312.046
VIII
1957
1-4

MATEMATIKAI LAPOK

VIII. ÉVFOLYAM

1-2.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1957

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.

Budapest, 1957. június, VIII. évfolyam 1—2. szám.

Felelős szerkesztő: Turán Pál.

Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd.

Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.

A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.

Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat, Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850. Csekkszámlaszám: 61 257.

Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat: József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.

Előfizetés egy évre 20,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Neumann János † 1

Szabó Árpád: Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? I. . . . 8

Császár Ákos: A topológikus tér fogalmáról, I. 37

Rényi Kató: Egy végtelen lineáris egyenletrendszerről 61

Szüsz Péter: Megjegyzések a számjegyek eloszlásáról valós számok Cantor-sorában 68

Egerváry Jenő: A differenciálokról 79

Erdős Pál: Néhány geometriai problémáról 86

Péter Rózsa: A Grzegorczyk-féle korlátozottan rekurzív függvények és az Ackermann-féle majorizációs módszer 93

Mikolás Miklós: A $\sum_{k=1}^{\infty}{}' k^{-(2\nu+1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sorok zárt alakja és a $\zeta(s, u)/\zeta(s)$ hányados 100

Molnár József: A kétdimenziós topológikus Helly-tételről 108

Bihari Imre: Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek megoldásának többértelműségéről 115

A Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatainak francia nyelvű szövege 120

Feladatrovat 134

Példarovat 144

Hírek 158

Társulati élet 161

Könyvismertetés 181

NEUMANN JÁNOS

1957. február 8-án halt meg Washingtonban korunk egyik legnagyobb matematikusa, Neumann János. Neumann 1903. december 28-án született Budapesten, itt is tett érettségi vízsgálatot. 1921—23-ban a berlini egyetemen tanult, majd a zürichi műegyetemen 1925-ben vegyészmérnöki oklevelet szerzett. Doktori címét Fejér Lipótnál szerezte 1926-ban Budapesten. Ugyanezen évben magántanárrá habilitálta a berlini egyetem, majd 1929-ben a hamburgi egyetem. 1930-ban a princetoni egyetem hívta meg, majd 1933-ban az akkor alapított Institut for Advanced Study professzora lett, mely poziciót haláláig tartotta. Tudományos munkássága elismeréseképp díszdoktorává fogadta a princetoni egyetem 1947-ben, a Pennsylvania- és Harward-egyetemek 1950-ben, az istambuli és a Maryland-egyetemek 1952-ben, a müncheni műegyetem 1953-ban, a Columbia-egyetem 1954-ben. Tagjául választotta az USA-ban a National Academy of Sciences és az American Academy of Arts and Sciences, a holland királyi akadémia, a római Accademia Nazionale dei Lincei, a milanoi Istituto Lombardo di Scienze e Lettere és a limai Academia Nacional de Ciencias Exactas. A Magyar Tudományos Akadémián is jelölték levelező tagnak 1935-ben, de nem választották be. Sokirányú egyéb működése közül megemlíthető, hogy 1955-től az U. S. Atomic Energy Commission tagja volt.

Matematikai munkáinak ismertetését egy cikksorozat lesz hivatva elvégezni. E munkák sokféle iránya már dolgozatainak jegyzékéből is kitűnik, melyet az alábbiakban közlünk.

NEUMANN JÁNOS MUNKÁINAK JEGYZÉKE

1922 1. Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome. Fekete Mihállyal együtt. *Jahresb.*, 31 (1922), pp. 125—138.

1923 2. Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen. *Acta Szeged*, 1 (1923), pp. 199—208.

1925 3. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Jour. f. Math., 154 (1925), pp. 219—240.

1925 4. Egyenletesen sűrű számsorozatok. Math. Phys. Lapok, 32 (1925), pp. 32—40.

1926 5. Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen. *Acta Szeged*, 2 (1926), pp. 193—227.

6. Az általános halmazelmélet axiomatikus felépítése (doktori disszertáció, Tud. Egy. Budapest) l. 18. (1926).

1927 7. Über die Grundlagen der Quantenmechanik. D. Hilbert és L. Nordheimel együtt. Math. Ann., 98 (1927), 1—30.

8. Zur Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. (1927), 76—90.

9. Mathematische Begründung der Quantenmechanik. Gött. Nach. (1927), pp. 1—57.

10. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. Gött. Nach. (1927), 245—272.

11. Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten. Gött. Nach. (1927), pp. 273—291.

12. Zur Hilbertschen Beweistheorie. Math. Zschr., 26 (1927), pp 1—46.

1928 13. Allgemeine Eigenwerttheorie symmetrischer Funktionaloperatoren. „Habilitationsschrift", Univ. of Berlin (1928), l. 30.

14. Zerlegung des Intervalles in abzählbar viele kongruente Teilmengen. Fund. Math., 11 (1928), pp. 230—238.

15. Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen. Math. Ann. 99 (1928), pp. 134—141.

16. Über die Definition durch transfinite Induktion, und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre. Math. Ann., 99 (1928), pp. 373—391.

17. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Math. Ann., 100 (1928), pp. 295—320.

18. Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zschr., 27 (1928), pp. 669—752.

19. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons, I. E. Wignerrel együtt. Zschr. f. Phys., 47 (1928), pp. 203—220.

20. Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Drehelektrons. Zschr. f. Phys., 48 (1928), pp. 868—881.

21. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons, II. E. Wignerrel együtt. Zschr. f. Phys., 49 (1928), pp. 73—94, l. 19.

22. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons, III. E. Wignerrel együtt. Zschr. f. Phys., 51 (1928), pp. 844—858, l. 19.

1929 23. Über eine Widerspruchfreiheitsfrage der axiomatischen Mengenlehre. Journ. f. Math., 160 (1929), pp. 227—241.

24. Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen. Math. Zschr., 30 (1929), pp. 3—42.

25. Über merkwürdige diskrete Eigenwerte. E. Wignerrel együtt. Phys. Zschr., 30 (1929), pp. 465—467.

26. Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen. E. Wignerrel együtt. Phys. Zschr., 30 (1929), pp. 467—470.

27. Beweis des Ergodensatzes und des *H*-Theorems in der neuen Mechanik. Zschr. f. Phys., 57 (1929), pp. 30—70.

1929 28. Zur allgemeinen Theorie des Maasses. Fund. Math., 13 (1929), pp. 73—116.
29. Zusatz zur Arbeit „Zur allgemeinen ...“ Fund. Math., 13 (1929), pp. 333. Cf. 28.
30. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Ann., 102 (1929), pp. 49—131.
31. Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren. Math. Ann., 102 (1929), pp. 370—427.
32. Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen. Journ. f. Math., 161 (1929), pp. 208—236.

1930 33. Über einen Hilfssatz der Variationsrechnung. Hamb. Abh., 8 (1930), pp. 28—31.

1931 34. Über Funktionen von Funktionaloperatoren. Ann. Math., 32 (1931), pp. 191—226.
35. Algebraische Repräsentanten der Funktionen „bis auf eine Menge vom Maasse Null.“ Journ. f. Math., 161 (1931), pp. 109—115.
36. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren. Math. Ann., 104 (1931), pp. 570—578.
37. Bemerkungen zu den Ausführungen von Herrn St. Leşniewski über meine Arbeit „Zur Hilbertschen Beweistheorie.“ Fund. Math., 17 (1931), pp. 331—334.
38. Die formalistische Grundlegung der Mathematik. Report to the Congress, Königsberg, Sept. 1931. Erkenntniss, 2, pp. 116—121.

1932 39. Zum Beweise des Minkowskischen Satzes über Linearformen. Math. Zschr., 30 (1932), pp. 1—2.
40. Über adjungierte Funktionaloperatoren. Ann. Math., 33 (1932), pp. 294—310.
41. Proof of the quasi-ergodic hypothesis. NAS Proc., 18 (1932), pp. 70—82.
42. Physical applications of the quasi-ergodic hypothesis. NAS Proc., 18 (1932), pp. 263—266.
43. Dynamical systems of continuous spectra. B. O. Koopmannal együtt. NAS Proc., 18 (1932), pp. 255—263.
44. Über einen Satz von Herrn M. H. Stone. Ann. Math., 33 (1932), pp. 567–573.
45. Einige Sätze über messbare Abbildungen. Ann. Math., 33 (1932), pp. 574—586.
46. Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik. Ann. Math., 33 (1932), pp. 587—642.
47. Zusätze zur Arbeit „Zur Operatorenmethode ...“ Ann. Math., 33 (1932), pp. 789—791, l. 46.
47a. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. J. Springer, Berlin (1932); Dover Publications, New York (1943); Presses Universitaires de France, (1947); Instituto de Mathematicas „Jorge Juan“, Madrid (1949), angol fordítása. Princeton University Press, 1955.

1933 48. Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen. Ann. Math., 34 (1933), pp. 170—190.
49. A koordináta-mérés pontosságának határai az elektron Dirac-féle elméletében (Über die Grenzen der Koordinatenmessungsgenauigkeit in der Diracschen Theorie des Elektrons). Mat. és Természettud. Értesítő, 50 (1933), pp. 366—385.

1934 50. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. P. Jordan és E. Wigner-rel együtt. Ann. Math., 35 (1934), pp. 29—64.
51. Zum Haarschen Maß in topologischen Gruppen. Compos. Math., 1 (1934), pp. 106—114.
52. Almost periodic functions in a group. I. AMS Trans., 36 (1934), pp. 445—492.
53. The Dirac equation in projective relativity. A. H. Taub és O. Veblennel együtt. NAS Proc., 20 (1934), pp. 383—388.

1935 54. On complete topological spaces. AMS Trans., 37 (1935), pp. 1—20.
55. Almost periodic functions in groups. II. S. Bochnerrel együtt. AMS Trans., 37 (1935), pp. 21—50.
56. On compact solutions of operational-differential equations. I. S. Bochnerrel együtt. Ann. Math., 36 (1935), pp. 255—291.
57. Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators. Actualités Scient. et Ind. Series. No. 229. Exposés Math., publiés à la mémoire de J. Herbrand, No. 13, Paris (1935), 20 pp.
58. On normal operators. NAS Proc., 21 (1935), pp. 366—369.
59. On inner products in linear metric spaces. P. Jordannal együtt. Ann. Math., 36 (1935), pp. 719—723.
60. The determination of representative elements in the residual classes of a Boolean algebra. M. H. Stone-nal együtt. Fund. Math., 25 (1935), pp, 353—378.

1936 61. On a certan topology for rings of operators. Ann. Math., 37 (1936), pp. 111—115.
62. On rings of operators. F. J. Murray-val együtt. Ann. Math., 37 (1936), pp. 116—229.
63. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism (Part I). Mat. Sbornik, 1 (1936), pp. 415—484.
64. The uniqueness of Haar's measure. Mat. Sbornik, 1 (1936), pp. 721—734.
65. The logic of quantum mechanics. G. Birkhoffal együtt. Ann. Math., 37 (1936), pp. 823—843.
66. Continuous geometry. NAS Proc., 22 (1936), pp. 92—100.
67. Examples of continuous geometries. NAS Proc., 22 (1936), pp. 101—108.
68. On regular rings. NAS Proc., 22 (1936), pp. 707—713.

1937 69. On some analytic sets defined by transfinite induction. C. Kuratowski-val együtt. Ann. Math., 38 (1937), pp. 521—525.
70. On rings of operators, II. F. J. Murray-val együtt. AMS Trans., 41 (1937), pp. 208—248.
71. Some matrix-inequalities and metrization of matrix-space. Tomsk. Univ. Rev., 1 (1937), pp. 286—300.
72. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Erg. eines Math. Coll., Vienna, edited by K. Menger, 8 (1937), pp. 73—83.
73. Algebraic theory of continuous geometries. NAS Proc., 23 (1937), pp. 16—22.
74. Continuous rings and their arithmetics. NAS Proc., 23 (1937), pp. 341—349.

1938 75. On infinite direct products. Compos. Math., 6 (1938), pp. 1—77.

1940 76. On the transitivity of perspective mappings. I. Halperin-nel együtt. Ann. Math., 41 (1940), pp. 87—93.

1940 77. On rings of operators, III. Ann. Math., 41 (1940), pp. 94—161.

78. Minimally almost periodic groups. E. Wignerrel együtt. Ann. Math., 41 (1940), pp. 746—750.

78a. The estimation of the probable error from successive differences R. H. Kenttel együtt. Aberdeen Proving Ground, Md., Report No 175 (1940), 19 pp.

1941 79. The mean square successive difference. R. H. Kent, H. R. Bellinson és B. I. Hart-tal együtt. Ann. Math. Stat., 12 (1941), pp. 153—162.

80. Fourier integrals and metric geometry. I. J. Schoenberggel együtt. AMS Trans., 50 (1941), pp. 226—251.

81. Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance. Ann. Math. Stat., 12 (1941), pp. 367—395.

1942 82. A further remark concerning the distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance. Ann. Math. Stat., 13 (1942), pp. 86—88.

83. Operator methods in classical mechanics, II. P. R. Halmossal együtt. Ann. Math., 43 (1942), pp. 332—350.

84. The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars, I. S. Chandrasekharral együtt. Astrophys. J., 95 (1942), pp. 489—531.

85. Tabulation of the probabilities for the ratio of the mean square successive difference to the variance. By B. I. Hart, with a note by J. von Neumann. Ann. Math. Stat., 13 (1942), pp. 207—214.

86. Approximative properties of matrices of high finite order. Portugaliae Math., 3 (1942), pp. 1—62.

1943 87. On rings of operators, IV. F. J. Murray-val együtt. Ann. Math., 44 (1943), pp. 716—808.

88. The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars. II. The speed of fluctuations; dynamical friction; spatial correlations. S. Chandrasekharral együtt. Astrophys. J., 97 (1943), pp. 1—27.

89. On some algebraical properties of operator rings. Ann. Math., 44 (1943), pp. 709—715.

1944 90. Theory of Games and Economic Behavior. O. Morgensternnel együtt. Princeton Univ. Press (1944, 1947, 1953), 625 pp.

1945 90a. A model of general economic equilibrium. Rev. Economic Studies, 13 (1), (1945—46), pp. 1—9.

1946 91. Solution of linear systems of high order. V. Bargmann és D. Montgomery-vel együtt. Report prepared for Navy BuOrd under Contract Nord—9596 (25 Oct. 1946), 85 pp.

92. Prelinimary discussion of the logical design of an electronic computing instrument. Part I, Vol. I. A. W. Burks és H. H. Goldstine-nel együtt. Report prepared for U. S. Army Ord. Dept. under Contract W-36-034-ORD-7481 (28 June 1946, 2nd ed. 2 Sept. 1947), 42. pp.

1947 93. The Mathematician. „The Works of the Mind." U. of Chicago Press (1947), pp. 180 - 196.

94. Numerical inverting of matrices of high order. H. H. Goldstine-nel együtt. AMS Bull., 53 (1947), pp. 1021—1099.

1947 95. Planning and coding of problems for an electronic computing instrument. Part II, Vol. I. H. H. Goldstine-nel együtt. Report prepared for U. S. Army Ord. Dept. under Contract W-36-034-ORD-7481 (1947), 69 pp.

1948 96. Planning and coding of problems for an electronic computing instrument. Part II, Vol. II. H. H. Goldstine-nel együtt. Report prepared for U. S. Army Ord. Dept. under Contract W-36-034-ORD-7481 (1948), 68 pp.

97. Planning and coding of problems for an electronic computing instrument. Part II, Vol. III. H. H. Goldstine-nel együtt. Report prepared for U. S. Army Ord. Dept. under Contract W-36-034-ORD-7481 (1948), 23 pp.

98. On the theory of stationary detonation waves, File No. X122 (20 Sept. 1948) BRL, Aberdeen Proving Ground, Md., 26 pp.

1949 99. On rings of operators. Reduction Theory. Ann. Math. 50 (1949), pp. 401—485.

1950 100. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. R. D. Richtmyerrel együtt. J. App. Phys. 21 (1950), pp. 232—237.

101. Functional Operators — Vol. I: Measures and Integrals. Ann. Math. Studies, No. 21, 261 pp; Vol. II: The Geometry of Orthogonal Spaces. Ann. Math. Studies, No. 22, 107 p. Princeton U. Press (1950).

102. Solutions of games by differential equations. G. W. Brownnal együtt. "Contributions to the Theory of Games". Ann. Math. Studies No. 24, Princeton U. Press (1950), pp. 73—79.

103. Statistical treatment of values of first 2000 decimal digits of e and of π calculated on the ENIAC. N. C. Metropolis és G. Reitwiesner-rel együtt. Math. Tables and Other Aids to Comp., 4 (1950), pp. 109—111.

104. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. J. G. Charney és R. Fjœrtofttal együtt. Tellus 2 (1950), pp. 237—254.

105. A theorem on unitary representations of semisimple Lie groups. I. E. Segallal együtt. Ann. Math. 52 (1950), pp. 509—517.

1951 106. Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes. Math. Nach. 4 (1950—50), pp. 258—281.

107. The Future of High-Speed Computing. Proc., Camp. Sem., Dec. 1949, published and copyrighted by IBM (1951), p. 13.

108. Discussion on the existence and uniqueness or multiplicity of solutions of the aerodynamical equations. (Chap. 10 of "Problems of Cosmical Aerodynamics", Proceedings of the Symposium on the Motion of Gaseous Masses of Cosmical Dimensions held at Paris, Aug. 16—19, 1949. Central Air Doc. Office (1951), pp. 75—84.

109. Numerical inverting of matrices of high order, II. H. H. Goldstine-nel együtt. AMS Proc. 2 (1951), pp. 188—202.

110. Various techniques used in connection with random digits. (Chap. 13 of proceedings of symposium on "Monte Carlo Method" held June—July 1949 in Los Angeles. National Bureau of Standards, Applied Math. Series 12 (June 11, 1951), pp. 36—38.

111. The General and Logical Theory of Automata. "Cerebral Mechanisms in Behavior — The Hixon Symposium", Sept. 1948, Pasadena, edited by L. A. Jeffress. John Wiley and Sons, Inc. New York (1951), pp. 1—31.

1952 112. Five notes on Continuous Geometry, Prepared by W. Givens for use of participants in seminar at Univ. of Tenn., summer 1952. Includes nos. 66, 67, 68, 73, 74.

1953 113. A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem. "Contributions to the Theory of Games", Vol. II. Ann. Math. Studies, No. 28. Princeton Univ. Press 1953, pp. 5—12.

114. Two variants of poker. D. B. Gillies és J. P. Mayberry-vel együtt. "Contributions to the Theory of Games", Vol. II. Ann. Math. Studies, No. 28. Princeton Univ. Press 1953, pp. 13—50.

1954 115. Significance of Loewner's theorem in the quantum theory of collisions. E. P. Wignerrel együtt. Ann. Math. 59 (1954), pp. 418—433.

116. The Role of Mathematics in the Sciences and in Society. Address before Assoc. of Princeton Graduate Alumni, June 16, 1954.

117. A numerical method to determine optimum strategy. Naval Res. Logistics Quarterly, Vol. 1, No 2, June (1954), pp. 109—115.

118. The NORC and Problems in High Speed Computing. Speech at first public showing of IBM Naval Ordnance Research Calculator, Dec. 2, 1954.

119. Entwicklung und Ausnutzung neuerer mathematischer Maschinen. Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 45. Düsseldorf, Sept. 15, 1954.

1955 120. Can we Survive Technology? Fortune, June 1955.

121. On the Permutability of Self-Adjoint Operators. A. Devinatz és A. E. Nussbaum-mal együtt. Ann. Math. 62 (1955), pp. 199—203.

122. Continued Fraction Expansion of $2^{1/3}$. Bryant Tuckermannal együtt. Math. Tables & Other Aids to Computation, IX, No. 49, Jan. 1955.

123. Blast Wave Calculation. H. H. Goldstine-nel együtt. Comm. Pure & Applied Math., Vol. VIII (1955), pp. 327—353.

1956 124. Probabilistic Logics and the Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components. "Automata Studies", edited by C. F. Shannon and J. McCarthy. Princeton Univ. Press 1956, pp. 43—98.

Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? I.

SZABÓ ÁRPÁD

Ennek a tanulmánynak a célja az, hogy kimutassa: a görög matematika mint deduktív tudomány az eleai filozófia hatására született meg legkésőbb az i. e. 5. század első felében; ezt megelőzően az eleaták fogalmazták meg tudatosan először az európai gondolkozás történetében a logika alapelveit, deduktív matematika pedig nem lehetséges mindaddig, amíg a matematikus nem építheti tételeinek igazolását az általa már jól ismert és tudatosan alkalmazott logikára. A kitűzött célnak megfelelően a dolgozat az alábbi *négy* fejezetre oszlik: az I. fejezetben röviden vázolom, hogy milyen újabb kérdéseket vetett föl a görög matematika történetével kapcsolatban a régebbi ókori keleti népek matematikájának alaposabb megismerése; a II.-ban ismertetem a görög matematika kibontakozására vonatkozó újabb elgondolásokat; a III.-ban összefoglalom azokat a legfontosabb antik adatokat és a hozzájuk fűződő modern tudománytörténeti megállapításokat, amelyekre saját elgondolásom épül; végül pedig a IV.-ben a matematikai indirekt bizonyítás vizsgálatával kapcsolatban kifejtem véleményemet az egzakt görög tudomány létrejöttéről.

I.

A legutóbbi évtizedek során több jelentős tudománytörténeti jellegű dolgozat foglalkozott az ókori Egyiptom és Babylón népeinek matematikai ismereteivel.[1] Ezek a kutatások nemcsak azzal az eredménnyel jártak, hogy jobban megismertük a görögség előtti ókori kultúrák matematikáját, hanem újabb ismereteink módosították a görögségről és a tudomány kezdeteiről alkotott elképzelé-

[1] Lásd ezeknek az eredményeit összefoglalva B. L. v. d. WAERDEN, Science awakening, Groningen, 1954 c. munkájának első három fejezetében.

seinket is. Amíg nem ismertük az egyiptomi és babylóni matematikát, több-kevesebb joggal a görögöket tarthattuk a matematika megteremtőinek. De egyszerre más lett a helyzet akkor, amikor kiderült, hogy sok matematikai felismerés, amelyet a görög hagyomány az i. e. 6. vagy 5. századra datált, már évszázadokkal korábban közismert volt a görögség előtti kultúrákban. Pythagoras életkorát pl. a görög hagyomány az i. e. 6. századra teszi, és ennek megfelelően i. e. 6. századi eredetű lehetne az a Pythagoras tétele néven emlegetett felismerés, amelyet a hagyomány Pythagorasnak tulajdonít. A modern kutatók közül azonban régebben sokan kétségbevonták ezt a hagyományt azért, mert nem tartották lehetőnek, hogy egy ilyen fontos tételt már ilyen *korán*, a tudománynak szinte a kezdetén fölismertek volna.[2] Más értelme lett azonban a modern tudomány szkepszisének az antik hagyománnyal szemben akkor, amikor kiderült, hogy ismerték a Pythagoras-tétel gyakorlati alkalmazását a babylóniak már az i. e. 2. évezredben is.[3] Hasonlóképpen kiderült az Euklidés művében rendszerezett matematikai tudásanyag nagy részéről, hogy az — legalábbis mint empirikus ismeret — már jóval a görögök előtt készen volt a babylóni kultúrában.[4]

Megismertük a görög tudomány előzményeit, s ezáltal a görögök a tudománytörténet szempontjából szinte elveszítették régi nimbuszukat. Mint a görögség előtti matematika történetének egyik kutatója, O. NEUGEBAUER mondja: amióta nemcsak azt a két és félezer évet tekinthetjük át, amely a klasszikus görög kor óta eltelt, hanem amióta többé-kevésbé ismerjük azt a másik két és félezer évet is, amely a görög kor *elé* esik, azóta nem tekinthetjük a görögöket a tudomány megteremtőinek.[5] Mai megítélésünk szerint a görög matematika már nem a tudomány történetének a kezdetén, hanem valahol a közepe táján helyezkedik el.[6] Sőt, NEUGEBAUER éppen a babylóni matematikára gondolva fölvetette azt a kérdést is:

[2] Vö. B. L. v. d. WAERDEN, Die Arithmetik der Pythagoreer I. c. dolgozatával (Math. Ann. 120 1947/49 127—153; különösen 132. lap)

[3] Vö. O. NEUGEBAUER, Vorlesungen über die Geschichte der antiken math. Wissenschaften, Berlin 1934, 168. lap és K. REIDEMEISTER, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949, 51. lap.

[4] Vö. O. NEUGEBAUER, Studien zur Geschichte der antiken Algebra III. (Quellen und Studien zur Gesch. der Math. Abt. B. Bd. 3, 1936 245—259): „Sowohl im Bereich der Elementargeometrie, wie im Bereich der elementaren Proportionenlehre wie schließlich im Bereich der Gleichungslehre liegt in der babylonischen Mathematik das gesamte *inhaltliche* Material geschlossen vor, auf dem die griechische Mathematik aufbaut. Der Anschluß ist in allen Punkten praktisch lückenlos herzustellen."

[5] O. NEUGEBAUER, Quellen und Studien i. h. 259. lap.

[6] B. L. v. d. WAERDEN, Math. Ann. 120 1947/49 132. lap.

vajon szabad-e a tudománytörténet szempontjából a görög matematika vívmányait egyértelműen *csak* pozitíven értékelnünk? — Hiszen a görögök, ahelyett pl., hogy a babylóniak nyomán tudatosan megteremtették volna a 10-es vagy 12-es pozicionális számrendszert, a babylóniak kibontakozóban levő pozicionális számjelölését betűszámokká módosították, ami hosszú ideig tartó súlyos visszaesésre kellett vezessen[7]. Hasonlóképpen a babylóni algebra is a görögök

[7] A. Frenkian, Études des mathématiques suméro-akkadiennes, égyptiennes et grecques c. román nyelvű tanulmányának francia kivonatában (Revue de l'Université de Bucarest 1953, 9—20) írja: "Rien n'indique les mathématiciens grecs aient connu le système de notation de position relative des peuples de la Mésopotamie. Le système grec de notation des nombres est des plus défectueux, *incapable d'aider le calcul* (az én kiemelésem — Sz. Á.) inférieur même à celui des Égyptiens, qui avait un signe particulier pour chaque ordre d'unités décimales, qu'ils répétaient autant de fois qu'il était nécessaire pour écrire un nombre donné. Donc, ou bien les Grecs n'ont pas connu le système de notation des Babyloniens, ou bien *l'esprit de leur mathématique étant orienté dans une autre direction, ils n'ont pas adopté ce système, si toutefois ils l'ont connu*" (az én kiemelésem — Sz. Á.) — A továbbiakban megkíséreli *Frenkian* a magyarázatot arra a kérdésre: miért nem fejlesztettek ki a görögök jobb számjelölési rendszert; ezzel kapcsolatban a következő érdekes magyarázattal próbálkozik: Les Hellénes avaient deux sciences qui s'occupaient des nombres: *l'arithmétique* qui était la science théorique des nombres, très étudiée et honorée, et *la logistique* qui était lié à la pratique et qu'on avait abandonné à des specialistes considérés comme des artisans, appelés avec un certain mépris du nom de *banausoi*. C'est ainsi que la science théorique qui est l'arithmétique a fait chez eux de grands progrès, sans faire profiter la logistique de ces progrès. Celle ci a continué de travailler avec les anciennes méthodes venues de l'Égypte: à savoir, la multiplication par duplications successives dont parle un scholie au dialogue Charmide de Platon et le calcul fractionnaire seulement avec des fractions ayant l'unité au numérateur, méthode qui fut employé jusqu'aux temps des Byzantins. — Les mathématiques suméro-akkadiennes ont été beaucoup plus liées à la pratique, comme on le voit par les problèmes qu'elles ont à résoudre dans les textes qui nous sont parvenus. Ensuite, la base de 60 pour le système de numération était très grande et c'est pourquoi les tenants de la civilisation mésopotamienne ont eu recours à la notation de position relative, etc." — Ez az elgondolás összeegyeztethető azzal a felfogással, amelyet dolgozatunk is képvisel, hogy ti. az antik görög matematikának nemcsak nagy eredményei, hanem viszonylagos *elmaradottsága* is úgyanannak az alapvető tendenciának következménye. A. Frenkian elméletéhez csak a következő korrekciót kell hozzáfűznünk: tévedés a görögök „*elméleti* aritmetikáját" egyszerűen csak a „*gyakorlati* logisztikával" szembeállítani. Platon az Állam és a Philebos c. dialogusokban nemcsak praktikus logisztikáról, hanem praktikus arithmetikáról is beszél; ezt a két gyakorlati tudományt állítja szembe az elméleti arithmetikával és logisztikával. Platon szerint tehát mind az arithmetika, mind a logisztika lehet gyakorlati és elméleti tudomány is. Az az egyszerűsítő elgondolás, amelyet Frenkian is képvisel, csak későbbi, *újplatonikus* eredetű. Vö. J. Klein, Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra I., II., Quellen und Studien zur Gesch. der Math. Abt. B. Bd. 3. (1936) 18. kk. és 122. kk.

közbejötte nélkül szinte egyenesen fejlődhetett volna tovább a reneszánsz algebrájába, és ezzel talán kétezer évet „megtakaríthattunk" volna.[8]

Természetesen NEUGEBAUER is tudja, hogy a görögök a matematika története szempontjából távolról sem jelentettek „visszaesést" a szó igazi értelmében. Az említett példákra csak azért hivatkozik, mert érzékeltetni akarja, hogy a tudomány fejlődése *nem* egyenes vonalú fejlődés; csakugyan voltak a régebbi babylóni matematikában olyan kezdemények, amelyeket a náluk későbbi görögök *nem* használtak ki; sőt azáltal, hogy a görögök a matematika fejlődését egy bizonyos meghatározott irányba terelték[8a], lehetetlenné vált az is, hogy a babylóniaknak az algebrában meglevő kezdeményei az európai reneszánsz kora előtt tovább fejlődjenek.[9]

[8] Lásd az 5. jegyzetet!

[8a] Ez a dolgozat a görögök legfőbb érdemét a *deduktív* matematika megteremtésében látja. A deduktiv matematika viszont elgondolásunk szerint azáltal jött létre, hogy alkalmazták a logikát az addig csak *empirikus* jellegű matematikai ismeretekre. Mégis tévedés lenne, ha azt hinnők, hogy a logika alkalmazása a matematikai ismeretekre kezdettől fogva *csak* pozitív hatással volt a tudomány fejlődésére. Részben ez a hatás egyes területeken gátolta is a tudomány továbbfejlődését. Már B. L. v. d. WAERDEN is utalt arra, milyen feltűnő pl. éppen a matematikában a görögök logikus merevsége. Közismert az is, hogy a görögség előtti kultúrákban milyen fejlett volt a törtekkel való számolás. A görög deduktív matematika viszont nem tudott mihez kezdeni a törtekkel; sőt éppen merev logikus megfontolás alapján kénytelen volt kirekeszteni a törteket a matematikából. Mint Platón Sokratese fejtegeti egy alkalommal: „Hiszen tudod, hogy a matematikusok, ha valaki az *egy*et megpróbálná felosztani, kinevetnék és nem járulnának hozzá kísérletéhez: hanem ha te darabokra törnéd az egyet, ők ehelyett inkább megszoroznák, mert mindenképpen el akarnák kerülni, hogy *az egy bármikor is ne egy, hanem több részből álló legyen*..." (Platón, Állam, VII, 525 D kk.). A törteket tehát azért kellett kiküszöbölni a görög matematikából, bármilyen fejlett volt is a törtekkel való számolás régebbi gyakorlata, hogy *ellentmondásmentes* maradjon az „egység" definíciója: *„egység az, ami szerint bármely dolgot egynek mondunk"* (Eucl. VII, def. 1.). — Ezért nem fejlődhetett tovább a görögöknél a törtekkel való számolás gyakorlata sem; még a bizánci időkben is az maradt, ami volt az ókori Egyiptomban. (Vö. ezzel A. FRENKIANnak föntebb a 7. jegyzetben említett dolgozatát.). Egyébként a görög matematika éppen azért fejlesztette olyan magas fokra az arányról szóló tanítást, mert deduktív matematikájukban az arány helyettesítette a törtet.

[9] Érdemes egyébként O. NEUGEBAUER és B. L. v. d. WAERDEN szavait összevetnünk abból a szempontból, hogyan ítéli meg ez a két kutató a görögöknek ugyanazt a matematikai felismerését, ti. azt, hogy megismerkedtek az irracionális mennyiségekkel. O. NEUGEBAUER a legutóbb idézett helyen ezt írja: „In der Mathematik wurde die Einsicht in das Wesen der Irrationalzahlen erkauft mit dem abrupten Abbrechen eines bereits zu einem algebraischen Formalismus gelangten Systems, das sich in allen Punkten direkt in die Algebra der Renaissance hätte fortentwickeln können — *ohne* die tiefsten mathematischen Leistungen der Griechen wären vielleicht 2000 Jahre zu

Azóta tehát, hogy jobban ismerjük a görögség előtti matematikát, másképp ítéljük meg a görögöket, mint régebben. De módosították újabb ismereteink a matematika kezdeteiről alkotott elképzeléseinket sok egyéb szempontból is. Régebben pl. úgy gondolták, hogy a matematika fejlődésének kezdeti szakaszán túlnyomórészt *geometria* volt; azt hitték, ez így is kellett hogy legyen, mert a geometria „kevésbé elvont", „szemléletesebb", mint az algebra. Szinte észre sem vették, hogy ez a téves elgondolás tulajdonképpen csak Euklidés és a görög matematika szemléletéből indult ki; azért tartották a geometriát a legrégibb matematikai diszciplinának, mert a görögöknél — a „legrégibb" ismert ókori kultúrnépnél — a matematika úgyszólván egyértelmű volt a geometriával. Ezért feledkeztek meg a közelmúlt tudósai arról, hogy a valóságos fejlődés lépten-nyomon ellentmond a geometria történeti elsőbbségéről felállított posztulátumnak. Hiszen a geometria újabb eredményei a fejlődés minden szakaszán más matematikai diszciplinák fejlődésével szorosan összefonódva születnek meg, úgyhogy az, ami tisztán geometriai jellegű, csak utólag bontakozhatik ki ebből az összefonódottságból.[10] Mint a közelmúltban folytatott történeti vizsgálatok igazolták, érvényes ez a megfigyelés a matematika őstörténetére is. A „tiszta" („szintetikus") geometria ebben a korai szakaszban még túlságosan nehéz lenne. Ezért a görögöket megelőző 2000 éves fejlődés során mindaz, ami geometria, még csak másodlagos jellegű.[11] A geometria előtérbe nyomulása csak jóval később, a görögöknél következett be.

gewinnen gewesen". — B. L. v. d. WAERDEN viszont éppen az irracionális számok fölismeréséből adódó logikai konzekvenciákról írván (hogy ti. *Strekken nicht universell durch Zahlen darstellbar sind und daher auch nicht ohne weiteres wie Zahlen behandelt werden dürfen),* rendkívül nagyra értékeli a görögök teljesítményét és összehasonlítja őket a modern európai tudomány képviselőivel a következőképpen: „Die meisten Vertreter der abendländischen Wissenschaft z. B. haben die Darstellbarkeit von geometrischen Größen durch Zahlen nie bezweifelt, obwohl sie mit der Existenz von irrationalen Verhältnissen bekannt waren und obwohl man vor Dedekind und Cantor nicht über den exakten Begriff der reellen Zahl verfügte. *Die griechische Kultur ist meines Wissens die einzige, die diese logische Konsequenz wirklich vollzogen hat*" (az én kiemelésem — Sz. Á.)

[10] O. NEUGEBAUER, Quellen und Studien, i. h. 246. lap: „Die großen Fortschritte der Geometrie sind in allen Phasen immer unlösbar mit der Entwicklung anderer Disziplinen verknüpft (analytische Geometrie und elementare Algebra, Differentialgeometrie und Analysis, Topologie und Riemannsche Flächen + abstrakte Algebra), So daß das Geometrische an sich immer erst nachträglich wieder aus dieser Verknüpfung gelöst werden mußte."

[11] O. NEUGEBAUER uo. 247. lap: „in den 2000 Jahren vorangehender Entwicklung ist alles 'geometrische' nur ein sekundäres Objekt zunächst der Rechentechnik mit den rationalen Zahlen in beiden vorgriechischen Kulturen, dann der Algebra in Babylonien."

Ez a felismerés lehetővé tette azt is, hogy teljesebb magyarázatot találjunk egy olyan jelenségre a görög matematikán belül, amelyet ugyan már régebben észrevettek, de megmagyarázni alig tudtak. Már ZEUTHEN észrevette ugyanis,[12] hogy Euklidés II. és VI. könyvében tulajdonképpen geometriai formába öltöztetett *algebrai* problémákról van szó. De arra a kérdésre, hogy igazában miért is geometrizálták a görögök az algebrát, régebben nem tudtunk kielégítő magyarázatot; legfeljebb csak a geometria nagyobb „szemléletességére" hivatkozhattunk. Ma viszont tudjuk már, hogy a görögöknek azért kellett geometrizálniok az algebrát, mert az irracionális mennyiségek felfedezése után csak ezen az úton biztosíthatták továbbra is a matematika általános érvényűségét, áttérvén a racionális számok területéről az általános mennyiségi viszonyok területére; és ezért kellett az egész görögség előtti „algebrikus" algebra eredményeit is a „geometrikus" algebra nyelvére lefordítaniuk.[13] — Ebben a megvilágításban egyszerre megértettük azt is, miért tartotta az i. e. 4. század legelején ARCHYTAS még többre a „logisztikát" (a görögök *algebráját*) mint a geometriát;[14] ARCHYTAS ugyanis még nem érvényesítette olyan messzemenően az irracionalitás felfedezéséből adódó logikai következményeket, mint

[12] H. G. ZEUTHENNEK (Die Mathematik im Altertum und Mittelalter) erre a régi felismerésére utal O. NEUGEBAUER, Quellen und Studien, i. h. 249. lap és B. L. v. d. WAERDEN, Math. Ann. 117, 1940 158. lap.

[13] O. NEUGEBAUER i. m. 250. lap: „Die Antwort auf die Frage nach der geschichtlichen Ursache der Grundaufgabe der gesamten geometrischen Algebra kann man heute vollständig geben: sie liegt einerseits in der aus der Entdekkung der irrationalen Größen folgenden Forderung der Griechen, der Mathematik ihre Allgemeingültigkeit zu sichern durch Übergang vom Bereich der rationalen Zahlen zum Bereich der allgemeinen Größenverhältnisse, andrerseits in der daraus resultierenden Notwendigkeit, auch die Ergebnisse der vorgriechischen algebraischen Algebra in eine geometrische Algebra zu übersetzen."

[14] ARCHYTAS, H. DIELS, Fragmente der Vorsokratiker 35 B 4: „a logisztika mint tudomány messze felülmúlja a többit, különösen a geometriát, mert ez világosabban kezeli tárgyát, mint amazok . . . és ahol a geometria már nem boldogul, a logisztika még tovább bizonyít." — A „logisztika" terminus ebben az összefüggésben arithmetikát *és* logisztikát együtt jelöl; vö. J. KLEINnek föntebb a 7. jegyzetben idézett dolgozatával (32. lap 1. j.). Érdemes lesz megemlíteni, hogy ennek az Archytas-fragmentumnak az értelmét mindaddig nem is foghattuk fel, amíg O. NEUGEBAUER (Quellen und Studien, i. h. 245) rá nem mutatott igazi matematikai-történeti jelentőségére. Mint NEUGEBAUER írja: „Die Prägnanz dieses Ausspruchs ist umso interessanter, als er ja nur um wenige Jahre älter ist, als die Geometrisierung der griechischen Mathematik, die wir als ihre 'klassische' Form anzusehen gewöhnt sind". Ezzel szemben DIELS szöveggyűjteménye nem tudván még erről az összefüggésről, megjegyzi: „Sinn und Herstellung des Fragments unsicher . . .".

közvetlen utána THEAITÉTOS és PLATÓN.[15] Ez más szóval azt jelenti, hogy ma már pontosan meg tudjuk jelölni azt az időszakaszt, amikor a görögöknél a régebbi „logisztikát" háttérbe szorítja a geometria;[16] tudjuk azt is, hogy a geometria előtérbe nyomulása egy logikai felismerésnek — az irracionális mennyiségek felfedezésének a szükségszerű következménye volt.[17] — Az a régebbi elgondolás tehát, amely a görög geometria „szemléletességét" hangsúlyozta, erősen módosult. Sőt, az újonnan föltáruló történeti perspektívában fel kellett merülnie a kérdésnek: vajon egyáltalán a szemléletesség-e a görög matematika legjellemzőbb vonása?[18] Egyszerre igazat kellett adnunk Platónnak, aki a görög matematikáról szólva már az i. e. 4. század első felében hangsúlyozta, hogy a geometria szemléletessége távolról sem *konkrét* szemléletesség, mert ez a szemléletesség tulajdonképpen csak *emlékeztet* valamire, ami másképp, mint gondolati úton egyáltalában nem hozzáférhető.[19]

A felsorolt példák tehát azt mutatják, hogy a görögség előtti matematika jobb megismerése csakugyan módosította és elmélyítette a görögökre vonatkozó ismereteinket is. Ma már ugyan nem tekinthetjük a görögöket a matematikai tudomány megteremtőinek abban az értelemben, ahogy ezt régebben gondolták, de ma már

[15] B. L. v. d. WAERDEN, Zenon und die Grundlagenkrise der griech. Math. c. dolgozatában (Math. Ann. 117. 1940. 141 kk.) az előbbi Archytas-idézettel kapcsolatban a következőket írja: „Wenige Jahrzehnte später hat sich das Blatt bereits gewendet: Theaitetos entwickelt seine Klassifikation der irrationalen Strecken, und bei Platon ist das Verhältnis zwischen Logistik und Geometrie vollständig umgekehrt. Die bisherige Logistik ist als Wissenschaft verpönt, die geometrischen Schlüsse sind die wahren Vorbilder exakter Beweisführung. Bei Euklid ist die Algebra vollends aus dem Bereich der offiziellen Geometrie verbannt und darf nur in geometrischem Gevande, als Flächenrechnung oder 'geometrische Algebra', ihr Dasein fristen.

[16] Lásd O. NEUGEBAUER és B. L. v. p. WAERDEN szavait a megelőző két jegyzetben.

[17] Vö. B. L. v. d. WAERDEN Science awakening 125. lap k.: „It is therefore *logical necessity*, not the mere delight in the visible, which compelled the Pythagoreans to transmute their algebra into a geometric form."

[18] K. REIDEMEISTER, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949, 51. lap; „Es ist ein weitverbreitetes Vorurteil, das wesentliche Merkmal der griechischen Mathematik sei ihre Anschaulichkeit . . . Richtig ist es vielmehr, daß sich in der pythagoreischen Mathematik die Umwendung vom Anschaulichen zum Begrifflichen vollzieht."

[19] PLATON, Állam, VII, 526 (amikor a matematikusok számokról beszélnek, akkor számon valami olyasmit értenek, ami *csak a gondolkozás számára* megközelíthető) és uo. 527 (amikor a geometriában valamit szemléltetnek, úgy beszélnek, mintha valami konkrét dologról lenne szó, holott igazában *nem* a láthatóra, hanem a *csak elgondolhatóra* akarják irányítani a figyelmet.

annál konkrétebben tudunk rámutatni arra, hogy mit jelentett a görögség a matematika történeti fejlődésében. Egyértelműen kiderült pl., hogy a görögség előtti matematika még egyáltalán nem ismeri a *tétel*, a *bizonyítás*, a *definíció*, a *posztulátum* és az *axióma* fogalmát.[20] Ez a régebbi matematika tulajdonképpen még csak empirikus ismerethalmaz, amely ad ugyan bizonyos szabályokat matematikai jellegű feladatok megoldására, de a tételeket nem fogalmazza meg általános érvényű formában és a tételek bizonyítására még csak kísérletet sem tesz, legfeljebb bemutatja egy-egy numerikus példán az eredmény kiszámításának a menetét. Rendszeres deduktív tudománnyá csak a görögöknél lett a matematika. Az empirikus ismerethalmaznak ez az átalakulása egzakttudománnyá természetesen óriási jelentőségű lépés volt a további fejlődés szempontjából. Érthető tehát, hogy a történeti kutatás figyelme e felé a kérdés felé fordult: *hogyan, mikor* és *miért* lett a görögöknél a matematika deduktív tudománnyá? — Dolgozatom, amely ezeknek a kérdéseknek a tisztázására törekszik, a következő fejezetben mindenekelőtt három pontban ismerteti azokat az elgondolásokat, amelyek a fölvetett problémával kapcsolatban a közelmúltban napvilágot láttak.

II.

A matematikának mint deduktív tudománynak a kibontakozását általában a logika elméletének a kibontakozásával szokták összehasonlítani. Lássuk pl. az 1. pontban annak a K. v. FRITZ-nek az elgondolását, aki legutóbb egyik dolgozatában[21] utalt arra, hogy a matematika a görögöknél tulajdonképpen azért „válhatott egzakt tudománnyá, mert definíciós-axiomatikus megalapozást nyert". Bár a szerző arra a kérdésre, hogy ez a folyamat hogyan és mikor ment végbe, nem ad közvetlen választ, mégis érdemes lesz átte-

[20] O. BECKER, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg München 1954 22. lap: „Nicht einmal die Formulierung allgemeiner Sätze ist für Babylonien gesichert. (Dagegen kommen solche in der traditionellen Form des dogmatischen Kurzsatzes (sūtra) in der altindischen Sakralgeometrie vor.) Von Beweisen ist in den erhaltenen altorientalischen Dokumenten erst recht nichts zu finden; höchstens kommen zahlenmäßig ausgerechnete Proben vor." — ALEXITS GY. és FENYŐ I. könyve (Matematika és dialektikus materializmus, 1948) több ízben beszél az egyiptomi és babylóni matematika „bizonyításairól" (pl. a 40. és 41. lapon). Tudomásom szerint a görögség előtti matematikában egyáltalán nincsenek bizonyítások.

[21] K. v. FRITZ, Die *Ἀρχαί* in der griechischen Mathematik, Archiv für Begriffsgeschichte, Bd. 1, Bonn 1955 13—103.

kintenünk — helyenként kiegészítve és korrigálva! — a gondolatmenetét, mert szempontjai közelebb vihetnek bennünket a probléma megoldásához.

1. pont EUKLIDÉS klasszikus művében, az Elemekben, amely i. e. 300 körül keletkezett, külön csoportokba foglalva ismerteti előbb a definíciókat, posztulátumokat, axiómákat, és csak ezek után tér át az egyes tételek (theorémák) ismertetésére, ill. bizonyítására. Arra nézve, hogy mi ennek a beosztásnak az értelme, EUKLIDÉS maga egyáltalán nem ad magyarázatot. De világosan megmagyarázza ezt Euklidés kommentátora, PROKLOS az i. sz. 5. században:

„Minthogy azt állítjuk, hogy ez a tudomány, a geometria (= matematika) feltevésekből indul ki és meghatározott principiumokból bizonyítja levezetett következtetéseit — mert ezek közül csak az egyik csoport feltevés nélküli, a másik azonban éppen az előbbiből nyeri principiumait —, annak, aki geometriai kézikönyvet állít össze, külön kell tárgyalnia tudományának alapjait (= principiumait), és külön azokat a dolgokat, amelyeket az alapokból vezet le. Az alapokról nem kell számot adnia, ezeket nem kell bizonyítania, de mindazt, ami ezekből következik, bizonyítania kell."[22]

PROKLOS félreérthetetlenül megmagyarázza művében más alkalommal azt is, hogy mi a különbség az euklidési definíciók, posztulátumok és axiómák között: ezeket együttvéve nevezi *alapoknak*, principiumoknak, ill. görög szóval *archék*nek. Magyarázatából bennünket most leginkább az érdekel, hogy szerinte az axiómák és posztulátumok esetében *nem szükséges*, sőt *nem is lehetséges* a bizonyítás vagy geometriai megokolás;[23] ezeket ismerteknek tételezzük fel és a definíciókkal együtt ezek az alapjai (principiumai) mindannak, ami utánuk következik.

PROKLOS magyarázata csakugyan jól megvilágítja EUKLIDÉS művének a szerkezetét. EUKLIDÉS nyilván azért sorolja fel mindjárt az első könyv elején, mielőtt még rátérne az egyes tételek ismertetésére és bizonyítására, a definíciókat, posztulátumokat és

[22] PROCLI DIADOCHI in primum Euclidis Elementorum librum commentarii ed. G. Friedlein. Lipsiae 1873 p. 75.

[23] PROCLUS (ed. G. Friedlein) 178. lap: „Közös az axiómák és posztulátumok esetében az, hogy ezeket nem kell bizonyítanunk vagy geometriailag megokolnunk, hanem föltesszük, hogy ezek ismertek és principiumai mindannak, ami utánuk jön. (Egymás között azonban ezek éppen úgy különböző dolgok, mint ahogy más a tétel és más a feladat.)" — Más alkalommal viszont (76. lap) így ír Proclus: „Ha olyan állítással van dolgunk, amely önmagában nem evidens ugyan, de amely mégis fölállítható, és az, aki hallja, elfogadja, akkor *definíció*ról beszélünk."

axiómákat,[24] mert ezek azok a „principiumok", amelyekből a theorémák levezethetők. Ebben az összefüggésben most nem lényeges az a kérdés, vajon az egyes definíciók, posztulátumok és axiómák csakugyan *mind* magától EUKLIDÉSTŐL származnak-e.[25] (Lehet, hogy ezek közül egyiket-másikat EUKLIDÉS már készen vette át; mások viszont később, az EUKLIDÉS utáni korban is belekerülhettek az „Elemek"-be.) Kétségtelen, hogy magának az euklidési műnek a szerkezete bizonyítja: EUKLIDÉSnek már nagyon is jól kellett tudnia, hogy egész matematikai tudásunk be-nem-bizonyított principiumokból és olyan tételekből áll, amelyek az előbbi principiumokból következnek. Ez viszont más szóval azt jelenti, hogy a görögök EUKLIDÉS korában, i. e. 300 körül már pontosan tudták: miben áll a matematikai bizonyítás, és meddig folytatható.

ARISTOTELÉS volt az, aki már egy generációval EUKLIDÉS előtt, a 4. században, egyik logikai munkájában, az *Analytica posterior*aban rendszeresen tárgyalta az ún. bizonyító (apodeiktikus) tudományok módszerét. ARISTOTELÉS erre vonatkozó fejtegetései nagyjából összeegyeztethetők azzal, amit EUKLIDÉS kommentátora, PROKLOS mond a matematikai bizonyításról, bár kétségtelen, hogy EUKLIDÉS és az antik matematikusok nem mindenben értettek egyet ARISTOTELÉS véleményével; ARISTOTELÉSnek még a terminológiája sem mindenben azonos a matematikusok terminológiájával.[26] A lényeg azonban számunkra az, hogy a bizonyító tudomány módszerét ARISTOTELÉS is a matematikán illusztrálja, és ő is úgy gondolkozik a principiumokról, mint EUKLIDÉS, illetőleg PROKLOS; mint írja; „Principiumnak nevezem minden műfajban azt, amelyről nem lehet bebizonyítani, hogy *van*, illetőleg hogy *érvényes*"[27]. — Világos, hogy ebben az értelemben tekintik principiumnak a definíciókat, posztulátumokat és axiómákat EUKLIDÉS és PROKLOS is.

Hasonló volt a véleménye a matematikai principiumokról (vagy legalábbis egy részükről: a *definíciókról*) már ARISTOTELÉS

[24] Posztulátumokat és axiómákat Euklidés csak az első könyv elején sorol fel; definíciót viszont a VIII., IX., XII. és XIII. könyvtől eltekintve minden könyv elején találunk. — Minthogy az axiómák és posztulátumok általánosabb jellegűek, mint a definíciók, valószínű, hogy ezeknek, az axiómáknak és posztulátumoknak a fogalmát csak később teremtették meg a matematikusok. A definíciók lehetnek a legkorábban fölismert euklidési principiumok.

[25] Az euklidési definíciók, posztulátumok és axiómák különböző eredetére vonatkozóan lásd: P. TANNERY, Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide (Mém. scient. 1912, 48—63) és A. M. FRENKIAN, Le postulat chez Euclide et chez les modernes, Paris 1940, 21—24.

[26] Találóan jegyzi meg ezzel kapcsolatban K. v. FRITZ i. m. 103. lap: „Die mathematische Entwicklung ist weitgehend an Aristoteles vorbeigegangen."

[27] Aristoteles, An. Post. I. 10.

előtt a 4. század első felében PLATÓNnak is. Mint az Állam c. dialógusban PLATÓN SÓKRATÉSE mondja: „azok, akik geometriával, számokkal és más ehhez hasonló tudománnyal foglalkoznak, alapul veszik a páratlant, a párost, a háromféle szöget és más ehhez hasonló fogalmat; ezeket teszik meg alapnak abban a feltevésben, hogy ezeket tudják már; nem is adnak róluk számot sem maguknak, sem másnak, hanem ezekből mint principiumokból kiindulva az utánuk következő dolgok bizonyításához látnak (VI 510 C—D); az alapul választott feltevések mögé azonban már nem hatolhatnak" (VI 511 A).

Ebből láthatjuk tehát, hogy jóval EUKLIDÉS előtt, már PLATÓN korában tudtak a görögök a matematikai bizonyításról két rendkívül fontos dolgot:

a) a bizonyítás nem folytatható végtelenül, nincs *regressus ad infinitum*

és

b) a matematikának kell hogy legyenek tovább már nem bizonyítható alapjai.

Úgy látszik tehát, a matematika definíciós-axiomatikus megalapozásának — részben mindenesetre — azért kellett bekövetkeznie, mert a görögök nyilván szükségesnek érezték, hogy összeállítsák azokat a tovább már nem bizonyítható, de önmagukban is evidensnek érzett matematikai jellegű megállapításokat, amelyekre fölépíthető volt egész matematikai tudásuk.

Ennek a definíciós-axiomatikus megalapozásnak a létrejöttét K. v. FRITZ az aristotelési logika keletkezésével hasonlítja össze: mint írja: az aristotelési logika a dialektikából bontakozott ki. (Dialektikán értsük ezúttal a platóni „dialektiké techné"-t, a vitatkozás művészetét.) A párbeszéd, a dialógus két résztvevőjének, *A*-nak és *B*-nek a szerepe beszélgetés közben a következőképpen oszlik meg. *A*-nak valamely állítását *B* nem fogadja el. *A* pedig be akarván bizonyítani ezt az állítást, olyan praemissákat keres, amelyeket *B* is helyesnek tart és elfogad. Utána *A* megmutatja, hogy állítása, amelyet *B* kezdetben nem tartott helyesnek, logikus szükségszerűséggel következik azokból a praemissákból, amelyeket *B* is elismert.

Kétségtelen, hogy ez a schéma csakugyan alkalmazható az euklidési matematikára. EUKLIDÉS bármelyik „bonyolult" tételéről megállapíthatjuk, hogy a bizonyítás ezt a tételt „egyszerűbb" tételekre, az egyszerűbb tételeket pedig általánosan elfogadott praemissákra, definíciókra, posztulátumokra vagy axiómákra vezeti visz-

sza.[28] Hiszen a matematika éppen ezért *deduktív* tudomány, mert minden állítását (tételét) *levezeti* ilyen praemissákból, illetőleg az állítást *visszavezeti* az elfogadott praemissákra.

Tanulságos a definíciós-axiomatikus megalapozás létrejöttének ez az összehasonlítása az aristotelési logika kibontakozásával azért is, mert felhívja a figyelmet egy nagyon lényeges körülményre. A vita folyamán az, aki be akar valamit bizonyítani, magából a bebizonyítandó állításból indul ki és csak *utólag* keresi ehhez az állításhoz azokat a praemissákat, amelyeket ellenfele is elfogad; de egyáltalán nem bizonyos az, hogy a bebizonyítandó tétel ismeretéhez csakugyan a bizonyításnál felhasznált praemissák ismerete alapján jutottak el. Éppen ellenkezőleg: nagyon könnyen elképzelhető, hogy valamely igaznak tapasztalt vagy plauzibilis állítás logikus praemissáit csak utólag, akkor tudatosították magukban a vitatkozó partnerek, amikor egyikük megkísérelte állítását a másikkal is elfogadtatni, bebizonyítani. Egészen bizonyos, hogy így volt ez az euklidési matematikai tételek nagy részével is. Ezeknek a tételeknek nagy részét is régesrégen ismerték már a gyakorlatból az ókori keleti népek, amikor később a görögök keresni kezdték azokat az „egyszerűbb" tételeket, amelyekből levezethetők a „bonyolultabbak". Hiszen a matematika, mint kész rendszer, szisztematikus deduktív tudomány ugyan, de keletkezése során még csak gyakorlatból származó induktív tudás.[29]

Minthogy K. v. Fritz magyarázata szerint a görögök a matematika definíciós-axiomatikus megalapozása során csak *utólag* keresték a tételeik bizonyításához szükséges praemissákat, érthető az is, hogy a görög matematikusoknak aligha sikerült mindjárt kezdetben tisztázniok azt a kérdést: melyek a „legegyszerűbb" matematikai jellegű állítások, a legáltalánosabb praemissák, mit tekintsenek be-nem-bizonyítható axiómának, posztulátumnak vagy definíciónak? — Valószínű, hogy mindaz, amit Euklidés ezeken a címeken összefoglal, csak hosszabb fejlődés eredményeként kristályosodhatott ki. Hiszen az előbbi schéma értelmében kezdetben

[28] Jellemző a görögök naiv empirizmusára, hogy csakugyan megkülönböztettek „egyszerűbb" és bonyolultabb tételeket. Arra, hogy az „egyszerűbb" és „bonyolultabb" mennyire szubjektív kategória, úgy látszik, nem jöttek rá. Aristotelés mindenesetre hosszasan fejtegeti, milyeneknek kell lenniök azoknak a praemissáknak, amelyekre a bizonyító tudomány fölépülhet; ezért írhatja K. v. Fritz (i. m. 23. lap) Aristotelés nyomán: „Das als Prinzip angenommene muß in sich *einsichtiger* (?), *einfacher* (?) und abstrakter sein als das, was daraus abgeleitet wird".

[29] Vö. G. Pólya, Schule des Denkens, Vom Lösen mathematischer Probleme, Bern, 1949. 9. lap: „Nach Euklid dargestellt erscheint die Mathematik als eine systematische deduktive Wissenschaft, aber die Mathematik im Entstehen erscheint als eine experimentelle induktive Wissenschaft".

csak arra törekedhettek a matematikusok, hogy a „bonyolultabb" állításokat „egyszerűbb" praemissákra, az ellenfél által is elfogadott tételekre vezessék vissza. Ha pedig valóban így ment végbe a fejlődés, akkor aligha képzelhető, hogy már a legelső kísérletek során megtalálták volna a „legegyszerűbb" praemissákat, az axiómákat, posztulátumokat és definíciókat. Hogy milyen hosszú időn át folytak ilyen természetű kísérletek, arra jellemző lehet PROKLOS állítása,[30] aki elmondja, hogy a pergéi APOLLÓNIOS még az EUKLIDÉS utáni korban is megkísérelte pl. bebizonyítani azt az axiómát, amely szerint: ha két mennyiség külön külön egyenlő valamely harmadikkal, akkor a két mennyiség egymással is egyenlő.[31] APOLLÓNIOSnak ez a kísérlete PROKLOS szerint azért nem sikerülhetett, mert „kevésbé evidens" praemissákkal akarta megokolni azt, ami „evidensebb" a praemissáinál.[32]

Jóllehet K. v. FRITZ magyarázata — tehát a görök matematika definíciós-axiomatikus megalapozásának összehasonlítása az aristotelési logika kibontakozásával — olyan elgondolás, amely részben *helyesen* világítja meg a görög tudomány keletkezésének a körülményeit, mégis a szerző nem veti fel elég élesen azt a kérdést: *mikor, hogyan* és *miért* következett be a görög matematika története során az a fordulat, amely a deduktív tudomány megszületésére vezetett? — K. v. FRITZ dolgozata erre a kérdésre csak a következő három — tartalmában ugyan helyes, de kissé elmosódó körvonalú — állítással felel:

1) Megállapítja a dolgozat, hogy a definíciós-axiomatikus megalapozás első lépéseinek már Aristotelés előtt meg kellett történniök, mert különben ARISTOTELÉS nem hivatkozhatott volna éppen a matematikára azokban a fejtegetésekben, amelyekben az apodeiktikus (bizonyító) tudományokról beszél.[33]

[30] PROCLUS, ed Friedlein p. 183.

[31] Eucl. I. koinai ennoiai 1. (*Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα Καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.*) O. BECKER (Grundlagen der Mathematik 90. lap) fordítása szerint: „Was demselben gleich ist, ist untereinander gleich." Euklidés szövege nem használja a „mennyiség" fogalmát.

[32] Apollónios kísérletével kapcsolatban érdemes megemlíteni: a mai tudásunk szerint *nem* lenne valószínű az a feltevés, hogy Apollónios „tudatosan axiomatizált volna" — ti. a szónak abban az értelmében, hogy fölismerte volna: valamely nem-euklidési axióma-rendszerben csakugyan fölbukkanhatnak Euklidés axiómái mint levezetett tételek.

[33] Vö. K. v. FRITZ i. m. 43. lap: „Es ist deutlich zu sehen, daß Aristoteles nicht in der Weise hätte mit konkreten Beispielen aus der Mathematik operieren können, wenn Ansätze zu einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik . . . nicht schon vor ihm vorhanden gewesen wären".

2) Utal arra, hogy — úgy látszik — a régebbi görög matematika (különösen THALÉS) még empirikusabb jellegű lehetett és a szemléletesség evidenciájára törekedett; később — EUKLIDÉS korában — az empiria és a szemléletességre törekvés már háttérbe szorult; a matematika ebben a későbbi korban már sokkal inkább absztrakt jellegűvé lett.[34]

3) Egy alkalommal megállapítja K. v. FRITZ azt is, hogy az a matematika, amely az i. e. 5. század pythagoreusaival kezdődött, már más jellegű volt, mint a 6. századi THALÉSnek a szemléletesség evidenciájára törekvő geometriája.[35]

További hiányossága ennek az elgondolásnak az, hogy szinte teljesen nyitva hagyja a következő kérdéseket: Vajon a deduktív matematika megszületése összefüggött-e és milyen mértékben a logika elméletének a kibontakozásával? Csak párhuzamosan, egymást helyenként befolyásolva ment-e végbe a két jelenség — a logika és a deduktív matematika kibontakozása —, vagy pedig feltétlenül megelőzte-é közülök az egyik a másikat?

Lássuk ezekután a következő pontban azt az elgondolást, amely már nemcsak párhuzamba állítja a deduktív matematika keletkezését a logika kibontakozásával, hanem amely megkísérli a választ arra a kérdésre is: hogyan és miért ment végbe ez a folyamat?

2. pont. A deduktív matematika keletkezését ALEXITS GY. és FENYŐ I. a következő elgondolással magyarázza:

„A szigorú bizonyítás szükségességének felfedezése jelenti tulajdonképpen a tudományos matematika kezdetét (Pythagoras). De a bizonyítás szükségességének felfedezése is a társadalmi viszonyokban leli a magyarázatát. Magja közvetlenül a korabeli filozófiában keresendő; nevezetesen a szofistáknak minden ellentmondást felszínre hozó vitatkozásmódja ráterelte a hellén kutatók figyelmét a logikai bizonyítás szükségességére. Ha tovább megyünk, úgy azt kell konstatálni, hogy a filozófiának ez a nagyfokú fejlettsége és főleg elterjedtsége a politikai, tehát *társadalmi* vitákból fejlődött ki és ezek hatása a matematikában is — éspedig korszak-

[34] K. v. FRITZnek azokra a fejtegetéseire, amelyek Thalés geometriájára vonatkoznak, visszatérünk még e dolgozat III. fejezetében.

[35] Az a gondolat, hogy az i. e. 5. század pythagoreusaival tulajdonképpen új korszak kezdődik a görög matematika történetében, igazában nagyon régi. De ennek a gondolatnak a jelentőségét csak legutóbb kezdte hangsúlyozni K. REIDEMEISTER; lásd erre vonatkozóan e dolgozat III. és IV. fejezetét.

alkotó módon — a szigorú bizonyítások felfedezésében nyilvánult meg. A többi ókori birodalom matematikai ismereteiből éppen ez a döntően fontos elem hiányzott, ezért nem lehetett azokat az athéni, alexandriai stb. matematikusok tudományával összehasonlítani".[36]

Mielőtt részleteiben vizsgálnánk ALEXITSnek és FENYŐnek ebben az idézetben összefoglalt gondolatmenetét, fel kell hívnunk a figyelmet egy olyan gondolatra, amely a szerzők véleményének a kialakításában nagy szerepet játszott. A szerzők ugyanis igyekeztek az ókori görögség esetére is alkalmazni azt a tételt, hogy a matematika fejlődése *általában* párhuzamos a termelés fejlődésével, és hogy a matematika problémái a történelem folyamán *sokszor* a termelés szükségleteiből fakadtak.[37] Ez a nagy egészében helyes gondolat azonban könnyen félrevezethet, ha elsietetten általánosítjuk. A görög matematika esetében pl. a PYTHAGORASTÓL EUKLIDÉSIG terjedő időszakaszra vonatkozóan egyáltalán nem tudunk kimutatni konkrét kapcsolatot egyfelől a deduktív matematika problémái, másfelől pedig az egykorú termelés problémái között.[38] Az is hiba lenne, ha megfeledkeznénk arról, hogy a görög matematikusok tudományukat általában nem a termelés, a gyakorlat eszközének vagy eredményének tartották; éppen ellenkezőleg: ők a matematikában a gyakorlattól való *elfordulást*, a tiszta *szemlélődést*, a spekulációt látták.[39] Tekintet nélkül arra, hogy helyes-e ez az ókori felfogás, nem szabad figyelmen kívül hagynunk az antik matematikusoknak ezt a véleményét, mert különben lehetetlenné tesszük, azt, hogy megértsük a deduktív tudomány létrejöttének a körülményeit.

[36] ALEXITS GY. és FENYŐ I., Matematika és dialektikus materializmus, Budapest 1948. 39. lap.

[37] I. m. 36—37.

[38] Tévedés lenne ezt a megállapítást azzal cáfolni, amit ALEXITS—FENYŐ könyve a 37. lapon ír. Az említett helyen ti. ezt olvassuk: „A Kr. e. V. és IV. századbeli görög geometriai problémák nagyrésze az arányosságokkal foglalkozik (Eudoxos), vagy azokból indul ki. *Ezek elé a problémák elé az emberi test ábrázolása (vázákon) és építészeti feladatok állították a kor gondolkodóit.*" Ez az utóbbi, általunk kiemelt állítás csak önkényes hipotézis. Mert igaz ugyan, hogy az arányosság problémai először a mindennapi gyakorlatban merültek fel, de a görög deduktív matematika képviselői az i. e. 5. és 4. században arány-elméleteikkel *nem* gyakorlati jellegű feladatok megoldására törekedtek. Éppen ellenkezőleg, tisztára elméleti meggondolásból kiindulva a *tört* fogalmát akarták megkerülni.

[39] Jellemző pl., hogy Platón Állam c. dialógusában Sokratés nagyon határozottan megállapítja: a geometriának és általában a matematikának csak *igen kis része az*, ami tökéletesen elegendő a gyakorlati szükségletek kielégítésére; ezeknek a tudományoknak nagyobb és jelentősebb része *nem* gyakorlati, hanem egyéb szükségleteket elégít ki (VII, 526 D).

Az az elgondolás tehát, hogy a görög matematika fejlődése párhuzamos a termelés fejlődésével, a PYTHAGORASTÓL EUKLIDÉSIG terjedő szakaszra *nem igazolható*. Még kevésbé igazolható az előbbi idézet gondolatmenete, ti. a szerzőknek arra a kérdésre adott válasza: hogyan lett a matematika a görögöknél deduktív tudománnyá? — Ők ugyanis ebben a nagyjelentőségű lépésben a termelés fejlődésének *közvetett hatását* szeretnék kimutatni. Elgondolásuk a következő.

A termelési mód fejlődése egy adott pillanatban lehetővé teszi a rabszolgatartó görög demokrácia kibontakozását. A demokrácia együtt jár a szólásszabadsággal, a vélemények nyílt harcával, a vitákkal. A viták során az ügyes vitatkozók, a szofisták reáirányítják a figyelmet a véleményekben rejlő ellentmondásokra. Így merül fel egy idő múlva a *logikai bizonyítás* igénye, és végül: éppen ennek az igénynek a kielégítésére törekszik a görög matematikus — már PYTHAGORAS is! — akkor, amikor bebizonyítja állításait, tételeit.

Elég ennek a gondolatmenetnek egymásba kapcsolódó láncszemeit közelebbről megvizsgálnunk ahhoz, hogy azonnal észrevegyünk egy chronológiai tévedést. Mert jóllehet mi is helyeseljük ugyan a szerzőknek azt az elgondolását, hogy a tudományos matematika kezdetei az egykorú filozófiában keresendők, mégis a szerzők elképzelése szerint a demokrácia-adta szólásszabadságban az ügyesen vitatkozó *szofisták* azok, akik reáirányítják a figyelmet az ellentmondásokra, és az ő működésük nyomán merül fel a logikai bizonyítás igénye; a matematikus pedig éppen ennek a logikai igénynek tesz eleget mintaszerű formában akkor, amikor megteremti a deduktív tudományt. — A baj csak az, hogy a deduktív matematika — a szerzők szerint is — az *i. e. 6. századi* PYTHAGORASszal (vagy tanítványaival) kezdődik, ügyesen vitatkozó szofisták pedig az i. e. *5. század közepe előtt* semmi esetre sem voltak. — A konstrukció tehát csak abban az esetben állhatná meg a helyét, ha egyrészt be tudnánk bizonyítani, hogy a logika mint tudomány csakugyan a mindennapi élet vitáiból született meg,[40] másrészt

[40] Az a gondolat, hogy a logika mint tudomány a mindennapi élet vitáiból született meg, felmerül — feltevés formájában — O. GIGONnál is (Der Ursprung der griechischen Philosophie, Basel 1945, 251. lap): „Das Verfahren des Parmenides, durch Elimination der Möglichkeiten zum Wahren zu gelangen, setzt voraus, daß Parmenides eine bestimmte formale Methode des Beweisens schon kennt, ehe er sich daran macht, nun das Sein zu beweisen. Die Frage stellt sich dann nach dem Ursprung dieser Methode. Er wird schwerlich in der ionischen Kosmologie oder in der pythagoreischen Verkündigung zu suchen sein. Mit allen Vorbehalten sei bemerkt, daß *eine solche*

pedig, ha már bizonyosak lehetnénk afelöl, hogy logika valóban volt már abban az időben, amikor a deduktív tudomány kezdetei jelentkeznek.

De még ha korrigálhatnánk is az előbbi konstrukció chronológiai tévedését, van ennek az elgondolásnak egyéb gyengéje is. Hiszen az előbbi idézet szerzői a szigorú matematikai bizonyítás *szükségességéről* beszélnek, de nem teszik fel azt a történeti kérdést: vajon mit jelenthetett a szigorú matematikai bizonyítás „szükségessége" az ókorban? — Ahelyett, hogy ezt a kérdést feltennék, saját *modern* elgondolásukat a matematikai bizonyítás „szükségességéről" úgy tüntetik föl, mintha ez csakugyan az ókori görög matematikusok „felismerése" lett volna. Mert nézzük csak meg közelebbről, mit mond ALEXITS és FENYŐ a matematikai bizonyítás szükségességének a felfedezéséről? — Miután megemlítették azt a régi, csak approximatív értékű egyiptomi geometriai szabályt, hogy az egyenlőszárú háromszög területe egyenlő az alap és az *oldal* félszorzatával,[41] így folytatják:

„Ez elegendő pontosságú volt az egyiptomiaknak, mert a Nilus áradásai többnyire olyan hosszú egyenlőszárú háromszög alakú területeket öntöttek el, hogy ezek felmérésére ez a területképlet az akkori mérések pontossága mellett a tapasztalattal megegyező eredményre vezetett. *De a görögök ugyanezt a képletet építészeti feladatok megoldására akarták felhasználni, ahol már nem vált be*".[42]

Technik des Beweisens am leichtesten in der Welt der politischen und juristischen Argumentation, in der sogenannten Gerichtsrhetorik sich bilden konnte. Die konkrete Frage des Advokaten nach einem ungeklärten Tatbestand oder einer ungewissen Täterschaft konnte ohne Zweifel am ehesten zu solchen Beweismethoden führen, wie sie hier Parmenides an einem ganz anderen Objekt übt. Was wir wissen, ist daß Sizilien zur Zeit des Parmenides die Gerichtsrhetorik geschaffen haben soll. Was uns fehlt, sind die äußeren Beweisstücke, die von der sizilischen Rhetorik zum 'Wege der Forschung' des Parmenides hinüberführen. So muß dies lediglich eine nur zögernd angedeutete Hypothese bleiben."

[41] Ehhez az approximatios formulához lásd O. NEUGEBAUER, Vorlesungen über die Geschichte der antiken math. Wissenschaften Bd. 1. Berlin 1934, 123. lap: „Eine Anzahl von Feldern (scil.: in Aegypten) sind dreieckig. Die Angabe der Größe erfolgt dann etwa nach dem folgenden Schema: Die westliche Seite ist *a*, die östliche *b*, die südliche *c*, die nördliche *nichts*. Die Fläche ist dann wieder aus $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c}{2}$ zu erhalten. Hier hat man es also immer mit Näherungsrechnungen zu tun, die sich auf ganz bestimmte Felder beziehen und mit einer für praktische Zwecke ausreichenden Genauigkeit die Flächen angeben."

[42] ALEXITS GY. és FENYŐ I. i. m. 37—38 lap.

Az utolsó, általunk kiemelt mondat alapján könnyen az lehet az olvasó benyomása, mintha csakugyan bármilyen forrásból tudomásunk lenne arról, hogy a görögök valaha is megpróbálták volna felhasználni a megközelítő pontosságú egyiptomi *képletet* építészeti problémák megoldására. A valóság ti. ezzel szemben az, hogy az idézett állítás csak szellemes, de ellenőrizhetetlen kombináció. Ugyanilyen joggal akár azt is kérdezhetnénk: hát az egyiptomiaknak vajon miért nem jutott eszükbe, hogy felhasználják empirikus eredetű „képletüket" saját építészeti problémáik megoldására? Vagy talán nekik egyáltalán nem lettek volna építészeti problémáik? Ők talán a geometriát *csak* földmérésre használták volna? — De mindez még megbocsátható volna, ha a szerzők nem fűznék tovább merész kombinációikat. A következő lapon ti. már így folytatják:

„Az előbb említett és még sok más empirikus úton felállított tétel alapján az athéni matematikusok arra a megállapításra jutottak, hogy a puszta tapasztalat elvont általánosítása még nem nyújt kellő biztonságot; ennek következtében az athéniek rájöttek a matematikai *bizonyítás* szükségességére és ezzel lerakták a mai értelemben vett matematikai tudomány alapjait."[43]

Nem kétséges, hogy ez a gondolatmenet a matematikai bizonyítás szükségességéről vallott *modern* felfogást vetíti vissza az ókorba. Mert a valóságban egyáltalán nincs bizonyítékunk arra, hogy a görögök a deduktív tudomány megteremtésével csakugyan a mindennapi gyakorlat érdekében törekedtek volna nagyobb pontosságra, bizonyosságra. Minden jel arra mutat, hogy a gyakorlatban ők is megelégedtek a pontosságnak azzal a fokával, amely empirikusan is elérhető. Inkább az lehet a benyomásunk, hogy a görögök *elfordultak* a gyakorlattól, sőt részben még a tapasztalattól is akkor, amikor megteremtették a deduktív, theoretikus tudományt. Egyelőre elégedjünk meg azzal a megállapítással, hogy a görög matematikusok — különösen a deduktív tudomány történetének legrégibb szakaszán — *szinte csupa olyan tételt bizonyítottak be, amelyet a gyakorlatból már úgyis réges-régen jól ismertek.* A gyakorlat szempontjából pedig az ily módon deduktív úton bebizonyított matematikai tétel egyáltalában nem lett értékesebb, mint amilyen a bizonyítás előtti empirikus ismeret volt. Az ókorban a deduktív bizonyításnak *nem volt* közvetlen gyakorlati haszna. Sőt, a jelek arra mutatnak, hogy az ókori matematikusok igazában nem is sejtették a deduktív bizonyítás gyakorlati felhasználhatóságát. Egy elterjedt anekdota szerint pl., amikor EUKLIDÉSTŐL

[43] Uo. 39. lap.

megkérdezte egyik tanítványa, hogy vajon mit nyer azzal, ha megtanulja a matematikai levezetéseket, EUKLIDÉS odaszólt a rabszolgájának: adjon egy obolost a kérdezőnek, mert az illetőnek — úgy látszik — feltétlenül nyernie kell valamit abból, amit tanul.[44] — Aligha születhetett volna meg ez az ókori anekdota, ha a görög matematikusok egyáltalán sejtették volna az egzakt matematikai bizonyítás közvetlen gyakorlati felhasználhatóságát. — Félrevezető tehát arról beszélni, hogy a görögök „felfedezték a szigorú matematikai bizonyítás szükségességét". Mert igaz ugyan, hogy ezek az ókori görög matematikusok rendkívül szigorú bizonyításokra törekedtek, de arra a kérdésre, hogy mi szükség van ezekre a bizonyításokra, ők maguk egyáltalán nem tudtak volna választ adni.

Egy másik gyöngéje ALEXITS és FENYŐ föntebb idézett magyarázatának abban áll, hogy a szerzők a deduktív matematikai bizonyítást a mindennapi bizonyításformákból akarják levezetni. Elgondolásuk szerint a régi görögök először a mindennapi élet vitái során lettek volna figyelmesek az érvelésben felbukkanó ellentmondásokra; így merült volna fel a logikai bizonyítás igénye, s aztán később ennek az igénynek a kielégítésére kezdtek törekedni a matematikusok is. A matematikai bizonyítás tehát eszerint a mindennapi bizonyításformák egyik továbbfejlődött változata lehetne. — De visszavezethető-e az egzakt matematikai bizonyítás eredete olyan bizonyításformákra, amelyek *minőségükben* különböznek a matematikai bizonyítástól? Mert a mindennapi élet bizonyításformái csak nagyon *távolról* emlékeztetnek a matematikai bizonyításra. A nem-matematikai bizonyítás legtöbbször csak arra törekedhetik, hogy feltárja valamely állítás *valószínűségét*; az igazság kritériuma azonban ezekben az esetekben mindig a *gyakorlat*, a *tapasztalat*, illetőleg *maguk a tények*. Az ókori matematikusnak viszont nagyon sokszor éppen az évszázadok óta jól ismert és empirikusan lépten-nyomon tapasztalt tényeket kellett általános érvénnyel bebizonyítania. Hiszen a matematika éppen ez által lett tudománnyá, hogy — a principiumoktól eltekintve — *nem* elégedett meg az empirikusan tapasztalt tényekkel. — Ha tehát a matematikai bizonyítás eredetét a jóval szerényebb igényű mindennapi bizonyításformákban keressük, akkor éppen azt kellene még megmagyaráznunk: hogyan és miért lett a matematikai bizonyítás a görögöknél olyan rendkívül szigorúvá, feltételezett eredetét meghazudtolva egyedülállóan igényessé? ALEXITS és FENYŐ elgondolása erre a döntően fontos kérdésre egyáltalán nem ad választ.

[44] Vö. G. SARTON, Ancient Science and Modern Civilization, London 1954. 20. lap.

3. pont. Az egzakt görög matematika megszületését v. d. Waerden a következő elgondolással magyarázza.[45] A görögök sok empirikusan megismert matematikai tételt készen vettek át Egyiptomból és Babylónból. De a különböző eredetű keleti matematikai receptek nem mindig voltak összhangban egymással. A babylóniak szerint pl. a kör területe $3r^2$, az egyiptomiak szerint viszont $(8/9 \cdot 2r)^2$. A görögöknek már most, amikor megismerték ezeket az egymástól eltérő empirikus eredetű és pusztán gyakorlati célú szabályokat, dönteniök kellett, melyik a helyesebb, hogyan lehetne pontosabban kiszámítani a kör területét. Így jutottak volna el lassanként az egzakt levezetés, a bizonyítás gondolatához.

Ez az elgondolás szerényebb igényű, mint az előbbi kettő. Nem keresi az egzakt matematika eredetét valahol a logika közelében, vagy a logika kibontakozásával párhuzamosan haladó úton; nem is származtatja a matematikai bizonyítást mindennapi, a matematikán kívül eső bizonyításformákból. B. L. v. d. Waerden elgondolása az egzaktságra való törekvést egyszerű matematikai jellegű reflexiókra vezeti vissza. Csakugyan elképzelhető, hogy a matematikai bizonyítás gondolatának a megszületéséhez — különösen kezdetben, Thalés esetében — ilyen természetű reflexiók is hozzájárulhattak. Hiánya azonban ennek a plauzibilis elgondolásnak az, hogy nem veszi figyelembe azt a különös jelenséget, amelyet más összefüggésben maga v. d. Waerden is hangsúlyoz, hogy ti. a görög matematikusok már nagyon korán úgyszólván mindent, a legkézenfekvőbb tényeket is bizonyítani akarták. Ha összeállítjuk a legrégibb ismert görög matematikai bizonyításokat, egyáltalán nem az a benyomásunk, mintha a görök matematikusok azért teremtették volna meg a deduktív tudományt, hogy eldönthessenek olyan régebben „vitás kérdéseket", mint pl. a kör területének a kiszámítása. Éppen ellenkezőleg: a legrégibb matematikai bizonyítások szinte csupa vitathatatlan és közismert empirikus tényt bizonyítanak. Mi lehetett az oka ennek a mindenáron mindent bizonyítani-akarásnak már az i. e. 5. században? — B. L. v. d. Waerden elgondolása erre a kérdésre nem ad választ.

[45] B. L. v. d. Waerden, Science awakening. Groningen 1954. 89. lap; v. ö. O. Becker, Gnomon 23, 1951. 297. kk.: „Interessanter als alle Einzelheiten ist die Gesamtauffassung des Verf. von der frühgriechischen Mathematik. Die entscheidende Wendung sieht er mit Recht in dem Auftreten von Theoremen mit Beweisen. Das Motiv liegt nach ihm in der Übernahme einer nicht immer einheitlichen orientalischen Tradition (wie z. B. die verschiedene Bestimmung des Kreisinhalts durch Aegypter und Babylonier) und der sich daraus ergebenden Notwendigkeit einer kritischen Entscheidung zwischen ihnen."

Az a három különböző elgondolás tehát, amelyet ebben a fejezetben összefoglaltunk, bár használható szempontokat ad a további kutatáshoz, *nem* oldja meg problémánkat: hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá?

Minthogy a tudománytörténetnek mindeddig nem sikerült elfogadható magyarázatot adnia az egzakt görög matematika keletkezéséről, a következő fejezetben megkíséreljük összefoglalni azt, amit erről a kérdésről mai tudásunk alapján elmondhatunk. Előbb áttekintjük az antik hagyománynak erre vonatkozó legfontosabb adatait *(A. pont)*, majd kiegészítjük ezt azzal, amit erről a kérdésről a jelenkori tudomány megállapíthat *(B. pont)*.

III.

A) Az antik matematika legrégibb, klasszikussá lett összefoglalása, *Euklidés Elemeinek 13 könyve, i. e. 300 körül* keletkezett. EUKLIDÉS műve — jóllehet a tudomány későbbi fejlődése során többször rámutattak már fogyatékosságaira — a maga nemében mind a mai napig úgyszólván mintaszerű.[46] Megállapíthatjuk pl., hogy a görögök egzakt matematikai bizonyítása EUKLIDÉS korában már elérte legmagasabb fejlettségi fokát. A deduktív tudomány kialakulásának tehát az EUKLIDÉST *megelőző* korra kell esnie. Mit tud erről az EUKLIDÉS előtti korról a görög hagyomány?

A legrégibb görög matematika-történetet nem sokkal EUKLIDÉS előtt ARISTOTELÉS egyik tanítványa, EUDÉMOS írta az *i. e. 4. században*. Elveszett művének rövid kivonata belekerült az *i. sz. 5. században* élő PROKLOSnak EUKLIDÉS első könyvéhez írott kommentárjába. Ezt nevezik PROKLOS híres „matematikus jegyzékének". A jegyzék bennünket érintő legfontosabb megállapításai a következők.

(1) A görög matematika, illetőleg geometria megteremtője, az *i. e. 6. századi* THALÉS Egyiptomban gyűjtötte tudását és onnan hozta ezt a diszciplinát a görögök közé. A szöveg azt mondja róla, hogy „sok mindent feltalált ő maga, és sok másban megmutatta követőinek a principiumokhoz vezető utat azáltal, hogy egyes kérdéseket általánosabb, másokat viszont kézzelfoghatóbb (= érzékelhetőbb) formában vetett fel".[47]

[46] Lásd erre vonatkozóan G. PÓLYA idézett művének fejezeteit a 96. kk. és 225. kk. lapokon: „Durchführen eines Planes" és „Warum Beweise?"

[47] PROCLUS (ed. G. Friedlein) p. 65. — A matematikus-jegyzék egész szövegét lefordítja és részben kommentálja B. L. v. d. WAERDEN, Science awakening, 90. kk.

(2) A jegyzék következő, számunkra fontos megállapítását az ugyancsak *6. századi* PYTHAGORASszal kapcsolatban teszi. Azt állítja róla, hogy ő, PYTHAGORAS a geometriával való foglalkozást (= filozófiát) megváltoztatta, olyan formát adott neki, hogy ez a szabademberi nevelésének része legyen. — Ezekkel a szavakkal írja körül forrásunk azt az állítását, hogy a geometria, illetőleg matematika PYTHAGORAS kezében többé már nem gyakorlati, hanem elméleti jellegű tudománnyá lett. Antik felfogás szerint ugyanis a gyakorlat, *praxis*, nem méltó a szabad emberhez; a szabad ember csak szemlélődéssel, *theóriával* foglalkozhatik. Rendkívül fontos lehet számunkra a matematikus-jegyzéknek ez a PYTHAGORASszal kapcsolatos megállapítása, ha meggondoljuk, hogy a matematikai „tételt" görögül *theórémának* hívják. A *theóréma* elnevezés maga is arra mutat, hogy itt már nem gyakorlatról, hanem öncélú szemlélődésről, *theóriáról* van szó. — PYTHAGORAS a jegyzék szavai szerint döntő változást hozott a matematikába azáltal, hogy a geometria alapjait, principiumait kutatta és tételeit a konkrét anyagtól függetlenül *(ἀΰλως)* tisztán intellektuális úton *(νοερῶς)* vizsgálta. Ő, PYTHAGORAS volt az — mondja még szövegünk —, aki felfedezte az irracionálisok (vagy inkább: arányok?) elméletét[48] és megszerkesztette a kozmikus (= szabályos) testeket.

(3) Elmondja még ezenkívül PROKLOS jegyzéke többek között azt is, hogy már jóval EUKLIDÉS előtt mások is írtak olyan rendszeres matematikai műveket, „Elemeket", mint amilyen később EUKLIDÉSé lett. Az első ilyen rendszerező matematikus a chiosi HIPPOKRATÉS volt az *i. e. 5. században*, majd a *4. század első felében* LEON, a *4. század második felében* pedig a magnésiai THEUDIOS.

Lássuk mármost, mennyiben egészíti ki vagy módosítja az ókori hagyományt a mai matematika-történet.

B) Vegyük előbb sorra a PROKLOS jegyzékéből kiemelt három pontot.

ad 1. THALÉST illetően a modern történeti kutatás megerősíteni látszik az ókori jegyzék állításait. Talán szabad kiolvasnunk a THALÉSről szóló adatokból annyit, hogy a görög hagyomány is számontartotta az empirikus matematikai tudásanyag keleti eredetét; ezért emlegethetik THALÉS egyiptomi utazásait.[49] A szövegből nem derül

[48] G. FRIEDLEIN olvasása szerint a szöveg az *irracionálisok* elméletéről szól; más olvasás szerint csak az *arányok* elméletéről lenne szó.

[49] Érdekes, hogy az antik hagyomány az empirikus, gyakorlati matematikai ismeretek keleti eredetéről szólva mindig csak Egyiptomot emlegeti és sohasem Babylont. Vö. O. BECKER (Grundlagen der Math. 22. lap): „Die Griechen übernahmen weithin altorientalisches, besonders wohl *babylonisches* Material, obwohl die griechische Tradition immer nur von *Aegypten* als dem

ugyan ki minden kétséget kizáróan, vajon egzakt tudomány volt-e már THALÉS geometriája, de talán még ebben a kérdésben is utbaigazíthat bennünket az imént összefoglalt rövid híradás. A szöveg ugyanis azt mondja, hogy THALÉS „megmutatta követőinek a principiumokhoz vezető utat"; mintha ezekkel a szavakkal éppen azt akarná kifejezésre juttatni az antik szerző, hogy THALÉS maga nem jutott ugyan el a principiumokhoz, a matematika igazi alapjaihoz, inkább csak egyengette feléjük az utat. Tette pedig ezt azáltal, hogy „egyes kérdéseket *általánosabb*, másokat viszont kézzelfoghatóbb (= érzékelhetőbb) formában vetett fel". Mintha még ez a mondat is igazolható lenne. A geometriai „szög" fogalmát pl. csakugyan THALÉS vagy legalábbis THALÉS kora vezette be;[50] márpedig ez nagyfokú *általánosítás* volt. Az általánosításra törekvésnek tehát valóban érvényesülnie kellett már THALÉS tudományában. A szöveg azonban ugyanakkor azt is mondja, hogy THALÉS egyes kérdéseket *„érzékelhetőbb* formában vetett fel". Az érzékelhetőségnek ez a hangsúlyozása THALÉSszel kapcsolatban nem véletlen. Hiszen alig pár sorral alább PYTHAGORASról már éppen az ellenkezőjét halljuk. PROKLOS jegyzéke szerint PYTHAGORAS a matematika tételeit „a konkrét anyagtól függetlenül, tisztán intellektuális úton vizsgálta". THALÉSszel kapcsolatban tehát „érzékelhetőbb formáról", PYTHAGORASszal kapcsolatban pedig „tisztán intellektuális vizsgálódásról" hallunk. Ez a két megállapítás — úgy látszik — tudatosan utal egymásra.

Ursprungslande der Geometrie spricht." — Vajon mi lehet az oka annak, hogy a hagyomány ilyen egyoldalúvá torzult? Azt hisszük erre a kérdésre eléggé valószínű magyarázatot adhatunk akkor, ha figyelembe vesszük a következőket. Úgy látszik, a görög hagyomány is tudott arról, hogy a babylóni kultúra kisugárzási területén a számokkal való foglalkozás (az arithmetika) fejlett volt. Proklos pl. a görög tudomány eredetéről szólva megemlíti, hogy a phoinikoknál milyen magas színvonalú volt a számok ismerete éppen a kereskedelem és a számolással való gyakorlati foglalkozás következtében (Friedlein p. 65). — Abban az időben viszont, amikor Eudemos a 4. században megírta az első görög matematikatörténetet, a görög matematika már teljes egészében *geometrizálódott*. Amikor pedig a görögök a geometria eredetét kutatták, helyenként csakugyan magukhoz közelebb állónak érezhették az egyiptomi tudományt mintsem a babylónit. Hiszen láttuk már, hogy az egyiptomiak pl. a kör területét csakugyan „pontosabban" ki tudták számítani, mint a babylóniak. A görög hagyomány eltorzulásának tehát legalább részben oka lehet az is, hogy a görögök az egyiptomi geometriát közelebb érezték saját geometrizált tudományukhoz, mint a babylónit.

[50] Vö. O. BECKER, Gnomon 1951. 298. lap): „Im übrigen ist gerade die Einführung des Winkelbegriffs (statt des sqt) eine wesentliche neue Errungenschaft der frühgriechischen Geometer (Scheitelwinkel, Basiswinkel, Winkel im Halbkreis), die von weittragenden Folgen war (Winkelsumme im Dreieck, woraus vielerlei abgeleitet werden konnte).

De vajon miben állhatott a thalési geometria „érzékelhetősége"? — Erre a kérdésre is felelhetünk, ha azt vizsgáljuk előbb: vajon be tudta-e bizonyítani THALÉS a tételeit, és hogyan? — Az antik hagyomány csakugyan beszél THALÉS „bizonyításairól",[51] de nem mondja meg világosan, miből állott a bizonyítás. A modern interpretáció ezzel kapcsolatban két körülményre hívja fel a figyelmet; egyrészt utal arra, hogy a „bizonyítást" jelölő görög szó jelent egyszerű *megmutatást* is; másrészt pedig emlékeztet a modern tudománytörténet egy olyan megfigyelésre, amelynek alapján nagy valószínűséggel rekonstruálhatjuk THALÉS bizonyítási eljárásait.[52] EUKLIDÉS ugyanis az I. könyv elején megfogalmazza az ún. kongruencia-axiómát: „azok (a dolgok = síkidomok), amelyek *egymásra illeszthetőek*, egyenlők egymással".[53] Az „egymásra illesztés" *(ἐφαμόζειν)* kifejezést azonban EUKLIDÉS soha egyetlen egy tételében sem használja, csak ebben az axiómában és csak nagyon ritkán (összesen kétszer!) egy-egy tétel bizonyításában, jóllehet az említett axióma használata sokszor megkönnyíthette volna munkáját.[54] Nyilvánvaló tehát, hogy EUKLIDÉS kerülni igyekszik a kongruencia-axióma használatát. Ugyanakkor azonban tudjuk PROKLOS szövegéből, hogy régebben olyan geometriai bizonyításokban is használták az „egymásra illesztés" empirikus módszerét, amelyeket EUKLIDÉS már egyáltalán nem említ. „Ezt a módszert tehát egykor sokkal gyakrabban használták, mint amennyire ez EUKLIDÉS szövege alapján elképzelhető volna. Úgy látszik, ez a módszer még a görög matematika történetének korai szakaszából származik. Nem lehet véletlen az sem, hogy a hagyomány által THALÉSnek tulajdonított öt tétel közül négy közvetlenül, az ötödik pedig közvetve csakugyan bebizonyítható az egymásra-illesztés módszerével".[55] Továbbá megtaláljuk PROKLOSnál egy olyan tételnek az

[51] Lásd PROCLUS (ed. G. Friedlein) p. 157.

[52] A következőkben K. v. FRITZ (lásd föntebb a 21. jegyzetet) megfigyeléseit foglalom össze; megállapításait részben kiegészítem.

[53] A kérdéses axióma I. L. HEIBERG szövegkiadásának latin fordításában: „quae inter se congruunt, aequalia sunt". „Was sich deckt, ist gleich" (O. Becker).

[54] K. v. FRITZ i. m. 77. lap: „Manche Unstimmigkeiten in den Gleichheitsdefinitionen hätten sich bei Euklid leicht vermeiden lassen, wenn von der Deckungsmethode ein etwas reichlicher Gebrauch gemacht worden wäre."

[55] K. v. FRITZ uo.: „Diese Methode muß also einmal in viel weiterem Umfang angewendet worden sein, als dies bei Euklid der Fall ist. Sie scheint auf den ersten Anfang der griechischen Mathematik zurückzugehen, und es ist dann nicht leicht, es als einen reinen Zufall zu betrachten, daß von den fünf Sätzen, die dem Thales in der antiken Überlieferung zugeschrieben werden, vier sich direkt und der fünfte indirekt mit der Deckungsmethode beweisen lassen."

empirikus bizonyítását is éppen az egymásra-illesztés módszerével, amely tételről egy másik alkalommal PROKLOS azt állította, hogy ezt már THALÉS is bebizonyította.[56] Föltehető tehát, hogy THALÉS bizonyítási eljárása éppen abból állott: alkalmazta az empirikus egymásra-illesztés módszerét, azt a módszert, amelyet régebben olyan gyakran használtak és csak később igyekeztek kerülni.[57] THALES valószínűleg úgy bizonyította be a tételeit, hogy a tárgyalt geometriai alakzatokat egymásra illesztette, és állításainak igazságát ily módon szemléltette, „megmutatta". A matematikai bizonyítás jelölésére használt görög szó, *ἀποδεικνύναι* eredetileg csakugyan „megmutatást" jelent. PROKLOSnak azt az állítását tehát, hogy THALÉS egyes geometriai kérdéseket még „érzékelhetőbb formában" tárgyalt, a következőképpen magyarázhatjuk: THALÉS számára az evidencia még egyszerűen csak a szemléletesség evidenciája volt. Az a fordulat a tudomány történetében, amelyet a matematikus-jegyzék PYTHAGORAS működésének tulajdonít, THALÉS korában még nem következett be.

PYTHAGORAST illetően a tudomány rendkívül szkeptikus a matematikus-jegyzék állításaival szemben.[58] Legrégibb forrásaink ugyanis PYTHAGORAST egyáltalán nem tartják filozófusnak vagy matematikusnak. Úgy látszik, hogy az ő nevéhez fűződő antik legenda tulajdonképpen csak az i. e. 4. század *után* kezdett kialakulni.[59] PLATÓN és ARISTOTELÉS pl. még csak pythagoreusokról és nem magáról PYTHAGORASról beszél. A PYTHAGORASnak tulajdonított matematikai felfedezésekről is kiderült, hogy részint jóval régebbiek, részint pedig későbbiek, mint a 6. század.[60] Érthető, ha

[56] PROCLUS (ed. G. Friedlein) p. 157. — A kérdéses tétel kimondja, hogy „az átmérő felezi a kört". Euklidés ezt a megállapítást nem mint tételt tárgyalja, hanem beleépíti az I. könyv 17. definíciójába: ezáltal viszont túlterheli a definíciót.

[57] K. v. FRITZ i. m. 94. lap: „Daß im Anfang die *anschauliche* Evidenz eine nicht unbeträchtliche Rolle gespielt hat, zeigt die in einem frühen Stadium reichliche Verwendung der Deckungsmethode, während umgekehrt die fortschreitende, wenn auch bis auf Euklid nicht vollständige Ausschaltung dieser Methode und das sichtliche Bestreben Euklids, den letzten Überbleibseln der Methode, die er nicht vermeiden kann, ein axiomatisches Fundament zu geben und sie auch sonst ihres empirischen Charakters so sehr als möglich zu entkleiden, REIDEMEISTER Recht geben: das Charakteristische der griechischen Mathematik ist, daß sich in ihr die Umwendung vom Anschaulichen zum Begrifflichen vollzieht."

[58] Vö. E. FRANK, Plato und die sog. Phythagoreer, Halle (Saale) 1923. 67. lap és 166. jegyzet a 356. lapon.

[59] K. REINHARDT, Parmenides und die Gesch. der griech. Philosophie, Bonn 1916. 232. kk.

[60] Vö. K. REIDEMEISTER, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949. 20. és 51—52. lapok; E. SACHS, Die fünf platonischen Körper, Berlin 1917.

ezekután sokan legendának minősítették azt is, amit PROKLOS jegyzéke PYTHAGORASról a matematika megváltoztatásával kapcsolatban mond. — Némi óvatosságra int azonban a következő meggondolás: több ízben beszélnek megbízható antik forrásaink az i. e. 5. században élő pythagoreusok arithmetikai jellegű tanulmányairól. ARISTOTELÉS pl. azt állítja, hogy a pythagoreusok voltak az elsők, akik *mathémákkal* foglalkoztak.[61] Platón szerint pedig a pythagoreusok tudományai — *mathémái* — közül az első és legfontosabb a számokkal való foglalkozás volt.[62] A modern történeti kutatásnak csakugyan sikerült is rekonstruálnia az i. e. 5. századi pythagoreus matematikának legalább egy részét. Ha mármost összevetjük ezt a rekonstruált pythagoreus matematikát azzal, amit PROKLOS jegyzéke magáról PYTHAGORASról mond, meglepődve tapasztaljuk, hogy a hagyománynak PYTHAGORASra vonatkozó állításai az 5. századi pythagoreus matematikára mindenesetre érvényesek. A gyakorlati, empirikus jellegű matematikai ismeret ezen a fokon már csakugyan elméletivé, intellektuális jellegűvé, theóretikussá lett. Ez a matematika már csakugyan a principiumokat keresi „a konkrét anyagtól függetlenül, tisztán intellektuális úton". Ezért jutott K. REIDEMEISTER arra a következtetésre, hogy az egzakt matematika megteremtői az 5. századi pythagoreusok voltak.[63] Úgy látszik, mintha PROKLOS jegyzéke ezt a modern megállapítást egyszerűen csak visszavetítené arra a legendás PYTHAGORASra, akiről a pythagoreusok szektája elnevezte magát. Ezzel természetesen még egyáltalán nem magyaráztuk meg a deduktív görög matematika létrejöttét, de mindenesetre jó lesz tudnunk, hogy az antik hagyomány legendás PYTHAGORASa és a modern tudomány által felfedezett pythagoreusok nem állnak túl messze egymástól.

ad 3. Abból, mit PROKLOS jegyzéke a legrégibb matematikai kézikönyv-szerzőkről elmond, bennünket leginkább az 5. századi HIPPOKRATÉSre vonatkozó adatok érdekelnek. A chiosi származású HIPPOKRATÉS i. e. 450—430 táján hosszabb ideig volt Athénben és ott abból élt, hogy geometriát tanított.[64] PROKLOS szerint ő volt az első, aki rendszeres matematikai kézikönyvet, „Elemeket" írt. Ezt a híra-

[61] Aristoteles, Met. 5. 985 b 23—24. — A pythagoreusok szemében a „mathéma" tételek és bizonyítások rendszere volt; a szó magyarázatához lásd K. REIDEMEISTER i. m. 52. lap: „Mathema = eine Zusammenstellung mathematischer Sätze und Beweise".

[62] Platón, Epinomis 990 C.

[63] K. REIDEMEISTER i. m. 52. lap. — Reidemeisternek ezzel a megállapításával részletesebben foglalkozunk a következő fejezetben.

[64] Jó összefoglaló tájékoztatást ad mind Heippokratesre mind pedig a görög tudomány korai történetére vonatkozólag G. HAUSER, Die Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid. Luzern 1955.

dást a mai tudomány nem vonja kétségbe; egyrészt azért nem, mert fennmaradt egy szó szerinti 4. századi beszámoló HIPPOKRATÉSnek egy másik matematikai művéről *(quadratura lunularum)*,[65] és ennek alapján olyannak ismerjük HIPPOKRATÉS matematikai tudását, hogy könnyen hihetjük róla: megkísérelte szigorú logikai rendbe foglalni korának matematikai ismereteit; másrészt támogatják PROKLOS adatát a legújabb kutatások eredményei is. A modern matematika-történet ugyanis függetlenül a HIPPOKRATÉSre vonatkozó antik híradástól arra az eredményre jutott, hogy csakugyan lennie kellett már az 5. században (i. e. 400 előtt) valamilyen rendszeres matematikai kézikönyvnek, amelynek anyaga később minden lényegesebb változtatás nélkül belekerült Euklidés Elemeinek VII. könyvébe.[66] — Tanulságos a mi szempontunkból a HIPPOKRATÉSre vonatkozó antik adat azért, mert ha HIPPOKRATÉS már az 5. század közepe táján vagy második felében megkísérelhette a matematika rendszeres összefoglalását, azt a munkát, amelyet klasszikus formában később EUKLIDÉS végzett el, akkor ebből nyilvánvaló, hogy a deduktív matematika kezdeteinek még a HIPPOKRATÉST *megelőző* időre kell esniök.

Az antik matematikus-jegyzék gyér adatait némileg kiegészíthetjük azzal, amit a modern történeti kutatásnak sikerült rekonstruálnia az Euklidés-előtti, különösen pedig az 5. századi görög matematikából. Bennünket ebben az összefüggésben leginkább O. BECKERnek egy 1936-ban, és B. L. v. D. WAERDENnek egy másik 1947-ben megjelent dolgozata érdekel.

O. BECKER ugyanis észrevette, hogy EUKLIDÉS IX. könyvének utolsó 16 tétele (21—36), valamint a X. könyv végén a 27. Appendix, amely az említett tételekhez kapcsolódik, tulajdonképpen csak *függelék* EUKLIDÉS művében, amelyet vagy a szerző maga, vagy pedig még valamelyik ókori másolója meglehetősen lazán illesztett hozzá az Elemekhez.[67] Ezt az összesen 17 tételből álló sorozatot a szakirodalom O. BECKER felfedezése óta mint a párosról és páratlanról szóló pythagoreus tanítást emlegeti. A felfedezőnek sikerült kimutatnia, hogy ezek a tételek még az i. e. 5. század közepéről, vagy első feléből származnak. Bár a datálás csak hozzávetőleges, annyi mindenesetre bizonyos, hogy éppen ezt a tétel-

[65] Ez a beszámoló Aristotelés tanítványától, a 4. századi Eudemostól származik; fenmaradt Simplikiosnak, az i. sz. 6. század Aristotelés-kommentátorának a művében; vö. O. BECKER, Grundlagen der Mathematik, 29. kk.

[66] Vö. B. L. v. d. WAERDEN, Math. Ann. 120 (1947/49) 145—146.

[67] O. BECKER, Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente. Quellen und Studien zur Gesch. der Math. Abt. B. Bd. 3 (1936) 533—553.

sorozatot kell a jelenleg ismert legrégibb görög deduktív mathémának tartanunk.

Hasonlóképpen sikerült megállapítania B. L. v. d. WAERDENnek EUKLIDÉS VII. könyve első 36 tételéről, hogy ezek már az i. e. 5. században, tehát 400 előtt, valamilyen pythagoreus matematikai kézikönyvében összefoglalva készen állottak, és innen kerültek át minden lényeges változtatás nélkül EUKLIDÉS szövegébe.[68] Fennmaradt ugyanis a 430—360 között élő ARCHYTASnak egy matematikai bizonyítása BOETIUS (i. sz. 5. század) egyik művében;[69] v. d. WAERDEN elemezvén ezt a bizonyítást, kimutatta, hogy ebben ARCHYTAS olyan már bebizonyított tételekre hivatkozik, amelyeket mi EUKLIDÉS VII. és VIII. könyvében olvashatunk. Minthogy ARCHYTAS a bizonyítás során egyébként rendkívül gondosan, lépésről lépésre halad, az említett két esetben viszont csak röviden utal az alapul szolgáló tételekre, bizonyosra vehetjük, hogy a ki-nem-fejtett utalások olyasmire vonatkoznak, ami ARCHYTAS korában már közismert volt. Ezen a nyomon továbbhaladva sikerült v. d. WAERDENnek valószínűvé tennie, hogy EUKLIDÉS Elemeinek úgyszólván egész VII. könyve már ARCHYTAS *előtt* megvolt írásos formában rögzítve.

Ha mármost összevetjük a modern kutatásnak ezeket az eredményeit az antik hagyománnyal, akkor úgy látszik, figyelmünket a görög matematikának arra a legrégibb korszakára kell összpontosítanunk, amelynek legfontosabb adatait a következő 5 pontban foglalhatjuk össze.

1. A 6. századi THALÉS, úgy látszik, a bizonyításban még csak a szemléletesség evidenciájára törekedett. Az ő geometriája még többé-kevésbé empirikus jellegű volt.
2. Az 5. század közepén vagy még a század első felében keletkezett a páros és páratlanról szóló pythagoreus tanítás *(Eukl. IX 21—36 és X App. 27)*. Ez a legrégibb ismert görög deduktív tételsorozat.
3. Az 5. század közepe táján (i. e. 450—430) élt Athénben HIPPOKRATÉS a *quadratura lunularum* szerzője, az első matematikus, aki már logikai rendbe állított „Elemeket" írt.[70]

[68] B. L. v. d. WAERDEN, Die Arithmetik der Pythagoreer I., Math. Ann. 120 (1947/49) 127—153.

[69] BOETIUS, De inst. mus. III 11 (ed. G. Friedlein, 1867) p. 285.

[70] Azokat a matematikai tételeket, amelyeket a chiosi Hippokratésnek ismernie kellett, összeállítja G. HAUSER i. m. 105. kk.

4. Még az 5. században állították össze azoknak a tételeknek nagy részét, amelyeket *Euklidés VII. könyvéből* ismerünk.

5. 430—360 között élt ARCHYTAS, aki e régi kor szellemében még többre tartotta az arithmetikát, mint a geometriát. Ő utána következett be az algebra geometrizálása.

A matematikai bizonyítás szempontjából azokról a tételekről, amelyeket az utóbbi négy pontban állítottunk össze, a következőket állapították meg.

A pythagoreus matematikában a bizonyítás szigorúságával szemben támasztott igények már igen korán meglepően nagyok. A páros és páratlanról szóló tanításban pl. azok a tételek, amelyeket Euklidés IX. könyvének 21—29 pontjaiban olvashatunk, mindenki számára, aki jártas egy kissé a számolásban, maguktól értetődőek; mégis ezeket a természetesnek látszó tényeket tételekbe foglalják és bebizonyítják. Hasonlóképpen minden további nélkül érthetőek a IX 30—32 tételek is, de ezeket is levezetik még egyszerűbb tényekből.

A holdacskák quadraturájáról szóló Hippokratés-töredék még azokat az egyenlőtlenségeket is gondosan bizonyítja, amelyek bármely ábráról azonnal leolvashatók lennének.

Hasonló jelenséggel találkozunk Euklidés VII. könyvében is léptennyomon. ARCHYTAS bizonyítása pedig az egyes lépések kidolgozását már szinte pedáns túlzásba viszi.[71]

A feltűnő tehát az, hogy a 6. századi THALÉS bizonyításai még csak empirikus kísérletek voltak, amelyek megelégedtek a szemléletesség evidenciájával, az 5. századi pythagoreusok bizonyításai viszont már rendkívül szigorú egzakt bizonyítások. Arról, hogy ki tudnánk mutatni a pythagoreusok bizonyításainak a technikájában valamilyen fokozatos fejlődést vagy lassú kibontakozást, egyszerűen szó sem lehet. A deduktív matematika kezdetének a kezdetén egyszerre máris rendkívül szigorú, igényes bizonyításokat találunk. Abban az időszakaszban tehát, amely a 6. századi THALÉS és az 5. századi pythagoreusok közé esik, döntő változás történt: megszületett a deduktív görög matematika.

Ezzel sikerült legalább nagyjából meghatároznunk az egzakt tudomány létrejöttének a korát. Hátra van még a fontosabb kérdés: *hogyan* és *miért* lett a matematika deduktív tudománnyá?

[71] Lásd ezeknek a tételeknek és bizonyításaiknak a jellemzését B. L. v. d. WAERDENnél, Math. Ann. 120. 139—140.; ill. Hippokratesre vonatkozóan G. HAUSER i. m. 107.

A topologikus tér fogalmáról I.

CSÁSZÁR ÁKOS

1. A halmazelméleti irányú topológia fejlődése azokkal a vizsgálatokkal veszi kezdetét, amelyeket G. CANTOR a múlt század második felében az euklideszi terekben fekvő ponthalmazok tulajdonságainak leírása céljából folytatott. Ezekre az indítékot az egyváltozós, illetőleg többváltozós valós függvények elméletében fellépő bizonyos kérdések adták; a felmerült problémák tisztázása céljából CANTOR bevezette azokat az alapvető fogalmakat, amelyek a topológiában ma is szerepelnek: ponthalmaz belső, külső, határpontja, torlódási pont, nyílt halmaz, zárt halmaz stb. Az ő munkái nyomán a felsorolt fogalmak és a velük kapcsolatos legegyszerűbb tételek az egy- és többváltozós függvények szabatos és lehetőleg általános eredményekre törekvő vizsgálatában mindinkább nélkülözhetetlennek bizonyultak, úgyhogy az euklideszi terekben fekvő ponthalmazok elméletének alapfogalmai ma már a bevezető egyetemi analízis-előadásokban, illetőleg ilyen tárgyú tankönyvekben találnak helyet.

Néhány évtizeddel CANTOR első ponthalmazelméleti kutatásai után felmerült az a gondolat, hogy az általa bevezetett alapfogalmakat nem lehet-e az euklideszi tereken kívül még más természetű mennyiségek által alkotott sokaságokban is bevezetni. Az analízis egyes ágaiban felléptek ugyanis olyan függvények is, amelyeknek független változója nem jellemezhető véges számú valós számmal, vagyis nem ábrázolható egy többdimenziós euklideszi tér egy pontjával. A variációszámítás bizonyos feladataiban például a függvények egyes osztályai alkotják azon (általánosított értelemben vett) függvény értelmezési tartományát, amelynek szélsőértékét keressük, ugyancsak a variációszámítás más problémáiban viszont bizonyos görbékhez rendelünk valós számokat s az ilyen függvények szélsőértékeinek meghatározása a feladat. M. FRÉCHET vette észre, hogy függvények, görbék, s másfajta mennyiségek között is gyakran sikerül a távolság fogalmát értelmezni s az euklideszi tér pontjai közötti távolság tulajdonságaihoz hasonló tulajdonságokkal fel-

ruházni, s hogy ezáltal a ponthalmazelmélet alapfogalmait és legegyszerűbb tételeit bizonyos változtatásokkal, sőt sokszor változatlanul, át lehet vinni olyan halmazokra, melyeknek „pontjai" függvények, görbék, és így tovább. A távolság fogalmának legfontosabb alaptulajdonságait megragadva bevezette a *metrikus tér* fogalmát, amely azóta a matematika számos fejezetében nélkülözhetetlenné vált.

FRÉCHET mindjárt tovább is ment és megkísérelte a metrikus térnél általánosabb olyan térfogalom megalkotását, amelyre a ponthalmazelmélet alapfogalmai még lényegében változatlanul átvihetők, de ez irányú próbálkozásai nem jártak teljes sikerrel. Övele csaknem egy időben RIESZ FRIGYES is megadta a tér fogalmának olyan általános definícióját, amely az előbb megfogalmazott célnak, éspedig a Fréchet-féle tereknél jobban, megfelelt, de a bevezetett térfogalom tulajdonságainak részletes elemzésével már nem foglalkozott. Így aztán F. HAUSDORFF volt az első, aki 1914-ben megjelent könyvében az általános topologikus tér fogalmát bevezette és tulajdonságait is módszeresen kifejtette. Az általa tárgyalt ún. *Hausdorff-féle terek* a topológiai kutatásoknak ma is egyik legfontosabb területét alkotják.

A ponthalmazelmélet legegyszerűbb eredményeinek átvitele még a HAUSDORFF által tett feltevéseknél is kevesebb kikötés mellett is sikerül, más szóval a topologikus tér fogalma még tovább is általánosítható. A legáltalánosabb topologikus terek szerkezetének vizsgálatában P. Sz. ALEKSZANDROV, P. Sz. URISZON és A. N. TYIHONOV ért el a húszas években alapvetően fontos eredményeket. Munkásságuk nyomán fény derült arra, hogy a legáltalánosabb topologikus terekből kiindulva hogyan lehet egyre erősebb megszorításokkal lépésenként eljutni a metrikus terekhez, amelyeknek tulajdonságai már igen nagy fokban emlékeztetnek az euklideszi terekben uralkodó viszonyokra.

A metrikus terek jól áttekinthető szerkezetéhez való közeledés óhaja jellemzi a topologikus terek elméletének újabb fejlődését is. Így a topologikus csoportok vizsgálata közben kiderült, hogy ezek sok tekintetben hasonlóan viselkednek a metrikus terekhez, még akkor is, ha a távolság fogalma nem vezethető be bennük. Ezeknek a körülményeknek elemzése közben jutott el A. WEIL 1937-ben az *uniform struktúrák* fogalmának megalkotásához,[1] amelyek az általános topologikus terek vizsgálatában igen hasznos segédeszköznek bizonyultak.[2] A metrikus terek tulajdonságainak más ter-

[1] L. A. WEIL, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Actual. Scient. et Ind., nº 551 (Paris, 1937).

[2] L. pl. N. BOURBAKI, Topologie générale, Actual. Scient. et Ind., nos 858, 916, 1029, 1045, 1084 (Paris, 1940—1949).

mészetű általánosítása képezi az alapgondolatot a V. A. JEFREMOVICS-tól származó *szomszédsági struktúrák* értelmezésében.[3] Ezeknek szerkezetét JU. M. SZMIRNOV derítette fel jelentékeny mértékben.[4] Ugyanőneki — s tőle függetlenül J. NAGATÁnak — sikerült A. H. STONE eredményeinek felhasználásával az általános topologikus terek és a metrikus terek közötti kapcsolatok felkutatásában URISZON és TYIHONOV munkái óta a legjelentősebb lépést megtennie.[5]

A következőkben, kiindulva a topologikus terekkel kapcsolatos legalapvetőbb fogalmakból, megkíséreljük elvezetni az olvasót egészen az előbb említett újabb keletű eredményekig. Eközben mód nyílik arra, hogy megmutassuk, az újabban bevezetett topológiai struktúrák mennyire megnövelik a különféle topologikus terek összefüggései feletti áttekintésünket és mennyi lehetőséget nyújtanak régen ismert eredmények egyszerűbb tárgyalására.

2. Valamely R halmazt *metrikus tér*nek mondunk és elemeit *pont*oknak nevezzük, ha bármely két $x \in R$ és $y \in R$ ponthoz hozzá van rendelve egyértelműen egy $\varrho(x, y)$ valós szám, az x és y pontok *távolsága*, éspedig úgy, hogy

(2. 1) $\varrho(x, y) \geqq 0, \varrho(x, x) = 0;$

(2. 2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x);$

(2. 3) $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z);$

(2. 4) ha $x \neq y$, akkor $\varrho(x, y) > 0.$

Ilyen metrikus teret alkot például tetszőleges n természetes szám mellett az *n-dimenziós euklideszi tér*, vagyis az összes valós számokból álló $(x_1, \ldots, x_n)$ szám-n-esek halmaza, ha közöttük a távolságot az $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ jelölésekkel a

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

képlet alapján értelmezzük. A (2. 1), (2. 2) és (2. 4) kikötések teljesülése a definícióból rögtön kiolvasható, a *háromszög-egyenlőtlenség*nek nevezett (2. 3) kikötés teljesülése pedig az ismert Cauchy-féle egyenlőtlenség felhasználásával könnyű számolással igazolható.

[3] L. B. A. Ефремович, Геометрия близости I. Мат. Сборн. **31 (73)** (1952), 189—200.

[4] L. Ю. М. Смирнов, О пространствах близости, Мат. Сборн. **31 (73)** (1952), 543—574.

[5] L. A. H. STONE, Paracompactness and product spaces, Bull. Am. Math. Soc. **54** (1948), 977—982 és Ю. М. Смирнов, О метризации топологических пространств, Усп. Мат. Наук. **6 (46)** (1951), 100—111.

J. NAGATA, On a necessary and sufficient condition of metrizability, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A Math. **1** (1950), 93—100.

Ha x az R metrikus tér egy pontja, r pedig valamely pozitív szám, akkor azon $y \in R$ pontok halmazát, melyeknek x-től való távolsága kisebb, mint r, x középpontú, r sugarú *gömb*nek nevezzük és $S(x, r)$-rel jelöljük.

Az R metrikus tér egy G részhalmazát *nyílt*nak mondjuk, ha minden $x \in G$ ponthoz található olyan $r > 0$ szám, hogy $S(x, r) \subset G$. Eszerint nyílt halmaz az üres halmaz (melyre a definícióban foglalt kikötés „üresen" teljesül), továbbá az egész R tér. Nyílt továbbá tetszőleges számú G_γ $(\gamma \in \Gamma)$ nyílt halmaz $G = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ egyesítése is, mert ha $x \in G$, akkor valamely γ_0 indexre $x \in G_{\gamma_0}$, tehát G_{γ_0} nyíltsága miatt van oly $r > 0$, hogy $S(x, r) \subset G_{\gamma_0}$, de akkor annál inkább $S(x, r) \subset G$. Végül nyílt két nyílt G_1 és G_2 halmaz $G = G_1 \cap G_2$ közös része is, hiszen ha $x \in G$, akkor $x \in G_1$ és $x \in G_2$, tehát van olyan r_1 és r_2 pozitív szám, hogy $S(x, r_1) \subset G_1$ és $S(x, r_2) \subset G_2$, s akkor az r_1 és r_2 számok közül a kisebbiket r-rel jelölve, $S(x, r) \subset G_1 \cap G_2$. Ebből teljes indukcióval következik, hogy tetszés szerinti véges számú nyílt halmaz közös része is nyílt.

3. A topologikus tér legáltalánosabb fogalmához úgy jutunk el, hogy megköveteljük a tér bizonyos részhalmazainak mint nyílt halmazoknak kitüntetését és a metrikus tér nyílt halmazainak előbb bizonyított tulajdonságaival való felruházását.

Valamely R halmazt eszerint *topologikus tér*nek nevezünk, ha ki vannak jelölve bizonyos, *nyílt* halmazoknak nevezett, részhalmazai, s ezek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

(3. 1) Az üres halmaz és az egész R tér nyílt.
(3. 2) Tetszőleges számú nyílt halmaz egyesítése nyílt.
(3. 3) Véges számú nyílt halmaz közös része nyílt.

Az előbbi pont gondolatmenetének következménye, hogy valamely metrikus térben a gömbök segítségével a fent leírt módon definiálva a nyílt halmazokat, a metrikus tér topologikus térré válik. Ilyenkor *a tér metrikája által indukált topológiáról* beszélünk.

Legyen A az R topologikus tér valamely részhalmaza. Az A halmaz összes nyílt részhalmazainak egyesítése (3. 2) szerint nyílt halmaz, ezt az A halmaz *belsejének* nevezzük és $\operatorname{Int} A$-val jelöljük. $\operatorname{Int} A$ nyilván a legnagyobb A-ban foglalt nyílt halmaz.

$\operatorname{Int} A$ értelmezéséből közvetlenül adódnak a következő egyszerű szabályok:

(3. 4) $\operatorname{Int} A \subset A$;
(3. 5) $A \subset B$ esetén $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$;
(3. 6) A akkor és csak akkor nyílt, ha $\operatorname{Int} A = A$;
(3. 7) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

Csak az utolsó szorul igazolásra. Belátása végett gondoljuk meg, hogy egyrészt $\mathrm{Int}(A \cap B)$ oly nyílt halmaz, mely $A \cap B$-nek része, tehát A-nak is és B-nek is, s ezért mindkettő belsejében foglaltatik, úgyhogy $\mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}\, A \cap \mathrm{Int}\, B$; másrészt $\mathrm{Int}\, A \subset A$, $\mathrm{Int}\, B \subset B$, s ezért $\mathrm{Int}\, A \cap \mathrm{Int}\, B$ olyan nyílt halmaz, mely $A \cap B$-nek része, s így $\mathrm{Int}\, A \cap \mathrm{Int}\, B \subset \mathrm{Int}(A \cap B)$.

Valamely R topologikus térben a nyílt halmazok kiegészítő halmazait *zárt* halmazoknak nevezzük. A (3. 1)—(3. 3) relációkból a kiegészítő halmazokra való áttéréssel rögtön adódnak a következő állítások:

(3. 8) Az üres halmaz és az egész R tér zárt.
(3. 9) Tetszőleges számú zárt halmaz közös része zárt.
(3. 10) Véges számú zárt halmaz egyesítése zárt.

Egy A halmazt tartalmazó összes zárt halmazok közös része (3. 9) alapján zárt; ezt az A halmaz *lezárás*ának nevezzük és $[A]$-val jelöljük. $[A]$ nyilván az A-t tartalmazó legkisebb zárt halmaz; ezért $[A]$ kiegészítő halmaza az A kiegészítő halmazában foglalt legnagyobb nyílt halmaz, más szóval a kiegészítő halmazt felülvonással jelölve

$$(3.\ 11) \qquad \overline{[A]} = \mathrm{Int}\, \bar{A}.$$

Ebből és a (3. 4)—(3. 7) szabályokból a kiegészítő halmazokra való áttéréssel rögtön adódik, hogy

(3. 12) $A \subset [A]$;
(3. 13) $A \subset B$ esetén $[A] \subset [B]$;
(3. 14) A akkor és csak akkor zárt, ha $[A] = A$;
(3. 15) $[A \cup B] = [A] \cup [B]$.

Ha $x \in \mathrm{Int}\, A$, akkor azt mondjuk, hogy x *belső pont*ja A-nak és A *környezete* x-nek.[6] A relációból következik, hogy ha A tartalmazza x-nek egy környezetét, akkor maga is környezete x-nek, (3. 7)-ből pedig az folyik, hogy az x pont két (s általánosabban véges számú) környezetének közös része ugyancsak környezete x-nek. (3. 4) folytán x hozzátartozik minden környezetéhez. Világos, hogy A belső pontjainak összessége $\mathrm{Int}\, A$-val azonos, s hogy x akkor és csak akkor belső pontja A-nak, ha van olyan környezete, mely teljesen A-ban fekszik.

Az x pontot *külső pont*nak mondjuk A-ra nézve, ha van olyan környezete, amelyben A-nak egyetlen pontja sem fekszik,

[6] Sokszor csak az x pontot tartalmazó *nyílt* halmazokat nevezik az x pont környezeteinek; sok szempontból célszerűbb azonban — és újabban egyre terjedőben van — az itt használt terminológia.

vagyis ha x belső pontja az $\bar{A}$ kiegészítő halmaznak. Azt mondjuk, hogy x *határpont*ja A-nak, ha x minden környezetében van A-hoz tartozó pont is, $\bar{A}$-hoz tartozó pont is. A belső és határpontokat együttvéve *érintkezési pont*oknak nevezzük; ezek tehát azáltal jellemezhetők, hogy minden környezetükben van legalább egy A-hoz tartozó pont. Az A halmaz érintkezési pontjainak halmaza azonos A-nak $[A]$ lezárásával, hiszen az érintkezési pontok halmazának kiegészítő halmaza a külső pontokból áll, ezek pedig az $\operatorname{Int}\bar{A}$ halmazt, tehát (3. 11) alapján $[A]$ kiegészítő halmazát alkotják.

4. Az algebrából ismert izomorfia-elv értelmében két topologikus tér struktúráját lényegében megegyezőnek, izomorfnak tekintjük, ha egymásba kölcsönösen egyértelmű leképezéssel átvihetők úgy, hogy az egyik tér nyílt halmazai a másik tér nyílt halmazaiba menjenek át és viszont. Ilyenkor a két topologikus teret *homeomorf*nak mondjuk és az olyan kölcsönösen egyértelmű leképezést, amely a nyílt halmazokat nyílt halmazokba viszi át és viszont, *topologikus leképezés*nek nevezzük.

A topologikus leképezés iránt támasztott követelményeket mintegy megfelezve a folytonos leképezés fogalmához jutunk. Pontosabban szólva az R topologikus térnek az R' topologikus térbe való f leképezését akkor mondjuk *folytonos*-nak, ha egyértelmű s ha minden R'-beli nyílt G' halmaz $f^{-1}(G')$ inverz képe nyílt R-ben. Világos, hogy ha f R-nek R'-be való, g pedig R'-nek R''-be való folytonos leképezése, akkor az $x'' = g(f(x))$ összetett leképezés is folytonos. Ugyancsak világos, hogy az f leképezés akkor és csak akkor topologikus, ha kölcsönösen egyértelmű és ha mind f, mind f^{-1} folytonos.

5. Ha R_0 az R topologikus tér egy részhalmaza, akkor R_0-ból topologikus teret alkothatunk, ha R_0-nak azokat és csak azokat a részhalmazait tekintjük nyíltnak, amelyek $R_0 \cap G$ alakban írhatók, ahol G R-nek valamely nyílt részhalmaza. Az, hogy így valóban topologikus teret nyerünk, a következő képletekből olvasható ki:

$$0 = R_0 \cap 0, \qquad R_0 = R_0 \cap R, \qquad \bigcup_\gamma (R_0 \cap G_\gamma) = R_0 \cap \left(\bigcup_\gamma G_\gamma\right),$$
$$(R_0 \cap G_1) \cap (R_0 \cap G_2) = R_0 \cap (G_1 \cap G_2).$$

Az ekként nyert topologikus teret R *alterének* mondjuk.

Ha R metrikus tér és $R_0 \subset R$, akkor az R-ben értelmezett távolság egyben R_0-t is metrikus térré teszi. Világos, hogy az R_0 metrikus térben az x középpontú, r sugarú gömb nem egyéb, mint $R_0 \cap S(x, r)$, ahol $S(x, r)$ az R metrikus térben meghatározott x

középpontú, r sugarú gömböt jelenti. Ha G R-nek nyílt részhalmaza, akkor $R_0 \cap G$ nyílt az R_0 metrikus térben, mert $x \in R_0 \cap G$ esetén valamely pozitív r számra $S(x, r) \subset G$ és így $R_0 \cap S(x, r) \subset \subset R_0 \cap G$. Ha viszont G_0 nyílt az R_0 metrikus térben, akkor minden $x \in G_0$ ponthoz tartozik olyan r_x pozitív szám, hogy $R_0 \cap S(x, r_x) \subset G_0$; jelöljük G-vel az összes $S(x, r_x)$ gömbök egyesítését, ahol x átfutja G_0 pontjait, akkor $G_0 = \bigcup_{x \in G_0} (R_0 \cap S(x, r_x)) =$ $= R_0 \cap (\bigcup_{x \in G_0} S(x, r_x)) = R_0 \cap G$ és a G halmaz nyílt, mert gömbök egyesítése és mert minden gömb nyílt. (Az utóbbi állítás abból adódik, hogy ha $y \in S(x, r)$ és ha $\varrho(x, y) = r' < r$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt $S(y, r - r') \subset S(x, r)$.)

Okoskodásunk eredményét így foglalhatjuk össze:

(5. 1) *Ha R metrikus tér és $R_0 \subset R$, akkor az R_0 metrikus térben a metrika által indukált topológia megegyezik R_0-nak az R metrikus térben indukált topologikus tér altereként nyert topológiájával.*

Ha f R-nek R'-be való folytonos leképezése és $R_0 \subset R$, akkor f-nek R_0-ra való $f|R_0$ megszorítása R_0-nak R'-be való folytonos leképezése, hiszen ha G' R'-nek nyílt részhalmaza, akkor a $g = f|R_0$ jelöléssel $g^{-1}(G') = R_0 \cap f^{-1}(G')$ s ez nyílt R_0-ban, mert $f^{-1}(G')$ nyílt R-ben. Más részről világos, hogy R-nek R'-be való f leképezése akkor és csak akkor folytonos, ha R-nek $f(R)$-be való leképezésének tekintve folytonos, hiszen $G' \subset R'$ esetén $f^{-1}(G') = $ $= f^{-1}(f(R) \cap G')$. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy a leképezés folytonossága nem függ attól, hogy a képhalmazt altereként tartalmazó topologikus terek közül melyikbe való leképezésnek tekintjük.

6. Egy R topologikus tér *bázis*ának mondunk minden olyan nyílt halmazokból álló $\mathfrak{B}$ halmazrendszert, melynek halmazaiból egyesítéssel minden nyílt halmaz előállítható (ez azt jelenti, hogy minden G nyílt halmaz $G = \cup B_\gamma$ alakban legyen írható, ahol a B_γ halmazok $\mathfrak{B}$-hez tartoznak). Elég volna itt csak az R tér nem üres nyílt halmazainak $\cup B_\gamma$ alakban való előállíthatóságát megkívánni, mert az üres halmaz mindig előállítható egyetlen tagot sem tartalmazó „üres egyesítés" alakjában. Egyenértékű a bázis előbbi definíciójával a következő is: a nyílt halmazoknak valamely $\mathfrak{B}$ rendszere bázis az R térben, ha bármely nyílt G halmazhoz és bármely $x \in G$ ponthoz mindig található olyan $B \in \mathfrak{B}$, hogy $x \in B \subset G$. Valóban, ha $G = \cup B_\gamma$, akkor $x \in G$ esetén legalább egy γ indexre $x \in B_\gamma \subset G$, s viszont ha minden $x \in G$ ponthoz találunk egy B_x halmazt úgy, hogy $x \in B_x \subset G$, akkor $G = \bigcup_{x \in G} B_x$. Ennek alapján

világos, hogy például egy metrikus térben az összes gömbök bázist alkotnak (az 5. pontban láttuk, hogy a gömbök nyílt halmazok, s a bázis most adott definíciójában foglalt feltételnek a metrikus tér nyílt halmazainak értelmezéséből kifolyólag eleget tesznek). Eszerint a számegyenesen a véges hosszúságú nyílt intervallumok bázist alkotnak; könnyű belátni, hogy ezek közül már a racionális végpontúak is bázist szolgáltatnak.

Világos a bázis eredeti értelmezése alapján, hogy ha f az R térnek az R' térre való topologikus leképezése és ha $\mathfrak{B}$ az R térnek egy bázisa, akkor az $f(B)$ $(B \in \mathfrak{B})$ halmazok bázist alkotnak az R' térben. Ugyanilyen könnyen adódik, hogy $R_0 \subset R$ esetén az $R_0 \cap B$ $(B \in \mathfrak{B})$ halmazok bázist alkotnak az R_0 altérben.

Az R halmazból topologikus teret alkothatunk olyan módon, hogy nem adjuk meg benne közvetlenül az összes nyílt halmazokat, hanem csak egy bázisnak a halmazait jelöljük ki; ezekből az összes nyílt halmazokat előállíthatjuk, ha képezzük a bázis halmazainak összes lehetséges egyesítéseit.

Arra a kérdésre, hogy milyen tulajdonságúnak kell az R halmaz részhalmazaiból álló $\mathfrak{B}$ halmazrendszernek lennie ahhoz, hogy egy topologikus tér bázisát alkothassa, választ ad a következő tétel:

(6. 1) *Ha* $\mathfrak{B}$ *az* R *halmaz részhalmazaiból álló halmazrendszer és ha*

(6. 2) $\quad x \in R$ *esetén van olyan* $B \in \mathfrak{B}$, *hogy* $x \in B$,

(6. 3) $\quad x \in B_1 \cap B_2, B_1 \in \mathfrak{B}, B_2 \in \mathfrak{B}$ *esetén van olyan* $B \in \mathfrak{B}$, *hogy* $x \in B \subset B_1 \cap B_2$,

akkor nyíltnak nevezve az $\cup B_\gamma$ $(B_\gamma \in \mathfrak{B})$ *alakban írható halmazokat,* R*-ből topologikus teret alkotunk.*

Bizonyítás. Az üres halmaz nyílt, mert üres egyesítésként állítható elő. Az R tér nyílt, mert (6. 2) folytán $R = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$. Akárhány nyílt halmaz egyesítése nyílt a nyílt halmazok értelmezéséből kifolyólag. Végül ha $G_1 = \bigcup_\gamma B_{1\gamma}$ és $G_2 = \bigcup_\delta B_{2\delta}$ $(B_{1\gamma} \in \mathfrak{B}, B_{2\delta} \in \mathfrak{B})$, akkor legyen x a $G_1 \cap G_2$ halmaz tetszőleges pontja, s válasszuk meg a γ és δ indexet úgy, hogy $x \in B_{1\gamma} \cap B_{2\delta}$ legyen; (6. 3) értelmében található olyan $B_x \in \mathfrak{B}$ halmaz, hogy $x \in B_x \subset B_{1\gamma} \cap B_{2\delta}$, és az összes ilyen B_x halmazok egyesítése éppen a $G_1 \cap G_2$ halmazt adja, ez tehát nyílt.

Megjegyzendő, hogy a (6. 2) és (6. 3) feltételek szükségesek is ahhoz, hogy $\mathfrak{B}$ egy topologikus tér bázisa lehessen, erre a körülményre azonban a továbbiakban nem lesz szükségünk.

Egy R topologikus tér *súlyán* értjük a legkisebb τ kardinális számot, amelyre van a térnek τ számosságú bázisa. Például a számegyenesnek a súlya $\aleph_0$, mert a racionális végpontú nyílt intervallumok megszámlálható bázisát szolgáltatják és véges bázisa nyilván nem lehet (véges bázissal rendelkező topologikus térben csak véges számú nyílt halmaz van). Nyilvánvaló, hogy homeomorf topologikus tereknek a súlya megegyező, továbbá, hogy egy tér alterének a súlya legfeljebb akkora, mint az egész téré. Az olyan topologikus teret, melynek súlya nem nagyobb, mint $\aleph_0$, vagyis amelynek van megszámlálható bázisa, *szeparábilis*nak mondjuk. Az előbbiek szerint szeparábilis tér például a számegyenes is.

7. Abból a célból, hogy a legáltalánosabb topologikus tér fogalmától elindulva közeledhessünk a legjobban megvizsgált és legértékesebb tulajdonságokkal rendelkező metrikus terekhez, a topologikus tér fogalmát szűkítenünk kell, vagyis a (3. 1)—(3. 3) axiómák mellé további axiómákat kell felvennünk. A topologikus terek általános elméletének kialakulása során ilyen axiómáknak egész sorozata jött létre, amelyek az általános topologikus tér fogalmát lépésről lépésre szűkítik s egyben közelítik a metrikus terek felé. Legtöbbjüknek jellege az, hogy a topologikus tér pontjainak, illetőleg zárt halmazainak nyílt halmazokkal való szétválaszthatóságára vonatkozóan tartalmaznak valamilyen kikötést, ezért *szétválasztási axiómák*nak nevezik őket.

Legkevesebbet kívánja meg, leggyengébb a következő szétválasztási axióma:

(T_0) *Két különböző pont közül legalább az egyiknek van olyan környezete, amely a másikat nem tartalmazza.*

A (T_0) axiómát kielégítő topologikus tereket röviden T_0-tereknek nevezzük. Nem T_0-tér például az olyan, egynél több pontból álló, halmaz, amelyben nyilt halmaznak csak az üres halmazt és az egész halmazt tekintjük.

Az olyan topologikus terek, amelyekben a (T_0) axióma nincs kielégítve, külön vizsgálatot alig érdemelnek; ezekből ugyanis a túlságosan összetapadó pontokat egymással azonosítva mindig T_0-teret nyerhetünk. Pontosabban szólva, a következő tétel érvényes:

(7. 1) *Legyen R tetszőleges topologikus tér. Nevezzük az $x \in R$ és $y \in R$ pontokat ekvivalensnek, ha $[\{x\}] = [\{y\}]$; jelöljük $f(x)$-szel az $x \in R$ pontot tartalmazó ekvivalencia-osztályt és $\tilde{R}$-mal az ilyen ekvivalencia-osztályok halmazát. $\tilde{R}$-ból topologikus teret alkotunk, ha nyíltnak nevezzük azokat és csak azokat a $\tilde{G} \subset \tilde{R}$ halmazokat, amelyekre $f^{-1}(\tilde{G})$ nyílt R-ben, és az így nyert topologikus tér mindig T_0-tér.*

BIZONYÍTÁS. Világos, hogy a bevezetett reláció valóban ekvivalencia-reláció. Az, hogy a megadott módon $\tilde{R}$-ból valóban topologikus teret alkotunk, a következő formulákból olvasható ki:

$$f^{-1}(0) = 0,\ f^{-1}(\tilde{R}) = R,\ f^{-1}(\cup \tilde{G}_\gamma) = \cup f^{-1}(\tilde{G}_\gamma),$$
$$f^{-1}(G_1 \cap G_2) = f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2).$$

Annak belátására, hogy R eleget tesz a (T_0) axiómának, gondoljuk meg először is, hogy ha F zárt halmaz R-ben, akkor $x \in F$ esetén $f(x) \subset F$; valóban, $y \in f(x)$ azt jelenti, hogy $[\{y\}] = [\{x\}]$ és ez része F-nek, mert $[\{x\}]$ a legkisebb x-et tartalmazó zárt halmaz, s így $y \in [\{y\}] \subset F$. Így minden R-ben zárt halmaz teljes ekvivalencia-osztályok egyesítése, s a kiegészítő halmazokra való áttéréssel ugyanez adódik az R-ben nyílt halmazokra is, hiszen R diszjunkt ekvivalencia-osztályokra bomlik.

Legyen most $\tilde{x}$ és $\tilde{y}$ $\tilde{R}$-nak két különböző pontja, mondjuk $\tilde{x} = f(x)$, $\tilde{y} = f(y)$. Minthogy $f(x) \neq f(y)$, azért $[\{x\}] \neq [\{y\}]$, tehát van olyan $z \in R$ pont, amely az utóbbi két halmaz közül az egyikhez hozzátartozik, a másikhoz nem; tegyük fel például, hogy $z \in [\{x\}] - [\{y\}]$. Ekkor z érintkezési pontja az $\{x\}$ halmaznak s így z minden környezete tartalmazza x-et, de z nem érintkezési pontja az $\{y\}$ halmaznak s ezért van olyan környezete, mely nem tartalmazza y-t. Jelöljük G-vel egy ilyen környezet belsejét; ez tehát olyan nyílt halmaz, mely nem tartalmazza y-t, de ugyancsak z környezete lévén, tartalmazza x-et. Az előbbiek szerint G teljes ekvivalencia-osztályok egyesítése, s ezért $G = f^{-1}(f(G))$, úgyhogy az $f(G) \subset \tilde{R}$ halmaz nyílt, tartalmazza $f(x) = \tilde{x}$-ot s nem tartalmazza $f(y) = \tilde{y}$-ot. Az $f(G)$ halmaz eszerint $\tilde{x}$-nak $\tilde{y}$-ot nem tartalmazó környezete $\tilde{R}$-ban.

A (T_0) axiómánál erősebb szétválasztási axióma a következő:

(T_1) *Bármely két különböző pont közül mindegyiknek van olyan környezete, amely a másikat nem tartalmazza.*[7]

Világos, hogy minden a (T_1) axiómának eleget tevő topologikus tér, röviden T_1-tér, egyben T_0-tér is. Olyan T_0-tér, amely nem T_1-tér, például az ú. n. *összefüggő pontpár*, vagyis olyan két pontból álló $\{a, b\}$ halmaz, melyben nyíltnak tekintjük a 0, $\{a\}$, $\{a, b\}$ halmazokat és csak ezeket.

A T_1-tereket jellemzi a következő egyszerű tétel:

(7. 2) *Az R topologikus tér akkor és csak akkor T_1-tér, ha benne minden egy pontból álló halmaz zárt.*

[7] A RIESZ FRIGYES által bevezetett topologikus térfogalom lényegében a T_1-tér fogalmával azonos.

Valóban, ha R T_1-tér és $x \neq y$ R-nek két pontja, akkor x-nek van y-t nem tartalmazó környezete, tehát x nem érintkezési pontja az $\{y\}$ halmaznak, s így ez a halmaz zárt. Ha viszont R-ben minden egy pontból álló halmaz zárt, akkor $x \in R$, $y \in R$, $x \neq y$ esetén $R - \{y\}$ az x pontnak y-t nem tartalmazó környezete.

A (T_1) axiómánál is erősebb a következő, F. HAUSDORFFtól származó axióma:

(T_2) *A tér bármely két különböző* $x \neq y$ *pontjának van diszjunkt* U_x *és* U_y *környezete.*

A (T_2) axiómának eleget tevő topologikus tereket T_2-tereknek vagy *Hausdorff-féle terek*nek nevezzük. Világos, hogy minden T_2-tér egyben T_1-tér is. Olyan T_1-térre, amely nem T_2-tér, példa az a tér, amely a számegyenes pontjaiból s egy további ω pontból áll, s melyben nyíltnak tekintjük a számegyenesnek a szokásos topológiában nyílt részhalmazait, az egész teret, továbbá a véges halmazok kiegészítő halmazait; könnyű belátni, hogy ez valóban T_1-tér, de nem T_2-tér, mert ha x a számegyenesnek egy pontja, akkor az x és ω pontoknak nincs diszjunkt U_x és U_ω környezetük.

További szétválasztási axiómák bevezetése céljából célszerű megállapodni a következő elnevezésben: egy A *halmaz környezetének* nevezzük az olyan U halmazt, melynek belseje tartalmazza A-t. E definíció értelmében az x pont környezetei azonosak az $\{x\}$ halmaz környezeteivel. (3. 4) alapján az A halmaz része minden környezetének, (3. 5) folytán az olyan halmaz, mely tartalmazza A-nak egy környezetét, maga is környezete A-nak, (3. 7) következtében pedig az A halmaz két (s általában véges számú) környezetének közös része ugyancsak környezete A-nak. (3. 6)-ból s abból, hogy minden halmaz belseje nyílt, következik, hogy A valamely U környezetének belseje A-nak (nyílt) környezete.

Jegyezzük még meg, hogy ha $R_0 \subset R$ és $A \subset R_0$, akkor A-nak R_0-ra vonatkozó környezetei azonosak az $R_0 \cap U$ alakú halmazokkal, ahol U A-nak valamely R-beli környezetét jelenti. Valóban, ha $A \subset \operatorname{Int} U$, akkor $R_0 \cap \operatorname{Int} U$ A-t tartalmazó, $R_0 \cap U$-ban foglalt, R_0-ban nyílt halmaz, ezért $R_0 \cap U$ R_0-ra vonatkozó környezete A-nak. Ha viszont U_0 A-nak valamely R_0-ra vonatkozó környezete, akkor U_0 tartalmaz egy A-t magában foglaló R_0-ban nyílt halmazt, amely tehát $R_0 \cap G$ alakú, ahol G nyílt az egész R térben; mármost az $U = U_0 \cup G$ jelöléssel $A \subset G \subset U$, tehát U környezete A-nak és $U_0 = R_0 \cap U$.

Most már kimondhatjuk a következő definíciót:

Egy topologikus tér reguláris, ha T_1*-tér s ha minden* x *pontjának s minden* x*-et nem tartalmazó zárt* F *részhalmazának van diszjunkt* U_x *és* U_F *környezete.*

Minden reguláris tér T_2-tér, mert ha $x \neq y$ két pontja, akkor x-nek s a (T_1) következtében zárt $\{y\}$ halmaznak van diszjunkt U_x és U_y környezete. Készíthető azonban olyan T_2-tér, amely nem reguláris.

Nem nehéz belátni a reguláris terek következő fontos jellemzését:

(7. 3) *Egy T_1-tér akkor és csak akkor reguláris, ha bármely x pontjának bármely U_x környezete tartalmazza x-nek egy zárt V_x környezetét.*

Valóban, ha R reguláris és U_x az x pontnak egy környezete, akkor $\overline{\text{Int } U_x}$ x-et nem tartalmazó zárt halmaz s így e halmazt F-fel jelölve, van x-nek és F-nek diszjunkt U_x' és U_F környezete; $[U_x'] = V_x$ x-nek zárt környezete és

$$V_x = [U_x'] \subset [\overline{U_F}] = \overline{\text{Int } U_F} \subset \overline{F} = \text{Int } U_x \subset U_x.$$

Megfordítva, ha R eleget tesz a (7. 3)-ban foglalt feltételnek, legyen $x \in R$ és $F \subset R$ az x pontot nem tartalmazó zárt halmaz; $\overline{F}$ x-nek környezete s ezért tartalmaz egy zárt V_x környezetet, s ekkor V_x és $\overline{V_x}$ x-nek és F-nek diszjunkt környezete.

A reguláris tér definíciójához hasonló a normális téré:

Egy topologikus tér normális, ha T_1-tér s ha bármely két diszjunkt F_1 és F_2 zárt részhalmazának van diszjunkt U_1 és U_2 környezete.

Minden normális tér reguláris, hiszen a normális tér definíciójában foglalt feltételt az $\{x\}$ és F diszjunkt zárt halmazokra alkalmazva éppen a reguláris tér definíciójára szolgáló feltétel teljesülése adódik. Van azonban olyan reguláris tér, amely nem normális. (7. 3) mintájára könnyű bebizonyítani a normális terek következő jellemzését:

(7. 4) *Egy T_1-tér akkor és csak akkor normális, ha bármely zárt F halmazának bármely U_F környezete tartalmazza F-nek egy zárt V_F környezetét.*

Egy topologikus teret *metrizálható*nak mondunk, ha homeomorf egy metrikus térrel. Minden metrizálható tér normális; minthogy normális térrel homeomorf tér nyilván normális, elég azt belátnunk, hogy minden metrikus tér normális. Ha azonban F_1 és F_2 egy metrikus tér diszjunkt zárt részhalmazai, akkor F_1 minden x pontja körül készíthető F_2-t nem metsző $S(x, r_x)$ gömb, s ugyanígy F_2 minden y pontja körül van F_1-et nem metsző $S(y, r_y)$ gömb. Az

$$U_1 = \bigcup_{x \in F_1} S(x, \frac{1}{2} r_x) \qquad \text{és} \qquad U_2 = \bigcup_{y \in F_2} S(y, \frac{1}{2} r_y)$$

halmazok nyilván nyíltak, az első F_1-et, a második F_2-t tartalmazza és $U_1 \cap U_2 = 0$, hiszen $z \in U_1 \cap U_2$ esetén alkalmas $x \in F_1$ és $y \in F_2$ pontokra

$$\varrho(x, z) < \frac{1}{2} r_x, \qquad \varrho(z, y) < \frac{1}{2} r_y,$$

ha tehát r_x és r_y közül pl. r_x nem nagyobb, mint a másik,

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < \frac{1}{2} r_x + \frac{1}{2} r_y \leqq r_y,$$

ellentétben azzal a feltevéssel, hogy $S(y, r_y) \cap F_1 = 0$.

A felsorolt szétválasztási axiómák általában *öröklődők*, amin azt értjük, hogy a nekik eleget tevő tér minden altere is eleget tesz nekik. A metrizálhatóság öröklődő voltát az (5. 1) tétel mondja ki. A (T_0), (T_1) és (T_2) axiómák is öröklődők; lássuk ezt be pl. a (T_2) axióma esetére. Ha R T_2-tér és $R_0 \subset R$, legyen $x \neq y$ R_0-nak két pontja; R-ben van x-nek és y-nak diszjunkt U_x és U_y környezete, de akkor $R_0 \cap U_x$ és $R_0 \cap U_y$ ugyanezen két pontnak R_0-ra vonatkozó két diszjunkt környezete. Öröklődő tulajdonság a tér reguláris volta is, amit legegyszerűbben (7. 3) alapján láthatunk be: ha R reguláris tér, $R_0 \subset R$, $x \in R_0$ és U_0 x-nek R_0-ra vonatkozó környezete, akkor $U_0 = R_0 \cap U$, ahol U x-nek R-beli környezete, s ezért U tartalmazza x-nek egy zárt V környezetét, amikor is $V_0 = R_0 \cap V$ x-nek U_0-ban foglalt, R_0-ban zárt R_0-ra vonatkozó környezete.

Be lehet azonban bizonyítani, hogy a tér normális volta már nem mindig öröklődik, s így bármennyire is kézenfekvő a normális tér definíciója a reguláris tér bevezetése után, mégsem illik be a normális tér fogalma a szétválasztási axiómák egyre erősödő megszorításával nyert tértípusok sorozatába. Néhány évvel a felsorolt szétválasztási axiómák bevezetése után sikerült is felfedezni a topologikus tereknek egy újabb típusát, melynek definíciója valamivel bonyolultabb ugyan, de amely számos rendkívüli figyelmet érdemlő tulajdonsága miatt a topologikus tereknek, a metrizálható terek után, legfontosabb típusát képviseli. Ez a TYIHONOV által bevezetett *teljesen reguláris terek* típusa.

8. A teljesen reguláris tér definíciójához a következő elnevezésre van szükségünk: egy topologikus tér A és B részhalmazairól azt mondjuk, hogy *függvénnyel szétválaszthatók*, ha van olyan az egész térben folytonos, 0 és 1 közötti értékeket felvevő valós függvény (más szóval az adott térnek a $[0, 1]$ zárt intervallumba, mint a számegyenes szokásos topológiával ellátott terének alterébe való folytonos leképezése), amely A-n a 0, B-n az 1 értéket veszi

fel. Az ilyen függvényről azt mondjuk, hogy A-t és B-t szétválasztja.

Egy topologikus teret teljesen regulárisnak mondunk, ha T_1-tér s ha benne minden x pont és minden x-et nem tartalmazó zárt F halmaz függvénnyel szétválasztható.

Minden teljesen reguláris tér reguláris, hiszen ha a φ függvény x-et és F-et szétválasztja (amin persze azt kell érteni, hogy az $\{x\}$ és F halmazokat szétválasztja), akkor $\left\{t : \varphi(t) < \frac{1}{2}\right\}$ és $\left\{t : \varphi(t) > \frac{1}{2}\right\}$ x-nek és F-nek diszjunkt környezete. Van azonban olyan reguláris tér, amely nem teljesen reguláris.

Teljesen reguláris tér minden altere is teljesen reguláris. Tegyük fel, hogy R teljesen reguláris, $R_0 \subset R$, $x \in R_0$, $F_0 \subset R_0$ x-et nem tartalmazó R_0-ban zárt halmaz. Ekkor $G_0 = R_0 - F_0$ x-et tartalmazó R_0-ban nyílt halmaz, tehát $G_0 = R_0 \cap G$, ahol G ugyancsak x-et tartalmazó R-ben nyílt halmaz, úgyhogy $F = R - G$ x-et nem tartalmazó zárt halmaz s $R_0 \cap F = R_0 - G_0 = F_0$. Mármost x és F függvénnyel szétválasztható R-ben s ha φ jelent egy őket szétválasztó függvényt, akkor R_0-ra való $\varphi | R_0$ megszorítása nyilván szétválasztja x-et és F_0-t.

Később látni fogjuk, hogy minden normális tér teljesen reguláris, úgyhogy a teljesen reguláris terek a reguláris és a normális terek között foglalnak helyet. (Bebizonyítható, hogy nem minden teljesen reguláris tér normális.)

A teljesen reguláris tér fogalmának az ad fontosságot, hogy az ilyen terekben értelmezhetők különféle, a metrikus terek elméletéből ismert fogalmak s ezáltal a metrikus terek sok tulajdonsága átvihető a teljesen reguláris topologikus terekre. A következőkben több ilyen, eredetileg metrikus terekben definiált fogalom általánosítását mutatjuk be.

9. Ha A és B egy metrikus tér két részhalmaza, akkor a két *halmaz $\varrho(A, B)$ távolságán* értjük az $x \in A$ és $y \in B$ pontok $\varrho(x, y)$ távolságának alsó határát:

$$\varrho(A, B) = \inf \{\varrho(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Ha $\varrho(A, B) = 0$, akkor az A és B halmazokat *szomszédos*nak, ha pedig $\varrho(A, B) > 0$, akkor A-t és B-t *távoli*nak mondjuk.

Egy metrikus tér topológiája meg van határozva, ha bármely két A és B részhalmazról ismeretes, szomszédos-e vagy távoli. Valóban, a metrikus tér nyílt halmazait az a tulajdonságuk jellemzi, hogy ha $x \in G$, akkor $\{x\}$ és G-nek $\overline{G}$ kiegészítő halmaza

távoli (mert ez a kikötés éppen azt fejezi ki, hogy G tartalmazzon egy x középpontú gömböt).

A metrikus terekben tapasztalt most említett tények alapján V. A. JEFREMOVICS[8] nyomán a következő definícióban állapodunk meg: egy R halmazról azt mondjuk, hogy *szomszédsági struktúrával* van ellátva, ha R bármely két A és B részhalmazáról meg tudjuk állapítani, hogy szomszédos-e (jelben: $A\delta B$) vagy ellenkező esetben távoli (jelben: $A\bar{\delta}B$), és ha e relációk eleget tesznek a következő axiómáknak:

(9. 1) $A\delta B$ esetén $B\delta A$;

(9. 2) $0\bar{\delta}A$ minden $A\subset R$ halmazra;

(9. 3) $\{x\}\delta\{y\}$ akkor és csak akkor, ha $x=y$;

(9. 4) $A\cup B\bar{\delta}C$ akkor és csak akkor, ha $A\bar{\delta}C$ és $B\bar{\delta}C$;

(9. 5) $A\bar{\delta}B$ esetén van olyan U és V halmaz, hogy $U\cap V=0$, $A\bar{\delta}\bar{U}, B\bar{\delta}\bar{V}$.

A rövidség kedvéért $\{x\}\delta A$ és $\{x\}\bar{\delta}A$ helyett azt írjuk, hogy $x\delta A$ és $x\bar{\delta}A$ s azt mondjuk, hogy az x pont és az A halmaz szomszédos, illetőleg távoli. A (9. 5) axiómát egyszerűbben lehet kifejezni, ha bevezetjük a következő elnevezést: az U halmazt az A halmaz *szomszédság*ának mondjuk, ha $A\bar{\delta}\bar{U}$. Ekkor (9.5) azt kívánja, hogy bármely két távoli halmaznak legyenek diszjunkt szomszédságaik. Az $\{x\}$ halmaz szomszédságait röviden az x pont szomszédságainak nevezzük. Azt, hogy U szomszédsága A-nak, így fogjuk jelölni: $A<U$.

Soroljuk fel a (9. 1)—(9. 5) axiómák néhány egyszerű következményét:

(9. 6) $A<U$ esetén $\bar{U}<\bar{A}$,

mert az első reláció azt jelenti, hogy $A\bar{\delta}\bar{U}$, a második azt, hogy $\bar{U}\bar{\delta}A$, s e kettő (9. 1) alapján egyenértékű.

(9. 7) $0<A<R$ minden $A\subset R$ halmazra,

mert ezek a $0\bar{\delta}\bar{A}$ és $A\bar{\delta}0$ relációkkal ekvivalensek, ezek pedig (9. 2) következményei.

(9. 8) $A\bar{\delta}B, A'\subset A, B'\subset B$ esetén $A'\bar{\delta}B'$,

mert (9. 4) szerint $A'\cup A=A\bar{\delta}B$ miatt $A'\bar{\delta}B'$, hasonlóan $B'\cup B=B\bar{\delta}A'$ miatt $B'\delta A'$ (közben (9. 1)-et is ismételten felhasználtuk).

[8] L. a [3]) alatt idézett munkát.

(9. 9) $A\bar{\delta}B$ esetén $A \cap B = 0$,

mert $x \in A \cap B$ esetén (9. 8) alapján $x\bar{\delta}x$ következnék (9. 3)-mal ellentétben.

(9. 10) $A < U$ esetén $A \subset U$,

mert $A\bar{\delta}\bar{U}$ (9. 9) szerint maga után vonja, hogy $A \cap \bar{U} = 0$.

(9. 11) $A' \subset A < U \subset U'$ esetén $A' < U'$,

mert a feltétel szerint $A\bar{\delta}\bar{U}$, $A' \subset A$ és $\bar{U}' \subset \bar{U}$, s akkor az állítással egyenértékű $A'\bar{\delta}\bar{U}'$ (9. 8) következménye.

(9. 12) $A < U, B < V$ esetén $A \cup B < U \cup V$ és $A \cap B < U \cap V$,

mert $A\bar{\delta}\bar{U}, B\bar{\delta}\bar{V}$ következtében (9. 8) alapján $A\bar{\delta}\bar{U} \cap \bar{V}, B\bar{\delta}\bar{U} \cap \bar{V}$, s akkor (9. 4) szerint $A \cup B\bar{\delta}\bar{U} \cap \bar{V} = \overline{U \cup V}$; másrészt ugyancsak a feltételekből következik (9. 8) értelmében, hogy $A \cap B\bar{\delta}\bar{U}, A \cap B\bar{\delta}\bar{V}$, tehát (9. 4) szerint $A \cap B\bar{\delta}\bar{U} \cup \bar{V} = \overline{U \cap V}$.

(9. 13) $A < U$ esetén található olyan V, hogy $A < V < U$,

mert $A\bar{\delta}\bar{U}$ következtében (9. 5) alapján van olyan V és V', hogy $V \cap V' = 0$, $A\bar{\delta}\bar{V}$ és $\bar{U}\bar{\delta}\bar{V}'$; innen egyrészt $A < V$ adódik, másrészt $V \subset \bar{V}'$ miatt $V\bar{\delta}\bar{U}$, azaz $V < U$.

Ha az R halmaz szomszédsági struktúrával van ellátva, belőle topologikus teret alkothatunk, ha nyíltnak nevezzük az olyan halmazokat, amelyek minden pontjuknak szomszédságai. Valóban, ekkor az üres halmaz nyílt, mert egyetlen pontja sincsen, és R is nyílt (9. 7) folytán. Továbbá ha a G_γ halmazok nyíltak és $x \in G = \cup G_\gamma$, akkor legalább egy γ indexre $x \in G_\gamma$, tehát G_γ nyíltsága miatt $x < G_\gamma$ s akkor (9. 11) következtében $x < G$. Végül ha G_1 és G_2 nyílt és $x \in G_1 \cap G_2$, akkor $x < G_1$ és $x < G_2$ alapján (9. 12) értelmében $x < G_1 \cap G_2$.

A fenti módon nyert topológiát a *szomszédsági struktúra által indukált topológiának* nevezzük; az olyan topologikus teret, melynek topológiáját egy szomszédsági struktúra indukálja, *szomszédsági tér*nek mondjuk.

Könnyű belátni, hogy *a metrikus térben a fentiekben bevezetett szomszédos és távoli halmazok szomszédsági struktúrát definiálnak s* hogy *ez éppen a metrika által indukált topológiát indukálja*, azaz röviden: minden metrikus tér szomszédsági tér. Valóban, (9. 1) teljesül, mert nyilván $\varrho(A, B) = \varrho(B, A)$; (9. 2) azért áll fenn, mert $\varrho(0, A) = +\infty$, hiszen az üres számhalmaz alsó határa megállapodásszerűen $+\infty$; (9. 3) belátására azt kell meggondolnunk,

hogy $\varrho(\{x\}, \{y\}) = \varrho(x, y)$. (9. 4) abból adódik, hogy egyrészt $\varrho(A, C) \geqq \varrho(A \cup B, C)$, $\varrho(B, C) \geqq \varrho(A \cup B, C)$, másrészt ha $\varrho(A, C) \geqq \varepsilon$, $\varrho(B, C) \geqq \varepsilon$, akkor nyilván $\varrho(A \cup B, C) \geqq \varepsilon$. Végül (9. 5) belátására legyen $\varrho(A, B) = \varepsilon > 0$ és

$$U = \left\{ z : \varrho(z, A) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \quad V = \left\{ z : \varrho(z, B) < \frac{\varepsilon}{2} \right\};^{9}$$

ekkor $U \cap V = 0$, mert $z \in U \cap V$ esetén alkalmas $x \in A$ és $y \in B$ pontokra $\varrho(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\varrho(z, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ állna s ebből

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < \varepsilon$$

következnék a $\varrho(A, B) = \varepsilon$ feltétellel ellentétben, továbbá nyilván $\varrho(A, \bar{U}) \geqq \frac{\varepsilon}{2}$ és $\varrho(B, \bar{V}) \geqq \frac{\varepsilon}{2}$. Azt már fent megjegyeztük, hogy a metrika által indukált topológiában éppen azok a G halmazok nyíltak, amelyeknek minden pontja távoli $\bar{G}$-tól, s ez a szomszédsági térben nyílt halmazok definíciójával megegyezik.

Amikor egy metrikus térről mint szomszédsági térről beszélünk, mindig a zérustávolságú halmazok szomszédosságán alapuló szomszédsági struktúrára gondolunk.

(9. 14) *Egy R normális tér szomszédsági térré válik, ha benne az A és B halmazokat akkor és csak akkor mondjuk szomszédosnak, ha* $[A] \cap [B] \neq 0$.

Valóban, (9. 1) és (9. 2) ekkor triviálisan teljesül, (9. 3) pedig annak a következménye, hogy a normális tér T_1-tér, tehát $[\{x\}] = \{x\}$, $[\{y\}] = \{y\}$. (9. 4) a (3. 15) formulából folyik, (9. 5) pedig abból, hogy ha $[A] \cap [B] = 0$, akkor a tér normális volta miatt van $[A]$-nak és $[B]$-nak diszjunkt U' és V' környezete; az $U = \operatorname{Int} U'$, $V = \operatorname{Int} V'$ jelöléssel $U \cap V = 0$, s minthogy U $[A]$-nak, V pedig $[B]$-nak nyílt környezete, $[A] \cap [\bar{U}] = [B] \cap [\bar{V}] = 0$. Az közvetlenül világos, hogy a G halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha $x \in G$ esetén $[\{x\}] \cap [\bar{G}] = 0$.

Az előzők szerint egy metrikus tér topológiája a zérustávolságú halmazok szomszédosságán alapuló szomszédsági struktúrán kívül még azzal a szomszédsági struktúrával is származtatható, amelyben szomszédosnak a közös érintkezési ponttal rendelkező halmazokat tekintjük (gondoljuk meg, hogy metrikus tér mindig normális, tehát rá a (9. 14) tétel alkalmazható). A kétféle szom-

[9] A $\varrho(z, A)$ szimbolum $\varrho(\{z\}, A)$ helyett áll rövidítésként.

szédsági struktúra lehet különböző; például a síkban A-val egy hiperbolát, B-vel ennek aszimptotáját jelölve, az első szomszédsági struktúrában A és B szomszédos, a másodikban azonban távoli.

Szükségünk lesz még a szomszédsági terek következő tulajdonságaira:

(9. 15) *Az R szomszédsági tér azon pontjai, amelyek egy $A \subset R$ halmaztól távol vannak, nyílt halmazt alkotnak.*

Legyen ugyanis G a kérdéses pontok halmaza. $x \in G$ esetén $x < \bar{A}$, így (9. 13) szerint van olyan U, hogy $x < U < \bar{A}$; $y \in U$ maga után vonja (9. 11) alapján, hogy $y < \bar{A}$, ezért $U \subset G$ s ezért ismét (9. 11) felhasználásával $x < G$.

(9. 16) *Bármely R szomszédsági térben az $A \delta B$ és az $[A]\bar{\delta}[B]$ relációk egyidejűleg állnak fenn.*

Bizonyítás. Egyszerűbb a két állítás tagadásának egyenértékűségét megmutatni. (9. 8) alapján $[A]\bar{\delta}[B]$ maga után vonja, hogy $A\bar{\delta}B$. A megfordított állítás igazolására gondoljuk először is meg, hogy ha $U < V$, azaz ha $U\bar{\delta}\bar{V}$, akkor a $\bar{V}$-tól távoli pontok (9. 15) szerint nyílt G halmazt alkotnak s (9. 8) szerint $U \subset G$, (9. 9) szerint $G \cap \bar{V} = 0$, úgyhogy $U \subset G \subset V$, s akkor $U \subset \operatorname{Int} V$. Tegyük fel aztán újból, hogy $U < V$, és válasszuk (9. 13) alapján a W halmazt úgy, hogy $U < W < V$ legyen. Előbbi eredményünket a (9. 6) szerint adódó $\overline{W} < \bar{U}$ relációra alkalmazva, azt kapjuk, hogy $\overline{W} \subset \operatorname{Int} \bar{U}$, azaz $[U] = \overline{\operatorname{Int} \bar{U}} \subset W$ s így (9. 11)-et felhasználva $[U] < V$.

Tegyük fel most, hogy $A\bar{\delta}B$. Előbbi eredményünk szerint az $A < \bar{B}$ relációból folyik $[A] < \bar{B}$, ebből következik (9. 6) szerint $B < \overline{[A]}$, s újból az előbbi eredményt alkalmazva $[B] < \overline{[A]}$, azaz $[B]\bar{\delta}[A]$, innen pedig (9. 1) értelmében az $[A]\bar{\delta}[B]$ reláció nyerhető.

Ha R szomszédsági tér és $R_0 \subset R$, akkor R_0-ban szomszédsági struktúrát definiálunk, ha az $A \subset R_0$ és $B \subset R_0$ halmazok közül azokat és csak azokat tekintjük szomszédosnak, amelyek R-ben szomszédosak. A (9. 1)—(9. 4) axiómák evidensen teljesülnek R helyett R_0-ra, (9. 5) teljesülése pedig abból következik, hogy ha $A \subset R_0$, $B \subset R_0$ és $A\bar{\delta}B$, akkor van oly $U \subset R$, $V \subset R$, hogy $U \cap V = 0$, $A\bar{\delta}\bar{U}$, $B\bar{\delta}\bar{V}$; ekkor azonban $R_0 - U \subset \bar{U}$, $R_0 - V \subset \bar{V}$ miatt (9. 8) alapján $A\bar{\delta}R_0 - U$, $B\bar{\delta}R_0 - V$, tehát az $U_0 = R_0 \cap U$, $V_0 = R_0 \cap V$ jelöléssel $U_0 \cap V_0 = 0$ és $A\bar{\delta}R_0 - U_0 = R_0 - U$, $B\bar{\delta}R_0 - V_0 = R_0 - V$.

Az R_0-ban most bevezetett szomszédsági struktúra R_0-ban az R topologikus tér altereként nyert topológiát indukálja. Ha ugyanis

G nyílt R-ben, akkor $G_0 = R_0 \cap G$ nyílt R_0-ban, hiszen $R_0 - G_0 = R_0 - G \subset \bar{G}$, úgyhogy $x \in G_0$ esetén (9. 8) szerint $x \bar{\delta} R_0 - G_0$ folyik a G nyíltsága miatt érvényes $x \bar{\delta} \bar{G}$ relációból.

Megfordítva tegyük fel, hogy $G_0 \subset R_0$ nyílt R_0-ban, azaz hogy $x \in G_0$ esetén $x \bar{\delta} R_0 - G_0$; jelentse ekkor G azon $x \in R$ pontok halmazát, amelyek $R_0 - G_0$-tól távoliak, (9. 15) szerint G nyílt halmaz R-ben s nyilván $G_0 = R_0 \cap G$, hiszen $R_0 - G_0$ pontjai (9. 9) szerint vele szomszédosak.

Eredményeink alapján az R szomszédsági tér R_0 részhalmazát, ellátva a fent leírt módon származtatott szomszédsági struktúrával, az R *szomszédsági tér alterének* mondjuk.

Az R szomszédsági térnek az R' szomszédsági térbe való f leképezését *szomszédságtartó*nak nevezzük, ha abból, hogy $A \subset R$ és $B \subset R$ szomszédos, következik, hogy $f(A)$ és $f(B)$ szomszédos R'-ben. Szomszédságtartó leképezés mindig folytonos, mert ha G' R'-nek nyílt részhalmaza, $G = f^{-1}(G')$ és $x \in G$, akkor $x \bar{\delta} \bar{G}$, hiszen ellenkező esetben $f(x) \bar{\delta} f(\bar{G}) \subset \bar{G}'$ következnék G' nyíltságával ellentétben. Világos, hogy ha f R-nek R'-be való, g pedig R'-nek R''-be való szomszédságtartó leképezése, akkor $h(x) = g(f(x))$ R-nek R''-be való szomszédságtartó leképezése.

Egy kölcsönösen egyértelmű f leképezést *ekvimorf*nak mondunk, ha f is és f^{-1} is szomszédságtartó. Ha az R szomszédsági tér ekvimorf leképezéssel átvihető az R' szomszédsági térbe, akkor e két teret is *ekvimorf*nak mondjuk. Világos az előbbiek alapján, hogy két szomszédsági tér ekvimorf volta reflexív, szimmetrikus és tranzitív reláció, s hogy ekvimorf terek egyúttal homeomorfok is egymással.

A szomszédsági tér alterének definíciója alapján világos az is, hogy az R tér valamely f szomszédságtartó leképezésének az $R_0 \subset R$ altérre való $f|R_0$ megszorítása is szomszédságtartó, valamint hogy a leképezés szomszédságtartó volta nem függ attól, hogy az $f(R)$ teret altérként tartalmazó szomszédsági terek közül melyikbe való leképezésnek tekintjük.

10. Egy újabb alapvetően fontos topológiai struktúra bevezetése céljából tekintsünk ismét egy R metrikus teret. Nevezzük $\varepsilon > 0$ esetén *ε-környék*nek az R tér mindazon pontjaiból alkotott (x, y) pontpárok összességét, melyeknek $\varrho(x, y)$ távolsága kisebb, mint ε (az ε-környék tehát olyan halmaz, melynek elemei nem az R tér pontjai, hanem ilyen pontokból alkotott pontpárok). Világos, hogy az összes ε-környékek ismeretében a tér szomszédsági struktúrája (s ezen keresztül topológiája is) meg van határozva, hiszen

$\varrho(A, B) = 0$ akkor és csak akkor áll fenn, ha minden ε-környékben van olyan (x, y) pontpár, melyre $x \in A$, $y \in B$.

Ennek mintájára A. Weil[10] nyomán egy R halmazról azt mondjuk, hogy *uniform struktúrával* van ellátva, ha meg vannak adva bizonyos, az R halmaz elemeiből alkotott elempárokból álló halmazok, amelyeket *környék*eknek nevezünk, s amelyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

(10. 1) Ha $\mathfrak{V}$ környék, akkor $(x, y) \in \mathfrak{V}$ esetén $(y, x) \in \mathfrak{V}$.

(10. 2) Minden $\mathfrak{V}$ környék tartalmazza az összes (x, x) alakú párokat, de ha $x \neq y$, akkor van olyan $\mathfrak{V}$ környék, mely az (x, y) párt nem tartalmazza.

(10. 3) Bármely két $\mathfrak{V}_1$ és $\mathfrak{V}_2$ környék közös része tartalmaz egy alkalmas $\mathfrak{V}$ környéket.

(10. 4) Minden $\mathfrak{V}$ környékhez található olyan $\mathfrak{V}'$ környék, hogy $(x, y) \in \mathfrak{V}'$, $(y, z) \in \mathfrak{V}'$ esetén $(x, z) \in \mathfrak{V}$ legyen.[11]

A következőkben, ha $\mathfrak{V}$ valamely környék, $\mathfrak{V}'$-vel mindig olyan környéket jelölünk, amely $\mathfrak{V}$-nak (10. 4) értelmében megfelel.

Ha $A \subset R$ és $\mathfrak{V}$ tetszőleges környék, akkor az A halmaz $\mathfrak{V}$-*környezet*ének nevezzük és $S(A, \mathfrak{V})$-val jelöljük azon $x \in R$ pontok halmazát, melyekhez található olyan $y \in A$ pont, hogy $(x, y) \in \mathfrak{V}$. $S(\{x\}, \mathfrak{V})$ helyett röviden $S(x, \mathfrak{V})$-t írunk és az x pont $\mathfrak{V}$-környezetéről beszélünk. Világos, hogy ha az R metrikus térben $\mathfrak{V}_\varepsilon$ jelöli a fent bevezetett ε-környéket, akkor $S(x, \mathfrak{V}_\varepsilon) = S(x, \varepsilon)$. (Itt hallgatólag felhasználtuk azt az alább bizonyításra kerülő tényt, hogy a metrikus térben bevezetett ε-környékek uniform struktúrát alkotnak.)[12]

[10] L. az [1]) alatt idézett munkát, vagy Bourbaki [2]) alatti művét, amelyben az uniform struktúrák elmélete részletesen tárgyalva van.

[11] Az uniform struktúra eredeti definíciójában a (10. 2) axióma helyett csak annyi van feltéve, hogy minden $\mathfrak{V}$ környék tartalmazza az összes (x, x) alakú párokat. Az ilyen terekkel azonban nem érdemes külön foglalkozni, mert érvényes a (7. 1) tétellel (és a később tárgyalandó (11. 4) tétellel) analóg olyan tétel, amely szerint az ilyen térben azokat a pontokat, amelyeknek párja minden környékben benne van, egymással azonosítva a mi definíciónk szerinti uniform teret nyerünk. Az eredeti Weil-féle definíció formálisan is eltér némileg az általunk adottól. — Hasonló a helyzet egyébként a szomszédsági terek esetében is; itt is lehetne (9. 3) helyett csupán annyit megkövetelni, hogy $\{x\} \delta \{x\}$ legyen minden x pontra, s akkor be lehetne bizonyítani, hogy az ilyen térben azonosítva egymással az egymással szomszédos pontokat a (9. 3) axiómának eleget tevő szomszédsági teret nyerünk. Számos bonyodalmat kerülünk el azáltal, hogy a (9. 3) és (10. 2) axiómákat mindjárt az itt megadott erősebb alakban kötjük ki.

[12] Ennek mintájára az $S(A, \mathfrak{V}_\varepsilon)$ környezet helyett röviden $S(A, \varepsilon)$-t írunk.

Egy uniform struktúrával ellátott R halmazban szomszédsági struktúrát vezethetünk be, ha az A és B halmazokat akkor és csak akkor mondjuk szomszédosnak, ha minden $\mathfrak{V}$ környékben van olyan (x, y) pontpár, hogy $x \in A, y \in B$. Valóban, a (9. 1) axióma (10. 1) következménye, (9. 2) evidensen teljesül, (9. 3) (10. 2)-ből folyik; (9. 4) belátására gondoljuk meg, hogy ha egy $\mathfrak{V}$ környékben nincsen olyan (x, y) pontpár, melyre $x \in A \cup B, y \in C$, akkor olyan sincsen, melyre $x \in A, y \in C$, s olyan sem, melyre $x \in B, y \in C$; megfordítva, ha a $\mathfrak{V}_1$ környékben nincs olyan (x, y) pár, melyre $x \in A, y \in C$, a $\mathfrak{V}_2$ környékben pedig nincs olyan pár, melyre $x \in B, y \in C$, akkor $\mathfrak{V}$-val egy $\mathfrak{V}_1 \cap \mathfrak{V}_2$-ben foglalt környéket jelölve (ilyennek létezését (10. 3) biztosítja) $\mathfrak{V}$-ban nincs olyan (x, y) pár, melyre $x \in A \cup B, y \in C$. Végül (9. 5) belátására tekintsünk olyan $\mathfrak{V}$ környéket, melyben nincsen olyan (x, y) pontpár, hogy $x \in A, y \in B$. A (10. 4)-ben biztosított $\mathfrak{V}'$ környékkel képezzük az $U = S(A, \mathfrak{V}')$, $V = S(B, \mathfrak{V}')$ halmazokat; ekkor $A \bar{\delta} U$, mert $\mathfrak{V}'$-ben nincs olyan (x, y) pár, hogy $x \in A, y \in \bar{U}$, hasonlóan $B \bar{\delta} \bar{V}$, és $U \cap V = 0$, hiszen $z \in U \cap V$ esetén alkalmas $x \in A$ és $y \in B$ pontokra $(x, z) \in \mathfrak{V}'$, $(z, y) \in \mathfrak{V}'$ volna, ahonnan $(x, y) \in \mathfrak{V}$ következnék a feltevéssel ellentétben.

Az imént bevezetett szomszédsági struktúrát az *uniform struktúra által indukált szomszédsági struktúrának* nevezzük, az ezen szomszédsági struktúra által indukált topológiát pedig az *uniform struktúra által indukált topológiának*. Az olyan topologikus teret, melynek topológiáját egy uniform struktúra indukálja, *uniform tér*nek mondjuk.

Könnyű belátni, hogy az R metrikus térben fent definiált ε-környékek uniform struktúrát szolgáltatnak; (10. 1) (2. 2) folyománya, (10. 2) (2. 1)-ből és (2. 4)-ből folyik, (10. 3) annak következménye, hogy ha ε_1 és ε_2 közül a kisebbiket ε-nal jelöljük, akkor az ε-környék része az ε_1-környéknek is, az ε_2-környéknek is, végül (10. 4) belátására elég meggondolni, hogy ha $\mathfrak{V}$ az ε-környék, akkor a (2. 3) háromszögegyenlőtlenség felhasználásával $\mathfrak{V}'$ számára az $\frac{\varepsilon}{2}$-környék megfelel. Világos az is, hogy az ε-környékek által alkotott uniform struktúra éppen a metrikus tér szokásos szomszédsági struktúráját indukálja. Eszerint minden metrikus tér uniform tér; ha egy metrikus tér uniform struktúrájáról beszélünk, mindig az ε-környékek alkotta uniform struktúrára gondolunk.[13]

[13] Uniform terekre további fontos példát nyújtanak a *topologikus csoportok*. Egy G (algebrai) csoportot topologikus csoportnak mondunk, ha G elemei topologikus T_1-teret alkotnak, amelyben az inverz-képzés és a szorzás

Igen könnyen belátható, hogy ha R uniform tér és $R_0 \subset R$, akkor az R_0 halmazban uniform struktúrát értelmezünk, ha környékeknek tekintjük az R-ben megadott környékeknek az R_0-ból vett (x, y) pontpárok által alkotott részeit; ugyancsak evidens, hogy az R_0-ban így definiált uniform struktúra éppen azt a szomszédsági struktúrát indukálja, amely R_0-nak az R-ben adott szomszédsági tér altereként jut. Az imént bevezetett uniform struktúrával felruházott R_0 halmazt az R *uniform tér alterének* mondjuk.

Az analízis elemeiből ismert egyenletesen folytonos függvények fogalmának általánosításaként az R metrikus térnek az R' metrikus térbe való f leképezését egyenletesen folytonosnak mondjuk, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy $x \in R, y \in R$, $\varrho(x, y) < \delta$ esetén $\varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Ez a feltétel nyilván úgy is megfogalmazható, hogy az R'-beli ε-környékhez található legyen olyan R-beli δ-környék, hogy ha az (x, y) pontpár ehhez tartozik, akkor az $(f(x), f(y))$ képpont-pár az adott ε-környékhez tartozzék.

Ennek mintájára az R uniform térnek az R' uniform térbe való egyértelmű f leképezését *egyenletesen folytonos*nak mondjuk, ha minden R'-beli $\mathfrak{W}$ környékhez található olyan R-beli $\mathfrak{V}$ környék, hogy $(x, y) \in \mathfrak{V}$ esetén $(f(x), f(y)) \in \mathfrak{W}$ legyen. Egyenletesen folytonos leképezés egyúttal szomszédságtartó is (az R uniform struktúrája által indukált szomszédsági térnek az R' uniform struktúrája által indukált szomszédsági térbe való szomszédságtartó leképezése), mert ha $A \subset R$, $B \subset R$ és $A \delta B$, akkor bármely R'-beli $\mathfrak{W}$ környékhez meghatározva az egyenletesen folytonos leképezés értelmezésében szereplő $\mathfrak{V}$ környéket, van $\mathfrak{V}$-ban olyan (x, y) pár, hogy $x \in A$, $y \in B$, tehát $(f(x), f(y)) \in \mathfrak{W}$ és $f(x) \in f(A)$, $f(y) \in f(B)$, úgyhogy $f(A) \delta f(B)$. Ezért egyenletesen folytonos leképezés egyszersmind folytonos is. Világos, hogy ha f R-nek R'-be való, g pedig R'-nek R''-be való egyenletesen folytonos leképezése, akkor $h(x) = g(f(x))$ R-nek R''-be való egyenletesen folytonos leképezése. Világos továbbá az is, hogy az R-en egyenletesen folytonos f

művelete folytonos; ezen azt kell érteni, hogy ha $x \in G$, akkor az x^{-1} elem minden U környezetéhez található x-nek olyan V környezete, hogy $y \in V$ esetén $y^{-1} \in U$, továbbá $x \in G, y \in G$ esetén az xy elem minden U környezetéhez megadható x-nek olyan V és y-nak olyan W környezete, hogy $x' \in V, y' \in W$ esetén $x'y' \in U$. Mármost nem nehéz belátni, hogy egy G topologikus csoportban uniform struktúrát értelmezünk, ha az e egységelem minden U környezetéhez hozzárendelünk egy $\mathfrak{V}_U$ környéket, amely azokból és csak azokból az (x, y) párokból áll, amelyekre $xy^{-1} \in U$ és $yx^{-1} \in U$, s hogy ez az uniform struktúra éppen a G csoport eredeti topológiáját indukálja. — Ha a G csoport topológiájáról nem kötjük ki, hogy a (T_1) axiómának eleget tegyen, akkor csak a [11]) alatt említett általánosabb típusú uniform struktúrát nyerünk az imént leírt módon.

leképezésnek R valamely R_0 alterére való $f|R_0$ megszorítása is egyenletesen folytonos, valamint az, hogy az f leképezés egyenletesen folytonos volta nem függ attól, hogy az $f(R)$ teret altérként tartalmazó uniform terek közül melyikbe való leképezésnek tekintjük.

Egy kölcsönösen egyértelmű f leképezést *izomorf*nak mondunk, ha f is és f^{-1} is egyenletesen folytonos. Ha az R uniform tér izomorf leképezéssel átvihető az R' uniform térbe, akkor azt mondjuk, hogy e két tér izomorf. Világos, hogy ez a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, s hogy izomorf uniform terek egyúttal ekvimorfok és ezáltal homeomorfok is.

11. A továbbiakban igen hasznos lesz a következő fogalom, amely a metrikus térben értelmezett távolság-fogalomnak közvetlen általánosítása: az R halmaz pontjaiból alkotott pontpárokon értelmezett valós $\sigma(x, y)$ függvényt *eltérés*nek nevezzük, ha

$$\sigma(x, y) \geqq 0, \sigma(x, x) = 0; \tag{11. 1}$$

$$\sigma(x, y) = \sigma(y, x); \tag{11. 2}$$

$$\sigma(x, z) \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z). \tag{11. 3}$$

Látható, hogy a különböző pontok távolságának pozitív voltára vonatkozó feltevést hagytuk csak el a távolság értelmezéséből.

Az R halmazról azt mondjuk, hogy *eltérési struktúrával* van felruházva, ha meg van rajta adva az eltéréseknek egy Σ családja, éspedig úgy, hogy $x \in R, y \in R, x \neq y$ esetén mindig legyen olyan $\sigma \in \Sigma$ eltérés, hogy $\sigma(x, y) > 0$. (Vagyis a metrikus terekben érvényes (2. 4) axiómát az egyes eltérések külön-külön ugyan nem valósítják meg, megkívánjuk azonban, hogy mintegy összeségükben már megvalósítsák.) Világos, hogy ha R metrikus tér, akkor a benne értelmezett távolság egymagában eltérési struktúrát alkot.

Az R halmazon megadott eltérési struktúra segítségével uniform struktúrát értelmezhetünk a következőképpen: válasszunk ki a Σ eltérés-családból véges számú $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ eltérést és tekintsünk egy pozitív ε számot, s rendeljük hozzájuk a $\mathfrak{V}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r; \varepsilon)$ környéket, amely azokból és csak azokból az (x, y) pontpárokból áll, melyekre

$$\sigma_1(x, y) < \varepsilon, \ldots, \sigma_r(x, y) < \varepsilon.$$

Az összes így definiált (tehát minden lehetséges kiválasztásnak és minden pozitív ε-nak megfelelő) környékek valóban uniform struktúrát alkotnak; (10. 1) (11. 2)-ből következik, (10. 2) első része (11. 1)-nek folyománya, s ha $x \neq y$, akkor olyan $\sigma \in \Sigma$ eltérést választva, hogy $\sigma(x, y) > 0$ legyen, $\varepsilon < \sigma(x, y)$ mellett $(x, y) \notin \mathfrak{V}(\sigma; \varepsilon)$.

(10.3) így látható be: legyen $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r; \varepsilon_1)$, $\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{v}(\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_s; \varepsilon_2)$, akkor $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(\sigma_1, \ldots, \sigma_s; \varepsilon) \subset \mathfrak{V}_1 \cap \mathfrak{V}_2$, hacsak $\varepsilon < \varepsilon_1, \varepsilon < \varepsilon_2$. Végül (10.4) belátására legyen $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r; \varepsilon)$ és $\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_r; \frac{\varepsilon}{2}\right)$; ekkor (11.3) alapján rögtön látható, hogy $(x, y) \in \mathfrak{V}'$, $(y, z) \in \mathfrak{V}'$ az $(x, z) \in \mathfrak{V}$ relációt vonja maga után.

A most értelmezett uniform struktúrát az adott *eltérési struktúra által indukált uniform struktúrának* nevezzük, az általa indukált szomszédsági struktúrát és topológiát az *eltérési struktúra által indukált szomszédsági struktúrának*, illetőleg *topológiának* nevezzük. Az olyan topologikus teret, melynek topológiája eltérési struktúra által van indukálva, *eltérési tér*nek mondjuk. Minthogy a metrikus térben az egyetlen ϱ távolság által alkotott eltérési struktúrára a fenti konstrukciót alkalmazva nyilván éppen az ε-környékekhez jutunk, azért minden metrikus tér egyben eltérési térnek is tekinthető, amelynek uniform struktúrája a metrikus tér szokásos uniform struktúrájával esik egybe.

Ha az R halmazon eltérési struktúra helyett egyetlen eltérés van csak megadva, a zérus eltérésű pontok azonosításával metrikus teret nyerünk. Érvényes ugyanis a (7.1) tétel következő analogonja:

(11.4) *Legyen az R halmazon egy σ eltérés értelmezve. Nevezzük az $x \in R$ és $y \in R$ pontokat ekvivalensnek, ha $\sigma(x, y) = 0$; jelöljük $f(x)$-szel az x-et tartalmazó ekvivalencia-osztályt és $\tilde{R}$-mal az ilyen ekvivalencia-osztályok halmazát. A $\varrho(f(x), f(y)) = \sigma(x, y)$ képlettel értelmezett ϱ távolság az $\tilde{R}$ halmazon, amely ezáltal metrikus térré válik.*

Bizonyítás. Világos, hogy a $\sigma(x, y) = 0$ reláció reflexív és szimmetrikus, és tranzitív is, mert ha $\sigma(x, y) = 0, \sigma(y, z) = 0$, akkor $\sigma(x, z) \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z) = 0$ s így $\sigma(x, z) = 0$. Az $\tilde{R}$ halmazon lehet a ϱ távolságot a $\varrho(f(x), f(y)) = \sigma(x, y)$ képlettel értelmezni, mert $f(x) = f(x'), f(y) = f(y')$ esetén $\sigma(x', y') \leqq \sigma(x', x) + \sigma(x, y) + \sigma(y, y') = \sigma(x, y)$ s ugyanígy $\sigma(x, y) \leqq \sigma(x', y')$, tehát $\sigma(x, y) = \sigma(x', y')$. Az így definiált távolság eleget tesz nyilván a (2.1)—(2.3) axiómáknak, és eleget tesz (2.4)-nek is, mert $f(x) \neq f(y)$ esetén $\sigma(x, y) > 0$, úgyhogy $\tilde{R}$ valóban metrikus tér.

Egy végtelen lineáris egyenletrendszerről

RÉNYI KATÓ

FOURIER „Théorie analytique de la chaleur" című művében [1] foglalkozik a következő végtelen lineáris egyenletrendszerrel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

illetőleg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} x_n = b_{2k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1'}$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} x_n = b_{2k} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1''}$$

egyenletrendszerekkel. FOURIER a fenti egyenletrendszerek egy-egy megoldását úgy találja meg, hogy az első N egyenletből az első N ismeretlent tartalmazó tagok megtartásával képezett véges lineáris egyenletrendszert (melynek determinánsa Vandermonde-determináns) explicite megoldja és azután elvégzi az $N \to \infty$ határátmenetet. Az (1), illetve az (1') és (1'') egyenletrendszerekkel igen sokan foglalkoztak. A homogén esetben H. POINCARÉ [2], az inhomogén esetben É. BOREL [3] dolgozatában függvénytani módszerek segítségével adja meg az (1) egyenletrendszer végtelen (sőt kontinuumnyi) sok különböző megoldását.[1] RIESZ FRIGYES [4] könyvében kidomborítja FOURIER ezirányú vizsgálatainak jelentőségét;

[1] Az alábbi II. tételből következik, hogy az (1) egyenletrendszer Borel által adott megoldása, abban az általánosságban, ahogy Borel kimondja, hibás. Borel módszere csak bizonyos mellékfeltételek teljesülése esetén alkalmazható az (1)-hez hasonló $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ végtelen lineáris egyenletrendszer megoldására. Arra, hogy Borel meggondolásai némi kiegészítésre szorulnak, már Pólya György [6] rámutatott.

ugyanakkor rámutat arra, hogy FOURIER fent vázolt módszere (principe des réduits) nem minden végtelen lineáris egyenletrendszernél engedhető meg. A *Fourier-féle* eljárás jogosultságának kérdésével foglalkozik G. H. HARDY is [5] dolgozatában: megmutatja, hogy a *Fourier-féle* meggondolásban fellépő divergens sorok milyen eljárásokkal tehetők szummábilissá. PÓLYA GYÖRGY [6] dolgozatában egy általános tételt bizonyít be, amelyből következik, hogy az (1) egyenletrendszernek a jobb oldalon álló b_k sorozat tetszőleges választása esetén megadható végtelen sok lineárisan független megoldása, mégpedig oly módon, hogy a bal oldalon álló sorok abszolút konvergensek lesznek. H. VON KOCH [7] dolgozatában az (1)-nek megfelelő

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

homogén egyenletrendszerrel foglalkozik és többek között bebizonyítja, hogy ha $\{x_n\}$ a (2) egyenletrendszernek egy a triviálistól különböző megoldása, akkor

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} \geqq e^{-2\pi}. \tag{3}$$

H. VON KOCHnak ez az eredménye egy általánosabb tételének speciális esete, amellyel lényegében megegyező eredményt vele egyidejűleg és tőle függetlenül P. STÄCKEL [8] is bebizonyított.

E dolgozatban szintén az (1) egyenletrendszerrel foglalkozunk. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy (3) akkor is fennáll, ha nem a *teljes* rendszer homogenitását tesszük fel, hanem csak azt, hogy

$$b_{2k-1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

(ami azt jelenti, hogy az (1')-nek megfelelő homogén egyenletrendszert kielégítő nem triviális $\{x_n\}$ sorozat is eleget tesz (3)-nak). De ennél több is igaz: (3) még ebben az esetben is a következőképpen javítható:[2]

[2] H. von Koch tulajdonképpen azt bizonyítja, hogy ha $\{x_n\}$ a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^k x_n = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

egyenletrendszer egy nem triviális megoldása, akkor

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} \geqq e^{-2\pi} \quad \text{vagy} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_{-n}|} \geqq e^{-2\pi}.$$

Az alábbihoz hasonló meggondolás segítségével $e^{-2\pi}$ ebben az általánosabb esetben is 1-gyel helyettesíthető.

Ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} x_n = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4'}$$

és a (4') *egyenletrendszert kielégítő* $x_n (n = 1, 2, \ldots)$ *számok között van* 0*-tól különböző, akkor*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|x_n|} \geqq 1. \tag{5}$$

Ez a következőképpen látható be: Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|x_n|} = q < 1$$

volna. Akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{inz} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{-inz} \tag{6}$$

sorok konvergálnának, ha $|e^{iz}| = e^{-Im\, z} < \frac{1}{q}$ és $|e^{-iz}| = e^{Im\, z} < \frac{1}{q}$, vagyis ha $|Im\, z| < \log \frac{1}{q}$. Mivel $|z| \geqq |Im\, z|$ és a feltevés értelmében $\log \frac{1}{q} > 0$, tehát a (6) sorok egyenletesen konvergálnának a $|z| < \log \frac{1}{q}$ kör belsejében. Ez azonban azt jelentené, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin nz \tag{7}$$

sor a $z = 0$ pont környezetében egy reguláris $f(z)$ függvényt állítana elő. $f(z)$ nyilvánvalóan páratlan függvény, tehát $f^{(2k)}(0) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. A (7) sor tagonkénti differenciálásával megkapjuk $f(z)$ páratlan deriváltjait:

$$f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} x_n \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

(4')-ből következik, hogy $f^{(2k-1)}(0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ez azonban csak úgy volna lehetséges, ha $f(z) \equiv 0$ lenne, ami ellentétben áll azzal a feltevésünkkel, hogy az x_n számok között van 0-tól különböző. Ezzel állításunk bizonyítást nyert.

(5) természetesen akkor is fennáll, ha $b_{2k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ esetében $\{x_n\}$ az (1'') egyenletrendszer nem triviális megoldása.

Ez esetben (7) helyett a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos nz$ sor által előállított függvény felhasználásával jutunk ellentmondásra.

Az (1) egyenletrendszer vizsgálata hasonló jellegű eredményekre vezet akkor is, ha a jobb oldalon álló b_k számsorozatnak a (4)-nél „ritkább" részsorozatáról tesszük csak fel, hogy zérus, nevezetesen, ha azt tesszük fel, hogy

$$b_{2k_s-1} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

ahol

$$k_s < cs \qquad (1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots;\ c > 1). \tag{10}$$

Igaz a következő tétel:

II. *Ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k_s-1} x_n = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots), \tag{9'}$$

ahol

$$k_s < cs \qquad (1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots;\ c > 1) \tag{10}$$

és a (9') *egyenletrendszert kielégítő* $x_n (n = 1, 2, \ldots)$ *számok között van* 0*-tól különböző, akkor*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} > 0. \tag{11}$$

A bizonyításhoz felhasználjuk a [9] 2. §.-ában szereplő 2. tételt, melynek a továbbiakban szükséges gyengébb fogalmazása a következő:

Ha $f(z)$ *páratlan periodikus egész függvény* ($\not\equiv$ const.) *és*

$$f^{(2k_s-1)}(0) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

akkor

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{s}{k_s} = 0. \tag{13}$$

A bizonyítás az I. tételhez hasonlóan, indirekt úton történik. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 0$$

volna. Akkor a (7) sor a z sík bármely zárt résztartományában egyenletesen konvergálna, tehát az általa előállított páratlan periodikus $f(z) \not\equiv$ const. függvény egész függvény lenne. A (8) képlet és a (9') feltétel miatt fennállanának a (12) összefüggések egy

olyan k_s sorozatra, amely eleget tesz a (10) feltételnek. Ez a feltétel azonban ekvivalens azzal, hogy

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{s}{k_s} > 0$$

és így ellentmondásra jutnánk (13)-mal.[3]

IRODALOMJEGYZÉK:

[1] J. Fourier: Théorie analytique de la chaleur, Oeuvres de Fourier, Paris, Gauthier Villars, 1888., Vol. 1. pp. 426—427.

[2] H. Poincaré: Remarque sur l'emploi de la méthode précédente, Bulletin de la Soc. Math. de France 13. 1885. pp. 19—27.

[3] É. Borel: Thèse, Annales scient. de l'École Normale Sup. 12, 1895. pp. 9–55.

[4] F. Riesz: Les systèmes d'equations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, Gauthier—Villars, 1913. pp. 1—182.

[5] G. H. Hardy: Remarks on some points in the theory of divergent series. Annals. of Math. 36 (1935) pp. 167—181.

[6] G. Pólya: Eine einfache, mit funktionen-theoretischen Aufgaben verknüpfte, hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen, Commentarii Math. Helv. 11, 1938., pp. 234—252.

[7] H. von Koch: On regular and irregular solutions of some infinite systems of linear equations, International Congress of Math., Cambridge, 1912.

[8] P. Staeckel: Periodische Funktionen und Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen, Festschrift H. Weber, 1912., pp. 396—409.

[9] C. Rényi: On periodic entire functions, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8 (1957). (sajtó alatt).

[3] Könnyen belátható, hogy a bebizonyított tétel abban az esetben is érvényes, ha (9') helyett azt tesszük fel, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k_s} x_n = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots), \tag{9''}$$

ahol a k_s kitevőkre (10) teljesül. Ugyanis $x_n' = n x_n$ jelöléssel (9'') visszavezethető (9')-re és így (11)-ből $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|x_n|} > 0$. Mivel $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, ebből következik, hogy $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} > 0$.

ON AN INFINITE SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS

by Catherine Rényi

Summary

The paper deals with the infinite system of linear equations

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} x_n = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

The following two theorems are proved:

I. *If* (1) *holds with* $b_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *then*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} \geqq 1. \tag{2}$$

This improves a result of H. von Koch [7] who proved (2) with $e^{-2\pi}$ instead of 1 on the right hand side.

II. *If* (1) *holds and* $b_{k_s} = 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$, *where*

$$k_s < cs$$

with some constant $c > 1$, *then*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} > 0.$$

The proof of II. is based on the following theorem, proved recently by the author [9]:

If $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ is an entire periodic function, then the lower density of the sequence of integers k for which $a_k = 0$ can not exceed $\frac{1}{2}$.

ОБ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Катя Реньи

(Резюме)

Обсуждается бесконечная система линейных уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} x_n = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Доказаны следующие две теоремы:

I. Если (1) имеет место с $b_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} \geqq 1. \tag{2}$$

Этот результат улучшает теорему Коха [7], кто доказал (2) с постоянной e^{-2n} вместо 1 на правой стороне.

II. Если (1) имеет место и $b_{k_s}=0 \quad (k=1,2,\ldots)$, где

$$k_s < cs$$

с постоянной $c>1$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} > 0.$$

Доказательство теоремы II. основано на следующей теореме, доказанной недавно автором [9]:

Если $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ есть периодическая целая функция, то нижняя плотность последовательности целых чисел k, для которых $a_k=0$, не превосходит 1/2.

Megjegyzések a számjegyek eloszlásáról valós számok Cantor-sorában

SZŰSZ PÉTER

Valamely x $(0 < x < 1)$ valós szám Cantor-féle előállításán az

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2, \ldots, q_k} \tag{1}$$

előállítását értjük,[1] ahol $q_1, q_2, \ldots$ 1-nél nagyobb természetes számokat jelentenek, míg az ε_k „számjegyek" minden k-ra a $0, 1, 2, \ldots$ $(q_k - 1)$ számok valamelyikét jelentik. Ha $q_1, q_2, \ldots$ adottak, akkor, mint ismeretes, az (1) előállítás egyértelmű (kivéve azokat az x számokat, amelyek $x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \ldots q_k}$ alakban írhatók.) Ha $q_1 = q_2 = \cdots = q$, akkor az x szám közönséges q-adikus kifejtését nyerjük. A közönséges q-adikus kifejtésekre érvényes BOREL[2] következő tétele: Jelölje $N_n(x, r)$ az

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q^k} \tag{2}$$

előállításban azon ε_k-k számát, amelyekre $\varepsilon_k = r$ és $k \leqq n$. Akkor majdnem minden x-re teljesül

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(x, r)}{N_n(x, s)} = 1, \tag{3}$$

ahol r és s a $0, 1, \ldots, q-1$ számok bármelyikét jelenthetik. Miután a lehetséges q-adikus kifejtések alapszámai megszámlálhatók és megszámlálhatóan sok nullmértékű halmaz egyesítése is nullmértékű, innen azonnal adódik, hogy majdnem minden x-re teljesül (2) akkor is, ha q helyébe tetszőleges 1-nél nagyobb természetes számot írunk.

[1] L. pl. PERRON [1].
[2] BOREL [2].

Bár nem tartozik szorosan jelen dolgozat tárgyához, BOREL tételével kapcsolatban a következőt jegyzem meg: BOREL tételét úgy szokták tekinteni, mint a valószínűségszámításból ismert nagy számok erős törvényének speciális esetét és a bizonyítás is a valószínűségszámítás eszközeivel szokott történni. Kevésbé ismert, hogy a fenti tétel speciális esete annak az ismert tételnek, amely szerint a $\{(q^n x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat majdnem minden x-re $(0, 1)$-ben egyenletes eloszlású, ahol $(\cdots)$ a zárójelen belül álló szám tört részét jelenti. Ezt a tételt WEYL módszere is kiadja (l. WEYL [3], 348. old.). Ugyanis, mint az igen egyszerű átalakítással adódik, a [2] formulában álló ε_k-kra fennáll, hogy $\varepsilon_k = [q(q^{k-1}x)]$. Mármost abból, hogy a $\{(q^k x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sorozat $(0, 1)$-ben egyenletes eloszlású, következik, hogy azon k-k sűrűsége, amelyekre $(q^{k-1}x)$ $\frac{r}{q}$ és $\frac{r+1}{q}$ közé esik, $(r = 0, 1, \ldots, (q-1))$ $\frac{1}{q}$-val egyenlő; azonban k-nak ezen (és csak ezen) értékeire áll fenn $\varepsilon_k = r$, ezzel BOREL tételét igazoltuk. Megfordítva igaz az is, hogy BOREL tételéből következik a $\{(q^k x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sorozat egyenletes eloszlása $(0, 1)$-ben x-nek majdnem minden értékére. HARDY és LITTLEWOOD ezen az úton bizonyították be a fenti sorozat egyenletes eloszlását majdnem minden x-re. L. HARDY—LITTLEWOOD [4].

RÉNYI ALFRÉD [5] bebizonyította, hogy (3) igaz marad akkor is, ha $N_n(x, r)$ az első n helyen álló r számjegyek számát jelenti x (1) alakú kifejtésében, hacsak a $q_1, q_2, \ldots$ alapszámok bizonyos elég általános feltételeknek tesznek eleget. RÉNYI tétele a következőképpen hangzik:

Legyen $q_1, q_2, \ldots$ egy 2-nél nem kisebb természetes számokból álló sorozat, amelyre teljesülnek az

a) $$q_k \to \infty \quad \text{ha} \quad k \to \infty$$

és

b) $$\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} = \infty$$

feltevések. Jelentse továbbá $N_n(x, r)$ x (1) alakú kifejtésében (ahol most már feltételezzük, hogy a q_k-k teljesítik az a) és b) feltételeket) azon ε_k-k számát, amelyekre $k \leqq n$ és $\varepsilon_k = r$. Akkor bármely nem negatív egész r-re és s-re azon x számok, amelyekre (3) nem teljesül, egy nullmértékű halmazt alkotnak.

Érdekes lenne ezt a tételt is egy egyenletes eloszlásra vonatkozó tételre visszavezetni, mint ahogyan BOREL tétele a $\{(q^k x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sorozat egyenletes eloszlásából következik; ez azonban mindezideig nem sikerült.

RÉNYI tételével kapcsolatban felmerül a kérdés, hogy — BOREL tételéhez analóg módon — igaz-e (3) majdnem minden x-re akkor is, ha a $q_1, q_2, \ldots$ számsorozatot az összes a)-nak és b)-nek eleget tevő számsorozatokon futtatjuk végig. Ez felelne meg a Borel-tétel azon következményének, hogy $q_1 = q_2 = \cdots$ esetén (3) igaz majdnem minden x-re akkor is, ha a $q_1, q_2, \ldots$-k közös értéke gyanánt akármilyen 2-nél nem kisebb természetes számot megengedünk. A mód, ahogyan e következmény BOREL tételéből adódik, nem vihető át az általános esetre, mert ott azt a tényt használtuk fel, hogy megszámlálhatóan sok nullmértékű halmaz egyesítése is nullmértékű, az a)-nak és b)-nek eleget tevő sorozatok halmaza pedig kontinuum számosságú. Valóban, RÉNYI dolgozatában megmutatja, hogy minden x-hez megadható oly a)-nak és b)-nek eleget tevő $q_1, q_2, \ldots$ sorozat, hogy (3) nem teljesül. A konstrukció, amely ERDŐS PÁL egy gondolatán alapszik, az eredeti „normális“ [3] sorfejtésekhez egy másik Cantor-sort rendel hozzá, amelyről már kimutatható, hogy nem normális. Ennél a konstrukciónál, bár a) és b) teljesül, az eredi $q_1, q_2, \ldots$ sorozat bizonyos tulajdonságai (pl. a monotonitás) már nem maradnak meg. Így felmerül a kérdés, hogy minden, vagy legalábbis minden irracionális x-hez található-e olyan 2-nél nem kisebb természetes számokból álló

$$q_1, q_2, \ldots$$

sorozat, hogy

$$0 \leqq q_{k+1} - q_k < K \tag{4}$$

legyen, ahol K egy numerikus állandót jelent, továbbá x-nek a $q_1, q_2, \ldots$ sorozat szerinti Cantor-sora nem normális.

Jelen dolgozatban bebizonyítom, hogy ez lehetséges még akkor is, ha (4) helyett az annál valamivel erősebb

$$0 \leqq q_k - a_k < K$$

megszorítást tesszük, ahol $\{a_k\}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ egy 2-nél nem kisebb természetes számokból álló számsorozat, továbbá, ha a helyett a követelés helyett, hogy x-nek a q_k-k szerinti Cantor-sora ne legyen normális, azt az erősebb kikötést tesszük, hogy egy számjegy pl. a 0, teljesen kimaradjon (1. tétel).

Bebizonyítom továbbá a következő, első pillanatra meglepő tényt: Legyen x adott, 0 és 1 között fekvő irracionális szám, továbbá $b_2, b_3, \ldots$ nemnegatív egész számokból álló számsorozat. Akkor megadható oly 2-nél nem kisebb természetes számokból álló

$$q_1, q_2, \ldots$$

[3] Normális Cantor-sornak nevezi a szerző azon $q_1, q_2, \ldots$ számsorozatot, amelyre (3) teljesül; itt x már rögzített.

számsorozat, hogy ha ε_k $(k=1, 2, \ldots)$ x-nek ezen q_k-k szerinti Cantor-sorának számjegyeit jelentik, akkor

(5) $$\varepsilon_k = b_k \qquad (k=2, 3, \ldots, r)$$

ahol r tetszőlegesen nagy természetes szám; ha a b_k sorozatra azt a megszorítást tesszük, hogy abban a 0 legfeljebb véges sokszor fordul elő, akkor olyan q_k $(k=1, 2, \ldots)$ számsorozat is található, hogy (5) nemcsak véges sok k-ra, hanem k minden értékére igaz legyen (2. tétel).

Az 1. § az 1. és 2. tételek bizonyításához szükséges egyszerű formulákat tárgyalja. A 2. §-ban az 1. tételt, a 3. §-ban a 2. tételt bizonyítom be. A tételeket a könnyebb áttekinthetőség kedvéért a 2., ill. 3. §-ban mégegyszer kimondom. A 4. § néhány megjegyzést tartalmaz.

1. §.

Legyen x 0 és 1 között fekvő valós szám, $q_1, q_2, \ldots$ adott, 2-nél nem kisebb természetes számokból álló sorozat. Tekintsük x-nek ezen q-k szerinti Cantor-sorát:

(1. 1) $$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2, \ldots, q_k}.$$

Először is felállítunk egy rekurziós formulát az ε_k-k között. (1. 1)-ből adódik

$$0 \leqq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \ldots q_k} < \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n},$$

vagyis

(1. 2) $$0 \leqq q_n \left(q_1 q_2, \ldots, q_{n-1} \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \ldots q_k} \right) \right) - \varepsilon_n < 1.$$

Vezessük be a

(1. 3) $$q_1 q_2, \ldots, q_n \left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \ldots q_k} \right) = \delta_n$$

jelölést. δ_n minden n-re egy 0 és 1 között fekvő szám. Akkor (1. 2)-ből adódik

(1. 4) $$\varepsilon_n = [q_n \delta_{n-1}],$$

továbbá ((1. 4)-ből és δ_n definíciójából)

(1. 5) $$\delta_n = (q_n \delta_{n-1})$$

ahol $(\cdots)$ a zárójelen belül álló tört szám részét jelenti. Ha speciálisan $q_1 = q_2 = \cdots = q$, akkor (1.4) a bevezetésben a Borel-tétellel kapcsolatban már említett $\varepsilon_n = [q(q^{n-1}x)]$ formulát adja.

2. §.

1. TÉTEL. *Legyen x 0 és 1 között fekvő valós szám, legyen továbbá $a_1, a_2, \ldots$ 2-nél nem kisebb természetes számokból álló számsorozat. Akkor megadható oly 2-nél nem kisebb természetes számokból álló*

$$q_1, q_2, \ldots$$

számsorozat, hogy teljesüljön

$$0 \leqq q_n - a_n < 16 \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{2.1}$$

továbbá x-nek ezen q_k-k szerinti (1.1) alakú kifejtésében

$$\varepsilon_n \geqq 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

legyen.

A bizonyításhoz szükség van a következő

SEGÉDTÉTEL-re: *Legyen β valós szám $(0 < \beta < 1)$, továbbá*

$$\beta = \frac{A}{B} + \frac{\vartheta}{B^2} \qquad ((A, B) = 1,\ |\vartheta| < 1) \tag{2.3}$$

Akkor bármely n-re és $k = 1, 2, \ldots, B$-re fennáll

$$((n+k)\beta) = \left(\delta(n) + \frac{\varphi(k)}{B} + \frac{k\vartheta}{B^2}\right) \tag{2.4}$$

ahol $\delta(n)$ egy csak n-től és β-tól függő, $\frac{1}{B}$-nál nem nagyobb nemnegatív szám, továbbá $\varphi(k)$ az $1, 2, \ldots, B$ számoknak valamely permutációja.

A bizonyítás azonnal adódik (2.3)-ból és abból a tényből, hogy ha $(A, B) = 1$ és k végigfut egy teljes maradékrendszert (mod B), akkor ugyanezt teszi $Ak + l$, ahol l tetszőleges egész szám.

Most már rátérhetünk az 1. tétel bizonyítására. Válasszuk először q_1-et úgy, hogy érvényes legyen

$$\frac{1}{8} < \delta_1 < \frac{7}{8}, \tag{2.5}$$

ahol $\delta_1, \delta_2, \ldots$ jelentése ugyanaz, mint (1.3)-ban. Jelölje $A_r^{(1)}/B_r^{(1)}$

δ_1 lánctörtkifejtésének azt a legnagyobb indexű közelítő törtjét, amelyre fennáll

$$B_r^{(1)} < 8,$$

vagyis

$$B_r^{(1)} < 8 \leqq B_{r+1}^{(1)}. \tag{2.6}$$

A lánctörtelméletből ismeretes, hogy

$$\left| \delta_1 - \frac{A_r^{(1)}}{B_r^{(1)}} \right| < \frac{1}{A_r^{(1)} B_{r+1}^{(1)}}; \tag{2.7}$$

(2.7) jobboldala (2.6) miatt kisebb, mint $\frac{1}{8B_r^{(1)}}$. (2.5), (2.6) és (2.7)-ből következik

$$B_r^{(1)} \geqq 2; \tag{2.8}$$

Ha ugyanis $B_r^{(1)} = 1$ volna, akkor következnék

$$|\delta_1 - A_r^{(1)}| < \frac{1}{8},$$

ami ellentmond (2.5)-nek.

Most két esetet különböztetünk meg, aszerint, hogy $B_r^{(1)} \leqq 3$ vagy $B_r^{(1)} \geqq 4$. *a)* Legyen először $B_r^{(1)} = 2$ vagy 3. Akkor (2.6) és (2.7)-ből következik

$$\left| \delta_1 - \frac{A_r^{(1)}}{B_r^{(1)}} \right| < \frac{3}{8} \frac{1}{B_r^{(1)2}}; \tag{2.9}$$

innen a segédtétel miatt adódik, hogy akárhogyan jelölünk ki $(0, 1)$-ben egy $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{16}$ hosszúságú részintervallumot, tetszőleges a_2 mellett az

$$((a_2+8)\delta_1),\ ((a_2+9)\delta_1),\ ((a_2+10)\delta_1)$$

számok egyike beleesik az adott intervallumba; legyen q_2 az a_2+8, a_2+9, a_2+10 számok közül, amelyre teljesül

$$\frac{1}{8} < (q_2 \delta_1) < \frac{7}{8}. \tag{2.10}$$

Mindenesetre $q_2 - a_2 \leqq 10$, továbbá (2.5) és (1.4) miatt $\varepsilon_2 \geqq 1$.

b) Legyen most $B_r^{(1)} \geqq 4$. Akkor a segédtételből következik, hogy akárhogyan jelölünk ki $(0, 1)$-ben egy $\frac{1}{2}$-nél nem kisebb

hosszúságú intervallumot, az

$$a_2+8, a_2+9, \ldots, a_2+B_r-1+8$$

számok valamelyikére, amelyet egy pillanatra q_2'-vel fogok jelölni, $(q_2'\delta)$ beleesik az adott intervallumba; így létezik oly q_2, amelyre teljesül (2. 10), továbbá

$$0 < q_2 - a_2 < B_r^{(1)} + 8 < 16$$

és (2. 5) és (1. 4) miatt $\varepsilon_2 \geqq 1$ is.

Az *a)* és *b)* esetekből következik oly q_2 létezése, amelyre teljesülnek a

$$\frac{1}{8} < (q_2\delta_1) = \delta_2 < \frac{7}{8},$$

$$0 < q_2 - a_2 < 16$$

és

$$\varepsilon_2 = [q_2\delta_1] \geqq 1$$

relációk. E konstrukció megismétlésével nyerhetjük a $q_1, q_2, \ldots$ sorozat első két tagja után a többi tagot is, amelyek ugyanezen tulajdonságokkal bírnak. Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

3. §.

Legyen x irracionális szám, $b_2, b_3, \ldots$ egy nemnegatív egész számokból álló számsorozat. Akkor létezik oly $q_1, q_2, q_3, \ldots$ 2-nél nem kisebb természetes számokból álló számsorozat, hogy x-nek ezen q_k-k szerinti Cantor-kifejtésének számjegyeire teljesül

(3. 1) $$\varepsilon_k = b_k \qquad (k = 2, 3, \ldots, r),$$

ahol r tetszőlegesen nagy természetes szám; ha a b_2, b_3 sorozatról még azt a megszorítást is feltesszük, hogy abban a 0 legfeljebb véges sokszor forduljon elő, akkor a q_k-k választhatók úgy is, hogy (3. 1) k minden (2-nél nem kisebb) értékére is teljesüljön.

Bizonyítás. Legyen r adott, de egébként tetszőleges természetes szám, továbbá

(3. 2) $$\vartheta = 2^{-(r+1)}.$$

Válasszuk meg először q_1-et úgy, hogy

(3. 3) $$0 < \delta_1 = (q_1 x) < \beta$$

teljesüljön. Ez Dirichlet tétele értelmében lehetséges. Legyen q_2 az a *legkisebb* szám, amelyre teljesül

$$q_2 \geqq 2, \quad \varepsilon_2 = [q_2\delta_1] = b_2.$$

Ilyen q_2 (3. 2) és (3. 3) miatt létezik; továbbá fennáll

$$\delta_2 = (q_2\delta_1) \leqq \begin{cases} 2\delta_1 & \text{ha } b_2 = 0 \\ \delta_1 & \text{ha } b_2 \neq 0. \end{cases}$$

Ezután meghatározzuk azt a *legkisebb* q_3 számot, amelyre teljesül

$$q_3 \geqq 2, [q_3\delta_2] = b_3$$

q_2-hez analóg módon teljesül

$$\delta_3 = (q_3\delta_3) \leqq \begin{cases} 2\delta_2 & \text{ha } b_3 = 0 \\ \delta_2 & \text{különben.} \end{cases}$$

E konstrukció addig folytatható, amíg $\delta_{n-1} < \frac{1}{2}$. Általában fennáll

$$\delta_{n+1} = (q_{n+1}\delta_n) \leqq \begin{cases} 2\delta_n & \text{ha } b_{n+1} = 0 \\ \delta_n & \text{különben.} \end{cases} \tag{3. 4}$$

A konstrukció ezért (3. 2) és (3. 4) miatt legalább r lépésen át folytatható. Ezzel a tétel első állítását igazoltuk.

Ha a b_k-k között a 0 legfeljebb véges sokszor fordul elő, akkor (3. 4)-ben véges sok kivétellel az erősebb $\delta_{n+1} < \delta_n$ fog teljesülni. Ha tehát (3. 2) ϑ-jára fennáll

$$\vartheta < 2^{-(N+1)},$$

ahol N a $b_2, b_3, \ldots$ sorozatban előforduló 0-k számát jelenti, akkor a konstrukció korlátlanul folytatható. Ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

4. §.

Befejezésül néhány megjegyzést teszek.

1. Az első tételt valós x-ekre bizonyítottuk be, tehát racionális is lehet; a 2. tételnél x irracionális volta ki van használva és a tétel racionális x-ekre általában nem is igaz. Ha ugyanis $x = \frac{p}{q}$, ahol $\frac{p}{q}$ egy nem túl nagy nevezőjű tört, akkor nyilvánvalóan a $q_1, q_2, \ldots$ számok semmilyen választásával sem érhető el, hogy pl.

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = \varepsilon_r = 0, \ \varepsilon_{r+1} \neq 0$$

legyen, hacsak r (q-tól függően) elegendő nagy.

2. A 2. tétel bizonyítását szolgáltató konstrukcióból kiderül, hogy ha az ε_k-k értékét nem minden 2-nél nem kisebb k-ra írjuk

elő, hanem csak a természetes számsor egy részhalmazára, amely azonban végtelen sok hézagot tartalmaz, akkor elérhető, hogy $\varepsilon_{k'} = b_{k'}$ legyen, minden k'-re, ahol k' a természetes számsor azon elemeit jelenti, amelyekre $b_{k'}$ értékét előírtuk.

3. Mint nehezebb, és nem is teljesen megoldott problémát említem meg a következőt: Tegyük fel, hogy $b_k \neq 0$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Milyen további kikötésnek kell eleget tenniök a b_k-knak, ha még azt is akarjuk, hogy a 2. tételnek eleget tevő q_k-kra fennálljon $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} = \infty$? $\sum_{k=2}^{\infty} b_k^{-1} = \infty$ mindenesetre szükséges. Ugyanis $q_n \geqq b_n$ miatt $\sum_{k=2}^{\infty} b_k^{-1} < \infty$-ből következik $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} < \infty$. Hogy ezen feltétel elegendő-e, azt nem tudom. Azt azonban be tudom bizonyítani, hogy ha a $\sum_{k=2}^{\infty} b_k^{-1}$ sorból kiválasztható oly $\sum_{k=2}^{\infty} b_k^{-1}$ részsor, amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy a $\sum_{k=2}^{\infty} \min\left(b_{2k}'^{-1}, b_{2k+1}'^{-1}\right)$ sor is divergens, akkor megadható oly $q_1, q_2, \ldots$ sorozat, hogy a 2. tétel követelései mellett $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} = \infty$ is teljesüljön. Ennek bizonyítása a következőképpen történhetik. A 2. §-ban ismertetett konstrukciót kissé módosítanunk kell. Ezt a módosítást az teszi lehetővé, hogy feltételezzük $b_k \neq 0$-t. Legyen $b_{\varphi(2)}, b_{\varphi(3)}, \ldots$ a $b_2, b_3, \ldots$ sorozatnak azon részsorozata, amelyre teljesül $\sum_{k=1}^{\infty} \min\left(b_{\varphi(2k)}^{-1}, b_{\varphi(2k+1)}\right) = \infty$. Ha most $\delta_{\varphi(2k)-1} > \frac{1}{4}$, akkor (1.5) miatt $q_{\varphi(2k)}^{-1} > \frac{1}{4 b_{\varphi(2k)} + 1}$. Ha pedig $\delta_{\varphi(2k)-1} < \frac{1}{4}$, akkor pusztán $q_{\varphi(2k+1)-1}$ alkalmas választásával elérhető, hogy

$$\delta_{\varphi(2k+1)-1} > \frac{1}{4}$$

legyen.[4] Ha ez megtörtént, akkor már

$$\varepsilon_{\varphi(2k+1)} = b_{\varphi(2k+1)}, \quad q_{\varphi(2k+1)}^{-1} > \left(4\left(b_{\varphi(2k+1)} + 1\right)\right)^{-1}$$

is elérhető. Ezzel állításunkat igazoltuk.

[4] Itt $q_{\varphi(2k+1)-1}$ nem azt a *legkisebb* számot jelenti, amelyre $[q_{\varphi(2+1)-1} \cdot \delta_{\varphi(2k+1)-1}] = b_{\varphi(2k+1)-1}$ teljesül, hanem azt a legkisebb q-t, amelyre a fenti reláció mellett még $\delta_{\varphi(2k+1)-1} > \frac{1}{4}$ is fennáll. Ez a konstrukció említett módosítása.

Ezzel kapcsolatban felmerül a következő, most már nem számelméleti, hanem sorelméleti kérdés: melyek azok a divergens $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ pozitív tagú sorok, amelyek azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy választható belőlük olyan $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\varphi(k)}$ alakú részsor, amelyre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left(c_{\varphi(k)}, c_{\varphi(k+1)}\right)$$

divergens. Bebizonyítható, hogy ez nem minden, pozitív tagú divergens sorra áll fenn. A szükséges és elégséges feltétel a következő: jelölje $c_1', c_2', \ldots$ a $c_1, c_2, \ldots$ sorozatnak azt az átrendezését, amelyre $c_1' \geqq c_2' \geqq \cdots$. Ha $\overline{\lim_{n\to\infty}} nc_n' > 0$, akkor létezik a fenti feltételeknek eleget tevő részsor. Erre a kérdésre egy későbbi dolgozatban vissza szándékozom térni.

IRODALOM

[1] O. Perron, Irrationalzahlen, Berlin, 1921.
[2] É. Borel, Sur les probabilités dénombrables et leur applications arithmétiques. Rend. di Palermo, 26 (1909) 247—271.
[3] H. Weyl, Über die Gleichverteilung der Zahlen mod Eins. Math. Ann. 77 (1916) 313—392.
[4] G. H. Hardy—J. E. Littlewood, Some problems on Diphantine Approximation, Acta Math. 37 (1914).
[5] Rényi A., A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-sorában. Mat. Lapok. VII. évf. 1—2. sz. (1956) 77—98 old.

BEMERKUNGEN ZUR VERTEILUNG DER ZIFFERN IN DER CANTORSCHEN REIHE REELLER ZAHLEN*

Von P. Szüsz

(Zusammenfassung)

Es werden die folgenden beiden Sätze bewiesen:

Satz 1. Ist x eine beliebige Zahl des Intervalls $(0, 1)$, $a_2, a_3, \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen, die nicht kleiner, als 2 sind, so gibt es eine „Grundzahlenfolge“ $q_1, q_2, \ldots$, also eine Folge natürlicher Zahlen mit $q_j \geqq 2$ $(j = 1, 2, \ldots)$ derart, daß in der Cantorschen Darstellung von x nach dieser

* Eine umgearbeitete deutschsprachige Variante dieser Arbeit erscheint n den Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.

Grundzahlenfolge

$$(1) \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \dots q_k} \qquad (\varepsilon_k(x) = 0, 1, \dots, q_{k-1};\ k = 1, 2, \dots)$$

stets $\varepsilon_k(x) \geqq 1$ gilt und außerdem die Relationen

$$0 \leqq q_k - a_k < 16 \qquad (k = 2, 3, \dots)$$

erfüllt sind.

Satz 2. Ist $c_2, c_3, \dots$ eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen, unter denen die Null höchstens endlich oft vorkommt, so läßt sich zu jeder x eine Grundzahlenfolge $q_1, q_2, \dots$ angeben, daß in der Darstellung von der Gestalt (1) von x die Relationen $\varepsilon_2(x) = c_2, \varepsilon_3(x) = c_3, \dots$ gelten. Dies ist eine kleine Verallgemeinerung der „Engelschen Reihen erster Art" (vgl. Perron [1], S. 120).

ПРИМЕЧАНИЯ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ЦИФР В КАНТОРОВОЙ РЯДЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

П. Сюс

Доказываются следующие две теоремы:

I. теорема: пусть x число в интервале (0, 1), и $a_2, a_3, \dots$ — последовательностьлюбых действительных чисел не меньшех чем 2. При таких условия существует такая послеговательность целых чисел" $q_1, q_2, \dots$, что

$$(1) \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1, q_2, \dots, q_k}$$

где $\varepsilon_k(x) \geqq 1$, целые числа, $1 \leqq \varepsilon_k(x) \leqq q_k - 1$ и

$$0 \leqq q_k - a_k < 16 \qquad (k = 2, 3, \dots).$$

II. теорема: пусть x число в интервале (0, 1), и $c_2, c_3, \dots$ — последовательность неотрицательных целых чисел, содержащея только конечное число нулей. При таких условиях можно найти последовательность целых чисел $q_1, q_2, \dots$, таких, что в выражении x по (1)

$$\varepsilon_2(x) = c_2, \ \varepsilon_3(x) = c_3, \dots$$

A differenciálokról

EGERVÁRY JENŐ

Irodalom tanulmányozása során, egyik ismert folyóirat „nyilt tér"-szerű rovatában szemembe ötlött egy rövid cikk a differenciálokról. Ezt ugyanott több, hasonló tárgyú cikk követte, melyek közül bennem különös érdeklődést váltott ki ALONSO CHURCH dolgozata. CHURCH tudvalevőleg a matematikai logikának ma egyik leghíresebb művelője, kinek egyéni kutatásai sztratoszférikus távolságban vannak a „földi" matematikától.

Azzal a kíváncsisággal kezdtem olvasni CHURCH dolgozatát, amellyel egy szerény szemlélő — mondjuk — Olivecronát nézné, ha az egy szép napon manikűrözéssel kezdene foglalkozni.

Differenciálokról folytatott eszmecserére csupán belföldi matematikusok körében nyilt alkalmam. Ezek közt azonban nem volt kettő (magamat is beleértve), akinek a differenciálok definíciójára, elsősorban annak az oktatás folyamán történő bevezetésére vonatkozó elgondolásai megegyeztek volna.

Félreértések elkerülése végett már itt hangsúlyozom, hogy az alábbi pár sorban legkevésbé sem szándékozom még kísérletet sem tenni abban az irányban, hogy egy kódex állíttassék fel, mely ennek vagy annak a fogalomnak oktatási módját unifikálja. Ellenkezőleg — nézetem szerint —, egyetemi előadónak feltétlenül kell az általa előadott tárgykörben olyan jártassággal és önállósággal rendelkeznie, hogy a különféle könyvek és segédeszközök póráza nélkül is, sőt a bürokratikus pórázok dacára is megtalálja a helyes utat.

A differenciálokkal kapcsolatban szerintem annyiban áll fenn egy különleges helyzet, mert alig van fogalom, amelynek a precizirozása annyi mesterkedésébe került volna a jelen kor matematikusainak, mint azok a kísérletek, melyekkel a differenciál történeti hagyományként ránk maradt

$$dy = f'(x)dx$$

szimbólumát és az amögött rejlő eszmét „tisztába akarták tenni".

Hogy ezen kísérletek közül az előadó, leendő matematikusok számára tartott előadásban, melyiket választja és használja, azt — úgy véljük — az előadó ízlésére bízhatjuk. Ha azonban az előadás olyanoknak szól, akik a matematikát segédtudományként tanulják, akkor a fenti liberalizmus — meggyőződésünk szerint — káros lehet. Legnagyobb az okozott kár akkor, ha az előadó az egyváltozós függvények differenciáljának egy olyan definícióját forszírozza, amely már az integrálásnál is felmondja a szolgálatot és teljesen értelmetlenné válik többméretű (fizikai mennyiségekre vonatkozó) differenciálok és integrálok esetén.

Jelen sorok írója, aki lényegileg ahhoz az, egyesek által homályosnak és kellő szabatosságot nélkülözőnek minősített, felfogáshoz csatlakozik, miszerint a differenciálok változó, 0-hoz konvergáló növekmények, az alábbi idézeteket azért hozza a magyar matematikus közönség elé, hogy egyrészt az érdeklődő olvasók tájékozást nyerjenek a differenciálokkal kapcsolatos problémákról, másrészt felvilágosíttassanak abban a tekintetben, hogy a differenciálok szokásos definíciói — eltekintve gyakorlati hasznavehetetlenségüktől — korántsem olyan „makulátlan lovagok" a logikai szigorúság szemüvegén át, mint ahogy azok a könyvekben megjelennek.

Nézzük egy pillanatra, mit mondanak a legjobb könyvek[1] a differenciálokról?

„... megállapodunk abban, hogy a dy differenciált a

$$dy = f'(x)\Delta x$$

egyenlet *definiálja*. Ebből $f(x) = x$ speciális választás mellett

$$dx = \Delta x,$$

tehát

$$dy = f'(x)dx.$$

Mindkét oldalt osztva dx-szel nyerjük

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

ahol $\frac{dy}{dx}$ az eddigiekkel ellentétben nem y deriváltját, hanem a dy és dx differenciálok hányadosát jelenti. Ily módon a $\frac{dy}{dx}$ szimbólum kettős jelentést nyer..."

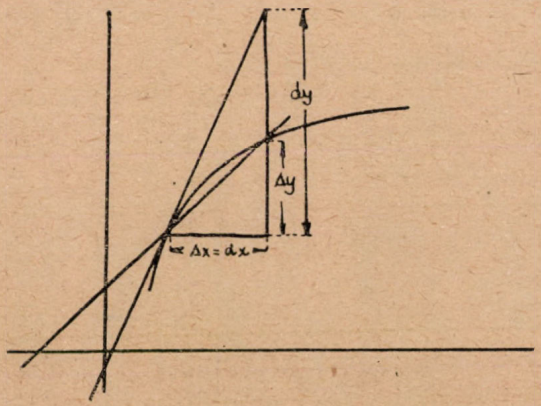
Geometriai interpretációban „... $f(x)$ differenciálja egyenlő az $y = f(x)$ görbe érintőjének ordináta változásával, midőn az x ab-

[1] Lásd pl. HARDY: Pure Mathematics.

szcisszájú érintéspontból egy más $x+\Delta x$ abszcisszájú pontba megyünk át" (1. ábra).

A differenciáloknak ehhez a bevezetési módjához fűzik KAC és RANDOLPH az alábbi színes megjegyzéseiket:[2]

„Noha kívánatos és nem is nehéz differenciálok nélkül megélnünk, úgy látszik, hogy azoktól mégsem tudunk megválni. Az a tény, hogy differenciálok használatával lehet korrekt eredményre jutni akkor is, ha valaki dx-et és dy-t 'x és y kis darabkáinak' gondolja, elhiteti az illetővel, hogy korrektül gondolkodott, következésképpen nem is lesz hajlandó feladni a differenciálokról alkotott fogalmát pusztán azért, mert valamelyik pedáns matematikus azt mondja neki, hogy csak így lesz boldog.



1. ábra

Feltéve már most, hogy nincs szándékunkban a differenciálok száműzése, kérdezzük, tehetünk-e valamit annak érdekében, hogy a kezdővel megértethessük, mik azok tulajdonképen. A beavatatlan kezdő, aki megkísérli mindazt elhinni, amit olvas vagy tanára neki mond, reménytelenül össze van zavarodva. Egyik napon megpróbálja elhinni (de nem sikerül neki), hogy $\frac{dy}{dx}$ nem azt jelenti, hogy dy osztva van dx-szel. A rákövetkező napon talán pillanatnyilag jól érzi magát, amikor megtudja hogy végeredményben $\frac{dy}{dx}$ mégis ugyanannyi, mint dy osztva dx-szel, továbbá,

[2] M. KAC and J. F. RANDOLPH: Differentials (The American Mathematical Monthly, Volume 49, 1942, 110. oldal).

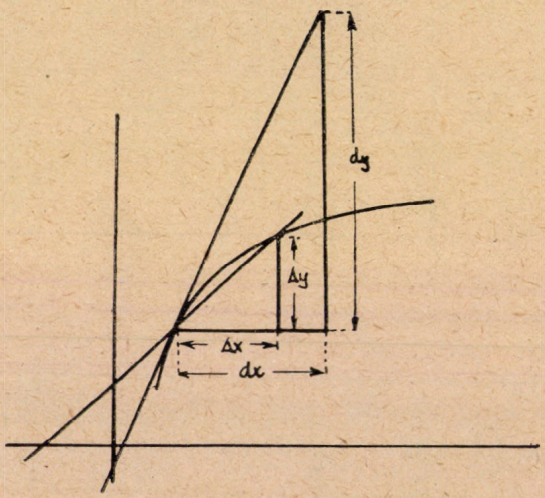
hogy $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$. Persze, ugyanakkor azt mondják neki, sőt „horribile dictu" be is bizonyítják, hogy $dx = \Delta x$. Bámulattal tekint talán a derék dx-re, mely képes arra, hogy az egyenlet egyik oldalán konstans maradjon és ugyanakkor az egyenlet másik oldalán (miután $dx = \Delta x$) 0-hoz tartson...

... definiáljuk az $f'(x)$ szimbólumot mint a (létezőnek feltételezett)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

határértéket. Semmi esetre se jelöljük azonban kezdetben ezt a határértéket $\frac{dy}{dx}$-szel. Legyen már most dx teljesen tetszőleges szám és legyen definíció szerint

$$dy = f'(x)dx.$$



2. ábra

Ebből nyilván, ha $dx \neq 0$, akkor $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Most tehát az első pillanattól kezdve $\frac{dy}{dx}$ ugyanannyi, mint dy osztva dx-szel.

Mivel pedig Δx és dx teljesen tetszőlegesek, semmi olyan intern ok nem forog fenn, ami miatt azoknak egyenlőknek kellene lenniök, így tehát azokat egyelőre különbözőknek fogjuk tekinteni.

Ennek következtében a dy és Δy összefüggését szemléltető kép (1. ábra) helyett a 2. ábra fogja a geometriai viszonyokat mutatni. Minthogy pedig $\Delta x \to 0$ esetén a húr iránytangense konvergál az érintő iránytangenséhez, azért nyilván

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

és itt nem kelt zavart a dx-re gyakorolt terror, miközben $\Delta x \to 0$.

Ha már most a differenciálokat növekmények megközelítésére kívánjuk felhasználni, akkor a kezdőt fel kell világosítani afelől, hogy dy akkor fogja Δy-t megközelíteni, ha dx és Δx-nek egyébként tetszőleges értékeit egymással egyenlőknek és 'kicsiny'-nek választjuk. Sőt, ha infinitezimális mennyiségek használatát ebben az összefüggésben kívánatosnak tartjuk, akkor írhatjuk

$$\lim_{dx = \Delta x \to 0} \frac{dy - \Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{dy}{dx} - \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) - f'(x) = 0,$$

és így nyerjük, hogy $dy - \Delta y$ magasabb rendű infinitezimális, mint $\Delta x (= dx)$."

Jelen sorok írója elsősorban azért idegenkedik — a matematikának, mint segédtudománynak előadása esetén — a most diszkutált definíció használatától, mert nézete szerint az gondosan leplezi azt a történeti fejlődésnek és gyakorlati szemléletnek egyaránt megfelelő tényt, hogy a $dx, dy, dV, \ldots$ differenciálok összes előfordulásaikban 0-hoz konvergáló $\Delta x, \Delta y, \Delta V, \ldots$ növekmények „emlékei". De lássuk ezek után, miként vélekedik a differenciálokról A. CHURCH?

„Komoly kifogást lehet emelni a differenciáloknak nemcsak a szokásos definíciója ellen, hanem a Kac és Randolph által javasolt variáns ellen is.

Ez a kifogás a következőképpen formulázható. A két definíció egyezik a független változó — mondjuk x — differenciáljának definiálását illetőleg, amennyiben dx-et egy új független változónak deklarálja. Ennek folytán lehetne — legalábbis ugyanolyan korrektséggel — egyetlen betűt, mondjuk z-t használni ennek az új változónak a jelölésére. Ekkor a függő változó — mondjuk y — differenciálja fent említett definíció szerint $dy = f'(x)dx$, vagyis az új jelöléssel $dy = f'(x) \cdot z$.

De ha sorra vesszük azokat a főbb célokat, melyeknek érdekében az analízis differenciálokat használ, észre kell vennünk, hogy ezek közül nem mindegyiket szolgáljuk kielégítő módon akkor, ha dx és dy helyébe egyszerűen z és $f'(x) \cdot z$-t írunk.

Először is ily módon a differenciáloknak az integrálásnál való használatáról semmi gondoskodás sem történik, $\int x dx$-ből egyszerűen $\int xz$ lesz és a fogalom egész jelentősége ezzel a szimbolikával elvész. (Mit is jelentsen az olyan $\int$ művelet, mely az x és z független változók szorzatára alkalmazva $\frac{1}{2}x^2+C$-t eredményez?) Hangsúlyozni kívánjuk, hogy a differenciálok használatával járó könnyebbség markánsabb módon jut kifejezésre az integrálszámításban, mint a differenciálszámításban és ezért minden olyan definíció, melyben annak az $\int$ jellel kapcsolatos használatáról nem történik gondoskodás, már eleve értékének több mint felét elvesztette.

Hasonlítsuk össze pl. az alábbi műveletek kivitelét egyrészt differenciálok használatával, másrészt pedig azzal a lompos módszerrel, mely a $\int \ldots dx$ jelet 'indivizibilisnek' tekinti és a differenciálok mellőzésével, kizárólag deriváltakat használ.

1. A $\int x\sqrt{4x+3}\,dx$ integrálás $t^2=4x+3$ helyettesítéssel és a differenciálok közti $dx=\frac{1}{2}t\,dt$ egyenlőség felhasználásával.

2. A $\frac{dy}{dx}=xy$ differenciálegyenlet megoldása mindkét oldalnak $\frac{dx}{y}$-nal való szorzása és azután a $\int$ műveletnek mindkét oldalon való alkalmazása által.

3. Valamely elsőrendű és elsőfokú differenciálegyenlet integráló tényezőjének puszta „ránézés“ alapján való kitalálása.

Más oldalról nézve, fenti kifogásunk azt nehezményezi, hogy ugyanaz a jel, dx vagy dy, különböző jelentést kap aszerint, hogy x független vagy függő változó. Ez nagyon szerencsétlen körülmény, mert a differenciálok használatának egyik fő előnye éppen abban áll, hogy különféle változók szimmetrikusan kezelhetők, anélkül, hogy azok közül egyiket önkényesen független változóvá léptetnénk elő (pl. lásd a $ds^2=dx^2+dy^2$ egyenletet).

A kezdő gyakran szeretné kérdezni, vajon mért nem lehet a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

eredményhez egyszerűen du-val való rövidítéssel eljutni és ezáltal

a limesek tulajdonságain alapuló, nehézkes meggondolást elkerülni? A válasz — a differenciálok szokásos definíciója alapján — tudvalevőleg az, hogy *du* két „jelenésében" különböző szerepekkel bir; éppen ez a körülmény leplezi le a szokásos definíció gyengeségét.

Amíg ezen nehézségek kiküszöbölésére valami megoldás nem adódik, *úgy látjuk, jobb lenne, ha a differenciálokat bevallottan tökéletlen és heurisztikus módon, mint a növekmények kis értékeit („a változó mennyiségek apró parányait") vezetnők be és az azokban rejlő eszmét nem ruháznók fel a logikai szigorúság csalóka látszatával.*"

Úgy véljük, hogy A. Church fenti megállapításai nagy mértékben alátámasztják meggyőződésünket, mely szerint nem szabad az analízisben adott definíciók által teljesen elszakítani a differenciálokat az alkalmazásokban vitt szerepüktől.

ON THE DIFFERENTIALS
By J. Egerváry

О ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ
Е. Эгервари

Néhány geometriai problémáról

ERDŐS PÁL

E cikkben néhány geometriai problémát fogok diszkutálni, melyekkel az utóbbi években foglalkoztam. A problémák kombinatórikai természetűek. Hasonló kérdésekkel foglalkozik HADWIGER nemrég megjelent érdekes cikke.[1]

1. Legyen adva n különböző pont a síkban $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tekintsük az $\overline{x_i, x_j}$ $1 \leqq i < j \leqq n$ távolságokat. Jelölje $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ezen n pont közötti különböző távolságok számát és legyen

$$f(n) = \min_{x_1, x_2, \ldots, x_n} D(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Bebizonyítottam,[2] hogy

$$(1) \qquad (n-1)^{1/2} - 1 < f(n) < c_1 \frac{n}{\sqrt{\log n}}.$$

A négyzetes síkrács példája mutatja, hogy

$$f(n) < c_1 \frac{n}{\sqrt{\log n}}.$$

MOSER[3] az alsó határt $\left(\frac{n^{2/3}}{2\sqrt[3]{9}} - 1\right)$-re javította. Biztosra vehető, hogy $f(n) > n^{1-\varepsilon}$ sőt, talán $f(n) > c_2 \frac{n}{\sqrt{\log n}}$. Moser tulajdonképpen azt bizonyítja be, hogy van egy oly pont, melytől számított távolságok között legalább $\frac{n^{2/3}}{2\sqrt[3]{9}} - 1$ különböző van. Talán ez is $c_3 \frac{n}{\sqrt{\log n}}$-re javítható. Általában jelentse $d(x_i)$ az x_i-től való különböző távol-

[1] l'Enseignement Math. (2). 1 (1955) 56—89.
[2] Amer. Math. Monthly 53 (1946) 248—251.
[3] Amer. Math. Monthly 59 (1852) 85—91.

ságok számát. Az előbbi sejtés $\max_{1\leqq i\leqq n} d(x_i) > c_3 \frac{n}{\sqrt{\log n}}$ alakba írható. További probléma volna $\sum_{i=1}^{n} d(x_i)$ megbecslése. Valószínűnek látszik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) > n^{2-\varepsilon} \tag{2}$$

$\left(\text{talán } c_4 \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \text{ is igaz}\right)$. Azonban csak annyit tudok bizonyítani, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) > \frac{1}{2} n^{3/2}. \tag{3}$$

Ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontok konvex poligont alkotnak, akkor valószínűnek látszik (2), hogy $f(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$ (egyenlőség a szabályos sokszög esetén).

MOSER[3] bebizonyította, hogy ez esetben $f(n) \geqq \left[\frac{n+2}{3}\right]$. Az is valószínűnek látszik (2), hogy van olyan x_i, melytől nincs három más x_i egyenlő távolságban $\left(\text{ebből persze következnék, hogy } f(n) = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$. A négyzetes síkrács példája mutatja, hogy megadható n pont a síkban úgy, hogy mindegyikhez van $n^{c_5/\log\log n}$ tőle egyenlő távolságban levő pont. Lehetséges azonban, hogy e határ pontos — azaz, ha adva van $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n pont a síkban, mindig van egy x_i, melytől nincs $n^{c_6/\log\log n}$ pont egyenlő távolságban. Bebizonyítani csak azt tudom, hogy van oly pont, melytől nincs $n^{2/3}+2$ pont egyenlő távolságban. Ez a következőképpen látható be: Tegyük fel, hogy x_i-től $g(x_i)$ pont van egyenlő távolságban $(1 \leqq i \leqq n)$. Azaz van oly x_i középpontú kör, amelyen $g(x_i)$ pont van. Minthogy minden ponthármas csak egy ily körön fekhetik, nyilván nyerjük, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{g(x_i)}{3} \leqq \binom{n}{3}$$

azaz, ha $\min_{1\leqq i\leqq n} g(x_i) = y$, $n\binom{y}{3} \leqq \binom{n}{3}$, tehát $y < n^{2/3}+2$ qu. e. d.

Ha az x_i pontok a k ($k>2$) dimenziós térben vannak, akkor a rácspontok példája mutatja, hogy $f_k(n)<c_k n^{2/k}$ ($f_k(n)$ jelentése ugyanaz, mint $f(n)$-é, a k-dimenziós térben, ezek szerint $f(n)=f_2(n)$) és nincs kizárva, hogy ez már a helyes nagyságrend, tehát hogy $f_k(n)>c'_k n^{2/k}$. $k=1$ esetén, tehát ha a pontok egy egyenesen vannak, akkor nyilván $f_1(n)=n-1$.

A k dimenziós térben nyilván $f_k(k+1)=1$, de $f_k(k+2)=2$. KELLY kérdezte, mily nagynak kell l-nek lennie, hogy $f_k(l)>2$ legyen. Bebizonyítottam, hogy $l<k^c$ (c fix, de nem függ k-tól) l valódi nagyságrendje talán ck.

Adva van a síkban n pont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, melyeknek átmérője 1 (azaz $\max_{1\leq i<j\leq n} \overline{x_i x_j}=1$). Könnyű bebizonyítani, hogy legfeljebb n pontpár van, melynek távolsága 1.[4] VÁZSONYI kb. 20 évvel ezelőtt sejtette, hogy a háromdimenziós térben legfeljebb $2n-2$ pontpár van, melyeknek távolsága 1 (könnyű belátni, hogy $2n-2$ elérhető). Néhány hónappal ezelőtt HEPPES (17), GRÜNBAUM (izraeli matematikus) és S. STRASZEVICZ (18) lengyel matematikus bebizonyították e sejtést. E kérdés összefügg BORSUK következő sejtésével: Minden k dimenziós egységnyi átmérőjű halmaz feldarabolható $k+1$ 1-nél kisebb átmérőjű halmazra. $k=1$-re ez triviális, $k=2$-re könnyű, $k=3$-ra néhány évvel ezelőtt EGGLESTON[5] egy komplikáltabb bizonyítást talált. Néhány hónappal ezelőtt GRÜNBAUM és HEPPES egy sokkal egyszerűbb bizonyítást találtak a $k=3$ esetre. $k>3$ esetén a sejtés még nincs eldöntve.

Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n pont a síkban. Tegyük fel, hogy

$$\min_{1\leq i<j\leq n} \overline{x_i x_j}=1.$$

Hány oly pontpár lehetséges, melyekre $\overline{x_i x_j}=1$? Könnyű belátni, hogy legfeljebb $3n$ ily pontpár van (2) és ugyancsak könnyű ezt $(3n-c_6 n^{1/2})$-re javítani (2). A háromszögrács példája viszont mutatja, hogy $(3n-c_7 n^{1/2})$ ily pontpár ténylegesen lehetséges. Valószínűnek látszik, hogy ha a pontok száma $3n^2+3n+1$, a legkisebb távolság maximális előfordulási száma $9n^2+3n$, s ez esetben a pontok egy n oldalhosszúságú szabályos hatszöget kitöltő háromszögrácsot alkotnak.

Általában az $\overline{x_i x_j}$ számok közül legfeljebb $[n^{3/2}]$ lehet egyenlő (2) — azaz ugyanaz a távolság legfeljebb $[n^{3/2}]$-szer fordulhat elő. Ez valószínűleg $n^{1+\varepsilon}$-ra javítható, talán $n^{1+c_8/\log\log n}$-re, de mint a négyzetes síkrács példája mutatja, ennél tovább már biztosan nem lesz javítható.

[4] Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung.
[5] Journal London Math. Soc. 30 (1955) 11—24.

Egy halmaz legyen T tulajdonságú, ha bármely két pontja közötti távolság különböző. Legyen adva n pont az egyenesen. Könnyű belátni, hogy mindig van egy $[n^{1/3}]$ pontból álló részhalmaza, mely T tulajdonságú. Ez talán $(1+o(1))n^{1/2}$-re javítható, de $(1+c)n^{1/2}$-re biztosan nem.[6] E kérdések a síkra és k-dimenziós térre is felvethetők, de csak annyit tudok bebizonyítani, hogy a k-dimenziós térben mindig van egy n pontból álló T tulajdonságú részhalmaz, c_k pontos értékét nem tudom meghatározni.

Legyen adva a k-dimenziós térben egy m számosságú (m végtelen) S halmaz. Akkor mindig van egy T tulajdonságú részhalmaza, mely szintén m számosságú[7] (a bizonyítás nem használja a Cantor-sejtést, mely szerint $2^{\aleph_0}=\aleph_1$). KAKUTANIval és OXTOBYval kimutattuk, hogy Hilbert-térre ez nem igaz.[7] KAKUTANIval azt is kimutattuk,[8] hogy az egyenes felbomlik megszámlálhatóan sok T tulajdonságú halmaz összegére. Nem tudom, hogy ez a síkra is igaz-e.

Számos más, az előbbiekhez hasonló kérdés vethető még fel. Legyen például adva n pont a k-dimenziós térben; mi az ezen pontok által meghatározott egyenlő oldalú (egyenlő szárú) háromszögek maximális száma? $k=2$ és egyenlő oldalú háromszögek esetén a válasz nagyságrendje cn^2 lesz, de c pontos értékét nem ismerem.

Legyen adva n pont a k-dimenziós térben. Mekkora T tulajdonságú részhalmaza kell, hogy legyen? (Egy halmaz akkor T tulajdonságú, ha nem tartalmaz egyenlőszárú háromszöget.) E kérdés erőszakoltnak tűnik fel, azonban a látszat csal, ugyanis ha $k=1$ és a pontok ekvidisztánsak, akkor problémánk arra a jól ismert kérdésre redukálódik, hogy hány szám adható meg n-ig úgy, hogy ne forduljon elő háromtagú számtani sor.[9]

Bebizonyítottam, hogy ha a síkban adva van 7 pont, akkor mindig van közülük három, mely nem alkot egyenlőszárú háromszöget.[10] A szabályos ötszög és középpontja mutatja, hogy 6-ra ez nem igaz. Nem tudom, hogy a térben (vagy $k>3$ dimenzió esetén) mi a megfelelő eredmény.

[6] Erdős—Turán, Journal London Math. Soc. 16 (1941) 212—215. Kimutatjuk, hogy az ekvidisztans esetben sem javítható, lásd még ibid. 19 (1944) 208.

[7] Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) 127—141.

[8] Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943) 457—461.

[9] Az első cikk e kérdésről Erdős—Turán, Journal London Math. Soc. 11 (1936) 261—264. Lásd Turán cikkét a Középiskolai Mat. Lapokban. A jelenleg ismert legélesebb eredményeket Roth és Behrend érték el, Journal London Math. Soc. 29 (1954) 20—26, és Proc. Nat. Acad. Sci. USA 32 (1946) 331—332.

[10] Amer. Math. Monthly.

Igaz-e, hogy ha 2^k+1 pont van adva a k dimenziós térben, akkor mindig van közülük három, mely tompaszögű háromszöget alkot?[11] $k=2$-re ez triviális, $k=3$-ra ketten is bebizonyították a sejtést (nevükre nem emlékszem). Megadható-e a térben 7 pont úgy, hogy az összes keletkező háromszög hegyesszögű legyen?

2. GALLAI 1933-ban bebizonyította a következő tételt.[12] Legyen adva a síkban n pont, melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor mindig van oly egyenes, mely pontosan két ponton megy át. A kérdést SYLVESTER[13] vetette fel 1891-ben, de a problémát akkor senki sem oldotta meg s a kérdés feledésbe merült. 1933-ban SYLVESTER problémáját nem ismerve, a kérdést újból felvetettem s GALLAI bebizonyította. Megjegyezhetjük, hogy a tétel nem tisztán kombinatórikus, hanem lényeges, hogy a pontok a síkban vannak, így pl. ha $n=6k+1$ vagy $n=6k+3$, megadható a ternóknak egy oly rendszere, hogy minden ambo egy és csakis egy ternoban foglaltatik.[14] E kérdéseket MOTZKIN[15] is felvetette, és 1939-ben (GALLAItól függetlenül) A. ROBINSON is bebizonyította GALLAI tételét.

MOTZKINtól[15] származik továbbá a következő kérdés: Legyen adva a k-dimenziós térben n pont, melyek nincsenek mind egy $(k-1)$-dimenziós hipersíkon. Akkor e pontok legalább n $(k-1)$-dimenziós hipersíkot határoznak meg. E sejtés kétféleképpen értelmezhető. Első értelmezés geometriai, azaz az n pont egy k-dimenziós euklideszi térben van, a második mélyebb kombinatórikus értelmezés: hogy egy projektív k-dimenziós térben vannak a pontok. HANANI $k=2$ esetben a kombinatórikus kérdést megoldotta. Néhány évvel később e kérdéseket, Motzkin problémáját nem ismerve, $k=2$-re én újból felvetettem. A geometriai probléma $k=2$-re azonnal következik GALLAI tételéből. A kombinatórikus problémát $k=2$-re DE BRUIJN és én[16] és SZEKERES is megoldották. DE BRUIJNnel való módszerünket felhasználva MOTZKIN[15] a k-dimenziós kombinatórikus problémát megoldotta s így e kérdés teljes elintézést nyert.

Azonban talán még a következő, idetartozó geometriai és kombinatórikus kérdések felvethetők: Legyen adva n pont a síkban, melyek nincsenek mind egy körön. Rajzoljuk meg az összes legalább három ponton átmenő kört. A kérdés mármost az, hogy mi az így meghatározott körök minimális száma. A kérdés kombinató-

[11] Wiskundige Opgaven; lásd még Amer. Math. Monthly 55 (1945) 431.

[12] Amer. Math. Monthly 51 (1944) 170; lásd még Coxeter „The real projektive plane".

[13] Educational Times 59 (1893) 98, 11851-ik probléma.

[14] Netto, Kombinatorik. Lásd a Steinersche Dreier című fejezetet.

[15] Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951) 451—464.

rikus alakban is felvethető: legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n elem, $A_1, A_2, \ldots, A_t$ az a-kból alkotott kombinációk, minden $(a_i a_j a_l)$ terno egy és csakis egy A-ban foglaltatik, tegyük fel továbbá, hogy minden A legalább három elemet tartalmaz és hogy $t > 1$. Mi t minimális értéke? (Ha ternok helyett ambokat tekintünk, akkor e kérdés a HANANI által elintézett projektiv geometriai kérdéssel megegyezik.) E kérdésekkel HANANIval együtt sokat foglalkoztunk, de nem jutottunk eredményre. Itt persze egyáltalán nem biztos (sőt nem is valószínű), hogy a geometriai és a kombinatórikus kérdés ugyanarra az eredményre vezet. E kérdés persze ternok helyett k-ad osztályú kombinációkra is felvethető.

MOTZKINtól[15] való még a következő sejtés, mely GALLAI tételének általánosítása: legyen adva n pont a k-dimenziós euklideszi térben, melyek nincsenek mind egy $(k-1)$-dimenziós hipersíkban. Akkor e pontok meghatároznak legalább egy oly $(k-1)$-dimenziós hipersíkot, melyeknek pontjai egy kivételével egy $(k-2)$-dimenziós hipersíkban vannak (azaz, ha $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ pontok), akkor ezek nincsenek mind egy $(k-2)$-dimenziós hipersíkban, de $x_{i_2}, \ldots, x_{i_l}$ már egy $(k-2)$-dimenziós hipersíkon vannak. $k = 2$-re ez GALLAI tétele, MOTZKIN $k = 3$-ra is bebizonyítja e sejtést, $k > 3$-ra a probléma még nincs megoldva.

MOTZKIN[15] megjegyzi, hogy GALLAI tételének általánosítása a háromdimenziós térre nem igaz: Legyen adva n pont, melyek nincsenek mind egy síkban, akkor van oly sík, mely pontosan három ponton megy át. Motzkin két ellenpéldát is ad. Az első ellenpéldában két kitérő egyenes mindegyiken van három vagy több pont, a második ellenpélda 10 pontból áll, melyet öt általános helyzetben levő sík metszéspontja határoz meg. Motzkin lehetségesnek tartja, hogy minden egyéb esetben van oly sík, mely pontosan három ponton megy át.

E gondolatkörből talán még a következő problémák említhetők meg: Legyen adva n pont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az euklidesi síkban, melyek nincsenek mind egy egyenesen. $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jelentse azon egyenesek számát, melyek pontosan két ponton mennek át és $V(u)$ legyen $V(x_1, \ldots, x_u)$ minimuma. GALLAI tétele szerint $V(u) \geqq 1$. DE BRUIJNnel sejtettük, hogy $V(u) \to \infty$, ha $u \to \infty$. DIRAC GÁBOR[16] bebizonyította, hogy $V(u) \geqq 4$ és MOTZKIN,[15] hogy $V(u) > c\sqrt{u}$ s ezzel sejtésünket igazolta. DIRAC[16] sejtette, hogy $V(u) \geqq \left[\frac{u}{2}\right]$. DIRAC[16] bebizonyította, hogy ha adva van n pont, melyek nincsenek

[16] Quarterly Journal of Math. II. (1951) 221—227.

mind egy egyenesen, akkor ezen pontok egyikéből legalább $[\sqrt{n}]$ különböző egyenes indul ki s sejti, hogy ez $\left[\frac{n}{2}\right]$-re javítható.

Legyen adva n pont az euklideszi síkban, melyek nincsenek mind egy egyenesen, amint már említettük, ez n pont legalább n egyenest határoz meg s egyenlőség csak akkor van, ha ezen n pont közül $n-1$ egy egyenesen van. Tegyük fel mármost, hogy n pont van a síkban, úgy, hogy nincs $n-1$ közülük egy egyenesen. Legalább hány egyenest határoznak meg e pontok? Azt lehetne gondolni, hogy $2n-4$ a válasz ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ a pontok (x_1, x_2, x_3), $(x_1, x_4, \ldots, x_n)$ egy egyenesen vannak), de 7 pontot meg lehet adni, melyek csak 9 egyenest határoznak meg, egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai, oldalainak felezőpontja s a háromszög középpontja. Lehetséges, hogy nagy n esetén mégis $2n-4$ a válasz.

Talán még érdemes lesz az olvasók figyelmét a következő kombinatórikus kérdésekre felhívni: Legyenek k és l adott számok. Milyen n mellett létezik az n elem l-elemű részhalmazainak egy oly osztálya, hogy k elemű részhalmaz egy és csakis egy l elemű részhalmazban foglaltatik. Nyilvánvalóan szükséges feltétel, hogy $\binom{n}{k} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\binom{l}{k}\right)$. Ismeretes, hogy $l=3$, $k=2$ esetén ez elégséges is[14], de egyetlen egy más k és l esetén sem ismeretes szükséges és elégséges feltétel. A legérdekesebb speciális eset, ha $n=m^2+m+1$, $l=m+1$, $k=2$. Ha $m=p^\alpha$, akkor ismeretes, hogy ily rendszer létezik, s egy jól ismert sejtés szerint, ha m nem ilyen alakú, ily rendszer nincs. E kérdés összefügg véges projektiv geometriákkal.

ON SOME GEOMETRICAL PROBLEMS
By P. Erdős

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ
П. Эрдёш

[17] Acta. Math. Ac. Sci. Hung. VIII. (1957) 1—2 sz.
[18] Bull. de l'Ac. Pol. des Sciences Classe III. V. (1957) 1. sz. 39. o.

A Grzegorczyk-féle korlátozottan rekurzív függvények és az Ackermann-féle majorizációs módszer

PÉTER RÓZSA

Bevezetés

1. A rekurzív függvényekre vonatkozó általános ismeretek megtalálhatók a könyvemben,[1] de bevezetésképpen itt is felsorolom mindazt, amire a továbbiakban szükségem lesz.

Rekurzív függvényeken olyan számelméleti (azaz nem-negatív egész számokon értelmezett és nem-negatív egész értékeket felvevő) függvényeket értünk, amelyek bizonyos alapfüggvényekből kiindulva véges számú helyettesítéssel (függvény függvényének képzésével) és rekurzióval épülnek fel. A rekurzió fogalmát különböző módokon lehet értelmezni, így különböző függvényosztályokhoz juthatunk; ezek fontos szerepet játszanak a matematika alapjaira vonatkozó vizsgálatokban.

2. A *primitív-rekurzív függvények* osztályához a 0 és $n+1$ alapfüggvényekből kiindulva jutunk el, ha egy $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ függvényt a már ismert $\alpha(a_1, \ldots, a_r)$ és $\beta(n, a_1, \ldots, a_r, b)$ függvények segítségével megadó *primitív-rekurzión* a következő két függvényegyenletből álló definíciót értjük:

$$\varphi(0, a_1, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, \ldots, a_r)$$

$$\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r) = \beta(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r)).$$

Itt n a rekurziós változó; az első függvényegyenlet megadja φ értékét $n=0$-ra, és a második megmutatja, hogy az $n+1$-hez tartozó függvényérték hogyan nyerhető az n-hez tartozóból.

Egy $a_1, \ldots, a_r$ közötti $B(a_1, \ldots, a_r)$ relációt primitív-rekurzívnak mondunk, ha található hozzá olyan primitív-rekurzív $\varphi(a_1, \ldots, a_r)$

[1] R. PÉTER, Rekursive Funktionen (Budapest, Akadémiai Kiadó, 2. kiadás, 1957).

„karakterisztikus“ függvény, hogy $B(a_1, \ldots, a_r)$ olyan és csak olyan $a_1, \ldots, a_r$ között áll fenn, melyekre $\varphi(a_1, \ldots, a_r) = 0$.

Az elemi számelméletben használatos függvények és relációk nagy része primitív-rekurzív, pl. minden szám, mint konstans függvény, továbbá n, $m+n$, $m \cdot n$, m^n, $|m-n|$ és az $m < n$, $m = n$, $m \neq n$ relációk; a kevésbé ismerteket, amelyekre a továbbiakban szükségem lesz, itt sorolom fel:

(1) $\operatorname{sg}(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 0 \\ 1, & \text{ha } n \neq 0, \end{cases}$

(2) $p_n =$ az $n+1$-edik törzsszám,

(3) $\exp_n(a) = p_n$ kitevője a törzstényezős felbontásában,

(4) $\alpha(a_1, \ldots, a_r, n)$-nel együtt

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha(a_1, \ldots, a_r, i) \text{ és } \prod_{i=0}^{n} \alpha(a_1, \ldots, a_r, i) \text{ is,}$$

(5) $\alpha(a_1, \ldots, a_r, n)$-nel együtt

$$\mu_i[i \leqq n \text{ és } \alpha(a_1, \ldots, a_r, i) = 0] \text{ is,}$$

amelynek értéke a legkisebb olyan i az n korlátig (azt is beleértve), amelyre $\alpha(a_1, \ldots, a_r, i) = 0$, ha van ilyen i; és 0, ha n-ig nincs ilyen i.

3. A rekurzióban részt nem vevő változók, a „paraméterek“, azonosak a primitív rekurzió függvényegyenleteinek bal és jobboldalán. Bebizonyítottam,[2] hogy ha a második függvényegyenlet jobboldalán ismert primitív-rekurzív függvényeket helyettesítünk a paraméterek helyére, vagy akár magának a definiálandó φ függvénynek olyan értékeit, amelyekben a rekurziós változó helyén 1-gyel kisebb szám van, mint a baloldalon (pl. ilyen is lehet a második függvényegyenlet:

$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, \varphi(n, \varphi(n, a^2))))),$$

még az ilyen bármennyire bonyolult *„beskatulyázott rekurziók“* sem vezetnek ki a primitív-rekurzív függvények osztályából.

4. Ha viszont megengedjük, hogy a rekurzió egyszerre több változó szerint menjen végbe, új függvényosztályokhoz jutunk. *„k-szoros“ a rekurzió*, ha egyszerre k változó szerint történik; a legfeljebb k-szoros rekurziók felhasználásával definiált rekurzív

[2] R. Péter (Politzer), Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, Math. Annalen 110 (1934), 612—632. oldal. — A rekurzív függvények elméletéhez, Matematikai és Fizikai Lapok 42 (1935), 25—49. old.

függvényeket „*k-rekurzív*“ *függvények*nek nevezzük. ACKERMANN[3] bebizonyította, hogy a kétszeres rekurzió kivezet a primitív-rekurzív függvények osztályából. Példáját egy 2-rekurzív de nem primitív-rekurzív függvényre egyszerűbb alakra hoztam[4]; az egyszerűbb példa definíciója így szól:

$$\psi(0, n) = n + 1$$
$$\psi(m + 1, 0) = \psi(m, 1)$$
$$\psi(m + 1, n + 1) = \psi(m, \psi(m + 1, n)).$$

A harmadik definíciós egyenlet jobboldalán kétszer szerepel ψ, egymásba skatulyázva; az egyikben az egyik, a másikban a másik változó kisebb, mint a baloldalon.

ACKERMANN tételére még egy bizonyítást adtam, a *Cantor*-féle átlós módszer felhasználásával. Ezzel a módszerrel általában is bebizonyítottam,[5] hogy a $k + 1$-szeres rekurzió kivezet a k-rekurzív függvények osztályából. Ugyanitt megmutattam, hogy minden k-szoros rekurzió olyan normálalakra hozható, amelyben legfeljebb kétszeres beskatulyázás fordul elő; és hogy a be nem skatulyázott k-szoros rekurzió még nem vezet ki a primitív-rekurzív függvények osztályából.

5. Más speciális rekurzív függvényosztályokra most nem térek ki.

HERBRAND[6] és GÖDEL[7] gondolatait felhasználva KLEENE[8] bevezette az „*általánosan-rekurzív*“ *függvény* fogalmát, mint olyan függvényét, melynek értékei (a „függvényegyenletrendszer“ és a „kiszámítás“ fogalmának precizírozása után) egy függvényegyenlet-rendszerből egyértelműen kiszámíthatók. KLEENE[9] megmutatta, hogy minden általánosan-rekurzív függvény megkapható az $m + n$, $m \cdot n$ függvényekből és az $m \dot{-} n$ reláció karakterisztikus függvényéből mint alapfüggvényekből kiindulva, véges számú helyettesítéssel és

[3] W. ACKERMANN, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, Math. Annalen 99 (1928), 118—133. old.

[4] R. PÉTER, Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, Math. Annalen 111 (1935), 42—60. old.

[5] R. PÉTER, Über die mehrfache Rekursion, Math. Annalen 113 (1936), 489—527. old.

[6] J. HERBRAND †, Sur le non-contradiction de l'arithmetique, Journ. f. d. reine u. angewandte Math. 166 (1932), 1—8. old.

[7] K. GÖDEL, On undecidable propositions of formal mathematical systems, Notes of lectures at the Inst. for Advanced Study (1934).

[8] S. C. KLEENE, General recursive functions of natural numbers, Math. Annalen 112 (1936), 727—742. old.

[9] S. C. KLEENE, A note on recursive functions, Bulletin of the Amer. Math. Soc. (1936), 544—546. old.

μ-operációval, ahol az utóbbi a következőt jelenti: ha $\alpha(a_1, \ldots, a_r, n)$ olyan primitív-rekurzív függvény, hogy minden $a_1, \ldots, a_r$-hez van olyan i, melyre $\alpha(a_1, \ldots, a_r, i) = 0$, akkor az ebből μ-operációval képezett

$$\mu_i[\alpha(a_1, \ldots, a_r, i) = 0]$$

függvényen, mint $a_1, \ldots, a_r$ függvényén a legkisebb ilyen tulajdonságú i-t értjük.

I.

ACKERMANN úgy bizonyította be egy 2-rekurzív függvény nem-primitív-rekurzív voltát, hogy megmutatta: a szóbanforgó függvény a változók elég nagy értékére majorizál minden primitív-rekurzív függvényt. Az én átlós módszerrel konstruált függvényemnek nincs ilyen szigorúan érvényes majoráns-tulajdonsága. Azt lehetne hinni, hogy az erős növekedés nem tartozik az ilyen példa lényegéhez. Ugyanis könnyen belátható, hogy az egyváltozós primitív-rekurzív függvények megszámlálható számosságúak; ha

(1) $$\varphi_1(n), \varphi_2(n), \ldots, \varphi_m(n), \ldots$$

sorozatba rendezzük őket, azután mindegyikük sg-függvényét vesszük:

$$\mathrm{sg}(\varphi_1(n)), \mathrm{sg}(\varphi_2(n)), \ldots, \mathrm{sg}(\varphi_m(n)), \ldots$$

akkor megkapjuk (többszörösen, de ez lényegtelen) mindazokat az egyváltozós primitív-rekurzív függvényeket, amelyek nem vesznek fel 1-nél nagyobb értéket (hiszen, ha $\varphi_i(n)$ ilyen függvény, akkor $\mathrm{sg}(\varphi_i(n)) = \varphi_i(n)$); márpedig, mint SKOLEM[10] rámutatott, az átlós módszer erre a sorozatra is alkalmazható:

$$\psi(n) = |1 - \mathrm{sg}(\varphi_n(n))|$$

ugyancsak olyan függvény, amely nem vesz fel 1-nél nagyobb értéket, de nem lehet primitív-rekurzív, mert akkor azonos volna valamelyik $\mathrm{sg}(\varphi_k(n))$-nel; márpedig a

$$\psi(n) = \mathrm{sg}(\varphi_k(n))$$

azonosságból $n = k$-ra adódó

$$\psi(k) = \mathrm{sg}(\varphi_k(k))$$

ellentmond $\psi(n)$ definíciójának. Mint megmutattam,[4] az (1) megszámlálás úgy történhetik, hogy $\varphi_n(n)$ 2-rekurzív legyen; vele együtt azonban $\psi(n)$ is 2-rekurzív.

[10] TH. SKOLEM, Some remarks on recursive arithmetic, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandlinger 17 (1944), 103—106. old.

Így példánk van egy 2-rekurzív, de nem primitív-rekurzív függvényre, amelynek semmi esetre sincs meg a szóban forgó majoráns-tulajdonsága, hiszen nem vesz fel 1-nél nagyobb értéket (és a legegyszerűbb primitív-rekurzív függvények közt is vannak minden határon túl növekvők, pl. az $n+1$ alapfüggvény is ilyen).

Azonban az átlós függvény felépítésében mégis részt vesznek erősen növekedő függvények is, ha ezt utólag le is rontja a sg-függvény alkalmazása. Hogy a felépítés bonyolultsága lényeges az ilyen példa megkonstruálásához, arra már könyvemben[1] is utaltam, más vonatkozásban. Új megvilágításba helyezi ezt a körülményt a GRZEGORCZYK[11] bevezette korlátozottan rekurzív függvények vizsgálata.

II.

GRZEGORCZYK fogalomalkotásában egy $\varphi(n_1, \ldots, n_r)$ függvényt definiáló *„korlátozott rekurzió"* függvényegyenleteihez még egy

$$\varphi(n_1, \ldots, n_r) \leqq \gamma(n_1, \ldots, n_r)$$

alakú „korlátozó" egyenlőtlenség járul, ahol γ már előzőleg definiált függvény. Felvetődik a probléma, hogy vajon a korlátozott többszörös rekurzió is kivezet-e a primitív-rekurzív függvények osztályából.

Ezt sikerült eldöntenem: nem vezet ki innen.

A bizonyítást egy aránylag egyszerű 2-szeres rekurzión mutatom be; kiterjesztése tetszés szerinti többszörös rekurziókra nem okoz semmi elvi nehézséget, csak technikailag bonyolultabb.

Vizsgáljuk a következő korlátozott kétszeres rekurziót:

$$\varphi(m, n) = 0, \quad \text{ha} \quad m \cdot n = 0$$

$$\varphi(m+1, n+1) = \alpha(m, n, \varphi(m, \beta(m, n, \varphi(m+1, n))))$$

$$\varphi(m, n) \leqq \gamma(m, n),$$

ahol α, β és γ primitív-rekurzív függvények.

Vezessük be a következő „értékkészletfüggvényt":

$$\psi(m, n) = \prod_{i=0}^{n} p_i^{\varphi(m, i)}.$$

Akkor bármilyen $u \geqq n$-re

$$\varphi(m, n) = \exp_n(\psi(m, u)).$$

[11] A. GRZEGORCZYK, Some classes of recursive functions, Inst. Mat. Polskiej Akademii Nauk, Warszawa (1953).

Ez lehetővé teszi, hogy φ korlátozott voltát felhasználva, u kellő megválasztásával a beskatulyázott $\varphi(m, \beta(m, n, \varphi(m+1, n)))$ érték helyett ψ definíciójában csak beskatulyázatlan függvényértékek lépjenek fel. Ugyanis $\varphi(m+1, n) \leqq \gamma(m+1, n)$, tehát, ha i 0-tól $(\gamma m+1, n)$-ig változik, a $\beta(m, n, i)$ értékek közt okvetlenül elő fog fordulni $\beta(m, n, \varphi(m+1, n))$ is; így, ha a

$$\nu(m, n) = \sum_{i=0}^{\gamma(m+1, n)} \beta(m, n, i)$$

jelölést vezetjük be,

$$\beta(m, n, \varphi(m+1, n)) \leqq \nu(m, n).$$

Eszerint

$$\varphi(m, \beta(m, n, \varphi(m+1, n))) = \exp_{\beta(m, n, \varphi(m+1, n))}(\psi(m, \nu(m, n))).$$

Minthogy ezenkívül

$$\varphi(m+1, n) = \exp_n(\psi(m+1, n)),$$

és

$$\psi(m+1, n+1) = \prod_{i=0}^{n+1} p_i^{\varphi(m+1, i)} = \psi(m+1, n) \cdot p_{n+1}^{\varphi(m+1, n+1)} =$$

$$= \psi(m+1, n) \cdot p_{n+1}^{\alpha(m, n, \varphi(m, \beta(m, n, \varphi(m+1, n))))},$$

a

$$\delta(m, n, a, b) = b \cdot p_{n+1}^{\alpha(m, n, \exp_{\beta(m, n, \exp_n(b))}(a))}$$

jelölést vezetve be, és tekintetbe véve még, hogy

$$\psi(m, 0) = \prod_{i=0}^{0} p_i^{\varphi(m, i)} = p_0^{\varphi(m, 0)} = p_0^0 = 1$$

és

$$\psi(0, n) = \prod_{i=0}^{n} p_i^{\varphi(0, i)} = \prod_{i=0}^{n} p_i^0 = 1,$$

$\psi(m, n)$ így definiálható:

$$\psi(m, n) = 1, \quad \text{ha} \quad m \cdot n = 0$$

$$\psi(m+1, n+1) = \delta(m, n, \psi(m, \nu(m, n)), \psi(m+1, n)).$$

Ez azonban be nem skatulyázott 2-szeres rekurzió, tehát, mint a bevezetésben említettem, nem vezet ki a primitív-rekurzív függvények osztályából. Ennélfogva $\varphi(m, n)$ sem vezet ki innen, hiszen

$$\varphi(m, n) = \exp_n(\psi(m, n)),$$

és így $\varphi(m, n)$ helyettesítéssel jön létre primitív-rekurzív függvényekből.

Mint már említettem, ugyanilyen gondolatmenettel bizonyítható, hogy semilyen korlátozott többszörös rekurzió sem vezet ki a primitív-rekurzív függvények közül.

Ha tehát nem-primitív-rekurzív függvényre akarunk példát kapni, nem szabad korlátoznunk a többszörös rekurziókkal definiált függvényeket. Ennélfogva az ilyen példának csakugyan lényeges tulajdonsága, hogy felépítése közben bármilyen primitív-rekurzív függvényt majorizáló függvények is fellépnek.

III.

Mint a bevezetésben említettem, többszörös rekurziók helyett μ-operációkat alkalmazva, néhány alapfüggvényből kiindulva minden általánosan-rekurzív függvényt megkapunk. Itt triviális, hogy korlátozás mellett nem juthatunk túl a primitív-rekurzív függvények osztályán, hiszen a primitív-rekurzív függvénnyel korlátozott μ-függvény a bevezetés 2. pontjának 5) definíciója szerint primitív-rekurzív függvényből jön létre úgy, hogy ennek n változója helyére a primitív-rekurzív korlátot helyettesítjük.

THE BOUNDEDLY RECURSIVE FUNCTIONS OF GRZEGORCZYK AND THE MAJORISATION METHOD OF ACKERMANN

by R. Péter

ОГРАНИЧЕННО РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИИ ГЖЕГОРЧИКА И МАЙОРАЦИОННЫЙ МЕТОД АККЕРМАННА

Р. Петер

A $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2\nu+1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sorok zárt alakja és a $\zeta(s, u)/\zeta(s)$ hányados

MIKOLÁS MIKLÓS

1. Ismeretes, hogy a $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$ EULER—MASCHERONI-féle konstansról és a $\zeta(2\nu+1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\nu+1}}$ (ν fix pozitív egész szám) sor-összegek természetéről mindmáig keveset tudunk,[1] ami annál feltűnőbb, mert a páros kitevők esetének megfelelő $\zeta(2\nu) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\nu}}$ sorok összegét már EULERnek sikerült meghatároznia és annál sajnálatosabb, mivel igen gyakran felhasznált, nevezetes konstansokról van szó. EULER eredménye — mellyel egy JAK. és JOH. BERNOULLI által felvetett problémát oldott meg jóval általánosabb formában — a következő:

$$\zeta(2\nu) = \frac{(-1)^{\nu-1}B_{2\nu}}{2(2\nu)!}(2\pi)^{2\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

ahol $B_{2\nu}$ az

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!}x^n + \cdots \qquad (|x| < 2\pi) \tag{2}$$

sorfejtés megfelelő együtthatóját jelenti (ún. BERNOULLI-féle számok).[2]

[1] Ez természetesen főként a szóban forgó állandók *aritmetikai* sajátságaira, *egzakt* előállítására vonatkozik; a *numerikus*, közelítő meghatározásnak nincs semmi akadálya. — Vö. pl. KNOPP: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen (Berlin—Heidelberg, 1947; 4. kiadás), 246. o.; NIELSEN: Handbuch der Theorie der Gammafunktion (Leipzig, 1906), 46. o.

[2] (2)-ből az együtthatók rekurzív módon könnyen kiszámíthatók; így $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$, s nyilván va-

$\gamma, \zeta(3), \zeta(5), \ldots$ hasonló előállításának keresése révén találtam néhány évvel ezelőtt a $\Gamma(z)$ gamma-függvény logaritmikus deriváltjának következő kifejezését:

$$(3)\qquad \psi(z) = -\left[\gamma + \frac{1}{2z} + \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi z + \frac{\pi}{2}\int_0^1 \operatorname{tg}\frac{\pi u}{2}\left(\frac{\sin \pi z u}{\sin \pi z} - u\right) du\right]$$

(z komplex, u valós változó; $z \neq 0, \pm 1, \ldots$), melyből

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^{p+1}} = \frac{(-1)^{p+1}}{p!}\left[\frac{d^p}{dz^p}\left(\frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi z\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\pi}{2}\int_0^1 \operatorname{tg}\frac{\pi u}{2}\frac{\partial^p}{\partial z^p}\left(\frac{\sin \pi z u}{\sin \pi z}\right) du\right] \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Minthogy az utóbbi eredmény $z \to 0$ mellett p paritásától függően (1)-et, ill. a

$$(5)\qquad \zeta(2\nu+1) = \left[\frac{(-1)^{\nu+1}}{2}\int_0^1 B_{2\nu+1}(u)\operatorname{ctg}\pi u\, du\right](2\pi)^{2\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

képletet szolgáltatja, ahol $B_{2\nu+1}(u)$ a megfelelő ún. BERNOULLI-féle polinom,[3] (4) magában foglalja a kívánt típusú zárt előállításokat, s egyúttal úgy tekinthető, mint (1) és (5) közös *általánosítása*.[4]

lamennyi Bernoulli-szám *racionális*. — Ennek megfelelően $\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2$, $\zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4$, $\zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6$, s. i. t.

[3] $B_1(u) = u - \frac{1}{2}$, $B_2(u) = \frac{1}{2}u(u-1) + \frac{1}{12}$, $B_3(u) = \frac{1}{6}u(u-1)\left(u - \frac{1}{2}\right)$, ...

Általában: $B_n(u) = \frac{1}{n!}\sum_{\lambda=0}^{n}\binom{n}{\lambda} B_\lambda u^{n-\lambda}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, úgyhogy a Bernoulli polinomok az $xe^{ux}/(e^x - 1) = 1 + B_1(u)x + B_2(u)x^2 + \cdots + B_n(u)x^n + \cdots$ $(|x| < 2\pi)$ sorfejtés együtthatói.

[4] Alkalmazásokkal és számos rokon eredménnyel együtt l. MIKOLÁS M.; Über die Beziehung zwischen der Gammafunktion und den trigonometrischen Funktionen, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **4** (1953), 143—157. o.; továbbá: Zur Theorie der Gammafunktion, der Riemannschen Zetafunktion und verwandter Funktionen, I., u. ott **6** (1955), 381—438.

2. A jelen dolgozat célja egészen más irányú általánosítás, ti. olyan, mely a

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s} \qquad (\Re(s)>1)$$

és

$$\zeta(s,u)=\sum_{k=1}^{\infty}(u+k)^{-s} \qquad (\Re(s)>1;\ 0<u\leqq 1)$$

sorokból analitikus folytatással származó RIEMANN-, ill. HURWITZ-féle zeta-függvény *komplex* értékeire vonatkozik. Bármely rögzített u-ra $\zeta(s,u)$ (tehát $\zeta(s,1)=\zeta(s)$ folytán egyúttal a RIEMANN-féle zeta-függvény is) s-nek analitikus függvénye, eltekintve az $s=1$ helytől, mely elsőrendű pólus; másrészt $\zeta(s,u)$ ismert integrál-előállításaiból kiolvasható,[5] hogy ez fix s mellett u-nak a $(0,1)$ számközben folytonos függvénye, míg az $u=0$ pontban jobboldali határátmenetnél $\Re(s)<0$ mellett $\zeta(s,u)\to\zeta(s)$, $\Re(s)=0$ esetén $\zeta(s,u)$ korlátos, végre $\Re(s)>0$ esetén $u^s\zeta(s,u)\to 1$. Kiemeljük, hogy

$$\zeta(-p,u)=-p!\,B_{p+1}(u) \qquad (p=0,1,2,\ldots); \tag{6}$$

speciálisan

$$\zeta(1-2\nu)=-\frac{B_{2\nu}}{2\nu}\neq 0,\ \zeta(-2\nu)=0 \qquad (\nu=1,2,\ldots). \tag{7}$$

Szükségünk lesz az $\Re(s)>0$, $s\neq 1$ mellett érvényes

$$\zeta(s,u)=u^{-s}+\frac{1}{2}(u+1)^{-s}-$$
$$-\frac{1}{1-s}(u+1)^{1-s}-s\int_1^{\infty}B_1(\overline{x})\,(u+x)^{-s-1}dx \tag{8}$$

képletre, ahol $\overline{x}=x-[x]$ mod 1 vett értéket jelent.[6] Előrebocsátjuk továbbá HURWITZ következő formuláját:[7]

$$\zeta(1-s,u)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\left(\cos\frac{\pi s}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s}\cos 2k\pi u+\right.$$
$$\left.+\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s}\sin 2k\pi u\right) \qquad (\Re(s)>1), \tag{9}$$

[5] Vö. MIKOLÁS M.: Mellinsche Transformation und Orthogonalität bei $\zeta(s,u)$; Verallgemeinerung der Riemannschen Funktionalgleichung von $\zeta(s)$, Acta Sci. Math. (Szeged), **17** (1956), 143—164.

[6] Vö. LANDAU: Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. kötet (Leipzig, 1927), 10. o.

[7] L. pl. WHITTAKER—WATSON: A course of modern analysis, 4. kiadás (Cambridge, 1952), 269. o.

mely $u=1$ mellett a

$$(10)\qquad \zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s)\qquad (s\neq 1,0,-1,-2,\ldots)$$

relációba: $\zeta(s)$ RIEMANN-féle függvényegyenletébe megy át.

3. Mármost rögtön látható, hogy (10)-ből $s=2\nu$ esetén (vö. (7)) közvetlenül adódik (1), tehát (10) az utóbbi messzemenő általánosításának is vehető. Mi felel meg azonban (5)-nek?

TÉTEL. $\Re(s)>1$ *mellett fennáll az*

$$(11)\qquad \int_0^1[\zeta(1-s,u)-\zeta(1-s)]\operatorname{ctg}\pi u\,du=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}\zeta(s)$$

integrál-reláció. A baloldali szorzat $\Re(s)<1$ *esetén nem abszolút integrálható.*

BIZONYÍTÁS.

1°. Ha $\Re(s)>1$, a (9) jobboldalán álló trigonometrikus sorok minden u-ra abszolút és egyenletesen konvergensek, tehát (9) alatt $\zeta(1-s,u)$-nak közönséges Fourier-sorfejtése áll a $0\leqq u\leqq 1$ intervallumra vonatkozólag, azaz

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1\zeta(1-s,u)\cos 2k\pi u\,du&=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\cdot k^{-s}\\ \int_0^1\zeta(1-s,u)\sin 2k\pi u\,du&=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}\cdot k^{-s}\end{aligned}\right\}\ (k=1,2,\ldots).$$

Az utóbbit felhasználva kapjuk:

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{k=1}^{n}k^{-s}=\int_0^1\zeta(1-s,u)\left(\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\pi u\right)du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\zeta(1-s,u)\left[\operatorname{ctg}\pi u-\frac{\cos(2n+1)\pi u}{\sin\pi u}\right]du,$$

s mivel

$$\int_0^1\left[\operatorname{ctg}\pi u-\frac{\cos(2n+1)\pi u}{\sin\pi u}\right]du=2\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\sin 2k\pi u\,du=0,$$

írhatjuk:

$$2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{k=1}^{n}k^{-s}=\int_0^1[\zeta(1-s,u)-\zeta(1-s)]\operatorname{ctg}\pi u\,du-$$

(12)

$$-\int_0^1[\zeta(1-s,u)-\zeta(1-s)]\operatorname{cosec}\pi u\cdot\cos(2n+1)\pi u\,du$$

$$(n=1,2,\ldots),$$

feltéve, hogy az első integrál (CAUCHY-féle értelemben) létezik.

2°. Legyen $\Re(s)>2$.

Akkor (9)-ből folyóan $\zeta(1-s,\overline{u})$ az u valós változónak mindenütt differenciálható függvénye és

$$\frac{d}{du}\zeta(1-s,\overline{u})=2(2\pi)^{1-s}\Gamma(s)\left(-\cos\frac{\pi s}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-s}\sin 2k\pi u+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-s}\cos 2k\pi u\right)=(s-1)\zeta(2-s,\overline{u}),$$

tekintettel a zárójelben álló sorok egyenletes konvergenciájára; tehát a L'HOSPITAL-szabály szerint

$$\lim_{u\to+0}\frac{\zeta(1-s,u)-\zeta(1-s)}{\sin\pi u}=\lim_{u\to+0}\frac{\frac{d}{du}\zeta(1-s,u)}{\pi\cos\pi u}=\frac{s-1}{\pi}\zeta(2-s).$$

Mivel e határérték létezése biztosítja, hogy $[\zeta(1-s,u)-\zeta(1-s)]$-nek mind $\operatorname{ctg}\pi u$-val, mind $\operatorname{cosec}\pi u$-val való szorzata a $0<u\leqq 1$ intervallumban korlátos, (12) esetünkben fennáll; ha $n\to\infty$, a jobboldali második integrál a RIEMANN-lemma alapján 0-hoz tart, úgyhogy közvetlenül (11)-re jutunk.

3°. Tegyük fel, hogy $1<\Re(s)\leqq 2$. (9)-ből ekkor is rögtön látható, hogy $\zeta(1-s,u)-\zeta(1-s)\to 0$, midőn $u\to+0$; az eltűnés „rendjének" vizsgálatához azonban fel kell használnunk a (8) előállítást is.

Minthogy általában $B'_{m+1}(x)=B_m(x)$ $(m=1,2,\ldots)$, (8)-ból kétszeres parciális integrálással adódik:

$$\zeta(s,u)=u^{-s}+\frac{1}{s-1}(u+1)^{1-s}+\frac{1}{2}(u+1)^{-s}+\frac{s}{12}(u+1)^{-s-1}-$$

(13)

$$-s(s+1)(s+2)\int_1^{\infty}B_3(\overline{x})(u+x)^{-s-3}dx$$

Az utolsó integrál $|B_3(\overline{x})(u+x)^{-s-3}| \leqq \max_{0\leqq x\leqq 1}|B_3(x)|\cdot x^{-\Re(s)-3}$ $(1\leqq x<\infty)$ folytán[8] minden rögzített u-ra bármely $\Re(s)\geqq -2+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ félsíkban egyenletesen konvergens, úgyhogy s-nek itt reguláris függvénye; az analitikus függvények azonossági tétele alapján tehát (13) $\Re(s)>-2$, $s\neq 1$ mellett érvényes.

Mármost a $\lim_{u\to+0}\zeta(s,u)=\zeta(s)$ $(\Re(s)<0)$ limesz-reláció és a binomiális sor alkalmazásával nyerjük

$$\zeta(s,u)-\zeta(s)=u^{-s}+\frac{1}{s-1}[(1+u)^{-s}-1]+\frac{1}{2}[(1+u)^{-s}-1]+$$

$$+\frac{s}{12}[(1+u)^{-s-1}-1]-s(s+1)(s+2)\int_1^\infty B_3(\overline{x})[(x+u)^{-s-3}-x^{-s-3}]dx=$$

(14)
$$=u^{-s}+u\left[-1-\frac{s}{2}-\frac{s(s+1)}{12}+\right.$$

$$\left.+s(s+1)(s+2)(s+3)\int_1^\infty B_3(\overline{x})x^{-s-4}dx\right]+\cdots=u^{-s}-u\mathfrak{P}_s(u)$$

$$(-2<\Re(s)<0;\ 0<u<1),$$

ahol $\mathfrak{P}_s(u)$ egy olyan u hatványai szerint haladó hatványsort jelent, melyre $\mathfrak{P}_s(0)=s\zeta(s+1)$. Következőleg

$$\frac{1}{u}[\zeta(1-s,u)-\zeta(1-s)]=u^{s-2}-\mathfrak{P}_{1-s}(u)\qquad(1<\Re(s)<3),$$

ami

$$\lim_{u\to+0}\frac{\pi u}{\sin \pi u}=1$$

folytán evidenciába helyezi a (12) alatti integranduszok abszolút integrálhatóságát az $1<\Re(s)\leqq 2$ sávra nézve is.

Így ilyen s-értékekre szintén érvényes (12), továbbá a RIEMANN-féle lemma segítségével innen adódó (11) integrál-reláció.

4°. Ha $\Re(s)<1$, azaz $1-\Re(s)>0$, akkor $u^{1-s}\zeta(1-s,u)=g_{1-s}(u)$ jelölés mellett

$$\frac{1}{u}[\zeta(1-s,u)-\zeta(1-s)]=u^{s-2}g_{1-s}(u)-u^{-1}\zeta(1-s),$$

[8] Különben könnyű kimutatni, hogy $\max_{0\leqq x\leqq 1}|B_3(x)|=\frac{1}{216}\sqrt{3}$.

ahol $\lim_{u \to +0} g_{1-s}(u) = 1$. Mivel $\Re(s) - 2$ most < -1,

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{\delta}^{1} |\zeta(1-s, u) - \zeta(1-s)| \, |\operatorname{ctg} \pi u| \, du$$

nem lehet véges, qu. e. d.

4. Megjegyezzük, hogy alternatív, a fentivel körülbelül egyenértékű bizonyítást szolgáltat a (9)-hez konjugált trigonometrikus sorra való hivatkozás, vagy parciális integrálás, a $\log(2 \sin \pi u) = -\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \cos 2k\pi u$ $(0 < u < 1)$ sorfejtés és a PARSEVAL-formula alkalmazása.

Ha (11)-ben $s = 2\nu$, (6)-ra tekintettel adódik:

$$\int_{0}^{1} \left[B_{2\nu}(u) - \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} \right] \operatorname{ctg} \pi u \, du = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

ami a *Bernoulli*-polinomok tulajdonságai alapján közvetlenül is belátható. Ha viszont $s = 2\nu + 1$, akkor $\Gamma(2\nu + 1) = (2\nu)!$ folytán (11) éppen (5)-be megy át, tehát valóban ennek *általánosításával* állunk szemben.

Végre (11)-ből a (10) alatti RIEMANN-féle függvényegyenlet felhasználásával nyerjük:

$$\int_{0}^{1} \left[\frac{\zeta(s, u)}{\zeta(s)} - 1 \right] \operatorname{ctg} \pi u \, du = \operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2} \qquad (\Re(s) < 0, \, s \neq -2, -4, \ldots), \tag{16}$$

mely a $\zeta(s, u)/\zeta(s)$ *hányadosnak egy egyszerű integrál-kifejezését kizárólag a cotangens-függvény segítségével állítja elő.*

Ez utóbbira talán még egy más alkalommal vissza fogok térni.

Budapest, 1956. május 12.

SUR L'EXPRESSION FERMÉE DES SÉRIES $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2\nu+1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ET LE RAPPORT $\zeta(s, u)/\zeta(s)$

Par M. MIKOLÁS

(Résumé)

Dans deux ouvrages récents (cf. [4]), l'auteur a obtenu entre autres le résultat que $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ admet la représentation (3), subsistant pour tout z sauf les valeurs entières, où γ désigne la constante d'EULER—MASCHERONI;

de là il résulte la formule (4) de type nouveau, c'exprimant les sommes $\zeta(p+1, z+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (z+k)^{-(p+1)}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ par les fonctions trigonométriques. Puisque (4) se transforme pour $z \to 0$ en (1) resp. (5), il s'agit en même temps d'une généralisation des derniers. (Comme on le sait, notre connaissance de la nature des sommes $\zeta(2\nu+1)$ est incomplète, en contradiction à $\zeta(2\nu)$.)

Maintenant on démontre la relation (11) avec $\Re(s) > 1$, qui étend la validité de (5) dans une autre direction; à ce sujet, nous employons les formules (8), (9) et certaines propriétés (s'ensuivant de celles) de la fonction $\zeta(s, u)$ de Hurwitz. Cette formule (11) fournit (15) pour $s = 2\nu$ et (5) pour $s = 2\nu + 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$; par la joignant à l'équation fonctionnelle (10) de $\zeta(s)$, on obtient la relation (16).

О ЯВНОЙ ФОРМЕ РЯДОВ $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2\nu+1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ И О ЧАСТНОМ $\zeta(s\,u)/\zeta(s)$

М. Миколаш

(Р е з ю м е)

Одним из результатов новейших работ автора является выражение (3) функции $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ действительное для каждого целого z, где γ является константой Е й л е р — М а с к е р о н и; из этого вытекает нового типа формула (4), выражающая суммы $\zeta(p+1, z+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (z+k)^{-(p+1)}$, $(p = 1, 2, \ldots)$ в замкнутой форме при помощи тригонометрических функций. Ввиду того, что (4) при $z \to 0$ переходит в (1) т. е. в (5), имеем дело с генерализацией последних. (Как известно, в отличие от (2), константы $\zeta(2\nu+1)$ до сих пор мало выяснены.)

В вышеизложенном доказано действительное при $R(s) > 1$ интегральное отношение (11), означающее другого рода обобщение, при помощи формулы Хурвитца (9), относящейся к обобщенной функции, $\zeta(s, u)$ и формулы (8). При $s = 2\nu$ формула (11) дает (15), при $s = 2\nu + 1$ же — (5), если $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Эта же формула, связанная с Римановой (10), приводит к (16).

A kétdimenziós topológikus Helly-tételről

MOLNÁR JÓZSEF

Ismeretes HELLY következő tétele:[1]

Ha az euklideszi síkban levő tetszőleges számú egyszeresen összefüggő tartomány[2] olyan, hogy bármely kettő és bármely három közös része egyszeresen összefüggő tartomány, akkor valamennyinek van közös pontja.

Dolgozatunkban — az előbbi tételnél valamivel többet mondó — következő tételt bizonyítjuk:

TÉTEL: *Ha az euklideszi síkban levő tetszőleges számú egyszeresen összefüggő tartomány olyan, hogy bármely kettőnek közös része összefüggő, és bármely háromnak van közös pontja, akkor valamennyinek van közös pontja.*

Indukciós bizonyításunkban, melyben az eredeti bizonyítás gondolatát is felhasználjuk, fontos szerephez jut a következő

SEGÉDTÉTEL: *Ha a síkban levő három egyszeresen összefüggő tartomány olyan, hogy bármely kettőnek közös része összefüggő és a háromnak van közös pontja, akkor bármely kettő, ill. mindhárom közös része egyszeresen összefüggő tartomány.*

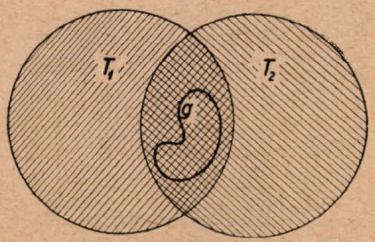
Először ezen segédtételünket bizonyítjuk. Legyen $T_{ij} = T_i \cdot T_j$, ill. $T_{123} = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3$, azaz jelöljük T_i, T_j, ill. T_1, T_2, T_3 közös

[1] HELLY E., Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten, Mh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), 281—302 o. Lábjegyzetben HELLY megemlíti, hogy a két dimenziós esetre (fent idézett tétel) adott bizonyítását már 1924-ben ismerte, mely eredményre KERÉKJÁRTÓ Béla is eljutott, aki ezt hozzá intézett 1925. áprilisi keltezésű levelében közölte is vele. Megemlítjük, hogy a tétel bizonyítása nem teljes. Ui. az indukciós eljáráshoz azon állítása, mely szerint, elegendő négy tartományra igazolni, hogy van közös részük (282. o.) kevésnek bizonyul. Ti. ahhoz az is kell, hogy a közös rész egyszeresen összefüggő legyen.

[2] Tartomány alatt korlátos és zárt ponthalmazt értünk. Egyszeresen összefüggő tartomány alatt pedig olyan tartományt értünk, mely 1. összefüggő, azaz bármely két pontja a tartományban haladó egyszerű ívvel összeköthető és 2. a tartomány bármely egyszerű zárt görbéje a tartománynak egy elemi felületét határolja.

részét T_{ij}-vel, ill. T_{123}-mal. Először belátjuk, hogy a segédtételben szereplő bármely két tartománynak közös része egyszeresen összefüggő.

Legyen a $T_{12} = T_1 \cdot T_2$ azon összefüggő tartomány, melyre bizonyítani akarjuk, hogy egyszeresen összefüggő. Tekintsünk a T_{12} tartományban egy egyszerű zárt g görbevonalat, azaz egy Jordan-görbét (1. ábra). Ha T_{12} nem volna egyszeresen összefüggő tartomány, akkor a g Jordan-görbe közrefogna olyan pontot, amely a T_1, T_2 közül legalább az egyiknek nem pontja, pl. T_1-nek. Ez viszont lehetetlen, hiszen a g görbe a T_1 tartománynak is egyszerű zárt görbéje, a T_1 pedig egyszeresen összefüggő tartomány.



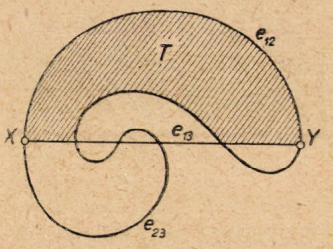
1. ábra

Most annak a bizonyításához kezdünk, hogy a T_{123} tartomány összefüggő. A T_{123} tartomány — mint zárt ponthalmazok közös része — zárt ponthalmaz, s amennyiben nem összefüggő, az összefüggő részhalmazai (komponensek) is zárt ponthalmazok. Legyen A és B két tetszőleges pontja a T_{123} tartománynak. Jelöljük T_A-val, ill. T_B-vel a T_{123} tartomány azon összefüggő részhalmazát, mely tartalmazza az A, ill. B pontot. Tételezzük fel, hogy T_A, T_B diszjunktak. Abból, hogy T_A, T_B diszjunktak, következik, hogy bárhogyan is kötjük össze a T_A, ill. T_B tartomány A, ill. B pontját a T_{12} tartományban haladó egyszerű ívvel, van az összekötő ívnek olyan e_{12} szakasza, melynek $\bar{A}$ ill. $\bar{B}$ végpontja T_A, ill. T_B pontja és ezen végpontokon kívül más T_A, ill. T_B tartománybeli pontot nem tartalmaz. Állítjuk, hogy az e_{12} ívnek van olyan e_{12}^* szakasza, melynek belső pontjai nem pontjai a T_{123} tartománynak, és a T_{123} tartomány két diszjunkt T_X és T_Y tartományát köti össze. Nyilvánvaló, hogy van az e_{12} ívnek ilyen kikötésnek eleget tevő e_{12}^* szakasza, melynek belseje T_{123} tartománybeli pontoktól mentes, hiszen különben T_A, T_B nem lennének diszjunktak. Annak belátására, hogy létezik a második kikötésnek is eleget tevő e_{12}^* ív, két esetet különböztetünk meg: a) $\bar{A}$ nem torlódási pontja az e_{12} íven levő T_{123} tartománybeli pontoknak, b) $\bar{A}$ torlódási pontja az e_{12} íven levő T_{123} tartománybeli pontoknak.

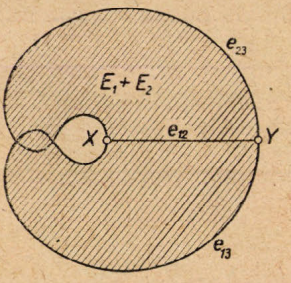
a) Ha $\bar{A}$ nem torlódási pontja az e_{12} íven levő T_{123} tartománybeli pontoknak, akkor az $\bar{A}$ pontból kiindulva és haladva az e_{12} íven a T_B tartomány felé, eljutunk a T_{123} tartománynak egy Y

pontjához, mely nyilván a $T_A \equiv T_X$-hez diszjunkt $T_Y \subset T_{123}$ tartománynak pontja. Ebben az esetben $e_{12}^* = \bar{A}\,Y \subseteq e_{12}$.

b) Jelölje $\{s_i\} \subset T_{123}$ az e_{12} íven levő azon zárt „szakaszokat“,[3] melyek az e_{12} íven levő és az $\bar{A}$ ponthoz torlódó T_{123} tartománybeli pontokból állnak. Mivel az e_{12} nem tartalmaz T_A, ill. T_B tartománybeli pontot, következik, hogy az $\{s_i\}$ „szakaszok“ nem tartoznak ugyanazon $T_{123}^* \subset T_{123}$ összefüggő részhez, hiszen $\{s_i\} \subseteq T_{123}^*$-ből következik, hogy $A \subset T_{123}^*$, tehát $T_{123}^* = T_A$, ami lehetetlen. Ha azonban $\{s_i\} \subset T_{123}^*$, akkor léteznie kell az e_{12} íven két szomszédos s_k és s_{k+1} „szakasznak“, melyek nem tartoznak T_{123} ugyanazon zárt, összefüggő részéhez. Ezen s_k és s_{k+1} „szakaszokat“ tartalmazó diszjunkt tartományok éppen T_X és T_Y. Az e_{12}^* pedig az e_{12} ívnek s_k és s_{k+1} közé eső szakasza.



2. ábra



3. ábra

Jelöljük a továbbiakban az e_{12}^* ívet egyszerűen e_{12}-vel, végpontjait pedig X, Y-nal. Fordítsuk most figyelmünket a T_{123} tartomány diszjunkt T_X, T_Y részeire! Kössük össze az X, Y pontokat a T_{13}, ill. T_{23} tartományban haladó e_{13}, ill. e_{23} ívvel. Mivel az e_{12} ív az X, Y végpontokon kívül más T_{123} tartománybeli pontot nem tartalmaz, nem tartalmaz belsejében e_{13}, e_{23} ívekhez tartozó pontot sem. Tekintsük a $g_1 = e_{12} + e_{13}$, ill. $g_2 = e_{12} + e_{23}$ Jordan-görbe által határolt E_1, ill. E_2 elemi tartományt. Két eset lehetséges: 1. az E_1 és E_2 elemi tartomány az e_{12} ív ugyanazon oldalán helyezkedik el (2. ábra), 2. az E_1 és E_2 elemi tartomány az e_{12} ív ellentétes oldalán helyezkedik el (3. ábra). Mindkét esetben bizonyítani fogjuk, hogy a X, Y pontok összeköthetők a T_{123} tartományban haladó egyszerű ívvel, azaz T_X és T_Y nem diszjunktak, és ezzel feltevésünkkel ellentmondásba kerültünk, vagyis a T tartomány összefüggő. Lássuk ezt be!

[3] A „szakasz“ itt egyetlen pont is lehet.

1. Az E_1 és E_2 elemi tartomány az e_{12} ív ugyanazon oldalán helyezkedik el. Tekintsük az E_1, E_2 elemi tartományok $E_1 \cdot E_2$ közös részének azon T összefüggő részét, melynek H határához az e_{12} ív is hozzátartozik (2. ábra). Az e_{12} ívet H határrá kiegészítő $\bar{e}_{12}$ ponthalmaz, mely e_{13}, ill. e_{23} pontjaiból tevődik össze benne van a T_{123}-ban, hiszen $\bar{e}_{12} \subset E_1 \cdot E_2$. Állítjuk: $\bar{e}_{12}$ egyszerű ív.

Állításunk közvetlen következménye KERÉKJÁRTÓ következő segédtételének:[4]

Ha két g_1, g_2 Jordan-görbe legalább két közös ponttal rendelkezik, akkor a $g_1 + g_2$ által határolt bármely nyilt tartomány határa ugyancsak Jordan-görbe.

Abból pedig, hogy az $\bar{e}_{12} \subset T_{123}$ egyszerű ív, következik, hogy T_X, T_Y nem diszjunktak. Ezzel az első eset tárgyalása véget ért.

2. Az E_1 és E_2 elemi tartomány az e_{12} ív más és más oldalán van (3. ábra). Tekintsük az E_1 és E_2 elemi tartomány egyesítésből adódó $E_1 + E_2$ tartományt. Mivel mind E_1, mind pedig E_2 része a T_3 tartománynak, ezért $E_1 + E_2$ is benne van a T_3 tartományban. Másrészt az $E_1 + E_2$ tartalmazza az X, Y pontokat összekötő e_{12} ivet, vagyis e_{12} is benne van a T_3 tartományban, tehát $e_{12} \subset T_3$, azaz T_X, T_Y nem diszjunktak.

Ezzel bizonyításunk véget is ért, vagyis bebizonyítottuk, hogy hogy a T_{123} tartomány összefüggő.

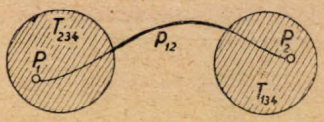
Hogy a tartomány nemcsak összefüggő, hanem egyszeresen összefüggő is, ugyanúgy látható be, mint T_{12} esetén láttuk. Ha ui. T_{123} nem volna egyszeresen összefüggő, akkor a T_{123} tartománynak egy g Jordan-görbéje tartalmazna olyan pontot, amely a T_1, T_2, T_3 tartományok közül legalább az egyiknek nem pontja, pl. T_1-nek. Ez viszont lehetetlen, hiszen a g görbe a T_1 tartománynak is egyszerű zárt görbéje, a T_1 viszont egyszeresen összefüggő tartomány. Ezzel segédtételünk bizonyítása véget ért.

Most pedig — indukciós bizonyításunk első lépéseként — áttérünk a tétel bizonyítására $n = 4$ esetben, azaz bizonyítani fogjuk, hogy ha négy egyszeresen összefüggű tartomány olyan, hogy bármely kettő közös része összefüggő és bármely háromnak van közös pontja, akkor valamennyinek van közös pontja.

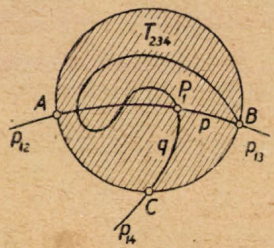
Tételezzük fel az ellenkezőjét, vagyis legyen $T_{1234} = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4$ üres. Legyen továbbá $P_1 \in T_{234}$, $P_2 \in T_{134}$, $P_3 \in T_{124}$, és $P_4 \in T_{123}$, azaz legyen P_1, P_2, P_3, P_4 egy-egy pontja a közös ponttal nem rendelkező $T_{234} = T_2 \cdot T_3 \cdot T_4$, $T_{134} = T_1 \cdot T_3 \cdot T_4$, $T_{124} = T_1 \cdot T_2 \cdot T_4$, és $T_{123} = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3$ tartománynak. Mivel $P_1 \in T_{234}$ és $P_2 \in T_{134}$, ezért $P_1, P_2 \in T_{34}$, azaz P_1, P_2 összeköthetők T_{34} tar-

[4] KERÉKJÁRTÓ B., Topologie I. (Berlin, 1923).

tományban haladó $\widehat{P_1P_2}$ egyszerű ívvel. Nyilvánvaló, hogy ezen $\widehat{P_1P_2}$ ív választható úgy, hogy egyetlen $p_{12} \subseteq \widehat{P_1P_2}$ íve kösse össze a T_{234} tartományt a T_{123} tartománnyal és $\widehat{P_1P_2} - p_{12} \subseteq T_{234} + T_{123}$ (4. ábra). Hasonló módon választható a $\widehat{P_1P_3}$, $\widehat{P_1P_4}$, $\widehat{P_2P_3}$, $\widehat{P_2P_4}$ és $\widehat{P_3P_4}$ ív is. Állítjuk, hogy az így választott $\widehat{P_1P_2}$, $\widehat{P_1P_3}$, $\widehat{P_1P_4}$, $\widehat{P_2P_3}$, $\widehat{P_2P_4}$, $\widehat{P_3P_4}$, íveknek (röviden $\{\widehat{P_iP_j}\}$) nincs közös pontjuk a T_{123}, T_{124}, T_{134} és T_{234} tartományon kívül. Ui. pl. $\widehat{P_1P_2}$, ill. $\widehat{P_2P_3}$ benne van a T_{34}, ill. T_{14} tartományban s így $\widehat{P_1P_2}$ és $\widehat{P_2P_3}$ közös pontja benne van a T_{134} tartományban. Most pedig belátjuk, hogy a P_1, P_2, P_3, P_4 pontok választhatók úgy, hogy a $\{\widehat{P_iP_j}\}$



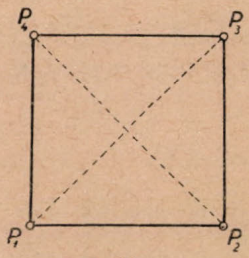
4. ábra



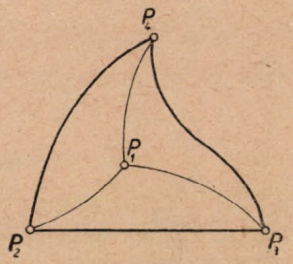
5. ábra

egyszerű íveknek a T_{123}, T_{124}, T_{134}, T_{234} tartományokban csupán végpontjai legyenek közösek. Ui. tekintsük a P_1 pontot tartalmazó T_{234} tartományt és jelöljük A-, B-, ill. C-vel a p_{12}, p_{13}, ill. p_{14} ívnek a T_{234} tartománnyal való közös pontját (5. ábra). Kössük össze az A-t B-vel, ill. B-t C-vel a T_{234} tartományban haladó p, ill. q egyszerű ívvel. Jelöljük P_1-gyel a q ívnek C-től számított első közös pontját a p ívvel és helyettesítsük a P_1P_2, P_1P_3, ill. P_1P_4 ívnek a T_{234} tartományban levő szakaszát az $\widehat{AP_1} \subseteq p$-, $BP_1 \subseteq p$-, ill. $\widehat{CP_1} \subseteq q$ ívekkel. Ilyen módon a T_{234} tartományban az új $\widehat{P_1P_2}$, $\widehat{P_1P_3}$, $\widehat{P_1P_4}$ ívnek csupán P_1 végpontjuk közös. A P_1-hez hasonlóan választva a P_2, P_3, P_4 pontokat is, olyan $\{\widehat{P_iP_j}\}$ ívekhez jutunk, melyek a P_1, P_2, P_3, P_4 pontokat párosával a kötik össze és csak a megfelelő végpontjaik közösek. Vizsgáljuk meg ezen $\{\widehat{P_iP_j}\}$ ívek által szolgáltatott alakzatot! A $\{\widehat{P_iP_j}\}$ ívek burka nem tartalmazhatja mind a négy pontot, hiszen akkor pl. a $\widehat{P_1P_3}$, $\widehat{P_2P_4}$ ívek metszenék

egymást (6. ábra). Hátra maradt annak az esetnek a vizsgálata, midőn a $\{\widehat{P_i P_j}\}$ ívek burka három P_i pontot tartalmaz és ezek összekötő íveinek burka tartalmazza a negyedik P pontot. A 7. ábrán P_1 pontja a $P_2 P_3 P_4$ görbevonalú háromszögnek. Ez ellenmondáshoz vezet, hiszen konstrukciónk folytán a $P_2 P_3 P_4$ görbevonalú háromszög benne van a T_1 tartományban, P_1 viszont nem pontja a T_1 tartománynak. Helytelen ezért a feltevés, azaz $T_{1234} = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4$ nem üres.



6. ábra



7. ábra

Ezen eredményt indukcióval terjesztjük ki az $n > 4$ esetre. Feltesszük, hogy a tétel helyes n-re. Tekintsük a $\overline{T}_n = T_n \cdot T_{n+1}$ közös részt. Állítjuk, hogy segédtételünk és az $n = 4$-re adott bizonyítás birtokában következik, hogy $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, \overline{T}_n$ eleget tesz a tétel feltételeinek. Ui. segédtételünk értelmében a $\overline{T}_n = T_n \cdot T_{n+1}$ valamint $T_i \cdot \overline{T}_n = T_i \cdot T_n \cdot T_{n+1}$ tartomány egyszeresen összefüggő, a $T_i \cdot T_j \cdot \overline{T}_n = T_i \cdot T_j \cdot T_n \cdot T_{n+1}$ pedig az előbbi $n = 4$-re adott bizonyítás értelmében nem üres. Így tehát a $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, \overline{T}_n$ tartományokra igaz az a tétel, vagyis ezen tartományok közös ponttal rendelkeznek. Ugyanez áll ekkor a $T_1, T_2, \ldots, T_n, T_{n+1}$ tartományokra is.

Hogy a tétel végtelen sok egyszeresen összefüggő tartományra is igaz, az következménye Riesz következő tételének:[5]

Ha tetszőleges számú korlátos és zárt ponthalmaz olyan, hogy közülük bármely véges soknak közös része nem üres, úgy valamennyinek van közös pontja.

Befejezésül hálás köszönetet mondok Hajós György professzornak a dolgozattal kapcsolatban tett értékes megjegyzéseiért.

[5] Riesz F., Atti del IV. Congresso internazionale dei Matematici, Róma, 2 (1908), 21. o.

О ДВУХМЕРНОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ХЕЛЛИ

И. Мольнар

(Резюме)

Автор доказывает, что двухмерная топологическая теорема Хелли верна и в следующей форме:

Если находящиеся в плоскости односвязные, ограниченные и замкнутые области таковы, что общая часть любых двух областей связна и любые три имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

ÜBER DEN ZWEIDIMENSIONALEN TOPOLOGISCHEN SATZ VON HELLY

J. Molnár

(Zusammenfassung)

Der Verfasser beweist, daß der zweidimensionale topologische Satz von Helly auch in der folgenden Form richtig ist:

Ist in der Ebene eine beliebige Anzahl von einfach zusammenhängenden, beschränkten und abgeschlossenen Bereichen so vorgegeben, daß der Durchschnitt von je zweien zusammenhängend ist, und der Durchschnitt von je dreien nicht leer ist, so ist der Durchschnitt sämtlicher Bereiche nicht leer.

Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek megoldásának többértelműségéről

BIHARI IMRE

Az alábbiakban egy új elégséges feltételt adunk meg arra, hogy az $y' = f(x, y)$ egyenletnek adott kezdeti feltételek mellett több megoldása legyen. A tétel, amelyet bemutatunk, egy Perron-féle unicitás-tétel[1] pendantja és magában foglalja TAMARKIN többértelműségi tételét[2] is.

Ha az $f(x, y)$ függvény a $D(|x| < a, |y| < b)$ tartományban folytonos és eleget tesz az

$$|f(x, y) - f(x, \varphi(x))| \leqq \omega(x, |y - \varphi(x)|) \tag{F}$$

feltételnek, ahol $\varphi(x)$ az

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

egyenlet egy origón átmenő $|x| < a$ esetén létező D-be eső integrálja és $\omega(x, u)$ az $|x| < a, u \geqq 0$ tartományban nem negatív folytonos függvény, melyre $\omega(x, 0) = 0$, de $\omega(x, u) \not\equiv 0$, ha $u \not\equiv 0$, továbbá az

$$u' = \omega(x, u) \tag{2}$$

egyenletnek van az $u \equiv 0$ megoldáson kívül is $u \geqq 0$ megoldása, mely $|x| < a$ esetén létezik, akkor az (1)-nek legalább két megoldása van, amely az origón halad át. Ugyanez érvényes a $\varphi(x)$ görbe minden D-beli pontjára. Az (1) origóhoz tartozó maximál és minimál integráljának eltérésére alsó becslést adunk.

A tétel lényege az, hogy, ha az iránymező nagyobb fokban szinguláris (erősebben változik bizonyos irányban) mint egy olyan

[1] O. PERRON: Über Ein- und Mehrdeutigkeit des Integrals eines Systems von Diff.-gleichungen, Math. Zeitschrift 95 (1926) 98—101.

[2] J. TAMARKINE: Sur le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires, Math. Zeitschrift 16 (1923) 207—213.

E tétel egy új bizonyítását l. a szerző következő dolgozatában: A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of diff. equations, Acta Math. Acad. Scient. Hung. 7 (1956).

egyenleté, melynél több megoldás van, akkor az adott egyenletnél is ugyanez a helyzet.

BIZONYÍTÁS. Az $y(x)-\varphi(x)=\eta(x)$ transzformációval egyenletünk az

$$\eta' = f(x, \varphi+\eta)-\varphi'(x)=\bar{f}(x, \eta) \tag{1'}$$

alakot, az (F) feltétel pedig az

$$|\bar{f}(x, \eta)| \leqq \omega(x, |\eta|) \tag{F'}$$

alakot ölti, az $y=\varphi(x)$ megoldásnak az $\eta=0$ felel meg. Elég tehát azt bizonyítanunk, hogy az (1')-nek az X tengely minden $|x|<a$ pontján több megoldása halad át az (F') feltétel és az $\omega(x, u)$-ra tett változatlan feltételek mellett.

Legyen $\overline{\psi}_\varepsilon(x)$ az

$$\eta' = \bar{f}(x, \eta)+\varepsilon \qquad (\varepsilon>0) \tag{3}$$

egyenlet egy origón áthaladó rögzített integrálja. — Mint ismeretes — minden $0<a_1<a$ számhoz meghatározható az $\varepsilon>0$ szám úgy, hogy $\overline{\psi}_\varepsilon(x)$ létezzék az $|x|<a_1$ intervallumban. Ezenkívül

$$\overline{\psi}_\varepsilon(x)>\bar{G}(x)\geqq 0 \quad (0\leqq x<a_1) \quad \text{és} \quad \overline{\psi}_\varepsilon(x)<\bar{g}(x)\leqq 0 \quad (-a_1<x\leqq 0),$$

ahol $\bar{G}(x)$ az (1') origón átmenő maximál-, $\bar{g}(x)$ pedig a minimál integrálja. Az is ismeretes, hogy ha $\varepsilon\to+0$,

$$\overline{\psi}_\varepsilon(x)\Rightarrow\bar{G}(x) \quad (0\leqq x<a_1) \quad \text{és} \quad \overline{\psi}_\varepsilon(x)\Rightarrow\bar{g}(x) \quad (-a_1<x\leqq 0).$$

A (3) szerint

$$\overline{\psi}'_\varepsilon(x)=\bar{f}(x, \overline{\psi}_\varepsilon(x))+\varepsilon \qquad (|x|<a_1). \tag{4}$$

Az (F') feltétel következtében az $\bar{f}(x, \eta)$ függvény állandó előjelű mind az $\eta>0$, mind az $\eta<0$ esetben és csak $\eta=0$ esetén tűnik el.

Szorítkozzunk az $\eta>0$ esetre és vegyük először azt az esetet, amikor

a) $$f(x, \eta)>0 \qquad (\eta>0).$$

Ekkor a (4)-ből (F') figyelembevételével

$$\overline{\psi}'_\varepsilon(x)>\bar{f}(x, \overline{\psi}_\varepsilon(x))\geqq\omega(x, \overline{\psi}_\varepsilon(x)) \qquad (0\leqq x<a_1),$$

vagyis $\overline{\psi}_\varepsilon(x)$ a (2) egyenlet egy origóhoz tartozó Perron-féle felső függvénye $0\leqq x<a_1$ esetén és — mint ilyenre — fennáll, hogy

$$\overline{\psi}_\varepsilon(x)\geqq G_\omega(x) \qquad (0\leqq x<a_1), \tag{5}$$

ahol $G_\omega(x)$ a (2) egyenlet origóhoz tartozó maximál integrálja.

Ebből következik, hogy

$$\bar{G}(x) \geqq G_\omega(x) \qquad (0 \leqq x < a_1)$$

tetszőleges $0 < a_1 < a$-ra, tehát még $0 \leqq x < a$ esetén is.

Ha pedig

b) $$\bar{f}(x, \eta) < 0 \qquad (\eta > 0),$$

akkor a (4) integrálalakjából

$$0 < \overline{\psi}_\varepsilon(x) < \varepsilon x < \varepsilon a_1 < \varepsilon a \qquad (0 \leqq x < a_1),$$

vagyis

$$\bar{G}(x) \equiv 0 \qquad (0 \leqq x < a).$$

Az $x = -\xi$ transzformációval kitűnik, hogy a $-a < x \leqq 0$ intervallumban az a) esetben $\bar{G}(x) \equiv 0$, a b) esetben $\bar{G}(x) \geqq G_\omega(x)$. Az $f(x, \eta)$ $\eta < 0$-ra vonatkozó előjelétől függően hasonló eredmények adódnak a $\bar{g}(x)$ függvényre. — Visszatérve az (1′) egyenletről az (1) egyenletre — ennek origóhoz tartozó maximál, ill. minimál integrálját $G(x)$-, ill. $g(x)$-szel jelölve, a következő alsó becslést kapjuk: ha

a) $$h(x, y) = f(x, y) - f(x, \varphi(x)) > 0 \qquad y > \varphi(x)$$

esetén, akkor

$$G(x) - \varphi(x) \geqq G_\omega(x) \qquad (0 \leqq x < a).$$

(Persze még inkább igaz, hogy $G(x) - g(x) \geqq G_\omega(x)$ ugyanitt.)

b) $$h(x, y) < 0 \qquad y > \varphi(x)$$

esetén, akkor

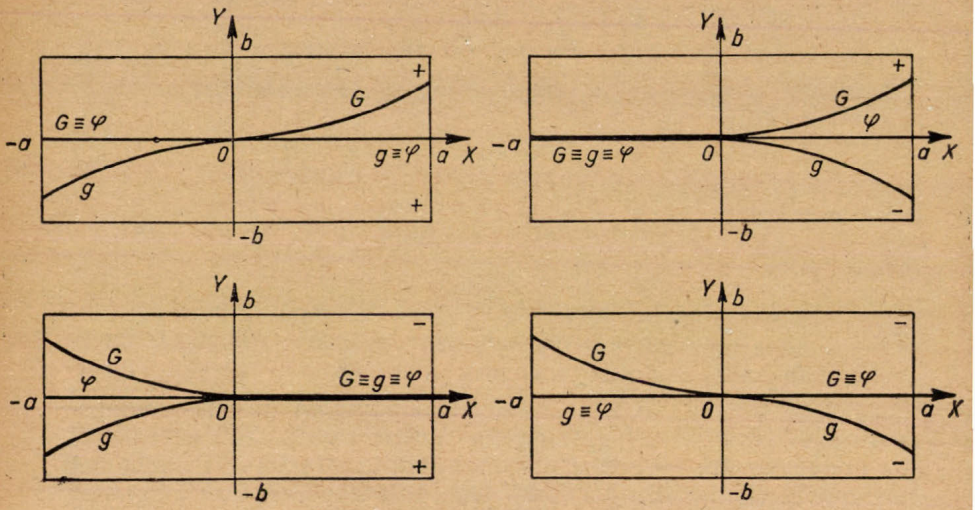
$$G(x) - \varphi(x) \equiv 0, \quad G(x) \equiv \varphi(x) \qquad (0 \leqq x < a).$$

A $-a < x \leqq 0$ intervallumban fordított a helyzet és hasonló eredmények adódnak a $\varphi(x) - g(x)$ különbségre a $h(x, y)$ függvény $y < \varphi(x)$-re vonatkozó előjelétől függően. Tehát az origó egyik oldalán a megoldásgörbék *mindig szétágaznak*. A $\varphi(x) \equiv 0$ esetben — amire (mint láttuk) mindig vissza lehet vezetni a problémát — a következő oldalon, az 1. és 2. ábrán látható érdekes — CZIPSZER JÁNOStól származó — szemléltetés lehetséges.

Az (5) egyenlőtlenséget még más módon is be lehet látni, amivel a bizonyítás egy variációjához jutunk. Az (5) igaz $x = 0$ esetén és, ha nem lenne igaz az egész $0 \leqq x < a_1$ intervallumban, akkor jelöljük azon x értékek alsó határát, melyekre ez nem érvényes ξ-vel. Ekkor $0 \leqq \xi < a_1$ és

$$\overline{\psi}_\varepsilon(\xi) = G_\omega(\xi), \quad \overline{\psi}'_\varepsilon(x) \leqq G'_\omega(\xi),$$

ahonnan



1., 2. ábra.

A jobb felső, ill. alsó sarokba tett $+$ — jelek a $h(x, y)$ függvény előjelét jelentik $y > 0$, ill. $y < 0$ esetén

$$\bar{f}(\xi, \overline{\psi}_\varepsilon(\xi)) + \varepsilon \leqq \omega(\xi, G_\omega(\xi)) = \omega(\xi, \overline{\psi}_\varepsilon(\xi)),$$

vagyis

$$\bar{f}(\xi, \overline{\psi}_\varepsilon(\xi)) < \omega(\xi, \overline{\psi}_\varepsilon(\xi)),$$

ami az a) esetben ellentmond az (F′) feltételnek. A bizonyítás többi része változatlan marad.

Egy harmadik bizonyítás is lehetséges meglepő egyszerű módon:

az a) esetben $\eta > 0$-ra az (F′) feltétel az $\bar{f}(x, \eta) \geqq \omega(x, \eta)$ alakot ölti, vagyis ez az összefüggés az (1′) és (2) egyenletek jobboldalai között, amiből a

$$\overline{G}(x) \geqq G_\omega(x) \qquad (0 \leqq x < a)$$

reláció azonnal következik.[3]

[3] L. pl. E. Kamke: Diff.-gleichungen reeller Funktionen. Leipzig (1952) 91. o. 5. tétel.

ON THE UNICITY OF THE SOLUTIONS OF THE ORDINARY FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

by I. Bihari

(Summary)

This paper gives a new sufficient condition for the existence of several solutions of the equation $y' = f(x, y)$ with the same initial condition. The stated theorem is the analogous of the uniqueness theorem of Perron [1] and involves a similar theorem of Tamarkin.[2] The theorem in question:

If the function $f(x, y)$ is continuous in the domain $D(|x| < a, |y| < b)$ and satisfies the condition

$$|f(x, y) - f(x, \varphi(x))| \geqq \omega(x, |y - \varphi(x)|)$$

where $\varphi(x)$ is a solution of the equation

$$y' = f(x, y)$$

with $\varphi(0) = 0$ for $|x| < a$, and $\omega(x, u)$ is a continuous non-negative function for $|x| < a$, $u \geqq 0$, with $\omega(x, 0) = 0$, $\omega(x, u) \neq 0$ for $u \neq 0$, further the equation $\omega' = \omega(x, u)$ has also solution $u \geqq 0$ beside the trivial solution $u \equiv 0$ and this exists for $|x| < a$, the equation (1) has at least two solutions (consequently in an infinit number too) through the origin. The same holds for all the points of the curve $\varphi(x)$ in D. The paper gives a lower boundary estimation for the difference of the maximal and minimal integrals of (1) corresponding to the origin.

О МНОГОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Бихари

(Резюме)

В статье дано новое достаточное условие для того, чтобы при данных начальных условиях уравнение $y' = f(x, y)$ имело несколько решений. Эта теорема является аналогом Перроновой теоремы [1] единства и содержит теорему Тамаркина многозначности.[2] Теорема следующая:

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области $D(|x| < a, |y| < b)$ и удовлетворяет условию

(F) $$|f(x, y) - f(x, \varphi(x))| \geqq \omega(x, |y - \varphi(x)|),$$

где $\varphi(x)$ является существующим в случае пересекающего начало координата $|x| < a$ уравнения

(1) $$y' = f(x, y)$$

и $\omega(x, u)$ в области $|x| < a$, $u \geqq 0$ является неотрицательной непрерывной функцией, относительно которой $\omega(x, 0) = 0$, но $\omega(x, u) \neq 0$, если $u \neq 0$ и если уравнение

$$u' = \omega(x, u)$$

имеет решение не только $u \equiv 0$, но и $u \geqq 0$, которое существует в случае $|x| < a$, то (1) имеет не меньше двух решений, которые пересекают начало координата. Это же относится к каждому пункту кривой $\varphi(x)$, находящемуся в области D. Дана оценка низшего расхождения максимального и минимального интегралов уравнения (1), принадлежащих к началу координата.

Les problèmes du concours de mathématique Miklós Schweitzer

Le concours de mathématique Miklós Schweitzer est organisé annuellement depuis 1949 par la Société Mathématique János Bolyai pour les étudiants des universités de Hongrie. En 1949 et 1950, les participants du concours pouvaient travailler pendant 5 heures sous surveillance; depuis le second tour du concours de l'année 1950, les problèmes sont publiés aux tableaux des annonces des chaires de mathématique et les participants ont un délai d'une semaine pour travailler aux solutions. Les solutions et le résultat du concours sont publiés annuellement dans notre périodique.

Concours de l'année 1949.

1. Considérons une suite infinie de sous-ensembles mesurables de l'intervalle $(0, 1)$ de mesure $\geqq \alpha > 0$. Démontrer qu'il existe un point qui appartient à une infinité des ensembles de la suite.

2. Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 nx}\, dx.$$

3. p étant un nombre premier impair, soient $a_1, \ldots, a_p$ et $b_1, \ldots, b_p$ deux permutations quelconques des nombres $1, \ldots, p$. Démontrer que les restes modulo p des produits $a_1 b_1, \ldots, a_p b_p$ ne fournissent jamais une permutation des nombres $1, \ldots, p$.

4. Soient A et B deux sous-ensembles mesurables et disjoints de l'intervalle $(0, 1)$, de mesures α et β respectivement. Désignons par n un nombre naturel donné et posons $\lambda = \frac{1}{n}$. Démontrer qu'il existe un intervalle partiel (c, d) de l'intervalle $(0, 1)$ tel que la partie commune de A et de (c, d) possède la mesure $\lambda\alpha$ et que celle de B et de (c, d) possède la mesure $\lambda\beta$. Démontrer

que la proposition analogue n'est plus valable si λ n'est pas de la forme $\frac{1}{n}$.

5. Soit $f(x)$ un polynôme de second degré dont les deux racines se trouvent dans l'intervalle fermé $[-1,+1]$ et tel que $|f(x)|$ prenne la valeur 1 dans le même intervalle. Démontrer que, pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$, il existe un point ξ dans le même intervalle tel que $|f'(\xi)| = \alpha$ et que la même propositition n'est plus valable pour $\alpha > 1$.

6. Démontrer que, k et n étant des nombres entiers positifs tels que $n \geqq k$, le plus grand diviseur commun des nombres $\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \binom{n+2}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}$ est égal à l'unité.

7. Déterminer les valeurs de la variable complexe z pour lesquelles la série

$$1+\frac{z}{2!}+\frac{z(z+1)}{3!}+\frac{z(z+1)(z+2)}{4!}+\cdots+\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{(n+2)!}+\cdots$$

est convergente et calculer la somme de celle-ci.

8. Six barres forment les quatre côtés et les deux segments joignant les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère dans l'espace. Les barres étant jointes par des charnières, démontrer que ce système à articulation peut subir des déformations.

Concours de l'année 1950, premier tour.

1. Soit $k_1, k_2, \ldots$ une suite de nombres positifs supérieurs à l'unité, telle que

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n < 2k_n$$

pour tout nombre naturel n. Démontrer qu'il existe un nombre $q > 1$ tel qu'on ait pour $n = 1, 2, \ldots$

$$k_n > q^n.$$

2. Étant donnés dans l'espace trois plans et un point de chacun, dans quelles conditions existe-t-il une surface de second ordre qui soit tangente aux plans donnés aux points donnés?

3. Démontrer qu'étant donnés n^2+1 intervalles sur l'axe des nombres, on peut en choisir ou bien une suite de $n+1$ intervalles dont chacun contient le suivant, ou bien $n+1$ intervalles dont aucun ne contient un autre.

4. Déterminer les polynômes qui prennent la valeur 1 pour $x=0$, dont les n premières dérivées s'annulent pour $x=0$ et qui s'annulent avec leurs m premières dérivées pour $x=1$.

5. Démontrer qu'on peut trouver à un nombre naturel k quelconque k nombres entiers consécutifs dont aucun n'est la somme des carrés de deux nombres entiers.

6. Démontrer l'identité suivante de déterminants:

$$|c_{ik}+a_i+b_k+1|_{i,k=1,\ldots,n}+|c_{ik}|_{i,k=1,\ldots,n}=$$
$$=|c_{ik}+a_i+b_k|_{i,k=1,\ldots,n}+|c_{ik}+1|_{i,k=1,\ldots,n}.$$

7. Soit x un nombre quelconque de l'intervalle $(0, 1)$ et désignons par $f_k(x)$ le nombre des multiples entiers de x qui sont situés entre k et $k+1$ (y compris k, mais $k+1$ exclu). Démontrer que la limite

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)}$$

existe et calculer la valeur de celle-ci.

8. Les éléments d'une matrice quadratique à n lignes sont non-negatifs et la somme des éléments de chaque ligne est égale à l'unité. λ étant une racine de l'équation caractéristique (séculaire) de cette matrice, démontrer qu'on a soit $|\lambda|<1$, soit $\lambda^k=1$ pour un k naturel.

9. Déterminer la somme de la série

$$x+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}+\cdots.$$

10. La variation totale de direction d'un arc de courbe plane est inférieur à π; la courbe possède de courbure en chacun de ses points, la courbure admet de dérivée suivant la longueur d'arc et cette dérivée ne s'annule nulle part. Étant donnés les cercles osculateurs des deux extrémités de l'arc de courbe et une de ces extrémités, on demande la détermination du lieu géométrique de l'autre extrémité.

Concours de l'année 1950, second tour.

1. Soient $a>0, d>0$ et

$$f(x)=\frac{1}{a}+\frac{x}{a(a+d)}+\frac{x^2}{a(a+d)(a+2d)}+\cdots;$$

exprimer $f(x)$ par une relation fermée.

2. Démontrer l'existence d'une constante numérique positive c de la propriété suivante: on peut trouver à tout α irrationnel et

positif une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $(p, q) = 1, q \equiv 1 \pmod 4$ et que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{c}{q^2}.$$

(P. ex. $c = 28$ remplit ces conditions.)

3. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres positifs et posons

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1,$$

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + \nu x_\nu}{\nu + (\nu - 1)x_1 + \cdots + 1 \cdot x_{\nu-1}}, \qquad \nu = 2, 3, \ldots, n.$$

Démontrer qu'à tout ε positif correspond un $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que, pour $n > n_0$, il existe un système d'arguments $(x_1, x_2', \ldots, x_n')$ qui remplit les conditions $x_1 + x_2' + \cdots + x_n' = 1$ et

$$f_\nu(x_1, x_2', \ldots, x_n') \leqq \varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

4. Posons

$$M = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix},$$

où p, q et r sont positifs et on a

$$p + q + r = 1.$$

Démontrer que tous les élément de la matrice M^n tendent vers $\frac{1}{3}$ pour $n \to \infty$

5. Soit

$$1 \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leqq N$$

une suite de nombres entiers telle que le plus petit multiple commun de deux quelconques de ses éléments est $\leqq N$. Démontrer l'inégalité

$$m < 3\sqrt{N}.$$

6. Un arc de courbe possède de cercle de courbure en chacun de ses points, le rayon de courbure est une fonction dérivable de la longueur d'arc et cette dérivée ne s'annule nulle part. La variation totale de direction de l'arc de courbe est inférieur à π. Les rayons de courbure aux points $P_1, P_2, \ldots, P_6$ croissent dans ce même ordre. Démontrer que le rayon de la circonférence qui

passe par les points P_1, P_3 et P_5 est inférieur à celui de la circonférence qui passe par les points P_2, P_4 et P_6.

7. Examiner l'allure de l'expression

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\log(n-\nu)}{\nu} - \log^2 n$$

pour $n \to \infty$.

8. L'artillerie côtière découvert un croiseur ennemi à une distance d'un km et commence à ouvrir le feu en tirant un coup par minute. Après le premier coup de canon, le croiseur commence à s'enfuir et s'éloigne du canon côtier à une vitesse de 60 km par heure. On suppose que $0{,}75 \cdot x^{-2}$ est la probabilité d'un coup qui porte, où x désigne la distance (en km) du croiseur au canon, et que l'artillerie continue à tirer jusqu'à ce que le croiseur sombre. Supposons encore que la probabilité de ce que le croiseur sombre après n coups qui ont porté soit égale à $1 - \frac{1}{4^n} (n = 0, 1, \ldots)$. Démontrer que la probabilité de ce que le croiseur réussit à se sauver est égale à

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}.$$

9. Étant donnés deux coniques d'un même plan, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une tangente quelconque de l'une des coniques contienne un point réel de l'autre conique.

Concours de l'année 1951.

1. Considérons une série partielle convergente de la série harmonique. Démontrer que les termes de cette série forment une suite partielle de densité zéro dans la suite des termes de la série harmonique.

2. Une fonction réelle $f(s)$, appelée quasi-limite, soit définie sur un ensemble H des suites $S = (s_1, s_2, \ldots)$ des nombres réels. Supposons que l'ensemble H contient avec la suite S la suite $S' = s_2, s_3, \ldots)$ aussi et que si $S = (s_1, s_2, \ldots)$ et $T = (t_1, t_2, \ldots)$ apartiennent à H, les suites $S + T = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \ldots)$ et $ST = (s_1 t_1, s_2 t_2, \ldots)$ en font partie également. En outre la fonction $f(s)$ doit remplir les conditions suivantes:

a) si $S = (c, c, \ldots)$, on a $f(s) = c$;
b) si les termes de la suite S sont non-négatifs, on a $f(s) \geqq 0$;
c) $f(S+T) = f(S) + f(T)$;
d) $f(ST) = f(S) f(T)$;
e) $f(s') = f(s)$.

Démontrer que si ces conditions sont remplies, $f(s)$ ne peut être qu'une des points d'accumulation de la suite S.

3. Considérons la suite récurrente définie par les formules $x_{n+1}=f(x_n)$, où $f(x)=4x-4x^2$. Déterminer les points x_0 du segments $[0, 1]$ qui engendrent des suites convergentes et calculer la limite de ces suites.

4. Démontrer que la série

$$1-\frac{1}{x(x+1)}-\frac{x-1}{2!x^2(2x+1)}-\frac{(x-1)(2x-1)}{3!x^3(3x+1)}-$$
$$-\frac{(x-1)(2x-1)(3x-1)}{4!x^4(4x+1)}-\cdots$$

est convergente pour toute valeur positive de x. En désignant sa somme par $F(x)$, déterminer

$$\lim_{x\to+0} F(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

5. 19% des poissons d'un lac sont des silures, 2% sont des sterlets et 80% appartiennent à d'autres espèces de poissons. On repêche 10 poissons, dont x sont des silures et y des sterlets. Déterminer l'espérence mathématique de l'expression $\frac{x}{1+y}$.

6. Dans le jeu de tennis, chaque échange de balle se termine par le gain d'un point au profit de l'un des adversaires. Un game est gagné par celui qui obtient le premier au moins quatre points de telle façon qu'en même temps il ait au moins une avance de deux points sur son adversaire. Le joueur qui, le premier, arrive à gagner au moins six games, avec un avantage d'au moins deux games sur son adversaire, gagne un set. De tous les points obtenus, quel est le pourcentage minimum des points gagnés par le vainqueur?

7. Soit $f(x)$ un polynôme tel que $f(0)=0$ et que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

soit un nombre entier toutefois que a et b sont des nombres entiers différents. Est-ce qu'il existe parmi les polynômes de cette sorte de tels dont les coefficients ne sont pas tous des nombres entiers?

8. n étant un nombre entier supérieur à trois, démontrer que le plus petit multiple commun de tous les produits $x_1x_2\ldots x_k$ à facteurs entiers positifs et tels que $x_1+x_2+\cdots+x_k\leqq n$, est inférieur à $n!$.

9. Choisissons quelques-unes des congruences suivantes en nombre infini

$$x \equiv 2m^2 \mod (2m-1), \qquad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Dans quelles conditions possèdent ces congruences des solutions communes et dans quelles conditions n'en possèdent-elles aucune?

10. Soit $f(x)$ un polynôme à coefficients entiers et désignons dar p un nombre premier, par $z_1, \ldots, z_{p-1}$ les $(p-1)$-ièmes racines de l'unité. Démontrer la congruence

$$f(z_1)f(z_2)\ldots f(z_{p-1}) \equiv f(1)f(2)\ldots f(p-1) \mod p.$$

11. Démontrer la proposition suivante: à un couple quelconque n, r de nombres naturels correspond un polynôme $f(x)$ de degré n à coefficients entiers tel que tous les polynômes $g(x)$ de degré n au plus sont irréductibles (dans le corps des nombres rationnels), pour lesquels les coefficients polynôme $f(x)-g(x)$ sont des nombres entiers inférieurs ou égaux à r en valeur absolue.

12. Appelons fonction arithmétique toute fonction qui est définie pour les nombres entiers et dont les valeurs sont aussi des nombres entiers. Peut-on donner des fonctions arithmétiques $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ telles que toute fonction arithmétique $F(x)$ puisse être exprimée de façon univoque par la relation suivante:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x),$$

où les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont des nombres entiers?

13. Dans un déterminant d'ordre $2n$ tous les éléments s'annulent, sauf ceux pour lesquels la différence des deux indices est un multiple de n. Combien de termes comprend le développement de ce déterminant?

14. Dans quelles conditions est égal le produit de tous les éléments d'un groupe commutatif fini à l'élément unité du groupe?

15. Faisons tourner uniformément la droite $z = x, y = 0$ autour de l'axe des z de sorte que l'intersection de cette droite et de l'axe des z se déplace en même temps d'une translation uniforme.

a) Déterminer la surface de révolution sur laquelle la surface obtenue peut être représentée isométriquement.

b) Déterminer dans cette représentation les lignes qui sont les images de l'axe et des génératrices de la surface obtenue.

16. Considérons une surface et deux familles de lignes géodésiques de cette surface, telles que par chaque point de la sur-

face passe une ligne géodésique et une seule de chaque famille. Les lignes de l'une des familles coupent les lignes de l'autre sous un angle constant. Démontrer qu'en ce cas la surface peut être représentée isométriquement sur le plan.

17. Démontrer que, pour qu'un polygone fermé du plan projectif divise celui-ci en deux parties, il faut et il suffit qu'il existe une droite coupant un nombre pair des côtés du polygone. (Quelques-uns des côtés du polygone peuvent passer par des points à l'infini.)

Concours de l'année 1952.

1. Quels sont les polyèdres convexes tels que tout segment qui relie deux des sommets du polyèdre est situé sur la surface du polyèdre?

2. Peut-on trouver trois coniques dans le plan telles que toute droite du plan coupe au moins deux d'entre elles et que par tout point du plan passent des tangentes d'au moins deux de ces coniques?

3. Démontrer que si $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ est un nombre parfait, on a

$$2 < \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1} < 4;$$

si a est impair, on peut remplacer le nombre 4 du dernier membre par le nombre plus petit $2\sqrt[3]{2}$.

4. Soit K le corps fini de p éléments, ou p est un nombre premier. Pour un polynôme

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (\in K[x])$$

quelconque soit

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{pi}.$$

Démontrer que pour deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ quelconques de $K[x]$, les conditions $f(x) | g(x)$ et $f(x) | \bar{g}(x)$ sont équivalentes.

5. Soit G un groupe non-commutatif. Considérons les anti-automorphismes de G, c'est-à-dire les transformations biunivoques $a \to a'$ de G en soi-même telles que $(ab)' = b'a'$. Démontrer que ceux-ci forment avec les automorphismes de G un groupe, dont le groupe des automorhismes constitue un facteur direct.

6. Quelle est la probabilité de ce qu'en formant n couples au hasard de $2n$ points donnés sur une circonférence et en reliant

par un segment les deux points de chaque couple, aucune des n cordes obtenues ne rencontre aucune autre? On suppose que chaque accouplement possible a la même probabilité.

7. Un point mobile se trouve à l'instant $t=0$ au point x_0 de l'axe des x, où $|x_0| \leqq N$, N étant un entier positif. Si ce point se trouve à l'instant t (entier non-négatif) au point x et si $|x| < N$, il se trouve à l'instant $t+1$ au point $x+1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et au point $x-1$ également avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Si à l'instant t ce point se trouve au point $x=N$ ou au point $x=-N$, à l'instant $t+1$ il se trouvera au point $N-1$ ou au point $-N+1$ respectivement avec la probabilité 1. Désignons par $P_k(t)$ la probabilité de ce que le point se trouve à l'instant t au point $x=k$. Déterminer les limites de $P_k(2t)$ et de $P_k(2t+1)$ lorsque t croît indéfiniment en parcourant les nombres entiers, pour tout entier fixé k.

8. Soit $c_k > 0$ et supposons que la série $\sum_1^\infty \frac{c_k}{k}$ est convergente. Pour quelles valeurs de z est-il convergente la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_1 c_2 \ldots c_n z^n ?$$

9. Désignons par C l'ensemble des fonctions intégrables dans l'intervalle (a, b) et satisfaisant à l'inégalité $0 \leqq f(x) \leqq 1$. Appelons élément "frontière" de l'ensemble C un élément $\varphi(x)$ de cet ensemble qui ne peut être exprimé par la moyenne arithmétique de deux éléments de C, autrement que par la formule évidente $\varphi(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(x)]$. Déterminer les éléments frontières de C et les éléments $f(x)$ de C qui sont des limites faibles d'une suite d'éléments frontières $\varphi_n(x)$, ce qui veut dire qu'on a pour toute fonction intégrable $h(x)$

$$\int_a^b \varphi_n(x)\, h(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, h(x) dx \qquad (n \to \infty);$$

(les intégrales peuvent être prises au sens de Riemann ou au sens de Lebesgue).

10. Démontrer que la fonction

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots + (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} - \frac{x}{2}$$

possède dans l'intervalle $0 < x < \frac{\pi}{m+1}$ le même signe que $(-1)^m$.

Concours de l'année 1953.

1. Soient les nombres a_ν tels que

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_n > 0$$

et que

$$b_1 \geqq a_1, \quad b_1 b_2 \geqq a_1 a_2, \ldots, \quad b_1 b_2 \ldots b_n \geqq a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Démontrer que

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

2. Plaçons sur un échiquier 32 pièces blanches et 32 pièces noires. Nous disons que deux pièces de couleurs différentes forment un couple si elles se trouvent dans la même ligne ou dans la même colonne. Quel est le nombre maximum et quel est le nombre minimum des couples?

3. Désignons par E l'ensemble des polynômes trigonométriques de la forme

$$f(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx,$$

où

$$c_0 \geqq c_1 \geqq \cdots \geqq c_n > 0.$$

Démontrer les inégalités

$$\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{n+1} \leqq \min_{E} \frac{\max\limits_{\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi} |f(x)|}{\max\limits_{0 \leqq x \leqq 2\pi} |f(x)|} \leqq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{n+1}.$$

4. Démontrer qu'une courbe fermée quelconque située sur la surface d'une sphère de rayon un et de longueur inférieure à 2π est toujours contenue dans une hémisphère de cette sphère.

5. Démontrer que tout entier positif posséde au moins autant de diviseurs de la forme $3k+1$ que de la forme $3k-1$ (il s'agit de diviseurs positifs).

6. En posant

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),$$

déterminer pour y fixé quelconque la valeur de la limite

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{y}{2n}\right)^n H_n\left(\frac{n}{y}\right).$$

7. Les nombres positifs t_1, t_2, t_3 et t_4 sont tels que chacun d'eux est inférieur à la somme des autres. Démontrer qu'il existe un tétraèdre dont les faces ont des aires respectives de t_1, t_2, t_3 et t_4.

8. Est-ce qu'il existe un anneau euclidien qui fait partie du corps des nombres réels, ne coïncidant pas avec celui-ci et dont le corps-quotient est identique au corps des nombres réels?

9. La fonction $w = f(z)$ étant holomorphe pour $|z| \leqq 1$, supposons que le diamètre de l'image du cercle de rayon un égale l'unité. Démontrer que le diamètre du cercle $|z| \leqq r$ est $\leqq r$ pour $0 \leqq r < 1$.

10. Un point se meut sur les arêtes d'un réseau de triangles réguliers dans le plan de sorte que, lorsqu'il est arrivé en un des sommets du réseau, il continue sa route avec la même probabilité sur une quelconque des arêtes issues de ce sommet. Démontrer que si le point continue son mouvement indéfiniment, il retourne avec la probabilité 1 à son point de départ.

Concours de l'année 1954.

1. Soit r un nombre entier supérieur à l'unité. Démontrer qu'il existe une infinité de séries géométriques ayant des termes positifs dont la somme est égale à l'unité et jouissant de la propriété suivante: les nombres positifs $S_1, S_2, \ldots, S_r$ étant arbitrairement choisis et ayant pour somme l'unité, on peut ranger les termes de la série géométrique en r séries infinies de telle façon que la somme de chaque série ainsi obtenue soit égale respectivement à $S_1, S_2, \ldots, S_r$.

2. Démontrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(a \sin \frac{2\pi n}{N}\right) e^{b \cos \frac{2\pi n}{N}}$$

est convergente, N étant un nombre naturel, a et b étant des nombres réels quelconques.

3. Peut-on faire correspondre un nombre réel Af à chaque fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle fermé $[0, 1]$ de sorte que $f(x) \leqq g(x), f(x) \neq g(x)$ entraîne $Af < Ag$? Existe-t-il une correspondance du même genre pour les fonctions monotones croissantes dans l'intervalle $[0, 1]$?

4. Déterminer les fonctions $f(x, y)$ réelles et définies sur tout le plan qui satisfont aux équations fonctionnelles

$$f(x+u, y+v) = f(x, y) + u$$

et

$$f(xv, yv) = f(x, y)\, v$$

pour des nombres réels x, y, u et v quelconques.

5. Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots$ des variables aléatoires complètement indépendantes et possédant une répartition uniforme dans l'intervalle (0, 1). Démontrer que la répartition de la variable aléatoire

$$\eta_n = \sqrt{n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\xi_k}{k}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

tende vers une répartition limite.

6. Les propositions suivantes sont-elles justes?

a) $a < b$ étant deux nombres naturels, on peut trouver parmi b nombres entiers consécutifs quelconques deux d'entre eux dont le produit est un multiple de ab.

b) $a < b < c$ étant des nombres naturels, on peut trouver parmi c nombres entiers consécutifs quelconques trois d'entre eux dont le produit est un multiple de abc.

7. Quels sont les groupes finis qui possèdent un sous-groupe maximum (propre) et un seul?

8. On entend par somme des idéaux A et B de l'anneau R l'ideal formé par les éléments de la forme $a+b$, où $a \in A$ et $b \in B$. Les idéaux A et B sont premiers entre eux si leur somme coïncide avec R. (Il s'agit des idéaux bilatéraux.)

Démontrer le théorème suivant: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant des idéaux de l'anneau R qui possède un élément unité, supposons que deux quelconques de ces idéaux sont premiers entre eux; en ce cas on peut trouver à des éléments $c_1, c_2, \ldots, c_n$ quelconques de R un élément x de R tel que $x - c_k \in A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

9. Soit P une ligne brisée connexe, simple et ouverte dans le plan. $\mathbf{v}$ étant un vecteur quelconque du plan, désignons par $P+\mathbf{v}$ la ligne brisée qui résulte de P par la translation par le vecteur $\mathbf{v}$. Démontrer que si $\mathbf{v} \neq 0$ est un vecteur tel que les lignes brisées P et $P+\mathbf{v}$ ont au moins un point commun, les lignes brisées P et $P+\alpha\mathbf{v}$ ont, elles aussi, au moins un point commun, pourvu que α soit la réciproque d'un entier positif. Est-ce que la proposition analogue est valable pour d'autres valeurs positives de α?

10. On construit sur les côtés AB, BC et CA du triangle ABC, en les prenant pour bases, de triangles isocèles semblables ABC_1, BCA_1 et CAB_1. Démontrer que les droites AA_1, BB_1 et CC_1 passent par un même point. Est-ce que ce théorème est valable dans les géométries hyperbolique et elliptique?

Concours de l'année 1955.

1. Soient $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ $n+m$ vecteurs unitaires dans l'espace cartésien à r dimensions. Supposons les vecteurs $\mathbf{a}$ per-

pendiculaires deux à deux, ainsi que les vecteurs **b** (donc, que $n, m \leqq r$). Faisons correspondre à un vecteur quelconque **x** de l'espace le vecteur

$$\mathbf{y} = T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_k)\mathbf{b}_k.$$

Démontrer que la suite de vecteurs $\mathbf{x}, T\mathbf{x}, T^2, \mathbf{x}, \ldots, T^n\mathbf{x} = T(T^{n-1}\mathbf{x}), \ldots$ converge et caractériser de façon géométrique la dépendance du vecteur-limite du vecteur **x**. (Le symbole **(c, d)** désigne le produit scalaire des vecteurs **c** et **d**:)

2. Soient $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ des fonctions intégrables au sens de Lebesgue dans l'intervalle (0, 1) et telles que

$$\int_0^1 f_i(x)\,dx = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Démontrer que, pour $0 < \alpha < 1$, il existe un sous-ensemble mesurable E de mesure α de l'intervalle (0, 1) tel que

$$\int_E f_i(x)\,dx = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

3. Soit la fonction de densité $f(x)$ de la variable aléatoire ξ une fonction paire et supposons en outre que $f(x)$ est monotone non-croissante pour $x > 0$ et que $D^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x)\,dx$ est fini. Démontrer l'inégalité

$$P(|\xi| \geqq \lambda D) \leqq \frac{1}{1+\lambda^2}$$

pour $\lambda \geqq 0$ quelconque.

4. Déterminer les nombres naturels α, β $(\alpha > 1)$ et les nombres premiers p, q et r qui satisfont à l'équation $p^\alpha = q^\beta + r^\alpha$ (les nombres α, β, p, q et r ne doivent pas être différents).

5. Démontrer que l'anneau R est commutatif, si $x^2 - x$ appartient au centre de l'anneau, quel que soit l'élément x de l'anneau.

6. N étant un nombre naturel et p un nombre premier, appelons le nombre entier k tel que $p^k \mid N$ et que $p^{k+1} \nmid N$, l'exposant de p, et la puissance p^k, la contribution de p dans la décomposition en facteurs premiers du nombre N. Démontrer que, pour un nombre naturel n quelconque, l'ordre de grandeur des exposants des nombres premiers dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$ est le même que l'ordre de grandeur des contributions correspondantes.

7. Démontrer que le polynôme

$$2\left(1+x^{\frac{p+1}{2}}+(1-x)^{\frac{p+1}{2}}\right)$$

est congru mod p au carré d'un polynôme ayant des coefficients entiers rationnels, quel que soit le nombre premier impair p.

8. Démontrer qu'un tétraèdre quelconque posséde trois dièdres aigus tels que parmi les faces qui les enferment, figure chaque face du tétraèdre.

9. Démontrer qu'étant donné un paraboloïde elliptique quelconque F_1, on peut trouver un paraboloïde elliptique F_2 (différente de F_1) et une transformation affine de l'espace qui transforme F_1 en F_2 de façon que toute droite reliant un point de F_1 qui n'est pas un point fixe de la transformation, au point correspondant de F_2, soit tangente à chacune des deux surfaces.

10. Appelons régulier un ensemble de points de l'espace ordinaire si un point quelconque de l'ensemble peut être transporté à un autre point quelconque de l'ensemble par une transformation congruente de l'espace qui transforme l'ensemble en soi-même. Démontrer que si les sommets d'un polyèdre convexe forment un ensemble régulier et si ses arêtes et ses faces sont congruentes, le polyèdre est un polyèdre régulier.

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket, az egyes feladatok megoldását külön lapon, a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.

Kitűzött feladatok

97. Bizonyítandó, hogy adott pozitív c számhoz található a természetes számoknak olyan $n_1, n_2, \ldots$ és $m_1, m_2, \ldots$ sorozata, hogy k minden értékére $\varphi(n_k) = \varphi(m_k)$, és ha $k \to \infty$, akkor $n_k/m_k \to c$.

Erdős Pál

98.* Kérdés, hogy ha az $x_1, \ldots, x_n$ pozitív számokra

$$x_1 + \cdots + x_n = n + a,$$

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} = n + \frac{1}{a},$$

ahol $0 < a < 1$, akkor teljesül-e az

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geqq n + 1 - a^2$$

egyenlőtlenség.

Barna Béla

99. Legyen f egy K körvonalnak a C síkgörbére való kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezése. Bizonyítandó, hogy tetszőleges $\delta > 0$ mellett van K-nak δ-nál rövidebb és egymásba nem nyúló $P_0P_1, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_0$ ívekre való olyan felbontása, hogy $f(P_0)f(P_1)\ldots f(P_n)f(P_0)$ egyszerű zárt poligon.

Császár Ákos

* A szerző a feladat megoldását nem ismeri.

Megoldott feladatok

73. feladat. A projektív sík ponthalmazát konvexnek mondjuk, ha bármely két pontjával együtt tartalmazza e két pont összekötő szakaszainak legalább az egyikét. Bizonyítandó, hogy ha egy ponthalmaz konvex, akkor vagy ez a halmaz, vagy a kiegészítő halmaz tartalmazza egy egyenesnek minden pontját.

(Czipszer János)

I. megoldás. A projektív síkot egy a síkon kívül elhelyezkedő O pontból egy O középpontú $\mathfrak{G}$ gömbre vetítve meggyőződhetünk arról, hogy a feladat állítása a következővel ekvivalens:

Ha $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{G}$ gömb egy olyan részhalmaza, amely eleget tesz a következő két feltételnek:

a) ha $P \in \mathfrak{A}$, akkor $P' \in \mathfrak{A}$ (P' a P pontnak O-ra vonatkozó tükörképét jelöli),

b) ha $P \in \mathfrak{A}$, $Q \in \mathfrak{A}$ és $Q \neq P \neq Q'$, akkor $\overset{\frown}{PQ} \subset \mathfrak{A}$ vagy $\overset{\frown}{PQ'} \subset \mathfrak{A}$ ($\overset{\frown}{PQ}$ a P és a Q pontokat összekötő rövidebbik főkörívet jelöli),

akkor vagy $\mathfrak{A}$, vagy $\mathfrak{G} - \mathfrak{A}$ tartalmaz egy főkört.

A $\mathfrak{G} - \mathfrak{A}$ halmazt $\mathfrak{B}$-vel jelöljük. Könnyű belátni, hogy $\mathfrak{B}$ is eleget tesz az $\mathfrak{A}$-ra kirótt a) és b) feltételeknek. A tétel állítása triviálisan teljesül abban az esetben, amikor $\mathfrak{A}$ vagy $\mathfrak{B}$ egy főkörön helyezkedik el. A továbbiakban feltesszük, hogy

c) sem $\mathfrak{A}$-t, sem $\mathfrak{B}$-t nem tartalmazza egyetlen főkör sem.

Megmutatjuk, hogy a következő két állítás közül legalább az egyik igaz:

d) Ha P, Q és R három pontja $\mathfrak{A}$-nak, melyek között nincs átellenes pontpár, és $\overset{\frown}{PQ} \subset \mathfrak{A}$, $\overset{\frown}{QR} \subset \mathfrak{A}$, akkor $\overset{\frown}{PR} \subset \mathfrak{A}$.

e) Ha P, Q és R három pontja $\mathfrak{B}$-nek, melyek között nincs ellentétes pontpár, és $\overset{\frown}{PQ} \subset \mathfrak{B}$, $\overset{\frown}{QR} \subset \mathfrak{B}$, akkor $\overset{\frown}{PR} \subset \mathfrak{B}$.

Tegyük fel, hogy e) nem igaz. Akkor található $\mathfrak{B}$-nek három különböző P, Q, R pontja úgy, hogy

$$P \neq Q' \neq R \neq P', \qquad \overset{\frown}{PQ} \subset \mathfrak{B}, \qquad \overset{\frown}{QR} \subset \mathfrak{B}, \qquad \overset{\frown}{PR} \not\subset \mathfrak{B}.$$

Könnyű belátni, hogy P, Q és R nem helyezkednek el egy főkörön. Minthogy $\mathfrak{B}$ is rendelkezik a b) tulajdonsággal, azért $\overset{\frown}{PR'} \subset \mathfrak{B}$. Ha még figyelembe vesszük, hogy $\mathfrak{B}$ szimmetrikus az O pontra, akkor beláthatjuk, hogy $\mathfrak{B}$ tartalmazza a

$$\Pi = \overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{QR} + \overset{\frown}{RP'} + \overset{\frown}{P'Q'} + \overset{\frown}{Q'R'} + \overset{\frown}{R'P}$$

poligont. Könnyű belátni, hogy Π egyszerű zárt poligon. Ha tehát A és B két olyan pontja $(\mathfrak{G}-\Pi)$-nek, hogy az A és B pontokat összekötő valamelyik főkörív Π-t páratlan számú pontban metszi és Π egyetlen csúcsán sem halad át, akkor Π elválasztja az A és B pontokat. Ennek alapján megmutatjuk, hogy ha $U \in \mathfrak{G}-\Pi$, akkor Π elválasztja az U és U' pontokat. Legyen γ egy olyan U-n áthaladó főkör, amelyik Π egyetlen csúcsát sem tartalmazza. γ metszi a $\overset{\frown}{PQ}$, $\overset{\frown}{QR}$, $\overset{\frown}{RP}$ ívek valamelyikét. Ez így látható be: Ha γ nem metszi $\overset{\frown}{PQ}$-t, akkor $\overset{\frown}{P'Q'}$-t sem metszi. Másrészt γ valahol metszi a PQ főkört, s így γ metszi a $\overset{\frown}{PQ'}$, $\overset{\frown}{P'Q}$ íveket. Eszerint γ metszi a $P'QR$ háromszög egyik oldalát, kell tehát, hogy messe e háromszög még egy oldalát, s így metszi vagy a $\overset{\frown}{P'R}$, vagy a $\overset{\frown}{QR}$ ívet. Bizonyítjuk most, hogy γ a $\overset{\frown}{PQ}, \overset{\frown}{QR}, \overset{\frown}{R'P}$ ívek közül vagy pontosan egyet metsz, vagy mind a hármat metszi. Láttuk, hogy az egyik ívet metszi. Tegyük fel, hogy legalább két ívet metsz; pl. a $\overset{\frown}{PQ}$, $\overset{\frown}{QR}$ íveket. Mivel γ a PQR háromszög két oldalát metszi, a harmadik $\overset{\frown}{RP}$ oldalt nem metszi, tehát az RP főkört az $\overset{\frown}{RP}$, $\overset{\frown}{R'P'}$ íveken kívül metszi, így szükségképp metszi az $\overset{\frown}{RP'}$ ívet. A mondottakból következik, hogy γ a Π poligonnak vagy két, vagy mind a hat oldalát metszi. Szimmetriaokokból következik, hogy γ-nak az U, U' pontokat összekötő félköríve Π-t egy vagy három, tehát mindenesetre páratlan számú pontban metszi. Π tehát valóban elválasztja az U, U' pontokat.

Ha d) nem lenne igaz, akkor a fenti okoskodást $\mathfrak{B}$ helyett $\mathfrak{A}$-ra alkalmazva adódnék, hogy $\mathfrak{A}$ tartalmaz egy

$$\Pi_1 = \overset{\frown}{P_1Q_1} + \overset{\frown}{Q_1R_1} + \overset{\frown}{R_1P_1'} + \overset{\frown}{P_1'Q_1'} + \overset{\frown}{Q_1'R_1'} + \overset{\frown}{R_1'P_1}$$

poligont (P_1, Q_1, R_1 különböző pontok és nincs köztük két átellenes). Mivel Π elválasztja a P_1, P_1' pontokat, Π-nek és Π'-nek lenne közös pontja, ami lehetetlen.

Ezzel kimutattuk, hogy d) és e) közül legalább az egyik igaz. A továbbiak során feltesszük, hogy d) igaz. Azt is feltesszük, hogy

f) $\mathfrak{A}$ nem tartalmaz főkört.

Vezessünk be $\mathfrak{A}$ pontjai között egy relációt a következő előírással:

$$P \sim Q, \text{ ha } P = Q, \text{ vagy}$$
$$\text{ha } P \neq Q \neq P' \text{ és } \overset{\frown}{PQ} \subset \mathfrak{A}.$$

Világos, hogy ez a reláció reflexív és szimmetrikus; megmutatjuk, hogy tranzitív is. Legyen $P \sim Q$, $Q \sim R$. Ha P, Q, R között van két azonos pont, akkor világos, hogy $P \sim R$. Tegyük fel, hogy P, Q, R különböző pontok, és így

(1) $$P' \neq Q \neq R', \qquad \widehat{PQ} + \widehat{QR} \subset \mathfrak{A}.$$

$P = R'$ lehetetlen, mert akkor a PQ főkör teljesen $\mathfrak{A}$-hoz tartoznék, ami ellentmond f)-nek. Minthogy $P \neq R'$, (1)-ből és d)-ből következik, hogy $\widehat{PR} \subset \mathfrak{A}$. Így tehát valóban $P \sim R$.

Ezzel kimutattuk, hogy „$\sim$" ekvivalencia-reláció, s így $\mathfrak{A}$-nak osztályokra való felbontását indukálja. Legyen $\mathfrak{A}_1$ az egyik osztály. Megmutatjuk, hogy ha $\mathfrak{A}_2$ az $\mathfrak{A}_1$ halmaznak O-ra vonatkozó tükörképét jelöli, akkor

(2) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$$

(3) $$\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = 0.$$

(3) abból következik, hogy $\sim$ definíciója szerint az átellenes pontok nem ekvivalensek. Legyen P egy pontja $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1)$-nek. Megmutatjuk, hogy $P \in \mathfrak{A}_2$. Legyen Q egy tetszőleges pontja $\mathfrak{A}_1$-nek, tehát $P \neq Q$. Ha $P = Q'$, akkor nyilván $P \in \mathfrak{A}_2$. Ha $P \neq Q'$, akkor $\widehat{PQ} \subset \mathfrak{A}$ vagy $\widehat{P'Q} \subset \mathfrak{A}$. $P \notin \mathfrak{A}_1$ és $Q \in \mathfrak{A}_1$ miatt $\widehat{PQ} \subset \mathfrak{A}$ lehetetlen, így $\widehat{P'Q} \subset \mathfrak{A}$, azaz $P' \sim Q$, s így $P' \in \mathfrak{A}_1$, tehát $P \in \mathfrak{A}_2$. Ezzel (2)-t is igazoltuk.

$\mathfrak{A}_1$ rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

g) $\mathfrak{A}_1$ nem tartalmaz átellenes pontpárokat.

h) Ha $P \in \mathfrak{A}_1$, $Q \in \mathfrak{A}_1$ és $P \neq Q$, akkor $\widehat{PQ} \subset \mathfrak{A}_1$.

g) triviálisan igaz. Ha P, $Q \in \mathfrak{A}_1$ és $P \neq Q$, akkor $P \sim Q$ miatt $\widehat{PQ} \subset \mathfrak{A}$. Ennélfogva $\widehat{PQ}$ minden belső R pontjára igaz az, hogy $R \in \mathfrak{A}$ és $\widehat{RP} \subset \mathfrak{A}$, így $R \sim P$, tehát $R \in \mathfrak{A}_1$. Ezzel h)-t is igazoltuk.

i) Legyen X egy tetszőleges pontja $\mathfrak{B}$-nek. Van olyan $\mathfrak{A}_1$-et tartalmazó félgömb, amelynek határköre X-et tartalmazza.

Ezt az állítást kétféleképpen is igazoljuk.

α) Legyen ξ az a főkör, melynek pólusa X. Legyen $\bar{\xi}$ a ξ főkör azon U pontjainak a halmaza, melyekre az XUX' fél-főkörív tartalmazza $\mathfrak{A}_1$-nek legalább egy pontját. Igazoljuk, hogy

j) $\bar{\xi}$ nem tartalmaz ellentétes pontpárokat,

k) $\bar{\xi}$ két különböző ponttal együtt az azokat összekötő rövidebbik főkörívet is tartalmazza.

Ad j) Ha U és U' a $\bar{\xi}$ halmazhoz tartoznék, akkor az XUX' és az $XU'X'$ félfőkör belsejében tartalmazná $\mathfrak{A}_1$ egy-egy pontját, a P és Q pontokat. Ebben az esetben $\widehat{PQ} \subset \mathfrak{A}$, ami lehetetlen, mert PQ tartalmazza X, X' pontok valamelyikét, és $X, X' \in \mathfrak{B}$.

Ad k) Tegyük fel, hogy $U \in \bar{\xi}$, $V \in \bar{\xi}$, $U \neq V$ és W az UV ív belső pontja. Feltevés szerint az XUX' félfőkör tartalmaz egy $\mathfrak{A}_1$-hez tartozó P pontot, az XVX' félfőkör tartalmaz egy $\mathfrak{A}_1$-hez tartozó Q pontot. h) szerint $\widehat{PQ} \subset \mathfrak{A}_1$. Világos, hogy PQ metszi az XWX' félfőkört, így ez utóbbi tartalmazza $\mathfrak{A}_1$ egy pontját, tehát $W \in \bar{\xi}$.

j)-ből és k)-ból egyszerűen következik, hogy van olyan $\xi_1 (\subset \xi)$ félfőkör, amely $\bar{\xi}$-t tartalmazza. $\bar{\xi}$ értelmezéséből következik, hogy az a ξ_1-et tartalmazó félgömb, amelynek határköre ξ_1 végpontjain és X-en halad át, tartalmazza $\mathfrak{A}_1$-et. Ezzel i) igazolást nyert.

β) Legyen

$$\mathfrak{A}_1^* = \sum_{P \in \mathfrak{A}_1} \overline{OP}, \qquad \mathfrak{A}_2^* = \sum_{P \in \mathfrak{A}_2} \overline{OP}.$$

Világos, hogy $\mathfrak{A}_1^*$, $\mathfrak{A}_2^*$ a tér konvex halmazai. Az X és X' pontokon áthaladó l egyenes is konvex. Világos (v. ö. (3)), hogy

$$l \cap \mathfrak{A}_1^* = O, \qquad \mathfrak{A}_1^* \cap \mathfrak{A}_2^* = O.$$

Tekintettel a második relációra, és arra, hogy $\mathfrak{A}_1^*$ és $\mathfrak{A}_2^*$ szimmetrikusok az O pontra nézve, következik, hogy O határpontja $\mathfrak{A}_1^*$-nak. Az l és $\mathfrak{A}_1^*$ konvex halmazok közül tehát egyik sem tartalmazza a másik belső pontját. Ennélfogva van olyan σ sík, amelynek egyik oldalán l-nek, másik oldalán $\mathfrak{A}_1^*$-nak nincs pontja. Világos, hogy $l \subset \sigma$, és a σ által lemetszett egyik félgömb $\mathfrak{A}_1$-et tartalmazza.

Legyen X_1, X_2, X_3 három nem egy félkörre eső pontja $\mathfrak{B}$-nek (ilyen pontok c) szerint találhatók). Található i) szerint három főkör, ξ_1, ξ_2 és ξ_3, amelyek áthaladnak rendre az X_1, X_2 és X_3 pontokon, s amelyeknek mindegyike határol egy $\mathfrak{A}_1$-et tartalmazó félgömböt. $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ lehetetlen, mert X_1, X_2, X_3 nincsenek egy főkörön. Van tehát két különböző, $\mathfrak{A}_1$-et tartalmazó félgömb. Ezzel kimutattuk, hogy van olyan K, K' csúcsú (π-nél kisebb nyílásszögű) Θ gömbi kétszög, amely $\mathfrak{A}_1$-et tartalmazza. Ha $K \in \mathfrak{B}$, akkor minden K-n áthaladó főkör, amelynek Θ-val a K és K' pontokon kívül más közös pontja nincs, rendelkezik avval a tulajdonsággal, hogy nincs közös pontja $\mathfrak{A}_1$-gyel, s így (2) miatt $\mathfrak{A}$-val sem, tehát része $\mathfrak{B}$-nek.

Tegyük most fel, hogy $K \in \mathfrak{A}$. c)-ből és (2)-ből következik, hogy $\mathfrak{A}_1$-nek van két olyan M és N pontja, amelyek nincsenek egy K-n áthaladó főkörön. Legyen γ_1 és γ_2 a KMK' és KNK' félkör. M és N választása folytán $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Kössük össze a K, K' pontokat egy γ_1-tól és γ_2-től különböző és a γ_1 és γ_2 által határolt kétszögben haladó γ főkörívvel. $\gamma \subset \mathfrak{A}$ f) miatt lehetetlen. Így γ tartalmaz egy $\mathfrak{B}$-hez tartozó L pontot. i) szerint van olyan δ főkör, amely L-et tartalmazza, és amely által határolt egyik $\mathfrak{G}_1$ félgömb $\mathfrak{A}_1$-et tartalmazza. Ha $\delta = \gamma$ volna, akkor világos, hogy M és N a δ főkör különböző oldalaira esnének, így a δ által határolt félgömbök egyike sem tartalmazhatná egyszerre az M, N pontokat és azért $\mathfrak{A}_1$-et sem. δ nem halad át tehát a K ponton, következésképp $\mathfrak{G}_1$ és Θ közös része egy $\mathfrak{A}_1$-et tartalmazó gömbháromszög. Minden olyan főkör, amelyik ezt a gömbháromszöget nem metszi, teljes egészében $\mathfrak{B}$-hez tartozik. Ezzel tételünket igazoltuk.

Czipszer János

II. megoldás. Legyen **A** a projektív sík konvex ponthalmaza, és **B** a kiegészítő ponthalmaz. A konvexitás definíciójából következik, hogy **B** is konvex. Feltesszük, hogy minden egyenesnek van közös pontja **A**-val is és **B**-vel is, és ebből ellentmondásra fogunk jutni. Feltesszük azt is, hogy sem **A**, sem **B** nem áll egyetlen egyenes pontjaiból, hiszen az ellenkező esetben a feladat állítása nyilván helyes.

Az **A** és **B** halmazok bármelyikének két pontja egyértelműen meghatározza azt az összekötő szakaszukat, amelyet a két halmaz egyike teljes egészében tartalmaz. Ez a konvexitásból és abból következik, hogy az egyenes egészét egyik halmaz sem tartalmazza.

Tudvalevő, hogy a projektív sík adott PQ, QR szakaszai (melyeknek egyike ponttá is fajulhat) egyértelműen meghatároznak egy PR szakaszt úgy, hogy a síkot a három szakasz mentén felvágva egyetlen elemi felület keletkezik. Ebben az esetben azt fogjuk mondani, hogy a három szóban forgó szakasz ciklust alkot.

Az **A** és **B** halmazok mindegyike nem tartalmazhat háromhárom, ciklust alkotó szakaszt. Ha ugyanis az **A** által tartalmazott $A_1A_2A_3A_1$ töröttvonal ciklus, akkor a síkot egyetlen elemi felületre vágja fel, ez tartalmazza a teljes **B** halmazt és minden általa tartalmazott $B_1B_2B_3B_1$ töröttvonalat. Ez utóbbi nem lehet tehát ciklus, hiszen az elemi felületen egy tartományt határol.

Feltehetjük ezek szerint, hogy **A** nem tartalmaz ciklust. Feltevésünkből következik, hogy ha **A** tartalmazza a $A_1A_2A_3$ háromszögvonalat, akkor tartalmazza az általa határolt háromszögtartományt is. Következik így az is, hogy ha A bejárja az A_2A_3 sza-

kaszt, akkor az **A** által tartalmazott A_1A szakasz is folytonosan változik.

Bizonyítjuk, hogy **B** *minden B pontján át fektethető olyan b egyenes, amelyet egyetlen* **A** *által tartalmazott szakasz sem metsz át.*

Legyen A_1 az **A** halmaz egy pontja és rögzítsünk egy A_1B szakaszt. A B ponton áthaladó minden e egyenesen egy irányítást definiálunk. Van e-nek **A**-hoz tartozó A_2 pontja. Az **A** által tartalmazott A_1A_2 és a rögzített A_1B szakasz meghatároz egy ezekkel ciklust alkotó BA_2 szakaszt. Ez utóbbin B-ből A_2 felé haladva az e egyenesen egy irányt definiáltunk. Ugyanezt az irányt kapjuk akkor is, ha A_2 helyett másik A_3 pontot választunk, mert ha az A_2 pontot az **A** által tartalmazott A_2A_3 szakaszon A_3-ba visszük át, akkor az $A_1BA_2A_1$ ciklus folytonosan változik, s így ciklus marad.

Ha az e egyenest B körül forgatjuk, irányítása nem változhatik mindvégig folytonosan, mert akkor félfordulat után ugyanarra az egyenesre ellenkező irányítás is adódnék. Van tehát olyan a B ponton áthaladó b egyenes, amelynek környezetében a forgó egyenes irányítása nem változik folytonosan.

A b egyenest nem metszheti át egyetlen **A** által tartalmazott szakasz sem, mert ha az egyenes forgatása során mindig evvel a szakasszal alkotott metszéspontját választjuk A_2-nek, akkor a folytonos átmenet révén folytonos változó irányítás adódnék ebben a környezetben. Ezzel fenti állításunkat igazoltuk.

A feladat állításának bizonyítására térünk. A **B** halmaz minden pontján át egy-egy olyan egyenest vesszünk fel, melyet **A** szakaszai nem metszenek. Ha van ezek között három közös pont nélküli, akkor az egyenesek tulajdonsága folytán **A** annak a négy háromszögtartománynak valamelyikén helyezkedik el, amelyekre a három egyenes a síkot felvágja. Ezen a háromszögtartományon kívül haladó egyenesnek **A**-val sincs közös pontja.

Ha viszont a felvett egyenesek mindegyike egy közös C ponton halad át, akkor C a **B** halmazhoz tartozik. Ellenkező esetben volna ugyanis a C ponton athaladó egyenesek mindegyikén C-től különböző és **B**-hez tartozó pont, így mindezek az egyenesek szerepelnének a felvett egyenesek között, és egyikük sem metszhetné az **A** halmaz egyetlen szakaszát sem. Ez azonban csak abban a kizárt esetben lehetséges, amikor **A** egyetlen, a C ponton áthaladó egyenesen van rajt.

A **B** halmaznak van két olyan C-től különböző pontja, amelyeket C-vel összekötve két különböző egyenest kapunk, hiszen **B** sem állhat egyetlen egyenes pontjaiból. Ez a két egyenes szerepel a felvett egyenesek között, s így nem metszik **A** szakaszait. E két

egyenes a síkot két szögtartományra osztja, egyeneseink tulajdonsága folytán az **A** halmaz ezeknek a szögtartományoknak egyikén helyezkedik el. A másik szögtartomány belsejében nincs **A**-nak pontja. Mivel C sem pontja **A**-nak, felvehetünk ebben a szögtartományban olyan egyenest, amelynek nincs **A**-val közös pontja.

Minden esetben ellentétbe jutunk azzal a feltevéssel, hogy sem **A**, sem **B** nem tartalmaz teljes egyenest, és ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Hajós György

A 73. feladatra (hiányosan kidolgozott) megoldást küldött még be BÁRTFAI PÁL és KONCZ KÁROLY.

79. feladat.* Az $M(x, y)$ és $N(x, y)$ folytonos függvények értékei $x < y$ esetén az (x, y), $x > y$ esetén pedig az (y, x) intervallum belsejéhez tartoznak. Bizonyítandó hogy az

$$a_{n+1} = M(a_n, b_n), \qquad b_{n+1} = N(a_n, b_n)$$

előírással képezett $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ sorozat konvergens.

(Aczél János)

Megoldás. A feltételekből határátmenettel $M(x, x) = x$ és $N(x, x) = x$ következik, úgyhogy a feladat állítása biztosan teljesül, ha valamely n-re $a_n = b_n$. Ha ezt az esetet kizárjuk, és az $\alpha_n = \min(a_n, b_n)$, $\beta_n = \max(a_n, b_n)$ jelölést alkalmazzuk, akkor a feladat előírásaiból $\alpha_n < \alpha_{n+1} < \beta_{n+1} < \beta_n$ következik, tehát az $\{\alpha_n\}$ és $\{\beta_n\}$ sorozatok külön-külön konvergálnak: $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$.

Ha bizonyos indextől kezdve $a_n < b_n$, akkor elég nagy n-ekre $\alpha_{n+1} = M(\alpha_n, \beta_n)$, tehát határátmenettel $\alpha = M(\alpha, \beta)$, ami az M-re vonatkozó előírás szerint csak az $\alpha = \beta$ esetben lehetséges. Ugyanez a helyzet, ha bizonyos indextől kezdve $a_n > b_n$, mert akkor $\beta_{n+1} = M(\beta_n, \alpha_n)$ folytán $\beta = M(\beta, \alpha)$. Ha végül van oly $\{n_k\}$ indexsorozat, hogy $a_{n_k} < b_{n_k}$, de $a_{n_k+1} > b_{n_k+1}$, akkor $\beta_{n_k+1} = M(\alpha_{n_k}, \beta_{n_k})$ következtében $\beta = M(\alpha, \beta)$, s így ismét $\alpha = \beta$. Eszerint a feladat állítása minden esetben helyes.

Megjegyezzük, hogy az M és N folytonos függvények egyikétől elég lett volna csak azt követelni meg, hogy értéke az argumentumok által határolt zárt intervallumhoz tartozzék. Megoldásunk akkor is alkalmazható, ha N-re csak ezt a gyengébb kikötést tesszük; M és N szerepe pedig természetesen felcserélhető.

* A feladat eredetileg hibás szöveggel jelent meg. Helyesbítését lásd VI. évf. 244 o.

Nem elegedő azonban, ha az M és N függvények mindegyikére csak a mondott gyengébb kikötést tesszük, amit $M(x, y) = \min(x, y)$, $N(x, y) = \max(x, y)$ példája mutat.

Császár Ákos

A 79. feladat megoldását beküldték még: BÁRTFAI PÁL, KŐVÁRI TAMÁS, PINTÉR LAJOS, RÉVÉSZ PÁL.

81. feladat. Bizonyítandó, hogy van olyan irracionális szám, amelyiknek lánctörtkifejezéséhez tartozó minden közelítő törtnek nevezője teljes k-adik hatvány (k adott természetes szám).

(Szűsz Péter)

Megoldás. Ismeretes, hogy a $q_0, q_1, \ldots$ végtelen lánctört közelítő törtjeinek nevezőit a $B_0 = 0$, $B_1 = 1$, $B_{n+1} = B_n q_n + B_{n-1}$ rekurziós formula szolgáltatja. Ha a $q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ számokat úgy határoztuk már meg, hogy $B_i = b_i^k$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, akkor q_n-t úgy kell meghatároznunk, hogy valamilyen b_{n+1} egész számra

$$b_{n-1}^k + q_n b_n^k = b_{n+1}^k$$

teljesüljön. Ha b_{n+1} értékét a

$$b_n^k \mid b_{n+1} - b_{n-1}$$

előírásnak megfelelően választjuk, akkor a fenti összefüggés q_n számára is egész értéket ad, mert

$$b_n^k \mid b_{n+1}^k - b_{n-1}^k$$

is teljesül. A q_n értékek sorozata megválasztható tehát a feladat követelményének megfelelő módon.

Surányi János

A 81. feladat megoldását beküldték még: KŐVÁRI TAMÁS, REJTŐ PÉTER.

Problèmes posés

97. Démontrer qu'on peut trouver, à un nombre positif c quelconque, deux suites $n_1, n_2, \ldots$ et $m_1, m_2, \ldots$ de nombres naturels telles que $\varphi(n_k) = \varphi(m_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ et que $n_k/m_k \to c$ pour $k \to \infty$.

P. Erdős.

98. Les égalités

$$x_1 + \cdots + x_n = n + a$$

et

$$\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}=n+\frac{1}{a}$$

étant vérifiées pour les nombres positifs $x_1, \ldots, x_n$ et pour $0 < a < 1$, s'ensuit-il nécessairement la validité de l'inégalité

$$x_1^2+\cdots+x_n^2 \geqq n+1-a^2 ?$$

*B. Barna.**

99. Soit f une transformation biunivoque et continue d'une circonférence K en une courbe plane C. Démontrer que, pour un $\delta > 0$ quelconque, il existe une decomposition de K en arcs $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_0$ non empiétants et de longueurs inférieures à δ, telle que $f(P_0)f(P_1)\ldots f(P_n)f(P_0)$ soit un polygone simple fermé.

Á. Császár.

* L'auteur ne connaît pas la solution du problème.

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Bolyai Társulat címére küldjük (Bp. V., Reáltanoda u. 13—15.) A borítékra írjuk rá feltűnően: *Példarovat.* Minden megoldást külön lapra írjunk, név feltüntetésével. Közlésre szánt példákat — megoldással együtt — szívesen fogadunk. Megjegyezzük azonban, hogy geometriai példákkal rovatunk évekre el van látva.

Kitűzött példák

77. Egy polinom $x-a$, $x-b$, $x-c$-vel való osztásakor fellépő maradékok rendre A, B, C. Mi az osztás maradéka, ha a polinomot $(x-a)(x-b)(x-c)$-vel osztjuk?

(Biró József)

78. Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ egész együtthatós polinomok, és minden egész n-re legyen $g(n)$ osztója $f(n)$-nek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f(x)=g(x)h(x)$, ahol $h(x)$ olyan — nem feltétlenül egész együtthatós — polinom, melyre $f(n)$ egész, ha n is az.

(Fried Ervin)

79. Egy háromszög négy érintőkörének sugara mértani sort alkot. Mekkorák a háromszög szögei?

(Biczó Géza)

80. Meghatározandó az ABC háromszögből kivágható legnagyobb területű olyan rombusz, melynek egyik szöge egybeesik az ABC háromszög egyik szögével.

(Bártfai Pál)

Megoldott példák

(A VI. évfolyam 1. és 2—3. számában kitűzött példák megoldása.)

62. példa. Gyakran halljuk a parallelepipedonok következő osztályozását; téglatest, egyszeresen ferde, kétszeresen ferde, há-

romszorosan ferde parallelepipedon. Kielégítő-e ez az osztályozás, ha a lapszögek és élszögek derékszögűségére egyaránt tekintettel vagyunk?

63. példa. Bizonyítsuk be, hogy ha egy parallelepipedonnak van 90°-os élszöge és 90°-os lapszöge, akkor az elsőből legalább 16, a másodikból legalább 8 van.

A 62. és a 63. példa megoldása. A parallelepipedonnak 12 (négyenkint párhuzamos) éle, tehát 12 lapszöge, továbbá 6 (páronkint párhuzamos) parallelogramma-lapja, tehát 24 élszöge van. A lapok, ill. élek párhuzamosságából következik, hogy

egy lapszög derékszögűsége maga után vonja másik három lapszög derékszögűségét (azokét, amelyeknek az éle az első lapszög élével párhuzamos);

egy élszög derékszögűsége maga után vonja másik hét élszög derékszögűségét (azokét, amelyek vele egy lapon és az ezzel párhuzamos lapon vannak).

Elég tehát figyelembe venni három egymástól független élszöget és három egymástól független lapszöget derékszögűség, ill. ferdeszögűség szempontjából; például a parallelepipedon egy csúcsból kifutó három élének és lapjának szögeit: egy tríéder oldalait és lapszögeit.

Világos, hogy pusztán a lapszögek szempontjából négy eset lehetséges:

D_0) egyetlen derékszögű lapszög sincs;
D_1) egy derékszögű lapszög van;
D_2) két derékszögű lapszög van;
D_3) mindhárom lapszög derékszögű.

Hasonló esetek lehetségesek az élszögek szempontjából is:

d_0) egy derékszögű élszög sincs;
d_1) egy derékszögű élszög van;
d_2) két derékszögű élszög van;
d_3) mindhárom élszög derékszögű.

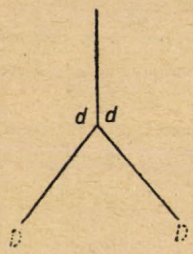
Kérdés, hogy a négy-négy eset elvben 16 kombinációjából hány valósítható meg.

Példa a D_0d_0 esetre: a szabályos tetraéder bármelyik testszöglete.

Megvalósulhat-e a D_0d_1 eset? Igen, könnyű példát találni rá: egy kocka egy csúcsból kiinduló két éle és egy testátlója. (A lapszögek: 120°, 45°, 45°.)

Megvalósulhat-e a D_0d_2 eset? Ha a tríéder egyik éle két másik élre merőleges, akkor a térgeometria ismert tétele szerint a másik két él síkjára is merőleges ez az él, és egyúttal a rajta áthaladó

síkok is (1. ábra). A d_2 eset tehát nemhogy a D_0-val, de még a D_1-gyel sem járhat együtt: ha a triéder két élszöge 90°-os, akkor legalább *két* lapszöge szintén 90°-os.



1. ábra

Viszont a D_2d_2 eset megvalósulhat; példa rá egy kocka egy csúcsból kiinduló két éle és egy lapátlója.

Világos, hogy a harmadik élszög és a harmadik lapszög (amelyeket az 1. ábra jelölés nélkül hagy) egyszerre derékszögek vagy ferdeszögek, hiszen a lapszög nagyságát az élére merőleges, lapjaiban fekvő félegyenesek szöge méri. Ebből következik, hogy D_3 csak d_3-mal, d_3 csak D_3-mal járhat együtt.

Eddigi meggondolásaink eredményét az alábbi táblázat foglalja össze:

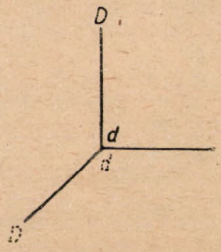
	D_0	D_1	D_2	D_3
d_0	+			−
d_1	+			−
d_2	−	−	+	−
d_3	−	−	−	+

A D_1d_0 esetre megint könnyű példát találni: egy kocka egy csúcsból kiinduló éle, lapátlója és testátlója. (A lapátlón és a testátlón átfektetett sík, a kocka egyik átlós síkja, merőleges az él és a lapátló síkjára, a kocka egyik lapjára.)

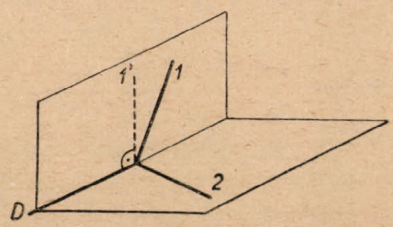
Megvalósítható-e D_1d_1 eset?

Tegyük fel először, hogy a 90°-os élszög benne van a lapszög egyik lapjában; ekkor egyik éle azonos a lapszög élével, másik éle viszont merőleges a lapszög másik lapjára. (Ha merőleges síkok egyikében a síkok metszésvonalára merőlegest húzunk, ez a másik síkra is merőleges lesz!) Ekkor azonban ez az él a másik lap minden egyenesére merőleges, többek között a triéder harmadik élére is. Fellép tehát egy másik 90°-os élszög is (az ábra ezt szaggatott d-vel jelöli). A két derékszögű élszög létezése viszont maga után vonja egy másik derékszögű lapszög fellépését is (lásd az előző esetet, 1. ábra). Ezt a 2. ábra szaggatott D-vel jelöli.

Elképzelhető volna azonban a $D_1 d_1$ eset úgy is, hogy a 90°-os élszög, d, a 90°-os lapszöggel, D-vel „szemközt" van; egyik éle az egyik lapban, másik a másikban. Azt állítjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha d-nek legalább az egyik éle merőleges D élére. Ha ugyanis (3. ábra) például 1 nem esik egybe az ugyanezen félsíkban D élére emelt 1′ merőlegessel, akkor $2 \perp 1$ (a feltevés szerint), $2 \perp 1'$ (ugyanis 1′ merőleges a két merőleges lap metszésvonalára, ezért a másik lapra, és így annak minden egyenesére), tehát 2 merőleges 1 és 1′ síkjára, és így D élére is. Tehát ekkor is mindenképpen fellép még egy 90°-os élszög, és így — az előbbiek szerint — még egy 90°-os lapszög is.



2. ábra



3. ábra

Ezzel bebizonyítottuk a 63. példa állítását: ha a parallelepipedonnak van egy 90°-os élszöge és egy 90°-os lapszöge, akkor van legalább *két független* (vagyis összesen 16) 90°-os élszöge és *két független* (vagyis összesen 8) 90°-os lapszöge.

A 62. példa megoldásához szükség van még a $D_2 d_0$ és $D_2 d_1$ esetek vizsgálatára. Világos, hogy ha egy lapra másik két lap merőleges (ezt az esetet jelöltük D_2-vel), akkor a két lap közös éle is merőleges az első lapra, s így annak éleire is. D_2 tehát maga után vonja d_2-t, vagyis $D_2 d_0$ és $D_2 d_1$ nem léphetnek fel. Az összes lehetséges eseteket a táblázat mutatja:

	D_0	D_1	D_2	D_3
d_0	+	+	−	−
d_1	+	−	−	−
d_2	−	−	+	−
d_3	−	−	−	+

Nem négy eset lehetséges tehát, hanem öt: a „kétszeresen ferde" parallelepipedon vagy élszögek tekintetében kétszeresen, lapszögek tekintetében háromszorosan ferde ($D_0 d_1$), vagy fordítva ($D_1 d_0$).

Megoldást küldött

a 62. példára: Biczó Géza, Bukovszky Ferenc, Csiszár Imre, Koncz Károly, Reményi Gusztáv;

a 63. példára ugyanezek (Csiszár Imre két megoldást) és Kántor Sándor, Kiss Ernő.

64. példa. Bizonyítsuk be, hogy ha egy z komplex szám valós része 1-nél nagyobb, akkor

$$\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}.$$

(Fried Ervin)

1. megoldás. A $z=x+iy$ komlex számról feltettük, hogy $x>1$. A feltevésből következik, hogy

$$4-4x<0.$$

Adjunk mindkét oldalhoz x^2+y^2-et:

$$4-4x+x^2+y^2=(2-x)^2+y^2<x^2+y^2,$$

vagyis

$$|(2-x)-iy|<|x+iy|.$$

De

$$(2-x)-iy=2-z.$$

Így

$$|2-z|<|z|.$$

Osszuk el mindkét oldalt $2|z|$-vel:

$$\frac{|2-z|}{|2z|}=\left|\frac{2-z}{2z}\right|=\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}.$$

Qu. e. d.

Dux Erik

Hasonló (számításos) megoldást küldött be még: Ádám András, Biczó Géza, Csiszár Imre, Fried Vilmos, Kántor Sándor, Kelemen József, Kiss Ernő, Koncz Károly, Reményi Gusztáv.

2. megoldás. Valamely z komplex szám reciprokát ábrázoló pontot megkapjuk, ha a z konjugáltját ábrázoló pontnak az $|z|=1$ körre vonatkozó inverzét képezzük.

A feladat szerint z a komplex síknak a valós tengelyre az 1 pontban emelt merőlegestől jobbra eső részén van. Ugyanebben a síkrészben van z is.

Bizonyítandó tehát, hogy az egységkörre vonatkozó inverzió a valós tengelyre az 1 pontban emelt merőlegestől jobbra eső síkrészt a $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ kör belsejére képezi le.

Ismeretes tétel szerint egy kör középpontján át nem haladó egyenesnek a körre vonatkozó inverze a kör középpontján átmenő kör (a két kör centrálisa merőleges az egyenesre). Az 1 pontnak az egységkörre vonatkozó inverze pedig nyilván önmaga. Tehát az egységkörre vonatkozó inverzió a valós tengelyre az 1 pontban állított merőlegest az $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ körvonalba viszi át, amiből a bizonyítandó állítás már következik.

Csiszár Imre

Hasonló megoldást küldött be még : Biczó Géza, Bukovszky Ferenc, Klafszky Emil, Reményi Gusztáv.

65. példa. Ismeretes logikai feladat a következő: három fekete és két szürke kalap közül kettőt elteszünk, hármat pedig egy-egy ember fejére teszünk, sötétben, hogy se azt ne lássák, milyen színű kalapokat tettünk el, se azt, milyen színű került a fejükre. Villanygyújtás után ki kell találniuk, milyen színű kalap van a fejükön. Bizonyítsuk be, hogy ha a három ember egymás mögött áll, azaz, ha egyikük a két előtte lévőnek a kalapját látja, egy másik csak a harmadikét, a harmadik pedig egyikét sem, akkor a kalapok bármely kiválasztása esetén pontosan egyikük találja ki elsőként, milyen kalap van a fején. Melyik lesz az? (Feltesszük, hogy mindegyikük logikusan és egyformán gyorsan gondolkozik; ha kitalálja kalapja színét, azt azonnal közli; végül mindegyik tisztában van azzal, hogy ezek a feltételek mindegyikükre teljesülnek.)

Megoldás. Jelölje a fekete kalapot *F*, a szürkét *S*. Az alábbi kalapeloszlások lehetségesek a 3 személy közt.

1	2	3	4	5	6	7
S	*S*	*S*	*F*	*F*	*F*	*F*
S	*F*	*F*	*S*	*S*	*F*	*F*
F	*S*	*F*	*S*	*F*	*S*	*F*

(A vonal alatti első sor jelöli az elöl álló kalapjának színét.)

Ha az 1. eset következik be, akkor a hátsó két szürke kalapot lát maga előtt, tehát mivel több szürke kalap nincs, kitalálja, hogy fekete kalap van a fején.

Ha a 2. vagy 3. eset következik be, akkor a középső tudja, hogy a hátsó azért nem szól, mert nem lát maga előtt két szürke kalapot. Tehát ha a középső szürke kalapot lát maga előtt, ebből és a hátsó hallgatásából kitalálhatja, hogy fekete kalap van a fején.

A 4—7. esetekben a két hátsó egyike sem tud következtetni az előtte álló kalapjának színéből, és így nem szólal meg. Ebből viszont a legelső kitalálhatja, hogy nem az 1—3. eset áll fenn, hanem a 4—7. esetek valamelyike, vagyis az ő fején fekete kalap van.

Tehát valóban mindegyik esetben a három közül pontosan egy találja ki, milyen színű kalap van a fején, mégpedig mindig egy fekete kalapú; ha több ilyen van, akkor a fekete kalapúak közül a legelőbb álló.

Koncz Károly

Megoldást küldött be még: Ádám András, Biczó Géza, Bukovszky Ferenc, Csiszár Imre, Fuchs Rezső, Kántor Sándor, Klafszky Emil, Reményi Gusztáv.

66. példa. Keressük annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy négyszög érintőnégyszög legyen, azaz legyen olyan kör, amelyet minden oldalegyenese érint.

Megoldás. Konvex négyszög *beírt* köre létezésének ismert szükséges és elegendő feltétele az, hogy a szemközti oldalak összege egyenlő legyen. Célunk vagy kiterjeszteni ezt a tételt, vagy más szükséges és elegendő feltételt találni azokra az esetekre, amikor az érintőnégyszög konkáv, esetleg hurkolt, vagy amikor a kör, amelyet a négyszög oldalegyenesei érintenek, nincs a négyszög belsejében, még ha konvex is a négyszög.

A 4. és az 5. ábráról leolvasható, hogy ha van érintőköre a konvex, konkáv vagy hurkolt négyszögnek, akkor két oldalának összege mindig egyenlő a másik két oldal összegével; mégpedig, ha a négyszög belsejében van a kör, akkor a szemközti oldalak összege, ha nincs a belsejében, akkor két-két szomszédos oldal összege egyenlő.

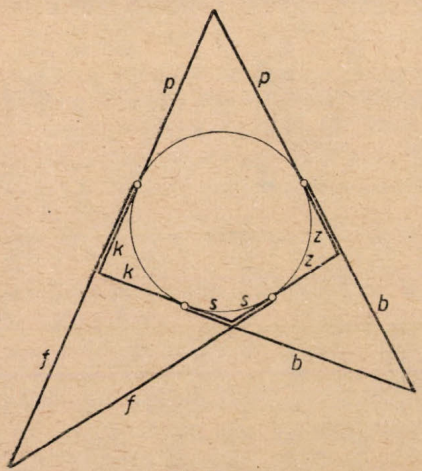
1. *Konvex* négyszög beírt körére a bizonyítás az l. gimnáziumi tankönyvekből ismeretes (4. ábra). Kívülről érintő kör esetében (5. ábra) a két „baloldali" oldal összege $p-k+k-b$, a két „jobboldalié" $p-z+z-b$.

2. *Konkáv* négyszög beírt köre esetében (4. ábra) a szemközti oldalak összege $p+f+b-s$, ill. $p+b+f-s$, kivülről érintő

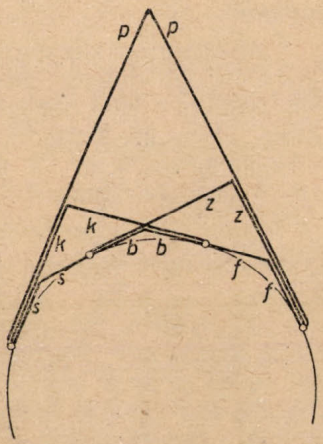
* Az egyenlő betűkkel jelölt szakaszok ugyanabból a pontból a körhöz húzott érintőszakaszok; a betűk egy-egy szín kezdőbetűi.

kör esetében (5. ábra) „baloldalt“ $p-s+s+b$, „jobboldalt“ $p-f+f+b$ az oldalak összege.

3. *Hurkolt* érintőnégyszögben mindenképpen a szomszédos oldalak összege egyenlő, annak megfelelően, hogy ekkor csak kívülről érintő kör fordulhat elő. A 4. ábra esetében $f-k+k+b$ és $f+z+b-z$ az egyenlő oldalszögek, az 5. ábra esetében $k-s+s+z$ és $k+f+z-f$.



4. ábra



5. ábra

Igaz-e a fenti állítás megfordítása, vagyis igaz-e, hogy ha egy négyszög két oldalának összege egyenlő a másik két oldal összegével, akkor a négyszög oldalegyenesei kört érintenek?

Konvex négyszögre, és abban az esetben, amikor a *szemközti* oldalak összege egyenlő, az I. gimnáziumi tankönyvek megadják a bizonyítást; lásd például GALLAI TIBOR és PÉTER RÓZSA könyve 1. kiadásának 316. lapján. Ez a bizonyítási eljárás (az egyik oldalegyenes párhuzamos eltolódása és indirekt okoskodás) átvihető a többi esetre is, kivéve, ha a négyszög olyan trapéz, amelyben kétkét szomszédos oldal összege egyenlő; vagyis parallelogramma.** Ebben az esetben a kívülről érintő kör elfajul: sugara végtelenné

** Valóban, tegyük fel, hogy egy olyan trapézban, amely nem parallelogramma, két szomszédos oldal összege egyenlő a másik kettő összegével. Vágjunk le a trapézból egy háromszöget úgy, hogy a megmaradó idom parallelogramma legyen. A parallelogrammára szintén érvényes a mondott összefüggés, a háromszögre viszont a háromszög-egyenlőtlenség (a metszésvonal kisebb a másik két oldal összegénél), s ez együtt ellentmond eredeti feltevésünknek.

válik és középpontja is a végtelenbe távozik. Parallelogrammának is lehet azonban *beírt* érintőköre, ti. akkor, ha minden oldala egyenlő, vagyis ha rombusz. Ha tehát az elfajuló esetet ki akarjuk rekeszteni, így kell fogalmaznunk az érintőkör létezésének szükséges és elegendő feltételét:

Egy négyszög oldalegyenesei akkor és csak akkor érintenek kört, ha a négyszög két oldalának összege egyenlő a másik két oldal összegével, és a négyszög nem különböző oldalú parallelogrammma.

Megjegyzés. Hurkolt négyszög belsejében nem lehet olyan kör, amely minden oldalegyenesét érinti, viszont hurkolt négyszöggel az sem fordulhat elő, hogy szemközti oldalainak összege egyenlő. Utóbbi állításunk belátásához csupán a háromszög-egyenlőtlenséget kell alkalmaznunk arra a két háromszögre, amelyet a hurkolt négyszög oldalai bezárnak.

Megoldást küldött be: BICZÓ GÉZA, BUKOVSZKY FERENC, KÁNTOR SÁNDOR, KLAFSZKY EMIL, KONCZ KÁROLY, REMÉNYI GUSZTÁV.

67. példa. Ismeretes, hogy az x^2+y^2 kifejezés a valós számok körében nem bontható tényezőkre, de a komplex számok körében már igen: $x^2+y^2=(x+iy)\cdot(x-iy)$. Bizonyítsuk be, hogy $x^2+y^2+z^2$ még a komplex számok körében sem bontható fel két polinom szorzatára. Igaz-e ez háromnál több változó négyzetének összegére is?

(Balatoni Ferenc)

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy $n \geqq 3$ esetén a $P \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ polinom nem lehet azonosan egyenlő két komplex számtest feletti polinom szorzatával.

Mindkét polinomnak legalább elsőfokú kellene lennie, hiszen konstans tényezővel végtelen sok felbontás adható, amelyeket nem szokás különbözőknek tekinteni. De egyik sem lehet másod- vagy magasabb fokú, mert akkor elsőfokú polinommal szorozva harmadvagy magasabbfokú tag lépne fel összevonás után is; márpedig két polinom akkor és csak akkor azonosan egyenlő, ha tagról-tagra egyezik, ezért a szorzat nem lehetne azonosan egyenlő P-vel. Tehát P csak két elsőfokú, pontosan n változós polinom szorzata lehet; hiszen ha valamelyik változó együtthatója valamelyik tényezőben 0 volna, akkor a szorzatban az illető változó négyzete nem szerepelhetne. Fejtsük ki két ilyen polinom szorzatát, és tegyük fel, hogy $S \equiv P$. (Az alábbi összegekben $x_0 = y_0 = 1$.)

$$S \equiv \sum_0^n a_i x_i \cdot \sum_0^n b_k x_k =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x_1 + (a_0 b_2 + a_2 b_0) x_2 + \cdots + (a_0 b_n + a_n b_0) x_n +$$
$$+ (a_1 b_2 + a_2 b_1) x_1 x_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1) x_1 x_3 + \cdots + (a_1 b_n + a_n b_1) x_1 x_n +$$
$$+ (a_2 b_3 + a_3 b_2) x_2 x_3 + \cdots + (a_2 b_n + a_n b_2) x_2 x_n + \cdots$$
$$\cdots + (a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}) x_{n-1} x_n + \sum_1^n a_p b_p x_p^2.$$

Minthogy a_i, b_k ($i = k = 0$ kivételével) $\neq 0$, ezek közül egyet tetszőlegesen felvehetünk. Legyen pl. $a_1 = 1$. S-ben x_1^2 együtthatója csak úgy lehet 1, ha $b_1 = 1$. Mivel $x_1 x_i$ együtthatói 0-val kell, hogy megegyezzenek, $a_i + b_i = 0$ kell, hogy legyen $i = 2, 3, \ldots, n$-re.

De kell, hogy $x_2 x_3$ együtthatója is 0 legyen:

$$a_2 b_3 + a_3 b_2 = 0.$$

Azonban $a_2 + b_2 = 0$ és $a_3 + b_3 = 0$ miatt $-a_2 a_3 - a_2 a_3 = 0$, azaz $a_2 a_3 = 0$ kellene, hogy legyen, vagyis a_2 és a_3 egyikének el kellene tűnnie, de ez ellentmondásban van egy előbbi megállapításunkkal („pontosan n változós polinomok"). Az a feltevés tehát, hogy a felbontás lehetséges, ellentmondásra vezet. A bizonyításból kitűnik, hogy az ellentmondás már $n = 3$ esetén bekövetkezik.

Reményi Gusztáv.

Megoldást küldött be még: BÁRTFAI PÁL, BICZÓ GÉZA, BUKOVSZKY FERENC, DUX ERIK, KISS ERNŐ, KONCZ KÁROLY, QUITTNER PÁL.

68. példa. Érintkezhetik-e a háromszög köré írt kör a háromszög Feuerbach-körével? (Feuerbach-kör: A háromszög magasságainak és súlyvonalainak talppontjain áthaladó kör.)

(Obláth Richárd)

Megoldás. A kérdésre a válasz igenlő: minden derékszögű háromszögben — és csak az ilyenekben — a Feuerbach-kör érinti a körülírt kört.

A Feuerbach-kör — a továbbiakban röviden f-kör — sugara minden háromszögben 0,5 r, azaz fele a körülírt kör — a továbbiakban k-kör — r sugarának. Sugaraik különbözősége folytán valóságos (nem elfajuló) háromszögben k és f nem lehetnek azonosak.

Tegyük fel, hogy ABC háromszögünk k és f köre érintik egymást, és jelöljük (egyetlen) közös pontjukat T-vel. Érintkezésük csak belső lehet, mert f-nek vannak pontjai k belsejében: a k-ban

húrként szereplő oldalak felezőpontjai. Így köreink centrálisának hossza, mint sugaraik (pozitív) különbsége, ugyancsak 0,5 r. Ez a megegyezés egyrészt azt jelenti, hogy f átmegy k-nak K középpontján, másrészt, — mivel T is a centrálison van — hogy T tükörképe K-nak az f kör F középpontjára nézve.

Az Euler-egyenes ismert tulajdonsága szerint viszont K-nak F-re vonatkozó tükörképe minden háromszögben a M magasságpont. Így esetünkben $T \equiv M$, vagyis a magasságpont rajta van k-n.

Állítjuk, hogy ekkor M egybeesik a háromszög valamelyik csúcsával, és hogy a háromszög éppen ezen csúcsánál derékszögű. Ugyanis hegyesszögű háromszögnek M a belsejében van, tehát k-nak is belső pontja, C-nél tompaszögű háromszög esetén pedig a C csúcs van az ABM háromszögnek és az ezen három ponton átmenő körnek belsejében, hiszen ilyenkor C a magasságpontja az ABM hegyesszögű háromszögnek (e négy pont bármelyike mindig magasságpontja a másik három által alkotott háromszögnek). Így esetünkben a háromszög sem hegyesszögű nem lehet, sem tompaszögű; derékszögű viszont lehet, mert ilyenben a derékszög csúcsába eső M rajta van k-n.

Mindezek szerint a háromszög derékszögű volta szükséges feltétele k és f érintkezésének. Azonban egyszersmind elegendő feltétele is, mert bármely C-nél derékszögű háromszögben $M = C$, $K = C_1$ (a CS súlyvonal talppontja), F felezi az $MK = CK$ sugarat, és így C, F és K egy egyenesbe eséséből (Euler), valamint $FK = 0{,}5\,r = r - 0{,}5\,r = CK - CF$-ből következik, hogy a f és k körök C-ben (belsőleg) érintkeznek.

Bakos Tibor

Megoldást küldött be még: BÁRTFAI PÁL, BICZÓ GÉZA (kétfélét), BUKOVSZKY FERENC, GOLDSTEIN RÓBERT, GÖNYEI ANTAL, KLAFSZKY EMIL, KONCZ KÁROLY, QUITTNER PÁL, REMÉNYI GUSZTÁV, SZEMÉLYI KÁLMÁN.

69. példa. Egymásutáni egyenlő számközökben található prímszámokat megfigyelve azt tapasztaljuk, hogy számuk nem alkot monoton csökkenő sorozatot; pl.

1—10	4	prímszám van	1—100	25	prímszám van
11—20	4	„ „	101—200	21	„ „
21—30	2	„ „	201—300	16	„ „
31—40	2	„ „	301—400	16	„ „
de már			de már		
41—50	3	„ „	401—500	17	„ „

Igaz-e ez a következő általános formában: „Bármelyik k és n természetes számok esetén, ha k-tól kezdve n-es csoportokra osztjuk a természetes számokat (eredeti sorrendjükben), e csoportokban található prímszámok száma sohasem alkot még tágabb értelemben sem monoton csökkenő sorozatot"?

(Fried Ervin)

Megoldás. Ismeretes, hogy $(m+1)!+1$ után következő m szám egyike sem prímszám, mert oszthatók rendre $2, 3, \ldots, m+1$-gyel.

Legyen l olyan természetes szám, melyre teljesül egyrészt az

$$l! \geqq (2k+1)! \qquad (l \geqq 2k+1),$$

másrészt az

$$l! \geqq n-1$$

egyenlőtlenség. (Ilyen l van, mert vagy $l=2k+1$, vagy $l=n$ kielégíti a feltételt.)

Akkor az $l!+2, l!+3, \ldots, l!+2k, l!+2k+1$ számok egyike sem prímszám, viszont a csoportosítás k elemből álló egyik csoportjának bele kell esnie a $2k$ számból álló csoportba, tehát van olyan csoport, melyben a prímszámok száma 0. Mivel a prímszámok száma végtelen, a következő csoportok között lesz olyan, melyben van prímszám, tehát a prímszámok száma nem alkothat monoton csökkenő sorozatot.

Bártfai Pál

Megoldást küldött be még: Biczó Géza, Bukovszky Ferenc, Dux Erik, Koncz Károly, Quittner Pál, Reményi Gusztáv.

Megjegyzés. Bár a mondott értelemben vett *végtelen* számköz-sorozatok nem lehetnek, megadhatók bármily hosszú véges számköz-sorozatok, amelyekben a *prímszámok száma szigorú értelemben monoton csökken.* Ezzel a kérdéssel a harmincas években több dolgozatban foglalkoztam, először 1930-ban,* utoljára 1935-ben.** A tételt fokozatosan élesítettem, illetőleg fokozatosan növeltem az intervallumok számát, amelyekben a prímszámmennyiség monoton fogy. Az utolsó publikációban így hangzik:

Ha x elég nagy és m valamely tetszőleges természetes szám, akkor az egymásra következő egyenlő hosszú

$$\langle 1, \ldots, x\rangle, \langle x, \ldots, 2x\rangle, \ldots, \langle (n-1)x, \ldots, nx\rangle$$

* Obláth R. A prímszámok eloszlásáról. *Math. és Termtud. Értesítő* 47., 1930., p. 250—254.

** R. Obláth: Über Primzahlen in aufeinanderfolgenden Intervallen. *Annali di matematica pura ed applicata,* serie 4., t. 14. 1935/6., p. 299—303.

intervallumok mindenikében kevesebb prímszám van, mint a megelőzőben, ha

$$n < \log^m x.$$

A bizonyítás a prímszámtételen (a *Littlewood*-féle maradéktaggal) alapszik.

Az eredmény élessége onnan látszik, hogy az intervallumok igen csekély megnövelésénél már érvényét veszti. Fennáll ugyanis a következő tétel:

Ha x elég nagy és $c > 1$ konstans, akkor az

$$\langle 1, \ldots, x\rangle, \langle x, \ldots, cx\rangle, \langle cx, \ldots, c^2x\rangle, \ldots \langle c^{n-1}x, \ldots c^n x\rangle$$

intervallumok mindenikében több prímszám van, mint a megelőzőben. *Obláth Richárd*

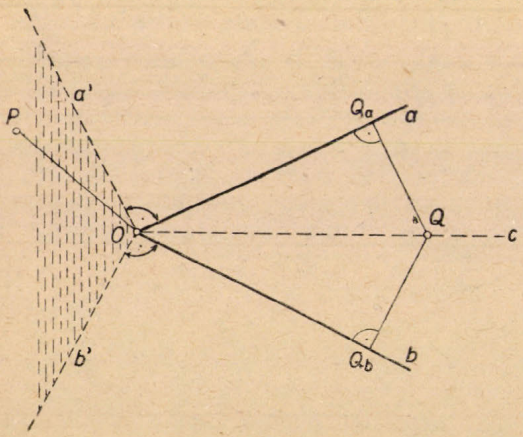
70. példa. Mi azon pontok mértani helye, amelyek egy szög száraitól egyenlő távolságra vannak

a) a szögszárak meghatározta síkban;

b) a térben?

(A szögszárak félegyenesek. Két ponthalmaz távolsága: azon szakaszok hosszának minimuma, amelyek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik halmazhoz tartozik.)

Megoldás. a) Az adott szöget két félegyenes: az O-ból kiinduló a és b zárja be. Az $(a, b) \sphericalangle$ szögfelezője a c félegyenes. Felvesszük az O pontból az $a' \perp a$ és $b' \perp b$ félegyeneseket.



6. ábra

Legyen P az a' és b' félegyenesek bezárta konvex szögnek tetszőleges belső vagy határpontja. P távolsága a-tól és b-től egyaránt PO.

Legyen Q a c félegyenes tetszőleges pontja. Ennek távolsága a-tól, ill. b-től $Q_a = Q_b$.

A keresett mértani hely a (6. ábrán bevonalkázott) a', b' szögtartomány és a c félegyenes. Könnyű belátni, hogy a sík többi pontjaira az a-tól, ill. b-től való távolságok különbözőek.

b) Legyen *o* az *O* ponton át az (a, b) síkra merőleges egyenes. Az *o* egyenes az a, b, a', b', c félegyenesekkel az $[a]$, $[b]$, $[a']$, $[b']$ és $[c]$ félsíkokat határozza meg. A keresett mértani hely a $[c]$ félsík, továbbá az $[a']$ és a $[b]$ félsík határolta térrész.

Bukovszky Ferenc.

Megoldást küldött be még: BAKOS TIBOR, BÁRTFAI PÁL, BICZÓ GÉZA, KONCZ KÁROLY, QUITTNER PÁL, REMÉNYI GUSZTÁV.

Matematikai és személyi hírek

Külföldi hírek:

Matematikusok 1958. évi Nemzetközi Kongresszusa
Előzetes értesítés

Az edinburghi egyetem és a londoni Royal Society 1958. aug. 14—21-ig Edinburgh városában megrendezi a Matematikusok Nemzetközi Kongresszusát. A kongresszus külön fel nem kért résztvevőinek negyedórás előadás tartására lehetőségük van a következő szekciókban:

1. Logika és a matematika alapjai.
2. Algebra és számelmélet.
3. Analizis.
4. Topológia.
5. Geometria.
6. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika.
7. Alkalmazott matematika, matematikai fizika és numerikus módszerek.
8. Matematikatörténet és pedagógia.

A szervező bizottság a Kongresszus tartama alatt különböző rendezvényeket, fogadásokat, kirándulásokat tervez.

A Kongresszus résztvevőit két csoportba soroljuk: Rendes tagok, akik résztvehetnek az összes tudományos és egyéb rendezvényeken és megkapják a Kongresszus Közleményeit.

Kísérő tagok, akik a rendes tagokat kísérik, azokkal azonos jogaik vannak, csupán nem vesznek részt a tudományos rendezvényeken és nem kapják meg a Kongresszus Közleményeit.

A részt venni kívánók szándékukat esetleges előadásuk címével jelentsék be még az év folyamán a Bolyai János Matematikai Társulatban.

Szovjetunió

A Szovjetunió Tudományos Akadémiája Euler születésének 250. évfordulója alkamából április 15-től 18-ig Leningrádban ünnepi ülésszakot rendezett, melynek ismertetésére visszatérünk.

Német Demokratikus Köztársaság.

A Német Tudományos Akadémia Euler születésének 250. évfordulója alkalmából 1957. március 21-én d. e. emlékünnepélyt tartott, melyen N. Winter, P. Sz. Alexandroff és E. Hölder professzorok tartottak előadásokat Euler tudományos munkásságáról. Ezt követőleg 21.-én, 22.-én, és 23.-án tudományos

ülésszakot tartottak, melyen a következő előadások hangzottak el időrendi sorrendben:

M. Deuring: Zetafunktionen algebraischer Kurven und Mannigfaltigkeiten.

A. G. Postnikov: Analogon des Tarryschen Problems für die Exponentialfunktion.

K. Kuratowski: Über die Konvergenz von Mengen.

O. Boruvka: M. Lerch als Fortsetzer der Klassiker in der Theorie der Gammafunktion.

H. Grell: Idealklassen und Struktur der Ringe in algebraischen Zahlkörper.

J. E. Hofmann: Über Eulers erste Reihenstudien.

B. N. Delaunay: Über den Zusammenhang zwischen den Lagrangeschen Klassen der Irrationalitäten und den Markoffschen Klassen der extremen Formen.

S. Stoilov: Über die durch ganze Relationen definierten analytischen Funktionen.

V. Brun: Mehrdimensionale Algorithmen, welche die Eulersche Kettenbruckentwicklung der Zahl *e* verallgemeinern.

A. P. Juschkevitsch: Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis.

M. Eichler: Die Cohomologiegruppen der Wegegruppe einer Riemannschen Fläche.

P. Turán: Zur Theorie der Dirichletschen Reihen.

A. Denjoy: Zur Theorie reeller Funktionen.

E. Bompiani: Representations of plane differential elements.

W. Blaschke: Euler und die Kinematik.

W. Schmeidler: Variationsrechnung und Integralgleichungstheorie.

E. Lamprecht: Durch Produktorstellungen erklärte Zetafunktionen.

P. Erdős: Resultaten und Probleme aus der additiven Zahlentheorie.

Német Szövetségi Köztársaság

A Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfachban 1957. július 11-től 15-ig gyűrűelméleti kollokviumot rendez.

Hollandia.

1957. augusztus 26-tól 31-ig Amsterdamban az UNESCO matematikai kollokviumot rendez „Különböző konstruktivitási fogalmak a matematikában" címen.

Hazai hírek

Kulturcsereegyezmény keretében, illetve a Magyar Tudományos Akadémia vendégeként az alábbi külföldi matematikusok jártak hazánkban az 1956. év folyamán:

B. Bozsilov Ivanov bolgár matematikus III. 27-től V. 16-ig.

J. Karamata jugoszláv professzor IV. 2-től 8-ig.

S. Brehmer német aspiráns V. 4-től VI. 26-ig,

J. Novák csehszlovák professzor IX. 9-től 13-ig.

J. Hájek csehszlovák matematikus IX. 10-től X. 21-ig.

H. Rasiowa lengyel matematikus IX. 10-től X. 6-ig.

H. Greniewski lengyel matematikus IX. 10-től 22-ig.

G. Bothe német aspiráns X. 1-től XI. 14-ig.

R. Sulanke német matematikus X. 1-től XI. 16-ig.

Megjelent Pólya György stanfordi professzor „A gondolkodás iskolája (Hogyan oldjam meg?)" című könyve a Bibliotheca kiadásában. Kapható a könyvesboltokban 27.50 ft-os áron. A könyv ismertetésére lapunk következő számában visszatérünk.

DOKTOROK, KANDIDÁTUSOK

Freud Géza: „Ortogonális polinomokról" című doktori disszertációjának vitáját 1956. október 12-én tartották meg. A disszertáció opponensei voltak: Alexits György, Sz.-Nagy Béla, Turán Pál.

Takács Lajos „Részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról" című doktori disszertációjának vitája 1957. február 23-án volt. Opponensek voltak: Jordan Károly, Sz.-Nagy Béla, Rényi Alfréd.

Az alábbi kandidátusi disszertáció-megvédések történtek:

1956. április 13.: Kővári Tamás „Egész függvények maximum-modulus függvényével kapcsolatos vizsgálatok." Opponensek: Rényi Alfréd. Kalmár László.

április 13.: Králik Dezső: „Törtrendű integrálok és deriváltak konstruktív függvénytani vizsgálata." Opponensek: Császár Ákos, Sz.-Nagy Béla.

május 25. Prékopa András: „Sztochasztikus halmazfüggvények." Opponensek: Császár Ákos, Sz.-Nagy Béla.

szeptember 29. Frey Tamás: „A konstruktiv függvénytan néhány lokális tételéről." Opponensek: Alexits György, Tandori Károly.

június 17. Rózsa Pál: „A matrix-elmélet néhány új tételéről és azok alkalmazásairól." Opponensek: Gyires Béla, Makai Endre.

1957. február 15. Barna Béla: „Bizonyos algebrai egyenletekre alkalmazott Newton-féle gyökközelítő eljárás divergencia pontjairól." Opponensek: Császár Ákos, Rényi Alfréd.

február 15. Molnár József: „Helly tételének egyes általánosításairól." Opponensek: Fejes-Tóth László, Soós Gyula.

március 8. Hosszu Miklós: „A disztributivitás függvényegyenletének általánosításai és topológikus izomorfizmusok az n-dimenziós térben." Opponensek: Fuchs László, Varga Ottó.

Társulati élet

A Bolyai János Matematikai Társulat 1956. évi balatonvilágosi kollokviumain a következő előadások hangzottak el:

Topológiai kollokvium

Szeptember 11.

Császár Ákos: Általános topológikus tér fogalmáról.
Bognár Mátyás: A kombinatorikus topológia alapfogalmai.

Szeptember 12.

Alexits György: A görbeelmélet néhány problémájáról.
Pásztor István: A dimenzió elmélet elemei.
Császár Ákos: Egy új topológiai strukturáról.

Geometriai kollokvium

Szeptember 11.

Heppes Aladár: Néhány probléma ponthalmazok átmérőjével kapcsolatban.
Fejes Tóth László: Néhány geometriai probléma.
Farkas Miklós: A Gauss-Bonnet tétel bizonyítása a Levi Civita féle párhuzamos eltolás segítségével.
Rapcsák András: Sík-projektív Finsler terek egy új jellemzése.
Sztachó Lajos: Körök letűzése.
Turán Pál A négylevelű lóhere egy extremális tulajdonságáról.
Erdős Pál: Összefüggő halmazokról.

Szeptember 12.

St. Golab: Gauss-Bonnet tételről.
Hajós György: A felszín fogalmáról.
T. Sós Vera: Steinhaus egy sejtéséről.
Varga Ottó: P vektorok alkalmazásáról.
Aczél János: Geometriai objektumok elméletéről.

Szeptember 13.

Hosszú Miklós: Geometriai objektumok elméletéről.
Moór Arthur: Autoparallel görbék általános metrikus vonal terekben.

Sztochasztikus folyamatok elmélete és alkalmazásai kollokvium

September 13.

RÉNYI ALFRÉD: Megnyitó.
ERDŐS PÁL: Az iterált logaritmus tételről.
PRÉKOPA ANDRÁS: Egy új sztochasztikus integrál.
SZÜSZ PÉTER: Sztochasztikus matrixok sajátértékeiről.
TAKÁCS LAJOS: Többdimenziós Poisson folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról.

September 14.

MOGYORÓDI JÓZSEF: Atommagreaktorok neutronlassítás folyamatáról.
TAKÁCS LAJOS: Részecskeszámlálással kapcsolatos valószínűségszámítási problémákról.
ACZÉL JÁNOS—EGERVÁRY JENŐ: Az átmenet-valószínűségek Kolmogorov egyenletének megoldásáról.
HAJEK JAROSLAV: Konvex korrelációs függvényekről.
PRÉKOPA ANDRÁS—RÉNYI ALFRÉD: Egy határeloszlástétel és annak alkalmazása a sztochasztikus folyamatok elméletében.

September 15.

BALATONI JÁNOS: Hincsin egy újabb munkájának ismertetése.
JULESZ BÉLA: Sztochasztikus fázis-modulált jelek spektruma.
KORÓDI ALBERT: Az információ elmélet kérdéseiről.
PÁL SÁNDOR—RÉNYI ALFRÉD: Szénellenállások vezetőképessége.
TAKÁCS LAJOS: Erlang képletének általánosításáról.

Halmazelméleti, matematikai logika- és matematikai gépekkel foglalkozó kollokvium

September 13.

KALMÁR LÁSZLÓ: Bizonyos műszaki alkalmazásokkal kapcsolatos gráfelméleti problémákról.
ERDŐS PÁL—FODOR GÉZA: Relációelméleti problémákról.
HAJNAL ANDRÁS: Egy az axiomatikus halmazelméletben fellépő relációelméleti problémáról.
ERDŐS PÁL: Hajnal egy problémájáról.
FODOR GÉZA: A regresszív rendszámfüggvényekről.
HELENA RASIOWA: Algebrai modellek és alkalmazásaik.
HAJNAL ANDRÁS: Axiomarendszerek modelljeinek bővítéséről
SURÁNYI JÁNOS: A szűkebb logikai függvénykalkulus eldöntésproblémájáról.

September 14.

HENRYK GRENIEWSKI: Essai d'une théorie des systemes relativment isolés.
TARJÁN REZSŐ: Gyorsműködésű számológépek organizációs problémái. (Az előadást Sándor Ferenc tartotta meg.)
PÉTER RÓZSA: A relé-kontaktus rendszerek differencia-egyenletrendszeréről.
FREY TAMÁS: Néhány művelet analog, ill. digitális instrumentálásáról.

Szeptember 14.

TARJÁN REZSŐ: A Magyar Tudományos Akadémia Méréstechnika és Műszerügyi Intézete számológép csoportjának munkájáról. (Az előadást Sándor Ferenc tartotta meg.)
SÁNDOR FERENC: Ferromágneses elemek alkalmazása memória - é kapcsolási célokra.
KISS GYÖRGY: Késleltető művonal memória-célokra.
FONÓ ERVIN: Gépi módszerek alkalmazása a népgazdasági tervezéseknél.
FENYŐ ISTVÁN: Számológépek építése a Német Demokratikus Köztársaságban.
POLLÁK GYÖRGY: Független kontaktusokkal megvalósítható logikai műveletekről. (Ismertetés)

Szeptember 15.

KALMÁR LÁSZLÓ: A szegedi logikai gép tervéről és a vele kapcsolatos problémákról.
BAKOS TIBOR: Megjegyzések egy logikai géppel kapcsolatos kombinatorikai problémáról.
TARJÁN REZSŐ: Számológép és idegrendszer. (Felolvasta Sándor Ferenc.)
ÁNGYÁN ANDRÁS: A fiziológiai és gépi memória, és modern kísérletes kutatási lehetőségeik.
KIRÁLY JÓZSEF: A transzisztorok és neuronok közötti analógiáról.

A Bolyai János Matematikai Társulat Budapesti Tagozatának előadásai 1956. június 30-tól december 31-ig

Szeptember 7.

ERDŐS PÁL: Egészfüggvényekkel kapcsolatos néhány problémáról.

Szeptember 22.

KÁRTESZI FERENC: Érdekes geometriai feladatok.
Előadás középiskolai diákok részére.

Szeptember 27.

Sajátértékfeladatok perturbációszámítása. Előadássorozat.
8. sz. előadás. Az előadást Korányi Ádám tartotta.

Október 1.

HELENA RASIOWA: Einige Probleme der Theorie der Verbände.

Október 5.

VINCZE ISTVÁN: Beszámoló a román matematikus kongresszusról.
Klubest.

Október 9.

Ifjúsági Matematikai Kör klubestje. Előadást tartott Kovács László.

Október 12.

ADLER GYÖRGY: Hővezetési differenciálegyenlet maximum elvéről.

Október 19.

Beszámoló a bécsi matematikus kongresszusról.
A beszámolót Békéssy András, Freud Géza, Kővári Tamás és Rényi Kató tartották.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szegedi Tagozatának előadásai 1956. január 1-től december 31-ig

Január 10.

Aczél János: A geometriai objektumok elméletéről.

Január 28.

Sztachó Lajos: A Buffon-féle tűproblémáról.
(Előadás diákok részére)

Február 4.

Szőkefalvi-Nagy Béla beszámolója moszkvai útjáról. (Klubest)

Február 25.

Tandori Károly: Az 1955. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny feladatmegoldásainak ismertetése.

Március 7.

Bakos Tibor: Térmértani számítások a Ribkin-féle példatár felhasználásával. (Előadás középiskolai tanárok számára, az MSzBH keretében)

Március 10.

Steinfeld Ottó: Vizsgálatok a félcsoportok Szuskevics-féle magjával kapcsolatban. (MSzBH előadás)

H félcsoport összes kétoldali ideáljainak nem-üres metszetét H *Szuskevics-magjának* szokás nevezni. Az előadó kimutatta, hogy H Szuskevics-magja H összes minimális kváziideáljainak (nem-üres) egyesítési halmaza. A bizonyításban felhasználta a következő eredményeket: 1. H félcsoport mindegyik minimális kváziideálja H részcsoportja. 2. Ha H összes minimális kváziideáljainak egyesítési halmaza, M nem-üres, akkor M H-nak minimális kétoldali ideálja.

Március 12.

Rábai Imre: Ismertette Kordemszkij: Matematikai érdekességek c. könyvét. (Előadás középiskolai diákok számára, az MSzBH keretében)

Március 20.

Erdős Pál: Diofantikus egyenletekről.

Március 24.

Fodor Géza: Alexandrov és Uryszon egyik tételének általánosításáról. (MSzBH előadás)

Március 24.

Előadó a következő tétel bizonyításával foglalkozott: Legyen Λ olyan másodfajú rendszám, amely nem konfinális ω-val és M a Λ-nál kisebb rendszámok halmazának $W(\Lambda)$-nak egy részhalmaza. Tegyük fel, hogy M minden α eleméhez hozzá van rendelve egy olyan $f(\alpha)$ rendszám, amelyre $f(\alpha) < \alpha$. Ha $W(\Lambda) - M$-ben nincs olyan zárt halmaz, amellyel $W(\Lambda)$ konfinális, akkor van egy olyan π rendszám, $\pi < \Lambda$, és M-nek egy olyan N részhalmaza, amelylyel $W(\Lambda)$ konfinális és $f(\alpha) \leqq \pi$ az N-nek minden α elemére.

Március 30.

Kállai István: Hibás geometriai bizonyítások.
Egy szovjet könyv ismertetése, MSzBH keretében.

Április 28.

Freud Géza: Derivált-függvény approximációja a függvényt approximáló polinomok deriváltjaival.

Április 29.

Rédei László: Beszámoló a lipcsei útról. Klubest.

Május 10.

Fejes-Tóth László: Csillagtestek.
Csillagsokszögek és soklapok definíciója és a szabályos csillagsokszögek és soklapok szélsőértéktulajdonságokkal való jellemzése. Néhány csillagpoliéderre vonatkozó egyenlőtlenség ismertetése, amelyben egyenlőség csak a kilenc szabályos, ti. az öt platoni és a négy Kepler—Poinsot-féle poliéderre áll fenn.

Május 18.

Tarján Rezső: A kibernetika tudományos problémái.
(A TTIT-vel közös előadás)

Május 19.

Tarján Rezső: Gyorsműködésű számoló automaták.
(A TTIT-vel közös előadás)

Május 23.

Neukomm Gyula: Tipikus hibák a tanulók feladatmegoldásaiban.
(Előadás közép- és általános iskolai tanárok részére)

Június 2.

Fried Ervin: Komplex számok felhasználása a geometriában.
(A békéscsabai csoport előadása)

Június 20.

Rédei László: Elsőfokban nemkommutatív véges gyűrűk.
(l. június 18-i debreceni előadás kivonatát)

Szeptember 3.

Maurer Gyula: Néhány csoportelméleti kérdésről.
(l. szeptember 5-i debreceni előadás kivonatát)

Szeptember 27.

HELENA RASIOWA: (Varsó): Über ε-Sätze in den klassischen und nichtklassischen elementaren Theorien.

Október 6.

TANDORI KÁROLY: Ortogonális sorokról.
Az előadó ismertette az ortogonális sorokra vonatkozó legújabb eredményeit. A négyzetesen integrálható kifejtések részlettömegeire, ortogonális függvények összegeire, ortogonális függvények négyzetösszegeire, valamint a Lebesgue-függvényekre vonatkozó ismert aszimptotikus becslésekről megmutatható, hogy általában finomíthatatlanok. A bizonyítások során szükség van egy Mensov-féle példa élesítésére, amelynek alapján adott, bizonyos nagyságrendi feltételnek eleget tevő, együtthatósorozathoz megkonstruálható olyan ortogonális sor, amely az alapintervallumon mindenütt divergál.

A Bolyai János Matematikai Társulat Debreceni Tagozatának előadásai 1956. január 1-től december 31-ig

Február 14.

ACZÉL JÁNOS: Megjegyzések a kúpszeletek analitikus geometriai tárgyalásához. (Előadás tanárok számára)

Február 14.

MOÓR ARTHUR: Poliéderek térfogatmértékének bevezetése. (Előadás tanárok számára)

Március 2.

MOÓR ARTHUR: Általános metrikus vonalelemterekről.
Az előadó egy olyan általános metrikus vonalelemtér felépítését ismerteti, amelynek metrikus alaptenzora nem Finsler-geometriát definiál. Cartan módszerével értelmezi ebben a térben vektorok parallel eltolását. Abból a feltételből, hogy ez az eltolás metrikus legyen, levezeti ezen eltolást meghatározó paramétereket, és módszert ad, amelynek segítségével a görbület és torzió mennyiségek meghatározhatók. Ezek után vázolta ezen terek mozgáscsoportjait.

Március 14.

HOMOKI ILONA és TÓTH MARIANNA: Magyar—szovjet matematikai kapcsolatok. (Összevont szakköri ülés a hajdúböszörményi Bocskai gimnáziumban, az MSzBH alkalmából)

Március 15.

FŰFA IGNÁC: A matematikai természetes ész c. könyv ismertetése. (Előadás a berettyóújfalui gimnáziumban, az MSzBH keretében).

Március 16.

RAPCSÁK ANDRÁS: Skalárgörbületű Finsler-terek egy új jellemzése. A skalárgörbületű Finsler-terek egyik csoportja, a sík projektív skalárgörbületű Finsler-tér. Ezeket a tereket azzal sikerült jelle-

mezni, hogy benne minden vonalelemhez, minden normál irányban sík fektethető. Ehhez szükséges volt a sík általánosítása Finsler-térben, amely a geodetikus vonalak, ill. a kvázi geodetikus vonalak segítségével történt.

Március 22.

MESTER ISTVÁN: Feladatmegoldások.
(Előadás a Fazekas M. gimnáziumban, az MSzBH alkalmából).

Március 28.

BIRÓ MARGIT: A geometriai számításos feladatok megoldásával kapcsolatos követelmények.
(Előadás a Bocskai gimnáziumban, Hajdúböszörményben, az MSzBH alkalmával).

Március 28.

MERZA JÓZSEF: A Szovjetunió matematikai élete.
(MSzBH előadás a Csokonai Vitéz Mihály gimnáziumban.)

Március 28.

NAGYMÁTÉ MARGIT: A Matematika v Skolje feladataiból.
(MSzBH előadás a hajdúszoboszlói ált. gimnáziumban.)

Március 30.

MAJOR JÓZSEF: Csoportok unitér előállításai Hilbert-térben, I.
Az előadó bevezette a topológikus és Lie-csoportok fogalmát, rátért a topológikus csoportok lineáris előállítására, majd definiálta a Lie-csoportok unitér előállításait Hilbert térben. Megmutatta az előállítások konstrukciójának általános módszerét. Részletezte félig-egyszerű Lie-csoportok esetében az ismert eredményeket. Végül beszélt a különféle előállítási lehetőségekről, melyek a skalársorozat különböző definícióiból adódnak. (MSzBH előadás.)

Április 6.

MAJOR JÓZSEF: Csoportok unitér előállításai Hilbert-térben, II.
Az előadó egy feloldható Lie-csoport példáján bemutatta, hogyan kell konstruálni unitér előállításokat, majd kimutatta a kapott előállítás irreducibilitását. A továbbiakban ismertette a Plancherel-formula általánosításait kommutatív lokálisan bikompakt csoportokra, megmutatta, hogy milyen összefüggés áll fenn a reguláris előállítás és a Plancherel-formula között. Ismertette továbbá az előállítások ekvivalencia problémáját. Végül rövid történelmi áttekintést adott az unitér előállítások elmélete terén elért szovjet és egyéb eredményekről.

Április 6.

UNGVÁRI JÁNOS: A természetes ész a matematikában.
(MSzBH előadás a püspökladányi tanítóképzőben)

Május 5.

KISS LÁSZLÓ: A matematika történetének szerepe a mennyiségtan tanításában. (Pedagógustovábbképző előadás)

Június 1.

Gyires Béla: A Toeplitz-féle matrixokról. Az előadó Szegő Gábornak egy lényegesen pozitív, 2π szerint periodikus, folytonos függvényhez tartozó Toeplitz-féle mátrixok determinánsaira vonatkozó tételét általánosította úgy, hogy a tétel érvényességét egy 2π, szerint periódikus, folytonos lényegesen pozitív szimmetrikus függvénymátrixhoz tartozó általánosított Toeplitz-féle mátrixok determinánsaira igazolja. Foglalkozott még a tétel további általánosítási lehetőségeivel is.

Június 18.

Rédei László: Elsőfokban nemkommutatív véges gyűrűk. Elsőfokban nemkommutatívnak nevezünk egy nemkommutatív gyűrűt csupa kommutatív valódi részgyűrűvel. A véges, elsőfokban nemkommutatív gyűrűk részint nilpotensek, részint nemnilpotensek. Közülük az előbbiek bizonyos igen egyszerű szerkezetű, explicit megadható gyűrűknek az összes nemkommutatív homomorf képei. Az utóbbiak explicite megadhatók. Részletes közlemény az Acta Math. Acad. Sci. Hung.-ban fog megjelenni.

Június 18.

Fuchs László: Általánosított szerváns alcsoportokról.
Az általánosított szerváns alcsoport fogalmát Gacsályi Sándor vezette be; erre az előadó új definíciót adott és megmutatta, hogy ez a fogalom a szerváns alcsoportok számos fontos tulajdonságával rendelkezik. G Abel-csoport H alcsoportját m-szervánsnak nevezte, ha H direkt összeadandó G-nek minden olyan F alcsoportjában, mely H-t tartalmazza és az $[F:H]$ index kisebb az m számosságnál. (Ha m a megszámlálható számosság, H szerváns a régi értelemben). Többek közt szerepel a következő tétel: ha H m-szerváns G-ben és G/H faktorcsoport direkt összege m-nél kisebb számosságú csoportoknak, akkor H direkt összeadandó G-ben. Egy K alcsoport mindig beágyazható oly m-szerváns alcsoportba, melynek számossága csak K számosságától és m-től függ.

Szeptember 5.

Maurer Gyula: Néhány csoportelméleti kérdésről.
Előadó a permutáció és monomiális szubsztitució fogalmának tetszés szerinti számosságú halmaz esetére való kiterjesztésével foglalkozva, rámutatott arra, hogy ezen általánosítások a végtelen csoportok reprezentációja szempontjából érdekesek. A végtelen permutációs és monomiális csoportok legfontosabb tulajdonságainak ismertetése után, ezen csoportokban egy topológiát vezetett be alkalmasan választott limeszfogalom segítségével. Miután ismertette topologikus csoportok legfontosabb tulajdonságait, néhány megoldásra váró problémát fogalmazott meg.

Október 11.

Szénássy Barna: A matematika történetének vázlatos áttekintése. (Előadás tanárok számára)

A Bolyai János Matematikai Társulat Miskolci Tagozatának előadásai 1956. január 1-től december 31-ig

Február 10.

Nikodémusz Antal: Egy új módszer a gázdinamikai diff.-egyenlet megoldására. Az előadó történeti áttekintés után a Meyer-Prandtl féle parallelaramlást alkalmazta egy adott profilra és közelítő eljárást adott az ellenállás kiszámítására. Kiszámította az áramvonal új egyenletét. Végül az eljárás korlátait s a további kutatások irányát ismertette.

Február 15.

Szabó Jenő: Kiegészítések az általános iskolai matematika-anyaghoz. (Előadás általános iskolai tanárok számára.)

Február 22.

Erdélyi László: Függvények tanításának középiskolai problémái. I. (Előadás középiskolai tanárok számára.)

Február 22.

Parai Gusztáv: Függvények tanításának középiskolai problémái. II. (Előadás középiskolai tanárok számára.)

Március 5.

Batár Zoltán: Tréfás matematikai feladatok.
(Előadás általános iskolai tanulók számára)

Március 7.

Parai Gusztáv: Kiegészítések az általános iskolai matematika anyaghoz.
(Előadás általános iskolai tanárok számára)

Március 7.

Nikodémusz Antal: Az egyenes körhenger.
(MSzBH előadás, a miskolci Kilián gimnáziumban)

Március 7.

Huszthy László: Feladatmegoldások.
(MSzBH előadás a szerencsi ált. gimnáziumban)

Március 9.

Vincze Endre: Az egyenes körhenger.
(MSzBH előadás a miskolci Földes Ferenc gimnáziumban)

Március 9.

Batár Zoltán: Matematikai mulatságok.
(Előadás diákok részére a putnoki mezőgazdasági technikumban)

Március 14.

Szénássy Barna: Bolyai Farkas.
(Előadás tanárok részére)

Március 14.

Szarka Zoltán: Az egyenes körhenger.
(Előadás az MSzBH alkalmából a miskolci Tanítóképzőben)

Március 14.

Szabó Miklós: Logaritmikus és trigonometrikus egyenletek megoldása.
(Előadás az MSzBH alkalmából a miskolci közgazdasági technikumban, diákok részére).

Március 14.

Nikodémusz Antal: Néhány probléma az egyenes körhengerrel kapcsolatban.
(MSzBH előadás a tokaji általános gimnáziumban)

Március 16.

Batár Zoltán: Numerikus sorozatok és sorok.
(Előadás a Vámos Ilonka leánygimnáziumban)

Március 16.

Obádovics J. Gyula: Feladatok a Szovjetunióban rendezett matematikai versenyekről.
(MSzBH előadás az ózdi ált. gimnáziumban)

Március 16.

Törő Béla: Matematikai műszerek.
(MSzBH előadás a mezőkövesdi gimnáziumban)

Március 21.

Borbély Samu: Grafikus eljárás polárkoordinátás függvények differenciálására.
Előadó egy grafikus eljárást ismertetett polárkoordinátás függvények differenciálására és ennek alkalmazását az inverz feladat megoldására; így az evolvens görbe szerkesztése révén különösen a másodrendű differenciálegyenletek megoldása válik könnyen áttekinthetővé. Több nyitott problémát is felemlített, melyek megoldása a grafikus eljárás gyakorlati kivitelének pontosságát jelentősen előmozdítja.

Március 21.

Batár Zoltán: Számelméleti kongruencia.
(Előadás az ózdi ált. gimnáziumban)

Március 21.

Nikodémusz Antal: Közelítő számítások alkalmazása kémiai feladatoknál.
(Előadás a mezőkövesdi általános gimnáziumban)

Március 21.

Burány János: A henger ellipszis síkmetszetéről.
(Előadás az MSzBH keretében a miskolci közgazdasági leánytechnikumban)

Március 23.

Vághó Ildikó: Az egyenes körhengerrel kapcsolatos néhány probléma.
(MSzBH előadás a miskolci gépipari technikumban)

Március 23.

Batár Zoltán: Matematikai tréfák.
(Előadás a miskolci kohászati technikumban)

Március 23.

Törő Béla: Matematikai műszerek.
(Előadás a miskolci óvónőképzőben)

Március 28.

Fónyad Zoltán: Körhengerre vonatkozó szélsőérték és térfogatszámításos probléma.
(MSzBH előadás a bányaipari technikumban)

Március 29.

Batár Zoltán: Kongruens számok és alkalmazásaik.
(Előadás a sárospataki gimnáziumban)

Március 29.

Hoffmann Andor: Számrendszerek.
(Előadás a sárospataki tanítóképzőben)

Március 29.

Szarka Zoltán: Az egyenes körhenger síkmetszete ellipszis.
(Előadás a sátoraljaujhelyi gimnáziumban)

Március 29.

Nagy Ilona: Egyenlőtlenségek.
(Előadás a sátoraljaujhelyi közgazdasági technikumban)

Március 30.

Obadovics J. Gyula: Szovjet matematikai versenyek.
(MSzBH előadás a miskolci villamosipari technikumban)

Április 24.

Saláczy Sámuel: Bemutató fizikai kísérletek.

Április 24.

Törő Béla: Matematikai műszerek. (Ismertetés)

Április 25.

Parai Gusztáv: Kiegészítés az általános iskola matematika-anyagához.
(Előadás általános iskolai tanárok számára)

Április 26.

Törő Béla: Planiméterek. (Ismertetés)

Április 27.

Aczél János: Mátrix algebrai megjegyzések a Markov-féle folyamatok átmeneti-valószínűségeire vonatkozó Kolmogorov-egyenlet megoldásához.
Az előadó a t, S skalároktól függő $P(t, S)$ mátrixra felírt

$$P(t, S) = P(t, U)\ P(U, S) \qquad t \leqq u \leqq s$$

egyenlet nem feltétlen reguláris megoldását megadó dolgozatát ismertette, melyet Egerváry Jenő akadémikussal közösen írt.

Április 27.

Parai Gusztáv: Beszámoló a matematikai versenyről.

Április 27.

Parai Gusztáv: Technikumi felvételi matematikai vizsgák tapasztalatai.

Április 28—30.

A Bolyai János Matematikai Társulat Nagymiskolci Tagozata, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, a Borsod Megyei Tanács és a Miskolc Városi Tanács Oktatási Osztályai, a Magyar Pedagógusok Szakszervezeti Borsodmegyei Területi Bizottsága által a matematika és fizika szakos középiskolai tanárok részére rendezett megyei továbbképzési ankét:

Április 28. d. e.

Földes Ferenc gimnáziumban:

a) Hetényi György: Megnyitó.

b) Bemutató tanítások:

1. Kósch János: III. o. Matematika (évközi ismétlés)
A tanítást vita követte, bevezető előadást tartott Bede Lajos: Az évvégi ismétlés címmel.

2. Darkó Béla: IV. o. fizika (gyakorlati foglalkozás)
A tanítást vita követte, bevezető előadást tartott Darkó Béla: A gyakorlati órák tapasztalatai címmel.

Április 28. du. az Egyetemvárosban:

a) Nagy Elemér: A tranzisztor.

b) Fizikai műszerek és laboratóriumok megtekintése a Fizikai Tanszéken.

c) Gáspár Gyula: Nevezetes szerkesztési problémák.

d) Rajzeszközök, geometriai szemléltető eszközök, matematikai műszerek kiállításának megtekintése. A kiállítást a Matematikai Tanszék és az Ábrázológeometriai Tanszék rendezte.

Április 29. de.

A kazincbarcikai hőerőmű megtekintése.

Április 29. este

Klubest a Nevelők Házában. Előadást tartott Borbély Samu A politechnikai nevelésről.

Április 30. de.

a) Reiman István: Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon.

b) Borbély Samu: Elemi grafikus módszerek transzcendens egyenletek megoldására.

c) Bóna Ervin: Zárszó.

Május 3.

Szarka Zoltán: Mérések a terepen.
(Előadás általános iskolai tanárok számára Ózdon)

Május 10.

Szarka Zoltán: Mérések a terepen.
(Előadás a mezőkövesdi gimnáziumban)

Május 11.

Batár Zoltán: A számelméleti kongruencia és alkalmazásai.
(Előadás Putnokon)

Május 21.

Vághó Ildikó: Harmadfokú egyenletekkel kapcsolatos néhány probléma.
(Előadás Sátoraljaújhelyen középiskolai diákok számára)

A Bolyai János Matematikai Társulat Pécsi Tagozatának előadásai 1956. január 1-től december 31-ig.

Február 13.

Továbbképző előadások a Bolyai János Matematikai Társulat, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, Pécs város és Baranya megye oktatási osztályai közös rendezésében, a pedagógus továbbképzés keretében.

Fizika:
Jeges Károly: Kísérletek a fény és elektromosságtan köréből.
Álló Géza: Dialektikus materializmus a fizika tanításában.
Hites Ferenc és Gyulai Ferenc: A gyakorlati órákról.

Matematika:
Surányi János: Az elemi függvénytan alapfogalmainak kialakítása a középiskolában.
Bóka István: Helyzetgeometriai problémák és azok megoldásai.

Március 14.

Bóka István: Néhány probléma az egyenes körhengerrel kapcsolatban. (MSzBH klubest)

Április 2.

Rábai Imre: Egyenlőtlenségek.
(Előadás középiskolai diákok számára)

Április 3.

Rábai Imre: Ismertette Novoszelov: „Trigonometrikus függvények" c. könyvét, különös tekintettel a Trigonometrikus egyenletek c. fejezetre. (MSzBH előadás tanárok számára)

Április 27.

Bujtár József: 1. Évvégi ismétlések módszeres felépítése.
2. Feladatok megoldása.
(Előadás általános iskolai tanárok számára)

Május 4.

Bujtár József: Évvégi ismétlések geometriából.
(Előadás általános iskolai tanárok számára)

Május 16.

Bóka István: Pusztán körzővel megoldható feladatok.
(Előadás tanárok számára)

Június 5.

KALMÁR LÁSZLÓ: A matematikai logika és alkalmazása. (Előadás tanárok számára)

Június 5.

KALMÁR LÁSZLÓ—TARJÁN REZSŐ: Kibernetikai kérdések a matematikai logika szemszögéből. MTESz IB Automatizálási Munkabizottságának előadása

Október 11.

BÓKA ISTVÁN: Térgeometriai problémák.

A Bolyai János Matematikai Társulat Veszprémi Tagozatának előadásai 1956. január 1-től december 31-ig

Február 16.

Ankéttal egybekötött továbbképzési nap, a Bolyai János Matematikai Társulat, a Veszprémi Megyei Tanács Oktatási Osztálya és a veszprémi Vegyipari Egyetem rendezésében.

de. Ankét matematikai oktatásunk aktuális problémáiról.
FEJES-TÓTH LÁSZLÓ: Megnyitó.
Referátumot tartott: VESZELY LÁSZLÓ.
Vitavezető: GÁDOR ENDRÉNÉ.

—

du. GÁDOR ENDRÉNÉ: A geometria tanítása az általános iskolában.
VARGA TAMÁS: Egyenletek ekvivalenciája.

Március 8.

FEJES-TÓTH LÁSZLÓ: Kúpszeletek, cikloisok. (Előadás középiskolai tanárok számára)

Március 29.

ALEXITS GYÖRGY: A szovjet matematikáról. (MSzBH előadás a TTIT-vel közös rendezésben)

Április 26.

MAKAI ENDRE: Differenciálegyenletek alkalmazása a kémiában. (A Magyar Kémikusok Egyesületével közös rendezés)

A Bolyai János Matematikai Társulat Egri Tagozatának előadásai 1956. január 1-től december 31-ig

Március 19.

NAGY FERENC: I. N. Lobacsevszkij.

Március 26.

SÓVÁRI KATALIN: Néhány probléma az egyenes körhengerrel kapcsolatban. (MSzBH előadás a Dobó István gimnáziumban)

Március 27.

NAGY FERENC: A két Bolyai élete és munkássága. (Előadás Hevesben)

Április 6.

Némethy Katalin: Körhengerre vonatkozó feladatok.
(MSzBH előadás a Szilágyi Erzsébet leánygimnáziumban)

Április 11.

Pelle Béla: Feladatmegoldások.
(MSzBH előadás a közgazdasági technikumban)

Április 18.

Nagy Ferenc: Hasonlósági transzformációk felhasználása szerkesztésekben.

Május 4.

Obláth Richárd: A teljes hatványok néhány tulajdonsága.

Május 26.

Lehner Lenke: Bolyai János.

Október 10.

Fried Ervin: Algebrai módszerek alkalmazása geometriai szerkesztésekben.

Október 18.

Králik Dezső: A Lebesgue-féle integrál- és mértékelmélet, és néhány alkalmazásuk.

A Bolyai János Matematikai Társulat Győri Tagozatának előadásai 1956. január 1-től december 31-ig

Január 25.

Vincze István: A valószínűségszámítás néhány gyakorlati alkalmazásáról.

Március 3.

Bodócs István: Az integrálás megkerülésének egyszerűsítése a középiskolai oktatásban.

Március 21.

Ankét az általános- és középiskolai matematika tanítás módszertani problémáiról. Referátumot tartott: Szeliánszky Ferenc.

Március 24.

Reiman István: Az egyenletek ekvivalenciájáról.
(Előadás Tatabányán)

Március 27.

Szeliánszky Ferenc: Szovjet olimpiász feladatok.
(Előadás diákok részére MSzBH keretében)

Március 28.

Tasnády István: Az elemi függvényismeretek tanítása a középiskolában.

Tamás Gyula: A középiskolában bemutatható kísérletek.
(Előadás Pápán a Türr gimnáziumban, tanárok részére)

Március 28.

Szeliánszky Ferenc: Szovjet olimpiász feladatok.
(Előadás Pápán, diákok számára)

Április 11.

Veszely László: Matematika-oktatásunk időszerű problémái.
Gádor Endréné: A középiskolai matematikatanítás főbb hibái.

Április 24.

Hódi Endre: A térmértan tanítása a gimnázium IV. osztályában.
(Továbbképző előadások Esztergomban)

Május 9.

Kárteszi Ferenc: Nehezebb síkgeometriai kérdések egyszerű tárgyalása, térgeometriai meggondolások segítségével.

Október 10.

Kárteszi Ferenc: Hamis matematikai okoskodások.

A Bolyai János Matematikai Társulat Soproni Tagozatának előadásai 1956. január 1-től december 31-ig

Január 23.

Czapáry Endre: Mohr—Macheroni-féle szerkesztések.

Február 20.

Autheried Éva: Engedmények és megszorítások a szerkesztésben.

Március 19.

Tasnády István: A determinánsok tárgykörében elért újabb eredmények.

Április 9.

Vermes Miklós: Optikai kísérletek.
(Az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezés)

Október 22.

Vincze István: Geometriai kérdések.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szolnoki Tagozatának előadásai 1956. január 1-től december 31-ig

Március 7.

Gádor Endréné: A jövő évi VIII. osztályos mértan könyvről.
(Továbbképző előadás)

Április 16.

Császár Ákos: Az analízis fejlődése.
(Előadás tanárok részére)

Május 5.

Dux Erik: Speciális algebrai egyenletek.
(Előadás középiskolai diákok számára)

Május 11.

Bukovszky Ferenc: A rácsgeometriáról.
(Előadás középiskolai diákok számára)

Május 22.

Révai Katalin: A komlex számokról.
(Előadás középiskolai diákok számára, Mezőtúron)

Május 25.

Kalmár László: A matematikai logika néhány műszaki alkalmazásáról.

A Bolyai János Matematikai Társulat Nyíregyházi Tagozatának előadásai 1956. január 1-től december 31-ig

Február 4.

Lakatos István: Az I. gimnáziumi algebratanítás problémái.

Február 17.

Bereznai Gyula: Versenyfeladatok. (Feladatmegoldások a továbbképzés keretében)
Reményi Gusztáv: Képies képek szerkesztési módszerei.

Március 19.

Bereznai Gyula: Feladatmegoldások.
(MSzBH előadás középiskolai diákok számára)

Március 24.

Kovács Gábor: Elemi topológiai problémák.

Március 29.

Tiszolczy István: Feladatmegoldások.
(MSzBH előadás középiskolai diákok számára)

Április 5.

Reményi Gusztáv: Szempontok az általános iskolai algebra tanításához.

Április 13.

Kovács Magda: Mit kíván a középiskola az általános iskolai számtan- és algebratanítástól.

Április 14.

Medgyessy Pál: Kísérleti eredmények feldolgozásának új matematikai módszerei.

Április 16.

Ambrózy Géza: Szempontok az algebra általános iskolai tanításához.

Április 16.

Bereznay Gyula: Elforgatás és szerkesztés.
(Középiskolai matematikai délután Nagykállón a Budai Nagy Antal gimnáziumban)

Május 5.

Bereznay Gyula: Az általános iskolai algebratanítás problémái (Előadás a vásárosnaményi általános iskolában tanárok részére).

Május 12.

Ambrózy Géza: Diofantikus egyenletek.

Június 3.

Reiman István: Betekintés a projektív geometriába.

Szeptember 29.

Reményi Gusztáv: Ankét az I. gimn. matematikakönyvről.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szombathelyi Tagozatának előadásai 1956. január 1-től december 31-ig

Január 9.

Varga Árpád: Az általános- és középiskolai matematikatanítás közös problémái.

Január 26.

Varga Árpád: Affin transzformációk alkalmazása szerkesztésekben. (Továbbképző előadás Nagykanizsán)

Február 9.

Obláth Richárd: A görög matematika története.
(A TTIT-vel közös rendezésben)

Március 6.

Zsuppán József: Néhány probléma az egyenes körhengerrel kapcsolatban. (MSzBH előadás, a zalaegerszegi Zrinyi Miklós gimnáziumban.)

Március 8.

Wiedemann László: A matematikai indukció.
(MSzBH előadás a szentgotthárdi ált. gimnáziumban, a TTIT-vel közös rendezésben)

Március 12.

Aczél György: Feladatmegoldások.
(MSzBH előadás Körmenden a Kölcsey Ferenc gimnáziumban)

Március 18.

Erdősi József: Bevezetés a nem-euklideszi geometriába.
(A TTIT-vel való közös rendezvény)

Március 18.

Arató József: A politechnikai képzés a matematikában és fizikában.

Március 20.

VARGA ÁRPÁD: Egyenlőtlenségek megoldása és alkalmazása. (MSzBH előadás)

Március 20.

MÉSZÁROS JÓZSEF: B. A. Korgyemszkij: Matyematyicseszkaja Szmekalka (Matematikai természetes ész) c. könyv ismertetése. Előadás a táplánszentkereszti általános iskolában.

Március 22.

CZAPÁRY ENDRE: Néhány probléma az egyenes körhengerrel kapcsolatban. (MSzBH előadás)

Március 26.

KÁRMÁN JOLÁN: Szélsőértékfeladatok. (MSzBH előadás Nagykanizsán a Kőolajbányászati és Mélyfúróipari technikumban)

Március 28.

CSONTOS MIKLÓS: Az egyenes körhenger. (MSzBH előadás Sárváron)

Március 28.

ECKER JULIANNA ismertette B. A. Korgyemszkij: Matyematyicseszkaja Szmekalka c. könyvét a horvátzsidányi ált. iskolában. (MSzBH előadás)

Március 28.

SZENTPÉTERY GYULA ismertette B. A. Korgyemszkij: Matyematyicseszkaja Szmekalka c. könyvét. (MSzBH előadás)

Március 29.

VIDA MÁRIA ismertette B. A. Korgyemszkij: Matyematyicseszkaja Szmekalka c. könyvét. (MSzBH előadás a celldömölki ált. gimnáziumban)

Április 11.

HÁROMI JENŐ ismertette B. A. Korgyemszkij: Matyematyicseszkaja Szmekalka c. könyvét. (MSzBH előadás az ikervári általános iskolában)

Április 19.

WIEDEMANN LÁSZLÓ: Néhány differenciálegyenlet alkalmazása a fizikában.

Április 25.

VARGA ÁRPÁD: A számolási és mechanikai készségek fejlesztése.
ARATÓ ISTVÁN: A fizikai kísérletek szerepe a politechnikai képzésben.

Április 25.

DUX ERIK: Háromszöggeommetriai problémák. (Továbbképző előadás Zalaegerszegen)

Április 26.

Dux Erik: Háromszöggeometriai problémák.
(Továbbképző előadás Nagykanizsán)

Június 4.

Gádor Endréné: Az általános iskola VIII. osztályos új geometria-tankönyvének ismertetése.
(Továbbképző előadás)

Június 4.

Hódi Endre: Diofantoszi egyenletek megoldása.
(Továbbképző előadás)

Augusztus 27.

Varga Árpád: Számolási készségfejlesztő feladatok a gimnázium I. osztályában a tanév első két hónapjában.

Október 3.

Varga Árpád: Szimmetrikus egyenletek megoldása.

Könyvismertetés

Faragó László: A számelmélet elemei

Faragó László „A számelmélet elemei" című munkája a legfontosabb elemi számelméleti tételeket tartalmazza.

I. fejezetében az oszthatóság fogalmát vezeti be (racionális egészek között) a maradékos osztáson keresztül, majd az osztók elemi tulajdonságai, a prímszám fogalma és a prímszámok száma következnek.

A II. fejezetben két szám közös osztói és többszörösei, a legnagyobb közös osztó definíciója, előállítása az euklideszi algoritmussal, és a legkisebb közös többszörös szerepelnek.

A III. fejezetben a számelmélet alaptételét tárgyalja, továbbá néhány számelméleti függvénnyel (osztók száma, osztók összege, Euler-féle φ-függvény, osztók φ-függvényeinek összege) foglalkozik.

A IV. fejezetben a kongruencia fogalma és alapvető tulajdonságai, a kis Fermat-tétel és a tizes számrendszer szerepel.

Az V. fejezet egyismeretlenes lineáris kongruencia megoldhatósági feltételeit és megoldási módszereit tartalmazza.

Végül a VI.—VII. fejezetben példákat tűz ki a szerző és útbaigazításokat közöl a példák megoldásához.

A könyv középiskolás diákok részére készült és mint a bevezetésből kiderül, hármas célkitűzéssel.

Fő célja, hogy felkeltse a diákok érdeklődését a számelmélet iránt, — amelynek közismert vonzereje többek között abból ered, hogy problémakörét, eredményeit bárkivel könnyen meg lehet értetni, míg a megoldások útja sokszor igen bonyolult, sőt, nem egyszer évtizedeken át zárva áll a legkitűnőbb matematikusok előtt is. — Ezt a célkitűzését a szerző teljes mértékben megvalósította, amennyiben világos stílusával, a témák jó összeválogatásával, és főleg ügyesen összeállított példatárával bizonyára felkeltette a matematikával szívesen foglalkozó diákok érdeklődését. Több jól felépített részt vagy szép példát említhetnénk a könyvből. Így szerencsés gondolat, hogy a maradékosztályok fogalmának bevezetését (amelyre a IV. fejezetben kerül sor) már az első fejezetben előkészíti ügyes példákkal.

Érdekes a tizedestörtek tulajdonságaival foglalkozó rész.

Igen helyes, hogy a diofantikus egyenletek tárgyalásánál röviden foglalkozik a Fermat-sejtéssel is. Utóbbival kapcsolatban talán csak azt jegyezném meg, hogy érdemes lett volna megemlíteni még néhány érdekes könnyen érthető megoldatlan vagy részben megoldott problémát.

A szerző második célkitűzése az, hogy a matematikával szívesen foglalkozó diákok megismerjék néhány olyan számelméleti tétel bizonyítását, amely-

nek érvényességét már esetleg az általános iskolában is elfogadták, bár bizonyításukkal nem foglalkoztak, — vagy amelyekkel kapcsolatban fel sem merült bennük a bizonyítás szükségessége.

Végül célja az, hogy a számelméleti feladatok megoldásában bizonyos jártasságot biztosítson a diákoknak és hogy segítséget adjon a tudatos példamegoldáshoz. Így például a számelmélet alaptételének bizonyításánál nagyon helyesen nem elégszik meg a tétel bebizonyításával, hanem igyekszik megvilágítani, hogy miért szükséges azt egyáltalán bizonyítani. Megmutatja ugyanis, hogy a páros számok gyűrűjében az analóg tétel nem is érvényes, tehát az alaptétel állítása a műveletek tulajdonságainak nem valamely nyilvánvaló következménye.

Hiányolható viszont az, hogy a fent említett elvet nem elég következetesen valósítja meg a könyv minden részében. Pl. több helyen, főleg egyes közismert fogalmak definíciójánál már nem világít rá arra, hogy miért szükséges a megszokott definíciótól eltérően máshogy bevezetni a fogalmat. Példa erre a legnagyobb közös osztó, amelynél — ha csak a könyvben szereplő anyagot tekintjük — semmi sem indokolja a definíciót: „olyan közös osztó, amely bármely más közös osztónak többszöröse". Sőt, félő, hogy egyes diákok, akik nem ismerik ezen definíció előnyét, csak tehernek érzik, hogy így még létezését is külön bizonyítani kell. További hibának tartom, hogy a bizonyítások jó részénél saját célkitűzésével ellentétben nem a legegyszerűbb utat választja, hanem bonyolultan, számos elkerülhető tétel felhasználásával bizonyít. Más helyeken pedig az egyszerű gondolatmenetet is formálisan bonyolulttá teszi (bonyolult megfogalmazással, túl sok jelöléssel stb.). Így nézzünk egy kiragadott példát: A II. fejezet 14. pontja így szól: „Ha két szám mindegyikét legnagyobb közös osztójukkal osztjuk, akkor az így kapott hányadosok relatív prím számok." A bizonyítás: „induljunk ki a legnagyobb közös osztó többszörösök összegeként való előállításából. (12. pont (4) alatti összefüggés).

$$(a, b) = ga + hb.$$

Osszuk el egyenlőségünk mindkét oldalát (a, b)-vel. Ekkor

$$1 = g\frac{a}{(a, b)} + h\frac{b}{(a, b)}$$

azaz az

$$\frac{a}{(a, b)}x + \frac{b}{(a, b)}y = 1$$

kétdimenziós elsőfokú határozatlan egyenletnek van egész számokból álló megoldásrendszere és így a 13. pontban kifejtettek szerint

$$\left(\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)}\right) = 1$$

amivel a tétel állítását igazoltuk."

A fenti bizonyítás teljesen feleslegesen több tételre támaszkodik, pedig az állítás nyilvánvalóan csupán a legnagyobb közös osztó definíciójának egyszerű következménye, tehát a bizonyítást pl. így lehetett volna elvégezni. Legyen $(a, b) = d$. Ekkor $a = a_1 d$, $b = b_1 d$. Ha az állítással ellentétben volna a_1-nek és b_1-nek 1-nél nagyobb közös osztója: h, akkor hd d-nél nagyobb közös osztója volna a-nak és b-nek, ami ellentmondás.

A könyv további részeiben is több feleslegesen bonyolult rész szerepel, pl. a $\varphi(n)$ függvény explicit előállítása, az „oszthatósági szabályok a tizes számrendszerben" c. rész pedig az egyes egyszerű lépéseket bonyolult köntösbe öltözteti.

A példák kitűzésénél is tapasztalható az említett hiba, pl. a 22. oldalon szereplő feladat így szól: „Bizonyítsuk be, hogy ha egy szorzat osztható két egymáshoz relatív prim számmal, akkor osztható a szorzatukkal is." Miért kell a feltételben szereplő számnak szorzatnak lennie? A 39. oldalon pedig a következő szerepel: „Az n szám osztóinak számát kifejező $d(n)$ kifejezést — melynek értéke nyilván az n-től függ — számelméleti függvénynek nevezzük."

Ez a mondat igen megtévesztő, annál is inkább, mert sehol sem szerepel máshol a számelméleti függvény helyes definíciója. Összefoglalva, — a könyv egészében jól használható a középiskolás szakkörökben és reméljük, bővíteni fogja a számelmélet iránt érdeklődők táborát. Azonban, hogy ezt a feladatát betölthesse, feltétlenül kívánatos, hogy az újabb kiadások javított, a szükséghez képest átdolgozott formában kerüljenek forgalomba.

Lánczi Ivánné

Folyóirat-kiadványaink előfizethetők és számonként is vásárolhatók a következő helyeken:

Akadémiai Könyvesbolt, Budapest, V., Váci-utca 22.
Akadémiai Kiadó Terjesztési osztály, Budapest, V., Alkotmány-u.
Posta Központi Hírlap Iroda, Budapest, V., József Nádor-tér 1.

A kézirat beérkezett: 1957. V. 20.
Terjedelem: 11,75 (A/5) ív.
A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Szöllőssy Károly

Szegedi Nyomda Vállalat 57-1413 Felelős vezető: Vincze György

ОГЛАВЛЕНИЕ

Неуманн Янош † 1
А. Сабо: Как стала математика дедуктивной наукой. I. 8
А. Часар: О понятии топологического пространства. I. 37
К. Реньи: Об одной бесконечной системе линейных уравнений 61
П. Сюс: Примечания к распределению цифф в Канторове ряде действительных чисел 68
Е. Эгервари: О дифференциалах 79
П. Эрдёш: О некоторых геометрических проблемах 86
Р. Петер: Ограниченно рекурсивных функции Гжегорчика и майорационный метод Аккерманна 93
М. Миколаш: О явной форме рядов $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2\nu+1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ и о частном $\zeta(s, u)/\zeta(s)$ 100
Й. Мольнар: О двухмерной топологической теореме Хелли 108
И. Юихари: О многозначности решения обыкновенных прямолинейных дифференциальных уравнений 115
Проблемы соревнования в честь М. Швейтцера 120
Проблемы 134
Задания 144
Новости 158
Из жизни общества 161
Обзор книг 181

CONTENT

Neumann János † 1
A. Szabó: How mathematics became a deductive science. I. 8
Á. Császár: On the notion of topological space. I. 37
K. Rényi: On an infinite system of linear equations 61
P. Szüsz: Remarks on the distribution of digit in the Cantor-representation of real numbers 68
J. Egerváry: On the differentials 79
P. Erdős: On some geometrical problems 86
R. Péter: The boundedly recursive functions of Grzegorczyk and the majorisation method of Ackermann 93
M. Mikolás: On the closed form of the series $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2\nu+1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ and on the ratio $\zeta(s, u)/\zeta(s)$ 100
J. Molnár: On Helly's two-dimensional topological theorem 108
J. Bihari: On the multiplicity of integrals of ordinary differential equations 115
Problems of the Schweitzer-competition 120
Problems 134
Examples 144
News 158
Society life 161
Book review 181

Ára 12,— Ft.
Előfizetés évi 20,— Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb. szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.

312.046

MATEMATIKAI LAPOK

VIII. ÉVFOLYAM

3-4.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1957

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.

Budapest, 1957. december, VIII. évfolyam 3—4. szám.

Felelős szerkesztő: Turán Pál.

Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd.

Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.

A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.

Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat, Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850. Csekkszámlaszám: 61 257.

Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat: József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.

Előfizetés egy évre 20,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Szőkefalvi-Nagy Béla: Neumann János munkássága az operátorelmélet területén 185
Kiegészítés Neumann János dolgozatainak jegyzékéhez 210
Császár Ákos: A topologikus tér fogalmáról, II. 211
Szabó Árpád: Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? II. . . . 232
T. Sós Vera: A lánctörtek egy geometriai interpretációja és alkalmazásai 248
Kántor Sándor: Geőcze Zoárd függvénye mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható 264
Császár Ákos: Megjegyzés Geőcze Zoárd függvényéhez 268
A. N. Kolmogorov: Tudósképzés a Szovjetunióban 272
Fejes Tóth László 1957 évben Kossuth-díjjal kitüntetett munkáinak jegyzéke 281
Jelentés az 1956. évi Schweitzer Miklós emlékversenyről 284
Feladatrovat 313
Példarovat 322
Hírek 341
Társulati élet 344
Beszámoló az 1954 évben Jósvafőn tartott matematikai statisztikai kollokviumról 352
Diákkonferencia Debrecenben 355
Könyvismertetések 357



Neumann János munkássága az operátorelmélet területén*

Írta
Szőkefalvi-Nagy Béla

1. §. Kvantummechanika és spektrálelmélet

1. Neumann János első munkái főleg a halmazelmélet és a bizonyításelmélet körébe vágnak, de igen korán bekapcsolódik, mégpedig rendkívül nagy sikerrel, azokba a kutatásokba is, amelyek az 1925-ik és az azt követő néhány év alatt szinte robbanásszerű gyorsasággal kifejlesztették az atomi rendszerek új mechanikáját, a kvantummechanikát. Egy sor dolgozattal járult hozzá az elmélet

* Деятельность Яноша Неймана в области теории операторов. — J. von Neumann's work in the theory of operators.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

elvi alapjainak és egyes részleteinek is a kidolgozásához, ezek tárgyai közt szerepelnek: a Dirac-féle elektronelmélet és a spektrumok tulajdonságai közötti kapcsolatok (részben Wigner Jenővel közösen írt dolgozatok); az ergodelmélet és Boltzmann-féle H-tétel érvényessége az új mechanikában; a kvantummechanika viszonya a statisztikához és a klasszikus mechanikához stb. Az a könyv, amelyet a kvantummechanika matematikai alapjairól írt[1], az új elmélet alapvető irodalmának egyik legnevezetesebb darabja.

E könyvben és megelőző dolgozataiban Neumann következetesen arra törekszik, hogy az új elmélet számára szilárd matematikai alapot teremtsen. Bár elismeri, hogy a kvantummechanika Dirac-féle formalizmusa rövidség és elegancia szempontjából aligha mulható felül, de ugyanakkor megállapítja, hogy ez a formalizmus a matematikai szigorúság feltételeinek nem felel meg. E formalizmus ugyanis következetesen arra a fikcióra épül, hogy minden „önadjungált operátor" diagonális alakra hozható, ami azoknak az operátoroknak az esetében, amelyekre ez valójában nincs így, bizonyos „nem valódi" függvények bevezetését teszi szükségessé, bizonyos egymásnak ellentmondó tulajdonságokkal (Dirac-féle deltafüggvény). Idézünk a könyv bevezetéséből: „Ez nem volna ellenvetés, ha ezek, az analízis mai kereteibe bele nem illő fogalomalkotások az új fizikai elmélet számára valóban lényegesek lennének. Amint a Newton-féle mechanika az, akkori alakjában még kétségtelenül önmagának ellentmondó, infinitézimális számítás keletkezésére is indítékot adott, úgy a kvantummechanika is felvetheti a ‚végtelen sok változós analízis' új felépítését — tehát a matematikai apparátust kellene megváltoztatni, nem pedig a fizikai elméletet. Erre azonban egyáltalában nincs szükség, sőt meg fogjuk mutatni, hogy a transzformációelmélet éppen olyan világosan és egységesen megalapozható matematikailag kifogástalan módon is. Hangsúlyozni kell, hogy a korrekt felépítés nem a Dirac-féle módszer valamilyen matematikai pontosításában és kifejtésében áll, hanem elejétől kezdve eltérő eljárást tesz szükségessé, nevezetesen az operátorok Hilbert-féle spektrálelméletére való támaszkodást."

Neumann következetesen kitart amellett, hogy az atomi rendszerek állapotainak leírása a kvantummechanikában a Hilbert-tér vektorai által, az e rendszerekkel kapcsolatos fizikai mennyiségek leírása viszont e tér lineáris transzformációi, „operátorai" által történhet a matematikailag legalkalmasabb módon. Ehhez azonban az szükséges, hogy a Hilbert-tér operátorainak, pontosabban ezek közül az ún. Hermite-féléknek az elméletét a Hilbert és közvetlen

[1] *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin, 1932).

követői (E. Hellinger, Riesz Frigyes, E. Schmidt, O. Toeplitz) által megszabott kereteken túl folytassuk, kiterjesztve ezt az elméletet az ún. nem-korlátos operátorokra is.

Ezt a hatalmas, tiszta matematikai feladatot Neumann fényes eredménnyel megoldotta, új fejezetet nyitva meg ezzel a Hilbert-tér elméletében és ezzel az analízisnek „funkcionálanalízis" néven nevezett új ágában.

Mint fent idézett szavaiból is kitűnik, Neumann János nem azért ragaszkodott a Dirac-féle, matematikailag önellentmondásokat tartalmazó formalizmusnak a kvantummechanikából való kiküszöböléséhez, mert eleve lehetetlennek tartotta ezen ellentmondásoknak egy újszerű, az addigi matematikai analízis fogalomalkotásait messzemenően általánosító, de egzakt elméletben való feloldását. Mindössze azt állította, és ezt be is bizonyította, hogy a kvantummechanikának teljesen kielégítő, egzakt matematikai felépítése megadható a meglévő matematikai eszközökkel is, ha ezeket előbb bizonyos módon, de az analízis szokásos keretein túl nem lépve, kifinomítjuk. Neumann ezen álláspontját teljesen jogosnak kell tartanunk, még ha azóta ki is derült, hogy a kvantumelmélet egy újabb hajtásában, az ún. terek kvantumelméletében a Hilbert-féle tér és operátorai már nem látszanak mindenben alkalmas matematikai segédeszközöknek s a Dirac-féle „önellentmondó" függvények kiküszöbölése itt nem sikerült. Igaz, azóta megszületett az analízis alapvető fogalomalkotásainak az a kiterjesztése (az „általánosított függvények" ill. „disztribuciók" Szoboljev—Schwartz-féle elmélete), amelyen belül ezek az ellentmondások feloldódnak.

2. Abban a hatalmas dolgozatában[2], amelyben a Hilbert-tér és ún. Hermite-féle operátorainak újabb, a kvantummechnika igényeinek megfelelő elméletét kifejti, Neumann a Hilbert-tér fogalmát axiomatikus módon vezeti be. Addig Hilbert-téren azoknak a végtelen sok komponensű $x = (x_1, x_2, \ldots)$ „vektoroknak" a „terét" értették, amelyekre az

$$\|x\| = (\Sigma |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

„norma" véges értékű; e tér bármely két vektorára az

$$(x, y) = \Sigma x_k \bar{y}_k$$

képlet által „belső szorzat" értelmezhető, és nyilván $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$. Az analógia a véges dimenziós euklidesi vektortérhez, ill. annak komplex komponensű vektorokra kiterjesztett alakjához nyilvánvaló. A Neumann János által bevezetett értelemben Hilbert-téren tetszőleges x vektorhoz és A operátorhoz hozzárendelhető egy A^* operátor, az A adjungáltja, amelyre $(Ax, y) = (x, A^*y)$. Ha $A = A^*$, akkor A önadjungált operátor. Ezek a fogalmak a véges dimenziós esetben a mátrixelmélet jól ismert fogalmainak felelnek meg.

[2] Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Annalen*, **102** (1929), 49—131.

leges $f, g, \ldots$ elemekből álló olyan *lineáris, normált* és *teljes*[3] teret értünk, amelyben a norma-fogalom egy belsőszorzat-fogalomból származik az

$$\|f\|^2 = (f,f)^{\frac{1}{2}}$$

összefüggés szerint, kikötve még, hogy a tér dimenziója megszámlálhatóan végtelen legyen. (Az újabb irodalomban ezt az utóbbi kikötést gyakran elengedik.)

Hogy mely lineáris, normált terek norma-fogalma származtatható egy belsőszorzat-fogalomból, arra később Neumann, P. Jordannal együtt, egy érdekes kritériumot adott[4]. Ez a kritérium a következő, ún. parallelogramma-azonosság érvényessége bármely f, g vektorpárra:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.$$

Az axiomatikus definíció közös tárgyalását teszi lehetővé a különböző „konkrét" Hilbert-tereknek, így a véges négyzetösszegű számsorozatokból álló, már előbb említett tér mellett a véges négyzetintegrálú függvények terének stb., s így pl. a kvantummechanika számára azzal a közvetlen előnnyel jár, hogy eleve nyilvánvalóvá teszi a Heisenberg—Born—Jordan-féle „matrixmechanikának" és a Schrödinger-féle „hullámmechanikának" az ekvivalenciáját.

A Hilbert-térben egy tetszőleges teljes ortogonális és normált rendszert vezetve be „koordonátarendszer" gyanánt, a tér elemei (vektorai) komponenseik sorozatával, a tér (korlátos) lineáris operátorai pedig matrixaikkal jellemezhetők, ezzel azonban az a közvetlen hátrány jár együtt, hogy a műveletek invariáns, koordinátarendszertől nem függő tulajdonságai elkendőződnek. Éppen ezért már Riesz Frigyes is, a végtelen sok ismeretlenű lineáris egyenletrendszerekről 1913-ban megjelent könyvében (amely könyvből a későbbi kutatók, köztük Neumann János is, igen sokat merítettek), az operátorok vizsgálatában koordinátarendszer-nélküli, erősen geometriai jellegű tárgyalásmódot követ: az operátorokkal magukkal számol és nem valamely koordinátarendszerbeli végtelen matrixaikkal. Ez a módszer Rieszné́l még csupán elegánsabb a matrix-módszernél, de azzal ekvivalens. Ha azonban a nem-korlátos operátorokat akarjuk vizsgálni, márpedig a kvantummechanika ilyeneket is felvet, akkor a matrix-tárgyalásmód általában nem is

[3] Teljességen azt értjük, hogy az $\|f\|$ norma-fogalom, ill. az $\|f-g\|$ távolság-fogalom által származtatott konvergencia-fogalom esetén teljesül a Cauchy-féle belső konvergencia-kritérium.

[4] On inner products in linear, metric spaces, *Annals of Math.*, **36** (1935), 719—723.

lehetséges, hiszen ezek az operátorok általában a Hilbert-térnek nem minden vektorára vannak értelmezve (így esetleg a koordinátarendszer alapvektoraira éppen nem). A matrix-tárgyalásmóddal kapcsolatban felmerülő különféle nehézségeket Neumann János egy dolgozatában részletesen analizálja[5].

A koordináta-nélküli alakban kifejezve, egy A lineáris operátort akkor mondunk *korlátosnak*, ha 1) a $\mathfrak{H}$ Hilbert-tér minden f vektorára értelmezve van, 2) létezik egy olyan M szám, hogy minden f vektorra

$$\|Af\| \leqq M\|f\|; \tag{1}$$

a legkisebb ilyen tulajdonságú M számot az A operátor normájának nevezzük és $\|A\|$-val jelöljük. *Szimmetrikusnak* akkor mondjuk az A operátort, ha minden f, g vektorpárra áll az

$$(Af, g) = (f, Ag) \tag{2}$$

összefüggés. Korlátos szimmetrikus operátorokról Hilbert óta ismeretes, hogy előállíthatók az

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda) \tag{3}$$

Stieltjes-integrál alakban (így kifejezve először Riesznél), ahol $E(\lambda)$ egy ún. *spektrálsereg*, azaz a $\mathfrak{H}$ tér bizonyos altereire való (merőleges) vetítések operátorainak a λ paraméterrel együtt növekedő serege, amelyre

$$E(\lambda) = O \quad \text{ha} \quad \lambda < -M, \qquad E(\lambda) = I \quad \text{ha} \quad \lambda < M \tag{4}$$

(I az identikus transzformáció, O a nulla-transzformáció operátora). Ez a korlátos szimmetrikus operátorok „spektrális felbontására" vonatkozó tétel természetes általánosítása a véges szimmetrikus matrixok diagonális alakra hozhatóságát állító algebrai tételnek. $E(\lambda)$ mint λ függvénye ugrásszerűen nő az A sajátértékei helyén, folytonosan nő az A spektrumának többi pontjaiban. A λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok egy alterét alkotják $\mathfrak{H}$-nak, az erre való vetítés operátora az $E(\lambda+0) - E(\lambda-0)$ ugrásértékkel egyenlő.

A (3) alatti operátor-relációt abban az értelemben vehetjük, hogy a $\mathfrak{H}$ tér minden f, g vektorpárjára

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d(E(\lambda)f, g), \tag{5}$$

[5] Zur Theorie der unbeschränkten Matricen, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **161** (1929), 208—236.

ahol most már a jobboldalon egy közönséges Stieltjes-integrál áll az $(E(\lambda)f, g)$ függvényre vonatkozólag, amelyről könnyen belátható, hogy korlátos változású. Ebből könnyen következik az is, hogy

$$(6) \qquad \|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2.$$

Mint már mondottuk, a kvantummechanika operátorai lineárisak, de általában nem korlátosak; azaz a $\mathfrak{H}$ Hilbert-térnek csak valamely $\mathfrak{D}_A$ lineáris (de nem feltétlenül zárt) részsokaságán vannak értelmezve és azt lineáris (azaz additív és homogén) módon képezik le $\mathfrak{H}$ valamely $\mathfrak{R}_A$ lineáris részsokaságára. Neumann egy A lineáris operátort *Hermite-félének* nevez (mi nevezzük *szimmetrikusnak*), ha

1) $\mathfrak{D}_A$ a $\mathfrak{H}$ térben mindenütt sűrűn fekszik,

2) $\mathfrak{D}_A$ bármely két vektorára áll a (2) egyenlet.

A kvantummechanika operátorai ilyenek (pl. a

$$(7) \qquad Qf(x) = x \cdot f(x), \quad Pf(x) = -ih\frac{d}{dx}f(x)$$

operátorok az $L^2(-\infty, \infty)$ függvénytérben).

Kérdés, kiterjeszthető-e ezekre a nem-korlátos szimmetrikus operátorokra is a spektrális felbontás tétele, azzal a természetes engedménnyel, hogy (4) helyébe a következő általánosabb feltétel lép:[6]

$$(4') \qquad E(\lambda) \to O \text{ ha } \lambda \to -\infty \quad \text{és} \quad E(\lambda) \to I \text{ ha } \lambda \to \infty.$$

Ha azonban az $E(\lambda)$ spektrálsereg nincs lényegében egy véges $(-M, M)$ intervallumra szorítva, mint a korlátos esetben, akkor az integrálok konvergenciájának a kérdése is felmerül. Természetes ekkor a (6) relációt abban az értelemben vennünk, hogy érvényes az A értelmezésű tartományának minden f elemére, és a jobboldalt álló integrál csakis ezekre az f-ekre konvergens. Az (5) relációt is természetesen csak a $\mathfrak{D}_A$-ba tartozó f-ekre (és minden g-re) követeljük meg. Hogy az (5) jobboldalán álló integrál az ilyen f, g párokra konvergens, az könnyen következik a (6) alatti integrál konvergenciájából.

[6] Korlátos operátorok esetén a $B_n \to B$ konvergencián azt értjük, hogy a Hilbert-tér minden f vektorára $B_n f \to Bf$. Ez az ún. *erős* operátorkonvergencia. Emellett szerepe van más konvergencia-fogalmaknak is: B_n *normában* tart B-hez, ha $\|B_n - B\| \to 0$, és *gyengén* tart B-hez, ha minden f, g vektorpárra $(B_n f, g) \to (Bf, g)$.

Neumann kimutatta, hogy nem minden szimmetrikus A operátorra érvényes az így általánosított spektrális felbontás tétele. Ennek egyik oka az lehet, hogy az A értelmezési tartományát tulságosan szűkre szabtuk, azaz van A-nak valamely tágabb $\mathfrak{D}_{A'}$ lineáris sokaságra való, ugyancsak szimmetrikus A' folytatása. De még ha ilyen folytatás nem is létezik, azaz ha A *maximális* szimmetrikus operátor, akkor sem feltétlenül érvényes rá a tétel, hanem csak akkor érvényes, ha A *hipermaximális*, vagy az azóta inkább használatos kifejezéssel élve: *önadjungált* operátor.

Hogy ezt a fogalmat megértsük, be kell vezetnünk egy tetszőleges (nem szükségképpen szimmetrikus) T lineáris operátor *adjungáltjának* a fogalmát; T-ről feltesszük, hogy értelmezési tartománya $\mathfrak{H}$-ban sűrű. A T^* adjungált operátort Neumann a

$$(Tf, g) = (f, T^*g) \tag{8}$$

egyenlettel definiálja a következő pontos értelemben: T^* értelmezési tartománya álljon azokból a g vektorokból, amelyekhez található olyan g' vektor, hogy a

$$(Tf, g) = (f, g') \tag{9}$$

reláció minden $\mathfrak{D}_T$-beli f vektorra érvényes; $\mathfrak{D}_T$ sűrű lévén $\mathfrak{H}$-ban, g' ezzel egyértelműen meg van határozva. Legyen definíció szerint $g' = T^*g$. Az így nyert T^* operátor linearitása evidens, de értelmezési tartománya nem feltétlenül sűrű $\mathfrak{H}$-ban. Ha T korlátos, akkor T^* is az, és $\|T\| = \|T^*\|$.

A szimmetrikus A operátorok ezek szerint úgy is jellemezhetők, hogy A^* egyenlő A-val, vagy annak folytatása, jelben:

$$A \subseteq A^*.$$

Ha itt egyenlőség van, akkor nevezzük A-t *önadjungáltnak*.

Minden korlátos szimmetrikus operátor nyilvánvalóan önadjungált is ebben az értelemben, de a nem-korlátosak nem mind azok, még a maximálisak sem. A kvantummechanika által konkréten felvetett operátorok mindenesetre önadjungáltak, ezekre tehát a spektrális felbontás lehetséges. Egyébként Neumannak sikerült a nem-önadjungált maximális szimmetrikus operátorok szerkezetét is meghatároznia.

Fontos tudni, hogy mely szimmetrikus operátoroknak létezik önadjungált, tehát spektrálisan felbontható folytatásuk. Neumann az ún. defektus-indexek bevezetésével erre a kérdésre is megadja a feleletet, és kimutatja, hogy többek között minden *valós* és minden *félig korlátos* szimmetrikus operátornak van önadjungált folytatása. Az A operátor akkor valós, ha létezik olyan teljes normált

ortogonális rendszer, amelyben az A matrixának elemei valós számok; A pl. alulról félig korlátos, ha létezik olyan C szám, hogy az

$$(Af, f) \geqq C(f, f)$$

egyenlőtlenség az A értelmezési tartományának minden f vektorára fennáll.

Neumann ezeket az eredményeit érdekes új módszerrel éri el. Az A szimmetrikus operátorról áttér a

$$V = \frac{A+iI}{A-iI} \quad (= (A+iI)(A-iI)^{-1})$$

operátorra, A ún. Cayley-transzformáltjára; ez hosszúságtartó, azaz $\|Vf\| = \|f\|$, és következésképpen korlátos és így könnyen kezelhető. Könnyű például áttekinteni a V operátor összes hosszúságtartó folytatásait, amivel együtt azután az A operátor összes szimmetrikus folytatásait is áttekinthetjük. A akkor maximális, ha V-nek nincs hosszúságtartó folytatása, ami csak úgy lehetséges, hogy V-nek vagy az értelmezési tartománya, vagy az értékkészlete már kitölti a $\mathfrak{H}$ teret. A akkor önadjungált, ha V-nek mind az értelmezési tartománya, mind az értékkészlete kitölti $\mathfrak{H}$-t, azaz ha V *unitér* operátor. Már pedig unitér U operátorra aránylag könnyen nyerhető a (3)-hoz hasonló

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda}\, dE(\lambda) \tag{10}$$

spektrális felbontás ($E(0) = O$, $E(2\pi) = I$), amiből az

$$U = \frac{A+iI}{A-iI}, \quad A = i\frac{U+I}{U-I}$$

összefüggések alapján eljuthatunk az önadjungált A operátor kívánt spektrális felbontásához.

Az önadjungált operátorokra nyert

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)$$

spektrális felbontás lehetővé teszi operátorkalkulus kiépítését: ha $F(\lambda)$ valós- vagy komplexértékű függvény, értelmezzük az $F(A)$ operátort az

$$F(A) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, dE(\lambda)$$

integrálképlettel. Részletesebben: $F(A)$ értelmezési tartománya azokból az f vektorokból áll, amelyekre az

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 \, d\|E(\lambda)f\|^2$$

integrál véges értékű, és ilyen f-re $F(A)f$-et értelmezzük az

$$(F(A)f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \, d(E(\lambda)f, g)$$

integrálképlet által, ahol g tetszőleges eleme $\mathfrak{H}$-nak. Az $F(\lambda)$ függvényről természetesen fel kell tennünk, hogy az $(E(\lambda)f, g)$ függvények mindegyikére nézve a Lebesgue—Stieltjes-féle értelemben mérhető.

Az így definiált operátor-függvények tulajdonságaival Neumann egy dolgozata[7] részletesen foglalkozik. Részben egy előbbi dolgozata[8] eredményeire támaszkodva bebizonyítja, hogy egy korlátos B operátor akkor és csakis akkor függvénye egy adott A korlátos önadjungált operátornak, ha B felcserélhető minden olyan korlátos operátorral, amely A-val felcserélhető (T és S felcserélhetősége azt jelenti, hogy $TS = ST$). Ez a tétel nem korlátos A és B esetére is kiterjeszthető, ha a felcserélhetőség fogalmát megfelelően kiterjesztjük. Erre a tételre közvetlenebb bizonyítást adott később Riesz Frigyes a szegedi *Acta Scientiarum Math.* 7. kötetében.

Egy másik idevágó tétele Neumannak: korlátos önadjungált operátorok tetszésszerinti olyan $\{A_\alpha\}$ halmazához, amelyben bármely két operátor egymással felcserélhető, található olyan önadjungált B operátor, amelynek mindegyik A_α operátor függvénye:

$$A_\alpha = F_\alpha(B);$$

B választható korlátosnak és megkívánható, hogy B az A_α-kból alkotott polinomok határértéke legyen. Ez a tétel természetes általánosítása a felcserélhető szimmetrikus matrixok szimultán diagonális alakra hozhatóságára vonatkozó algebrai tételnek. Egyébként ez a tétel is kiterjeszthető nem korlátos A_α operátorokra. Mindkét említett tétel bizonyításában lényegesen fel kell használni, hogy a Hilbert-tér dimenziója megszámlálható.

A nem-korlátos önadjungált operátorok spektrális felbontására és a velük való függvénykalkulusra közvetlenül Neumann első

[7] Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Math.* **32** (1931), 191—226.

[8] Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Annalen*, **102** (1929), 370—427.

közleményei után M. H. Stone és Riesz Frigyes más módszerekkel is eljutottak, azóta egy sor további tárgyalásmód ismeretes, de elvileg ezek sem egyszerűbbek és sok vonatkozásban támaszkodnak a Neumann által bevezetett fogalmakra és módszerekre. Kiemelendők a félig korlátos szimmetrikus operátorokra vonatkozó Friedrichs- és Krein-féle vizsgálatok.

3. Az általános, nem feltétlenül szimmetrikus T lineáris operátorok vizsgálatára Neumann igen ötletes módon bevezeti az operátor ún. *gráfjának* a fogalmát.[9] Abból az elemi tényből indul ki, hogy a valós változós, valós értékű $t(x)$ függvényt úgy szoktuk ábrázolni, hogy a valós x számegyenest még egy, az előbbire merőleges példányban vesszük (y-tengely) és az $\{x, y\}$ síkban a függvényt az $\{x, t(x)\}$ pontok halmazával ábrázoljuk: ez a $t(x)$ függvény gráfja. Ehhez hasonlóan Neumann a $\mathfrak{H}$ Hilbert-teret veszi még egy, az előbbire merőleges példányban és tekinti az általuk kifeszített $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ teret. Ennek elemei tehát a $\mathfrak{H}$ tér elemeiből alkotott $\{f, g\}$ párok, amelyekre az összeadást és a számokkal való szorzást „komponensenként", a belső szorzatot és normát pedig az

$$(\{f, g\}, \{f', g'\}) = (f, f') + (g, g'),$$
$$\| \{f, g\} \|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

képletek által definiáljuk. Az így kapott új tér is Hilbert-tér. Tekintsük ebben az

$$\{f, Tf\}$$

alakú elemek halmazát, ahol f befutja a T operátor egész értelmezési tartományát: ez a halmaz a T gráfja. A gráf akkor és csak akkor *lineáris* részsokasága a $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ térnek, ha a T operátor *lineáris*. Korlátos lineáris T operátor folytonosságából következik, hogy a gráfja *zárt* lineáris részsokasága, azaz *altere* a $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ térnek. De lehet a gráf zárt bizonyos nem korlátos operátorok esetében is: az ilyen operátorokat *zártaknak* mondjuk.

A gráf fogalmának az adjungált operátorok vizsgálatában való felhasználhatósága a következő egyszerű észrevétel alapján világos lesz. Legyen T lineáris operátor, $\mathfrak{H}$-ban sűrű $\mathfrak{D}_T$ értelmezési tartománnyal. A T adjungáltját értelmező (8) egyenletet így is írhatjuk:

$$(\{f, Tf\}, \{-g', g\}) = 0.$$

Ez azt fejezi ki, hogy $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$-nak a T gráfjára merőleges elemei

[9] Über adjungierte Funktionaloperatoren, *Annals of Math.*, **33** (1932), 294—310.

pontosan azok a $\{h, g\}$ elemek, amelyekre

$$g \in \mathfrak{D}_{T^*} \text{ és } h = -T^* g.$$

Ez a kapcsolat lehetővé teszi Neumann számára, hogy az adjungált operátorra vonatkozó több fontos megállapítást tegyen, pl. a következőket:

a) a T^* operátor mindig zárt;

b) ha T maga is zárt, akkor T^* értelmezési tartománya is sűrű $\mathfrak{H}$-ban és $T^{**} = (T^*)^* = T$;

c) zárt T esetében a $T^* T$ szorzatoperátor önadjungált;

d) zárt T operátor előállítható a $T = WA$ szorzatalakban, ahol A pozitív önadjungált operátor és W hosszúságtartó operátor: ez a T operátor ún. poláris felbontása. Az A pozitivitása azt jelenti, hogy A értelmezési tartományának minden f elemére $(Af, f) \geqq 0$ (most egyébként $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_T$).

Az olyan korlátos lineáris T operátort, amelyre $T^* T = T T^*$, normálisnak nevezünk. Neumann normálisnak mondja az olyan nem feltétlenül korlátos, de zárt operátorokat is, amelyekre ez az egyenlőség fennáll. Ezekre az önadjungált operátorokéhoz hasonló spektrálfelbontási tétel érvényes, csak a valós λ-tengely helyett a komplex számsíkon kell integrálni:

$$T = \int\int z \, dK(z),$$

ahol $K(z)$ egy ún. komplex spektrálsereg.[10]

2. §. Egyparaméteres operátorcsoportok, ergodelmélet

4. Szó volt már a $\mathfrak{H}$ Hilbert-tér unitér operátorairól: U unitér, ha az egész $\mathfrak{H}$ teret az egész $\mathfrak{H}$ térre lineáris és hosszúságtartó módon képezi le. Ezekre érvényes a (10) alakú spektrális felbontás, amiből bármely n egész kitevőre is következik az

$$U^n = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} \, dE(\lambda)$$

formula. Tekintsünk most az egész n-ekre értelmezett $U(n) = U^n$ függvény helyett egy minden valós t paraméterértékre értelmezett $U(t)$ függvényt, amelynek az értékei továbbra is unitér operátorok, a következő ún. csoporttulajdonsággal:

$$U(s+t) = U(s)\, U(t), \quad U(0) = I;$$

[10] Az eddig idézett dolgozatokon kívül idevonatkozóan lásd még: On normal operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **21** (1935), 366—369.

tegyük fel továbbá, hogy $U(t)$ a t-től folytonosan függ: $U(s) \to U(t)$, ha $s \to t$. Ekkor azt mondjuk, hogy az $U(t)$ unitér operátorok egyparaméteres folytonos csoportot alkotnak. Ezekre vonatkozólag M. H. Stone bebizonyította a következő spektrálfelbontási tételt:

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE(\lambda),$$

ahol $E(\lambda)$ spektrálsereg a $(-\infty, \infty)$ egyenesen. Bevezetve az

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)$$

(általában nem korlátos) önadjungált operátort, $U(t)$ tehát az A függvényeként írható fel:

$$U(t) = e^{itA}. \tag{11}$$

Neumann János e tételre egy olyan, a Stone-étól erősen különböző bizonyítást adott[11], amely akkor is ezt az eredményt szolgáltatja, ha $U(t)$-ről nem tételezzük fel eleve a folytonosságot t-ben, hanem csak a mérhetőséget abban az értelemben, hogy $(U(t)f, g)$ minden f, g vektorpárra t-nek mérhető függvénye. (Itt ismét lényegesen ki kell azonban használni, hogy csak megszámlálható dimenziójú térről van szó.)

Az önadjungált A operátort $U(t)$ egyértelműen meghatározza:

$$iAf = \lim_{t \to 0} \frac{U(t) - I}{t} f;$$

A értelmezési tartománya pontosan azokból az f vektorokból áll, amelyekre a jobboldalon álló határérték létezik. Fordítva, minden önadjungált A operátor a (11) képlet alapján meghatároz egy $U(t)$ egyparaméteres folytonos unitér operátorcsoportot. Ez lehetővé teszi, hogy egyes problémákban az önadjungált operátorok helyett a hozzájuk tartozó $U(t)$ csoportokkal dolgozzunk, ami azzal az előnnyel jár, hogy míg A általában nincs a tér minden vektorára értelmezve, addig $U(t)$ értelmezési tartománya természetesen az egész $\mathfrak{H}$ tér.

5. Egy ilyen problémát vet fel az ún. kvantummechanikai felcserélési reláció:

$$PQ - QP = -ihI. \tag{12}$$

[11] Über einen Satz von Herrn M. H. Stone, *Annals of Math.*, **33** (1932), 567—573.

Kérdés, mely önadjungált Q, P operátorok tesznek ennek eleget? Meg lehet mutatni, hogy korlátos Q, P nem lehet megoldás, de ha nem korlátos operátorok közt keresünk megoldást, akkor az értelmezési tartományokkal van probléma (két önadjungált operátor szorzatának értelmezési tartománya nem szükségképpen sűrű a térben, sőt lehet, hogy csak a 0 vektorból áll). H. Weyl javasolta, hogy ezeket a nehézségeket elkerülendő, térjünk át a megfelelő

$$U(t) = e^{itP}, \quad V(t) = e^{itQ}$$

unitér csoportokra; (12) helyébe ekkor az

$$U(t)\, V(s) = e^{-ihst}\, V(s)\, U(t)$$

reláció lép. Neumann egy érdekes dolgozatában[12] meghatározza az összes ilyen kapcsolatban levő unitér operátorcsoportokat. Ha megkívánjuk, hogy a megoldásrendszer irreducibilis legyen, azaz hogy a Hilbert-térnek ne létezzék a megoldásrendszer operátorainak mindegyikére nézve invariáns valódi altere, akkor lényegében (azaz unitérekvivalenciától eltekintve) nincs más megoldás, mint azok a csoportok, amelyeket a (7) alatt említett ún. Schrödinger-féle P, Q operátorok származtatnak.

Megjegyezzük, hogy 1946-ban F. Rellichnek ezt a kérdést sikerült olyan módon is tárgyalnia, hogy nem tér át az unitér csoportokra, viszont ekkor a P, Q értelmezési tartományairól kell bizonyos, fizikai szempontból indokolt kikötéseket tennie.

6. Azt már hangsúlyoztuk, hogy Neumann operátorelméleti vizsgálatainak kiindulópontja és fő ösztönzője a kvantummechanika volt. Hogy az új eredmények a kvantummechanikában milyen alapvető módon jutnak szerephez, arra vonatkozólag részletekbe nem bocsátkozhatunk, hanem utalunk Neumann idézett könyvére.

Az operátorelmélet, nem sokkal azután, hogy a kvantummechanika fontos matematikai segédeszközévé vált, meglepő módon szerephez jutott a klasszikus mechanikában is.

Tekintsünk egy k szabadsági fokkal biró konzervatív dinamikai rendszert, a $H(q_1, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_k)$ Hamilton-függvénnyel. A megfelelő Φ „fázistér" általános $P = (q_1, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_k)$ pontja a Hamilton—Jacobi-differenciálegyenleteknek megfelelően t idő múlva az $S_t P$-vel jelölt helyzetbe jut. S_t a Φ fázistérben egy folytonos áramlásnak fogható fel. Liouville egy egyszerű tétele alapján ez az áramlás mértéktartó, azaz Φ minden mérhető részhalmazát S_t (tetszőleges rögzített t esetén) ugyanakkora mértékű

[12] Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, *Math. Annalen*, **104** (1931), 570—578.

halmazba visz át, és viszont. Ha Ω egy adott energiaértékhez tartozó összes pontok halmaza Φ-ben, azaz egy „energiafelület", akkor Ω S_t-re nézve invariáns, és Ω-n is könnyen megadható olyan $d\omega$ mértékfogalom, amely S_t-re nézve invariáns. Az S_t áramlás konzervatív voltából következik, hogy $S_t(S_s P) = S_{t+s} P$, azaz $S_t S_s = S_{t+s}$. Azonfelül $S_t P$ a (P, t) változópártól folytonosan (sőt folytonosan differenciálhatóan) függ.

B. O. Koopman 1931-ben arra a szerencsés gondolatra jutott, hogy az Ω felületen a $d\omega$ invariáns mérték szerint négyzetesen integrálható $f(P)$ függvények terében tekintse az

$$U_t f(P) = f(S_t P)$$

egyenlet által értelmezett U_t operátort: ez nyilván lineáris, és az S_t áramlás mértéktartó voltából, csoport-tulajdonságából és folytonosságából rendre következik, hogy U_t unitér, megvan a csoport-tulajdonsága, és t-nek mérhető függvénye. Stone tétele szerint tehát U_t előállítható az

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \, dE(\lambda) \tag{13}$$

alakban. Koopman rámutatott arra, hogy az $E(\lambda)$ spektrálsereg egyes tulajdonságaiból következtetéseket lehet levonni a dinamikai rendszer tulajdonságaira, legalábbis olyan módon, hogy ezek a tulajdonságok a rendszer „majdnem minden" állapotában megvannak. Ezzel új, operátorelméleti módszer nyílt meg a klasszikus mechanika és különösen a klasszikus mechanikai statisztika számára.

Az új módszer egyik első nevezetes alkalmazásaként Neumann Jánosnak sikerült bebizonyítania a klasszikus mechanikai statisztika egy alapvető hipotézisét, az ún. kváziergodikus hipotézist.[13]

Először is azt bizonyította be, hogy tetszőleges unitér operátorcsoportra a (13) előállításból következik, hogy az

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b U_t f \cdot dt$$

integrálközép a Hilbert-tér bármely f vektorára $b-a \to \infty$ esetén egy f^* határértékhez tart; utóbbi nyilván invariáns minden U_s-re nézve:

$$U_s f^* = f^*.$$

[13] Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **18** (1932), 70—82; Physical applications of the quasi-ergodic hypothesis, *u. ott*, 263—266.

A dinamikai problémára visszatérve ebből az következik, hogy bármely, Ω-n négyzetesen integrálható $f(P)$ függvényre a

$$\varphi_{a,b}(P) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(S_t P)\,dt$$

integrálközép átlagosan, azaz a

$$\lim_{b-a\to\infty}\int_\Omega |\varphi_{a,b}(P) - f^*(P)|^2\,d\omega = 0$$

értelemben konvergál egy négyzetesen integrálható $f^*(P)$ függvényhez, amely az áramlással szemben invariáns, azaz

$$f^*(S_t P) = f^*(P),$$

legalábbis egy esetleg nullamértékű (t-től függő) halmaz P pontjainak a kivételével.

Ha az Ω halmaz véges mértékű, akkor azok a függvények, amelyek majdnem mindenütt egy konstanssal egyenlők, nyilván négyzetesen integrálhatók és invariánsak. Az S_t áramlást nevezzük ergodikusnak, ha a más invariáns függvény nincs is: ez ekvivalens azzal, hogy az áramlás „metrikusan tranzitív", ami azt jelenti, hogy Ω nem bontható fel két pozitív mértékű, S_t-re nézve invariáns részhalmaz összegére. Metrikusan tranzitív áramlás esetén tehát $\varphi_{a,b}(P)$ átlagosan egy C konstanshoz tart, következésképpen

$$\int_\Omega \varphi_{a,b}(P)\,d\omega \to C\cdot\omega(\Omega).$$

Másrészt S_t mértéktartósága miatt

$$\int_\Omega \varphi_{a,b}(P)\,d\omega = \frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\int_\Omega f(S_t P)\,d\omega\right]dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\int_\Omega f(P)\,d\omega\right]dt =$$

$$= \int_\Omega f(P)\,d\omega,$$

és így

$$C = [\omega(\Omega)]^{-1}\int_\Omega f(P)\,d\omega.$$

Metrikusan tranzitív áramlás esetén tehát az $f(P)$ függvény $\varphi_{a,b}(P)$ „időbeli" közepe $b-a\to\infty$ esetén átlagosan az $f(P)$ „térbeli" közepéhez tart.

Ezzel a klasszikus mechanikai statisztika alapvető hipotézise bizonyítást nyert, legalábbis bizonyos átlagos értelemben, ami azonban fizikai szempontból elég. Neumann e tételét közvetlenül Neumann felfedezése után G. D. Birkhoff úgy finomította, hogy bebizonyította a $\varphi_{a,b}(P)$ időbeli közép pontonként való konvergenciáját is az $a = 0$, $b \to \infty$ esetben, legalábbis majdnem minden P pontra nézve (ún. individuális ergodikus tétel).

Azóta az „ergodelmélet" irodalma igen kiterjedt, többek között Riesz Frigyes is fontos további eredményekkel gazdagította. Meg kell említenünk, hogy Neumannal egyidőben, de bizonyos erősebb feltevések mellett, a svéd Carleman is eljutott az átlagos ergodikus tételhez.

Neumann nem elégedett meg ergodikus tételének bizonyításával, hanem az eredeti Koopman-féle programnak megfelelően részletesen megvizsgálta az S_t mértéktartó áramlás és a hozzátartozó $E(\lambda)$ spektrálsereg tulajdonságai közötti kapcsolatokat.[14] Egyik érdekes eredménye a következő. Legyen Ω egy tetszőleges mérhető halmaz és az Ω-n négyzetesen integrálható függvények Hilbert-terében legyen adva egy mérhető U_t egyparaméteres unitér csoport. Akkor és csak akkor létezik Ω mértéktartó leképezéseinek egy S_t áramlása, amelyhez a Koopman-féle értelemben éppen az adott U_t operátorcsoport tartozik, ha bármely két korlátos, négyzetesen integrálható f, g függvényre

$$U_t(f \cdot g) = U_t f \cdot U_t g$$

(a szükségesség nyilvánvaló az $(f \cdot g)(S_t P) = f(S_t P) \cdot g(S_t P)$ azonosság alapján).

3. §. Operátorgyűrűk

7. Az eddig említett vizsgálatok lényegében egy operátorra, vagy operátorok egy kommutatív családjára vonatkoznak. A Hilbert-tér összes korlátos lineáris operátorainak halmazát $\mathfrak{B}$-vel jelölve, $\mathfrak{B}$ nem kommutatív. A csoportelőállítások elméletének természetesen kínálkozó (és a fizika igényei által is indokolt) általánosítása véges matrixok esetéről végtelen matrixokéra, azaz a Hilbert-tér lineáris operátoraival történő csoportelőállítások elmélete sem építhető ki

[14] Dynamical systems of continuous spectra (Koopman-nal együtt), *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **18** (1932), 255—263; Zur Operatormethode in der klassischen Mechanik, *Annals of Math.*, **33** (1932), 587—642; ennek folytatása egy P. R. Halmossal együtt írt dolgozat: Operator methods in classical mechanics. II, *u. ott*, **43** (1942), 332—350.

addig, míg a nem-kommutatív operátorcsaládokra vonatkozó alapvető tájékozódást nem végezzük el. Ennek a tájékozódásnak részben algebrai, részben topológiai jellegűnek kell lennie.

Neumann [8] alatt már idézett dolgozatában, majd még egy dolgozatban[15] fekteti le e vizsgálatok alapjait. A B halmazon különböző környezetfogalmakat és ezzel különböző topológiákat vezet be (gyenge, erős, legerősebb, egyenletes). Ezek közül sok tekintetben a legfontosabb a *gyenge topológia*, amely a következő, ún. gyenge környezetfogalmon alapul:

a T_0 operátor egy gyenge környezetét azok a T operátorok alkotják, amelyekre

$$|(T-T_0)f_i, g_i)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol ε adott pozitív szám és f_i, g_i a Hilbert-tér véges sok, adott vektora.

Ez a környezetfogalom eleget tesz a Hausdorff-féle axiómáknak és, mint könnyű látni, egy operátorsorozat akkor konvergens a gyenge topológia értelmében, ha a közönséges értelemben gyengén konvergens[6]. De létezhet egy operátorhalmaznak a gyenge topológia értelmében torlódási pontja, amely nem határértéke a halmazból kiválasztható gyengén konvergens sorozatok egyikének sem (Neumann megad erre példákat).

Neumann *operátorgyűrűnek* nevezi B minden olyan M részhalmazát, amelyből a B-ben értelmezett „algebrai" műveletek, azaz a $(cT, T \pm S, TS, T^*)$-műveletek nem vezetnek ki s amely ezenkívül *zárt* a gyenge topológiában.

B egy tetszésszerinti H részhalmaza *kommutánsának* nevezi és H'-vel jelöli B mindazon S elemeinek a halmazát, amelyek H minden T elemével és ezek T^* adjungáltjaival is felcserélhetők. H' a fenti értelemben operátorgyűrűt alkot és nyilván tartalmazza az I egységoperátort is.

Neumann dolgozatának egyik főeredménye a következő: a $H'' = (H')'$ operátorgyűrű a legszűkebb mindazon operátorgyűrűk közül, amelyek az adott H operátorhalmaz elemeit és az I operátort is tartalmazzák. Ez a tétel a véges matrixokkal való csoportelőállítások elméletéből ismert Burnside-féle tételnek és Frobenius és Schur által adott élesítésének kiterjesztése a Hilbert-tér operátorainak az esetére.

Speciálisan, ha M az egységoperátort tartalmazó operátorgyűrű, akkor $M'' = M$.

[15] On a certain topology for rings of operators, *Annals of Math.*, **37** (1936), 111—115.

Legyen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ véges sok operátorgyűrű a következő tulajdonságokkal:

a) az M_i-be tartozó bármely operátor felcserélhető az M_j-be tartozó bármely operátorral $(i \neq j)$,

b) az $M_1, M_2, \ldots, M_n$ gyűrűk által generált operátorgyűrű a teljes $\mathfrak{B}$ gyűrű.

Ekkor azt mondjuk, hogy $M_1, M_2, \ldots, M_n$ a $\mathfrak{B}$ operátorgyűrűnek egy *faktorizációja*. Kimutatható, hogy ekkor mindegyik M_i-nek megvan az a tulajdonsága, hogy M_i és M_i' közös része csak az I skaláris többszöröseiből áll.

A faktorizáció problémája tehát felveti azon M operátorgyűrűk vizsgálatának a szükségességét, amelyekre

$$M \cap M' = (cI),$$

az ilyen operátorgyűrűket Neumann *faktoroknak* nevezi.

Négy hatalmas dolgozatban, amelyeket a harmadik kivételével F. J. Murray-vel együtt írt[16], Neumann a faktorok mélyreható vizsgálatát adja. E vizsgálatok mind módszer, mind eredmények tekintetében a modern matematika legkiemelkedőbb alkotásai közé tartoznak. E vizsgálatok, valamint Neumannak egy később közölt, az előbbiekre mintegy a koronát rátevő dolgozata[17], óriási visszhangot váltottak ki, egész iskola nőtt fel az utóbbi évtizedben, amely az operátorgyűrűk és a kapcsolatos más fogalomalkotások vizsgálatának szenteli erejét. Utalunk itt J. Dixmier nemrégen megjelent könyvére: *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de Neumann)* (Paris, 1957).

E vizsgálatok részletes ismertetésére itt természetesen nincsen módunk, mindössze ízelítőt tudunk csak adni a főbb eredményekből.

Nevezzük a $\mathfrak{H}$ Hilbert-tér egy $\mathfrak{M}$ zárt alterét az M faktorhoz tartozónak, jelben $\mathfrak{M} \eta M$, ha az $\mathfrak{M}$-re való ortogonális vetítés operátora M-be tartozik, vagy ami ezzel ekvivalens, ha $\mathfrak{M}$ invariáns az M'-be tartozó unitér operátorokkal szemben. Az M-hez tartozó alterek között a szerzők két relációt vezetnek be: $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ azt jelenti, hogy M-ben létezik olyan U operátor, amely $\mathfrak{M}$-et hosszúságtartó módon $\mathfrak{N}$-re képezi le, az $\mathfrak{M}$-re merőleges vektorokat pedig a 0 vektorba viszi át; $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ viszont azt jelenti, hogy az $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$

[16] On rings of operators, *Annals of Math.* **37** (1936), 116—229; *Transactions Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 208—248; *Annals of Math.*, **41** (1940), 94—161 és **44** (1943), 716—808.

[17] On rings of operators. Reduction Theory, *Annals of Math.*, **50** (1949), 401—485.

reláció nem áll fenn, de van $\mathfrak{N}$-nek olyan $\mathfrak{N}'$ altere, amelyre az $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}'$ reláció fennáll. A számosságok Cantor-féle elméletének analogiájára a szerzők kimutatják, hogy az $\sim$ reláció reflexiv, szimmetrikus és tranzitív, azaz ekvivalenciareláció, a $\prec$ reláció pedig egy egyszerű rendezést definiál az M-hez tartozó alterek halmazában. Egy fontos lemma, amit eközben felhasználnak, a következő: ha X tetszés szerinti zárt, lineáris, sűrűn értelmezett operátor $\mathfrak{H}$-ban, amelyre $UXU^{-1} = X$ az M'-be tartozó minden unitér U operátor esetében, akkor az X és X^* operátorok értékkészleteinek lezárásait $\mathfrak{M}$-mel és $\mathfrak{M}^*$-gal jelölve, ezek mindketten M-hez tartozó alterek és egymással ekvivalensek (az ilyen X operátorokról azt mondják, hogy M-hez tartoznak, jelben: $X \eta \mathsf{M}$). A mérés klasszikus, euklidesi algoritmusának analogiájára (némileg hasonló eljárással, mint amelyet Haar Alfréd követett az invariáns csoport-mértékekről szóló híres dolgozatában) a szerzők megszerkesztenek egy $D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{M})$ ún. *relatív dimenziófüggvényt*, amely az összes $\mathfrak{M} \eta \mathsf{M}$ alterekre értelmezve van és a következő tulajdonságokkal bir:

$0 \leqq D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{M}) \leqq \infty$; $D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{M}) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{M} = (0)$;
$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ esetén $D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{M}) = D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{N})$;
$\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$ esetén $D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) = D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{M}) + D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{N})$.

Kimutatják, hogy ezek a tulajdonságok e függvényt egy konstans pozitív szorzótól eltekintve meghatározzák és hogy ezekből a tulajdonságokból már az is következik, hogy

$D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{M}) = D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{N})$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$,
$D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{M}) < D_{\mathsf{M}}(\mathfrak{N})$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

Kimutatják, hogy e függvény értékkészlete, Δ, alkalmas normálás esetén, csak a következő halmazok valamelyike lehet:

I_n eset: $\Delta = (0, 1, \ldots, n)$, n véges;
I_∞ eset: $\Delta = (0, 1, \ldots, \infty)$,
II_1 eset: Δ az egész $0 \leqq \alpha \leqq 1$ valós számköz,
II_∞ eset: Δ az egész lezárt $0 \leqq \alpha \leqq \infty$ valós félegyenes,
III_∞ eset: Δ csak a 0-ból és a ∞-ből áll.

Maguk a faktorok ennek megfelelően osztályozhatók. Az egymáshoz kapcsolt M, M' faktorokról kiderül, hogy ugyanazon római-szám-tipusúak. A legegyszerűbb természetesen az I_n eset: ekkor M izomorf az összes $n \times n$ tipusú matrixok gyűrűjével. A teljes B operátorgyűrű I_∞ tipusú faktor. Mélyreható, csoportelméleti meggondolásokat is felhasználó konstrukcióval a többi lehetséges tipusra is sikerül példákat megadni. A legszingulárisabb tipus természetesen a III_∞. Viszont kiderül, hogy a legregulárisabb

tipushoz, I_n-hez, nem az I_∞ tipus áll a legközelebb, hanem sokkal inkább a másik „véges" tipus, II_1. Erre elsősorban az mutat, hogy I_n és II_1 tipusú M faktorok esetén lehetséges az M-be tartozó összes operátorokra egy $\mathrm{tr}_M(A)$ *relatív nyomfüggvényt* értelmezni a következő tulajdonságokkal:

$\mathrm{tr}_M(A)$ A-tól lineáris módon függ;

$\mathrm{tr}_M(A)$ akkor és csak akkor pozitív, ha $A \geqq O$, de $A \neq O$;

$\mathrm{tr}_M(A^*) = \overline{\mathrm{tr}_M(A)}$, $\mathrm{tr}_M(AB) = \mathrm{tr}_M(BA)$;

és ezek a tulajdonságok egyértelműen meghatározzák.

A relatív nyom létezése az I_n esetben jól ismert, de az is ismert, hogy az összes korlátos lineáris operátorok alkotta, I_∞-tipusú B faktorban relatív nyom nem értelmezhető.

A relatív nyom konstrukciója egyébként az I_n, II_1 tipusú M faktorok esetében egyaránt a relatív dimenziófüggvény felhasználásával történhet: ha P egy M-hez tartozó $\mathfrak{M}$ altérre való projekció operátora, akkor legyen $\mathrm{tr}_M(P) = D_M(\mathfrak{M})$; ha

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda)$$

egy tetszőleges, M-be tartozó önadjungált operátor, akkor legyen

$$\mathrm{tr}_M(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \cdot d\,\mathrm{tr}_M(E(\lambda));^{18}$$

végül tetszés szerint, M-be tartozó A operátorra legyen $\mathrm{tr}_M(A) = \mathrm{tr}_M(B) + i\,\mathrm{tr}_M(C)$, ahol $B = (A + A^*)/2$, $C = (A - A^*)/2i$.

A II_1 típusú M faktor*hoz* tartozó nem korlátos (de zárt és sűrűn értelmezett) X operátorokról is olyan megállapítások tehetők, amelyeket az I_∞ tipusú B faktor esetében szerzett tapasztalataink alapján nem várnánk, így pl. az M-hez tartozó minden szimmetrikus operátor önadjungált, stb.

8. Nincs módunk a faktorokra vonatkozó nagyszámú további eredmények ismertetésére[19]. Szólnunk kell azonban még Neumannnak a redukcióelméletről szóló,[17] alatt már idézett, igen fontos dolgozatáról. Ezt a dolgozatát 1938-ban írta, de további tökéletesítés és egyszerűsítés reményében (amire a háború és egyéb vizs-

[18] A-val együtt az $E(\lambda)$ spektrálsereg operátorai is M-be tartoznak.

[19] A felsoroltakon kivül Neumannak még egy dolgozata vág e témakörbe: On some algebraical properties of operator rings, *Annals of Math.*, 44 (1943), 709—715.

gálatai miatt végül is nem került sor) a dolgozatot a közlés elől 1949-ig visszatartotta.

E dolgozat alapvető fogalomalkotása a Hilbert-terek *direkt integráljának* a fogalma, amely az (ortogonális) direkt összegek fogalmát általánosítja. Legyen a t valós paraméter minden értékéhez hozzárendelve egy $k(t)$ dimenziós $\mathfrak{H}(t)$ Hilbert-tér; $k(t)$ lehet véges, vagy megszámlálhatóan végtelen. Legyen továbbá adva egy korlátos, növekvő $\sigma(t)$ „súlyfüggvény"; tegyük fel, hogy a $k(t)$ függvény $\sigma(t)$-re vonatkozólag Lebesgue—Stieltjes-mérhető. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathfrak{H}(t)$ a $k(t)$ dimenziós koordinátatér. Válasszunk mindegyik $\mathfrak{H}(t)$ térből egy-egy

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots)$$

vektort (az n index véges $k(t)$ érték esetén az 1-től $k(t)$-ig terjedő, végtelen $k(t)$ esetén pedig az összes természetes számokon fut át), megkívánjuk azonban, hogy az így kapott $x(t)$ vektorfüggvény mérhető legyen abban az értelemben, hogy minden rögzített n indexre az $x_n(t)$ komponens a $\sigma(t)$ függvény szerint Lebesgue—Stieltjes-értelemben mérhető (azon a halmazon, amelyen értelmezve van, ti. ahol $k(t) \geqq n$), továbbá feltesszük, hogy $\|x(t)\|^2$ a $\sigma(t)$ függvény szerint integrálható. Itt $\|x(t)\|$ természetesen a $\mathfrak{H}(t)$ térbeli normát jelenti, azaz

$$\|x(t)\|^2 = \sum_n |x_n(t)|^2.$$

Két ilyen $x(t)$ vektorfüggvényt tekintsünk ekvivalensnek, hogyha legfeljebb egy $\sigma(t)$-re vonatkozóan nullamértékű halmaz t pontjaiban különböznek. Ha x az ebben az értelemben ekvivalens vektorfüggvényeknek egy ekvivalenciaosztályát jelenti, akkor az $x \sim x(t)$ reláció azt fejezi ki, hogy $x(t)$ az x ekvivalenciaosztály egy reprezentáns eleme. Ezekre az ekvivalenciaosztályokra az összeadás és a konstanssal való szorzás műveleteit a nyilvánvaló módon, a belső szorzatot pedig az

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t), y(t))\, d\sigma(t)$$

integrállal értelmezzük (ez a definíció nyilván független a reprezentáns $x(t), y(t)$ elemek választásától. Ilyen módon az x ekvivalenciaosztályok egy $\mathfrak{H}^*$ Hilbert-teret alkotnak: ezt a teret nevezzük a $\mathfrak{H}(t)$ terek direkt integráljának az adott súlyfüggvényre vonatkozóan.

A $\mathfrak{H}^*$ tér bizonyos A operátorainak megvan az a tulajdonságuk, hogy ha $x \sim x(t)$, akkor $Ax \sim A(t)x(t)$, ahol $A(t)$ t minden

rögzített értéke mellett a $\mathfrak{H}(t)$ tér egy operátora; ebben az esetben azt mondjuk, hogy A *felbontható,* és az A operátor és az $A(t)$ operátorfüggvény közötti kapcsolatot így jelöljük: $A \sim A(t)$; $A(t)$-t A újra csak egy nullamértékű halmaz erejéig határozza meg, azaz A-hoz voltaképpen az operátorértékű $A(t)$ függvények egy ekvivalenciaosztálya tartozik.

Neumann dolgozatának főeredménye a következő. Legyen M a $\mathfrak{H}$ Hilbert-tér egy operátorgyűrűje. Ekkor $\mathfrak{H}$ azonosítható egy alkalmasan választott $\mathfrak{H}^*$ direkt-integrál-térrel (azaz arra lineáris és hosszúságtartó módon leképezhető) úgy, hogy a) az M-be tartozó A operátorok mind felbonthatók, és a reprezentáló $A(t)$ függvények választhatók úgy, hogy a direkt integrál $\sigma(t)$ súlyfüggvényére vonatkozó nullhalmaz pontjainak esetleges kivételével minden *rögzített* t-re áll: b) az $A \to A(t)$ leképezés M-et homomorf módon képezi le a $\mathfrak{H}(t)$ tér egy $\mathsf{M}(t)$ operátorgyűrűjére, c) ez az $\mathsf{M}(t)$ operátorgyűrű *faktor.* Ilyen értelemben tehát minden operátorgyűrű előállítható faktorok direkt integráljaként.

A bizonyítás igen mély és nehéz meggondolásokat igényel, többek között felhasználja a ponthalmazelméletből az ún. analitikus halmazokra vonatkozó egyes eredményeket is.

Neumann e vizsgálataihoz közvetlenül csatlakozó, máris tekintélyes nagyságú irodalomból ki kell emelnünk egyik tanítványának, F. I. Mautnernek fontos eredményét 1947-ből: a $\mathfrak{H}$ tér adott M operátorgyűrűjéhez található $\mathfrak{H}$-nak olyan direkt-integrál-előállítása is, amelynél a fenti a), b) feltételek mellett a következő feltétel teljesül: c') az $\mathsf{M}(t)$ operátorgyűrű $\mathfrak{H}(t)$-ben irreducibilis majdnem minden t esetében (azaz nincs $\mathfrak{H}(t)$-nek olyan valódi altere, amely az $\mathsf{M}(t)$-be tartozó operátorok mindegyikére nézve invariáns). Mautner e tételéből az a fontos következtetés is levonható, hogy ha G egy lokálisan kompakt topologikus csoport és $g \to U_g$ ennek egy $\mathfrak{H}$ Hilbert tér unitér operátoraival való előállítása (azaz $U_{g^{-1}h} = U_g^{-1} U_h$), akkor $\mathfrak{H}$ mindig azonosítható egy direkt-integrál-térrel úgy, hogy a) az U_g operátorok mind felbonthatók, $U_g \sim U_g(t)$, b) az $U_g(t)$ reprezentásfüggvények alkalmas választása esetén majdnem minden rögzített t esetén $U_g(t)$ a G csoport irreducibilis unitér előállítása $\mathfrak{H}(t)$-ben. Ez az eredmény élesíti I. M. Gelfand és D. A. Rajkov híres tételét (1944), amely szerint a G csoport irreducibilis unitér előállításai bizonyos értelemben teljes rendszert alkotnak.

4. §. Spektrális halmazok és egyéb problémák

9. Zárt lineáris A operátor *spektrumán*, mint ismeretes, azon komplex λ számok halmazát értjük, amelyekre az $A-\lambda I$ operátornak nincsen mindenütt értelmezett, korlátos inverze. Önadjungált operátor spektruma a valós tengelyen, unitér operátoré az egységkörön fekszik, és mindig zárt halmaz. Ha A önadjungált operátor és $u(\lambda)$ tetszés szerinti olyan függvény, amelyre az $u(A)$ operátor értelmezve van (lásd az 1. §-t) és amely az A spektrumán korlátos, akkor az $u(A)$ operátor is korlátos, sőt érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\|u(A)\| \leqq \sup_{\lambda \in \sigma} |u(\lambda)|,$$

ahol σ-val jelöltük az A spektrumát. Ez könnyen következik az $u(A)$ operátor integráldefiníciójából, ha figyelembe vesszük azt a tényt, hogy az A-hoz tartozó $E(\lambda)$ spektrálfüggvény növekedési pontjainak halmaza éppen az A spektrumával esik össze.

A λ komplex változó bizonyos egyszerű $u(\lambda)$ függvényei esetében természetes módon értelmezhető az $u(A)$ operátor akkor is, ha A nem önadjungált. Így pl. ha A tetszőleges korlátos lineáris operátor a Hilbert-térben, akkor minden olyan

$$u(\lambda) = c\,\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)}{(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)\cdots(\lambda-\mu_m)}$$

racionális törtfüggvényhez, amelynek a pólusai nem esnek az A spektrumába, hozzárendelhető az

$$u(A) = c\,(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_n I)(A-\mu_1 I)^{-1}(A-\mu_2 I^{-1}\cdots \cdots(A-\mu_m I)^{-1}$$

operátor; az $u(\lambda) \to u(A)$ megfelelelkezés adott A mellett u-ban nyilván lineáris és multiplikatív, az $\|u(A)\|$ normát azonban általában nem lehet becsülni $|u(\lambda)|$-nak az A spektrumán felvett értékeiből, hiszen van olyan $A \neq O$ operátor is, amelynek a spektruma egyetlen pontból áll.

Neumann János egy dolgozatában[20] felvetette azt a kérdést, nincs-e olyan, az A operátor spektrumát szükségképpen tartalmazó S halmaz a komplex síkban, hogy minden az S-en korlátos racionális $u(\lambda)$ függvényre álljon az

$$\|u(A)\| \leqq \sup_{\lambda \in S} |u(\lambda)|$$

[20] Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachrichten*, 4 (1950/51), 258—281.

egyenlőtlenség; ilyen tulajdonságú S halmazt Neumann az A operátorhoz tartozó *spektrális halmaznak* nevez.

Főeredménye, amelyet érdekes, komplex függvénytani segédeszközökkel bizonyít be, a következő: bármely korlátos A lineáris operátor esetében a 0 pont körüli $\|A\|$ sugarú körlemez spektrális halmaz. Egy további érdekes eredmény: a valós tengely csak önadjungált, az egységkörvonal pedig csak unitér operátornak spektrális halmaza.

A spektrális halmazokra vonatkozó, Neumann által kezdeményezett vizsgálatok még nem tekinthetők lezártaknak. A főtételre azóta E. Heinz és e sorok írója közölt egyszerűbb bizonyításokat.

10. Néhány szóban emlékezzünk meg Neumann többi operátorelméleti vizsgálatairól is:

Az operátorgyűrűkről szóló, Murray-val együtt írt első nagy dolgozatában bevezeti véges sok Hilbert-tér *direkt szorzatának* és ezzel kapcsolatban véges sok operátor direkt szorzatának a fogalmát, mert ezek az operátorgyűrűk vizsgálata során fontos alkalmazást nyernek. A $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ Hilbert-terek direkt szorzata lényegében a következőképpen áll elő. Tekintjük $\varphi = f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$ alakú formális szorzatokat, ahol $f_i \in \mathfrak{H}_i$, és ezek között egy „belső szorzatot" értelmezünk a

$$(\varphi, \varphi') = (f_1, f_1') \cdot (f_2, f_2') \cdots (f_n, f_n')$$

képlet által, majd ezt az értelmezést kiterjesztjük az ilyen szorzatok formális véges lineáris $\psi = \Sigma c_i \varphi_i$ kapcsolataira a

$$(\psi, \psi') = (\sum_i c_i \varphi_i, \sum_j c_j' \varphi_j') = \sum_{i,j} c_i c_j' (\varphi_i, \varphi_j')$$

képlet által. Belátható, hogy $(\psi, \psi) \geqq 0$. Két ψ, ψ' lineáris kapcsolatot egyenlőnek tekintve, ha $(\psi - \psi', \psi - \psi') = 0$, és a ψ-k által alkotott lineáris teret a $\|\psi\| = (\psi, \psi)^{1/2}$ norma által származtatott metrikában lezárva, egy Hilbert-teret kapunk: ez az adott Hilbert-terek direkt szorzata. Az operátorok direkt szorzatának értelmezése ezek után természetes módon adódik.

Egy dolgozatában[21] Neumann e fogalomalkotásokat végtelen sok Hilbert-tér esetére is kiterjeszti (érdekes, hogy erre neki többek között az ún. második kvantálás elmélete adott indítékot).

Már véges sok Hilbert-tér esetében is a φ formális elemszorzatok ψ lineáris kapcsolatai között más metrika bevezetésére is van mód úgy, hogy a kapott tér normált lineáris tér (ha nem

[21] On infinite direct products, *Compositio Math.*, **6** (1938), 1—77.

is Hilbert-tér) legyen. E lehetőségekkel foglalkozik Neumannak két, R. Schatten-nel közösen írt dolgozata.[22]

Egy, S. Bochnerrel együtt írt dolgozatában[23] operátorelméleti módszereket vezet be differenciálegyenletek tárgyalására.

Másik dolgozatában viszont integráloperátorok spektrumát vizsgálja[24]. A $(-\infty, \infty)$ egyenesen négyzetesen integrálható függvények L^2 terében nevezzünk integráloperátornak minden olyan K lineáris operátort, amelyhez található olyan $k(x, y)$ magfüggvény, hogy az K értelmezési tartományába tartozó minden $f(x)$ függvényre álljon:

$$Kf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x, y) f(y)\, dy.$$

Neumann egyik érdekes eredménye: a $\mathfrak{H}$ Hilbert-tér egy korlátos önadjungált A operátora akkor és csakis akkor unitérekvivalens az L^2 tér egy integráloperátorával, ha a 0 pont vagy végtelenszeres sajátértéke A-nak, vagy torlódási pontja az A spektrumának. (Unitérekvivalencia azt jelenti, hogy $\mathfrak{H}$ lineáris és hosszúságtartó módon leképezhető L^2-re úgy, hogy az A operátor a K operátorba megy át.)

Egy, A. Devinatz-cal és A. E. Nussbaum-mal együtt írt dolgozatában[25] önadjungált operátorok felcserélhetőségéről van szó. Korlátos önadjungált A_1, A_2 operátorokról nyilvánvaló, hogy akkor és csakis akkor cserélhetők fel, ha az $A_1 A_2$ szorzat is önadjungált. Ezt általánosítva bebizonyítják, hogy ha a nem szükségképpen korlátos önadjungált A_1, A_2 operátorokhoz található olyan önadjungált A operátor, amelynek az $A_1 A_2$ szorzatoperátor *folytatása* $(A \supseteq A_1 A_2)$, akkor A_1 és A_2 felcserélhetők abban az értelemben, hogy a hozzájuk tartozó spektrálseregek operátorai felcserélhetők $(E_1(\lambda) E_2(\mu) = E_2(\mu) E_1(\lambda)$ minden λ, μ értékpárra).

Végül meg kell említenünk Neumannak egy dolgozatát, amelyben az operátorgyűrűkre vonatkozó vizsgálatai által indítva, igen eredeti módon tanulmányozza a véges, de magas rendszámú matrixok approximatív tulajdonságait.[26]

[22] The cross-space of linear transformations. II, *Annals of Math.*, **47** (1946), 608—630; III, *u. ott*, **49** (1948), 557—582. (Az első közlemény szerzője egyedül Schatten.)

[23] On compact solutions of operational-differential equations. I, *Annals of Math.*, **36** (1935), 255—291.

[24] Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators, *Actualités scientifiques et industrielles*, No. 229 (Paris, 1935).

[25] On the permutability of self-adjoint operators, *Annals of Math.*, **62** (1955), 199—203.

[26] Approximative properties of matrices of high finite order, *Portugaliae Math.*, **3** (1942), 1—62.

De többé-kevésbé szerepet kapnak operátorelméleti meggondolások és segédeszközök Neumann néhány másirányú dolgozatában is (csoportelmélet, játékelmélet stb.), ezekre azonban ennek az ismertetésnek a keretében már nem térhetünk ki.

Így is csak egészen futólag tudtuk áttekinteni ezt az óriási művet, alig adva számot arról a kivételesen nagy hatásról, amelyet ez a matematika fejlődésére már eddig is kifejtett. Gondolatainak mélysége és eredetisége, eredményeinek lenyűgöző bősége mellett e hatáshoz bizonyára hozzájárult Neumann dolgozatainak világos stílusa és didaktikus gonddal áthatott előadásmódja is. Neumann János operátorelméleti művei, akárcsak egyéb irányú munkássága, igen sokáig nagyon erős, irányító hatással lesznek a további matematikai kutatásokra.

Kiegészítés Neumann János dolgozatainak jegyzékéhez*

Functional Operators. Sokszorosított jegyzet 1933/34-ben és 1934/35-ben tartott princetoni előadásokról, C. C. Torrance ill. R. S. Martin kidolgozásában. Könyvalakban is megjelent: Annals of Math. Studies, No. 21/22.

Quantum Mechanics of Infinite Systems. P. A. M. Dirac 1934/35-ben tartott princetoni előadásairól készült sokszorosított jegyzet ("Lectures on quantum electrodynamics") 147—172. oldalain, Princeton.

Lectures on Continuous Geometry. Sokszorosított jegyzet 1935/37-ben tartott princetoni előadásokról, három részben, Princeton.

Quantum Logics. Sokszorosított jegyzet 1937/38-ban tartott princetoni előadásokról, Princeton.

Invariant Measures. Sokszorosított jegyzet 1940/41-ben tartott princetoni előadásokról, P. R. Halmos kidolgozásában, Princeton.

Proposal and analysis of a new numerical method for the treatment of hydrodynamical shock problems (National Defense Research Committee, Applied Math. Panel Memo 38.7. M., Applied Mathematics Group — New York University, No. 18), 1943.

Oblique reflections of shocks (Navy Department, Bureau of Ordnance, Explodives Research Report, No. 12), 1943.

Progress report on the theory of shock waves (National Defense Research Committee, Division 8, Office of Scientific Research and Development, No. 140), 1943.

The cross-space of linear transformations. II—III (R. Schatten-nel együtt), Annals of Math., **47** (1946), 608—630; **49** (1948), 557—582.

A numerical study of a conjecture of Kummer (H. H. Goldstine-nal együtt), Math. Tables and Other Aids of Computation, **7** (1953), 133—134.

Communication on the Borel notes, Econometrica, **21** (1953), 124—127.

* *Mat. Lapok,* **8** (1957), 1—7. A kiegészítő jegyzéket Szőkefalvi-Nagy Béla professzor volt szíves a szerkesztőség rendelkezésére bocsátani.

A topologikus tér fogalmáról. II.

CSÁSZÁR ÁKOS

12. Az előzőkben megismertük a teljesen reguláris tér, a szomszédsági tér, az uniform tér és az eltérési tér fogalmát. Láttuk, hogy ezek között bizonyos kapcsolat van, amennyiben minden uniform tér indukál egy szomszédsági teret, minden eltérési tér indukál egy uniform teret, és minden szomszédsági tér indukál egy topológiát; meg fogjuk mutatni a következőkben, hogy a szomszédsági tér által indukált topológia mindig teljesen reguláris, s hogy ezek az állítások mind meg is fordíthatók, azaz hogy minden reguláris topologikus tér topológiája indukálható szomszédsági struktúrával, minden szomszédsági tér szomszédsági struktúrája indukálható uniform struktúrával, s minden uniform tér uniform struktúrája indukálható eltérési struktúrával. Ilyenformán a teljesen reguláris topologikus tereket az tünteti ki az összes topologikus terek közül, hogy topológiájuk akár szomszédsági, akár uniform, akár eltérési struktúrával indukálható.

Mindezek a fontos következmények egy igen figyelemre méltó segédtétel segítségével bizonyíthatók be, amelynek legegyszerűbb speciális esete URISZONTÓL származik és így (még az alábbi általánosabb alakban is jogosan) *Uriszon-féle lemmának* nevezhető. Ez a következőképpen szól:

(12. 1) *Legyen az R halmaz részhalmazai között értelmezve a $<_n$ jellel jelölt relációknak egy sorozata* ($n = 0, 1, 2, \ldots$) *a következő tulajdonságokkal:*

(12. 2) $A <_n B$ *esetén* $\overline{B} <_n \overline{A}$;

(12. 3) $0 <_n A <_n R$ *minden* $A \subset R$ *halmazra;*

(12. 4) $A <_n B$ *esetén* $A \subset B$;

(12. 5) $A' \subset A <_n B \subset B'$ *esetén* $A' <_n B'$;

(12. 6) $A <_n B$, $C <_n D$ *esetén* $A \cup C <_n B \cup D$ *és* $A \cap C <_n B \cap D$;

(12. 7) $A <_n B$ *esetén van olyan* C, *hogy* $A <_{n+1} C <_{n+1} B$.

Ha most az A_0 *és* B_0 *halmazok között fennáll az* $A_0 <_0 B_0$ *reláció, akkor létezik az* R *halmaznak az* $I=[0,1]$ *intervallumba való olyan* φ *leképezése, hogy* $x \in A_0$ *esetén* $\varphi(x)=0$, $x \in \overline{B}_0$ *esetén* $\varphi(x)=1$, *s minden pozitív* ε *számhoz található olyan* n *természetes szám, hogy* $X \subset I$, $Y \subset I$, $\varrho(X, \overline{Y}) \geqq \varepsilon$ *esetén* $\varphi^{-1}(X) <_n \varphi^{-1}(Y)$.

Bizonyítás. Mindenekelőtt minden t valós számhoz hozzárendeljük R valamely $A(t)$ részhalmazát a következő konstrukcióval. Legyen $A(0)=A_0$ és $A(1)=B_0$. Ekkor a feltevés szerint $A(0) <_0 A(1)$, tehát (12. 7) folytán van olyan halmaz, ezt választjuk $A\left(\frac{1}{2}\right)$-nek, amelyre $A(0) <_1 A\left(\frac{1}{2}\right) <_1 A(1)$. Tegyük fel, hogy egy n természetes számra már megválasztottuk az $A\left(\frac{p}{2^n}\right)$ halmazokat $(p=0, 1, \ldots, 2^n)$ úgy, hogy

$$A\left(\frac{p}{2^n}\right) <_n A\left(\frac{p+1}{2^n}\right) \qquad (p=0, 1, \ldots, 2^n-1)$$

legyen; ekkor ismét (12. 7) alapján az utóbbi két halmaz közé iktatjuk az $A\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right)$ halmazt úgy, hogy

$$A\left(\frac{p}{2^n}\right) <_{n+1} A\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right) <_{n+1} A\left(\frac{p+1}{2^n}\right)$$

legyen. Így definiáljuk teljes indukcióval az $A(t)$ halmazokat abban az esetben, amikor t a $[0, 1]$ intervallumba eső véges diadikus tört.

Minthogy (12. 4) és (12. 5) következtében a $<_n$ reláció tranzitív, azért $0 \leqq p < q \leqq 2^n$ esetén (p és q egész)

$$A\left(\frac{p}{2^n}\right) <_n A\left(\frac{q}{2^n}\right).$$

Tetszőleges valós t-re az $A(t)$ halmaz definícióját a következő módon terjesztjük ki: $t<0$ esetén legyen $A(t)=0$, $t>1$ esetén legyen $A(t)=R$, végül $0 \leqq t \leqq 1$ esetén legyen

$$A(t)=\bigcup_{r \leqq t} A(r),$$

ahol a jobboldalon r a t-nél nem nagyobb véges diadikus törteket futja át.

Megmutatjuk, hogy $t-s \geqq 2^{-n}$ esetén $A(s) <_{n+1} A(t)$. Ez (12.3) következménye, ha $s<0$ vagy $t>1$; $0 \leqq s < t \leqq 1$ esetén pedig nyilván található olyan p egész szám, hogy

$$0 \leqq s \leqq \frac{p}{2^{n+1}} < \frac{p+1}{2^{n+1}} \leqq t \leqq 1,$$

amikor is $A(t)$ értelmezése folytán $A\left(\frac{p+1}{2^{n+1}}\right) \subset A(t)$, továbbá $A(s) \subset A\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)$, hiszen ha $0 \leqq r \leqq r' \leqq 1$ két véges diadikus tört, akkor (12.4) miatt $A(r) \subset A(r')$, márpedig $A(s)$ olyan $A(r)$ halmazok egyesítése, amelyekben r s-nél, tehát a fortiori $\frac{p}{2^{n+1}}$-nél nem nagyobb véges diadikus tört. Figyelembe véve még az $A\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) <_{n+1} A\left(\frac{p+1}{2^{n+1}}\right)$ relációt, (12.5) szolgáltatja az állítást.

Értelmezzük most az R halmazon a $\varphi(x)$ függvényt a következő képlettel:

$$\varphi(x) = \inf\{t : x \in A(t)\}.$$

Világos, hogy $0 \leqq \varphi(x) \leqq 1$ minden $x \in R$-re, továbbá $x \in A_0$ esetén $\varphi(x) = 0$, $x \in \overline{B}_0$ esetén pedig $\varphi(x) = 1$ (az utóbbi állítás belátására gondoljuk meg, hogy előbbi eredményünk szerint $s<t$ esetén $A(s) \subset A(t)$, tehát $t<1$ esetén $A(t) \subset A(1) = B_0$).

A φ függvény még nem bizonyított sajátságának megmutatása végett adott $\varepsilon > 0$-hoz határozzuk meg az n természetes számot úgy, hogy $2^{-n+2} < \varepsilon$ legyen. Osszuk fel a számegyenest δ hosszúságú egymásba nem nyúló részintervallumokra, ahol $2^{-n+2} < 2\delta < \varepsilon$, s tekintsük mindegyik részintervallumot jobbról zártnak. Ha most az $X \subset I$, $Y \subset I$ halmazokra teljesül a $\varrho(X, Y) \geqq \varepsilon > 2\delta$ feltétel, akkor az X valamely pontját tartalmazó részintervallummal szomszédos két intervallum s maga a kérdéses intervallum is Y-hoz tartozik. Ha tehát $J_1, \ldots, J_m$ jelenti azt a véges számú részintervallumot, amelyeknek van a korlátos X halmazzal közös pontjuk, és J_k' jelenti a J_k intervallumnak és a vele szomszédos két részintervallumnak egyesítését, akkor

$$X \subset \bigcup_1^m J_k \subset \bigcup_1^m J_k' \subset Y. \tag{12.8}$$

Szemeljünk ki most egy J_k intervallumot és legyen $J_k = (s, t]$, $J_k' = (s', t']$, úgyhogy $s - s' = t - s = t' - t = \delta > 2^{-n+1}$. Világos,

hogy

$$\varphi^{-1}(J_k) = \{x : \varphi(x) \leqq t\} \cap \{x : \varphi(x) > s\},$$

s mivel φ definíciójából kifolyólag $u < v$ esetén

$$A(u) \subset \{x : \varphi(x) \leqq u\} \subset A(v),$$

azért az $s'' = s - 2^{-n+1}$, $t'' = t' - 2^{-n+1}$ jelöléssel

$$\varphi^{-1}(J_k) \subset A(t'') \cap \overline{A(s)}.$$

Ugyanilyen okoskodással

$$\varphi^{-1}(J_k') = \{x : \varphi(x) \leqq t'\} \cap \{x : \varphi(x) > s'\} \supset A(t') \cap \overline{A(s'')}.$$

Minthogy $t' - t'' = s - s'' = 2^{-n+1}$, azért $A(t'') <_n A(t')$ és $A(s'') <_n A(s)$, s így (12. 1) alapján $\overline{A(s)} <_n \overline{A(s'')}$, úgyhogy (12. 5) és (12. 6) felhasználásával $\varphi^{-1}(J_k) <_n \varphi^{-1}(J_k')$. Ezt $k = 1, \ldots, m$ esetén alkalmazva és (12. 5), illetőleg (12. 6) újból való felhasználásával (12. 8) alapján az állított $\varphi^{-1}(X) <_n \varphi^{-1}(Y)$ reláció adódik. Ezzel az Uriszon-féle lemmát teljesen bebizonyítottuk.

Egyszerűen adódik a lemma következő korollárium a:

(12. 9) *Ha az R szomszédsági térben $A \bar{\delta} B$, akkor van az R térnek az $I = [0, 1]$ intervallumba olyan szomszédságtartó φ leképezése, amely az A halmazon a 0, a B halmazon az 1 értéket veszi fel.*

Az állítás röviden úgy fogalmazható meg, hogy *szomszédsági térben két távoli halmaz szomszédságtartó függvénnyel szétválasztható.*

Az állítás igazolására alkalmazzuk a (12. 1) lemmát arra az esetre, amikor a $<_n$ relációk minden n-re az adott szomszédsági térben értelmezett $<$ relációval esnek egybe. Ezt megtehetjük, mert a (12. 2) feltétel (9. 6)-ból, (12. 3) (9. 7)-ből, (12. 4) (9. 10)-ből, (12. 5) (9. 11)-ből, (12. 6) (9. 12)-ből, (12. 7) (9. 13)-ból azonnal folyik. Ha mármost $A \bar{\delta} B$, azaz ha $A < \overline{B}$, akkor a (12. 1) lemmát az A és $\overline{B}$ halmazokra alkalmazva adódik, hogy van R-nek I-be való olyan leképezése, amely A-n a 0, B-n az 1 értéket veszi fel, és szomszédságtartó is, hiszen ha $U \subset R$, $V \subset R$ mellett $\varphi(U) \bar{\delta} \varphi(V)$, akkor $\varrho(\varphi(U), \varphi(V)) = \varepsilon > 0$, tehát a lemma állítása szerint $\varphi^{-1}(\varphi(U)) < \varphi^{-1}(\overline{\varphi(V)})$, tehát $\varphi^{-1}(\varphi(U)) \bar{\delta} \overline{\varphi^{-1}(\varphi(V))}$ és annál inkább távoli $U \subset \varphi^{-1}(\varphi(U))$ és $V \subset \overline{\varphi^{-1}(\varphi(V))}$.

(12. 9)-nek fontos következménye az alábbi tétel:

(12. 10) *Szomszédsági tér topológiája teljesen reguláris.*

Legyen ugyanis R szomszédsági tér. Akkor (12. 9) szerint R-ben bármely két távoli halmaz szomszédságtartó, s annál inkább folytonos függvénnyel szétválasztható. Speciálisan függvénnyel szétválasztható (9. 3) értelmében két különböző pont is, ami maga után vonja a (T_1) axióma fennállását, hiszen ha a folytonos φ függvény szétválasztja az x és y pontokat, akkor $\{t: \varphi(t) < 1\}$ x-nek y-t nem tartalmazó környezete, $\{t: \varphi(t) > 0\}$ pedig y-nak x-et nem tartalmazó környezete. Ha viszont F az x pontot nem tartalmazó zárt halmaz, akkor $\overline{F}$ nyiltsága miatt $x \delta F$, tehát x és F függvénnyel szétválasztható, ami a tér teljesen reguláris voltát mutatja.

Minthogy minden uniform tér és minden eltérési tér egyben szomszédsági tér is, azért

(12. 11) *Uniform tér és eltérési tér topológiája teljesen reguláris.*

Minthogy (9. 14) szerint minden normális tér szomszédsági tér, azért

(12. 12) *Normális tér teljesen reguláris.*[14]

A teljesen reguláris terek tehát, amint már említettük, a reguláris és a normális terek között foglalnak helyet.

(12. 10) és (12. 11) megfordításaként megmutatjuk, hogy

(12. 13) *Minden teljesen reguláris tér topológiája indukálható eltérési struktúrával (s így uniform struktúrával is és szomszédsági struktúrával is).*

Bizonyítás. Legyen R teljesen reguláris topologikus tér. Jelöljük Φ-vel az R térnek az $I = [0, 1]$ intervallumba való folytonos leképezéseinek összességét. Minden $\varphi \in \Phi$ leképezés segítségével értelmezzünk egy σ_φ eltérést a következőképpen:

$$\sigma_\varphi(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Azonnal konstatálható, hogy az eltéréseket jellemző (11. 1)—(11. 3) kikötések teljesülnek. A σ_φ eltérések Σ családja eltérési struktúrát alkot az R halmazon, mert $x \in R$, $y \in R$, $x \neq y$ esetén az R tér teljes regularitása miatt az x és y pontok valamely $\varphi \in \Phi$ függvénnyel szétválaszthatók és akkor $\sigma_\varphi(x, y) = 1$.

Megmutatjuk, hogy ez az eltérési struktúra az R tér eredetileg adott topológiáját indukálja. Ha először is G nyílt az R tér eredeti topológiájában, jelentse x G-nek tetszőleges pontját; a tér teljesen reguláris volta miatt x és $\overline{G}$ valamely $\varphi \in \Phi$ függvénnyel

[14] Az Uriszon-féle lemma eredeti alakja éppen a most alkalmazott speciális esetre vonatkozik s azt mondja ki, hogy normális térben bármely két diszjunkt zárt halmaz függvénnyel szétválasztható.

szétválasztható s világos, hogy ekkor $S\left(x, \mathfrak{V}\left(\sigma_\varphi; \frac{1}{2}\right)\right) \subset G$, más szóval hogy nincs $\overline{G}$-ban olyan y pont, hogy $(x, y) \in \mathfrak{V}\left(\sigma_\varphi; \frac{1}{2}\right)$. Eszerint x és $\overline{G}$ távoli az eltérési struktúra által indukált szomszédsági struktúrában s ez $x \in G$ tetszőleges volta miatt G nyiltságát mutatja az eltérési térben.

Legyen most megfordítva G nyílt az eltérési térben és $x \in G$. Akkor x és $\overline{G}$ távoli az eltérési struktúra által indukált szomszédsági struktúrában, tehát vannak olyan $\sigma_{\varphi_1}, \ldots, \sigma_{\varphi_r}$ eltérések és olyan pozitív ε, hogy semmilyen $y \in \overline{G}$ mellett nem lesz $(x, y) \in \mathfrak{V}(\sigma_{\varphi_1}, \ldots, \sigma_{\varphi_r}; \varepsilon)$. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy ha

$$|\varphi_1(y) - \varphi_1(x)| < \varepsilon, \ldots, |\varphi_r(y) - \varphi_r(x)| < \varepsilon,$$

akkor $y \in G$. De a φ_i leképezés folytonossága miatt az

$$\{y : |\varphi_i(y) - \varphi_i(x)| < \varepsilon\} = \varphi_i^{-1}((\varphi_i(x) - \varepsilon, \varphi_i(x) + \varepsilon))$$

halmazok nyíltak, közös részük tehát x-et tartalmazó és G-ben foglalt, az R tér eredeti topológiájában nyílt halmaz, ami $x \in G$ tetszőleges volta miatt mutatja, hogy G nyílt halmazok egyesítése, tehát nyílt halmaz az R tér eredeti topológiájában.

A (12. 10), (12. 11) és (12. 13) tételek együttvéve igazolják azt a régebben kilátásba helyezett eredményt, hogy a teljesen reguláris terek és csak ezek láthatók el akár szomszédsági, akár uniform, akár eltérési struktúrával. Nem bizonyítottuk azonban még be azt a szintén megígért eredményt, hogy minden szomszédsági struktúra indukálható uniform struktúrával s hogy minden uniform struktúra indukálható eltérési struktúrával. Igaz ugyan, hogy például egy szomszédsági struktúra indukál egy teljesen reguláris topológiát és ez a topológia a fentiek szerint indukálható eltérési struktúrával s így uniform struktúrával is, de nem tudhatjuk, hogy az így megkonstruált uniform struktúra éppen az adott szomszédsági struktúrát fogja-e indukálni, hiszen jól tudjuk, hogy egy teljesen reguláris topológia általában többféle szomszédsági struktúrával is indukálható (a sík topológiája például a zérustávolságú halmazok szomszédosságán alapuló struktúrával is és a közös érintkezési ponttal rendelkező halmazok szomszédosságán alapuló struktúrával is). Ezeknek a kérdéseknek a tisztázásához további, részben eléggé mélyen fekvő eredményekre van szükségünk.

Mielőtt ezekre rátérnénk, lássuk a (12. 1) lemma egy további fontos korollárium.

(12. 14) *Ha az R uniform tér által indukált szomszédsági struktúrában $A_0 \overline{\delta} B_0$, akkor van az R térnek az $I = [0, 1]$ intervallumba olyan egyenletesen folytonos φ leképezése, amely az A_0 halmazon 0, a B_0 halmazon az 1 értéket veszi fel.*

Más szóval *uniform térben bármely két távoli halmaz egyenletesen folytonos függvénnyel szétválasztható.*

Bizonyítás. Minthogy $A_0 \overline{\delta} B_0$, van olyan $\mathfrak{V}$ környék, amely nem tartalmaz egyetlen olyan (x, y) párt sem, melyre $x \in A_0$, $y \in B_0$. Legyen $\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{V}$ s jelöljük $\mathfrak{V}_1$-gyel a (10. 4) alapján meghatározott $\mathfrak{V}_0'$ környéket, majd $\mathfrak{V}_2$-vel a $\mathfrak{V}_1'$ környéket, s általában ha már $\mathfrak{V}_n$ értelmezve van, jelentse $\mathfrak{V}_{n+1}$ a $\mathfrak{V}_n'$ környéket.

Értelmezzük most a $<_n$ relációt a következőképpen:

$A <_n B$ akkor és csak akkor, ha $S(A, \mathfrak{V}_n) \subset B$. Megmutatjuk, hogy teljesülnek a (12. 2)—(12. 7) kikötések. Először is $A <_n B$ azt jelenti, hogy nincs olyan $(x, y) \in \mathfrak{V}_n$ pontpár, melyre $x \in A$, $y \in \overline{B}$, a $\overline{B} <_n \overline{A}$ reláció pedig azt, hogy nincs olyan $(y, x) \in \mathfrak{V}_n$ pár, melyre $y \in \overline{B}$, $x \in A$; (10. 1) miatt az első állításból folyik a második. (12. 3) abból következik, hogy $S(0, \mathfrak{V}_n) = 0$ és $S(A, \mathfrak{V}_n) \subset R$. (12.4) belátására csak azt kell meggondolnunk, hogy (10. 2) miatt $A \subset S(A, \mathfrak{V}_n)$. (12. 5) abból következik, hogy nyilván $A' \subset A$ esetén $S(A', \mathfrak{V}_n) \subset S(A, \mathfrak{V}_n)$. (12. 6) igazolása céljából vegyük figyelembe, hogy

$$S(A \cup B, \mathfrak{V}_n) = S(A, \mathfrak{V}_n) \cup S(B, \mathfrak{V}_n)$$

és

$$S(A \cap B, \mathfrak{V}_n) \subset S(A, \mathfrak{V}_n) \cap S(B, \mathfrak{V}_n).$$

Végül (12. 7) abból következik, hogy $S(A, \mathfrak{V}_n) \subset B$ esetén a $C = S(A, \mathfrak{V}_{n+1})$ jelöléssel $S(A, \mathfrak{V}_{n+1}) \subset C$ és $S(C, \mathfrak{V}_{n+1}) \subset B$, hiszen ha valamely z ponthoz található olyan y pont, hogy $(y, z) \in \mathfrak{V}_{n+1}$ és $y \in C$, akkor ehhez az y-hoz található olyan $x \in A$ pont, hogy $(x, y) \in \mathfrak{V}_{n+1}$, és akkor (10. 4) és $\mathfrak{V}_{n+1}$ értelmezése alapján $(x, z) \in \mathfrak{V}_n$, azaz $z \in S(A, \mathfrak{V}_n) \subset B$.

Minthogy az A_0 és B_0 halmazok között $<_0$ értelmezése folytán fennáll az $A_0 <_0 B_0$ reláció, azért a (12. 1) lemma alkalmazható és olyan φ leképezést szolgáltat, amely az A_0 és B_0 halmazon a kívánt értéket veszi fel, és egyenletesen folytonos is, mert adott pozitív ε-hoz a lemmában szereplő n természetes számot megválasztva $(x, y) \in \mathfrak{V}_n$ esetén $\varphi^{-1}(\varphi(\{x\})) <_n \varphi^{-1}(\overline{\varphi(\{y\})})$ nem áll fenn, tehát $\varrho(\varphi(\{x\}), \varphi(\{y\})) \geqq \varepsilon$ sem állhat fenn, azaz $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

13. A felvetett kérdések tisztázása céljából meg kell ismerkednünk a topologikus tereknek egy további fontos típusával, a

kompakt terekkel. Ezeknek értelmezésére vezessük be a következő elnevezést: az A_γ halmazokról azt mondjuk, hogy *befedik* az A halmazt, ha $A \subset \bigcup_\gamma A_\gamma$, ilyenkor az A_γ halmazok összessége *befedése* az A halmaznak. Egy befedést *nyílt*nak mondunk, ha csupa nyílt halmazból áll, és *véges*nek, ha csak véges számú halmaz alkotja.

Mármost egy R topologikus teret *kompakt*nak nevezünk, ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható egy véges lefedés; ez tehát pontosabban azt jelenti, hogy ha a G_γ nyílt halmazok együttvéve lefedik az R teret, akkor közülük már véges számú alkalmasan megválasztott halmaz is lefedi. Az ismert Borel-féle befedési tétel éppen azt mondja ki, hogy egy euklidesi térnek minden korlátos és zárt altere kompakt.[15]

A kompakt T_2-tereket *kompaktum*oknak nevezzük; a továbbiakból kitűnik, hogy ezek alkotják a kompakt terek legfontosabb osztályát.

Szükségünk lesz a továbbiakban a kompakt tereknek egy másik definíciójára is. Ennek megfogalmazása végett nevezzünk egy halmazrendszert *centrált*nak, ha a halmazrendszer tetszőlegesen kiválasztott véges számú halmazának mindig van közös pontja. Mármost a kompakt terek a következőképpen jellemezhetők:

(13. 1) *Egy R topologikus tér akkor és csak akkor kompakt, ha benne bármely zárt halmazokból álló centrált halmazrendszer valamennyi halmazának van közös pontja.*

Valóban, tegyük fel, hogy R kompakt és legyen az F_γ zárt halmazok rendszere centrált. Ha az összes F_γ halmazoknak nem volna közös pontjuk, akkor a nyílt $\overline{F_\gamma}$ halmazok R-nek egy befedését alkotnák, amelyből kiválasztható volna véges lefedés, s ez azt jelentené, hogy az F_γ halmazok közül alkalmasan kiválasztott véges soknak sem volna közös pontja. Megfordítva, ha az R tér teljesíti az állításban foglalt feltételt, legyen $\{G_\gamma\}$ az R térnek egy nyílt lefedése; akkor a $\overline{G_\gamma}$ zárt halmazoknak nincsen közös pontjuk, tehát nem alkothatnak centrált rendszert, úgyhogy közülük már véges sok is van, melynek a közös része üres, s akkor a megfelelő véges számú G_γ halmaz már befedi R-et, s ezért R kompakt.

[15] A régebbi s a szovjet irodalomban ma is használt terminológia csak a kompakt metrikus tereket nevezi kompakt tereknek, illetőleg általánosabban azokat a topologikus tereket, amelyekben minden végtelen A halmazhoz található a térnek olyan x pontja, amelynek minden környezetében A-nak végtelen sok pontja van (bebizonyítható, hogy metrikus térnek akkor és csak akkor van meg ez a tulajdonsága, ha kompakt). Az általunk definiált kompakt tereket ebben a terminológiában bikompakt tereknek nevezik.

Legyen R kompakt tér és R_0 R-nek zárt részhalmaza. Ha a G_γ nyílt halmazok lefedik R_0-t, akkor a G_γ halmazokból és az $\overline{R_0}$ nyílt halmazból álló halmazrendszer R-nek nyílt lefedése, úgyhogy belőle kiválasztható egy véges lefedés, s ennélfogva a G_γ halmazok közül már véges számú is lefedi R_0-t. Figyelembe véve, hogy az R_0 altérben nyílt halmazok $R_0 \cap G$ alakban írhatók, ahol G az R térben nyílt, a következő tételt nyerjük:

(13. 2) *Kompakt R tér minden zárt R_0 része is kompakt. Ha a nyílt G_γ halmazok lefedik a zárt $R_0 \subset R$ halmazt, közülük már véges számú is lefedi.*

A (13. 2) állítás bizonyos megszorítások mellett megfordítható:

(13. 3) *Egy T_2-tér minden kompakt részhalmaza zárt.*

Valóban, ha R T_2-tér és $K \subset R$ kompakt, legyen $x \in \overline{K}$ és $y \in K$ tetszőleges. A (T_2) axióma szerint van x-nek és y-nak diszjunkt U'_x és U'_y környezete, úgyhogy $U_x = \operatorname{Int} U'_x$ és $U_y = \operatorname{Int} U'_y$ az x és y pontoknak diszjunkt nyílt környezete. Az összes $y \in K$ pontoknak megfelelő $K \cap U_y$ halmazok a K altérnek nyílt lefedését alkotják, ebből K kompakt volta miatt kiválasztható egy véges $\{K \cap U_{y_i}\}$ lefedés $(i = 1, \ldots, r)$. Az U_{y_i} környezeteknek megfelelő U_{x_i} környezetek közös része x-nek $\overline{K}$-ban foglalt környezete, ami $x \in \overline{K}$ tetszőleges volta miatt $\overline{K}$ nyílt, tehát K zárt voltát mutatja.

Megmutatjuk, hogy kompakt térben a (T_2) axióma teljesülése maga után vonja a tér normális voltát:

(13. 4) *Minden kompaktum normális tér.*

Először megmutatjuk, hogy minden kompaktum reguláris. Legyen F az R kompaktum zárt részhalmaza és $x \notin F$. Minden $y \in F$ ponthoz meg lehet határozni a (T_2) axióma alapján az x és y pontoknak diszjunkt U_y és V_y környezetét (U_y tehát x-nek y-tól függően megválasztott környezete), éspedig az előbbi bizonyításban követett okoskodással mindjárt elérhetjük, hogy U_y és V_y nyílt legyen. A V_y halmazok együtt lefedik F-et, ezért (13. 2) folytán közülük már véges számú: $V_{y_1}, \ldots, V_{y_r}$ is lefedi. Ekkor azonban $U = \bigcap_{i=1}^{r} U_{y_i}$ és $V = \bigcup_{i=1}^{r} V_{y_i}$ x-nek és F-nek diszjunkt nyílt környezetét szolgáltatja.

Legyen most F_1 és F_2 R-nek két diszjunkt zárt halmaza. Az előbb bizonyítottak szerint minden $x \in F_1$ ponthoz található x-nek és F_2-nek diszjunkt nyílt U_x és V_x környezete (V_x tehát F_2-nek x-től függően megválasztott környezetét jelenti). Az U_x nyílt halmazok F_1-nek befedését szolgáltatják, tehát közülük már véges sok:

$U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}$ is befedi F_1-et; ekkor azonban $U = \bigcup_{i=1}^{r} U_{x_i}$ és $V = \bigcap_{i=1}^{r} V_{x_i}$ F_1-nek és F_2-nek diszjunkt nyílt környezetei.

A (13. 4) tétel következtében minden kompaktumban szomszédsági struktúrát vezethetünk be, ha azokat a halmazokat tekintjük szomszédosnak, amelyeknek van közös érintkezési pontjuk. Megmutatjuk, hogy nincs is más szomszédsági struktúra, amely egy kompaktum topológiáját indukálja:

(13. 5) *Bármely kompakt topológiájú R szomszédsági térben az $A\delta B$ reláció akkor és csak akkor érvényes, ha* $[A] \cap [B] \neq 0$.

Bizonyítás. Ha $[A] \cap [B] \neq 0$, akkor (9. 9) szerint $[A]\delta[B]$ és így (9. 16) értelmében $A\delta B$ (még akkor is, ha a tér topológiája nem kompakt). Feltéve most, hogy az R tér kompakt és hogy $[A] \cap [B] = 0$, $x \in [A]$ esetén $x \in \overline{[B]}$, s ez $\overline{[B]}$ nyíltsága miatt maga után vonja, hogy $x < \overline{[B]}$; készítsünk (9. 13) felhasználásával olyan U_x halmazt, hogy $x < U_x < \overline{[B]}$ és gondoljuk meg, hogy (9. 16) alapján $x \bar{\delta} \overline{U_x}$ következtében $x \bar{\delta} [\overline{U_x}] = \overline{\operatorname{Int} U_x}$, azaz $x < \operatorname{Int} U_x$. A zárt $[A]$ halmazt lefedik a nyílt $\operatorname{Int} U_x$ ($x \in [A]$) halmazok, tehát (13. 2) miatt közülük véges számú: $\operatorname{Int} U_{x_1}, \ldots, \operatorname{Int} U_{x_r}$ is lefedi, úgyhogy annál inkább $A \subset [A] \subset \bigcup_{1}^{r} U_{x_i}$. Az $U_{x_i} < \overline{[B]}$, vagyis $U_{x_i} \bar{\delta} [B]$ relációból (9. 4) alapján $\bigcup_{1}^{r} U_{x_i} \bar{\delta} [B]$ következik, s ebből (9. 8) szerint $A \bar{\delta} B$ adódik. Így kompakt térben $A\delta B$ és $[A] \cap [B] \neq 0$ valóban egyidejűleg igaz vagy hamis.

A kompakt tér értelmezéséből közvetlenül kitűnik, hogy kompakt térrel homeomorf tér is mindig kompakt. Ennél azonban sokkal több is igaz:

(13. 7) *Kompakt tér folytonos képe is kompakt.*

Valóban, legyen f az R kompakt téren értelmezett folytonos leképezés és $f(R) = R'$. Ha a G'_γ halmazok R'-nek nyílt befedését szolgáltatják, akkor az $f^{-1}(G'_\gamma)$ halmazok R-nek alkotják nyílt lefedését; R kompakt volta miatt az utóbbi halmazok közül már véges számú is lefedi R-et, ezeknek képe pedig R'-t.

A (13. 7) tétel magában foglalja az euklidesi terek korlátos, zárt részhalmazain folytonos függvények korlátosságáról szóló ismert tételt, amennyiben a számegyenes minden kompakt részhalmaza lefedhető véges számú intervallummal s így korlátos. Kiterjeszthető

azonban kompakt terekre a korlátos, zárt halmazon folytonos függvények egyenletes folytonosságáról szóló tétel is, éspedig a következőképpen:

(13. 8) *Legyen f az R kompakt uniform térnek az R' uniform térbe való folytonos leképezése; akkor f egyúttal egyenletesen is folytonos.*

Bizonyítás. Bocsássuk előre a következő állítást:

(13. 9) Ha x egy uniform térnek egy pontja és $\mathfrak{V}$ egy környék, akkor $x \in \operatorname{Int} S(x, \mathfrak{V})$.

Valóban, az uniform tér szomszédsági struktúrájában x és $\overline{S(x, \mathfrak{V})}$ távoli, tehát (9. 16) szerint x és $[\overline{S(x, \mathfrak{V})}] = \overline{\operatorname{Int} S(x, \mathfrak{V})}$ is távoli, azaz $x < \operatorname{Int} S(x, \mathfrak{V})$, s így (9. 10) értelmében $x \in \operatorname{Int} S(x, \mathfrak{V})$.

A tétel bizonyítására rátérve, legyen $\mathfrak{W}$ tetszőleges környék az R' tér uniform struktúrájából, $\mathfrak{W}'$ a neki (10. 4) alapján megfelelő környék, s tekintsük az R tér tetszőleges x pontját. (13. 9) szerint $\operatorname{Int} S(f(x), \mathfrak{W}')$ az $f(x)$ pontnak nyílt környezete R'-ben, ezért f folytonossága miatt $f^{-1}(\operatorname{Int} S(f(x), \mathfrak{W}'))$ az x pontnak nyílt környezete R-ben. Ezért $x < f^{-1}(\operatorname{Int} S(f(x), \mathfrak{W}'))$ az R tér szomszédsági struktúrájában, úgyhogy van olyan $\mathfrak{V}(x)$ környék, hogy

$$(13.\ 10)\quad S(x, \mathfrak{V}(x)) \subset f^{-1}(\operatorname{Int} S(f(x), \mathfrak{W}')) \subset f^{-1}(S(f(x), \mathfrak{W}')).$$

Legyen $\mathfrak{V}'(x)$ a $\mathfrak{V}(x)$-nek (10. 4) értelmében megfelelő környék. Akkor (13. 9) értelmében $x \in \operatorname{Int} S(x, \mathfrak{V}'(x))$; az összes $\operatorname{Int} S(x, \mathfrak{V}'(x))$ nyílt halmazok lefedik R-et, úgyhogy közülük véges számú: $\operatorname{Int} S(x_i, \mathfrak{V}'(x_i))$ $(i = 1, \ldots, r)$ is lefedi, és akkor még inkább $R = \bigcup_1^r S(x_i, \mathfrak{V}'(x_i))$. Válasszuk meg a $\mathfrak{V}$ környéket úgy, hogy része legyen mindegyik $\mathfrak{V}'(x_i)$-nek $(i = 1, \ldots, r)$, ami (10. 3) miatt lehetséges.

Legyen most $(x, y) \in \mathfrak{V}$. Alkalmas i indexre $x \in S(x_i, \mathfrak{V}'(x_i))$, azaz $(x_i, x) \in \mathfrak{V}'(x_i)$; innen $(x, y) \in \mathfrak{V} \subset \mathfrak{V}'(x_i)$ miatt (10. 4) szerint $(x_i, y) \in \mathfrak{V}(x_i)$ következik, vagyis $y \in S(x_i, \mathfrak{V}(x_i))$, s persze $(x, x) \in \mathfrak{V}'(x_i)$ felhasználásával $x \in S(x_i, \mathfrak{V}(x_i))$. (13. 10) miatt ebből $f(x) \in S(f(x_i), \mathfrak{W}')$, $f(y) \in S(f(x_i), \mathfrak{W}')$ adódik, vagy más szóval $(f(x), f(x_i)) \in \mathfrak{W}'$, $(f(y), f(x_i)) \in \mathfrak{W}'$, s innen (10. 4) értelmében $(f(x), f(y)) \in \mathfrak{W}$. Ez mutatja, hogy f valóban egyenletesen folytonos.

A (13. 7) tételnek fontos kiegészítése a következő:

(13. 11) *Ha f az R kompakt térnek az R' T_2-térbe való kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezése, akkor f topologikusan képezi le R-t $f(R)$-re.*

Csak az f^{-1} inverz leképezés folytonosságát kell bebizonyítanunk, vagyis azt, hogy minden nyílt $G \subset R$ halmaz $f(G)$ képe $f(R)$-ben nyílt halmaz. A kiegészítő halmazokra való áttéréssel ezzel egyenértékű az az állítás, hogy minden zárt $F \subset R$ halmaz $f(F)$ képe zárt $f(R)$-ben. Csakhogy (13. 2) értelmében F kompakt, így (13. 7) szerint $f(F)$ is kompakt, úgyhogy (13. 3) alapján $f(F)$ zárt R'-ben, s ezért $f(F) = f(F) \cap f(R)$ zárt $f(R)$-ben is.

Minden kompaktum, mint normális tér, teljesen reguláris és így ellátható uniform struktúrával. Megmutatjuk, hogy a (13. 5) tétel analogonjaként ez lényegében (ti. izomorf uniform struktúrákat azonosaknak tekintve) csak egyféleképpen lehetséges. Pontosabban szólva a következő tétel érvényes:

(13. 12) *Ha R és R' két kompakt uniform tér és f R-nek R'-re való topologikus leképezése, akkor f egyúttal izomorf is; ahelyett, hogy f topologikus, elég feltenni, hogy kölcsönösen egyértelmű és folytonos.*

Minthogy ugyanis uniform tér topológiája teljesen reguláris és így a (T_2) axiómának is eleget tesz, azért (13. 11) következtében az állítás második része az elsőre visszavezethető; ez pedig a (13. 8) tételnek az f és f^{-1} leképezésekre való alkalmazásával adódik.

14. Szükségünk lesz a továbbiakban egy fontos eljárásra, amellyel adott topologikus terekből egy újabb topológikus teret alkothatunk. Ez az eljárás a topologikus terek direkt szorzása.

Tekintsük a topologikus tereknek tetszőleges számosságú $\{R^\gamma\}$ halmazát ($\gamma \in \Gamma$). Rendeljük hozzá a Γ index-halmaz minden γ eleméhez az R^γ tér tetszőleges x^γ pontját; ilyen módon „Γ-típusú vektorok" keletkeznek, az $x = (x^\gamma)$ vektor „γ-dik koordinátája" x^γ. Az összes keletkező vektorok halmazát (amelyben tehát mindegyik x^γ koordináta végigfutja az R^γ minden egyes pontját) a $\bigtimes_{\gamma \in \Gamma} R^\gamma$ szimbólummal jelöljük, az R^γ tér a $\bigtimes_{\gamma \in \Gamma} R^\gamma$ „szorzat" „γ-dik tényezője".

Az $R = \bigtimes R^\gamma$ halmazban topológiát vezethetünk be a következő módon. Tekintsük az R halmaz $\bigtimes G^\gamma$ alakú részhalmazait, ahol G^γ az R^γ tér nyílt részhalmaza és véges számú γ index kivételével $G^\gamma = R^\gamma$. Állapodjunk meg abban, hogy ezek a halmazok alkossák az R halmaz topológiájának egy bázisát. Ahhoz, hogy ezt megtehessük, a (6. 1) tétel értelmében meg kell mutatnunk, hogy a bázis halmazai eleget tesznek a (6. 2) és (6. 3) feltételeknek. Ez

(6. 2) esetében evidens, mert értelmezésünk szerint maga $R = \times R^\gamma$ is a bázishoz tartozik. (6. 3) belátására pedig gondoljuk meg, hogy ha $x \in \times G_1^\gamma$, $x \in \times G_2^\gamma$, s véges számú γ index kivételével $G_1^\gamma = R^\gamma$, $G_2^\gamma = R^\gamma$, továbbá minden G_1^γ és G_2^γ halmaz nyílt R^γ-ban, akkor $x \in \times(G_1^\gamma \cap G_2^\gamma) = (\times G_1^\gamma) \cap (\times G_2^\gamma)$, véges számú γ kivételével $G_1^\gamma \cap G_2^\gamma = R^\gamma$ és $G_1^\gamma \cap G_2^\gamma$ nyílt R^γ-ban minden γ-ra.

Ilyenformán a (6. 1) tétel értelmében topologikus teret nyerünk az R halmazból, ha benne nyíltnak tekintjük azokat a halmazokat, amelyek az imént bevezetett bázis halmazainak egyesítéseként állíthatók elő. Az $R = \underset{\gamma \in \Gamma}{\times} R^\gamma$ halmazt az így értelmezett topológiával ellátva az R^γ topologikus terek *direkt szorzat*ának nevezzük.

A bázis fogalmából rögtön folyik a $\times R^\gamma$ térben nyílt halmazok felismerésének következő egyszerű szabálya: egy $G \subset R$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha minden $x \in G$ ponthoz található a bázisban olyan $\times G^\gamma$ halmaz (G^γ nyílt R^γ-ban minden γ-ra és véges számú γ kivételével $G^\gamma = R^\gamma$), hogy $x \in \times G^\gamma \subset G$.

(14. 1) *Ha F^γ zárt R^γ-ban minden γ-ra, akkor $\times F^\gamma$ zárt $R = \times R^\gamma$-ban.*

Legyen $F_\alpha^\alpha = F^\alpha$ és $\gamma \neq \alpha$ esetén $F_\alpha^\gamma = R^\gamma$, továbbá $G_\alpha^\alpha = \overline{F^\alpha}$ és $\gamma \neq \alpha$ esetén $G_\alpha^\gamma = R^\gamma$. Világos, hogy $F_\alpha = \underset{\gamma}{\times} F_\alpha^\gamma$ és $G_\alpha = \underset{\gamma}{\times} G_\alpha^\gamma$ egymásnak R-re vonatkozó kiegészítő halmazai s hogy G_α nyílt (mint bázis-halmaz). Ezért F_α zárt s az állítás az evidens $\underset{\gamma}{\times} F^\gamma = \bigcap_\alpha F_\alpha$ reláció következménye.

(14. 2) *Tetszőleges $A^\gamma \subset R^\gamma$ halmazokra* $[\times A^\gamma] = \times [A^\gamma]$.

Valóban, (14. 1) szerint $\times [A^\gamma]$ zárt halmaz, amely a $\times A^\gamma$ halmazt tartalmazza, úgyhogy $[\times A^\gamma] \subset \times [A^\gamma]$. Ha viszont $(x^\gamma) \in \times [A^\gamma]$, akkor $\times G^\gamma$-val jelölve tetszőleges (x^γ)-t tartalmazó bázishalmazt, G^γ környezete x^γ-nak R^γ-ban, s minthogy x^γ érintkezési pontja A^γ-nak, van G^γ-nak és A^γ-nak közös y^γ pontja. Ennélfogva $(y^\gamma) \in (\times G^\gamma) \cap (\times A^\gamma)$, s minthogy a fent mondottak szerint az (x^γ) pontnak minden környezete tartalmazza (x^γ)-nak egy bázis-környezetét (vagyis egy (x^γ)-t tartalmazó bázis-halmazt), azért (x^γ) érintkezési pontja $\times A^\gamma$-nak. Így tehát $\times [A^\gamma] \subset [\times A^\gamma]$. A két eredmény együtt adja állításunkat.

Ha $R_0^\gamma \subset R^\gamma$ minden γ-ra, akkor a $\times R_0^\gamma$ halmaz topológiája ugyanaz, akár úgy tekintjük, mint az R_0^γ alterek direkt szorzatát,

akár úgy, mint az $R = \times R^\gamma$ tér alterét. A $\times R_0^\gamma$ direkt szorzat bázisát ugyanis a $\times G_0^\gamma$ alakú halmazok alkotják, ahol G_0^γ nyílt R_0^γ-ban és véges számú γ kivételével $G_0^\gamma = R_0^\gamma$; figyelembe véve, hogy az R_0^γ-ban nyílt halmazok $G_0^\gamma = R_0^\gamma \cap G^\gamma$ alakban írhatók, ahol G^γ nyílt R^γ-ban, továbbá hogy $R_0^\gamma = R_0^\gamma \cap R^\gamma$, ezek a bázis-halmazok azonosak a $\times(R_0^\gamma \cap G^\gamma)$ alakú halmazokkal, ahol G^γ nyílt R^γ-ban és véges számú γ kivételével $G^\gamma = R^\gamma$. Csakhogy

$$\times(R_0^\gamma \cap G^\gamma) = (\times R_0^\gamma) \cap (\times G^\gamma),$$

úgyhogy a $\times R_0^\gamma$ direkt szorzat bázis-halmazai nem egyebek, mint a $\times R^\gamma$ tér bázis-halmazainak a $\times R_0^\gamma$ halmazzal közös részei; tudjuk azonban, hogy ezek éppen az R tér $\times R_0^\gamma$ alterének topológiáját határozzák meg.

(14. 3) *Legyen $\mathfrak{B}^\gamma$ az R^γ tér egy bázisa. Akkor a $\times R^\gamma$ térben bázist alkotnak azok a $\times G^\gamma$ alakú halmazok, amelyekben véges számú γ-ra $G^\gamma \in \mathfrak{B}^\gamma$, a többi γ-ra pedig $G^\gamma = R^\gamma$.*

A szóbanforgó halmazok nyílván nyíltak, hiszen hozzátartoznak a $\times R^\gamma$ tér topológiáját definiáló bázishoz (amelyet egyéb bázisoktól való megkülönböztetés végett *kanonikus bázis*nak nevezhetünk). Másrészt ha G nyílt a $\times R^\gamma$ térben és $x = (x^\gamma) \in G$, van a kanonikus bázisban olyan $\times G_0^\gamma$ halmaz, hogy $x \in \times G_0^\gamma \subset G$; az $x^\gamma \in G_0^\gamma$ ponthoz található a $\mathfrak{B}^\gamma$ bázisban olyan G^γ halmaz, hogy $x^\gamma \in G^\gamma \subset G_0^\gamma$, s ha $G_0^\gamma = R^\gamma$, legyen egyúttal $G^\gamma = R^\gamma$. Világos, hogy a $\times G^\gamma$ halmaz hozzátartozik az általunk vizsgált típusú halmazokhoz s hogy

$$x \in \times G^\gamma \subset \times G_0^\gamma \subset G,$$

úgyhogy G előállítható ilyen típusú halmazok egyesítéseként; ezek tehát csakugyan bázist alkotnak.

Könnyen következik ennek alapján, hogy

(14. 4) *Legfeljebb megszámlálható sok szeparábilis tér direkt szorzata is szeparábilis.*

Ha ugyanis az R^i $(i = 1, \ldots, r;\ r \leqq \infty)$ terek mindegyikében egy megszámlálható $\mathfrak{B}^i$ bázist készítünk, magát az R^i teret is a bázishoz számítva, akkor (14. 3) szerint a $\times R^i$ térben bázist alkotnak a

$$G^1 \times G^2 \times \cdots \times G^n \times R^{n+1} \times R^{n+2} \times \cdots \qquad (G^i \in \mathfrak{B}^i)$$

alakú halmazok, amelyek legfeljebb megszámlálható sokan vannak.

A T_0-, T_1- és T_2-tulajdonságok mindegyike invariáns a direkt szorzás műveletével szemben, vagyis

(14. 5) *Tetszőleges számú T_0- (T_1-; T_2-) tér direkt szorzata is T_0- (T_1-; T_2-) tér.*

Lássuk be például a T_2-terekre vonatkozó állítást. Ha az R^γ terek mind T_2-terek és $x \in \times R^\gamma$, $y \in \times R^\gamma$, $x \neq y$, akkor az $x = (x^\gamma)$, $y = (y^\gamma)$ jelöléssel valamilyen α indexre $x^\alpha \neq y^\alpha$; az R^α tér (T_2) tulajdonsága miatt van x^α-nak és y^α-nak R^α-ban diszjunkt környezete, s ezeknek belsejét véve oly U^α és V^α halmazokhoz jutunk, hogy $x^\alpha \in U^\alpha$, $y^\alpha \in V^\alpha$, $U^\alpha \cap V^\alpha = 0$ és U^α is, V^α is nyílt R^α-ban. Legyen $\gamma \neq \alpha$ esetén $U^\gamma = V^\gamma = R^\gamma$, akkor $\times U^\gamma$ és $\times V^\gamma$ az x és y pontoknak diszjunkt környezete $R = \times R^\gamma$-ban.

(14. 6) *Tetszőleges számú reguláris tér direkt szorzata is reguláris.*

Ezt legkönnyebben a (7. 3) tétel segítségével láthatjuk be. Ha ugyanis az R^γ terek mindegyike reguláris, akkor (14. 5) értelmében a $\times R^\gamma$ tér is T_1-tér, továbbá, ha $x = (x^\gamma) \in R = \times R^\gamma$, legyen U az x pont egy környezete R-ben; U belseje tartalmazza a kanonikus bázisnak egy x-et tartalmazó $\times G^\gamma$ halmazát, ahol tehát G^γ környezete x^γ-nak R^γ-ban és véges számú γ kivételével $G^\gamma = R^\gamma$. Azokra az indexekre, amelyekre $G^\gamma \neq R^\gamma$, legyen $U^\gamma \subset G^\gamma$ x^γ-nak egy zárt környezete R^γ-ban, a többi γ indexekre pedig legyen $U^\gamma = R^\gamma$; ekkor a $\times U^\gamma$ halmaz (14. 1) szerint zárt és környezete x-nek, mert $x \in \times \operatorname{Int} U^\gamma \subset \times U^\gamma$ és véges számú γ kivételével $\operatorname{Int} U^\gamma = R^\gamma$, továbbá $\times U^\gamma \subset \times G^\gamma \subset G$, ami a (7. 3)-ban foglalt feltétel teljesülését mutatja az R térben.

Megjegyezzük, hogy normális terek direkt szorzata általában nem normális. Nem igaz általában az sem, hogy metrizálható terek direkt szorzata metrizálható. Fennáll ellenben a következő tétel:

(14. 7) *Metrizálható terek direkt szorzata ellátható eltérési struktúrával.*

Bizonyítás. Vezessük be a metrizálható R^γ térbe a ϱ_γ távolságot s az $R = \underset{\gamma \in \Gamma}{\times} R^\gamma$ térben minden $\gamma \in \Gamma$ indexnek feleltessünk meg egy σ_γ eltérést a következőképpen: $x = (x^\gamma)$, $y = (y^\gamma)$ esetén legyen $\sigma_\gamma(x, y) = \varrho_\gamma(x^\gamma, y^\gamma)$. Ezek valóban eltérések, mert a (11. 1)—(11. 3) feltételek evidensen teljesülnek, és együttvéve eltérési struk-

túrát alkotnak, mert két különböző $x \in R$ és $y \in R$ pont esetén legalább egy γ-ra $x^\gamma \neq y^\gamma$.

Meg kell még mutatnunk, hogy ez az eltérési struktúra az $R = \times R^\gamma$ direkt szorzat topológiáját indukálja. Legyen először G nyílt a direkt szorzat topológiájában; akkor $x \in G$ esetén van a kanonikus bázisban olyan $\times G^\gamma$ halmaz, hogy $x = (x^\gamma) \in \times G^\gamma \subset G$. Legyen $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ az a véges számú γ index, amelyre $G^\gamma \neq R^\gamma$, ekkor G^{γ_i} környezete x^{γ_i}-nek az R^{γ_i} metrikus térben, úgyhogy alkalmas ε_i pozitív számra $S(x^{\gamma_i}, \varepsilon_i) \subset G^{\gamma_i}$. Az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ számok legkisebbikét ε-nal jelölve világos, hogy mindazok az $y = (y^\gamma)$ pontok, amelyekre $\sigma_{\gamma_i}(x, y) < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, r)$, hozzátartoznak a $\times G^\gamma$ halmazhoz s így még inkább G-hez, ami mutatja, hogy G nyílt az eltérési struktúra által indukált topológiában.

Ha megfordítva G nyílt az eltérési struktúra által indukált topológiában és $x = (x^\gamma) \in G$, akkor van olyan véges számú $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ index, hogy mindazon $y = (y^\gamma)$ pontok, amelyekre $\sigma_{\gamma_i}(x, y) < \varepsilon$ minden $i = 1, \ldots, r$-re és alkalmas pozitív ε-ra, hozzátartoznak G-hez. Ez azonban más szavakkal azt jelenti, hogy bevezetve a $G^{\gamma_i} = S(x^{\gamma_i}, \varepsilon)$ jelölést $(i = 1, \ldots, r)$ és a többi γ-kra a G^γ halmazt R^γ-val téve egyenlővé, a G halmaz tartalmazza a kanonikus bázis $\times G^\gamma$ halmazát. Ez mutatja, hogy G nyílt a direkt szorzat topológiájában.

A bizonyítás azt is mutatja, hogy ha a direkt szorzat tényezőinek száma legfeljebb megszámlálható, akkor a direkt szorzatban bevezethető legfeljebb megszámlálható sok eltérésből álló eltérési struktúra. Ebben az esetben a direkt szorzat metrizálható is, ami a következő tétel folyománya:

(14. 8) *Ha az R eltérési tér eltérési struktúrája megszámlálható sok eltérésből áll, akkor az R tér metrizálható.*

Ennek belátása végett először a következő megjegyzést bocsátjuk előre:

(14. 9) *Legyen R tetszőleges eltérési tér, Σ a neki megfelelő eltérés-család; akkor található a Σ-val egyenlő számosságú Σ' eltérés-család, amely R-ből olyan eltérési teret alkot, melynek uniform struktúrája izomorf a Σ által indukált uniform struktúrával, s melyben minden eltérés 1-nél kisebb értéket vesz csak fel.*

Legyen ugyanis $\varphi(u)$ a $[0, +\infty)$ intervallumban folytonosan differenciálható függvény, melyre $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(u) > 0$ és monoton csökkenő, továbbá $0 \leqq \varphi(u) < 1$. Ilyen függvény például $\varphi(u) = \operatorname{th} u$.

Az ilyen $\varphi(u)$ függvény szigorúan monoton növekvő és folytonos, tehát ugyancsak szigorúan monoton növekvő és folytonos φ^{-1} inverz függvénye van értelmezve a $[0, \delta)$ intervallumban, ahol $\delta = \varphi(+\infty) \leqq 1$. Tetszőleges $u \geqq 0$ és $v \geqq 0$ számokra érvényes továbbá

$$\varphi(u+v) \leqq \varphi(u) + \varphi(v), \tag{14.10}$$

mert ugyanez más alakban

$$\int_0^{u+v} \varphi'(t)dt \leqq \int_0^u \varphi'(t)dt + \int_0^v \varphi'(t)dt;$$

csakhogy φ' monoton csökkenő voltát figyelembe véve

$$\int_0^{u+v} \varphi'(t)dt = \int_0^u \varphi'(t)dt + \int_v^{u+v} \varphi'(t)dt = \int_0^u \varphi'(t)dt +$$

$$+ \int_0^v \varphi'(u+s)ds \leqq \int_0^u \varphi'(t)dt + \int_0^v \varphi'(s)ds,$$

ami (14.10) érvényét mutatja.

Ha mármost $\sigma \in \Sigma$, akkor $\sigma'(x, y) = \varphi(\sigma(x, y))$ is eltérés; (11.1) és (11.2) evidensen teljesül, (11.3) pedig azért, mert (14.10) felhasználásával

$$\varphi(\sigma(x, z)) \leqq \varphi(\sigma(x, y) + \sigma(y, z)) \leqq \varphi(\sigma(x, y)) + \varphi(\sigma(y, z)).$$

Világos az is, hogy az összes $\sigma \in \Sigma$ eltéréseknek megfelelő σ' eltérések egy Σ-val egyenlő számosságú Σ' eltérési struktúrát alkotnak. Annak belátására, hogy a Σ és Σ' által indukált uniform struktúra izomorf, elég meggondolni, hogy $\sigma_i \in \Sigma$ esetén $(i = 1, \ldots, r)$ tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$\mathfrak{V}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r; \varepsilon) = \mathfrak{V}(\sigma_1', \ldots, \sigma_r'; \varphi(\varepsilon)),$$

illetőleg

$$\mathfrak{V}(\sigma_1', \ldots, \sigma_r'; \varepsilon) = \mathfrak{V}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r; \varphi^{-1}(\varepsilon)).$$

Az közvetlenül világos, hogy $\sigma' \in \Sigma'$ esetén $\sigma'(x, y) < 1$ minden $x \in R$, $y \in R$ pontpárra.

Most már bebizonyíthatjuk a következő tételt, amely még (14.8)-nál is többet mond ki:

(14.11) *Ha az R eltérési tér eltérési struktúrája megszámlálható sok eltérésből áll, akkor az R tér metrizálható oly módon, hogy a metrika által indukált uniform struktúra izomorf legyen az eltérési struktúra által indukált uniform struktúrával.*

Elég azzal az esettel foglalkoznunk, amikor az R tér eltérési struktúrája megszámlálhatóan végtelen sok $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ eltérésből áll, mert a véges számú eltérésből álló struktúrát ilyenné alakíthatjuk, ha egyik eltérést végtelen sokszor szerepeltetjük.

A (14. 9) tétel alapján mindjárt feltehetjük, hogy $\sigma_i(x, y) < 1$ minden i-re és minden $x \in R$, $y \in R$ pontpárra. Legyen most

$$\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sigma_i(x, y);$$

világos, hogy $x \in R$, $y \in R$ esetén $0 \leqq \varrho(x, y) < 1$, s igen könnyen igazolhatók a (2. 1)—(2. 4) axiómák, úgyhogy az R halmaz a ϱ távolsággal metrikus térré válik. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett válasszuk meg az i_0 természetes számot úgy, hogy $2^{-i_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ legyen; ekkor $\sigma_i(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ $(i = 1, \ldots, i_0)$ maga után vonja, hogy

$$\varrho(x, y) < \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-i_0} < \varepsilon,$$

vagyis más szóval

$$\mathfrak{V}\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i_0}; \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \mathfrak{V}(\varrho; \varepsilon).$$

Megfordítva $\varrho(x, y) < 2^{-i_0}\varepsilon$ maga után vonja, hogy $i = 1, \ldots, i_0$ esetén $\sigma_i(x, y) < \varepsilon$, vagyis

$$\mathfrak{V}(\varrho; 2^{-i_0}\varepsilon) \subset \mathfrak{V}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i_0}; \varepsilon),$$

s ez mutatja a kétféle uniform struktúra izomorf voltát.

A (14. 7) tételhez fűzött megjegyzésünkből (14. 8) alapján következik, hogy

(14. 12) *Megszámlálható sok metrizálható tér direkt szorzata is metrizálható.*

Az $R = \times R^\gamma$ térnek az R^α térre való azon leképezését, amely az $x = (x^\gamma)$ pontnak az x^α pontot felelteti meg, az R^α térre való *vetítés*nek nevezzük és pr^α-val jelöljük: $\mathrm{pr}^\alpha(x) = x^\alpha$. Ez folytonos leképezés, mert ha $G^\alpha \subset R^\alpha$ nyílt R^α-ban, akkor $(\mathrm{pr}^\alpha)^{-1}(G^\alpha) = \times G^\gamma$, ahol $\gamma \neq \alpha$ esetén $G^\gamma = R^\gamma$, ez pedig, mint a kanonikus bázis halmaza, nyílt halmaz R-ben.

Legyen f az S topologikus térnek az $R = \times R^\gamma$ térbe való leképezése és legyen $x \in S$ esetén $f^\alpha(x) = \mathrm{pr}^\alpha(f(x))$, úgyhogy tehát

$f(x)=(f^\gamma(x))$. *Az f leképezés akkor és csak akkor folytonos, ha minden α-ra $f^\alpha(x)$ S-nek R^α-ba való folytonos leképezése.* Valóban, ha f folytonos, akkor pr^α folytonossága miatt f^α is folytonos. Tegyük fel megfordítva, hogy az összes f^α leképezések folytonosak; az f leképezés folytonosságának kimutatása végett elég belátnunk, hogy a kanonikus bázishoz tartozó halmazok inverz képe nyílt S-ben, mert ebből már következik, hogy minden nyílt halmaz inverz képe is nyílt. Mármost ha $\times G^\gamma$ a kanonikus bázishoz tartozó halmaz, akkor nyilván $f^{-1}(\times G^\gamma)=\cap(f^\gamma)^{-1}(G^\gamma)$; itt az egyes $(f^\gamma)^{-1}(G^\gamma)$ halmazok az f^γ leképezések folytonossága miatt nyíltak, s véges számú kivétellel az egész S térrel egyenlők, mert véges számú γ kivételével $G^\gamma=R^\gamma$, úgyhogy $f^{-1}(\times G^\gamma)$ is nyílt.

Az eddig felsorolt tételeknél mélyebben fekvő és jóval nehezebb segédeszközöket igényel a következő, A. N. Tyihonovtól származó tétel:

(14. 13) *Kompakt terek direkt szorzata is kompakt.*

Ennek a tételnek bizonyítása csak transzfinit segédeszközökkel sikerül; legcélszerűbb az ún. Tukey-féle lemmának[16] felhasználása. Ez a következőt mondja ki: egy $\mathfrak{E}$ halmazrendszert *véges jellegű*nek mondunk, ha egy E halmazt akkor és csak akkor tartalmaz, ha E-nek minden véges részhalmazát tartalmazza; mármost *minden véges jellegű $\mathfrak{E}$ halmazrendszernek minden E halmaza belefoglalható $\mathfrak{E}$-nek egy maximális E_m halmazába* (vagyis olyan $E_m\in\mathfrak{E}$ halmazba, melyet egyetlen $\mathfrak{E}$-beli halmaz sem tartalmaz valódi részhalmazként).

Mármost világos, hogy a centrált halmazrendszerek összessége véges jellegű: egy halmazrendszer akkor és csak akkor cent-

[16] L. például a következő cikket: T. Szele, On Zorn's lemma, Publ. Math. 1 (1950), 254—256 és Errata, 257. o., ahol a Tukey-féle lemmának a halmazelmélet szokásos transzfinit segédeszközeivel (jólrendezési tétel, Zorn-lemma stb.) való kapcsolata van tárgyalva.

Legegyszerűbben transzfinit indukció segítségével lehet bebizonyítani a következő módon: az $E\in f$ halmazból kiindulva készítünk egy szigorúan növekvő transzfinit halmazsorozatot; $E_0=E$ mellett, ha már a $\xi<\alpha$ rendszámokra definiáltuk E_ξ-t úgy, hogy $E_\xi\in f$ és $\xi<\eta<\alpha$ esetén $E_\xi\subset E_\eta$, $E_\xi\neq E_\eta$ legyen, az $\bigcup_{\xi<\alpha} E_\xi$ halmaz is f-hez tartozik, mert minden véges részhalmaza az E_ξ ($\xi<\alpha$) halmazok valamelyikének részhalmaza és mert f véges jellegű. Ha tehát az $\bigcup_{\xi<\alpha} E_\xi$ halmaz nem maximális f-ben, jelöljük E_α-val egy f-hez tartozó valódi bővítését; a konstrukció egyszer megszakad, mert az f rendszert előbb-utóbb kimerítjük, s ha a megszakadás az α-dik lépésnél következik be, akkor $E_m=\bigcup_{\xi<\alpha} E_\xi$ a keresett maximális halmaz.

rált, ha minden véges részrendszere centrált. Ezért *egy adott halmaz részhalmazaiból alkotott minden centrált halmazrendszer kibővíthető maximális centrált halmazrendszerré* (vagyis olyanná, amelynek már egyetlen valódi bővítése sem centrált). Ha $\mathfrak{C}$ maximális centrált halmazrendszer és a C_i $(i=1,\ldots,n)$ halmazok $\mathfrak{C}$-hez tartoznak, akkor a $C=\bigcap_1^n C_i$ halmaz is $\mathfrak{C}$-hez tartozik, különben C-vel ki lehetne bővíteni $\mathfrak{C}$-t úgy, hogy centrált maradjon $(C^k\in\mathfrak{C}$ $(k=1,\ldots,m)$ esetén $C\cap(\bigcap_1^m C^k)=(\bigcap_1^n C_i)\cap(\bigcap_1^m C^k)\neq 0)$. Ha $\mathfrak{C}$ ismét maximális centrált halmazrendszer és a C halmaznak van $\mathfrak{C}$ minden halmazával közös pontja, akkor $C\in\mathfrak{C}$, különben újból ki lehetne $\mathfrak{C}$-t bővíteni a C halmazzal (mert $C_i\in\mathfrak{C}$ $(i=1,\ldots,n)$ esetén előbbi eredményünk szerint $\bigcap_1^n C_i\in\mathfrak{C}$, tehát a feltevés értelmében $C\cap(\bigcap_1^n C_i)\neq 0$).

(14. 13) bizonyításának előkészítése céljából bocsássuk még előre a kompakt terek következő jellemzését: *az R tér akkor és csak akkor kompakt, ha minden centrált halmazrendszernek van R-ben közös érintkezési pontja.* Ha ugyanis R kompakt és a $\mathfrak{C}$ halmazrendszer R részhalmazaiból álló centrált rendszer, akkor a $C\in\mathfrak{C}$ halmazok $[C]$ lezárásai még inkább centrált rendszert alkotnak, ennek mint zárt halmazokból álló centrált rendszernek (13. 1) szerint van közös pontja, azaz a $C\in\mathfrak{C}$ halmazoknak van közös érintkezési pontjuk. Ha viszont R-ben minden centrált halmazrendszernek van közös érintkezési pontja, akkor minden zárt halmazokból álló centrált rendszernek van közös pontja, s így az R tér (13. 1) szerint kompakt.

Térjünk most rá a Tyihonov-féle tétel bizonyítására. Legyenek az R^γ terek kompaktok és legyen $R=\times R^\gamma$. Tekintsünk az R tér részhalmazaiból álló centrált $\mathfrak{C}$ halmazrendszert; meg kell mutatnunk, hogy $\mathfrak{C}$ valamennyi halmazának van közös érintkezési pontja. Feltehetjük, hogy $\mathfrak{C}$ maximális centrált halmazrendszer, mert ha nem ilyen, kibővíthető ilyen rendszerré s ha a bővebb rendszer halmazainak van közös érintkezési pontjuk, annál inkább van az eredeti rendszer halmazainak is.

Tekintsünk egy $C\in\mathfrak{C}$ halmazt és legyen $C^\gamma=\mathrm{pr}^\gamma(C)$. Rögzített γ mellett az összes C^γ $(C\in\mathfrak{C})$ halmazok centrált rendszert alkotnak, hiszen $C_i\in\mathfrak{C}$ $(i=1,\ldots,n)$ esetén $\bigcap_1^n C_i\neq 0$, s akkor annál inkább $\bigcap_1^n C_i^\gamma=\bigcap_1^n \mathrm{pr}^\gamma(C_i)\supset \mathrm{pr}^\gamma(\bigcap_1^n C_i)\neq 0$. Az R^γ tér kompakt volta

miatt van tehát az összes C^γ halmazoknak közös $x^\gamma \in R^\gamma$ érintkezési pontjuk. Legyen most $x = (x^\gamma)$; megmutatjuk, hogy x közös érintkezési pontja az R térben az összes $C \in \mathfrak{C}$ halmazoknak. Az x pont tetszőleges környezete tartalmaz ugyanis egy x-et tartalmazó és a kanonikus bázishoz tartozó $\times G^\gamma$ halmazt, elég tehát megmutatnunk, hogy minden ilyen bázis-halmaz tartalmaz minden $C \in \mathfrak{C}$ halmazzal legalább egy közös pontot.

Ennek belátása végett legyen $G_\alpha^\alpha = G^\alpha$ és $\gamma \neq \alpha$ esetén legyen $G_\alpha^\gamma = R^\gamma$. Minthogy G^α az x^α pontnak környezete az R^α térben, azért minden egyes C^α halmazzal van közös pontja (hiszen ezeknek x^α közös érintkezési pontjuk), amiből következik, hogy a $G_\alpha = \times_\gamma G_\alpha^\gamma$ halmaznak van minden $C \in \mathfrak{C}$ halmazzal közös pontja; ilyennek választható ugyanis C bármely pontja, melynek R^α-ra való vetítése $C^\alpha \cap G^\alpha$-nak egy pontját szolgáltatja. Mármost a $\mathfrak{C}$ rendszer maximális centrált rendszer, s így abból, hogy G_α-nak $\mathfrak{C}$ minden halmazával van közös pontja, következik, hogy $G_\alpha \in \mathfrak{C}$. Csakhogy $\times G^\gamma = \bigcap_\alpha G_\alpha$, és itt a G_α halmazok véges számú kivétellel az egész R térrel esnek egybe, hiszen véges számú α kivételével $G^\alpha = R^\alpha$. Az R-rel egyenlő G_α-kat elhagyva látható, hogy $\times G^\gamma$ a $\mathfrak{C}$ rendszer véges számú halmazának közös része s ezért $\mathfrak{C}$ maximális centrált volta miatt $\mathfrak{C}$-hez tartozik. Akkor azonban a $\times G^\gamma$ bázis-halmaznak a $\mathfrak{C}$ rendszer minden C halmazával van közös pontja, amit bizonyítanunk kellett.

Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? II.

Szabó Árpád

IV

Az eddigi vizsgálatok arra mutatnak, hogy a deduktív matematika megteremtői — úgy látszik — a pythagoreusok voltak, mert ők állították össze azokat a jelenleg ismert legrégibb matematikai tételeket és bizonyításokat, amelyekből a deduktív tudomány meglétére következtethetünk. Arról azonban még egyáltalán nem szóltunk, hogy vajon mi ösztönözhette a pythagoreusokat e jelentős lépés megtételére. Hogyan jöttek rá a pythagoreusok arra, hogy egy matematikai jellegű állítás így is bebizonyítható, nemcsak úgy, ahogy annak idején Thales »bizonyította« a tételeit? És hogyan lehetséges az, hogy a pythagoreusok már olyan korán megteremtették azt a szigorú bizonyítási módszert, amelyet szinte még a későbbi korok sem tudtak fölülmúlni? Mert jegyezzük meg mindjárt azt is: a legcsodálatraméltóbb a pythagoreusok tudományában éppen bizonyításaik szigorúsága.[72]

[72] A pythagoreus matematika bizonyításainak logikai szigorúsága még a szakembereket is meglepi. *O. Becker* pl. némi kétkedéssel fogadja B. L. *v. d. Waerden*nek azt a megállapítását, hogy Euklidés VII. könyve az i. e. 5. századból származik. és így ír erről a kérdésről: ..die vollendete Form von 7 könnte durch eine spätere Überarbeitung, etwa durch die Mathematiker der Akademie zustande gekommen sein." Ennek a kételynek az oka nyilván az, hogy *O. Becker* szinte elképzelhetetlennek tartja: már az 5. századi pythagoreusok meg tudták volna teremteni az euklidési 7. könyv szigorúan zárt, kompakt egységét? — De alig merült fel benne ez a kétely, már szinte vissza is vonja: „Indessen macht der Verfasser (d. h. *B. L. v. d. Waerden*) dagegen das gewichtige Argument geltend, daß bei einer streng logischen Untersuchung, wie die Begründung der Zahlentheorie in 7 darstellt, eine Unterscheidung von Inhalt und Form untunlich ist." (Gnomon 23. (1951. 299).

A régebbi kutatás csak a tényt magát állapította meg, hogy ti. a görög tudomány a pythagoreusokkal kezdődik, de egyáltalán nem adott választ az imént fölvetett kérdésekre. K. Reidemeister pl. a következő szavakkal jellemzi a pythagoreusoknak azt a fölismerését, amely a tudomány későbbi története szempontjából olyan végtelenül fontossá lett:

»A pythagoreusok rájöttek arra, hogy a matematika tényei visszavezethetők hypothesisekre, amelyekből ugyanezek a tények *gondolati úton* kikövetkeztethetőek. Ezzel egyszersmind fölfedezték azt az utat is, amely a szemléletességből olyan geometriai tényekhez vezet, amelyek már *csak* a gondolkozás számára hozzáférhetőek.[73]

Ha gondosan mérlegeljük ezeket a szavakat, be kell látnunk, hogy csakugyan találóan jellemzik a pythagoreusok tudománytörténeti érdemét. Mert a pythagoreusok valóban a matematika tényeit (amelyek érzékelhetőek!) hypothesisekre, azaz tisztán gondolati elemekre vezették vissza. Nem csoda, hogy ugyanezek a tények a hypothesisekből gondolati úton kikövetkeztethetőek voltak. Az út nemcsak a szemléltetésből, az érzékien észrevehetőből vezetett a tisztán gondolatihoz, hanem megfordítva, a tisztán gondolatiból is vissza az érzékien észrevehetőhöz. A meglepő inkább az volt, hogy a hypothesisekből el lehetett jutni olyan másfajta tényekhez is, amelyek már *nem* voltak szemléletesek, *csak* a gondolkozás számára voltak hozzáférhetőek. Reidemeister mindjárt illusztrálja is ezt a megállapítását egy példán, és így ír: »A pythagoreusok tanítása a párosról és páratlanról abban a bizonyításban kulminál, amely kimutatja, hogy a négyzet átlója d és ugyanannak a négyzetnek az oldala s *nem mérhető* ugyanazzal az e egységgel. (Ezt nevezik a matematika nyelvén a négyzet átlója és oldala *inkommenzurábilitásának*.) Ezt pedig már nem lehet szemléltetni (az inkommenzurábilitás tapasztalatilag nem érzékelhető) — mint ahogy ellenkezőleg szemléltethető pl. Pythagoras tétele —, ez már csak elgondolható és kikövetkeztethető«.[74] — A megállapítás nyilvánvalóan helyes. A kérdés in-

[73] *K. Reidemeister* i. m. 52. lap: „Die Pythagoreer entdeckten die Möglichkeit, mathematische Tatbestände auf Hypothesen zurückzuführen, aus denen diese Tatbestände durch *Denken* gefolgert werden können. Damit entdeckten sie aber zugleich einen Weg, der aus dem Anschaulichen heraus zu geometrischen Tatsachen führt, die *nur* dem Denken zugänglich sind."

[74] *K. Reidemeister* uo.: „Die pythagoreische Lehre vom Geraden und Ungeraden gipfelt nämlich in dem Nachweis, daß die Diagonale d eines

kább csak az, hogy vajon megértjük-e ebből: hogyan jutott eszükbe a pythagoreusoknak az a különös gondolat, hogy az érzékeinkkel is tapasztalható matematikai tényeket hypothesisekre vezessék vissza? Mit akartak egyáltalán elérni hypothesiseikkel? Mert az aligha képzelhető, hogy a pythagoreusok előre megsejtették volna: a hypothesisekből kiindulva olyasmit is felfedeznek majd, amit egyáltalán nem lehet már szemléltetni, csak elgondolni és kikövetkeztetni lehet, mint pl. az imént említett inkommenzurábilitást. — Egyszóval: az előbbi REIDEMEISTER-idézet helyesen jellemzi ugyan a tényeket és jól meg is világítja azt az alapvető változást, ami a pythagoreus matematikában végbement, de nem ad *történeti* magyarázatot arra: *hogyan ment végbe a döntő fordulat?*

Véleményünk szerint: ha történeti magyarázatot keresünk a deduktív matematika létrejöttére, akkor mindenekelőtt a bizonyítás módszereit kell vizsgálnunk azoknak a tételeknek az esetében, amelyek mai tudásunk szerint a deduktív matematika legrégibb korszakából származnak. O. BECKER maga mutatott példát arra — a páros és páratlanról szóló pythagoreus tanítás rekonstruálásával: hogyan és milyen módszerekkel folytatható az ilyenfajta vizsgálódás. Példája meggyőz arról is, hogy ezen az úton az antik tudománytörténetnek még nagyon sok kérdése jobban megvilágítható. BECKER ugyanis rámutatott már a régi pythagoreus matematika sok jellegzetes vonására. Hasonlóképpen vizsgáljuk mi most a következőkben a legrégibb matematikai tételek bizonyításformáit.

Mindenekelőtt az a kérdés érdekel bennünket, vajon a legrégibb görög matematikai tételek bizonyításformája megerősíti-e azt az elméletet, amelyet K. v. FRITZ állított fel a deduktív matematika keletkezésére akkor, amikor összehasonlította ezt a logika elméletének a kibontakozásával? Csakugyan igaz-e, hogy már az 5. században — a deduktív matematika legkorábbi szakaszán — a bizonyítás, a levezetés abból állott, hogy a »bonyolultabb« tételt »egyszerűbb« premisszára vezették vissza? Vegyük példának okáért a páros és páratlanról szóló pythagoreus tanítás egyik tételét.

Quadrates und die Quadratseite *s* desselben nicht mit derselben Einheitsstrecke *e* gemessen werden können. Das läßt sich nicht veranschaulichen — wie sich etwa der Satz des Pythagoras veranschaulichen läßt —, nur denken und erschließen."

Euklidés IX 22. tétele kimondja: *Ha tetszőleges páratlan számokat adunk össze olymódon, hogy az összeadandók száma páros, akkor az összeg páros szám lesz.* A bizonyítás ezt a tételt visszavezeti a közvetlen megelőzőre, IX 21-re: *Tetszőleges számú páros szám összege páros szám.*[74a] A IX 22. bizonyításának gondolatmenete ti. a következő: Az adott páratlan számok mindegyikéből (összesen tehát párosszámú összeadandóból!) kivonjuk az egységet. Minthogy a VII. könyv 7. definíciója értelmében a páratlan szám éppen az egységgel különbözik a páros számtól, az egység kivonásával a páratlan számokat átalakítottuk páros számokká, és nyertünk még egy új páros számot, miután párosszámú összeadandókból vontuk ki az egységeket; az új összeadandó tehát ugyancsak egy páros szám. Páros számok összege viszont a megelőző, IX 21. tétel értelmében páros szám. Ezzel igazoltuk a tételt. — A bizonyítás tehát ebben az esetben csakugyan a »bonyolultabb« IX 22. tételt visszavezeti az »egyszerűbb« premisszára, a IX 21. tételre. Hasonlóképpen vezeti vissza a IX 21. tétel bizonyítása ezt a másikat még egyszerűbb premisszájára, a VII. könyv, 6. definíciójára.

Ilyen és ehhez hasonló közvetlen levezetést csakugyan gyakran találunk azok között a tételek között, amelyek — mai tudásunk szerint — a deduktív matematika legrégibb korszakából származnak. És ha az ilyen levezetésekre gondolunk, akkor csakugyan hajlandók lennénk igazat adni K. v. Fritz elméletének. — Némi óvatosságra int azonban bennünket az a körülmény, hogy a legrégibb ismert görög matematikai bizonyítások korántsem mindig olyan egyszerű, közvetlen levezetések, mint amilyen az imént tárgyalt eset volt.

Mindenekelőtt érdemes lesz összeállítanunk legalább vázlatosan a jelenleg ismert legrégibb görög matematikai levezetések bizonyításformáinak a statisztikáját. Egy ilyen statisztikából ti. a következő figyelemre méltó tény derül ki.

A páros és páratlanról szóló pythagoreus tanítás összesen 17 tételből áll (Eukl. IX 21—36. és X App. 27.). Ez a 17 tétel mai formájában Euklidésnél részben átdolgozott. Euklidés

[74a] Eucl. IX. 22: *Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὁ ὅλος ἄρτιος ἔσται.* O. Becker (Grundlagen der Mathematik 39 lap) fordításában: „Setzt man beliebigviele ungerade Zahlen zusammen und ist ihre Anzahl gerade, so muß die Summe gerade sein."

ugyanis — vagy az a másoló, aki ezeket a tételeket nem sokkal Euklidés után még az ókorban az Elemekhez fűzte — arra törekedett, hogy a »függeléket« szorosabb szálakkal kapcsolja a IX. könyvhöz; ezért egy-egy tétel bizonyításában néha »fölöslegesen« hivatkozik olyan más euklidési tételekre is, amelyeknek színvonala jóval magasabb, mint általában a páros és páratlanról szóló régi pythagoreus tanításé. (O. Becker említett dolgozata kimutatta, hogy éppen ezekben az esetekben nagyon könnyen rekonstruálható az eredeti egyszerűbb összefüggés is!) A különös azonban az, hogy ebből a 17 tételből — még abban a formában is, ahogy ma olvassuk őket Euklidésnél — *ötnek* a bizonyítása indirekt bizonyítás; egy *hatodik* esetben a bizonyítás nemcsak egyszerűen indirekt, hanem azon túl még reductio ad absurdum is. Ha figyelembe vesszük O. Becker rekonstrukcióit, még ennél is több — *nyolc!* — az indirekt bizonyítású tételek száma. Minthogy rendkívül egyszerű, triviális matematikai tételekről van szó, feltűnő az indirekt bizonyításnak ez a meglehetősen sűrű alkalmazása. Az embernek önkéntelenül is az a benyomása, mintha a deduktív matematika első századában különösen fontos szerepet játszott volna az indirekt bizonyítás.

Még inkább megerősödik ez a sejtésünk, ha megvizsgáljuk annak az Archytas-tételnek a bizonyítását, amely alkalmat adott v. d. Waerdennek arra, hogy kimutassa Euklidés VII. könyvének 5. századi eredetét. A mi szempontunkból érdekes ti. az, hogy mind Archytas tétele, mind pedig azoknak a tételeknek nagy része, amelyekre ez felépül, indirekt bizonyítású. Euklidés VII. könyvének első 36 régi tétele közül *tizenötnek* a bizonyítása mai formájában is indirekt. De ezen túlmenően vannak ebben a VII. könyvben olyan tételek is, amelyeknek bizonyításformája az első pillanatra úgy hat, mintha közvetlen, direkt bizonyítás volna; csak ha jobban megnézzük őket, akkor derül ki egyszerre, hogy gondolatmenetük eredetileg tulajdonképpen indirekt bizonyítás volt: az euklidési megfogalmazás csak felületesen takarja el az eredeti indirekt gondolatmenetet. (Ilyen utólag átalakított, de eredetileg indirekt bizonyítású tétel pl. *Eukl. VII 19.*).

Mi lehet mármost az oka annak, hogy az indirekt bizonyítást ilyen gyakran alkalmazták már az i. e. 5. században, a deduktív tudomány kialakulásának ezen a korai szakaszán? Bizonyos, hogy az a magyarázat, amelyet K. v. Fritz a direkt

bizonyítás, a közvetlen levezetés esetére megkísérelt, erre a másik esetre nem alkalmazható. Mert az indirekt bizonyítás esetében egyáltalán nem beszélhetünk arról, mintha a »komplikáltabb« tételt valamilyen »egyszerűbb« premisszára vezetnénk vissza. Az indirekt bizonyítás egy egészen más jellegű logikai megfontolás eredménye. De nézzük meg mindenekelőtt, mit mond B. L. v. d. WAERDEN erről a bizonyításformáról egy olyan cikkében, amely a matematikai heurisztika kérdéseivel foglalkozik.[75]

»Ha be akarunk bizonyítani valamely matematikai tételt, akkor gyakran célravezető az *indirekt bizonyítás* keresése. Föltesszük, hogy az állítás hamis, majd összehasonlítjuk ezt az ismert adatokkal (»man zieht auch noch das Gegebene heran«) és következtetéseket fűzünk hozzá mindaddig, amíg ellentmondásra nem bukkanunk. Gyakran sikerül utólag aztán a direkt levezetés is, de megtalálni könnyebb az indirekt bizonyítást, mert ebben az esetben több tényezővel számolhatunk, ti. az ismert adatokkal, a bebizonyítandó tétellel, meg azzal is, hogy a tétel hamis. Ha mindkét irányból következtetünk, meglehet a reményünk arra, hogy következtetéseink valahol középen találkoznak«.[76]

A jelenkori matematikusnak ez a gyakorlati tanácsa nemcsak azért érdekes, mert némileg megvilágíthatja a matematikai felfedezés pszichológiai folyamatát, hanem azért is, mert új perspektívát nyit abban a másik kérdésben: hogyan jöttek rá egykor a deduktív bizonyítás gondolatára. A matematikus azt állítja, hogy az indirekt bizonyítás gyakran előnyösebb, mint a közvetlen levezetés. Később gyakran sikerül a közvet-

[75] Dolgozatunk csak vázlatosan tárgyalja a matematikai indirekt bizonyítás kérdését, de utalunk arra, hogy — úgy látszik —. a görög matematikusok másképp kezelték a harmadik kizárásának elvét az 5. században és másképp a 4. században; vö. *Á. Szabó*, Ein Lehrsatz der pythagoreischen Arithmetik, Elemente der Mathematik 1956, 101—105.

[76] „Einfall und Überlegung in der Mathematik", Elemente der Mathematik, Bd. VIII. Basel 1953 123: „Wird nicht eine Konstruktion, sondern ein Beweis verlangt, so sucht man oft mit Vorteil einen *indirekten Beweis*. Man nimmt an, die Behauptung sei falsch, man zieht auch noch das Gegebene heran, und man schließt so lange weiter, bis man auf einen Widerspruch kommt. Oft gelingt es nachher, den Beweis direkt zu führen, aber zu finden ist der indirekte Beweis manchmal leichter, weil man dabei mehr voraussetzen kann, nämlich das Gegebene und die Falschheit des Behaupteten. Von beiden Seiten aus schließend, hat man eine Chance, sich in der Mitte zu treffen."

len levezetés is, de megtalálni sokszor könnyebb az indirekt bizonyítást, hiszen ebben az utóbbi esetben több lehetőség áll a rendelkezésünkre. — Ha figyelmesen olvassuk ezeket a szavakat, és közben arra is gondolunk, hogy csakugyan már a deduktív matematika legelső századában is milyen gyakran alkalmazták az indirekt bizonyítást, akkor egyszerre fölmerül bennünk a kérdés: *vajon az indirekt bizonyítás nem volt-e már kezdettől fogva egyike a deduktív matematika leglényegesebb eszközeinek?* — Mielőtt erre a kérdésre felelnénk, vizsgáljuk meg az indirekt bizonyítás néhány esetét a legrégibb görög matematikából vett példákon.[77]

A legrégibb ismert matematikai indirekt bizonyítást a pythagoreusoknak a párosról és páratlanról szóló tanításában találjuk. Euklidés IX 30. tétele kimondja: *Ha valamely páratlan szám osztója egy páros számnak, akkor ugyanaz a páratlan szám osztója az előbbi páros szám felének is.* — Ezt a tételt a bizonyítás *indirekt úton* visszavezeti a megelőző, IX 29. tételre. (A IX 29. tétel kimondja, hogy *két páratlan szám szorzata mindig páratlan szám.*) A IX 30. tétel bizonyításához mindenekelőtt azt kell kimutatnunk, hogy egy páros számnak és egy páratlannak a hányadosa *csak* páros szám lehet. (Ebből ugyanis eo ipso következik, a tétel maga.) Ennek az utóbbi állításnak indirekt bizonyítása a következő meggondolásra épül.

A tétel maga kimondja, hogy az osztandó páros szám, az osztó pedig páratlan; bebizonyítandó, hogy a hányados csak páros lehet. — Természetesen tudjuk, hogy az osztónak és a hányadosnak a szorzata egyenlő az osztandóval. A mi esetünkben tehát egy páratlan számnak, az osztónak és egy másiknak, a hányadosnak —, amelyről még nem tudjuk, hogy páros-e vagy páratlan — a szorzata egyenlő az osztandóval, egy páros számmal. Hogyan bizonyíthatnánk be ezek után, hogy a hányados csakugyan páros szám? — Tegyük föl az ellenkezőjét annak, amit bizonyítani akarunk; legyen a hányados ne páros, hanem »páratlan« szám, és vizsgáljuk meg most, mi következik ebből. Ha nemcsak az osztó páratlan szám, hanem a hányados is, akkor két páratlan szám szorzatával van dolgunk. Két páratlan szám szorzata azonban a megelőző (IX 29.) tétel ér-

[77] A következőkhöz lásd „Eleatica" c. dolgozatomat: Acta Antiqua Academiae Scientiarum Hungaricae III. 67—13, valamint ennek előzményeit: Acta Antiqua I. 377—410, II. 17—62 és 243—289.

telmében maga is páratlan. A mi esetünkben azonban az osztó és a hányados szorzata (az osztandó) páros szám. Az a feltevés tehát, hogy »a hányados páratlan szám«, ellentmondásra vezetett — jeléül annak, hogy helytelenül gondolkoztunk. *Nem lehetséges* tehát, hogy a hányados az adott esetben »páratlan szám« legyen, párosnak kell lennie, és ezzel a tétel be van bizonyítva.

Nem szószerint idéztük ugyan az Euklidésnél olvasható bizonyítást, de igyekeztünk pontosan követni a gondolatmenetet, hogy ezáltal megkönnyítsük az egyes lépések ellenőrzését. Lássuk mármost, mit állapíthatunk meg ennek alapján az indirekt bizonyításról.

Mindenekelőtt látjuk, hogy az indirekt bizonyítás tulajdonképpen *nem* a kérdéses tételt *bizonyítja*, hanem a tétel ellenkezőjét *cáfolja*. Hiszen azt akartuk kimutatni, hogy a vizsgált szám (a hányados) páros, de ahelyett, hogy ezt az állítást közvetlenül bizonyítottuk volna, megcáfoltuk ennek az állításnak az ellenkezőjét, amely így hangzott: »a vizsgált szám páratlan«. Ez a bizonyításforma (»indirekt«) onnan kapta a nevét, hogy tulajdonképpen nem is bizonyítás, hanem cáfolat. Nem a vizsgált tételt bizonyítjuk, hanem az ellenkezőjét cáfoljuk. Tehát valamely állítást indirekt úton úgy bizonyíthatunk be, hogy előbb megfogalmazzuk az állítás ellenkezőjét, azután kimutatjuk, hogy ez az utóbbi állítás hamis. — Elég ezt a körülményt magát tudomásul vennünk ahhoz, hogy máris egy nagyon lényeges dolgot állapíthassunk meg arra vonatkozóan: mi szükséges ahhoz, hogy valaki alkalmazni tudja az indirekt bizonyítási formát? — Ahhoz, hogy valaki indirekt bizonyításhoz folyamodjék, mindenekelőtt tudnia kell, hogy egy állítás vagy *igaz*, vagy *nem igaz*, harmadik lehetőség nincs. (Valamely dolog vagy *A* vagy *Non-A; tertium non datur.*) Olyan jól kell ismernünk a logikának ezt az alapvető felismerését, hogy egyszersmind arról is meg legyünk győződve: valamely állítás *(A)* bizonyítása *ekvivalens* az állítás ellenkezőjének *(Non-A)* cáfolatával. Ezeknek a tudása nélkül senki sem gondolhat arra, hogy indirekt úton bizonyítson be valamely állítást.

Ha figyelmesen tovább vizsgáljuk az előbbi indirekt bizonyítást, hamarosan észreveszünk ezen a logikai műveleten egy másik lényeges vonást is. Feltűnő ugyanis az, hogy miről ismerjük föl a hamis állítást a bizonyítási eljárás során. — Az előbb ugyanis a bizonyítandó igaz tétel *(a hányados páros*

szám) helyett fölállítottuk ennek az ellenkezőjét, a hamis tételt: *»a hányados páratlan szám«*. Akkor, amikor ezt az utóbbi (hamis) tételt megfogalmaztuk, nem tudhattuk még, hogy ez csakugyan hamis; ez csak a későbbi művelet során derült ki róla. Mert a felállított (hamis) tételhez következtetéseket fűztünk, és így gondolkoztunk: ha »páratlan szám« a hányados, akkor régebbi, már igaznak bizonyult ismereteink (ti. megelőző IX 29. tétel) értelmében »páratlan szám« kell legyen az osztandó is, hiszen két páratlan szám szorzata mindig páratlan. Ezzel azonban máris *ellentmondásra* bukkantunk — mert az adott esetben tudjuk, hogy az osztandó nem »páratlan«, hanem páros szám — és éppen ez az *ellentmondás* a jele annak, hogy hamis állításból indultunk ki. — Mielőtt továbbmennénk, tisztában kell lennünk azzal, mit is jelent voltaképpen az, hogy *ellentmondásra bukkantunk?* Miben áll az adott esetben az »ellentmondás?« — Ez a kissé talán különös kifejezésmód a következőt jelenti: Gondolataink során eljutottunk ahhoz az állításhoz, hogy *»az osztandó páratlan szám«*. A gondolatsor elején azonban, akkor, amikor magát a bebizonyítandó tételt hallottuk, máris megállapíthattuk: *»az osztandó páros szám«*. Ez a két állítás ellentmond egymásnak és nem lehet egyszerre igaz, mert egy dolog vagy *A*, vagy *Non-A, tertium non datur*. A két állítás közül csak az egyik igaz, a másik szükségszerűen hamis. Az a kifejezés tehát, hogy »ellentmondásra bukkantunk«, tulajdonképpen csak annyit jelent: egy olyan állításhoz jutottunk, amely nem egyeztethető össze régebbi, már igaznak ismert állításunkkal; a két állítás nem kapcsolható össze (»ugyanaz a szám páros *és páratlan«*), mert összekapcsolásuk *belső ellentmondás* lenne.

Jellemző tehát a tárgyalt indirekt bizonyítási formára az a felfogás, hogy valamely gondolat belső ellentmondása mutatja: a kérdéses gondolat hamis. Az a gondolat, amely önmagának ellentmond, nem lehet igaz; igaz csak az ellentmondásmentes gondolat lehet. Természetesen annak, aki indirekt úton bizonyít valamely állítást, tisztában kell lennie azzal, hogy az ellentmondásmentesség valamely állítás igaz voltának *egyetlen* logikai kritériuma.[78] Mielőtt továbbmennénk és következ-

[78] A köznapi életben igaznak tartjuk azt az állítást, amely tapasztalatainkkal megegyezik. Valamely állítás igaz voltának *tisztán logikai kritériuma* azonban csak az ellentmondásmentesség. Ez más szóval azt is jelenti, hogy — pusztán a logika szempontjából — igaznak kell tartanunk minden olyan állítást, amelynek ellentmondásossága nem mutatható ki.

tetéseket fűznénk az indirekt bizonyításra vonatkozó megállapításainkhoz, illusztráljuk még legalább egy olyan példán az indirekt bizonyítást, amelyet a legrégibb görög matematika köréből választunk.

Euklidés VII. könyvének 31. tétele, amelynek 5. századi eredetét B. L. v. d. WAERDEN kimutatta, így hangzik: *Minden összetett számnak osztója valamely törzsszám.* A tétel bizonyításához ismernünk kell Euklidés VII. könyvének következő definícióit:

2. definíció: A szám egységekből álló (véges) halmaz;

11. definíció: Törzsszám az, amelynek az egységen és önmagán kívül más osztója nincs;

13. definíció: Összetett szám (=nem-törzsszám) az, amelynek van valódi osztója.

A VII 31. tétel bizonyításának gondolatmenete a következő. Legyen a valamely tetszőleges összetett szám. Be akarjuk bizonyítani, hogy ennek az összetett számnak osztója valamely törzsszám. Minthogy a összetett szám, a 13. definíció értelmében valódi osztója ennek valamely b szám. Ez a b szám vagy törzsszám vagy nem-törzsszám (= összetett szám); harmadik lehetőség nincs. Ha törzsszám b, akkor máris igaznak bizonyult a VII 31. tétel; ha viszont nem-törzsszám (= összetett szám) b, akkor a 13. definíció értelmében osztója b-nek valamely c szám, amely ennek folytán osztója természetesen a-nak is. Ez a c szám viszont megint vagy törzsszám, vagy nem-törzsszám (= összetett szám); harmadik lehetőség nincs. Ha törzsszám c, akkor igaznak bizonyult a VII 31. tétel, mert megtaláltuk a összetett szám osztóját, c törzsszámot; ha viszont nem-törzsszám (= összetett szám) c, akkor tovább vizsgáljuk ennek a számnak d szám osztóját, míg olyan törzsszámot nem találunk, amely osztója a összetett számnak. — A bizonyítás hangsúlyozza, hogy ezen az úton végül is találnunk kell egy olyan törzsszámot, amely osztója a összetett számnak. Mert ha egy olyan törzsszámot se találnánk, amely osztója lenne a számnak, akkor ez azt jelentené, hogy a számnak *végtelen* sok folyton kisebbedő összetett szám osztója van, ez pedig — tekintettel a szám definíciójára — nem lehetséges.

Ha áttekintjük a bizonyítás gondolatmenetét, rögtön kiderül, hogy az egymást követő gondolatok az »ellentmondás-

mentesség« jegyében kapcsolódnak egymáshoz; *b* szám pl. azért vagy törzsszám vagy nem-törzsszám, mert a harmadik lehetőség (»*b* törzsszám *és* nem-törzsszám«) belső ellentmondás lenne, amely nyilvánvaló jele a gondolat hamis voltának. Ha az első eset érvényes (»*b* törzsszám«), akkor nem folytatjuk tovább a műveletet, mert máris igazoltuk a tételt. Ha viszont a második eset érvényes (»*b* nem-törzsszám«), akkor a 13. definíció értelmében *b*-nek is van egy osztója *(c)*, amelyre ismét alkalmazható az előbbi »hármas út«: *törzsszám — nem-törzsszám — a harmadik eset nem lehetséges;* az első esetben meg van oldva a feladat, a második esetben újra alkalmazzuk a »hármas utat«. — Világosan kitűnik a bizonyítás utolsó (indirekt!) lépéséből is, hogy éppen az *ellentmondásmentesség* az a döntő motívum, amelynek jegyében egymáshoz kapcsolódnak gondolataink. Az az állítás »A«, amelyet ezúttal indirekt úton bizonyítunk be, így hangzik: »a keresett törzsszámot a jellemzett módon véges számú lépés után megtaláljuk«. Az indirekt bizonyítás azzal kezdődik, hogy megfogalmazzuk a tétel ellenkezőjét, »Non-A«: »a keresett törzsszámot a jellemzett módon *nem találjuk* meg véges számú lépés után«. Ezt az utóbbi állítást (»Non-A«) kell most megcáfolnunk. Hogy kimutassuk az állítás hamis voltát, következtetéseket fűzünk hozzá mindaddig, amíg ellentmondásra nem bukkanunk. — Ha a keresett törzsszámot »nem találjuk meg« *véges számú lépés után,* akkor ez azt jelenti, hogy a vizsgált *a* számnak *végtelen sok osztója* van. Valamely számnak az osztója azonban mindig kisebb, mint maga a szám. Az *a* szám végtelen sok osztója is folyton kisebbedik. Lehet-e azonban valamely számnak végtelen sok folyton kisebbedő osztója? Nyilvánvaló, hogy abban az esetben, ha »a szám egységekből álló (véges) halmaz«, akkor nem lehet egy számnak sem végtelen sok folyton kisebbedő osztója, mert ez a két állítás ellentmond egymásnak. — Ez az ellentmondás a jele annak, hogy a felállított tétel (»Non-A«) hamis volt, az ellenkezője (az »A« tétel) az igaz.

Tanulságos az indirekt bizonyításnak ez a legutóbbi példája azért is, mert véletlenül éppen ez az eset megvilágíthatja azt a kérdést: hogyan jöttek rá a matematikai *definíció* lényegére? Ha ugyanis figyelmesen vizsgáljuk Euklidés VII 31. tételét és imént vázolt indirekt bizonyítását, könnyen rájöhetünk egy érdekes történeti összefüggésre. — Mint láttuk, a

bizonyítás azt hangsúlyozza, hogy *nincs* olyan összetett szám, amelynek *végtelen sok egyre kisebbedő osztója lenne.* A filozófia-történetből tudjuk, hogy »a végtelen sok egyre kisebbedő osztó« problémája milyen nagy szerepet játszott az i. e. 5. század görög gondolkozásában. Az eleai Zenon azt állította, hogy a mozgó test sohasem juthat el *A* pontból *B* pontba, mert mielőtt az *AB* útszakaszt befutná, ennek a távolságnak a felét, az előtt viszont a felének a felét kellene befutnia és így tovább a végtelenig.[79] Ez más szóval nyilván azt is jelenti, hogy bármely AB távolságnak a következő végtelen sok egyre kisebbedő osztója van: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ Euklidés VII 31. tételének bizonyítása — úgy látszik — erre a Zenon-féle érvelésre is gondol, amikor hangsúlyozza, hogy a számok birodalmában nem lehetséges a végtelen sok egyre kisebbedő osztó. Az euklidési szám-fogalom definíciója az, ami ezt lehetetlenné teszi. A definíciót tehát úgy fogalmazták meg, hogy ez alapja legyen a reá épülő állítások (tételek) ellentmondásmentességének. Ez egyszersmind a magyarázat arra is, miért hangsúlyozza Platon (Állam VI 511 A), hogy a matematikusok a definíciók mögé már nem hatolnak; a gondolatok ellentmondásmentességét csak a definíciókig követik a visszafelé vezető úton.

Az ellentmondásmentesség motívumára vonatkozó vizsgálódásunkat egyelőre a következő gondolatmenettel zárhatjuk le. Ha az ellentmondásmentesség valamely állítás igaz voltának *egyetlen logikai kritériuma,* akkor az indirekt bizonyítás — feltehetően — logikai szempontból *elsődleges bizonyítási* forma, ezzel szemben a direkt bizonyítás logikai szempontból csak *másodlagos jellegű* lehet. Természetesen nem vezethetjük be ezt a két új terminust — *logikai szempontból elsődleges és másodlagos jellegű bizonyítás* — anélkül, hogy megmagyaráznánk, mit értünk rajtuk. Kezdjük talán a könnyebb terminussal: mit értünk azon, hogy a direkt bizonyítás logikai szempontból *másodlagos* jellegű bizonyítási forma? — Valamely állítás igaz voltát a logika szabályai szerint *közvetlenül* csak úgy bizonyíthatjuk be, hogy kimutatjuk: a kérdéses állítás azért igaz, mert logikusan következik egy másik, már igaznak ismert állításból. A közvetlen, a direkt bizonyítás tehát a bebizonyítandó állítást visszavezeti egy, már igaznak ismert másik

[79] Vö. Aristoteles, Phys. Z 9.239 b 9 kk. és 2.233 a 21.

állításra. De direkt módszerrel sohasem dönthetjük el valamely állításról önmagában, hogy igaz-e vagy hamis; legfeljebb tapasztalatainkra vagy arra hivatkozhatunk, hogy az az állítás, amelyre visszavezetjük a bebizonyítandót, nem szorul már bizonyításra, evidens. Ezért nevezzük a direkt bizonyítást »másodlagos jellegűnek«. — Ezzel szemben az indirekt bizonyítás »elsődleges jellegű«, mert egy olyan megfontolásra épül, amelynek alapján pusztán logikai módszerrel — a tapasztalattól függetlenül is — megállapítható egyik-másik állítás hamis volta. Nyilvánvaló ugyanis, hogy az az állítás, amely önmagának ellentmond, hamis állítás. Ha valamely önmagának ellentmondó állításra bukkanunk, nem szükséges a tapasztalatra hivatkoznunk, az ilyen állításról azonnal megállapítható, hogy hamis. Az indirekt bizonyítás éppen erre a logikai megfontolásra épül, ezért nevezzük az indirekt bizonyítást logikai szempontból *elsődlegesnek*. — Már e megfontolás alapján is valószínű, hogy a logika történeti kibontakozása során korábban jelentkezett az indirekt bizonyítás, mint a direkt levezetés.

Térjünk vissza ezek után azokhoz a következtetésekhez, amelyeket a matematika-történet az indirekt bizonyítás vizsgálatából levonhat. Az a körülmény, hogy a pythagoreusok már az i. e. 5. században sűrűn alkalmazták az indirekt bizonyítást, arra mutat, hogy jól kellett már ismerniök a logikát. Tudatosan alkalmazott logika nélkül nem is képzelhető el deduktív matematika, hiszen a matematikai bizonyítás nem is egyéb, mint éppen a logika alkalmazása matematikai természetű állításokra. A kérdés csak az: honnan származik ez a logika? A pythagoreusok teremtették-e meg a logikát, miközben matematikával foglalkoztak, vagy készen vették-e át a logikát és alkalmazták a matematikára — megteremtvén ezzel a deduktív tudományt? — Vizsgáljuk meg közelebbről mind a két lehetőséget.

Föltéve, hogy a pythagoreusok maguk teremtették meg a logikát, miközben behatóan foglalkoztak a régebbi empirikus eredetű matematikai ismeretekkel, az a kérdés merül fel bennünk: vajon mi vezette őket ebben a különös szellemi tevékenységben? A dolgozat megelőző fejezeteiben láttuk már, hogy gyakorlati céljaik ezzel nem voltak. Marad az a másik lehetőség, hogy pusztán intellektuális jellegű érdeklődés vezette őket; tehát nem annyira a matematikai ismeretek maguk, a nyers anyag érdekelte őket, mint inkább az, amit ezen az anyagon

kipróbáltak, azaz a logika. De ha ez így van, akkor miért született volna meg mégis a logika a matematikai jellegű vizsgálódásból? — Erre a kérdésre egyáltalán nem tudunk választ adni. Ha tehát csakugyan a pythagoreusok teremtették volna meg a logikát a matematikából, akkor rejtély az: hogyan és miért történt ez.

Ha viszont megvizsgáljuk most a másik lehetőséget, azt ti., hogy nem a pythagoreusok teremtették meg a logikát, hanem készen vették át és csak alkalmazták ezt saját speciális területükre, a régebbi matematika empirikus jellegű ismereteire, akkor egyszerre új, történeti perspektíva tárul föl előttünk. Mindjárt hivatkozhatunk ugyanis azokra az eleai filozófusokra, akik éppen az i. e. 6. század végén és az 5. elején Dél-Itáliában nem messze a pythagoreusok hazájától működtek. — Túlságosan messzire vezetne, ha ebben az összefüggésben részletesen ki akarnánk térni arra, hogyan teremtették meg az eleaták a logikát.[80] Inkább csak utaljunk röviden arra, hogy a pythagoreus matematika legjellegzetesebb vonásai az eleai filozófiából származnak.

Kezdjük talán azzal, hogy magának az indirekt bizonyításnak legrégibb görög példáját Parmenidés tanítóköltemányében találjuk.[81] Parmenidés az, aki tudomásunk szerint legelőször alkalmazta a »hármas útnak« azt a bizonyítási formáját, amelyet Euklidés VII 31. tétele kapcsán fejtegettünk. Parmenidésnél azonban ez a hármas út még a következő, jóval egyszerűbb formában szerepel: 1. »a létező van«, 2. »a létező nincs«, 3. »a létező van is, meg nincs is« (tertium exclusum). Parmenidés volt — legalábbis az európai gondolkozás történetében — legrégibb képviselője annak a tételnek, hogy az igazság egyetlen kritériuma az ellentmondásmentesség. Dehát kimutatható-e valamely állítás ellentmondásmentessége, ez a negatívum, és hogyan? — Természetesen csak indirekt úton olymódon, hogy tulajdonképpen nem is az adott állítás ellentmondásmentességét, hanem az állítással ellenkező másik állítás ellentmondásosságát mutatjuk ki. A bizonyítás elsődleges logikai formája tehát a cáfolat; megcáfoljuk a tételünkkel ellenkező tételt azáltal, hogy kimutatjuk benne az ellentmondást. Ez volt

[80] Vö. Acta Antiqua II 17—62 és 243—289.

[81] Vö. *O. Gigon*, Der Ursprung der griechischen Philosophie. Basel 1945 251. lap. „die These wird (bei Parmenides) durch Widerlegung des Gegenteils bewiesen."

Parmenidés és az eleaták módszere; nem bizonyítottak, hanem cáfolták a tételeikkel ellenkező nézeteket, kimutatván, hogy ezek ellentmondanak önmaguknak.

Ha csakugyan az eleatáktól származik a pythagoreusok által alkalmazott logika, akkor egyszerre érthető az az alapvető változás is, amely a matematikában bekövetkezett. — Hangsúlyoztuk már, hogy a pythagoreusok nem elégedtek meg az empirikus, szemléletes evidenciával; még a legnyilvánvalóbb tényeket is »deduktív« úton akarták bebizonyítani, sőt szinte ellenségei voltak a gyakorlatnak, a praxisnak. Mindez aligha érthető abban az esetben, ha a logika a praktikus matematikai ismeretekből származik. Sőt szinte elképesztő az, hogy úgyszólván hallani sem akarnak a gyakorlatról és a tapasztalatról éppen olyan ismeretek esetében, amelyek a tapasztalatból származnak, és amelyeket a gyakorlat használ föl. — De mindez egyszerre érthető lesz akkor, ha meggondoljuk, hogy ez a matematikában végbement változás tulajdonképpen az eleai filozófia öröksége. Az eleaták ugyanis elvetették az érzékszerveink által közvetített megismerést, mert tisztán spekulatív úton rájöttek az érzéki tapasztalat belső ellentmondásosságára. Azt tartották, hogy érzékszerveink félrevezetnek bennünket, mert valóságnak tüntetik föl a »mozgást«, a »változást«, a »keletkezést« és az »elmúlást«, holott ezekben mind benne rejlik a *»lét* és *nemlét«* ellentmondása. Ezért hirdette Parmenidés az új megismerési programot: »ne bízd magadat a sokat-tapasztalt megszokásra, látásodra, hallásodra és nyelvedre; *értelmeddel* döntsd el a sokat vitatott kérdést, amelyet eléd tárok!« (Diels fr. 1, 33. kk.) Az 5. századi pythagoreusok ezekhez a szavakhoz tartották magukat, ezért fordultak el a szemléletességtől és a tapasztalattól, és ezért lett számukra az ellentmondásmentesség az igaz állítás egyetlen kritériuma. — Az eleai logikának és módszernek ez az átvétele, illetőleg alkalmazása az addig csak empirikus jellegű matematikai ismeretekre egyszerre rendkívül termékenynek is bizonyult. Indirekt úton az ellentmondásmentesség elvének az érvényesítésével egyszerre föl lehetett fedezni egy olyan területet is, amely a szemlélet és az érzékszervek számára teljességgel hozzáférhetetlen. Ki lehetett mutatni pl., hogy a négyzet átlója inkommenzurábilis a négyzet oldalával, mert ha kommenzurábilis lenne, akkor ez azt jelentené, hogy »ugyanaz a szám páros *és* páratlan egyszerre«. Az eleai logika alkalmazása váratlan, új

perspektívát tárt föl a matematika előtt, a matematika viszont ugyanakkor *igazolta* is ezt a logikát, mert kiderült, hogy az ellentmondásmentesség elvének az érvényesítése csakugyan magasabbfokú megismerést közvetíthet, mint amilyennek közvetítésére érzékszerveink képesek.

*

A matematika a görögség előtti korban csak tapasztalati, praktikus ismeretek gyűjteménye volt. Azáltal, hogy az első pythagoreusok a 6. század végén vagy legkésőbb az 5. elején alkalmazták ezekre a gyakorlati ismeretekre az eleaták logikus módszerét, meglepő változást készítettek elő. A matematika azzá lett, amit ma ezen a néven értünk: deduktív tudománnyá. Ugyanakkor azonban az eleaták spekulatív logikája is egy olyan területen nyert alkalmazást, amely lényegének legjobban megfelelt. Ettől kezdve nemcsak a logika segítette elő a deduktív tudomány további fejlődését, hanem a matematika is visszahatott a logika fejlődésére.

КАК СТАЛА МАТЕМАТИКА ДЕДУКТИВНОЙ НАУКОЙ

А. Сабо

WIE IST DIE MATHEMATIK ZU EINER DEDUKTIVEN WISSENSCHAFT GEWORDEN?

von A. Szabó

(s. Acta Antiqua Ac. Sci. Hung. T. IV, (1956) 109—152,)

A lánctörtek egy geometriai interpretációja és alkalmazásai

T. Sós Vera

1. Huygens a naprendszer egy mechanikai modelljének megkonstruálásakor a következő problémához jutott: olyan fogaskerekeket kellett szerkesztenie, amelyek fokszámainak aránya megegyezik a reprezentált bolygók keringési idejének hányadosával. Mivel a fogaskerekek száma tulságosan nagy nem lehetett, a következő approximációs kérdés állott elő:

Előírt α pozitív valós számhoz és N pozitív egészhez meghatározandók a p, q pozitív egészek,[1] *hogy $q \leq N$ megkötés mellett* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ *a lehető legkisebb legyen.*

Ez a kérdés tekinthető a diophantikus approximáció elméletében a kiindulási problémának. A diophantikus approximáció fejlődése azonban arra vezetett, hogy az előbbi probléma megoldása helyett azon q egész számok lettek meghatározva és karakterizálva, amelyekre adott α és N mellett, a $q \leqq N$ megkötés esetén $|q\alpha - p|$ a lehető legkisebb.

Tudva azt, hogy $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ minden irracionális α számra végtelen sok p, q egésszel $\frac{1}{q^2}$ rendben válik kicsivé — és hogy ugyanez $\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$-re ($\varepsilon > 0$) már nem áll fenn; az előbbi approximációs kérdéseken túl felmerül a $q\,|q\alpha - p|$ kifejezést minimizáló $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ egészek meghatározása és ezek karakterizálása is.

[1] A következőkben mindig p, q, N pozitív egész számot, α pozitív valós számot jelöl.

Így egy irracionális α szám racionálissal való approximálásának fenti értelemben a következő három formája lép fel:

$$\text{A)} \quad \min_{0<q\leqq N} \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

$$\text{B)} \quad \min_{0<q\leqq N} |q\alpha - p|$$

$$\text{C)} \quad \min_{0<q\leqq N} q\,|q\alpha - p|$$

illetve a megfelelő minimizáló q számok meghatározása.

A B) probléma megoldását kiadják a lánctörtelmélet klasszikus alaptételei. A lánctörtelmélet leggyakoribb felépítési módja a következő: az α szám reguláris lánctörtkifejtésének [2] értelmezése után az ebből nyerhető lánctörtnevezőkre [2] kimutatható, hogy az α számot B) alatti értelemben legjobban approximálják, majd ezeknek a lánctörtkifejtésből eredőleg további tulajdonságai határozhatók meg. Ennél természetesebb felépítés újabban W. J. LeVeque [1] [3] és W. S. Cassels [2] könyveiben található. E két felépítés eltérő, de közös abban a lényegben, hogy mindkettő az α számot B) alatti értelemben legjobban approximáló $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ számokból indul ki. A $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ számok e karakterizálásából kiindulva határozzák meg ezek további tulajdonságait és a lánctörtnevezőkkel való azonosságukat.

[2] Egy α szám reguláris lánctörtkifejtése ennek

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots} + \cfrac{1}{a_k + \cdots}}$$

alakú előállítása, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ pozitív egészek. A

$$\frac{P_k}{Q_k} = \cfrac{1}{a_1 + \cdots \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}$$

részlettörtek α közelítőtörtjei, az ezek által meghatározott $Q_1, \ldots Q_k, \ldots$ számok α lánctörtnevezői. α melléktörtjei a $\dfrac{P_{k-1} + \nu P_k}{Q_{k-1} + \nu Q_k}$ $(\nu = 1, \ldots, a_k - 1)$ számok, mellléknevezői a $Q_{k-1} + \nu Q_k$ $(\nu = 1, 2, \ldots, a_k - 1)$ számok.

[3] A nevek után [ ]-ban álló számok a dolgozat végén levő irodalomjegyzékre utalnak.

E dolgozat 2. fejezetében megadjuk a lánctörtnevezőknek egy, az előzőektől eltérő, geometriai szemléleten alapuló értelmezését,[4] ahol ugyancsak a B) értelemben való legjobban approximáló $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ számok egy interpretálásából kiindulva adjuk meg ezek további karakterizálását és bizonyítjuk be a lánctörtnevezőkkel való azonosságukat. Ezen felépítés abban is eltér az előzőektől, hogy itt kiindulásként tulajdonképpen nemcsak a lánctörtnevezők, hanem az ún. mellléknevezők[2] is szerepelnek. Hogy a mellléknevezőknek is — a lánctörtnevezők mellett — lényeges szerepük van, azt éppen az A) probléma megoldása mutatja. A lánctörteknek ezen felépítése több más szempontból is hasznosnak mutatkozik.[5]

Az A) problémát illetően, annak ellenére, hogy történetileg is ez a kiinduló kérdés, tudomásunk szerint ennek teljes megoldása csak [9]-ben szerepel.

A III. tételben bebizonyítjuk Perron eredményét. A bizonyításban felhasználjuk a 2. fejezet eredményeit, ill. egy abból következő tételt, amely lényegében a következőt mondja ki: Jelentse (x) az x valós szám törtrészét. Az $(\alpha), (2\alpha), \ldots, (N\alpha)$ számok nagyságszerinti sorrendje ezek legkisebb és legnagyobbikának multiplumából, azaz a $\min_{0<l\leqq N} (l\alpha) = (l_1\alpha)$, $\max_{0<l\leqq N} (l\alpha) = (l_N\alpha)$ jelöléssel l_1 és l_N ismeretéből explicite megadható.

A 4. fejezetben a C. kérdésre adunk választ, amely a lánctörtelmélet ismert tételeiből egyszerűen következik; ezt azonban a teljesség kedvéért itt bizonyítjuk.

2. Legyen a következőkben mindig az egyszerűség kedvéért $0 < \alpha < 1$ és α irracionális. Az egységkerületű K kör kerületére egy 0 kezdőpontból kiindulva pozitív irányban felmérjük az α hosszúságú ívet 1-szer, 2-szer, ..., n-szer, ... Az így kapott ívek végpontjait α-, 2α-, ..., $n\alpha$-, ... pontnak nevezzük.

1. MEGJEGYZÉS: Gyakran fogjuk használni az α-, 2α-, ..., $n\alpha$-, ... pontrendszernek azt a tulajdonságát, hogy az $m\alpha$ és $n\alpha$-pontok $(m > n)$ közötti, K körön vett irányított távolság megegyezik az $(m-n)\alpha$- és 0-pontok közötti irányított távolsággal. Másszóval az $m\alpha$- és $n\alpha$-pontok „beleforgathatók" az $(m-n)\alpha$- és 0-pontokba.

[4] Ez vázolva van már [3] és [4]-ben, amennyiben ezekben erre támaszkodtunk.

[5] Így például a lánctörtnevezőknek és mellléknevezőknek itt következő értelmezése kiterjeszthető a diophantikus approximáció inhomogén esetére vonatkozólag, amelynek segítségével az eddigi eredmények egységes tárgyalásán túl egyes új eredmények érhetők el. [3], [4], [5], [6]

DEFINÍCIÓ. „0-val szomszédosnak“ nevezünk egy $s\alpha$-pontot, ill. a megfelelő s multiplumot, ha a K kör kerületén a 0 és $s\alpha$-pontok által határolt két zárt körív egyikébe nem esik $n\alpha$-pont $n < s$ esetén.

A következőkben az alábbi jelöléseket fogjuk használni:

Az egymásután fellépő „0-val szomszédos“ multiplumokat

$$1 = s_1 < s_2 < \cdots < s_\nu < \cdots \tag{2.1}$$

-vel jelöljük. A megfelelő *irányított* „üres“ íveket — amelybe nem esik $n < s_\nu$ esetén $n\alpha$-pont, — Δ_ν-vel jelöljük, ahol Δ_ν pozitív ill. negatív aszerint, hogy a 0 pontból pozitív - ill. negatív irányban indul ki. A következőkben helyenként az $s_\nu\alpha$-pontot a Δ_ν ív végpontjának nevezzük.

A Δ_ν „üres“ ív *előjeles* hosszát δ_ν-vel jelöljük. δ_ν előjele Δ_ν előjelével azonos.

A „0-val szomszédos“ $s_\nu\alpha$-pontok közül azokat, amelyekre $|\delta_\nu| < |\delta_l|$ $l = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ esetén, „közelítő“ pontnak, a megfelelő s_ν multiplumot „közelítő“ multiplumnak nevezzük. A „0-val szomszédos“ s_ν multiplumok ezen részsorozatára a

$$q_1 \equiv s_{\nu_1}, q_2 \equiv s_{\nu_2}, \ldots, q_k \equiv s_{\nu_k}, \ldots$$

jelölést, a $\delta_1, \ldots, \delta_\nu, \ldots$ sorozat megfelelő részsorozatára a

$$d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots$$

jelölést használjuk.[6] A későbbiek miatt célszerű még $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ esetén a $q_1 = q_2 = 1$ értelmezés. A $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ multiplumok értelmezéséből következik, hogy

$$|d_1| \leqq |d_2| < \cdots < |d_k| < \cdots \tag{2.2}$$

Megjegyezzük, hogy minden fix q esetén

$$\min_p |q\alpha - p| = \min |(q\alpha), 1 - (q\alpha)| \tag{2.3}$$

és e minimum $(q\alpha) \leqq \frac{1}{2}$ esetén $p = [q\alpha]$-val, $(q\alpha) \geqq \frac{1}{2}$ esetén $p = [q\alpha] + 1$-el éretik el. $q = q_k$ esetén ezen minimizáló p egész számot p_k-val jelöljük. $k > 1$ esetén nyilvánvalóan

$$|d_k| = |q_k\alpha - p_k| \tag{2.4}$$

és $s_\nu > q_2$ esetén

$$|\delta_\nu| = \min_p |s_\nu\alpha - p| \tag{2.5}$$

[6] Irracionális α esetén, mivel, mint ismeretes, az $n\alpha$-pontok mindenütt sűrűn vannak, a $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ sorozat végtelen.

Tetszőleges q esetén a

$$t_q \equiv \min_p |q\alpha - p| \tag{2.6}$$

jelölést használjuk.

A „0-val szomszédos" s_ν multiplumok és az ezek közül kiválasztott q_k „közeli" multiplumok értelmezéséből következik, hogy a $q\alpha$-pontok közül, $q < q_k$ esetén a $q_k\alpha$ pont van a 0 ponthoz legközelebb. (A többi $s_\nu\alpha$-pont a 0 ponthoz egyik ill. másik oldalról legközelebbi pontok az előbbi értelemben.) Ez egyúttal azt is jelenti, hogy *az így értelmezett* $q_1, \ldots, q_\nu$ *multiplumok approximálják a a legjobban az* α *számot a* B) *alatti értelemben.*

A fenti módon értelmezett s_ν „0-val szomszédos" és a legjobban approximáló q_k „közeli" multiplumok karakterizálását és lánctörtnevezőkkel, ill. melléknevezőkkel való azonosságát nyerjük a következő tételek alapján.

I. LEMMA. *Legyenek az* α-, 2α-, $\ldots$, $s_\nu\alpha$-*pontok közül a 0-ponthoz pozitív, ill. negatív irányból legközelebbi pontok (0 pontot közrefogó pontok) az* $s_\nu\alpha$ *és* $s_{\nu-l}\alpha$ *pontok (l pozitív egész). Ekkor a következő rekurzív formulák állnak fenn:*

$$s_{\nu+1} = s_\nu + s_{\nu-l} \tag{2.7}$$

$$\delta_{\nu+1} = \delta_\nu + \delta_{\nu-l} \tag{2.8}$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $q\alpha$ egy, a $\Delta_\nu + \Delta_{\nu-l}$ ívbe eső pont. Az „0-val szomszédos" multiplumok értelmezéséből következőleg $q > s_\nu$. Mivel a $\Delta_\nu + \Delta_{\nu-l}$ ív hossza $|\delta_\nu| + |\delta_{\nu-l}|$, a következő két eset valamelyike áll fenn:

a) az $q\alpha$-pont és $s_\nu\alpha$-pont körön való távolsága — a $\Delta_\nu + \Delta_{\nu-l}$ íven belül tekintve — nem nagyobb, mint $|\delta_{\nu-l}|$

b) az $q\alpha$-pont és $s_{\nu-l}\alpha$-pont körön való távolsága — előbbi értelemben — kisebb, mint $|\delta_\nu|$.

Az a) esetben, mivel a $q\alpha$ és $s_\nu\alpha$ pontok közötti irányított távolság az 1. megjegyzés értelmében ugyanaz, mint az $(q - s_\nu)\alpha$- és 0-pontok közötti irányított távolság, így, mivel ez a távolság nem nagyobb, mint $|\delta_{\nu-l}|$, az $(q - s_\nu)\alpha$-pont a $\Delta_{\nu-l}$ ívben van. Ezért, $s_{\nu-l}$ definíciójából következőleg

$$q - s_\nu \geqq s_{\nu-l}$$

$$q \geqq s_\nu + s_{\nu-l}$$

A b) esetben hasonlóan nyerhető, hogy

$$q > s_\nu + s_{\nu-l}$$

Tehát a legkisebb q multiplumú pont, amely a $\Delta_\nu + \Delta_{\nu-l}$ ívbe eshet,

az $(s_\nu + s_{\nu-1})\alpha$-pont. Az 1. megjegyzés miatt ez valóban ezen ívbe esik, ami a (2. 7) formulát igazolja. Ugyancsak az 1. megjegyzés miatt ez maga után vonja a (2. 8) formula teljesülését.

Az I. lemma jelentésére és következményére vonatkozólag a következőket jegyezzük meg.

2. MEGJEGYZÉS. Az $s_{\nu+1}\alpha$-pont az 0-pontból kiinduló két „üres" ív, Δ_ν és $\Delta_{\nu-1}$ közül a nagyobbik ívbe kerül, mégpedig úgy nyerhető, hogy ezen abszolút értékben nagyobb ív végpontjából az abszolút értékben kisebb ívet visszamérjük. Ebből következik, hogy az $s_{\nu+1}\alpha$-pont akkor és csak akkor van az $\Delta_{\nu-1}$ ívben, ha $|\delta_\nu| < |\delta_{\nu-1}|$, azaz ha $0 < j < \nu$ esetén $|\delta_\nu| < |\delta_j|$. Ezért a q_k közelítő multiplumok értelmezése equivalens a következővel:

egy 0-val szomszédos s_ν multiplum akkor közelítő q_k multiplum, ha $\delta_\nu \cdot \delta_{\nu+1} < 0$[7].

I. TÉTEL *Az α számhoz tartozó q_k „közeli" multiplumok megegyeznek α lánctörtnevezőivel, a többi „0-val szomszédos" s_ν multiplum megegyezik α melléknevezőivel. Az $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ lánctörtjegyek*[2] *azonosak az*

$$\left[\left|\frac{d_{k-1}}{d_k}\right|\right] = a'_k \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{2. 9}$$

módon értelmezett $a'_1, \ldots, a'_k$, számokkal, ahol értelmezés szerint $d_0 = -1$.

BIZONYÍTÁS. A tétel állításait azáltal bizonyítjuk be, hogy igazoljuk az

$$q_{k+1} = q_{k-1} + a_k q_k$$

továbbá $q_{k-1} < s_\nu < q_k$ esetén

$$s_\nu = q_{k-1} + r q_k \qquad 0 < r < a_k$$

rekurzív formulák fennállását.

2. MEGJEGYZÉSből következik, hogy az α-, 2α-, ..., $q_k\alpha$-pontok közül nem esik pont a 0 és $q_{k-1}\alpha$-pontok közé, a $\Delta_{\nu_{k-1}}$ ívbe. Ezért, tekintetbe véve I. lemmát, a legkisebb multiplumú pont, amely ebbe az ívbe esik, az $s_{\nu_k+1}\alpha$-pont;

$$s_{\nu_k+1} = q_{k-1} + q_k$$
$$\delta_{\nu_k+1} = d_{k-1} + d_k$$
$$|\delta_{\nu_k+1}| = |d_{k-1}| - |d_k|$$

[7] Azaz ha az $s_{\nu+1}\alpha$-pont és az $s_\nu\alpha$-pont a 0 ponttal átellenes oldalról szomszédosak.

a'_k-nek (2. 9) alatti értelmezése miatt

(2. 10) $$|d_{k-1}| - r|d_k| > |d_k|, \quad \text{ha} \quad 0 < r < a'_k$$

(2. 11) $$|d_{k-1}| - a'_k|d_k| < |d_k|.$$

Ezért I. lemma szukcesszív alkalmazásával kapjuk, hogy

(2. 12) $$s_{\nu_k+r} = q_{k-1} + rq_k$$

(2. 13) $$|\delta_{\nu_k+r}| = |d_{k-1}| - r|d_k| \qquad 0 < r \leqq a'_k$$
$$|\delta_{\nu_k+r}| = |d_{k+1}| - r|d_k|.$$

(2. 10) miatt a $s_{\nu_k+r}\alpha$-pontok $0 < r \leqq a'_k$ mellett még mind az $\Delta_{\nu_{k-1}}$ ívben vannak, (2. 11) miatt az $s_{\nu_k+a'_k+1}\alpha$-pont már a Δ_{ν_k} ívben van, és így

(2. 14) $$q_{k+1} = s_{\nu_k+a'_k} = q_{k-1} + a'_k q_k$$

(2. 15) $$d_{k+1} = \delta_{\nu_k+a'_k} = d_{k-1} + a'_k d_k$$

(2. 16) $$|d_{k+1}| = |d_{k-1}| - a'_k|d_k|.$$ [8]

Az (2. 16) rekurzív formulákból és a'_k (2. 9) alatti értelmezéséből nyilvánvalóan adódik ezeknek az a_k lánctörtjegyekkel való azonossága.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

3. MEGJEGYZÉS. A I. tétel bizonyításából következik, hogy az I. lemmában értelmezett, 0 pontot „közrefogó" s_ν és $s_{\nu-1}$ multiplumok mindig a következő alakúak:

$$s_{\nu-l} = q_k$$
$$s_\nu = q_{k-1} + rq_k \qquad 0 < r \leqq a_k,$$

alkalmas r és k-val. Ugyancsak következik a bizonyításból, hogy a $d_1, \ldots, d_k, \ldots$ sorozat váltakozó előjelű.

3. II. TÉTEL. *Az $\alpha, 2\alpha, \ldots, N\alpha$ pontok közül a 0 pontot I. lemma alatti értelemben „közrefogó" két pont legyen a $q_k\alpha$- és $(q_{k-1} + rq_k)\alpha$-pont $(1 \leqq r \leqq a_k)$, ahol tehát $q_{k-1} + rq_k \leqq N < q_{k-1} + (r+1)q_k$. A 0 pontból d_k irányába haladva a körön egymás után következő multiplumok legyenek*

$$k_1 = q_k, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N = q_{k-1} + rq_k.$$

k_1 és k_N az $1, 2, \ldots, N$ számok $k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N$ permutációját

[8] (2. 12)—(2. 16)-ból egyszerűen kimutatható a $P_{k+1} = P_{k-1} + a_k P_k$ rekurzív formulák fennállása.

egyértelműen meghatározzák, éspedig:

a) $k_{l+1} = k_l$ *ha* $0 \leqq k_l \leqq (N - q_k)$

b) $k_{l+1} = k_l - (q_{k-1} + rq_k - q_k)$ *ha* $N - q_k < k_l < q_{k-1} + rq_k$

c) $k_{l+1} = k_l - (q_{k-1} + rq_k)$ *ha* $q_{k-1} + rq_k \leqq k_l \leqq N$.[9]

BIZONYÍTÁS. Külön-külön bizonyítjuk be az a), *b*) és c) eseteket, a következő állítás bizonyítása útján: Ha egy $q\alpha$-pont $k_l\alpha$- és az állítólagos $k_{l+1}\alpha$-pont közé esik, akkor szükségképpen $q > N$.

a) külön nézzük az $q < k_l$ és külön az $q > k_l$ esetet. Ha $q > k_l$ akkor az 1. megjegyzés értelmében az

$$k_l\alpha\text{-},\ q\alpha\text{-},\ (k_l + q_k)\alpha\text{-}$$

pontok beleforgathatók az

$$0,\ (q - k_l)\alpha\text{-},\ q_k\alpha\text{-}$$

pontokba. Ezért, q_k definíciójából következőleg

$$q - k_l > N,$$

azaz

$$q > N.$$

A $q < q_k$ esetben, alkalmazva az 1. megjegyzést, az

$$(k_l + q_k)\alpha\text{-},\ q\alpha$$

pontok beleforgathatók az

$$(k_l + q_k - q)\alpha\text{-},\ 0\text{-}$$

pontokba, és ezért q_k definíciójából következik, hogy

$$k_l + q_k - q > N$$

és így az is, hogy $k_l + q_k > N$. Ez azonban k_l a) alatti értékével van ellentmondásban.

b) 1. megjegyzés miatt az

$$k_l\alpha\text{-},\ q\alpha\text{-},\ (k_l + q_k - (q_{k-1} + rq_k))\alpha\text{-}$$

pontok beleforgathatók az

$$(q_{k-1} + rq_k)\alpha\text{-},\ (q + (q_{k-1} + rq_k) - k_l)\alpha\text{-},\ q_k\alpha\text{-}$$

pontokba. $q_{k-1} + rq_k \geqq k_l$ miatt $q + q_{k-1} + rq_k - k_l \geqq 0$ (2. 7) miatt

$$q + (q_{k-1} + rq_k) - k_l \geqq (q_{k-1} + rq_k) + q_k.$$

Ebből k_l b) alatti értéke miatt következik, hogy

$$q > N.$$

[9] E tételre egy második bizonyítást adott Surányi János, l. [8].

c) Ismét külön nézzük az $q > k_l - (q_{k-1} + rq_k)$ és $q < k_l - (q_{k-1} + rq_k)$ eseteket. Az első esetben, 1. megjegyzés miatt a

$$k_l\alpha\text{-},\quad q\alpha\text{-},\quad (k_l - (q_{k-1} + rq_k))\alpha\text{-}$$

pontok beleforgathatók az

$$(q_{k-1} + rq_k)\alpha\text{-},\ (q - k_l + q_{k-1} + rq_k)\alpha\text{-}, 0$$

pontokba. Így $q_{k-1} + rq_k$ definíciójából következik, hogy

$$q - k_l + q_{k-1} + rq > N$$

Ezért $k_l \geqq q_{k-1} + rq_k$ miatt ebben az esetben $q > N$. A $q < k_l - (q_{k-1} + rq_k)$ esetben, mivel a

$$k_l\alpha\text{-},\ q\alpha\text{-}$$

pontok beleforgathatók a

$$(k_l - q)\alpha\text{-},\ 0\text{-}$$

pontokba, ezért a $(k_l - q)\alpha$ pont az $q_{k-1} + rq_k$ és 0 pontok közé esik, és így $q_{k-1} + rq_k$ értelmezéséből következik, hogy

$$k_l - q > N$$

ami ellentmond annak, hogy $k_l \leq N$.

Ezzel a II. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy e tételből következik a többek által bizonyított[10] H. Steinhaustól eredő következő meglepő sejtés:

A K körön az $0, \alpha\text{-}, 2\alpha\text{-}, \ldots, N\alpha$-pontok által meghatározott $N+1$ diszjunkt ívek hossza legfeljebb három különböző értéket vehet fel (minden α és N esetén).

a), b) és c)-ből ugyanis, 1. megjegyzés értelmében következik — e három különböző ívhossz karakterizálását is megadva —, hogy a szereplő $N+1$ diszjunkt ív mindegyikének hossza a

$$|d_k|,\ |d_{k-1}| - r|d_k|,\ |d_{k-1}| - (r-1)|d_k|$$

értékek valamelyikével egyezik meg.

Látható, hogy $N = s_{\nu+1} - 1 = q_{k-1} + (r+1)q_k - 1$ esetén nincs a b) esetnek megfelelő k_l szám, azaz minden ν-re,

a $0, \alpha\text{-}, 2\alpha\text{-}, \ldots, (s_{\nu+1} - 1)\alpha$ *pontok által keletkezett diszjunkt ív között csak két különböző hosszúságú ív van;* $|d_k|$ *és* $|d_{k-1}| - r|d_k|$ *hosszúságú.*

Ebben az esetben a két különböző ívhosszúság egymásutánja, a $k_1, k_2, \ldots, k_N$ permutáció egyszerűbben felírható explicite.

[10] E sejtést bebizonyították még Erdős P., Hajós Gy., N. Swieczkowsky, Surányi J. [8] és Szüsz P.

Ebből annyit, amennyire a III. tételben szükségünk lesz, a következőkben adjuk meg:

Az $N = s_{r+1} - 1 = q_{k+1} + (r+1)q_k - 1$ esetben a szereplő a) és c) esetek a következőképpen alakulnak:

a) $k_{l+1} = k_l + q_k$, ha $0 \leqq k_l < q_{k-1} + rq_k$

c) $k_{l+1} = k_l - (q_{k-1} + rq_k)$,

ha $q_{k-1} + rq_k \leqq k_l \leqq q_{k-1} + (r+1)q_k - 1$.

$k_1 = q_k < q_{k-1} + rq_k$ miatt $k_2 = 2q_k$ és hasonlóan

$$k_i = q_{k-1} + iq \quad \text{ha} \quad 0 < i \leqq r+1.$$

$k_{r+1} = (r+1)q_k > q_{k-1} + rq_k$ miatt

$$k_{r+2} = (r+1)q_k - (q_{k-1} + rq_k) = q_k - q_{k-1},$$

majd ismét $k_{r+2} < q_{k-1} + rq_k$ miatt $k_{r+3} = k_{r+2} + q_k = 2q_k - q_{k-1}$, s ez a meghatározás hasonló módon folytatható. A 0 pontból sig $n\, d_k$ irányban haladva tehát az egymásután következő pontok a

(3. 1) $0\text{-}, q_k\alpha\text{-}, \ldots, ((r+1)q_k)\alpha\text{-}, (q_k - q_{k-1})\alpha\text{-}, (2q_k - q_{k-1})\alpha\text{-}, \ldots,$

pontok.

Ugyancsak egyszerűen meghatározható a 0 pontból sig $n\,(-d_k)$ irányban haladva az egymásután fellépő $k_N, k_{N-1}, \ldots$ multiplumú pontok. Ekkor a) vagy c)-ből k_{l+1} értékéből kiindulva kell k_l értékét meghatározni. Így pl.

$$k_N \equiv k_{s_{r+1}-1} = q_{k-1} + rq_k;$$

$$k_{s_{r+1}-1} - q_k = q_{k-1} + (r-1)q_k < q_{k-1} + rq_k$$

miatt

$$k_{s_{r+1}-2} = q_{k-1} + (r-1)q_k$$

és hasonlóan, ha $0 < i \leqq r+1$, akkor

$$k_{s_{r+1}-i} = q_{k-1} + rq_k - (i-1)q_k = q_{k-1} + (r-i+1)q_k.$$

Továbbá,

$$k_{s_{r+1}-(r+1)} - q_k = q_{k-1} - q_k < 0$$

miatt

$$k_{s_{r+1}-(r+2)} = q_{k-1} + (q_{k-1} + rq).$$

A további r pontra ismét

$$k_{s_{r+1}-(r+2+i)} = 2q_{k-1} + (r-i)q_k \qquad \text{ha} \quad 0 < i \leqq r.$$

A szerint, hogy $k_{s_{r+1}-(2r+2)} = 2q_{k-1} < q_k$ ill. $2q_{k-1} > q_k$,

$k_{s_{r+1}-(2r+3)} = 2q_{k-1} + q_{k-1} + rq_k$, ill. $k_{s_{r+1}-(2r+3)} = 2q_{k-1} - q_k$.

Tehát az 0 pontból sig $n\,(-d_k)$ irányban haladva, az egymásután fellépő pontok a

(3. 2) $\quad 0\text{-}, (q_{k-1}+rq_k)\alpha\text{-}, (q_{k-1}+(r-1)q_k)\alpha\text{-}, \ldots, q_{k-1}\alpha\text{-},$

$(2q_{k-1}+rq_k)\alpha\text{-}, \ldots, 2q_{k-1}\alpha\text{-}, (3q_{k-1}+rq_k)\alpha\text{-}, (3q_{k-1}+(r-1)q_k)\alpha\text{-}, \ldots$

pontok, amennyiben $2q_{k-1} < q_k$ és hasonlóan $2q_{k-1} > q_k$ esetén a

(3. 3) $\quad 0\text{-}, (q_{k-1}+rq_k)\alpha\text{-}, (q_{k-1}+(r-1)q_k)\alpha\text{-}, \ldots, q_{k-1}\alpha\text{-},$

$(2q_{k-1}+rq_k)\alpha\text{-}, \ldots, 2q_{k-1}\alpha\text{-}, (2q_{k-1}-q_k)\alpha\text{-}, (3q_{k-1}+(r-1)q_k)\alpha\text{-}, \ldots$

pontok. Orientáció végett, bár erre nem lesz a későbbiekben szükség, megjegyezzük, hogy az $0, \alpha\text{-}, 2\alpha\text{-}, \ldots, (s_{\nu+1}-1)\alpha$ pontok által létrejött diszjunkt ívek hosszának az eloszlása tehát a következő jellegű:

r-szer ill. $(r+1)$-szer egymásután szerepel $|d_k|$ hosszúságú ív, majd egy $|d_{k-1}|-r|d_k|$ hosszúságú ív, ez után ismét r ill. $(r+1)$-szer egy $|d_k|$ hosszúságú ív, s. i. t.

(Ha $N \neq s_{\nu+1}-1$, akkor is az ívek hosszának egymásutánja hasonló jellegű, mindössze azzal a különbséggel, hogy bizonyos $|d_{k-1}|-r|d_k|$ hosszúságú ívek helyén egy $|d_{k-1}|-(r-1)|d_k|$ hosszúságú ív szerepel.)

III. TÉTEL *Legyen az adott N számhoz k és r értéke*

$$q_{k-1}+rq_k \leqq N < q_{k-1}+(r+1)q_k \qquad 0 < r \leqq a_k$$

által meghatározva. Ezekkel

$$\min_{0<q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| = \left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|, \qquad \text{ha } r \leqq \frac{a_k}{2}+\left|\frac{d_{k-1}}{d_k}\right|-\frac{q_{k-1}}{q_k}$$

$$\min_{0<q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| = \left|\alpha-\frac{p_{k-1}+rp_k}{q_{k-1}+rq_k}\right|, \qquad \text{ha } r > \frac{a_k}{2}+\left|\frac{d_{k+1}}{d_k}\right|-\frac{q_{k-1}}{q_k}.$$ [11]

BIZONYÍTÁS. Legyen $s_\nu \equiv q_{k-1}+rq_k$ és így $s_{\nu+1} \equiv q_{k-1}+(r+1)q_k$. Először bebizonyítjuk, hogy $|\delta_\nu|, |d_k|, t_q$ (2. 4), (2. 5), (2. 6) alatti jelentései mellett

(3. 4) $$\min_{0<q<s_{\nu+1}} \frac{t_q}{q} = \min\left(\frac{|\delta_\nu|}{s_\nu}, \frac{|d_k|}{q_k}\right).$$

[11] Mivel $\left|\frac{d_{k+1}}{d_k}\right| - \frac{q_{k-1}}{q_k}$ nyilván ± 1 közé esik, lényegében az számít, hogy $r < \frac{a_k}{2}$ ill. $r > \frac{a_k}{2}$.

$\frac{t_q}{q}$ értékére (3. 1), (3. 2), (3. 3) alapján a következőképpen lehet alsó becslést kapni. (3. 1) következtében az 0 pontból sig nd_k irányban haladva, az $0, \alpha, 2\alpha, \ldots, (s_{\nu+1}-1)\alpha$ pontok által létrejött, egymásután következő diszjunkt ívek hossza rendre

$$\underbrace{|d_k|, |d_k|, \ldots, |d_k|}_{(r+1)\text{-szer}}, \quad |\delta_\nu|, |d_k|, \ldots$$

és így a $k_1\alpha, k_2\alpha, \ldots$, pontoknak 0 ponttól való „távolságai" $t_{k_1}, t_{k_2}, \ldots$ rendre

(3. 5) $\quad |d_k|, \ldots, (r+1)|d_k|, (r+1)|d_k|+|\delta_\nu|, (r+2)|d_k|+|\delta_\nu|, \ldots$

Hasonlóan (3. 2) és (3. 3)-ból, az 0 ponttól sig $n|-d_k|$ irányban egymásután következő diszjunkt ívek hossza rendre a $2q_{k-1} < q_k$ esetben

$$|\delta_\nu|, \underbrace{|d_k|, \ldots, |d_k|}_{r\text{-szer}}, |\delta_\nu|, \underbrace{|d_k|, \ldots, |d_k|}_{r\text{-szer}}, |\delta_\nu|, |d_k|, \ldots.$$

ill. a $2q_{k-1} > q_k$ esetben

$$|\delta_\nu|, \underbrace{|d_k|, \ldots, |d_k|}_{r\text{-szer}}, |\delta_\nu|, \underbrace{|d_k|, \ldots, |d_k|}_{(r+1)\text{-szer}}, |\delta_\nu|, |d_k|, \ldots.$$

Ebből a megfelelő $k_{s_{\nu+1}-1}, k_{s_{\nu+1}-2}, \ldots$ pontoknak 0 ponttól való „távolsága" rendre

(3. 6) $\quad |\delta_\nu|, |\delta_\nu|+|d_k|, \ldots, |\delta_\nu|+r|d_k|, 2|\delta_\nu|+r|d_k|,$
$2|\delta_\nu|+(r+1)|d_k|, \ldots, 2|\delta_\nu|+2r|d_k|, 3|\delta_\nu|+2r|d_k|,$
$3|\delta_\nu|+(2r+1)|d_k|, \ldots$

ill.

(3. 7) $\quad |\delta_\nu|, |\delta_\nu|+|d_k|, \ldots, |\delta_\nu|+r|d_k|, 2|\delta_\nu|+r|d_k|, \ldots,$
$2|\delta_\nu|+(r+1)|d_k|, \ldots, 2|\delta_\nu|+2r|d_k|, 2|\delta_\nu|+(2r+1)|d_k|, \ldots.$

(3. 5), (3. 6) és (3. 7)-ből következik, hogy az 0 pontból sign d_k ill. sign $(-d_k)$ irányban haladva, az (3. 1) alatti első $r+2$ számú, ill, a (3. 2) ill. (3. 3) alatti első $2r+4$, ill. $2r+3$ számú, „kivételes" pontoktól eltekintve valamennyi $q\alpha$ potra $t_q > (r+2)|d_k|$. Ezért mindenesetre ezen pontokra

$$q \leqq s_{\nu+1}-1 = q_{k-1}+(r+1)q_k-1 < (r+2)q_k$$

miatt

(3. 8) $\quad \frac{t_q}{q} > \frac{(r+2)|d_k|}{(r+2)q_k} = \frac{|d_k|}{q_k}.$

A „kivételes“ (3. 1), (3. 2) és (3. 3) alatti pontok esetében közvetlenül külön-külön bizonyíthatók be a megfelelő egyenlőtlenségek. Így pl.

$$q = q_{k-1} + (r-i)q_k \qquad (0 < i \leqq r)$$

esetén

$$t_q = |\delta_\nu| + i|d_k|$$

és így

$$\frac{t_q}{q} = \frac{|\delta_\nu| + i|d_k|}{q_{k-1} + (r-i)q_k} > \frac{|\delta_\nu|}{q_{k-1} + rq_k} = \frac{|\delta_\nu|}{s_\nu}.$$

Hasonlóan bizonyíthatók be a megfelelő egyenlőtlenségek a többi kivételes pont esetében is. Ezek (3. 8)-al együttesen a (3. 4) egyenlőtlenség érvényességét igazolják.

Ezzel a feladat redukálva van $\min\left(\frac{|\delta_\nu|}{s_\nu}, \frac{|d_k|}{q_k}\right)$ meghatározására. Az (2. 10), (2. 11) rekurzív formulákból

$$\frac{|\delta_\nu|}{s_\nu} = \frac{|d_{k-1}| - r|d_k|}{q_{k-1} + rq_k} = \frac{|d_{k+1}| + (a_k - r)|d_k|}{q_{k-1} + rq_k} =$$

$$= \frac{|d_k|}{q_k} \cdot \frac{a_k - r + \left|\frac{d_{k-1}}{d_k}\right|}{r + \frac{q_{k-1}}{q_k}}$$

Ebből és (3. 4)-ből a tétel állítása következik.

4. A C. alatti kérdésre ad választ a

IV. TÉTEL.

$$\min_{0<q\leqq N} q|q\alpha - p| = q_l|q_l\alpha - p_l|,$$

ahol $0 < q_l \leqq N$. *l értékére további megszorítás, mely minden irracionális α számra érvényes, nem adható meg. Ha k értékét $q_k \leqq N < q_{k+1}$ által határozzuk meg, l értéke — $l \leqq k$ mellett — az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ lánctörtjegyektől függ.*

BIZONYÍTÁS. Határozzuk meg a ν számot minden q pozitív egészre $q_\nu \leqq q < q_{\nu+1}$ által. q_ν értelmezéséből és 2. megjegyzésből t_q és $|d_\nu|$ (2. 4) és (2. 6) alatti jelentése mellett következik, hogy

$$t_q > |d_\nu| \qquad \text{ha } q_\nu < q < q_{\nu+1}.$$

Ebből $q > q_\nu$ miatt méginkább

$$q|q\alpha - p| > q_\nu|q_\nu\alpha - p_\nu|.$$

Ebből viszont következik, hogy

$$\min_{0<q\leqq N} q|q\alpha-p| = \min_{0<q_\nu\leqq N} q_\nu|q_\nu\alpha-p_\nu|$$

Mivel az (2. 12), (2. 13) rekurzív formulákból könnyen kimutathatólag

$$\frac{1}{a_\nu+\frac{1}{a_{\nu+1}}} < q_\nu|q_\nu\alpha-p_\nu| < \frac{1}{a_\nu},$$

$\min_{0<q_\nu\leqq N} q_\nu|q_\nu\alpha-p_\nu|$, ill. l értéke a tétel állításának megfelelően az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ lánctörtjegyektől függ.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] W. J. Leveque: Topics in number theory. Addison-Wesley Publishing Company, INC. 1956.

[2] W. S. Cassels: An introduction to diophantine approximation. Cambr. Tracts. No. 45. (1957).

[3] Vera T. Sós: On diophantine approximation. I. (On a problem of A. Ostrovski). Acta Matematika Hung. Tom. VIII. fasc. 3—4. p. 461—472.

[4] Vera T. Sós: On the distribution mod 1 of the seqence n α. Annales Universitatis Sc. Eötvös Lorand nominatae Sect. Math. 1957. In press.

[5] Vera T. Sós: On the theory of diophantine approximation II. Acta Mathematica Hung. In press.

[6] Vera T. Sós: On a theorem of A. Khintchine. Acta Arithmetica. In press.

[7] A. Khintchine: Kettenbrüche. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig. 1956.

[8] J. Surányi: Über die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl mod 1. Annales Universitatis Sc. Eötvös Lorand nominatae Sect. Math. 1957. In press.

[9] O. Perron: Lehre von der Kettenbrüche. 1954.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ЦЕННЫХ ДРОБЕЙ

Вера Т. Шош

(Резюме)

Работа подробно дает одно геометрическое построение теории ценных дробей, которое было кратко изложено в работе [3]. В настоящей работе оно используется для решения следующей задачи. При данном положительном иррациональном x и натуральном N найти минимум величины $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$, если p и q целые числа и $1\leqq q\leqq N$. Решение дается следующей теоремой III.

Пусть $\dfrac{1}{a_1+}\ \dfrac{1}{a_k+}\cdots$ правильное разложение x в цепную дробь и пусть $\dfrac{p_k}{q_k}$ ее подходящие дроби. Для данного N единственным образом могут быть подобраны такие целы k и p, что

$$q_{k-1}+rq_k \leqq N < q_{k-1}+(r+1)q_k, 0<r\leqq a_k.$$

Тогда

(1) $$\min_{q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| = \left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|, \text{ если } 0<r<\frac{1}{2}a_k+\frac{|q_{k+1}\alpha-p_{k+1}|}{|q_k\alpha-p_k|}-\frac{q_{k-1}}{q_k},$$

и

(2) $$\min_{q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| = \left|\alpha-\frac{p_{k-1}+rp_k}{q_{k-1}+rq_k}\right|, \text{ если } \frac{1}{2}a_k+$$

$$+\frac{|q_{k+1}\alpha-p_{k+1}|}{|q_k\alpha-p_k|}-\frac{q_{k-1}}{q_k}<r\leqq a_k$$

Заметим, что верхняя граница r в (1) имеет вид $\dfrac{1}{2}a_k\pm 1$. Основное орудие доказательства — теорема II., подробное доказательство которой, приведено и в [4] и согласно которой, если $(k_1,\ldots,k_N)$, то перестановка $(1,2,\ldots,N)$, для которой $0<(k_1\alpha)<(k_2\alpha)<\cdots<(k_N\alpha)<1$, то, зная k_1 и k_N, можно в явной форме представить всю перестановку $(k_1,k_2,\ldots,k_N)$.

Теорема IV связана с $\min\limits_{q\leqq N} q^2\left|\alpha-\dfrac{p}{q}\right|$.

ON A GEOMETRICAL THEORY OF CONTINUED FRACTIONS

Vera T. Sós

The paper contains a detailed geometrical approach to the theory of continued fractions sketched in the paper [3] (Theorem I) This is applied to the solution of the problem to determine to any prescribed positive α and positive integer N the minimum of $\left|\alpha-\dfrac{p}{q}\right|$ when p,q are positive integers with $1\leqq q\leqq N$. The result (theorem III.) runs in the usual language of the continued fractions as follows.

Let $\dfrac{1}{a_1+}\ \dfrac{1}{a_2+}\cdots$ the regular continued fraction of α and $\dfrac{p_k}{q_k}$ $(k=1,2,\ldots)$ its convergents. To our given N we determine uniquely the integers k and r by

$$q_{k-1}+rq_k\leqq N<q_{k+1}+(r+1)q_k \qquad 0<r\leqq a_k.$$

Then we have

$$(1)\qquad \min_{q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right| \text{ for } 0<r<\frac{a_k}{a}+\left|\frac{q_{k+1}\alpha-p_{k+1}}{q_k\alpha-p_k}\right|-\frac{q_{k-1}}{q_k}$$

and

$$(2)\qquad \min_{q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\left|\alpha-\frac{p_{k-1}+rp_k}{q_{k-1}+rq_k}\right| \text{ for } \frac{a_k}{2}+$$

$$+\left|\frac{q_{k+1}\alpha-p_{k+1}}{q_k\alpha-p_k}\right|-\frac{q_{k-1}}{q_k}<r\leqq a_k$$

For the sake of orientation we remark thet the upper bound for r in (1) is between $\frac{a_k}{2}+1$. The main tool in the proof is the theorem (theorem II.) of this paper, for which a detailed proof can be found in [4] according which if $(k_1,\ldots,k_N)$ is that permutation of $(1,2,\ldots,N)$ for which $0<(k_1\alpha)<(k_2\alpha)<$ $<\cdots<(k_N\alpha)<1$, then in the knowledge of k_1 and k_N the whole permutation $(k_1,\ldots,k_N)$ can be explicitely determined. Theorem IV. gives the explicite determination of

$$\min_{q\leqq N} q^2\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|.$$

Geőcze Zoárd függvénye mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható

KÁNTOR SÁNDOR (Debrecen)

A valós függvények elméletének modern fejezete akkor kezdődött, amikor WEIERSTRASS munkálkodása nyomán a matematikusok előtt ismertté vált olyan adott intervallumban folytonos függvény, mely az intervallum egy pontjában sem differenciálható. E felfedezés hatalmas jelentőségét az is mutatja, hogy azóta számos ilyen tulajdonságú függvényt készítettek — még a legújabb időkben is.

GEŐCZE ZOÁRD 1905-ben konstruált egy függvényt [1], [2], és kimutatta róla, hogy adott intervallumban folytonos, de képének egyetlen részíve sem rektifikálható.* Felvetődött az a kérdés, hogy GEŐCZE függvénye nem jelent-e újabb példát mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható függvényre? E cikkben bebizonyítjuk, hogy valóban megvan az a tulajdonsága is. A sehol sem differenciálható függvények között így GEŐCZE függvénye igen értékes, mert egyszerűség tekintetében felveszi a versenyt bármelyik rokon konstrukcióval, általános paraméterekkel dolgozva világosan emeli ki a lényeget, és képe nem rektifikálható görbére is egyszerű példa. Ez utóbbi tulajdonság Geőczétől származó vizsgálatát egyszerűsége és a teljesség kedvéért jelentéktelen változásokkal leírjuk.

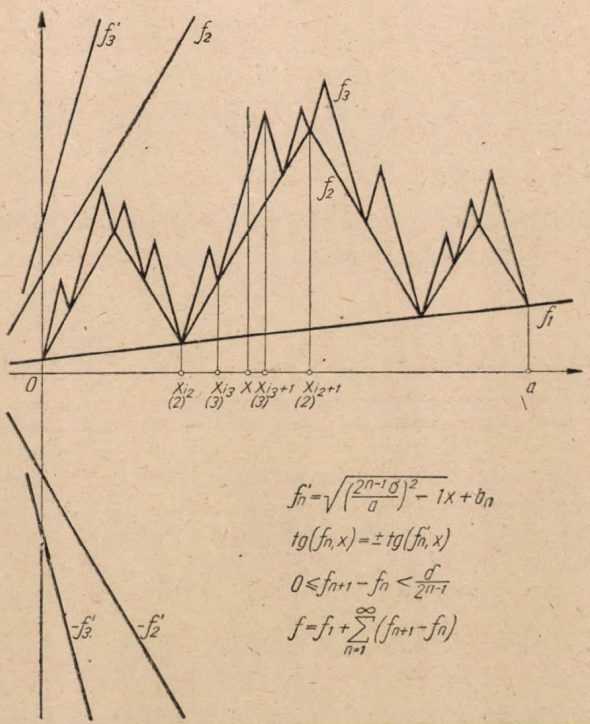
1. A függvény definíciója.

Bár GEŐCZE értekezései általában nehezen érthetők, a függvényére vonatkozó rész annyira világos, hogy a definíciót szószerint átvehetjük.

„Legyen $z = f_1$ lineár és x nőttével növekvő, és hossza a $[0, a]$-ban G. Legyen $z = f_2'$ is ilyen, de hossza $2G$. Könnyű látni, hogy ha δ előre adott, van oly $z = f_2$ függvény, melynek geometriai képe (1. ábra) párosszámú egyenes darabból álló törtvonal, melynek egyenes darabjai felváltva a $z = f_2'$, $z = -f_2'$ egyenesekkel pár-

* Szénássy Barna hívta fel a figyelmemet erre a függvényre.

huzamosak, s e törtvonal minden második, $x = 0$-tól, mint elsőtől $x = a$ felé számított, csúcsa az f_1 egyenesen van.



1. ábra

Legyenek a csúcsok abszcisszái $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2r} = a$. És $0 \leqq f_2 - f_1 < \delta$ lehet, ha r elég nagy és (x_i, x_{i+1}) elég kicsi. Épp úgy, mint az f_1-hez a $[0, a]$-ban az f_2, az f_2-höz minden $[x_i, x_{i+1}]$-ben van egy f_3, melynek egyenes darabjai az $y = f_3'$, $y = -f_3'$ a $[0, a]$-ban $4G$ hosszúságú emelkedő ill. ereszkedő egyenesekkel paralelek, és az egész $[0, a]$-ban $0 \leqq f_3 - f_2 < \frac{\delta}{2}$. Hasonlóképpen képezhető f_4 stb.

$$f = f_1 + \sum_{i=1}^{\infty}(f_{i+1} - f_i)\text{“}$$

2. Az f függvény folytonos. f_i bármely i-re folytonos a felvétel módja miatt, s így $f_{i+1} - f_i$ is az. A $0 \leqq f_{i+1} - f_i < \frac{\delta}{2^{i-1}}$

felvételből pedig következik, hogy $f_1 + \sum_{i+1}^{\infty} (f_{i+1} - f_i) = f$ (egyenletesen) is konvergens és folytonos [3].

3. Az f függvény által értelmezett görbe ívhossza végtelen nagy bármely kis részintervallumban is. f_i a $[0, a]$ bármely $[u, v]$ részintervallumában $(v-u)\frac{G}{a}2^{i-1}$ hosszú görbét állít elő, mivel olyan egyenes szakaszokból áll, melyek vagy f_i'-nek $[u, v]$-ben $(v-u)\frac{G}{a}2^{i-1}$ hosszú szakaszával, vagy $-f_i'$-nek $[u, v]$-ben ugyancsak $(v-u)\frac{G}{a}2^{i-1}$ hosszú szakaszával párhuzamosak. Tehát ha $i \to \infty$, akkor $[u, v]$-ban f_i képének hossza is végtelenhez tart.

4. Az f függvény $[0, a]$-ban sehol sem differenciálható.

Az f_n csúcsainak abszcisszái legyenek $0 = \underset{(n)}{x_1}, \underset{(n)}{x_2}, \ldots, \underset{(n)}{x_{s_n}} = a$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Tetszőleges $(0, a)$-beli x-re

$$0 \leqq \underset{(1)}{x_{i_1}} \leqq \underset{(2)}{x_{i_2}} \leqq \cdots < x \leqq \cdots \leqq \underset{(2)}{x_{i_2+1}} \leqq \underset{(1)}{x_{i_1+1}} \leqq a.$$

Legyen $h_m = \underset{(m)}{x_{i_m}} - x$, ha az x-hez tartozó ordináta az

$$\left(\underset{(m)}{x_{i_m}}, \underset{(m)}{f_m(x_{i_m})}\right); \quad \left(\underset{(m)}{x_{i_m+1}}, \underset{(m)}{f(x_{i_m+1})}\right)$$

pontokat összekötő szakasz fölé emelt, f_{m+1}-hez tartozó t törtvonal emelkedő ágát metszi, és $h_m = \underset{(m)}{x_{i_m+1}} - x$, ha t ereszkedő ágát metszi, vagy f_{m+1} egyik csúcspontján megy át.

Mivel f_{m+1} szakaszainak iránytangense $\pm\sqrt{\left(2^m \frac{G}{a}\right)^2 - 1}$, ezért $\left|\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| \geqq +\sqrt{\left(2^m \frac{G}{a}\right)^2 - 1}$. De ez éppen azt jelenti, hogy $\lim_{m\to\infty} \frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$ nem létezik.

Az f a $[0, a]$ intervallum végpontjaiban sem differenciálható, mert f_m innen induló, ill. ide befutó szakaszának iránytangense $m \to \infty$ esetén végtelenhez tart.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] Geőcze Zoárd: Folytonos rendszert képező síkgörbék ívhosszáról. Az ungvári áll. reálisk. 1904/5. évi Értesítője.
[2] Szénássy Barna: Geőcze Zoárd matematikai munkássága és a felszínmérés újabb eredményei. Budapest, 1943.
[3] Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok. Tankönyvkiadó Budapest, 1954.

ФУНКЦИЯ ЗОАРДА ГЁЦЕ ВЕЗДЕ НЕПРЕРЫВНА, НО НИГДЕ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМА

Ш. Кантор

Резюме

В 1905 г. З. Гёце была построена функция, а также им доказано, что эта функция в данном интервале непрерывна, но ее график не имеет спрямляемой дуги. В этой работе доказывается, что эта очень простая функция Гёце всюду непрерывна, но нигде не дифференцируема.

ÜBER DIE FUNKTION VON Z. GEŐCZE

S. Kántor

Zusammenfassung

Im Jahre 1905 konstruierte Z. Geőcze eine Funktion (s. Figur) und zeigte, daß diese in einem gegebenen Intervall stetig ist, aber kein Teilbogen ihres Bildes rektifizierbar ist. In dieser Arbeit beweisen wir, daß diese sehr einfache Funktion von Geőcze überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist.

Megjegyzés Geőcze Zoárd függvényéhez

CSÁSZÁR ÁKOS (Budapest)

KÁNTOR SÁNDOR az előző cikkben[1] rámutat arra, hogy a GEŐCZE ZOÁRD által készített folytonos és egyetlen részintervallumban sem rektifikálható grafikonnal rendelkező függvény egyben seholsem differenciálható folytonos függvényre is példa, méghozzá az erre a függvénytípusra készített igen nagyszámú példák között is egyike a legegyszerűbbeknek. Talán nem érdektelen, ha a következőkben megmutatjuk, hogy a GEŐCZE-féle konstrukció csekély módosításával olyan általánosabb függvénytípushoz jutunk, amely a szabadon választható paraméterek bizonyos megválasztása mellett seholsem differenciálható folytonos függvényt, más megválasztásuk mellett pedig olyan folytonos, szigorúan monoton növekvő függvényt szolgáltat, amelynek differenciálhányadosa majdnem mindenütt zérus.

Bocsássuk előre a következő egyszerű lemmát:

(1) *Legyen az* $f(x)$ *függvény grafikonja az* $[\alpha, \beta]$ *intervallumban* m *iránytangensű egyenesdarab. Ha az* m' *és* m'' *számok közrefogják* m*-et*[2], *akkor van olyan* $\alpha < \gamma < \beta$ *szám és olyan* $[\alpha, \beta]$*-ban folytonos* $g(x)$ *függvény, melyre* $g(\alpha) = f(\alpha)$, $g(\beta) = f(\beta)$ *és melynek grafikonja* $[\alpha, \gamma]$*-ban* m' *iránytangensű,* $[\gamma, \beta]$*-ban* m'' *iránytangensű egyenesdarab.*

Minthogy ugyanis a koordinátarendszer szokásos elhelyezése mellett két egyenes közül a metszéspontjuktól jobbra a nagyobb iránytangensű, attól balra a kisebb iránytangensű van felül, azért pl. $m' < m < m''$ esetén $f(x)$ grafikonját e-vel, az $(\alpha, f(\alpha))$ ponton át m' iránytangenssel fektetett egyenest e'-vel, a $(\beta, f(\beta))$ ponton át m'' iránytangenssel fektetettet pedig e''-vel jelölve az α helyen e'' e s egyben e' alatt, a β helyen pedig e' e s egyben e'' alatt van,

[1] KÁNTOR SÁNDOR: Geőcze Zoárd függvénye mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható, Mat. Lapok **8** (1958), 264—267.

[2] Azaz vagy $m' < m < m''$, vagy $m'' < m < m'$.

úgyhogy e' és e'' egymást α és β közötti abszcisszájú pontban metszi, s e metszéspont abszcisszáját γ-val jelölve a kívánt $g(x)$ függvény grafikonja az e' egyenes $[\alpha, \gamma]$ intervallumbeli szakaszából s az e'' egyenes $[\gamma, \beta]$ intervallumbeli szakaszából összeállítható.

Legyen mármost

$$0 < M_0 < M_1 < M_2 < \ldots, \tag{2}$$

$$\delta_n > 0 \; (n = 0, 1, 2, \ldots), \; \delta_n \to 0, \tag{3}$$

$$\sum_0^\infty M_n \delta_n < +\infty. \tag{4}$$

Induljunk ki egy $[a, b]$ intervallumban lineáris $f_0(x)$ függvényből, melynek grafikonja abszolút értékben M_0-nál nem nagyobb iránytangensű, s tegyük fel, hogy már elkészítettük az $f_{n-1}(x)$ függvényt úgy, hogy $[a, b]$-ben folytonos és szakaszonként lineáris s a grafikonját alkotó egyenesdarabok iránytangense abszolút értékben M_{n-1}-nél nem nagyobb legyen.

Az $f_{n-1}(x)$ függvény grafikonjának töréspontjai az $[a, b]$ intervallumot véges számú részintervallumra osztják. Készítsük el szükség esetén újabb osztópontok hozzávételével $[a, b]$-nek δ_n-nél rövidebb intervallumokra való F_n felosztását; az F_n felosztás szomszédos osztópontjai által határolt intervallumok mindegyikében $f_{n-1}(x)$ grafikonja egy egyenesdarabból áll. Írjunk elő ezen intervallumok mindegyikéhez két, M_n-nél abszolút értékben nem nagyobb és $f_{n-1}(x)$ grafikonjának itteni iránytangensét közrefogó, egyébként azonban tetszőleges számot s szerkesszük meg az $f_n(x)$ függvényt úgy, hogy $[a, b]$-ben folytonos legyen, az F_n felosztás osztópontjaiban $f_{n-1}(x)$-szel megegyezzék, s grafikonja az említett osztópontok határolta intervallumok mindegyikében két, az előírt számokkal mint iránytangesekkel rendelkező egyenesdarabból álljon; az (1) lemma biztosítja ennek lehetőségét.

Az $f_n(x)$ függvények így elkészített sorozata $[a, b]$-ben egyenletesen konvergál egy $f(x)$ függvényhez, amely tehát folytonos. Ennek belátására csak azt kell meggondolnunk, hogy $f_{n-1}(x)$ és $f_n(x)$ az F_n felosztás osztópontjaiban megegyezik egymással, az ezek által határolt intervallumok mindegyikében pedig $f_n(x)$ ingadozása legfeljebb $M_n \delta_n$, $f_{n-1}(x)$-é legfeljebb $M_{n-1} \delta_n < M_n \delta_n$, tehát az egész $[a, b]$ intervallumban

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leqq 2 M_n \delta_n,$$

amiből az állított egyenletes konvergencia (4) alapján könnyen következik.

Jegyezzük még meg, hogy az F_n felosztás osztópontjaiban

$$f_n(x) = f_{n+1}(x) = \cdots = f(x). \tag{5}$$

Ha tehát $[\alpha_n, \beta_n]$ jelöli az F_n felosztásnak azt a részintervallumát, amely az $[a, b]$ intervallumnak egy előírt x_0 helyét tartalmazza, s ha az $f'(x_0)$ derivált létezik, akkor

$$f'(x_0) = \lim \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \lim \frac{f_n(\beta_n) - f_n(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}; \tag{6}$$

az $[\alpha_n, \beta_n]$ intervallumok nyilván mindig megválaszthatók úgy is, hogy $\alpha_{n-1} \leqq \alpha_n < \beta_n \leqq \beta_{n-1}$ legyen.

Mármost abból a célból, hogy seholsem differenciálható folytonos függvényhez jussunk, nem kell egyebet tennünk, mint az előbbi konstrukcióban például az

$$M_n = n, \qquad \delta_n = \frac{1}{n^3}$$

választással az $f_0(x) \equiv 0$ függvényből kiindulva az $f_n(x)$ függvény grafikonjának iránytangenseiként F_n mindegyik intervallumában $+n$-t és $-n$-t előírnunk; ezek akár $+(n-1)$-et, akár $-(n-1)$-et közrefogják, úgyhogy a konstrukció elvégezhető. A keletkező $f(x)$ függvény seholsem lehet differenciálható, mert (6) jobboldalán $\pm n$ áll, az ottani limesz tehát véges semmi esetre sem lehet.

Ha viszont folytonos, szigorúan monoton növekvő és majdnem mindenütt eltűnő deriválttal rendelkező függvényt akarunk előállítani, legyen $0 < p < 1 < q < 2$ két adott állandó,

$$M_n = q^n, \qquad \delta_n = \frac{1}{2^n},$$

s az $f_0(x) \equiv x$ függvényből kiindulva írjuk elő az F_n felosztás mindegyik részintervallumában $f_{n-1}(x)$ grafikonja ottani iránytangensének p-szeresét és q-szorosát; ezek a kérdéses iránytangenst közrefogják, így a konstrukció végrehajtható, hiszen teljes indukcióval könnyen következik, hogy $f_n(x)$ grafikonjának iránytangense mindegyik lineáris szakaszon olyan n tényezős szorzat, melynek valamennyi tényezője vagy p-vel, vagy q-val egyenlő, tehát (abszolút értékben) M_n-nél nem nagyobb. Kitűnik ebből az is, hogy $f_n(x)$ szigorúan monoton növekvő, s így $f(x)$ is monoton növekvő, sőt szigorúan monoton növekvő, mert F_n osztópontjaiban $f_n(x)$-szel megegyezik s ezért egyetlen intervallumban sem lehet állandó. Lebesgue tételéből következik, hogy $f(x)$ majdnem mindenütt differenciálható. Deriváltja azonban sehol sem vehet fel 0-tól különböző véges értéket, hiszen a (6) jobboldalán álló különbségi

MTA KÖNYVTÁRA

hányadosok közül az n-edik és $(n-1)$-edik hányadosa (ha az $[\alpha_n, \beta_n]$ intervallumokat az ott leírt módon választottuk meg) vagy p-vel, vagy q-val egyenlő, semmiképpen sem tarthat tehát 1-hez.

Megjegyezzük még, hogy a most leírt szerkesztés a $p+q=2$ esetben lényegében a RIESZ FRIGYES által készített függvényt szolgáltatja[3].

ЗАМЕЧАНИЕ О ФУНКЦИИ ЗОАРДА ГЁЦЕ

Акош Часар

Автор показывает, что обобщая одну конструкцию Зоарда Гёце, можно получить такое общее построение, которое при некотором выборе параметров даёт нигде не дифференцируемую везде непрерывную функцию, а при другом выборе — строго возрастающую непрерывную функцию, производная которой почти везде равна нулю.

SUR LA FONCTION DE Z. GEŐCZE

Par Á. CSÁSZÁR (Budapest).

(Résumé)

Par une modification de la construction due à Z. Geőcze (voir la Note précédente), l'auteur construit une famille de fonctions continues qui comprend d'une part de très simples exemples de fonctions nulle part dérivables, de l'autre des exemples de fonctions continues, strictement monotones et possédant presque partout la dérivée nulle.

[3] F. RIESZ ET B. SZ.-NAGY: Leçons d'Analyse Fonctionnelle (Budapest, 1952), 48—49. old.

Tudósképzés a Szovjetunióban*

A. N. Kolmogorov

Az emberiség életében a tudomány jelentősége egyre inkább erősödik. Ez növeli annak a ténynek jelentőségét, hogy a tudományos fejlődés jólképzett (középkáder) kutatók tízezreit követeli, olyanokat, akik között jelentékeny számban akadnak a nagyobb tehetségük alapján kiválaszthatók. Ezt a célt csak olyan kiképzési rendszerrel lehet elérni, amely emberek nagy tömegének nyújt lehetőséget arra, hogy olyan területen fejlődjenek ki, ahol az egyén legtöbbet használhat az emberiségnek.

Ezért egészen természetes, hogy a tudományos kiképzés kérdése jelenleg minden országban napirenden levő probléma, és talán érdekes itt megállapítanunk, hogy röviddel ezelőtt az USA-ban illetékes személyek nyugtalanságukat fejezték ki amiatt, hogy becslésük szerint az USA-ban évenként végző 70 000 fiatal kutatóval szemben a Szovjetunióban évenként 120 000 végez. Miután én valamivel jobban értesült vagyok, mint azok, akik a Szovjetunióban jelenleg adott helyzetet ilymódon felbecsülték, — szeretném megjegyezni, hogy a 120 000-es szám némileg túlzott és túlzás mindenkit tudósnak tekinteni, aki valamely egyetemen, bizonyos területen végzett tanulmányait befejezi. Tény az, hogy a Szovjetunióban széles körben vitatják annak szükségességét, hogy az egyetemen végzők jelentékeny része mint középiskolai tanár nyerjen beosztást.

Ne töltsük az időt azzal, hogy a különböző országokban hány fiatal kutató van; általában megállapítható, hogy eddig egy ország sem lehet a tudósképzésével megelégedve. Ebből kiindulva szeretném azzal a megállapítással kezdeni, ami

* A „Wissenschaftliche Welt" 1957. 1. számában megjelent cikk fordítása. Fordította: Székely Gáborné.

nyilvánvaló tény, hogy a matematika és fizika iránti hatványozott tehetség és rendkívüli adottság — sőt esetleg olyan képesség, amely geometria vagy algebra műveléséhez szükséges — kisebb-nagyobb mértékben nagyjából egyenletesen elosztva adott a különböző néprétegekben. Kérdésünk tehát a következő: hogyan fedezi fel az ember ezeket a tehetségeket, hogyan bontakoztatja ki azokat és hogyan bírja rá az ezen adottságokkal rendelkező fiatalokat, hogy a tudomány oly területén dolgozzanak, ahol országuknak és az emberiségnek legjobban használhatnak. Ennek a problémának két oldala van: materiális és morális. Ami a materiális részét illeti, mi úgy gondoljuk, a Szovjetunióban, hogy a kérdést megoldjuk, mivel a közeljövőben az egész lakosság részére kötelező lesz a középiskolai oktatás (ez nálunk kb. 18 éves korban fejeződik be). Így lehetővé válik, hogy minden fiúnak és lánynak hajlamát, képességét különleges adottságait (ha ilyenek vannak) megállapítsuk. Az a fiatal, aki kutatómunkában kíván majd résztvenni, nem ütközik akadályba, ha jó felfogó képességű, kitartó és a kutatómunkához szükséges bizonyos rátermettséggel rendelkezik. Ekkor a választott szaknak megfelelő műszaki főiskolára vagy egyetemre felveszik, ösztöndíjat kap, — amelyből megélhetési költségeit fedezheti (diákjaink 90%-a kap ösztöndíjat) és ha nincsenek szülei vagy rokonai, akiknél lakhatna, úgy diákotthonban lakhatik. Ha a diák (vagy diáklány) faluról jött, vagy viszonylag gyengébb kulturális nevelést kapott, a tanulmányvezető egész természetesen sokkal nagyobb figyelmet szentel neki; de ettől eltekintve elmondhatjuk, hogy minden diák származására való tekintet nélkül, gyakorlatilag ugyanazon feltételek mellett dolgozik, ezek lehetnek ugyan szerények, de azokat a mi fiataljaink kielégítőnek találják.

Ami a kérdés másik oldalát illeti, amit az előbb mint »morális«-t jelöltem meg, most közel jutottunk (itt, a Szovjetunióban) egy megoldáshoz. Fiataljainkat áthatja az a kívánság, hogy újat alkossanak, új gépeket találjanak fel, gátakat építsenek, új területeket fedezzenek fel (feltéve, hogy vannak ilyen feltárásra váró területek), de az én véleményem az, hogy legtöbbjüknek halvány sejtelme sincs arról, mit jelent valójában tudósnak lenni, és még kevesebbüknek van fogalma a tudomány bármely ágának különleges követelményeiről.

Vegyük pl. a matematikát — minthogy én matematikus vagyok —, meg kell mondanom, hogy középiskoláinkban a

matematika oktatása gyakran oly skolasztikus, hogy megakadályozza, hogy a diák megértse, vagy elkezdje megérteni, milyen alkotó munkát lehet itt kifejteni; pedig ezen a területen ez olyan lelkesítően hatna.

A helyzetnek ez a megítélése világítja meg azt a kívánságunkat, hogy középiskoláinkba (és különösen a felső osztályokba) minél több olyan tanárt küldjünk, akik egyetemet végeztek, és így az alkotó, tudományos kutatás légköréhez, szelleméhez hozzászoktak.

Jelentős viták után az az álláspont kerekedett felül, hogy az egyetem a leendő kutatókat és középiskolai tanárokat közösen képezze ki.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy főiskolai tanáraink, akik a középiskolai tanárok képzésére specializálták magukat — és több száz ilyen főiskolai tanárunk dolgozik kb. 30 egyetemünkön —, meglehetős nagy hagyománnyal rendelkeznek olyan vonatkozásban, hogy diákjaikat a tiszta tudományok kutatására ösztönözzék. Néhány igen ismert tudósunkat nevezhetnénk itt meg, akik ezúton lettek azzá, amik ma. A továbbiakban pusztán az a tény, hogy ezekben az intézetekben találhatók a diákok között olyanok, akik személyes kutatómunkával kezdték el, igen kedvező hatást tesz azok fejlődésére és érdeklődésére, akik középiskolába mennek tanítani.

Ha a nevelési feltételek kedvezők, akkor a tudomány vagy technika iránti érdeklődés a 14. vagy 15. életévben megnyilvánul; azonban semmiesetre sem később, mint 16 és 17 éves korban. Mivel a Szovjetunióban a középiskolák felső osztályai számára előírt tananyag minden diák számára ugyanaz, különös jelentősége van annak, hogy az érdeklődők szakterületüket szabadon választhatják. Minthogy matematikus vagyok, szeretném elmondani, hogyan áll ez a szabad választás az én szakmámban. Legtöbb iskolának van egy vagy több »matematikus köre«, amelyet egy-egy tanár vezet; olyan városokban azonban, ahol egyetem vagy tanárképző intézet van, gyakori, ill. szokásos, hogy az iskolák ez intézmények valamely hallgatóját hívják meg vezetőnek. Ezek a csoportok hetenként jönnek össze. A tanár vagy az egyetemről meghívott fiatal előadó vezeti a kört. Néha egy-egy előadásnak szentelik az összejövetelt, amelyet a kör valamelyik tagja tart, azonban rendszerint a tagok által megoldott feladatok megbeszélése és elemzése a főcél. Vannak oly könyvek és brosúrák, amelyeket külön ezeknek a köröknek írnak.

Egyetemeinken is vannak ilyen matematikai szakkörök, ezek azonban természetszerűleg magasabb színvonalúak és valójában csak a tényleg tehetséges és jólképzett diákok számára valók. A moszkvai egyetemen pl. tucatjával vannak ilyen körök, amelyeket minden tanév elején ezernél több diák látogat, azonban legfeljebb néhány száz dolgozik aktívan egész éven át. A tanév végén az egyetemek matematikai olimpiákat rendeznek. A versenyek célja: nehéz feladatok megoldása. A legjobbakat díjakkal jutalmazzák. A moszkvai egyetemen mindig több mint ezer versenyző indul. Évközben, vasárnaponként, a professzorok különböző matematikai kérdésekről tartanak előadást. Ezeket Moszkvában 400—500 érdeklődő látogatja. A szabadon választható munka célja — a matematika területén — abban áll, hogy a diákokat saját könyveik tanulmányozására bírjuk; (a matematikai olimpiák díjai is mindig könyvek) és ezáltal kifejlesztjük feladatmegoldó készségüket, ami már gyakran közel áll az alkotó, tudományos munkához. Nem kevésbé fontos az a cél, hogy kisebb számú, tehetséges diákot arra ösztönözzünk, hogy további matematikai tanulmányokkal, vagy pedig a természettudományok vagy technika oly ágával foglalkozzék, ahol jólképzett matematikusokra van szükség. Szeretném hangsúlyozni, hogy mi az olimpiák eredményét nem vesszük nagyon komolyan és hogy a díjjal való kitüntetés még semmi különleges »bánásmódot« nem jelent, tehát nem biztosítja az egyetemre vagy más főiskolára való felvételt. Utolsó szavunk a részvevőkhöz mindig a következő: Önök közül mindenki abban a helyzetben van, hogy saját maga tudja legjobban felbecsülni képességeit. Ha tényleg meg vannak győződve arról, hogy mint matematikusok eredményesen működhetnek, úgy Önökön múlik, hogy az egyetemi felvételi vizsgákon bebizonyítsák képességeiket, teljesen függetlenül attól, hogy itt ma díjat nyernek-e, vagy sem.

Más tudományágak képviselőinek más a módszerük, amivel a diákokat szakterületükön munkára ösztönözni igyekeznek. Természetes például, hogy a földrajz- és geológia-klubok a diákok számára roppant eredményesek; ezek nagy utazásokat szerveznek, és az idősebb diákoknak lehetővé teszik, hogy valódi expedíciókon mint a tudósok asszisztensei részt vehessenek.

Nálunk — mint bárhol máshol — az egyetemi vagy főiskolai felvétel fontos állomás a jövendő tudós pályáján. A múltban tudósaink között igen erős (és még ma sem teljesen túlha-

ladott) irányzat speciális intézmények létrehozását tartotta helyesnek a különlegesen tehetséges diákok számára. Többek között az »Ecole Normale Supérieure« és az »Ecole Polytechnique« franciaországi intézeteket állították példaképül, amelyeknek nagy eredményeit természetesen jól ismerik országunkban is. Tény azonban, hogy hasonló iskolák létesítésére irányuló kísérleteink nem vezettek eredményre; valószínű azért, mert a franciaországi speciális *»matematika osztályok«* megfelelői nálunk nem léteznek.

A Szovjetunióban 17 vagy 18 éves korban fejezik be a középiskolát és akkor vagy azonnal megpróbálják tanulmányaikat egyetemen vagy főiskolán folytatni, vagy elkezdenek dolgozni. Csak nagyon kevés, jólszituált szülő engedheti meg magának, hogy az iskola befejezése után fiát vagy lányát magántanár útján készíttesse elő az egyetemi felvételre. Ezt azonban alapjában véve nem is tartjuk kívánatosnak. Ezért inkább lehetővé tesszük, hogy sokan iratkozzanak be az egyetemre. Ezzel azt az előbb említett célt is szolgáljuk, hogy a jövendő tanárait és tudósait közösen képezzük ki. Ezért minden egyetemünkön nagy a beiratkozott hallgatók száma. A moszkvai egyetem pl. minden évben 400 jövendő matematikust és mérnököt, 500 jövendő fizikust és 300 jövendő kémikust vesz fel. Ha tekintetbe vesszük, hogy a mi fiataljaink 30 egyetemünk közül pl. a leningrádit, a kijevit, a charkovit és tifliszit a moszkvaival egyenrangúnak tekintik, ebből látható, hogy az egyetemi felvételeknél megkövetelt színvonal nagyon közel áll a nagy francia egyetemek által megkívánt színvonalhoz. Meg kell azonban mondanom, hogy ezt nem is kívánjuk másként.

Az ötéves egyetemi tanulmányok első két évén kötött tanmenet van. Ez egy héten 36 óra kötelező óraszámot jelent és a kötelező gyakorlatokat. Néhány diák elég okos ahhoz, hogy ez alatt a két év alatt időt találjon a saját maga által választott speciáltéma tanulmányozására; — mellékesen megjegyezve, ezek nagyobbrészt matematikusok. Ennek megfelelően az általános program elvégzésére szánt időt redukálják és a hallgatóktól elvárják, hogy bizonyos számú előadást, tudományos szemináriumot és különleges laboratóriumi gyakorlatot válasszanak. Az ötödik évben már szinte kizárólag a főszakjukra kell összpontosítaniuk figyelmüket — és sok fakultáson a tizedik és egyben utolsó szemesztert — a Szovjetunióban csak két szemeszter

van egy évben — az ún. »diplomaterv« elkészítésének szentelik; ez egy rövid tudományos munka, amelyet nyilvánosan meg kell védeniök.

Matematikus hallgatók számára a speciális munka legfontosabb formája a szemináriumokon való részvétel. A hallgatótól megkövetelik, hogy a professzoroktól »igazolást« mutasson be arról, hogy az utolsó három év alatt három ilyen szemináriumon vett részt. Ez azt jelenti, hogy a három szeminárium mindegyikében egy olyan dolgozatot kell bemutatnia, amely vagy különböző forrásokból összeállított anyagot, vagy pedig több-kevesebb saját eredményt is tartalmaz. Az ilyen szemináriumokon való részvétel mindenesetre feltételezi azt, hogy a hallgató a különböző szakfolyóiratokban megjelenő (nemcsak orosz nyelvű) cikkeket fel tudja használni.

Ez természetesen azt jelenti, hogy nagyszámú, aktuális problémákkal foglalkozó szemináriumunknak kell lennie. Ez nem mondható el minden egyetemről, bár pl. a moszkvai matematika tanszékek egyedül (a gépészmérnöki kar nélkül) kb. 40 szemináriumot hirdetnek meg, amelyeken a legkülönbözőbb időszerű tudományos problémákkal foglalkoznak. Ezek a szemináriumok különböző színvonalúak, de közös a céljuk: egy bizonyos szakterületen az ismereteket bővíteni. Általában nem igyekszünk ezeket a szemináriumokat színvonaluk szerint csoportosítani. Egy új szeminárium megindítása általában úgy történik, hogy kihirdetik »ez a szeminárium ettől és ettől az évfolyamtól kezdve vehető fel«. Ily módon előfordulhat, hogy különböző évfolyamok hallgatói azonos szemináriumon vesznek részt.

A tudományos kutatásnak ez a fejlesztése diákjaink között arra az eredményre vezetett, hogy szaklapjainkban kb. 20—25 olyan tudományos cikk jelenik meg, amely a moszkvai egyetem matematikus hallgatóinak az Akadémián megtartott előadását tartalmazza. Más, olyan tudományos területen, amely inkább alkalmas kollektív munkára, még nagyobb azoknak a száma, akik a tudomány továbbfejlesztése szempontjából valóban szerepet játszanak. A hallgatók legjobb munkáit díjazzák. A moszkvai egyetem pl. 1955-ben 2 Lomonoszov-díjat adott ki. Az említett díj I. fokozatát egy Gontsar nevű matematikus kapta A kvázianalitikus függvények egy új osztálya c. dolgozatáért, amely az én véleményem szerint egyike az utóbbi években, bármely országban elért, legjelentősebb eredményeknek. A

II. díjat egy geológus hallgatónak ítélték oda, aki a szibériai Jeniszej folyón építendő duzzasztógát helyét úgy jelölte ki, hogy az jobb volt az idősebb kollegája által javasoltnál. A hallgatók tudományos eredményeit magasabb ösztöndíjjal jutalmazzák. Azonban az ilyen ösztöndíj és a szorgalmasan dolgozó diákok ösztöndíja között nem nagy a különbség; mi általában ellenezzük a diákok tudományos teljesítménye közötti bármely különbség túlzott kihangsúlyozását.

A jövő tudományos kutatóinak végső kiválasztása csak később történik, amikor a hallgatók »diplomatervüket« készítik. Ez általában 4 évi tanárképző intézetben végzett tanulmány, vagy 5 évi főiskolai intézménynél eltöltött tanulmányi idő után történik. Elsőrendű tudományos kutatóink legnagyobbrészt aspiránsaink közül kerülnek ki. Néhányan ugyan ellenvetik, hogy sok tudósunk sohasem volt aspiráns; tény azonban, hogy az 50 éven aluli tudósaink $^3/_4$ része életpályája kezdetén aspiráns volt.

Eszerint a szabályozás szerint a kiválasztott fiatal kutatók 3 éven keresztül ösztöndíjat kapnak, ami minden szükséges kiadásuk fedezésére elegendő, hacsak az illető nem házas. Ez az ösztöndíj attól függ, hogy az első 18 hónapban a kandidátusi vizsgáját a munkaprogramnak — amelyet minden aspiráns számára egyénileg állítanak össze — megfelelően leteszi-e és a harmadik év végén nyújt-e be olyan »kandidátusi disszertációt«, amely önálló tudományos munkát tartalmaz. Egyedül a moszkvai egyetemen évenként 25 személyt veszünk fel matematikus aspiránsnak. Ezek az aspiránsok — eredményeiket illetően — meglehetősen különbözők. Néhányan közülük munkájukat időben befejezik, mások csődöt mondanak; ezt elkerülendő az egyetlen lehetőséget abban látom, hogy aspiránturára csak olyanokat veszünk fel, akik a »kandidátusi munkához« szükséges minimális követelményeket megfelelő tudományos munkával már igazolták; csak ezek az aspiránsok lesznek képesek arra, hogy ha kandidátusi munkájuk során kudarc éri őket, korábbi munkájukat felülvizsgálják és átdolgozzák, hogy később mint disszertációt benyújthassák. A moszkvai egyetem matematika szakán a kandidátusi vizsgára jelentkező hallgatók száma nagy, tehát a helyzet elég kedvező, — ez azonban nem mondható el a többi egyetemről is.

A hallgatók számára két lehetőség van, hogy aspiránsok lehessenek. Vagy a főiskola, ill. egyetem elvégzése után, az

illető főiskola vagy egyetem tudományos tanácsának javaslatára vagy pedig legalább 3 évi gyakorlati munka után jelentkezhetnek. aspirantúrára. Ezt a szabályozást az magyarázza meg, hogy hallgatóink, akik az államtól ösztöndíjat kapnak, kötelesek tanulmányaik befejezés után a munkát ott elkezdeni, ahova az erre a célra létesített szakbizottság helyezi őket. A Szovjetunióban elég sokat vitatják ennek a két felvételi módnak a viszonylagos előnyeit. Gyakorlati szempontból nézve az a vélemény alakult ki, hogy matematikus- és fizikusképzés szempontjából az első, más természettudományos-képzés szempontjából a második út célravezetőbb, míg a műszakiak szempontjából úgy az egyiket, mint a másikat lehet választani. Sok hallgató, aki aspirantúra szempontjából nem jön számításba, az egyetemen vagy főiskolán lesz tanársegéd, vagy pedig kutatómunkát végez valamely tudományos vagy műszaki intézetben. Ezeknek, és az iparban foglalkoztatott technikusoknak is, — az aspiránsokéhoz hasonló lehetőségeik vannak; itt különösen a levelezőaspirantúrát említjük meg. Az aspirantúrára való formális felvételnek van bizonyos nem formális jellege is. A folyamodónak vizsgáznia és szóbeli válaszokat kell adnia munkásságára vonatkozóan; publikált munkáit, illetve az általa beterjesztett dolgozatokat figyelembe veszik. A folyamodó a vizsgákat esetleg a legnagyobb sikerrel teheti le és mégis elutasítják. A vizsgáknál megkívánt nívó nem túl magas és ha a felsőoktatási intézményeinkben a diploma megszerzéséhez szükséges vizsgák mind azonos nívójúak lennének, úgy arra szorítkozhatnánk, hogy a folyamodót csak speciálterületéről kérdeznénk ki, és egy olyan témájú tudományos munkája alapján döntenénk, amelyről az illető esetleg már írásban is jelentetett meg dolgozatot.

Bizonyára megállapítható, hogy én itt jövendő kutatóink kiválasztásának és képzésének egy kezdeti stádiumáról számoltam be, — arról, hogy őket mint középiskolai diákokat, ill. egyetemi hallgatókat hogyan választják ki az aspirantúrára. Nem akarok mentegetőzni, mert azon a véleményen vagyok, hogy éppen az a tény, hogy jövő tudósaink képzésére már kezdetben nagy figyelmet szentelünk — ez ugyanis kiképzési rendszerünk fő előnye —, a legérdekesebb más országok tudósai számára. Ha a fiatal tudós már elkezd dolgozni mint egy csoport vagy kollektíva munkatársa, akkor úgy gondolom, hogy fejlődése sok tekintetben minden országban egyforma. A szovjet matematikusok nagyra értékelik

Franciaországban a matematikusok képzése terén elért eredményeket és ha összehasonlítanánk azok számát, akik ott és a Szovjetunióban mint matematikusok előképzést kaptak, úgy valószínűleg Franciaország lenne a győztes.

Végezetül szeretném megjegyezni, hogy mi a Szovjetunióban a legteljesebb mértékben értékelni tudjuk a tanulmányok személyes irányításának és vezetésének hagyományait. Minden egyes tanévben azok a diákok, akik komolyan akarnak tudományos munkával foglalkozni, tanulmányaik személyes irányítása ügyében egy olyan professzorhoz vagy fiatal tudóshoz fordulhatnak, akik éppen ilyen diákot keresnek. Aspiránsoknak szinte kötelező egy ilyen »megbízott« vezetésével dolgozni. Nem is kell talán utalnunk arra, hogy egy ilyen önkényes viszony létesítése mester és tanítvány között mennyire kényes kérdés; némileg házasságközvetítéshez hasonlít, úgy, hogy néha »válásoknak« kell bekövetkezniök. Rendszerünk megengedi, hogy ilyen kapcsolatot bármelyik fél kérésére fel lehessen bontani. Tény azonban, hogy ilyen esetek nem fordulnak gyakran elő, mert a mester és tanítvány közötti kapcsolat nagyjából saját magától kialakul, még mielőtt a diákot aspirantúrára felveszik. Legtöbb esetben ez a viszony megmarad az egész aspirantúra ideje alatt és még utána is soká fennáll.

Az 1957. évi Kossuth-díjjal kitüntetett Fejes Tóth László munkáinak jegyzéke

1. Des séries exponentielles de Cauchy. Comptes Rendus de Paris 200/1935/1712—1714.
2. Sokszögekre vonatkozó szélsőértékfeladatokról. Középisk. Mat. Fiz. Lapok 13/1937/1—4.
3. A Cauchy-féle exponenciális sor. Mat. Fiz. Lapok 45/1938/3—20.
4. Poliéderekre vonatkozó szélsőértékfeladatok. Mat. Fiz. Lapok. 45/1938/191—199.
5. Über die Approximation konvexer Kurven durch Polygonfolgen. Compositio Math. 6/1939/456—467.
6. Two inequalities concerning trigonometric polynomials. J. London Math. Soc. 14/1939/44—46.
7. Über zwei Maximumaufgaben bei Polyedern. Tohoku Math. J. 46/1939/79—83.
8. A símuló n-lapról. Mat. Fiz. Lapok 46/1939/141—145.
9. Über einen geometrischen Satz. Math. Zeitschrift 46/1940/83—85.
10. Eine Bemerkung zur Approximation durch n-Eckringe. Compositio Math. 7/1940/474—476.
11. Sur un théorème concernant l'approximation des courbes par des suites de polygones. Annali di Pisa 18/1940/1—3.
12. Egy extremális soklapról. Mat. Term.-tud. Ért. 59/1940/476—479.
13. Einige Extremaleigenschaften des Kreisbogens bezüglich der Annäherung durch Polygone. Acta Sci. Math. 10/1943/164—173.
14. Über eine Extremaleigenschaft der Kegelschnittbogen. Monatshefte für Math. Phys. 50/1943/317—326.
15. Über die dichteste Kugellagerung. Math. Zeitschrift 48/1943/676—684.
16. Az egyenlőoldalú háromszögrács. mint szélsőértékfeladatok megoldása. Mat. Fiz. Lapok. 49/1942/238—248.
17. A szabályos testek, mint szélsőértékfeladatok megoldásai. Mat. Term.-tud. Ért. 61/1942/471—477.
18. A lehűlés Fourier-soráról. Mat. Term.-tud. Ért. 61/1942/478—495.
19. Über eine Abschätzung der kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems. Jahresbericht DMV 53/1943/66—68.
20. Egy gömbfelület befedése egybevágó gömbsüvegekkel. Mat. Fiz. Lapok 50./1943/40—46.
21. Über einige Extremaleigenschaften der regulären Polyeder und des gleichseitigen Dreiecksgitters. Ann. Pisa (2) 13/1948/51—58.
22. Az ellipszis izoperimetrikus és az ellipszoid izepifán tulajdonságairól. Mat. Term.-tud. Ért. 62/1943/88—94.

23. A gömbfelületet egyenlő felszínű konvex részekre osztó legrövidebb görbehálózat. Mat. Term.-tud. Ért. 62/1943/349—354.
24. A térnek egy szélsőértékfeltételt kielégítő felbontása soklapokra. Mat. Fiz. Lajok. 51/1944/3—19.
25. Extremális pontrendszerek a síkban, a gömbfelületen és a térben. Acta Sci. Math. Nat. Kolozsvár 23/1944/IV. + 54.
26. Über die Fouriersche Reihe der Abkühlung. Acta Sci. Math. 8/1946/28—36.
27. Eine Bemerkung über die Bedeckung der Ebene durch Eibereiche mit Mittelpunkt. Acta Sci. Math. 8/1946/93—95.
28. Einige Bemerkungen über die dichteste Lagerung inkongruenter Kreise. Comm. Math. Helv. 17/1944/45/256—261.
29. Mittlere Trefferzahlen und geometrische Wahrscheinlichkeiten (Hadwigerrel közösen) Experientia 3/1947/1—10.
30. Über Mittelwerte in einem Bereichsystem (Hadwigerrel közösen) Bul Polit. Iaşi 3/1948/29—35.
31. An inequality concerning polyhedra. Bull. Amer. Math. Soc. 54/1948/139—146.
32. Approximation by polygons and polyhedra. Bull. Amer. Math. Soc. 54/1948/431—438.
33. On ellipsoids circumscribed and inscribed to polyhedra. Acta Sci Math. 11/1948/225—228.
34. The isepiphan problem for *n*-hedra. Amer. J. Math. 70/1948/147—180.
35. New proof of a minimum property of the regular *n*-gon. Amer. Math. Monthly 54/1947/589.
36. Inequalities concerning polygons and polyhedra. Duke Math. J. 15/1948/817—822.
37. Über die mittlere Schnittpunktszahl konvexer Kurven und Isoperimetrie. Elemente d. Math. 3/1948/1.
38. On the densest packing of convex domains. Kon. Ned. Acad. Wet. 51/1948/189—192.
39. On the total length of the edges of a polyhedron. Kon. Nors. Vid. Selsk. Forhand. 21/1948/32—34.
40. On the densest packing of circles in a convex domain. Kon. Nors. Vid. Selsk. Forhand. 21/1948/68—70.
41. Über dichteste Kreislagerung und dünnste Kreisüberdeckung. Comm. Math. Helv. 23/1949/342—349.
42. On the densest packing of spherical caps. Amer. Math. Monthly 56/1949/330—331.
43. Extremum properties of the regular polyhedra. Can. J. Math. 2/1950/22—31.
44. Ausfüllung eines konvexen Bereiches durch Kreise. Publ. Math. 1/1949/92—94.
45. Some packing and covering theorems. Acta Sci. Math. 12/1950/62—67.
46. Covering by dismembered convex discs. Amer. Math. Soc. 1/1950/806—812.
47. A. Brunn—Minkowski-féle tételről. Mat. Lapok 1/1950/211—217.
48. Az izoperimetrikus probléma. Mat. Lapok 1/1950/363—383; 2/1951/34—45.
49. Elementarer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung. Acta Math. Sci. Hung. 1/1950/273—276.
50. A legsűrűbb gömbelhelyezésről. Első Magyar Mat. Kongr. Közl. /1950/619—642.
51. Über gesättigte Kreissysteme. Math. Nachr. 5/1951/253—258.
52. Über den Affinumfang. Math. Nachr. 6/1951/51—64.

53. Ein Beweisansatz für die isoperimetrische Eigenschaft des Ikosaeders. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 3/1952/155—163.
54. Lagerungen in der Bene, auf der Kugel und im Raum. Berlin. 1953. X + 197.
55. Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4/1953/103—110.
56. Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4/1953/111—114
57. On close-packings of spheres in spaces of constant curvature. Publ. Math. 3/1953/158—167.
58. Über die dichteste Horozyklenlagerung. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 5/1954/41—44
59. Extremum properties of the regular polytopes. Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 6/1955/143—146.
60. Annäherung von Kurven durch Kurvenbogenzügen Publ. Math. 3/1954/273—280.
61. Megjegyzések Dowker sokszögtételeihez. Mat. Lapok 6/1955/176—179.
62. Characterization of the nine regular polyhedra by extrem properties. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7/1956/31—48.
63. Über die dünnste Horozyklenüberdeckung. Acta Math. Acad. Sci. Hung, 7/1956/95—98.
64. On the volume of a polyhedron in non-Euclidean spaces. Publ. Math. 4/1956/256—261.
65. Pontok elhelyezése egy tartományban. (Erdős Pállal közösen) Akad. III. Oszt. Közl. 6/1956/185—190.
66. Triangles inscrits et circonscrits à une courbe convexe sphérique. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7/1956/163—167.
67. On the filling of a domain by isoperimetric discs. Publ. Math. (megjelenőben.)
68. On the sum of distances determined by a point set. Acta Math. Acad. Sci. Hung. (megjelenőben.)
69. Szabályos alakzatok. Akad. III. Oszt. Közl. (megjelenőben.)

Jelentés
az 1956. évi Schweitzer Miklós emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 1957. február 23. és március 4. között rendezte meg a nyolcadik Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyt.* A kitűzött feladatokat február hó 23-án 13 órakor függesztették ki a Társulat központjában, továbbá a budapesti és vidéki egyetemek és főiskolák matematikai tanszékein. A megoldások benyujtásának, illetve postára adásának határideje 1957. március 4-én 13 óra volt. A versenyzőknek ilyen módon teljes kilenc nap állt rendelkezésükre a feladatok megoldására. A versenyen részt vehetett minden egyetemi és főiskolai hallgató, továbbá mindazok, akik az egyetemet, illetve főiskolát 1956-ban fejezték be. A verseny tételei a következők voltak:

1. Adjuk meg determinánsmentes végalakban a

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+\alpha}{j} x_{k-j} = b_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszer megoldását, ahol α rögzített valós szám.

2. Kiszámítandó $\operatorname{Max}(|1+z|, |1+z^2|)$ minimuma, ha z befutja a komplex számsíkot.

3. Egy konvex sokszög *háromszögelése* alatt ezen sokszögnek bizonyos, egymást a sokszög belsejében nem metsző átlói meghúzásával háromszögekre való felbontását értjük. Kiszámítandó, hogy egy n-oldalú konvex sokszögnek hány különböző háromszögelése lehetséges és ezek közül hány olyan van, amelynél a sokszög csupa olyan háromszögre van felbontva, amelyek mindegyikének legalább egy közös oldala van magával a sokszöggel?

* Az 1956. évi verseny megrendezése 1957-re tolódott el, mivel meg kellett várnunk az egyetemi oktatás megindulását.

4. Jelölje $a(n)$ az n pozitív egész szám legnagyobb törzstényezőjét. Bebizonyítandó, hogy a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{na(n)}$$

sor konvergens.

5. Egy körön helyezkedjék el n pont, amelyek egymást páronként a távolságuk négyzetével fordított arányban taszítják. Bebizonyítandó, hogy a pontrendszer akkor és csak akkor van stabilis egyensúlyi állapotban, ha a pontok egy a körbe írt szabályos n-szög csúcsaiban helyezkednek el; másszóval tekintsünk n pontot egy körön és vizsgáljuk az n pontból kiválasztható $\binom{n}{2}$ pontpár távolságának reciprok összegét: ez az összeg akkor és csak akkor minimális, ha a pontok egy szabályos n-szög csúcsaiban fekszenek.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex poliéder minden lapja centrál-szimmetrikus, akkor a poliéder lapjainak száma páros.

7. Legyen a_n $(n = 0, 1, \ldots)$ egy valós számsorozat $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ és tegyük fel, hogy létezik az

$$s = \lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

határérték és megadható olyan C pozitív szám, hogy

$$|a_1| + 2|a_2| + \cdots + n|a_n| < Cn \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Bizonyítsuk be, hogy akkor

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_0^2 + s_1^2 + \cdots + s_n^2}{n+1} = s^2$$

8. Legyen a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ egy pozitív tagú számsorozat és tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ sor divergens. Legyen $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Bebizonyítandó, hogy létezik olyan pozitív tagú b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ számsorozat, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergens, és N minden értékére

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n > \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$$

9. Bebizonyítandó, hogy ha az $f(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu\vartheta$ trigonometrikus polinom a $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ intervallumban monoton fogyó, akkor a $g(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\vartheta$ trigonometrikus polinom ugyanabban az intervallumban nemnegatív.

10. Egy urnában N különböző színű golyó van, minden színből n darab golyó ($n \geqq 2$). Visszatevés nélkül húzunk az urnából addig, amíg először fordul elő, hogy olyan színű golyót húzunk ki, amely szín az előző húzások során már előfordult. Jelölje $\nu_{N,n}$ a végzett húzások számát és jelölje $M_{N,n}$ a $\nu_{N,n}$ valószínűségi változó várható értékét. Határozzuk meg a $\frac{\nu_{N,n}}{M_{N,n}}$ valószínűségi változó határeloszlását, ha $N \to +\infty$ és ugyanakkor n rögzített szám.

A verseny ez évben is sikeres volt. Összesen 23 dolgozat érkezett be, ezek közül 11-et talált a bizottság kiemelkedőnek. Sajnálattal állapította azonban meg a bizottság, hogy a 7. és 9. feladatra csak egy-egy nem teljes megoldás, a 10. feladatra pedig egyetlen helyes megoldás sem érkezett. A bizottság ebből a tényből arra következtet, hogy míg a geometriai, algebrai és az elemi analízisbe tartozó feladatok megoldása terén a helyzet megnyugtató, a felsőbb analízisbe tartozó feladatok megoldásában az egyetemi hallgatók kellő gyakorlattal nem rendelkeznek. A bizottság ezúton is felhívja az egyetemek matematikus oktatóinak figyelmét erre a tapasztalatra (amit az előző években rendezett Schweitzer-versenyek is alátámasztottak). Az analízisbe tartozó feladatok megoldásában való gyakorlat elsajátítására a legalkalmasabb segédeszköz Pólya György és Szegő Gábor kitűnő kétkötetes feladatgyűjteménye (Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Springer, Berlin, 1952, I—II.). A bizottság ezúton is az egyetemi hallgatóság figyelmébe ajánlja ezt az alapvető munkát.

A versenybizottság a dolgozatok elbírálásánál az eddigi szokáshoz híven nemcsak a megoldott feladatok számát, hanem a megoldás ötletességét, a kidolgozás szabatosságát, a versenyzőknek a kitűzött feladatokhoz fűzött, a megoldáson túlmenő megjegyzéseit is figyelembe vette. Mindezen szempontok gondos mérlegelése alapján a bizottság a következő határozatot hozta:

Az I. díjat megosztva Kántor Sándornak, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem IV. éves matematika-fizika szakos hallgatójának és Kovács Lászlónak, a debreceni Kossuth Lajos

Tudományegyetem III. éves matematika-fizika szakos hallgatójának ítélte oda és dolgozataikat 1000—1000 forinttal jutalmazta. A II. díjat megosztva GRÄTZER GYÖRGYnek, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem III. éves alkalmazott matematika szakos hallgatójának, HEPPES ALADÁRnak, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem V. éves alkalmazott matematika szakos hallgatójának és PAPP ZOLTÁNnak, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem III. éves matematika-fizika szakos hallgatójának ítélte oda és őket fejenként 500 forinttal jutalmazta. A III. díjat megosztva BÁRTFAI PÁLnak, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem II. éves matematika-fizika szakos hallgatójának, CSISZÁR IMRÉnek, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem I. éves fizikus hallgatójának és ZSOMBÓK ZOLTÁNnak, a budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Kara I. éves hallgatójának ítélte oda és őket könyvjutalomban részesítette.

Ezenkívül dícséretben és kisebb könyvjutalomban részesítette a Versenybizottság BICZÓ GÉZÁT, az Eötvös Loránd Tudományegyetem II. éves fizikus hallgatóját, DANCS ISTVÁNT, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem IV. éves matematika-fizika szakos hallgatóját és DÖMÖLKI BÁLINTOT, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem IV. éves matematika-fizika szakos hallgatóját.

A felsorolt kitüntetett versenyzők munkáját a Versenybizottság a következőképpen értékelte:

KÁNTOR SÁNDOR megoldotta az 1., 2., 3., 4., 5., 6. és 8. feladatokat, továbbá a 7. feladatra is beküldött egy hiányos bizonyítási vázlatot, amelynek alapgondolata azonban helyes. E feladattal a versenyzők közül csak ő foglalkozott. Különösen kiemelendő dolgozatából az 5. feladatra adott szellemes megoldása, továbbá a 6. feladat általánosítása. Feladatmegoldásait eredeti gondolkodásmód és intuició jellemzi; dolgozatának értékét azonban csökkenti, hogy a fogalmazás pontosságára és gondosságára nem helyezett kellő súlyt.

KOVÁCS LÁSZLÓ megoldotta az 1., 2., 3., 4., 5., 6. és 8. feladatokat. Kiemelendő dolgozatából a 4. és 6. feladat általánosítása. Feladatmegoldásaira a kitűnő matematikai érzék és a mintaszerűen szabatos fogalmazás jellemző.

GRÄTZER GYÖRGY megoldotta az 1., 2., 3., 5. és 6. feladatokat. Mindezekhez a feladatokhoz, de különösen a 6. feladathoz, figyelemre méltó megjegyzéseket és kiegészítéseket fűzött. A 8. feladatra adott megoldása nem teljes.

HEPPES ALADÁR megoldotta az 1., 3., 4., 5. és 6. feladatokat. Kiemelendők az 5. és 6. feladatokra adott szép bizonyításai, e fel-

adatok általánosításai és ezekhez fűzött kiegészítő megjegyzései. A megoldásokat példás világossággal fogalmazta meg.

PAPP ZOLTÁN megoldotta az 1., 2., 3., 4., 5., 6. és 8. feladatokat. Megoldásai világosak, szabatosak.

BÁRTFAI PÁL megoldotta a 2., 3., 4., 6. és 8. feladatokat.

CSÍSZÁR IMRE megoldotta az 1., 2., 3., 4., 6. és 8. feladatokat.

ZSOMBÓK ZOLTÁN megoldotta az 1., 2., 3., 4. és 6. feladatokat.

BICZÓ GÉZA megoldotta az 1., 2., 4. és 6. feladatokat. Érdekes a 2. feladathoz fűzött megjegyzése.

DANCS ISTVÁN megoldotta a 2., 3. és 4. feladatokat, ezenkívül a versenyzők közül egyedül ő kísérelte meg a 9. feladat megoldását. Bizonyításának alapgondolata helyes, azonban a bizonyítás során hibát követett el.

DÖMÖLKI BÁLINT megoldotta az 1., 2., 3. és 5. feladatokat, kiemelendő a 2. feladatra adott szép megoldása.

Még több más versenyző dolgozatában található 2—3 helyes megoldás. Az alábbiakban minden egyes feladat megoldásainak ismertetése után felsoroljuk azoknak a versenyzőknek a nevét, akik az illető feladatot megoldották.

A Versenybizottság:

CSÁSZÁR ÁKOS
HAJÓS GYÖRGY
RÉNYI ALFRÉD
SURÁNYI JÁNOS
TURÁN PÁL

A feladatok megoldásai:

1. feladat

Nyilvánvaló, hogy a

$$(1) \qquad \sum_{j=0}^{k} \binom{k+\alpha}{j} x_{k-j} = b_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható, ugyanis minden egyenlete eggyel több ismeretlent tartalmaz, mint a megelőző, az új ismeretlen együtthatója 1, vagyis x_s-et egyértelműen meghatározza $x_0, x_1, \ldots, x_{s-1}$ és az első egyenletből x_0 egyértelműen meghatározott ($x_0 = b_0$). Állítjuk, hogy az egyenletrendszer megoldása

$$(2) \qquad x_s = \sum_{t=0}^{s} (-1)^t \binom{\alpha+s}{t} b_{s-t} \qquad (s = 0, 1, \ldots, n)$$

Ezt úgy látjuk be, hogy x_s $(s=0, 1, \ldots, k)$ (2) alatti kifejezését az (1) alatti k-adik egyenletbe behelyettesítve $(k=0, 1, \ldots, n)$ és a fellépő kettős összegben összegyűjtve azokat a tagokat, amelyekben b_{k-r} szerepel, b_{k-r} együtthatója $\binom{k+\alpha}{r}\sum_{t=0}^{r}(-1)^t\binom{r}{t}$ lesz, ami $r=0$ esetén 1-gyel, $r>0$ esetén 0-val egyenlő.

GRÄTZER GYÖRGY

Megoldották még: BÁNKÖVI GYÖRGY, BICZÓ GÉZA, CSÍSZÁR IMRE, DÖMÖLKI BÁLINT, HEPPES ALADÁR, HORVÁTH JENŐ, JARABEK LAJOS, KÁNTOR SÁNDOR, KOVÁCS LÁSZLÓ, MARIK MIKLÓS, PAPP ZOLTÁN, QUITTNER PÁL, RÉVÉSZ PÁL, RÚZSA IMRE, TANKÓ JÓZSEF, ZSOMBÓK ZOLTÁN.

1. megjegyzés: KOVÁCS LÁSZLÓ megjegyzi, hogy ha az (1) egyenleteket k minden nemnegatív egész értékére tekintjük, vagyis egy *végtelen* egyenletrendszer megoldását keressük, ezt a megoldást szintén (2) szolgáltatja.

2. megjegyzés: A fent adott bizonyítás lényegében a megoldás *verifikálása*. A megoldás alakjára k kis értékeire explicite elvégezve a megoldást, könnyen rá lehet jönni. Adható azonban olyan megoldás is, a generátorfüggvény módszerével, amelyik szisztematikusan elvezet a végeredményhez, anélkül, hogy azt előre „ki kellene találni". A végtelen egyenletrendszert vizsgáljuk, ami az 1. megjegyzés szerint megengedett. Szorozzuk be az (1) egyenletet z^k-val $(|z|<1)$ és összegezzük az egyenleteket $k=0$-tól ∞-ig. Bevezetve a $B(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$ és $X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x_kz^k$ jelöléseket, nyerjük a binomiális sor felhasználásával a

$$B(z)=\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}X\left(\frac{z}{1-z}\right) \tag{3}$$

összefüggést, amelyből, bevezetve a $w=\frac{z}{1-z}$ új változót, nyerjük, hogy

$$X(w)=\frac{1}{(1+w)^{\alpha+1}}B\left(\frac{w}{1+w}\right). \tag{4}$$

(4) jobboldalán $\frac{w}{1+w}$ minden hatványát binomiális sorba fejtve és (4) két oldalán w^s együtthatóit összehasonlítva adódik (2).

3. megjegyzés: $x'_k = (-1)^k x_k$ és $b'_k = (-1)^k b_k$ jelöléssel az (1) és (2) kifejezések egymásba mennek át. Speciálisan, ha $\alpha = 0$ $b_k = a^k$, akkor $x_s = (a-1)^s$.

4. megjegyzés: GRÄTZER GYÖRGY és KOVÁCS LÁSZLÓ az 1. feladat bizonyos algebrai általánosításaival is foglalkoznak; ezeket itt nem ismertetjük.

2. feladat

Nyilván $\max(|1+z|, |1+z^2|)$ és $\max(|1+z|^2, |1+z^2|^2)$ a minimumát ugyanott veszi fel, ezért foglalkozhatunk az utóbbival. A feladat azon legkisebb $c > 0$ szám meghatározása, amelyre van olyan z, hogy $|1+z|^2 \leqq c^2$ és $|1+z^2|^2 \leqq c^2$. Nyilván $c \geqq 1$ (mert $z = 0$-ra $|1+z| = |1+z^2| = 1$).

Legyen $z = re^{i\varphi}$, akkor

(1) $|1+z|^2 = 1 + r^2 + 2r\cos\varphi$ és $|1+z^2|^2 = (1-r^2)^2 + 4r^2\cos^2\varphi$.

Az

(2) $$|1+z|^2 \leqq c^2 \text{ és } |1+z^2|^2 \leqq c^2$$

egyenlőtlenségekből (1) segítségével következnek a

(2′) $$\cos^2\varphi \geqq \frac{(r^2+1-c^2)^2}{4r^2} \text{ és } \cos^2\varphi \leqq \frac{c^2-(1-r^2)^2}{4r^2}$$

egyenlőtlenségek. Ahhoz tehát, hogy létezzék a (2) feltételeknek eleget tevő z, kell hogy

(3) $$(r^2+1-c^2)^2 \leqq c^2-(1-r^2)^2$$

teljesüljön, vagyis fennálljon a

(3′) $$2r^4 - 2r^2c^2 + (c^4 - 3c^2 + 2) \leqq 0$$

egyenlőtlenség. (3′)-nek pozitív r^2 szám csak akkor tehet eleget, ha

(4) $$c^4 - 6c^2 + 4 \leqq 0.$$

Ha tehát a (2) egyenlőtlenség valamely z-re fennáll, akkor kell hogy (4) teljesüljön. A legkisebb (4)-nek eleget tevő érték $c = \sqrt{3-\sqrt{5}}$.

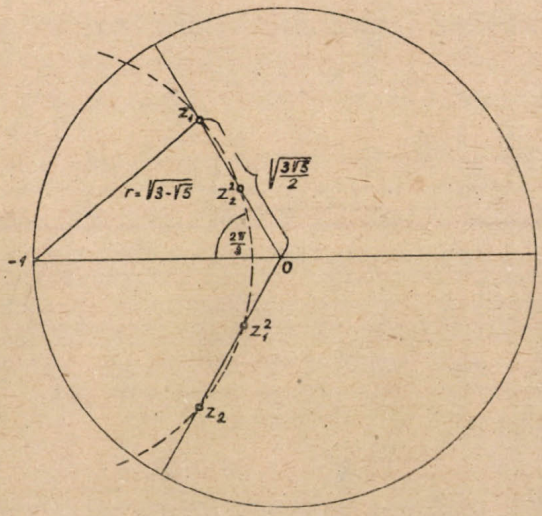
Tehát bármely z-re $\max(|1+z|, |1+z^2|) \geqq \sqrt{3-\sqrt{5}}$.

Azonban, ha $z = z_1 = re^{i\varphi}$ vagy $z = z_2 = re^{2i\varphi}$, ahol $r = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ és $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, akkor $|1+z| = |1+z^2| = \sqrt{3-\sqrt{5}}$ (l. az 1. ábrát).

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\min_z \max(|1+|z|, |1+z^2|) = \sqrt{3-\sqrt{5}}$.

BÁRTFAI PÁL.

Megoldották még: BÁNKÖVI GYÖRGY, BICZÓ GÉZA, CSÍSZÁR IMRE, DANCS ISTVÁN, DÖMÖLKI BÁLINT, GRÄTZER GYÖRGY, KÁNTOR SÁNDOR, KIRÁLYFALVI LÁSZLÓ, KOVÁCS LÁSZLÓ, PAPP ZOLTÁN, QUITTNER PÁL, RÉVÉSZ PÁL, ZSOMBÓK ZOLTÁN.



1. ábra

1. megjegyzés: A fenti bizonyítás nem tételezi fel eleve, hogy a feladatnak van megoldása; ez a bizonyításból adódik. Több versenyző azonban azzal kezdte, hogy bebizonyította, hogy a feladatnak van megoldása, felhasználva WEIERSTRASS nevezetes tételét, hogy zárt tartományban folytonos függvény felveszi a minimumát. A tétel alkalmazása előtt persze rá kell mutatni, hogy eleve szorítkozhatunk a $|z| \leqq \sqrt{2}$ körre, ugyanis, ha $|z| > \sqrt{2}$, akkor $|z^2+1| \geqq 1$.

2. megjegyzés: A fenti bizonyítás során csak a végeredményből konstatáljuk, hogy azon z-kre, amelyekre $\max(|1+z|, |1+z^2|) = \sqrt{3-\sqrt{5}}$ fennáll, hogy $|1+z| = |1+z^2|$. Több versenyző rámutatott, hogy ezt előre lehet látni. ZSOMBÓK ZOLTÁN ezt

úgy bizonyítja, hogy $|1+z|$ és $|1+z^2|$ a maximum-elv miatt egy összefüggő tartományban 0-tól különböző minimumukat csak a tartomány kerületén vehetik fel, és így, ha egy olyan z_0 pontra, amelyre $\max(|1+z|, |1+z^2|)$ minimális $|1+z_0|<|1+z_0^2|$ volna, akkor z_0-nak megadható volna egy olyan környezete, amelyben ez az egyenlőtlenség mindenütt teljesül, és ennek kerületén olyan pont, amelyre $|1+z_1|^2<|1+z_0|^2$, $|1+z_1|<|1+z_0|^2$, vagyis ellentmondásra jutnánk. Hasonlóképpen $|1+z_0^2|<|1+z_0|$ is ellentmondásra vezet.

3. megjegyzés: PAPP ZOLTÁN rámutatott, hogy $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ az egységkörbe írt szabályos tízszög oldalhosszúsága.

4. megjegyzés: BICZÓ GÉZA megjegyzi, hogy a feladat megoldásában szereplő z_1 egyben minimizálja $\max(|1+z^2|, |z^2-z|, |1+z|)$ értékét is. Felveti a problémáknak a következő általánosítását: ha $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$ megadott polinomok, meghatározandó $\max\{|\varphi_i(z)-\varphi_j(z)|, i\neq j, i, j=1, 2, \ldots, n\}$ minimuma. A 2. feladat tekinthető ezen általános proléma speciális esetének $n=3$ $\varphi_1(z)=z$, $\varphi_2(z)=z^2$, $\varphi_3(z)\equiv -1$ esetén. (A feladat kézenfekvőbb általánosításaira vonatkozólag lásd TURÁN PÁL „Az analízis egy új módszeréről és annak egyes alkalmazásairól", Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951. című könyvét.)

3. feladat

A különböző háromszögelések összeszámolását mindkét esetben a következő módon végezzük: Kiválasztjuk a sokszög egyik oldalát. Erre az oldalra minden háromszögelésnél támaszkodik háromszög. Rögzítsük e háromszög egyik lehetséges helyzetét és számoljuk össze azokat a háromszögeléseket, amelyek ezt a háromszöget változatlanul hagyják, majd rögzítsük a háromszöget máshogy, ismét számoljuk össze az ezt tartalmazó háromszögeléseket, s. í. t. Ha végigmegyünk a kiválasztott oldalra támaszkodó összes lehetséges háromszögön, akkor minden háromszögelést összeszámoltunk és mindegyiket pontosan egyszer.

Először a feladat második részére válaszolunk.

Tekintsünk egy konvex n-szöget és nevezzük ennek egyik oldalát „alap"-nak. Számoljuk össze, hogy e sokszögnek hány olyan háromszögelése lehetséges, amelyben minden háromszög tar-

talmazza a sokszög az alaptól különböző oldalát. Jelöljük ezt a számot u_n-nel. Látnivaló, hogy az alapra csak kétféleképpen támaszkodhat olyan háromszög, amely az alaptól különböző oldalt is tartalmaz. E háromszög elhagyásával keletkező $(n-1)$-szöget úgy kell tovább darabolnunk, hogy minden háromszög tartalmazza az eredeti sokszög egy oldalát, tehát az új sokszög az új alaptól különböző oldalát. Fenti jelölésünk szerint az ilyen háromszögelések száma u_{n-1}. Így tehát $u_n = 2u_{n-1}$. Minthogy $u_3 = 1$, így $u_n = 2^{n-3}$.

Ezután rátérhetünk a feladatra: Válasszuk ki az adott konvex n-szög egyik oldalát és jelöljük a sokszög nem ezen az oldalán fekvő csúcsait $C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}$-vel. Kössük össze a választott oldal végpontjait C_k-val $(k = 1, 2, \ldots, n-2)$. Az így keletkezett háromszög az eredeti n-szöget egy $(k+1)$- és egy $(n-k)$-szögre vágja. Mindkét részsokszöget háromszögelnünk kell, úgy, hogy minden háromszög tartalmazza az n-szög valamelyik oldalát. Nevezzük e sokszögeknek a kiválasztott élre támaszkodó háromszöggel közös oldalát alapnak. A két részsokszöget egymástól függetlenül, összesen tehát $u_{n-k} \cdot u_{k+1} = 2^{n-5}$-féleképpen háromszögelhetjük, a képlet azonban nyilván csak $1 < k < n-2$ esetén érvényes; $k = 1$ és $k = n-2$-nél helyette 2^{n-4} a helyes eredmény. Mindezt k szerint összegezve nyerjük, hogy egy konvex n-szög kívánt tulajdonságú háromszögeléseinek száma

$$(n-4) \cdot 2^{n-5} + 2 \cdot 2^{n-4} = n \cdot 2^{n-5} \qquad (n \geqq 4).$$

Most áttérünk a feladat első részére: Jelöljük a_n-nel egy konvex n-szög összes háromszögeléseinek számát. Tekintsünk egy konvex n-szöget, válasszuk ki egyik oldalát, majd innen elindulva a kerületen jelöljük az ezen az oldalon fekvő csúcsokat C_k-val $(k = 1, 2, \ldots, n-2)$. A kiválasztott oldal végpontjait C_k-val összekötve olyan háromszöget nyerünk, amely eredeti sokszöget egy $k+1$ és egy $n-k$-szögre bontja szét. E két részsokszöget egymástól függetlenül háromszögelhetjük, az egész sokszöget tehát — a felvett háromszög rögzítése mellett — $a_{k+1} \cdot a_{n-k}$-féleképpen. A k szerinti összegezés rekurzív formulát ad, amely — bevezetve az $a_2 = 1$ jelölést, — a következő alakban írható fel:

$$(1) \qquad a_n = \sum_{k=1}^{n-2} a_{k+1} \cdot a_{n-k}.$$

Írjuk most a_k helyébe b_{k-1}-et és képezzük a $B(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ hatványsor négyzetét:

$$B^2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} \right)$$

ez azonban az (1)-nek megfelelő

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} \tag{1'}$$

képlet szerint a

$$B^2(z) - B(z) + z = 0$$

egyenletre vezet. Ezt megoldva és a $b_0 = 0$-nak megfelelő „gyököt" sorbafejtve

$$B(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \binom{\frac{1}{2}}{k} 2^{2k-1} z^k,$$

amiből

$$a_n = b_{n-1} = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}.$$

HEPPES ALADÁR.

Megoldották még: CSISZÁR IMRE, GRÄTZER GYÖRGY, KÁNTOR SÁNDOR, KOVÁCS LÁSZLÓ, PAPP ZOLTÁN, ZSOMBÓK ZOLTÁN.

1. megjegyzés: KÁNTOR SÁNDOR, KOVÁCS LÁSZLÓ és PAPP ZOLTÁN rámutatnak arra, hogy a feladat első részét EULER 1751-ben Goldbachhoz írt levelében vetette fel mint kérdést, és később ő maga is megadta egy konvex n-szög összes lehetséges háromszögeléseinek számát $a_n = \prod_{\nu=3}^{n} \frac{4\nu-10}{\nu-1}$ alakban, továbbá, hogy SEGNER ANDRÁS is foglalkozott ezzel a problémával.

2. megjegyzés: KÁNTOR SÁNDOR és ZSOMBÓK ZOLTÁN az $a_n = \prod_{\nu=3}^{n} \frac{4\nu-10}{\nu-1}$ képletet közvetlenül bizonyítják be teljes indukcióval úgy, hogy kimutatják, hogy $a_n = \frac{4n-10}{n-1} a_{n-1}$.

4. feladat

Az $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{na(n)}$ sort részsorokra bontjuk, egy-egy részsorba sorolva azokat a tagokat, amelyekben $a(n)$ értéke ugyanaz. Így S az $S_p = \frac{1}{p} \sum_{a(n)=p} \frac{1}{n}$ (p primszám) részsorok összegeként áll elő. S konvergenciájának igazolásához (pozitív tagú sorokról lévén szó)

elegendő kimutatnunk azt, hogy az S_p részsorok külön-külön konvergensek és az összegeikből alkotott $\sum_p S_p$ sor is konvergens.

Az egyes S_p részsorok nyilvánvalóan konvergensek és összegük $S_p = \frac{1}{p^2} \prod_{q \leqq p} \frac{q}{q-1}$, ahol q a p-nél nem nagyobb törzsszámokon fut végig.

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$S_p < 2p^{-\frac{3}{2}}. \tag{1}$$

Ez az egyenlőtlenség $p = 2$-re közvetlenül belátható; legyen p_k a nagyság szerinti k-adik primszám, tegyük fel, hogy (1) érvényességét $p = p_{k-1}$-ig már igazoltuk, s megmutatjuk, hogy ekkor p_k-ra is érvényes. Nyilvánvaló, hogy $2p_k - 1 < 2p_k < p_k(p_k - p_{k-1})$ átrendezve $(p_k-1)^2 > p_k p_{k-1}$, négyzetgyököt vonva $p_k - 1 > \sqrt{p_k p_{k-1}}$. Az indukciós feltevés szerint

$$S_{p_k} = \frac{p_{k-1}^2}{p_k^2} \frac{p_k}{p_k - 1} S_{p_{k-1}} < \frac{p_{k-1}^2}{p_k(p_k-1)} \cdot 3p_{k-1}^{-3/2}$$

$p_k - 1$ helyébe $\sqrt{p_k p_{k-1}}$-et írva tovább növeljük a jobboldalt:

$$S_{p_k} < \frac{p_{k-1}^2}{p_k \sqrt{p_k p_{k-1}}} \cdot 2p_{k-1}^{-3/2} = 2p_k^{-3/2}.$$

Eszerint a pozitív tagú $\sum_{p=2}^{\infty} S_p$ sor tagonként kisebb a konvergens $\sum_{p=2}^{\infty} 2p^{-\frac{3}{2}}$ sornál s így maga is konvergens. Ezzel egyszersmind S konvergenciáját is bebizonyítottuk.

Ugyanez a meggondolás igazolja tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (a(n))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ konvergenciáját is.

KOVÁCS LÁSZLÓ.

Megoldották még: BÁRTFAI PÁL, BICZÓ GÉZA, CSÍSZÁR IMRE, DANCS ISTVÁN, DOMINYÁK IMRE, HEPPES ALADÁR, KÁNTOR SÁNDOR, PAPP ZOLTÁN, QUITTNER PÁL, TANKÓ JÓZSEF, ZSOMBÓK ZOLTÁN.

1. megjegyzés: Ha felhasználjuk MERTENS nevezetes képletét, amely szerint

$$\prod_{q \leqq x} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\log x},$$

ahol q a törzsszámokon fut végig és C az Euler-féle állandó, azt is ki lehet mutatni, hogy $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(a(n))^{\alpha}}$ konvergál, nemcsak $\alpha > \frac{1}{2}$-re, mint azt KOVÁCS LÁSZLÓ megmutatta, hanem minden $\alpha > 0$-ra, sőt, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log a(n))^{\alpha}}$ is konvergens, ha $\alpha > 1$. Még ennél is több igaz. ERDŐS PÁL rámutatott, hogy ha $f(n)$ tetszőleges pozitív és monoton növekvő függvény, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nf(a(n))}$, akkor és csak akkor konvergál, ha $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nf(n)}$ konvergens.

5. feladat

1. megoldás: A feladat állításán túlmenően be fogjuk bizonyítani, hogy egy körön levő n különböző pont közt fellépő $\binom{n}{2}$ távolság aritmetikai közepe (A), harmonikus közepe (H) és geometriai közepe (G), akkor legnagyobb, ha a pontok egy szabályos n-szög csúcsai. Jelöljünk ki m pontot a körön. Nevezzük k-adrendű m-szögnek azt a sokszöget, amelyet úgy kapunk, hogy elindulva a kijelölt pontok egyikéből, azt a körön sorba haladva a k-adik rákövetkező csúccsal kötjük össze. Ha feltesszük, hogy k és m relatív prímek, akkor a sokszög csak akkor záródik, ha minden pontot felhasználtunk [k-adrendű m-szög egyben $m-k$-adrendű is].

Bebizonyítjuk, hogy egy k-adrendű m-szög oldalainak számtani, mértani, ill. harmónikus közepe akkor maximális, ha csúcsai egy szabályos m-szög csúcsaival esnek egybe.

Tekintsünk ugyanis egy körívet és annak egy belső pontját. E pontnak a körív végpontjaitól mért távolságainak összege akkor a legnagyobb, ha a pont a körív felezőpontja. (Ez pl. abból következik, hogy az ív végpontjai, mint fókuszok köré írt és a felezőponton átmenő ellipszis tartalmazza az egész körívet és csak egy közös pontja van vele.) Hasonlóképpen e két távolság szorzata is akkor maximális, ha a pont a felezőpontban van, ugyanis e pont és az ív végpontjai által meghatározott háromszög területe — amely épp a vizsgált távolságok szorzatával arányos, hiszen a közbezárt szög állandó — ekkor maximális.

Ezekután az ismert $A \geqq G \geqq H$ egyenlőtlenségből, illetve abból, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a távolságok egyenlőek, következik, hogy e két távolság harmonikus közepe is akkor maximális, ha a pont az ív felezőpontja.

Tekintsünk most egy k-adrendű m-szöget. Ha csúcsai nem esnek egybe egy szabályos m-szög csúcsaival, akkor van olyan csúcsa, amelyből különböző hosszúságú oldalak indulnak ki, következésképp nem lehet maximuma az oldalak említett közepeinek, hiszen ha e csúcsot a vele összekötöttek meghatározta ív felezőpontja felé eltoljuk, mindhárom középérték nő.

Fentiek közvetlen következménye, hogy egy körön levő n különböző pont közt fellépő távolságok szorzata, összege és reciprokösszegének reciprok értéke akkor maximális, ha az n pont egy szabályos n-szög csúcsait képezi. Minden teljes sokszöget felbonthatunk ugyanis k-adrendűekre $\left(k \leqq \frac{n}{2}\right)$; a fellépő távolságok összege (reciprokösszege) az egyes k-adrendű összetevő sokszögekben fellépő távolságok összegének (reciprokösszegének) összege és a távolságok szorzata az egyes összetevő sokszögekben fellépő távolságok szorzatának szorzata. Minthogy szabályos n-szög esetében valamennyi összetevőben a távolságösszeg és szorzat maximális, a reciprokösszeg pedig minimális, ugyanez áll a teljes sokszögre is, azaz a fellépő távolságok számtani, mértani és harmonikus közepe a szabályos sokszög esetében maximális.

HEPPES ALADÁR

2. megoldás: (KÁNTOR SÁNDOR megoldásának átfogalmazása):

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ egy az egységkörbe írt n-oldalú A konvex sokszög egymás után következő csúcsai. Legyen B az a sokszög, amelynek csúcsai az $\overset{\frown}{A_1A_2}, \overset{\frown}{A_2A_3}, \ldots, \overset{\frown}{A_nA_1}$ körívek $B_1, B_2, \ldots, B_n$ felezőpontjai. Először azt bizonyítjuk be, hogy a B sokszög csúcsai távolságának reciprok összege kisebb vagy egyenlő, mint az A sokszög csúcsai távolságainak reciprok összege. Ezt úgy lehet belátni, hogy ha az $\overset{\frown}{A_kA_l}$ ív hossza ϑ_k és $|PQ|$ jelöli a P és Q pontok távolságát, és $A_{n+1} = A_1$, akkor a JENSEN-féle egyenlőtlenség szerint

$$\frac{1}{|B_kB_l|} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\vartheta_k - \vartheta_l + \vartheta_{k+1} - \vartheta_{l+1}}{4}\right)} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin\frac{\vartheta_k - \vartheta_l}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\vartheta_{k+1} - \vartheta_{l+1}}{2}}\right) = \frac{\frac{1}{|A_kA_l|} + \frac{1}{|A_{k+1}A_{l+1}|}}{2}$$

és így

$$\sum_{1\leqq k<l\leqq n}\sum \frac{1}{|B_kB_l|} \leqq \sum_{1\leqq k<l\leqq n}\sum \frac{1}{|A_kA_l|}$$

és egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha k és l minden értékére $\vartheta_k - \vartheta_l = \vartheta_{k+1} - \vartheta_{l+1}$, vagyis ha a sokszög szabályos. Tehát $\sum\sum \frac{1}{|A_kA_l|}$ csak akkor lehet minimális, ha a sokszög szabályos.

Megoldották még: DANCS ISTVÁN, DOMINYÁK LAJOS, DÖMÖLKI BÁLINT, GRÄTZER GYÖRGY, JARABEK LÁSZLÓ, KOVÁCS LÁSZLÓ, PAPP ZOLTÁN.

1. megjegyzés: Mindkét fenti bizonyításból hiányzik annak igazolása, hogy a szóbanforgó reciprokösszegnek ténylegesen van minimuma (ill. az 1. megoldásból hiányzik annak igazolása, hogy a távolságok összegének, ill. szorzatának van maximuma). Ez a hiány azonban könnyen pótolható, ugyanis egy, az egységkörbe írt n-szög csúcsai távolságának számtani, mértani és harmonikus közepe a csúcspontoknak n-változós folytonos függvénye és így WEIERSTRASS tétele biztosítja a maximum létezését.

2. megjegyzés: KÁNTOR SÁNDOR fenti bizonyításához hozzáfűzi azt a megjegyzését, hogy ha azt az eljárást, ahogyan az A sokszögből a B sokszöget nyerjük (az ívek felezésével) minden határon túl folytatjuk, határértékben szabályos sokszöget nyerünk. Ez az állítás lényegében azt jelenti, hogy ha az $M = (m_{ik})$ n-edrendű négyzetes matrix elemei $m_{ii} = m_{i,i+1} = \frac{1}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $m_{nn} = m_{n1} = \frac{1}{2}$ és a többi $m_{ik} = 0$; akkor $N \to \infty$-re M^N konvergál ahhoz az M^* matrixhoz, amelynek összes elemei $\frac{1}{n}$-nel egyenlők. Ez az állítás a Markov-láncok elméletéből jólismert Markov-féle tétel speciális esete. Ugyanis M ún. *duplán sztochasztikus matrix* (lásd RÉNYI ALFRÉD „Valószínűségszámítás", 543 és 582. o.). Egyébként az állítás közvetlenül is belátható, úgyanis M^N i-edik sorának j-edik eleme

$$m_{ij}^{(N)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1+\omega^k}{2}\right)^N \omega^{-k(j-i)},$$

ahol $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ és így mivel $\omega^0 = 1$ és $\left|\frac{1+\omega^k}{2}\right| < 1$, ha $k = 1, 2, \ldots, N$, látható, hogy

$$\lim_{N\to\infty} m_{ij}^{(N)} = \frac{1}{n} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

3. megjegyzés: GRÄTZER GYÖRGY és még többen mások is megjegyzik, hogy a feladatot a geometriai megfogalmazásban bizonyították be, a fizikai megfogalmazás tulajdonképpen többet kíván: a reciprokösszegnek nemcsak az abszolút, hanem a relatív minimumainak megkeresését. A versenybizottság ezzel kapcsolatban megjegyzi, hogy a feladat megfogalmazásából kitűnik, hogy a geometriai megfogalmazásban oldandó meg a feladat, a fizikai megfogalmazást csak az érdeklődés növelése céljából bocsátottuk előre. Egyébként azt sem nehéz belátni, hogy lokális minimum sincs más, mint a szabályos sokszögnek megfelelő abszolút minimum; ha ugyanis a fenti 2. megoldásban a B sokszöget nem az $\widehat{A_k A_{k+1}}$ ívek felezésével, hanem $\theta : 1-\theta$ arányban való osztással származtatjuk, akkor is igaz, hogy B csúcsai távolságainak reciprokösszege kisebb, mint az A csúcsaira vonatkozó összeg, kivéve, ha A szabályos, és θ értéket tetszőleges kicsinynek választva, következik, hogy relatív minimum sincs más, mint a szabályos sokszög.

6. feladat

1. megoldás: Fektessük a poliédert egyik lapjával az asztalra. Válasszuk ki ennek az L lapnak tetszőleges **a** élét és tekintsük a poliéder összes **a**-val párhuzamos éleit. Legyen ezek közül a legmagasabban (azaz L-től legtávolabb) fekvő él (ha több ilyen van, akkor az egyik ilyen él) **a'**.

Figyeljük meg az **a'**-t alkotó lapokat: ezen lapok a centrálszimmetria szerint **a'**-nek megfelelő élei (mint **a'**-vel s így **a**-val is párhuzamos élek) nem lehetnek **a'**-nél magasabban. Így a lapok konvexitása miatt e lapok egyetlen pontja sem lehet **a'**-nél magasabban. Ebből a poliéder konvexitása miatt tovább következik, hogy a poliéder egyetlen pontja sem lehet **a'**-nél magasabban, hiszen a poliéder e lapok síkjai alatt tartozik elhelyezkedni (azaz e síkoknak ugyanazon oldalán, amelyen L van).

Legyen továbbá **b** az L lapnak egyik **a**-hoz csatlakozó éle. Válasszuk ki **b'**-t **b**-hez ugyanúgy, ahogy **a'**-t választottuk **a**-hoz; nyilván **b'**-re is igaz, hogy a poliéder egyetlen pontja sem lehet

b′-nél magasabban. Így **a**′ és **b**′ egy magasságban: egy síkban vannak. Az elmondottak szerint a poliéder nem nyúlhat e sík fölé, de azzal két (nem azonos) szakaszban érintkezik, s így a konvexitás miatt kell hogy a poliéder egy L' lapja e síkban legyen.

A konstrukció szerint L és L' párhuzamosak, s a poliédernek (konvex volta miatt) több L-lel párhuzamos lapja nem lehet. L tetszőleges volt: a poliéder lapjait tehát párhuzamos párokba tudjuk sorolni, méghozzá egyértelműen, s így a lapok száma biztosan páros.

KOVÁCS LÁSZLÓ

2. megoldás: A feladat állításán túlmenően be fogjuk bizonyítani, hogy egy a fenti feltételt kielégítő poliéder lapjai páronként párhuzamosak és egybevágók, azaz a poliéder centrálszimmetrikus.

Legyen **a** a poliéder egyik éle. Húzzuk meg **a** felezőpontjából kiindulva az **a**-hoz csatlakozó lapok súlyvonalait. A lapok centrálszimmetriája folytán e súlyvonalak másik végpontja egy-egy **a**-val párhuzamos és egyenlő nagyságú él felezőpontja. E felezőpontokból ismét húzzuk meg a csatlakozó lapok súlyvonalait és folytassuk ezt az eljárást, amíg új súlyvonalakat nyerünk. Az eljárás végeztével egy zárt, önmagát nem metsző poligont nyerünk a poliéder határán. (A poligon önmagába visszatér, hiszen véges sok lépéssel keletkezik és nem szakad meg, de önmagát nem metszi, mert bármely lapon csak egyszer haladhat át.) Nevezzük ezt a poligont **a**-körnek. Tekintsük most az **a** élhez csatlakozó F_1 lapnak egy **a**-val nem párhuzamos **b** élét. Fentiekhez hasonlóan készítsük el a **b**-kört is. Minthogy a poliéder konvex, egyben egyszeresen összefüggő is, tehát az **a**- és **b**-kör metszéspontjainak száma páros. Az **a**-kör metszi a **b**-kört F_1 centrumában, ezért kell hogy a két körnek legyen további metszéspontja. Jelöljük F_1'-vel azt a lapot, amelynek centrumában egy másik metszéspont van. Minthogy az **a** kör **a**-val, a **b**-kör **b**-vel párhuzamos oldalakat köt össze, F_1'-nek van mind **a**-val, mind **b**-vel párhuzamos oldala, tehát F_1-gyel párhuzamos; a poliéder konvexitásából következik, hogy több F_1-gyel párhuzamos lap, tehát a két „kör"-nek több metszéspontja nem lehet. Ebből pedig az adódik, hogy bármely két oldalából indulunk is ki F_1-nek, ezen oldalakhoz tartozó „körök" F_1' középpontjában találkoznak, tehát F_1'-nek legalább annyi oldala van, mint F_1-nek. A két lap szerepe szimmetrikus, tehát oldalszámuk megegyezik. A lapok konvexitása folytán az egyes oldalak állásszögük által egyértelműen meghatározott sorrendben kell hogy kövessék egymást. F_1 és F_1' oldalai irány és nagyság szerint páronként egyenlőek, szükségképpen e két lap egybevágó.

Nyilván bármely párhuzamos és egybevágó lappárnak szimmetriacentruma a középpontjaikat összekötő szakasz felezőpontja. Ki fogjuk mutatni, hogy e szimmetriacentrumok egybeesnek.

Tekintsük az **a**-kör vetületét egy, az **a**-ra merőleges síkon. E vetület olyan konvex poligon, amelynek oldalai — mint páronként párhuzamos és egybevágó lapok vetületei — páronként párhuzamosak és egyenlőek. Következésképpen az **a**-kör vetülete szimmetrikus egy C pontra nézve. Ebből — visszatérve a térbe — az következik, hogy az **a**-körhöz tartozó lappárok szimmetriacentrumai a C ponton áthaladó és **a**-val párhuzamos egyenesen vannak, és hogy szomszédos lapok párhuzamos párjai is szomszédosak.

Legyen C, az F_1 és F_1'-höz, C_2 az F_2 és F_2'-höz tartozó centrum, **a**′ pedig F_1' és F_2' közös éle. Minthogy C_1 és C_2 a C-n áthaladó **a**-irányú egyenesen van, mindkettő **a**′-be tükrözi az **a** élt. Az **a** és **a**′ élpárnak azonban csak egy szimmetriacentruma lehet, tehát C_1 és C_2 megegyezik. Ebből azonban már következik, hogy C_1 az egész poliédernek centruma, hiszen bármely két szomszédos lappár centruma ugyanaz.

HEPPES ALADÁR

Megoldották még: BÁRTFAI PÁL, BICZÓ GÉZA, CSERNYÁK LÁSZLÓ, CSÍSZÁR IMRE, DURST ENDRE, GRÄTZER GYÖRGY, KÁNTOR SÁNDOR, PAPP ZOLTÁN, RUZSA IMRE, ZSOMBÓK ZOLTÁN.

A poliéder centrálszimmetriáját is kimutatták: GRÄTZER GYÖRGY, CSÍSZÁR IMRE és KOVÁCS LÁSZLÓ.

Megjegyzések: E feladathoz a versenyzők különösen sok figyelemre méltó megjegyzést fűztek.

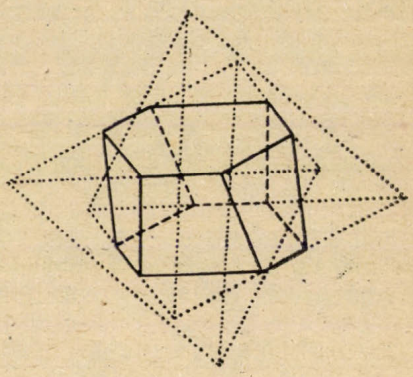
1. (HEPPES ALADÁR megjegyzései):

a) Ellenkező irányú tétel nem érvényes: a poliéder centrálszimmetriájából ugyanis még az sem következik, hogy a lapok páros oldalszámúak. A lapok centrálszimmetriája még akkor sem következik, ha a poliéder centrálszimmetriáján kívül azt is feltesszük, hogy a lapok páros oldalszámúak. Tekintsünk ugyanis egy szabályos tetraédert és tükrözzük ezt a súlypontja és egyik lapjának súlypontja közti szakasz egy belső pontjára. E két tetraéder közös része centrálszimmetrikus, két egybevágó hatszög és hat egybevágó, egyenlőszárú trapéz határolja (2. ábra).

b) A lapokról csupán a páros oldalszámot feltenni a centrálszimmetria helyett kevés ahhoz, hogy a poliéder páros oldalszámú legyen. Ezt mutatja a következő példa: Vágjunk ketté egy szabályos oktaédert valamelyik éle felezőpontjában emelt merőleges síkkal, majd a metsző síkban levő oktaéder-testátlóra merőleges

síkokkal vágjuk le egy-egy csúcsát. A keletkező poliédernek nyolc négyszög és egy hatszög lapja van és nyilván nem centrálszimmetrikus (3. ábra).

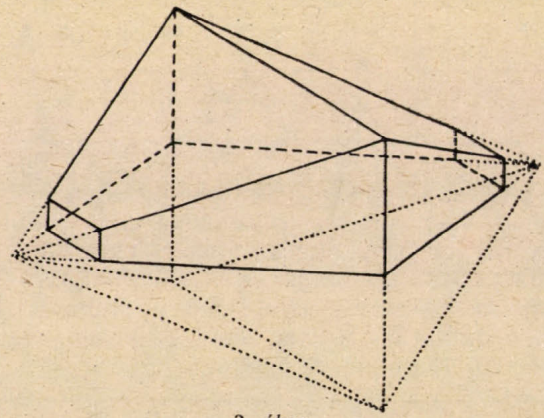
2. (GRÄTZER GYÖRGY és KÁNTOR SÁNDOR megjegyzése): A feladat állítása akkor is igaz, ha csak azt tesszük fel, hogy a poliéder konvex s lapjai olyan páros oldalszámú sokszögek, amelyeknél a szemközti oldalak párhuzamosak.



2. ábra

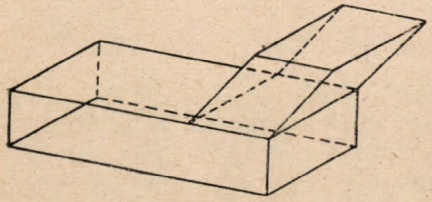
3. (GRÄTZER GYÖRGY és HEPPES ALADÁR megjegyzése): Ha a feladat feltételei közül a poliéder konvexitását elhagyjuk (de feltesszük, hogy a poliéder a gömbbel homeomorf), akkor a feladat állítása nem érvényes. GRÄTZER GYÖRGY példáját a 4. ábra mutatja. HEPPES ALADÁR példáját pedig az 5. ábra.*

4. A feladat állításának az az erősebb alakja, hogy a poliéder maga is centrálszimmetrikus, A. D. ALEXANDROVtól származik (lásd A. D. ALEXANDROV, Vüpuklie mnogogranniki, Moszkva).

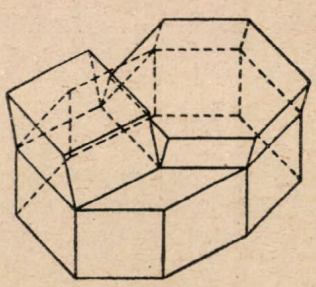


3. ábra

* Grätzer György példájának az a „szépséghibája", hogy a poliédernek van olyan éle, amelyhez három lap illeszkedik.



4. ábra



5. ábra

7. feladat

1. megoldás: (KÁNTOR SÁNDOR bizonyítás-vázlatának kiegészített alakja):

Legyen

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \tag{1}$$

akkor

$$s_n - \sigma_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k a_k}{n+1} \tag{2}$$

és így a

$$\sum_{1}^{n} k|ak| < Cn \tag{3}$$

feltétel miatt $|s_n - \sigma_n|$ korlátos, tehát $|s_n|$ is korlátos, hiszen σ_n konvergens, tehát korlátos. Legyen továbbá

$$\sigma_n^{(2)} = \frac{s_0^2 + s_1^2 + \cdots + s_n^2}{n+1} \tag{4}$$

akkor egyszerű számolással belátható, hogy

$$\sigma_n^{(2)} - (\sigma_n)^2 = \frac{1}{2(n+1)^2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (s_i - s_j)^2. \tag{5}$$

Kimutatjuk, hogy az s_n sorozat „majdnem konvergens" s-hez, vagyis, hogy ha ε tetszőleges pozitív szám és $N_n(\varepsilon)$ jelöli az $s_0, s_1, \ldots, s_n$ számok közül azok számát, amelyekre $|s_k - s| > \varepsilon$,

akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(\varepsilon)}{n} = 0$.* (5) alapján ebből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} (\sigma_n^{(2)} - (\sigma_n)^2) = 0$, tehát, hogy $\sigma_n^{(2)} \to s^2$ ha $n \to \infty$. Ugyanis, ha $|s_n| \leqq A$ $(n = 1, 2, \ldots)$ akkor (5) szerint $|\sigma_n^{(2)} - (\sigma_n)^2| \leqq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{N_n(\varepsilon)}{n+1}$.

s_n „majdnem-konvergenciáját" indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy s_n nem „majdnem konvergens" s-hez. Jelölje $N_n^+(\varepsilon)$ azon s_k $(k \leqq n)$ számok számát, amelyekre $s_k > s + \varepsilon$ és $N_n^-(\varepsilon) = N_n(\varepsilon) - N_n^+(\varepsilon)$ azon s_k $(k \leqq n)$ számok számát, amelyekre $s_k < s - \varepsilon$. Feltevésünk szerint megadhatók olyan $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ számok és egy végtelenhez tartozó n_k sorozat, hogy $N_{n_k}(\varepsilon) > 2\delta(n_k + 1)$; akkor tehát az $N_{n_k}^+(\varepsilon) > \delta(n_k + 1)$ és $N_{n_k}^-(\varepsilon) > \delta(n_k + 1)$ egyenlőtlenségek közül az egyik végtelen sok k-ra teljesül. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy minden k-ra $N_{n_k}^+(\varepsilon) > \delta(n_k + 1)$ teljesül. Mármost könnyen belátható, hogy ha $s_m \geqq s + \varepsilon$ és $s_l < s$ $(l > m)$, akkor

$$(6) \qquad \varepsilon \leqq s_m - s_l = -\sum_{k=m+1}^{l} a_k \leqq \sum_{k=m+1}^{l} |a_k|.$$

Mármost, ha a $0, 1, \ldots, n_k$ számok közül legalább $\delta(n_k + 1)$ olyan m szám van, amelyre $s_m > s + \varepsilon$, akkor ezen m számok közül legalább $\frac{\delta}{2}(n_k + 1)$ nagyobb, mint $\frac{\delta}{2}(n_k + 1)$. (6) szerint, ha az m index $\frac{\delta}{2}(n_k + 1)$-ről n_k-ra növekszik, eközben s_m legfeljebb véges sokszor mehet át $s + \varepsilon$-nál nagyobb értékről s-nél kisebb értékre. Ha ugyanis

$$n \leqq m_1 < l_1 < m_2 < l_2 < \cdots < m_h < l_h < 2n$$

és $s_{mi} > s + \varepsilon$, $s_{li} < s$ és l_i-nek, meg m_i-nek mindig a lehető legkisebb az előírt feltételeknek megfelelő számot választunk, akkor

$$h\varepsilon \leqq \sum_{k=n}^{2n} |a_k| \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} k|a_k| \leqq 2C \quad \text{és így} \quad h \leqq \frac{2C}{\varepsilon} = H.$$

Az

$$\left(n_k, \frac{n_k}{2}\right), \left(\frac{n_k}{2}, \frac{n_k}{4}\right), \ldots \qquad \left(\frac{n_k}{2^{T-1}}, \frac{\delta}{2}(n_k + 1)\right)$$

* Ebből következik, hogy kiválasztható az indexeknek egy olyan $n_1 < n_2 < \ldots$ sorozata, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n_k} = 0$ (az n_k indexsorozat 0 sűrűségű) és az s_{n_k} sorozat elhagyása után a megmaradó s_n $(n \neq n_k)$ sorozat már konvergál s-hez.

intervallumok mindegyikében, (ahol T a legnagyobb olyan egész szám, amelyre $\frac{n_k}{2^{T-1}} > \frac{\delta}{2}(n_k+1)$ és így $T < \frac{\log 4/\delta}{\log 2} = R$ (legfeljebb H átmenet eshet és mivel legfeljebb egy átmenet „nyúlhat át" az $(n, 2n)$ intervallumból a $(2n, 4n)$ intervallumba, így az egész $\left(\frac{\delta}{2}(n_k+1), n_k\right)$ intervallumban legfeljebb $(H+1)R$ átmenet lehet, ahol H és R nem függnek k-tól. Ilyen módon, mivel az (l_{k-1}, m_k) intervallumokban nincs $s+\varepsilon$-nál nagyobb s_j, az (m_k, l_k) intervallumok száma pedig legfeljebb $R(H+1)$, kell lennie olyan (m_k, l_k) intervallumnak, amelybe legalább $\frac{\delta}{2R(H+1)}(n_k+1)$ olyan s_j esik, amely $> s+\varepsilon$; ebbe az intervallumba egyetlen olyan s_j sem esik, amelyik $\leqq s$. Ha ez az intervallum az (m, l) intervallum, akkor tehát

$$(7) \qquad \sigma_l \geqq \frac{(m+1)\sigma_m + \frac{\delta}{2R(H+1)}(n_k+1)(s+\varepsilon) + \left(l-m-\frac{\delta}{2R(H+1)}\right)s}{l+1}$$

és így

$$(8) \qquad \sigma_l - s \geqq \frac{(m+1)(\sigma_m - s)}{l+1} + \frac{\delta}{2R(H+1)} \geqq$$

$$\geqq \frac{\delta}{2R(H+1)} - |\sigma_m - s|.$$

Mivel $\sigma_n \to s$, választható k értéke olyan nagyra, hogy ha $m \geqq \frac{\delta}{2}(n_k+1)$, akkor $|\sigma_m - s| < \frac{\delta}{4R(H+1)}$ legyen. De akkor (8)-ból $\sigma_l - s \geqq \frac{\delta}{4R(H+1)}$, ami ellentmond annak, hogy $\lim_{l\to\infty} \sigma_l = s$. Ilyen módon feltevésünk, hogy s_n nem „majdnem konvergens" s-hez, ellentmondáshoz vezetett. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

1. megjegyzés: A feladat állításából következik az is, hogy

$$(9) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} |s_k - s|}{n+1} = 0.$$

vagyis s_k „*erősen szummábilis*“ s-hez. E formában a feladat J. KARAMATÁTÓL származik (lásd J. KARAMATA, Sur la sommabilité forte et la sommabilité absolue, Mathematica 15 (1939) 119—124).

2. megjegyzés: A bizonyításból látható, hogy a tétel bebizonyításához a $\sum_{k=1}^{n} k|a_k| \leqq Cn$ feltevés helyett elegendő annyit feltenni, hogy megadható olyan $C>0$ állandó, hogy $\sum_{k=n}^{2n} ka_k > -Cn$. Ugyanis a $\sum_{k=1}^{n} k|a_k| < Cn$ feltételt csak (6)-ban használtuk fel és ott ilyen egyoldalú egyenlőtlenség is elég.

2. megoldás: Az eredeti fogalmazásban a feladat állítása következik O. TOEPLITZ egy nevezetes tételéből is: Feltehetjük, hogy $s \neq 0$, ellenkező esetben ugyanis az s_n sorozat helyett az s_n+1 sorozatot vizsgálhatjuk, amelyre e feltevés már teljesül. Ez esetben

$$\frac{\sigma_n^{(2)}}{s} = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\sigma_k, \tag{10}$$

ahol

$$a_{nk} = \begin{cases} -\dfrac{(k+1)a_{k+1}}{(n+1)s} & \text{ha} \quad 0 \leqq k \leqq n-1 \\ \dfrac{\sigma_n}{s} + \dfrac{\sum_{k=1}^{n} ka_k}{(n+1)s} & \text{ha} \quad k=n. \end{cases}$$

Mivel

$$\alpha) \quad \sum_{k=0}^{n} a_{nk} = \frac{\sigma_n}{s} \to 1 \quad \text{ha} \quad n \to \infty$$

$$\beta) \quad \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| \leqq \left|\frac{\sigma_n}{s}\right| + 2\frac{\sum_{k=1}^{n} k|a_k|}{(n+1)s} \leqq B \quad \text{ha} \quad n=1,2,\ldots$$

ahol B nem függ n-től.

$\gamma)$ $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, k bármely rögzített értékére tehát az a_{nk} matrix a Toeplitz-féle értelemben „reguláris“ és így mivel feltevésünk szerint $\sigma_n \to s$, Toeplitz tételéből következik, hogy $\frac{\sigma_n^{(2)}}{s} \to s$, amivel a feladat állítása bizonyítva van.

8. feladat

1. megoldás: Alkalmazzuk az Abel—Dini-féle kritériumot. (L. Szász Pál: Differenciál- és integrálszámítás elemei, I. 586. o.). Legyen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b_1 = 2a_1 \quad \text{és} \quad b_k = \frac{a_k}{s_k^{1/2+\varepsilon}} \quad \text{ha} \quad k > 1.$$

A kritérium értelmében a

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

sor konvergens. Továbbá

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k > \frac{s_n}{s_n^{1/2+\varepsilon}} = s_n^{1/2-\varepsilon}.$$

Tehát a konstruált b_k sorozat teljesíti a feladat feltételét.

Papp Zoltán

2. megoldás: Legyen

$$b_k = \frac{\lambda}{a_n}\left(\left(\sum_{j=1}^{k} a_j^2\right)^{1/2-\varepsilon} - \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j^2\right)^{1/2-\varepsilon}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ahol $\lambda > 1$. Először megmutatjuk, hogy b_k-nak ez a választása az egyenlőtlenség-feltételt kielégíti. Ez világos, mivel

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2-\varepsilon}.$$

Másodszor kimutatandó $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ konvergenciája:

$$b_k^2 = \frac{\lambda^2}{a_k^2}\left(\sum_{j=1}^{k} a_j^2\right)^{1-2\varepsilon}\left(1 - \left(1 - \frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^{k} a_j^2}\right)^{1/2-\varepsilon}\right)^2.$$

Mivel

$$\left(1 - \frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^{k} a_j^2}\right)^{1/2-\varepsilon} \geqq 1 - \frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^{k} a_j^2}$$

tehát

$$b_k^2 \leqq \frac{\lambda^2 a_k^2}{\left(\sum_{1}^{k} a_j^2\right)^{1+2\varepsilon}}$$

és így $\sum b_k^2$ konvergenciája az Abel—Dini kritériumból következik.

BÁRTFAI PÁL

Megoldották még: CSÍSZÁR IMRE, DOMNYIK LÁSZLÓ, JARABEK LAJOS, KÁNTOR SÁNDOR, KOVÁCS LÁSZLÓ, TANKÓ JÓZSEF.

9. feladat

1. megoldás: Legyen $f(\vartheta)=\sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\vartheta$ és $g(\vartheta)=\sum_{k=1}^{n} a_k \sin k\vartheta$. Akkor $f'(\vartheta)=-\sum_{k=1}^{n} k a_k \sin k\vartheta$. A trigonometrikus függvények orthogonalitása folytán

$$g(\vartheta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-f'(x))\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin \nu x \sin \nu\vartheta}{\nu}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-f'(x))\log\frac{\sin\frac{x+\vartheta}{2}}{\left|\sin\frac{x-\vartheta}{2}\right|}dx.$$

Mivel a $0<x<\vartheta$ és $\vartheta<x<\pi$ intervallumokban $\log\frac{\sin\frac{x+\vartheta}{2}}{\left|\sin\frac{x-\vartheta}{2}\right|}$ pozitív és feltevésünk szerint $-f'(x)>0$, következik, hogy $g(\vartheta)>0$, ha $0<\vartheta<\pi$.

2. megoldás: Mivel feltevésünk szerint $\sum_{k=1}^{n} k a_k \sin k\vartheta \geqq 0$ ha $0\leqq\vartheta\leqq\pi$, tehát a $h(r,\vartheta)=\sum_{k=1}^{n} k a_k r^k \sin k\vartheta$ harmonikus polinom az egységkör felső félkörének egész kerületén nem-negatív (ugyanis a valós tengelyen eltűnik). Mivel összefüggő tartományban harmonikus függvény a minimumát csak a kerületen veheti fel, következik, hogy

$$h(r,\vartheta)\geqq 0, \quad \text{ha} \quad 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\vartheta\leqq\pi.$$

De akkor

$$g(\vartheta)=\int_0^{1}\frac{h(r,\vartheta)}{r}dr>0, \quad \text{ha} \quad 0<\vartheta<\pi.$$

Megjegyzés: A tétel állítása FEJÉR LIPÓTTÓL származik (lásd L. FEJÉR: Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotonen Koeffizientenfolge, Acta Sci. Math. Szeged, 8 (1936) 89—115.) FEJÉR e dolgozatában nemcsak véges trigonometrikus polinomokra, hanem tetszőleges, a zárt egységkörben reguláris $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ valós együtthatós hatványsorokra mondja ki a tételt, abban az alakban, hogy ha $\frac{\partial(\Re f(z))}{\partial \vartheta} < 0$ $(z = re^{i\vartheta})$ a felső félkörön, vagyis, ha $r = 1, 0 < \vartheta < \pi$, akkor $f(z)$ az egységkörben egyrétű; ebből következik, hogy $\Im f(z) > 0$, ha $0 < \vartheta < \pi, r = 1$. A fent közölt mindkét bizonyítást FEJÉR LIPÓT és SZEGŐ GÁBOR „Special conformal mappings, Duke Math. Journal 18 (1951) 535—647.) dolgozatából vettük át, ahol egyébként a tételnek még további bizonyításai is találhatók.

DANCS ISTVÁN az 1. megoldásban közölt úton indult el, azonban a bizonyítás során hibát követett el.

10. feladat

Jelölje $P(\ldots)$ a zárójelben álló esemény valószínűségét. Legyen

(1) $$R_{N,n}(y) = P(\nu_{N,n} > y) \qquad (y > 0).$$

Akkor

(2) $$R_{N,n}(y) = \prod_{1 \leq j < y} \left(1 - \frac{(n-i)j}{N-j}\right).$$

Könnyen be lehet látni, hogy igaz a következő határértékreláció, amely a jólismert $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ reláció általánosítása:

Ha teljesülnek az alábbi feltételek:

$\alpha)$ $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{k_N} x_{Nj} = x$

$\beta)$ $\lim_{N\to\infty} \max_{1 \leq j \leq k_N} |x_{Nj}| = 0$

$\gamma)$ $\sum_{j=1}^{k_N} |x_{Nj}| \leq A$ $(N = 1, 2, \ldots)$, *ahol A nem függ N-től, akkor*

(3) $$\lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{k_N} (1 + x_{Nj}) = e^x.$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{N\to\infty} R_{N,n}\left(x\sqrt{\frac{N}{n-1}}\right)=e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (x\geqq 0). \tag{4}$$

Másrészt, mivel

$$M_{N,n}=\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{n}\right]} R_{N,n}(k) \tag{5}$$

könnyen belátható, hogy

$$\lim_{N\to\infty}\frac{M_{N,n}}{\sqrt{N}}=\int_0^\infty e^{-\frac{(n-1)x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2(n-1)}} \tag{6}$$

és így (4) és (6) szerint, figyelembe véve $1-e^{-\frac{x^2}{2}}$ folytonosságát, következik, hogy

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{\nu_{N,n}}{M_{N,n}}<x\right)=1-e^{-\frac{\pi x^2}{2}} \qquad (x\geqq 0). \tag{7}$$

Megjegyzés: Érdekes, hogy az eredmény nem függ n értékétől, hacsak $n>1$ ($n=1$ esetében persze soha nem húzunk ki másodszor ugyanolyan színű golyót.) Ebből be lehet látni, hogy az eredmény az $n\to\infty$ határesetben is érvényes. Ez a határeset a visszatevéses húzásnak felel meg. Persze, ez az eset közvetlenül is tárgyalható, sőt, egyszerűbb a feladatban szereplőnél. Ha ugyanis N különböző golyó van az urnában, visszatevéssel húzunk és ν_N jelöli annak a húzásnak a sorszámát, amikor először fordult elő olyan szín, amit már kihúztunk előzőleg is, akkor

$$P(\nu_N>k)=\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{N}\right)\sim e^{-\frac{k^2}{2N}},$$

ha $k=o(N^{2/3})$ és így

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{\nu_N}{\sqrt{N}}>x\right)=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ennek az eredménynek érdekes alkalmazása van a lottó-játéknál. A lottónál ugyanis $N=\binom{90}{5}$ lehetőség van minden húzásnál; mivel $\binom{90}{5}=43\,949\,268$, meglehetősen nagy szám, a határeloszlástételt jó közelítéssel alkalmazhatjuk, tehát kb. 99 % annak való-

szinűsége, hogy 20 000 húzás során előforduljon, hogy olyan 5 számot sorsoljanak ki, ami már egyszer előfordult. Évi 50 húzás esetén tehát kb. 400 éven belül valószínűleg elő fog fordulni ilyen eset.

PROBLÈME DU CONCOURS COMMÉMORATIF NICOLAS SCHWEITZER DE L'ANNÉE 1956

1. Donner la solution du système d'équations

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+\alpha}{j} x_{kj} = b_k \qquad (k = 0, 1, \ldots n)$$

par une formule explicite exempte des déterminants ; α est un nombre réel fixe.

2. Calculer le minimum $\max(|1+z|, |1+z^2|)$, si z parcourt le plan complexe.

3. On appelle la triangulation d'un polygone convexe sa décomposition en triangles par ses diagonales qui n'ont pas d'intersection à l'intérieure du polygone. Calculer le nombre des triangulations possibles d'un polygone convexe a n cotés et celui d'entre elles où le polygone est décomposé seulement en triangles dont chacun a au moins une coté commune avec celle du polygone.

4. Désignons par $a(n)$ le plus grand facteur premier du nombre positif n. Démontrer que la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n a(n)}$$

est convergente.

5. n points soient situés sur une circonférence tels qu'ils exercent deux à deux mutuellement un effet répulsif proportionel à l'inverse du carré de leurs distances. Démontrer que ce système de points n'est en équilibre stable que si les n points se placent aux sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans ce circle ; en d'autres termes, considérons les n points sur la circonférence et examinons la somme des inverses des distances des $\binom{n}{2}$ couples de points qu'on peut choisir parmi les n points : cette somme atteint son minimum alors et seulement alors si les n points se placent aux sommet d'un polygone régulier à n cotés.

6. Démontrer que si chaque coté d'un polyèdre convexe possède une symétrie centrale, alors le nombre des cotés du polyèdre est paire.

7. Soit a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres réels, $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ et supposons qu'il existe le limite

$$s = \lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

et qu'on peut donner un nombre positif C, tel que

$$|a_1| + 2|a_2| + \ldots + n|a_n| < Cn \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Démontrer que dans ce cas

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_0^2 + s_1^2 + \cdots + s_n^2}{n+1} = s^2.$$

8. Soit a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite des nombres positifs et supposons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ est divergente. Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Démontrer qu'il existe une suite de nombres positifs b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ pour laquelle $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ est convergente et pour chaque valeur de N

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n > \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

9. Démontrer que si le polynome trigonométrique $f(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu\vartheta$ est monotone décroissant dans l'intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, alors le polynome trigonométrique $g(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\vartheta$ est non négatif dans le même intervalle.

10. Une urne contient des boules de N couleurs différentes, n piéces de chaque couleur $(n \geqq 2.)$ Nous tirons un par un les boules de l'urne sans en remettrer jusqu'à ce qui nous tirons une telle couleur qui a figuré une fois déjà. Désignons par $\nu_{N,n}$ le nombre des tirages effectués et désignons par $M_{N,n}$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\nu_{N,n}$. Déterminer la distribution limite de la variable aléatoire $\frac{\nu_{N,n}}{M_{N,n}}$ quand $N \to \infty$ et en même temps est un nombre n fixe.

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket, az egyes feladatok megoldását külön lapon, a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.

Kitűzött feladatok

100. Bizonyítsuk be, hogy a Hilbert-tér egységgömbjének felületén megadható olyan végtelen ponthalmaz, amelynek bármely két pontja $\sqrt{2}$-nél távolabb van egymástól, s hogy ha a Hilbert-tér tömör egységgömbjének egy végtelen részhalmaza a gömb belsejének legalább egy pontját tartalmazza, akkor tartalmaz két olyan pontot, amelyek $\sqrt{2}$-nél közelebb vannak egymáshoz.

Czipszer János és Erdős Pál

101. Melyek azok a síkbeli konvex tartományok, amelyeknek határvonala valódi részként tartalmazza egy síkbeli konvex tartomány határvonalát?

Hajós György

102. Egy rendezett test kvadratikusan lezárt, ha minden pozitív elemének négyzetgyökét tartalmazza. Bizonyítandó, hogy a kvadratikusan lezárt K test azon elemeinek M halmaza, amelyeket K minden automorfizmusa önmagukba visz át, K-ban algebrailag zárt, azaz $M(\alpha)$ transzcendens M fölött, ha α K-nak M-hez nem tartozó eleme.

Fried Ervin

Megoldott feladatok

78. feladat. Melyek azok a poliéderek, amelyeknek minden síkmetszete legfeljebb ötszögű poligon?

Hajós György

Megoldás. Állítjuk, hogy a feladat követelményének *a legfeljebb öt lap által határolt konvex poliéderek* felelnek meg. Nyilvánvaló, hogy ezek síkmetszetei legfeljebb ötszögű poligonok. Csak azt kell bizonyítanunk, hogy más poliédernek nincs meg ez a tulajdonsága. Ezt előbb a konkáv poliéderekre, majd az ötnél több lapú konvex poliéderekre bizonyítjuk.

Konkáv poliédernek van konkáv lapszöge (lásd 57. feladat, VI. évf. 39—41. o.). Alkossanak az e élben találkozó L_1, L_2 lapok konkáv lapszöget. Messük el a poliédert olyan síkkal, amelyik e-vel párhuzamos, s amelyik metszi az L_1, L_2 lapokat. Olyan síkmetszethez jutunk, amelynek két oldala párhuzamos, és a metszetidom e párhuzamos oldalak mentén két oldalról csatlakozik a párhuzamosok által határolt síksávhoz. Minthogy két ilyen párhuzamos oldala csak legalább hatszögű poligonnak lehet, igazoltuk, hogy minden konkáv poliédernek van legalább hatszögű síkmetszete.

Bizonyítjuk, hogy minden legalább hatlapú konvex poliédernek van három olyan éle, amelyek nincsenek egy síkban, s amelyekben hat különböző lap találkozik páronként. Ebből következik majd, hogy ezeknek a poliédereknek van legalább hatszögű síkmetszetük, hiszen van olyan sík, amelyik a három él mindegyikét metszi, s így metszi a mondott hat lap mindegyikét is.

Egyelőre csak azt igazoljuk, hogy minden legalább hatlapú poliédernek van három olyan éle, amelyekben hat különböző lap találkozik páronként. Evégből először két szomszédos (élben találkozó) lapot választunk. Minthogy minden lap legalább három lappal szomszédos, egy szabadon választott harmadik laphoz találhatunk egy ezzel szomszédos, az eddig kiválasztott lapoktól különböző negyediket. Most további két lapot tekintünk. Ha ezek szomszédosak egymással, vagy ha valamelyikük egy még nem szerepeltetett lappal szomszédos, akkor kívánt tulajdonságú harmadik lappárhoz jutottunk.

Külön kell foglalkoznunk avval az esettel, amidőn az ötödik és hatodik lap szomszédjai mindannyian szerepelnek az első négy lap között. Mivel minden lapnak legalább három szomszédja van, az ötödik és hatodik lap mindegyike csak legfeljebb egy-egy lappal nem szomszédos az első négy lap közül. Ezért vagy az első

és második, vagy a harmadik és negyedik lapra bizonyára igaz az, hogy az ötödik és hatodik lap szomszédjai között mindkettő szerepel az egyik esetben egyiküknek esetleges kivételével. Ha pl. ez a harmadik és negyedik lapra áll, mégpedig megengedve, hogy a negyedik és ötödik lap nem szomszédos, akkor az első két lap mellett a harmadik és ötödik, valamint a negyedik és hatodik lapból álló lappárokat tekintjük. Ilyen módon minden esetben három kívánt tulajdonságú lappárhoz, azaz három kívánt tulajdonságú élhez jutottunk.

Bizonyítanunk kell még, hogy az a kikötés is teljesíthető, hogy a három él ne legyen egy síkban. Ha a kapott három él egy síkban van, s a poliéder lapjainak száma hatnál több, akkor egy hetedik lapot veszünk fel, s ennek olyan határélét szemeljük ki, amelyik nincs a három kapott él síkjában. Ha ez a hetedik lap a kiszemelt él mentén a már kiválasztott hat lap valamelyikével szomszédos, akkor elhagyjuk a három él közül az ehhez a szomszédos laphoz tartozót. Ha nem ez a helyzet, akkor a három él közül szabadon hagyunk el egyet. A megmaradó két él az újonnan kiszemelttel együtt újabb kikötésünket is kielégítő három élt ad.

Külön kell még megemlítenünk azt az esetet, amidőn a poliéder hatlapú, és három egysíkú élhez jutottunk. Ekkor a három él szükségképpen háromszöget alkot, s a poliéder egy erre a háromszögre támaszkodó bipiramis. Ilyenkor a háromszög egyik oldala s a szemközti csúcsába futó két gúlaalkotó ad három, kikötéseinket kielégítő élt.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. Megjegyezzük, hogy a poliéder konvexitását okoskodásunk második részében ismételten kihasználtuk. Ezért mondhattuk, hogy a síkmetszet legalább hatszögű, ha a sík legalább hat lapot metsz. A konvexitásra támaszkodtunk akkor is, amikor mondhattuk, hogy a poliéder egy hetedik lapjának van olyan határéle, amelyiket hat lap három metszésvonalának síkja nem tartalmaz.

Megemlítjük, hogy ha egy poliédert pontosan öt lap határol, akkor a poliédernek van ötszögű síkmetszete. Ilyen metszetet kapunk, ha két más-más lapokhoz tartozó élt tekintünk, és ezt a két élt, valamint az ötödik lapot egy síkkal metsszük.

Könnyű arról meggyőződni, hogy az ötlapú poliédereket vagy egy négyszög és négy háromszög, vagy három négyszög és két egymással nem szomszédos háromszög határolja. Ezt felhasználva megállapíthatjuk, hogy a feladat követelményeit a következő poliéderek elégítik ki: 1. ötszögű metszete is van a négyoldalú konvex gúlának, valamint azoknak a konvex poliédereknek, amelyeket egy

háromoldalú (végtelen) gúlát vagy hasábot két síkkal elmetszve kapunk, 2. ötszögű metszete sincs a tetraédernek.

Hajós György

A 78. feladat nem teljes megoldását beküldte *Bártfai Pál.*

80. feladat. Kiegészíthető-e egy racionális egész számokból álló, m soros és n oszlopos mátrix ($m < n$) egy racionális egész számokból álló $m+1$-edik sorral úgy, hogy az új mátrix $m+1$-edrendű determinánsainak legnagyobb közös osztója megegyezzék az eredeti mátrix m-edrendű determinánsainak legnagyobb közös osztójával?

Fuchs László

I. megoldás. Az alábbiakban csak olyan mátrixokról szólunk, amelyeknek elemei racionális egész számok, s az ilyen mátrixokhoz tartozó legnagyobb közös osztó a mátrix annyiadrendű determinánsainak legnagyobb közös osztóját jelenti, ahány sora van a mátrixnak.

Egy mátrixhoz tartozó legnagyobb közös osztó nem változik meg, ha az egyik oszlop egész többszörösét egy másik oszlophoz adjuk, hiszen minden közös osztó e művelet elvégzése után is közös osztó marad, s új közös osztó sem léphet fel, mert az új mátrixból ugyanolyan művelettel az eredeti mátrixot állíthatjuk elő. Felesleges ugyanezt az oszlopok felcserélésére külön is kimondanunk, hiszen minden oszlopcseréhez az oszlopok többszöröseinek egymáshoz adása révén is eljuthatunk. Hangsúlyozzuk, hogy az említett oszlopműveletek megfordításai is ugyanilyen oszlopműveletek.

Ilyen oszlopműveletekkel elérhetjük, hogy mátrixunk első sorában

$$a_{11}, 0, \ldots, 0$$

álljon, ahol a_{11} az eredeti mátrix első sora elemeinek legnagyobb közös osztóját jelenti. Ha hasonlóan járunk el a többi sorral is, akkor mátrixunkat oszlopműveletekkel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ a_{11} & a_{22} \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mm} & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

alakra hozhatjuk. Egészítsük ki ezt a mátrixot egy $(m+1)$-edik

$$0\ 0 \cdots 0\ 1 \cdots 0$$

sorral, melynek minden eleme 0 az $(m+1)$-edik oszlopban álló

1 kivételével. Közvetlenül belátható, hogy ez a bővítés a mátrixhoz tartozó legnagyobb közös osztó értékét nem változtatja meg.

Ha most az alkalmazott oszlopműveletek megfordításait alkalmazzuk, akkor az első m sorban ismét az eredeti mátrix áll, s így az eredeti mátrix bővítéséhez jutottunk. Az előre bocsátottak alapján adódik, hogy az eredeti és a bővített mátrixhoz ugyanaz a legnagyobb közös osztó tartozik.

Ezek szerint a feladat kérdésére a válasz igenlő. Megjegyezzük, hogy megoldásunk változatlanul helyes akkor is, ha az egész számok gyűrűje helyett tetszőleges euklideszi gyűrűről van szó.

Surányi János

Megjegyzés. Megfelelő mátrixhoz juthatunk úgy is, hogy az átalakított mátrixot egész számokból álló $(m+1)$-edik sorral bővitjük úgy, hogy e sor utolsó $n-m$ elemének legnagyobb közös osztója 1 legyen. Ilyen módon minden megfelelő bővítést megkapunk.

Az adott megoldás utasítása numerikusan adott esetben gyakorlatilag is jól követhető.

(Szerk.)

II. megoldás. Okoskodásunk során támaszkodni fogunk arra az ismert tényre, hogy egy n dimenziós pontrács n darab rácsvektora olyan n dimenziós parallelotopot feszít ki, amelynek térfogata a pontrács fundamentális tartománya térfogatának egészszámszorosa, valamint arra, hogy egy m dimenziós altérben elhelyezkedő rácspontok pontrácsának m darab alapvektora mindig kiegészíthető $n-m$ vektorral a teljes n dimenziós pontrács n darab alapvektorává.

Mátrixunk m sora az n dimenziós tér m darab vektorát az $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ vektorokat adja. Feltehetjük, hogy ezek a vektorok lineárisan függetlenek, mert ellenkező esetben a szóbanforgó determinánsok mindegyike 0, s ez a bővített mátrixra is áll, akárhogyan végezzük is a bővítést. A kezdőpontból felmért $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ vektorok eszerint egy m dimenziós R_m alteret feszítenek ki, s az ebben az altérben elhelyezkedő (egész koordinátájú) rácspontok egy m dimenziós pontrácsot alkotnak. Állítjuk, hogy a feladatban szereplő legnagyobb közös osztó az $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ vektorok által kifeszített P parallelotop s az említett pontrács egy F fundamentális parallelotopja P/F térfogatarányával egyenlő.

Ez abból következik, hogy a szóbanforgó m-edrendű determinánsok P-nek egy-egy m dimenziós koordinátasíkra vetett merőleges vetületének térfogatával egyenlők. Ezért a P-hez tartozó ilyen

determinánsok az F-hez tartozó megfelelő determinánsoknak P/F-szeresei. Az F-hez tartozó determinánsok legnagyobb közös osztója azonban 1. Ez abból adódik, hogy az F parallelotopot kifeszítő $f_1, \ldots, f_m$ vektorok megfelelően választott $f_{m+1}, \ldots, f_n$ vektorokkal a teljes n dimenziós pontrács $f_1, \ldots, f_n$ alapvektoraivá egészíthetők ki. Ilyen alapvektorokról tudjuk, hogy koordinátáik ± 1 értékű determinánst adnak. E determináns első m sora szerinti Laplace-kifejtése azt adja, hogy az F-hez tartozó determinánsok megfelelő egész együtthatókkal szorozva 1-et adnak összegül, ami állításunkat bizonyítja.

Tekintsünk most egy $m+1$ dimenziós R_{m+1} alteret, amely tartalmazza az R_m alteret és egy R_m-hez nem tartozó rácspontot. R_{m+1} rácspontjai $m+1$ dimenziós pontrácsot alkotnak, s az $f_1, \ldots, f_m$ vektorok megfelelően választott a_{m+1} vektorral kiegészítve ennek az $m+1$ dimenziós pontrácsnak $f_1, \ldots, f_m, a_{m+1}$ alapvektorait szolgáltatják. Az $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}$ vektorok által kifeszített P' parallelotop és az $f_1, \ldots, f_m, a_{m+1}$ vektorok által kifeszített fundamentális F' parallelotop térfogataránya $P'/F' = P/F$, hiszen P' és F' térfogata P és F térfogatából ugyanavval a szorzóval, ti. a_{m+1}-nek R_m-re merőleges komponense hosszával szorozva adódik.

Az elmondottakból következik, hogy ha mátrixunkat az a_{m+1} vektor koordinátáiból álló sorral bővítjük, akkor a szóbanforgó legnagyobb közös osztó változatlan marad. A feladat kérdésére tehát igennel kell felelni.

A mátrix bővítésére a következő utasítást adhatjuk: Az n dimenziós R_n tér kezdőpontján át olyan $n-m$ dimenziós R_{n-m} alteret fektetünk, amely R_m-mel együtt kifeszíti az R_n teret. R_n rácspontjain át R_m-mel párhuzamos m dimenziós altereket fektetünk, s ezek R_{n-m}-ből egy $n-m$ dimenziós pontrácsot metszenek ki. Olyan rácspontot választunk ebben a pontrácsban, amelyik a kezdőponttal összekötve más rácspontot nem tartalmazó szakaszt ad. Az így felvett rácsponton át R_m-mel párhuzamos alteret fektetünk, és az R_n tér rácspontjai közül kiválasztunk egy ebben az altérben elhelyezkedőt. A kiválasztott pont koordinátái a követelménynek megfelelően bővített mátrix $(m+1)$-edik sorát adják. Ez az előírás minden megfelelő bővítést megad.

Hajós György

A 80. feladat megoldását beküldte még *Rejtő Péter*.

83. feladat. Legyen n adott természetes szám, továbbá (a, b) adott részintervalluma a $(-1, 1)$ intervallumnak. Mutassuk meg, hogy megadható a $(-1, 1)$ intervallumban olyan nem-negatív, leg-

feljebb véges sok helyen eltűnő, differenciálható súlyfüggvény, amelyhez tartozó ortogonális polinomsorozat n-edik polinomjának minden gyöke az (a, b) intervallumban van.

Vincze István

Megoldás. Legyen a $\varrho(x)$ súlyfüggvényhez tartozó n-edik ortogonális polinom

$$p_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n .$$

Az $a_1, \ldots, a_n$ együtthatókat egyértelműen meghatározzák az

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)\, x^k\, \varrho(x)\, dx = \mu_{n+k} + a_1 \mu_{n+k-1} + \cdots + a_n \mu_k = 0$$

feltételek $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, ahol

$$\mu_i = \int_{-1}^{1} x^i\, \varrho(x)\, dx \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2n-2).$$

Ha ugyanis $\varrho(x)$ olyan nem-negatív, LEBESGUE-integrálható függvény, amely pozitív mértékű halmazon vesz fel pozitív értékeket, akkor a momentumokból alkotott $|\mu_{i+k}|_0^{n-1}$ determináns értéke nem 0.

Ha $\varrho(x)$-et a

$$d(\varrho_1, \varrho_2) = \int_{-1}^{1} |\varrho_1(x) - \varrho_2(x)|\, dx$$

távolsággal mérve keveset változtatjuk meg, akkor a momentumok egyenletesen keveset változnak, és így az együtthatókat szolgáltató egyenletrendszer megoldásvektora is keveset változik, következésképpen a $p_n(x)$ polinom is egyenletesen keveset változik a $(-1, 1)$ intervallumon.

Legyen $\varrho_0(x)$ az adott (a, b) intervallum karakterisztikus függvénye. Az ehhez tartozó n-edik ortogonális polinom az (a, b) intervallumhoz tartozó n-edik LEGENDRE-polinom, tehát ez (a, b) belsejében n-szer vált előjelet. Ha tehát $d(\varrho, \varrho_0)$ elég kicsi, akkor a ϱ-hoz tartozó $p_n(x)$ polinom legalább n-szer vált (a, b)-ben előjelet, s mivel n-edfokú, minden zéróhelye (a, b)-ben van.

Helyes tehát a feladat állítása, mert könnyen szerkeszthetünk olyan $\varrho(x)$ súlyfüggvényt, amely végig pozitív, differenciálható és a $\varrho_0(x)$ függvénnyel előírtan kis d távolságot alkot.

Megállapíthatjuk, hogy $\varrho(x)$ akár polinomnak is választható, s hogy a feladat kikötése nemcsak az n-edik ortogonális polinomra, hanem az első n polinom mindegyikére is teljesíthető.

Szőkefalvi-Nagy Béla

A 83. feladat megoldását beküldték még *Császár Ákos, Erdős Pál, Rejtő Péter.*

84. feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számhoz található olyan euklideszi gyűrű, amelyben pontosan n prímszám van.

Fried Ervin

Megoldás. Legyenek $p_1, \ldots, p_n$ tetszőleges, de különböző prímszámok. Azokat a racionális $\frac{m}{n}$ számokat tekintjük, amelyekre $(n, p_1 \ldots p_n) = 1$. Ezek a racionális számtest egy R részgyűrűjét alkotják. E gyűrű $a = \frac{m}{n} \neq 0$ eleméhez az

$$N(a) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

normát rendeljük, ha

$$m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n} l \quad \text{és} \quad (l, p_1 \ldots p_n) = 1.$$

Megállapíthatjuk, hogy R egységei azok a számok, amelyeknek normája 0, s hogy R-nek bármely két (0-tól különböző) a, b elemére

$$N(ab) = N(a) + N(b).$$

Állítjuk, hogy (R, N) euklideszi gyűrű. Ennek bizonyítása végett R-nek olyan a és $b \neq 0$ elemeit tekintjük, amelyeknek a/b hányadosát R nem tartalmazza, és olyan q, r elemeket kell találnunk, hogy

$$a = qb + r \quad \text{és} \quad N(r) < N(b)$$

teljesüljön. Az

$$a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n} \frac{l_1}{n_1}, \quad b = p_1^{\beta_1} \ldots p_n^{\beta_n} \frac{l_2}{n_2}$$

alakokról feltesszük, hogy l_1, l_2, n_1, n_2 nem oszthatók a $p_1, \ldots, p_n$ prímszámokkal, s hogy csak a $p_1, \ldots, p_k$ prímszámok szerepelnek 0 kitevővel mind a két kifejezésben. Igazoljuk, hogy $q = p_1 \ldots p_k$, ill. $k = 0$ esetben $q = 1$ választással kívánt tulajdonságú r számhoz jutunk.

Legyen $(p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}, p_1^{\beta_1} \ldots p_n^{\beta_n}) = d$. Minthogy a/b nincs R-ben, $d \neq p_1^{\beta_1} \ldots p_n^{\beta_n}$ és így $N(d) < N(b)$. Könnyű belátni, hogy $r = qb - a$ redukált törtalakjának számlálójában a $p_1, \ldots, p_n$ prímszámoknak csak azok a hatványai szerepelnek tényezőként, amelyek az a, b számokhoz tartozó számlálókban szerepelnek, hogy tehát

$r = d\frac{l}{n}$, ahol l és n nem osztható a $p_1, \ldots, p_n$ prímszámokkal. Ezek szerint $N(r) = N(d)$, és így $N(r) < N(b)$ valóban teljesül.

Az R gyűrű prímszámait keresve az asszociált elemek között nem teszünk különbséget. Elég ezért, ha csak a $p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$ számok közötti prímszámokat keressük, hiszen $p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$ és $p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}\frac{l}{n}$ asszociált számok. Nyilvánvaló viszont, hogy a $p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$ számok között csak $p_1 \ldots, p_n$ a prímszámok. Az R gyűrűben tehát (asszociált számokat csak egyszer számlálva) n prímszám van.

Kővári Tamás

A 84. feladat megoldását beküldte még *Rejtő Péter*.

Problèmes proposés

100. Démontrer qu'on peut donner sur la surface de la sphère unité de l'espace de Hilbert un ensemble infini de points dont chaque couple de points a une distance supérieure à $\sqrt{2}$ et que si un sous-ensemble infini des points de la sphère unité pleine de l'espace de Hilbert contient au moins un point à l'intérieur de la sphère unité, alors il contient aussi deux points dont la distance est inférieure à $\sqrt{2}$.

Jean Czipszer et Paul Erdős

101. Trouver les domaines convexes du plan dont les contours contiennent, comme leur partie véritable, le contour d'un domaine convexe du plan.

Georges Hajós

102. Un corps ordonné est quadratiquement fermé, s'il contient les racines carrées de tous ses éléments positifs. Démontrer qu'un ensemble M formé de tels éléments du corps K quadratiquement fermé qui se transforment en eux-mêmes par chaque automorphisme de K est algébriquement fermé en K, c'est-à-dire que $M(\alpha)$ est transcendent sur M, si α est un élément de K qui n'appartient pas à M.

Ervin Fried

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Bolyai Társulat címére kérjük (Bp. V. Reáltanoda u. 13—15.). A borítékra írjuk rá feltűnően: *Példarovat.* Minden megoldást külön lapra írjunk.

A 64. és a 66. példára a VIII. évfolyam 1—2. számának megjelenése előtt megoldás érkezett még be Bereznai Gyulától.

A VIII. évfolyam 1—2. számában kitűzött 78. példa végén $f(n)$ helyett $h(n)$ olvasandó.

Kitűzött példák

81. Hány különböző módon bontható egy n szám k természetes szám összegére? (Két felbontást akkor tekintsünk különbözőnek, ha az egyik nem permutációja a másiknak.)

(Reményi Gusztáv)

82. Legfeljebb hány futó helyezhető el a sakktáblán úgy, hogy egyik se üthesse a másikat? Oldjuk meg a feladatot más sakkfigurák esetére is!

Megoldott példák

(A VII. évfolyam 1—2. és 3—4. számában kitűzött példák megoldása.)

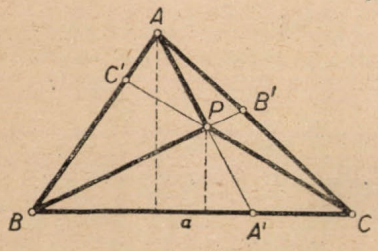
67. példa. Egy háromszög egyik belső pontját kössük össze a csúcsokkal, és az összekötő szakaszokat hosszabbítsuk meg a ponton túl az oldalakig. Bizonyítsuk be, hogy a meghosszabbító szakaszok összege kisebb a háromszög legnagyobb oldalánál.

(Erdős Pál)

1. megoldás. Jelöljük a háromszög kiszemelt belső pontját P-vel, a csúcsokon és P-n át húzott transzverzálisokat AA'-, BB'-, CC'-vel (1*a* ábra). A $PA' : AA'$ arány megegyezik a PBC és az ABC háromszög BC oldalhoz tartozó magasságának arányával, és így a két háromszög területének arányával, $t_a : t$-vel is. Ugyanígy ciklikusan még két esetben. Tehát

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} = \frac{t_a + t_b + t_c}{t} = \frac{t}{t} = 1.$$

Az $AA'B$ és $AA'C$ háromszögek közül legalább az egyik A'-nél derékszögű vagy tompaszögű, tehát A'-vel szemközti oldala nagyobb AA'-nél. AA' eszerint mindenesetre kisebb, mint az őt közrefogó oldalak közül a nagyobbik. Ugyanez igaz BB'-re és CC'-re is. Tehát mindhárom szakasz kisebb a háromszög legnagyobb oldalánál, a-nál. Ezért



1a ábra

$$\frac{PA'}{a} + \frac{PB'}{a} + \frac{PC'}{a} < 1,$$

és így

$$PA' + PB' + PC' < a,$$

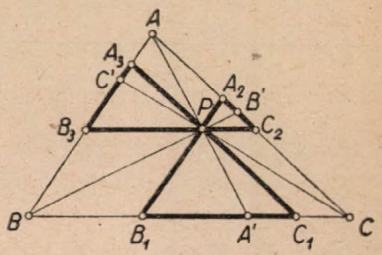
amit bizonyítanunk kellett.

Ambrózy Géza

Hasonló megoldást küldött be Bereznai Gyula.

2. megoldás. Felhasználjuk a következő segédtételt: a háromszög bármely csúcsát a szemközti oldal tetszőleges belső pontjával összekötő szakasz rövidebb, mint a háromszög leghosszabb oldala. (Ezt az előző megoldásban — egy kissé más formában — már bebizonyítottuk.)

Húzzunk a háromszög P belső pontján át párhuzamosokat az oldalakkal. Az eredetihez hasonló háromszögek keletkeznek, többek között PB_1C_1, A_2PC_2, A_3B_3P (1*b* ábra). Ha az eredeti háromszög leghosszabb oldala BC, akkor ezekben sorra B_1C_1, PC_2, B_3P a leghosszabb oldal. A segédtétel folytán ezek a szakaszok sorra nagyobbak a PA', PB', PC' szakaszoknál (az, hogy ezek a szakaszok a kis háromszögek bel-



1b ábra

sejében vannak, a hasonlóságból következik):

$$B_1C_1 > PA', \quad PC_2 > PB', \quad B_3P > PC'.$$

Adjuk össze a három egyenlőtlenséget; vegyük mindjárt figyelembe, hogy $PC_2 = C_1C$ és $B_3P = BB_1$, mint egy-egy parallelogramma szemközti oldalai:

$$B_1C_1 + C_1C + BB_1 = BC > PA' + PB' + PC'.$$

Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

Biró József

Hasonló megoldást küldött be: BARTÓK KÁROLY, BENDE SÁNDOR, BICZÓ GÉZA, BUKOVSZKY FERENC, FRIED VILMOS, GARAS ANTAL és QUITTNER PÁL.

További megoldásokat küldtek be: BÁRTFAI PÁL, GOLDSTEIN RÓBERT, HARZA TIBOR, H. NAGY ISTVÁN, QUITTNER PÁL és REMÉNYI GUSZTÁV.

68. példa. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre $\frac{n+1}{n}$ is és a reciproka is felírható véges tizedestört alakban?

(Fried Ervin)

1. megoldás. Szögezzük le először is, hogy a tört nem egyszerűsíthető, s hogy nevezőjében — és így a feltétel szerint számlálójában is — csak 2 és 5 fordulhat elő törzstényezőként. A tört tehát vagy $\frac{2^p}{5^q}$ alakú, vagy ennek reciproka. Ezek után vizsgáljuk meg a lehetséges eseteket:

1. Legyen $n = 5^q$. Ekkor $n+1 = 5^q+1 = 2^p$. Egész számú p és q esetében ez az egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $q = 0$ és $p = 1$. Ugyanis $5^q - 1$ mindig osztható 4-gyel, ha $q \geqq 0$, tehát $5^q + 1$ 2-nek csak első hatványával osztható. Az előbb említett kivételes esetben a tört $\frac{1}{2}$, reciproka 2, tehát mindkét esetben kielégíti feltételünket.

2. Legyen $n = 2^p$. Ekkor $5^q - 1 = 2^p$. Ez az egyenlőség azonban akkor és csak akkor áll fenn, ha $q = 1$ és $p = 2$. Ha ugyanis $q \geqq 0$ páros, akkor $5^q - 1 = 25^{q/2} - 1$ osztható 6-tal, törzstényezős alakjában tehát a 2-n kívül a 3-nak is szerepelnie kell. Ha

pedig q páratlan, akkor $(5^q-1):(5-1)$ sorbafejtett alakjában q, azaz páratlan számú tag van, s minthogy mindegyik 5-nek valamely nem negatív egész kitevőjű hatványa, ezért mindegyik páratlan, s összegük is az. 5^q-1-ben tehát $q>1$ esetén feltétlenül van egy 2-től különböző páratlan törzstényező, és így csak $q=1$ esetén lehet 2 hatványa. A feladat második megoldása tehát $\frac{4}{5}$, illetve $\frac{5}{4}$.

Ambrózy Géza

2. megoldás. A szóbanforgó számok $1+\frac{1}{n}$, illetve $1-\frac{1}{n+1}$ alakban is írhatók, így olyan $n, n+1$ természetes számpár keresendő, melyek reciprokának tizedes alakja véges. Ehhez szükséges és elegendő, hogy törzstényezős előállításuk $n=2^i5^j$, $n+1=2^k5^m$ alakú legyen. Ámde szomszédos természetes számok relatív prímek, ennélfogva i és k, valamint j és m egyike 0. Így három eset lehetséges:

1) $i=j=0$-val $n=1$, $n+1=2$ egy megfelelő pár.

2) $i=m=0$ mellett nincs megoldás, mert $j=1$-gyel $n+1=6=2\cdot3\neq2^k$, $j\geqq2$-vel pedig $n=5^j\equiv25$, $n+1\equiv26 \pmod{100}$, $n+1\equiv26\equiv2 \pmod 4$, vagyis $n+1=2u$ és ez $\neq2^k$, mert u páratlan és $u>1$.

3) Végül $j=k=0$ mellett egyetlen megfelelő érték $i=2$-vel: $n=4$, amihez $m=1$. Ugyanis 1-nél nagyobb páratlan m-mel $n+1=5^m=5^{2r+1}\equiv125 \pmod{1000}$, $n+1\equiv5$, $n\equiv4 \pmod 8$, vagyis $n=4u$, és ez $\neq2^i$, mert u páratlan és $u>1$, hiszen így $n+1\geqq125$; páros m-mel pedig $n+1=5^m=5^{2r}$, $n=(5^r+1)(5^r-1)$, ahol $r\geqq1$, és ez ismét $\neq2^i$, hiszen $5^r-1=4s$, $5^r+1=4s+2$, és így $n=2^3s(2s+1)$, ahol $s\geqq1$ és $2s+1\geqq3$, páratlan. Mindezek szerint a követelményeknek csak $n=1$ és $n=4$ felel meg.

Bakos Tibor

3. megoldás. A feltétel szerint $\frac{n+1}{n}\cdot10^\alpha$ és $\frac{n}{n+1}\cdot10^\beta$ egész számok. Eszerint n-nek és $n+1$-nek nincs 2-n és 5-ön kívül más törzstényezője. De mert $(n, n+1)=1$, azért a két szám közül az egyik 2-nek, a másik pedig 5-nek hatványa.

I. $n=5^k$, $n+1=2^l$.

$$5^k+1=2^l. \qquad (1)$$

Triviális megoldás: $k=0, l=1$. Ennek megfelel:

$$n=1.$$

Keressünk más megoldásokat. Ha (1) $k>0$-ra teljesül, akkor 2^l utolsó jegye 6, vagyis

$$l=4p.$$

De akkor (1)-ből

$$5^k+1=16^p. \tag{2}$$

(2) baloldala osztható 16-tal. Ez azonban

$$(4+1)^k+1=16A+4+1+1=16A+6$$

miatt lehetetlen, tehát nincs más megoldás.

II. $n=2^l$, $n+1=5^k$,

Ekkor

$$2^l=5^k-1. \tag{3}$$

Ennek triviális megoldása $l=2, k=1$. Ennek megfelel:

$$n=4.$$

Ha (3) $k>1$-re teljesül, akkor 2^l utolsó jegye 4, vagyis

$$l=4p+2=2(2p+1).$$

Ezzel (3) helyett $2^l=4^{2p+1}=16^p\cdot 4$ miatt ezt kapjuk:

$$16^p\cdot 4=5^k-1. \tag{4}$$

Eszerint 5^k-1-nek 16-tal osztathónak kellene lennie, ami azonban

$$(4+1)^k-1=16C+4$$

miatt lehetetlen. Itt sincs további megoldás.

Feladatunknak tehát csak ez a két megoldása van:

$$\begin{array}{ll} n=1, & 4, \\ n+1=2, & 5. \end{array}$$

Bukovszky Ferenc

4. megoldás. Véges tizedes tört alakban csak azok a törtek írhatók fel, amelyeknek a nevezője csupán a 10 prímtényezőiből van összetéve; mivel $(n, n+1)=1$, azért n illetve $n+1$ csak a 2, illetve az 5 valamely hatványa lehet. Tehát a megoldást a

$$2^k\pm 1=5^m \tag{1}$$

diofantoszi egyenlet adja, melynek típusa

$$x^k\pm 1=y^m.$$

Erről GÉRONO kimutatta[1], hogy ha $k, m > 1$, akkor benne sem x, sem y nem lehet prímszám, az ismert $2^3 + 1 = 3^2$ kivételtől eltekintve. A mi egyszerű esetünkben még GÉRONO tételére sincs szükség. Azt az esetet, ha x vagy $y = 2$, több szerző külön is tárgyalta;[2] még ezek eredményeit sem kell felhasználnunk. Legyen $k = ak_1$, $m = bm_1$, ahol k_1 és m_1 prímszámok. Ha p prímszám, akkor Euler-nek egy sokszor felhasznált tétele szerint[3] az $x^p \pm 1$ kifejezésnek minden az $x \pm 1$-ben nem foglalt prímtényezője $2hp + 1$ alakú. Ennélfogva az (1) egyenlet csak akkor teljesülhet, ha

$$5 = 2hk_1 + 1,$$

vagyis csak $k_1 = 1, h = 2$ vagy $k_1 = 2, h = 1$ lehet.

A feladat összes megoldásai tehát $n = 4$ és $n = 1$.

Obláth Richárd

További megoldásokat küldtek be: BARTÓK KÁROLY, BÁRTFAI PÁL, BENDE SÁNDOR, BEREZNAI GYULA, BICZÓ GÉZA, BIRÓ JÓZSEF, DANYI PÁL, HARZA TIBOR, KISS ERNŐ, QUITTNER PÁL, REMÉNYI GUSZTÁV és VINCZE ENDRE.

69. példa. A 2. ábrán látható négy kis kör sugara a legnagyobb kör sugarának negyede; ez számítással könnyen igazolható. (Lásd a II. gimnáziumi könyvben, az 1951. évi kiadásban a 97. lapon.) Igazoljuk számítás nélkül!

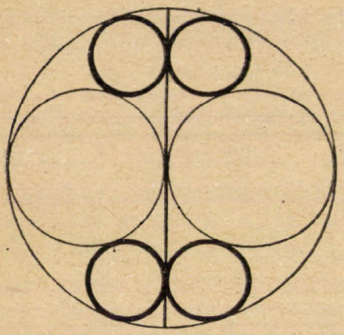
(Zalotay Elemér)

Megoldás. Elég csak az ábra negyedén okoskodni, ebből kétszeri tükrözéssel kapjuk a teljes ábrát. Legyen a két nagyobb kör sugara $4r$ és $2r$, középpontjuk O_1 és O_2. A két kör sugarát csökkentsük, ill. növeljük r-rel. A kapott $3r$ sugarú körök metszéspontja r távolságra lesz az eredeti köröktől. Ez a metszéspont rajta van O_1 és O_2 felező merőlegesén (az új körök tükörtengelyén), és így az O_1A sugártól is (lásd a 3. ábrát) r távolságra van. Tehát a kapott metszéspont köré r sugárral írt kör éppen eredeti ábránk

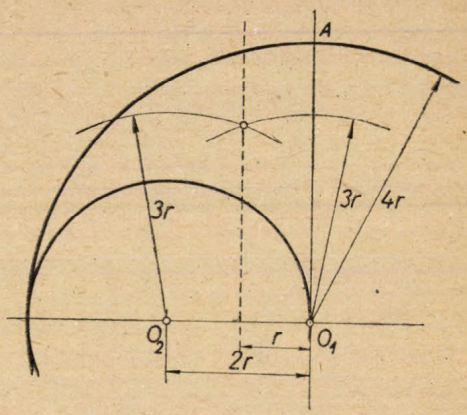
[1] Gérono, Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$. *Nouv. Ann. de Math.* 2. sér. 9. 1870, p. 469, és 10, 1871., p. 204. Ld. Obláth R.: Az $x^2 - 1$ számokról. Mat. és Fiz. Lapok 47., 1940., p. 58—77., különösen p. 59. és 68.

[2] De Polignac, Math. Questions, Ed. Times 46.. 1887., p. 109—110. Rohrberg, Ztschrft. Math. Nat. Unt. 42., 1911., p. 34., Aufg. 293. Obláth, uott. 45., 1914, p. 294. Aufg. 453. Ld. Obláth i. h.[1])

[3] Euler, 1747. Comm. Arithm. Coll. 1849, I. köt. p. 60, II. kötet, p. 533. Tankönyvekben is, pl. Wertheim, Anfangsgründe d. Zahlenlehre, Braunschweig 1902, p. 298., E. Cahen, Elém. de la théorie des nombres, Paris, 1900. p. 328. Ld. Obláth i. h.[1]) p. 66.



2. ábra



3. ábra

négy kis körének egyike, s így ezek sugara csakugyan r, vagyis a nagy kör sugarának negyede.

Biczó Géza

Megoldást küldött be még: Bártfai Pál, Bereznai Gyula, Biró József, Bukovszky Ferenc, Fried Vilmos, Garas Antal, Goldstein Róbert, Quittner Pál, Reményi Gusztáv, Reményi Gusztávné, Vigassy József és Vincze Endre.

70. példa. Határozzuk meg a háromszög hozzáírt köreinek sugarát, ha összegük: $r_1+r_2+r_3=11$ cm, a háromszög kerülete $k=12$ cm, beírt körének sugara $\varrho=1$ cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

(Biczó Géza)

Megoldás. Felhasználva a

$$\varrho=\frac{t}{s},\quad r_1=\frac{t}{s-a},\quad r_2=\frac{t}{s-b},\quad r_3=\frac{t}{s-c} \qquad (1)$$

összefüggéseket, könnyen igazolható, hogy

$$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=s^2$$

és

$$r_1r_2r_3=\varrho s^2,$$

ahol s a háromszög félkerülete. A kapott adatokkal a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} &r_1+r_2+r_3=11,\\ &r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=36,\\ &r_1r_2r_3=36. \end{aligned}\right\}$$

A gyökök és együtthatók közti összefüggések alapján r_1, r_2, r_3 az

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$$

egyenlet gyökei. Ezt megoldva, kapjuk, hogy

$$r_1 = 2 \text{ cm}, \quad r_2 = 3 \text{ cm}, \quad r_3 = 6 \text{ cm}.$$

Végül az (1) alatti összefüggésekből a háromszög oldalai:

$$a = 3 \text{ cm}, \quad b = 4 \text{ cm}, \quad c = 5 \text{ cm}.$$

Fitos László

Megoldást küldött be még: BAKOS TIBOR, BARTÓK KÁROLY, BÁRTFAI PÁL, BENDE SÁNDOR, BEREZNAI GYULA, BIRÓ JÓZSEF, BUKOVSZKY FERENC, DANYI PÁL, FRIED VILMOS, GARAS ANTAL, HARZA TIBOR, QUITTNER PÁL, REMÉNYI GUSZTÁV és VINCZE ENDRE.

71. példa. Jelölje a, b, c egy háromszög oldalait, m_a, m_b, m_c pedig a megfelelő magasságokat. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = (m_a+m_b+m_c)\left(\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\right).$$

(Bukovszky Ferenc)

Megoldás. A jobboldalon helyettesítsük m_a, m_b, m_c helyébe sorra a $\frac{2t}{a}, \frac{2t}{b}, \frac{2t}{c}$ értékeket. A jobboldal első tényezőjéből $2t$, a második tényezőből $\frac{1}{2t}$ kiemelése után azonosságra jutunk.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \equiv 2t \cdot \frac{1}{2t}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c).$$

Kiss Ernő

Megoldást küldött be még: AMBRÓZY GÉZA, BARTÓK KÁROLY, BÁRTFAI PÁL, BENDE SÁNDOR, BEREZNAI GYULA, BICZÓ GÉZA, BIRÓ JÓZSEF, DANYI PÁL, DURST ENDRE, FITOS LÁSZLÓ, FRIED VILMOS, GARAS ANTAL, HARZA TIBOR, QUITTNER PÁL (2 megoldást) REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ és VINCZE ENDRE.

72. példa. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_i \geqq 0$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqq n^2.$$

1. megoldás. Írjuk ki részletesen a bizonyítandó állítást:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq n^2.$$

Ha a baloldalon a beszorzást elvégezzük, n^2 tagot kapunk, köztük n darab 1-est. A megmaradó n^2-n darab tagot rendezzük úgy, hogy minden tag mellé a reciproka kerüljön. Bizonyítandó, hogy

$$\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\geqq n^2-n.$$

A baloldalon minden csoport értéke legalább 2 (bizonyítás: $(a-1)^2\geqq 0$, $a^2+1\geqq 2a$, $a+\frac{1}{a}\geqq 2$). Mivel az n^2-n tag $\frac{n^2-n}{2}$ kettes csoportra oszlik, a baloldal értéke vagy n^2-n, vagy ennél nagyobb. Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

Harza Tibor

2. megoldás. A számtani és mértani középre vonatkozó ismert egyenlőség szerint

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},\qquad \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}{n}\geqq\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}.$$

Ezekből szorzással következik

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}{n^2}\geqq 1,$$

ami eredeti állításunkat is igazolja.

Bukovszky Ferenc

3. megoldás. Ismeretes Cauchy egyenlőtlensége: ha x_i és y_i $(i=1,2,\ldots,n)$ valós számok, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i^2\geqq\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2.$$

Legyen itt speciálisan $x_i=\sqrt{a_i}$ és $y_i=\frac{1}{\sqrt{a_i}}$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqq\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\,\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2=n^2,$$

amit éppen bizonyítanunk kellett.

Vincze Endre

Megoldást küldött be még: AMBRÓZY GÉZA, BAKOS TIBOR, BARTÓK KÁROLY (kettőt), BÁRTFAI PÁL (kettőt), BENDE SÁNDOR (hármat), BEREZNAI GYULA (hármat), BICZÓ GÉZA (hármat), BIRÓ JÓZSEF, BUKOVSZKY FERENC (még egyet), DANYI PÁL, DURST ENDRE, FITOS LÁSZLÓ, FRIED VILMOS, GARAS ANTAL, GOLDSTEIN RÓBERT, HARZA TIBOR (még egyet), KISS ERNŐ, PÁTER ZOLTÁN, QUITTNER PÁL (kettőt), REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ és VINCZE ENDRE (még hármat).

73. példa. Az alábbi sorozatoknak nagyon egyszerű a képzési szabálya. Mik ezek a szabályok? Írjuk fel mindegyik sorozat következő három elemét!

a) 2, 4, 8, 7, 5, 10, 11, 13, 8, 7, 14, 19, 20, 22...

b) 0, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 6, 6, 7, 11, 7, 13, 9, 8, 8...

c) 1, 1, 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 19, 20, 25, 28, 29...

Megjegyezzük, hogy mindegyik sorozat végtelen és egyik sem korlátos, vagyis mindegyikben vannak akármilyen számnál nagyobb számok. A *c)* sorozat monoton, sőt, ha első elemét elhagyjuk, szigorúan monoton, vagyis több ismétlődés nem fordul elő benne. Azt a nevezetes sejtést, hogy tagjai közt végtelen sokszor fordulnak elő szomszédos természetes számok, még senkinek sem sikerült sem bebizonyítani, sem megcáfolni.

Megoldás. A számsorozatok képzési szabálya és következő tagjai:

a) 2^n számjegyeinek összege (26, 25, 14);

b) n összes (nemcsak különböző) prímtényezőinek összege (17, 8, 19);

c) $p_n - n$ ahol p_n az n-edik prímszám (32, 37, 42). A feladatban említett sejtés csupán más megfogalmazása annak a sejtésnek, hogy az ikerprímszámok száma végtelen.

Bártfai Pál

Megoldást küldött be még: ÁDÁM ANDRÁS, BEREZNAI GYULA (*b*-re), BICZÓ GÉZA (*a*-ra és *c*-re), QUITTNER PÁL, REMÉNYI GUSZTÁV (*b*-re és *c*-re).

74. példa. Egy háromszög oldalai:

$$a < b < c.$$

Mi a nagyság szerinti sorrendje

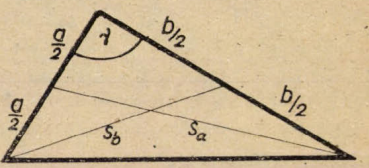
a) a háromszög súlyvonalainak;

b) a háromszög szögfelezőinek.

1. megoldás a-ra. A cosinus-tétel alapján

$$s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - ab\cos\gamma,$$

$$s_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - ab\cos\gamma.$$



4. ábra

Innen

$$s_a^2 - s_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2),$$

ez pedig a feltétel szerint pozitív. Tehát $s_a^2 > s_b^2$, és így $s_a > s_b$, minthogy mindkettő pozitív. Ugyanígy $s_b > s_c$. *Kiss Ernő*

Számításos megoldást küldött be még: BEREZNAI GYULA, BIRÓ JÓZSEF, DANYI PÁL, DÜRST ENDRE, NAGY FERENC (Hajdúböszörmény), QUITTNER PÁL, VIGASSY LAJOS.

2. megoldás a-ra. Ha $a < b$, akkor C az AB szakasz felező merőlegesének B-t tartalmazó partján van, és vele együtt a háromszög súlypontja, S is. Ezért

$$SA > SB,$$

és ugyanilyen összefüggés van ezeknek a szakaszoknak a másfélszeresei, a súlyvonalak között is. Ugyanígy bármelyik két súlyvonal közül az a kisebb, amely a nagyobb oldalból indul ki.

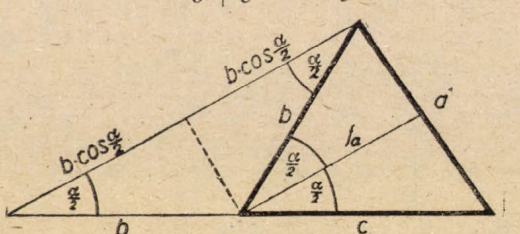
Reményi Gusztáv

Számítás nélküli megoldást küldött be még: BIRÓ JÓZSEF, HALÁSZ FERENC és QUITTNER PÁL.

1. megoldás b-re.

Az 5. ábráról leolvashatjuk, hogy

$$\frac{2b\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c} = \frac{f_a}{c},$$



5. ábra

vagyis

$$f_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}, \text{ és ugyanígy } f_b = \frac{2ca\cos\frac{\beta}{2}}{c+a}.$$

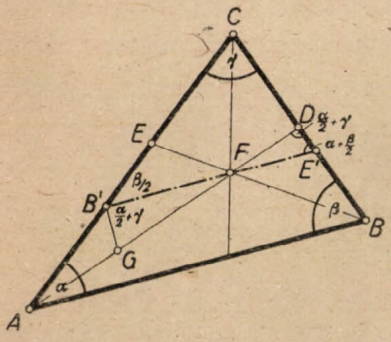
Különbségük

$$f_a - f_b = \frac{2c\left[b(c+a)\cos\frac{\alpha}{2} - a(b+c)\cos\frac{\beta}{2}\right]}{(b+c)(c+a)}.$$

Itt $2c$ és a nevező pozitív. A számlálóban $\cos\frac{\alpha}{2} > \cos\frac{\beta}{2}$, mert $0 < \alpha < \beta < \pi$. Amellett a nagyobbiknak az együtthatója is nagyobb, vagyis $b(c+a) > a(b+c)$. (Ugyanis mindkét oldalról elhagyva ab-t $bc > ac$, vagyis $b > a$ adódik, amit kikötöttünk, és ezek a lépések mind megfordíthatók.) Tehát $f_a > f_b$. Ugyanígy $f_b > f_c$.

Nagy Ferenc
(Hajdúböszörmény)

Számításos megoldást küldött be még: Bereznai Gyula, Biró József, Danyi Pál, Durst Endre, Quittner Pál (kétfélét), Kiss Ernő, Reményi Gusztáv és Vigassy Lajos.



6. ábra

2. megoldás b-re. A 6. ábrán $AD = f_a$, $BE = f_b$, $B'E'$ pedig BE-nek γ szögfelezőjére vonatkozó tükörképe.

Összehasonlítjuk AD és $B'E'$ hosszát. Két eset lehetséges:

1. Ha $\gamma \leqq 60°$, akkor $\alpha + \beta \geqq 120°$, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \geqq 60°$, tehát $\gamma \leqq \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, s innen — a két oldal $\frac{\alpha}{2}$-vel való növelésével —: $\frac{\alpha}{2} + \gamma \leqq \alpha + \frac{\beta}{2}$. Ezért a $DFE'\triangle$ oldalai és szögei közti összefüggés alapján

$$FE' \leqq FD. \qquad (1)$$

Mivel $AB'F\sphericalangle = 180° - \frac{\beta}{2} > 90°$, ezért az $AFB'\triangle$-ben

$$B'F < AF. \qquad (2)$$

(A tompaszöggel szemközti oldal nagyobb.)

(1)- és (2)-ből összeadással: $B'F+FE'<AF+FD$, azaz $B'E'<AD$, vagyis $f_b<f_a$.

2. Ha $\gamma>60°$, akkor $\alpha+\beta<120°$, $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}<60°$, tehát $\gamma>\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$ és $\frac{\alpha}{2}+\gamma>\alpha+\frac{\beta}{2}$, ezért pedig a $DFE'\triangle$-ben $FE'>FD$, azaz

$$FE'-FD>0. \tag{3}$$

$AB'F\sphericalangle=180°-\frac{\beta}{2}=\alpha+\frac{\beta}{2}+\gamma>\frac{\alpha}{2}+\gamma$, ezért az $AB'F\sphericalangle$ szárai között húzható olyan egyenes, amely $B'F$-fel $\frac{\alpha}{2}+\gamma$ nagyságú szöget zár be; ez az egyenes G-ben metszi az AF szakaszt.

$B'FG\triangle\sim DE'F\triangle$, mert megfelelő szögeik egyenlők; a hasonlóságból következik:

$$k=\frac{GF}{FE'}=\frac{B'F}{FD}. \tag{4}$$

Másrészt (3) alapján

$$\frac{B'F}{FD}>\frac{B'F}{FE'}. \tag{5}$$

A szögfelező a háromszög szemközti oldalát a szöget bezáró oldalak arányában osztja, ezért a $B'E'C$ háromszögből

$$\frac{B'F}{FE'}=\frac{B'C}{E'C}. \tag{6}$$

A $B'E'C$ háromszögben $\alpha+\frac{\beta}{2}=B'E'C\sphericalangle>CB'E'\sphericalangle=\frac{\beta}{2}$, ezért $B'C>E'C$, s innen

$$\frac{B'C}{E'C}>1. \tag{7}$$

A (4)—(7) összefüggésekből adódik, hogy

$$k>1. \tag{8}$$

(4)-ből:

$$k\cdot FE'=GF \text{ és } k\cdot FD=B'F.$$

(3) miatt $GF>B'F$ és

$$GF-B'F=k(FE'-FD). \tag{9}$$

(9)-ből (8) figyelembe vételével következik: $FE'-FD<GF-B'F$.

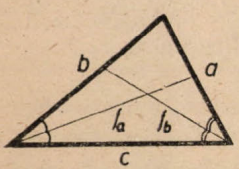
Innen pedig $B'F+FE'<GF+FD$, azaz $B'E'<GD$. Mivel pedig $GD<AD$, azért $B'E'<AD$, vagyis $f_b<f_a$.

Tehát minden esetben $f_b<f_a$, ha $a<b$.

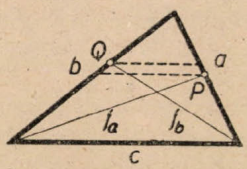
Ebből már következik, hogy ha $a<b<c$, akkor $f_a>f_b>f_c$.

Biró József

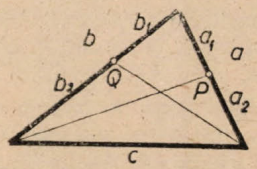
3. megoldás b-re. A 7. ábra azt sejteti, hogy $a<b$ esetén $f_a>f_b$. Ha ez c-től függetlenül mindig igaz, akkor következik belőle az is, hogy $a<b<c$ esetén $f_a>f_b>f_c$, (hiszen b-t és c-t is jelölhettük volna a-val és b-vel).



7. ábra



8. ábra



9. ábra

Hogy összehasonlíthassuk az f_a és az f_b szakaszt, húzzunk P és Q végpontjukból (8. ábra) c-vel párhuzamosokat. Két egyenlőszárú háromszöget kapunk; alapjuk f_a és f_b. Alapon levő szögeiket össze tudjuk hasonlítani: $(b,f_a)\sphericalangle=(f_a,c)\sphericalangle<(c,f_b)\sphericalangle=(f_b,a)\sphericalangle$ mert $a<b$. Ha igaz az, amit az ábra mutat, hogy P mindig közelebb van c egyeneséhez, mint Q, akkor a két háromszög közül az f_a alapúnak a szárai a nagyobbak (lásd a szaggatott vonalakat). Ha ennek a háromszögnek az alapján levő szögeit akkorára növeljük, mint az f_b alapú háromszög alapján levő szögei, de közben az alapját változatlanul hagyjuk, akkor a szárai még nagyobbak lesznek. Kell tehát, hogy az alapja, f_a is nagyobb legyen, mint a másik egyenlőszárú háromszög alapja, f_b.

Csak azt kell még belátnunk, hogy P közelebb van c egyeneséhez, mint Q (9. ábra). Ez másszóval azt jelenti, hogy $a_1:a_2$ nagyobb, mint $b_1:b_2$. De $a_1:a_2=b:c$ és $b_1:b_2=a:c$, tehát $a<b$ miatt $a_1:a_2>b_1:b_2$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Varga Tamás

75. példa. a) Hányféleképpen cserélheti el n személy a kalapját úgy, hogy egyiknek a fején se legyen a saját kalapja?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy ha n személy közt találomra osztjuk szét az n személy kalapját, egyiknek a fejére sem kerül a saját kalapja?

(Feltesszük, hogy minden személynek pontosan egy kalapja van.)

(Bukovszky Ferenc)

1. megoldás. Feladatunk megoldása céljából állítsuk embereinket sorba, s mindegyiküket kalapjával együtt számozzuk meg helye sorszámával, Feladatunk ezek után így fogalmazható: Számláljuk meg azokat a kalap-elrendezéseket, melyekben egy kalap száma sem egyezik helyének sorszámával; vagy: számláljuk meg az n elemből álló permutációs füzetek közül azokat, amelyekben egyik elem sem áll természetes helyén. Így a 321546 füzet kétszeresen kedvezőtlen számunkra, mert a 2 és a 6 a helyén áll. Jelöljük a ránk nézve kedvező esetek számát K_n-nel, ahol n a kalapok számát jelenti. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $K_1 = 0$, $K_2 = 1$ és $K_3 = 2$.

Vegyük az n kalap esetét. Ezeket $n!$-féleképpen helyezhetjük el. A feladat most az, hogy az $n!$ füzetből kiválasszuk a ránk nézve kedvezőket. Könnyebb azonban a kedvezőtlen esetek számát határozni meg. Ez a következő módon történhet:

Az első füzet n-szeresen kedvezőtlen. $n-1$-szeresen kedvezőtlen füzet nincs, mert minden cseréhez legalább két kalap kell. Az $n-2$-szeresen kedvezőtlen füzetek számát úgy kaphatjuk meg, hogy az n elemből az összes lehetséges módon kiválasztunk $n-2$-t, ami n alatt $n-2$-féleképpen lehetséges, s a fennmaradó két helyre elhelyezzük a fennmaradó két elemet, de úgy, hogy azok ne kerülhessenek természetes helyükre. Ennek a két elemnek K_2 elhelyezése lehet. Így a kérdéses kedvezőtlen esetek száma: $\binom{n}{n-2} K_2$.

Ugyanígy az $n-3$-szorosan kedvezőtlen füzetek száma $\binom{n}{n-3} K_3$.

Általában az $n-k$-szorosan kedvezőtlen füzetek számát az $\binom{n}{n-k} K_k$ kifejezés adja meg. Végül az egyszeresen kedvezőtlen füzetek számát úgy kapjuk meg, ha egy elemet a helyére teszünk, és a többit úgy helyezzük melléje, hogy feltétlenül kedvező füzetet kapjunk. Az egyszeresen kedvezőtlen füzetek száma tehát $\binom{n}{1} K_{n-1}$.

Ezek szerint az n elemből álló kedvező füzetek számát a következő kifejezés adja meg:

$$K_n = n! - \left[1 + \binom{n}{1} K_1 + \binom{n}{n-2} K_2 + \binom{n}{n-3} K_2 + \cdots + \binom{n}{1} K_{n-1}\right].$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$$

és formai okokból állapodjunk meg abban, hogy $K_0=1$, akkor kifejezésünk röviden így írható:

$$K_n=n!-\left[\binom{n}{0}K_0+\binom{n}{1}K_1+\binom{n}{2}K_2+\cdots+\binom{n}{n-1}K_{n-1}\right]=$$

$$=n!-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}K_k.$$

A kedvező esetek valószínűsége:

$$V=\frac{n!-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}K_k}{n!}=1-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}K_k}{n!}.$$

Ambrózy Géza

2. megoldás. Határozzuk meg először a feladat *b*) részében szereplő valószínűség értékét. A feladat egyszerű átfogalmazása az ún. Montmort-féle problémának. A megoldáshoz felhasználjuk a minden elemi valószínűségszámítással foglalkozó kézikönyvben (pl. Gnyegyenko—Hincsin; Takács—Ziermann) megtalálható Poincaré-tételt, amely szerint annak valószínűsége, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül legalább egy előfordul:

$$P=\sum_{k=1}^{n}-(-1)^k S_k,$$

ahol

$$S_k=\Sigma P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{ik}).$$

Az az esemény, hogy senki sem kapja a saját kalapját, ellentéte annak az eseménynek, hogy legalább egy a sajátját kapja, tehát:

$$p=\bar{P}=1-\sum_{k=1}^{n}-(-1)^k S_k$$

Annak valószínűsége, hogy k számú ember a saját kalapját kapja:

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k})=\frac{(n-k)!}{n!}$$

Látható, hogy minden S_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ összegben csupa egy-

forma $\frac{(n-k)!}{n!}$ értékű tagok szerepelnek, s minthogy a tagok száma $\binom{n}{k}$, azért

$$S_k = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Így

$$p = 1-\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{-(-1)^n}{n!}\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Megjegyezzük, hogy az analízis módszereivel könnyen kimutatható az, hogy $n \to \infty$ esetén $p \to \frac{1}{e}$, ahol e a természetes logaritmus alapszáma.

A *b)* alatti valószínűség értékének ismeretében könnyen megfelelhetünk az *a)* kérdésre is. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események „egyenlően valószínűek". A kalapokat $n!$ különböző módon tudjuk tulajdonosaik közt szétosztani, feladatunk szempontjából tehát „kedvező" az az N számú eset, amikor senki nem kapja a saját kalapját. Így az előbbi valószínűségre fennáll, hogy:

$$\frac{N}{n!} = p = \frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!} =$$

$$= \frac{1\cdot2\cdot3\ldots n-2\cdot3\ldots n+3\cdot4\ldots n-\cdots+(-1)^n}{n!}$$

Minthogy a nevezők egyenlők, azért a számlálók is azok, tehát:

$$N = 1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots n-2\cdot3\cdot4\ldots n+3\cdot4\ldots n-\cdots+(-1)^n$$

azaz:

$$N = (-1)^n+\sum_{k=1}^{n}-(-1)^k\prod_{i=k}^{n} i.$$

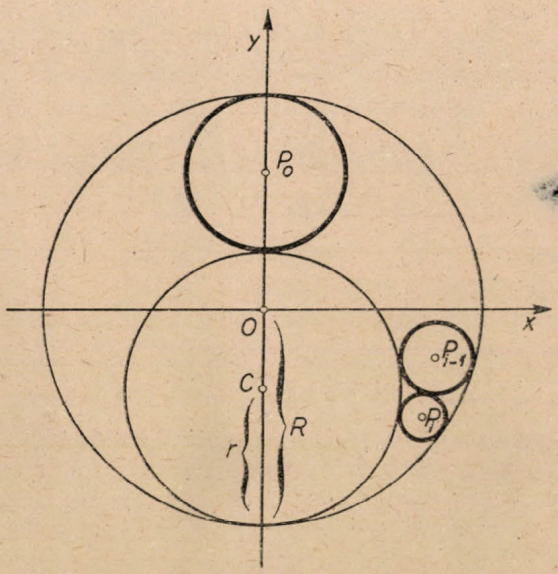
Bereznai Gyula

Megoldást küldött be még: Biró József, Durst Endre, Halász Ferenc, Quittner Pál és Reményi Gusztáv.

76. példa. Egy R sugarú kört belülről érint egy r sugarú kör. A két kör határolta sarlószerű idomba írjunk olyan köröket, amelyek érintik az adottakat is és egymást is. (Mindegyik két

másikat). Szerepeljen ezek között az a kör is, amelynek középpontja az eredeti két kör centrálisan van; legyen ennek a sugara ϱ_0, a tőle mindkét oldalra sorakozó körök sugara pedig sorban $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n \ldots$. Kiszámítandó ϱ_n mint R, r és n függvénye!

(Horvay Béla)



10. ábra

Megoldás. Jelöljük az R, r, ϱ_0 sugarú köröket rendre k_R, k_r, k_{ϱ_0}-val, az első két kör érintési pontját O-val. Alkalmazzunk O középpontú inverziót. Az inverzió körének sugarát válasszuk például $2r$-nek. Ekkor k_R és k_r inverze két párhuzamos egyenes, k_{ϱ_0}-é pedig egy ezeket érintő kör. A feladatban szereplő érintő körök inverzei a két párhuzamos egyenest érintő körök, amelyek mindegyike a sorozat előző körét is érinti. Az inverz körök közös ϱ sugarának meghatározása után ϱ_n is kiszámítható. (Az invertált alakzatokat az eredetiektől felső vesszővel különböztetjük meg.)

Mivel k'_R a k_{2r} és a k_R kör hatványvonala, a H pont hatványa mindkét körre nézve ugyanakkora:

$$2\varrho\,(4r-2\varrho) = (2r-2\varrho)\,[2R-(2r-2\varrho)].$$

Ebből

$$\varrho = \frac{r}{R}\,(R-r).$$

(Ugyanez adódik R és r $(R>r)$ bármilyen kölcsönös nagysága esetén.) Tehát

$$v = 2r - \varrho = \frac{r}{R}(R+r),$$

$$t'_n = \sqrt{v^2 + u'^2_n} = \sqrt{\frac{r^2}{R^2}(R+r)^2 + 4n\frac{r^2}{R^2}(R-r)^2}.$$

k_{ϱ_n} és k'_{ϱ_n} középpontjai nem alkotnak inverz pontpárt, de a két kör legközelebbi, ill. legtávolabbi pontjai igen. Eszerint

$$(t'_n - \varrho)(t_n + \varrho_n) = 4r^2$$

és

$$(t'_n + \varrho)(t_n - \varrho_n) = 4r^2.$$

E két egyenletből ϱ_n és t_n meghatározható mint R, r és n függvénye. Feladatunk ϱ_n meghatározása:

$$\varrho_n = \frac{2r^2}{t'_n - \varrho} - \frac{2r^2}{t'_n + \varrho} = \frac{4r^2\varrho}{t'^2_n - \varrho^2} = \frac{Rr(R-r)}{Rr + n^2(R-r)^2}.$$

Reményi Gusztáv

Megoldást küldött be még: Bíró József, Halász Ferenc és Quittner Pál.

HÍREK

Német Demokratikus Köztársaság

A Német Matematikai Társulat 1957. évi kongresszusát szeptember 9-től 14-ig tartotta Drezdában. Társulatunk részéről az alább felsoroltak tartottak előadást a kongresszuson:

Aczél János: Miszellen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.

Adler György: Sur le principe de maximum de l'équation de la chaleur.

Bognár Mátyás: Verallgemeinerung des lokalen Dualitätssatzes von P. Alexandroff.

Császár Ákos: Bemerkung zur allgemeinen Topologie.

Freud Géza: Einige Resultate aus der Approximationstheorie.

Lovass-Nagy Viktor: Über die Verallgemeinerung einiger Ergebnisse der Vierpoltheorie mit Hilfe von Hypermatrizen.

Mikolás Miklós: Zur Theorie der Modulfunktion und der Dedekindschen Summen.

Rózsa Pál: Über einige Anwendungen der Matrizen und Hypermatrizen in der Mechanik der Massenpunktgitter.

Seres Iván: Über ein Irreduzibilitätsproblem.

Surányi János: Über die Reihenfolge der Vielfachen einer reellen Zahl mod. 1.

Tarján Rezső: Neuronale Automaten.

Varga Ottó: Über den Algorithmus der Erweiterung in allgemeinen differentialgeometrischen Räumen und einige Anwendungen desselben.

Zányi László: Eine neue Methode in der Algebra.

Hollandia

Az „International Union of Logic, Philosophy and Methodology of the Sciences" 1957. aug. 26—31-ig kollokviumot rendezett Amszterdamban „Konstruktivitás a matematikában" címen. A kollokviumon a következő előadások hangzottak el:

A. Mostowski: Various degrees of constructivism.

A. Grzegorczyk: Some approaches to constructive analysis.

D. Lacombe: Sur la „récursivation" de quelques notions topologiques générales. Applications à l'analyse récursive.

R. L. Goodstein: Recursive analysis.

E. Specker: Der Satz vom Maximum in der rekursiven Analysis.

P. Lorenzen: „Beweis" und „Definition" in der konstruktiven Mathematik.

R. Péter: Rekursivität und Konstruktivität.
L. Kalmár: An argument against the plausibility of Church's thesis.
S. C. Kleene: Countable functionals.
G. Kreisel: Constructive interpretations of analysis by means of functionals of finite type.
F. B. Titch: Quasi constructive foundations for mathematics.
M. H. Löb: Construction truth.
J. Myhill: Finitely representable functions.
H. Rasiowa: Algebraische Charakterisierung der intuitionistischen Logik mit starker Negation.
R. Sikorski: Der Heytingsche Prädikatenkalkül und metrische Räume.
H. Hermes: Zur Formulierung des Lorenzenschen Inversionsprinzips.
H. Rasiowa—R. Sikorski: Formalisierte intuitionistische elementare Theorien.
P. Bernays: Über eine natürliche Erweiterung des Relationkalküls.
E. W. Beth: The constructive character of intuitionistic logic.
D. Nelson: Negation and separation of concepts in constructive systems.

Német Szövetségi Köztársaság

1956. szept. 25-től 29-ig az oberwolfachi Matematikai Kutató Intézet csoportelméleti kollokviumot rendezett. A kollokviumon többek között részt vettek R. Baer. B. H. Neuman. Hanna Neumann, G. Higman. K. Hirsch, W. Gaschütz, F. Loonstra, H. Bergström, B. Huppert, Mc. Lain, magyar részről Fuchs László. A kollokviumon B. H. Neuman rendezett csoportok bővítéséről, R. Baer Engel-féle elemekről, Hanna Neumann szabad csoportok alcsoportjainak metszeteiről adott elő. K. Hirsch pedig referátumot tartott csoportok szóproblémájának megoldhatatlanságáról. Fuchs László „Ringe und ihre additive Gruppe" címen adott elő.

1957. jún. 11-től 15-ig a kutatóintézet gyűrűelmélet-kollokviumot rendezett. Ezen magyar részről Fuchs László és Kertész Andor vettek részt. Jelen voltak még többek között R. Baer, Fr. Kasch. E. A. Behrens, P. Roquette, H. Grell, R. Croisot, J. Guérindon. R. Baer algebrailag nem zárt testek egy karakterizálásáról, Fr. Kasch gyűrűk Galois-elméletéről, R. Croisot nem-kommutatív gyűrűk ideálelméletéről, H. Grell véges algebrai számtestek részgyűrűinek szerkezetéről tartott előadást. Fuchs László „Beitrag zur additiven Idealtheorie" és Kertész Andor pedig „Gleichungssysteme über Moduln" címmel tartott előadást.

Finnország

A Nemzetközi Matematikai Unió támogatásával 1957. augusztus 12-től 18-ig Helsinkiben Nemzetközi Függvénytani Kollokviumot rendeztek. A szervezőbizottság elnöke R. Nevanlinna, titkára O. Lehto volt. A kollokviumon a komplex függvénytan száznál több kutatója vett részt és közel 80 előadás hangzott el. A magyar matematikusok közül Erdős Pál. Rényi Alfréd és Rényi Kató vettek részt a kollokviumon a Nemzetközi Matematikai Unió meghívására, és a következő előadásokat tartották:
Erdős Pál: Extremal properties of polynomials.
Rényi Alfréd: Some remarks on univalent functions.
Rényi Kató: Über einige Fragen bezüglich lakunären Potenzreihen.

Svédország

A Nemzetközi Statisztikai Intézet (ISI) 1957. augusztus 8-tól 15-ig Stockholmban tartotta meg harmincadik ülésszakát, többszáz statisztikus és matematikus részvételével. Hazánkból Péter György és Mód Aladárné (Központi Statisztikai Hivatal), továbbá Rényi Alfréd vettek részt az ülésszakon.

Rényi Alfréd 1957. augusztus 6-án az uppsalai egyetem statisztikai intézetében H. Wold professzor szemináriumában tartott előadást: „On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables" címen.

Lengyelország

Turán Pál a lublini egyetem meghívására Lengyelországban a múlt évben a következő előadásokat tartotta: Lublinban 1956 szept. 24., 25. és 26-án „Az analízis egy új módszeréről", szept. 28-án „Közönséges differenciálegyenletrendszerek instabilitásáról", Krakkóban szept. 29-én „Közönséges differenciálegyenletrendszerek instabilitásáról", Lodzban okt. 2-án „Polinomok analitikus elméletéről" címen.

Turánné Sós Vera Lublinban szept. 26-án és Lodzban okt. 2-án tartott előadást „A lánctörtek elméletének egy geometriai felépítése és Steinhaus egy sejtése" címmel.

*

Turán Pál a lundi, koppenhágai, mainzi és göttingeni egyetemek matematikai intézeteinek meghívására előadásokat tartott. Lundban 1957. jún. 24-én, Koppenhágában júl. 1-én, Mainzban júl. 12-én „Analysis and diophantine approximation:' címmel és Göttingenben júl. 18-án „Über die Anwendungen einer Methode in der analytischen Zahlentheorie" címmel.

Franciaország

Szőkefalvi-Nagy Béla a párizsi Sorbonne meghívására 1957. máj. 19-től jún. 6-ig Franciaországban tartózkodott. A párizsi egyetem Poincaré Intézetében „Sur quelques théorèmes de Löwner, Nevanlinna et Pick" és „Quelques résultats récents sur les opérateurs dans un espace hilbertien" címen tartott előadásokat. A bordeaux-i egyetemen is előadott „Contractions de l'espace de Hilbert" címen.

Alexits György a Faculté des Sciences de Paris meghívására május 16-tól jún. 2-ig ugyancsak előadásokat tartott a Sorbonne-on „Convergence absolue des développements orthogonaux" és „Divergence des séries orthogonales" címen. Első előadását a caeni egyetemen is megismételte máj. 25-én.

Társulati élet

A Bolyai János Matematikai Társulat Budapesti és Pestmegyei Tagozatának előadásai 1957. január 1-től június 30-ig

Január 18.

Rényi Kató: Pólya György egy sejtéséről.

Az előadó transzcendens egész függvényekkel kapcsolatos tételeket bizonyított be, amelyek egyike speciális esetként tartalmazza Pólya György következő sejtésének bizonyítását: Fabry-hézagos hatványsor által előállított függvények semmilyen más pont körüli Taylor-sora nem lehet Fabry-hézagos.

Január 25.

Freud Géza ismertette Mikusinszki: Operátorszámítás c. könyvét. Klubest.

Január 26.

Reiman István: Szabályos háromszögek az elemi geometriában. (Középiskolai matematikai diákdélután.)

Február 8.

Frey Tamás: A Korous tétel általános ortogonális polinomsorozatok aszimptotikájára.

Az előadó Korous eredeti tételét több irányban általánosította. Az egyik irányban sikerült megszabadulnia attól a Korousnál lényeges szerepet játszó feltételtől, hogy a két egymáshoz símuló súlyfüggvény hányadosa, az alap-intervallum felett korlátos és 0-tól elhatárolt legyen. A konkluziók lényeges megváltozása nélkül megengedhető ugyanis, hogy mindkét súlyfüggvény végesszámú pont környezetében majorálható és minorálható egy-egy integrálható hatványfüggvénnyel úgy, hogy a majoráns és minoráns exponensének különbsége — 1-nél nagyobb.

Sikerült gyengítenie a két súlyfüggvény símulását, Korousnál jellemző feltételt ís, amely szerint a két függvény hányadosának Lip. 1. osztálybelinek kell lennie — abban az esetben, ha ismeretes, hogy az egyik súlyfüggvényhez rendelt ortonormált polinomsorozat a tekintett pont valamely környezetében összességében egyenletesen korlátos. Ez esetben ui. a másik súlyfüggvényhez tartozó ortonormált polinomsorozat is egyenletesen korlátos a tekintett pontban, ha a két súlyfüggvény hányadosa

a) a tekintett pont környezetében Dini-Lipschitz feltételt elégít ki.

b) a tekintett pontban 1/2-nél nagyobb exponensű Lipschitz-feltételt elégít ki. Sikerült általánosítania a tételt az aszimptotikus vizsgálatok esetére is, a következő értelemben. Amennyiben a két súlyfüggvény a tekintett pontban

a) másodrendben símul egymáshoz

b) elsőnél magasabb rendben símul egymáshoz és az egyikhez tartozó ortonormált polinomsorozat a tekintett pont környezetében egyenletesen korlátos,

akkor igen általános globális (ti. az egész intervallumra vonatkozó) feltételek mellett bármelyik súlyfüggvényhez tartozó ortonormált polinomsorozat rendelkezik aszimptotitikával a tekintett pontban, ha a másikhoz tartozó polinomsorozat is rendelkezik ilyennel. Az eredmények lényegesen élesített formában tartalmazzák Szegő G., illetve Freud G. aszimptotikus eredményeit, amelyek arra a speciális esetre vonatkoznak, amikor az egyik súlyfüggvény a Csebisev-féle. Ez utóbbi speciális esetet illetően azonban további lényeges eredményeket is ismertetett az előadó. Amennyiben a súlyfüggvény — elég általános globális feltételek mellett —

a) a tekintett pontban 1/2-nél nagyobb exponensű Lipschitz-feltételt elégit ki,

b) a tekintett pontban Dini—Lipschitz feltételt elégít ki és az ortonormált polinomsorozat e pont környezetében összességében egyenletesen korlátos, akkor e pontban az ortonormált polinomsorozat rendelkezik aszimptotikával. Megjegyezte végül az előadó, hogy ez utóbbi eredmények kapcsán egy további mellékeredmény adódott az eredeti Korous-tételt illetően, nevezetesen az ott szereplő és a két súlyfüggvény hányadosára vonatkozó, korlátosságot és 0-tól elhatároltságot követelő feltétel a konkluziók megváltozása nélkül teljesen elhagyható.

Február 16.

Horvay Katalin: Kapcsolat a háromszög Feuerbach-féle köre és Simpson egyenesei között.

(Középiskolai matematikai diákdélután.)

Február 28.

Adler György: Hővezetési differenciálegyenlet maximum elvéről. Az előadó a hővezetés differenciálegyenletére vonatkozó ismert Tyihonov-tétellel kapcsolatos, részint saját, részint Freud Géza, részben pedig kettőjük közös eredményeit ismertette. Ezen eredmények egyrészt a Tyihonov-tétel bizonyos élesítését adják, másrészt pedig a hőmérsékleti függvény gradiensére, illetve bizonyos összetett hővezető rendszerre vonatkozó maximum elveket szolgáltatnak.

Március 1.

Szüsz Péter: A sorelmélet egy problémájáról.

Előadó a következő tételt bizonyította be: Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív számoknak egy monoton csökkenő sorozata. Akkor annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy e sorozat minden $a'_1, a'_2, \ldots$

átrendezéséhez létezzék oly $\varphi(1), \varphi(2), \ldots$ kiválasztás, hogy teljesüljön a $\sum_{k=1}^{\infty} \min (a'_{\varphi(k)}, a'_{\varphi(k+1)}) = \infty$ reláció, a $\lim_{n\to\infty} n a_n > 0$ feltétel teljesülése.

Március 9.

Kárteszi Ferenc vezetésével előre kitűzött feladatok megbeszélése.
(Középiskolai matematikai diákdélután.)

Március 22.

Aczél János: Újabb eredmények a geometriai objektumok elméletében. (lásd a Debreceni Tagozat márc. 11.-i előadását)

Március 29.

Frey Tamás: Közönséges differenciálegyenletek közelítő megoldási módszereiről.
Röviden összefoglalta az előadó az ismert közelítő módszerek alapgondolatát, továbbá azt, hogy a modern programvezérelt számológépek üzembeállítása milyen irányban változtatta meg a közelítő eljárásokkal kapcsolatos igényeket.
Ezután ismertette, hogy hogyan sikerült finomítania a Runge-Kutta-féle eljárást a függő változó(k) szerint vett parciális deriváltak felhasználásával. A finomítás lényege: úgy emelni az eljárás fokszámát (az egzakt és az approximativ megoldás egymással megegyező Taylor-polinomjának fok-számát), hogy azon pontok száma, ahol az egyenlet(ek)ben szereplő függvény(ek) értékét ki kell számítani, ne emelkedjék túl gyorsan a fokszámmal.

Április 6.

Dux Erik: Speciális algebrai egyenletek.
(Középiskolai matematikai diákdélután.)

Április 8.

Rényi Alfréd kihirdette az 1956. évi Schweitzer verseny eredményét és ismertette a feladatokat.
(l. e szám 321 oldalán.)

Április 12.

Kalmár László: A matematikai logika műszaki alkalmazásairól. (I.—III.)
Egy elektromos hálózat (áramkör) matematikai szempontból egy gráf, amelynek élei határozott elektromos viselkedésű alkatrészek (vezetékek, kapcsolók, jelfogó-tekercsek stb.) és amelynek egyes szögpontjai, mint bemenő vagy kimenő pólusok, ki vannak tüntetve. Pusztán huzalt tartalmazó hálózat két pólusa között akkor és csak akkor van vezető összeköttetés, ha a gráf ugyanazon összefüggő komponenséhez tartoznak. Kapcsolót (érintkezőt, kulcsot) is tartalmazó hálózat esetén annak az ítéletnek a logikai értéke, amely azt állítja, hogy két pólus között van vezető összeköttetés, azon ítéletek logikai értékétől függ, amelyek az egyes kapcsolókról azt állítják, hogy zárva vannak. Ezt a függést, a logikai ítélet kalkulus egy formulájával lehet felírni. Két (két-két kitüntetett pólussal bíró) hálózat sorbakapcsolásának a megfelelő

logikai formulák konjunkciója, párhuzamos kapcsolásának a logikai formulák diszjunkciója felel meg. A logikai formula tágabb értelmében monoton növekvő Boole-féle függvényt állít elő; fordítva, minden ilyen függvényt előállító formula megvalósítható huzalokból és kapcsolókból álló kétpólusú hálózattal, ha az azonos logikai változóknak megfelelő kapcsolók azonos állását mechanikai kapcsolattal biztosítjuk. Ha olyan mechanikai kapcsolatot is megengedünk, amely két kapcsoló ellenkező állását biztosítja, akkor az ítéletkalkulus minden formulája megvalósítható lesz. Egy másik mód az ítéletkalkulus tetszőleges formuláinak hálózattal való megvalósítására abban áll, hogy a két logikai értéknek nem egy-egy kapcsoló két állását, vagyis azt feleltettük meg, hogy két pont (a kapcsoló két kivezetése) között van-e vezető összeköttetés vagy nincs, hanem három pont 5 lehetséges vezetési állapota (particiója) közül azzal a kettővel reprezentáljuk, amelyben a három pont egyike a másik kettő egyikével és csakazzal van vezető összeköttetésben. A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében épülő logikai gép ezen az elven alapul; ez lehetővé teszi a logikai műveleteknek pusztán huzalt tartalmazó alkatrészek segítségével való elvégzését, szemben pl. a Ferranti-féle elektromechanikus logikai géppel, amely a logikai értékeket egy-egy pont feszültségi állapotával reprezentálja, vagyis azzal, feszültség alatt van-e, vagy földelve van-e, a logikai műveletek elvégzésére pedig jelfogókat, egyenirányítókat, és sőnt-ellenállásokat tartalmazó műveleti dobozokat alkalmaz. A műveleteknek pusztán huzalos dobozokkal való elvégzése aritmetikai műveletek esetén is lehetséges; példaként szerepelt az előadásban egy huzalos bináris összeadó, amely Székely-Doby Sándor egy ötletének felhasználásával készült.

Jelfogókat is tartalmazó hálózatok esetén már figyelembe kell venni a hálózattal kapcsolatos ítéletek logikai értékének az időtől való függését, különben már az elektromos csengő leírásánál a krétai antinómiához hasonló ellentmondáshoz jutnánk. A logikai változók helyébe tehát ez esetben logikai függvények lépnek. Az előadó az elektromos csengő és az önzáró jelfogó példáján megmutatta a logikai függvénykalkulus alkalmazhatóságát; általánosabb idevágó kérdéseket illetően Péter Rózsa, Dömölki Bálint és S. C. Kleene eredményeire utalt.

A logikai függvénykalkulus nemcsak elektromechanikus, hanem elektronikus, félvezetős stb. hálózatokra is alkalmazható; az előadó ezt az elektromechanikus jelfogó elektroncsöves analogonjának vázolásával tette plauzibilissé.

Április 12.

Kolonits Ferenc: Kisebb, körzővel és vonalzóval megoldható feladatokról.

Szász Domokos: Csak körzővel elvégezhető szerkesztésekről. Az Ifjúsági Matematikai Kör előadásai.

Április 19.

Fenyő István: A disztribucióelmélet Korevaar-féle megalapozása. Az előadás a disztribució elméletnek Korevaar által adott megalapozását ismertette. Foglalkozott a Schwartz-féle elmélettel való összefüggéssel, rámutatva arra, hogy egyes területeken a Korevaar-

féle, más területeken viszont az L. Schwartz-féle elmélet használatának vannak előnyei. Az előadás új, önálló eredményeket nem tartalmazott, néhány tételnek az eddig ismerteknél egyszerűbb bizonyítását adta.

Április 26.

Vincze István: Egészfüggvények együtthatóiról.
Jelölje $M(r)$ az $F(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$ *transzcendens* egész függvény maximum modulusát $(\max_{|z|=r}|F(z)|=M(r))$ r_n azt az (egyértelműen meghatározott) helyet, ahol az $\frac{M(r)}{r^n}$ függvény minimumát felveszi, továbbá legyen $M_n=\frac{M(r_n)}{r_n^n}$. Cauchy egyenlőtlensége ekkor az $|a_n|<M_n$ formában a legerősebb. Az előadó bebizonyította, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{M_n}$ divergens, ami arra utal, hogy az M_n értékek végtelen sok n-re bizonyos értelemben jó becslést adnak az együtthatókra. — A továbbiakban egy tételt adott arra, hogy hogyan lehet csupán az $M(r)$ függvény ismeretében az $F(z)$ el nem tűnő együtthatóira bizonyos következtetést levonni, végül az együtthatókra vonatkozó integrálbecslést ismertetett.

Május 4.

Strommer Gyula: A kúpszeletekre vonatkozó egy nevezetes tétel és annak alkalmazása feladatok megoldására.
(Középiskolai matematikai délután.)

Május 10.

Kalmár László: A matematikai logika műszaki alkalmazásáról. II.

Május 17.

Czách László: A Poisson-egyenlet általánosított megoldása.

Május 24.

Serés Iván: Egy irreducibilitási problémáról.
Legyenek adva az
1. $a_1<a_2<\cdots<a_n$ $(n\geqq 6)$ racionális egészszámok,
2. az $f(z)=z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots\pm 1$ egész együtthatójú irreducibilis polinom, amelynek nem minden gyöke valós.
Jelentse z a következő polinomot
3. $z=\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)Q(x)$ ahol a $Q(x)$ polinom együtthatói is racionális egészek és a főegyütthatója 1.
Bebizonyítható a fenti feltételek mellett a következő
Tétel: Az $f\left(\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)Q(x)\right)$ polinom irreducibilis a racionális számtest fölött.

A bizonyítás alapja a következő.

Segédtétel:
Jelölje Δ az $f(z)$ fenti polinom gyöktestét.
Legyen $\tau(x)$ oly polinom, melynek főegyütthatója 1, a többi együtthatója a Δ-ból való egészek; továbbá $\tau(a_k)$ és $\tau(a_l)$ racionális egész a_k és a_l mellett egységesek a Δ-ból

$$\tau(a_k)\tau^{-1}(a_l) \text{ valós szám } \Delta\text{-ból}$$

ha $|a_k - a_l| > 2$.

Június 8.

Az Arany Dániel verseny eredménykihirdetése és díjkiosztása. A verseny feladatait Varga Tamás, illetve Lőrincz Pál ismertették.

Június 14.

Kalmár László: A matematikai logika műszaki alkalmazásáról. III. rész

Június 14.

Udvardy András: Vektoralgebra.
(Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.)

Június 21.

Cipszer János—Freud Géza: Derivált függvény approximációja a függvényt approximáló polinomok deriváltjaival.

Az előadó a következő tételeket ismertette:

1. Ha $F(x)$ 2π szerint periodikus, k-szor folytonosan differenciálható függvény, $P_n(x)$ n-rendű trigonometrikus polinom és $|F(x) - P_n(x)| \leqq \delta E_n(F)$ akkor

$$|F^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)| \leqq c\delta \log [\min (n, k) + 1] E_n(F^{(k)}),$$

ahol C univerzális konstans.

2. Ha az 1. tétel feltevései mellett mindig igaz, hogy

$$|F^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)| \leqq (\delta \varphi(k. n) E_n(F^{(k)}),$$

akkor $\varphi(k, n) \geqq \text{const. } \log [\min (k, n) + 1]$.

(Az előadás megjelenik az Acta Mathematica-ban „Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynome trigonométrique et par ses dérivées" címmel.)

Június 28.

Aczél János: Újabb eredmények függvényegyenletekről.

Az előadó S. Zaremba, S. Kurepa, M. Fréchet, T. Hayashi R. Caccioppoli, H. Kiesewetter, G. Stokes, J. Stirling, R. M. Redheffer, Cz. Ryll-Nardzewski, S. Paszkowski, J. Mycielski, S. Golab, S. Lojasiewicz, N. H. Abel, J. Tannery, L. Vietoris, P. Montel, G. Kirschmer, D. S. Mitrinovic és a saját régebbi és újabb eredményeihez kapcsolódik általánosításokkal, a feltételek enyhítésével, új bizonyítási eljárásokkal, problémák megoldásával és újak felvetésével.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szegedi Tagozatának előadásai 1957. január 1-től június 30-ig

Február 2.

PRÉKOPA ANDRÁS: A korlátlanul osztható eloszlásokról.

Az előadás célja a független növekményű sztochasztikus folyamatok és a korlátlanul osztható eloszlások közti szoros kapcsolat vizsgálata egy új módszer segítségével, főként abból a szempontból, hogy a Lévy-féle kanonikus alakban szereplő konstansok és függvények hogyan származtathatók a folyamat ugrásainak jellemző adataiból.

Február 2.

RÉNYI ALFRÉD: Valós számok különböző előállításával kapcsolatos valószínűségszámítási problémákról.

Április 13.

GEHÉR LÁSZLÓ: A Lipschitz-féle függvények kiterjesztése.

Az előadás a Lipschitz feltételt kielégítő függvényekre a következő két tételt mondja ki.

1. Egy M metrikus téren értelmezett K konstansú Lipschitz feltételt kielégítő függvény kiterjeszthető bármely $N \supset M$ metrikus térre Lipschitz feltételt kielégítő függvénye, a K Lipschitz konstans megtartásával.

2. Legyen N egy metrikus tér, M ennek egy zárt halmaza. $f(x)$ legyen egy, az M halmazon értelmezett olyan függvény, amely az M minden pontjában Lipschitz feltételt elégít ki. Akkor létezik egy, az egész N halmazon értelmezett $F(x)$ függvény, amely N minden pontjában Lipschitz feltételt elégít ki és az M halmazon $F(x) = f(x)$.

Április 27.

SZÉKELY-DOBY SÁNDOR: Jelfogós számológépek tervezésénél fellépő problémák.

A Leibniz-féle számológép rövid ismertetése különös tekintettel a maradékátadás megoldására. Egy elképzelhető megoldás egyidejű maradékátadás bevezetésére mechanikus gépeknél egyszerű áramkör segítségével. Egyidejű maradékátadással dolgozó 10-es számrendszerbeli jelfogós összeadógép áramköri alapjai. 2-es számrendszerben dolgozó számológép egy bináris helyértékének megfelelő elemi összeadóáramkör megtervezése logikai algebra gyakorlati alkalmazásával. A programozás egy-két problémája jelfogós számológépek tervezésénél.

Április 29.

KÁNTOR SÁNDOR, KOVÁCS LÁSZLÓ, PAPP ZOLTÁN: Az 1956. évi Schweitzer verseny feladatainak megoldása.

Június 3.

HOSSZÚ MIKLÓS: Megjegyzések függvényegyenletek és algebrai módszerek alkalmazásához a geometriai objektumok elméletében.

A Bolyai János Matematikai Társulat Debreceni Tagozatának előadásai 1957. január 1-től június 30-ig

Március 7.

Soós Gyula: A differenciálgeometria térfogalma.
Előadás középiskolai diákok számára.

Március 11.

Aczél János: Újabb eredmények a geometriai objektumok elméletében.
Összefoglaló előadás a geometriai objektumok definíciójáról, klasszifikáció elméletéről, kovariáns deriváltjáról, saját és mások eredményeinek ismertetésével. Részletesebben az egydimenziós, egykomponensű másodosztályú, többkomponensű harmadosztályú objektumok klasszifikációját és az egydimenziós egykomponensű másodosztályú objektumok kovariáns deriváltjának kérdését tárgyalta. Régebbi eredményekhez képest a feltételek és levezetések is egyszerűsödtek.

Március 26.

Mosonyi Kálmánné: Az önállóságra nevelés a matematika órákon.
Általános iskolai továbbképzés.

Március 30.

Bakos Tibor: Binárisan n-jegyű számok egy bizonyos felsorolásáról.

Április 3.

Szénássy Barna: Bolyai Farkas.
Előadás középiskolai diákok számára, a Kossuth L. Gyakorló Gimnáziumban.

Április 10.

Bakos Tibor: Testmodellek építése a térmértan tanításához.
Továbbképző előadás középiskolai tanárok részére.

Április 11.

Merza József: Geometriai bizonyításoknál elkövethető hibák.
(Előadás középiskolai diákok számára.)

Április 16.

Kertész Andor: A Ruffni—Abel-féle tételről.
Előadás középiskolai tanárok számára.

Április 16.

Varga Tamás: A középiskolai matematikai oktatás egyes problémái.
Előadás középiskolai tanárok számára.

Április 18.

Szendrei János: Magasabbfokú egyenletrendszerek.
Középiskolai továbbképző előadás Makón.

Május 4.

Moór Arthur: Schur differenciálgeometriai tételéről.

Május 18.

Kalmár László: Szellemi munkát végző gépek.
Előadás a TTIT-tel közös rendezésben.

Május 20.

KALMÁR LÁSZLÓ: A Ferranti-féle logikai gép szegedi változata. A Szegeden épülő logikai gép elvi és műszaki megoldásának ismertetése.

Május 28.

MOSONYI KÁLMÁN: Matematikai játékok.

Május 30.

MOSONYI KÁLMÁN: Érdekes matematikai feladatok. Általános iskolai továbbképző előadás Makón.

Beszámoló az 1954. évben Jósvafőn tartott matematikai statisztikai kollokviumról

A Bolyai János Matematikai Társulat 1954. szeptember hó 27-től kezdődően három napos matematikai statisztikai kollokviumot rendezett Jósvafőn. A kollokvium előadásai felölelték a matematikai statisztika területén folytatott tudományos kutatómunkát, amely nálunk az elmélet és alkalmazásai terén folyt. A kollokviumon matematikusokon kívül más tudományok kutatói és több gyakorlati szakember is részt vett, akik részben előadásokat is tartottak, részben hozzászólásaikban fejtették ki statisztikai tárgyú problémáikat. A következőkben az elhangzott előadásokat témakörök szerint csoportosítva közöljük. Ha az előadás tárgya időközben közlésre került, rövid ismertetés helyett csak utalunk a megfelelő cikkre.

Becsléselmélet

1. LIPTÁK TAMÁS: *Becsléselmélet.* — Előadó a matematikai statisztika e fejezetét nagyobb terjedelmű referátumában a legújabb kutatások tükrében világította meg. Előadásának anyagát a szükséges és elégséges statisztika fogalma köré csoportosította.

2. JORDÁN KÁROLY: *A Poisson-eloszlás általánosítása.* — Lásd a szerző A valószínűségszámítás néhány új eredményéről c. dolgozatát. MTA III. Osztályának Közleményei V. kötet 128—135. old.

3. SARKADI KÁROLY: *A várható eltérésre vonatkozó Sheppard-korrekció.* — Lásd szerzőtől ugyane című cikket az MTA Alkalmazott Matematikai Intézete Közleményeinek 3. kötetében. (191—194. old.)

4. PRÉKOPA ANDRÁS: *Többdimenziós Markov-folyamatok.* — Lásd a szerző Sztochasztikus halmazfüggvényekről, I. c. dolgozatát. MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közleményei (1956) VI. kötet, 3—4. szám, 289—337. old.

Mezőgazdasági, orvosi, biológiai statisztika

1. SZÉKELY GÁBOR: *A mezőgazdasági csoport kutatási terve.* — Előadó referátumában ismertette a mezőgazdasági kísérleteknél felmerülő speciális nehézségeket, amelyek különleges kísérleti metodika megteremtését tették szükségessé. Rámutatott a blokk-módszerek mellett a sztochasztikus folyamatok elmélete és az integrál-geometria módszerei alkalmazásának szükségességére.

2. ZERGÉNYI ERZSÉBET: *Kísérleti elrendezések a mezőgazdaságban.* — A mezőgazdaságban a terméshozamnak, a különböző kezelések eredményes-

ségének összehasonlításánál alkalmazott következő módszereket ismertette: véletlen blokk elrendezés, latin négyzet, súlyozott nem teljes blokk elrendezés, súlyozott rács, súlyozott rácsnégyzet.

3. Székely Gábor: *Markov-regresszió.* — Előadó Markov lineáris regresszióra vonatkozó tételén keresztül a mezőgazdasági kísérleteknél használatos speciális blokk elrendezések közül a véletlen blokk elrendezés és a latin négyzetes elrendezés szórásbecslésével foglalkozott.

4. Rényi Alfréd: *Egy, a lucerna nemesítésével kapcsolatos kombinatorikai problémáról.* — Lásd a szerző Egy kombinatorikai probléma, amely a lucerna nemesítésével kapcsolatban merült fel c. dolgozatát. Matematikai Lapok VI. évf. 2—3. szám 151—164. old.

5. Juvancz Iréneusz—Takács Lajos: *Meteoropatológikus jelenségek valószínűségszámítási vizsgálatáról.* — Lásd Takács Lajos: Valószínűségszámítási módszerek alkalmazása bizonyos meteoropatológiai jelenségek vizsgálatánál. MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei. (Budapest, 1955). III. kötet 301—320. old.

6. Csizmás Lajos: *Szimmetrián alapuló módszerek adag-hatás görbék 50%-ban hatékony adagjának számítására.* — Előadó az 50%-ban hatékony adag meghatározására használatos módszereket ismertette, majd egy az eddiginél általánosabb, szimmetrián alapuló módszert ismertetett, amelynek több ismert módszer alesete.

7. Csizmás Lajos: *Nomografikus eljárás Poisson-eloszlások középértékeinek összehasonlítására.* — Poisson-eloszlások szignifikáns eltérésének megállapítására elég nagy észlelésszám esetén pontsoros nomogrammal ábrázolható formulát ad.

Rendezett minták elmélete

1. Rényi Alfréd: *Megoldatlan problémák a rendezett minták elméletében.* — Előadó a rendezett minták elméletének és gyakorlati alkalmazásának szempontjából jelentőséggel bíró alábbi problémákat ismertette:

a) Eloszlásmentes kritérium kidolgozása többdimenziós valószínűségeloszlásokra vonatkozó hipotézisek ellenőrzésére.

b) Különböző eloszlások karakterizálása a rendezett minta elemeinek tulajdonságai által.

c) *Arnóth Edit* vetette fel azt a kérdést, hogy hogyan határozható meg valamely eloszlásból vett minta számtani közepénél kisebb mintaelemek számának eloszlása. Ő maga a kérdést exponenciális eloszlás esetében oldotta meg.

d) Előadó kidolgozott egy módszert az empirikus és elméleti eloszlás összehasonlítására, amely a relatív eltérés vizsgálatán alapul. Kívánatos volna hasonló kritériumot adni két minta összehasonlítására.

e) *Kolmogorov és Szmirnov* tételei eloszlásfüggvények összehasonlítására vonatkoznak; kívánatos volna a megfelelő intervallumfüggvények összehasonlításán alapuló kritérium kidolgozása.

2. Lipták Tamás: *Több statisztikai adaton alapuló kritériumok.* — Előadó a minták szignifikancia szerinti parciális rendezésével értelmezett próbák szintjének meghatározásával foglalkozott. Speciális esetként ismertette a Juvancz Iréneusszal közösen írt „A matematikai statisztika orvosi-biológiai alkalmazásának néhány problémájáról" (MTA Alk. Mat. Int. Közl. II. köt. 175—193) c. dolgozatában szereplő DD-próba esetét. Lásd még Juvancz Iréneusz—Lipták Tamás: Kiegészítés fenti cikkhez (u. o. III. köt. 239—242.).

Ipari minőségellenőrzés

1. Vincze István: *A minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszereiről irandó könyvvel kapcsolalos problémák.* — A tárgykör eddigi külföldi irodalma túlnyomó részben a kérdés gyakorlati tudnivalóit tartja szem előtt. Előadó hangsúlyozta a precíz, de lehető egyszerű valószínűségszámítási tárgyalás szükségességét.

2. Dukáti Ferenc: *A matematikai statisztika felhasználása a szabványokban.* — Előadó hangsúlyozta a szabványnak mint a műszaki fejlesztés egyik fontos serkentőjének jelentőségét, amely egyben lehetővé teszi tudományos kutatások eredményeinek országos jellegű, törvényszerű előírásokba való átültetését. Foglalkozott továbbá a matematikai statisztikával kapcsolatos részben kidolgozott, részben kidolgozás alatt álló szabványtémákkal, mint tömegcikkek próbavétele, tömegcikkek statisztikai minősítése, gyártásközi ellenőrzés, továbbá néhány terminológiai szabvány. Ezután néhány mintavételi problémát vetett fel.

3. Tallián Tibor: *Gördülőcsapágyak élettartamszámításának finomítása.* — Előadó megvizsgálta a gördülőcsapágy egy mikrogeometriai jellemzőjének: a gördülő testek átmérőingadozásának hatását az élettartamra. Remélhető, hogy az így nyert összefüggés módot ad a legcélszerűbb pontosság elérésére.

4. Tallián Tibor: *Folytonos gyártási folyamatok statisztikai minőségellenőrzése.* — Lásd szerző hasonló című dolgozatát Szabványosítás, 7. évf. 1—2. szám 11—16. old.

5. Sarkadi Károly: *Cement vizsgálatok matematikai statisztikai kiértékelése.* — A cementvizsgálati laboratórium eredményeiből megállapították, hogy a cement keménysége mint valószínűségi változó nem bontható szét két olyan összeadandóra, amelyek közül az egyik csak az anyag minőségétől, a másik csak a laboratóriumi kísérlettől függ.

6. Takács Lajos—Orosz Gábor: *Szuperponált véletlen jelekkel történő nyilvántartási rendszerek.* — Lásd a szerzők Szuperponált véletlen jelzeteket alkalmazó dokumentációs rendszerek matematikai kérdéseiről c. dolgozatát. MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei I. évf. 357—378. old.

Egyéb ipari problémák

1. Sarkadi Károly: *A sztochasztikus folyamatok elméletének alkalmazása a minőségellenőrzésben.* — Az előadó ismertette azokat a vizsgálatokat, amelyeket az Alkalmazott Matematikai Intézet Matematikai Statisztikai Osztálya végzett a sztochasztikus folyamatok elméletének az ipari minőségellenőrzésben való alkalmazását illetően. Lásd még Tallián Tibor: Folytonos gyártási folyamatok statisztikai minőségellenőrzése. Szabványosítás 7. évf. 1—2. szám 11—16. old.

2. Békéssy András: *Statisztikus jelekkel működő scalerek üzem közben való ellenőrzéséről.* — Lásd a szerző Hibás scalerek (jelosztók) jeleinek valószínűségeloszlásáról c. dolgozatát. MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei 3. kötet, 171—181. old.

3. Medgyessy Pál: *Binomiális és Poisson-eloszlások keverékeinek felbontása összetevőire.* — Lásd a szerző Diszkrét valószínűségeloszlások keverékének felbontása összetevőire c. dolgozatát. MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei 3. kötet, 139—153. old.

4. Vincze István: *Egy a binomiális eloszlással kapcsolatos eloszlásról és vegyipari alkalmazásáról.* — Lásd Medgyessy Pál, Rényi Alfréd, Tettamanti

Károly, Vincze István: A frakcionáló megosztás matematikai tárgyalása nem teljes diffuzió esetén. MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei 3. kötet, 81—97. old.

5. Medgyessy Pál: *Készülékek folytonosan változtatható szórású Gauss-függvénygörbe előállítására.* — Matematikai statisztikai adatfeldolgozásnál gyakran szükséges adatok Gauss-görbéhez való készítése. E célra szerző ismertet néhány olyan készüléket, amely bizonyos határok közt folytonosan változtatható szórású és maximum-magasságú Gauss-görbét állít elő, pl. kivetítve; a képet azután az adatok grafikonjával hozzuk fedésbe. Az említett eljárások normális eloszlásfüggvényénél is alkalmazhatók, valamint bizonyos más függvénytípusoknál is.

Diákkonferencia Debrecenben

1956. május 3—4—5-én tartották a Tudományos Diákkörök II. Országos Konferenciáját a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen. A matematikai szakkonferencián az előző évi I. Konferencia 7 előadásával szemben 13 előadás hangzott el és örömmel állapítható meg, hogy ez alkalommal szegedi hallgatók is szerepeltek az előadók közt, a budapesti és a vendéglátó debrecenieken kívül.

Az előadások színvonalasságát igazolja, hogy azóta több dolgozat megjelent nyomtatásban, illetve sajtó alatt van.

Május 3-án, csütörtökön négy előadás hangzott el:

Kiefer Ferenc (Szeged) *Normális operátorok felcserélhetőségi kérdései* c. előadásában N. Dunford spektrális operátorokra vonatkozó elméletének alkalmazásával egyszerű és közvetlen bizonyítását adta B. Fuglede következő tételének: Ha N normális, B pedig korlátos operátor és $NB = BN$, akkor N-nek minden spektrálaltere redukálja B-t.

Rejtő Péter (Budapest) *Euklidesi gyűrűkről* szóló előadásában bebizonyította, hogy bármely kommutatív nullosztómentes gyűrű tetszőleges $n > 0$ egészszám mellett beágyazható pontosan n felbonthatatlan elemet tartalmazó euklidesi gyűrűbe. Kérdés, igaz-e hasonló állítás nem-kommutatív gyűrűkre is?

Heppes Aladár (Budapest) *Többdimenziós valószínűségeloszlások meghatározása vetületeik segítségével* (On the determination of probability distributions of more dimensions by their projections, Acta Math. Acad. Sci. Hung., VII. 3—4, 403—410 (1957)), valamint

Mogyoródi József és Németh Géza (Budapest) *Atommagreaktorok elméletével kapcsolatos valószínűségszámítási problémák* (Mat. Kutató Int. Közl. I. 3. 337—348. (1956)) című előadások délután hangzottak el.

A pénteki hat előadást a következők tartották:

Tóth Balázs (Szeged) *Ciklikus csoportok egy jellemzése* c. dolgozatában élesíti Szász Ferenc egy tételét kimutatván, hogy egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha két nem triviális, egymáshoz relatív prím kitevőjű hatványa ciklikus.

Papp Zoltán (Debrecen) *A szubdirekt összegek előállításairól* adott elő. Fuchs L. és I. Fleischer dolgozataihoz kapcsolódva vizsgálta a lehetséges szubdirekt előállításokat operátormodulusokra vonatkozóan.

Kovács László (Debrecen) *Neumann-féle reguláris gyűrűkről* (A note on regular rings, Publ. Math. 4. 465—468. (1955—56)),

Grätzer György és Schmidt Eligius (Budapest) pedig *Hálók homomorfizmusai* címmel adott elő. (Hálók ideáljai és kongruenciarelációi I. M. Tud. Akad. III. Oszt. Közl. VII. 1. 93—109 (1957)).

A harmadik nap délelőtti előadásai:

Ádám András (Debrecen) *Csoportok automorfizmusairól és direkt felbontásairól.* (On permutations of set produkts, Publ. Math. 5. 1—2, 147—149, (1957)), valamint

Máthé János (Budapest): *Pár szó a kinai matematika történetének egy problémájáról* (Mat. Lapok VII. 1—2, 112—113 (1956)).

A délutáni előadások pedig:

Heppes Aladár és Révész Pál (Budapest): *A Borsuk-féle feldarabolási problémához* (Mat. Lapok VII. 1—2, 108—111., ill. Zum Borsukschen Zerteilungsproblem, Acta Math. Acad. Sci. Hung. VII. 2. 156—162 (1956)).

Viski Mária (Budapest): *Az ötdimenziós gömb leképezése kvaterniók segítségével.* A dolgozat az ötdimenziós gömb felületének a kvaterniók segítségével történő önmagára való leképezéseivel foglalkozik, tárgyalásmódja elemi.

Kántor Sándor (Debrecen): *Bolyai Farkas átdarabolási tételének térbeli általánosításához* címmel adott elő. Dolgozatában a síkbeli halmazokra Bolyai Farkas, térbeliekre pedig Dehn által definiált ill. vizsgált végszerű egyenlőségnek tetszőleges, véges vagy végtelen ponthalmazokra való kiterjesztésével foglalkozik.

Könyvismertetés

L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953, X + 197 old., 124 ábra.

A szóban forgó könyv megjelenése óta négy esztendő telt el. E négy esztendő folyamán több ismertetés, továbbá számos, FEJES TÓTH LÁSZLÓ könyvére hivatkozó dolgozat jelent meg, s e dolgozatok szerzői közül nem egy éppen FEJES könyvétől nyert indítékot. Mindezek bizonyítják, hogy sikeres, az olvasók széles körét megnyerő művet alkotott a szerző. Akár egy könyv, akár egy dolgozat értékét tekintjük, a belső érték mellett lényeges külső tényező az, hogy mily mértékben adott indítékot más kutatóknak. Ez a késői ismertetés módot adott arra, hogy FEJES könyvének ilyen hatását megállapíthassam.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ 1944-ig 14 geometriai tárgyú dolgozatot írt; e dolgozataiban a következő főbb témák szerepelnek. *A*) A legsűrűbb körelhelyezkedés és a legsűrűbb gömbelhelyezkedés problémája. *B*) Konvex görbék sokszögekkel való megközelítése. *C*) Bizonyos extremális poliéderek tulajdonságai. Behatóan megismerkedvén e témakörök irodalmával és ismereteit saját eredményeivel kiegészítve, 1944-ben egy 54 oldal terjedelmű könyvet írt, „*Extremális pontrendszerek a síkban, a gömbfelületen és a térben*" címen. (Acta Sci. Math. Nat., Kolozsvár.) Most ismertetésre kerülő műve ennek a régebbinek érettebb és lényegesen gazdagabb tartalmú; erősen kiegészített megújítása. 1944-óta FEJES 26 újabb dolgozattal, mások, hazai és külföldi matematikusok közel félszáz, figyelemre méltó dolgozattal gazdagították a szóban forgó témák irodalmát. (Tájékoztatásul néhány dolgozat szerzőjét említem: A. D. ALEKSZANDROV, H. S. M. COXETER, H. HADWIGER, K. F. ROTH, B. L. VAN DER WAERDEN.) Világos, hogy ez az irodalomban is visszatükröződő, egyre fokozódó érdeklődés kívánatossá tette, hogy a mondott problémakörökben, valamint azokkal közelebbi kapcsolatban álló problémák terén elért eredményeket egy átfogó, könnyen olvasható könyvben írja meg valaki. (A könnyen olvashatóságot azért említem, mert a geometria olyan fejlődésben lévő problémaköreiről van szó, melyben kezdő matematikusnak is sikerülhet figyelemre méltó eredményt elérnie, következésképpen az ilyen olvasók fokozott érdeklődésére számíthat a szerző.) FEJES könyve sikeresen oldotta meg e szerzői feladatokat.

FEJES egyik eredeti, szerzői fogása a következő: Nem érte be a könyvet bezáró, szokásos bibliográfiai jegyzék összeállításával, melyben 139 kisebb-nagyobb közleményt és könyvet sorol fel, hanem minden egyes fejezethez fejlődéstörténeti tájékoztatást fűz. Ezt az összesen mintegy 18 oldalnyi 7 paragrafust olvastam el először, mert FEJES 1944-ben megjelent könyve óta, noha több hazai és külföldi matematikus ilyen tárgyú dolgozatát elolvastam, kíváncsi voltam a legújabb eredmények hézagtalan képére. Fejlődésben lévő problémakör ilyen ismertetése, mind a kezdő matematikus, mind a kívül álló érdeklődő számára tanulságos olvasmány és fáradságos munkától kímél meg. Ezekben a

paragrafusokban számos még megoldatlan problémára is rámutat a szerző; ezek az ott felvetett kérdések 1953-óta megjelent dolgozatokban tovább fejlődtek. Példaként említem az V. fejezet 13. §-át. Ott a hiperbolikus síkon való elhelyezkedési problémákkal kapcsolatos megjegyzések is szerepelnek. Ezekhez már újabb dolgozatok csatlakoztak.

A könyv változatos anyagot ölel fel, s az egymástól távolinak látszó kérdések kapcsolata többnyire abban a közös vonásban mutatkozik, hogy bizonyos extremális tulajdonságok az alakzatok bizonyos szabályos alkata esetén valósulnak meg.

Az I. fejezet előkészítő jellegű, az elemi geometria néhány szükséges fogalmát és tételét ismerteti: konvex tartományok, affinitás, polaritás, Euler-féle poliédertétel, Lexell-féle kör, vektoralgebrai azonosságok, szférikus trigonometriai formulák, szabályos és féligszabályos poliéderek. Ezeken kívül a szabályos sokszögek extremális tulajdonságainak, az izoperimetrikus problémának, s néhány a háromszöggel kapcsolatos egyenlőtlenségnek szép tárgyalását adja.

A II. fejezetben is szerepelnek előkészítő, de már kevésbé elemi jellegű részletek: a Blaschke-féle kiválasztási tétel, a Jensen-féle egyenlőtlenség, az affin-ívhosszúság, az integrálgeometria néhány alapvető tétele. Ezeken kívül még a következő témák tárgyalása szerepel. C. H. Dawker tételei a konvex tartományba beírt maximális és a konvex tartomány körül írt minimális területű sokszögekről. Egy konvex tartományba beírt, maximális területű n-szög és a tartomány területe közötti

$$T_n \geqq T \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$$

összefüggés; az ellipszis egy extremális tulajdonságáról. Egy az affin-ívhosszúsággal összefüggő terület-szélsőérték probléma, melynek kúpszeletív a megoldása.

A III. fejezetben konvex idomoknak a síkon való következő kirakásairól van szó: 1. Az elhelyezendő idomok kizárják egymást (nincs közös belső pontjuk). 2. Az elhelyezendő idomok egy adott tartomány összes pontjait (legalább egyszeresen) befedik. Ezeknek megfelelően *elhelyezési* és *befedési* problémákat mondok. Az elhelyezési és fedési problémák elemi konvex idomai lehetnek egybevágók vagy nem egybevágók; az elemi idomok kérdéses rendszerében az elemek száma lehet véges vagy végtelen. Az elemi idomok és az elemek által befedett körtartomány viszonyát bizonyos „sűrűségekkel" jellemzi a szerző: tartalomsűrűség (például területsűrűség), elemszám-sűrűség. A sűrűségfogalom segítségével kifejezhető elhelyezési és fedési szélsőérték problémákat fogalmaz meg, s szép megoldásokat tárgyal. Sok esetben az extremális helyzeti kirovást az elemi idomok rácsszerű rendszere valósítja meg; $\{3,6\}$ és $\{6,3\}$ típusú rácsszerkezetek vezető szerepet játszanak.

Az IV. fejezetben az idomrács, a szeparált idomrács és a fedőrács fogalmának bevezetése után a háromszög bizonyos extremális tulajdonságáról van szó: Egy konvex idommal egybevágó elemekből alkotott legsűrűbb szeparált idomrács sűrűsége $\geqq 2/3$; a legritkább fedőrács sűrűsége pedig $\leqq 2/3$; az egyenlőség mindkét sűrűség esetében csak akkor következik be, ha az elemi idom háromszög. Ezek után annak az elhelyezési, illetve fedési problémának megoldását tárgyalja, hogy centrálisan szimmetrikus konvex idomokkal miképpen lehet a síkot legrosszabbul megtölteni, illetve leggazdaságosságtalanabbul befedni. Rámutat arra a még megoldatlan, általánosabb problémának a nehézségeire, melynek az előbbiek, a megoldottak, csak speciális esetei.

MTA Könyvtára
Periodika 3677/1962 sz.

Az V. fejezetben a szabályos poliéderek extremális tulajdonságait tárgyalja szerző, és saját tételei közül itt szerepelnek a legszebbek, többek közt a következők. Az egységgömb felületének n-számú pontja között mindig van két olyan, melynek távolsága

$$P_k P_i \leqq (4 - \operatorname{cosec}^2 \omega_n)^{1/2}, \quad \omega_n = \frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Ez az egyenlőtlenség $n = 3, 4, 6, 12$ esetekben nem javítható, ha pedig n elég nagy, a síkon való legsűrűbb körelhelyezkedés problémájának megoldását szolgáltatja. Kivételesség nélküli zárt konvex felületbe írt adott csúcspontszámú maximális térfogatú poliéder minden lapja szükségképpen háromszög. Hasonlóképpen kitüntetett szerepet kap a háromélű csúcspontokkal rendelkező poliéder is; például a következő tételben: Ha egy konvex n-lap felszíne F és térfogata V, fennáll az

$$\frac{F^3}{V^2} \geqq 54\,(n-2)\,\operatorname{tg}\omega_n\,(4\sin^2\omega_n - 1)$$

egyenlőtlenség, s az egyenlőség csak akkor lép fel, ha a poliéder csúcsai háromélűek. E néhány példa is többet mond e gazdag fejezet tartalmából, mint a témák címszavakkénti felsorolása.

A VI. fejezet a gömbön való nem szabályos elhelyezkedés problémáit tárgyalja. Az n-számú egybevágó kör gömbön való legsűrűbb elhelyezkedése még megoldatlan probléma. E fejezetben főként bizonyos, Schütte és van der Waerden által kidolgozott módszerről, s a mondott probléma $n = 7$ és 8 esetben való megoldásáról van szó.

Az VII. fejezet a térbeli elhelyezkedés problémáiról szól. Itt a legsűrűbb gömbelhelyezkedés a központi kérdés, amit durván így lehet megfogalmazni: Egymást kizáró kongruens gömbökkel a térnek hányadrésze tölthető meg? Elegendő a következő, igen súlyosnak bizonyult sztereometriai feladatra utalni: Bizonyítandó, hogy adott gömböt legfeljebb 12 ugyanakkora egymást kizáró gömb érinthet. Ez az egyetlen feladat is mutatja, hogy a legsűrűbb gömbelhelyezkedés problémája más jellegű, mint a megfelelő síkbeli probléma, továbbá a térbeli és síkbeli problémák párhuzamos tárgyalásához nem kínálkozik hasznosítható analógia. A szóban forgó probléma megoldására a szerző egy konkrét programot ad.

A könyv áttekinthető, világos szerkezete, könnyen követhető és szemléletes előadásmódja, egyszerű és szabatos stílusa biztosítja, hogy a kezdő matematikus is nehézség nélkül olvassa, ebben a szükséges előismeretek kellő helyen való közlése is segíti. A jól megtervezett, szépen megrajzolt beszédes ábrák is elősegítik a zökkenő nélküli olvasást.

A felölelt anyag jelentékeny hányadát a szerző több mint egy évtizeden át folytatott vizsgálatai során elért eredményei szolgáltatják. Több ismert tétel pedig az eddigieknél szebb, a szerzőtől eredő bizonyítással kerül tárgyalásra. Fejes Tóth László e könyvének legnagyobb érdemét még sem az eddig megállapítottakban találom, hanem abban a hatásban, hogy ellenállhatatlanul csábítja az olvasót az általa művelt kutatási területre, a bőségesen tálalt problémák megoldására.

Kárteszi Ferenc

Folyóirat-kiadványaink előfizethetők és számonként is vásárolhatók a következő helyeken:

Akadémiai Könyvesbolt, Budapest, V., Váci-utca 22.
Akadémiai Kiadó Terjesztési osztály, Budapest, V., Alkotmány-u.
Posta Központi Hírlap Iroda, Budapest, V., József Nádor-tér 1.

A kézirat beérkezett: 1957. XII. 2.
Terjedelem: 11 (A/5) ív
A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Szöllössy Károly

Szegedi Nyomda Vállalat 57-4842 Felelős vezető: Vincze György

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

ОГЛАВЛЕНИЕ

Бела Сёкефалви-Надь: Деятельность Яноша Нэуманна в области теории операторов 185
Дополнение к списку работ Яноша Нэуманна 210
Акош Часар: О понятии топологического пространства, II. 211
Арпад Сабо: Как стала математика дедуктивной наукой 232
Вера Т. Шош: Геометрическое построение теории ценных дробей . . 248
Шандор Кантор: Функция Зоарда Гёце везде непрерывна, но нигде не дифференцируема 264
Акош Часар: Замечание о функции Зоарда Гёце 268
А. Н. Колмогоров: Подготовка научных кадров в СССР 272
Список Ласло Фэеша-Тота, награжденного в 1957 году Кошутовской премией 281
Сообщение о соревновании Миклоша Швейтцера 1956-го года 284
Проблемы 313
Задачи 322
Информация 341
Из жизни общества 344

CONTENT

B. Sz.-Nagy: Neumann's work in the theory of operators. The scientific works of J. v. Neumann 185
Supplement to the list of the works of J. von Neumann 210
Á. Császár: On the notion of the topological space II. 211
Á. Szabó: How became the mathematics a deductive science. II. 232
Vera T. Sós: On a geometrical theory of continued fractions 248
A. Kántor: The function continuous and nowhere differentiable of. Z. Geőcze 264
Á. Császár: Remark on the preceding paper 268
A. N. Kolmogorov: On the instruction of scientists in the Soviet Union 272
The list of works of L. Fejes Tóth, winner of the Kossuth-prize in 1957 281
Report on the N. Schweitzer-competition in 1956 284
Problems 313
Examples 322
Scientific news 341
Society life 344
The colloquium on mathematical statistics held in Jósvafő 352
Scientific conference of students in Debrecen 355
Book-review 357

Ára 12, Ft.
Előfizetés évi 20, Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb. szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.