13

Matematikai Lapok

1997/1–2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 7. évfolyam (1997), 1–2. szám

(Megjelent 2002-ben)

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201–7656.

Egyes szám ára 400 Ft+ÁFA.

* Megjegyzés: Korábbi előfizetőknek a lap ára az eddigi befizetés függvénye.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

TÁRSULATI ÉLET

I/1. Az 1997. évi nagyrendezvényekről

a) Rátz László vándorgyűlés (Eger, július 1–4., résztvevők száma: 443 fő, közülük határainkon túlról 28-an érkeztek. Idén új kezdeményezésként meghívást kapott a rendezvényre két – tanára által javasolt – pedagógusjelölt is.)

A július 1-jei plenáris ülést Fejes Tóth Gábor, a Társulat főtitkára nyitotta meg, a Beke Manó-emlékdíjakat is ő adta át.

Az első plenáris előadást (az 1997. évi „Nagy Beke-díjas") Freud Róbert tartotta; Erdős Pál két problémájáról beszélt, majd Pőcze Gábor pedagógiai tárgyú előadása hangzott el.

A vándorgyűlés, a szokásoknak megfelelően július 2–4. között szekcióüléseken folytatta munkáját. Igyekeztük előre összegyűjteni minél több előadás kivonatát, hogy ezt kiosztva megkönnyítsük a szekciók közötti választást.

Az alsó tagozatos szekcióban nem csak feladatmegoldásokat hallhattak a résztvevők, hanem módszertani ötleteket, gyakorlatban hasznosítható metódusokat is kaptak. A szekció, közvélemény-kutatás alapján legjobban tetszett előadása Kovács Csongorné–Szeredi Éva „Alsós munka felsős szemmel" c. előadása volt.

A felső tagozatban különösen a feladatmegoldó szemináriumok munkáját dicsérték a résztvevők, közülük is Pintér Klára, Mikusi Imre, Nagy Erzsébet foglalkozásait.

A középiskolai szekcióban terítékre került a mindenki számára izgalmas valószínűség-számítás témaköre; két előadás is foglalkozott vele. Ebben a szekcióban Török Turul „Valószínűségszámítás az érettségin", Urbán János „Péter Rózsa", Majoros Mária–Vásárhelyi Éva „Oktatási szituációk, gyengékkel jól" c. előadása, valamint Juhász István feladatmegoldó szemináriuma kapták a legtöbb szavazatot.

A szekcióüléseket jól egészítették ki a különböző kiállítások és könyvárusítások (CALIBRA, Mozaik, TypoTeX).

A felsőoktatási ankét előadásait és az informatikai rendezvényeket is számosan látogatták.

A néhány éves gyakorlatnak megfelelően péntek délutántól szombat délig a MATKAPOCS rendezvényei zajlottak (36 fő részvételével).

A vándorgyűlés befejezéseként az Oktatási Bizottság kibővített ülést tartott, értékelve a rendezvényt. Az ülésen a rendezvény jövőjét illetően többek között a következők hangzottak el:

- egy-két évre előre „adatbank" formájában jó lenne előadók neveit és témáit összegyűjteni. (Közülük az „ismeretlenek" kapjanak kipróbálási lehetőséget [valamilyen táborban, vagy hasonló fórumon].)

- legalább 5 éves tanítási tapasztalat nélkül senki se tarthasson előadást. A „szabály" alól csak szakmailag nagyon indokolt esetben lehet felmentést adni. (Pl. az időről-időre felkérendő kiemelkedő tehetségű egyetemi hallgatók bemutatkozásai [őket tanáraik javasolhatják, akik teljes felelősséget is kell, hogy vállaljanak értük], vagy egyes számítástechnikai bemutatók esetén)

b) Extremális gráfok konferencia (Balatonlelle, július 27–augusztus 2., résztvevők száma 70, magyar 44, külföldi 26 fő)

Az 1997. évi International Colloquium on Extremal Graph Theory c. konferenciát július 27-től augusztus 2-ig rendeztük meg Balatonlellén (a Hotel Giuseppeben).

A várakozásnak nagyjából megfelelően az összejövetelnek 70 résztvevője volt. Ez is azt mutatja, és a visszajelzésekből is az derül ki, hogy a konferencia rendkívül sikeres volt. A méret is optimális volt, hiszen így nem kellett párhuzamos szekciókat szervezni, a társaság végig együtt volt, (ez az előadások menetrendjében is megengedett kis mértékű rugalmasságot).

Ugyanakkor nem biztos, hogy minden évben kell egy diszkrét matematika konferenciát szervezni, ugyanis informálisan kaptunk olyan visszajelzést, miszerint előző (előző két) évben már voltak Magyarországon, most inkább máshová mennek. Egyszerűen nagyon megnőtt a konferenciák száma világszerte. Az előadások sora, különösen a kiemelt, 40 perceseké mindenki számára igen impresszív volt.

Ezek az előadások a következők voltak:

Beck József – Ramsey type games on complete graphs

Bollobás Béla – Judicious partitions of graphs and hypergraphs

Adrian Bondy – Minimum degree conditions for circuits

Ralph Faudree – Extremal problems for cycles in graphs

Füredi Zoltán – New asymptotics on bipartite Turán numbers

Gyárfás András – How to make maximal triangle-free graphs

Győri Ervin – Extremal graph problems on triangles, pentagons and hexagons

Hajnal András – A metric generalization of Ramsey's theorem

Alexander Kostochka – On the number of edges in colour-critical graphs and hypergraphs

Felix Lazebnik – Some extremal problems on graphs with forbidden cycles

Pach János – Extremal problems for geomtric graphs

Hans-Jürgen Prömel – Induced Ramsey numbers

Simonovits Miklós – General methods to prove exact results in extremal graph theory

Sós Vera – Extremal graph theory and application, Turán Ramsey theorems

Andrew Thomason – On the number of complete and empty subgraphs

Bjarne Toft – Graph colouring problems and results

Tuza Zsolt – Some unsolved extremal problems.

2. Az 1997. évi társulati díjak odaítéléséről

a) Szele Tibor-emlékérem

Az 1997. évi Szele Tibor-emlékérmet *Juhász István,* a matematikai tudomány doktora, az MTA Matematikai Kutatóintézetének osztályvezetője kapta.

Szinte szimbolikus, hogy Juhász István tudományos kutatómunkáját 1963-ban, a halmazelméletet forradalmian megújító Cohen-módszer felfedezésének évében kezdte meg. E módszernek legfontosabb alkalmazási területévé hamarosan az általános topológia vált, mert kitűnt, hogy számos topológiai kérdésre a válasz attól függ, milyen feltevésekkel egészítjük ki a halmazelmélet klasszikus ZFC axiómarendszerét; a Cohen-módszer éppen azt teszi lehetővé, hogy az ilyen feltevéseknek ZFC-ben megcáfolhatatlan, azaz konzisztens voltát bebizonyítsuk. Juhász István rövid idő alatt beledolgozta magát az így kialakult ún. halmazelméleti topológiába, s annak egyik legeredményesebb kutatójává vált. Száznál több folyóiratcikk mellett ő írta a témakör első kismonográfiáját, ennek lényegesen bővített új változatát, valamint több fontos kézikönyvnek e kérdéskörrel foglalkozó fejezetét.

Mindennek eredményeképpen Juhász Istvánt világszerte a halmazelméleti topológia vezető kutatói között tartják számon, s lényeges szerepe van abban, hogy ma Budapest ennek a tudományágnak világviszonylatban egyik legmegbecsültebb kutatócentruma. Ennek köszönhetők meghívásai számos konferencia felkért nagyelőadásának megtartására, valamint hosszabb idejű vendégprofesszori vagy vendégkutatói állás betöltésére.

Juhász István szívesen dolgozik együtt más kutatókkal közleményeinek több mint fele egy vagy több társszerzővel közösen készült. Az utóbbiak között nagy számban szerepelnek olyan nála fiatalabb kutatók, akik az ösztönzést tőle kapták s így tanítványai közé sorolhatók.

Néhány olyan kutató neve, akikre Juhász meghatározó mértékű hatást gyakorolt:

Magyarország: Balogh Zoltán, Gerlits János, Nagy Zsigmond, Soukup Lajos, Szentmiklóssy Zoltán. Hollandia: E. van Douwen, F. van Engelen, J. van Mill. Kanada: J. Steyvans, S. Watson, W. Weiss. USA: A. Berner, K. Ciesielski. A fentiek közül többen ma már maguk is széles körben elismert kutatóvá fejlődtek.

(Császár Ákos)

b) Beke Manó-emlékdíj

Az emlékdíj *I. fokozatában* – „Nagy Beke"-díjban részesült Freud Róbert,

a díj *II. fokozatát* a következők kapták: Ács Katalin, Bíró Bálint, Deli Lajos, Kothencz Jánosné, Nagy Józsefné, Peresztegi László.

Indoklás

Freud Róbert 1970-ben szerzett matematikus szakos egyetemi diplomát az ELTE TTK-n. 27 éve az ELTE oktatója.

Fő kutatási területe a kombinatorikus számelmélet. Kutatási eredményei alapján számos konferencia- és vendégoktatói meghívást kapott. Több dolgozatát idézi az egyik legfontosabb számelméleti monográfia (R. Guy: Unsolved problems in number theory).

Két amerikai egyetemen volt vendégprofesszor: Ohio State Universityn (Columbus) és a University of Californian (Los Angeles).

Előadóként, gyakorlatvezetőként rendszeresen kapcsolatba került a tanárjelöltekkel is. Ezt a munkát is a rá jellemző lelkesedéssel, alapossággal, igényességgel, matematikai tisztasággal végezte. A matematikai problémák elmélyült elemzésének szerves részeként a tanárjelöltek magukkal vihették a belőle sugárzó pedagógusi elhivatottságot, mint módszertani alapelvet a tanulói aktivitás maximális kihasználását, továbbá a matematikában mindenütt ott rejlő szépség, harmónia felmutatásának igényét. Ez a hatása már a tanárjelöltek gyakorlóévében is észlelhető volt a diákokkal végzett munkájukban.

Szakmai tevékenységéért számos kitüntetésben részesült (Rényi Kató-díj, Grünwald Géza-díj. Kiváló Munkáért Érdemérem 1986, az ELTE TTK Kiváló Oktatója 1989, Pro Universitate Érem 1996).

A matematikai közélet rendkívül aktív résztvevője. Számos bizottság, munkacsoport tagja (többek között a TTK Kari Tanács, ELTE TTK Oktatási Bizottság, Schweitzer Miklós-emlékverseny bizottság).

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny speciális matematika tantervű bizottságának elnöke.

Az ELTE TTK egyik legkiválóbb és legnépszerűbb oktatója.

Az ELTE TTK-n az algebra és számelmélet szinte valamennyi területét oktatja (tanárszakon, matematikus szakon és a PhD program keretében is). Oktatási tevékenységének fontos része a témavezetés (szakdolgozatok, diákköri pályázatok, doktori és kandidátusi disszertációk témavezetője).

A tudományos ismeretterjesztésben is fáradhatatlan.

Rendszeresen tart ismeretterjesztő előadásokat. Sok éve szervezi a Fővárosi Pedagógiai Intézet, illetve a TIT Szabadegyetem matematika tanártovábbképző és ismeretterjesztő programjait.

Szakirodalmi tevékenysége is kimagasló: 20 tudományos dolgozat, 3 ismeretterjesztő cikk és 1 könyv, 7 könyvfordítás szerepel a listán. A Lineáris algebra c. tankönyve (amely 1996-ban jelent meg) kiváló felépítése és gondosan összeválogatott feladatanyagán kívül széles látókörével és a lineáris algebra szerteágazó kapcsolatainak és alkalmazásainak bemutatásával emelkedik ki a témát tárgyaló művek sorából.

Ács Katalin Szegeden a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán matematika-fizika szakon végzett 1978-ban. 3 évig vidéken tanított, majd különböző budapesti általános iskolákban, jelenleg a VII. kerületi Dob Utcai Általános Iskola tanára.

Családi indíttatása és személyes érdeklődése egyaránt a matematika és a matematikatanítás szeretetét, s ezért való tenniakarást erősítették benne.

Nagy empátiával fordul a tanítványai felé. A matematika tanításában arra törekszik, hogy minden gyereknek saját képességeihez igazítva adjon útmutatást. Gondot fordít arra, hogy ne kallódjanak el a gyengébb eredményű gyerekek között a matematikából tehetségesebbek. Az iskolai matematikai és természettudományos versenyek egyik fő szervezője.

Sokoldalú, művelt ember, és tanítványainak a nevelésében is a teljességre törekszik. Egy kreativitást fejlesztő FPI-s kísérlet matematikát és természettudományokat érintő részének kidolgozója, kipróbálója volt. Fontosnak tartja az alsó és felső tagozatos tanári munka szoros kapcsolatának ápolását, ezért nagyon sokat tesz a kerületében, 1997-ben kísérletként egy elsős osztály tanítását is elvállalta matematikából.

Szeretettel és igényes módszertani kultúrával foglalkozik a szociálisan, vagy anyagilag hátrányos helyzetű diákjaival.

Több éve fogad matematikatanár szakos hallgatókat az ELTE Tanárképző Főiskolai Karáról pedagógiai gyakorlatra, és a szokásost messze meghaladó alapossággal adja át tapasztalatait.

A matematikai nevelés országos feladataiból is részt vállal. A NAT matematikát kidolgozó csoport egyik tagjaként dolgozott több éven át.

1990 óta a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Szakosztályának titkára. Ebben a funkcióban indította Szendrei Júliával közösen a most is jól működő tanárklubot, amely értékes módszertani és szakmai programjaival országosan népszerű a kollégák között.

Fontosnak tartja a közelmúlt matematikatörténeti értékeinek megőrzését. Szervezőként, szerkesztőként több videofilm készítésében vett részt ennek a hagyományőrzésnek a szellemében. Kezdeményezésére film készült többek között Péter Rózsa, Kalmár László, Fejér Lipót és Riesz Frigyes munkásságáról, a matematikai olimpikonok visszaemlékezéseiből, a Rátz László Vándorgyűlésekről.

A vándorgyűléseknek sok éve lelkes és áldozatkész szervezője.

Bíró Bálint 1980-ban végzett a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem matematika-fizika szakán. Egy évet Kiskunfélegyházán tanított, majd Egerben volt nevelőtanár. 1983-tól hat évig szakközépiskolában tanított, 1989-től az egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium tanára.

Szakmai felkészültsége kiváló, iskolájában a speciális matematika tagozaton, annak beindításától kezdve tanít. A Matematika Tanítása c. folyóirat tanári feladatmegoldó versenyére megoldásokat küld be.

Tanítványai részt vesznek a KöMaL pontversenyén, kiemelkedően szerepelnek a megyei versenyeken, az Arany Dániel versenyen és az OKTV-n. A megyei versenyek szervezésében jelentős szerepet vállal. Tehetséges tanítványait a matematika szeretetére, a matematikai problémákban való elmélyedésre neveli. Kevésbé tehetséges tanítványainak rendszeresen tart korrepetálást, felzárkóztató jellegű foglalkozásokat.

Számára pedagógiai sikert az jelent, ha matematika iránt érdeklődő tanítványai a felsőoktatásban jól megállják a helyüket, a tovább nem tanulókkal kapcsolatban pedig az, ha még a leggyengébbek sem félnek a matematikától.

1995-től az OKTV I. kategóriájának bizottsági tagja. 1996 áprilisában meghívást kapott az V. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny zsűrijébe.

1995 óta Heves megye matematika szaktanácsadója. Ilyen minőségben e rövid idő alatt is sokat tett a tanárok szakmai, módszertani felkészítéséért, például azért is, hogy az új helyi tantervek megfelelő matematikatanítást biztosítsanak.

1996-tól a BJMT Heves megyei Tagozatának a titkára. Ebben a minőségében sok segítséget nyújtott az idei vándorgyűlés előkészítésében.

1979-ben szerzett a KLTE-n matematika–fizika szakos középiskolai tanári oklevelet. Tanári tevékenységét – feleségével együtt – azóta is a hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnáziumban fejti ki.

Deli Lajos a debreceni Fazekas Gimnázium Speciális matematika tagozatán érettségizett.

Deli Lajos sokat tett Hajdú-Bihar megyében a tanárokért, az ifjúságért.

4 évig volt Hajdú-Bihar megye gimnáziumainak matematikai szaktatanácsadója, ahol élénk matematikai életet valósított meg. Tartalmas előadásokat, feladatmegoldó szemináriumokat szervezett tapasztalt kollégák bevonásával, a pályakezdők számára pedig módszertani szemináriumsorozatokat. A BJMT Hajdú-Bihar megyei Tagozata és az MPI közös szervezésű megyei matematikaverseny koordinátora volt hosszú ideig.

Egy cikluson keresztül a BJMT H-B megyei vezetőségének tagja volt. Rendszeresen részt vesz a RLV-n és szaktanácsadóként támogatta a H-B megyei tanárok részvételét.

Nyitott és fogékony az új iránt. A Hőgyes Endre Gimnáziumban (Hajdúszoboszló) egyik szervezője volt a hatosztályos gimnáziumi osztályoknak.

Ezek matematika tantervét ő készítette. Sikerét jelzi, hogy több iskola ezt a tantervet használja.

Évek óta tart városi tehetséggondozó szakkört ötödikeseknek és hatodikosoknak, ahová még a környező falvakból és tanyákról is bejárnak a gyerekek. Itt egyrészt megkedvelteti a matematikát, másrészt előkészíti a diákokat további középiskolai tanulmányaikra. Általános iskolás és középiskolás tanítványai is jól szerepelnek a megyei és országos versenyeken, a közelmúltban sokszor végeztek az első helyeken a Zrínyi, a Kalmár, és a Varga Tamás-versenyeken.

Diákjai aktívan résztvesznek a KöMaL feladatmegoldó-versenyén.

Deli Lajos több országos, illetve megyei innovációs pályamunkát írt és 3 alkalommal díjat is nyert. Tervezi, hogy szakköri füzet formájában megjelenteti a szakkörökön feldolgozott feladatokat, módszertani útmutatóval együtt.

A gimnáziumban meghívott előadókkal sokszor tartanak „rendhagyó" matematikaórát. A tatai matematika szaktábor egyik rendszeres előadója. A megye és a Fazekas Gimnázium (Debrecen) érdeklődő tanulói számára nyári matematikai tábort szervezett.

Deli Lajos volt a bírálója a középiskolai matematikai összefoglaló feladatgyűjtemény megoldáskötetének.

Hosszú ideje fejt ki példamutató és nagyon aktív munkát a matematika népszerűsítése és a matematikaoktatás érdekében.

Kothencz Jánosné 1967-ben a József Attila Tudományegyetemen szerezte meg matematika-fizika szakos tanári diplomáját. Egyévi budapesti tanítás után Szegedre került a jelenlegi Tisza-parti Általános Iskolába, ahol több mint 30 éve végzi lelkesen oktató-nevelő munkáját, melynek során folyamatosan képzi magát.

A szerzett ismereteket szélesebb körben is kamatoztatta és kamatozatja munkája során. A megyei és városi szakmai továbbképzéseken rendszeresen tartott bemutató órákat, módszertani foglalkozásokat matematika szakos kollégái számára, ahol a mindennapi munkához mindig hasznosítható ötleteket, tanácsokat kaptak a résztvevők. Sok-sok egyéni elképzelést, újítást honosított meg iskolájában, ahol az Ő munkája nyomán gazdag hagyományai vannak a tehetségnevelésnek. Célja, hogy tanítványai a matematika tanulása során találkozhassanak a megismerés és felfedezés örömével. Rendkívüli alapossággal végzett felkészítő munkája eredményességét sok-sok tanítványa kimagasló versenyeredménye dicséri, közülük nem egy ma már matematikusként, vagy matematikatanárként tevékenykedik. A jövő pedagógusnemzedékének képzésében is részt vesz. 1983 óta a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékének külső szakvezető tanára. A IV. éves hallgatók jó útravalót, alapos előkészítést kapnak a nála végzett tanítási gyakorlat alatt.

Megalakulása óta egyik legaktívabb tagja a Csongrád Megyei Matematika-fizikatanárok szegedi alkotóműhelyének. E munkacsoportban végzett tevékenységének is köszönhető, hogy Csongrád megyében a megyei szervezésű matematikaversenyek olyan népszerűek az általános iskolások körében. A megyei versenybizottság egyik legalaposabb résztvevője. Hódmezővásárhelyen és környékén Ő vezeti a versenybizottságot, őt bízták meg a versenyfeladatok összeállításával. A Csongrád megyében megjelenő szakfolyóiratokban publikált. A pedagógus munkát élethivatásnak tekinti. Kollégái elismerik, becsülik következetességét.

Igazi alkotó pedagógus. Iskolájában „Vezető Pedagógus" minősítést kapott. 1982-ben „Kiváló Munkáért" kitüntetésben részesült.

Nagy Józsefné tanítói diplomáját 1958-ban szerezte Egerben, több évtizedes tapasztalattal rendelkező, szakmailag igen jól felkészült tanító, pályáját Mátraderecskén kezdte, majd 1969-től a FPI gyakorlóiskolájában tanított. A kisiskolás korosztály oktatását diplomaszerzés óta hozzáértéssel, gyermekszeretettel végzi.

Érdeklődő, nyitott, magát folyamatosan képző, biztos háttértudással rendelkező pedagógus.

A matematika tanításával pályakezdése óta kiemelten foglalkozik. A logikus gondolkodás fejlesztésében igen szép eredményeket ért el tanítványai körében. 1978-tól, mint gyakorló iskolai nevelő tanító, folyamatosan részt vett a pedagógusok felkészítésében, az új matematika tanterv terjesztésében. Bemutatóóráin a matematikai tanításának korszerű módszereit alkalmazta, így többszóz tanítót indított el a szemléletváltás útján.

Kiemelkedő munkát végzett a TIT KMBK szakkörök vezetésében, a matematika iránt érdeklődő tanulók fejlesztésében. A TIT felkérésére a 3–4. osztályos szakköri füzetek és módszertani útmutatók egyik szerzője. Ezek mellett mindig nagy gondot fordított a matematikából gyengébb tanulók felzárkóztatására.

Szakértelmére matematika mérési anyagok készítésében, taneszközök lektorálásában a mai napig számít a Fővárosi Pedagógiai Intézet.

Két évvel ezelőtt nyugdíjba vonult. A gyermekekkel való foglalkozást azonban nem adta fel. A Napklub Alapítvány szervezésében hátrányos helyzetű kisiskolások napi, iskolai felkészítését végzi, különös tekintettel a matematikai képességek fejlesztésére.

A matematikával való elkötelezettségét s hozzáértését mutatja az is, hogy évek óta szakértőként vesz részt a Kalmár László matematikai versenyen, mint zsűritag.

Peresztegi László 1970-ben végzett matematika-fizika szakon az ELTE TTK-n. 1970-től folyamatosan a Szombathelyi Nagy Lajos Gimnázium tanára.

1987-től matematikai munkaközösség-vezető. Iskolájában sikerrel megújítja a szakköri tevékenységet, amiben folyamatosan, sikeresen vesz részt maga is. 1988-tól a város általános iskolásai (7–8. osztályosak) számára tartott foglalkozásokat. Kiemelten szorgalmazza a KöMaL gyakorlatainak, feladatainak megoldását. Az egy tanulóra jutó átlagpontszám alapján jó az iskola helyezése.

1992-ben II. díjat nyert a régió középiskolai tanárai számára kiírt többfordulós matematikai feladatmegoldó versenyen. 1992-től a Vas megyei matematikai versenyfelkészítő szakkört vezeti. Megszállottan gyűjti a nehéz feladatokat. 1992-ben a Soproni Regionális Matematika Konferencián előadást tartott „Érdekes szakköri feladatok" címmel. 1993-ban az Erlangeni Matematikai Intézetben tartott előadást „Magyar középiskolai versenyfeladatok" címmel. A megye matematikatanárai számára rendezett klubfoglalkozások rendszeres közreműködője. 1995 óta a Vas megyei Pedagógiai Intézet megbízásából szaktanácsadóként tevékenykedik, ezt a munkáját is igen lelkiismeretesen végzi.

Különös hangsúlyt fektet az Országos Tanulmányi Versenyen matematikából résztvevők felkészítésére. Tanítványai, szakkörösei számos jó helyezést értek el a KöMaL pontversenyében, az OKTV, Arany Dániel, Kenguru, Szőkefalvi, Zrínyi-versenyeken.

1997-ben az OKTV matematikai versenybizottságok javaslatára, diákjai évek óta tartó sikeres felkészítéséért és versenyeredményeiért Oktatási Miniszteri elismerésben részesült.

c) Grünwald Géza-emlékdíj

Az 1997. évi díjban Csizmadia György, Hajdú Lajos, Morvai Gusztáv és Nagy Gábor részesült

Indoklás

Csizmadia György 1991-ben szerzett matematikus diplomát az ELTE-n. Már hallgató korában megoldott egy Ramsey-típusú kérdést, és azóta nemzetközi visszhangot kiváltó szép eredményeket ért el a kombinatorikus geometriában.

Hajdú Lajos 1992-ben végzett a KLTE matematikus szakán. Értékes eredményeket ért el Turán Pál egy irreducibilis polinomokra vonatkozó problémájával kapcsolatban, kombinatorikus egyenleteket oldott meg és effektív eredményeket ért el elliptikus és szuperelliptikus egyenletek megoldására vonatkozólag.

Morvai Gusztáv a BME-n szerzett villamosmérnöki oklevelet 1991-ben és 1996-ban matematikából PhD-t. Kutatási területe a nemparaméteres sűrűségfüggvények és regresszió függvények becslése, ahol abban az esetben ért el eredményeket, amikor a regressziós függvény már nem becsülhető univerzálisan az ergodikus mintából.

Nagy Gábor 1995-ben végzett a JATE matematikus szakán, és a Geometriai Tanszék tanársegédje. Fő erőssége a geometriai és algebrai technikák kombinálása, melynek révén tisztán geometriai tételeket is tovább tudott fejleszteni. Eredményei hurokosztályokhoz tartozó hálózatok automorfizmuscsoportjára vonatkoznak.

Mind a négy díjban részesített fiatal kutató számos publikációt készített és megjelent a tudományos élet nemzetközi színterén.

d) Farkas Gyula-emlékdíj

1997-ben 3 fiatal matematikus nyerte el a Farkas Gyula-emlékdíjat: Almási Béla adjunktus (Kossuth Lajos Tudományegyetem, Matematikai és Informatikai Intézet Információtechnológia Tanszék),

Békési József adjunktus (Juhász Gyula Tanárképző Főiskola, Számítástechnikai Tanszék) és

Mészáros Csaba tudományos munkatárs (MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratórium).

Indoklás

Almási Béla 1966-ban született. 1989-ben a KLTE matematikus szakán szerzett diplomát. 1995-ben védte meg egyetemi doktori értekezését. Kutatási területe elsősorban a számítógép-hálózatok sztochasztikus modellezése. Vizsgálatai a meghibásodó számítógéprendszerek hatékonyságának és megbízhatóságának elemzésére irányulnak. E tárgykörben elért eredményeiről eddig 6 dolgozata jelent meg különböző folyóiratokban. Számos konferencián is beszámolt eredményeiről. Tudományos publikációk mellett igen hasznos kézikönyveket, magyar nyelvű leírásokat, oktatási segédanyagokat is készített. 1992-ben a paderborni egyetemen volt vendégkutató.

Békési József 1963-ban született, 1987-ben a József Attila Tudományegyetemen szerzett matematikusi diplomát. Idén védte meg PhD értekezését. Kutatási területei a döntéselmélet, és a kombinatorikus optimalizálás. Eredményei egy része adattömörítési kérdésekkel kapcsolatos, ebben a témakörben sikerült több nyitott kérdést is megoldania. Egy másik sikeres területe a kombinatorikus optimalizáláson belüli ládapakolás problémaköre, különböző heurisztikus algoritmusok viselkedésének vizsgálata. Eddig 4 dolgozata jelent meg igen rangos folyóiratokban. Eredményeiről már több konferencián és külföldi egyetemen tartott előadást, 1997-ben 2 hónapig a TU Graz vendégkutatója volt.

Mészáros Csaba 1967-ben született, 1991-ben az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett matematikus diplomát. 1996-ban szerzett PhD fokozatot. Kutatási területe az optimalizálás. A belső pontos algoritmusok hatékony implementációjának kérdéseit, alkalmazásait vizsgálja. Fő eredménye a jelenlegi implementációs technológiákon túlmutató eljárások elméleti kidolgozása és ezek vizsgálata a gyakorlatban. Elért eredményeinek elismeréseként felkért társszerzője a Kluwer Academic Publishers gondozásában megjelent „Interior Point Methods of Mathematical Programming" című kötetnek. A SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratóriumának tagjaként résztvevője döntéstámogató rendszerek kutatásának és fejlesztésének. Tevékenységét ezen a területen is több alkalmazás ill. publikáció jelzi.

e) Rényi Kató-emlékdíj

A Rényi Kató-díj *I. fokozatában* részesült *Pete Gábor,* a JATE IV. éves hallgatója, aki egy sakktáblára vonatkozó ismert feladatot általánosít, vizsgálja annak többdimenziós és véletlen variánsait is. Egy dolgozata a „Random Structures and Applications"-ba lett benyújtva, 3 további a „Polygon"-ban jelent meg, illetve kéziratban van.

Szintén I. fokozatban részesült *Szegedy Balázs,* az ELTE V. éves hallgatója. Szegedy a véges csoportok elméletével foglalkozik. A „Journal of Algebra"-ban megjelent cikke M. Gech egy mátrixcsoportok reprezentációjára vonatkozó problémáját oldja meg. Egy publikálatlan cikke klasszikus csoportok Sylow részcsoportjaival foglalkozik.

A Rényi Kató-díj *II. fokozatában* részesült *Horváth Márta,* a BME végzett hallgatója. Horváth Márta a statisztikus alakfelismeréssel, az empirikus hibaminimalizáláson alapuló módszerekkel foglalkozik. A Vapnik–Cervonenkis dimenzió módosításával olyan dimenziófogalmat vezetett be, amely jobban illeszkedik az alakfelismerés feladatához.

f) Patai László-díj

Az 1997. évi díjat *Csörnyei Marianna,* az ELTE IV. éves matematikus szakos hallgatója kapta.

Indoklás

Csörnyei Marianna az egyik legkiválóbb matematikushallgatónk az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. Középiskolás kora óta a matematikai versenyek ismert és sikeres résztvevője.

1993-ban az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen I. helyezést ért el, ugyanez évben a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián aranyérmet szerzett.

1994-ben az Olimpián ezüstérmes, és a Schweitzer Miklós-emlékversenyen III. díjas.

1995-ben a Schweitzer-versenyen megint III. díjat szerzett.

1996-ban egyedüli első díjasként megnyerte a Schweitzer Miklós-emlékversenyt.

Csörnyei Marianna az egyetemi tanulmányait is lelkiismeretesen, tehetségéhez méltó kiváló eredményekkel végezte, tanulmányai mellett gyakorlatvezetést is vállalt az ELTE TTK Analízis Tanszéken.

1996-ban két diákköri pályázatot is készített, melyekkel sikeresen szerepelt az idei Országos Tudományos Diákköri Konferencián. Lelkes résztvevője és rendszeres előadója az egyetemi valós függvénytani szemináriumnak.

Hat angol nyelvű dolgozatot írt, melyből 1997-ig egy már megjelent, kettőt közlésre elfogadtak, további hármat pedig különböző szaklapokhoz közlésre benyújtott.

Csörnyei Marianna a matematika (valós függvénytan) aktív és sikeres kutatója, akinek a matematika természetes életeleme, tehetsége és eddigi eredményei alapján a magyar matematika egyik legnagyobb ígérete.

Az 1997. évi Schweitzer Miklós Matematikai-emlékverseny eredménye:

I díjas: *Szegedy Balázs,* az ELTE V. éves hallgatója,

II. díjas: *Frenkel Péter,* az ELTE I. éves hallgatója,

Pap Gyula, az ELTE I. éves hallgatója,

III. díjas: *Braun Gábor,* az ELTE I. éves hallgatója,

Kálmán Tamás, az ELTE V. éves hallgatója,

Matolcsi Máté, az ELTE V. éves hallgatója,

dicséretben részesült: *Timár Ádám,* a JATE III. éves hallgatója,

különdicséretben részesült: *Bérczi Gergely,* a szegedi Ságvári Endre Gimnázium 12. oszt. tanulója.

II/1. Az 1997. évi nagyrendezvényekről

a) Rátz László vándorgyűlés(Nyíregyháza, július 1–4., résztvevők száma: 456 fő, közülük határainkon túlról 32-en érkeztek.)

A július 1-jei plenáris ülésen Fábiánné Gyimesi Lívia és Mérő László tartottak előadást, ekkor adtuk át az 1998. évi Beke Manó-emlékdíjakat is.

A vándorgyűlés, a szokásoknak megfelelően július 2–4. között szekcióüléseken folytatta munkáját. Igyekeztünk előre összegyűjteni minél több előadás kivonatát, hogy ezt kiosztva megkönnyítsük a szekciók közötti választást.

Mielőtt részletesen végigkövetnénk az egyes szekciók munkáját, szeretnénk megjegyezni, hogy visszajelzések alapján szakmailag és szervezésileg is kiemelkedő sikerű volt a rendezvény.

Az alsó tagozatos szekcióban, a szokásoknak megfelelően nem csak feladatmegoldásokat hallhattak a résztvevők, hanem módszertani ötleteket, gyakorlatban hasznosítható metódusokat is kaptak. Közvélemény-kutatás alapján a szekció legjobban tetszett előadásai a Székely Balázsné és Török Tamás által tartottak voltak.

A felső tagozatban különösen a feladatmegoldó szemináriumok (Deli Lajos, Kubatov Antal és Mészáros József) munkáját dicsérték a résztvevők; az e szekcióban elhangzottak közül Fazakas Tünde, Kiss Sándor és Móra Xavér előadásai nyerték el leginkább a hallgatóság tetszését. A középiskolai szekcióban is a feladatmegoldó szemináriumok (Mihályi Gyula, Peresztegi László, Veres Pál) voltak a leglátogatottabbak. A szekció előadásai közül a legnagyobb tetszést Csorba Ferenc, Fazakas Tünde, Filep László és Surányi László előadása aratta.

A felsőoktatási ankét előadásain – többek között – szó esett a tanártovábbképzésről és a tervezett didaktikai PhD képzésről is. A szekcióüléseket jól egészítették ki a különböző kiállítások és könyvárusítások (CALIBRA, Mozaik, Műszaki Kiadó, Tankönyvkiadó, TypoTeX). A néhány éves gyakorlatnak megfelelően péntek délutántól szombat délig a MATKAPOCS rendezvényei zajlottak 37 fő részvételével.

b) „Dimensions and Dynamics" konferencia (Miskolc, július 20–24., résztvevők száma 36 fő; 10 országból)

A konferencián részt vett a témakör legnevesebb képviselői közül: R. D. Mauldin (USA), K. I. Falconar (GB), P. Mattila (SF), B. Solomyak (USA), M. Urbanski (USA), M. Zahle (D). Mind a fenti személyek, mind a többi résztvevő a konferenciát nagyon sikeresnek tartotta, amit részben szóban, részben a konferencia óta küldött email-jeikben fejeztek ki. A konferencia szakmai szempontból azért volt fontos, mert egyrészt Miskolcon a témában dolgozó fiatalok (Kovács Béla, Körei Attila) megismerkedhettek a téma legnevesebb képviselőivel, másrészt azon magyar matematikusok, akik nem ezzel a témával foglalkoznak, de a kutatási területük érinti a konferencia témáját, szintén kapcsolatot teremthettek ezen a területen dolgozó legfontosabb emberek egy jelentős részével.

Minthogy a konferencia témája a dimenzióelmélet és dinamikai rendszerek elmélete fiatal kutatási téma, a miskolci konferencia volt a második ebbe a témába vágó konferencia a világon (nem számítva helyi jellegű kisebb összejöveteleket).

c) **8. Nemzetközi Topológia Konferencia** (Gyula, augusztus 9–15., résztvevők száma 62 fő; 23 országból).

A rendezvénynek az Erkel Ferenc Gimnázium adott otthont, a szó átvitt és tényleges értelmében egyaránt.

Annak ellenére, hogy Budapesten a rendezvénnyel egyidőben kéthetes nyári iskola zajlott a téma egy részét lefedve, a klasszikus topológia alábbi nagynevű képviselői tartottak előadást:

A. Arhangelskii – On dense subspaces and normality, an application, some open problems

Z. Balogh – Dowker spaces in the 90's

G. Gruenhage – More on alfa spaces

J. Jaworowski – Free involutions and circle actions in Lens spaces

K. Kunen – Bohr topologies

S. Mardesic – Shape theory and its applications.

A konferencián elhangzott előadások lektorált változatát a Topology and Its Applications c. folyóirat közli.

2. Az 1998. évi társulati díjak odaítéléséről

a) Szele Tibor-emlékérem

Az 1998. évi Szele Tibor-emlékérmet *Tusnády Gábor* nyerte el.

Tusnády Gábor 1941-ben született. 1964-ben végezett matematikusként, 1965 óta az MTA Matematikai Kutató Intézetében a Matematikai Statisztikai Osztályon dolgozik.

Az egyetemi doktori címet 1972-ben szerezte meg, ezután 1973-ban nyolc hónapot ösztöndíjasként a kanadai Kingston városkában dolgozott D. G. Watts irányítása alatt. Kandidátusi fokozatot 1979-ban szerzett.

1976-ban meghívott előadó volt Grenoble-ban az European Meeting of Statisticians konferencián. 1978-ban az MT Akadémia neki ítélte az Erdős Pál-díjat. 1980 és 1984 között tagja volt a Bernoulli Society regionális bizottságának.

1965 és 1982 között a Középiskolai Matematikai Lapok, 1983 és 1985 között a The Annals of Statistics, 1983 és 1991 között a Probability Theory and Related Fields szerkesztésében vett részt.

1966 óta dolgozik együtt Czeizel Endrével a veleszületett rendellenességek statisztikai vizsgálatában. 1982 óta dolgozik az Országos Onkológiai Intézetben, témája a patológiai vizsgálatok statisztikai kiértékelése és immunológiai folyamatok modellezése. 1988 óta foglalkozik biztosításmatematikával, elkészítette a magyar népesség számának előrejelzését 2050-ig. Tanácsadó tagja a Nyugdíjbiztosítási Önkormányzat Távlati Fejlesztési Bizottságának.

b) Beke Manó-emlékdíj

1998-ban a Beke Manó-emlékdíj I. fokozatát

Békefi Zsuzsa, a veszprémi Lovassy László Gimnázium tanára;

a Beke Manó-emlékdíj II. fokozatát

Cselyuszka Antalné, a székesfehérvári Hétvezér Általános Iskola tanára,

Csordás Mihály, aki jelenleg a kecskeméti Berkes Ferenc Szakközépiskolában tanít, korábban a Zrínyi Ilona Általános Iskola tanára volt,

Doleszák Magdolna, a Rátkai Általános Iskola tanára,

Freller Miklós, a dombóvári Illyés Gyula Gimnázium tanára,

Róka Sándor, a nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskola docense

és

Szilágyiné Oravecz Márta, a Fővárosi Pedagógiai Intézet vezető tanítója kapja.

Indoklás

Békefi Zsuzsa az ELTE TTK matematika-fizika szakának elvégzése után tanári pályáját a keszthelyi gimnáziumban kezdte, majd a veszprémi Lovassy László Gimnáziumba került, ahol jelenleg is dolgozik. Itt elsősorban a speciális matematika tagozaton tanít.

Kitűnő szakmai felkészültsége, állandó önképzése, tevékenységének kritikus elemzése, elhivatottsága, lelkiismeretessége és megnyerő egyénisége együttesen magyarázzák a matematikatanításban elért kiváló eredményeit.

Széles körben ismertté tették őt a matematika tagozatos osztályok tanárainak tartott bemutató órái. Több mint 20 éve tagja az országos egyetemi írásbeli felvételi vizsgabizottságnak. Lektorálta az Egyetemi Felvételi Feladatok Matematikából c. sorozat köteteit, ezt a munkát a sorozat szerzője, Scharnitzky Viktor, az egyik kötet előszavában külön is nagyra értékelte. Többször szerepelt előadóként a TIT Kis Matematikusok Baráti Köre mozgalmának országos tanári rendezvényein. Sok éve rendszeresen tart megyei előkészítő és tehetséggondozó szakköröket. Részt vesz Veszprém megyében a tanártovábbképzésben is. Gráfelmélet példatárat állított össze, amely a Veszprém megyei Pedagógiai Intézet gondozásában jelent meg.

Hosszú éveken keresztül a BJMT Oktatási Szakosztályának alelnökeként, majd elnökeként kiemelkedő munkát végzett a Rátz László Vándorgyűlések programjainak kialakításában és megszervezésében. A szakosztály munkájának irányítását töretlen lelkesedéssel, igen sok ötlettel és új, hasznos kezdeményezésekkel végezte egészen 1996-ig, amikor megszaporodott iskolai feladatai miatt már nem tudta tovább vállalni ezt a munkát. Iskolájában a pedagógiai munkaterv elkészítése mellett kidolgozta az ott indított hatosztályos gimnázium matematika tantervét és irányította az ezzel kapcsolatos szervező munkákat. 1997-ben figyelemfelhívó, gondolatébresztő tanulmányt írt a tervbe vett kétszintű matematika érettségi vizsga várható eredményeiről az eddigi egységes rendszer tapasztalatai alapján, ezzel is segítve a reform zökkenőmentes életbeléptetését. 1998-ban Brusznyai-díjjal tüntették ki kiváló tanári munkája elismeréseként.

Cselyuszka Antalné matematika-fizika szakos általános iskolai tanár több mint 30 éve dolgozik a pedagógus pályán; 19 évig falusi iskolában tanított matematikát és fizikát, 1982-től a székesfehérvári Hétvezér Általános Iskola tanára. Az 1988/89-es tanévtől elsőként vállalta a városban akkor induló matematika tagozatos ötödik osztály tanítását. Erre tudatosan készült, továbbképzéseken vett részt, és tapasztalatcsere látogatásokat tett az ország számos matematika tagozatos iskolájában.

Cselyuszka Antalné szakmai tudásával és a tanulókkal történő odaadó foglalkozásával sokat tett a gyerekek tehetségének kibontakoztatásáért. Mind az általános tanterv szerint tanuló, mind pedig tagozatos tanítványai között igen sok olyan található, akik általános iskolai versenyeken, majd később a középiskolában és az egyetemen is kiemelkedő teljesítményt nyújtottak a matematika és a természettudományok területén.

Csordás Mihály a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskola elvégzése után főleg általános iskolákban tanított. A 80-as években a kecskeméti Zrínyi Ilona Általános Iskolában ő vezette be a számítástechnika oktatását. A 90-es években elindította, majd országosan is megszervezte az egyre népszerűbb Zrínyi Ilona matematikai versenyt. A Zrínyi-verseny szervezőbizottságának elnöke, továbbá szerkesztője a verseny feladatait és azok megoldásait évente példás gyorsasággal megjelentető kiadványnak. Rendszeres előadója a Mozaik Oktatási Stúdió által szervezett Módszertani Napoknak, és a Rátz László Vándorgyűlésen is vezetett feladatmegoldó szemináriumot. Iskolájában „házi használatú" tantervet dolgozott ki és néhány kollégájával közösen értékes feladatgyűjteményt állított össze. Tanítványai rendre sikeresen szerepelnek a különböző matematikai versenyeken.

Doleszák Magdolna a nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskolán szerzett matematika tanárszakos oklevelet. Hosszú időn keresztül tanított szülőfalujában, Mádon, két évig tanulmányi felügyelőként is tevékenykedett. 1991 óta a Rátkai Általános Iskola tanára.

Önképzéssel, komplex továbbképzésekkel rendszeresen gyarapítja ismereteit. Minden eszközt megragad, hogy a gyerekek számára közelebb hozza, színesebbé és érdekesebbé tegye a matematikát és annak tanulását. A tanulók felzárkóztatására, illetve a tehetségek gondozására speciális fejlesztő feladatsorokat dolgozott ki, egyik fóliasorát megyei újításként is elfogadták. KMBK szakkört vezetett, rendszeresen résztvesz szaktáborok szervezésében és lebonyolításában. Az országos fórumokon felkérésre többször tartott sikeres módszertani előadásokat. Bemutató óráit a kis falvak tanárai mellett az ELTE neves külföldi vendégtanárai is nagyra értékelték.

Freller Miklós matematika-fizika szakos középiskolai tanár 1970 óta tanít a dombóvári Illyés Gyula (korábban Gőgös Ignác) Gimnáziumban. 22 éve vezeti kiválóan és nagy odaadással a Tolna megyei I. és II. osztályos gimnazisták központi szakkörét. A BJMT Tolna Megyei Tagozatának vezetőségi tagja, a középiskolai versenyek felelőse, az Arany Dániel-verseny megyei középbizottságának tagja.

Freller Miklós sokoldalú és nagyhatású tanáregyéniség, mindkét szakját kimagasló szakmai felkészültséggel tanítja. Nevéhez fűződik a Dombóváron működő speciális matematika tagozatos osztályok és a hozzájuk kapcsolódó szakmai rendezvények megszervezése. A megyében rendszeresen tart tanártovábbképzést, ehhez több témakörből igényes feladatsorokat készített. Emellett atom- és magfizikai példatárat állított össze, amely a közeljövőben országos terjesztésben is megjelenik.

Róka Sándor a KLTE-n szerzett matematikusi és matematika tanári diplomát. 3 évig középiskolában tanított, 1985-től dolgozik a Bessenyei György Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékén. 1997-ben lett főiskolai docens. 1983-ban és 1984-ben is 3. díjas lett a BJMT Matematikatanárok Versenyén. 1985-től tart tehetséggondozó városi szakkört. Különböző lapokban 20-nál több tehetséggondozással, szakköri munkával kapcsolatos cikke jelent meg. Megyei matematikaversenyek feladatsorainak összeállítását végzi évek óta. A Rátz László Vándorgyűlésen többször vezetett feladatmegoldó szemináriumot, s gyakran szerepel előadóként tanártovábbképzéseken is. 1992-ben jelent meg az 1000 feladat az elemi matematika köréből c. feladatgyűjteménye. Azóta további könyvei is megjelentek, amelyek szintén a tehetséggondozást segítik.

1990-től kezdve minden tanévben megszervez egy nyolcfordulós feladatmegoldó pontversenyt 10–14 éveseknek. Ezen az országos levelező tehetséggondozó versenyen a résztvevők száma 1000 körül szokott lenni. 1994 őszén beindította az Abacus, Matematikai Lapok 10–14 éveseknek c. lapot, s ettől kezdve az Abacus ad teret a pontversenynek. A lapban fizika, sakk és más rovatok és versenyek is vannak.

Szilágyiné Oravecz Márta a budapesti Tanítóképző Főiskolán szerzett tanítói oklevelet. 1994-ig a XV. kerületi Czabán Samu Általános Iskolában tanított, azóta a Fővárosi Pedagógiai Intézet vezető tanítója. Tanítói munkájának legalapvetőbb vonása a gyerekek okos szeretete, gyermekségük elfogadása és tisztelete. Alapvetően nagy gonddal építi minden tanítványának ismeretrendszerét, fogalmait, fejleszti képességeiket, készségeiket. Nincs olyan növendéke, akiben ne találná meg az értéket, nincs, akiről lemondana.

Társszerzője az 1. és 2. osztályos tankönyvcsaládnak. Több sikeres tanfolyamot vezetett, a Rátz László Vándorgyűlésnek is többször volt előadója. Részt vesz a Budapesti Tanítóképző Főiskola hallgatóinak gyakorlati képzésében. Szakmai igényessége, pszichológiai–pedagógiai–matematikai felkészültsége és színes, egyedülálló módszertani eszköztára nagy hatást gyakorol hallgatóira és kollégáira egyaránt.

c) Grünwald Géza-emlékdíj

A díjat 1998-ban Losonczi Attila, Sziklai Péter és Talata István kapták.

Indoklás

Losonczi Attila a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézetének ösztöndíjas kutatója; 1971-ben született.

Már hallgató korában, majd az ELTE doktori iskolájának látogatása közben is kiterjedt és eredményes kutatómunkát végzett az általános topológia területén, közelebbről a kváziuniform terek elméletében. Eredményeiről nyolc cikket készített; ezek közül egy megjelent, további négy van sajtó alatt, három pedig közlésre benyújtva.

Első két cikke a kváziuniform terek bővítéseivel, pontosabban véges számú új pont hozzávételével előálló bővítéseivel foglalkozik: szükséges és elegendő feltételt fogalmaz meg ilyen bővítés létezésére, és megmutatja, hogy az ilyen bővítések a tartalmazásra nézve hálót alkotnak. Alaposan elemzi az így előálló háló tulajdonságait: fő eredménye szerint izomorfia erejéig jellemezni tudja ezeket a hálókat.

3. dolgozata a szimultán kiterjesztéseknek egy speciális esetét vizsgálja, ti. azt, amikor egy X halmazt két diszjunkt Y és Z részre bontunk, X-en megadunk egy topológiát, Y-on és Z-n egy-egy kváziuniformitást, és ezekhez keresünk kompatibilis kváziuniform kiterjesztést.

4. cikében egy tranzitív kváziuniformitás indukált kváziszomszédságával kompatibilis legdurvább kváziuniformitást szerkeszti meg egy meglepően egyszerű konstrukcióval, s ennek igen érdekes alkalmazásait mutatja be.

5. cikke azt az esetet vizsgálja, amikor egy topológiához található legdurvább kompatibilis kváziuniformitás.

A 6–8. cikkek hallatlanul érdekes, igen ötletes konstrukciókkal igazolható számossági kérdéseket vizsgálnak. A 6. fő eredménye az, hogy egy topológiához vagy csak egyetlen kompatibilis kváziuniformitás található, vagy pedig legalább 2^{2^ω}. Igen érdekesek a vizsgált speciális esetek is. 7. problémája hasonló, de topológia helyett megadott kváziszomszédsággal; itt elsősorban a tranzitivitás feltétele esetén nyerhetők jó eredmények. Végül a 8. egy lokálisan kompakt Hausdorff-tér legdurvább kompatibilis kváziszomszédsága esetén vizsgálja a fenti problémát, és erre ismét a fentiekhez hasonló eredményeket talál.

Losonczi Attila eddigi munkássága bővelkedik nehéz, csak számos meglepő ötlet mozgósításával megoldható problémák felvetésében és eredményes vizsgálatában. Ezek révén a szerző fiatal kora ellenére is elmondható, hogy a kváziuniform tereknek nemzetközileg is elismert, sokat ígérő kutatója.

Sziklai Péter 1968 októberében született. Munkái a véges geometria témakörébe tartoznak. Ezen belül a terület legfrissebb kérdéseivel (magpontok, hézagos polinomok, lefogó ponthalmazok), valamint klasszikus problémákkal (süvegek, karakterisztikával rendelkező síkok) egyaránt foglalkozik. 1998-ig összesen 5 dolgozata jelent meg nemzetközi folyóiratban vagy referált konferencia-kiadványban. Egyet közlésre elfogadott a Discrete Math., egy dolgozatot nyújtott be (a Geom. Dedicatahoz), további két dolgozata van kéziratban. Kandidátusi értekezését 1998 júliusában védte meg.

A magpontok vizsgálata a 80-as években indult meg Blokhuis és Wilbrink rövid frappáns bizonyításával, mellyel megmutatták, hogy ha egy $(q+1)$ pontú $S \subset PG(2,q)$ halmaz legalább q sugársor minden egyenesét a tartótól különböző pontban metszi, akkor S egy egyenes. Később Blokhuis, majd Gács, Sziklai és Szőnyi messzemenően általánosították a magpontok — a fenti tulajdonságú sugársorok tartói — fogalmát a rájuk vonatkozó becslésekkel együtt. Ezekhez a vizsgálatokhoz azóta többen, pl. Simeon Ball is csatlakoztak.

A véges testek kombinatorikai alkalmazásaiban fontos téma a négyzetelemek tulajdonságainak vizsgálata.

Az A. Blokhuisszal közös „Small complete caps on the Klein quadric" Bull. Belg: Math. Soc. Simon Stevin (1998) dolgozat a címnek megfelelően a Klein kvádrika egy tartalmazásra maximális süvegének méretére ad alsó becslést. Az eredmény lényegesen jobb, mint a standard módon kapható.

„Homogeneous planes" J. Geometry 57 (1996), 191–196, valamint a Blokhuisszal közös dolgozatukban a p karakterisztikájú síkokat vizsgálják. Több mint negyven éve sejtik, hogy az ilyen síkok csak testre épített síkok lehetnek. A benyújtott dolgozat megoldja a problémát, ha a sík rendje p^2.

Elmondhatjuk, hogy Sziklai Péter nemzetközileg sokat vizsgált témákban ért el szép eredményeket, melyek rangos nemzetközi folyóiratokban jelentek meg. Különösen kiemelésre méltó a p karakterisztikájú síkokra vonatkozó több mint negyvenéves sejtésnek a $q = p$ esetben való Blokhuisszal közös) bizonyítása.

Talata István 1968. szeptember 24-én született. Tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikus szakán végezte, diplomáját 1993-ban szerezte. További tanulmányait az ELTE doktori iskolájában folytatta Bezdek Károly vezetésével, majd 1996 óta az Auburn University PhD hallgatója.

Talata Istvánnak 1998-ig 6 dolgozata jelent meg vagy van közlésre elfogadva, további hat dolgozata van kéziratban. Matematikai tevékenységének fő területe az elhelyezések és fedések elmélete. Első cikkei a Hadwiger-Levi féle lefedési problémával, illetőleg az ezzel a kérdéssel rokon megvilágítási feladatokkal foglalkoznak. Hadwiger egy máig nyitott sejtése szerint tetszőleges d dimenziós K konvex test lefedhető K-nak legfeljebb 2^d számú kisebb homotetikus példányával, s a 2^d számú példányra csak parallelotóp esetén van szükség. A kérdést vizsgálták különböző speciális testekre. Bezdek Károly és Bisztriczky Tibor bebizonyították a sejtést ciklikus politópok duálisaira. Becslésüket Talata István jelentősen megjavította. Páros dimenzió esetén pontosan meghatározta ezen politotópok Hadwiger fedési számát, páratlan dimenzió esetén pedig aszimptotikusan éles becslést adott rá.

Talata István legjobb erdménye problémájával kapcsolatosak egy $K \subset R^d$ konvex test Hadwiger számára exponenciális alsó korlátot adott. A bizonyítás különleges szépsége, hogy az, meglepő módon, a Milman, Lindenstrauss, Pisier és Bourgain által kifejlesztett geometriai funkcionálanalízis eszközeit használja. Kevésbé látványos, de igen nehéz Talata Istvánnak a Hadwiger számokkal kapcsolatos egy másik eredménye, amelyben meghatározza a tetraéder Hadwiger számát.

Rácsgeometriával foglalkozó szép cikkében konvex testekbe eső rácspontok számára ad alsó becslést a rácsszélesség segítségével. Ez javítja Lovász és Kannan egy tételét.

d) Farkas Gyula-emlékdíj

1998-ban a Farkas Gyula-emlékdíjat Szkaliczki Tibor (MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet, Informatikai Osztály) nyerte el.

Indoklás

Szkaliczki Tibor 1967-ben született. 1993-ban a Budapesti Műszaki Egyetemen, műszaki informatika szakon szerzett diplomát. 1993 és 1996 között ugyanitt volt doktori ösztöndíjas. 1998-ban védte meg PhD értekezését. Kutatási területe a nagybonyolultságú integrált áramkörök (VLSI) huzalozástervezési algoritmusai. A huzalozás terén kitűzhető különböző minimalizálási feladatok bonyolultságával foglalkozik. Fontosabb eredményei azt igazolják, hogy bizonyos ilyen típusú feladatok NP-teljesek. Ezt olyan esetre is sikerült belátnia, amellyel korábban a témakör leghíresebb szakértői is foglalkoztak, eredménytelenül. Más esetben viszont megmutatta, hogy a feladat megoldható polinomiális algoritmussal.

Elért eredményeit a matematikusok és a mérnökök is érdekesnek találták, már az 1997-ben tartott 16. Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpóziumon is hivatkozott rájuk két előadás.

e) Rényi Kató-emlékdíj

A Társulat Elnöksége az alábbi bizottságot hozta létre a díj odaítélésére: Győry Kálmán (elnök), Komjáth Péter (titkár), Király Zoltán, Lippner György, Pollák György, Sebestyén Zoltán, Totik Vilmos.

A bizottság 1998. december 16-i körlevelével az alábbi határozatot hozta:

A Rényi Kató-díjban részesíti *Győry Mátét,* aki idén szerzett diplomát a KLTE-n és jelenleg I. éves PhD hallgató, önálló tudományos munkát IV. éves kora óta végez Molnár Lajos témavezetése mellett. A XXIII. OTDK-n első díjat kapott. Társszerzővel írott 3 közös dolgozata van megjelenés alatt, egy negyedik megjelent. újabb eredményeit leíró cikke van előkészületben. Két nemzetközi konferencián tartott előadást.

f) Patai Alapítvány díja

A díjat odaítélő bizottság úgy határozott, hogy az 1998. évi díjat Győry Máté és Imreh Csanád kapja.

Indoklás

Imreh Csanád 1998-ban végzett matematikus szakon a JATE-n, jelenleg ugyanott PhD ösztöndíjas, de korábbi kutatásai alapján egy féléves meghívást kapott a grazi egyetemre. Négy dolgozata megjelent, további négy dolgozata megjelenés alatt van. Ezek egy része ismeretterjesztő mű, amelyek jelentőségét nem szabad lebecsülni, az utóbbi dolgozatai azonban egy ma sokat kutatott és nagy érdeklődésre számot tartó területhez kötődnek, ezek témája hálózati folyamatok szintézise (PNS probléma). Az általa és társszerzői által vizsgált modell egy speciális kombinatorikus optimalizálási problémához vezet. Mivel a vizsgált probléma NP-teljes, ezért fontos a jól megoldható speciális részosztályok meghatározása. Ezen a területen sikerült több eredményt elérnie, a probléma gráfjára tett megszorításokkal olyan speciális feladatosztályokat tudott meghatározni, amelyek jól megoldhatók.

Imreh Csanád az egyik legszorgalmasabb és legtehetségesebb matematikus hallgatója volt a JATE-nak az elmúlt években. Eddigi munkája alapján messzemenően alkalmas a Patai Alapítvány díjára.

Az 1998. évi Schweitzer Miklós Emlékverseny eredménye:

I. díjas: *Szegedy Balázs,* az ELTE 1998-ban végzett hallgatója,
II. díjas: *Frenkel Péter,* az ELTE II. éves hallgatója,
III. díjas: *Pap Gyula,* az ELTE II. éves hallgatója,
Abért Miklós, az ELTE 1998-ban végzett hallgatója,
dicséretben részesültek: *Mátrai Tamás,* az ELTE II. éves hallgatója,
Pete Gábor, a JATE V. éves hallgatója,
Tímár Ádám, a JATE IV. éves hallgatója,
Juhász András, a Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. IV. oszt. tanulója,
Bérczi Gergely, a JATE I. éves hallgatója,
Kun Gábor, az ELTE I. éves hallgatója,
Braun Gábor, az ELTE II. éves hallgatója,
Lippner Gábor, az ELTE I. éves hallgatója.

FAKTORANALÍZIS

TUSNÁDY GÁBOR

Bevezetés

1965. május elsején léptem be az Intézetbe. Harper Lewis Don't kill a blackbird című könyvének egy kislány a hőse és a mesélője is egyben, ő indítja azzal a könyvet, hogy testvére mellé harmadik játszótársnak egyik nyár elején a krumpliágyasok között felbukkant a szomszédból egy vendég fiú. Az én történetem ugyan nem a belépésemmel kezdődött, de a többit felejtsük el.

Az Óbudai Hajógyárba küldött ki először Rényi ismerkedni a matematika alkalmazásaival. Monáth Lajos mérnök úr volt a partnerem, a gyár áramfogyasztásának az ingadozásait kellet vizsgálnom. Voltak ugyan adatok, de a pontatlanságuk miatt alig lehetett használni azokat. Kerítettem egy stoppert, és magam mértem órákon át a fogyasztásmérő kattanásai között eltelt időt. 1966-ban rövid ideig hetente egy nap az Országos Közegészségügyi Intézetben voltam. Itt sok barátra tettem szert. Koch Sándor doktor úr dodekaéder alakú vírusok kötődését volt képes befolyásolni valami hétköznapi anyag adagolásával, én csak mint egy bűvészinas lehettem jelen, ha Rényivel dolgozott. De amikor Vértes László, a Samu megtalálója az emberi civilizácó fejlődésére felírt univerzális egyenletét szerette volna igazolni a kőbalták átmérőjének eloszlásában tapasztalható változásokkal, Rényi rám bízta a számolásokat. Amit én továbbadtam Rupp Mártának, aki valahol egy zérót O-nak hagyott lyukasztani, és ez egy kis időre megállította a mi fejlődésünket. A tiszta-fejes eredményünket Komlóssal még el tudtuk mondani Rényinek, de a beágyazást már nem.

Egy ember emléke legendák gyűjteménye. Nekem csak egy saját legendám van: Rényi TIT előadását hallgattuk Katóval fejkendős nénikék között. Végül, amikor mindenki elment, Kató cicásan azt mondta Bubának, hogy tudod, abban nem vagyok biztos, hogy amikor hosszasan ecsetelted a Hilbert-tér belső szépségeit, azokat valóban sikerült teljesen világossá tenned minden jelenlevő számára. De amikor láttad az órádon, hogy már csak két perced van, és nemes egyszerűséggel azt mondtad, hogy a Banach-tér ugyanolyan, mint a Hilbert-tér, csak nincsen benne skaláris szorzás, akkor érezni lehetett, hogy a dolog lényegét mindenki megértette.

Minden mérés alapja valamilyen összehasonlítás, egybevetés. Tenyerem ráteszem néhányszor az asztalra, így határozom meg, mekkora terítő kell rá. Adott két számozott, egyforma elemszámú véges pontrendszer a véges dimenziós euklideszi térben. Keressük azt az egybevágóságot, amelyik az egyiket úgy viszi a másik közelébe, hogy az azonos számú pontok távolságainak négyzetösszege minimális legyen. Ez közismert feladat. Kapcsolatban áll azzal a kevésbé közismert feladattal, hogy véges sok vektorhoz keressünk hozzájuk legközelebbi ortonormált rendszert. Ezt nevezhetjük optimális ortonormálásnak. (A vektorok száma nem lehet nagyobb a dimenziónál.) Hasonló vagy kevésbé hasonló dolgok egybevetésének a módja az, hogy megpróbáljuk a dolgokat összeilleszteni, mint egy széttört cserép darabjait. Ha tudni akarjuk, milyen viszonyban áll az ország bányáiban rejlő szénkészlete a hőerőművek igényével, akkor megnézzük, hogy a legolcsóbb szállítás mennyibe kerül. Az, hogy az egyes bányákból hova mennyi szenet szállítunk a kétféle széneloszlás eltérésének a mértéke. Véletlen dolgok eloszlásának az összehasonlításakor a szállítás azt jelenti, hogy a külön-külön definiált véletlen világokat egy közös térbe helyezzük bele. Ezt hívjuk beágyazásnak. A beágyazás számomra legfontosabb kérdése megválaszolatlan. Czeizel Endre vizsgálatainak a kiértékeléséhez kezdtem el a dolgot megfordítani. Eredetileg eloszlások távolságát segített kimérni a beágyazás, lassan jöttem rá, hogy az együttes eloszlás újabb és újabb térbe való vetítése, beágyazása statisztikai diagnosztikára használható. Ez a maximál korreláció utóélete.

A beágyazás

Pethő Bertalan 1970 táján a schisophrén betegeket 7-8 csoportra osztotta, és azt igazolandó, hogy ezek a kezelésben jól használható csoportok, hosszútávú vizsgálatba kezdett. Minden csoportból kiválasztott 40 beteget, ezekhez illesztett kontrollt kerített, és az így kialakuló populáción vagy tízféle pszichológiai tesztet vett fel egy erre a célra szervezett csapattal. A vizsgálatot öt év múlva megismételte, és a kapott adatok kiértékelése volt a doktori dolgozata. Most újra megvizsgálja a populációt. Még csak az adatok előkészítésénél tartunk, de máris szeretnék a dologból valamit látni.

Van mondjuk 500 ember, ezek mindegyikén tíz különböző vizsgálat mindegyikét 1/2 valószínűséggel vagy végrehajtjuk vagy nem. Egy vizsgálathoz körülbelül 30 változó tartozik, amelyeknek vagy maximum tíz különböző értékük lehet (de a különböző értékek száma általában kevesebb, legtöbbször 4), vagy száz-kétszázig futó értékek lehetnek, mint az IQ-nál. Ha csak kevés érték van is, azok is többnyire rendezettek, mintha valamilyen szempontból a bajok számát adnánk meg.

Első ismerkedésül a következőt csinálom. Minden emberhez hozzárendelek két független standard normális eloszlású véletlen számot. Ez az emberek kétdimenziós képe. Innen elindulva két lépést ismételgetek felváltva.

Emberekből változók. Minden egyes vizsgálat minden egyes változójának minden egyes lehetséges értékére veszem azon emberek képének az átlagát, akikre elvégezték azt a vizsgálatot, és akiknek erre a változóra a mondott érték lett a vizsgálat eredménye.

Változókból emberek. Minden egyes ember új képe az illetőn elvégzett vizsgálatokhoz tartozó változók képe átlagának átlaga.

Kétdimenziós kép helyett akárhány dimenziós képet használhatnék, csak hát az ember kétdimenzióban tud rajzolni. Lehetne a kép Hilbert térbeli is, vagy akár Banach térbeli, a fontos az, hogy abban a térben tudjak átlagot számolni. Több dimenzióban az algoritmus az egyes koordinátákon identikus. Nagy baj lenne, ha az eredmény nem lene az. Akkor hát mire jó a több dimenzió? Semmit nem nyerünk, ha nem iktatjuk a lépések közé a Schmidt-ortogonalizációt.

Emberekre veszem az első koordináták átlagát, azt kivonom az emberek első koordinátájából. Aztán veszem az első koordináták négyzetösszegének négyzetgyökét, azzal elosztom az első koordinátákat. Veszem a második koordináták átlagát, azt kivonom az emberek második koordinátájából. Az ortogonalizálás azt jelenti, hogy összegezem a két koordináta szorzatát, ezzel szorzom az első koordinátákat, és ezt a szorzatot kivonom a második koordinátákból. Végül veszem a második koordináták négyzetösszegének négyzetgyökét, azzal elosztom a második koordinátákat. (Ez a lépés persze már nem értelmezhető Banach térben.)

Madárjóslás: nem sért meg aki ezt mondja a dologra. Én szeretem csinálni, fokozatosan tanulgatom kiolvasni a kapott képekből az adatmező struktúráját. Czeizel doktor hipergráfjaiból képezhető clustereket nézegettem eredetileg ezzel a módszerrel. Ha le kell rajzolni egy gráfot, az éleket rugóknak képzelem. Jó lenne, ha lenne fizikai alapja is az algoritmusnak, de a Schmidt-ortogonalizálás miatt nincsen. Simonovits Miklós ezen a ponton a csúcsokra fizikailag értelmezhető külső erőket alkalmaz. Mások egyszerűen hozzárendelnek valamilyen szimmetrikus mátrixot a gráfhoz, és veszik annak a sajátértékeit, sajátvektorait. Nem tudom, irányított gráfokkal lehet-e valamit csinálni. Fák evolúcióját vizsgálva persze ezt az algoritmust is alkalmaztam. Esze ágában se volt a fákat tisztességes fáknak mutatni. Kénytelen voltam nyers erőszakkal lerajzolni a fáimat. Bármennyire is szereti egy anya a gyermekét vagy talán éppen azért ha jő a rabló, segítségül rendőrt hív, nem a gyermekét.

Ideghálózatok körében Teuvo Kohonen SOM algoritmusa emlékeztet az én algoritmusomra. Amikor az első gráfos algoritmust elmondtam Persi Diaconisnak, ő kellő tisztelettel ugyan de szelíden figyelmeztetett arra, hogy illő volna az EM algoritmust ismernem. Aztán Csiszár Imrével új bizonyítást adtunk az algoritmus konvergenciájára, erről Leo Breimannak a saját ACE algoritmusa jutott az eszébe. Eszerint az $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ mérhető terek szorzatán adott P valószínűségi mérték mellett felváltva alkalmazzuk az $(X, \mathcal{A})$-ra, $(Y, \mathcal{B})$-ra való feltételes várható érték képzést. Tehát az "alternating conditional expectation" az én beágyazásom absztrakt változata, de azt nem látjuk, hogy van-e közvetlen kapcsolata az EM konvergenciájának bizonyításához használt váltakozó divergencia vetítéssel. Itt is igaz az, hogy ugyan a világon minden mindennel összefüg, de ugyanazt a dolgot mindenki másként csinálja: nem egyetlen algoritmus van, mert a részletek apró módosítása nagyon eltérő eredményekre vezethet. Ez a mechanikus módszerek híveit elriaszthatja, de szerintem a módszer erejét igazolja.

Szeretik a maximál korreláció számlájára írni, hogy bolhából elefántot csinál: ha valahol a tér valamelyik eldugott sarkában van a változók között egy picike kis egyetértés, azt nagyítja ki. Mi mást tehetne?

Dinamikus faktoranalízis

Ziermann Margit 1975 táján Bánkövi Györggyel és Veliczky Józseffel gazdasági idősorokra vitte át a klasszikus statisztika faktoranalízis módszerét. Eredetileg az az elképzelés, hogy

$$X = AZ + \varepsilon,$$

ahol X és ε n-dimenziós normális eloszlású véletlen vektorok, Z k-dimenziós standard normális változó, A $n \times k$ méretű, ismeretlen konstansokat tartalmazó vektor, Z és ε függetlenek, és ε koordinátái is függetlenek. Ez a modell akkor hatásos, ha k n-hez viszonyítva kicsi, mondjuk $k \approx \sqrt{n}$, ami azt jelenti, hogy az eredeti n-féle adat helyett alkalmasan megválasztott és transzformált $\sqrt{n}$-féle adat is elég. Ez a szemlélet vezetett arra, hogy ha X idősor, akkor koordinátáinak olyan lineáris kombinációját keressük, amelyre a következő két feltétel egyszerre teljesül:

- az új idősorból X jól becsülhető
- az új idősor önmagából jól előrejelezhető.

E két követelmény közül az első felel meg a klasszikus faktoranalízisnek, a második azt tükrözi, hogy ezt idősorokra adaptáljuk. Természetes gondolat ezt úgy fejleszteni tovább, hogy az új idősor is többdimenzós legyen, mondjuk legyen k a dimenziója, ahol k és n viszonya változatlan. Ez az általánosítás vezetett a következő problámára.

A Z probléma

Legyen n pozitív egész, és legyenek $Z_1, \dots, Z_n$ $n \times n$ mértű valós, pozitív szemidefinit mátrixok, melyekre

$$\operatorname{tr}(Z_i) = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

ahol tr a diagonálisbeli elemek összegét jelöli, és legyen

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = I,$$

ahol I az $n \times n$ méretű egységmátrixot jelöli. Ez konvex halmaz, ennek extremálisait keressük. Azt sejtjük, hogy ezek a következőek. Legyen k kisebb mint n és legyen C

$k \times n$ méretű mátrix, melynek a $c_{j,i}$ elemei nem negatív egészek, a sorok összege n, és az oszlopok összege k. Veszünk k alkalmasan választott n-dimenziós ortonormált bázist, és legyen

$$Z_i = \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=S_{j,i-1}+1}^{S_{j,i}} \operatorname{diad}(U_{j,s}),$$

ahol $S_{j,i} = \sum_{t=1}^{j} c_{t,i}$, $\operatorname{diad}(U) = UU^T$, és $U_{j,s}$ a j-edik bázis s-edik eleme. Ez a sejtésünk úgy alakult ki, hogy először azt hittük, $k = 1$ elegendő. Erre volt egy rossz bizonyításunk, amiben Lovász László hibát talált. Ezt követően ifjú Böröczky Károly bizonyította a sejtést $n \leq 3$ mellett, majd $n = 4$ mellett $k = 2$-re találtunk olyan C mátrixot, és hozzá tarozó ortonormált bázist, amelyből a $k = 1$ esethez tartozó konvex burokhoz nem tartozó $Z_1, \ldots, Z_n$ rendszert kapunk.

Sejtésünknek van egy könnyű és egy nehéz fele. A könnyű rész azt tisztázni, hogy adott n-hez milyen nagy k kell. A nehéz azt megmutatni, hogy ha egyesítjük az összes C mátrixhoz és ortonormált bázishoz tartozó $Z_1, \ldots, Z_n$ rendszert, megkapjuk az eredeti halmazt.

Absztrakt faktoranalízis

Legyenek $\big((X_i, \mathcal{A}_i),\ i = 1, \ldots, n\big)$ tetszés szerinti mérhető terek, legyen $(X, \mathcal{A})$ a szorzatuk, és legyen P valószínűségi mérték $(X, \mathcal{A})$ felett. A rendszer faktoranalízise egy olyan $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér, és az $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ terek szorzata felett olyan Q valószínűségi mérték, melyre teljesül, hogy

- Q-nak a $(X, \mathcal{A})$ térre vett vetülete P

- Q szerint Y-ra nézve az $\big((X_i, \mathcal{A}_i), i = 1, \ldots, n\big)$ terek feltételesen függetlenek.

Ha valami eleget tesz ezeknek a feltételeknek, azt hasító beágyazásnak mondjuk.

Talán érthető, miért ezt mondjuk legáltalánosabb faktoranalízisnek. Meglepő, hogy a legegyszerűbb kérdéseket se tudjuk megválaszolni.

Ellenpéldával megmutatható, hogy általában nem feltétlenül létezik minimális hasító beágyazás. De mi a létezés elégséges feltétele?

Igaz-e ez, hogy normális eloszlásra az absztrakt definíció szerint az eredeti modellt kapjuk?

Normális eloszlásra az absztrakt definíció geometriai merőlegességre redukálódik. Van-e itt minimális hasítás? (Egyszer talán találtunk ellenpéldát, de elfeledtük.)

Mi a helyzet, ha az X_i-k végesek? Ez felel meg a veleszületett rendellenességekre alkalmazott rejtett struktúra modellnek, így persze amit akkor kiderítettünk az EM algoritmussal kapcsolatban, az most felhasználható (Pick–Tusnády (1980), Tusnády (1982), Csiszár–Tusnády (1984)) viszont változatlanul nyitott a modellnek az a verziója, amikor Y a kétdimenziós tér, és a feltételes eloszlások logisztikusak.

Más irányú specializálása a modellnek a Boole faktoranalízis. Itt annyit fejlesztettem a modellen, épp az általános modell szellemében, hogy a modell adta biteket még átküldöm egy zajos csatornán.

A circularis dichroismus görbéinek felbontása

A fehérjék ismertté vált térszerkezetei azt mutatják, hogy van bennük néhány jól azonosítható, bizonyos egyszerűsítéssel ismétlődőnek mondható szerkezeti elem. Ezek közül a két legfontosabb az alfa hélix és a béta redő. Az alfa hélix spirál alakú, a béta redő fűrészfog alakú. A poláros fényt ezek a szerkezeti elemek a hullámhossz függvényében jól azonosítható módon forgatják el. Ez a jelenség a circuláris dichroizmus. Egy fehérje elforgatási görbéje a komponenseihez tartozó görbék keveréke. Ezt a görbét sokkal egyszerűbb kimérni mint a térszerkezetet, és ha fel tudjuk bontani a komponenseire, akkor az egyes térformák arányát kapjuk.

Jelöljük a mérésből kapott görbék halmazát $\mathcal{F}$-fel, a komponensek számát k-val, az egyes komponenseket $g_1, \ldots, g_k$-val. Az a feladat, hogy adott $\mathcal{F}$-hez és k-hoz keressük azt a $g_1, \ldots, g_k$ függvényhalmazt, amelyre $\sum_{f \in \mathcal{F}} d(f, g_1, \ldots, g_k)$ minimális, ahol $d(f, g_1, \ldots, g_k)$ az f függvénynek a $g_1, \ldots, g_k$ függvények által kifeszített altértől L_2-ben mért távolsága. Ennek a feladatnak ismert a megoldása. Az is ismert, hogy általában csak a $g_1, \ldots, g_k$ függvények altere van egyértelműen meghatározva, maguk a függvények nem. Azt javasoltuk, hogy a függvényeket azáltal tegyük meghatározottá, hogy megköveteljük, hogy az általuk meghatározott szimplex térfogata minimális. Így jutottunk a következő feladatra. Adott a k-dimenziós térben véges sok pont. Keressük a pontokat tartalmazó szimplexek között a minimális térfogatút. Fejes Tóth Gábor ötlete alapján ez a feladat a következő algebrai alakra hozható. Adott egy $k \times n$ méretű C mátrix, amelynek elemei nem negatívak, és az oszlopok összege 1. Megengedett lépés az, hogy az egyik sort elhagyjuk, a többit tetszés szerinti pozitív számokkal megszorozhatjuk arra ügyelvén, hogy a csonka oszlopösszegek ne váljanak 1-nél nagyobbá. Ezután kipótoljuk a kihagyott sor elemeit úgy, hogy az oszlopösszegek újra eggyel legyenek egyenlőek. A megengedett lépéseket tetszés szerinti sorrendben és számban alkalmazhatjuk egymás után. A feladat a közben használt szorzó számok szorzatának a maximalizálása.

Ha rögzítjük az elhagyott sort a szorzók szorzatának maximalizálása az úgy nevezett Bregman-algoritmussal érhető el. Az így kapott komponens görbék jó egyezést mutatnak azoknak a fehérjéknek az eredő görbéivel, amelyekben az egyes szerkezeti elemek tisztán fordulnak elő.

A C mátrix elemei keverési arányok, ezért nem negatívok, és az összegük ezért egy. Ezek a kényszerfeltételek valószínűleg sok más feladatban fellépnek, ahol faktoranalízist alakalmaznak. Számomra nehezen érthető, hogy előttünk mások miért nem ütköztek ebbe. Amit én itt csináltam, az nem sok, csak egy hosszú út első lépése.

Hivatkozások

[1] M. Bolla, Gy. Michaletzky, G. Tusnády and M. Ziermann, Extrema of sums of heterogeneous quadratic forms, *Linear Algebra and Applic.*, **269** (1998), 331–365.

[2] M. Bolla and G. Tusnády, Spectra and optimal partitions of weighted graphs, *Discrete Mathematics,* **128** (1994), 1–20.

[3] L. Breiman and J. H. Friedman, Estimating optimal transformations for multiple regression and correlation, *J. Amer. Stat. Assoc.*, **46** (1985), 580–619.

[4] I. Csiszár and G. Tusnády, Information geometry and alternating minimization procedures, *Statistics and Decissions, Supplement Issue,* **1** (1984), 205–237.

[5] D. Cvetković, M. Doob, I. Gutman and A. Torgašev, *Recent results in the theory of graph spectra,* North-Holland (1988).

[6] A. Czeizel, L. Telegdi and G. Tusnády, *Multiple congenital abnormalities,* Akadémiai Kiadó (1986).

[7] T. Kohonen, *Self-Organizing Maps,* Springer (1995).

[8] J. Komlós, P. Major and G. Tusnády, An approximation of partial sums of independent RV's, and the sample DF. I–II, *Zeitschrifts für Warscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete,* **32** (1975), 111–131, **34** (1976), 33–58.

[9] J. Komlós and G. Tusnády, On sequences of "pure heads", *The Annals of Probability,* **3** (1975), 608–617.

[10] Michaletzky György és Tusnády Gábor, Többdimenziós idősorok állapotteres leírása, *Alkalmazott Matematikai Lapok,* **13** (1987), 231–284.

[11] Gy. Michaletzky and G. Tusnády: Representation of inner products and stochastic realisation, in: *Topics in stochastic systems: Modelling,estimation and adaptive control,* Ed. L. Gerencsér–P. E. Caines, 1991, 79–102.

[12] Monáth Lajos és Tusnády Gábor: A villamosenergia fogyasztás véletlen ingadozásainak matematikai leírása, *Elektrotechnika,* **61** (1968), 209–214.

[13] A. Perczel, M. Hollósi, G. Tusnády and G. D. Fasman: Convex constraint analysis: a natural deconvolution of circular dichroism curves of proteins, *Protein Engineering,* **4** (1991), 669–679.

[14] B. Pethő, J. Tolna and G. Tusnády: Multi-trait-multi-method assessment of predictive variables of outcome in schizophrenia spectrum disorders. A nosological evaluation, *J. Psychiat. Res.*, **15** (1979), 163–174.

[15] R. Pick and G. Tusnády: Decomposition of mixtures, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica,* **15** (1980), 31–37.

[16] M. Rupp and G. Tusnády, Appendix to the paper by L. Vértes „Rates of evolution in palaeolithic technology", *Acta Archaeologica Academiae Scientiarum Hungaricae,* **20** (1968), 17–19.

[17] Tusnády Gábor, Keverékek felbontása, *Matematikai Lapok,* **30** (1982), 59–67.

[18] Tusnády Gábor és Ziermann Margit, *Idősorok analízise,* Műszaki Könyvkiadó (1986).

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Gábor Tusnády: Factor analysis

Following the ideas of Margit Ziermann we developed a generalization of dynamical factor analysis. Given a probability measure in the product of measurable spaces a factor splitting means an embedding of the product space into a larger one having the property that the original component spaces are conditionally independent.

JELENTÉS AZ 1997. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1997. november 7. és 17. között rendezte meg az 1997. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi vagy főiskolai hallgatók, valamint 1997-ben egyetemet illetve főiskolát végzettek vehettek részt.

A verseny megrendezésére a Bolyai János Matematikai Társulat a következő bizottságot jelölte ki: Győry Kálmán (elnök), Gilányi Attila, Hajdu Lajos (titkárok), Arató Mátyás, Bácsó Sándor, Bódi Béla, Brindza Béla, Daróczy Zoltán, Dömösi Pál, Dragálin Albert, Fazekas István, Gaál István, Kormos János, Nagy Péter, Pap Gyula, Páles Zsolt, Pethő Attila, Szabó József, Száz Árpád, Székelyhidi László, Szilasi József, Sztrik János, Tamássy Lajos. A bizottság munkájában Molnár Lajos, továbbá Pap Gyula helyett Ispány Márton is részt vett.

A bizottság 10 feladatot tűzött ki. E feladatokat – sorrendben – Károlyi Gyula, Ruzsa Imre, Brindza Béla, Csákány Béla, Csirmaz László, Totik Vilmos, Páles Zsolt, Molnár Lajos, Szilasi József valamint Tusnády Gábor bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 26 versenyző 97 megoldást nyújtott be, amelyek közül 52 bizonyult teljesnek. A beérkezett megoldások értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta:

I. díjban és 9000 Ft pénzjutalomban részesül *Szegedy Balázs,* az ELTE V. éves hallgatója;

II. díjban és 6000 Ft pénzjutalomban részesül *Frenkel Péter,* az ELTE I. éves hallgatója, *Pap Gyula,* az ELTE I. éves hallgatója;

III. díjban és 4000 Ft pénzjutalomban részesül *Braun Gábor,* az ELTE I. éves hallgatója, *Kálmán Tamás,* az ELTE V. éves hallgatója, *Matolcsi Máté,* az ELTE V. éves hallgatója;

Dicséretben és 2000 Ft pénzjutalomban részesül *Timár Ádám,* az JATE III. éves hallgatója;

Külön dicséretben és 1000 Ft pénzjutalomban részesül *Bérczi Gergely,* a szegedi Ságvári Endre Gimnázium 12. oszt. tanulója.

Indoklás

Szegedy Balázs megoldotta az 1., 2., 3., 4., 5. és 10. feladatot. A 6. feladatra adott megoldása hiányos, a 7. és 8. feladat megoldása során részeredményeket ért el. A versenyzők közül egyedül ő oldotta meg a 2. és 10. feladatot.

Frenkel Péter megoldotta az 1., 3., 4., 5. és 6. feladatot. Az 1. feladatra benyújtott megoldása kiemelkedő.

Pap Gyula megoldotta az 1., 3., 4., 5. és 6. feladatot. A 4. feladatra két elvileg különböző, teljes megoldást adott, a 6. feladatra benyújtott megoldása kiemelkedő.

Braun Gábor megoldotta az 1., 3., 4. és 6. feladatot. A 6. feladatra adott megoldása kiemelkedő.

Kálmán Tamás megoldotta az 1., 4., 5. és 9. feladatot. A 9. feladatra benyújtott megoldása kiemelkedő, a 6. feladatra részmegoldást adott. Egyedül ő oldotta meg a 9. feladatot.

Matolcsi Máté megoldotta az 1., 3., 4., és 5. feladatot, a 6. feladatra adott megoldása hiányos, a 7. feladat megoldása során részeredményeket ért el.

Timár Ádám megoldotta a 4., 5. és 6. feladatot, az 1. feladatra hiányos megoldást adott.

Bérczi Gergely középiskolai tanuló megoldotta a 4. és 5. feladatot.

Az 1997. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Definiáljuk minden k pozitív egész számra gráfoknak egy $\mathcal{G}_k$ osztályát a következő módon. Egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor eleme $\mathcal{G}_k$-nak, ha létezik éleinek olyan $\psi : E \to [k] = \{1, 2, \ldots, k\}$ színezése, hogy a csúcsok tetszőleges $\phi : V \to [k]$ színezése esetén található a gráfnak olyan $e = \{x, y\}$ éle, melyre $\phi(x) = \phi(y) = \psi(e)$. Bizonyítsuk be, hogy léteznek $c_1 < c_2$ pozitív konstansok az alábbi két tulajdonsággal:

(i) minden $\mathcal{G}_k$-beli gráfnak legalább $c_1 k^2$ csúcsa van;

(ii) van $\mathcal{G}_k$-ban olyan gráf, melynek legfeljebb $c_2 k^2$ csúcsa van.

2. Legyen $A = \{1, 4, 6, \ldots\}$ azon n természetes számok sorozata, melyekre n páros számú, $n+1$ pedig páratlan számú prímszám szorzata (az ismétlődő prímeket multiplicitással véve). Bizonyítsuk be, hogy az A elemeinek reciprokaiból képzett sor divergens.

3. Jelölje $f_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ a $\Pi_{j=1}^{n}(X + j - 1)$ polinomot. Mutassuk meg, hogy ha az α és β számokra $f'_{1997}(\alpha) = f'_{1999}(\beta) = 0$, akkor $f_{1997}(\alpha) \neq f_{1999}(\beta)$.

4. Egy $0-1$-mátrix elemi változtatásán egy elemének és vele együtt összes vízszintes, függőleges és átlós szomszédainak (0-ról 1-re vagy 1-ről 0-ra való) megváltoztatását értjük. Zérusmátrixszá alakítható-e minden 1791×1791 típusú $0-1$-mátrix elemi változtatásokkal?

5. Legyen $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$ nullához tartó sorozat. Egy egység oldalú négyzetbe a_1 sugarú köröket teszünk átfedés nélkül egészen addig, míg több már nem fér el. (Korábban letett kört nem szabad elmozdítani.) Ezután a_2 sugarú köröket helyezünk a megmaradt részbe addig, amíg több már nem fér el. Folytassuk ezt az eljárást az $a_3, a_4, \dots$ sugarú körökkel. Mekkora lehet a körök által lefedett rész területe?

6. Legyen κ végtelen számosság és legyenek A, B κ számosságú halmazok. Konstruáljuk meg $f : A \to B$ függvényeknek egy olyan 2^κ számosságú $\mathcal{F}$ családját, hogy akárhogyan választunk véges sok különböző $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ függvényt és tetszőleges $b_1, \dots, b_n \in B$ elemeket, mindig van olyan $a \in A$, amelyre $f_1(a) = b_1$, $\dots$, $f_n(a) = b_n$.

7. Legyen G egy Abel-csoport, $0 \leq \varepsilon < 1$ és $f : G \to \mathbb{R}^n$ egy olyan függvény, amely kielégíti az

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \|f(y)\| \quad (x,y) \in G^2$$

egyenlőtlenséget. Igazoljuk, hogy ekkor léteznek olyan $A : G \to \mathbb{R}^n$ additív és $\varphi : A(G) \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvények, hogy $f = \varphi \circ A$.

8. Legyen H végtelen dimenziós szeparábilis komplex Hilbert-tér és jelölje $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ korlátos lineáris operátorainak algebráját. Tekintsük az

$$l_\infty(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H})) = \{(A_n) \mid A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ (n \in \mathbb{N}), \ \sup_n \|A_n\| < \infty\}$$

és a

$$C(\beta\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H})) = \{f : \beta\mathbb{N} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid f \text{ folytonos a } \mathcal{B}(\mathcal{H})\text{-beli normára nézve}\}$$

algebrákat a pontonkénti műveletekkel és a szuprémumnormával. Mutassuk meg, hogy ezen C^*-algebrák nem izometrikusan izomorfak. (Itt $\beta\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok halmazának Stone–Čech kompaktifikáltját.)

9. Legyen adva egy (M, g) Riemann-sokaság. Terjesszük ki a g metrikus tenzort a TM érintősokaságra a következő előírással: ha $a, b \in T_vTM$ $(v \in T_pM)$, akkor

$$\tilde{g}_v(a,b) := g_p(\dot\alpha(0), \dot\beta(0)) + g_p(D_\alpha X(0), D_\beta Y(0)),$$

ahol α, β olyan M-beli görbék, hogy $\alpha(0) = \beta(0) = p$; X és Y α- illetve β-menti vektormező az $\dot X(0) = a$, $\dot Y(0) = b$ feltétellel; D_α és D_β a Levi-Civita konnexió szerinti, a megfelelő görbék menti kovariáns deriválás operátora. Harmonikus-e az (M, g) Riemann-sokaság energiafüggvénye a $(TM, \tilde{g})$ Riemann-sokaságon?

10. Rendeljünk egy n-dimenziós kocka csúcsaihoz független standard normális eloszlású valószínűségi változókat. Egy csúcsot mondjunk nagyobbnak egy másiknál, ha a hozzárendelt szám nagyobb mint a másikhoz rendelt. Definiáljunk egy bolyongást a csúcsokon a következő szabályok szerint:

a) a kezdőpontot az összes csúcs közül egyenlő valószínűséggel választjuk,

b) ha utunk során olyan pontba jutunk, amelyhez található a vele szomszédos csúcsok között nála nagyobb, ezek közül egyenlő valószínűséggel választjuk a következő pontot,

c) ha ilyen nincs, megállunk.

Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív ε-hoz található olyan K, hogy

$$P(\lambda > K \log n) < \varepsilon$$

teljesül minden $n > 1$ mellett, ahol λ a bolyongás lépéseinek a száma.

A megoldások ismertetése

Az 1. feladat megoldása

Gráfon az alábbiakban egyszerű gráfot értünk. Megmutatjuk, hogy minden G_k-beli gráfnak legalább $2 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) = 2 + \binom{k}{2}$ csúcsa van. (Mivel $\frac{2+\binom{k}{2}}{k^2} \to \frac{1}{2}$, ez bizonyítja, hogy bármely pozitív ε-ra $c_1 = \frac{1}{2} - \varepsilon$ megfelel, ha k elég nagy, illetve $c_1 = \frac{1}{2}\inf\left(1 - \frac{1}{k} + \frac{4}{k^2}\right) \geq \frac{1}{4}$ megfelel minden k-ra).

Teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$-re állításunk igaz, mert egy G_1-beli gráfnak nyilván legalább 2 csúcsa van. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$, és k-nál kisebb egészekre igaz az állítás. Legyen $G \in G_k$, $|V(G)| = n$. Legyen ψ a G-nek egy, a feladat szerinti tulajdonságú élszinezése. G-nek legfeljebb $\binom{n}{2}$ éle van, tehát van olyan szín, mely legfeljebb $\frac{\binom{n}{2}}{k}$ élen szerepel. Feltehetjük, hogy ez a k szín. Legyen H a k színű élek alkotta részgráf. Ekkor $|V(H)| = n$, $|E(H)| \leq \frac{\binom{n}{2}}{k}$. Azt állítjuk, hogy H-ban van $(k-1)$ független pont. Ellenkező esetben ugyanis H-nak legalább annyi éle volna, mint annak a T gráfnak, melyet úgy kapunk, hogy az n pontot a lehető legegyenletesebben $(k-2)$ részre osztjuk, és két pontot pontosan akkor kötünk össze, ha egy osztályban vannak (ez a Turán-tétel klikk helyett antiklikkre fogalmazott változata). Ha T-ben az osztályok elemszáma $a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}$, akkor – felhasználva $\binom{x}{2}$ konvex voltát –

$$|E(T)| = \sum_{i=1}^{k-2} \binom{a_i}{2} \geq (k-2)\binom{\frac{n}{k-2}}{2} = \frac{n(\frac{n}{k-2} - 1)}{2}.$$

Az ellentmondáshoz elég volna megmutatni, hogy ez nagyobb, mint $\frac{\binom{n}{2}}{k}$, azaz, hogy $\frac{n}{k-2} - 1 > \frac{n-1}{k}$. Ez ekvivalens algebrai lépésekkel $n > \binom{k-1}{2}$ alakba írható. Ez viszont következik az indukciós feltevésből, és abból, hogy $G_k \subseteq G_{k-1}$. (Ha ugyanis $G \in G_k$, akkor a G-nek a feladat szerinti k-élszínezésében a k színű éleket $(k-1)$ színűre átfestve a feladat szerinti $(k-1)$-élszínezést kapunk: $\forall\varphi : V \to [k-1]$-re van egy csúcsaival megegyező színű él az eredeti élszínezés szerint, és ez nem lehet k színű, tehát az új színezés szerint is ilyen.)

Ezzel beláttuk, hogy H-ban van $(k-1)$ független pont, legyen egy ilyen $(k-1)$ pontú halmaz A. Ekkor $G-A \in G_{k-1}$. Ha ugyanis ψ-t megszorítjuk $G-A$-ra, akkor $G-A$-nak a feladat szerinti ψ' élszínezését kapjuk $(k-1)$-re: ha volna olyan $\varphi : V(G-A) \to [k-1]$, hogy nincs $\varphi(x) = \varphi(y) = \psi'(e)$-t kielégítő $e = \{x,y\}$ él, akkor ezt a $\varphi(a) = k$ $(a \in A)$ utasítás szerint kiegészítve sem lesz ilyen él G-ben, mert $G-A$-ra ezt feltettük (itt írhatunk ψ' helyett ψ-t, mert $G-A$-ban nincs k színű pont), $G-A$ és A között nem lesz ilyen él, mert $G-A$ pontjai nem k színűek, A pontjai k színűek; és A-n belül sem lesz, mert A független ponthalmaz H-ban, így nincs benne k színű él.

Tehát $G-A \in G_{k-1}$, így $V(G-A) \geq 2 + \binom{k-1}{2}$ (indukciós feltevés), tehát $V(G) \geq 2 + \binom{k-1}{2} + (k-1) = 2 + \binom{k}{2}$, és készen vagyunk.

Megmutatjuk, hogy $c_2 = 4$ megfelelő. A Csebisev-tétel szerint van olyan p prím, hogy $k < p \leq 2k$. Legyen F_p a mod p maradékosztályok teste. Legyen $V(G) = F_p^2$, és $a,b,c,d,i \in F_p$, $a \neq c$. $i \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ esetén húzzunk be (a,b) és (c,d) között egy $(i+1)$ színű élt, ha F_p-ben

$$\frac{d-b}{c-a} = i. \tag{1}$$

Ez a reláció nyilván szimmetrikus az (a,b) és a (c,d) párra; és tranzitív a $V(G)$-n értelmezett „$x = y$ vagy az $\{x,y\}$ él be van húzva $i+1$ színnel" reláció: $d-b = i(c-a)$, $f-d = i(e-c)$ esetén $f-b = i(e-a)$. Tehát az $i+1$ színű élek alkotta részgráf minden komponense teljes és p pontú, mert rögzített a, b, i esetén fussa be c az $F_p \setminus \{a\}$-t; a $p-1$ eset mindegyikében pontosan 1 megoldása van d-re nézve az (1) elsőfokú F_p-beli egyenletnek. Ezért a komponensek száma $\frac{p^2}{p} = p$. Ha φ a pontok egy k-színezése, akkor $p^2 > kp$ miatt van olyan szín, melyet legalább $p+1$-szer használ, tehát az illető szín szerinti komponensek között van olyan C, melyben a színt legalább kétszer használja: $\varphi(x) = \varphi(y)$. A komponens teljes, így $\{x,y\} = e \in E(C)$, és $\psi(e) = \varphi(x) = \varphi(y)$.

Ezzel beláttuk, hogy a fent definiált ψ élszínezés kielégíti a feladat feltételeit. Mivel $|V(G)| = p^2 \leq 4k^2$, ez igazolja állításunkat.

Frenkel Péter megoldása alapján.

A feladatra 13 versenyző nyújtott be dolgozatot. Frenkel Péter megoldása kiemelkedő. Braun Gábor, Kálmán Tamás, Matolcsi Máté, Pap Gyula, Pete Gábor és Szegedy Balázs megoldása teljes. Elekes Márton, Hegedűs Pál, Tichler Krisztián és Timár Ádám részmegoldást adott.

A 2. feladat megoldása

Jelölje $\omega(n)$ az n szám prímosztóinak számát multiplicitással számolva, és legyen $\lambda(n) = (-1)^{\omega(n)}$ a Liouville függvény. λ persze teljesen multiplikatív, azaz mindig $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$, és

$$L(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n) = o(x), \tag{1}$$

ami a prímszámtétellel ekvivalens.

Legyen

$$B = \{n : \lambda(n) \neq \lambda(n+1)\}.$$

Ha

$$B = \{b_1 < b_2 < \ldots\},$$

akkor $A = \{b_1, b_3, b_5, \ldots\}$ minden második B-beli elemet tartalmazza. Így elég belátni, hogy B elemeinek reciprokösszege divergens.

Jelölje M_i a B halmaz elemeinek számát a $J_i = [2^{i-1}, 2^i - 1]$ intervallumban. Állításunk persze ekvivalens azzal, hogy a $\sum M_i/2^i$ sor divergens. Tegyük fel, hogy ez nem így van. Ekkor találunk olyan k számot, hogy

$$\sum_{i=k}^{\infty} M_i/2^i < 1/6. \tag{2}$$

A folytatás alapgondolata a következő. Ha ismerjük $\lambda(n)$ értékeit J_i-ben, akkor ismerjük J_{i+1} páros számain is, sorra az előző intervallum számainak ellentettjei. Ha most $\lambda(n)$ és $\lambda(n+1)$ csak „ritkán" különbözhet, akkor ismerjük J_{i+1} legtöbb páratlan számán is, kevés kivétellel annyi, mint az előző páros számon. Ezt ismételve azt fogjuk kapni, hogy λ értékei lényegében hosszú homogén blokkokból állnak, ami ellentmond (1)-nek.

Pontosabban, legyen

$$S_r = \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \lambda(2^r j) \sum_{i=0}^{2^r-1} \lambda(2^r j + i).$$

Ekkor $S_0 = 2^{k-1}$. Mivel $\lambda(2^{r+1}j) = \lambda(2)\lambda(2^r j) = -\lambda(2^r j)$, ezért

$$\begin{aligned} S_{r+1} - 2S_r &= \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \lambda(2^r j)\left(\sum_{i=0}^{2^{r+1}-1} -\lambda(2^{r+1}j+i) - 2\sum_{i=0}^{2^r-1} \lambda(2^r j + i)\right) = \\ &= \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \lambda(2^r j) \sum_{i=0}^{2^r-1} \big(-\lambda(2^{r+1}j+2i) - \lambda(2^{r+1}j+2i+1) - 2\lambda(2^r j + i)\big). \end{aligned}$$

Ám $\lambda(2^r j + i) = -\lambda(2^{r+1}j + 2i)$, így a fenti összegben a nagy zárójeles tag értéke

$$\lambda(2^{r+1}j + 2i) - \lambda(2^{r+1}j + 2i + 1).$$

Ennek abszolút értéke 2 vagy 0 aszerint, hogy $2^{r+1}j + 2i \in B$ vagy nem. Így tehát

$$|S_{r+1} - 2S_r| \leq 2M_{k+r+1}.$$

Ezt elosztjuk 2^{k+r+1}-nel:

$$\left| \frac{S_{r+1}}{2^{k+r+1}} - \frac{S_r}{2^{k+r}} \right| \leq \frac{M_{k+r+1}}{2^{k+r}}.$$

Ezeket tekintve $r = 0, \ldots, R-1$-re a háromszög-egyenlőtlenség és (2) miatt (és mert $S_0/2^k = 1/2$)

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{S_R}{2^{k+R}} \right| \leq 2(M_{k+1}/2^{k+1} + \cdots) < 1/3. \tag{3}$$

Másrészt fix k mellett $r \to \infty$ esetén (1) miatt

$$S_r = \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \lambda(2^r j)\big(L(2^r(j+1)-1) - L(2^r j - 1)\big) = o(2^r),$$

így nagy R-re (3) nem állhat fenn.

A feladat kitűzőjének megoldása alapján.

A feladatra 8 dolgozat érkezett. Szegedy Balázs megoldása teljes.

A 3. feladat megoldása

Ha p prímszám, akkor a $\mathbb{Z}[X]$ polinomgyűrűben $f_p(X) = X^p - X \pmod p$ és $f_p'(X) \equiv -1 \pmod p$ (ld. pl. Turán Pál, Gyarmati Edit: *Számelmélet,* kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985). Az Eisenstein „kritérium" alkalmazásával adódik, hogy f_p' irreducibilis, tehát az α és β definiáló polinomjai f_{1997}' és f_{1999}', mivel 1997 és 1999 ikerprímek.

Jelölje $\mathbb{K}$ a $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ algebrai számtestet és $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\gamma)$ a $\gamma \in \mathbb{K}$ elem $\mathbb{K}$-ra vonatkozó relatív normáját. A relatív norma multiplikatív, ezért

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}\big(f_{1997}(\alpha)\big) = \Big(\frac{f_{1997}'(0)\dots f_{1997}'(-1996)}{1997^{1997}}\Big)^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}(\alpha)]},$$

továbbá

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}\big(f_{1999}(\beta)\big) = \Big(\frac{f_{1999}'(0)\dots f_{1999}'(-1998)}{1999^{1999}}\Big)^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}(\beta)]},$$

ahol $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}(\alpha)]$ és $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}(\beta)]$ a $\mathbb{K}$ fokszámát jelölik a $\mathbb{Q}(\alpha)$ illetve $\mathbb{Q}(\beta)$ testek felett. A jobboldalon álló törtek $f_p'(X) \equiv -1 \pmod p$ miatt nem egyszerűsíthetőek, így (még) az $f_{1997}(\alpha)$ és $f_{1999}(\beta)$ normái sem lehetnek egyenlőek.

A feladat kitűzőjének megoldása alapján.

A feladatra 10 versenyző nyújtott be megoldást. Braun Gábor, Elekes Márton, Frenkel Péter, Hegedűs Pál, Matolcsi Máté, Pap Gyula és Szegedy Balázs megoldása teljes, Pete Gábor részeredményeket ért el.

A 4. feladat megoldása

I. megoldás. Észrevesszük, hogy *két* elemi változtatás sorrendje közömbös, továbbá ugyanaz az elemi változtatás (azaz a mátrix ugyanazon helyén álló elemnek és szomszédainak megváltoztatása) kétszer végrehajtva a mátrixot nem változtatja (a mondat első része miatt akkor sem, ha ezeket nem közvetlenül egymás után hajtjuk végre). Elemi változtatások minden sorozata helyettesíthető tehát *különböző* elemi átalakítások egy *halmazával,* ennélfogva maga is megadható egy 1791×1791 típusú $0-1$-mátrixszal (a továbbiakban a jelzőket elhagyva röviden: *mátrixszal*), amelyben a (szomszédaikkal együtt) megváltoztatandó elemek helyén 1 áll, másutt 0. Ezért elemi változtatások sorozata helyett beszélhetünk változtatásmátrixról. Azt a mátrixot, amellyé az A mátrixot a B változtatásmátrix változtatja, jelöljük $B(A)$-val. A feladatban szereplő kérdés tehát az, hogy van-e minden A mátrixhoz olyan V_A változtatásmátrix, hogy $V_A(A) = O$, ahol O a zérusmátrix jele. Ámde $V_A(A) = O$ ugyanazt jelenti, mint $V_A(O) = A$, ezért a kérdés az, hogy az összes mátrixok halmazának $\gamma : B \mapsto B(O)$ önmagába való leképezése szürjektív-e, amit a skatulyaelv miatt úgy is kérdezhetünk, hogy γ kölcsönösen egyértelmű-e.

Tegyük fel, hogy nem. Legyenek B_1, B_2 különböző mátrixok, amelyekre $B_1(O) = B_2(O)$. Akkor a B_1 és B_2 egymás utáni végrehajtásával történő változtatássorozat O-t O-ba viszi át; másrészt ennek a változtatássorozatnak az eredménye ugyanaz, mint a $B_1 + B_2 (\neq O)$ mátrixé, ahol $+$ a mod 2 összeadás. Feltevésünkből tehát következik, hogy van olyan C mátrix, amely nem zérusmátrix, és amelyre $C(O) = O$. Nevezzük az ilyet *lusta mátrixnak* (hiszen nem csinál semmit).

Ha van lusta mátrix, akkor van olyan lusta mátrix is, amely a vízszintes középvonalára (azaz a 896-odik sorára) vonatkozóan szimmetrikus. Mert, ha C_1 lusta, de nem ilyen, akkor tükrözzük középvonalára. Kapjuk a C_2 mátrixot, s ekkor $C_1 + C_2$ már a kívánt tulajdonságú lesz. Ugyanezzel a fogással találunk olyan D lusta mátrixot is, amely mindkét középvonalára nézve szimmetrikus.

D mindkét középvonala szükségképpen vagy csupa 0, vagy 110110...011011 alakú. Ellenkező esetben ugyanis $D(O)$ nem lehetne zérusmátrix, mert valamelyik középvonalán lenne 1 (itt felhasználjuk azt, hogy D kétszeres szimmetriája miatt egy középvonal minden helye D azon a középvonalon kívüli 1 elemei közül páros számúval szomszédos, és így $D(O)$ bármelyik középvonalának minden eleme csak D ugyanazon a helyen álló elemétől és annak ugyanazon a középvonalon levő szomszédaitól függ). A második lehetőség azonban nem állhat fenn, mert 1791 nem $3k + 2$ alakú.

Ebből következik, hogy D-nek mind a négy 895×895 típusú sarokalmátrixa is lusta. Ezek ugyanis zérusmátrixot csinálnak az 1791×1791 típusú zérusmátrix megfelelő sarokalmátrixaiból, mégpedig kívülálló elemen végrehajtott elemi változtatások segítsége nélkül (erre kellett a középvonalak „kiürítése"). Van tehát 895×895 típusú lusta mátrix is. Ezt a meggondolást megismételve nyerjük n^2 típusú lusta mátrix létezését az $n = 447, 223, 111, 55, 27, 13$ értékekre, és végül $n = 6$-ra.

Megint a skatulyaelv alapján ez azt jelenti, hogy 6×6 típusú $0-1$-mátrixokra – ezentúl *ezeket* nevezzük röviden mátrixoknak – a $\varphi : B \mapsto B(O)$ leképezés nem szürjektív. Ezt megcáfolnánk, ha minden (i, j) párhoz $(1 \leq i, j \leq 6)$ találnánk olyan B_{ij} mátrixot, amely O-nak egyetlen, mégpedig az i-edik sora j-edik helyén álló elemét változtatja meg (más szóval, amelyre $\varphi(B_{ij})$ éppen az E_{ij} elemi mátrix), mert ekkor ***bármely*** $B = (b_{kl})$ mátrixra

$$\left(\sum_{b_{ij}=1} B_{ij}\right)(O) = B.$$

Az elemi változtatások szimmetrikus volta miatt elegendő, ha az $(i, j) = (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)$ indexpárokhoz találunk ilyen mátrixokat. Erre három lehetséges módszer:

(1) Oldjuk meg a

$$\sum_{r,s=1}^{6} \varphi(E_{rs}) \cdot x_{rs} = E_{ij}$$

lineáris egyenletrendszert a kételemű test felett. Ha x_{rs} máris a megoldásokat jelöli, a $B_{ij} = (x_{rs})$ mátrixra $\varphi(B_{ij}) = B_{ij} = E_{ij}$. Ez nem szép módszer, mert 36 egyenletünk és ugyanannyi ismeretlenünk van, mégpedig hatszor; igaz, a MAPLE másodpercek alatt boldogul vele.

(2) Ugyanezeket a B_{ij} mátrixokat ki is lehet találni (egyszerűek és szépek):

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&1\\ 0&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&1\\ 0&1&1&0&1&1 \end{pmatrix}, \qquad B_{12} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&1 \end{pmatrix},$$

$$B_{13} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad B_{22} = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&1 \end{pmatrix},$$

$$B_{23}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B_{33}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

(3) Tekintsük az $E_{ij}, \varphi(E_{ij}), \varphi^2(E_{ij})\big(=\varphi(\varphi(E_{ij}))\big), \ldots$ mátrixokat. E sorozatban szükségképpen ismétlődés lép fel, s ha az első ismétlődő mátrix nem E_{ij} lenne, akkor φ nem lenne kölcsönösen egyértelmű, ahonnan a feladat kérdésére nemleges válasz következnék. Ám triviális számolással azt kapjuk, hogy a hat megvizsgálandó eset mindegyikében $\varphi^{14}(E_{ij})=E_{ij}$, és $\varphi^k(E_{ij})\neq\varphi^l(E_{ij})$, ha $0\le k<l\le 14$. Innen pedig $B_{ij}=\varphi^{13}(E_{ij})$. (Ha így járunk el, hat helyett csak négy esetet kell megnéznünk, mert $\varphi^2(E_{11})=E_{33}$, s ezért $B_{33}=\varphi(E_{11})$, továbbá $\varphi^{10}(E_{11})$ éppen E_{22} centrális tükrözöttje, s ezért B_{22} a $\varphi^9(E_{11})$ mátrix centrális tükrözöttje.)

A cáfolathoz szükséges mátrixokat előállítottuk, nem létezik tehát 6×6 típusú lusta $0-1$-mátrix. Ezért a feladat kérdésére a válasz *igen.*

A feladat kitűzőjének megoldása alapján.

II. megoldás. Jelölje $M_{1791}(F_2)$ a kételemű test feletti 1791×1791-es mátrixok halmazát, valamint $M_{ij}\in M_{1791}(F_2)$ annak az elemi változtatásnak a mátrixát, amely az i-edik sor j-edik eleméhez, mint megváltoztatandó elemhez tartozik. A feladatban szereplő kérdés ekvivalens azzal, hogy az M_{ij} alakú mátrixok $1\le i,j\le 1791$-re generálják-e az $M_{1791}(F_2)$-t.

Legyen $V=F_2^{(1791)}$ az F_2 feletti 1791 dimenziós vektortér és $A_i\in V$ az a vektor, amelynek i-edik koordinátája és annak szomszédai 1-gyel egyenlőek, a többi koordinátája pedig 0. Legyen

$$\varepsilon_i=\begin{cases}0, & \text{ha } i\equiv 1 \pmod 3),\\ 1 & \text{különben.}\end{cases}$$

Ekkor $Z=\sum\limits_{i=1}^{1791}\varepsilon_i A_i=e_1=(1,0,\ldots,0)$, mivel $3\mid 1791$. Ha $X\in V$ tetszőleges, akkor az A_i-k lineáris kombinációjával megkaphatjuk azt a vektort, amelynek minden koordinátája egyezik X-ével, kivéve esetleg az elsőt. Ezek után Z segítségével X-et is előállíthatjuk. Tehát az A_i vektorok, $i=1,\ldots,1791$-re, generálják V-t.

Az $M_{1j},\ldots,M_{1791j}$ mátrixok (melyekben egymás alatt $j=1$ és 1791-re kettő, különben három egyforma V-beli elem áll) felhasználásával lineárisan kikombinálható minden olyan K_{ij} mátrix ($1\le i,j\le 1791$), melynek i-edik sorának j-edik oszlopában és annak vízszintes szomszédaiban 1 áll, a többi helyen 0. A $K_{i1},\ldots,K_{i1791}$ mátrixok lineáris kombinációjaként pedig előáll minden E_{ij} ($1\le i,j,\le 1791$) elemi mátrix (melyeknek az i-edik sor j-edik eleme 1, többi eleme pedig 0). Felhasználva, hogy az elemi mátrixokkal generálható az $M_{1791}(F_2)$, kapjuk, hogy a feladat kérdésére a válasz *igen.*

Megjegyezzük, hogy a feladat 1791 helyett bármilyen nem $3k+2$ alakú természetes számra átfogalmazható, s a megoldás hasonlóan végezhető.

Pap Gyula és Szegedy Balázs megoldása alapján.

A feladatra 20 dolgozat érkezett. Pap Gyula két, lényegesen különböző teljes megoldást adott. Bérczi Gergely, Binder Tamás, Braun Gábor, Frenkel Péter, Hajdu Sándor Zoltán, Hegedűs Pál, Imreh Csanád, Kálmán Tamás, Lángi Zsolt, Matolcsi Máté, Mátrai Tamás, Mester Péter, Nagy Katalin, Pete Gábor, Szegedy Balázs, Tichler Krisztián és Timár Ádám megoldása teljes. Elekes Márton részmegoldást adott.

Az 5. feladat megoldása

Legyenek a körök a megadott sorrendben $k_1, k_2, \dots$. Ezek közül a_1 sugarú az első n_1. A következő n_2 sugara a_2, stb. Most vegyük az első $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ kört ahogy vannak, a maradék köröket pedig nagyítsuk ki a középpontjukból kétszeresükre. Ezek a körök le kell, hogy fedjék a négyzetet. Ha nem, akkor a négyzetnek van egy le nem fedett P pontja; ez nincs az első $n_1+n_2+\dots+n_k$ körlap egyikén sem, legyen távolsága ezen körlapok mindegyikétől nagyobb, mint a_m $(m > k)$. Most a P körüli a_m sugarú kör a_m-nél nagyobb távolságra van mindegyik a_m sugarú kör középpontjától, hiszen P egyik ilyen kör kétszeresében sincs benne. Ezért a P körüli a_m sugarú kör nem metszi egyik a_m sugarú (és azt megelőző) kört sem. Ez ellentmond annak, hogy addig tettünk a_m sugarú köröket, amig több már nem fér.

Jelölje $t_1, t_2, \dots$ a körök területét. Ekkor $\sum t_i \leq 1$. Ezért a farokösszegek nullához tartanak. Ugyanakkor van végtelen sok m index, hogy $\sum\limits_{i<m} t_i + \sum\limits_{i \geq m} 2t_i \geq 1$, ami csak úgy lehet, hogy $\sum t_i = 1$.

A feladat kitűzőjének megoldása alapján.

A feladatra 21 versenyző nyújtott be dolgozatot. Bérczi Gergely, Elekes Márton, Frenkel Péter, Imreh Csanád, Kálmán Tamás, Lángi Zsolt, Matolcsi Máté, Mátrai Tamás, Pap Gyula, Szabó Szilárd, Szegedy Balázs, és Timár Ádám megoldása teljes. Zuhán Tamás hiányos megoldást, Pete Gábor részmegoldást adott.

A 6. feladat megoldása

Legyen K egy κ számosságú rendszám. Adott $m \in \mathbb{N}$ természetes számra tekintsük a $H_m = K^m \times B^{\binom{\{0,1\}^m}{}}$ halmazt. Ennek számossága: $|H_m| = |K^m| \times \left|B^{\binom{m}{2}}\right| = \kappa \cdot \kappa = \kappa$. Következésképpen $H = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_m$ számossága $|\omega| \cdot \kappa = \kappa$.

Mivel H ekvivalens A-val, elegendő megadnunk a $H \to B$ függvényeknek a feladatban előírt tulajdonságú $\mathcal{F}$ családját. Az $f_g : H \to B$ függvényt minden $g \in \{0,1\}^K$-ra a következőképpen definiáljuk:

$$f_g(h) := x\big(g(k_1), \dots, g(k_m)\big),$$

ahol m-et a $h \in H_m$ reláció definiálja, $(k_1, \dots, k_m)$ jelöli h-nak a K^m-beli, x pedig h-nak a $B^{\binom{\{0,1\}^m}{}}$-beli komponensét. Ha $i = 1, \dots, n$-re a $g_i \in \{0,1\}^K$ transzfinit $0-1$-sorozatok különbözőek és $b_i \in B$, akkor létezik olyan $h \in H$, amelyre $f_{g_i}(h) = b_i$ teljesül. Valóban, $i \neq j$ esetén g_i és g_j legalább egy helyen különbözőek. Tehát megadható olyan $k_1, \dots, k_m \in K$ $\left(m = \binom{n}{2}\right)$ amelyekre g_i és g_j valamelyik k_i helyen különböző értétűek. Most x-et úgy választjuk $B^{\binom{\{0,1\}^m}{}}$-ből, hogy x-nek a $\big(g_i(k_1), \dots, g_i(k_m)\big)$ helyen felvett értéke legyen b_i $(i = 1, \dots, n)$. Ez a választás lehetséges, hiszen a $\big(g_i(k_1), \dots, g_i(k_m)\big)$ és $\big(g_j(k_1), \dots, g_j(k_m)\big)$ $\{0,1\}^m$-beli m-esek különbözőek, ha $i \neq j$. Az x egyéb helyeken felvett értékét tetszőlegesen adjuk meg. Így meghatároztunk olyan $h = \big((k_1, \dots, k_m), x\big) \in H_m$ elemet, amelyre $f_{g_i}(h) = b_i$.

Tehát az $\mathcal{F} = \{f_g \mid g \in \{0,1\}^K\}$ függvénycsalád eleget tesz a feladat követelményének.

Pap Gyula megoldása alapján.

A feladatra 13 dolgozat érkezett. Braun Gábor és Pap Gyula kiemelkedő, Frenkel Péter és Timár Ádám teljes megoldást adott. Matolcsi Máté és Szegedy Balázs megoldása hiányos, Elekes Márton, Hegedűs Pál, Kálmán Tamás, Mester Péter, Pete Gábor és Szováti Éva a feladat megoldása során részeredményeket ért el.

A 7. feladat megoldása

Jelöljük $B(p,r)$-rel a $p \in \mathbb{R}^n$ körüli r sugarú zárt gömböt. Ekkor a feladatbeli egyenlőtlenség ekvivalens az alábbi tartalmazással:

$$(1) \qquad f(x+y) - f(x) \in B\big(f(y), \varepsilon\|f(y)\|\big).$$

Ismeretes, hogy minden Abel-csoport amenábilis (Hewitt–Ross, Abstract Harmonic Analysis), azaz a G-n értelmezett korlátos valós függvények terén létezik transzláció invariáns középérték, azaz egy olyan $M : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, amelyre

$$Mf_t = Mf \quad \text{és} \quad \inf_G f \le Mf \le \sup_G f$$

teljesül, ahol $f_t(x) = f(t+x)$ az f függvény t-vel való eltoltját jelöli.

Ha $f = (f_1, \dots, f_n) : G \to \mathbb{R}^n$ egy vektorértékű függvény, akkor legyen

$$Mf = (Mf_1, \dots, Mf_n).$$

Azonnal látható, hogy M transzláció invariáns lineáris leképezés $\mathcal{B}(G, \mathbb{R}^n)$-ből $\mathbb{R}^n$-be, amely teljesíti még az alábbi középérték tulajdonságot is:

$$Mf \in \overline{\operatorname{conv}} f(G).$$

Az (1) feltétel szerint az $x \to f(x+y) - f(x)$ függvény korlátos, ezért a közepelés az x változóban elvégezhető, és azt kapjuk, hogy

$$(2) \qquad A(y) := M_x\big[f(x+y) - f(x)\big] \in B\big(f(y), \varepsilon\|f(y)\|\big).$$

Megmutatjuk, hogy A additív. Valóban, $y, z \in G$ esetén

$$\begin{aligned} A(y) + A(z) &= M_x\big[f(x+y) - f(x)\big] + M_x\big[f(x+z) - f(x)\big] = \\ &= M_x\big[f(x+z+y) - f(x+z)\big] + M_x\big[f(x+z) - f(x)\big] = \\ &= M_x\big[f(x+z+y) - f(x)\big] = A(y+z). \end{aligned}$$

A (2) reláció azt jelenti, hogy

$$\|A(y) - f(y)\| \le \varepsilon\|f(y)\|.$$

Tehát

$$\big|\|A(y)\| - \|f(y)\|\big| \le \varepsilon\|f(y)\|.$$

Innen kapjuk, hogy

$$(1-\varepsilon)\|f(y)\| \le \|A(y)\| \le (1+\varepsilon)\|f(y)\|.$$

A feladatban szereplő egyenlőtlenségből hasonlóan következik, hogy

$$(1-\varepsilon)\|f(y)\| \le \|f(x+y) - f(x)\| \le (1+\varepsilon)\|f(y)\|.$$

A fenti összefüggések alapján kapjuk, hogy

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|A(y)\| \le \|f(x+y) - f(x)\| \le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\|A(y)\|.$$

Végrehajtva az $y := y - x$ helyettesítést

$$(3) \qquad \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|A(y) - A(x)\| \le \|f(y) - f(x)\| \le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\|A(y) - A(x)\|,$$

s ebből az egyenlőtlenségből világos, hogy $f(x) = f(y)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A(x) = A(y)$. Tehát a

$$\varphi\big(A(x)\big) = f(x) \quad (x \in G)$$

összefüggéssel értelmezett $\varphi : A(G) \to \mathbb{R}^n$ függvény korrektül van meghatározva. A (3) egyenlőtlenségből azonnal adódik, hogy

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|s - t\| \le \|\varphi(s) - \varphi(t)\| \le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\|s - t\|,$$

ami azt mutatja, hogy φ injektív, folytonos és az inverze is folytonos. (Az is látható, hogy a φ függvény maga is eleget tesz egy, a feladatban találhatóhoz hasonló egyenlőtlenségnek.)

A feladat kitűzőjének megoldása alapján.

A feladatra négy dolgozat érkezett: Elekes Márton, Matolcsi Máté, Pete Gábor és Szegedy Balázs részeredményeket ért el a megoldás során.

A 8. feladat megoldása

Azt fogjuk belátni, hogy $C(\beta\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$-nak van olyan nemzérus reprezentációja (*-megőrző multiplikatív lineáris leképezése) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-n, ami eltűnik a minimális projekciók halmazán, míg $\ell_\infty\big(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H})\big)$-nek nem létezik ilyen reprezentációja. Az állítás ebből már azonnal adódik.

Egy C^*-algebra nemzérus p projekcióját (önadjungált idempotensét) minimálisnak nevezzük, ha nem írható fel $p = p_1 + p_2$ alakban, ahol p_1, p_2 nemzérus projekciók, melyekre $p_1p_2 = 0$. Határozzuk meg $C(\beta\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ minimális projekcióit. Tetszőleges $f \in C(\beta\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ projekció esetén f értékei $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-beli projekciók. Ha f, s így $\|f(.)\|$ is eltűnik $\mathbb{N}$-en, akkor a Stone-Čech kompaktifikáció tulajdonságai miatt $f = 0$. Tehát ha $f \neq 0$ projekció $C(\beta\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$-ban, akkor f az $\mathbb{N}$ valamely pontjában egy nemzérus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-beli projekciót vesz fel értékként. Ha f-et megszorozzuk ezen pont karakterisztikus függvényével, akkor projekciót kapunk. Innen már nyilvánvaló módon adódik, hogy ha f minimális projekció, akkor f valamely $\mathbb{N}$-beli pontban egy 1-rangú projekciót vesz fel értékként, $\beta\mathbb{N}$ többi pontjában pedig eltűnik. Az, hogy minden ilyen típusú függvény minimális projekció $C(\beta\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$-ben, világos. Tekintsünk most egy $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ pontot és az $f \mapsto f(p)$ módon definiált leképezését $C(\beta\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$-nak $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-ba. Nyilvánvaló, hogy ez egy nemzérus reprezentáció, ami eltűnik a minimális projekciók halmazán.

Tekintsük most az $\ell_\infty\big(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H})\big)$ algebra esetét. Ezen C^*-algebra minimális projekciói éppen azon sorozatok, melyek egyetlen koordinátája különbözik 0-tól, s ez egy 1-rangú projekció $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-ban. Legyen $\Phi : \ell_\infty\big(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H})\big) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nemzérus reprezentáció, ami eltűnik a minimális projekciókon. Világos, hogy ekkor Φ eltűnik azon kovéges sorozatokon is, melyek nemzérus koordinátái véges rangú operátorok. Legyen (e_n) teljes ortonormált rendszer $\mathcal{H}$-ban és jelölje $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ az ezen bázishoz tartozó unilaterális shift-et. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen P_n az $e_1, \ldots, e_n$ rendszer által generált altérre való ortogonális projekció. Ha $n, m \in \mathbb{N}$, akkor

$$(1) \qquad \Phi(P_n, P_n, P_n, \ldots)\Phi(S, S^2, S^3, \ldots) = \Phi(P_nS, P_nS^2, P_nS^3, \ldots) = 0$$

ugyanis $m \geq n$ esetén $P_nS^m = 0$, míg P_nS^m véges rangú operátor ha $m < n$. Tekintsük most az $A \mapsto \Phi(A, A, A, \ldots)$ leképezését $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-nak önmagába. Világos, hogy ez egy reprezentációja $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-nak $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-n. Mivel $\mathcal{H}$ szeparábilis, egy nevezetes tétel miatt az ilyen reprezentációk mind normálisak (azaz folytonosak az egységgömb gyenge- illetve erős operátor topológiájára vonatkozóan). Lásd pl. R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator*

Algebras, Vol II., Academic Press, 1986, 10.4.14. Corollary a 757. oldalon. Mivel a (P_n) sorozat gyenge-határértéke az I identitás, ezért

$$\lim_n \Phi(P_n, P_n, P_n, \ldots) = \Phi(I, I, I, \ldots)$$

a gyenge operátor topológiában. Az (1) miatt kapjuk, hogy

$$\Phi(S, S^2, S^3 \ldots) = \Phi(I, I, I, \ldots)\Phi(S, S^2, S^3 \ldots) = 0,$$

ahonnan

$$0 = \Phi(S^*, S^{2^*}, S^{3^*}, \ldots)\Phi(S, S^2, S^3, \ldots) = \Phi(I, I, I, \ldots).$$

Ebből adódik, hogy

$$0 = \Phi(I, I, I, \ldots)\Phi(A_1, A_2, A_3, \ldots) = \Phi(A_1, A_2, A_3, \ldots)$$

tetszőleges $(A_1, A_2, A_3, \ldots) \in \ell_\infty\big(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H})\big)$ esetén. A bizonyítás ezzel teljes.

A feladat kitűzőjének megoldása alapján.

A feladatra 5 dolgozat érkezett. Teljes megoldást senki sem adott, Hegedűs Pál megoldása hiányos, Szegedy Balázs értékelhető részeredményeket ért el.

A 9. feladat megoldása

(a) Nézzünk meg először egy nagyon speciális esetet. Tekintsük az $\mathbb{R}^m$ sokaságot ($m \in \mathbb{N}$), ellátva a $\langle\ ,\ \rangle$ kanonikus Riemann-struktúrával (azaz a standard belső szorzattal), s legyen $(e_i)_{i=1}^m$ $\mathbb{R}^m$ szokásos ortonormált bázisa. Erre vonatkozóan a Laplace-operátor a

$$\Delta = \sum_{i=1}^n D_i^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

alakban adható meg ($D_i : f \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \to D_i f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ az i-edik parciális deriválás operátora, amely természetes módon azonosítható e_i-vel). Az energiafüggvény

$$E : v \in \mathbb{R}^m \to E(v) := \|v\|^2 = \langle v, v\rangle.$$

Ennek v-beli gradiense a

$$\operatorname{grad} E(v) = 2v$$

vektor. A gradiens és a derivált közötti jól ismert kapcsolat szerint

$$\forall v, a \in \mathbb{R}^m : E'(v)(a) = \big\langle \operatorname{grad} E(v), a\big\rangle;$$

így speciálisan

$$\forall v = \sum_{i=1}^m v^i e_i : D_i E(v) = E'(v)(e_i) = 2\langle v, e_i\rangle = 2v^i \quad (1 \leq i \leq m).$$

Másképpen írva:

$$e_i(E)(v) = 2v^i,$$

következésképpen

$$e_i^2(E)(v) = 2 \quad (1 \leq i \leq m),$$

s ennélfogva most

$$\Delta E = 2m.$$

Látni fogjuk, hogy ennél több számolás az általános eset elintézéséhez sem szükséges.

(b) Tekintsük ezután az (M, g) Riemann-sokaságot, föltételezve, hogy $\dim M = m \geq 1$. Jelölje $\pi : TM \to M$ az M érintőnyalábját. Az energiafüggvény most az

$$E : TM \to \mathbb{R}, \; v \in T_pM \to E(v) := g_p(v, v) =: \|v\|^2$$

előírás szerint hat. Tetszőleges $v \in TM$ esetén a π leképezés $T_v\pi : T_vTM \to T_{\pi(v)}M$ v-beli érintőleképezése lineáris szürjekció, amelynek nullterét a v-beli *vertikális altér*nek nevezzük és V_vTM-mel jelöljük. Az (M, g) Riemann-sokaság Levi-Civita konnexiójának birtokában megkonstruálható egy $K : TTM \to TM$ ún. *konnektor* (ld. pl. Arthur L. Besse: *Manifolds all of whose Geodesics are Closed,* Springer Verlag, 1978). Tetszőleges $v \in TM$ esetén $K_v : T_vTM \to T_{\pi(v)}M$ ugyancsak lineáris szürjekció, ennek nulltere a $H_vTM := \operatorname{Ker} K_v$ ún. v-beli *horizontális altér*. Fennáll, hogy

$$H_vTM \oplus V_vTM = T_vTM.$$

A $T_v\pi \restriction H_vTM$ és $K_v \restriction V_vTM$ lineáris izomorfizmusok T_pM-re; segítségükkel – $T_{\pi(v)}M$-ről történő visszahúzás („pull-back") révén – euklideszi tér struktúra definiálható H_vTM-en és V_vTM-en. Ilyen módon T_vTM is euklideszi vektortérré tehető azzal a megkötéssel, hogy *H_vTM és V_vTM legyenek ortogonálisak.* Ez az eljárás Riemann-struktúrát származtat a TM érintősokaságon, az ún. Sasaki-metrikát; jelöljük ezt g_s-sel. Egyszerűen átgondolható, hogy *a feladatban megadott $\tilde{g}$ metrikus tenzor éppen a g_s Sasaki-metrika.*

Tetszőleges $v \in TM$ esetén kijelölhető tehát T_vTM-nek egy olyan $(h_1, \ldots, h_m, e_1, \ldots, e_m)$ ortonormált bázisa, hogy $h_i \in H_vTM$, $e_i \in V_vTM$ $(1 \leq i \leq m)$. Az energiafüggvény h_i és e_i szerinti második deriváltjának kiszámításához elegendő a függvényt olyan

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \; \beta_1, \ldots, \beta_m : [0,1] \to TM$$

görbék mentén tekinteni, melyekre

$$\dot{\alpha}_i(0) = h_i, \; \dot{\beta}_i(0) = e_i \quad (1 \leq i \leq m).$$

Ilyen β_i görbéket könnyű megadni. Mivel $V_vTM = T_vT_{\pi(v)}M$, e_i T_pM-beli vektorral azonosítható, s így

$$\beta_i : [0,1] \to TM, \; t \to \beta_i(t) := v + te_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

a kívánt tulajdonságú görbe. Az (a)-ban leírtak figyelembevételével ekkor

$$e_i^2 E = 2 \quad (1 \leq i \leq m) \tag{1}$$

adódik. Alkalmas α_i görbéket úgy lehet előállítani, hogy M-ben p-n átmenő, $T_v\pi(h_i)$ kezdősebességű görbét – például geodetikust – tekintünk, s ennek mentén v-t párhuzamosan eltoljuk. Mivel a párhuzamos eltolások izometriák, E konstans α_i mentén; s ezért

$$h_i^2 E = 0 \quad (1 \leq i \leq m). \tag{2}$$

Az (1) és (2) összefüggések alapján megállapíthatjuk, hogy

$$\forall p \in M : \Delta_p E = 2m \neq 0,$$

következésképpen az (M, g) Riemann-sokaság energiafüggvénye a

$$(TM, \tilde{g}) = (TM, g_s)$$

Riemann-sokaságon bizonyosan *nem harmonikus.*

Megjegyzés. Ismert, hogy ha $(U,\ (u^i)_{i=1}^m)$ térkép az (M,g) Riemann-sokaságon, $f : M \to \mathbb{R}$ pedig sima függvény, akkor

$$\Delta f \restriction U = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u^j} \left(g^{jk} \sqrt{G} \frac{\partial f}{\partial u^k} \right), \tag{3}$$

ahol $(g^{jk}) := (g_{jk})^{-1}$, $G := \det(g_{ij})$, s a kétszer előforduló indexekre összegzés értendő 1-től m-ig. Ez a következő megoldási lehetőségeket kínálja: számítsuk ki g_s komponensfüggvényeit, majd alkalmazzuk – értelemszerűen – (3)-t. Az út járható, de igen komoly technikai nehézségek adódnak, ha alkalmatlan lokális bázisban dolgozunk. Egy „alkalmas" lokális bázist a következőképpen kapunk: Legyen

$$(\pi^{-1}(U),\ (x^i, y^i)_{i=1}^m)$$

az $\left(U,\ (u^i)_{i=1}^m\right)$ térkép által indukált térkép TM-en (ekkor $x^i := u^i \circ \pi$, $y^i := du^i$); legyenek továbbá Γ_{ij}^k a Levi-Civita konnexió komponensfüggvényei az M-en alapulvett térképre vonatkozóan. Ha $\Gamma_i^k := y^j(\Gamma ij^k \circ \pi)$, és

$$h_i := \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_i^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad e_i := \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (1 \le i \le m),$$

akkor $\mathcal{X}(TM)$ $(h_i, e_i)_{i=1}^m$ lokális bázisa „alkalmas" lesz.

Kálmán Tamás megoldása alapján.

A feladatra egyedül Kálmán Tamás nyújtott be dolgozatot. Az általa adott megoldás kiemelkedő.

A 10. feladat megoldása

Először vegyük észre, hogy a feladat megoldása szempontjából nem lényeges, hogy éppen független normális eloszlásokat rendelünk a kocka csúcsaihoz. Valójában arról van szó, hogy vesszük a kocka csúcsainak egy véletlen permutációját az egyenletes eloszlás szerint, és akkor lépünk egy A csúcsból egy vele szomszédosba, ha A korábban szerepel a permutációban, mint az a csúcs, ahova lépünk. Definiáljuk ezután az alábbi új stratégiát, amely ekvivalens azzal, amit a feladat mond. Bolyongjunk úgy a kockán, hogy miután beérünk egy csúcsba egymás után egyenletes eloszlás szerint teszteljük a szomszédos csúcsokat abból a szempontból, egyáltalán mehetünk-e oda, és mindjárt menjünk is abba az első csúcsba, ahova mehetünk anélkül, hogy a többit tesztelnénk. Jegyezzük meg, merre jártunk, és ezeket a csúcsokat már ne teszteljük újra. Utunk során számláljuk a tesztelt csúcsokat elsőnek mondva azt, ahonnan indulunk (noha azt nem teszteljük). Legyen ε_t értéke 1 vagy 0 aszerint, hogy a t-ediknek tesztelt csúcsba mehetünk-e. Ezek a valószínűségi változók függetlennek egymástól, és

$$P(\varepsilon_t = 1) = 1/t$$

teljesül minden t-re, hiszen a csúcsok érték szerinti sorrendje tisztán véletlen, és ezt nem befolyásolja a bolyongási stratégiánk sem. A t-dik tesztelés előtt meglátogatott csúcsok száma

$$\eta_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i,$$

hiszen akkor és csakis akkor lépünk az i-diknek tesztelt csúcsba, ha $\varepsilon_i = 1$. Legyen

$$v_t = \min\{i : i > t,\ \varepsilon_i = 1\},$$

ez független az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ változóktól. Legyen τ az utolsó meglátogatott csúcsig tesztelt csúcsok száma. Ekkor $\lambda = \eta_\tau$, és

$$P(\lambda > T) = EP(\eta_\tau > T \mid \tau) \leq E\big(P(\eta_t > T)I(\tau \leq t) + I(\tau > t)\big) \leq$$
$$\leq P(\eta_t > T) + P(\tau > t)$$

minden (t, T) pár esetén, hiszen rögzített T mellett $P(\eta_t > T)$ t-ben monoton nem csökken. A Markov-egyenlőtlenség miatt a jobboldalon szereplő első valószínűség becsülhető a

$$P(\eta_t > T) \leq \frac{1}{T}E\eta_t = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{i} = \frac{1}{T}(C + \log_2 t)$$

módon, ahol C alkalmasan választott konstans. Másrészt a $\{\tau > t\}$ esemény magával vonja a $\{v_t \leq t + n\}$ eseményt, és

$$P\big(\{v_t > t + n\}\big) \geq P(\varepsilon_{t+i} = 0,\ i = 1, \ldots, n) = \left(1 - \frac{1}{t+n}\right)^n,$$

így

$$P(\tau > t) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{t+n}\right)^n \leq \frac{n}{t+n}.$$

Legyen $T = K\log_2 n$ és $t = Kn$. Ekkor

$$P(\lambda > K\log_2 n) \leq \frac{C + \log_2 K}{K\log_2 n} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} \leq \frac{C + \log_2 K}{K} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1},$$

ahol a jobboldal K alkalmas megválasztásával kisebbé tehető ε-nál. Ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés 1. A megoldásban nem állítottuk, hogy csak akkor állunk meg, ha $v_t > t + n$, csak azt, hogy $v_t > t + n$, esetén már biztosan megállunk. (Tulajdonképpen n helyett eleve mondhatnánk $n - 1$-et, hiszen oda nem akarunk menni, ahonnan jöttünk.)

Megjegyzés 2. Belátható, hogy τ/n-nek van határeloszlása, és ez megegyezik egy, a végtelen számegyenesen értelmezett standard Poisson folyamatban a

$$\min\{x : e^y - e^x > 1\}$$

valószínűségi változó eloszlásával, ahol y az x-től jobbra levő pont, és x a folyamat tetszőleges pontja. Az is belátható, hogy λ-nak a τ-ra vett feltételes határeloszlása τ paraméterű Poisson eloszlás. Így $(\lambda - \log n)/\sqrt{\log n}$ határeloszlása standard normális.

A feladat kitűzőjének megoldása alapján.

A feladatra 2 dolgozat érkezett. Szegedy Balázs megoldása teljes.

JELENTÉS AZ 1998. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

PROKAJ VILMOS

Az 1998-as Schweitzer Miklós-emlékverseny szervezése 1998. szeptember közepén kezdődött el. A verseny lebonyolítására bizottság alakult a következő tagokból: Laczkovich Miklós elnök, Császár Ákos, Fried Ervin, Freud Róbert, Pálfy Péter Pál, Makai Endre, Ruzsa Imre, Michaletzky György, Buczolich Zoltán tagok, Prokaj Vilmos titkár. Meglehetősen rövid idő állt rendelkezésre arra, hogy a feladatjavaslatokat bekérjük. Ennek ellenére szeptember 30-ig igen sok, összesen 35 javaslat érkezett. A versenyfeladatokról a bizottság 1998. október 5-én döntött.

A versenyt 1998. október 16-a és 1998. október 26-a között rendeztük meg. A feladatsor felkerült az Internetre is, így külföldön tanuló magyar diákokhoz is eljuthatott.

Huszonegy versenyző, összesen 73 megoldást küldött be a Bolyai János Matematikai Társulathoz. Az ötödik feladat bizonyult a legnehezebbnek, erre egyetlen egy megoldás érkezett, amely viszont hibás volt. Ugyancsak igen nehéznek bizonyult a negyedik, nyolcadik és tizedik feladat is. A negyedik feladatra egyetlen, hibátlan megoldás, a nyolcadik és tizedik feladatra két-két megoldás érkezett, egy-egy jó és egy-egy hibás. Legtöbben (szám szerint tizenheten) a második feladat megoldásával próbálkoztak. Erre a feladatra tíz helyes, öt részleges és két rossz megoldás született. Sokan foglalkoztak még (tizenhárman) az első feladattal. Erre nyolc helyes, három hiányos és két rossz megoldást küldtek be a versenyzők.

A beérkezett megoldások javítását a bizottság tagjai ill. a feladatok kitűzői végezték. A díjak odaítéléséről a Schweitzer bizottság 1998. december 9-én döntött. A bizottság egyhangúlag úgy határozott, hogy az 1998. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny díjazottai: *Szegedy Balázs* I. díj és 20.000 Ft pénzjutalom, *Frenkel Péter* II. díj és 15.000 Ft pénzjutalom, *Papp Gyula* és *Ábert Miklós* III. díj és 10-10.000 Ft pénzjutalom. Dicséretben részesültek *Mátrai Tamás, Juhász András, Timár Ádám, Pete Gábor, Bérczi Gergely, Kun Gábor, Lippner Gábor, Braun Gábor.*

A döntés indoklásaképpen álljon itt a díjazottak és dicséretben részesültek teljesítménye.

Szegedy Balázs az első, második, harmadik, hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik feladatra nyújtott be megoldást. Megoldásai a nyolcas feladattól eltekintve jók, ebben a feladatban egy olyan részeredményt használt, amit nem igazolt, tehát ez a megoldása hiányos.

Frenkel Péter az első, második, harmadik, negyedik, ötödik, hetedik és kilencedik feladatra nyújtott be megoldást. Az első, második, harmadik és negyedik feladatra adott megoldása jó, a harmadik feladatra adott megoldása kiemelkedő. Az ötödik feladatot nem sikerült helyesen megoldania, a hetedik feladatnál csak a triviális résszel foglakozott. A kilencedik feladat megoldása jó, bár kissé pontatlan.

Pap Gyula az első, második, hatodik, hetedik és kilencedik feladatra nyújtott be megoldást. Az első feladatra adott megoldása jó. A második feladat könnyebbik felével nem foglalkozott. A hatodik feladat megoldása során a kerület és terület hányadosára 800-as felső becslést kapott. A feladatra született helyes megoldások között ez volt a legjobb felső korlát. A hetedik feladat megoldása jó, végül a kilencedik feladathoz jó gondolatot írt le zavarosan.

Abért Miklós az első, második, harmadik, hatodik és hetedik feladatra nyújtott be megoldást. Az első és második feladatra adott megoldása jó, a harmadik feladat lényeges lépését megtalálta az irodalomban. A hatodik feladat megoldása egy könnyen javítható apró hibát tartalmaz, az általa kapott felső becslés a legnagyobb a helyes megoldások között, 10^{15}. A hetedik feladat megoldásában részeredményt ért el.

Juhász András IV. osztályos gimnazista létére három feladatra nyújtott be megoldást. Az első feladatra adott megoldása kiemelkedő. Egyrészt a feladat állítását némiképp általánosította, másrészt az ő megoldása volt a legszabatosabb. A második feladatra adott megoldása jó. A hetedik feladat megoldásában részeredményt ért el. $n \geq 5$-re indukciós bizonyítást ad, de a kezdőlépésről elfeledkezik.

Kun Gábor a második, harmadik, hatodik és hetedik feladatra nyújtott be megoldást. A második feladatra adott megoldása kiemelkedő, bár a leírás kissé pongyola. A harmadik feladat megoldása nem jó. A hatodik feladat megoldása hibás. A hetedik feladatot jól oldotta meg $n > 10$-re. Kiemelendő, hogy az Erdős–Szekeres tétel megkerülésével bizonyítja az állítást, továbbá ez az eredmény erősebb mint a kitűző által korábban ismert állítás.

Braun Gábor a második és kilencedik feladatra adott megoldást. Mindkét megoldása jó.

Lippner Gábor a második és hetedik feladatra nyújtott be megoldást. Mindkét megoldása jó.

Bérczi Gergely az első, második, harmadik, hatodik és hetedik feladatra nyújtott be megoldást. Az első feladatra adott megoldása jó, a második feladat megoldásában kifelejtett egy triviális esetet. A harmadik feladattal kapcsolatban részeredményt sikerült elérnie. A hatodik feladat megoldása hibás. A hetedik feladat megoldásában részeredményt ért el és a megoldás leírása hiányos.

Mátrai Tamás az első, második, harmadik, hatodik és hetedik feladatra nyújtott be megoldást. Az első feladatra adott megoldása jó. A második feladat nehezebbik részére hibás megoldást ad. A harmadik feladat megoldása során kijavítható, de súlyos hibát vétett. A hatodik feladatra adott megoldása hibás. A hetedik feladat megoldása során javítható hibát vétett.

Pete Gábor az első, második, harmadik, nyolcadik, kilencedik és tizedik feladatra adott be megoldást. Az első feladatra adott megoldása hibás. A második feladatra kiemelkedő megoldást adott, de stílusa pongyola. A harmadik feladatra adott megoldása rossz. A nyolcadik feladatra hibás bizonyítást adott. A kilencedik feladattal analóg állítást talált az irodalomban, amely azonban nem fedi le teljes egészében a feladat állítását, így megoldása formálisan hibás. A tizedik feladat állításánál gyengébb és egyszerűbb eredményt igazolt, ezért ez a megoldása nem teljes értékű.

Tímár Ádám az első, második, hetedik és kilencedik feladatra nyújtott be megoldást. Az első feladatra adott megoldása jó. A második feladat megoldása kiemelkedő. A hetedik feladat megoldása sok érdekes elemet is tartalmaz, mégis hibás. A kilencedik feladat megoldása rossz.

A díjak kiosztására 1998. december 15-én került sor.

A bizottság tagjai örvendetesnek tartják, hogy a korábbi évekhez képest növekedett a verseny iránti érdeklődés.

Az 1998. évi Schweitzer Miklós-emlékverseny feladatai és megoldásai

1. *A feladatot javasolta: Hajnal András.* Megadható-e kontinuum sok kontinuum számosságú halmaz úgy, hogy

(i) bármely kettő metszete véges, és

(ii) minden halmaz, amelyik mindegyiket metszi, valamelyiket végtelen halmazban metszi?

2. *A feladatot javasolta: Ruzsa Imre.* Legyen egy f polinomhoz P_f azon n egész számok száma, amelyekre $f(n)$ (akár pozitív, akár negatív) prímszám. Legyen $q_d = \max P_f$, ahol f végigfut a d fokú $\mathbb{Q}$ fölött reducibilis egész együtthatós polinomokon. Bizonyítsuk be, hogy elég nagy d-re $d + 1 \leq q_d \leq d + 2$.

vagy

Tetszőleges f polinomra jelölje P_f azon n egész számok számát, amelyekre $f(n)$ (pozitív) prímszám. Legyen $q_d = \max P_f$, ahol f végigfut a d-edfokú, $\mathbb{Q}$ fölött reducibilis egész együtthatós polinomokon. Bizonyítsuk be, hogy minden $d \geq 2$ számra $q_d = d$.

3. *A feladatot javasolta: Bíró András.* Legyen p prím és $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ a p-edrendű ciklikus csoporton értelmezett komplex értékű függvény. Definiáljuk f Fourier-transzformáltját az

$$\hat{f}(k) = \sum_{l=0}^{p-1} f(l) e^{i2\pi kl/p} \qquad (k \in \mathbb{Z}_p)$$

formulával. Mutassuk meg, hogy ha f és $\hat{f}$ zérushelyeinek együttes száma legalább p, akkor f azonosan nulla.

4. *A feladatot javasolta: Buczolich Zoltán.* Tetszőleges $H \subset \mathbf{R}$ mérhető halmazra definiáljuk az $(a_n(H))$ sorozatot az

$$a_n(H) = \lambda\Big([0,1] \setminus \bigcup_{k=n}^{2n} (H + \log_2 k)\Big)$$

formulával, ahol λ a Lebesgue-mértéket, $\log_2$ pedig a kettes alapú logaritmust jelöli.

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan mérhető, 1 szerint periodikus, nem nulla mértékű $H \subset \mathbf{R}$ halmaz, melyre az $a_n(H)$ sorozat egyetlen l_p térhez sem tartozik $(1 \le p < \infty)$.

Milyen $1 \le p < \infty$ számokra igaz, hogy valahányszor H mérhető 1 szerint periodikus és nem nulla mértékű akkor a hozzátartozó $a_n(H)$ sorozat l_p-beli.

vagy

Létezik-e olyan H mérhető 1-szerint periodikus halmaz, amelyre

$$(a_n(H)) \in c_0 \setminus \cup_{0<p<\infty} l_p?$$

5. *A feladatot javasolta: Halász Gábor.* Legyen K_1 olyan nyílt körlap a komplex síkon, amelynek határa átmegy a -1 és $+1$ pontokon, és legyen K_2 a K_1 tükörképe a valós tengelyre. Legyen továbbá $D_1 = K_1 \cap K_2$, és D_2 a D_1 külseje. Tegyük fel, hogy az $u_1(z)$ függvény harmonikus a D_1 tartományon és folytonos a lezártján, $u_2(z)$ harmonikus D_2-ben (beleértve a ∞-t is) és folytonos a lezártján, továbbá $u_1(z) = u_2(z)$ a D_1 és D_2 tartományok közös határán. Bizonyítandó, hogy ha $u_1(x) \ge 0$ minden $-1 < x < 1$-re, akkor $u_2(x) \ge 0$ minden $x > 1$-re és $x < -1$-re.

6. *A feladatot javasolta: Keleti Tamás.* Legyen U a síkban fekvő, véges sok (nem feltétlenül egyállású és nem feltétlenül diszjunkt) zárt egységnégyzet uniója. Lehet-e U kerületének és területének hányadosa akármilyen nagy?

7. *A feladatot javasolta: Károlyi Gyula.* Legyen P egy $4n$ pontból álló halmaz a síkban úgy, hogy a pontok közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy ha n elég nagy, akkor a következő két állítás ekvivalens.

(i) P felosztható n darab négyelemű részhalmazra úgy, hogy minden egyes részhalmaz egy–egy konvex négyszög csúcsait alkossa.

(ii) P nem bontható fel két, páratlan elemszámú A és B részre úgy, hogy minden olyan konvex négyszögnek, melynek csúcsai P-ből kerülnek ki, mind A-ba, mind B-be páros számú csúcsa essék.

8. *A feladatot javasolta: Juhász István.* Bizonyítandó, hogy ha egy kompakt T_2 tér minden $\aleph_1$ számosságú altere M_1, akkor az egész tér is M_1. (Egy topologikus tér M_1, ha minden pontjának van megszámlálható környezetbázisa.)

9. *A feladatot javasolta: Bognár Mátyás.* Legyen G olyan tartomány (összefüggő nyílt halmaz) az $\mathbf{R}^2$ síkban, amelynek határa lokálisan összefüggő. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G határának minden q pontjához létezik olyan v_q egyszerű ív $\mathbf{R}^2$-ben, amelyre $q \in v_q$ és $v_q \setminus \{q\} \subset G$.

További lehetséges kérdések:

(i) Mutassuk meg, hogy G határának lokális összefüggősége nem helyettesíthető G határának összefüggőségével!

(ii) Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{R}^2$ síkot az $\mathbf{R}^3$ térrel helyettesítjük, akkor az állítás nem marad érvényben!

10. *A feladatot javasolta: Major Péter.* Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, nulla várható értékű valószínűségi változók olyan sorozata, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} E(\xi_n^2) = 0$, továbbá legyen $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$. Jelölje $I(A)$ az A esemény indikátorfüggvényét. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} I\left(\left\{ \max_{1\le j\le k} |S_j| > \sqrt{k} \right\}\right) \to 0$$

1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$.

A megoldások ismertetése

Az 1. feladat megoldása

Igen. Legyen $\mathcal{M}$ egy kontinuumos, megszámlálhatóan végtelen halmazokból álló majdnem diszjunkt halmazrendszer $\mathbb{N}$-en, azaz $A, B \in \mathcal{M}$ esetén $|A \cap B| < \infty$, továbbá legyen $A_i = \{i\} \times \mathbf{R}$ ($i \in \mathbb{N}$).

Az összes valós sorozatok halmaza kontinuum számosságú, így van egy $\varphi : \mathcal{M} \to {}^{\mathbb{N}}\mathbf{R}$ bijekció. Legyen $A_H = (\varphi(H) \restriction H) \cup (\{H\} \times \mathbf{R})$. Ekkor

$$\mathbf{A} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{A_H : H \in \mathcal{M}\}$$

kontinuum számosságú halmazokból álló, kontinuum számosságú halmazrendszer, ami eleget tesz az állításnak.

Az (i) tulajdonság igazolásához tekintsük az $A \neq B \in \mathbf{A}$ halmazokat. Három esetet különböztethetünk meg:

Ha $A = A_i$ és $B = A_j$ akkor $i \neq j$ hiszen $A \neq B$ és ezért $A \cap B = \emptyset$.

Ha $A = A_i$ és $B = A_H$ valamely $H \in \mathcal{M}$ halmazra, akkor $A \cap B \subset \big\{(i, \varphi(H)(i))\big\}$, így a metszet legfeljebb 1 elemű.

Ha $A = A_H$ és $B = A_S$ akkor $H \neq S$ különben $A = B$ volna és így $A \cap B \subset \varphi(H) \restriction (H \cap S)$ ezért $A \cap B$-nek legfeljebb $|H \cap S|$ eleme van, ami $\mathcal{M}$ választása folytán véges.

Ha egy B halmaz $\mathbf{A}$ minden elemét metszi akkor metszi az A_i halmazok mindegyikét is és így létezik olyan $f : \mathbb{N} \to \mathbf{R}$ sorozat amire $f \subset B \cap \mathbb{N} \times \mathbf{R}$, f-hez létezik pontosan egy $H \in \mathcal{M}$ amire $f = \varphi(H)$. Erre a H-ra $B \cap A_H$ végtelen.

Megoldók: Szegedy Balázs, Frenkel Péter, Pap Gyula, Abért Miklós, Mátrai Tamás, Juhász András, Tímár Gábor, Bérczi Gergely. Részeredményt ért el Pete Gábor, Mester Péter, Bernáth Attila.

A 2. feladat megoldása

Először olyan d-edfokú polinomot konstruálunk, melyre $P_f = d$. Legyenek $p_1, \dots, p_{d-1}$ különböző prímszámok, és legyen t olyan természetes szám, hogy

$$r = 1 + t(p_1 - 1)\dots(p_{d-1} - 1)$$

is prím. Ekkor

$$f(x) = x\big(1 + t(p_1 - x)\dots(p_{d-1} - x)\big)$$

olyan d fokú polinom, hogy $f(p_i) = p_i$, $f(1) = r$.

Most rátérünk a felső becslésre.

Lemma. *Legyen g olyan egész együtthatós polinom, hogy azon n egész számok száma, melyekre $g(n) = \pm 1$, nagyobb, mint $k = \deg g$. Ekkor g az alábbi polinomok egyike egy $\pm g(\pm x + m)$ transzformáció erejéig:*

$$1 - x, \quad 1 - 2x,$$

$$x(x-3) + 1, \quad 2x(x-2) + 1,$$

$$x(x-1)(x-3) + 1.$$

Bizonyítás. Ha g 1 és -1 közül csak az egyiket veszi fel, azt persze legfeljebb k-szor teheti. Tegyük fel, hogy mindkettőt felveszi egész számon; a leírt transzformációval elérhetjük, hogy a legkisebb egész szám, amelyre $g(n) = \pm 1$, az $n = 0$ és $g(0) = 1$. Az $a - b \mid g(a) - g(b)$ oszthatóság miatt $g(n) = -1$ csak $n = 1$ vagy 2 esetén lehet, innen pedig $g(n) = 1$ csak $n \le 4$ mellett. Ez véges sok lehetőség a ± 1 értékekre. Ha van l előírt ± 1 értékünk, meghatározhatjuk azt az egyetlen $\le l - 1$ fokú polinomot, amely ezeket felveszi; ez nem mindig lesz egész együtthatós, amikor pedig az lesz, a fentieket kapjuk.

A megoldás folytatása. Legyen tehát $f = gh$ reducibilis. f prím értékei kétfélék, vagy $g(n) = \pm 1$, $h(n) = \pm p$, vagy $g(n) = \pm p$, $h(n) = \pm 1$. Tegyük fel, hogy ezekből együtt több mint d van; ekkor vagy az első fajtából több van mint $\deg g = k$, vagy a másodikból több mint $\deg h = l = d - k$. Feltehetjük, hogy az elsőből, és ekkor feltehetjük, hogy g a lemmában felsorolt 5 polinom egyike. A legkisebb n, amelyre $|g(n)| = 1$, mindig a 0; a legnagyobb legyen b, ami 1, 2, 3 lehet. Mindegyik g polinom a $[0, b]$ intervallum egészein csak a $\pm 1, 0$ értékeket veszi fel, tehát a 2. fajta értékek $[0, b]$-n kívül esnek.

Polinomaink a $(-\infty, -1]$ és $[b + 1, \infty)$ félegyeneseken konstans előjelűek, tehát ha a második típusú prím értékeknél $h(n) = 1$ és $h(n) = -1$ is előfordul, akkor az egyik egy $n_1 \le -1$, a másik egy $n_2 \ge b + 1 \ge 2$ számnál; ez pedig az $n_1 - n_2 \mid h(n_1) - h(n_2)$ oszthatóságnak ellentmond. Így csak az egyik lép fel, mondjuk $h(n) = e$, $g(n) = ep$, ahol e 1 és -1 valamelyike. Legyenek az ilyen n számok $u_1, \dots, u_m$. Ekkor

$$h(x) = e + r(x)(x - u_1)\dots(x - u_m)$$

és

$$l = \deg h = m + \deg r. \tag{1}$$

Tekintsük most azokat a számokat, ahol $g(n) = \pm 1$ és $h(n) = \pm p$; legyenek ezek $0 \leq v_1 < \ldots < v_s \leq b$. Mivel $|h(v_i)| \geq 2$, $h(v_i)$ és

$$h(v_i) - e = r(v_i)(v_i - u_1)\ldots(v_i - u_m)$$

előjele azonos. Mivel $u_i \notin [0,b]$, a $\prod(v_i - u_j)$ tényezők előjele azonos; így a $h(v_i)$ sorozatnak csak annyi jelváltása lehet, mint $r(v_i)$-nek, vagyis maximum $\deg r$. A szóbajövő g polinomokhoz tartozó ± 1 sorozatok viszont olyanok,hogy belőlük z jelváltással legfeljebb $k + z$ választható ki. (Ez $z = 0$ esetén triviális. Az összes ± 1 érték száma legfeljebb $k + 1$, kivéve a $g(x) = x(x-3) + 1$ esetet, ahol $k + 2$, és ez elintézi a többi eseteket, kivéve a $z = 1$, g mint fent lehetőséget, ahol a $+--+$ sorozatról van szó, amiből 1 jelváltással csak 3 vehető ki.) Eszerint

$$s \leq k + \deg r.$$

Ezt (1)-gyel összevetve látjuk, hogy a prímek száma $= m + s \leq l + k = d$.

Megoldók: Abért Miklós, Braun Gábor, Bérczi Gergely, Frenkel Péter, Juhász András, Kun Gábor, Lippner Gábor, Pete Gábor, Szegedy Balázs, Tímár Ádám teljes értékű megoldást adtak. Bernáth Attila, Borsányi Ákos, Mátrai Tamás, Mester Péter, Papp Gyula részeredményt értek el.

A 3. feladat megoldása

Előkészületképpen jelölje $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$ az egyik primitív p-edik egységgyököt és legyen $R = \mathbb{Z}[\varepsilon]$. Jól ismert, hogy ε minimálpolinomja a

$$\prod_{j=1}^{p-1}(x - \varepsilon^j) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \cdots + x + 1$$

körosztási polinom. Ide 1-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $\prod_{j=1}^{p-1}(1 - \varepsilon^j) = p$. A baloldalon álló tényezők tehát egymással asszociáltak R-ben, hiszen $1 - \varepsilon^j = (1-\varepsilon)(1 + \varepsilon + \cdots + \varepsilon^{j-1})$ és $1 - \varepsilon = (1 - \varepsilon^j)\big(1 + \varepsilon^j + \cdots + \varepsilon^{j(k-1)}\big)$, ha $jk \equiv 1 \mod p$. Innen látható, hogy $1 - \varepsilon$ nem egység R-ben és az $R/(1-\varepsilon)$ faktorgyűrű karakterisztikája p. Mivel R tetszőleges elemére $a_2\varepsilon^{p-2} + \cdots + a_1\varepsilon + a_0 \equiv a_{p-2} + \cdots + a_1 + a_0 \mod (1-\varepsilon)$ ezért az $R/(1-\varepsilon)$ faktorgyűrű nem más mint a p-elemű $\mathbb{Z}_p$ test.

Legyen $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ a feladatban szereplő függvény és definiáljuk a

$$g(x) = f(p-1)x^{k-1} + \cdots f(1)x + f(0) \in \mathbb{C}[x]$$

poliniomot. Ekkor $\hat{f}(k) = g(\varepsilon^k)$. Tegyük fel, hogy f nem azonosan nulla, és jelöljük f, illetve $\hat{f}$ zérushelyeinek halmazát Z-vel, illetve $\hat{Z}$-pal. Ez azt jelenti, hogy az $f(0), \ldots, f(p-1)$ komplex számok nem triviális megoldását szolgáltatják az $f(l) = 0$ ($l \in Z$), $g(\varepsilon^k) = 0$ ($k \in \hat{Z}$) homogén lineáris egyenletrendszernek. Ekkor ennek az egyenletrendszernek az együtthatóit tartalmazó $\mathbb{Q}[\varepsilon]$ körosztási testben is van nem triviális megoldása, tehát az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy f értékei az R gyűrűből valók legyenek. Ha ezek után f minden értéke osztható $(1-\varepsilon)$-nal, akkor osszuk el f-et $1-\varepsilon$ lehető legnagyobb hatványával, így még azt is elérhetjük, hogy f minden értéke R-beli legyen, de legalább egy értéke ne legyen osztható $(1-\varepsilon)$-nal. Ilyen f-re tekintsük a $g(x)$ polinom $\bar{g}(x)$ képét az $R[x] \to R[x]/(1-\varepsilon) \cong \mathbb{Z}_p[x]$ természetes homomorfizmusnál. Választásunk folytán ez nem zérus polinom, de minden $k \in Z$ számra a k-adfokú tag együtthatója $g(x)$-ben, és így $\bar{g}(x)$-ben is nulla.

Ha $k \in \hat{Z}$, akkor ε^k gyöke $g(x)$-nek, így a következő felbontást nyerjük:

$$g(x) = h(x) \prod_{k \in \hat{Z}} (x - \varepsilon^k),$$

ahol $h(x)$ egy alkalmas nem-zérus polinom. A homomorf képekre áttérve kapjuk a

$$\bar{g}(x) = \bar{h}(x)(x-1)^{|\hat{Z}|}$$

felbontást. Feladatunk megoldásához tehát elegendő igazolnunk a következő állítást:

Ha egy $\mathbb{Z}_p$ feletti p-nél kisebb fokú nem-zérus polinomnak az 1 legalább k-szoros gyöke, akkor a polinomnak k-nál több együtthatója különbözik nullától.

Ezt az állítást a polinom fokára vonatkozó teljes indukcióval látjuk be. Ha a polinom konstans, akkor az állítás nyilvánvaló. Egyébként két esetet különböztetünk meg. Amennyiben a polinom konstans tagja 0, akkor x-szel osztva azonnal vissza tudjuk vezetni az állítást az eggyel kisebb fokú polinomra vonatkozóra. Ha pedig a polinom konstans tagja nem 0, akkor tekinthetjük a polinom deriváltját. Ebben pontosan eggyel kevesebb nullától különböző együttható van, mint az eredeti polinomban, mivel a legalább elsőfokú tagok deriváltja nem tűnhet el a fokszámra tett kikötés miatt. Ugyanakkor a deriváltnak az 1 legalább $(k-1)$-szeres gyöke, így az indukciós feltevés alkalmazható.

Megoldók: A fenti megoldás Frenkel Pétertől származik. Megoldották még Abért Miklós, Borsányi Ákos és Szegedy Balázs.

A 4. feladat megoldása

A feladat megfolgalmazása alapján nyilvánvaló, hogy elegendő az egységnyi kerületű körvonalon $S^1 = \mathbf{R}/\mathbb{Z}$-n okoskodni. Az összeadás $+$ a moduló 1 összeadást jelöli, intervallum alatt adott körüljárási irány mentén vett ívet fogunk érteni, λ jelöli a normalizált Lebesgue mértéket S^1-en, azaz $\lambda(S^1) = 1$. Teljes indukcióval könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\{\log_2(2i-1) \,:\, i = 1, \ldots, D\} = \{\log_2 k \,:\, k = D, \ldots, 2D\} \mod 1.$$

A rövidebb írásmód kedvéért jelölje $r_i = \log_2(2i-1)$-et. Az előző észrevétel alapján elegendő olyan $H \subset S^1$ mérhető, nem nulla mértékű halmazt konstruálni, amire az

$$a_n(H) = \lambda\left(S^1 \setminus \bigcup_{k=1}^{n} (H + r_k)\right)$$

sorozat egyetlen l_p térhez sem tartozik hozzá. H komlementerének minusz egyszeresére átfogalmazva, elegendő olyan $A \subset S^1$ nem teljes mértékű, mérhető halmazt megadni, amire a

$$\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{n} (A - r_k)\right)$$

sorozat elég lassan tart nullához. Azt fogjuk megmutatni, hogy ilyen A halmaz létezik sőt a fenti sorozat tetszőlegesen lassan tarthat 0-hoz (alkalmas A halmaz esetén).

Rögzítsünk le olyan $b_0 = 0 < b_1 < b_2 \ldots$ és $n_1 < n_2 < \ldots$ szigorúan monoton számsorozatokat, melyekre

1. $b_n \to 1/2$, és az $1/2 - b_n$ sorozat egyetlen l_p térhez sem tartozik hozzá, pl. $b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{\log(n+1)}$ ha $n > 0$,

2. $\left(\frac{n_d}{n_d+1}\right)^d > \frac{1}{2}$,

és vezessük be a

$$C^d_{n^{(1)},\dots,n^{(d)}} = \left\{ \sum_{i=1}^{d} k_i r_i \,:\, 0 \le k_i \le n^{(i)},\ k_i \text{ egész} \right\},$$

továbbá a $C^d_n = C^d_{n,\dots,n}$ jelölést.

Rekurzióval definiáljuk az $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \ldots \subset S^1$ nyílt halmazokat, úgy hogy $\lambda(A_n) = b_n$. Legyen $A_0 = \emptyset$. Ha $A_0, \dots, A_{d-1}$ már definiált, akkor legyen $A_d = A_{d-1} \cup \big(C^d_{n_d} + (0, t_d)\big)$ ahol t_d-t úgy választjuk, hogy $\lambda(A_d) = b_d$ teljesüljön. Az, hogy ilyen t_d létezik, annak a következménye, hogy a $t \mapsto \lambda\big(A_{d-1} \cup \big(C^d_{n_d} + (0,t)\big)\big)$ függvény nyilvánvalóan folytonos és $t = 0$ esetén b_{d-1} az értéke (ami kisebb mint b_d), míg $t = 1$ esetén 1 (ami nagyobb mint b_d).

Legyen ezek után $A = \cup_{d=1}^{\infty} A_d$. Mivel $A_d \subset A_{d+1}$ ezért $\lambda(A) = \lim_{d\to\infty} \lambda(A_d) = 1/2$, tehát A nem teljes mértékű, és nyilvánvalóan mérhető (nyílt) halmaz. Tudjuk, hogy

$$\lambda\Bigg(\bigcup_{d \ge D} \big(C^d_{n_d} + (0, t_d)\big) \Bigg) \ge \lambda(A \setminus A_{D-1}) = \frac{1}{2} - b_{D-1}. \tag{1}$$

Bebizonyítjuk, hogy

$$\lambda\Bigg(\bigcup_{d \ge D} \big(C^d_{\underbrace{n_d - 1, \dots, n_d - 1}_{D \text{ db index}},\ \underbrace{n_d, \dots, n_d}_{d-D \text{ db index}}} + (0, t_d)\big) \Bigg) \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - b_{D-1}\right).$$

A bal oldalon $\cap_{i=1}^{D}(A - r_i)$ egy részhalmazának a Lebesgue-mértéke áll, így (2) igazolásával a feladat állítását is beláttuk.

(2) igazolásához vezessük be az

$$f_D(\delta) = \lambda\Bigg(\bigcup_{d \ge D} \big(C^d_{\underbrace{n_d - 1, \dots, n_d - 1}_{\delta \text{ db index}},\ \underbrace{n_d, \dots, n_d}_{(d-\delta) \text{ dbindex}}} + (0, t_\delta)\big) \Bigg)$$

jelölést. Megmutatjuk, hogy

$$f_D(\delta) \ge \left(\frac{n_D}{n_D + 1}\right)^{\delta} \left(\frac{1}{2} - b_{D-1}\right) \tag{3}$$

$\delta = 0$-ra ez éppen (1), $\delta = D$-re pedig $\big(n_D/(n_D+1)\big)^D > 1/2$ folytán erősebb, mint ami kell. (3)-hoz nyilván elegendő igazolni, hogy

$$f_D(\delta) \ge \frac{n_D}{n_D + 1} f_D(\delta - 1). \tag{4}$$

Rögzítsük le δ-t és $d \ge D$-re legyen

$$X_d = C^d_{\underbrace{n_d - 1, \dots, n_d - 1}_{\delta-1 \text{ db index}},\, n_d - n_D,\ \underbrace{n_d, \dots, n_d}_{(d-\delta) \text{ db index}}} + (0, t_d),$$

és $X = \cup_{d \geq D} X_d$. Ha most $Y_k = X + \{0, r_\delta, \dots, (k-1)r_\delta\}$ akkor

$$f_D(\delta) = \lambda\big(X + \{0, r_\delta, \dots, (n_D - 1)r_\delta\}\big) = \lambda(Y_{n_D}),$$

továbbá

$$f_D(\delta - 1) = \lambda(X + \{0, r_\delta, \dots, n_D r_\delta\}) = \lambda(Y_{n_D + 1}),$$

(4) abból fog következni, hogy a $0, \lambda(Y_1), \lambda(Y_2), \dots$ sorozat differenciái monoton fogyó sorozatot alkotnak, így

$$f_D(\delta - 1) - f_D(\delta) = \lambda(Y_{n_D+1}) - \lambda(Y_{n_D}) \leq \frac{\lambda(Y_{n_D+1})}{n_D + 1} = \frac{f_D(\delta - 1)}{n_D + 1}$$

ami (4)-gyel ekvivalens.

Vizsgáljuk meg tehát az $\lambda(Y_k)$ sorozat differencáit. $Y_k \subset Y_{k+1}$ miatt $\lambda(Y_{k+1} \setminus Y_k) = \lambda(Y_{k+1}) - \lambda(Y_k)$, és $Y_{k+1} \setminus Y_k \subset X + kr_\delta$. Könnyű végiggondolni, hogy

$$(X + kr_\delta) \cap Y_k \supset \big\{(X + (k-1)r_\delta) \cap Y_{k-1}\big\} + r_\delta,$$

ezért

$$\lambda(Y_{k+1} \setminus Y_k) = \lambda(X + kr_\delta) - \lambda\big((X + kr_\delta) \cap Y_k\big) \leq$$
$$\leq \lambda\big(X + (k-1)r_\delta\big) - \lambda\big((X + (k-1)r_\delta) \cap Y_{k-1}\big) = \lambda(Y_k \setminus Y_{k-1}).$$

Megoldók: A fenti megoldás Frenkel Péteré.

Az 5. feladat megoldása

1. Megoldás. A

$$\frac{z+1}{1-z}$$

lineáris transzformációval a lencseszerű tartomány szögtérbe megy át, és u_1-ből és u_2-ből a zárt síkon folytonos $u(z)$ függvény lesz, amely adott $0 < \alpha \leq \pi$ mellett harmonikus az

$$\left\{te^{i\frac{\alpha}{2}} : t \geq 0\right\} \quad \text{és} \quad \left\{te^{-i\frac{\alpha}{2}} : t \geq 0\right\}$$

sugarakon kívül. Igazolni kell, hogy $u(x) \geq 0$ $(x \geq 0)$ esetén $u(x) \geq 0$ $(x < 0)$.

A

$$\left\{z : |\arg z| < \frac{\alpha}{2}\right\}$$

szögtartományt a $z^{\pi/\alpha}$ $(1^{\pi/\alpha} = 1)$ leképezés a jobb félsíkba viszi, az $u(z)$ függvényt az ott harmonikus $u(z^{\alpha/\pi})$ függvénybe, amelynek kerületi értékei az imaginárius tengelyen,

$$h(y) = \begin{cases} u\left(|y|^{\frac{\alpha}{\pi}} e^{i\frac{\alpha}{2}}\right), & \text{ha } y \geq 0, \\ u\left(|y|^{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right), & \text{ha } y \leq 0. \end{cases}$$

A jobb félsíkban a Dirichlet feladat megoldását ezen peremértékekkel a pozitív tengelyen a következő integrálformula adja meg:

$$u\left(x^{\frac{\alpha}{\pi}}\right) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(y)}{x^2 + y^2}\, dy = \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{h(y) + h(-y)}{x^2 + y^2}\, dy = \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U\left(y^{\frac{\alpha}{\pi}}\right)}{x^2 + y^2}\, dy,$$

ahol bevezettük az

$$U(t) \stackrel{\text{def}}{=} u\left(te^{i\frac{\alpha}{2}}\right) + u\left(te^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$$

jelölést.

Az $y = t^{\pi/\alpha}$ helyettesítéssel

$$u(x) = \frac{x^{\frac{\pi}{\alpha}}}{\alpha} \int_0^\infty \frac{U(t)}{x^{\frac{2\pi}{\alpha}} + t^{\frac{2\pi}{\alpha}}} t^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\, dt \quad (x > 0),$$

és végül az $x \to e^x$, $t \to e^t$ helyettesítéssel

$$u(e^x) = \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}x}}{\alpha} \int_{-\infty}^\infty \frac{U(e^t)}{e^{\frac{2\pi}{\alpha}x} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}t}} e^{\frac{\pi}{\alpha}t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^\infty \frac{U(e^t)}{e^{\frac{\pi}{\alpha}(x-t)} + e^{-\frac{\pi}{\alpha}(x-t)}}\, dt = \frac{1}{\alpha} U(e^t) * \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{\alpha}t\right)};$$

$*$-gal jelöljük a konvolúciót.

A komplementer szögtartománynak az origóra vett tükörképe a

$$\left\{ z \, : \, |\arg z| < \frac{2\pi - \alpha}{2} \right\}$$

szögtartomány, és az előző számolásban α-t $2\pi - \alpha$-val helyettesítve

$$u(-e^x) = \frac{1}{2\pi - \alpha} U(e^t) * \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2\pi - \alpha}t\right)}$$

ugyanazzal az $U(e^t)$ függvénnyel!

$\alpha = \pi$ esetén a két képlet megegyezik, ami a tükrözési elv alapján eleve nyilvánvaló, és az állítás triviális.

$\alpha < \pi$ esetén

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{\pi} < b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi - \alpha}{\pi},$$

és ha találunk olyan $K \in \mathfrak{L}_1$, $K(t) > 0$ függvényt, amellyel

$$\frac{1}{\cosh \frac{t}{b}} = \frac{1}{\cosh \frac{t}{a}} * K(t),$$

akkor

$$u(-e^x) = \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} u(e^t) * K(t),$$

amiből valóban következik, hogy $u(x) \geq 0$ $(x < 0)$, ha $u(x) \geq 0$ $(x > 0)$.

$K(t)$ kiszámítására a Fourier transzformációt használjuk. Általában

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{zt}}{\cosh t}\, dt = \frac{2\pi}{\cosh\left(i\frac{\pi}{2}z\right)}$$

$|\Re z| < 1$ esetén. Legegyszerűbben úgy számíthatjuk ki az integrált, hogy a valós tengelyt $i\pi$-vel feltolva azon ellenkező irányban integrálunk, ami az eredeti integrál $e^{i\pi z}$-szeresét adja, (hiszen az integrandus számlálója $e^{i\pi z}$-vel, a nevezője -1-gyel szorzódik), majd kiszámítjuk az egyetlen közbezárt szingularitás, $i\pi/2$ reziduumát.

$1/\cosh(t/a)$ Fourier transzformáltja tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{\cosh\frac{t}{a}}\,dt = a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaxt}}{\cosh t}\,dt = \frac{2\pi a}{\cosh\left(\frac{a\pi}{2}x\right)}.$$

Ugyanezt felírva a helyett b-vel és figyelembvéve, hogy a Fourier transzformáció a konvolúciót közönséges szorzásba viszi, a keresett $K(t)$ függvény Fourier transzformáltja

$$\frac{b}{a}\frac{\cosh\left(\frac{a\pi}{2}x\right)}{\cosh\left(\frac{b\pi}{2}x\right)}.$$

A Fourier transzformáció inverziós képlete,

$$K(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{\cosh\left(\frac{a\pi}{2}x\right)}{\cosh\left(\frac{b\pi}{2}x\right)}\,dx = \frac{1}{\pi^2 a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2}{b\pi}tx}\frac{\cosh\left(\frac{a}{b}x\right)}{\cosh x}\,dx$$

alapján erről kell megmutatnunk, hogy nem-negatív és $\mathfrak{L}_1$-beli.

A számlálóban levő cosh-t a definíciója szerint két tagra bontva a következő két integrál lép fel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{2}{b\pi}tx\pm\frac{a}{b}x}}{\cosh x}\,dx = \frac{2\pi}{\cosh\left(\pm i\frac{a\pi}{2b}+\frac{t}{b}\right)}$$

általános formulánk szerint, ugyanis

$$\left|\Re - i\frac{2}{b\pi}t \pm \frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} < 1.$$

Innen

$$K(t) = \Re\frac{2}{a\pi\cosh\left(i\frac{a\pi}{2b}+\frac{t}{b}\right)}.$$

A nevező valós része

$$a\pi\cos\left(\frac{a}{b}\frac{\pi}{2}\right)\cosh\frac{t}{b} > 0,$$

hiszen $0 < a/b < 1$, és exponenciálisan tart ∞-hez $t \to \pm\infty$ esetén. Ezért a reciprok valós része is pozitív, és exponenciálisan tart 0-hoz. A bizonyítást ezzel befejeztük.

2. Megoldás (vázlatosan): Legyen w valós, $|w| > 1$, és $G(z,w)$ a D_2 tartomány Green függvénye: $G(z,w)$ a D_2 határán eltűnő, a belsejében pozitív harmonikus függvény a ∞-t is beleértve, de $z = w$ kivételével, ahol $G(z,w) + \log|z-w|$ harmonikus.

$G(z,w)$ beterjeszthető D_1-be folytonosan úgy, hogy ott szubharmonikus legyen, sőt a $[-1,1]$ szakaszon kívül harmonikus is.

Ezt legegyszerűbben a síknak a

$$\frac{z-1}{z+1}$$

lineáris törtfüggvénnyel való leképezésével láthatjuk be. Ha a D_1 lencseszerű tartomány belső szöge ±1-ben $\alpha(\leq\pi)$, akkor a leképezés D_2-t a

$$\left\{z : |\arg z| < \frac{2\pi-\alpha}{2}\right\}$$

szögtartományba viszi. Ennek a

$$w_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w-1}{w+1}$$

ponthoz tartozó Green függvénye

$$\log \left| \frac{z^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}} + w_0^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}}{z^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}} - w_0^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}} \right| ;$$

$1^{\pi/2\pi-\alpha} = 1.$

Erről látható, hogy mind a felső, mind az alsó félsíkban harmonikusan folytatható a szögtartományon túl egészen a negatív tengelyig, és a negatív tengelyen a szimmetria miatt a két folytatás ugyanazokhoz az értékekhez vezet.

Sőt a negatív tengelyen át is folytatható mind a felső, mind az alsó félsíkból. Például a felsőből az alsóba folytatva ismét a konkrét alakból látszik, hogy origó körüli körvonalon haladva a függvény monoton csökkenő. A negatív tengely környezetében tehát az előbb leírt kiterjesztés két harmonikus függvény maximuma lesz, és mint ilyen, szubharmonikus.

Visszatérve mármost az eredeti síkra, legyen mindjárt általánosabban D_1 és D_2 a zárt sík két nyílt halmaza, egymásnak külsejei a kellően sima közös $\partial D_1 = \partial D_2$ határral, $w \in D_2$ rögzített pont, és $G(z)$ az egész síkon folytonos, szubharmonikus függvény, amely D_1 lezárásának egy, (a $[-1, 1]$ szakasz szerepét játszó) E zárt részhalmazától eltekintve harmonikus is, kivéve $z = w$-t, ahol $G(z) + \log|z - w|$ harmonikus, és $G(z) = 0$ ($z \in \partial D_1 = \partial D_2$). Legyen továbbá (az $u_1(z)$ és $u_2(z)$ által meghatározott függvény szerepét játszó) $u(z)$ függvény a zárt síkon folytonos, D_1-ben és D_2-ben harmonikus.

Írjuk fel a Green formulát D_2-re:

$$\int_{\partial D_2} \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \iint\limits_{D_2} (u\Delta G - G\Delta u)\, dx\, dy,$$

ahol $\partial/\partial n$ a külső normális szerinti derivált, ds az ívhosszelem, Δ a Laplace operátor, $dx\,dy$ a területelem.

$G(z) = 0$ ($z \in \partial D_2$), $\Delta G(z) = 0$ D_2-ben kivéve a w pontot, ahol

$$\Delta G\, dx\, dy = -\Delta \log|z - w|\, dx\, dy$$

disztribúció értelemben a w-be koncentrált Dirac-δ pontmérték -2π-szerese, míg $\Delta u(z) = 0$ mindenütt D_2-ben. A formula tehát így egyszerűsödik:

$$\int_{\partial D_2} u\frac{\partial G}{\partial n}\, ds = -2\pi u(w).$$

(Ez a formula, amely a Dirichlet feladat megoldását adja D_2-re, tulajdonképpen az 1. Megoldásban is szerepel.)

Írjuk fel ugyanezt a formulát D_1-re:

$$\int_{\partial D_1} \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \iint\limits_{D_1} (u\Delta G - G\Delta u)\, dx\, dy,$$

Ismét $G(z) = 0$ ($z \in \partial D_1$). A szubharmonikus függvények Riesz-féle reprezentációja szerint

$$G(z) = \int_E \log|z-a|\, d\mu(a) - \log|z-w|,$$

ahol μ az E halmazra koncentrált alkalmas valószínűségi mérték. $\Delta G(z) = 0$ D_1-ben E-n kívül, általában azonban disztribúció értelemben

$$\Delta G\, dx\, dy = \Delta \int_E \log|z-a|\, d\mu(a)\, dx\, dy = 2\pi d\mu.$$

$\Delta u(z) = 0$ most is mindenütt. D_1 Green formulája tehát így alakul:

$$\int_{\partial D_1} u \frac{\partial G}{\partial n}\, ds = 2\pi \int_E u(a)\, d\mu(a).$$

A baloldal ugyanaz, mint D_2 esetében ellenkező előjellel, tehát

$$u(w) = \int_E u(a)\, d\mu(a).$$

(Az 1. Megoldásban is ugyanezt a formulát vezettük le más úton.) Speciálisan $u(a) \geq 0$ ($a \in E$) esetén $u(w) \geq 0$, amivel a feladat állítását bebizonyítottuk.

A 6. feladat megoldása

Nem lehet akármilyen nagy. Ennek igazolásához vegyünk a $2d$ oldalhosszúságú négyzetrács rácspontjai körül egy-egy d sugarú kört, így a sík egy diszjunkt körpakolását kapjuk. Ha d elég kicsi ($d = \left(\sqrt{2}-1\right)/2$), akkor minden egységnégyzet tartalmaz legalább egy ilyen körlapot.

Egy rögzített körlaphoz tekintsük azokat (az unióban szereplő) egységnégyzeteket, melyek őt tartalmazzák, legyen K ezek uniója. Jelöljük O-val a körlap középpontját. K nyilván egy O-ból csillagszerűen konvex sokszöglap. A csúcsokat O-val összekötve, K-t háromszögekre daraboljuk. Mivel a háromszög O-val szemközti oldala egy, a d sugarú körlapot tartalmazó négyzet oldalának egy darabja, a háromszög O-hoz tartozó magassága legalább d. Tehát a háromszög területe / az O-val szemközti oldal legalább $d/2$, vagyis K területe/kerülete is legalább $d/2$. De K benne van egy $\sqrt{2}$ sugarú körben (valójában még kisebben), így a területe legfeljebb 2π. Tehát K kerülete legfeljebb $4\pi/d$.

Tegyük fel, hogy N olyan körlap volt, amelyiket legalább egy egységnégyzetünk tartalmaz. Ekkor a teljes únió (U) tartalmaz N diszjunkt d sugarú körlapot, így területe legalább $Nd^2\pi$. Mivel U a fentiekben szereplő K halmazok egyesítése, ezért a kerülete legfeljebb K-k kerületének összege, vagyis $N4\pi/d$.

Tehát a kerület és terület aránya legfeljebb $4/d^3$ ($= 32/\left(\sqrt{2}-1\right)^3$, azaz kb. 450).

Megoldók: Szegedy Balázs, Pap gyula, Ábért Miklós.

A 7. feladat megoldása

Világos, hogy (i) teljesülése (ii) szükséges feltétele, n értékétől függetlenül. Megmutatjuk, hogy $n \geq 9$ esetén a feltétel elégséges is.

Kiindulópontunk Klein Eszter tétele (a továbbiakban KET) mely szerint bármely 5 általános helyzetű pont között a síkban található 4, melyek egy konvex négyszög csúcsait alkotják. Az egyszerűség kedvéért egy ponthalmazt konvexnek hívunk, ha a benne szereplő pontok egy konvex sokszög csúcsai, ellenkező esetben pedig konkávnak.

Először egy másik elégséges feltételt fogalmazunk meg.

Lemma. *Tegyük fel, hogy a $4n$ pontú P halmazból kiválaszthatók X_1, X_2, X_3 és Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 különböző pontok úgy, hogy $\{X_1, X_2, X_3, Y_i\}$ konvex minden $i = 1, 2, 3, 4$ esetén, míg $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ konkáv. Ekkor* (i) *teljesül.*

Bizonyítás. KET miatt a fennmaradó $4n-7$ pontból $n-2$ csúcsdiszjunkt konvex négyszög alkotható. Jelölje a kimaradó pontot Z. Az $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Z\}$ halmazból KET miatt kiválasztható egy konvex négyszög, ez nem lehet $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\{Y_1, Y_2, Y_3, Z\}$ konvex. Mivel Mivel $\{X_1, X_2, X_3, Y_4\}$ is konvex, P-re teljesül (i). ■

A továbbiakban tegyük fel tehát, hogy $n \geq 9$ és a $4n$ pontú P halmazra (ii) teljesül. Először is megmutatjuk, hogy léteznek különböző A_1, A_2, A_3 és $B_1, B_2, \ldots, B_7$ pontok úgy, hogy $\{A_1, A_2, A_3, B_i\}$ konvex minden $1 \leq i \leq 7$ esetén. Minden pontötösben található egy konvex négyszög KET alapján, továbbá egy rögzített konvex négyszög $4n-4$ különböző ötösben van benne, ezért a konvex négyesek száma legalább $\frac{1}{4n-4}\binom{4n}{5} = \frac{1}{5}\binom{4n}{4}$. Minden konvex négyes 4 db. háromszöget tartalmaz ezért van olyan háromszög, amely legalább

$$4\frac{\frac{1}{5}\binom{4n}{4}}{\binom{4n}{3}} = \frac{4n-4}{5} > 6.$$

konvex négyeshez tartozik, amint azt bizonyítani akartuk.

Ha $\{B_1, B_2, \ldots, B_7\}$ tartalmaz konkáv négyest, akkor a lemma alapján (i) teljesül, és készen vagyunk. Ellenkező esetben $\{B_1, B_2, \ldots, B_7\}$ konvex. Legyen ekkor $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$, $k \geq 7$ maximális konvex halmaz, $\mathcal{B}$ esetleg az A_1, A_2, A_3 pontokat is tartalmazhatja.

A lemma miatt feltehetjük, hogy minden $C \in P \setminus \mathcal{B}$ pontra $\{B_\alpha, B_\beta, B_\gamma, C\}$ konkáv, ha $1 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq k$. Először is, $\mathcal{B}$ maximális volta miatt nem lehet, hogy minden $\{B_\alpha, B_\beta, B_\gamma, C\}$ halmaz konvex. Ha lenne két diszjunkt indexhalmaz, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ és $\{\delta, \varepsilon, \eta\}$ úgy, hogy $\{B_\alpha, B_\beta, B_\gamma, C\}$ konvex és $\{B_\delta, B_\varepsilon, B_\eta, C\}$ konkáv, akkor a lemmát alkalmazhatnánk az $\{X_1, X_2, X_3\} = \{B_\alpha, B_\beta, B_\gamma\}$ és $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\} = \{B_\delta, B_\varepsilon, B_\eta, C\}$ halmazokra. Továbbá, ha lennének olyan $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ indexek, hogy $\{B_\alpha, B_\beta, B_\gamma, C\}$ konvex és $\{B_\alpha, B_\beta, B_\delta, C\}$ konkáv, akkor ezektől különböző ε, η, ζ indexekkel ($k \geq 7$ miatt ilyenek léteznek) tekintve a $\{B_\varepsilon, B_\eta, B_\zeta, C\}$ halmazt, az akár konvex, akár konkáv, a feladatot az első esetre visszavezethetnénk. Végül, ha lennének olyan α, β, γ, δ, ε indexek, hogy $\{B_\alpha, B_\beta, B_\gamma, C\}$ konvex és $\{B_\alpha, B_\delta, B_\varepsilon, C\}$ konkáv, akkor akár konvex, akár konkáv a $\{B_\alpha, B_\gamma, B_\varepsilon, C\}$ halmaz, a feladatot az előző esetre visszavezethetnénk.

Ha $\mathcal{B}$ páros és $|\mathcal{B}| \geq 6$ (ez teljesül, hiszen $k \geq 7$), akkor válasszunk ki a $P \setminus \mathcal{B}$ halmazból páronként közös pont nélküli konvex négyeseket, amilyen sokat csak lehet.

KET miatt a fennmaradó pontok száma $0, 2$ vagy 4. Az első esetben készen is vagyunk, hiszen $\mathcal{B}$ pontjai nyilván beoszthatók a kívánt módon. A második esetben legyen ez a két pont P_1, P_2 és alkalmazzuk KET-et a $\{B_1, B_2, B_3, P_1, P_2\}$ halmazra. Mivel $\{B_1, B_2, B_3, P_i\}$ nem konvex, a kapott konvex négyes P_1-et és P_2-t is tartalmazza. A harmadik esetben ezt a lépést kétszer kell elvégezni, hogy már csak $\mathcal{B}$-hez tartozó pontok maradjanak, $|\mathcal{B}| \geq 6$ miatt ez lehetséges is.

Végül, ha $\mathcal{B}$ páratlan, akkor van $P_1, P_2, P_3 \in P \setminus \mathcal{B}$ melyre valamely $B_i \in \mathcal{B}$-re $\{P_1, P_2, P_3, B_i\}$ konvex. Ellenkező esetben ugyanis a $\{A = \mathcal{B}, B = P \setminus \mathcal{B}\}$ partició (ii)-nek ellentmondana. Ekkor a $P' = P \setminus \{P_1, P_2, P_3, B_i\}$ halmazban $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap P'$-re $\mathcal{B}'$ páros, $|\mathcal{B}'| \geq 6$, és így az előző gondolatmenet megismételhető.

Megoldók: A fenti megoldás Kun Gábor megoldása alapján született. Helyes megoldást adott még Lippner Gábor, Papp Gyula és Szegedy Balázs. Könnyen javítható hibát tartalmazott Mátrai Tamás megoldása.

A 8. feladat megoldása (Szegedy Balázs megoldása alapján)

Néhány egyszerű lemmával kezdjük a bizonyítást.

Lemma 1. *Legyen X reguláris tér és $Y \subset X$ sűrű. Ha tetszőleges $x \in X$-re az $Y \cup \{x\}$ altér M_1 akkor X is az.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X$ tetszőleges. A feltétel szerint x-nek létezik megszámlálható környezetbázisa az $S = Y \cup \{x\}$ altérben, azaz $G_1, G_2, \ldots$ nyílt részhalmazai X-nek, hogy tetszőleges $N \subset X$ nyílt esetén $x \in S \cap G_i \subset N \cap S$ teljesül valamely i indexre.

Ha most $V \subset X$ nyílt és $x \in H$ akkor a regularitás miatt létezik olyan U nyílt amire $x \in U \subset \overline{U} \subset V$. A fentiek szerint ekkor valamely i-re $S \cap G_i \subset U$. $S \cap G_i$ sűrű G_i-ben ezért $G_i \subset \overline{S \cap G_i} \subset \overline{U} \subset V$. Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges $x \in V$ nyílthoz létezik i amivel $x \in G_i \subset V$, azaz $\{G_i : i = 1, 2, \ldots\}$ az x környezetbázisa X-ben. ■

Lemma 2. *Legyen X kompakt Hausdorff tér. Egy $p \in X$ pontnak pontosan akkor van megszámlálható környezetbázisa, ha $\{p\}$ G_δ halmaz.*

Bizonyítás. Ha a p pontnak van megszámláható környezetbázisa és a tér legalább T_1 akkor ennek metszete csak p-ből áll. Elegendő tehát a megfodítást igazolni.

Ha $\{p\}$ G_δ akkor léteznek $G_1, G_2, \ldots$ nyíltak, hogy $\cap G_k$ egyetlen eleme p. A G_k halmazok további csökkentésével az is elérhető, hogy $\overline{G_{i+1}} \subset G_i$, így ezt eleve feltehetjük a G_i sorozatról. Azt kell igazolnunk, hogy ha $p \in U$ és U nyílt akkor létezik olyan i, hogy $G_i \subset U$. Nincs mit igazolni akkor ha $U = X$ ezért csak az $U \neq X$ esettel kell foglalkoznunk. Ekkor

$$U \cup \bigcup \{\overline{G_i}^c : i = 1, 2, \} = X.$$

A kompaktság miatt ennek a fedésnek van véges részfedése. Mivel a $\overline{G_i}^c$ monoton növő halmazsorozat és $U \neq X$, ezért van két elemű részfedés is, mondjuk $U \cup \overline{G_k}^c$. De ekkor $p \in G_k \subset \overline{G_k} \subset U$. Tehát G_i, $i = 1, 2, \ldots$ megszámláható környezetbázis. ■

Lemma 3. *Legyen Y kompakt M_1 tér és $S \subset Y$, $|S| > \aleph_0$. Ekkor S-nek végtelen sok kondenzációs pontja van.*

Bizonyítás. Rekurzióval definiálunk egy megfelelő sorozatot. Ehhez először azt mutatjuk meg, hogy van kondenzációs pont. Ellenkező esetben, minden p pontnak van olyan nyílt U_p környezete, amelyben csak megszámláható sok pontja esik S-nek. A kompaktság miatt a $\{U_p : p \in Y\}$ fedésnek létezik véges részfedése amiből $|Y| \leq \aleph_0$ következne, ez azonban ellentmondás.

Legyen most p az S egy kondenzációs pontja. A tér M_1 tehát létezik G_i nyílt halmazokból álló sorozat melyre $\cap_i G_i = \{p\}$. Emiatt

$$S \setminus \{p\} \subset \cup_i S \setminus G_i.$$

Létezik tehát olyan G_i amire $|S \setminus G_i| > \aleph_0$.

Ezek után az előző gondolatmenetet ismételve $Y \setminus G_i$ ill. $S \setminus G_i$ halmazokra kapunk egy második kondenzációs pontot. A rekurziót folytatva előáll kondenzációs pontoknak egy végtelen sorozata. ■

Legyen most X kompakt T_2 tér. Tegyük fel, hogy az állítás feltétele teljesül, tehát X minden $\aleph_1$ számosságú altere M_1. Indirekt módon okoskodunk és belátjuk, hogy ellenmondásra jutunk abból a feltevésből, hogy X nem M_1.

Transzfinit rekurzióval definiáljuk a p_α, $\mathcal{I}_\alpha$ $(\alpha < \omega_1)$ sorozatokat úgy, hogy a következő tulajdonságok teljesüljenek.

(1) $\mathcal{I}_\alpha$ nyílt halmazok megszámlálható családja, $p_\alpha \in \bigcap \mathcal{I}_\alpha$, p-től különböző pontja X-nek.

(2) Minden $U \in \mathcal{I}_\alpha$ nyílthoz létezik $V \in \mathcal{I}_\alpha$, hogy $\overline{V} \subset U$.

(3) $\bigcap \mathcal{I}_\alpha \cap \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}} = \{p\}$.

(4) ha $\beta < \alpha$ akkor $\mathcal{I}_\beta \subset \mathcal{I}_\alpha$.

Tegyük fel, hogy sikerült definiálni a p_α, $\mathcal{I}_\alpha$ sorozatokat. Az (2) tulajdonságból következik, hogy $\bigcap \mathcal{I}_\alpha$ zárt minden $\alpha < \omega_1$ esetén.

A feltevésünk és a 2. Lemma szerint $Y = \overline{\{p\} \cup \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}}$ M_1 tér, amely kompakt tehát a 3. Lemma szerint létezik olyan $q \neq p$ pontja amely a $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ halmaz kondenzációs pontja, azaz minden U környezetére igaz, hogy az

$$\{\alpha : p_\alpha \in U\}$$

nem korlátos ω_1-ben. Kihasználva a (1) (4) és (2) tulajdonságokat ebből az is következik, hogy tetszőleges $\alpha < \omega_1$ rendszámra,

$$q \in \overline{\{p_\beta : \beta > \alpha\}} \subset \bigcap \mathcal{I}_\alpha.$$

Ugyanakkor az Y tér M_1, tehát a q pont a $\{p_\beta : \beta < \omega_1\}$ halmaz valamely megszámlálható részének is torlódási pontja, tehát létezik α, hogy

$$q \in \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}}$$

Ekkor azonban

$$q \in \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}} \cap \bigcap \mathcal{I}_\alpha$$

is teljesülne, ami a (3) tulajdonsággal együtt ellenmond annak, hogy $p \neq q$.

Az állítást tehát igazoltuk, ha megmutatjuk, hogy a fenti $p_\alpha, \mathcal{I}_\alpha$ sorozat megkonstruálható.

Legyen $\mathcal{I}_0$ a p nyílt környezeteinek egy sorozata, amelyre a (2) tulajdonság teljesül. Ilyen nyilván van a tér regularitása miatt. Mivel az indirekt feltevés szerint a p pontnak nincs megszámlálható környezetbázisa, így a 2. Lemma szerint $\bigcap \mathcal{I}_\alpha \neq \{p\}$. Legyen p_0 a $\bigcap \mathcal{I}_\alpha$ halmaz tetszőleges p-től különböző pontja.

Ha $\mathcal{I}_\beta, p_\beta$ $(\beta < \alpha)$ már definiálva van, akkor minden már definiált p_β ponthoz válasszunk egy (2) tulajdonságnak megfelelő $G_{\beta,n}$ sorozatot a p pont környezetei közül úgy $p_\beta \notin G_{\beta,1}$ és legyen

$$\mathcal{I}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{I}_\beta \cup \{G_{\beta,n} : \beta < \alpha,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Az így definiált $\mathcal{I}_\alpha$ a p nyílt környezeteiből álló megszámlálható halmazrendszer, ami kielégíti az (2), (3), (4) tulajdonságokat.

$\bigcap \mathcal{I}_\alpha \neq \{p\}$ mert $\mathcal{I}_\alpha$ megszámlálható, legyen p_α a metszet tetszőleges p-től kölönböző pontja. Ezzel (1) is teljesül.

Ezzel a $p_\alpha, \mathcal{I}_\alpha$ sorozat létezését is igazoltuk és az állítást teljes egészében bebizonyítottuk.

Megoldó: Szegedy Balázs.

A 9. feladat megoldása

Legyen $S_0 \supset S_1 \supset \ldots$ a q pont egy (később rögzítendő) környezetbázisa. Megmutatjuk, hogy létezik összefüggő nyílt halmazoknak olyan $H_0 \supset H_1 \supset \ldots$ sorozata, amire $H_n \subset S_n \cap G$. Ez elegendő, hiszen legyen $p_n \in H_n$ egy-egy rögzített pont. Mivel H_n összefüggő és $H_{n+1} \subset H_n$ ezért p_n és p_{n+1} összeköthető folytonos H_n-ben haladó ívvel, legyen ez $\varphi_n : \left[1/n, 1/(n+1)\right] \to H_n$, amire $\varphi_n(1/n) = p_n$ és $\varphi_n\big(1/(n+1)\big) = p_{n+1}$.

A $\varphi_n\big([1/n, 1/(n+1))\big)$ folytonos íveket egyesítve, egyszerűsítve és kiegészítve a q ponttal épp az előírt tulajdonságú v_q ívet kapjuk.

Rögzítsünk egy $x_0 \in G$ tetszőleges pontot. Válasszunk egy pozitív számokból álló, szigorúan monoton fogyó (ε_n) számsorozatot úgy, hogy ε_1 legyen kisebb mint x_0 és q távolsága. Jelölje S_i a q közepű, ε_i sugarú nyílt körlapot és S_0 a teljes síkot. Legyen továbbá $\mathcal{M}_i$ a $G \cap S_i$ azon H komponenseinek halmaza, melyek metszik S_{i+1}-et.

A (V, E) irányított gráf legyen a következő: a gráf csúcsainak halmaza $V = \cup^*_{i \geq 0} \mathcal{M}_i$ azaz, az $\mathcal{M}_i$-k diszjunkt úniója. Másképpen fogalmazva

$$V = \big\{(H, i) : H \in \mathcal{M}_i,\ i \geq 0\big\}.$$

Ha $u, v \in V$ akkor u-ból v-be pontosan akkor megy egy él, ha valamely $i \geq 0$ indexre $u = (H, i)$ és $v = (H', i+1)$, továbbá $H' \subset H$. A (V, E) gráf nyilvánvalóan egy fa, amelynek gyökere az $(G, 0)$ csúcs. Világos, hogy pontosan akkor létezik olyan összefüggő nyílt halmazokból álló H_n sorozat, melyre $H_{n+1} \subset H_n \subset S_n \cap G$ $(n \geq 0)$, ha a (V, E) gráfban létezik végtelen hosszú ág. Ehhez elegendő, hogy a (V, E) gráf teljesíti a Kőnig lemma feltételeit, azaz a gyökértől n távolságra lévő pontok száma, másszóval $\mathcal{M}_n$, véges, és minden m-re létezik legalább m hosszúságú ág.

Elsőként azt mutatjuk meg, hogy létezik tetszőleges hosszúságú ág. Mivel q a G-nek határpontja, így $G \cap S_{m+1}$ nem üres; jelölje ennek egy tetszőleges pontját y. $i \leq m$ esetén legyen H_i az $S_i \cap G$ azon komponense, ami y-t tartalmazza. Világos, hogy $H_{i+1} \subset H_i$ és egyik sem üres, tehát a $\big\{(H_i, i) : i = 0, \ldots, m\big\}$ egy m hosszúságú ág a (V, E) gráfban.

Hátramaradt $\mathcal{M}_i$ végességének igazolása. Ezt csak $i \geq 1$ esetére kell igazolni, mivel $\mathcal{M}_0$ egy elemű. Legyen i rögzített és rendeljünk hozzá minden $H \in \mathcal{M}_i$ komponenshez egy t_H töröttvonalat a következőképpen:

Válasszunk egy $y \in H \cap S_{i+1}$ pontot, G összefüggő, tehát y összeköthető x_0-lal egy G-ben haladó egyszerű töröttvonal segítségével, ezt jelölje t. A t töröttvonalon rögzítsük azt a természetes rendezést, mely szerint y a legkisebb pont és x_0 a legnagyobb. Legyen A a t töröttvonalnak az, az imént rögzített rendezés szerinti, legkisebb pontja ami már nincs H_i-ben. Az így definiált A az S_i körlemez határpontja. Valóban könnyű végiggondolni, hogy sem külső, sem pedig belső pont nem lehet. Legyen B a t töröttvonalnak az A-nál kisebb, legnagyobb olyan pontja ami $\overline{S_{i+1}}$-ben van. B az S_{i+1} határpontja. Végezetül legyen t_H a t töröttvonal B és A közé eső része.

Az ily módon választott t_H töröttvonalaknak azt a tulajdonságát fogjuk kihasználni, hogy ha $H \in \mathcal{M}_i$ akkor t_H az $\overline{S_i} \setminus S_{i+1}$ zárt körgyűrűt „keresztül szeli" és a végpontjaitól eltekintve H-ban halad.

Legyen K a q közepű $(\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1})/2$ sugarú körvonal. A következő észrevétel segít a bizonyítás befejezésében.

Állítás. *Ha az $U \subset S_i \setminus S_{i+1}$ összefüggő nyílt halmaz a $p \in K$ pont környezete és*

$$\{H \in \mathcal{M}_i : t_H \cap U \neq \emptyset\}$$

legalább három elemű, akkor $U \cap \partial G$ nem összefüggő.

Ez elegendő $\mathcal{M}_i$ végességének igazolásához. Ugyanis legyen $p \in K$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan U_p nyílt környezete p-nek ami a $\{t_H : H \in \mathcal{M}_i\}$ töröttvonalak közül csak véges sokat metsz. Valóban ha p a G-nek belső vagy külső pontja, akkor ez világos. Ha p a G-nek határpontja, akkor létezik olyan $U_p \subset S_i \setminus S_{i+1}$ környezete, amire $U_p \cap \partial G$ összefüggő, hiszen ∂G lokálisan összefüggő. De ez az U_p környezet a fenti állítás szerint a $\{t_H : H \in \mathcal{M}_i\}$ töröttvonalak közül legfeljebb kettőt metszhet. K kompaktsága miatt az $\{U_p : p \in K\}$ fedésnek van véges részfedése, de akkor összesen csak véges sok olyan $\{t_H : H \in \mathcal{M}_i\}$ töröttvonal létezhet ami K-t metszi. Mivel minden $H \in \mathcal{M}_i$-re rögzítettünk egy t_H töröttvonalat, ami nyilvánvalóan metszi a K körvonalat, $\mathcal{M}_i$-nek is végesnek kell lennie.

Az állítás igazolása. Legyen H_1, H_2, H_3 az $\mathcal{M}_i$ három olyan eleme melyekhez tartozó töröttvonalak (a rövidség kedvéért legyenek ezek) t_1, t_2, t_3 metszik U-t. Kifogjuk használni azt a szemlélet számára egyébként világos tényt, hogy $t_1 \cup t_2 \cup t_3$ az $S_i \setminus \overline{S_{i+1}}$ nyílt körgyűrűt három komponensre vágja szét, azaz az

$$S_i \setminus \left(\overline{S_{i+1}} \cup t_1 \cup t_2 \cup t_3\right)$$

nyílt halmaznak pontosan három komponense van, V_1, V_2, V_3. Az is világos, hogy egy ilyen V_k komponens határa a t_1, t_2, t_3 poligonok közül pontosan egytől diszjunkt. Így a V-k jelölését választhatjuk úgy, hogy $\overline{V_k} \cap t_k = \emptyset$.

Legyen t olyan U-ban haladó töröttvonal, ami a $t_k \cap U$ ($k = 1, 2, 3$) nem üres halmazok mindegyikét metszi, és minimális abban az értelemben, hogy nincs olyan valódi része ami szintén törtöttvonal lenne és mindhárom halmazt metszené.

t minimalitása folytán végpontjai csak a t_k töröttvonalakon lehetnek, és a két végpontjának különböző töröttvonalakra kell illeszkednie. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy t kezdőpontja a t_1, vépgpontja a t_3 poligonon van. Ezzel egyúttal egy rendezést is rögzítettünk t-n.

Legyen A az a legkisebb pont t-n, ami a t_2 töröttvonalra is illeszkedik. t' jelöli a t töröttvonalnak a kezdőpont és A közé eső darabját. t' a végpontjaitól eltekintve V_3-ban van és mivel két végpontja a $S_i \cap G$ különböző komponenseiben van, ezért t' metszi G határát is, tehát $V_3 \cap (\partial G \cap U)$ nem üres. Hasonló okoskodás mutatja, hogy $V_1 \cap (\partial G \cap U)$ sem üres. De ez egyúttal azt is jelenti, hogy $\partial G \cap U$ nem összefüggő, amivel az állítást igazoltuk.

Megoldók: Braun Gábor, Szegedy Balázs, Frenkel Péter, Mester Péter, Papp Gyula, Pete Gábor. Részeredményt ért el Nagy Béla.

A 10. feladat megoldása

Ha $2^{l-1} \le k < 2^l$, akkor

$$\left\{\left(\max_{1 \le j \le k} |S_j| > \sqrt{k}\right)\right\} \subset \left\{\left(\max_{1 \le j \le 2^l} |S_j| > 2^{(l-1)/2}\right)\right\} \subset$$
$$\subset \bigcup_{p=0}^{l} \left\{\left(\max_{2^p \le j < 2^{p+1}} |S_j - S_{2^p}| > \frac{2^{1/4}}{2^{1/4}-1} \frac{2^{(l-1)/2}}{2^{(l-p)/4}}\right)\right\}.$$

(Vegyük észre, hogy a jobb oldalon szereplő kifejezés csak l-en keresztül függ k-tól.)

Alkalmazva az előző összefüggést minden $2^m \le k < 2^{m+1}$, és $1 \le m < l$ számra kapjuk, hogy az

$$\eta_p = \sum_{m=p}^{\infty} I\left\{\left(\max_{2^p \le j < 2^{p+1}} |S_j - S_{2^p}| > \frac{2^{1/4}}{2^{1/4}-1} 2^{(m+p-2)/4}\right)\right\},$$

$p = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók teljesítik az

$$0 \le \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} I\left\{\left(\max_{1\le j\le k} |S_j| > \sqrt{k}\right)\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\log n} \sum_{m=0}^{l} \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{2^{m-1}\le k<2^m} I\left\{\left(\max_{1\le j\le k} |S_j| > \sqrt{k}\right)\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\log n} \sum_{m=0}^{l} \sum_{p=0}^{m} I\left\{\left(\max_{2^p\le j<2^{p+1}} |S_j - S_{2^p}| > \frac{2^{1/4}}{2^{1/4}-1} 2^{(m+p-2)/4}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\log n} \sum_{p=0}^{l} \sum_{m=p}^{l} I\left\{\left(\max_{2^p\le j<2^{p+1}} |S_j - S_{2^p}| > \frac{2^{1/4}}{2^{1/4}-1} 2^{(m+p-1)/4}\right)\right\} \le$$

$$\le \frac{2}{l} \sum_{p=0}^{l} \eta_p.$$

egyenlőtlenséget, ha $2^{l-1} \le n < 2^l$. Ezért elég belátni, hogy

$$\frac{1}{l} \sum_{p=0}^{l} \eta_p \to 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel, ha } l \to \infty.$$

Az η_p valószínűségi változók függetlenek, és a Kolmogorov egyenlőtlenség alapján

$$P(\mathbf{B}_{p,m}) = P\left(\max_{2^p\le j<2^{p+1}} |S_j - S_{2^p}| > \frac{1}{(2^{1/4}-1)} 2^{(m+p-1)/4}\right) \le$$

$$\le \sqrt{2}(2^{1/4}-1)^2 \frac{\sum_{j=2^p}^{2^{p+1}-1} \sigma_j^2}{2^{(m+p)/2}} \le \text{const.}\, \varepsilon(p) 2^{(p-m)/2},$$

ahol

$$\varepsilon(p) = 2^{-p} \sum_{j=2^p}^{2^{p+1}-1} \sigma_j^2 \to 0, \quad \text{ha} \quad p \to \infty.$$

Ezért

$$E\eta_p = \sum_{m=p}^{\infty} P(\mathbf{B}_{p,m}) \le \text{const.} \sum_{m=p}^{\infty} \varepsilon(p) 2^{(p-m)/2} =$$

$$= \text{const.}\, \varepsilon(p) \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m/2} \to 0,$$

ha $p \to \infty$. Továbbá $E\eta_p^2 = \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{m'=p}^{\infty} P\left(\mathbf{B}_{p,m} \cap \mathbf{B}_{p,m'}\right)$, és $\mathbf{B}_{p,m'} \subset \mathbf{B}_{p,m}$, ha $m' \ge m$. Ezért

$$E\eta_p^2 = \sum_{m=p}^{\infty} (m-p) P(\mathbf{B}_{p,m}) \le \text{const.} \sum_{m=p}^{\infty} \varepsilon(p)(m-p) 2^{(p-m)/2} \to 0,$$

ha $p \to \infty$.

Így $\lim_{l\to\infty} \frac{1}{l}\sum_{p=1}^{l} E\eta_p = 0$, és az η_p valószínűségi változók teljesítik a nagy számok törvényét, azaz

$$\frac{1}{l}\sum_{p=1}^{l}(\eta_p - E\eta_p) \to 0, \quad 1 \text{ valószínűséggel, ha } l \to \infty.$$

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

ISSN 0025-519X

Nyomdai munkák: Modok és Társa Kft., Kiskunhalas – Tel.: 77/421-344/153

Matematikai Lapok

1997/3–4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

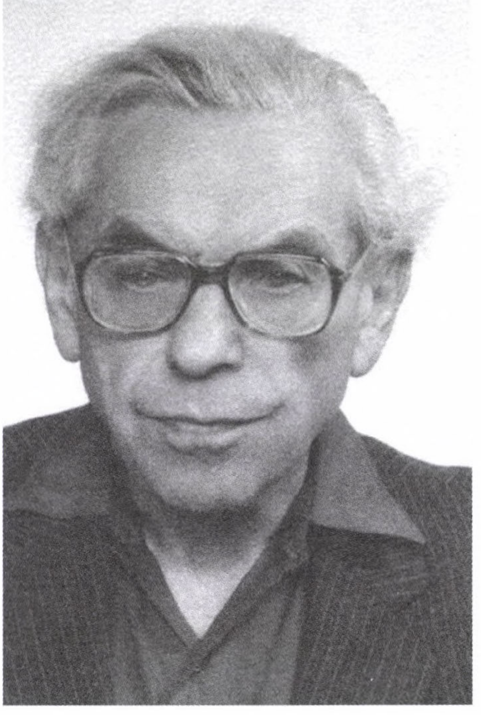
Új sorozat 7. évfolyam (1997), 3–4. szám

(Megjelent 2003-ban)

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Előfizetési díja 2200 Ft + ÁFA/évfolyam.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.



Erdős Pál, 1913–1996

BÚCSÚ ERDŐS PÁLTÓL

KATONA GYULA

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete munkatársainak nevében búcsúzom Erdős Páltól.

A nemzetközi sajtó szerint nem volt állandó munkahelye, hiszen állandóan utazott. Ez talán túlzás, hiszen a mi Intézetünk büszkélkedhetett azzal, hogy rendszeresen ott dolgozott, és ezért munkabért is kapott. Ez a munkaviszony valóban különleges volt. Nem volt besorolva egyik Osztályunkba sem, nevetségesnek tartottuk volna, hogy Erdős Pál egy bizonyos Osztályhoz „tartozzon". Nem kellett szabadságot kérnie, hiszen úgyis mindannyian tudtuk, mikor utazik el. A jelentésekben nem soroltuk fel cikkeit, idézeteit. Nem éreztük volna sportszerűnek az azokkal való dicsekvést.

De különleges volt hatása is az Intézetre. Ha itthon volt, megváltozott az élet. Elfoglalt egy jól megközelíthető szobát, legtöbbször az igazgatóét, összegyűjtötte 4-5 munkatársát és azokkal egyidőben különféle témákon dolgozott. Alig bírták tartani a tempót vele, a 83 évessel.

Mint szerkesztő bizottsági tag, igen sok folyóiratot kapott, ezeket mind a könyvtárunknak ajándékozta. Ez nagyon fontos forrása volt a könyvtárnak.

Nem volt semmi hivatalos funkciója, nem szeretett bizottságokban ülni. Mégis a legnagyobb tudományszervező volt. Matematikusok ezreinek a munkáját, sorsát szervezte. Azzal, hogy érdekes problémákat adott nekik, azzal, hogy példát mutatott a matematika szeretetéből, hogy pénzdíjakat tűzött ki, hogy reklámozta a fiatalok szép eredményeit. Ahol megjelent a világban, ott felpezsdült a matematikai élet.

Egyike vagyok annak a sokezer matematikusnak, akinek munkáját, sorsát szervezte, segítette. Amikor másodéves hallgató koromban kezembe nyomta egy munkájának különlenyomatát egy megoldatlan problémával, egy életre szólóan döntően meghatározta matematikai érdeklődésemet. Amikor a problémát megoldottam, elvitt egy étterembe ebédelni. Hatalmas kitüntetésnek éreztem. Ilyen egyszerű eszközökkel szervezte a tudományt.

Vannak nagy matematikusok, akik egyedül menetelnek egy hosszú úton, amikor elég messzire jutottak, könyvekben publikálják a teljes elméletet. Erdős Pál ezt másképp csinálta. Ötleteit már csírájukban elosztotta a világban. Az elméleteket sok-sok matematikus fejlesztette ki ötletei alapján, és támogatása segítségével. A könyveket mások írták meg. Ezekből az ötletekből sokkal több elmélet született, mint amennyit egy ember – még ha olyan termékeny is, mint Erdős Pál – képes lett volna egy életen át kidolgozni. Erdős Pál ugyanolyan zseniális tudományszervező volt, mint amilyen zseniális tudós.

Nem mondhatom, hogy példaképünk volt. Nem, nem, ő követhetetlen volt, mint ahogy Zeusz nem lehet példaképe egy földi halandónak.

Sokat szoktak írni különleges életmódjáról. Pedig voltak hasonló életmódok. Erdős Pál a matematika szerzetese volt. Ahogy a középkori szerzetesek egész életüket Isten dicsőítésének szentelték, és mindent ennek rendeltek alá, Erdős Pál életét a Matematika Istenének szentelte. Mindent eszerint tett, a világi hívságokat megvetette. De a matematika szerzetesének életmódjához hozzátartozott, hogy évente többször beutazza a világot. Így tudott még több embert megtéríteni.

Mint a matematikusok többsége, ő is úgy gondolta, hogy a matematikusok a matematikát nem saját kényük-kedvük szerint találják ki, hanem a meglévő matematikát fedezik fel. Vagyis hitt a matematika objektivitásában. Ezt ő úgy fejezte ki, hogy van egy Könyv, nagy K-val, amiben a legszebb, legjobb bizonyítások állnak. Nagy dícséret volt, ha valakinek azt mondta, hogy „a bizonyításod a Könyvből van". Afeletti elkeseredettségünkben, hogy elvesztettük őt, az vígasztalhat bennünket, hogy azóta már a Könyvet olvashatja. Bár ahogy ismerjük, már ki is olvasta. Most már átírja. Az angyalok pedig körbeülik, és matematikai problémákon törik a fejüket.

Közismerten sokat szeretett viccelődni idős korával, hamarosan eljövő halállal. Mi ezt persze nem szerettük hallgatni. Hatvan éves korában elnevezte magát P.G.O.M.-nek, ami a Poor Great Old Man rövidítése. Ötévenként újabb és újabb betűket talált ki. A jelen alkalomra már nem adott nekünk ilyen rövidítést. Javaslatom E.P.H.M.G., Erdős Pál, a Halhatatlan Matematikai Géniusz.

Pali Bácsi! Tudom, hogy többet már nem fogod elfoglalni az igazgatói szobát. De szeretném szellemedet ott látni, érezni továbbra is. Az Intézetben is, az országban is, és az egész világon.

G. O. H. Katona: Farewell to Paul Erdős

Eulogy at Erdős's funeral on 18 October 1996.

ERDŐS PÁL: AZ EMBER ÉS A MATEMATIKUS (1913–1996)[1]

SIMONOVITS MIKLÓS ÉS T. SÓS VERA

1. Előszó

Erdős Pál a huszadik század egyik legkiemelkedőbb matematikusa volt.

Nemcsak a matematikusok körében, nemcsak a tudományos világban volt elismert és közismert, hanem egy sokkal szélesebb közönség előtt is, nemcsak Magyarországon, hanem szerte a világon.

Ebben a cikkben megkíséreljük Erdős Pált olyannak mutatni be, amilyennek *mi* láttuk. Nem próbáljuk matematikai munkásságát még csak vázlatosan sem ismertetni: ez messze túlmenne a kereteken. Évtizedekkel ezelőtt ezt részben már megtették ugyanitt, a Matematikai Lapok oldalain Turán Pál [71] és Hajnal András [48]. Ismertetünk néhány részletet Erdős munkásságából, elsősorban az egyszerűbben elmagyarázható kombinatorikai és számelméleti eredményeire szorítkozva. Matematikusi egyéniségével, stílusával és könnyebben megközelíthető eredményeivel az Olvasó egyebek között megismerkedhet több mint 30 a Matematikai Lapok számára írt cikkén keresztül.[2]

Erdős Pál már életében is legendává vált. Erős egyénisége, világos erkölcsi alapelvei, a matematikáért való rajongása, és a külvilág által meghatározott körülmények arra késztették, hogy egy teljesen szokatlan életformát alakítson ki magának. Erdős számára eltörpült a jelentősége az élet sok olyan részletének, amelyre a legtöbb ember igencsak odafigyel. Így hát nem meglepő, hogy egyes különcségeiről – időnként a valóságnak megfelelően, máskor túlozva – gyakran mesélnek ismerősei, illetve a róla szóló írások. Erdős az ilyen történetek közül bizonyosakkal nem törődött, másokra viszont szívesen emlékezett vissza, és ő is felidézte azokat,

[1] Ez a cikk a mátraházi „műhely" nyomán kiadott kötetben jelent meg eredetileg, angolul [64], Miklós Simonovits, Vera T. Sós: The Mathematics of Paul Erdős című cikkének erősen átdolgozott, magyar nyelvű változata. A fordítás Szász Réka munkája, az átdolgozást a szerzők végezték. Az eredeti cikk a Recent Trends in Combinatorics, The Legacy of Paul Erdős című kötet 9–20. oldalán jelent meg, eds.: Ervin Győri és Vera T. Sós (2000), copyright Cambridge University Press, Cambridge. A cikk sok ponton támaszkodik T. Sós [66] cikkére is.

[2] A cikk végén található egy lista Erdős a Matematikai Lapokban megjelent cikkeiről.

egyben hitelesítve is ezen anekdotákat. (Bizonyosak viszont kifejezetten bosszantották.) Mint ahogy ez a szenvedélyes zseniknél sajnos gyakran megtörténik, az írók a különcségeiről szóló történetek segítségével vélik megmutatni, hogy mennyire különleges ember volt. Azok számára viszont, akik Erdőst közelről ismerték, ezek a történetek talán mulatságosak, de messze nem ragadják meg személyiségének lényegét, ami nagyon is életközeli volt.

2. Erdős és a magyar matematika

A magyar matematikának több szempontból is óriási adottsága, hogy voltak kiemelkedő egyéniségei, akik világszínvonalra emelték. A magyar kultúra és a világkultúra, a magyar tudomány és a világtudomány kapcsolatának nagyon fontos és bonyolult kérdését nem lehet néhány mondatban, vagy néhány oldalon elintézni. Ebben a cikkben viszont ki kell emelnünk, hogy Erdős Pál egyike volt azon magyar matematikusoknak, akik a legtöbbet tették azért, hogy a magyar matematika világhíressé váljék, és hogy nagyszámú, nemzetközi szinten is elismert magyar matematikus nevelődjön ki.

Turán Pál, (aki egyetemi éveik óta egyik legjobb barátja volt Erdősnek) a következőket írta Erdős 50. születésnapjára, a Matematikai Lapokban, 1963-ban [71], hosszabb, matematikailag is igen érdekes cikke befejezéseként, szeretetet, elismerést némi élcelődéssel is vegyítve:

> „... 1958-ban Kossuth díjjal lett kitüntetve, 1956-ban a Magyar Tudományos Akadémia levelező-, majd 1961-ben rendes tagja lett. De hagyjuk a felsorolást; Erdős matematikai pályája felfelé ível, ha ma már csak másod- vagy harmadnaponként is ír csak egy dolgozatot. Hatása erősebb, mint valaha; ő a jelenkori magyar matematika egyik legerősebb stimulátora. Kívánjuk neki, hogy dolgozatainak száma szigorúan monoton növekedjék, olvasóinak pedig, hogy sajtóhibáinak száma szigorúan monoton fogyjon."

* * *

Erdős hatása nemcsak a kutatói szinten jelent meg. Csodagyerek volt és felnőtt korában nagy odafigyeléssel foglalkozott maga is csodagyerekekkel, tehetséges ifjakkal, és emellett gyakran adott elő tanároknak, vagy írt a Matematikai Lapok olvasóinak, legutóbb geometriáról, [32] azt megelőzően Pálfy Péter Pállal csoportokról, [37], és előtte még sok más cikket és megemlékezést, geometriáról, számelméletről, diofantikus approximációról, algebráról. Az egyik első, 1956-os „Mat-Lap" cikke két a Matematikai Lapok feladatrovatában feladott problémához kapcsolódik [33].

Liberális gondolat Lenin és Sztálin fényképe alatt: Erdős matematikáról beszél általános iskolásoknak Sztálinvárosban, 1955-ben

3. Mátraháza

Erdősnek életeleme volt a konferenciákon való részvétel. Ezek az időszakok számára a pezsgő életet jelentették, azt, hogy matematikai problémákat diszkutálhatott, barátaival, kollégáival lehetett együtt. Az egyik első nemzetközi konferencia gráfelméletből Magyarországon volt, Dobogókőn, 1959-ben, majd a hatvanas években beindult a magyar kombinatorika és számelmélet konferencia-sorozat, melyek mindegyikén résztvett. Ezek közül is kiemelnénk az Erdős 60. 70. és 80. születésnapjára Magyarországon szervezett konferenciákat, [74], de emellett 80. születésnapjára konferenciát szerveztek a tiszteletére Cambridge-ben, Prágában, [75] és Kalamazoo-ban (USA) is.

Halála után 3 évvel, 1999-ben egy konferenciát szerveztünk emlékére a Magyar Tudományos Akadémia Roosevelt téri palotájában, 450 résztvevővel, 120 meghívott előadóval.[3] Az egész konferencia Erdősről szólt, a főelőadók Erdős matematikájáról tartottak áttekintő előadásokat, és a többi előadás is Erdős matematikájához kapcsolódott. Ezek többsége a közelmúltban két vastag kötetben, 1400 oldalon jelent meg a Bolyai János Matematikai Társulat és a Springer közös kiadásában [76].[4] A konferencia szervezésével az volt a célunk, hogy lehetőséget teremtsünk Erdős egyedülállóan széles spektrumú matematikai munkásságának bemutatására.

[3]Ez tiszta matematikában egy különlegesen nagy konferenciának számít.

[4]A kötetben megtalálható a számos szakmai áttekintő cikk mellett több megemlékezés régi barátai tollából.

Ebben a cikkben két emlékezetes konferenciáról szólunk részletesebben.

1995-ben egy nemzetközi tudományos műhelyt (workshop-ot) szerveztünk kevés résztvevővel, Mátraházán. A „workshop"-ok abban különböznek a szokványos konferenciáktól, hogy kevés előadás szerepel a programjukban, ezek között gyakran vannak áttekintő előadások, és nagyobb szerepet kapnak a résztvevők tudományos beszélgetései, „együtt-dolgozása". Mátraházán csak 9 előadás volt. Az ilyen kisebb konferenciákat, workshopokat Erdős különösen szerette: otthon érezte magát, régi barátok és fiatal matematikusok vették körül. Ilyenkor lehetett legjobban csodálni azt a különleges képességét, hogy szimultán dolgozott teljesen különböző problémákon, teljesen különböző emberekkel.

A mátraházi konferencia csoportképe

Ennek a workshopnak az volt a célja, hogy összehozza a szakembereket a kombinatorikus matematika egymástól távolabbi területeiről, pontosabban, a tiszta kombinatorika, a gráfelmélet, a kombinatorikus számelmélet és a véletlen gráfok elméletének témáiból.[5] Egy hetet töltöttünk ott „bizonyításokkal és sejtésekkel".[6] Emlékszünk, hogy Erdős intenzíven dolgozott például Peter Cameronnal egy kombinatorikus számelméleti kérdésen. Cikkük részben a szemünk láttára született, posthumous jelent meg a workshop kötetében [7].

Ezen a workshop-on amelyet a Magyar Tudományos Akadémia mátraházai üdülőjében rendeztünk, maga a helyszín is különleges légkört és hangulatot jelentett Erdős számára. Erdőst itt nagy szeretet, tisztelet, és törődés vette körül. A 60-as évek vége óta Erdős rendszeresen eltöltött itt 1–2 hetet. Különösen kellemes emlékűek voltak számára azok az időszakok, amikor még édesanyja és barátai, Kalmár László és felesége, Rényi Alfréd és felesége, Rényi Kató, Turán Pál társaságában lehetett itt. A fenti neveket nem kell olvasóinknak bemutatni, azt azonban talán kevesen tudják, hogy Kalmár László segített Erdősnek megírni az első cikkét, amely a Csebisev tétel egy új, egyszerűsített bizonyítását tartalmazta.[7] [8] Mátraházán született néhány korábbi, Erdős Pállal közös kedvenc cikkünk is, pl. [42], [43].

A mátraházi üdülőben az élethez hozzátartozott, hogy itt a legkülönbözőbb tudományok jeles képviselői voltak együtt, nemcsak matematikusok, akik természetesen nemcsak dolgoztak, hanem politizáltak, történelemről és közgazdaságtanról, biológiáról, fizikáról, orvostudományokról beszélgettek.

Ezekben a beszélgetésekben Erdős nagy érdeklődéssel és széleskörű tájékozottsággal vett részt. A beszélgetésekhez kiváló keretet adtak a hosszabb-rövidebb séták. Erdősnek voltak kedvenc sétaútjai. Az egyik egy kis kilátó toronyba vezetett, ahova mindig szívesen felmászott.

Emellett Erdős rengeteget pingpongozott itt sajátos, kissé furcsa, de igen hatékony stílusában[9], sakkozott, és go-zott (sokáig ő volt a legjobb magyar go játékos).[10] Bridzselni is szeretett.

4. Varsó, egy évvel később

Erdős Varsóban halt meg 1996. szeptember 20-án. Halálának körülményei mélyen megrendítőek voltak. A varsói Banach Központban 1996 őszén egy öthetes konferencia-sorozatot rendeztek. Erdős két hetet töltött ezen a workshop-sorozaton. Élvezte a matematikai légkört, de sokat panaszkodott a hideg időjárásra. Két előadást tartott, a másodikat szeptember 18-án, szerdán. Nagy sikere volt.

[5] Igen ismert matematikusok mellett azonban a tehetséges fiatal diákok közül is sokan itt voltak.

[6] Ez Erdős kedvenc kifejezése volt. Néha, szokásos túlzásaival, azt mondta, hogy addig van értelme az embernek élni, amig sejteni és bizonyítani tud.

[7] Később Kalmár az Erdős féle bizonyítást a Középiskolai Matematikai Lapokban dolgozta fel, [52].

[8] Csebisev tétele azt mondja ki, hogy bármely egész szám és a kétszeres között van prímszám.

[9] talán azért volt furcsa a stílusa, mert nem volt nagyon jó a szeme, de kitűnőek voltak a reflexei?

[10] Nagyon jó sakkozó volt, de a matematikusok között ez kevésbé meglepő. A GO egy kínai eredetű játék amelyik talán ugyanolyan komoly és mély, mint a sakk, csak Európában kevésbé elterjedt.

Erdős Go-zik (1941)

Péntek hajnali három körül, egy szívrohamot követően, a szállodai szobájából kórházba került. Hamarosan elvesztette eszméletét. Délután három óra körül egy második, végzetes szívrohamot kapott.

Barátai, kollégái, szerencsétlen körülmények folytán, csak ezután értesülhettek kórházbaviteléről és haláláról.

* * *

Erdős – akinek idősebb korára erősödött humora morbid oldala, – gyakran „kifejtette", hogy az „élet befejezésének legszebb módja" „... megtartani egy előadást, befejezni egy bizonyítást, letenni a krétát, és meghalni..." Bizonyos értelemben úgy ment el, ahogyan azt kívánta. A legutolsó napig matematikán gondolkozott, sejtett és bizonyított.

Bármerre járt a világban, a nap szinte minden percében törődő és szeretettel gondoskodó kollégák hada vette körül, és baráti, szerető gondoskodás, amelyet egyre kevésbé tudott nélkülözni – mégis utolsó óráiban magára maradt, az idegen kórházi környezetben, idegenek között.

Mindnyájunk érzéseit fejezte ki Vojta Rödl egy e-mailben:

„Pali bácsi nélkül már semmi sem lesz a régi".[11]

5. Erdős matematikájáról

Erdős még nincs 18 éves, amikor megold egy Kőnig Dénestől hallott gráfelméleti problémát. (Ezt Kőnig beveszi könyvébe, amely az első és évtizedekig az egyetlen gráfelméleti monográfia.) Fejér Lipótnál doktorál, témája számelmélet, prímszámok számtani sorokban való eloszlása.

Erdős 1934-ben Mordell meghívására 4 évre Manchesterbe megy. Eközben rendszeresen hazajár Budapestre: évente háromszor több hetet tölt itthon szüleivel és barátaival. 1938-ban az elsők között van, akik úgy ítélik meg, hogy el kell hagyni Magyarországot. Szeptemberben a Princeton-i Institute for Advanced Study meghívására az USA-ba megy és csak 10 év múlva, 1948-ban jön haza, hogy rajongva szeretett édesanyját és barátait meglátogassa. 1955-től már rendszeressé válnak hosszabb-rövidebb ideig tartó hazalátogatásai. 1962-től az MTA Matematikai Kutatóintézetének munkatársa. Emellett változatlanul járja a világot, az év jelentős részét külföldön tölti.

* * *

1939-ben kezdte a „nomád" életmódot: állandóan úton volt, egyik helyről a másikra utazott.

Azonban életformájának nem az volt a leglényegesebb vonása, hogy sok helyen járt. Ennél sokkal fontosabb az, hogy rendkívül könnyen volt képes „matematikai" és „emberi" kapcsolatot teremteni, barátságokat kötni, bármerre is járt. Amikor új helyre érkezett, az ottani matematikusokkal elkezdett beszélgetni, kikérdezte őket kutatási témájukról, elkezdett gondolkodni a kérdéseiken, és gyakran meglepő megoldásokkal állt elő. Ehhez hozzátartozik, hogy hihetetlenül gyors is volt.

Gyakran megesik, hogy a matematikailag nagyon erős, mély, és gyors gondolkodású matematikusokkal bénító együtt dolgozni. Nagyon nyomasztó tud lenni, amikor hónapokig gondolkodunk egy kérdésen, és egyszercsak találkozunk valakivel, aki feltesz néhány kérdést, és megoldja problémánkat. Erdőssel teljesen más volt a helyzet. Annak ellenére, hogy tisztában voltunk azzal, hogy egy matematikai óriás ül velünk szemben, a vele való beszélgetésekkor Erdős olyan különös légkört teremtett, hogy vele egyenrangúnak érezhettük magunkat. Gyakran tett fel a másik területéhez közel álló kérdéseket, vagy olyanokat, amelyeknél ő megakadt. Mindenki boldog volt, ha válaszolni tudott a kérdéseire, és büszke volt, ha sikerült megoldania egy „Erdős problémát",[12] majd elmondhatta neki a megoldást. De ő nem állt

[11]"Things won't be the same without uncle Paul".

[12]azaz, Erdőst foglalkoztató matematikai kérdést.

meg itt, hanem további kapcsolódó kérdéseket tett fel, az eredetileg ártatlannak látszó kérdésből kiinduló újabb és újabb irányokba kutatva tovább.

Mindannyiunknak vannak erről történetei. Hadd mutassuk ezt be Hajnal András történetén keresztül. (Hajnal ezt a történetet részletesen leírja Erdős Kombinatorikus Halmazelméleti hatását taglaló egyik áttekintő cikkében [49], mi itt magyarra fordítottuk és kissé lerövidítettük.)[13] Erdős Kalmárnál volt látogatóban, amikor Hajnal először találkozott vele. Hajnal ezt írja:

> „Abban az időben Kalmár László aspiránsa voltam Szegeden ... Erdős lejött Szegedre meglátogatni az egyetemet. ... Engem úgy mutattak be neki, mint egy ígéretes fiatalembert, aki halmazelméletet tanul. [Hajnal axiomatikus halmazelmélettel foglalkozott ekkortájt, disszertációját a relatív konstruálhatóságból írta.] Hamarosan magunkra hagytak bennünket Kalmár egyetemi szobájában, két hatalmas fotelben ülve, közöttünk egy kávézó asztallal. Úgy éreztem, nagyon öreg: 43 éves volt, én 25. Nagyon megtisztelve éreztem magamat és zavarban is voltam, hogy egyedül hagytak ezzel a híres emberrel. Akkor még nem tudtam, hogy legtöbb fiatal munkatársával hasonló körülmények között találkozott. Erdős megkérdezte, mi érdekel engem halmazelméleten belül. Én a relatív konstruálhatóság témájában dolgoztam, és nagyon büszke is voltam erre. Elkezdtem tehát elmagyarázni az eredményeimet. Ő nagyon udvariasan végighallgatott, majd, amikor befejeztem, megkérdezte: „érdekli önt a normális halmazelmélet is?..."

Itt Hajnal leírja a beszélgetésük matematikai témáját, amit átugrunk. Mindenesetre, Hajnal feltett Erdősnek egy kérdést a sokváltozós halmaz-leképezésekkel kapcsolatban. Hajnal így folytatja:

> „Szerencsére ez tetszett Erdősnek. Élénk beszélgetésbe kezdtünk, ami egyre folyékonyabb és közvetlenebb lett. Az első dolog, amit tőle tanultam, (és ez elég sok időbe tellett nekem) az volt, hogy ő soha sem kezdte az általános esettel. Először azt akarta kideríteni, mi történik a kétváltozós esetben.

Később Erdős szelíden rábeszélte Hajnalt, hogy (Fodor Gézával) másszanak fel a szegedi Dóm tornyába.

> „Addigra már két évet töltöttem el Szegeden, de soha nem okozott nehézséget, hogy ellenálljak bármiféle nyomásnak, hogy felmásszak a toronyba. Nagy meglepetésemre, Erdős indítványának nem tudtam ellenállni. A lépcsőkön felfelé haladva Erdős újabb és újabb eredményeket és sejtéseket fogalmazott meg, miközben néha arra panaszkodott, hogy kicsit szédül.

[13] A téma, pontosabban Erdős és a halmazelmélet kapcsolata iránt érdeklődők számára a már említett, a Matematikai Lapokban megjelent Hajnal cikket is ajánlhatunk [48].

Este Kalmáréknál vacsoráztunk, ahol a matematikai disszkusszió a halmazfüggvényekről továbbfolytatódott, néha keveredve Erdős Sam-re és Joe-ra (azaz, az USA-ra és Szovjetúnióra) vonatkozó megjegyzéseivel.

Amikor elváltunk, az már majdnem olyan volt, mintha régi barátok váltak volna el, és volt egy félig kész közös cikkünk, amelyet már levelezés útján is befejezhettünk."

6. Ars Mathematica: „Sejtés és Bizonyítás"...

Erdős matematikájáról úgy tudhatjuk meg a legtöbbet, ha eredetiben olvassuk el néhány cikkét. Ezeknek egy része – elsősorban a kombinatorika, de a számelmélet és a geometria területéről is – van összegyűjtve az 1973-ban az MIT Press által kiadott „Art of Counting" (azaz, „A számolás művészete") című kötetben [15]. A könyv egy kitűnő válogatás Erdős cikkeiből.

Az olvasó számára talán a már említett, több mint 30, a Matematikai Lapokban megjelent cikke a legelérhetőbb forrás. Ezekre mi előszeretettel fogunk hivatkozni.

Több áttekintő tanulmány jelent meg munkásságáról a 80-adik születésnapja alkalmából, illetve halála óta. Csak néhányat említve: Bollobás [5], Hajnal [49], Ruzsa [61], Sárközy [62] és Simonovits [63]. Ezenkívül melegen ajánljuk Turán már említett írását [71] és Erdős egy saját cikkét [30], valamint egy életéről szóló hosszú cikket Babaitól [2], és egyet T. Sóstól [66]. Sokat árul el Erdős matematikájáról még Chung és Graham könyve Erdős megoldatlan gráfelméleti sejtéseiről, problémáiról is [6].

Végül sokat megtudhatunk Erdős matematikájáról és személyiségéről azokból a cikkekből, amelyeket *ő maga* írt barátairól: Turánról [19], [18], [20], [18], Gallairól, [23], Kalmárról [16], Gödelről [27], Gabriel Diracról [21], Ernst Strausról [24], Stan Ulamról [25], Richard Radoról [26].

* * *

Már említettük, hogy amikor Erdős 50 éves lett, Turán írt egy áttekintést [71] Erdős matematikai munkásságáról. Turán sorai még ma is azok közé az írások közé tartoznak, amelyek a legjobban segítenek Erdős matematikájának megértésében.[14] Cikke „bevezető" részében Turán a következőképpen ír:

> „Nem könnyű annak a feladata, aki Erdős Pál matematikai munkáinak akár csak vázlatos ismertetésére vállalkozik azon alkalomból, hogy 1963 március 26-án lesz 50 éves. ... Nehézzé teszi először az is, hogy ... tudományos dolgozatainak száma közel 400,... tehát egy mozartinak nevezhető termékenység és e cikk szükségképpen korlátozott terjedelme.

[14] Nem meglepő, hogy amikor Erdősről írunk, sokan használjuk Turán sorait. Az viszont érdekesebb, hogy maga Erdős is ezt a forrást hasznfálta egyik utolsó cikkében [30].

Még nehezebbé teszi az, hogy a dolgozatok témaköre a matematika oly távoleső területeit foglalja magában, melyre Erdősön kívül nehezen találni bennük egyenlően kompetens szakértőt."

...

„De főleg nehézzé tette az írást az, hogy munkáinak és hatásának ismertetése nehezen választható el matematikusi egyéniségétől."

...

„Bizonyos értelemben egy occidentális [nyugati] Ramanujan ő, annak erejével és korlátaival, szinguláris és egyszeri jelenség...

Eddig publikált munkái nagyjából a következő témakörökre vonatkoznak:

1. Aritmetika [Számelmélet]
2. Valószínűségszámítás, ergodelmélet,
3. Gráfelmélet, aszimptotikus kombinatorika
4. Konstruktív függvénytan,
5. Halmazelmélet, halmazelméleti topológia,
6. Sorelmélet
7. Komplex függvénytan,
8. Geometria.

..."

Ezek a sorok több, mint 30 éve íródtak. Addigra Erdős körülbelül 400 cikket írt (ma a publikációs listája körülbelül 1500 cikket tartalmaz).

* * *

Úgy tűnik, hogy elmúltak azok az idők, amikor a matematikusok képesek voltak több különböző témát mélyen megérteni, és ezekben maradandót alkotni. Valaki egyszer azt mondta, Hilbert volt az utolsó polihisztor. Az bizonyos, hogy Erdős úttörő volt több, egymástól független területen, és a mai matematika számos ágának nyilvánvalóan ő volt az egyik megteremtője. Arra is több példa van, hogy valaki más – egy adott területen – írt egy vagy két úttörő cikket, aztán Erdős elkezdett kérdezni, tételeket sejteni és bizonyítani, és a terület néhány elszigetelt eredmény gyűjteményéből virágzó elméletté változott. Sokszor munkatársaiban sem tudatosodott azonnal, hogy mi is történik: Erdős kérdései és válaszai csak egy kis terület utolsó hiányosságait pótolták, vagy pedig egy jelentős elmélet van kialakulóban.

Erdős matematikájának leírásában két szempontot fogunk követni:

Megemlítjük néhány fontosabb eredményét. Bemutatjuk, hogyan nőttek ki elméletek Erdős „kis" kérdéseiből. Ezek között voltak, ahol Erdős fejlesztette ki az elméletet, máshol mások folytatták az Erdős által elkezdett kutatásokat.

Nem próbáljuk ezeket szétválasztani, mert Erdősnél is minden mindennel összefonódott.

Erdős matematikai munkásságának első két évtizedében elsősorban számelmélettel és analízissel foglalkozott. Ma úgy tűnhet, hogy legtöbbet kombinatorikai, diszkrét matematikai témákon dolgozott: gráfelméleten, kombinatorikus számelméleten, kombinatorikus halmazelméleten. Valójában, a korábbi munkáiban is sokszor megtalálható a kombinatorikus jelleg. Ugyanakkor a legtöbb a 13. oldalon 1–8. alatt felsorolt téma is az élete végéig megjelenik munkásságában.

Néhány éve megkértük, hogy írjon egy cikket „kedvenc tételeiről" [30], a szokásos „kedvenc problémáiról" helyett, abba a kötetbe, amit a 80-adik születésnapjára adtunk ki [74]. Ez a cikk, amelyben leírja a saját értékelését, segít kiválasztani néhányat a legfontosabb eredményei közül. Most ezek közül említünk néhányat.

* * *

Erdős elemi bizonyítást talált sok klasszikus prímszámelméleti tételre. A prímszámok számára Gauss sejtette, hogy ez n-ig kb. $\frac{n}{\log n}$, de ezt csak sokkal később sikerült bizonyítani a Riemann féle $\zeta(s) := \sum \frac{1}{n^s}$ függvény mély analitikus tulajdonságainak felhasználásával. 1948-ban Erdős és Selberg egy rég várt elemi bizonyítást találtak a prímszámtételre. Itt az „elemi" azt jelenti, hogy nem használ komplex függvénytant. Az eredménytől egyébként akkor azt várták, hogy áttörést fog eredményezni a számelmélet és a Riemann sejtésre vonatkozó kutatások terén, de ez – úgy tűnik – nem következett be. A történetet és az Erdős–Selberg bizonyítás egy részletesen kidolgozott variánsát megtalálhatjuk a Hoffmann–Surányi cikkben [50].

* * *

Erdős megfigyelte, hogy néhány számelméleti függvény viselkedése nagyon hasonlít a független valószínűségi változók összegének viselkedéséhez: Kaccal [36] és Wintnerrel [46] a számelmélet egy teljesen új ágát indították el. Az elmélet lényegét dióhéjban úgy lehet leírni, hogy ha bizonyos számelméleti függvényeket vizsgálunk, azok viselkedése sok szempontból olyan, mintha a prímek egymástól független véletlen számok lennének. Például, egy szám prímosztóinak száma normális eloszlású.

* * *

Régóta vizsgált, hogyan lehet minél pontosabban megadni az $x^2+y^2 \leq T$ egész megoldásainak számát. Mivel ez nem más, mint az origó középpontú, $\sqrt{T}$ sugarú körben levő rácspontok száma, ez nagy T-re a kör területéhez van közel: $\pi T + o(T)$. A kérdés az, hogy lehet-e jelentősen javítani a fenti becslést. Hardy és Littlewood megmutatták, hogy ha $f(T)$ jelöli a tekintett rácspontok számát, akkor

$$\frac{|f(T) - \pi T|}{(T \log T)^{1/4}}$$

nem tarthat 0-hoz, azaz (alkalmas $c > 0$ konstansra) van tetszőleges nagy T, amire a hibatag nagyobb, mint $c(T\log T)^{1/4}$.

Erdős és Fuchs [34] észrevették, hogy a négyzetszámok helyett hasonló jelenség igaz egészek tetszőleges sorozatára. A fentihez kapcsolódóan belátták, hogy

Erdős–Fuchs tétel. *Bármely $a_1, \dots, a_n, \dots$ sorozatra, ha $F(T)$ az $a_i + a_j \leq T$ megoldásainak száma, akkor bármely $c > 0$-ra*

$$\frac{\left|F(T) - cT\right|}{\left(T/(\log T)^2\right)^{1/4}}$$

nem tarthat 0-hoz.

Ez azt jelenti, hogy az $a_i + a_j \leq T$ megoldásszáma nem lehet túl közel egy lineáris függvényhez. (Ennek az a tartalma, hogy az $a_i + a_j = n$ megoldásszáma nemcsak, hogy nem lehet konstans, de még átlagban sem lehet túl közel egy konstanshoz.)

* * *

Erdős olyan matematikus volt, akit elsősorban a „konkrét kérdések" érdekeltek.

Erdős barátja és szerzőtársa, Ernst Straus (aki egy ideig Albert Einstennek asszisztense és szerzőtársa is volt) így írt róla: „A problémamegoldók hercege és a kérdésfelvetők császára." Erdős ezt a következőképpen fogalmazza:

> „A kérdések mindig is matematikai életem lényeges részét alkották. Egy jól kiválasztott kérdés a matematika egy adott területének alapvető nehézségét különítheti el, és így olyan szintjelzőként szolgálhat, amihez viszonyítani lehet a területen elért haladást. Egy ártatlannak tűnő kérdésen gyakran nem is látszik valódi természete...".

Sok matematikus inkább elméletek felépítését tekinti feladatának, és amikor megakad, akkor megvizsgál speciális eseteket, hogy a részleteket tisztázza.

Erdős az ellenkező módszerrel dolgozott. Speciális esetekből indult ki, megtámadta őket, egyre több eredményt bizonyított az egyes kérdések körül, kezdetben csak kis magvát építve ki annak, ami később egy teljes elméletté nőtte ki magát.[15] Az alábbiakban ezt mutatjuk be néhány példán.

Érdekes illusztrációja Erdős matematizálási stílusának a híres Erdős–Szekeres problémakör kifejlődése is. Erdős és Szekeres [45] egy Klein Eszter által feltett szokatlan kérdésből indultak ki:

Adott n általános helyzetű pont a síkon, milyen nagy konvex k-szög választható ki ebből a ponthalmazból? Könnyű belátni, hogy 5 pont közül mindig kiválasztható 4 konvex helyzetű. Azt már sokkal nehezebb bizonyítani, hogy 9 pont közül kiválasztható 5 konvex helyzetű. Erdős és Szekeres bebizonyított egy általános tételt

[15] Ez derült ki a Hajnal András által leírt első találkozásukból is, 11. old.

[45]. Eközben tulajdonképpen újra felfedezték Ramsey tételét [59] amely segített az eredeti kérdés megoldásában. Ramsey más motivációval indult és kevéssel megelőzte őket a tételt bizonyításával.[16]

Maga a geometriai tétel a következőt mondja ki:

Erdős–Szekeres tétel (1936). *Minden $k \geq 3$ egészhez van olyan $f(k)$ szám, hogy ha a síkon legalább $f(k)$ pontot veszünk, akkor ezek között lesz k olyan, amelyek egy konvex k-szöget határoznak meg.*

Erdős és Szekeres azt sejtették, hogy $f(k)$ lehető legkisebb értéke $2^{k-2}+1$.[17] Ez máig is megoldatlan.

Ramsey tétele a legegyszerűbb általános esetben, Erdős és Szekeres megfogalmazásában így szól:

Erdős és Szekeres „Ramsey" tétele ([45]). *Legyen adott két pozitív egész, k és ℓ. Ha egy G gráf pontszáma*

$$n > \binom{k+\ell-2}{k-1}, \tag{1}$$

akkor G vagy tartalmaz egy teljes k-ast, vagy egy üres ℓ-est.

A tétel felfogható a skatulya-elv általánosításának is, ez magyarázza, hogy nagyon sok helyen alkalmazható, gráfelméletben, számelméletben, elméleti számítógéptudományban, és még sok más területen.

De ha a tétel nem volna alkalmazható, akkor is elmondanánk róla, hogy sok és mély általánosítása van, és hogy ma a kombinatorikában van külön elmélete a véges és végtelen Ramsey típusú kérdéseknek, és mindenképpen ezek a modern kombinatorika egyik legmélyebb, legkiterjedtebb területét jelentik.[18]

* * *

A Ramsey tétellel elérkeztünk a kombinatorikához.

A kombinatorika a számítógéptudománnyal való kölcsönhatása következtében robbanásszerű fejlődésen ment át az elmúlt két-három évtizedben. Bár Erdős maga sohasem foglalkozott közvetlenül számítógéptudománnyal, Erdős matematikájának hatása nagyon erősen érződik a kombinatorikában és az ezzel szoros kapcsolatban levő számítógéptudományban. Például „véletlen módszere" az elméleti számítógéptudomány hatékony eszközévé vált, többek között algoritmusok sebességének alsó becslésénél használják.

---

[16] A történet részletes leírása megtalálható például Szekeres cikkében [67] az Art of Counting [15] bevezető részében.

[17] Az Erdős féle geometriai problémák iránt érdeklődőknek ajánljuk a Pach–Agarwal könyvet [56].

[18] Standard könyv a témakörből Graham, Rothschild és Spencer monográfiája [47]

Erdős kedvenc kombinatorikai területei közé tartoztak a Ramsey elmélet, az extremális gráfok elmélete, és a véletlen gráfok elmélete is. (Ez a három elmélet egymással is összefonódott.) Mi itt – illusztrációként – a véletlen gráfokkal fogunk foglalkozni. Miért éppen ezzel? „A valószínűségszámítási módszerek alkalmazása vörös fonalként húzódik végig Erdős egész munkásságán..." írja Turán a már többször idézett cikkében. Ez a véletlen gráfoknál is nagyon jól érzékelhető.

Ennek a területnek egyre nő a jelentősége. A véletlen módszerek számelméletben, gráfelméletben, és sok más területen való tudatos alkalmazása Erdős egyik legnagyobb érdeme.

A véletlen struktúrákra vonatkozó eredményeket három csoportba érdemes osztanunk:

(1) Vannak eredmények, amelyek arról szólnak, hogy bizonyos determinisztikus struktúrák véletlenszerű vonásokat mutatnak. (Ilyenek a már említett, a prímszámokra vonatkozó tételek, az Erdős–Kac tétel, stb.)

(2) Más eredmények véletlen módszerekkel bizonyítják bizonyos objektumok létezését.

(3) Végül az utolsó csoportba tartoznak azok az eredmények, ahol adott típusú objektumokat generálunk véletlenszerűen, de nem azért, hogy valaminek a létezését bizonyítsuk, hanem, hogy ezek tipikus struktúráját írjuk le.

A fenti osztályozás fontos Erdős matematikájában, az annak nyomán kialakult területeken és a vele párhuzamosan mások által kifejlesztett elméletekben is.

* * *

Turánnak egy Ramsey-típusú kérdésére válaszolva Erdős véletlen módszereket kezdett alkalmazni a gráfelméletben. Mi is volt ez a kérdés?

Az Erdős–Szekeres képletből azonnal látjuk, hogy minden n pontú gráf tartalmaz egy legalább $\frac{1}{2}\log_2 n$ méretű teljest vagy üreset. Erdőst bebizonyította, hogy

Erdős tétel [10]. *Van olyan G_n n-pontú gráf, melyben a legnagyobb teljes és a legnagyobb üres részgráf is legfeljebb $2\log_2 n$ méretű.*

A cikk egyszerű leszámolást használva bizonyítja ilyen gráfok létezését, anélkül, hogy egyetlen konkrét ilyen gráfot is megadna. Valójában azt mutatja meg, hogy *majdnem mindegyik gráf* ilyen.

Mindmáig izgalmas nyitott kérdés egy ilyen gráf megkonstruálása.

Bizonyos értelemben ekkor született meg a véletlen módszer. Később ennek a módszernek egyre kifinomultabb változatait használva Erdős bebizonyította a nagy derékbőségű[19] és nagy kromatikus számmal rendelkező gráfok létezését [12], [13].

Erdős tétel. *Minden k és g egész számra van olyan G gráf, amelyiknek nincs g-nél rövidebb köre, de a kromatikus száma nagyobb, mint k.*

[19] A derékbőség a gráf legrövidebb körének hossza. Az angol „girth" szót szoktuk itt használni. Egy gráf kromatikus száma az a legkisebb egész, hogy ennyi színnel úgy is meg lehet színezni a gráf pontjait, hogy minden él 2 különböző színű pontot kössön össze.

Az ilyen gráfok létezése azért meglepő, mert a nagy derékbőség azt jelenti, hogy a gráf ritka, kevés éle van, és addig a magas kromatikus számot sűrű részekkel vélték biztosíthatónak. A bizonyítási módszer meglehetősen bonyolult, de egy igen egyszerű és fontos új gondolatot tartalmaz:

> Nem azt mutatjuk meg, hogy valamilyen megadott pontszámú és élszámú gráfok között majdnem mindegyik magas kromatikus számú és derékbőségű, hanem azt, hogy majdnem mindegyikből elhagyható néhány él, hogy azután már ilyenné váljék.

Az előbbi Erdős féle egzisztenciabizonyítás determinisztikussá tétele volt Lovász egyik első kiemelkedő eredménye [55]. Azzal, hogy a magát a tételt *általánosította hipergráfokra,* egy messze nem triviális indukciós bizonyítást tudott adni rá.

A „véletlen módszeres egzisztenciabizonyításoknak" számtalan alkalmazása van gráfelmélet legkülönbözőbb területein. Kapcsolódik a kérdés az extremális gráfok elméletéhez is, amiről itt most nem írunk (bár Erdősnek döntő hatása volt ennek kifejlődésében, és bár mindkét szerző kedvenc kutatási területei közé tartozik). És kapcsolódik a kérdés az expander gráfok modern elméletéhez is.[20]

A véletlen módszeres egzisztenciabizonyítások egyik csúcspontja az Erdős–Lovász cikkben megjelent a Lovász szita (Lovász Local Lemma) [35]. Ezt a lemmát algoritmusokban is gyakran használják.

* * *

Erdős és Rényi a 60-as években megfogalmazták a véletlen gráfok bizonyos modelljeit (ezeknek már voltak előzményei, pl. Gilbertnél) és több a véletlen gráfok tipikus struktúrájára vonatkozó tételt bizonyítottak be, [38], [39], [40], [41], a következő kérdésre keresve a választ:

> Mi az, hogy véletlen gráf, és tipikusan milyen tulajdonságai vannak?

A kérdés csírájában már ott volt a fentebb megfogalmazott egzisztenciabizonyításokban is.

Ma a véletlen gráfok elmélete is az egyik legjelentősebb ága a kombinatorikának. Az alábbiakban néhány idevonatkozó tételt mutatunk be, leegyszerűsítve és a definíciókat elhagyva.

Abban a véletlen gráfmodellben, amelyet Erdős, majd később Erdős és Rényi használtak, [41] egy $f(n)$ pozitív egész értékű függvényhez tekintjük az összes, az adott $x_1, \ldots, x_n$ csúcsokon megadható $f(n)$ élű gráfot. Ezek száma

$$M(n) := \binom{\binom{n}{2}}{f(n)}$$

[20] Az expander gráfok fontos szerepet játszanak az alkalmazásokban, pl. a biztonságos információ-továbbításban.

Ezek közül kiválasztunk egyet, $1/M(n)$ valószínűséggel.

Egy másik nagyon elterjedt véletlen gráfmodellben, egy $p(n) > 0$ pozitív értékű függvényhez, az adott $x_1, \ldots, x_n$ csúcsokon az $\binom{n}{2}$ pontpárra mindegyikére kisorsoljuk, hogy kiválasszuk-e az adott $x_i x_j$ élt, vagy sem. A kiválasztás valószínűsége $p(n)$ és az élválasztások egymástól független események.

A következő tétel szerint a legtöbb gráfnak nincs szimmetriája.

Tétel (Erdős–Rényi, Aszimmetrikus gráfok). *Ha az $x_1, \ldots, x_n$ pontokon megadunk egy véletlen gráfot, $p > 0$ konstans élvalószínűséggel, akkor annak valószínűsége, hogy a pontoknak legyen olyan permutációja, amely a gráfot önmagába viszi elenyésző: 0-hoz tart, ha $n \to \infty$.*

Az alábbi tétel (megint nagyon leegyszerűsítve) azt mondja ki, hogy az n pontra éleket dobálva le egymás után, véletlenszerűen a gráf abban a pillanatban válik összefüggővé, amikor élszáma eléri az $\frac{1}{2}n \log n$-et.

Tétel (Erdős–Rényi, Összefüggőség). *Ha $c > 1$ és az $x_1, \ldots, x_n$ pontokon megadunk egy véletlen gráfot, $p > c\frac{\log n}{n}$ élvalószínűséggel, akkor a kapott gráf* összefüggő, *1-hez tartó valószínűséggel, ha $n \to \infty$. Ha viszont $c < 1$, akkor ezen véletlen gráf* nem összefüggő, *1-hez tartó valószínűséggel.*

Rényi Alfréd halála után[21] nem volt világos, hogy milyen irányban fog fejlődni a véletlen gráfok elmélete. Mindenesetre volt néhány olyan probléma, melyek megoldása nagyon izgalmasnak látszott. Az egyik a véletlen gráfok kromatikus számára vonatkozott, a másik a véletlen gráfok Hamilton körére. A kromatikus számra vonatkozó tételt Bollobás Béla bizonyította be, egy bizonyos Spencer és Shamír által bizonyított eredményt is felhasználva [4]. Kicsit leegyszerűsítve a tétel így fogalmazható:

Véletlen gráfok komatikus száma. *Majdnem minden n pontú gráf kromatikus száma aszimptotikusan $\frac{n}{2\log_2 n}$.*

A másik, talán (?) leghíresebb nyitott kérdés arra vonatkozott, hogy egy véletlen gráfban milyen élszámnál jelenik meg a Hamilton kör. Erre vonatkozik

Pósa tétele [58]. *Létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy ha egy életlen gráfnak $cn \log n$ éle van, akkor 1-hez tartó valószínűséggel van benne Hamilton kör.*

Nem folytatjuk ezen nagyon vonzó és dinamikusan fejlődő terület ismertetését. Az érdeklődő olvasó tájékozódhat Erdős vagy Erdős és Rényi eredeti cikkeiből, vagy Erdős és Spencer [44], Bollobás [3], Alon és Spencer [1] monográfiáiból.

* * *

Erdősnek jelentős és szép valószínűségszámítási eredményei is vannak, amelyek talán kevésbé közismertek, de ezekről itt nem szólunk részletesen. Eredményei

[21] 1970-ben

között vannak bolyongási tételek, a 0–1 sorozatokra vonatkozó tételek. Ehhez társulnak a véletlen módszerek alkalmazásai a tiszta matematika más területein.

* * *

Erdős stílusának egyik alapvető vonása volt, hogy meglepő kérdéseket tett fel, amelyek a matematika távoli területeit kötötték össze.

Munkásságában összekapcsolódott a számelmélet, a kombinatorika/gráfelmélet és a geometria. A gráfelmélet és geometria összekapcsolására szép példa a következő. Több, mint ötven éve Erdős a következőt kérdezte [11]:

„Legfeljebb hány egységnyi távolság lehet n síkbeli pont között?"

Azt sejtette, hogy legfeljebb $O\big(n^{1+o(1)}\big)$[22]. Ez a sejtés azon alapul, hogy található olyan élhosszúságú rács, melyben az egységtávolságok száma egy $c\sqrt{n}$ sugarú körlemezben kicsit több, mint lineáris. A sejtés szerint ez az optimum.

A kérdés geometriainak tűnhet, de nyilvánvalóan nem hasonlít a szokásos geometriai kérdésekre.

Könnyen összekapcsolható ez azzal a klasszikus számelméleti kérdéssel, hogy adott $m > 0$ egész számot hányféleképpen lehet felírni $x^2 + y^2$ alakban, ahol x és y egészek, amiről már írtunk (l. 14. old.).

A sejtést könnyű megérteni, de bizonyítás még nem született rá. Erdős rögtön észrevette, hogy egy egyszerű, (a $K_{2,3}$-a vonatkozó) extremális gráf tétel az $O(n^{3/2})$ becslést adja. Józsa és Szemerédi egy sokkal bonyolultabb okoskodása [51] a $o(n^{3/2})$ felső becslést eredményezi. Sok évvel később Spencer, Szemerédi és Trotter [65] bebizonyították, hogy az egységtávolságok száma $O(n^{4/3})$-nal becsülhető felülről, és Peter Brass megmutatta, hogy bizonyos Minkowski geometriákban ez éles lehet.[23] Az utóbbi eredmény jelentősége az, hogy ezek szerint – ha igaz a sejtés – a sík Euklideszi szerkezetét nem triviális módon kell kihasználni. Úgy tűnik, hogy a fenti sejtés a kombinatorikus geometria egyik legnehezebb kérdése.

Az elmúlt 50 évben a távolságok eloszlása (általános metrikus terekben is) nehéz és sokat kutatott területté vált. Meglepő módon az ilyen típusú kérdések a számítógéptudományban is fontossá váltak. Egyebek között a robotok mozgására vonatkozó matematikai kutatások vezetnek gyakran Erdős típusú kérdésekre.

* * *

Erdős matematikájáról szólva mindenképpen meg kell említeni Erdős és Turán egy sejtését, amely Van der Waerdennek a számtani sorozatokról szóló nagyon híres tételével kapcsolatos. A tétel azt mondja ki, hogy

Van der Waerden tétele. *Ha rögzítünk két tetszőleges pozitív egészt, k-t és r-et, és az egész számokat beosztjuk r osztályba, akkor legalább az egyik osztályban lesz k olyan szám, amelyek számtani sort alkotnak.*

[22] azaz, minden $\varepsilon > 0$-ra legfeljebb $n^{1+\varepsilon}$, feltéve, hogy $n > n_0(\varepsilon)$.

[23] Egy Minkowski geometria azzal jellemezhető, hogy megadunk egy centrálszimmetrikus konvex síkidomot és azt követeljük meg, hogy ez legyen a geometriában az egységkörlemez.

A negyvenes évek elején Erdős és Turán – Van der Waerden tételének kapcsán, – a következő kérdést tette fel: mi a maximális hossza az olyan $[1, n]$-beli egész számokból álló sorozatoknak, amelyek nem tartalmaznak k-tagú számtani sorozatot? Sejtésük az volt, hogy ez a maximum $o(n)$.[24] K. F. Roth 1954-ben bebizonyította ezt $k = 3$-ra, és 1973-ban E. Szemerédi bebizonyította az általános esetet [68] (amiért egy 1000$-os díjat kapott Erdőstől). H. Fürstenberg és I. Katznelson ennek az eredménynek többféle általánosítását bizonyították be az ergodelmélet eszközeit használva. Az utolsó évtizedben egy egészen új terület alakult ki ebből az ártatlannak tűnő kérdésből. Itt kell megjegyeznünk, hogy Tim Gowersnek aki 1998-ban Fields Érmet kapott, legkiemelkedőbb eredményei között vannak a Szemerédi tétel bizonyos élesítései. Ezen eredményei bizonyításában használja a Freiman–Ruzsa tételt (az additív számelmélet egyik alapvető tételét) és Ruzsa bizonyítási módszereit [60].

Egy érdekes idekapcsolódó Erdős probléma a következő: Igaz-e, hogy ha egész számok egy sorozatára $\sum_i \frac{1}{a_i} = \infty$, akkor minden k-ra van az a_i-kból álló k tagú számtani sor. Ha ez igaz volna, a Szemerédi tétel egy élesítése lenne. Mivel a prímszámok reciprokösszege divergens, ebből az is következne, hogy van minden k-ra csupa prímből álló számtani sor. Ez Erdős egyik kedvenc és mindmáig megoldatlan problémája.

Magáról a Van der Waerden és Ramsey témakörről is írt egy cikket Erdős a Matematikai Lapokban [14].

7. Erdős életvitele

Három érték állt Erdős életvitelének középpontjában: a függetlenség, az igazság keresése és a törődő emberszeretet.

A tudomány, a politika és a mindennapi élet igazságainak keresése volt örökös munkájának és termékenységének a hajtóereje, alárendelve ennek fájdalmat, betegséget, öregséget. Hogy biztosítsa személyes függetlenségét (a politikai hatalomtól, ideológiai dogmáktól, és az őt körülvevő világ szokásaitól), feladott családot, biztos munkahelyet, tulajdont. Ezt nem lehetett áldozatok nélkül megtenni, amint azt maga is sokszor megjegyezte. Egész életében vállalta ennek következményeit. Utolsó napjaiig folytatta nomád életmódját, miközben évente 20–30 cikket írt, és több tucat előadást tartott.

Ellentétben sokak véleményével, nem volt aszkéta, mégha a tulajdont nem is tartotta sokra. Ellenkezőleg, nagyon is élvezte az életet. Zene, olvasás, kirándulás stb. mind lényeges részei voltak életének. Időnként valamelyikünk szobájába belépve kezébe vett egy könyvet, kicsit beleolvasott, majd kölcsönkérte azt, és a világ egy másik pontjáról küldte vissza postán. Amint már korábban írtuk, meglepően

[24] Magyarul, ha pl. $k = 100$, és $\varepsilon > 0$ tetszőleges kis pozitív szám, és 1 és n között kiválasztunk több mint εn egész számot, akkor mindig találunk közöttük egy 100 hosszúságú számtani sort, feltéve, hogy n (ε-tól függően) elég nagy.

Erdős kiránduláson

jártas volt az irodalomban, a biológiában, a történelemben és a politikában. Szerette a zenét, különösen Bachot, Händelt és Mozartot. Ha valamelyikünkkel együtt dolgozott, gyakran kérte, hogy tegyük fel egyik kedvenc lemezét.

Szeretett étterembe járni, és gurmandhoz illő ízlése volt (a gurmand étvágya nélkül). Szeretett embereket étterembe hívni, és szerette, ha jó hangulatú vendégségekbe, vagy finom vacsorákra hívták. Szeretett jó szállodákban lakni. Ugyanakkor Indiában nem volt hajlandó rendes ételt enni, és jó éttermekbe menni. Pedig nem volt pénzszűkében. Úgy gondolta, hogy egy olyan országban, ahol több százmillió ember éhezik, nem ehet úgy, mint egy gurmand. Amikor a bombayi Tata Intézetben csodagyerekekről tartott előadást, megjegyezte nagyrészt jómódúakból álló közönségének, hogy nem érti, hogyan fogadhatja el az ember a jólétet ilyen mindenütt jelenlévő szegénység közepette.

* * *

Erdős törődött az emberekkel. Megértő és együttérző ember volt. Megrendítette, ha valamelyik barátja nehéz helyzetbe került. Erdős sokféleképpen segített másoknak. Segített matematizálásban, fiatalok pályájának egyengetésében, sokszor anyagi segítséget is nyújtott. Miután édesanyja meghalt, érzelmi okokból nem használta többé budapesti lakását, inkább az Akadémia vendégházában lakott. Lakását így éveken keresztül barátainak adta kölcsön: azoknak a magyaroknak, akik éppen költözködtek, vagy Magyarországra látogató külföldi barátainak.

* * *

A barátság nagyon fontos szerepet töltött be Erdős életében. 1930-ban, amikor egyetemi hallgató lett, megismerkedett Gallai Tiborral, Grünwald Gézával, Klein Eszterrel, Turán Pállal, Vázsonyi Endrével és másokkal a Pázmány Péter Tudományegyetemről,[25] valamint Szekeres Györggyel, aki vegyészmérnök hallgató volt a Műszaki Egyetemen, és a két egyetem között ingázott.

Gallai Tibor, Erdős, Wachsberger Márta az Anonymus-szobornál

[25] a mai Eötvös Loránd Tudományegyetem

A visszaemlékezéseik szerint rendszeres találkozóik, egész napos kirándulásaik Budapest környékén vagy a Városligeti Anonymus szobornál való matematizálásuk minden szempontból nagy hatással voltak a jövőjükre.

Egyfajta nyitott, „peripatetikus" egyetem volt ez. A kor szociálisan és politikailag kirekesztő magatartása, – ami mindnyájukat érintette, – hozta létre.

Szekeres György így írt ezekről az évekről:

> „Egy fiatal matematikusokból álló nagyon szoros kör volt a mienk, a legkiválóbbak közülük Erdős, Turán és Gallai voltak. Az itt kovácsolódott barátságok a legtartósabbak voltak azok közül, amiket valaha is láttam, túlélték a harmincas évek felfordulását, egy szörnyű világháborút, és azt, hogy szétszóródtunk a világ minden tájára. Főként matematikáról, személyes pletykákról, és politikáról beszéltünk."

Klein Eszter, Szekeres felesége, pedig így írt a híres Anonymus szobor körüli matematizálásukról:[26]

> „1929 (?) őszén mi elsőéves egyetemi hallgatók voltunk. Az analízis tanszéken Fejér Lipót adott elő, a gyakorlatokat Veress Pál vezette. Egy ilyen gyakorlat alatt Veress megemlítette a Pólya–Szegő könyvet [57] és tanácsolta, hogy egy páran álljunk össze, és menjünk végig a feladatokon, – nem tud ennél jobb bevezetést az analízisbe. Ez a tanács indította el a mi kis csoportunkat. Az Anonymus szobor nagyon jó találkozó pont volt, úgy emlékszem, szerda délutánonként találkoztunk.
>
> Egy Pólya–Szegőt kölcsönöztünk a könyvtárból és minden héten kimásoltunk 2–3 feladatot, hogy kidolgozzuk a következő hétre. Ez valószínűleg 1929 tavaszán kezdődött, az első résztvevők Turán Pál, Wachsberger Márta, Klein Eszter voltak, de nagyon hamar megnövekedett a csoport. Szekeres György a műegyetemről, időnként Ság Miklós, szintén a műegyetemről. Hamarosan egy fizikai problémakönyvön is dolgoztunk. A nyári szünet sem állította meg ezt a rendszeres találkozást: rossz időben a Matematikai Szemináriumban (?) találkoztunk. Azt hiszem, a következő évben csatlakozott Erdős Pál, hozva Grünwald Tibort[27]. Időnként megjelent Grünwald Géza, aki a Szegedi Egyetemen tanult, és Molnár László, aki Zürichben tanult A következő évben Székely Lili és Elek Tibor kacpsolódtak be, mint rendszeres résztvevők."

* * *

Erdősnek legendás volt az édesanyjával való kapcsolata. A háború és a politikai helyzet miatt tíz évig nem láthatták egymást. Először 1948-ban tért vissza

[26] egyikünk kérésére, 2 évvel ezelőtt.
[27] Azaz, Gallai Tibort.

látogatóba Budapestre. 1955 után rendszeresen hazalátogatott Magyarországra, és attól kezdve egyre több időt töltöttek együtt, ez életének egyik legfontosabb része lett. A 60-as évektől együtt utaztak, együtt élték Erdős vándor életét. Anyja halála teljesen megváltoztatta Erdős életét és életérzését.

* * *

A cikkek, az előadások, a levelezés, és a személyes beszélgetések mind fontos részei voltak Erdős matematikai kapcsolatainak.

Cikkeiben és előadásaiban egy sajátos műfajt alakított ki. Körülbelül 200 problémafelvető cikket írt, amelyek több tucat egy témához kapcsolódó kérdést fogalmaznak meg, és egyben ismertetik a téma hátterét, illetve az addigi részeredményeket. Az utolsó évtizedekben előadásaira is ez volt jellemző, akár plenáris előadást tartott nemzetközi kongresszuson, akár ismeretterjesztő előadást tanárok vagy diákok számára. Az előadásokat részeredményekkel, sejtésekkel, és történetekkel (úgynevezett „erdősizmusokkal") tarkította. Nagyon szeretett matematikáról beszélgetni, középiskolás diákokkal is, és világhírű matematikusokkal egyaránt.

Legendás memóriája volt. Emlékezett a saját és mások eredményeire a kiadásuk helyével és dátumával együtt, több száz matematikussal való több évtizeddel korábbi beszélgetésére, úgy, ahogy más a tegnap történtekre sem emlékszik.

Külön meg kell említenünk a levelezését is, ami része volt napirendjének, életmódjának. Vannak, akik több száz, mások több tucat levelet őriznek, amelyeket Erdős a sajátos, csak rá jellemző stílusában írt, ide-oda ugrálva régi és új matematikai kérdésekről politikára, barátokra és munkatársakra, napi élményeire.

Több ezer kérdést fogalmazott meg, leírta a hozzájuk kapcsolódó részeredményeket. Matematikai híreket közvetített leveleiben, földrajzi és politikai határokon keresztül, közeli barátait és alkalmi ismerőseit közös munkára ösztönözve. (Sok szép eredmény született így, kizárólag levelezés útján.)

* * *

Természetesen bármi, amit Erdősről írunk jellemzőbb lehetett életének egyik szakaszára, mint egy másikra.

A számtalan legenda és anekdota ellenére, amelyek egy részét halála óta tovább színezték, és költötték, Erdősre mindig úgy fogunk emlékezni, mint melegszívű, együttérző, és nagylelkű emberre és a 20. század különlegesen nagyhatású kivételes matematikusára. Erdős briliáns elme, kivételes szellem, és kivételesen mélyérzésű ember volt, aki egy kivételes életvitelt alkotott magának. Reméljük, hogy Erdős Pálról *ez* a kép erősödik majd fel, és marad fenn az idők során.

Hivatkozások

[1] N. Alon and J. Spencer: *The Probabilistic Method,* Wiley Interscience (1992).

[2] L. Babai: In and out of Hungary, Paul Erdős, his friends and times, *Combinatorics, Paul Erdős is 80,* **2/2**, Bolyai Society Math Studies (eds D. Miklós, V. T. Sós and T. Szőnyi (1996), pp. 7–96.

[3] B. Bollobás: *Random Graphs,* Academic Press (1985).

[4] B. Bollobás: The chromatic number of random graphs, *Combinatorica,* **8** (1988), no. 1, 49–55.

[5] B. Bollobás: Paul Erdős – Life and work, in: *The mathematics of Paul Erdős I, Algorithms and Combinatorics,* **13**, Springer Verlag, (eds Graham and Nešetřil), (1997), pp. 1–41.

[6] F. R. K. Chung and R. L. Graham: *Erdős on Graphs, His legacy of unsolved problems,* A. K. Peters, Wellesly (Massachusetts, 1998).

[7] P. Cameron and P. Erdős, Notes on sum-free and related sets, Recent trends in combinatorics (Mátraháza, 1995), *Combin. Probab. Comput.*, **8** (1999), no. 1–2, 95–107.

[8] P. D. T. Elliott: *Probabilistic Number Theory, 1–2,* Springer Verlag (1980).

[9] P. Erdős: Beweis eines Satzes von Tschebyschef (in German), *Acta Litt. Sci. Szeged,* **5** (1932), 194–198.

[10] P. Erdős: Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 292–294.

[11] P. Erdős: On sets of distances of n points, *Amer. Math. Monthly,* **53**, 248–250.

[12] P. Erdős: Graph Theory and Probability, *Canad. Journal of Math.*, **11** (1959), 34–38.

[13] P. Erdős: Graph Theory and Probability, II, *Canad. Journal of Math.*, **13** (1961), 346–352.

[14] Erdős Pál: Ramsey és van der Waerden tételével kapcsolatos kombinatorikai kérdésekről, *Mat. Lapok,* **14** (1963) 29–37.

[15] Paul Erdős: *Art of Counting* (Selected Writings of Paul Erdős, ed Joel Spencer) MIT Press (1973).

[16] Erdős Pál: Néhány személyes és matematikai emlékem Kalmár Lászlóról, *Mat. Lapok,* **25** (1974) no. 3–4, 253–255, 1977.

[17] P. Erdős: Paul Turán 1910–1976: His work in graph theory, *J. Graph Theory,* **1** (1977), 96–101.

[18] P. Erdős: Some notes on Turán's mathematical work, *J. Approx. Theory,* **29** (1980) no. 1, 2–5.

[19] P. Erdős: Some personal reminiscences of the mathematical work of Paul Turán, *Acta Arith.*, **37** (1980), 4–8.

[20] P. Erdős: *Preface. Personal reminiscences,* Studies in pure mathematics, To the memory of Paul Turán, pp. 11–12, Birkhäuser (Basel–Boston, Mass., 1983).

[21] P. Erdős: On some aspects of my work with Gabriel Dirac, Graph theory in memory of G. A. Dirac, Pap. Meet., Sandbjerg/Den. 1985, *Ann. Discrete Math.*, **41** (1989), 111–116.

[22] P. Erdős: On the combinatorial problems which I would most like to see solved, *Combinatorica,* **1**(1) (1981), (1981), 25–42.

[23] P. Erdős: Personal reminiscences and remarks on the mathematical work of Tibor Gallai, *Combinatorica,* **2** (1982) no. 3, 207–212.

[24] P. Erdős: E. Straus (1921–1983), Number theory (Winnipeg, Man., 1983), *Rocky Mountain J. Math.,* **15** (1985) no. 2, 331–341.

[25] P. Erdős: Ulam, the man and the mathematician, *J. Graph Theory,* **9** (1985) no. 4, 445–449. Also appears in *Creation Math.,* **19** (1986), 13–16.

[26] P. Erdős: My joint work with Richard Rado, in: *Surveys in combinatorics* 1987 (New Cross, 1987), London Math. Soc. Lecture Note Ser., 123, pp. 53–80, Cambridge Univ. Press (Cambridge–New York, 1987).

[27] P. Erdős: Recollections on Kurt Gödel, *Jahrb. Kurt-Gödel-Ges.* **1988**, 94–95.

[28] P. Erdős: Some personal and mathematical reminiscences of Kurt Mahler, *Aust. Math. Soc. Gaz.,* **16**, No. 1, 1–2 (1989).

[29] P. Erdős: On the 120-th anniversary of the birth of Schur, *Geombinatorics,* **5** (1995), No. 1, 4–5.

[30] P. Erdős: On some of my favorite theorems, *Combinatorics, Paul Erdős is 80,* **2**/**2**, Bolyai Society Math Studies, (eds D. Miklós, V. T. Sós and T. Szőnyi (1996), pp. 97–132.

[31] P. Erdős: Some of my favorite problems and results, in: *The Mathematics of Paul Erdős 1* (eds R. L. Graham, J. Nešetřil) (1997), *series:* Algorithms and Combinatorics, **Vol 13**, Springer Verlag 47–67.

[32] Erdős Pál: Néhány megoldatlan elemi geometriai problémáról, *Mat. Lapok,* **2** (1992), no. 2, 1–10.

[33] Erdős Pál: Megjegyzések a Matematikai Lapok két problémájához, *Mat. Lapok,* **71** (1960), 26–32.

[34] P. Erdős and W. H. J. Fuchs: On a problem of additive number theory, *J. London Math. Soc.,* **31** (1956), 67–73.

[35] P. Erdős and L. Lovász: Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, in: *Infinite and finite sets* (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. II; Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10, pp. 609–627, North-Holland (Amsterdam, 1975).

[36] M. Kac and P. Erdős: The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions, *Amer. J. Math.,* **62** (1940), 738–742.

[37] Erdős Pál és Pálfy Péter Pál: Direkt szorzatra nem bontható csoportok rendjéről, *Mat. Lapok,* **33** (1982/86) (1987), no. 4, 289–298.

[38] P. Erdős and A. Rényi: Asymmetric graphs, *Acta Math. Hungar.,* **14** (1963), 295–315.

[39] P. Erdős and A. Rényi: On the strength of connectedness of a random graph, *Acta Math. Hungar.,* **12** (1961), 261–267.

[40] P. Erdős and A. Rényi: On the evolution of random graphs, *Bull. Inter. Stat. Inst. Tokyo,* **38** (1961), 343–347.

[41] P. Erdős and A. Rényi: On the evolution of random graphs, *MTA MKI Közl.,* **5** (1960), 17–61.

[42] P. Erdős, A. Rényi and V. T. Sós: On a problem of graph theory, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **1**(1966), 215–235. (Újranyomtatva [15]-ban).

[43] P. Erdős and M. Simonovits: Some extremal problems in graph theory, Combinatorial Theory and its Appl., *Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai,* **4** (1969) 377–384. (Újranyomtatva [15]-ban.)

[44] P. Erdős and J. Spencer: *Probabilistic methods in combinatorics,* Academic Press (New York–London, 1974).

[45] P. Erdős and Gy. Szekeres: A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.,* **2** (1935), 463–470.

[46] P. Erdős and A. Wintner: Additive arithmetical functions and statistical independence, *Amer. J. Math.,* **61** (1939), 713–721.

[47] R. L. Graham, B. L. Rothschild and J. H. Spencer: *Ramsey theory.* Second edition, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc. (New York).

[48] Hajnal András: Erdős Pál halmazelméleti munkásságáról, hatvanadik születésnapjára, *Mat. Lapok,* **22** (1971), 197–208 (1972).

[49] A. Hajnal: Paul Erdős' set theory, in: *The Mathematics of Paul Erdős 2* (eds R. L. Graham, J. Nešetřil) (1997), *series:* Algorithms and Combinatorics, **Vol 14**, Springer Verlag 352–393. (Az itteni idézet: 359–360. old.)

[50] Hoffmann György és Surányi László: A prímszámtétel első aritmetikai bizonyításának ismertetése, *Mat. Lapok,* **23** (1972), 31–51 (1973).

[51] S. Józsa and E. Szemerédi: The number of unit distances on the plane, *Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai,* **10** (Keszthely, 1973), vol. II, 939–950.

[52] Kalmár László: Gyertek, bizonyítsuk be Csebisev tételét, *Középiskolai Mat. Lapok,* (3 részben) **1** (1947–1948), 89–90, 127–128, 176–182. (Ugyanez folytatódik a KöMaL következő számában is.)

[53] M. Karoński and A. Ruciński, The origins of the theory of random graphs, in: *The Mathematics of Paul Erdős I* (eds R. L. Graham, J. Nešetřil) (1997), *series:* Algorithms and Combinatorics, **Vol 13**, Springer Verlag 311–336.

[54] T. Kővári, Vera T. Sós, P. Turán: On a problem of Zarankiewicz, *Colloq. Math.,* **3** (1954), 50–57.

[55] L. Lovász: On chromatic number of finite set-systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **19** (1968), 59–67.

[56] J. Pach and P. K. Agarwal: *Combinatorial geometry,* Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization,. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc. (New York, 1995).

[57] G. Pólya and G. Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* I–II Band, Springer-Verlag (Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1954). Magyarul is kiadva.

[58] L. Pósa: Hamiltonian circuits in random graphs, *Discrete Math.,* **14** (1976), 359–364.

[59] F. P. Ramsey: On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc. 2nd Series,* **30** (1930), 264–286.

[60] I. Z. Ruzsa: Arithmetical progressions and the number of sums, *Period. Math. Hungar.,* **25** (1992), no. 1, 105–111.

[61] I. Z. Ruzsa: Erdős and the integers, *J. Number Theory,* **79** (1999), no. 1, 115–163.

[62] A. Sárközy: Paul Erdős (1913–1996), *Acta Arith.*, **81** (1997), no. 4, 301–317.

[63] M. Simonovits: Paul Erdős' influence on extremal graph theory, in: *The Mathematics of Paul Erdős II* (eds R. L. Graham, J. Nešetřil) (1997), *series:* Algorithms and Combinatorics, **Vol 14**, Springer Verlag 148–192.

[64] M. Simonovits and V. T. Sós: Foreword. Paul Erdős: the man and the mathematician (1913–1996), in: *Recent Trends in Combinatorics* (Mátraháza, 1995), ix–xx, Cambridge Univ. Press (Cambridge).

[65] J. Spencer, E. Szemerédi and W. T. Trotter: Unit distances in the Euclidean plane, in: *Graph Theorey and Combinatorics* (ed. B. Bollobás) Academic Press (New York, 1984), 293–303.

[66] V. T. Sós: Paul Erdős, 1913–1996, *Aequationes Math.*, (1997), 205–220.

[67] Gy. Szekeres: A Combinatorial Problem in Geometry, [15] bevezető részében, xix–xxii.

[68] E. Szemerédi: On a set containing no k elements in an arithmetic progression, *Acta Arithmetica,* **27** (1975), 199–245.

[69] Turán Pál: Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, *Matematikai Lapok,* **48** (1941), 436–452, (see also [70], [72]).

[70] P. Turán: On the theory of graphs, *Colloq. Math.*, **3** (1954), 19–30 (see also [72]).

[71] Turán Pál: Erdős Pál 50 éves, *Matematikai Lapok,* **14** (1963) / 1–2, pp. 1–28. (angolul is megjelent, [72], [76]).

[72] *Collected papers of Paul Turán,* Akadémiai Kiadó (Budapest, 1989). Vol. 1–3.

[73] P. Turán: A Note of Welcome, *Journal of Graph Theory,* **1** (1977), 7–9.

Konferencia Kötetek

[74] Paul Erdős is 80, 1–2 Combinatorics (eds D. Miklós, V. T. Sós and T. Szőnyi), (1996) *Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Sudies in Math.*, **2** (Invited talks and papers to the conference in honor of Paul Erdős's 80th birthday (Hungary, 1993).

[75] R. L. Graham, J. Nešetřil (editors): The Mathematics of Paul Erdős Vol. 1 (1997), *series:* Algorithms and Combinatorics, **Vol 14**, Springer Verlag.

[76] Paul Erdős and his Mathematics, (szerk: Halász Gábor, Lovász László, Simonovits Miklós és T. Sós Vera) Springer Verlag (2002).

[77] *Recent trends in combinatorics.* Papers from the Combinatorial Workshop on Some Trends in Discrete Mathematics held in Mátraháza, October 22–28, 1995. Edited by Ervin Győri and Vera T. Sós. Combin. Probab. Comput. 8 (1999), no. 1–2.

[78] *Recent trends in combinatorics,* Papers from the Combinatorial Workshop on Some Trends in Discrete Mathematics held in Mátraháza, October 22–28, 1995. Edited by Ervin Győri and Vera T. Sós, Cambridge University Press (Cambridge, 1999), pp. i–iv and 1–192.

Erdős Pál további, a Matematikai Lapokban megjelent cikkei

[79] Erdős Pál, Sárközy András: R. R. Hall egy problémájáról, *Mat. Lapok,* **30** (1978/82), no. 1–3, 23–31.

[80] Erdős Pál: Binomiális együtthatók prímfaktorairól. II, *Mat. Lapok,* **30** (1978/82), no. 4, 307–316.

[81] Erdős Pál: Néhány szokatlan, nem konvencionális, additív számelméleti problémáról, *Mat. Lapok,* **30** (1978/82), no. 1–3, 9–14.

[82] Erdős Pál: Néhány elemi geometriai problémáról, *Köz. Mat. Lapok,* **61** (1980), 49–54.

[83] Erdős Pál: Binomiális együtthatók prímfaktorairól, *Mat. Lapok,* **28** (1977/80), no. 4, 287–296. 10A25 (05A10)

[84] Erdős Pál, Szemerédi, Endre: Megjegyzések az American Mathematical Monthly egy problémájáról, *Mat. Lapok,* **28** (1980), 121–124.

[85] Erdős Pál, Győry Kálmán, Papp Zoltán: A $\sigma(n)$, $\varphi(n)$, $d(n)$ és $v(n)$ függvények néhány új tulajdonságáról, *Mat. Lapok,* **28** (1980), no. 1–3, 125–131.

[86] Erdős Pál, Szalay Mihály: Turán Pál matematikai munkássága, I., Statisztikus csoportelmélet és partíció-elmélet, *Mat. Lapok,* **25** (1974), 229–238.

[87] Erdős Pál, Révész Pál: Varga Tamás egy problémájáról, *Mat. Lapok,* **24** (1973), 273–282.

[88] Erdős Pál, Spencer Joel: Erdős és Hajnal egy problémájáról, *Mat. Lapok,* **22** (1971), 1–2 (1972).

[89] Erdős Pál: Turán Pál gráf tételéről, *Mat. Lapok,* **21** (1970), 249–251 (1971).

[90] Erdős Pál: Hilbert térben levő ponthalmazok néhány geometriai és halmazelméleti tulajdonságáról, *Mat. Lapok,* **19** (1968), 255–258.

[91] Erdős Pál, Gallai T.: Gráfok előírt fokú pontokkal, *Mat. Lapok,* **11/4** (1960), 264–274 (T. Gallai).

[92] Erdős Pál, Hajnal András: Egy kombinatorikus problémáról *Mat. Lapok,* **19** (1968) 345–348.

[93] Erdős Pál: Gráfok páros körüljárású részgráfjairól, *Mat. Lapok,* **18** (1967), 283–288.

[94] Erdős Pál, Hajnal András: Kromatikus gráfokról, *Mat. Lapok,* **18** (1967), 1–4.

[95] Erdős Pál: Számelméleti megjegyzések, V. Extremális problémák a számelméletben, II., *Mat. Lapok,* **17** (1966), 135–155.

[96] Erdős Pál: Ramsey és van der Waerden tételével kapcsolatos kombinatorikai kérdésekről, *Mat. Lapok,* **14** (1963), 29–37.

[97] Erdős Pál: Számelméleti megjegyzések, IV. Extremális problémák a számelméletben, I., *Mat. Lapok,* **13** (1962), 228–255.

[98] Bollobás Béla, Erdős Pál: Gráfelméleti szélsőértékekre vonatkozó problémákról, *Mat. Lapok,* **13** (1962), 143–152.

[99] Erdős Pál: Néhány elemi geometriai problémáról, *Középisk. Mat. Lapok,* **24/5** (1962), 1–9.

[100] Erdős Pál: Számelméleti megjegyzések, III. Néhány additív számelméleti problémáról, *Mat. Lapok,* **13** (1962), 28–38.

[101] Erdős Pál: Számelméleti megjegyzések, II. Az Euler-féle φ-függvény néhány tulajdonságáról, *Mat. Lapok,* **12** (1961), 161–169.

[102] Erdős Pál: Számelméleti megjegyzések, I, *Mat. Lapok,* **12** (1961), 10–17.

[103] Erdős Pál, Surányi János: Megjegyzések egy versenyfeladathoz, *Mat. Lapok,* **10** (1959), 39–48.

[104] Erdős Pál, Surányi János: Egy additív számelméleti probléma, *Mat. Lapok,* **10** (1959), 284–290.

[105] Erdős Pál, Vincze István: Konvex, zárt síkgörbék megközelítéséről, *Mat. Lapok,* **9** (1958), 19–36.

[106] Erdős Pál: Néhány geometriai problémáról, *Mat. Lapok,* **8** (1957), 86–92.

[107] Erdős Pál: Megjegyzések Kővári Tamás egy dolgozatához, *Mat. Lapok,* **7** (1956), 214–217.

[108] Erdős Pál: Megjegyzések a Matematikai Lapok két feladatához, *Mat. Lapok,* **7** (1956), 10–17.

[109] Erdős Pál: Egy kongruenciarendszerekről szóló problémáról, *Mat. Lapok,* **3** (1952), 122–128.

[110] Erdős Pál: Az $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{a}{b}$ egyenlet egész számú megoldásairól, *Mat. Lapok,* **1** (1950), 192–210.

Emlékcikkek: Erdős, 1913–1996

[111] T. Erdélyi and P. Vértesi: In memoriam: Paul Erdős (1913–1996). Bibliography in approximation theory compiled by J. Szabados, *J. Approx. Theory,* **94** (1998), no. 1, 1–41.

[112] A. Sárközy: Paul Erdős (1913–1996), *Acta Arith.,* **81** (1997), no. 4, 301–317.

[113] L. Babai and J. Spencer: Paul Erdős (1913–1996), *Notices Amer. Math. Soc.,* **45** (1998), no. 1, 64–73.

[114] L. Babai: Paul Erdős (1913–1996): his influence on the theory of computing, *STOC '97* (El Paso, TX), 383–401 (electronic), ACM (New York, 1999). 68R10 (68-03 68R05)

[115] T. Łuczak and Z. Palka: Paul Erdős (1913-1996). (Polish) **Wiadom. Mat.,** *33* (1997), 99–109. 01A70

[116] A. Ádám, K. Győry and A. Sárközy: The life and mathematics of Paul Erdős (1913–1996), *Math. Japon.,* **46** (1997), no. 3, 517–526. 01A70

[117] G. Tenenbaum: In memoriam Paul Erdős (1913–1996). (French) *Gaz. Math.,* No. 71 (1997), 13–25. 01A70

[118] Gy. Szekeres: Paul Erdős (1913–1996), *Austral. Math. Soc. Gaz.,* **23** (1996), no. 5, 189–191. 01A70

[119] J. E. Baumgartner: In memoriam: Paul Erdős (1913–1996), *Bull. Symbolic Logic,* **3** (1997), no. 1, 70–72. 01A70 (04-03)

[120] L. Takács: In memoriam: Pál Erdős (1913–1996), *J. Appl. Math. Stochastic Anal.,* **9** (1996), no. 4, 563–564. 01A70

[121] K. Ramachandra: Professor Paul Erdős (1913–1996), an obituary, *Current Sci.,* **72** (1997), no. 1, 78–80. 01A70

Miklós Simonovits, Vera T. Sós: Paul Erdős: the man and the mathematician (1913–1996)

Personal reminiscences of the authors on Paul Erdős's life and mathematics.

Simonovits Miklós és T. Sós Vera
A Magyar Tudományos Akadémia
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézete

PÓSA LAJOS ELŐADÁSA
ERDŐS-KONFERENCIA, 1999.

Kedves Hallgatóság!

Pali bácsiról szeretnék ezt-azt mesélni. Kezdjük a legelején, volt egy első találkozásunk. Tizenkét éves voltam akkor. Pali bácsi nagyon szerette ezt a találkozást, a velem való találkozását elmesélni, és nagyon sokszor el is mesélte, többen meg is írták, sokszor el is olvastam. És én nem meséltem el még idáig sohasem, vagy legalábbis nem emlékszem rá. Arra gondoltam, hogy ha már egyszer így összejöttünk, akkor most az egyszer ezt én mesélem el. Egyszer talán én is elmesélhetem.

No szóval, tizenkét éves voltam. A Múzeum körút 6-8-ban, a TTK épületében kezdődött a találkozás, ott volt anyám kollégája és barátnője, Péter Rózsi néni, gondolom azért, hogy ne féljek az idegen bácsitól. Meg kell mondanom azonban, hogy egyáltalán nem féltem az idegen bácsitól. Rózsi nénitől talán egy kicsit igen... (aki ismerte őt, annak nem kell elmagyaráznom, hogy egy kicsit lehetett tőle félni, bár nagyon szerettem Rózsi nénit, de hát most nem róla akarok mesélni). Ezzel szemben Pali bácsitól egyáltalán nem féltem, éspedig azért nem, mert nem volt benne semmi félelmetes. Nagyon kedves volt, megnyugtató volt a társasága. Azt ugyan nem értettem, miért nevez Epszilonnak, úgyhogy meg is kérdeztem, hogy miért lennék én Epszilon, mire azt felelte, hogy a matematikában így nevezik a kis mennyiségeket. Ezt akkor, tizenkét évesen nem értettem, s emlékszem, egy kicsit tűnődtem azon, hogy mitől kicsi vagy nagy egy mennyiség. Nagyon nem izgathatott, mert nem kérdeztem meg.

Az összeismerkedés után, ami egy folyosón történt, elmentünk a Múzeum Kávéházba ebédelni. Ott a leves kanalazása közben, ahogy ezt Pali bácsi sohasem hagyta ki a meséből, föltett nekem egy kérdést:

Az $1, 2, 3, \ldots, 2n$ számok közül $(n+1)$-et kiválasztottunk. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük kettő, amelyek relatív prímek.

Kicsit gondolkoztam rajta, majd azt mondtam, hogy hát ennyi szám között biztosan vannak szomszédosak is. (Ha ezt a $2n$ számot n darab párra szétbontjuk:

$$\mid 1, 2, \mid 3, 4, \mid \cdots \mid 2n-1, 2n \mid$$

és $n+1$ számot kiválasztunk az n párból, akkor lesz olyan pár, amelyből mind a kettőt ki kell választanunk, s ezek a számok szomszédosak lesznek.) Szomszédos számok pedig mindig relatív prímek.

Hát így történt, ezt mesélte el a Pali bácsi olyan sokszor. El kell árulnom azonban, hogy én erre az egészre nem emlékszem, mindezt csak onnan tudom, hogy ... olvastam meg hallottam sokszor. Se arra nem emlékszem, hogy ezt Pali bácsi kérdezi, és arra sem, hogy ezen gondolkodom. Kiesett a fejemből. Gyakori, hogy a gyerekek a kiskorukban történteket onnan tudják, hogy a szüleik gyakran el-elmesélik, és végül ez már majdnem olyan, mintha személyes emlék lenne, így vagyok ezzel én is, csak itt a Pali bácsi a mesélő. Ezzel szemben sokkal jobban emlékszem erre a kérdésre:

Az $1, 2, 3, \ldots, 2n$ számok közül $(n+1)$-et kiválasztottunk. Bizonyítsuk be, hogy biztosan van közöttük osztó és többszörös.

Ugyanúgy kezdődik, szintén kiválasztunk ebből a $2n$ számból $(n + 1)$-et, de most azt állítjuk, hogy van közöttük osztó és többszörös, tehát van közöttük két olyan szám, amelyek egyike többszöröse a másiknak. Ez sokkal nehezebb, mint az előző, nem is oldottam meg ott, rögtön az ebéd alatt, néhány napig gondolkoztam, nagyon izgatott ez a kérdés. Még emlékszem a megoldás pillanatára... Talán ha lesz idő rá, elmondom a megoldást is. Mindenesetre azt már most mondom, hogy ez Pali bácsi egyik legkedvesebb problémája volt. Nagyon szerette ezt a kérdést. A gólyavári előadásban[1] éppen nem hangzott el, de egyébként sokszor elmesélte.

Milyen volt a kapcsolatom vele? A leglényegesebb az, hogy tökéletesen egyenrangú partnerként kezelt engem, és egyáltalán mindenkit, aki vele kapcsolatba került, tehát ez nem az én személyemnek szólt, a gyerekeket, felnőtteket, és most én azért inkább a gyerekekről beszélek, minden fontoskodás nélkül, minden kivagyiság nélkül teljesen egyenrangú partnernek tekintette, és ez a lényéből fakadt, nem szerep volt, egyszerűen így érezte.

A másik, amit el akarok mondani, és szintén nagyon jellemző Pali bácsi és a gyerekek kapcsolatára, hogy igen korán mondott megoldatlan problémákat. Nem volt nagyon didaktikus, nem törekedett annyira, hogy valamit fölépítsen, gyorsan rátért a megoldatlan problémákra. Ez összefüggésben van az előzővel, tehát a természetével, hát ha egyszer a másik egyenrangú partner, akkor úgy bánok vele, mintha olyan lenne, mint én. Én mit is csinálok, matematikai problémákon gondolkozom, akkor tehát mondom neki azokat, amelyek számomra most épp érdekes problémák, és amiket ő azért képes megérteni.

Most felidézek egy másfajta tanítást. Jártam, kicsivel később Gallai Tiborhoz, akit szintén nagyon szerettem. Gallaihoz hetente egyszer mentem, mindig ugyanabban az időben, mindig megkent zsemlékkel várt, gondosan elkészített zsemlékkel, és feladta a gondosan előkészített feladatokat, a feladatok egymásra épültek, és nem (vagy csak nagyon ritkán) mondott megoldatlan problémákat. Pali bácsival rendszertelenül találkoztam, soha semmilyen zsemlét nem kent meg, a feladatsorai nem voltak igazán felépítettek, elég ötletszerűek voltak, és nagyon gyorsan mondott megoldatlan problémákat.

Elmesélem, hogy miért kaptam ki később gyakran, néha Pali bácsitól és többször Hajnal Andrástól, egy kicsit a gondolkodásmódjukat akarom ezzel bemutatni.

[1] Az előadásom előtt videofelvételről megnéztük Pali bácsi 1993-as gólyavári előadását. A felvétel a 80. születésnap alkalmából készült.

Hallottam tőlük roppant érdekes megoldott kérdéseket, és nagyon izgatott, hogy hogyan lehet ezeket megoldani. Igazából egy kérdés nem attól volt számomra kedves elsődlegesen, hogy megoldatlan, hanem hogy szép és érdekes. És ők sokszor mondták, hogy ne ezen gondolkozzál, mert ezt már megcsinálták! Jó, hogy tényleg érdekes és szép, de már megcsinálták. Hanem inkább azon gondolkozzam, amit még nem csináltak meg. Mert azzal lehet a tudományt gazdagítani.

Most sok év után magam is gyerekekkel foglalkozom, nem érzem olyan rettenetesen fontosnak, hogy a gyerek nagyon korán megoldatlan problémákkal találkozzon. Azt fontosnak tartom, hogy kutatási helyzetbe kerüljön, fontos, hogy olyasmi történjen vele, ami egy kutatóval kutatás közben, például hogy nehéz feladaton gondolkozzon. Nem érzem, igazán lényegesnek, hogy ez megoldatlan legyen. Ha megoldatlan problémákat adunk gyerekeknek, nem tudjuk megtervezni a munkájukat, mert mi magunk se tudjuk, hogy mi kell a megoldáshoz. Jobban tervezhető egy kutatási helyzet, ha én tudom, hogy a probléma hogyan oldható meg, és akkor olyan helyzeteket tudok teremteni, amelyek meghatározott irányba visznek, meghatározott módszereket igényelnek, és jól elő is tudom készíteni ezt a pillanatot. Az a fontos, hogy a gyerek fejében milyen folyamatok játszódnak le. Ha egy feladat hasznos, ha a rajta való gondolkodás serkentő, akkor ebből semmit nem von le, hogy már megoldották. Továbbá a matematika bizonyos témáihoz nem is vezet ilyen út, ezeknél a területeknél nagyon-nagyon sokat kell ahhoz tanulni, hogy valaki már abba a helyzetbe kerüljön, hogy megoldatlan problémán gondolkozhasson.

Ettől függetlenül természetesen nagyon jó dolog volt, amit Pali bácsi csinált. Azt mondhatnám az ő módszerét nézve, hogy mégis csak vezet a matematikához királyi út. Valamilyen értelemben ez királyi út volt. Tehát a témakör rendes felépítése nélkül, a részletek szisztematikus átgondolása nélkül egy-egy érdekes feladattal eljutni az aktuális problémákhoz. Nem minden területen lehetséges ez. De hát ő olyan területeken csinálta, ahol lehetséges.

Leveleztem is Pali bácsival. Mutatok néhány olyan feladatot, amit levélben kaptam tőle, azazhogy annyi év után nem tudom már, hogy mi volt ebből levél és mi személyes közlés. Négy probléma, megoldott problémák, természetesen nem csak megoldatlan problémákat mondott Pali bácsi, mondott megoldottakat is, most négy megoldott problémát mutatok.

1. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ irracionális.

2. $1 < n < m$ egészek $\Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m}$ nem lehet egész.

3. $H \subset N$ végtelen halmaz. H elemei a $p_1, p_2, \ldots, p_k$ prímekből épülnek fel. $\Rightarrow$ létezik egy $a_1 \mid a_2 \mid a_3 \ldots$ végtelen osztólánc H-ban.

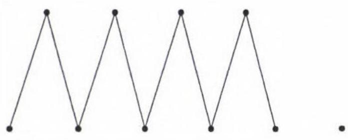
4. A Ramsey-tétel.

Csupa érdekes kérdés, talán olyan nagyon nem is kell őket kommentálnom.... De azért az első feladathoz tegyük hozzá: ezt egy 14–15 éves gyereknek adta föl, aki nem ismerte a végtelen sor összegének fogalmát. És az e számról se tudott többet, mint hogy ennek a végtelen összegnek az értéke.

A harmadik feladatban az az érdekes, ahogy a végtelen fogalmát exponálja. Egy végtelen halmazban, természetes számok egy végtelen halmazában van egy végtelen osztólánc, ha ez a halmaz olyan, hogy véges sok prímből épül föl. Ugye, ha végtelen sok prímből épül föl, akkor ez nem igaz, a prímszámok halmazában egyáltalán nincs osztó és többszörös. Tehát az lényeges, hogy végtelen sok eleme van, de ez véges sok prímből épül föl. Ez a feladat nagyon jó, és a végtelenről való gondolkodásnak az ízét, módszerét mutatja. Tehát például egy ilyen feladattal bele lehet lökni valakit abba, hogy mi a véges és a végtelen, és hogyan lehet ezzel bánni. A Ramsey-tétel azt mondja, hogy ha egy végtelen teljes gráf éleit két színnel megszínezzük, akkor lesz benne egy végtelen, teljes, egyszínű részgráf. Ez szintén a véges-végtelennel kapcsolatos első nagy lökések egyike lehetett.

Ahogy erről már beszéltem, Pali bácsi tehát adott megoldott kérdéseket, de nem nagyon szisztematikusan, nem nagyon felépítve, és elég türelmetlenül várta a pillanatot, hogy a számára sokkal kedvesebb megoldatlan problémákra rátérhessen. Hát ilyet nagyon sokat mondott nekem, most egyet bemutatok ezek közül. Először is ismerkedjünk meg a Dirac-tétellel. A Dirac-tétel azt mondja ki, hogy ha egy gráfnak $2n$ pontja van, és mindegyik pont foka legalább n, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört (azaz olyan kört, amely a gráf minden pontján átmegy).

Minden tétel kapcsán fölmerülhet az élesség problémája. A tétel látszólag éles. Ugyanis ha fölveszünk pontokat két kupacban, az egyikbe $(n-1)$-et, a másikba $(n+1)$-et teszünk, és a két kupac között minden lehetséges élt behúzunk, akkor most minden pont foka legalább $n-1$.



A gráf pedig nyilvánvalóan nem tartalmaz Hamilton-kört, hiszen ha elképzeljük a kört, ahogy föl-le lépdelünk a két rész között, akkor a végén láthatóan bajba kerülünk, mert fönt már elfogynak a pontok, amikor lent még nem fogytak el. Így vagy úgy, de mindenki könnyen végiggondolhatja, hogy ebben a gráfban miért nincsen Hamilton-kör.

Tehát akkor úgy látszik, hogy a Dirac-tétel éles. Pali bácsi azonban belevitt ebbe a témakörbe egy egészen új gondolatot, amit nekem rögtön el is mondott, egyébként hát azt nem kell mondanom, hogy hihetetlen képessége volt az érdekes kérdések felvetésére, és ezeket mindig nagyon önzetlenül osztogatta. Nos, azt a kérdést vetette föl Pali bácsi, hogy ha már ilyen frontálisan, minden pontra vonatkozóan a fokszámfeltételt nem is lehet gyengíteni, de talán megengedhetnénk néhány kivételes pontot. Mondjuk, van egy darab másodfokú pont, és a többire áll az eddigi feltétel. Vagy két darab harmadfokú pontot engedélyezünk, a többi pont foka most is legalább n legyen. Vagy lehet három kivételes pont is, de legalább negyedfokúak legyenek stb. Ilyen értelemben talán lehetne a Dirac-tételt élesíteni. Akkor nekem nagyon megtetszett ez a gondolat, hogy egy ilyen kevert feltétellel is lehetne próbálkozni, és az előbbi sejtést sikerült bebizonyítanom, sőt egy ennél erősebb állítás is kijött. Ebből lett az első önálló cikkem.

Pali bácsi az év legnagyobb részében külföldön tartózkodott. Ilyenkor leveleztünk, ha pedig Pesten volt, akkor mindennapos telefonkapcsolatban voltunk egymással. Egyébként a leveleiről hadd mondjak annyit, hogy egyszer egy osztálytársam nálam járt, amikor egy levelét kibontottam, és percekig kacagott azon, hogy a levél így kezdődött: „Kedves Pósa Lajos! Remélem, jól vagy. Legyen n pozitív egész szám..." Szóval nem volt sok cicázás, cicomázás, rátért a lényegre. Így ment mindez egy jó darabig.

Hogy alakult később a kapcsolatunk? Az úgy történt, hogy a későbbiekben is sok problémát mondott nekem, azonban az érdeklődésem irántuk elkezdett csökkenni. Tehát egyre rosszabb partner lettem, kevésbé csillogó szemmel gondolkoztam a kérdésein, és ezt persze észrevette, ritkábban telefonált, és aztán eljött az az idő, amikor Pali bácsi úgy járt Pesten, hogy fel se hívott engem telefonon, tehát már nem érezte fontosnak, hogy beszélgessünk. Múltak az évek, és aztán azért egyszer-egyszer fölhívott – ritkán –, és ha valami érdeklődést mutattam a kérdései iránt, mondjuk, visszahívtam, és valamelyik kérdésével kapcsolatban mondtam valamit, akkor nagyon lelkes lett, és ilyenkor előfordult, hogy néhány napig akár naponta négyszer is felhívott telefonon, mert akkor megint azt érezte, hogy valamilyen munkatársi kapcsolat alakulhat ki közöttünk. Ezt szerette volna, és én is szerettem volna, de az élet másként alakult.

Nem volt megelégedve a pályafutásommal. Tanári tevékenységemet nem becsülte sokra. Ez persze engem bosszantott, de erről most nem kívánok többet beszélni. Viszont még szeretnék mesélni két dolgot vele kapcsolatban. Az egyik sok évvel később történt, mint az említettek. Kilenc évvel ezelőtt csináltam egy matematikai tábort gyerekeknek, akik akkor 15 évesek voltak. A színhely egy budapesti kollégium, jelen vannak 15 éves gyerekek, élvonalbeli 15 éves gyerekek, s Pali bácsi éppen Pesten volt. Megkérdeztem, hogy lenne-e kedve eljönni. Volt kedve eljönni. Egyébként nem kellett különösebben udvarolni neki ahhoz, hogy gyerekeket megnézzen vagy gyerekekkel összeismerkedjen, és talán Lovász Laci és Ruzsa Imre majd elmesélik[2], hogy ők hogyan ismerkedtek meg Pali bácsival. Én már nem emlékszem arra, hogy kik voltak, akiket elvittem Pali bácsihoz, ugyanis annyira természetes volt a számára, hogy ő bárkit megnéz. Már gimnazista koromban is, ha megemlítettem, hogy szeretném elhozni egy barátomat vagy ismerősömet, akit nagyon érdekel a matematika, akkor minden további nélkül mondta, hogy persze, persze, hozd csak el, és így aztán ez nem volt esemény, tehát nem is maradt meg igazán a fejemben.

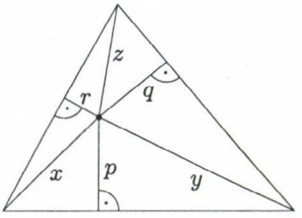
Így az is természetes volt Pali bácsinak, hogy eljött akkor a 15 éves gyerekekhez, s gondolom, örülni fognak a jelenlévők, ha most bepillantunk abba, hogy mit is csinált kilenc évvel ezelőtt Pali bácsi azon a délutánon. Szerencsére feljegyeztem a feladatokat.

[2]Utánam ők tartottak előadást.

1. Az $1, 2, 3, \ldots, 2^n$ számok közül legfeljebb hányat lehet kiválasztani úgy, hogy a belőlük képezhető összes összeg különböző legyen?

2. Minden háromszög egyenlőszárú.

3. Bármely n szám egyenlő.

4. 

$x + y + z \geq 2(p + q + r)$

5. Prímszámokról

a.) n és $2n$ között van prím.

b.) $\prod_{p<n} p < 4^n$.

c.) n^2 és $(n+1)^2$ között van prím (megoldatlan).

d.) n^3 és $(n+1)^3$ között van prím (megoldott).

e.) $n \geq 4$, páros $\Rightarrow$ felbontható két prím összegére.

f.) Van-e végtelen sok ikerprím?

g.) Van-e végtelen sok $n^2 + 1$ alakú prím?

6. Adott a síkban 5 pont, nem esik 3 egy egyenesre $\Rightarrow$ kiválasztható közülük egy konvex négyszög 4 csúcsa.
9 pont $\Rightarrow$ konvex ötszög 5 csúcsa.
Sejtés: $2^{n-2} + 1$ pont $\Rightarrow$ konvex n-szög csúcsai.

7. Konvex n-szögnek mindig van olyan csúcsa, amelytől nincs 4 csúcs azonos távolságra.

8. $6 \to (3,3)$. ($5 \to (3,3)$ nem igaz.)
$x \to (4,4)$ Ismert a legkisebb x, amelyre igaz.
$y \to (5,5)$ Számítógéppel remélhető, hogy megtaláljuk a legkisebbet.
$z \to (6,6)$ Számítógéppel sincs sok remény.

9. Gallai-tétel: adott a síkban véges sok pont, amelyek nem esnek egy egyenesre. Ekkor biztosan van olyan egyenes, amely pontosan kettőn megy át az adott pontok közül.

10. Adott $(n+1)$ (egész) szám $2n$-ig $\Rightarrow$ Van közöttük osztó és többszörös.

11. Hány számot kell megadni n-ig $\Rightarrow$ van közöttük két különböző, amelyek összege is a számok között van?

12. Hány szám n-ig $\Rightarrow$ Van közöttük három, $x < y < z$, melyre $x + y$, $y + z$ és $x + z$ is a számok között van?

Sejtés: $\frac{5}{8}n$. Pali bácsi 1000 Ft-ot ajánlott fel a megoldásért.

Ez az előadás a táborban 1990-ben hangzott el. Ma délután videofelvételen láttuk, hogy mit mondott el Pali bácsi 80 éves korában, 1993-ban a Gólyavárban. Jól láthatók a kedves, fontosnak érzett, visszatérő motívumok. A nyitókérdés ugyebár ugyanaz. De ebben a tábori műsorban ez után mindjárt két olyan dolog következett, ami most engem is meglepett, amikor annyi év után elővettem a feljegyzéseimet. Kicsit bolondozott a gyerekekkel, mutatott két hibás bizonyítást. Egy bizonyítást arra, hogy minden háromszög egyenlőszárú, és levezette, hogy bármely n szám egyenlő. Ez teljes indukcióval ment, n szerinti teljes indukcióval. Ezek jól ismert tréfák, de ha most nem látnám a füzetemben, nem is gondolnám, hogy ilyenfajta bolondozás is benne volt a repertoárjában.

Kimondta, persze bizonyítás nélkül az Erdős–Mordell-egyenlőtlenséget (**4.**). Prímszámokról elmesélte a kedvenc megoldatlan problémákat, de hozzátett két régóta igazolt állítást (**5/a,b**), természetesen semmit se bizonyítva. A konvex sokszögek kiválasztásának problémájáról az előadásában már sokat hallottunk. A **8.** pontban azonban olyasmiről van szó, ami nem szerepelt a gólyavári előadásban, noha ezt a témát is nagyon szerette és gyakran emlegette.

Mit is jelentenek ezek a nyilak? A már említett Ramsey-tétel véges változatairól van szó. $x \to (4,4)$ például a következő állítást jelenti: ha egy x pontból álló teljes gráf éleit két színnel megszínezzük, akkor a gráf tartalmazni fog egy 4-pontú, teljes, egyszínű részgráfot. Érdekes, hogy az utolsó kérdést mennyire reménytelennek tartotta.

A **9**. és a **10**. állítást nagyon szerette elmeséłni. Érdekes kérdések, kerek válaszok. Előadásaiban Pali bácsi viszonylag ritkán mondott bizonyításokat. De ennek a két állításnak szerette elmondani a bizonyítását is. Megvan bennük a matematika varázsa. Nehéz rájönni ezekre a bizonyításokra, de utólag rövidek és gyönyörűek. A **10.** feladat megoldását most elmondom.

Helyezzük el az $1, 2, 3, \ldots, 2n$ számokat különböző sorokba a következő módon:

$$\begin{array}{l}
1, 2, 4, 8, \ldots \\
3, 6, 12, 24, \ldots \\
5, 10, 20, 40, \ldots \\
\ldots \\
\ldots \\
2n-3 \\
2n-1
\end{array}$$

A sorok a páratlan számokkal kezdődnek, tehát a sorok száma n (hiszen n páratlan szám van $2n$-ig). A megadott $(n+1)$ szám így nem eshet csupa különböző sorba, tehát van közöttük kettő, amelyek egy sorban vannak. Egy soron belül azonban bármelyik két szám osztó-többszörös viszonyban áll egymással.

Amikor ezt a feladatot Pali bácsi nekem feladta, én nem jöttem rá erre a megoldásra. Van egy sokkal kevésbé szellemes, de könnyebben megtalálható teljes indukciós bizonyítás is.

Még egy történet van hátra, és ez már az utolsó találkozásunkról szól. 1996 nyarán volt az Ifjúsági Matematikai Kongresszus Miskolcon, hat héttel Pali bácsi halála előtt. A főszervező megkért, érjem el valahogyan, hogy Pali bácsi egy előadás erejéig meglátogassa a konferenciát. Most sem volt nehéz dolgom..., elég volt néhány szó. Egerben tartottak ugyanabban az időben egy másik konferenciát, onnan jött át Pali bácsi minket meglátogatni.

Szóval eljött, megtartotta az előadást, olyan jellegű volt, mint amilyenekkel ma már találkoztunk. Sajnos nem jegyzeteltem, és így nem tudok beszámolni a részletekről. Az előadás után egy kicsit rosszkedvűnek láttam, odamentem és elmeséltem, hogy van itt a konferencián a résztvevők között két kicsi gyerek, 11–12 évesek, megkérdeztem, hogy lenne-e kedve megismerkedni velük. Egészen felélénkült a gondolattól, mondta, hogy nagyon szívesen találkozna a gyerekekkel. Összehoztam őket egymással, de aztán valamiért el kellett mennem máshová.

Este bankett volt, a résztvevők kisebb termek között oszlottak szét. Kíváncsi lettem, hol van Pali bácsi, abban se voltam biztos, hogy itt van-e még, vagy visszament már Egerbe. Be-benéztem hát a termekbe, és az egyikben meg is találtam. Egy hosszú asztal végénél ült, két oldalán a két kisfiúval. Csendben voltak, nem beszélgettek, addigra Pali bácsi már elfáradhatott. A többiek, akik az asztalnál ültek, felnőttek voltak, zajosak, vidámak, talán néhány pohár bor is lecsúszott már a torkukon, nem vettek tudomást a kisfiúkról és az idős bácsiról. Odamentem, és üdvözöltem őket. Pali bácsi magához tért, odahajolt hozzám, és azt kérdezte: „Mondd, feladhatom a gyerekeknek azt, hogy ha adott $(n+1)$ szám $2n$-ig, akkor...?" „Még ne, Pali bácsi – feleltem –, talán majd legközelebb..."

Lajos Pósa: Personal reminiscences on Paul Erdős

The author's personal reminiscences about Paul Erdős. Erdős often talked about his encounters with the author. This paper is the same story explained from the other point of view. Transcript of a lecture given at the Conference "Paul Erdős and his Mathematics", Budapest July 4–11, 1999.

ERDŐS PÁL: AZ EGYÜTTMŰKÖDÉS MESTERE[1]

JERROLD W. GROSSMAN

Az utóbbi több mint hatvan évben Erdős Pál a közös kutatás művészetét soha nem ismert magasságokba emelte. Ebben a rövid cikkben tudományos együttműködéseit vizsgálva be szeretnénk mutatni széleskörű matematikai érdeklődését, a körülötte lévő embereket és másokkal közös kutatásának hatását a matematika világára. Nem matematikai munkásságára vagy egyéniségére akarunk koncentrálni, hanem arra, milyen következtetések vonhatók le publikációs listájának tanulmányozásából. Ez tehát nem matematikai, nem is életrajzi, inkább bibliográfiai megközelítése Erdősnek. Az adatok nagy része a jelen számban megjelenő bibliográfiából és a *Mathematical Reviews (MR)* [13] adatbázisából származik. Hasznos információforrás volt továbbá a *The Hypertext Bibliography Project* (ez egy elméleti computer science cikkeket tartalmazó adatbázis) [11], a *Zentralblatt* [16], a *Jahrbuch* [10], felsorolhatatlan mennyiségű nekrológ és személyes közlések sora. Korábbi cikkek ezekben a témákban [3, 4, 7, 8, 14].

Vitathatatlan, hogy Erdős ma már legenda, akinek híre (különcsége és zsenialitása miatt egyaránt) messze túlmutat a kutató matematikusok közösségén. Van már róla videofilm [2], cikkek magas példányszámban megjelenő képeslapokban [9,15] (és persze matematikai cikkek is – egy csodálatos példa erre [1]), internet graffiti (pl. az a tőle származó mondás, hogy a matematikus olyan gép, amely kávéból tételeket állít elő, azon a Világhálózat oldalon, mely a html nyelv bemutatására lett tervezve [12]). De teljesítménye és stílusa már az egyetemi (és alkalmazott) matematikusok táborában folklórisztikussá vált.

Az olvasók nagy része valószínűleg hallott már az Erdős számról, melynek rekurzív definíciója a következő. EP[2] Erdős száma 0. Minden $n \geq 0$-ra, ha valakinek még nincs Erdős száma, de írt egy közös matematikai cikket valakivel, akinek az Erdős száma n, akkor az ő Erdős száma $n+1$ lesz. Akihez ezzel az eljárással nem rendeltünk Erdős számot, annak az Erdős száma ∞. Tehát egy ember Erdős száma nem más, mint a kérdéses személy távolsága Erdős Páltól a *C együttműködési gráfban* (ahol két szerző közé akkor húzunk élet, ha van közös cikkük – természetesen nem kell kizárólag matematikusokra szorítkozni). Például Albert Einstein Erdős száma 2, hiszen közös eredménye nincs Erdőssel, de volt közös publikációja Ernst

[1]Ez a cikk J. W. Grossman: Paul Erdős: Master of Collaboration című cikkének magyar fordítása (fordította Gács András). Az eredeti a *Mathematics of Paul Erdős* kötet 467–477. oldalán jelent meg (Eds.: R. L. Graham, J. Nešetřil), *Algorithms and Combinatorics,* **14** (1999), copyright Springer-Verlag (Berlin–Heidelberg).

[2]Erdős Pál egyik gyakran, szinte csak magyarok által használt beceneve.

H. Abbott 74; J. Aczél 65; R. Aharoni 88; M. Aigner 87; M. Ajtai 81; L. Alaoglu 44:2; Y. Alavi 87:7; K. Alladi 77:5; N. Alon 85:2; J. Anderson 85; B. Andrásfai 74; N. Ankeny 54; N. Anning 45; B. Aronov 94; J. Ash 74; D. Avis 88:2; L. Babai 80:3; G. Babu 75:3; F. Bagemihl 53:4; A. Balog 90; L. Bankoff 73; A. Barak 84; P. Bateman 50:5; J. Baumgartner 79:2; L. Beasley 87; M. Behzad 91; S. Benkoski 74; M. Berger 88; E. Bertram 94; A. Bialostocki 95; A. Blass 92; M. Bleicher 75:3; A. Boals 87:2; R. Boas, Jr. 48; D. Boes 81; B. Bollobás 62:14; D. Bonar 77; J. Bondy 73; R. Bonnet 74; I. Borosh 78; J. Bosák 71; J. Bovey 75; J. Brenner 87; J. Brillhart 83; B. Brindza 91; T. Brown 85:2; W. Brown 73:6; R. Buck 48; S. Burr 75:24; D. Busolini 77; L. Caccetta 85:4; P. Cameron 90; E. Canfield 83; F. Carroll 77; F. Cater 78; M. Cates 76; P. Catlin 80; J. Chalk 59; G. Chartrand 87:5; C. Chen 76; G. Chen 93:2; H. Chen 92; R. Chen 88; P. Chinn 81; S. Choi 74:3; S. Chowla 50:3; C. Chui 78; F. Chung 79:13; K.-L. Chung 47:4; V. Chvátal 72:3; B. Clark 85; L. Clark 93; J. Clarkson 43; J. Clunie 67; S. Cohen 76; C. Colbourn 85; J. Conway 79; A. Copeland 46; H. Croft 79; E. Csáki 85; I. Csiszár 65; J. Czipszer 62; D. Darling 56:2; R. Darst 81; H. Davenport 36:7; R. Davies 75; D. Daykin 76:2; N. de Bruijn 48:6; D. de Caen 86; J.-M. De Koninck 81; P. Deheuvels 87; J. Dénes 69; J. Deshouillers 76; M. Deza 75:4; H. Diamond 78:3; G. Dirac 63; J. Dixmier 87; Y. Dowker 59; D. Drake 90; U. Dudley 83; R. Duke 77:7; A. Dvoretzky 50:8; E. Ecklund, Jr. 74:2; A. Edrei 85; R. Eggleton 72:7; M. El-Zahar 85; G. Elekes 81; P. Elliott 69:3; R. Entringer 72:3; M. Erné 86; A. Evans 89; V. Faber 81:3; S. Fajtlowicz 77:4; R. Faudree 76:41; L. Fejes Tóth 56; E. Feldheim 36; W. Feller 49; A. Felzenbaum 88; L. Few 64; P. Fishburn 91:4; G. Fodor 56:3; D. Fon Der Flaass 92; J. Fowler 85:2; A. Fraenkel 88; P. Frankl 78:6; A. Freedman 90; G. Freiman 90; G. Freud 74; R. Freud 83:4; E. Fried 72; H. Fried 47; W. Fuchs 56; Z. Füredi 82:9; I. Gál 48:3; J. Galambos 74; T. Gallai 36:8; F. Galvin 75:6; L. Gerencsér 70; J. Gillis 37; L. Gillman 55; J. Gimbel 90:4; A. Ginzburg 61:2; W. Goddard 94; C. Godsil 88; M. Goldberg 88; M. Golomb 55; A. Goodman 66; B. Gordon 64; R. Gould 87:3; R. Graham 72:26; A. Granville 90; D. Grieser 87; K. Grill 87; P. Gruber 89; B. Grünbaum 73:2; G. Grünwald 37:3; D. Gunderson 95; H. Gupta 76; M. Guy 79; R. Guy 70:4; A. Gyárfás 88:9; E. Győri 92:2; K. Győry 80; A. Hajnal 58:54; G. Halász 91; R. Hall 73:13; J. Hammer 89; H. Hanani 62:2; D. Hanson 74; F. Harary 65:2; G. Hardy 78; W. Hare 87; C. Harner 73; S. Hartman 67; E. Härtter 66; E. Harzheim 86; J. Hattingh 93; S. Hechler 75:2; S. Hedetniemi 87; Z. Hedrlín 72; N. Hegyvári 83:3; H. Heilbronn 64; P. Hell 89; R. Hemminger 84; M. Henning 93; M. Henriksen 55; F. Herzog 50:6; M. Herzog 70; D. Hickerson 89:2; D. Higgs 84; A. Hildebrand 87; N. Hindman 76:2; A. Hobbs 77:3; A. Hoffman 80; V. Hoggatt, Jr. 78; D. Holton 84; R. Holzman 94; P. Horák 94; M. Horváth 91; E. Howorka 80; D. Hsu 92; G. Hunt 53; J. Hwang 78:2; K.-H. Indlekofer 87; A. Ingham 64; A. Ivić 80:7; E. Jabotinsky 58:3; S. Jackson 94; M. Jacobson 87:2; V. Jarník 37; G. Jin 93; F. Jones 82:2; I. Joó 87:9; M. Joó 92; M. Kac 39:5; P. Kainen 78; S. Kakutani 43:7; I. Kaplansky 46:2; J. Karamata 56; I. Kátai 69:7; Zhao Ke 38:4; P. Kelly 63:2; J. Kennedy 87; H. Kestelman 63; S. Khare 76; H. Kierstead 91; P. Kiss 88:2; M. Klamkin 73:2; M. Klawe 80; D. Kleitman 68:6; M. Klugerman 94; J. Knappenberger 93; J. Koksma 49:2; P. Komjáth 86:2; J. Komlós 70:3; V. Komornik 90:2; I. Koren 88; A. Kostochka 92; T. Kővári 56; S. Krantz 88; D. Kratsch 91; A. Kroó 89; E. Kubicka 90; G. Kubicki 91; K. Kunen 81; C. Lacampagne 85:3; J. Larson 79:5; R. Laskar 83:3; H. Lefmann 95; J. Lehel 91;

J. Lehner 41; B. Lengyel 38; W. LeVeque 63; M. Lewin 95; D. Lick 91; N. Linial 87:2; J. Liu 92; M. Loebl 95; G. Lorentz 58; L. Lovász 73:6; J. Loxton 79; T. Luczak 92:3; A. Macintyre 54; M. Magidor 76; K. Mahler 38:2; H. Maier 87; E. Makai 91:2; M. Makkai 66; P. Malde 87:2; S. Marcus 57; A. Máté 70:3; R. Mauldin 76:4; T. Maxsein 90; M. Mays 88; J. McCanna 92; R. McEliece 71; B. McKay 84; A. Meir 71:5; G. Mills 81; E. Milner 66:15; H. Minc 73; L. Mirsky 52; P. Montgomery 73:3; J. Moon 64:4; S. Moran 87:2; P. Morton 83; L. Moser 64:3; R. Mullin 83; M. Ram Murty 87; V. Kumar Murty 87; M. Nathanson 75:18; J. Nešetřil 83:3; E. Netanyahu 73; J. Neveu 63; D. Newman 74:5; P. Ney 74; J.-L. Nicolas 75:16; I. Niven 45:6; D. Norton 88; P. O'Neil 73; R. Obláth 37; A. Odlyzko 79:3; O. Oellermann 87:4; A. Offord 56; E. Ordman 85:6; J. Oxtoby 55; J. Pach 80:16; P. Pálfy 87:2; Z. Palka 83:2; E. Palmer 83; Z. Papp 80; T. Parsons 88; C. Payan 82; D. Penney 78; K. Phelps 85; A. Pinkus 85; G. Piranian 47:14; R. Pollack 89; H. Pollard 49; C. Pomerance 78:20; L. Pósa 62:4; K. Prachar 61; D. Preiss 76; P. Pudaite 87; N. Pullman 85:2; G. Purdy 71:8; L. Pyber 88:2; R. Rado 50:18; K. Ramachandra 75:2; S. Rao 92; A. Reddy 73:11; T. Reid 95; A. Rényi 50:32; P. Révész 75:9; B. Reznick 87; I. Richards 77; L. Richmond 76:5; G. Rieger 75; H. Riesel 88; R. Robinson 83; V. Rödl 83:8; C. Rogers 53:7; A. Rosa 71; P. Rosenbloom 46; B. Rothschild 73:8; C. Rousseau 76:30; L. Rubel 64:2; A. Rubin 80; M. Rudin 75; I. Ruzsa 73:5; C. Ryavec 72; H. Sachs 63; B. Saffari 79; E. Saias 95; M. Saks 86; P. Salamon 88; A. Sárközy 66:57; N. Sauer 75; J. Schaer 75; R. Schelp 76:34; P. Scherk 58; A. Schinzel 60:2; E. Schmutz 91; J. Schönheim 70:3; L. Schulman 94; S. Schuster 81:2; A. Schwenk 87:4; S. Segal 78; W. Seidel 53; J. Selfridge 67:13; S. Selkow 80; Á. Seress 86; J. Shallit 91; H. N. Shapiro 51:3; H. S. Shapiro 65; A. Sharma 65; S. Shelah 72:3; T. Sheng 75; A. Shields 65; O. Shisha 85; T. Shorey 76; G. Silberman 88; R. Silverman 83; A. Simmons 73; M. Simonovits 66:21; N. Singhi 77:2; J. Širáň 94; T. Sirao 59; D. Skilton 85:3; B. Smith 81; P. Smith 90; A. Soifer 93:2; V. Sós 66:33; E. Specker 61; J. Spencer 71:22; C. Spiro-Silverman 90; W. Staton 91:2; A. Stein 83; S. Stein 63:2; C. Stewart 76:4; D. Stinson 83; A. Stone 45:3; H. Straight 90; E. Straus 53:20; M. Subbarao 72:2; H. Sun 93; J. Surányi 59:3; H. Swart 93; J. Szabados 78:4; M. Szalay 77:6; M. Szegedy 87; G. Szegő 42:2; L. Székely 87:2; G. Szekeres 34:5; E. Szemerédi 66:29; P. Szüsz 58:2; A. Tarski 43:2; A. Taylor 92; H. Taylor 71:3; S. Taylor 57:7; G. Tenenbaum 81:6; P. Tetali 90; C. Thomassen 89; R. Tijdeman 88; W. Trotter 78:2; P. Turán 34:29; J. Turk 84; W. Tutte 65; Z. Tuza 89:8; S. Ulam 68:3; K. Urbanik 58; J. Vaaler 87:2; E. van Kampen 40; J. van Lint 66:2; A. Varma 86:2; R. Vaughan 74:2; E. Vázsonyi 36:2; P. Vértesi 80:7; K. Vesztergombi 88:2; K. Vijayan 85:3; I. Vincze 58:2; B. Volkmann 66; S. Wagstaff, Jr. 80; G. Weiss 83; D. West 85:2; A. Williamson 87; R. M. Wilson 85; R. J. Wilson 77; P. Winkler 89; A. Wintner 39:3; N. Wormald 86; F. Yao 79; A. Zaks 90; S. Zaks 88; Y. Zalcstein 87:3; S. Zaremba 73; Z. Zhang 93:2; A. Ziv 61

1. ábra. *Erdős Pál társszerzői*

Straus-szal, aki EP egyik fő társszerzője. A szőrszálhasogatók megvitathatják, hogyan kell egy olyan cikket számolni, melynek több mint két szerzője van, mi azt a liberális megközelítést választjuk, hogy egy k-szerzős cikk $\binom{k}{2}$ szerzője közül bármely kettő szomszédos C-ben.

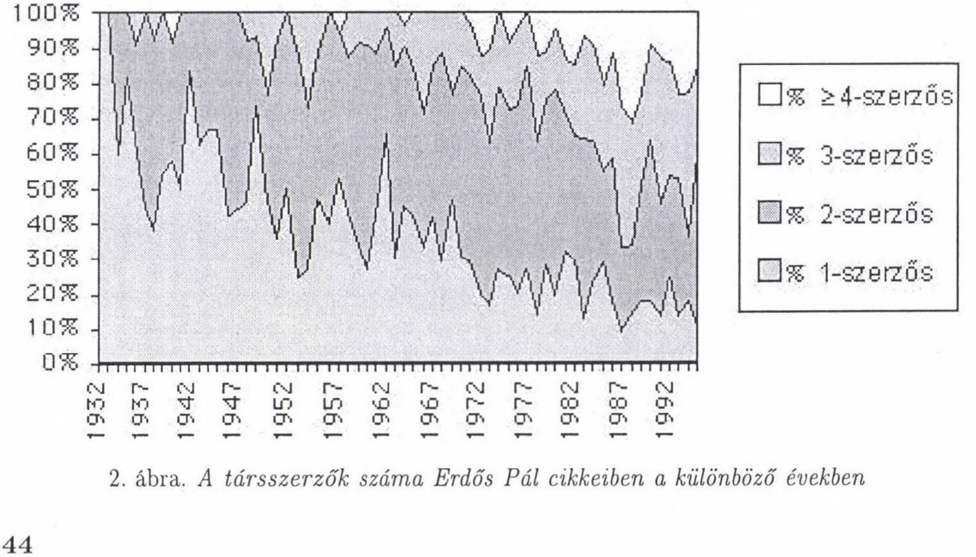
Egy másik elterjedt változat szerint, ha valaki $p > 0$ közös cikket írt EP-vel, akkor az Erdős száma $1/p$. Sárközi András $(\frac{1}{57})$ és Hajnal András $(\frac{1}{54})$ rendelkeznek a legkisebb Erdős számmal e szerint a definíció szerint, a további sorrend Faudree, Schelp, Simonovits, Pomerance, Straus, Nathanson, Rado, Nicolas, Pach, Milner, Bollobás, Piranian, F. Chung, Hall, Selfridge és Reddy, mindannyian 0.1 alatti értékkel.

Jelenleg 458 olyan ember ismert, akiknek 1 az Erdős száma, nevüket az 1. táblázat tartalmazza. Az „x y:n" jelentése az, hogy x *19*y-ban publikált először Erdőssel közös cikket, és a mai napig n közös cikkük jelent meg (esetleg további társszerzőkkel); $n = 1$ esetén n-et elhagytuk. A társszerzők körülbelül 60%-ának van egyetlen közös cikke Erdőssel. A közös cikkek átlagos száma a társszerzőkön belül 3.2, 6.1-es szórással.

E cikk írója elektronikus listákat tart fent Erdős társszerzőiről és a társszerzők társszerzőiről (azaz azokról, akiknek az Erdős száma nem több 2-nél), évente kiegészítve azokat. Ezeket bárkinek hozzáférhetővé fogjuk tenni anonymus ftp-n [6] vagy a világhálózaton [5] keresztül. (Nyilván többek között a szerzők azonosításának nehézségei miatt az adatok nem 100%-osan pontosak, de bízunk benne, hogy a hibák száma nem túl nagy.)

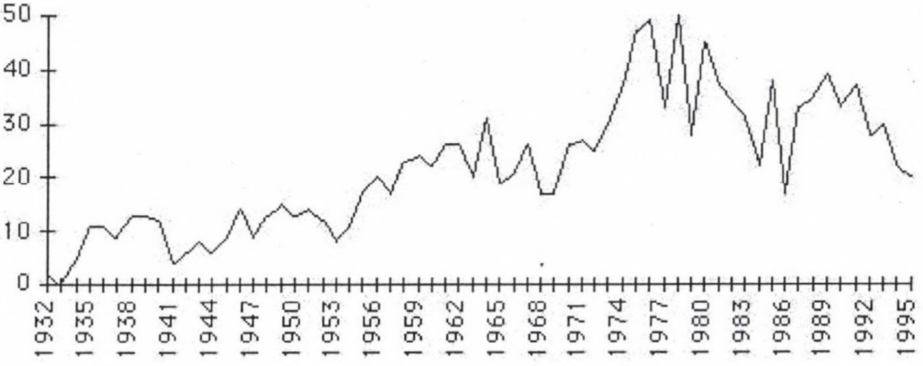
Amint azt [7]-ben kiemelik a szerzők, a tudományos matematikai cikkek szerzőinek átlagos száma Erdős Pál élete alatt drámai ütemben nőtt. (Érdekes kérdés, okozója volt-e Erdős ennek a változásnak.) Például az *MR*-ben szereplő cikkek közt a kettő vagy több szerzősök aránya mint az idő függvénye nőtt. Míg 56 éve (amikor az *MR* indult) még több mint 90%-a volt a cikkeknek egy szerző munkája, ma már a cikkek alig fele egy szerzős. Ugyanez alatt az idő alatt a két szerzős cikkek aránya 10% alól körülbelül egyharmadra nőtt. 1940-ben lényegében nem léteztek olyan cikkek, melyeket három ember írt, pláne nem olyanok, melyeket négy vagy több; mára a matematikai tudományokban a cikkek körülbelül 10%-ának három vagy több szerzője van, körülbelül 2%-nak négy vagy több.

Ugyanez a folyamat figyelhető meg EP-nél, de az együttműködés még szembeszökőbb. A 2. ábra grafikonján az 1-, 2-, 3- és a $\geq$ 4-szerzős cikkek aránya

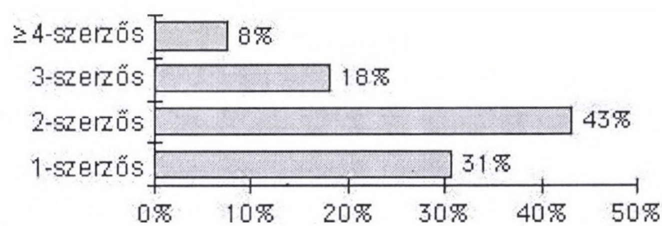


2. ábra. *A társszerzők száma Erdős Pál cikkeiben a különböző években*

figyelhető meg Erdős publikációs listájában évről évre. (Ezek majdnem mindegyike tudományos cikk. A többi könyv, cikk emberekről vagy más írás.) Referencia kedvéért a 4. ábrán láthatók a szóban forgó abszolút értékek, azaz a publikációk száma évről évre. (Az utolsó két érték – 1994 és 1995 – valószínűleg túl alacsony az adatok hiányossága miatt.) A 4. ábra összegzése szerint EP munkáinak kevesebb mint egyharmada egyéni vállalkozás. Valójában Erdős társszerzőinek átlagos száma (Erdőssel együtt) majdnem pontosan kettő.



3. ábra. *Erdős Pál cikkeinek száma az évek során*

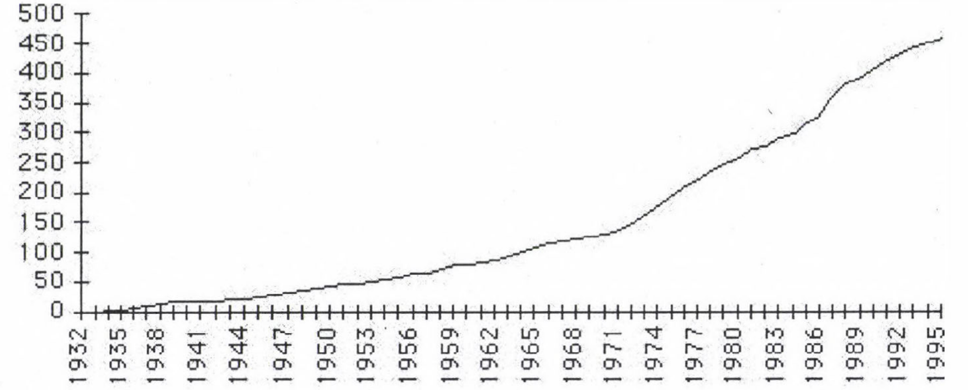


4. ábra. *Erdős Pál cikkeinek megoszlása a társszerzők száma szerint*

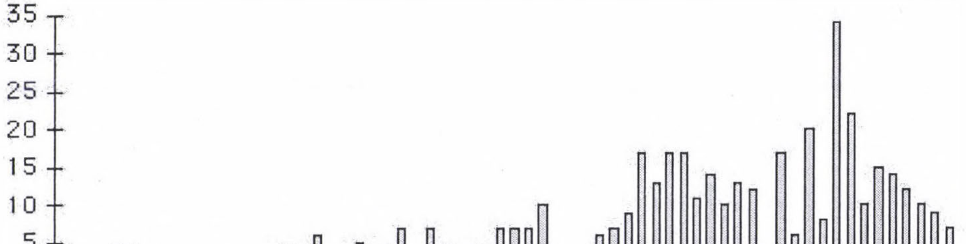
Erdős jelenlegi működési módszere (melyet azóta alkalmaz, mióta 1954 körül elhagyta állandó állását a Notre Dame-ban) teljesen egyéninek számít a matematikusok között. Egy állandó intézménynél (kutatóintézetnél vagy egyetemi tanszéken) való kutatás helyett folytonos mozgásban van, mindig egy konferencián vagy egy kutató központban látogat éppen egy matematikust. Sokszor tölt néhány hónapot nyáron Budapesten, ahol tagja a Magyar Tudományos Akadémiának és ahol a legtermékenyebb társszerzőinek többségével dolgozhat együtt. Felsorolhatatlan mennyiségű kedvenc tartózkodási helyei közé tartozik Memphis, Tennessee, New York City.

Minden évben ott van a Southeastern Combinatorics Confernce-en (Boca Raton, Florida vagy Baton Rouge, Louisiana) és rengeteg más olyan rendszeres összejövetelen, melynek témája beleillik rendkívül tág érdeklődési körébe. Például az e cikk írása körüli hónapokban EP útiterve a következő: Atlanta, Memphis, három város Texasban, New Jersey, New Haven, Baton Rouge, Colorado, Franciaország, Németország, Kalamazoo és Pennsylvania, ebben a sorrendben.

Mivel utazásai során EP egyre több emberrel találkozik, nem meglepő, hogy 1936 óta minden évben volt új társszerzője. (1936 előtt csak ketten írtak vele közös cikket: Turán Pál és Szekeres György 1934-ben.) Az ötödik ábra a társszerzők számának emelkedését mutatja, míg a hatodikon ennek a függvénynek az idő szerinti diszkrét deriváltja látható. EP a cikkek megírását általában a társszerzőkre hagyja, részben azért, mert állítása szerint nem tud gépelni.

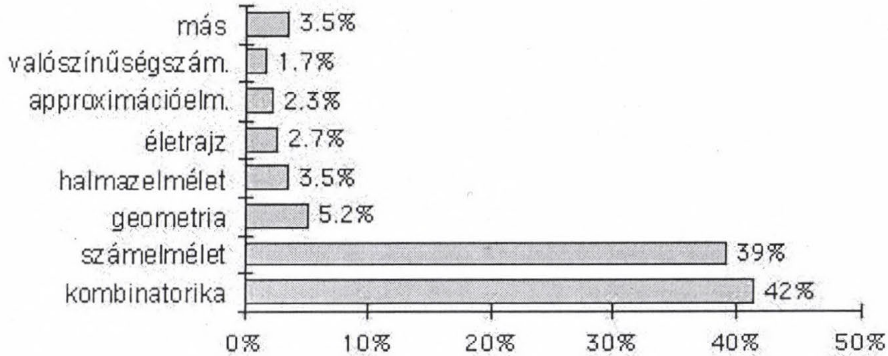


5. ábra. *Erdős társszerzőinek száma mint az idő függvénye*



6. ábra. *Az új társszerzők száma évről évre*

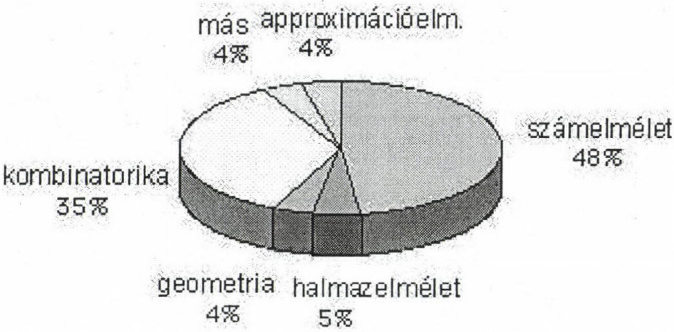
Amint a csatolt lista is mutatja, Erdős Pál cikkei a matematika számtalan területét fedik le és sokszor több terület között teremtenek kapcsolatot. (Az utóbbira szép példa a valószínűségszámítás alkalmazása a kombinatorikában.) A *Mathematical Reviews* jelenleg körülbelül 60 matematikai területet tart számon a „Matematikai logika alapjai"-tól az „Információ és kommunikáció, hálózatok" címűig (plusz egy történeti és biográfiai rész), minden egyes cikk ezen területek valamelyikébe van besorolva. Ez a lista az idővel kicsit változik, néha bővül, néha egy-egy kategória megszűnik, mivel az *MR* mindig a legmodernebb irányzatokat igyekszik követni. Az EP munkái által lefedett területek az összes terület vagy azok elődeinek körülbelül 40%-át teszik ki, persze gyakran egy-egy cikk több tárgyterületbe is beleférne és így nehéz egy kategóriába sorolni. Nemcsak a két fő ág, a számelmélet és a kombinatorika tartozik ide, továbbá mélyreható kutatás az approximációelméletben, geometriában, halmazelméletben és valószínűségszámításban, hanem cikkek a következő témákban: matematikai logika, hálóelmélet és rendezett algebrai struktúrák, lineáris algebra, csoportelmélet, topológikus csoportok, polinomok, mérték és integrálás, komplex függvénytan, véges differenciák és függvényegyenletek, sorok és sorozatok, Fourier analízis, funkcionálanalízis, általános és algebrai topológia, statisztika, numerikus analízis, számítógéptudomány és információelmélet.



7. ábra. *Erdős Pál 1979 óta megjelent cikkeinek megoszlása területek szerint*

A 7. ábrán látható táblázat EP 1980 óta írt cikkei témájának megoszlását mutatja az *MR* besorolása szerint. Egy ilyen táblázatot könnyű csinálni, mivel az *MR*-nál szereplő kód („review number") első két jegye a pontosvessző után a cikk témájának megfelelő kategória kódja. A 8. ábrán egy kevésbé pontos kördiagram látható, mely a 80 előtt megjelent cikkeket is tartalmazza. Jól látható az utóbbi 15 évben az eltolódás a kombinatorika irányába (persze a gráfelméletet idesorolva), párhuzamosan a számelmélet visszaesésével. Ez persze nyilvánvaló, ha figyelembe vesszük, hogy a korai cikkek majdnem mindegyike számelméleti volt (1932 és 1939 között körülbelül 60 a 64-ből.)

Mivel Erdős társszerzői olyan sokféle területről valók, az ember azt várja, hogy a 2, 3 vagy kicsit magasabb Erdős számmal rendelkezők halmaza már a matematika minden ágát lefedi. Ez természetesen így is van. A Fields medál nyertesei az utóbbi három ciklusban (1986–1994) mind az Erdős komponensben vannak az együttműködési gráfban, valamennyiük Erdős száma legfeljebb 9. Ebbe a csoportba elméleti fizikus is tartozik, amit például a következő út mutat: Edward Witten – Chiara Nappi – Robert Israel – Robert Phelps – David Preiss – Erdős Pál. Így aztán az a sejtés válik indokolttá, hogy sok (talán majdnem minden) fizikus is az Erdős komponensben van, de akkor már ugyanez igaz kell legyen sok (majdnem minden) természettudósra. Figyelembe véve a gráfelmélet és a statisztika számtalan



8. ábra. *Erdős Pál cikkeinek megoszlása tárgyterület szerint (megközelítőleg)*

alkalmazását a társadalomtudományokban, azt gyaníthatjuk, hogy a bölcsészettudományok sok kutatója is ide tartozik.

Érdekes megvizsgálni Erdős társszerzőinek publikációs jegyzékét (vagy legalábbis a társszerzőségi listákat), hogy mennyi együttműködés figyelhető meg, ha EP kilép a képből. Legyen E_1 az 1 Erdős számú emberek által feszített részgráfja C-nek. Az 1995-ig összesített adatok szerint E_1-nek 458 csúcsa és 1218 éle van; tehát egy átlagos társszerzője Erdősnek több mint 5 másik Erdős társszerzővel működött együtt. (A medián viszont az átlaggal szemben csak 3. A szórás 6, és van 30 fölötti érték is négy esetben: Ron Graham, Frank Harary, Vojtech Rödl és Joel Spencer.) Összesen 40 izolált csúcsa van E_1-nek (kevesebb mint 9%), és három olyan komponense, melyekben két-két csúcs van. A maradék 412 csúcs összefüggő részgráfot feszít E_1-ben. Úgy tűnik, EP stílusa mindenkit megfertőz.

Kicsit általánosabban megközelítve a kérdést kiderül, hogy az 1 Erdős számmal rendelkezők átlagosan 20 különböző emberrel működnek együtt (medián 15, szórás 22), és csak hat olyan van köztük, aki Erdősön kívül senkivel nem írt közös cikket. Ötnek van közülük több mint 100 társszerzője (Frank Harary, Saharon Shelah, Ron Graham, Noga Alon és Dan Kleitman).

4546 további emberre EP másodkézből hatott, ők azok, akik együtt kutattak, a kivételezett 458 valamelyikével. A 2 Erdős számúak háromnegyedének van csak egy olyan társszerzője, akinek Erdős száma 1, (azaz belőlük pontosan egy kettő hosszú út vezet Erdőshöz C-ben). Az átlagos 1 Erdős számú társszerzőik száma viszont 1.5 (szórás 1.2), és ez a szám eléri a 13-at (Dwight Duffus és Linda Lesniak esetében).

A csatolt bibliográfia körülbelül 1400 cikket sorol fel, ami valószínűleg nem teljes, főleg a legújabb dolgozatok miatt. Az 1939 óta keletkezett cikkek nagy része megtalálható a *Mathematical Reviews* adatbázisában. Az *MR* minden eddigi számában van összefoglaló Erdős cikkről, például az 1. szám 1. oldalán egy összefoglaló egy Gallai Tiborral közös cikkről, melyet Pólya György írt. Érdekes megemlíteni, hogy a második legtermékenyebb szerző az *MR* adatbázisában Leonard Carlitz körülbelül 735 cikkel. Carlitz Erdős száma 2 (hét különböző társszerzőn keresztül) és számtalan Erdős cikknek ő írta az *MR* összefoglalóját. Összességében majdnem

500 ember írt összefoglalót az *MR*-nek Erdős cikkeiről. EP is írt az *MR*-nek, a mai napig több mint 700 összefoglaló fűződik a nevéhez.

Ha valaki akár a cikkben, akár az együttműködők listáiban, akár a csatolt bibliográfiában hibát talál, vagy kiegészítést szeretne tenni, minél előbb forduljon a szerzőhöz (`grossman@oakland.edu`).

Epilógus

Erdős Pál publikációs listája a halála után is növekedett, és még mindig bővül. 28 cikke jelent meg 1997-ben, 14 új társszerzővel, 10 új cikk és 4 új társszerző 1998-ban, 22 cikk és 13 új társszerző 1999-ben, egy illetve 3 új cikk 2000-ben es 2001-ben (nincs új társszerző), és eddig 3 cikk 2002-ben (egy új társszerzővel). A jelen állás szerint Erdősnek összesen 1519 cikke van, de valószínű, hogy nem ez lesz a végleges szám.

References

[1] László Babai, In and out of Hungary: Paul Erdős, his friends and times, *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty, Volume 2,* pp. 7–93, J. Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1996.

[2] George Paul Csicsery, *N is a number, a portrait of Paul Erdős,* 57-min. videotape, George Paul Csicsery, Oakland, CA, 1993.

[3] Paul Erdős, On the fundamental problem of mathematics, *Amer. Math. Monthly,* **79** (1972), 149–150.

[4] Casper Goffman, And what is your Erdős number?, *Amer. Math. Monthly,* **76** (1969), 791.

[5] Jerrold W. Grossman, Lists of people with Erdős number at most 2, available on the World Wide Web: `http://www.acs.oakland.edu/~grossman/erdoshp.html`, Oakland University, Rochester, MI, 1996 (updated annually).

[6] Jerrold W. Grossman, Lists of people with Erdős number at most 2, available via anonymous ftp to `vela.acs.oakland.edu` in directory `pub/math/erdos`, Oakland University, Rochester, MI, 1996 (updated annually).

[7] Jerrold W. Grossman and Patrick D. F. Ion, On a portion of the well-known collaboration graph, in: *Proceedings of the Twenty-sixth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Boca Raton, FL, 1995), Congressus Numerantium, to appear.

[8] Frank Harary, The collaboration graph of mathematicians and a conjecture of Erdős, *Journal of Recreational Mathematics,* **4** (1971), 212–213.

[9] Paul Hoffman, The man who loves only numbers, *The Atlantic Monthly,* **260** (Nov., 1987) no. 1, 60–74.

[10] *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik,* 1868–1942, Berlin.

[11] David M. Jones, The hypertext bibliography project, World Wide Web: `http://theory.lcs.mit.edu/%7Edmjones/hbp/`

[12] Otmar Lendl, Otmar's list of HTML tags, World Wide Web: `http://wwwcip.informatik.uni-erlangen.de/CIP/Manuals/www/html/taglist.html`

[13] *Mathematical reviews,* American Mathematical Society, Providence, RI, 1940–.

[14] Tom Odda [=Ronald L. Graham], On properties of a well-known graph or what is your Ramsey number?, in: *Topics in Graph Theory* (New York, 1977), Ann. New York Acad. Sci., 328, pp. 166–172, New York Acad. Sci., New York, 1979, **MR** 81d:05055.

[15] John Tierney, Paul Erdős is in town, his brain is open, *Science (Amer. Assoc. Adv. Science),* **5(8)** (October, 1984), 40–47.

[16] *Zentralblatt für Mathematik und Ihre Grenzgebiete,* Springer, Berlin–New York, 1931–.

J. W. Grossman: Paul Erdős: the master of collaboration

This paper is about Erdős's publications: a statistical analysis of how he wrote papers, with how many coauthors, and in what fields of mathematics.

Jerrold W. Grossman
Department of Mathematical Sciences
Oakland University
Rochester
MI 48309-4401
`grossman@oakland.edu`

ERDŐS PÁL KALANDOZÁSAI A VÉGTELEN GRÁFOK VILÁGÁBAN*

KOMJÁTH PÉTER

Veszélyes lenne Erdős szerteágazó matematikai tevékenységéből egy fejezetet kiemelni, mégis talán mondhatjuk azt, hogy a gráfelmélet a matematika olyan ága, amely hosszú időre szinte azonossá vált Erdőssel. Kőnig Dénes hű tanítványaként, ahol ez egyáltalán lehetséges volt, a tételeket kiterjesztette a végtelen esetre is, ihletett és szenvedélyes érdeklődéséből született a végtelen gráfok elméletének számtalan szép tétele, kihívó sejtése. Ebben a cikkben ezek közül nyújtok át egy csokorravalót, időnként a későbbi fejleményeket is megemlítve.

Az érdeklődő olvasó Erdős halmazelméleti munkáiról személyes hangú beszámolót találhat Hajnal András írásaiban [28]-ban, illetve angolul [30]-ban.

1. Erdős legkorábbi végtelen gráfokra vonatkozó eredménye Menger tételének általánosítása volt. 1931-ben, még elsős egyetemistaként Kőnig Dénes előadásán hallotta először Menger tételét, amely szerint, ha egy véges gráfban adott két össze nem kötött pont, A és B, akkor a (végpontoktól eltekintve) pontdiszjunkt A–B utak maximális száma megegyezik az A-t B-től szeparáló ponthalmaz minimális méretével. Végtelen gráfoknál természetesen két (véges vagy végtelen) számosság egyenlőségéről van szó és Erdős azonnal megcsinálta ezt az esetet is, be is került Kőnig nevezetes 1936-os gráfelmélet monográfiájába ([41]).

Sok évvel később Erdős, aki elégedetlen volt a fenti általánosítással, megtalálta a tétel végtelen gráfokra vonatkozó másik, „valódi" formáját, ismét megmutatva ragyogó, problémafelvetői tehetségét. Új sejtése szerint, amelyre rendkívül büszke volt – joggal – és nagyon sokszor megemlítette, ha G egy (véges vagy végtelen) gráf, A és B össze nem kötött pontok, akkor van diszjunkt A–B-utak egy $\mathcal{P}$ rendszere és egy S szeparáló halmaz, hogy S minden pontja egy és csak egy $\mathcal{P}$-beli úton van és minden $\mathcal{P}$-beli úton egy és csak egy S-beli pont fekszik. Könnyű látni, hogy ha G véges, akkor ez az állítás ekvivalens a Menger tétellel. Ez a sejtés mind a mai napig megoldatlan, igen nehéznek tűnik ([10]). Megszámlálható esetét Ron Aharoni igazolta ([2]). Tulajdonképpen számos más ismert min-max tételnek

*A „Paul Erdős and his mathematics" (Budapest, 1999. július 4–11) konferencián tartott előadás kibővített változata. Hálával tartozom Hajnal Andrásnak és egy anonim lektornak számos észrevételért.

megfogalmazható olyan végtelen gráfokra (vagy halmazrendszerekre) vonatkozó általánosítása, ahol a kívánt bijekciót az illeszkedés szolgáltatja. Ezek közül a Kőnig-tétel (ami tulajdonképpen a Menger tétel speciális esete) megfelelőjét Ron Aharoni igazolta: minden páros gráfban van független éleknek olyan I és lefogó pontoknak olyan C halmaza, hogy minden I-beli él pontosan egy pontban metszi C-t. A bizonyítás igen nehéz, felhasználja a végtelen páros gráfok faktorizációjának elméletét ([1]).

2. A fiatal Erdősnek és barátainak egy, manapság szinte elfelejtett eredménye Euler híres tételét általánosítja végtelen gráfokra, szükséges és elégséges feltételt adva olyan út létezésére, amely valamennyi élt pontosan egyszer érint. Vázsonyi Endre visszaemlékezésében leírja, hogy Erdős milyen fantasztikusan gyorsan találta meg a jó bizonyítást.

Tétel (Erdős–Gallai–Vázsonyi, 1936, [12], [13]). *Egy G végtelen gráfnak akkor és csak akkor van Euler-vonala, ha*

(a.) *G összefüggő;*

(b.) *G megszámlálható;*

(c.) *nincs páratlan fokú szögpont;*

(d.) *ha A pontok véges halmaza, akkor $G - A$-nak legfeljebb két végtelen összefüggő komponense van;*

(e.) *ha A pontok olyan véges halmaza, hogy $G|A$-ban minden pont fokszáma páros, akkor G-ből az A-beli élek elhagyásával kapott gráfnak pontosan egy végtelen komponense van.*

3. Szintén egy korai, de karakterisztikusan szép eredmény az Erdős–Kakutani-tétel: az $\aleph_1$ szögpontú teljes gráf (tehát $K_{\aleph_1}$) felbomlik megszámlálható sok fa egyesítésére ([22]). Ez a ma már nem túl nehéznek számító tétel első hallásra annyira meghökkentő, hogy még gyanakszunk is, hogy triviálisan hamis. Persze utólag könnyű látni, hogy csak egy újabb, szép variánsa a „nagy halmazok felbontása kevés kicsire" témának (a sík Sierpiński-felbontása, a valós számok halmaza lehet megszámlálható sok Hamel-bázis uniója, amit szintén az Erdős–Kakutani-cikkben találhatunk, stb).

4. Erdős egy további, pályája viszonylag korai szakaszán de Bruijn-nel közösen nyert eredménye szerint egy (végtelen) gráf k-színezhetősége véges részgráfjain múlik.

Tétel (de Bruijn–Erdős [5]). *Ha k természetes szám, akkor egy végtelen gráf pontosan akkor k-színezhető, ha minden véges részgráfja az.*

Azt lehet tehát mondani, hogy a véges kromatikus, végtelen gráfoknak nincs elméletük. E tétel érdekessége, hogy sokféleképpen lehet igazolni: jólrendezve az alaphalmazt és transzfinit rekurzióval, a Teichmüller–Tukey lemmával, a Zorn-lemmával (Dirac Gábor és Pósa Lajos, lásd [42], 9.14.). Erdősék a Tyihonov kompaktsági tételt használták. Ez azért nem olyan nagyon meglepő, mivel a tétel valójában speciális esete a Gödel-féle kompaktsági tételnek.

Hasonló bizonyítással számos, úgynevezett kompaktsági argumentum bizonyítható: véges k esetén, egy (végtelen) gráf akkor és csak akkor irányítható úgy, hogy minden pont ki-foka legfeljebb k, ha ez minden véges részgráfra igaz; ha egy gráf minden véges részgráfja élszínezhető két színnel homogén háromszög nélkül, akkor az egész gráf is, stb.

5. Számos Erdős-felfedezés kiindulópontja lett Tutte, Zykov és Ungár észrevétele: van tetszőleges nagy kromatikus számú, háromszögnélküli véges gráf.

Erdős nevezetessé vált módszerével, véletlen gráfokkal igazolta, hogy minden k-ra és s-re van olyan (véges) gráf, amely k-kromatikus és nem tartalmaz $C_3, C_4, \ldots, C_s$-et, tehát rövid köröket ([9]). Ez sokkal nehezebb, mint a C_3-ra vonatkozó konstrukció: valóban, hosszú ideig nem is sikerült Erdős egzisztencia bizonyítását konkrét konstrukcióval helyettesíteni.

Erdőst mindig érdekelte, hogyan lehet végtelen gráfokra kiterjeszteni ezt az eredményt és sikerült is Richard Radoval készíteni olyan háromszögnélküli gráfot, amely κ színnel nem színezhető (és 2^κ számosságú, [23]). Hosszú ideig próbálkozott a két tétel közös általánosításával, az azonban csak nem akart kijönni, míg – most már Hajnal Andrással közösen dolgozva – fel nem fedezték azt a váratlan tényt, hogy megszámlálhatónál nagyobb kromatikus gráf mindenképpen tartalmaz C_4-et, sőt, minden véges páros gráfot.

A bizonyítás melléktermékе egy másik felfedezés volt, a sorozatszám fogalmáé. Egy G gráf sorozatszáma legfeljebb μ (angolul coloring number, tehát $\mathrm{Col}(G) \leq \mu$), ha van szögpontjainak olyan jólrendezése, amelyben minden csúcsból kevesebb, mint μ él megy lefelé. Persze, $\mathrm{Col}(G) = \mu$, ha $\mathrm{Col}(G) \leq \mu$ igaz, de nincs $\tau < \mu$ számosság, amire $\mathrm{Col}(G) \leq \tau$ teljesülne (a kromatikus szám definíciója is hasonló minimum, $\mathrm{Chr}(G)$ a legkisebb μ amire G-nek van μ színnel jó színezése). Ha $\mathrm{Col}(G) \leq \mu$, akkor a G gráf transzfinit rekurzióval, az adott jólrendezés mentén, kiszínezhető μ színnel, így $\mathrm{Chr}(G) \leq \mathrm{Col}(G)$. Ennek a fogalomnak előnye, hogy egyrészt a fentiek szerint nagy kromatikus számú gráf sorozatszáma is nagy, másrészt egy adott μ-re a legalább μ sorozatszámú gráfok osztálya jobban kezelhető. Például, egy $\aleph_1$ számosságú G gráf sorozatszáma pontosan akkor $\aleph_1$, ha a szögpontok *bármelyik* ω_1 rendszámú $V(G) = \{v_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ felsorolásában stacionárius azon α rendszámok halmaza, amelyekre v_α végtelen sok korábbi pontba van bekötve.

Erdős és Hajnal belátták, hogy $\mathrm{Col}(G) > \omega$ esetén G tartalmaz minden véges páros gráfot. Mivel vannak tetszőlegesen nagy sorozatszámú páros gráfok, ez a módszer nem adhat többet nagykromatikus gráfok részgráfjairól.

Egy gráf sorozatszámának értéke közel van ahhoz a számossághoz, ahány erdő uniójára lehet a gráfot felbontani. Nevezetesen, ha $\mathrm{Col}(G) \leq \kappa^+$ akkor X előáll, mint κ erdő uniója. Itt κ véges vagy végtelen számosság. Ez végtelen κ-ra megfordítható, véges számosságokra pedig a következő igaz: ha egy gráf n erdő uniója (n véges), akkor sorozatszáma legfeljebb $2n$ és ez pontos ([15]).

6. Felfedezésük után Erdős és Hajnal már könnyen meg tudta fogalmazni és be tudta bizonyítani a rövid körök kizárására vonatkozó Erdős tétel transzfinit analogonját: minden n-re van tetszőleges nagy kromatikus gráf, amelyben nincs $C_3, C_5, \ldots, C_{2n+1}$.

Itt érdemes megemlíteni egy egyszerű, de hatékony konstrukciót: az élgráfot. Ehhez legyen κ végtelen számosság és vegyünk egy $(2^\kappa)^+$ számosságú $(A, <)$ rendezett halmazt. Az $X(A, <)$ élgráf pontjai az A-beli $\{x, y\}$ pontpárok és pontosan $x < y < z$ esetén kötjük össze $\{x, y\}$-t $\{y, z\}$-vel. Könnyen látható, hogy $X(A, <)$ háromszögmentes. Ha pedig κ színnel színezzük, az az A alaphalmaz párjainak lesz κ-színezése és az úgynevezett Erdős–Rado-tétel miatt van egyszínű háromszög, tehát $x < y < z$, hogy $\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}$ színe ugyanaz, tehát $\{x, y\}$ és $\{y, z\}$ fenti $X(A, <)$ gráfunk két azonos színű, összekötött pontja lesz. Ezért a készített gráf kromatikus száma legalább κ^+. (Ez a példa egyébként, a véges Ramsey-tétel segítségével, rendkívül egyszerű példát szolgáltat tetszőlegesen nagy kromatikus, véges, háromszögnélküli gráfokra: egy elég nagy véges rendezett halmaz élgráfja.)

Erdős és Hajnal ezt a konstrukciót általánosították olyan nagykromatikus gráfok konstruálására, amelyek nem tartalmaznak $C_3, C_5, \ldots, C_{2n+1}$-et, tehát rövid páratlan köröket.

Konstrukciójuk egy egyszerű megfogalmazása a következő: Tegyük fel, hogy $X = \big(V(X), E(X)\big)$ gráf a rendezett $V(X)$ ponthalmazon. Készítsük el a következő $X' = \big(V(X'), E(X')\big)$ gráfot. X' $V(X')$ szögponthalmaza $E(X)$ és a csatlakozó éleket kötjük össze, tehát $\{x, y\}$ és $\{y, z\}$ össze van kötve, ha $x < y < z$. Könnyen látható, hogy ha X-ben nincs $C_3, C_5, \ldots, C_{2n-1}$, akkor X'-ben nincs $C_3, C_5, \ldots, C_{2n+1}$, továbbá (ez Fred Galvin észrevétele, [27]) ha X kromatikus száma (2^κ)-nál nagyobb, akkor X'-é κ-nál nagyobb.

Ezért, ha X a $\lambda = \left(2^{2^{\cdot^{\cdot^{\kappa}}}}\right)^+$ számosságú teljes gráf, akkor $X^{\prime\prime\cdots\prime}$ olyan κ-nál nagyobb kromatikus gráf, amelyben nincs $C_3, C_5, \ldots$, vagy C_{2n+1} ([16]) (n hatványozás, illetve vessző). Könnyű átgondolni, hogy az így kapott gráf az úgynevezett n-shift gráf: $\mathrm{Sh}_n(\lambda)$ szögpontjai egy λ típusú jólrendezett halmaz $n+1$-es részhalmazai, az élek pedig a csatlakozó $n+1$-esek: az

$$\big\{\{x_0, \ldots, x_n\}, \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}\big\}$$

alakú párok, ahol $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$.

A shift-gráfokhoz hasonló, de kisebb számosságú gráfok az úgynevezett Specker-gráfok. Ezek a következőképpen lettek definiálva. Vegyünk egy $\kappa > \aleph_0$ számosságot. Gráfunk alaphalmaza $[\kappa]^n$, azaz κ n-elemű részhalmazainak halmaza. Két ilyet, mondjuk a (növőleg felsorolt) $\{x_1, \ldots, x_n\}$-et és $\{y_1, \ldots, y_n\}$-et pontosan akkor kötünk össze, ha közös elem nélküliek és egyesítésükben az elemek egy megadott sorrendben következnek. Például, $n = 3$-ra egy lehetőség:

$$x_1 < x_2 < y_1 < x_3 < y_2 < y_3$$

(ez volt Specker eredeti példája). Be lehet bizonyítani, hogy a gráf kromatikus száma κ és az összekötési előírás alkalmas megválasztásával különböző véges gráfokat zárhatunk ki, például ismét a páratlan köröket egy bizonyos határig. Vegyük észre, hogy itt a gráf számossága ugyanannyi, mint a kromatikus száma: κ ([14]).

7. Richard Rado kérdezte, hogy a de Bruijn-Erdős tulajdonság teljesül-e a sorozatszámra. Ez meglepő módon nem igaz: van olyan végtelen gráf, amelynek a sorozatszáma pontosan 4 és minden véges részgráfjának a sorozatszáma legfeljebb 3. Általában ha a véges részgráfok sorozatszáma legfeljebb $k \geq 2$, akkor a gráf sorozatszáma legfeljebb $2k-2$ és ez pontos. (Erdős–Hajnal, [14]).

Van viszont a sorozatszámra egy másfajta, nagyon fontos kompaktság: Shelah igazolta, hogy ha μ végtelen számosság, $\lambda > \mu$ szinguláris számosság, G λ számosságú gráf, amelynek minden λ-nál kisebb számosságú részgráfjának sorozatszáma legfeljebb μ akkor ez G-re is igaz ([48]). Ezzel a gráfok sorozatszámának egy egyszerű jellemzése adódott, aminek segítségével például lehetővé vált a $\mathrm{Col}(G) > \omega$-nak eleget tevő gráfok bármilyen számosságú kötelező részgráfjainak leírása (Komjáth, [34]).

Shelah egyébként rámutatott arra, hogy egy jóval mélyebben fekvő jelenségről van szó: axiomatizálta azokat a problémaosztályokat, amelyekre a fentihez hasonló szinguláris kompaktság teljesül (őt elsősorban az érdekelte, milyen $\lambda > \omega$ számosságra van olyan λ számosságú Abel-csoport ami nem szabad, de minden kisebb számosságú részcsoportja az. A tétel szerint szinguláris λ-ra nincs).

Sikerült belátnom, hogy ez a jelenség a kromatikus számra nem áll fenn: konzisztens, hogy van olyan $\aleph_{\omega_1}$ számosságú G gráf, amelynek minden kisebb számosságú részgráfja megszámlálható kromatikus, de maga G nem (ekkor persze G kromatikus száma csak $\aleph_1$ lehet, [35]). Egy elegáns forszolással Shelah azt is megmutatta, hogy ez teljesülhet az Általánosított Kontinuumhipotézissel együtt is, sőt, ilyen példák léteznek a konstruálhatósági axióma feltételezése mellett ([50]).

8. Erdősék tehát meghatározták, hogy melyek azok a véges gráfok, amelyek mindenképpen megjelennek a megszámlálhatónál nagyobb kromatikus gráfokban (a párosak). Viszont mindenképpen kell tartalmaznia legalább egy páratlan kört (különben 2-kromatikus lenne). Erdős és Hajnal rögtön elkezdte vizsgálni, hogy mit mondhatunk véges gráfok azon osztályairól, amelyeket tartalmaznia kell. Így sejtették, hogy ha G kromatikus száma $\aleph_0$-nál nagyobb, akkor G tartalmaz minden elég nagy páratlan kört. Ezt később Erdős–Hajnal–Shelah ([20]) és Thomassen [52], egymástól függetlenül be is bizonyította.

Legyen X végtelen gráf, jelölje $\mathcal{F}(X)$ véges részgráfjainak halmazát. Erdős és Hajnal igen sokat spekulált azon, mit tudhatunk az $\mathcal{F}(X)$ alakú halmazokról, ahol X $\kappa > \omega$-kromatikus, de még nagyon messze vagyunk attól, hogy a végső választ megfogalmazhassuk. Feltehető, hogy a válasz ugyanaz minden $\kappa > \omega$-ra (ez Erdős–Hajnal, illetve Taylor sejtése, [20]). Egy ennél erősebb sejtés volt, hogy ha X megszámlálhatónál nagyobb kromatikus, akkor $\mathcal{F}(X)$ tartalmazza $\mathcal{F}(\mathrm{Sh}_n(\omega))$-t valamilyen n-re. Ez a komolyan sosem gondolt sejtés meg is lett cáfolva aztán [31]-ben.

A helyzetet tovább bonyolítja, hogy van még egy paraméter, amely szerepet játszik: a gráf számossága. Vegyük például az élgráfok véges részgráfjait,

$\mathcal{F}(\mathrm{Sh}_2(\omega))$-t. Van $(2^{\aleph_0})^+$ számosságú, csak ezeket tartalmazó, megszámlálhatónál nagyobb kromatikus gráf: $\mathrm{Sh}_2\left((2^{\aleph_0})^+\right)$. Ha viszont egy $2^{\aleph_0}$ számosságú G gráf minden véges részgráfja $\mathcal{F}(\mathrm{Sh}_2(\omega))$-beli, akkor G beágyazható egy kontinuum számosságú élgráfba ami Galvin idézett tétele miatt megszámlálható kromatikus.

9. Erdős kimondott még két karakterisztikusan szép sejtést a véges részgráfokra.

Legyen G megszámlálhatónál nagyobb kromatikus számú gráf. Készítsük el a következő, természetes számokból természetes számokba képező függvényt. $f_G(n)$ G n-szögpontú részgráfjai kromatikus számainak maximuma. Nyilvánvalóan $f_G(n) \leq n$ és f_G monoton nő. Továbbá a de Bruijn–Erdős–tételből következik, hogy $f_G(n) \to \infty$. Erdős kérdése az, lehet-e ez a divergencia tetszőlegesen lassú?

Erdős, Hajnal és Szemerédi [21]-ben bebizonyították, hogy az $\mathrm{Sh}_k(\lambda)$ shift-gráfra $f_G(n)$ olyan rendben tart végtelenhez, mint a $(k-1)$-szer iterált logaritmus. Így tehát van olyan $(2^{\aleph_0})^+$ számosságú legalább $\aleph_1$-kromatikus gráf, amelyre $f_G(n) = O(\log n)$. Ezzel kapcsolatban sikerült [36]-ben egy ilyen tulajdonságú $2^{\aleph_0}$ számosságú gráfot konstruálnom. E módszer következményeképpen az Erdős–Hajnal–Szemerédi-féle shift-gráfnál „eggyel kisebb" számosságú gráf kapható: olyan G gráf, amire $f_G(n)$ a k-szorosan iterált logaritmus rendjében tart végtelenhez, s számossága $\left(2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\kappa}}}}}\right)^+$ helyett $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\kappa}}}}}$ (k hatványozás).

Erdős, Hajnal és Szemerédi cikkükben számos rokon függvényt is megvizsgálták. Belátták például, hogy egy $\mathrm{Sh}_k(\lambda)$ shift-gráfra minden n-szögpontú részben van $\left(1-\frac{2}{k}\right)n$ nagyságú páros részgráf. Ha tehát egy G gráfra és n természetes számra $f_G^1(n)$ jelöli a legnagyobb számot, amekkora független halmaz bármely n pont között van, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra van tetszőlegesen nagy kromatikus gráf, hogy $f_G^1(n) > \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n$. Másrészt könnyen látható, hogy minden megszámlálhatónál nagyobb kromatikus G gráfra van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden elég nagy n-re $f_G^1(n) < \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n$, ugyanis van olyan m, hogy G tartalmaz végtelen sok diszjunkt C_{2m+1}-et és ha ezekből k példányt veszünk, akkor a legnagyobb független halmaznak legfeljebb km eleme van.

Fennmarad a kérdés, van-e $\aleph_1$-kromatikus és $\aleph_1$ számosságú olyan G gráf, amelyre $f_G^1(n) > cn$ valamilyen $c > 0$-ra. (A shift-gráf $(2^{\aleph_0})^+$ számosságú.) A Specker-gráfok nem jók; ezekre

$$f_G^1(n) = O\left(\frac{n \log\log n}{\log n}\right)$$

[21]-ben a következő $g_G(n)$ függvényt is vizsgálták. Adott megszámlálhatónál nagyobb kromatikus G gráf esetén legyen $g_G(n)$ az a legkisebb szám, ahány él elhagyásával G minden n-szögpontú részgráfja párossá tehető. Belátják, hogy az élgráfra $g_G(n) \leq 2n^{3/2}$ és általában a shiftgráfok segítségével minden $\varepsilon > 0$-ra adható olyan megszámlálhatónál nagyobb kromatikus G gráf, hogy $g_G(n) = (n^{1+\varepsilon})$.

A másik sejtés a következő. Bármely két megszámlálhatónál nagyobb kromatikus gráfnak van közös 4-kromatikus részgráfja. Az analóg állítás 4 helyett 3-mal könnyen következik az idézett Erdős–Hajnal–Shelah–Thomassen tételből; a két gráf mindegyike tartalmaz minden elég hosszú páratlan kört. A 4-re vonatkozó sejtés ravaszsága az, hogy anélkül utal hasonló tételre, hogy megmondaná pontosan melyek is azok a 4-kromatikus gráfok, melyek közül majdnem mindet tartalmaznia kell egy $\aleph_1$-kromatikus gráfnak.

10. Természetesen még nehezebb kérdés az, melyek a megszámlálható kötelező részgráfok. Erdős és Hajnal már [14]-ben igazolta, hogy ha egy gráf kromatikus száma (sőt sorozatszáma) nagyobb, mint megszámlálható, akkor minden n-re van benne $K_{n,\aleph_1}$, tehát a teljes páros gráf n és $\aleph_1$ számosságú osztályokkal. Hajnal később azt is belátta, hogy szükségképpen tartalmazza a „félgráf"-ot, tehát azt a gráfot az $\{x_i, y_i : i < \omega\}$ szögpontokon, amelyben x_i össze van kötve y_j-vel, ha $i < j$. Még korábban Hajnal azt is bebizonyította, hogy van olyan gráf, amelynek a kromatikus száma legalább $\aleph_1$ és nem tartalmazza $K_{\omega,\omega}$-t a teljes megszámlálható páros gráfot.

Ezeket az eredményeket valamelyest kiterjesztettük [31]-ben.

Tétel (Hajnal–Komjáth, [31]). *Minden megszámlálhatónál nagyobb kromatikus számú gráf tartalmazza G_0-t, de nem feltétlenül G_1-et, ahol G_0 szögpontjai $\{x_i, y_i, z : i < \omega\}$, minden y_i be van kötve minden x_j-be, ha $j < i$ és z be van kötve minden x_j-be. G_1 ugyanez, de két pont van, z_0 és z_1, ami minden x_j-be be van kötve.*

Ennek nyomán végül is sikerült meghatározni az összes olyan gráfot, amely minden megszámlálhatónál nagyobb sorozatszámú gráfban megjelenik ([34]), de a hasonló probléma a kromatikus számra még teljesen nyitott.

Megoldatlan marad Erdős következő szép sejtése: ha X olyan gráf, amelynek a kromatikus száma legalább $\aleph_1$, akkor X tartalmaz (nemüres) ω-összefüggő részgráfot. A sejtést az motiválta, hogy, mint Erdős és Hajnal megmutatták, minden megszámlálhatónál nagyobb kromatikus gráf tartalmazza a $K_{n,n}$ teljes páros gráfot (n véges), az pedig n-szeresen összefüggő. Meg lehet azt is mutatni, hogy minden ilyen gráf tartalmaz n-öszefüggő megszámlálhatónál nagyobb kromatikus gráfot, de az ω-összefüggőségre ez nem igaz ([33], [35]).

11. Ezekkel kapcsolatos a következő Erdős-sejtés is. Miután kiderült, hogy van $K_{\omega,\omega}$-t nem tartalmazó $\aleph_1$-kromatikus gráf, Erdős azonnal megkérdezte, el lehet-e még hagyni a háromszöget is. Ezt később Hajnal igazolta is. Ennek egy másik lehetséges bizonyítása válna lehetővé, ha a következő állítás igaz lenne: ha X kromatikus száma legalább $\aleph_1$, akkor van olyan háromszögnélküli $Y \subseteq X$ (tehát részgráf), aminek a kromatikus száma legalább $\aleph_1$. A fentieket figyelembe véve tovább is lehet terjeszteni a sejtést: ha X kromatikus száma $\kappa > \omega$, akkor minden n-re van κ-kromatikus $Y \subseteq X$, amiben nincs $C_3, C_5, \dots, C_{2n+1}$, $\kappa = \omega$ esetén pedig olyan Y is van, amiben nincs $C_3, C_4, \dots, C_n$; ez kiterjesztené a rövid kör nélküli, nagy kromatikus véges gráfok létezésére vonatkozó Erdős-tételt ([9]). Az utóbbi sejtés leggyengébb, csak háromszögeket kizáró esetét Rödl igazolta [47], az általános eset még megoldatlan. Az első sejtést Shelahhal megcáfoltuk már a $\kappa = \aleph_1$

illetve a háromszög esetére: konzisztens, hogy van olyan $\aleph_1$ számosságú és kromatikus számú gráf, amelynek minden háromszögnélküli részgráfja megszámlálható kromatikus, [39].

12. Egy probléma, amelyet nem Erdős talált ki, de megtetszett neki és sokszor említette problémacikkeiben, a Darboux tulajdonság. Fred Galvin vette észre, hogy noha véges $\kappa < \lambda$-ra nyilvánvalóan igaz (a de Bruijn–Erdős-tétel segítségével) hogy minden λ-kromatikus gráf tartalmaz κ-kromatikust, ez távolról sem nyilvánvaló, ha κ és λ végtelen. Azért még be lehet látni, ismét a de Bruijn-Erdős–tétellel $\kappa = \aleph_0$-ra, ezért az első nyitott kérdés $\kappa = \aleph_1$, $\lambda = \aleph_2$. Galvin cikkében ([27]) belátta, hogy legalábbis a feszített részgráfot követelő verzió konzisztensen hamis; ha ugyanis $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} < 2^{\aleph_2}$ áll fenn (ez tényleg kiforszolható), akkor a $2^{\aleph_2}$ számosságú rendezett halmazon definiált élgráfra a következő igaz: kromatikus száma $\aleph_2$, feszített részgráfjai pontosan az X' alakú gráfok egy valamilyen X él-részgráfra, minden ilyen X' kromatikus száma $\leq \kappa$ pontosan akkor, ha X kromatikus száma $\leq 2^\kappa$. Ezért, ha X' kromatikus száma $\leq \aleph_1$, akkor X kromatikus száma $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$, innen X' kromatikus száma $\leq \aleph_0$, tehát nincs pontosan $\aleph_1$-kromatikus feszített részgráf.

Később sikerült igazolnom, hogy konzisztensen van olyan $\aleph_2$ számosságú, $\aleph_2$-kromatikus gráf, aminek nincs $\aleph_1$-kromatikus (feszített, vagy nem feszített) részgráfja ([35]).

13. Erdős és Hajnal vette észre a következőt. Ha igaz a kontinuumhipotézis, akkor van olyan $\aleph_2$ számosságú, $\aleph_1$-kromatikus G gráf, hogy G-nek minden $\aleph_1$ számosságú részgráfja megszámlálható kromatikus. Nevezetesen: legyen G egy $\aleph_2$ számosságú rendezett halmaz élgráfja. Rögtön megkérdezték (és megismételték híres problémacikkükben, [17]-ben) lehet-e még G kromatikus száma $\aleph_2$? Ez a probléma hosszú ideig megoldatlan maradt, majd kiderült mindkét irány konzisztenciája[1]. Baumgartner [3] belátta, hogy konzisztensen létezik ilyen G, Foreman és Laver pedig azt igazolta [26], hogy ha konzisztens úgynevezett óriási számosság létezése, akkor az is, hogy nincs ilyen G. Mindkét bizonyítás igen nehéz. Később Shelah igazolta ilyen G létezését a konstruálhatósági axiómából, [50].

Erdős és Hajnal a következő érdekes megjegyzést fűzte a kiinduló konstrukcióhoz ([16]). Legyen $G(\omega_2, \omega)$ a következő gráf: szögpontjai az $\omega_2 \to \omega$ függvények és összekötjük az f és g függvényeket, ha $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ teljesül minden elég nagy $\alpha < \omega_2$-re. Erre bebizonyították a következő tulajdonságokat:

(a.) $G(\omega_2, \omega)$ minden $\aleph_1$ számosságú részgráfja megszámlálható kromatikus;

(b.) ha a G $\aleph_2$ számosságú gráf minden $\aleph_1$ számosságú részgráfja megszámlálható kromatikus, akkor G beágyazható $G(\omega_2, \omega)$-ba.

Ezért, ha a kontinuumhipotézis teljesül, akkor tudjuk, hogy van olyan $\aleph_2$ számosságú $\aleph_1$-kromatikus G gráf, amire a (b.)-beli feltétel teljesül, így beágyazható $G(\omega_2, \omega)$-ba, ezért $G(\omega_2, \omega)$ kromatikus száma legalább $\aleph_1$ (számossága persze

[1] A (halmazelméleti) függetlenség felütötte rút fejét. (E.P.)

$\aleph_0{}^{\aleph_2} = 2^{\aleph_2}$). Vajon mennyi? Erre részben sikerült választ adni [37]-ben: az Általánosított Kontinuumhipotézis mellett a kromatikus szám lehet $\aleph_2$ is és $\aleph_3$ is. Végül pedig Foreman belátta, hogy ha konzisztens úgynevezett majdnem óriási számosság létezése, akkor $\aleph_1$ is lehet ([25]). Később Todorcevic mindenféle feltevés nélkül belátta, hogy $G(\omega_2, \omega)$ kromatikus száma mindig nagyobb megszámlálhatónál ([54]).

14. Ramsey tétele és általában a Ramsey-típusú jelenségek felfedezése és vizsgálata mindig Erdős kutatásainak központjában volt. Legegyszerűbb esete szerint, ha a hat elem közti összes párt két színnel színezünk, van egyszínű háromszög. A halmazelméletben szokásos jelölés szerint: $6 \to (3)^2_2$, ahol csak az nem világos, melyik kettes mit jelent: a fölső utal arra, hogy (a 6-elemű halmaz) 2-elemű részhalmazairól van szó, az alsó 2 pedig a színek száma. Azt tehát, hogy 5-tel az állítás nem igaz, $5 \not\to (3)^2_2$-vel jelöljük, a híres 17-tudós feladatot pedig $17 \to (3)^2_3$-mal (azaz, ha 17 pont párjait 3 színnel színezzük, mindig van egyszínű hármas). A végtelen Ramsey-tétel így fogalmazható: ha r, n pozitív egész számok, akkor $\aleph_0 \to (\aleph_0)^r_n$ azaz, ha egy végtelen halmaz r-eseit n színnel színezzük, mindig van végtelen egyszínű (homogén) részhalmaz. Ennek az állításnak a paraméterek megváltoztatásával kapható végtelen számosságokra vonatkozó variánsait Erdős, Hajnal és Richard Rado vizsgálta ki az ötvenes és hatvanas években, az így született elmélet a *partíciókalkulus*. Lehet azonban, legalábbis az $r = 2$ esetet, tisztán gráfelméleti állításnak tekinteni: ha a megszámlálhatóan végtelen teljes gráf éleit két színnel színezzük, akkor valamelyik színben van végtelen homogén részgráf. Erdős kollégáival szenvedélyesen kutatta a Ramsey-tétel gráfelméleti általánosításait. Már 1942-ben elintézte az alapkérdést: ha adva van gráfoknak egy tetszőleges $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ sorozata, akkor van egy olyan Y gráf, hogy ha Y éleit az $\alpha < \kappa$ rendszámokkal színezzük, akkor valamelyik α-ra van α színű példány X_α-ból. Ez ugyanis következik a következő (manapság Erdős–Rado-tételnek nevezett) partíciótételből ([8]):

$$(2^\kappa)^+ \to (\kappa^+)^2_\kappa.$$

15. Kézenfekvőnek tűnt a probléma olyan variánsait keresni, amelyekben a fenti egyszerű megoldás lehetősége kizárt. Egy ilyen, Walter Deubertől eredő, változat, amikor a feszített célgráfot követelünk, ekkor nyilván nem okoskodhatunk azzal, hogy minden gráf teljes gráfba ágyazható, azokra pedig tudjuk a tételt. Jelöljük az erre vonatkozó pozitív állítást $Y \rightarrowtail (X_\alpha : \alpha < \kappa)^2$-vel, ha pedig azonos célgráfok vannak, $Y \rightarrowtail (X)^2_\kappa$-val. Itt már a legegyszerűbb eset is meglehetősen rafináltan bizonyítható tétel: ha X véges gráf, akkor van olyan Y véges gráf, hogy $Y \rightarrowtail (X)^2_2$ teljesül, szavakban: ha Y éleit két színnel kiszínezzük, akkor van egyszínű feszített példány X-ből. Ezt egyszerre és függetlenül többen igazolták: W. Deuber [6], [7], V. Rödl [46], Erdős–Hajnal–Pósa [18]. Az első két szerző ügyes indukciót használt. Erdősék azonban sokkal többet igazoltak.

Tétel (Erdős–Hajnal–Pósa, [18]).

(a.) *Ha X_0, X_1 megszámlálható, X_0 lokálisan véges, akkor van megszámlálható Y, amire $Y \rightarrowtail (X_0, X_1)^2$.*

(b.) *Ha Y megszámlálható gráf, akkor $Y \not\rightarrowtail (K_{\omega,\omega})^2$.*

(c.) *Ha $X_0, X_1, \ldots, X_k$ véges sok megszámlálható gráf, akkor van olyan kontinuumszámosságú Y gráf, amire $Y \rightarrowtail (X_0, \ldots, X_k)^2$ teljesül.*

A végtelen gráfok elmélete szempontjából ezek az eredmények nyitva hagyták az alapkérdést: igaz-e, hogy minden X gráfhoz és minden κ számossághoz van olyan Y gráf, amire $Y \rightarrowtail (X)^2_\kappa$ teljesül. E témakörben váratlanul negatív megoldás született [32]-ben: megmutattuk, hogy (egy Cohen-valós hozzáadásával) konzisztens hogy van olyan $\aleph_1$ számosságú X gráf, hogy semmilyen Y gráfra nem teljesül $Y \rightarrowtail (X)^2_2$. Rögtön ezután Shelah igazolta, hogy a pozitív válasz is konzisztens: minden X gráfhoz és minden κ számossághoz van olyan Y gráf, amire $Y \rightarrowtail (X)^2_\kappa$ teljesül (sőt, tetszőleges struktúrára belátta, [49]). Később megmutattam, hogy nem véletlen, hogy Shelah osztályforszolást használ: minden halmazforszolás, ami egyáltalán forszol valamit, ad olyan X gráfot és κ számosságot, hogy $Y \not\rightarrowtail (X)^2_\kappa$ teljesül minden Y gráfra ([38]). Végül Hajnal bebizonyította a következő nehéz tételt: ha X véges gráf és κ tetszőleges számosság, akkor van olyan Y gráf, hogy $Y \rightarrowtail (X)^2_\kappa$ teljesül ([29]).

E terület nevezetes megoldatlan problémája, hogy ki lehet-e terjeszteni a fenti Hajnal-tételt megszámlálható gráfokra. A sejtés szerint tehát, ha X megszámlálható gráf és κ számosság, akkor van olyan Y gráf, hogy $Y \rightarrowtail (X)^2_\kappa$. Mivel van univerzális megszámlálható gráf (Rado), elég lenne a tételt arra bizonyítani. A Rado-féle gráf ráadásul nem változtatható forszolással, így eleve reménytelen a [32]-beli módszerek alkalmazása ellenpélda forszolására.

16. Egy másik lehetőség az élszínezési probléma megnehezítésére a következő. Induljunk ki az eredeti állításból, tehát abból, hogy ha a K_6 teljes gráf éleit 2 színnel színezzük, akkor mindenképpen van egyszínű háromszög, azaz $K_6 \to (K_3)^2_2$. Persze ez a tulajdonság minden olyan gráfra is teljesül, ami tartalmazza K_6-ot: $K_6 \le X$-re $X \to (K_3)^2_2$. Erdős és Hajnal azt kérdezte 1967-ben, van-e olyan X (véges) gráf, ami nem tartalmaz K_6-ot, de $X \to (K_3)^2_2$ igaz. Ilyen gráfot konstruált G. L. Cherlin, R. Graham, van Lint és Pósa Lajos. Pósa példája K_5-öt sem tartalmazott, de a végső kérdésre, hogy van-e K_4-et sem tartalmazó X gráf, amire $X \to (K_3)^2_2$ teljesül, csak Jon Folkman tudott választ adni egy nagyon szellemes és mély konstrukció segítségével [24]. Folkman példája gigászi volt, több, mint

$$10^{10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}}$$

ponttal, és Erdőst mindig érdekelte, lehet-e nagyságát például 10^{10} alá csökkenteni. Frankl és Rödl kb. 10^{11} pontú gráfot konstruált, ezt kissé megjavította Joel Spencer, példájának néhányszor százmillió pontja van ([51]). Legújabban[2] Gyárfás András talált egy mindössze 165 pontból álló példát s ezzel igazolta Erdős sejtését, hogy a szögpontszám ezer alá csökkenthető.

[2] 2000. december 14.

Nešetřil és Rödl bebizonyította az általános véges tételt is: ha X véges gráf, ami nem tartalmaz K_p-t, $k \geq 2$ természetes szám, akkor van ugyancsak K_p-nélküli Y gráf, amire $Y \rightarrowtail (X)^2_k$ teljesül ([43], [44]).

Erdős és Hajnal [15]-ben részletesen vizsgálta a végtelen esetet is. A következőket bizonyították be.

Tétel (Erdős–Hajnal [15]).

(a.) *Ha κ végtelen, n véges, van olyan κ számosságú K_{n+1}-et nem tartalmazó gráf, aminek a szögpontjait κ-nál kevesebb részre osztva mindig van egyszínű K_n.*

(b.) *Ha κ, λ végtelen, van κ^λ számosságú K_{λ^+}-t nem tartalmazó gráf, aminek a szögpontjait κ-nál kevesebb részre osztva mindig van egyszínű K_λ.*

(c.) *Ha κ végtelen, van olyan $\left(2^{(2^\kappa)^+}\right)^+$ számosságú, $K_{\aleph_0}$-t nem tartalmazó gráf, amely éleinek minden κ színnel való színezésében tartalmaz minden $n < \omega$-ra egyszínű K_n-et.*

(d.) *Ha κ végtelen számosság, van olyan $(2^\kappa)^+$ számosságú, $K_{(2^\kappa)^+}$-t nem tartalmazó gráf, aminek az éleit κ színnel színezve mindig adódik egyszínű K_{κ^+}.*

(d.) bizonyítása a $(2^\kappa)^+ \not\rightarrow \left((2^\kappa)^+, (2^\kappa)^+\right)^2$ és a $(2^\kappa)^+ \rightarrow \left((2^\kappa)^+, (\kappa^+)_\kappa\right)^2$ partíció relációkon alapszik.

Ezzel kapcsolatban azt a megjegyzést tehetjük, hogy az Erdős–Hajnal módszert alkalmazva egy picit erősíthető, azon az áron, hogy növeljük a gráfot. Legyen a konkrétság kedvéért $\kappa = \aleph_0$. Van olyan λ számosság, amire $\lambda = \lambda^{\aleph_0} < \lambda^{\aleph_1}$. Erre tudjuk $\lambda^+ \rightarrow \left(\lambda^+, (\omega_1)_\omega\right)^2$-t és $\lambda^{\aleph_1} \not\rightarrow (\lambda^+, \omega_2)^2$-t, tehát $\lambda^+ \not\rightarrow (\lambda^+, \omega_2)^2$-t. Ez utóbbi gráf egyik osztálya tehát olyan $K_{\aleph_2}$-t nem tartalmazó gráf, amiben nincs független λ^+-os, ezért a másik tétel miatt minden $\aleph_0$ színnel történő élszínezésben van egyszínű $K_{\aleph_1}$-s.

Egyszerű bizonyítást (c.)-re a gyengébb $\lambda = \left(2^{2^{2^\kappa}}\right)^+$ korláttal a következőképpen nyerhetünk: legyen gráfunk szögponthalmaza λ párjainak halmaza, s kössük össze $\{x, y\}$-t $\{x', y'\}$-vel, ha $x < x' < y' < y$. Ebben a gráfban nincs $K_{\aleph_0}$, mert az rendszámok végtelen csökkenő sorozatához vezetne, a színezési állítás pedig következik a $\lambda \rightarrow (2n)^4_\kappa$ partíció relációból (Erdős–Rado tétel).

A legérdekesebb nyitott kérdések a következők. Van-e olyan K_4-et nem tartalmazó gráf, amit ha megszámlálható sok színnel élszínezünk, mindig keletkezik egyszínű háromszög, azaz $K_4 \not\leq X \rightarrow (K_3)^2_{\aleph_0}$. Ezt a problémát Erdős nagyon szerette, sokszor említette előadásaiban, problémacikkeiben. Még ki is tűzött 250 dollárt a megoldásra.

Shelah [49]-ben bebizonyította a konzisztenciáját ennek az állításnak, tehát azt, hogy forszolással kapható ilyen X gráf. Eredményének van egy érdekes következménye. Ha $K_4 \not\leq X \rightarrow (K_3)^2_{\aleph_0}$, akkor X-re igaz a gyengébb $K_4 \not\leq X \rightarrow (K_3)^2_2$ reláció is. A de Bruijn–Erdős-tételnél említett kompaktsági elv miatt X tartalmaz olyan véges Y gráfot, hogy $K_4 \not\leq Y \rightarrow (K_3)^2_2$ teljesül. Végül, mivel forszolás nem változtatja meg a véges gráfok tulajdonságait, Shelah eredménye miatt az alapmodellben is mindenképpen van ilyen Y, tehát a Shelah-féle forszolás adja a Folkman-gráf létezését, de nem tűnik lehetségesnek ebből a bizonyításból egy konkrét konstrukció kielemzése.

(Van egy másik, szintén kiválasztási axiómát használó bizonyítása a Folkman gráf létezésének. [4]-ben Baumgartner és Hajnal azt igazolja, hogy ha X gráf egy ω_1^2 típusú halmazon, és nincs benne $\omega_1\omega$ típusú független részhalmaz, akkor X minden két színnel történő élszínezésében van egyszínű háromszög. Másrészt, feltéve a kontinuumhipotézist, van ilyen tulajdonságú, K_4-et nem tartalmazó gráf. Mivel forszolással mindig el tudjuk érni, hogy a kontinuumhipotézis teljesüljön, azt kapjuk, hogy a halmazelmélet minden modelljének van olyan bővítése, amelyben van $K_4 \not\leq Y \to (K_3)_2^2$-et kielégítő gráf. Tehát, akkor az alapmodellben is van. Tehát a halmazelmélet minden modelljében van, tehát bizonyítható a létezése.)

Az, hogy mindenféle feltevés nélkül van olyan X gráf, ami nem tartalmaz K_4-et és $X \to (K_3)_{\aleph_0}^2$ teljesül, mint említettük, mindmáig megoldatlan.

Erdős és Hajnal [15] cikkének egy másik megoldatlan kérdése, hogy van-e $K_{\aleph_1}$-et nem tartalmazó X gráf, amire $X \to (K_{\aleph_0})_{\aleph_0}^2$ teljesül.

Shelah módszerét továbbfejlesztve [40]-ben igazoltuk, hogy konzisztens a teljes Ramsey-jelenség: ha X tetszőleges gráf, μ számosság, X nem tartalmaz K_α-t, akkor van olyan Y gráf, ami szintén nem tartalmaz K_α-t, és $Y \to (X)_\mu^2$ teljesül. Ez viszont, mint Hajnallal megmutattuk, már nem igaz minden feltevés nélkül: konzisztens, hogy van olyan háromszögnélküli X gráf, hogy ha valamilyen Y-ra $Y \to (X)_{\aleph_0}^2$ teljesül, akkor Y tartalmaz $K_{\aleph_0}$-t [32]).

17. Erdős és munkatársai vizsgálták a gráfok általánosításait is, tehát ekkor valamilyen n-re egy adott S alaphalmaz bizonyos n-elemű részhalmazaiból álló $\mathcal{H}$ rendszert tanulmányozunk. $\mathcal{H}$ kromatikus száma a legkisebb olyan számosság, ahány színnel S kiszínezhető anélkül, hogy valamelyik $\mathcal{H}$-beli halmaz egyszínűvé válna. Az $n = 2$ esetben tehát a gráfokat kapjuk. Már [14]-ben tettek néhány megjegyzést erre az általános esetre, például bebizonyították a következőt ($n = 3$-ra mondjuk ki): ha $\mathcal{H}$ hármashalmazok $\aleph_1$ számosságú, $\aleph_1$-kromatikus rendszere, akkor van két hármas, $A, B \in \mathcal{H}$, hogy $A \cap B$ kételemű (nevezzük ezt az $\{A, B\}$ rendszert rombusznak). A bizonyítás is közeli rokona a gráfokra vonatkozó, hasonló, C_4 tartalmazását kimondó tételének. Úgy tűnt, az egész elmélet szépen átvihetőaz $n > 2$ esetre, csak eggyel több paraméter fog mindenütt szerepelni.

És ekkor teljesen váratlan fordulat következett, kiderült, hogy az $n > 2$ eset lényegesen különbözik a gráfokétól: Erdős, Hajnal és Rothschild [19]-ben megmutatta, hogy van megszámlálhatónál nagyobb kromatikus rombusznélküli hármasrendszer. A rendszer számossága $(2^{\aleph_0})^+$ és a konstrukció meglepően egyszerű: S alaphalmaznak vegyük egy $(2^{\aleph_0})^+$ számosságú halmaz párjait, $\mathcal{H}$-ba pedig az $\{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\}$ alakú hármasokat tegyük be. Közvetlen számolás mutatja, hogy $\mathcal{H}$-ban nincs rombusz, továbbá $\mathcal{H}$ nem színezhető jól $\aleph_0$ színnel, hiszen, ha egy ekkora halmaz párjait ennyi színnel színezzük, akkor Erdős nevezetes tétele[3] miatt mindig van egyszínű háromszög, ami pontosan olyan $\mathcal{H}$-beli hármas, melynek mindhárom eleme ugyanolyan színű.

Ezután intenzív kutatás kezdődött. [11]-ben már Erdős, Galvin és Hajnal több, mint egyéves kutatásának eredményeit olvashatjuk. Részletesen vizsgálták, mekkorának kell lennie egy rombuszmentes, megszámlálhatónál nagyobb kromatikus hármasrendszernek. Mint láttuk, $\aleph_1$-nél mindenképpen nagyobbnak. Ha a MA_κ axióma teljesül, akkor κ-nál is nagyobbnak. A másik irányban találjuk a fenti $(2^{\aleph_0})^+$ számosságú példát. Azt is belátták, hogy ha a $\omega_1 \not\to [\omega_1]^2_{\aleph_1}$ partícióreláció[4] teljesül, akkor van $2^{\aleph_1}$ nagyságú példa is. Az, hogy $\omega_1 \not\to [\omega_1]^2_{\aleph_1}$ teljesül, ekkor és még hosszú ideig nem volt ismert, végül Todorcevic bizonyította be ([53]).

Az általános esetre bebizonyították, hogy ha $\mathcal{H}$ n elemű halmazok rendszere, amelyben bármely két halmaz metszete legfeljebb i elemű, és $mi + 2 \leq n$, akkor $|\mathcal{H}| \leq \kappa^{+m}$ esetén még $\mathcal{H}$ kromatikus száma legfeljebb κ. Feltéve az általánosított kontinuumhipotézist ez pontos: a paraméterek minden más megválasztása esetén ellenpélda van.

Noha a kilencvenoldalas [11] cikk sűrűn tartalmaz tételeket, becsléseket, konstrukciókat, sok egészen egyszerű, alapvető problémát is felvetnek benne, amelyek mindmáig megoldatlanok, kivizsgálatlanok. Melyek azok a hármasrendszerek, amelyek mindenképpen előfordulnak egy megszámlálhatónál nagyobb kromatikus hármasrendszerben? Azonos választ kapunk-e, ha a „megszámlálhatónál nagyobb" kifejezést „$\aleph_1$-nél nagyobb"-ra cseréljük? Melyik a legkisebb olyan κ számosság, amelyre teljesül, hogy ha $\mathcal{S}$ véges hármasrendszer és van $\mathcal{S}$-et nem tartalmazó, megszámlálhatónál nagyobb kromatikus számú $\mathcal{H}$ hármasrendszer, akkor van ilyen, amelyre $|\mathcal{H}| \leq \kappa$ is teljesül? (Könnyen látható, hogy ilyen κ létezik.) Igaz-e, hogy ha $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ hármasrendszerek és külön-külön mindkettőre van őt elhagyó megszámlálhatónál nagyobb kromatikus számú hármasrendszer, akkor van olyan is, amely mindkettőt kihagyja?

Remélem, sikerült az olvasót meggyőznöm nemcsak arról, hogy a végtelen gráfok elmélete érdekes, de arról is, hogy Erdős jellegzetes gondolkodása, problémafelvetései jelentősen hozzájárultak e témakör fejlődéséhez.

[3] Ezt a fontos eredményt általában Erdős–Rado tételként szokták említeni, pedig először Erdős egyedül fedezte fel és bizonyította [8]-ban. Az r-esek színezésére vonatkozó analóg eredmény $r \geq 3$-ra viszont valóban helyesen nevezhető Erdős–Rado tételnek.

[4] $\lambda \not\to [\kappa]^2_\mu$ reláció azt mondja ki, hogy egy λ számosságú S alaphalmaz párjainak van olyan μ színnel színezése, hogy S minden κ számosságú részhalmazában szerepel minden szín. Ekkor tehát $\lambda \not\to [\kappa]^2_2$ és $\lambda \not\to (\kappa)^2_2$ ekvivalensek.

Irodalom

[1] R. Aharoni: König's duality theorem for infinite bipartite graphs, *Journal of London Mathematical Society,* **29** (1984), 1–12.

[2] R. Aharoni: Menger's theorem for countable graphs, *Journal of Combinatorial Theory (B),* **43** (1987), 303–313.

[3] J. E. Baumgartner: Generic graph construction, *Journal of Symbolic Logic,* **49** (1984), 234–240.

[4] J. E. Baumgartner, A. Hajnal: A remark on partition relations for infinite ordinals with an application to finite combinatorics, in: *Logic and combinatorics,* Contemporary Mathematics, **65,** Amer. Math. Soc. (1987), 157–167.

[5] N. G. de Bruijn, P. Erdős: A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, *Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. Amsterdam,* **54** (1951), 371–373.

[6] W. Deuber: A generalization of Ramsey's theorem, *Infinite and finite sets* (Colloq. Keszthely 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. I. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. **10,** North Holland (Amsterdam, 1975).

[7] W. Deuber: Partitionstheoreme für Graphen, *Math. Helv.,* **50** (1975), 311–320.

[8] P. Erdős: Some set-theoretical properties of graphs, *Revista de la Univ. Nac. de Tucumán, Ser. A. Mat. y Fis. Teór.,* **3** (1942), 363–367.

[9] P. Erdős: Graph theory and probability, *Canad. J. Math.,* **11** (1959), 34–38.

[10] P. Erdős: Problem 8, in: *Theory of graphs and its applications,* Proceedings of the Symposium held in Smolenice, June 1963, Czechoslovak Acad. Sci. Prague (1964), p. 159.

[11] P. Erdős, F. Galvin, A. Hajnal: On set-systems having large chromatic number and not containing prescribed subsystems, *Infinite and finite sets* (Colloq. Keszthely 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. I. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. **10,** North Holland (Amsterdam, 1975), 425–513.

[12] Erdős Pál, Grünwald Tibor, Weiszfeld Endre: Végtelen gráfok Euler vonalairól, *Mat. Fiz. Lapok,* **43** (1936), 129–141.

[13] P. Erdős, T. Grünwald, E. Vázsonyi: Über Euler–Linien unendlicher Graphen, *J. Math. Physics,* **17** (1938), 59–75.

[14] P. Erdős, A. Hajnal: On chromatic number of graphs and set-systems, *Acta. Math. Hungar.,* **17** (1966), 61–99.

[15] P. Erdős, A. Hajnal: On decomposition of graphs, *Acta. Math. Hungar.,* **18** (1967), 359–377.

[16] P. Erdős, A. Hajnal: On chromatic number of infinite graphs, in: *Theory of graphs, Proc. of the Coll. held at Tihany 1966, Hungary* (ed. P. Erdős and G. Katona), Akadémiai Kiadó (Budapest) – Academic Press (New York, 1968), 83–89.

[17] P. Erdős, A. Hajnal: Unsolved problems in set theory, *Axiomatic Set Theory* (Proc. Symp. Pure Math. **XIII,** Part I, Univ. Calif. Los Angeles, Calif. 1967). Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1971), 17–48.

[18] P. Erdős, A. Hajnal, L. Pósa: Strong embeddings of graphs into colored graphs, *Infinite and finite sets* (Colloq. Keszthely 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. I. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. **10,** North Holland (Amsterdam, 1975), 585–595.

[19] P. Erdős, A. Hajnal, B. L. Rothschild: On chromatic number of graphs and set-systems, *Cambridge School in Mathematical Logic* (Cambridge, England, 1971), Lecture Notes in Mathematics, Vol. **337,** Springer (Berlin, 1973), 531–538.

[20] P. Erdős, A. Hajnal, S. Shelah: On some general properties of chromatic numbers, *Topics in topology* (Proc. Colloq. Keszthely, 1972), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 8. North Holland (Amsterdam, 1974), 243–255.

[21] P. Erdős, A. Hajnal, E. Szemerédi: On almost bipartite large chromatic graphs, *Annals of Discrete Math.*, **12** (1982), 117–123.

[22] P. Erdős, S. Kakutani: On non-denumerable graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 457–461.

[23] P. Erdős, R. Rado: A construction of graphs without triangles having pre-assigned order and chromatic number, *J. London Math. Soc.*, **35** (1960), 445–448.

[24] J. Folkman: Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring, *SIAM Journ. of Applied Math.*, **18** (1970), 19–24.

[25] M. Foreman: An $\aleph_1$-dense ideal on $\aleph_2$, *Israel Journ. Math.*, **108** (1998), 253–290.

[26] M. Foreman, R. Laver: Some downward transfer properties for $\aleph_2$, *Advances in Mathematics,* **67** (1988), 230–238.

[27] F. Galvin: Chromatic numbers of subgraphs, *Periodica Math. Hung.*, **4** (1973), 117–119.

[28] Hajnal András: Erdős Pál halmazelméleti munkásságáról, *Matematikai Lapok,* **22** (1971), 197–208.

[29] A. Hajnal: Embedding finite graphs into graphs colored with infinitely many colors, *Israel Journal of Math.* **73** (1991), 309–319.

[30] A. Hajnal: Paul Erdős' set theory, in: *The Mathematics of Paul Erdős,* (R. Graham, J. Nešetřil, eds.), Springer (1997), 352–393.

[31] A. Hajnal, P. Komjáth: What must and what need not be contained in a graph of uncountable chromatic number? *Combinatorica,* **4** (1984), 47–52.

[32] A. Hajnal, P. Komjáth: Embedding graphs into colored graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **307** (1988), 395–409.

[33] P. Komjáth: Connectivity and chromatic number of infinite graphs, *Israel Journal of Mathematics,* **56** (1986), 257–266.

[34] P. Komjáth: The colouring number, *Proc. London Math. Soc.*, **54** (1987), 1–14.

[35] P. Komjáth: Consistency results on infinite graphs, *Israel Journal of Mathematics,* **61** (1988), 285–294.

[36] P. Komjáth: Third note on Hajnal–Máté graphs, *Periodica Math. Hung.*, **24** (1989), 403–406.

[37] P. Komjáth: The chromatic number of some uncountable graphs, in: *Coll. Math. Soc. János Bolyai,* **60,** Sets, graphs, and numbers, (Budapest ,Hungary, 1991), 439–444.

[38] P. Komjáth: Ramsey-theory and forcing extensions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **121** (1994), 217–219.

[39] P. Komjáth, S. Shelah: Forcing constructions for uncountably chromatic graphs, *Journal of Symbolic Logic,* **53** (1988), 696–707.

[40] P. Komjáth, S. Shelah: A consistent partition theorem for infinite graphs, *Acta Math. Hung.*, **61** (1993), 115–120.

[41] D. Kőnig: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen,* Akademische Verlagsgesellschaft, MBG (Leipzig, 1936).

[42] Lovász László: *Kombinatorikai problémák és feladatok,* TypoTeX (1999).

[43] J. Nešetřil, V. Rödl: Type theory of partition properties of graphs, in: *Recent Advances in Graph Theory,* (ed. M. Fiedler), Academia (Prague, 1975), 183–192.

[44] J. Nešetřil, V. Rödl: Ramsey properties of graphs with forbidden complete subgraphs, *Journ. Comb. Th. (B),* **20** (1976), 243–249.

[45] J. Nešetřil, V. Rödl: A short proof of the existence of restricted Ramsey graphs by means of a partite construction, *Combinatorica,* **1** (1981), 199–202.

[46] V. Rödl: *M. Sc. Thesis,* Charles University (Prague, 1973).

[47] V. Rödl: On the chromatic number of subgraphs of a given graph, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **64** (1977), 370–371.

[48] S. Shelah: Infinite abelian groups, Whitehead problem, and some constructions, *Israel Journal of Mathematics,* **18** (1974), 243–256.

[49] S. Shelah: Consistency of positive partition theorems for graphs and models, in: *Set theory and applications* (J. Steprāns, S. Watson, eds), Lecture Notes in Math., **1401,** 167–193.

[50] S. Shelah: Incompactness for chromatic numbers of graphs, in:*A tribute to P. Erdős* (A. Baker, B. Bollobás, A. Hajnal, eds) Camb. Univ. Press (1990), 361–371.

[51] J. Spencer: Three hundred million points suffice, *Journ. Comb. Th. (A),* **49** (1988), 210–217.

[52] C. Thomassen: Cycles in graphs of uncountable chromatic number, *Combinatorica* **3** (1983), 133–134.

[53] S. Todorcevic: Coloring pairs of countable ordinals, *Acta Math.,* **159** (1987), 261–294.

[54] S. Todorcevic: Comparing the continuum with the first two uncountable cardinals. Logic and scientific methods (Florence, 1995), 145–155, Synthese Lib., 259, Kluwer Acad. Publ. (Dordrecht, 1997).

Péter Komjáth: Paul Erdős's adventures in the realm of infinite graphs

Two of the important areas of the mathematics of Paul Erdős are graph theory and infinity. No surprise that in his long career he frequently returned to the theory of infinite graphs, indeed, arguably he was the leading figure of this theory.

In this short article we survey some of the topics discovered and extensively studied by Erdős prominent among them being those connected with the Ramsey phenomenon and the chromatic number.

NÉHÁNY KOMBINATORIKUS PROBLÉMÁRÓL I. RÉSZ: KLASSZIKUS ILLESZKEDÉSI KÉRDÉSEK

ELEKES GYÖRGY

Előszó a cikksorozathoz

A sík pontjai és egyenesei között fellépő illeszkedések számát és struktúráját Jackson [9] és Sylvester [14, 15, 16, 17] óta vizsgálják.

Az euklideszi sík és a véges projektív sík illeszkedési struktúrája közti – érezhető – különbséget először Gallai tétele [8] öntötte matematikai formába, kimutatva, hogy $\mathbb{R}^2$-ben bármely nem-kollineáris véges ponthalmaz meghatároz olyan egyenest, amelyen a rendszerből *pontosan két* pont van. (Ez egy véges geometriában nem teljesül; pl. a teljes ponthalmazra sem.)

A 80-as években – Erdős egy sejtése nyomán – az illeszkedési számok intenzív és szisztematikus vizsgálata kezdődött. Először Beck [1] és Szemerédi–Trotter (l. II. rész 1.5 tétel, lásd még [13]) talált nem-triviális felső becsléseket (Erdős sejtését is igazolva) egyenesekre, majd egységkörökre. Ezeket az eredményeket általánosította Clarkson–Edelsbrunner–Guibas–Sharir–Welzl [3]; végül – r-paraméteres görbeseregekre – Pach–Sharir [11, 12].

Nagyon keveset tudunk viszont az optimális struktúrákról – és még kevesebbet az azt csak nagyságrendben megközelítőekről. Az ismert eredményeknek azonban érdekes alkalmazásai vannak; az utolsó néhány részben ezekből mutatunk be néhányat.

1. A Sylvester–Gallai tétel

A kombinatorikus geometria első nem-triviális eredménye eredetileg Sylvester sejtése volt [14]. A probléma:

kiválasztható-e a síkon véges sok pont – nem mind egy egyenesen – úgy, hogy bármely kettőt összekötő egyenesen legyen harmadik is?

70 évvel később Erdős újra felfedezte a kérdést, melyre végül Gallai találta meg a (tagadó) választ:

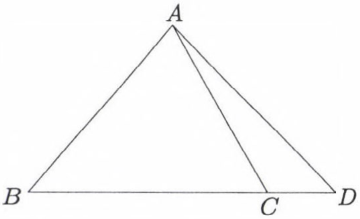
1.1. Tétel (Sylvester sejtés, Gallai tétel). *Ha a sík véges sok pontja nincs mind egy egyenesen, akkor van olyan egyenes, amelyik pontosan kettőt tartalmaz közülük.*

Az ilyen kétpontú egyeneseket a továbbiakban „Gallai-egyeneseknek" nevezzük.

Bizonyítás (Kelly): Mivel a pontok nem mind kollineárisak, akárhogy veszünk két kijelölt pontot, az őket összekötő egyenesen *kívül* lesz olyan harmadik, amellyel nem-elfajuló háromszöget alkotnak. Tekintsük az összes (de természetesen véges számú) ilyen háromszög összes (pozitív) magassága közül az egyik legkisebbet! Legyen ez pl. az ABC háromszög A-ból induló, BC-re merőleges magassága.

Megmutatjuk, hogy a BC oldalegyenesen nincs további D pont a kijelöltek közül – így megtaláljuk a keresett Gallai-egyenest.

Ha B, C és D egy egyenesbe esne (és feltehetjük, hogy közülük C a középső, lásd 1. ábra), akkor az $ACB\sphericalangle$ és $ACD\sphericalangle$ szögek közül valamelyik legalább derékszög volna.



1. ábra: Ha lenne további pont a BC egyenesen...

Legyen pl. $ACD\sphericalangle \geq 90°$. Ekkor az ACD háromszögben AD a leghosszabb oldal; speciálisan hosszabb, mint CD. De nagyobb oldalhoz kisebb magasság tartozik (az $am_a = 2T = cm_c$ terület-képletek szerint), így a C-ből induló magasság rövidebb lenne az A-ból indulónál; utóbbi azonban azonos az ABC háromszög ugyancsak A-ból induló magasságával, ami – feltevésünk szerint – minimális. Ellentmondásra jutottunk; D nem létezhet. ∎

Érdemes megemlíteni e tétel egyik szép következményét.

1.2. Tétel. *Ha n síkbeli pont nem mind kollineáris, akkor legalább n különböző egyenest határoznak meg.*

Bizonyítás: teljes indukció; az $n = 3$ eset triviális.

Tegyük fel, hogy $n-1$-re igaz az állítás és tekintsünk n nem-kollineáris pontot! Gallai tétele szerint létezik két pontú egyenes; hagyjuk el erről az egyik pontot!

Ha a maradék $n-1$ mind egy egyenesbe esik, akkor az elhagyottat visszavéve, az minden mással csupa különböző egyenest ad; ez összesen éppen n egyenes.

Ha pedig a maradék $n-1$ nem kollineáris, akkor alkalmazhatjuk az indukciós feltételt. Eszerint ők legalább $n-1$ egyenest határoznak meg, s ezek között NEM szerepel az a Gallai-egyenes, melynek egyik pontját elhagytuk. Tehát e pontot visszavéve, újabb, legalább n-edik egyenest is találunk. ∎

Az 1.1. és 1.2. Tételeket kimondhatjuk úgy is, hogy az egyenesek és pontok szerepét felcseréljük. Ismeretes, hogy az illeszkedési tételek ilyen értelemben lényegében szimmetrikusak: igaz állításokból „szerepcserével" ismét igaz állításokat kapunk, hiszen az illeszkedési alaptulajdonságok (axiómák) is lényegében szimmetrikusak.

A „lényegében" szót azért is hangsúlyoztuk, mert teljes szimmetria csak akkor teljesül, ha a síkot végtelen távoli pontokkal egészítjük ki. Két pontra ugyanis mindig illeszkedik egyenes, két egyenesre azonban nem biztos, hogy illeszkedik VÉGESBELI pont.

1.3. Tétel. *Ha a sík véges sok egyenese nem megy át mind egy ponton, akkor van olyan (esetleg végtelen távoli) pont, amelyik* pontosan kettőre *illeszkedik közülük.*

(Ugyanez végtelen távoli pontok nélkül: ha az egyenesek nem mind mennek át egy ponton és nem is mind párhuzamosak, akkor vagy van olyan pont, amelyik pontosan kettőre *illeszkedik közülük, vagy van olyan irány, amellyel* pontosan kettő *párhuzamos.)*

1.4. Tétel. *Ha n síkbeli egyenes nem megy át mind egy ponton, akkor legalább n különböző (esetleg végtelen távoli) metszéspontjuk van.*

Ha akarjuk, elkerülhetjük a végtelen távoli pontokat; ennek azonban az az ára, hogy ki kell zárnunk a párhuzamos egyenespárokat.

1.5. Tétel. *Ha a sík véges sok egyenese között nincs két párhuzamos és nem is megy át mind egy ponton, akkor van olyan (közönséges véges) pont, amelyik* pontosan kettőre *illeszkedik közülük.*

1.6. Tétel. *Ha n síkbeli egyenes között nincs két párhuzamos és nem is megy át mind egy ponton, akkor legalább n különböző (közönséges véges) metszéspontjuk van.*

Utóbbi kettőt visszavezethetjük az 1.1. és 1.2. Tételekre:

1.7. Definíció. Nevezzük parabolikus dualitásnak a következő megfeleltetést:

$$P(a,b) \qquad \longleftrightarrow \qquad \{y = 2ax - b\},$$

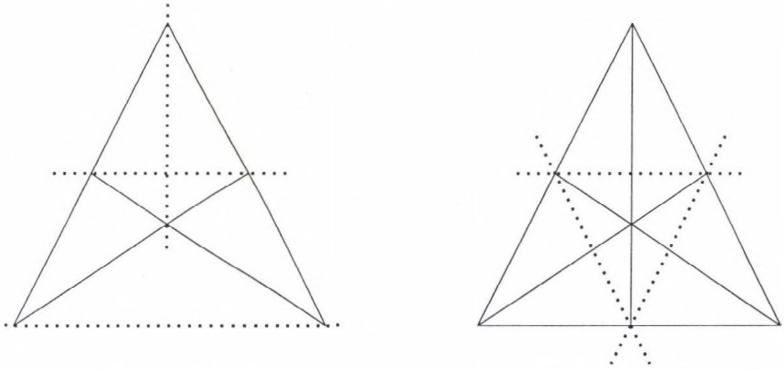
ahol tehát a sík pontjait és nem-függőleges egyeneseit rendeljük kölcsönösen egymáshoz. (A „parabolikus" szó magyarázata: az $y = x^2$ parabola pontjainak az ott húzott érintők felelnek meg – és viszont.) Könnyen látható – és fel is használjuk –, hogy ez a hozzárendelés illeszkedéstartó.

Az 1.5., 1.6. Tételek bizonyítása: Ha szükséges, forgassuk úgy az egyeneshalmazt, hogy egyikük se legyen függőleges. A fent definiált módon rendeljünk az egyenesekhez pontokat és metszéspontjaikhoz egyeneseket. Alkalmazzuk az 1.1. ill. 1.2. Tételeket; az így adódó Gallai-egyenes illetve n különböző egyenes eredetijei megfelelő metszéspontok lesznek. ■

Az 1.3. és 1.4. Tételeket is visszavezethetjük a most igazoltakra alkalmas pontból (másik síkra) való vetítéssel, csak arra kell ügyelnünk, hogy a vetületegyenesek között ne legyen két párhuzamos.

Az 1.1. Tételből tudjuk, hogy *legalább egy* Gallai-egyenest minden nemkollineáris ponthalmaz meghatároz. Igaz-e, hogy mindig van több is, ha $n \geq 3$?

Jelöljük $g(n)$-nel a legnagyobb olyan egész számot, melyre a sík tetszőleges n nem-kollineáris pontja legalább $g(n)$ Gallai-egyenest határoz meg. (Gallai tétele szerint $g(n) \geq 1$.) Kelly és Moser mutatta meg [10], hogy $g(n) \geq \lceil 3n/7 \rceil$ (ahol $\lceil x \rceil$ az x valós szám felső egész része; a legkisebb, x-nél nem kisebb egész). Egyenlőség áll például $n = 6$-ra és $n = 7$-re (lásd 2. ábra).



2. ábra: $g(6) = g(7) = 3$. A legalább három pontú egyenesek folytonos vonallal, a Gallai-egyenesek szaggatottal jelölve

Becslésüket később Csima és Sawyer még egy picivel megjavította [4, 5]:

1.8. Tétel. *Ha $n \neq 7$, akkor $g(n) \geq \lceil 6n/13 \rceil$.*

A legjobb ismert konstrukcióban csak $n/2$ Gallai-egyenes van (lásd 3.7. Megjegyzés); – lehetséges, hogy ez már a minimum.

1.9. Sejtés. *$g(n) \geq \lceil n/2 \rceil$, ha n elég nagy.*

2. Probléma a gyümölcsösben

Ugyancsak Sylvestertől származik az az előzővel rokon kérdés, mely az angol nyelvű irodalomban „Orchard Problem" néven vált ismertté (ennek magyarítására tesz kísérletet a szerző e szakasz címében):

ültessünk el úgy n gyümölcsfát, hogy a lehető legtöbb egyenesre essen közülük legalább három!

A pontosabb fogalmazás céljából nevezzünk (n,t)-konfigurációnak egy n különböző pontból és t különböző kijelölt egyenesből álló struktúrát, ha mind a t egyenesre legalább három pont esik. (Természetesen a pontpárok által meghatározott egyeneseket nem mind vesszük be, pl. a Gallai-egyeneseket semmiképpen sem.) Jelöljük továbbá $s(n)$-nel a legnagyobb olyan t értéket, melyre található (n,t)-konfiguráció.

2.1. Probléma. *Határozzuk meg $s(n)$-et n függvényében!*

Az n paraméter kis értékei közül $n = 3, 4, 5$-re $s(3) = s(4) = 1$ és $s(5) = 2$ nyilvánvaló. Olyan példákat sem nehéz találni, amelyek $s(6) \geq 4$-et illetve $s(7) \geq 6$-ot mutatják (lásd 2. ábra).

Léteznek-e még jobb konfigurációk ezen két értékre? Megmutatjuk, hogy a válasz tagadó.

Számoljuk össze, hány pontpár szerepelne összesen egy $(6,5)$ illetve $(7,7)$ konfiguráció egyenesein! Az első esetben ez az öt egyenes mindegyikén legalább $\binom{3}{2} = 3$ pár; összesen legalább $5 \cdot 3 = 15 = \binom{6}{2}$ – és minden párt természetesen csak egyszer számoltunk. A másodikban pedig a hét egyenesen együtt legalább $7 \cdot 3 = 21 = \binom{7}{2}$. Azt kaptuk, hogy mindkét esetben az *összes* pár a konfiguráció egy-egy ≥ 3 pontú egyenesén üldögélne; így a pontok nem határozhatnának meg egyetlen Gallai-egyenest sem! Ellentmondásra jutottunk az 1.1. Tétellel – tehát ilyen konfigurációk nem létezhetnek.

Ezzel a kettős leszámlálási ötlettel közvetlen összefüggést is kaphatunk $s(n)$ és az előző szakaszban definiált $g(n)$ Gallai-szám között.

2.2. Lemma.

$$3s(n) + g(n) \leq \binom{n}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad s(n) \leq \left\lfloor \left(\binom{n}{2} - g(n) \right) / 3 \right\rfloor .$$

Valóban, egy (n,t)-konfiguráció mind a t egyenesén legalább három pontpár található; a Gallai-egyeneseken pedig egy-egy. ∎

Például $n = 9$-re innen – az 1.8. Tétel $g(9) \geq \lceil 6 \cdot 9/13 \rceil = 5$ becslését használva – $s(9) \leq 10$ adódik; vagyis ekkor legfeljebb $(9,10)$ konfiguráció létezhet. Ezzel a speciális esettel már Jackson is foglalkozott (Sylvester előtt 60 évvel) már említett könyvében [9]. Érdemes megpróbálkozni vele.

2.3. Feladat. *Rajzoljunk kilenc pontot és tíz egyenest úgy, hogy minden egyenesre három pont illeszkedjen – másszóval: készítsünk $(9,10)$ konfigurációt!*

$s(n)$ ismert értékeit Burr–Grünbaum–Sloan [2] foglalja össze:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$s(n)$	1	1	2	4	6	7	10	12	16	19	?	?	?	37	?

Mint látható, $13 \leq n \leq 15$-re és 17-től felfelé $s(n)$ pontos értéke ismeretlen; ezekre csak becsléseket tudunk, pl. $22 \leq s(13) \leq 24$. A felső becslések egy része, pl. $s(11) \leq 16$, $s(13) \leq 24$ és $s(16) \leq 37$, a 2.2. Lemmából és az 1.8. Tételből következik. A többi egyedi elemzést igényel. Az alsó becslések egyre bonyolultabb konstrukciókból adódnak.

3. Nagyságrend és aszimptotika $s(n)$-re.

Az előző szakaszban láttuk (2.2. Lemma), hogy $s(n)$ legfeljebb másodfokú függvénye lehet n-nek. Elérhető-e ez a nagyságrend? A válasz igenlő, mint azt az alábbi észrevétel és az azt követő egyszerű példa mutatja.

3.1. Lemma. *Az $y = x^3$ egyenletű görbe három különböző pontja, pl. (a, a^3), (b, b^3) és (c, c^3) pontosan akkor esik egy egyenesbe, ha $a + b + c = 0$.*

Bizonyítás: Ha a három pont az $y = ux + v$ egyenletű egyenesre esik, akkor az

(1) $$x^3 = ux + v \qquad \text{azaz} \qquad x^3 - ux - v = 0$$

egyenlet gyökei a, b és c. A gyökök összege pedig, mint ismeretes, a másodfokú tag együtthatójának ellentettje, jelen esetben 0. Visszafelé, ha $a + b + c = 0$, akkor az $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$ egyenletet hozhatjuk (1) alakúra. ∎

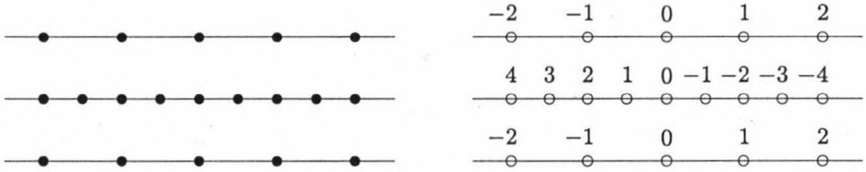
3.2. Példa. Legyen $n = 2k + 1$ és válasszuk ki az $y = x^3$ egyenletű görbe következő n pontját:
$$\{(i, i^3);\ i = -k, -(k-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k\}.$$

Megmutatjuk, hogy ez a ponthalmaz legalább $k^2/2 \approx n^2/8$ hárompontú egyenest határoz meg.

$(k-1)+(k-2)+\ldots+2+1+0 = k(k-1)/2$ darab olyan rendezett (i_1, i_2) pár van, melyekre $1 \leq i_1, i_2 \leq k$ és még $i_1 + i_2 \leq k$ is teljesül. Ha a sorrendtől eltekintünk, az ilyen (rendezetlen) párok száma még mindig több lesz, mint $k(k-1)/4$ (az $i_1 = i_2$ eseteket eleve csak egyszer számoltuk). Mindegyik párhoz található olyan $i_3 \in \{-k, \ldots, -1\}$, melyre $i_1 + i_2 + i_3 = 0$; tehát az ilyen x-koordinátájú pontok egy egyenesbe esnek az előző lemma szerint. Hasonlóan legalább $k(k-1)/4$ olyan kollineáris hármas létezik, melyekben két negatív és egy pozitív koordináta szerepel. Hozzáadva ezekhez a k darab $-i, 0, i$ típusú hármast, több, mint $k^2/2 \approx n^2/8$ hárompontú egyenest kapunk.

Sok egyéb példa adható még cn^2 hárompontú egyenessel, különböző $c > 0$ konstans szorzók mellett. Bemutatunk néhányat ezek közül; a pontos aszimptotikát (azaz a lehető legjobb c konstanst) az utolsó 3.11. Példa adja majd. Ez utóbbinak megértését megkönnyítendő javasoljuk, hogy a T. Olvasó – ha még nem barátkozott meg a paraméterezéssel karakterizált kollinearitás fogalmával – a 3.3–3.6. Példákat is részletesen nézze végig.

3.3. Példa. Vegyünk fel két párhuzamos egyenesen egy-egy $n/4$ tagú számtani sorozatot, közép-párhuzamosukon pedik egy $n/2-1$ tagú *dupla sűrűségű* ponthalmazt! (Lásd 3.(a) ábra; a megfelelő paraméterezést a 3.(b) ábra mutatja).



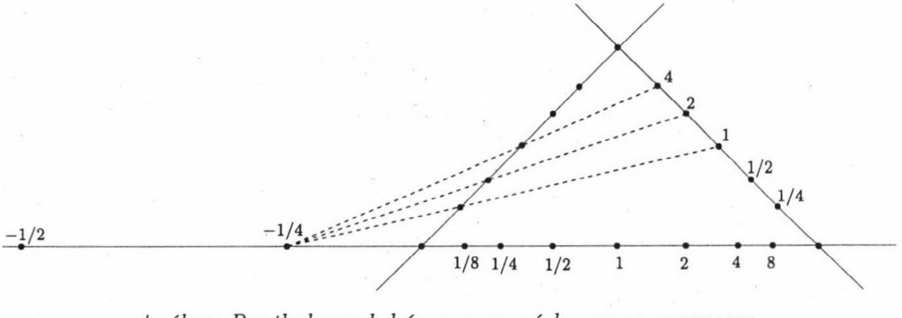
3. ábra: Számtani sorozatok három párhuzamos egyenesen

Ehhez a kevesebb, mint n ponthoz $n^2/16$ olyan egyenes található, amelyek hármat tartalmaznak, hiszen az $n/4$ tagú számtani sorozatokból ennyiféleképpen vehetünk ki egyet-egyet és ezek összekötő egyenese mindig átmegy a középső halmaz egy pontján is.

3.4. Példa. Legyen $n = 12k$ és helyezzünk el egy $A_1A_2A_3\Delta$ háromszög oldalegyenesein $n/3$-$n/3$ (azaz $4k$-$4k$) pontot úgy, hogy egy-egy egyenesen a két csúcstól (pl. A_i-től és A_j-től) való irányított távolságukra

$$\frac{\overrightarrow{A_iP}}{\overrightarrow{PA_j}} \in \left\{ \pm 1, \pm 2^{\pm 1}, \ldots, \pm 2^{\pm(k-1)} \right\}$$

teljesüljön! (Lásd 4. ábra; a pontok mellé írt értékek a fenti hányadosok.)



4. ábra: Ponthalmazok három nem párhuzamos egyenesen

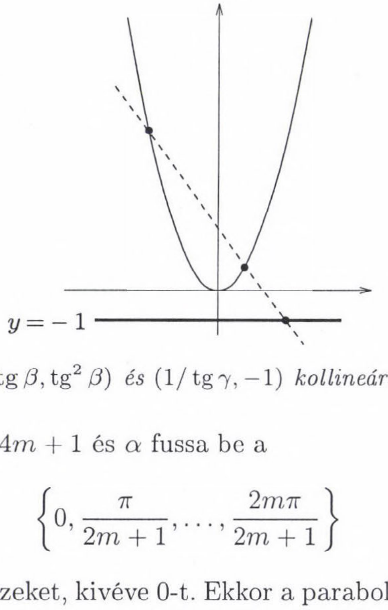
Menelaos tétele szerint a három oldalegyenes egy-egy pontja akkor és csak akkor kollineáris, ha a megfelelő osztóviszonyok szorzata -1. Ha tehát az osztóviszony *ellentettjével* paraméterezünk, akkor a kollinearitás feltétele az, hogy a paraméterek szorzata 1 – másszóval a kitevők összege nulla – legyen. Innen már egyszerűen számolható, hogy legalább cn^2 háromszoros egyenes létezik, alkalmas pozitív c abszolút konstansra.

Következő példánk konstruálásához először vegyük észre, hogy az $y = x^2$ parabola két, pl. (a, a^2), (b, b^2) pontját összekötő egyenes az $y = -1$ egyenest azon pontban metszi, amelynek x-koordinátája

$$(2) \qquad \frac{ab-1}{a+b}, \qquad \text{ha} \quad a+b \neq 0.$$

Paraméterezzük a parabolát az irányszöggel, ekkor az α paraméterhez tartozó pont $(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}^2\alpha)$ lesz; az $y = -1$ egyenes $\gamma \neq 0 + k\pi$ paraméterű pontja pedig legyen az, melynek x-koordinátája $1/\operatorname{tg}\gamma$. A következő észrevétel egyszerűen következik a (2) képletből, amely a tangens függvény addíciós képletének negatív reciprokához hasonló szerkezetű.

3.5. Lemma. *A parabola α, β paraméterű és az egyenes γ paraméterű pontjai pontosan akkor kollineárisak, ha $\alpha + \beta + \gamma = 0 + k\pi$ (lásd 5. ábra).* ■



5. ábra: $(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}^2\alpha)$, $(\operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}^2\beta)$ *és* $(1/\operatorname{tg}\gamma, -1)$ *kollineáris, ha* $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$

3.6. Példa. Legyen $n = 4m + 1$ és α fussa be a

$$\left\{0, \frac{\pi}{2m+1}, \dots, \frac{2m\pi}{2m+1}\right\}$$

értékeket; γ pedig ugyanezeket, kivéve 0-t. Ekkor a parabola α, β paraméterű olyan pontpárjainak száma, melyekre $\alpha + \beta \neq 0 + k\pi$, legalább $2m(2m+1)/2 \approx n^2/8$ lesz, és mindegyik ilyen pár hárompontú egyenest határoz meg.

3.7. Megjegyzés. Mivel a fenti példa kissé mesterkéltnek tűnhet, nem árt némi magyarázatot fűzni hozzá.

Vegyük egy szabályos $2m + 1$-szög csúcsait; a csúcs-párok által meghatározott összes (szintén $2m + 1$ darab) irányt pedig reprezentáljuk a végtelen távoli egyenes megfelelő pontjaival. Erről, az előzőnél természetesebb módon definiált $n = 4m + 2$ elemű ponthalmazról könnyen látható, hogy cn^2 darab háromszoros egyenest határoz meg. Még az is igaz, hogy csak $n/2$ Gallai-egyenese van! (Ez mutatja, hogy az 1.9. Sejtésben az $n/2$-es alsó korlát nem javítható.)

Szépséghibának legfeljebb az tűnhet, hogy a pontok fele végtelen távoli. Ennek elkerülésére született a 3.6. Példa; nevezetesen egy másik síkra való olyan vetítés útján, ahol a szabályos sokszög köré írt kör az $y = x^2$ egyenletű parabolába megy át, a végtelen távoli egyenes pedig az $y = -1$ egyenletűbe. (Közben az egyik végtelen távoli pont elveszett, mert végtelen távoli maradt – így a Gallai-egyenesek száma $m - 1 \approx n/4$-gyel nőtt.)

3.8. Példa. Egy $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$-es négyzetrács csúcsai is $\geq cn^2$ darab háromszoros egyenest határoznak meg, alkalmas $c > 0$ abszolút konstanssal.

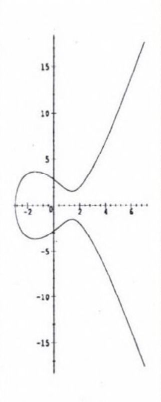
Erről bárki könnyen meggyőzheti magát, bár a precíz becsléshez az Euler-féle ϕ függvényre is szükség van – ahol $\phi(n)$ az n-nél kisebb, hozzá relatív prím pozitív egészek száma. (A számolás részletezésétől eltekintünk.)

3.9. Megjegyzés. Ez a példa kissé kilóg a sorból, mert itt a kollinearitást *nem* paraméterezés írja le.

Utolsó példánkhoz tekintsünk egy harmadrendű (azaz harmadfokú egyenlettel leírt) görbét, például azt, melynek egyenlete

$$y^2 = x^3 - x - 6. \tag{3}$$

Vigyázat! A bal oldalon *nem* y, hanem a négyzete szerepel; lásd 6. ábra.



6. ábra: Egy harmadrendű elliptikus görbe

A következő állítás az algebrai geometria egyik alapvető eredménye.

3.10. Lemma. *A fenti görbe (és hozzá hasonlóan minden úgynevezett „elliptikus” harmadrendű is) paraméterezhető* $(0,1)$*-beli értékekkel úgy, hogy három pontja akkor és csak akkor essék egy egyenesbe, ha a megfelelő paraméterek összege egész.*

[Ha úgy tetszik, az összeg $\equiv 0 \pmod 1$*, vagy egyszerűen 1 vagy 2 – hiszen nagyobb nem lehet.]*

Érdekes, hogy a fenti lemmában egy (u, u, v) típusú paraméter-hármas az u paraméterű pontban húzott, a v paraméterűn átmenő érintőnek felel meg; az (u, u, u) alakúak pedig – ahol u szükségképpen vagy $1/3$, vagy $2/3$ – inflexiós érintőnek.

Az átlagosnál érdeklődőbb olvasók kedvéért megjegyezzük azt is, hogy a paraméterezést lényegében a Weierstrass-féle $\wp$ függvény inverze adja – ennek azonban a továbbiakban nem lesz jelentősége.

3.11. Példa. Tekintsük a (3) görbének a 3.10. Lemma szerinti paraméterezését; a ponthalmaz pedig álljon az

$$\left\{\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}\right\} \tag{4}$$

paraméter-értékekhez tartozó n pontból.

Megmutatjuk, hogy ezek $\approx n^2/6$ háromszoros egyenest határoznak meg.

Nyilván elég annyit igazolni, hogy ennyiféle (i, j, k) hármas létezik, melyekre $1 \le i, j, k \le n$, különbözőek és $i + j + k$ az $n + 1$-nek egész számú többszöröse. Márpedig „majdnem mind" az $\binom{n}{2}$ darab i, j párhoz (sorrend nem számít) pontosan egy alkalmas k létezik. A kivételek két csoportba oszthatók:

(a) $k = i$ – vagy $k = j$, de a sorrend nem számított – azaz $2i+j$ osztható $n+1$-gyel; ilyen pár pedig legfeljebb n létezik (minden i-hez legfeljebb egy);

(b) $i + j = n + 1$ (amikor $k = 0$ vagy $n + 1$ lenne); az ilyen párok száma is n.

Az alkalmas (i, j) párokból indulva tehát legalább

$$\binom{n}{2} - n - n = \frac{n^2}{2} - \frac{5}{2}n$$

jó hármast kapunk. Mivel mindegyikhez pontosan háromféleképp jutottunk el, a különböző hármasok száma legalább $n^2/6 - 5n/6$.

Azt a következtetést vonhatjuk le, hogy $s(n)$ aszimptotikusan $n^2/6$, hiszen

$$\frac{n^2}{6} - \frac{5}{6}n \le s(n) \le \frac{1}{3} \cdot \binom{n}{2} = \frac{n^2}{6} - \frac{1}{6}n,$$

ahol a bal oldali alsó becslés a fenti példából, a jobb oldali pedig a 2.2. Lemmából származik. Itt a hiba lineáris (tehát sokkal kisebb, mint n^2). Az elsőfokú tagok együtthatóin még javíthatunk egy kicsit; pl. felső becslésként $n > 7$ -re $n^2/6 - 25n/78$ adódik a Csima–Sawyer féle 1.8. Tételből. A legjobb ismert alsó becsléshez pedig Sylvester a (3) harmadrendű görbe $\{0, 1/n, \ldots, (n-1)/n\}$ paraméterű pontjait használta. (Sajnos a 0 paraméterű általában végtelen távoli, de alkalmas vetítés után ő is „bejön" a végesbe.) Ekkor a (b) típusú rossz hármasok eltűnnek (jók lesznek), így az $s(n) \ge n^2/6 - n/2$ becsléshez jutunk. A hiba azonban továbbra is lineáris marad.

A konstrukció Burr–Grünbaum–Sloan [2] érdeme; ugyanennek kissé egyszerűsített változatát találta Füredi és Palásti [7].

3.12. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy (a négyzetrács kivételével) összes példánkban van valami közös. Egy-egy kommutatív (azaz Abel-féle) csoport – nevezetesen hol $\mathbb{R}$ additív csoportja, hol $\mathbb{R} - \{0\}$ multiplikatív csoportja, hol pedig a mod 1 összeadás-csoport – elemeivel paramétereztünk egy-egy harmadrendű görbét. Három pont kollinearitásának feltétele pedig mindenütt az volt, hogy paramétereikre a csoportműveletet (összeadást vagy szorzást) alkalmazva, az eredmény a csoport neutrális (null vagy egység) eleme legyen.

Hol szerepel harmadrendű görbe a 3.3., 3.4., 3.6. Példákban? Három egyenes, pl. $y = m_1x + b_1$, $y = m_2x + b_2$, $y = m_2x + b_2$ pontjaiból álló halmaz jellemezhető az $(y - m_1x - b_1)(y - m_2x - b_2)(y - m_3x - b_3) = 0$ harmadfokú egyenlettel; az $y = ax^2 + bx + c$ parabola és az $y = ux + v$ egyenes egyesítése pedig az $(y - ax^2 - bx - c)(y - ux - v) = 0$ – szintén harmadfokú – egyenlettel. (Ez a két harmadrendű görbe persze „elfajuló", azaz „reducibilis".)

Sokféle kérdést lehet feltenni a fenti észrevételből kiindulva, de még a következő – legegyszerűbb – változat [6] is megoldatlan.

3.13. Sejtés. *Ha n pont legalább cn^2 háromszoros egyenest határoz meg, akkor van* 10, *amelyek egy harmadrendű görbére esnek – feltéve, hogy $n > n_0(c)$.*

Itt azért 10 a „bűvös szám", mert kilenc pontot mindig tartalmaz egy alkalmas – esetleg reducibilis – harmadrendű görbe. A sejtésre persze nem ellenpéldák a (legalább 4×4-es) négyzetrácsok sem, hiszen három (pl. párhuzamos) egyenes pontjai egy (elfajuló) harmadrendű görbét alkotnak.

E problémával kapcsolatban érdemes megemlíteni néhány, ebbe az irányba mutató részeredményt.

3.14. Tétel ([6]). *Tegyük fel, hogy az r-edrendű (azaz r-edfokú polinomegyenletet kielégítő) γ algebrai görbén létezik n pont, melyek legalább cn^2 darab háromszoros egyenest határoznak meg. Ekkor*

(i) *ha γ irreducibilis, akkor csakis $r = 3$-adrendű lehet;*

(ii) *ha γ reducibilis, akkor tartalmaz harmadrendű részt;*

– feltéve, hogy $n > n_0(r, c)$.

Ha nem kötjük ki, hogy az *egész* ponthalmaz egyetlen, rögzített rendű görbén helyezkedjen el, csak *egy részéről* tesszük fel ezt, akkor is igaz lesz a fentihez hasonló állítás. Például egy későbbi rész eredményeiből az alábbiak következnek:

ha egy H ponthalmaz három, egyenként $n/3$ pontú részre bontható (pl. $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$) úgy, hogy

(a) *H_1 egy l_1 egyenesre, H_2 egy l_2 egyenesre esik; H_3 pedig diszjunkt $l_1 \cup l_2$-től (de további feltételt nem teszünk rá);*

(b) *legalább cn^2 olyan egyenes létezik, amely mindhárom H_i-ből tartalmaz egy-egy pontot,* *akkor alkalmas, csak c-től függő c^* konstanssal H_3-nak is legalább c^*n pontja kollineáris.*

Erre az eredményre és egy-két rokonára későbbi részekben még visszatérünk. Sajnos a probléma *teljesen általános* ponthalmazokra igen nehéznek tűnik.

4. Erdős „általánosított gyümölcsösei"

Erdős vetette fel azt a kérdést, mit mondhatunk, ha nem három, hanem $k \geq 4$ pontú egyeneseket keresünk. Itt a $k = 4$ esettel foglalkozunk; a tetszőleges k-ra vonatkozó kérdéseket és eredményeket a következő részben vizsgáljuk.

A pontos maximum $k = 4$-re sem – mondhatni: itt „még kevésbé" – ismert; a nagyságrend viszont továbbra is n^2 körüli lesz. Egyrészt nyilván nem lehet több; másrészt pedig ez most is elérhető, mint azt a következő két példa (bármelyike) mutatja.

4.1. Példa (v.ö. 3.3. Példa). Négy párhuzamos egyenesen egy-egy számtani sorozat.

4.2. Példa (v.ö. 3.8. Példa). Továbbra is megfelel a $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$-es négyzetrács, sőt a $d \geq 3$ dimenziós $\sqrt[d]{n} \times \sqrt[d]{n} \times \ldots \times \sqrt[d]{n}$-es kockarácsok síkbeli vetületei is. (A pontos becslés újra az Euler-féle ϕ függvényen múlik.)

Mivel csak ez a két konstrukció ismeretes (lásd alább a 4.4. Megjegyzést és a közelmúltban született 4.5. Tételt is), természetes módon vetődik fel a következő – szintén Erdőstől származó – kérdés.

4.3. Probléma (Erdős). *Igaz-e, hogy ha a sík n pontja legalább cn^2 darab négy- vagy többpontú egyenest határoz meg, akkor tartalmaz öt kollineárisat is – feltéve, hogy $n > n_0(c)$?*

Valószínűleg igaz lesz még az is, hogy létezik $\geq t$ kollineáris pont, ha $n > n_0(c,t)$. Talán n^α is mindig található, alkalmas $0 < \alpha = \alpha(c) < 1$-re. Ennél több azonban nem várható, hiszen a 4.2. Példában a kockarács vetületében csak $n^{1/d}$ pont esik egy egyenesbe.

4.4. Megjegyzés. Érdekes, hogy a fenti kettőn kívül a többi, sok háromszoros egyenest meghatározó konstrukciónak nincs négypontú megfelelője. Ez főleg a 3.2. és 3.11. Példák esetében furcsa.

Miért ne lehetne egy negyedfokú polinom grafikonján vagy egy általános (irreducibilis) negyedrendű görbén n olyan pontot találni, amelyek sok négyszeres egyenest határoznak meg? (Az ilyen görbéken persze négynél több kollineáris pont automatikusan kizárt lenne; negyedfokú egyenletnek ugyanis legfeljebb négy gyöke lehet.) Ezt a kérdést először Simonovits Miklós vetette fel. A válasz – mint említettük – meglepő [6].

4.5. Tétel. *$r \geq 4$-edrendű irreducibilis algebrai görbén elhelyezkedő n pont nemhogy cn^2 darab négyszeres egyenest, de még $cn^{1.72}$ darab háromszorosat(!) sem határozhat meg – ha $n > n_0(c, r)$.*

Az állítás közeli rokona a korábbi 3.14. Tételnek; bizonyításukra egy későbbi részben még visszatérünk.

Irodalom

[1] József Beck, On the lattice property of the plane and some problems of Dirac, Motzkin and Erdős, *Combinatorica,* **3(3–4)**:281–297, 1983.

[2] S. A. Burr, Branko Grünbaum and N. J. A. Sloane, The orchard problem, *Geometriae Dedicata,* **6**:397–424, 1974.

[3] Kenneth Clarkson, Herbert Edelsbrunner, Leo Guibas, Micha Sharir, and Emo Welzl, Combinatorial complexity bounds for arrangements of curves and surfaces, *Discrete and Computational Geometry,* **5**:99–106, 1990.

[4] J. Csima and E. T. Sawyer, There exist $6n/13$ ordinary points, *Discrete Comput. Geom.,* **9(2)**:187–202, 1993.

[5] J. Csima and E. T. Sawyer, The $6n/13$ theorem revisited, in: *Graph theory, combinatorics, algorithms and applications,* Vol. 1., 1995.

[6] György Elekes and Endre Szabó, Triple lines and cubic curves, *Combinatorica,* to appear in 2003.

[7] Zoltán Füredi and Ilona Palásti, Arrangements of lines with a large number of triangles, *Proc AMS,* **92**:561–566, 1984.

[8] Tibor Gallai, Solution of problem 4065, *Am. Math. Monthly,* **51**:169–171, 1944.

[9] J. Jackson, *Rational Amusements for Winter Evenings,* Longman Hurst Rees Orme and Brown, London, 1821.

[10] L. M. Kelly and W. O. J. Moser, On the number of ordinary lines determined by n points, *Canad. J. Math.,* **1**:210–219, 1958.

[11] János Pach and Micha Sharir, Repeated angles in the plane and related problems, *Journal of Combinatorial Theory, series A,* **59**:12–22, 1990.

[12] János Pach and Micha Sharir, On the number of incidences between points and curves, Technical report, Courant Institute of Math Sciences, New York, New York, NY 10012, 1996.

[13] Endre Szemerédi and W. T. Trotter, Jr, Extremal problems in Discrete Geometry, *Combinatorica,* **3(3–4)**:381–392, 1983.

[14] J. J. Sylvester, Problem 2473, *Math. Questions from the Educational Times,* **8**:106–107, 1867.

[15] J. J. Sylvester, Problem 2572, *Math. Questions from the Educational Times,* **45**:127–128, 1886.

[16] J. J. Sylvester, Problem 3019, *Math. Questions from the Educational Times,* **45**:134, 1886.

[17] J. J. Sylvester, Problem 11851, *Math. Questions from the Educational Times,* **59**:98–99, 1893.

György Elekes: On some combinatorial problems. (Part I.)

Incidences between points and straight lines in the plane — both their maximal number and their structure — have been studied since Jackson and Sylvester started investigating them in the 19th century.

Gallai's Theorem was the first result which pointed out the apparent difference between the incidence structures of the Euclidean and the finite (projective) planes, showing that in the former one, any non-collinear finite point set determines a straight line which contains exactly two points of the set. (This is false for finite planes, e.g. for the whole set.)

In the 1980's — motivated by a conjecture of Erdős — bounds on the number of incidences became the subject of intensive studies. Beck and Szemerédi–Trotter found the first non-trivial bounds for straight lines (the latter also settled Erdős' conjecture). These were later extended by Clarkson–Edelsbrunner–Guibas–Sharir–Welzl and — to r-parametric families of curves — by Pach and Sharir.

Very little is known about the optimal configurations — let alone those which only attain the best order of magnitude. However, the few such results found so far have some nice applications; the are the subject of the forthcoming parts.

JELENTÉS AZ 1999. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1999. október 29. és november 8. között rendezte meg az 1999. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 1999-ben egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére a következő bizottságot kérte fel: Totik Vilmos (elnök), Szabó László Imre (titkár), Bálintné Szendrei Mária, Csákány Béla, Csörgő Sándor, Czédli Gábor, Hajnal Péter, Hatvani László, Kérchy László, Kincses János, Krámli András, Leindler László, Makay Géza, Simányi Nándor, Szendrei Ágnes és Tandori Károly.

A versenybizottság 11 feladatot tűzött ki. A feladatokat sorrendben Komjáth Péter, Ruzsa Imre, Hajnal András és Pach János, Elek Gábor és Tardos Gábor, Totik Vilmos, Ruzsa Imre, Krisztin Tibor, Kincses János, Szabó László Imre, Szűcs András és Csörgő Sándor bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 18 versenyző 100 megoldást nyújtott be. Ezek értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta:

I. díjban és 30 000 Ft pénzjutalomban részesül *Frenkel Péter,* az ELTE III. éves matematikus hallgatója;

II. díjban és 20 000–20 000 Ft pénzjutalomban részesülnek *Braun Gábor* és *Mátrai Tamás*, az ELTE III. éves matematikus hallgatói;

III. díjban és 10 000–10 000 Ft pénzjutalomban részesülnek *Bérczi Gergely* és *Kun Gábor,* az ELTE II. éves, és *Pap Gyula* az ELTE III. éves matematikus hallgatói;

Dicséretben részesülnek *Lippner Gábor,* az ELTE II. éves, *Terpai Tamás,* az ELTE I. éves, és *Valkó Benedek,* az ELTE V. éves matematikus hallgatói.

Indoklás:

Frenkel Péter megoldja az 1., 2., 3., 4., 5., 6., 8. és 9. feladatokat. Hiányos a 10. és 11. feladatra adott megoldása. Egyedül ő oldja meg a 6. és 9. feladatokat, és a 10. feladat megoldásában is ő jut a legmesszebb.

Braun Gábor megoldja az 1., 2., 3., 4., 5. és 11. feladatokat. Erősen hiányos megoldást nyújt be a 6. és a 9. feladatokra. Kiemelkedően szép a 3., az 5. és a 11. feladatokra adott megoldása.

Mátrai Tamás megoldja az 1., 2., 3., 4., 5., 7., és 8. feladatokat. Erősen hiányos a 9. feladatra adott megoldása.

Bérczi Gergely megoldja az 1., 2., 4., 5. és 8. feladatokat. Erősen hiányos megoldást ad a 9. feladatra.

Kun Gábor jó megoldást ad a 3., 4., 5. és 8. feladatokra. Kissé hiányos a 2. feladatra, és erősen hiányos a 11. feladatra adott megoldása.

Pap Gyula megoldja a 2., 3., 4., 5. és 7. feladatokat. Hiányos a 8. feladatra, és erősen hiányos a 9. feladatra benyújtott megoldása.

Lippner Gábor helyesen oldja meg a 2., 4., 5. és 8. feladatokat. A 11. feladatra benyújtott megoldása erősen hiányos.

Terpai Tamás megoldja a 2. és 4. feladatokat. Hiányos az 5., 7. és 8. feladatra adott megoldása, és erősen hiányos a 9. feladatra benyújtott megoldása.

Valkó Benedek megoldja a 3., 5. és 11. feladatokat. Részeredményeket ér el a 9. és a 10. feladatban. A 11. feladatra adott megoldása kiemelkedő.

Az 1999. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Nevezzük körnek a sík egy A részhalmazát, ha van olyan pont, hogy minden ebből kiinduló félegyenes az A halmazt egy pontban metszi. Igazoljuk, hogy a sík lefedhető megszámlálható sok körrel.

2. Legyen $\varepsilon > 0$. Igazoljuk, hogy minden elég nagy n természetes számhoz vannak olyan x, y, z természetes számok, hogy $n^2 + x^2 = y^2 + z^2$, és amelyekre $y, z \leq (1+\varepsilon)n/\sqrt{2}$.

3. Bizonyítandó, hogy bármely véges G gráfhoz van egy $c(G) > 0$ konstans úgy, hogy minden n-pontú gráfban, melynek nincs G-vel izomorf feszített részgráfja, van két, egyenként legalább $n^{c(G)}$ elemű diszjunkt csúcshalmaz, melyek közt vagy minden él be van húzva, vagy pedig egyetlenegy él sem fut.

4. Az egész számok halmazának egy f permutációját korlátosnak nevezzük, ha $|x - f(x)|$ korlátos. A korlátos permutációk a permutációszorzással egy W csoportot alkotnak. Mutassuk meg, hogy a racionális számok additív csoportja nem izomorf W egyetlen részcsoportjával sem.

5. Legyen $\alpha > -2$, és egy n természetes számra legyen $y_1, \ldots, y_n$ a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{1}{j+k+\alpha} = \frac{1}{n+1+k+\alpha}, \qquad k = 1, \ldots, n$$

egyenletrendszer megoldása. Igazoljuk, hogy $y_{j-1}y_{j+1} \leq y_j^2$ teljesül minden $1 < j < n$ indexre.

6. Mutassuk meg, hogy minden 1-periódusú $L^2(0,1)$-be eső f valós függvényhez létezik három ugyanilyen tulajdonságú g_1, g_2, g_3 függvény úgy, hogy valamilyen c_0, c_1, c_2, c_3 konstansokkal

$$f(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{3} \big(g_i(x + c_i) - g_i(x)\big).$$

7. Legyen adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $tf(t) > 0$ $(t \neq 0)$ tulajdonsággal. Igazoljuk, hogy létezik egy nem azonosan nulla differenciálható $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $y'(t) = f\big(y(t-1)\big)$ teljesül minden $t > 1$ számra, és y zéróhelyeinek halmaza nem korlátos.

8. Adott a C kör belsejében egy T háromszöglemez. Igazoljuk, hogy nem létezik olyan zárt konvex halmaz a C belsejében, amelyik különbözik T-től, de a C körvonal minden pontjából ugyanakkora szög alatt látszik, mint T.

9. Legyen $P_1, \dots, P_n$ illetve $Q_1, \dots, Q_n$ a sík két konvex sokszöge ellentétes körüljárással. Bizonyítandó, hogy van olyan egyenes, amely a $P_1Q_1, \dots, P_nQ_n$ szakaszok mindegyikét metszi.

10. Legyen $M = F_1 \times \dots \times F_k$ k darab sima zárt felület (2-dimenziós, C^∞, kompakt, összefüggő, határ nélküli sokaság) szorzata, mely felületek közül pontosan s darab nem irányítható. Bizonyítsuk be, hogy M beágyazható $\mathbb{R}^{2k+s+1}$-be.

11. Legyenek $\{U_{n,1}, \dots, U_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ teljesen független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változók, és $\alpha \geq 1$ esetén tekintsük a $H_n = \{\lfloor n^\alpha U_{n,1} \rfloor, \dots, \lfloor n^\alpha U_{n,n} \rfloor\}$ halmazokat, ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ az egész részt jelöli. Igazoljuk, hogy a $H_n \cap (\cup_{m=n+1}^{\infty} H_m)$ halmazok elemszámai akkor és csakis akkor alkotnak majdnem biztosan korlátos sorozatot, ha $\alpha > 3$.

A megoldások ismertetése

Az 1. feladat megoldása

I. megoldás

Legyen H az R test egy transzcendenciabázisa Q felett. Ekkor H végtelen halmaz (különben R megszámlálható volna). Legyenek $h_1, h_2, \dots$ különböző elemei a H halmaznak. Legyen K_n a $H \setminus \{h_n\}$ halmaztól algebrailag függő valós számok teste. Ekkor $K_n \times K_n$ lefedhető egy körrel, mert a (h_n, h_n^2) ponton átmenő bármely egyenes legfeljebb 1 pontban metszi a $K_n \times K_n$ halmazt (ellenkező esetben h_n kielégítene egy K_n feletti legfeljebb másodfokú nemtriviális egyenletet, ami H algebrai függetlensége miatt lehetetlen).

Belátjuk, hogy $R \times R = \cup_{n=1}^{\infty}(K_n \times K_n)$. Legyen $(x, y) \in R \times R$ tetszőleges. Az x és y számok algebrailag függenek H-tól, így annak valamely véges H' részétől is. Ha most n olyan, hogy $h_n \notin H'$, akkor $(x, y) \in K_n \times K_n$.

Frenkel Péter megoldása

II. megoldás

Nevezzük M-körnek a sík egy A részhalmazát, ha van olyan pont, hogy minden ezen átmenő egyenes az A halmazt megszámlálható sok pontban metszi. Nyilván minden M-kör megszámlálható sok azonos középpontú körrel lefedhető. Megjegyezzük, hogy minden egyenes része egy körnek (melynek középpontja az egyenesen kívül van). Így elég megmutatni, hogy a sík lefedhető megszámlálható sok M-körrel és egy egyenessel.

Legyen $\mathcal{H}$ a valós számok halmazának egy Hamel-bázisa. Ekkor minden x valós szám egyértelműen felírható $x = \sum_{i=1}^{n} r_i h_i$ alakban, ahol $h_i \in \mathcal{H}$ és $r_i \neq 0$ racionális szám, $i = 1, 2, \ldots, n$. Legyen $T(x) = \{h_1, \ldots, h_n\}$.

Tekintsük minden $q \neq 0$ egészhez a

$$H_q = \Big\{(x, y) \,:\, x, y \in R,\ x \neq 0,\ T(y/x) \subset T\big((y-q)/x\big)\Big\}$$

halmazt. Azt állítjuk, hogy H_q egy M-kör.

Valóban, a H_q halmazhoz megfelelő középpont a $(0, q)$ pont. Jelölje ugyanis $e_{m,q}$ a $(0, q)$ ponton átmenő m meredekségű egyenest. Ha $(x, y) \in e_{m,q}$, ahol $x \neq 0$, akkor $m = (y-q)/x$, és ha még $(x, y) \in H_q$ is teljesül, akkor a $t = y/x$ jelölést bevezetve $(x, y) \in e_{t,0}$, továbbá $T(t) \subset T\big((y-q)/x\big) = T(m)$. Viszont rögzített m meredekséghez megszámlálható sok olyan t érték létezik, melyre $T(t) \subset T(m)$, hiszen ha $T(m) \subset \{h_1, \ldots, h_n\}$, akkor $t = r_1h_1 + \cdots + r_nh_n$, ahol az $r_1, \ldots, r_n \in Q$ együtthatókat megszámlálhatóan sokféleképpen választhatjuk meg. Azonban $q \neq 0$ miatt $e_{t,0} \cap e_{m,q}$ legfeljebb 1-elemű minden t számra, és mivel $T(t) \subset T(m)$ csak megszámlálható sok t esetén teljesül, ezért a $H_q \cap e_{m,q}$ halmaz is megszámlálható. Az y-tengelyen pedig egyetlen H_q-beli pont sincs, mert $(x, y) \in H_q$ esetén $x \neq 0$.

Másrészt a H_q halmazok az y-tengely kivételével lefedik a síkot, azaz minden (x, y) ponthoz, ahol $x \neq 0$, létezik $q \neq 0$ egész, melyre $T(y/x) \subset T\big((y-q)/x\big)$. Legyen ugyanis $y/x = h_1r_1 + \cdots + h_kr_k$ és $1/x = l_1s_1 + \cdots + l_ms_m$, ahol $h_1, \ldots, h_k, l_1, \ldots, l_m \in \mathcal{H}$, továbbá $r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_m$ nullától különböző racionális számok. Ekkor a q egész számot elég nagyra választva elérhető, hogy ha valamely $1 \leq i \leq k$ és $1 \leq j \leq m$ index esetén $h_i = l_j$, akkor $r_i \neq qs_j$ teljesüljön (legyen például $q > |r_i/s_j|$ minden ilyen i, j párra). Ekkor $T\big(y/x - q \cdot (1/x)\big) = \{h_1, \ldots, h_k\} \cup \{l_1, \ldots, l_m\}$. Tehát $T\big((y-q)/x\big) \supset T(y/x)$, és így $(x, y) \in H_q$, ahol $q > 0$.

Tehát a H_q M-körök ($q \in Z \setminus \{0\}$) és az y-tengely lefedik a síkot, amiből következik a feladat állítása.

Juhász András megoldása

III. megoldás

Mivel a számegyenes része egy körnek, elég a komplementer halmazt lefedni. Azt igazoljuk, hogy ha akárhogyan adott egy megszámlálhatóan végtelen $K = \{P_1, P_2, \ldots\}$ halmaz a számegyenesen, és egy $H \subset C \setminus R$ halmaz, akkor H lefedhető megszámlálható sok olyan körrel, amelyek középpontjai K-beliek. Ezt H számosságára vonatkozó transzfinit indukcióval igazoljuk. Ha ez megszámlálható, akkor az állítás igaz, ezért legyen $|H| = \kappa$, és tegyük fel, hogy κ-nál kisebb számosságú halmazokra már igazoltuk az állítást.

Nevezzük H-t zártnak, ha minden olyan pontot tartalmaz, amely két olyan egyenes metszéspontjaként előáll, amelyek átmennek H ill. K egy-egy pontján. Mivel tetszőleges H-ra ilyen egyenes pár csak $(\kappa \cdot \aleph_0)^2 = \kappa$ lehet, az összes ilyen egyenes metszéspontját hozzávéve H-hoz, majd ezt az eljárást megszámlálható sokszor megismételve megkaphatjuk H lezárását, amely az előbbiek alapján ismét κ számosságú.

Feltehetjük tehát, hogy H zárt. Állítsuk elő H-t $H = \cup_{\theta<\kappa} H_\theta^{**}$ alakban, ahol a H_θ^{**}-ok κ-nál kisebb számosságúak, legyen $H_\xi^* = \cup_{\theta<\xi} H_\xi^{**}$ és legyen H_ξ a H_ξ^* halmaz lezártja. Könnyen látható, hogy limeszrendszámra $H_\xi = \cup_{\theta<\xi} H_\theta$ teljesül. ξ szerinti transzfinit indukcióval definiáljuk H_ξ egy beosztását K-ba eső középpontú körökbe (minden K-beli pontot csak egyszer használva középpontként) oly módon, hogy korábbi pontok beosztását minden lépésben megtartjuk, és magukat a köröket is ezen konstrukció alatt definiáljuk. Limeszrendszámra nincs mit csinálni, ezért legyen $\xi = \gamma + 1$, és az indukciós feltevésnek megfelelően legyen $H_\gamma = C_1 \cup \cdots \cup C_j \cup \cdots$, ahol a C_i-k rendre $P_i \in K$ középpontú részköröket jelölnek. Az indukciós feltevés miatt a $H_{\gamma+1} \setminus H_\gamma$ halmaz, melynek számossága kisebb mint κ, lefedhető $P_1, P_3, P_5, \ldots$ középpontú $D_1, D_3, D_5, \ldots$ körökkel, és hasonlóan lefedhető $P_2, P_4, P_6, \ldots$ középpontú $E_2, E_4, E_6, \ldots$ körökkel is. Tehát egy tetszőleges $P \in H_{\gamma+1} \setminus H_\gamma$ pont rajta van egy D_{2j+1} és egy E_{2k} körön. A megfelelő, P-t tartalmazó P_{2j+1} ill. P_{2k} végpontú félegyenesek legyenek l_1 és l_2. Az nem lehet, hogy mind l_1-nek mind l_2-nek a metszete H_γ-val nem üres, mivel ekkor H_γ zártsága miatt $P \in H_\gamma$ volna. Tehát pl. $l_1 \cap H_\gamma = \emptyset$, de akkor P hozzátehető a C_{2j+1} részkörhöz.

Az indukció ily módon végigvihető, és az állítás következik.

Bérczi Gergely megoldása alapján

7 dolgozat érkezett. Helyes Bérczi Gergely, Braun Gábor, Frenkel Péter, Juhász András, Mátrai Tamás és Timár Ádám megoldása.

A 2. feladat megoldása

I. megoldás

Először is jegyezzük meg, hogy bármely $\theta > 0$-ra vannak olyan u és v relatív prím természetes számok, hogy $(u+iv)/(u-iv)$ argumentuma θ-nél közelebb van $\pi/4$-hez. Ez világos, hiszen mindössze $\tan \pi/8$-at kell approximálni v/u alakú racionális számokkal.

Mármost a megoldás menete az, hogy megmutatjuk, hogy van olyan, csak u-tól és v-től függvő N szám, hogy minden elég nagy n-re van egy $n + ix$ alakú szám, amely osztható $(u - iv)$-vel (azaz a hányados is $a + bi$ alakú valamilyen a, b egészekkel), és $0 \le x \le N$. Ha ezt tudjuk, akkor, mivel $(u+iv)/(u-iv)$ abszolút értéke 1, az $n + ix$ és $y + iz := (n + ix)(u + iv)/(u - iv)$ számok abszolút értéke megegyezik, azaz

$$n^2 + x^2 = y^2 + z^2.$$

Továbbá nagy n-re $n+ix$ argumentuma 0 és θ közé esik, ezért az $y+iz$ szám argumentuma csak legfeljebb 2θ-val tér el $\pi/4$-től. De ez azt jelenti, hogy $1 - 4\theta < z/y < 1 + 4\theta$, és így az előző egyenlőség $\theta < \varepsilon/20$-ra és $n > 2N/\varepsilon$-ra adja, hogy $y, z < (1+\varepsilon)n/\sqrt{2}$.

A fenti oszthatóság igazolásához először is vegyünk olyan u_0, v_0 egészeket, amelyekre $u_0 < 0$, $v_0 > 0$ és $uu_0 + vv_0 = 1$ fennáll. Mivel u és v relatív prímek, ilyenek vannak. Mármost egy nagy n számot osszunk el $(u^2 + v^2)$-tel, azaz írjuk fel $n = (u^2 + v^2)t + n_0$ alakban, ahol $0 \le n_0 < u^2 + v^2$. A $p = ut + u_0 n_0$ és $q = vt + v_0 n_0$ számokra igaz az, hogy $up + vq = n$, és ugyanakkor az $x = uq - pv = (uv_0 - vu_0)n_0$ szám nemnegatív, és nem nagyobb, mint $(uv_0 - vu_0)(u^2 + v^2)$, amely független n-től. Márpedig ezek a relációk azt jelentik, hogy $(u - iv)(p + iq) = n + ix$, ahol $0 \le x \le (uv_0 - vu_0)(u^2 + v^2)$.

Totik Vilmos megoldása

II. megoldás

Legyen α azon ívhez tartozó középponti szög, melyet az $(1+\varepsilon/2)n$ sugarú, origó középpontú körből a $0 \le y, z \le (1+\varepsilon)n/\sqrt{2}$ négyzet kimetsz az y, z síkon. α persze független n-től. Legyen k később rögzítendő pozitív egész. Legyen n olyan nagy, hogy $\sqrt{\varepsilon n} > 5^k$.

A -1 szám kvadratikus maradék (mod 5^k). Legyen ugyanis g primitív gyök (mod 5^k), és legyen $0 < s < \varphi(5^k) = 4 \cdot 5^{k-1}$ az a kitevő, amelyre $-1 \equiv g^s$ (mod 5^k). Ekkor $1 = (-1)^2 \equiv g^{2s}$, így $2s$ osztható a $\varphi(5^k) = 4 \cdot 5^{k-1}$ számmal, tehát s páros. Ezért az $X^2 \equiv -1$ (mod 5^k) kongruenciának van megoldása, és n^2-tel való végigszorzással kapjuk, hogy az $x^2 \equiv -n^2$ (mod 5^k) kongruencia is megoldható; legyen $0 < x \le 5^k < \sqrt{\varepsilon n}$ egy megoldás. Ekkor tehát $n^2 + x^2 = 5^k d = (2+i)^k(2-i)^k d$. A Gauss-egészek körében érvényes a számelmélet alaptétele, és $n + xi$ lényegében egyértelmű felbontása az $n - xi$ felbontásának tényezőnkénti konjugáltja. Továbbá $2 \pm i$ Gauss prím, mert normája 5, ami prímszám. Ezért $n + xi = (2+i)^u(2-i)^v\delta$, ahol $u + v \ge k$ és δ Gauss egész. Vegyük a $(2+i)^{u+v}\delta, (2+i)^{u+v-1}(2-i)\delta, \dots, (2+i)(2-i)^{u+v-1}\delta, (2-i)^{u+v}\delta$ számokat. Ez legalább $k+1$ különböző szám (a számelmélet alaptétele miatt, hiszen $2+i$ és $2-i$ nem asszociáltak). Az origó körüli $\sqrt{n^2+x^2}$ sugarú körön vannak, és argumentumaik számtani sorozatot alkotnak (mod 2π). Mivel $(2-i)/(2+i)$ argumentuma irracionális számszorosa π-nek (ellenkező esetben ugyanis valamilyen r természetes számra $(2-i)^r(2+i)^{-r} = 1$ lenne, ami nem lehetséges, hiszen $2+i$ és $2-i$ nem asszociáltak), így $(2-i)/(2+i)$ hatványai mindenütt sűrűek az egységkörön (lásd pl. Gyarmati–Turán: Számelmélet, 8.17. Tétel). Tehát elég nagy k esetén minden α hosszú ívbe belelépnek az $1, \dots, \left((2-i)/(2+i)\right)^k$ számok. Egy ilyen k-t rögzítve, minden elég nagy n-re működik a fenti gondolatmenet, és az említett legalább $k+1$ Gauss-egész között van olyan, – legyen ez $y + zi$ – melyre $\left|\arg(y+zi) - \pi/4\right| < \alpha/2$. Ekkor $y^2 + z^2 = n^2 + x^2$, $|y+zi| = |n+xi| < \sqrt{(1+\varepsilon)n^2} < (1+\varepsilon/2)n$. Ezekből $y, z < (1+\varepsilon)n/\sqrt{2}$ adódik az α definíciója miatt, amivel az állítást igazoltuk.

Frenkel Péter megoldása

14 dolgozat érkezett. Helyes Bérczi Gergely, Braun Gábor, Frenkel Péter, Lippner Gábor, Mátrai Tamás, Pap Gyula és Terpai Tamás dolgozata. Hiányos Halasi Zoltán és Kun Gábor dolgozata. Erősen hiányos Gyarmati Katalin és Juhász András dolgozata.

A 3. feladat megoldása

Mivel tetszőleges c pozitív kitevő esetén $n^c \ge 1$, ezért a feladat G-vel izomorf feszített részgráf hiánya esetén egy legalább 4 pontú alkalmas részgráf létezését kívánja. Természetesen ez csak elég nagy pontszám esetén lehetséges.

Segédtétel. *Legyenek n, k természetes számok, $k \ge 2$. Legyen adva egy gráf kn ponton, amelyek k darab n elemű részre vannak osztva, mondjuk ezek $S_1, \dots, S_k$. Ekkor vagy van a gráfnak olyan k pontú teljes részgráfja, amelynek mindegyik S_i-ben pontosan egy pontja van (az ilyet nevezzük átlósnak), vagy van olyan két olyan*

$$m = \left[n^{\frac{1}{k-1}}\right]$$

pontú részhalmaz, amelyek között nincs él, és amelyek közül az egyik egy S_i-ben, a másik egy S_j-ben van, $i \ne j$.

Bizonyítás: k szerinti teljes indukciót használunk. Ha $k = 2$, az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel most, hogy $k \geq 3$ és $k-1$ részre már ismerjük az állítás.

1. eset: van S_k-ban egy olyan pont, amelyből mindegyik S_i-be ($i \leq k-1$) legalább m^{k-2} él megy. Legyenek $T_1 \subset S_1, \ldots, = T_{k-1} \subset S_{k-1}$ ezzel a ponttal összekötött m^{k-2} elemű halmazok. Alkalmazzuk az indukciós feltevést arra a részgráfra, amelyet a T_i-k feszítenek ki. Ha ebben van teljes $k-1$-es átlós, azt kiegészítve a mi pontunkkal kapunk egy teljes k-as átlós részt az eredeti gráfban. Ha nincs, akkor vannak üres páros gráfot kifeszítő részek, amelyek elemszáma

$$\left[(m^{k-2})^{1/(k-2)}\right] = m,$$

ahogy kívántuk.

2. eset: ilyen pont nincs. Ekkor S_k minden pontjából valamelyik S_i-be $\leq m^{k-2}-1$ él megy. Van legalább $n/(k-1)$ olyan pont, amelyre ez az i érték közös. Válasszunk ki ezek közül m-et. Ezt megtehetjük, ha

$$n \geq (k-1)m. \tag{1}$$

Ezekből S_i-be összesen

$$\leq m(m^{k-2}-1) = m^{k-1} - m \leq n - m$$

él megy, így van m olyan pont, amelybe egy sem megy. Ez az m pont és a kiválasztott m adja a két m-es részt.

Ha pedig (1) nem teljesül, akkor

$$m^{k-1} \leq n < (k-1)m,$$

vagyis $m^{k-2} < k-1$. Mivel $2^{k-2} \geq k-1$, ezért ekkor $m = 1$, és a kívánt részgráf egyszerűen két össze nem kötött pont. Ilyen van, kivéve hogyha minden él be van húzva minden S_i, S_j között, amely esetben átlós k-as van.

Ezzel a segédtételt igazoltuk.

Legyen mármost G pontjainak száma k. Vegyünk fel az n pontú gráfban k darab $[n/k]$ elemszámú részt, ezek lesznek az S_i-k. Ha G-ben i és j össze van kötve, akkor megtartjuk az S_i és S_j közötti éleket, ha nem, megfordítjuk, vagyis pontosan akkor kötünk össze két élet az új gráfban, ha az eredetiben nem volt. Ekkor az új gráf átlós teljes gráfja az eredeti gráf G-vel izomorf feszített részgráfjának felel meg. Ha ilyen nincs, akkor a segédtétel szerint van két legalább

$$[n/k]^{1/(k-1)} \geq \frac{1}{2} n^{1/(k-1)}$$

elemszámú kupac valamely S_i, S_j-ben, amelyben az új gráfban nincs él. Ez az eredeti gráfban vagy üres, vagy teljes páros részgráf.

Braun Gábor és Ruzsa Imre megoldása

Megjegyzés.

Braun Gábor a következő általánosabb állítást mondja ki és bizonyítja: Legyen adva k szín, legyen G a teljes gráf egy k színt használó élszínezett példánya. Ekkor elég nagy pontszám esetén tetszőleges T teljes gráf k színnel történő élszínezése esetén találhatunk

T-nek egy teljes részgráfját, amely színezés tartó módon izomorf G-vel, vagy található két diszjunkt $n^{c(G)}$ nagyságú diszjunkt ponthalmaz, amelyek közötti élek nem használják fel az összes színt.

Valóban, T ponthalmazát osszuk fel $|V(G)|$ darab egyenlő diszjunkt halmazra (alkalmasan kicsi maradék ponthalmazzal) amelyeket G csúcsival azonosítunk. Ezen az osztályozott ponthalmazon definiálunk egy S gráfot a következő módon: két osztály között pontosan azokat az éleket húzzuk be, amelyek T-beli színe megegyezik a két osztálynak megfelelő G-beli csúcsok színével.

A segédtétel alapján ez az állítás könnyen belátható. Egy $|V(G)|$ elemszámú teljes részgráf S-ben megfelel G egy színtartó példányának T-ben, illetve két osztály közötti, nagy, üres, teljes páros gráf megfelel egy teljes páros gráfnak T-ben, amely élein lévő színek közül hiányzik az a szín, amely a két osztálynak megfelelő G-beli csúcsot összekötő él színe.

9 megoldás érkezett. Helyes Braun Gábor, Frenkel Péter, Gyarmati Katalin, Halasi Zoltán, Kun Gábor, Mátrai Tamás, Pap Gyula és Valkó Benedek megoldása.

A 4. feladat megoldása

W-ben minden végtelen rendű elemnek csak véges sok k-ra lehet k-adik gyöke. Legyen ugyanis f végtelen rendű korlátos permutáció, és tegyük fel, hogy $k > |x - f(x)|$ teljesül minden x egész számra. Ekkor nem lehet f-nek k-adik gyöke W-ben. Legyen ugyanis $g^k = f$ egy korlátos g-re és legyen $|x - g(x)|$ maximuma l. Vegyünk egy x egészet, melynek g-pályája n-nél nagyobb elemszámú (ilyen van, hiszen g is végtelen rendű). A $g^i(x)$ elemek $i = 0, 1, \ldots, n$ esetén különbözőek, de bármely kettő közül az egyik elérhető a másikból f-et legfeljebb n/k-szor alkalmazva, és g-t legfeljebb $k - 1$-szer alkalmazva. Így ezek az elemek egy $n + 1$ elemű részhalmazát adják az egészeknek, melynek átmérője maximum $(k - 1)(n/k + l)$, ami $n > lk(k - 1)$ esetén ellentmondás.

A kitűzők (Elek Gábor és Tardos Gábor) megoldása

15 megoldás érkezett. Helyes Bérczi Gergely, Borsányi Ákos, Braun Gábor, Frenkel Péter, Gyarmati Katalin, Halasi Zoltán, Kun Gábor, Lippner Gábor, Mátrai Tamás, Pap Gyula, Pete Gábor, Terpai Tamás és Timár Ádám megoldása. Erősen hiányos Hartmann Miklós megoldása.

Az 5. feladat megoldása

Tekintsük a

$$P(x) = x^n - y_n x^{n-1} - y_{n-1} x^{n-2} - \cdots - y_2 x - y_1$$

polinomot! Az y_j-k definíciója szerint

$$\int_0^1 P(x) x^{k-1} x^{\alpha+1} dx = \frac{1}{n+1+k+\alpha} - \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{1}{j+k+\alpha} = 0$$

minden $k = 1, 2, \cdots, n$-re, azaz P olyan n-edfokú polinom, amelyre

$$\int_0^1 P(x) Q(x) x^{\alpha+1} dx = 0 \tag{1}$$

minden legfeljebb $(n-1)$-edfokú Q polinomra. Könnyen látható, hogy ekkor P minden zérushelye valós és a $[0,1]$ intervallumba esik. Valóban, ha ez nem lenne igaz, akkor P legfeljebb $(n-1)$-szer váltana előjelet a $(0,1)$ intervallumban, így véve azt a Q-t amelynek azon $(0,1)$-beli pontok a zérushelyei amelyekben P előjelet vált, ellentmondásba kerülnénk (1)-gyel, hiszen a PQ polinom állandó előjelű $(0,1)$-en.

Legyenek $x_1,\dots,x_n$ a P zérushelyei. Ekkor $y_{n+1-j}=(-1)^{j+1}S_j$, ahol

$$S_j=\sum_{i_1<i_2<\dots<i_j} x_{i_1}\cdots x_{i_j}$$

az $x_1,\dots,x_n$ számok j-edik elemi szimmetrikus polinomja.

Az igazolandó állítás tehát az, hogy ha $x_1,\dots,x_n$ nemnegatívak, akkor

$$S_{n+2-j}S_{n-j}\le S^2_{n+1-j}$$

minden $1<j<n$-re, vagy ami ugyanaz, $S_{j-1}S_{j+1}\le S_j^2$ minden $1<j<n$-re, ami egy jól ismert egyenlőtlenség, de közvetlenül is könnyen látható. Valóban, mind az $S_{j-1}S_{j+1}$ szorzat, mind az S_j^2 szorzat

$$x_{i_1}^2\cdots x_{i_k}^2x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_{2j-k}}$$

alakú szorzatok összege. Egy ilyen szorzat az $S_{j-1}S_{j+1}$-ben csak úgy szerepelhet, hogy két olyan u és v, S_{j-1}-ben illetve S_{j+1}-ben fellépő tag szorzata, amelyek mindegyike tartalmazza az $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ tényezőket, és az $x_{i_{k+1}},\dots,x_{i_{2j-k}}$ tényezők közül pontosan $j-1-k$ szerepel u-ban, míg a többi v-ben fordul elő. Tehát a fenti tagot az $S_{j-1}S_{j+1}$ szorzat pontosan

$$\binom{2j-2k}{j-k-1}\text{-szer}$$

tartalmazza. Ugyanez a gondolatmenet adja, hogy a fenti tagot az S_j^2 szorzat pontosan

$$\binom{2j-2k}{j-k}\text{-szer}$$

tartalmazza. Mármost az $S_{j-1}S_{j+1}\le S_j^2$ egyenlőtlenség azonnal adódik abból, hogy

$$\binom{2j-2k}{j-k-1}\le\binom{2j-2k}{j-k}$$

minden $k<j$-re.

A kitűző (Totik Vilmos) és Braun Gábor megoldása

Megjegyzések.

1. A versenyzők többsége a Crámer szabály alapján megoldotta az egyenletrendszert, és az előforduló determinánsokat explicit módon kiszámolta. Ez az egyenletrendszer speciális alakja miatt éppen lehetséges volt, de hosszadalmas számolással járt.

2. A fenti megoldás bizonyos más egyenletrendszerek esetén is adja a feladat állítását, ilyen pl. az

$$\sum_{j=0}^{n-1} y_j\frac{1}{(j+k)!}=\frac{1}{(n+k)!},\qquad k=0,\dots,n-1$$

egyenletrendszer.

13 dolgozat érkezett. Helyes Bérczi Gergely, Borsányi Ákos, Braun Gábor, Frenkel Péter, Gerbicz Róbert, Juhász András, Kun Gábor, Lippner Gábor, Mátrai Tamás, Nikolényi István, Pap Gyula és Valkó Benedek megoldása. Hiányos Terpai Tamás dolgozata.

A 6. feladat megoldása

Tekintsük az

$$e^{ik2\pi x}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

teljes ortonormált rendszert $L^2(0,1)$-ben, és legyen

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik2\pi x}$$

ill.

$$g_j(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{k,j} e^{ik2\pi x}, \qquad j = 1, 2, 3,$$

ahol a jobb oldalakon a Fourier-sorfejtések állnak a fenti rendszer szerint, azaz pl.

$$a_k = \int_0^1 f(t) e^{-ik2\pi t}\, dt$$

minden k-ra. Legyen $c_0 = a_0$. Mivel a $g_j(x + c_j)$ függvény Fourier-együtthatói a

$$b_{k,j} e^{ik2\pi c_j}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

számok, áttérve Fourier-sorokra az állítás az, hogy ha $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l_2$ (a két irányban végtelen l_2), $a_0 = 0$, akkor $j = 1, 2, 3$-ra vannak olyan $\{b_{k,j}\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l_2$ sorozatok és c_j valós számok, hogy

$$a_k = \sum_{j=1}^{3} (e^{ik2\pi c_j} - 1) b_{k,j} \tag{1}$$

teljesül minden k-ra. Könnyen látható, hogy ha

$$C_k = \sum_{j=1}^{3} \left| e^{ik2\pi c_j} - 1 \right|,$$

és

$$\sum_k \frac{a_k^2}{C_k^2} < \infty, \tag{2}$$

akkor (1) megoldható l_2-beli $\{b_{k,j}\}$-kel. Ugyanis ha egy adott k-ra $j_k \in \{1, 2, 3\}$ jelöli azt az indexet, amelyre $\left| e^{ik2\pi c_j} - 1 \right|$ maximális, akkor legyen

$$b_{k,j_k} = \frac{a_k}{e^{ik2\pi c_{j_k}} - 1},$$

és a másik kettő $b_{k,j}$ legyen 0. Ezek megoldják (1)-et, és (2) miatt a $\{b_{k,j}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $j = 1, 2, 3$ sorozatok mind l_2-ben vannak.

Megmutatjuk, hogy ha a c_j-ket véletlenül választjuk, akkor (2) majdnem biztosan fennáll. Legyen $d(x_1, x_2, x_3)$ az (x_1, x_2, x_3) pont távolsága a hozzá legközelebbi egész koordinátájú ponttól R^3-ban. Nyilvánvalóan $C_k/d(kc_1, kc_2, kc_3)$ két pozitív konstans között van k-tól függetlenül, ezért elég megmutatni, hogy vannak olyan c_j számok, amelyekre $\{a_k/d(kc_1, kc_2, kc_3)\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l_2$. Ehhez elegendő igazolni, hogy

$$(3) \qquad \int_{[0,1]^3} \sum_k \frac{a_k^2}{d(kc_1, kc_2, kc_3)^2} dc_1\, dc_2\, dc_3 < \infty.$$

Ez ugyanaz, mint

$$(4) \qquad \sum_k a_k^2 \int_{[0,1]^3} \frac{1}{d(kc_1, kc_2, kc_3)^2} dc_1\, dc_2\, dc_3 < \infty,$$

és ez utóbbi integrál független k-tól. Valóban, ha a $kc_j \to x_j$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor, mivel az integrandusz minden változójában 1 szerint periodikus, azt kapjuk, hogy az integrál ugyanaz, mint

$$\frac{1}{k^3} \int_{[0,k]^3} \frac{1}{d(x_1, x_2, x_3)^2} dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_{[0,1]^3} \frac{1}{d(x_1, x_2, x_3)^2} dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Továbbá ez az integrál véges, mert azon pontok mértéke a $[0, 1]^3$ kockában, amelyre $d(x_1, x_2, x_3) < r \le 1/2$, megegyezik az r sugarú gömb térfogatával, azaz $4r^3\pi/3$-mal, és így pl. az integrál kisebb, mint

$$4 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (2^{-l})^3 \pi}{3(2^{-(l+1)})^2} < 30.$$

Tehát (3) és (4) igaz, hiszen $\{a_k\} \in l_2$.

Totik Vilmos és lényegében Frenkel Péter megoldása

3 dolgozat érkezett. Helyes Frenkel Péter dolgozata. Erősen hiányos Braun Gábor dolgozata.

A 7. feladat megoldása

Vegyük észre, hogy ha egy megoldás egy 2 hosszú $[a, b] \subset [0, \infty)$ intervallumon pozitív, akkor minden $x > b$-re pozitív. Ebből azonnal következik, hogy ha azon megoldásokat, amelyek valahonnan kezdve pozitívak, megszorítjuk a $[0, 1]$ intervallumra, akkor a $C[0, 1]$ egy nem üres nyílt halmazát kapjuk (ugyanis az elég egyszerűen látható, hogy ha két megoldás közel van $[0, 1]$-n, akkor minden előre adott véges intervallumon is közel vannak egymáshoz). Ugyanígy a valahonnan kezdve negatív megoldásokból kapjuk a $C[0, 1]$ egy másik, az előzőtől diszjunkt nem üres nyílt részhalmazát. De $C[0, 1] \setminus \{f_0\}$ (ahol f_0 az azonosan 0 függvényt jelöli) összefüggő, így a fenti két halmazon kívül van még egy $u \in C[0, 1] \setminus \{f_0\}$ függvény, és ezt a differenciálegyenlet segítségével folytatva olyan megoldást kapunk, amely nem azonosan 0, és nem is pozitív illetve negatív valahonnan kezdve, azaz a zéróhelyeinek halmaza nem korlátos.

Ha netán ez a megoldás nem lenne differenciálható $[0,\infty)$-en, akkor toljuk el balra 2 egységgel.

Több versenyző megoldása alapján

4 megoldás érkezett. Helyes Mátrai Tamás, Pap Gyula és Pete Gábor megoldása. Hiányos Terpai Tamás megoldása.

A 8. feladat megoldása

Legyen T' egy T-től különböző zárt konvex alakzat a C körvonalon belül, ami C minden pontjából T-vel azonos szögben látszik. Ekkor nyilván nem lehet $T \cap T' = \emptyset$ és T ill. T' egyike sem tartalmazhatja a másikat.

Létezik olyan $P \in C$ pont, hogy a belőle T-hez ill. T'-höz állított egy-egy támaszegyenes egybeesik (legyen ez az egyenes e). Ekkor, a látószögek egyenlősége miatt a P pontból a T-hez ill. T'-höz állított másik támaszegyenesek is egybeesnek (legyen ez az egyenes f). Legyen az $f \cap C$-nek a P-től különböző Q pontjából a T-hez (és T'-höz) állított másik támaszegyenes g. Legyenek a T-nek egy-egy e-re, f-re ill. g-re eső pontja rendre E, F és G; a T'-nek ezekre eső valamely pontjai E', F', G'. Először tegyük fel, hogy $\{E, F, G\}$-t csak egyféleképp választhattuk (azaz T egyik oldala sem esik $e \cup f \cup g$-re).

Ha most az EF és $E'F'$ szakaszoknak van pontosan egy közös pontjuk, akkor P-t megfelelő irányba elmozdítva a C-n, nagyobb szögben látjuk $E'F'$-t, mint EF-et (és így T-t). Hasonló igaz az FG és $F'G'$ szakaszokra és a Q pontra. Tehát a megfelelő szakaszok nem metszhetik egymást pontosan egy pontban, amiből következik, hogy vagy $E = E'$, $F = F'$ és $G = G'$ (amit kizárhatunk $T \not\subset T'$ miatt), vagy pedig az EG és $E'G'$ szakaszok egy pontban metszik egymást. Ekkor viszont $e \cap (C \backslash f)$ és $g \cap (C \backslash f)$ közül a megfelelőt kiválasztva, és felhasználva, hogy belőle EG ugyanolyan szögben látszik, mint T, ismét azt kapjuk, hogy $E'G'$ nagyobb szögben látszik T-nél.

Maradt az a lehetőség, hogy az e, f, g egyenesek valamelyikére esik T egy oldala. Könnyen látható, hogy ekkor $e \cap g$ pontja T-nek. Feltehető, hogy g az az egyenes, aminek T-vel vett metszete egy oldal. Ha ugyanis f lenne ilyen (e-t szimmetria okokból kizárhatjuk), akkor vegyük az $e \cap (C \backslash f)$ -ben T-hez húzott e-től különböző e' támaszegyenest és az (e', e, f) egyeneshármast tekintsük az eddigi (e, f, g) helyett.

Korábbi okoskodásunk alapján most is feltehető, hogy $|EF \cap E'F'| \neq 1$ (hiszen e-re és f-re ismét csak egy-egy T-beli pont esik), sőt, $EF \cap E'F' = \emptyset$ is igaz kell legyen. Valóban, máskülönben $E' = E = e \cap g$, vagyis $e \cap g$ pontja T'-nek is. Mivel T és T' is az e, f, g egyenesek által bezárt háromszögbe esik, $e \cap g$-n végtelen sok olyan egyenes megy át, ami T-t és T'-t is csak e pontban metszi. Ezek közül alkalmasat választva és a C-vel vett metszéspontjaiban felvéve a másik támaszegyenest T-hez (és T'-höz), a kapott három egyenesre alkalmazható az első gondolatmenet.

Tehát $EF \cap E'F' = \emptyset$, így F' közelebb van P-hez, mint F. De akkor a $g \cap (C \backslash f)$ pontból a T'-höz más g-től különböző támaszegyenes tartozik, mint T-hez, és $F'G'$ (és így T') nagyobb szögben látszik innen, mint T. Ezzel az utolsó eset is ellentmondásra vezetett.

Timár Ádám megoldása alapján

11 dolgozat érkezett. Helyes Bérczi Gergely, Frenkel Péter, Kun Gábor, Lippner Gábor és Mátrai Tamás dolgozata. Hiányos Pap Gyula, Terpai Tamás és Timár Ádám dolgozata. Erősen hiányos Juhász András dolgozata.

A 9. feladat megoldása

Ha a két konvex sokszöglap egymásba nem nyúló, akkor egy őket (gyengén) elválasztó egyenes jó lesz. Tegyük fel, hogy egymásba nyúlóak. Legyen K és L két konvex halmaz, melyeket úgy kapunk, hogy a sokszöglapokat az oldalaik fölé rajzolt (elég kis) körszeletekkel egészítjük ki. Legyenek $\varphi : S^1 \to \partial K$ és $\psi : S^1 \to \partial L$ homomorfizmusok, melyekre $\varphi(e^{k2\pi i/n}) = P_k$ és $\psi(e^{k2\pi i/n}) = Q_k$ $(k = 1, \dots, n)$. (Itt S^1 a komplex sík egységköre). Minden $\varepsilon \in S^1$ irányhoz egyértelműen létezik egy ε irányú e_ε irányított egyenes, amely által meghatározott bal oldali félsík φ szerinti őstképe S^1-en ugyanolyan hosszú, mint a jobb oldali félsík ψ szerinti ősképe. Valóban, legyen l egy, az ε irányra merőleges egyenes. Minden ε irányú e egyenest egyértelműen meghatározza, hogy az l mely pontján megy át. Ha ez a P pont, akkor e helyett írjunk $e(P)$-t. Mármost az $e(P)$ által meghatározott bal oldali félsík φ szerinti ősképének ill. a jobb oldali félsík ψ melletti ősképének a hossza a P-nek ellentés értelmű folytonos és szigorúan monoton függvényei, ezért e két hossz különbsége is a P-nek folytonos és szigorúan monoton függvénye. Továbbá ez a különbség a 2π ill. -2π értékeket egyaránt felveszi amikor K és L egyszerre vannak az $e(P)$ meghatározta bal ill. jobb oldali félsíkban. Ezekből már következik, hogy ez a különbség egyetlen helyen veszi fel a nullát, amivel e_ε létezését és egyértelműségét igazoltuk.

Világos, hogy e_ε pontosan kétszer metszi a ∂K és ∂L határokat. Legyen $f_0(\varepsilon)$ ill. $g_0(\varepsilon)$ az e_ε irányítása szerinti második metszéspont ∂K-n ill. ∂L-en. Legyen $f_1(\varepsilon)$ illetve $f_2(\varepsilon)$ azon ε irányú irányított támaszegyenes támasztási pontja, melytől K balra, illetve jobbra esik, és $g_1(\varepsilon)$ illetve $g_2(\varepsilon)$ ugyanez L-re. Világos, hogy ha $|\varepsilon' - \varepsilon|$ elég kicsi, akkor $f_0(\varepsilon')$ a ∂K határ $f_1(\varepsilon)$ és $f_2(\varepsilon)$ által meghatározott $f_0(\varepsilon)$-t tartalmazó ívének fix kis környezetébe esik. Továbbá, bármely ε' irányra, e_ε és $e_{\varepsilon'}$ metszik egymást $K \cup L$-ben, különben az $e_{\varepsilon'}$ által meghatározott félsíkok φ, illetve ψ szerinti ősképei szigorú tartalmazási relációban állnának az e_ε által meghatározottakéival, ami lehetetlen. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy f_0 folytonos. Hasonlóan látható, hogy g_0 folytonos.

Tekintsük most a $\gamma_i = \varphi^{-1} \circ f_i$ és $\delta_i = \psi^{-1} \circ g_i : S^1 \to S^1$ folytonos leképezéseket. Feltehetjük, hogy ∂K volt pozitívan és ∂L negatívan irányítva. Ekkor γ_1 és γ_2 körülfordulási száma 1, a δ_1 és δ_2 függvényeké pedig -1. γ_0 sohasem egyezik meg γ_1-gyel vagy γ_2-vel, ezért γ_0 körülfordulási száma is 1; ugyanúgy δ_0 körülfordulási száma -1. Ezért létezik ε^* úgy, hogy $\gamma_0(\varepsilon^*) = \delta_0(\varepsilon^*)$.

Állítjuk, hogy az e_{ε^*} egyenes megfelel a feladat feltételeinek. Valóban, a szerinte vett

$$I_\varphi = \{\varepsilon : \varphi(\varepsilon) \text{ a bal félsíkban}\} \subset S^1$$

és

$$I_\psi = \{\varepsilon : \psi(\varepsilon) \text{ a jobb félsíkban}\} \subset S^1$$

ívek megegyeznek, hiszen ugyanolyan hosszúak (az e_{ε^*} tulajdonsága alapján), és az óramutató járásával megegyező irányban vett közös végpontjuk e^*. Mármost P_k (Q_k) akkor és csakis akkor van az e_{ε^*} egyenes bal (jobb) oldalán, ha $e^{k2\pi i/n} \in I_\varphi$ ($e^{k2\pi i/n} \in I_\psi$), és így az I_φ és I_ψ ívek megegyezése azt jelenti, hogy P_k és Q_k az e_{ε^*} egyenesnek mindig ellentétes oldalára esnek, és ezt kellett igazolnunk.

Frenkel Péter megoldása

12 megoldás érkezett. Helyes Frenkel Péter megoldása. Erősen hiányos Bérczi Gergely, Braun Gábor, Mátrai Tamás, Pap Gyula, Terpai Tamás és Valkó Benedek megoldása.

A 10. feladat megoldása

A bizonyítást a k számra vonatkozó indukcióval végezzük. Szükségünk lesz két segédtételre:

1. Segédtétel. *Ha az F zárt felület irányítható, akkor $F \times \mathbb{R}$ diffeomorfan beágyazható az $\mathbb{R}^3$ térbe.*

Bizonyítás: Jól ismert tény, hogy egy F irányítható felület megkapható tóruszok összefüggő uniójaként. Ezért F beágyazható egy $F \subset \mathbb{R}^3$ részsokaságként $\mathbb{R}^3$-ba. Az F felület irányíthatósága miatt F-en globálisan értelmezhető az egységvektorokból álló $n(q)$ $(q \in F)$ normális vektormező. Minden $(q,t) \in F \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ pontra (itt $\varepsilon > 0$ rögzített) tekintsük a $\Phi(q,t) = q + t \cdot n(q) \in \mathbb{R}^3$ pontot. Az inverz függvény tétel értelmében a Φ leképezés az $F \times \{0\}$ minden pontjának egy környezetében diffeomorfizmus. Az F kompaktságát felhasználva azonnal kapjuk, hogy létezik olyan, elegendően kicsi $\varepsilon_0 > 0$ szám, amire $\Phi : F \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^3$ diffeomorf beágyazás $\mathbb{R}^3$-ba. Mivel a $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ intervallum diffeomorf $\mathbb{R}$-rel, kapjuk a segédtétel állítását.

2. Segédtétel. *Ha az F zárt felület nem irányítható és $n \geq 2$, akkor $F \times \mathbb{R}^n$ diffeomorfan beágyazható az $\mathbb{R}^{n+3}$ térbe.*

(Megjegyezzük, hogy ezen segédtétel állítása az n érték növelésével triviális módon gyengül, tehát a segédtétel legerősebb esete az $n = 2$.)

Bizonyítás: Az előbbi bizonyítást módosítjuk. Ismert tény, hogy létezik $j : F \to \mathbb{R}^3$ immerzió, azaz minden pontban 2 rangú leképezés (lásd: Hilbert–Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie). Az $\mathbb{R}^3$ teret úgy fogjuk fel, mint az $\mathbb{R}^{n+3}$ tér első 3 koordinátatengelye által kifeszített alteret. Az $n + 3 \geq 5 = 2 \cdot \dim F + 1$ feltétel miatt egy generikus $\iota : F \to \mathbb{R}^{n+3}$ leképezés már beágyazás (Whitney), ezért van a j immerziónak tetszőlegesen kicsi $\iota : F \to \mathbb{R}^{n+3}$ beágyazás perturbációja. Ezen perturbáció kicsinysége miatt az $\mathbb{R}^{n+3}$ tér utolsó n tengelye által kifeszített V altér a $\iota(F)$ sokaság minden p pontjában transzverzális lesz a $\iota(F)$ p-beli érintőterére. Ortogonalizációval azonnal kapjuk, hogy a $\iota(F)$ sokaság $\mathbb{R}^{n+3}$-beli normálnyalábja tartalmaz egy $E \approx \iota(F) \times \mathbb{R}^n$, $\iota(F) \times \mathbb{R}^n$-nel izomorf, azaz triviális résznyalábot. Minden $p \in \iota(F)$ pont esetén tekintsük az E nyaláb p pont feletti E_p fibrumából az ε_0-nál rövidebb ($\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < 1$ kicsi fix szám) vektorok W_p halmazát. Az előző segédtétel bizonyításához hasonló módon kapjuk, hogy az $\bigcup_{p \in \iota(F)} W_p$ halmaz az $F \times \mathbb{R}^n$ sokasággal diffeomorf részsokasága $\mathbb{R}^{n+3}$-nak. Valóban, alkossanak a $\iota(F)$ feletti $Y_1, \ldots, Y_n$ sima normálvektor-mezők egy ortonormált rendszert. Minden $p \in \iota(F)$ ponthoz és $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz rendeljük hozzá a $\Psi(p, \vec{x}) = p + \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \in \mathbb{R}^{n+3}$ pontot. A feltételek szerint a Ψ leképezés a $\iota(F) \times \mathbb{R}^n$ nyaláb 0 szelésének minden pontjában maximális, azaz $n + 2$ rangú, tehát lokális beágyazás az ilyen pontokban. Az F kompaktságát felhasználva kapjuk tehát, hogy a Ψ leképezés diffeomorfan beágyazza $\mathbb{R}^{n+3}$-ba a $\iota(F) \times \mathbb{R}^n$ nyaláb ε_0-nál rövidebb vektorai halmazát, ha az ε_0 elegendően kicsinek van választva.

Ezután már könnyen elvégezhetjük az indukciós bizonyítást. A $k = 1$ esetben az állítás igaz, mivel jól ismert, hogy minden irányítható zárt felület beágyazható $\mathbb{R}^3$-ba, illetve minden nem irányítható zárt felület beágyazható az $\mathbb{R}^4$ térbe (Whitney).

Nézzük most az indukciós lépést! Legyen $k > 1$, $M = F_1 \times M' = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_k$, és az F_i zárt felületek közül pontosan s darab nem irányítható. Tegyük fel először, hogy

F_1 irányítható. Az indukciós feltevés szerint az $M' = F_2 \times \cdots \times F_k$ sokaság beágyazható az $\mathbb{R}^{2k+s-1}$ térbe. Emiatt tehát az $M = F_1 \times M'$ sokaság beágyazható az $F_1 \times \mathbb{R}^{2k+s-1} = (F_1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2k+s-2}$ térbe. Az első segédtétel szerint viszont az $F_1 \times \mathbb{R}$ tér beágyazható az $\mathbb{R}^3$ térbe, és így végül az $M = F_1 \times M'$ tér beágyazható lesz a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{2k+s-2} = \mathbb{R}^{2k+s+1}$ térbe.

Nézzük meg végül azt az esetet, amikor F_1 nem irányítható! Ekkor az $M' = F_2 \times \cdots \times F_k$ sokasághoz tartozó beágyazási dimenzió érték $2k + s - 2$ lesz, ami ezúttal 3-mal kisebb az $M = F_1 \times M'$ sokaságra bizonyítandó értéknél. Az indukciós feltevés szerint az $M = F_1 \times M'$ tér beágyazható az $F_1 \times \mathbb{R}^{2k+s-2}$ szorzatba, ahol most az $n = 2k + s - 2$ szám legalább 3. A 2. segédtételünk így azonnal adja az indukciós lépést.

Szűcs András és Simányi Nándor megoldása

Megjegyzés

Bebizonyítható, hogy a feladat állítása éles, vagyis, hogy a feladatban leírt sokaság a feladatban megadottnál alacsonyabb dimenziós euklideszi térbe soha nem ágyazható be. Ez az ún. karakterisztikus osztályok segítségével látható be. (Lásd: Husemoller: Fibre bundles, vagy Milnor–Stasheff: Characteristic classes.)

3 dolgozat érkezett. Hiányos Frenkel Péter dolgozata. Erősen hiányos Valkó Benedek dolgozata.

A 11. feladat megoldása

Először egy olyan összefüggést igazolunk, melyet mindvégig használni fogunk. Legyen

$$F_n = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} H_m.$$

Ekkor a következő összefüggés teljesül bármely $\alpha \geq 1$ esetén:

$$(1) \qquad P(i_1, \ldots, i_j \notin F_n) = \prod_{m>n} \left(1 - \frac{j}{m^\alpha}\right)^m, \quad 0 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq \lfloor n^\alpha \rfloor.$$

Valóban, felhasználva a valószínűségi változók teljes függetlenségét:

$$\begin{aligned} P(i_1, \ldots, i_j \notin F_n) &= P\Bigg(\bigcap_{m>n} \bigcap_{k=1}^{m} \{ \lfloor m^\alpha U_{m,k} \rfloor \neq i_1, \ldots, i_j \} \Bigg) = \\ &= \prod_{m>n} \prod_{k=1}^{m} P(\lfloor m^\alpha U_{m,k} \rfloor \neq i_1, \ldots, i_j) = \\ &= \prod_{m>n} \prod_{k=1}^{m} P\left(U_{m,k} \notin \bigcup_{l=1}^{j} \left[\frac{i_l}{m^\alpha}, \frac{i_l + 1}{m^\alpha} \right) \right) = \\ &= \prod_{m>n} \left(1 - \frac{j}{m^\alpha} \right)^m, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy az $[i_l/m^\alpha, (i_l + 1)/m^\alpha)$ intervallumok páronként diszjunktak és $[0, 1)$ részei, továbbá, hogy az $U_{m,k}$ változók a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásúak.

A megoldás vázlata ezek után a következő:

I. $\alpha \leq 2$ esete;

II. $\alpha > 2$ esete:

1. $p_k^{(n)}$ becslése (definícióját lásd alább);
2. $\alpha > 3$ esete;
3. $2 < \alpha \leq 3$ esete.

I. Legyen tehát mostantól kezdve $\alpha \leq 2$. Először is vegyük észre, hogy

$$\prod_{m>n} \left(1 - \frac{1}{m^\alpha}\right)^m = 0. \tag{2}$$

Ehhez elég megmutatni, hogy

$$\sum_{m>n} m \ln\left(1 - \frac{1}{m^\alpha}\right) = -\infty.$$

Ez pedig egyszerűen következik az $\ln(1+x) \leq x$ egyenlőtlenségből, amely minden $x > -1$ számra fennáll (esetünkben $x = -1/m^\alpha$):

$$\sum_{m>n} m \ln\left(1 - \frac{1}{m^\alpha}\right) \leq \sum_{m>n} m\left(-\frac{1}{m^\alpha}\right) = -\sum_{m>n} \frac{1}{m^{\alpha-1}} = -\infty.$$

Az (1) és (2) formulákból egyszerűen adódik, hogy

$$P(i \notin F_n) = 0, \quad 0 \leq i \leq \lfloor n^\alpha \rfloor,$$

és így 1 valószínűséggel $H_n \subseteq \{0, 1, \ldots, \lfloor n^\alpha \rfloor\} \subseteq F_n$. Ezért elég megmutatni, hogy H_n elemszáma (a továbbiakban $|H_n|$) 1 valószínűséggel nem korlátos, ha $n \to \infty$. Ha $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}$ az x szám „felső egész része", akkor

$$\{|H_n| \geq \log n\} \supseteq \bigcap_{i=2}^{\lceil \log n \rceil} \left\{\lfloor n^\alpha U_{n,i} \rfloor \neq \lfloor n^\alpha U_{n,1} \rfloor, \ldots, \lfloor n^\alpha U_{n,i-1} \rfloor\right\} = \bigcap_{i=2}^{\lceil \log n \rceil} A_i.$$

Tehát A_i az az esemény, hogy $U_{n,i} \notin \cup_{j=1}^{i-1}\left[\lfloor n^\alpha U_{n,j} \rfloor / n^\alpha, \left(\lfloor n^\alpha U_{n,j} \rfloor + 1\right)/n^\alpha\right)$, ennek valószínűsége pedig – feltéve, hogy $A_2, \ldots, A_{i-1}$ bekövetkezett, azaz $\lfloor n^\alpha U_{n,1} \rfloor, \ldots, \lfloor n^\alpha U_{n,i-1} \rfloor$ különbözők – egy kicsivel több, mint $1 - (i-1)/n^\alpha$. (Ha valamilyen $j < i$ számra $\lfloor n^\alpha U_{n,j} \rfloor = \lfloor n^\alpha \rfloor$, akkor az $\left[\lfloor n^\alpha U_{n,j} \rfloor / n^\alpha, \left(\lfloor n^\alpha U_{n,j} \rfloor + 1\right)/n^\alpha\right)$ intervallum kilóghat $[0, 1]$-ből.) Tehát

$$P(|H_n| \geq \log n) \geq P\left(\bigcap_{i=2}^{n} A_i\right) = \prod_{i=2}^{\lceil \log n \rceil} P(A_i \mid A_2 \cap \cdots \cap A_{i-1}) \geq \tag{3}$$

$$\geq \prod_{i=2}^{\lceil \log n \rceil} \left(1 - \frac{i-1}{n^\alpha}\right) > \left(1 - \frac{\lceil \log n \rceil}{n^\alpha}\right)^{\lceil \log n \rceil} \geq 1 - \frac{\lceil \log n \rceil^2}{n^\alpha},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a Bernoulli-egyenlőtlenség $\big((1+x)^n \ge 1+nx,\ x \ge -2,\ n \in \mathbb{N}\big)$ speciális esete. Mindezekből látható, hogy $\lim_{n\to\infty} P\big(|H_n| \ge \log n\big) = 1$, továbbá a $|H_n|$ valószínűségi változók teljesen függetlenek, így a Borel–Cantelli lemma alapján a $\big\{|H_n| \ge \log n\big\}$ események közül 1 valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik, ami maga után vonja a $\big(|H_n|\big)$ sorozat nem korlátos voltát. Azaz a $\big(|H_n|\big)$ sorozat 1 valószínűséggel nem korlátos. [A Versenybizottság megjegyzése: A jelen $\alpha \in [1,2]$ esetben Valkó Benedek ugyanígy gondolkodik és a fentinél többet bizonyít, nevezetesen azt, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} P\big(|H_n \cap F_n| \le \sqrt{n}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} P\big(|H_n| \le \sqrt{n}\big) < \infty$.]

II. 1. Legyen k rögzített pozitív egész és legyen

$$p_k^{(n)}(i_1,\dots,i_k) = P(i_1,\dots,i_k \in F_n), \quad 0 \le i_1 < \dots < i_k \le \lfloor n^\alpha \rfloor.$$

A továbbiakban kiderül, hogy $p_k^{(n)}\ (i_1,\dots,i_k)$ értéke nem függ az $i_1,\dots,i_k$ számoktól, ezért a későbbiekben majd röviden csak $p_k^{(n)}$-t fogunk írni. Célunk $\alpha > 2$ esetén igazolni, hogy

$$p_k^{(n)} \approx \frac{1}{n^{k(\alpha-2)}}, \tag{4}$$

ahol $\approx$ a gyenge aszimptotikát jelöli. (Ha (a_n), (b_n) két pozitív tagú sorozat, akkor $a_n \approx b_n$ definíció szerint pontosan akkor, ha léteznek $c_1, c_2 > 0$ konstansok úgy, hogy minden n indexre $c_1 a_n < b_n < c_2 a_n$.)

Itt $p_k^{(n)}(i_1,\dots,i_k)$ annak a valószínűsége, hogy az $i_1 \notin F_n$, $i_2 \notin F_n, \dots, i_n \notin F_n$ események egyike sem következik be. Ezt számítsuk ki a szitaformulával, felhasználva az (1) egyenlőséget:

$$p_k^{(n)}(i_1,\dots,i_k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \prod_{m>n} \left(1 - \frac{j}{m^\alpha}\right)^m. \tag{5}$$

Innen rögtön adódik, hogy $p_k^{(n)}(i_1,\dots,i_k)$ nem függ az $i_1,\dots,i_k$ számoktól. A továbbiakban az (5) egyenletben szereplő végtelen szorzatok igen pontos megbecslésére lesz szükségünk.

Az ln függvényt 1 körüli hatványsora elejével becsülve:

$$\ln\left(1 - \frac{j}{m^\alpha}\right) = -\sum_{\ell=1}^{k} \frac{j^\ell}{\ell m^{\ell\alpha}} - O\left(\frac{j^{k+1}}{m^{(k+1)\alpha}}\right).$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{m>n} m \ln\left(1 - \frac{j}{m^\alpha}\right) = -\sum_{m>n} m \left(\sum_{\ell=1}^{k} \frac{j^\ell}{\ell m^{\ell\alpha}} + O\left(\frac{j^{k+1}}{m^{(k+1)\alpha}}\right)\right) =$$
$$= -\sum_{\ell=1}^{k} \frac{j^\ell}{\ell} \sum_{m>n} \frac{1}{m^{\ell\alpha-1}} - O\Big(j^{k+1} \sum_{m>n} \frac{1}{m^{(k+1)\alpha-1}}\Big). \tag{6}$$

A rövidség kedvéért legyen $S_{n,\beta} = \sum_{m>n} 1/m^\beta$. Ismeretes, hogy ez a sor $\beta > 1$ esetén konvergens és

$$S_{n,\beta} \approx \frac{1}{n^{\beta-1}} \quad (\beta > 1 \text{ rögzített}).$$

$\alpha > 2$ miatt a (6) képletben szereplő összes ilyen sor konvergens ($\ell\alpha - 1 \geq \alpha - 1 > 1$). Ezt a jelölést használva alkalmazzuk a fenti (6) összefüggésre az exponenciális függvényt, és az exponenciális függvényt becsüljük a zérus körüli Taylor-sorának elejével:

$$\prod_{m>n}\left(1-\frac{j}{m^\alpha}\right)^m = \exp\left(-\sum_{\ell=1}^{k}\frac{j^\ell}{\ell}S_{n,\ell\alpha-1} - O\left(j^{k+1}S_{n,(k+1)\alpha-1}\right)\right) =$$

$$= \sum_{t=0}^{k}\frac{1}{t!}\left(-\sum_{\ell=1}^{k}\frac{j^\ell}{\ell}S_{n,\ell\alpha-1} - O\left(j^{k+1}S_{n,(k+1)\alpha-1}\right)\right)^t +$$

$$+ O\left(\left(-\sum_{\ell=1}^{k}\frac{j^\ell}{\ell}S_{n,\ell\alpha-1} - O\left(j^{k+1}S_{n,(k+1)\alpha-1}\right)\right)^{k+1}\right).$$

A hatványozásokat a polinomiális tétel szerint elvégezve egy olyan összeget kapunk, melynek tagjai

$$\text{konstans}\cdot j^\ell\prod_{i=1}^{v}S_{n,\ell_i\alpha-1}^{t_i} \qquad \left(\sum_{i=1}^{v}\ell_i t_i = \ell,\ 1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_v\right)$$

alakúak. Egy ilyen tag gyengén aszimptotikusan ekvivalens az $n^{-\sum_{i=1}^{v} t_i(\ell_i\alpha-2)}$ kifejezéssel.

$$\sum_{i=1}^{v}t_i(\ell_i\alpha-2) = \left(\sum_{i=1}^{v}t_i\ell_i\right)\alpha - 2\sum_{i=1}^{v}t_i = \ell\alpha - 2\sum_{i=1}^{v}t_i \geq \ell\alpha - 2\sum_{i=1}^{v}\ell_i t_i = \ell\alpha - 2\ell = \ell(\alpha-2),$$

és itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\ell_1 = \cdots = \ell_v = 1$, azaz ha $v = 1, \ell_1 = 1, t_1 = \ell$. Innen látható, hogy $\ell \geq k$ esetén a tag nagyságrendje legfeljebb $1/(nk^{(\alpha-2)})$, és csak 1 tag esetén pontosan ennyi, mégpedig amelyik az $\ell_1 = 1, t_1 = k, v = 1$ értékekhez tartozik: $\frac{(-1)^k}{k!\cdot k^k}j^k \cdot S_{n,\alpha-1}^k$.

Az $\ell < k$ indexekhez tartozó tagokat csoportosítva j-nek egy legfeljebb $(k-1)$-edfokú polinomját kapjuk, melyben az együtthatók nem függnek j-től (de n-től igen), ugyanis ilyen tag nem származik egyetlen hibából ($O(\dots)$ kifejezésből) sem. Tehát

$$\prod_{m>n}\left(1-\frac{j}{m^\alpha}\right)^m = g_n(j) + \frac{(-1)^k}{k!\cdot k^k}\cdot j^k\cdot S_{n,\alpha-1}^k + O\left(\frac{1}{n^{k(\alpha-2)+q}}\right),$$

(itt $q > 0$ és q csak α-tól és k-tól függ,) ahol g_n egy legfeljebb $(k-1)$-edfokú polinom, melynek együtthatói nem függnek j-től, de n-től függhetnek. Behelyettesítve az (5) egyenletbe és a következő lemmát felhasználva kapjuk, hogy

$$p_k^{(n)} = p_k^{(n)}(i_1,\dots,i_k) = \frac{1}{k^k}S_{n,\alpha-1}^k + O\left(\frac{1}{n^{k(\alpha-2)+q}}\right) \approx \frac{1}{n^{k(\alpha-2)}}. \tag{7}$$

Segédtétel. *Legyen $g \in \mathbb{R}[x]$ legfeljebb k-adfokú polinom, és jelölje a az x^k együtthatóját. Ekkor*

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}g(j) = (-1)^k\cdot k!\cdot a \qquad (k \geq 0).$$

Bizonyítás: k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Tekintve, hogy a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldala g-ben lineáris, elég az egyenlőséget az $1, x, x^2, \ldots, x^k$ bázisra igazolni. Az 1 polinomra az állítás a következő jól ismert azonosság:

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } k=0 \\ 0, & \text{ha } k>0. \end{cases}$$

Ezzel egyúttal a $k=0$ esetet is elintéztük. $k>0$ és $1 \le t \le k$ esetén

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{j}j^t = \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}j^t = \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\cdot k\binom{k-1}{j-1}j^{t-1} =$$

$$= (-k)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}(i+1)^{t-1} = \begin{cases} 0, & \text{ha } t<k \\ (-1)^k\cdot k!, & \text{ha } t=k, \end{cases}$$

ahol az utolsó egyenlőségnél az indukciós feltevést alkalmaztuk az $(x+1)^{t-1}$ polinomra. Ezzel az egyenlőséget az $x, x^2, \ldots, x^k$ polinomokra is beláttuk.

2. Legyen

$$x_n = |H_n \cap F_n| = \left|H_n \cap \bigcup_{m=n+1}^{\infty} H_m\right|.$$

Az $\lfloor n^\alpha U_{n,1}\rfloor, \lfloor n^\alpha U_{n,2}\rfloor, \ldots, \lfloor n^\alpha U_{n,n}\rfloor$ változók mindegyike csak véges sok értéket vehet fel, együttesen is csak véges sokféle értékük lehet. Aszerint, hogy ezen változók milyen értékeket vesznek fel, kapunk egy véges $B_1, \ldots, B_\eta$ teljes eseményrendszert. Vegyünk egy tetszőleges $1 \le t \le \eta$ egész számot. A B_t esemény bekövetkezésekor $H_n = \{i_1, \ldots, i_\ell\}$ ($\ell \le n$) valamilyen $1 \le i_1 < \cdots < i_\ell \le \lfloor n^\alpha\rfloor$ egészekre. Alkalmazva a Bonferroni-egyenlőtlenséget és az $\{U_{m,k}\}$ változók függetlenségét:

$$P(x_n \ge k \mid B_t) = P\big(\text{az } i_j \in F_n \ (1 \le j \le \ell) \text{ események közül}$$

$$\text{legalább } k \text{ bekövetkezik} \mid B_t\big) \le$$

$$\le \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le \ell} P(i_{j_1}, \ldots, i_{j_k} \in F_n \mid B_t) = \binom{\ell}{k}p_k^{(n)} \le \binom{n}{k}p_k^{(n)},$$

(itt $\binom{\ell}{k} = 0$, ha $\ell < k$) így a teljes valószínűség tétele szerint:

$$P(x_n \ge k) = \sum_{t=1}^{\eta} P(x_n \ge k \mid B_t)P(B_t) \le \sum_{t=1}^{\eta}\binom{n}{k}p_k^{(n)}P(B_t) = \binom{n}{k}p_k^{(n)} \le \frac{c}{n^{k(\alpha-3)}},$$

felhasználva, hogy $\binom{n}{k} \approx n^k$ és $p_k^{(n)} \approx 1/n^{k(\alpha-2)}$ rögzített k-ra (c egy k-tól függő konstans). Legyen $\alpha > 3$, és a k számot válasszuk olyan nagy pozitív egésznek, hogy $\alpha > 3 + 1/k$. Ekkor $k(\alpha-3) > 1$, így $\sum_{n=1}^{\infty} P(x_n \ge k) \le c\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{k(\alpha-3)} < +\infty$, azaz 1 valószínűséggel az $\{x_n \ge k\}_{n=1}^{\infty}$ események közül csak véges sok következik be a Borel–Cantelli lemma miatt. De ha csak véges sok n-re teljesül $x_n \ge k$, akkor az (x_n) sorozat korlátos. Ezzel beláttuk, hogy $\alpha > 3$ esetén az (x_n) sorozat 1 valószínűséggel korlátos.

3. Mostantól kezdve feltételezzük, hogy $2 < \alpha \leq 3$. Hasonló gondolatmenettel, mint ahogy az I. részben a (3) képletet igazoltuk megmutatható, hogy

$$P(|H_n| = n) \geq \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{n^\alpha}\right) \geq \left(1 - \frac{n-1}{n^\alpha}\right)^{n-1} \geq 1 - \frac{(n-1)^2}{n^\alpha},$$

és mivel $\alpha > 2$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} P(|H_n| = n) = 1. \tag{8}$$

Legyen k rögzített pozitív egész, továbbá legyen $\varepsilon = \alpha - 2$. Emlékeztetünk arra, hogy aszerint, hogy az $\lfloor n^\alpha U_{n,1}\rfloor, \dots, \lfloor n^\alpha U_{n,n}\rfloor$ változók milyen értéket vesznek fel, kaptuk a $B_1, \dots, B_\eta$ teljes eseményrendszert. Legyen $1 \leq t \leq \eta$ olyan, hogy a B_t eseménynél $|H_n| = n$, $H_n = \{i_1, \dots, i_n\}$. A következő becsléshez a Bonferroni-egyenlőtlenséget és a (7) összefüggést használjuk. A q-t olyan kicsi pozitív számnak választjuk, hogy (7) fennálljon akkor is, ha k helyére $(k+1)$-et helyettesítünk. Ki fogjuk használni, hogy $2 < \alpha \leq 3$ következtében $0 < \varepsilon \leq 1$.

$$\begin{aligned}
P(x_n \geq k \mid B_t) &= P\big(\text{az } i_j \in F_n \ (1 \leq j \leq n) \text{ események közül}\\
&\qquad\qquad \text{legalább } k \text{ bekövetkezik} \mid B_t\big) \geq\\
&\geq P\big(\text{az } i_j \in F_n \ (1 \leq j \leq n^\varepsilon) \text{ események közül}\\
&\qquad\qquad \text{legalább } k \text{ bekövetkezik} \mid B_t\big) \geq\\
&\geq \binom{\lfloor n^\varepsilon\rfloor}{k} p_k^{(n)} - k\binom{\lfloor n^\varepsilon\rfloor}{k+1} p_{k+1}^{(n)} =\\
&= \binom{\lfloor n^\varepsilon\rfloor}{k}\left(\frac{1}{k^k} S_{n,\alpha-1}^k\right) + O\left(\frac{1}{n^{k(\alpha-2)+q}}\right) -\\
&\quad - k\binom{\lfloor n^\varepsilon\rfloor}{k+1}\left(\frac{1}{(k+1)^{k+1}} S_{n,\alpha-1}^{k+1} + O\left(\frac{1}{n^{(k+1)(\alpha-2)+q}}\right)\right) =\\
&= \binom{\lfloor n^\varepsilon\rfloor}{k} S_{n,\alpha-1}^k \left(\frac{1}{k^k} - \frac{k}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{\lfloor n^\varepsilon\rfloor - k}{k+1} S_{n,\alpha-1}\right) + O\left(\frac{1}{n^q}\right).
\end{aligned}$$

Itt $O(1/n^q)$ a hibatagokból származik az $\binom{\lfloor n^\varepsilon\rfloor}{k} \approx n^{\varepsilon k}$, $\binom{\lfloor n^\varepsilon\rfloor}{k+1} \approx n^{\varepsilon(k+1)}$ és $S_{n,\alpha-1} \approx 1/n^{\alpha-2} = 1/n^\varepsilon$ becsléseket felhasználva. Tekintve, hogy $S_{n,\alpha-1} \approx 1/n^\varepsilon$, létezik olyan $a > 0$ konstans, hogy $\limsup_{n\to\infty} n^\varepsilon S_{n,\alpha-1} \leq a$ és így

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k^k} - \frac{k}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{\lfloor n^\varepsilon\rfloor - k}{k+1} S_{n,\alpha-1}\right) \geq \frac{1}{k^k} - \frac{k}{(k+1)^{k+2}} \cdot a.$$

A jobb oldalon pozitív szám áll, ha $a < (k+1)^{k+2}/k^{k+1} = (k+1)(1+1/k)^{k+1}$, ami biztosan fennáll, ha k α-tól függően elég nagy (a csak α-tól függ). Minthogy $\binom{\lfloor n^\varepsilon\rfloor}{k} S_{n,\alpha-1}^k \approx n^{\varepsilon k}(1/n^\varepsilon)^k = 1$, így végül is a következő eredményre jutunk:

Ha k α-tól függően elég nagy, akkor létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy minden elég nagy n-re és az n-hez tartozó B_t-re, melyre $|H_n| = n$, fennáll, hogy $P(x_n \geq k \mid B_t) \geq c$. Ekkor

$$P(x_n \geq k) = \sum_{t=1}^{\eta} P(x_n \geq k \mid B_t)P(B_t) \geq \sum_{\substack{t=1 \\ B_t \subseteq \{|H_n|=n\}}}^{\eta} c\,P(B_t) = c\,P\big(|H_n| = n\big).$$

Így (8)-at figyelembe véve következik, hogy $\liminf_{n\to\infty} P(x_n \geq k) > 0$. A Fatou-lemmát alkalmazva kapjuk, hogy ha k elég nagy, akkor

$$P\Big(\limsup_n \{x_n \geq k\}\Big) \geq \limsup_n P(x_n \geq k) \geq \liminf_n P(x_n \geq k) > 0.$$

Legyen $\mathcal{A}_n = \sigma(U_{n,1}, \dots, U_{m,n})$ az $U_{n,1}, \dots, U_{n,n}$ változók által generált σ-algebra. Ekkor az $\mathcal{A}_n$ σ-algebrák teljesen függetlenek ($n = 1, 2, \dots$), továbbá $\limsup_n \{x_n \geq k\} \in \sigma(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{A}_{n+2}, \dots)$, így a Kolmogorov-féle 0–1 törvény szerint

$$P\Big(\limsup_n \{x_n \geq k\}\Big) \in \{0, 1\}.$$

De nagy k-ra ezen valószínűség – mint fentebb kimutattuk – pozitív, így szükségképpen $P\big(\limsup_n \{x_n \geq k\}\big) = 1$. Tehát ha k elég nagy, akkor 1 valószínűséggel végtelen sok n-re teljesül $x_n \geq k$, amiből következik, hogy az (x_n) sorozat 1 valószínűséggel nem korlátos.

Braun Gábor megoldása

9 dolgozat érkezett. Helyes Braun Gábor és Valkó Benedek dolgozata. Hiányos Frenkel Péter dolgozata. Erősen hiányos Kun Gábor, Lippner Gábor és Pete Gábor dolgozata.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

ISSN 0025-519X

Nyomdai munkák: Modok és Társa Kft., Kiskunhalas – Tel.: 77/421-344/153