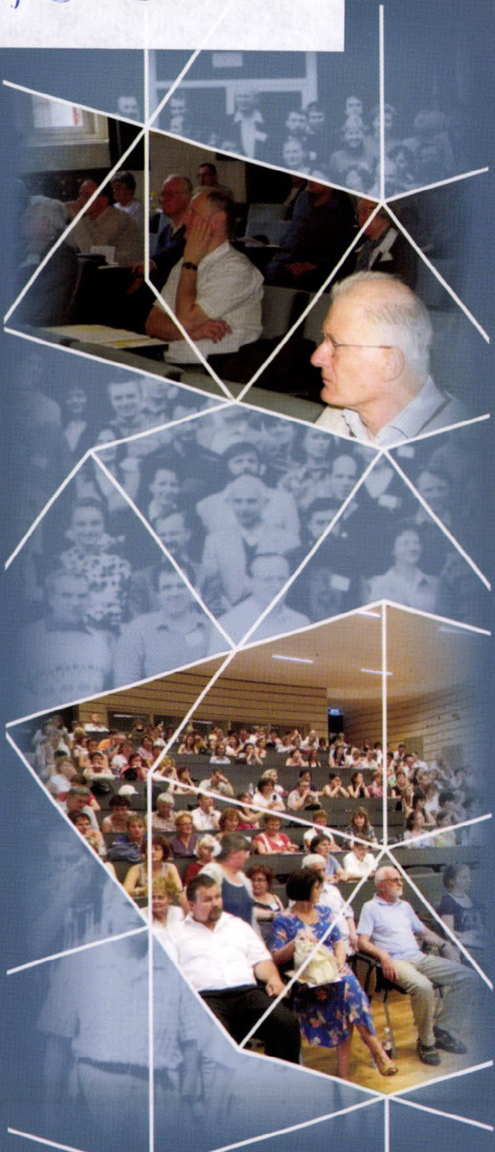
Matematikai Lapok



2012/1

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 18. évfolyam (2012), 1. szám

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

MAXIMÁLIS HALMAZRENDSZEREK KIZÁRT POSETEKKEL

BURCSI PÉTER, NAGY T. DÁNIEL

Ha P egy véges poset (részbenrendezett halmaz), akkor $\mathrm{La}(n, P)$ jelöli az $[n]$ alaphalmaz részhalmazaiból álló legnagyobb olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszer elemszámát, ami nem tartalmazza P-t részposetként. Meghatározzuk $\mathrm{La}(n, P)$ értékét végtelen sok P esetén. Ezek olyan posetek lesznek, amelyek hét elemi posetből építhetők fel két művelet segítségével. Felső korlátot adunk $\mathrm{La}(n, P)$-re tetszőleges P esetén, ez P elemszámától és a leghosszabb láncának méretétől függ majd. Mindezekhez bevezetünk egy új módszert, $\mathcal{F}$-nek nem a láncokkal, hanem az úgynevezett vastag láncokkal vett metszeteit vizsgáljuk.

1. Bevezetés

Az $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ véges alaphalmaz részhalmazaiből álló, valamilyen tartalmazási konfigurációtól mentes $\mathcal{F}$ halmazrendszereket vizsgálunk.

Definíció. Legyen P egy véges poset, $\mathcal{F}$ pedig az $[n]$ részhalmazaiból álló halmazrendszer. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ tartalmazza P-t, ha valamilyen $f : P \to \mathcal{F}$ injektív leképezésre teljesül $a < b \Rightarrow f(a) \subset f(b)$ minden $a, b \in P$ esetén. Ha $\mathcal{F}$ nem tartalmazza P-t, akkor P-mentesnek nevezzük.

Legyen $\mathrm{La}(n, P)$ az $[n]$ részhalmazaiból álló legnagyobb P-mentes halmazrendszer elemszáma.

Ne feledjük, hogy P-t nem feszített részposetként keressük, tehát $\mathcal{F}$ elemei több relációt is teljesíthetnek, mint P elemei. A célunk az, hogy meghatározzuk $\mathrm{La}(n, P)$ értékét minél több poset esetén. Az első ilyen jellegű tétel Spernertől származik, amit Erdős általánosított.

1.1. tétel (Sperner) [8]. *Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ alaphalmaz részhalmazaiból álló halmazrendszer. Ha $\mathcal{F}$ egyik eleme sem részhalmaza egy másiknak, akkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{1}$$

1.2. tétel (Erdős) [3]. *Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ alaphalmaz részhalmazaiból álló halmazrendszer. Ha nincs $\mathcal{F}$-nek $k+1$ olyan eleme, amelyekre $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_{k+1}$ teljesül ($k \leq n$), akkor $|\mathcal{F}|$ legfeljebb annyi, mint a k legnagyobb n szerinti binomiális együttható összege. Ez a korlát nem javítható, hiszen választhatjuk azokat az F halmazokat, amikre $\left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor \leq |F| \leq \left\lfloor \frac{n+k-1}{2} \right\rfloor$.*

Mivel sok P poset esetén fog a legnagyobb P-mentes halmazrendszer az összes $n/2$-höz közeli méretű részhalmazból állni, célszerű bevezetni a következő jelölést.

Jelölés. $\Sigma(n,m) = \sum_{i=\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n+m-1}{2} \rfloor} \binom{n}{i}$ jelöli az m legnagyobb n szerinti binomiális együttható összegét.

Fogalmazzuk át az 1.2. tételt. Legyen P_{k+1} a $k+1$ elemű lánc poset. Ekkor

$$\mathrm{La}\,(n, P_{k+1}) = \Sigma(n,k). \tag{2}$$

Most bebizonyítjuk az 1.2. tételt. Nem Erdős eredeti bizonyítását mutatjuk be, hanem Lubell láncokat használó módszerét alkalmazzuk [7].

Bizonyítás (1.2. tétel). Láncnak nevezzük az $[n]$ alaphalmaz $n+1$ olyan részhalmazából álló halmazt, amire $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n$ és $|L_i| = i$ teljesül minden $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ esetén. Összesen $n!$ lánc van. Kettős leszámlálást alkalmazunk az olyan (C, F) párokra, ahol C egy lánc, $F \in C$ és $F \in \mathcal{F}$.

Egy adott $F \in \mathcal{F}$ részhalmazon összesen $|F|!(n - |F|)!$ lánc megy át. Tehát a párok száma

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} |F|!(n - |F|)!\,.$$

Egy lánc legfeljebb k darab $\mathcal{F}$-beli elemet tartalmazhat, különben megjelenne egy P_{k+1} poset. Tehát legfeljebb $k \cdot n!$ pár van. Ez alapján

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} |F|!(n - |F|)! \leq k \cdot n! \tag{3}$$

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|F|}} \leq k. \tag{4}$$

Ha $|\mathcal{F}|$-et rögzítettnek tekintjük, (3) bal oldala akkor minimális, ha a halmazok mérete a lehető legjobban megközelíti $n/2$-t. Kiválasztva azt a $\Sigma(n,k)$ részhalmazt, amire $\left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor \leq |F| \leq \left\lfloor \frac{n+k-1}{2} \right\rfloor$, egyenlőséget kapunk. Tehát

$$\mathrm{La}\,(n, P_{k+1}) = \Sigma(n,k). \quad \blacksquare \tag{5}$$

Már sok posetre sikerült aszimptotikusan meghatározni $\mathrm{La}\,(n, P)$ értékét, azonban a pontos érték csak néhány P esetén ismert (lásd [6] és [5]).

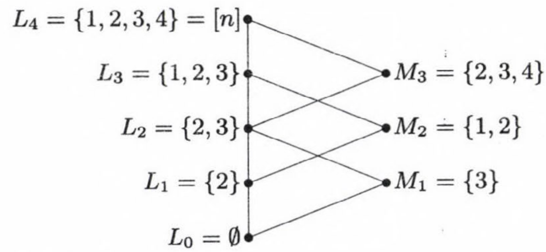
2. A módszer alapjai

A célunk az, hogy pontosan meghatározzuk $\mathrm{La}(n, P)$-t végtelen sok P posetre. Ehhez a fenti módszer egy változatát alkalmazzuk, láncok helyett vastag láncokat használva.

Definíció. Legyen $C: L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n$ egy lánc. A C-hez tartozó vastag lánc az a $D = \{L_0, L_1, \ldots, L_n, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}\}$ halmaz, ahol $M_i = L_{i-1} \cup (L_{i+1} \backslash L_i)$.

Ekkor $|M_i| = |L_i| = i$, $i < j \Rightarrow L_i \subset L_j$, $L_i \subset M_j$, $M_i \subset L_j$ és $i + 1 < j \Rightarrow M_i \subset M_j$.

$\{L_0, L_1, \ldots, L_n\}$-et a D vastag lánc főszálának, az $\{M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}\}$ halmazt a vastag lánc mellékszálának nevezzük. $\mathcal{D}$ jelöli az összes vastag lánc halmazát ($|\mathcal{D}| = n!$).



1. ábra. Az $\emptyset \subset \{2\} \subset \{2,3\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$ *lánchoz tartozó vastag lánc*

2.1. lemma. *Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ részhalmazaiból álló halmazrendszer ($n \geq 2$), és legyen m pozitív valós szám. Tegyük fel, hogy*

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} |\mathcal{F} \cap D| \leq 2m \cdot n! . \tag{6}$$

Ekkor

$$|\mathcal{F}| \leq m \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{7}$$

Ha m egész és $m \leq n - 1$, akkor az alábbi erősebb becslés is igaz:

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, m). \tag{8}$$

Bizonyítás. Először számoljuk meg azt, hogy hány vastag lánc metsz egy adott $F \subseteq [n]$ halmazt. $\emptyset$ és $[n]$ benne vannak mind az $n!$ vastag láncban. Tegyük fel, hogy $F \notin \{\emptyset, [n]\}$. Ekkor $|F|!(n - |F|)!$ vastag lánc tartalmazza F-et a főszálában, hiszen ennyi lánc megy át rajta. Most számoljuk meg, hány vastag lánc tartalmazza F-et a mellékszálában. Legyen $F = M_{|F|}$, ekkor $|F| \cdot (n - |F|)$-féleképpen választhatjuk meg $L_{|F|}$-et, mivel ki kell cserélnünk $M_{|F|}$ egyik elemét egy újra. $M_{|F|}$ és

$L_{|F|}$ egyértelműen meghatározzák $L_{|F|-1}$-et és $L_{|F|+1}$-et. Ezután $(|F|-1)!$, illetve $(n-|F|-1)!$ módon választhatjuk meg a főszál elejét és végét. F-et a mellékszálukban tartalmazó vastag láncok száma tehát $|F|(n-|F|)(|F|-1)!(n-|F|-1)! = |F|!(n-|F|)!$. Tehát F-et összesen $2|F|!(n-|F|)!$ vastag lánc tartalmazza.

Legyen $t = \big|\mathcal{F} \cap \{\emptyset, [n]\}\big|$. Alkalmazzunk kettős leszámlálást a (D, F) párokra, ahol $D \in \mathcal{D}$, $F \in D$ és $F \in \mathcal{F}$.

$$t \cdot n! + \sum_{F \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset, [n]\}} 2|F|!(n-|F|)! \leq 2m \cdot n! , \tag{9}$$

$$t \cdot \frac{1}{2} + \sum_{F \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset, [n]\}} \frac{1}{\binom{n}{|F|}} \leq m. \tag{10}$$

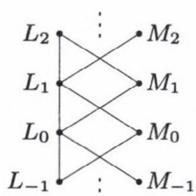
Mivel $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ a legnagyobb n szerinti binomiális együttható, és $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq 2$, a következő adódik:

$$\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq m. \tag{11}$$

Ezzel igazoltuk (7)-et. Ha m egész, $m \leq n-1$, és $|\mathcal{F}|$-et rögzítettnek tekintjük, (9) bal oldala akkor minimális, ha olyan részhalmazokat választunk, amiknek a mérete a lehető legközelebb esik $n/2$-höz. $\Sigma(n, m)$ ilyen részhalmazt véve, (9)-ben egyenlőség áll. Ezért $|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, m)$, tehát (8) is igaz. ∎

Definíció. A végtelen vastag lánc egy olyan poset, melynek elemei L_i, $i \in \mathbb{Z}$ és M_i, $i \in \mathbb{Z}$, definiáló relációi pedig

$$i < j \Rightarrow L_i \subset L_j, \quad L_i \subset M_j, \quad M_i \subset L_j.$$



2. ábra. A végtelen vastag lánc

Tetszőleges vastag lánc elemeiből a tartalmazással, mint relációval képzett poset részposete a végtelen vastag láncnak.

2.2. lemma. *Legyen m egész szám, vagy egy egész fele, P pedig egy véges poset. Tegyük fel, hogy a végtelen vastag lánc bármely $2m+1$ eleme tartalmazza P-t. Legyen $\mathcal{F}$ egy $[n]$ részhalmazaiból álló P-mentes halmazrendszer. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq m \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{12}$$

Ha m egész és $m \leq n-1$, akkor az alábbi erősebb becslés is igaz:

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, m). \tag{13}$$

Bizonyítás. Mivel a vastag láncok elemeiből álló poset részposete a végtelen vastag láncnak, $|\mathcal{F} \cap D| \leq 2m$ minden $D \in \mathcal{D}$-re. Összesen $n!$ vastag lánc van, tehát

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} |\mathcal{F} \cap D| \leq 2m \cdot n!. \tag{14}$$

A 2.1. lemmát használva készen vagyunk. ∎

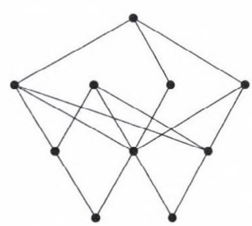
Megjegyzés. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a végtelen vastag lánc tetszőleges 5 elemét kiválasztva, két-két elem pirosra, illetve kékre színezhető úgy, hogy a pirosak nagyobbak legyenek a kékeknél. Tehát ha B jelöli azt a négyelemű posetet, amelynek definiáló relációi $a_1 < b_1$, $a_1 < b_2$, $a_2 < b_1$ és $a_2 < b_2$ (lásd 4. ábra), akkor a 2.2. lemma szerint $n \geq 3$ esetén

$$\mathrm{La}\,(n, B) \leq \Sigma(n, 2). \tag{15}$$

(15)-ben egyenlőség áll, mivel választhatjuk az összes $\lfloor n/2 \rfloor$ és $\lfloor n/2 + 1 \rfloor$ elemű részhalmazt. Ezzel új bizonyítást nyertünk De Bonis, Katona és Swanepoel tételére, mely szerint $\mathrm{La}\,(n, B) = \Sigma(n, 2)$, ha $n \geq 3$. Az eredeti bizonyítás a körmódszeren alapszik [2].

3. Felső becslés általános posetekre

Definíció. A P véges poset leghosszabb láncának a hossza az a legnagyobb $L(P)$ szám, amire valamely $a_1, a_2, \ldots, a_{L(P)} \in P$ esetén $a_1 < a_2 < \ldots < a_{L(P)}$ teljesül.



3. ábra. Egy poset, aminek $|P| = 10$ eleme van, és a leghosszabb lánca $L(P) = 4$ hosszú

3.1. tétel. *Legyen P egy véges poset, és legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ részhalmazaiból álló P-mentes halmazrendszer. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \left(\frac{|P| + L(P)}{2} - 1 \right) \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{16}$$

Ha $\frac{|P|+L(P)}{2} - 1$ egész szám és $\frac{|P|+L(P)}{2} \leq n$, akkor a következő erősebb becslés is igaz:

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma \left(n, \frac{|P| + L(P)}{2} - 1 \right). \tag{17}$$

Bizonyítás. A 2.2. lemmát akarjuk használni $m = \frac{|P|+L(P)}{2} - 1$-gyel. Tehát elég a következő lemmát bizonyítani.

3.2. lemma. *Legyen P egy véges poset. Ekkor a végtelen vastag lánc minden $|P| + L(P) - 1$ elemű S részposete tartalmazza P-t.*

Bizonyítás. A lemmát $L(P)$ szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $L(P) = 1$, akkor S egy $|P|$ elemű részposete a végtelen vastag láncnak. Kiválaszthatjuk mindet, így P-t kapunk, mivel P elemei közt nincsenek relációk. Tegyük fel, hogy beláttuk a lemmát minden olyan véges posetre, amiben a leghosszabb lánc hossza $l - 1$, és lássuk be egy olyan P-re, amire $L(P) = l$.

Rendezzük sorba a végtelen vastag lánc elemeit a következőképpen:

$$\ldots L_{-1}, M_{-1}, L_0, M_0, L_1, M_1, L_2, M_2 \ldots .$$

Tegyük fel, hogy P-nek k minimális eleme van, és válasszuk ezeknek S első k elemét a fenti sorrend szerint. Vegyük észre, hogy S összes további eleme, esetleg egy kivétellel, nagyobb a végtelen vastag láncban a már kiválasztott k elem mindegyikénél. Ha van ilyen kivétel, töröljük azt S-ből. Ezután S-nek legalább $|P| + L(P) - k - 2$ eleme marad, mind nagyobbak annál a k-nál, amit a minimális elemeknek választottunk. Jelölje S' ezen elemek halmazát.

Legyen P' az a poset, ami P-ből marad a minimális elemek törlése után. Ennek $|P'| = |P| - k$ eleme van, és a leghosszabb lánca $L(P') = L(P) - 1$ hosszú. Az indukciós feltétel szerint S' néhány eleme P'-t alkot, mivel $|S'| \geq |P| + L(P) - k - 2$ $= |P'| + L(P') - 1$. Ezekhez az elemekhez hozzávéve az eredeti k-t, egy P posetet kapunk S elemeiből. ■

Megjegyzés. Az eddig ismert legjobb felső becslés P-mentes halmazrendszerek elemszámára általános P esetén $\Sigma(n, |P| - 1)$ volt. Ez az 1.2. tételből következik, mivel P részposete a $P_{|P|}$ lánc posetnek. Az új felső korlát megegyezik ezzel a lánc posetek esetén, azonban erősebb minden más posetre. Ekkor ugyanis $L(P) < |P|$, tehát

$$\Sigma\left(n, \frac{|P| + L(P)}{2} - 1\right) < \Sigma(n, |P| - 1). \tag{18}$$

Továbbá elég nagy n-re

$$\left(\frac{|P| + L(P)}{2} - 1\right)\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} < \Sigma(n, |P| - 1). \tag{19}$$

4. Pontos eredmények

Ebben a fejezetben leírunk végtelen sok olyan posetet, amire $\mathrm{La}(n,P)$ pontosan meghatározható a 3.1. tétel segítségével.

Definíció. Egy P véges posetre jelölje $e(P)$ a legnagyobb m egészt, amire az $[n]$ összes $k, k+1, \ldots, k+m-1$ méretű részhalmazából álló halmazrendszer P-mentes minden n és k esetén.

Végtelen sok P-re belátjuk, hogy $\mathrm{La}(n,P) = \Sigma\big(n, e(P)\big)$, ha n elég nagy. Ezzel megerősítjük az alábbi sejtést.

4.1. sejtés [1]. *Minden P véges posetre*

$$\mathrm{La}(n,P) = e(p)\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\big(1 + O(1/n)\big). \tag{20}$$

Bukh belátta a sejtést minden olyan posetre, aminek a Hasse-diagramja fa [1]. Vezessünk be egy jelölést a 3.1. tételben szereplő kifejezésre.

Jelölés.

$$b(P) = \frac{|P| + L(P)}{2} - 1. \tag{21}$$

4.2. lemma. *Tegyük fel, hogy egy véges P posetre teljesül $e(P) = b(P)$ és $n \geq b(P) + 1$. Ekkor*

$$\mathrm{La}(n,P) = \Sigma\big(n, e(P)\big) = \Sigma\big(n, b(P)\big). \tag{22}$$

Bizonyítás. Álljon $\mathcal{F}$ az $[n]$ azon részhalmazaiból, melyeknek a mérete

$$\left\lfloor \frac{n - e(P) + 1}{2} \right\rfloor \leq |F| \leq \left\lfloor \frac{n + e(P) - 1}{2} \right\rfloor.$$

Ekkor $|\mathcal{F}| = \Sigma\big(n, e(P)\big)$, és $\mathcal{F}$ P-mentes $e(P)$ definíciója szerint. Másrészt a 3.1. tétel szerint egy P-mentes halmazrendszernek legfeljebb $\Sigma\big(n, b(P)\big)$ eleme lehet. ∎

Most megadunk néhány egyszerű posetet, amire $e(P) = b(P)$ teljesül.

Definíció (lásd a 4. ábrát). E az egyelemű poset.

A következő posetek elemei szintekre oszhatók úgy, hogy a pontosan akkor nagyobb b-nél a posetben, ha a magasabb szinten van, mint b.

B a pillangó-poset, egy 2 szintű poset, 2 elemmel mindkét szintjén.

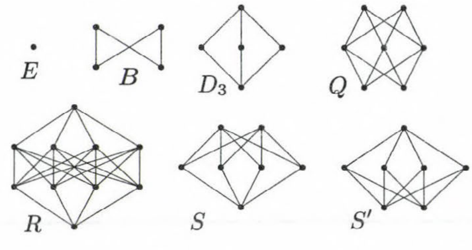
D_3 a 3-gyémánt poset, aminek rendre 1, 3 és 1 eleme van az egyes szintjein.

Q az a poset, aminek rendre 2, 3 és 2 eleme van a szintjein.

R az a poset, aminek rendre 1, 4, 4 és 1 eleme van a szintjein.

S az a poset, aminek rendre 1, 4 és 2 eleme van a szintjein.

S' az a poset, aminek rendre 2, 4 és 1 eleme van a szintjein.



4. ábra. 7 egyszerű poset, amire $e(P) = b(P)$ teljesül

4.3. lemma. *Minden $P \in \{E, B, D_3, Q, R, S, S'\}$ esetén teljesül $e(P) = b(P)$.*

Bizonyítás. $b(P)$ egész szám mind a hét fenti posetre. Tegyük fel, hogy $e(P) \geq b(P) + 1$ valamelyik P posetre. Ekkor $n \geq b(P) + 1$ esetén lenne egy P-mentes $\mathcal{F}$ halmazrendszer, ami $[n]$ részhalmazaiból áll, és $|\mathcal{F}| = \Sigma\big(n, b(P) + 1\big) > \Sigma\big(n, b(P)\big)$, ez pedig ellentmond a 3.1. tételnek. Tehát $e(P) \leq b(P)$. Belátjuk, hogy minden $P \in \{E, B, D_3, Q, R, S, S'\}$ posetre és n, k egészekre az $[n]$ alaphalmaz összes $k, k+1, \ldots, k + b(P) - 1$ elemű részhalmazából álló halmazrendszer P-mentes. Ebből $e(P) \geq b(P)$ következik, ami teljessé teszi a bizonyítást.

Az állítás triviális $P = E$-re, mivel $b(E) = 0$.

$b(B) = 2$. Az összes k és $k + 1$ elemű részhalmaz alkotta halmazrendszer B-mentes, mivel két $k + 1$ elemű részhalmaznak nem lehet két különböző k elemű metszete.

$b(D_3) = 3$. Az összes k, $k + 1$ és $k + 2$ elemű részhalmaz alkotta halmazrendszer D_3-mentes, mivel ha az A, B részhalmazokra $|B| - |A| \leq 2$, akkor legfeljebb két F halmazra lesz igaz $A \subset F \subset B$.

$b(Q) = 4$. Tegyük fel, hogy 7 darab $k, k+1, k+2$ vagy $k + 3$ méretű részhalmaz Q-t formál. Ekkor közülük lesz 4 az alsó két szinten, vagy 4 a felső két szinten. Ők B-t kellene hogy alkossanak, ami nem lehetséges.

$b(R) = 6$. Tegyük fel, hogy 10 darab $k \leq |F| \leq k + 5$ méretű részhalmaz R-et formál. Legyen A a legkisebb, B a legnagyobb részhalmaz. Legyen U az 5 legkisebb részhalmaz uniója. A második szint 4 halmaza mind részhalmaza U-nak, és legalább 3 különbözik tőle. Hasonlóan, a harmadik szint 4 részhalmaza tartalmazza U-t és legalább 3 különbözik tőle. Mivel D_3 nem áll elő m, $m + 1$ és $m + 2$ méretű halmazokból, $|A| + 6 \leq |U| + 3 \leq |B|$, ami ellentmondás.

$b(S) = 4$. Tegyük fel, hogy 10 darab $k, k+1, k+2$ vagy $k+3$ méretű részhalmaz S-et formál. Legyen V a legfelső szint két elemének a metszete, ekkor $|V| \leq k + 2$. A középső szint 4 halmaza mind részhalmaza V-nek, és legalább 3 különbözik tőle. Ez a 3 elem V-vel és a legkisebb részhalmazzal együtt egy D_3-at formál k, $k + 1$ és $k + 2$ elemű részhalmazokból, ez pedig ellentmondás.

Egy halmazrendszer pontosan akkor S' mentes, ha az elemei komplementeréből álló halmaz S-mentes. Ezért $e(S') = e(S) \geq b(S) = b(S')$. ■

Megadunk két módszert arra, hogy poseteket építsünk kisebbekből, megtartva az $e(P) = b(P)$ tulajdonságot.

Definíció. Legyenek P_1, P_2 posetek. Legyen $P_1 \oplus P_2$ az a poset, ami P_1-ből és P_2-ből úgy kapható, hogy feltesszük az $a < b$ relációt minden $a \in P_1$, $b \in P_2$-re.

Tegyük fel, hogy P_1-nek van legnagyobb eleme, P_2-nek pedig legkisebb. Ekkor jelölje $P_1 \otimes P_2$ azt a posetet, ami P_1-ből és P_2-ből úgy kapható, hogy azonosítjuk P_1 legnagyobb elemét P_2 legkisebb elemével.

4.4. lemma. *Tetszőleges véges posetekre*

$$e(P_1 \oplus P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) + 1. \tag{23}$$

Ha $P_1 \otimes P_2$ értelmezve van, akkor

$$e(P_1 \otimes P_2) \geq e(P_1) + e(P_2). \tag{24}$$

Bizonyítás. Ahhoz, hogy P_1-et találjunk, legalább $e(P_1) + 1$ szint kell, P_2-höz pedig legalább $e(P_2) + 1$ szint. $\oplus$ definíciója szerint P_2 legalsó szintje P_1 legfelső szintje felett van $P_1 \oplus P_2$ tetszőleges előállításánál, tehát $P_1 \oplus P_2$-höz legalább $e(P_1) + 1 + e(P_2) + 1$ szint kell. $P_1 \otimes P_2$-re ugyanígy érvelhetünk, hozzátéve, hogy P_1 legfelső szintje egybeesik P_2 legalsó szintjével.

4.5. lemma. *Tegyük fel, hogy P_1 és P_2 olyan véges posetek, amikre $e(P_1) = b(P_1)$ és $e(P_2) = b(P_2)$ teljesül. Ekkor*

$$e(P_1 \oplus P_2) = b(P_1 \oplus P_2). \tag{25}$$

Ha $P_1 \otimes P_2$ értelmezett, akkor

$$e(P_1 \otimes P_2) = b(P_1 \otimes P_2). \tag{26}$$

Bizonyítás. $|P_1 \oplus P_2| = |P_1| + |P_2|$, $L(P_1 \oplus P_2) = L(P_1) + L(P_2)$, és $e(P_1 \oplus P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) + 1$, továbbá $|P_1 \otimes P_2| = |P_1| + |P_2| - 1$, $L(P_1 \otimes P_2) = L(P_1) + L(P_2) - 1$, és $e(P_1 \otimes P_2) \geq e(P_1) + e(P_2)$.

A fentiek és (21) alapján

$$e(P_1 \oplus P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) + 1 = b(P_1) + b(P_2) + 1 = b(P_1 \oplus P_2) \tag{27}$$

és

$$e(P_1 \otimes P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) = b(P_1) + b(P_2) = b(P_1 \otimes P_2), \tag{28}$$

ha $P_1 \otimes P_2$ értelmezett. Már láttuk, hogy $e(P) \leq b(P)$ minden posetre igaz, ezzel készen vagyunk. ■

A következő tétel összefoglalja az eddig bizonyítottakat.

4.6. tétel. *Legyen P egy véges poset, ami felépíthető az E, B, D_3, Q, R, S és S' posetekből a $\oplus$ és $\otimes$ műveletekkel (az 5. ábrán látható három példa). Ha $n \geq b(P) + 1$, akkor*

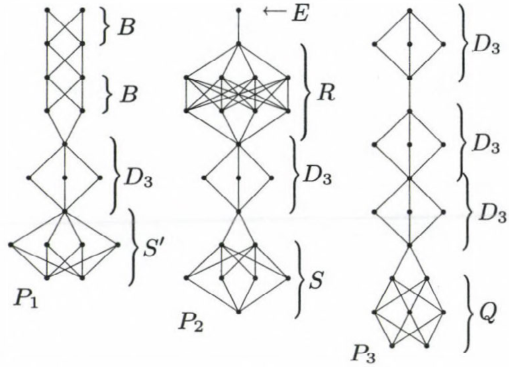
$$\mathrm{La}(n, P) = \Sigma\big(n, b(P)\big) = \Sigma\big(n, e(P)\big). \tag{29}$$

Bizonyítás. A 4.3. és a 4.5. lemmák szerint $e(P) = b(P)$. Ekkor az 4.2. lemma bizonyítja a tételt. ■

Megjegyzés. A 4.6. tétel közös általánosítása Erdős tételének (1.2. tétel), a B posetre vonatkozó tételnek és a következő eredménynek.

4.7. tétel (Griggs, Li, Lu) [4]. *Ha $n \geq 2$, akkor*

$$\mathrm{La}(n, D_3) = \Sigma(n, 3). \tag{30}$$



5. ábra. Az E, B, D_3, Q, R, S és S' posetekből a $\oplus$ és $\otimes$ műveletekkel épített posetek. $P_1 = S' \otimes D_3 \oplus B \oplus B$, $P_2 = S \oplus D_3 \otimes R \oplus E$ és $P_3 = Q \oplus D_3 \otimes D_3 \oplus D_3$

Irodalom

[1] B. Bukh, Set families with a forbidden subposet, *Electronic J. of Combinatorics,* **16** (2009), R 142.

[2] A. De Bonis, G. O. H. Katona and K. J. Swanepoel, Largest family without $A \cup B \subseteq C \cap D$, *J. Combin. Theory. Ser. A.,* **111** (2005), 331–336.

[3] P. Erdős, On a lemma of Littlewood and Offord, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **51** (1945), 898–902.

[4] J. R. Griggs, W.-T. Li and L. Lu, Diamond-free families, *J. Combinatorial Theory,* **119** (2012), 310–322.

[5] J. R. Griggs and L. Lu, On families of subsets with a forbidden subposet, *Combinatorics, Probability, and Computing,* **18** (2009).

[6] G. O. H. Katona, Forbidden inclusion patterns in the families of subsets (introducing a method), in: *Horizons of Combinatorics,* Bolyai Society Mathematical Studies, vol. 17, Bolyai János Mathematical Society, Budapest and Springer-Verlag, 2008, pp. 119–140.

[7] D. Lubell, A short proof of Sperner's lemma, *Journal of Combinatorial Theory,* **1** (1966), 299.

[8] E. Sperner, Ein Satz über Untermegen einer endlichen Menge, *Math. Z.,* **27** (1928), 544–548.

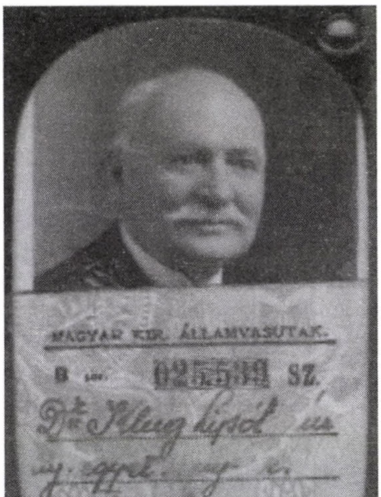
Burcsi Péter, Nagy T. Dániel
Eötvös Loránd Tudományegyetem

KLUG LIPÓT (1854–1945)

OLÁH-GÁL RÓBERT

1. Klug Lipót arcképe

Klug Lipótnak, a szintetikus geometria egyik jeles magyar művelőjének, eddig nem ismertük az arcképét. Eddig egyetlenegy lexikonban, tanulmányban, cikkben vagy kézirattárban sem sikerült fellelni ennek a jeles tudósnak a fényképét. Írásunk célja, hogy halála után 66 évvel végre megismerhessük arcvonásait.



A legrészletesebb Klug-megemlékezést Kárteszi Ferenc írta hajdani mesteréről, életművét pedig Zigány Ferenc közölte. Kárteszi Ferenc a következő szavakkal kezdi megemlékezését, éppen e lap hasábjain 1973-ban: *„Turán Pál már nemegyszer bíztatott, hogy írjak Klug Lipótról, a kolozsvári egyetem egykori professzoráról megemlékezésszerű közleményt, mert azok közül, akikkel hosszú élete utolsó évtizedeiben kapcsolatot tartott, ma már csak nekem vannak személyes emlékeim. Pályaválasztásomat is az a tény befolyásolta, hogy középiskolás diákkoromban foglakozott velem, s nála tett látogatásom alkalmával felkeltette és szította a „tiszta geometria" iránti érdeklődésemet. Amikor először fogadott lakásán – abban a korban szokatlan volt,* *hogy egy professzor idegen, iskolás gyerekkel szóba álljon – én tizenhat éves voltam, ő pedig annyi idős, mint én ma, s talán ez lobbantotta fel bennem a régi szép emlékeket. Nem szándékozom Klug Lipót életrajzát megírni, sem tudományos munkásságát ismertetni. Csupán az emlékek felvillantásával igyekszem érzékeltetni, hogy milyennek ismertem."*

Rögtön kiegészítem, hogy Kárteszi Ferenc mellett, Teller Ede szintén mesterének tekintette, és megőrizte kézfogásának melegét a XXI. századra is.

Az erdélyi matematikatörténet kutatójaként jutottam el én is Klug Lipóthoz az EME (Erdélyi Múzeum Egylet) Orvos-Természettudományi Értesítője révén, amelyben az egyik legtöbbet publikált matematikus éppen Klug Lipót volt. A másik érdekes „felfedezésem" a Bécsi Műszaki Egyetem Geometriai Intézet Könyvtárában történt, ahol minden oktatónak és/vagy fontosabb geométernek van egydoboznyi dolgozata. A kevesebb publikációval rendelkezők több dobozban is elférnek, így például Strommer Gyula, Fejes Tóth László, Kárteszi Ferenc dolgozatai megosztoznak más kollegáik dolgozataival egy doboz űrtartalmán. De már Paul Stäckelnek kétdoboznyi publikációja van.

Csak egy magyar geométer van, akinek van egydoboznyi dolgozata és azon a neve is felírva! Teller Ede így emlékszik rá azon a hangfelvételen, amely az Interneten is letölthető, meghallgatható:

„Apámnak volt egy idősebb, nyugalmazott matematikaprofesszor barátja. A neve Klug Lipót, s talán az a férfi, aki a legnagyobb hatással volt az életemre. Ő már nyugdíjas matematikatanár volt, és ideadta nekem Leonhard Euler Algebra könyvét. Én tízéves voltam akkor. A problémák túl nehezek voltak számomra, ahhoz, hogy megoldjam, de nem túl nehéz volt megértenem. Klug adta nekem ezt a könyvet, és elolvastam. Ez volt a kedvenc könyvem. Klug volt az első felnőtt, akivel találkoztam, aki szerette, amit csinál. Aki nem fáradt el, amikor sokat dolgozott. Nagyon élvezte, amikor elmagyarázza a dolgokat nekem. Én azt hiszem, hogy akkor döntöttem el, hogy ez az, amivel én is foglakozni szeretnék."

Így jutottam el én is Klug Lipóthoz, és ez késztetett arra, hogy addig ügyködjek, amíg Klug Lipót is bekerül a Szent András Egyetem matematikusokat tartalmazó adatbázisába[1] (szerintem ez ma a legnagyobb ilyen jellegű adatbázis).

Igen ám, de sehol sem találtam fényképet Klug Lipótról! Végignéztem az összes publikációt, kerestem az OSZK fényképtárában, a Magyar Nemzeti Múzeum Képtárában és Fotótárában, az MTA Könyvtár Kézirattárában, a Kolozsvári Állami Levéltárban és a Ferenc József Tudományegyetemtől „megörökölt" Babeş-Bolyai Egyetem Könyvtárában, semmi nyomra nem találtam. Segítséget kértem Staar Gyulától, Gazda Istvánntól, Horváth Jenőtől (Kárteszi Ferenc egyik utolsó tanársegédjétől), Szabó Péter Gábortól, végignéztem Fejér Lipót hagyatékát, Réthy Mór hagyatékát, a Zsidó Múzeumoknak írtam e-maileket, eredmény nélkül. De nem adtam fel. Az idő aztán meghozta a megoldást!

Jó sorsom összehozott Koltai Károly családkutatóval és az Interneten megjelent Homola László családtörténeti krónikája. E két önzetlen ember segítségével

[1] `http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Klug.html`.

olyan adatokhoz jutottam, amelyek sokban pontosítják Klug Lipót életrajzát. Homola László jóvoltából megismerhetjük Klug Lipót arcképét.

Klug Lipót arcképe visszatükrözi a szellemét és szerény tudósi habitusát

Kárteszi Ferenc így fejezte be Klug Ferencről szóló emlékeit:

„A háborút kísérő pusztulásban az alapítvány[2] értéke semmivé vált, a jutalomdíj többé nem került kiadásra. Még megrendítőbb az életek pusztulása. A háború utolsó periódusában kiáradó aljas és gyilkos ösztönök tébolyult dúlása. Az öreg tudós akkor 91 esztendős. Hogy mi történt vele, csak sejteni lehet, 1944-ben nyoma veszett".

Szerencsére, Klug Lipót nem lett a faji gyűlölet áldozata. Természetes halállal hunyt el 1945. március 24-én, és a Kozma utcai Zsidó Temetőben nyugszik. (Tévesen minden lexikon, cikk, írás 1944-ben jelöli meg Klug elhalálozási évszámát, ugyanis így olvastuk Kárteszi professzornál.)

Klug Lipót és házvezetőnője, Klein Jolán a Kertész utca 38. szám alatt vészelte át a rémkorszakot, a német megszállást. Klug Lipótnak és házvezetőnőjének mentelmi joga volt, ahogy azt Siklós Albertnek, akkor 14. éves ifjúnak emlékeiből megtudhatjuk. Siklós Albert Klein Jolánnak volt unokaöccse és így Siklós Dezsőnét, Siklós Etelkát, Siklós Olgát és Siklós Albertet Klug befogadta a házába. Az SS-ek és a nyilas különítményesek többször kizavarták a házból Klugékat, de később Klugnak és házvezetőnőjének sikerült visszatérni a saját otthonukba. Így Klug Lipót túlélte a borzalmakat, és 1945. március 24-én hunyt el.

Klug Lipót végrendeletét, amely tudománytörténeti szempontból is érdekes adatokat tartalmaz, a IV. részben közöljük.

[2]Klug-Alapítvány, lásd a Végrendeletben.

Ki volt ez a halk szavú, már-már feledésbe merült „kiérdemesült"[3] geométer? Klug Lipót talán a legjelentősebb projektív vagy inkább mondjuk szintetikai magyar geométer volt. Vitathatatlan, hogy az utóbbi időben Teller Ede hozta közel fénybe, a fenti visszaemlékezésével.

Klug 1854-ben született Gyöngyösön. Szülei Klug Miksa és Neufeld Hani. A Fejér Lipót hagyatékában megtalált eredeti Klug levelekből tudom, hogy a VII. kerületben lévő, Kertész utca 38. szám I/4-ben lakott. Annak a szintetikai és projektív geometriának a képviselője volt, amelynek talán Coxeter volt az egyik legismertebb művelője.

A matematikustársadalomért hozott legnagyobb áldozata, a Klug-alapítvány megtétele, amelyet egy negyed évszázados kis nyugdíjából összespórolt.

Íme, hogyan számolt be erről a Magyar Zsidó Lapja 1942. augusztus 13. száma:

„Dr. Klug Lipót professzor 10 000 pengős alapítványt tett a kolozsvári egyetemen.

Magyar tudományos körökben hetek óta élénk szóbeszéd tárgyát képezi, hogy dr. Klug Lipót professzor, a nemzetközi hírnévnek örvendő matematikus, 10 000 pengős alapítványt tett a kolozsvári egyetemen, amelynek egykor – a román megszállás előtt – nyilvános rendes tanára volt.

A sok szóbeszéd valósnak bizonyult. A nagy összegű alapítvány felajánlása csakugyan megtörtént. A kolozsvári egyetem tanácsa köszönettel fogadta a zsidóvallású tudós mecénási gesztusát.

A vallás és közoktatási minisztérium pedig jóváhagyta az alapítvány statútumait.

Dr. Klug Lipót alapítványából – mint értesültünk – elsősorban azokat a diákokat fogják jutalomban részesíteni, akik a szemináriumi munkálatokban az ábrázoló geometria terén kiválóknak bizonyulnak. Másodsorban pedig azokat díjazzák, akik különös érdeklődést mutatnak, és rendkívüli képességeket árulnak el a geometria iránt. Ez a tárgy volt ugyanis dr. Klug Lipót kedvenc szaktárgya.

Dr. Klug Lipót, az új egyetemi alapítványtevő, 1854-ben született Gyöngyösön, mint vallásos zsidó család gyermeke, 1891-ben a budapesti tudományegyetemen a szintetikai geometria magántatára, 1897-ben a kolozsvári egyetemen rendkívüli tanára. 1900-ban pedig a kolozsvári egyetemen nyilvános rendes tanára lett. A Magyar Tudományos Akadémia támogatásával adta ki „A projektív geometria elemei" című munkáját.

Több tanulmánya német nyelven látott napvilágot, mint a bécsi Akademie der Wissenschaften kiadványa.

Matematikusok generációi kerültek ki a kiváló tudós tanítványai közül. Működését talán csak annak a dr. Fejér Lipótnak a tevékenységével lehet egybevetni, aki ugyancsak a régi kolozsvári egyetemen végezte első tudományos kutatásait.

---

[3] A karnak 1918/19-ben volt három kiérdemesült tanára (Farkas Gyula, Klug Lipót, Richter Aladár), hét nyilvános rendes, valamint három nyilvános rendkívüli (Ruzitska Béla, Ortvay Rudolf, Pogány Béla) tanára. Lásd: Gaal György, Egyetem a Farkas utcában, A kolozsvári Ferenc József Tudományegyetem előzményei, korszakai és vonzatai, Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság, Kolozsvár, 2001.

A patriarchakorban lévő dr. Klug Lipót, aki állandóan Budapesten lakik, de az idei nyarat a felszabadult Kolozsvárott, egykori működés színhelyén tölti, most úgy kívánja továbbszolgálni a magyar tudományt, hogy anyagilag segíti elő a fiatal matematikusok és geometrikusok szárnypróbálgatásait."

Klug munkásságát legalaposabban Zigány Ferenc műegyetemi professzor írta meg, aki ezért Klug Lipót-jutalomban részesült. Idézek Zigány dolgozatából, ugyanis ma talán még igazabbak és aktuálisabbak Zigány megállapításai, mint 1943-ban:

„Az idők múlásával a dolgok változnak. És nem kivétel ez alól a tudományos kutatás sem, amelynek különböző problémái hol divatba jönnek, hol háttérbe szorulva újaknak adják át a helyüket. Míg az elmúlt két évszázad geométerei témáikat legnagyobbrészt a projektív geometria, a másodrendű görbék és felületek köréből vették, a jelenkor érdeklődése ebben az irányban erősen megcsappant. A projektív geometria és abban is a szintetikus módszer ama nagyszerű virágzásának, melyben az elmúlt idők oly sok nagy elméje talált termékeny talajra, rajongója Klug Lipót. Amekkora szeretettel ápolta a szintetikus módszerű projektív geometriát, akkora keserűséggel látta az iránta tanúsított érdeklődés hanyatlását.

Munkásságának gerince két tankönyve: A projektív geometria elemei és Projektív geometria. Az első síkbeli, a másik térre is kiterjedő ismertetése tárgykörének. Az elsőnek érdekes és a szokásosnál jobban kidolgozott részlete a különböző projektivitások, illetve involuciók és több ilyenek (pl. az adjungáltak) kapcsolata, valamint a kettős érintésű kúpszeletek. Mindkét témakör kedvence Klugnak és több értekezése vonatkozik reájuk. A második munkának szép részlete a hiperboloid c. fejezetében a poláris tetraéderre vonatkozó rész, valamint a harmadrendű térgörbe c. fejezetében e görbének a nullarendszerrel és a görbén átmenő hiperboloid alkotóseregeivel való kapcsolatai. Harmadik helyen áll Ábrázoló geometria c. tankönyve, amely kitűnő pedagógiai érzékkel és az anyag ügyes kiválasztásával írott munka; végül a negyedik: A harmadrendű térgörbék synthetikai tárgyalása.

E tankönyveken kívül nagyszámú értekezéssel gazdagította geometriai irodalmunkat."[4]

Miután Pesten elvégezte az egyetemet, Pozsonyba került az ottani Főreál Gimnáziumba. 1874–1897 között középiskolai tanár. Ez idő alatt doktorált, és elérte, hogy 1897-ben kinevezzék a kolozsvári Ferenc József Tudományegyetemre, mint az ábrázoló geometria egyetemi magántanára. Majd rá két évre az ábrázoló geometria professzora lesz húsz és fél évig, 1917-ig, amikor is nyugdíjba vonul, és hazaköltözik Budapestre. Hosszú nyugdíjas éveit a tudományos kutatásnak és publikálásnak szentelte, nem véletlen, hogy egy „egész doboznyi" dolgozatát őrzi a Bécsi Műszaki Egyetem. Közben sokat foglakozik tehetséges fiatalokkal, többek között Kárteszi Ferenccel és Teller Edével. Kolozsváron maradt tanítványai közül megemlítjük Gergely Jenő professzort.

Lehetetlen megítélni, hogy a Ferencz József Tudományegyetem matematikusai közül ki volt a legnagyobb? (Ugyan is a matematikusok nem alkotnak egy jól rendezett halmazt, így nincs is legkisebb és legnagyobb elemük.)

---

[4] [4].

Riesz Frigyes, Fejér Lipót és Haar Alfréd nagyon jelentős tudósok voltak. De Ők viszonylag keveset voltak Kolozsvárott.

Schlesinger Lajos volt az egyetlen magyar matematikus, aki Lobacsevszkij-díjat kapott, még kolozsvári tartózkodása alatt.

Réthy Mór volt az első magyar, aki nyilvános előadásokat tartott a Bolyai-geometriából, és Ő hozta be Erdélybe a modern matematikát, addig az egyetemen, középiskolás szinten művelték a matematikát.

Farkas Gyula, noha az elméleti fizikai tanszéknek volt a vezetője, ma már a matematikusok is magukénak vallják, és talán a legnagyobb idézettségű magyar „matematikus".

Klug Lipót volt az egyetlen kolozsvári matematikus, aki hivatalosan is képviselte a kolozsvári (a magyar) matematikusokat a Cambridge (Anglia), 1912 matematikai kongresszuson. Két levelét, melyeket Cambridge-ből írt, közöljük is a III. részben. (Klug Lipót részt vett még az 1908-as római és az 1904-es heidelbergi Matematikakongresszuson.) Kétszer, az 1908/09-es és az 1912/13-as tanévben volt a Kolozsvári Egyetem Matematika-természettudományi Kar dékánja.

Klug Lipót nagyon jó viszonyban volt Apáthy Istvánnak, aki akkoriban a politikában is és az egyetemen is igen nagy befolyással bírt. Apáthyt az első világháború végén kormánybiztosnak nevezte ki a magyar kormány, és neki köszönhető, hogy a román hadsereg nem lőtte szét a várost. Ugyanis a román bevonulók felszólították Apáthyt, hogy az Antant megbízásából Kolozsvárt elfoglalják, és ha ellenállást tanúsítanak, akkor lövetni fogják a várost! Apáthy megüzente, nem lesz ellenállás! Bölcs döntés volt, mert másképpen szétverték volna Kolozsvárt!

Nagyon sok mindent érdemes még kikutatni Klugról, de nem tévedek, ha azt állítom, talán ő volt az egyik legnagyobb magyar projektív és szintetikai mértanos.

2. Részletek Klug Lipót levelezéséből

Igyekeztem felkutatni Klug Lipót összes levelét, amely művelődéstörténetileg jelentőséggel bír:

Ezekből adunk most néhányat közre:

*

De Keysers Royal-hotel and Blackfriars Bridge, London
29 júl. (1912?)
Méltóságos Dr. Apáthy István úr a math. és termt. kar dékánja
Kolozsvár Hungary

Kedves barátom!

Az itteni nagyszabású természetrajzi múzeumok megtekintése után, ma a Zooba mentünk, de csak és alig láthattunk valamit. Holnap megismételjük a látogatást. Párizsban voltam hasori nevű kertekben. – Reménylem, hogy a zilált politikai viszonyok melyről napról-napra olvastam az újságokban nem zavarják nyugalmadat.

Lakásom itt Londonban 25, Treboviv, Earls, court S.W.

Ha néhány sort írnál személyemet illető ügyekről, köszönettel fogadná barátod: Klug

Kézcsókomat feleségednek.

*

Letter Card
Méltóságos Dr. Apáthy István
egyetemi tanár úrnak, stb.
Kolozsvár
Hungary

Méltóságos Dékán úr, Kedves Barátom

Visszaemlékezve f.é. június Kolozsvári megállapodásunkra értesítelek, hogy holnap reggel utazom innen Cambridge-be, hogy a 21-28-ig tartandó V. math. congressuson részt vehessek. Több mint 10 hete távol lévén kedves hazámtól alig várom, hogy ismét visszajöhessek, és magyar szót hallhassak. Itt az idegenben azt tapasztalom, hogy e független nép, e nagy nemzet, mily elégedett és boldog, - míg nálunk a létért való küzdelem folyton izgalomba tartja az országot és annak minden (nemzetiségű?) ...[5] lakosát.

A Cambridge-i congressusból remélhetőleg 27-én elutazhatom, s ha a körülmények megengedik, 31-én Kolozsvárt leszek és a dékáni hivatalt átvehetem.

Kérlek, ne vedd rossz néven, hogy a szabályszerinti időn túl terheltetlek a hivatal viselésével.

Őszinte híved és barátod: Klug Lipót

Brighton, 1912 Sz.–István napján.

*

Klug Lipót 1899. április 25-én szerződést köt a Lampel R.-féle (Wodianer F és Fiai) cs. és kir.udv. könyvkiadó céggel, „Ábrázoló Geometria" a reáliskolák VI., VII., VIII. oszt. számára. A mű terjedelme 20 ív, és nyomtatott ívenként 50 frt. fizet a szerző úrnak. 4000 példányban fogják kinyomtatni.

*

kelt. Budapesten 1899. április hó 25-én.
Kolozsvár. 1903. január 17-én.
Nagyságos Wodianer Arthúr kir. tanácsos úrnak Budapesten

Tisztelt uram!

A Bolyai-ünnepélyre Kolozsvárra érkezett mathematikusok közül többen kérdezősködtek, hogy mikor jelenik már meg a rég várt Projektív geometriám. Én erre Szily Kálmán Akad. főtitkár úrtól megtudtam, hogy a M. T. Akadémia munkám kiadását támogatni fogja.

[5]Kiolvashatatlan.

E kedvező hír után legyen szabad újra felvenni a fonalat ott, ahol azt múlt év november elején megszakítottuk.

Én akkor könyvem terjedelmét 24 ívre becsültem, melyből 2 ív ábrákat foglal el, és Wodianer úr 1000 példányban való kiadásáért.

Könyvemben azonban egyet-mást egyszerűsítettem, úgy, hogy azt csak 22 ív terjedelmű lesz a rövid előszó nélkül.

Ehhez képest én Wodianer úrnak nyolcszáz (800) koronát felajánlok, ha Projektív geometriámat az öntől megszokott szép kiállításban kiadja (akár 1000, akár 500 példányban, az, mint Önnek kedvesebb) és kötelezem magamat a megjelölt összeget a megjelenés napján átadni.

A könyv kelendőségére vonatkozólag megjegyzem,

1. hogy a könyv egyetemi előadásaimnak bővebb kidolgozása, tehát hallgatóim azt használhatják.

2. hogy a műegyetemen is tartanak rendesen projektív geometriai előadásokat, és más ily tárgyú projektív geometria magyar nyelven nem jelent meg; végre

3. hogy remélhetőleg a középiskolai tanári könyvtárak jegyzékének is valószínűleg bevétetik, mint más előbb megjelent munkám.-

Örvendeni fogok, ha ajánlatomat elfogadja és a M. T. Akadémiának, ha támogatásáról hivatalosan értesít, már jelenthetem, hogy könyvem az Ön kiadásában már sajtó alatt van.

Kiváló tisztelettel
Dr. Klug Lipót
egyetemi tanár

*

Fejléc
A kolozsvári
Ferencz József Tudomány-egyetem
ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIAI INTÉZETE
Kolozsvárt, 1903. február 5-én.
Wodianer F. és Fiai Könyvkiadó czégnek
Budapest

„Projektív geometria stb." czímű könyvem első kiadásának költségeihez egyezer (1000) koronával hozzájárulok és kötelezem magamat ez összeget kifizetni a könyv megjelenése és tiszteletpéldányok elküldése után két héttel.

Tisztelettel
Dr. Klug Lipót
egyetemi tanár

U.I. Kérem e nyilatkozatot bizalmas jellegűnek tekinteni. K.L.

*

Most azt a három levelét adom közre, amit a Fejér Lipót hagyatékában találtam meg. Mind a három rövid kis levelet Fejér Lipótnak írta. (A dátumok nehezen kiolvashatók az eredeti kéziraton.)

Első levél:

*

„Tisztelt Tanár úr, Kedves Kartárs.

A korrekturát átnéztem, néhány sort még hozzá írtam, inkább érdeklődést kelt, mit sem fölösleges volna.

Jobban most sem tudnám megírni a szöveget, és talán más sem -; bárcsak olvasója akadna, de félek, hogy még most is igazak az, amit König Gyula volt tanárom 38 év előtt mondott:

„bár a mathematikának Magyarországon annyi olvasója volna, mint ahány tanára van!"

Még megírom, amit már úgy is tud, hogy nyugalomba vonultam, továbbá, hogy leányom a zenetanári oklevelet megszerezte és most már a 8. nyelvet, a törököt, tanulja, mert oroszul és spanyolul már rég olvas eposzokat és regényeket.

Készséges híve és barátja: Klug Lipót
Budapest, 1917. X. 30."

*

Azt hiszem, hogy a König Gyulától idézet gondolat ma is nagyon aktuális!

A Kárteszi-féle visszaemlékezésből[6] megtudhatjuk, hogy két gyermekét Klug eltemette. A fenti levélből megtudhattuk, hogy egyik gyermeke zenetanári oklevelet szerzett.

Második levél:

*

„Tisztelt Kartárs Úr!

Igen kérném e mellékelt két írott oldalt a Math és Phys. Lapok számára írt és egy év előtt beküldött értekezésem végéhez még odailleszteni.

Már nem szándékom többet írni, mert szemeim a sokévi olvasás és írástól úgy meggyöngültek, hogy már nem szabad fárasztanom geometriai munkával.

Készséges híve és barátja: Klug Lipót
Budapest (Kertész u. 38. sz. I/4), 1918. IV. 16"

*

Ha a dátum jó, akkor valószínű, nagyon elgyengültek Klug szemei, melyek később meggyógyulhattak.

[6] [1].

Harmadik levél:

*

„Budapest (VII. Kertész utca 38), 1930. XI/13.

Tisztelt Kartárs Úr.

Ide mellékelt dolgozatot a Math. és Fizikai Lapok számára „Kúpszeletek és evolutáik simulókörének szerkesztése" címen 5 ábrával azért írtam, mert átlapozván ezelőtt 8-10 nappal Romsauer műegyetemi tanár Ábrázoló Geometriájának most megjelent II. kötetét, - nem láttam a rajzokban a kúpszeletek simulókörének szerkesztését (csupán annak csúcsaiban), de nem volt meg egy gyűrűfelület (torus) érintősíkja metszésének érintőpárja a kettőspontban, azaz az érintőpontban, amelyet már a több mint 80 év előtt megjelent, Levoy Darst. Geometrie-ben olvastam, de a mely szerkesztését dolgozatomban attól eltér, s a kúpszeletek simulókörének felhasználásával történik.

Én mindent, amit itt megírtam nagyrészt előadtam a kolozsvári előadásaimban s volt hallgatóim, ha még érdeklődnek iránta örülni fognak talán, hogy azt ily (...) olvashatják. De azt gondolom, hogy mások is, akik ezeket nem hallották, vagy másképp tárgyalva tanulták, érdeklődnek iránta, talán még jobban, mint valami egészen új dolog iránt.

Még megjegyzem, hogy dolgozatomban a kúpszeletek evoluta simulókörének középpontját a kinematika módszerével magyarázom, amely szintén kellemes lehet az olvasásra, ha ezzel még nem foglalkozott.

Szívélyes üdvözlettel maradtam híve: Klug Lipót"

3. Jelentés az 1943. évi Klug Lipót-jutalomról

„Az első Klug Lipót-jutalom ügyében Társulatunk választmánya javaslattételre a következő bizottságot küldte ki: Egerváry Jenő, Kerékjártó Béla, Rédei László, Szőkefalvi-Nagy Gyula. A bizottság jelentése a következő.

A választmány már az alapítvány első közzétételekor (lásd Mat. és Fiz. Lapok, 48.k.,36.l.) azt az óhaját fejezte ki, hogy – az alapítvány célja elérésének megkönnyítésére és egyszersmind az alapítványtevő iránti tiszteletének és hálájának kifejezésére — az első jutalomból Klug Lipót tudományos működését ismertető és méltató jelentés szerzője jutalmaztassék. A Társulathoz egyetlen ilyen jelentés futott be, amelynek szerzője Dr. Zigány Ferenc műegyetemi m. tanár. Zigány referátumát a bizottság céljának megfelelő világos és alapos munkának minősíti, és ezért azt javasolja, hogy az első Klug Lipót-jutalom felerészben neki ítéltessék oda. A bizottság kívánatosnak tartja, hogy már első alkalommal is – az alapítvány tulajdonképpeni céljának megfelelően – eredeti geometriai kutatások is jutalmaztassanak, és hogy ilyen irányú nagysikerű munkásságáért az első Klug Lipót-jutalom másik fele Dr. Fejes László kolozsvári egyetemi gyakornoknak adassék.

Fejes Lászlónak eddig 13 matematikai dolgozata jelent meg, 6 további ki van szedve. E 19 dolgozat közül 15 geometriai tárgyú. Fejes László geometriai munkásságának főbb irányai a következők. 1. Konvex görbék megközelítése sokszögekkel.

2. Bizonyos extremális soklapok tulajdonságai. 3. A „legsűrűbb körelhelyezkedés problémája" és ezzel kapcsolatos kérdések. Ebbe a három irányba tartozik Fejes számos, szép és mélyreható eredménye közül ez a három tétel:

1. Bármely konvex görbéhez megadható egy l_n kerületű beírt és egy L_n kerületű körülírt n-szög úgy, hogy

$$\frac{L_n - l_n}{L_n} \leq 2\sin^2\frac{\pi}{2n}.$$

Ez az egyenlőtlenség nem javítható.

2. Egy kivételességmentes zárt konvex felületbe írt adott csúcspontszámmal bíró maximális térfogatú soklap minden lapja szükségképpen háromszög.

3. Egy egységgömbön fekvő n-számú pont között mindig van két olyan, amelyek távolsága nem nagyobb mint

$$\left(4 - \cos ec^2\frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ez az egyenlőtlenség $n = 3$, 4, 6 és 12-re nem javítható, n nagy értékére pedig a síkbeli legsűrűbb körelhelyezkedés problémájának megoldását adja.

A bizottság e jelentésben foglalt javaslatot a választmány 1943. Febr. 25-i ülésén egyhangúlag elfogadta és az első Klug Lipót-jutalmat, két egyenlő részre elosztva, Dr. Fejes Lászlónak és Dr. Zigány Ferencnek ítélte oda, mindkét féljutalmat a Társulat vagyonából 300-300 pengőre egészítve ki".[7]

4. Klug Lipót végrendelete[8]

Végrendeletem

Isten akaratából olyan kort értem el, mint kevesen. Fogyni érzem erőmet s azért rendelkezni akarok azzal a kevés vagyonnal, amelyet takarékos és józan életmódommal félretehettem. Minthogy édesanyám halála után most élő rokonnak és leszármazottainak támogatásában nem részesültem, nem érzem kötelességét annak, hogy meglévő vagyonomból azoknak is juttassak valamit. Az állam két évig részesített ösztöndíjban, amelynek segítségével befejezhettem tanulmányaimat 1874-ben. Ezért hálával az állam iránt támogatni akarok oly intézményeket, amelyek az állam hasznára vannak és tudományos életének nívóját előmozdítják. Ezért hagyományozok:

Az 1892-ben keletkezett Mathematikai és Fizikai Társulatnak Budapesten ötezer, az az 5000 pengőt, amelynek kamataiból oly mathematikusokat részesítsen két-évenként, akik a geometria terén, különösen azon a téren, amelyben magam is dolgoztam, eredményes munkásságot fejtettek ki.

[7] [2].

[8] A végrendelet eredetije a Budapesti Levéltár tulajdona, azonosítója: [5], HU BFL – VII.12.e – 1945 – V.(I)177.

Hagyományozok a Ferencz József Tudományegyetem mathematikai és természettudományi karának tízezer, azaz 10000 pengőt abból a célból, hogy a geometriából legtehetségesebb és legszorgalmasabb hallgatót a volt tanszékem, jelenleg geometriai és ábrázoló geometriai tanszék tanárának ajánlatára, részesítse annak kamataiból évenként jutalomban (és ha ketten vannak, akkor a jutalom megosztható kettő között is.)

Hagyományozok, a Magyar Tud. Akadémia III. osztályának nyolcvanezer, azaz 80000 pengőt abból a célból, hogy jutalmazzon oly tudósokat annak kamataiból, akik azon téren fejtettek ki legtöbb eredményt, amelyen magam is dolgoztam t.i. a szintetikai geometria és ábrázoló geometria terén, mintegy folyatásaként azoknak a dolgozatoknak, amelyek tőlem is megjelentek az Akadémia Értesítőjében és az Akadémia támogatásával 1892. és 1903-ban könyv alakban.

Budapesten 1940 év július 2-án.
Dr. Klug Lipót nyug. egyetemi ny.r. tanár.

Mi, alulírt tanúk tanúsítjuk, hogy az általunk személyesen ismert Dr. Klug Lipót ny.r. egyetemi tanár a mi együttes jelenlétünkben kijelentette, hogy ezen okirat az Ő végrendeletét tartalmazza, és hogy azt Ő maga saját kezűleg írta és aláírta.

Kelt Budapesten, 1940. évi július hó 2-án
Radó Simon ny. gimn. tanár a Végrendelkező egykori tanítványa
Vargha Miklós a Hazai Bank RT igazgatója.

U.I. Minthogy a Ferencz József Tudományegyetem legnagyobb örömemre visszakerült Kolozsvárra, minden kétséget kizárólag kijelentem, hogy a végrendeletem 2. pontjában tett alapítványom a Kolozsvári Ferencz József Tudományegyetemnek szól, ahol húsz és fél évig szolgáltam.

Budapest 1940. október hó 29-én.
Dr. Klug Lipót nyug. egyet ny. r. tanár

*

A Mathematikai és Fizikai Társulatnak a hagyományomból az ötezer (5000) pengőt az ötven éves jubileuma alkalmából f. é. január havában kifizettem és így a Társulat, mint örökös ki van elégítve.

Budapest, 1941. január hó 30-án.
Dr. Klug Lipót

*

A Ferencz József Tudományegyetemnek a végrendeletemben hagyományozott tízezer (10000) pengőt f. é. szept. hó 9-én a Mathematikai és Természettudományi Kar Dékánjának megküldtem annak örömére, hogy az Egyetem visszakerült Kolozsvárra, ahol több mint 20 évig működtem, mint tanár. Ezért az Egyetemet a hagyatékomból már nem illeti semmi örökség.

Budapest 1941. október hó 2-án
Dr. Klug Lipót

*

Kizárom örökségemből anyai ági rokonomat Lewy M. Hermannét és leányát René-t, aki múlt hónapban sértegető durva hangú levelet írt, jóllehet éveken át pénzsegélyben részesítettem. Anyja is Steiner Aloisné szül. Neufeld Katalin irigy szemmel nézte haladásomat és ellenséges indulattal volt irányomban.

Budapest, 1941. december hó 23-án.
Dr. Klug Lipót

*

Fiók végrendeletem

Kizárom örökségemből minden rokonomat atyai és anyai ágon, azon alapos oknál fogva, hogy sem anyám halála után sem előbb bár legnagyobb szükségben voltam budapesti diákkoromban, nem részesültem a jelenleg még élő rokonok szüleitől és nagyszüleitől – a legkisebb támogatásban.

Örökségül hagyom lakásom bútorait, szőnyegeit, a fehér neműket és ruhákat, valamint az összes ezüsttárgyakat s könyveim kivételével minden tárgyat jelenlegi háztartásbeli alkalmazottam és ápolónőmnek, Klein Jolánnak (szül. Kolozsvárt 1902. ápril 9-én) – aki 1941. aug. 1 óta nálam szolgálatot teljesít – hűséges szolgálata jutalmául, ha még halálomkor is nálam szolgálatban van.

Arany zsebórámat Vargha Miklós úrnak a Hazai Bank RT igazgatójának hagyományozom.

Könyveim közül a mathematikai szakbelieket és az értekezéseket a Kolozsvári Ferencz József Tudományegyetem Geometriai Intézet Könyvtárának, a többi könyveket pedig ugyanazon egyetem könyvtárának hagyományozom.

Budapest 1942. Május 14-én.
Dr. Klug Lipót

Mi alulírott tanúk tanúsítjuk, hogy az általunk személyesen ismert Dr. Klug Lipót nyug. r. egyetemi tanár a mi együtt jelenlétünkben kijelentette, hogy ezen okirat az ő fiókvégrendeletét tartalmazza, és hogy azt saját kezűleg írta és aláírta.

Kelt Budapesten 1942. Május 16-án.
Dr. Teller Miksáné, sz. Deutsch Ilona, Dr. Teller Miska

*

Ezen végrendeletet a fiókvégrendelettel együtt a 138/1945./Vn 5/1945.-sz. jegyzőkönyv tanúsága szerint a mai napon kihirdetem.

Kelt Budapesten 1945, ezerkilencszáz negyvenöt évi június hó 26.
Dr. Kiss Dezső

*

Dr. Kiss Dezső közjegyző irodája részére hivatalból kirendelt Dr. Kiss Dezső közjegyzőnek a budapesti közjegyzői kamara 343/1945 k. sz. határozatával bejegyzett

2. számú pótvégrendelemnek Fiókvégrendelet

Végrendeletemben az Eötvös Roland Mathematikai és Fizikai Társulatnak ötezer (5000) pengőt a Kolozsvári Ferencz József Tudományegyetemnek tízezer

(10000) pengőt hagyományoztam. Ezeket az összegeket azonban még életemben az illető intézményeknek a rendelkezésére bocsátottam, és pedig az 5000 pengőt 1941. Év január havában, a 10000 pengőt ugyanazon évi szeptember havában és a végrendeletem második lapján megírtam, hogy ezeket az összegeket már nem kell kifizetni.

Minthogy egyszerű és szerény életmódommal nyugdíjamból annyit takaríthattam meg, hogy abból a végrendeletemben jelzett összegeket kifizetése lehetséges, fenntartom az abban levő rendelkezésemet, azaz kívánom, hogy halálom után hagyományomból az Eötvös Roland Mathematikai és Fizikai Társulatnak még ötezer (5000) pengő, tízezer (10000) pengő adassék át, és pedig ugyanazzal a céllal, amellyel azt annak idejében rendelkezésre bocsátottam.

A meglévő ékszerekre és értéktárgyakra vonatkozólag jelenleg nem rendelkezhetem, mert nem tudom, hogy nem lesz-e szükségem még azoknak értékesítésére.

Budapest, 1943. Év ápr. 1-én.

Utóirat.

Dr. Szőkefalvi Nagy Gyulát, egyetemi tanárt kértem meg végrendeletem végrehajtására. Ő kijelentette, hogy ezzel megtisztelve érzi magát és elfogadja. Szakkönyveimet a Kolozsvári Tudományegyetem Geometriai Intézet Könyvtárának, a többit az ottani egyetemi Könyvtárnak hagyományozom.

Bp. 1943. Ápr. havában Dr. Klug Lipót
Con Gyula, mint tanú   Klein Jolán, mint tanú

*

Ezen fiókvégrendeletet a Kjő: 138/1945-Vn. 5,1945-sz. jegyzőkönyv tanúsága szerint a mi napon kihirdettem.

Kelt Budapesten, 1945. Ezerkilencszáznegyvenöt évi június hó 26. huszonhatodik napján.

Dr. Lukács Izsó budapesti közjegyző irodája részére hivatalból kirendelt Kiss Dezső közjegyzőnek a budapesti közjegyzői kamara 343/1945 Kk. sz. határozatával bejegyzett helyettese.

*

Szám: Kjő.:138/1945.
Vn. 5/1945.
A tekintetes Központi Járásbírósághoz Budapesten

A Budapesten, 1945. évi március hó 24. napján elhalt dr. Klug Lipót volt budapesti (VII. Nagyatádi Szabó u. 38-40) lakósnak 1940. évi július hó 2-án kelt eredeti magánvégrendeletét és 1943. évi április hó 1. Napján kelt második fiókvégrendeletét, melyeket Vn. 5/1945. Szám alatt kihirdettem, van szerencsém eredetben beterjeszteni.

Budapesten, 1945. évi július hó 19. napján.
Hivatalos tisztelettel:

Mell: 2 db. eredeti végrendelet.

Dr. Lukács Izsó budapesti közjegyző irodája részére hivatalból kirendelt Kiss Dezső közjegyzőnek a budapesti közjegyzői kamara 343/1945 Kk. sz. határozatával bejegyzett helyettese.

Köszönetet mondok Homola Lászlónak és Koltai Károlynak az értékes adataikért és a segítségükért.

Irodalom

[1] Kárteszi Ferenc, Találkozásaim Klug Lipóttal, *Matematikai Lapok* (1973), p. 219–223.

[2] Jelentés az 1943. évi Klug Lipót-jutalomról, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **50** (1943), p. 86–87.

[3] Staar Gyula, *A megélt matematika,* Gondolat (Budapest, 1990), p. 310–311.

[4] Zigány Ferenc, Klug Lipót munkássága, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **50** (1943), p. 205–222.

[5] Budapesti Levéltár, Budapesti Központi Királyi Járásbíróság. Kihirdetett végrendeletek.

Róbert Oláh-Gál: Lipot Klug (1854–1945)

Lipot Klug, who was a prominent Hungarian representative of the synthetic geometry, didn't have a known portrait until now. No photograph of this scientist was discovered in any dictionary, paper, article or manuscript so far. Our purpose is to present his portrait 66 years after his death. So far literature quoted a wrong year of Lipot Klug's death; the correct date is 24th of March 1945. In this paper we clarify this data; we quote excerpts from his correspondence and also his last will and testament, what has a cultural-historical value, as well.

Oláh-Gál Róbert

Sapientia Egyetem Gazdaság- és Humántudományok Kar
Csíkszereda
Románia

HOGYAN **SZERETEK** MATEMATIKÁT **TANÍTANI**

Mozaikok egy tanári pályáról

SOMFAI ZSUZSA

A matematikai nevelés egyik országosan ismert képviselője egy alkalommal azt mondta, hogy a Rátz Tanár Úr Életműdíj a mi szakmánkban olyan, mint amikor egy művész Kossuth-díjat kap. A díj alapításáig visszatekintve nem érzem túlzásnak ezt a kijelentést. Magam nagy-nagy szakmai megbecsülésnek éltem meg, és ritka felhőtlen örömöt éreztem a díj átvételekor, de érzem ennek a megbecsülésnek a felelősségét is. A felelősség egyik kis szelete, hogy mit mutatok meg ebből az alkalomból a matematikatanári munkámból.

A választásom szempontjait egy egyszerű párhuzammal igyekszem érzékeltetni. Amikor egy étel készül, az alapanyagok és a recept általában adottak és a készítők számára ugyanazok, de az egyéni ízlés, a saját ötletek, fűszerek hozzáadásával pl. nagyon sokféle lecsó készül el. Hasonló a tanítás ügye is. Adottak természetesen a diákok és a többé-kevésbé megegyező tananyag, de a jó eredmény eléréséhez szükséges „fűszerek" alkalmazása teret enged a tanár saját ízlésének, egyéniségének a megnyilvánulására. Az alábbiakban az én tanári munkám fűszereiből fogok néhányat bemutatni.

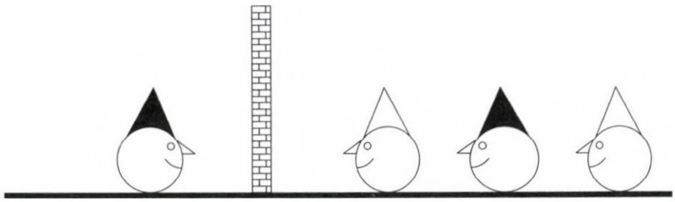
Képzeljünk el egy skálát, amelyiken a tanárkodás hangsúlyait szemléltetjük. A két szélét jelölték meg, és ezen próbáljuk meg érzékeltetni a különböző tanárhabitusokat:

MATEMATIKAtanár matematikaTANÁR

Az, hogy ki hova helyezhető, vagy helyezi magát ezen a skálán, nagyon sok tényezőtől függhet, ezek közül az egyik pl. a két kultúrához való viszony. Én biztosan valahol a skála jobb felén kell, hogy helyet kapjak, hiszen a matematika tanítását az emberformálás, a gondolkodásra nevelés egyik legszebb és hatékony eszközeként élem meg. A következő feladatokkal, esetleírásokkal ezt az alapállást szeretném illusztrálni.

Az empátia

A négy nyakig földbe ásott rab tudja, hogy két fekete és két fehér sapkát tettek a fejükre, de mindenki csak az előtte levőket látja, a fal pedig magas és nem átlátható. Megmentheti a saját és a többiek életét az, aki helyesen megmondja, hogy az



ő fején milyen sapka van, de ha a megszólaló téved, az a csoport életébe kerül. Ki és hogyan gondolkozva mentette meg a csoportot?

A jobb oldali középső figura maga előtt lát egy fehér sapkát és azt gondolja, hogy ha az ő fején is fehér lenne, akkor a leghátsó társa nagyon gyorsan megszólalt volna. Mivel erre nem kerül sor, kis idő múlva bejelenti, hogy az ő fején fekete sapka van.

A gyerekek általában hamar megtalálják a megoldást, és akkor tudunk egy kicsit arról beszélni, milyen fontos, hogy megtanuljuk átgondolni, átélni a mások helyzetét, vagyis **empatikusak legyünk.**

Ugyanezt az emberi, gondolkodásmódbeli tulajdonságot erősíti matematikusabb változatban a következő, a diákok számára az előbbinél nehezebbnek bizonyuló feladat:

A sofőr mindig 5 órakor veszi fel főnökét az állomáson, és onnan viszi haza. Egyik nap a főnök egy órával előbb beért az állomásra, sétálva elindult hazafele. A sofőr felvette, amikor az úton összetalálkoztak, így végül a szokásosnál 20 perccel hamarabb értek haza. Hány percet sétált aznap a főnök?

A gyors megoldásban itt is a **jó nézőpont megtalálása** segít. Most a sofőr helyzetét célszerű követni. A 20 perc időnyereség az ő számára úgy keletkezhetett, hogy a főnökével való találkozáskor még 10 percnyi útja lett volna az állomásig, majd további 10 perc ezen a szakaszon vissza. Mivel a szokásos időnél 10 perccel hamarabb vette fel a főnökét, a megelőző 50 percet a főnök sétával töltötte.

A feladat megbeszélésekor a tanulók egy része azon bosszankodik, hogy milyen egyszerű az ismertetett megoldás, ami neki nem jutott eszébe. Szinte minden csoportban van olyan gyerek is, aki szerint az elmondottak nem helyesek, mert nem vettük figyelembe azt az időt, ami alatt az autó megfordul, a főnök pedig beszáll. Ha a tanár az ilyen észrevételt okvetetlenkedésnek tartja és lehurrogja, elveszíthet diákokat a matematika ügyének. A válasszal meg lehet ragadni az alkalmat a matematikai absztrakció, a modellválasztás jobb megértetésére.

Gondolkodáslélektani alapelv, hogy **egy gondolatmenetet akkor értünk igazán, ha az inverzét is átlátjuk.** A függvénytulajdonságok tanítása során ezt az elvet követi a „Függvényvadászat" nevű játék, amit több évfolyamon is játszhatunk az ott tárgyalt függvényekre vonatkoztatva. A játék lényege, hogy kezdetben a tanár mond néhány tulajdonságot, aminek alapján a diákoknak „le kell vadászni" a függvényt, azaz megadni a képletét, vagy felrajzolni a grafikonját. Nem csak a jó válaszok, hanem a hibák, tévedések is nagyon tanulságosak lehetnek a jobb megértés érdekében. Később a diákok is adhatnak fel vadászatra függvénytulajdonságokat, de fontos, hogy csak olyat, amit maguk meg tudnak válaszolni.

Azt gondolná az ember, hogy 40 év tanítás után már nem érheti meglepetés a munkájával kapcsolatban. A közelmúlt meggyőzött arról, hogy ez nem így van. Annál elgondolkodtatóbb volt az alább leírt tapasztalat a számomra, mert régóta foglalkoztat a természetes nyelv és a matematikai nyelv kapcsolatának kérdése, ennek a matematika tanításakor megjelenő problémái.

Fontosnak tartom, hogy fokozatosan megtanítsuk a tanítványainkat matematikai szöveget önállóan olvasva is megérteni, ezért a 10. osztályban a középpontos hasonlóság tulajdonságait úgy dolgoztuk fel, hogy az órán mindenki olvasta magának a tankönyvi szöveget, aztán megbeszéltük.

Íme a tankönyvi szöveg, ami magán hordozza a matematikai pontosság, nyelvi tömörség és a könnyen érthetőség között sokszor meglevő ellentmondást.

A középpontos hasonlósági transzformáció tulajdonságai

(1) **Ha $\lambda \neq 1$, akkor a transzformáció egyetlen fixpontja az O középpont. Ha $\lambda = 1$, akkor a tér minden pontja fixpont,** azaz a transzformáció az identikus transzformáció.

(2) **Az O középpontra illeszkedő egyenesek a transzformáció invariáns egyenesei.** Ha $\lambda \neq 1$, akkor más invariáns egyenes nincs.

(3) **Bármely, az O középpontra nem illeszkedő egyenes képe az eredetivel párhuzamos, O-ra nem illeszkedő egyenes.**

(4) A fenti tulajdonságok alapján a középpontos hasonlóság **szögtartó transzformáció,** azaz bármely szög és a képe egyenlő nagyságúak.

(5) A λ arányú középpontos hasonlóságnál bármely szakasz képének hossza az eredeti szakasz hosszának $|\lambda|$-szerese, azaz **bármely A és B pontok esetén $A'B' = |\lambda| \cdot AB$.**

(6) **A középpontos hasonlóság akkor és csak akkor egybevágóság, ha $|\lambda| = 1$.** Ha $\lambda = 1$, akkor identitás, ha $\lambda = -1$, akkor középpontos tükrözés.

(7) A síkbeli középpontos hasonlóság nem változtatja meg az alakzatok körüljárási irányát, azaz **irányítástartó.**

A meglepetést az olvasottak megbeszélése okozta. Arra a kérésre, hogy mondja el valaki a saját szavaival, hogy miről olvasott, a 19 fős humán tagozatú csoportban senki nem jelentkezett. Amikor azt kértem, hogy a könyv szavaival idézzék fel, amit megtanultak, arra többen is szívesen vállalkoztak. Rá kellett döbbennem, hogy **a megtanulás és a megértés egyáltalán nem esett egybe,** hiszen a tanulásra hangolt, rokonszenves csoport tagjai a memóriájukra támaszkodva vissza tudták adni az olvasottakat, de a tartalom nem vált saját gondolataikká.

A laikus közvéleményben az iskolai matematikát sokszor illetik azzal a váddal, hogy száraz, személytelen. A tanításban ezer apró ötlet segít abban, hogy **a tananyagot személyessé tegyük a diákok számára.** Különösen fontos ez olyan esetben, amikor a matematika iránt kevésbé fogékony gyerekekről van szó. Két példát mutatok erre a „fűszergyűjteményemből".

9. osztályban év elején felidézzük az általános iskolában tanultak közül a legfontosabbakat, így például az egyenes és a fordított arányt is. Én ehhez sokszor veszem segítségül Karinthty Frigyes Tanár úr kérem-jéből a Tanítom a kisfiamat c. epizódot.

A történet szerint a Karinthy Gábornak, Gabinak feladott feladat a következő: „Ha kilenc kályhában öt és fél nap alatt tizenkét köbméter bükkfa ég el – mennyi nap alatt ég el tizenkét kályhában kilenc köbméter bükkfa..." Felolvassuk a tollat rágó, tanácstalankodó fiú és a segíteni akaró, majd az ebbéli kudarcát egyre nevetségesebben leplezni próbáló apa párbeszédét, és a történetben leírt feladat megoldása előtt még egy nagyon fontos rövid beszélgetésre sor kerül: Megkérem a gyerekeket, idézzék fel magukban, tapasztaltak-e valami hasonlót a felnőttek részéről, nevezetesen azt, hogy valaki sehogy nem akarta bevallani, hogy valamihez nem ért. Nem kell hangosan kimondani, de a legtöbb diák tekintetéből látszik, hogy igen a válasz. Ezzel **a csoport meg én, a tanár egy oldalra kerültünk**, egy kicsit cinkosokká váltunk abban, hogy sokszor átlátunk a felnőtteken. Így már szinte becsületbeli ügyünk, hogy együtt megoldjuk azt a fránya feladatot.

Szintén 9. vagy esetleg 10. osztályban kerül sorra Pitagorasz tétele. Nincs olyan csoport, ahol ne lenne érdeklődés a görög gondolkodás iránt, és sok diákot megragad az is, hogy az évszázadok folyamán milyen sokféle bizonyítását adták ennek a tételnek. Vannak közöttük, akik szívesen keresnek pl. az interneten különböző bizonyításokat, ezeket ismertethetik az órán, vagy szakkörön. Egy alkalommal a pitagóreus gondolkodók szimmetria iránti tiszteletéről beszéltem a gyerekeknek, és együtt kerestünk a természetben vagy az épített környezetben található szimmetriákat. Megkérdeztem tőlük, szeretnének-e olyan környezetben élni, ahol a szimmetria az uralkodó tulajdonság. Nagyon rokonszenvesnek éreztem, hogy nem vágott rá rögtön senki valamilyen választ, hanem eltöprengtek a kérdésen. Végül egy kislány azt fogalmazta meg, hogy nagyon nem szeretne, mert az egyhangú, unalmas lenne. Bizony nem került itt sor a szimmetria pontos matematikai értelmezésére, hanem úgy is használtuk közben a fogalmat, mint egy köznapi beszédből ismertet, de őszintén remélem, hogy ez az epizód nemcsak nekem, hanem a gyerekeknek is élményszerű, emlékezetes marad.

A matematikára hangolt, érdeklődő csoportokban különösen gyorsan kialakítható az igény **egy feladat többféle megoldásának a keresésére.** Itt is fontos tényező a személyesség, hiszen az egyik megoldás pl. a Sebi-féle, a másik a Dóri-féle, de személyes ízlés dönthet abban is, ki melyiket tartja érdekesebbnek, szebbnek. Így formálódik a matematikai ízlés.

Van aztán eset, amikor egyértelmű, melyik a szebb megoldás: az, amelyik kevésbé mechanikus, egy jó ötlet alapján elegánsan rövid.

Bemutatok erre is egy példát.

András és Béla sokat asztaliteniszeznek egymással. A tapasztalat szerint András 0,7*, Béla* 0,3 *valószínűséggel nyer meg egy játékot. Ha többször játszanak, azt tekintjük győztesnek, aki többször nyert.*

a) Mekkora András nyerési esélye 4 *játszmánál?*

b) Hogyan változott András egy játékának nyerési esélye, ha tudjuk, hogy két játék esetén Béla $\frac{5}{9}$ *valószínűséggel nem veszít?*

A valószínűségszámításban tanult összefüggések egyszerű alkalmazására van szükség az *a*) kérdésnél, és az ott meggondoltakat lehet használni a *b*) megoldásakor.

a) $$\binom{4}{3}\cdot 0{,}7^3\cdot 0{,}3^1+\binom{4}{4}\cdot 0{,}7^4\cdot 0{,}3^0=0{,}6517,$$

b) $$\binom{2}{0}p^0\cdot(1-p)^2+\binom{2}{1}p^1\cdot(1-p)^1=\frac{5}{9}\quad\text{így}\quad p=\frac{2}{3}.$$

Amikor az *a*) megbeszélése után az egyik diák a táblánál megoldotta a *b*) kérdést, a helyére menve azt kérte, hogy hallgassuk meg a szomszédja megoldását is *b*)-re, mert az sokkal szebb az övénél.

Íme, **a szép megoldás:**

$$P(\text{Béla nem veszít})=P(\text{András nem nyer})=1-P(\text{András nyer})=1-p^2=\frac{5}{9},$$

$$\text{így}\quad p=\frac{2}{3}.$$

A feladat két kérdése didaktikusan egymásra épül, segítséget adva ezzel a kicsit nehezebb részhez. A tanári irányítást követő gyerek jár is ezen az úton, el is jut a megoldáshoz. Az öntörvényűbb, a saját útját szívesebben járó gyerek pedig megy a saját feje és gondolatai szerint, és ad egy valóban szebb megoldást.

A két(féle) diák tanára pedig nagy élvezettel és örömmel állapítja meg, hogy milyen jó dolog sokféle gyerek szellemi fejlődésénél bábáskodni.

Matematikatanárok is sokszor mondják azt, hogy a társadalomtudományok vagy a művészetek kérdéseiben lehet valamit így is, meg úgy is gondolni, nincs az „igazságnak" kritériuma. Bezzeg a matematika! Ott minden biztosan eldönthető, csak egyféle igazság lehet. Ez majdnem igaz, de félrevezetnénk a diákjainkat, ha felsőbb éves korukban nem tudatosítanánk, hogy ezt az egyértelműséget a nagyfokú absztrakció mellett a pontosan leírt és következetesen alkalmazott modell megválasztása biztosítja. Ha ez nincs meg, a matematikában is előjöhet az „így is, meg úgy is".

Kinek van igaza?

Két játékos egy kilenc menetből álló páros játékot játszik, amelyikben egy-egy menetnek nincs döntetlen kimenetele. A végén az a győztes, aki több menetet nyert meg, és természetesen az viszi a bankot. Egy alkalommal hat menet után a játékot be kellet fejezni. Eddigre az első játékosnak 4 nyertes menete volt, a másodiknak pedig kettő. Milyen arányban osztozzanak a bankon?

A kérdésre a legtöbb gyerek (és a legtöbb felnőtt is) azt a választ adja, hogy 2 : 1 arányban, hiszen ennyi a győztes menetek aránya.

Csak egy olyan csoportra emlékszem, ahol arra a felszólításra, hogy érveljenek a 7 : 1 arány mellett, volt vállalkozó diák, aki jól érvelt: A játék végéig még 3 menet lenne hátra. Ezeknek $2^3 = 8$ féle kimenetele lehet. A második játékos csak úgy nyerhetné meg a játékot, ha mindhárom menetet megnyeri, ez a 8 lehetőségből 1, tehát 7 : 1 arányban kell a bankon osztozni.

Az, hogy melyik érvelésnek van igaza, csak úgy dönthető el, ha a feladatban szereplő hiányos modellt kiegészítjük arra az esetre nézve is, ha hamarabb abbamarad a játék, mint 9 menet.

A fenti példákkal a tanári munkám hangsúlyait igyekeztem bemutatni. Végezetül megfogalmazok egy olyan tulajdonságot, amit ha valaki magán megtapasztal, menthetetlenül tanár-alkatnak érezheti magát: Sokkal átéltebb, intenzívebb egy érzelmi, vagy szellemi élmény, ha megoszthatom valakikkel, és nagyon jó, ha a tanítványaimmal oszthatom meg.

TÁRSULATI ÉLET – 2011

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2011. évi érmet **Páles Zsolt**nak ítélte oda.

Indoklás: Páles Zsolt 1956-ban született Sátoraljaújhelyen, ott érettségizett a Kossuth Lajos Gimnáziumban 1974-ben, és a KLTE TTK matematikus szakán kapott diplomát 1980-ban, ahol 1982-ben egyetemi doktori címet szetzett. Kandidátusi értekezését 1987-ben, az MTA doktori értekezését pedig 2001-ben védte meg.

Páles Zsolt kivételes képességű és szorgalmú matematikus, aki a matematika és alkalmazása több területén ért el jelentős nemzetközi visszhangot kiváltó eredményeket. Eddig 199 tudományos dolgozata jelent meg, amelyekre több mint 900 független hivatkozás történt. Az elmúlt öt évben 42 publikációja jelent meg, amelyeket tematikai szempontból a következőképpen lehet csoportosítani:

Függvényegyenletek regularitását javító módszerek;
Függvényegyenlőtlenségek és konvex analízis;
Stabilitási tételek függvényegyenletekre és egyenlőtlenségekre;
Nemsima analízis és nemlineáris funkcionálanalízis;
Optimális irányításelmélet és nemlineáris optimalizálás;
Középértékek elmélete.

Dolgozatai rangos nemzetközi folyóiratokban jelentek meg. Társszerzői között 17 magyarországi matematikuson kívül 22 kanadai, amerikai, ausztrál, osztrák, lengyel, romániai és német matematikus található. Munkásságának nemzetközi elismertségét mutatja, hogy 1992/93-ban Humboldt ösztöndíjas volt a Saarbrückeni Egyetemen, a 2005/06 akadémiai évben vendégprofesszor a Michigan State University-n, és eddig 23 alkalommal volt vendégkutató külföldi egyetemeken.

1989 óta több mint 30 szakdolgozat, illetve diplomamunka témavezetője volt. Alapító tagja a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájának, amelynek 2008 óta a vezetője. Eddig 5 PhD-s hallgatója szerezte meg a fokozatot és jelenleg is két PhD-s hallgató témavezetője, akik már teljesítették a fokozatszerzés tudományos feltételeit.

Fontos szerepet vállal a fiatalabb korosztály tehetséggondozásában is. Éveken át tartott előadásokat a megyei matematikai szakkörben, 5 éven keresztül ő készítette a megyei matematikai verseny feladatait a 11. osztályos tanulók számára, és részt vett a megoldások értékelésében is. Hasonló tevékenységet fejtett ki a Református Iskolák Országos Matematikai Versenyének megszervezésében. Vezetője volt a Jász-Nagykun-Szolnok megyei középiskolai verseny szervezőbizottságának. Személyes konzulensként vett részt középiskolások nemzetközi tudományos konferenciára való felkészítésében. Rendszeresen tart módszertani előadásokat a Matematikai Intézet tanártovábbképzései keretében.

A fentebb vázolt kutatói és tanári munkája mellett Páles Zsolt kiemelkedő szakmaiközéleti tevékenységet fejt ki. 2007 óta az MTA Matematikai osztálya doktori bizottságának tagja és egyben az operációkutatási szakbizottságának is közgyűlési képviselője. Jelenleg a Debreceni Egyetem tudományos rektorhelyettese. Tagja volt a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj (Matematikai) kuratóriumának (2001–2006) és az OTKA Természettudományi Kollégiumának is (2006–2009). Jelenleg a MAB természettudományi bizottságának a tagja.

Páles Zsolt főszerkesztője az Alkalmazott Matematikai Lapoknak (2003-tól) és az Aequationes Mathematicae-nak (2008-tól), és további 7 folyóirat szerkesztőbizottságának is tagja: Publicationes Mathematicae Debrecen (1993-tól), Matematikai Lapok (1993-tól), Mathematical Inequalities and Applications (1997-től), Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics (1999-től), Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis (2004-től), International Symposium on Functional Equations (2008-tól), Banach Journal of Mathematical Analysis (2008-tól). A Matematikai és Informatikai Intézet igazgatójaként (2001–03 között) jelentős szerepet vállalt a Teaching Mathematics and Computer Science folyóirat létrehozásában.

Széles körű és kiváló munkásságáért eddig a következő elismerésekben részesült: Rényi Kutató Emlékdíj (1983), Grünwald Géza-emlékdíj (1980), Alexits György-díj (1992), Széchenyi Professzori Ösztöndíj (1997), Arany János Közalapítvány Bolyai Farkas kuratóriumi díja (2000), Széchenyi István-ösztöndíj (2001), Akadémiai Díj (2004), Szentgyörgyi Albert-díj (2009).

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy Páles Zsolt nemzetközileg is elismert tudományos kutatómunkát végez, szakterületein jelentős hatású, iskolateremtő tanár, és kiemelkedő aktivitású közéleti személyiség. Ezek alapján javasoljuk számára a 2011. évi Szele Tibor-emlékérem odaítélését.

Beke Manó-emlékdíj

A 2011. évi Beke Manó-emlékdíj bizottság körültekintő mérlegelés után az alábbi határozatot hozta: a Beke Manó-díj második fokozatát kapják: **Bánky Judit, Csizmadia Lajosné, Hubert Györgyné, Keszegh István, Kozmáné Jakab Ágnes, Olosz Ferenc, Remeténé Orvos Viola** és **Szakolczai Katalin.**

Indoklás: *Bánky Judit,* a Kempelen Farkas Gimnázium tanára, 1998-tól a nyolcosztályos gimnázium igazgatója. Bánky Judit pedagógus családból származik. Mindig tanár akart lenni. Tanulmányait az ELTE Természettudományi Karán matematika–fizika tanári szakán végezte. Több középiskolában tanított, és műszaki főiskolákon vezetett gyakorlatot. 1989-től majd tíz éven keresztül volt meghatározó tagja a Zsolnai József nevével fémjelzett törökbálinti iskolakísérletnek. Motivációs tárháza kifogyhatatlan, a gyengébb képességű és a tehetséges gyermekek számára egyaránt meg tudja teremteni az ideális tanulási helyzetet. Tanítványai ma már a közigazgatásban, a gazdasági élet különböző területein elismert szakemberekként dolgoznak. Mind a mai napig erősen kötődnek egykori tanárukhoz, igénylik a vele való személyes kapcsolatot. Személyiségük fejlődésében, sorsuk alakulásában a vele eltöltött éveket meghatározónak tartják: nemcsak az általa közvetített szakmai ismereteket, hanem a tőle tanult, tőle ellesett, általa közvetített emberi értékeket is, sőt ez utóbbit talán jobban. 1999-től vesz részt a közoktatás országos reformjában: előbb a kerettantervi bizottság, majd 2003-ban a NAT matematikai bizottságának tagja volt. Az Oktatási Hivatal felkérésére immár hét éve tagja a matematika tantárgy érettségi feladatsorait összeállító bizottságnak. 2005-ben a szakma Graphisoft Díjjal jutalmazta.

Csizmadia Lajosné Vingler Katalin a Pécsi Tanárképző Főiskolán szerzett matematika–fizika szakos tanári diplomát 1974-ben. Tanári pályafutását 1969-ben kezdte Dégen, az ottani nevelőotthonban. 1970-től 1977-ig Mezőszilason, az általános iskolában tanított matematikát és fizikát. 1977-től a mai napig a ráckevei Árpád Fejedelem Általános Iskolában dolgozik. 1990-től húsz éven keresztül, nyugdíjba vonulásáig az iskola matematikai munkaközösségének vezetője volt. Nemcsak tanítja, hanem meg is szeretteti tanítványaival a matematikát és a fizikát. A tehetséggondozás mellett fontos feladatának tekinti a gyengébb képességű tanulókkal való foglalkozást is. Rendszeresen tart iskolájában matematikából tehetséggondozó, középiskolai előkészítő és versenyekre felkészítő szakköröket, és szervezi a tanulók versenyeken való részvételét. Az iskola tanulói minden évben szép számban vesznek részt a Varga Tamás, a Zrínyi Ilona, a Bátaszéki, az Alapműveleti egyéni versenyeken, és a tavalyi évtől a Bolyai-csapatversenyen. 1992 óta a Zrínyi Ilona-matematikaverseny Pest megyei szervezője, emellett több éve szervezi a Bátaszéki verseny helyi fordulóját. Munkássága nem szorítható be az iskola falai közé. Aktívan rész vesz Ráckeve város programjain, sőt ötleteivel, szervezőkészségével gazdagítja is azokat. Kezdeményezésére jött létre a ráckevei vállalkozók egy olyan csoportja, akik lelkes támogatói, segítői a matematikai tehetséggondozásnak. Ez a vállalkozói kör ráckevei tanulók támogatása mellett minden évben matematikából tehetséges székelyföldi gyerekeket lát vendégül egyhetes táborban Ráckevén.

Hubert Györgyné az ELTE TTK-n szerzett matematika–fizika szakos tanári diplomát. 1969 óta tanít a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnáziumban. A speciális matematika tagozat arculatának egyik meghatározója, alakítója, annak születése óta. Részt vett sok új program kialakításában, így 1973-ban dolgozott az MTA Matematikai Kutatóintézet felkérésére „A matematika és fizika összehangolt tanítása a speciális matematika tantervű osztályokban" elnevezésű kutatásban. Pedagógiai munkáját szorgalom, precizitás, kérlelhetetlen őszinteség és tartás jellemzi; követelő és inspiráló igényesség magával, kollégáival és tanítványaival szemben. A tanítás mellett fontos feladatának érzi a fiatal kollégák felkarolását, támogatását is. Kezdetektől fogva részt vesz az iskola Matematikai Tehetséggondozó Táborának („Matektábor") szervezésében, foglalkozásainak elektronikus jegyzetét nagy gonddal készíti el. Témáit alaposan felépített, lépésről lépésre haladó feladatsorokba öntve adja át diákjainak. Interneten is elérhető jegyzetei többek között: Kúpszeletek elemi úton, Mértani helyek, Ábrázoló geometria, Feladatok a szabályos tizennyolcszögben. Több évig tagja volt a matematika OKTV középbizottságának. Középszintű érettségi vizsgabizottságok elnöke, 2005-től a kétszintű érettségi beindulása óta matematikából emelt szintű szóbeli bizottsági elnök és javításvezető. Tanítványai kiválóan szerepelnek az emelt szintű matematika érettségi vizsgákon, és több országos versenyen értek el szép eredményeket matematikából és fizikából. Többek között a matematika OKTV-n, az Arany Dániel Matematika Versenyen, az Eötvös fizikaversenyen és a KöMaL pontversenyeiben voltak helyezettjei. Több miniszteri kitüntetésben részesült. 2001-ben Graphisoft-díjat, 2007-ben Arany Katedra Emlékplakettet kapott.

Keszegh István a komáromi magyar gimnáziumban érettségizett, majd a prágai Károly Egyetemen szerzett diplomát matematika–fizika szakon. 30 éve tanít megszakítás nélkül a komáromi Selye János Gimnáziumban. A gimnázium igazgatójaként is dolgozott. Igazgatóként egyik legfontosabb feladatának tekintette a tantestület szakmai színvonalának és elkötelezettségének növelését. Tanítványai kiváló eredményeket érnek el a szlovák, a magyar és más matematikaversenyeken, részt vesznek a KöMaL és a szlovák matematikai lapok pontversenyén is. Ezekkel az eredményekkel Keszegh István nemzetközi hírűvé tette a komáromi magyar gimnáziumot. Életre hívta a PROMATEKA Alapítványt, amelynek célja az egész Felvidékről felkarolni a fiatal magyar matematikatehetségeket. Dolgozik a felsőoktatásban is, és tanít a veszprémi egyetem tehetséggondozó programjában, az Erdős Iskolában. Részt vesz a Csemadok és a Szlovákiai Magyar Pedagógusok Szövetsége országos tevékenységében is. A Rátz László-vándorgyűléseken többször részt vett, szemináriumot is tartott. Fő szervezője az idei, 51. Rátz László-vándorgyűlésnek. Munkáját többször elismerték, többek között 2004-ben Felvidéki Magyar Pedagógus díjat, a Szlovák Oktatási Minisztériumtól pedig Szent Gorazd-emlékérmet kapott.

Kozmáné Jakab Ágnes matematika–fizika szakos tanári oklevelét a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán szerezte, később a főiskola Gyakorló Általános Iskolájának matematika szakvezető tanárává, vezető pedagógussá nevezték ki, majd igazgatóhelyettes lett. A matematika tanításában elért sikerei és eredményei alapján 1992-től a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola matematika tanszékének szakvezető tanáraként és szakmetodikusaként sok-sok évfolyam végzős hallgatójával osztotta meg a tanári mesterség fortélyait, és irányította a matematika szakos tanárjelöltek tanítási gyakorlatát. Szakmódszertani szemináriumokat vezetett a matematika tanár szakos főiskolai hallgatóknak. Társszerzője a Mozaik Kiadónál megjelent, felső tagozatos diákoknak szóló matematika összefoglaló feladatgyűjteménynek. Mindig nagy hangsúlyt helyez a kristálytiszta fogalomalkotásra, az önálló felfedezésre, a biztos, alkalmazásra érett tudás megszerzésére. A tehetséges tanulókkal való kiemelt foglalkozás szívügye. Tanítványai rajongással szeretnek és sikeresen tudnak vele dolgozni. Szuggesztív egyéniségével, kifinomult pedagógiai eszközeivel kiválóan motiválja őket mind magasabb teljesítményre. Közülük többen matematikusok, matematikatanárok, fizikusok, informatikusok lettek. Tanítványai a Zrínyi

Ilona-versenyen és a Makkosházi versenyen többször értek el I.–II. helyezést. Több kitüntetés birtokosa.

Olosz Ferenc egyetemi tanulmányait a kolozsvári Babeş–Bolyai Tudományegyetem matematika–mechanika fakultásán, számítógép szakon végezte. A tanítást Gyergyóremetén kezdte, ezt követően Erdődre az Elméleti Líceumba kapott áthelyezést. Szatmárnémetibe versenyvizsgával került, ahol gépipari líceumokban majd a Kölcsey Ferenc Főgimnáziumban tanított. 2007-ben nyugdíjazták, de még három évig tanított. Különböző intézményi keretekben részt vett a tanítóképzésben is. Több könyvet írt. 49 szakcikket közölt módszertani és matematikai lapokban. Több mint 350 saját szerkesztésű feladata jelent meg nyomtatásban, illetve szerepelt különböző versenyeken kitűzött feladatként. Sok embert sikerült „megfertőznie" a matematika szeretetével, így közel 30 matematikatanár, több száz mérnök, közgazdász, informatikus van a végzett tanítványai között, néhányan a matematika tudományok doktorai. Diákjai különböző versenyeken is sikeresen szerepeltek. Mint szakmódszertanos tanár, a romániai Szatmár megyében a magyarul tanító matematikatanárok szakmai segítését, ellenőrzését és irányítását végezte, ily módon igényesebb szakmai munkára tudta ösztönözni tanártársait. Nagyon sokat tett az általános iskolai és líceumi matematikatanítás színvonalának és hatékonyságának emeléséért. 2004-ben Vektorok c. könyvéért a Romániai Magyar Pedagógus Szövetségtől Apáczai-díjat, 2008-ban a Román Oktatási Minisztériumtól Diploma de Excelenta életműdíjat kapott.

Remeténé Orvos Viola a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen, matematika–fizika szakon szerzett középiskolai tanári diplomát. Az első és egyetlen munkahelye a debreceni Fazekas Mihály Gimnázium. 1996 óta tanít matematika tagozatos osztályokban. Minden nyáron részt vesz legalább egy matematikatábor munkájában. Diákjai rendszeresen és eredményesen szerepelnek a helyi, az országos és nemzetközi matematikaversenyeken. Segítette a Nemzetközi Magyar Matematika Verseny debreceni megrendezését, amely versenysorozaton az iskola csapata azóta is kiemelkedően szerepel. 1998 óta minden évben viszi az iskola diákcsapatát a Révkomáromi Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozóra, ahol több alkalommal foglalkozásokat is tartott. Remeténé Orvos Viola ismert, megbecsült szakmai közéleti és közösségi ember, aki önzetlenül nagyon sokat tesz a tehetséggondozásért, a tanulói versenyekért. Aktívan bekapcsolódott az országos tehetséggondozó projektbe, a komplex matematika–nyelvi TÁMOP pályázat projektmenedzsere. Kétszer kapott Graphisoft díjat, 2009-ben és 2010-ben pedig az ABACUS díjazott tanára volt.

Szakolczai Katalin 1986-tól a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium vezető tanítónője. Matematika szakköröket vezetett először csak saját iskolájában – a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskolában – saját tanítványainak, majd a város minden pontjáról felkeresték szakkörét az érdeklődő, tehetséges kisdiákok. Budapesti szakköre ma is vonzza az érdeklődőket. Már a nyolcvanas évek elején részt vett abban a tanárokból álló csapatban, amely kidolgozta a TIT keretében a Kis Matematikusok Baráti Köre által használt szakköri füzeteket. Szakkörösei évtizedek óta a budapesti és országos matematikaversenyek díjazottjai között vannak. Igazolják, hogy a tehetséggel párosult szorgalom csodás szellemi teljesítményekre tesz képessé. Szakolczai Katalin vezető tanító nemcsak a gyerekek számára példakép, hanem a tanítók is mintaként tekintenek rá. Több mint húsz esztendeje vesz részt a tanártovábbképzésben. Nyílt, az érdeklődők által látogatható órái, valamint rendszeresen tartott bemutató órái népszerűek, nemcsak a budapesti, hanem a vidéki tanítók körében is. Számos, a tanítók munkáját segítő kiadvány szerzője, társszerzője. Rendszeresen publikál a Tanítók lapjában, A Tanító Módszertani füzetek és a Tanítói Kézikönyv sorozatban. Tanítóknak tartott előadásait tudása, gazdag tapasztalata teszi hitelessé. Tanított felnőtteket és tanult felnőttként maga is, példát mutatva az élethosszig tartó tanulásra. 2009-ben Karácsony Sándor-díjban részesült.

Grünwald Géza-emlékérem

2011-ben a Grünwald Géza-emlékéremre hat jelölés érkezett. A bizottsági vita során az egybehangzó vélemény az volt, hogy minden jelölt a kiemelkedő tudományos munkássága alapján a díj elnyerésére méltó lenne. A Bolyai Társulat azonban évente csak négy díjat ítélhet oda. A bizottság szavazatai alapján az idei a díjazottak a következők: **Besenyei Ádám, Gselmann Eszter, Máthé András,** és **Mező István.**

Indoklás: *Besenyei Ádám* 1982-ben született, és 2005-ben szerzett alkalmazott matematikus diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, majd 2009-ben PhD fokozatot ugyanott Simon László témavezetésével. Jelenleg az ELTE TTK alkalmazott analízis tanszék adjunktusa. Besenyei Ádámnak 11 tudományos publikációja van, valamint további 4 népszerűsítő cikket is közölt a KöMaL-ban. A PhD disszertációjában lévő eredmények 4 publikációhoz vezettek, amelyek közül kiemelendő az „On nonlinear parabolic variational inequalities containing nonlocal terms" című munka. Ebben egy új megközelítést alkalmazva lényegesen továbbfejleszti Chipot és Molinet valamint Simon László korábbi eredményeit. A doktori értekezést követő differenciálegyenleti kutatásai közül kiemelendő az „On a system consisting of three different types of differential equations" című cikk, amelyben egy porózus közegbeli áramlást modellező rendszer megoldhatóságát tanulmányozza. Legújabban pedig Petz Dénessel közösen mátrixok közepeivel kapcsolatban ért el jelentős eredményeket. Valamennyi munkájából látható a funkcionálanalízis és a differenciálegyenletek számos tárgykörének igen alapos ismerete, valamint az eredeti gondolatok rendszeres alkalmazása. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Besenyei Ádám a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Gselmann Eszter 1984-ben született, 2007-ben szerzett matematikus diplomát a Debreceni Egyetemen, majd 2011-ben PhD fokozatot Maksa Gyula témavezetésével ugyanott. Jelenleg a Debreceni Egyetem analízis tanszékén dolgozik tanársegédként. Gselmann Eszternek 15 publikációja van. PhD disszertációja, „Az információelmélet néhány függvényegyenletének stabilitása" címmel, a szerző 5 dolgozatában megjelent eredményeket foglalja össze. A stabilitás problémája az, hogy ha egy függvény egy egyenletet csak „behatárolható hibával" teljesít, akkor az egyenletnek van-e olyan megoldása, amely a szóban forgó függvénytől szintén csak „behatárolható hibával" tér el. A fenti dolgozatokban a szerző teljes megoldást ad az információ paraméteres alapegyenlete stabilitásának problémájára bármilyen egytől különböző valós szám is az egyenletben szereplő alfa paraméter. Érdemes megjegyezni, hogy ezekben a vizsgálatokban a stabilitáselmélet alapvető módszerei közül – az $\alpha = 0$ eset kivételével – egyik sem alkalmazható, így az egyenlet specialitásait kihasználó eredeti ötletekre van szükség. Legújabb dolgozataiban főleg derivációkkal és további stabilitási problémákkal foglalkozik. Kiemelésre érdemes ezek közül az a teljesen újszerű eredmény, amelynek következményeként igen általános körülmények között lehetséges a derivációkat definiáló egyenletrendszert egyetlen egyenlettel helyettesíteni. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Gselmann Eszter a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Máthé András 1981-ben született, 2005-ben szerzett matematikus diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, majd 2009-ben PhD fokozatot ugyanott Laczkovich Miklós témavezetésével. Jelenleg posztdoktori kutató a University of Warwick egyetemen. Kiemeljük továbbá, hogy 2004-ben első helyezést ért el a Schweitzer Miklós-emlékversenyen. Máthé Andrásnak 10 publikációja van, közülük több rangos folyóiratokban. Jelentős eredményeket ért el több területen, úgymint valós függvénytanban, geometriai mértékelméletben, valamint kombinatorikában is. Megmutatta, hogy a különböző dimenziókhoz tartozó Hausdorff-mértékek páronként egymással nem izomorf mértéktereket definiálnak a Borel-halmazokon, amely kérdést David Preiss évtizedeken át a mértékelmélet egyik legfontosabb problémájaként emlegette. Egy további régi problémakört zárt le azzal, hogy megmutatta, hogy bármely $[0, 1]$-en értelmezett folytonos függvény korlátos változású egy $1/2$-dimenziós halmazon. A Kakeya-problémakörhöz kapcsolódóan társszerzőivel belátta, hogy 2-nél magasabb dimenzióban egy egyenes folytonos mozgatásával is létrehozható null-mértékű Besicovitch-féle halmaz. Ezen felül kiemelkedő eredménye kombinatorikában, hogy megoldást adott Conway híres Angyal–Ördög problémájára a síkon. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Máthé András a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Mező István 1981-ben született, és 2006-ban szerzett matematikus diplomát a Debreceni Egyetemen, majd 2010-ben PhD fokozatot ugyanott Pham Ngoc Ánh témavezetése mellett. Jelenleg a Debreceni Egyetem Informatikai Kara alkalmazott matematika és valószínűségszámítás tanszékén egyetemi adjunktusként dolgozik. Mező Istvánnak 16 publikációja van. Harmadéves egyetemista korában kezdte meg kutatásait harmonikus analízisben Gát György témavezetésével. Megmutatta, hogy a Walsh–Fourier-analízisben oly fontos Dirichlet-magfüggvények – melyeknek integrálja végtelen – megfelelő súlyozással végessé tehetők, jóval általánosabb esetben is, mint azt korábban mások előtte leírták. PhD-tanulmányai alatt érdeklődése a kombinatorika felé fordult, és ma is ez a fő kutatási területe. Ezen területre eső 12 publikációjának egy része partícióelméleti témájú – a Stirling-számokat és általánosításait vizsgálja –, a dolgozatok másik része pedig a Stirling-számok számelméleti és analitikus tulajdonságait, belőlük képzett végtelen összegeket tárgyal. Érdemes megemlíteni, hogy a Stirling-számok általa definiált kiterjesztésével egy új formula adható a régóta ismert Bernoulli-polinomok racionális helyettesítési értékeire. Megmutatta továbbá, hogy az ún. r-Stirling-számok unimodálisak, mely kérdés kombinatorikus sorozatokra széles körben vizsgált tulajdonság. Ezzel a cikkével – mely a neves *Advances in Applied Mathematics* című lapban jelent meg – újabb kutatásokat indított, és már számos további, független eredmény támaszkodik az övére. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Mező István a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Farkas Gyula-emlékdíj

A bizottság, a beérkezett javaslatok alapján 2011-ben két Farkas Gyula-emlékdíjat adományoz. A díjazottak: **Eisenberg-Nagy Marianna** és **Schlotter Ildikó.**

Indoklás: *Eisenberg-Nagy Marianna* a kecskeméti Bányai Júlia Gimnáziumban érettségizett 1999-ben. Alkalmazott matematikus diplomáját az Eötvös Loránd Tudományegyetemen 2004-ben, PhD-jét az ELTE Alkalmazott Matematika programjában Illés Tibor vezetésével 2009-ben szerezte meg. Marianna – 2005-ben – OTDK első díjat nyert elégséges lineáris komplementaritási feladatok új belsőpontos algoritmusának kifejlesztésével. 2009 szeptemberétől két évet a Tilburgi Egyetemen töltött, mint postdoktor, majd 2011. ősztől az amszterdami CWI-ben kapott egy éves postdoktori kutatói állást. Nagy Marianna doktori disszertációjában elsőként dolgozott ki általános lineáris komplementaritási feladatok megoldására hatékony algoritmusokat. Ezzel az eredményével jelentősen hozzájárult fontos gyakorlati problémák (pl. egyensúlyi piac modellek) megoldásához. Jelenleg szemidefinit programozási feladatok kombinatorikus optimalizálási alkalmazásaival foglalkozik. Marianna eddig 11 tudományos publikáció szerzője (társszerzője), amelyek a matematikai programozás és optimalizálás legjobb folyóirataiban jelentek meg.

Schlotter Ildikó középiskolai tanulmányait a budapesti Szent István Gimnázium speciális matematika tagozatán végezte. Egyetemi diplomáját a BME informatika szakán szerezte 2005-ben, majd ugyanitt doktori képzésben vett részt és 2010-ben PhD fokozatot szerzett summa cum laude minősítéssel. 2008-tól tanársegéd, majd adjunktus a BME számítástudományi és információelméleti tanszékén. 2010-től az ELTE operációkutatás tanszékének részállású kutatója. Schlotter Ildikó fő kutatási területe a kombinatorikus optimalizálási problémák (főleg gráfproblémák és többszereplős döntési feladatok, pl. a stabil párosítások vagy a választási rendszerek vizsgálata) algoritmuselméleti és bonyolultságelméleti szempontból. Cikkeiben többnyire a paraméteres bonyolultság módszertanát alkalmazza, így képes NP-nehéz problémákra matematikailag egzakt, de érdekes és nem triviális algoritmusokat adni illetve az NP-nehézségnél erősebb bonyolultsági eredményeket bizonyítani. Eddig 7 cikket publikált ismert nemzetközi folyóiratokban, további 7-et nemzetközi konferenciákon.

Rényi Kató-emlékdíj

A kiküldött bizottság a következő döntést hozta. A Rényi Kató-emlékdíj első fokozatát kapja **Nagy Ábris,** a Debreceni Egyetem végzett hallgatója, jelenleg ugyanott Ph. D. hallgató, és **Soukup Dániel Tamás,** az ELTE végzett hallgatója, jelenleg Ph. D. hallgató a University of Toronto-n.

A Rényi Kató Emlékdíj második fokozatát kapja **Rábai Zsolt** és **Varga Nóra,** mindketten a Debreceni Egyetem végzett hallgatói, jelenleg ugyanott Ph. D. hallgatók.

Nagy Ábris dolgozataiban általánosított kúpszeleteket vizsgál a konvex geometria és differenciálgeometria, esetenként a komplex függvénytan és a mértékelmélet változatos módszereivel. Az általánosított kúpszeletek az euklideszi (vagy más) tér azon pontjainak halmazai, amelyeknek egy adott K halmaz pontjaitól való átlagos távolsága állandó, ahol az átlag súlyozott összeget vagy (végtelen K esetén) a távolság súlyozott integráljait jelenti. Az [1] dolgozatban azt az esetet vizsgálják, amikor K véges sok csatlakozó, sima ív egyesítése, az említett átlagtávolság pedig az adott ponttal összekötő szakaszok által borított felület felszíne. Differenciálgeometriai módszereket alkalmazva, a [2] és [3] dolgozatban leírják, hogy egybevágóságok egy adott csoportjára mikor invariánsak az általános kúpszeletek. A [4] cikk eredménye, hogy a Manhattan-távolság (taxicab-norma) alkalmazása esetén az integrálással kapott függvény másodrendű parciális deriváltjai visszaadják a K halmaz röntgenfüggvényeit a koordinátairányokban, lehetővé téve tomográfiai alkalmazásokat.

Nagy Ábris dolgozatai:

[1] Á. Nagy, Zs. Rábai and Cs.Vincze, On a special class of generalized conics with infinitely many focal points, *Teaching Mathematics and Computer Science,* **7** (2009), 87–99.

[2] Á. Nagy and Cs. Vincze, Examples and notes on generalized conics and their applications, *Acta Math. Acad. Ped. Nyiregyháziensis.,* **26** (2010), 359–375.

[3] Á. Nagy and Cs. Vincze, An introduction to the theory of generalized conics and their applications, *Journal of Geometry and Physics,* **61** (2011), 815–828.

[4] Á. Nagy and Cs. Vincze, On the theory of generalized conics with applications in geometric tomography, *Journal of App. Theory,* megjelenés alatt.

Soukup Dániel halmazelméleti topológiával foglalkozik, nagy technikai hozzáértéssel használja a halmazelmélet korszerű módszereit. Szűkebb területe a D-terek elmélete. Egy X topologikus tér D-tér, ha akárhogy rendelünk X minden x pontjához egy U_x környezetet, van olyan Y zárt, diszkrét halmaz, amire $\bigcup\{U_y : y \in Y\} = X$. Arhangelszkij vezette be 2002-ben a D-tér fogalmának egy általánosítását: az aD-tereket. Soukup oldotta meg azt a problémát, hogy egybeesik-e ez a két fogalom, [1] és [2] dolgozata példát ad olyan diszpergált aD-térre, ami nem D-tér. A [3] cikkben a szerzők azt látják be, hogy bizonyos fedési tulajdonságú terek D-terek. [4]-ben a $\diamondsuit$ axiómából Lindelöf Hausdorff-teret konstruálnak, ami nem D-tér.

Soukup Dániel dolgozatai:

[1] D. Soukup, Properties D and aD are different, *Top. Proc.*, **38** (2011), 279–299.

[2] D. Soukup, Constructing aD, non-D spaces, *Topology and its App.*, **158** (2011), 1219–1225.

[3] D. Soukup and Xu Yuming, The Collins–Roscoe mechanism and D-spaces, *Acta Math. Hung.*, **131** (2011), 275–284.

[4] D. Soukup and P. J. Szeptycki, A counterexample in the theory of D-spaces, benyújtva.

Rábai Zsolt kutatási területe a diofantoszi egyenletek elmélete és kisebb részben differenciálgeometria.

Az [1] dolgozatban a szerzők azokat az általánosított kúpszeleteket vizsgálják, amelyek úgy keletkeznek, hogy ha K véges sok csatlakozó sima ív egyesítése, a tér minden pontjához hozzárendeljük a K-val összekötő szakaszok által borított felület felszínét, és azokat a pontokat vesszük, amelyekre az említett szám azonos. [2] dolgozatában meghatározza az $x^2 + 5^k 17^\ell = y^n$ exponenciális diofantoszi egyenlet összes megoldását. A bizonyítás elméleti és számítógépes módszereket kombinál. A [3] dolgozatban a szerzők igazolják, hogy ha $c = 2$ vagy 3, $b > a \geq 1$, $n \geq 3$, (a, b, c) nem az $(1, 3, 2)$, $(1, 4, 3)$, $(2, 5, 3)$ számhármasok egyike, akkor az $|ax^n - by^n| = c$ egyenletnek legfeljebb egy megoldása van, kivéve, ha $b = a + c$ és $(a, n, c) = (11, 11, 3)$ vagy $(7, 13, 3)$. A bizonyítás Laurent egy logaritmusok lineáris formáira vonatkozó tételét kombinálja az úgynevezett hipergeometrikus módszerrel.

Rábai Zsolt dolgozatai:

[1] Á. Nagy, Zs. Rábai and Cs. Vincze, On a special class of generalized conics with infinitely many focal points, *Teaching Mathematics and Computer Science*, **7** (2009), 87–99.

[2] I. Pink and Zs. Rábai, On the diophantine equation $x^2 + 5^k 17^\ell = y^n$, *Communications in Mathematics*, megj. alatt.

[3] I. Pink and Zs. Rábai, On the number of solutions of some binomial Thue equations, kézirat.

Varga Nóra szintén diofantoszi egyenletek megoldhatóságával foglalkozik. [1] dolgozatában az m-edrendű poligonális és n-edrendű piramidális számok egybeesésére vonatkozó

$$\frac{x}{2}\big((m-2)x + 4 - m\big) = \frac{y(y+1)}{6}\big((n-2)y + 5 - n\big)$$

diofantoszi egyenletet vizsgálja az $x > m \geq 3$, $y > n \geq 3$ feltételek mellett. Belátja, hogy $(m, n) \neq (4, 5)$ esetén a megoldások egy m-től és n-től függő effektíve kiszámítható korlát alatt vannak.

A [2] dolgozat tárgya az, hogy az

$$f_{k,m}(x) = \frac{x(x+1)\cdots(x+k-2)\big((m-2)x + k + 2 - m\big)}{k!}$$

alakú általánosított poligonális számok értékei között mikor szerepelhetnek olyan számok, amelyek (valamilyen számrendszerben) csupa azonos jegyből állnak. A szerzők meghatározzák, hogy a paraméterek mely értékei esetén van végtelen sok megoldás. A bizonyítás az ismert effektivitási tételeken és módszereken kívül számítógépes eljárást is használ.

Varga Nóra dolgozatai:

[1] Á. Pintér and N. Varga, Resolution of a nontrivial diophantine equation without reduction methods, *Publ. Math. Debrecen,* **79** (2011), 1–6.

[2] T. Kovács, Gy. Péter and N. Varga, On some polynomial values of repdigit numbers, *Periodica Math. Hung.*, benyújtva.

Patai László Alapítvány díja

A Bolyai Társulat elnökségének kiküldött bizottsága többségi szavazással úgy döntött, hogy a „Patai László Alapítvány" díját 2011-ben **Szilasi Zoltán** részére ítéli oda.

Indoklás: *Szilasi Zoltán* 2007-ben a Debreceni Egyetemen matematika és ábrázoló geometria tanári szakon szerzett oklevelet, majd elkezdte doktori tanulmányait az egyetem differenciálgeometriai és alkalmazásai doktori programja keretében Bácsó Sándor irányításával. A doktori tanulmányok ideje alatt kiszélesítette érdeklődési területét a véges geometriák iránt is, majd 2010-ben védte meg „On the projective theory of sprays with applications to Finsler geometry" c. PhD értekezését, és nyerte el a doktori fokozatot. Eddig 11 dolgozatot készített, részben Bácsó Sándorral közösen, melyből 6 megjelent, 2 elfogadva, 3 pedig közlésre van benyújtva. Első dolgozatában másodrendű hiper-felületekkel foglalkozik 4 dimenziós valós projektív térben. Másik dolgozatában K. Rabl egy 7 ponthoz kört rendelő leképezését általánosítja tetszőleges dimenzióra, és bemutatja, hogy ezt hogyan lehet háromdimenziós Apollonius-féle feladatok megoldásában felhasználni. A doktori disszertáció témájához kapcsolódó dolgozatai a differenciálgeometria Debrecenben hagyományosan erős témájához, a Finsler-geometriához tartoznak. Szilasi megmutatta, hogy amennyiben a Landsberg-tenzor, illetve a stretch tenzor csupán a helytől függ, az iránytól nem, akkor szükségképpen zéró. Legújabb dolgozatában az ún. p-Berwald-terekkel foglalkozik, melyekben a projektív Berwald-görbület eltűnik. Megmutatja, hogy ez 3 dimenzióban ekvivalens a gyengén Berwalcš, Douglas típusú feltétellel, s hogy egy ilyen tér pontosan akkor R-kvadratikus, ha stretch tenzora zéró. Legfrissebb dolgozataiban érdeklődése a véges geometriák egyes kérdéseire irányul. A bizottság a fentiek alapján döntött úgy, hogy „Patai László Alapítvány" díját 2011-ben Szilasi Zoltán részére ítéli oda.

JELENTÉS A 2011. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2011. október 28. és november 7. között rendezte meg a 2011. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen azok vehettek részt, akik a verseny megrendezésekor Magyarországon vagy magyar állampolgárként külföldön valamely egyetem, főiskola hallgatói vagy középiskolai tanulók voltak, vagy a verseny megrendezésének évében szereztek egyetemi, főiskolai oklevelet. PhD-hallgatók csak akkor vehettek részt, ha egyetemi, főiskolai diplomájukat a verseny megrendezésének évében szerezték.

A verseny megrendezésére a Társulat a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetét kérte fel. A Bolyai Intézet tanácsa bizottságot nevezett ki a verseny lebonyolítására, amelynek elnöke *Hatvani László,* titkárai *Maróti Miklós* és *Röst Gergely,* tagjai pedig *Czédli Gábor, Fodor Ferenc, Hajnal Péter, Kérchy László, Kincses János, Krámli András, Krisztin Tibor, Major Péter, Makay Géza, Móricz Ferenc, Nagy Béla, Nagy Gábor, Pap Gyula, Stachó László, Szabó László Imre, Szendrei Mária, Totik Vilmos, Varjú Péter* és *Zádori László* voltak.

A versenybizottság felhívására itthon és külföldön dolgozó magyar matematikusok 29 feladatot javasoltak kitűzésre; szerencsére mindazon témákból állt rendelkezésünkre elegendő feladat, amelyek a hagyományok szerint a versenyen szerepelni szoktak. Ezúton is köszönjük minden javaslattevő munkáját; nélkülük a versenyt nem tudtuk volna sikeresen lebonyolítani. Ellenőrzés és mérlegelés után a bizottság tíz feladatot tűzött ki.

A 2011. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. feladat. Legyenek $F_1, F_2, \ldots$ olyan Borel-mérhető halmazok a síkon, amelyek uniója az egész sík. Igazolandó, hogy van olyan n természetes szám és S körvonal, amelyekre az $S \cap F_n$ halmaz sűrű S-ben. Mutassuk meg azt is, hogy az állítás nem feltétlenül igaz, ha az F_j halmazok mérhetőségére vonatkozó feltételt elhagyjuk.

2. feladat. Tegyük fel, hogy egy n pontú G egyszerű gráf fokszámainak $\delta(G)$ minimuma legalább $3n/4$. Bizonyítsuk be, hogy G éleinek bármely 2-színezésében van olyan legalább $\delta(G)+1$ pontú összefüggő részgráf, melynek minden éle ugyanolyan színű.

3. feladat. A d-dimenziós $\mathbb{R}^d$ térben egy $n \times n \times \cdots \times n$-es kockarács összes (azaz n^d számú) pontját lefogtuk $2n-3$ hipersíkkal. Bizonyítsuk be, hogy ezek közül kiválasztható n hipersík úgy, hogy már azok is lefogják a rács összes pontját.

4. feladat. Legyen G, H két véges csoport, és legyen $\varphi, \psi : G \to H$ két szürjektív, de nem injektív homomorfizmus. Igazoljuk, hogy létezik G-nek az egységelemtől különböző olyan eleme, amelynek képe φ és ψ mellett azonos.

5. feladat. Legyenek n, k pozitív egészek. Az $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ és $a \in \mathbb{R}^k$ vektorok esetén legyen $f_a(x) := \|x-a\|^{2n}$, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma, és tekintsük az f_a $(a \in \mathbb{R}^k)$ függvények által generált $Q_{n,k}$ vektorteret. Melyik az a legnagyobb N egész szám, amelyre $Q_{n,k}$ tartalmazza az $x_1, \ldots, x_k$ összes olyan polinomját, amelynek teljes fokszáma legfeljebb N?

6. feladat. Legyenek $C_1, \ldots, C_d$ kompakt és összefüggő halmazok $\mathbb{R}^d$-ben, és tegyük fel, hogy mindegyik C_i konvex burka tartalmazza az origót. Bizonyítandó, hogy minden i-re van olyan $c_i \in C_i$, amelyekre az origó benne van a $c_1, \ldots, c_d$ pontok konvex burkában.

7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy nemnegatív valós számok tetszőleges $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatára

$$\liminf_{n\to\infty} \left(n^2\left(4a_n(1-a_{n-1})-1\right)\right) \leq \frac{1}{4}.$$

8. feladat. Adott $a \leq 1/e$ nullától különböző valós szám esetén legyenek $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ olyan nem valós számok, amelyekre $ze^z + a = 0$ teljesül, továbbá legyenek $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ tetszőlegesek. Mutassuk meg, hogy az $f(x) := \Re\left(\sum_{j=1}^n c_j e^{z_j x}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^n c_j e^{z_j x}\right)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek minden 1 hosszúságú zárt intervallumban van zérushelye.

9. feladat. Legyen $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha minden $t > 1$ esetén teljesül az

$$x'(t) = -x^3(t) + \frac{t-1}{t}x^3(t-1)$$

egyenlőség, akkor $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

10. feladat. Legyenek $X_0, \xi_{i,j}, \varepsilon_k$ $(i,j,k \in \mathbb{N})$ független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\xi_{i,j}$ $(i,j \in \mathbb{N})$ azonos eloszlásúak, ε_k $(k \in \mathbb{N})$ is azonos eloszlásúak, $\mathbb{E}(\xi_{1,1}) = 1$, továbbá $\mathbb{E}(X_0^\ell) < \infty$, $\mathbb{E}(\xi_{1,1}^\ell) < \infty$ és $\mathbb{E}(\varepsilon_1^\ell) < \infty$ valamely $\ell \in \mathbb{N}$ esetén. Tekintsük az $X_n := \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}$ $(n \in \mathbb{N})$ valószínűségi változókat, ahol $\sum_{j=1}^{0} \xi_{n,j} := 0$. Vezessük be az $M_n := X_n - X_{n-1} - \mathbb{E}(\varepsilon_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot. Bizonyítandó, hogy van olyan legfeljebb $\ell/2$ fokú P_ℓ polinom, melyre $\mathbb{E}(M_n^\ell) = P_\ell(n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Az első feladatot Totik Vilmos, a másodikat Gyárfás András, a harmadikat Károlyi Gyula, a negyediket Maróti Miklós, az ötödiket Totik Vilmos, a hatodikat

Bárány Imre, a hetediket Totik Vilmos, a nyolcadikat Krisztin Tibor, a kilencediket Hatvani László, a tizediket pedig Pap Gyula javasolta kitűzésre.

A versenyre 18 versenyző összesen 59 megoldást nyújtott be. Név szerint, *Backhausz Tibor* megoldást küldött a 2., 4., 5. és 7. feladatra, *Csige Tamás* a 2., 3. és 4. feladatra, *Gerencsér Máté* a 4., 7., 8., 9. és 10. feladatra, *Grósz Dániel* a 2. és 4. feladatra, *Gyenyizse Gergő* a 2., 3., 4., 7., 9. és 10. feladatra, *Kelemen Norbert* a 6. feladatra, *Kiss Viktor* az 1., 2., 3. és 4. feladatra, *Kovács Kristóf* a 2. feladatra, *Mészáros Szabolcs* a 2., 3., 4., 7. és 9. feladatra, *Nagy Ábris* a 6. feladatra, *Nagy Csaba* a 2., 4., 5., 7. és 9. feladatra, *Nagy Dániel* az 1., 2., 3., 4. és 7. feladatra, *Ozsvárt László* a 2. és 4. feladatra, *Soltész Dániel* a 2. feladatra, *Szakács Nóra* a 2., 4. és 6. feladatra, *Tomon István* a 2., 3., 4., 5., 7., 8. és 10. feladatra, *Udvari Balázs* a 2. feladatra, *Virosztek Dániel* pedig az 1., 7. és 10. feladatra.

A versenybizottság 2011. november 30-án megtartott ülésén a következő határozatot hozta:

A 2011. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny díjazottjai

I. díjban és 70 000 forint pénzjutalomban részesül **Tomon István,** az ELTE Matematika alapszak harmadéves hallgatója;

II. díjban és 50 000 forint pénzjutalomban részesül **Gyenizse Gergő,** az SZTE Matematikus mesterszak elsőéves hallgatója;

III. díjban és 40 000 – 40 000 forint pénzjutalomban részesülnek **Gerencsér Máté** és **Nagy Csaba,** az ELTE Matematikus mesterszak másodéves hallgatói.

Indoklás:

Tomon István teljes megoldást adott a 2., 3., 4., 5., 7., 8. és 10. feladatra.

Gyenizse Gergő teljes megoldást adott a 2., 3., 4., 7., 9. és 10. feladatra.

Gerencsér Máté teljes megoldást adott a 4., 7., 8., 9. és 10. feladatra.

Nagy Csaba teljes megoldást adott a 2., 4., 5., 7. és 10. feladatra, és kitűnt a megoldások világos, pontos leírásával.

A feladatok megoldásai

1. feladat (Totik Vilmos). *Legyenek $F_1, F_2, \ldots$ olyan Borel-mérhető halmazok a síkon, amelyek uniója az egész sík. Igazolandó, hogy van olyan n természetes szám és S körvonal, amelyekre az $S \cap F_n$ halmaz sűrű S-ben. Mutassuk meg azt is, hogy az állítás nem feltétlenül igaz, ha az F_j halmazok mérhetőségére vonatkozó feltételt elhagyjuk.*

Megoldás. I. rész (Kiss Viktor). Tegyük fel, hogy az F_j halmazok Borel-mérhetőek. Baire kategóriatétele szerint valamelyik F_k nem I. kategóriájú. Mivel F_k Borel-halmaz, megvan a Baire-tulajdonsága, azaz van olyan G nyílt halmaz, hogy F_k a G és egy I. kategóriájú E halmaz szimmetrikus különbsége. Mivel F_k nem I. kategóriájú, G nem üres, így tartalmaz egy B körlapot. Legyen ennek sugara r és középpontja P. Tekintsük a P körüli $\rho < r$ sugarú körvonalakat. Ha F_k egyikben sem sűrű, akkor minden ilyen körvonalnak van olyan íve, amely diszjunkt tőle, azaz amely E-ben van. Az E halmazt P körül elforgatva minden racionális szöggel és az elforgatottak H unióját véve ekkor $B \subset H$ lenne, ami lehetetlen, hiszen H I. kategóriájú (része E megszámlálható sok elforgatottja uniójának). Ez az ellentmondás igazolja, hogy F_k sűrű valamelyik P körüli $\rho < r$ sugarú körvonalon.

II. rész (Elekes Márton, versenyen kívül). Legyen K a sík köreinek halmaza, és minden $C \in K$ körre vegyünk fel diszjunkt $I_0(C), I_1(C), \dots$ íveket ezen a körön. A sík pontjait meg fogjuk színezni a $0, 1, 2, \dots$ színekkel, és minden $C \in K$ kör minden $I_k(C)$ ívéhez is hozzá fogjuk rendelni ezen színek valamelyikét 1-1 értelmű módon úgy, hogy minden j-re a j színű íven nincs j színű pont. Ez adja a feladat második részének a megoldását, hiszen ha F_j a j színű pontok halmaza és C egy kör, akkor F_j-nek nincs pontja a C kör j színű ívén, és így nem lehet sűrű C-ben.

Egy $H \subset R^2 \cup K$ halmazt nevezzünk zártnak, ha

1. $x, y, z \in H$ nem kollineáris pontok esetén az általuk meghatározott kör is eleme H-nak,
2. H-beli körök metszéspontjai (érintési pontjai) is elemei H-nak.

Jelölje egy tetszőleges S halmazra $\mathrm{cl}(S)$ azt a legszűkebb zárt halmazt, amely tartalmazza S-et. Mivel ez a $\mathrm{cl}(S)$ lezárt megszámlálható sok lépésben generálható S-ből körök metszeteit, illetve ponthármasokra illeszkedő köröket véve, $|\mathrm{cl}(H)| \leq |H| + \omega$. Azt is vegyük észre, hogy ha $X = \{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ egy jólrendezése egy $X \subset R^2 \cup K$ halmaznak, akkor a $\{\mathrm{cl}(\{x_\xi \mid \xi < \alpha\})\}_{\alpha<\kappa}$ növő lánc folytonos, azaz limesz α-ra

$$\mathrm{cl}(\{x_\xi \mid \xi < \alpha\}) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{cl}(\{x_\xi \mid \xi < \beta\}).$$

Egy $H \subset R^2 \cup K$ halmaz egy jó színezésén a következőt értjük:

1. minden $x \in H$ ponthoz egy természetes számot rendelünk, ami a színe,
2. bármely H-beli C körre az $I_0(C), I_1(C), \dots$ körívekhez 1-1 értelműen hozzárendeljük a $0, 1, 2 \dots$ színeket (ez lesz a színük),
3. egyetlen j-re sincs a j színű íven j színű pont.

A következőt fogjuk igazolni: *Tegyük fel, hogy egy $H \subset R^2 \cup K$ halmaz előáll véges sok zárt halmaz uniójaként. Ha adott a H egy jó színezése, és adott egy H-tól diszjunkt $X \subset R^2 \cup K$ halmaz, akkor H jó színezése kiterjeszthető $H \cup X$ egy jó színezésévé.*

Ármost ennek a $H = \emptyset$, $X = R^2 \cup K$ speciális esete adja a feladat második részének megoldását.

A fenti állítást az X számosságára vonatkozó indukcióval igazoljuk.

1. eset: $|X| \leq \omega$. Legyen $X = \{x_0, x_1, \dots\}$ az X egy (esetleg véges) felsorolása. Legyen $Z_n = \mathrm{cl}(\{x_k \mid k < n\})$. Ez megszámlálható. n-re vonatkozó rekurzióval színezzük a $Z_{n+1} \cup H$ halmazokat úgy, hogy a $Z_n \cup H$ halmazon már meglévő színezést megtartjuk. Elegendő tehát színezni $G_{n+1} = Z_{n+1} \setminus (Z_n \cup H)$ elemeit. Ezt egy újabb rekurzióval csináljuk: ha $G_{n+1} = \{g_0, g_1, \dots\}$ egy felsorolás, akkor a g_i elemeket sorban színezzük a következő módon.

$a)$ Ha g_i a sík pontja, akkor a zártság definíciója miatt legfeljebb egy Z_n-beli kör mehet át rajta, és ugyanilyen megfontolásból csak véges sok H-beli kör mehet át rajta. Az alrekurzióban a korábbi $j < i$ lépésekben már megszíneztünk véges sok kört (pontosabban azok íveit), és H színezésében is a H-beli körök ívei már színezettek, de mint mondtuk, összesen csak véges sok eddig megszínezett kör megy át g_i-n. Az $I_k(C)$ ívek diszjunktsága miatt minden ilyen körnek legfeljebb egy színezett íve tartalmazhatja g_i-t, így csak véges sok színe van ezeknek az íveknek az eddig már megadott jó színezésben. Legyen g_i színe tetszőleges ezektől különböző szín.

$b)$ Ha $g_i = C$ a sík egy köre, akkor Z_n zártsága miatt legfeljebb két Z_n-beli pont lehet rajta, és ugyanilyen okból csak véges sok H-beli pont lehet rajta. Az alrekurzióban a korábbi $j < i$ lépésekben megszíneztünk véges sok pontot, és H színezésében is a H-beli pontok már színezettek, de az éppen mondottak szerint, összesen csak véges sok eddig megszínezett pont van g_i-n. Mármost az $I_0(C), I_1(C), \ldots$ íveket színezzük meg a $0, 1, \ldots$ színekkel úgy, hogy minden színt pontosan egyszer használunk, és ha egy már megszínezett j színű pont valamelyik $I_k(C)$ íven van, akkor $I_k(C)$ színe j-től különböző legyen.

Könnyen látható, hogy ez jó színezést ad a $Z_{n+1} \cup H$ halmazon. Mivel az így kapott színezés a $Z_n \cup H$ színezésének kiterjesztése, végül kapjuk egy jó színezését a $H \cup X$-nél bővebb $H \cup \operatorname{cl}(X) = H \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n\right)$ halmaznak.

2. eset: $|X| > \omega$. Legyen $X = \{x_\alpha\}_{\alpha<|X|}$ az X elemeinek egy jólrendezése $|X|$ típusban. Legyen $Z_\alpha = \operatorname{cl}\left(\{x_\xi \mid \xi < \alpha\}\right)$. A fenti első megjegyzés alapján $|Z_\alpha| < |X|$. A második megjegyzés szerint $\{Z_\alpha\}_{\alpha<|X|}$ folytonos növő lánc, így elég a $G_{\alpha+1} = Z_{\alpha+1} \setminus (Z_\alpha \cup H)$ halmazokat úgy színezni, hogy a $Z_\alpha \cup H$ már meglévő színezésével együtt a $Z_{\alpha+1} \cup H$ egy jó színezését kapjuk. Ezt α-ra vonatkozó rekurzióval tesszük: alkalmazzuk az indukciós feltevést $Z_\alpha \cup H$-ra (vegyük észre, hogy ez véges sok zárt halmaz uniója), ennek az eddig megkonstruált jó színezésére és a $G_{\alpha+1}$ halmazra, ahol $|G_{\alpha+1}| \leq |Z_{\alpha+1}| < |X|$, így az indukciós feltevés használható.

Ismét könnyen látható, hogy ez jó színezést ad $H \cup \operatorname{cl}(X)$-en.

Érkezett 3 dolgozat, ebből értékelhető Kiss Viktoré, aki megoldotta a feladat első részét.

2. feladat (Gyárfás András). *Tegyük fel, hogy egy n pontú G egyszerű gráf fokszámainak $\delta(G)$ minimuma legalább $3n/4$. Bizonyítsuk be, hogy G éleinek bármely 2-színezésében van olyan legalább $\delta(G)+1$ pontú összefüggő részgráf, melynek minden éle ugyanolyan színű.*

1. megoldás (Több versenyző megoldása alapján). Feltesszük, hogy az élszínezés a piros és kék színeket használja. Tegyük fel, hogy a piros élek nem tartalmaznak feszítőfát (amikor is az állítás nyilvánvaló). Ekkor gráfunk csúcshalmaza szétvágható két, nem üres halmazra úgy, hogy az összes keresztél kék legyen. Legyen a két rész közül A a kisebb elemszámú, B a másik ($|A| \leq n/2$). Legyen $x \in A$ egy tetszőleges csúcs.

Állítás: *x összes szomszédja elérhető x-ből kék éleken való sétákkal.*

Ez a feladatot megoldja, hiszen x és szomszédjai legalább $1 + d(x) \geq \delta(G) + 1$ csúcs, amelyek az állítás szerint egy kék összefüggő gráfba esnek.

A B-beli szomszédokra az állítás nyilvánvaló. Legyen y egy A-beli szomszéd. Minden A-beli pontnak van legalább $\delta(G)$ szomszédja, amelyek közül legalább $\delta(G) - \left(|A| - 1\right)$ darab B-be esik. A B-be eső szomszédok mindegyike kék-szomszéd. Az x és y csúcsok B-be eső szomszédai nem lehetnek diszjunktak, hiszen

$$\left(\delta(G) - \left(|A| - 1\right)\right) + \left(\delta(G) - \left(|A| - 1\right)\right) = \left(2\delta(G) - |A|\right) - |A| + 2 \geq n - |A| + 2 > |B|.$$

x és y közös B-beli, azaz kék szomszédjának léte bizonyítja az állítást, és így megoldja a feladatot.

Igazából a bizonyítás azt is adja, hogy x összes szomszédját és A összes csúcsát összefűzik a kék élek.

2. megoldás (Több versenyző megoldása alapján). Most is feltesszük, hogy az élszínezés a piros és kék színeket használja. Legyen x egy tetszőleges csúcs. Legyen P az x-ből piros éleken történő sétával elérhető csúcsok halmaza. Legyen K az x-ből kék éleken történő sétával elérhető csúcsok halmaza. P és $V(G)-P$ közti összes él kék, K és $V(G)-K$ közti összes él piros.

P és K csúcshalmazokon alapulva, $V(G)$-t négy diszjunkt halmazra bonthatjuk fel:

$$V(G) = (P \cap K) \,\dot\cup\, (P \cap \overline{K}) \,\dot\cup\, (\overline{P} \cap K) \,\dot\cup\, (\overline{P} \cap \overline{K}). \tag{1}$$

$P \cap K$ és $\overline{P} \cap \overline{K}$ között nem vezethet él, hiszen egy olyan él sem piros, sem kék színt nem kaphatna. Hasonlóan nincs él $P \cap \overline{K}$ és $\overline{P} \cap K$ között.

Feltevésünk alapján $P \cap K$ nem üres, hiszen tartalmazza x-et. Ha $P \cap \overline{K}$ vagy $\overline{P} \cap K$ üres lenne, akkor $P \cup K$ P-vel vagy K-val egybeesne. Feltehetjük, hogy $P \cup K = P$. Mivel $P \cup K$ tartalmazza x egész szomszédságát és x-et, ezért legalább $\delta(G)+1$ csúcsa lenne, továbbá a piros élek összefűzik ezeket a pontokat. Ebben az esetben készen vagyunk. Feltesszük, hogy $P \cap \overline{K}$ és $\overline{P} \cap K$ is nemüres. Ha $\overline{P} \cap \overline{K}$ üres, akkor egy $y \in P \cap \overline{K}$ csúcs összes szomszédja P-be esik. Ekkor ismét készen vagyunk. Tehát feltehetjük, hogy (1) jobb oldalán mind a négy tag nem üres halmaz. Ha valamelyikből kiveszünk egy csúcsot, akkor ez a csúcs és szomszédai legalább $\delta(G)+1$ csúcsot adnak, amelyekről tudjuk, hogy a négy tag közül csak háromba eshetnek. Speciálisan

$$|P \cap K| + |P \cap \overline{K}| + |\overline{P} \cap K| \geq \delta(G) + 1,$$

$$|P \cap K| + |P \cap \overline{K}| + |\overline{P} \cap \overline{K}| \geq \delta(G) + 1,$$

$$|P \cap K| + |\overline{P} \cap K| + |\overline{P} \cap \overline{K}| \geq \delta(G) + 1,$$

$$|P \cap \overline{K}| + |\overline{P} \cap K| + |\overline{P} \cap \overline{K}| \geq \delta(G) + 1.$$

Az egyenlőtlenségek összege

$$3n \geq 4\big(\delta(G) + 1\big) > 3n,$$

ami ellentmondás.

Megjegyzések: A $\delta(G)+1$-es határ természetes, hiszen elképzelhető, hogy gráfunk ekkora komponensekből áll.

A $\delta(G)$-re adott egyenlőtlenség az optimális feltétel, ha $4|n$. Ezt a következő élszínezett gráf mutatja: Legyen $V(G) = A \,\dot\cup\, B \,\dot\cup\, C \,\dot\cup\, D$, $|A| = |B| = |C| = |D|$. Két pont pontosan akkor nincs összekötve, ha egyik A-beli, másik C-beli, illetve ha egyik B-beli, a másik D-beli. Az A–B és C–D élek legyenek pirosak, az A–D és B–C élek legyenek kékek (a többi él színe tetszőlegesen választható). Ekkor $\delta(G) = 3n/4 - 1$, és a legnagyobb összefüggő, azonos színű élekből álló gráf pontszáma $n/2$.

Érkezett 14 dolgozat. Teljes megoldást adott Backhausz Tibor, Grósz Dániel, Gyenizse Gergő, Kiss Viktor, Kovács Kristóf, Nagy Csaba, Nagy Dániel, Ozsvárt László, Soltész Dániel, Szakács Nóra, Tomon István és Udvari Balázs. Értékelhető részeredményeket ért el Csige Tamás.

3. feladat (Károlyi Gyula). *A d-dimenziós* $\mathbb{R}^d$ *térben egy* $n \times n \times \cdots \times n$*-es kockarács összes (azaz* n^d *számú) pontját lefogtuk* $2n-3$ *hipersíkkal. Bizonyítsuk be, hogy ezek közül kiválasztható* n *hipersík úgy, hogy már azok is lefogják a rács összes pontját.*

1. megoldás (Tomon István megoldása alapján). A feladat állítása $d = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $d \geq 2$. Továbbá azt is feltesszük, hogy $n \geq 4$, mert $n \leq 3$ esetén az állítás triviálisan igaz.

Jelölje e_i, $i = 1, \ldots, d$, az $\mathbb{R}^d$ térbeli standard bázisvektorokat. Egy ponthalmaz hipersíkokkal való fedését nevezzük *tengelymerőleges* fedésnek, ha létezik olyan standard bázisvektor, amely merőleges a fedésben résztvevő mindegyik hipersíkra.

Az alábbiakban a következő, a kitűzöttnél általánosabb állítást bizonyítjuk be.

Állítás. *Legyenek* $A_1, \ldots, A_d \subset \mathbb{R}$ *véges halmazok,* $a_i = |A_i|$, $i = 1, \ldots, d$ *és* $a_1 \leq \ldots \leq a_d$. *Legyen* $C = A_1 \times \ldots \times A_d \subset \mathbb{R}^d$ *és tegyük fel, hogy* C *pontjait lefedi* $a_1 + a_2 - 3$ *hipersík. Megmutatjuk, hogy ebből a fedésből kiválaszthatók olyan hipersíkok, melyek* C *egy tengelymerőleges fedését adják.*

Ebből a feladat eredeti állítása már következik, hiszen ha $A_1 = \ldots = A_d = \{0, \ldots, n-1\}$, akkor $a_1 = \ldots = a_d = n$ és $C = A_1 \times \ldots \times A_d$ éppen egy $n \times \ldots \times n$-es kockarács, amit $2n-3$ hipersík lefed, s ebből kiválasztható egy tengelymerőleges fedés, azaz kiválasztható n olyan hipersík, amely lefedi C-t.

Az állítást dimenzió szerinti indukcióval igazoljuk.

Először tegyük fel, hogy $d = 2$, $C = A_1 \times A_2$ és $a_1 + a_2 - 3$ egyenes lefedi C-t. A fedésben résztvevő $a_1 + a_2 - 3$ egyenes közül hagyjuk el az összes tengelymerőlegest, és legyen C' az a ponthalmaz, amelyet úgy kapunk C-ből, hogy elhagyjuk az összes olyan pontot, amely tengelymerőleges egyenesen fekszik. Ha b_1 az e_1-re merőleges egyenesek száma és b_2 az e_2-re merőleges egyenesek száma, akkor C'-nek $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)$ pontja van. Ha $C' = \emptyset$, akkor $a_1 = b_1$ vagy $a_2 = b_2$, és ekkor nyilvánvalóan kiválasztható C-nek egy tengelymerőleges fedése. Tegyük fel, hogy C' nem üres. Ekkor C'-t lefedi az eredeti fedésből el nem hagyott $a_1 + a_2 - 3 - b_1 - b_2$ egyenes. Ha $a_1 - b_1 = 1$, akkor a C'-ben lévő $a_2 - b_2$ pont mind egy e_2-vel párhuzamos szakaszon van, így ezeknek a lefedéséhez $a_2 - b_2$ egyenes kell. Azonban $a_2 - b_2 > a_2 - b_2 - 2 = a_1 + a_2 - 3 - b_1 - b_2$, ami ellentmondás. Nyilván ugyanez a helyzet, ha $a_2 - b_2 = 1$. Most tegyük fel, hogy $a_1 - b_1 \geq 2$ és $a_2 - b_2 \geq 2$. Ekkor C' konvex burka egy téglalap, melynek határán $2(a_1 - b_1) + 2(a_2 - b_2) - 4$ pontja van C'-nek. Bármely nem tengelymerőleges egyenes legfeljebb két pontot tartalmazhat a téglalap határáról, így az $a_1 + a_2 - 3 - b_1 - b_2$ egyenes legfeljebb $2(a_1 + a_2 - 3 - b_1 - b_2) < 2(a_1 - b_1) + 2(a_2 - b_2) - 4$ pontot fedhet le a téglalap határán, azaz nem fedheti le C'-t, ami ellentmondás. Ezzel a $d = 2$ esetet bebizonyítottuk.

Ezután tegyük fel, hogy $d \geq 3$ és hogy $d-1$-re igaz az állítás. Megmutatjuk, hogy ekkor d-re is igaz az állítás. Hagyjuk el a fedésből a tengelymerőleges hipersíkokat és C-ből a tengelymerőleges hipersíkokon fekvő pontokat. Így kapjuk a C' téglarácsot. Jelölje b_i az e_i-re merőleges hipersíkok számát $i = 1, \ldots, d$ esetén. Ekkor C'-nek $(a_1 - b_1) \ldots (a_d - b_d)$ pontja van. Legyenek $A'_1, \ldots, A'_d \subset \mathbb{R}$ azok a halmazok, melyekre $C' = A'_1 \times \ldots \times A'_d$, és $a'_i = |A'_i| = a_i - b_i$, $i = 1, \ldots, d$. Ha $C' = \emptyset$, akkor $a_i - b_i = 0$ valamely $1 \leq i \leq d$-re, és ekkor a fedésből kiválasztható b_i darab e_i-re merőleges hipersík, amely lefedi C-t.

Most megmutatjuk, hogy ha $C' \neq \emptyset$, akkor ellentmondáshoz jutunk. Tegyük fel, hogy az $a'_1, \dots, a'_d$ számok közül $a'_p \leq a'_q$ $(p \neq q)$ a két legkisebb. Ekkor

$$a_1 + a_2 - 3 - (b_1 + \ldots + b_d) \leq a_p + a_q - 3 - (b_1 + \ldots + b_d) \leq$$
$$\leq a_p + a_q - 3 - b_p - b_q = a'_p + a'_q - 3.$$

Legyen $t_1 \in A'_p$ tetszőleges és tekintsük az

$$S = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_p = t_1\}$$

hipersíkot. Ekkor $S \cap C'$ egy $(d-1)$-dimenziós téglarács, melynek mérete $a'_1 \dots a'_{p-1} a'_{p+1} \dots a'_d$. Jelölje a C'-t lefedő hipersíkokat rendre $H_1, \dots, H_k$ $(k = a_1 + a_2 - 3 - (b_1 + \ldots + b_d))$. Ekkor $L_i = S \cap H_i$, $i = 1, \dots, k$ ($(d-2)$-dimenziós) hipersíkok S-ben. Mivel $C' \cap S$ mérete $a'_1 \dots a'_{p-1} a'_{p+1} \dots a'_d$ és $C' \cap S$-t lefedi a $k \leq a'_p + a'_q - 3$ darab S-beli $L_1, \dots, L_k$ hipersík, így az indukciós feltevés alapján ezekből kiválasztható $L_{j_1}, \dots, L_{j_m}$ S-ben tengelymerőleges fedése $C' \cap S$-nek. Ekkor $m \geq \min\{a'_1, \dots, a'_{p-1}, a'_{p+1}, \dots a'_d\} = a'_q$. Tegyük fel, hogy $L_{j_1}, \dots, L_{j_m}$ merőleges az e_u standard bázisvektorra $(p \neq u)$. Ekkor $L_{j_1}, \dots, L_{j_m}$ merőleges e_p-re is, így H_{j_r} normálvektora $n_{j_r} = \alpha_{j_r} e_p + \beta_{j_r} e_u$ alakban írható alkalmas $\alpha_{j_r}, \beta_{j_r}$ számokra $r = 1, \dots, m$ esetén. Legyen $l \neq p, u$ és S' egy e_l-re merőleges hipersík. Ekkor $H_{j_r} \cap S'$, $r = 1, \dots, m$ nem tengelymerőleges S'-ben. Rögzítsünk egy $1 \leq l \leq d$ indexet úgy, hogy $l \neq p, u$, és legyen $t_2 \in A'_l$ tetszőleges. Tekintsük a

$$T = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_l = t_2\}$$

hipersíkot. Ekkor $C' \cap T$ egy $a'_1 \dots a'_{l-1} a'_{l+1} \dots a'_d$ méretű téglarács, amelyet lefed a k darab $H_1 \cap T, \dots, H_k \cap T$ T-beli hipersík, amelyekből az indukciós hipotézis alapján kiválasztható egy T-ben tengelymerőleges fedés. Azonban ez a tengelymerőleges fedés legalább $M \geq \min\{a'_1, \dots, a'_{l-1}, a'_{l+1}, \dots, a'_d\} = a'_p$ elemet tartalmaz. Legyenek ezek $H_{i_1} \cap T, \dots, H_{i_M} \cap T$. A fentiek alapján a $H_{i_1}, \dots, H_{i_M}$ mind különbözőek a $H_{j_1}, \dots, H_{j_m}$ hipersíkoktól, így $m + M \geq a'_p + a'_q > a'_p + a'_q - 3 \geq k$, ami ellentmondás. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

2. megoldás (Gyenizse Gergő megoldásának felhasználásával). Feltehető, hogy $d \geq 2$, hiszen $d = 1$ esetén az állítás evidens. A feladatbeli kockarács

$$K = A_1 \times \ldots \times A_d$$

alakú, ahol $A_1, \dots, A_d$ valós számokból álló n-elemű halmazok. Vezessük be az alábbi jelöléseket, feltéve hogy $a \in A_i$, $b \in A_j$ és $i \neq j$:

$$S(x_i = a) := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_i = a\},$$

$$K(x_i = a) := A_1 \times \ldots \times A_{i-1} \times \{a\} \times A_{i+1} \times \ldots \times A_d,$$

$$S(x_i = a, x_j = b) := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_i = a,\ x_j = b\}.$$

Nyilván $K(x_i = a)$ egy $(d-1)$-dimenziós n^{d-1}-elemű kockarács, amely részhalmaza az $S(x_i = a)$ hipersíknak. Továbbá $S(x_i = a, x_j = b)$ egy $(d-2)$-dimenziós affin altér. (A $K(\dots)$, illetve $S(\dots)$ jelölés a „kocka”, illetve a „sík” kezdőbetűjéből ered.) A feladatnál erősebb alábbi állítást bizonyítjuk.

Állítás. *Ha $\mathbb{E}$ az $\mathbb{R}^d$ legfeljebb $2n - 3$ hipersíkjából álló halmaz és $K \subseteq \bigcup_{H \in \mathbb{E}} H$, akkor van olyan $i \in \{1, \dots, d\}$, hogy minden $a \in A_i$-re $S(x_i = a) \in \mathbb{E}$.*

Az állítást d szerinti teljes indukcióval igazoljuk. A $d = 1$ eset triviális. A $d = 2$ (síkbeli eset) ugyanúgy bizonyítható, mint az 1. megoldásban.

Legyen $d \geq 3$, és tegyük fel, hogy $(d-1)$-dimenziós kockarácsokra az állítás igaz. Fel fogjuk használni azt a közismert tényt, hogy $\mathbb{R}^d$-ben két különböző, de nem diszjunkt hipersík metszete $(d-2)$-dimenziós affin altér. (Ez könnyen adódik a vektorterek altereire vonatkozó dimenzióegyenlőségből, ha az origót a két hipersík valamelyik közös pontjába eltoljuk.)

Tegyük fel indirekt módon, hogy az állítás nem igaz. Ekkor minden $\ell \in \{1, \ldots, d\}$ esetén le tudunk rögzíteni egy $a_\ell \in A_\ell$ számot úgy, hogy

$$S(x_\ell = a_\ell) \notin \mathbb{E}.$$

Mivel $S(x_\ell = a_\ell) \notin \mathbb{E}$, a $(d-1)$-dimenziós $K(x_\ell = a_\ell)$ kockarácsot az $S(x_\ell = a_\ell)$ hipersíknak bizonyos $\mathbb{E}$-beli hipersíkokkal vett metszetei fedik le. Ezek a metszetek a fenti megjegyzés szerint $(d-2)$-dimenziósak, és számuk legfeljebb $|\mathbb{E}| \leq 2n - 3$. Az indukciós hipotézis miatt van olyan $\pi(\ell) \in \{1, \ldots, d\} \setminus \{\ell\}$, hogy minden $b \in A_{\pi(\ell)}$-re az $S\big(x_\ell = a_\ell, x_{\pi(\ell)} = b\big)$ affin altér (amely $S(x_\ell = a_\ell)$-nek hipersíkja) egy $\mathbb{E}$-beli hipersík metszete $S(x_\ell = a_\ell)$-lel. Ez a $\pi(\ell)$ egyértelmű, mert ha egy tőle különböző γ is hasonló tulajdonságú lenne, akkor $|A_{\pi(\ell)}| + |A_\gamma| = 2n$ metszet keletkezne, holott $|\mathbb{E}| < 2n$. Tehát π egy egyértelműen meghatározott $\{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, d\}$ *fixpontmentes* leképezés azzal a tulajdonsággal, hogy

$$(2) \qquad \big(\forall \ell \in \{1, \ldots, d\}\big)\big(\forall b \in A_{\pi(\ell)}\big)\,(\exists H \in \mathbb{E})$$
$$\big(S\big(x_\ell = a_\ell, x_{\pi(\ell)} = b\big) = H \cap S(x_\ell = a_\ell)\big).$$

Most megmutatjuk, hogy π *involúció,* azaz minden $i \in \{1, \ldots, d\}$-re $i = \pi\big(\pi(i)\big)$. Indirekt módon tegyük fel ennek az ellenkezőjét. Ekkor azt is feltehetjük (hiszen ez csak indexelés kérdése), hogy $\pi(1) = 2$ és $\pi(2) = 3$.

Ha a (2) összefüggést $\ell = 1$-re alkalmazva fellépő $H \in \mathbb{E}$ hipersíkok mindegyike különbözne az $\ell = 2$ esetben fellépő hipersíkoktól, akkor $\mathbb{E}$-nek legalább $|A_{\pi(1)}| + |A_{\pi(2)}| = 2n$ eleme lenne, ami lehetetlen. Ezért van olyan $H \in \mathbb{E}$, amely $\ell = 1$ és $\ell = 2$ esetén is fellép (2)-nek megfelelően. Ehhez a közös $H \in \mathbb{E}$ hipersíkhoz létezik olyan $b_2 \in A_2 = A_{\pi(1)}$ és $b_3 \in A_3 = A_{\pi(2)}$, hogy

$$H \cap S(x_1 = a_1) = S(x_1 = a_1, x_2 = b_2) \quad \text{és} \quad H \cap S(x_2 = a_2) = S(x_2 = a_2, x_3 = b_3).$$

Ennélfogva bármely $y_3, \ldots, y_d, z_1, z_4, \ldots, z_d \in \mathbb{R}$ esetén

$$(3) \qquad u = (a_1, b_2, y_3, \ldots, y_d) \in H \text{ és } v = (z_1, a_2, b_3, z_4, \ldots, z_d) \in H.$$

Először tegyük fel, hogy $a_2 = b_2$. Nyilvánvaló, hogy $S(x_2 = a_2)$ minden pontja előáll $\lambda u + (1-\lambda)v$ alakban, (3)-nak megfelelő alkalmas u és v pontokkal. Ezért $S(x_2 = a_2) \subseteq H$. Mivel H nem tartalmazhat valódi részhalmazként egy másik hipersíkot, az $S(x_2 = a_2) = H \in \mathbb{E}$ ellentmondáshoz jutunk.

Legyen most $a_2 \neq b_2$. Ekkor $\mathbb{R}^d \setminus \big(S(x_2 = a_2) \cup S(x_2 = b_2)\big)$ minden pontja előáll $\lambda u + (1-\lambda)v$ alakban, (3) szerinti u-val és v-vel. Így $\mathbb{R}^d \setminus \big(S(x_2 = a_2) \cup S(x_2 = b_2)\big) \subseteq H$, azaz $\mathbb{R}^d$ előáll három hipersík, jelesül a (d-dimenzióban 0 Lebesgue-mértékű) $S(x_j = a_2)$, $S(x_j = b_2)$ és H hipersíkok uniójaként, ami ismét ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy π involúció. (Megjegyzendő, hogy páratlan d esetén innen az állítás máris következik, hiszen akkor nincs fixpontmentes $\{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, d\}$ involúció.)

A következő lépésben azt fogjuk igazolni, hogy bármely $i, j \in \{1, \dots, d\}$ esetén

(4) $$\text{ha } j \notin \{i, \pi(i)\}, \text{ akkor } \pi(j) \in \{i, \pi(i)\}.$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy ez nem igaz. Az egyszerűbb jelölés érdekében azt is feltehetjük, hogy $(i, \pi(i), j, \pi(j)) = (1, 2, 3, 4)$, azaz $\pi(1) = 2$ és $\pi(3) = 4$. A korábbi megfontoláshoz hasonlóan, a (2) összefüggést $\ell = 1$-re és $\ell = 3$-ra alkalmazva megint csak lesz egy közös $H \in \mathbb{E}$. Ezért alkalmas $b_2 \in A_{\pi(1)} = A_2$ és $b_4 \in A_{\pi(3)} = A_4$ esetén $S(x_1 = a_1, x_2 = b_2) = H \cap S(x_1 = a_1)$ és $S(x_3 = a_3, x_4 = b_4) = H \cap S(x_3 = a_3)$. Tehát bármely $s_3, \dots, s_d, t_1, t_2, t_5, \dots, t_d \in \mathbb{R}$ esetén $\bar{u} = (a_1, b_2, s_3, \dots, s_d) \in H$ és $\bar{v} = (t_1, t_2, a_3, b_4, t_5, \dots, t_d) \in H$. Azonban $\mathbb{R}^d$ bármely eleme $\lambda\bar{u} + (1-\lambda)\bar{v} \in H$ alakú, ami ellentmondás, és bizonyítja (4)-et.

Az előkészületek után a $d \geq 3$ esetben az állítás könnyen adódik. Legyen $j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{1, \pi(1)\}$. (4)-ből kapjuk, hogy $\pi(j) = 1$ vagy $\pi(j) = \pi(1)$. Azonban mindkét eset ellentmondáshoz vezet: ha $\pi(j) = 1$, akkor akkor $j = \pi(\pi(j)) = \pi(1)$, ha pedig $\pi(j) = \pi(1)$, akkor $j = \pi(\pi(j)) = \pi(\pi(1)) = 1$.

3. megoldás (Varjú Péter, versenyen kívül). d szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy van a lefogó hipersíkok között n olyan, amelyek mindegyike merőleges ugyanarra a koordinátatengelyre, és amelyek együtt már lefogják a rácsot.

A $d = 2$ (síkbeli eset) ugyanúgy bizonyítható, mint az 1. megoldásban. Tegyük fel, hogy az állítás $d-1$-re igaz. Ha valamely i-re $(1 \leq i \leq n)$ a $V_i = \{x_1 = i\} \subset \mathbb{R}^d$ nincs a lefogó hipersíkok között, akkor a rácsnak a V_i-vel való R_i metszetére és a lefogó hipersíkok V_i-vel való metszeteire alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, így van olyan $L_1^{(i)}, \dots, L_n^{(i)}$ a lefogó hipersíkok között, hogy az $L_k^{(i)} \cap V_i$ $d-2$-dimenziós síkok merőlegesek pl. az x_2-tengelyre, és együtt lefedik R_i-t. Ha V_j $(j \neq i)$ szintén nincs a lefedő hipersíkok között, akkor a V_j-hez definiált $L_1^{(j)} \cap V_j, \dots, L_n^{(j)} \cap V_j$ $d-2$ dimenziós síkok is mind az x_2-tengelyre lesznek merőlegesek, ellenkező esetben ugyanis $L_1^{(i)}, \dots, L_n^{(i)}, L_1^{(j)}, \dots, L_n^{(j)}$ $2n$ számú különböző hipersík lenne, ami szintén lehetetlen $2n > 2n-3$ miatt. Ezt is indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $L_k^{(i)} = L_s^{(j)}$. Ekkor $L_k^{(i)} \cap V_i$ párhuzamos $L_s^{(j)} \cap V_j$-vel, hiszen V_i párhuzamos V_j-vel, tehát $L_s^{(j)} \cap V_j$ merőleges az x_2-tengelyre. Ha $L_s^{(j)} \cap V_j$ egy, az x_2-tengelytől különböző tengelyre is merőleges, akkor az $L_s^{(j)} \cap V_j$ $d-2$-dimenziós síknak a V_j $d-1$-dimenziós síkra vonatkozó kodimenziója legalább 2, ami lehetetlen.

Most vegyük észre, hogy ha $L_k^{(i)} \cap V_i$ merőleges az x_2-tengelyre, akkor az $L_k^{(i)}$ hipersík merőleges az $[x_1, x_2]$ síkra. Valóban, az $L_k^{(i)} \cap V_i$ 2 kodimenziós sík $\mathbb{R}$-ben merőleges az x_1-tengelyre, az x_2 tengelyre és az $L_k^{(i)}$ sík n_i normálvektorára, tehát n_i-nek párhuzamosnak kell lenni az $[x_1, x_2]$ síkkal.

Azt kaptuk tehát, hogy ha csak az $[x_1, x_2]$ síkra merőleges lefogó hipersíkokat tartjuk meg, akkor már azok is lefedik a rácsot (ha egy V_i a lefogó hipersíkok között van, akkor ő is merőleges az $[x_1, x_2]$ síkra). Mármost vetítsünk mindent az $[x_1, x_2]$ síkra; ezzel visszavezettük a problémát a $d = 2$ esetre.

Megjegyzés. A feladat állítása éles abban az értelemben, hogy $d \geq 2$ esetén a kockarács lefedhető $2n-2$ hipersíkkal úgy, hogy a fedő hipersíkok egyike sem hagyható el.

Érkezett 6 dolgozat. Teljes megoldást adott Gyenizse Gegrő, Nagy Dániel és Tomon István. Értékelhető részeredményeket ért el Kiss Viktor és Mészáros Szabolcs.

4. feladat (Maróti Miklós). *Legyen G, H két véges csoport, és legyen $\varphi, \psi : G \to H$ két szürjektív, de nem injektív homomorfizmus. Igazoljuk, hogy létezik G-nek az egységelemtől különböző olyan eleme, amelynek képe φ és ψ mellett azonos.*

Megoldás (Szakács Nóra). Azt igazoljuk, hogy ha $\varphi, \psi : G \to H$ két olyan szürjektív homomorfizmus a G véges csoportról H-ra, amely kizárólag G egységeleméhez rendeli ugyanazt az elemet, akkor φ és ψ szükségképpen injektív is. Ehhez elég belátni, hogy $|G| \leq |H|$, azaz elég megadni egy $G \to H$ injektív leképezést. Megmutatjuk, hogy a $\tau : G \to H$, $g \mapsto (g\varphi)^{-1} \cdot g\psi$ leképezés injektív. Ha ugyanis a $g_1, g_2 \in G$ elemekre $g_1\tau = g_2\tau$, akkor $(g_1\varphi)^{-1} \cdot g_1\psi = (g_2\varphi)^{-1} \cdot g_2\psi$, amiből $g_1\psi \cdot (g_2\psi)^{-1} = g_1\varphi \cdot (g_2\varphi)^{-1}$ következik. Mivel φ és ψ homomorfizmus, ez az egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $(g_1g_2^{-1})\psi = (g_1g_2^{-1})\varphi$. Tehát a $g_1g_2^{-1}$ elemhez φ és ψ ugyanazt az elemet rendeli, ezért a feltevésünk értelmében $g_1g_2^{-1}$ az egységelem, azaz $g_1 = g_2$. Ezzel beláttuk, hogy τ valóban injektív.

Érkezett 12 dolgozat. Megoldotta Backhausz Tibor, Gerencsér Máté, Gyenizse Gergő, Kiss Viktor, Mészáros Szabolcs, Nagy Csaba, Ozsvárt László, Szakács Nóra és Tomon István. Kissé hiányos megoldást adott Csige Tamás. Javítható hibával megoldotta Nagy Dániel.

5. feladat (Totik Vilmos). *Legyenek n, k pozitív egészek. Az $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ és $a \in \mathbb{R}^k$ vektorok esetén legyen $f_a(x) := \|x - a\|^{2n}$, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma, és tekintsük az f_a $(a \in \mathbb{R}^k)$ függvények által generált $Q_{n,k}$ vektorteret. Melyik az a legnagyobb N egész szám, amelyre $Q_{n,k}$ tartalmazza az $x_1, \ldots, x_k$ összes olyan polinomját, amelynek teljes fokszáma legfeljebb N?*

Megoldás (Kitűző). A megoldásban „fokszám" mindig a teljes fokszámot jelenti.

Tetszőleges a esetén

$$f_a(x) = \|x - a\|^{2n} = \left(\|x - a\|^2\right)^n = \left(\sum_{j=1}^{k} (x_j - a_j)^2\right)^n$$

az $x_1, \ldots, x_k$ változók legfeljebb $2n$-edfokú polinomja, ezért $Q_{n,k}$ egy altere az összes, legfeljebb $2n$-edfokú polinomok Π_{2n} lineáris terének, ezért polinomoknak egy véges dimenziós vektortere. Ez a vektortér zárt az $\mathbb{R}^k$ kompakt halmazain egyenletes konvergencia által definiált topológiában (a Π_{2n} elemeinek a konvergenciája ebben a topológiában ekvivalens azzal, hogy a polinomsorozat együtthatóiból álló sorozatok konvergensek). Másrészt, ha $P(x) = \sum_{j=1}^{l} c_j f_{a_j}(x)$, akkor $P(x + a) = \sum_{j=1}^{l} c_j f_{a_j - a}(x)$, tehát $Q_{n,k}$ zárt az $x \mapsto x + a$ eltolásokra nézve is. Ezért, ha $P \in Q_{n,k}$, akkor

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{P(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_k) - P(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k)}{h}$$

is $Q_{n,k}$-ban van, ami azt jelenti, hogy $Q_{n,k}$ zárt a parciális deriválásra, és így a tetszőleges rendű parciális deriválásra.

Mivel $\|x\|^{2n} = \left(\|x\|^2\right)^n = f_0(x) \in Q_{n,k}$, ezért ennek a függvénynek tetszőleges x_j szerinti parciális deriváltja is $Q_{n,k}$-ban van, vagyis $n\|x\|^{2n-2}2x_j \in Q_{n,k}$. Mégegyszer differenciálva az eredményt x_j szerint, azt kapjuk, hogy $2n\|x\|^{2n-2} + 4n(n-1)\|x\|^{2n-4}x_j^2 \in Q_{n,k}$. Ezeket a függvényeket összegezve a $j = 1, 2, \ldots, k$ indexekre az adódik, hogy $\big(nk + 2n(n-1)\big)\|x\|^{2n-2}$, és így $\|x\|^{2n-2}$ is $Q_{n,k}$-ban van. Következésképpen, az összes $\|x\|^{2n-2}P_1(x)$ alakú polinom, ahol P_1 az x koordinátáinak legfeljebb elsőfokú polinomja, $Q_{n,k}$-hoz tartozik.

Ha az előbb bizonyított

$$\|x\|^{2n} \in Q_{n,k} \Longrightarrow \|x\|^{2n-2} \in Q_{n,k}$$

implikációt (illetve annak bizonyítását) ismételten alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy $\|x\|^{2n-2m} \in Q_{n,k}$ bármely $m = 0, 1, \ldots, n$ esetén.

Ezek után m szerinti teljes indukcióval könnyű belátni, hogy az $\|x\|^{2n-2m} P_m(x)$ alakú polinomok minden $m = 0, 1, \ldots, n$ esetén $Q_{n,k}$-hoz tartoznak, ahol P_m az $x_1, \ldots, x_k$ változók legfeljebb m-edfokú tetszőleges polinomja. Valóban, ezt már bizonyítottuk $m = 0, 1$-re, és most tegyük fel, hogy az állítás igaz valamilyen $m < n$ esetén. Akkor tetszőleges $\|x\|^{2n-2m} x_1^{s_1} \ldots x_k^{s_k}$, $s_1 + \ldots + s_k \leq m$, is $Q_{n,k}$-hoz tartozik, ahonnan x_j szerinti differenciálással azt kapjuk, hogy a

$$2(n-m)\|x\|^{2n-2m-2} x_1^{s_1} \ldots x_{j-1}^{s_{j-1}} x_j^{s_j+1} x_{j+1}^{s_{j+1}} \ldots x_k^{s_k} +$$

$$+ s_j \|x\|^{2n-2m} x_1^{s_1} \ldots x_{j-1}^{s_{j-1}} x_j^{s_j-1} x_{j+1}^{s_{j+1}} \ldots x_k^{s_k}$$

polinom is $Q_{n,k}$-ban van. Az indukciós feltevés miatt ennek az összegnek a második tagja $Q_{n,k}$-beli, ezért az

$$\|x\|^{2n-2m-2} x_1^{s_1} \ldots x_{j-1}^{s_{j-1}} x_j^{s_j+1} x_{j-1}^{s_{j-1}} \ldots x_k^{s_k}$$

kifejezések is $Q_{n,k}$-ban vannak. Ezek között előfordul az $\|x\|^{2n-2m-2}$-nek tetszőleges, legfeljebb $(m+1)$-ed fokú egytagúval való szorzata, kivéve magát a $\|x\|^{2n-2m-2}$ kifejezést, amiről viszont már korábban láttuk, hogy $Q_{n,k}$-hoz tartozik. Ezzel az indukciós lépést bebizonyítottuk.

Másrészt vegyük észre, hogy az

$$(x, a) = \sum_{j=1}^{k} x_j a_j, \qquad x = (x_1, \ldots, x_k), \qquad a = (a_1, \ldots, a_k),$$

jelöléssel

$$P_a(x) = \left(\|x\|^2 - 2(x, a) + \|a\|^2\right)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \|x\|^{2n-2m} \left(2(x, a) + \|a\|^2\right)^m,$$

és itt a jobb oldalon $\|x\|^{2n-2m} P_m(x)$, $m = 0, \ldots, n$, alakú polinomok összege áll. Következésképpen, $Q_{n,k}$ megegyezik az $\|x\|^{2n-2m} P_m(x)$, $m = 0, \ldots, n$, alakú polinomok lineáris kombinációinak, azaz ezen polinomok összegeinek halmazával.

Ha $k = 1$, akkor $Q_{n,1}$, vagyis az $x^{2n-2m} P_m(x)$, $m = 0, \ldots, n$, $x \in \mathbb{R}$ alakú polinomok összegeinek halmaza tartalmazza az összes, legfeljebb $2n$-edfokú polinomot (hiszen tartalmazza az összes x^p, $0 \leq p \leq 2n$, hatványt), tehát ekkor a feladatban definiált N szám egyenlő $2n$-nel.

Legyen most $k \geq 2$. Az $m = n$ eset azt adja, hogy $Q_{n,k}$ tartalmazza az összes, legfeljebb n-edfokú polinomot. Ugyanakkor belátjuk, hogy $x_1^{n+1} \notin Q_{n,k}$, tehát ekkor a feladat kérdésére a válasz $N = n$. Valóban, az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy lehetséges egy

$$x_1^{n+1} = \sum_{m=0}^{n} \left(\|x\|^2\right)^{n-m} P_m(x)$$

előállítás. Akkor ez egy algebrai azonosság, és így érvényes komplex $x_1, \ldots, x_n$ változókra is. Legyen $x_2 = ix_1$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_k = 0$. Ezen választás esetén $\|x\|^2 = 0$, tehát az előző azonosság az

$$x_1^{n+1} = P_n(x_1, ix_1, 0, \ldots, 0)$$

alakot ölti, ami nyilvánvalóan lehetetlen, hiszen a jobb oldal az x_1 változónak egy legfeljebb n-edfokú (komplex) polinomja.

Megjegyzés. A $Q_{n,k}$ feladatban szereplő előállítása speciális esetként tartalmazza Jose L. Martinez-Morales egy eredményét, miszerint $m, n \geq 0$ esetén $Q_{2(n+m),2}$ tartalmazza az $r^{n+2m} \cos(n\theta)$ függvényt, ahol $re^{i\theta} = x_1 + ix_2$ (Functions on the plane as combinations of powers of distances to points, *Abstr. Appl. Anal.*, 2010, Art. ID 713241).

Érkezett 3 dolgozat. A feladatot megoldotta Backhausz Tibor, Nagy Csaba és Tomon István.

6. feladat (Bárány Imre). *Legyenek $C_1, \ldots, C_d$ kompakt és összefüggő halmazok $\mathbb{R}^d$-ben, és tegyük fel, hogy mindegyik C_i konvex burka tartalmazza az origót. Bizonyítandó, hogy minden i-re van olyan $c_i \in C_i$, amelyekre az origó benne van a $c_1, \ldots, c_d$ pontok konvex burkában.*

Megoldás (A kitűző megoldása alapján). Jelölje egy K halmaz konvex burkát $\operatorname{conv} K$, relatív belsejét $\operatorname{relint}(K)$.

Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, és legyenek $a_1 \in C_1, \ldots, a_d \in C_d$ azok a pontok, melyekre az $S = \operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_d\}$ szimplex és az O origó távolsága a legkisebb, továbbá legyen $z \in S$ az origóhoz legközelebbi pont. Legyen most H az origót tartalmazó, Oz-re merőleges hipersík. Minden i-re létezik $b_i \in C_i \cap H$, mert $O \in \operatorname{conv} C_i$, és C_i összefüggő. Ha van olyan a_{i_0}, amelyre $z \in \operatorname{conv}\{a_i \mid i \neq i_0\}$, akkor a $\operatorname{conv}\{b_{i_0}, a_i \mid i \neq i_0\}$ szimplex közelebb van az origóhoz mint S, ami ellentmondás. Ebből adódik, hogy az S szimplex $(d-1)$-dimenziós, és z az S relatív belsejében, $\operatorname{relint}(S)$-ben van.

Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_d$ az $\mathbb{R}^d$ standard bázisa, és legyen Q a

$$\operatorname{conv}\{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \ldots, e_d, -e_d\}$$

keresztpolitóp határa. Definiáljuk az $f : Q \to \mathbb{R}^d$ leképezést úgy, hogy $f(e_i) = a_i$, $f(-e_i) = b_i$, és aztán terjesszük ki f-et Q-ra szimpliciálisan. Vegyük észre, hogy

- Q bármely lapjának az f melletti képe olyan szimplex, aminek csúcsai egy-egy pont C_i-ből,
- f lineáris homeomorfizmus $\operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_d\}$ és S között,
- $f(Q)$ minden pontja az S síkja és a H között (vagy ezeken) van,
- ha egy y pontra $f(y)$ az S síkjában van, akkor $y \in \operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_d\}$.

Ha az Oz egyenesnek csak z a közös pontja $f(Q)$-val, akkor $f(Q) \setminus \operatorname{relint}(S)$ merőleges vetülete S hipersíkjára nem tartalmazza z-t. Így ez a vetület a z pontból centrálisan kivetíthető S határára. Mivel a fentiek alapján

$$f(Q) \setminus \operatorname{relint}(S) = f\big(Q \setminus \operatorname{relint}\big(\operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_d\}\big)\big),$$

ezért végül kapunk egy folytonos leképezést $Q \setminus \operatorname{relint}\big(\operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_d\}\big)$-ből $\operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_d\}$ határára, ami a határon identitás. De ez ellentmond annak, hogy a $(d-1)$-dimenziós gömbnek (amivel $Q \setminus \operatorname{relint}\big(\operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_d\}\big)$ homeomorf) nem retraktuma a $(d-2)$ dimenziós gömbfelület (amivel $\operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_d\}$ határa homeomorf); ld. Patterson, *Topológia* vagy Hatcher, *Algebraic topology* könyveket.

Ha viszont az Oz egyenesnek van egy z-től különböző x metszéspontja $f(Q)$-val, akkor a konstrukció miatt az x pont csak az $[O, z)$ szakaszon lehet, és ezért közelebb van

O-hoz, mint z. Ugyanakkor x egy $\operatorname{conv}\{c_1, \ldots, c_d\}$, $c_i \in C_i$, $1 \le i \le k$, szimplexben van, ami ellentmond annak, hogy S volt az O-hoz legközelebbi szimplex.

Ez az ellentmondás igazolja az állítást.

Érkezett 3 dolgozat. Értékelhető részmegoldást adott Szakács Nóra.

7. feladat (Totik Vilmos). *Bizonyítsuk be, hogy nemnegatív valós számok tetszőleges $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatára*

$$\liminf_{n\to\infty} \left(n^2\left(4a_n(1-a_{n-1})-1\right)\right) \le \frac{1}{4}.$$

Megoldás (Ryszard Szwarz, versenyen kívül). Könnyű látni, hogy az állítás ekvivalens a következővel: ha létezik olyan c konstans és N szám, hogy

$$a_n(1-a_{n-1}) \ge \frac{1}{4} + \frac{c}{16n^2}$$

teljesül $n \ge N$ esetén, akkor $c \le 1$. Ezt fogjuk bebizonyítani.

Feltehetjük, hogy $c > 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ha $c' = c - \varepsilon$, akkor létezik olyan $N' \ge N$, hogy

$$a_n(1-a_{n-1}) \ge \frac{1}{4} + \frac{c'}{4(4n^2-1)},$$

feltéve, hogy $n \ge N'$. Ha $d := c'/4$, akkor

$$a_n(1-a_{n-1}) \ge \frac{1}{4} + \frac{d}{4n^2-1} \quad (n \ge N'). \tag{5}$$

Azt kell megmutatni, hogy bármilyen kicsi is volt $\varepsilon > 0$, ebből $d \le 1/4$ következik.

Mivel $d \ge 0$, vagyis $a_n(1-a_{n-1}) \ge 1/4$, és $a_{n-1}(1-a_{n-1}) \le 1/4$, tudjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat nem-csökkenő, tehát létezik a $\lim_{n\to\infty} a_n =: \overline{a}$ határérték, amely eleget tesz a $4\overline{a}(1-\overline{a}) \ge 1$ egyenlőtlenségnek. Ez azt jelenti, hogy $\overline{a} = 1/2$, és $a_n = (1-\delta_n)/2$ teljesül alkalmas $\delta_n \in [0,1]$ számokkal. Ha ezt az előállítást (5)-be helyettesítjük, akkor a

$$\delta_{n-1} - \delta_n - \delta_{n-1}\delta_n \ge \frac{d}{n^2 - \frac{1}{4}} \tag{6}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ebből a

$$\delta_{n-1} - \delta_n \ge \frac{d}{n-\frac{1}{2}} - \frac{d}{n+\frac{1}{2}}$$

becslés adódik. Ezek $n+1$-től végtelenig történő összeadásával a

$$\delta_n \ge \frac{d}{n+\frac{1}{2}} \quad (n \ge N) \tag{7}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Vezessük be a

$$D := \inf_{n \ge N'} \delta_n \left(\frac{n+1}{2}\right), \quad \varepsilon_n := \delta_n\left(\frac{n+1}{2}\right) - D \tag{8}$$

jelöléseket. (7) szerint $D \ge d$. (8)-at (6)-ba helyettesítve kapjuk:

$$\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \ge \frac{D^2 - D + d}{n^2 - \frac{1}{4}} + \frac{D\varepsilon_n}{n - \frac{1}{2}} + \frac{D\varepsilon_{n-1}}{n+\frac{1}{2}}.$$

Tehát
$$\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n \geq \frac{D^2-D+d}{n^2-\frac{1}{4}} = (D^2-D+d)\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right).$$
Ezeket összeadva
$$\varepsilon_n \geq \frac{D^2-D+d}{n+\frac{1}{2}}$$
adódik, amelyből D definíciója miatt
$$0 \geq D^2-D+d = \left(D-\frac{1}{2}\right)^2+d-\frac{1}{4}.$$
Ebből már látszik, hogy $d \leq 1/4$.

Megjegyzés. A $c \leq 1$ becslés éles, mivel
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4(4n^2-1)} = \frac{n}{2n+1}\left(1-\frac{n-1}{2(n-1)+1}\right).$$

Érkezett 8 dolgozat. Megoldotta a feladatot Gerencsér Máté, Gyenizse Gergő, Nagy Csaba, Nagy Dániel és Tomon István. Értékelhető részeredményt ért el Virosztek Dániel.

8. feladat (Krisztin Tibor). *Adott $a \leq 1/e$ nullától különböző valós szám esetén legyenek $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}$ olyan nem valós számok, amelyekre $ze^z+a=0$ teljesül, továbbá legyenek $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{C}$ tetszőlegesek. Mutassuk meg, hogy az $f(x) := \Re\big(\sum_{j=1}^n c_j e^{z_j x}\big) = \mathrm{Re}\big(\sum_{j=1}^n c_j e^{z_j x}\big)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek minden 1 hosszúságú zárt intervallumban van zérushelye.*

Megoldás (Gerencsér Máté és a kitűző megoldása alapján). 1. Vegyük észre, hogy ha $z \in \mathbb{C}$-re fennáll $ze^z+a=0$ és $c \in \mathbb{C}$, akkor $\frac{d}{dx}ce^{zx} = ce^{z(x-1)}ze^z = -ace^{z(x-1)}$ teljesül, továbbá $\mathbb{R} \ni x \mapsto \Re(ce^{zx}) \in \mathbb{R}$ analitikus, és $\frac{d}{dx}\Re(ce^{zx}) = -a\Re\big(ce^{z(x-1)}\big)$. Innen következik, hogy f analitikus, és $f'(x) = -af(x-1)$. $f \equiv 0$ esetén az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $f \not\equiv 0$.

2. Ha $\Re z_j = \Re z_k$, akkor a $ze^z+a=0$ egyenlet alapján $|z_j|e^{\Re z_j} = |a| = |z_k|e^{\Re z_k}$-ből $|z_j| = |z_k|$ következik. Így $z_k = z_j$ vagy $z_k = \overline{z_j}$. Ha z-re fennáll $ze^z+a=0$, akkor $\overline{z}$-re is.

Ha r, ϕ, μ, ν valósak, $c = re^{i\phi}$, $z = \mu+i\nu$, akkor $\Re(ce^{zx}) = re^{\mu x}\cos(\phi+\nu x)$. Így $c,d \in \mathbb{C}$, $z = \mu+i\nu$ esetén $\Re(ce^{zx}+de^{\overline{z}x})$ írható $ae^{\mu x}\sin(\nu x+b)$ alakban alkalmas valós a, b számokkal.

A fentiek alapján – az indexek felcserélésével – $f(x)$ írható
$$f(x) = \sum_{j=1}^m a_j e^{\mu_j x}\sin(\nu_j x+b_j)$$
alakban, ahol $a_j, b_j, \mu_j, \nu_j \in \mathbb{R}$, $\mu_j+i\nu_j$-re teljesül a $ze^z+a=0$ egyenlet, $\nu_j>0$, $j \in \{1,\dots,m\}$, továbbá
$$\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_m.$$
Mivel $f \not\equiv 0$, az is feltehető, hogy $a_1 \neq 0$.

3. Állítás: $\nu_1 > \pi$. Legyen $z = \mu+i\nu$ a $ze^z+a=0$ megoldása, és tegyük fel, hogy $0 < \nu \leq \pi$. Ekkor $z+ae^{-z}=0$ is teljesül, és így μ, ν-re
$$\mu = -ae^{-\mu}\cos\nu, \quad \nu = ae^{-\mu}\sin\nu.$$

Innen $a \neq 0$ és $\nu > 0$ miatt $\nu \neq \pi$. Ezért $\mu = -\nu \cot \nu$ és $a = A(\nu)$ adódik, ahol $A(\nu) = \frac{\nu}{\sin \nu} e^{-\nu \cot \nu}$, $\nu \in (0, \pi)$. Az $A : (0, \pi) \to (0, \infty)$ függvény folytonosan differenciálható, $A(\nu) \to 1/e$, ha $\nu \to 0+$, és

$$A'(\nu) = e^{-\nu \cot \nu} \frac{(\sin \nu - \nu \cos \nu)^2 + \nu^2 \sin^2 \nu}{\sin^3 \nu} > 0.$$

Ekkor az $a = A(\nu)$ egyenlet nem teljesülhet, ellentmondás. Tehát $\nu_1 > \pi$.

4. A 2. lépés alapján

$$f(x) = e^{\mu_1 x} \left(a_1 \sin(\nu_1 x + b_1) + \sum_{j=2}^{m} a_j e^{(\mu_j - \mu_1)x} \sin(\nu_j x + b_j) \right),$$

ahol $a_1 \neq 0$, $\mu_1 > \mu_j$, $j = 2, \ldots, m$. Innen $\nu_1 > \pi$ (3. lépés) alapján következik olyan x_0 létezése, hogy az (x_0, ∞) intervallumon f-nek végtelen sok zérushelye van, és a szomszédosak távolsága 1-nél kisebb.

5. Tegyük fel, hogy a és b az f két szomszédos zérushelye, amelyekre $x_0 < b - 1 < a < b$ teljesül. Ilyenek vannak a 4. lépés miatt. Ekkor a középértéktétel miatt van $c \in (a, b)$, amelyre $f'(c) = 0$. Az $f'(x) = -af(x-1)$ egyenlet és $a \neq 0$ alapján $f(c-1) = 0$ következik. Továbbá, a $c - 1$ zérushelyre $c - 1 \in (a - 1, b - 1) \subset (a - 1, a)$ teljesül. Így lesz f-nek a-tól balra, a-tól 1-nél kisebb távolságra is zérushelye.

Mivel f zérushelyei nem torlódhatnak a végesben (f analitikus), ezzel az eljárással balra lépegetve a következő zérushelyre, minden $x < b$ esetén az $(x - 1, x)$ intervallumban lesz f-nek zérushelye. $x \geq b$ esetén a 4. lépés eredménye garantálja zérushely létezését $(x - 1, x)$-ben.

Megjegyzések. Az állítás nyílt intervallumra is igaz. Az $a > 1/e$ esetben az állítás nem igaz, mivel ekkor $\nu_1 \in (0, \pi)$, és így $f(x) = e^{\mu x} \sin(\nu_1 x)$ zérushelyeinek a távolsága 1-nél nagyobb.

Érkezett 2 dolgozat. Megoldotta a feladatot Gerencsér Máté és Tomon István.

9. feladat (Hatvani László). *Legyen* $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha minden* $t > 1$ *esetén teljesül az*

$$x'(t) = -x^3(t) + \frac{t-1}{t} x^3(t-1)$$

egyenlőség, akkor $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

1. megoldás (Nagy Csaba megoldása alapján). Vezessük be az

$$x^\infty := \limsup_{t \to \infty} x(t), \qquad M_y := \max_{[y, y+1]} x(t)$$

jelöléseket. Ekkor $x^\infty = \limsup_n M_n$, ahol $n \in N$. Először belátjuk, hogy $x^\infty \leq 0$.

Ha $M_y \leq 0$ valamely y-ra, akkor $M_{y+1} \leq 0$. Legyen ugyanis $c \in [y+1, y+2]$ olyan, hogy $M_{y+1} = x(c)$ (több ilyen c is létezhet). Ha $c = y + 1$, akkor $M_{y+1} = x(y+1) \leq M_y \leq 0$. Ha $c > y + 1$, akkor $x'(c) \geq 0$, így az egyenletből

$$0 \leq x'(c) = -x^3(c) + \frac{c-1}{c} x^3(c-1),$$

ezért

$$x^3(c) \le \frac{c-1}{c} x^3(c-1). \tag{9}$$

Mivel $c - 1 \in (y, y+1]$, $x(c-1) \le M_y \le 0$, így $M_{y+1} = x(c) \le 0$. Tehát mindkét esetben $M_{y+1} \le 0$, ebből indukcióval következik, hogy minden $k \in N$ esetén $M_{y+k} \le 0$, és ekkor $x^\infty \le 0$.

A továbbiakban feltesszük, hogy $M_n > 0$ minden n-re.

Ha $M_{y+1} = x(c)$ és $c > y+1$, akkor (9) miatt

$$M_{y+1} = x(c) \le \sqrt[3]{\frac{c-1}{c}} x(c-1) \le \sqrt[3]{\frac{y+1}{y+2}} M_y. \tag{10}$$

Ha $c = y+1$, akkor is $M_{y+1} \le M_y$. Indukcióval adódik $M_{y+k} \le M_y$. Ekkor az is teljesül, hogy ha $y \le z$, akkor $M_y \ge M_z$. Valóban, legyen $x(c) = M_z$. Ekkor $c \in [y+k, y+k+1]$ valamilyen k egész számra, így $M_z = x(c) \le M_{y+k} \le M_y$. M_n tehát egy monoton csökkenő pozitív sorozat. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} M_n = d > 0$. Azt állítjuk, hogy minden n-re

$$M_{n+4} \le \sqrt[3]{1 - \frac{d^2}{d^2+1} \cdot \frac{1}{n+5}} \cdot M_n. \tag{11}$$

Két esetet különböztetünk meg: (*a*) van olyan $t \in [n+1, n+4]$, amire $x'(t) > 0$. Ekkor t nem lehet maximumhely, így $M_t = x(c)$ valamilyen $c > t$-re, ezért (10)-ből $M_t \le \sqrt[3]{\frac{t}{t+1}} \cdot M_{t-1}$. Kapjuk, hogy

$$M_{n+4} \le M_t \le \sqrt[3]{\frac{t}{t+1}} \cdot M_{t-1} \le \sqrt[3]{\frac{n+4}{n+5}} \cdot M_n.$$

Mivel

$$\frac{n+4}{n+5} = 1 - \frac{1}{n+5} \le 1 - \frac{d^2}{d^2+1} \cdot \frac{1}{n+5}$$

és $M_n > 0$, (11) teljesül. A (*b*) esetben minden $t \in [n+1, n+4]$ esetén $x'(t) \le 0$, és $x(t)$ monoton csökkenő az $[n+1, n+4]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $t \in [n+2, n+3]$, amire

$$x'(t) = x(n+3) - x(n+2) \ge x(n+3) - x(n+1).$$

A monotonitás és $x(n+1) = M_{n+1} > 0$ miatt

$$x'(t) = -x^3(t) + \frac{t-1}{t} x^3(t-1) \le -x^3(n+3) + \frac{n+2}{n+3} x^3(n+1),$$

tehát

$$x(n+3) + x^3(n+3) \le x(n+1) + \frac{n+2}{n+3} x^3(n+1).$$

Legyen $k = x(n+1) = M_{n+1} \ge d > 0$ és $r = \frac{x(n+3)}{x(n+1)} = \frac{M_{n+3}}{M_{n+1}} \in (0,1)$. Ezekkel a jelölésekkel az előző egyenlőtlenség $rk + r^3k^3 \le k + \frac{n+2}{n+3}k^3$. Egyszerűsítve k-val és felhasználva $r^3 < r$-t kapjuk, hogy $r^3(1+k^2) \le 1 + \frac{n+2}{n+3}k^2$, amiből $k \ge d$ miatt átrendezéssel

$$\sqrt[3]{1 - \frac{d^2}{d^2+1} \cdot \frac{1}{n+5}} \ge r = \frac{M_{n+3}}{M_{n+1}} \ge \frac{M_{n+4}}{M_n}$$

adódik, ami éppen (11). Képezzük (11) alapján az alábbi szorzatokat:

$$\prod_{i=0}^{m-1} M_{4i+5} \leq \prod_{i=0}^{m-1} \left(\sqrt[3]{1 - \frac{d^2}{d^2+1} \cdot \frac{1}{4i+6}} M_{4i+1} \right).$$

Egyszerűsítés után és $1 - x \leq e^{-x}$ $(x \geq 0)$ miatt

$$(M_{4m+1})^3 \leq (M_1)^3 \cdot \prod_{i=0}^{m-1} \left(1 - \frac{d^2}{d^2+1} \cdot \frac{1}{4i+6}\right) < (M_1)^3 \exp\left(\frac{-d^2}{d^2+1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{4i+6}\right)$$

adódik. Ezért M_{4m+1} tart 0-ba, ami ellentmond $d > 0$-nak, tehát $x^\infty \leq 0$.

Ha $x(t)$ megoldása a feladatban szereplő egyenletnek, akkor $-x(t)$ is, amiből kapjuk, hogy $x^\infty \geq 0$, vagyis $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

2. megoldás (Kitűző). Azt fogjuk belátni, hogy $\lim\limits_{t\to\infty} x^4(t) = 0$.

Mivel

$$\left(\frac{1}{4}x^4(t)\right)' = -x^6(t) + \frac{t-1}{t}x^3(t)x^3(t-1) \leq -\left(1 - \frac{t-1}{2t}\right)x^6(t) + \frac{t-1}{2t}x^6(t-1),$$

könnyű látni, hogy az $M(t) := \max\limits_{t-1\leq s\leq t} \{x^4(s)\}$ nem-növekvő. Bebizonyítjuk, hogy $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = 0$. Ha ez nem igaz, akkor létezik olyan $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ sorozat és $\varepsilon > 0$, hogy $t_{i-1}+1 \leq t_i \leq t_{i-1}+3$, $i = 2, 3, \ldots$, és $x^4(t_i) \geq \varepsilon^4$. Mivel M korlátos, x is korlátos, és a feladatban megkívánt egyenlőség szerint x' is korlátos. Vagyis van olyan $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, hogy $t_i - \delta \leq t \leq t_i + \delta$ esetén $x^4(t) > (\varepsilon/2)^4$.

Egészítsük ki az $x^4/4$ függvényt úgy, hogy monoton legyen:

$$V(t) := \frac{1}{4}x^4(t) + \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t} x^6(s)\,ds;$$

$$V'(t) = -x^6(t) + \frac{t-1}{t}x^3(t)x^3(t-1) + \frac{1}{2}\left(x^6(t) - x^6(t-1)\right) \leq$$

$$\leq -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t-1}{t}\right)x^6(t) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t-1}{t}\right)x^6(t-1) \leq 0.$$

Ekkor

$$V(t_i+\delta) \leq V(0) - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^6 \sum_{k=1}^{i} \int_{t_k-\delta}^{t_k+\delta} \left(1 - \frac{t-1}{t}\right) dt \to -\infty, \text{ ha } i \to \infty,$$

ami ellentmond annak, hogy $V(t) \geq 0$.

Érkezett 4 dolgozat. Megoldotta a feladatot Gerencsér Máté, Gyenizse Gergő és Nagy Csaba. Értékelhető részeredményt ért el Mészáros Szabolcs.

10. feladat (Pap Gyula). *Legyenek X_0, $\xi_{i,j}$, ε_k $(i,j,k \in \mathbb{N})$ független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\xi_{i,j}$ $(i,j \in \mathbb{N})$ azonos eloszlásúak, ε_k $(k \in \mathbb{N})$ is azonos eloszlásúak, $\mathbb{E}(\xi_{1,1}) = 1$, továbbá $\mathbb{E}(X_0^\ell) < \infty$, $\mathbb{E}(\xi_{1,1}^\ell) < \infty$ és $\mathbb{E}(\varepsilon_1^\ell) < \infty$ valamely $\ell \in \mathbb{N}$ esetén. Tekintsük az $X_n := \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}$ $(n \in \mathbb{N})$ valószínűségi változókat, ahol $\sum_{j=1}^{0} \xi_{n,j} := 0$. Vezessük be az $M_n := X_n - X_{n-1} - \mathbb{E}(\varepsilon_n)$*

$(n \in \mathbb{N})$ *sorozatot. Bizonyítandó, hogy van olyan legfeljebb $\ell/2$ fokú P_ℓ polinom, melyre* $\mathbb{E}(M_n^\ell) = P_\ell(n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

1. megoldás (Gerencsér Máté megoldása alapján). Először megmutatjuk, hogy van olyan legfeljebb ℓ fokú Q_ℓ polinom, melyre $\mathbb{E}(X_n^\ell) = Q_\ell(n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ezt az állítást ℓ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás triviális $\ell = 0$ esetén. Most tegyük fel, hogy az állítás igaz $0, 1, \ldots, \ell - 1$ esetén. Ekkor

$$\mathbb{E}(X_n^\ell) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \varepsilon_n^{\ell-i} \left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}\right)^i\right] = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \mathbb{E}(\varepsilon_1^{\ell-i}) \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}\right)^i\right].$$

A polinomiális tétellel

$$\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}\right)^i = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_{X_{n-1}}=i,\\ i_1,\ldots,i_{X_{n-1}}\in\mathbb{Z}_+}} \frac{i!}{i_1!\ldots i_{X_{n-1}}!} \xi_{n,1}^{i_1} \ldots \xi_{n,X_{n-1}}^{i_{X_{n-1}}} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+mk_m=i,\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le m\le i}} \frac{i!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\ldots(m!)^{k_m}} S_{k_1,\ldots,k_m}(\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,X_{n-1}}),$$

ahol $S_{k_1,\ldots,k_m}(y_1, \ldots, y_{X_{n-1}})$ az

$$y_1 \ldots y_{k_1} y_{k_1+1}^2 \ldots y_{k_1+k_2}^2 \ldots y_{k_1+\ldots+k_{m-1}+1}^m \ldots y_{k_1+\ldots+k_m}^m$$

polinom által generált X_{n-1} változós szimmetrikus polinom. Az $S_{k_1,\ldots,k_m}(\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,X_{n-1}})$ összeg tagjai azonos eloszlásúak, a tagszám

$$\binom{X_{n-1}}{k_1}\binom{X_{n-1}-k_1}{k_2}\ldots\binom{X_{n-1}-k_1-\ldots-k_{m-1}}{k_m} =$$

$$= \frac{X_{n-1}(X_{n-1}-1)\ldots(X_{n-1}-k_1-k_2-\ldots-k_m+1)}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

független a tagoktól, ezért az $\mathbb{E}\left[S_{k_1,\ldots,k_m}(\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,X_{n-1}})\right]$ várható érték meghatározására alkalmazható a Wald-azonosság. Az $S_{k_1,\ldots,k_m}(\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,X_{n-1}})$ összeg tagszáma X_{n-1} polinomja, melynek fokszáma $k_1 + \ldots + k_m \le k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m = i$. Ez a fokszám csak az $S_i(\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,X_{n-1}})$ összeg esetén i, amikor a tagszám $\binom{X_{n-1}}{i}$, a tagok közös várható értéke $\mathbb{E}(\xi_{n,1} \ldots \xi_{n,i}) = \mathbb{E}(\xi_{n,1}) \ldots \mathbb{E}(\xi_{n,i}) = 1$, és a $\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}\right)^i$ kifejtésében hozzá tartozó együttható $i!$. Ezeket felhasználva

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}\right)^i\right] = \mathbb{E}\left[X_{n-1}(X_{n-1}-1)\ldots(X_{n-1}-i+1)\right] + \mathbb{E}\left[Q'_{i-1}(X_{n-1})\right],$$

ahol Q'_{i-1} legfeljebb $i-1$ fokú polinom. Az $\mathbb{E}(X_n^\ell)$ kifejtése alapján

$$\mathbb{E}(X_n^\ell) = \mathbb{E}\left[X_{n-1}(X_{n-1}-1)\ldots(X_{n-1}-\ell+1)\right] + \mathbb{E}\left[Q'_{\ell-1}(X_{n-1})\right] + \sum_{i=0}^{\ell-1} \mathbb{E}\left[Q''_i(X_{n-1})\right],$$

ahol Q_i'' legfeljebb i fokú polinom. Az indukciós feltétel alapján

$$\mathbb{E}(X_n^\ell) = \mathbb{E}(X_{n-1}^\ell) + Q_{\ell-1}'''(n-1),$$

ahol $Q_{\ell-1}'''$ legfeljebb $\ell - 1$ fokú polinom. Így

$$\mathbb{E}(X_n^\ell) = \mathbb{E}(X_0^\ell) + \sum_{k=1}^{n} Q_{\ell-1}'''(k-1) = Q_\ell(n),$$

ahol Q_ℓ legfeljebb ℓ fokú polinom.

Ezután hozzáfogunk a feladat állításának bizonyításához.

$$\mathbb{E}(M_n^\ell) = \mathbb{E}\left[\left((\varepsilon_n - \mathbb{E}(\varepsilon_n)) + \sum_{j=1}^{X_{n-1}} (\xi_{n,j} - 1)\right)^\ell\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \mathbb{E}\left[(\varepsilon_1 - \mathbb{E}(\varepsilon_1))^{\ell-i}\right] \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} (\xi_{n,j} - 1)\right)^i\right].$$

Újra a polinomiális tétellel

$$\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} (\xi_{n,j} - 1)\right)^i =$$

$$= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+mk_m=i,\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le m\le i}} \frac{i!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\ldots(m!)^{k_m}} S_{k_1,\ldots,k_m}(\xi_{n,1} - 1, \ldots, \xi_{n,X_{n-1}} - 1).$$

Ismét használhatjuk a Wald-azonosságot az $\mathbb{E}\left[S_{k_1,\ldots,k_m}(\xi_{n,1} - 1, \ldots, \xi_{n,X_{n-1}} - 1)\right]$ várható értékek meghatározására, azonban most $\mathbb{E}(\xi_{n,j} - 1) = 0$ $(j \in \mathbb{N})$ miatt $k_1 \geq 1$ esetén az $S_{k_1,\ldots,k_m}(\xi_{n,1} - 1, \ldots, \xi_{n,X_{n-1}} - 1)$ összegben a tagok közös várható értéke 0, ezért $\mathbb{E}\left[S_{k_1,\ldots,k_m}(\xi_{n,1} - 1, \ldots, \xi_{n,X_{n-1}} - 1)\right] = 0$. Így

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} (\xi_{n,j} - 1)\right)^i\right] =$$

$$= \sum_{\substack{2k_2+\ldots+mk_m=i,\\ k_2,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le m\le i}} \frac{i!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\ldots(m!)^{k_m}} S_{0,k_2,\ldots,k_m}(\xi_{n,1} - 1, \ldots, \xi_{n,X_{n-1}} - 1).$$

Mivel az $S_{0,k_2,\ldots,k_m}(\xi_{n,1} - 1, \ldots, \xi_{n,X_{n-1}} - 1)$ összeg tagszáma X_{n-1} polinomja, melynek fokszáma $k_2 + \ldots + k_m \leq (2k_2 + 3k_2 + \ldots + mk_m)/2 = i/2$, ezért

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} (\xi_{n,j} - 1)\right)^i\right] = \mathbb{E}\left[R_i(X_{n-1})\right],$$

ahol R_i legfeljebb $i/2$ fokú polinom. Az első állítás alapján $\mathbb{E}\left[R_i(X_{n-1})\right] = R_i'(n)$, ahol R_i' legfeljebb $i/2$ fokú polinom. Az $\mathbb{E}(M_n^\ell)$ kifejtése alapján ebből következik, hogy $\mathbb{E}(M_n^\ell) = P_\ell(n)$, ahol P_ℓ legfeljebb $\ell/2$ fokú polinom.

2. megoldás (Kitűző). Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegeinek momentumaival kapcsolatban felhasználjuk a következő lemmát:

Lemma. *Legyenek Z_k $(k \in \mathbb{N})$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy $\mathbb{E}\big[|Z_1|^\ell\big] < \infty$ valamely $\ell \in \mathbb{N}$ esetén.*

(i) Ha $\mathbb{E}(Z_1) \neq 0$, akkor van olyan ℓ fokú Q_ℓ polinom, melynek főegyütthatója $\big[\mathbb{E}(Z_1)\big]^\ell$, és

$$\mathbb{E}\big[(Z_1 + \ldots + Z_N)^\ell\big] = Q_\ell(N) \qquad (N \in \mathbb{N}).$$

(ii) Ha $\mathbb{E}(Z_1) = 0$, akkor van olyan legfeljebb $\ell/2$ fokú R_ℓ polinom, hogy

$$\mathbb{E}\big[(Z_1 + \ldots + Z_N)^\ell\big] = R_\ell(N) \qquad (N \in \mathbb{N}).$$

A lemma bizonyítása. (i) A polinomiális tétellel

$$\mathbb{E}\big[(Z_1 + \ldots + Z_N)^\ell\big] = \sum_{\substack{\ell_1+\ldots+\ell_N=\ell,\\ \ell_1,\ldots,\ell_N\in\mathbb{Z}_+}} \frac{\ell!}{\ell_1!\ldots\ell_N!}\mathbb{E}(Z_1^{\ell_1}\ldots Z_N^{\ell_N}) =$$

$$= \sum_{\substack{\ell_1+\ldots+\ell_N=\ell,\\ \ell_1,\ldots,\ell_N\in\mathbb{Z}_+}} \frac{\ell!}{\ell_1!\ldots\ell_N!}\mathbb{E}(Z_1^{\ell_1})\ldots\mathbb{E}(Z_1^{\ell_N}) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+sk_s=\ell,\\ k_1,\ldots,k_s\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le s\le\ell}} \binom{N}{k_1}\binom{N-k_1}{k_2}\cdots\binom{N-k_1-\ldots-k_{s-1}}{k_s}\times$$

$$\times \frac{\ell!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\ldots(s!)^{k_s}}\big[\mathbb{E}(Z_1)\big]^{k_1}\ldots\big[\mathbb{E}(Z_1^s)\big]^{k_s}.$$

Mivel

$$\binom{N}{k_1}\binom{N-k_1}{k_2}\cdots\binom{N-k_1-\ldots-k_{s-1}}{k_s} =$$

$$= \frac{N(N-1)\ldots(N-k_1-k_2-\ldots-k_s+1)}{k_1!k_2!\ldots k_s!}$$

polinomja az N változónak, melynek fokszáma $k_1+\ldots+k_s \le \ell$, így valóban van olyan legfeljebb ℓ fokú Q_ℓ polinom, hogy $\mathbb{E}\big[(Z_1+\ldots+Z_N)^\ell\big] = Q_\ell(N)$. Mivel ℓ fokú tag csak $k_1+\ldots+k_s=\ell$ esetén keletkezhet, ami csak úgy lehet, hogy $s=1$ és $k_1=\ell$, és az ekkor keletkező tag $N(N-1)\ldots(N-\ell+1)\big[\mathbb{E}(Z_1)\big]^\ell$, ezért Q_ℓ valóban ℓ-fokú, és főegyütthatója $\big[\mathbb{E}(Z_1)\big]^\ell$.

(ii) Újra a polinomiális tétellel

$$\mathbb{E}\big[(Z_1 + \ldots + Z_N)^\ell\big] = \sum_{\substack{\ell_1+\ldots+\ell_N=\ell,\\ \ell_1,\ldots,\ell_N\in\mathbb{Z}_+}} \frac{\ell!}{\ell_1!\ldots\ell_N!}\mathbb{E}(Z_1^{\ell_1}\ldots Z_N^{\ell_N}) =$$

$$= \sum_{\substack{\ell_1+\ldots+\ell_N=\ell,\\ \ell_1,\ldots,\ell_N\in\mathbb{Z}_+\setminus\{1\}}} \frac{\ell!}{\ell_1!\ldots\ell_N!}\mathbb{E}(Z_1^{\ell_1})\ldots\mathbb{E}(Z_1^{\ell_N}) =$$

$$= \sum_{\substack{2k_2+3k_3+\ldots+sk_s=\ell,\\ k_2,\ldots,k_s\in\mathbb{Z}_+,\ 2\le s\le\ell}} \binom{N}{k_2}\binom{N-k_2}{k_3}\ldots\binom{N-k_2-\ldots-k_{s-1}}{k_s}\times$$

$$\times\frac{\ell!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\ldots(s!)^{k_s}}\big[\mathbb{E}(Z_1^2)\big]^{k_2}\ldots\big[\mathbb{E}(Z_1^s)\big]^{k_s}.$$

Most az

$$\binom{N}{k_2}\binom{N-k_2}{k_3}\ldots\binom{N-k_2-\ldots-k_{s-1}}{k_s}=$$

$$=\frac{N(N-1)\ldots(N-k_2-k_3-\ldots-k_s+1)}{k_2!k_3!\ldots k_s!}$$

polinom fokszáma $k_2+\ldots+k_s\le\ell/2$, így kapjuk a lemma második állítását.

A megoldás folytatása. Először megmutatjuk, hogy van olyan legfeljebb ℓ fokú P_ℓ polinom, hogy $\mathbb{E}(X_n^\ell)=P_\ell(n)\quad(n\in\mathbb{N})$. Ezt az állítást ℓ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Jelölje $\mathcal{F}_n$ az $X_1,\ldots,X_n$ valószínűségi változók által generált σ-algebrát. Mivel $\mathbb{E}(X_n\mid\mathcal{F}_{n-1})=X_{n-1}+\mathbb{E}(\varepsilon_n)$, így $\mathbb{E}(X_n)=\mathbb{E}(X_{n-1})+\mathbb{E}(\varepsilon)$, amiből $\mathbb{E}(X_n)=n\mathbb{E}(\varepsilon)+\mathbb{E}(X_0)\quad(n\in\mathbb{N})$, ezért az állítás igaz $\ell=1$ esetén. Most tegyük fel, hogy az állítás igaz $1,\ldots,\ell-1$ esetén. Mivel

$$X_n^\ell=\bigg(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,j}+\varepsilon_n\bigg)^\ell=\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}\bigg(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,j}\bigg)^k\varepsilon_n^{\ell-k},$$

és a $\xi_{n,j}$, ε_n $(j\in\mathbb{N})$ valószínűségi változók függetlenek egymástól és az $\mathcal{F}_{n-1}$ σ-algebrától, így

$$\mathbb{E}(X_n^\ell\mid\mathcal{F}_{n-1})=\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}\mathbb{E}\bigg[\bigg(\sum_{j=1}^{N}\xi_{n,j}\bigg)^k\bigg]\bigg|_{N=X_{n-1}}\mathbb{E}(\varepsilon_n^{\ell-k}).$$

A lemma (i) állítása és $\mathbb{E}(\xi_{1,1})=1$ alapján $\mathbb{E}\big[\big(\sum_{j=1}^N\xi_{n,j}\big)^k\big]$ az N változó k fokú polinomja, melynek főegyütthatója 1. Ezért van olyan legfeljebb $\ell-1$ fokú $Q_{\ell-1}$ polinom, hogy $\mathbb{E}(X_n^\ell\mid\mathcal{F}_{n-1})=X_{n-1}^\ell+Q_{\ell-1}(X_{n-1})\quad(n\in\mathbb{N})$. Az indukciós feltevés alapján van olyan legfeljebb $\ell-1$ fokú $\widetilde{P}_{\ell-1}$ polinom, melyre $\mathbb{E}\big[Q_{\ell-1}(X_{n-1})\big]=\widetilde{P}_{\ell-1}(n-1)\quad(n\in\mathbb{N})$. Ezért $\mathbb{E}(X_n^\ell)=\mathbb{E}(X_{n-1}^\ell)+\widetilde{P}_{\ell-1}(n-1)\quad(n\in\mathbb{N})$, amiből

$$\mathbb{E}(X_n^\ell)=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{P}_{\ell-1}(i-1)+\mathbb{E}(X_0^\ell)=P_\ell(n)\quad(n\in\mathbb{N}),$$

ahol P_ℓ legfeljebb ℓ fokú polinom.

Ezután hozzáfogunk a feladat állításának bizonyításához. Nyilván

$$M_n=\sum_{j=1}^{X_{n-1}}\big(\xi_{n,j}-\mathbb{E}(\xi_{n,j})\big)+\big(\varepsilon_n-\mathbb{E}(\varepsilon_n)\big),$$

ezért

$$M_n^\ell=\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}\bigg(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}\big(\xi_{n,j}-\mathbb{E}(\xi_{n,j})\big)\bigg)^k\big(\varepsilon_n-\mathbb{E}(\varepsilon_n)\big)^{\ell-k}.$$

Mivel a $\xi_{n,j} - \mathbb{E}(\xi_{n,j})$, $\varepsilon_n - \mathbb{E}(\varepsilon_n)$ $(j \in \mathbb{N})$ valószínűségi változók függetlenek egymástól és az $\mathcal{F}_{n-1}$ σ-algebrától, így

$$\mathbb{E}(M_n^\ell \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \mathbb{E}\Bigg[\Bigg(\sum_{j=1}^{N} (\xi_{n,j} - \mathbb{E}(\xi_{n,j}))\Bigg)^k\Bigg]\Bigg|_{N=X_{n-1}} \mathbb{E}\big[(\varepsilon_n - \mathbb{E}(\varepsilon_n))^{\ell-k}\big].$$

A lemma (ii) állítása alapján $\mathbb{E}\big[\big(\sum_{j=1}^N (\xi_{n,j} - \mathbb{E}(\xi_{n,j}))\big)^k\big]$ az N változó legfeljebb $k/2$ fokú polinomja, ezért $\mathbb{E}(M_n^\ell \mid \mathcal{F}_{n-1}) = R_\ell(X_{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$, ahol R_ℓ legfeljebb $\ell/2$ fokú polinom. Felhasználva az $\mathbb{E}(X_n^k)$ $(k = 1, \ldots, \ell)$ momentumokról bizonyított állítást, azt kapjuk, hogy $\mathbb{E}(M_n^\ell) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n^\ell \mid \mathcal{F}_{n-1})) = T_\ell(n)$ $(n \in \mathbb{N})$, ahol T_ℓ legfeljebb $\ell/2$ fokú polinom.

Érkezett 4 dolgozat. Megoldotta a feladatot Gerencsér Máté, Gyenizse Gergő, Tomon István és Virosztek Dániel.

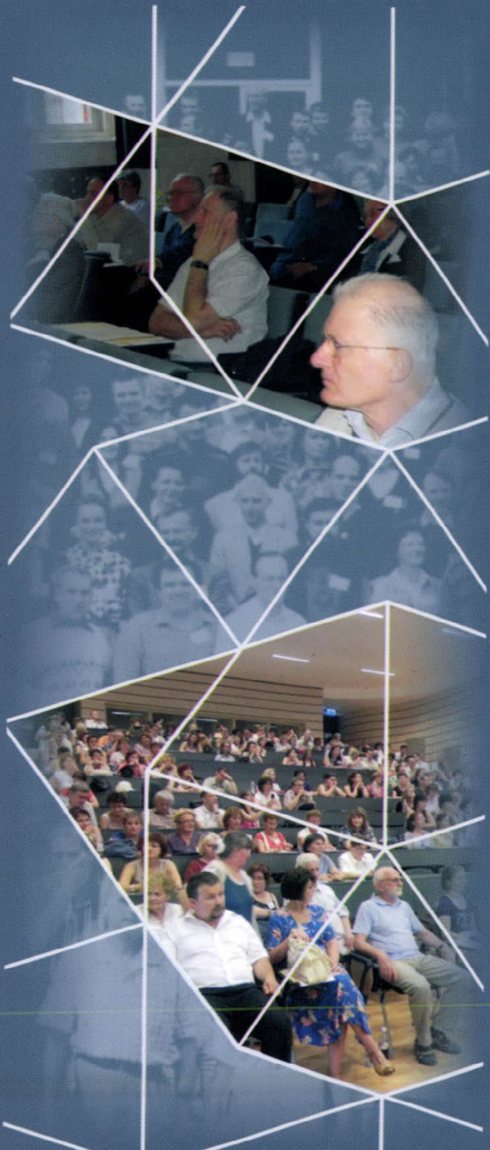
Szeged, 2012. február 17. *A Versenybizottság*

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Nagy és Társa Nyomda és Kiadó Kft., Budapest

Matematikai Lapok



2012/2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 18. évfolyam (2012), 2. szám

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12., I/4. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

MAGYAR ÖRÖKSÉG DÍJAT KAPOTT A KOMÁROMI OLÁH CSALÁD

KESZEGH ISTVÁN, TARICS PÉTER

2013. március 23-án a Magyar Tudományos Akadémia dísztermében átadták a Magyar Örökség Díjakat. Az idén ebben a rangos kitüntetésben részesült – többek között – a révkomáromi Oláh család, nevezetesen Oláh Imréné Domonkos Ilona, Oláh Imre és Oláh György.

Hármuk közül már csak *Oláh Ilona* él, hiszen 2012 tavaszán az Oláh testvérek visszaadták a lelküket a Teremtőnek. Az elismerés mégsem mondható posztumusz díjnak, hiszen mindmáig itt vannak közöttünk, s nemcsak az emlékezések szintjén, hanem a különböző nemzetközi és hazai matematikaversenyek szellemiségében, barátok, tanártársak lelkületében. A három tanár a kitüntetést *„több évtizedes matematika- és fizikatanári, valamint a magyar kultúra megőrzése érdekében végzett munkásságáért"* kapta. Mindhárman felbecsülhetetlen értékű munkát végeztek a magyar matematika és fizikai tehetségek felkutatásában és gondozásában. Mindhárman több rangos kitüntetés tulajdonosai. Az ünnepi átadáson az Oláh család életművét *dr. Gazda István* tudománytörténész méltatta laudációjában.

Oláh Imréné Domonkos Ilona gimnáziumi tanár a Nagymegyeren töltött gyermekkort maga mögött hagyva 1954-ben érettségizett Dunaszerdahelyen, majd 1958-ban a Pedagógiai Főiskolán szerzett matematika–fizika szakos tanári diplomát Pozsonyban. Alapító tagja volt az Ifjú Szívek Néptáncegyüttesnek, és évekig énekelt a Magyar Tanítók Énekkarában. Mivel édesapja a komáromi bencés gimnáziumban érettségizett (1927-ben), és élete végéig nagy tisztelője volt e gazdag múltú intézménynek, Ilona számára sem volt kétséges, hogy hol kezdi majd a tanári pályáját. Így lett 1958-ban a komáromi magyar gimnázium tanára, ahol nyugdíjba vonulásáig, a kilencvenes évek derekáig dolgozott. Kiegyensúlyozott, a szakmáját hivatásként megélő, a szeretet alázatával tanító pedagógust ismerhettük meg személyében. Külön foglalkozásokon készítette föl tanítványait a matematika- és fizikaversenyekre és olimpiákra, ahol szép eredményeket ért el tanítványaival. Hűséggel, szeretettel, alázattal őrzi családi-pedagógiai gyökereit. Kezdeményezője volt a komáromi Csokonai-szobor felállításának. Több társadalmi szervezet tagja, és a Komáromi Protestáns Nőegylet elnöke.

Oláh György középiskolai matematikatanár több mint ötven tanulmányt írt, számos tankönyvvel, példatárral, tanári segédkönyvvel, fordítással és recenzióval járult hozzá a matematikai ismeretek bővítéséhez és népszerűsítéséhez. Tanított a Nyitrai Pedagógiai Főiskolán, a révkomáromi Ipari Középiskolában, a révkomáromi magyar gimnáziumban, valamint a szintén révkomáromi MARIANUM

Egyházi Gimnáziumban. A Szlovákiai Magyar Pedagógusok Szövetségének alapító tagja. Nemzetközi és hazai magyar matematikaversenyek kezdeményezője, alapítója. Ezek közül talán a legjelentősebb az 1991-ben elindított *Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó,* melynek húsz éven át volt a főszervezője (évente mintegy 200 diák és 30 tanár vett részt a találkozón). 1991-ben szintén ő indította el a *Nemzetközi Magyar Matematika Versenyt,* erdélyi, délvidéki, kárpátaljai, felvidéki és magyarországi diákok bevonásával. A versenyeken évente 250-300 diák vett részt. S hogy hol rendezték? Minden második évben Magyarországon, a többi években pedig Révkomáromban, Ungváron, Székelyudvarhelyen, Szabadkán, Dunaszerdahelyen, Sepsiszentgyörgyön, Nagydobronyban, Zentán és máshol. Erre a nemes vetélkedésre *Teller Ede* és *Erdős Pál* is felfigyelt, de tisztelte azt *Lax Péter* Abel-díjas matematikus, akinek a nagyapja a Felvidékről származik, illetve *Lovász László* is, akinek az édesapja a felvidéki Bátorkesziről származik. 1996 óta Oláh György volt a *Felvidéki Magyar Matematika Verseny* koordinátora, amelyekre feladatokat állított össze, feladatsorokat alakított ki. Kezdeményezője volt a *Gidró Bonifác Matematikai és Fizikai Napok* elindításának. 1999-ben jelent meg a budapesti TYPOTEX Kiadó gondozásában *„Határon túli matematikaversenyek”* című könyve. 1985-ben és 2010-ben a matematika terén végzett munkájáért *Beke Manó-díjat* kapott. Erénye: tisztelet és alázat az alkotómunka és a tehetséggondozó tevékenység iránt. A matematika tanítását mindig gondosan összekötötte a magyarságtudat erősítésével. *„Egyszemélyes intézmény”* – mondták és mondják róla és életművéről szakmabeli barátai Kárpát-medence-szerte. Hatékonyan ápolta a szülőfalujából, Komáromszentpéterről származó felvidéki magyar költő, tanár, Kossányi József hagyományait, életművét. Rendkívül gazdag könyvtára volt, ex libris-gyűjteménye felbecsülhetetlen értékű.

Bátyja, *Oláh Imre* gimnáziumi tanár, miután a második világháborút követően a magyar iskolákat bezárták a Felvidéken, Magyarországon tanult. Eleken, Szegeden, majd az 1949/50-es tanévben Makón végezte tanulmányait a kereskedelmi középiskolában. Miután 1950-ben megnyílt Komáromban a Magyar Tannyelvű Gimnázium, hazajött, és itt, a Felvidéken fejezte be tanulmányait. Ezt követően a Pedagógiai Főiskola matematika-fizika szakán szerzett középiskolai tanári diplomát Pozsonyban. Csaknem negyven évig tanított a komáromi magyar gimnáziumban. Tanári pályafutása alatt több száz diákkal szerettette meg a matematikát és a fizikát. Szorgalmazta körükben, hogy tanuljanak tovább, menjenek főiskolára, egyetemre. Matematikából és fizikából komoly eredményeket ért el a hazai és nemzetközi versenyeken. Már az ötvenes években bekapcsolta diákjait a Középiskolai Matematikai Lapok pontversenyébe. Több matematika-fizika szakos tanár nevelt ki. A matematika és a fizika szeretete mellett magyarságtudatra, hazaszeretetre nevelte diákjait.

Keszegh István
matematika-fizika szakos
gimnáziumi tanár
Révkomárom

Tarics Péter
újságíró
Révkomárom

REIMAN ISTVÁN (1927–2012)

KATONA GYULA

Reiman István, Társulatunk tagja 2012. március 11-én elhunyt. Alább közöljük a temetési szertartásán elhangzott egyik beszédet.

Reiman István temetésére

A magyar matematika egyik nagy alakjától búcsúzunk ma. Reiman István matematikus volt.

A szó nagyon széles értelmében. Azzal kezdem, ami talán kevésbé ismert: kiváló kutató volt, szép és fontos eredményekkel. A Zarankiewicz-problémáról szóló kombinatorikus cikkének gondolatait például az elsős matematikus hallgatóknak tanítom, a cikkre 78 hivatkozás található a neten, közülük több 2010-es és 2011-es. De sok szép geometriai eredménye is volt.

A matematikusi feladatok közül az egyetemi oktatásban is kiválót nyújtott. 1953-tól 1970-ig az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, attól kezdve 1996-ig a Budapesti Műszaki Egyetem geometriai tanszékén tanította azokat, akiknek olyan szerencséjük volt, hogy hozzá kerültek. 1986 és 1992 között az utóbbi helyen tanszékvezető is volt. Mint minden tevékenységét, az egyetemit is nagy tudással, alapos felkészüléssel és határtalan szerénységgel végezte.

Leghíresebb azonban a magyar matematikai tehetségek kiválasztásában, kinevelésében játszott szerepe által lett. 1961-től 2002-ig, 41 éven át volt a Nemzetközi Matematikai Olimpiákon résztvevő magyar csapat felkészítője. Az alap a Reiman-szakkör volt, amit kéthetenként szombat délutánonként tartott. Azután az olimpiák előtt volt egy intenzív felkészítés is. Sajnos idős korom megakadályozott abban, hogy részese legyek ezeknek az élménynek, én két évvel korábban, 1959-ben voltam olimpikon. De a kiemelkedő magyar matematikusok, akadémikusok, nagydoktorok négy évtizednyi hada ebből az iskolából került ki. Ők mesélnek a szakkör csodálatos hangulatáról. Kis füzetéből a táblára felírta a gondosan összeválogatott szép és izgalmas feladatokat, azután a háttérbe húzódott. Hagyta a diákokat érvényesülni, csak néha fűzött kommentárt egy-egy feladat megoldásához. Mennyi munka volt emögött! Hány és hány könyvből, szaklapból gyűjtötte össze a feladatokat. És micsoda pedagógiai érzéket kívánt a kihívás, az ország legtehetségesebb matematikus diákjaival dolgozni, mekkora felelősség, hogy belőlük kihozza a maximumot! Vezetése alatt sok nagy sikert ért el a magyar olimpiai csapat. Pedig nem ezt tartotta fő célnak, hanem azt, hogy kiváló, egészséges gondolkodású matematikusokat neveljen az országnak.

A nemzetközi matematikai közvélemény is jól ismerte és elismerte e tevékenységét. Részben az eredmények miatt, részben az olimpiai feladatokat összegyűjtő, angolul is megjelent kötetei alapján. A Matematikaversenyek Nemzetközi Szövetsége ezért 2000-ben Erdős-éremmel tüntette ki.

Szerénysége vitte e területre. Felvetődik a kérdés, hogy ha nem tölti idejét a fiatalok nevelésével, mennyivel több szép matematikai tételt alkothatott volna. De azt hiszem helyesebb úgy számolni, hogy annak a több száz matematikusnak, akiket nevelt, egy-két cikkét a javára írjuk, hiszen azok – talán – nem születtek volna meg Reiman tanár úr nélkül hazánk és a világ matematikájának hasznára.

A Bolyai János Matematikai Társulat nevében is köszönetet kell mondanom áldozatos tehetségkiválasztó-nevelő munkájáért, de a különböző bizottságaink munkájában végzett tevékenységéért, hasznos tanácsaiért is.

Volt még egy érdekes munkája, amitől ismert lett az ország közvéleménye előtt is. Éveken át a fél ország ült éjjeli órákban a képernyő elé, hogy világos magyarázatait hallgatva megtudja, hogyan kellett volna a koszinuszos feladatot megoldani az egyetemi felvételin.

Az ország és szakma megpróbálta kitüntetésekkel kifejezni háláját. 1993-ban Apácai Csere János-díjat, 2002-ben Rácz Tanár Úr Életműdíjat, 2007-ben pedig a Magyar Köztársasági Érdemérem tisztikeresztjét nyerte el.

Kedves Pista Bácsi, köszönjük Neked ezt az életet, a rengeteg munkát. Tudd, hogy érdemes volt. Százaknak adtál jó kezdetet, életre szóló élményt. Te vagy az egyik oka a magyar matematika világhírének.

Katona Gyula

a Társulat elnöke

PÁLMAY LÓRÁNT (1929–2012)

KATONA GYULA, LEIBINGER JÁNOSNÉ

Pálmay Lóránt, Társulatunk alelnöke, a kiváló pedagógus 2012. december 19-én elhunyt. Ez alkalomból közöljük az alábbi két emlékbeszédet.

Pálmay Lóránt temetésére

A Bolyai János Matematikai Társulat nevében búcsúzom társulatunk alelnökétől, Pálmay Lóránttól, tagjaink: matematikusok és tanárok nevében.

53 éve találkoztam vele először. Geometria gyakorlatot vezetett a szigorú Hajós tanszéken, mosolygósan, nagy megértéssel. Látszott, hogy szerette a tárgyat, és sikerült nekünk is megmutatnia a szépségeit. Kiemelkedett gyakorlatvezetőink közül. Nekem ő máig is Pálmay tanár úr. Bár később fő tevékenysége másfele kanyarodott, mostanáig tartott előadásokat az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. A 2011–12-es tanévben a – rá jellemző – Geometriai érdekességek címmel. Mivel már egyetemista korában elkezdett gyakorlatokat vezetni, összesen 63 évig tanított az egyetemen.

1976-ban a Fővárosi Pedagógia Intézetbe került át, ahol – nyugdíjazásáig – 1999-ig dolgozott, előbb mint vezető szakfelügyelő, majd szaktanácsadó. Ő fogta össze, felügyelte a spciális matematika osztályok tanárainak munkáját. A Nemzeti Alaptanterv eredeti kidolgozásában ő vezette a matematika műveltségterületének munkálatait, és a kerettanterv matematika részének kidolgozását. De a gyakorlatból is ismerte a középiskolai munkát. 21 évig tanított a Szent László Gimnáziumban, ahol valaha érettségizett, de később is vezetett szakkört. Emellett tanított a Fazekas Mihály és a Fáy András Gimnáziumokban is. Sok tankönyvet, feladatgyűjteményt írt.

A Bolyai János Matematikai Társulatnak 60 évig volt tagja. Nehéz még felsorolni is, mennyi feladatot vállalt és végzett el ott is kitűnően. 1972 és 1993 között a Társulat dunántúli titkára, 2006-tól haláláig a Társulat budapesti alelnöke (így a Társulat elnökségének és Választmányának tagja). A következő bizottságoknak volt tagja: Oktatási bizottság, Kürschák versenybizottság, a Beke Manó-emlékdíj bizottság tagja, 2008-tól haláláig elnöke, az Ericsson bizottságnak 1999-es megalakításától elnöke, a Rátz Tanár Úr Életműdíj bizottság tagja 2003-tól, 2004-től haláláig elnöke. Társulatunk munkájának egyik oszlopa volt. Munkabírása hihetetlen volt. Nyugdíjas korában is 12 órákat dolgozott. És mindezt jókedvűen, mosolygósan. Nyugodt, bölcs hozzászólásai mindig valami fontos dologra hívták fel a figyelmet.

A középiskolai matematikaoktatás és tehetségkiválasztás minden lehetséges területén dolgozott, hatalmasat és nagyszerűt alkotott.

Társulatunk és a társadalom megpróbálta kitüntetésekkel kifejezni háláját ezért a tehetséges, szenvedélyes munkáért. A társulat Beke Manó-díját először 1963 nyerte el, majd 1980-ban a kiemelt Beke-díjat ítélték neki. A tanári munka legnagyobb elismerését, a Rácz Tanár Úr Életműdíjat 2002-ben kapta. De elnyerte az Apáczai Csere János és a Trefort Ágoston-díjakat is.

Magyarország bővelkedik matematikai tehetségekben. Sok nálunk a csodagyerek. Ennek titka az, hogy ilyen csodatanárok vannak, mint Pálmay tanár úr volt. Az erős tanáregyéniségek gyakran családjukban is példát tudnak mutatni. Gyermekeik, unokáik megszeretik a nagy előd hivatását. Ez történt az ő esetében is. Olyan szerencsém volt, hogy taníthattam az egyetemen lányát, Piroskát, aki azóta maga is kitűnő tanár, nemrég pedig kiderült, hogy az egyetemi szemináriumomra járó tehetséges fiatal matematikus, Nagy Zoltán az ő unokája.

De most már az angyalok ismerkednek a geometria szépségeivel. Pálmay tanár úr, mindent köszönünk, Isten veled!

Katona Gyula

a Társulat elnöke

Emlékezés Pálmay Lóránt tanár úr gyászmiséjén

Kedves gyászoló Testvérek!

Pálmay Lóránt tanár urat az egyetemi tanulmányaim alatt ismertem meg. Egyrészt differenciálgeometriát tanított az évfolyamunknak, másrészt évfolyamfelelősként figyelemmel kísérte a 120 fős matematika–fizika évfolyam valamennyi hallgatójának sorsát. Többeknek gyakorlatvezetője is volt. Mindannyian tiszteltük, szerettük nemcsak világos magyarázataiért, hanem felelősségteljes, igaz emberi magatartásáért is. Azok közé az egyetemi oktatók közé tartozott, akinek szavaira érdemes volt odafigyelni, akinél jó volt vizsgázni, mert alapos, igényes, ugyanakkor igazságos volt.

Később érettségi elnökként találkoztam vele. Ebben a feladatában is ugyanazt a rendkívüli precizitást tapasztaltam nála, mint az egyetemi évek alatt.

Nagy örömömre szolgált, hogy alapító tagja volt a reál tantárgyakat tanító katolikus pedagógusok Öveges József Tanáregyletének, amelynek megalakulása óta, 12 éven át elnökhelyettese is volt. Ebben a feladatban is a kitartás, a pontosság, az odaadottság jellemezte. Ő javasolt nevet a katolikus iskolák matematikaversenyének, és személyes munkájával önzetlenül segítette a Dugonics András Matematikaverseny eredményességét. Jelenlétével emelte a döntők rangját.

Nekem külön öröm volt tudni, hogy közös a hitünk, néhány rövid közös utazásunk alkalmával ilyen téren is tudtunk egymással beszélgetni.

Olyan ember volt, akiről nemcsak tudtuk, hanem tapasztaltuk is, hogy Isten képmását hordozza.

Benjámin László versének részletével búcsúzom tisztelt és szeretett tanárunktól, és kedves munkatársunktól:

Mind többet gondolok hajdani mestereimre,
az elcsöndesedett férfiakra, kik ifjúságom fölé magasodnak
megviselten és méltóságosan, akár a százados fák.

...

Nem kell behúnynom a szemem látásukért,
legendák és nosztalgiák homályából kiválnak.
Szavaimban, gesztusaimban néha fölismerem őket.

... vallották egész életükkel:
mindig talál tennivalót s a dologra társat az igaz ember.
Figyelmes tekintetük követ a halál árkain túlról is,
szemükkel nézem dolgaimat, velük mérem magam
s velük a változó világot. Emléknél többek ők.
Egyre sűrűbben gondolok rájuk, s újra meg újra fölismerem őket
az énekekből kifelejtett országban, igaz emberekben,
akik a végső kérdésekre egész életükkel felelnek.

(Benjámin László: Emléknél többek)

Kedves Tanár úr! Isten Veled!

Leibinger Jánosné
(Pálvölgyi Éva)
volt tanítvány

A VALÓS SZÁMOK RENDSZERÉNEK FELÉPÍTÉSE

GECSE FRIGYES

E tanulmány gimnazisták, főiskolai vagy egyetemi hallgatók és tanárok számára készült. Célja a valós számok elméletének mélyebb ismertetése. Szeretnénk, ha a matematikai alapok e fontos része nem maradna ki a matematikusok látóköréből. A középiskolákban és gimnáziumokban a diákok kezdetleges vagy alapszintű ismereteket kapnak e témakörből, később pedig időhiány miatt ugyancsak nem foglalkoznak vele kellőképpen. Mivel a természetes számok bevezetése az alsó tagozatban történik, nincs lehetőség az elméleti problémákkal foglalkozni. Tudományos alapot e téren a Peano-féle axiomatikus rendszer szolgáltat [1], [2]. Általános iskolában a diákok megismerkednek a törtekkel és a racionális számokkal. Már középiskolai feladatokkal is igazoljuk a racionális számok $\mathbb{Q}$ rendszere kibővítésének szükségességét. Mivel a racionális számok véges vagy végtelen szakaszos tizedes törtek formájában is megadhatók, kézzel fogható a hiányzó számok bevezetése végtelen nem szakaszos tizedes törtek alakjában. De az így konstruált irracionális számok egyrészt megalapozatlanok a sorok elmélete nélkül, másrészt túlságosan bonyolultak ahhoz, hogy velük műveleteket végezzünk, vagy általuk a számok tulajdonságait tanulmányozzuk. Illusztrációs szerepet pedig a számegyenes pontjai is betölthetnek. Sőt ez utóbbiakkal egyszerűbben és jobban magyarázható a kibővítés célja: a teljesség elérése (geometriai nyelven: a számegyenes folytonosságának vagy teljes lefedésének megteremtése). A valós számok $\mathbb{R}$ rendszerének teljességét pontosabban később értelmezzük, de az a tény, hogy a középiskolában erre nem alapoznak, a valós számok elméletének befejezetlenségét tükrözi, és ez a matematika oktatásának komoly hiányossága.

A XIX. sz. végén több kiváló matematikus foglalkozott a valós számok elméletének megalapozásával. A legtökéletesebb modellt Richard Dedekind német matematikus alkotta meg, amely máig is vezető szerepet játszik. E cikk célja a valós számrendszer konstruktív megalapozása, azaz egy modell részletes megszerkesztése halmazelméleti nyelven, amelyen teljesülnek a valós számok meghatározó tulajdonságai (ezeket az 1. és 2. tételben foglaltuk össze). Ismeretlen elméletre nem hivatkozunk, csak a racionális számokra támaszkodunk, de bizonyos alapszintű matematikai műveltséget az Olvasótól elvárunk. Magyar nyelven a modellről legtöbbet talán W. Rudin [3] könyvében olvashatunk. Nem a racionális számokat bővítjük ki irracionálisokkal, hanem új modellt építünk, amelynek egy része a racionális számokat reprezentálja, a másik része pedig az előző természetes kiterjesztése. A modellt úgy kell felépíteni, hogy elemeire teljesüljenek a racionális számok ismert tulajdonságai, ezenkívül biztosítva legyen a fő cél: a számrendszer teljessége. A tanulmány a valós számok axiomatikus elméletéről is képet ad, sőt annak ellentmondás-mentességét is bizonyítja. Így a valós számrendszerről azt is állíthatjuk, hogy az egy teljes rendezett test. Ennek értelmét az 1. és 2. tételben magyarázzuk. Az elmélet további problémáiról a [4], [5], [7] könyvekben olvashatunk.

Ismertetjük röviden a tervünket. A konstrukció elvi alapja abban rejlik, hogy minden valós számot (pontosabban annak modelljét) bizonyos racionális számok halmazával adjuk meg. A matematikában e módszer a halmazelmélet felépítése következtében általánossá vált: minden matematikai fogalom bizonyos halmazra vezethető vissza. Például a racionális szám az egyenlő törtek halmaza, a szabad vektor egy irányított szakasz párhuzamos eltolásainak halmaza, a reláció rendezett párok halmaza stb. Kiderült, hogy egy r racionális szám reprezentálására a modellben legalkalmasabb az $r^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > r\}$ halmaz. Ennek képe a racionális számok tengelyén egy félegyenes, amely nem tartalmazza a baloldali r végpontját. De léteznek olyan hasonló típusú félegyenesek is, amelyek alulról nem racionális számmal korlátoltak. Ezek szolgáltatják az irracionális számok képeit. Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező halmazok egyszerűen definiálhatók geometriai szemléltetés nélkül is. Így kapjuk meg a valós szám modelljét, melynek neve: szelet. De a valós számrendszer nem csupán halmaz, hanem olyan struktúra, melyben a halmazon összeadás és szorzás műveletek, valamint rendezési reláció adottak, és – nem utolsó sorban – bizonyos alaptulajdonságok (axiómák) teljesülnek. A jól megválasztott reprezentációnak köszönhető, hogy a műveletek és a rendezési reláció egyszerűen definiálhatóak, és tulajdonságaik könnyen bebizonyíthatóak. Összesen 16 alaptulajdonságot kell bebizonyítani, amelyekkel – egy kivételével – a racionális számok is rendelkeznek. A valós számokra jellemző 16., teljességi axiómát olyan egyszerű formában adtuk meg, hogy megértése ne okozzon gondot a gimnazisták körében sem. Aztán bebizonyítjuk, hogy az általunk választott teljességi axióma ekvivalens az általában elterjedt, a korlátossággal kapcsolatos axiómával. A bizonyítások egyszerűsítése céljából egy segédfogalmat is bevezettünk kváziszelet néven. A kapcsolatot az alapfogalommal – a szelettel – az alábbiakban részletesen megmagyarázzuk.

A terv egyszerű, és jól áttekinthető, de kivitelezése terjedelmes, hiszen 16 axióma teljesülését szükséges ellenőrizni. A fő fogalmakat geometriai illusztrációkkal láttuk el. A részletes bizonyításokkal az Olvasó munkáját kívánjuk könnyíteni. A modell felépítése után néhány módszertani elemzéssel és következtetések bizonyításával is foglalkozunk. Az alábbiakban megszerkesztett modell a valós számok $\mathbb{R}$ rendszerének egy reprezentánsa. Léteznek más modellek is, de mindegyik funkciója azonos, vagyis az ismert modellek egyenrangúak. Ezekkel a problémákkal már nem foglalkozunk. Megjegyezzük, hogy az $\mathfrak{R}$, $\mathbb{R}$ szimbólumok halmazt is, rendszert (struktúrát) is jelölnek. Tehát a számrendszer jelentése: az $\mathbb{R}$ halmaz az axiómákat kielégítő elemekkel, műveletekkel és rendezési relációval együtt.

Kváziszeletek és szeletek

Térjünk át a valós számok modelljének szerkesztésére. Használjuk az implikáció és ekvivalencia $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ jeleit, valamint a $\forall$ és $\exists$ kvantorokat, amelyek a „minden", illetve „létezik" szavakat helyettesítik. A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazán a műveleteket és a relációkat a megszokott szimbólumokkal jelöljük. Ezenkívül a következő jelöléseket használjuk: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$ megfelelően a természetes, pozitív egész, pozitív és negatív racionális számok halmaza; $\mathbb{Q}_\circ^+$ és $\mathbb{Q}_\circ^-$ a nemnegatív, illetve nempozitív racionális számok halmaza. A továbbiakban $\mathbb{Q}$ minden részhalmazáról feltételezzük, hogy az nem üres és valódi, azaz különbözik a $\emptyset$ és $\mathbb{Q}$ halmazoktól. Ezenkívül $A \subseteqq B$ helyett $A \subset B$-t írunk akkor is, amikor a halmazok közt egyenlőség áll fenn. Legyen továbbá

$$A' := \mathbb{Q} \setminus A, \quad \text{ha} \quad A \subset \mathbb{Q}; \qquad A^\times := \mathbb{Q}^+ \setminus A, \quad \text{ha} \quad A \subset \mathbb{Q}^+;$$

$$\overline{k,l} := \{n \in \mathbb{N} \mid k \le n \le l\}.$$

Definiáljuk $\mathbb{Q}$ részhalmazain a következő műveleteket:

$$\begin{aligned}
A + B &:= \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\},\\
A - B &:= \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\},\\
-A &:= \{-a \mid a \in A\},\\
CD &:= \{cd \mid c \in C,\ d \in D\}, \quad \text{ha} \quad C, D \subset \mathbb{Q}_\circ^+,\\
B_{\text{rec}} &:= \left\{\frac{1}{b} \mid b \in B\right\}, \quad \text{ha} \quad B \subset \mathbb{Q}^+.
\end{aligned}$$

Az $A < B$ szimbólum azt jelenti, hogy $a < b$ minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén.

1. állítás. *Fennállnak az alábbi egyenlőségek:*

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C), \quad -(A + B) = -A - B;$$
$$A, B, C \subset \mathbb{Q};$$
$$AB = BA, \quad (AB)C = A(BC), \quad -(AB) = (-A)B = A(-B); \quad A, B, C \subset \mathbb{Q}_\circ^+.$$

Bizonyítás. Minden egyenlőség bizonyítása hasonló. Pl. a második egyenlőség abban rejlik, hogy annak mindkét oldalán lévő halmaz elemei ugyanazok a számok. De ezek az $(a + b) + c$, illetve $a + (b + c)$ összegek, ahol $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Nyilván ezek az összegek egyenlőek, ezért a tárgyalt egyenlőség igaz. ∎

Ezzel ellentétben ld. az 1. gyakorlatot.

Definíció. Egy A halmazt *kváziszeletnek* nevezünk, ha $A' < A$ ($A \subset \mathbb{Q}$ és – ahogyan megállapodtunk – $A \neq \emptyset$, $A' \neq \emptyset$).

A kváziszelet olyan segédfogalom, amelyből az alapfogalom származik, és amely megkönnyíti az alábbiakban több állítás bizonyítását. Ha A kváziszelet, akkor vagy A-nak nincs minimuma, vagy A'-nek nincs maximuma. Ellenkező esetben a minimum és maximum közt lenne olyan racionális szám, amely egyik halmazba sem tartozna. De ez lehetetlen, mivel $A \cup A' = \mathbb{Q}$. A fő fogalmat a következő meghatározás adja.

Definíció. Az A kváziszeletet *szeletnek* nevezzük, ha A-ban nincs legkisebb elem, azaz $\min A$ nem létezik.

Jelöljük $\mathfrak{R}$-rel az összes szeletből álló halmazt. Ez lesz $\mathbb{R}$ modellje. A szelet fogalmat kissé másféleképpen Dedekind vezette be. Kváziszeletek pl. a $\mathbb{Q}_\circ^+$, $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1\}$, $\mathbb{Q}^+$, $\{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 > 2\}$ halmazok, de közülük csak az utolsó kettő szelet.

A kváziszeletet következőképpen is jellemezhetjük.

2. állítás. *A $\mathbb{Q}$ halmaz egy nem üres, valódi A részhalmaza pontosan akkor kváziszelet, amikor az minden elemével együtt a tőle nagyobb racionális számokat is tartalmazza; másképpen:*

$$(1) \qquad (\forall r \in \mathbb{Q})(\forall a \in A) a < r \Rightarrow r \in A.$$

Bizonyítás. Legyen A kváziszelet és $a \in A$, $r \in \mathbb{Q}$. Ha $a < r$, akkor $A' < A$ miatt $r \notin A'$, tehát $r \in (A')' = A$.

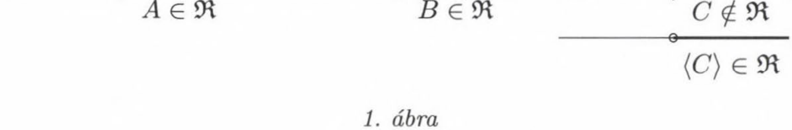
Teljesüljön az (1) állítás. Minden $a \in A$ és $r \in A'$ esetén elvben három lehetőség van: $a = r$, $a < r$ és $a > r$. Az első lehetőséget elvethetjük, hiszen $A \cap A' = \emptyset$. Ha $a < r$, akkor (1) szerint $r \in A$, ami lehetetlen $r \in A'$ miatt. Ennélfogva marad a harmadik lehetőség: $r < a$. Tehát $A' < A$, azaz A kváziszelet. ■

Definíció. A $\mathbb{Q}$ halmaz nem üres, valódi részhalmazain egy transzformációt definiálunk $\langle\rangle$ jellel a következőképpen:

$$\langle A \rangle := \begin{cases} A, & \text{ha } \min A \text{ nem létezik,} \\ A \setminus \{\min A\}, & \text{ha } \min A \text{ létezik.} \end{cases}$$

A $\langle\rangle$ jelet csak ebben az értelemben fogjuk használni. Az $\langle A \rangle = \langle B \rangle$ egyenlőség lehetséges akkor is, amikor $A \neq B$, viszont ez utóbbi halmazok csak egy elemben különbözhetnek egymástól. Pl. $\langle \mathbb{Q}_\circ^+ \rangle = \langle \mathbb{Q}^+ \rangle = \mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_\circ^+ = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.

Szemléltessük a fentieket a következő ábrán, ahol a $\mathbb{Q}$ halmazt egyenes szakasszal ábrázoltuk, A, B, C pedig a $\mathbb{Q}$ halmaz részhalmazai.



1. ábra

3. állítás. *Ha A kváziszelet, akkor $\langle A\rangle$ szelet.*

Bizonyítás. Legyen A kváziszelet. Az $\langle A\rangle$ halmaz nem üres, és $\mathbb{Q}$-tól különböző. Az (1) állítás nem csak A-ra, de $\langle A\rangle$-ra is teljesül, tehát $\langle A\rangle$ kváziszelet. Ha A-nak nincs legkisebb eleme, akkor $\langle A\rangle = A$ miatt $\langle A\rangle$ szelet. Ha pedig létezik $\min A =: a$, akkor $a = \max\left\{\langle A\rangle'\right\}$, tehát nem létezik $\min\langle A\rangle$. Ezért $\langle A\rangle$ ismét szelet. ■

4. állítás. *Ha A szelet és $A \subset B$, akkor $A \subset \langle B\rangle$.*

Bizonyítás. Ha B-nek nincs minimuma, akkor az állítás triviális. Ha pedig létezik $\min B =: b$, akkor b nem lehet eleme A-nak, mert ellenkező esetben $A \subset B$ miatt $b = \min A$ lenne, ami lehetetlen, hiszen A szelet. Ennélfogva $A \subset B \setminus \{b\} = \langle B\rangle$. ■

Szükségünk van a természetes számok néhány tulajdonságára. Először is azt állítjuk, hogy minden racionális számnál van nagyobb természetes szám. Elég ezt belátni egy pozitív racionális q szám esetén. De ekkor $q = \frac{m}{n}$, ahol m, n pozitív egész számok, és nyilván $q < m + 1$.

5. állítás. *Ha $K \subset \mathbb{N}$ és $K \neq \emptyset$, akkor létezik* $\min K$.

Bizonyítás. Legyen k a K halmaz valamely eleme. A $K \cap \overline{0,k}$ halmaz nem üres és véges, ezért létezik minimuma, ami megegyezik $\min K$-val (ld. a 3. gyakorlatot). ■

6. állítás. *Legyen A szelet és ε tetszőleges pozitív racionális szám. Ekkor találhatók olyan $a \in A$ és $a' \in A'$ számok, hogy $a - a' < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Tetszőlegesen megadott pozitív racionális ε-ra válasszunk olyan természetes n számot, hogy $n > \frac{1}{\varepsilon}$, azaz $\frac{1}{n} < \varepsilon$ legyen. Adjunk meg tetszőlegesen egy-egy $a_1 \in A$ és $a_2 \in A'$ számot, és vezessük be a

$$K := \left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, a_2 + \frac{k}{n} \in A\right\}$$

halmazt. Ha k olyan természetes szám, hogy $k \geq n(a_1 - a_2)$, akkor $a_2 + \frac{k}{n} \geq a_1$, és (1) miatt $k \in K$. Ennélfogva $K \neq \emptyset$, és $\min K =: k_\circ$ létezik az 5. állítás következtében. Nyilván $a := a_2 + \frac{k_\circ}{n} \in A$ és $a' := a_2 + \frac{k_\circ - 1}{n} \in A'$. Látható, hogy $a - a' < \varepsilon$. ■

Definíció. Egy A szeletet *racionálisnak* nevezünk, ha létezik $\max A' =: a$. Ekkor A helyett a^*-ot is írunk. Nyilvánvaló, hogy $a^* = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > a\}$. A szeletet *irracionálisnak* nevezzük, ha az nem racionális.

Ha A irracionális szelet, akkor nem létezik sem $\max A'$, sem $\min A$. Ilyen szelet pl. az $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 > 2\}$.

Könnyen látható, hogy $f : r \mapsto r^*$, $r \in \mathbb{Q}$ kölcsönösen egyértelmű leképezés a racionális szeletek $\mathfrak{Q}$ halmazára, azaz bijekció.

Rendezési reláció és műveletek $\mathfrak{R}$-en

Definiáljunk a szeletek $\mathfrak{R}$ halmazán egy $\preccurlyeq$ relációt a következőképpen:

$$(2) \qquad A \preccurlyeq B \;\Leftrightarrow\; B \subset A \quad (A, B \in \mathfrak{R}).$$

7. állítás. *Az $\mathfrak{R}$ halmaz minden A, B és C elemére igaz, hogy*

$$(3) \qquad A \preccurlyeq A,$$

$$(4) \qquad A \preccurlyeq B \text{ és } B \preccurlyeq C \quad\Rightarrow\quad A \preccurlyeq C,$$

$$(5) \qquad A \preccurlyeq B \text{ és } B \preccurlyeq A \quad\Rightarrow\quad A = B,$$

$$(6) \qquad A \preccurlyeq B \text{ vagy } B \preccurlyeq A.$$

Bizonyítás. Ezek az állítások a $\subset$ reláció tulajdonságaiból következnek. Csak a (6) állítást bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy az $A \preccurlyeq B$ állítás hamis. Ekkor van olyan $b \in B$, hogy $b \notin A$, azaz $b \in A'$. Az A szelet tetszőleges a elemére fennáll az $a > b$ egyenlőtlenség, ezért (1) következtében $a \in B$. Ezzel beláttuk, hogy $A \subset B$, azaz $B \preccurlyeq A$. Ennélfogva a (6) állítás igaz. ∎

Definíció. A $\mathbb{Q}^+ = 0^*$ szeletet *nullszeletnek* hívjuk. Azok az A szeletek, amelyekre a $0^* \preccurlyeq A$ reláció teljesül, a *nemnegatív szeletek* halmazát alkotják; jelölése: $\mathfrak{R}^+_\circ$. Használjuk az

$$(7) \qquad \mathfrak{R}^+ := \mathfrak{R}^+_\circ \setminus \{0^*\}, \quad \mathfrak{R}^- := \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^+_\circ, \quad \mathfrak{R}^-_\circ := \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^+$$

jelöléseket is. Ezek elemeinek neve rendre *pozitív, negatív* és *nemnegatív szeletek.*

Nyilván egy A szelet akkor és csakis akkor pozitív (negatív), ha A' tartalmaz pozitív racionális számot (A tartalmaz negatív racionális számot).

Térjünk át a négy alapművelet bevezetésére az $\mathfrak{R}$ halmazon. Egy állítás bizonyításával kezdjük. Megjegyezzük, hogy $(-A)' = -(A')$. Ezért itt a zárójelezés fölösleges, és élhetünk a $-A'$ jelöléssel.

8. állítás. *Legyenek A, B, C, D, E kváziszeletek, $C, D \subset \mathbb{Q}^+_\circ$ és E a $\mathbb{Q}^+$ valódi részhalmaza. Ekkor az $A + B$, CD, $-A'$ és $(E_{\text{rec}})^\times$ halmazok szintén kváziszeletek. Ha ezenkívül A, B, C, D még szeletek is, akkor $A + B$ és CD szintén szeletek.*

Bizonyítás. Először azt igazoljuk, hogy az

$$(8) \qquad A + B, \quad CD, \quad -A', \quad (E_{\text{rec}})^\times$$

halmazok kváziszeletek. E halmazok nyilván nem üresek. Lássuk be, hogy $A + B$ nem azonos $\mathbb{Q}$-val, a többi halmazra ez nyilvánvaló. Ha $a \in A$, $b \in B$, $a' \in A'$ és $b' \in B'$ tetszőleges elemek, akkor $a + b$ az $A + B$ halmaz tetszőleges eleme, ezért $a' + b' < a + b$ miatt $a' + b' \notin A + B$, hanem $a' + b' \in (A + B)'$.

Ellenőrizzük a (8)-beli halmazokra az (1) feltételt. Tételezzük fel az alábbiakban, hogy r racionális szám.

Ha $a \in A$, $b \in B$ és $a+b < r$, akkor $b_1 := r - a$ racionális szám, és $b_1 > b$. Ezért (1)-nek megfelelően $b_1 \in B$, és így $r = a + b_1 \in A + B$, tehát az (1) feltétel teljesül $A + B$-re.

Ha C vagy D tartalmazza a nullát, akkor $CD = \mathbb{Q}_o^+$, és az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $0 \notin C$, $0 \notin D$, $c \in C$, $d \in D$ és $r > cd$. Ekkor $d_1 := \frac{r}{c} > d$ miatt $d_1 \in D$ és $r = cd_1 \in CD$, tehát az (1) feltétel CD-re is teljesül.

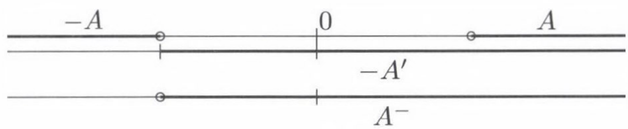
Mivel az $A' < A$ egyenlőtlenségből nyilván következik, hogy $-A < -A'$, $(-A')' < (-A)' = -A'$, ezért A-val együtt $-A'$ is kváziszelet.

Tegyük fel, hogy $x \in (E_{\text{rec}})^\times$ és $r > x$. Ekkor az x és r pozitív racionális számok, $x \notin E_{\text{rec}}$ és $\frac{1}{x} \notin (E_{\text{rec}})_{\text{rec}} = E$. Mivel E kváziszelet és $\frac{1}{r} < \frac{1}{x}$, ezért (1) alapján $\frac{1}{r} \notin E$, $r \notin E_{\text{rec}}$, $r \in (E_{\text{rec}})^\times$. Tehát az $(E_{\text{rec}})^\times$ halmazra is teljesül az (1) feltétel.

Legyenek ezután A, B tetszőleges, C, D pedig nemnegatív szeletek. Igazoljuk, hogy az $A + B$ és CD kváziszeleteknek nincs legkisebb elemük. Ha $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \in D$ tetszőleges elemek, akkor léteznek olyan $a_1 \in A$ és $c_1 \in C$ számok, amelyekre $a_1 < a$, $c_1 < c$, $a_1 + b < a + b$, $c_1 d < cd$. Tehát az $A + B$ halmaznak bármilyen $a + b$ eleménél van kisebb $a_1 + b$ eleme, azaz $\min(A + B)$ nem létezik. Hasonlóképp nem létezik $\min(CD)$. ■

Megjegyezzük, hogy racionális A szelet esetén $-A'$, valamint $(A_{\text{rec}})^\times$ (ha A még pozitív is) csak kváziszeletek, de nem szeletek.

Definíció. Legyenek A, B szeletek, C, D pedig nemnegatív szeletek. Ekkor az $A + B$, CD, $\langle -A' \rangle$ szeleteket rendre A és B *összegének*, C és D *szorzatának*, valamint A *ellentettjének* nevezzük, és használjuk megfelelően az $A + B$, CD és A^- jelöléseket (A^- illusztrációját ld. a 2. ábrán). Az *összeadás* és a *kivonás* olyan műveletek $\mathfrak{R}$-en, amelyek az A, B szeletek (A, B) rendezett párjához az $A + B$, illetve $A + B^-$ szeletet rendelik. A *szorzás* műveletet egyelőre csak az $\mathfrak{R}_o^+$ halmazon definiáljuk a $(C, D) \mapsto CD$ hozzárendeléssel.



2. ábra

9. állítás. *Az összeadás művelet asszociatív és kommutatív tulajdonságokkal rendelkezik.*

Bizonyítás. Az 1. és 8. állítás következtében ez nyilvánvaló. ■

10. állítás. *Minden A és B szeletre igazak az alábbi állítások:*

$$A + 0^* = A, \tag{9}$$

$$A + A^- = 0^*, \tag{10}$$

$$A = B \Leftrightarrow A + B^- = 0^*. \tag{11}$$

Bizonyítás. Tetszőleges A szeletre igaz, hogy $A \subset A + \mathbb{Q}^+$. Fordítva, ha $x \in A + \mathbb{Q}^+$, akkor $x = a + r$, ahol $a \in A$, $r \in \mathbb{Q}^+$. Mivel $x > a$ és A szelet, ezért $x \in A$. Tehát $A + \mathbb{Q}^+ \subset A$, és a (9) egyenlőség fennáll.

A (10) egyenlőség bizonyítására elegendő igazolni, hogy

$$A + (-A') \subset \mathbb{Q}^+, \tag{12}$$

$$\mathbb{Q}^+ \subset A + \langle -A' \rangle. \tag{13}$$

Ha $a \in A$, $b \in -A'$, akkor $-b \in A'$ és $-b < a$, tehát $a + b \in \mathbb{Q}^+$, ennélfogva (12) igaz. Fordítva, tetszőlegesen megadott pozitív racionális ε számhoz válasszunk olyan $a \in A$ és $a' \in A'$ számokat, hogy a 6. állításhoz híven $a - a' < \varepsilon$ legyen. A 8. állítás szerint az $A + (-A')$ halmaz kváziszelet, ezért a 2. állítás következtében $\varepsilon \in A + (-A')$. Ezáltal igazoltuk, hogy $\mathbb{Q}^+ \subset A + (-A')$. Még azt kell belátni, hogy $A + (-A') \subset A + \langle -A' \rangle$.

Legyenek $a \in A$, $b \in -A'$ tetszőleges elemek. Mivel A szelet, létezik olyan $a_1 \in A$, hogy $a_1 < a$. Ekkor (1) miatt $b + (a - a_1) \in \langle -A' \rangle$, ennélfogva $a + b = a_1 + b + (a - a_1) \in A + \langle -A' \rangle$. Tehát a (12) és (13) állítások igazak, és így (10) is igaz.

A (11) állítás könnyen igazolható (9), (10) és a 9. állítás alapján. ■

11. állítás. *Egy A szelet akkor és csakis akkor racionális, ha A^- racionális. Az A szelet pontosan akkor pozitív (nemnegatív), amikor A^- negatív (nempozitív). Minden A, B, C szeletre igazak az alábbi állítások:*

$$(0^*)^- = 0^*, \quad (r^*)^- = (-r)^* \quad (r \in \mathbb{Q}), \tag{14}$$

$$A^- = -A, \quad \textit{ha } A \textit{ irracionális szelet}, \tag{15}$$

$$A \preccurlyeq B \Rightarrow A + C \preccurlyeq B + C, \tag{16}$$

$$A \preccurlyeq B \Leftrightarrow 0^* \preccurlyeq B + A^-, \tag{17}$$

$$(A^-)^- = A, \quad (A + B)^- = A^- + B^-. \tag{18}$$

Bizonyítás. (14) könnyen ellenőrizhető a definíciók alapján, hiszen r^* olyan x racionális számok halmaza, melyekre az $x > r$ egyenlőtlenség teljesül. Ha pedig A irracionális szelet, akkor az A halmaznak nincs minimuma, és A'-nek nincs maximuma, ezért A^- is irracionális szelet. Ezekből nyilván következtethető az állítás első mondata. A második mondat A^- definíciójából, valamint a pozitív és negatív szeletek definíciójához fűzött megjegyzésből könnyen adódik.

(15) a definíció következménye. A (18) alatti első egyenlőség a (14) és (15) állításokból könnyen következtethető.

Ha $A \preccurlyeq B$, akkor $B \subset A$, tehát $B + C \subset A + C$, így a (16) implikáció teljesül. (17) is könnyen megkapható (16)-ból (9) és (10) figyelembe vételével.

Az utolsó egyenlőséget a (11) ekvivalencia alapján bizonyítjuk a (10) és a (18)-beli első egyenlőségek, valamint a 9. állítás figyelembevételével:

$$(A^- + B^-) + \left((A + B)^-\right)^- = A^- + B^- + A + B = 0^*. \ ■$$

Foglalkozzunk most a szorzással kapcsolatos problémákkal általános esetben. Már definiáltuk az AB szorzatot nemnegatív A, B szeletek esetén. Tetszőleges szeletekre fogadjuk el, hogy

$$A \cdot B := \begin{cases} AB, & \text{ha } A, B \in \mathfrak{R}_\circ^+; \\ A^- B^-, & \text{ha } A, B \in \mathfrak{R}^-; \\ (A^- B)^-, & \text{ha } A \in \mathfrak{R}^-,\ B \in \mathfrak{R}_\circ^+; \\ (AB^-)^-, & \text{ha } A \in \mathfrak{R}_\circ^+,\ B \in \mathfrak{R}^-. \end{cases}$$

Ezáltal az $A \cdot B$ *szorzatot* és a $(A, B) \mapsto A \cdot B$; $A, B \in \mathfrak{R}$ *szorzás műveletet* korrekt módon definiáltuk. Elfogadjuk a szorzás prioritását az összeadással szemben, így kevesebb zárójelre lesz szükség. Lássuk a szorzás tulajdonságait (ajánljuk az 5.–9. gyakorlatokat).

12. állítás. *A szorzás művelet asszociatív, kommutatív és disztributív az összeadásra nézve. Igazak a következő állítások is:*

$$(19) \qquad (\forall A \in \mathfrak{R})\ A \cdot 1^* = A; \quad 1^* \neq 0^*;$$

$$(20) \qquad A \preccurlyeq B \ \Rightarrow\ A \cdot C \preccurlyeq B \cdot C; \quad (A, B \in \mathfrak{R},\ C \in \mathfrak{R}_\circ^+).$$

Bizonyítás. Az asszociatív és kommutatív tulajdonságok nemnegatív szeletek esetén az 1. állításból következnek. Tetszőleges szeletekre a definíciót, a 11. állítást és a 9. gyakorlatot alkalmazzuk. Pl., ha A, C negatív szeletek, B pedig nemnegatív, akkor

$$(A \cdot B) \cdot C = (A^- B)^- \cdot C = (A^- B)C^- = A^-(BC^-) = A \cdot (B \cdot C).$$

Térjünk át a disztributív tulajdonság bizonyítására. Több esetet vizsgálunk attól függően, hogy a szeletek pozitívak vagy nem. Ezért a bizonyítás terjedelmes, de nem bonyolult.

1. Tegyük fel, hogy A, B, C nemnegatív szeletek. Evidens, hogy $(A + B)C$ az $AC + BC$ halmaz részhalmaza. Tegyük fel, hogy $a \in A$, $b \in B$; $c_1, c_2 \in C$, $x = ac_1 + bc_2$ és $c := \min\{c_1, c_2\}$. Ekkor $x \geq (a + b)c$ és $(a + b)c \in (A + B)C$. Mivel az $(A + B)C$ halmaz szelet, ezért x e halmaz eleme. Ezzel igazoltuk az $(A + B)C = AC + BC$ egyenlőséget, ami megegyezik $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$-vel.

2. Legyenek az A, B szeletek negatívak, C pedig nemnegatív. A már bizonyítottak alapján és a 11. állítás, valamint a 7., 8. gyakorlatok figyelembevételével azt kapjuk, hogy $(A + B) \cdot C = \big((A^- + B^-)C\big)^- = (A^- C + B^- C)^- = (A^- C)^- + (B^- C)^- = A \cdot C + B \cdot C$.

3. Nézzük azt az esetet, amikor a B szelet negatív, az A, C szeletek pedig nemnegatívak. Két lehetőség van. Ha az $A + B$ szelet nemnegatív, akkor $(A + B) \cdot C + B^- \cdot C = \big((A + B) + B^-\big) \cdot C = A \cdot C = AC$, ezért

$$(A + B) \cdot C = AC + (B^- \cdot C)^- = AC + (B^- C)^- = A \cdot C + B \cdot C.$$

A második lehetőség esetén az $A+B$ szelet negatív, és ekkor

$$\begin{aligned}(B\cdot C)^- &= B^-\cdot C = \big((A+B)^- + A\big)\cdot C = (A+B)^-\cdot C + A\cdot C =\\ &= \big((A+B)\cdot C\big)^- + A\cdot C.\end{aligned}$$

Innen látható, hogy $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.

4. Az $A\in\mathfrak{R}^-$; $B, C\in\mathfrak{R}_\circ^+$ eset a kommutativitás miatt az előbbire hozható.

5. Nézzük az utolsó esetet, amikor C negatív, A, B pedig tetszőleges szeletek. Az előzőkhöz hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(A+B)\cdot C &= \big((A+B)\cdot C^-\big)^- = (A\cdot C^- + B\cdot C^-)^- =\\ &= (A\cdot C^-)^- + (B\cdot C^-)^- = A\cdot C + B\cdot C.\end{aligned}$$

A (19) alatti második egyenlőség triviális, az első egyenlőség bizonyítását pedig két esetre bontjuk. Ha az A szelet nemnegatív, akkor $A\cdot 1^* = A1^*\subset A$, mert 1^* minden x eleme nagyobb 1-nél, és $ax > a$ minden a-ra A-ból. Ezért (1) miatt $ax\in A$. Fordítva, ha $a\in A$, akkor van olyan 1-nél nagyobb r racionális szám, hogy $\frac{a}{r}\in A$. Ennélfogva $a = \frac{a}{r}r\in A1^*$ és $A\subset A1^*$. Az $A\cdot 1^* = A$ egyenlőséget ezzel bebizonyítottuk.

Ha A negatív szelet, akkor A^- pozitív, és így

$$A\cdot 1^* = (A^-\cdot 1^*)^- = (A^-)^- = A.$$

Végül a (20) implikáció igazolására tegyük fel, hogy $A\preccurlyeq B$ és $0^*\preccurlyeq C$. Ekkor (17), valamint a 7., 9. gyakorlatok és a disztributivitás alapján

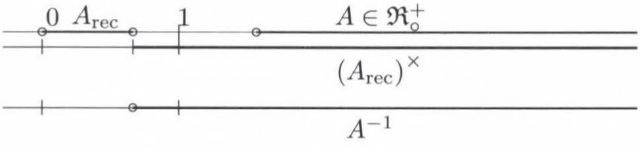
$$B\cdot C + (A\cdot C)^- = B\cdot C + A^-\cdot C = (B + A^-)\cdot C\in\mathfrak{R}_\circ^+,\quad \text{azaz}\quad A\cdot C\preccurlyeq B\cdot C. \quad\blacksquare$$

Tudjuk, hogy egy racionális $a\neq 0$ szám reciproka olyan a^{-1} racionális szám, amelyre az $aa^{-1} = 1$ egyenlőség áll fenn. Általánosítsuk e fogalmat a szeletek esetére (az illusztráció a 3. és 4. ábrán látható).

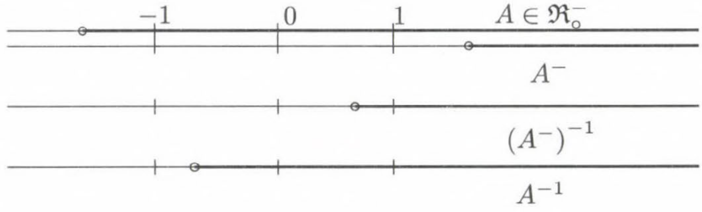
Definíció. Az $A\neq 0^*$ szelet *reciprokának*, vagy *inverzének* az

$$A^{-1} := \begin{cases} \langle (A_{\text{rec}})^\times\rangle, & \text{ha}\quad A\in\mathfrak{R}^+,\\ \big((A^-)^{-1}\big)^-, & \text{ha}\quad A\in\mathfrak{R}^- \end{cases}$$

szeletet nevezzük.



3. ábra



4. ábra

13. állítás. *Egy A szelet akkor és csakis akkor pozitív (negatív), ha A^{-1} is pozitív (negatív). Ha $A \neq 0^*$, akkor*

$$A \cdot A^{-1} = 1^*. \tag{21}$$

Bizonyítás. A 8. állítás szerint $(A_{\text{rec}})^\times$ kváziszelet, tehát az $A^{-1} = \langle (A_{\text{rec}})^\times \rangle$ halmaz szelet. Egy A szelet pontosan akkor pozitív, ha az a $\mathbb{Q}^+$ halmaz valódi részhalmaza. Könnyű ellenőrizni, hogy ez pontosan akkor igaz, amikor $(A_{\text{rec}})^\times$ és A^{-1} is ilyen részhalmazok. Negatív szelet esetén a 11. állítást alkalmazzuk.

Igazoljuk a (21) egyenlőséget először pozitív A-ra. Egyrészt $(A_{\text{rec}})^\times A \subset 1^*$, mert minden $a \in A$ és $b \in (A_{\text{rec}})^\times$ elemre nyilván $ab > 1$. Másrészt azt állítjuk, hogy minden 1-nél nagyobb r racionális szám az $(A_{\text{rec}})^\times A$ kvázlszelet eleme. Ebből a 4. állítás miatt az $1^* \subset A \cdot A^{-1}$ reláció fog következni, amivel a (21) bizonyítása véget fog érni.

Állításunk igazolására rögzítsünk egy $b \in A'$ elemet, és adjunk meg egy ε pozitív racionális számot úgy, hogy az $\varepsilon < b(r-1)$ egyenlőtlenség teljesüljön. Válasszunk a, a' számokat A-ban, illetve A'-ben a 6. állításnak megfelelően úgy, hogy az $a - a' < \varepsilon$ és $a' \geq b$ egyenlőtlenségek teljesüljenek. Ekkor

$$\frac{1}{a'} \notin A_{\text{rec}}, \quad \frac{1}{a'} \in (A_{\text{rec}})^\times, \quad \frac{a}{a'} < \frac{a'+\varepsilon}{a'} = 1 + \frac{\varepsilon}{a'} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{b} < r, \quad \frac{a}{a'} \in (A_{\text{rec}})^\times A.$$

A 2. állítás szerint r is az $(A_{\text{rec}})^\times A$ kvázlszelet eleme. Ezzel (21) bizonyítása pozitív A esetén véget ért.

Ha A negatív szelet, akkor A^- pozitív, és a bizonyítottak alapján

$$A \cdot A^- = A \cdot \left((A^-)^{-1}\right)^- = A^- \cdot (A^-)^{-1} = 1^*. \blacksquare$$

Foglaljuk össze az eddigi eredményeket tétel formájában.

1. tétel. *Az $\mathfrak{R}$ halmaz rendezett test. Ez azt jelenti, hogy az $\mathfrak{R}$ halmazon adottak az összeadás és szorzás műveletek, amelyek asszociatív, kommutatív és disztributív tulajdonságokkal rendelkeznek; léteznek olyan 0^* és 1^* elemek, amelyek a (9) és (19) tulajdonságokkal rendelkeznek; minden $A \in \mathfrak{R}$ elemnek létezik ellentettje, minden 0^*-tól különböző elemnek létezik inverze, ezek kielégítik a (10), illetve (21) egyenlőségeket; végül az $\mathfrak{R}$ halmazon adott olyan $\preccurlyeq$ rendezési reláció, amely eleget tesz a (3)–(6), (16) és (20) állításoknak.*

A tétel állítása elfogadható a rendezett test definíciójaként, ha $\mathfrak{R}$ helyett tetszőleges halmazt használunk. Ekkor a tételben felsorolt tulajdonságokat a rendezett test alaptulajdonságainak vagy axiómáinak nevezzük. A racionális számok rendszere is rendezett test, és ezt a fentiekben gyakran ki is használtuk.

Megjegyezzük még, hogy az $\mathfrak{R}$ halmazon definiálható az *osztás* művelet az $\frac{A}{B} := A \cdot B^{-1}$ egyenlőséggel ($A, B \in \mathfrak{R}$, $B \neq 0^*$).

$\mathfrak{R}$ mint teljes rendezett test

Az $\mathfrak{R}$ rendezett test egy újabb tulajdonsággal is rendelkezik, amit *teljességnek* nevezünk [4], [6]. Ez lényegesen megkülönbözteti az $\mathfrak{R}$ rendezett testet $\mathbb{Q}$-tól.

Definíció. Egy $\preccurlyeq$ relációval ellátott T rendezett testet *teljesnek* nevezünk, ha annak minden olyan $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ nemüres részhalmazaira, amelyek $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ elemeire teljesül az $A \preccurlyeq B$ reláció (röviden: $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$), létezik legalább egy olyan C testbeli elem, amelyre az $A \preccurlyeq C$ és $C \preccurlyeq B$ relációk teljesülnek (röviden: $\mathcal{A} \preccurlyeq C \preccurlyeq \mathcal{B}$).

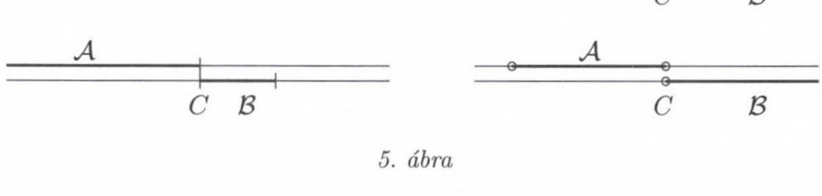
Másképpen: A T rendezett test teljes, ha

$$(\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset T)\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B} \Rightarrow (\exists C \in T)\mathcal{A} \preccurlyeq C \preccurlyeq \mathcal{B}. \tag{22}$$

2. tétel. *Az $\mathfrak{R}$ rendezett test teljes.*

Bizonyítás. Teljesüljenek az $\mathfrak{R}$ rendezett testben a teljesség definíciójának feltételei: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a test nemüres részhalmazai és $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$. Legyen D a $\mathcal{B}$ halmaz elemeinek egyesítése: $D := \{x \in \mathbb{Q} \mid (\exists B \in \mathcal{B})\, x \in B\}$. Lássuk be, hogy D kváziszelet. Evidens, hogy $D \neq \emptyset$ és $D \neq \mathbb{Q}$, mert D tartalmazza $\mathcal{B}$ szeleteinek elemeit, és nem tartalmazza $\mathcal{A}$ szeleteinek egyes elemeit. Ha $x \in D$, $r \in \mathbb{Q}$ és $r > x$, akkor van olyan $B \in \mathcal{B}$, hogy $x \in B \subset D$. Ezért a 2. állítás szerint D kváziszelet. Jelöljük C -vel a $\langle D \rangle$ szeletet. Ha $B \in \mathcal{B}$, akkor $B \subset D$, de mivel B szelet, a 4. állítás következtében $B \subset \langle D \rangle$, tehát $C \preccurlyeq B$. Ha pedig $A \in \mathcal{A}$, akkor $A \preccurlyeq B$ bármilyen is legyen $B \in \mathcal{B}$; másképpen: $B \subset A$. Ennélfogva $D \subset A$, és annál inkább $C = \langle D \rangle \subset A$, azaz $\mathcal{A} \preccurlyeq C$. ■

Néhány esetet az 5. ábrán szemléltetünk, de ne tévesszük össze a korábbi szemléltetésekkel. Most a szeleteket pontokkal ábrázoljuk, az $\mathfrak{R}$-t pedig egyenessel.



5. ábra

Minden rendezett halmazban definiálhatók egy X részhalmaz felső és alsó korlátai, és azok között a legkisebb, illetve a legnagyobb. Az utóbbiak idegen eredetű neve: *az X halmaz szuprémuma* ($\sup X$), illetve *infimuma* ($\inf X$). A $\sup X$ és $\inf X$ definícióját logikai szimbólumokkal a következőképpen adhatjuk meg (a rendezéssel kapcsolatos $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ relációkat ismertnek tekintjük):

$M = \sup X$ ($m = \inf X$) akkor és csakis akkor, ha teljesülnek a következő feltételek:

$$\begin{array}{llll} 1) & (\forall x \in X) x \leq M, & 2) & (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X) x > M - \varepsilon; \\ (1) & (\forall x \in X) x \geq m, & 2) & (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X) x < m + \varepsilon). \end{array}$$

14. állítás. *A T rendezett test fent közölt teljességi definíciója ekvivalens a következő állítások bármelyikével:*

1) *A T rendezett test teljes akkor és csakis akkor, ha minden nemüres felülről korlátos részhalmazának van szuprémuma.*

2) *A T rendezett test teljes akkor és csakis akkor, ha minden nemüres alulról korlátos részhalmazának van infimuma.*

Bizonyítás. Legyen T teljes rendezett test az első definíció értelmében és $\mathcal{A} := X \subset T$, továbbá $\mathcal{B}$ az X halmaz felső korlátainak halmaza. E halmazok nem üresek, és a felső korlát definíciója alapján $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$. Ennek következtében a teljesség definíciója szerint létezik olyan $M \in T$, hogy $X \preccurlyeq M \preccurlyeq \mathcal{B}$. Innen látható, hogy M az X legkisebb felső korlátja, vagyis szuprémuma.

Fordítva, ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a T rendezett test olyan nemüres részhalmazai, amelyekre $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{A}$ felülről korlátos, tehát létezik $\sup \mathcal{A} = M$ és így $\mathcal{A} \preccurlyeq M$. Nyilván $\mathcal{B}$ minden eleme az $\mathcal{A}$ felső korlátja, ezért $M \preccurlyeq \mathcal{B}$. Tehát a T rendezett test teljes az eredeti értelemben.

A 2) állítás hasonlóan bizonyítható, vagy – mint ismeretes – 2) az 1) ekvivalens alakja. ∎

Korábban már említettük, hogy a valós számrendszer minden modelljének szerepe ugyanaz; felépítésükben csak az a fontos, hogy elemeik az 1. és 2. tételben közölt tulajdonságokkal rendelkezzenek. Ez azt jelenti, hogy bizonyos értelemben csak egy teljes rendezett test létezik (pontosabban kifejezve: minden két teljes test között létezik bizonyos – relációt és műveleteket tartó – bijekció) [4], [7]. Az axiomatikus elméletben az alapfogalmakat nem definiálják, azok lehetnek bármilyen halmaz elemei, részhalmazai vagy a halmazon létező tetszőleges relációk, műveletek, ha rendelkeznek az axiómákban felsorolt tulajdonságokkal. Tehát a valós számok rendszere – axiomatikus alapon – teljes rendezett test. Viszont az axiómarendszernek ellentmondásmentesnek kell lenni. Ennek ellenőrzését mi olyan modell szerkesztésével végeztük el, amely a racionális számrendszerre támaszkodik. De ez utóbbi szintén megalapozásra szorul. Ez megoldható a halmazelmélet keretében. Az itt leírtak részletesebb előadásával az Olvasó megismerkedhet pl. a [4], [5], [7] könyvek alapján.

$\mathbb{N}$ és $\mathbb{Q}$ beágyazása $\mathfrak{R}$-be

A racionális számok a 15. gyakorlatban szereplő $f : x \mapsto x^*, x \in \mathbb{Q}$ bijekció segítségével beágyazódnak az $\mathfrak{R}$ halmazba. Ez azt jelenti, hogy x és x^* szerepe ugyanaz. Az $f(\mathbb{N})$ halmaz is az $\mathfrak{R}$ testben a természetes számok halmazának szerepét tölti be. Lényegében ezt állítjuk az alábbi tételben.

3. tétel. *Az $f(\mathbb{N})$ halmaz az $\mathfrak{R}$ test legszűkebb induktív részhalmaza, azaz*

1) $0^* \in f(\mathbb{N})$;

2) $(\forall A \in \mathfrak{R}) \quad A \in f(\mathbb{N}) \ \Rightarrow \ A + 1^* \in f(\mathbb{N})$;

3) *ha egy $\mathcal{N} \subset \mathfrak{R}$ részhalmaz rendelkezik az 1) és 2) tulajdonságokkal (vagyis $0^* \in \mathcal{N}$ és $(\forall A \in \mathfrak{R}) \quad A \in f(\mathbb{N}) \ \Rightarrow \ A + 1^* \in f(\mathbb{N})$), akkor $f(\mathbb{N}) \subset \mathcal{N}$.*

Bizonyítás. Evidens, hogy $0^* = f(0) \in f(\mathbb{N})$. Ha pedig $A \in f(\mathbb{N})$, vagyis $A = f(n)$ valamely n-re $\mathbb{N}$-ből, akkor $n + 1 \in \mathbb{N}$, és

$$A + 1^* = f(n) + f(1) = f(n+1) \in f(\mathbb{N}).$$

Tegyük fel, hogy $\mathcal{N}$ rendelkezik az 1) és 2) tulajdonságokkal, de létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $f(n) \notin \mathcal{N}$. Tekintsük a $K := \{k \in \mathbb{N} \mid f(k) \notin \mathcal{N}\}$ nem üres halmazt. Az 5. állítás szerint létezik $\min K =: k_\circ$. Nyilván $k_\circ \neq 0$, hiszen $f(0) = 0^* \in \mathcal{N}$, ezért a $k_\circ - 1$ szám $\mathbb{N}$ eleme és $f(k_\circ - 1) \in \mathcal{N}$. De ekkor

$$f(k_\circ) = f\big((k_\circ - 1) + 1\big) = f(k_\circ - 1) + f(1) = f(k_\circ - 1) + 1^* \in \mathcal{N},$$

ami ellentmond annak, hogy $k_\circ \in K$. Ezzel az $f(\mathbb{N}) \subset \mathcal{N}$ relációt igazoltuk. ∎

E tétel alapján az $f(\mathbb{N})$ halmaz azonosítható $\mathbb{N}$-nel, vagyis az n^* szeletet természetes számnak tekinthetjük ($n \in \mathbb{N}$). A racionális szeletek hasonlóképpen azonosíthatók a racionális számokkal és megadhatók $f(k) \cdot f(n)^{-1}$ alakban ($k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^+$) (ld. a 15. gyakorlatot).

Az axiomatikusan felépített valós számok rendszerében a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazának definíciója megegyezik a 2. tétel állításával: $\mathbb{N}$ a teljes rendezett test legszűkebb induktív részhalmaza. Ezen alapszik a teljes indukció elve, amit a következőképpen is megfogalmazhatunk: egy $\mathbb{N}$ változóját tartalmazó nyitott mondat igazsághalmaza megegyezik $\mathbb{N}$-nel, ha az tartalmazza a nullát és $\mathbb{N}$ minden elemével együtt az azt követezőt is.

A továbbiakban $\mathfrak{R}$ vagy $\mathbb{R}$ elemeit számoknak fogjuk hívni. A számokat kis betűkkel jelöljük, a szorzás jelét és a racionális szelet csillag jelét elhagyjuk, $\preccurlyeq$ helyett a megszokott $\leq$ jelet használjuk, a^- helyett $-a$-t írunk. Bevezetjük a pozitív számok $\mathbb{R}^+$ halmazát és a $<$ relációt; a definíció szerint $x < y$ akkor és csakis akkor, ha $x \leq y$ és $x \neq y$.

Következmények és gyakorlatok

A valós számokról ismert minden állítás levezethető a teljes rendezett test alaptulajdonságaiból. Példaként bebizonyítunk néhány ismert és triviálisnak tűnő állítást.

4. tétel. 1) *Nem létezik egynél több nulla;*

2) $0 \cdot x = 0 \quad (x \in \mathfrak{R})$;

3) $(-1) \cdot x = -x \quad (x \in \mathfrak{R})$;

4) $1^{-1} = 1, \quad (-1)^{-1} = -1$;

5) $0 < 1$;

6) *az* $a \leq b$ *egyenlőtlenség tagadása ekvivalens a* $b < a$ *egyenlőtlenséggel* $(a, b \in \mathfrak{R})$.

Bizonyítás. Állapítsuk meg, hogy lépésenként milyen korábbi állítást alkalmazunk a bizonyítás során.

1) Tegyük fel, hogy nem csak 0, de $\tilde{0} \in \mathfrak{R}$ is rendelkezik a (9) tulajdonsággal, azaz $x + \tilde{0} = x$ minden $x \in \mathfrak{R}$ esetén. Ekkor x helyett 0-t választva kapjuk, hogy $0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$.

2)
$$0x = 0x + 0 = 0x + \big(0x + \big(-(0x)\big)\big) = (0x + 0x) - (0x) =$$
$$= (0 + 0)x - (0x) = 0x + \big(-(0x)\big) = 0.$$

3)
$$(-1)x = (-1)x + 0 = (-1)x + \big(x + (-x)\big) =$$
$$= (-1)x + \big((1x) + (-x)\big) = (-1 + 1)x + (-x) =$$
$$= 0x + (-x) = 0 + (-x) = -x.$$

4)
$$1^{-1} = 1^{-1}1 = 1(1^{-1}) = 1;$$
$$(-1)^{-1} = (-1)^{-1}1 = (-1)^{-1}\big(-(-1)\big) =$$
$$= (-1)^{-1}\big((-1)(-1)\big) = \big((-1)^{-1}(-1)\big)(-1) =$$
$$= \big((-1)(-1)^{-1}\big)(-1) = 1(-1) = (-1)1 = -1.$$

5) A (4) állítás alapján $1 \leq 0$ vagy $0 \leq 1$. Tegyük fel, hogy $1 \leq 0$. Ekkor (16) miatt $1 + (-1) \leq 0 + (-1)$, amiből $0 \leq -1$ következik. Alkalmazzuk (20)-at az $1 \leq 0$ egyenlőtlenségre: $1(-1) \leq 0(-1)$. Eszerint $-1 \leq 0$, amiből $0 \leq -1$ miatt a $-1 = 0$, avagy az $1 = -0 = 0$ egyenlőségek adódnak. Ez ellentmond a 12. állításnak, tehát az $1 \leq 0$ feltevés hamis. Ezért igaz a $0 \leq 1$ egyenlőtlenség. De $0 \neq 1$, tehát $0 < 1$.

6) Alkalmazzuk a 7. állítást és a logika egyszerű szabályait:

$$b < a \;\Leftrightarrow\; \{b \leq a \text{ és } a \neq b\} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \big\{b \leq a \text{ és hamis az } (a \leq b \text{ és } b \leq a) \text{ állítás}\big\} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \{b \le a \text{ és } (a \le b \text{ hamis vagy } b \le a \text{ hamis})\} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{b \le a \text{ és } (a \le b \text{ hamis})\} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \{(b \le a \text{ hamis}) \text{ vagy } a \le b\} \text{ hamis} \Leftrightarrow \ \{a \le b \text{ hamis}\}. \ \blacksquare$$

A teljességi axióma következménye a G. Cantor nevéhez fűződő alábbi állítás.

5. tétel. *Legyen $\mathcal{A} = \{[a_i, b_i] : i \in I\}$ olyan indexelt zárt intervallumok halmaza $\mathbb{R}$-ben, hogy $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset$, ha $i, j \in I$. Ekkor az intervallumok metszete nem üres, vagyis $\cap\mathcal{A} \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Vezessük be az $A := \{a_i \mid i \in I\}$, $B := \{b_i \mid i \in I\}$ halmazokat. Ha léteznek olyan a_i, b_j számok, hogy $a_i > b_j$, akkor $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset$, de ez ellentmond a tétel feltételének. Ezért $A \le B$. A teljességi axióma alapján létezik olyan c szám, hogy $A \le c \le B$. Mivel zárt intervallumokról van szó, $c \in [a_i, b_i]$ minden i-re, azaz $c \in \cap\mathcal{A}$. $\blacksquare$

Ez alapján könnyen bebizonyítható az ismert rendőrelv.

1. következmény. *Ha $([a_n, b_n])$ olyan zárt intervallumok sorozata $\mathbb{R}$-ben, hogy $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ és $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, akkor létezik olyan c szám, hogy $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = c$ és $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c$.*

Bizonyítás. Az 5. tétel következtében a fenti metszetről csak azt kell igazolni, hogy egyelemű. Ez könnyen megállapítható indirekt módon. A határértékekről állított egyenlőségek is nyilvánvalóak $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ miatt. $\blacksquare$

Önálló munkára ajánlunk néhány **gyakorlatot**.

1. Adjunk meg $\mathbb{Q}$ olyan A, B, C részhalmazait, amelyekre nem teljesül az $(A + B)C = AC + BC$ egyenlőség!

2. Mutassunk példákat $\mathbb{Q}$ olyan A és B részhalmazaira, melyekre a $B = A' \Rightarrow B < A$, $B < A \Rightarrow B = A'$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B < A$, $B < A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ implikációk közül

a) pontosan kettő teljesül;

b) pontosan három teljesül;

c) mind a négy teljesül!

Igazoljuk, hogy a négy implikáció közül legalább kettő mindig teljesül!

3. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ minden nem üres, véges részhalmazának van legkisebb eleme!

4. Igazoljuk, hogy az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{Q})$ egyenlet megoldáshalmaza $\mathbb{R}$-en nem üres! Példával igazoljuk, hogy az ilyen állítás hamis a $\mathbb{Q}$ halmazon!

5. Igazoljuk, hogy racionális és irracionális szeletek összege és szorzata irracionálisak!

6. Mit mondhatunk az irracionális szeletek összegéről és szorzatáról?

7. Igazoljuk, hogy $A \cdot B \in \mathfrak{R}^+$ pontosan akkor, amikor A és B ugyanazon $\mathfrak{R}^+$ vagy $\mathfrak{R}^-$ halmaz elemei!

8. Igazoljuk, hogy $A \cdot B \in \mathfrak{R}^-$ pontosan akkor, amikor A és B két különböző $\mathfrak{R}^+$ és $\mathfrak{R}^-$ halmaz elemei!

9. Igazoljuk, hogy minden A és B szeletre az $(A \cdot B)^- = A^- \cdot B = A \cdot B^-$ egyenlőségek igazak!

10. Igazoljuk, hogy $(\forall A \in \mathfrak{R} \setminus 0^*)\ A \in \mathfrak{R}^+ \Leftrightarrow A^{-1} \in \mathfrak{R}^+$!

11. Igazoljuk a definíció alapján, hogy $1^{-1} = 1$!

12. Igazoljuk, hogy minden 0^*-tól különböző A, B szeletre fennállnak az $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$ egyenlőségek!

13. Igaz-e minden A és B szeletre, hogy $A < B \Leftrightarrow B + A^- \subset \mathbb{Q}^+$?

14. Igaz-e minden $A \neq 0^*$ szeletre az $A \preccurlyeq 1^* \Rightarrow 1^* \preccurlyeq A^{-1}$ implikáció?

15. Bizonyítsuk be, hogy az $f : x \mapsto x^*$, $x \in \mathbb{Q}$ leképezés olyan bijekció, melyre minden $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén igazak az alábbi állítások!

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(x-y) = f(x) - f(y), \quad f(xy) = f(x) \cdot f(y);$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) \cdot f(y)^{-1}\ (y \neq 0); \quad f(x) \preccurlyeq f(y), \quad \text{ha } x \leq y;$$

$$(\forall x \in \mathbb{Q})(\exists k \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{N}^+)\ x = f(k) \cdot f(n)^{-1}.$$

16. Igazoljuk, hogy minden valós számnál van nagyobb természetes szám!

17. Igazoljuk, hogy minden valós számnak létezik egész része!

18. Bizonyítsuk be, hogy minden monoton számsorozat akkor és csakis akkor konvergens, ha korlátos.

19. Igazoljuk, hogy a (τ_n), (p_n), (q_n) sorozatok konvergensek, ha $\tau_0 = 0$, $\tau_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\tau_n}$, $n \in \mathbb{N}$; $p_n = (2^n)\sqrt{2 - 2\tau_n}$; $q_n = \frac{p_n}{\tau_n}$, $n > 0$.

20. Bizonyítsuk be, hogy minden nemnegatív számnak létezik n-edik gyöke.

Irodalomjegyzék

[1] Filep, L., *A valós számok fogalmának kialakulása,* Polygon, X. köt., 1. sz. (2000).

[2] Вивальнюк, Л. М., *Числові системи,* Вища школа, Київ (1977).

[3] Rudin, W., *A matematikai analízis alapjai,* Műszaki k., Budapest (1978).

[4] Гече, Ф. Й., *Основи аналізу. Множини. Дійсні числа. Елементарні функції,* Ужгородск. Нац. Ун-т, Ужгород (2004).

[5] Feferman, S., *The number systems,* Addison-Wesley p. c., INC. Reading, Mass.–Palo, ALTC–London (1963);

[6] Németh, Z., *Az arkhimédészi tulajdonságról,* Polygon, XVI. köt., 1. sz. (2007).

[7] Gecse, F., *Matematikai alapok,* Z-press Kiadó Kft., Miskolc (2013).

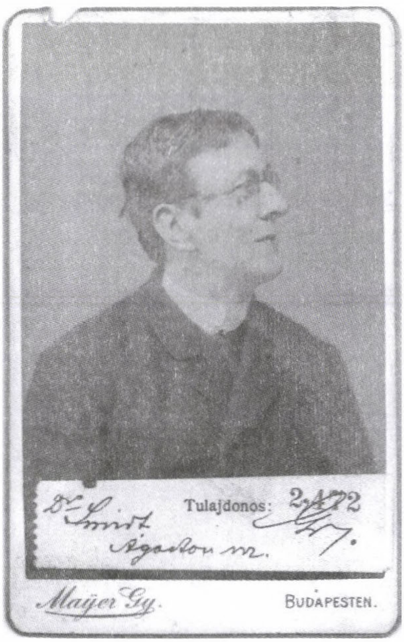
Frigyes Gecse: Construction of the system of real numbers

We construct the system of real numbers based on the rational ones as a totally ordered field. With a simple set-theoretical method we introduce a new version of the Dedekind separation. This study aims at giving a comprehensive picture of real numbers for both students and instructors.

SCHMIDT ÁGOSTON (1845–1902)[1]

OLÁH-GÁL RÓBERT

Írásunk célja, hogy ismertessük Dr. Schmidt Ágoston (1845–1902) életét, és közöljük egyik, 1880-ban írt és kéziratban maradt dolgozatát a Grassmann-algebráról. Schmidt Ágoston piarista tanár éveken át a Mathematikai és Physikai Társulat alelnöke, a Budapesti Tanári Kör elnöke és a Közoktatásügyi Tanács tagja volt. A Kolozsvári Egyetemen 1874–1878 között ő adott elő elsőként számelméletet, lineáris algebrát, valószínűség-számítást mint óraadó docens. Igen értékesek a tankönyvei, tankönyv-fordításai és tankönyvszerkesztői tevékenysége.



2012-ben 140 éve, hogy Kolozsváron létrehozták Erdély első tudományegyetemét. Tény, hogy sok vita és küzdelem előzte meg a megszületését. Az egyik legkényesebb kérdés volt, hogy kik fognak tanítani? Volt néhány óriási tekintélynek örvendő személyiség akiket sem politikailag, sem erkölcsileg nem lehetett kihagyni. Ilyen volt Berde Áron, Brassai Sámuel, Koch Antal. A legnehezebb kérdés az egzakt

[1] Készült az MTA Határon Túli Magyar Tudományos Ösztöndíjprogram támogatásával.

tudományok tanításának megoldása volt, mert akkor, az 1870-es években, Erdélyben nem volt „szakképzett” matematikus, aki külföldön szerzett volna képesítést és matematikából doktorátust. Így történt, hogy 1872-ben, az egyetem megnyitásakor, az elemi mennyiségtan tanszékre (matematikai alaptudományok) Brassai Sámuelt, míg a felsőbb mennyiségtan tanszékre (felsőbb matematikai tudományok) Martin Lajost nevezték ki. Az elméleti fizikai tanszékre nem találtak megfelelő jelöltet, így azt betöltetlenül hagyták.

Úgy Brassai Sámuel, mint Martin Lajos színes egyéniségek, polihisztorok voltak, de egy gond volt velük – nemhogy doktorátusuk nem volt, de még egyetemet sem végeztek. Mind a ketten autodidakta módon képezték magukat, és tapasztalati tudásuk alapján szereztek hírnevet. Martin Lajos megkezdte az Institutum Geometricumot, de a forradalom miatt nem tudta befejezni, és később sem engedték, hogy levizsgázzon. Martin Lajos lényegében megfelelő szakember volt. A gond szerintem csak Brassaival volt, aki mindenből valóban igen kiváló tudós volt, a matematikán kívül. Ebben volt a legkevésbé képzett. De 1865-ben ő fordította le először magyarra Euklidesz Elemeit, és ez lehetett a döntő érv, amiért a minisztérium kinevezte professzornak.

Valószínű, a minisztériumban látták, hogy illene egy olyan szürke eminenciást is az egyetemre vinni, aki biztosítja a matematikai tudományoknak, a kor követelményei szintjén való leadását. 1871-ben Kolozsvárra helyezte a piarista rend Dr. Schmidt Ágostont, aki 1873-ban Rostockban matematikából doktorátust szerzett. Ezért úgy döntöttek, hogy óraadói munkakörben ő lesz a matematikai tudományok lelkiismerete. Valóban, ha végignézzük a Kolozsvári Egyetem Tanrendjét 1872–1918-ig, abból egyértelműen kiderül, hogy Schmidt Ágoston tartott először számelméletből, lineáris algebrából, analitikus mértanból, elliptikus függvényekből, valószínűség-számításból és matematikatörténetből órákat. Tény, hogy 1874-ben Trefort Ágoston miniszter a Kolozsvári Egyetem elméleti fizikai tanszékére kinevezte Réthy Mórt, azzal a felhatalmazással, hogy matematikát is taníthat. (Ezt a „fentről való kinevezést”, a kolozsvári Kari Tanács nem is vette jó néven.)

Meg kell jegyezzük, hogy eddig az összes, a Kolozsvári Ferencz József Tudományegyetemmel foglakozó monográfia, cikk, jegyzet, tanulmány kifelejtette Schmidt Ágoston nevét és szerepét megemlíteni. E sorok írója sem tudott róla, bár több tanulmányt közölt a fenti témában!

Ki volt Schmidt Ágoston? Munkásságának ismertetése nem csak a Kolozsvári Tudományegyetem története szempontjából fontos, de az anyaországi matematikaoktatás története szempontjából is! Ugyanis éveken át, a Mathematikai és Physikai Társulat alelnöke, a Budapesti Tanári Kör elnöke és a Közoktatásügyi Tanács tagja volt!

Schmidt Ágoston 1845. évi február 3-án, Ferencfalván, Krassó-Szörény megyében született.

A gimnázium alsó négy osztályát Temesváron a piaristáknál végezte. 15 évesen úgy döntött, hogy beáll piarista rendbe, így 1859. szeptember 20-án, Vácon a piarista rend tagjai közé lépett. Így már növíciusként Kecskeméten végezte a gimnázium 5., 6. és 7. osztályát, Budapesten a 7. osztályát, ahol érettségi vizsgát is tett. Tanári pályáját az 1864/5. évvel Magyaróvárott kezdette meg, ahol 1866. április

2-án ünnepélyes fogadalmát is letette. Az 1866/7. iskolai évtől kezdve egy esztendőt Selmecbányán, hármat Temesváron töltött. Temesváron 1868. július 3-án áldozópappá is szentelték. Majd egy évet Kecskeméten tanított és közben elvégezte Budapesten a tanárképzőt, ahol Jedlik Ányos volt a mestere. 1871. május 6-án Budapesten tanári vizsgát tett, utóbb pedig bölcsészettudori oklevelet is szerezett. A rendje kiküldte Rostockba, ahol 1873. július 8-án matematikából doktorátust szerzett. Tanári tevékenységét az 1871/2. évtől kezdve 8 éven át kolozsvári piarista főgimnáziumunknál folytatta, és 1874-től óraadó a frissen megalakult Kolozsvári Tudományegyetemen.

Itt tennék egy pici kitérőt. Ahogy a bevezetőben említette, néhány nagy tekintélyű tudósnak nem volt doktorátusa. Ezt a helyzetet az induló Kolozsvári Egyetem nagyon eredeti módon oldotta meg: 1874-ben Berde Áront, Brassai Sámuelt, Koch Antalt és Martin Lajost díszdoktorrá avatták, és a továbbiakban már nem tettek különbséget a dísz és a rendes doktorátusok között. És ugyanazon alkalomból Schmidt Ágoston Rostockban szerzett doktorátusát is „honosították":

„Magnificus Dominus Samuel Brassai, annorum 73, rel. Unitariae, locus natalis Toroczkó in Hungaria, in Doctorem Philosophiae honoris causa promotus die 24-a mensis Januarii anii 1874.

Reverendus Dominus Augustinus Schmidt, annorum 29 rel. rom cath. locus natalis Ferenczfalva in Hungaria, Doctor Philosophiae Rostockii de Dato die 8-a mensis Julii anni 1873, nostificatus die 16-a mensis Aprilis anni 1874."

Szerintem nagy vesztessége volt a Kolozsvári Egyetemnek, hogy Schmidt Ágostont nem nevezték ki professzornak, bár lehet, hogy ebben a piarista rendnek is döntő szava volt. A rend ugyanis 1879-ben áthelyezte a Budapesti Piarista Főgimnáziumba, ahol haláláig, 1902-ig matematikát és fizikát tanított. Igen értékesek a tankönyvei, tankönyv-fordításai és tankönyvszerkesztői tevékenysége. Az osztrák Franz Mocznik „Számtan", „Algebra", „Geometria" és „Geometria elemei" című munkájának átdolgozásán kívül megírta „Elemi Mennyiségtan", „Algebra polgári iskolák számára", „Természettan" és „Fizikai földrajz" című, eredeti műveit, melyek közül az „Algebra" három, a „Fizikai földrajz" pedig 11 kiadást ért meg. (Mocznik műveit még ifj. Szász Károly, Arany János barátja és nagykőrösi kollégája fordította magyarra).

Jellemzésére szeretnék néhány idézetet betenni: „AZ ÚRBAN ELHUNYT RENDTAGOK KEGYELETES EMLÉKEZETE" című megemlékezésből:

„Az 1902. évi érettségi vizsgálatokon láttam őt mint tanárt – mondja róla Bartoniek Géza, az Eötvös-collegium érdemes igazgatója – *s mondhatom, vizsgálásának módja rendkívül érdekes volt. Egészen az ő egyéniségének nyilatkozása volt minden kérdése: ő örökké spekuláló és általánosító szellem volt s valóságos virtuozitással tudta a kérdéseket úgy feltenni, hogy a kérdezett vizsgálattevő nagy területről volt kénytelen felelni. A részletek nála egészen eltűntek, csak széles kapcsolatban jöttek szóba. Ebből arra következtettem, hogy tanítása a gondolkodó ifjúra rendkívül érdekes lehetett, a mennyiben örökös okoskodásra kényszerítette."*

„Tudós hajlamai nem tették rendtársunkat sem rideggé, sem zárkózottá; derült kedélye mindvégig megtartotta keresetlen melegségét s ha néha ítéleteiből egyik-másik kedvelt filozófusának hatása alatt némi kesernyés pesszimizmus érzett is ki,

ha a társadalmi rendről alkotott nézeteivel olykor az utópiák határához közeledett is: az csak a teljes jogegyenlőségért, az egyéni igaz érdem érvényesüléséért rajongó lélek túlcsapó hevülete volt, de soha sem ember- vagy világgyűlölő keserűség. Nézeteit szerette leplezetlenül feltárni, viszont szívesen hallgatta meg mások meggyőződésen alapuló véleményét; becsülte az egyenes és kíméletlen szót, de gyűlölte az alakoskodó képmutatást. Korunk megalkuvó szelleme és a korlátlanságra törő hatalom túlkapásai ellen nem egyszer kelt ki csípős szavakban, de részvéttel fordult az elnyomottak ügye felé, s humanizmusa, mély emberbaráti szeretete nemcsak szavakban nyilvánult."

„*December 31-én* – írja a budapesti házfőnök – *elszorult szívvel vettük körül haldokló társunkat s az utolsókenet szentségében részesítettük őt, minek felvétele után bágyadt hangon többször ismételte e szavakat: „Istenem, irgalmazz, kegyelmezz". Érezve végső órájának közelgését, meghatottan nyújtotta végbúcsúra elhidegült jobbját ágyánál megjelent rendtársainak. Szenvedése, mit erős lélekkel tűrt, esti 1/2 6 órakor ért véget, a mikor csendesen, minden agónia nélkül visszaadta lelkét Teremtőjének, 1902. évi december hó 31-én, korának 58-ik és szerzetesi életének 44-ik évében, Budapesten.*"

Vályi Gyula tehát Schmidt Ágostontól tanult számelméletet és ábrázoló geometriát. Réthy Mór csak 1874-ben lett az elméleti fizika professzora, de a hajdani Kolozsvári Egyetem Tanrendje szerint, „komoly" matematikai diszciplínákat csak Schmidt Ágoston tanított 1874-1879 között. Köszönetet mondok Labancz Zsolt atyának, a Piarista Rendtartomány főnökének, Koltai Andrásnak, a rend levéltárosának, a Schmidt Ágostonról adott értékes adatokért, továbbá Kása Zoltán professzornak, aki felhívta a figyelmemet a Ferenc József Tudományegyetem Tanrendjének az áttanulmányozására.

A következőkben beillesztek Schmidt Ágostonnak egy eddig még nem közölt dolgozatát, melyből megítélhetjük, hogy mennyire tájékozott volt korának szakirodalmában. Ez a dolgozata 1880-ban készült, tehát abban a tanévben amikor Kolozsvárról Budapestre került. Láthatjuk, hogy azonnal felismerte a Grassmann-algebra fontosságát, tehát, hogy a lineáris algebra a matematikai tudományok alapozó tárgyai közé fog kerülni, és megérezte Felix Klein Erlangeni Programjának hatását a matematika további fejlődésére. (Ezt csak akkor tudjuk igazán értékelni, ha tudjuk például, hogy Brassai Sámuel, a Ferenc József Egyetem matematika professzora, akkor még nem hallott a lineáris algebráról és például nem ismerte még a Crammer-szabályt sem [5].)

Hivatkozások

[1] Hénap Tamás tartományfőnöki titkár (rendfőnöki titoknok): „AZ ÚRBAN ELHUNYT RENDTAGOK KEGYELETES EMLÉKEZETE az 1902. év novemberétől – az 1903. év novemberéig. 4. Schmidt Ágoston".

[2] Százhuszonöt éve nyílt meg a Kolozsvári Tudományegyetem, Magyar Tudománytörténeti Intézet, Piliscsaba, 1997, Összeállította: Gazda István

[3] Oláh-Gál Róbert: A Ferenc József Tudományegyetemen matematikából doktoráltak listája, Műszaki Szemle 2009., 46. szám (Historia Scientiarum Nr. 6), 28–33. `http://www.emt.ro/downloads/muszaki_szemle/msz46.pdf`

[4] Oláh-Gál Róbert: Hogyan került Schlesinger Lajos Kolozsvárra? (Műszaki Szemle 2010., Nr. 50), Historia Scientiarium 7., 2010, 16–22. `http://epa.oszk.hu/00000/00028/00042/pdf/musze_EPA00028_2010_50_16-22.pdf`

[5] Oláh-Gál Róbert, Sándor József: Brassai Sámuel, a kolozsvári egyetem első matematikaprofesszora, Műszaki Szemle 2011., Nr. 54, Historia Scientiarium 8., 9–17.

A GRASSMANN-FÉLE MÓDSZER VISZONYA A QUATERNIÓK ÉS BIQUATERNIÓK CALCULUSÁHOZ[1]

SCHMIDT ÁGOSTON

Salmon Fiedler: Analytische Geoemtrie des Raumes (2. Kiadás) II. részének 673. lapján a Hamilton-féle quaterniókra nézve ezt a megjegyzést találtam: „Für Seine (t.i. des Quaternionencalculus) Brauchbarheit spricht die Bemerkung, dass er die Methoden von Mőbius und Grassmann umfasst". E téves nézet, mely szerént a Grassmann-féle módszer a quaternióknak csak speciális esetök volna, holott épen ellenkezőleg Grassmann módszere foglalja magába a quaterniókat, 's biquaterniokat is; valamint az a meggyőződésem, hogy a Grassmann-féle kiterjedéstannak (Ausdehnungslehre) a mathematikai tudomány jövőjére roppant nagy befolyása leend, arra indítottak, hogy kutassam azt a vonatkozást, mely a hypercomplex algebra említett két módszere között létezik.

E kutatás eredménye vázlatosan a következő sorokban van letéve.

A Grassmann-féle algebra számos mai fogalmaink szerént még abnormális szorozmányait mellőzve ezúttal pusztán csak a „külső" és „belső" szorozmányra szorítkozom azokra, melyeket Sylvester „polár" és „scalar" szorzatoknak nevezett s melyek elsejére nézve a commutativ törvény nem érvényesül, úgy, hogy $ab = -ba$; még csak azt jegyezve meg, hogy két ab vonalhossz (táv, Strecke) „külső" szorzata számértéke szerént $ab\sin(ab)$, „belső" szorzatáé, $ab\cos(ab)$, ha a és b a távok abszolút hosszait jelentik.

Vegyük fel az n eseménynek: $\iota_1, \iota_2, \iota_3, \ldots, \iota_n$ oly rend szerént, melyekre nézve a polár szorzás érvényesül úgy, hogy $\iota_r\iota_s = -\iota_s\iota_r$. Geometriai értelemben pontokat

[1] Jelzet: Piarista Rend Magyar Tartománya Központi Levéltára, Manuscripta antiqua (1.2.a.), for. 5/90. Cím: Schmidt Ágoston hagyatékában talált dolgozatok, és hivatalos iratok. (1868–1901.) M., lat. Schmidt Ágoston: „A Grassmann-féle módszer viszonya quaterniók és biquaterniók calculusához." (1880.) Autogr. 12 pp. 340 × 210 mm. 12 oldalas.

képviselnek, melyek $n-1$ dimenziójú térben léteznek. A kettes szorozmány $\iota_r\iota_s$ akkor az ι_r és ι_s pontokat összekötő egyenes menetében mérendő egység; a hármas szorzat $\iota_r\iota_s\iota_t$ az egységterület az ι_r, ι_s, ι_t pontokon átmenő síkon s így tovább. Ez egységeknek valamely lineár csoportosítása mint $\sum a_r\iota_r = \alpha$ Mőbius barycentrikus calculusában pontot képvisel az $n-1$ dimenziójú, adott egyenes térben.

A háromméretű (térben) vegyünk fel négy pontot: ι_0, ι_1, ι_2, ι_3, úgy, hogy ι_1, ι_2, ι_3 pontok az ι_0 ponttól három egymásra derékszögű irányban, végtelen távolban legyenek. Már most a szorzat fogalmát két szempontból tekintjük. Így, ha azt mondjuk: $2 \times 3 = 6$, a 6 szorzatot úgy tekinthetjük mint számot származtatva oly műveletből, melynél 2 és 3 hasonló szerepet vittek; vagy úgy vehetjük, mint 3-ból lettek a kétszerezés mívelete folytán.

Az első esetben a 2 is, 3 is számok, az utóbbiban a 3 szám, de a 2 operatio s a két tényező itt valóban különböző functiot teljesít. Az első szemponton az Ausdehnungslehre, az utóbbin a quaterniók elmélete sarkallik. Ha a vonalat úgy tekintjük mint két pont szorzatát, vagy az egykörényt oldalainak szorzatául vesszük, a tényezők egynemű dolgok s ezúttal hasonló szerepet visznek. De ily quaternioegyenletben: $q\varrho = \sigma$ hol ϱ és σ vektorok, a q quaternio a forgatás és nyújtás míveletét teljesíti, mely ϱ-t σ-vá változtaja; a q tehát egészen más valami, mint a ϱ vektor.

Az egyetlen speciális eset, midőn q és ϱ egyneműnek tekinthető az, ha magát ϱ-t is speciális jelentésű quaterniónak t.i. derékszögű verszornak[2] vesszük.

A quaternio-symbolumok i, j, k tudvalevőleg derékszögű verszorok az az: oly operatiók képviselői, melyek az idomot a három coordináta síkban derékszögnyire forgatják; természetes tehát, ha valamelyik kétszer alkalmaztatik egyazon idomra, az eredmény két derékszögnyi forgás reversio (felfordulás) leend; lesz tehát:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

E jelképeket az ι_0, ι_1, ι_2, ι_3 pontokkal összehasonlítandó, tegyük fel, hogy az i az $\iota_0\iota_2$ vonalat $\iota_0\iota_3$-ba forgatja; j az $\iota_0\iota_3$ vonalat $\iota_0\iota_1$-be; s hogy k az $\iota_0\iota_1$, vonalat forgatás útján $\iota_0\iota_2$-be hozza. Az $\iota_0\iota_2$-nek forgása $\iota_0\iota_3$-ba egyenértékű a translatioval a végtelen távolsága $\iota_2\iota_3$ vonal mentében. Írhatni tehát:

$$i = \iota_2\iota_3, \quad j = \iota_3\iota_1, \quad k = \iota_1\iota_2.$$

Már most i az $\iota_0\iota_2$-t $\iota_0\iota_3$-ba forgatja; az az $i \cdot \iota_0\iota_2 = \iota_0\iota_3$ vagy

$$\iota_0\iota_3 = \iota_2\iota_3 \cdot \iota_0\iota_2 = -\iota_2^2\iota_0\iota_3;$$

kell tehát írnunk: $\iota_2^2 = -1$ s hasonlólag találhatók $\iota_1^2 = \iota_3^2 = -1$.

Innen egyszerre megkapjuk az i, j, k verszorok forrásának szabályait. Ugyanis

$$jk = \iota_3\iota_1 \cdot \iota_1\iota_2 = \iota_1\iota_3 = i$$

$$ki = \iota_1\iota_2 \cdot \iota_2\iota_3 = \iota_3\iota_1 = j$$

$$ij = \iota_2\iota_3 \cdot \iota_3\iota_1 = \iota_1\iota_2 = k.$$

[2]Schmidt Ágoston versornak írja.

Végre: $ijk = \iota_2\iota_3 \cdot \iota_3\iota_1 \cdot \iota_1\iota_2 = -1$; ennélfogva, hogy a quaterniók algebrája az Ausdehnungslehre keretébe illesztessék, mindenik egység négyzete (-1)-nek teendő, mint ezt Grassmann Mathem. Annalen XII. kötetében „Über der Ort den Hamilton'sche Quaternionen in der Ausdehnungslehre" című értekezésben kifejezte; bár behatóbb összehasonlítás után azon véleményben bátorkodom lenni, hogy a quaterniojelképek (i, j, k) első sorban nem az Ausdehnungslehre „elemi mennyiségeinek (Elementargrössen)" hanem inkább ezek kettes szorozmányainak felelnek meg, mely feltevés, mint láttuk közvetlenül szolgáltatja a szorzás szabályait.

Tény, hogy az egynemű tényezők szorzományának, valamint két nem épen derékszögű verszorként szereplő vektor[3] szorozmányának fogalma, Hamilton elméjében születetett, mi az i, j, k symbolumok helyett lassanként az általánosabb jellemű S és V jelképekre vezetett. A i, j, k verszorok szorozmányának e szempontból való értelmezése végett Grassmann szerént a „Kiegészítés"-hez kell folyamodni vagy a mi egyre megy az ij területet egy erre merőleges k vektorral kell helyettesíteni.

Egyébiránt az értelmezés ez esetben is korántsem oly könnyű és egyszerű; s az alkalmazott mathematikára is nagy fontosságúvá válhatik az a jelenség, hogy a megkülönböztetés a mennyiség s annak, „kiegészítése" között vagyis a terület s a megfelelő vektor között, mi némely esetben célszerűen mellőzhető, – a physikában szerepet kezd játszani. Ugyanis Maxwell a kétnemű vektort, erőnek és huzamnak (force and flow) nevezve, élesen megkülönbözteti, melynek eleje az egységnek, másik pedig ezek kettes szorozmányainak vonalas függvénye.

Az i, j, k jelenségek úgy tekinthetjük mint derékszögű verszorokat operáva az $\iota_0\iota_1$, $\iota_0\iota_2$, $\iota_0\iota_3$ mennyiségeken. E mennyiségek hosszegységek mérve a tengelyeken az igenleges irányba; van nagyságuk, irányuk és helyzetük s így rotorok, megkülönböztetésül a vektoroktól, melyeknél csak nagyság és irány jönnek tekintetbe. A vektor oly természetű mint a haladó mozgásba levő merev test gyorsasága vagy mint az erőpár, egy adott hosszúságú bármely irányba vont egyenes azt teljesen meghatározva; míg a rotor oly természetű mint test forgási gyorsasága vagy az erő: határozott tengelyhez van kötve. A barycentrikus calculus értelmében ab vektor, $a - b$ vagyis két egyenlő súlyú pont különbsége reprezentálja, míg következetesen a súlytalan pont végtelen távolságú pontnak vétetik.

Ehhez képest $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ a tengelyek mentén mérendő vektoregységnek is vehetők, mert ha $\iota_0 + \iota_r = \alpha_r$ akkor az α pontok a kezdőponttól az egységül vett távolban fekszenek s így $\iota_r = \alpha_r - \iota_0$a vektor egységet adja az α_r kezdőponttól. Az i, j, k verszorok ezen vektorokra épen úgy operálnak mint az $\iota_0\iota_1$, $\iota_0\iota_2$, $\iota_0\iota_3$ rotorokra; ugyan is $i\iota_1 = \iota_2\iota_3 \cdot \iota_2 = \iota_3$, $j\iota_3 = \iota_1$, $k\iota_1 = \iota_2$, mely szorzási szabályok az i, j, k jelvényekéivel megegyeznek, ha ez utóbbiakat tesszük az ι_1, ι_2, ι_3 helyére. Ugyanazon szimbólumokra használhatjuk tehát, akár a tengelyarányos vektoregységeket, akár a derékszögű verszorokat akarjuk kifejezni; de azért az ι_1, ι_2, ι_3 vektorok nem azonosak az $\iota_2\iota_3$, $\iota_3\iota_1$, $\iota_1\iota_2$ területekkel; csupán csak célszerű néha az ι_1 és $\iota_2\iota_3$ közti különbséget tekintetbe nem venni.

A háromméretű, elliptikus vagy hiperbolikus geometriában (mi alatt Klein F. az egyenletes igenleges vagy nemleges görbületű tér geometriáját érti) az ι_0, ι_1,

[3] Schimdt Ágoston vectort ír.

ι_2, ι_3 pontok egy tetraéder csúcsainak vehetők, mely önmagához conjugált úgy, hogy két-két pont távola egy quadrans által van meghatározva. Négy $\alpha\beta\gamma\delta$ pont szorozmánya tehát háromnemű tagokból álland: 1, negyedrendű tagokból, melyekben $\iota_0\iota_1\iota_2\iota_3$ szorozva van a négy pont coordinátáiból alkotott determinánssal, mely $\sin(\alpha\beta)\sin(\gamma\delta)\cos(\alpha\beta,\gamma\delta)$ arányos; 2, másodrendű tagok, melyek ily alakú: $\iota_0^2\iota_1\iota_2 = -\iota_1\iota_2$ szorzatokból erednek; 3, 0-rendű tagok mint származékai ily alakú szorzatoknak: $\iota_0''\iota_0^2\iota_1^2$; s így: $\alpha\beta\gamma\delta = a + \sum b_{rs}\iota_r\iota_s + c\iota_0\iota_1\iota_2\iota_3$ hol r és s különbözők.

Látnivaló itt, hogy a páros számú lineár factorokból álló szorozmányok ugyanazon alakúak, s ez alak az, melyet biquaternionak neveztek el. Legyen $\omega = \iota_0\iota_1\iota_2\iota_3$ akkor mivel $i = \iota_2\iota_3$; $j = \iota_0\iota_1$; $k = \iota_1\iota_2$; $\omega i = i\omega = \iota_1\iota_0$; $\omega j = j\omega = \iota_2\iota_0$; $\omega k = k\omega = \iota_3\iota_0$; $\omega^2 = 1$; minélfogva kettőnél nagyobb páros számú tényezők szorozmánya az i, j, k, ω, ωi, ωj, ωk mennyiségeknek vonalas függvénye, tehát ily alakú: $q + \omega r$, hol q és r quaterniók. Míg az ω szorzata i, j, k-val scalar – ι_0, ι_1, ι_2, ι_3 –vel való szorzata polár leend. Az ω-val való szorzás tehát nem egyéb mint valamely rendszernek a polár rendszerbe való átvitele.

A geometriai algebrák osztályozásai közül legfontosabb az, mely páratlan és páros méretű algebrát különböztet. Az n-dimenziójú elliptikus tér geometriája ugyanaz mint a végtelen távolságú pontok geometriája az egyenes vagy parabolikus de $(n+1)$ méretű térben; a pontok és rotorok elmélete az előbbiben ugyanaz a vektorok és azok szorzataiével az utóbbiakban. Mindenik $(n+1)$ méretű algebra teszen szükségessé. Így a négyegységű algebra vagy a pontokkal és rotorokkal foglalkozik a háromméretű elliptikus térben, vagy a vektorokkal 0 ezek szorzataival a négyméretű egyenes térben.

Lássuk példakép a kétegységű geometriai algebrát, mely vagy az egyméretű elliptikus geometriához, vagy a síkbeli vektorok elméletéhez tartozik.

Legyenek az egységek ι_2, ι_3: ekkor valamely, páros számú tényezőkből álló szorzat leend:

$$a + b\iota_2\iota_3.$$

Ha $i = \iota_2\iota_3$ akkor $i^2 = -1$ s ily természetű kettes szorzat a közönséges complex szám: $a + bi$.

Gauss metódusa szerént minden vektor a síkban, az ι_2 vektoregységhez való viszonya által van kifejezve vagyis ι_2, ι_3 az ι_2, ι_3 az 1 és i által van helyettesítve; ezzel két vektornak mesterséges, de azért hasznos szorzatait nyerjük melyek Bellavitis aequipollentiáiban vagy Scheffler, Rechnung mit Richtungszahlen című művében szép alkalmazást találtak.

Budapest, 1880. május 20. Schmidt Ágoston

Róbert Oláh-Gál: Ágoston Schmidt (1845–1902)

Our purpose is to present the life of Dr. Ágoston Schmidt (1845–1902) and one of his manuscripts about the Grassmann-Algebra written in 1880. Schmidt Ágoston was a Piarist teacher, he has been member of the Mathematical and Physical Association and the Council for Education, and the president of the Teacher's Circle

Budapest for years. He was the first teaching Number Theory, Linear Algebra and Probability as lecturer on the University of Kolozsvar (Cluj) between 1874-1878. His textbooks, textbook translations and textbook editorial activity are valuable.

Oláh-Gál Róbert

Sapientia, EMTE
Gazdaság- és Humántudományok Kara
Csíkszereda
Románia

KVALITATÍVE MAJDNEM-FÜGGETLEN HALMAZOK

BALÁZS BARBARA

Két halmazt akkor nevezünk kvalitatív függetlennek, ha négyfelé vágják az alaphalmazt. Egy n elemű halmazon vett páronként kvalitatív független halmazrendszer elemszámának felső korlátjára adunk egy – a Bollobáséhoz [1] hasonló – rövid bizonyítást. Majd meghatározzuk annak a halmazrendszernek a maximális elemszámát, melyre teljesül, hogy bármely 3 eleme közül biztosan kiválasztható kettő, melyek kvalitatív függetlenek.

1. Bevezetés

Két halmazt (legyen A és B) akkor nevezünk kvalitatív függetlennek, ha $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ egyike sem üres, vagyis ha négyfelé vágják az alaphalmazt. Az elnevezés Edward Marczewskitől származik (qualitatively independent) [5], és szószerinti fordításban azt jelenti „minőségileg független". Ez az elnevezés arra utal, hogy abból az információból, hogy az alaphalmaz egy eleme (legyen x) benne van-e A-ban vagy sem, nem tudunk meg semmit arról, hogy x eleme-e B-nek. Ez valóban így van, hiszen ha az $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ halmazok között van üres, és tudjuk, hogy $x \in A$ vagy $x \notin A$, akkor az $x \in B$, $x \notin B$ sok esetben kikövetkeztethető, ennek megmondása nem mindig ad új információt. Például ha $\overline{A} \cap B = \emptyset$, akkor $x \in B$-ből adódik, hogy $x \in A$. Azonban ha $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ egyike sem üres, x helyzetének meghatározásához szükségünk van annak ismeretére, hogy $x \in B$ vagy $x \notin B$.

A továbbiakban $A \circledast B$ jelölje azt, hogy A és B kvalitatív független halmazok.

Az itt szereplő, kvalitatív független halmazokról szóló tételek bizonyításában fontos szerepet játszik a '70-es évek elején Katona Gyula által bevezetett körmódszer. Ennek alapgondolata a következő:

Az alaphalmaz elemeit helyezzük el egy kör mentén egy ciklikus permutáció segítségével: $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n), \sigma(1), \dots$. Az intervallumokat értelmezzük a következő módon: $\{\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(i+l-1)\}$ egy l hosszúságú intervallum, ahol a $\sigma(j)$ számok modulo n értendők. A módszer egy olyan lemma kimondásán alapszik, ami a tételben megkívánt tulajdonságokat megtartva, halmazok helyett a permutált elemeken vett intervallumokra van megfogalmazva. Utolsó lépésként a lemma állítását felhasználva kettős leszámlálást alkalmazunk a (C, A) párokra, ahol C az n elem egy ciklikus permutációja, $A \in \mathcal{A}$ pedig egy intervallum a permutált elemeken.

2. Páronként kvalitatív független halmazok

Rényi tette fel a kérdést [6], hogy mi a maximális mérete egy n elemű alaphalmazon vett páronként kvalitatív független halmazrendszernek. A választ egymástól függetlenül – különféle megfogalmazásban és különféle motivációkkal – megadta Brace és Daykin [2], Kleitman és Spencer [4], Bollobás [1], illetve Katona Gyula [3]. Itt egy körmódszert használó rövid bizonyítást közlünk, amely Bollobás módszeréhez hasonlít.

2.1. tétel ([1], [2], [3], [4]). *Legyen $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ egy n elemű alaphalmaz páronként kvalitatív független halmazrendszere. Ekkor*

$$|\mathcal{A}| \le \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $A_1 \ast A_2$ pontosan akkor teljesül, ha $A_1 \ast \overline{A_2}$. (Ez A_1 és A_2 kvalitatív függetlenségének definíciójából közvetlenül következik.)

Tehát ha $|A_j| > \frac{n}{2}$, akkor A_j helyett vehetjük $\overline{A_j}$-t, és a halmazrendszerünk páronként kvalitatív független marad. Vagyis $A_1, A_2, \dots, A_k$ választható úgy, hogy $|A_i| \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Az $\frac{n}{2}$-nél nagyobb elemszámú halmazok komplementerre cserélésével nem kaphatunk többszörös multiplicitású halmazokat, hiszen ha létezik $1 \le i \le k$, hogy A_i most többször szerepel – azaz $A_i = A_j$ $(i \ne j)$ –, akkor az eredeti halmazrendszer nem volt kvalitatív független. (Mert ha $A_i = \overline{A_j} (i \ne j)$, akkor $A_i \cap \overline{A_j} = \emptyset$, tehát A_i és A_j nem kvalitatív függetlenek.)

Ugyancsak feltehető, hogy $A_i \ne \emptyset$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$, különben $\emptyset \cap A = \emptyset$ miatt sérülne $\mathcal{A}$ páronként kvalitatív függetlensége.

2.2. lemma. *Vegyük az n elem egy ciklikus permutációját $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ és ezen egy olyan $\mathcal{B}$ páronként kvalitatív független intervallumrendszert, hogy $\forall B \in \mathcal{B}$: $1 \le |B| \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ekkor*

$$|\mathcal{B}| \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

A lemma bizonyítása. Ha az intervallumokat egy adott irányban (mondjuk az óramutató járásával egyezően) tekintjük, egy elemmel csak egy intervallum kezdődhet, mert tartalmazás esetén nem teljesül a kvalitatív függetlenség, tehát $|\mathcal{B}| \le n$. Ezt a felső korlátot még tovább csökkenthetjük.

Rögzítsük $B_1 \in \mathcal{B}$-t, úgy hogy $B_1 := \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(l)\}$ $(l \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$. Mivel $\mathcal{B}$ páronként kvalitatív független intervallumrendszer, minden további elemének kell, hogy legyen B_1-gyel metszete. Ha van olyan $\mathcal{B}$-beli intervallum, aminek első eleme $\sigma(i+1)$, akkor nincs olyan $B \in \mathcal{B}$, aminek utolsó eleme $\sigma(i)$, hiszen a $|B| \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$(\forall B \in \mathcal{B})$ feltétel miatt ezeknek üres lenne a metszete, vagyis $\mathcal{B}$ páronként kvalitatív függetlensége sérülne. Tehát minden $(\sigma(i), \sigma(i+1))$ $(1 \le i \le l-1)$ párhoz legfeljebb egy $\mathcal{B}$-beli intervallum tartozik. Így azt kapjuk, hogy $|\mathcal{B}| \le 1 + (l-1) = l \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ezzel a lemma állítását beláttuk. ∎

Kettős leszámlálást alkalmazva vizsgáljuk a (C, A) párok számát, ahol C az n elem egy ciklikus permutációja, $A \in \mathcal{A}$ pedig egy intervallum a permutált elemeken.

Először tekintsük A-t rögzítettnek. Mivel A és $\overline{A}$ elemei egymástól függetlenül permutálhatóak, azon ciklikus permutációk száma, amiknél A intervallum marad: $|A|!(n-|A|)!$. Tehát a (C, A) párok száma $\sum\limits_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n-|A|)!$.

Most rögzítsük a C permutációt. Az n elemnek $(n-1)!$ különböző ciklikus permutációja van, és mivel a C szerinti intervallumok páronként kvalitatív függetlenek, a lemma mindegyikre alkalmazható, vagyis a (C, A) párok száma legfeljebb $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (n-1)!$.

A két leszámlálás összehasonlításából kapjuk:

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n-|A|)! \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (n-1)!.$$

Osszuk le az egyenlőtlenséget $n!$-sal, és becsüljük alulról a bal oldalt:

$$|\mathcal{A}| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \le \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \le \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}.$$

Ebből

$$|\mathcal{A}| \le \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}. \quad ∎$$

3. Általánosítás

Észrevettük, hogy a körmódszer segítségével arra a kérdésre is választ tudunk adni, hogy legfeljebb mekkora lehet annak a halmazrendszernek a mérete, melyre igaz, hogy bármely három eleme közül kiválasztható kettő, melyek kvalitatív függetlenek.

3.1. tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ olyan halmazrendszer egy n elemű alaphalmazon, amelyre teljesül, hogy bármely három eleme között biztosan van kettő, melyek kvalitatív függetlenek. Ekkor*

$$|\mathcal{A}| \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Bizonyítás. Itt is felhasználjuk, hogy $A_1 \ast A_2$ akkor és csak akkor, ha $A_1 \ast \overline{A_2}$.

Tehát ha A_1, A_2, A_3 közül $A_1 \ast A_2$, és A_3 helyett a komplementerét nézzük, akkor A_1, A_2, $\overline{A_3}$ között is lesz két kvalitatív független halmaz: A_1 és A_2. Továbbá ha A_i helyett vesszük a komplementerét, az $\overline{A_i}$, A_j, A_3 halmazok között akkor is lesz két kvalitatív független, mert a fenti meggondolás szerint $A_i \ast A_j \Leftrightarrow \overline{A}_i \ast A_j$ $(i, j = 1, 2,\ i \neq j)$.

Ez azt jelenti, hogy az $\frac{n}{2}$-nél nagyobb elemszámú halmazok helyett a komplementerüket véve nem sérül a tételben leírt tulajdonság. Persze, ha A és $\overline{A}$ mindkettője $\mathcal{A}$-ban van, akkor a csere nem okoz változást. Vagyis $\mathcal{A}$ választható úgy, hogy vagy $A, \overline{A} \in \mathcal{A}$ vagy $|A| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

1. eset: $\emptyset \in \mathcal{A}$.

A tétel feltétele, hogy a halmazrendszer bármely három halmaza között legyen kettő kvalitatív független. Ha az üres halmaz is eleme $\mathcal{A}$-nak, akkor a feltételből adódóan az üres halmaz mellé $\mathcal{A}$ bármely két másik elemét választva (legyenek ezek A_1 és A_2) is olyan hármast kapunk, melyek között lesz kettő kvalitatív független. Tehát $\mathcal{A} - \{\emptyset\}$ is páronként kvalitatív független halmazrendszer. A 2.1. tétel állítását felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} + 1.$$

Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} + 1 = \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}\left(1 + \frac{1}{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}\right) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}\left(1 + \frac{1}{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}\right),$$

majd becsüljük felülről:

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}\left(1 + \frac{1}{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}\right) \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}(1+1) \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{1}{2} \cdot 2 = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

amivel a tétel állítását beláttuk arra az esetre, amikor az üres halmaz eleme a halmazrendszernek.

2. eset: $\emptyset \notin \mathcal{A}$. Természetesen ekkor az alaphalmaz sem lehet $\mathcal{A}$-ban.

3.2. lemma. *Vegyük az n elem egy ciklikus permutációját $\big(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\big)$ és ezen egy $\mathcal{B}$ intervallumrendszert $\big(\forall B \in \mathcal{B}$: $1 \leq |B| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vagy $\overline{B} \in \mathcal{B}\big)$, melyre teljesül, hogy bármely három intervalluma közül kiválasztható kettő, ami kvalitatív független. Ekkor*

$$|\mathcal{B}| \leq n.$$

A lemma bizonyítása. Nevezzük *rövid intervallumnak* az olyat, amire $|B| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ teljesül. A többiek a *hosszúak*. Tehát minden $\mathcal{B}$-beli hosszú intervallum rövid komplementere is $\mathcal{B}$-ben van. Egy elemmel nem kezdődhet kettőnél több intervallum, mert ha lenne $\mathcal{B}$-nek három olyan eleme, melyek mindegyike $\sigma(i)$-ből indul, akkor közülük bárhogy választunk ki két intervallumot, az egyik tartalmazni fogja a másikat, és tartalmazás esetén nem teljesül a kvalitatív függetlenség. Tehát $|\mathcal{B}| \leq 2n$, de ezt a felső korlátot még tovább csökkenthetjük.

Nevezzünk egy $\sigma(i)$ elemet *rossznak*, ha vagy két rövid intervallum indul belőle ki, vagy egy olyan rövid intervallum indul belőle, aminek komplementere is $\mathcal{B}$-beli. Halmazukat jelölje R. Ha $\sigma(i) \in R$, akkor $\sigma(i + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ olyan pont, amivel nem kezdődhet egyetlen $\mathcal{B}$-beli rövid intervallum sem. Ugyanis ha lenne $B_3 \in \mathcal{B}$, aminek első eleme $\sigma(i + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$, akkor B_3 a két előző halmazzal páronként nem-kvalitatív-független párokat alkotna. Jelölje N azokat az elemeket, ahonnan nem indul rövid intervallum. Ekkor a $\varphi(\sigma(i)) = \sigma(i) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ leképezésre fennáll, hogy $\varphi(\sigma(i)) \neq \varphi(\sigma(i'))$ ha $\sigma(i) \neq \sigma(i')$. Ezért $|N| \geq |R|$. A $\mathcal{B}$-beli intervallumok számát felírhatjuk egy n-tagú összegként, ahol 0 áll, ha $\sigma(i) \in N$, 1 áll, ha $\sigma(i)$-ből egy rövid intervallum indul, aminek komplementere nincs $\mathcal{B}$-ben, és 2 áll a többi esetben. Mivel a 2-es tagok száma nem több, mint a 0-ásoké, az összeg legfeljebb n. ■

Térjünk vissza a 3.1. tétel bizonyítására!

Kettős leszámlálást alkalmazva vizsgáljuk a (C, A) párok számát, ahol C az n elem egy ciklikus permutációja, $A \in \mathcal{A}$ pedig egy intervallum a permutált elemeken.

Először tekintsük A-t rögzítettnek. Mivel A és $\overline{A}$ elemei egymástól függetlenül permutálhatóak, azon ciklikus permutációk száma, amiknél A intervallum marad: $|A|!(n - |A|)!$. Tehát a (C, A) párok száma $\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)!$.

Most rögzítsük a C permutációt. Az n elemnek $(n - 1)!$ különböző ciklikus permutációja van, és mivel a C szerinti intervallumokra teljesül, hogy bármely három között van kettő kvalitatív független, a lemma mindegyikre alkalmazható, vagyis a (C, A) párok száma legfeljebb $n(n - 1)!$.

A két leszámlálás összehasonlításából kapjuk:

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)! \leq n!.$$

Osszuk le az egyenlőtlenséget $n!$-sal, és becsüljük alulról a bal oldalt:

$$|\mathcal{A}| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

Ebből

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}. \quad ■$$

Irodalom

[1] B. Bollobás, *Sperner systems consisting of pairs of complementary subsets,* in J. Combinatorical Theory, vol. 15 of A, 1973, pp. 363–366.

[2] A. Brace and D. E. Daykin, *Sperner type theorems for finite sets,* Combinatorics, (1972), pp. 18–37.

[3] G. O. H. Katona, *Two applications (for search theory and truth functions) of Sperner type theorems,* in Period. Math. Hungar., vol. 3, 1973, pp. 19–26.

[4] D. J. Kleitman and J. Spencer, *Families of k-independent sets,* in Discrete Math., vol. 6, 1973, pp. 255–262.

[5] E. Marczewski, *Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures,* in Colloq. Math., vol. 1, 1948, pp. 122–132.

[6] A. Rényi, *Foundations of Probability,* in Wiley, New York, 1971.

Barbara Balázs:

Two subsets of X are called qualitatively independent if they divide X into four non-empty parts. A short proof – similar to Bollobás's [1] – is given for the maximum number of pairwise qualitatively independent subsets of an n-element set. Also, upper bound is given for the size of a family which complies the property that there are two qualitatively independent subsets among any three subsets.

Balázs Barbara
Eötvös Loránd Tudományegyetem

TUTTE VERSE

Surányi László tagtársunk édesapja, Surányi János (Tárulatunk volt főtitkára, elnöke, alelnöke; lásd Lovász László emlékező cikkét Lapunk 2008/2. számában) hagyatékában talált egy érdekes verset, amit William T. Tutte, a kiváló brit-kanadai matematikus írt a magyar matematikusokhoz.

Hadd idézzünk a Wikipedia Tutte-ról szóló cikkéből.

William Thomas Tutte, másként Bill Tutte (1917. május 14–2002. május 2.) brit, majd kanadai kódfejtő és matematikus. A második világháború alatt brilliáns ötleteivel jelentősen hozzájárult a német Lorenz-kód megfejtéséhez. Az ezzel nyert infomációk jelentősen hozzájárultak a szövetségesek európai győzelméhez. Jelentős matematikai eredményei is voltak – többek között – a gráfelmélet és a matroidelmélet megalapozásában.

Alább ismertetjük a verset eredeti angol nyelven, nem vállalkozva a fordításra. Sajnos nem ismerjük a körülményeket: kikre gondolt Tutte, kik voltak akkor Prágában.

*

A költő Tutte írta Prágában, 1959. október 18-án.

With subtlety and rigour
And a gleam within their eyes
The graphmen of Hungary
Prove many a bold surmise
By tangled trees and circuits
They hack and slide their way.
They will only need four paint-pots
On some fine future day.

Written in Prague, Oct 18 1959, by the poet Tutte.

With subtlety and rigour
And a gleam within their eyes
The graphmen of Hungary
Prove many a bold surmise
By tangled trees and circuits
They hack and slide their way.
They'll only need four paint-pots
On some fine future day.

ELTÉVESZTETTEM (MONDTA TURÁN PÁL)

KOVÁCS KLÁRA

Mikor az ELTE mat.–fiz. szakára jártam (1972–1977), az algebra előadásokat Gyarmati Edit tartotta.

Egy alkalommal valami elfoglaltsága akadt. Előre bejelentette, hogy a következő előadást nem tudja megtartani, de ne aggódjunk, hogy így vizsga előtt elmarad, majd beküld valakit, aki megtartja.

A következő előadáson érdeklődve vártuk, kit küldött.

Órakezdetkor az ajtó kinyílt, és besietett Turán Pál.

Természetesen felálltunk, ahogy illik, de rögtön elkezdődött a pusmogás, hogy ez lehetetlen!

Turánt nem lehet csak úgy beküldeni!

Turán úr felment az emelvényre és elkezdte: Tisztelt hallgatóim!

Ahogy végignézett a hallgatóságon, mi még álltunk, egyre döbbentebbé vált.

– Maguk nem matematikusok!

– Nem hát, mi mat–fizesek vagyunk.

Turán bosszúsan megrázta a fejét, majd az ujjaival csettintett.

– Bocsánat, eltévesztettem az ajtót!

Kiszáguldott.

Eddigre tértünk észre annyira, hogy visszaültünk.

Lehetséges, hogy Turán Pál értelmi képességei szükségesek annak belátásához, hogy tévedtünk?

Nála kevésbé okos ember bizonyította volna, hogy a 120 diák tévesztette el az ajtót.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Nagy és Társa Nyomda és Kiadó Kft., Budapest