, s a közben periodikus mozgást kövessen, elegendő, ha a mozgás hosszabb idő elfolyása alatt, átlagban véve, periodikusnak tekinthető. — Ugyancsak 1871-ben e sorok irója egy dolgozatot terjesztett a m. t. akadémia elé, melyben arra figyelmeztetett, hogy a Boltzmann- és Clausius-féle mechanikai tétel, legalább a formájára nézve, tökéletesen megegyez a Hamilton-féle elvvel, s ebből azt következtette, hogy a második főtétel afféle szerepet játszik a thermodynamikában, a minőt Hamilton elve a dynamikában.

Mindezen dynamikai levezetések azonban, ha mentek voltak is a hőtani hypothesisektől, de nem voltak mentek a mechanikaiaktól s így nem is kelthettek teljes megnyugvást a második főtétel általános érvényességére nézve.

Ez indított arra, hogy egy nem régiben közzétett dolgozatomban *) a kérdést újra vizsgálat alá vegyem, s támaszkodva Rankine-nek egy jóslatszerű affirmativ nyilatkozatára, megkisértsem: *levezetni a második főtételt egyenest az erély megmaradása elvéből, minden további mechanikai föltevés nélkül.*

Meg kell azonban vallanom, hogy e kisérletem akkoriban meglehetősen erőltetve akart csak sikerűlni: a gondolatmenet nehézkes, és a levezetés nem is áll mindenképen kifogástalan alapon. — Azóta folyvást üldözött a gondolat, nem lehetne-e a levezetést természetszerűbbé, világosabbá s minden kifogástól mentessé tenni. Elvégre meggyőződtem, hogy a főnehézség onnan származik, *hogy a mechanikai fogalmak, melyeket magunknak a hőelméletben előforduló thermikus mennyiségekről alkottunk, nem kielégítők és szigorúan véve nem is helyesek.* — Be-

*) Megjelent a M. Tud. Akadémia »Mathematikai Értekezései« között IV. kötet, 3. szám.

láttam, hogy mindenek előtt e fogalmakat kell tisztázni, egyrészt általánosbítani, másrészt szabatosítani. Elszántam magamat az eddigi fogalmak némelyikével szakítani s őket általánosabb és szerintem szabatosabb fogalmakkal helyettesíteni; s mihelyt e térre léptem, a levezetés azonnal egyszerűbbé, természetesebbé vált, olyanná, mely — miként ez idei hőelméleti előadásaimon meggyőződtem — kezdők által is könnyen követhető.

A jelen dolgozatomban közrebocsátom idevágó elmélkedéseim eddigi eredményét és pedig: 1.) is a hőelméleti fogalmak szükségessé vált módosítását, 2.) ezen módosított fogalmak alapján a második főtétel dynamikai levezetését, és végre 3.) a dolgok ezen új felfogásából levonható következtetéseket.

1.

A hőelmélet mathematikai tárgyalásának egyik sarkkövét az a föltevés képezi, mely szerint a test hőtani állapota mindaddig változatlannak tekintendő, a míg a térfogat és a mérséklet állandó marad. — Ez ellen, minthogy nem foglal magában egyebet, mint annak az ismeretlen valaminek, a mit hőtani állapotnak szokás nevezni, csakis egyoldalú és hozzá még meglehetős laza definitióját, elvégre nem lehet kifogásunk. Szokássá vált azonban ez állítást egész mereven kifejezni s teljes exclusivitással mondani, hogy a test hőtani állapota *csakis* akkor tekinthető és tekintendő változatlannak, ha a térfogat és a mérséklet folytonosan állandó marad; és mihelyt, akár az egyik, akár a másik — bárha végtelen kevéssé is — megváltozik, megváltozik aránylag a test állapota is. Helyes-e ez? Vagy ha már a hőtani állapotnak ezen értelmezésétől épenséggel nem akarunk megválni, szabad-e a természetben előforduló testekről ily értelemben vett változatlan állapotot föltételezni? Én azt hiszem, hogy — ha *így* akarjuk érteni a test hőtani állapotának változatlanságát — nincs a természetben test, melyről el szabadna képzelni, hogy a hőtani állapota bár egy pillanatig tartó *véges kis* idő folytán is állandó maradna.

Mert minden testet temérdek sok — de nem végtelen sok — anyagi pont halmazának lehet tekintenünk, melyek belső és külső erők hatása alatt, bizonyos ismeretlen törvények szerint, folyvást mozognak. Képzeljünk el magunknak egy testet az ő temérdek sok moleküljével s az ezek között tátongó aránylag nagy hézagokkal. Vegyük ezt a belvilágot egy bizonyos $t=o$ időpillanatban szemügyre. Mindenik molekülnek megvan e pillanatban a maga helye, a maga sebessége és a maga

gyorsulása, megtörténhetvén, hogy egynémelyiknek közülök e pillanatban épen semmi a sebessége. És most teljék el egy végtelen kis idő *dt* s tekintsük meg a testet ujra. Egész más elrendezés tárul fel előttünk! Majd mindenik molekül megváltoztatta a maga helyét, sebességét és gyorsulását; csak azok maradtak veszteg a régi helyükön, melyeknek az imént épen zérus talált lenni a sebességük. Emitt a molekülök szélyelebb mentek egymástól, amott összébb kerültek: itt tágulás, ott összébbzsufolás. És ugyanaz mutatkozik nemcsak a test belsejében, hanem a kerületén is; itt is hol szélyelebb mentek, hol összébb szorúltak a molekülök. Az erre következő pillanatban ismét más panoráma áll előttünk. S így megy ez tovább szakadatlan változatosságban.

Mi a következménye e folytonos változásnak? Minthogy a molekülök száma, bár töméntelen, de nem végtelen, s minthogy egyelőre feltételezzük, hogy egyensúlyozatlan külső erők nem szerepelnek, melyek a spontán változékonyságot megzavarhatnák, a valószinűség szerint ép úgy megeshetik az, hogy az imént találomra választott pillanatban a partialis tágulások legyenek túlsúlyban a partialis összébbnyomódások felett, mint annak ellenkezője. Annak, hogy a tetszőlegesen választott végtelen kis *dt* időben a tágulások összessége lesz-e túlsúlyban, vagy az összébbnyomódásoké, annak *valószinüsége* — ismétlem, hogy egyensúlyozatlan külső erők nem szerepelnek — *egyenlő nagy*. Tegyük fel, hogy az imént választott pillanatban a tágulás lett légyen túlsúlyban, tehát hogy e pillanatban a test térfogata növekedett. Egy vártat múlva ismét megtekintve a test belső elrendezését, meglehet, hogy most az összébbhúzódást tapasztaljuk túlsúlyban levőnek, vagyis hogy a térfogat e pillanatban csökkent. És minthogy az egymásra jövő változások ugrásszerűleg sohasem következhetnek be, szükségképen előfordúl a tágulásnak, valamint az összébbhúzódásnak minden fokozata — és pedig folytonos sorrendben — a test körülményei által megszabott határok között. E szerint a térfogat egy darab ideig folyvást növekszik, míg el nem éri tágulásának az adott körülmények által megszabott szélső határát; ekkor egy pillanatig állandó marad, aztán meg folyvást csökken, míg csak az összehúzódásnak szélső határát el nem éri; itt ismét egy pillanatig változatlan marad, hogy újból tágulva az imént leirt játékát ismételje. Valóban igen különös, szerfelett ritka véletlen lenne az, hogy a partialis tágulások és összébbhúzódások *minden pillanatban* épen compensálják egymást. Sokkal valószinűbb, hogy *a térfogat folytonos variationak, folytonos lüktetésnek van alávetve*. E térfogat-lüktetések érzékileg ép oly kevéssé vehetők

észre, mint maguk a molekül-mozgások, melyek őket szülik. Egy-egy teljes lüktetés után a térfogat megint visszatér előbbeni phasisára. Jelöljük a térfogat positiv vagy negativ változását a dt idő alatt δv-vel, egy teljes lüktetés idejét i-vel, úgy

$$\int_0^i \delta v . dt = 0$$

a mi szóval akként fejezhető ki, hogy a térfogat-változás közép-értéke *egy teljes* lüktetés alatt egyenlő a semmivel, tehát

$$\overline{\delta v} = 0.$$

Midőn tehát azt mondjuk, hogy valamely test térfogata állandó, úgy az voltaképen csak annyit jelent, hogy a térfogat-változás középértéke egy teljes lüktetés alatt egyenlő a semmivel.

Föltéve, hogy ezen térfogat-variatiókra *a test tökéletesen rugalmas*nak tekinthető s hogy külső egyensúlyozatlan erők a lüktetéseknek sem tágasságát, sem időtartamát nem alterálják, úgy egyfelől állandó marad a lüktetés ideje és másfelől a térfogatnak ezen időtartamra vonatkoztatott középértéke, vagyis

$$i = \text{const.}$$

és

$$\bar{v} = \frac{1}{i}\int_0^i v . dt = \text{const.}$$

Midőn tehát azt mondjuk, hogy a térfogat állandó, voltaképen nem a térfogat maga, hanem a térfogat középértéke marad állandó.

Azt hiszszük, hogy e fölfogás jogossága nem vonható kétségbe.

Ha azonban azt megengedjük, hogy a térfogat folytonos variatióknak van alávetve, úgy azt is meg kell engednünk, hogy a test a reá ható erők ellenében folytonosan végez munkát, majd positivot majd negativot, noha térfogatát közönséges értelemben állandónak mondjuk. Ebből következik, hogy a dt idő alatt végzett munka δW nem 0, hanem a δW-nek egy teljes lüktetés idejére vonatkoztatott középértéke lesz csupán 0; vagyis:

$$\overline{\delta W} = \frac{1}{i}\int_0^i \delta W . dt = 0$$

Honnan veszi, vagy hová fordítja a test ezen alternativ munka-végzésnél vagy munka-fogyasztásnál szereplő erélyt? Azzal egyrészt saját erélyét csökkentheti vagy szaporíthatja, másrészt pedig a környezetét. Nevezzük a környezettől dt idő alatt vett erélymennyiséget $+\delta Q$-nak

a test erélyéből ugyanazon idő alatt kölcsönzöttet pedig $-\delta E$-nek, úgy az erély megmaradása elvénél fogva:

$$\delta W = \delta Q - \delta E$$

s minthogy δW általában nem 0, következik, hogy általánosságban véve sem δQ, sem δE nem tartozik 0 lenni.

A test összes erélye is folytonos variatiónak, folytonos lüktetésnek van tehát alávetve, majd szaporodik majd csökken, bárha a térfogat és hőmérsék állandónak mondatik is. Midőn azt mondjuk, hogy valamely test összes erélye állandó, úgy ez voltaképen csak annyit jelent, hogy a test erélyének egy-egy lüktetés idejére vonatkozó középértéke:

$$\overline{E} = \text{Const.}$$

A test összes erélye két részből áll: t. i. az eleven erőből, T-ből, és a potentiális erélyből, U-ból, úgy, hogy

$$E = T + U,$$

S minthogy E folytonos variatiónak van alávetve, T és U is folytonosan változni fognak; de középértékük egy teljes lüktetés tartamára vonatkoztatva maradjon állandó, vagyis:

$$\overline{T} = \text{Const.}$$
$$\overline{U} = \text{Const.}$$
$$\text{és } \overline{E} = \overline{T} + \overline{U}.$$

A környezettől kölcsönzött erély δQ hasonló lüktetéseknek van alávetve. A dt végtelen kis idő alatt több meleget kaphat a test a környezettől, mint a mennyit ez neki ugyanezen dt idő alatt visszaad. A Prévost-féle mozgó egyensúly, a mint ebből látjuk, végtelen kis időre nem érvényes. Az erélycsere fluctuatiója a test és a környezet között folytonosan fenáll, bárha a térfogat és hőmérsék állandónak mondatik is; hol a test *kap* több erélyt a környezettől, hol a test *ad* több erélyt a környezetnek, úgy, hogy δQ általában nem zérus — csakis a lüktetés szélső határain az — hanem igenis a δQ-nak egy-egy lüktetés idejére vonatkoztatott középértéke lesz zérus, vagyis:

$$\overline{\delta Q} = \frac{1}{i}\int_0^i \delta Q.\, dt = 0$$

honnan, i nem lévén végtelen nagy,

$$\int_0^i \delta Q.\, dt = 0.$$

Eddigi elmélkedéseink eredményét összefoglalva, könnyen belátható már most, hogy mikor kell a test hőtani állapotát állandónak tekinteni. Erre korántsem szükséges, hogy az úgynevezett állapotjelzők — térfogat, hőmérsék, feszültség — változatlanúl maradjanak. A mi felfogásunk szerint, *a test változatlan állapotának föltétele az, hogy a térfogat-lüktetés periodusa, továbbá a térfogatnak, eleven erőnek, potentiális erélynek, a végzett munkának és a környezettől vett erélynek egy teljes lüktetés idejére vonatkoztatott középértéke állandó legyen*, tehát:

$$i = \text{Const.} \quad 1) \qquad \overline{v} = \text{Const.} \quad 2)$$

$$\overline{T} = \text{Const.} \quad 3) \qquad \overline{U} = \text{Const.} \quad 4)$$

$$\overline{\delta W} = 0 \quad 5) \qquad \overline{\delta Q} = 0 \quad 6)$$

A meddig a test állapota változatlan, addig e hat feltétel is teljesítve van, és viszont. E feltételi egyenletek azonban nem mindnyájan függetlenek egymástól; meglehet, hogy ha kettő vagy három közülök teljesítve van, a többi már *eo ipso* beteljesedik.

Ezek előleges megállapítása után térjünk át most az állapotváltozás analytikai tárgyalására s ezzel kapcsolatban a hőelmélet második főtételének levezetésére.

2.

Gondoljunk magunknak egy tetszőleges testet és szemeljünk ki a testet alkotó anyagi pontok közül egyet példaképen. E pont tömege legyen m, derékszögű coordinátái a $t=0$ pillanatban legyenek x_0, y_0, z_0; sebességének componensei x'_0, y'_0, z'_0; gyorsulásának componensei x''_0, y''_0, z''_0; ugyanakkor a test térfogata: v_0; eleven ereje: T_0; potentiális erélye: U_0. Ha a test állapota meg nem változnék, a lüktetés ideje: (i) állandó maradna s hasonlóképen az erre vonatkoztatott középértékek $\overline{v}$, $\overline{T}$ és $\overline{U}$ is etc.; az m pont pedig i idő lefolyása után eljutna egy új helyzetbe, melynek coordinátáit x_1, y_1, z_1-vel, a pontnak ottani sebességi componenseit x'_1, y'_1, z'_1-vel, ottani gyorsulási componenseit x''_1, y''_1, z''_1-vel jelöljük. Ámde a test állapota, ezen i idő lefolyása alatt, változzék meg egy végtelen keveset, és pedig akkép, hogy az i idő leteltével a lüktetés tartama ne legyen többé i, hanem $i+\delta i$; az eleven erő középértéke ne legyen többé $\overline{T}$, hanem $\overline{T}+\delta\overline{T}$ s így tovább. A közlött $\overline{\delta Q}$, mely különben az i idő lefolyása alatt 0 lett volna, most általában különbözni fog a semmitől, hasonlóképen $\delta\overline{W}$. Igy az m pont sem fog az x_1, y_1, z_1 helyzetbe jutni, hanem egy más

helyre, melynek coordinátáit x_2, y_2, z_2-vel, az odatartozó sebességi componenseket x'_2, y'_2, z'_2-vel és a gyorsulási componenseket x''_2, y''_2, z''_2-vel jelöljük.

Valamely t pillanatban, mely a 0 és i időpillanatok között feküdjék, legyenek az m pont coordinátai x, y, z; sebességi componensei x', y', z'; gyorsulási componensei x'', y'', z''; a test ekkori eleven ereje T, ¡potentiális erélye U. Az ezen t pillanatra következő dt végtelen kis dő alatt a pont helye megváltozik $\delta x, \ldots$.; sebességi componensei $\delta x' \ldots$.; gyorsulási componensei $\delta x'' \ldots$.-vel; a test eleven ereje δT-vel; potentialis erélye δU-val s e közben végez a test δW munkát s mindezekre kölcsönöz a környezettől δQ erélymennyiséget. Úgy az erély megmaradása elvénél fogva:

$$\delta Q = \delta T + \delta U + \delta W.$$

De miután:

$$T = \Sigma \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

és

$$\delta U + \delta W = - \Sigma m (x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z)$$

(ha t. i. az erők által a test ellenében végzett munkát számítjuk posinak) lesz:

$$\delta Q = \Sigma m (x' \delta x' + \ldots - x'' \delta x - \ldots)$$

Hogy δQ-t képezhessük, szorozzuk az egyenletet dt-vel s vegyük figyelembe, hogy

$$x' \, dt = dx$$
$$x'' \, dt = dx'$$

akkor:

$$\delta Q . \, dt = \Sigma m \, (dx . \, \delta x' \ldots\ldots - dx' \, \delta x \ldots\ldots).$$

Ámde:

$$dx' \delta x = d(x' \, \delta x) - x' d\delta x$$

és:

$$x' \, d\delta x = x' \, \delta dx = \delta(x' \, dx) - dx \, \delta x'$$

úgy hogy:

$$\delta Q . \, dt = - \Sigma m \, d(x' \, \delta x + \ldots.) + \Sigma m \, \delta(x' \, dx + \ldots.)$$

vagy pedig a differentiálás és variálás jelét az összeg elé irva, s az utolsó összegben dx iménti értékét megint visszatéve és az eleven erő fentebbi kifejezését figyelembe véve, végre 0 és i határok között integrálva:

$$\int_0^i \delta Q . \, dt = \Sigma m \, [x' \delta x + \ldots.]_0^i + \delta \int_0^i 2 \, T . \, dt$$

vagy a középértékek behozatala után:

$$i.\overline{\delta Q} = \Sigma m\,[x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z]_0^i + \delta(2.i\,\overline{T}) \qquad \text{I.)}$$

Ezen egyenlet — a mint már Sir William Thomson az »A Treatise on Natural Philosophy«-ben (I. 233) megjegyezte — minden körülmények között érvényes.

Alkalmazzuk először is arra az esetre, midőn a test állapota nem változik; úgy, mivel ekkor

$$i = \text{Const.}$$
$$\overline{T} = \text{Const.}$$

és

$$\overline{\delta Q} = 0.$$

származik ez:

$$\Sigma m\,[x'\delta x + \ldots.]_0^i = 0$$

vagy a föntebb megállapított jelölésekkel élve:

$$\Sigma m\,[x'_0\,\delta x_0 + y'\,\delta y_0 + z'_0\,\delta z_0] = \Sigma m\,[x'_1\,\delta x_1 + y'_1\,\delta y_1 + z'_1\,\delta z_1] \qquad 7.)$$

Az ezen egyenlet jobb vagy baloldalán álló összeg nem egyéb, mint az úgynevezett *sebességi potentiál* variatiója. Jelöljük ezt a potentiált Helmholtz szerint (V. ö .Crelle's Journal, Vol. 57, pag. 13: Ueber Luftschwingungen in offenen Röhren.«) Φ-vel, úgy a 7.) alatti egyenlet így irható:

$$(\delta\Phi)_0 = (\delta\Phi)_1\,; \qquad 7a.)$$

vagyis — a test állapota változatlan lévén — a sebességi potentiál variatiója a lüktetések ugyanazon phasisára mindig állandó.

Alkalmazzuk most az I. alatti egyenletet az i idő alatt végbement állapotváltozásra, úgy:

$$i\,.\,\overline{\delta Q} = \Sigma m(x'_0\delta x_0 + \ldots.) - \Sigma m(x'_2\delta x_2 + \ldots.) + \delta(2i\,\overline{T})$$

vagy:

$$i\,.\,\overline{\delta Q} = (\delta\Phi)_1 - (\delta\Phi)_2 + \delta(2i\,\overline{T})$$

Lássuk, mennyiben különböznek $(\delta\Phi)_1$ és $(\delta\Phi)_2$ egymástól?

Mindkettő ugyanazon dt végtelen kis időre vonatkozik, mely nyomban az i idő letelte után következik, de azzal a különbséggel, hogy az első a sebességi potentiál akkori variatiója, midőn a test állapotát nem változtatta, a második pedig, midőn az állapot végtelen keveset változott; és így:

$$(\delta\Phi)_2 = (\delta\Phi)_1 + \delta(\delta\Phi),$$

vagyis a kettő különbsége:

$$\delta(\delta\Phi)_1$$

tehát:

$$i\,.\,\overline{\delta Q} = -\,\delta(\delta\Phi)_1 + \delta(2i\overline{T})$$

De a jobboldal első tagja másodrendű végtelen kicsiny, holott a többi tagok elsőrendű végtelen kicsinyek; marad tehát:

$$i\,.\,\overline{\delta Q} = \delta(2i\overline{T})$$

Minthogy ez egyenletben most már csupán variatiojelek fordúlnak elő, a variálást fölcserélhetjük differentiálással és írhatjuk:

$$i\,.\,\overline{dQ} = d(2i\overline{T}) \qquad \text{Ia.)}$$

Ha a test az állapot-változásoknak egy teljes sorozatán — úgynevezett körfolyamon — megy végig akként, hogy i és $\overline{T}$ elvégre megint a kezdeti értékre térnek vissza, úgy:

$$\int i.\overline{dQ} = 0 \qquad \text{IIa.)}$$

vagy:

$$\int\int dQ\,.\,dt = 0$$

hol az első $\int$ egy teljes lüktetésre, a második pedig egy teljes körfolyamra vonatkozik.

Az Ia.) egyenlet másképp is egészelhető. Oszszuk el $i.\overline{T}$-vel, úgy:

$$\frac{\overline{dQ}}{\overline{T}} = 2.d\,\log.\,(i\,\overline{T})$$

másképp írva:

$$\frac{\int_0^i dQ\,.\,dt}{\int_0^i T dt} = 2.d\,\log.\left(\int_0^i 1 dt\right)$$

Az előbbi alakjában egy teljes körfolyamon át integrálva:

$$\int \frac{\overline{dQ}}{\overline{T}} = 0 \qquad \text{IIb)}$$

vagy másképp írva:

$$\int \frac{\int_0^i dQ.dt}{\int_0^i T.dt} = 0.$$

3.

Hasonlítsuk most össze ezen dynamikai eredményeket a hőelmélet második főtételével, mely visszafordítható körfolyamokra alkalmazva, így iratik:

$$\int \frac{dQ}{a+t} = 0 \qquad \text{II.)}$$

hol $a+t$ a permanens gázok absolut zéruspontjától számított hőmérséket fejezi ki; dQ-ról pedig az állíttatik, hogy ez a testtel közlött meleg differentiálját jelenti. A IIb) alatti általános érvényű dynamikai egyenlet a II) alatti thermodynamikai egyenlettel teljesen megegyez ugyan, de csak azon föltétel alatt, ha az absolut hőmérsék aránylagos a test eleven erejével és a hőelméleti dQ aránylagos a dynamikai $\overline{dQ}$-val. Vegyük először is ez utóbbi viszonyt vizsgálat alá, s jelöljük a hőelméleti dQ-t megkülönböztetésül egyelőre $d\mathfrak{Q}$-val, úgy:

$$d\mathfrak{Q} = \alpha \overline{dQ}.$$

és minthogy mind $d\mathfrak{Q}$ (melegség), mind $\overline{dQ}$ erélyt jelent, az α aránylagossági tényező csak puszta szám, melynek nagysága egyesegyedül a választott mértékegységektől függ. Válaszszuk a melegség egységét úgy, hogy az egyenlő legyen az erély egységével, akkor $\alpha = 1$ és

$$d\mathfrak{Q} = \overline{dQ}$$

vagyis:

$$d\mathfrak{Q} = \frac{1}{i} \int_0^i dQ \,.\, dt$$

Ebből látjuk, hogy $d\mathfrak{Q}$ nem jelenti, mint ekkoráig általánosan föltételezték, az erély differentiálját, hanem az erély differentiáljának egy-egy teljes lüktetésre vonatkoztatott középértékét. Most már könnyen megmagyarázható az is, hogy a hőelmélet első főegyenlete miért nem egészelhető közvetetlenül; azért, mert $d\mathfrak{Q}$ nem teljes differentiál, hanem differentiáloknak középértéke, mely a középérték differentiáljától általában különbözhetik. Eddig egészen bizonytalan volt, hogy a II. alatti egyenletben előforduló dQ melegség mennyi idő alatt közöltetik a testtel, most tisztán látjuk, hogy az egy teljes lüktetés idejére vonatkozik s azon átlagos erélymennyiséget jelenti, mely az idő egysége alatt közöltetik a testtel.

A mi pedig az absolut hőmérsék és eleven erő viszonyát illeti, legyen köztük az aránylagossági tényező egyelőre β, úgy

$$\overline{T} = \beta(a + t)$$

s minthogy a hőmérsék független a tömegtől — kis tömegnek lehet ép akkora hőmérséke, mint a nagy tömegnek — holott $\overline{T}$, mint eleven erő, a tömegtől függő, legegyszerűbb, ha β aránylagosnak vétetik a test tömegével. Legyen például:

$$\beta = M.c$$

hol M a test tömegét, c pedig egy puszta számot jelent, mely csupán a test anyagi minőségétől függ. Igy azután:

$$a + t = \frac{\overline{T}}{M.c} \qquad 8.)$$

vagyis *a test absolut hőmérséke egyenes arányban van a test eleven erejének egy teljes lüktetésre vonatkoztatott középértékével és visszásan a test tömegével.* Mértékegysége: eleven erő osztva tömeggel, vagy — a mi egyre megy — hosszegység négyzete osztva időegység négyzetével.

Határozzuk még meg a c szám jelentését. Képzeljük, hogy minden meleg, mely középértékben véve az időegység alatt a testtel közöltetik, egyesegyedül az eleven erő középértékének növesztésére fordíttassék, tehát hogy

$$\overline{dQ} = d\overline{T}$$

legyen.

És így a 8.) alatti egyenlet szerint:

$$\overline{dQ} = Mc\,.\,dt.$$

Látni innen, hogy c nem egyéb, mint a valódi *höfoghatóság* vagyis az a szám, mely megmutatja, hogy az illető anyagból a tömegegységnek mennyi melegre van szüksége, hogy hőmérséke egy fokkal emelkedjék.

Alkalmazzuk a 8.) alatti egyenletet példaképen az úgynevezett állandó gázokra. Ezeknél, mint Joule és Thomson kisérleteiből tudjuk, a fajmeleg állandó térfogat mellett igen közel egyenlő a höfoghatósággal. Ha tehát V a test térfogatát, v a fajlagos térfogatot, c a tömegegységre vonatkozó fajmeleget állandó térfogatnál, γ pedig a térfogategységre vonatkozó fajmeleget ugyancsak állandó térfogatnál jelenti, úgy

$$\overline{v} = \frac{\overline{V}}{M}$$

és

$$\gamma = \frac{c}{\overline{v}}$$

honnan:

$$M.c = \overline{V}.\gamma$$

és

$$a+t = \frac{\overline{T}}{\overline{V}.\gamma}$$

Két különböző gáznál:

$$\frac{a+t}{a+t_1} = \frac{\overline{T}}{\overline{V}} \cdot \frac{\overline{V}_1}{\overline{T}_1} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma}$$

A hydrogén, oxygén, nitrogén és szénoxyd állandó gázok, és moleküljeik egyenlő számú atómokból állanak. De Regnault kisérletei alapján ki van mutatva, hogy ezeknél γ-nak, függetlenül az anyagi minőségtől, igen közel egyenlő értéke van, vagyis:

$$\gamma_1 = \gamma.$$

E gázoknál tehát:

$$\frac{a+t}{a+t_1} = \frac{\overline{T}}{\overline{V}} \cdot \frac{\overline{V}_1}{\overline{T}_1}.$$

Ha két oly gázról — melyeknek moleküljei egyenlő számú atomokból állanak — azt mondjuk, hogy *hömérsékük egyenlö*, úgy ez azt jelenti, hogy *a térfogat egységében levő eleven erö középértéke egy-egy lüktetés alatt mind a kettönél ugyanaz.*

Ekként megállapítván a hőelmélet második főtételében előforduló mennyiségek dynamikai jelentését, térjünk vissza a

$$\overline{dQ} = \frac{2d(i\overline{T})}{i}$$

egyenlethez. Látjuk ebből, hogy az idő egységében közölt végtelen kis melegmennyiség átlaga: $\overline{dQ}$ két független változó által, u. m. a lüktetés ideje és az erre vonatkozó közép eleven erő által adatik meg; s hogy e mennyiségek kettejéből a harmadik kiszámítható. E három mennyiség közül legkevésbbé ismerjük a lüktetés idejét. Relativ értéke egy esetben, t. i. az állandó gázoknál, minden nehézség nélkül kiszámítható.

Az iménti egyenlet t. i. még így is irható:

$$d \log. (i\overline{T}) = \frac{\overline{dQ}}{2\overline{T}}$$

s minthogy az egyenlet jobb oldala is teljes differentiál tartozik lenni. jelöljük azt egyszerűen dS-sel, hol is S az úgynevezett entrópia felét fogja jelenteni. Integráljuk az egyenletet, s az egészelés állandóját jelöljük C_1-vel, úgy

$$i = C_1 . \frac{e^S}{T}$$

Állandó gázoknál az S változó könnyen kifejezhető a szokásos állapotjelzők által. Tudjuk ugyanis, hogy állandó gázoknál, ha tömegük M

$$\overline{dQ} = M . c_v . dt + M(c_p - c_v)(a+t)\frac{dv}{v}$$

és ha a kétféle fajmeleg viszonyát k-val jelöljük:

$$\overline{dQ} = d\overline{T} + (k-1)\overline{T}\frac{dv}{v}$$

tehát:

$$\frac{\overline{dQ}}{2T} = dS = \frac{1}{2} d \log. (\overline{T} v^{k-1})$$

és innen az állandó gázokra:

$$e^S = C_2 \overline{T}^{\frac{1}{2}} v^{\frac{k-1}{2}}$$

hol C_2 az itteni egészelés állandóját ábrázolja. Helyettesítsük S ezen értékét a lüktetés idő általános képletébe és a C_1, C_2 állandók szorozmányát jelöljük C-vel, úgy:

$$i = C \sqrt{\frac{v^{k-1}}{T}}$$

Vegyünk két oly gázt, melyeknek moleküljei egyenlő számú atómokból állanak, egyenlő nyomás és hőmérsék mellett; s jelöljük normális sűrűségeiket ϱ és ϱ_1-vel, a lüktetési időket i és i_1-vel, úgy:

$$i = i_1 \sqrt{\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^{k-1}}$$

Vonatkoztassuk a sűrűséget a hydrogénéra s jelöljük d-vel; vegyük továbbá a hydrogén lüktetés idejét időegységül, úgy:

$$i = d^{-\frac{k-1}{2}}$$

Két atómos molekűlü gázoknál:

$$k = 1{\cdot}405$$

és

$$\frac{k-1}{2} = 0{\cdot}2025$$

tehát:

$$\log. i = - 0{\cdot}2025 \log. d$$

E képlet alapján számíttatott ki a következő tábla:

A gáz neve	Sűrűsége	Lüktetés ideje
Hydrogén	1	1
Oxygén	16	0·5704
Nitrogén	14	0·5860
Levegő	14·438	0·5825

Látjuk e táblából, hogy a ritkább gázok lassabban, a sűrűbbek gyorsabban lüktetnek; az oxygén lüktetéseinek száma egyazon időben majdnem kétakkora, mint a hydrogéné.

Még csak egy rövid megjegyzést! Ha igaz az, a mint az eddigi tapasztalatok szerint okunk van hinni, hogy a természetben, a tökéletlen rugalmasság, surlódás, nyulósság s az erély szertesugárzása stb. miatt, visszafordítható körfolyam tényleg nem adhatja magát elő, hogy tehát

$$\int \frac{\overline{dQ}}{(a+t)}$$

mindig nagyobb a semminél, úgy a

$$\int i\overline{dQ}$$

értéke is mindig nagyobb tartozik lenni a semminél, más szóval az $A=2\overline{iT}$ függvény, melyet Maupertuis működésnek (action) nevezett el, az erélyforrásra nézve, minden változás végén okvetetlenül *kisebb*, mint annak elején volt. Az a tétel tehát, mely szerint a világegyetem úgynevezett entrópiája folyvást növekszik, egyjelentésű lenne azzal, hogy a világegyetem működése folytonosan csökken.

(Budapest 1876. május 30.)

A DETERMINÁNSOK ELMÉLETÉHEZ.

Hunyady Jenőtől.

Ha az a_{ik} és b_{ik} $(i, k=1, 2, \ldots . n)$ n^2 elemből összetett determinánsokat A és B-vel, az a_{ik} és b_{ik} elemeknek az együtthatóit α_{ik} és β_{ik}-val jelöljük, ha továbbá A_{ik} és B_{ik} azon determinánsok, a melyek A és B-ből akként erednek, hogy A vagy B-ben az i-dik sort vagy oszlopot a B illetőleg A determinánsok k-dik sora vagy oszlopa által pótoljuk és ha végre $\mathfrak{A}_{ik}$-val és $\mathfrak{B}_{ik}$-val azon determinánsokat jelöljük, a melyek az A_{ik} és B_{ik} determinánsokból akként erednek, hogy azokban az a és b

elemeket az azoknak megfelelő α és β együtthatók által pótoljuk, akkor fönnállanak a következő egyenletek:

$$\mathfrak{A}_{ik} = A^{n-2}\ B_{ki}$$
$$\mathfrak{B}_{ik} = B^{n-2}\ A_{ki}$$

Bebizonyítás. Az előrebocsátott jelölések szerint:

$$\mathfrak{A}_{ik} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots\ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i-1,1} & \alpha_{i-1,2} & \ldots\ldots & \alpha_{i-1,n} \\ \beta_{k,1} & \beta_{k,2} & \ldots\ldots & \beta_{k,n} \\ \alpha_{i+1,1} & \alpha_{i+1,2} & \ldots\ldots & \alpha_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots\ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots\ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots\ldots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots\ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

ennélfogva tehát:

$$\mathfrak{A}_{ik}\,A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots\ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i-1,1} & \alpha_{i-1,2} & \ldots\ldots & \alpha_{i-1,n} \\ \beta_{k,1} & \beta_{k,2} & \ldots\ldots & \beta_{k,n} \\ \alpha_{i+1,1} & \alpha_{i+1,2} & \ldots\ldots & \alpha_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots\ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots\ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots\ldots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots\ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & A & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ B_{k,1} & \ldots & B_{k,i-1} & B_{ki} & B_{k,i+1} & \ldots & B_{k,n} \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & A & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & A \end{vmatrix}$$

Minthogy ez utóbbi determinánsban $i-1$ vizszintes és $n-(i-1)$ függélyes sor közös elemei eltűnnek, azért az a determináns-elmélet ismeretes tétele szerint két determináns szorzatából áll, melyek közül az egyik $i-1$-dik, a másik pedig $[n-(i-1)]$-dik fokú, minél fogva:

$$\mathfrak{A}_{ik}\ A = \begin{vmatrix} A & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & A \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_{ki} & B_{k,i+1} & \dots & B_{kn} \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & A \end{vmatrix} = A^{n-1} B_{ki}$$

és innét:

$$\mathfrak{A}_{ik} = A^{n-2} B_{ki}$$

a mi bebizonyítandó volt.

Hasonló módon bizonyítható be a második egyenlet helyessége is.

AZ EGÉSZ SZÁMOK OSZTÓIRA VONATKOZÓ TÉTEL.

König Gyulától.

Legen n egy tetszőleges egész szám:

$$n = p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\ p_r^{\alpha_r},$$

hol tehát $p_1, p_2, \dots$ az n-ben föllépő különböző törzstényezőket, az $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ pedig mint kitevők ezeknek hányszoros előfordultát jelzik. Akkor ismeretes, hogy n minden osztójának összege, ha ideértjük az 1-et és n-t is:

$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_1+1} - 1}{p_2 - 1} \dots\dots \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_{r-1}}$$

Ha n általánosságban két egymáshoz viszonylagos törzstényezőre van felbontva, úgy, hogy

$$n = PQ$$

akkor asz osztók összegét jelző S függvény még a következő törvényt is követi:*)

$$S(n) = S(P)\ S(Q)$$

Ha tehát mint az n-nek két viszonylagos törzstényezőjét a következőket veszszük:

$$p_1^{\alpha_1} \text{ és } p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

lesz:

---

*) Lásd p. szerző »Bevezetését a fölsőbb algebrába« 8. l.

$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} S(p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r})$$

vagyis:

$$(p_1 - 1) S(n) + S(p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) = p_1^{\alpha_1+1} S(p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}).$$

De könnyű látni, hogy $S(p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r})$ az n mindazon osztóinak összegét jelenti, melyek p_1-et nem tartalmazzák, valamint $p_1^{\alpha_1+1} S(p_2^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r})$ megfelelőleg mindazoknak p-szeres összegét, melyeknek kapcsolt *) osztói nem tartalmazzák a p_1-et. Eszerint, ha az n osztóit külön osztályokba sorozzuk, a mint az egyik adott törzsténye zőt tartalmazzák vagy nem, a következő tételt mondhatjuk ki:

Ha veszszük az n minden osztóját, mely nem tartalmazza a p törzstényezőt, és hozzáadjuk az összes osztók p—1-szeres összegét, a p-t nem tartalmazó osztók kapcsoltjainak p-szeres összegét nyerjük.

Például vizsgáljuk a *105* osztóit. Ezek:

1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105; összegük = *192.*

Ezek közől a 7-tel el nem oszthatók: *1, 3, 5, 15;* összegük = *24* a megfelelő kapcsolt osztók: *105, 35, 21, 7;* összegük = *168.*

A tétetnek megfelelőleg: *6. 192+24=7. 168=1176.*

Ha $p=2$, az osztókat páros vagy páratlan voltuk szerint osztályozzuk, és ekkor mint a föntebbi tétel egyszerűbb esetét nyerjük a következőt, melyet Glaisher tett közzé a »Mathematical Messenger« 1875. augustusi füzetében:

Ha veszszük az n minden páratlan osztóját, és hozzáadjuk az összes osztókat, a páratlan osztók kapcsoltjainak kétszeres összegét nyerjük.

Például szolgáljon: *56.* Osztói *1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56,* összegük = *120*

a páratlan osztók: *1, 7;* összegük = *8*

a kapcsolt osztók: *56, 8;* összegük = *64.* Megfelelőleg:

120 + 8 = 2. 64.

**) Ha d az n osztója, úgy $\frac{n}{d}$, mely szintén osztója az n-nek, a d kapcsolt osztója.

A MAGYAR MATHEMATIKAI IRODALOM KEZDETE. Egy mult századi számtan »Arithmetica, vagy számvetésnek mestersége mellyet írtt és ki-adott MARÓTHI GYÖRGY Debretzeni Professor. 1743. Esztendőben.« Előljáró beszédében igen érdekes adatokat találunk a magyar mathematikai irodalom kezdetéről. Nemcsak egybegyüjtve látjuk itt az első zsengéket, de MARÓTHI egy kis kritikát is hallat róluk. Annál becsesebb az előszó idevágó része, mert három olyan mathematikának az emlékét is fentartotta, melyekről irodalomtörténetünkben sincs említés.

"Minekutánna valami Magyar Arithmeticának kinyomtattatása, mind a Tanuló Ifjuságnak, mind másoknak hasznokra szükségesnek ítéltetvén, elvégeztetett, és reám bizattatott; úgy gondolkoztam elsőben, hogy tsak az eddig kézben forgott Magyar Arithmeticák közzül veszem elő valamellyiket; és azt, imitt amott meg-jobbítván, ki-nyomtattatom. Volt pedig kezem között három Magyar Arithmetica. Edgyik a TOLVAJ MENYŐI FERENTZÉ; melly mindenek előtt ismeretes, és leginkább forog kézben. Másik az ONADI JÁNOSÉ, a ki Kassai Oskola Mesterségében a' maga Arithmeticáját ugyan ott Kassán, A. 1693 in 12-mo adta-ki. A Harmadik leg-régibb; mert még A. 1591 nyomtattatott Kolosváron, in 8-vo. Ennek az Irója volt maga a' Typographus; a' mint látszik Német Nemzetből való: mert a' maga nevít fel-nem tette; hanem csak ezt írja a' könyvnek legvégin; Megbotsáss pedig a' vétkektől, mert én Magyar nem vagyok. Isten éltessen. Octobernek 31 Napján. 1591. Typographus.

Ezen a' hárman kivül kellett még avagy tsak kettőnek lenni mindeniknél régibbnek. Mert a Kolosvári felőle van írva a' Titulusban, hogy az most ujonnan a' Frisiusnak Magyar Arithmeticájából sok uj és hasznos Példákkal kiadatott. Melly Magyar Frisiustól különböző az a' Debretzenben nyomtattatott Arithmetica, a' melly azon Kolosváriban, pag. 145 vagy folio K. 2. említtetik; melynek Réguláji felől azt mondja, hogy nem tudhatja honnét vették légyen azokat.

Ezen az öt Magyar Arithmetikán kivül többnek nyomába nem akadhattam. Ezeket pedig méltónak ítéltem, így rövid szóval meg-említeni; hogy-itt-is meg-maradjon emlékezetek: A' Debretzenit pedig nevezetesen azért, hogy ebből ki-tessék a' Debretzenieknek már akkor-is a' Közhaszonra tartozó dolgokban meg-mutattatott szorgalmatoskodások.

Én azt a' két leg-régibb Arithmeticát nem láttam: hanem úgy lehet gondolni, hogy azoknál nem fog alább való lenni a' Kolosvári; a' melly azoknak utánnok irattatott. A' Gemma Frisiusét ugyan láttam Deákul; mely derék jó munka. De nem tudom, ha azon módon fordították-e Magyarra?

Az említett három Magyar Arithmeticát azért vizsgálóra vevén, csak hamar észre vettem, hogy annak edgyike sem ollyan, a' mi nemü nálunk kivántatnék.

Ugyanis a' Tolvajé nem csak felette hijjános; azért, hogy mind a' Fractiókat, mind sok egyeb szükséges dolgokat egészszen el-hagyott; de annak felette, ha igazat kell mondani, az egész munka igen sületlen; és a sok szükségtelen szó szaporítás miatt unalmas. Főképen pedig az, a' mellyet Deákul írtt, ollyan, hogy a' X-dik, vagy a' XI-dik Seculumban sem kellett volna alább valót írni. Sőt azt-is könnyü volna meg-mutatni, hogy a szegény Tolvaj maga sem igen értette az Arithmeticát.

Az Onadi János Arithmeticája sokkal jobb a' Tolvajénál: és tsudálkozni lehet rajta, hogy a' Tolvajét háromszor-is (leg-alább) nyomtatták ki; úgymint Debretzenben, Kolosváron, és Lőtsén, (a' mint maga Tolvaj írja pag. 40 a' Deák Arithmeticájában;) holott az Onadiét talám többszörsem annál az egyszernél. Mindazáltal ebben-is nagy hiba ez, hogy a' Regulák, minthogy mind Versekbe vagynak foglalva, ollyan homályosok, hogy nagyobb részét lehetetlen meg érteni; hatsak az ember vagy már azelőtt nem tudja; vagy a' Példákból nagy bajjal ki nem fejtegeti, mint a' Mesét: Mert a Réguláknak semmi magyarázat nints utánok téve. Továbbá minthogy a' Példákat mind a' Sz. Irásból akarta szedni, a' lett belőle, hogy igen kevés van alkalmatos Példa. Az igyekezet jó, de a' Szent Irást nem az Arithmeticában kell tanulni.

A Kolosvári Arithmeticát sok dologra nézve, ama kettőnél, talám mindeniknél jobbnak lehet mondani. De tsakugyan ebben-is igen sok változást kellett volna tennünk, és hol kihagynunk, hol bővítenünk; ha ugyan tsak a' közönséges haszonra kellett volna alkalmaztatnunk.

Minekokáért végtére reá-szántam magamat, hogy inkább egészen újonnan írok egy Arithmeticát, úgy a' mint legjobbnak gondolhatom; mellyet, Isten jó voltából, ime el-is végeztem — — —"

Érdekesnek tartjuk még itt megemlíteni, hogy maróthi miként vélekedett a magyar műszók csinálásáról.

„— — Minthogy még eddig a' Deákság nélkül való Tanulóknak igen nagy bajt szerzettek a' Deák nevek, mint Additio, Subtractio, Quotiens; s' a' t. én hasznosnak ítéltem, mind azok helyett Magyar szókat tenni; mellyeket még az Asszony-nép is meg-érthessen. Még pedig a' hol az eddig való Magyar szókban nem találtam alkalmatost; új szót is tsináltam egynehányat: mellyért, úgy reménylem egy okos ember sem fog megitélni. — — — Ebben pedig arra vigyáztam, hogy a' Magyar szóban, ha lehet, meg-maradjon a' nyoma, sőt a' formája is annak a' Deák szónak, a' mellynek helyette van téve (p. o. Fractio, Magyarul Törtt-szám: multus, multiplex, multiplicare; Magyarul Sok, Sokszo-

ros, Sokszorozni). De a hol más szókat alkalmatosabbaknak gondoltam, azokat tettem helyekbe".

Érdekes az is, a mit a sokszorozás szóról mond a 7-ik lapon.

„A Multiplicatiot Magyarul nagy részént, Sokasításnak hívják. Nem illő az iránt senkivel tzivódni. De mivel azok a' jobb nevek, a' mellyekből a' dolgot inkább meg-lehet esmérni; úgy látszik, hogy jobb, a' deák-szó formájára, Sokszorozásnak hívni, mint Sokasításnak. Mert az Öszve-adásban is semmi egyéb nintsen a' Sokasításnál. Ellenben a' Multiplicatiot abból mindenkor bizonyosan meg-lehet esmérni, hogy abban ezek a' Szók kétszer, háromszor, hatszor, nyoltzszor, azaz: sokszor ennyi, s ennyi; szüntelen elő-fordulnak. Mindazáltal, ha valakinek ez a' szó épen nem tetszik; ám nevezze Sokasításnak. *Talám idővel a' másik Nevezetnek-is le-kopik a' darabossága*".

Közli: Szüts Béla

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

7. Két egyenes OA és OB a velök egy síkon levő OC függélyessel egyenlő (α) szöget képez; az OA egyenesen m_1, az OB-n m_2 tömegű sulyos pont mozog, úgy, hogy a két pont távolsága (l) állandó marad: határoztassék meg a sulyos pontok, illetőleg összekötő egyenesök mozgása.

(Közli: Réthy Mór.)

Megoldás Bäumel Edétől, a középtan. tanárképezde tagjától.

Mindenekelőtt kérem az olvasót, szerkeszsze meg magának az idomot. Legyen az OA egyenesen az m_1 pont t pillanatban A_1-nél és $OA_1 = s_1$; hasonlóképen az m_2 pont az OB egyenesen B_1-nél, és $OB_1 = s_2$; továbbá az összekötő egyenesnek hajlása a függélyeshez azon az oldalon, mely az OA egyenes felé van fordulva, φ, úgy mindig állanak a következő egyenletek:

$$s_1 = \frac{l}{\sin. 2\alpha} \sin. (\varphi - \alpha) \qquad 1)$$

$$s_2 = \frac{l}{\sin. 2\alpha} \sin. (\varphi + \alpha) \qquad 2)$$

és

$$l^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \cos. 2\alpha \qquad 3)$$

1) *Határozzuk meg először is az összekötő egyenes valamely pontjának pályáját.*

E czélból válaszszuk a coordinata-rendszer tengelyéül magát a két egyenest, úgy, hogy OA az X tengely, OB pedig az Y tengely legyen. Az $A_1 B_1$ egyenes valamely pontjának távola az A_1 ponttól: a; B_1-től: b, úgy $a + b = l$.

Hasonló háromszögekből következik, hogy:

$$\frac{s_1}{x} = \frac{l}{b} \text{ és } \frac{s_2}{y} = \frac{l}{a} \qquad 4)$$

ha most s_1 és s_2 innen vett éltékeit 3)-ba behelyettesitjük, lesz:

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 - 2ab\,xy \cos. 2\alpha = a^2 b^2 \qquad 5)$$

Az egyenes minden pontjának pályája ellipsis, mely az esetben, ha $a = 0$ vagy $b = 0$ egyenessé, ha pedig $a = b$ és $4a = \pi$ körré fajul.

A tömegközéppont pályája, melyre nézve $m_1 a = m_2 b$, ez:

$$m_2^2 x_2 + m_1^2 y_2 - 2m_1 m_2 xy \cos. 2\alpha = \frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} l^2$$

Ez is, mikor $m_1 = m_2$ és $4\alpha = \pi$ körré fajul.

2) *Az egyensúlyi helyzet meghatározása.*

Legyen az egyensúlyi helyzetre:

$$s_1 = \sigma_1 ; \quad s_2 = \sigma_2 \quad \text{és } \varphi = \varphi_0$$

Alkalmazzuk a virtualis munkák elvét, mely szerint az egyensúlykor, minden lehetséges elmozdulásra, a munkák összege egyenlő semmivel, lesz tehát:

$$m_1 g \cos. \alpha\, d\sigma_1 + m_2 g \cos. \alpha\, d\sigma_2 = 0$$

vagy:

$$m_1 d\sigma_1 + m_2 d\sigma_2 = 0$$

differentiáljuk σ_1 és σ_2-t az 1) és 2) segítségül vételével, úgy egyszerü rövidités után;

$$m_1 \cos. (\varphi_0 - \alpha) + m_2 \cos. (\varphi_0 + \alpha) = 0$$

ebből:

$$\text{cotg. } \varphi_0 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \text{ tg. } \alpha \qquad 6)$$

Innen látható, hogy 2 egyensúlyi helyzet van; az egyiknél az összekötő egyenes hajlása a függélyeshez:

$$\varphi_0 = \text{arc. cotg.} \left[\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \text{ tg. } \alpha \right]$$

a másiknál pedig:

$$\varphi_0 + \pi$$

Az elsőben az egyenes az O alatti szárakon nyugszik, a másodikban pedig megnyujtásukon O felett. — Kitűnik az 1) és 2)-ből, ha φ helyébe a 6) egyenletből φ_0-t behelyettesítjük; ekkor ugyanis:

$$\sigma_1 = \frac{l}{\sin. 2\alpha} \frac{m_1 + m_2 \cos. 2\alpha}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos. 2\alpha}}$$

és

$$\sigma_2 = \frac{l}{\sin. 2\alpha} \frac{m_2 + m_1 \cos. 2\alpha}{\sqrt{m_2^2 + m_1^2 + 2m_2 m_1 \cos. 2\alpha}}$$

azon esetben ha $m_1 = m_2$ akkor:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ vagy } \frac{3\pi}{2}$$

és

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \pm \frac{l}{2 \sin. \alpha}$$

3) *Az egyenes valamely pontjának sebessége.*

Ismeretes, hogy ferdeszögű sík-rendszernél a sebesség négyzete:

$$v_2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) \cos. 2\alpha$$

x és y értékeit 4)-ből és az így bejött s_1 és s_2-őt 1) és 2)-ből véve, kapjuk a következő egyenletet:

$$v = \frac{1}{\sin. 2\alpha}\Big(b^2 \cos.^2 (\varphi - \alpha) + a^2 \cos.^2 (\varphi + \alpha) + \\ + 2ab \cos. (\varphi - \alpha) \cos. (\varphi + \alpha) \cos. 2\alpha\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{d\varphi}{dt} \qquad 7)$$

4) *Mikor egyenlő a sebesség zérussal?*

A sebesség akkor lesz zérus, ha a 7) egyenletben vagy a gyökjel alatt álló tag, vagy $\frac{d\varphi}{dt}$ egyenlő semmivel.

Az első tagról könnyü kimutatni, hogy ez, valós φ mellett, zérussá csak akkor válhatik, ha vagy a vagy b egyenlő semmivel.

Ha $a = 0$ úgy az összekötő egyenes iránya:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha \text{ vagy } \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

$b = 0$ esetében:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ vagy } \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

tehát az a vagy b pontnak sebessége akkor zérus, ha az összekötő egyenes az OB illetőleg OA egyenesre merőleges.

Mikor $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, az összekötő egyenesnek minden pontja nyugalomban van.

Hogy ez a második eset beállhat-e, annak eldöntésére határozzuk meg először is általánosan $\frac{d\varphi}{dt}$ értékét. Induljunk ki e végből az erély megmaradása elvéből, mely szerint az összes erély

$$E = T + U \qquad 8)$$

hol T a mozgási és U a helyzeti erély; E pedig állandó. Feladatunkban:

$$2T = m_1 \left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + m_2 \left(\frac{ds_2}{dt}\right)^2$$

$$T = \frac{l^2}{2 \sin.^2 2\alpha}\left[m_1 \cos.^2(\varphi - \alpha) + m_2 \cos.^2(\varphi + \alpha)\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Minthogy továbbá az U függvény — a potential fogalma szerint — oly természetű, hogy az s_1 és s_2 szerint vett partialis differential-quotiensei nagyságra egyenlők, de ellenkező jegyűek az s_1 és s_2 irányban működő külerőkkel; leszen:

$$dU = -(m_1 g \cos. \alpha\, ds_1 + m_2 g \cos. \alpha\, ds_2)$$

Az egyenes egyensúlyi helyzetében $U = 0$; következésképp az egészelés után:

$$U = g \cos. \alpha \left[m_1 (\sigma_1 - s_1) + m_2 (\sigma_2 - s_2)\right]$$

a σ_1 σ_2 s_1 és s_2 értékeit 1) és 2)-ből véve, lesz:

$$U = \frac{gl}{2 \sin. \alpha}\left[m_1\left(\sin.(\varphi_0 - \alpha) - \sin.(\varphi - \alpha)\right) + m_2\left(\sin.(\varphi_0 + \alpha) - \sin.(\varphi + \alpha)\right)\right]$$

Ez még a 6) egyenlet alapján a következő alakra hozható:

$$U = \frac{2gl m_2 \cos. \alpha}{\cos.(\varphi_0 - \alpha)} \sin.^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2}$$

T és U-nak értékét 8)-ba helyettesítve, $\frac{d\varphi}{dt}$ szerint feloldva, lesz:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sin. 2\alpha}{l}\sqrt{2E}\sqrt{\frac{1 - \frac{2g\, l\, m_2 \cos. \alpha}{E \cos.(\varphi_0 - \alpha)} \sin.^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{m_1 \cos.^2(\varphi - \alpha) + m_2 \cos.^2(\varphi + \alpha)}} \qquad 9)$$

Nyilvánvaló, hogy $\frac{d\varphi}{dt}$ csak úgy lehet zérus, ha a gyökjel alatt a számláló egyenlővé válhatik a zérussal. Három eset különböztethető meg, a szerint a mint

$$k^2 = \frac{2g\, l\, m_2 \cos. \alpha}{E \cos.(\varphi_0 - \alpha)} \lessgtr 1$$

a) Ha $k^2 < 1$, úgy $\frac{d\varphi}{dt}$ sohasem lehet zérus, mert különben φ képzetes lenne, ez esetben tehát az összekötő egyenes minden pontja a maga ellipsisén

folyton folyvást körös-körül jár, kivéve az A és B pontokat, melyeknek sebes sége $\frac{d\varphi}{dt}$-től függetlenül semmivé válhat. Ezek

$$+\frac{l}{\text{sin. } 2\alpha} \text{ és } -\frac{l}{\text{sin. } 2\alpha}$$

határok között ide-oda lengenek az OA illetőleg OB egyenesen.

b) Ha $k^2 = 1$, úgy $\frac{d\varphi}{dt}$ akkor 0, ha $\varphi = \varphi_0 \mp \pi$.

E két állás nyilvánvaló egybeesik és az O pont felett levő egyensúlyi helyzettel azonos. Az egyenes folyton csökkenő szögsebességgel közeledik ez állás felé, a nélkül hogy azt valaha elérné, ép úgy mint a közönséges inga az analog esetben.

c) Ha $k^2 > 1$, úgy φ-nek két értéke van, melynél az egész egyenes sebessége semmi, u. m.

$$\varphi = \varphi_0 \pm 2 \text{ arc. sin. } \frac{1}{k}$$

E két állás az egyensúlyi helyzettől jobbra és balra egyenlő szöggel hajlik el; a pontok e szélső határok között lengenek, túl nem léphetnek rajtok, különben $\frac{d\varphi}{dt}$ képzetes lenne. Az egyes pontok nem járnak körös-körül egész ellipsisükön, hanem a két szélső határ közzé eső ellipsis íveken lengenek.

5) *A keringés vagy a lengés ideje.*

A 9) alatti képletből:

$$t = \frac{l}{\text{sin. } 2\alpha} \frac{1}{\sqrt{2E}} \int \sqrt{\frac{m_1 \cos.^2(\varphi-\alpha) + m_2 \cos.^2(\varphi+\alpha)}{1 - k^2 \text{ sin.}^2 \frac{1}{2}(\varphi-\varphi_0)}} d\varphi \qquad 10)$$

Az *a*) és *c*) eseteknek megfelelő határok között véve, megadja a ke ringés illetőleg lengés idejét. Az itt előforduló integrál értéke csak sorbafejtés útján határozható meg.

Egy specialis esetben, a mikor

$$m_1 = m_2 = m \quad \text{és} \quad 4\alpha = \pi$$

az integral »első fajú ellipticus integrál«-lá fajul. Ekkor t. i. a tömegközéppont pályája kör, és a 6) alatti képlet szerint:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

továbbá:

$$m \cos.^2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + m \cos.^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = m$$

és végre:

$$t = \sqrt{\frac{m\,l^2}{2E}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin.^2 \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}}$$

Helyettesítsünk φ helyébe egy új változót ψ-t, mely úgy legyen választva, hogy:

$$\varphi - \frac{\pi}{2} = 2\psi$$

Ekkor:

$$t = \sqrt{\frac{2m\,l^2}{E}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin.^2 \psi}}$$

A föntebb tárgyalt három eset közül példaképen az elsőt véve, midőn

$$k < 1$$

itt a keringés ideje alatt φ elkezdve például $\frac{\pi}{2}$-től $\frac{5\pi}{2}$-ig, ψ pedig 0-tól π-ig növekszik.

De ezen elliptikus integrálnál

$$\int_0^{\pi} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}}$$

tehát:

$$t = 2\sqrt{\frac{2m\,l^2}{E}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin.^2 \psi}}$$

vagy Legendre jelölésével élve:

$$t = 2\sqrt{\frac{2m\,l^2}{E}}\, F\left(\frac{\pi}{2}\, k\right)$$

hol is

$$k = \sqrt{\frac{2m\,g\,l}{E}}$$

és így:

$$t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\, k\, F\left(\frac{\pi}{2}\, k\right)$$

tökéletesen úgy, mint a köringa analog esetében.

Ha pedig $k > 1$ úgy a teljes lengés ideje

$$t = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, F\left(\frac{\pi}{2}\, \frac{1}{k}\right)$$

És ha ez utóbbi esetben még $E = 0$, akkor $\frac{1}{k} = 0$, tehát:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, C\right) = \frac{\pi}{2}$$

végre:

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

---

10. Egy félgömbalakú szilárd katlan sima belsejéhez támaszkodik egy adott (l) hosszaságú, adott (Q) súlyú homogén pálcza, a katlan síma karimájára dőlve s adott ($l-a$) hosszaságú részszel kinyúlva belőle. Mekkora a pálcza hajlása a vízszinteshez? és mekkorák a nyomások a támaszpontokra?

(Szily)

Megoldás Szikay Béla, a középtanodai tanárképezde r. tagjától.

Alkalmazzuk feladatunk megoldására a *virtuális munkák* elvét.

A hajlás (α) meghatározására képzeljük a rendszert végtelen kissé elmozdítva és pedig akként, hogy egyrészt forgatás történjék a gömb karimája körül, másrészt a pálcza belső vége csúszszék a gömb felületén. Ez esetben a támaszpontokon működő reactio-erők virtuális munkái külön-külön egyenlők 0-sal, és így az egyensúly feltétese:

$$Q\,dq = 0,$$

hol is q a pálcza tömegközéppontjának a katlan felszinétől számitott függélyes távolságát jelenti. És minthogy Q nem lehet 0:

$$dq = 0.$$

Úgyde:

$$q = \left(a - \frac{l}{2}\right) \sin.\,\alpha,$$

vagy ha a katlan fél átmérőjét egyelőre r-rel jelöljük:

$$q = \left(2r.\,\cos\,\alpha - \frac{l}{2}\right) \sin.\,\alpha.$$

Tekintetbe véve, hogy az elmozdítás közben sem l, sem r nem változik a $dq = 0$ feltétel a következő egyenletre vezet:

$$2r\,\cos.\,\alpha = \frac{l}{2}\cos.\alpha,$$

vagy visszatéve r helyébe a-t:

$$a\,\cos.\,2\alpha = \frac{l}{2}\,\cos.^2\,\alpha,$$

honnan:

$$\text{tg.}\;\alpha = \sqrt{1 - \frac{l}{2a}}$$

Látni való, hogy adott pálczahossz mellett a $tg\alpha$ maximumát éri el, midőn $a = l$; és ez esetben $tg\,\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, aminek megfelel $35^0\ 15'\ 51''$-nyi szög. *Ennél nagyobb hajlása soha sincs a pálczának.*

A katlan belsejében működő reactio-erő (R) meghatározására fordítsuk el egy kevéssé a pálczát a karima körül, úgy, hogy mindenik pontja végtelen kis körivet irjon le, és csak a karimán nyugvó pontja maradjon veszteg. Minthogy R a félátmérő irányába esik és minthogy ez esetben a karima reactiojának (N-nek) virtuális munkája 0, marad a következő feltételi egyenlet:

$$R \sin.\alpha\, a d\alpha - Q \cos.\alpha \left(a - \frac{l}{2}\right) d\alpha = 0$$

honnan:

$$R = Q \cotg.\alpha \left(1 - \frac{l}{2a}\right),$$

és tekintetbe véve az 1) alatti egyenletet:

$$R = Q\sqrt{1 - \frac{l}{2a}}$$

Minthogy R maximuma akkor áll be, mikor $l = a$; következik, hogy

$$R_{max.} = \frac{Q}{\sqrt{2}}.$$

A karima reactiojának N-nek meghatározására, minthogy ez merőleges a pálcza irányára, forgassuk a rendszert a pálcza belső vége körül, mialatt az egyes pontok végtelen kis köríveket írnak le, és csupán az a pont, hol R működik, marad veszteg. Lesz tehát:

$$N\, a\, d\alpha - Q \frac{l}{2} \cos.\alpha\, d\alpha = 0.$$

Fölhasználva ismét az 1) alatti egyenletet, lesz:

$$N = Q \frac{l}{\sqrt{8a^2 - 2al}} \qquad 3)$$

Minthogy N minimuma akkor áll be, mikor R-nek a maximuma, vagyis mikor $l = a$, lészen:

$$N_{min.} = \frac{Q}{\sqrt{6}}.$$

E feladat különben könnyen megoldható úgy is, hogy ha a virtuális munkák általános elve helyett abból a speciális elvből indulunk ki, mely csakis három erő egyensúlyára érvényes. Három erő — a jelen esetben Q, R és N — csak úgy lehet t. i. egyensúlyban, ha *egy* síkban fekszenek, *egy* pontban találkoznak s kettejök eredője egyenlő a harmadik erővel. Ez elv is könnyen ráveznet az imént talált eredményekre.

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

I. kötet. 1876. 7. füzet.

AZ ERŐK ÖSSZETÉTELÉRŐL A STATIKÁBAN.

(Darboux G.-tól.)

Egy 1726-ból való értekezésében, mely részét teszi a »Commentaires de Saint-Pétersbourg« I. kötetének, Bernoulli Dániel vizsgálat alá veszi azon eljárást, melynek segítségével Newton és Varignon az erők összetevése törvényét lehozták az általuk létesített mozgások összetételének törvényéből. Birálatában különösen azt kifogásolja, hogy esetleges igazságokra támaszkodnak, t. i. olyanokra, a melyek kisérletekből vannak kölcsönözve: »Nihil in illa demonstratione, — mondja ő, — ut falsum rejicio, sed quaedam ut obscura, quaedam ut non necessarie vera.« A Newton eljárása ellen tehető ellenvetéseknek bő és részletes meghányása után áttért főfeladatára, mely az erők összetételi törvényének *geometricus* levezetésében áll.

Anélkül, hogy Bernoulli észrevételeinek teljes elemzését adnók, kiemeljük, hogy levezetése mégsem oly annyira geometricus, mint a minőnek ő azt gondolja. Mint Newton-é, ugy ez is a kisérletből kölcsönzött elveken és különösen az eredő erőnek fogalmán alapszik. Igaz, hogy nem veszi igénybe a mozgások összetételét; de azért nem is képes ujabb fejtegetések nélkül kiterjeszkedni azon esetre, midőn az erők mozgó pontra hatnak.*) Daczára ennek a Bernoulli eljárása számos

*) Feltételezve a nyugvás tanában talált eredőt, midőn a pont mozgásban van így lehet tovább okoskodni. Legyen adva két erő P és Q, melyek egy anyagi A pontra hatnak; vezessünk be két más erőt $-P$ és $-Q$-t és ezeken kivül még egy R erőt, mely ezeket egyensúlyban tartja. Az állapot, vagyis a pont mozgása ekkor nem változik. Hagyjuk el a P, $-P$ és Q, $-Q$ erő-csoportokat; hátramarad az R erő, mely következéskép pótolni képes a P és Q erőket. Azonban azon elv, hogy egy mozgó pontra lehet alkalmazni vagy róla elvenni oly erőket, melyek nyugvó ponton müködve ellensúlyozzák egymást, alapjában véve semmi más, mint egy különös esete az erők által létesített mozgások összetétele elvének.

utánzóra talált. A statika gyakran a dynamikától egészen függetlenül adatik elő, és kizárólagosan az erők összetételének törvényén alapszik. Természetes volt tehát a törekvés, e törvény oly levezetését keresni, mely egyedül az egyensúly vizsgálatából indúl ki; s ezt teszi valóban nagy számú tudós.

Mindaz, mi Bernoulli módszerének a Newton-félével való összehasonlítására vonatkozik, valamint a többi analog levezetés, mely még a »Mécanique analytique« előtt jelent meg, megtalálható Lagrange e munkájának elején, az erő parallelogrammra vonatkozó történeti áttekintésben. A Lagrange által idézett különféle iratok közől mi különösen d'Alembert értekezését említjük meg, az »Opuscules mathématiques« I. kötetében, melyben Bernoulli kissé hosszadalmas levezetése lehetőleg egyszerűsítve található.

Ma már kevés tudományos folyóirat van, melyben nem találkoznánk a parallelogramm tételének legalább egy levezetésével. A »Mécanique céleste« első fejezetében e czélból a végtelen kicsinyt látjuk alkalmazva. Poisson »Mécanique rationelle«-jében egy másikat ad, mely függvény-egyenletre vezet. Monge »Statique«-jának utolsó kiadásában még egy Cauchy-tól származó levezetéssel találkozunk, mely az »Exercises de Mathématiques« 1826. I. kötetében szintén közzé van téve. Möbius »Statik«-jába nagyon különös módszert ismertet. Az, melyet a jelenkori franczia mechanikai kézikönyvek legnagyobb része tartalmaz, igen egyszerű, azonban a szilárd testek nyugvás-tanának egyik elvén alapszik; úgy hiszem, hogy ez Ampère-nek tulajdonítandó. Végül, hogy felsorolásunkban már véget érjünk, még idézzük Liouville »Journal«-jának I. kötetéből Aimé levezetését, mely ismét közel áll a Bernoulli-éhoz és semmiféle előnyt nem mutathat fel az ennek d'Alembert által adott alakkal szemben.

Ezen különböző levezetések részint oly elveken nyugszanak, melyek mindnyájukkal közösek, részint olyanokon, melyek az egyesek sajátjai. Igy p. felveszi az egyik rész, hogy az eredő iránya és nagysága az összetevők irányával és nagyságával együtt folytonosan változik; mások csak azt tételezik föl, hogy az eredő iránya az összetevők által képezett szög belsejébe esik.

Ujból e kérdés tanulmányozására adván magamat, azt mint tiszta geometricus feladatot akartam tárgyalni, hiszen alapjában nem is más és úgy iparkodtam a levezetést idomítani, hogy lehető legjobban ki legyenek emelve azon hypothesisek, melyek mellőzhetők, és azok, melyeket kényszeritve vagyunk elfogadni. Elfogadva tehát azon hypo-

thesiseket, melyek valamennyi levezetéssel közösek, a tárgyalást a következő geometricus feladattal kezdem meg:

Legyen adva számra nézve n vonal: OA_1, OA_2,..... OA_n, legyen azok kezdőpontja egy O pont; akkor ezen vonal számára az összetételnek oly törvénye állapítandó meg, mely a következő feltételeket kielégíti:

I. A teljes, egyedűli és meghatározott eredő változatlan marad, ha ezen vonalak nehánya helyett ezeknek részlet-eredőjét teszszük. Az független legyen a rendtől is, melyben a részletes összetételek végbez vitettek.

II. Független legyen egyúttal a teljes eredő a rendszer térbeli irányától, azaz: a teljes eredő változatlan rendszert alkot a többi vonallal, ha a O pont körül bármi helyzetváltozás történik. Ily módon állítva föl a feladatot, szükséges lesz ép azon részleteket bebizonyitani, melyek leginkább maguktól érthetőknek látszanak, midőn erőkről van szó; a következtetés annyival értékesebb lesz, minél kevesebb feltételt kell bevezetnünk végette.

A felvett két hypothezisből mindjárt következik, hogy két egyenlő és egymással ellentett irányú vonal eredője: OC zerus. Az OA és OB vonalakból álló rendszer ugyanis nem szenved változást: 1-ször, az AOB körüli bármely nagyságu forgása által; 2-szor 180° -kal való elfordulása által egy az AOB-re merőlegesen álló OX tengely körül, mely OA-t OB-be, OB-t pedig OA-ba viszi át. Ezen forgások tehát nem változtathatnak az eredő helyzetén, mi lehetetlen. S igy kell hogy az zérus legyen.

Megfordítva: két vonal OA és OB eredője csak akkor lehet zérus, ha ezek egyenlők és ellentett irányúak. Vegyük fel ugyanis, hogy az OA és OB erők eredője zérus. Tekintsük a következő három: OA, OB és ez utóbbival egyenlő és ellentett irányú OB' vonalból álló rendszert. Ezen három egyenes vonal eredője OA, mivel pedig, OA és OB erők eredője zérus, ezen eredő egyszersmind OB'. Mivel pedig az I. feltét szerint a rendszer nem bírhat két különböző eredővel, kell hogy OB' egyenlő párhuzamos és egyirányú legyen OA-val, azaz kell hogy OA és OB egyenlők és ellentett irányúak legyenek.

Másodszor, az OA és OB vonalak eredője szükségkép az azok által meghatározott síkban fekszik, mert legyen OC ezen eredő: két vonal OA' és OB', melyek OA, illetőleg OB-vel egyenlők és ellentett irányúak, szükségkép oly OC'' eredőt adnak, mely egyenlő és ellentétes OC-vel. S valóban, az OA, OB, OA' és OB' eredője zérus, következ-

zőleg kell, hogy OC és OC' eredők egyenlők és ellentett irányúak legyenek. Ha már most OA-t és OB-t síkjukban 180°-kal elforditjuk, azok OA'-, illetőleg OB'-re esnek; s igy kell, hogy OC, meghosszabitására: OC''-re essék, mi megkivánja, hogy OC a BOA síkban feküdjék. Tehát:

Két vonal eredője az ezen két vonal által meghatározott síkban fekszik.

Ezen első eredmény után legyen P és Q két — az O pontból kiinduló vonal. Csatoljunk hozzájuk egy tetszőleges harmadik R vonalat, mely nem fekszik velök ugyanazon egy síkban, s keressük e három erő S eredőjét. Legyen R' P- és Q-nak eredője, Q' pedig P és R-é, végre P' Q- és R-é. S-et összetehetjük P és P'-ből, vagy Q- és Q'-ből, vagy végre R és R'-ből. Ebből azonban következik, hogy a P és P', a Q és Q', végre az R és R' által meghatározott három sík egy és ugyanazon egyenesben metszik egymást. Mondhatják tehát — a háromélű szögletre vonatkozó ismert tételt alkalmazva — hogy:

$$\frac{\sin R'OP}{\sin R'OQ} \cdot \frac{\sin P'OQ}{\sin P'OR} \cdot \frac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP} = -1,$$

$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'} = \frac{\sin P'OR}{\sin P'OQ} : \frac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP}.$$

Tegyük fel, hogy OR merőleges a POQ síkra. A $\frac{\sin P'OR}{\sin P'OQ}$ viszony egyedül R és Q erőktől s ezeknek hajlásszögétől függ, mely utóbbi pedig utolsó feltétünk szerint derékszög. S igy az pusztán R és Q-nak valamely függvénye, $\varphi\,(R, Q)$. Ép igy lesz a hasonló viszony $\frac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP}$ R-nek és P-nek hasonló függvénye, s igy a

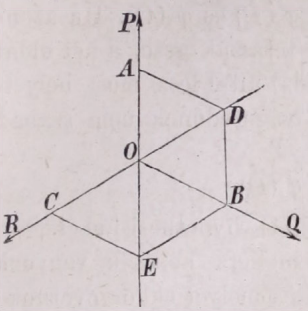
$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'} = \frac{\varphi\,(R, Q)}{\varphi\,(R, P)},$$

vagy ha R-nek valamely számbeli értéket, pl. 1-et adunk, lesz:

$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'} = \frac{\varphi\,(Q)}{\varphi\,(P)}.$$

Ezen egyenlet kifejezi, hogy, ha a $\varphi\,(P)$ hossz a P vonalra vitetik át és pedig P-vel egyirányban, vagy pedig ellentett irányban aszerint, amint maga $\varphi\,(P)$ positiv, vagy negativ, s ugyanezt tesszük $\varphi\,(Q)$-

val, melyet a Q-ra kell átvinnünk, akkor az eredő *irányát* a $\varphi(P)$- és $\varphi(Q)$-ból szerkeszthető parallelogramm átlója adja. Hozzáteszem még hogy az átló nagysága egyenlő az R' eredőnek $\varphi(R')$ függvényével.



Legyen ugyanis P, Q és R három oly vonal, melynek eredője zérus. Mindegyik egyenlő és ellenirányú lesz a másik kettőnek eredőjével. Legyen

$$OA = \varphi(P), OB = \varphi(Q), OC = \varphi(R);$$

akkor OP iránya az OB- és OC-ből alakitott parallelogramm átlójáé, OR pedig az OA- és OB-ből alakitott parallelogramm átlójáé). E szerint

$$OD = BE = OC, \text{ vagyis } OD = \varphi(R).$$

Minthogy R adja a P és Q vonalak eredőjének nagyságát, láthatni, hogy a $\varphi(P)$ és $\varphi(Q)$-ból alakitott egyközény átlója képviseli nagyságra nézve a $\varphi(R)$-et, a mint azt előre jeleztük. A megelőzőkből az összetételre a következő szabályt vehetni ki.

Legyen adva n számú vonal: $P_1, P_2, \ldots, P_n$, az összetétel legáltalánosabb szabálya, mely eleget tesz: az I. és II. feltételeknek, a következő: Választunk valami $\varphi(x)$ függvényt, és átviszszük a $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ .... $\varphi(P_n)$ hosszakat megfelelőleg $P_1, P_2, \ldots P_n$-re azon értelemben, mint azt mindegyiknek előjele kivánja. Összetesszük azután ezen vonalak valamennyiét az erősokszög szabálya szerint, azaz: rendre egymáshoz illesztvén őket; azon oldal, mely a sokszöget bezárja, az R eredő irányát fogja adni, még nagyságra nézve egyenlő lesz $\varphi(R)$-rel.

Hozzáteendő még, hogy — az R teljes ismeretére ezt $\varphi(R)$ értékéből minden kétértelmüség nélkül kell meghatározhatni. Jegyezzük még meg végre, hogy az összetétel szabálya nem változik, ha $\varphi(x)$ helyébe $m\varphi(x)$ tétetik, hol m tetszőleges szám érték.

Az I. és II. föltétel tehát nem elégséges arra, hogy egyedül magától az erők összetételének szabályaira vezessen; még egy hypothesist kell hozzátennünk, melyet az erőegyenközény szabályának valamennyi levezetése elfogadott, s melyen az erő nagyságának definitiója alapszik.

III. A vonalok összetételének, szabályának visszavezethetőnek kell lenni az ugyanazon irányú vonalak algebraicus összeadására.

Lássuk ezen hypothesis következményeit a $\varphi(P)$ alakú függvényre nézve.

Vizsgáljunk két egyenközű és egyarányú P és Q vonalat, s azonfelül tetszőleges S, T, vonalakat. Az összetétel eredményezte vonalsokszögből két párhuzamos oldal fordul elő, $\varphi(P)$ és $\varphi(Q)$. Ha azonban P-t és Q-t egy másik $(P+Q)$ vonallal teszszük össze, a két oldal $\varphi(P)$ és $\varphi(Q)$ pusztán az egy $\varphi(P+Q)$ oldal által lesz most helyettesítve, mely azokkal párhuzamos. Mivel a végeredőnek nem szabad változnia, kell hogy

$$\varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$$

legyen. Mely függvény-egyenlet már kifejezi III. hypothesisünket.

A $\varphi(P)$ folytonosságának föltétele mellett képesek vagyunk megoldani a megelőző egyenletet. A függvény, melyet ekkor nyerünk:

$$\varphi(P) = aP.$$

Azonban még megmutathatjuk, hogy ugyanazon eredményre jövünk ha egyszerüen felteszszük, hogy $\varphi(P)$ positiv.

A

$$\varphi(P+Q) - \varphi(P) = \varphi(Q)$$

egyenlet ugyanis azt mondja, hogy a $\varphi(x)$ függvény, ha ez positiv, mindig növekszik. Azonfelül a függvény-egyenletből ismeretes módon lehozható, hogy

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\varphi(1),$$

azaz: $\varphi(x) = ax$, x-nek valamennyi rationál értékére nézve.

A függvény növekedő lévén, világos egyuttal, hogy ugyanazon képlet x-nek irrational értékeire nézve is fönn fog állani, anélkül, hogy szükséges volna feltenni, folytonosságát.*)

Fentebb tett megjegyzésünk szerint szabad lesz osztani a-val, és így fölvenni, hogy: $\varphi(x) = x$, a mi máris a parallelogramm törvényéhez vezet.

Hogy tehát ezen törvényt megkapjuk, a már felvett három hypothesishez még egy negyediket is kell csatolnunk a következő kettőből:

IV. $\varphi(P)$ mindig positiv, azaz $\varphi(P)$ és $\varphi(Q)$ egyjelüek.

IVa. $\varphi(P)$ folytonos függvény.

---

*) Mert legyen x egy $\frac{p}{q}$ és $\frac{p+1}{q}$ közt fekvő irrationál mennyiség, akkor $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) < \varphi(x) < \varphi\left(\frac{p+1}{q}\right)$, vagyis $a\left(\frac{p}{q}\right) < \varphi(x) < a\left(\frac{p+1}{q}\right)$; $\varphi(x)$ tehát két oly mennyiség közt fekszik, melyeknek határértéke ax.

Vizsgáljuk meg ezen két feltétnek mechanikai jelentését.

IV. Ha φ (P) mindig ugyanazon előjelű, a P és Q erők eredője mindig az általuk képzett szög belsejébe lesz irányozva.

IVa. Ha φ (P) folytonos, az eredő iránya és nagysága folytonos függvényei lesznek a két erőnek.

E két hypothesisnek egyikét, vagy másikát kell tehát elfogadnunk, hogy a két erőnek ismeretes összetételi törvényét megnyerjük.

Egy levezetés sem nélkülözi azon feltételeket, melyeket mi itt fölállítottunk. A d'Alembert által módosított Bernoulli-féle levezetés ugy látszik még a legjobb, minthogy lehető kevés hypothesisből indul ki és csupán síkbeli szerkesztéseket követel.

Ugy hiszem, hogy e közlemény alapján, eltávolítva belőle mindazon részleteket, melyek nem az oktatás keretébe valók, nem lesz nehéz a statikában az erők összetételének törvényét elég egyszerüen kifejteni.

(»*Bulletin des sciences mathématiques.*« *1875. decz.*)

Forditotta: Dr. Wohlrab Flóris.

A MÉRLEGRŐL.

Schuller Alajos, müegyetemi tanártól.

II.

14. Megvizsgálása.

A mérleg megvizsgálásánál két szempontnak kell leginkább irányadónak lenni, az egyik: hogy a mérleg állandó-e? s a másik: hogy karjai egyenlők-e? A többi tulajdonságok csak másodrendű fontosságúak.

Mielőtt a megvizsgálásnál és kijavitásnál követni szokott eljárásokat tárgyaljuk, adjunk előbb számot azon tényezőkről, melyeket módosítva a mérlegnek kellő felszerelést adhatunk. Három körülményt kell kiválóan szem előtt tartani. Az egyik a mérleg szilárd szerkezete, mely nélkül meg nem felel a *jóság* kellékének. Az e tekintetben netalán mutatkozó hiba kijavitása kézmüves munka levén, ezzel itt nem foglalkozhatunk; feltételezzük, hogy a mérleg legalább a megakasztás, és a súlyok felrakásakor okozott rázkódásokat kibirja, anélkül hogy nyugalmi helyzete észrevehetően megváltoznék.

Az ilyen mérleg kellékei *egyrészt az élek- és másrészt a tömegek elhelyezésétől függenek.*

Az élek állásától függenek a mérleg fő tulajdonságai: a jóság vagyis az állandóság és az egyenkarúság, továbbá befoly ez arra is, hogy az érzékenység miként változik a megterheléssel.

A tömegek elhelyezése az üres mérleg nyugalmi helyzetére, az érzékenységre és a lengési időre gyakorol befolyást.

A kijavitás szempontjából czélszerű a két csoportot, melyek egymástól függetlenül kezelhetők, külön választani.

15. Az élek állásának megvizsgálása.

Az élek állásával kapcsolatos követelmények a megvizsgálás szempontjából három részre oszlanak. Megvizsgálandó ugyanis, hogy 1.) az élek egy síkban vannak-e? hogy 2.) párhuzamosak-e? és végre 3.) hogy a mérleg karjai egyenlők-e?

E három műtét mindegyike más pontossággal végzendő. Legnagyobb pontosság szükséges a harmadik, legkisebb az első pontra vonatkozó megfigyeléseknél. A kijavitást illetőleg ép így áll a dolog.

Az élek egy síkban fekvése t. i. csakis azért kivánatos, mert ekkor az érzékenység a különféle megterheléseknél elméletileg egyenlő; de mivel az érzékenység változását úgysem lehet elkerülni, hisz egészen meg nem akadályozhatjuk a mérleg rúdjának meggörbülését, és mivel e változás nem is korlátozza a mérésnél elérhető pontosságot: valóban felesleges lenne akár a megvizsgálásra, akár a kijavitásra felette vagy gondot fordítani. Szigorúan véve, a legelőnyösebb eset az, midőn az élek közép terhelés mellett esnek egy síkba; ekkor az üres mérleg szélső élei magasabban lesznek mint a középső; a legnagyobb megterhelés pedig ugyanannyival mélyebbre juttatja őket. Az érzékenységnek a meggörbülés okozta változásai ekkor lesznek a legcsekélyebbek. De még tovább is megszoríthatjuk követelésünket; elég ugyanis, ha az élek középső részei egy síkba esnek akkor, midőn a csészékben közép nagyságu teher van. Megengedhető tehát, habár nem előnyös, hogy valamelyik élnek egyik vége a sík felett, a másik pedig alatta legyen. A készítő ugyan törekszik az éleket egymáshoz párhuzamosan helyezni, de külön e czélra való javitó részek alig alkalmaztatnak, s a megvizsgálás is szükségtelen, minthogy az élek a közönségesen használt módok*)

*) A megvizsgálásnak módját illetőleg E. Hartig közlött egy eljárást a Polyt. Centr. Bl. 1859 kötetében. Lényege a 17. pont. 2-ik példájában tett megjegyzésekből kitünik.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

szerint is egészen kielégítő állásba hozhatók. Nagyobb pontosság kívántatik annak megvizsgálására, vajjon az élek egymáshoz párhuzamosak-e vagy szabatosabban szólva, vajjon egymáshoz párhuzamos függélyes síkokban feküsznek-e (az előbbiek alapján többet nem követelhetünk). Mert ha valamelyik élnek egyik vége közelebb van a középső élhez, mint másik vége, akkor ugyanaz a súly más hatást idéz elő ahhoz képest, amint az illető élnek az egyik vagy a másik végére nehezedik inkább. Már pedig a használatban lévő szerkezeteknél ennek lehetősége nincs kizárva. Mert a súrlódás okozta akadályok miatt a megterhelt csésze súlypontja az élnek más-más pontja alatt állapodik meg. Általában véve a véletlentől függ, hogy a súly miként oszlik meg az élnek különböző pontjai közt, habár bizonyos mértékben tetszés szerint is előidézhető, hogy az élnek egyik vagy másik vége legyen jobban megterhelve; t. i. azáltal, hogy a súlyokat a csészének egyik felére, vagy az elsőre vagy a hátúlsóra rakjuk, s azután a megakasztót óvatosan megeresztjük. — Minden esetre koczkáztatva van a mérleg legfontosabb tulajdonsága akkor, ha a szélső élek (rövidség okáért mondjuk:) nem párhuzamosak a középsővel, az a tulajdonság, mely miatt a csészéket élekre (vagy csúcsokra) szokás felakasztani, hogy t. i. az egy-egy csészébe rakott súly fogópontja mindig ugyanazon távolságban legyen a középső éltől. Mindamellett e tekintetben meg lehet egy kis hibát engedni; a csészék ugyanis nincsenek szilárd összeköttetésben az őket tartó kengyelekkel, sőt inkább csak kis felületeken, úgyszólván csak éleken, érintkeznek velök. Ezen élek merőlegesen állanak a kengyeleket tartó élekre. Ennélfogva az egy-egy csészébe rakott tömeg súlypontja az illető főélnek mindig közel ugyanazon pontja alatt állapodik meg, s ez történik annál inkább, minél finomabb élek közvetitik a csészék és kengyelek érintkezését.

Máskép áll a dolog a karok hosszával, vagyis a szélső élek közepeinek a középső éltől számított távolságaival. E tekintetben ugy a kijavításnál, mint a hibát előtüntető vizsgálatnál arra a pontosságra kell törekednünk, mely a mérlegelésnél egyátalában elérhető, s mely, mint minden szabatos meghatározás, csak gondos kezelés utján szerezhető meg. — Azt kivánjuk, hogy a karok egyenlők legyenek, azért, hogy a test tömegét egyszerű mérés által lehessen megállapítani, és hogy a legpontosabb méréseknél a Gauss-féle eljárást alkalmazhassuk, anélkül, hogy a súlyokon változtatni kellene (lásd a 12-ik pontot). Rendszerint kénytelenek vagyunk még itt is egy kis hibát — észlelhető és talán még kijavítható hibát — eltűrni, minthogy a legtöbb esetben

nem kerülhetjük el a mérleg hőfokának változásait, melyek hasonló — idővel ingadozó — különbségeket okoznak a karok hosszában.

16. Az élek egy síkban feküsznek-e?

Ennek felületes megvizsgálására finom szálat feszítünk a szélső éleken át és megnézzük, vajjon a középső él épen érinti-e anélkül, hogy behajlítaná a szálat. Jobbnak látszik a mérleg készítők által gyakran használt mód, mely abban áll, hogy az egyik szélső élen keresztül a középső él felé néznek, s emellett figyelemmel kisérik a harmadik élet.

Ha fényes vonal látszik az élek között, akkor a szélső élek alantabb fekszenek; és ha egyátalában nem lehet keresztül látni, akkor magasabban vannak mint a középső. Ezeknél szabatosabb a Girgensohn módja, mely arra van alapítva, hogy az egyensúly helyreálltával a csészének és a beléje rakott testeknek súlyát azon az élen képzelhetjük összpontosítva, amely a csészének alátámasztására szolgál.

E tulajdonságból az következik, hogy — midőn a mérleg nyugalmi helyzetében megállapodott — az élekre nehezedő összes súlyt szabad abban a pontban összegyülve képzelnünk, mely a középső élen át fektetett függélyes síkban és egyidejüleg a szélső éleken át fektetett (közel vízirányos) síkban is fekszik. A felrakott súlyoknak ezen közös súlypontja akkor esik a középső élbe, ha mind a három él egy síkban van, mely esetben a felrakott súlyok közvetlenül*) nem változtatnak a mérleg statikai nyomatékán, tehát az érzékenységén sem. Vajjon ez az eset fennforog-e a mérlegnél, annak kipuhatolására Girgensohn szerint egyelőre leveszszük a csészéket kengyelestül, s a rúd közepén alkalmazott csavart addig mozgatjuk felfelé, míg a közönyös egyensúly eléretik, a mikor a rúd többféle helyzetekben képes megállapodni. Ezután a csészéket ismét visszahelyezzük, és súlyokat rakunk beléjük. Ha azt tapasztaljuk, hogy a különféle megterhelések alatt megmarad a közönyös egyensúly, az annak a jele, hogy az élek eredetileg egy síkban feküdtek, és hogy a megterhelés nem változtatott rajta, hogy tehát a rúd meggörbülése jelentéktelen. Ha pedig a megterhelés után a rúd felbillen, akkor az oldalélek magasabban vannak mint a középső, ellenben alantabb esnek, ha a mérleg biztos súlyegyenbe hozható, azaz ha lengéseket végez. Mivel ritkán lesz a rúdnak meggörbülése a legnagyobb megengedhető teher alatt annyira jelentéktelen, hogy befolyása ne

*) Közvetett hatásuk a súrlódás fokozásában és a rúd meggörbítésében nyilvánul.

mutatkoznék, azért általában az a legjobb eset, midőn középnagyságú teher (a megengedhető legnagyobbnak fele) létesíti a közönyös egyensúlyt; kisebb súlyok alatt a mérleg felbillen, és nagyobbak felrakása biztos egyensúlyt hoz létre.

17. Az élek egymáshoz párhuzamosak-e?

Az oldalélek és a középső él közti szögek meghatározására Gauss igen pontos optikai módot használt, melyet azonban ritkán alkalmaznak, mivel egy másik, kényelmesebb mód szintén elegendő pontosságot nyujt. Ez okból Gauss eljárásának leirását itt annyival is inkább mellőzhetjük, mivel az több elterjedt munkában feltalálható.

A mérleg készítők rendesen Hartig eljárását követik — némi módosítással — mely a karhosszak összehasonlításával is összefüggésbe hozható. Hartig a megvizsgálandó élről eltávolítja a csészét, de meghagyja rajta a kengyelt, melynek egyszer az innenső, azután a hátulsó részére akasztja ugyanazt a súlyt. Eközben a mérleg másik oldalán általában különböző súlyok fognak kivántatni, hogy a mutató eredeti állását ismét visszafoglalja. Ebből következik, hogy az illető élnek végei a középső éltől különböző távolságban vannak. A különbség nagyságát következőkép találhatjuk meg:

Legyen G_1 a baloldalon ide-oda mozgatott súly,

l_1 a távolság a középső éltől, midőn hátul függ,

és $l_1 + dl_1$ » » » » » » elől »

a jobb oldalon alkalmazandó megfelelő súlyok legyenek G_2 és $G_2 + dG_2$; tegyük fel, hogy az illető él hátulsó részén függenek, melynek távolsága a középső éltől l_2-vel jelöltessék. Akkor a két esetben a következő két egyenlet érvényes:

$$G_1 \, l_1 = G_2 \, l_2$$

midőn a mozgó súly hátul van felfüggesztve, és

$$G_1 \, (l_1 + dl_1) = (G_2 + dG_2) \, l_2$$

midőn elől függ. E két egyenletből következik, hogy

$$\frac{dl_1}{l_2} = \frac{dG_2}{G_1} \quad \text{vagy} \quad dl_1 = l_2 \, \frac{dG_2}{G_1}$$

Hozzátehetjük egyúttal a mérleg másik oldalára vonatkozó kifejezést is. E végből képzeljük a G_1 súlyt a bal él elején meghagyva és a G_2 súlyt a jobbik elejére függesztve. Ez esetben az egyensúlyi állapotra vonatkozó egyenlet ily alakot ölt

$$G_1 (l_1 + dl_1) = (G_2 + dG_1) (l_2 + dl_2)$$

hol dG_1 jelenti a G_2-hez hozzájáruló súlyt, midőn a távolság $l_2 + dl_2$.

Innét, az előbbi egyenletek segítségével, némi megengedhető elhanyagolás után következik:

$$\frac{dl_2}{l_2} = \frac{dG_2 - dG_1}{G_2} \text{ vagy } dl_2 = l_2 \frac{dG_2 - dG_1}{G_2}$$

A mérlegkészítők rendesen a kengyeleket is eltávolítják, és más az élek irányára merőlegesen állítható kengyelek segélyével egyenlő súlyokat akasztanak mindkét oldalélre, mi által nemcsak hogy megszakítás nélkül egymásután megvizsgálhatják mindegyik oldal-élnek hajlását a középsőhöz képest, hanem azonfelül — a súlyok egyenlősége miatt — még a karok viszonyára is következtethetnek.

Jól kiigazított mérlegek megvizsgálására ezt az eljárást még ugy módosíthatjuk, hogy igen közel egyenlő súlyokat használván, azokat nem változtatjuk meg, hanem a nyugalmi állásokból következtetünk a megkivántató súlyokra. Ha ez esetben az érzékenység ismeretes, az egész vizsgálat három nyugalmi helyzet megállapítására szorítkozik,*) melyek p. a következők lehetnek: 1.) mind a két súly az illető élnek hátulsó részén függ, 2.) az egyik ott hagyatván, a másikat elől alkalmazzuk, és végre 3.) mindkét súly elől van felakasztva.

A két esetben végrehajtandó műveletek és számítások sorának, valamint a valóságban előforduló hibák nagyságának előtüntetésére a következő két példa szolgáljon.

1. Példa. Egy finom Schickert-féle mérlegnél, — mely a grammnak százezred részeit még jól megmutatja, de mindegyik csészében csak 5 grammig terhelhető, — közel 5 grammot nyomó kellően meggörbített üveg rudakkal (jelöljük őket $(5)_1$ és $(5)_2$-vel) terhelték meg az éleket egyszer elől azután hátul, és a mutatónak eltérését az eredeti állástól a lovas felrakása által hárították el.

A következő viszonyok közt állott be az eredeti nyugalmi helyzet

a bal oldalon	a jobb oldalon
hátul $(5)_1$	hátul $(5)_2$ — *0·00052* gr.
elől $(5)_1$	hátul $(5)_2$ — *0·00082* »
elől $(5)_1$	elől $(5)_2$ + *0·00002*] »

*) Az üres mérleg nyugalmi helyzetére csak akkor van szükségünk, ha az érzékenység a három esetben különbözik. Lásd az ezen pontban foglalt második példához csatolt megjegyzést.

Helyettesítsük az innét eredő értékeket fentebbi egyenleteinkbe, tekintetbe véve, hogy

$$G_1 = (5)_1 \qquad G_2 = (5)_2 - 0{\cdot}00052 \text{ gr.}$$
$$G_2 + dG_2 = (5)_2 - 0{\cdot}00082 \text{ tehát } dG_2 = -0{\cdot}00030$$
$$G_2 + dG_1 = (5)_2 + 0{\cdot}00002 \text{ » } dG_1 = +0{\cdot}00054$$
$$dG_2 - dG_1 = +0{\cdot}00084$$

akkor $\frac{dl_1}{l_2} = -\frac{0{\cdot}00030}{5} = -0{\cdot}00006$

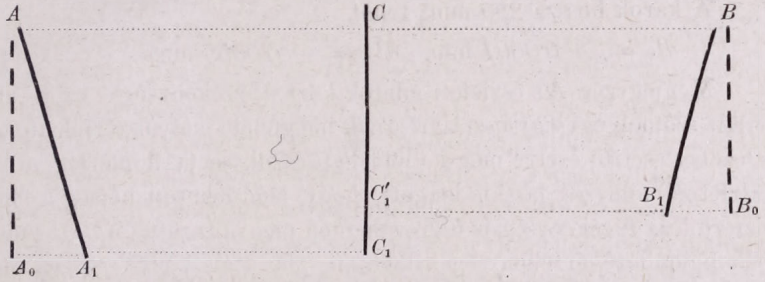
$$\frac{dl_2}{l_2} = -\frac{0{\cdot}00084}{5} = -0{\cdot}00017$$

Mérlegünknél egy-egy kar hossza 77 mm., ennélfogva

$dl_1 = -0{\cdot}0046$ mm., $\qquad dl_2 = -0{\cdot}0131$ mm.

Ha még hozzávesszük, hogy az élek hossza 8 mm., akkor a hajlás-szögeket is kiszámíthatjuk.

Könnyebb áttekintés végett a mellékelt idomban az élek állása és a méretek ki vannak jelölve.



$AC = l_1$ $\qquad$ $BC = l_2$

$A_0A_1 = dl_1 = -0{\cdot}0046^{mm}$. $\qquad$ $B_0B_1 = dl_2 = -0{\cdot}0131^{mm}$.

$A_1C_1 = l_1 + dl_1$ $\qquad$ $B_1C_1' = l_2 + dl_2$

$AA_1 = BB_1 = 8^{mm}$

2. Példa. Egy másik aránylag jobban felszerelt Bosch-féle mérlegen nem kellett a súlyokon változtatni, s ez okból az illető nyugalmi állásokat észlelték. Mindegyik oldalon *150* grammot alkalmazván, a következő adatok származtak:

	bal oldal	jobb oldal	a mutató kitérései	a mutató nyugalmi helyzete	érzékenység
1.)	hátul $(150)_1$	hátul $(150)_2$	$+0{\cdot}1$ $+1{\cdot}8$ $+0{\cdot}1$	$+0{\cdot}95$	$0{\cdot}00110$
2.)	elől $(150)_1$	hátul $(150)_2$	$+0{\cdot}9$ $+2{\cdot}2$ $+2{\cdot}0$	$+1{\cdot}50$	$0{\cdot}00012$
3.)	elől $(150)_1$	elől $(150)_2$	$-6{\cdot}7$ $-3{\cdot}7$ $-6{\cdot}7$	$-5{\cdot}2$	$0{\cdot}00062$

Üresen a mérleg + *0·95*-nél állapodott meg; ugyanoda jött volna a mutató, ha a következő súlyok alkalmaztattak volna a jobb oldalon:

1) *0·0*
2) + *0·00007*
3) — *0·00371*

Eszerint az egyenletekben előforduló mennyiségek a következő értékkel bírnak

$$G_1 = (150)_1 \qquad G_2 = (150)_2$$
$$G_2 + dG_2 = (150)_2 + 0{\cdot}00007 \qquad dG_2 = + 0{\cdot}00007$$
$$G_2 + dG_1 = (150)_2 - 0{\cdot}00371 \qquad dG_1 = - 0{\cdot}00371$$
$$dG_2 - dG_1 = + 0{\cdot}00377$$

melyek alapján

$$\frac{dl_1}{l_2} = + 0{\cdot}00000047 \quad \frac{dl_2}{l_2} = + 0{\cdot}0000251.$$

A karok hossza *220* mm., tehát

$dl_1 = + 0{\cdot}0001$ mm. $dl_2 = + 0{\cdot}0055$ mm.

Megjegyzés. Az észleleti adatok közt »érzékenység« czím alatt foglalt számok egy-egy osztályrésznek megfelelő súlyokat jelentenek; — ezeket esetről esetre meg kellett határozni, mert a mérleg a 2-ik kisérletnél annyira lassan lengett, hogy nem lehetett kétség a fölött, miszerint az érzékenység is észrevehetően megváltozott. Az itt mutatkozó különböző érzékenység világosan oda utal, hogy egy-egy oldal élnek a két vége különböző magasságban van, hogy az oldal élek nem állanak vizszintesen, midőn a középső virányos. Ezen körülmény miatt az eltéréseket jelző osztályrészek nem szolgálhattak az eltéréseket okozó súlyok mértékeül, — a súlyok nem arányosak az osztályrészekkel — tehát fel kellett keresni az üres mérleg nyugalmi állását is, hogy segélyével kiszámíthassuk azon súlyokat, melyek felrakása által az eltérések megsemmisíthetők volnának.

18. A karok hossza egyenlő-e?

Ennek kipuhatolására különböző módokat követhetünk, a szerint amint más-más czélt tartunk szem előtt. A kijavitás szempontjából legjobb, ha az oldal élek mindkét végeinek a távolságát tudjuk feltalálni, mire szükséges, hogy a súlyok az élek végein alkalmaztassanak (lásd a 17. számú pontot) — különben pedig ha kielégít a középtávol-

ságok ismerete, akkor az illető súlyokat a csészékbe is rakhatjuk. A két esetet egy szempont alá foglalhatjuk, de különbséget okoz az, hogy a karok többé vagy kevésbé térnek el egymástól. Ha tetemes különbség van köztük, akkor

1) felkeressük a nyugalmi helyzetet,

2) közel egyenlő súlyokkal — G_1 és G_2 — terhelvén a mérleget, a mutatkozó eltérést apró súlyok dG_2 által igyekszünk elhárítani, és

3) a G_1 és G_2 súlyok felcserélése után ismét felkeressük azt a súlyt dG_1, mely a mérleget az eredeti állásba visszahozza.

Ellenben, ha már csak kis különbség van a karok közt, akkor itt is kényelmesebb és pontosabb a súlyok változtatása helyett a megváltozott nyugalmi helyzeteket megfigyelni, még pedig ezen sorrendben:

1) az üres, meg nem terhelt mérlegnél,

2) a közel egyenlő súlyok felrakása után, és

3) azoknak megcserélése után.

Ha azután az így nyert adatok alapján kiszámitjuk azon súlyokat dG_2 és dG_1, melyek a mutatót a második, illetőleg a harmadik állásból az elsőbe visszahozni képesek, akkor a számítást mind a két esetben ugyanazon módon végezhetjük.

A karok különbségét megadják az egyensúlyi állapotra vonatkozó egyenletek:

$$G_1 l_1 = (G_2 + dG_2)\, l_2$$
$$G_2 l_1 = (G_1 + dG_1)\, l_2$$

melyek összeadva ily alakba hozhatók:

$$(l_1 - l_2)\,(G_1 + G_2) = l_2\,(dG_1 + dG_2)$$

és innét a keresett különbség:

$$l_1 - l_2 = l_2 \frac{dG_1 + dG_2}{G_1 + G_2}$$

dG_1 és dG_2 helyett behozhatjuk az eltéréseket, jelző osztályrészeket m és n, feltéve, hogy az egy osztályrészszel egyenértékű súly α ismeretes

$$dG_1 = m\alpha \qquad dG_2 = n\alpha$$

tehát

$$l_1 - l_2 = l_2\, \alpha \frac{m+n}{G_1 + G_2} \quad *)$$

Álljon itt is két, az előbbieket kiegészítő példa.

1. Példa. A fent említett, Bosch-féle mérlegen tett kisérletekkel kapcsolatban a karhosszakra vonatkozó észleletek is történtek. Ugyanis

*) Ha tökéletesen egyenlő súlyokat használunk, akkor a harmadik észlelet felesleges, mert akkor $m = n$ és $G_1 = G_2$, tehát $l_1 - l_2 = l_2\, \alpha \frac{m}{G_1}$

az ott említett három észleléshez a súlyok felcserélése után még egy negyedik csatoltatott, mely az elsővel összefoglalva, különálló csoportnak tekinthető:

	bal oldal	jobb oldal	kitérések	nyug. helyz.	α
1)	hátul $(150)_1$	hátul $(150)_2$	$+0{\cdot}1$ $+1{\cdot}8$ $+0{\cdot}1$	$+0{\cdot}95$	$0{\cdot}0011$
4)	hátul $(150)_2$	hátul $(150)_1$	$+52$ $+2{\cdot}3$ $+51$	$+3{\cdot}72$	

A nyugalmi helyzet eredetileg $+0{\cdot}95$-nél volt,

ennélfogva $n = +0{\cdot}95 - 0{\cdot}95 = 0{\cdot}0$

$m = +3{\cdot}72 - 0{\cdot}95 = +2{\cdot}77$

tehát $$l_1 - l_2 = \frac{220.0{\cdot}00011.2{\cdot}77}{300} = 0{\cdot}00225 \text{ mm.}$$

Minthogy az előbbi meghatározások nyomán már tudjuk, hogy az élek miként hajlanak egymáshoz, azért kiszámíthatjuk az oldalélek közepeinek távolságait a középső éltől. Ezen távolságok szerepelnek mint emelő karok, ha a súlyok a csészékben vannak, ha tehát súlypontjuk az élek közepe alá esik, ami jó szerkezetű mérlegnél legalább közelítőleg teljesítve van.

A bal él közepének távolsága $220 + 0{\cdot}00225 + 0{\cdot}00005 = L_1$

a jobb » » » $220 + 0{\cdot}00275 = L_2$

Az eltérés köztük $L_1 - L_2 = -0{\cdot}00045$ mm.

2. Példa. Ugyanazon mérlegnél a csészékbe közel 200 grammot nyomó súlyokat raktak, s a következő adatokat nyerték

	bal oldal	jobb oldal	kitérések	közép	α
1.	$(200)_1$	$(200)_2$	$+0{\cdot}2$ $+4{\cdot}1$ $+3{\cdot}6$	$+2{\cdot}02$	$0{\cdot}0008$
2.	$(200)_2$	$(200)_1$	$-4{\cdot}4$ $-0{\cdot}1$ $-4{\cdot}0$	$-2{\cdot}15$	

Az üres mérleg nyugalmi állása $0{\cdot}00$

Innét $m = 2{\cdot}02$ $n = -2{\cdot}15$ $m + n = -0{\cdot}13$

tehát a karok különbsége

$$L_1 - L_2 = -\frac{220.0{\cdot}0008.0{\cdot}13}{400} = -0{\cdot}00006 \text{ mm.}$$

Ez a mennyiség, ugy mint az előbb talált különbség, nem haladja meg az elkerülhetlen hibák határát, eszerint mérlegünk karjai — a szélső élek közepétől számítva azokat — egyenlők.

A VIRIÁLROL.

Szily Kálmántól.

1870-ben Clausius egy igen fontos dynamikai tételt állított fel*), mely szavakkal kifejezve így hangzik: »*a közép eleven erő egyenlő a viriállal.*«

A tétel formulázására gondoljunk magunknak egy tetszőleges pontrendszert és szemeljünk ki a rendszert alkotó anyagi pontok közül egyet a többiek képviselőjéül. E pont tömege legyen m; derékszögü coordinátái a t időpillanatban x, y, z; sebességének componensei x', y', z'; gyorsulásának componensei x'', y'', z''; a reá működő erők componensei X, Y, Z. — A rendszer összes eleven erejét

$$\Sigma \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

jelöljük egy betüvel, T-vel; képezzük továbbá a következő összeget:

$$-\frac{1}{2}\Sigma(Xx + Yy + Zz)$$

s vegyük mind a két összegnek i időre vonatkozó középértékét, úgy Clausius tétele formulába írva így hangzik:

$$\frac{1}{i}\int_0^i T dt = -\frac{1}{2i}\int_0^i (Xx + Yy + Zz)dt$$

Vagy ha az egyes mennyiségek középértékét a változó értéktől akként különböztetjük meg, hogy a változó mennyiséget ábrázoló symbolum fölé egy vízszintes vonást húzunk, úgy a tétel még így is írható:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\Sigma(Xx + Yy + Zz)}$$

Az egyenlet baloldalán a rendszer közép eleven ereje áll; a jobb oldalon levő kifejezés pedig nem egyéb, mint a mit Clausius (az erő latin neve *vis* után) a rendszer *viriál*jának nevezett. A viriál tehát nem egyéb mint a

$$-\frac{1}{2}\Sigma(Xx + Yy + Zz)$$

összeg időbeli középértéke.

---

*) Pogg, Ann. 141. köt. 124. lap; Comptes Rendus 70. köt. 1315. l.; Phil. Mag. IV. Séries. 40. köt. 122. lap. — V. ö. még »Ueber verschiedene Formen des Virials« von R. Clausius. Pogg. Ann. Jubelband. 411. lap.

Tétele bebizonyításában Clausius a következő identitásból indul ki:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2x}{dt^2}$$

mi, a föntebbi jelöléssel élve, még így is írható:

$$d(xx') = x'^2dt + xx''dt.$$

Szorozzunk $\frac{m}{2}$-vel s a pont mozgási egyenletei értelmében írjunk mx'' helyébe X-t, úgy:

$$\frac{m}{2}x'^2dt = -\frac{1}{2}Xxdt + \frac{m}{2}d(xx')$$

és ép így:

$$\frac{m}{2}y'^2dt = -\frac{1}{2}Yydt + \frac{m}{2}d(yy')$$

$$\frac{m}{2}z'^2dt = -\frac{1}{2}Zzdt + \frac{m}{2}d(zz')$$

Analog egyenletek állanak a rendszer valamennyi pontjára. Képezzük mind ezen egyenletek összegét, úgy a következő származik:

$$Tdt = -\frac{1}{2}\Sigma(Xx + Yy + Zz)dt + d\Sigma\frac{m}{2}(xx' + yy' + zz')$$

Integrálva 0 és i határok között, és i-vel osztva, lesz:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\Sigma(Xx + Yy + Zz)} + \frac{1}{i}\int_0^i \Sigma\frac{m}{2}(xx' + yy' + zz')$$

az utolsó tagban a substitutió jellel azt fejezvén ki, hogy a reá következő összegnek azon értékéből, mely a felső határnak megfelel, le kell vonni az alsó határnak megfelelő értékét.

A levezetésből látszik, hogy az utolsó egyenlet is tiszta mathematikai identitás. Érvényes az minden pontrendszerre, minden körülmények között.

Clausius ezután föltételezi — legalább egyelőre —, hogy a rendszert alkotó anyagi pontok mozgása periodikus, hogy tehát:

$$x_i = x_0; \quad y_i = y_0; \quad z_i = z_0$$

és

$$x'_i = x'_0; \quad y'_i = y'_0; \quad z'_i = z'_0$$

így aztán:

$$\int_0^i \Sigma\frac{m}{2}(xx' + yy' + zz') = 0$$

és kijön a bebizonyítandó tétel.

Minthogy azonban igen bajos föltenni, hogy a természetbeli tes-

tek minden egyes pontja periodikus mozgást kövessen, Clausius így folytatja: »Bei einer Bewegung, die nicht periodisch, sondern unregelmässig variirend ist (a franczia szövegben hozzáteszi: comme le mouvement des atomes dans l'intérieur d'un corps) wird das letzte Glied nicht so regelmässig gleich Null, aber sein Werth kann doch nicht fortwährend wachsen, sondern nur innerhalb gewisser Grenzen schwanken und der Divisor i, mit welchem das Glied behaftet ist, muss demnach bewirken, dass bei sehr grossen Werthen von i das Glied verschwindend klein wird.«

Bármily tetszetős is Clausius indokolása, még sem egészen szigorú, s a viriálról szóló tételt nem a való igazság képében, hanem annak csak megközelítéseképen tünteti elő.

Szeretném megkisérteni, vajon az a felfogás, melyet a testek változatlan állapotáról e folyóirat 6-ik füzetében a 168-ik lapon fejtegettem, nem vezetne-e a viriálról szóló tételnek szigorú bebizonyítására.

Az én felfogásom szerint a testet alkotó anyagi pontok egyáltalában nem tartoznak periodikus mozgást követni; nem is teszem föl, hogy a testnek, ha állapota állandó dynamikai tulajdonságai folyvást állandók legyenek. Egyedül csak azt teszem föl, hogy minden dynamikai tulajdonság, mely a test összességére vonatkozik, periodikus függvénye az időnek. Szerintem a test térfogata, eleven ereje, potentiális erélye, virtuális munkája, tömegközéppontjának coordinátái, mozgás-mennyiségének, a működő erők eredőjének, az eredő forgási nyomatéknak componensei, a változatlan irányok szerint vett tehetetlenségi nyomatékok, sat. sat. mindannyian periodice lüktetnek és pedig mindannyian egy és ugyanazon közös periodus szerint. Ha tehát ezen mennyiségek valamelyikét a tetszés szerint választott o időpillanatban N_o-val, az i periodus leteltével pedig N_i-vel, ugyanannyival utóbb N_{2i}-vel .... jelöljük, úgy

$$N_o = N_i = N_{2i} = \ldots\ldots N_{ni}$$

hol n tetszőleges egész szám.

Rövid elmélkedés után könnyen ráismerünk, hogy a test dynamikai tulajdonságai közül melyiket kell tekintetbe venni, ha meg akarjuk mutatni, hogy a Clausius egyenletében előforduló utolsó tag a természetbeli testekre nézve csakugyan zérus.

Jelöljük ugyanis a test *tehetetlenségi nyomatékát* az $X, \ldots$ tengelyre vonatkoztatva $J_x, \ldots$.-vel, úgy

$$J_x = \Sigma m(y^2 + z^2)$$
$$J_y = \Sigma m(z^2 + x^2)$$
$$J_z = \Sigma m(x^2 + y^2).$$

honnan:

$$\Sigma m(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z)$$

Differentiálva t szerint és elosztva 4-gyel:

$$\Sigma \frac{m}{2}(xx' + yy' + zz') = \frac{1}{8}\frac{d}{dt}(J_x + J_y + J_z)$$

és így:

$$\int_0^i \Sigma \frac{m}{2}(xx' + yy' + zz') = \frac{1}{8}\frac{d}{dt}\int_0^i (J_x + J_y + J_z)$$

Jelentve ez intenrálban i, mint az imént, a test lüktetési periodusát, úgy:

$$\int_0^i J_x = \int_0^i J_y = \int_0^i J_z = 0$$

következésképp:

$$T = -\frac{1}{2}\Sigma(Xx + Yy + Zz)$$

A viriálról szóló tétel érvényes tehát minden oly időtartamra, mely a lüktetési időnek egész számú többszöröse, és minden oly pontrendszerre, melynél a tehetetlenségi nyomaték periodikus függvénye az időnek.

Dugonics és az első magyar mennyiségtan. Azon sok jelesek közt, kik a mult század végén a nemzeti irodalom fejlesztésére s művelésére egyesültek, egynek sincs oly kiváló s a sokoldalú munkálkodás által valóban kitünő érdeme mint Dugonicsnak.

Nem lehet czélja e soroknak, hogy Dugonics szépirodalmi működését rajzolja; de midőn a nemzeti kegyelet ünnepet rendez s a fiára büszke Szeged szobrot emel az érdemdús férfiúnak, föladatunk lesz, hogy irodalmi munkálkodásának egy a költészettől egészen eltérő irányát fölemlítsük s e téren első és nagy nemzeti jelentőségű munkáját bemutassuk.

Munkáiról, szépirodalmi tevékenységéről egyéb lapok vannak hivatva szólani, mi csupán az első mennyiségtan irójáról kivánunk megemlékezni, hogy a reáltudományok mai fejlődő s virágozni kezdő korszakában e téren működő s e térre lépni készülő ifjainknak bemutassuk azon férfiút, ki első volt a mathematikai tudományok terjesztői között hazánkban; s *legelső*, ki magyar nyelven a *valódi tudomány* kézikönyvét közzé tette akkor, midőn még e téren az út nálunk járatlan volt. Nemcsak a régi s nagyhirű tudósok tudományait kelle neki elsajátítani, de nyelvet is teremteni, hogy az utókor saját nyelvén

tanulhassa azt. Ez az különösen, mi Dugonicsnak kiváló érdeme; s lehetetlen hogy tisztelettel ne említsük nevét, ha müve átolvasása után összehasonlítást teszünk a »Tudákosság« s a mai »Betüszámtanok« közt; lehetetlen, hogy hálával ne gondoljunk az úttörő tudósról, ki megkönnyíté az utána következő mennyiségtanirók munkáját, midőn a magyar mennyiségtani műszókat megteremté, melyek közül nagy rész, daczára a nyelv — a »Tudákosság« első megjelenése óta eltelt idő alatti — nagy fejlődésének, maig is használtatik, miről az alant látható összehasonlító-szótárból meggyőződhetünk.

Az első magyar mennyiségtan 1784-ben jelent meg »Tudákosság könyvei« czim alatt két kötetben. Tizennégy év mulva, 1798-ban második *bővített* kiadásban jelent meg, négy kötetben. Teljes czimlapja ez utóbbi kiadás első kötetének a következő:

»A tudákosságnak első könyve. a bötü-vetés (algebra) melyet közhaszonra irt Dugonics András Kegyes oskolabeli Szerzetes Pap. A' Józan 's egyszer-'s-mind a' Természeti Tudományoknak oktatója. Ennek-előtte a' Budai Tanulmányoknak Királyi Mindenségében ugyan azon Tudákosságnak Királyi Tanitója 's a' Tanultaknak egygyik tagja. Mostanában pedig a' Jeles Természeti Karnak Legörebbike. — Második meg-bővített ki-adás. — Pozsonyban és Pesten Füskuti Landerer Mihály bötüivel és költségén. 1798.«

A négy könyv tartalma a következő:

A Tudákosságnak első könyve. *A Bötü-vetés* (Algebra).

Ez négy szakaszra oszlik fel, s mindenekelőtt tárgyalja a négy alapműveletet egész és tört számokkal. A második szakaszban a hatványozás és gyökvonásra vonatkozó tételeket adja elő. A harmadik szakaszban szól az egyenletekről; mig végre a negyedikben a viszonyok, arányok, haladványok, logarithmusok és sorok foglaltatnak.

A második könyv A »Föld-mérés«-t (Geometria) tárgyalja s miután annak alapfogalmait szerinte »*első értéseit*« előadta, három szakaszban szól a a Hosszakról a Felület és a testek térfogatainak számításáról.

A harmadik könyv a Háromszögtant, Dugonics szerint A Három-szögelések-et, foglalja magában. Az egész könyv két szakaszra oszlik fel; az első szakaszban tárgyalja a *Síkháromszög*-ekre vonatkozó tételeket s utána a logarithmusok vagy szerinte a Szám-szerek tábláiról szól. A második szakaszban a Gömbháromszögtan nevezetesebb tételeit tárgyalja; megjegyzendő itt, hogy a

könyvhöz mellékelt ábrák jók, tiszták és érthetők, csupán a gömbháromszögre vonatkozók hiányosak s sok dolgot adnak a képzeletnek.

A negyedik könyvben a Csucsos szelésekről vagyis a kúpmetszetekről szól, és pedig mind a három görbe vonalról, melyek a kupnak különböző metszései által származnak, t. i. a kerülék, hajtalék és mentelékről s oly érthetően és kimeritően, hogy egy ma megjelenő mennyiségtannak is becsületére válnék.

Összehasonlító-szótár. *)

(A dőlt betükkel szedett szó a Dugonicsé, az utána következő a mai napság szokásos.)

Alatság Átfogó. *Al-érdeklő* subtangens, alérintő. *Al-folyamat* Számtani sor. *Államány* Póttétel. *Al-számtartás* Számtani viszony. *Al-szer* Számtani arány. *Általag* Hasáb. *Asztallag* Dülény. — *Bel-szög* Belszög. *Billeg* Jelző (Charakteristik). *Bötüvetés* Betüszámtan. *Bötüvetési-vitatás* Betüszámtani bebizonyitás. — *Csonka czövek* Csonka gula. *Csucs* Kúp. *Csucsos szelések* Kúpmetszetek. — *Délkör* Délkör. *Derék* Négyzet. *Derekalni* Négyzetre emelni. *Derékszög* Derékszög. *Derékgyök* Négyzetgyök. *Divat* Érték. — *Egeket czirkalmazó Tudákosok* Csillagvizsgálók. *Egyenes általag* Egyenes hasáb. *Egyenes hosz* Egyenes vonal. *Egyenes számtartás* Egyenes viszony. *Egyenes szer* Egyenes arány. *Egyenlet* Egyenlet. *Egyközü* Egyközü. *Egy-nemü* Egynemü. *Egy-müvü* Együttható, vele járó. *Egy raju mekkoraság* Egytagú mennyiség. *Egy tételü oldalok* Egyenfekvésü oldalok· *Egy ügyü egyenlet* Tiszta egyenlet. *Éles szög* Hegyes szög. *Élesszögü* △ Hegyes szögü háromszög. *Elev* Segédtétel. *Ellenszög* Szembe fekvő szög. *Elosztás* Osztás. *Előbbi számtartás* Előviszony. *Első piczíny* Percz. *Elvevés* Kivonás. *Első karú egyenlet* Elsőfokú egyenlet. *Érdeklő* Érintő. *Érdeklő körszög* Az érintő és hur által alkotott szög. — *Fél-röndös* Rendező. *Feltétel* Föladat. *Foglalat* Zárjel. *Foglaló* Vezérsugár, vonsugár. *Fojadék* Következmény. *Folyamatok* Haladványok. *Folyó-szer* Folytonos arány. *Fő-folyamat* Mértani sor. *Földmérés* Földmérés, mértan. *Fő-számtartás* Mértani viszony. *Fő-szer* Mértani arány. *Függö-hosz* Függélyes. — *Gombolyag* Gömbded. *Gömb* Gömb. *Gömbös háromszögelés* Gömbháromszögtan. *Gyökjel* Gyökjel. *Gyököt vonni* Gyököt vonni. — *Hajult-szög* Ferdeszög. *Hajult-általag* Ferde hasáb. *Hajtalék* Hajtalék. *Háromszög* Háromszög. *Határozatlan egyenlet* Határozatlan egyenlet. *Határozott egyenlet* Határozott egyenlet. *Heános mekkoraság* Negatív mennyiség. *Helyes töredék* Valódi tört· *Hely-tartó* Függvény. *Helytelen töredék* Ál-tört. *Henger* Henger. *Horgas hosz* Görbe vonal. *Horgasítani pl. kört* Kerekíteni. *Horg-horgas hosz* Folytonos görbe. *Hori horgas hosz* Tört vonal. *Hosz* Vonal. *Hosszakkal való vitatás* Mértani bebizonyítás. *Hosz-szél* Felület. *Huros körszög* Kerületi szög. *Huzamos mekkoraság* Folytonos mennyiség. — *Illetett egyenlet* Vegyes egyenlet. *Illethetlenek* Végérintők. *Iromány* Képlet. *Ismeretes* Ismeretes. *Ismeretlen* Ismeretlen. *Iz* Fok. *Jármas öreghur* Kapcsolt átmérő. *Jegy* Mutató, kitevő. *Jegyzet* Jegyzet. — *Kajla* Ferde. *Kajla általag* Ferde hasáb. *Kar* Hatvány. *Kar-gyök* A hatvány gyöke. *Kerek, Kör,* Kör. *Kerek-érdeklő* Körérintő. *Kerek-hur* Körhur. *Kerek-ij* Köriv. *Kerek-kör* Körkerület. *Kerek-öreg*

---

*) Dugonics mathematikai műszavait tudtunkkal Kugler Mihály, 1864-ben zürichi műegyetemi hallgató s jelenleg a m. kir. államvaspálya budapesti állomásfőnöke állította először össze a »Zürichi Évkönyvek« I. kötetében. (Kézirat a kir. Józsefműegyetem könyvtárában.) *Szerk.*

hurja Körátmérő *Kerek-sugár* Körsugár. *Kerek-szegő* Kör-szelő. *Kerek-szék* Középpont. *Kerek-szelet* Körszelet. *Kertelet* Alak. *Kéremény* Követelmény. *Kétraju mekkorasáy* Kéttagu mennyiség. *Ketté vágni* Felezni. *Kevesitendő* Kisebbítendő. *Kevesitő* Kivonandó. *Ki-iktatni* Kiküszöbölni. *Kis-öböl* Fordított vagy visszás sinus (sinus versus). *Köb* Köb. *Köb-gyök* Köbgyök. *Körfél* Félkör. *Környegyed* Környegyed. *Körszög* Kerületi szög. *Közelitő* Összehajló. *Közarány* Egyenközény. *Közszám* Természetes szám. *Közszélekre-vágás* Mértani középarányos keresése. *Közöböl* Sinus. *Kül* Görbe felület. *Különbközü* Nem egyenközü. *Különbnemü* Különnemü. *Különbözet* Különbség. *Külső szög.* Ellentett szög. *Külszög* Külszög. — *Lap* Lap. *Lapos háromszögelés* Sikháromszögtan. — *Magyarázat* Értelmezés. *Maradék* Maradék. *Második picziny* Másodpercz. *Megszakadt mekkorasáy* Különvált mennyiség. *Mekkorasáy* Mennyiség. *Mellékoldal* Befogó. *Mellékszög* Mellékszög. *Mentelék* Mentelék. *Minéműség* Minőség. *Müv* Szorzat. *Müves* Tényező. — *Négyszög* Négyszög. *Nemező* Nevező. *Nyujtó* Parameter. *Nyult-derék* Épközény. *Nyult-pais* Dülényded. — *Oldal* Oldal. *Osztály* Hányados. *Osztandó* Osztandó. *Osztó* Osztó. *Öböl-mássa* Cosinus. *Öregöböl* Derékszög sinusa. *Összeadás* Összeadás. *Összességes mekkorasáy* Megnevezett mennyiség. — *Pais* Dülény. *Párkány* Kerület. *Pont* Pont. *Puszta mekkorasáy* Elvont mennyiség. — *Raj* Tag. *Remek iromány* Általános képlet. *R ndes többlap* Szabályos sokszög. *Rendetlen többszög* Szabálytalan sokszög. *Rendszer* Sor. *Részes* Számláló. *Röndös* A kettős rendező. — *Sokszorozás**) Sokszorozás, szorzás. *Sokszorzandó* Szorzandó. *Sokszorzó* Szorzó. *Somma* Összeg. *Sugár* Sugár. *Sugáráltalag* Egyenes hasáb. *Szabás* Szabály. *Szakadtszer* Különböző beltagu arány. *Szám* Szám. *Számasiz* Számjegy. *Számtarlás* Viszony. *A számtartás középsői* Beltagok. *A számtartás szélsői* Kültagok. *Számszer* Logarithmus. *Számvetés* Számtan. *Szegő* Szelő. *Szék* Középpont. *Székszög* Középponti szög. *Szer* Arány. *Szerkeszteti iz* Többjegyü szám. *Szerkesztett számtartás* Összetett viszony. *Szög-szárai* Szög-szárai. *Szögellő* Függőn. *A szög mássa* Pótszög. *Szögmérő* Szögmérő. *Szögváltó* Szögmásoló. — *Tag* Az egyenlet egyik oldala. *Talp* Alap. *Távozó* Széthajló. *Téglány* Téglány, Egyenközény. *Temérdek* Test. *Termérdekes-szög* Testszög. *Tengely* Tengely. *Tér* Tér. *Tétel* Feladat. *Tető* Csúcs. *Tompaszög* Tompaszög. *Többlap* Soklap. *Tökéletes derék.* Tökéletes négyzet. *Töredék* Tört. *Történet* Eset. *Tudákosság* Mennyiségtan. *Tudtom* Alapelv. *Tüzellő* Gyupont. — *Udvar* Terület, felület. — *Vágán* Metszék. *Vagyonos mekkorasáy* Positiv mennyiség. *Vakgyök* Képzetes gyök. *Váltó-szög* Váltószög. *Végetlen-köz-számok* Végetlen term. számok. *Végetlen* ∞. *Vég-végetlen* ∞^2. *Vég-vég-végetlen* ∞^3. *Vegyes-töredék* Vegyestört. *Veszett-gyök* Végszerütlen gyök. *Vétel* Tantétel. *Vezető* Rad. vectr. *Viszált-számtartás* Fordított viszony. *Viszált szer* Fordított arány.

Mint az összehasonlító-szótárból látható, Dugonics összesen majdnem 250 mennyiségtani műszót magyarított, s részben úgy, hogy azok még ma is az ő magyarítása szerint használtatnak; sőt a ma már egyéb szók által helyettesítettek is olyanok, hogy csaknem mind helyes értelmét adják annak, mit kifejezni akarnak.

Szüts Ferencz,
gymn. tanár Nagy-Kőrösön.

---

*) E gyűjteményben nehány olyan szó is belekerült, melyet már Dugonics előtt is használtak. Igy a »sokszorozás« sem Dugonicstól hanem Marótitól való.
Szerk.

A MELEGSÉG TERJEDÉSÉNEK SEBESSÉGE VASRÚDBAN. A Comptes Rendus 82-ik kötetében a 731 ik lapon (ez idei márczius 27-iki szám) DECHARME úr közli kisérleti tanulmányait, melyeket a melegség terjedési sebességének meghatározása végett vasrudakon tett. Eljárásának lényege ez:

Vesz egy igen homogén vasrúdat, 1 méter hosszút és 21 milliméter széleset és magasat s abba 20—20 centiméter távolságra lyukakat fúr, 14 mm. mélyeket és 6 mm. átmérőjüeket; a lyukakba $^1/_{10}$ fokos osztályzatú hőmérőket helyez s mindenik lyukat megtölti higanynyal. A rúd egyik végét most egy állandó melegű gázégetővel hevíti s a hőmérőket a melegség sugárzásától közbeállított ernyővel oltalmazza. Végre az órán leolvasva az időt, hogy hány percz alatt éri el a rúdon tovaterjedő melegség az egyes hőmérőket.

Az észleletek eredménye ez: Az első hőmérőt, mely a hevített végtől 20 c. m. távolságra volt, elérte a melegség 1 minuta alatt; a másodikat 40 c. m. távolságban $4^1/_2$, a harmadikat, 60 c. m. távolságnyira, 10 és a negyediket, 80 c. m. távolságban levőt, 16 minuta alatt. E számok, melyek az

1, 4, 9, 16-tól

csak kevéssé különböznek, az mutatják, hogy *az az idő, mely alatt a melegség a rúd különböző pontjaiig eláramlik, egyenes arányban van az illető pont és a hevített vég közti távolságnak négyzetével.*

E kisérleti eredményből DECHARME úr azt következteti, hogy a melegségi áram *sebessége fordított viszonyban van a* hőmérő és hőforrás közti *távolság négyzetével.*

Az utóbbi következtetés azonban határozottan hibás. Jelöljük ugyanis a hőmérő távolságát a gázégetőtől, tehát a melegség úthosszát s-sel, a melegség megérkezésének idejét t-vel, úgy az imént közlött kisérleti adatok szerint

$$s^2 = \alpha . t$$

hol α állandó szorzó az aránylagosságot fejezi ki.

A sebességet pedig ismeretes dynamikai képlet alapján:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

tehát:

$$v = \frac{\alpha}{2s}$$

vagyis: *a sebesség a távolságnak nem négyzetével, hanem első hatványával van fordított viszonyban.* Sz. K.

IRODALOM.

(J. J. Révy. Hydraulics of great rivers. the parana, the uruguay and the la-plata estuary. London, 1874. E. et F. N. Spon. — Général Morin: Rapport sur l'ouvrage de M. Révy. Comptes Rendus, 1876 No. 3.)

A folyók vizének mozgási törvényei — számos kitűnő szakember beható és hosszas kutatásai daczára — mind a mai napig sinesenek biztosan s egész általánosságban megállapítva. Prony, Eytelwein, Brunnings, Tadini s utánuk több tekintélyes mérnök foglalkozott e kérdéssel; s ha buzgó fáradozásuknak lett is némi sikere, az általuk megállapított törvények leginkább csak kisebb folyókra vagy csatornákra vonatkoztak, a mely törvényeket nagyon természetesen — nem lehet alkalmazni nagyobb folyókra, legkevésbé pedig Amerika óriási folyamaira, a melyek vizének mozgására bizonyára másféle s nagyobb mérvü befolyást gyakorolnak még oly tényezők is, a melyek a kisebb folyók vizének csörgedezését vagy épen nem vagy csak alig-alig háborgatják.

Minő törvényeknek van alávetve ezen nagyobb folyamokban a viz mozgása? minők azon tényezők, a melyek e mozgást szabályozzák? mindezek oly nagy jelentőségü kérdések, a melyek megérdemlik a tüzetes tanúlmányozást, úgy a tudomány, mint az alkalmazás szempontjából.

Ily nagyobbszerü hydraulikai kutatás végrehajtásával bizta meg az argentini köztársaság kormánya 1871-ben egy kitűnő hazánkfiát: Révy mérnököt, a ki 18 év óta Angliában és Amerikában müködvén, tekintélyes nevet szerzett magának a müvelt világ előtt. Révy Dél-Amerika két legnagyobb folyamán: a Paranán és Uruguayon, valamint a La-Plata tengeröblön három éven át eszközölt hydrometriai felvételeket, s kutatásainak és tanulmányainak eredménye a fent czimzett mü, a mely már több oldalról méltányló elismerésben részesült. A franczia akadémia Tresca és Morin által biráltatta meg e munkát s Morin f. év Január havában terjesztette be erről szóló jelentését*), a melynek nyomán érdekesnek tartjuk e müvet röviden megismertetni.

Mielőtt a részletes tárgyalásba bocsátkoznék, azt mondja Morin, hogy Révy, habár nem oldatta is meg teljesen azon kérdést, melyet tanulmánya tárgyává tüzött ki, megérdemli a méltányló elismerést; mert legalább egyengette az útat hasonló kutatások végrehajtására. S azon eljárás, a melyet meg-

*) V. ö. Rapport sur l'ouvrage de M. Révy, ingénieur anglais, intitulé: »Hydraulique des grandes fleuves le Parana, l'Uruguay et le bassin de la Plata.« Comptes rendus, 1876. No. 3.

figyeléseinél követett, úgyszintén az egész művelet berendezése oly példányszerű volt, hogy bátran mintául szolgálhat bármely hydrometriai fölvétel foganatosításánál.

Az argentini köztársaság kormánya nem kímélt semmi költséget, hogy lehetőleg előmozdítsa e nagyfontosságú kutatások sikerét. Rendelkezésére bocsátott Révynek egy sekély járású gőzhajót, elegendő számu személyzetet s több kisebb hajót, bárkát és csolnakat.

A mi legelsőbben is a szükséges fölvételeket illeti, ezek a Paranán következőleg foganatosíttattak. Kifürkésztek egy alkalmas helyet, közel Rosariohoz s mintegy 300 kilometernyi fölfelé Buenos-Ayrestől, itt a balparton lemértek 915 meter hosszú alapvonalat, megjelölvén annak végeit magas zászlós póznákkal. Erre merőlegesen s a felveendő profil irányában szintén ily póznákat helyeztek el, egyet a vonal végére, a másikat egy lehorgonyzott úszóra, mintegy 250 méternyire az alapvonaltól. — Ezek segélyével könnyü volt a hajó állását a keresztszelvény minden pontjában meghatározni, ugyanis csak azon szöget kellett a sextanssal észlelni, a melyet az illető helyről az alapvonal két végpontja felé irányzott sugár egymással képez. De sokkal nagyobb és nehezebb feladat volt a viz mélységét pontosan megmérni. Erre Révy a mérőónt használta, a melyet már előre lebocsátott bizonyos mélységre s így követte a hajót, mely a felveendő keresztszelvény felső szélén haladt át s ugyanazon vonalban jött vissza. A mint a hajó a profil egy pontján megállt, a sextanssal azonnal észlelték a szöget, s a mérő-ónt a fenékre bocsátván megmérték a viz mélységét. Az irányszög és a mélység egymásután gyorsan följegyeztetvén, a művelet ismételtetett,

Ily módon határozták meg állomásról állomásra a viz mélységét s aztán konstruálták a keresztszelvényt. Révy állítása szerint ezen módon *két* óra alatt fel lehet venni a legnagyobb folyó keresztszelvényét is.

A viz sebességének észlelése végett egymástól 3 méternyire elhelyezett két bárkából hajóhidat alkottak s a vizmérő készülék e két bárka közt volt elhelyezve. A sebesség mérésére Révy a Woltmann-féle szárnyat használta, azonban tetemes és igen elmés módosítással. — Az általa reconstruált készüléknek ugyanis két csavar-felületü szárnya van, a melyeknek külső átmérője 150 mm. s egy 50 mm. átmérőjü üres rézgolyóra erősítvék. — Ezen golyó s természetesen a szárnyak is — mint rendesen — a végtelen csavarral ellátott vizszintes tengelyen vannak, a mely csavar két differentiál kerékbe, a számláló készülékbe kapaszkodik s azzal nincs állandó összeköttetésben. Ha a készüléket viz alá merítjük, a viz kissé fölemeli az említett üres golyót, úgy hogy a csapágyban a surlódás csaknem egészen megszünik, mi által az észlelés ment marad egy nem épen lényegtelen hibától. — A számláló-készülék üveglemez-

zel van befödve s egy tiszta vizzel megtöltött tokba téve; ez által a differentiál-kerekek forgása teljesen meg van mentve minden zavaró külbefolyástól. A bebocsátott viz finom kis csatornával van a külső vizzel összekötve, hogy a nyomás künt és bent egyenlő legyen. A készülék függélyes tengelyre van erősítve s nagy ellenszárnynyal (kormánylapáttal) ellátva, a melynek segélyével a forgó szárnyak állandóan a vizfolyással szembe állíthatók. *)

A Woltmann-szárny 3 meter hosszú, 50 mm. széles és 10 – 12 mm. vastag vasrúdra volt erősítve s vizszintesen felfüggesztve a hajóhíd közepén. Két, beosztással ellátott kötél segélyével tetszőleges mélységre lehetett a készüléket lebocsátani s a mélységet a kötélen leolvasni. Nagyon könnyen belátható, hogy ezen elrendezés mellett, ha egyszer a hajóhíd az illető állomáson el helyeztetett, könnyű volt megtenni az észleléseknek egész sorát a különböző mélységekben. S Morin kötelességének is tartja ezen czélszerü elrendezésre felhivni mindazon mérnökök figyelmét, a kik hasonló észleletek kivitelére vállalkoznak.

Sikerrel használható ezen készülék ugyanazon függélyesben még a középsebesség meghatározására is. Ez úgy történik, hogy a müszert *lassan* és *egyenletesen* lebocsátjuk s aztán ugyanígy felhúzzuk, s a leolvasott forgásszámból s az észlelt időtartamból kiszámíthatjuk azon függélyesben a középsebességet. Hogy az eredmény annál pontosabb legyen, e mütétet czélszerü többször is ismételni, s akkor, mint a kisérletek mutatták, igen megbizható eredményekhez lehet jutni. — Ezen mütételnél a lebocsátásnak és felhuzásnak, nagyon természetesen, lehetőleg egyenletesnek és igen lassúnak kell lenni, hogy az ne legyen befelyással a szárnyak forgás-számára.

Azon kérdések között, a melyeknek megoldását Révy feladatául tüzte ki, az volt a legujabb és legfontosabb, hogy minő befolyást gyakorol a viz mélysége a folyás sebességére? Ezen törvény megállapíthatása végett pedig szükséges:

1.) Hogy a folyam-meder azon szakasza, a melyben a vizsgálat alá veendő profilok vannak, szabályos, egyenesvonalu s lehetőleg széles legyen, továbbá a vizszin esése nagy darabon ugyanaz maradjon;

2.) hogy a folyam tetemes szélességgel birjon, s a vizmélység igen különböző s e mellett elegendő nagy legyen. Ha ezen feltételek megvannak, az észlelés természetesen lehetőleg ment marad minden zavaró befolyástól.

---

*) A mint Révy úr e sorok irójának mondotta, ezen általa reconstruált Woltmann-szárnyból már több mint 100 példány van használatban, főként Amerikában és Indiában. Ára körülbelül 120 frt.

A Paranán végrehajtandó mérés végett Révy visszament a folyón fölfelé közel Rosario városához, hogy oly helyet találjon, a hol a tengernek már nincs észrevehető befolyása e folyam vizére. Az itt felvett keresztszelvény 1485 meter széles volt, s a vizmélység a partoktól szabályszerűen növekedve, elérte egész a 22 metert. — Az 1871. január 24-én végrehajtott felvétel, valamint közel a viz felszinéhez észlelt sebességek eredménye a következő táblázatban van előtüntetve:

Sorszám	Távolság a balparttól	Vizmélység	Sebességek közel a viz felszinéhez		
			az állomások száma	a parttól való távolság	sebesség per 1 mp.
	méterekben			méterekben	
1	134.2	5.05	*a.*	152.5	0,456
2	223.0	9.26			
3	303.0	11.50	*b.*	254.0	0,668
4	406.0	12.80			
5	522.0	14.94	*c.*	377.0	0,880
6	662.0	16.36			
7	762.0	17.69	*d.*	406.0	0,995
8	808.0	17.71			
9	915.0	18.02	*e.*	515.0	1,095
10	1009.0	21.20			
11	1070.0	20.96	*f.*	665.0	1,225
12	1180.0	7.44			
13	1060.0	20.86	*g.*	860.0	1,300
14	1080.0	21.63			
15	1145.0	21.98	*h.*	1080.0	1,295
16	1206.0	3.86			
17	1270.0	2.77	*k.*	1185.0	0,550
18	1485.0	1.83			

Ha itt a följegyzett adatokat grafikailag is előtüntetjük olyformán, hogy a vizmélységek képezzék az abscissákat s a sebességek az ordinátákat: arra az eredményre jutunk, hogy a sebességek csaknem arányosan növekszenek a vizmélységgel. S a Paranának ezen állomásán a sebességek és a vizmélység között levő viszonyt a következő egyenlet fejezi ki:

$$v = 0{,}075\, H.,$$

a melyben a v a másodperczenkénti sebességet s H a vizmélységet jelenti — méterekben.

Ezen viszony nagyon természetesen függ minden egyes esetben a vizszin esésétől és a meder természetétől, s a Révy által levont következtetések csak ott alkalmazhatók, a hol a meder egyforma széles és az esés egyenlő. Azonban azon általános következtetései, a melyeket a Paranán végrehajtott

észleleteiből levezetett, bizonyára figyelemre méltók s nagyon üdvös volna, ha ezek más folyókon tett mérések és kutatások által igazoltatnának.

A Révy által Dél-Amerika nagyobb folyamain végrehajtott hydrometriai kutatások azon eredményre vezettek, hogy nagy folyamoknál, a hol a meder hosszú folyamszakaszon egyenlő széles s a vizszin esése is állandóan ugyanaz: a felszin alatt csekély mélységben észlelt sebesség csaknem állandó viszonyban van a vizmélységgel. Ezen következtetés, a mely még eddig nem volt megállapítva, bizonyára igen fontos és azonkivül semmi ellenmondásban sincs az ismert tényekkel. S bizonyára megérdemli Révy a méltányló elismerést már csak azért is, hogy megmert küzdeni ezen óriás folyamokkal, de főként azért, hogy utánzásra és követésre méltó példát adott arra nézve, miként kell az ilyen hydrometriai felvételeket berendezni, az egész müveletet és személyzetet a legczélszerűbben organisálni. — Egyedül az idő, minden emberi munkának emez elengedhetlen eleme az, a melynek észlelésére nem rendelkezett eléggé könnyen kezelhető és pontos müszerekkel.

A franczia akadémia Morin érdekes jelentése alapján s a kiküldött bizottság indítványára köszönetet szavazott Révy-nek ezen fontos közléseért s elismerését nyilvánítá a nagy folyamok hydraulikájára vonatkozó kutatásaiért.

Gonda Béla.

MEGFEJTETT FELADATOK.

12. Adva van a következő, $2n$ ismeretlenre vonatkozó egyenletrendszer:

$$
\begin{aligned}
&x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 + \ldots + x_{2n-1} x_{2n} = A_1 \\
&x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2 + x_5^2 x_6^2 + \ldots + x_{2n-1}^2 x_{2n}^2 = A_2 \\
&x_1^3 x_2^3 + x_3^3 x_3^3 + x_5^3 x_6^3 + \ldots + x_{2n-1}^3 x_{2n}^3 = A_3 \qquad \text{(I.)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_1^n x_2^n + x_3^n x_4^n + x^n x_6^n + \ldots + x_{2n-1}^n x_{2n}^n = A_n \\
&x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{2n-1}^2 = B_1 \\
&x_1^4 + x_3^4 + x_5^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{2n-1}^4 = B_2 \\
&x_1^6 + x_3^6 + x_5^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{2n-1}^6 = B_3 \qquad \text{(II.)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_1^{2n} + x_3^{2n} + x_5^{2n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{2n-1}^{2n} = B_n
\end{aligned}
$$

Kivántatik e rendszer teljes megfejtése. (König.)

Megoldás Vályi Gyula, a kolozsvári tanárképezde tagjától.

Az I.) alatti symmetricus egyenlet-csoportból következik, hogy $x_1 x_2, x_3 x_4, x_5 x_6 \ldots, x_{2n-1} x_{2n}$ szorzatok gyökei ezen n-edfokú egyenletnek:

$$\eta^n + a_1 \eta^{n-1} + a_2 \eta^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\eta + a_n \qquad (1.)$$

ha $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ coefficiensek eleget tesznek ezen egyenletnek:

$$A_1 + a_1 = o$$
$$A_2 + A_1 a_1 + 2a_2 = o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{n-1} + A_{n-2} a_1 + A_{n-3} a_2 + \ldots + A_1 a_{n-2} + (n-1)a_{n-1} = o$$
$$A_n + A_{n-1} a_1 + A_{n-2} a_2 + \ldots + A_2 a_{n-2} + A_1 a_{n-1} + n a_n = o$$

a mely egyenletekből $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ mind meghatározhatók egyértékűleg.

Épen így a II.) alatti symmetrikus egyenletekből következik, hogy $x_1^2, x_3^2, x_5^2, \ldots x_{2n-1}^2$ gyökei ezen n-edfokú egyenletnek:

$$\xi^n + b_1 \xi^{n-1} + b_2 \xi^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\xi + b_n = o \qquad (2.)$$

ha $b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n$ eleget tesznek ezen egyenleteknek:

$$B_1 + b_1 = o$$
$$B_2 + B_1 b_1 + 2b_2 = o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_{n-1} + B_{n-2} b_1 + B_{n-3} b_2 + \ldots + B_1 b_{n-2} + (n-1) b_{n-1} = o$$
$$B_n + B_{n-1} b_1 + B_{n-2} b_2 + \ldots + B_2 b_{n-2} + B_1 b_{n-1} + n b_n = o$$

a mely egyenletekből $b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n$ mind egyértékűleg meghatározhatók.

Ezen (2.) alatti egyenlet gyökei adják $x_1^2, x_3^2, \ldots x_{2n-1}^2$ értékét, de ezek közül mindenik fölveheti az egyenlet mindenik gyökének értékét, s így n értéket kap mindenikök. De egyidejűleg csak külön gyökértékeket vehetnek föl, mert egyszerre mind az n gyököt kell képviselniök együttesen. Igy a hányféleképen lehet az n gyököt permutálni, annyiféleképen választhatók $x_1^2, x_3^2, \ldots x_{2n-1}^2$ értékei, azaz $1.2.3.\ldots(n-1)n = n!$-féleképen.

Ha már $x_1^2, x_3^2, \ldots x_{2n-1}^2$ meg vannak határozva, $x_1 x_3 \ldots x_{2n-1}$ mindenike még kétféleképen, + és — jellel vehető. Ha $(n-1)$ elemből a jegyválasztással már minden lehetséges combinatiót megtettünk, az n-ik gyök új eleműl járulhat + és — jellel, tehát $C_n = 2C_{n-1}$ (ha általában C_k-val az $x_1^2 x_3^2 \ldots x_{2k-1}^2$ megválasztásával $x_1 x_3 \ldots x_{2k-1}$ számára nyerhető combinatiók számát jelöljük.) Ha tovább folytatva s tekintetbe véve, hogy $C_1 = 2$, lesz $C_n = 2^n$. Igy $x_1 x_3 \ldots x_{2n-1}$ megválasztása $2^n n!$-féleképen történhetik.

A páratlan indexű ismeretlenek által a páros indexűek már meghatározhatók. Ugyanis az (1.) alatti egyenlet gyökeit $(\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n)$ sorra kell oszta

nunk a páratlan indexű ismeretlenekkel, s így a megfelelő páros indexű már meg lesz határozva. Egy páratlan indexűnek így n páros indexű fog megfelelni, mert az n gyök sorra osztható a páratlan indexűvel. Vagy pl. az x_1-nek megfelelő x_2 n értéke $x_1^n x_2^n + a_1 x_1^{n-1} x_2^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_1 x_2 + a_n = o$ egyenletből is nyerhető, mely (1.) egyenlet szerint áll, a hol csak x_1 választott értéke behelyettesítendő. Épen így, ha $x_3\ x_5 \ldots x_{2n-1}$, is mind megválasztottuk, sorra kapjuk:

x_2 számára $\frac{\eta_1}{x_1}, \frac{\eta_2}{x_1} \ldots\ldots \frac{\eta_{n-2}}{x_1}, \frac{\eta_n}{x_1}$

x_4 » $\frac{\eta_1}{x_3}, \frac{\eta_2}{x_3} \ldots\ldots \frac{\eta_{n-1}}{x_3}, \frac{\eta_n}{x_3}$

. . . . . .

x_{2n-2} » $\frac{\eta_1}{x_{2n-2}}, \frac{\eta_2}{x_{2n-3}} \ldots\ldots \frac{\eta_{n-1}}{x_{2n-3}}, \frac{\eta_n}{x_{2n-3}}$

x_{2n} » $\frac{\eta_1}{x_{2n-1}}, \frac{\eta_2}{x_{2n-1}} \ldots\ldots \frac{\eta_{n-1}}{x_{2n-2}}, \frac{\eta_1}{x_{2n-1}}$ értéket.

De egyszerre $x_2\ x_4 \ldots x_{2n}$ csak külön rovatban és sorban levő értékeket vehetnek föl, mert $x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \ldots x_{2n-1}\ x_{2n}$ szorzatok (1.) egyenlet minden gyökét képviselik együttesen. A páratlan indexű ismeretlenek meghatározásával tehát a páros indexűek még $n!$-féleképen választhatók.

Összefoglalva az eddigieket: a lehetséges gyökrendszerek száma $= 2^n (n!)^2$. A páratlan indexűek mindenike $2n$, a páros indexűek mindenike $2n^2$ értéket vehet föl. De az egész levezetés csak azon esetre áll, ha (1.) és (2.) egyenleteknek mind különböző gyökei vannak.

Végül megemlíthető, hogy olyan $2n^2$ fokú egyenletet is nyerhetünk, melynek gyökei közvetetlenül adják azon értékeket, melyeket a páros indexűek akármelyike (pl. x_{2k}) felvehet. Nem kell egyebet tennünk, mint

$$x_{2k-1}^n x_{2k}^n + a_1 x_{2k-1}^{n-1} x_{2k}^{n-1} + a_2 x_{2k-1}^{n-2} x_{2k}^{n-2} + \ldots + n_{n-1} x_{2k-1} x_{2k} + a_n = o$$

és

$$x_{2k-1}^{2n} + b_1 x_{2k-1}^{2n-2} + b_2 x_{2k-1}^{2n-4} + \ldots + b_{n-1} x_{2k-1}^2 + b_n = o$$

egyenletekből, melyek (1.) és (2.) alapján állanak, x_{2k-1}-et valamely ismert módszer pl. a Sylvester-féle szerint eliminálni.

FÖLADATOK.

15. Bizonyíttassék be a következő determináns-egyenlet:

$$\frac{1}{n!} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, 0, 0 \ldots\ldots 0 \\ \frac{1}{2!}, & 1, & 1, 0, 0 \ldots\ldots 0 \\ \frac{1}{3!}, & \frac{1}{2!}, & 1, 1, 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{1}{(n-1)!}, & \frac{1}{(n-2)!} & \ldots\ldots\ldots, 1, 1 \\ \frac{1}{n!}, & \frac{1}{(n-1)!}, & \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2!}, 1 \end{vmatrix}$$

Hasonlóképen:

16.

$$(1-x)^n = \begin{vmatrix} 1, 1, 0, & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ x, 1, 1, & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ x^2, 1, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}, & 0, \ldots\ldots 0 \\ x^3, 1, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}, & \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x^n, 1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3} & \ldots\ldots \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

17.

$$0 = \begin{vmatrix} 1, \binom{2}{1}, & 0, & 0, & 0, \ldots\ldots & 0 \\ 1, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ 1, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, & 0, & \ldots\ldots & & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ 1, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \binom{k}{3}, \binom{k}{4}, & \ldots\ldots & \binom{k}{k-2} & & \end{vmatrix}$$

hol k páros egész számot jelent. (König.)

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

I. kötet. **1876.** 8. füzet.

ÉSZREVÉTELEK MAXWELL ELEKTROMAGNETIKUS FÉNYELMÉLETÉHEZ.

Dr. Fröhlich Izor, egyetemi magántanártól.

Maxwell szerint a fény elektromagnetikus zavarás. Ezen elvet kiterjeszti többek között az elektricitást jól vezető közegekre is, és a következő kifejezésekre jut *):

$$\nabla^2 F + 4\pi\mu C\frac{dF}{dt} = 0, \quad \text{stb.}$$

Ezen egyenletben F az elektromagnetikus zavar egyik componense, C az illető közeg elektrikus vezetőképessége és

$$\mu = 1 + 4\pi k$$

hol k a közeg magnetizátiójának együtthatója. Teljesen ugyanily alakú egyenletek állnak a zavar G és H componenseire nézve.

Ezen egyenletek segítségével az elektromagnetikus zavar, a közeg bármily pontjára nézve, mint a pont helyzetének és az időnek függvénye állítható elő.

Másfelől pedig Fourier azt találta, miszerint a melegnek vezetés általi elterjedése következő egyenletnek felel meg:

$$\nabla^2 F + \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{dF}{dt} = 0$$

hol F a közeg tetszőleges pontjának *hőmérsékét*, γ ezen közeg thermometrikus hővezetési képességét jelenti.

*) J. C. Maxwell: A treatise on electricity and magnetism. Oxford. 1873 II. köt. 396. lap.

Az említett elmélet szerint a fény, a hő és az elektromagnetismus tüneményei egyetlen egy zavarnak különböző nyilvánulásai; következik tehát, hogy a két egyenlet összehasonlitása a bennök előforduló állandók következő kapcsolatára vezet:

$$4\pi\mu C = \frac{1}{\gamma}.$$

Eddig, úgy látszik, ezen állandók nem lettek egybeállítva és összehasonlítva, habár e relatio igazolása vagy nem igazolása az elektromagnetikus fény-elmélet egyik fontos mathematikai következtetésének kriteriuma gyanánt szolgálhat.

Az összehasonlításra szükséges adatokat Wiedemann és Franz*) dolgozatából merítjük; a táblázatban l a közegek viszonylagos melegvezetési, C pedig azok viszonylagos elektrikus vezető-képességét jelenti.

Közeg	C	l
Ezüst	100	100
Réz	77.2	73·6
Arany	60.7	53.2
Ón	15.7	14.5
Vas	12.5	11.9
Ólom	8.7	8.5
Platina	9.5	8.4
Bismut	1.9	1.8

E táblázat azonban ily állapotban a nevezett összehasonlításra nem használható, hanem mindenekelőtt az első sorból $4\pi\mu C$ állandók, a második rovat értékeiből pedig a thermometrikus vezetési állandók képezendők.

Mindenek előtt meg kell jegyeznünk, hogy a μ állandó az itt felsorolt fémekre nézve oly kevéssé különbözik az egységtől (a megfelelő k rendkivűl kicsiny lévén), hogy minden nevezhető hiba nélkül helyébe az egység irható. Kivételt csak a *vas* képez, melyre nézve $\mu = 500$-nak vétetett fel, mivel a megfelelő k 32—45 közt ingadozik. *)

*) Pogg. Annal. LXXXIX. 497. l.

*) Maxwell műve, II. köt. 46. l.

A thermometrikus hővezetés meghatározása végett vissza kell mennünk ezen állandó jelentőségére és fogalmára, a melyszerint ez: »azon szám, mely kifejezi, hogy az időegység alatt a közeg köbegységének két átellenben fekvő oldalain keresztül ömlő melegmennyiség (feltéve hogy e két oldal hőmérséki különbsége állandóan egy fok, és hogy a köb többi oldalai hőre nézve áthatlanok) ugyanezen közegből hány térfogat egység hőmérsékét bírja egy fokkal fölemelni.

Eunélfogva a táblában foglalt állandók (melyek az időegység alatt az illető közeg köbegységén keresztül ömlő melegmennyiség viszonylagos értékei), még az illető test *térfogati fajmelegével* osztandók.

A térfogati fajmeleg pedig a közönséges (a tömegegység hőmérsékét egy fokkal emelő) fajmelegnek c-nek szorzata a közeg fajsulyával s-sel; ezen szorzatokkal az első táblázatban foglalt melegvezetési képességek osztatnak.

A következő tábla első számrovata a közegek térfogati fajmelegét (a viz térfogati fajmelegét egységnek véve), és második rovata viszonylagos thermometrikus melegvezetési képességüket tartalmazza.

Közeg	$c'=cs$	γ
Ezüst	0.597	167.6
Réz	0.827	89.0
Arany	0.618	86.1
Ón	0.408	35.5
Vas	0.855	13.9
Ólom	0.352	24.1
Platina	0.704	11.9
Bismut	0.304	5.9

Ha most végre a második sorozat állandóinak visszás értékét véve, az így eredő adatok valamely közös számbeli tényezővel szoroztatnak, úgy, hogy az ezüstnek megfelelő állandó értéke 100 legyen, a következő táblázathoz jutunk:

Közeg	$4\pi\mu C$	$\frac{1}{\gamma}$
Ezüst	100.0	100.0
Réz	77.2	188.3
Arany	60.7	194.7
Ón	15.7	185.6
Vas	6250.0	1205.7
Ólom	8.7	679.6
Platina	9.5	1408.3
Bismut	1.9	2840.5

E táblázat természetesen nem tartalmazza az illető állandók absolut értékeit; de ez szükségtelen is, minthogy az elméleti következtetés értelmében a különböző közegek μC állandóinak viszonylagos értékei egyenlők a közegek thermometrikus vezetési képességének viszonylagos értékeivel.

Ez összeállításból látni, hogy alig gondolható nagyobb ellentét, mint a mely az elmélet mathematikai következtetése és a kisérleti adatok között fennáll.

Az elektromagnetikus fényelmélet alkalmazása jó elektrikus vezető közegekre tehát a tapasztalással egyenes ellentétben álló eredményekre vezet.

Mindazonáltal az elméletet e miatt teljesen elvetni vagy csak mellőzni is talán már azért sem tanácsos, minthogy Boltzmann, Schiller, Silow, Root *) kisérleti dolgozatai kiderítették, hogy Maxwell elméletének következtetései nem vezető dielektrikus közegekre nézve (szilárd testek, folyadékok, sőt még gázokra nézve is) a tapasztalással igen kielégítő összhangzásban vannak.

Úgy tetszik, mintha az elméletnek a tapasztalattól ez alkalommal kimutatott eltérésének oka Maxwell elméletének egyszerűségében rejlenék. A fémek belsejében véghez menő mozgási folyamatok minden esetre bonyolúltabbak, mint az átlátszó, illetőleg nem vezető, dielektrikus közegekben végbe menők; és ép oly kevéssé, a mint levezethető a fény visszaverődése a fémek felületéről a fény egyszerű rezgési elméletéből, ép oly kevéssé lesz elegendő Maxwell elmélete, ily bonyolódott folyamatokról kielégítő magyarázatot adni.

(Budapest, 1876. szeptember hó.)

---

*) Ezen dolgozatok vagy kivonataik Pogg. Annal. utolsó évfolyamaiban találhatók.

NÉHÁNY, A CONFOCÁLIS KÚPSZELET-SEREGGEL KAPCSOLATOS MÉRTANI HELYRŐL.

Klug Lipót, főreáltanodai tanártól Pozsonyban.

A tétel, melyre az olvasó figyelmét fel akarjuk hívni, következőleg hangzik:

Egy elsőrendü sugársor — S — sugarainak érintő pontjai valamely confocális kúpszelet-sereggel harmadrendü görbén fekszenek, mely a confocális kúpszelet-sereg gyujtópontjain és a sugársor központján S-en keresztülmegy.

Legyen a confocális kúpszelet-sereg középponti egyenlete, derékszögü összrendezőkre vonatkoztatva:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} - 1 = 0 \qquad (1.)$$

hol $\sqrt{a^2-b^2}=c$ a gyújtópontok távolságai a középponttól, λ pedig a változó parametert jelenti.

Az xy pontban vont érintőnek egyenlete a sereg egyik kúpszeletéhez:

$$\frac{xx'}{a^2+\lambda} + \frac{yy'}{b^2+\lambda} - 1 = 0, \qquad (2.)$$

hol x', y' a folyó összrendezőket jelölik.

Ha ezen érintő adott S ponton átmegy, akkor e pont összrendezői $(\xi\eta)$ eleget tesznek az érintő egyenletének, vagyis lesz:

$$\frac{x\xi}{a^2+\lambda} + \frac{y\eta}{b^2+\lambda} - 1 = 0. \qquad (3.)$$

Ha az (1.) és (3.) egyenletekből a változó parametert, λ-t kiküszöböljük, megkapjuk az S ponton átmenő egyenesek érintő pontjainak mértani helyét.

A kiküszöbölés után nyert egyenlet ily alakra hozható:

$$xy\,(x\eta - y\xi)[x(x-\xi) + y(y-\eta)] + c^2(x-\xi)(y-\eta) = 0,$$

ez pedig szétoszlik az:

$$x = 0\,; \quad y = 0,$$
$$(x\eta - y\xi)[x(x-\xi) + y(y-\eta)] + c^2(x-\xi)(y-\eta) = 0 \qquad (4.)$$

egyenletekre.

A két első egyenletben kifejezett eredmény, hogy t. i. a confo-

cális kúpszelet-sereg tengelyei a keresett mértani helyhez tartoznak, előre volt látható.

A kúpszelet-sereg mindegyik tengelye egybeeső egyenes párrá degenerált kúpszeletnek tekinthető. Az ily degenerált kúpszelet minden egyenes érintőjén, mely az S ponton átmegy, maga a metszési pont tekintendő érintő-pontnak.

Ha e két egyenletet mellőzzük, úgy a talált mértani hely harmadrendű görbe.

E görbének különös fekvése van az összrendszer tengelyeihez. Tegyünk ugyanis a görbe egyenletébe (4.)-be először y azután x helyett zérust, az ekként származó egyenletek a következő alakra hozhatók:

$$(x^2-c^2)(x-\xi)=0$$
$$(y^2+c^2)(y-\eta)=0.$$

Az első egyenlet arra mutat, hogy a görbe a gyújtó-pontokon és az S pontnak X tengelybeli derékszögű vetületén megy keresztül; a második egyenletből következik, hogy a görbének az Y tengelyen két képzetes és egy valós pontja van, mely utóbbi az S pontnak derékszögü vetülete az Y tengelyre.

A görbe érintője a gyujtópontokban könnyen szerkeszthető. Ezeknek egyenleteit:

$$y=\frac{2\eta(\xi-c)}{(\xi-c)^2-\eta^2}x=\text{tg.}\,\delta_1 x$$
$$y=\frac{2\eta(\xi+c)}{(\xi+c)^2-\eta^2}x=\text{tg.}\,\delta_2 x$$

mint tudjuk, megtaláljuk, ha a görbe egyenletébe egyszer x helyett $x+c$, aztán x helyett $x-c$-t teszünk és az ekként származott egyenletben a tagokat, melyekben az x és y az első hatványban fordul elő, zérussal egyenlítjük.

Jelöljük ezen érintők hajlás-szögét az X tengelyhez δ_1 illetőleg δ_2, akkor:

$$\text{tg.}\frac{\delta_1}{2}=\frac{\eta}{\xi-c};\quad \text{tg.}\frac{\delta_2}{2}=\frac{\eta}{\xi+c};$$

és e szögek e szerint egyszerűen szerkeszthetők.

Vonatkeztassuk a görbét oly rendszerre, melynek tengelyei párhuzamosak az előbbiekkel és melynek kezdőpontja S-ben van, úgy az átváltoztatott egyenlet alakja ez lesz:

$$\eta x^3-\xi x^2 y+\eta x y^2-\xi y^3+\xi\eta(x^2-y^2)+xy[\eta-\xi^2+c^2]=0.$$

Ez egyenletben hiányzik az állandó tag, valamint azok a tagok is, melyekben x vagy y az első hatványban fordulna elő; az S pont tehát kettős pontja a harmadrendű görbének.

Az érintőpár egyenletét e pontban megtaláljuk, ha

$$x^2 - y^2 + xy\frac{(\eta^2-\xi^2+c^2)}{\xi\eta} = 0$$

négyzetes egyenletet lineár tényezőkre bontjuk. Ezek:

$$\frac{y(\xi-c)-\eta x}{\sqrt{\eta^2+(\xi-c)^2}} + \frac{y(\xi+c)-\eta x}{\sqrt{\eta^2+(\xi+c)^2}} = 0.$$

Ezek az egyenletek az S ponton átmenő hyperbola és ellipsis érintőinek egyenletei, melyek mint ismeretes egymásra merőlegesek.

Tudva már most, hogy a görbének kettős (nem conjugált) pontja van, az osztályszám kitudása végett nem szükség egyenletét vonalösszrendezőkben kifejezni, mert az ily tulajdonságú harmadrendű görbék mindig 4-ed osztályuak. *)

A görbe végérintőinek egyenleteit:

$$(\xi^2+\eta^2)(x\eta-y\xi) + \eta\xi c^2 = 0,$$
$$2(x\xi-y\eta) \pm 2\sqrt{-1}(x\eta+y\xi-\xi\eta) + \eta^2-\xi^2-c^2 = 0$$

megtaláljuk, ha az általános módszerek szerint járunk el, melyeket pl. Salmon közöl, említett munkájának 40. lapán.

A mint ezen egyenletekből látható, a görbének csak egy valós végérintője van, és ez párhuzamos a kúpszelet-sereg középpontját az S ponttal összekötő egyenessel.

A harmadrendű görbe, S különös helyzetében, kúpszeletté degenerálhat.

Ha az S pont valamely Q egyenesnek végtelenben fekvő pontja, mely egyenesnek hajlása az X tengelyhez Θ, úgy a harmadrendű görbe egyenlete a következő alakra válik:

$$x^2 - y^2 - xy\left[\text{tg.}\,\Theta - \frac{1}{\text{tg.}\,\Theta}\right] - c^2 = 0$$

Ez pedig oly egyenoldalú hyperbola egyenlete, melynek egyik végérintője párhuzamos a G egyeneshez.

Ha tehát valamely confocális kúpszelet-seregnek a G vonalhoz párhuzamos érintőit (vagy derékl̈öit) meghúzzuk, akkor az érintő pontok (illetőleg a talppontok) egyenoldalú hyperbolán fekszenek, melynek

*) Salmon »Higher plane curves« p. 131. Ugyane munka német fordítása: »Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven Fiedler-től.«

középpontja egybe esik a kúpszelet-sereg középpontjával és mely a kúpszelet-sereg gyujtópontjain megy keresztül. E hyperbola egyik végérintője párhuzamos a G egyeneshez.

Ha a harmadrendü görbe egyenletében egyszer η helyett, másszor ξ helyett 0-t teszünk és a fölösleges factort eltávolítjuk, ezeket az egyenleteket kapjuk:

$$x^2 + y^2 - x\,\frac{c^2+\xi^2}{\xi} + c^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + y\,\frac{c^2-\eta^2}{\eta} - c^2 = 0$$

ezeknek értelme pedig a következő:

Ha valamely confocális kúpszelet-sereg tengelyeinek különböző pontjaiból a kúpszeletekhez érintőket (vagy derékliket) huzunk, akkor érintő pontjaik (illetőleg talppontjaik) két conjugált körseregben fekszenek. Az egyik körsereg alappontjainak összrendezői: $y=0$; $x=\pm c$, a másik körsereg alappontjainak összrendezői: $x=0$; $y=\pm c\sqrt{-1}$.

A DETERMINÁNSOK ALKALMAZÁSA A MÉRTANBAN.

Hunyady Jenötöl.

I.

E sorokban a determinánsokat nehány planimetriai, stereometriai és gömb-háromszögtani feladat megoldására fogjuk alkalmazni.

A kitüztük feladatok egyébkénti megoldásai ismeretesek lévén, csak az általunk követett módszerre fektetjük a súlyt. Reméljük hogy e megoldásokban mindenütt a legtermészetesebb és legelemiebb utat választottuk,

1. A háromszög területe, kifejezve a három oldal által. Legyenek a, b, c és A, B, C a háromszög oldalai és szögei; T pedig a háromszög területe, úgy

$$2T = bc \sin. A$$

és ismét

$$4T^2 = b^2c^2\sin^2 A = b^2c^2(1-\cos^2 A).$$

Carnot tétele szerint pedig

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

és ha $\cos A$ ezen értékét az előbbi egyenletbe helyettesítjük, úgy lesz:

$$16T^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

vagy

$$16T^2 = \begin{vmatrix} 2c^2 & b^2 + c^2 - a^2 \\ b^2 + c^2 - a^2 & 2b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2c^2 & b^2+c^2-a^2 \\ 1 & 0 & b^2+c^2-a^2 & 2b^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2c^2 & b^2+c^2-a^2 \\ 1 & 0 & b^2+c^2-a^2 & 2b^2 \end{vmatrix}$$

és innét

$$-16T^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2c^2 & b^2+c^2-a^2 \\ 1 & 0 & b^2+c^2-a^2 & 2b^2 \end{vmatrix}$$

Ha továbbá a jobb oldalon lévő determinánsban a c^2 és b^2-tel szorzott első vizszintes és első függélyes sort a *3.* és *4.*ik vizszintes és függélyes sorból kivonjuk és azután az első vizszintes, valamint a *2*-ik *3*-dik és *4*-ik függélyes sort -1-gyel szorozzuk, úgy végre ered:

$$-16T^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (1).$$

A háromszög területét még más alakban is kifejezhetjük, ha az iménti egyenletben a determinánst olykép alakitjuk át, hogy abban a viszintes sorok mindegyikét abc-vel sokszorozzuk és azután a *2*-dik *3*-dik és *4*-dik vizszintés és függélyes sorokat rendre bc, ca és ab-*vel* elosztjuk. Ez átalakitással az előbbi egyenlet a következővé válik:

$$-16T^2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (2)$$

*2. A tri*é*der sinusa.* Ha a triéderben az élszögeket a,b, c-vel es az átellenes lapszögeket A, B, C-vel jelöljük úgy Staudt szerint a következő szorozmány

$$\sin a \sin b \sin C = \sin b \sin C \sin A = \sin c \sin a \sin B$$

a triéder sinusának (Eckensinus) neveztetik.

Célunk a triéder sinusát élszögekkel kifejezni; e végből a következő egyenletből indulunk ki:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

melyből továbbá következik, hogy

$$(\cos c - \cos a \cos b)^2 = \sin^2 a \sin^2 b (1 - \sin^2 C).$$

és innét

$$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C = (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) - (\cos c - \cos a \cos b)^2$$

vagy

$$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C = \begin{vmatrix} 1 - \cos^2 b & \cos c - \cos a \cos b \\ \cos c - \cos a \cos b & 1 - \cos^2 c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - \cos^2 b & \cos c - \cos a \cos b & \cos b \\ \cos c - \cos a \cos b & 1 - \cos^2 a & \cos a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ha pedig az utolsó determinánsban a $\cos b$ és $\cos a$-val szorzott utolsó függélyes sort az első és második függélyes sorhoz hozzáadjuk, úgy találjuk, hogy

$$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} \qquad (3.)$$

Alig szükséges megemlíteni, hogy a megelőző egyenlet azon összefüggésnél fogva, mely a háromél és a gömbháromszög között van, a gömbháromszögre nézve is érvényes, annak oldalait a, b, c-vel, szögeit pedig A, B, C-vel jelölvén.

Ha továbbá felteszszük, hogy a triédernek mind a három éle ugyanazon sikban fekszik, úgy a lapszögek egyenlők levén zérussal, a (3.) alatti egyenletnek első tagja eltűnik, az élszögekre nézve pedig a következő egyenlet áll:

$$c = a + b \qquad (4.)$$

Ezen feltétel alatt tehát:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} \qquad (5.)$$

Ez az egyenlet a, b és c minden értékére nézve érvényes, föltéve hogy azok a (4.) alatti feltételnek megfelelnek.

3. A tetraéder köbtartalma az élekben kifejezve. Ha a tetraéder köbtartalmát V-vel, az egyik csúcsában találkozó éleket λ_1, λ_2, λ_3-mal és az átellenes éleket μ_1, μ_2, μ_3-mal, végre a λ_1, λ_2, λ_3 triéderben

az ezen éleknek átellenes élszögeket a, b, c-vel jelöljük, úgy ismeretes, hogy:

$$36V^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

Képesek vagyunk továbbá az a, b és c szögek cosinusait a tetraéder élei által kifejezni; és pedig a használt jelöléseknél fogva:

$$\cos a = \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \mu_1^2}{2\lambda_2 \lambda_3}, \quad \cos b = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \mu_2^2}{2\lambda_1 \lambda_3}, \quad \cos c = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \mu_3^2}{2\lambda_1 \lambda_2}$$

Ha ezen értékeket az előbbi egyenletbe behelyettesítjük, úgy az, a nevezők eltávolítása után, a következővé válik:

$$288V^2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \begin{vmatrix} 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & \lambda_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \mu_3^2) & \lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \mu_2^2) \\ \lambda_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \mu_3^2) & 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & \lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \mu_1^2) \\ \lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \mu_2^2) & \lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \mu_1^2) & 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{vmatrix}$$

és ebből, ha a jobb odalon álló determinánsban az 1-ső, 2-dik és 3-dik vizszintes sort $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$-mal szorozzuk és azután az 1-ső, 2-dik és 3-dik függélyes sorból pedig a $\lambda_2 \lambda_3$, $\lambda_3 \lambda_1$ és λ_1, λ_2 tényezőket kiveszszük, a a következő egyenletre jövünk:

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 2\lambda_1^2 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \mu_3^2, & \lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \mu_2^2 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \mu_3^2 & 2\lambda_2^2 & \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \mu_1^2 \\ \lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \mu_2^2, & \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \mu_1^2 & 2\lambda_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2\lambda_1^2 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \mu_3^2, & \lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \mu_2^2 \\ 1 & 0 & \lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \mu_3^2 & 2\lambda_2^2 & \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \mu_1^2 \\ 1 & 0 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \mu_3^2, & \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \mu_1^2 & 2\lambda_3^2 \end{vmatrix}$$

Ha végre ezutóbbi determinánsban a λ_1^2, λ_2^2 és λ_3^2-tel szorzott első vizszintes és első függélyes sort a 3-dik, 4-dik és 5-dik vizszintes és függélyes sorokból kivonjuk és az így átalakított determinánsban az utolsó négy függélyes és az első vizszintes sort —1-gyel szorozzuk, úgy találjuk, hogy

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ 1 & \lambda_1^2 & 0 & \mu_3^2 & \mu_2^2 \\ 1 & \lambda_2^2 & \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 \\ 1 & \lambda_3^2 & \mu_2^2 & \mu_1^2 & 0 \end{vmatrix} \tag{6.}$$

4. *A teljes négyszög hat oldala közti viszony.* Ha felteszszük,

hogy a tetraédernek az egyik csúcsa a vele szemben fekvő lapba esik, úgy a tetraéderből teljes sík-négyszög lesz, melynek hat oldalát az előbbi tetraéder-élek képezik. A tetraéder köbtartalma ez esetben egyenlő zérussal.

Ezeket szemmel tartva és a (6.) alatti egyenletet a jelen esetre alkalmazva, a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ 1 & \lambda_1^2 & 0 & \mu_3^2 & \mu_2^2 \\ 1 & \lambda_2^2 & \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 \\ 1 & \lambda_3^2 & \mu_2^2 & \mu_1^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.)$$

s ez fejezi ki azt a viszonylatot, a mely a teljes sík-négyszög hat oldala közt fennáll.

5. A teljes gömb-négyszög hat oldala közti viszonylat. Ha a teljes gömb-négyszög szemben fekvő oldalait λ_1, μ_1; λ_2, μ_2; λ_3, μ_3-mal jelöljük, a λ_1, λ_2, λ_3 oldalok a négyszög egyik csúcsában találkozván; ha továbbá a, b és c-vel azon szögeket jelöljük, melyeket a λ_1, λ_3; λ_3, λ_1; λ_1, λ_2 oldalok egymással képeznek, úgy, mivel:

$$c = a + b$$

az (5.) alatti egyenletnél fogva:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ámde:

$$\cos a = \frac{\cos\mu_1 - \cos\lambda_2 \cos\lambda_3}{\sin\lambda_2 \lambda_3}$$

$$\cos b = \frac{\cos\mu_2 - \cos\lambda_1 \cos\lambda_3}{\sin\lambda_1 \sin\lambda_3}$$

$$\cos c = \frac{\cos\mu_3 - \cos\lambda_1 \cos\lambda_2}{\sin\lambda_1 \sin\lambda_2}$$

és ezen értékeket az előbbi egyenletbe helyettesitve, a nevezők eltávolitása után, találjuk, hogy $O=$

$$\begin{vmatrix} \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \sin\lambda_3 & \sin\lambda_3(\cos\mu_3 - \cos\lambda_1\cos\lambda_2), & \sin\lambda_2(\cos\mu_2 - \cos\lambda_1\cos\lambda_3) \\ \sin\lambda_3(\cos\mu_3 - \cos\lambda_1\cos\lambda_2) & \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \sin\lambda_3 & \sin\lambda_1(\cos\mu_1 - \cos\lambda_2\cos\lambda_3) \\ \sin\lambda_2(\cos\mu_2 - \cos\lambda_1\cos\lambda_3), & \sin\lambda_1(\cos\mu_1 - \cos\lambda_2\cos\lambda_3) & \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \sin\lambda_3 \end{vmatrix}$$

vagy, ha e determinánsban az 1-ső 2-dik és 3-ik vizszintes sort $\sin\lambda_1$, $\sin\lambda_2$ és $\sin\lambda_3$-mal szorozzuk, az 1-ső 2-ik és 3-ik függélyes sort pedig

$\sin \lambda_2 \sin \lambda_3$, $\sin \lambda_1 \sin \lambda_3$ és $\sin \lambda_1 \sin \lambda_2$-vel elosztjuk, úgy az előbbi egyenlet a következővé válik:

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos^2 \lambda_1 & \cos \mu_3 - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2, & \cos \mu_2 - \cos \lambda_1 \cos \lambda_3 \\ \cos \mu_3 - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 & 1 - \cos^2 \lambda_2 & \cos \mu_1 - \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 \\ \cos \mu_2 - \cos \lambda_1 \cos \lambda_3, & \cos \mu_1 - \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 & 1 - \cos^2 \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ez egyenletet továbbá még így is irhatjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \lambda_1 & 1 - \cos^2 \lambda_1 & \cos \mu_3 - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2, & \cos \mu_2 - \cos \lambda_1 \cos \lambda_3 \\ \cos \lambda_2, & \cos \mu_3 - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 & 1 - \cos^2 \lambda_2 & \cos \mu_1 - \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 \\ \cos \lambda_3, & \cos \mu_2 - \cos \lambda_1 \cos \lambda_3, & \cos \mu_1 - \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 & 1 - \cos^2 \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

és ha végre ezen utóbbi determinánsban a $\cos \lambda_1$, $\cos \lambda_2$, $\cos \lambda_3$-mal szorzott első függélyes sort a 2-dik 3-dik és 4-dik függélyes sorhoz adjuk, úgy az előbbi egyenlet a következő alakot ölti

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda_1 & \cos \lambda_2 & \cos \lambda_3 \\ \cos \lambda_1 & 1 & \cos \mu_3 & \cos \mu_2 \\ \cos \lambda_2 & \cos \mu_3 & 1 & \cos \mu_1 \\ \cos \lambda_3 & \cos \mu_2 & \cos \mu_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.)$$

s ez az egyenlet mulatja az összefüggést, mely a teljes gömb-négyszög hat oldala között fennáll.

Ezen egyenlet továbbá még azt az összefüggést is kifejezi, mely azon hat szög között fennáll, melyet tetszés szerinti négy egyenes egymással képez, valamint végre még azon összefüggést is, mely a tetraéder hat lapszöge között fenn forog.

6 A tér öt pontja által meghatározott tiz távolság közti összefüggés. A nevezett összefüggésre az utolsó egyenletből jöhetünk. Jelöljük a tér öt pontját *1, 2, 3, 4, 5*-tel, továbbá az *1, 2, 3, 4* pontok által meghatározott tetraéderben az egymásnak szemben fekvő éleket a_1 b_1; a_2, b_2; a_3, b_3-mal, úgy hogy a_1, a_2, a_3 a4-es pontban találkozó élek legyenek, továbbá c_1, c_2, c_3, c_4 az 5 pont távolságai az *1, 2, 3, 4* pontoktól, végre legyenek λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 azon szögek, melyeket a c_1 c_4; c_2, c_4; c_3 c_4; c_2 c_3; c_1, c_3; c_1, c_2 egyenesek egymással képeznek. Czélunk elérésére a (8) alatti egyenletet a következőképen irjuk

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \mu_3 & \cos \mu_2 & \cos \lambda_1 \\ \cos \mu_3 & 1 & \cos \mu_1 & \cos \lambda_2 \\ \cos \mu_2 & \cos \mu_1 & 1 & \cos \lambda_3 \\ \cos \lambda_1 & \cos \lambda_2 & \cos \lambda_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A λ és μ szögek cosinusait az a, b és c távolságok által fejezhetjük ki, és pedig

$$\cos\lambda_1 = \frac{c_1^2+c_4^2-a_1^2}{2\,c_1\,c_4} \qquad \cos\mu_1 = \frac{c_2^2+c_3^2-b_1^2}{2\,c_2\,c_3}$$

$$\cos\lambda_2 = \frac{c_2^2+c_1^2-a_2^2}{2\,c_2\,c_4} \qquad \cos\mu_2 = \frac{c_1^2+c_3^2-b_2^2}{2\,c_1\,c_3}$$

$$\cos\lambda_3 = \frac{c_3^2+c_4^2-a_3^2}{2\,c_3\,c_4} \qquad \cos\mu_3 = \frac{c_1^2+c_2^2-b_3^2}{2\,c_1\,c_2}$$

Ha ezen értékeket a fentebbi egyenletbe helyettesitjük, úgy annak, a nevezők eltávolitása és az előbbi számokhoz hasonló átalakitása után, a következő alakot adhatjuk:

$$\begin{vmatrix} 2c_1^2 & c_1^2+c_2^2-b_3^2 & c_1^2+c_3^2-b_2^2 & c_1^2+c_4^2-a_1^2 \\ c_1^2+c_2^2-b_3^2 & 2c_2^2 & c_2^2+c_3^2-b_1^2 & c_2^2+c_4^2-a_2^2 \\ c_1^2+c_3^2-b_2^2 & c_2^2+c_3^2-b_1^2 & 2c_3^2 & c_3^2+c_4^2-a_3^2 \\ c_1^2+c_4^2-a_1^2 & c_2^2+c_4^2-a_2^2 & c_3^2+c_4^2-a_3^2 & 2c_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

vagy

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2c_1^2 & c_1^2+c_2^2-b_3^2, & c_1^2+c_3^2-b_2^2, & c_1^2+c_4^2-a_1^2 \\ 1 & 0 & c_1^2+c_2^2-b_3^2 & 2c_2^2 & c_2^2+c_3^2-b_1^2, & c_2^2+c_4^2-a_2^2 \\ 1 & 0 & c_1^2+c_3^2-b_2^2, & c_2^2+c_3^2-b_1^2 & 2c_3^2 & c_3^2+c_4^2-a_3^2 \\ 1 & 0 & c_1^2+c_4^2-a_1^2, & c_2^2+c_4^2-a_2^2, & c_3^2+c_4^2-a_3^2 & 2c_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ha végre az utobbi determinánsban a c_1^2, c_2^2, c_3^2, c_4^2-vel szorzott első vizszintes és első függélyes sort a *3*-dik *4*-dik *5*-dik és *6*-dik vizszintes és függélyes sorból kivonjuk, úgy a következő egyenletre jövünk:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_4^2 \\ 1 & c_1^2 & 0 & b_3^2 & b_2^2 & a_1^2 \\ 1 & c_2^2 & b_3^2 & 0 & b_1^2 & a_2^2 \\ 1 & c_3^2 & b_2^2 & b_1^2 & 0 & a_3^2 \\ 1 & c_4^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

s ez fejezi ki összefüggést, mely a tér öt pontja által meghatározott tiz távolság között létezik. (L. e lapok 4 füzetében 125. l.)

A következő füzetben a (7), (8) és (9) alatti egyenleteket a sik- és gömb-háromszög körül irt kör sugarának, valamint a tetraéder körül irt gömb sugarának meghatározására fogjuk alkalmazni, az első esetben az oldalakat, a másodikban az éleket adván. A (7) és (9) alatti képletek továbbá három adott körhöz és négy adott gömbhöz az orthogonál kör és gömb sugarának meghatározására fognak szolgálni.

A HŐELMÉLETBEN ELŐFORDULÓ MENNYISÉGEK DYNAMIKAI JELENTÉSÉRŐL.

Szily Kálmántól.

II.

E folyóirat 6-ik füzetében a 165-ik és következő lapokon abbeli nézetemet fejeztem ki, hogy a mechanikai fogalmak, melyeket magunknak a hőelméletben előforduló mennyiségekről jelenleg alkotunk, nem kielégitők és szigorúan véve nem is helyesek. Ekkoráig t. i. az a föltevés uralkodik, hogy a testnek, míg állapota változatlan, minden dynamikai és thermodynamikai jellemvonása is, ú. m. térfogata, összes erélye, feszültsége s. a. t., daczára a testet alkotó anyagi pontok örökös sürgés-forgásának, mégis folyvást változatlan, más szóval hogy e mennyiségek *az időtől független állandók*. Nézetem szerint, e föltevést elfogadva, alig lehet egyáltalában el képzelni, hogy a természetben változatlan állapotú test csak egy perczig is létezhessék. Mert ha a testet alkotó atómok és molekülök helyzete, sebessége és gyorsulása minden pillanatban változik, miként maradhatna a sűrűség, térfogat és összes erély mégis folyvást állandó? Sokkal természetesebb és a valóságot bizonyára sokkal inkább megközelitő az a föltevés, melyet idézett dolgozatomban bővebben indokoltam, hogy t. i. *a test állapota akkor tekintendő változatlannak, ha térfogata, eleven ereje, potentiális erélye és minden egyéb dynamikai tulajdonsága az időnek periodikus függvénye és pedig úgy, hogy ez a periodus valamennyi tulajdonságra nézve egy és ugyanaz legyen.* A pillanatonkénti változás tehát nem zérus, ɛ mint ekkoráig föltételezik, hanem igen is zérus a változás középértéke egy-egy periodus alatt. — A változatlan állapotú test anyagi pontjainak mozgását spontán mozgásnak és az ebből folyó periodikus változásokat *spontán változásoknak* neveztem.

A bekövetkezett műegyetemi szünetek alatt sokat elmélkedtem hypothésisem jogosult vagy jogosulatlan volta felől s minél többet vizsgáltam a dolgot, annál jobban megszilárdult bennem a meggyőződés, hogy helyes úton járok. Részletek, melyek az első kidolgozásban nem vonták magukra figyelmemet, utóbb tisztán kidomborodtak s az egésznek a körrajzát is világosabban elém tüntették. Igy aztán a tisztult felfogás a mathematikai kezelésnek is meggyőzőbb erőt kölcsönzött.

Értekezésem angol átdolgozásában, miként az a londoni Philosophical Magazineben látott napvilágot, már újabb vizsgálataim eredményét is fel lehetett használnom.

Legyen szabad ez újabb vizsgálatokat, a mennyiben azok a hőelmélet második főtételére vonatkoznak, pótlékképen ide igtatnom.

Jelöljük a térfogat momentán nagyságát a t időpillanatban v-vel és a térfogat spontán változását dt idő alatt dv-vel, a periodus tartamát i-vel, úgy a térfogat-változás középértéke i idő alatt egyenlő a semmivel,

$$\overline{dv} = \frac{1}{i}\int_0^i dv \,.\, dt = 0.$$

Ugyanezt még akként is kifejezhetjük, hogy a térfogat középértéke állandó, vagyis

$$\overline{v} = \frac{1}{i}\int_0^i v \,.\, dt = \text{Const.}$$

Ebből következik, hogy a dt idő alatt végzett munka dW nem 0, hanem csupán a végzett munka középértéke egy-egy periodus alatt lesz 0,

$$\overline{dW} = \frac{1}{i}\int_0^i dW \,.\, dt = 0.$$

A test eleven ereje (T), helyzeti erélye (U) és összes erélye (E) sem állandó; csupán közép-értékük marad mindaddig változatlan, míg az állapot változatlan, vagyis

$$\overline{T} = \text{const.} \; ; \; \overline{U} = \text{const} \; ; \; \overline{E} = \text{const.}$$

A dt idő alatt netán kivülről kapott erély dQ, az erély megmaradása elvénél fogva,

$$dQ = dT + dU + dW$$

Hogy ezt kiszámíthassuk, legyen a test valamelyik pontjának tömege m, derékszögü coordinátái a t időpontban x, y, z, sebességi és gyorsulási componensei x'..... illetőleg x''..... tehát

$$x' = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad x'' = \frac{dx'}{dt}$$

A reá következő dt idő alatt megváltoznak a coordináták dx..... vel a sebességi componensek dx'..... vel, s az eleven erő dT-vel;

MTA KÖNYVTÁRA

$$dT = \Sigma m(x'dx' + \ldots\ldots)$$

a dt idő alatt végzett összes (belső és külső) munka pedig

$$dU + dW = -\Sigma m(x''dx + \ldots\ldots)$$

következésképp

$$dQ = \Sigma m(x'dx' + \ldots\ldots - x''dx - \ldots\ldots)$$

vagy még

$$dQ = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}dx' + \ldots\ldots - \frac{dx'}{dt}dx - \ldots\right)$$

és igy

$$dQ = 0.$$

Ebből látható, hogy a test spontán változásai közben erélyt se nem kap, se nem ad ki, és így az alternativ munka-végzésnél és munka-fogyasztásnál szereplő erélyt a test kizárólag a maga erélyéből fedezi. A míg tehát állapota változatlan, mindaddig nem is kölcsönöz a test erélyt a környezettől. *)

Ha tehát a test állapota változatlan, úgy a lüktetés periodusa (i) a térfogatnak, eleven erőnek, potentiális erélynek, összes erélynek sat. középértéke ($\overline{v}$, $\overline{T}$, $\overline{U}$, $\overline{E}$ sat.) az időtől független állandó, a közlött erély-mennyiség pedig minden pillanatban semmi.

Képzeljük most, hogy a testbe a meglevőn felül még kivülről egy végtelen kis erély mennyiséget bevezetünk; ennek következtében a test állapota is megváltozik egy keveset s az állapotjelzők (ú. m. i, $\overline{v}$, $\overline{T}$, $\overline{U}$ s. a. t.) megfelelőleg változást szenvednek. És minthogy minden változás időben történik, e végtelen csekély állapotváltozásra is idő kivántatik. De ugyanaz a változás, az erélybeszállitás gyorsaságához képest, hosszabb vagy rövidebb idő alatt eshetik meg. Az állapot-változásra szükséges időtartamot tehát tetszésünk szerint szabhatjuk meg. A t_0 időpillanatban legyen tehát a test még a régi állapotban; ezennel megindul az erély-beszállitás és vele együtt az állapotváltozás; eltart t_1 időpillanatig s ennek leteltével megszünik; az új állapotjelzők jelenlegi értékei ezentul ismét állandók maradnak.

Valamely t időpillanatban, mely a t_0 és t_1 idő közé esik, legyenek az m pont coordinátái, sebességi illetőleg gyorsulási componensei

*) Multkori közleményemben e pontot nem vizsgálván meg közelebbről, azt állitottam, hogy az alternativ munka-végzésre szükséges erélyt a test egyrészsaját erélyéből, másrészt a környezetéből fedezheti. Most kitünik, hogy a változatlan állapotú test csakis saját erélyét veszi igénybe.

mint az imént x....., x'....., illetőleg x''....., a test eleven ereje és potentiális erélye T és U s. a. t. Az ezen időpillanatot követő dt idő alatt mindezen momentán értékek megváltoznak, és pedig *két okból*. Először a *spontán változás* miatt; másodszor az erély-beszállitással járó állapotváltozás miatt. Az első okból származó változást jelöljük, mint az imént, az illető mennyiség differentiáljával. A tetszőleges ξ mennyiség spontán változása dt idő alatt lesz tehát $d\xi$. — Az erély közlés okozta változást nevezzük röviden *indukált változásnak*. Nyilvánvaló, hogy az indukált változás a dt idő alatt csak másodrendü végtelen kis mennyiség lehet. Ugyanis az egész állapotváltozás végtelen kicsiny és a véges $(t_1 - t_0)$ idő alatt megy végbe, az egészből tehát a végtelen kis dt időre nem juthat több másodrendű végtelen kicsinynél. E szerint a ξ mennyiség indukált változását dt idő alatt úgy kell megjelölnünk, hogy már a megjelölés maga kifejezze azt, hogy másodrendű végtelen kicsinynyel van dolgunk. Fogadjuk el a következő jelölést: a ξ indukált változása dt idő alatt legyen:

$$\frac{\delta\xi \,.\, dt}{t_1 - t_0}$$

hol $\delta\xi$ első rendű végtelen kis mennyiség, s azt az indukált változást jelenti, mely $(t_1 - t_0)$ idő alatt menne végbe, föltéve hogy e változás tempója az egész $(t_1 - t_0)$ időn át folyvást ugyanaz maradna, mint a minő a dt idő alatt tényleg volt. A $\delta\xi$ variatio tehát nem tényleg bekövetkező változás, hanem oly változás mely bekövetkeznék, ha spontán változás nem lenne és ha az indukált változás tempója az egész $(t_1 - t_0)$ időn át folyvást ugyanaz maradna, mint a minő a dt idő alatt tényleg volt. E jelölés értelmében az m pont x..... coordinátája és x'..... sebességi componense a dt idő alatt összesen (a spontán és indukált változást együtt véve)

$$dx + \frac{\delta x \,.\, dt}{t_1 - t_0} \quad \text{és} \quad dx' + \frac{\delta x' dt}{t_1 - t_0}$$

változást szenved. Az elevenerő, potentiális erély összes változása:

$$dT + \frac{\delta T.dt}{t_1 - t_0} \quad , \quad dU + \frac{\delta U.dt}{t_1 - t_0}$$

A dt idő alatt tényleg végzett külső munka:

$$dW + \frac{\delta W \,.\, dt}{t_1 - t_0}.$$

A mind ezen változások véghezvitelére kivülről beszállitandó erély, analog kifejezéssel élve, lenne :

$$dQ + \frac{\delta Q . dt}{t_1 - t_0}.$$

De minthogy dQ, t. i. a spontán változás közben kivülről fölvett erély, mint láttuk, zérus; következik hogy

$$\frac{\delta Q . dt}{t_1 - t_0}$$

jelenti azt az erélyt, melyet a test dt idő alatt kivülről kap; és így az

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta Q . dt}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \delta Q . dt$$

az összes erélyt jelenti, melyet a test $t_1 - t_0$ idő alatt vagyis az állapotváltozás közben kivülről fölvesz. Ez fejezi ki tehát azt az erélyt, melyet a testbe be kell szállítani, hogy állapota végtelen kevéssé megváltozzék, vagyis hogy az állapotjelzők: i, $\overline{T}$, $\overline{U}$ s. a. t. végtelen kis változást szenvedjenek. Ezek pedig, minthogy spontán változásuk zérus, a dt idő alatt

$$\frac{\delta i . dt}{t_1 - t_0}, \frac{\delta \overline{T} . dt}{t_1 - t_0} \ldots\ldots$$

változást s az egész $t_1 - t_0$ idő alatt

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta i . dt}{t_1 - t_0}, \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta T . dt}{t_1 - t_0} \ldots\ldots$$

változást fognak szenvedni. A feladat már most az: kiszámítani az összefüggést az állapotjelzők változása és a beszállítandó erély között.

Induljunk ki ismét az erély megmaradása elvéből. A dt idő alatt beszállított erély egyenlő tartozik lenni az elevenerő változásának, a potentiális erély változásának és az a közben végzett külső munkának összegével, vagyis

$$\frac{\delta Q . dt}{t_1 - t_0} = dT + \frac{\delta T . dt}{t_1 - t_0} + dU + \frac{\delta U . dt}{t_1 - t_0} + dW + \frac{\delta W . dt}{t_1 - t_0} \ldots \text{I)}$$

s minthogy

$$dT + dU + dW = 0$$

marad, a közös nevező elhagyásával:

$$\delta Q . dt = \delta T . dt + (\delta U + \delta W) dt$$

úgyde:

$$\delta T = \Sigma m(x' \delta x' + \ldots .)$$

és

$$\delta U + \delta W = - \Sigma m (x'' \delta x + \ldots.)$$

következésképp

$$\delta Q . dt = \Sigma m (dx\, \delta x' + \ldots. - dx' \delta x - \ldots.)$$

a mi még, tekintetbe véve hogy

$$\delta dx = d\delta x$$

így is írható:

$$\delta Q . dt = \Sigma m \delta (x' dx + \ldots.) - \Sigma m d (x' \delta x + \ldots.)$$

A δ és d jelet az összegjel elé kitéve és a jobb oldalon levő első összeget, a mint következik, transformálva

$$\Sigma m (x' dx + \ldots.) = \Sigma m (x' \frac{dx}{dt} + \ldots.) dt = 2T . dt$$

leszen:

$$\delta Q . dt = \delta (2T dt) - d[\Sigma m (x' \delta x + \ldots.)]$$

t_0 és t_1 határok közt integrálva s a határpillanatoknak megfelelő értékeket a változó mellé ragasztott O illetőleg 1 indexxel jelölve származik:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta Q . dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta (2T dt) + \Sigma m (x_0' \delta x_0 + \ldots.) - \Sigma m (x_1' \delta x_1 + \ldots.) \quad \text{(II.}$$

Oszszunk $t_1 - t_0$-val, úgy az egyenlet baloldalán álló

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \delta Q . dt$$

kifejezés, mint láttuk, azt az erélyt jelenti, melyet az állapotváltozás véghez vitelére a testbe kivülről be kell szállitani. *De minthogy ugyanaz a változás az erély-beszállítás gyorsaságához képest hosszabb vagy rövidebb idő alatt eshetik mey, nyilván való hogy δQ iménti középértéke az állapotváltozás idő tartamától, vagyis a $t_1 - t_0$ idő hosszától független.* Ha tehát képesek vagyunk e középértéket $(t_1 - t_0)$-nak egy bizonyos értéke mellett kiszámítani, úgy ezzel egész általánosan meghatároztuk azt, a mennyiben ugyanaz a beszállított erélyquantum tartozik $t_1 - t_0$ időtartam minden tetszőleges értékének megfelelni. Vagyis az állapotváltozásra szükséges időtartamot tetszésünk szerint szabhatjuk meg; bár mekkorának vegyük is, a számítás δQ középértékét illetőleg ugyanarra az eredményre fog vezetni. Legegyszerübb lesz a számítás, ha a változás időtartamát egyenlőnek veszszük a test lüktetési

periodusával, i-vel, ezzel, a test mindenkori állapotára nézve különben is jellemző időtartammal. Legyen tehát egyelőre

$$t_1 - t_0 = i$$

s az állapotváltozás kezdetét, a t_0 idő pillanatot, vegyük az egyszerűbb irásmód kedvéért az időszámítás kezdetének, úgy

$$\int_{t_0}^{t_1} = \int_0^i$$

és a II. alatti egyenlet i-vel osztva átalakul a következővé

$$\frac{1}{i}\int_0^i \delta Q \,.\, dt = \frac{1}{i}\left[\int_0^i \delta(2Tdt) + \Sigma m(x_0'\delta x_0 + \ldots) - \Sigma m)x_i'\delta x_i + \ldots)\right]$$

A δQ középértékét jelöljük röviden $\overline{\delta Q}$-val s a jobb oldalon az $\int$ és δ jelét fölcserélve irjunk

$$\frac{1}{i}\int_0^i T dt$$

közép-érték helyébe $\overline{T}$-t, úgy

$$\overline{\delta Q} = \frac{1}{i}\left[\delta(2iT) + \Sigma m(x_0' dx_0 + \ldots) - \Sigma m\,(x_i'\delta x_i + \ldots)\right]$$

Az egyenlet jobb oldalán az első sommázat, ú. m.

$$\Sigma m(x_0'\delta x_0 + \ldots.)$$

a O idő pillanatra vagyis az állapotváltozás első időelemére, a második t. i.

$$\Sigma m(x_i'\delta x_i + \ldots.)$$

az i időpillanatra, vagyis az állapotváltozás utolsó időelemére vonatkozik. E két idő között a változatlan állapotu testnek épen egy periodusa fekszik s így a test, míg állapota nem változik, O és i időpillanatban egyenlő phasisban van, vagyis:

$$v_i = v_0\,;\; T_i = T_0\,;\; U_i = U_0\,;\ldots.$$

következésképen

$$\delta v_i = \delta v_0\,;\; \delta T_i = \delta T_0\,;\; \delta U_i = \delta U_0\ldots.$$

Továbbá dt_i és dt_0 egyenlő időelemek alatt végzett külső munka is — ugyanabból a phasisból ugyanaz a végtelen kis állapotváltozás indulván meg — ugyanaz lesz, vagyis:

$$\frac{\delta W_i \,.\, dt_i}{i} = \frac{\delta W_0 \,.\, dt_0}{i}$$

és innen

$$\delta W_i = \delta W_0$$

és végre:

$$\delta Q_i = \delta Q_0$$

Ezeket előrebocsátva, lássuk mi a dynamikai jelentése a

$$\Sigma m(x'\delta x + \ldots.)$$

sommázatnak? E végből vizsgáljuk meg előbb a

$$\Sigma m(x'dx + \ldots.)$$

jelentését. Ezt írhatjuk így is:

$$\Sigma m(x'^2 + \ldots.)dt$$

vagy még így:

$$2Tdt.$$

Ez utolsó kifejezés pedig nem egyéb mint a változatlan állapotu testnek dt idő alatti (úgynevezett) *működése, actioja*. Jelöljük ezt dA-val, úgy

$$\Sigma m(x'dx + \ldots.) = dA$$

Következéskép a kérdéses sommázat, ú. m.

$$\Sigma m(x'\delta x + \ldots.) = \delta A$$

nem jelent egyebet mint azt a működést, melyet a test i idő alatt vinne véghez, föltéve hogy részecskéinek spontán mozgása nem lenne és föltéve, hogy az indukált változás tempója az egész i időn át ugyanaz maradna, mint a minő a dt időben tényleg volt. E szerint

$$\frac{\delta A \,.\, dt}{i}$$

az a működés, mely dt idő alatt tényleg véghez vitetnék, föltéve hogy a részecskéknek spontán mozgása nem lenne. Adjuk hozzá azt a működést, mely dt idő alatt a résecskék spontán mozgása következtében vitetik véghez, úgy

$$\frac{\delta A \,.\, dt}{i} + dA.$$

az összes működés, mely dt idő alatt tényleg véghez vitetik.

A 0 időpillanatban vagyis az állapotváltozás első időelemében véghezvitt működés

$$\frac{\delta A_0 \,.\, dt_0}{i} + dA_0$$

Képzeljük most, hogy ugyanazt a végtelen kis állapotváltozást 0

időpillanat helyett i idővel később kezdjük és i idővel később végezzük, úgy most az állapotváltozás első időelemében véghezvitt működés

$$\frac{\delta A_i \,.\, dt_i}{i} + dA_i$$

Ámde az előrebocsátott fogalmak szerint a testek dynamikai tulajdonságai az időnek periodikus függvényei; az tehát nem tehet különbséget, vajon az állapotváltozás az n-edik vagy $(n+1)$-dik periodus elején indul-e meg, az állapotváltozás első időelemében véghezvitt működésnek ugyanannak kell lenni, akárhányadik periodusban történik is az, csak a phasis legyen ugyanaz. Következésképp

$$\frac{\delta A_0 \,.\, dt_0}{i} + dA_0 = \frac{\delta A_i \,.\, dt_i}{i} + dA_i$$

vagy még

$$\frac{\delta A_0 \,.\, dt_0}{i} + 2T_0 \,.\, dt_0 = \frac{\delta A_i \,.\, dt_i}{i} + 2T_i \,.\, dt_i$$

és mivel

$$T_0 = T_i\,;\quad dt_0 = dt_i$$

lesz:

$$\delta A_0 = \delta A_i$$

vagy δA jelentését tekintetbe véve:

$$\Sigma m(x_0' \delta x_0 + \ldots.) = \Sigma m(x_i' \delta x_i + \ldots.)$$

Lesz tehát:

$$\overline{dQ} = \frac{1}{i}\delta(2i\overline{T}) \qquad \text{IIa.}$$

Az állapotváltozás közben kivülről fölvett erély egyenlő tehát a lüktetés idejére vonatkoztatott spontán működés változásának és a lüktetés idejének viszonyával. S minthogy $\overline{\delta Q}$ az állapotváltozás időtartamától független, a IIa. alatti egyenlet mindig érvényes, bárha nem is épen i, hanem a tetszőleges $t_1 - t_0$ idő alatt megy is végbe, s következésképp a

$$\frac{1}{i}\delta(2i\overline{T}) = \left[\int_{t_0}^{t_1} \delta(2Tdt) + \Sigma m(x_0' \delta x_0 + \ldots.) - \Sigma m(x_1' \delta x_1 + \ldots.)\right]$$

egyenlet t_0 és t_1 minden értéke mellett igaz tartozik maradni.

Az állapotjelzők: i, $\overline{T}$, $\overline{U}$, $\overline{v}$... az állapotváltozás közben, $t_1 - t_0$ idő alatt, mint föntebb láttuk,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta i dt}{t_1 - t_0} \quad , \quad \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta \overline{T} . dt}{t_1 - t_0} \ldots\ldots$$

változást szenvednek. Hogy e kifejezéseket egyszerűbben írhassuk, szabjuk meg az eddigelé egészen tetszőlegesnek hagyott variatioinkat akként, hogy a variálás közben

$$\frac{dt}{t_1 - t_0}$$

állandónak tekintessék. Igy:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta i . dt}{t_1 - t_0} = \int_{t_0}^{t_1} \delta \left(\frac{i dt}{t_1 - t_0} \right) = \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{i dt}{t_1 - t_0} = \delta i$$

és:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta \overline{T} . dt}{t_1 - t_0} = \int_{t_0}^{t_1} \delta \left(\frac{\overline{T} dt}{t_1 - t_0} \right) = \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{\overline{T} dt}{t_1 - t_0} = \delta \overline{T}$$

A feladat, melyet magunk elé tüztünk: meghatározni az állapotjelzők változása és a közlött erély között az összefüggést, következőleg formulázható: Valamely testnek lüktetési ideje i, közép-elevenereje $\overline{T}$, közép-térfogata $\bar{v}$, közép-potentiális erélye $\overline{U}$; mennyi erély közlésére van szükség, hogy a lüktetés idő megváltozik δi-vel, a közép-elevenerő $\delta \overline{T}$-vel, s a t.

E feladat a IIa. alatti egyenletben találja megoldását, A közlendő erély ugyanis

$$\overline{\delta Q} = 2\delta \overline{T} + 2\overline{T} \frac{\delta i}{i}.$$

Ugyancsak a IIa. alatti egyenlet mutatja, hogy $\overline{\delta Q}$ magában nem integrálható; azzá válik, ha az egyenletet vagy i-vel szorozzuk, vagy $\overline{T}$-vel osztjuk.

(Budapest, 1876. Szept. 30.)

A Sikes-féle hydrometer (spiritometer). A különböző spiritus fajták árát némely országban nem az alkohol-tartalom szerint szabják meg, hanem a szerint hogy mennyi ivó pálinka kerül ki belőle, ha vizzel keverik.

Ezt a bizonyos ivó pálinkát próba-spiritusnak (angolul *proof-spirit*-nek) nevezik, s ennek az ára szabja meg aztán a többi spiritus-fajták árát.

Az 1816 julius 2-iki parlamenti acta az angol próba-spiritust törvényesen meghatározza és pedig akként, hogy 51° Fahrenheitnél $^{12}/_{13}$-adát kell nyomnia a vele egyenlő térfogatu és mérsékletü viznek.

A viz sűrűsége Pierre I. kisérletei szerint 10.55 C. foknál (51° F.) = 0.999695; e szerint 12 liter víz ennél a hőfoknál 11.99634 kilogramot nyom, 1 liter próba-spiritus pedig ennek $^1/_{13}$-át vagyis 0·9227923 kilogramot. A megfelelő alkohol-tartalom ennél a mérsékletnél 55.576 volum-procent lenne; a valódi alkohol tartalom (15° Cels.) lesz tehát:

$$55.576\ (15 - 10.55)\ 0.365 = 57.2\%$$

A próba-spiritusban több víz lévén mint a kereskedésbeli spiritusban, „a proof-spirit procentje" alatt nem azt értik, hogy hány akó próba-spiritus van az illető spiritus 100 akajában, hanem azt hogy az illető spiritus 100 akaja, vizzel keverve, hány akó próba-spiritust ad. Azokat a spiritus fajtákat, melyek a próba-spiritusnál gyöngébbek, próbán-aluliaknak (*under proof*) nevezik; s ezeknél „a proof-spirit procentje" elnevezés közönséges értelmében veendő. A próba-spiritusnál erősebb fajtákról azt mondják hogy próbán felüliek (*over proof*).

Hogy az Angliában szokásos Sikes-féle spiritus fokok jelentését jól megérthessük, vegyünk először egy-két példát. Ha például valamely spiritus-fajtából 100 liter a mondott normál hőfoknál, vizzel keverve, 120 liter próba-spiritust ad, úgy Sikes ezt a spiritus-fajtát 20° over proof jelöli; ha ellenben 100 liter spiritus, eltávolitván belőle a fölösleges vizet, 80 liter probaspiritust ad, úgy ezt a spiritust Sikes szerint 20° under proof-nak nevezik. A tévedéseket elkerülendő, tanácsos az over proof fokokat + sal, az under proof fokokat — sal megjelölni. E szerint a vizet — 100°-kal, a próba-spiritust pedig 0°-kal kell megjelölni.

A mi már most a spiritus árának megszabását illeti, világos (a víz nem kerülvén semmibe), hogy 100 liter 20 over proof foku spiritus annyit ér mint 120 liter próba spiritus; 100 liter 20 under proof foku spiritus pedig annyit ér mint 80 liter próba-spiritus. Vagyis a végből, hogy az illető spiritus fajtából vízzel keverés vagy víz-elvétel útján előállítható próba-spiritus mennyiségét (s ezzel az illető spiritus árát) megkaphassuk, nem kell egyebet tennünk mint a Sikes féle fokok számát, ha overproof, 100-hoz hozzáadni, ha pedig underproof 100-ból levonni. Ha például 100 liter próbaspiritus ára 100 forint úgy 100 liter 20° overproof 120 forintot, ellenben 100 liter 20° underproof 80 forintot ér. És így a Sikesféle fokok a procenteket jelölik, melyeket a proba-

spiritus árához hozzáadni vagy belőle levonni kell, hogy az illető spiritus fajta árát megtudhassuk.

A Sikes-féle spiritometernek (vagy hydrometernek) ez a szerkezete:

Gömbjének van fölül és alul is nyele; a felső nyél rendes hasáb vagy henger és 10 egyenlő fórészre s azon kivül minden fórész 5 egyenlő részre van beosztva, úgy hogy egy-egy kisebb rész a fórésznek $^2/_{10}$-e-le. A zéruspont a skála fölső végén van, s a legalantibb vonás 10-zel van megjelölve. Az alsó nyélre tömör sárga réz kúp van forrasztva csúcsával le felé, a mi ellensúlyképen szolgál és a spiritométert nem engedi sem jobbra sem balra billenni a folyadékban. Ez az alsó nyél azon felül még úgy van berendezve, hogy kisebb nagyobb súlyokat kényelmesen rá lehet csiptetni. Kilencz ilyen súly van. Ha a spiritometert a 9-es számú súlylyal terheljük meg, és 51° F. vizbe mártjuk, úgy a skála legalsó osztályvonaláig vagyis 10-ig merül be. A többi súlyok úgy vannak szabályozva, hogy az esetben ha valamelyik súly a spiritométert 10-ig sülyeszti, a rákövetkező nagyobb súly a készüléket ugyanabban a folyadékban 0-ig nyomja alá. Ezen a 9 súlyon kivül van még egy 10-ik is — az úgynevezett *kalap* — mely úgy van alkotva, hogy a spiritometer felső nyelére csúsztatható, anélkül hogy maga a vizbe érne. Ez tehát csak arra való hogy a készülék súlyát szaporitsa; nagysága pedig akként van megszabva, hogy a spiritometer, felső nyelén ezzel a kalappal, alsó nyelén pedig a 6-os számú súlylyal megterhelve, a skála 8-ik fővonásáig sülyed. Ez a 8-ik fővonás a négyélü nyelen egy külön jellel is meg van jelölve, Ugyaneddig sülyed a készülék a normál-hőfokú próba-spiritusban, a 6-os számú súlylyal megterhelve, de kalapját levéve. E szerint a kalap a súly-különbséget ábrázolja a tiszta viz és a próba-spiritus között annál a térfogatnál, a mely a készüléknek a 8-ik fővonásig megfelel.

A folyadék hőmérsékét a spiritométerrel járó hőmérő határozza meg. A spiritometeren leolvasott számadatból. és a hőfokból ki lehet keresni egy terjedelmes táblázat segélyével a folyadéknak spiritus fokát (over vagy under proof), vonatkoztatva a normál-hőmérsékre. —

Ha már most a spiritometernek és a vele adott táblázatnak segitségével meghatároztuk, hogy a spiritusnak hány Sikes féle fok felel meg, úgy a Ruan és Salleron által kiszámított tábla nyomán azt is mindjárt megmondhatjuk hogy az illető spiritusban *hány volumprocent alkohol* van, 15°C. normál-hőmérséknél. T. i. a Sikes fokokat over proof hozzáadjuk 100-hoz az under proof fokokat pedig levonjuk 100-ból és az igy kapott számot az itt következő tábla „proof spirit" czimü rovataiban fölkeressük, a jobbról mellé irt szám mindjárt az alkohol volum percentjét adja meg 15°C-nál.

Wartha Vincze

Ruan és Salleron táblája

a proof-spirit procentek átváltoztatására

alkohol-volum procentekké.

Proof. spirit %	Alkohol Volum %	Proof spirit %	Alkohol Volum %	Proof spirit %	Alkohol Volum %	Proof spirit %	Alkohol Volum %	Proof spirit %	Alkohol Volum %
1	0·6	36	21·1	71	41·1	106	60·5	141	81·0
2	1·2	37	21 7	72	41·7	107	61·0	142	81·6
3	1·8	38	22·2	73	42·3	108	61·6	143	82 0
4	2·4	39	22·8	74	42·8	109	22 2	144	82·6
5	3·1	40	23·4	75	43·4	110	62 7	145	83 2
6	3·6	41	23·9	76	44·0	111	63·3	146	83 7
7	4·2	42	24·6	77	44·6	112	63·9	147	84·3
8	4.8	43	25·1	78	45 2	113	64·3	148	84·8
9	5·4	44	25 7	79	45·8	114	64·9	149	85·3
10	6·0	45	26·3	80	46·4	115	65·5	150	85 9
11	6·6	46	26·8	81	47·0	116	66·1	151	86·4
12	7·2	47	27·4	82	47 6	117	66·7	152	87·0
13	7·8	48	27·9	83	48·1	118	67·3	153	87·6
14	8·4	49	28·4	84	48·6	119	68·0	154	88·1
15	9 0	50	29·0	85	49·1	120	68·6	155	88·6
16	9·6	51	29 6	86	49·7	121	69·2	156	89·2
17	10·2	52	30·1	87	50·2	122	69·8	157	89·7
18	10·8	53	30·6	88	50 8	123	70·4	158	90·3
19	11·4	54	31·2	89	51·3	124	71·0	159	90·8
20	12·0	55	31·8	90	51·8	125	71·6	160	91·4
21	12·5	56	32·3	91	52·4	126	72·2	161	91·9
22	13 1	57	32·9	92	52·8	127	72·8	162	92·5
23	13·7	58	33·4	93	53·3	128	73·4	163	93·0
24	14·3	59	34·0	94	53·9	129	74·0	164	93·6
25	14·9	60	34·6	95	54·4	130	74·6	165	94·1
26	15·5	61	35·2	96	55·0	131	75 2	166	94·7
27	16·1	62	35·8	97	55 6	132	75·8	167	95·2
28	16·6	63	36·4	98	56·2	133	76·4	168	95 8
29	17·2	64	36·9	99	56·7	134	77·0	169	96·3
30	17·8	65	37 6	100	57 2	135	77 6	170	96·9
31	18·3	66	38·1	101	57·8	136	78·2	—	—
32	18·9	67	38 7	102	58·3	137	78·8	—	—
33	19·4	68	39·3	103	58·9	138	79·4	—	—
34	20·0	69	39·9	104	59·4	139	79·9	—	—
35	20·6	70	40 5	105	60·0	140	80 5	—	—

A XVI. SZÁZADI MAGYAR ARITHMETIKÁK. — MARÓTHI az ő arithmeticája előljáró beszédében azt mondja, hogy három magyar arithmetika volt a keze között: egyik a TOLVAJ MENYŐI FERENCZÉ, másik az ONADI JÁNOSÉ, a harmadik legrégibb; mert még A. 1591 nyomtattatott Kolozsváron in 8-vo. „Ezen a' hárman kivül — mondja MARÓTHI — kellett még avagy tsak kettőnek lenni mindeniknél régibbnek. Mert a Kolozsvári felőle van írva a' Titulusban, hogy az most ujonnan a Frisiusnak Magyar Arithmeticájából sok uj és hasznos példákkal kiadatott. *Mely magyar Frisiustól különböző az a' Debretzenben nyomtattatott Arithmetica, a mely azon Kolozsváribn folio k. 2 emlittetik;* melynek Régulái felől azt mondja, hogy nem tudhatja honnét vették légyen azokat *)

A Műegyetemi Lapok „egy szorgalmas olvasója" arra figyelmezteti a szerkesztőket, hogy MARÓTHI tévedett, midőn azt vélte *hogy a Debreczenben nyomtatott arithmetica különböző a magyar Frisiustól.* A dolog t. i. úgy áll, hogy a Frisius magyar Arithmetikája Debreczenben adatott ki, először 1577-ben, másodszor pedig 1582-ben. Világosan kitünik ez SZABÓ KÁROLY nagyérdemű tudósunk egyik közleményéből, mely »az erdélyi muzeum-egylet év könyvei« V-ik kötete I-ső füzetében jelent meg s mely ím itt következik.

Arithmetica, Az az Számvetesnek Tudomania mel' forditatot Gemma Frisius Arithmethicaiaból Magiar Nielure az Calcularis Szamuetesis szép rövid értelemmel kiadatot. (Következik Debreczen város czimere, a zászlós bárány) Romanorum 16. Aszt akarom hog' az io es hasznos dolgokban eszesek legietek, az gonosz és ártalmas dolgokban pedig egiugiuek. Debreczenbe Rodolphus Hoffhalter Niomtatta. Anno D. 1582. 8r. $A—J6=8\,^3/_4$ ív= 70 számozatlan lev.—Elől: cziml. és ajánlás 4 számozatlan levél.

Ajánlva van Váradi Kalmár Mihály biharvármegyei harminczadi inspector fiainak, Istvánnak és Mihálynak »Debrecini II. Ti kegyelmeteknek szolgaia Rodolphus Hoffhalter Tigurinus: Debre. Köniniomtato.«

Az előszóban Hoffhalter e könyvről csak annyit mond, hogy »eszt mostan Magiernieluen niomtattam ki« azonban a fordítót nem nevezi meg.

A szöveg elején ez a fölirás áll: »Az Szamvet'eznek rövid és hasznos uta avagy modgya, mely az tanuloknak hamarabb való értelmekre, az Frisiustul irattatot szam vetesből Anno 1577. rövideden rendeltetet. »Kitetszik ebből, hogy a forditás 1577-ben készült; ugyanez évben jelent is meg e kézi könyv első magyar kiadása, melynek *egyetlen példánya* Debreczen. 1577. 8. r. Farkas Lajos könyvtárában létezik.

Az 1582-dik évi második kiadásból egy egészen ép példány a kolozsvári ref. coll. könyvtárában, egy másik csonka példány — három levél hija —

*) V. ö. Műegy. Lap. 183 old.

az erdélyi Muzeum könyvtárában (most egyetemi könyvtárban) van. *E két példányon kivül többnek létezéséről nincs tudomásunk.*

Szabó Károly azt gyanítja hogy a fordító Laskai János volt, ki már 1577-ben Debreczenben tanított s 1592-ben mint »debreczeni mester « görögből és deákból magyarra forditotta »az Aesopus életéről, erkölcséről, minden fődolgairól és haláláról való historiát«.

Az 1577-ik évi magyar arithmetikáról lapunk legközelebbi számában bővebb ismertetést fogunk adni. (Sz. K.)

IRODALOM.

O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung: Revidirt und mit Zusätzen versehen von Dr. S. Gundelfinger 3-te Auflage. Leipzig. Teubner 1876. XVI, 546 pp.

Azok előtt, kik a külföldi viszonyokat és különösen a Németországban divó viszonyokat figyelemmel kisérik, bizonyára ismeretes, hogy a német elsőrangú tudósok között e század első hat tizedében nem igen találkozott olyan a ki az egyetemen tartott előadását vagy előadásait, úgy nevezett Compendi, umokban összefoglalva, sajtó alá bocsátotta volna, Sem Gauss, sem Jacobi, sem Dirichlet, sem pedig Riemann nem rendezték sajtó alá nagy hírű előadásaikat. Az első, és mindjárt kijelentjük, hogy fényesen sikerült kisérletet e tekintetben Hessenek, a nagy geométernek köszönjük. ki a königsbergai, hallei és heidelbergai egyetemeken tartott előadásait az elemző térmértanból a fentebb említett czím alatt rendezte sajtó alá 1861-ben, s ezzel a mathematikai közönség kezébe az első német classikus mathematikai kézi könyvet bocsátotta. A munka czélja az olvasót az elemző-mértani modorokba bevezetni és önálló kutatásokra serkenteni.

Az előttünk fekvő 3-dik kiadás sajtó alá rendezését, Hesse özvegyének felszólitása következtében, Gundelfinger tübingai egyetemi tanár vállalta magára és supplementekkel megtoldva adta ki.

Az egész munka 31 előadásból és a függelékből áll. Az 1-ső előadást képezi a bevezetés az elemző térmértanba. A 2-dik és 3-ik a síkra vonatkozik A 4-dik előadás tárgya a Pascalféle hatszög a gömb-felületen. Az 5-dik a pontra vonatkozik és a 2. és 3. előadásnak némileg megfelelő, a mennyiben ugyanazon egyenletek mértani magyarázatát adja, ha bennök pont-összrendezők helyett sik-összrendezők lépnek fel.

Már ezen előadásokban kitünik az egész munkán uralkodó alap-gondolat, mely később a reciprok polárok elvét tartalmazó 12-dik előadásban még inkább érvényre jut.

A 6-ik előadásban az egyenméretű összrendezők és az egyenesek tárgyaltatnak, míg a 7. és 8-ik a determinánsok elemeit, valamint számos analytikai és geometriai alkalmazásaikat vezeti elénkbe.

A 9—31 előadások főleg a másod-rendű felületekre vonatkoznak. A 9-ik a másod-rendű felületek átmetszésére vonatkozó tételeket foglalja magában, a 10.— 13. előadások pedig a polus és a polár sik, továbbá a conjugált átmérők és átmérő-sikok és a középpont elméletét, valamint a reciprok-polárok elvét foglalják magokban.

A 14. és 16-ik különösen a kúpfelületekre, míg a 15. és 17. előadások a határfelületekre vonatkoznak. A 18. és 20. előadásban az összrendezők átalakitása, valamint e feladat analytikai átalánositása tárgyaltatik. A 19-ik tartalma pedig a másodrendű felületek átalakitása a főtengelyekre.

A 21. 22. és 26- előadások tartalma a főtengelyek problémája a kúpszeleteknél és másodrendű felületeknél, a confocális kúpszeletek és másod-rendü felületek, valamint az elliptikus coordináták. A 23 és 24. előadások a geodätikus vonalakat, valamint a focál-görbéket tartalmazzák, a 25-ik mechanikai tartalmu előadás pedig a test tengelyeinek meghatározásával foglalkozik. A 27-ik tartalma a forgási felületek feltételei. A 28-ik a másodrendü felületek átmetszései a síkkal. A 29.—31 előadások a felületek görbületére vonatkoznak. A függelékben pedig a planéták mozgása tárgyaltatik.

A függeléket megelőzik Gundelfinger ur supplementei. (449—529 ll.) Dicsérnünk kell bennök azt a tapintatos eljárást, hogy ezeket egészen külön függesztette hozzá s általok az eredeti munka sajátságait nem zavarta meg.

A munka tanulmányozása reánk is azt a benyomást tette, melynek, a munka 2-dik kiadását birálva, Paul Du Bois-Reymond adott kifejezést.

»Mann kann es ansehen, als geometrische Theorie der aus Punkten, Ebenen und Flächen zweiten Grades zusammen gesetzten Raumgebilde und ihrer polaren Eigenschaften unter Hinzuziehung der Analysis, als eines Hülfsmittels, oder als geometrische Illustration zu einer sehr vollständig durchgeführten Theorie der homogenen Functionen ersten und zweiten Grades mehrerer Variabeln«. (Schlömilch Zeitschrift für Math. u. Phys. Literatur-Zeitung pag. 1.) (H. J.)

MEGFEJTETT FELADATOK.

14. Adott légtömeg, mely a deréklő irányában minden oldalról egyenlő nagyságú és a belső feszültségtől csak végtelen kevéssé különböző külső nyomásnak van alávetve, térfogatának α-szorosára tágúl ki:

1.) vagy állandó nyomással,

2.) vagy állandó mérséklettel,

3.) vagy állandó meleg-mennyiséggel.

Miként viszonylanak e három esetben a tágulás alatt végzett külső munkák egymáshoz s melyik közöttük a legnagyobb és melyik a legkisebb, föltéve hogy $a > 1$. (Szily.)

E feladat megoldását beküldötték Bäumel Ede, Simandl Samu és Szikay Béla urak.

A tágulás alatt végzett külső munkának általános kifejezése az adott esetben a következő:

$$W = \int_{v_1}^{v_2} p dv$$

hol W a külső munkát, p a felületegységre eső nyomást és v a térfogatot jelenti.

Az első esetben, midőn a nyomás állandó, lesz:

$$W_p = p_1 \int_{v_1}^{v_2} dv = p_1 v_1 \left(\frac{v_2}{v_1} - 1 \right)$$

A második esetben, midőn a lég állandó mérséklet mellett (isothermice) tágul ki, Mariotte törvénye szerint:

$$pv = p_1 v_1$$

és ebből p értékét az általános egyenletbe helyettesítve és az egészelést végrehajtva, lesz:

$$W_t = p\ v_1 \log. \frac{v_2}{v_1}$$

A harmadik esetben, midőn a lég állandó melegmennyiséggel (adiabatice) tágul ki, Poisson egyenlete szerint:

$$pv^k = p_1 v_1{}^k \text{ hol } k = 1{\cdot}41$$

és ebből p értékét az általános egyenletbe behelyettesitve, az egészelés után lesz:

$$W_m = p_1 v_1 \frac{1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-k}}{k-1}$$

Ennélfogva a 3 esetben a tágulás alatt végzett munkák egymáshoz való viszonya ez:

$$W_p : W_t : W_m = \frac{v_2}{v_1} - 1 : \log \frac{v_2}{v_1} : \frac{1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-k}}{k-1}$$

de, a föltételnél fogva $\frac{v_2}{v_1} = a$

$$W_p : W_t : W_m = a-1 : \log a : \frac{1-a^{1-k}}{k-1}$$

Hogy meghatározhassuk melyek közöttük a legnagyobb és a legkisebb irjuk így az arányt:

$$W_p : W_t : W_m = (k-1)(a-1) : \log a^{k-1} : 1-a^{1-k}$$

és használjuk fel az exponentiális függvény sorbafejtését, ekkor:

$$a-1 = \log a + \frac{1}{2}(\log a)^2 + \ldots$$

és

$$1-a^{1-k} = \log a^{k-1} - \frac{1}{2}(\log a^{1-k})^2 - \ldots$$

következésképp

$$W_p : W_t : W_m = \log a^{k-1} + \frac{k-1}{2}(\log a)^2 + \ldots .$$

$$\log a^{k-1} : \log a^{k-1} - \frac{(k-1)^2}{2}(\log a)^2 - \ldots .$$

vagy még

$$W_p : W_t : W_m = 1 + \frac{1}{2}\log a + \ldots : 1 : 1 - \frac{k-1}{2}\log a - \ldots$$

Ebből láthato, hogy $W_p > W_t$-nél $> W_m$

A tárgyalt 3 eset közt, a munka állandó nyomás mellett a legnagyobb, állandó meleg mennyiség mellett pedig a legkisebb. —

FÖLADATOK.

18. Mit kell a variatio közben állandónak tekinteni, hogy a középérték variatioja egyenlő legyen a variatio középértékével, vagyis hogy

$$\delta\left[\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1} X\,dt\right] = \frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}\delta X.\,dt,$$

hol X tetszőleges függvénye t-nek. (Szily)

19. Adva van valamely hatványsor:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots\ldots$$

értéke: $f(x)$; mikép lehet az f függvény segitségével kifejezni azokat a sorokat, melyek az eredetiből keletkeznek, ha ennek csak minden p-dik tagját veszszük, tehát a következő alakban foglaltakat;

$$a_ix^i + a_{i+p}x^{i+p} + a_{i+2p}x^{i+2p} + \ldots\ldots$$

hol i tetszőleges. (König)

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

I. kötet. **1876.** 9. füzet.

A DETERMINÁNSOK ALKALMAZÁSA A MÉRTANBAN.

Hunyady Jenőtől.

II.

7. *A háromszög körül irt kör sugara.* Legyenek a, b, c a háromszög oldalai és r a körül irt kör sugara.

A háromszög három csúcsa és a körül irt kör középpontja hat távolságot határoznak meg, melyek között azon összefüggésnek kell állania, mely általában a teljes négyszög hat oldala között fennforog Ennél fogva tehát a (7) alatti egyenlet (236-ik lap), a jelen esetre alkalmazva, a következővé válik:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r^2 & r^2 & r^2 \\ 1 & r^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & r^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & r^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

s ebből meg lehet az r mennyiséget határozni. Ha ez utóbbi egyenlet első tagjában az első vizszintes és első függélyes sort r^2-tel szorozzuk és a második vizszintes és függélyes sorból kivonjuk, úgy ered:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & 0 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

vagy

$$2r^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

és innét

$$-r^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2 \qquad (11)$$

a mely egyenletből az (1) alatti egyenlet (233-ik lap) tekintetbe vételével a következőre jövünk

$$r = \frac{abc}{4T}$$

8. A gömbháromszög körül irt kör sugara. Ha úgy, mint az imént, a gömbháromszög oldalait a, b, c és a körül irt kör sugarát r-rel jelöljük és a gömbön a háromszög három csúcsa és a körül irt kör középpontja által meghatározott hat távolságot tekintetbe veszszük, úgy azok a (8) alatti egyenletnek (237-ik lap) engedelmeskedni tartoznak. Ez a jelen esetben a következő lesz:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos r & \cos r & \cos r \\ \cos r & 1 & \cos c & \cos b \\ \cos r & \cos c & 1 & \cos a \\ \cos r & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

vagy ha a determinánsban az első vizszintes és függélyes sort $\cos r$-rel osztjuk, az $\frac{1}{\cos^2 r}$-t pedig $\operatorname{tg} r$ által kifejezzük, úgy:

$$\begin{vmatrix} 1+\operatorname{tg}^2 r & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

vagy

$$\operatorname{tg}^2 r\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

miuthogy továbbá az utolsó determinánst, ha benne az első vizszintes sort a 2-dik, 3-dik és 4-dik vizszintesből kivonjuk, még igy is irhatjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2\sin^2\frac{1}{2}c, & -2\sin^2\frac{1}{2}b \\ 0 & -2\sin^2\frac{1}{2}c & 0 & -2\sin^2\frac{1}{2}a \\ 0 & -2\sin^2\frac{1}{2}b, & -2\sin^2\frac{1}{2}a & 0 \end{vmatrix},$$

ez pedig egyenlő

$$-8\sin^2\frac{1}{2}a\,\sin^2\frac{1}{2}b\,\sin^2\frac{1}{2}c$$

az utóbbi egyenletből ered:

$$\operatorname{tg}^2 r \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 8\sin^2\frac{1}{2}a\,\sin^2\frac{1}{2}b\,\sin^2\frac{1}{2}c \quad (13)$$

mely a körül irt kör sugarának meghatározására szolgál.

9. A tetraéder körül irt gömb sugara. Ha a tetraéder egyik csúcsában találkozó éleket λ_1, λ_2, λ_3-mal, a velök által ellenes éleket pedig μ_1, μ_2, μ_3-mal, végre a körül irt gömb sugarát r-rel jelöljük, úgy a tetraéder négy csúcsa és a körül irt gömb középpontja által meghatározott tiz távolság között a (9) alatti egyenletben kifejezett összefüggés áll; a nevezett egyenlet ez esetben a következő lesz:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r^2 & r^2 & r^2 & r^2 \\ 1 & r^2 & 0 & \mu_3^2 & \mu_2^2 & \lambda_1^2 \\ 1 & r^2 & \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 & \lambda_2^2 \\ 1 & r^2 & \mu_2^2 & \mu_1^2 & 0 & \lambda_3^2 \\ 1 & r^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

és ha e determinánsban az r^2-tel szorzott első vizszintes és függélyes sort a 2-dik vizszintes és függélyes sorból kivonjuk, ugy az előbbi egyenlet a következővé válik:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mu_3^2 & \mu_2^2 & \lambda_1^2 \\ 1 & 0 & \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 & \lambda_2^2 \\ 1 & 0 & \mu_2 & \mu_1^2 & 0 & \lambda_3^2 \\ 1 & 0 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 0 \end{vmatrix}$$

és innét:

$$2r^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mu_3^2 & \mu_2^2 & \lambda_1^2 \\ 1 & \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \mu_2^2 & \mu_1^2 & 0 & \lambda_3^2 \\ 1 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & \mu_2^2 & \mu_2^2 & \lambda_1^2 \\ \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 & \lambda_2^2 \\ \mu_2^2 & \mu_1^2 & 0 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 0 \end{vmatrix} \qquad (15)$$

vagy, ha még a (6) alatti egyenletet tekintetbe veszszük

$$576\, V^2 = - \begin{vmatrix} 0 & \mu_3^2 & \mu_2^2 & \lambda_1^2 \\ \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 & \lambda_2^2 \\ \mu_2^2 & \mu_1^2 & 0 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 0 \end{vmatrix}$$

A (15) alatti egyenlet fejezi ki a tetraéder körül irt gömb sugarát a tetraéder éleiben.

10. *A három körhöz tartozó orthogonál-kör sugara.* A nevezett meghatározás szintén a 7) alatti egyenlet segítségével történik. Jelöljük a három adott kör sugarát r_1, r_2, r_3-mal, középpontjait pedig *1*, *2*, *3*-mal és az ezen pontok által képezett háromszög *23*, *31*, *13* oldalait *a*, *b*, *c*-vel, úgy, ha az orthogonál kör sugarát ϱ-val, középpontját pedig *0*-val jelöljük.

$$\overline{0\,1} = \sqrt{r_1^2 + \varrho^2}\,, \quad \overline{0\,2} = \sqrt{r_2^2 + \varrho^2}\,, \quad \overline{0\,3} = \sqrt{r_3^2 + \varrho^0}$$

Ha továbbá meggondoljuk, hogy e három távolság, valamint az *a*, *b*, *c* távolságok az *0123* teljes négy szög hat oldalát képezik, úgy a 7) alatti egyenletnél fogva a következő egyenlet áll:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_1^2+\varrho^2, & r_2^2+\varrho^2, & r_3^2+\varrho^2 \\ 1 & r_1^2+\varrho^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & r_2^2+\varrho^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & r_3^2+\varrho^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

vagy ha a ϱ^2-tel szorzott első függélyest és első vizszintest a második függélyesből és vizszintesből kivonjuk, úgy ered:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\varrho^2 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & r_2^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & r_3^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

vagy még továbbá

$$-2\varrho^2\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & r_2^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & r_3^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

és innét az (1 alatti egyenlet tekintetbe vételével, ha az *1 2 3* háromszög területét *T*-vel jelöljük

$$32\varrho^2 T^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & r_2^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & r_3^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \qquad 16)$$

11. *A négy gömbhöz tartozó orthogonál-gömb sugara.* A nevezett sugár meghatározása a 9) alatti egyenlet segítségével történik. Jelöljük az adott gömbök sugarait r_1, r_2, r_3, r_4-gyel a nekik megfelelő középpontokat pedig *1, 2, 3, 4*-gyel és az ezen pontok által képezett tetraéder *14, 24, 34, 23, 13, 12* éleit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$-mal; úgy, ha az orthogonál-kör sugarát ϱ-val, annak középpontját pedig *0*-val jelöljük:

$$\overline{01} = \sqrt{r_1^2+\varrho^2},\ \overline{02} = \sqrt{r_2^2+\varrho^2},\ \overline{03} = \sqrt{r_3^2+\varrho^2},\ \overline{04} = \sqrt{r_4^2+\varrho^2},$$

Ha továbbá meggondoljuk, hogy e négy távolság, valamint a λ és μ távolságok az *01234* pontok által meghatározott tíz távolságot képezik, úgy a 9) alatti egyenletnél fogva:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_1^2+\varrho^2 & r_2^2+\varrho^2 & r_3^2+\varrho^2 & r_4^2+\varrho^2 \\ 1 & r_1^2+\varrho^2 & 0 & \mu_3^2 & \mu_2^2 & \lambda_1^2 \\ 1 & r_2^2+\varrho^2 & \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 & \lambda_2^2 \\ 1 & r_3^2+\varrho^2 & \mu_2^2 & \mu_1^2 & 0 & \lambda_3^2 \\ 1 & r_4^2+\varrho^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

vagy ha a ϱ^2-tel szorzott első függélyest és vizszintest a második függélyesből és vizszintesből levonjuk, ugy ered:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\varrho^2 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & \mu_3^2 & \mu_2^2 & \lambda_1^2 \\ 1 & r_2^2 & \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 & \lambda_2^2 \\ 1 & r_3^2 & \mu_2^2 & \mu_1^2 & 0 & \lambda_3^2 \\ 1 & r_4^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 0 \end{vmatrix}$$

innét pedig továbbá ered:

$$-2\varrho^2\begin{vmatrix} 0 & \mu_3^2 & \mu_2^2 & \lambda_1^2 & 1 \\ \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 & \lambda_2^2 & 1 \\ \mu_2^2 & \mu_1^2 & 0 & \lambda_3^2 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & \mu_3^2 & \mu_2^2 & \lambda_1^2 \\ 1 & r_2^2 & \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 & \lambda_2^2 \\ 1 & r_3^2 & \mu_2^2 & \mu_1^2 & 0 & \lambda_3^2 \\ 1 & r_4^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

vagy a (*b*) alatti egyenlet tekintetbe vételével, ha az *1234* tetraéder köbtartalmát *V*-vel jelöljük:

$$576\varrho^2 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & \mu_3^2 & \mu_2^2 & \lambda_1^2 \\ 1 & r_2^2 & \mu_3^2 & 0 & \mu_1^2 & \lambda_2^2 \\ 1 & r_3^2 & \mu_2^2 & \mu_1^2 & 0 & \lambda_3^2 \\ 1 & r_4^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 0 \end{vmatrix} \qquad (17)$$

a mely képlet az orthogonál gömb sugarának meghatározására szolgál,

Azt a képletet, a mely a háromszög területét az oldalak által fejezi ki, alexandriai HERON-nak köszönjük; a tetraéder köbtartalmára vonatkozó képlet pedig EULER-től [1]) ered. A teljes négyszög hat oldala közötti viszonylat CARNOT-tól [2]), a tér öt pontja által meghatározott tíz távolság közötti viszonylat pedig LAGRANGE-tól [3]) adatott. A háromszög körül írt kör sugarának képletét a régiek már ismerték; determinánsok segitségével a szóban levő képletet először JOACHIMSTHAL [4]) hozta le. A tetraeder körül irt gömb sugarára vonatkozó képletet CARNOT-nak [5]) köszönjük. A három adott kör és a négy adott gömbhöz tartozó orthogonál kör és gömb sugarára vonatkozó képletek BAUER-től [6]) erednek.

---

[1]) Nov. Comm. Petrop. IV. köt. 158. l.

[2]) Géométrie de position art. 331 et 346.

[3]) Oeuvres de Lagrange T. III. Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires art. 19.

[4]) Crelle Journal f. d. r. u. a. Math. 40. köt. 28. l.

[5]) Mémoire sur la relation entre 5 points dans l'espace, art. 12.

[6]) Sitzungsberichte der math. physik. Classe der k. bayr. Akad. d. Wiss. zu München. Bd. II. Jhrg. 1872, p. 345, 346.

VALAMI A TELITETT GŐZOKRŐL.

Nagy Dezső, műegyetemi tanártól.

A telített gőzök hőelméleti egyenlete:

$$dQ = cdT + Td\left(\frac{xr}{T}\right) \qquad (1.)$$

(hol c a folyadék fajmelegét, T a folyadék és gőz közös absolut mérsékletét, x a viszonylagos gőzmennyiséget, r a gőz fajmelegét, Q pedig a közlendő melegmennyiséget jelenti) abban az esetben, midőn az állapotváltozás *állandó mérséklet* mellett megy végbe, a következő egyszerű egyenletre redukálódik:

$$dQ = rdx \qquad (2.)$$

Azonban a (2.) alatti egyenlet még másképen is előállhat az (1.)-ből. Hajtsuk ugyanis végre a kijelölt műveletet, úgy az (1.) még így is írható:

$$dQ = cdT + rdx + xdr - xr\frac{dT}{T}$$

vagy pedig tekintetbe véve hogy

$$c + \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T}$$

nem egyéb, mint a telített gőz fajmelege: h, az (1.) alatti egyenlet még a következő alakot is öltheti magára:

$$dQ = rdx + [c—(c—h)x]dT.$$

Látni ebből, hogy az általános egyenlet nem csak akkor redukálódik a (2.) alatti alakra, midőn T állandó, hanem akkor is, mikor a viszonylagos gőzmennyiség, vagyis a folyadék és gőz keverési aránya épen úgy van kiszabva, hogy

$$x = \frac{c}{c—h} \qquad (3.)$$

Weyrauch J. »Zur Theorie der Dämpfe« czimű értekezésében az állapotváltozások különböző menetét külön-külön görbe vonalokkal ábrázolván, azt a görbét, mely a (3.) alatti föltételhez kötött állapotváltozásnak felel meg, »nulla-görbének« nevezte el. E nulla-görbének összehasonlítása a többi már addig ismert állapotváltozási görbékkel, Weyrauch-ot egynémely érdekes következtetésre vezette.

Függetlenül Weyrauch-tól, s egészen más úton ugyanazon eredményekre jutottam én is. S minthogy vizsgálataim az ő következtetéseit nem csak igazolják, de némi tekintetben általánosbítják is, nem tartom fölöslegesnek közlésüket.

Az állapotváltoztatást gondoljuk akként eszközölve, hogy melegség se ne közöltessék, se ne vezettessék el, azaz történjék a változás adiabatikusan, vagyis legyen

$$dQ = 0,$$

tehát

$$cdT + Td\left(\frac{xr}{T}\right) = 0.$$

Integrálva és a folyadék fajmelegét — a mint Clausius és Zeuner is teszi, — állandónak tekintve, lesz az adiabatikus görbe egyenlete:

$$\frac{xr}{T} + c \log. T = \text{Const.} \qquad (4.)$$

Képzeljük ez egyenletet oly derékszögü összrendezői rendszerre vonatkoztatva, melynek vizszintes tengelyén az absolut hőmérsék, a függélyesen a viszonylagos gőzmennyiség legyen felrakva.

A (4.) alatti egyenletet még így is írhatjuk:

$$\frac{xr}{T} + c \log. T = \frac{x_1 r_1}{T_1} + c \log. T_1$$

a miből kitünik, hogy minden kezdeti (T_1 és x_1) állapotnak más és más görbe fog megfelelni. Vegyük e görbéket tüzetesebb vizsgálat alá s kérdezzük mindenekelőtt van-e maximum- vagy minimumjok?

Differentiálván az egyenletet, leend ismét:

$$d\left(\frac{xr}{T}\right) + c\frac{dT}{T} = 0$$

vagy kifejtve:

$$\left(\frac{r}{T}\right)dx + x\frac{Tdr - rdT}{T^2} + c\frac{dT}{T} = 0$$

miből következik:

$$\frac{dx}{dT} = \frac{x}{r}\left(\frac{r}{T} - \frac{dr}{dT}\right) - \frac{c}{r} \qquad (5.)$$

Ezt egyenlőnek tevén nullával és megoldván x szerint:

$$x = \frac{c}{\frac{r}{T} - \frac{dr}{dT}}$$

de mivel

$$\frac{r}{T} - \frac{dr}{dT} = c - h$$

kapjuk

$$x = \frac{c}{c-h}$$

Jelöljük x-nek ezt a bizonyos értékét x_m-mel, s vizsgáljuk meg, vajon maximumnak vagy minimumnak felel-e meg? Differentiáljuk az (5.) alatti egyenletet még egyszer T szerint és lássuk, minő a jele a második diff. quotiensnek, ha benne x helyébe x_m-t, és dx helyébe 0-t teszünk, úgy:

$$\frac{d^2x}{dT^2} = -\frac{c}{Tr} - \frac{c}{r(c-h)} \frac{d^2r}{dT^2}$$

És miután az eddig megvizsgált gőzök rejtett melegére nagy megközelítéssel használható a következő formula:

$$r = \alpha + \beta T$$

hol α és β állandók, leszen:

$$\frac{dr}{dT} = \beta$$

és

$$\frac{d^2r}{dT^2} = 0$$

következőleg:

$$\frac{d^2x}{dT^2} = -\frac{c}{Tr}$$

vagyis azon határok között, melyekre képleteink alkalmazhatók, okvetetlenül *nemleges*. Vagyis: *minden ekkoráig megvizsgált telített gőznek van minden hőmérsékletnél egy bizonyos keverési aránya a gőz és folyadék között, melyből kiindulva ép úgy az adiabatikus kiterjedésnél, mint az adiabatikus összenyomásnál gőz le fog csapodni.* És egyszersmind azt is állíthatjuk, hogy ez idő szerint nem ismerünk olyan gőzt, melynél az ellenkező jelenség mutatkoznék.

Ha a fentebbi képletünk alapján különbféle hőmérsékeknek megfelelőleg az x_m értékeket kiszámítva és összrendező rendszerünk tengelyeire felvive gondoljuk, úgy az x_m-ek végpontjai egy görbe vonalat adnak, mely nem egyéb mint a Weyrauch-féle »nulla görbe.«

E görbe egyenlete:

$$x_m = \frac{c}{c-h}$$

vagy:

$$x_m = \frac{c}{\frac{r}{T} - \frac{dr}{dT}}$$

Viz-gőzöknél Clausius szerint:

$$r = 607 - 0{,}708\,t$$

vagy:

$$r = 800{,}3 - 0{,}708\,T$$

tehát:

$$x_m = \frac{cT}{800{,}3}$$

vagyis a »nulla-görbe« oly egyenes, melynek hajlási szöge a vizszintes T tengelyhez

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dx_m}{dT}$$

azaz:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c}{800{,}3}$$

és ha c-t Zeuner szerint egyenlőnek veszszük $1{\cdot}0224$-gyel, úgy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{782}$$

Minthogy a (T és x_m) állapotból kiinduló és adiabatikusan kiterjedő vízgőz mennyisége folyvást az x_m végpontjából húzott vízszintes alatt, de egyszersmind az ugyanonnan $\frac{1}{782}$-ed hajlás alatt húzott egyenes felett tartozik maradni, könnyen belátható, hogy a görbének ez az ága szerfelett lassan száll alá, vagyis hogy aránylag igen nagy hőmérsékváltozásnak csak csekély gőzváltozás felel meg.

Igy például: $T=425{,}22$ C°-nál, azaz $p=5$ légköri nyomásnál, $x_m=0{,}5315$. Átmenvén innen adiabatikusan $p=0{,}5$ azaz $T=354{,}71$-re lesz: $x=0{,}52176$.

Hasonló mutatkozik az összenyomásnál is. Például ha az előbbeni gőzt $p=5$-ről összenyomjuk $p=14$- azaz $T=468{,}53$-ig, lesz: $x=0{,}52449$.

Analog eredményekre jutunk mindazon gőznemeknél, melyekről feltehető, hogy rejtett melegük a hőmérséknek vonalas függvénye, vagyis hogy

$$r = \alpha + \beta T$$

Ezeknél ugyanis:

$$\frac{r}{T} - \frac{dr}{dT} = \frac{\alpha}{T}$$

tehát

$$x = \frac{c}{\alpha} . T$$

vagyis a »nulla görbe«, szerintünk, *egyenes* és:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{\alpha}$$

szintén kicsiny, és így a változás, melyet x_m szenved, midőn a megfelelő T állapotból egy másik T_1 állapotba átmegyünk, aránylag csekély; s ha a hőmérséklet változása maga sem nagy, úgy az x_m változástól egészen eltekinthetünk; vagyis egész általánosságban kimondható, hogy az eddig ismert minden gőznemnek van minden hőmérséknél egy oly gőz és folyadék keverési aránya, melyből kiindulva, ép úgy az adiabatikus kiterjedésnél mint az adiabatikus összenyomásnál, lecsapodás fog bekövetkezni, mely lecsapodás azonban aránylag oly csekély, hogy ettől kivált kis hőmérsék-különbségeknél, egészen eltekinthetünk.

(Budapest, 1876. október 20.)

A MÉRLEGRŐL.

Schuller Alajos, műegyetemi tanártól.

(Befejezés*)

19. A MÉRLEG TÖMEGVISZONYAITÓL FÜGGŐ TULAJDONSÁGOK MEGVIZSGÁLÁSA ÉS KIJAVITÁSA.

Ismétlések elkerülése végett, e tulajdonságok megvizsgálásának és kijavításának módjait együtt tárgyaljuk.

A tömegektől függő tulajdonságokat illetőleg, kívánatos, hogy *a*) a mérleg rudjának súlypontja azon síkban legyen, mely a középső élen át fektetve két egyenlő részre osztja a rudat; hogy *b*) a csészék súlya egyenlő legyen, és hogy *c*) az érzékenység — az elérendő pontossághoz mérve — a kellő fokot elérje.

a) A rúd súlypontjára vonatkozó vizsgálat előtt a mérleg szekrényét, az alátámasztó csavarok segitségével, rendes állásba kell hozni, úgy, hogy a függő ón illetőleg a libella helyessen mutasson.**) Ha ez

*) L. a megelőző részeket a 97, 135, 199-ik lapokon.

**) Erre minden egyébb műtételnél is czélszerű ügyelni, hogy a szekrénynek helyzetében netalán mutatkozó változásokat észrevehessük és elkerülhessük. Különösen fontos ez az egyszerű mérésnél, ha az üres mérleg nyugalmi helyzete nem határoztatik meg minden egyes mérés előtt vagy azután,

megtörtént, eltávolítjuk a csészéket és kengyeleket és megnézzük, vajon a nyugalmi helyzetben a mutató a *0* pont előtt áll-e vagy sem? A netalán mutatkozó eltérést elháríthatjuk a rúd két végén levő futó csavarok segélyével, vagy ezeknek hiányában, egy a rúd közepén levő excentrikus szárnycsavar jobbra vagy balra forgatása által.

b) Hogy a két csésze súlya egyenlő-e, azt megtudjuk, ha őket az *a*) pont szerint felszerelt rúdra felakasztjuk, a nyugalmi helyzetet meghatározzuk és megnézzük, hogy a csészék és kengyelek felcserélése a nyugalmi helyzetet változtatja-e? Ha a mutató az első esetben nagyon oldalt állana, úgy súlyokat is rakhatunk az egyik csészébe mindaddig, míg a nyugalmi helyzet az osztályzat közepére nem esik, de ekkor a csészék felcserélése után a súlyokat is át kell rakni, hogy t. i. mind a két esetben a mérleg ugyanazon oldalán hassanak.

Ha a csészék felcserélése változást okoz a nyugalmi helyzetben, úgy súlyuk különböző. Jelentékeny különbséget nem lehet meghagyni, hanem el kell hárítani az egyik csésze súlyának megváltoztatása által (pl. az által hogy aljáról egy keveset lereszelünk); azonban annyi különbséget meg lehet engedni, hogy a hatása az imént említett futócsavarok vagy a szárnyas csavar által ellensúlyozható legyen. Ha ez megtörtént, akkor a használat közben a csészéket nem szabad többé felcserélni. Az idő közönként szükséges megvizsgálás szempontjából, előnyös a csészék súlyát egészen egyenlővé tenni. E czélból addig változtatunk az egyik csésze súlyán, míg a mutató, a felcserélés előtt és után elfoglalt állások közt középen nem állapodik meg. Az eredmény jóságáról újból történő felcserélés által szerzünk tudomást és a műtételt szükség szerint egy vagy kétszer ismételjük.

c) Hogy az érzékenység eléri-e a kivánt fokot, annak megitélése végett a 12-ik pontban (141. oldal) tárgyalt módon felkeressük azt a súlyt, mely a mérleget egy osztályrészszel odább képes billenteni. Az érzékenység megváltoztatása végett — a mennyiben az t. i. tömegek elhelyezésétől függ — a középső él felett kettős csavar van alkalmazva, melynek részeit előbb ellenkező irányban kell forgatni, míg egymástól elválnak, és azután szükség szerint felfelé vagy lefelé csavarván őket, a kivánt állásban ismét egymáshoz kell feszíteni.

III.

20. A mérleg kijavitása.

Az ezen pont alá tartozó műtételek egy részét már a 19. pontban tárgyaltuk, tehát itt csak a többi, az élekre vonatkozó javitásokkal kell foglalkoznunk.

Különböző szerkezeteknél a kijavitásnak ugyan egy kissé eltérő módok szerint kell történnie, mind a mellett mégis elégséges lesz itt csak egy bizonyos szerkezetet szem előtt tartani, mert az erre vonatkozó eljárást esetről esetre könnyen idomíthatjuk akként, hogy az adott szerkezetnek megfeleljen.

Olyan mérleget képzelünk, melynek középső éle a rúddal szilárd összeköttetésben van és melynél mindegyik szélső él négy csavar által van a rudhoz szorítva. Ilyen szerkezetnél a kijavitás két szakaszban történhetik.

A műtétel egymásutánjára nézve, legelső teendő az éleket egy síkba helyezni, de ha a körülmények megengedik, ha t. i. az élek közel egy síkban vannak, úgy ezt a műtételt inkább elhagyjuk, mert ez a munkát nagyon megkönnyíti. A kijavitás második részét ez éleknek párhuzamossá és a karoknak egyenlővé tétele képezi.

a.) A szóban forgó szerkezetnél az oldaléleket tartó lapok valamivel alantabb vannak mint kellene, úgy, hogy az éleket alájuk rakott vékony lemezek segélyével a kellő magasságba lehessen hozni. Csavarokat e czélra nem szoktak alkalmazni, mert ez által a szerkezet szilárdsága szenvedne.

Ha csupán az élek közepeit akarjuk egy síkba hozni, a javitást egy oldalon végezhetjük és pedig akként, hogy a csészék és kengyelek eltávolítása után két az él ugyanazon oldalán lévő csavart megeresztünk, az élt felemeljük és alája teszünk vagy alóla elveszünk e célra való, kellő vékonyságu platina lemezt. A csavarok megfeszitése után megvizsgáljuk (16. pont), hogy az eredmény mennyire felel meg a kivánságnak, s ha szükségesnek mutatkoznék, a műtételt ismételjük. Az esetben ha nem tudni, hogy valamely oldal élnek végei ugyanazon magasságban vannak-e az él közepével, a megvizsgálásnál a súlyokat a 17 pontban említett egyik vagy másik módon az élek végén alkalmazzuk, és szükség esetén az élnek egyik vége alá több lemezt fektetünk mint a másik vége alá.

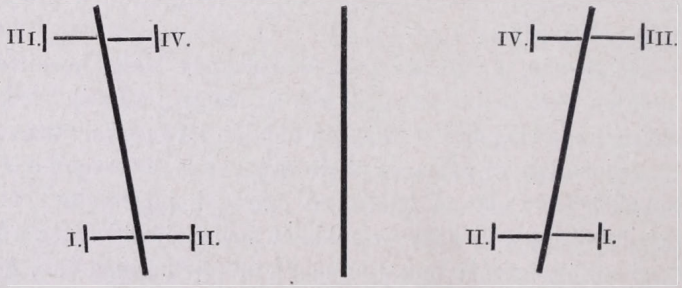
b.) Az itt alapul vett szerkezetnél együttesen kell az éleket párhuzamossá és a karokat egyenlővé tenni, mert nem lehet a két műtételt egymástól függetlenül végezni. Azon kezdjük, hogy az oldal éleket párhuzamossá állítjuk a középsőhöz, azután kiegyenlitjük a karokat és a műtételeket felváltva ismételjük.

Valamely él irányának megváltoztatására két egymással szemközt álló csavart használhatunk, melyek közül előbb az egyiket megeresztjük, és azután a másikat megfeszítjük. Használhatjuk az elül lévő

két csavart vagy a hátulsókat; azt a kettőt választjuk, melyek által a karok különbsége kisebbedik. Szükség esetén mind a két párral dolgozhatunk.

A kar hosszának megváltoztatására mind a négy csavart működtetjük, még pedig ugy, hogy két egy oldalon lévőt *egyenlő mértékben* visszacsavarunk s az élet a másik kettővel amazokhoz szorítjuk. — Az utolsó kijavitásnál csak az által változtatunk az élek állásán, hogy az illető csavarokat jobban vagy kevésbbé megfeszítjük, a mi a legtöbb esetben kellő mértékben elérhető, anélkül hogy észrevehető mozgás okoztatnék.

A műtételek sorrendje a fennforgó viszonyoktól függ és meg nem állapítható egyszer mindenkorra. Ezért legczélszerübb egy példát felvenni, melyre vonatkozólag a sorrendet röviden összeállíthatjuk. A mellékelt idom túlzott mértékben tünteti elő a vizsgálat közben kiderült eltéréseket. A hajlott vonalak az élek eredeti állását, a középső egyenes az elérni kivánt állás irányát jelezik. Az előbbiek úgy választattak, hogy



a bal élen, mely csaknem párhuzamos a középsővel, ne kelljen sokat változtatni. Végezzünk először a jobb éllel, melynél nagy hibák tapasztaltattak. Ereszszük meg az I-ső és IV számu csavart és húzzuk meg a II-ik és III-ik számút. Ezután vizsgáljuk meg, hogy az él már most párhuzamos-e a középsővel, s szükség esetén változtassunk rajta. Ha párhuzamos, akkor megvizsgáljuk, hogy távolsága a középső éltől olyane mint a másik él közepének távola. Az e tekintetben mutatkozó hibát a fentemlített módon kell kijavitani. E közben nem kerülhetjük el, hogy az él kissé meg ne változtassa irányát; tehát újból kell azt a középső éllel párhuzamossá állítani, mi ismét változást okoz a kar hosszában De a hibák, óvatos kezelés mellett, folytán kisebbednek, úgy, hogy egy párszori ismétlés után mégis czélt érünk.

A felsorolt műveleteket rendszerint nem végezhetjük egy folyamatban, mert habár puszta kézzel nem nyúlunk is a mérleg rudjához, mégsem kerülhetjük el egészen a mérséklet megváltoztatását. Szükséges tehát, hogy előbb időt engedjünk a mérséklet kiegyenlődésére, és csak azután vizsgáljuk meg, hogy mennyire közelítettük meg a czélt.

Ha már az egyik él a kivánt állást elfoglalta, csak akkor változtatunk a másikon. Az idomban az élek csavarjai úgy vannak számozva, hogy a mondottakat változtatás nélkül vonatkoztathatjuk a bal él kijavitására.

IV.

A mérlegelés adatainak kijavitása.

Az eddig emlitett eljárások (8. 9. 11. pontok) szerint nyert adatok még nem szolgáltatják a valódi súlyokat; az eredmények még bizonyos mértékben hibásak, bár ha az észlelés helyesen történt is. Egyrészt a súlysorozat hibái, másrészt a helyéből kiszorított levegő okozzák ezt.

21. A súlysorozat hibái.

A súlysorozattól mindennek előtt azt követeljük, hogy az egyes darabok tömegei között meg legyen a *helyes viszony*. E mellett még lehetséges, hogy minden darab hibás, hogy például a 100 gramos csak 99·8, az egy gramos csak 0·998. Az ilyen súlysorozat tömegek *összehasonlitására* föltétlenül használható, ellenben ha a mérésből térfogatra vagy valamely physikai tulajdonságra akarunk következtetni, az helyesen csak akkor történhetik ha a súlysorozat hibáját számba veszszük E szerint a súlysorozatot két irányban kell megvizsgálnunk: először. hogy egyes részei közt megvan-e a helyes viszony, és másodszor, hogy, valamelyik darabjának például a legnagyobbnak névérték szerinti tömege van-e ? Az utóbbi vizsgálat nem lévén eszközölhető megbizható normálsuly nélkül, a legtöbb esetben meg kell elégednünk azzal, hogy megállapitjuk az egyes darabok súlyviszonyát és a mutatkozó hibáikat vagy kijavítjuk*), vagy ha már nagyon kicsinyek volnának, meghagyjuk, de az igazi pontos méréseknél mindenesetre számba veszszük.

*) Rendesen a súly megfogására való fej lecsavarható ; ez esetben a kijavitás úgy eszközöltetik, hogy a fej lecsavarása által támadt üregbe apró testeket beleejtünk vagy belőle kiveszünk.

A megvizsgálás abban áll, hogy a súlyokat, melyek névértékük szerint egyenlők tartoznak lenni, egymás közt összehasonlítjuk, más szóval, a köztük levő különbséget felkeressük. Mivel itt az illető mérlegen elérhető legnagyobb pontosságra kell törekednünk, azért a csészékbe helyezett testeket okvetlenül felcseréljük egymásközt, és az érzékenységet esetről esetre külön-külön meghatározzuk. Mindez három nyugalmi helyzet felkeresését teszi szükségessé: felcserélés előtt meg az után, és az egyik tömegnek, például 0·001 grammal való megváltoztatása után. Az eredmények sokaságánál fogva szükséges, hogy a mérések bizonyos rendben történjenek és hogy az eredmények könnyen áttekinthető csoportokba osztassanak. Egy csoportnak tekintjük azon tömegeket, melyek közt a legnagyobbik tizszer akkora mint a legkisebb, például *100* gr. *50, 20, 10, 10* gr. Az ilyen csoportot kiegészítjük úgy, hogy tömege két annyi legyen, mint a legnagyob darab tömege; például hozzáadunk egy másik súly sorozatból *10* gr.-os darabot. Az eredményeket következőkép állítjuk össze A névleges értéket, megkülönböztetendő a valódi tömegtől, akként fogjuk jelölni, hogy az illető számot zárójelek közé foglaljuk:

$$(100) = (50) + (20) + (10)_1 + (10)_2 + (10)_3 + a.\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}$$

$$(50) = (20) + (10)_1 + (10)_2 + (10)_3 + b.\frac{(0.01)_3}{10}$$

$$(20) = (10)_1 + (10)_2 + c.\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}$$

$$(10)_1 = (10)_2 + d.\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}$$

$$(10)_2 = (10)_3 + e.\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}$$

$(0{\cdot}01)_3$ jelenti a mérésnél használt lovas névleges tömegét.

$$a.\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}, \quad b.\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}, \quad c.\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}, \ldots\ldots$$

pedig azon positiv vagy negativ jellel veendő tömegeket, melyek a mérések által nyeretnek.

E csoportokból kikeressük $(10)_3$ értékét, melyet aztán felhasználhatunk a következő csoportnál mint legnagyobb darabot. A számítás ekként történhetik. Fejezzük ki a többi mennyiségeket $(10)_3$ által

$$(10)_2 = (10)_3 + e.\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}$$

$$(10)_1 = (10)_3 + (d+e).\frac{(0{\cdot}10)_3}{10}$$

$$(20) = 2(10)_3 + (c + d + 2e).\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}$$

$$(50) = 5(10)_3 + (b + c + 2d + 4e).\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}$$

$$(100) = 10.(10)_3 + (a + b + 2c + 4d + 8e).\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}$$

Legyen $(a + b + 2c + 4d + 8e) = A$

akkor

$$(100) = 10(10)_3 + A.\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}$$

Innét

$$(10)_3 = \frac{(100) - A\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}}{10}$$

A következő csoport végtagja:

$$(1)_3 = \frac{(10)_3 - A_1\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}}{10} = \frac{\frac{(100) - A\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}}{10} - A_1\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}}{10}$$

$$= \frac{(100) - (A + 10A_1)\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}}{1000}$$

Hasonló alakban nyerjük a többi végtagokat is:

$$(0{\cdot}1)_3 = \frac{(100) - (A + 10A_1 + 100A_2).\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}}{1000}$$

$$(0{\cdot}01)_3 = \frac{(100) - (A + 10A_1 + 100A_2 + 1000A_3)\frac{(0{\cdot}01)_3}{10}}{10000}$$

A_1 A_2 .... stb. értékei a következők

$$A_1 = a_1 + b_1 + c_1 + 4d_1 + 8e_1$$
$$A_2 = a_2 + b_2 + c_2 + 4d_2 + 8e_2$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Az előbbi egyenletből

$$(0{\cdot}01)_3\left[1 + \frac{A + 10A_1 + 100A_2 + 1000A_3}{100000}\right] = \frac{(100)}{10000}$$

$$(0{\cdot}01)_3 = \frac{(100)}{10000 + \frac{A + 10A_1 + 100A_2 + 1000A_3}{10}}$$

Vegyük egységül a 100 gramos (sorozatunkban a legnagyobb) darab tömegének századrészét ugy, hogy (100) = 100, az az a 100 gramos darab 100 súlyegységet foglaljon magában, úgy

$$(0{\cdot}01)_3 = \frac{1}{100 + \frac{A_1 + 10A_2 + 100A_3 + 1000A_4}{1000}}$$

Az innét kiszámitott értéket azután behelyettesitjük a többi egyenletekbe s ekként megtaláljuk valamennyi darab értékét, viszonyítva a 100 gramos darab tömegéhez. Hogy az igy talált táblázatba összefoglalt eredményeket felhasználhassuk, szükséges tudnunk, hogy a súly sorozatnak mely darabjai szolgáltak a mérésnél. Ez oknál fogva, a névleg egyenlő súlyokat valami jellel kell megkülönböztetni (a platinasúlyoknál például tűszurásokkal) s azon felül hozzá kell szokni ahhoz, hogy a súlysorozat egyenlő értékü darabjai közül mindig a legelsőt (mely a nagyobb tömegekhez közelebb áll) használjuk. Igy például, ha 0.2 gramra van szükségünk, nem használjuk soha a két 0·1 gramos garabot.

A mérés után összeadjuk a használt súlyoknak a táblázatból kiirt értékeit s ez által megtaláljuk a megmért test tömegére vonatkozó azon értéket, melyet helyes viszonyban levő darabokból alkotott súlysorozat szolgáltatott volna.

22. A MÉRLEGET KÖRNYEZŐ LEVEGŐTŐL SZÁRMAZÓ HIBÁK.

Levegőben történt méréseknél a súlysorozat hibáitól megszabaditott eredmény általában még nem fejezi ki híven a test tömegét; mivel a mérleg egyensúlya nem a tömegektől, hanem a tömegek súlyától függ, és mivel minden test súlya a levegőben kisebb mint a légüres térben, melyre a valódi súly fogalma vonatkozik. E befolyástól mentes eredményt kétféleképen nyerhetünk, vagy azáltal, hogy a mérésnél REGNAULT fogását alkalmazzuk, vagy úgy, hogy a levegő jelenlétéből származó hibát számitásba veszszük.

REGNAULT fogása abban áll, hogy a két csészébe egyenlő térfogatú és egyenlő felületű testek tétetnek. Ez esetben a levegő befolyása mindkét oldalon egyenlő, bármikép változzék is feszültsége, mérséklete vagy nedvessége. Ekkor az egyenlő karú mérlegnél, a mérés pontossága szempontjából, a levegő jelenlététől egészen eltekinthetünk, mert nemcsak a kiszoritott levegő okozta súlyváltozás, hanem a felületeken meg sűrűdött viz vagy levegő mennyisége is mind a két oldalon egyenlőnek vehető. Ha tehát ugy intézhetjük a mérést, hogy egyenlő térfogatú

és azonos felületű testek súlyai hasonlíttatnak össze, akkor a levegőben történő mérés általában véve ugyan oly pontosságra képes, mintha légüres térben végeznők azt, sőt mivel a levegőben eszközölt mérésnél az összehasonlítandó testeket egymással rövid idő alatt felcserélhetjük, a légüres térben működő mérlegeknél pedig még nem használnak olyan szerkezetet, mely a felcserélést magában a légüres térben — tehát gyorsan — lehetővé tenné, azért a levegőben még pontosabban is mérhetünk. Légüres térben működő mérleget e szerint, — a használatban lévő szerkezetek tökéletlensége miatt — csak olyan esetben előnyös alkalmazni, mikor kénytelenek vagyunk különböző térfogatú vagy különböző felületű testek tömegét egymással összehasonlitani, és ilyenkor is csak azon esetre, ha a levegő okozta változást nem tudjuk elég pontosan kiszámítani,

Gyakran alkalmazunk Regnault-éhoz hasonló eljárást anélkül, hogy azáltal a levegő hatása egészen kiküszöböltetnék. Ugyanis a levegőben történő méréssel pontosan kimutathatjuk, hogy mikor egyenlő két tömeg, feltéve, hogy térfogatuk valamint felületük minősége és nagysága egyenlő; de magukat a tömegeket csak ugy mérhetjük meg, ha a kiszorított levegő tömegét beszámítjuk. Vegyük például a folyadékok sürüségének meghatározását. Készítsünk olyan üveglombikot, melynek bizonyos kijelölt pontjáig 100 gr. meghatározott fokú viz fér; egy második az előbbihez hasonló lombikot pedig a mérleg csészéjébe téve, terheljünk meg addig mig az előbbivel egyensúlyt tart, midőn az 100 gr. vizzel megtöltve tétetett a mérleg másik csészéjébe. Azután zárjuk el légmentesen ezt a második, tárának való edényt. Ha most a vizet ugyanoly térfogatú és hőfokú más folyadékkal helyettesítjük, melynek sürüséget tudni akarjuk, akkor az egyik vagy a másik csészébe valamely m tömeget kell még tenni, hogy a mérleg mutatója a rendes állásba jőjjön. A megmért folyadék tömege e szerint $100 \pm m$ lenne s ha ezt elosztjuk a víz tömegével, $\frac{100+m}{100}$ adná az illető hőfokra vonatkozó sürűséget. De az eredmény hibás, ha a 100 gr. viz leméréséné a levegő súlyát számitásba nem vettük; mert azon mérésnél nem volt a csészébe helyezett testek térfogata egyenlő. A levegő okozta súlyvesztesség miatt több vizet mértünk le mint kellett volna, feltéve hogy a mérő tömegek a viznél sürübb anyagból állanak. A hiba elkerülése végett a 100 gr. viz térfogata kijelölésének ekként kell történnie.

Kiszámítjuk, hogy mennyivel több a 100 gr. viz által kiszoritott levegő tömege mint az, melynek helyét a 100 gramos mérő tömeg

elfoglalja; a kiszámitott tömeget, a sürüség meghatározására való edénynyel együtt, a mérleg bal csészéjébe teszszük, a jobb csészébe pedig az üres üvegedény egyensulyozására szükséges tárát és a 100 gramos darabot helyezzük. Ezután vizet töltünk az edénybe, mig az egyensúly helyre áll és ha a kivánt hőfokot felvette, az üvegen megjelöljük a viz felületének állását. Ha most készitjük azt a második, tárának használandó zárt lombikot, úgy az emlitett módon kiszámitott sürüség helyesnek tekinthető, mert már most csakis az esetenként szükséges mérő tömegek m által kiszorított levegő okozhat hibát, melyet kicsinységénél fogva a legtöbb esetben elhanyagolhatunk. — Ellenben a viz helyére férő levegő már nagyobb hibát okoz, még pedig annál inkább, minél jobban eltér a sűrűség az egységtől. Ha ezt nem veszszük tekintetbe, akkor pl. az találjuk, hogy a

sűrűség	*0·4995*	midőn valóban	*0·5000*
»	*0·8999*	» »	*0·9000*
»	*2·0010*	» »	*2·0000*

Az itt mutatkozó eltérések közül mindegyik meghaladja az elkerülhetetlen hibákat; mert ha csak 0·001 gr -ra pontosan mérünk, akkor 100 köbcentiméteres edény használata mellett a mérés hibája, a például felvett esetekben, a sürűségnek legfeljebb csak az 5-ik tizedesében nyilvánulhat.

Mikor a feladat természete nem engedi, hogy a mérleg két oldalán egyenlő térfogatú testek alkalmaztassanak, akkor levegőben történő méréseknél hibás eredményt kapunk, s ha ezt el akarjuk kerülni, kénytelenek vagyunk a levegő jelenléte által okozott változást kiszámitani. A kijavitásnál azon tételre támaszkodunk, mely szerint a testek a levegőben annyival könnyebbek, a mennyit az általuk elfoglalt térbe férő levegő nyom, a mit — tekintettel arra, hogy a súlyok arányosak a tömegekkel — célunknak inkább megfelelő alakban igy fejezhetünk ki. A levegőben megmért test tömege annyival kisebbnek látszik, a mennyit a helyéből kiszoritott levegőnek tömege tesz.

Minthogy nem csak a megmérendő test tömegénél, hanem a mérő tömegeknél is nyilvánul a levegőnek befolyása, e két befolyás pedig egymást csökkenti, azért a kijavitást a következő módon eszközölhetjük. Mindennek előtt kiszámítjuk, hogy mennyivel nagyobb a megmért test az egyensúlyt tartó tömegeknél: a talált térfogat-különbséget a mérleget környező levegővel képzeljük kitöltve. Kiszámitjuk ennek a levegőnek a tömegét s ezt a mérésnél talált hibás tömegből levonjuk. Az

igy talált eredmény az elkerülhetetlen észlelési hibáktól eltekintve, legfeljebb csak annyiban tér el a megmért test valódi tömegétől, a mennyiben a megmért test és a mérő tömegek különböző mennyiségü levegőt vagy vizet tartanak felületükön sűrűdve.

A LEGRÉGIBB MAGYAR ARITHMETIKA. — A megelőző füzetben (253 l.) megigértük, hogy lapunk legközelebbi számában a most 300 éve megjelent legelső magyar arithmetikát bővebben meg fogjuk ismertetni. Egyetlen megmaradt példánya, előbb Farkas Lajos tulajdona, a nemzeti muzeum könyvtárában a XVI-ik századi magyar incunabulák között őriztetik. Formája kis 8 rét. $A—S_2=8^3/_4$ ív$=70$ számozatlan levél. Fájdalom, a 9, 12, 13 és 30-ik levél hiányzik, különben ép; csakhogy valamely szorgalmas olvasója, az irás után itélve még a tizenhetedik században, telefirkálta a széleket és az üres fejezetközöket magyar és latin jegyzetekkel. Elől: czímlap és előszó 2 számozatlan levelen. Czímlapján ez áll:

Aritmetica, az az,
A Szamve
tesnec Tudoma
nia, mell' az Tudos Gemma
Frisiusnac szam-vetesbeol
Maggar nyelure (ez tudománban gyönyörködöknec hasznokra, es hamaráb való értelmekre io moddal) forditatott.
(Debreczen város czímere)
Romanorum 16.
Azt akarom hog' az io es hasznos dolgokban eszesec legyetek' az gonóz es artalmas dolgokban penig egiúgiúek.
Debreczenbe.
Rodolphus Hoffhalter niomtatta,
Anno D. 1577.

Az előszó igy hangzik:

Minden keresztien olvasonac az keonynyomtató isteni kegyelmet es bekeseget kevan.

Minden valaki ez láthato világnac, niomorodot es vtolsó részében, az istenteul szerzet közenséges tarsaságnac, Politiaknac, es Respublikáknac megmaradására valamit akar használni, nag' figyelmetessen es szorgalmatossan ez kis kön'uechkét: (melyben az szám vetésnec mogya szép rendel meg irattatott)

oluasa. Mert iol tudom hog' mindennek ez igen tuttára vag'on, hog' fölötte nag' hasznot hoz az Szám vetésnec tudása, mind közönseges es mind az kiuálképpen valo haszonnac megmaradására és öregbeulésére, Vg' annira hog' még sok hellyen a' Szent irásnac magyarázatt'a, főképpen penig az ó töruén sem lehet annekeul. Nem nehéz leszen penig ez tudománnac ez kichin kön'uechkéből való tanulása, mert mindenec oll' szép rendel es moddal hel'heztettenec eg' más után, hog' minden tanuloknac elmeiöc, az kik az *Gemma Frisio* böséges beszédében láttatnának el fárataknac lenni, ez kis röuid es hasznos tractatusban fölötte meg niughatnac.

Eszt is penig meg kell tekinteni hog' ez tudoman böseges hasznot hoz azoknac az kic amaz fő es öreg tudományokra igyekeznec, feuképpen penig az Astronomiára, az az, amaz égi chillagoknak és Planetáknac, helyeknec, forgásoknac es mozgásoknac megtudására, mell' tudomán' az Philosophianac auag' az Deáki tudománnac fő része es tagia. Vgyan ezen tudomán' által ert-hettieuc meg az Geometriaknac is, az az, ez világnac földnec, es Országoknac részeinec tudományát, Mert az Geometria auagy az földmérés, az Aritmetikában valo liniác nékeul semmi keppen nem lehet, ielesben mikor demonstratiot, az az, kétség nélkül való mutogatást akar tenni, mely mutogatásra az számok is igen hasznossok, mellyec az egi chillagoknac járásokat es mozgásokat, (mell' az Arithmetica és Geometria nekeul nem lehet) meg mutattiák. Azert szerelmes atyámfia keresztién oluasó, nem en vag'oc ez Arithmeticánac forditoia, hanem egy iambor vram es Istenben attiamfia hozta az en officinamban, kéruén hog' ki nyomtatnám es ö sem tudá ennékem meg mondani az iambornak neuét, ki neue alat tuttam volna kibochátani. Hog' ha penig valami vétket vagy Cotákban vagy böteukben talalandasz, arrol ennékem kegyesen meg bochás, Mell' dolgot ha chelekeszel (es ennekem kegyessen megbochátandasz) ez után a *Jehova* segitségével igyekezeunc nagyobakba szolgálni ti kegyelmeteknec. Ezokáért minden szorgalmatos es hiu oluasot es tanulot itt ez aránt kérem, hog' ez kis könuechkét meg ne vtáll'a hanem szorgalmatosan oluassa, mell' beol mind kiuálképen való es mind keozconséges hasznot nem keuesset vehet. Vale. Debrecini 13 August: Anno Domini M.D.LXXVII. Ti Kegyelm: szolgáia Rodolphus Hoffhalter.

Figyelmesen elolvasva czímlapot és előszót, ellenmondást sejditünk a kettő között. Amaz azt mondja, hogy »a tudós Gemma Frisius számvetéséből magyar nyelvre *jó móddal* fordittatott«; emez pedig azt állítja, hogy »a kik a Gemma Frisius böséges beszédében láttatnának elfáradtaknak lenni, e kis rövid és hasznos tractatusban fölötte megnyughatnak.« Ha a kettőt: »a rövid és hasznos tractatus« elnevezést és a »jó móddal fordittatott« kifejezést össze akarjuk egyeztetni, úgy látszik azt kell föltennünk, hogy a XVI. században a

»jó móddal fordítás« alatt valamely bővebb munka kivonatos fordítását értették. Tisztába akarván jönni a dologgal, kivettem az egyetem könyvtárából Gemma Frisius latin arithmetikáját*), és összehasonlítottam a muzeumbeli magyar arithmetikával. Egészen meg voltam lepetve, midőn azt tapasztaltam, hogy a magyar arithmetika és a Gemma Frisiusé közt semmiféle egyéb hasonlatosság nincs, mint az, hogy ez is amaz is a számvetéssel foglalkozik. Egész bátorsággal ki merem mondani, hogy *a debreczeni arithmetika tősgyökeres eredeti magyar munka.* Mind a szabályok fogalmazásában, mind az útmutatásban a műveletek véghezvitelére, mind pedig a példák megválasztásában teljesen eredeti. — Ime, e tekintetben is mily különbség a mostani és a 300 év előtti szokás között. Most ha valami tankönyv-gyártó két vagy három német munkából kegyetlen magyarsággal összeferdit egy nyomorult arithmetikát vagy algebrát, nagy büszkén odairja a maga úri nevét a czímlapra, világért sem említvén meg az eredeti szerzők nevét. — Három száz évvel ezelőtt egy szerény debreczeni tanító (talán Laskay János) nagy szorgalommal áttanulja Gemma Frisiust, teljesen magáévá teszi belőle az arithmetika elemeit s aztán ír az ő tősgyökeres eredeti felfogásával egy kis arithmetikát, az akkori magyar szükségletekhez mérve; de nevét elhallgatja, sőt még a könyvnyomtatóval is eltagadtatja, s a munkát Gemma Frisius fordításának adják ki. Meglehet azonban az is, hogy akkoron ez volt a reklam-csinálás legsikeresebb módja.

A munka tartalmát és viszonylagos terjedelmét előtünteti a fejezetczimek közvetkező össze állitása.

*Mitsoda az Számuetés? Hány keuzeunsegeus Regulai vadnak az Számuetésnec? De Numeratione 3 lap. — Az Numerationac Fractioiáról 4. — De Additione 11. — Micsoda az Additio Fractioia. De Subtractione 17. — Az Subtractionac Fractioiáról 10. — De Multiplicatione 15. — Az Multiplicationac Fractioiáról 4. — De Divisione 12. — De Progressione 12. — De Regula Detri 13. — Az Regula Detrinec fractioiaról 9. — Regula Wlgaris 3. — Regula Societatis**) 5. — De Regula Falsi 4. — Az Nemet penzreol. Az Magyar penzről. Az Masa szamrol. Magyar fontrol. Az Magyar fertonrol. Az Nemet Masarol es fontrol. Az Nemet Fontrol es Lotrol 2. — Ha meg akarod tudni tarsodnac hani penz vagyon erszenieben, igy probald meg 2. — Az Figuralis Arithmeticanac vége. Következkezic immár az calculussal valo szam vetes. De Additione. Subtractio. Multiplicatio. Divisio 14.*

*) Arithmeticae Practicae Methodus Facilis, per Gemmam Frisium Medicum ac Mathematicum. Witteberga. Anno M.D.XLVIII.

**) E fejezetet a kedélyes szerző igy kezdi: »Magyar országban ennec e regulanac igön nagy haszna nintsen, mert à Magyaroc igön kemény nyakuuac es egyaránt az fizetést restellic. De meg-is ha az töb speciesekről szoltunc, szollyunc erről is valami keueset.

E munkából öt évvel később, 1582-ben ugyancsak Debreczenben egy teljesen változatlan második kiadás jelent meg. Úgy látszik, az egyedüli különbség a két kiadás között az, hogy a második Váradi Kalmár Mihály biharvármegyei hazminczadi inspector fiainak, Istvánnak és Mihálynak van ajánlva. Ebből 2 példány maradt fenn, az egyik a kolozsvári egyetem, a másik a kolozsvári ref. coll. könyvtárában.

Ugyan e munkából, első megjelenése után 14 évre, 1591-ben teteme sen megbővítve és javítva egy harmadik kiadás jelent meg Kolosvárott. A kolozsvári kiadás*) összehasonlithatatlanul jobb, értelmesebb és terjedelmesebb a debreczeninél, úgy hogy bátran egészen új munkának nevezhető.

Más alkalommal meg fogjuk ismertetni e két XVI. századi magyar arithmetika műnyelvét és a bennök előforduló mérték-egységeket. (Sz. K.)

IRODALOM.

A MECHANIKAI TECHNOLOGIA ÚJABB IRODALMA. — Közmívelődésünk újabbkori gyors haladása következtében igényeink finomodnak, nemesbülnek, de egyszersmind napról napra szaporodnak is. Termelő képességünk azonban nem fejlődik arányosan igényeinkkel, ennélfogva kénytelenek vagyunk a külföld ermékeit nagy mértékben importálni, a mint ezt hazánk kereskedelmi mérlegének deficitje elég világosan mutatja.

E baj különben most már a mindennapi szükségletek beszerzésénél is annyira általánosan érezhető, hogy hazai iparunk csekély és drága termelését, lassú haladását minden lépten-nyomon kárhoztatni, erélyesebb fejlesztését pedig minden oldalról sürgetni halljuk.

Iparunk egészséges fejlődése, mint a tapasztalás mindenütt mutatta, csakis a tudomány megbízható eredményei alapján történhetik. De minthogy a tudomány és ipar, kivált nálunk, nagyon messze járnak egymástól, mindenektlőtt oly közegekre van szükségünk, melyek a tudomány vívmányait az ipar mezejére átszármaztatni, ott minél szélesebb körben terjeszteni és alkalmazni tudják. A tudomány ily közvetitő közegeiként szerepelnek a gyakorlatban a *technikusok* és a *technologiai irodalom*. Itt ez utóbbiról akarunk egyetmást elmondani.

A technologiai irodalom úgyszólván csak e század elején keletkezett s mégis a mai napig már oly bámulatosan kifejlődött az ipar dolgában előbbre

*) Ebből tudtommal nincs a budapesti könyvtárakban. A kezem közt forgott példány a kun-szentmiklósi ref. gymn. tulajdona.

haladott külföldön, s termékei annyira felszaporodtak, hogy az áttekintés már nagyon meg van nehezítve, főkép azért, mert a legtöbb és néha a legérdekesebb technologiai közlemények vegyes tartalmú folyóiratokban találhatók fel.

A *technologia*, általános értelmében véve, a nyers anyagok feldolgozását tanítja; tehát magát a nyers anyagot, feldolgozása módját, eszközeit és a kész terméket ismerteti. Nagy terjedelme miatt két külön disciplinára, a *mechanikai* és a *chemiai technologiára* osztatott fel, a szerint, a mint a nyers anyag a feldolgozás közben csupán alakbeli, vagy pedig csupán anyagbeli változást szenved.

A tárgyalás rendje szerint megkülönböztetik a *speciális* és az *általános technologiát*. Az előbbi, mely kezdetben divatozott s rendszerét időjártával sokféleképen változtatta, a tárgyat vagy a nyers anyagoknak, vagy a feldolgozás módjának, vagy a kész termékeknek különfélesége szerint csoportosítja és adja elő. Ilyen például: a fémeknek, a fonás-szövésnek, papírgyártásnak s a t. speciális technologiája.

Az *általános*, rationális vagy összehasonlító technologia az eddig nyert tapasztalatokból a tudomány alkalmazásával azon elveket vonja le és állapítja meg, melyek szerint az ugyanazon physikai tulajdonsággal felruházott nyers anyagok feldolgozásánál, tekintet nélkül természetrajzi különnemüségükre vagy használatukra, rendesen el kell járnunk.

A régibb technologiai munkák jobbadán bizonyos iparágaknak speciális monographiái voltak; utánok következtek az encyclopaediai összeállítások, és csak a legujabb kézi- és tankönyvekben akadunk a rationalis technologia rendszerének nyomára. A jövendő technologiai tankönyvekben azonban, úgy hiszszük, a tisztán tudományos rendszer fog kizárólag alkalmaztatni.

Az újabb időben megjelent mechanikai-technologiai munkák közül a nevezetesebbek és nálunk könnyebben hozzáférhetők a következők: Karmarsch: *Handbuch der mech. Technologie*, ötödik, Hartig tanár által teljesen átdolgozott és bővített kiadása. — Ez ismeretes mű úttörője volt a tudományos technologiai irodalomnak és beható, alapos tárgyalásánál, és megbizható adatainál fogva, jelenleg is jól használható kézikönyv. Rajzok nem lévén benne, kiegészítő részeül tekinthető: Kronauer: *Atlas zur mech. Technologie* czimű ismeretes munkája. Nem ily jelentékeny és inkább ipariskolák számára való Grothe: *Die mech. Technologie* czimű műve. — Ujabb tankönyv: Hoyer: *Lehrbuch der mech. Technologie*, melynek megjelent öt füzetében a rationális technologiának számos nyoma mutatkozik, a hagyományos módszerrel vegyesen. — Az *összehasonlító technologiának* rendszerét Dr. Exner W. T. részletesen fejtegeti Dingler »Polytech. Journal« 214-ik kötetében.

Az újabb, jelentékenyebb speciális munkák közül a fémek feldolgozásával foglalkoznak: Dr. H. Wedding: *Die Darstellung des schmiedbaren Eisens*,

mely szerző vas-kohászati kézi könyvének harmadik részét képezi, az acél és kovácsvas, vagy együttesen a kovácsolható vas különféle termelési módjait és eszközeit kimerítően és összehasonlító bírálattal tárgyalván. Nem legújabb, de kitűnő munkáknak mondhatjuk Petzholdt A. *Fabrikation, Prüfung und Uebernahme von Eisenbahnmaterial* és ugyanezen szerző *Die Erzeugung von Eisen- und Stahlschienen* című munkáit.

A szálas anyagok feldolgozásával foglalkozó textil-ipar köréből újabb időben feltűnően sok becses munka és közlemény jelent meg, nevezetesen: Dr. H. Grothe: *Technologie der Gespinnstfasern.* Nagy szabású munka, melynek eddig megjelent első része: *Die Streichgarn-Spinnerei* a posztó-gyapjú fonását kimerítően tárgyalja, s ez bennünket annyival inkább érdekel, mert a hazánkban termelt gyapjú nagyobb részt épen finom posztó készítésére való. Lohren A.: *Die Kämmaschine für Wolle, Baumwolle, Flachs und Seide.* I. rész. A szakirodalom első munkája, mely a textil-ipar legszövevényesebb műveletét és annak eszközeit, a fésülő-gépeket összehasonlító leírásban és pontos rajzokban ismerteti. Willkomm G.: *Technologie der Wirkerei.* I. rész. Szintén egyetlen munka a maga nemében, mely a kötött kelmék — tricotage — készítésének módjait és eszközeit tárgyalja. Folytatása a kötő-gépeket fogja ismertetni.

Hausner J.: *Darstellung der Textil-, Kautschuk- und Lederindustrie.* E munka főkép katonai felszerelési tárgyak készítése és megvizsgálása körül szerzett tapasztalatokat közöl; különben az ipar nehány fontosabb ágai fölött is érdekes áttekintést nyújt az ipar dolgában kevésbbé avatott olvasónak.

Végül örömmel teszünk jelentést két új magyar munkáról, — melyek egyike a technologiai irodalom szélesebb körben való meghonosításáról, a másik hazai szakirodalmunk szép haladásáról tesz tanúságot.

Frecskay J.: *Találmányok könyve*, melyet szerző a földmivelés, ipar és kereskedelmi miniszterium megbizásából németből a szó teljes értelmében *átmagyarosított.* A nagy közönség számára lévén irva, nyelvezete népies, könnyen megérthető, sőt eredeti, válogatott magyaros műszavait a szakirodalom is köszönettel fogadja. Eddig 4 füzete jelent meg.

A másik munka a természettudományi társulat kiadásában fog leközelebb megjelenni: t. i. Kerpelyi Antal *monographiája Magyarország vasfajairól.* Erről egyelőre csak annyit mondhatunk, hogy szerzőjének a hazai valamint a külföldi szakirodalomban jól ismert neve kezeskedik e munkának érdekes tartalmáról, melyre szakközönségünk figyelmét előre felhivjuk. (P. Á.)

Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Zweiter Theil. Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften. Auf

Grund von Universitätsvorträgen und mit Benützung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet von Dr. Heinrich Schröter, Professor der Math. an der Universität zu Breslau. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner, 1876 in 8-o XII., 535. Ára 14 mark.

Steiner-nek a berlini egyetemen tartott geometriai előadásait Geiser és Schröter rendezték sajtó alá. A munka I-ső részéről már e lapok 1-ső füzetében szólottunk; a második részt, melynek 2-dik kiadása most jelent meg, Schröter rendezte sajtó alá. Ez a kúpszeletek projectiv tulajdonságait tárgyalja. Ámbár az új kiadás, a munka eredeténél fogva, nem térhet el lényegesen az előbbitől, mégis tetemesen javítottnak mondható, a mennyiben Schröter az új kiadásban az első három fejezet végére számos bebizonyítandó tételt és számos feladatot csatolt, melyek az olvasónak az elmélet alkalmazásában hasznos gyakorlatul szolgálnak és nem ritkán önálló vizsgálatokra serkentik. Talán felesleges is felemlíteni, hogy ez által a már különben is nagybecsű munka becse még növekedett.

A munka tartalmát a következő négy fejezet alkotja: I-ső fej.: A projectiv pont-sorok és sugár-sorok, II-dik fej.: A kúpszelet projectiv származtatása. III-dik fej.: A kúpszeletsor (Kegelschnittbüschel) és kúpszelet-sereg (Kegelschnittschaar). IV-dik fej.: Az involutió-hálózat és kúpszelet-hálózat.

A szóban forgó munkát legmelegebben ajánlhatjuk mindazoknak, kik az újabb synthetikus mértan sajátságos modoraival meg akarnak ismerkedni.

(H. J.)

Kirchhoff, Dr. Gustav, Professor der Physik an der Universität zu Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. I—III. Lieferung. Leipzig B. G. Teubner, 1876. 466 nagy nyolczadrétü lap. Ára 13 mark.

A világhírü szerző e művéről, melyből az első füzet még 1874-ben látott napvilágot, már futólag megemlékeztünk e folyóirat irodalmi rovatában. Úgy szóltunk róla, mint a mathematikai physikai irodalom egyik legkiválóbb jelenségéről, s megigértük, hogy legközelebbi füzetének megjelentekor az egész müről bővebb ismertetést fogunk adni.

Az első kötetet — a mechanikát — befejező 3-ik füzet a folyó év elején jelent meg. Az egész kötet mindössze 28 ívre terjed s e szerint, a mi a terjedelmet illeti, korántsem mérkőzhetik a használtabb mechanikai kézikönyvek ívszámával. Fele sincs p. a Schell Elméleti Mechanikájának. S mindamellett bátran el lehet mondani, hogy a jelen század második felében napvilágot látott mechanikai munkák közt, a Sir William Thomson Treatise-én kivül, egy sem lendít annyit az elméleti mechanika továbbfejlődésén mint épen ez. Az

önálló kutatásoknak egész sorozata, önálló elrendezés, s a mi a legfőbb, *önálló felfogás*, egy nagy tudós felfogása tárul elénk. Ha Kirchhoff minden értekezését a legnagyobb gonddal át meg áttanulmányozzuk is, még sem szerezhetünk magunknak tiszta képet arról, hogy az a nagy elme, mely maradandó betükkel véste nevét a természettan történetébe, miként fogta fel, miként tükröztette vissza szaktudománya fundamentális fogalmait. Értekezésben erre nincs is igen alkalom, kathedra az ilyes fejtegetéseknek legillőbb színhelye. S ez kölcsönöz nézetem szerint oly rendkivüli fontosságot »az előadási füzetek« közzétételének. Ezekben tükröztetheti vissza az illető tudós leghívebben a maga felfogását. Természetesen az illető »feldolgozó-« vagy »közrebocsátó«-nak szerfelett vigyáznia kell, hogy a maga drága énje lehetőleg háttérbe szoruljon a bárha pongyolán, de mentől hívebben elénk állított nagy individuum mellett. A távollevőkre kétségkivül legjobb lenne, ha mindig maga az illető rendezné sajtó alá a maga előadásait, a mint most Kirchhoff teszi. Azonban ennek is van bökkenője. Az egyetemi ifjuságnak Németországban ép úgy, mint nálunk, meg van az a kedves szokása, hogy a nyomtatásban megjelent előadásokat nem jegyzi föl, a levezetéseket nem követi pennával vagy czeruzával, hanem szépen kitárja maga elé az illető könyvet s kényelmesen olvassa belőle a táblára irottakat. Elképzelhetjük, mily kellemes lehet az előadóra nézve, midőn fejtegetéseiben elmélyedve egyszerre csak azt hallja, hogy minden padban mintegy taktusra lapot fordítanak. És mi haszna is van a tanulónak az előadás ilyenforma látogatásából? Hiszen ha nem akar jegyezni és jegyezve már félig meg nem akarja tanulni a tárgyat, úgy bizonyára kényelmesebb otthon olvasni el az illető fejezetet, mint az egyetemi szük padban. Mindent összevetve, úgy látszik, legczélszerűbb lenne, ha az illető nagy tudósok örököseikre bíznák a kinyomatásra kész füzetek kiadását.

Azonban nagyon is elkalandozunk tárgyunktól. Lássuk már Kirchhoff könyve tartalmát.

E könyv, előadásokból eredvén, nem fejezetekre, hanem előadásokra van beosztva. Az egész 30 előadásból áll s az analytikai mechanikát tárgyalja, beleértve a hydrodynamikát és a szilárd testek rugalmasságának elméletét is. Aránylag legkisebb rész jut a közönséges értelemben vett mechanikának, t. i. az általános elvek és a merev testek tárgyalásának. Mindez összesen 6 ívet foglal el, s mindamellett sehol sem találni oly szabatosan kifejezve a virtuális elmozdulások jelentését, a D'Alembert elve valódi értelmét mint ezen a nehány lapon. Hamilton elve sehol, még Jacobi dynamikájában sem talál oly bő alkalmazásra, mint Kirchhoffnál, úgy hogy el lehet mondani, hogy Kirchhoff vezette be igazán a Hamilton elvét a mathematikai természettanba. A második rész: a hydrodynamika az egész könyvnek majdnem felét foglalja

el, ha t. i. beleértjük azt a speciális esetet is, a mit hydrostatikának és capillaritásnak szokás nevezni. Itt találjuk Helmholtz és Kirchhoff hydrodynamikai kutatásainak első rendszeres feldolgozását. — A harmadik rész, a rugalmasság elmélete s annak alkalmazása a hangtanra, szintén bő alkalmat nyujt szerzőnek, hogy egyfelől Helmholtz, másfelől a maga értekezéseinek eredményeit a kellő helyen beszője.

A mi a tárgyalás modorát illeti, az a szokásostól lényegesen különböző. A mechanikát rendesen úgy szokták értelmezni, mint az erők tudományát, az *erőket* pedig mint azon *okokat*, melyek mozgásokat létesítenek vagy *törekszenek* létesíteni. Szerző elismeri, hogy ez az értelmezés igen hasznos volt a mechanika fejlődésére, s hogy még ma is hasznos a tanulónak; de meg kell adni azt is, hogy nem világos, mivel az ok és a törekvés fogalmától meg nem szabadítható. E bizonytalanság jelentkezik például ama vélemény-különbségben is, vajon a tehetetlenségről és az erők parallelogrammjáról szóló tételek tapasztalati eredmények-e vagy axiomák, vagy végre oly tételek, melyek logikailag bebizonyíthatók és bebizonyítandók. Szerző kivánatosnak tartja e homályosságot eltüntetni e tudományból, melynek következtetései különben oly világosak. Ez okból K. a mechanika feladatát a természetben végbemenő mozgások teljes és lehető egyszerű *leírásában* keresi. Az legyen a feladat megmondani tudni, mily jelenségek mennek végbe, nem pedig az, hogy a jelenségek okait kutassuk. Ha ebből induluńk ki, mondja K., és a tér, idő és anyag képzeteit föltételezzük, úgy tisztán mathematikai szemlélődések alapján eljutunk a mechanika általános egyenleteire. Igy felfogva, a mechanika egyenletei nem egyebek puszta mathematikai identitásoknál, melyek a testek valódi mozgásairól mit sem mondanak s melyekbe életet csak a természeti jelenségek megfigyelése önthet.

Annyi bizonyos, hogy az ily tiszta mathematikai felfogású mechanika nem való kezdő kezébe. Legjobb izelitő a mechanikához a phys kai felfogás; ez kölcsönöz az egésznek természetességet s ez tolja legmegragadóbban előtérbe a tapasztalati viszonylatokat, melyeket soha sem szabad a tanuló szeme elől a calculus lavinájával elborítani. — De hisz' nem is kezdők számára van e könyv írva, s épen ez okból teljesen méltatlan az a goromba elbánás, melyben Dühring*) Kirchhoff mechanikáját részesiti.

Meg fognak-e és mikor fognak megjelenni szerző többi mathematikai physikai előadásai, ú. m. a villanyosság tana, a hőtan és a fénytan, arról ma még nem hallani semmit. Vagy talán Kirchhoff is oly sokáig csonkán fogja hagyni megkezdett művét, mint Thomson az ő Treatise on Natural Philosophy-

*) Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Második kiadás. Lipcse, 1877. Pag. 535.

jét, melyből az I-ső kötet még 1865-ben látott napvilágot s melynek azóta nincs folytatása. Én bizonyára egyike lennék azon számosaknak, kik mélyen sajnálni fognák, ha Kirchhoff kényszerítve érezné magát fóltett szándékától elállani, s a föntebb adott tanácsot követve, örököseire bizná kinyomatásra kész előadási füzeteinek kiadását. Kívánjuk a most fejlődő physikus-nemzedék érdekében, hogy ne legyen úgy! (Sz. K.)

MEGFEJTETT FELADATOK.

15. Bizonyíttassék be a következő determináns-egyenlet:

$$\frac{1}{n!} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, 0, 0 \ldots\ldots 0 \\ \frac{1}{2!}, & 1, & 1, 0, 0 \ldots\ldots 0 \\ \frac{1}{3!}, & \frac{1}{2!}, & 1, 1, 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{(n-1)!}, & \frac{1}{(n-2)!} & \ldots\ldots\ldots, 1, 1 \\ \frac{1}{n!}, & \frac{1}{(n-1)!}, & \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2!}, 1 \end{vmatrix}$$

Megoldás Farkas Gyula, fögymn. tanártól (jelenleg Polgárdin).

Bebizonyítandó, hogy azon n-ed fokú determinans, melynek r-edik sora ez

$$\frac{1}{r!}, \frac{1}{(r-1)!}, \frac{1}{(r-2)!} \ldots \frac{1}{2}, 1, 1, 0 \ldots$$

$\frac{1}{n}$ értékével bir.

Vonjuk ki az első oszlopot a másodikból, az új második oszlopnak kétszeresét a harmadikból, az új harmadiknak háromszorosát a negyedikből s i. t. E miveletek kivitele után a fősor jobb oldalán levő elemek elenyésznek, tehát a determináns értéke a főtagéval egyenlő: ennek pedig elemei:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots \frac{1}{n};$$

és igy a tárgyalt determináns valóban $\frac{1}{n}$. A röviden kijelölt átalakitások indokolására elég lesz a következő identitásokat idézni.

$$\frac{1}{(r-1)!} - \frac{1}{r!} = \frac{r-1}{r!},$$

$$\frac{1}{(r-2)!} - 2\,\frac{r-1}{r!} = \frac{(r-1)(r-2)}{r!},$$

$$\frac{1}{(r-3)!} - 3\,\frac{(r-1)(r-2)}{r!} = \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{r!}$$

$$\frac{1}{(r-k)!} - k\,\frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{r!} = \frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)(r-k)}{r!}.$$

A 15. föladat megfejtését beküldötték még Bäumel Ede, Klug Lipót és Dr. Schrader Károly urak.

---

16. Bizonyíttassék be a következő egyenlet:

$$(1-x)^n = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ x, & 1, & 1, & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ x^2, & 1, & \binom{2}{1}, & \binom{2}{2}, & \ldots\ldots & 0 \\ x^3, & 1, & \binom{3}{1}, & \binom{3}{2}, & \binom{3}{3}, \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x^n, & 1, & \binom{n}{1}, & \binom{n}{2}, & \binom{n}{3} \ldots\ldots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

1. megoldás Dr. Schrader Károlytól, az ó-gyallai csillagda segédjétől.

Jelöljük egyelőre a tárgyalandó determináns értékét $f(n)$-nel, akkor be lehet bizonyitani, hogy:

$$f(n) = (1-x).f(n-1)$$

minthogy pedig

$$f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix},$$

vagyis

$$(1-x),$$

ebből valóban következik, hogy

$$f(n) = (1-x)^n.$$

Vonjuk le az első sort a másodikból, másodikat a harmadikból, ... az n-ediket az $n+1$-ikből, akkor lesz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ (x-1) & 0 & 1 & 1 & \dots \\ x(x-1) & 0 & 1 & \binom{2}{1} & \dots \\ x^2(x-1) & 0 & 1 & \binom{2}{1} & \dots \\ x^3(x-1) & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{n-1}(x-1) & 0 & 1 & \binom{n-1}{1} & \dots \binom{n-1}{n-2} \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots \\ x & 1 & 1 & \dots \\ x^2 & 1 & \binom{2}{1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{n-1}, & 1, & \binom{n-1}{1} & \dots \binom{n-1}{n-2} \end{vmatrix}$$

ha t. i. kifejtjük az első sor szerint vett aldeterminánsokat, melyek a 2-ik kivételével mindannyian eltünnek. Az átalakitás kivitele a következő képlet segitségével történt:

$$\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1},$$

Az uj determináns azonban nem más mint $f(n-1)$; a miből tehát első megjegyzésünk értelmében következik, hogy:

$$f(n) = (1-x)^n.$$

Egy második megoldást is vettünk Scholtz Ágoston főgymnásiumi igazgató úrtól; ezt azonban nagyobb terjedelménél fogva csak a következő füzetben közölhetjük. *Szerk.*

FÖLADATOK.

20. Egy tömegpont (A) körpályában állandó sebességgel mozog. Minő mozgást végez e tömegpont vonzása következtében B tömegpont a körpálya középpontjának közelében, feltéve, hogy ott az A által kifejtett vonzó erőt állandónak tekintjük? (B. Eötvös Loránd.)

21. Vannak-e számrendszerek, melyekben valamely adott a számot csupa 1-esekkel lehet kiirni, és ha igen, minő alapszámokra vonatkozhatnak e rendszerek? (König.)

22. Ha valamely pont körpályán állandó sebességgel mozog, úgy, a mint tudva van, a pont vetülete az egyenesen a végtelen kis tágasságú inga mozgását követi. Kérdés, minő görbén kell a pontnak állandó sebességgel mozogni, hogy vetülete az egyenesen a véges tágasságú inga mozgási törvényét kövesse? (Szily.)

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

I. kötet. **1876.** 10. füzet.

AZ ELHAJLÍTOTT FÉNY POLARISATIÓJA.

(A m. tud. Akadémia f. év novembr 6-án tartott ülésén előterjesztett értekezés kivonata.)

Dr. Fröhlich Izor, egyetemi magántanártól.

Minden eddigi kisérlet, mely az elhajlított fény polarisatiója megvizsgálását tűzte ki czéljául, amaz, az egész fénytanra nézve oly kiválóan fontos kérdés eldöntésére akart szolgálni: vajjon az egyenesen polarisált fény polarisatió síkjához merőlegesen vagy párhuzamosan rezeg-e.

Ez irányban az első kutatásokat Stokes [1]) eszközölte, ki kisérletei által elméletéből folyó következtetéseket kivánt igazolni, és meglehetősen kielégítő eredményekhez is jutott.

Utána Holtzmann [2]) ugyanezen kisérleteket kissé megváltoztatott elrendezés mellett ismétlé, és Eisenlohr [3]) az általa nyert adatokat az ő elméletével (melyben a hosszrezgéseknek a fénytüneményekre lényeges befolyást tulajdonít) egyeztette össze.

Hasonló eljárást követett Lorenz [4]) is kisérletei kivitelében eredményei Stokes-éivel megegyeznek ugyan, de ő azokat saját, igen különös fényelmélete igazolásának tekintette.

Pontosabban és kimerítőbben vizsgálta át ugyanezen viszonyokat Mascart [5]), ki az elhajlított fényt egész 70 foknyi diffractiói szögig követve, annak polarisatióját határozta meg.

[1]) Cambridge Transactions. IX. 1.
[2]) Pogg. Annal. XCIX. 446.
[3]) Pogg. Annal. CIV. 337.
[4]) Pogg. Annal. CXI. 315.
[5]) Comptes Rendus LXIII. 1005.

Mindezen kisérleteknél a fény üvegrácsok által lett elhajlítva; a beeső fény tovaterjedési iránya az üvegrács normalisába esett, és csak az átmenő elhajlított fény vizsgáltatott meg.

Az ily módon diffrangált fény polarisatió viszonyait illetőleg Stokes elméleti és Holtzmann geometriai úton következő egyszerű képlethez jutottak:

$$\text{tg.}\,\varphi = \text{tg.}\,\psi \cos.\,\delta\,;$$

itt a φ az elhajlított fény rezgési iránya és a diffractió sík normalisa között fekvő szög; ψ ugyanaz a beeső fényre nézve; δ pedig a beeső fény tovaterjedési iránya és a diffrangált sugár által képezett szög.

Az említett kisérletekből következett, miszerint az egyenesen polarisált fény polarisatió síkjára merőlegesen rezeg.

Jelen dolgozatban azonban az elhajlított fény polarisatiói viszonyai sokkal általánosabban és terjedelmesebben vizsgáltattak meg.

Nemcsak az üvegrácsra különböző beesési szögek alatt beeső és átmenő diffrangált fény, hanem túlnyomóan a visszavert és elhajlított fény polarisatiója határoztatott meg, mely utóbbi fénynem, úgy látszik, eddig az észlelők figyelmét kikerülte.

A visszavert fény vizsgálatát főleg azért tartottam előnyösnek, mivel itt a fény csak egyszerű visszaverődés és diffractió után azonnal észlelhető, míg az átmenő fény a rács felületein kétszeres visszaverődést és egyszeri törést szenved, mi által az önmagában egyszerű tünemény meglehetősen complicálva lesz.

Az észlelésre két rács használtatott, melyeknek vonalai gyémánt-a l lettek bemetszve; megfelelő közük szélessége $0^{mm}\,0506$ és $0^{mm}\,90617$-nyinek találtatott. (Ezen rácsokat Dr. Jedlik Ányos, egyetemi tanár készítette egy ugyancsak ő általa szerkesztett osztógép segítségével.)

Ez észlelésnél a következő elrendezés lett alkalmazva:

Egy heliostat segítségével az elsötétített terembe egy napsugárnyaláb bocsáttatott, mely a szögmérő collimator-csövére forgathatólag ráerősített Nikol-féle hasábra esett. E Nikol után a collimator-lencse gyújtópontjában lévő és változtatható szélességü hasadék következett, melyen keresztül a fény a collimator-lencsére s onnan párhuzamos nyalábban a szögmérő horizontális köre közepére függélyesen felállított rácsra esett. Az ily módon elhajlított fény az észlelési távcső tárgylencséje által gyűjtetett össze s az annak szemlencséje előtt forgathatólag megerősített második Nikollal analysáltatott.

Igy tehát a visszavert és diffrangált fénynek irányát az észlelési távcső iránya, polarisatió-síkjának fekvését pedig a második nikol azon helyzete határozta meg, melyre nézve az említett fény teljesen eltünt A rácsok mindig úgy állíttattak, hogy a beeső fény csak rácsozott felületre esett.

Az eszköz (t. i. a horizontális kör) *O*-pontja, valamint a nikolok alaphelyzetei kellő elővigyázat mellett határoztattak meg; e mérések ellenőrzése végett azok az észlelés folyamában többször ismételtettek s mindannyiszor helyeseknek találtattak.

Mindenekelőtt meg kell jegyezni, miszerint daczára annak, hogy az üvegrácsok rácsozott oldala lett a beeső fény ellen fordítva, mégis annak hátsó felületéről is verődött vissza a fény, úgy hogy a diffrangált fény két rendszerü szinképei támadtak, melyek egymást közel födték. Szerencsére azonban mindkét használt üvegrács határfelületei nem voltak egészen párhuzamosak, úgy hogy a hátsó felülettől visszavert fényt az első (rácsozott) felülettől visszavert fénytől könnyen és biztosan az által lehetett megkülönböztetni, hogy a collimatorcső függélyes hasadékjánnk és e hasadék horizontális fonalának az első és hátsó felülettől visszavert képei egészen különböző helyzeteket foglaltak el.

Természetesen csak az első felületről reflectált fény észleltetett.

Az összes észlelési sorozatoknál a beeső fény a beesési síkhoz, és így a diffractió síkhoz is, 45° alatt volt egyenesen polarizálya.

A keskenyebb közü rács (0·00617) 5°-ról 5°-ra változó beesési szögekre állíttatott be; minden beesési szögnél a visszavert és elhajlított, a középső fehér csík mindkét oldalán fekvő spectrumokra nézve a *B, D, E, F, G* Frauhofer-féle vonaloknak megfelelő fénynemek polarisatió síkja határoztatott meg akként, hogy a második nikol addig lett forgatva, míg e fénynemek teljesen eltüntek.

Bármily beesési szögre nézve az észlelés a második spectrumon túl nem terjedhetett: részint a diffrangált fény gyenge intensitása miatt, részint pedig mivel ezentúl már nem tiszta szinképek következtek.

Ezen rácscsal az említett módon a beesési szögek egész sorozatára nézve (85°—25°) megmértem az elhajlított fény polarisatió síkjait, minden egyes irányra nézve tiz leolvasást eszközölvén.

Erre az egész eszköz szétvétetett és a nikolok is eltávolíttattak, azután pedig az eszköz ujra összeállíttatott, annak *O*-pontja, illetőleg a nikolok alaphelyzetei ujra meghatároztattak és ugyanazon rácscsal egy az előbbihez teljesen hasonló észlelési sorozat végeztetett, hogy ez által mind a beállításnál netalán elkövetett hibák tünjenek ki, mind

pedig különösen, hogy az észlelések pontossága felől némi itéletet lehessen szerezni. A beállítási hibák aránylag rendkivül csekélyek voltak, azok középértéke a 2'-t túl nem haladta; a polarisatió sík helyzeteit illető észlelési adatok pedig csak a legritkább esetekben (400 adat közül kétszer) mutattak 1°-nyi különbséget, (még pedig csak akkor, midőn az elhajlított fény intensitása igen gyenge volt) rendesen azonban e különbség fél fokon alúl maradt. Mindezen körülmények, tekintettel az ilynemű észlelések kényes voltára, valamint különösen a diffrangált fény csekély intensitására, teljesen kielégítő összhangzatra mutatnak.

Az észlelt értékek ezen két sorozatból összevonás útján egyesíttettek és rendeztettek, úgy hogy az itt adott polarisatió-azimuthok húsz egyszerű mérés átlagát képviselik.

A szélesebb közü (0^{mm}0506) rácscsal két, az előbbivel teljesen egyenlő folyamú észlelési sorozatot végeztem; csak hogy itt már nem az egyes Fraunhofer-féle vonaloknak megfelelő irányok voltak a mérvadók, mivel itt a szinképek sokkal keskenyebbek voltak és a vonalok igen közel estek egymáshoz.

Ezért itt az elhajlított fény észlelése már a legkisebb alkalmas diffractió-szögnél kezdődött és ennek szabályszerű növekedése mellett folytattatott, tekintet nélkül arra, vajjon az észlelt fény tiszta spectrumokhoz tartozott-e, vagy pedig több szinkép egyes szineinek egymásra rakódásából eredt-e; sőt igen sokszor még azon fény is vizsgáltatott, mely a tiszta (másodrendű) spectrumok között, vagy a középső fehér csík és az első szinképek között foglalt helyet, mely tehát egyenesen elsőrendű szinképek alkatrészét képezte.

A táblázatban szintén a két észlelési sorozat egyesítéséből származó értékeket foglaltam. Ezen táblákban d az elhajlított és a beeső fény tovaterjedésének iránykülönbsége; δ a középső fehér csík (mely nem egyéb, mint az egyenesen visszavert fény) és a diffrangált sugár által képezett szög (diffractió-szög); φ az elhajlított fény polarisatiói azimuthja, végre $\varphi_0 - \varphi$ a középső csík és a diffrangált fény polarisatió azimuthjainak különbsége. d és δ között természetesen következő összefüggés létezik:

$$d = 180^0 - 2i + \delta$$

vagy:

$$d = 180^0 - 2i - \delta$$

a mint t. i. a diffrangált sugár, a középső csíktól szamítva, egyik vagy másik oldalon fekszik, s hol i a fény beesési szöge.

Széles közü rács.

$i = 55^0$

$\psi = 45^0$

d	δ	φ	$\varphi_0 - \varphi$
48° 24′	21° 36′	+ 13° 96	— 15° 83
50° 19′	19° 41′	13° 02	14° 89
52° 9′	17° 51′	11° 98	13° 85
53° 54′	16° 6′	10° 97	12° 84
55° 34′	14° 26′	9° 73	11° 60
57° 9′	12° 51′	8° 13	10° 00
58° 39′	11° 21′	6° 96	8° 83
60° 4′	9° 56′	6° 05	7° 92
61° 24′	8° 36′	5° 13	7° 00
62° 39′	7° 21′	3° 83	5° 70
63° 49′	6° 11′	2° 92	4° 79
64° 54′	5° 6′	1° 84	3° 71
65° 57′	4° 3′	+ 0° 86	2° 73
67° —	3° —	— 0° 10	1° 77
68° —	2° —	0° 85	1° 02
69° —	1° —	1° 21	— 0° 66
70° —	0° —	1° 87	0° 00
71° —	1° —	3° 15	+ 1° 28
72° —	2° —	3° 78	1° 91
73° —	3° —	4° 97	3° 10
74° —	4° —	5° 73	3° 86
75° 4′	5° 4′	6° 49	4° 62
76° 14′	6° 14′	7° 01	5° 14
77° 29′	7° 29′	7° 71	5° 84
78° 49′	8° 49′	8° 49	6° 62
80° 14′	10° 14′	9° 85	7° 98
81° 44′	11° 44′	11° 26	9° 39
83° 19′	13° 19′	12° 69	10° 82
84° 59′	14° 59′	14° 09	12° 22
86° 44′	16° 44′	15° 62	13° 75
88° 34′	18° 34′	16° 88	14° 97
90° 29′	20° 29′	18° 07	16° 20
92° 29′	22° 29′	— 19° 91	+ 18° 04

Keskeny közü rács.

$i = 55^0$

$\psi = 45^0$

d	δ	φ	$\varphi_0 - \varphi$
43° 6′	26° 54′	+ 16° 07	— 17° 50
47° 6	22° 54′	13° 33	14° 26
51° 7′	18° 53′	11° 44	12° 37
57° 10′	12° 50′	7° 84	8° 51
58° 54′	11° 6′	7° 10	7° 77
60° 5′	9° 55′	6° 31	7° 24
61° 4′	8° 56′	5° 35	6° 28
62° 8′	7° 52′	+ 4° 88	— 5° 88
70° —	0° —	— 0° 93	0° 00
76° 28′	6° 28′	7° 93	+ 7° 00
77° 15′	7° 15′	8° 18	7° 25
77° 48′	7° 48′	8° 23	7° 30
78° 41′	8° 41′	8° 75	7° 82
79° 33′	9° 33′	9° 27	8° 34
82° 12′	12° 12′	11° 96	11° 03
83° 37′	13° 37′	12° 91	11° 98
84° 36′	14° 36′	14° 01	13° 08
86° 7′	16° 7′	15° 21	14° 28
87° 45′	17° 45′	— 16° 33	+ 15° 40

Széles közü rács.

$P = 56^0\ 10'$

i	φ *számitás*	φ *észlelés*	*Sz. — É.*
85°	+ 39° 43	+ 39° 54	— 0° 11
80°	33° 55	33° 76	— 0° 21
75°	27° 50	27° 53	— 0° 03
70°	20° 82	20° 27	+ 0° 55
65°	13° 63	13° 45	+ 0° 18
60°	+ 6° 00	+ 6° 14	— 0° 14
55°	— 1° 83	— 1° 87	— 0° 04
50°	9° 50	9° 66	— 0° 16
45°	16° 70	16° 88	— 0° 18
40°	23° 17	23° 18	— 0° 01
35°	28° 73	28° 60	+ 0° 13
30°	33° 40	33° 28	+ 0° 12
25°	— 37° 35	— 37° 02	+ 0° 33

Keskeny közü rács.

$P = 55^\circ\ 35'$

i	φ *számitás*	φ *észlelés*	*Sz.* — *É.*
85°	+ 39° 65	+ 39° 61	+ 0° 04
80°	34° 09	33° 87	+ 0° 22
75°	28° 12	28° 01	+ 0° 11
70°	21° 62	21° 74	— 0° 12
65°	14° 64	14° 85	— 0° 21
60°	+ 6° 93	+ 7° 20	— 0° 27
55°	— 0° 90	— 0° 93	— 0° 03
50°	8° 68	8° 13	+ 0° 55
45°	16° 02	16° 18	— 0° 16
40°	22° 62	22° 62	0° 00
35°	28° 33	28° 62	— 0° 29
30°	33° 12	33° 41	— 0° 29
25°	— 37° 18	— 37° 30	— 0° 12

Ezenkivül mindkét rácsra nézve az egyes beesési szögeknél az egyenesen visszavert tény (megfelel a középső fehér csíknak) polarisatiói azimuthja összeállíttatott s Fresnel képlete

$$\text{tg.}\,\varphi = \frac{\cos.(\alpha + \alpha')}{\cos.(\alpha - \alpha')}$$

szerint számított értékkel hasonlíttatott össze. Itt tételett:

$$\frac{\sin.\alpha}{\sin.\alpha'} = \text{tg.}\,P$$

P-vel a rács üvegfelületének az észlelésekből következtetett polarisatió szögét jelelve.

Az erre vonatkozó legutóbbi két tábla mutatja, hogy az észlelt értékek sem nagyobb, sem pedig kisebb mértékben el nem térnek Fresnel ama közelitő képletétől, mint azt nem rácsozott üvegfelületeknél várhatni.

Az összes észlelési adatokból itt csak azok közöltetnek, melyekre nézve mindkét rácsnál a beesési szög 55°; továbbá az utoljára említett két tábla.

Végre átmenő fénynyel is történtek kisérletek; a függélyes be-

esésnél az elhajlított fény polarisatió síkja csakugyan Stokes cosinustörvényének felelt meg; a más beesési szögek alatt észlelt diffrangált fényre vonatkozó adatok korántsem mutatnak ily szabályszerű folyamot, mint a visszavert fényre vonatkozó megfelelő adatok; azonkivül ezek nem tiszták, minthogy a törés következtében a keresztül haladó polarisatió síkja már amúgy is szenvedett változást.

Mindezen okokból az átmenő elhajlított fényt illető adatokat, melyek részint fölöslegesek, részint pedig csak igen nehezen használhatók, ez alkalommal nem közlöm; kitünt mégis, miszerint, ugyanazon beesési szög mellett az átmenő ép úgy mint a visszavert elhajlított fény intensitásának maximumainak irányai az egyenesen átmenő, illetőleg egyenesen visszavert fény irányával teljesen egyenlő szögeket képeznek, a mint ez a diffractió általános elméletéből közvetetlenül következik.

Tekintsük át most az egész tünemény lényegét.

A beeső fény egyenesen polarisált állapotban és párhuzamos sugárnyalábban esik a rácsozott felületre. Huyghens elve szerint e felületelemek a fénymozgás uj központjaivá válnak, melyekből a mozgás minden irányban szétterjed. A rács felületén fekvő legkisebb részecsek, bármilyen legyen a beeső fény mozgása, elliptikus pályában rezegnek; e pálya síkja az eddigi fölfogás szerint a rezgés tovaterjedésének irányára merőlegesen áll. Fontoljuk meg azonban, hogy épen a határfelület részecsei mind a beeső, mind a visszavert és tört fény mozgásában egyszerre vesznek részt: következik, miszerint (kivévén azon esetet, midőn a beeső fény a rács normalisa irányában éri a felületet, s midőn tehát e részecsek a beesési síkhoz merőlegesen rezegnek) egyáltalában lehetetlen, hogy a határfelület részecsei mind a három, vagy csak két hullám tovaterjedési irányára merőlegesen rezegjen.

Ehhez járul még azon körülmény, hogy diffractió útján még számtalan irányban is terjed szét a fény, a mi az említett lehetetlenséget még erősíti. Más oldalról az átmenő elhajlított fény vizsgálata (t. i. Stokes törvényének kisérleti igazolása) nemcsak a rezgési irány merőleges voltát a polarisatió síkjára, hanem egyenesen azt is kimutatta, hogy a fénymozgás csak keresztrezgésekből áll, (minthogy épen ezen egyszerü feltevésből következik Stokes törvénye). Ezen kisérleteknél azonban a beeső fény tovaterjedési iránya összeesett a visszavert és tört fény irányával, valamint a rács normalisával, úgy hogy a felületen levő részecs e kivételes esetben a határfelülethez párhuzamo-

san rezgett és az átmenő fény diffractiója a normalis két oldalán teljes symmetriával történhetett. Könnyü belátni, hogy itt a 90°-nyi diffractió-szöggel biró fény polarisatió-azimuthjának 0-nak kell lennie.

De ha a beeső fénynyaláb nem merőleges a rácsra, akkor az elhajlított fény ama symmetriája s vele együtt a polarisatió viszonyainak egyszerüsége is elenyészik; ugyanez áll még a visszavert és diffrangált fényre nézve is.

Ha föltennők, hogy a határfelület részecsei ezen esetben is párhuzamosan rezegnek e felülethez, akkor az ezen felülethez közel párhuzamosan elhajlított fény polarisatió-síkja szintén 0-val egyenlő lenne. Ez azonban a jelen észlelésekkel teljes ellentétben áll. (Igy pl. a keskeny közü rácsnál: $i=65°$-ra nézve a rács felületére magára $d_1=25°$; és egy elhajlított sugár: $d=27°46'$, $\varphi=+27°41'$; a széles közü rácsnál: $i=80°$ és $d_1=10°$; egy elhajlított sugár: $d=11°12'$, $\varphi=+38°15'$, stb.)

Ferde beesési szög alatt tehát a rács felületeleme nem rezeghet párhuzamosan e felülethez; tehát e mozgásnak mindenesetre van egy, a rács felületéhez merőleges componense, mely e mozgás szabad kiterjedését határozottan és lényegesen módosítja.

Eddig hallgatva feltettük, hogy az itt észlelt elhajlított fény egyenesen polarisált, minthogy azt a második nikol segítségével majdnem teljesen elsötétíteni lehetett; de mindazonáltal igen valószinű, hogy ezen fény is ép úgy, mint a közönséges módon visszavert és tört fény elliptikusan van polarizálva. Az előbbiek szerint ez ellipsis pálya kis tengelye csak jelentéktelen annak nagy tengelyéhez képest, úgy hogy az itt adott észlelések nagy megközelítéssel a megfelelő elhajlított fény pályája nagyobb tengelyének fekvését adják.

Ámde már az itt közlött két táblából kitünik miszerint az egy és ugyanazon fényforrásból (a rács felületelemeiből) különböző irányban elterjedő fényrezgéseknek megfelelő nagy tengelyek különböző azimuthnegyedekben feküsznek, mi határozottan phasis-eltolódásra mutat.

Sajnos hogy az egyetem physikai intézete még nem bir azon eszközökkel, melyek az elliptikus polarisatió pontos meghatározására szolgálnak.

Az összes tünemény pontos áttekintése és szigorú átgondolása következő eredményekhez vezet:

1. Az egyenesen polarisált fény polarisatió-síkjához merőlegesen rezeg. (Megerősítése a már előbb Stokes és mások által nyert eredménynek.)

2. Bármily mozgású rezgési középpontból különböző irányban elterjedő sugaraknak megfelelő rezgés a tovaterjedési irányra merőlegesen történik. (Megerősítése annak, hogy a fénymozgás hosszrezgésekből áll.)

3. Az elhajlított fény polarisatiója függ a beesési és diffractió szögtől, ellenben független a használt rács szélességétől. a fény nemétől és szerkezetétől (vajjon ez tiszta, egynemű, vagy különböző rendű szinképek egymásra rakódásából eredt-e stb.).

4. Az egyenesen visszavert fény polarisatiója ugyanaz marad, akár a fény terjedelmesebb felületről, akár pedig oly felületelemekről verődik vissza, melyeknek szélessége a fény hullámhosszaival majdnem egyenrangu értékkel bir, feltéve, hogy a visszaverő felület természete változatlan maradt.

5. Rendkivül valószinűvé teszik ez észlelések, miszerint (egész általánosan) *a két különböző közeg határfelületén fekvő részecsből, mint mozgási középpontból (fényforrásból) egy homogen isotrop közegben különböző irányban szétterjedő fénymozgások egyenlő tovaterjedési sebességet ugyan, de különböző phasisokat nyernek.*

Ezen észlelések a budapesti kir. egyetem II. physikai intézetében lettek végrehajtva; a kivitelre a mult nyár derült napjait használtam.

Nem mulaszthatom el ez alkalommal hálás köszönetemet kifejezni Dr. Jedlik Ányos és Dr. b. Eötvös Loránd egyetemi tanár uraknak azon szivességükért, melylyel e rácsokat a vizsgálatnál használni, illetőleg az említett intézetben teljesen szabadon dolgozni engedtek.

(Budapest október hóban.)

KRISTÁLYJELZÉSI JAVASLAT.

Dr. Krenner József Sándor, müegyetemi tanártól.

A ki csak az ásványtan tanításával foglalkozik, bizonyára tapasztalta, hogy semmi sem nehezíti a kezdőnek ezt a tudományt annyira, mint az a körülmény, hogy nemcsak a különböző nemzetek iro-

dalmában, de még egy és ugyanazon irodalomban *) is a kristályalakok jellemzésére különböző jelzési módok használtatnak, melyek gyakran egészen különböző elveken alapulnak.

Mellőzve még a tudománynak már multjához tartozó jelzéseket, mint p. a Hausmannét, vagy pedig az ép oly complicált mint nem mathematikai Mohs-félét, mely habár ma már nem használtatik, mégis helyt foglal fontos tankönyvekben, mondom, egészen mellőzve ezeket, csak azt az ismert tényt említem, hogy jelenleg főleg négyféle jelzési mód van használatban:

1.) A Weiss-féle jelek, a berlini iskoláé;

2.) A Naumann-féle jelek, a lipcsei iskoláé; mind a kettő el van terjedve Németországban, az utóbbi Ausztria-Magyarországban, még Oroszországban is; **)

3.) A Haüy-Lévy-félék, vagyis a francziáké; és

4.) a Miller szerinti jelzés, mely az angoloké.

Az elveket, a melyeken ezen jelzési módok alapulnak, e helyen nem szükséges fejtegetni, csak röviden fogom körvonalozni, hogy okszerű kristálytani jeltől mit kell okvetetlenül megkívánni.

a) Én kívánom, hogy a kristályjel *directe* fejezze ki azon relativ arányt, mely a jelzendő kristályalaknak tengelymetszvényei és az ahhoz tartozó alapidom tengelymetszvényei közt fönnáll;

b) kívánom továbbá, hogy ezen jel lehető rövid legyen, hogy azt esetleg magukra a kristálylapokra lehessen följegyezni;

c) kell hogy adva legyen lehetősége annak, hogy az alakoknak minden egyes lapja a jel által kifejezhető legyen;

d) törtszámok ne forduljanak elő, hogy így a jelzés átnézetes és könnyen érthető legyen.

Ha ezen szempontokat tekintetbe véve, a fent említett módokat átvizsgáljuk, akkor a következő eredményre jutunk:

1. Hogy a Weiss-féle jel aránylag a legvilágosabb és a legátnézetesebb, azonban túlságos hossza miatt — csak némileg complicált combinált kristály jelzésére is igen sok tért vesz igénybe — lassanként eltünik az irodalomból, helyét elfoglalván a következő.

2. A Naumann-féle jelzési mód kívánja, hogy a tengelymetszvényi viszonyt kifejező számarány az egyik nem fölfelé irányult tengely számértékével osztassék, azaz az egységre redukáltassék; az egyes he-

*) A német irodalom maga csak ötféle jelzési módot ismer.

**) Északamerikában a Naumann-féle jelek Dana által rövidített alakban használtatnak.

lyett aztán iratik *O* vagy *P*. Ez által sokszor számtörtek keletkeznek; azonkivül annak jelzésére, hogy a két fekvő tengely közt melyik reducáltatott az egységre, igen sokszor segédjelek szükségesek. Ezen jelekben a szükségnél több mesterkedést látok, és csak kissé complicált tengelyviszonyoknál nem eléggé átnézetesek; és mindamellett, hogy sokszor e jelzések túlhalmozva vannak kis jelecskékkel, még sem lehet a kristályalaknak *minden egyes* lapját jelezni, nem is tekintve azt, hogy a három véglappár jelzésében egy kis inconsequentiát látok.

3. A franczia mineralogusok jelei nem adják a tengelymetszetek arányát directe és igen complicáltak.

4. Az angol ásvány-irodalomnak kristályjele rövid, prácis, törteket nem tartalmaz, minden egyes kristálylapot külön lehet megjelölni, azonban azon hátránya van, hogy a tengelymetszvényi arányt nem adja directe, hanem csak reciprok értékét, a mi persze előnyt is nyujt, mert a számításba közvetetlenül bevezethető. A tengelymetszetek arányszámai itten előre meghatározott sorrendben iratnak. Bárhol vett példa magyarázhatja e módszert.

Vegyünk p. egy rhombos pyramist, a melynek minden lapja (a nyolcz lap közül) a 3 tengelyt *a, b* és *c* *3 : 2 : 3* arány szerint metszi, ezen alaknak jele lesz:

Weiss szerint: $a : \frac{3}{2}b : \frac{2}{3}c$

Naumann szerint: $\frac{3}{2}\bar{P}\frac{3}{2}$

Haüy-Lévy: szerint: $b^1\, b^{\frac{1}{5}}\, h^{\frac{1}{2}}$ és

Miller szerint: *232.*

Mennyire különbözők ezek a jelek! Pedig egy se fejez ki mást, mint azt, hogy az illető kristálylap sor szerint a három tengelyt *3 : 2 : 3* arányszámok szerint metszi; csak hogy az egyik jobban szembetünő módon mint a másik.

A mit én javaslatba hoznék, az abban áll, hogy a tengelymetszetnek számértékei bizonyos meghatározott rendben egymás mellett irassanak. Minthogy a sorrend egy bizonyos előre megállapított, szükségtelen minden más segédjelecskének alkalmazása.

Ezen eljárás szerint lenne, a föntebbi példára vonatkozólag, a kérdéses rhombpyramisnak a jele:

323

TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

A mi azt fejezi ki hogy az illető kristálylap az *a* tengelyt a háromszoros, a *b* tengelyt a kétszeres, a c tengelyt pedig ismét a háromszoros távolságban metszi.

Ezen jel lenne az általános az *egész alakra* vonatkozó jel, ha azonban annak egyes lapjait külön akarjuk jellemezni, akkor az angol mineralogusok példáját követve, a tengely irányára (természetesen a tengelyrendszer középpontjától kezdve) vonatkozó positiv vagy negativ jeleket hozzuk akként az arányszámokkal kapcsolatba, hogy, a mint ez a mathematikában általában divatos, csakis a negativ irányt jelöljük, mig a positiv külön nem jelöltetik. A negativ jel a szám fölé irandó.

Ezt előrebocsátva, lenne a pyramis nyolcz egyes lapja:

$$\begin{array}{ll} 323 & 32\bar{3} \\ \bar{3}23 & \bar{3}\bar{2}3 \\ 323 & 32\bar{3} \\ \bar{3}23 & \bar{3}\bar{2}\bar{3} \end{array}$$

Látjuk hogy minden egyes lap külön jelölhető, a mi által a leirásnak szükségtelenül hosszadalmas voltát el lehet kerülni.

A lap és tengelyeknek esetleg párhuzamos fekvését szintén nem a hosszú ∞ jellel, hanem rövidebbel fejezem ki. T. i. ∞ helyett teszem ezt: $\frac{1}{0}$ és helyette még rövidebben: 0. A párhuzamosságot tehát a 0 jel fejezi ki, úgy hogy például egy rhomb alapprizma lenne 110, azaz az *a* és *b* tengely metszesek a távolság egységében; *c*-vel ‖ a lap. A kisebb átló véglapja p. a mit Naumann $\infty\breve{P}\infty$-vel jelöl, lenne e szerint 100 sat.

Ezen a dolog természetéből folyó egyszerű jelek, melyeket ezennel ajánlatba hozok, megfelelnek a föntebbiben kifejtett igényeknek minden tekintetben. A tengelyviszonyt directe fejezik ki, a jelek rövidek, minden egyes krystálylap külön jelölhető és nem tartalmaznak törteket, végre a kezdőre nézve is könnyen érthetők.

Nem hallgathatom el azt sem, hogy használatuk semmiféle nehézségeket nem okoz a nyomdákban, és hogy igen gyorsan lehet őket a rövid és átnézetes számításra szükséges Miller-féle jelekre átváltoztatni.

Jelünk mindig háromtagú, az első érték vonatkozik az *a*, a második a *b*, a harmadik a *c* tengelyre.

A mi most még a krystálytengelyek sorrendjét illeti, a sok ajánlatba hozott közt, a következőt tartanám a legczélszerűbbnek:

1. A szabályos rendszerben a sorrend közömbös.

2. A négyzetes rendszerben a két egyenértékü melléktengely *a* és *b*, a főtengely *c*.

3. A rhombrendszerben: hosszú átló *a*, rövid átló *b*, főtengely *c*.

4. Az egyhajlásu rendszerben a ferde tengely *a*, az egyenes tengely *b*, a főtengely *c*; a tompaszögü oktansok positivok.

5. A háromhajlásu rendszerben a fölfelé irányult tengely *c*, a többi kettő *a* és *b*.

6. a hatszöges rendszert illetőleg, a két egyenértékü melléktengely *a* és *b*, a főtengely *c*.

Minthogy a javaslatba hozott krystálytani jelek amaz igényeknek, melyeket egy okszerü jelzési módtól követelhetünk, megfelelnek, minthogy ezenkivül tapasztalatból meggyőződtem, hogy azok — azt a mit sokan az ásványtanban a legnehezebbnek tartják — a krystályalakok értelmezését és felfogását nagy mértékben megkönnyítik, merem őket általános használatra ajánlani.

Végül említem, hogy a nemzeti muzeumnak nagy terminologiai gyüjteményében nemkülönben a munkálatban levő »Magyarország ásványai« czimü művemben az itt tárgyalt jelzési módot alkalmazom.

IRODALOM.

Dr. Moritz Cantor: Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Eine historisch-mathematische Untersuchung. (8°, 237 l. 5 könyomatú táblával), Leipzig, 1875. B. G. Teubner.

A mathematika és exact tudományok fejlődésének kritikai története aránylag fiatal tudományág, melynek müvelésére, midőn e szakok maguk uj és rohamos fejlődésnek indultak, nem sok időt lehetett szakítani. Csak a jelenkori munkaosztás elve, és a munkálkodó erők felszaporodása e téren tette lehetségessé azon számos detail-vizsgálatot, mely már-már az összes fejlődés áttekintését közvetíti. Itt is úgy van, mint minden okszerü történeti kutatásnál, hogy épen a parányiaknak, jelentékteleneknek látszó részletek világítják meg legjobban az egyes korszakok culturális viszonyait, hogy a nagy és jellemző vonásokat az ily apró részletekből lehet legjobban megszerkeszteni. Azok közül, kik Németországban e téren működnek, Cantor kiváló helyet érdemel, úgy számos értekezése, mint egyik régiebb keletü nagyobb munkája alapján (»Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker.«)

Az itt ismertetendő munka a mathematika történetének egyik, eddig homályba burkolt részét tárgyalja, t. i. azt a kérdést, hogy a görögök geometriai ismeretei mi úton és mily kiterjedésben szálltak át a középkorra, tudvalevő dolog lévén, hogy az eredeti görög munkákkal a nyugoti Európa csak később az arabok közvetítése által ismerkedett meg.

Cantor műve majdnem kizárólag új forrásvizsgálatokon alapszik, és így annak ismertetésében csak úgy járhatunk el, hogy tartalmának itt legalább röviden körvonalait adjuk, a mire az eredeti munkán kivül, még használtuk annak magától Cantor-tól származó hosszabb ismertetését a Königsberger és Zeuner-féle »Repertorium der litterarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik« czimü új folyóirat 1-ső füzetében.

A földmértan első alapitói között látjuk mindenekelőtt az ősrégi culturával dicsekedő *egiptomiakat*. Ezek legkésőbb már Kr. sz. e. 1700 körül foglalkoztak oly kérdésekkel, melyek az egyes testek és területek felmérésére vonatkoztak. Természetszerüleg mindenekelőtt a legegyszerübb idomra, a háromszögre meg pedig az *egyenszárú háromszögre* irányult figyelmök, melynek területét, ha az oldalak a, a, b betükkel jelöltetnek, $\frac{a \cdot b}{2}$ képlettel fejezték ki, (melybe, mint látjuk, a magasság helyett egy oldal van bevéve). Az egyenszárú háromszöggel való foglalkozás csakhamar rávezetett az egyenszárú trapezre, melynek területe, ha a, b_1, b_2 az oldalak, $\frac{a \cdot (b_1 + b_2)}{2}$ képletben adatott. Ezen téves formulák a gyakorlatban nem csak hogy Kr. e. 100 évig fentartották magukat, de ez idő alatt határozott visszaesést kell tapasztalnunk mert lassanként eltekintenek a trapez azon különös alakjától, hol két oldal párhuzamos, a másik kettő pedig egymás között egyenlő, s a tetszőleges négyszög területét ennek folytán igy fejezik kl: $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2}$, ha a_1, a_2, b_1, b_2 az egyes oldalakat jelentik. A további kiszámítás mindig u. n. binär törtek segítségével történik: azaz olyanokkal, melyekben a számláló az egység, a nevező a kettő valamely hatványa. Megemlítjük még, hogy az egiptomiak a kör területére nézve $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ értéket használtak. *)

A régi Egiptomban a földmértannak csak egyes elemeivel találkozunk, a Ptolemaeusok görög Egyptomában, azonban ez már mint önálló tudomány lép föl. Alexandrai Herontól (Kr. e. 100 körül) birunk egy, valószinüleg kormányrendeletre készített munkát, mely a *felmérésnél követendő eljárást* s a

*) Cantor munkája közli először a papyrus Rhind földolgozásának eredményeit, melynek teljes kiadása Eisenlohr fordításában legközelebb várható.

felmérés tudományát tárgyalja. Heron, mint a tudomány számos ágában, úgy itt is jelentékeny készültséget árul el; nemcsak hogy meglepő szabatossággal tárgyalja a mezőn végzendő egyes (természetesen még csak egyszerű) operatiókat, de a területek kiszámításában sem marad hátra. Azonban legfontosabb, hogy ő szerkesztette azon *dioptránuk* nevezett eszközt, melyben mai theodolitunk első kezdetét már fölismerhetjük. Kétségtelen, hogy Heron igen sokat sajátított el az egyptomiaktól, így pl. a complicáltabb alakoknak egyenesek általi felbontását egyszerűebbekre. Csak azt kell sajnálnunk, hogy a mi különben csak Egyptomban volt lehetséges, hogy 100 évvel Euclides után Alexandriában, hol maga Euclides is élt, az egyptomiaknak többé-kevésbé jó adataival néha-néha egy hamis megközelítést is átvesz. A kör négyzetitésénél azonban Heron elhagyja az egiptomiakat és az Archimedes-féle π-értéket $\left(\frac{22}{7}\right)$ használja többnyire. Heron geometriájából felemlíthetjük, hogy ő alapította meg a képletet a háromszög területének oldalaiból való meghatározására; megközelítőleg az egyenoldalú háromszög területét az oldal négyzetének $\frac{1}{3}+\frac{1}{10}$-ével fejezte ki; a szabályos nyolcz-szög oldalát (a_8) s a körülirt kör átmérőjét (d_8) ezen relatióval kapcsolta össze:

$$\left(\frac{d_8}{2}\right)^2=\left[\sqrt{2\left(\frac{a_8}{2}\right)^2}+\frac{a_8}{2}\right]^2+\left(\frac{a_8}{2}\right)^2.$$

Hogy valaki képes legyen levezetni ezen dolgokat, okvetlenül némi *háromszögtani ismeretekkel* kell birnia; mert másképen aligha lehet megmagyarázni, hogyan volt képes Heron (igaz ugyan, hogy csak megközelítőleg) a szabályos sokszögeknek — a háromszögtől a 12 szögig — területét egy-egy oldalból továbbá a körszeleteknek területét, a körívek hosszát, gömbszelvények köbtartalmát stb. stb. kiszámítani. Jó talán itt külön megemlíteni, hogy eme a földmérési szükségletnek megfelelő megközelítésnek története egészen más, mint a tiszta tudományé, mely Euclides, Archimedes és Apollonius irataiban már e kérdéseken rég túlhaladt; de mig eme munkák századokra egészen elvesztek, a római és középkori mathematika ezen bizonyítás nélkül elfogadott, és igazaknak hitt formulákon alapult.

A *rómaiak* alig bővítették valamivel a földmértan tudományát; ők csak a lánczszemet képezik a görög s a későbbi keresztény aera között; igaz el sem hagytak semmit, hanem mindvégig a nagyrészt ó-egiptomi eredetű, — közelítő értéket adó *hamis* képleteket használták. Ugyanezen meddőséget észlelni a középkor férfiainál, kik különben nem is egyebek, mint a rómaiak tanítványai. A római agrimensoroknak *öntudatlan* érdeme, hogy ügyességüket nem sodorta el a népvándorlások barbár korszaka.

Cantor mindenek előtt ismereteik eredetének kérdésével foglalkozik. Maga a földmérés ügyessége valószinüleg az etruskok ős hagyománya, ezt látszik bizonyitani a *groma* elnevezés is, melyet Cantor nem akar a *gnomonnal* összetévesztetni, mert mig ez napmutatót jelent, azalatt valószinüleg valami szögmérő eszköz értendő. Az már sokkal biztosabb, hogy a rómaiak földmértani tudománya az alexandriaiaktól származik, mert ennek átültetése egyszerüen Julius Caesar alexandriai hadjárata következtében történik. Ezen feltevést irodalmi maradványok is támogatják, melyek segélyével a római földmértan még határozottabban Herontól átvettnek mondható, a római irók (az. u. n. agrimensorok) müvei feltünően bővelkedvén a Heron munkáiból szórol-szóra leforditott fejezetekben. A wolfenbütteli könyvtárban feltalált *Codex Arcerianus*, mely körülbelül a VI. vagy VII. században iratott, és a tulajdonképi agrimensorok iratait tartalmazza, igen sok bizonyitékot szolgáltat erre nézve; de még más szerzők is, úgy Vitruvius, Columella, Frontinus, Boetius és Hyginus e kérdésre nagy fényt vetnek. Körszámitási kisérleteket csak Vitruvius-nál találunk, ki π-t $3\frac{1}{8}$-nak veszi, ezt az értéket még Dürer használta; a fenebb emlitett Frontinusnak egy mértani munkája egész a XII. századig fentartotta magát, de ezen időtájban nyomtalanul elveszett; egyes részletei Leonardo da Pisa gyakorlati mértanában feltalálhatók. A nevezett codex töredékeiből kitünik, hogy az illető szerzők ismertek képleteket, 1) a polygonálszámoknak az oldalakból való kiszámitására; 2) a megfordított föladatra: 3) a pyramidalszámoknak a megfelelő polygonálszámok s oldalaik általi kifejezésére; s 4) a köbszámok összegének kifejezésére. A tulajdonképeni földmértan körét tárgyaló Balbus, Celsus, Frontinus munkáiból csak jelentéktelen töredékek maradtak fenn.

A középkort a rómaiak tanitványai nyitják meg. Itt részletesebben ismerteti Cantor az ezelőtt *reichenaui jelenleg carlsruhei feladat-gyüjteményt*, (a karlsruhei állami könyvtárban) melynek kézirata 1000-ből való, mig a munka maga valószinüleg Alcuinra megy vissza, és Gerbert mértanát. Gerbert *mértana* a kettő közt hasonlithatlanul nagyobb jelentőségü; tőle sem szabad ugyan ujabb felfedezéseket, vagy a tudomány tovább fejlesztését várni: de Gerbertnek meg van azon bizonyára nem csekély érdeme, hogy ő állitá egybe megint először rendszeres egészbe azon tételeket, definitiókat, szám-és mértani fejezeteket, melyek előtte csak elszórva voltak feltalálhatók; Gerbert munkája valószinüleg a 981. s 985. évek között készittetett. Félreismerhetlen, hogy különösen földmértani része római kútfők után készült s igy legalább némileg pótolhatja az eredetiek hiányát. Gerbertnél is sajnálattal kell tapasztalnunk, hogy ő sem ment nagy hibáktól, pedig őt jogosan tekinthetjük e téren a középkor legkiválóbb szellemei egyikének; ujabb bizonyitéka ez annak,

hogy e korban a fentartott ismeretek mennyisége nem csökken ugyan, de azok megértése mind szükebb határok közé szorul. Gerbert (ha szabad igy kifejezni magunkat) rendszeres munkája vezérfonalul szolgált a középkor majdnem összes e szakba vágó munkáinál; Gerbert után, ki különben a középkor egyik legkiválóbb embere, szerzőnk végre még Hermann Contractus, Johannes Widmanm von Eger, Gregorius Reysch működését tárgyalja, kiknél szintén még többé-kevésbé felismerhetők a rómaiak által a keresztény aerára hagyományozott földmértan heroni tartalomköre.

»A rómaiak — Cantornak e végszavaival fejezzük be mi is ezen ismertetést — a görög földmértanra s az evvel közvetett vagy közvetetlen összefüggésben álló egyéb anyagra nézve tisztán a meglévőt őrző középhelyet foglalnak el. Egyes kiváló szellemek kivételével a föntartottnak megértése mindinkább szükebb határokba szorúl, de a föntartattnak mennyisége nem változott. Ez nem valami nagy dolog, de mégis több, mint a mit eddig gondoltuk. Hogy egyáltalában valami kevés geometria átment a korai középkor tudomány ekintetében egészen barbár idejébe, az a római agrimensoroknak habár öntudatlan érdeme. (Szokolay István.)

MEGFEJTETT FELADATOK.

5. Miképen lehet valamely mérleg súlypontjának távolságát a középső éltől kisérlet utján meghatározni? (Schuller Alajos).

Megoldás Renner János, müegyetemi tanársegédtől.

E feladatot dynamikai és statikai uton lehet megoldani.

1.) *Dynamikai megoldás.*

A csészéktől és kengyelektől megszabadított mérlegrudat physikai ingának tekintve, az inga lengési idejének képletét használjuk fel, melyben a keresett távolság is előfordul:

Ha t_1 a lengési idő; T_1 a tehetetlenségi nyomaték; m a tömeg; g a szabad esés gyorsulása; x a sulypont távola a középső éltől és ha a rudat a középső él körül lengetjük, úgy

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{T_1}{Mgx}} \qquad 1,)$$

De ezen egyenlet magában véve még nem elegendő, mert ha meg is határoztuk t_1—t észlelés által még három ismeretlen marad. T_1, M és x. T_1 és M kiküszöbölése végett következőkép járunk el. A mérleg rudját egy-má-

sodik, a középső élhez párhuzamos tengely körül hagyjuk lengeni s a lengési időt (t_2) ismét meghatározzuk. Legyen a a mostani forgási tengely távola a súlyponttól, T_2 az illető tehetetlenségi nyomaték, úgy

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{T_2}{Mga}} \qquad 2.)$$

A felírt két egyenletből már kiküszöbölhetjük a tömeget; czélszerűbb belőlük a $(T_2 - T_1)$ különbséget kikeresni. Ez annyi mint:

$$T_2 - T_1 = \frac{Mg}{\pi^2}(at_2^2 - xt_1^2) \qquad 3.)$$

E különbséget még egy ismeretes mechanikai tétel alapján is, függetlenül az eddigi egyenletektől, kifejezhetjük. Ugyanis a tehetetlenségi nyomaték (vonatkoztatva egy tetszés szerinti tengelyre) annyi mint a súlyponton átmenő az adotthoz párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték (T), hozzáadva még a súlypontban egyesítve képzelt tömegnek az adott tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát, tehát képletben:

$$T_1 = T + Mx^2 \text{ és}$$
$$T_2 = T + Ma^2.$$

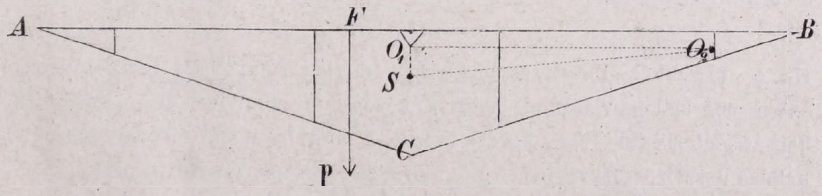
Innét

$$T_2 - T_1 = M(a^2 - x^2) \qquad 4.)$$

A *3)* és *4)* egyenletből következik

$$a^2 - x^2 = \frac{g}{\pi^2}(at_2^2 - xt_1^2), \qquad 5.)$$

melyben, ha a távolságot ismerjük, már csak x ismeretlen a mit azonnal ki is számíthatunk. Az a távolság miként történő meghatározása attól függ, hogy hol vettük fel a második tengelyt.



Kisérletimnél, melyeknek eredményei alább vannak összeállítva, a rúd az O_2-vel jelölt (a rajzban ugyan pontnak látszó, de tulajdonképen egy a papir síkjára merőleges vonalot jelölő) helyen volt egy kellően fölállított segédélre felakasztva, olyformán, hogy ez a második él (mint az idom is mutatja) a rúd vizszintes állásában a középső éllel (O_1) ugyanazon magasságban s tőle lehetőleg távol volt.

Ezen esetben áll.

$$O_2S = a = \sqrt{\overline{O_1O_2^2} + \overline{O_1S^2}}$$

vagyis, mivel O_1S nem egyéb mint x

$$a = \sqrt{\overline{O_1O_2^2} + x^2};$$

ezt behelyettesítvén az 5) egyenletbe, lesz

$$\overline{O_1O_2^2} = \frac{g}{\pi^2}(t_2^2 \cdot \sqrt{\overline{O_1O_2^2} + x^2} - x^2 t_1^2).$$

Mielőtt innét x-t kiszámitanók, vegyük tekintetbe, hogy érzékeny mérlegnél a súlypont távola a forgási éltől nagyon csekély; ez okból x^2-el hanyagolható a sokkal nagyobb $\overline{O_1O_2^2}$ mellett s egyenletünk ezzé válik:

$$\overline{O_1O_2^2} = \frac{g}{\pi^2}\left(\overline{O_1O_2} \cdot t_2^2 - x.t_1^2\right),$$

miből, ha O_1O_2 távolságot lemértük, x-et csupa ismeretes mennyiségek által kifejezhetjük, t. i.

$$x = \frac{t_2^2 g - \pi^2 O_1O_2}{t_1^2 g} \cdot \overline{O_1O_2} \qquad 6.)$$

A műegyetemi természettani szertár egyik mérlegével tett kisérletek a következő eredményeket adták:

$$t_1 = 17^{mp}; \; t_2 = 0{\cdot}555^{mp}; \; O_1O_2 = 19{\cdot}3^{cm} \text{ és } g = 980^{cm}.$$

E szerint

$$x = \frac{(0{\cdot}555)^2 \times 980 - (3{\cdot}14)^2 \times 19{\cdot}3}{(17)^2 \times 980} \times 19{\cdot}3$$

s ha a kijelölt műveleteket véghez viszszük, találjuk, hogy

$$x = 0{\cdot}0075^{cm}.$$

Ha a csészékkel ellátott és megterhelt mérleg súlypontját akarnók keresni, akkor meg kellene vizsgálni, hogy a középső él mennyivel esik a szélső éleken átmenő sík fölé vagy alá; a középső éltől ilyen (függélyes) távolságban kellene a szélső élekre nehezedő tömegeket összpontosítva képzelni. De a rúd tömege szintén az ő súlypontjában képzelhető egyesítve s igy a közös súlypontot is könnyen megtalálhatjuk.

2.) *Statikai megoldas.*

Képzeljük a rud tömegét (a csészéket és kengyeleket kivéve) annak súlypontjában egyesítve s észleljük a kitérést, melyet egy kis túlsúlyt okoz. Meghatározván a szöget, melylyel a mérleg helyéből kimozdúlt, ennek segítségével a következő módon találhatjuk meg a súlypont távolát a forgási éltől

Ha p a túlsúly; P a rud súlya; α a kitérés szöge; x a súlypont távola a középső éltől; tehát $x.\ \sin\alpha$ a P emelő karja. és ha l-el a p túlysúly emelő karját jelöljük, akkor az egyensúly feltételét a következő egyenlet fejezi ki

$$P.\ x.\ \sin\alpha = p.l$$

miből

$$x = \frac{p.l}{P \sin\alpha}. \qquad 7.)$$

Az α-szöget illetőleg a mutató kitérését észleljük a mögötte lévő osztályzaton; a centiméterek-ben kifejezett kitérésből (s) és a mutató végpontjának távolából (r) a forgási éltől, a következő arány alapján találjuk az α szöget fokokban kifejezve:

$$s : 2r\pi = \alpha : 360^0$$

honnan:

$$\alpha = \frac{s}{2r\pi}.\ 360^0$$

A föntebb említett mérleggel tett kisérletek e módon a következő eredményekre vezettek

$$p = 0{\cdot}01^{grm};\ P = 549^{grm};\ l = 3{\cdot}33^{cm};\ s = 0{\cdot}23^{cm};\ r = 28^{cm}.$$

Ezekből először is

$$\alpha = \frac{0{\cdot}23}{2\times 28\times 3{\cdot}14}.\ 360^0 = 28'5'',$$

és a 7) egyenlet értelmében

$$x = \frac{0{\cdot}01\times 3{\cdot}33}{549\times \sin 28'5''} = 0{\cdot}0074^{cm}$$

Megjegyzendő, hogy a második eljárás közvetlenül megadja a súlypont helyét azon esetre is, ha a rúd a csészékkel és azokban lévő súlyokkal van megterhelve, csak hogy most a rúd súlya helyett a csészékkel és súlyokkal megterhelt rúd sulyát kell számitásba venni.

---

16. Bizonyíttassék be a következő egyenlet:

$$(1-x)^n = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ x, & 1, & 1, & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ x^2, & 1, & \binom{2}{1}, & \binom{2}{2}, & 0, \ \ldots\ldots & 0 \\ x^3, & 1, & \binom{3}{1}, & \binom{3}{2}, & \binom{3}{3}, \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x^n, & 1, & \binom{n}{1}, & \binom{n}{2}, & \binom{n}{3} \ldots\ldots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

(König.)

Második megoldás Scholtz Ágoston, főgymnasiumi igazgatótól Budapesten.

A tulajdonképi föladat megoldása előtt még három más determinánsegyenlet bebizonyítását kivánom adni, melyből a foladatban adott egyenlet könnyü szerrel levezethető. Ezek a következők:

$$A_n = 1, \quad A_0 = 1, \quad A_r = \binom{n}{r},$$

hol A_n, A_0, A_r sorban

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, \ldots & 0 \\ 1, & 1, & 0, & 0, \ldots & 0 \\ 1, & \binom{2}{1}, & \binom{2}{2}, & 0, \ldots & 0 \\ 1, & \binom{3}{1}, & \binom{3}{2}, & \binom{3}{3}, \; . & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \binom{n}{1}, & \binom{n}{2}, & \binom{n}{3}, \ldots & \binom{n-1}{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 0, & \ldots. & 0, & 0 \\ 1, & \binom{2}{1}, & \binom{2}{2}, & 0, & \ldots. & 0, & 0 \\ 1, & \binom{3}{1}, & \binom{3}{2}, & \binom{3}{3}, & \ldots. & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \binom{n}{1}, & \binom{n}{2}, & \binom{n}{3}, & \ldots. & \binom{n}{n-2}, & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \binom{r+1}{r}, & \binom{r+1}{r+1}, & 0, & 0, & \ldots. & 0, & 0 \\ \binom{r+2}{r}, & \binom{r+2}{r+1}, & \binom{r+2}{r+1} & 0, & \ldots. & 0, & 0 \\ \binom{r+3}{r}, & \binom{r+3}{r+1}, & \binom{r+3}{r+2}, & \binom{r+3}{r+3}, & \ldots. & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{n}{r}, & \binom{n}{r+1}, & \binom{n}{r+2}, & \binom{n}{r+3}, & \ldots. & \binom{n}{n-2}, & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

determinánsokat jelentik. Mindenek előtt tehát ki kell mátatnunk, hogy e három egyenlet igaz.

$A_n = 1$ helyessége már A_n determináns figyelmes meg tekintéséből kiviláglik. Mert e determinánsban a fősor egyik oldalán levő elemek mind zérussal egyenlők, a determináns tehát egyenlő a fősorban álló elemek szorzatával, vagyis:

$$A_n = 1.1.\binom{2}{2}, \binom{3}{3} \ldots \binom{n-1}{n-1} = 1,$$

mert tudva van, hogy $\binom{2}{2} = \binom{3}{3} = \ldots = \binom{n-1}{n-1} = 1.$

Csekély átalakitással kimutatjuk, hogy A_0 is az egységgel egyenlő. Ez átalakitás a következő: kivonjuk a második oszlop tagjaiból az első oszlop megfelelő sorbeli tagjait; a harmadik oszlop tagjaiból az átalakitott második oszlop tagjait s igy végig az utolsó oszlopig, Az ekkép nyert determináns átlós elemei:

$$1, \binom{2}{1} - 1, \binom{3}{2} - \binom{3}{1} + 1, \binom{4}{3} - \binom{4}{2} + \binom{4}{1} - 1, \ldots\ldots$$

$$\binom{n-1}{n-2} - \binom{n-1}{n-3} + \ldots + (-1)^n, \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \ldots + (-1)^n - (-1)^n;$$

az fősor elemeinek jobb szomszédjai pedig ezek

$$1 - 1, \binom{2}{2} - \binom{2}{1} + 1, \binom{3}{3} - \binom{3}{2} + \binom{3}{1} - 1, \binom{4}{4} - \binom{4}{3} + \binom{4}{2} - \binom{4}{1} + 1,$$

$$\ldots\ldots, \binom{n-1}{n-1} - \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-3} - \ldots - (-1)^n.$$

Tekintetbe véve (lásd: Dr. König Gyula, Bevezetés a felsőbb algebrába 90 l 3 képlet.), hogy:

$$\binom{x}{x} - \binom{x}{x-1} + \binom{x}{x-2} - \binom{x}{x-3} + \ldots + (-1)^x \binom{x}{1} - (-1)^x = 0$$

és az ebből eredő

$$\binom{x}{x} = 1 = \binom{x}{x-1} - \binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-3} - \ldots - (-1)^x \binom{x}{1} + (-1)^x$$

egyenletet, azt látjuk, hogy ezen átalakitás folytán az fősor elemei az egységgel és jobboldali szomszédjai zérussal lesznek egyenlőkké, a fősor jobb oldalán levő többi tagok pedig megtartják régi, zérussal egyenlő értékeiket. Innen ered, hogy

$$A_0 = 1.$$

A harmadik $A_r = \binom{n}{r}$ egyenlet bebizonyitására végett bontsuk föl A_r determinánst az első sor tagjai szerint, mi által lesz

$$A_r = \binom{r+1}{r} \cdot \begin{vmatrix} \binom{r+2}{r+1}, \binom{r+2}{r+1}, & 0, & 0, & \ldots & 0, & 0 \\ \binom{r+3}{r+1}, \binom{r+3}{r+2}, \binom{r+3}{r+3}, & 0, & \ldots & 0, & 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot

hol A_{n+2} symbolumot

$$\begin{vmatrix} \binom{r+3}{r+2}, & \binom{r+3}{r+3}, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n-1}{r+2}, & \binom{n-1}{r+3}, & \binom{n-1}{r+4}, & \dots & \binom{n-1}{n-2}, & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n}{r+2}, & \binom{n}{r+3}, & \binom{n}{r+4}, & \dots & \binom{n}{n-2}, & \binom{n}{n+1} \end{vmatrix}$$

determináns helyett irtunk. Tovább vivén ezt a fölbontást, A_r végre e recurrens alakban áll elő:

$$A_r = \binom{r+1}{r} . A_{r+1} - \binom{r+2}{r} . A_{r+2} + \binom{r+3}{r} . A_{r+3} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-r} \binom{n-1}{r} . A_{n-1} - (-1)^{n-r} \binom{n}{r} . A_n .$$

Az utolsó A_{n-2}, A_{n-1}, A_n determinánsok értékei sorban

$$\begin{vmatrix} \binom{n-1}{n-2}, & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n}{n-2}, & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}, \quad \binom{n}{n-1}, \quad \binom{n-1}{n-1} = 1 = \binom{n}{n}$$

Egyszerü számitással kimutatható, hogy

$$A_{n-2} = \begin{vmatrix} \binom{n-1}{n-2}, & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n}{n-2}, & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix} = \binom{n}{n-2}$$

E szerint $A_r = \binom{n}{r}$ egyenletben kimondott tételünk e három esetben

$$A_{n-2} = \binom{n}{n-2}, \quad A_{n-1} = \binom{n}{n-1}, \quad A_n = \binom{n}{n}$$

igaznak bizonyul be. Tegyük föl, hogy e törvény $A_{r+1} = \binom{n}{r+1}$ egyenletig igaz, akkor A_r föntebbi, recurrens alakban kifejezett értékének segitségével bebizonyitjuk, hogy $A_r = \binom{n}{r}$ is igaz. A_r recurrens alakja e föltevések mellett:

$$A_r = \binom{r+1}{r} \cdot \binom{n}{r+1} - \binom{r+2}{r} \cdot \binom{n}{r+2} + \binom{r+3}{r} \cdot \binom{n}{r+3} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-r} \binom{n-1}{r} \cdot \binom{n}{n-1} - (-1)_{n-r} \binom{n}{r} \cdot \binom{n}{n} .$$

alakot ölt. E sornak tagjai $\binom{r+x}{r} \cdot \binom{n}{r+x}$ alakúak, honnan azok

$$x = 1, 2, 3, \ldots . n-r-1, n-r$$

értékeknél származnak. Már most

$$\binom{r+x}{r}\cdot\binom{n}{r+x} = \frac{(r+x)!}{r!\,x!}\cdot\frac{n!}{(r+x)!(n-r+x)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{x!\,(n-r-x)!}$$

azaz

$$\binom{r+x}{r}\cdot\binom{n}{r+x} = \binom{n}{n}\cdot\binom{n-r}{x}$$

és ennek folytán:

$$\begin{aligned} A_r = &\binom{n}{r}\binom{n-r}{1} - \binom{n}{r}\cdot\binom{n-r}{2} + \binom{n}{r}\cdot\binom{n-r}{3} - \ldots \\ &\ldots . + (-1)^{n+r}\binom{n}{r}\cdot\binom{n-r}{n-r-1} - (-1)^{n-r}\binom{n}{r}\cdot\binom{n-r}{n-r} \\ = &\binom{n}{r}\cdot\left[\binom{n-r}{1} - \binom{n-r}{2} + \binom{n-r}{3} - \ldots \right. \\ &\left. \ldots + (-1)^{n-r}\binom{n-r}{n-r-1} - (-1)^{n-r}\binom{n-r}{n-r}\right], \end{aligned}$$

tehát

$$A_r = \binom{n}{r},$$

mert

$$\begin{aligned} &\binom{n-r}{1} - \binom{n-r}{2} + \binom{n-r}{3} - \ldots\ldots + (-1)^{n-r}\binom{n-r}{n-r-1} \\ &\qquad - (-1)^{n-r}\binom{n-r}{n-r} = 1 . \end{aligned}$$

Ezen előzmények után áttérünk a tétel bebizonyitására. Jelöljük

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots . & 0 \\ x, & 1, & 1, & 0, & 0, & \ldots . & 0 \\ x^2 & 1, & \binom{2}{1}, & \binom{2}{2} & 0, & \ldots . & 0 \\ x^3 & 1, & \binom{3}{1}, & \binom{3}{2}, & \binom{3}{3} & \ldots . & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^n, & 1, & \binom{n}{1}, & \binom{n}{2}, & \binom{n}{3} & \ldots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

determinánst rövidség kedvéért S betüvel és bontsuk azt föl az első oszlop tagjai szerint, akkor ered

$$S = A_0 - A_1 x + A_2 x^2 - \ldots + (-1)^r A_r x^r + \ldots + (-1)^n A_n x_n.$$

Itt A_0 és A_n az előbbiben ugyanazon betükkel jelöl determinánsok, tehát $A_0 = 1$, $A_n = 1$. Továbbá

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots & 0, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\ 1, & 1, & 0, & 0, & \ldots & 0, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \binom{r-1}{1}, & \binom{r-1}{2}, & \binom{r-1}{3}, & \ldots & \binom{r-1}{r-1}, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\ 1, & \binom{r+1}{1}, & \binom{r+1}{2}, & \binom{r+1}{3}, & \ldots & \binom{r+1}{r-1}, & \binom{r+1}{r}, & \binom{r+1}{r+1}, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \binom{n}{1}, & \binom{n}{2}, & \binom{n}{3}, & \ldots & \binom{n}{r-1}, & \binom{n}{r}, & \binom{n}{r-1}, & \ldots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

E determinánsban $1, 1, \binom{2}{2}, \binom{3}{3}, \ldots \binom{r-1}{r-1}$ fősorbeli elemeknek jobb oldalán levő elemek mind elenyésznek, azért A_r determináns

$$1.\ 1.\binom{2}{2}\ldots\binom{r-1}{r-1}\cdot\begin{vmatrix} \binom{r+1}{r}, & \binom{r+1}{r+1}, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{n}{r}, & \binom{n}{r+1}, & \ldots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

szorzattal egyenlő vagy tekintettel lévén a bebizonyitotr harmadik egyenletre

$$A_r = \binom{n}{r}.$$

Innen következik, hogy S determináns fentebbi felbontása

$$1 - \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 - \ldots, + (-1)^r \binom{n}{r} x^r + \ldots + (-1)^n x^n,$$

a mi tudvalevőleg $(1-x)^n$ sorba fejtett értéke.

A feladat megfejtését beküldötték még *Bäumel Ede*, *Farkas Gyula* és *Klug Lipót* urak.

FÖLADATOK.

23. Vezettessék le elemi úton a physikai inga szögsebességének legnagyobb értékére szolgáló képlet, t. i,:

$$\frac{w_m^2}{2} = \frac{Mg \,.\, s}{\Sigma m r^2} \sin^2 \varepsilon$$

hol w_m a keresett szögsebesség, M az inga egész tömege, m az inga valamely pontjának tömege, r ugyanannak távola a forgástengelytől, s az inga tömegközéppontjának távola ugyanattól, ε pedig az inga középvonalának — a tömeg-középponttól a forgás-tengelyre bocsátott merőlegesnek — legnagyobb kihajlása a függélyestől. (Farkas Gyula.)

24. Kerestetik azon gömbfelület egyenlete, mely az r_1, r_2, r_3, r_4 sugarakkal tetszőleges középpontokból leírt gömböket φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 szögök alatt metszi. (Hunyady.)

A szerkesztőség levelezése.

B. N. úr a következő föladatot tárgyaló czikket küldött be: *a háromszöget a három adott magasságból szerkeszteni.* A feladat megoldása egy néhány pontjából rajzolandó görbe segítségével történik, mely görbének jelleme azonban épen nem tárgyaltatik. Mielőtt az ily — szigorú mathematikai igényeknek meg nem felelő — tisztán graphikus módszerhez folyamodunk, mindig szükséges vizsgálni azt, vajjon az illető föladat nem tárgyalható-e ily segédeszközök nélkül. Az adott esetben a háromszög valóban egészen elemi úton megszerkeszthető és kiszámítható, a mint ezt különben számos tankönyvben található. Legyen ugyanis x_1, x_2, x_3 a háromszög három oldala, h_1, h_2, h_3 mindig a megfelelő magasság; akkor:

$$x_1 h_1 = x_2 h_2 = x_3 h_3$$

á háromszög kétszeres területe; tehát:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3}.$$

Ez tehát mutatja, mikép lehet oly háromszöget szerkeszteni, mely a keresetthez hasonló, ettől pedig átmehetünk arra, melynek az eredetileg megkivánt méretei vannak.

V. F. úr *az m tagból álló polynom n-edik hatványában előforduló tagok számát* határozza meg egy számunkra beküldött czikkben, mely föladat az irodalomban, legalább a közönséges tankönyvekben nem fordúlna elő. A meghatározás egészen helyes; de pillanatnyi meggondolás mutatja, hogy a keresett tagszám nem lehet más mint az m elemből ismétléssel képezhető n tagú combinatiók száma.

A „Műegyetemi Lapok“ I. kötetének tartalma.

I.

(A szerzők neve betürendje szerint.)

Bäumel Ede, Néhány végtelen sor összeadása elemi úton, 53.

— — megoldja a 3, 4, 7, 9, 14, 15, 17. számú feladatot, 121, 94, 185, 160, 255, 287, 315.

Bein Károly, A »Nouvelles Annales« egy főladata. 86.

Császár Károly, megoldja az 1. számu feladatot, 60.

Deregnyey Géza, megoldja a 8. számú feladatot, 156.

Detsinyi Lajos, megoldja a 9. számu feladatot, 158.

B. Eötvös Loránd, Új módszer a capillaritási tünemények tanulmányozására, 2.

— — megismerteti *Riemann* »Schwere, Elektricität und Magnetismus» czimű művét, 56.

— — kitüzi a 8, 20 számú feladatot, 95, 288, 315.

Farkas Gyula, megoldja a 15, 16. számú feladatot, 286.

— — kitüzi a 23. számú feladatot.

Fölser István, Kúpszeletek központi vetületben (két kőnyomatú táblával), 36. — A másodrendű felületek körmetszéseinek constructiv meghatározása (egy kőnyomatú táblával) 161.

Fördös Géza, közöl egy régi magyar észleletet, 49.

Fröhlich Izor. Észrevételek Maxwell elektromagnetikus fény-elméletéhez. 225. — Az elhajlított fény polarisatiója, 289.

Gonda Béla, megismerteti Morin nyomán Révy »Hydraulics of great Rivers« czimű művet, 217.

Heller Ágost, megismerteti Bessel »Abhandlungen« czimű művet, 88.

Herrmann Emil, A testek fajhevéről és hőfoghatóságáról, 116.

Hunyady Jenő, Desargues tétele a perspectiv háromszögekről. 81. — A determinánsok elméletéhez, 179. — A determinánsok alkalmazása a mértanban (Két czikk) 232, 257.

— — megismerteti *Hankel* »Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung, 31; *Steiner* »Vorlesungen über synthetische Geometrie I-ter Theil, 31; *Clebsch* »Vorlesungen über Geometrie, 57; *Hesse* »Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, 3-te Auflage, 253; *Steiner* »Vorlesungen über synthetische Geometrie, II-ter Theil, 282.

— — kitüzi az 1, 6, 13, 24. számu feladatot, 32, 64, 160, 315.

— — megoldja a 3. számú feladatot, 125.

Klug Lipot, Nehány a confocális kúpszelet-sereggel kapcsolatos mértani helyről, 229.

— — megoldja az 1, 4, 6, 15, 16. számu feladatot, 61, 94, 94, 287, 315.

Kohn Gyula, A villanyszikra sikamlásáról. 144.

König Gyula, Az *n*-ed foku algebrai egyenletek egy általános megfejtéséről (Két czikk.) 20, 112. — Megjegyzés Laurent tételéhez, 88. — Az egész számok osztóira vonatkozó tétel, 181.

— — megismerteti *Todhunter* »An elementary treatise on Laplace's functions, Lamé's functions and Bessel's functions, 92;

— — kitüzi a 2, 3, 11, 12, 15, 16, 17, 19, 21. számú feladatot, 32, 32, 128, 128, 224, 224, 224, 256, 288.

Krenner József Sándor, Az ehrenfriedersdorfi plinián, 129. l. — Kristályjelzési javaslat, 297.

Kruspér István, A graphikai háromszögelés által felvett pontok összrendezőinek megmérése a szelvény-négyszögben, 33. —

Lengyel Béla, A köneny színképéről (egy könyomatu táblával) 65.

Nagy Dezső, Az egyenes vezetésről, 10. — Valami a telített gőzökről, 263. —

— — kitüzi a 9. számu feladatot, 96.

Pilch Ágoston megismerteti a mechanikai technologia újabb irodalmát, 280.

Pillitz Vilmos, A gallium egy új elem, 142.

Renner János, megoldja az 5-ik számú feladatot, 306.

Réthy Mor, közli a 7. számú feladatot, 64.

Schmidt Sándor, Coelestin Romagnából, 209.

Scholtz Ágoston megoldja a 6, 16. számú feladatot, 93, 310.

Schrader Károly, megoldja a 15, 16. számú feladatot, 287. 287

Schuller Alajos, A mérlegről (Négy czikk.) 97, 135, 199, 267.

— — kitüzi az 5. számú feladatot, 32.

Simandl Samu megoldja a 8, 14. számú feladatot, 157, 255.

Szikay Béla megoldja a 10, 14. számú feladatot, 191, 255.

Szily Kálmán, A propeller-csavar elméletéhez, 41. — Lehet-e a melegített vízgőz belső munkája negativ, 118. — A hőelméletben előfordúló mennyiségek dynamikai jelentéséről, (Két czikk.) 165, 239. — A viriálról, 209. — A melegség terjedésének sebessége vasrúdban, 216. — A XVI. századi magyar arithmetikák, 252. — A legrégibb magyar arithmetika, 277. —

— — megismerteti *Waltenhofen* »Grundriss der allgemeinen mechanischen Physik« 28; *Herrmann Emil* értekezését »A testek fajhevéről és hőfoghatóságáról,« 84; *Neumann* »Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme, 150; *Kirchhoff* »Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik.« 183.

— — kitüzi a 4, 10, 14, 18. számú feladatot, 32, 96, 160, 256.

Szokolay István ismerteti Cantor »Die römischen Agrimensoren« czimü müvét, 302.

Szüts Béla, A magyar mathematikai irodalom k zdete, 183.

Szüts Ferencz, Dugonics és az első magyar mennyiségtan, 212.

Vályi Gyula, megoldja a 3, 12 számú feladatot, 153, 221.

Wartha Vincze, A nyomás befolyása az égési tüneményekre, 13. — A szőlő czukor fajlagos forgató képessége, 51. — A Malligand-féle ebulioskop 147. — A Síkes-féle hydrométer, 148. —

— — megismerteti *Boussingault* »Études sur la transformation du fer en acier par la cémentation,« 120.

Winter József, megoldja az 1, 2, 4. számú feladatot, 62, 62, 95.

Wohlrab Flóris, Egy számelméleti játék, 52. — Az erők összetételéről a statikában (Darboux után), 193.

II.

Ismertetett munkák.

	Lap.
Bessel Fr. W. Abhandlungen, 1. Band (Heller Ágost)	88
Boussingault, Études sur la transformation du fer en acier (W. V.) .	120
Cantor M., Die römischen Agrimensoren etc. (Szokolay Istv.) . . .	302
Clebsch A., Vorlesungen über Geometrie, I. B. 1. Th. (H. J.) . . .	57
Hankel H., Elemente der projectivischen Geometrie (H. J.) . . .	31

Hesse O., Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes (H. J.) 253
Kirchhoff G., Vorlesungen über math. Physik. Mechanik. (Sz. K.) . 283
Neumann C., Vorlesungen über die mech. Theorie der Wärme (Sz. K.) 150
Révy J. J., Hydraulics of great rivers etc. (Gcnda Béla) 217
Riemann B., Schwere Elektricität und Magnetismus (Eö. L.) . . . 56
Steiner J., Vorlesungen über synthetische Geometrie, 1. Theil (H. J.) 31
— — — » » » » 2. » (H. J.) 282
Todhunter, Elementary treatise on Laplace's, Lamé's and Bessel's functions (K. Gy.) 92
Waltenhofen A., Grundriss der allgemeinen mechan. Physik (Sz. K.) 28

III.

Kitüzött és megoldott föladatok.

(A zárjelbe tett számok a már közzétett megoldásokra utalnak.)

Számelmélet: 1, (62) 21. *Egyenletek elmélete:* 11. 12. (221.) *Determinánsok:* 15. (286.) 16. (287.) 17. *Végtelen sorok:* 19. *Variátiószámitás:* 18.

Mértan: 1. (60. 61.) 3. (121. 125. 153.) 6. (93.) 14. 24.

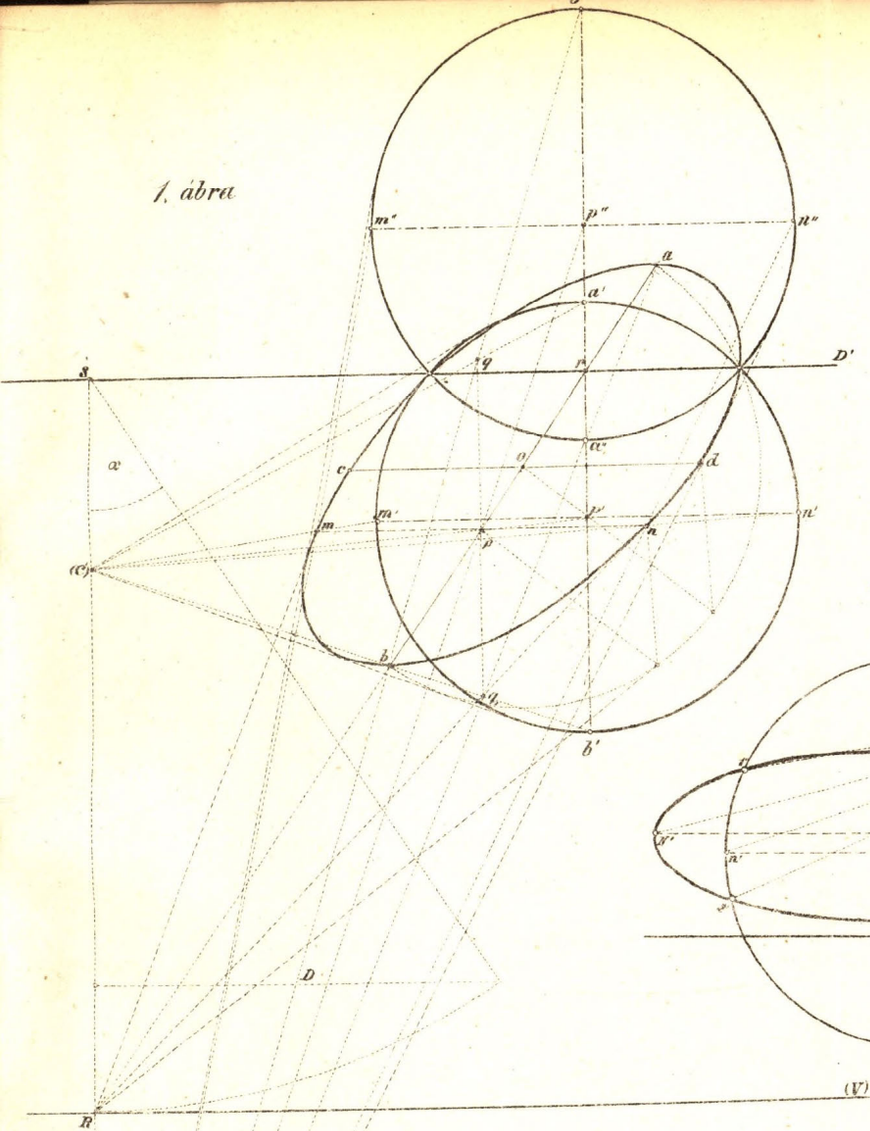
Mechanika és mathematikai természettan: 4. (94.) 7. (185.) 8. (156.) 9. (158.) 10. (191.) 14. (254.) 20. 22. 23.

Kisérleti természettan: 5. (306.)

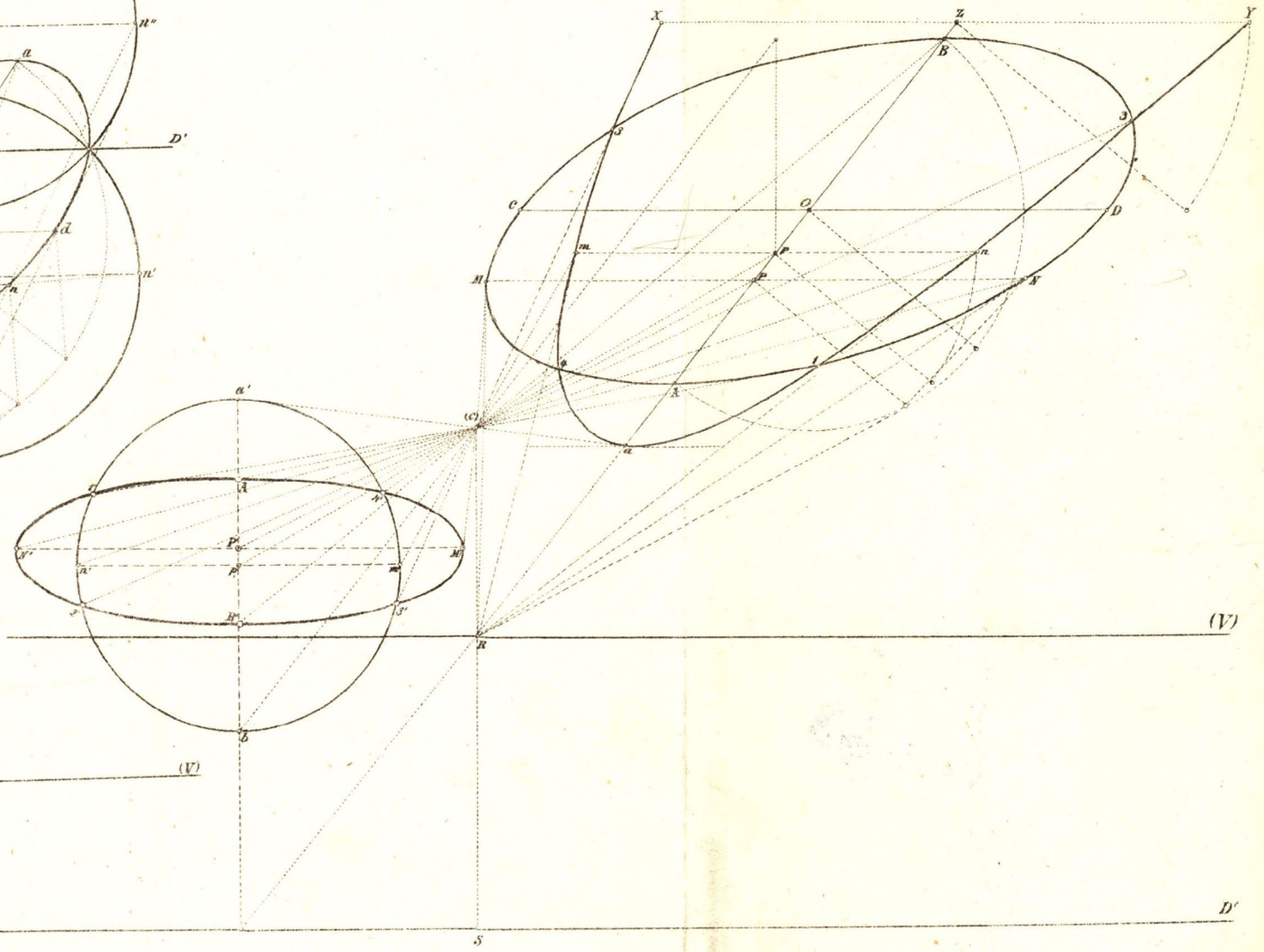


Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

1. ábra

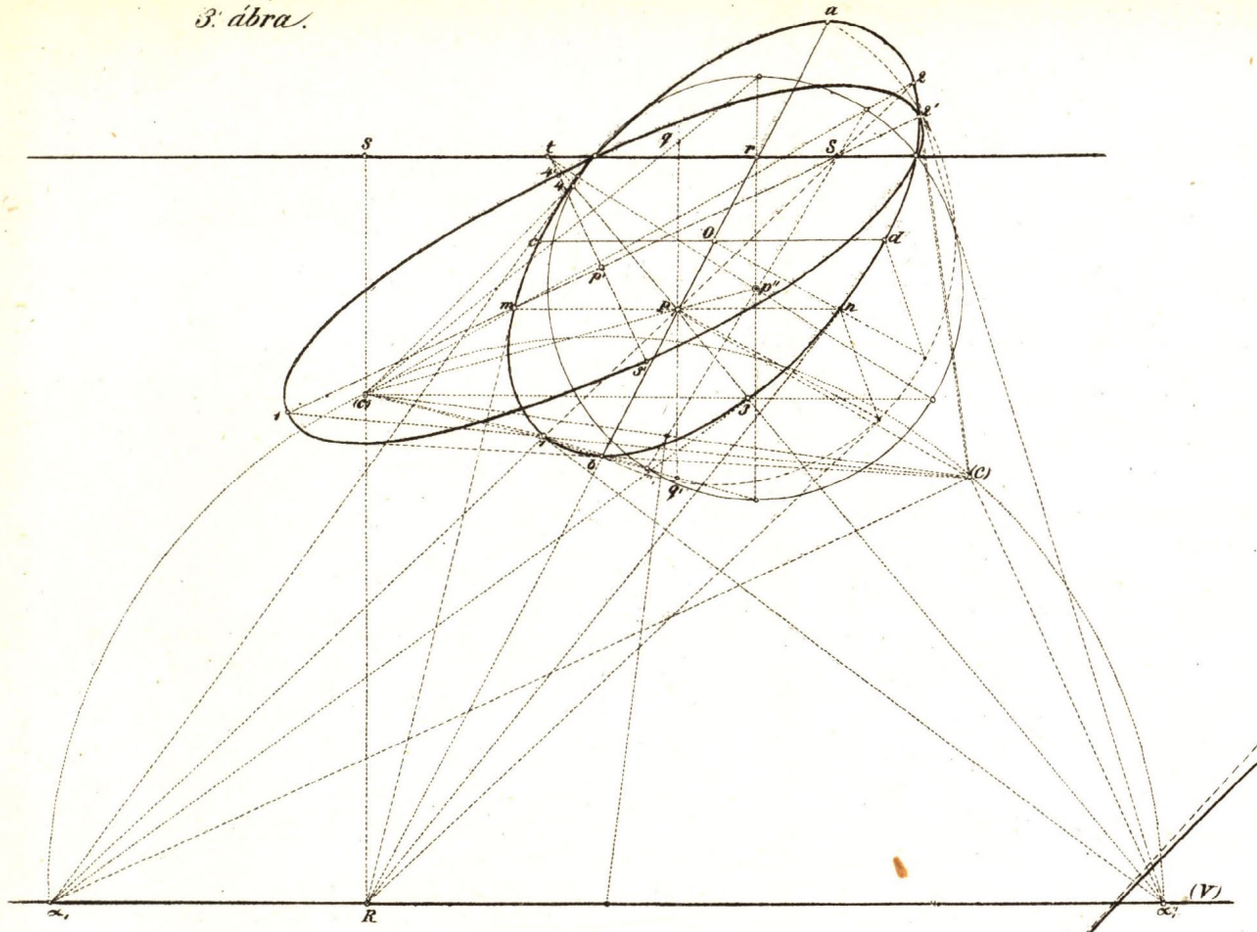

m''
p''
n''
a
a'
q
p
D'
S
α
c
o
a''
d
m
m'
p'
n
n'
(C)
b
q₁
b'
D
R
(V)

2. ábra.

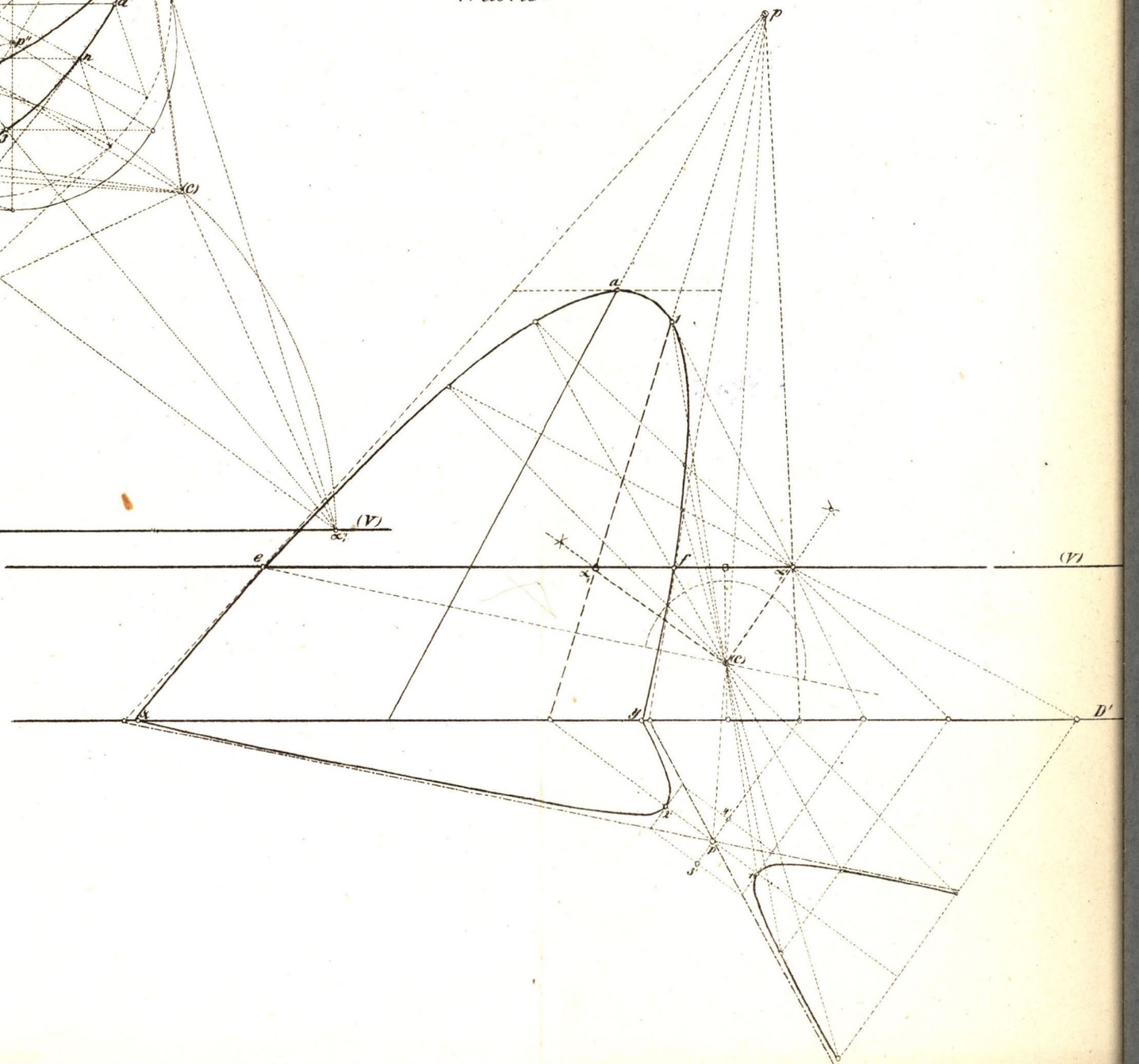

X
Z
Y
B
3
C
O
D
m
P
n
M
N
p
1
A
a
(C)
a'
A'
N'
P'
n'
p'
m'
M'
3'
B'
b
(V)
R
D'
S

M. T. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

3. ábra.

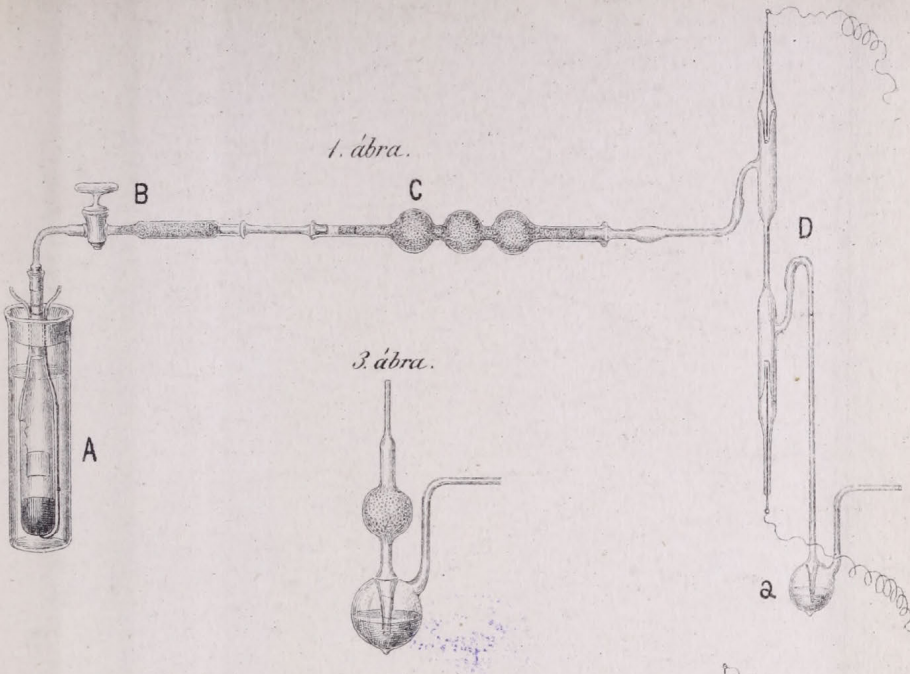


4. ábra.



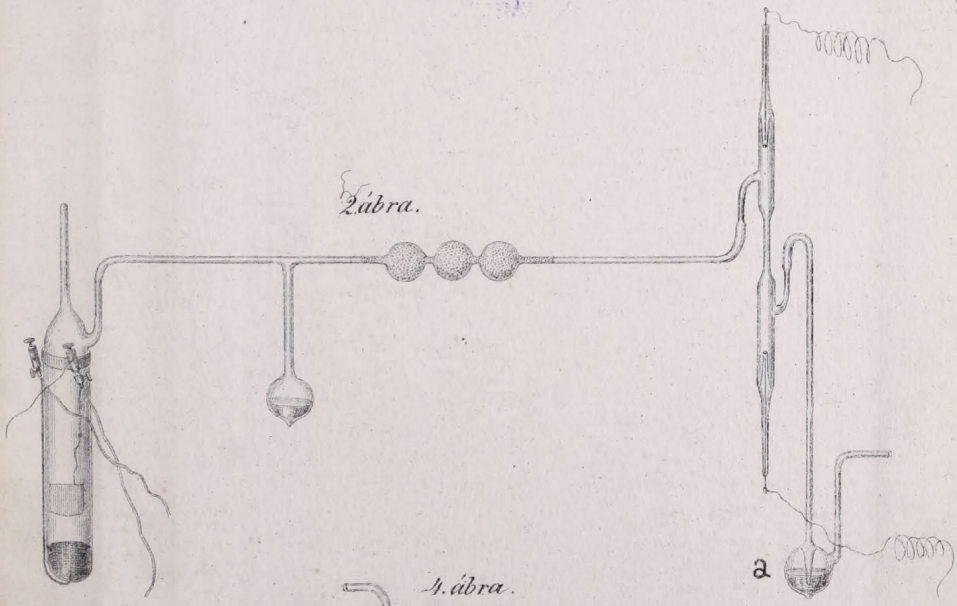
M. T. AKAD. KÖNYV-TÁRA

1. ábra.

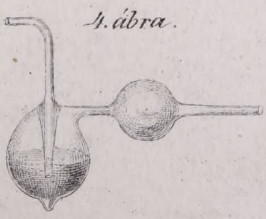


3. ábra.

2ábra.

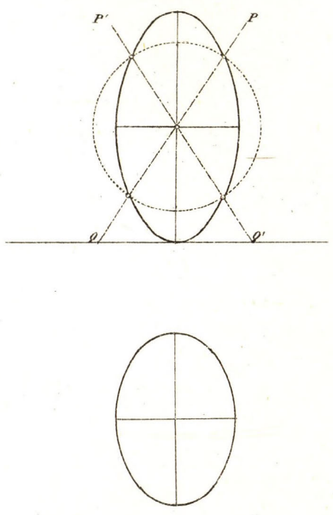


4. ábra.



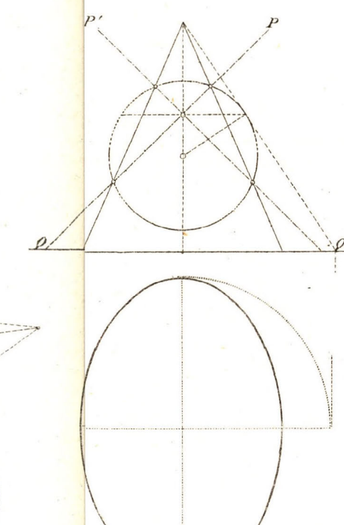
M. T. AKADÉMIA KÖNYV-TÁRA

1. ábra.

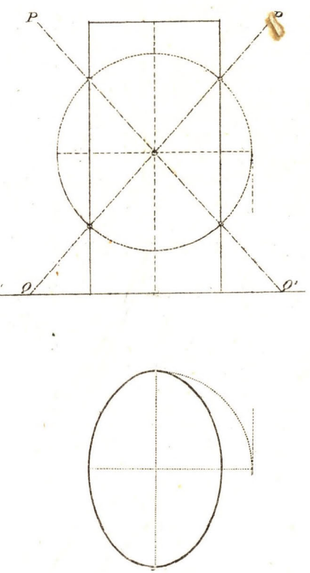


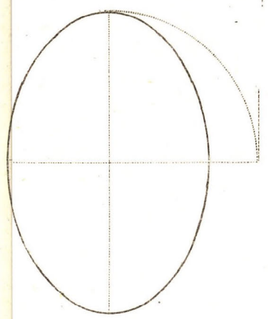
2. ábra

5. ábra.

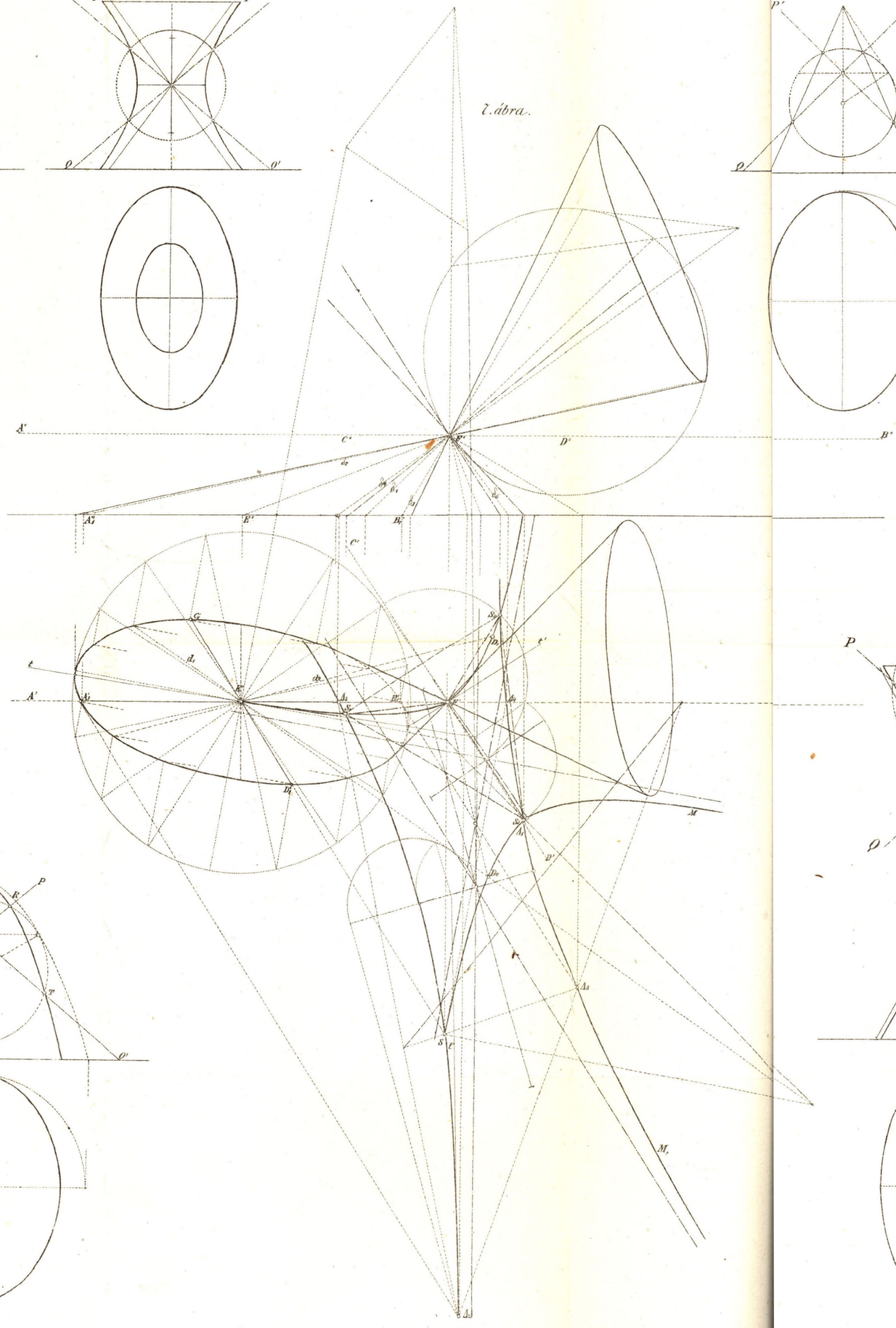


6. ábra

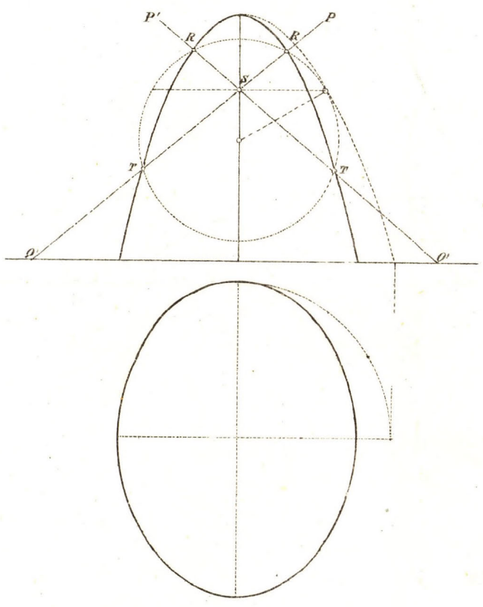




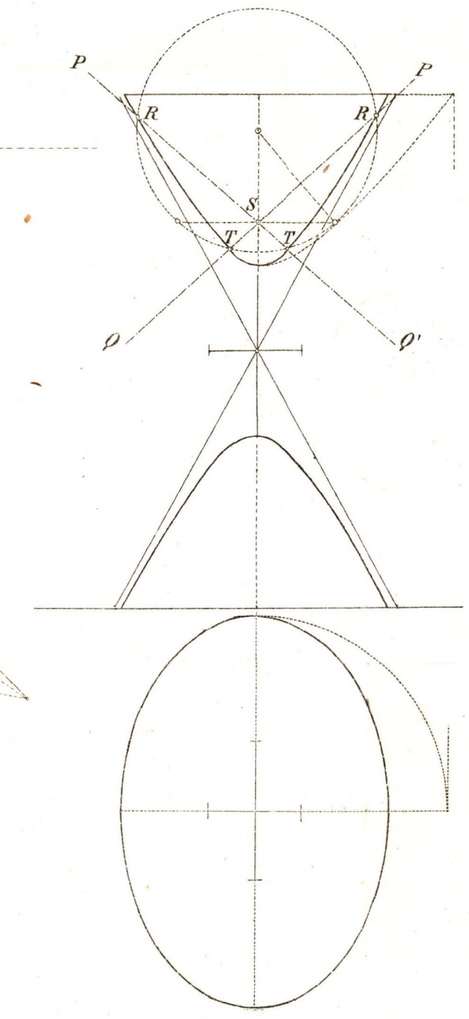
7. ábra.



3. ábra



4. ábra



MTA KÖNYVTÁRA