312.046
VI
1955
1-4

MATEMATIKAI LAPOK

VI. ÉVFOLYAM

1.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1955

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.
Budapest, 1955. március. VI. évfolyam 1. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor.
Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.
A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.
Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20.— Ft.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.

TARTALOMJEGYZÉK

Felszabadulásunk 10. évfordulójára 1
Turán Pál: Grünwald Géza élete és matematikai munkássága 6
Takács Lajos: Megjegyzés Turán Pál „A kínai matematika történetének egy problémájáról" című dolgozatához 27
Surányi János: Megjegyzések a kínai matematika történetének egy problémájához 30
Huszár Géza: A kínai matematika történetének egy problémájáról 36
Feladatrovat 39
Példarovat 47
Társulati élet 60
Hírek 92
Könyvismertetés 95

Felszabadulásunk 10. évfordulójára

Ez év április 4-én ünnepeljük meg tizedszer hazánk felszabadulásának évfordulóját. Tíz évvel ezelőtt egy új korszak vette kezdetét hazánkban, amikor a magyar nép végre kezébe vehette sorsának intézését. Tíz év alatt dolgozó népünk nagyszerű, történelmi jelentőségű sikereket ért el új, szabad, békés életének építésében. A Magyar Dolgozók Pártja vezetésével, felszabadítónk, a nagy Szovjetunió példáját követve és támogatása által segítve népünk biztosan halad előre a szocializmus építésének útján. Dolgozó népünk milliói egységesen és lendületesen, lelkes, odaadó, szívós munkával váltják valóra azokat a nagy nemzeti feladatokat, amelyeket a Magyar Dolgozók Pártja országunk felemelkedésére, népünk boldogulására kitűzött.

Abban az új életben, amelyet 10 éve építünk, a tudomány sokkal nagyobb szerepet játszik, mint valaha is hazánkban. Felszabadulásunk a magyar tudomány történetében és ezen belül matematikai életünkben is döntő fordulópontot jelentett. Nincs itt helyünk, hogy részletesen összefoglaljuk, milyen jelentős fejlődés ment végbe 10 év alatt hazánkban a matematika terén. Csak arra szorítkozhatunk itt, hogy ennek a fejlődésnek néhány kiragadott eredményére rámutassunk, azt néhány adattal jellemezzük és ezzel kapcsolatban érintsük Társulatunk szerepét és soronkövetkező feladatait.

Ha összehasonlítjuk mai matematikai életünket a felszabadulás előttivel, legelőször az tűnik szemünkbe, hogy ma a matematikai tudományos kutatás, a matematika oktatása nemcsak a matematikusok szűk körének ügye, hanem országos üggyé vált. Egyre világosabban látják matematikusok és nemmatematikusok egyaránt, hogy milyen nagy szerepe van a matematikának épülő új életünkben. A felszabadulás előtt legnagyobb matematikusainkat, Fejér Lipótot és Riesz Frigyest, — akiknek ez évben ünnepeltük meg 75. születésnapját — külföldön jobban ismerték és értékelték, mint a hazai hivatalos körök. Ezzel szemben ma a magyar matematikusok tudományos eredményeit országunk számontartja és megbecsüli. Erről tanúskodik például, hogy 1948 óta 13 matematikust tüntetett ki Népköztársaságunk a legnagyobb tudományos

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

elismeréssel, a Kossuth-díjjal, köztük hatot kétízben is. Számos más matematikus is részesült elismerésben: az Akadémia évente nagyszámú matematikust tüntet ki prémiummal, Társulatunknak pedig a „Grünwald Géza" és „Beke Manó" emlékdíjakat osztja ki évente. A felszabadulás óta egyre növekszik az érdeklődés hazánkban a matematika és annak gyakorlati alkalmazásai iránt. A matematika egyre nagyobb súlyt nyer az iskolában, az egyetemeken, tudományos és gazdasági életünkben. Ezzel párhuzamosan megváltozott a matematikusok felfogása is: míg régen csak maguknak művelték szeretett tudományukat, ma egyre több matematikus törekszik arra, hogy elősegítse a matematika eredményeinek sikeres felhasználását más tudományok terén, továbbá az országépítés munkájában. Erről tanúskodik a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének munkája; ez az Intézet nem egész $4^1/_2$ év alatt több mint 600 megbízást kapott különböző tudományos intézetektől, üzemektől, állami szervektől, és ezek túlnyomó részét eredményesen meg is oldotta. A magyar matematikusok egyre nagyobb sikerrel törekszenek a matematikai ismeretek minél szélesebb körben való terjesztésére, a matematika-oktatás színvonalának emelésére, az általános-, közép- és főiskolákon, az egyetemeken és az egyetemet végzettek szakmai továbbképzése terén egyaránt.

A matematikai tudományos élet fellendülésének jellemzésére csak néhány számadatot említünk meg. Kereken 100-ra tehető ma hazánkban azoknak a matematikusoknak a száma, akiknek már megjelent nyomtatásban önálló tudományos munkája, és ezek közül 70-nél többnek az első tudományos munkája a felszabadulás után jelent meg. A matematikának számos ágával, amellyel a felszabadulás előtt csak egy-két matematikus foglalkozott — mint pl. a modern algebra és a valószínűségszámítás — ma egész kutatócsoportok, tudományos kollektívák foglalkoznak. Ugyanakkor a matematika különböző ágaiban dolgozó kutatók sem szakadnak el egymástól, ismerik, becsülik egymás munkáját. Matematikai életünk fellendülése tükröződik a matematikai könyv- és folyóiratkiadás terén is. A felszabadulás óta több, mint 30 kötet matematikai monográfia és egyetemi tankönyv jelent meg, továbbá számos középiskolai tankönyv, segédkönyv, szakköri füzet és népszerűsítő munka; 10 év alatt több matematikai munkát adtak ki hazánkban, mint a megelőző 50 év alatt. Jelenleg hazánkban 3 magyar nyelvű és 3 idegen nyelvű matematikai folyóirat jelenik meg rendszeresen, amelyek eredeti tudományos munkákat közölnek, ezenkívül Társulatunk az Oktatási Minisztériummal együttműködve kiadja a Középiskolai Matematikai Lapokat és „A matematika tanítása" c. lapot. Matematikai életünk felszabadulás utáni gyors fellendülését igen tanulságos összehasonlítani az első világháború utáni helyzettel, amikor hosszú évekig tartott, amíg a matematikai élet vontatottan bár, de megindult.

A felszabadulás utáni gyorsütemű fejlődésnek a matematika terén egyik jellemző vonása, hogy nemzetközileg elismert, vezető matematikusaink mellé egyre nagyobb számban zárkóznak fel a fiatal tehetségek. E tekintetben igen biztató az évente tartott különböző fokú matematikai versenyek eredménye. E versenyek közül a Rákosi Mátyás-versenyt az Oktatási Minisztérium szervezi a Társulat közreműködésével, a többit: az Arany Dániel-, Kürschák József- és Schweitzer Miklós-versenyeket Társulatunk rendezi meg évente. Minden diáknak, a középiskola első osztályától kezdve az egyetem elvégzéséig legalább tíz versenyen van alkalma résztvenni. Ehhez járul még a Középiskolai Matematikai Lapok igen népszerű állandó pontversenye. A versenyeknek ez a sűrű hálózata lehetőséget nyújt minden a matematika iránt komolyan érdeklődő diáknak, hogy tudását és képességeit megmutassa, és egyben komoly ösztönzést ad a fiatalok matematika iránti érdeklődésének.

Matematikai életünk fellendítésében központi szerepet játszott és játszik Társulatunk, amely 1947-ben alakult meg. A Társulat eleinte Szegeden, majd később Budapesten is, mint néhány matematikus baráti társasága működött. Azonban a Társulat alapító tagjai rövidesen felismerték, hogy milyen nagy lehetőségei és milyen nagy országos jellegű feladatai vannak a Társulatnak. Ennek következtében a Társulat néhány év leforgása alatt ezernél több tagot számláló országos tömegszervezetté alakult át, amelynek ma már 13 nagyobb városban működik helyi tagozata, és számos kisebb városban van helyi csoportja. Társulatunk az összes magyar matematikusok együttműködését és összefogását tűzte ki feladatául, a közös cél: a hazai matematikai élet fejlesztése érdekében, és ezt a Társulat meg is valósította. Jórészt Társulatunk munkájának eredménye, hogy hazánkban az összes matematikusok között szoros együttműködés, jó kartársi viszony alakult ki, amely egymás munkájának megismerésén, megbecsülésén, és kölcsönös segítésén alapszik. E tekintetben igen nagy jelentősége van a matematikai kollokviumoknak, amelyeket a Társulat évente megrendez, a tagozatok közötti előadócserének, a kötetlen társulati klub-esteknek, stb.

A matematika felszabadulás utáni fejlődését hazánkban nagymértékben elősegítette az egyre szorosabb együttműködés a Szovjetunió és a népi demokráciák matematikusaival, és általában a külfölddel való tudományos kapcsolatok fejlődése. A szovjet matematikusoktól rendkívül sok értékes segítséget kaptunk. A szovjet matematika nagyszerű eredményeinek megismerése — amely a felszabadulás előtt sok akadályba ütközött — nagymértékben hozzájárult matematikai életünk fellendüléséhez. Éppen ezért tekinti Társulatunk a szovjet matematikusok eredményeinek ismertetését egyik legfontosabb feladatának. Ez évben is megünnepelte Társulatunk a szovjet—magyar barátság hónapját, amelynek idén külön

súlyt adott, hogy felszabadulásunk 10. évfordulója egyben felszabadítónk, a Szovjetunió iránti hűségünk és hálánk ünnepe is. A baráti országok matematikusaival való együttműködésnek fontos állomása volt az 1950-ben megrendezett I. Magyar Matematikai Kongresszus, amelyen 9 tagú szovjet delegáció és a népi demokráciák 20 küldötte vett részt. A felszabadulás óta magyar matematikusok külföldi kongresszusokra való kiküldetéseinek a száma meghaladja a 60-at; 40-nél több azoknak a külföldi matematikusoknak a száma, akiket a felszabadulás óta hazánkban vendégül láthattunk, közülük néhányat több ízben is.

Néhány szóval ki szeretnénk térni ez alkalommal a Társulatunk előtt álló, eddig meg nem oldott feladatokra is. Társulatunknak a jövőben fokozottabban kell törekednie arra, hogy a vidéken, nem egyetemi városokban élő tagjait jobban bekapcsolja a matematikai tudományos életbe. E tekintetben nagy feladat vár a Matematikai Lapokra is, amelynek többet kell tennie ennek érdekében. A matematika-oktatás elvi kérdéseivel, a tanárok szakmai továbbképzésével a Társulat eddig is sokat foglalkozott, de az eredménnyel, az iskolai matematika-oktatás színvonalával még ma sem lehetünk megelégedve. Társulatunk még 1949-ben megindította a harcot a matematika tanításában megnyilvánuló, az élettől elszakadt formalizmus ellen, az ellen a tanítási mód ellen, amely megelégszik a meg nem értett szabályok gépies bemagoltatásával. E téren még ma is igen sok teendő áll Társulatunk előtt. A matematika tanítása terén még ma is változatlanul a formalizmus az a fő veszély, amely ellen erőfeszítéseinket irányítanunk kell, mert ez a kulcsa a matematika-oktatás eredményesebbé tételének. A matematika tanulása csak úgy járhat maradandó eredménnyel, ha a megértésen alapszik; emellett természetesen kellő gondot kell fordítani az ismeretek megszilárdítására, a megértett módszerek begyakorlására is. Nagyobb súlyt kell fektetni a gyakorlattal való kapcsolatra és a szemléltetésre is. Fejleszteni kell az iskolai matematikai modell-gyűjteményeket, és napirendre kell tűzni a matematikai oktatófilmek kérdését. Többet kell tennie a Társulatnak a matematikai ismeretek széles körben való terjesztése, a matematika népszerűsítése terén is. Az elmúlt évek tapasztalatai azt mutatták, hogy dolgozó népünk tanulniakarása, tudásvágya rendkívüli mértékben megnövekedett a matematika irányában is, de megmutatták azt is, hogy ha a hozzáértő, erre hivatott szakemberek nem elégítik ki a dolgozók ilyen irányú igényeit, és nem fordítanak elég figyelmet a színvonalas tudomány-népszerűsítésre, ezzel akarva-akaratlanul ezt a fontos feladatot hozzá nem értő, tudálékos dilettánsoknak engedik át, és ezeknek a tudatlan népszerűsítőknek a kontárkodása elveszi a kedvét a matematika iránt érdeklődőknek, tehát nemcsak, hogy nem használ, hanem árt is. Végül fontos feladata

Társulatunknak a magyar matematika nagy hagyományainak ápolása, a magyar matematika történetének feltárása is.

A mondottakból is látszik, hogy még sok megoldatlan feladat áll előttünk. Ezek megoldásához erőt gyűjthetünk, ha végigtekintünk matematikai életünk fellendülésének és virágzásának a felszabadulás óta eltelt 10 évén. Érthető, hogy a magyar matematikusok azt szeretnék, hogy zavartalanul folytathassák békés alkotó munkájukat. Éppen ezért mi, magyar matematikusok, egész dolgozó népünkkel együtt egységesen és határozottan tiltakozunk az imperialista háborús uszítók háborús készülődései ellen, Nyugat-Németország felfegyverzése ellen, felháborodottan elítéljük az atomháború borzalmaival való fenyegetődzés politikáját és követeljük az atomfegyverek haladéktalan betiltását és megsemmisítését. Még élénken élnek bennünk a háború borzalmainak emlékei, még emlékszünk a budapesti egyetem matematikai szemináriuma bombatalálatot kapott könyvtárának szomorú képére, a háború kegyetlen pusztításának erre a megrendítő szimbólumára. Nem felejtettük el azokat a matematikus társainkat, akik a háború, a fasiszta gyilkosok áldozatai lettek. Őrájuk is gondoltak a budapesti egyetem matematikus professzorai, amikor kivétel nélkül aláírták azt az üdvözlő levelet, melyet az egyetem természettudományi karai intéztek a Sorbonne professzoraihoz, abból az alkalomból, hogy azok felemelték tekintélyes szavukat a Nyugat-Németország felfegyverzésére vonatkozó párisi egyezmény ratifikálása ellen. A magyar matematikusok mindenütt az országban aláírásukkal csatlakoztak a Béke Világtanácsnak az emberi kultúrát, az egész emberiséget fenyegető atomfegyverek betiltására vonatkozó felhívásához.

Felszabadulásunk 10. évfordulóján visszatekintve 10 év békés alkotó munkájának eredményeire, erőt meríthetünk a további munkához és a béke megvédéséért folyó harchoz, amelyben nekünk is minden erővel részt kell vennünk.

Grünwald Géza élete és matematikai munkássága.[1]

Írta: Turán Pál

Grünwald Gézáról először még 1943-ban kezdtem írni, kevéssel azután, hogy megtudtam, hogy nincs többé. Nehéz volt elhinnem, hogy mikor 1942 áprilisában egy társulati előadóülésen találkoztunk és búcsúzásnál megemlítette, hogy munkaszolgálati behívót kapott, ez utolsó találkozásunk volt. A fiatalabb embert megdöbbenti a halál, de igazán nem tudja realizálni azt; magam is így voltam akkor, azt is reméltem, talán tévedés az egész, az írás hamar el is akadt. Azóta legalábbis Budapest ostrománál, a halál mindnyájunk személyes ismerőse lett; az idő múltával a bizonyság jelei is meggyőző erejűekké szaporodtak. Megtudtuk, hogy a század, melybe behívták, büntetőszázad volt, egy állítólagos győri szabotázs retorziójaként állították össze ártatlanokból, baloldali gondolkozásuk miatt nyilvántartottakból. A teljes hadilétszámú fegyvertelen századból pár hónapon belül 5 ember maradt meg, közöttük Kossa István, aki személy szerint is jóbarátságban volt Grünwald Gézával és vele volt haláláig. Szerinte és a hivatalos értesítés szerint szeptember 7.-én halt meg Grünwald Géza nem egész 32 éves korában. Elbeszélése borzasztóan hatott rám; valahányszor csak eszembe jutott a megemlékező cikk, ezen rémképek oly intenzíven tolultak elém, hogy alig tudtam elhajtani őket tudatomból. E részleteket itt ne érje szó; csak felháborodás és megvetés illetheti azokat, akik haláláért felelősek.

Grünwald Géza 1910. október 18.-án született Budapesten. Apja szobafestő volt, aki szűkös keresetéből úgy őt, mint Gyula öccsét tanította. Ugyanabba a gimnáziumba járt, melybe Erdős Pál és hamarosan összebarátkoztak egymással. Sokat sétáltak együtt a Városligetben, versenyezve egymással a fejszámolásban és sakkozásban, melyhez Grünwaldnak különös érzéke volt, későbbi szegedi tanulóévei egyikében legyőzte Szeged akkori sakkbajnokát. Erdős kitűnő pedagógus édesapja, Erdős Lajos, aki ugyanezen gimnáziumban tanított, hamar figyelmes lett Grünwaldra és a szellemi segítés mellett anyagilag is támogatta őt, amire szülei eléggé rászorultak. 1927-ben tüdőbeteg lett, Erdős Lajos juttatta be egy tüdőbeteg szanatóriumba, ahol egy évig feküdt. Így csak 1929-ben érettségizett, elégséges eredménnyel. Az egyetemre nem nyervén felvételt, Olaszországban próbált tanulni nagy nélkülözések közepette. 1931-ben Erdős Lajos felhívta rá Haar Alfréd figyelmét, aki fogadta őt

[1] Előadva a Bolyai János Mat. Társulat 1955. ápr. 1-i ülésén.

Grünwald Géza

és a beszélgetés után felvették a szegedi egyetemre. Itt másodéves kora óta, 1933-tól kezdve, négy éven át minden évben elnyerte a matematikai pályatételre kitűzött egyetemi pályadíjat, utolsó évben Nagy Bélával együtt, az interpolációról írott pályamunkáival. 1932—33 tanévi pályamunkájának jeligéje, azévben elhalt tanárának, Haar Alfrédnek emlékére „Haar" volt; a többieké rendre „Beta", „Gamma" ill. „Delta". Az utolsó pályamunkája egyben doktori disszertációja is volt; doktori szigorlatát gyakorlóéve alatt 1935. december 4.-én tette le. 1936 szeptemberében mat.-fiz.-szakos tanári diplomát szerzett. Utána katonai kiképzésben vett részt; később több alkalommal vonult be hadgyakorlatra, 1941-től kezdve már csak fegyvernélküli szolgálatra. 1938-ban megnősült; felesége, Szilágyi Anna hallgatótársa volt. Egyetlen gyermek maradt utána, Éva lánya. 1937 szeptemberében Bay Zoltán mellett az Egyesült Izzóban kutatómatematikusi állást kapott; a biztosítási matematikusok mellett talán ő volt hazánkban az első üzemben alkalmazott matematikus. Tragikus sors, hogy épp ezen alkalmaztatás, mely a sok nélkülözésteli év után egy nyugodtabb élet lehetőségét megadni látszott, vált végzetévé.

Grünwald Géza matematikai érdeklődése igen széleskörű volt; a szegedi egyetem sokirányú előadásairól sokat mesélt itt pesti baráti körének, tele lelkesedéssel és érdeklődéssel. Mégis *aktív* érdeklődési köre egy olyan témakör volt, melyet Szegeden nem műveltek; ez a ma S. Bernstein kezdeményezése nyomán konstruktív függvénytannak nevezett irány volt. Ehhez itt Pesten mi Fejér dolgozatain átjutottunk, lelkes ifjú kör, melyből Gallai Tiborral elsiratóknak maradtunk itt. Ki tudja, hány más lelkes ifjú kör tele érdeklődéssel és ideákkal, pattan szét a világ minden részén, ha az őrültség és gonoszság újra diadalt ül az értelem felett! Sok érdekes kérdésünk merült fel és a fiatal matematikusok mindig és mindenkor örömmel kapcsolódnak egy *körhöz*. Grünwald Géza sem volt kivétel, az egyik levelében explicite áll is; nyaranta eljárt rendszeres heti összejöveteleinkre, melyeket az erszények lapos voltára való tekintettel a városligeti Anonymus szobornál rendeztünk. Szegeden ilyen kör nem volt; ez érthetővé teszi tehát érdeklődési körének ilyen kialakulását. Így még próbálkozásaink egy igen korai stádiumában, a Banach—Steinhaus-féle módszerek ismerete előtt vetődött fel az a kérdés, van-e oly $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ függvény, hogy ennek a T-matrixhoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomjai egy *megszámlálható* ponthalmazon korlátlanok legyenek.[2] Akkoriban előadó talált egy ügyetlen megoldást,

[2] A $[-1, +1]$-ben értelmezett $f(x)$-nek a T-matrixhoz tartozó n-ik Lagrange-interpolációs polinomja azon legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, mely az $x_{\nu n} = \cos\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ helyeken rendre megegyezik $f(x)$-el. Az $x_{\nu n}$ számok a $T_n(x) = 0$ gyökei, ahol $T_n(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta$.

mely a következő bizonyítatlan segédtételen alapult. Ha a [0, 1] köz minden x pontjához e köz véges sok *más* pontja van hozzárendelve, (röviden véges sok, tőle különböző képpont) akkor [0, 1]-ben van végtelen sok P_ν pont, melyek egyike sem képe egy másikának. E segédtételt Erdős, Grünwald [6], és Lázár hamar bebizonyították[3]; a kérdés irodalma, mint Fodor Géza szép kandidátusi értekezése mutatja, azóta nagyon kiterjedt, világosan mutatván, hogy nincs oly ügyetlen matematikai megoldás, melyből értő kezek érdekeset ne tudnának kihozni. Grünwaldot ezek vezették azon sokkal nehezebb kérdéshez, vajon van-e oly [—1, +1]-ben folytonos $g(x)$ függvény, melynek T-matrixhoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomjai *mindenütt* divergensek. A kérdés helyes megvilágításához tudnunk kell a következőket. Mint könnyen verifikálható, a szóban forgó n-ik interpolációs polinom

$$L_n(f)_{x=\cos\vartheta} = \sum_{\nu=0}^{n-1}{}' c_\nu \cos \nu\vartheta$$

alakba írható, ahol $\nu = 1, 2, \ldots, n$-re

$$c_\nu = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}{}' f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cos\nu\frac{2k-1}{2n}\pi,$$

$$c_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}' f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right).$$

Hasonlítsuk össze ezt $f(\cos\vartheta)$ cosinus-sorának $(n-1)$-ik részletösszegével; ez $\sum_{\nu=0}^{n-1}{}' d_\nu \cos\nu\vartheta$ alakú, ahol

$$d_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\alpha)\,d\alpha \quad \text{és} \quad d_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\alpha)\cos\nu\alpha\,d\alpha$$

$\nu = 1, 2, \ldots, (n-1)$-re. Az együtthatóformulák teljesen analógok, és így felületes szemléletre úgy látszik, hogy az $L_n(f)$ polinomok konvergencia szempontjából úgy viselkednek, mint $f(\cos\vartheta)$ Fourier-cosinussora. Márpedig azon kérdés, hogy egy mindenütt folytonos függvény Fourier-sora divergálhat-e mindenütt, közismerten rendkívül nehéz; Kolmogorov ismert brilliáns példája csak egy L-integrálható függvény létezését biztosítja a kívánt divergenciatulajdonsággal. Annál meglepőbb volt 1935-ben Grünwald azon tétele, hogy a fenti $L_n(f)$ interpolációs polinomok egy folytonos függvény

[3] A név után zárójelzett szám Grünwald dolgozatainak hátul megadott sorszámára vonatkozik.

esetén is lehetnek *mindenütt* divergensek. Az eredmény meglepő voltát az is mutatja, hogy a Zentralblattban maga S. Bernstein referálta a dolgozatot, kinek a Lagrange-interpoláció divergencia-elmélete szintén sokat köszönhet. Referátumát a következőképp kezdi: "Le présent travail apporte une contribution importante a la question de divergence possible des polynomes interpolateurs de Lagrange relatifs a une fonction continue pour les noeuds $x_k = \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ de Tchebycheff...". A konstrukció több fázison ment át ([1], [2], [3]), egyszerűsödött és a kezdeti majdnem mindenütt-divergencia mindenütt-divergencia lett: a végső forma már meglepően egyszerű. Alapja három egyszerűen igazolható észrevétel. Az első az, hogy ha $[-1, +1]$-et m egyenlő részre osztjuk, akkor, hacsak $\frac{2}{1+x} < m \leqq \frac{n}{3}$,

$$\lambda_n(x, m) \equiv \sum' |l_{2k+1}(x)| > \frac{1}{2\pi}|T_n(x)| \log m - c_1(x),$$

ahol $l_{2k+1}(x)$ a $\cos\frac{2(2k+1)-1}{2n}\pi$-hez tartozó n-ik alapfüggvény, Σ' fix x, n és m mellett azon k-kra vonatkozik, melyekre, ha

$$\frac{l}{m} < x \leqq \frac{l+1}{m} \qquad -(m-1) \leqq l \leqq m-1,$$

akkor

$$\cos\frac{2(2k+1)-1}{2n}\pi \leqq \frac{l}{m};$$

$c_1(x)$ se m-től, sem n-től nem függő pozitív érték. A második Weierstrass approximációs tételének azon könnyen látható kis általánosítása, mely szerint az $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ egyenletesen approximálható itt polinommal azon további megkötés mellett is, hogy az approximáló polinom véges sok előreadott helyen $[-1, +1]$-ben $f(x)$-el direkt megegyezzék. A harmadik megjegyzés megint interpolációra vonatkozik, de ez már nincs a T-matrixhoz kötve. Ha $l_\nu(x)$ egy tetszőleges alapmatrixú Lagrange-interpoláció alapfüggvényei, melynek alappontjaira

$$1 \geqq x_1 > x_2 > \cdots > x_n \geqq -1,$$

továbbá egy x_0-ra

$$x_\nu > x_0 > x_{\nu+1},$$

akkor az

$$l_j(x_0) \qquad \nu+1 \leqq j \leqq n$$

sorozat szomszédos tagjai ellenkező előjelűek. Ezek figyelembe-

vételével a Grünwald-féle konstrukció a következőképp írható le. Tetszőleges pozitív egész $m \geqq 4$-el legyenek adva az

$$3m < n_1 < n_2 < \cdots < n_{m-1}$$

pozitív páronkint relatív prím páratlan egész számok. Ekkor könnyen látható, hogy a $T_{n_1}(x), \ldots, T_{n_{m-1}}(x)$ polinomok páronkint közös gyöke csak 0 lehet. Nem ellentmondó tehát az, hogy tekintsük azon $\psi(x)$ függvényt, mely $x = 0$-ra 0, továbbá $T_{n_1}(x)$-nek $-1 < x \leqq 1 - \frac{2}{m}$-be eső páratlan indexű gyökeire 1 (az esetleg ezek közé eső 0 gyököt nem számítva), $T_{n_1}(x)$ többi gyökhelyein 0, továbbá $T_{n_2}(x)$-nek $-1 < x \leqq 1 - \frac{4}{m}$-be eső páratlan indexű gyökeire 1 (az esetleges 0 gyököt nem véve), $T_{n_2}(x)$ többi gyökein 0 ... végül $T_{n_{m-1}}(x)$-nek $-1 < x \leqq 1 - \frac{2(m-1)}{m}$-be eső páratlan indexű gyökeire 1 (az esetleges 0 gyököt kivéve), $T_{n_{m-1}}(x)$ többi gyökein 0, és két szomszédos ilyen pont között lineáris; ezt két vízszintessel $[-1, +1]$-ben definiált függvénnyé terjeszthetjük ki. A második észrevétel segélyével $\psi(x)$ approximálható úgy egy (elég magas fokú) $\varphi(x)$ polinommal, hogy $[-1, +1]$-ben

$$|\varphi(x)| \leqq 2$$

és $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ szögpontjain átmenjen. Ekkor a harmadik észrevétel rögtön adja, hogy $1 - \frac{2}{m} < x \leqq +1$-re, x_{2j+1}-el $T_{n_1}(x)$ páratlan indexű gyökeit jelölve,

$$|L_{n_1}(\varphi)| = \Big| \sum_{x_{2j+1} \leqq 1 - \frac{2}{m}} l_{2j+1}(x) \Big| = \sum_{x_{2j+1} \leqq 1 - \frac{2}{m}} |l_j(x)| = \lambda_{n_1}(x, m)$$

azaz az első észrevétel szerint itt

$$|L_{n_1}(\varphi)| > \frac{1}{2\pi} |T_{n_1}(x)| \log m - c_1(x)$$

és így φ-nek n_1-ik interpolációs polinomja az egész $1 - \frac{2}{m} < x \leqq 1$-re máris „nagy", hacsak az $|T_{n_1}(x)|$ faktor és az $x = 0$ alappont elhagyása el nem rontják a dolgot. Hasonlóképp $1 - \frac{4}{m} < x \leqq 1 - \frac{2}{m}$-re

$$|L_{n_2}(\varphi)| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{n_2}(x)| \log m - c_1(x),$$

azaz φ-nek n_2-ik interpolációs polinomja az egész $1-\frac{4}{m}<x\leqq 1-\frac{2}{m}$-re máris „nagy", hacsak az $|T_{n_2}(x)|$ faktor és az $x=0$ elhagyása el nem rontják a dolgot. S.i.t. $1-\frac{2(m-1)}{m}<x\leqq 1-\frac{2(m-2)}{m}$-re φ-nek n_{m-1}-ik interpolációs polinomja lesz „nagy", hacsak $|T_{n_{m-1}}(x)|$ és az $x=0$ elhagyása el nem rontja a dolgot. Mivel Fejér egy megjegyzése miatt az alapfüggvények mindegyike abszolút értékben $\sqrt{2}$ az egész $[-1,+1]$ közben, tehát a 0 esetleges elhagyása előbbieken lényegileg semmitse változtat. Miként lehet azonban biztosítani azt, hogy $|T_{n_1}(x)|,\ldots,|T_{n_{m-1}}(x)|$ nem lesznek akár mind „kicsik"? Évégből Grünwald szellemesen a következőképp jár el, $\varphi(x)$ fenti definícióját módosítva, megjegyezvén, hogy, ha m és n páratlan relatív prímek, akkor $T_m(x)$ és $T_{2n}(x)$ ill. $T_{2m}(x)$ és $T_{2n}(x)$ közös gyökei csak $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ lehetnek. $|T_{n_1}(x)|$ akkor „kicsi", ha arc cos x „közel" $\frac{2j-1}{2n_1}\pi$ alakú; de ekkor $|T_{2n_1}(x)|$ értéke nyilván „közel" 1. Tehát az elég magas fokú $\varphi(x)$ polinom legyen olyan, hogy $[-1,+1]$-ben

$$|\varphi(x)|\leqq 2,$$

továbbá $\varphi(x)$ értéke legyen 1 a $T_{n_1}(x)$-nek *és* $T_{2n_1}(x)$-*nek* $-1<x\leqq 1-\frac{2}{m}$-be eső páratlan indexű gyökein, 0 a többin, ovábbá legyen $\varphi(x)$ értéke 1 a $T_{n_2}(x)$-nek *és* $T_{2n_2}(x)$-*nek* $-1<x\leqq 1-\frac{4}{m}$-be eső páratlan indexű gyökein, 0 a többin, s. i. t., az esetleg előjövő 0, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ alaphelyeken legyen 0. Ekkor közös gyökökkel nincs baj megint és az egész változás az lesz, hogy $1-\frac{2}{m}<x\leqq 1$-ben

$$|L_{n_1}(\varphi)|>\frac{1}{2\pi}|T_{n_1}(x)|\log m-c_1(x)$$

$$|L_{2n_1}(\varphi)|>\frac{1}{2\pi}|T_{2n_1}(x)|\log m-c_1(x),$$

azaz előbbi megjegyzés szerint $1-\frac{2}{m}<x\leqq+1$ minden pontjában $|L_{n_1}(\varphi)|$ vagy $|L_{2n_1}(\varphi)|$ valamelyike már biztosan „nagy". Hasonlóan

adódik, hogy $1-\frac{4}{m}<x\leqq 1-\frac{2}{m}$-ben

$$|L_{n_2}(\varphi)|>\frac{1}{2\pi}|T_{n_2}(x)|\log m-c_1(x)$$

$$|L_{2n_2}(\varphi)|>\frac{1}{2\pi}|T_{2n_2}(x)|\log m-c_1(x),$$

azaz $1-\frac{4}{m}<x\leqq 1-\frac{2}{m}$ minden pontjában $|L_{n_2}(\varphi)|$ és $|L_{2n_2}(\varphi)|$ valamelyike biztosan „nagy", s. i. t. Tehát a mi új $\varphi(x)$-ünk olyan, hogy $-1+\frac{2}{m}<x\leqq+1$ minden pontjához van *legalább egy* oly k index, hogy $L_k(\varphi)$ „nagy"; azaz Fejér egy kifejezésével élve $\varphi(x)$ „csírájában" már mutatja a divergenciát. Pontosabban minden pozitív egész N-hez van oly elég magas fokú $\varphi_N(x)$ polinom és elég nagy m egész, hogy $-1+\frac{2}{m}<x\leqq 1$-hez *minden* pontjára alkalmas $k=k(x)$-el $|L_k(\varphi_N)|\geqq N$. A divergenciához azonban minden x-helyen *végtelen sok* ilyen index kell. Annak azonban semmi akadálya, hogy a jólismert Lebesgue-féle rezonancia-elvet alkalmazva a kívánt tulajdonságú, $[-1, +1]$-ben folytonos függvényt

$$\Phi(x)=\sum_{\nu} c_\nu \varphi_{N_\nu}(x)$$

alakban keressük, ha az N_ν-k elég ritkán vannak; ez már járt utakon célhoz vezet. Az egyetlen megmaradt kis szépséghiba az, hogy ilyen módon a divergencia csak a $-1<x\leqq+1$ balról nyílt intervallumra van igazolva. Ezen egy további ötlettel úgy segít, hogy csinál oly $[-1, +1]$-ben folytonos $\psi(x)$-et, melynek T-matrixhoz tartozó interpolációs polinomjai *csak* $x=-1$-re korlátlanok, másutt nem; ha $\Phi(x)$ interpolációs polinomjai $x=-1$-re korlátosak volnának, akkor $\Phi(x)+\psi(x)$ adja a probléma teljes megoldását.

A konstrukció igen szellemes és a hozzáfűzött kis analízis világosan mutatja, milyen nehézségeket kellett legyőznie. Vele egyidőben a lengyel Marczinkievicz is foglalkozott a kérdéssel és valamivel később, de nyilván Grünwaldtól függetlenül megoldotta azt. Megoldása reprodukálva van Natanszon konstruktív függvénytani könyvében[4]; nekem Grünwald konstrukciója lényegesen áttetszőbbnek tűnik. Érdekes módon Marczinkiewicznél e tétel szintén doktori disszertációjában szerepel; életük abban is parallel ha-

[4] I. P. Natanszon: Konstruktív függvénytan. Akad. Kiadó 1952. p. 393.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

ladt, hogy mindkettőjüket a hitleri Németország által kirobbantott háború kergette a korai halálba, Marczinkiewiczet még előbb.

E sikeren felbuzdulva Grünwald sokat foglalkozott a Fourier-sor megfelelő divergencia problémájával. E próbálkozásait azonban nem koronázta siker, még az L_2-függvényosztály körében sem. Az azonban nem lehetetlen, hogy módszere a lineáris függvényoperációk körében olyan általános tételre vezet, mint H. Hahn-nak 1918-ban az interpolációról írott dolgozata[5] egyenes úton vezetett Banach—Steinhaus általános tételeihez.[6]

Az első jel arra vonatkozólag, hogy a T-matrixhoz tartozó interpolációs polinomok és Fourier-sor közötti analógia nem teljes, Fabertól való, még 1910-ből.[7] E dolgozatában Faber oly $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ függvény létezését mutatta ki, hogy $f(\cos \vartheta)$ Fourier-sora egyenletesen konvergál $[0, \pi]$-ben, míg a szóban forgó interpolációs polinomok végtelen sok helyen divergensek. Grünwald, egy Erdőssel írott cikkében ([8]), módszerének továbbfejlesztésével ezen lényegesen túlmegy; kimutatták ebben oly $f(x)$ létezését, hogy, $f(\cos \vartheta)$ Fourier-sora $[0, \pi]$-ben egyenletesen konvergál és $f(x)$ szóban forgó interpolációs polinomjai *mindenütt* divergálnak. Megjegyzem, hogy a duális kérdés, oly $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ konstrukciója, melynél a T-matrixhoz tartozó interpolációs polinomok konvergálnak egyenletesen $f(x)$-hez és $f(\cos \vartheta)$ Fourier-sora divergens pl. $\vartheta = 0$-ra, tudomásom szerint az irodalomban még nincs tárgyalva.

A T-matrixhoz tartozó interpolációs polinomok és Fourier-sor közötti formális analógia alapján azt lehetne gondolni, hogy miként a Fourier-sornál, az interpolációs polinomok számtani közepei egy folytonossági helyen konvergálnak a függvényértékhez. Előadó még 1932-ben vette észre — ez egy Erdőssel írott, 1937-ben megjelent dolgozatukban szerepel[8] — hogy van oly $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$, melyre ezen interpolációs polinomok számtani közepei $x = 0$-ra korlátlanok. Marczinkiewicz disszertációjában felvetette azon kérdést is, vajon ezen arithmetikai közepek divergálhatnak-e *mindenütt?* Egy Grünwaldhoz intézett levele szerint[9] ezen divergenciajelenséget egy megszámlálható halmazra ki tudja mutatni. Grünwald egy Erdőssel írott dolgozatában ([4]) módszerének további fejlesztésével e nehéz kérdést is tudták tárgyalni. Ha megoldásuk, mint Erdős utólag észrevette, nem is teljesen helyes,

[5] „Über das Interpolationsproblem". Math. Zeitschr. 1. (1918) p. 115—142.

[6] Sur le principe de la condensation de singularités. Fund. Math. 9. (1927) p. 50—61.

[7] Math. Ann. 69. p. 372—443.

[8] On Interpolation I. Annals of Math. Vol. 38 (1937) p. 142—155. különösen p. 144.

[9] L. [4] p. 83.

annyi igaz marad, hogy e számtani közepek *majdnem mindenütt* divergálnak alkalmas, $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$-re. E tény csak alátámasztja azon előbbi megjegyzésemet, melyet Grünwald és Marczinkiewicz konstrukcióinak összehasonlítására tettem.

Egy másik nevezetes eredménye Fejér egy sejtésére vonatkozik. (L. [13], [18].) G. Faber egy nevezetes eredménye szerint[10] nemcsak a T-matrixhoz, hanem a $[-1, +1]$-ben adott interpolációs alaphelyek *bármely* A-matrixához van oly $[-1, +1]$-ben folytonos $g(x)$, melynek A-matrixhoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomjai korlátlanok. Fejér vette észre, hogy a helyzet javul, ha Lagrange-interpolációs polinomok helyett, melynél az n-ik polinom foka $\leqq (n-1)$, azon polinomok sorozatát tekintjük, melyeknél az n-ik polinomnál az adott n helyen a polinom értéke megegyezik a függvényértékkel és deriváltja e helyeken 0; e polinom foka $\leqq 2n-1$ és őt az A-matrixhoz tartozó n-ik Hermite—Fejér-féle lépcsőparabolának nevezzük. Mármost Fejér 1916-ban azt mutatta ki,[11] hogy ha a T-matrixszal fenti Hermite—Fejér polinomok sorozatát képezzük, akkor ezek $[-1, +1]$-ben egyenletesen konvergálnak $f(x)$-hez, ha $f(x)$ itt folytonos. Előzőleg[12] analóg tételt talált azon esetre is, mikor az alappontok matrixának n-ik sorát az n-ik Legendre-polinom gyökei adják. Bizonyításai mindkét esetben mint később kifejtette azon észrevételén múltak, hogy az alapmatrix „normális".[13] Ez alatt a következőt értette. A Hermite—Fejér interpolációs polinomok általános A-matrix esetén

$$H_n(f) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu n}) h_{\nu n}(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} v_{jn}(x) l_{jn}(x)^2 \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{n} f(x_{jn}) \left\{ 1 - \frac{\omega_n''(x_{jn})}{\omega_n'(x_{jn})} (x - x_{jn}) \right\} l_{jn}(x)^2$$

alakba írhatók, ahol az x_{jn}-ek az A-matrix n-ik sorának pontjai, $l_{jn}(x)$ a Langrange-interpoláció alapfüggvényei,

$$\omega_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_{jn}).$$

Mármost az A-matrixot normálisnak akkor nevezte, ha a fellépő

[10] L. 7. Egy különösen egyszerű bizonyítást adott Fejér „Die Abschätzung eines Polynoms etc." c. dolgozatának függelékében, Math. Zeitschr. XXXII. (1930) p. 426—457.

[11] Über Interpolation. Gött. Nachr. (1916) p. 66—91.

[12] „Interpolációról". Mat. és Term. Értesítő XXXII. köt. (1915) p. 53—82.

[13] L. Fejér: „On the characterisation of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points. Math. Monthly 41. (1934) p. 1—14.

lineárfaktorok nem tűnnek el $[-1,+1]$-ben, azaz itt

$$v_{jn}(x) \geqq 0$$
$$j = 1, 2, \ldots, n \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

vagyis ezen j és n-ekre

$$\left| x_{jn} + \frac{\omega_n'(x_{jn})}{\omega_n''(x_{jn})} \right| > 1,$$

„szigorúan normális"-nak, ha többet követőleg van oly pozitív n-től független pozitív δ, hogy $-1 \leqq x \leqq 1$-re

$$v_{jn}(x) \geqq \delta$$
$$j = 1, \ldots, n \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Fejér szóban forgó sejtése mármost az volt, hogy minden szigorúan normális A-matrix esetén igaz az, hogy a $H_n(f)$-polinomok sorozata egyenletesen konvergál $f(x)$-hez, ha ez $[-1,+1]$-ben folytonos. Ha a kérdés kézenfekvő is volt, a felelet távolról sem volt az. Ami könnyű, az csak az hogy, ha $f(x)$ folytonosan deriválható $[-1,+1]$-ben és a normális A-matrixon nem a $H_n(f)$ lépcsőparabolák sorozatát, hanem a $G_n(f)$ ún. símuló parabolákét nézzük, akkor ezek sorozata egyenletesen konvergál $f(x)$-hez $[-1,+1]$-ben. ($G_n(F)$ azon legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom, mely $j = 1, 2, \ldots, n$-re x_{jn} helyeken függvényértékben és első deriváltban megegyezik $F(x)$-el. Verifikálható, hogy

$$G_n(F) = \sum_{j=1}^{n} F(x_{jn})\, v_{jn}(x)\, l_{jn}(x)^2 + \sum_{j=1}^{n} F'(x_{jn})(x - x_{jn}) l_{jn}(x)^2.).$$

A könnyűség oka az, hogy, ha $P_k(x)$ tetszőleges k-adfokú polinom, akkor

$$G_n(P_k) \equiv P_k(x),$$

hacsak $2n-1 \geqq k$. Ha $f(x)$-ről csupán azt tételezzük fel, hogy $[-1,+1]$-ben folytonos, akkor Fejér sejtésének bizonyítására a következő elindulás teljesen kézenfekvő. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és $Q_k(x)$ k-adfokú polinom, melyre $-1 \leqq x \leqq +1$-ben

$$|f(x) - Q_k(x)| \leqq \varepsilon.$$

Ekkor $2n-1 \geqq k$-ra

$$H_n(f) - f = (H_n(f) - Q_k) - (f - Q_k) = (H_n(f) - G_n(Q_k)) - (f - Q_k)$$

azaz, mivel $G_n(F)$ előbbi explicit alakjából

$$G_n(Q_k) = H(Q_k) + \sum_{j=1}^{n} Q_k'(x_{jn})(x - x_{jn}) l_{jn}(x)^2,$$

tehát $-1 \leqq x \leqq +1$-ben

$$|H_n(f)-f| \leqq \varepsilon + |H_n(f-Q_k)| + \left| \sum_{j=1}^{n} Q_k'(x_{jn})(x-x_{jn}) l_{jn}(x)^2 \right|.$$

Mivel $P_k(x) \equiv 1$-re $G_n(P_k) \equiv P_k$-ból

$$\sum_{j=1}^{n} v_{jn}(x) l_{jn}(x)^2 \equiv 1$$

és a normálisság miatt

$$\sum_{j=1}^{n} |v_{jn}(x)| l_{jn}(x)^2 \equiv 1,$$

tehát $[-1, +1]$-ben

$$|H_n(f-Q_k)| \leqq \varepsilon$$

és így, ha $[-1, +1]$-ben $|Q_k'(x)| \leqq K$, akkor

$$|H_n(f)-f| \leqq 2\varepsilon + K \sum_{j=1}^{n} |x-x_{jn}| l_{jn}(x)^2.$$

Ami tehát az egész nehézség, az annak kimutatása, hogy szigorúan normális A-matrix esetén

$$\sum_{j=1}^{n} |x-x_{jn}| l_{jn}(x)^2 \leqq \eta,$$

ha $n > n_0(\eta)$; az eddigiekben csak a normalitás volt kihasználva. Nyilván elég rögzített $[-1, +1]$-beli a mellett $n > n_0(\eta)$-ra

$$\sum_{x_{jn} \leqq a} (x_{jn}-a) l_{jn}(a)^2 \leqq \eta$$

egyenlőtlenséget igazolni. E főnehézség elegáns áthidalására Grünwald Géza azt vette észre, hogy az előbbi a-val a speciális

$$f_0(x) = \begin{cases} (x-a)^{\frac{\delta}{2}} & a \leqq x \leqq 1 \\ 0 & -1 \leqq x \leqq a \end{cases}$$

függvényre az n-ik símulóparabola

$$G_n(f_0) = \sum_{x_{jn} \leqq a} (x_{jn}-a)^{\frac{\delta}{2}} l_{jn}(x)^2 \left\{ v_{jn}(x) - \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Ha tehát e speciális $f_0(x)$-re be tudnánk bizonyítani, hogy $G_n(f_0)$ egyenletesen tart $f_0(x)$-hez éspedig a-ban egyenletesen, akkor

$x = a$-ra adódnék $n \to \infty$-re a-ban egyenletesen

$$\sum_{x_{jn} \gtrless a} (x_{jn} - a)^{\frac{\delta}{2}} l_{jn}(a)^2 \left(v_{jn}(a) - \frac{\delta}{2} \right) \to 0$$

azaz, kihasználva a *szigorúan* normálisság kikötését $n \to \infty$-re

$$\sum_{x_{jn} \gtrless a} (x_{jn} - a)^{\frac{\delta}{2}} l_{jn}(a)^2 \to 0$$

és ebből már a kritikus állítás könnyen adódnék, tekintve, hogy a szigorú normáltságból $-1 \leqq x \leqq +1$-ben

$$\sum_{j=1}^{n} l_{jn}(x)^2 \leqq \frac{1}{\delta}.$$

De $f_0(x)$ csak az $x = a$ kivételével folytonosan deriválható; így tehát a bevezetőleg említett könnyű approximációs tétel minden további nélkül nem alkalmazható. Ezen újabb kis nehézségen Grünwald kézenfekvően úgy segített, hogy $f_0(x)$ „sarkát" $x = a$-nál „letompította" alkalmas folytonosan deriválható függvénnyel helyettesítve azt.

Grünwald [16] és [18] dolgozataiban a tételt több irányban kimélyítette. Mindmáig eldöntetlen azonban az a további kérdés, hogy van-e szigorúan normális matrix esetén *lokális* konvergenciatétel, azaz egy x_0 helyen való folytonosságból következik-e a lépcsőparabolák konvergenciája e helyen?

A Lagrange-interpoláció konvergenciaelméletével foglalkozik egy, az előadóval írott közös dolgozata ([7]). Ebben oly $A = A(p)$ matrixok esetével foglalkoznak, mikor az n-ik sort egy $p(x)$ súlyra a $[-1, +1]$-ben ortogonális polinomsorozat n-ik polinomjának gyökei alkotják; ezek, mint jólismert, mind $[-1, +1]$-be esnek és egyszeresek, ha $[-1, +1]$-re $p(x) \geqq 0$. Ilyen általánosságban semmitse sikerült kimutatni; különböző egyszerű megkötéseket téve azonban $p(x)$-re, több általános tételt nyertek. Egy ilyen premissza volt az, hogy $-1 \leqq x \leqq +1$-re

$$p(x) \geqq m$$

egy pozitív m állandóval. Ez esetben kimutatták, hogy ha $f(x)$ $\frac{1}{2}$-nél nagyobb Lipschitz feltételt teljesít, egyenletesen $[-1, +1]$-ben, akkor tetszőleges kis pozitív ε mellett az $A(p)$ matrixhoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomok $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban egyenletesen konvergálnak $f(x)$-hez. Ez könnyen következik, ha igazolva van, hogy $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban

$$\sum_{j=1}^{n} |l_{jn}(x)| \leqq c_1(m)\sqrt{n}$$

és erre két egyszerű bizonyítást is adtak. Mint közvetlenül a már megírt dolgozat elküldése előtt a szerzők Feldheim Ervintől megtudták, e tételt előzőleg Shohat is bebizonyította, jóval komplikáltabban; Natanszon[4] és Szegő[14] könyvei e tételre a [7] dolgozat egyik bizonyítását adják. Igen valószínű, hogy $\sqrt{n}$ az előbbi egyenlőtlenségben $\log(n+1)$-el helyettesíthető; erre vonatkozólag eddig csupán Freud Géza[15] egy szép részeredménye ismeretes. Alexits György[16] a tétel egy lokalizált formáját találta meg.

Az interpolációról szóló további érdekes dolgozatainak ismertetését ([9], [14], [17]) időhiány miatt elhagyva térünk rá trigonometrikus sorokról szóló dolgozataira ([10], [11], [12]. Ezek Fejér egy érdekes gondolatának továbbfejlesztéseképp keletkeztek.[17] Fejér klasszikus tétele szerint, ha $f(x)$ 2π szerint periodikus és

$$f \sim a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

és $x = x_0$ helyen $f(x)$ folytonos, akkor a Fourier-sor $x = x_0$ helyen $(C, 1)$ szummabilis, amit, ha a sor részletösszegei $s_0, s_1, \ldots,$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \{s_\nu - f(x_0)\}}{n+1} = 0$$

alakba is írhatunk. Hardy és Littlewood még azt is kimutatták, hogy egy ilyen x_0 helyen a Fourier-sor „erősen szummabilis", azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} (s_\nu - f(x_0))^2}{n+1} = 0$$

is igaz, Carleman és Sutton még többetmondóan, hogy tetszőleges nagy fix pozitív k-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu - f(x_0)|^k}{n+1} = 0, \qquad \text{a.)}$$

ha x_0 egy folytonossági hely (sőt ez is lényegesen enyhíthető).

[14] „Orthogonal polynomials". Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XXIII. (1939) p. 339.

[15] „Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation". Acta Math. Hung. T. IV. (1953) p. 137—142.

[16] „Eine Bemerkung zur Konvergenzfrage des Lagrangeschen Interpolationsverfahrens". Acta Math. Hung. T. IV. (1953) p. 233—236.

[17] L. Fejér: Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen und Laplaceschen Reihe. Proc. of Camb. Phyl. Soc. XXXIV. (1938) p. 503—509.

Fejér gondolata Hardy—Littlewood fenti tételére vonatkozik; e tételt egy *kétváltozós* függvény Fourier-sorára vonatkozó *közönséges* szummabilitási tételből származtatja. Legyen $f(x, y)$ mindkét változóban 2π szerint periodikus, L-integrálható és

$$f(x, y) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu},$$

ahol

$$A_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \cos \mu x \cos \nu y + b_{\mu\nu} \cos \mu x \sin \nu y + c_{\mu\nu} \sin \mu x \cos \nu y + \\ + d_{\mu\nu} \sin \nu x \sin \nu y;$$

legyen továbbá

$$s_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} A_{\mu\nu}.$$

Ekkor Saks egy megjegyzése alapján az[18]

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} s_{\mu\nu}$$

aritmetikai közepek meglepő módon még majdnem mindenütt divergálhatnak attól, hogy $f(x, y)$ a periodusnégyzetben L-integrálható. Fejér mármost azt találta jelzett dolgozatában, hogy a „jó" szummálási mód nem a fenti, mikor „minden" részletösszeg tekintetbe van véve, hanem az, mikor az s_{mn} részletösszegek

$$\begin{matrix} s_{00} & s_{10} & s_{20} & \dots \\ s_{01} & s_{11} & s_{21} & \dots \\ s_{02} & s_{12} & s_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

quadratikus sémájából csak a diagonálisban levőket vesszük tekintetbe. Fejér azt találta, hogy ha az $s_{\nu\nu}$-knek *harmadrendű* Cesaro-közepeit, azaz a

$$\sigma_n^{(3)} = \frac{1}{\binom{n+3}{3}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+3-\nu}{3} s_{\nu\nu}$$

kifejezéseket vizsgáljuk, akkor $f(x, y)$ minden (x_0, y_0) folytonossági helyén $\sigma_n^{(3)} \to f(x_0, y_0)$ és ebből Hardy—Littlewood fenti tételét elegánsan levezette. Grünwald [10] alatti dolgozatában kimutatta azon, nehezebben bizonyítható tételt, hogy egy folytonossági helyen már

[18] Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral. Fund. Math. 22 (1934) p. 257—261.

az $s_{\nu\nu}$ számok $\sigma_n^{(1)}$ *elsőrendű* számtani közepei is $f(x_0, y_0)$-hoz konvergálnak. [11] dolgozatában Lebesgue—Fejér tételének azon kétdimenziós átvitelét bizonyította be, hogy ha $f(x, y)$-ról csak azt tesszük fel, hogy a periodusnégyzetben L-integrálható, akkor ezen $\sigma_n^{(1)}$ közepek *majdnem mindenütt* $f(x, y)$-hoz konvergálnak. Ennek érdekessége szembeszökő, ha összehasonlítjuk Saks előbb említett tételével. [12] dolgozatában a Fejér-féle

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_{\nu\nu}$$

„főátlóközepeket" a „Cauchy-szerű"

$$g_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_{\nu, n-\nu}$$

„mellékátlóközepekkel" állítja szembe és rájuk analóg tényállást talál.

[11] dolgozatában egy igen érdekes alkalmazást ígért be, aminek beteljesítésében a halál megakadályozta. Érdemes erről is pár szót szólani; igazán érdekes volna, ha gondolata a szóban forgó kérdés egy egyszerűbb megoldáshoz vezetne. Ez Hardy—Littlewood előbb említett erős-szummációs tételére vonatkozik. Már ők kimutatták, hogy $x = x_0$ már akkor is erős-szummabilitási hely a mondott értelemben, ha valamely $r > 1$-re $f \in L_r$ és

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)|^r \, dt = 0;$$

erről belátható, hogy ez majdnem minden x_0-ra teljesül. A kérdés mármost az, hogy mi a helyzet, ha $r = 1$, azaz $f(x)$-ról pusztán L-integrálhatóságot teszünk fel? Mint Hardy és Littlewood[19] kimutatták, $r = 1$ esetén előbbi már nem igaz, a

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)| \, dt = 0$$

nem vonja maga után, hogy e helyen

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} (s_\nu - f(x_0))^2 \to 0, \qquad \text{b.)}$$

[19] The strong summability of Fourier series. Fund. Math. XXV. (1935) p. 162—189.

sőt még azt sem, hogy valamely kis pozitív k-val

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu - f(x_0)|^k \to 0.$$

Ezután elég meglepő volt, mikor Marczinkiewicz[20] kimutatta, hogy mégis igaz az $r=1$ esetben is, hogy a Fourier-sor b.) értelemben erős-szummabilis majdnem minden x-re. Bizonyítása nehéz. Mármost Grünwald [11] dolgozatában azt jegyezte meg, hogy tételében szereplő nullhalmaz pontosabb tanulmányozása kiadhatja Marczinkiewicz tételét.

Különben Grünwald az erős szummabilitásra vonatkozólag egy másik érdekes kérdést is vetett fel, azt beszélgetés közben. Legyen $f(x)$ mindenütt folytonos. Grünwald kérdése mármost abból állott, lehet-e Carlemann—Sutton a.) tételét úgy szigorítani, hogy k helyett egy lassan $+\infty$-hez tartó univerzális $k(n)$ kitevő álljon. Ezen kérdésre való negatív válasz volt a tárgya azon dolgozatnak,[21] melyet előadó Grünwald Géza emlékére írt. Ezzel kapcsolatban igen sok kérdés maradt még tisztázatlanul; így pl. ha a mindenütt folytonos $f(x)$-re egy $x=x_0$ helyen $0<\alpha\leqq 1$-el

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| \leqq \frac{1}{\log^\alpha \frac{1}{|h|}},$$

milyen $k(n)$ mellett marad a.) igaz.

Egy dolgozata ([5]), melyet előadóval írt, komplex függvénytani tárgyú éspedig A. Bloch nevezetes tételére vonatkozik. E tétel, melyből Picard, Landau és Schottky tételei könnyen származtathatók, azt mondja ki, hogy ha

$$w=f(z)=z+a_2z^2+\cdots$$

reguláris $|z|\leqq 1$-re, akkor az egységkör képe a w-síkon (melynek egyes részei többszörösen lehetnek lefedve) tartalmaz egy körlemezt, melynek sugára pl. $>\frac{1}{10}$. A közölt bizonyítás két segédtételén alapszik. Az első azt mondja ki, hogy van oly r_0, hogy $0<r_0\leqq 1$ és az $|z|\leqq r_0$ körlemez képének területe osztva kerületével (többszörösség szerint számítva) $\geqq \frac{1}{2\sqrt{e}}$, függetlenül az együtthatóktól. A másik elemi geometriai és azt mondja ki, hogy ha egy

[20] Sur la sommabilité forte de séries de Fourier. Journ. of Lond. Math. Soc. 14 (1939) p. 162—168.

[21] On the strong summability of Fourier series. (In memory of my late friend dr. Géza Grünwald.) Journ. of Indian Math. Soc. Vol. XII. (1948) p. 8—12.

Jordan-görbe kerülete k és területe t, akkor bele lehet írni egy oly kört, melynek sugara $\geqq \frac{1}{4\pi+2} \cdot \frac{t}{k}$. Mint Grünwald és Vázsonyi később kimutatták,[22] az egyenlőtlenség igaz marad akkor is, ha $\frac{1}{4\pi+2}$ helyett 1-et írunk és ekkor az egyenlőség jele, elérhető minden „lóversenypályára", azaz oly tartományra, melyet egy körlap leír, ha középpontja egy egyenesszakaszon végigcsúszik; további általánosításokat Santaló[23] és Besicovitch[24] találtak. A Bloch tétel bizonyítását ezekből a szerzők úgy gondolták levezethetni, hogy az első segédtétel r_0-jával tekintik $|z| \leqq r_0$ képét; ha H_ν jelenti $\nu \geqq 1$-re azon pontok halmazát a képben, melyek legalább ν-szörösen vannak fedve, akkor a második segédtételt az egyes H_ν-kra alkalmazzák. Elkerülte figyelmüket azonban az a tény, hogy már H_1 is nem szükségképpen egyszeresen összefüggő, így a bizonyítás ezen formájában csak oly $f(z)$-kre helyes minden további nélkül, melyek $|z| \leqq 1$-re egyrétűek. Mint Ungár Péter megjegyezte, ezen úgy lehet segíteni, hogy a második segédtételnek megfelelő tételt nem a síkon, hanem $f(z)$ Riemann-felületén kell tekinteni. Idevágó eredményei közlés alatt állanak.

Végigmentünk nagy vonásokban Grünwald megjelent munkáin, melyek utolsó kettőjét már biztosan nem láthatta megjelenni. Elgondolkozhatunk azon, mivé fejlődhetett volna, ha megéri e kort, melyben tehetsége teljesen és akadálytalanul kibontakozhatott volna és melyről annyit álmodozott. Mert Grünwald Géza kora ifjúságától kezdve kommunista meggyőződésű volt. Erről néha szólt nekünk, barátainak, akik közül többen tőle hallottunk először a dialektikus materializmusról az elmaradhatatlan vasárnapi gyalog- vagy evezőtúrákon. Dehát nem érhette meg álmai beteljesülését és így későbbi fejlődési lehetőségeinek irányait csak megmaradt jegyzeteiből tudjuk megsejteni. E jegyzetekbe volt alkalmam betekinthetni. Ezek alaposabb tanulmányozást igényelnek, de már felületes átnézés ki tudott ragadni belőle eredményeket, és kérdéseket, melyek sokirányú aktív érdeklődését mutatják. Nem szólok Stone egy tételével és valószínűségszámítással kapcsolatos próbálkozásokról, mely utóbbiakhoz Egyesült Izzóbeli munkájával jutott és melyek megítélésére nem érzek kompetenciát. Nem tudok közelebbit mondani arról a halmazelméleti dolgozatáról sem, melyet e feljegyzések szerint 1941 elején Tomszkba küldött; ennek tartalmáról csak jegyzeteinek gon-

[22] A bizonyítást tudomásom szerint nem publikálták.

[23] Sobre el circolo de radio maximo contenido en un recintro. Revista de la Union Math. Argentina Vol. X. (1945) p. 155—162.

[24] A variant of a classical isoperemetrical problem. Quart. 7. of Math. Oxford Ser. 20 (1949) p. 84—94.

dosabb tanulmányozása adhat számot. Geometria iránti érdeklődését azon publikálatlan csinos tétele is mutatja, melyet feleségével talált, mely azt mondja ki, hogy egy t területű konvex tartomány mindig befoglalható $2t$ területű centrálszimmetrikus konvex tartományba. Algebra iránti érdeklődése annak bizonyítási kísérleteiben manifesztálódott, hogy ha egy csoport minden részcsoportjának rendje nem halad meg egy fix n értéket, akkor véges. Emlékszem továbbá — ha erről feljegyzéseiben nincs is nyom —, hogy Hajósnak a Minkowski sejtést bizonyító dolgozatának megjelenése után a bizonyítás egyszerűsítésével próbálkozott. Számelméleti érdeklődése látszik az

$$I(n) = \frac{3}{4\pi} \int_0^{\pi} \left(\sum_{p \leqq n} \cos px \right)^3 dx + O(1)$$

formulán; itt p az n alatti prímeken fut végig, $I(n)$ az n alatti ikerprímek száma, tehát azon n alatti p prímeké, melyeknél $p+2$ is prím és $O(1)$ egy oly kifejezés, mely növekvő n-nel korlátos marad. Mint tudjuk, mindmáig nincs igazolva még az sem, hogy az ilyen ikerprímek száma végtelen; nem látható egyenlőre, Grünwald formulája előreviszi-e a kérdést. Valós függvénytani érdeklődést mutat a következő feljegyzés: „Egy zárt közben folytonos függvény maximumainak halmaza zérusmértékű *(esetleg megszámlálható).*" Ezt azóta Gehér István is megtalálta (l. Mat. Lapok II. évf. 1. szám. 38. feladat, p. 69), szigorúbb második formájában [6] dolgozatának folytatásaképp elvesztett tomszki dolgozatának tárgya esetleg következő feljegyzésének kidolgozása lehetett. Ha egy M halmaz minden eleméhez M-nek legfeljebb k (véges sok) tőle különböző eleme van hozzárendelve, akkor M felbomlik $(k+1)$ halmaz összegére úgy, hogy mindegyiken belül egy elem sincs a másikhoz rendelve. Csinos sorelméleti megjegyzése az, hogy ha $a_\nu \geqq 0$ és minden egész n-re

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n},$$

akkor a $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ sor konvergens és $\sum_{1}^{\infty} a_\nu < 2ea_1$. Egy feljegyzés tanúskodik arról, hogy ő is talált egy bizonyítást a

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

identitásra, melyről e Lapok hasábjain utóbbi időkben többször

szó esett.[25] Mint problémát kérdi egy feljegyzés, n elemnek hány oly permutációja van, melyben minden elem az eredeti helyétől legalább k hellyel van jobbra vagy balra. Fourier sorokra vonatkozó egyik kérdését — melynek feljegyzéseiben nincs nyoma — előbb említettem. Egy másik kérdése a Fourier-féle duplasorra vonatkozik és azt kérdezi, vajon igaz marad-e, hogy ha

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)^2 dx\,dy < \infty,$$

akkor az $s_{2^n,2^n}$ részletösszegek $(n=0,1,\ldots)$ majdnem mindenütt konvergensek? Az ortogonális kifejtésekre vonatkozik azon kérdése, vajon van-e oly ortogonális kifejtés egyáltalán, úgy, hogy bármely L-integrálható függvénynek egy tetszőleges folytonossági helyén *ezen* ortogonális kifejtése $(C, 1)$ szummabilis, de van oly mindenütt folytonos $f(x)$, melynek ilyen kifejtése majdnem mindenütt divergál.

További irányú érdeklődését mutatja az az előadássorozat, amit az ergodikus tételekről tartott Ortvay Rudolf felkérésére szemináriumában 1937 vagy 1938-ban. Több feljegyzése mutatja, hogy állása folyamán elméleti fizikával behatóbban foglalkozott; szakértő szem kellene annak eldöntésére, hogy ezek csupán kivonatok-e, vagy már tartalmaznak eredeti gondolatot is.

Mint látjuk, Grünwald Géza azon matematikusok közé tartozott, akiknek a matematika nem foglalkozás, hanem lételem. Igen vonzották a nagy problémák, sokat foglalkozott velük; a pihenőkben azonban szívesen foglalkozott szép, de kisebb fontosságú kérdésekkel, egyetemi hallgatóéveiben több feladatmegoldást küldött a Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigungba. Érdekes módon a Középiskolai Matematikai Lapokba nem dolgozott, ennek oka talán az is volt, hogy egészen érettségi vizsgájáig nem döntötte el magában, milyen pályát válasszon. Csak akkor döntött, és fenti egész beszámoló azt mutatja, hogy döntése helyes volt a magyar tudomány szempontjából. Az a tűz, mely végül elemésztette őt, anyját és testvérét, nem emészthette el munkakedvét, érdeklődését, törhetetlen optimizmusát, nem rendítette meg póztalan helytállását. Lényeges énje, munkái túlélték a tüzet és ezek a magyar matematika történetének lapjain továbbélnek.

[25] Turán P.: A kínai matematika történetének egy problémájáról. V. (1954). p. 1.—6., valamint a jelen számban Huszár Géza, Surányi János és Takács Lajos dolgozatait.

Grünwald Géza
dolgozatainak jegyzéke

1. A Lagrange-féle interpolációs polinomok divergenciajelenségeiről. (Doktori értekezés.) *Math. Fiz. Lapok* XLII. (1935) p. 1—22.
2. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome. *Acta Szeged* T. VII. Fasc. IV. (1935) p. 207—221.
3. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen. *Annals of Math.* Vol. 37. No. 4. (1936) p. 908—918.
4. Über die arithmetischen Mittelwerte der Lagrangeschen Interpolationspolynome (Erdős Pállal) *Studia Math.* T. VII. (1937) p. 82—95.
5. Über den Blochschen Satz (Turán Pállal). *Acta Szeged* T. VIII. Fasc. IV. (1937) p. 236—240.
6. Egy halmazelméleti tételről. *Math. és Fiz. Lapok* XLIV. (1937) p. 51—53.
7. Über Interpolation (Turán Pállal). *Annali di Pisa* (1938) p. 1—10.
8. Über einen Faberschen Satz (Erdős Pállal) *Annals of Math.*, Vol. 39. No. 2. (1938) p. 257—261.
9. Note on an elementary problem of interpolation (Erdős Pállal). *Bull. of Amer. Math. Soc.* (1938) p. 515—518.
10. Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen Doppelreihe. *Proc. of the Camb. Phyl. Soc.* Vol. XXXV. Part III. (1939) p. 343—350.
11. Über die Summabilität der Fourierschen Reihe. *Acta Szeged.* T. X. Fasc. 1. (1941) p. 54—63.
12. Eine Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die Summabilität der Fourierschen Reihe". *Ibid.* T. X. Fasc. 2. (1941) p. 105—108.
13. A Hermite-féle interpolációról. *Math. és Fiz. Lapok* XLVIII. (1941) p. 272—284.
14. Note on interpolation. *Bull. of the Amer. Math. Soc.* Vol. 47. No. 4. (1941) p. 257—260.
15. On a convergence theorem for the Lagrange interpolation polynomials, *Ibid.* p. 271—274.
16. Az interpoláció alapfüggvényeiről. *Math. és Fiz. Lapok* XLIX. (1942) jan.—jún. füzet, p. 76—63.
17. On a theorem of S. Bernstein, *Acta Szeged*, T. X. Fasc. 3—4. (1943) p. 185—187.
18. On the theory of interpolation. *Acta Math.* Vol. 75. (1943) p. 219—245.

РЕЗЮМЕ

Жизнь и деятельность Г. Грюнвалда.

SUMMARY

Short biography and mathematical works of G. Grünwald.

Megjegyzés Turán Pál „A kínai matematika történetének egy problémájáról" című dolgozatához

Írta: Takács Lajos

1. Turán Pál [1] dolgozatában felemlíti, hogy Li Zsen-Su kínai matematikusnak 1867-ben Nankingban megjelent „Co ku hszi csaj szuan hszue" című könyvében szerepel, a régi kínai matematikusok hagyományait felidézve, a következő, bizonyítás nélküli állítás:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2. \tag{1}$$

Ennek igazolását Turán Pál és tőle függetlenül Szekeres György is megadták. Mindkét bizonyítás megtalálható Csang Jung [2] cikkében. A fentemlített [1] dolgozatban Turán Pál saját bizonyításának reprodukcióját közli. Ez a bizonyítás felhasználja a Legendre-polinomok bizonyos sajátságait.

A bizonyítandó egyenlőség alakjából ítélve azt várnánk, hogy az analítikus apparátus nélkül, elemi eszközökkel is igazolható. A következőkben éppen ezt a feladatot oldjuk meg és (1) fennállására elemi bizonyítást ismertetünk. Csupán azt az ismert tényt használjuk fel segédeszközül, hogy egy $f(x)$ függvény n-edik differenciája az $x=0$ helyen a következő alakban állítható elő:

$$\Delta^n f(0) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i). \tag{2}$$

2. Bizonyítás. Ha $f(x) = (-1)^j \binom{n+2k-x}{n}$ függvény j-edik differenciáját képezzük az $x=0$ helyen, úgy (2) szerint azt kapjuk, hogy

$$\binom{n+2k-j}{2k} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{j}{s} \binom{n+2k-s}{n}. \tag{3}$$

Ezt (1)-be helyettesítve és tekintetbe véve, hogy

$$\binom{k}{j}\binom{j}{s} = \binom{k}{s}\binom{k-s}{k-j},$$

az alábbi (1)-gyel ekvivalens állítást nyerjük:

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}\binom{n+2k-s}{n}\binom{k}{j}\binom{k-s}{k-j}=\binom{n+k}{k}^2. \qquad (4)$$

(4) baloldalán a j szerinti összegezést elvégezve

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}\binom{n+2k-s}{n}\binom{2k-s}{k}=\binom{n+k}{k}^2 \qquad (5)$$

-re jutunk. Ugyanis a Cauchy-féle formula szerint

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{k-s}{k-j}=\binom{2k-s}{k}.$$

(5) mindkét oldalát $\binom{n+k}{k}$-val osztva, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}\binom{n+2k-s}{n+k}=\binom{n+k}{k}. \qquad (6)$$

Ezen utóbbi állítás pedig igaz, ugyanis ez nem más, mint $f(x)=\binom{n+k+x}{n+k}$ függvény k-adik differenciája az $x=0$ helyen. A jobboldal közvetlen számítás eredménye, a baloldal pedig a (2) kifejezésből adódik.

Így tehát ezzel kimutattuk az (1) állítás igazságát is. Budapest, 1954. augusztus 12.

IRODALOM

[1] Turán Pál: A kínai matematika történetének egy problémájáról. Matematikai Lapok V. évf. 1. sz. (1954) pp. 1—6.

[2] Csang-Jung: Ko hszüe (Science) XXIII. k. 11. sz. (1939) pp. 647—663.

РЕЗЮМЕ

В своей книге, вышедшей в 1867 году, китайский математик Ли Жен-Су сообщил следующее тождество без доказательства:

$$\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2$$

Правильность тождества было подтверждена Палом Туран и Дьёпдем Секереш посредством анализа. Настоящее примечание подтверждает вышеприведенное тождество элементарным путем.

SUMMARY

The following identity

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

occurs without proof in a book of the Chinese mathematician LE-JEN SHOO from 1867. The proof of this identity was given by P. TURÁN and also GY. SZEKERES using analitical methods. The present note contains an elementary proof of this identity.

Megjegyzések a kínai matematika történetének egy problémájához

Írta: Surányi János

1. Turán Pál[1] foglalkozott e Lapok hasábjain Csu Si-Csie XIII. századbeli matematikus egy eredményével, mely Li Zsen-Su 1867-ben megjelent könyvében szerepel, és mely szerint (mai jelölésben)

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}^2\binom{n+2k-i}{2k}=\binom{n+k}{k}^2.$$

Az eredmény Li Zsen-Su-nál is bizonyítás nélkül szerepel. Turán és Szekeres adtak rá egy-egy bizonyítást, ami azonban egyszerűnek nem mondható. Felmerül a kérdés, mi vezethette Csu Si-Csie-t ilyen és hasonló elég mélyen fekvő összefüggések felfedezésére. Ennek a kérdésnek a megközelítéséhez — ami a mai kutatásokra is termékenyítő hatással lehet — az összefüggés lehetőleg egyszerű igazolása is segítséget nyújthat.

Egy egyszerűbb bizonyítás Loo Keng Hua-tól[2] származik. Ő n helyébe folytonos változót írva a két oldalon álló polinomok 0-helyeinek megegyezését igazolja. Erre a bizonyításra az alábbiakban visszatérek. Elemi átalakításokkal célhoz érő bizonyítást tartalmaznak Takács Lajos és Huszár Géza következő cikkei.

2. Az azonosság általánosítható:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{l}{i}\binom{n+k+l-i}{k+l}=\binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}. \qquad (1)$$

Ennek igazolására az említett bizonyítások mindegyike átvihető, amint azt L. K.-Hua bizonyításának példáján be is fogom mutatni; e mellett azonban kicsit átalakítva az (1) összefüggést adok rá egy tisztán kombinatorikus bizonyítást is.

[1] A kínai matematika történetének egy problémájáról, Matematikai Lapok 3 (1954) 1—6. old.

[2] Turán Pállal közölte megoldását.

3. *Loo Keng-Hua bizonyítása.* A binomiális együttható értelmezését tetszésszerinti x értékre kiterjeszthetjük az

$$\binom{x}{\nu} = \frac{x(x-1)\cdots(x-\nu+1)}{\nu!} \tag{2}$$

definíció alapján. Ekkor (1) n helyett tetszésszerinti x értékkel is igaz, tehát a

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{l}{i}\binom{x+k+l-i}{k+l} = \binom{x+k}{k}\binom{x+l}{l}$$

polinomazonosságot fogjuk igazolni. Elegendő valójában k és l közül a kisebbikig összegezni, mert ha i valamelyiküknél nagyobb, akkor a megfelelő binomiális együttható 0. Így az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $k \leqq l$. Szorozzunk át $(k+l)!$-sal, akkor az igazolandó azonosság

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{l}{i}(x-i+1)(x-i+2)\cdots(x-i+k+l) = \tag{3}$$
$$= \binom{k+l}{k}(x+1)^2(x+2)^2\cdots(x+k)^2(x+k+1)\cdots(x+l).$$

Mindkét oldalon $(k+l)$-edfokú polinom áll, a jobboldalon gyöktényezős alakban. Ha sikerül megállapítani, hogy a két oldal gyökei multiplicitással számítva megegyeznek, továbbá megegyezik a legmagasabb fokú tag együtthatója a két oldalon, vagy még egy helyen a két polinom értéke, ezzel már igazoltuk az állítás helyességét.

Az $x=0$ helyen baloldalt csak az $i=0$-hoz tartozó tag marad meg így a bal-, illetve a jobboldal értéke

$$\binom{k}{0}\binom{l}{0}\cdot 1\cdot 2\cdots(k+l) = (k+1)! \quad \text{ill.} \quad \binom{k+l}{k}k!\,l! = (k+l)!$$

Elég tehát még a 0-helyeket vizsgálni. (3) baloldalán i minden értéke mellett szerepelnek az $(x+1), (x+2), \ldots, (x+l)$ tényezők, tehát eltűnik a baloldal is az $x=-1, -2, \ldots, -l$ helyeken.

4. Azt kell még belátni, hogy ezekkel osztva a maradó

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{l}{i}(x-i+1)\cdots x\cdot(x+l+1)\cdots(x+l+k-i)$$

polinom —, ahol a jobboldali szorzat első része (ha $i=0$) vagy második része (ha $i=k$) hiányozhat — még mindig eltűnik az

$x=-1,-2,\ldots,-k$ helyeken. Legyen $1\leqq t\leqq k$, akkor

$$f(-t)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{l}{i}(-1)^i\frac{(i+t-1)!}{(t-1)!}\cdot\frac{(k+l-t-i)!}{(l-t)!}=$$

$$=\frac{l!}{(t-l)!\,(l-t)!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(i+1)(i+2)\cdots$$

$$\cdots(i+t-1)\cdot(l-i+1)(l-i+2)\cdots(l-i+k-t)=$$

$$=\frac{l!}{(t-1)!\,(l-t)!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\varphi(i),$$

ahol $\varphi(y)$ már i-től független $(k-1)$-edfokú polinom. A kapott összeg tehát

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}i^v$$

alakú kifejezések lineáris kombinációja, ahol $0\leqq v\leqq k-1$.

E kifejezések azonban 0-val egyenlők, ami pl. v szerinti teljes indukcióval így látható be: $v=0$-ra és tetszés szerinti pozitív egész k-ra az állítás közismert. Legyen most $g\geqq 1$ és tegyük fel, hogy minden $v<g$ értékre beláttuk, hogy tetszés szerinti $K>v$ egészre

$$\sum_{i=0}^{K}(-1)^i\binom{K}{i}i^v=0.$$

Ekkor $k>g$-re, (ha pozitív egész r, s-sel $\binom{r}{s}$-en és $\binom{r}{r+s}$-en 0-t értünk),

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}i^g=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left\{\binom{k-1}{i-1}+\binom{k-1}{i}\right\}i^g=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k-1}{i-1}(i^g-(i-1)^g)=$$

$$=-\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\left\{\binom{g}{1}i^{g-1}-\binom{g}{2}i^{g-2}+\cdots+(-1)^{g-1}\binom{g}{g}\right\}=$$

$$=\sum_{d=1}^{g}(-1)^d\binom{g}{d}\cdot\left\{\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}j^{g-d}\right\}.$$

Az indukciós feltevés szerint a kapcsok közti kifejezések mind eltűnnek, mert $g-d\leqq g-1$ és $k-1>g-1$. Ezzel állításunkat igazoltuk, tehát azt is, hogy $f(x)$ eltűnik az $x=-1,-2,\ldots,-k$ helyeken, tehát (3) baloldalának ezek kétszeres gyökei. Ebből az

előzőkkel együtt következik a (3) azonosság helyessége, abból pedig az (1) összefüggés.

(Megjegyezzük, hogy az utoljára bizonyított összefüggések helyessége közvetlenül következik abból is, hogy $(x-1)^k$ és első $k-1$ differenciálhányadosa eltűnik az $x=1$ helyen, ha a differenciálást a polinom-alakon végezzük. Közvetlenül is beláthatók ezen összefüggések alkalmas kombinatorikus jelentést tulajdonítva az összegnek.)

5. *Kombinatorikus bizonyítás.* Az (1) azonosságot alakítsuk át úgy, hogy abban ismétléses permutációk számai szerepeljenek. Ilyen formában sikerülni fog kombinatorikus meggondolásokkal minden számítás nélkül igazolni az azonosságot. Vezessük be a következő, egész $r_1, r_2, \ldots, r_u$-ra értelmezett jelölést:

$$P(r_1, r_2, \ldots, r_u) = \begin{cases} \dfrac{(r_1+r_2+\cdots+r_u)!}{r_1!\,r_2!\ldots r_u!} & \text{ha } r_\nu \geqq 0,\ \nu=1,2,\ldots,u; \\ 0 & \text{ha valamelyik } r_\nu \text{ negatív.} \end{cases}$$

Ekkor az (1) azonosságot a

$$P(k, l) = \frac{(k+l)!}{k!\,l!}$$

értékkel szorozva a

$$\sum_{i=0}^{k} P(k-i, l-i, n-i, i, i) = P(k, l)\,P(l, n)\,P(n, k) \qquad (4)$$

azonosságot kapjuk. A baloldali összegben csak azok a tagok szerepelnek ténylegesen, amelyekben i nem nagyobb k, l és n egyikénél sem, így az összegzési index k, l, n közül a legkisebbig fut. Mivel különben k, l és n szerepe szimmetrikus, feltehetjük, hogy $k \leqq l$, $k \leqq n$.

A (4) azonosság jobb oldala így szemléltethető: vegyünk k számú a-elemet, l számú b-t és n számú c-t és készítsük el (I) az a és b elemekből képezhető összes permutációkat, (II) a b és c elemekből képezhetőket és (III) a c és a elemekből képezhetőket. Ekkor (4) jobboldala az összes olyan hármasok száma, amelyek egy (I), egy (II) és egy (III) típusú permutációból állnak.

6. Az ilyen hármasokat fogjuk most egyértelműen leírni egyetlen ismétléses permutációval. Tekintsük mindhárom permutáció első elemét. Ezek közt vagy van két egyenlő (mint a felírt példában is), vagy mind a három különböző. Első esetben írjuk le ezt a közös első elemet és töröljük abból a két permutációból, amelyek ezzel kezdődtek.

b b a
b c b c c
a c c c

Ha a három kezdőelem különböző (mint példánkban is az első elhagyás után), akkor csak kétféle lehet az *a, b, c* elemek sorrendje: ha az (I) típusú permutáció *b*-vel kezdődik, akkor a (II) típusú, ami csak *b*-kből és *c*-kből áll, *c*-vel kell hogy kezdődjék, a (III) típusú pedig *a*-val; nevezzük ezt *d* elrendezésnek. Ha viszont az (I) típusú permutáció *a*-val kezdődik, akkor a (III) típusúnak kell *c*-vel, a (II) típusúnak pedig *b*-vel kezdődnie; ezt *e* elrendezésnek fogjuk nevezni. Ha a kezdő elemek *d*, ill. *e* elrendezésűek, akkor a megfelelő betűt fogjuk leírni és töröljük mindkét esetben mindhárom permutáció kezdő elemét. A fenti példában szereplő permutáció-hármasból pl. így a *bdecc* ismétléses permutációhoz jutunk és ennek megszerkesztése közben mindhárom permutáció minden elemét kihúztuk.

b a
c b c c
a c c c

7. Kérdés, általában hogyan akadhat el az eljárás. Ha egyszer sem kell átírás közben a *d* és *e* betűket leírnunk, akkor eljárásunk során egy-egy betűt egyidejűleg törlünk mindig az őt (egyenlő számban) tartalmazó két permutációból. Így egy-egy betű egyszerre fogy el abból a két permutációból, amiben szerepelt. Egy permutáció tehát úgy fogy el, hogy az ezt alkotó két betű a másik két permutációból is elfogy, tehát a harmadik betű maradhat csak meg a két permutációban egyenlő számban, ezek pedig a kérdéses betű ugyanilyen számú leírásával szintén elfogynak.

Az is látható, hogy ha leírtuk ezen átírás folyamán a *d* és *e* jelet, de nem egyenlő számban, akkor még nem fogyhatott el a permutációhármas egyik permutációjának sem minden eleme. Hiszen ha pl. több *d*-t irtunk le, mint *e*-t, akkor eközben az első permutációból több *b*-t húztunk ki, mint a másodikból, tehát a második tartalmaz még *b*-t s így nem fogyott ki. Hasonlóan a harmadik permutáció tartalmaz még *c*-t, az első pedig *a*-t. Teljesen hasonló a helyzet akkor is, ha *e*-ből írtunk le többet, mint *d*-ből. Ha viszont elmegyünk az első olyan elemig, ami után már sem *d*-t, sem *e*-t nem írunk (ez az elem vagy *d*, vagy *e*), akkor vagy kimerítettük ennek leírásakor mindhárom permutációt, vagy három olyan permutáció maradt vissza, (az egyik lehet üres is), amelyek közül kettő-kettő egyenlő számban tartalmazza a mindkettőben fellépő betűt. Mivel az eljárás további során a *d* és *e* elrendezés már nem fordul elő, az előző bekezdés meggondolása szerint a második esetben is csak akkor fejeződik be az eljárás, amikor már minden elemet kihúztunk.

Nyilvánvaló, hogy *d* és *e* jel legfeljebb annyiszor fordulhat elő, mint *k, l* és *n* közül a legkisebb. Ha e jelek száma *i*, akkor az *a, b* illetőleg *c* jeleket *k*—*i*-szel, *l*—*i*-szer, illetőleg *n*—*i*-szer kell leírni az átíráskor.

8. Legyen most $0 \leqq i \leqq \min(k, l, n)$ és legyen adva egy tetszés szerinti ismétléses permutáció $k-i$ számú a-elemből, $l-i$ számú b-ből, $n-i$ számú c-ből i számú d-ből és ugyanennyi e-ből. Ehhez szerkesszünk három elemsorozatot a következő módon. Sorra véve e permutáció egymásutáni elemeit minden a jel helyett az első és harmadik sorozatba írunk egy-egy a-t, minden b helyett az első és második sorozatba b-t, minden c helyett a második és harmadik sorozatba c-t; ha az adott permutációban d következik, akkor az első sorozatba b-t, a másodikba c-t, a harmadikba a-t írunk, minden e helyett pedig az elsőbe a-t, a másodikba b-t, a harmadikba c-t.

Az így keletkező sorozatok közül nyilván az első k számú a-t és l számú b-t, a második l számú b-t és n számú c-t a harmadik pedig n számú c-t és k számú a-t tartalmaz. Ha az így kapott permutációhármast ismét egy permutációval akarjuk leírni, akkor ahhoz a permutációhoz jutunk vissza, amelyből a permutációhármast megkonstruáltuk. A permutációhármasokat és az 5 féle elemből alkotott permutációkat tehát kölcsönösen egyértelműen rendeltük egymáshoz s így ezek száma is megegyezik.

Adott i mellett $k-i, l-i, n-i, i$ és i számú, külön-külön megegyező elemből alkotott ismétléses permutációk száma

$$P(k-i, l-i, n-i, i, i),$$

így megállapításaink éppen a (4) azonosságot adják, ami csak más alakja az (1) összefüggésnek.

РЕЗЮМЕ

Приведено два доказательства тождества (1), являющейся обобщением сохранившегося без доказательства результата, полученного древнекитайским математиком Цзу Ши-сье, Первое доказательство, имеющее алгебраический характер, по существу происходит от Ло Кен-Хуа. Второе же доказывает тождества (4), придавая подходящее комбинаторное значение обеим сторонам.

SUMMARY

Two proofs are given for the identity (1), which is a generalisation of an identity found at the ancient Chinese mathematician Chu Shih-Chieh. The first proof, due essentially to Loo Keng-Hua, uses algebraic means. The second applies to the form (4) of the identity, expressed by numbers of permutations with equal elements and proves the identity by finding appropriate combinatorical meaning for both of the sides.

A kínai matematika történetének egy problémájáról

Írta: Huszár Géza

Turán Pál azonos című értekezésében[1] szuggesztív módon foglalkozik Li Zsen-Su kínai matematikus, bizonyos fennmaradt kínai matematikai felfedezések egy részének összefoglalását célul tűző, 1867-ben Nankingban megjelent Co ku hszi csaj szuan hszue c. könyvével.

Bemutatja *Turán* a

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2$$

érdekes összefüggést s azt a *Legendre*-polynomok tulajdonságainak felhasználásával bizonyítja.

Az alábbiakban bemutatunk egy elemi bizonyítást.

Az összefüggést részben kifejtve:

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{k!}{j!\,(k-j)!}\,\frac{(n+2k-j)!}{(2k)!\,(n-j)!}=\frac{(n+k)!}{k!\,n!}\binom{n+k}{k},\ \text{vagy:}$$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\,\frac{(n+2k-j)!}{(n+k)!\,(k-j)!}=\frac{(2k)!}{k!\,k!}\binom{n+k}{k},$$

bizonyítandó tehát:

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{n}{j}\binom{n+2k-j}{k-j}=\binom{2k}{k}\binom{n+k}{k}.$$

A *Cauchy*-összefüggés:[2]

$$\binom{n+m}{z}=\sum_{x=0}^{z}\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}$$

alapján átalakítva, s a könnyebb érthetőség kedvéért kissé részle-

[1] Matematikai Lapok, V. évf. 1. szám, (1954.) 1. old.

[2] L. pl. *Jordan:* Calculus of finite differences. Bp, 1939., 73. o.

tesebben kiírva:

$$\binom{k}{0}\binom{n}{0}\left[\binom{n}{0}\binom{2k}{k}+\binom{n}{1}\binom{2k}{k-1}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{2k}{0}\right]+$$
$$+\binom{k}{1}\binom{n}{1}\left[\binom{n-1}{0}\binom{2k}{k-1}+\binom{n-1}{1}\binom{2k}{k-2}+\cdots+\binom{n-1}{k-1}\binom{2k}{0}\right]+\cdots+$$
$$+\binom{k}{j}\binom{n}{j}\left[\binom{n-j}{0}\binom{2k}{k-j}+\binom{n-j}{1}\binom{2k}{k-j-1}+\cdots+\binom{n-j}{k-j}\binom{2k}{0}\right]+\cdots+$$
$$+\binom{k}{k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}\binom{2k}{0}=\binom{2k}{k}\left[\binom{n}{0}\binom{k}{k}+\binom{n}{1}\binom{k}{k-1}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{k}{0}\right],$$

vagy átrendezve s összevonva a „mellékátló irányában“:

$$\sum_{j=0}^{k}\left\{\left[\binom{k}{0}\binom{n}{0}\binom{n}{j}+\binom{k}{1}\binom{n}{1}\binom{n-1}{j-1}+\cdots+\binom{k}{j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{0}\right]\binom{2k}{k-j}\right\}=$$
$$=\binom{2k}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{k}{k-j}.$$

De minden j-re külön:

$$\left[\binom{k}{0}\binom{n}{0}\binom{n}{j}+\binom{k}{1}\binom{n}{1}\binom{n-1}{j-1}+\cdots+\binom{k}{j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{0}\right]\binom{2k}{k-j}=$$
$$=\binom{2k}{k}\binom{n}{j}\binom{k}{k-j},\ \text{mert}$$
$$\left[\binom{k}{0}\frac{n!}{0!\,n!}\,\frac{n!}{j!\,(n-j)!}+\binom{k}{1}\frac{n!}{1!\,(n-1)!}\,\frac{(n-1)!}{(j-1)!\,(n-j)!}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\binom{k}{j}\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\,\frac{(n-j)!}{0!\,(n-j)!}\right]\frac{(2k)!}{(k-j)!\,(k+j)!}=$$
$$=\left[\binom{k}{0}\frac{j!}{0!\,j!}+\binom{k}{1}\frac{j!}{1!\,(j-1)!}+\cdots+\binom{k}{j}\frac{j!}{j!\,0!}\right]\frac{(2k)!}{(k-j)!\,(k+j)!}\cdot$$
$$\cdot\frac{n!}{j!\,(n-j)!}=\frac{(2k)!}{k!\,k!}\,\frac{k!}{(k-j)!\,j!}\,\frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$

egyszerűsítések után

$$\binom{k}{0}\binom{j}{j}+\binom{k}{1}\binom{j}{j-1}+\cdots+\binom{k}{j}\binom{j}{0}=\binom{k+j}{j}.$$

О ПРОБЛЕМЕ ИСТОРИИ КИТАЙСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Автор занимается формулой древней китайской магематики:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

Он доказивает её путем применения элементарных свойств биномиальных коэффициентов.

ON A PROBLEM OF THE HISTORY OF THE CHINESE MATHEMATICS

The author treats the peculiar formula

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

of the old mathematics of the Chinese.

He proves the same formula by applying some elementary properties of the binomial coefficients.

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Reáltanoda-u. 13—15. Az egyes feladatok megoldását külön lapon kérjük.

Kitűzött feladatok

77*. Szerkesszünk korlátos differencia-hányadosú függvényt, amelyik egy adott nullmértékű halmazon nem differenciálható.

79. Az $M(x, y)$ és $N(x, y)$ folytonos függvényekre $x < y$ esetén $x < M(x, y) < y$ és $x < N(x, y) < y$. Bizonyítandó, hogy az

$$a_{n+1} = M(a_n, b_n), \quad b_{n+1} = N(a_n, b_n)$$

előírással képezett $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ sorozat konvergens.

Aczél János

80. Kiegészíthető-e egy racionális egész számokból álló, m soros és n oszlopos mátrix ($m < n$) egy racionális egész számokból álló $m+1$-edik sorral úgy, hogy az új mátrix $m+1$-edrendű determinánsainak legnagyobb közös osztója megegyezzék az eredeti mátrix m-edrendű determinánsainak legnagyobb közös osztójával?

Fuchs László

81. Bizonyítandó, hogy van olyan irracionális szám, amelyiknek lánctörtkifejtéséhez tartozó minden közelítő törtnek nevezője teljes k-adik hatvány (k adott természetes szám).

Szűsz Péter

Megoldott feladatok

57. feladat. Bizonyítandó, hogy ha egy (önáthatolás-nélküli) poliéder minden lapszöge konvex, azaz 180°-nál kisebb, akkor a poliéder is konvex, azaz bármely két pontjának összekötő szakaszát tartalmazza.

(Hajós György)

* A 77. feladat az előző számban már megjelent, azonban szövegébe sajtóhiba csúszott, ezért a feladatot újból közöljük.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

I. megoldás. Azt kell bizonyítanunk, hogy minden konkáv poliédernek van konkáv lapszöge. Feltesszük, hogy ez nem igaz. A csupa konvex lapszöggel rendelkező konkáv poliéderek közül válasszunk ki egy olyat, amelyiknél a „metsző lapok" száma minimális. A poliéder egy lapját *metszőnek* mondjuk, ha síkja a poliédert metszi. Minden konkáv poliédernek van metsző lapja, hiszen ellenkező esetben a poliéder nyílván konvex. A kiszemelt P poliédernek van tehát A metsző lapja.

Vágjuk szét a P poliédert az A lap síkjával poliéderekre, és tekintsük azt a Q részpoliédert, amelyiknek határfelülete az A lapot tartalmazza, A-nak bármely oldalán túl való meghosszabbítása kilép P-ből, hiszen P-nek minden lapszöge konvex; ezért A lapja Q-nak. Minthogy Q szétvágással keletkezett, van Q-nek olyan lapja A síkjában, amelyik P-nek nem volt lapja, van tehát ebben a síkban A-tól különböző másik lapja is. Ebből következik, hogy Q konkáv poliéder, hiszen konvex poliédernek nincs ugyanabban a síkban két lapja.

A Q poliéder minden lapszöge konvex, hiszen e poliéder P-ből szétvágással keletkezett. Q-nak kevesebb metsző lapja van mint P-nek, mert P-vel ellentétben A síkja már nem vágja szét. Q létezése tehát ellentmond P megválasztásának. Ez az ellentmondás feltevésünk lehetetlenségét bizonyítja.

Surányi János

II. megoldás. Először azt látjuk be, hogy ha egy poliédernek valamelyik síkmetszete konkáv poligon, akkor a poliédernek van konkáv lapszöge. Ha a konkáv metszetet adó sík nem halad át a poliédernek egyik csúcsán sem, akkor állításunk nyomban következik abból, hogy konvex lapszög síkmetszete csak konvex szög lehet (s hogy konkáv poligonnak mindig van konkáv szöge). Ha viszont a konkáv metszetet adó sík áthalad a poliédernek csúcsán, akkor e síkot elegendő kevéssel eltolva olyan síkot kapunk, amelyik ugyancsak konkáv poligonban metsz, viszont nem halad át egy poliédercsúcson sem. Ezért állításunk minden esetben helyes.

Így elég azt bizonyítanunk, hogy konkáv poliédernek van konkáv síkmetszete. Legyen A és B a konkáv nyílt P poliédernek két olyan pontja, melyeknek összekötő szakaszát P nem tartalmazza. Kössük össze e pontokat P-ben haladó, $A, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$ pontok meghatározta töröttvonallal.

Legyen k a legkisebb olyan index, amelyre igaz, hogy P nem tartalmazza az AA_k szakaszt. P tehát tartalmazza az AA_{k+1} szakaszt, és a töröttvonal megválasztása folytán az $A_{k+1}A_k$ szakaszt is. Az A, A_{k+1}, A_k pontokon áthaladó sík ezért olyan poligonban, ill. többek között olyan poligonban metszi a P poliédert, amelyik tartalmazza a mondott két csatlakozó szakaszt. Ez a metszetpoli-

gon konkáv, mert A és A_k pontjainak összekötő szakaszát nem tartalmazza.

Bognár Mátyás

58. feladat. Megállapítandó a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{5kn}{kn}x^n \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

sor konvergencia-sugara és összege.

(Takács Lajos)

Megoldás. Jelölje $f_k(x)$ a vizsgált összeget. Minthogy $\binom{2n}{n}=\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4)^n$, a konvergencia-tartományon belül

$$f_1(y)=\frac{1}{\sqrt{1-4y}}. \tag{1}$$

Legyen ε primitív k-adik egységgyök, melyre

$$\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^{jn}=\begin{cases}0, & \text{ha } k\nmid n;\\ k, & \text{ha } k\mid n.\end{cases} \tag{2}$$

(1)-ből $y=\varepsilon^j x^{\frac{1}{k}}$ helyettesítéssel

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\varepsilon^{jn}x^{\frac{n}{k}}=\frac{1}{\sqrt{1-4\varepsilon^j x^{1/k}}} \qquad (j=1,\ldots,k).$$

Ezeket az egyenleteket (2) figyelembevételével összegezve, és k-val osztva

$$f_k(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-4\varepsilon^j x^{1/k}}}.$$

Ebből nyílvánvaló, hogy a konvergenciasugár $\frac{1}{4^k}$.

Kővári Tamás

Az 58. feladat megoldását beküldötték még *Császár Ákos, Gehér László, Hosszú Miklós, Makai Endre, Surányi János.*

59. feladat. Bizonyítandó, hogy ha egy félig rendezett halmaznak bármely végtelen részhalmazában van két összehasonlítható elem, akkor van olyan végtelen részhalmaza is, melynek bármely két eleme összehasonlítható.

(Hajnal András)

I. megoldás. Az adott H halmazból $H = H_0, H_1, H_2, \ldots$ halmazsorozatot készítünk; álljon a H_{k+1} halmaz H_k-nak azokból az a elemeiből, amelyekhez található H_k-nak b eleme úgy, hogy a félig rendezettség értelmében $a < b$.

Legyen $D_k = H_k - H_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. A D_k halmazok végesek, mert értelmezésük szerint nem tartalmaznak összehasonlítható elempárt. Ha valamelyik D_k üres, akkor H_k tartalmaz minden eleménél kisebbet is; ezért bármely a_1 eleméből kiindulva végtelen $a_1 > a_2 > \ldots$ lánchoz juthatunk, vagyis teljesül a feladat állítása.

Ne legyen tehát a D_k halmazoknak egyike sem üres. D_k-nak bármely d_k eleméhez található D_{k-1}-nek olyan d_{k-1} eleme, hogy $d_{k-1} < d_k$; hiszen H_{k-1} tartalmaz d_k-nál kisebb elemet, H_k pedig nem. Ebből a KŐNIG DÉNES-féle végtelenségi lemma alapján (l. pl. D KŐNIG: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Leipzig, 1936), 81. o.) következik, hogy van még végtelen

$$d_0 < d_1 < d_2 \ldots \qquad (d_k \in D_k)$$

lánc. Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Korányi Ádám

II. megoldás. Először kimutatjuk, hogy az adott H halmaznak bármely végtelen A részhalmazában van olyan elem, amelyik e részhalmaz végtelen sok elemével hasonlítható össze. Ha A-nak valamely a_1 eleme nem felel meg e követelménynek, akkor A-nak a_1-gyel össze nem hasonlítható elemei végtelen A_1 halmazt alkotnak. Ha A_1-nek valamely a_2 eleme nem felel meg (azaz nem hasonlítható össze A-nak végtelen sok elemével), akkor a_1-nek a_2-vel össze nem hasonlítható elemei végtelen A_2 halmazt alkotnak. Így tovább haladva nem juthatunk végtelen $a_1, a_2, \ldots$ sorozathoz, mert ebben nem volna két összehasonlítható elem. Eljárásunk tehát szükségképpen elvezet olyan a_n elemhez, amelyik A-nak végtelen sok elemével hasonlítható össze.

Legyen b_1 olyan eleme H-nak, amelyik H-nak végtelen sok elemével hasonlítható össze, s ezek alkossák a H_1 halmazt. Legyen b_2 olyan eleme H_1-nek, amelyik H_1-nek végtelen sok elemével hasonlítható össze, s ezek alkossák a H_2 halmazt. Így tovább haladva olyan végtelen $b_1, b_2, \ldots$ sorozathoz jutunk, amelyiknek bármely két eleme összehasonlítható.

Sarkadi Károly

III. megoldás. Bizonyítani fogjuk, hogy tetszőlegesen adott végtelen gráf esetében vagy ez a gráf, vagy a kiegészítő (komplementer) gráf tartalmaz végtelen teljes részgráfot.

Ebből a feladat állítása nyomban adódik, ha az adott halmaz elemei egy gráf szögpontjai, és az összehasonlítható elemeket köti

össze él. A feladat állításánál viszont többet bizonyítunk, mert a rendezési reláció tranzitív voltát nem használjuk ki.

Ha egy gráfnak végtelen sok véges fokszámú szögpontja van, akkor ezek közül nyílván kiválasztható végtelen sok olyan, amelyeket nem köt össze él; a kiegészítő gráf tehát tartalmaz végtelen teljes részgráfot.

Feltehetjük ezért, hogy az adott gráfnak csak véges sok véges fokszámú szögpontja van. Legyen A_1 egy a többi szögpont közül, A_1 végtelen sok szögponttal van összekötve, s ezek — összekötő éleikkel — szolgáltassák a G_1 részgráfot. Ez utóbbiról is feltehetjük, hogy csak véges sok véges fokszámú szögpontja van. Legyen A_2 olyan szögpontja, amelyik G_1-nek végtelen sok szögpontjával van összekötve, s ezek szolgáltassák a G_2 részgráfot. Így tovább haladva végtelen $A_1, A_2, \ldots$ szögpontsorozathoz jutunk, amelyik végtelen teljes részgráfot szolgáltat. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Szele Tibor

IV. megoldás. A feladat imént bebizonyított általánosításán is túlmenően azt bizonyítjuk, hogy az állítás akkor is teljesül, ha a rendezési reláció tranzitivitását nem tesszük fel. Más szövegezéssel: ha egy végtelen irányított gráf bármely végtelen sok szögpontja között van két éllel összekötött, akkor a gráfnak van végtelen, tranzitív irányítású teljes részgráfja.

Először is azt látjuk be, hogy a gráfnak van egy olyan szögpontja, amelyikbe végtelen sok él érkezik, vagy onnan végtelen sok él indul. Ugyanis ellenkező esetben nyilván végtelen sok véges fokszámú szögpont volna, és ezek között volna végtelen sok olyan szögpont, amelyek között nem fut él.

Legyen A_1 olyan szögpont, amelybe vagy amelyből végtelen sok él fut. E végtelen sok él másik végpontjai összekötő éleikkel együtt egy G_1 részgráfot alkotnak. Erre a részgráfra is érvényes a tétel feltevése, ezért van olyan A_2 szögpontja, amelyikbe vagy amelyikből végtelen sok él fut. Így tovább haladva egy végtelen $A_1, A_2, \ldots$ szögpontsorozathoz jutunk. Ebben a sorozatban vagy végtelen sok olyan szögpont szerepel, amelyikből a sorozat minden későbbi elemébe él indul, vagy végtelen sok olyan, amelyikbe a sorozat minden későbbi eleméből él érkezik. Sorozatunknak ilyen végtelen részsorozata végtelen, tranzitív irányítású részgráfot ad.

Surányi János

Az 59. feladat megoldását beküldötték még: *Császár Ákos, Gehér László, Hajós György, Kertész Andor, T. Sós Vera.*

Megjegyzés. A feladat szoros kapcsolatban van azzal a problémakörrel, amelyet *Turán Pál:* Egy gráfelméleti szélsőértékfeladat-

ról, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **48** (1941), 436—451. o. tárgyal. Feladatunk állításának a III. megoldásban megszövegezett általánosítása egyben e cikk II. tételének is általánosítása.

60. feladat. Bizonyítandó, hogy a 0-tól különböző s az $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ feltételt kielégítő a_1, b_1, a_2, b_2 komplex számokhoz meghatározható C úgy, hogy ha a $|z| \leqq C$ körlemezen reguláris $f_1(z), f_2(z)$ függvényekre

$$f_1(0) = a_1, \quad f_1'(0) = b_1, \quad f_2(0) = a_2, \quad f_2'(0) = b_2,$$

akkor az $|f_1(z)|, |f_2(z)|$ függvényeknek egyike sem lehet a körlemez minden pontjában a másiknál nagyobb.

(Turán Pál)

I. megoldás. Tegyük fel, hogy $f_1(z)$ és $f_2(z)$ reguláris a $|z| \leqq C$ körlemezen, és itt $|f_1(z)| < |f_2(z)|$. Ekkor a $g(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ függvény ezen a körlemezen reguláris és itt $|g(z)| < 1$. Ennélfogva

$$|g'(o)| = \left| \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=C} \frac{g(z)}{z^2}\, dz \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{1}{C^2} 2\pi C = \frac{1}{C},$$

így tehát

$$C < \left| \frac{a_2^2}{a_2b_1 - a_1b_2} \right|.$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy ha C olyan nagy, hogy sem ez az egyenlőtlenség, sem az ebből indexcserével adódó ($|f_2(z)| < |f_1(z)|$ esetnek megfelelő) egyenlőtlenség nem teljesül, akkor C kielégíti a feladat követelményét.

A feladatban felesleges az a megszorítás, hogy a_1, b_1, a_2, b_2 0-tól különbözők legyenek. Okoskodásunkban csak a (nyilván nem nélkülözhető) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ megszorítást használtuk ki. Ugyanis $a_2 \neq 0$ már következett az $|f_1(z)| < |f_2(z)|$ feltevésből.

Császár Ákos

II. megoldás. A feladat állításán túlmenően bizonyítjuk, hogy:

A) Ha $f_1(z), f_2(z)$ a

$$|z| \leqq \frac{||a_2|^2 - |a_1|^2|}{|d|}$$

körlemezen reguláris függvények, ahol $d = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, továbbá $a_1 = f_1(0)$, $a_2 = f_2(0)$, $b_1 = f_1'(0)$, $b_2 = f_2'(0)$, akkor $|f_1(z)|$ és $|f_2(z)|$ egyike sem lehet a másiknál nagyobb az egész körlemezen. A megadott határ nem javítható.

Ha $|a_1| = |a_2|$, állításunk helyes, de semmitmondó. Legyen tehát $|a_1| < |a_2|$. Elég ekkor az $|f_1(z)| < |f_2(z)|$ eset lehetetlenségét bizonyítanunk. Bevezetjük a $\varphi(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ és $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ jelöléseket. Ha $|f_1(z)| < |f_2(z)$ teljesül, akkor a körlemezen $f_2(z) \neq 0$; tehát $\varphi(z)$ reguláris. *A)* tehát folyománya a következő állításnak:

B) Ha $\varphi(z)$ *a*

$$|z| \leqq \frac{1 - |\alpha|^2}{|\beta|}$$

körlemezen reguláris, ahol $\alpha = \varphi(0)$, $|\alpha| < 1$, *és* $\beta = \varphi'(0) \neq 0$, *akkor* $|\varphi(z)| < 1$ *nem teljesülhet a zárt körlemezen, a belsejében azonban igen.*

Az $F(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}$ függvény az egységkört önmagára képezi le, és $F(\alpha) = 0$. Ha tehát bevezetjük a $\psi(z) = F(\varphi(z))$ jelölést, utóbbi állításunk a következő alakot ölti:

Ha $\psi(z)$ *a* $|z| \leqq \frac{1}{\psi'(0)}$ *körlemezen reguláris,* $\psi'(0) \neq 0$, *akkor* $|\psi(z)| < 1$ *nem teljesülhet a zárt körlemezen, a belsejében azonban igen.*

Ha végül z helyett a $\psi'(0)z$ változót vezetjük be, akkor állításunk a következő alakot ölti:

D) Ha $\psi(z)$ *a* $|z| \leqq 1$ *körlemezen reguláris,* $\psi'(0) = 1$, *akkor* $|\psi'(z)| < 1$ *nem teljesülhet a zárt egységkörön, belsejében azonban igen.*

Állításunk első része helyes, mert ellenkező esetben a CAUCHY-formula alapján $|\psi'(0)| < 1$ következnék. Állításunk második részét $\psi(z) = z$ példája bizonyítja.

Ezzel valamennyi állításunkat igazoltuk. Megjegyezzük még, hogy az *A)* állításnak $f_2(z) \equiv 1$ esete tartalmazza a *B)* állítást, ez utóbbinak $\alpha = 0$ esete tartalmazza a *C)* állítást, ennek pedig $\psi'(0) = 1$ esete a *D)* állítás.

Gallai Tibor

A 60. feladat megoldását beküldötték még: *Corradi Kereszttély, Gehér László, Korányi Ádám, Kővári Tamás, Szűsz Péter.*

Megjegyzés. A közölt megoldások lényegében csak arra építenek, hogy a körlemez határán nem állhat fenn az az egyenlőtlenség, amelynek lehetetlenségét bizonyítani kell. Az egyenlőtlenségnek a körlemez belsejében való fennállásából csak arra következtetnek, hogy a bevezetett hányadosfüggvény ott reguláris. Ezért

a feladat állítása és ennek *A)* általánosítása finomítható. Ha a két függvényről feltesszük, hogy a szerepeltetett vagy annál nagyobb zárt körlemezen regulárisak, s hogy a körlemez belsejében nem tűnnek el, akkor egyiküknek abszolút értéke sem lehet a körlemez határán mindenütt kisebb a másiknak abszolút értékénél. Ha csak az egyik függvényről kötjük ki, hogy ne legyen nullhelye a körlemez belsejében, akkor ebből már következik, hogy abszolút értéke a körlemez határán nem lehet mindenütt nagyobb a másiknak abszolút értékénél. A *B), C)* és *D)* állítások esetében minden járulékos feltevés nélkül igaz, hogy az egyenlőtlenség nem teljesülhet a szerepeltetett vagy annál nagyobb körlemezek határán sem.

(Szerk.)

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Bolyai Társulat címére kérjük (Bp., V., Reáltanoda u. 13—15.) A borítékra írjuk rá feltűnően: PÉLDAROVAT. Minden megoldást külön lapra írjunk. Kitűzésre szánt példákat is szívesen fogadunk, megoldással vagy annak közlésével, hogy a beküldő a példa megoldását nem ismeri.

Kitűzött példák

62. Gyakran halljuk a parallelepipedonok következő osztályozását: téglatest, egyszeresen ferde, kétszeresen ferde, háromszorosan ferde parallelepipedon. Kielégítő-e ez az osztályozás, ha a lapszögek és élszögek derékszögűségére egyaránt tekintettel vagyunk?

63. Bizonyítsuk be, hogy ha egy parallelepipedonnak van 90°-os élszöge és 90°-os lapszöge, akkor az elsőből legalább 16, a másodikból legalább 8 van.

64. Bizonyítsuk be, hogy ha egy z komplex szám valós része 1-nél nagyobb, akkor

$$\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}.$$

(Fried Ervin)

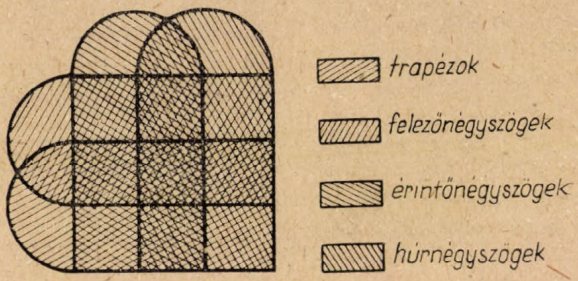
65. Ismeretes logikai feladat a következő: három fekete és két szürke kalap közül kettőt elteszünk, hármat pedig egy-egy ember fejére teszünk, sötétben, hogy se azt ne lássák, milyen színű kalapokat tettünk el, se azt, milyen színű került a fejükre. Villanygyújtás után ki kell találniuk, milyen színű kalap van a fejükön. Bizonyítsuk be, hogy ha a három ember egymás mögött áll, azaz ha egyikük a két előtte lévőnek a kalapját látja, egy másik csak a harmadikét, a harmadik pedig egyét sem, akkor a kalapok bármely kiválasztása esetén pontosan egyikük találja ki elsőként, milyen

kalap van a fején. Melyik lesz az? (Feltesszük, hogy mindegyikük logikusan és egyformán gyorsan gondolkozik; ha kitalálja kalapja színét, azt azonnal közli; végül mindegyik tisztában van azzal, hogy ezek a feltételek mindegyikükre teljesülnek.)

66. Keressük annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy négyszög érintőnégyszög legyen, azaz legyen olyan kör, amelyet minden oldalegyenese érint.

Megoldott példák

42. példa. Bizonyítsuk be, hogy az ábra helyesen tünteti fel az alábbi négy halmaz (fenti értelemben vett) összefüggését:



1. ábra

1. trapézok (a következő definíció szerint: olyan négyszög, amelynek van két párhuzamos oldala);

2. felezőnégyszögek (definíció: olyan négyszög, amelynek egyik átlója felezi a másikat);

3. érintőnégyszögek;

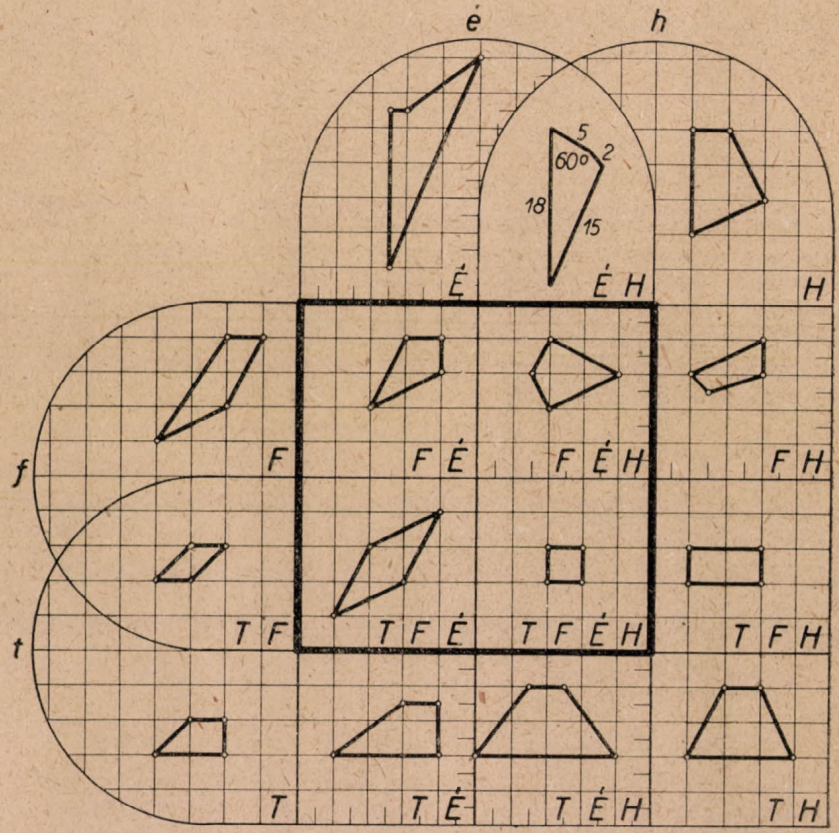
4. húrnégyszögek.

Az ábra mely pontjai felelnek meg a deltoidoknak? (Definíció: olyan négyszög, amelynek két szomszédos oldala egyenlő, és a másik kettő is egyenlő.)

Megoldás. Két dolgot kell bizonyítanunk: először azt, hogy nincs több „atom", mint ahányat az ábra feltüntet, másodszor, hogy ezek egyike sem üres. (Egy halmazrendszer bizonyos halmazaihoz tartozó atomon azon elemek összességét értjük, amelyek az illető halmazok mindegyikének elemei, de a többiek egyikének sem.)

Az állítás első része nyilvánvaló: négy halmaznak legfeljebb $2^4-1=15$ atomja lehet, hiszen négy elemből ennyiféleképpen választhatunk ki legalább egyet. Az ábrázolt halmazrendszer eléri ezt a maximális számot.

Az állítás második részét avval tudjuk igazolni, hogy megadjuk a halmazrendszer mind a tizenöt atomjának egy elemét. Az alábbi ábra ezeket a négyszögeket az eredeti ábra elrendezésében mutatja. Az egyes négyszögek alatti *T*, *F*, *H*, *É* betűk azt fejezik ki, melyik négyszögfajtákhoz tartozik a felrajzolt négyszög.



2. ábra

Egy kivételével mindegyik esetben rácsnégyszög adja a példát. (Helyenkint a rácsozást kétszer olyan sűrűre kell képzelni, csak akkor esik minden csúcs rácspontba. Ezt az ábrán is jeleztük.)

Az *ÉH* esetre („egyszerre érintő- és húrnégyszög, de nem trapéz, és egyik átlója sem felezi a másikat") nem rácsnégyszög a példa, hanem egy olyan konvex négyszög, amelyet az oldalai és egy szöge határoznak meg. Hogy ez a négyszög érintőnégyszög, azonnal látható: ugyanis szemközti oldalainak összege egyenlő. Könnyű belátni azt is, hogy ez a négyszög húrnégyszög, azaz a 60°-ossal szemközti szöge 120°-os: ugyanis $5^2+18^2-2\cdot 5\cdot 18\cdot \cos 60° = 2^2+15^2-2\cdot 2\cdot 15\cdot \cos 120° = 259$. Világos továbbá, hogy ez a négyszög nem trapéz: a trapézok között ugyanis csak az egyenlőszárúak húrnégyszögek. Azonkívül egyik átlója sem felezi a másikat: ugyanis, mint könnyű belátni, az érintőnégyszögek közül csak a deltoidoknak van meg ez a tulajdonsága. (Ismeretes ugyanis, hogy bármely érintőnégyszög két oldalának — nem feltétlenül a szemköztieknek — összege egyenlő a másik kettő összegével. Márpedig ha egy felezőnégyszög nem deltoid, akkor átlói nyilván nem lehetnek merőlegesek, akkor pedig két oldalának összege csak úgy lehet egyenlő a másik kettő összegével, ha a négyszög parallelogramma; mégpedig különböző oldalú parallelogramma, hiszen átlói nem merőlegesek. Ilyen parallelogramma pedig nem lehet érintőnégyszög.)

A többi négyszög esetében az ábráról minden nehézség nélkül leolvashatók a kívánt (részben pozitív, részben negatív) tulajdonságok.

A deltoidok halmaza: az érintő- és felezőnégyszögek halmazának közös része. Ugyanis, mint az előbb láttuk, az érintő- és egyben felezőnégyszögek mind deltoidok; másrészt nyilvánvaló, hogy minden deltoidnak megvan ez a két tulajdonsága.

Reményi Gusztáv

Megoldotta még: Bukovszky Ferenc, Csiszár Imre.

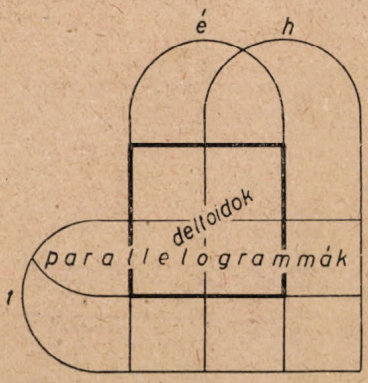
43. példa. Ábrázoljuk a következő halmazok összefüggéseit:

1. húrnégyszögek;
2. érintőnégyszögek;
3. trapézok;
4. parallelogrammák;
5. deltoidok.

(Az ábránkról leolvasható állításokat bizonyítsuk is be.)

Megoldás. Az előbbi feladat eredményei után már csak azt kell eldöntenünk, hogy a parallelogrammáknak a fenti ábra mely pontjai felelnek meg. Az nyilvánvaló, hogy a parallelogrammák felezőnégyszögek (kétféleképpen is: mindkét átlójuk felezi a másikat), és ugyanakkor trapézok is (szintén kétféleképpen). Tehát a

parallelogrammák halmazának részhalmaza a trapézok és felezőnégyszögek halmazának közös része. Kérdés, valódi részhalmaza-e. Könnyen belátható, hogy nem: ha egy trapéz egyik átlója felezi a másikat, akkor a felezett átló végpontjain át húzott párhuzamosok között bárhogyan húzunk a felezőponton átmenő szakaszt, azt szintén két egyenlő részre bontja ez a pont. Tehát a felezőtrapézok mind parallelogrammák.



3. ábra

Így a keresett ábrát az előbbiből néhány vonal elhagyásával kaphatjuk (3. ábra).

Csiszár Imre

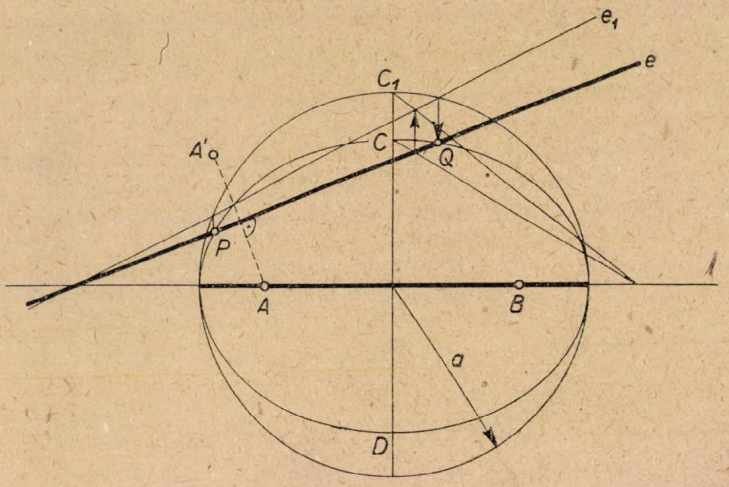
Megoldotta még: Bukovszky Ferenc, Reményi Gusztáv.

44. példa. Adva van egy egyenes és rajta kívül két pont, A és B. Szerkesszünk az egyenesen olyan P pontot, hogy $AP+PB$ adott hosszúságú legyen.

1. megoldás. Az adott e egyenes keresett pontja olyan ellipszisen van, amelynek fókuszai az adott pontok (A és B), nagytengelye pedig az adott távolsággal egyenlő hosszú szakasz ($2a$). Adott ellipszis és adott egyenes metszéspontjait kell tehát megszerkesztenünk. Ezt a feladatot AB tengelyű merőleges affinitás segítségével megoldhatjuk. Az ellipszist a nagytengely végpontjaiban érintő kör az ellipszisnek a kistengely irányában megnyújtott képe. A 4. ábra mutatja, hogyan szerkesztjük meg a C és C_1 pontokon átmenő segédegyenesekkel az e egyenes affin képét, e_1-et. Ha e_1-nek a körrel közös pontjait a kistengely irányában e-re vetítjük, akkor (az ábra esetében) két olyan pontot is kapunk, amely az ellipszisnek és az egyenesnek közös pontja (P és Q), és így a feltételeknek eleget tesz.

feladatnak 2, 1, vagy 0 megoldása lehet. Nincs megoldás, ha A pont e-re vonatkozó tükörképének, A'-nek B-től való távolsága (vagy ha a pontok az egyenes különböző oldalán vannak, maga az AB távolság) nagyobb, mint a nagytengely hossza. Ha A' és B távolsága éppen $2a$, akkor az egyenes érinti az ellipszist, és egy megoldás van.

Hável György



4. ábra

Megoldotta még: ÁDÁM ANDRÁS, BALATONI FERENC, BICZÓ GÉZA, BUKOVSZKY FERENC, FRIED VILMOS, HAMMER ENDRE, HORVÁTH MÁRTON, KÁNTOR SÁNDOR, KONCZ KÁROLY, REMÉNYI GUSZTÁV.

2. megoldás. Az ellipszist tekinthetjük az egyik fókusza körül nagytengely-sugárral írt kört érintő, másik fókuszán áthaladó körök középpontjai mértani helyek is. A keresett pont tehát oly kör középpontja, amely érinti az egyik adott pont körül az adott $2a$ sugárral húzott kört, továbbá átmegy a másik adott ponton és ennek az adott egyenesre vonatkozó tükörképén. Adott kört érintő két adott ponton áthaladó kör szerkesztése ismert feladat (megoldását lásd például a Matematikai Lapok IV. évfolyamának 289. oldalán).

Kántor Sándor

Ilyen módon megoldotta még: CSISZÁR IMRE.

45. példa. Szerkesszünk húrnégyszöget az oldalaiból.

1. megoldás. A koszinusz-tétel alapján felírhatunk két egyenletet a húrnégyszög valamelyik átlójára és ezzel szemközti szögeinek koszinuszára, mint ismeretlenekre. Mivel a húrnégyszög két szemközti szögének koszinusza csak előjelben különbözik, csak két ismeretlenünk lesz, és hozzá két egyenletünk:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$
$$x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha,$$

ahol x a húrnégyszög $(c,d) = \alpha$ szögét el nem vágó átlója. Ebből bármelyik ismeretlenre olyan kifejezés adódik, amely az oldalak alapján megszerkeszthető. Ezek után a húrnégyszög megszerkesztése nem okoz nehézséget.

Balatoni Ferenc

Ilyen módon megoldotta még: FRIED VILMOS, KÁNTOR SÁNDOR, KONCZ KÁROLY, REMÉNYI GUSZTÁV.

Megjegyzés. Abból a kifejezésből, amely a fenti egyenletrendszer alapján $\cos\alpha$-ra adódik:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)},$$

a megoldhatóságra vonatkozóan a következő feltétel olvasható le:

$$-1 < \frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)} < 1,$$

azaz

$$-2ab - 2cd < a^2 + b^2 - (c^2 + d^2) < 2ab + 2cd,$$

vagyis egyrészt $(c-d)^2 < (a+b)^2$,

ami $a, b, c, d > 0$ folytán egyértelmű azzal, hogy

$$c < a + b + d \quad \text{és} \quad d < a + b + c;$$

másrészt $(a-b)^2 < (c+d)^2$,

azaz

$$a < b + c + d \quad \text{és} \quad b < a + c + d.$$

Ezek az egyenlőtlenségek azt a feltételt fejezik ki, ami szemléletileg nyilvánvaló, hogy a megadott négy oldal egyike sem lehet nagyobb, mint a másik három összege. Az átalakítások visszafelé is elvégezhetők, tehát ezek a feltételek nemcsak szükségesek, hanem elégségesek is.

Koncz Károly

2. megoldás. A húrnégyszög oldalai alapján kiszámíthatjuk, és mivel a számításban csak a négy alapművelet és négyzetgyökvonás szerepel, meg is szerkeszthetjük azon szög felének tangensét és így magát a szöget is, amelyet a húrnégyszög két szomszédos oldala alkot*:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}},$$

ahol

$$s=a+b+c+d, \text{ és } \alpha=(a,d)\sphericalangle.$$

Négy oldalából és két szomszédosnak a szögéből a négyszög már megszerkeszthető.

Biczó Géza

Ilyen módon megoldotta még: Csiszár Imre.

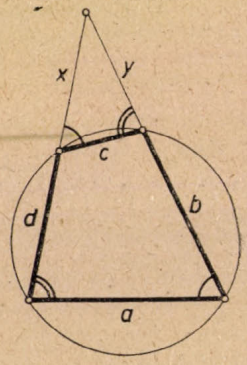
Megjegyzés. Biczó Géza hurkolt négyszögek esetére is kiterjeszti a megoldást. Egyszerűség kedvéért hurkolt négyszögekkel itt egyik megoldásban sem foglalkozunk.

3. megoldás. Ha a húrnégyszögben két-két szemközti oldal egyenlő, akkor a húrnégyszög téglalap, és ez oldalai alapján könnyen megszerkeszthető. Ha viszont van különböző oldalpár, akkor a másik két oldal meghosszabbítása metszi egymást (5. ábra). Két hasonló háromszög keletkezik. Az oldalarányok alapján bármelyik háromszög ismeretlen oldalai kiszámíthatók, például:

$$x=c\frac{ab+cd}{a^2-c^2},\quad y=c\frac{ad+bc}{a^2-c^2}.$$

Ezek a szakaszok az oldalak ismeretében megszerkeszthetők, és ennek alapján a húrnégyszög is.

Kántor Sándor



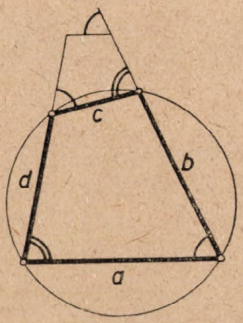
5. ábra

Ilyen módon megoldotta még: Csiszár Imre.

4. megoldás. Egyszerűbb szerkesztéshez jutunk, ha a két nem párhuzamos oldalt nem metszésig hosszabbítjuk meg, csak akkora szakaszokkal, hogy egy az eredetihez hasonló húrnégyszög keletkezzék (6. ábra). Ennek a húrnégyszögnek az oldalait könnyű meg-

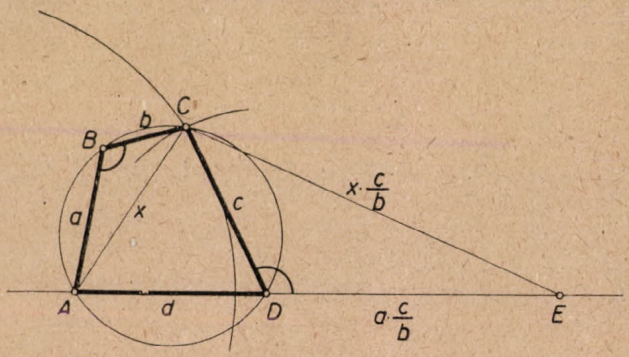
* Lásd a Középiskolai Matematikai Lapok 1952. évi V. kötete 96—97. oldalán (3—4. szám) a 430. feladat megoldását.

szerkeszteni, (az ábra jelölése szerint az eredeti négyszög oldalainak $\frac{c}{a}$-szorosai). A két húrnégyszög együtt trapézt alkot, ez oldalaiból megszerkeszthető, s ennek alapján az a, b, c, d oldalú húrnégyszög is.



6. ábra

5. megoldás. A húrnégyszög egyik oldalához olyan háromszöget illesztünk, amely hasonló ahhoz a vele nem szomszédos háromszöghöz, melyet a húrnégyszögből egyik átlója levág. Ha ezt



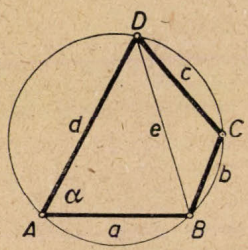
7. ábra

a 7. ábra szerinti módon helyezzük el, akkor olyan háromszög keletkezik (az ábrán $AEC\triangle$), amelynek ismerjük egy oldalát (AE) és a másik kettő arányát $\left(\frac{AC}{CE}=\frac{b}{c}\right)$. A C csúcs mértani helyeként megszerkeszthetünk hát egy Apollónius-kört. Másrészt ez a csúcs a D körül c sugárral szerkesztett körön is rajta tartozik lenni. Az AEC háromszög tehát megszerkeszthető, és ennek alapján a húrnégyszög is.

Csiszár Imre

Ilyen módon megoldotta még: BUKOVSZKY FERENC.

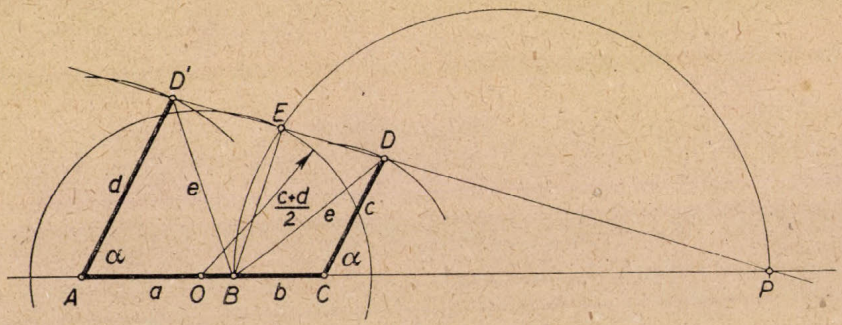
6. megoldás. Vágjuk ketté a húrnégyszöget egyik átlójával és forgassuk el az így kapott egyik háromszöget úgy, hogy a volt húrnégyszög két szomszédos oldala egy egyenesbe essék (8—9. ábra). Ekkor a d és c szakasz párhuzamos lesz. D' és D végpontjaik olyan egyenest határoznak meg, amely α bármilyen értéke esetén ugyanabban a P pontban metszi az AC egyenest, vagy, szintén α értékétől függetlenül, mindig párhuzamos vele, (ugyanis $APD' \triangle \sim CPD \triangle$ és a $c:d$ arány fix.)



8. ábra

Ennek alapján a DBD' egyenlőszárú háromszög DD' alapjának E felezőpontja számára megszerkeszthetünk egy mértani helyet: az E pontnak rajta kell lennie a PB átmérő fölé rajzolt Thales-körön.

Másrészt ha a D' pontot végigfuttatjuk az A pont körül d sugárral, a D pontot viszont a C pont körül c sugárral írt körön, akkor a DD' szakasz felezőpontja egy olyan körön fut végig, amelynek a középpontja az AC szakasz O felezőpontja, sugara pedig $\frac{c+d}{2}$. Tehát E meghatározására egy másik mértani helyet is



9. ábra

meg tudunk szerkeszteni. Ha E-t már ismerjük, a PE egyenes kimetszi a D' és D pontot. Ez után a húrnégyszög megszerkesztése könnyű.

Fried Vilmos

Megjegyzés. Diszkussziót csak az első megoldással kapcsolatban közöltünk; a többi megoldásnál ehhez általában elég sok számolás kellene. — Több helyen problémát okoz a szerkesztés

helyességének igazolása is. Például a 4. megoldásban annyi bizonyos, hogy ha a, b, c és d húrnégyszöget alkot, akkor hozzáragasztva ehhez az ábra szerint a lekicsinyített húrnégyszöget, trapézt kapunk. De az már egyáltalában nem magától értetődő, hogy ha

$$a, \quad b+\frac{c}{a}\cdot d, \quad \frac{c}{a}\cdot c, \quad d+\frac{c}{a}\cdot b$$

oldalakkal trapézt szerkesztünk, akkor a trapéz száraiból az ábra szerint levágva a b és d szakaszt, húrnégyszöget kapunk.

46. példa. Bontsuk tényezőkre az

$$(1+x+\cdots+x^n)^2-x^n$$

kifejezést.

1. *megoldás.* Ha az $x=1$ esetet kizárjuk, akkor a kisebbítendőt $\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ alakban írhatjuk. A tényezőkre bontandó T kifejezést így írhatjuk:

$$T=\frac{(x^{n+1}-1)^2-x^n(x-1)^2}{(x-1)^2}.$$

A számláló átalakítása, összevonás és kiemelés után ezt kapjuk:

$$T=\frac{(x^{n+2}-1)(x^n-1)}{(x-1)^2}=(1+x+\cdots+x^{n+1})(1+\cdots+x^{n-1}).$$

Látható, hogy T-nek ez a felbontása az eredetileg kizárt $x=1$ esetben is érvényes.

Horváth Márton

Ilyen módon megoldotta még: Balatoni Ferenc, Biczó Géza, Bukovszky Ferenc, Fried Vilmos, Hammer Endre, Kántor Sándor, Reményi Gusztáv.

2. megoldás.

$$\begin{aligned}(1+x+\cdots+x^{n-1}+x^n)^2&=\\ &=(1+x+\cdots+x^{n-1})^2+2(1+x+\cdots+x^{n-1})x^n+x^{2n}-x^n=\\ &=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+x^{n-1}+2x^n)+x^n(x^n-1)=\\ &=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+2x^n+x^{n+1}-x^n)=\\ &=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+x^{n-1}+x^n+x^{n+1}).\end{aligned}$$

Biczó Géza

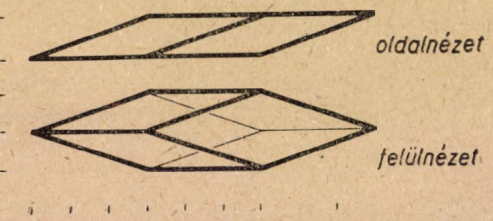
3. megoldás.

$$(1+x+\cdots+x^n)^2-x^n=$$
$$=(1+x+\cdots+x^n)^2-(1+x+\cdots+x^n)+(1+x+\cdots+x^{n-1})=$$
$$=(1+x+\cdots+x^n)\,(x+\cdots+x^n)+(1+x+\cdots+x^{n-1})=$$
$$=x(1+x+\cdots+x^n)\,(1+\cdots+x^{n-1})+(1+x+\cdots+x^{n-1})=$$
$$=(1+x+\cdots+x^{n-1})\,[x(1+x+\cdots+x^n)+1]=$$
$$=(1+x+\cdots+x^{n-1})\,(1+x+\cdots x^{n+1}).$$

Csiszár Imre

47. példa. Bizonyítsuk be, vagy cáfoljuk meg a következő állítást: „Egy parallelepipedont mindig átdarabolhatunk két vágással téglatestté."

Megoldás. Az állítás bizonyításához minden parallelepipedonra alkalmazható, általános módszert kellene adnunk. Az állítás megcáfolásához azonban egyetlen ellenpélda megadása is elég. Az állítás nem helyes, van ellenpélda, egyet az alábbi ábra mutat.



10. ábra

A nehézség csupán annak a megmutatásában van, hogy ez csakugyan ellenpélda. Ennek bizonyítását az alábbiakban vázolom anélkül, hogy minden részletre kiterjeszkedném.

Könnyen látható, hogy ennek a parallelepipedonnak a 12 lapszöge és 24 élszöge között egyetlen derékszög sincs. A téglatestnek viszont, amellyé át akarjuk darabolni két vágással, mind a 12 lapszöge és mind a 24 élszöge 90°-os. Ezeket a derékszögeket létre kell hoznunk, a ferdéket pedig el kell tüntetnünk a test felületéről.

A derékszögek létrehozása céljából olyan metszősíkokra van szükségünk, amelyek vagy merőlegesek egy élre (tehát merőlegesek az élben összefutó két lapra, és így a velük párhuzamosakra is, vagy legalább egy lapra (és így a vele párhuzamosra is) merőlegesek, vagy ha egyetlen lapra sem merőlegesek, akkor úgy

metszenek egy élt, hogy a metszéskor keletkező élek egymásra merőlegesek legyenek (és akkor az elmetszett éllel párhuzamos éleket is így metszik, feltéve, hogy egyáltalán metszik őket).

Ha két vágással akarjuk téglává darabolni a parallelepipedont, akkor az utóbbi típusú metszésről mindjárt le kell mondanunk: ekkor ugyanis még a legkedvezőbb esetben is — ha ti. sikerülne négy párhuzamos élt ilyen módon metszeni, ezáltal két téglalapot létrehozni (a metszősík két oldalán), az ezekkel nem szomszédos lapokat pedig összeilleszteni, s ilyen módon eltüntetni 8 ferde lapszöget és mind a 24 régi ferde élszöget — olyan parallelepipedonhoz jutnánk, amelynek egyetlen lapszöge sem 90°-os. Nyilvánvaló, hogy ebből egyetlen vágással már nem lehet téglát csinálni.

Ha pontosan két lapra merőleges a metszősík, akkor kedvező esetben — ti. ha van két olyan párhuzamos lap, amelyet a sík nem vág szét — négy 90°-os lapszög keletkezik; megfelelő összeillesztés esetén ekkor is megszüntethetünk 8 régi ferde lapszöget és mind a 24 régi élszöget, és olyan parallelepipedont kaphatunk, amelynek nincs ugyan 90°-os élszöge, de van négy 90°-os lapszöge. Az ilyen parallelepipedonokat kedvező esetben (ti. ha a 90°-os lapszögek éleire tudunk olyan merőleges síkot állítani, amely mind a négy élt metszi) egy vágással átdarabolhatjuk téglatestté. A mi példánkban azonban ez a kedvező eset nem valósul meg, bármennyire kihasználjuk is az első metszősík megválasztásakor meglévő lehetőségeinket. (Ti. olyan módon, hogy a metszősíkot az elmetszett élekre, ha nem is merőlegesen, mert akkor nem tudnánk négy élt metszeni, de a merőlegeshez minél közelebb álló szögben vesszük fel.)

Négy élre merőleges síkkal — mint azt legutolsó mondatunkban állítottuk, és mint az az ábráról közvetlenül le is olvasható — nem tudjuk úgy elmetszeni a példaként felhozott parallelepipedont, hogy a metszősík mind a négy élt messe. Márpedig ha ez a feltétel nem teljesül, akkor a kettévágott parallelepipedon részeit nem tudjuk úgy összeilleszteni, hogy akár csak nyolc ferde lapszöge is eltűnjön a hozzájuk tartozó 24 ferde élszöggel együtt; sőt még újak is keletkeznek, amelyeket már nem lehet egy további vágással eltüntetni.

Ugyanez, vagy még rosszabb a helyzet, ha a metszősík nyomán egyáltalán nem keletkeznek derékszögek, vagy ha a metszési idom nem parallelogramma.

Reményi Gusztáv

TÁRSULATI ÉLET

A Bolyai János Matematikai Társulat budapesti előadásai 1954-ben

Január 8. *Surányi János:* Egész együtthatós egyenletek egész megoldásai és lánctörtek.
(Összefoglaló jellegű előadás).

Január 15. *Aczél János:* Néhány általános módszer a függvényegyenletek elméletében. Néhány egyszerű módszer és tétel az $f(x+y)=F[f(x),f(y)]$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=F[f(x),f(y)] \quad \text{és} \quad f(x+y)=F[f(x),y]$$

függvényegyenlettípusok általános megoldására, továbbá speciális módszerek a

$$G[f(x),f(y),f(x+y),f(x-y),x,y]=0$$

típusú egyenletek néhány speciális alosztályára. Több alkalmazás.

Január 16. *Fuchs László:* Számelméleti kongruenciák.
(Előadás középiskolai diákok részére.)

Január 22. *Kővári Tamás* ismertette Goluzin: „Komplex függvények geometriai elmélete" c. könyvét.

Január 22. *Fuchs László:* Számfogalom felépítése, számtest.
(Pedagógus előadás.)

Január 29. *Turán Pál* ismertette az 1953. évi Schweitzer-verseny eredményét és feladatait.
(A versenyjelentés megjelent a Matematikai Lapok V. évfolyamának 2—3. sz. kötetében.)

Február 5. *Frey Tamás* ismertette Kantorovics—Krülov: „Közelítő módszerek az analízisben" c. könyvét. (Klubest.)

Február 6. *Koncz Károly:* Geometriai hamisságok.
(Előadás középiskolai diákok számára.)

Február 12. *Turán Pál:* A polinomok gyökeloszlásának vizsgálata Hermite kifejtésük alapján.
Az előadó az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában több tételt mondott ki bizonyítás nélkül. Ezen előadásban ezek közül egyesek bizonyítását vázolta, néhány kiegészítéssel és több újabb kérdés felvetésével.

Február 19. *Surányi János:* Lineáris egyenletrendszerek.
(Pedagógus előadás.)

Február 19. *Bognár Mátyás* ismertette Pontrjagin: „A kombinatorikus topológia alapjai" c. könyvét.

Február 26. *Rényi Alfréd:* A valószínűségszámítás axiomarendszerének általánosítása.
Az előadó ismertette a valószínűségszámítás általa adott új axiomatikus felépítését, amely a valószínűségszámítás Kolmogorovtól származó és ma általánosan elfogadott axiomatikájának általánosítása. Az új axiomarendszerben az alapvető fogalom a feltételes valószínűség fogalma. Az új elméletben értelmet nyer például az egész számegyenesen (síkon, térben stb.) egyenletes eloszlás fogalma, ami a Kolmogorov-féle elméletbe nem volt beilleszthető, és amelynek számos fizikai és egyéb (pl. integrálgeometriai) alkalmazása van. Az új elmélet segítségével az előadó a valószínűségszámítás klasszikus tételeinek, pl. a centrális határeloszlás-tételnek a Kolmogorov-féle elméletben megfogalmazható általánosításait adta meg. (Az új elmélet részleteit illetőleg l. az előadó „A valószínűségszámítás új axiomatikus megalapozása" c. dolgozatát, M. T. A. III. o. Közleményei 4 (1954) 369—427.)

Március 5. A Társulat első, témanélküli, kötetlen klubestje.

Március 6. *Tasnásy István:* Vektoralgebra.
(Előadás középiskolás diákok számára.)

Március 12. *Szele Tibor:* A szovjet csoportelméleti iskola munkásságáról.
Előadó a szovjet csoportelméleti iskola által elért legújabb eredmények közül részletesen ismertette egyfelől *A. G. Kuros* és *Sz. N. Csernikov* vizsgálatait a feloldható és nilpotens csoportok fogalmának végtelen csoportok esetére való kiterjesztésével kapcsolatban, másfelől *E. B. Dinkin* a Lie-csoportok és Lie-algebrák dualizmusára vonatkozólag legújabban nyert eredményeit.

Március 19. *Fuchs László:* Polinomok tulajdonságai.
(Pedagógus előadás.)

Március 19. *Pollák György:* Tapasztalatok a szovjet egyetemi matematika oktatás módszereiről. (Klubest.)

A Társulat Oktatási Szakosztálya az 1954. évi Magyar-Szovjet Barátsági Hónap alkalmával a következő előadásokat tartotta:

Március 17. *Tolnai Jenő:* A matematikai indukció módszere. (Apáczai Csere János Pedagógiai Főiskola.)

Március 17. *Faragó László:* Feladatmegoldások. (Széchenyi István gimnázium.)

Március 17. *Dettrich Árpád:* A matematikai indukció módszere. (Varga Katalin leánygimnázium.)

Március 17. *Hámori Miklós:* A matematikai indukció módszere. (Eötvös József gimnázium.)

Március 18. *Balassa Lórántné:* A matematikai indukció módszere. (József Attila gimnázium.)

Március 18. *Gádor Endréné:* Feladatmegoldások. (Rákóczi Ferenc gimnázium.)

Március 22. *Lantos Lajosné:* Feladatmegoldások. (Zrinyi Ilona leánygimnázium.)

Március 23. *Faragó László:* A matematikai indukció módszere. (Berzsenyi Dániel gimnázium.)

Március 23. *Molnár József:* A matematikai indukció módszere. (Dózsa György gimnázium.)

Március 23. *Pátzai Lászlóné:* A matematikai indukció módszere. (Budai Nagy Antal gimnázium.)

Március 23. *Kerny Jolán:* Feladatmegoldások. (Kossuth Zsuzsa leánygimnázium.)

Március 23. *Gádor Endréné:* Feladatmegoldások. (Könyves Kálmán gimnázium.)

Március 23. *Horváth István:* A matematikai indukció módszere. (I. László gimnázium.)

Március 23. *Horvay Katalin:* Feladatmegoldások. (Árpád gimnázium.)

Március 24. *Greff Géza:* Feladatmegoldások. (Corvin Mátyás gimnázium.)

Március 24. *Molnár Ottó:* A matematikai indukció módszere. (Jedlik Ányos gimnázium.)

Március 25. *Dombi Béla:* Az euklideszi algorithmus néhány folyománya. (Fáy András gimnázium.)

Március 26. *Sólyom Mihály:* Feladatmegoldások. (Fürst Sándor gimnázium.)

Március 26. *Molnár József:* Csillagtartományokról. (Kossuth Lajos gimnázium.)

Március 27. *Lovas Antal:* A matematikai indukció módszere. Kölcsey Ferenc gimnázium.)

* * *

Április 3. *Faragó László:* Az algebra alkalmazása a geometriai szerkesztésekben. (Előadás középiskolai diákok részére.)

Április 2. *Szép Jenő:* Véges csoportokról, melyek leképezhetők homomorf módon bizonyos alcsoportjaikra.
Előadó a következő problémát vizsgálta: 1. melyek azon $P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}$ rendű véges csoportok, melyek leképezhetők homomorf módon $P_i^{\alpha_i - 1}$ rendű alcsoportjaikra, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. 2. melyek azon véges csoportok, melyek leképezhetők Abel-féle alcsoportjaikra.

Április 9. *Varga Tamás:* Egyenlőtlenségek. (Pedagógus előadás.)

Április 9. *Rényi Alfréd* ismertette *Ju. V. Linnik*, a Szovjetunió Tudományos Akadémiája lev. tagjának matematikai munkásságát. (Klubest.)
A Magyar—Szovjet Barátsági Hónap keretében tartott előadásban az előadó ismertette *Ju. V. Linnik* tudományos munkásságát, abból az alkalomból, hogy *Ju. V. Linnik*et a Szovjetunió Tudományos Akadémiája levelező taggá választotta. Az előadó felsorolta *Ju. V. Linnik* legkiemelkedőbb számelméleti és valószínűségszámítási eredményeit és méltatta azok jelentőségét.

Április 16. *Vincze István:* Megjegyzések a térgörbék differenciálgeometriájához.
Előadó a térgörbe görbületének és torziójának a térgörbén értelmezett tömegeloszlással való kapcsolatát vizsgálja. Hasonló tulajdonságot mutat ki valamely skalártér gradiensére is. Végül zárt térgörbe ívdarabjainak súlypontjai által alkotott felületet vizsgálja.

Április 23. Témanélküli, kötetlen klubest.

Április 7. és 14. Ankét az egyetemi matematika oktatás budapesti oktatói számára a következő programmal: Vizsgarendszer. Folyamatos tanulás — folyamatos ellenőrzés. A hallgatók önálló szakmai fejlődésének kérdései. Tanárképzés — tudósképzés — tanterv.

Május 7. *Kalmár László:* Az általános algebráról — az algebra és a matematikai logika határterületéről.
A matematika az absztrakció eszközét alkalmazza a való

világ mennyiségi viszonyaira és térbeli formáira vonatkozó objektív törvényszerűségeket tükröző matematikai tételeknek minél általánosabb feltételek mellett való megállapítására; a szóbanforgó törvényszerűségek *törvényszerű* volta éppen ebben az általánosságban nyilvánul meg. A modern algebra nagymértékben alkalmazza az absztrakció eszközét; azonban több jel, többek között az algebra szétágazottsága, továbbá az, hogy nagyon könnyű új struktúrák definíciója alapján, ismert bizonyítások mintájára új algebrai „tételeket" nyerni, azt mutatja, hogy az algebrában aktuálissá vált egy további absztrakciós lépés: a csoport, a gyűrű, a test, a háló, az elrendezett gyűrű vagy test stb. fogalmából a struktúra általános fogalmának absztrahálása és a struktúrák általános elméletének megalkotása. Döntő kérdés, meddig menjünk ebben az újabb absztrakcióban, milyen általánosan definiáljuk a struktúra fogalmát. Túlzott általánosítás azzal a veszéllyel jár, hogy kellő számú konkrétabb anyag híján üres marad, az általános struktúrafogalomra csak triviális tételeket tudunk bebizonyítani. Viszont elégtelen általánosítás nem érné el célját: a különböző struktúrákra egyaránt érvényes általános törvényszerűségek feltárását. Előadó ismertette az általános struktúra fogalmának az irodalomban előforduló különböző (Birkhoff-, Tarski-, Pickert-, Bourbaki-féle stb.) definícióját és a következő, véleménye szerint az absztrakció éppen aktuális fokának megfelelő definícióját ajánlja: *struktúra egy tetszőleges halmaz, amelyen véges számú, egyenként véges számú változós művelet és reláció van definiálva.* Adott, e műveletekre és relációkra vonatkozó axiomarendszernek eleget tevő struktúrák összessége egy *struktúrafajtát* alkot; ennek szabatos definíciójához definiálni kell az *axiomarendszer* fogalmát, ami a matematikai logika eszközeivel lehetséges. Bizonyos vizsgálatokban olyan struktúrák is szerepelnek, amelyekben megszámlálhatóan végtelen sok művelet van definiálva. A *rész-struktúra*, az *izomorfia* és a *homomorfia*, a *direkt egyesítés* fogalma és más rokon algebrai fogalmak közvetlenül átvihetők az általános struktúrákra. Előadó ismertette az így keletkező általános algebra néhány (Birkhofftól, Tarskitól, A. Robinsontól és másoktól származó) eredményét; ezek bizonyításához legtöbbször matematikai logikai segédeszközökre van szükség. Ezek az általános eredmények

sokszor új, a régi értelemben vett modern algebra eszközeivel csak nehézkesen bizonyítható eredményeket tartalmaznak speciális esetként konkrét struktúrákra vonatkozóan. Az algebra így kapott általánosításának „sűrítés"-jellegét *(Pólya—Szegő* feladatgyűjteményének előszava értelmében) előadó a mondottakon kívül azzal illusztrálta, hogy az általános algebra eszközeinek felhasználásával eddig bonyolultnak tartott matematikai logikai tételeknek (pl. a *Löwenheim—Skolem*-tételnek) bizonyítása áttekinthetőbbé és az algebrista számára is világosabbá válik.

(Az előadás elhangzott a Balatonvilágoson megtartott algebra kollokviumon is 1954. szept. 22-én.)

Május 8. *Lőrincz Pál:* Kúpszeletek szerkesztése. (Előadás középiskolai diákok számára.)

Május 12. *Varga Tamás:* Algebrai egyenletek közelítő megoldása. (Pedagógus előadás.) Az előadást megelőzően alakult meg a Társulat Budapesti Tagozata.

Május 14. *Dénes Péter*: Struktúravizsgálatok az irreguláris körosztási számtestben. A p prímszámhoz tartozó körosztási számtesttel kapcsolatban meghatározhatók olyan számsorozatok, amelyek speciális kongruenciafeltételeket teljesítő alap-, illetve független egységrendszerekből adódnak és amelyek segítségével megállapítható, p hányadik hatványával osztható az osztályszám. E számsorozatoknak csak a reguláris számtestekre vonatkozó speciális esete volt ismert; ekkor a számsorozatok csupa zéróból állanak.

Május 21. *Gyires Béla:* Egy függvénymatrix-egyenletről. Az analízis különböző területein fontos szerepet játszik az a négyzetes mátrix, amelynek elemei nem negatív számokon értelmezett függvények és amely eleget tesz a Cauchy-féle függvényegyenletnek. Az előadó e mátrixoknak a ∞ helyen vett határértékét vizsgálja. E határérték létezésére vonatkozó szükséges és elegendő feltételeket a szóbanforgó mátrix elemi osztói segítségével adja meg. Végül az eredményeket alkalmazza a valószínűségszámításban nagy szerepet játszó sztochasztikus függvénymátrixokra.

Május 28. *Vladimir Knichal* (a Csehszlovák Akadémia Matematikai Intézetének igazgatója): Berechnung der Verzerrung bei frequenzmodulierten Wellen.

Június 4. *Czipszer János—Rényi Alfréd:* Bizonyos függvényrendszerek teljességéről.

Az előadást Czipszer János tartotta, a két szerző közös dolgozatának eredményeiről. Előadó a $\{\cos(k+\tau)x\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\{\sin(k+\tau)x\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\{1, \cos(k+\tau)x\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ függvényrendszerek teljességét és zártságát vizsgálta a $C(0, \pi)$ és $L^p(0, \pi)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ terekben. Itt τ tetszőleges komplex számot jelent. Többek között Sajdukov egy idevágó tételének általánosításaként bebizonyította, hogy a $\{\cos(k+\tau)x\}$ rendszer $L^2(0, \pi)$-ben akkor, és csak akkor teljes, ha $R(\tau) \leqq \frac{3}{4}$.

Június 5. Az 1954. évi *Arany Dániel* matematikai verseny eredményhirdetése. A verseny feladatait *Varga Tamás*, illetve *Lőrincz Pál* ismertette.

A társulat 1954-ben a következő kollokviumokat rendezte

Szeptember 16—17—18. Differenciál-, integrál- és függvényegyenletek kollokvium. Szervezőbizottság elnöke: Egerváry Jenő, tagjai: Aczél János. Fenyő István, Freud Géza.

Szeptember 19—20—21. Algebra kollokvium. Szervezőbizottság elnöke: Rédei László, tagjai: Fuchs László, Kertész Andor, Szele Tibor.
Fenti két kollokviumot a Társulat Balatonvilágoson tartotta.

Szeptember 19—20—21. Valósfüggvénytan- és funkcionálanalízis kollokvium Pécsett. Szervezőbizottság elnöke: Alexits György, tagjai: Császár Ákos és Szőkefalvi-Nagy Béla.

Szeptember 26—27—28. Matematikai statisztikai kollokvium Jósvafőn. Szervezőbizottság elnöke: Rényi Alfréd, tagjai: Sarkadi Károly, Víncze István.

A kollokviumokon elhangzott előadások és hozzászólások anyagának részletes ismertetésére a következő számokban visszatérünk.

* * *

Szeptember 14. *Pál László:* A halmazok ekvivalenciájáról. (Előadás középiskolai diákok számára).

Október 1. *Földes István* beszámolt a Szovjetunióban tett utazásáról. (Klubest.)

Október 9. *Bóka István:* Az ellipszis geometriai kinematikai tárgyalása. (Előadás középiskolai diákok számára.)

Október 8. *Obláth Richárd:* Négyzetmentes számok eloszlásáról. Az előadást követően „A kinai matematika történetének egy problémájához" c. a Mat. Lapok V. évf. 1. számá-

ban megjelent cikkhez hozzászóltak: *Turán Pál, Takács Lajos* és *Surányi János*. A hozzászólásokat részletesen ismerteti a Mat. Lapok 1955. évf. 1. száma.

Október 8. *Bellai László:* Szempontok az általános iskolai VI. osztályos geometria könyv tanításához. (Az előadást a Társulat Budapesti és Pestmegyei Tagozata rendezte a Budapesti Pedagógus Továbbképző Intézettel és a Központi Pedagógus Továbbképző Intézettel közösen, általános iskolai tanárok számára.)

Október 22. *Molnár József:* A számfogalom kialakítása az általános iskolában. (Közös rendezés a B. P. T. I., a K. P. T. I. és a Budapesti és Pestmegyei Tagozattal, általános iskolai tanárok számára.)

Október 22. *Klubest.* (Témanélküli, kötetlen.)

Október 29. *Császár Ákos:* A deriváltfogalom egy általánosításáról. Az előadó a deriváltszámokra vonatkozó Denjoy—Young—Saks-féle tételt átviszi olyan általánosított deriváltszámokra, melyeknek képzésénél egy (bizonyos feltételeknek alávetett) $\mathfrak{N}$ halmazrendszer halmazait elhanyagoljuk. Az átvitel a síkbeli ponthalmazok kontingenséről szóló Kolmogorov—Vercsenko-féle tétel hasonló irányú általánosításán alapszik; ez az általánosítás a tétel eredeti alakjából igen könnyen következik s belőle a deriváltszámokra vonatkozó tétel ismert okoskodások csekély módosításával nyerhető.

Október 27. *Surányi János:* Geometria és számelmélet. (Előadás középiskolai tanárok számára.)
Előadás előtt *Kratofil Dezső* tartott szakköri tapasztalatcserét.

November 5. *Mosoni György:* Elemi geometriai szerkesztések. (Előadás általános iskolai tanárok számára a B. P. T. I.-vel és a K. P. T. I.-vel közös rendezésben.)

November 5. *Alexits György* és *Rényi Alfréd* beszámoltak az 1954 szeptemberében Amsterdamban megtartott Nemzetközi Matematikai Kongresszusról. (Klubest.)

November 10. *Abád József:* A logaritmus oktatása. (Előadás általános iskolai tanárok számára a B. P. T. I.-vel és a K. P. T. I.-vel közös rendezésben.)

November 13. *Pásztor István:* Másod- és harmadrendű determinánsok alkalmazása elsőfokú egyenlenletrendszerek megoldására. (Előadás középiskolai diákok számára.)

November 13. *Prof. dr. Edward Čech* akadémikus (Prága): Az érintkezés mint a differenciál-geometria alapfogalma.

November 19. *Carl Hylthén-Cavallius:* On the position of the absolute maxima on circles and zeros of a polynomial of a complex variable. (Lund.) Turán Páltól származik azon tétel, hogy, ha az n-edfokú polinom $|z=1|$-re vonatkozó abszolút-értékmaximumát $z=1$-re veszi fel, akkor az egységkörnek $|\arc z| < \frac{\pi}{n}$ ívén nem tűnik el és ezen ív nagyobbal nem helyettesíthető; e tételnek Erdőssel több alkalmazását is találták. Előadó azon általánosabb kérdést oldotta meg, mi a $z=1$ pont körül megadható pontos tartomány, melyben $f(z) \neq 0$. Mint kimutatta, e tartományt, mely konvex, 2 negyedrendű görbe határolja, melyek explicite meg vannak adva, egyik az egységkör belsejében, másik a külsején halad, inverzióval egymásba mennek át és az egységkört az $e^{\pm i\frac{\pi}{n}}$ pontokban metszik.

November 24. *Reiman István:* Geometriai transzformációk csoportelméleti tárgyalása.
Az előadást megelőzően osztottuk ki az 1954. évi Beke díjakat.

December 3. Az 1954. évi Kürschák József verseny eredményhirdetése és díjkiosztása. A verseny feladatait *Hajós György* ismertette.

December 3. *Jerzy Łos:* Über die vollständigen direkten Potenzen der unendlichen zyklischen Gruppe.

December 3. *Ligeti Béla:* Elemi geometriai bizonyítások. (Előadás ált. isk. tanárok számára, a B. P. T. I.-vel és a K. P. T. I.-vel közös rendezésben.)

December 4. *Kővári Tamás:* A prímszámok eloszlásáról. (Előadás középiskolai diákok számára.)
Az előadás előtt ismertették a K. M. L. pontversenyének eredményhirdetését.

December 8, *Késedi Ferenc:* Közelítő számítások. (Előadás ált. iskolai tanárok számára a B. P. T. I.-vel és a K. P. T. I.-vel közös rendezésben.)

December 10. *Varga Ottó:* Az állandó görbületű Riemann-féle terekről. Előadó a normálkoordináták bevezetése segítségével visszavezeti a felület összes differenciálinvariánsainak meghatározását a projektív geometriának egy pusztán algebrai jellegű eliminációs problémájára.

December 15. *Hódi Endre:* Térmértani feladatok. (Előadás középiskolai tanárok számára.)

December 17. *Fried Ervin:* ismertette Rédei László: Algebra (I.) c. könyvét. (Klubest.)

A Bolyai János Matematikai Társulat Szegedi Tagozatának 1954-ben megtartott előadásai

Március 6. *Babiczky Ede:* Geometriai szerkesztések transzformációval. (Pedagógus előadás.)

Március 16. *Szele Tibor:* Lineáris transzformációk sűrű rendszerei. Új egyszerűsített bizonyítás a gyűrűelméletben igen fontos Chevalley—Jacobson-féle sűrűségi tételre, és e tétel néhány alkalmazása gyűrűk struktúravizsgálataiban.

Március 16. *Kertész Andor:* Féligegyszerű operátortartományok. Előadó a féligegyszerű gyűrűknek, mint operátortartományoknak új jellemzését adja. Bebizonyítja, hogy egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha a következő ekvivalens feltételek valamelyike teljesül: a) Bármely R-modulus minimális R-modulusok direkt összege. b) Bármely R-modulus bármely részmodulusa direkt összeadandó. c) Bármely R-modulus tetszőlegesen maximális független elemrendszere mindig bázis.

Március 27. *Csontos István:* Szélsőérték feladatok. (Előadás a Radnóti Miklós gimnáziumban.)

Március 27. *Rábai Imre:* A matematikai indukció módszere. (Előadás a Vegyipari Technikumban.)

Március 27. *Szendrei János:* A matematikai indukció módszere. (Előadás a Gépipari Technikumban.)

Március 27. *Horváth Jánosné:* A matematikai indukció módszere. (Előadás a Tömörkény István Leánygimnáziumban.)

Március 27. *Bakos Tibor:* A matematikai indukció módszere. (Előadás a Pedagógiai Főiskolán.)

Március 31. *Horóczi Ferenc:* Feladatmegoldások. (Előadás Hódmezővásárhelyen, a Bethlen Gábor gimnáziumban.)

Április 3. *Szendrei János:* A matematikai teljes indukció módszere. (Előadás a makói Szántó Kovács gimnáziumban.)

Április 10. *Korányi Ádám* ismertette Parhomenko: Mi a vonal c. cikkét. (Pedagógus előadás.)

Április 9. *Fuchs László:* Izomorf alcsoportok osztályairól.

Május 8. *Varga Ottó:* Felületi differenciálinvariánsok meghatározása. Előadó kimutatta, hogy a szabad mozgathatósággal rendelkező Riemann-féle tér szükségképpen állandó görbületű. Kimutatta továbbá azt, hogy ha minden hipersíkálláshoz euklidesi metrikájú érintő hiperfelület létezik, a tér Bolyai—Lobacsevszkij-féle, vagy euklidesi tér. Az előadás második részében szerző egy egyszerű

új bizonyítást ad arra az ismert tételre, hogy az állandó görbületű terek nem azonosak a nem-euklidesi terekkel.

Május 22. *Szép Jenő:* Csoportok Frobenius-féle felbontásáról. Ismeretes Frobenius következő tétele: Ha egy véges csoportnak van egy olyan alcsoportja, melynek normalizátora saját maga, és ezen alcsoport konjugáltjainak metszete 1, akkor a kimaradt elemek a véges csoportnak egy normálosztóját adják az egységelemmel. Ebből kiindulva a szerző olyan csoportokkal foglalkozik, melyek szétbonthatók alcsoportjainak egy olyan halmazára, melyek közül bármely kettőnek a metszete 1.

December 9. *Jerzy Łos:* Megjegyzések, tételek és problémák algebrák definiálható osztályaival kapcsolatban.

Algebrának nevezünk egy $\Gamma = \langle A, O_1, \ldots, O_n \rangle$ rendezett $n+1$-est, ha A tetszőleges halmaz, $O_1, \ldots, O_n$ pedig A-n definiált műveletek. Két algebrát *hasonlónak* mondunk, ha n, továbbá $O_1, \ldots, O_n$ változóinak száma rendre megegyezik. Legyen $\mathfrak{A}_0$ hasonló algebrák egy osztálya. $\mathfrak{A}_0$-t *elemien definiálhatónak* mondjuk, ha van elemi, vagyis a szűkebb logikai függvénykalkulusban formalizálható formuláknak olyan X halmaza, hogy $\mathfrak{A}_0$ azon algebrák összessége, amelyekben X minden eleme igaz. Ha X választható úgy, hogy csupa nyitott (azaz kvantor nélküli) formulából álljon (és az ilyen formula igazságán valamely algebrában *azonos* teljesülését értjük), akkor $\mathfrak{A}_0$-t *nyitott formulákkal definiálható* osztálynak, ha pedig X választható úgy, hogy csupa egyenletekből álljon, akkor $\mathfrak{A}$-t *egyenletekkel definiálható osztálynak* mondjuk. BIRKHOFF bebizonyította, hogy $\mathfrak{A}_0$ akkor és csak akkor definiálható egyenletekkel, ha zárt a részalgebra-képzéssel, a (tetszőleges kongruencia-reláció szerint) faktoralgebra-képzéssel és (tetszőleges számosságú, komplett) direkt szorzatok képzésével szemben. Előadó hasonló, de bonyolultabb kritériumot adott arra, hogy $\mathfrak{A}_0$ nyitott formulákkal definiálható legyen; ebben a faktoralgebra-képzésnek és a direkt szorzatok képzésének szerepét egy bizonyos, az ún. logikai mezők segítségével definiált szorzatképzés veszi át. (Egy másik, más természetű kritérium TARSKI-tól származik.) Hasonló kritérium adható arra, hogy $\mathfrak{A}_0$ elemien definiálható legyen. Ennek alapján bebizonyítható, hogy pl. a bikompaktumok osztálya (amelyekben az egyesítés, a metszetképzés, a komplementer és a zárt burok képzése a műveletek) nem definiálható elemien. VAUGHT

egy újabb eredménye szerint, ha egy elemien definiálható $\mathfrak{A}_0$ osztály tetszésszerinti véges számú hozzá tartozó algebra direkt szorzatát tartalmazza, akkor tartalmazza a hozzá tartozó algebrák tetszőleges ω típusú sorozatának komplett szorzatát is. Előadó és TARSKI egymástól függetlenül megmutatták, hogy ha egy $\mathfrak{A}_0$ osztály definiálható egyetlen olyan formulával, amelyben az algebrák elemein átfutó *általános* kvantorokon kívül a rajtuk értelmezett logikai függvényeken átfutó tetszőleges kvantorok is szerepelnek, de az utóbbiak (a formula praenex alakjában) megelőzik az előbbieket, akkor $\mathfrak{A}_0$ nyitott formulákkal is definiálható. Speciális esetként adódik, hogy az elrendezhető csoportok osztálya nyitott formulákkal (t. i. végtelen sokkal) definiálható; hasonló áll a csoporttá bővíthető félcsoportok osztályára (MALCEV régebbi eredménye). Viszont azon csoportok osztálya, amelyeknek minden eredménye parciális rendezése teljes rendezéssé bővíthető, nem definiálható elemien (RYLL-NARDZEWSKI példája).

December 9. *Szele Tibor:* Artin-féle gyűrűk. Előadó ismertette legújabb eredményeit a baloldali ideálokra nézve minimumkövetelményt kielégítő gyűrűk struktúrájával kapcsolatban. Bebizonyította, hogy ha egy ilyen gyűrű nilpotens, akkor additív csoportja kielégíti a minimumkövetelményt alcsoportjaira nézve. Ezen az alapon az összes ilyen gyűrűről áttekintés adható. Vizsgálja az egységelemes gyűrűbővítés problémáját is Artin-féle gyűrűk körében.

A Bolyai János Matematikai Társulat Debreceni Tagozatának 1954. évben megtartott előadásai

Január 6. *Fuchs László:* Az ideálelmélet főtételéről. Az előadó bebizonyított egy olyan tételt, amely a kommutatív gyűrűk ideálelméletének főtételét abban az irányban általánosítja, hogy egy tetszőleges gyűrű egyetlen ideáljára is alkalmazható kritériumot mond ki. Az előadó ez új eredményében speciális esetként a Noether-féle főtétel és annak több modern továbbfejlesztése is benne van.

Január 6. *Rédei László:* Holomorfelmélet.

Február 15. *Füfa Ignác:* A matematikai teljes indukció. (Előadás a berettyóújfalui gimnáziumban.)

Február 19. *Füfa Ignác:* A szovjet matematikai olimpiászok feladataiból. (Előadás a berettyóújfalui gimnáziumban.)

Február 19. *Kárteszi Ferenc:* 1. Egy fedési tételről. 2. Háromszöggeometriai tételek tárgyalása a Gauss—Argand-féle számsíkon.

1. Egy fedési tételről: Legyen adva a síkban n pont, melyek közül három sohasem esik egy egyenesre. Előadó bebizonyítja, hogy a pontoknak van olyan elhelyezkedése, amelyben a pontok által meghatározott háromszögek közül k számú, de ennél több nem, közös belső ponttal rendelkezik; itt

$$k = \frac{n^3 - 4n}{24} \quad \text{ill.} \quad \frac{n^3 - n}{24}$$

aszerint, hogy n páros vagy páratlan.

2. Háromszöggeometriai tételek tárgyalása a Gauss—Argand-féle számsíkon: Komplex számok segítségével igen egyszerű és elegáns bizonyítást ad az előadó két olyan háromszöggeometriai általános tételre, amely számos nevezetes tételt magában foglal speciális esetként. Az első tétel: Emeljünk az ABC háromszög oldalaira kifelé hasonló egyenlőszárú háromszögeket, s legyenek ezek új csúcsai megfelelő jelöléssel A', B', C'. Ekkor az AA', BB', és CC' egyenesek egy ponton mennek keresztül; továbbá az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek súlypontja azonos, és az egyik háromszög csúcsaiból a másik háromszög megfelelő oldalaira bocsátott merőlegesek egy ponton mennek keresztül és viszont. — A másik tétel: Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögek olyan helyzetűek, hogy az egyiknek csúcsaiból a másik megfelelő oldalaira bocsátott merőlegesek egy ponton mennek keresztül, akkor ez a kapcsolat a két háromszög szerepének felcserélésével is fennáll.

Február 24. *Mátyás Antal:* A matematikai teljes indukció. (Előadás a hajduszoboszlói általános gimnáziumban.)

Március 10. *Timáry Márton:* A matematikai teljes indukció módszere. (Előadás a hajdúböszörményi általános gimnáziumban.)

Március 11. *Barna Béla:* A matematikai teljes indukció módszere. (Előadás a Kossuth Lajos gimnáziumban.)

Március 16. *Fenyő István:* Megjegyzések I. V. Kantorovics módszeréhez nem-lineáris egyenletek megoldására.

Március 12. *Füfa Ignác* ismertette Parhomenko: Mi a vonal? c. cikkét. (Előadás a berettyóújfalui ált. gimnáziumban.)

Március 22. *Nemes László* ismertette Parhomenko: Mi a vonal? c. cikkét. (Előadás a hajduszoboszlói ált. gimnáziumban.)

Március 27. *Füfa Ignác:* Feladatmegoldások. (Előadás a berettyóújfalui gimnáziumban.)

Március 25. *Meszéna György:* Feladatmegoldások. (Előadás a Kossuth Lajos gimnáziumban.)

Április 2. *Aczél János:* 1. A legvalószínűbb és a várható érték eltérése a közönséges binomiális eloszlásnál. Annak kimutatása, hogy binomiális eloszlásnál mindig van olyan kisérletszám, hogy a várható és a legvalószínűbb érték irracionális valószínűség esetén eltérjen. Racionális valószínűségnél csak a 0 és 1/4, 1/4 és 1/3, 3/4 és 1 közti valószínűségekre érvényes ez.

2. Inhomogén átmenet-valószínűségek. (A Kolmogorov-egyenlet megoldása inhomogén Markov-folyamatokkal.) Az inhomogén Kolmogorov-egyenlet Fréchet-féle megoldásának élesítése, a sztochaszticitásból következő megszorítás egyszerűbb alakja és a szinguláris eset tárgyalása.

Április 14. *Turán Pál:* Egy determináns problémáról. Sylvestertől származik az a sejtés, hogy ha az n természetes szám osztható 4-gyel, akkor van olyan n-rendű ortogonális determináns, amelynek valamennyi eleme $+1$ vagy -1. E sejtés általános igazolása irányában tett lépésként előadó Szekeres Györggyel együtt meghatározta a $+1$ elemekből megalkotható n-rendű determinánsok második és negyedik hatványának összegét. Előadó az utóbbi eredmény bizonyítására legújabban olyan módszert talált, amely alkalmasnak igérkezik a magasabb hatványösszegek meghatározására s ezáltal a Sylvester-féle sejtés általános igazolására is.

Április 30. *Moór Arthur* ismertette Parhomenko: Mi a vonal? c. cikkét. (Előadás a Kossuth Lajos gimnáziumban.)

Április 28. *Barna Béla:* A Newton-féle gyökközelítő eljárás. Előadó oly valós algebrai egyenletekre alkalmazott Newton-féle iterációval foglalkozott, amelyeknek minden gyökük egyszeres és valós. Elemi meggondolásokkal adódik, hogy a divergens iterációs sorozatok kezdőelemei nem megszámlálható halmazt alkotnak. A komplex változós racionális függvények iterációelméletének ismert tételeit felhasználva egyszerűen adódik az is, hogy a halmaz pontjai sehol sem alkothatnak szakaszt.

Április 7. *Kertész Andor:* Elemi operátorcsoportok. Legyen R egységelemes gyűrű és G olyan operátormodulus, amelynek operátortartománya R. Előadó bebizonyítja, hogy G-re nézve ekvivalensek a következő állítások: 1. G egyszerű (minimális) részmodulusok direkt összege, 2. G bármely $\neq 0$ elemének a rendje véges számú maximális balideál metszete, 3. G bármely maximális független elemrendszere bázis, és végül 4. G bármely megengedett részmodulusa direkt összeadandó.

Április 7. *Prékopa András:* Valószínűségszámítási módszerek a depolimerizáció elméletében. (Lásd M. Tud. Ak. Alk. Mat. Int. Közleményei II. kötet, 1953. 103—124.)

Május 21. *Jordan Károly:* Megközelítés a legkisebb négyzetek és a momentumok elve alapján ortogonális polinomok segítségével. Az előadó mindenekelőtt azon módszerek közül, amelyek észlelési sorozatoknak függvényekkel való megközelítését célozzák, a legkisebb négyzetek elvét és a momentumok módszerét ismertette. E két módszer ugyanazt eredményezi, ha a megközelítő függvény polinom. Az előadás tulajdonképpeni részét egyenlőközű észlelési adatoknak polinomokkal való megközelítése alkotta. Mégpedig azoknak a hosszadalmas és nehézkes számításoknak elkerülésére, amelyek ebben az esetben fellépnek, az előadó egy tőle származó, ma már közismert, ortogonális polinomokra épített módszert ismertetett a közelítő polinom meghatározására.

Június 5. *Pukánszky Lajos:* Mautner egy tételéről. Az előadó röviden ismertette az operátorgyűrűk elméletének alapvonalait, majd bemutatta saját egyszerűsített bizonyítását Mautner egy tételére, amely szerint, ha egy G végtelen csoport csoportok egy sorozatának diszkrét direkt szorzata, amelyek közül végtelen sok nemkommutatív, akkor csoportalgebrának Neumann-féle centrális felbontásában csak véges-folytonos típusú faktorok lépnek fel.

Június 10. *Keresztúry Jenő:* A matematikai szedés problémái. Előadó a matematikai betűszedés problémáit ismertette, gyakorlati példákkal illusztrálva előadását.

Szeptember 17. *Aczél János:* Matematikus szemmel a Lengyel Népköztársaságban. Az előadó 1954 május 15 és június 10 között a Lengyel Népköztársaságban a magyar-lengyel kulturális egyezmény keretében tett utazásáról számolt be. Ismertette tapasztalatait a lengyelországi általános-, közép- és felsőoktatási és matematikai tudományos élettel kapcsolatban, majd néhány problémát és eredményt ismer-

tetett, melyek részben lengyel matematikusoktól származnak, részben az előadónak lengyel matematikusokkal közös eredményei. (Többváltozós függvények előállíthatósága kétváltozósokkal, többparaméteres transzformációk n-dimenziós és általánosabb terekben, a Kac—Mikusinski módszer integrálható megoldások differenciálhatóságának bizonyítására általános egyváltozós függvényegyenleteknél, binomiális eloszlások legvalószínűbb értéke és a várható értékhez legközelebbi egész szám különbözősége, a (0,1) és (1,0) pontokat összekötő 2 ívhosszú szigorúan monoton folytonos görbék stb.)

Október 1. *Hajós György* ismertette Pontrjagin: Bevezetés a kombinatorikus topológiába c. könyvét. P. Sz. Pontrjagin könyve tömör, de gondos tárgyalásban a komplex homológia elméletét nyújtja. Tömör előadásmódja következtében a szerző nem tér ki a kombinatorikus topológia geometriai tartalmának ismertetésére s a könyvből teljesen hiányzik a szemléltető anyag. A könyv ismertetése során az előadó részletesen utalt azokra a szemléletes geometriai alapokra, amelyekre a kombinatorikus topológia egyik legfontosabb fogalma — a Betti-féle csoport támaszkodik.

Október 21. *Szénássy Barna:* Magyar matematikusok középiskolában is bemutatható néhány eredménye.

November 3. *Gáspár Gyula:* A determinánsok axiomatikus bevezetése. Az előadó részletesen tárgyalta a determináns egy új axiomatikus bevezetési módját. Eredménye szerint az n-edrendű determináns az egyetlen olyan homogén multiplikatív mátrixfüggvény, amely két mátrix összegére megegyezik mindazon (összesen 2^n számú) mátrixokra felvett értékek összegével, amelyek a két adott mátrix soraiból kombinálhatók.

November 11. *Vincze István:* Megjegyzések a térgörbék differenciál geometriájához.

November 18. *Jerzy Łos:* Végtelen ciklikus csoportok teljes szorzatai. Előadó meghatározta végtelen ciklikus csoportok teljes szorzatának endomorfizmusgyűrűjét és homomorfizmuscsoportját az egész additív csoportjába. Kimutatta, hogy az előbbi az olyan végtelen matrixok gyűrűjével izomorf, amelyek elemei egész számok, s a matrix egy-egy sorában csak véges számelem lehet zérustól különböző. Az utóbbiról bebizonyította, hogy izomorf az alapul vett teljes szorzat faktorainak diszkrét direkt szorzatával. A vizsgálatokban döntő fontossága van lengyel

matematikusok halmazelméleti és mértékelméleti vonatkozású bizonyos eredményeinek.

November 25. *Jerzy Łos:* Végtelen generátorrendszerű Abel-féle csoportok. Nevezzük G-rendszernek egy megszámlálhatóan végtelen Abel-féle csoport olyan generátorrendszerét, amely végtelen sorozatban van elrendezve, és amelynek bármely részsorozat is generátorrendszer. Ugyanaz az elem akárhányszor szerepelhet egy G-rendszerben. Előadó bebizonyította, hogy véges csoportnak akkor és csak akkor van G-rendszere, ha ciklikus. Továbbá, ha egy csoportnak van G-rendszere, akkor a csoport bármely homomorf képének is van. Főeredmény: Torziócsoportnak akkor és csak akkor van G-rendszere, ha a csoport egy-egy algebrailag zárt csoportnak és egy olyan csoportnak direkt szorzata, amely utóbbi csupa különböző prímszámokhoz tartozó ciklikus p-csoportok direkt szorzata.

November 26. *Jerzy Łos:* Vajon a matematika csak számolást jelent-e? (Előadás középiskolai diákok részére.)

A Bolyai János Matematikai Társulat Miskolci Tagozatának 1954. évi előadásai

Január 27. *Gáspár Gyula:* A determinánsok elvi felépítése. Az előadó a determináns Weierstrass-féle jellemző tulajdonságait származtatta matrixalgebrai alapon. Ebből felépítette a determináns fogalmát, mint különleges racionális egész függvényt és bemutatta, hogy csak egy ilyen függvény tesz eleget a kívánalmaknak. Továbbképző előadás.

Február 11. *Fényes Imre:* Riccati típusú egyenletek közelítő megoldása. Előadó az elméleti fizikában használatos úgynevezett W. K. B. közelítő módszert taglalta a Riccati-féle differenciálegyenlet megoldásával kapcsolatosan. Ismertette ennek divergencia problémáját és a divergenciára vonatkozó vizsgálatait. Továbbképző előadás.

Február 17. *Gáspár Gyula:* A komplex számok néhány gyakorlati alkalmazása. A komplex szám számpáros, ill. vektorikus fogalmi bevezetése után áttekintést adott az elemi geometriai feladatok komplex számok segítségével történő megoldásáról. Egybevágóságon, ill. hasonlóságon alapuló feladatok megoldásával foglalkozott.

Február 19. *Rényi Alfréd:* Újabb szovjet eredmények a valószínűségszámításban. Előadó rövid áttekintést adott a szovjet

valószínűségszámítási iskola kialakulásáról és jelentőségéről. Ezután vázlatosan beszámolt a határeloszlástételek, a sztochasztikus folyamatok és a matematikai statisztika területén elért néhány kiemelkedő eredményről. (Így pl. ismertette Kolmogorov vizsgálatait a minőségellenőrzési tervekkel kapcsolatosan, és Hincsin dolgozatát a valószínűségszámítási „entrópia" fogalom megalapozásáról.)

Március 3. *Parai Gusztáv:* Függvények elemi tárgyalása a középiskolai oktatásban. (Pedagógus előadás.)

Március 10. *Obadovics J. Gyula:* Szemelvények a szovjet egyetemi felvételi vizsga anyagából. (Pedagógus előadás.)

Március 24. *Lengyel Sándor:* Az elektrolit oldatok elméletének néhány matematikai problémája. (l. Veszprém április 27.)

Március 31. *Firtkó János:* Bemutató kísérletek a fizikából. (Középiskolai diákok számára.)

Március 31. *Tóth Ferenc:* Szögfüggvény táblázatok elemi kiszámításai. (Középiskolai diákok számára.)

Március 31. *Fejes-Tóth László:* Geometriai valószínűségek. Előadó néhány klasszikus geometriai valószínűségszámítási problémát ismertetett. (π meghatározása pálcika dobálásával, a Bertrand-féle paradoxon stb.) Ezután az integrálgeometria alapproblémáit vázolta — mintegy e körbe beleágyazva az előbb felsorolt problémákat — és ismertette a legátfogóbb eredményeket Crofton, Poincaré, Blaschke, Santalo munkásságából, végül az izoperimetrikus problémakör néhány kiemelkedő eredményét.

Fenti rendezvényeken kívül az 1954. évi Magyar-Szovjet Barátsági Hónap alkalmával kiadott „Matematikai teljes indukció" c. sillabusz alapján a Miskolci Tagozat a következő iskolákban tartott középiskolások számára előadást:

Február 24. Kohászati Technikum. Előadó *Czibere Tibor.*
Február 25. Közgazdasági leánytechnikum. Előadó: *Hosszú Miklós.*
Február 26. Közgazdasági fiútechnikum. Előadó: *Tóth Ferenc.*
Március 3. Földes Ferenc gimnázium. Előadó: *Huszthy László.*
Március 10. Vámos Ilonka leánygimnázium. Előadó: *Törő Béla.*
Március 10. 13. sz. Gépipari technikum. Előadó: *Batár Zoltán.*
Március 13. Kilián György gimnázium. Előadó: *Szarka Zoltán.*
Március 17. Vill. ipari technikum. Előadó: *Kiss Barna.*
Március 26. Mezőkövesdi ált. gimn. Előadó: *Nikodémusz Antal.*
Március 24. Sárospataki Rákóczy gimn. Előadó: *Czibere Tibor.*
Március 27. Ózdi ált. gimnázium. Előadó: *Huszthy László.*

Március 27. Sárospataki tanítóképző. Előadó: *Nagy Ilona.*
Március 27. Ózdi technikum. Előadó: *Törő Béla.*
Április 1. Áll. Tanképző. Előadó: *Hoffmann Andor.*
Április 2. Sátoraljaújhelyi gimnázium. Előadó: *Hoffmann Andor.*

* * *

Április 1. *Vincze Endre:* Számok oszthatósági problémái. (Előadás ovónőképzősök számára.)

Április 21. *Borbély Samu:* Egyenletek megoldásának gyakorlati módszereiről. — Előadó rövid áttekintést adott az algebrai, ill. transzcendens egyenletek megoldásának elvi problémáiról, majd a gyakorlati módszereket mutatta be. Így tárgyalta a negyedfokú egyenlet Newton-féle iterációval történő megoldását, ill. a tg $x = \frac{2x}{x^2-1}$ egyenlet megoldását grafikusan adott kezdőértékek iterativ javítása útján. (Továbbképző előadás.)

Április 28. *Szabó Miklós:* Komplex számok. (Előadás középiskolai diákok részére.)

Április 28. *Tóth Sándor:* Fizikai- és kémiai műszerek ismertetése és bemutatása.

Május 5. *Szele Tibor:* Hiperkomplex számok. Előadó rövid áttekintést adott a valós és a komplex számtestről. Ezután felvetette a komplex számok általánosításának problémáját, bemutatta, hogy háromdimenziós esetben az ismert vektorfogalom csak egy ún. Lie-féle gyűrű felépítését teszi lehetővé, viszont négydimenziós esetben a kvaterniók a ferde test tulajdonságaival rendelkeznek. Ezután Frobenius átfogó tételét mutatta be arra vonatkozólag, hogy mindössze három dimenzió szám esetében ($n = 1, 2$ és 4) lehetséges ferde test tulajdonságú rendszer felépítése. (Pedagógus továbbképző előadás.)

Október 14—15. Évnyitó ülés.

Borbély Samu: Elnöki megnyitó.

Batár Zoltán: Titkári beszámoló.
Tisztújítás.

Bede Lajos: Társulatunk feladatai megyénkben a matematikai továbbképzés területén.

a) A függvényfogalom kialakítása.
A bevezetést tartotta a középiskola részéről: *Szabó Jenő*, a műszaki egyetem részéről: *Borbély Samu.*

b) Az algebra tanításának kérdései
A bevezetést tartotta az általános iskola részéről: *Kálmán József*, az egyetem részéről: *Raisz Iván.*

* * *

Borbély Samu: A ballisztika egyik problémájáról. Előadó a bombapályák számításának légellenállásos esetben egy gyorsabb eljárását ismertette. Eljárásának lényege szerint a légellenállás behatásának sebességi korrektúráit számította ki, az eddig alkalmazott módszerekkel szemben lényegesen gyorsabb és jobban ellenőrizhető módon.

Gáspár Gyula: A köbös determinánsok axiomatikus megalapozása. Előadó bemutatta a köbös determinánsok egy axiomatikus bevezetési módját. Ebben a köbös determinánst mint a köbös matrixok oly nem állandó függvényét tárgyalta, amely eleget tesz az a) $F(A+B)=\Sigma f(C)$ egyenletnek (ahol az összegezés kiterjesztendő az A és B matrixokból ún. (bármelyik index szerint vett) lapkombinációval keletkező összes C matrixokra). b) $f(MA):d(M)f(A)$, (M átlós vagy permutációs közönséges matrix, $d(M)$ ennek közönséges determinánsa) c) $f(E^{(3)})=1$. ($E^{(3)}$ köbös átlós matrix, amelynek főátlójában minden elem 1) feltételnek.

Hosszú Miklós: A disztributív törvény. Előadó bebizonyította, hogy az összeadásra vonatkozó kétoldali disztributív törvény jellemzi az $xy=(Ax)$ alakban felírható, kétváltozós, korlátos vektorfüggvényeket (melyek az n-dimenziós tér x és m-dimenziós tér y vektoraihoz a k-dimenziós tér xy vektorait rendelik hozzá), ahol A egy tetszőleges mxk-s matrix, melynek elemei n-dimenziós vektorok és az (Ax) matrix elemeit úgy képezzük, hogy A elemeit szorozzuk skalárisan x-szel. Megmutatta, hogy a megoldás tartalmazza a közismert disztributív vektorműveleteket: a komplex számok szorzását, a skaláris, vektoriális, diadikus, kvaternió stb. szorzatot; ezek az általános megoldásból további feltételek felhasználásával származtathatók.

November 4. *Aczél János:* Matematikus szemmel a Lengyel Népköztársaságban.

November 10. *Borbély Samu:* Általános áttekintés a differenciálegyenletekről. (Bevezető jellegű előadás.)

November 17. *Gehér László:* Függvények kiterjesztése. Az előadó megadta egy metrikus X tér $Y\subset X$ korlátos részhalmazán Lipschitz-feltételnek eleget tevő $f(x)\in \mathrm{Lip}\,(\alpha, K)$

$(0 < \alpha \leqq A)$ függvénynek olyan $g(x)$ kiterjesztését, mely az egész X térben K kitevőjű Lipschitz-feltételt elégít ki $K+\varepsilon(\varepsilon > 0$ tetszőleges kicsiny) konstanssal: $g(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, K+\varepsilon)$. Bebizonyította, hogy ha X metrikus tér szeparabilis, akkor az Y korlátosságára vonatkozó megszorítás elhagyható és $g(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, K)$.

November 17. *Gáspár Gyula:* Áttekintés a geometria axiomatikájáról. Az előadó ismertette az axiomatikus módszert, majd az euklideszi geometria Hilbert-féle axiomarendszert. Az axiomarendszert oly elrendezésben adta, amelyik alkalmas volt arra, hogy a projektiv, ill. affin geometriai sajátságok külön kiemelhetők legyenek.

November 24. *Szénássy Barna:* Régi magyar matematikusok. Előadó egy-egy érdekesebb — középiskolai szakkörök munkájában is felhasználható — problémának kiváló régi matematikusainktól származó szellemes megoldását ismertette. Így bemutatta Segner Andrásnak a pozitív együtthatós harmadfokú egész függvény szerkesztésére vonatkozó grafikus módszerét, a trapéz alakú földterületeknek Naszluhácz Lajos módszerével történő felosztását, Sípos Pál szerkesztő eljárását, amellyel az ellipszis kerületét lehet igen jó pontossággal megközelíteni, az $x'' = a + x$ trinom egyenlet egyik gyökének Bolyai Farkastól származó meghatározását, végül Vályi Gyulának Gauss azon problémájára adott elemi megoldását, mely az egész számmal mérhető oldalú és területű összes háromszögek meghatározását tűzi ki feladatul. Foglalkozott még a régebbi időkből szokásként fennmaradt öt ujjon történő számolással is, ahogy azt Maróthi György is említi Arithmeticájában.

December 1. *Obadovics J. Gyula:* A számfogalom felépítése. (Előadás általános iskolai tanárok részére.)

December 8. *Borbély Samu:* Exisztenciatételek és alkalmazásaik a differenciálegyenletek megoldásainak általános előállítására. Első és másodrendű diff. egyenletek felállítása és elemi integrációs módszereinek bemutatása, a középiskolai fizika tanításban előforduló területek (főleg mechanikai vonatkozású példák) felhasználásával. (Pedagógus továbbképző előadás.)

December 8. *Parai Gusztáv:* Klasszikus szerkesztési feladatok. (Előadás középiskolai diákok részére az ózdi ált. gimnáziumban.)

December 8. *Törő Béla:* Geometriai szerkesztések. (Előadások középiskolai diákok részére.)

December 15. *Batár Zoltán:* A számelmélet alapjai. (Előadás közép- és ált. iskolai tanárok részére, Sárospatakon.)

December 15. *Gáspár Gyula:* Áttekintés a geometria axiomatikájáról. (Előadás közép- és ált. iskolai tanárok részére, Sárospatakon.)

December 15. *Szabó Jenő:* Egyenletek és egyenletrendszerek. (Előadás ált. iskolai nevelők részére.)

A Bolyai János Matematikai Társulat pécsi tagozatának 1954. évi rendezvényei

Február 1. *Nagy Sándor:* Közelítő és grafikus módszerek algebrai és transzcendens egyenletek megoldására. (Előadás tanárok részére.)

Február 17. *Klubest.* Az Oktatási Osztály továbbképző csoportjával közösen megrendezett „Matematikai feladatmegoldó est".

Február 19. Feladatmegoldó délután középiskolai diákok részére. Vezette: Csaba István.

Február 23. *Surányi János:* Lineáris egyenletrendszerek. (Előadás tanárok részére.)

Március 17. *Klubest.* Feladatmegoldások tanárok számára. Vezette: Bóka István.
A Magyar-Szovjet Barátsági Hónap alkalmából A teljes matematikai indukcióról a következő iskolában tartottak előadást a vezető tanárok: Nagy Lajos gimnázium, Janus Pannonius gimnázium, Leöwey Klára gimnázium.

Március 22. *Kalmár László:* A prímszámok eloszlásáról. (Előadás tanárok számára.)

Április 25. *Bóka István:* Az ellipszis kinematikai tárgyalása.

Április 27. *Fenyő István:* Dialektikus materializmus a matematikában. (Előadás tanárok részére.)

Szeptember 20—21—22. Valósfüggvénytan és funkcionálanalízis kollokvium.

Szeptember 27. *Kalmár László:* Az összemérhetetlen távolságokról és szerepükről a középiskolában. (Előadás tanárok részére.)

Szeptember 28. *Kalmár László:* Az analízis tárgya és módszerei. (Előadás főiskolai hallgatók részére.)

Október 21. A VI. osztályos geometria könyv feldolgozása szakmai és módszertani szempontból. (Az Oktatási Osztállyal közös rendezésben folyamatos foglalkozások.) A foglalkozásokat Huszti Sándorné vezette.

November 15. *Székely Jenő:* A számfogalom kiépítése az általános és középiskolában. (Előadás tanárok részére.)

December 3. *Fenyő István:* A nomográfia elemei és azok alkalmazása középiskolai tanításban.

December 4. (Fenti előadás megismétlése Mohácson.)

December 15. *Klubest.* (Megemlékezés Bolyai Jánosról, — feladatok megbeszélése, — szünidei munkaprogram összeállítása.)

A Bolyai János Matematikai Társulat egri tagozatának 1954. évi rendezvényei

Február 17. *Horvay Katalin:* A Pell-féle egyenlet egész megoldásai.

Március 19. *Králik Dezső* ismertette Natanson: Konstruktív függvénytan c. könyvét.

A Tagozat a Magyar-Szovjet Barátsági Hónap alkalmával „A teljes matematikai indukció" címmel a következő iskolákban tartott előadást:

Március 14. *Dobó István* gimnázium. Előadó: *Barra György.*

Március 24. Tanítóképző. Előadó: *Békési Pál.*

Március 21. Hatvani vegyipari technikum. Előadó: *Fodor Miklós.*

Március 31. Közgazdasági technikum. Előadó: *Lengyel Gábor.*

Március 31. Szakérettségis tanfolyam. Előadó: *Darvas Andorné.*

Április 6. Gyöngyösi ált. gimnázium. Előadó: *Rónai Kálmán.*

Március 27. *Pelle Béla:* Feladatmegoldások. (Előadás a Dobó István gimnáziumban.)

Március 31. *Ferge Piroska:* Feladatmegoldások. (Előadás a Tanítóképző Intézetben.)

Április 2. *Nagy Ferenc* ismertette Parhomenko: Mi a vonal c. cikkét. (Előadás a Pedagógus Klubban.)

Április 7. *Pelle Béla:* Feladatmegoldások. (Előadás a gyöngyösi gimnáziumban.)

Április 10. *Nagy Ferenc* ismertette Parhomenko: Mi a vonal c. cikkét. (Előadás a Pedagógiai Főiskolán.)

* * *

Április 21. *Kárteszi Ferenc:* Komplex számok geometriai alkalmazása. (Előadás tanárok számára.)

Április 29. *Nagy Sándor:* Egyenletek közelítő megoldása. (Előadás tanárok számára.)

November 20. *Frey Tamás:* Az approximációelmélet alapfeladatai. (Előadás tanárok számára.)

December 16. *Fejes-Tóth László:* Körök elhelyezésével kapcsolatos kérdések.

A Bolyai János Matematikai Társulat veszprémi tagozatának 1954. évi rendezvényei

Február 23. *Fejes-Tóth László:* Geometriai szélsőérték problémák.

Április 6. *Fejes-Tóth László:* Egy Minkowski-féle probléma.

Április 27. *Lengyel Sándor*: Elektrolit-oldatok szerkezetével kapcsolatos matematikai problémák.
Az előadás röviden vázolta az elektrolitoldatok elméletének fejlődését, majd ismertette a Debye—Hückel-féle ionkölcsönhatási elméletben szereplő másodrendű homogén lineáris és inhomogén differenciálegyenletet, előbbinek megoldását, valamint az utóbbi megoldására irányuló próbálkozásokat. Tárgyalta továbbá a poláris folyadékok dielektromos állandója és molekuláik dipólmomentuma közötti kapcsolatot kifejező transzcendens egyenletet s ennek felhasználását a Debye—Hückel-féle elméletben s az így felállított bonyolultabb differenciálegyenletet. Foglalkozott ezenkívül az ionhidratációs szabad energiák elméleti meghatározásánál szereplő integrállal, s ennek numerikus kiszámításával. E kérdésekkel kapcsolatban az előadás ismertette az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének vonatkozó munkásságát.

Május 14. *Rényi Alfréd:* A valószínűségszámítás néhány kémiai alkalmazása. (A Mérnöktovábbképző Intézettel közös rendezésben.) (l. MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének közleményei 2(1953) 83—102.)

Október 14. *Fejes-Tóth László:* Konvex tartományok legsűrűbb elhelyezése.

A Bolyai János Matematikai Társulat győri tagozatának 1953. évi rendezvényei

Január 14. *Mikolás Miklós:* Az integrál fejlődése (II. rész).

Február 7. *Barabás Sarolta* ismertette a Kürschák verseny feladatait. (Középiskolai diákok részére.)

Február 17. *Surányi János:* Feladatmegoldások (Versenyfeladatok ismertetése és tárgyalása, — tanárok számára.)

Március 11. *Faludy Istvánné:* A matematikusi hivatásról. (Előadóülés, utána taggyűlés.

Március 14. *Marót Rezső:* Feladatmegoldások. (Középiskolai délután III—IV. oszt. részére.)

Április 1. *Pásztor István*: A szovjet matematikai analízis kutatásairól. (Előadás középiskolai tanárok részére.)

Május 24. *Gádor Endréné:* Logikus gondolkodásra nevelés a matematikaórán.

Május 24. *Hódi Endre:* A topológia elemi problémái. (Előadás Pápán, a Petőfi gimnáziumban, tanárok számára.)

Május 23. *Szeliánszky Ferenc:* A pythagorasi számhármasokról. (Előadás középiskolás diákok részére.)

Szeptember 21. *Kárteszi Ferenc:* Néhány módszertani elv és fogás példákon való bemutatása.

Szeptember 26. *Marót Rezső*: Feladatmegoldások. (Előadás középiskolás diákok részére, beszámoló a Rákosi- és Arany-versenyről.)

Október 26. *Molnár Ernő:* Az inverzióról. (Előadás középiskolás diákok részére.)

November 2. *Tarján Imre:* Tanulságos fizikai kísérletek bemutatása.

December 11. *Pál László:* Folytonos függvények polinomokkal való approximációja. (Előadás tanárok számára.)

December 12. *Gál Mária:* Feladatmegoldások. (Előadás középiskolás diákok részére.)

1954. évi rendezvények

Január 18. *Fuchs László:* Csoportok és szerepük a matematikában.

Március 22. *Koncz Károly:* Geometriai hamisságok.

Április 13. *Oláh Gyula* ismertette Szele Tibor: Bevezetés az algebrába c. könyvét.

Március 20. *Molnár Ernő:* Számelméleti feladatok. (Előadás középiskolás diákok részére)

Április 28. *Tasnády István:* A vektoralgebra alapjai. (Előadás tanárok részére.)

Június 2. *Gádor Endréné:* Problémák a mértan tanításában.

Június 2. *Hódi Endre:* Hibabecslés és hibaszámítás. (Előadás általános- és középiskolai tanárok részére.)

Október 20. *Králik Dezső* ismertette Natanson: Konstruktív függvénytan c. könyvét.

Október 20. *Szeliánszky Ferenc:* Magasabbfokú egyenletekről. (Előadás középiskolás diákok számára.)

November 17. *Molnár Ernő:* Feladatok a számelmélet köréből. (Előadás középiskolás diákok számára.)

December 1. *Nagy Sándor:* Egyenletek közelítő megoldása.

A Bolyai János Matematikai Társulat soproni tagozatának 1954. évi rendezvényei

Március 20. *Vincze István:* A valószínűségi változóról.

Április 3. *Pásztor István:* Halmazelméleti alapfogalmak.

Április 6. *Garai József:* Általános- és középiskolai szakköri füzetek.

Május 15. *Nagy Sándor:* Közelítő módszerek egyenletek és egyenletrendszerek megoldására.

Október 13. *Dux Erik:* A π története.

A Bolyai János Matematikai Társulat szolnoki tagozatának 1953—54. évi rendezvényei

Február 16. *Vincze István:* A valószínűségszámítás alapfogalmai az alkalmazásokra való tekintettel.

Március 24. *Dux Erik:* Egyenlőtlenségek. (Középiskolai délután.)

Március 30. *Hódi Endre:* A matematikusi hivatásról. (Előadás középiskolai tanárok részére.)

Május 5. *Rédl László:* A matematikus hivatásról. (Előadás Mezőtúron, az ált. gimnáziumban.)

Május 5. *Haszpra Ottó:* Vektoralgebra. (Előadás középiskolás diákok részére.)

Május 19. *Haszpra Ottó:* A komplex számokról. (Előadás középiskolás diákok részére.)

Szeptember 22. *Bognár Mátyás:* A topológia elemei.

Október 8. *Révai Katalin:* Valószínűségszámítás. (Előadás középiskolás diákok részére a mezőtúri áll. fiúgimnáziumban.)

Október 27. *Haszpra Ottó:* Nomográfia. (Előadás a mezőtúri áll. fiúgimnáziumban.)

November 3. *Szikszai József:* Komplex számok. (Előadás középiskolás diákok részére.)

November 4. *Révai Katalin:* Valószínűségszámítás. (Előadás a karcagi áll. fiúgimnáziumban.)

November 23. *Gesztelyi Ernő:* Trigonometria és komplex számok. (Előadás ált. isk. nevelők számára a jászberényi fiúgimnáziumban.)

Március 25. *Fuchs László:* Csoportok és szerepük a matematikában. (Előadás tanárok és egy. hallgatók számára.)

Október 8. *Császár Ákos:* Az integrálfogalom kialakulása.

November 26. *Körmendi István:* Járművek és vasszerkezetek rezgése. $x^{(n)} = f(x)$ differenciálegyenlet megoldása homogén kezdeti feltételekkel. Megoldás Cauchy és Duhamel integrál segítségével. Példák, szemléltetése az elmondottaknak, a közlekedés területéről. Járművek és vashidak viselkedése.

November 16. *Bukovszky Ferenc:* Feladatmegoldási módszerek. (Középiskolai délután a jászberényi gimnáziumban.)

December 14. *Révai Katalin:* Egyenlőtlenségek. (Előadás a mezőtúri gimnáziumban.)

December 17. *Bukovszky Ferenc:* A Schrödinger-féle egyenlet. (Tanári továbbképző előadás.)

Október 6. *Aczél János:* Matematikus szemmel a Lengyel Népköztársaságban.

Október 19. *Gesztelyi Ernő:* Vektoralgebra. (Középiskolai előadás a mezőtúri leánygimnáziumban.)

A Bolyai János Matematikai Társulat nyíregyházi tagozatának 1953—54. évi rendezvényei

1953 április 18. *Kuzaila Péter:* Egy számelméleti játék ismertetése történeti háttér keretében.

Június 28: *Reményi Gusztáv:* Az algebrai egyenletek elmélete.

Szeptember 12. *Ambrózy Géza:* A pythagorasi számhármasok.

Október 10. *Prékopa András:* A matematika gyakorlati alkalmazásairól. (Középiskolai délután.)

Október 11. Ankét a középiskolai matematika-oktatás problémáiról. Az ankét bevezető előadását *Barna Béla* és *Csorba József* tartották.

November 12. Özv. *Irsai Rezsőné:* Az Apollonius-kör és a vele végezhető szerkesztések. (Középiskolai délután.)

December 5. *Ambrózy Géza:* A kombinatorika elemei. (Középiskolai délután.)

December 13. *Bereznai Gyula:* A hiperbolikus függvényekről. (Előadás tanárok részére.)

December 22. *Ambrózy Géza:* A pythagorasi számhármasok. (Középiskolai délután a nagykállói ált. gimnáziumban.)

1954 január 24. *Gyires Béla:* A lineáris egyenletrendszerek megoldásának geometriai háttere.

Február 21—22. Konferencia a Társulat és a Központi Pedagógustovábbképző Intézet közös rendezésében.
A konferenciát követően az alábbi előadások hangzottak el:
Faragó László: A teljes indukció.
Gallai Tibor: A Bolyai-geometria Poincaré-féle modellje.
Kertész Andor ismertette Szele Tibor: Bevezetés az algebrába c. könyvét.

Március 14. *Lipa András*: Hogyan használjuk fel tanításunkban a két IV. osztályos tankönyvet.
A Magyar-Szovjet Barátsági Hónap alkalmával a „Matematikai teljes indukcióról" a következő előadásokat rendezte a tagozat:

Március 2. Budai Nagy Antal gimnázium, Nagykálló. Előadó: *Kristóf János.*

Március 6. Tanítóképző, Nyíregyháza. Előadó: *Nyulasi Imre.*

Március 11. Pénzügyi technikum. Előadó: *Reményi Gusztáv.*

Március 11. 7. sz. Magasépítőipari technikum. Előadó: *Reményi Gusztáv.*

Március 17. Kossuth gimnázium. Előadó: *Lipa András.*

Március 17. Közgazdasági technikum. Előadó: *Bereznai Gyula.*

Március 19. Zrinyi Ilona leánygimnázium. Előadó: *Baditz Károly.*

Március 23. 14. sz. Gépipari technikum, Kisvárda. Előadó: *Hafenscher András.*

* * *

Április 28. *Reményi Gusztáv:* Egyenletek ekvivalenciája. (Továbbképző előadás.)

Május 9. *Bereznay Gyula:* Kombinatorika. (Szakmai segítség ált. isk. tanárok számára.)

Május 15. *M. Takács Ferenc*: A π története az újkorig.

Május 16. *Reményi Gusztáv:* Differenciálszámítás I—II—III. (Szakmai segítség ált. isk. tanárok számára.)

Május 16. *Ambrózy Géza:* A Pascal-háromszög és a binomiális tétel. (Szakmai segítség ált. isk. tanárok számára.)

Május 22. *Ambrózy Géza:* Az Apollonius kör. (Középiskolai délután.)

Május 23. *Ketskeméti János:* Differenciál és integrálszámítás.

Május 23. *Nyulási Imre:* Térmértan. I—II.

Május 23. *Reményi Gusztávné:* Síkidomok hasonlósága.

Június 13. *Bereznay Gyula:* Komplex számok.

Június 13. *Nyulasi Imre:* A négyzetgyök geometriai vonatkozásai.

Június 17. *Ambrózy Géza:* Másodfokú egyenlet.

Június 20. *Reményi Gusztávné:* Magasabbfokú egyenletek.

Június 20. *Nyulasi Imre:* Sorozatok.

Június 20. *Ketskeméti János:* Az összetett függvények differenciálhányadosa.

Június 27. *Ambrózy Géza:* Magasabbfokú algebrai egyenletek.

Június 27. *Reményi Gusztávné:* A logaritmus.

Június 27. *Ketskeméti János:* Reciprokegyenletek.

Július 4. *Ambrózy Géza:* Feladatmegoldások.

Szeptember 11. *Bereznay Gyula:* A geometriai inverzió.

Szeptember 24. *Reményi Gusztáv:* Az egyenletek egyenértékűsége. (Középiskolás diákdélután.)

Szeptember 26. *Ambrózy Géza:* Függvények vizsgálata. (Ped. Főiskola levelező hallgatói számára.)

Október 10. *Reményi Gusztáv:* Magasabbfokú egyenletek, komplex számok. (Ped. Főisk. lev. hallgatói számára).

Október 10. *Ambrózy Géza:* Differenciálhányados.

Október 13. *Reményi Gusztáv:* Az egyenletek egyenértékűsége. (Előadás Kisvárdán az általános gimnáziumban, diákok számára.)

Október 13, *Bereznay Gyula:* Feladatmegoldások. (Előadás középiskolás diákok számára a Kossuth Lajos gimnáziumban.)

Október 16. *Reményi Gusztávné:* Híres ókori szerkesztési feladatok megoldhatatlansága. (Előadás középiskolás diákok számára a Zrinyi Ilona leánygimnáziumban.)

Október 25. *Ambrózy Géza:* Oszthatósági feladatok. (Előadás középiskolás diákok számára a Kossuth Lajos gimnáziumban.)

November 27. *Baditz Károly:* Betekintés a struktúrák elméletébe. (Előadás tanárok számára.)

December 11. *Szele Tibor:* Baricentrikus koordináták. (Továbbképző előadás tanárok számára.)

A Bolyai János Matematikai Társulat szombathelyi tagozatának 1953—54. évi rendezvényei

Április 2. *Hódi Endre:* A geometria klasszikus problémái. Az előadást alakulóülés követte. A jelenlévők Vas és Zala megye közös tagozatának vezetőségi tagjaivá a következőket választották meg: elnök Bukovszky Ferenc, alelnök Pászthory Antal, titkár Czapáry Endre.

Május 9. Ankét Nagykanizsán a matematikai szakkörökről. Az ankétot megelőzte Bukovszky Ferenc szakköri bemutatója.

November 15. *Czapáry Endre:* Szélsőértékfeladatok elemi megoldása. (Előadás középiskolások részére.)

November 18. *Czapáry Endre:* Szélsőértékfeladatok elemi megoldása. (Előadás a Jurisich gimnáziumban, Kőszegen.)

December 11. *Czapáry Endre:* Néhány elemi úton megoldható szélsőérték feladat. (Előadás ált. iskolai nevelők részére.)

December 11. *Arató István:* Mit vár a fizikatanítás a mennyiségtan tanításától. (Előadás a nagykanizsai ált. gimnáziumban.)

December 16. *Bukovszky Ferenc:* A Buffon-féle valószínűségi kísérlet. (Előadás középiskolás diákok részére.)

December 18. *Czapáry Endre:* Szélsőértékfeladatok elemi megoldása. (Előadás a Vörösmarty gimnáziumban, Szentgotthárdon.)

December 20. *Czapáry Endre:* Feladatmegoldások. (Előadás középiskolások részére.)

* * *

Január 25. *Czapáry Endre* ismertette Rademacher—Toeplitz: Számokról és alakzatokról c. szakköri füzetet. (Előadás a celldömölki ált. gimnáziumban.)

Február 13. *Pászthory Antal:* A nomográfia néhány kérdése. (Előadás középiskolások részére.)

Február 24. *Jónás Márton:* Szimmetrikus egyenletek. (Előadás középiskolások részére.)

Február 23. *Keresztury György:* A vektoralgebra elemei és alkalmazásuk. (Előadás Nagykanizsán, tanárok részére.)

Február 27. *Czapáry Endre:* ismertette Rademacher—Toeplitz: Számokról és alakzatokról c. szakköri füzetet. (Előadás a nagykanizsai ált. gimnáziumban.)

Február 23. *Keresztury György:* A matematika szerepe és jelentősége a fizikatanításban. (Előadás tanárok részére.)
A szombathelyi tagozat a Magyar-Szovjet Barátsági Hó-

nap alatt a „Matematikai teljes indukcióról" a következő előadásokat tartotta:

Március 16. Nagy Lajos gimn. Szombathely. Előadó: *Czapáry Endre.*

Március 17. Tanítóképző, Kőszeg. Előadó: *Karner Emilia.*

Március 22. Szakérettségis Tanfolyam. Előadó: *Czapáry Endre.*

Március 26. Közgazdasági Technikum, Szombathely. Előadó: *Kalons Róza* és *Szekér Aranka.*

Március 29. Ált. gimn. Nagykanizsa. Előadó: *Kertész Ilona.*

Március 29. Jurisich Miklós gimn. Kőszeg. Előadó: *Varga Jusztina.*

Április 2. Ált. gimn., Zalaegerszeg. Előadó: *Zsuppán József.*

* * *

Április 19. *Buvári András:* Érdekesebb matematikai feladatok.

Április 22. *Czapáry Endre:* Elemi és analitikus geometriai módszerek összehasonlítása. (Előadás a Jurisich gimnáziumban, Kőszegen.)

Április 24—25. Konferencia a K. P. T. I. és a Társulat közös rendezésében, a következő tárgysorozattal:

Bemutató tanítás és vita.

Szakmai továbbképzési konferencia.

Hódi Endre: Problémák a területszámítással kapcsolatban.

Surányi János: Lineáris egyenletrendszerek.

Rényi Alfréd: Szakkörökben bemutatható valószínűségszámítási kísérletekről.

Április 28. *Varga Tamás:* Átdarabolási kérdésekről. (Előadás tanárok számára.)

Április 28. *Csontos Miklós:* Feladatmegoldások. (Előadás a sárvári ált. gimnáziumban.)

Május 4. *Czapáry Endre:* Elemi és analitikus geometriai módszerek összehasonlítása. (Előadás a Zrínyi Miklós gimnáziumban, Zalaegerszegen.)

Május 4. *Varga Árpád:* A reciprok egyenletek megoldása. (Előadás az Irányi Dániel gimnáziumban, Nagykanizsán.)

Október 23. *Jónás Márton:* Szakköri problémák.

Október 23. *Keresztury György:* A vektoralgebra elemei (példákkal).

November 30. *Varga Árpád:* A számolási és mechanikuskészség fejlesztése.

November 20. *Varga Tamás:* Geometriai szerkesztések. (Továbbképző előadások a Zalaegerszegi Tanítónőképzőben.)

December 18. *Visnya Aladár:* Szabályos testekre vonatkozó feladatcsoportok.
Keresztury György: Vektorok alkalmazása trigonometriai problémák megoldására.

A Bolyai János Matematikai Társulat kecskeméti tagozatának előadásai

Március 20. *Pásztor István:* A halmazelmélet elemei.
Szendrei János: Magasabbfokú algebrai egyenletek. (Alakuló ülés. A tagság a következő vezetőséget választotta meg: elnök Schronk Jenő, Kiskunfélegyháza, alelnök: Borsodi István, Kecskemét, titkár: Szemerey Andor, Kecskemét.)

Április 15. *Szemerey Andor:* A teljes, matematikai indukció.

Április 30. *Faragó László:* Az algebra alkalmazása geometriai szerkesztésekben.

Május 14. *Szemerey Andor:* Feladatmegoldások.

Május 22. *Vincze István:* A valószínűségszámítás elemei.

November 20—21. Konferencia a K. P. T. I. és a Társulat közös rendezésében a következő tárgysorozattal:

Bemutató tanítás a Katona József gimnáziumban. A bemutató tanítást *Szabó Tiborné* tartotta, az azt követő vitát *Hamza Győzőné* vezette.

Császár Ákos: A topológia elemei.
Mikolás Miklós: A számelmélet analitikus módszerei.
Hódi Endre: Térmértani feladatok.

HÍREK

Új, bővített kiadásban jelent meg A. N. Kolmogorov „A matematikus hivatásról" című tanulmánya (А. Н. Колмогоров, О профессии математика, Советская Наука, Москва 1954, 1—29), amelynek első kiadását Társulatunk az 1952. évi Magyar—Szovjet Barátsági Hónap folyamán előadásokban ismertette tagjaival. A füzet egyik függeléke ismerteti a Moszkvai Lomonoszov-egyetemen folyó matematikus szakképzést. A Lomonoszov-egyetem matematika szakos hallgatóit a matematika és annak alkalmazásai terén végzendő tudományos munkára, továbbá főiskolai és középiskolai oktatómunkára készíti elő. A végző, matematika-szakos hallgatók túlnyomó része az egyetem elvégzése után különböző tudományos és műszaki kutató intézetekben, nagyüzemekben nyer elhelyezést, egy részük egyetemi, ill. főiskolai tanársegédként, kisebb számban középiskolai tanárként helyezkedik el, más részük aspiráns lesz.

A szakképzés a harmadik évben két szakra tagozódik: a „matematika" és a „numerikus matematika" szakra. A matematika szakos hallgatók a negyedik évben a következő irányok egyikében specializálódnak: 1. Analízis, 2. Algebra, 3. Geometria és topológia, 4. Differenciálgeometria, 5. Valószínűségszámítás, 6. Számelmélet, 7. Differenciálegyenletek, 8. Függvénytan és funkcionálanalízis, 9. Matematikatörténet.

A geometriai tanszéken külön nomográfiai kabinet, a valószínűségszámítási tanszéken statisztikai laboratórium működik. A numerikus matematika tanszéke mellett elektrotechnikai és rádiótechnikai laboratórium, továbbá matematikai gépekkel foglalkozó laboratórium működik, amelyek a legmodernebb felszereléssel vannak ellátva. A kötelező előadások mellett évente számos speciális matematikai előadás is folyik az egyetemen, amelyben az egyetem professzorai a matematika legújabb eredményeiről számolnak be. A szemináriumok a matematika aktuális megoldatlan problémáival foglalkoznak; a szemináriumokban folyó kutatómunkában nemcsak

a felsőbb évfolyamok, hanem az alsóbb évfolyamok hallgatói is aktívan részt vesznek.

A Moszkvai Lomonoszov egyetemen nyerte kiképzését a jelenleg a Szovjetunióban működő matematikusok jelentős része. Számos matematikus, aki a Moszkvai Lomonoszov egyetemen tanult, későbbi munkája során a modern matematika módszereit jelentősebb mértékben felhasználó más tudományok terén végzett jelentős kutatómunkát, így pl. M. V. Keldüs, M. A. Lavrentyev, L. P. Szretenszki a mechanika terén, A. N. Tyihonov, A. M. Obuhov a geofizika terén stb. Ilyenformán a moszkvai Lomonoszov egyetem matematikus-szakképzése nemcsak a matematika, hanem számos más, matematikai módszereket nagyobb mértékben felhasználó tudomány szakemberei kiképzésének is jelentős centruma.

* * *

A Lengyel Tudományos Akadémia Matematikai Intézete 1954. december 28-tól 30-ig Wroclawban tudományos konferenciát rendezett a sztochasztikus folyamatok elméletéről. A megnyitó előadást E. Marczewski professzor, a wroclawi Boleslaw Bierut Egyetem rektora tartotta. Előadásában áttekintést adott a wroclawi matematikusok kutatásairól a sztochasztikus folyamatok elmélete terén. A konferencián részben elméleti jellegű előadások hangzottak el, így C. Ryll-Nardzewski és mások számoltak be legújabb eredményeikről, részben a sztochasztikus folyamatok elméletének fizikai és technikai alkalmazásaira vonatkozó előadások szerepeltek, így pl. K. Urbanik és mások beszámoltak azokról a kutatásokról, amelyeket a sztochasztikus folyamatok elméletének a kozmikus sugárzás vizsgálatára vonatkozó alkalmazása terén fizikusok és matematikusok szoros együttműködésben elértek. Az említett kutatások többek között a Jánossy Lajos akadémikus által felállított ún. G-egyenletre vonatkoznak. A konferencián részt vett A. Špaček prágai matematikus, aki sztochasztikus egyenletek megoldására vonatkozó vizsgálatairól, továbbá a sztochasztikus folyamatok elméletének a radar-technikában való felhasználásáról tartott előadást. Hazánkból Rényi Alfréd vett részt a konferencián és „Sztochasztikus folyamatok feltételes határeloszlásai" címen tartott előadást. A konferencia megemlékezett a valószínűségszámítás történetének két nevezetes évfordulójáról: Bernoulli Jakab születésének 300. évfordulójáról és A. Moivre halálának 200. évfordulójáról.

* * *

Kalmár László lev. tag 1954 novemberében a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében három hetet töltött a Német Demokratikus Köztársaságban. Berlinben, Jenában, Rostockban,

Drezdában és Greifswaldban tartott előadásokat a következő témákról: „Gödel és Church tételei a dialektikus materializmus megvilágításában", „A szemlélettől az absztrakt fogalomalkotásig az analízis elemeinek egyetemi oktatásában", „A szűkebb logikai függvénykalkulus eldöntésproblémájának rekurzív megoldhatatlanságának direkt bizonyítása", „Gödel és Church tételeinek egyszerűsített bizonyítása", „Folytonos aritmetikai függvények a Baire-féle null-térben és összefüggésük a matematikai logikával."

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA:

Valós függvények és függvénysorok

Szőkefalvi-Nagy Béla nemrég megjelent tankönyve az első magyar nyelvű, összefoglaló valós-függvénytani munka. Veres Pálnak — a felszabadulás előtt megjelent — „Valós függvények" című tankönyve ugyanis meglehetősen szűk anyagot ölel fel, P. Sz. Alexandrov: „Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe" című műve (Budapest, 1952) pedig — mint egy két kötetesre tervezett mű első kötete — csak az ún. leíró halmaz- és függvényelméletet tárgyalja. Tekintve, hogy a Fourier-sorokkal és ortogonális polinomokkal kapcsolatos magyar nyelvű irodalom aránylag gazdagabb (Natanszon: Konstruktív függvénytan, Ahijezer: Előadások az approximáció elméletéről, Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei), a tankönyvvel foglalkozó második része nem olyan részletes, mint az első, valós függvényekről szóló általános rész.

A tankönyv III.—VII. fejezetei anyagukban és felépítésükben lényegében megegyeznek a szerzőnek Riesz Frigyessel közösen írt francia nyelvű műve első részével, (F. Riesz—B. Sz.-Nagy: „Leçons d'Analyse fonctionnelle", Bpest, 1952.) bár tárgyalásmódjuk annál lényegesen részletesebb.

Külön kiemelendőnek tartjuk a könyv bevezetését, melyben a szerző igen érdekesen ismerteti a függvényfogalom fejlődését, Eulertől napjainkig. Követendő példának tartjuk, hogy a szerző foglalkozik a könyvben tárgyalt fogalmak történeti fejlődésével.

A könyv I. fejezete az absztrakt halmazelmélet, a halmazalgebra és a ponthalmazok elméletének elemeit ismerteti.

A II. fejezet a függvények leíró elméletét tárgyalja. A szerző ebben a fejezetben részletesen kitér folytonos függvények sorozatainak vizsgálatára. Kiemelkedő a fejezetből Weierstrass approximációtételének egy Stone-tól származó igen messzemenő általánosítása. Végül ebben a fejezetben van érintve a függvények Baire-féle osztályozása is.

A III. fejezet a differenciálhatóság kérdéseit vizsgálja, középpontba a monoton függvény differenciálhatóságára vonatkozó Lebesgue-féle tételt állítva, Riesz Frigyes bizonyításával. A fejezet túlmegy az egyetemi anyagon, amennyiben a derivált számokra vonatkozó, immár klasszikussá vált, Denjoy—Young—Saks tételt is tárgyalja.

A IV. fejezet a Riemann-integrálról szól. Ez a fogalom az intervallumfüggvények integrálásával és differenciálásával kapcsolatos általános tételek közé van beágyazva. A fejezetben többváltozós függvények Riemann-integrálja is érintve van.

Az V. fejezet a Lebesgue-integrálnak és fontosabb alkalmazásainak van szentelve. A szerző az integrált — Riesz Frigyest követve — a mérték fogalmát megkerülve, lépcsősfüggvények integráljaira vezeti vissza; és csak az integrál után értelmezi a mértéket, mint a karakterisztikus függvény integrálját. Ismerteti röviden az integrál eredeti, Lebesgue-féle felépítését is, és kimutatja a két definíció ekvivalenciáját. Tekintve azonban a Lebesgue-féle felépítés jelentőségét és didaktikai értékeit, azt hisszük, hogy annak részletesebb tár-

gyalása, egy a fejezetet kiegészítő függelékben, növelte volna a tankönyv használhatóságát. A fejezet érinti többváltozós függvények Lebesgue-integrálját is.

A VI. fejezet a Riemann—Stieltjes és Lebesgue—Stieltjes integrált, valamint az absztrakt Lebesgue-integrált tárgyalja. A Stieltjes-integrál jelentősége a folytonos függvények terének lineáris operációra vonatkozó Riesz-féle tétellel van alátámasztva. Az absztrakt Lebesgue-integrál definíciója az absztrakt térben értelmezett általánosított lépcsős függvényekre van alapozva, ami kissé mesterkéltnek tűnik.

A VII. fejezet a négyzetesen integrálható függvényeknek van szentelve. Nagyon emeli a fejezet érdekességét, hogy az L^2 függvénytérre vonatkozó általános tételek mellett speciális ortogonális rendszerek (pl. Haar-féle rendszer, Rademacher-féle rendszer) vizsgálata, valamint a Schmidt-féle ortogonalizálási eljárás is helyet kapott. Ilyen módon a fejezet átvezet a könyv sorelméleti részébe, amelyik a

VIII. fejezettel kezdődik. Ez a fejezet a Fourier-sorok konvergenciájának kérdéseit vizsgálja. Kiemelendők a fejezetből a konjugált Fourier-sor konvergenciára vonatkozó Pringsheim és Lukács-féle tételek.

A könyv utolsó IX. fejezete a Fourier-sorokkal kapcsolatos összegezési eljárásokkal foglalkozik.

Igen emelik a könyv értékét az egyes fejezeteket kiegészítő érdekes, gondosan megválogatott feladatok.

Meggyőződésünk, hogy Szőkefalvi-Nagy Béla kitűnő könyvét nemcsak az egyetemi hallgatók, hanem minden, a tárgy iránt érdeklődő matematikus olvasó haszonnal fogja forgatni.

Kővári Tamás

A kézirat beérkezett: 1955. II. 4. — Példányszám: 900
Terjedelem 6 (A/5) ív, 10 ábra és 1 kép
A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Szöllőssy Károly

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 55 550 Felelős vezető: Vincze György

СОДЕРЖАНИЕ

Десятая годовщина освобождений нашей родины 1
П. Туран: Жизнь и деятельность Г. Грюнвалда 6
Л. Такач: Замечание к работе П. Турана „Об одной из проблем истории китайской математики“ 27
Я. Шураньи: Замечание к одной из проблем истории китайской математики 30
Г. Гусар: Об одной из проблем истории китайской математики . . . 36
Проблемы 39
Задачи 47
Из жизни Общества им. Я. Бояи 60
Известия 92
Обзор книг 95

CONTENT

The tenth anniversary of our liberation 1
P. Turán: The life and mathematical work of Géza Grünwald 6
L. Takács: Remark to a paper of P. Turán entitled “On a problem in the history of Chinese mathematics” 27
J. Surányi: Remarks on a problem in the history of Chinese mathematics 30
G. Huszár: On a problem in the history of Chinese mathematics 36
Problems 39
Examples 47
Society notes 60
Mathematical and personal news 92
Book review 95

Ára 7,— Ft.
Előfizetés évi 20,— Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor eziránytú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

312.046

MATEMATIKAI LAPOK

VI. ÉVFOLYAM

2-3.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1955

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.
Budapest, 1955. szeptember VI. évfolyam 2—3. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor.
Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.
A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.
Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20.— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Fuchs László: Szele Tibor élete és munkássága 97

Szász Pál: A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ sinus-sor maradéktagjáról 130

Péter Rózsa: Kalmár László matematikai munkássága 138

Rényi Alfréd: Egy kombinatorikai probléma, amely a lucerna nemesítésével kapcsolatban merült fel 151

Bihari Imre: Egy Sturm-tétel általánosítása és alkalmazása Bessel-függvényekre és Legendre-polinomokra 165

Fejes Tóth László: Megjegyzések Dowker sokszögtételeihez 176

Surányi János: A matematikai logika eldöntésproblémájáról 180

Mikolás Miklós: Egy végtelen szorzatokra vonatkozó Fejér-féle problémáról 198

Molnár József: Konvex tartományok beírt és körülírt poligonjairól . . . 210

L. Carlitz: A kínai matematika történetének egy problémájáról 219

Obláth Richárd: Megemlékezés Gauss halálának 100-ik évfordulóján . . 221

Az 1953. évi Beke Manó-emlékdíj bizottságának jelentése 241

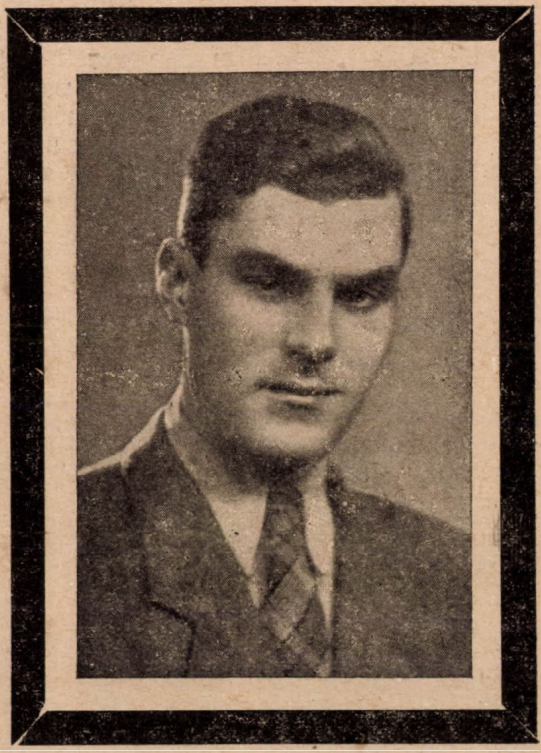
Feladatrovat 244

Példarovat 251

Társulati élet 261

Hírek 283

Könyvismertetés 289



Szele Tibor élete és munkássága*

1918—1955

Pótolhatatlan veszteség érte a magyar tudományt az absztrakt algebra nagyhírű művelőjének, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem fiatal professzorának, SZELE TIBORnak elhunytával. Rövid, súlyos betegség szólította el közülünk; hiábavalónak bizonyult minden emberi igyekezet, a szegedi orvostudományi egye-

* A Bolyai János Matematikai Társulat 1955. május 13-iki ülésén elhangzott megemlékezés.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

tem tudós professzorainak erőfeszítése, a fiát oly mérhetetlenül szerető édesanyának és az őt körülvevő aggódó matematikus-barátainak szerető gondoskodása — a végzetet nem lehetett feltartóztatni. Sírba szállt az alkotóereje teljében lévő ifjú tudós, a szebbnél-szebb tervektől, gondolatoktól terhes fiatal kutató, a maga alapította s az ő gondozása nyomán virágzásnak indult debreceni csoport-elméleti iskola köztiszteletben álló vezetője, hallgatóinak hőn szeretett professzora, a jóságos és önzetlen barát. Siratja őt, a nemesszívű embert, mindenki, aki szeretetreméltó egyéniségét, puritán jellemét, utolérhetetlen szerénységét megismerte. Az egyetlen gyermeküket sirató szülőknek, a családnak, a barátoknak, a debreceni egyetemnek gyászában osztoznak a magyar matematikusok, s tagjaival együtt Társulatunk is, mely az elhunytban egyik megalapítóját, debreceni tagozatának alelnökét, egyik legaktívabb tagját vesztette el.

Ha valaki idegen hagy itt bennünket örökre, akkor sem tudnánk megilletődés nélkül szólani fiatal életnek ily hirtelen elmulásáról, nemes ember s neves tudós ily korai távozásáról. S menynyivel kevésbé tudhatunk erőt venni magunkon, mikor a mi szeretett SZELE TIBORunkról, az ő rövid, de eredményekben oly gazdag életéről, az ő feledhetetlen példaadásáról emlékezünk. Oly hihetetlen, de — fájdalom — szomorú való, hogy soha többé nem láthatjuk szeretetreméltó alakját, mosolygó arcát, nem hallhatjuk ragyogó előadásait, tudományszomjtól áthatott s fenkölt gondolkodását tükröző szavait. Nem gazdagítják többé matematikai tudományunkat az ő tudományos eredményei és nem támogathatják az ő útmutató tanácsai a szárnyukat bontogató ifjú algebristáinkat — a halál kegyetlen parancsa elszólította őt közülünk.

És gyászunkban emlékezünk. Emlékezünk arra, aki minden téren, nemes szíve utolsó dobbanásáig oly szeretettel, oly lelkesen, oly példaadóan teljesítette kötelességét. S midőn most az ő emlékét idézzük és felelevenítjük életét, tudományos eredményeit, az elmúlása okozta mély fájdalom mellett büszkeség is tölti meg szívünket: büszkeség, hogy ő a mienk volt, a mi szeretett tudományunknak volt oly mestere, akit mindenkor példaképül állíthatunk az új tudós nemzedék elé.

*

SZELE TIBOR 1918 június 21-én született Debrecenben, ahol édesapja középiskolai, majd főiskolai tanárként működött. Alsó- és középfokú iskoláit szülővárosában végezte mindvégig a legjobb eredménnyel. Már gimnazista korában felkelti érdeklődését a matematika, szeretettel fordul matematikai problémák felé és V—VIII. osztályos korában rendszeres megoldója a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapoknak. 1934-ben e lap országos pályázatán az

I. díjjal őt tüntették ki. 1936-ban kitüntetéssel tette le érettségi vizsgáját a debreceni református gimnáziumban és az ugyanazon évben rendezett Eötvös Loránd matematikai tanulóversenyen az I. díjat nyerte el; a bíráló bizottság jelentésében külön kiemelte szabatos matematikai gondolkodásra valló megoldásait. Egyetemi tanulmányait a budapesti műegyetemen kezdte el mint gépészmérnök hallgató, de I. félévi vizsgáinak letétele után — engedve régi vágyának a matematika iránt — eltávozik a műegyetemről és beiratkozik a debreceni tudományegyetemen a matematika-fizika szakra. Itt hamar felfigyelnek a tehetséges ifjúra és 1937 szeptemberétől egészen tanári diplomája megszerzéséig a matematikai szemináriumban működik díjtalan gyakornokként. III. éves korában egyik dolgozatát az egyetem pályadíjjal tüntette ki. Tanári vizsgáit végig kitűnő eredménnyel teszi le, és 1941 januárjában megszerzi középiskolai tanári diplomáját.

1941 februárjában volt tanárának, SZÉLL KÁLMÁN professzornak meghívására Szegedre megy, ahol az elméleti fizikai intézet tanársegédje lesz. Szegedre kerülésekor SZELE tudományos fejlődése még nem bontakozott ki, bár kiváló képességei mindenkire mély benyomást tettek. Annak ellenére, hogy oktatási munkáját az elméleti fizikai tanszék mellett végzi, már akkor is a matematika, különösen pedig az algebra érdekli. Rendkívüli alapossággal tanulmányozza VAN DER WAERDEN *Moderne Algebra* könyvének mindkét kötetét, betekintést nyer a Szegeden folyó intenzív tudományos munkába és megcsapja őt is a szegedi matematikai intézet izzó tudományos levegője. Erre az időszakra SZELE mindig a legnagyobb szeretettel emlékezett vissza, hálával gondolva mindazokra, akik felkarolták őt, bevezették a tudományos kutatás módszereibe, (elsősorban KALMÁR, RÉDEI). Egy RÉDEI által felvetett nehéz gráfelméleti problémával foglalkozik, és bár a probléma nem látszott eredetileg különösebb érdekességűnek, SZELE kiváló kombinatorikai képességével a felvetett problémán lényegesen túlmenő eredményekre jutott. 1942 őszére elkészül az erről szóló doktori disszertációja, de alighogy kész volt a bírálat, be kellett vonulnia katonai szolgálatra, s emiatt doktori szigorlatát csak 3 és $^1/_2$ év múlva tudta letenni. Megszakítás nélküli katonáskodása 1945 tavaszán ért véget, mikor alakulatát nyugatra vezényelték, de SZELE a parancsot megtagadva — számolva az esetleges súlyos következményekkel is — úgy határozott, hogy nem hagyja el az ország területét. A vasúti közlekedés megindulása után visszatért Szegedre és elfoglalta régi állását. A hosszú katonai szolgálat testileg-lelkileg nagyon kimerítette a gyenge fizikumú ifjút és emellett három értékes alkotóképes esztendőtől fosztotta meg. Fokozatosan kapcsolódik be a munkába, leteszi doktori szigorlatát, amelynek alapján

sub laurea almae matris avatják doktorrá. 1946 szeptemberében megválik az elméleti fizikai intézettől és véglegesen átkerül a matematikára. A szegedi Bolyai Intézetben eltöltött két év a tudományos kibontakozás ideje. Ekkor ismerkedik meg RÉDEI mellett behatóan a modern algebra módszereivel s kezdi meg azokat a kutatásait, amelyek már pályája kezdetén is értékes gyümölcsöket hoztak.

1948-ban visszatér a debreceni egyetemre, amely rögtön magántanárává habilitálja. SZELE csak nehezen tudott megválni a szegedi matematikai intézettől, ottani mestereitől s barátaitól, hogy engedve szülővárosa hívó szavának, ott önálló munkakört lásson el. Szegedtől azonban nem tudott elszakadni, évente többször is ellátogatott Szegedre, esetleges szegedi letelepedés gondolata is foglalkoztatta. Sűrű levelezése a szegediekkel való kapcsolatot, tudományos együttműködést csak még jobban elmélyítette. Mintha a kérlelhetetlen sors is tisztelte volna benne ragaszkodását Szeged iránt, mikor e város képével zárta le örökre szemét.

Mint a debreceni matematikai intézet intézeti tanárát éri 1950-ben a megüresedett 2. matematikai tanszék vezetői megbízatása. Egyetemi katedráján intenzív tudományos tevékenysége mellett igen eredményes oktató-nevelő munkát fejt ki és tanítványai egymásután jelentkeznek önálló publikációval: kialakul a debreceni algebrai iskola. 1952-ben a legmagasabb kormánykitüntetésben részesül: *Kossuth-díj*jal jutalmazzák tudományos munkásságát. Ugyanezen évben egyetemi tanári kinevezést nyer és a Tudományos Minősítő Bizottság a matematikai tudományok doktorává nyilvánítja. Nagy oktatási elfoglaltsága mellett sok más feladatot is magára vállalt, amelyeknek példaadóan lelkiismeretes elvégzése meglehetősen igénybevette mind testileg, mind szellemileg, úgyhogy betegeskedése sokszor állandó jellegűvé vált. Ennek ellenére rendkívüli aktivitásával ritka termékenységgel publikált. Betegségeivel rendkívül szívósan dacolt, ami bizakodóvá tett bennünket utolsó súlyos betegségénél is. De bizakodásunkat mély döbbenet váltotta fel, mikor a megrendítő hírt vettük, hogy 1955 április 5-én örökre eltávozott körünkből.

Rövid életének is csak alig egy évtizedére terjedhetett ki tudományos munkássága, de e rövid idő alatt is igen értékes eredményekkel gazdagította a tudományt. Érdeklődésének középpontjában a végtelen Abel-csoportok állottak, de emellett behatóan foglalkozott gyűrűelmélettel s a modern algebra egyéb ágaival is. Az általa felvetett kérdések mindig érdekeseknek bizonyultak, sokszor egész meglepőek voltak; mesterkélt erőltetett problémák sose érdekelték. Eredményei sok esetben érdemleges előrehaladást jelentettek még megoldatlan problémák felé. Szerette a nehéz proble-

mákat és ezeket mindig több oldalról igyekezett megközelíteni. Azzal a ritka képességgel volt megáldva, hogy kimerítettnek látszó, lezártnak vélt területeket is új gondolatokkal tudott gazdagítani. Mély meglátásai, eredeti ötletei sokszor ejtették bámulatba környezetét. A tudományért való lelkesedése, a kutató-munka iránti szeretete szinte szárnyakat adott neki, s magával ragadta matematikus-barátait, hallgatóit is. Egy-egy előadását Társulatunk budapesti központjában, vagy valamelyik vidéki tagozatában az algebrai kutatásokon kívül állók is nagy élvezettel hallgatták: a lényeget kidomborító világos okfejtése, élvezetes stílusa, ízes magyarsága legkedveltebb előadóink közé emelték. Egyetemi katedrájáról tartott előadásain kívül ezen előadásai is nem kis mértékben járultak hozzá az absztrakt algebra megkedveltetéséhez. Saját tudományos eredményeit ismertető előadásokon kívül szívesen vállalt összefoglaló jellegű beszámolókat is, mint az Akadémián tartott referátuma a hazai absztrakt algebrai eredményekről, vagy a szovjet csoportelméleti iskola régebbi és újabb eredményeiről szóló áttekintés. Többször tartott előadásokat pedagógusok számára, s nagy figyelemmel kísérte az őáltala kezdeményezett „középiskolai matematikai délutánokat", amelyeket azóta Társulatunk az ország sok helyén rendszeresített, mivel igen hasznosnak bizonyultak a középiskolai diákok matematikai érdeklődésének felkeltésében. Résztvett Társulatunk központi lapjának, a *Matematikai Lapok*nak szerkesztésében és mint felelős szerkesztő irányította a debreceni egyetem matematikai intézete által kiadott *Publicationes Mathematicae* folyóiratot. Főként az ő lelkes s fáradhatatlan munkájának köszönhető, hogy e fiatal folyóirat megjelenése pillanatától kezdve nemzetközi nívójú és külföldi szerzők által is szívesen felkeresett szaklappá vált, amely a világ szinte minden részébe eljut. E folyóirat ügyét mindig szívén viselte, cikkeinek jelentős hányadát is ebben a lapban tette közzé.

Eddig megjelent és még sajtó alatt lévő tudományos munkáinak jegyzéke 55 cikket és 1 tankönyvet tüntet fel. Jónéhány további eredménye volt már — több hosszabb idő óta is — publikálásra érett állapotban, de nem jutott hozzá, hogy ezeket megírja. Sajnos ezekről alig készített jegyzeteket, s így feltehetőleg csak igen kevés lesz ezekből megmenthető jegyzetei és matematikus-barátainak visszaemlékezései alapján. Kiterjedt referensi tevékenységet fejtett ki a *Zentralblatt für Mathematik* és a *Mathematical Reviews* referáló folyóiratoknál.

Széles látókörű s nagy irodalmi tájékozottsággal rendelkező művelője volt a modern algebrának. Kutatási területét céltudatosan szélesítette, állandóan figyelemmel kísérve és felhasználva a legújabb külföldi eredményeket is. Rendszeres levelezést folytatott a

mai algebristák néhány legkiválóbbjával, így A. G. KUROS szovjet akadémikussal is, akitől nem egy értékes indíttatást nyert kutatómunkájához. SZELÉNek oroszlánrésze van abban, hogy KUROS kitűnő csoportelméleti monográfiája magyar fordításban is megjelenik. Mindenkor a legnagyobb érdeklődéssel forgatta a világhírű szovjet csoportelméleti iskola tagjainak publikációit; számos eredménye szovjet kutatásokhoz kapcsolódik. KUROSon kívül más szovjet matematikusokkal (KULIKOV, CSERNYIKOV) is összeköttetésben volt, de termékenynek bizonyultak egyes kiváló nyugati algebristákkal való kapcsolatai is (R. BAER, B. H. NEUMANN stb.). Azt pedig, hogy a hazai algebristákkal való rendszeres eszmecseréi, a velük való intenzív együttműködés mily gazdag eredményeket hozott, mindennél ékesebben bizonyítja az a tény, hogy viszonylag neki van a legtöbb közös cikke valamennyi magyar matematikus közül. SZELE sok oly problémát is felvetett, melyeket megoldásra másoknak, tanítványainak engedett át. Már eddig is mintegy 80-ra tehető azon dolgozatok száma, amelyek általa felvetett problémákat vitatnak meg, vagy az ő eredményeihez kapcsolódnak. Publikációinak nagy sikere nemcsak a bennük foglalt értékes eredményeknek köszönhető, hanem annak is, hogy helyesen ismerte fel a fejlődés irányát, de hozzájárult e sikerhez az is, hogy cikkeit mindig igen élvezetesen és világosan írta meg. Arra törekedett, hogy az olvasónak minél könnyebb dolga legyen a cikk olvasásakor. Cikkeit megfogalmazás tekintetében is követendő példaként említhetjük.

SZELÉTŐL, a matematikustól, tudományágának nagyrabecsült művelőjétől nem választható el SZELE, az ember. Szinte közmondásos udvariasságát, rendkívüli szerénységét és segítőkészségét ha némelyek talán túlzottnak is vélték, felismerhették, hogy ezek lelke mélyéből fakadó őszinte, természetes megnyilvánulások voltak, s hogy őt csupán embertársai iránti szeretete, tisztelete vezette. Hálás szíve szeretetével ragaszkodott mestereihez, kutatótársaihoz, barátaihoz és mindenkihez, aki vele jót tett, vagy jó szót váltott. De érző szíve sebet kapott, mikor a fasizmus embertelenségeit látta, mikor rosszindulatot, a tudományos munkának kellő megnemértését tapasztalta, és hogy ez mennyire fájt neki, arról sokszor csak meghittebb barátainak szólott.

Sok mindent sorolhatnánk még fel SZELE TIBORról. Beszélhetnénk egyetemi előadásairól, arról a szinte baráti viszonyról, amely őt hallgatóihoz fűzte, szólhatnánk aspiránsvezetői, tudományos utánpótlás-nevelő munkájáról és igen sokat mondhatnánk még el arról a meleg barátságról, amely őt sokunkhoz kapcsolta. A visszaemlékezés fájó képei helyett hadd szóljanak most az ő maradandó tudományos eredményei.

*

A következőkben ismertetjük SZELE tudományos eredményeit tárgykörök szerint csoportosítva. Az egyes tárgykörökön belül is sokszor eltérünk a dolgozatok megjelenésének időrendi sorrendjétől annak érdekében, hogy az egyes eredmények logikai összefüggését minél jobban kidomboríthassuk.

Abel-csoportokra vonatkozó eredményei

Mielőtt SZELÉnek az Abel-csoportok elméletében elért eredményeit ismertetnők, előzőleg — hogy mondanivalónkat ne kelljen megszakítanunk a szükséges fogalmak s alapvető tételek ismertetésével — a feltétlenül szükséges előismereteket összefoglaljuk.*

Ebben a részben csoporton mindig oly Abel-csoportot értünk, mely 1-nél több elemet tartalmaz és melyben a csoport-operációt összeadásnak írjuk. Az egységelemet ekkor 0-val jelöljük s $-a$ lesz a inverze, míg na lesz az a elem n-edik hatványa. Az a elem rendjét $O(a)$-val jelöljük; ez vagy természetes egészszám, vagy végtelen. Ha S a G csoport valamely részhalmaza, úgy $\{S\}$ jelenti a G csoportnak az S által generált alcsoportját (azaz mindazon alcsoportok metszetét, amelyek S-et tartalmazzák). $\{S\} = G$ esetén S-et G *generátorrendszerének* mondjuk. Ha emellett S végessok elemből áll, a csoportot végesen generált csoportnak nevezzük.

A G csoportról akkor mondjuk, hogy a G_α (α valamely tetszőleges számosságú, nem feltétlenül rendezett index-halmazt fut be) alcsoportok *direkt összege*, jelölésben: $G = \sum_\alpha G_\alpha$, ha 1. a G_α alcsoportok együttesen G-t generálják: $G = \{\ldots, G_\alpha, \ldots\}$; 2. tetszőleges G_α-nak az összes többi G_β által generált alcsoporttal vett metszete a 0 elem: $G_\alpha \cap \{\ldots, G_\beta, \ldots\} = 0$ $(\beta \neq \alpha)$. Ez esetben a G csoport tetszőleges g eleme pontosan egyféleképpen írható fel a $g = \cdots + g_\alpha + \cdots$ alakban, ahol az összegben minden G_α alcsoportból egyetlen g_α elem szerepel, de úgy, hogy a 0-tól különböző g_α-k számossága véges. G-nek H alcsoportját G *direkt összeadandójának* mondjuk, ha létezik egy $G = H + K$ direkt felbontás G-nek valamely alkalmas K alcsoportjára.

A G csoportot *torziócsoport*nak nevezzük, ha minden eleme végesrendű. Ellenkező esetben, ha ti. minden nemzérus eleme végtelenrendű, G-t *torziómentes*nek mondjuk. Oly csoportot, mely sem nem torziócsoport, sem nem torziómentes, *vegyes* csoportnak hívunk; nyilván ezek alkotják a legáltalánosabb csoportosztályt. Könnyű belátni, hogy vegyes csoportban a végesrendű elemek alcsoportot alkotnak, ezt a csoport *torzióalcsoport*jának mondjuk. Minden T torziócsoport felbontható egyértelműen meghatározott T_p *p-komponens*einek direkt összegére, $T = \ldots + T_p + \ldots$, ahol a T_p alcsoportok *p-csoportok* (tehát minden elemük rendje egy fix p prímszám valamely hatványa); e T_p alcsoportok T mindazon elemeiből állanak, melyeknek rendje p-nek hatványa. *Korlátos* csoportnak nevezünk egy torziócsoportot akkor, ha elemeinek rendje fix korlát alatt marad. *r-korlátú* a T torziócsoport, ha tartalmaz r-edrendű elemet, de r-nél magasabbrendűt már nem.

Az s-edrendű *ciklikus* csoportot, mely a $0, a, 2a, \ldots, (s-1)a$ elemekből áll, s melyben az elemek összeadását, kivonását mod s kell elvégezni, $C(s)$-sel fogjuk jelölni. Ezt a jelölési módot megtartjuk a végtelen ciklikus csoportra is: $C(\infty)$. Ez utóbbi a $\ldots, -2a, -a, 0, a, 2a, \ldots$ elemekből

* Az itt nem ismertetett alapfogalmakra vonatkozóan utalunk RÉDEI „Algebra" c. könyve I. kötetére.

áll. Az ún. *Prüfer-féle* vagy *kváziciklikus* (p^∞-*típusú*) csoportot $C(p^\infty)$-nel jelöljük. Ez a csoport izomorf a p-hatvány nevezőjű racionális számok additív csoportjának mod 1 vett faktorcsoportjával; vagy multiplikatív realizációban: a p-hatványrendű komplex egységgyökök multiplikatív csoportjával. $C(p^\infty)$ tehát generálható oly a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ elemekkel, melyekre teljesül:

$$a_1 \neq 0,\ pa_1 = 0,\ pa_2 = a_1,\ pa_3 = a_2, \ldots$$

R fogja jelölni az összes racionális számok addítív csoportját. nG-vel szokás jelölni az ng $(g \in G,\ n$ racionális egész) elemek halmazát. Ez G-nek alcsoportja. Könnyű látni, hogy $nG = G$ *minden* $n \neq 0$-*ra*, ha G izomorf a $C(p^\infty)$, R csoportok egyikével. Általában, *teljes*nek (vagy Szele terminológiája szerint *algebrailag zárt*nak) nevezzük a G csoportot, ha minden nemzérus n egészre $nG = G$, vagy, ami ugyanaz, ha minden p prímre $pG = G$ (p-csoport esetén elegendő ezt a szóbanforgó p-re megkövetelni). Ekvivalens definíció az, hogy G akkor teljes, ha benne az $nx = a$ egyenlet minden nemzérus egész n-re és tetszőleges a csoportelemre megoldható. Teljes csoportról kimutatható, hogy felbomlik $C(p^\infty)$ és R csoportok direkt összegére, továbbá a teljes csoportokra igaz Baer nevezetes tétele, mely szerint *ezek (s csak ezek) a csoportok direkt összeadandói minden őket tartalmazó Abel-csoportnak.*

A G csoport $a_1, \ldots, a_k$ elemeit $(a_i \neq 0)$ (lineárisan) *független*eknek nevezzük, ha az $n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k = 0$ (n_i racionális egész) reláció csak $n_1 a_1 = \cdots = n_k a_k = 0$ esetén állhat fenn. (Tehát $O(a_i) = \infty$ esetén $n_i = 0$, míg véges $O(a_i)$ esetén $O(a_i) \mid n_i$ következik.) G-nek végtelen részhalmaza definíció szerint akkor független, ha minden véges részhalmaza független. A Zorn-féle lemmából, vagy a vele ekvivalens Tukey-féle lemmából azonnal következik, hogy G-nek minden független részhalmaza kibővíthető G-nek maximális független részhalmazává. Feltéve, hogy a független rendszereket úgy választjuk, hogy vagy végtelenrendű, vagy prímhatványrendű elemekből álljanak (ami tényleges megszorítást nem jelent), igaz az, hogy G maximális független elemrendszereinek számossága G-nek invariánsa. Ezt G *rang*jának nevezzük. Ha a rang végtelen, számossága megegyezik a csoport számosságával, míg végesrangú csoport lehet akár véges, akár végtelen.

Legyen H a G-nek oly alcsoportja, amelyre teljesül a következő feltétel: ha az $nx = h$ $(h \in H)$ egyenlet megoldható G-ben, akkor van oly megoldása is, mely H-hoz tartozik. Ebben az esetben H-t H. Prüfer szerint a G *szerváns* alcsoportjának nevezzük. Világos, hogy p-csoport esetén csupán az $n = p_k$ eseteket kell ellenőrizni. Mivel torziómentes csoportban az $nx = h$ egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet, torziómentes csoportban szerváns alcsoportok metszete ismét szerváns alcsoport, és így van értelme, hogy egy S részhalmaz által generált szerváns alcsoportról beszéljünk. Ez pontosan azon y elemekből áll, amelyekre létezik oly $m \neq 0$ egész, hogy $my \in \{S\}$.

Legyen most G p-csoport. Ha $a \in G$ és k azon s nemnegatív egészek legnagyobbika, amelyekre a $p^s x = a$ egyenlet G-ben megoldható x-re nézve, akkor k-t az a elem *magasság*ának nevezzük. Ha ilyen maximális k nincs, akkor a-t végtelen magasságú elemnek mondjuk. A 0 elemet akár véges, akár pedig végtelen magasságúnak tekinthetjük (hogy mikor melyik célszerűbb, az minden egyes esetben nyilvánvaló). Könnyen adódik, hogy egy csoport végtelen magasságú elemei alcsoportot alkotnak, amely akkor és csakis akkor egyezik meg G-vel, ha G teljes. Az is világos, hogy szerváns alcsoportra az jellemző, hogy benne az elemek magasságai ugyanakkorák, mint elemeinek magasságai az egész csoportra vonatkoztatva.

Egy G csoport *endomorfizmus*ainak nevezzük a csoportnak önmagába való homomorf leképezéseit, vagyis G-nek valamely alcsoportjára való homomorfizmusait. Endomorfizmusok szorzatán értjük egymásutáni végrehajtásuk eredményét. Abel-csoportok endomorfizmusai között definiálható az összeadás is. Az endomorfizmusok gyűrűt alkotnak, az ún. *endomorfizmusgyűrűt.*

Miként említettük, SZELE tudományos munkásságának súlypontja az Abel-csoportok elméletére esik. Nagy érdeklődéssel foglalkozott ezzel az elmélettel; többször hangoztatta azt a nézetét, hogy e területen a közeljövőben is óriási feladatok várnak az algebristákra.

Első algebrai tárgyú dolgozatában egy érdekes csoportelméleti kérdéssel foglalkozik. A véges csoportok elméletében fontos feladat, áttekintést nyerni az összes n-edrendű csoportokról. SZÉP és RÉDEI meghatározták azon n számokat, amelyekhez csak kommutatív n-edrendű csoport létezik. RÉDEI eredményének korollárium-aként adódik, hogy az összes n-edrendű csoportok (a nem-kommutatívakat sem zárva ki) akkor és csakis akkor izomorfak egymással, más szóval: akkor és csakis akkor nem létezik n-edrendű csoport az n-edrendű ciklikus csoporton kívül, ha $(n, \varphi(n)) = 1$, ahol $\varphi(n)$ az Euler-féle függvényt jelöli. SZELE [2]* dolgozatában e tételre elemi bizonyítást ad, felhasználva FROBENIUS következő tételét: Egy ab-rendű csoportban pontosan b számú olyan elem van, amelynek rendje b-nek osztója, hacsak a négyzetmentes és b prímosztói mind nagyobbak a legnagyobb prímosztójánál.

[7] dolgozata is a véges csoportok elméletébe vág. A véges Abel-csoportok alaptétele értelmében e csoportok primhatványrendű ciklikus csoportok direkt összegére bonthatók. SZELE szükséges és elégséges feltételt keres arra, hogy a G véges csoport adott H alcsoportja G-nek direkt összeadandója legyen. A feltételt a G és H bázisa közti transzformációt előállító, egész számokból álló mátrix segítségével adja meg. Eredményei H. PRÜFER és K. SHODA régebbi vizsgálataival kapcsolatosak.

SZELE is bekapcsolódott a Hajós-féle csoportelméleti tétel bizonyításának egyszerűsítését célzó vizsgálatokba. Mint ismeretes, HAJÓS tétele a következőképpen szól: Ha G véges Abel-csoport (melyben a csoportoperációt most kivételesen szorzásként írjuk) felbontható $(1, a, a^2, \ldots, a^e)$ alakú komplexusainak (részhalmazainak) szorzatára:

$$G = (1, a_1, \ldots, a_1^{e_1}) \cdots (1, a_k, \ldots, a_k^{e_k})$$

(ahol a szorzatelőállítás úgy értendő, hogy G minden eleme pontosan egyszer állítható elő a jobboldalon álló komplexusokból vett egy-egy elem szorzataként), akkor legalább az egyik jobboldali faktor G-nek *alcsoportja*. HAJÓS eredeti bizonyítása, mely csoportalgebrai módszerrel történt, meglehetősen hosszú volt. RÉDEInek sikerült a bizonyítást egyszerűsíteni, SZELE [10] dolgozatában

* A szögletes zárójelbe foglalt számok SZELE tudományos munkáinak csatolt jegyzékére utalnak.

további egyszerűsítéseket hajt végre. HAJÓS és RÉDEI bizonyításaiban két segédtétel játszik igen lényeges szerepet, amelyeket ők a csoportalgebra felhasználásával bizonyítanak. SZELE egyszerűsítésének lényege mármost az, hogy az egyik segédtétel kiiktatható, sőt a bizonyítás egyes lépéseinek átrendezésével további egyszerűsítés is elérhető. Csoportalgebrai módszerre SZELÉnek csak az egyetlen segédtétel bizonyításánál van szüksége.

[34] és [43] dolgozatában a véges ciklikus csoportoknak egy érdekes tulajdonságából indul ki. Ezeknek megvan az a tulajdonságuk, hogy két különböző alcsoportjuk nem lehet izomorf egymással. SZELE mármost azon csoportokat jellemzi (a kommutativitás előzetes feltételezése nélkül), amelyeknek nincsen két különböző, egymással izomorf alcsoportjuk. Kiderül, hogy ezek éppen a kör összes végesrendű forgásaiból (másszóval az összes komplex egységgyökökből) álló csoport alcsoportjaival egyeznek meg. A véges csoportok közül tehát csak a ciklikusak jönnek számításba. SZELE bizonyítása egészen elemi és a legelemibb csoportelméleti fogalmakra épül.

A csoportelmélet egyik fontos problémája, hogy mikor bontható fel egy csoport ciklikus csoportok direkt összegére. Ezzel a kérdéssel foglalkozik [27] és [29] dolgozata, amelyek egy-egy elégséges feltételt tartalmaznak. [27] dolgozatában R. RADÓnak a végesen generált Abel-csoportok alaptételére adott bizonyításából kiindulva, olyan elégséges feltételt ad meg, mely biztosítja tetszőleges csoportnak ciklikus csoportok direkt összegére való bonthatóságát. Feltétele az, hogy G tartalmazzon oly generátorrendszert, melynek minden véges $a_1, \ldots, a_k$ részhalmazára igaz a következő: G-ben nincs oly $b_1, \ldots, b_k$ rendszer, melyre $\{a_1, \ldots, a_k\} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ és $\min_i O(b_i) < \min_i O(a_i)$.

A ciklusösszegre való bonthatósággal kapcsolatosan még meg kell említenünk SZELE egyszerű bizonyítását PONTRJAGIN azon tételére, mely egy torziómentes csoportnak ciklikus csoportok direkt összegére való bonthatóságára vonatkozik [29]. PONTRJAGIN tétele a következő: egy megszámlálható torziómentes csoport akkor és csakis akkor végtelen ciklikus csoportok direkt összege, ha tetszőleges, de rögzített r egészre a csoport r-edrangú alcsoportjainak bármely növekvő sorozata csak végessok különböző alcsoportból áll (vagyis ezen alcsoportok eleget tesznek az ún. maximum-feltételnek). SZELE e tételt a következő átfogalmazásban bizonyítja: az A megszámlálható torziómentes csoport akkor és csak akkor ciklikus csoportok direkt összege, ha minden végesrangú alcsoportja végesen generált. SZELE bizonyításának a gondolatmenete a következő: A szükségesség nyilvánvaló lévén, elegendő a feltétel elégséges

voltát bizonyítani. Tegyük fel, hogy A oly megszámlálható torziómentes csoport, amelynek végesrangú alcsoportjai végesen generáltak. A elemeit sorozatba rendezve: $a_1, a_2, \ldots$, az $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ alcsoportok oly* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ növekvő sorozatot alkotnak, melynek egyesítése A és melyben minden csoport rangja legfeljebb 1-gyel nagyobb a megelőzőénél. Van az A_n sorozatnak tehát oly $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ részsorozata, melyben B_n pontosan n-edrangú és a B_n-ek egyesítése változatlanul A. Jelöljük a B_n által generált és egyértelműen meghatározott szerváns alcsoportot C_n-nel. Ez is n-edrangú, s így a feltétel alapján végesen generált. A végesen generált Abel-csoportok alaptétele** értelmében $C_n = \{c_1\} + \ldots + \{c_n\}$. Egyszerű megmutatni, hogy ezek a c_i elemek választhatók a C_n-től függetlenül is, vagyis $C_{n+1} = C_n + \{c_{n+1}\}$, s így $A = \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n\}$ adódik, q. e. d.

Az Abel-csoportok elméletében a direkt felbontásokkal kapcsolatosan két fő kutatási irány figyelhető meg. Az egyik annak vizsgálata, hogy egy csoport mikor bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére — erről szóltak SZELE imént ismertetett dolgozatai. A másik irányba pedig azon kutatások esnek, amelyek bizonyos tulajdonságú direkt összeadandónak létezésére vonatkoznak. Ilyen jellegű kérdéseket vet fel [11] és [42] dolgozata. [11] dolgozatában azt mutatja ki, hogy *a 0-n kívül más végesrendű elemet is tartalmazó csoportnak feltétlenül van oly direkt összeadandója, mely $C(p^k)$ vagy $C(p^\infty)$ típusú.* E tételnek SZELE előtt csak speciális esetei voltak ismeretesek. Tételéből következik KULIKOV azon eredménye, hogy egy nem-torziómentes csoport akkor és csakis akkor direkt felbonthatatlan, ha az említett két csoporttípus egyikéhez tartozik.

Az előbbi tételét általánosítja [42] dolgozatában. A G csoport r-korlátú A alcsoportját *reguláris*nak nevezi, ha minden $a \in A$-ra

$$a \in \frac{r}{O(a)} A$$

(az ismertetendő tétel alapján következik majd, hogy A pontosan akkor lesz reguláris, ha ugyanannyiadrendű, éspedig r-edrendű ciklikus csoportok direkt összege). A tétel a következőképpen hangzik: *A reguláris r-korlátú A alcsoport akkor és csakis akkor direkt összeadandója G-nek, ha $A \cap rG = 0$.* Minthogy a feltétel szükségessége triviálisan adódik, tulajdonképpen csak az elégségesség

* $A \subseteq$ jelet használjuk a tartalmazás, a $\subset$ jelet a valódi tartalmazás jelölésére.

** „Minden végesen generált Abel-csoport felbontható végessok prímhatványrendű s végtelenrendű ciklikus csoport direkt összegére."

bizonyítandó. Feltéve, hogy A a tétel követelményeit kielégítő csoport, legyen B maximális olyan alcsoportja G-nek, melyre $rG \subseteq B$ és $A \cap B = 0$. (Hogy ilyen B alcsoport létezik, következik a feltételből és a Zorn-lemmából.) Az $A + B = G'$ direkt összeg feltétlenül létezik G-ben s kimutatjuk, hogy $G' \neq G$ nem lehet. Ha ui. lenne $g \in G, g \notin G'$, lenne oly g elem is, melyre ezeken felül $pg \in G'$ is teljesül az r valamely p prímosztójára ($rg \in rG \subseteq B \subseteq G'$ miatt). Így $pg = a + b$ ($a \in A, b \in B$), ahonnan $\frac{r}{p}a + \frac{r}{p}b = rg \in B$ és $A \cap B = 0$ miatt $\frac{r}{p}a = 0$. Tehát $O(a)\left|\frac{r}{p}\right.$, $p \left| \frac{r}{O(a)}\right.$ s így a feltételezett regularitás folytán $a \in \frac{r}{O(a)}A \subseteq pA$. Innen $a = pa'$ alkalmas $a' \in A$ elemre, tehát $pg = pa' + b$, $p(g - a') = b$. A $g' = g - a'$ elemre ezek szerint az igaz, hogy $g' \notin A + B$ (ellenkező esetben g is $\in A + B$ lenne), de $pg' \in B$. A B maximalitása miatt $A \cap \{B, g'\} \neq 0$, vagyis van olyan $\bar{a} \in A$, $\bar{a} \neq 0$, mely $\{B, g'\}$-höz tartozik, azaz ilyen alakú: $\bar{a} = b' + kg'$ ($b' \in B$), ahol $pg' \in B$ miatt feltehetőleg $0 \leqq k \leqq p - 1$. $k = 0$ azt jelentené, hogy $\bar{a} \in B$, ami nem lehet. $1 \leqq k \leqq p - 1$-ből viszont $pg' \in B$ miatt $\bar{a} - b' = kg'$ alapján az következik, hogy $g' = a^* + b^*$ ($a^* \in A, b^* \in B$), ami ellentmondást jelent. Ezzel a $G = A + B$ felbonthatóság bizonyítva van.

E tételnek számos fontos következménye van, köztük a [11] dolgozat említett eredményén kívül több nevezetes szovjet csoportelméleti tétel is. Például S. Fomin azon tétele, hogy ha egy G vegyes csoport T torzióalcsoportja korlátos, akkor T direkt összeadandója G-nek; vagy Kuros tétele, mely szerint ha egy G csoportban az alcsoportok a minimum-feltételnek tesznek eleget (azaz az alcsoportok minden csökkenő lánca csak végessok különböző alcsoportot tartalmaz), akkor G végessok ciklikus és kváziciklikus csoport direkt összege. E tétel további következménye Prüfer és Baer eredménye, hogy korlátos rendű csoport mindig felbontható ciklikus csoportok direkt összegére, speciálisan p-korlátú csoport p-edrendű ciklikus csoportok direkt összegére. Ugyancsak következik ebből a [14] dolgozat eredménye: nem-torziómentes csoport endomorfizmusgyűrűje akkor és csakis akkor nullosztómentes, ha a csoport $C(p)$-vel vagy $C(p^\infty)$-nel izomorf.

A legutóbbival rokon kérdést intéz el [9] dolgozata. Szélpál István meghatározta azon Abel-csoportokat, amelyeknek nincs valódi homomorfizmusuk. Szele felveti azt a kérdést, hogy melyek azok a G Abel-csoportok, melyeknek minden, a nulla-endomorfizmustól különböző endomorfizmusuk automorfizmus, vagyis endomorfizmusgyűrűjük ferdetest. Megoldásként a $C(p)$ és az R csoportok adódnak. A bizonyítás igen egyszerű. Minthogy az $x \to px$

(p fix prímszám) megfeleltetés G-nek pG-re való endomorfizmusa, csak két eset lehetséges: $pG = G$ vagy $pG = 0$. Ha minden p-re az első alternatíva teljesül, úgy G teljes, és így G felbomlik $C(p^\infty)$ és R csoportok direkt összegére; ha pedig valamely p-re $pG = 0$, akkor G p-korlátú csoport, és így felbomlik p-edrendű ciklikus csoportok direkt összegére. Ámde ha G direkt összeg, akkor G-t különböző direkt összeadandóira leképező endomorfizmusok nullosztók (ti. két ilyen szorzata 0), ami nem lehet. Viszont $C(p^\infty)$ endomorfizmusgyűrűje: a p-adikus egészek gyűrűje, nem teljesíti a feltételt, így maradnak az R és $C(p)$ csoportok. Ezeknek endomorfizmusgyűrűje a racionális számtest, ill. a p-elemű prímtest. — SZELE ezen eredményét J. P. SERRE francia matematikus általánosította operátorcsoportokra.

SZÉLPÁLlal közös [20] dolgozatában azt a kérdést fejtegeti, melyek azok a G Abel-csoportok, amelyek nem képezhetők le homomorf módon nem-triviális alcsoportjukra. Az előbbi bizonyításhoz teljesen hasonló okoskodás arra az eredményre vezet, hogy G a következő csoportok egyikével izomorf: $C(p)$, $C(p^\infty)$, R.

Az utoljára említett három dolgozat a csoport endomorfizmusainak bizonyos tulajdonságairól szólt. A csoport endomorfizmusgyűrűje más szempontból is foglalkoztatta SZELÉT. SZENDREI JÁNOSsal közösen írt [30] dolgozatában azon csoportokat tekinti, amelyeknek endomorfizmusgyűrűjük kommutatív. Torziócsoportok esetén az endomorfizmusgyűrű kommutativitására több szükséges és elégséges feltételt is adnak, amelyek közül a leginkább explicit jellegű a következő: *a T torziócsoport endomorfizmusgyűrűje pontosan akkor kommutatív, ha T izomorf az összes komplex egységgyökök multiplikatív csoportjának valamely alcsoportjával*, másszóval T izomorf különböző prímszámokhoz tartozó $C(p^k)$ ciklikus vagy $C(p^\infty)$ kváziciklikus csoportok direkt összegével. Vegyes csoport esetén a keresett csoportokat nem sikerült teljesen jellemezniök, de bizonyos osztályaikról áttekintést adtak. A vizsgálat érdekes sejtések kimondására vezeti őket, pl. arra, hogy kommutatív endomorfizmusgyűrűjű csoport számossága nem haladhatja meg a kontinuumot és ilyen csoport szükségképpen alcsoportja a kör összes (véges- és végtelenrendű) forgásaiból álló csoportnak.

Ebben a dolgozatában szerepel először a direkt összeg fogalmának egy érdekes általánosítása. A G csoport G_α alcsoportjainak direkt összege (amelyet nevezzünk ezentúl megkülönböztetés kedvéért *diszkrét* direkt összegnek) nyilvánvalóan izomorf az olyan végtelen vektorok $\langle \ldots, g_\alpha, \ldots \rangle$ csoportjával, amelyeknek minden G_α csoportból egyetlen komponensük van úgy, hogy csak végessok komponensük különbözik 0-tól és amelyek közt a csoportművelet komponensenként végzendő el. Egy másfajta,

az ún. *komplett* direkt összegre jutunk, ha elejtjük azt a megszorítást, hogy csak végessok komponens lehet $\neq 0$. SZELE és SZENDREI mármost a diszkrét és a komplett direkt összeg közé eső csoportokat tekintik, amelyekre SURÁNYI javaslata alapján az interdirekt összeg elnevezést használjuk.

Akkor mondjuk, hogy a G csoport *interdirekt* összege az ő B_α alcsoportjainak, ha G-nek léteznek oly ε_α endomorfizmusai, hogy 1. $G\varepsilon_\alpha = B_\alpha$; 2. $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = \varepsilon_\alpha$, ha $\alpha = \beta$, és $= 0$, ha $\alpha \neq \beta$; 3. ha egy $g \in G$ elemre és minden ε_α-ra $g\varepsilon_\alpha = 0$, akkor szükségképpen $g = 0$. — A komplett direkt összegre jutunk, ha még a következő feltétel is teljesül: 4. tetszőleges $b_\alpha \in B_\alpha$ reprezentáns-rendszerhez található oly $g \in G$ elem, hogy $g\varepsilon_\alpha = b_\alpha$ minden α-ra. Ha ehelyett a „4'. tetszőleges $g \in G$ elemre csak végessok olyan α van, hogy $g\varepsilon_\alpha \neq 0$" kikötést rójuk ki, éppen a diszkrét direkt összeget kapjuk.

Az interdirekt összegnek az a haszna is megvan, hogy segítségével igen egyszerű példa konstruálható oly vegyes csoportra, melynek torzióalcsoportja nem direkt összeadandója a csoportnak. Ilyen csoport pl. a $C(2)$, $C(3)$, ..., $C(p)$, ... prímszámrendű ciklikus csoportok bizonyos interdirekt összege.

A végtelen p-csoportok elméletében alapvető jellegű PRÜFER következő tétele, amely számos kutatás alapjául szolgált: G megszámlálható p-csoport akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére, ha nem tartalmaz végtelen magasságú elemet. PRÜFER azt is megmutatta, hogy a tételben szereplő feltétel kontinuum számosságú csoportok esetén már nem biztosítja a ciklusösszegre való bonthatóságot. SZELE [39] dolgozatában egyszerű példát ad oly csoportra, amely kontinuum számosságú, végtelen magasságú elemet nem tartalmaz és nem bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére. A példa lényegileg megegyezik KUROS példájával, a bizonyítás azonban SZELÉnél egyszerűbb és SZELE még azt is megmutatja, hogy létezik $\aleph_1$ számosságú csoport is, melyre a tétel már nem áll.

Az ellenpélda a következő. Tekintsük a p-, p^2-, ..., p^n-, ... rendű ciklikus csoportok komplett direkt összegét. Ennek T torzióalcsoportja kontinuum számosságú p-csoport, amelynek elemei oly $\mathbf{c} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \rangle$ alakú vektorok, hogy $b_n \in C(p^n)$, a művelet komponensenként végzendő és $\mathbf{c}$-ben a b_n elemek rendje korlátos, minthogy $p^k\mathbf{c} = 0$ kell legyen valamely k-ra. — Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy T ciklikus csoportok direkt összege; jelölje T_k a legfeljebb p^k-adrendű ciklikus direkt összeadandók direkt összegét. Nyilván T a T_k ($k = 1, 2, \ldots$) alcsoportok egyesítése, így T legfeljebb megszámlálható lehet, ha kimutatjuk, hogy mindegyik T_k véges. Ha T_k-nak két elemére, $\mathbf{c} = \langle b_1, b_2, \ldots \rangle$ és $\mathbf{c}' = \langle b_1', b_2', \ldots \rangle$-re $b_1 = b_1', \ldots, b_k = b_k'$ teljesül, akkor mi-

vel $\mathfrak{c}-\mathfrak{c}'=\langle 0,\ldots,0,b''_{k+1},\ldots\rangle$ alakú, azért $\mathfrak{c}-\mathfrak{c}'$-nek p^s rendjére és h magasságára $s+h>k$ teljesül. Ennélfogva T_k definíciója szerint $\mathfrak{c}-\mathfrak{c}'\in T_k$ csak úgy lehet, ha $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}'$. Ebből már adódik T_k végessége s ennek alapján az ellentmondás bizonyítja az állítást.

SZELÉnek egyik legnagyobb jelentőségű munkája a [22], amelyet RÉDEI LÁSZLÓnak 50. születésnapjára dedikált. Ebben a dolgozatában oly elmélet alapjait dolgozta ki az Abel-csoportok elméletében, amely teljes analogonja a testek STEINITZtől eredő immár klasszikussá vált elméletének.

A Szele-féle elmélet kiindulópontja az „algebrai" egyenlet alkalmas értelmezése Abel-csoportban. Minthogy itt csak egyetlen operáció van, a kommutativitás miatt minden egyismeretlenes egyenlet ilyen alakra hozható:

$$nx=a \qquad (n \text{ egész}, a\in G).$$

SZELE ennek alapján értelmezi a csoport *algebrai* és *transzcendens bővítését* a következőképpen. Legyen G a H csoport bővítése (azaz H alcsoportja G-nek). Egy $g\in G$ elemről akkor mondjuk, hogy *algebrai* H felett, ha létezik olyan n természetes egész, amelyre ng a H-nak nemzérus eleme, másszóval, g eleget tesz egy H-beli algebrai egyenletnek. Ellenkező esetben g-t H felett *transzcendens* elemnek mondjuk. (Másképpen: g transzcendens H felett, ha a $\{g,H\}=\{g\}+H$ direkt felbontás érvényes.) G-nek (g_ν) elemrendszerét akkor nevezzük H-ra vonatkozóan *algebrailag függetlennek*, ha az $n_1g_1+\ldots+n_kg_k=h$ $(h\in H)$ egyenlőségből szükségképpen $n_1g_1=\ldots=n_kg_k=h=0$ következik (tehát a g_ν-k függetlenek mod H abban az értelemben, ahogy ezt előzőleg már definiáltuk). E definíciók megadása után nyilvánvaló, hogy mit kell érteni H-nak *algebrai*, *transzcendens*, ill. *tiszta transzcendens* G bővítésén (ha G-nek minden eleme algebrai H felett, ha G nem minden eleme algebrai, ill. ha G a H-ból egy H felett algebrailag független elemrendszer adjunkciója révén áll elő). SZELE megmutatja, hogy érvényesek STEINITZ alaptételeinek teljes analogonjai: 1. *a csoport bármely bővítése felbontható egy tiszta transzcendens és egy utána következő algebrai bővítésre;* itt a tiszta transzcendens bővítés transzcendencia-foka egyértelműen meghatározott; 2. *minden csoportnak létezik algebrailag zárt algebrai bővítése, mely ekvivalens bővítésektől eltekintve egyértelműen meghatározott.* Algebrailag zárt csoport az olyan, amelyben minden „algebrai"-nak nevezett egyenlet megoldható, vagyis e fogalom egybeesik a teljes csoport fogalmával. SZELE azt is megmutatja, hogy az algebrailag zárt csoportok azon tulajdonságaik által vannak kitüntetve az összes csoportok közül, hogy bármely őket tartalmazó Abel-csoportnak direkt összeadandói (v. ö. BAER idézett tételével).

A SZELE által felállított elmélet a sokrétű analógia ellenére lényeges eltéréseket mutat a Steinitz-féle testelmélettől. Így pl. a csoportelméletben nincs megfelelője a prímtestnek s az sem igaz, hogy egy egyenletnek nem lehet több gyöke, mint amekkora a „foka". Ezek az eltérések sok nehézséget támasztanak az analógiák megállapításánál, és éppen ezért meglepő, hogy SZELÉnek ennek ellenére milyen sok hasonlóságot sikerült bizonyítania.

A SZELE által felállított elmélet főérdeme — az új eredményeken kívül — az, hogy lehetővé teszi számos, addig egymástól függetlenül nyert tételnek és módszernek egységes szempontból való tárgyalását. A részletekre itt bővebben nem térhetünk ki.

[51] dolgozatát egy a tetszésszerinti számosságú p-csoportok elméletében egészen alapvető szerepet játszó fogalomnak, a KULIKOV szovjet matematikus által bevezetett bázisalcsoportnak szenteli. KULIKOVtól eltérően, a G p-csoport B bázisalcsoportjára a következő természetesebb definíciót adja: B ciklikus csoportok direkt összege, $B = B_1 + \cdots + B_n + \cdots$, ahol B_n p^n-edrendű ciklikus csoportok direkt összege, és B azzal a tulajdonsággal bír, hogy $B_1 + \cdots + B_n$ a G csoportnak maximális p^n-korlátú direkt összeadandója minden n-re. A Szele-féle definíció fogalmilag egyszerűbb a Kulikov-félénél s az az előnye is megvan, hogy segítségével a különböző bázisalcsoportok izomorfizmusa is könnyebben adódik. SZELE bebizonyítja, hogy definíciója mind a Kulikov-féle, mind pedig a Kaloujnine-féle definícióval ekvivalens; ez utóbbi definíció egy topológiai jellegű fogalomra épül.

SZELE ezen új tárgyalás után rátér a dolgozat főeredményére, amelyről már a megjelenése óta eltelt rövid idő alatt is kiderült, hogy a tetszőleges számosságú p-csoportok elméletének egyik alapvető tétele. A tétel így szól: *a G p-csoport B bázisalcsoportja G-nek endomorf képe.* A bizonyítás lényegét a következő fontos példán ismerhetjük meg. Tekintsük az $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots$ p-, p^2-, ...-edrendű ciklikus csoportok komplett direkt összegének T torzióalcsoportját. Ez a végésrendű $\mathbf{b} = \langle m_1 a_1, m_2 a_2, \ldots \rangle$ vektorokból áll, ahol m_i egészek; ha $O(\mathbf{b}) = p^r$, akkor $p^{k-r} \mid m_k$ teljesül $k = r, r+1, \ldots$-re. Ekkor a $\mathbf{b} \to \langle m_2 a_1, m_4 a_2, \ldots \rangle$ megfeleltetés G-nek* $B = \{a_1\} + \{a_2\} + \ldots$ bázisalcsoportjára való homomorfizmusát definiálja, minthogy $k \geqq r$-re

$$m_{2k} a_k = m'_{2k} p^{2k-r} a_k = 0 \qquad (m_{2k} = p^{2k-r} m'_{2k}),$$

azaz $m_{2k} a_k$ közül csak végessok különbözhetik 0-tól (hiszen $O(a_k) = p^k$). Korollárium ként adódik: ha a G p-csoport homomorf módon leképezhető C-re, ciklikus csoportok direkt összegére, akkor B is leképezhető homomorf módon C-re, és megfordítva.

* Az a_i elemet identifikálhatjuk azon vektorral, melynek i-edik komponense a_i, a többi pedig 0.

A végtelen Abel-csoportok szerkezetének kérdése tudvalevőleg igen nehéz probléma, különösen a vegyes csoportok esetén, ahol még az olyan hatékony módszerek is hiányoznak, amelyekről egyáltalán remélhető, hogy lényegesen előbbrevisznek a struktúraprobléma megoldása felé. Speciális követelményeket kielégítő csoportok szerkezetét azonban sok esetben már sikerült feltárni. Ilyen vizsgálatok sok érdekes eredményre vezettek. SZELE is szívesen foglalkozott ilyen jellegű problémákkal.

[31], [44], [45], [47] és [54] dolgozatában részben KERTÉSZ ANDORral, részben KERTÉSZ ANDORral és FUCHS LÁSZLÓval együtt a következő problémakörrel foglalkozott. Legyen $\mathfrak{A}$ a G csoportból valamely előírt módon származtatott csoportosztály, pl. G direkt összeadandóinak, vagy összes alcsoportjainak, homomorf képeinek, szerváns alcsoportjainak stb. halmaza. Izomorf csoportokat $\mathfrak{A}$-ban csak egyszer veszünk számításba. Legyen $\mathfrak{B}$ a G-hez rendelt egy másik csoportosztály. A felsorolt dolgozatok azt a kérdést vizsgálják, melyek azok a G csoportok, amelyekre az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ osztályok egybeesnek, vagy pedig az $\mathfrak{A}$ osztály része a $\mathfrak{B}$ osztálynak.

A [31] dolgozat azon G csoportokat jellemzi, amelyekre nG minden természetes egész n-re G-nek direkt összeadandója. Ilyen G szerkezete a következő: $G = A + B$, ahol A teljes csoport, B-nek T torzióalcsoportjában egyetlen T_p p-komponens sem tartalmaz p-nél magasabbrendű elemet, B/T teljes és B a T_p csoportoknak interdirekt összege.

[44]-ben azok a csoportok vannak jellemezve, amelyekben minden végesen generált alcsoport endomorf kép. Ehhez kapcsolódva E. SĄSIADA lengyel matematikus azokat a csoportokat karakterizálta, amelyeknek minden megszámlálható alcsoportjuk endomorf kép. Az [54] dolgozat mindazon csoportok szerkezetét adja meg, amelyeknek minden egyes alcsoportjuk endomorf kép. Az ilyen tulajdonságú csoportok jellemzéséhez fontos számossági invariánsok voltak szükségesek. Ha G p-csoport, a $G, pG, p^2G, \ldots$ csoportok rangja közt van minimális, nevezzük ezt G *felső rang*jának. Ha G tetszőleges csoport, *torziómentes rang*ján értjük egy végtelenrendű elemekből álló maximális független rendszer számosságát. Ez G-nek invariánsa és megegyezik G/T rangjával, ha ti. T a G-nek torzióalcsoportja.

Ezek után megfogalmazhatjuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy G-nek minden alcsoportja G-nek endomorf képe legyen. *Torziócsoport esetén:* $G = T$-ben minden T_p p-komponensnek a felső rangja megegyezik az ő B_p bázisalcsoportjának felső rangjával (ezzel ekvivalens a $B_p \sim T_p$ homomorfizmusok létezése). *Vegyes csoport esetén:* 1. ha G-nek r torziómentes rangja véges:

$G = \sum_r C(\infty) + T$, ahol T olyan torziócsoport, amelyre szintén teljesül a feltétel; 2. ha G-nek r torziómentes rangja nem véges: $G = \sum_r C(\infty) + H$, ahol H oly csoport, amelynek torzióalcsoportjában az r-nél nagyobb felső ranggal bíró p-komponenseknek megvan a szóbanforgó tulajdonságuk. — Érdekes, hogy ugyanezen csoportokra jutunk, ha csupán azt kötjük ki, hogy minden oly alcsoport legyen endomorf kép, amely ciklikus csoportok direkt összegére bontható.

O. SCHREIERtől való a csoportok egyesített alcsoportú direkt összegének (ill. szorzatának) fogalma. Újabban H. NEUMANN is foglalkozott ezzel a kérdéssel. *Ciklikus csoportok egyesített alcsoportú direkt összege* a következőképpen van értelmezve: $G = \{\ldots, a_\alpha, \ldots\}$, ahol a tetszőleges számosságban adott a_α generátorelemek között a következő definiáló relációkat írjuk elő:

$$(1) \qquad m_1 a_1 = \ldots = m_\alpha a_\alpha = \ldots \quad (= c);$$

itt m_α-k 1-nél nagyobb természetes egészek. Ebben az esetben G az $\{a_\alpha\}$ végtelen ciklikus csoportoknak az $\{m_1 a_1\} = \ldots = \{m_\alpha a_\alpha\} = \ldots = \{c\}$ egyesített alcsoportú direkt összege. SZELE [40] dolgozatában az ilyen tulajdonságú G csoportok szerkezetét vizsgálja és a kérdést lényegesen redukálja azáltal, hogy kimutatja: $G = A + B$ alakú, ahol B véges ciklikus csoportok direkt összege, A pedig oly megszámlálható csoport, amely szintén ciklikus csoportok egyesített alcsoportú direkt összege, de úgy, hogy (1)-ben az összes m_α egészek különbözők. További eredményei közül megemlítendő: 1. G akkor és csakis akkor ciklusösszeg, ha az m_α-k korlátosak; 2. G akkor és csakis akkor torziómentes, ha az m_α-k egymáshoz relatív prímek (G ekkor szükségképpen megszámlálható); 3. G-nek T torzióalcsoportja mindig ciklusösszeg és G/T elsőrangú torziómentes csoport. — Ha az (1) alatti relációkon kívül még $mc = 0$-t is kikötjük, úgy G az $\{a_\alpha\}$ véges mm_α-adrendű ciklikus csoportoknak lesz egyesített alcsoportú direkt összege. (Ha $m = 1$, akkor a direkt összeadandók 0-alcsoportjai vannak egyesítve, vagyis a közönséges értelemben vett direkt összegről van szó.) Ebben az esetben G pontosan akkor ciklusösszeg, ha m-nek nincsen olyan p prímosztója, amelynek tetszőleges p^k hatványához található oly m_α, hogy $p^k \mid m_\alpha$.

Érdekes problémát tárgyal a periodikus ciklikus differencia-mátrixokról szóló dolgozatában [24]. Ez egy a [13] dolgozatában felmerült kérdéssel kapcsolatos. Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ a G csoport elemei, és képezzük ezekből az $a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_0 - a_{m-1}$ ciklikus differenciákat. A most nyert elemekkel hasonlóképpen járva el s í. t., az m-oszlopú *M ciklikus*

*differencia-mátrix*hoz jutunk. M-ről akkor mondjuk, hogy *periodikus és periódusa* k, ha van olyan k természetes egész, hogy M-nek $k+1$-edik sora megegyezik az első sorral. SZELE teljesen jellemzi a periodikus ciklikus differencia-mátrixokat, megmutatva, hogy ezek a következő 4 típus valamelyikével egyeznek meg: 1. a 0 mátrix; 2. oly $6r$-oszlopú mátrix, amelynek első sorában a 6 elemből álló $a, b, b—a, —a, —b, a—b$ sorozat ismétlődik r-szer (e sorozat minden tagja az előttelévőnek és az azt megelőzőnek a különbsége); 3. véges csoport elemeiből készített bármely ciklikus differencia-mátrix, az első néhány sor esetleg elhagyandó; 4. a 2. és 3. alatt említett típusú mátrixok összege; ezek oszlopszáma természetesen csak $6r$ alakú lehet. — Ezen eredményeknek SZELE érdekes csoportalgebrai értelmezését is bemutatja.

SZELE újabb vizsgálataiba bevonta a topologikus csoportok elméletét is, amelytől azt várta, hogy jelentős mértékben előrelendíti az absztrakt csoportelméleti kutatásokat is. A KERTÉSZSZEL együtt írt [48] dolgozatában azt vizsgálja, mikor vezethető be a G végtelen csoportba nem-diszkrét topológia. Ismeretes, hogy a G csoportban értelmezett topológia azt jelenti, hogy G-ben definiálva van a 0 környezeteinek oly Σ rendszere, amelyre 1. Σ elemeinek metszete 0; 2. ha $U \in \Sigma$ és $V \in \Sigma$, akkor van oly $W \in \Sigma$, hogy $W \subseteq U \cap V$; 3. minden $U \in \Sigma$-hoz található olyan $V \in \Sigma$, hogy $V+(-V) \subseteq U$; 4. ha $U \in \Sigma$ és $a \in U$, létezik olyan $V \in \Sigma$, hogy $V+a \subseteq U$. A topológiát folytonosnak mondjuk, ha 0 nem környezete önmagának, vagyis $0 \notin \Sigma$. A dolgozatban a következő eredményre jutnak: tetszőleges G végtelen Abel-csoportban mindig értelmezhető folytonos topológia, sőt ha G alcsoportjai nem tesznek eleget a minimum-feltételnek (azaz G nem állítható elő végessok $C(p^k)$ és $C(p^\infty)$ csoport direkt összegeként), akkor a Σ környezetrendszer úgy is megválasztható, hogy csupa alcsoportból álljon.

A bizonyítás a következő gondolaton alapszik. Ha a G csoportban van végtelenrendű a elem, akkor az $\{a\}, \{2a\}, \ldots, \{2^n a\}, \ldots$ alcsoportok környezetrendszert alkotnak. Ha G torziócsoport, de alcsoportjai nem tesznek eleget a minimum-követelménynek, úgy G tartalmazza megszámlálhatóan végtelen sok különböző, prímszámrendű ciklikus csoportnak a direkt összegét, $H = C(p_1)+ + C(p_2)+\ldots \subseteq G$ (p_i-k nem feltétlenül különbözők). De ekkor a $H_n = C(p_n)+C(p_{n+1})+\ldots$ alcsoportok 0-nak kívánt tulajdonságú Σ környezetrendszerét alkotják. Ha végül G-ben a minimum-feltétel érvényes, akkor benne nem található alcsoportokból álló Σ környezetrendszer, de G (végtelensége folytán) tartalmaz $C(p^\infty)$ típusú alcsoportot; e csoport izomorf lévén az összes p-, p^2-, ...-edik komplex egységgyökök multiplikatív csoportjával, az abszolút érték bevezetése folytonos topológiát szolgáltat.

Nem-kommutatív csoportok

SZELE lényegesebben kevesebbet foglalkozott a nem-kommutatív csoportok elméletével, néhány szép dolgozatáról azonban itt is említést tehetünk.

[3] dolgozatában az n-edfokú S_n szimmetrikus és A_n alternáló csoportról van szó. Ismeretes, hogy e csoportok $n \geqq 5$ esetén nem feloldhatók, azaz nem létezik bennük oly csökkenő alcsoportsorozat, amely az egész csoporttal kezdődik, az egység-alcsoporttal végződik, mindegyik alcsoport a megelőzőnek normálosztója és a hozzátartozó faktorcsoport Abel-féle. A feloldhatóság hiányán alapszik tudvalevőleg a 4-nél magasabbfokú algebrai egyenletek gyökjelekkel való megoldhatatlanságát kimondó Ruffini—Abel-tétel. KALMÁR LÁSZLÓ egyszerű bizonyítást adott arra, hogy A_n-nek ($n \geqq 5$) nincs prímindexű normálosztója, ami elégséges a feloldhatatlanság igazolásához. SZELE egyszerű bizonyítást ad arra, hogy S_n-nek egyetlen prímindexű normálosztója A_n és A_n-nek ilyen normálosztója nincs. Jelentse G S_n és A_n valamelyikét és legyen N prímindexű normálosztó G-ben. Mivel G/N p-edrendű ciklikus csoport, $c = a^{-1}b^{-1}ab \in N$ tetszőleges $a, b \in G$-re. Válasszuk $a = (ijk)$, $b = (ij)(lm)$, ahol i, j, k, l, m különböző permutálandó elemeket jelölnek. Ekkor $c = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}a^2 = a \in N$, így N tartalmazza az összes 3-asciklust, tehát az általuk generált alcsoportot is, ami nem egyéb, mint A_n.

A nem-kommutatív csoportok elméletében fontos szerepet tölt be az ún. kvaternió-csoport. Ez absztraktul úgy definiálható, mint az a, b generátorelemekkel létesített (8-adrendű) csoport, ahol a definiáló relációk: $a^4 = e$, $b^2 = a^2$, $bab^{-1} = a^{-1}$ (e a csoport egységeleme). E csoport nevezetes tulajdonságai közül megemlítjük azt, hogy egyetlen másodrendű alcsoportot tartalmaz, mégpedig az e, a^2 elemekből álló alcsoportot. Ha mármost mindazon véges p-csoportokat keressük, amelyekben csupán egyetlen p-edrendű alcsoport van, akkor a ciklikus p-csoportokon kívül az ún. *általánosított kvaternió-csoportok*at kapjuk. Ez utóbbiak 2^n ($n \geqq 3$) rendűek és a, b generátorelemeik az

$$a^{2^{n-1}} = e, \quad bab^{-1} = a^{-1}, \quad b^2 = a^{2^{n-2}} \qquad (n \geqq 3)$$

relációkkal vannak összekapcsolva. A ciklikus p-csoportok esetében létezik olyan minimális végtelen csoport, ti. a Prüfer-féle csoport, amelynek az összes ciklikus p-csoportok alcsoportjai. SZELE [18] dolgozatában felveti azt a kérdést, vajjon létezik-e hasonló *minimális* végtelen csoport az általánosított kvaternió-csoportok esetében. Megmutatja, hogy ilyen Q_∞ „végtelen kvaternió-csoport"

létezik, sőt egyértelműen meghatározott. Q_∞ generátor-elemei: b, a_1, a_2,..., és definiáló relációi:

$$a_1^2 = e,\ a_{k+1}^2 = a_k,\ b a_k b^{-1} = a_k^{-1},\ b^2 = a_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Nyilvánvaló, hogy az a_1, a_2,... elemek által generált A alcsoport 2^∞-típusú normálosztó és $Q_\infty = A + Ab$ (mellékosztályokra való felbontás). Érdekes, hogy az Ab mellékosztály minden eleme 4-edrendű: $(a_k^n b)^2 = a_k^n b a_k^n b = a_k^n a_k^{-n} b^2 = a_1$. Q_∞ alcsoportjai: A alcsoportjai (ezek normálosztók) és a Q_n kvaternió-csoportok (ezek nem normálosztók). Az $\{a_1\}$ alcsoport az egyetlen minimális alcsoport Q_∞-ben. SZELE sejtése szerint Q_∞ az egyetlen végtelen nem-kommutatív p-csoport, amelynek egyetlen egy minimális alcsoportja van.

*Tökéletes*nek szokás nevezni azokat a csoportokat, amelyek megegyeznek kommutátor-alcsoportjukkal. Ilyenek pl. az összes nem-kommutatív egyszerű csoportok. SZELE [23] dolgozatában azon csoportokat tekinti, amelyeknek van tökéletes alcsoportjuk. Bebizonyítja, hogy ha tetszőleges csoport tartalmaz tökéletes alcsoportot, akkor tartalmaz tökéletes normálosztót is.

Eredményei a gyűrűk és a ferdetestek elméletében

Gyűrűn oly kommutatív additív csoportot értünk, amelynek elemei között értelmezve van egy asszociatív, de nem szükségképpen kommutatív művelet: a szorzás, amelyet az összeadással a kétoldali disztributivitás köt össze. Ha az R gyűrűben figyelmünket az additív csoportra kívánjuk összpontosítani, akkor ezt R^+-szal fogjuk jelölni. Az R gyűrű *baloldali egységelemén* oly e gyűrűelemet értünk, amelyre $ex = x$ *minden* $x \in R$-re; e akkor lesz (kétoldali) *egységelem* R-ben, ha ezen felül még jobboldali egységelem is. Az $a \in R$ elem (baloldali) *nullosztó*, ha $ab = 0$ valamely $b \neq 0$-ra. R *nullosztómentes*, ha egyetlen nullosztója a triviális 0. R (baloldali) *annullátor*án értjük R oly x elemét, amelyre $xy = 0$ R-nek bármely y elemére. Kommutatív és nullosztómentes gyűrűt *integritási tartomány*nak szokás nevezni. *Zérógyűrű*nek mondjuk az olyan gyűrűt, amelyben bármely két elem szorzata 0, vagyis a gyűrű minden eleme a gyűrűnek annullátora. Egy f elemről azt mondjuk, hogy *idempotens*, ha $f^2 = f$.

Ha L az R gyűrű olyan részhalmaza, amely R^+-nak részcsoportja és ezen felül $ra \in L$ minden $r \in R$-re, akkor L-et R baloldali ideáljának, vagy röviden *balideál*nak nevezzük. (Pl: tetszőleges a gyűrűelemre Ra balideál R-ben.) Analóg módon definiálható a jobboldali ideál; (kétoldali) *ideál*on olyan részhalmazt értünk, amely egyidejűleg bal- és jobbideál. Triviális ideálok az egyetlen 0 elemből álló 0 ideál és az egész gyűrű. Az M balideál *maximális* R-ben, ha $M \subset R$, de nincs olyan N balideál, hogy $M \subset N \subset R$; M *minimális*, ha $0 \subset M$, de nincsen N, amelyre $0 \subset N \subset M$.

Azt mondjuk, hogy az R gyűrű balideáljai a *minimum-feltétel*nek tesznek eleget, ha a balideálok bármely szigorúan monoton csökkenő sorozata: $L_1 \supset L_2 \supset \ldots$ végessok lépés után megszakad.

Az L_1 és L_2 balideálok *összeg*én az $a_1 + a_2$ ($a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$) elemek összességét értjük, amely ismét balideálja R-nek. Az L_1 L_2 *szorzat*on az

$a_1 a_2$ ($a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$) alakú elemekből készített véges összegeket értjük; ezek R-ben ismét balideált alkotnak. L *nilpotens*, ha $L^n = 0$ valamely természetes egész n-re. *Féligegyszerű*nek nevezünk egy gyűrűt, ha nem tartalmaz nilpotens balideált és a balideálok a minimum-feltételnek tesznek eleget.

Ha az R gyűrűben az összeadáson, a kivonáson és a szorzáson kívül az osztás is elvégezhető, amihez az szükséges és elégséges, hogy R egységelemes legyen és minden elemének legyen reciprokja, akkor R-et *ferdetest*nek nevezzük. Kommutatív ferdetest neve *test*. Ferdetestben csak két baloldali ideál létezik, ti. a két triviális.

A gyűrűelméletben a gyűrűknek általában kétféle direkt felbontásáról esik szó. Mindkét esetben az R^+-nak a direkt összegre való felbontásáról van szó, de a direkt összeadandóktól nemcsak azt kívánjuk meg, hogy R^+-nak alcsoportjai legyenek, hanem vagy azt is, hogy R-nek *balideáljai*, vagy pedig, hogy R-nek *ideáljai* legyenek.

A féligegyszerű gyűrűkre vonatkozó Wedderburn—Artin-féle struktúratétel szerint ezek a gyűrűk felbonthatók végessok egyszerű gyűrű direkt összegére; az egyszerű gyűrűkre vonatkozó tétel pedig azt mondja ki, hogy ezek a gyűrűk izomorfak valamely ferdetest feletti teljes mátrixgyűrűvel (*egyszerű* az olyan gyűrű, amelynek nincs nemtriviális ideálja és amely különbözik a p-elemű zérógyűrűtől).

SZELE első gyűrűelméleti vonatkozású dolgozatát RÉDEI LÁSZLÓval közösen írta. E kétrészes nagy dolgozatban ([4] és [13]) a számelméleti függvényeknek tetszőleges gyűrűkre való általánosíthatóságát vizsgálták. Kimutatták, hogy csak a véges testeknek van meg az a tulajdonságuk, hogy minden olyan függvény polinom, melynek értelmezési tartománya és értékkészlete magához a gyűrűhöz tartozik.* E kérdés általánosításaképpen azt diszkutálják, hogy mikor lehet az adott R gyűrűhöz olyan T gyűrűt találni, hogy a T feletti polinomok előállítsák az R feletti függvényeket. Érdekes, hogy T nem mindig választható meg úgy, hogy R-et tartalmazza, pl. a mod m maradékosztálygyűrű esetében sem. A dolgozat első része azzal az esettel foglalkozik, mikor R éppen az imént említett maradékosztálygyűrű. A kérdés teljes megoldására jutnak abban az esetben, midőn m prímszámhatvány. Módszerük lényege az, hogy R-ről előbb oly S gyűrűre térnek, amelynek R homomorf képe, és csak ezután veszik egy, az S-et tartalmazó T gyűrűt. Eredményükben fontos szerepet visz a következő érdekes példa. Legyen $\psi(x) = \left(\frac{x^p - x}{p}\right)^p$. E függvénynek megvan az a tulajdonsága, hogy $x \equiv y \pmod{p^e}$ esetén $\psi(x) \equiv \psi(y) \pmod{p^e}$, ahol $e \geqq 2$. Könnyű azonban látni, hogy $\psi(x)$ nem polinom a mod p^e maradékosztálygyűrűben. — A második részben az általános esettel foglalkoznak. R-ről, majd T-ről kommutatívitást tételezve fel, vizsgálják a kérdést. Lényeges különbség, hogy most a T feletti polinomok x változóját T-nek csak egy olyan S részgyűrűjén engedik végigfutni, amelyhez R

* Nevezzük az ilyen függvényeket R felettieknek.

homomorf. Messze vezetne, ha az e dolgozatban foglalt eredményekről részletesebben kívánnánk szólani.

A véges gyűrűk szerkezetéről szól [5] cikke. Ha R véges gyűrű, akkor R^+ véges Abel-csoport, és létezik egy $R^+ = R^+_{p_1} + \ldots + R^+_{p_k}$ direkt felbontás, ahol $R^+_{p_i}$ különböző prímszámokhoz tartozó p-csoportok. Ebben a felbontásban az $R^+_{p_i}$ direkt összeadandók egyszersmind kétoldali ideálok is R-ben. Ez abból következik, hogy ha az a és b elemek rendje különböző prímszámoknak valamely hatványa, akkor az ab szorzat csak 0 lehet, mivel ab-nek mindkét prímhatvánnyal vett szorzata 0. E felbontás miatt a véges gyűrűk *p-gyűrűk* (azaz oly gyűrűk, amelyeknek additív csoportjuk p-csoport) direkt összege, és így elegendő csak az utóbbiakat vizsgálni. Szele előállít olyan mátrixgyűrűket, amelyeknek részgyűrűi kimerítik az összes véges gyűrűket. Lényegileg azt teszi, hogy a nem csupa nullosztóból álló véges gyűrűket előállítja mint additív csoportjuk endomorfizmusgyűrűjének részgyűrűjét, a többi gyűrűnél pedig előbb egységelemes bővítést végez.

Szele gyűrűelméleti eredményei közül különösen a gyűrűk additív csoportja struktúrájának vizsgálata emelendő ki, speciálisan az a kérdés, hogy adott Abel-csoportra mily gyűrűk építhetők (vagyis melyek azok az R gyűrűk, amelyekre R^+ izomorf egy adott Abel-csoporttal). Ezzel a nehéz problémakörrel először ő foglalkozott behatóan s neki magának sikerült komoly eredményeket is elérni.

Legyen G adott additív Abel-csoport. Feladatul tűzzük ki mindazon R gyűrűk meghatározását, amelyekre $R^+ \cong G$. Ilyen R gyűrű feltétlenül létezik, mégpedig a zérógyűrű. Szele [12] dolgozatában azon G csoportokat vizsgálja, amelyekre csak zérógyűrű építhető. Az ilyen tulajdonságú csoportokat nilcsoportoknak nevezzük. Nilcsoport pl. a Prüfer-féle p^∞ típusú csoport, ha ui. a, b e csoportoknak két tetszésszerinti eleme és b rendje p^k, akkor megoldva a csoportban a $p^k x = a$ egyenletet, következik, hogy $ab = (p^k x)\, b = x\,(p^k b) = 0$, vagyis bármely két elem szorzata szükségképpen 0. Viszont a p^k-rendű (általában az n-edrendű) ciklikus csoport nem nilcsoport, mivel az egész számok gyűrűjének mod p^k (ill. mod n) képzett maradékosztálygyűrűje e csoportra épített nem-zérógyűrű. Így nem lehet nilcsoport az olyan csoport sem, amelynek van véges ciklikus csoport direkt összeadandója. A torziócsoportok közül így nilcsoportok csak a teljes Abel-csoportok lehetnek, ezek viszont — miként ez a fentiekhez hasonlóan kimutatható — csakugyan nilcsoportok. A mondottakból az is következik, hogyha G nem torziócsoport és torzióalcsoportja nem teljes, akkor G nem lehet nilcsoport (l. [42]). Szele megmutatja, hogy ha G vegyes csoport és T torzióalcsoportja teljes $\neq 0$, akkor sem lesz

G nilcsoport. Ezzel teljes áttekintést kaptunk a torzió és a vegyes nilcsoportokról: ezek közt csakis a teljes torziócsoportok nilcsoportok. A torziómentes nilcsoportok problémája igen nehéz, még megoldatlan kérdés.

[26] dolgozatában előbb említett vizsgálatainak folytatásaképpen azon csoportokat tekinti, amelyekre pontosan két gyűrű építhető, azaz pontosan egy nem-zérógyűrű. Sikerült neki ezeket a csoportokat teljesen jellemezni, helyesebben részben visszavezetni a nilcsoportok esetére, ti. jellemzésének hiányossága, hogy szerepel benne egy torziómentes nilcsoport, amelynek szerkezetét közelebbről nem sikerült felderítenie. A szóbanforgó csoportok a következő 4 típus valamelyikével izomorfak: 1. a racionális számok additív csoportja, 2. a p-edrendű ciklikus csoport, 3. egy p-edrendű ciklikus csoportnak és más prímszámokhoz tartozó, tetszésszerinti számosságban adott Prüfer-féle csoportoknak direkt összege, 4. egy p-edrendű ciklikus csoportnak és oly B torziómentes nilcsoportnak direkt összege, amelyre $pB = B$. E tétel érdekes következménye, hogy annullátormentes gyűrűk közt csak a prímtestek azok, amelyeknek additív csoportjára rajtuk kívül más gyűrűt, mint zérógyűrűt nem lehet építeni.

E dolgozatában a nilcsoport fogalmának egy másirányú általánosítása is szerepel. Értsük a G Abel-csoport *nilfok*án az s természetes egész számot, ha a G-re épített R gyűrűk között van olyan, amelyre $R^s \neq 0$, de olyan már nincsen, amelyre $R^{s+1} \neq 0$. Ha G nilcsoport, úgy nyilván $s = 1$. SZELE bebizonyítja, hogy torziócsoportok esetén 1-nél nagyobb nilfok nem fordulhat elő, míg torziómentes csoportoknál minden nilfok $\geqq 1$, vegyes csoportok esetében pedig minden $s \geqq 2$ egész szám előfordulhat nilfokként.

[53] dolgozatát azon R nilpotens gyűrűk vizsgálatának szenteli, amelyekben érvényes a balideálokra vonatkozó minimum-feltétel. Ezek a gyűrűk a minimum-feltételnek eleget tevő gyűrűk között az egyik szélső kategóriát alkotják — a másik szélső eset ti. az, mikor a 0 ideálon kívül nincs más nilpotens balideál, vagyis éppen a féligegyszerű gyűrűk. Míg az utóbbi gyűrűkről WEDDERBURN és ARTIN struktúra-tételei teljes jellemzést adnak, addig a másik szélső esetet képező nilpotens, minimum-feltételes gyűrűkről az irodalomban mindössze igen kevés szó esett. A legmesszebbmenő eredmények CH. HOPKINStól valók; ő azt mutatta meg, hogy a baloldali ideálokra vonatkozó minimum-feltételből következik a jobbideálokra vonatkozó minimum-feltétel, sőt a részgyűrűkre vonatkozó minimum-feltétel is. SZELE lényegesen továbbmegy, kiindulva azon alapvető észrevételből, hogy a szóbanforgó gyűrűben, ill. ennek additív csoportjában teljesülnie kell az alcsoportokra vonatkozó minimum-feltételnek is. KUROSnak a minimum-fel-

tételű csoportokra vonatkozó említett tétele értelmében ebből tüstént következik, hogy R^+ végessok Prüfer-típusú és ciklikus p-csoport direkt összege. Ennek segítségével SZELE visszavezeti a tekintett gyűrűket a véges nilpotens p-gyűrűk szerkezetére (miként a féligegyszerű gyűrűk vissza vannak vezetve ferdetestekre).

A szóbanforgó R gyűrű R^+ additív csoportja — mint minden torziócsoport — p-csoportok direkt összege; miként fentebb, itt is azonnal látható, hogy ezen p-komponensek R-nek kétoldali ideáljai is, minthogy p-hatványrendű és q-hatványrendű elemek $p \neq q$ esetén annullálják egymást. Így R végessok p-gyűrű direkt összege, s ezért lehet a vizsgálatban a nilpotens p-gyűrűkre szorítkozni. Legyen m az a legkisebb nem-negatív egész, amelyre $p^m R^+$ teljes csoport (KUROS említett tételéből következik, hogy ilyen m szükségképpen létezik); m neve: *R szélessége*. R^+ azon x elemei, amelyekre $p^m x = 0$, R-nek R^* véges részgyűrűjét alkotják és R-nek R^*-on kívüli elemei R-nek annullátorai. R az R^* véges nilpotens gyűrűt egyértelműen meghatározza. Megfordítva, ha R^* véges nilpotens gyűrű, akkor egy hozzátartozó R a következőképpen konstruálható. Ha m az R^* szélessége, úgy válasszunk ki R^*-ban a p^m-edrendű annullátorok közt valamely (nem feltétlenül maximális) független rendszert, legyen ez pl. $a_1, \ldots, a_t$. Minden a_i p^m-edrendű ciklikus csoportot generál, amely belefoglalható egy p^∞ típusú csoportba. Így kibővítve R^* additív csoportját, R-et úgy definiáljuk, hogy az R^*-ban definiált szorzási műveleteket megtartva, az új elemek mind annullátorok legyenek. Látható, hogy adott véges R^* nilpotens gyűrűhöz csak végessok nem-izomorf R gyűrű tartozik.

A jelen sorok írójával közös [37] cikkében a féligegyszerű gyűrűknek egy új jellemzése szerepel, amely fontos szerepet tölt be KERTÉSZ ANDORnak a lineáris egyenletrendszerek elméletére és bizonyos operátormodulusokra vonatkozó vizsgálataiban. A féligegyszerű gyűrűk szerkezetét explicite megadó Wedderburn — Artin-féle struktúra-tételre adott bizonyításokban általában fontos lépés annak igazolása, hogy a féligegyszerű gyűrűkben minden L balideál tartalmaz egy e idempotens generátorelemet: $L = Re$. Ez ekvivalens azzal, hogy minden L balideál tartalmaz e jobbegységet, melyre tehát $xe = x$ minden $x \in L$-re. A dolgozat egyik főeredménye az, hogy ez a féligegyszerű gyűrűknek jellegzetes tulajdonsága, vagyis: *az R gyűrű akkor és csakis akkor féligegyszerű, ha minden balideálja tartalmaz jobbegységet*. A tétel érdekessége az, hogy a balideálokra vonatkozó minimum-feltétel is következménye az említett kikötésnek.

A dolgozat további részében be van bizonyítva, hogy egy R gyűrű minden balideálja akkor és csakis akkor tarlalmaz balegységet, ha ez kétoldali egység és ekkor a gyűrű végessok ferdetest

direkt összege (ezek a gyűrűben kétoldali ideálok), továbbá, hogy R összes részgyűrűi pontosan akkor tartalmaznak baloldali egységelemet, ha R végessok olyan test direkt összege, amelyek közül mindegyik valamelyik prímkarakterisztikájú prímtestnek algebrai bővítése.

Az előbbi dolgozat témájához közelálló kérdéssel foglalkozott az I. Magyar Matematikus Kongresszuson tartott előadásában [28]. Azt bizonyította be, hogy ha az R gyűrű nem tartalmaz 0-tól különböző nilpotens balideálokat és ha az L balideálnak van baloldali egységeleme, akkor R felbontható az $R = L + L'$ direkt összegre, ahol L' az R-nek alkalmas balideálja (L és L' ténylegesen kétoldali ideálok).

Az egyszerű és a féligegyszerű gyűrűk szerkezetét megadó Wedderburn—Artin-féle struktúra-tételeknek C. CHEVALLEY és N. JACOBSON messzemenő általánosítását adta minimum-feltételt ki nem elégítő gyűrűk esetére. E. ARTIN egyik újabb cikkében, amelyben WEDDERBURNnek a modern algebra fejlődésére való hatását méltatja, az egyszerű gyűrűkre vonatkozó tételnek meglepően egyszerű bizonyítását mutatta be. E bizonyítás a szokott bizonyítási módoktól lényegesen eltér, amennyiben nem idempotens elemekre, Peirce-féle felbontásokra támaszkodik, hanem CHEVALLEY és JACOBSON elméletének egyik viszonylag könnyen bizonyítható eredményét használja fel. SZELE észrevette, hogy ebből a tételből alig valamivel több fáradsággal bebizonyítható a féligegyszerű gyűrűkre vonatkozó struktúra-tétel is, sőt ebből azonnal adódik az egyszerű gyűrűkre vonatkozó tétel. SZELE bizonyításával a féligegyszerű gyűrűk elméletének lényegesen leegyszerűsített alakjához jutottunk ([49] és [50]).

A Wedderburn—Artin-struktúra-tételeknek folyománya, hogy ha R nullosztómentes és balideáljaira teljesül a minimum-feltétel, akkor R ferdetest. [6] cikkében SZELE ugyanezen eredményre jut gyengébb feltétel mellett: a balideálokra vonatkozó minimum-feltétel helyett csupán egyetlen minimális balideál exisztenciáját tételezi fel. Ha L minimális balideál és $c \neq 0$ tetszőleges elem L-ben, akkor a nullosztómentesség és L minimalitása folytán $0 \neq Lc = L$. Van tehát oly $e \in L$, melyre $ec = c$. Erről az e-ről könnyű kimutatni, hogy R-nek egységeleme. Ugyanis tetszőleges $y \in R$-re $0 = y(ec - c) = yec - yc = (ye - y)c$, innen $ye = y$. Speciálisan $e^2 = e$. Innen viszont ismét tetszőleges y-ra $0 = e^2y - ey = e(ey - y)$, tehát $ey = y$, azaz e az R gyűrű egységeleme. Ha pedig a gyűrű e egységeleme bennevan L-ben, akkor csak $L = R$ lehet. Mármost R önmagának minimális ideálja lévén, R tetszőleges $a \neq 0$ elemére $Ra = R$, tehát az $xa = e$ egyenlet tetszőleges $a \neq 0$ mellett megoldható, vagyis R ferdetest.

Egészen hasonló bizonyítás szerepel [17] cikkében, ahol azt mutatja ki, hogy ha az R gyűrűben a triviálisokon kívül nincsen más balideál, akkor R vagy p-elemű zérógyűrű, vagy pedig ferdetest.

RÉDEIvel közösen írt [16] cikkében SZELE az elsőrangú gyűrűket adja meg explicite. Elsőrangúnak nevezünk egy R gyűrűt, ha az R^+ Abel-csoport rangja 1. Ekkor R^+ izomorf a racionális számok additív csoportjának, vagy egy Prüfer-féle csoportnak valamely alcsoportjával. Kimutatják, hogy az elsőrangú gyűrűk pontosan a következők: a racionális számtest részgyűrűi, a mod p^k maradékosztálygyűrűk részgyűrűi, valamint azon zérógyűrűk, amelyek additív csoportjának rangja 1. RÉDEI és SZELE explicite megadják a racionális számtest összes részgyűrűit is: az egyes részgyűrűk elemeinek nevezőiben csak prímszámoknak egy fix halmazából vett prímek hatványszorzata áll, míg a számlálók egy fix, az előbbi prímekkel nem osztható n számmal oszthatók. Érdekes, hogy különböző részgyűrűk nem lehetnek izomorfak.

A csoportelméletnek nevezetes megoldatlan problémája, hogy van-e oly végtelen csoport, melynek alcsoportjai eleget tesznek egyidejűleg a minimum- és a maximum-feltételnek. SZELE az ennek megfelelő gyűrűelméleti kérdést oldja meg [52] munkájában, bebizonyítva, hogy ha egy R gyűrű részgyűrűi eleget tesznek a minimum- és a maximum-feltételnek, úgy R szükségképpen véges. (Ezt a tételt tőle függetlenül V. I. SNEJDMÜLLER szovjet matematikus is megkapta.) Ferdetestekre a mondottnál erősebb állítás is igaz: Ha S ferdetest részgyűrűi eleget tesznek a maximum-feltételnek, akkor már következik S végessége. A dolgozat ezeket az eredményeket általánosítja egy R egységelemes gyűrű feletti operátormodulusokra, bebizonyítva, hogy minden unitér R-modulus esetén a részmodulusokra vonatkozó minimum- és maximum-feltételből következik az R-modulus végessége, hacsak R maximális balideáljai R-ben véges indexűek, és megfordítva. (Még további ekvivalens feltételek is szerepelnek.)

E. ARTIN és O. SCHREIER 1926-ban a *Hamburger Abhandlungen*ban megjelent cikkükben a testek elrendezhetőségének kérdését vizsgálták és sikerült annak tiszta algebrai jellemzését adniok. Egy K testet *elrendezhető*nek mondunk, ha elemei közt értelmezhető egy $\geqq$ rendezési reláció (lineáris rendezés) a szokott tulajdonságokkal úgy, hogy pozitív elemek összege és szorzata ismét pozitív legyen. ARTIN és SCHREIER bebizonyította, hogy az elrendezhetőség szükséges és elégséges feltétele az, hogy a test formálisan valós legyen abban az értelemben, hogy -1 nem állítható elő négyzetelemek összegeként. J. P. SERRE általánosította ARTIN és SCHREIER eredményeit, megadva annak kritériumát, hogy

egy elrendezett test rendezése kiterjeszthető legyen a test egy bővítésére. SZELE általánosítva mindezen eredményeket, a ferdetestek elrendezhetőségének kérdését intézi el [33]. Bebizonyítja, hogy az elrendezhetőség pontos feltétele az, hogy -1 nem állítható elő négyzetelemek szorzatainak összegeként. Hogy SZELE mennyire a kérdés lényegét ragadta meg, azt legékesebben az bizonyítja, hogy SZELE eme eredménye nyomán a gyűrűk elrendezhetőségének kérdése rövid idő alatt is sokat fejlődött, így R. E. JOHNSON amerikai matematikus nullosztómentes gyűrűk, V. D. PODDERJUGIN szovjet matematikus pedig tetszésszerinti gyűrűk elrendezhetőségének adta meg szükséges és elégséges feltételét.

Élete utolsó napjaiban a gyűrűk topológiájával foglalkozott s erről a témáról tartotta utolsó előadását Szegeden, midőn KALMÁR LÁSZLÓT 50. születésnapján köszöntötte. Egy G csoport P endomorfizmusgyűrűjébe bevezet természetes topológiát ún. 0-rendszerek segítségével. A P-beli α_ι elemekről akkor mondja, hogy 0-*rendszert* alkotnak, ha a G csoport tetszőleges x elemére $x\alpha_\iota = 0$ legfeljebb végessok ι index kivételével. Nyilvánvaló, hogy 0-rendszer esetén a $\sum_\iota \alpha_\iota$ (végtelen) összeg a P endomorfizmusgyűrűnek jóldefiniált eleme, hiszen ennek bármely $x \in G$-re való alkalmazásánál csak végessok nemzérus tagot kell összegezni. SZELE mármost oly topológiát vezet be P-ba, hogy a 0-rendszerekre az lesz jellemző, hogy 0 bármely környezete a rendszer majdnem minden elemét tartalmazza.

Egyéb dolgozatai

SZELE az eddig ismertetett témakörökön kívül több egyéb kérdéssel is foglalkozott. Így doktori dolgozatában [1] az irányított teljes gráffal kapcsolatos vizsgálatairól számolt be. Mint ismeretes, az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ szögpontokhoz tartozó *irányított teljes gráf*on az összes $A_i A_k$ élek halmazát értjük, mindegyik élnek meghatározott irányítást adva. Különböző $B_1, \ldots, B_k$ szögpontokon áthaladó $\overrightarrow{B_1 B_2}, \ldots, \overrightarrow{B_{k-1} B_k}$ élek egymásutánját *pálya*nak nevezzük. Ha $k = n$, vagyis ha a pálya a gráf valamennyi szögpontján áthalad, *teljes* pályáról beszélünk. RÉDEI bebizonyította, hogy egy G gráf összes teljes pályáinak (G) száma mindig páratlan. SZELE e tételt újra bizonyítja a következő ekvivalens átfogalmazásban: ha a G gráf tetszőleges élének irányítását megfordítjuk, a teljes pályák száma páros számmal változik meg. RÉDEI tételének kétféle általánosítását is adja. Egyik általánosításként azt bizonyítja, hogy a

szögpontoknak $\binom{n-1}{l}$-lel egyező párosságú oly $B_1, \ldots, B_n$ permutációjuk van, amelyekben pontosan l számú $\overleftarrow{B_{i-1}B_i}$ irányítású él van. Szele azon gráfokat is vizsgálja, amelyek tranzitívak abban az értelemben, hogy az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ élekkel együtt az $\overrightarrow{AC}$ élt is tartalmazzák. Ennek alapján a (másodfajú) Stirling-féle számoknak érdekes gráfelméleti jelentését is bemutatja. Vizsgálja még a (G) szám T_n maximumát valamennyi n szögpontú irányított teljes gráfra vonatkozóan és bebizonyítja a

$$t = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}$$

határérték exisztenciáját, valamint azt, hogy $\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{1}{2^{3/4}}$. (A sejtés az, hogy $t = \frac{1}{2}$.)

Egy számelméleti kérdésnek szenteli egyik korai munkáját [8]. A Fermat-féle $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, ill. az Euler-féle $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$ (ahol $(x, m) = 1$ és φ az Euler-féle függvényt jelenti) kongruencia-tételeknek többféle általánosítása ismeretes. Így Gausstól ered az

$$F_m(x) = \sum_{d|m} \mu(d) x^{\frac{m}{d}} = x^m - \sum x^{\frac{m}{p_i}} + \sum x^{\frac{m}{p_i p_j}} - + \cdots \equiv 0 \pmod m$$

(μ a Möbius-féle függvény és $p_i, p_j, \ldots$ az m különböző prímosztói) kongruencia x prímszám esetére (ebben az esetben $\frac{1}{m} F_m(x)$ megadja a mod x irreducibilis m-edfokú polinomok számát). A felírt kongruenciát azóta többen is bizonyították tetszőleges egész x-re. Szele három különböző bizonyítást is ad, amelyek különböző elveken alapszanak. Az egyik bizonyítás a következő.

Legyen x egész és osszuk be $x^m - 1$-nek δ osztóit E_d osztályokba aszerint, hogy mely legkisebb d pozitív egészre teljesül $\delta | x^d - 1$. Világos, hogy érvényes a következő két oszthatósági reláció: $d | \varphi(\delta)$ és $d | m$. Legyen

$$\Phi(d) = \sum_{\delta \in E_d} \varphi(\delta).$$

Ekkor

$$\sum_{d|m} \Phi(d) = \sum_{d|m} \left(\sum_{\delta \in E_d} \varphi(\delta) \right) = \sum_{\delta | x^m - 1} \varphi(\delta) = x^m - 1,$$

ahol az utolsó lépésnél az Euler-függvény ismert összegzési kép-

letét használtuk. A Möbius-féle inverziós formula alapján innen

$$\Phi(m) = \sum_{d|m} \mu(d)\left(x^{\frac{m}{d}} - 1\right) =$$

$$= \sum_{d|m} \mu(d) x^{\frac{m}{d}} - \sum_{d|m} \mu(d) = F_m(x) - 0 = F_m(x).$$

$d|\varphi(\delta)$ miatt $d|\Phi(d)$ is, vagyis $m|\Phi(m)$, q. e. d.

CSÁSZÁR ÁKOS egyik munkájához kapcsolódó [15] cikkében a kvadratikus alakok ismert klasszifikációjával foglalkozik. Egészen elemi, a determináns-kifejtésre épülő bizonyítást ad a pozitív definit, a negatív definit és a szemidefinit kvadratikus alakok determináns-kritériumaira.

Az egész modern algebra szempontjából oly lényeges szerepet játszó Zorn-féle lemmáról szól [19] dolgozata. A Zorn-lemmát — mely azt mondja ki, hogy ha a P részben rendezett halmazban minden lánchoz (vagyis minden teljesen rendezett részhalmazhoz) van P-ben felső korlát, tehát oly $u \in P$ elem, hogy $x \leqq u$ minden láncbeli x elemre, akkor P tartalmaz maximális elemet, vagyis olyat, melynél nagyobb már nincs P-ben — többnyire a Zermelo-féle jólrendezési tételből szokás bizonyítani, amelyet viszont a kiválasztási axióma felhasználásával bizonyítanak. SZELE kiiktatja az elvileg kevésbé egyszerű jólrendezési tételt és ZERMELO első bizonyításának ideáját használva, közvetlenül a kiválasztási axiómából bizonyítja be ZORN lemmáját. A dolgozatban ciklikus bizonyítást ad a következő 5 ekvivalens tételre, mindegyiket a megelőzőből s az elsőt az utolsóból vezetve le: a kiválasztási axióma, ZORN lemmája, TUKEY lemmája, HAUSDORFF—BIRKHOFF tétele s végül ZERMELO jólrendezési tétele.

[38] dolgozatában a lineáris egyenletrendszerek elméletével foglalkozik. A ferdetest feletti lineáris egyenletrendszereket általában csak végessok egyenlet és végessok ismeretlen esetére szokták tekinteni. BOURBAKIék valamivel általánosabban értik a lineáris egyenletrendszert, de náluk is az az erős kikötés szerepel, hogy csak végessok ismeretlen értéke különbözhetik 0-tól. GACSÁLYI SÁNDOR bebizonyította, hogy tetszőleges számosságú egyenletből álló és tetszőleges számosságú ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer — hacsak egy-egy egyenletben csupán végessok ismeretlen szerepel ténylegesen — a nyilvánvalóan szükséges kompatibilitási feltételek teljesülése esetén mindig megoldható. A Gacsályi-féle bizonyítás a teljes (algebrailag zárt) csoportokra vonatkozó eredmények felhasználásával történik. SZELE kimutatja, hogy a véges egyenletrendszerek esetében alkalmazott klasszikus módszer könnyen kiterjeszthető az általános esetre is.

Sokrétű és intenzív tudományos munkája mellett behatóan foglalkozott az egyetemi oktatás egyes problémáival is. Az 1953-ban megjelent „Bevezetés az algebrába" c. egyetemi tankönyvében az I. éves algebra anyagnak adja mind pedagógiai, mind tudományos szempontból igen alaposan átgondolt tárgyalását. Külön kiemelendők azok az apróbetűvel szedett megjegyzések, amelyek a klasszikus algebrának egyes absztrakt algebrai vonatkozásaival ismertetik meg az olvasót, felkeltve érdeklődését a felsőbb algebra iránt.

Fuchs László

Szele Tibor

tudományos munkái

Könyv:

Bevezetés az algebrába. Egyetemi tankönyv (Budapest, 1953), 276 oldal.

Dolgozatok:

1. Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban. *Mat. és Fiz. Lapok,* **50** (1943), 223—256.
2. Über die endlichen Ordnungszahlen, zu denen nur eine Gruppe gehört. *Commentarii Math. Helv.,* **20** (1947), 265—267.
3. Ein Beweis des Ruffini—Abelschen Satzes. *Commentarii Math. Helv.,* **20** (1947), 268—269.
4. Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe. I. (*Rédei László*val közösen) *Acta Math. Uppsala,* **79** (1947), 291—320.
5. Ein Satz über die Struktur der endlichen Ringe. *Acta Sci. Math. Szeged,* **11** (1948), 246—250.
6. Eine kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper. *Commentarii Math. Helv.,* **22** (1949), 115—116.
7. Über die direkten Teiler der endlichen Abelschen Gruppen. *Commentarii Math. Helv.,* **22** (1949), 117—124.
8. Une généralisation de la congruence de Fermat, *Matematisk Tidsskrift,* **1948** B, 57—59.
9. Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen. *Acta Sci. Math. Szeged,* **13** (1949), 54—56.
10. Neuer vereinfachter Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós. *Publicationes Math. Debrecen,* **1** (1949), 56—62.
11. Sur la décomposition directe des groupes abéliens. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **229** (1949), 1052—53.
12. Zur Theorie der Zeroringe. *Math. Annalen,* **121** (1949), 242—246.
13. Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe. II. (*Rédei László*val közösen.) *Acta Math. Uppsala,* **82** (1950), 209—241.
14. Über die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring. *Publicationes Math. Debrecen,* **1** (1949), 89—91.
15. Über die Klassifikation der quadratischen Formen. *Publicationes Math. Debrecen,* **1** (1950), 189—192.
16. Die Ringe „ersten Ranges". (*Rédei László*val közösen.) *Acta Sci. Math. Szeged,* **12/A** (1950), 18—29.
17. Die Ringe ohne Linksideale. *Buletin Ştiinţific, Bucureşti,* **1** (1950), 783—789.

18. Die unendliche Quaternionengruppe. *Buletin Ştiinţific, Bucureşti,* **1** (1950), 791—801.
19. On Zorn's lemma. *Publicationes Math. Debrecen,* **1** (1950), 254—256.
20. Über drei wichtige Gruppen. (*Szélpál Istvánnal* közösen.) *Acta Sci. Math. Szeged,* **13** (1950), 192—194.
21. Elemi geometriai problémák megoldása vektorokkal. *A középiskolai matematikatanitás kérdései.* — Szocialista Nevelés Kiskönyvtára, 4. sz. 75—93.
22. Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen. *Journal f. reine und angew. Math.,* **188** (1950), 167—192.
23. Sur les groupes ayant un sous-groupe parfait. *Bulletin Sci. Math. Paris,* **74** (1950), 207—209.
24. Periodische zyklische Differenzenmatrizen. *Acta Math. Uppsala,* **84** (1951), 181—187.
25. A komplex számok bevezetése vektoralgebrai alapon. *Mat. Lapok,* **1** (1950), 349—362.
26. Gruppentheoretische Beziehungen bei gewissen Ringkonstruktionen. *Math. Zeitschrift,* **54** (1951), 168—180.
27. On direct sums of cyclic groups. *Publicationes Math. Debrecen,* **2** (1951), 76—78.
28. Ein Zerfällungssatz für radikalfreie Ringe. *Comptes Rendus du premier congrès des Mathématiciens Hongrois* (Budapest, 1952), 429—434.
29. On a theorem of Pontrjagin. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **2** (1951), 121—123.
30. On abelian groups with commutative endomorphism ring. (*Szendrei Jánossal* közösen.) *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **2** (1951), 309—324.
31. On abelian groups every multiple of which is a direct summand. (*Kertész Andorral* közösen.) *Acta Sci. Math. Szeged,* **14** (1952), 157—166.
32. Újabb eredmények az absztrakt algebra területén. *A MTA III. Osztályának Közleményei,* **2** (1952), 73—88.
33. On ordered skew fields. *Proc. Amer. Math. Soc.,* **3** (1952), 410—413.
34. On groups with atomic layers. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **3** (1952), 127—129.
35. Introduction of complex numbers as vectors of the plane. (*Fuchs Lászlóval* közösen.) *Amer. Math. Monthly,* **59** (1952), 628—631.
36. Az 1951. évi Schweitzer Miklós matematikai verseny. *Mat. Lapok,* **3** (1952), 243—272.
37. Contribution to the theory of semisimple rings. (*Fuchs Lászlóval* közösen.) *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **3** (1952), 233—239.
38. On arbitrary systems of linear equations. *Publicationes Math. Debrecen,* **2** (1952), 297—299.
39. On non-countable abelian *p*-groups. *Publicationes Math. Debrecen,* **2** (1952), 300—301.
40. On direct sums of cyclic groups with one amalgamated subgroup. *Publicationes Math. Debrecen,* **2** (1952), 305—307.
41. On the smallest distance of two lines in 3-space. (*Kertész Andorral* közösen.) *Publicationes Math. Debrecen,* **2** (1952), 308—309.
42. On direct decompositions of abelian groups. *Journal London Math. Soc.,* **28** (1953), 247—250.
43. Az egységgyökök multiplikatív csoportjáról. *Az MTA III. Osztályának Közleményei,* **3** (1953), 55—58.
44. Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image. (*Kertész Andorral* közösen.) *Acta Sci. Math. Szeged,* **15** (1953), 55—58.
45. On a special kind of duality in group theory. I. (*Fuchs Lászlóval* és *Kertész Andorral* közösen.) *Acta Math. Acad Sci. Hung.,* **4** (1953), 169—178.

46. Szovjet eredmények az absztrakt algebra területén. (*Fuchs László*val közösen.) *Mat. Lapok*, **4** (1953), 92—107.

47. Abelian groups in which every serving subgroup is a direct summand. (*Fuchs László*val és *Kertész Andor*ral közösen.) *Publicationes Math. Debrecen*, **3** (1953), 95—105.

48. On the existence of non-discrete topologies in infinite abelian groups. (*Kertész Andor*ral közösen.) *Publicationes Math. Debrecen*, **3** (1953), 187—189.

49. Két gyűrűelméleti struktúratétel geometriai bizonyítása. *Az MTA III. Osztályának Közleményei*, **4** (1954), 49—85.

50. Simple proof of the Wedderburn—Artin structure theorem. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 101—107.

51. On the basic subgroups of abelian *p*-groups. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 129—141.

52. On a finiteness criterion for modules. *Publicationes Math. Debrecen*, **3** (1954), 251—254.

53. Nilpotent Artinian rings. *Publicationes Math. Debrecen*, **4** (1955), 71—78.

54. On abelian groups whose subgroups are endomorphic images. (*Fuchs László*val és *Kertész Andor*ral közösen.) *Acta Sci. Math. Szeged*, **16** (1955), 77—88.

55. A komplex számok geometriája. (Szocialista Nevelés Kiskönyvtára. Megjelenés alatt.)

Резюме

Некролог: Жизнь и деятельность Т. Селе.

Summary

Obituary: Life and works of T. Szele.

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ sinus-sor maradéktagjáról

Fejér Lipót 75. születésnapjára

Szász Pál

Az ismert

$$\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = -\frac{1}{2} + \frac{\sin (2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

trigonometrikus összegképlet mindkét oldalán 0-tól x-ig integrálva, amint már M. Bôcher[1] is tette, előáll

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin (2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (1)$$

Felhasználva még a

$$\frac{\sin \tau}{\sin \tau} + \frac{\sin 3\tau}{\sin \tau} + \cdots + \frac{\sin (2n-1)\tau}{\sin \tau} = \left(\frac{\sin n\tau}{\sin \tau}\right)^2$$

összegképletet, Fejér[2] a

$$0 + \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots \quad (2)$$

[1] Maxime Bôcher, Introduction to the Theory of Fourier's Series, Annals of Mathematics, II. Series 7 (1905—6), 81—152, speciálisan 123—124.

[2] Fejér Lipót, A függvény szakadásának meghatározása Fourier-féle sorából, Matematikai és Természettudományi Értesítő 31 (1913) 385—415, speciálisan 391—392; vagy Leopold Fejér, Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe, Journal für die reine und angewandte Mathematik 142 (1913), 165—188, speciálisan 170. Itt az integrálban $\frac{t}{2}$ van bevezetve új változónak.

sinus-sor első $n+1$ részletösszegének $S_n(x)$ számtani közepét (1) alapján a

$$S_n(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^x \left(\frac{\sin (n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \qquad (3)$$

alakban állította elő. Egy további munkájában[3] megjegyzi, hogy mivel e képletet $x = \pi$-re alkalmazva

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2(n+1)} \int_0^\pi \left(\frac{\sin (n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt,$$

e (3) képlet más alakban

$$\frac{\pi - x}{2} - S_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \int_x^\pi \left(\frac{\sin (n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \qquad (3^*)$$

E figyelemreméltó formulából látható (amint FEJÉR az utóbb idézett helyen és másutt[4] ki is emeli), hogy

$$S_n(x) < \frac{\pi - x}{2}, \text{ ha } 0 < x < \pi.$$

Az alábbiakban FEJÉR (3*) *alatti képlete alapján megmutatjuk, miszerint a* $(0,2\pi)$ *intervallum belsejében*

$$\frac{\pi - x}{2} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \frac{\cos (2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \int_x^\pi \frac{\cos (n+1)t}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt \right\} \qquad (4)$$

$$(0 < x < 2\pi).$$

[3] LEOPOLD FEJÉR, Geschtaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 13 (1933), 80—88, speciálisan 83.

[4] LEOPOLD FEJÉR, On new properties of the arithmetical means of the partial sums of Fourier-series, Journal of Mathematics and Physics 13 (1934), 1—17, speciálisan 3; vagy FEJÉR LIPÓT, A Fourier-féle sor és a hatványsor számtani közepeinek néhány új tulajdonságáról, Matematikai és Fizikai Lapok 41 (1934), 1—16 speciálisan 3.

Ebből következik — mint látni is fogjuk — *e különbségnek* FEJÉR-*féle*[5] *aszimptotikus kifejezése:*

$$\frac{\pi - x}{2} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{\cos (2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \eta_n(x) \right\} \tag{5}$$

$$(0 < x < 2\pi),$$

ahol $n \to +\infty$ *esetén*

$$\eta_n(x) \to 0 \tag{6}$$

a $\delta \leqq x \leqq 2\pi - \delta$ *subintervallumban egyenletesen áll fenn valahányszor* $0 < \delta < \pi$. Ez aszimptotikus formulából is folyik az egyébként jól ismert

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi)$$

FOURIER-féle sorfejtés, tehát a (4) alatti különbség éppen e sinussor maradéktagja.

(4) alatti képletünket bebizonyítandó, a (3*) jobboldalán álló integrált átalakítjuk. Parciális integrálással

$$\int_x^{\pi} \left(\frac{\sin (n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \sin^2 (n+1)\frac{x}{2} +$$

$$+ \int_x^{\pi} (n+1) \sin (n+1)t \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt$$

s itt a jobboldali integrálra ismét parciális integrálást alkalmazva

$$\int_x^{\pi} (n+1) \sin (n+1)t \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt =$$

$$= \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \cos (n+1)x - \frac{1}{2} \int_x^{\pi} \frac{\cos (n+1)t}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt,$$

[5] LEOPOLD FEJÉR, Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, Transactions of the American Mathematical Society 39 (1936), 18—59, speciálisan 54. Itt az egyenletesség csak a $\delta \leqq x \leqq \pi - \delta$ intervallumra van kimondva.

tehát a $2\sin^2(n+1)\frac{x}{2} = 1 - \cos(n+1)x$ képletre tekintettel

$$\int_x^\pi \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^2 dt = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^\pi \frac{\cos(n+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \qquad (7)$$

$$(0 < x < 2\pi).$$

Eszerint (3*) a $(0, 2\pi)$ számköz belsejében a

$$\frac{\pi - x}{2} - S_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^\pi \frac{\cos(n+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \right\} \qquad (8)$$

$$(0 < x < 2\pi)$$

alakban írható. De általában valamely $c_0 + c_1 + \cdots + c_n$ összeg a részletösszegei S_n számtani közepével kifejezve[6]

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_n = S_n + \frac{1\cdot c_1 + 2\cdot c_2 + \cdots + n c_n}{n+1} \qquad (9)$$

s így a (2) alatti sor $(n+1)$-edik szelete

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} = S_n(x) + \frac{\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx}{n+1}$$

vagy az ismert

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (10)$$

összegképlet felhasználásával

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} = S_n(x) + \frac{1}{2(n+1)} \left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right).$$

Ezt (8)-cal összevetve, adódik (4).

[6] Fejér Lipót, A folytonos függvények Fourier-féle sorának singularitásairól, Matematikai és Természettudományi Értesítő 28 (1910), 1—45, speciálisan 12; vagy Leopold Fejér, Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, Annales de l'École Normale Superieure 28 (1911), 64—103, speciálisan 71.

Miután $1/\sin^2\frac{t}{2}$ a $0<x\leqq\pi$ intervallumban monoton fogyó pozitív függvény, az integrálszámítás második középértéktétele szerint

$$\int_x^\pi \frac{\cos(n+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\int_x^\xi \cos(n+1)t\,dt,\qquad x\leqq\xi\leqq\pi.$$

S mivel

$$\left|\int_x^\xi \cos(n+1)t\,dt\right|\leqq\frac{2}{n+1},$$

innen látható, hogy $0<\delta<\pi$ mellett

$$\left|\int_x^\pi \frac{\cos(n+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|\leqq\frac{2}{n+1}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}},\qquad \text{ha } \delta\leqq x\leqq\pi.$$

Ennélfogva (4)-ből következik, hogy

$$(n+1)\left(\frac{\pi-x}{2}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}\right)-\frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\to 0 \qquad (11)$$

a $\delta\leqq x\leqq\pi$ számközben egyenletesen áll fenn. De (4)-ből az is látható, hogy

$$\frac{\pi-x}{2}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}\to 0$$

a (δ,π)-ben egyenletesen (amint különben ismeretes is), tehát e részintervallumban egyben

$$n\left(\frac{\pi-x}{2}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}\right)-\frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\to 0 \qquad (12)$$

is egyenletesen érvényes. (11) és (12) összeadásával nyerjük, miszerint

$$(2n+1)\left(\frac{\pi-x}{2}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}\right)-\frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\to 0$$

a $\delta \leqq x \leqq \pi$ intervallumban egyenletesen. Minthogy

$$\cos(2n+1)\frac{x}{2} \Big/ \sin\frac{x}{2}$$

a 2π szerint periodikus páratlan függvény, e limes-relációból már következik annak egyenletes fennállása a $\pi \leqq x \leqq 2\pi - \delta$ intervallumban is. Ezzel megmutattuk, hogy (4) valóban maga után vonja (5) és (6) fennállását.

Alapul vehettük volna azt a FEJÉR[7] vizsgálataiból jól ismert képletet is, amely szerint az

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt + \cdots$$

divergens sor első $n+1$ részletösszegének számtani közepe

$$\frac{1}{2} + \frac{n\cos t + (n-1)\cos 2t + \cdots + 1\cdot\cos nt}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

s amelynek alapján (9) felhasználásával e sor $(n+1)$-edik szelete

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu t = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 + \frac{\sum_{\nu=1}^{n}\nu\cos\nu t}{n+1}.$$

Integrálva ugyanis x-től π-ig, innen

$$\frac{\pi - x}{2} - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\int_x^\pi \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt - \frac{\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu x}{n+1}$$

s ebből (7) alapján (10) felhasználásával ismét folyik (4).

(Budapest, 1955. február 9.)

[7] LEOPOLD FEJÉR, Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Mathematische Annalen 58 (1904), 51—69, speciálisan 53.

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ СИНУСОИДАЛЬНОГО РЯДА $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

К 75 летию со дня рождения Л. Фейера

Резюме

Л. Фейер[1] представил замечательную формулу:

$$\frac{\pi - x}{2} - S_n(x) = \left[\frac{1}{2(n+1)}\right] \int_x^{\pi} \left(\frac{\sin (n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt$$

для арифметического среднего $S_n(x)$ первых $n+1$ частных сумм синусоидального ряда

$$0 + \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots \frac{\sin nx}{n} + \cdots .$$

В настоящей статье указывается, что внутри интервала $(0, 2\pi)$

$$\frac{\pi - x}{2} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu\alpha}{\nu} = \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \frac{\cos (2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \int_x^{\pi} \frac{\cos (n+1)t}{\sin \frac{2t}{2}} dt \right\}.$$

На основании этой формулы приводится асимптотическое выражение этой разницы по Фейеру:[2]

$$\frac{\pi - x}{2} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu\alpha}{\nu} = \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{\cos (2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \eta_n(x) \right\} (0 < x < 2\pi)$$

где при $n \to +\cdot\infty$ в подинтервале $\delta \leqq x \leqq 2\pi - \delta$ предел

$$\eta_n(x) \to 0$$

равномерно существует, если $0 < \delta < \pi$.

[1] Leopold Fejér: „Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe“, Journal für reine und angewandte Mathematik 142 (1913), 165—188, специально 170; далее от того же автора „Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe“, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 13 (1933), 80—88, специально 83.

[2] Leopold Fejér: „Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge“, Transactions of the American Mathematical Society 39 (1936), 18—59, специально 54. Здесь равномерность доказана только в интервале $\delta \leqq x \leqq \pi - \delta$.

ÜBER DAS RESTGLIED DER SINUSREIHE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

LEOPOLD FEJÉR zu seinem 75. Geburtstage

LEOPOLD FEJÉR[1] hat für das arithmetische Mittel der $n+1$ ersten Partialsummen der Sinusreihe

$$0+\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n}+\cdots$$

die bemerkenswerte Integralformel

$$\frac{\pi-x}{2}-S_n(x)=\frac{1}{2(n+1)}\int_x^{\pi}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

angegeben. In vorliegender Arbeit wird durch Verwendung dieser Formel gezeigt, dass *im Innern des Intervalles* $(0, 2\pi)$

$$\frac{\pi-x}{2}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}=\frac{1}{2(n+1)}\left\{\frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\int_x^{\pi}\frac{\cos(n+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right\}$$

gilt. Auf Grund dieser letzten Formel wird dann für diese Differenz die folgende asymptotische Formel von LEOPOLD FEJÉR[2] hergeleitet:

$$\frac{\pi-x}{2}-\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}=\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\eta_n(x)\right\}$$

$$(0<x<2\pi)$$

wobei

$$\eta_n(x)\to 0 \qquad (n\to+\infty)$$

und zwar gleichmässig für $\delta\leqq x\leqq 2\pi-\delta$, $0<\delta<\pi$.

[1] LEOPOLD FEJÉR, Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe, Journal für die reine und angewandte Mathematik 142 (1913), 165—188, speziell 170; ferner von demselben Verfasser, Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 13 (1933), 80—88, speziell 83.

[2] LEOPOLD FEJÉR Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, Transactions of the American Mathematical Society 39 (1936), 18—59, speziell 54. Hierbei wird die Gleichmässigkeit nur für das Intervall $\delta\leqq x\leqq\pi-\delta$ ausgesprochen.

Kalmár László matematikai munkássága

Írta: Péter Rózsa

Kalmár László ebben az évben, március 27-én lett 50 éves. Ebből az alkalomból a Publicationes Mathematicae ünnepi számot adott ki tanítványai, barátai és tisztelői egy csoportjának neki ajánlott munkáiból. De egy terjedelmes kötetben sem lehetett volna hely mindazok számára, akik egészben vagy részben Kalmár tanítványainak érzik magukat. Nemcsak arról van szó, hogy a legjobb magyar matematikatanárok nagy része az ő keze alól került ki. Ha valaki az utolsó évtizedek magyar matematikájáról akarna tanulmányt írni, egyik főforrása Kalmár levelezése lehetne: a legkülönbözőbb területeken dolgozó matematikusok fordultak hozzá kérdéseikkel, és kaptak tőle munkájukat előbbre segítő feleletet. Hozzá fordultak, mert tudták, hogy matematikus egyéniségének legfőbb vonásai: a matematika egész területének világos áttekintése, nemcsak terjedelmében, hanem mélységében is, és szinte egyedülálló pedagógiai érzék.

Matematikus volta már gyermekkorában megnyilatkozott. Már 11 éves korában megértette egy kezébe került logaritmus-táblázat rendeltetését, és azt, hogy hogyan szerkeszthetne ő maga is egy műveleteket megkönnyítő táblázatot; 12 éves korában pedig 11-et hatványozgatva felfedezte a binomiális tételt. A régi IV—VIII. gimnázium anyagát felölelő tankönyvet már az iskolai algebratanulás előtt szinte egy ültőhelyben elolvasta, és ettől fogva azok a kérdések érdekelték, amelyekre ez a könyv nem ad választ. 13-ik születésnapjára Cesaro analiziskönyvét kérte, végig olvasta és meg is értette.

Amikor a budapesti egyetemre került, már évfolyamtársainak mestere volt. I. éves korában nemcsak az Eötvös-verseny első díját nyerte el, hanem az analitikus függvények Lagrange-féle interpolációs polinomokkal való megközelítésére vonatkozó egyetemi pályatétel első díját is. Én is évfolyamtársa voltam; ennek köszönhetem, hogy matematikus lettem. Akkor még nem jelent meg Pólya és Szegő kitűnő könyve, amely feladatokban dolgozza fel az analízis jelentős részét; a mi évfolyamunknak Kalmár volt az eleven

Pólya—Szegője. A körülötte csoportosuló, érdeklődő hallgatókkal feladatsorozatokban dolgoztatta fel a matematika különböző területeit. Abban is utat mutatott, hogy minden tudományegyetemi és műegyetemi előadást hallgatott, az arra érdemes magántanári előadásokat is. Egyes egyetemi előadásokról olyan jegyzeteket készített, hogy az egyikre Fejér hivatkozott is egyik dolgozatában. Példamutató volt később abban is, hogy a nemzetközi matematikai kongresszusokon részt vett abban az időben, amikor ez még súlyos anyagi áldozatot jelentett.

Mint vérbeli pedagógus, tanulni is, alkotni is tanítva tudott a legjobban. Volt rá eset, hogy félig kész munkáját adta elő fiatal matematikusoknak és előadás közben találta meg a hiányzó lépéseket. A matematikai logikával szegedi tanársegéd korában ismerkedett meg, úgy, hogy 40—50 oldalas leveleket írt róla; nekem is.

Külső pályáján lassan jutott előre. A felszabadulásig a szegedi egyetem adjunktusa volt, még magántanársága körül is sok volt a huzavona. Ez csak a felszabadulás után intéződött el, majd 1947-ben a szegedi egyetem rendes tanára, 1949-ben az Akadémia levelező tagja lett, 1950-ben Kossuth-díjat kapott.

Igen kiterjedt matematikai munkásságát csak egészen nagy vonalakban ismertethetem.

Doktori értekezése komplex változós *függvénytani* tárgyú; egyetemi pályamunkájához csatlakozik. Ugyanis ennek kidolgozásakor Faber vizsgálatait, amelyekkel állítása szerint elintézi az itt felvetődő főkérdést, nem sikerült Kalmárnak megértenie. Később kiderült, hogy a Faber kimondotta tétel hibás; a helyes kritériumot Kalmár adta meg disszertációjában. Pontosabban a következő eredményre jutott Kalmár: nevezzük egy C Jordan-görbére nézve „jól interpolálóknak" a C zárt belsejében fekvő $x_i^{(k)}$ helyeket ($k = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, n_k$), ha bármely, a C zárt belsejében reguláris $f(x)$ függvény esetén C zárt belsejében egyenletesen

$$L_k(x) \to f(x) \qquad (\text{ha } k \to \infty),$$

ahol $L_k(x)$ az az n_k-nál alacsonyabb fokú polinom, amely az $x_1^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ helyeken rendre ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint $f(x)$. Kör esetén Runge, az általános esetben Fejér adott meg először jól interpoláló helyeket. Fejér dolgozatának gondolatmenetéből elegendő feltételeket olvasott ki Kalmár a jól interpoláló sajátsághoz, és bebizonyította, hogy ezek a feltételek szükségesek is.

A függvénytanhoz Fejér hatásán kívül az *analitikus számelmélet* iránt való érdeklődése vezette Kalmárt. Erről a területről 3 dolgozata jelent meg; folytatásukat a matematikai logikával való ismerkedés, és a nyomában toluló felfedezések későbbre halasztották. Egyik megjelent munkájának tárgya a következő. Számos

számelméleti probléma a $\sigma > 1$-re konvergens

$$\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad (s = \sigma + it)$$

alakú Dirichlet-sorok

$$A(x) = \sum_{n \leqq x} a_n$$

együttható-összegének becslésére vezethető vissza, és ehhez rendszerint $\alpha(s)$-nek a $\sigma < 1$ félsíkra való analitikus folytathatóságát használják fel. $A(x) = O(x^h)$ alakú becslés érvényességéhez, ahol $h < 1$, szükséges is az analitikus folytathatóság. Ezzel szemben Kalmár megmutatja, hogy ha bármilyen $h < 1$-re $F(x) \neq O(x^h)$, akkor van olyan $\alpha(s)$ Dirichlet-sor, mely amellett, hogy $A(x) = O[F(x)]$, a $\sigma = 1$ egyenes minden pontjában szinguláris. Megad egy becslésmódot, mely $\alpha(s)$ analitikus folytathatósága helyett csak $\sigma > 1$-re vonatkozó egyenlőtlenségeket használ fel. Ezt alkalmazza a prímszámtétel egy olyan maradéktagbecslésének elemi bizonyítására, amely addig csak a Cauchy-tétel felhasználásával sikerült.

Két másik dolgozatában a „partitio numerorum" problémájának multiplikativ számelméleti analogonjával, a „factorisatio numerorum"-mal foglalkozik Kalmár. Legyen $f(n)$ az n természetes szám 1-nél nagyobb tényezők szorzataként való előállításainak száma, tekintettel a tényezők sorrendjére is, ϱ a $\zeta(s) = 2$ egyenlet egyetlen valós, 1-nél nagyobb gyöke és $C = -\frac{1}{\varrho \zeta'(\varrho)}$, ahol $\zeta(s)$ a Riemann-féle ζ-függvény. Kalmár elemi függvénytani eszközökkel bebizonyítja az

$$F(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \sim C n^{\varrho}$$

aszimptotikus képletet, és a Cauchy-tétel alkalmazásával, de az analitikus számelméletben szokásos görbevonalú integrálokat elkerülve felső becslést ad $|F(n) - Cn^{\varrho}|$ számára.

A vérbeli pedagógus Kalmár minden területen keresi a szokásosnál egyszerűbb bizonyításmódokat: a függvénytanban is, az algebrában is, az elemi számelméletben is. Pl. egy felszabadulás után megjelent dolgozatában új bizonyítást adott Cauchy konvergencia-kritériumára, amely nem használja fel a Bolzano-Weierstrass tételt.

Az *algebra* területén a Ruffini—Abel tételre ad Kalmár egyszerűbb bizonyítást, amely az alternáló csoport egyszerűsége helyett azt a könnyebben bizonyítható tényt használja fel, hogy $n \geqq 5$ esetén az n elem alternáló csoportjának nincs primszámindexű normális osztója. Egy újabb dolgozatával a valós számok Cantor-

féle elméletének algebrai feldolgozásába is bekapcsolódik; ezt „még algebraibbá" teszi.

Az *elemi számelméletben* teljes indukcióval bizonyít be Kalmár egy segédtételt (az ún. „négyszámtételt"), amely csírájában mutatja, hogy miért áll fenn a számelmélet alaptétele; ebből azután egyszerűen adódik nemcsak a primszámtulajdonság, (amiből rendszerint levezetik az alaptételt), hanem közvetlenül maga az alaptétel is; és közvetlenül adódnak belőle olyan oszthatósági tételek is, amelyeket az alaptétel segítségével szokás bizonyítani.

Az *aritmetika alapjai*ra vonatkozó tisztázatlan kérdések már a matematikai logikával való ismerkedése kezdetén foglalkoztatták Kalmárt. Az aritmetika Peano-féle axiomatikus felépítésében rekurzióval szoktak műveleteket definiálni, holott az így értelmezett függvény létezése nem adódik közvetlenül a teljes indukció axiómájából. Az exisztencia szokásos bizonyítása az egyenlőtlenség fogalmán alapul; ezt összeadással szokás értelmezni, az összeadást pedig rekurzióval: így circulus vitiosus keletkezik. Dedekind ezért az összeadás fogalma nélkül definiálta az egyenlőtlenséget; ez az út azonban nagyon bonyolult volt. Göttingeni tanulmányútján vetette fel Kalmár azt a gondolatot, hogy az összeadás esetén közvetlenül ís be lehet bizonyítani az exisztenciát, ezután már összeadással definiálható az egyenlőtlenség, és így felhasználható az általános exisztencia-tétel bizonyítására. Ezt Laudan tette közzé „Grundlagen der Analysis" c. könyvében, megjegyezve, hogy a Kalmártól származó gondolat könyvének egyetlen új mondanivalója.

Később — Lorenzen egy bonyolultabb bizonyítása után egyszerűbben — az általános esetben is bebizonyította Kalmár a szóbanforgó exisztenciatételt az egyenlőtlenség fogalmának felhasználása nélkül.

Az aritmetika körébe sorolhatók Kalmárnak a végtelen sok változós finit számelméleti függvényekre vonatkozó vizsgálatai is, amelyekről a VIII. Lengyel Matematikai Kongresszuson adott elő 1953-ban. Egy $f(x_1, x_2, \ldots)$ számelméleti (azaz természetes számokon definiált és természetes szám értékű) függvényt finitnek nevez Kalmár, ha minden $(a_1, a_2, \ldots)$ helyhez van olyan k, hogy valahányszor $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_k = a_k$, mindannyiszor $f(x_1, x_2, \ldots) = f(a_1, a_2, \ldots)$. Ilyenek a csupán véges sok változótól függő függvények, de pl. a valóban végtelen sok változós $x_1 + x_2 + \cdots + x_{x_1}$ függvény is. A finit függvények a *topológia* szempontjából is érdekesek, mert éppen a Baire-féle 0-térben folytonos pozitív egész értékű függvényekkel azonosak. Főérdekességük azonban a matematika alapjainak vizsgálatába vág. Ugyanis az intuicionista felfogás, mely csak annak létezését fogadja el, ami megkonstruálható, megcsonkítja ugyan a matematikát és ezért elfogadhatatlan; mindamellett helyes törekvés a megkonstruálható dolgok felkutatása.

Kalmár az intuicionizmus függvényfogalmának vizsgálatában lényeges lépést tesz előre, amikor ezt a vizsgálatot kiterjeszti a végtelen sok változós számelméleti függvények körére, hiszen ezek szoros kapcsolatban vannak a valós változós függvényekkel is.

A matematika alapjaihoz szokás számítani a halmazelméletet is. A *halmazelmélet*be vág, de a mai *matematikai statisztika* szempontjából is nagy fontosságú Kalmárnak az absztrakt játékok elméletéről szóló dolgozata. Zermelo adta pontos matematikai fogalmazását az ide vágó fogalmaknak (pl. „nyerőhelyzet"), és bebizonyította, hogy ha egy játék lehetséges helyzeteinek n száma véges, akkor nyerőhelyzetből kiindulva mindig lehet n lépésben nyerni. Kőnig Dénes rámutatott e bizonyítás egy hiányára, és újabb gráfelméleti bizonyítást adott arra az általánosabb tételre is, hogy ha akár végtelen sok helyzet lehetséges, de egy-egy helyzetből indulva csak véges sok lépés tehető, akkor minden nyerőhelyzethez megadható olyan n, hogy abból a helyzetből kiindulva n lépésben lehet nyerni. Kalmár transzfinit számok alkalmazásával, azonban végességi (vagy bármilyen számossági) megszorítások nélkül bebizonyítja, hogy minden nyerőhelyzetben van olyan nyerésre vezető „taktika" (ezt a fogalmat persze pontosan definiálja), amelynek előírt lépései egy-egy adott helyzetben csak a helyzettől függnek, nem pedig a játék addigi lefolyásától. Ebből azonnal következik Zermelo tétele; Kőnig tétele pedig transzfinit számok segítségével a legáltalánosabb játékokra terjeszthető ki. Transzfinit számok felhasználása nélkül azt a kevesebbet mondó tételt bizonyítja be Kalmár, hogy nyerőhelyzetben mindig van olyan nyerésre vezető taktika, amelyben helyzetek nem ismétlődhetnek; Zermelo tétele ebből is evidens módon következik.

Amikor Kalmár megismerkedett a matematikai logikával, ennek rohamos, izgalmas fordulatokban gazdag fejlődése magával ragadta. Érdeklődése továbbra is éber maradt a matematika többi területének kérdései iránt. Ezt már említett újabb függvénytani és algebrai dolgozatán kívül az is tanúsítja, hogy sokat segített más irányú pl. számelméleti, variációszámítási, gráfelméleti dolgozatok megfogalmazásában; az is, hogy amikor Szele Tibor érdeklődése a modern algebra felé fordult, olyan levelet írt neki a Galois-elmélet alapgondolatáról, hogy ezt többen lemásolták és kézről-kézre járt a fiatal matematikusok között; az is, hogy értékes tanácsokkal támogatta a matematikai kézikönyvek íróit: Kőnig Dénes és Kerékjártó geometriai tárgyú könyvének korrigálásában vett részt, legújabban pedig Rédei Algebrájának egyik lektora volt. 1951-ben a *függvényegyenletek* tárgyköréből is megjelent egy Aczéllal és Mikusińskivel közös dolgozata. De érdeklődésének és munkásságának legfőbb területe ettől kezdve *a matematika alapjainak* vizsgálata.

Ezen a helyen csak egészen rövid vázlatot adhatok erről a problémakörről; ebben is Kalmár munkáira utalhatok. Felsorolt munkái közül a 10. a Hilbert-féle *bizonyításelmélethez*, a 25. az ide vágó újabb eredményekhez, a 26. a *Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriá*ból kiindulva az axiomatikus módszer alapvető kérdéseihez a legjobb bevezetést adja.

A *matematikai logika* teszi lehetővé az axiomarendszerek tárgyalásában az ellentmondásmentesség, függetlenség és teljesség kérdésének pontos megfogalmazását és matematikai precizitással való vizsgálatát. Alapvető feladat ehhez a „következmény" fogalmának szabatos meghatározása. Az elemi logika a logikai műveletekkel foglalkozik. Logikai műveleten olyan függvényt értünk, melynek független változói is, értékei is egy kételemű halmazon futnak át: az „igaz" és „hamis" logikai értékek halmazán. Pl. a „negáció" művelete az az $\overline{X}$ függvény, amely igaz, ha X hamis, és fordítva; az implikáció művelete az az $X \rightarrow Y$ függvény, amely akkor és csak akkor hamis, ha X igaz és Y hamis (minden más esetben igaznak tekintjük). Minden más logikai művelet kifejezhető ezzel a két művelettel. Be lehet bizonyítani, hogy egy elemi logikai $\mathfrak{S}$ formula akkor és csak akkor következménye (egy jól precizírozott értelemben) az $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ formuláknak, ha belőlük és azonosan igaz formulákból (itt véges számú próba eldönti, hogy egy formula azonosan igaz-e) véges számú helyettesítéssel és legelemibb következtetési lépéssel, ún. „leválasztással" állítható elő. (A leválasztás az $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{S}$ formulákból $\mathfrak{S}$-re enged következtetni.) Ez tette aktuálissá az elemi logika „axiomatizálását", vagyis véges számú azonosan igaz formulájának megadását, amelyekből minden más azonosan igaz formulája helyettesítésekkel és leválasztásokkal nyerhető. Ezt először Post végezte el, a matematikai logika és az algebra közötti analógiára támaszkodva. Kalmár az algebra módszereitől független, közvetlenül az azonosság definíciójához csatlakozó, előismeretekre nem hivatkozó bizonyítást ad *az elemi logika axiomatizálhatóságára.*

Azonban az elemi logika nem elég ahhoz, hogy a matematikában szokásos összes következtetésmódokat formalizálhassuk. A (szűkebb) logikai függvénykalkulus a műveleteknél általánosabb logikai függvényeket vezet be. Ezeknek változói egy tetszésszerinti halmazon (ún. „individuumtartományon") futnak át, értékeik pedig logikai értékek. A logikai függvényekből nemcsak logikai műveletekkel képezhetők formulák, hanem két függvényoperáció ún. „kvantor" segítségével is. Az általános kvantort alkalmazva: $(x)F(x)$ értéke akkor és csak akkor igaz, ha $F(x)$ az egész individuumtartományon igaz; és az exisztenciális kvantort alkalmazva: $(Ex)F(x)$ akkor és csak akkor hamis, ha $F(x)$ az individuumtartományon

azonosan hamis. A logikai függvénykalkulus minden formulája azonos átalakításokkal úgynevezett „prenex" alakra hozható, amelyben minden kvantor a formula elején van (ezek alkotják a formula „prefixumát") és hatáskörük a formula végéig terjed. A prenex formula tipusán a Π és Σ jeleknek azt a sorozatát értjük, amely úgy jön létre, hogy a prefixum általános kvantorait Π, exisztenciális kvantorait Σ jellel pótoljuk és több egymást követő Π vagy Σ jelet hatványjelöléssel rövidítünk. Pl. a

$$(x)(y)(Ez)[F(x,y) \rightarrow G(z)]$$

formula tipusa $\Pi^2\Sigma$.

Végtelen individuumtartományokat is megengedve már nem döntheti el véges számú próba, hogy egy formula azonosan igaz-e, vagy hogy egyáltalán kielégíthető-e. Az *eldöntésprobléma* egy adott logikai formula azonosan igaz voltának vagy (ami egyre megy, hiszen ez a formula negációjának kielégíthetőségétől függ) kielégíthetőségének feltételeit keresi. A vizsgálatok itt kétirányúak: egyrészt speciális individuumtartományokra vagy formulaosztályokra szorítkozva oldják meg az eldöntésproblémát, másrészt az általános esetet ilyen speciális esetekre törekszenek visszavezetni.

Az első irányhoz Kalmárnak egy dolgozata csatlakozik: Gödellel és Schütte-vel egyidejűleg, tőlük függetlenül megoldotta a $\Sigma^m\Pi^2\Sigma^n$ tipusú formulák eldöntésproblémáját (a kielégíthetőség értelmében). Bár Gödel közleménye előbb jelent meg, Hilbert még sem engedte visszavonni a Math. Annalentől Kalmár cikkét, mert az volt a véleménye, hogy ebből jobban meg lehet érteni az alkalmazott módszert.

Kalmár legtöbb dolgozata az eldöntésprobléma redukcióelméletének körébe tartozik. Első idevágó dolgozataiban Löwenheimnek egy redukciós tételét egészítette ki, bizonyítását pedig lényegesen egyszerűsítette. Ezután a $\Sigma^m\Pi^2\Sigma\Pi^n$ tipusú formulák kielégíthetőségére vezette vissza az eldöntésproblémát (ha innen ki lehetne küszöbölni az egyedülálló Σ jelet, meg volna oldva az általános eldöntésprobléma, mert Bernays és Schönfinkel már előzőleg megoldották a $\Sigma^m\Pi^n$ tipusú formulák kielégíthetőségproblémáját). Ezt az eredményt később Ackermann, majd Pepis, a fasizmus áldozatául esett fiatal lengyel matematikus, tovább élesítette.

Kalmár az 1932-es zürichi matematikai kongresszuson az eldöntésproblémának olyan formulák kielégíthetőség-problémájára való visszavezetését kezdte meg, amelyekben egyetlen logikai függvény szerepel és az is csak kétváltozós. Emellett igyekezett azt is elérni, hogy a szóbanforgó formulák tipusa minél egyszerűbb legyen. Dolgozatok egy sorozatában bizonyítja be a megfelelő redukciós tételt $\Sigma^m\Pi^2\Sigma\Pi^n$ tipusú, majd $\Sigma\Pi\Sigma\Pi^n$ (Ackermann-

féle) tipusú, később Surányival közösen $\Pi^3\Sigma^n$ (Gödel-féle), $\Pi^n\Sigma$ és $\Pi^2\Sigma\Pi^n$ (Pepis-féle) tipusú, végre $\Pi^2\Sigma^n\Pi$ és $\Pi\Sigma^n\Pi^2$ tipusú formulák esetén.

Az I. Magyar Matematikai Kongresszuson más természetű redukcióstételt bizonyított be Kalmár: ez nem a formula tipusára, hanem az individuumtartományra vonatkozik. *Adott* véges számosságú individuumtartományokra már régen megoldott kérdés az eldöntésprobléma; másrészt Löwenheim bebizonyította, hogy az általános eldöntèsprobléma visszavezethető a megszámlálható individuumtartományokon való kielégíthetőség kérdésére. Kalmár rávilágított egy közbülső redukciós lehetőségre az *adott* véges és a megszámlálható között: megmutatta, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető erre a kérdésre: mely logikai formulákhoz van olyan (bármekkora számosságú, de) véges halmaz, amelyen a szóbanforgó formula kielégíthető.

Church egy eredménye erősen megingatta azt a reményt, hogy az eldöntésprobléma redukcióját addig lehet folytatni, míg egy megoldott speciális esetéhez nem jutunk. Church ugyanis példát adott „algoritmussal" meg nem oldható problémaseregre, és bebizonyította, hogy ennek következtében nincs olyan algoritmus, amellyel bármely adott formuláról el lehetne dönteni véges számú lépésben: azonosan igaz-e, ill. kielégíthető-e. (Ennek következtében az eldöntésprobléma minden redukciós tétele egy-egy példát szolgáltat Church értelmében vett algoritmussal meg nem oldható problémaseregre). Előbb persze szabatosan definiálni kellett az algoritmus fogalmát. Ezt többen kísérelték meg különböző módokon; a kapott definíciók mind ekvivalensnek bizonyultak. Az így nyert algoritmusfogalom visszavezethető a Kleene-féle „általánosan-rekurzív" függvény fogalmára; az pedig szokássá vált, hogy az általánosan rekurzív függvényeket a legáltalánosabb olyan számelméleti függvényeknek tekintsék, amelyek értéke minden helyen végesszámú lépésben kiszámítható.

Az algoritmussal meg nem oldható problémákat „abszolut" eldönthetetleneknek nevezték, megkülönböztetésül a Gödel-féle relatív eldönthetetlen problémáktól. Gödel ugyanis már előzőleg bebizonyította, hogy adott (igen tág feltételeknek eleget tevő) axiomarendszerekhez mindig van olyan probléma, amely a rendszeren belül nem oldható meg.

Kalmár intenzíven bekapcsolódott az *„eldönthetetlen problémák*ra" vonatkozó vizsgálatokba, és döntő szerepe van az itt felmerülő kérdések tisztázásában.

Mindenekelőtt kívánatos volt Gödel tételének, Rosser egy analog tételének és Church tételének igen bonyolult és nehezen áttekinthető bizonyítását egyszerűsíteni, és az előbbi két tétel minél

általánosabb feltételeit felderíteni. Kalmár nemcsak ezeket végezte el, hanem akadémiai székfoglalójában az idevágó Markov—Post-tételt is jóval egyszerűbben, az algebristák számára könnyen követhető úton bizonyította be. Itt ugyanis arról az algebristákat érdeklő tételről van szó, hogy az asszociatív rendszerek „szóproblémája" nem oldható meg (Church értelmében vett) algoritmussal. 1955-ös kiküldetésén Berlinben az eldöntésprobléma (Church-féle) algoritmussal való megoldhatatlanságának egy direkt bizonyítását adta elő Kalmár.

Még jóval előbb, Skolem egy cikkének referátumában vázoltam azt a gondolatot, hogy Church tétele a Gödel-tételből is levezethető. Részletesen ezt sohasem dolgoztam ki, mert Kalmár azonnal felismerte a felvetett gondolat jelentőségét, és mindjárt többet bizonyított be: azt, hogy a Church-tétel a Gödel-tétel egy speciális eseteként is megkapható. Erről tartott előadást az 1948-as Filozófiai Kongresszuson Amsterdamban. Kifejtette az eredmény ismeretelméleti következményeit is: egy speciális eset semmiesetre sem lehet nagyobb horderejű az általános tételnél, tehát, ha Gödel tétele csak relatív ellentmondásmentességről szólt, Church tétele sem bizonyíthatja abszolut eldönthetetlen problémák létezését.

Kalmár most megjelenőben lévő munkája még jobban megvilágítja ezt a helyzetet. Az előbbiekben mindig „Church értelmében vett" algoritmusról írtam, mert mindig kételkedtem abban, hogy az algoritmus fogalmát egyszer és mindenkorra rögzíteni lehetne (és ezzel együtt a legáltalánosabb kiszámítható számelméleti függvény fogalmát rögzíteni lehetne az általánosan-rekurzív függvény fogalmában). Mármost Kalmár 1955-ös berlini tartózkodása alatt Schröter a következő sejtést vetette fel: az általánosan rekurzív függvények osztálya azonos az olyan számelméleti függvények osztályával, amelyekhez van olyan függvényegyenletrendszer, melynek bármely két megoldásrendszere megegyezik a szóbanforgó függvényben. Kalmár azóta megcáfolta Schröter sejtését; ellenpéldát adott rá. A példából az is kiderül, hogy ha a legáltalánosabb kiszámítható számelméleti függvények azonosak volnának az általánosan-rekurzív függvényekkel, ebből egy igaz tétel abszolut (*nem* idézőjelben abszolut!) bizonyíthatatlansága következnék. Pontosabban egy előzőleg definiált általánosan-rekurzív $f(x, y)$ függvényre vonatkoznék ez a tétel és így szólna: van olyan nem negatív n egész szám, amelyhez nincs olyan y, hogy $f(n, y) = 0$ volna, de azt, hogy nincs ilyen y, nem lehet bizonyítani. Ez erősen megingatta azt az elgondolást, hogy a matematika eljárásait zárt keretek közé lehet kényszeríteni.

Talán ebből a rövid ismertetésből is kiviláglik, milyen átfogó képe van Kalmárnak a matematika egészéről, mind terjedelmében,

mind mélységében. Természetesen fakad ebből Kalmár érdeklődése a modern algebra iránt. Rédei úgy határozza meg a modern algebrát, hogy ez a struktúrák izomorf invariánsainak vizsgálatával foglalkozik. A „struktúra" fogalom azonban még alakulóban van; rendszerint néhány sokat vizsgált konkrét struktúra (test, csoport, stb.) gyüjtőnevét értik rajta az algebristák. Sokszor fordul elő, hogy valaki pl. a csoportelméletben kénytelen egy vizsgálataihoz szükséges tételt bebizonyítani, holott a megfelelő tételre pl. a gyűrűelméletben már van egészen hasonló bizonyítás; ezért kiváhatos, hogy az akármilyen struktúrákra vonatkozó tételeket tegyük vizsgálat tárgyává. Kalmár az 1955-ös balatonvilágosi algebrai konferencián rávilágított arra, hogy mi a struktúra ma aktuális általános definiciója. Ez az algebrában és a matematikai logikában használatos struktúrafogalom egyesítése, és az egyesítés mindkét terület számára termékeny, sőt az így kialakuló univerzális algebra még az analízist és a halmazelméletet is felöleli. Felejthetetlen Szele Tiborunk úgy nyilatkozott Kalmár előadásáról, hogy ez egész életre szóló tennivalót adott az algebristáknak (egyikünk sem gyanította, hogy az ő számára ez az időtartam ennyire rövid lesz).

Itt is megnyilatkozott Kalmár matematikusokat nevelő hatása. Ez talán azért nem mindig szembeszökő, mert Kalmárból teljesen hiányzik a nagyképűség; sohasem óvja a tekintélyét, szinte gyerekes őszinteséggel és nyiltszívűséggel tárja fel gondolatait. Eközben néha el is kalandozik; előadásmódja semmiképpen sem mondható tömörnek. De aki figyelmesen követi, mindig sokat tanulhat tőle. Egyetemi jegyzeteinek felépítése olyan, hogy nemcsak a kész anyagról ad tiszta képet, hanem arról is: mi teszi szükségessé vagy célszerűvé a szóbanforgó vizsgálatokat, milyen gondolatsorba kapcsolódnak be, hogyan jöhetne rá ezekre bárki, ha hasonló problémák elé kerülne. Didaktikai tárgyú cikkei nem szerepelnek munkáinak jegyzékében; egyrészük ma már nem szerezhető be, és nem is tükrözi Kalmár mai felfogását. De ezek közül — a ma nem aktuális keret elhagyásával — rendkívül hasznos lenne újra kiadni „A matematikai exaktság fejlődése a szemlélettől az axiomatikus módszerig" című dolgozatát. Ezt mindenkinek el kellene olvasni, aki matematikusnak vagy matematikatanárnak készül.

Befejezésül hadd idézzek szóról-szóra egy bekezdést a Kalmár megjelenőben lévő dolgozatáról adott lektori jelentésből: „A dolgozat megírásának módjáról külön kell megemlékeznem. Mintaként kellene terjeszteni leendő matematikus szerzők körében. Ilyen dolgozatokat kellene olvastatni a fiatalokkal: minden sora matematikust nevel. Amellett, hogy a bizonyítás rendkívül elegáns, nem káprázlatni akar ezzel az eleganciával, hanem megvilágítja azt is, hogy hogyan lehetett erre rájönni. Bevezetésében, mely az általá-

nosan rekurzív függvények rövid tankönyve lehetne, a fogalmak megvilágítására felhozott számos példa egyszersmind kicsiben mintát ad a későbbi bizonyítás egyes mozzanataira is."

Kalmár László munkáival, a The Journal of Symbolic Logic szerkesztőségi tagjaként, személyes hatásával külföldi tanulmányútjain és a matematikai kongresszusokon a világ legkülönbözőbb tájain élő matematikusok megbecsülését vívta ki. Minden matematikus szívből kívánja, hogy a tudományt előbbre vivő és matematikusokat nevelő munkáját békés és derűs légkörben még nagyon hosszú időn át folytathassa.

Kalmár László

matematikai munkáinak jegyzéke

1. Az interpolációról Mat. és Fiz. Lapok, 33 (1927), 120—149. o.
2. Zur Theorie der abstrakten Spiele, Acta Sci. Math., 4 (1928), 65—85. o.
3. Über die Abschätzung der Koeffizientensumme Dirichletscher Reihen, ugyanott, 4 (1929), 155—181. o.
4. Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie, ugyanott, 4 (1929), 248—252. o.
5. A „factorisatio numerorum" problémájáról. Mat. és Fiz. Lapok, 38 (1931), 1—15. o.
6. Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen, erste Mitteilung, Acta Sci. Math., 5 (1931), 95—107. o.
7. Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem, ugyanott, 5 (1932), 222—236. o.
8. Ein Beweis des Ruffini—Abelschen Satzes, ugyanott, 6 (1932), 59—60. o.
9. Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongresses (Zürich, 1932) 2. kötet, 337—338. o.
10. Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, Math. Annalen, 108 (1933), 466—484. o.
11. Über einen Löwenheimschen Satz, Acta Sci. Math., 7 (1934), 112—121. o.
12. Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, ugyanott, 7 (1935), 222—243. o.
13. Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen, Compositio math., 4 (1936), 137—144. o.
14. A számelmélet alaptételéről. Mat. és Fiz. Lapok, 43 (1936), 27—45. o.
15. Zur Reduktion des Entscheidungsproblems, Norsk Mat. Tidsskrift, 19 (1937), 121—130. o.
16. Jelentés az 1938. évi Kőnig Gyula-jutalomról. Mat. és Fiz. Lapok, 45 (1938), 1—17. o.
17. On the reduction of the decision problem, first paper: Ackermann prefix, a single binary predicate, The journal of symbolic logic, 4 (1939), 1—9. o.
18. On the possibility of definition by recursion, Acta Sci. Math., 9 (1940), 227—232. o.

19. A Hilbert-féle bizonyításelmélet célkitűzései, módszerei és eredményei, Mat. és Fiz. Lapok, 48 (1941), 65—119. o.

20. Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára, Mat. és Fiz. Lapok, 50 (1943), 1—23. o.

21. On the reduction of the decision problem, second paper: Gödel prefix, a single binary predicate, The journal of symbolic logic, 12 (1947), 65—73. o. (Surányi Jánossal együtt.)

22. Matematika és dialektikus materializmus, Magyar Technika, 3 (1948), 100—102. o.

23. On unsolvable mathematical problems, Proceedings of the tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, 1948), 1. 534—536. o.

24. On the reduction of the decision problem, third paper: Pepis prefix, a single binary predicate, The journal of symbolic logic, (Surányi Jánossal együtt.) 15 (1950), 161—173. o.

25. Eine einfache Konstruktion unentscheidbarer Sätze in formalen Systemen, Methodos, 2 (1950), 220—226. o.

26. Une forme du théorème de Gödel sous des hypothéses minimales, Comptes rendus de l'Académie Paris, 229 (1949), 963—965. o.

27. Quelques formes générales du théorème de Gödel, ugyanott, 229 (1949), 1047—1049. o.

28. Another proof of the Gödel—Rosser incompletability theorem, Acta Sci. Math., 12 (1950), 38—43. o.

29. On Cauchy's convergence test, Hungarica Acta Math., 1 (1950), 109—111. o.

30. Über die Cantorsche Theorie der reellen Zahlen, Publicationes math. 1 (1950), 150—159. o.

31. Contributions to the reduction theory of the decision problem, first paper: prefix $(x_1)(x_2)(Ex_3)\ldots(Ex_{n-1})(x_n)$, a single binary predicate, Hungarica Acta Math. 1 (1950), 64—73. o.

32. Contributions to the reduction theory of the decision problem, third paper: prefix $(x_1)(Ex_2)\ldots(Ex_{n-2})(x_{n-1})(x_n)$, a single binary predicate, ugyanott, 2 (1951), 19—38. o.

33. Another proof of the Markov-Post theorem, Acta Math. Hung. 3 (1952), 1—27. o.

34. Sur l'équation de translation, Studia Math., 12 (1951), 112—116. o. (Aczél Jánossal és G. Mikusinskivel együtt.)

35. Az eldöntésprobléma visszavezetése logikai formulák véges halmazon való kielégíthetőségének kérdésére. Az I. Magyar Matematikai Kongresszus kiadványai, (1953).

36. Contributions to the reduction theory of the decision problem, fourth paper: reduction to the case of a finite set of individuals, Acta Math. Hung., 2 (1951), 125—142. o.

37. A matematika alapjaival kapcsolatos újabb eredmények, A Magyar Tud. Akad. Mat. és Fiz. Oszt. Közleményei, 2 (1952), 89—103, és 108—112. o.

38. A Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria hatása az axiómatikus módszer fejlődésére. A Magy. Tud. Akad. Mat. és Fiz. Oszt. Közl. 3 (1953), 235—242. o.

39. Über ein Problem von K. Schröter betreffend die Definition des Begriffes der allgemeinrekursiven Funktion. Megjelenés alatt a Zeitschrif f. math. Logik und Grundl. d. Math.-ban; magyarul: K. Schröter egy, az általános rekurzív függvény fogalmának definiciójára vonatkozó problémájának megoldása. A Magyar Tud. Akad. Mat. és Fiz. Oszt. Közl. 5 (1955), 103—127. o.

ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ Л. КАЛМАРА В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ

Р. Петер

DIE MATHEMATHISCHEN APBEITEN VON LÁSZLÓ KALMÁR

R. Péter

Egy kombinatorikai probléma, amely a lucerna nemesítésével kapcsolatban merült fel

RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

A Martonvásári Mezőgazdasági Kutatóintézet néhány év előtt az Alkalmazott Matematikai Intézethez fordult, a következő problémával: nagyszámú lucerna fajtát kívánnak elvetni olymódon, hogy minden fajtából néhány sort vetnek el, mégpedig úgy, hogy bármely két fajta kereszteződése lehetséges legyen. Mivel a beporzást méhek végzik, és a méhek nem repülnek nagyobb távolságot leszállás nélkül, ehhez az szükséges, hogy bármely két fajta egymástól bizonyos d távolságon belül előforduljon, vagyis bármely két fajta előforduljon olyan két sorban, amelyeket egymástól legfeljebb $r-1$ sor választ el, ahol $r=\left[\frac{d}{\delta}\right]$ és δ jelöli két sor távolságát. A probléma abban áll, hogyan lehet adott n számú fajta — és adott megengedett d távolság — esetében ezt minél kevesebb vetőmaggal, tehát minél kevesebb vetéssorral megoldani.

A kérdés matematikailag nyilvánvalóan a következőképpen fogalmazható meg: keresendő az $1, 2, \ldots, n$ számokból álló olyan, lehetőleg rövid számsorozat, amelyben az $1, 2, \ldots, n$ számok közül bármely kettő előfordul olyan helyzetben, hogy azokat egymástól legfeljebb $r-1$ szám választja el ($r=1, 2, \ldots; n=r+2, r+3, \ldots$). Például, ha $n=8$ és $r=2$, akkor egy ilyen minimális sorozat a következő:

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 6, 7, 2, 5, 8, 7, 3, 4, 6, 8, 1 \qquad (1)$$

Az (1) sorozat 17 számból áll, az 1-es háromszor, a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számok mindegyike kétszer fordul benne elő, és az $1, 2, \ldots, 8$ számokból kiválasztható 28 számpár mindegyike előfordul az (1) sorozatban, olyan helyzetben, hogy vagy szomszédosak, vagy csak egy szám választja el őket (a (3, 4), az (1, 6), és az (5, 7) számpárok kétszer is előfordulnak ilyen helyzetben). Az $n=8$ és $r=2$

esetre vonatkozólag az (1) sorozat nyilván a lehető legrövidebb ilyen sorozat; ugyanis egy, a sorozatban előforduló és nem az első két vagy az utolsó két helyen álló számnak négy olyan szomszédja van, amelyet tőle legfeljebb egy szám választ el, a második és az utolsó előtti helyen álló számnak három ilyen szomszédja, végül az első és az utolsó helyen álló számnak két ilyen szomszédja van. Mivel minden számjegynek az összes előfordulási helyen összeszámolva a fenti értelemben vett szomszédjait, ezek száma összesen legalább 7 kell hogy legyen, minden számjegynek legalább kétszer elő kell fordulnia, vagyis a sorozat tagjainak a száma nem lehet kevesebb, mint $2 \cdot 7 + 3 = 17$, és az (1) sorozat éppen ennyi tagból áll.

A kérdés teljes megoldásához nyilván arra volna szükség, hogy bármely n-re és r-re legalább egy minimális sorozatot meg tudjunk adni. Gyakorlati szempontból kielégítő egy olyan szerkesztési módszer is, amely bármely n-re és r-re egy olyan sorozatot szolgáltat, amely nem lényegesen hosszabb a minimális sorozatnál. Annak idején egy ilyen, gyakorlatilag kielégítő módszert adtunk meg a Martonvásári Intézetnek, amelyet ott azóta is alkalmaznak. A módszer közzétételével azért vártunk, mert úgy gondoltuk, hogy idővel a probléma teljes megoldását is megtaláljuk. Azóta valóban előbbre jutottunk a kérdés megoldása terén, és bár a probléma teljes megoldásától még távol vagyunk, több szempont is szól amellett, hogy az elért szerény eredményeket összefoglaljuk. A kérdés ugyanis bizonyos érdeklődésre tarthat számot abból a szempontból, hogy egy gyakorlati feladat meglehetősen bonyolult kombinatorikai kérdésre vezet és a kérdés megoldása érdekes példája annak, hogy a számelmélet teljesen elvontnak látszó tételei, mint például *Thue* tétele, vagy az a tétel, hogy x^3 és $(x+1)^3$ között mindig van törzsszám, $(x = 1, 2, \ldots,)$, gyakorlati alkalmazást találhat. Másrészt a kérdés matematikai szempontból sem érdektelen, és talán e közlemény felkelti mások érdeklődését is és ezúton elvezet a probléma teljes megoldásához.

1. §. Alsó becslések

A rövidség kedvéért néhány jelölést és definiciót vezetünk be: Jelentsen $S(n, r)$ egy tetszőleges olyan, az $1, 2, \ldots, n$ számokból álló számsorozatot, amelyben az $1, 2, \ldots, n$ számok közül kiválasztható $\binom{n}{2}$ számpár mindegyike legalább egyszer előfordul olyan helyzetben, ahol őket legfeljebb $r-1$ közbeeső szám választja el $(r = 1, 2, \ldots; n = r+2, r+3, \ldots)$. Egy S sorozat hosszát jelölje

$H(S)$ és legyen $M(n, r) = \min H(S(n, r))$, vagyis $M(n, r)$ az $S(n, r)$ sorozatok hosszának minimuma. Ha S_1 és S_2 két számsorozat, jelölje $S_1 + S_2$ azt a sorozatot, amelyet úgy nyerünk, hogy S_1-et leírjuk, és S_1 jobb végéhez csatoljuk az S_2 sorozatot. Egy számsorozat kiválasztott tagjától jobbra (balra) álló számok közül azokat, amelyeket a kiválasztott tagtól legfeljebb $r-1$ szám választ el, a kiválasztott szám jobboldali (baloldali) r-szomszédjainak nevezzük, a jobb- és baloldali r-szomszédokat együtt a kiválasztott tag r-szomszédainak nevezzük. Jelölje végül $[a]$ az a valós szám egész részét, $\{a\}$ pedig a legkisebb a-nál nem kisebb egész számot. Ebben a §-ban kézenfekvő alsó becsléseket adunk $M(n, r)$-re vonatkozólag. Itt és a következőkben feltesszük, hogy $n \geqq r+2$, mivel az $n \leqq r+1$ eset triviális.[1]

1. tétel.

$$M(n, r) \geqq \left\{ \frac{r(r+1)+n(n-1)}{2r} \right\}. \tag{2}$$

Bizonyítás: Ha egy számsorozat N tagból áll, és $N \geqq r+2$, akkor abban az első $N-r$ tagnak rendre r jobboldali r-szomszédja van, az $N-r+j$-edik tagnak $(j = 1, 2, \ldots, r)$ $r-j$ jobboldali r-szomszédja van, tehát a sorozat összes tagjai jobboldali r-szomszédjai számának összege $(N-r)r + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{r(2N-r-1)}{2}$. Másrészt egy $S(n, r)$ sorozat az $1, 2, \ldots, n$ számok közül kiválasztható $\binom{n}{2}$ számú (i, j) számpár mindegyikét tartalmazza olyan helyzetben, ahol az i és a j számok közül az egyiknek a másik jobboldali r-szomszédja, vagyis kell, hogy teljesüljön az

$$\frac{r(2H(S(n, r))-r-1)}{2} \geqq \binom{n}{2}$$

egyenlőtlenség, amelyből $H(S(n, r)) \geqq \frac{r(r+1)+n(n-1)}{2r}$ és így az 1. tétel már következik.

Bizonyos esetekben valamivel jobb alsó becslést ad a következő

2. tétel:

$$M(n, r) \geqq n \left\{ \frac{n-1}{2r} \right\}. \tag{3}$$

[1] Ugyanis ha $n \leqq r+1$, akkor maga az $1, 2, \ldots, n$ sorozat $S(n, r)$ sorozat és egyben a legrövidebb ilyen sorozat, tehát $M(n, r) = n$, ha $n \leqq r+1$.

Bizonyítás: Egy tetszőleges számnak legfeljebb $2r$ r-szomszédja van; ha tehát egy $S(n, r)$ sorozatban az $1, 2, \ldots, n$ számjegyek egyike, pl. a k szám x-szer szerepel, akkor kell, hogy $x \cdot 2r \geqq n-1$ legyen, mivel a vizsgált k jegy r-szomszédai között az $1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ számjegyek mindegyikének elő kell fordulnia. Így tehát kell, hogy $x \geqq \left\{\frac{n-1}{2r}\right\}$ és így $M(n, r) \geqq n\left\{\frac{n-1}{2r}\right\}$ legyen.

Megjegyzés: Ha pl. $n = 23$ és $r = 2$, akkor

$$\left\{\frac{n(n-1)+r(r+1)}{2r}\right\} = 128 \quad \text{és} \quad n\left\{\frac{n-1}{2r}\right\} = 138,$$

tehát a 2. tétel valamivel jobb becslést ad. Ezzel szemben, ha $n = 16$ és $r = 4$ akkor

$$\left\{\frac{n(n-1)+r(r+1)}{2r}\right\} = 33, \quad \text{és} \quad n\left\{\frac{n-1}{2r}\right\} = 32,$$

tehát ebben az esetben az 1. tétel ad jobb becslést. A 2. tételben szereplő becslés még valamit javítható, ha figyelembe vesszük, hogy az első r és az utolsó r tagnak $2r$-nél kevesebb r-szomszédja van. Így például ha $r = 2$ és $n \equiv 0 \bmod 4$, akkor $M(n, 2) \geqq n\left\{\frac{n-1}{4}\right\} + 1$. Ezt a következőképpen láthatjuk be: ha a sorozat balszélén álló szám x-szer fordul elő, akkor a szélső helyzetben csak 2 2-szomszédja van, vagyis teljesülnie kell a $4(x-1) + 2 \geqq n-1$, vagyis az $x \geqq \left\{\frac{n+1}{4}\right\}$ egyenlőtlenségnek és így

$$M(n, 2) \geqq (n-1)\left\{\frac{n-1}{4}\right\} + \left\{\frac{n+1}{4}\right\}$$

egyenlőtlenségnek. Mivel ha $n \equiv 0 \bmod 4$ akkor $\left\{\frac{n+1}{4}\right\} = \left\{\frac{n-1}{4}\right\} + 1$ következik, hogy ez esetben $M(n, 1) \geqq n\left\{\frac{n+1}{4}\right\} + 1$.

Ha például $n = 8$ és $r = 2$, akkor az 1. tételből $M(8, 2) \geqq 16$, a 2. tételből is $M(8, 2) \geqq 16$ adódik, — míg a 2. tétel most említett élesítéséből $M(8, 2) \geqq 17$ adódik; láttuk a bevezetésben, hogy 17-tagú $S(8, 2)$-sorozat valóban megadható. A 2. tétel hasonló élesítésével az általános esetben nem foglalkozunk.

2. §. Felső becslések

Tegyük fel, hogy adott n-re és r-re megkonstruáltunk egy minimális hosszúságú $S(n, r)$-sorozatot. Ezt a sorozatot, amelyet $S^*(n. r)$-rel jelölünk, kiegészíthetjük $S(n+1, r)$-sorozattá, a következőképpen: először is feltehetjük, hogy $S^*(n, r)$ utolsó r eleme mind különböző, mert ha egy szám $S^*(n, r)$ utolsó r eleme között legalább kétszer fordul elő, akkor ezek közül az egyik elhagyható volna, és a sorozat még mindig $S(n, r)$ sorozat maradna, vagyis $S^*(n, r)$ nem volna minimális hosszúságú $S(n, r)$-sorozat. Mármost legyen $S^*(n, r)$ utolsó r eleme $a_1, a_2, \ldots, a_r$, ahol tehát az a_j $(j = 1, 2, \ldots r)$ számok különbözők; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_j = n+1-j$, $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Csatoljuk $S^*(n, r)$-hez a következő $\Delta(n, r)$ sorozatot:

$$n+1, 1, 2, \ldots, 2r, n+1, 2r+1, \ldots, 4r, n+1, \ldots, n-r,$$

ha $n-r \equiv h \bmod 2r$, ahol $0 < h \leqq r$, illetve az

$$n+1, 1, 2, \ldots, 2r, n+1, 2r+1, \ldots, 4r, n+1, \ldots, n-r, n+1$$

sorozatot, ha $n-r \equiv h \bmod 2r$, ahol $r < h \leqq 2r$.

Ebben a sorozatban tehát két $n+1$-est mindig $2r$ különböző szám választ el, és így ebben a sorozatban az $1, 2, \ldots, n-r$ számok mindegyike valamelyik $n+1$-nek r-szomszédja. A $\Delta(n, r)$ sorozat tagjainak a száma

$$n-r+1+\left\{\frac{n-2r}{2r}\right\}$$

ugyanis ha $n-r = 2mr+h$ és $0 < h \leqq r$, akkor az $n+1$ szám $\Delta(n, r)$-ben $m+1$-szer fordul elő, ha pedig $r < h \leqq 2r$, akkor $m+2$-szer, és

$$\left\{\frac{n-2r}{2r}\right\} = \left\{\begin{matrix} m \\ m+1 \end{matrix}\right\} \text{ ha } n-r = 2mr+h \text{ és } \left\{\begin{matrix} 0 < h \leqq r \\ r < h \leqq 2r \end{matrix}\right.$$

Ennélfogva

$$H(\Delta(n, r)) = (n-r+1)+\left\{\frac{n-2r}{2r}\right\}$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

3. tétel.

$$M(n+1, r) \leqq M(n, r)+n-r+1+\left\{\frac{n-2r}{2r}\right\}. \qquad (4)$$

A 3. tétel segítségével egy felső becslés nyerhető $M(n, r)$-re, ha $M(m, r)$-et, vagy annak egy felső becslését egy $m < n$-re ismerjük. Például, mint láttuk, $M(8, 2) = 17$, ennélfogva a 3. tétel szerint $M(9, 2) \leqq 17 + 7 + 1 = 25$, és

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 6, 7, 2, 5, 8, 7, 3, 4, 6, 8, 1. 9, 2, 3, 4, 5, 9, 6, 7, \quad (5)$$

egy $S(9, 2)$-sorozat. Valójában $M(9, 2) \leqq 22$. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

A (1) alatti sorozatnak hagyjuk el az utolsó elemét, az 1-est, és csatoljuk hozzá a következő sorozatot: 9, 1, 2, 3, 4, 9, 5, 7. Ekkor a sorozat 24 tagúvá válik; azonban, mivel az 1, 2, 3, 4 számsorozat a hozzácsatolt részben előfordul, a sorozat elejéről 1 és 2 elhagyható és így a következő 22 tagú $S(9, 2)$ sorozatot nyerjük:

$$3, 4, 5, 1, 6. 7, 2, 5, 8, 7, 3, 4, 6, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 9, 5, 7. \quad (6)$$

Határozzuk meg most $M(n, 1)$ pontos értékét. Érvényes a következő

4. tétel;*

$$M(n, 1) = \begin{cases} \binom{n}{2} + 1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \binom{n}{2} + \frac{n}{2}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases} \quad (7)$$

Bizonyítás: Vizsgáljuk először páratlan n-ek esetét. Nyilván az 1231 sorozat a legrövidebb $S(3, 1)$-sorozat és így $M(3, 1) = 4$. Tegyük fel, hogy már bebizonyítottuk, hogy $M(2k-1, 1) = \binom{2k-1}{2} + 1$ és legyen $S^*(2k-1, 1)$ egy minimális hosszúságú $S(2k-1, 1)$-sorozat. Abból, hogy $H(S^*(2k-1, 1)) = \binom{2k-1}{2} + 1$, következik, hogy $S^*(2k-1, 1)$-ben minden $(i.j)$ pár $(i, j = 1, 2, \ldots, 2k-1; i \neq j)$ pontosan egyszer fordul elő. Ez csak úgy lehetséges, hogy $S^*(2k-1, 1)$-ben az $1, 2, \ldots, 2k-1$ számok mindegyike egy kivétellel pontosan $k-1$-szer fordul elő, az egyik pedig k-szor és ez a k-szor előforduló szám áll $S^*(2k-1, 1)$ elején és végén; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez a

* A 4. tétel páratlan n-re vonatkozó állítása ekvivalens a teljes gráf bejárására vonatkozó jólismert gráfelméleti tétellel. (l. pl. D. König: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936. 20. o.) A dolgozatban tárgyalt problémakör gráfelméleti tárgyalása esetleg újabb eredményekhez is vezethet.

szám az 1-es; csatoljuk most $S^*(2k-1, 1)$-hez a következő A_{2k+1} sorozatot:

$$2k, 2, 2k+1, 3, 2k, 4, 2k+1, 5, \ldots, 2k+1, 2k-1, 2k, 2k+1, 1.$$

Könnyű belátni, hogy az $S^*(2k-1, 1)+A_{2k+1}$ sorozat $S(2k+1, 1)$ sorozat és tagjainak száma

$$\binom{2k-1}{2}+1+2(2k-1)+1=\binom{2k+1}{2}+1.$$

Tehát $M(2k+1, 1) \leqq \binom{2k+1}{2}+1$. Azonban $S(2k+1, 1)$-ben az $1, 2, \ldots, 2k+1$ számok mindegyike legalább k-szor elő kell, hogy forduljon, és az a szám, amely az első helyen áll, legalább $k+1$-szer kell, hogy előforduljon, hiszen minden számnak legalább $2k$ első szomszédja kell, hogy legyen, vagyis $M(2k+1, 1) \geqq (2k+1)k+1 = \binom{2k+1}{2}+1$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $M(2k+1, 1) = \binom{2k+1}{2}+1$ vagyis a 4. tétel páratlan számokra vonatkozó állítását.

A mondottakból következik, hogy páratlan n-re léteznek *optimális* $S(n, 1)$ sorozatok, amelyekben tehát bármely (i, j) számpár $(i, j=1, 2, \ldots, n; i \neq j)$ pontosan egyszer fordul elő szomszédként. Például, kiindulva az 1, 2, 3, 1 $S(3, 1)$ sorozatból 1, 2, 3, 1, 4, 2, 5, 3, 4, 5, 1 optimális $S(5, 1)$ sorozatot és ebből az

$$1, 2, 3, 1, 4, 2, 5, 3, 4, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 6, 4, 7, 5, 6, 7, 1 \qquad (8)$$

optimális $S(7, 1)$ sorozatot kapjuk.

Most vizsgáljuk meg páros n esetét.

Mindenek előtt nyilvánvaló, hogy egy $S(2k, 1)$ sorozat nem lehet optimális, ha $k \geqq 2$, vagyis olyan, amelyben bármely két szám pontosan egyszer fordul elő szomszédos helyzetben. Ugyanis egy $S(2k, 1)$ sorozatban, ha $k \geqq 2$, van olyan szám, amely a sorozatnak sem első, sem utolsó eleme, és egy ilyen számnak mindig páros számú szomszédja van. A 2. tételből következik, hogy

$$M(2k, 1) \geqq 2k^2 = \binom{2k}{2}+\frac{2k}{2},$$

tehát a (7) alattinál kisebb értéke $M(2k, 1)$-nek nem lehet. Másrészt ha $S^*(2k-1, 1)$ egy minimális $S(2k-1, 1)$ sorozat, amely 1-essel végződik, és A_{2k}-val jelöljük a

$$2k, 2, 3, 2k, 4, 5, 2k, 6, 7, \ldots, 2k\ 2k-2, 2k-1, 2k$$

sorozatot, $S^*(2k-1, 1)+\Delta_{2k}$ egy $S(2k, 1)$ sorozat és

$$H(S^*(2k-1, 1)+\Delta_{2k})=\binom{2k-1}{2}+1+3k-2=\binom{2k}{2}+\frac{2k}{2}.$$

Ezzel a 4. tételt páros n-re is igazoltuk.

Minimális hosszúságú (és egyben optimális) $S(2k+1, 1)$ sorozatok szerkesztésére egy másik eljárást is megadunk, abban az esetben, ha $2k+1=p$ törzsszám. Ez az eljárás azért érdekes, mert ez általánosítható azután tetszőleges r-re $S(p, r)$ sorozatok szerkesztésére. Legyen tehát p páratlan törzsszám, $p'=\frac{p-1}{2}$ és $a_k \equiv \frac{1}{k} \bmod p$ $(k=1, 2, \ldots, p')$ és képezzük a következő sorozatot (minden szám $\bmod p$ redukálandó úgy, hogy 1 és p közé essék):

$$1, 2, \ldots, p, a_2, 2a_2, \ldots, pa_2, a_3, 2a_3, \ldots, pa_3, \ldots, a_{p'}, 2a_{p'}, \ldots, pa_{p'}, 1. \qquad (9)$$

A (9) sorozatnak $pp'+1=\binom{p}{2}+1$ tagja van: könnyen belátható, hogy ebben a sorozatban bármely (i, j) számpár $(i, j=1, 2, \ldots, p; i \neq j)$ egyszer és csak egyszer fordul elő egymás mellett.

Ezt a következőképpen láthatjuk be: a $\pm a_1, \pm a_2, \pm a_3, \ldots, \pm a_{p'}$ számok mind különbözőek $\bmod p$ ugyanis nyilván $a_h \not\equiv a_k \bmod p$, ha $h \not\equiv k$, másrészt ha $a_h \equiv -a_k \bmod p$ volna, akkor $\frac{1}{h}+\frac{1}{k}=\frac{h+k}{hk} \equiv 0 \bmod p$ és így $h+k \equiv 0 \bmod p$ volna, de ez lehetetlen, mivel $2 \leqq h+k \leqq p-1$. Ennélfogva a $0, \pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_{p'}$ számok között a $0, 1, 2, \ldots, p-1$ számok mindegyike (és mindegyik egyszer) előfordul $\bmod p$. Itt tulajdonképpen *Thue* egy ismert tételének (l. pl. H. *Scholz*, Einführung in die Zahlentheorie, Göschen Bd. 1131., 45. o.) egy speciális esetéről van szó. *Thue* tétele a következőképpen szól:

Legyen p tetszőleges páratlan törzsszám, a és b legyen két egész szám, $(1 < a < p, 1 < b < p)$, amelyekre $ab > p$. Akkor bármely z egész számhoz találhatók olyan x és y egész számok, hogy $-a < x < +a$ és $1 \leqq y < b$, továbbá $z \equiv \frac{x}{y} \bmod p$.

A tételből speciális esetként $\left(a=2, b=\frac{p+1}{2}\right)$ következik tehát, hogy bármely z egész szám előállítható $z \equiv \frac{x}{y} \bmod p$ alak-

ban, ahol $x = \pm 1$ vagy $x = 0$ (a $z = 0$ esetben) és $1 \leqq y \leqq p'$. Tehát bármely i-hez és j-hez, ha $i \not\equiv j \bmod p$, található olyan y $(1 \leqq y \leqq p')$, hogy $i - j \equiv \frac{1}{y} \bmod p$ vagy $i - j \equiv -\frac{1}{y} \bmod p$. Mármost legyen $m \equiv yj \bmod p$ és $1 \leqq m < p$, akkor tehát $j \equiv ma_y$ és $i \equiv (m+1)a_y \bmod p$ vagy $i \equiv (m-1)a_y \bmod p$ és így a $p, a_y, 2a_y, \ldots (p-1)a_y, pa_y$ számsorozatban, (amelyben minden szám a vele mod p kongruens és 1 és p közé eső számmal pótlandó), i és j szomszédos helyzetben előfordulnak. Így például ha $p = 7$, a következő $S(7, 1)$ sorozatot nyerjük:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 7, 5, 3, 1, 6, 4, 2, 7, 1 \qquad (10)$$

Most térjünk vissza az általános tételre. Thue tétele $r > 1$-re is felhasználható $S(n, r)$ sorozatok konstruálására, abban az esetben, ha n törzszszám. Ezen az úton a következő tételt nyerjük:

5. tétel: Ha p páratlan törzsszám, és $r < p$, akkor

$$M(p, r) \leqq \left(\left\{ \frac{p+1}{r+1} \right\} - 1 \right)(p + r - 1) + 1. \qquad (11)$$

Bizonyítás: Legyen $a_k \equiv \frac{1}{k} \bmod p$ és $1 \leqq a_k < p$, ha $k = 1, 2, \ldots, p' = \left\{ \frac{p+1}{r+1} \right\} - 1$.

Képezzük a következő Δ_{pk} sorozatokat:

$$a_k, 2a_k, 3a_k, \ldots, pa_k, a_k, 2a_k, \ldots, ra_k \qquad (12)$$

és ezeket a Δ_{pk} sorozatokat $(k = 1, 2, \ldots, p')$ írjuk egymás után. Az így kapott $\sum_{k=1}^{p'} \Delta_{pk}$ sorozat $S(p, r)$ sorozat. Ugyanis, ha i és j két tetszőleges szám, $1 \leqq i < j \leqq p$, akkor Thue tételét az $a = r + 1$, $b = \left\{ \frac{p+1}{r+1} \right\} = p' + 1$ esetre alkalmazva, következik, hogy találhatók olyan $x (-r \leqq x \leqq +r)$ és olyan $y (1 \leqq y \leqq p')$ egész számok, hogy

$$i - j \equiv \frac{x}{y} \bmod p.$$

Ha most $m \equiv jy \bmod p$ $(1 \leqq m \leqq p)$, akkor tehát $j \equiv ma_y \bmod p$ és $i \equiv (m+x)a_y \bmod p$ és így a Δ_{py} sorozatban i és j r-szomszédok. Mivel Δ_{py} tagjainak száma $p + r$, tehát

$$H\left(\sum_{k=1}^{p'} \Delta_{pk} \right) = \left(\left\{ \frac{p+1}{r+1} \right\} - 1 \right)(p + r).$$

Az eredmény még egy keveset élesíthető; ehhez azt kell csak észrevennünk, hogy a Δ_{pk} sorozatok helyett egymás mellé illeszthetjük a következő $\Delta_{pk}^{(h_k)}$ sorozatokat:

$$(h_k+1)a_k, (h_k+2)a_k, \ldots, pa_k, a_k, 2a_k, \ldots (r+h_k)a_k \qquad (13)$$

ahol h_k tetszőleges pozitív egész szám, és képezhetjük belőlük az

$$S^*(p,r)=\sum_{k=1}^{p'} \Delta_{pk}^{(h_k)} \qquad (14)$$

sorozatot. Mármost h_k értéket mindig választhatjuk úgy, hogy teljesüljön a $(h_k+1)a_k \equiv (r+h_{k-1})a_{k-1} \bmod p$ kongruencia. Ehhez ugyanis csak az szükséges, hogy teljesüljön a

$$h_k \equiv k a_{k-1}(r+h_{k-1})-1 \equiv \frac{k}{k-1}(r+h_{k-1})-1 \bmod p$$

kongruencia; ez esetben azonban $\Delta_{pk}^{(h_k)}$ első tagja meg fog egyezni $\Delta_{p\,k-1}^{(h_{k-1})}$ utolsó tagjával és így $\Delta_{pk}^{(h_k)}$ első tagja kihagyható a sorozatból, ha $k=2, 3, \ldots p'$; az ilyen módon nyert $S^*(p,r)$ sorozatra nyilván

$$H(S^*(p,r))=\left(\left\{\frac{p+1}{r+1}\right\}-1\right)(p+r-1)+1.$$

Ezzel az 5. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzendő, hogy a gyakorlatban gyakran blokkokra kell szétvágni az $S(n,r)$ sorozatot, ugyanis. nincs hely arra, hogy az összes barázdák egy vonalban helyezkedjenek el. A fent adott szerkesztés lehetővé teszi a kérdés megoldását ebben az esetben is, ugyanis a $\Delta_{pk}^{(h_k)}$ sorozatoknak nem szükségképpen kell egymáshoz csatlakozniok, kerülhetnek külön blokkokba. Ez esetben természetesen a $\Delta_{pk}^{(h_k)}$ sorozatok utolsó tagjának elhagyása nem lehetséges.

Lehetséges, hogy az így konstruált sorozatban további felesleges tagok is vannak. Ezt a konstrukció során mindig meg kell figyelni. Így például legyen $p=11$ és $r=4$, akkor $\left\{\frac{p+1}{r+1}\right\}=3$ és így, mivel $\frac{1}{2}\equiv 6 \bmod 11$,

$$\left(\left\{\frac{11+1}{4+1}\right\}-1\right)(11+4-1)+1=29$$

és konstrukciónk a következő 29 tagú sorozatot szolgáltatja:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 10, 5, 11,$$
$$6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5, 11. \qquad (15)$$

A 2. tétel szerint $M(11, 4) \geqq 11 \left\{\frac{10}{8}\right\} = 22$; ebből sejthető, hogy még néhány tag elhagyható a sorozatból; valóban, az első helyen álló 1-es, a második helyen álló 2-es, a 16-ik helyen álló 10-es és a 29-ik helyen álló 11-es elhagyható, és így a következő 25 tagú $S(11, 4)$ sorozatot nyerjük:

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 11, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5 (16)

Ez a sorozat azonban még így sem a legrövidebb, ugyanis a következő sorozat:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 10, 11, 9, 4, 5, 6, 7, 8, 10. 11 (17)

pontosan 22 tagból áll, tehát minimális hosszúságú $S(11, 4)$ sorozat.

A most tárgyalt példa azt is megmutatja, hogy egy tetszőleges eljárással egy $S(n, r)$ sorozatot konstruálva azt utólag mindig tanácsos megvizsgálni, hogy nincsenek-e benne elhagyható tagok; nem igaz azonban az, hogy ha egy $S(n, r)$ sorozat egy tagja sem hagyható el, akkor az minimális sorozat.

Az 5. tétel bizonyításánál alkalmazott konstrukció segítségével bármely n-re és r-re megadható egy nem túlságosan hosszú $S(n, r)$ sorozat. Az eljárás a következő:

a) megkeressük a legnagyobb törzsszámot, amely nem nagyobb n-nél, jelöljük ezt p-vel. b) a fent megadott eljárással konstruálunk egy $S(p, r)$ sorozatot. c) ebből elhagyjuk a felesleges tagokat, d) a 3. tétel bizonyítása során alkalmazott eljárás ismételt felhasználásával az $S(p, r)$ sorozatot előbb $S(p+1, r)$ sorozattá, azután $S(p+2, r)$ sorozattá, ... végül $S(n, r)$ sorozattá alakítjuk át, minden lépés után elhagyva a felesleges tagokat. Például ha $n = 21$ és $r = 6$, a következőképpen járunk el: a legnagyobb törzsszám 21 alatt a 19, mivel $\left\{\frac{19+1}{6+1}\right\} = 3$, $p' = 2$ és mivel $\frac{1}{2} \equiv 10 \bmod 19$ tehát

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 16, 7, 17, 8, 18, 9, 19, 10, 1, 11, 2, 12, 3, 13,
4, 14, 5, 15, 6, 16, 7, 17, 8, 18

egy 49 tagú $S(19, 6)$ sorozat; ebből az utolsó helyen álló 18-as, és a 47-ik helyen álló 17-es, továbbá a 45-ik helyen álló 16-os elhagyható; az így kapott 46 tagú

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
1, 2,, 3, 4, 5, 6, 16, 7, 17, 8, 18, 9, 19, 10, 1, 11, 2, 12, 3,13,
4, 14, 5, 15, 6, 7, 8

sorozathoz hozzáfűzzük a 20, 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 19, 15-tagú sorozatot és így egy 61 tagú

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 16, 7, 17, 8, 18, 9, 19, 10, 1, 11, 2, 12, 3, 13, 4, 14, 5, 15, 6, 7, 8, 20, 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 19

$S(20, 6)$-sorozatot kapunk. Az így kapott 61 tagú $S(20, 6)$ sorozathoz csatoljuk hozzá a

21, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 21, 13, 14, 15

17-tagú sorozatot, akkor egy 78 tagú $S(21, 6)$-sorozatot nyerünk. Ebből a sorozatból azonban nyilvánvalóan elhagyhatók az elején álló 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és a 13-ik helyen álló 13-as, és így egy 69 tagú $S(21, 6)$ sorozatot nyerünk.

Az 5. tétel segítségével bebizonyítjuk a következő tételt:

6. tétel:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \frac{1}{r+1} \quad (r=2,3,\ldots) \tag{18}$$

Bizonyítás: Legyen n egy tetszőleges egész szám, legyen p_n a legnagyobb n-nél nem nagyobb törzsszám, akkor az 5. tétel szerint (ha $n \geqq r+2$)

$$M(p_n, r) \leqq \left(\left\{\frac{p_n+1}{r+1}\right\}-1\right)p_n+r-1)+1 \leqq \frac{(n+1)(n+r)}{r+1}$$

Másrészt a 3. tétel szerint

$$M(n,r) \leqq M(p_n,r) + \sum_{m=p_n}^{n-1}\left(m-r+1+\left\{\frac{m-2r}{2r}\right\}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{(n+1)(n+r)}{r+1} + (n-p_n)\left(n-r+\frac{n}{2r}\right). \tag{19}$$

Az analitikus számelméletből ismeretes*, hogy megadható olyan α $(0<\alpha<1)$ szám, és olyan $C>0$ n-től független állandó, hogy elég nagy n-re $n-p_n < Cn^{\alpha}$. Ennélfogva (19)-ből

$$\frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \frac{1}{r+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{r}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{2r}\right)C\cdot n^{\alpha-1} \tag{20}$$

* Ugyanis Ingham [2] bebizonyította, hogy x^3 és $(x+1)^3$ között mindig van törzsszám, ha x elég nagy egész szám. Ennélfogva, ha n elég nagy és x a legnagyobb egész szám, amelyre $(x+1)^2 \leqq n$, akkor van olyan p_n, amelyre $x^3 < p_n \leqq (x+1)^3$, tehát $n-p_n \leqq (x+2)^3 - x^3 \leqq 6x^2+12x+8 \leqq 26x^2$. Mivel $x^3 \leqq n$ tehát $x^2 \leqq n^{2/3}$ és így $n-p_n \leqq 26n^{\frac{2}{3}}$.

és így

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \frac{1}{r+1} \tag{21}$$

Összehasonlításul mondjuk ki a következő tételt is, amely akár az 1. akár a 2. tételből következik:

7. tétel:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M(n,r)}{n^2} \geqq \frac{1}{2r} \tag{22}$$

Nyitott kérdés, hogy létezik-e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(n,r)}{n^2} = \mu \tag{23}$$

és ha igen, mi az értéke. A 6. és 7. tételek szerint, (ha létezik) μ értéke $\frac{1}{2r}$ és $\frac{1}{r+1}$ közé esik. Amennyiben sikerülne bebizonyítani, hogy $\mu = \frac{1}{2r}$, ez azt jelentené, hogy bármely nagy n-re megadható olyan $S(n,r)$ sorozat, amelyben az ismétlődő r-szomszédságok száma az összes r-szomszédságok számához képest elhanyagolhatóan kicsiny, ezzel szemben $\mu > \frac{1}{2r}$ azt jelentené, hogy ez nem lehetséges. Úgy látszik, hogy ha $r \geqq 3$, a második lehetőség, áll fenn, ezt azonban eddig nem sikerült bebizonyítanom. *

* N. G. de Bruijn (Amsterdam) bebizonyította, hogy ha $r=2$, akkor $\mu = \frac{1}{4} = \frac{1}{2r}$. (Szóbeli közlés). de Bruijn bizonyítása, melyet szíves hozzájárulásával itt közlök, a következő: Legyen $n=2p$. ahol $p=2k+1$ törzsszám; jelölje A_s az $1, s+1, 2s+1, \ldots, ns+1, (n+1)s+1$ számokból álló sorozatot (minden szám mod n redukálandó) és jelentse S az $A_1, A_3, A_5 \ldots, A_p$ sorozatok egyesítését. Bebizonyítjuk, hogy S $S(n,2)$ sorozat. Legyen i és j két tetszőleges egész szám $(1 \leqq i < j \leqq n)$ és legyen $j-i=d$. Ha d páratlan és $d \leqq p$, i és j szomszédosak az A_d sorozatban; ha d páratlan és $p < d$, akkor j és i szomszédok az A_{n-d} sorozatban. Ha d páros és $d \equiv 2 \bmod 4$, akkor i és j másodszomszédok az $A_{\frac{d}{2}}$ sorozatban, végül ha $d \equiv 0 \bmod 4$, akkor j és i másodszomszédok az $A_{\frac{n-d}{2}}$ sorozatban. Másrészt $H(S) = \left(\frac{p+1}{2}\right)(n+2) = \frac{(n+2)^2}{4}$. Ingham tételének alkalmazásával (ugyanúgy mint a 6. tétel bizonyításában) adódik, hogy $\limsup_{n\to\infty} \frac{M(n,2)}{n^2} \leqq \frac{1}{4}$ és így a 7. tétel figyelembevételével, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{M(n,2)}{n^2} = \frac{1}{4}$.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ КОМБИНАТОРИКИ

А. Реньи

Резюме

Нижеследующая проблема комбинаторики встречалась в ходе исследования вопроса облагораживания люцерны:

Пусть $M(n, r)$ означает длину наикратчайшей из последовательностей чисел, состоящих из чисел $1, 2, \ldots, n$, в которых каждая пара чисел i, j (при $1 \leqq i < j \leqq n$) не меньше чем один раз находится в таком положении, в котором их разделяют не больше чем на $r-1$ элемента последовательности. Определить точное значение $M(n, r)$, или же хорошее верхнее приближение этого значения, а также дать метод, при помощи которого можно для произвольных чисел n и r построить последовательность минимальной длины, обладающую указанными свойствами, или же последовательность, длина которой не значительно больше минимальной. Статья содержит несколько неравенств для значений $M(n, r)$, а также несколько построений. Легко видеть, что при нечетных n, $M(n, 1) = \binom{n}{2} + 1$ и $M(n, 1) = \binom{n}{2} + \frac{n}{2}$ при n четных. Это равносильно одной общеизвестной теореме теории графов. В статье доказывается, что

$$\frac{1}{2r} \leqq \lim_{n \to \infty} inf \frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \limsup_{n \to \infty} \frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \frac{1}{r+1}.$$

Однако, не исследуется вопрос о существовании предела

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M(n,r)}{n^2}$$

и о его значении.

ON A COMBINATORICAL PROBLEM

The following combinatorical problem arose im connection with the selection of alfalfa: let $M(n, r)$ denote the number of elements of the shortest sequence consisting of the numbers $1, 2, \ldots, n$ in which each pair of integers (i, j) $(1 \leqq i < j \leqq n)$ occurs at least once in such a position, where they are separated by not more then $r-1$ elements of the sequence. It is required either to find the exact value of $M(n, r)$, or at least a good upper estimation of $M(n, r)$, as well as a method of constructing to any pair of integers n and r a sequence with the property mentioned above, and of minimal length, or a sequence which is not essentially longer than the minimal one. The paper contains some inequalities concerning $M(n, r)$ and some constructions. It is easy to see, that $M(n, 1) = \binom{n}{2} + 1$ if n is odd and $M(n, 1) = \binom{n}{2} + \frac{n}{2}$ if n is even. This is equivalent with a well-known theorem on graphs. It is shown that

$$\frac{1}{2r} \leqq \liminf_{n \to \infty} \frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \limsup_{n \to \infty} \frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \frac{1}{r+1} \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

It remains an open question whether $\lim \frac{M(n,r)}{n^2}$ exists and if it exists, what is its value.

Egy Sturm-tétel általánosítása és alkalmazása Bessel-függvényekre és Legendre-polinomokra

BIHARI IMRE

1. A kérdéses Sturm-tétel a következő:

1. Legyen az $f(x)$ és $F(x)$ függvény folytonos $a \leqq x \leqq b$ esetén és ugyanitt $f(x) \leqq F(x)$, de ne legyen $f(x) \equiv F(x)$,

2. tegyen $y(x)$ és $Y(x)$ eleget $a \leqq x \leqq b$ esetén a következő differenciálegyenleteknek

$$y'' + f(x)y = 0, \qquad Y'' + F(x)Y = 0,$$

3. legyen továbbá $a < x < b$ esetén $y > 0$, $Y > 0$, de $Y(b) = 0$,

4. létezzenek a következő limeszek és legyen nem negatív értékük

$$\lim_{x=a+0} y(x), \lim_{x=a+0} Y(x), \lim_{x=a+0} y'(x), \lim_{x=a+0} Y'(x), \lim_{x=a+0} [y'(x)\,Y(x) - y(x)\,Y'(x)],$$

akkor $\dfrac{y(x)}{Y(x)}$ az x növekvő függvénye $a < x < b$ esetén és föltéve, hogy $\lim\limits_{x=a+0} \dfrac{y(x)}{Y(x)} \geqq 1$ azt kapjuk, hogy

$$y(x) > Y(x) \qquad a < x \leqq b$$

A lényeges a tételben az, hogy következtetni tudunk az $y'' + f(x)\,y = 0$ differenciálegyenlet megoldásának a változására, ha az $f(x)$ függvényt megváltoztatjuk. Látjuk, hogy az $f(x)$ növelése a megoldás csökkenését vonja maga után.

2. Vajon lehetséges-e az általánosabb

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0 \tag{1}$$

alakú egyenlet esetén az $A(x), B(x)$ együtthatók változásából a megoldás változására következtetni.

Nyilván lehetséges, mert ez az egyenlet az $y = e^{-\frac{1}{2}\int A\,dx} \cdot v$ transzformációval a

$$v'' + \alpha(x)v = 0 \qquad \alpha(x) = B(x) - \frac{1}{4}A(x)^2 - \frac{1}{2}A'(x)$$

alakra hozható és ha pl. az A, B együttható-függvények úgy változnak, hogy $\alpha(x)$ növekszik, akkor a Sturm-tétel alapján állíthatjuk a $v(x)$ megoldás csökkenését. A és B adott változása esetén mindig eldönthető, hogy $\alpha(x)$ növekedett-e vagy sem, de hogyan kell az A és B-nek változnia, hogy $\alpha(x)$ nőjjön, ha pedig A és B egyszerű módon és tetszőleges mértékben változik anélkül, hogy $\alpha(x)$ nőne, mi történik a differenciálegyenlet megoldásával? Még ha $\alpha(x)$ nőtt volna is, kérdéses, hogy a $v(x)$ függvény viselkedéséről lehet-e következtetni az $y(x)$ függvényére. Lehet a fenti transzformáció olyan, hogy ezt lehetetlenné teszi. Ugyanez a helyzet, ha az egyenletet önadjungált alakjában vizsgáljuk. Ekkor a

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = 0$$

alakon a fenti transzformációt elvégezve hasonló nehézségekre jutunk, ha pedig a $d\xi = \frac{dx}{p}$ transzformációval az

$$\bar{y}'' + \bar{p}\bar{q} \cdot \bar{y} = 0$$

alakra hozzuk — ahol $\bar{y}\bar{p}\bar{q}$ az ypq-t jelenti mint ξ függvényét — akkor is p és q egyszerű, vagy kis változásából nehéz, vagy lehetetlen következtetni $\bar{p}$ és $\bar{q}$ változására, arról $\bar{p} \cdot \bar{q}$ változására, ebből $\bar{y}$, majd megint csak y változására, hiszen pl. a $\xi = \int \frac{dx}{p}$ transzformáció lehetetlenné teheti az $\bar{y}$-ra kapott megállapítás átvitelét y-ra. Az (1) alakot véve alapul egy olyan egyszerű azonosságot fogunk levezetni, melyből az A és B egyszerű és tetszőleges mértékű változásának az eredménye leolvasható. Mindenképpen jogosult tehát az (1) alakot alapul véve megállapítani az A és B változásának a következményeit.

Vegyünk tehát két (1) alakú egyenletet:

$$y'' + A_1(x)y' + B_1(x)y = 0 \qquad Y'' + A_2(x)Y' + B_2(x)Y = 0 \qquad (2)$$

Ezek megoldására — y-ra ill. Y-ra — bebizonyítjuk a Sturm-tétel következő általánosítását:

1. legyenek $A_1(x), A_2(x), B_1(x)\, B_2(x)$ folytonos függvények $a \leqq x \leqq b$ esetén,

2a. legyen $A_2(x) \geqq A_1(x)$ és $B_2(x) \geqq B_1(x)$ $\quad a < x < b,$

de

$$A_2(x) \not\equiv A_1(x) \qquad a < x < b,$$

2b. vagy pedig

$A_2(x) \equiv A_1(x)$, $B_2(x) \geqq B_1(x)$, de $B_2(x) \not\equiv B_1(x)$ $\quad a < x < b,$

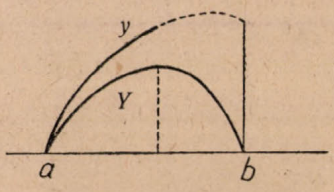
3. legyenek a következő limeszek nem negatívok:

$$\lim_{x=a+0} y(x), \lim_{x=a+0} Y(x), \lim_{x=a+0} y'(x), \lim_{x=a+0} Y'(x), \lim_{x=a+0} [y'(x)\,Y(x) - y(x)\,Y'(x)]$$

és

$$Y(b) = 0,$$

akkor az $\dfrac{y(x)}{Y(x)}$ tört $x > a$-ra az x növekvő függvénye az $Y(x)$ függvény esetleges maximumhelyén túl valameddig, sőt a 2b. esetben $a < x \leqq b$ esetén is és — ha $\lim\limits_{x=a+0} \dfrac{y(x)}{Y(x)} \geqq 1$ — akkor $y(x) > Y(x)$ ugyanezen szakaszokon.



1. ábra

Bizonyítás. A (2) egyenletek közül az elsőt $Y(x)$-szel-, a másodikat $y(x)$-szel szorozva és összeadva egy kis átalakítással könnyen kapható, hogy

$$(y'Y - yY')' + A_1(y'Y - yY') = (A_2 - A_1)yY' + (B_2 - B_1)yY$$

Mindkét oldalt megszorozva az $e^{\int_a^x A_1 dx}$ integráló tényezővel, a következő azonosságot nyerjük

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int_a^x A_1 dx} (y'Y - yY') \right] = [(A_2 - A_1)\,yY' + (B_2 - B_1)yY]\, e^{\int_a^x A_1 dx}.$$

Ennek integrál alakja

$$e^{\int_a^x A_1 dx} (y'Y - yY') = \lim_{x=a+0} (y'Y - yY') +$$

$$+ \int_a^x [(A_2 - A_1)yY' + (B_2 - B_1)yY] e^{\int_a^x A_1 dx} dx \qquad (I)$$

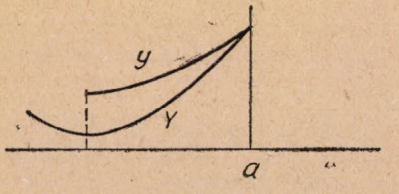
Feltételeink szerint legalább is az Y maximumáig az (I) jobb oldala pozitív, tehát a baloldal is az és lévén az $e^{\int_a^x A_1 dx}$ tényező mindig pozitív, az $y'Y - yY'$ is pozitív e közben, vagyis az $\frac{y}{Y}$ hányados növekvő és, ha $\lim_{x=a+0} \frac{y}{Y} \geqq 1$, akkor $y > Y$ legalább ugyanezen közben. A két görbe (y és Y görbéje) csak Y esetleges maximuma után metszhetik egymást, ha pedig a 2b. esetet vesszük, akkor az $\frac{y}{Y}$ növekedése, ill. az $y > Y$ egyenlőtlenség megmarad b-ig és a metszés csak b után lehetséges.

3. Az előbbi tétel megfogalmazható az a hely bal oldalára is. Ha 1) az egyenletek együtthatói egy $c \leqq x \leqq a$ intervallumban folytonosak, nagysági viszonyaik ugyanazok, mint előbb, de most

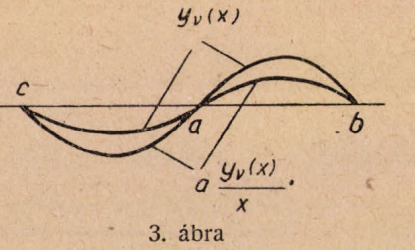
$$2) \quad \lim_{x=a-0} y(x) > 0, \ \lim_{x=a-0} Y(x) > 0, \ \lim_{x=a-0} y'(x) > 0, \ \lim_{x=a-0} Y'(x) > 0$$

$$\lim_{x=a-0} (y'Y - yY') = 0, \ Y(c) = 0,$$

akkor az a-tól balra $\frac{y}{Y}$ csökken és ha $\lim_{x=a-0} \frac{y}{Y} \geqq 1$, akkor $y > Y$ mégpedig az Y a-val szomszédos extremumától az a-ig, illetve, ha $A_2 \equiv A_1$, akkor Y a-val szomszédos c zérushelyétől egészen a-ig.



2. ábra



3. ábra

Ha $A_2 \not\equiv A_1$, akkor az (I) azonosságban levő $(A_2 - A_1) yY'$ tag miatt nem lehet a baloldalára következtetni, ha $\lim_{x=a-0} y = \lim_{x=a-0} Y = 0$. Ilyenkor ez a tag $x < a$ esetén negatív, a $(B_2 - B_1) yY$ tag pedig pozitív.

Viszont, ha $A_2 \equiv A_1$ és $\lim_{x=a-0} y = \lim_{x=a-0} Y = 0$, akkor könnyen belátható az (I) alapján, hogy $\frac{y}{Y}$ az a-tól balra csökkenő, ha tehát $\lim_{x=a-0} \frac{y}{Y} \geqq 1$, akkor $y < Y$ a már többször megjelölt korlátok közt.

Ha $c < x < b$ esetén $B_2 \equiv B_1, A_2 \geqq A_1$, de $A_2 \not\equiv A_1$ és $\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} Y = 0$, akkor az a hely mindkét oldalán $\frac{y}{Y}$ növekvő és az a hely mindkét oldalán $y > Y$, feltéve, hogy $\lim_{x=a} \frac{y}{Y} = 1$.*

Ha az a környezetében az $A_2 - A_1$ nagyságrendje ugyanakkora, mint $B_2 - B_1$, vagy az utóbbié kisebb, akkor $\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} Y = 0$ esetén az a mindkét irányú bizonyos környezetében $\frac{y}{Y}$ növekvő és $y > Y\ (x \neq a)$ föltéve, hogy $\lim_{x=a} \frac{y}{Y} = 1$.* Ti. ekkor $(A_2 - A_1) y Y'$ nagyságrendje nagyobb, mint $(B_2 - B_1) y Y$-é az a bizonyos környezetében. Ez biztosan bekövetkezik, ha $A_2(a) > A_1(a)$.

Pl. tekintsük a következő két egyenletet:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \qquad [\text{megoldása pl. } J_\nu(x)]$$

$$Y'' + \frac{3}{x} Y' + \left(1 + \frac{1-\nu^2}{x^2}\right) Y = 0. \quad \left(\text{megoldása pl. } \frac{J_\nu(x)}{x}\right)$$

Ha a a $J_\nu(x)$ Bessel-függvény egy zérushelye $(a \neq 0)$, akkor e két egyenletnek az $y(a) = Y(a) = 0, y'(a) = Y'(a) > 0$ kezdetifeltételekkel induló megoldásai (mint könnyű belátni)

$$y = J_\nu(x) \text{ és } Y = a \frac{J_\nu(x)}{x}.$$

Lévén itt $A_2 > A_1, B_2 > B_1$ a tétel szerint $y > Y$ $(x \gtrless a)$ legalább az Y a-val szomszédos extrémumáig.

Valóban $J_\nu(x) > a \frac{J_\nu(x)}{x}$ lévén $\frac{a}{x} \gtrless 1$, ha $x \lessgtr a$ (l. 3. ábra).

Az $y > Y$ egyenlőtlenség nem marad meg a $J_\nu(x)$ a-val szomszédos zérushelyeiig, mert most $A_2 \not\equiv A_1$.

Ha $A_2 \not\equiv A_1$, akkor y és Y metszhetik egymást b előtt.

Pl. vegyük a köv. egyenleteket:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad Y'' + \frac{3}{x} Y' + \left(1 + \frac{1-\mu^2}{x^2}\right) Y = 0$$

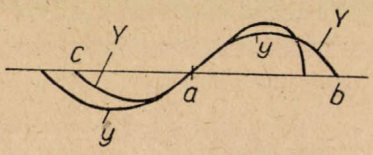
és legyen $a > 0$ a $J_\nu(x)$ egy zérushelye. Az $y(a) = Y(a) = 0$,

* Ez egyértelmű azzal, hogy $y'(a) = Y'(a)$

$y'(a) = Y'(a) > 0$ kezdeti feltételekhez tartozó megoldások

$$y = J_\nu(x), \qquad Y = \frac{\pi a^2}{2} J'_\nu(a)\, \frac{Y_\mu(a)J_\mu(x) - J_\mu(a)Y_\mu(x)}{x},$$

ahol $Y_\mu(x)$ a másodfajú Bessel-függvényt jelenti. Feltéve, hogy $\nu^2 < \mu^2 < 1 + \nu^2$ fennáll, hogy $B_2 > B_1$, $A_2 > A_1$ és így $y > Y$ $x \gtrless a$, mégpedig a-tól balra az y a-val szomszédos zérushelyéig, jobbra pedig csak y és Y metszéspontjáig, ami az Y soronkövetkező zérushelye előtt van, mert — mint később látni fogjuk — az Y a utáni zérushelye messzebb van mint y-é.



4. ábra

4. Alkalmazzuk az előbbieket az

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{1-\nu_1^2}{x^2}\right)y = 0, \quad Y'' + \frac{1}{x}Y' + \left(1 - \frac{\nu_2^2}{x^2}\right)Y = 0. \quad \nu_1 > \nu_2 > 0$$

egyenletek $y(a) = Y(a) = 0$, $y'(a) = Y'(a) > 0$ $(a > 0)$ kezdeti feltételekhez tartozó megoldásaira, ahol a a $J_{\nu_1}(x)$ egy zérushelye és $J'_{\nu_1}(a) > 0$. Az első egyenlet megoldásául vegyük az $y = J_{\nu_1}(x)$-et, akkor a másodiké — mint egyszerű számítással adódik —

$$Y = \frac{\pi a}{2} J'_{\nu_1}(a)\,[Y_{\nu_2}(a)J_{\nu_2}(x) - J_{\nu_2}(a)Y_{\nu_2}(x)]$$

Itt $A_2 \equiv A_1$, $B_2 - B_1 = \dfrac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{x^2} > 0$, tehát a fentiek szerint $y \gtrless Y$ ha $x \gtrless a$ $[y(a) = Y(a) = 0]$ egészen az Y a-val szomszédos zérushelyeiig. Legyenek az utóbbiak A és B, akkor

$$|J_{\nu_1}(x)| > \frac{\pi a}{2} J'_{\nu_1}(a)\,|\,Y_{\nu_2}(a)J_{\nu_2}(x) - J_{\nu_2}(a)Y_{\nu_2}(x)\,| \qquad (1)$$

$$A \leqq x \leqq B \quad (x \neq a)$$

Ebből persze az is következik, hogy az Y mondott zérushelyei A, B léteznek és a-hoz közelebb esnek mint $J_{\nu_1}(x)$ a-val szomszédos zérushelyei. Különben ezek az A, B számok eleget tesznek a következő transzcendens egyenletnek $\dfrac{J_{\nu_2}(x)}{Y_{\nu_2}(x)} = \dfrac{J_{\nu_2}(a)}{Y_{\nu_2}(a)}$.

Ha a $J_{\nu_1}(x)$ a-val szomszédos zérushelyei c és b, akkor tehát ennek az egyenletnek léteznek olyan A, B gyökei, melyekre $c < A < a < B < b$ és $A \leqq x \leqq B$ $(x \neq a)$ esetén fennáll (1). Persze a fenti egyenlet megoldhatóságára vonatkozó állításunk másképpen is és pedig igen egyszerűen igazolható.

Hasonlóképpen kaphatnánk

$$|Y_{\nu_1}(x)| > \frac{\pi a}{2} Y'_{\nu_1}(a) |J_{\nu_2}(a) Y_{\nu_2}(x) - Y_{\nu_2}(a) J_{\nu_2}(x)|$$

egy hasonló intervallumban, ahol a az $Y_{\nu_1}(x)$ zérushelye.

1. ha $\nu_2 = \frac{1}{2}$, $J_{\nu_2} = J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$, $Y_{\nu_2}(x) = Y_{\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

és a fenti (1)-ből adódik

$$J_\nu(x) \gtrless J'_\nu(a) \sqrt{\frac{a}{x}} \sin(x-a) \qquad \nu > \frac{1}{2} \qquad (a \geqq \pi),$$

ahol a $>$ jel $a < x \leqq a + \pi$-re érvényes, a $<$ jel pedig $a - \pi \leqq x < a$ esetén. Hasonló érvényes $\nu < \frac{1}{2}$-re és $Y_\nu(x)$-re.

A fentiekből az az ismert tény is következik, hogy a zérushelyek távolsága $\gtrless \pi$ ha $\nu \gtrless \frac{1}{2}$.

2. Ha $\nu_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, akkor hasonlóan adódik

$$J_\nu(x) \gtrless \frac{1}{\sqrt{ax^3}} [(ax+1)\sin(x-a) - (x-a)\cos(x-a)] \qquad \nu > \frac{3}{2},$$

olyan A és B helyek között, melyekre $\operatorname{tg}(x-a) = \frac{x-a}{ax+1}$.

Ez utóbbi egyenletnek tehát vannak gyökei a-tól jobbra-balra, mégpedig közelebb a-hoz, mint $J_\nu(x)$ megfelelő zérushelyei, s. i. t.

5. A Legendre-egyenlet így hangzik

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$$

Tegyük az n helyébe az $n_1 < n_2$ pozitív egészparaméter-értékeket. Akkor a $-1 < x < 1$ intervallumban az elsőnek megoldásául a $P_{n_1}(x)$ Legendre-polinomot választva és ennek egy zérushelyét

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

(ahol $P'_{n_1}(x) > 0$) a-val jelölve a megfelelő egyenletek $y(a) = Y(a) = 0$, $y'(a) = Y'(a) > 0$ kezdeti feltétellel induló megoldásai $y = P_{n_1}(x)$, $Y = (1-a^2) P'_{n_1}(a) [-Q_{n_2}(a) P_{n_2}(x) + P_{n_2}(a) Q_{n_2}(x)]$
és ezekre

$$|P_{n_1}(x)| > (1-a^2) P'_{n_1}(x) | - Q_{n_2}(a) P_{n_2}(x) + P_{n_2}(a) Q_{n_2}(x)|,$$

ahol $Q_n(x)$ a másodfajú Legendre-polinomot* jelenti. Ugyanígy

$$|Q_{n_1}(x)| > (1-a^2) Q'_{n_1}(a) | (-Q_{n_2}(x) P_{n_2}(a) + P_{n_2}(x) Q_{n_2}(a)|$$

Pl. ha $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, akkor

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \; P_1(x) = x, \; Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$$

és $a = 0$ a $Q_0(x)$ egy zérushelye és azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right| > |x|,$$

ami tényleg igaz.

6. Most teljes általánosságban vegyünk egy másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletet, melynél az y együtthatója egy ν paramétertől függ és annak monoton (pl. növekvő) függvénye. Ennek általános alakja

$$y'' + A(x) y' + B(x, \nu) y = 0 \qquad (1)$$

Legyenek ennek független partikuláris megoldásai az együtthatók folytonossági tartományában $K_\nu(x)$, $L_\nu(x)$.

Legyen $\nu_1 < \nu_2$ és a a $K_{\nu_1}(x)$ egy zérushelye és $K'_{\nu_1}(a) > 0$. Ekkor hasonlóan mint fent

$$K_{\nu_1}(x) | > c e^{\int_a^x A(x)\,dx} \cdot K'_{\nu_1}(a) | - L_{\nu_2}(a) K_{\nu_2}(x) + K_{\nu_2}(a) L_{\nu_2}(x) |$$
$$\alpha < x < \beta \qquad (x \neq a)$$

ahol α és β a $\frac{K_{\nu_2}(x)}{L_{\nu_2}(x)} = \frac{K_{\nu_2}(a)}{L_{\nu_2}(a)}$ egyenlet a-val szomszédos gyökei, C pedig egy csak ν-től függő konstans, mely teljesen határozott értékű mihelyt $K_\nu(x)$, $L_\nu(x)$ is ilyenek.

Ha $K_{\nu_1}(x)$-nek van a-nál nagyobb (kisebb) zérushelye, akkor a fenti egyenletnek is, még pedig közelebb az a-hoz.

Ha a fenti egyenletnek nincs gyöke (a-n kívül) a folytonossági tartományban, akkor $K_{\nu_1}(x)$-nek sem lehet zérushelye ugyanitt (kivéve a-t).

* Valójában ez nem is polinom.

A szokásos (Sturm-féle) úton bebizonyítható, hogy az (1) egyenlet bármely partikuláris megoldásának a zérushelyei a ν-nek csökkenő függvényei ($B(x,\nu)$ növekvő) Ezért, ha $K_{\nu_1}(x)$-nek több zérushelye van, Y-nak is több van, mégpedig legalább ugyanannyi és közelebb az a-hoz mint $K_{\nu_1}(x)$ megfelelő zérushelyei.

Pl. a Bessel függvények esetén a

$$\frac{J_{\nu_2}(x)}{Y_{\nu_2}(x)} = \frac{J_{\nu_2}(a)}{Y_{\nu_2}(a)}$$

egyenletnek végtelen sok gyöke van és mindegyik közelebb van a-hoz mint a $J_{\nu_1}(x)$ megfelelő zérushelyei ($\nu_1 > \nu_2$).

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ШТУРМА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ И К МНОГОЧЛЕНАМ ЛЕЖАНДРА

И. Бихари

Резюме

Обобщение теоремы имеет следующий вид:

1. Пусть $A_1(x), A_2(x), B_1(x), B_2(x)$ непрерывные функции при $a \leqq x \leqq b$,

2а). или $A_2(x) \geqq A_1(x)$ и $B_2(x) \geqq B_1(x)$ $\quad a < x < b$,
но $A_2(x) \not\equiv A_1(x)$ $\quad a < x < b$,

2б). или $A_2(x) = A_1(x)$, $B_2(x) \geqq B_1(x)$, а
$B_2(x) \not\equiv B_1(x)$ $\quad a < x < b$,

3. пусть следующие пределы не являются отрицательными величинами:

$$\lim_{x=a+0} y(x), \quad \lim_{x=a+0} Y(x), \quad \lim_{x=a+0} y'(x), \quad \lim_{x=a+0} Y'(x), \quad \lim_{x=a+0} [y'(x)\,Y(x) - y(x)\,Y'(x)],$$

4. и, наконец, пусть $y(x)$ и $Y(x)$ соотвественно предетавляют собой решения следующих уравнений:

$$y'' + A_1(x)y' + B_1(x)y = 0 \qquad Y'' + A_2(x)\,Y' + B_2(x)\,y = 0,$$

тогда отношение $\dfrac{y(x)}{Y(x)}$ является возрастающей функцией от x до некоторой области за случайным максимумом функций $Y(x)$, а даже в случае 2б). и при $a < x \leqq b$, и если

$$\lim_{x=a+0} \frac{y(x)}{Y(x)} \geqq 1$$

то

$$y(x) > Y(x)$$

в пределах указанных участков.

В статье исследуется обобщение указанной теоремы также в левую сторону от места a, а далее и случай, когда $B_2 \equiv B_1 A_2 \geqq A_1$, но $A_2 \not\equiv A_1$ и, наконец, случай, когда порядок величины $B_2 - B^1$ около a меньше или же

равен порядку величины $A_2 - A_1$. В приложени приводится неравенство

$$y_\nu(x) \gtrless y'_\nu(a) \sqrt{\frac{a}{x}} \sin(x-a) \qquad \left(\nu > \frac{1}{2} \quad a \geqq \pi\right)$$

для функции Бесселя $y_\nu(x)$, где символ $>$ справедлив при $a < x \leqq a + \pi$ и символ $<$ предусматривает случай $a - \pi \leqq x < a$. Подобные выражения имеют место при $\nu < \frac{1}{2}$ и для функции Бесселя второго рода $Y_\nu(x)$.

Доказывается, что при $y_{\nu_1}(a) = 0$ и $\nu_1 > \nu_2$ трансцендентное уравнение

$$\frac{y_{\nu_2}(x)}{Y_\nu(x)} = \frac{y_{\nu_2}(a)}{Y_{\nu_2}(a)}$$

имеет бесконечно много корней, каждый из которых ближе к a, чем соответствующая нулевая точка функции $y_{\nu_1}(x)$.

GENERALISATION OF A THEOREM BY STURM AND ITS APPLICATION TO BESSEL FUNCTIONS AND LEGENDRE POLYNOMIALS

By
Imre Bihari

Summary

The generalization in question is as follows:

1. Let $A_1(x), A_2(x), B_1(x), B_2(x)$ be continuous functions for $a \leqq x \leqq b$ and

2a). let

$$A_2(x) \geqq A_1(x) \quad \text{and} \quad B_2(x) \geqq B_1(x) \qquad a < x < b,$$
$$\text{but} \qquad A_2(x) \not\equiv A_1(x) \qquad a < x < b,$$

2b). or let

$$A_2(x) \equiv A_1(x), B_2(x) \geqq B_1(x), \quad \text{but} \quad B_2(x) \not\equiv B_1(x) \qquad a < x < b,$$

3. the following limiting values shall not assume negative values:

$$\lim_{x=a+0} y(x), \quad \lim_{x=a+0} Y(x), \quad \lim_{x=a+0} y'(x), \quad \lim_{x=a+0} Y'(x), \quad \lim_{x=a+0} [y'(x)\,Y(x) - y(x)\,Y'(x)],$$

4. and finally let $y(x)$ and $Y(x)$ resp. be the solutions of the following equations

$$y'' + A_1(x)\,y' + B_1(x)\,y = 0 \qquad Y'' + A_2(x)\,Y' + B_2(x)\,y = 0,$$

then the quotient $\frac{y(x)}{Y(x)}$ is an increasing function of x up to a certain point beyond the eventual maximum value of the function $Y(x)$, (in case 2b). even for the case $a < x \leqq b$) and, if

$$\lim_{x=a+0} \frac{y(x)}{Y(x)} \geqq 1$$

so $y(x) > Y(x)$ within the interval said.

The paper deals with a generalization of the theorem extending its valuability to the left side of point a, as well as with the case, when $B_2 \equiv B_1$, $A_2 \geqq A_1$, but $A_2 \not\equiv A_1$, finally with that particular case, when the order of magnitude of $B_2 - B_1$ in the vicinity of a is less or equal to the order of magnitude of $A_2 - A_1$. The paper gives an application of this theorem, by deducing the inequality

$$J_\nu(x) \gtrless J_\nu'(a) \sqrt{\frac{a}{x}} \sin(x-a) \qquad \left(\nu > \frac{1}{2} \quad a \geqq \pi\right)$$

for the Bessel-function $J_\nu(x)$, where the symbol $>$ applies for the case $a < x \leqq a + \pi$, while the symbol $<$ stands for the $a - \pi \leqq x < a$ case. Similar expressions can be found for the case $\nu < \frac{1}{2}$ and for the second kind Bessel-function $Y_\nu(x)$.

It is shown, that if $J_{\nu_1}(a) = 0$ and $\nu_1 > \nu_2$, then the transcendental equation

$$\frac{J_{\nu_2}(x)}{Y_{\nu_2}(x)} = \frac{J_{\nu_2}(a)}{Y_{\nu_2}(a)}$$

has an infinite number of roots and each of these approximates a nearer than the corresponding zero point of $J_{\nu_1}(x)$.

Megjegyzések Dowker sokszögtételeihez

Írta: Fejes Tóth László

Dowkertől[1] származnak a következő tételek:

Ha t_n jelenti egy tetszésszerinti módon megadott konvex tartományba írt maximális területű n-szög területét, akkor

$$t_{n-1}+t_{n+1} \leqq 2t_n, \qquad n=4, 5, \ldots .$$

Ha T_n jelenti egy konvex tartomány körül írt minimális területű n-szög területét, akkor

$$T_{n-1}+T_{n+1} \geqq 2T_n, \qquad n=4, 5, \ldots .$$

Másképp kifejezve, bármely konvex tartomány esetén a $t_3, t_4, \ldots$ sorozat konkáv, míg a $T_3, T_4, \ldots$ sorozat konvex.

Ezekből az önmagukban is szép tételekből figyelemreméltó következtetések vonhatók konvex tartományoknak a síkban való elhelyezésével és a síknak konvex tartományokkal való lefedésével kapcsolatos bizonyos kérdésekben.[2]

Az alábbiakban az eredeti Dowker-féle bizonyításnak egy egyszerűsített, a lényeget jobban kidomborító változatát mutatjuk be. Egyuttal rá óhajtunk mutatni arra, hogy analóg tételek állnak fenn a kerületre is. A bizonyítások hasonlósága miatt[3] itt csupán a beírt maximális kerületű sokszögre vonatkozó tétel bizonyítását részletezzük. Kimutatjuk tehát, hogy ha l_n jelenti egy konvex tartományba írt maximális kerületű n-szög kerületét, akkor

$$l_{n-1}+l_{n+1} \leqq 2l_n, \qquad n=4, 5, \ldots .$$

Nyilván elég annyit kimutatnunk, hogy egy-egy tetszésszerinti beírt $(n-1)$- és $(n+1)$-szöghöz szerkeszthető két olyan beírt n-szög, amelyek kerületösszege legalább akkora, mint az eredeti két sokszögé.

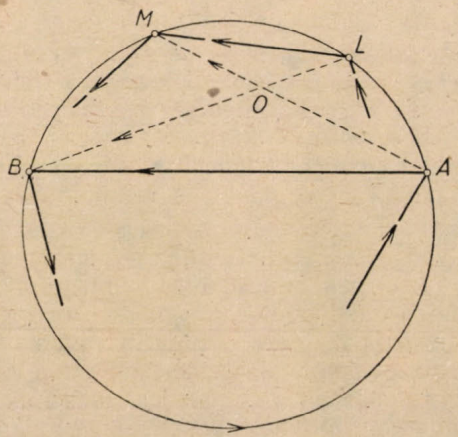
[1] C. H. Dowker, On minimum circumscribed polygons, Bull. Amer. math. Soc. 50, 120—122 (1944).

[2] L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum (Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953).

[3] V. ö. Molnár József, Konvex tartományok beírt és körülírt poligonjairól, Mat. Lapok 6 (1955) 210—218. o.

Egyszerűség kedvéért azt a lényegtelen megszorítást tesszük, hogy az $(n-1)$- és $(n+1)$-szög csúcsai között nincsenek azonosak. Egyesítsük a két sokszög csúcspontjait és számozzuk meg a nyert $2n$ pontot ciklikús sorrendben 1-től $2n$-ig. Azt állítjuk, hogy *a páratlan, illetőleg páros csúcsok által meghatározott két n-szög kielégíti a kívánt feltételt.*

Jelöljünk ki a síkban egy forgásirányt, ami által minden sokszögoldal határozott irányítást nyer. Legyen AB és LM két olyan oldal, amelyek végpontjai a tartományt határoló görbén a megadott forgásirányban A, L, M, B sorrendben következnek. Ilyenkor azt mondjuk, hogy AB közrefogja LM-et. Ilyen közrefogott oldalaknak egy $n-1$- és $n+1$-szög esetén nyilván fel kell lépniök.



1. ábra

Kössük össze A-t M-mel, azután menjünk az oldalak és ezek iránya által megszabott úton L-ig. L-et kössük össze B-vel, majd folytassuk útunkat az oldalakon kijelölt irányban A-ba. Ezáltal egy önmagát metsző sokszöget jártunk be, amelynek oldalai az eredeti oldalakból AB és LM törlése, és AM és LB beiktatása által keletkeztek. Mivel azonban az $ALMB$ konvex négyszögben[4] az átlóknak van egy közös O pontjuk, azért $AM+LB=AO+OB+LO+OM \geqq AB+LM$. Ezért az új sokszög kerülete nem kisebb, mint az eredeti két sokszög kerületösszege.

Az új sokszög kétszeres körüljárású. Ezen azt értjük, hogy ha a sokszöget úgy járjuk körül, hogy az oldalak helyett a hozzájuk tartozó görbeíveken haladunk, akkor az egész görbét pontosan

[4] Ez a négyszög egy egyenesszakasszá fajulhat.

kétszer futjuk be. Mivel ugyanis az AM és LB oldalhoz együttvéve ugyanaz az út tartozik, mint AB- és LM-hez, a körüljáráskor ugyanazt az útat tesszük meg, mintha az eredeti két sokszöget járnók külön-külön körül.

Jegyezzük meg azt is, hogy a fenti lépésben nem keletkezett újabb közrefogott oldal. Mivel azonban az LM oldal eltűnt, a más oldalak által közrefogott oldalak száma eggyel csökkent.

Legyen most az új sokszögben AB egy olyan oldal, amely közrefogja az LM oldalt. Helyettesítsük ismét az AB és LM oldalt AM- és LB-vel. Ha A-t M-mel kötjük össze és tovább haladunk a sökszögoldalakon, akkor — tekintettel a pontok eredeti $AB \ldots LM \ldots A$ sorrendjére — a B-től L-ig terjedő pontok érintése nélkül visszajutunk A-ba. Ha pedig L-et B-vel kötjük össze és folytatjuk útunkat az oldalakon, akkor — ismét tekintettel az eredeti $LM \ldots AB \ldots L$ sorrendre — az $M \ldots A$ sokszög csúcsainak érintése nélkül visszajutunk L-be. Sokszögünk tehát két különálló sokszögre esik szét. Ez a két sokszög együttesen ismét kétszeres, külön-külön tehát egyszeres körüljárású, azaz konvex. A közrefogott oldalak száma ebben a lépésben is csökkent, míg az oldalak összhossza nőtt, vagy legalább is nem csökkent.

Ennek az eljárásnak a folytatásával véges számú lépésben eljutunk egy olyan kétszeresen körüljárt sokszöghöz vagy konvex sokszögpárhoz, amelyben nincs közrefogott oldal. Ez csak úgy lehet, hogy minden oldal pontosan egy csúcsot fog közre. Tekintettel azonban az oldalak páros voltára, a végeredményként kapott alakzat csak a bizonyítandó állításban említett n-szögpár lehet.

A fenti bizonyításban az egyetlen metrikus elem az, hogy egy konvex négyszög átlóinak hosszösszege nagyobb mint két szemköztes oldalé. Ez a tény a nemeuklideszi geometriákban is fennáll, s így a fenti tétel ezekre is kiterjeszthető.

Sőt tovább általánosítható a tétel.

Tekintsünk egy zárt körlemezzel topológiailag izomorf felületdarabot, amelynek bármely két pontjához létezzék a felületen haladó legrövidebb összekötő vonal. Feltesszük továbbá, hogy ennek a hossza a két ponttal (azaz a pontokhoz tartozó felületparaméterekkel) folytonosan változik. Jelöljünk ki a felület határvonalán ciklikus sorrendben n pontot és kössük össze mindegyiket egy-egy legrövidebb vonallal a rákövetkezővel. Ilyen módon egy beírt „n-szöget“ nyerünk. Ezek között, a folytonosságra tett kikötés miatt, van maximális kerületű és bizonyításunk minden módosítás nélkül alkalmazható erre is. Ha ugyanis A, L, M és B felületnek ebben a ciklikus sorrendben következő négy határpontja, akkor az AM és LB „egyenesnek“ van legalább egy közös O pontja. Mivel azonban az AOB és LOM „törtvonal“ a felületen halad, azért az

A-t B-vel és L-et M-mel összekötő legrövidebb vonalakra fennáll bizonyításunk sarkalatos egyenlőtlensége: $AM+LB=AO+OB+LO+OM \geqq AB+LM$.

Úgy is mondhatjuk röviden, hogy a fenti tétel nem konvex tartomány és tetszésszerinti metrika esetén is érvényben marad.

Fordítsuk most figyelmünket az analóg térbeli problémákra!

A konvex testek elméletében egy háromdimenziós konvex testet három ún. fundamentális mértékszámmal, mégpedig a köbtartalommal, felszínnel és a középgörbület integráljával szokás jellemezni. Mivel továbbá a térbeli problémákban egyaránt tekinthetünk n csúcsú és n lapú poliédereket,[5] azért a négy síkbeli tételnek tizenkét természetesen felmerülő térbeli probléma felel meg.

Itt csupán egy konvex testbe írt n csúcsponttal bíró maximális köbtartalmú poliéderre vonatkozó kérdést vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy a fentemlített első Dowker-féle tétel ilyen irányú átvitele a térbe nem lehetséges.

Ismeretes, hogy egy gömbbe írt 4-, illetőleg 6-csúcsú soklapok közül a szabályos tetraédernek, illetőleg oktaédernek van a legnagyobb köbtartalma.[6] Könnyen megmutatható továbbá, hogy a beírt 5-csúcsú poliéderek közül a szabályos 3-oldalú kettősgúla térfogata a legnagyobb. Ennek megfelelően, v_n-nel jelölve az egységgömbbe írt n-csúcsú maximális köbtartalmú soklap köbtartalmát: $v_4=8\sqrt{3}/27$, $v_5=\sqrt{3}/2$, $v_6=4/3$. Ezeknek az értékeknek a birtokában beláthatjuk, hogy $v_4+v_6>2v_5$.

Az a tény, hogy a tekintett esetben már a gömb is ellenpéldát szolgáltat, kétségessé teszi a szóbanforgó tételek térbe való átvitelének a lehetőségét a többi irányban is.

Резюме

Упрощенное доказательство теорем Доукера, опубликованных в цитируемой статье. [1])

Auszug

Vereinfachter Beweis der unter [1]) zitierten Zätze von Dowker.

[5] Adott csúcspontszám esetén körülírt soklap helyett a testet tartalmazó, adott lapszám esetén pedig beírt soklap helyett a testben fekvő konvex poliéder tekintendő.

[6] L. a 2) alatt idézett könyvet. A gömbbe írt 7 csúcsú maximális köbtartalmú poliédert ezideig nem ismerjük.

A matematikai logika eldöntésproblémájáról

(Ismertetés)

Írta: Surányi János

Péter Rózsának őszinte barátsággal 50. születésnapjára

1. Bevezetés

Az alábbiakban igyekszem a címben szereplő tárgykört az abban kevésbé jártasokhoz is közelhozni és megmutatni, hogy a dolog lényege kombinatorikus jellegű: bizonyos feltételeket kielégítő halmazokat úgy átalakítani, hogy azok egyszerűen legyenek jellemezhetők. Így számot tarthat mindazok érdeklődésére, akik szívesen foglalkoznak kombinatorikus kérdésekkel.

A halmazok jellemzése formulákkal történik, így először a jelölésmód elemeiből ismertetek annyit, amennyi nélkülözhetetlen a továbbiakhoz. Aki a matematikai logikai jelölésmódot ismeri, az ezt a részt nyugodtan átugorhatja.

A továbbiakban az eldöntésprobléma lényegét, és az úgynevezett redukció-elmélet különböző módszereit, főbb eredményeit és néhány nyitott problémát vázolok — ezekről igyekszem áttekintést adni anélkül, hogy teljes és szigorú bizonyításokra törekedném.

2. Logikai formulák

Matematikai bizonyításokban általában néhány egyszerű logikai kapcsolat szokott csak szerepelni. Így kényelmes matematikai gyorsíráshoz jutunk, ha ezekre egyszerű jeleket vezetünk be:

nem $= \neg$, és $= \wedge$, vagy $= \vee$, ha ..., akkor ... $= \Longrightarrow$, akkor és csak akkor, ha $= \Longleftrightarrow$.

Emellett matematikai tételek egyes elemek tetszésszerinti értékeiről, mások alkalmas választása mellett állítják bizonyos összefüggések fennállását. Ennek jelölésére a

$\forall x =$ minden x-re, $\exists x =$ van oly x, amelyre

jelöléseket fogjuk használni.[1] Az utóbbi két jelet *kvantor*nak, közelebbről $\forall$-kvantornak és $\exists$-kvantornak fogjuk nevezni. Több egyező jellegű kvantornál csak egyszer írjuk ki az $\forall$, ill. $\exists$ jelet és utána felsoroljuk azokat a változókat, amikre vonatkozik.

Írjuk fel például a folytonosság és az egyenletes folytonosság definícióját egy nyitott (a, b) intervallumban:

$$\mathfrak{F} = \forall\varepsilon x \exists\delta \forall x' ((0 < \delta) \wedge \{[(a < x < b) \wedge (0 < \varepsilon) \wedge (|x - x'| < \delta)] \Rightarrow (|f(x) - f(x')| < \varepsilon)\});$$

$$\mathfrak{E} = \forall\varepsilon \exists\delta \forall x x' ((0 < \delta) \wedge \{[(a < x < b) \wedge (0 < \varepsilon) \wedge (|x - x'| < \delta)] \Rightarrow (|f(x) - f(x')| < \varepsilon)\}).$$

A két formula közt az egyetlen különbség a $\forall x$ és $\exists\delta$ kvantorok sorrendjében áll.[2]

Már nem a gyorsírás egyszerűsítését,[3] de a formulák kezelhetőségét növeli, ha összetett állításokat részeikre bontunk, és bizonyos egyöntetű jelölésmódot alkalmazunk:

$$|x| = \alpha(x), \quad x - y = \beta(x, y), \quad x < y = \mathsf{K}(x, y).$$

Ekkor $\mathfrak{F}$ így írható:

$$\mathfrak{F}' = \forall\varepsilon x \exists\delta \forall x' (\mathsf{K}(0, \delta) \wedge \{[(\mathsf{K}(0, \varepsilon) \wedge \mathsf{K}(a, x) \wedge \mathsf{K}(x, b) \wedge \mathsf{K}(\alpha(\beta(x, x')), \delta)] \Rightarrow \mathsf{K}(\alpha(\beta(f(x), f(x'))), \varepsilon)\}).$$

$\mathfrak{E}$ helyett $\forall\varepsilon \exists\delta \forall x x'$ kvantorok után a föntivel egyező formula adódnék most is.

Második példaként vegyük a csoportaxiómákat. Itt elemek olyan összességéről — halmazáról — van szó, amelyben egy kétváltozós $s(x, y)$ művelet (függvény) van adva a következő tulajdonságokkal

1. $\forall x y \exists z (s(x, y) = z)$

(a művelet nem vezet ki a halmazból)

2. $\forall x y z (s(x, s(y, z)) = s(s(x, y), z))$

(asszociatív a művelet)

[1] Az itt bevezetett jelölések mellett sok más is használatos. Ezekre most nem térek ki.

[2] Tudjuk, hogy nyitott intervallumban folytonosságból nem következik egyenletes folytonosság. Hogy véges, zárt intervallumban mégis érvényes az egyenletes folytonosság tétele, az ezek szerint nem tisztán logikai tény, hanem a két kvantor felcserélhetősége ez esetben lényegesen az analízis egy tétele.

[3] Megjegyezzük, hogy pl. a Német Demokratikus Köztársaság egyetemein előadók és hallgatók élnek is ezekkel a jelekkel. Hardy és Wright ismert számelmélet-könyve is használ rövidítésként logikai jeleket.

3. $\exists e \forall x((s(e, x) = x) \wedge \exists x'(s(x', x) = e))$

(van baloldali egység és baloldali inverz.)

A három formulát egybe is kapcsolhatjuk egy-egy „és"-sel:

$$\mathfrak{C} = \forall xy \exists z(s(x, y) = z) \wedge \forall xyz(s(x, s(y, z)) = s(s(x, y), z)) \wedge$$
$$\wedge \exists e \forall x((s(e, x) = x) \wedge \exists x'(s(x', x) = e)).$$

Azok a halmazok alkotnak egy rajtuk értelmezett $s(x, y)$ műveletre nézve csoportot, amelyekre a $\mathfrak{C}$-vel formalizált állítás érvényes.

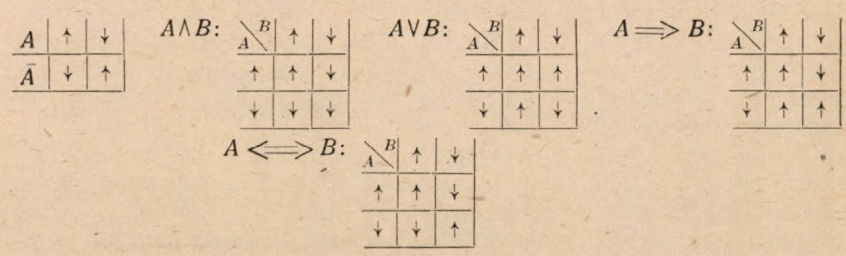
Figyeljük meg, hogy itt ki kellett jelölni azokat a formularészeket, amelyekre egy-egy kvantor, illetőleg kvantor-csoport vonatkozik. Egy kvantorhoz azt a formularészt, amelyre a kvantor vonatkozik, a kvantor *hatáskör*ének nevezzük. A kvantor változóját a kvantor hatáskörén belül *kötött változó*nak nevezzük, a kvantorral le nem kötött változót *szabad változó*nak.

Eddig formuláink matematikai állítások rövidítései, azonban szabatos matematikai értelmet is tulajdoníthatunk nekik. Egy formula elemek bizonyos halmazára vonatkozik. Ezt a halmazt *individuumtartomány*nak fogjuk nevezni, az elemeit pedig *individuum*oknak. Az az állítás, amit egy adott formula formalizál, vagy igaz, vagy hamis, tehát az „igaz" (jele $\uparrow$) és „hamis" (jele $\downarrow$) ún. *logikai értékek* valamelyikét veszi fel. Ugyanezen értékekből áll minden relációnak mint a fönti formulákban $K(x, y)$-nak vagy $x = y$-nak az értékkészlete. Hasonlóan felléphetnek kettőnél többváltozós relációk, vagy egyváltozósak is. (Utóbbiakat helyesebben tulajdonságoknak kell neveznünk.) Ezek változói individuumok, értékük viszont igaz, vagy hamis, aszerint, hogy az individuumok amelyekre vonatkoztatjuk, a kérdéses relációban vannak-e, vagy sem (illetőleg egy változó esetén megvan-e az individuumnak a szóbanforgó tulajdonsága). A relációk (és tulajdonságok) tehát olyan függvények, amelyek az individuumtartományon vannak értelmezve és logikai értékeket vesznek fel. Ezeket *logikai függvény*eknek nevezzük.

Emellett szerepelnek olyan függvények — vagy műveletek is, amelyek individuumokra vannak értelmezve és értékeik is individuumok, mint a $\mathfrak{C}$ formulában $s(x, y)$, vagy az $\mathfrak{F}'$ formulában $\alpha(x), \beta(x, y), f(x)$. Ezeket *matematikai függvény*eknek nevezzük, mert az individuumtartomány többnyire egy matematikai kérdéskör elemeiből áll, és ekkor valóban a matematika megfelelő ágának függvényeit nyerjük.

A függvények egy harmadik fajtája felel meg az $\wedge$, $\vee$ stb. jeleknek. Ezeket ugyanis olyan formularészekre alkalmazzuk, amelyek logikai értékeket vesznek fel és olyan újabb formulához vezetnek, amely szintén logikai értéket jelent. Ezek tehát olyan függ-

vények, amelyeknek értelmezési tartománya is, értékkészlete is a logikai értékek kételemű halmaza, Ezeket *logikai műveleteknek* nevezzük; megadásuk legegyszerűbben értéktáblázatukkal történhetik:[4]



Ezzel pontos értelmet nyertek formuláink. Az $\mathfrak{F}'$ és a $\mathfrak{C}$ formula között azonban még egy lényeges különség van. $\mathfrak{F}'$-nél az individuumtartomány a valós számok, α, β, K konkrét matematikai, illetve logikai függvények, míg $\mathfrak{C}$-nél az individuumtartomány is, az $s(x, y)$ művelet is határozatlan és a formula értelme az, hogy csoportnak azokat a halmazokat nevezzük egy rajtuk értelmezett kétváltozós művelettel, amelyekre a $\mathfrak{C}$ formula igaz. Itt tehát formulákkal kapcsolatban egy az egyenletekhez hasonló probléma merül fel. Tetszésszerinti formulában ismeretlenek a matematikai és logikai függvények, mindenek előtt pedig az individuumtartomány amin ezek értelmezve vannak,[5] és olyan halmazt keresünk, olyan rajta definiált matematika függvényekkel (műveletekkel) és logikai függvényekkel (relációkkal és tulajdonságokkal), amelyekre a formula igaz lesz.

A $\mathfrak{C}$ formula esetén egy algebrai struktúrafajta, a csoportok felelnek meg ennek a feltételnek. Általában is struktúrának fogunk nevezni egy halmazt rajta értelmezett matematikai és logikai függvényekkel. Ha egy formula egy struktúrára igaz lesz, azt mondjuk, hogy a struktúra kielégíti a formulát.

[4] Megjegyezzük, hogy a „vagy" nem szétválasztó értelemben, (hanem a latin *vel* értelmében) szerepel. A „ha ..., akkor ..." definíciója pedig nem fedi a mindennapi értelmet, mert az mindig feltételez egy ok-okozati összefüggést, tehát tartalmi kapcsolatot az állítások között, amitől egy formalizálásnál elvonatkoztatunk. De ezen túl is definíciónk szerint hamis állításból minden következik. Ez a definíció bizonyult hasznosnak és veszély nem származhatik belőle, hiszen ahhoz, hogy egy feltételes állítás helyességéből a következmény helyességét kimondhassuk, kell, hogy a feltétel helyességét belássuk. Ez nem lehetséges, ha a feltétel hamis.

[5] Megjegyezzük, hogy a $\mathfrak{C}$ formulában is határozott értelemben szerepel az $x = y$ reláció, az individuumnak egyenlősége. Ezt általában is meg szokás engedni, mint a logikai függvényváltozók mellett határozott értelemben szereplő relációt. Viszont az $\mathfrak{F}'$ formulában is határozatlanként szerepel az $f(x)$ függvény, az (a, b) intervallumon folytonosnak nevezve mindazon $f(x)$ függvényt, amelyekre $\mathfrak{F}' = \uparrow$.

3. Az eldöntésprobléma

A $\mathfrak{C}$ formulához ismerünk olyan struktúrát, amely kielégíti. Ha azonban a formula van adva, kérdés, hogy van-e olyan struktúra, amely kielégíti. Ez a kérdés, a formulák kielégíthetőségének kérdése az egyenletek megoldhatóságának kérdéséhez hasonlítható. Felmerült a kérdés, nem adható-e meg olyan eljárás, amely alkalmas arra, hogy segítségével minden formuláról[6] eldöntsük, kielégíthető-e[7] vagy sem. Egy ilyen eljárás számos nehéz, még eddig megoldatlan probléma megoldására adna (legalább is elvben) gépies eljárást. Ha csak a (tetszésszerinti sok változós és akárhányadfokú) diophantoszi egyenletek megoldhatóságának kérdését említjük, aminek eldöntésére gépies eljárást nehéz elképzelni, már akkor sem lehet meglepő A. CHURCH[8] következő, 1936-ból származó eredménye. A „gépies eljárás" egy bizonyos, igen általános jellegű precízirozása mellett megmutatta, hogy nem adható meg ilyen gépies eljárás az eldöntésprobléma megoldására.

CHURCH tétele előtt két oldalról igyekeztek megközelíteni a kérdést. Részben bizonyos egyszerű formula-típusokra kerestek eldöntési eljárást, részben pedig az általános problémát redukálták bizonyos szempontból egyszerűbb formula-típusokra vonatkozó eldöntésproblémára. Bár CHURCH tétele óta tudjuk, hogy a gépies eljárás CHURCH által körvonalazott értelme mellett — és az eddigi eldöntési eljárások gépiesek ebben az értelemben — a kétféle eredmények nem találkozhatnak össze, mégis érdekessége van annak, hogy tetszésszerinti formulák helyett milyen egyszerű formula-típusokra szorítkozhatunk anélkül, hogy ezzel a probléma általánosságát korlátoznánk. Olyan jellegű tételekről lesz itt szó, mint egyenletek körében az, hogy bármely irracionális egyenlet megoldása (tehát olyané, amelyben az ismeretlenekre és számokra alkalmazott alapműveletek mellett gyökvonás is előfordul) visszavezethető algebrai egyenlet megoldására (tehát polinom nulla-helyeinek keresésére). Ilyen, ún. redukciós tételekkel fogunk foglalkozni.

[6] Megjegyezzük, hogy az itt körvonalazott formulák a matematikai logika ún. szűkebb függvénykalkulusának formulái még nem alkalmasak a teljes matematika formalizálására, bár elég nagy részéére igen. A kalkulus tovább is kiterjeszthető volna, de ezzel itt nem foglalkozunk.

[7] Rokonprobléma volna annak eldöntése, hogy mely formulák azok, amelyek tetszésszerinti struktúrára igazak. Ez az „azonossági probléma" visszavezethető a kielégíthetőségire és viszont. Mi csak az utóbbival foglalkozunk.

[8] Az eldöntésprobléma irodalmára vonatkozóan utalok D. HILBERT—W. ACKERMANN: *Grundzüge der Theoretischen Logik* (III. Aufl. 1949. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg VI. + 156. old.) művének megfelelő paragrafusára, l. 94—105. old., továbbá KALMÁR L.-nak és a szerzőnek cikksorozatára: Contributions to the reductiontheory of the decision problem I—IV. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **1** (1950) és **2** (1951) kötetekben. Az először említett mű egyben kitűnő bevezetést ad a matematikai logikába.

Hogy rövidebben tudjuk magunkat kifejezni, nevezzünk *ekvivalens*nek két formulát (kielégíthetőség szempontjából), ha bármelyiknek kielégíthetőségéből következik a másik formula kielégíthetősége is. Ekkor minden redukció alkalmas ekvivalens formulák szerkesztésében áll, ez pedig úgy történik, hogy egy adott formulát kielégítő struktúrát (feltéve hogy van ilyen) úgy alakítunk át, hogy azon a formula állítása egyszerűen legyen formalizálható. Ezen túl azonban tartalmaznia kell az új formulának a struktúraátalakítás olyan mérvű jellemzését is, amelynek segítségével bármely az új formulát kielégítő struktúrából megszerkeszthető egy a régit kielégítő struktúra.

Erre mutatunk néhány példát, előbb azonban vizsgáljuk még meg kielégíthetőség szempontjából, gráfokkal való kapcsolatok megvilágítására, a K. SCHÜTTE által megadott következő formulát:

$$\forall x(\overline{F(x,x)})\wedge\forall x\exists y(F(x,y)\wedge\forall z(F(y,z)\Rightarrow F(x,z))).$$

Ez egyszerűbben így is írható:[9]

$$\forall x\exists y\forall z(\overline{F(x,x)}\wedge F(x,y)\wedge(F(y,z)\Rightarrow F(x,z))).$$

(Az olvasó gondolja át, hogy mindkét formula ugyanazt jelenti, pontosabban bármely struktúrára ugyanaz a kettő logikai értéke.)

Egy ezt kielégítő struktúrát szemléltethetünk úgy, hogy az individuumokat egy-egy pont ábrázolja és ha $F(a,b)=\uparrow$, akkor egy a-ból b-be mutató irányított élt rajzolunk.[10] Így irányított gráfot kapunk. Erre a formula szerint az „és"-sel kapcsolt három formularész igaz kell hogy legyen, tehát semelyik pontból nem vezethet önmagához él, ún. hurok; minden pontból indul ki él, mégpedig olyan ponthoz is, hogy amely pontokba az utóbbiból vezet tovább él, azokba az előbbiből is fut él.

Ha egy ilyen gráfban egy pontból kiindulva veszünk egy a fenti módon hozzárendelt pontot, egy ahhoz megfelelő pontot és így tovább, akkor végtelen részgráfot (egyébként tranzitív irányítású végtelen teljes gráfot) kapunk, mert ha valamely a pontból egy korábban kiválasztott b pontba érnénk vissza, akkor b korábban kiválasztott volta miatt vezet él b-ből a-ba, viszont, ha a-hoz b választható, az azt jelenti, hogy a-ból b-be is vezet él, és a $\Rightarrow$ összefüggés szerint b-ből b-be is. Ez azonban a formula első ré-

[9] Könnyen látható, hogy az „és" és a „vagy" asszociatív művelet így több „és"-sel, vagy „vagy"-gyal kötött formularész közt elhagyjuk a zárójeleket.

[10] Ha az individuumtartomány kontinuumnál nagyobb számosságú, akkor a szemléletes kép már elmarad. Ekkor az irányított gráf értelme az, hogy adva van egy P (pontoknak nevezett) és egy E (éleknek nevezett) halmaz, úgy hogy az E halmaz minden eleméhez egyértelműen hozzá van rendelve a P két különböző eleméből álló (a,b) rendezett pár (a kezdő és végpont).

szének ellentmond. Világos viszont, hogy végtelen, tranzitív irányítású teljes gráffal a formula kielégíthető.

A fenti Schütte-féle formula tehát kielégíthető, de csak végtelen individuumtartományon. Ez ad a formulának bizonyos fontosságot. Mi itt főként a gráfelmélettel való rokonság megvilágítására említettük.[11]

4. Redukciós tételek

Formuláink egyelőre számos különböző elemből állnak; $\forall$-kvantorok és $\exists$-kvantorok, amelyek tetszésszerint váltogathatják egymást; logikai és matematikai függvényváltozók, az utóbbiak tetszésszerint egy másbaskatulyázva, amint különösen az $\mathfrak{F}'$ formula mutat is rá példát. Mindkétféle függvények változóiként szerepelhetnek kötött és szabadváltozók egyaránt; emellett az „=" reláció határozott értelemben, tehát nem mint meghatározandó ismeretlen; ezek azok az elemek, amelyekből egy formula felépülhet. Szükséges ezek fölött bizonyos áttekintést nyernünk. Hasonló „azonos átalakításokkal" mint amilyen a fönti Schütte-féle formula két alakja közt van minden formula olyan alakra hozható, amelynek az elején vannak az összes kvantorok és az egész formulára vonatkoznak. Az ilyen formulákat *prenex*nek nevezzük. A formula elején álló kvantorok sorozatát *prefixum*nak, az utána következő kvantormentes formulát pedig a formula *mag*jának nevezzük.

Ennél tovább egyszerű formula-átalakítással nem juthatunk, csak (kielégíthetőség tekintetében) ekvivalens formulák szerkesztésével. Ezzel viszont azonnal kiküszöbölhetjük pl. az $\exists$-kvantorokat egy formulából. Tekintsünk például egy

$$\mathfrak{A} = \exists x \forall y z \exists t \forall v \exists w \mathbf{M}(x, y, z, t, v, w)$$

[11] Mivel a formulát semmilyen véges struktúra nem elégítheti ki, így mindegyiknek ki kell elégítenie a formula tagadását, ami például az

$$\exists x \forall y \exists z [(\overline{F(x, x)} \wedge F(x, y)) \Longrightarrow (F(y, z) \wedge \overline{F(x, z)})]$$

alakra hozható. Válasszunk struktúrának egy véges hurokmentes irányított teljes gráfot (tehát amelyben minden szögpontot az összes többivel összeköt egy irányított él, de csak egy), $F(x, y)$ jelentse most azt, hogy az irányítás y-ból x-be mutat. Ekkor $\overline{F(x, x)}$ minden x szögpontra igaz. A formula teljesülése így olyan x_0 pont létezését jelenti, amelyre ha egy y ponttal $F(x_0, y) = \uparrow$ tehát y-ból mutat él x_0-ba, (és így irányítás mentén haladva közvetlenül nem juthatunk x_0-ból y-ba), akkor van olyan z pont, amelyből egyrészt él mutat y-ba, másrészt x_0 nem mutat él, tehát x_0-ből mutat él z-be, onnan pedig y-ba. Így megállapításunkból az következik, hogy minden véges irányított teljes gráfban van olyan szögpont, amelyből bármely szögpont elérhető vagy egy vagy két él mentén irányítás szerint haladva. Lényegében ez volt az 1954. évi Kürschák-verseny 3. feladata.

alakú formulát. Az $\mathbf{M}$ magkifejezés közelebbi szerkezete most nem lényeges számunkra. Ha $\mathfrak{A}$ kielégíthető, akkor az $\exists x$ kvantor egy alkalmas ξ individuum létezését jelenti, amelyet x helyébe téve a többi változók választhatók úgy, hogy a formula igaz legyen. Ha x-et igy megválasztottuk, és a függvényeket is alkalmasan, akkor tetszésszerinti y és z individuumokhoz van legalább egy olyan individuum, amit t helyébe írva a formula igaz lesz. Ha több van, válasszunk ki minden egyes y, z párhoz egyet. Ezzel egy $\vartheta(y, z)$ matematikai függvényt definiáltunk. Ha végül még egy v individuumot is választunk tetszésszerint és minden egyes y, z, v hármashoz kiválasztunk egyet-egyet a w-ként megfelelő individuumok közül, akkor olyan $\omega(y, z, v)$ matematikai függvényt kapunk, amelylyel igaz lesz az

$$\mathfrak{A}^* = \forall y z v \mathbf{M}^*(\xi, y, z, \vartheta(y, z), v, \omega(y, z, v))$$

formula, a *-gal azt jelölve, hogy az $\mathbf{M}$-ben szereplő függvényváltozókat egy $\mathfrak{A}$-t kielégítő struktúra konkrét függvényeivel helyettesítettük. Egy ilyen struktúrát a $\vartheta(y, z)$ és $\omega(y, z, v)$ matematikai függvényekkel kiegészítve tehát a

$$\mathfrak{B} = \forall y z v \mathbf{M}(x, y, z, t(y, z), v, w(y, z, v))$$

formulát is kielégítő struktúrát kapunk és megfordítva, ha egy struktúra $\mathfrak{B}$-t kielégíti, akkor az x-ként megfelelő individuum, illetőleg a t és w-ként választott matematikai függvények megfelelő értékei olyan individuumok, amelyekre $\mathfrak{A}$ igaz, tehát a $\mathfrak{B}$-t kielégítő struktúra kielégíti $\mathfrak{A}$-t is. Hasonló eljárás minden formulára alkalmazható, tehát

I. TÉTEL. *Minden formula ekvivalens egy olyannal, amelyben csak $\forall$-kvantorok szerepelnek.* Minden egyes $\exists$-kvantort egy-egy matematikai függvénnyel helyettesíthetünk, amely azon $\forall$-kvantorok változóitól függ, melyek hatásköre kiterjed a kérdéses $\exists$-kvantorra.

Mivel a matematikai függvények bonyolultan egymásba lehetnek helyettesítve, (mint az $\mathfrak{F}$-formula is mutatta) igy hasznosabbnak látszanék egy ellenkező irányú tétel. Az előbbi gondolatmenetet nem lehet egyszerűen megfordítani ilyen tétel bizonyítása céljából, mégis elég egyszerűen ki lehet küszöbölni a matematikai függvényeket is. Vegyük példának az

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(F; f, g) = \exists x \forall y \exists z (F(f(x, g(y, z)), g(f(x, y), z)) \Rightarrow \\ \Rightarrow F(f(x, y), g(y, z)))$$

formulát. Tegyük fel, hogy ezt kielégíti egy struktúra, ha F helyébe valamely $\Phi(x, y)$ logikai függvényt, f és g helyébe pedig

$\varphi(x, y)$ és $\gamma(x, y)$ matematikai függvényeket helyettesítünk. Röviden ezt így fogjuk jelölni: $\mathfrak{A}$-t kielégíti az $S(\Phi; \varphi, \gamma)$ struktúra (a függvényeket ugyanabban a sorrendben soroltuk fel, miut $\mathfrak{A}$-ban a függvényváltozókat, amelyek helyébe helyettesítendők). Ekkor az $u = \varphi(x, y)$ matematikai függvény egy relációt jelent x, y és u közt:

$$\Psi(x, y, u) = \begin{cases} \uparrow, \text{ ha } u = \varphi(x, y) \\ \text{különben } \downarrow. \end{cases}$$

Ezek után a formulában szereplő $f(x, y)$ és $f(x, g(y, z))$ helyébe új u és v változókat írhatunk és azt írjuk fel, hogy ha ezek a megfelelő elemekkel a Ψ relációban vannak, akkor az $\mathfrak{A}$-ból e helyettesítéssel keletkező formula igaz:

$$\exists x \forall y \exists z \forall u v \{(\Psi(x, y, u) \wedge \Psi(x, \gamma(y, z), v)) \Rightarrow \\ \Rightarrow [\Phi(v, \gamma(u, z)) \Rightarrow \Phi(u, \gamma(y, z))]\}.$$

Ezen kívül formalizálni kell a φ függvény létezését, amit az $\mathfrak{A}$ formula kielégíthető volta magában foglal, hiszen különben az új formulát Ψ helyett az a függvény is kielégíti, amely minden helyen hamis, függetlenül attól, hogy az új formulát milyen formulából konstruáltuk. Ha még a függvények helyett újra függvényváltozót írunk, akkor a következő formuláról állítjuk, hogy ekvivalens $\mathfrak{A}$-val:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(F, H; g) = \exists x \forall y \exists z \forall u v \{(H(x, y, u) \wedge H(x, g(y, z), v)) \Rightarrow \\ \Rightarrow [F(v, g(u, z)) \Rightarrow F(u, g(y, z))]\} \wedge \forall x y \exists z H(x, y, z).$$

Valóban az $\mathfrak{A}$-t kielégítő S struktúrából konstruált $S'(\Phi, \Psi; \gamma)$ struktúra kielégíti a $\mathfrak{B}$ formulát. Ha viszont egy $S_1(\Phi_1, \Psi_1; \gamma_1)$ kielégíti a $\mathfrak{B}$ formulát, akkor az I. tétel bizonyításának gondolatmenetéhez hasonlóan szerkeszthető a $\mathfrak{B}$ formula utolsó részéhez olyan $z = \varphi_1(x, y)$ matematikaifüggvény, amelyre

$$\Psi_1(x, y, \varphi_1(x, y)) = \uparrow$$

minden x, y individuumpárra. Mivel $\mathfrak{B}$ minden u-ra és v-re igaz az S_1 struktúrán, így $u = \varphi_1(x, y)$, $v = \varphi_1(x, \gamma_1(y, z))$ választás mellett is. Mivel ezekre az első $\Rightarrow$-művelet (következtetés) feltétele igaz, igaznak kell lennie a következménynek is, ami éppen azt jelenti, hogy az $\mathfrak{A}$ formulát kielégíti az S_1-ből keletkezett $S_1'(\Phi_1; \varphi_1, \gamma_1)$ struktúra.

Ilyen eljárással természetesen kiküszöbölhető $g(x, y)$ is és kiküszöbölhetők a matematikai függvények bármely formulából. Könnyű belátni, hogy a nulla-változós matematikai függvények, vagyis a szabad változók is kiküszöbölhetők ezen az úton. (A Ψ-

nek megfelelően ekkor egyváltozós logikai függvény lép fel.) A szabad változót nem tartalmazó formulákat *zárt* formulának szokás nevezni. Így a következő eredményre jutottunk:

II. TÉTEL. *Minden formula ekvivalens egy olyan zárt formulával, amelyben nincsenek matematikai függvények.*

Figyeljük meg, hogy a kiküszöbölés során csak az utolsó formularészben lépett fel új ∃-kvantor és annak hatáskörében már nincs ∀-kvantor (egyáltalán nincs kvantor). Több függvény esetén is csupa ilyen ∃-kvantor keletkezik csak. Így az I. és II. tétel kombinálása élesebb eredményt is ad: ha először minden ∃-kvantort kiküszöbölünk, azután küszöböljük ki a matematikai függvényeket, akkor csak olyan ∃-kvantorok keletkeznek, amelyek hatáskörében nincs ∀-kvantor. Ez a tulajdonság prenex alakra hozásnál is megtartható. Így érvényes a következő

III. TÉTEL. *Minden formula ekvivalens egy olyan prenex zárt formulával, amelyben nem fordul elő matematikai függvény, és amelynek prefixuma*

$$\forall x_1 \ldots x_m \exists x_{m+1} \ldots x_n$$

alakú.

Ezzel már alapvető jelentőségű eredményhez jutottunk, amelyet először (más úton) SKOLEM bizonyított be, és amely még azzal is kiegészíthető, hogy feltehető (ennek az igazolására itt nem térünk ki), hogy a formulában csak logikai függvényváltozók szerepelnek, a határozott értelmű „=“-reláció nem. Az e feltételeknek megfelelő formulákat *Skolem-típusú*aknak fogjuk nevezni. E redukciós tétel nagy jelentősége a prefixum egyszerű szerkezetében rejlik. Ezzel kiinduló pontjává vált a mélyebb redukciós tételek hosszú sorának.

A „mélyebb“ jelző indokolható azzal, hogy az eddigi eredményeket az individuumtartomány változtatása nélkül nyertük, a további redukciós tételek azonban már éppen az individuumtartomány gyökeres átalakításán alapulnak. Ezek közül az átalakítások közül egyet fogunk még vázolni.

Eldöntési eljárás ismeretes az olyan formulákra, amelyekben csak egyváltozós logikai függvények vannak, továbbá az olyanokra, amelyek prefixumában csak egyféle kvantor szerepel, de még az olyanokra is, amelyek prefixumában csak egy ∀-kvantor van, vagy kettő és azok szomszédosak. Így a redukció irányai is az ∀-kvantorok számának csökkentése, az ∃-kvantorok számának csökkentése, a logikai függvények változói számának csökkentése, a többváltozós függvények, sőt az összes függvények számának csökken-

tése volt, és sikerült is mindegyik irányban nagymérvű redukciót elérni, sőt több felsorolt irányban egyidejűleg is lehet redukciót elérni.

A függvények változóinak számát csökkenthetjük úgy, hogy az individuumokból rendezett sorozatokat, „vektorokat" képezünk. Egy $F(x_1, \ldots, x_r)$ függvény az $x = (x_1, \ldots, x_r)$ vektornak már egyváltozós függvénye lesz. Így az eredeti formulából csak egyváltozós függvényeket tartalmazó formula lesz. Szükség lesz azonban kétváltozós relációkra az új struktúra jellemzéséhez.

Legyen tehát adva egy $\mathfrak{A}$ formula. Feltehetjük, hogy $\mathfrak{A}$ Skolem-típusú. Feltehetjük továbbá, hogy minden függvény annyi változós, ahány kvantorból áll a prefixum, mert egyrészt egy függvénynek nem kell valóban függenie minden változójától, másrészt nem változtat egy formula értelmén olyan kvantor előírása, amelynek a változója nem szerepel a formulában. Induljunk ki tehát egy

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_l) = \forall x_1 \ldots x_m \exists x_{m+1} \ldots x_n \mathbf{M}$$

alakú formulából, ahol $\mathbf{M}$ az n-változós $F_\lambda(a_1, \ldots, a_n)$, $(\lambda = 1, \ldots, l)$ logikai függvények különböző $F_\lambda(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ helyettesítési értékeiből logikai műveletekkel tevődik össze. Ezt így fogjuk szimbolizálni:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}[F_\lambda(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})].$$

Legyen $\mathfrak{A}$ kielégíthető valamely I individuumtartományon egy $S(I; \Phi_1, \ldots, \Phi_l)$ struktúrán. Ekkor vezessük be az I elemeiből képezett n-dimenziós vektorok (rendezett n-esek) halmazát: jelöljük ezt I^n-nel. Ha ezen a halmazon minden $\Phi_\lambda(a_1, \ldots, a_n)$ függvényt az $a = (a_1, \ldots, a_n)$ vektorra értelmezett $\Phi_\lambda(a)$ függvénnyel helyettesítünk, akkor ezeknek igen sok helyen vett értékei fognak szerepelni $\mathbf{M}$-ben, és mindezek helyébe egy-egy kvantorral lekötendő változó lép. Azonban azt is mondhatjuk, hogy a $\Phi_\lambda(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ függvény a kvantorok változóiból alkotott egyetlen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vektornak λ minden egyes értékére és minden egyes $i_1, \ldots, i_n$ sorozatra egy-egy újabb $\Psi_{\lambda i_1 \ldots i_n}(x)$ függvényét jelenti:

$$\Psi_{\lambda i_1 \ldots i_n}(x) = \Phi_\lambda(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}), \quad \text{ha} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in I^n.$$

Ekkor $\mathbf{M}$ az egyetlen változót és egyváltozós függvényeket tartalmazó

$$\mathbf{M}^*(x) = \mathbf{M}[\Psi_{\lambda i_1 \ldots i_n}(x)]$$

kifejezésbe megy át. Így a régi formula igen egyszerűvé válik, viszont probléma már annak kifejezése is, hogy x egyes komponenseinek tetszésszerinti választása mellett a többi megválasztható alkalmasan, ezen kívül jellemezni kell, hogy hogyan keletkezett az

új individuumtartomány a régiből, továbbá az egy λ-hoz tartozó $\Psi_{\lambda i_1 \dots i_n}$-ek közti kapcsolatot. Ehhez egyrészt az új individuumtartomány kibővítésére, másrészt új logikai függvényekre lesz szükség. Először is vegyük hozzá az m-dimenziós vektorok I^m halmazát I^n-hez, a kétféle vektorok jellemzésére pedig vezessük be a

$$\Gamma_k(x) = \begin{cases} \uparrow, \text{ ha } x \in I^k, \\ \text{különben } \downarrow, \end{cases} \qquad (k = m \text{ vagy } n)$$

függvényeket. Ekkor az eredeti formula így jellemezhető: Ha x tetszésszerinti m-dimenziós vektor, akkor van hozzá olyan n-dimenziós z vektor, amelynek első m komponense megegyezik x megfelelő komponenseivel, és amelyre $\mathbf{M}^*$ igaz. Ennek a kijelentésnek formalizálásához arra a relációra van szükségünk, hogy két vektor első m eleme megegyezik. A későbbiek kedvéért célszerű lesz külön az első, második, ..., m-edik komponensek megegyezésére egy-egy logikai függvényt bevezetni[12]:

$$\Delta_{ii}(x, y) = \begin{cases} \uparrow, \text{ ha } x = (x_1 \dots, x_k) \in I^k, y = (y_1, \dots, y_{k'}) \in I^{k'}, \\ (k, k' = m \text{ v. } n) \text{ és } x_i = y_i, \\ \text{különben } \downarrow, \end{cases}$$
$$(i = 1, \dots, m).$$

Ekkor a fenti állítás így formalizálható:[13]

$$(1) \qquad \forall x \exists z (\Gamma_m(x) \Rightarrow (\Gamma_n(z) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \Delta_{ii}(x, z) \right) \wedge (\wedge \mathbf{M}^*(z))).$$

A tovább felírandó formularészeknek most már azt kell majd biztosítaniok, hogy ha a belőlük összeteendő új formulát valamely S struktúra kielégíti, akkor ebből megkonstruálható legyen egy olyan S' struktúra, amely $\mathfrak{A}$-t kielégíti. Először is biztosítani kell m-dimenziós vektor létezését, vagyis olyan x individuumét, amelyre $\Gamma_m(x) = \uparrow$, mert különben (1) triviális módon lesz kielégíthető, úgy, hogy $\Gamma_m(x) = \downarrow$ minden x individuumra, függetlenül attól, hogy milyen formulából indultunk ki. Szét kell továbbá bontani tudni az (1) formula szerint minden m-dimenziós x vektorhoz

[12] Kettős indexet is a későbbiek kedvéért használunk.

[13] Az „$\wedge$"-sel, ill. „$\vee$"-gyal kapcsolt több egyező típusú részformula jelölésére alkalmazni fogjuk a Σ-jelhez hasonlóan az

$$\bigwedge_{i=1}^{r} \mathfrak{A}_i \; (= \mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathfrak{A}_r), \quad \text{ill.} \quad \bigvee_{i=1}^{r} \mathfrak{A}_i \; (= \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_r)$$

jelöléseket.

található n-dimenziós z vektort komponenseire, hogy azután ezek tetszésszerinti n-edosztályú ismétléses variációjából újra n-dimenziós vektort alkothassunk.

Ehhez célszerű lesz I-t is hozzávenni az új individuumtartományhoz. De még ekkor is a vektor szétbontása n számú $\exists$-kvantort összetevése pedig ugyanennyi $\forall$-kvantort kíván meg. Takarékoskodhatunk azonban a kvantorok számával, ha úgy tesszük össze a vektorokat, hogy egyenkint csatolunk a már meglevőkhöz még egy komponenst, és fordítva is minden vektort csak utolsó komponensére, és az ennek leválasztásával visszamaradó eggyel kevesebb dimenziós vektorra, a vektor „vetületére" bontjuk szét. Ehhez azonban az összes legfeljebb n-dimenziós vektorból kell képezni az új individuumtartományt, és minden $k \leqq n$ dimenziószámhoz be kell vezetni a megfelelő $\Gamma_k(x)$ függvényt a fenti Γ_m és Γ_n-hez hasonlóan. Szükségünk van továbbá általában a

$$\Delta_{ij}(x, y) = \begin{cases} \uparrow, \text{ ha } x = (x_1, \ldots, x_k) \in I^k, y = (y_1, \ldots, y_{k'}) \in I^{k'}, \\ \quad k \geqq i, k' \geqq j \text{ és } x_i = y_j, \\ \text{különben } \downarrow, \end{cases}$$

$$(i, j = 1, \ldots, n)$$

relációkra. Ekkor a vektor összetevése és szétbontása így formalizálható:

$$(2) \qquad \forall x y \exists z \left\{ \bigwedge_{k=1}^{n-1} \left[(\Gamma_k(x) \wedge \Gamma_1(y)) \Longrightarrow \right.\right.$$

$$\left.\left. \Longrightarrow \left(\Gamma_{k+1}(z) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{k} \Delta_{ii}(x, z) \right) \wedge \Delta_{1\,k+1}(y, z) \right) \right] \right\},$$

$$(3) \qquad \forall x \exists z \left\{ \bigwedge_{k=1}^{n-1} \left[\Gamma_{k+1}(x) \Longrightarrow \left(\Gamma_k(z) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{k} \Delta_{ii}(x, z) \right) \right) \right] \right\},$$

$$(4) \qquad \forall x \exists z \left\{ \bigwedge_{k=1}^{n-1} \left[\Gamma_{k+1}(x) \Longrightarrow (\Gamma_1(z) \wedge \Delta_{1\,k+1}(z, x)) \right] \right\}.$$

Szükséges még a Ψ-ket először is a teljes új individuumtartományon definiálni:

$$\Psi_\gamma i_1 \ldots i_n(x) = \begin{cases} \Phi_\lambda(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}), \text{ ha } x = (x_1, \ldots, x_k) \in I^k \\ \quad \text{és } i_1 \leqq k, \ldots, i_n \leqq k, \\ \text{különben } \downarrow; \end{cases}$$

és ezután az egy-egy λ-hoz tartozó különböző Ψ-k összefüggését kifejezni. Ez pl. így történhetik:

$$(5) \qquad \forall x y \left[\left(\bigwedge_{k=1}^{n} \Delta_{i_k k}(x, y) \right) \Longrightarrow (\Psi_{\lambda i_1 i_2 \ldots i_n}(x) \Longleftrightarrow \Psi_{\lambda 12 \ldots n}(y)) \right].$$

Szükséges a Δ_{ij}-k tranzitív tulajdonságát formalizálni, hiszen a $z=(z_1,\ldots,z_n)$ vektort lépésenként bontjuk összetevőire és ezekből lépésenként tesszük össze a $z'=(z_{i_1},\ldots,z_{i_n})$ vektorokat, s így csak számos közbeeső vektor közvetítésével derül ki, a

$$(6)\qquad \forall x y t \left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \bigwedge_{k=1}^{n} [(\Delta_{ij}(x,y) \wedge \Delta_{jk}(y,z)) \Rightarrow \Delta_{ik}(x,t)] \right\}$$

összefüggést ismételten felhasználva, hogy érvényes z' és z-re a

$$\bigwedge_{k=1}^{n} \Delta_{i_k k}(z,z')$$

formula.

A Δ_{ij}-függvények közül elhagyhatók pl. azok, amelyekre $i>j$, ilyenkor tekinthetjük $\Delta_{ij}(x,y)$-t másik jelölésnek $\Delta_{ji}(y,x)$ helyett. (Különben még e kettő ekvivalenciáját is formalizálni kellene.) Végül szükséges még azt is formalizálni, hogy bármely individuumra a Γ_k-k közül az egyik és csak az egyik lesz igaz:

$$(7)\qquad \forall x \left(\bigvee_{i=1}^{n} \Gamma_i(x) \right)$$

Az új formula az (1)-től (7)-ig terjedő formulák „és"-sel való összekapcsolása útján keletkezik, ha azokban $\Psi_{\lambda i_1 \ldots n}, \Gamma_k$ és Δ_{ij} helyébe rendre $U_{\lambda i_1 \ldots i_n}$, G_k és D_{ij} függvényváltozókat írunk.

Az elmondottak alapján nagyjából elképzelhető, hogyan történik az új és régi formula ekvivalenciájának szigorú bizonyítása; ezt nem részletezzük itt, inkább elemezzük kissé a nyert új formulát. Könnyen látható, hogy prenex alakra hozásnál „és"-sel kapcsolt formulák $\forall$-kvantorai azonosíthatók, pontosabban szólva[14]

$$(\forall x \mathfrak{A}(x)) \wedge (\forall x \mathfrak{B}(x)) = \forall x (\mathfrak{A}(x) \wedge \mathfrak{B}(x)).$$

Ezzel szemben az $\exists$-kvantorok nem egyesíthetők, hiszen különböző tulajdonságú individuumok létezését követelik meg és mindezekkel nem is rendelkezhetik ugyanaz az elem. Az új formula így prenex alakra hozható pl.

$$\forall x y \exists z_1 z_2 z_3 z_4 \forall t, \quad \text{vagy} \quad \forall x y t \exists z_1 z_2 z_3 z_4$$

alakú prefixummal. Az $\forall$-kvantorok száma itt már nem lehet csökkenthető, mert van olyan Church-értelemben gépies eljárás, amelylyel minden olyan formuláról, amely csak két szomszédos $\forall$-kvan-

[14] Az egyenlőség azt fejezi ki, hogy a két formula logikai értéke egyenlő bármely $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ formula esetén.

tort tartalmaz, eldönthető, hogy kielégíthető-e vagy sem, viszont CHURCH említett tétele szerint az általános eldöntésproblémára nincsen. Az ∃-kvantorok számának csökkentése ilyen elvi akadályba nem ütközik, sőt gyakorlati akadályokba sem. Figyeljük meg, hogy az I. tétel értelmében az (1), (3), (4) formulák ∃-kvantorainak egy-egy változós matematikai függvény felel meg, csupán a (2) formulánál adódik egy $\omega(x, y)$ kétváltozós matematikai függvény, de megnézve a „$\Rightarrow$" művelet feltételi részét, látható, hogy ennek a matematikai függvénynek az értéke is csak akkor lényeges, ha $x \notin I^n$, $y \in I$. Így könnyen egyesíthetjük ezt a négy matematikai függvényt például a következő táblázattal leírt egyetlen $\chi(x, y)$ kétváltozós matematikai függvénybe:

		$y \in$							
$\chi(x, y)$		I	I^2	I^3	.....	I^m	.....	I^{n-1}	I^n
$x \in$	I	$\omega(x, y)$	$\zeta_1(x)$	$\zeta_1(x)$	.....	$\zeta_1(x)$	.....	$\zeta_1(x)$	$\zeta_1(x)$
	I^2	$\omega(x, y)$	$\zeta_2(x)$						
	I^3	$\omega(x, y)$		$\zeta_2(x)$					
		⋮			⋱				
	I^m	$\omega(x, y)$	$\zeta_2(x)$			$\zeta_2(x)$			
		⋮					⋱		
	I^{n-1}	$\omega(x, y)$						$\zeta_2(x)$	
	I^n								$\zeta_2(x)$

Az üresen hagyott helyeken lényegtelen $\chi(x, y)$ jelentése, jelentsen pl. minden ilyen helyen x-et. Ezt a függvényt kellően jellemzi az (1)—(4) formulákból létrejövő következő formula:

$$\forall xy\exists z\Big\{\Big[\Big(\Gamma_m(x)\wedge\Gamma_2(y)\Big)\Rightarrow\Big(\Gamma_n(z)\wedge\Big(\bigwedge_{i=1}^{m}\Delta_{ii}(x,z)\Big)\wedge\mathbf{M}^*(z)\Big)\Big]\wedge$$

$$\wedge\Big(\bigwedge_{k=1}^{n-1}\Big[\Big((\Gamma_k(x)\wedge\Gamma_1(y))\Rightarrow(\Gamma_{k+1}(z)\wedge\Big(\bigwedge_{i=1}^{k}\Delta_{ii}(x,z)\Big)\wedge\Delta_{1k+1}(y,z)\Big)\Big)\wedge$$

(8)
$$\wedge\Big(\Gamma_1(x)\wedge\Gamma_{k+1}(y)\Rightarrow\Big(\Gamma_k(z)\wedge\Big(\bigwedge_{i=1}^{k}\Delta_{ii}(y,z)\Big)\Big)\Big)\wedge$$

$$\wedge(\Gamma_{k+1}(x)\wedge\Gamma_{k+1}(y))\Rightarrow(\Gamma_1(z)\wedge\Delta_{1k+1}(z,x))\Big]\Big\}.$$

Az (5)—(8) formulákban írva függvényváltozókat a konkrét függvények helyett és e formulákat „∧"-sel összekapcsolva ismét $\mathfrak{A}$-val ekvivalens formulát kapunk. Ezt megfelelő módon hozva prenex alakra nyerjük a következő tételt:

IV. TÉTEL. *Minden formula ekvivalens egy olyan* (matematikai függvényt nem tartalmazó) *zárt formulával, amelyben nem szerepelnek 2-nél több változós logikai függvények, és amely prenex alakra hozható*

$$\forall xy\exists z\forall t \quad vagy \quad \forall xyt\exists z$$

alakú prefixummal.

Felmerül még a kétváltozós logikai függvények számának korlátozása. A függvények közül csak a Δ_{ij}-k kétváltozósak és ezek száma csak az $\mathfrak{A}$ formula kvantorainak számától függ ($\frac{n(n+1)}{2}$, ha n kvantor van). Ez azonban azt jelenti, hogy ha a IV. tétel szerinti formulára mégegyszer alkalmazzuk a hozzá vezető eljárást, akkor olyan formulához jutunk, amelyben már a kétváltozós függvények száma is korlátozott, (legfeljebb 10). Vajon nem lehet-e ezeket is egy függvénybe egyesíteni? Itt minden esetre sokkal nehezebb a feladat, már csak azért is, mert itt csupa kétváltozós függvényt kellene egyesíteni. Nem is sikerült célt érni a fent vázolt bizonyítás kisebb módosításai útján, de újabb ötletek segítségével bebizonyítható az

V. TÉTEL. *Minden formula ekvivalens egy olyan zárt formulával, amelyben egyetlen kétváltozós matematikai függvényen kívül csak egyváltozósak szerepelnek és amely prenex alakra hozható*

$$\forall xy\exists z\forall t \quad vagy \quad \forall xyt\exists z$$

alakú prefixummal.

A 2. paragrafusban használt gráfelméleti átfogalmazás itt érdekes átfogalmazáshoz vezet, ha a kétváltozós függvényt ismét pontok összekötésével szemléltetjük, az egyváltozósokat pedig színekkel, amelyekkel a szögpontok vannak jelölve, esetleg egy pont több színnel is. (Gondoljunk pl. egy túristajelzésektől tarkálló fára.) Ekkor azt nyerjük, hogy az eldöntésprobléma ekvivalens egy következő jellegű kérdéssel: ha egy gráftól, melynek szögpontjai színezve lehetnek, mégpedig egyszerre több színnel is, azt követeljük, hogy bármely három szögpontjához található legyen egy negyedik úgy, hogy ezek bizonyos (a formula által megszabott) színezési és összekötési feltételeknek tegyenek eleget; akkor vajon van-e ilyen gráf.

Az egyváltozós függvények száma már nem lehet szintén korlátozható, legfeljebb kvantorok terhére, mert különben összesen korlátos számú jel állna rendelkezésre formulák készítésére és nem nehéz belátni, hogy korlátos számú jelből csak véges számú lényegesen különböző formula készíthető, azok eldöntésproblémája pedig nem lehetne ekvivalens az általános problémával. Kiküszöbölhetők azonban az egyváltozós függvények, ha valamelyik féle kvantorok számát nem korlátozzuk.

Az olyan prenex formulák, amelyekben az összes $\exists$-kvantorok megelőzik az $\forall$-kvantorokat, (éppen fordítva, mint a Skolem-típusú formulákban), szintén azon típusok közé tartoznak, amelyekre az eldöntésprobléma meg van oldva. Így a redukció további iránya az $\exists$-kvantor előbbrehozása volt. Megmutatható, hogy

VI. TÉTEL. *Minden formula ekvivalens egy*

$$\exists x \forall y \exists z \forall u v \quad \text{vagy} \quad \forall y \exists x z \forall u v$$

prefixumú és egyváltozós logikai függvényeken kívül csak korlátos számú kétváltozósat tartalmazó prenex zárt formulával is.

Az utoljára említett eredmény élesítése úgy, hogy csak egyetlen kétváltozós reláció szerepeljen benne, szintén nyitott kérdés.

A legfeljebb négykvantoros prenex zárt formulák közül meg van oldva az eldöntésprobléma mindazokra, amelyekben az $\exists$-kvantorok (ha előfordulnak) megelőznek minden $\forall$-kvantort (ha ilyen egyáltalán van); sőt minden ilyen formulához megadható egy-egy olyan N szám, hogy ha a formula megoldható, akkor már egy N elemű individuumtartományon is megoldható. Mindez áll az egy $\forall$-kvantort vagy két szomszédos $\forall$-kvantort tartalmazó formulákra is. A IV. tételben szereplő prefixumú formulák közt viszont már minden formulához található vele ekvivalens. Így a háromkvantoros formulák közül csak a

$$\forall x \exists y \forall z$$

prefixumú formulák maradnak fenn, a négykvantorosok közül pedig a

$$\forall x \exists y \forall z u, \quad \forall x \exists y \forall z \exists u, \quad \forall x \exists y z \forall u, \quad \exists x \forall y \exists z \forall u$$

prefixumúak. Ezekről lényegében semmit sem tudunk mondani, sőt még tetszésszerinti n-re a

$$\forall x \exists y \forall z_1 \ldots z_n$$

prefixumú formulákról sem. A háromkvantoros formulatípusra SCHÜTTE 2. paragrafusban tárgyalt példája mutatja, hogy ide már olyan kielégíthető formulák is tartoznak, amelyek semmilyen véges individuumtartományon nem kielégíthetők. Még inkább igaz ez a többi felsorolt formulatípusra. E formulatípusokra sem megoldási eljárás nem ismeretes, sem nem sikerült rájuk az általános problémát visszavezetni. Így érdekes és jelentős feladatnak látszik eldönteni, hogy mi ezeknek a formulatípusoknak a helyzete az eldöntésprobléma szempontjából.

Érdekes ezzel kapcsolatban megjegyezni azt, hogy ha függvényváltozók mellett szerepelhet a formulákban rögzített értelemben az individuumok megegyezését kifejező „=" reláció is, akkor bebizonyítható, hogy minden formula ekvivalens egy

$$\forall x \exists y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 \forall z$$

prefixumú formulával is.

О РЕДУКЦИИ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Работа прежде всего является обзорной статьей о проблеме, указанной в заголовке, причем она почерчивает простые доказательства некоторых раньших результатов и заявляет следующий новый результат.

С точки зрения удовлетворяемости каждая формула эквивалентна формулой формы

$$\forall x_1 x_2 \exists x_3 \mathbf{M}_1 \vee \forall y_1 y_2 y_3 \mathbf{M}_2,$$

где ядерные выражения $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ уже не содержают кванторы и, кроме одной функции двух переменных, в них фигурируются только функции одной переменной.

ON THE REDUCTION THEORY OF THE DECISION PROBLEM OF SYMBOLIC LOGIC

The paper aquints the reader with the problem in title. After sketching simple proofs of former results, the following result is announeed: *Any given first order formula is equivalent (as to satisfiability) to one of the form*

$$\forall x_1 x_2 \exists x_3 \mathbf{M}_1 \vee \forall y_1 y_2 y_3 \mathbf{M}_2$$

where the formulae $\mathbf{M}_1$ *and* $\mathbf{M}_2$ *do not contain any more quantifiers, and only a single binary predicate occurs in them besides mononary ones.*

Egy végtelen szorzatokra vonatkozó Fejér-féle problémáról

Írta: Mikolás Miklós (Budapest)

Az ún. Wallis-féle formula

$$\frac{2^2}{1.3}\cdot\frac{4^2}{3.5}\cdot\frac{6^2}{5.7}\cdots=\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

hol minden tört számlálójában a nevező tényezőinek aritmetikai közepe áll, kétségkívül egyike az analízis leggyakrabban használt szorzatképleteinek;[1] nevezetes, hogy (1)-ből π kizárólag természetes számokkal fejezhető ki. Fejér Lipót vetette fel olyan általános végtelenszorzat-típusok keresésének problémáját, melyek a Wallis-féle szorzathoz hasonló felépítésűek, azt speciális esetként magukban foglalják, továbbá értékük *zárt alakban előállítható* az elemi függvények értékei segítségével.

Egy dolgozatomban e kérdéshez kapcsolódva a

$$P=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+\nu}}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{a_n a_{n+1}\cdots a_{n+\nu}} \qquad (\nu\geqq 1) \tag{2}$$

alakú szorzatokat vizsgáltam azzal a megszorítással, hogy $\{a_n\}$ pozitív számokból álló, monoton növekedő sorozat; ez esetben — mint többek között kimutattam — P akkor és csak akkor konvergens, ha az

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_{n+\nu}}{a_n}-1\right)^2$$

sor összetartó.[2]

Most tetszőleges komplex-tagú aritmetikai haladványokból képezett, (2)-höz hasonló végtelen szorzatok zárt alakban való elő-

[1] Legegyszerűbb közvetlen bizonyítását illetően l. pl. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei (1951), I. kötet, 402—404. o.

[2] Vö. Mikolás M.: Sur un produit infini, Acta Sci. Math. (Szeged), XII. (Fejér—Riesz-jub. kötet, 1950), A 68—72. o.

állításának problémájával fogunk foglalkozni; előrebocsátjuk a gamma-függvény elméletének néhány tényét, melyekre szükségünk lesz.

$\Gamma(z)$-nek eredeti EULER-féle definíciója:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty u^{z-1}e^u du, \tag{3}$$

míg GAUSS a

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{4}$$

értelmezést használta fel. Mivel az utóbbi határérték zérus és a negatív egész számok kivételével z-nek bármely komplex értékére létezik, (4)-ből közvetlenül kiolvasható, hogy $\Gamma(z)$ meromorf függvény, melynek összes szinguláris helyei a $z=0,-1,-2,\ldots$ helyek, s valamennyi elsőrendű pólus. $\Gamma(z)^{-1}$ nyilván mindenütt reguláris, tehát transzcendens egész függvény, mely az említett helyeken és csak ezeken eltűnik. — Megjegyezzük, hogy a (3) alatti integrálnak csupán olyan z-értékek esetén van értelme, melyeknek valós része pozitív [$\Re(z)>0$], megadható azonban az egész z-síkon érvényes integrál-előállítás is.[3]

A gamma-függvény alaptulajdonságait az ún. differencia-egyenlet, kiegészítési és szorzási formula fejezi ki:[4]

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \qquad (z\neq 0,-1,\ldots), \tag{5}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad (z\neq 0,\pm 1,\pm 2,\ldots), \tag{6}$$

$$\prod_{\mu=0}^{\nu-1}\Gamma\left(z+\frac{\mu}{\nu}\right)=(2\pi)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu^{\frac{1}{2}-\nu z}\Gamma(\nu z) \qquad (\nu z\neq 0,-1,\ldots); \tag{7}$$

[3] Ilyen az ún. HANKEL-féle komplex vonalintegrál-formula. — Valós integrációs útra vonatkozik és minden nem-egész z-re fennáll a

$$\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}\int_0^1 e^{\cos \pi u}\cos(\pi u z+\sin \pi u)du+\int_1^\infty u^{z-1}e^{-u}du$$

képlet, valamint egy hasonló jellegű előállítás $\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$-re. — Alkalmazásokkal és rokon eredményekkel együtt l. MIKOLÁS M.: Über die Beziehung zwischen der Gammafunktion und den trigonometrischen Funktionen, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **4** (1953), 145—159. o.; továbbá: Zur Theorie der Gammafunktion, der Riemanschen Zetafunktion und verwandter Funktionen, I. (u. ott megjelenés alatt).

[4] Vö. pl. SZÁSZ PÁL i. m., II. kötet.

ezek alapján pl.

$$\Gamma(m) = (m-1)! \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{9}$$

Mint (8)-ból kitűnik, $\Gamma(z)$ a faktoriális-számok általánosítása a változó tetszőleges nem-egész értékei esetére; ebben és az integrálszámítással való szerteágazó kapcsolatában rejlik nagy jelentősége.

Legyen mármost $d \neq 0$ megadott komplex szám; tekintsük a z komplex változó valamely értékénél a $z_\mu = z + \mu d$ $(\mu = 0, 1, \ldots, \nu-1)$ véges számtani haladványt s képezzük e számok $\mathfrak{A}_\nu(z) = \frac{1}{\nu}(z_0 + z_1 + \cdots + z_{\nu-1})$ aritmetikai, valamint $\mathfrak{G}_\nu(z) = (z_0 z_1 \cdots z_{\nu-1})^{\frac{1}{\nu}}$ geometriai közepét.[5] Vizsgáljuk rögzített egész $\nu \geqq 2$ és adott komplex $A \neq 0, D \neq 0$ mellett a

$$Q = \prod_{\substack{z = A + nD \\ n = 0, 1, 2, \ldots}} \left(\frac{\mathfrak{A}_\nu(z)}{\mathfrak{G}_\nu(z)}\right)^\nu = \prod_{\substack{z = A + nD \\ n = 0, 1, 2, \ldots}} \frac{\left(z + \frac{\nu-1}{2} d\right)^\nu}{z(z+d)\cdots(z+\overline{\nu-1}\,d)} \tag{10}$$

végtelen szorzatot, hol tehát z egy másik (de végtelen) számtani haladvány elemein fut végig; Q nyilván úgy fogható fel, mint a WALLIS-féle szorzat általánosítása. — Írjuk rövidség kedvéért: $\alpha = \frac{A}{D}$, $\delta = \frac{d}{D}$, $h = \frac{\nu-1}{2}$.

1. tétel. A (10) *alatti szorzat akkor és csak akkor konvergens, ha az* $\alpha + h\delta, \alpha + \mu\delta$ $(\mu = 0, 1, \ldots, \nu-1)$ *számok között* 0, *vagy negatív egész szám nem fordul elő*;[6] *ez esetben* Q *értéke mindig kifejezhető a gamma-függvény felhasználásával zárt alakban, ti.*

$$Q = \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\delta)\cdots\Gamma(\alpha+\overline{\nu-1}\,\delta)\cdot\Gamma(\alpha+h\delta)^{-\nu}. \tag{11}$$

Speciálisan: $\delta = 1$ *mellett* $\nu = 2$ *esetén*

$$Q = \alpha\left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\right)^2, \tag{12}$$

[5] A hatványnak, ill. ν-edik gyöknek bármelyik értéke vehető.
[6] E korlátozás szükséges volta már (10) képzésmódja alapján nyilvánvaló.

míg bármely 2-nél nagyobb ν-re

$$Q=\frac{(\alpha+\nu-2)(\alpha+\nu-3)^2\cdots(\alpha+[h])^{2h-[h]}}{\alpha(\alpha+1)^2\cdots(\alpha+[h]-1)^{[h]}}\left(\frac{\Gamma(\alpha+[h])}{\Gamma(\alpha+h)}\right)^{\nu};^{7} \quad (13)$$

$\delta=\frac{1}{\nu}$ *mellett*

$$Q=(2\pi)^h\nu^{\frac{1}{2}-\nu\alpha}\frac{\Gamma(\nu\alpha)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{h}{\nu}\right)^{\nu}}; \quad (14)$$

$\alpha+h\delta=1$ *esetén pedig* $\Theta_\mu=1-(\alpha+\mu\delta)$ *jelölés mellett*

$$Q=\prod_{\mu=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]-1}\frac{\pi\Theta_\mu}{\sin\pi\Theta_\mu}, \quad (15)$$

feltéve, hogy egyik Θ_μ *sem egész szám.*

Bizonyítás. 1° Ha az $\alpha+h\delta$, $\alpha+\mu\delta$ $(\mu=0,1,\ldots,\nu-1)$ számok valamelyike 0, vagy negatív egész szám, akkor Q-nak N-indexű részletszorzatában:

$$Q_N=\prod_{n=0}^{N}\frac{(A+nD+hd)^{\nu}}{(A+nD)(A+nD+d)\cdots(A+nD+\overline{\nu-1}d)}=$$

$$=\prod_{n=0}^{N}\frac{(\alpha+h\delta+n)^{\nu}}{(\alpha+n)(\alpha+\delta+n)\cdots(\alpha+\overline{\nu-1}\delta+n)}$$

elegendő nagy N esetén a számláló, ill. a nevező eltűnik; így Q_N egy bizonyos indextől kezdve 0, vagy értelmét veszti.

Különben írhatjuk:

$$Q_N=$$

$$=\frac{\{(\alpha+h\delta)(\alpha+h\delta+1)\cdots(\alpha+h\delta+N)\}^{\nu}}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+N)\cdot(\alpha+\delta)(\alpha+\delta+1)\cdots(\alpha+\delta+N)\cdots(\alpha+\overline{\nu-1}\delta)\cdots(\alpha+\overline{\nu-1}\delta+N)}=$$

$$=\left(\frac{(\alpha+h\delta)(\alpha+h\delta+1)\cdots(\alpha+h\delta+N)}{N!\,N^{\alpha+h\delta}}\right)^{\nu}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{N!\,N^{\alpha+\mu\delta}}{(\alpha+\mu\delta)(\alpha+\mu\delta+1)\cdots(\alpha+\mu\delta+N)}.$$

[7] Ha ν páratlan, tehát $[h]=h$, a gamma-értékeket tartalmazó utolsó faktor nyilván elhagyható.

Itt (4) alapján mindegyik törtnek van limesze, midőn $N\to\infty$, továbbá

$$Q=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+h\delta+n)^{\nu}}{(\alpha+n)(\alpha+\delta+n)\cdots(\alpha+\overline{\nu-1}\delta+n)}= \\ =\Gamma(\alpha+h\delta)^{-\nu}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}\Gamma(\alpha+\mu\delta), \tag{16}$$

amint állítottuk.

2° Legyen $\delta=1$. Ha $\nu=2$, akkor (16)-ból (5)-re tekintettel adódik:

$$Q=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\left(n+\alpha+\frac{1}{2}\right)^2}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}= \\ =\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)=\alpha\left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\right)^2. \tag{17}$$

Ha viszont $\nu>2$, akkor az (5) ismételt alkalmazásával előálló

$$\Gamma(z)=(z-1)(z-2)\cdots(z-\lambda)\Gamma(z-\lambda)\quad(\lambda=1,2,\ldots) \tag{18}$$

relációt használjuk fel; az így nyerhető

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\alpha+\nu-1)=(\alpha+\nu-2)(\alpha+\nu-3)\cdots(\alpha+[h])\Gamma(\alpha+[h])\\
&\Gamma(\alpha+\nu-2)=\quad(\alpha+\nu-3)\cdots(\alpha+[h])\Gamma(\alpha+[h])\\
&\text{---}\\
&\Gamma(\alpha+[h]+1)=\quad(\alpha+[h])\Gamma(\alpha+[h])\\
&\Gamma(a+[h])=\quad\Gamma(\alpha+[h])\\
&\Gamma(\alpha+[h]-1=\quad(\alpha+[h]-1)^{-1}\Gamma(\alpha+[h])\\
&\text{---}\\
&\Gamma(\alpha+1)=\quad\{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+[h]-1)\}^{-1}\Gamma(\alpha+[h])\\
&\Gamma(\alpha)=\quad\{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+[h]-1)\}^{-1}\Gamma(\alpha+[h])
\end{aligned}$$

egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozva s a baloldali gamma-értékek szorzatára kapott kifejezést (16)-ba helyettesítve, valóban a

$$Q=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\alpha+h)^{\nu}}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)\cdots(n+\alpha+\overline{\nu-1})}= \\ =\left(\frac{\Gamma(\alpha+[h])}{\Gamma(\alpha+h)}\right)^{\nu}\frac{(\alpha+\nu-2)(\alpha+\nu-3)^2\cdots(\alpha+[h])^{2h-[h]}}{\alpha(\alpha+1)^2\cdots(\alpha+[h]-1)^{[h]}} \tag{19}$$

képletre jutunk.

3° Legyen $\delta = \frac{1}{\nu}$. — Akkor (16) és (7) alkalmazásával kapjuk:

$$Q = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\left(n+\alpha+\frac{h}{\nu}\right)^{\nu}}{(n+\alpha)\left(n+\alpha+\frac{1}{\nu}\right)\cdots\left(n+\alpha+\frac{\nu-1}{\nu}\right)} = \tag{20}$$

$$= \Gamma\left(\alpha+\frac{h}{\nu}\right)^{-\nu} \prod_{\mu=0}^{\nu-1} \Gamma\left(\alpha+\frac{\mu}{\nu}\right) = (2\pi)^{h} \nu^{\frac{1}{2}-\nu\alpha} \frac{\Gamma(\nu\alpha)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{h}{\nu}\right)^{\nu}}.$$

4° Legyen $\alpha+h\delta=1$, továbbá $\alpha+\mu\delta$ s egyúttal $\Theta_\mu = 1-(\alpha+\mu\delta)$ nem-egész ($\mu=0,1,\ldots,\nu-1$). Mivel (5) és (6) alapján

$$\Gamma(z)\Gamma(2-z) = \frac{\pi(1-z)}{\sin \pi z} \quad (z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{21}$$

esetünkben (11)-ből

$$Q = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{\nu}}{(n+\alpha)\left(n+\alpha+\frac{1-\alpha}{h}\right)\cdots\left(n+\alpha+\overline{\nu-1}\,\frac{1-\alpha}{h}\right)} =$$

$$= \Gamma(1)^{-\nu} \cdot \Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(2-\alpha-\delta)\cdots = \tag{22}$$

$$= \prod_{\mu=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]-1} \frac{\pi(1-(\alpha+\mu\delta))}{\sin \pi(\alpha+\mu\delta)} = \prod_{\mu=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]-1} \frac{\pi\Theta_\mu}{\sin \pi\Theta_\mu},$$

qu. e. d.

A (12)—(15) képletek mutatják, hogy bizonyos esetekben a Q szorzat értéke $(\nu+1)$-nél kevesebb gamma-érték segítségével is előállítható. — Kézenfekvő a kérdés: mikor fejezhetők ki (11) jobboldalának *összes* tényezői (zárt alakban) a többi elemi függvény értékeivel, azaz mely esetekben írhatjuk fel Q értékét a gamma-függvény felhasználása *nélkül?*

Erre vonatkozik a következő

2. tétel. Tegyük fel, hogy az $\alpha+h\delta, \alpha+\mu\delta$ ($\mu=0,1,\ldots,\nu-1$) *számok közül egyik sem* 0, *vagy negatív egész szám. — Kizárólag az* (5)—(9) *relációk alapján*[8] Q *akkor és csak akkor alakítható át*

[8] Hölder nek egy nevezetes tétele, mely szerint $\Gamma(z)$ nem tehet eleget polinom-együtthatós algebrai differenciálegyenletnek, többek között azt is mutatja, hogy további egyszerű kapcsolatok fennállása $\Gamma(z)$ és más elemi függvények között „nem valószínű". — Vö. pl. Nielsen: Handbuch der Theorie der Gammafunktion (1906), VIII. fej.

egy 2-ből, π-ből, ν-ből, faktoriális-számokból, valamint α-ból és δ-ból racionális műveletek, négyzetgyökvonás, továbbá a sinus-függvény felhasználásával felépített zárt analitikai kifejezéssé, ha fennáll a következő esetek közül legalább az egyik: 1. δ egész és $(\nu-1)\delta$ páros szám, 2. $2\alpha+(\nu-1)\delta=K$, ahol K nullától és a negatív páros számoktól különböző egész szám.

Bizonyítás. Jelentsen $\alpha, \alpha+\delta, \ldots, \alpha+(\nu-1)\delta, \alpha+h\delta$ nullától és a negatív egész számoktól különböző komplex számokat.

1° Tegyük fel, hogy δ egész és $(\nu-1)\delta \equiv 0 \pmod 2$, azaz $h\delta$ szintén egész szám. Akkor (18) alapján írhatjuk ($\mu=0,1,\ldots,\nu-1$):

$$\Gamma(\alpha+\mu\delta)= \tag{23}$$

$$=\begin{cases}(\alpha+\mu\delta-1)(\alpha+\mu\delta-2)\cdots(\alpha+h\delta)\Gamma(\alpha+h\delta), \text{ ha } (\mu-h)\delta>0,\\ \{(\alpha+\mu\delta)(\alpha+\mu\delta+1)\cdots(\alpha+h\delta-1)\}^{-1}\Gamma(\alpha+h\delta, \text{ ha } (\mu-h)\delta<0,\end{cases}$$

úgy hogy a (11)-be való helyettesítés után $\Gamma(\alpha+h\delta)^{\nu}$ kiesik és Q számára egy α-ban és δ-ban racionális zárt kifejezés adódik. Legyen $2\alpha+(\nu-1)\delta=K$ ($K=1,2,3,\ldots;-1,-3,-5,\ldots$). — Ez esetben (11) alatt egyfelől (vö. (5), (9))

$$\Gamma(\alpha+h\delta)=\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)=$$

$$=\begin{cases}(s-1)!, \text{ ha } K=2s \qquad (s=1,2,\ldots), \\ 2^{-s}(2s+1)!!\sqrt{\pi}, \text{ midőn } K=2s+1 \qquad (s=0,1,2,\ldots), \\ (-2)^{s+1}\dfrac{\sqrt{\pi}}{(2s+1)!!}, \text{ midőn } K=-(2s+1) \qquad (s=0,1,2,\ldots).\end{cases} \tag{24}$$

Másfelől tekintsük általában a

$$\Gamma(\alpha+\mu\delta)\Gamma(\alpha+\overline{\nu-\mu-1}\,\delta)=\Gamma(\alpha+\mu\delta)\Gamma(K-\alpha-\mu\delta) \tag{25}$$

szorzatot ($\mu=0,1,\ldots,\nu-1$); a jobboldal két faktoriális-szám szorzata, ha $\alpha+\mu\delta$ pozitív egész szám (vö. (8)), különben pedig (18) és (6) alapján racionális műveletek és a sinus-függvény segítségével π-nek, α-nak és δ-nak zárt kifejezéseként állítható elő.

2° Vizsgáljuk meg most, melyek az *összes* olyan esetek, amelyekben (11) jobboldala az (5)—(9) képletek (véges-számú) alkalmazásával a tételben jelzett típusú zárt kifejezéssé alakítható. Mint rögtön látjuk: pontosan azok, melyekben a

$$\Gamma(\alpha+h\delta)^{-\nu}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}\Gamma(\alpha+\mu\delta)$$

szorzat (5), (6), (7) alapján véges-számú lépésben redukálható úgy, hogy elemi függvények értékein kívül $\Gamma(z)$-nek legfeljebb a pozitív egész számoknál és a $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$ pontokban felvett értékei fordulnak elő.

Így — figyelembe véve, hogyan módosíthatja (5)—(7) alkalmazása az említett szorzatot — pl. $\Gamma(\alpha+h\delta)$-t illetően nyilván két lehetőség van: 1. csak „látszólag" lép fel Q-ban tényezőként, amennyiben (11) jobboldalán megfelelő átalakítás után $\Gamma(\alpha+h\delta)^{\nu}$-vel rövidíthetünk: 2. $\alpha+h\delta$ pozitív egész szám, vagy a $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$ törtek egyikével egyenlő, azaz

$$\alpha+h\delta=\frac{K}{2} \qquad (K=1,2,3,\ldots;-1,-3,-5,\ldots).$$

Az 1. eset csak úgy következhetik be, ha (5), ill. (18) segítségével a $\Gamma(\alpha+\mu\delta)$ $(\mu=0,1,\ldots,\nu-1)$ gamma-értékek mindegyike előállítható egy $\Gamma(\alpha+h\delta)$-t (1 kitevővel) tartalmazó szorzat alakjában (vö. (23)); ennek feltétele viszont az, hogy $(\mu-h)\delta$ $(\mu=0,1,\ldots,\nu-1)$, tehát egyúttal $(\mu+1-h)\delta-(\mu-h)\delta=\delta$ és $(\nu-1-h)\delta=\frac{1}{2}(\nu-1)\delta$ egész szám legyen.

A 2. esetben éppen a

$$2\alpha+(\nu-1)\delta=K \qquad (K=1,2,3,\ldots;-1,-3,-5,\ldots)$$

egyenlőségről, tehát a tételben megadott másik feltételről van szó.

* * *

Lássunk néhány idevágó érdekes példát!

(12)-ből folyik $\nu=2$ és $\alpha=\delta=1$, ill. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\delta=1$ esetén

$$\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}{m(m+1)}=\frac{4}{\pi}, \tag{26}$$

$$\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)^2}{(2m-1)(2m+1)}=\frac{\pi}{2}; \tag{27}$$

az utóbbi éppen WALLIS formulája.

(14)-ből $\alpha = \frac{1}{2\nu}$ helyettesítéssel adódik:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n+1)\nu]^\nu}{(2n\nu+1)(2n\nu+3)\cdots(2n\nu+2\nu-1)} =$$

$$= \frac{\nu^\nu}{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)} \cdot \frac{(3\nu)^\nu}{(2\nu+1)(2\nu+3)\cdots(4\nu-1)} \cdot \tag{28}$$

$$\cdot \frac{(5\nu)^\nu}{(4\nu+1)(4\nu+3)\cdots(6\nu-1)} \cdots = 2^{\frac{\nu-1}{2}} \quad (\nu = 2, 3, \ldots);$$

míg $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\nu}$ mellett nyerjük:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{[2(n+1)\nu]^\nu}{[(2n+1)\nu+1][(2n+1)\nu+3]\cdots[(2n+1)\nu+2\nu-1]} =$$

$$= \frac{(2\nu)^\nu}{(\nu+1)(\nu+3)\cdots(3\nu-1)} \cdot \frac{(4\nu)^\nu}{(3\nu+1)(3\nu+3)\cdots(5\nu-1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(6\nu)^\nu}{(5\nu+1)(5\nu+3)\cdots(7\nu-1)} \cdots = (2\pi)^h \nu^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^h h!}{\nu^{\frac{\nu}{2}}}, & \text{ha } \nu = 3, 5, 7, \ldots, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{\pi}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{2}} (\nu-1)!!, & \text{ha } \nu = 2, 4, 6, \ldots . \end{cases} \tag{29}$$

(15)-ből $\nu = 2\varrho$, $\alpha = \frac{1}{2\varrho}$, $\delta = \frac{1}{\varrho}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ esetén

$$Q = \left(\frac{\pi}{2\varrho}\right)^\varrho (2\varrho-1)!! \prod_{\mu=0}^{\varrho-1} \operatorname{cosec} \frac{(2\mu+1)\pi}{2\varrho}. \tag{30}$$

Ismeretes azonban, hogy

$$\prod_{l=1}^{\nu-1} \sin \frac{l\pi}{\nu} = \frac{\nu}{2^{\nu-1}} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots);^9$$

[9] Vö. pl. Szász Pál i. m., II. kötet, 32—33. o.

így (30) alatt

$$\prod_{\mu=0}^{\varrho-1} \operatorname{cosec} \frac{(2\mu+1)\pi}{2\varrho} = \prod_{l=1}^{\nu-1} \operatorname{cosec} \frac{l\pi}{\nu} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\varrho-1} \sin \frac{\lambda\pi}{\varrho} = \\ = \frac{2^{\nu-1}}{\nu} \cdot \frac{\varrho}{2^{\varrho-1}} = 2^{\varrho-1}, \tag{31}$$

s kapjuk:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{[2(n+1)\varrho]^{2\varrho}}{(2n\varrho+1)(2n\varrho+3)\cdots(2n\varrho+4\varrho-1)} = \\ = \frac{(2\varrho)^{2\varrho}}{1\cdot 3\cdots(4\varrho-1)} \cdot \frac{(4\varrho)^{2\varrho}}{(2\varrho+1)(2\varrho+3)\cdots(6\varrho-1)} \cdot \\ \cdot \frac{(6\varrho)^{2\varrho}}{(4\varrho+1)(4\varrho+3)\cdots(8\varrho-1)} \cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)^{\varrho} (2\varrho-1)!! \quad (\varrho=1, 2, 3, \ldots). \tag{32}$$

Az utóbbi előállítás $\varrho=1$ esetén (27)-be megy át, tehát a WALLIS-féle formulának egy különösen egyszerű általánosítása; megjegyzésre érdemes, hogy (32) könnyen adódik (28)-ból és (29)-ből is $\nu=2\varrho$ helyettesítéssel és a megfelelő oldalak összeszorzásával.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ФЕЙЕРА О БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Л. Фейеру принадлежит приоритет в нахождении таких обобщенных бесконечных произведений, среди которых содержится, как особый случай, произведение Валлиса (см. 1), и значение которых можно выразить в замкнутом виде при помощи элементарных функций.

Автор в предыдущей статье исследовал произведения типа (2), где $\{a_n\}$ означает строго монотонно возрастающие положительные последовательности чисел (срав. (1)). В данной статье исследуется возможность представления произведений типа (10) в замкнутом виде; d, A и D являются фиксированными, отличными от нуля комплексными числами, z означает комплексную переменную, $\mathfrak{A}_v(z)$ и $\mathfrak{G}_v(z)$ $(v \geqq 2)$ представляют собой арифметическое и геометрическое среднее величин $z, z+d \ldots, (z+(v-1)d$. Целесообразным считается введение обозначений

$$\alpha = \frac{A}{D}, \quad \delta = \frac{d}{D}, \quad h = \frac{\nu-1}{2}$$

Результаты:

Теорема 1.

Произведение Q в (10) является тогда и только тогда сходящимся, если в ряде чисел $\alpha+h\delta, \alpha+\mu\delta$ $(\mu=0, 1, \ldots, \nu-1)$ нулевое или отрицательное целое число не встречается.

В этом случае значение Q всегда можно выразить в замкнутом виде при помощи гамма-функции, то-есть справедлива формула (11), и (12), (13), (14), (15) являются соответственно особыми случаями последней при следующих условиях:

$$\delta = 1 \quad \text{и} \quad \nu = 2;\ \delta = 1,\ \nu > 2;\ \delta = \frac{1}{\nu};\ \alpha + h\delta = 1,$$

$$Q\mu = 1 - (\alpha + \mu\delta)\left(\mu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\nu}{2}\right] - 1\right) \text{ не целое.}$$

Теорема 2.

Предположим, что ни одно из чисел $\alpha + h\delta, \alpha + \mu\delta$ $(\mu = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$ не имеет нулевого или отрицательного целого значения. На основании исключительно соотношений (5)—(9) Q можно тогда и только тогда преобразовать в замкнутое аналитическое выражение, построенное из 2, π, ν из факториалов, а также из α и δ при помощи рациональных действий, извлечения квадратного корня и функции синуса, если по крайней мере один из следующих случаев имеет место: 1. δ является целым числом и $(\nu - 1)\delta$ четное, 2. $2\alpha + (\nu - 1)\delta$, где K целое число, отличное от нуля и от четных отрицательных чисел.

Из числа примеров, приведенных в конце статьи, можно выделить (29) и (32); последний представляет собой особо простое преобразование классической формулы (1).

ÜBER EIN FEJÉRSCHES PROBLEM BEZÜGLICH UNENDLICHER PRODUKTE

Von L. Fejér rührt die Aufgabe her, solche Typen unendlicher Produkte zu suchen, welche das sog. Wallis'sche Produkt als Spezialfall enthalten und sich mit Hilfe der elementaren Funktionen geschlossen auswerten lassen.

Der Verfasser beschäftigte sich in einer früheren Arbeit mit Produkten der Type (2), wobei $\{a_n\}$ eine streng monoton zunehmende, positive Folge bedeutet (vgl.[1]). Nun wird die Auswertungsmöglichkeit der Produkttype Q unter (10) untersucht; hierin sind d, A, D feste *komplexe* Zahlen $\neq 0, z$ eine komplexe Veränderliche, $\mathfrak{A}_\nu(z)$ und $\mathfrak{G}_\nu(z)$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ das arithmetische bzw. geometrische Mittel von $z, z + d, \ldots, z + (\nu - 1)d$. Man schreibt zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{A}{D},\ \delta = \frac{d}{D},\ h = \frac{\nu - 1}{2}.$$

Folgende Resultate werden abgeleitet:

Satz 1. *Das Produkt Q konvergiert dann und nur dann, wenn weder 0, noch eine negative ganze Zahl unter den Grössen $\alpha + h\delta$, $\alpha + \mu\delta$ $(\mu = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$ auftritt. In diesem Falle lässt sich Q immer durch die Gammafunktion geschlossen ausdrücken, nämlich in der Form* (11), *welche insbesondere in* (12), (13), (14) *bzw.* (15) *übergeht, wofern, der Reihe nach,*

$\delta = 1$ *und* $\nu = 2$; $\delta = 1$, $\nu < 2$; $\delta = \frac{1}{\nu}$; $\alpha + h\delta = 1$ *und* $\Theta_\mu = 1 - (\alpha + \mu\delta)\left(\mu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\nu}{2}\right] - 1\right)$ *nicht ganz gewählt wird.*

Satz 2. *Es sei angenommen, das keine der Grössen* $\alpha + h\delta$, $\alpha + \mu\delta$ $(\mu = 0, 1, \ldots, \nu-1)$ *Null oder einer negativen ganzen Zahl gleich ist. Auf Grund der Relationen* (5)—(9) *lässt sich Q dann und nur dann in einen aus* $2, \pi, \nu$, *Fakultäten und den Zahlen* α, δ *durch rationale Operationen, Quadratwurzeln, ferner mittels der Sinusfunktion gebildeten geschlossenen analytischen Ausdruck transformieren, wenn mindestens einer der folgenden Fälle vorliegt:* 1. δ *ist ganz und* $(\nu-1)\delta$ *gerade,* 2. $2\alpha + (\nu-1)\delta = K$, *wobei K eine von Null und den negativen geraden Zahlen verschiedene ganze Zahl bedeutet.*

Unter den angegebenen Beispielen sind (29) und (32) hervorzuheben; die letztere liefert eine besonders einfache Verallgemeinerung der Wallis'schen Formel (1).

Konvex tartományok beírt és körülírt poligonjairól

Írta: MOLNÁR JÓZSEF

C. H. DOWKER egy dolgozatában[1] a következő tételeket bizonyította be:

1. D *tétel: Jelentse T_n egy konvex tartományba beírt, maximális területű n-szög területét. Állítás: $T_3, T_4, \ldots$ sorozat konkáv:*

$$T_{n-1} + T_{n+1} \leqq 2T_n \qquad (n \geqq 4).$$

2. D *tétel: Jelentse t_n egy konvex tartomány körül írt, minimális kerületű n-szög területét. Állítás: $t_3, t_4, \ldots$ sorozat konvex:*

$$t_{n-1} + t_{n+1} \geqq 2t_n \qquad (n \geqq 4).$$

Jelen dolgozat első része tartalmazza a kerületre vonatkozó analóg probléma megoldását, amelyhez FEJES TÓTH LÁSZLÓval egyidejűleg és tőle függetlenül jutottam. E részben a következő két tételt bizonyítjuk:

1. *tétel: Jelentse K_n egy konvex tartományba beírt, maximális kerületű n-szög kerületét. Állítás: $K_3, K_4, \ldots$ sorozat konkáv:*

$$K_{n-1} + K_{n+1} \leqq 2K_n \qquad (n \geqq 4).$$

2. *tétel: Jelentse k_n egy konvex tartomány körülírt, minimális kerületű n-szög kerületét. Állítás: $k_3, k_4, \ldots$ sorozat konvex:*

$$k_{n-1} + k_{n+1} \geqq 2k_n \qquad (n \geqq 4).$$

A dolgozat második részében foglalkozunk a kerületre és területre vonatkozó tételek kiterjesztésével hiperbolikus síkra és gömbfelületre[2]. Elintézetlen maradt gömbfelületen a körülírt sokszögek kerületére vonatkozó probléma.

[1] DOWKER, C. H.: On minimum circumscribed poligons. Bull. Amer. math. Soc. **50**, 120—122 (1944).

[2] Erre az egész problémakörre FEJES TÓTH LÁSZLÓ hívta fel a figyelmemet

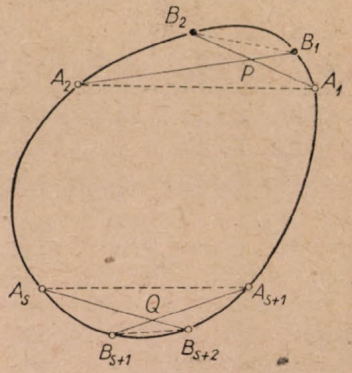
I. *Segédtétel: Egy kör* $A_1 < A_2 < \ldots < A_n$[3] *pontjai által létesített* $\overset{\frown}{A_1A_2}, \overset{\frown}{A_2A_3}, \ldots \overset{\frown}{A_nA_1}$ *n köríven*[4] *helyezkedjenek el az* $(A_1 \leqq) B_1 < B_2 < \ldots < B_{n+2}$ $(< A_1)$ *pontok úgy, hogy egy-egy íven legfeljebb két B pont legyen. Állítás: van olyan* $s > 1$, *amelyre* $A_s \leqq B_{s+1} < B_{s+2} < A_{s+1}$.

Bizonyítás: Az A_iA_{i+1} $(i = 1, \ldots, n, A_{n+1} = A_1)$ ívhez rendeljük a $\varphi(i) = \varrho - i$ egészértékű függvényt, ahol ϱ az a legnagyobb index, amelyre $A_1 \leqq B_\varrho < A_{i+1}$. A $\varphi(i)$ függvény közvetlenül belátható tulajdonságai: $\varphi(1) < 2$; $\varphi(n) = 2$; $\varphi(i+1)$ legfeljebb 1-gyel lehet több $\varphi(i)$ értékénél (ez akkor következik be, ha az A_iA_{i+1} íven két B pont van). Ezek figyelembe vételével adódik, hogy van legkisebb s érték, amelyre $\varphi(s) = 2$. Az $\overset{\frown}{A_sA_{s+1}}$ ív megfelel segédtételünk követelményének.

Az 1. tétel bizonyítása

Az első tétel bizonyításához tekintsünk a T konvex tartományba beírt $A \equiv A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ $(n-1)$-szöget és $B \equiv B_1B_2 \ldots B_{n+1}$ $(n+1)$-szöget. A bizonyításhoz elegendő belátni, hogy az A és B sokszöghöz mindig megadható olyan C és D beírt n-szög úgy, hogy teljesüljön $A + B \leqq C + D$[5]. Ugyanis $A \equiv K_{n-1}$, $B \equiv K_{n+1}$ esetén $K_{n-1} + K_{n+1} \leqq C + D \leqq 2K_n$. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: A T tartomány bármely $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, (n-1),$ $A_n = A_1)$ ívén legfeljebb két B pont van. Mivel a B pontok száma kettővel több mint az A pontoké, az indexezést úgy választhatjuk, hogy $A_1 \leqq B_1 < B_2 < A_2$ teljesüljön. Segédtételünk értelmében van olyan $s > 1$, amelyre $A_1 \leqq B_1 < B_2 < A_2 \leqq A_s < B_{s+1} < B_{s+2} < A_{s+1}$. Legyen $C \equiv A_1B_2 \ldots B_{s+1}A_{s+1} \ldots A_{n-1}$ és $D \equiv B_1A_2 \ldots A_sB_{s+2} \ldots B_{n+1}$. Mivel az $A_1B_1B_2A_2$, ill. $A_sB_{s+1}B_{s+2}A_{s+1}$ konvex négyszögben[6] az átlók összege nagyobb két szemközti oldal összegénél, azaz $A_1B_2 + B_1A_2 \geqq A_1A_2 + B_1B_2$, ill. $A_sB_{s+2} + B_{s+1}A_{s+1} \geqq A_sA_{s+1} + B_{s+1}B_{s+2}$ (1. ábra), következésképpen $A + B \leqq C + D$.



1. ábra

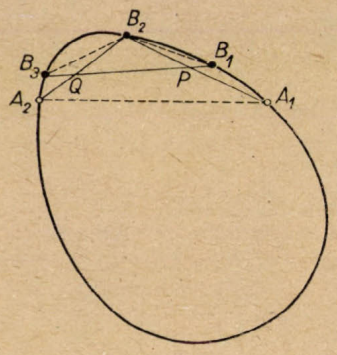
[3] $A_1 < A_2 < \ldots < A_n$ azt jelöli, hogy a görbe egy ciklikus körüljárásánál e pontok $A_1, A_2 \ldots, A_n, A_1$ rendben következnek. Megfelelő jelölést használunk egy poligon oldalaira vonatkozólag is.

[4] A $\overset{\frown}{PQ}$ körívhez a P kezdőpontot mindig hozzászámítjuk, s Q végpontot nem: tehát félig zárt körívekkel dolgozunk.

[5] Sokszögekre és kerületre ill. területre ugyanolyan jelölést használunk.

[6] A négyszög háromszöggé is fajulhat.

2. eset: Van a T tartománynak olyan $\widehat{A_iA_{i+1}}$ íve, mely tartalmaz három B pontot. Megfelelő indexezés mellett: $A_1 \leqq B_1 < B_2 < B_3 < A_2$. Legyen $C \equiv A_1B_2A_2 \ldots A_{n-1}$ és $D \equiv B_1B_3 \ldots B_{n+1}$. Jelölje P, ill. Q az A_1B_2, ill. A_2B_2 metszéspontját B_1B_3-mal (2. ábra). Mivel $B_1P + PB_2 \geqq B_1B_2$, $B_2Q + QB_3 \geqq B_2B_3$ és $A_1P + PQ + QA_2 \geqq A_1A_2$, ezeknek összeadásából adódik, hogy $A_1B_2 + B_2A_2 + B_1B_3 \geqq B_1B_2 + B_2B_3 + A_1A_2$, vagyis $A + B \leqq C + D$.



2. ábra

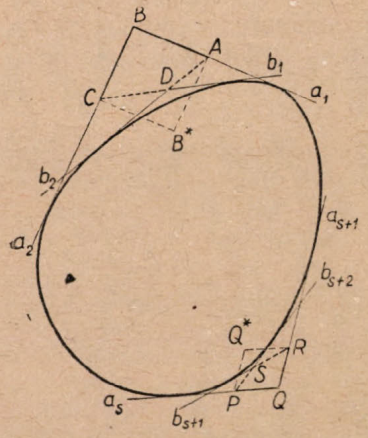
2. tétel bizonyítása

A 2. tétel bizonyításánál tekintsünk a T konvex tartomány körül írt $a \equiv a_1a_2 \ldots a_{n-1}$ $(n-1)$-szöget és $b \equiv b_1b_2 \ldots b_{n+1}$ $(n+1)$-szöget, ahol a_i és b_i sokszögoldalt jelent. Hasonlóan az 1. tétel bizonyításához, elegendő bebizonyítani, hogy a-hoz és b-hez megadható olyan c és d körülírt n-szög, hogy $c + d \leqq a + b$. E tétel bizonyításánál is két esetet különböztetünk meg.

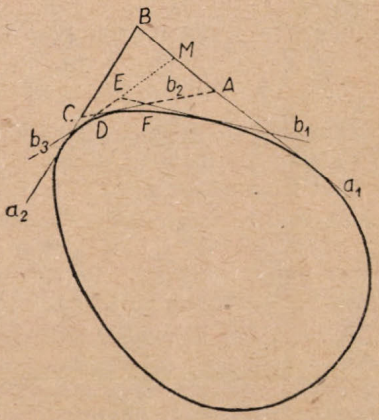
1. eset: $a_1 \leqq b_1 < b_2 < a_2 \leqq a_s < b_{s+1} < b_{s+2} < a_{s+1}$. Legyen $c \equiv a_1b_2 \ldots b_{s+1}a_{s+1} \ldots a_{n-1}$ és $d \equiv b_1a_2 \ldots a_sb_{s+2} \ldots b_{n+1}$. Jelentse $A = (a_1, b_2)$ az a_1 és b_2 egyenesek metszéspontját (3. ábra). Tekintsük még a következő metszéspontokat: $B = (a_1, a_2)$, $C = (b_1, a_2)$, $D = (b_1, b_2)$, $P = (a_s, b_{s+2})$, $Q = (a_s, a_{s+1})$, $R = (b_{s+1}, a_{s+1})$ és $S = (b_{s+1}, b_{s+2})$. Jelöljük továbbá B^*-al a B pontnak AC felezőpontjára vonatkozó tükörképét és Q^*-al a Q pontnak PR felezőpontjára vonatkozó tükörképét. Könnyen belátható, hogy az $ACB^*\triangle$ tartalmazza az $ACD\triangle$-et, a $PRQ^*\triangle$ pedig a $PRS\triangle$-et. Ennek folytán $AB + BC = AB^* + B^*C \geqq AD + DC$ és $PQ + QR = PQ^* + Q^*R \geqq PS + SR$, vagyis $c + d \leqq a + b$.

2. eset: $a_1 \leqq b_1 < b_2 < b_3 < a_2$. Tekintsük a következő metszéspontokat: $A = (a_1, b_2)$, $B = (a_1, a_2)$, $C = (a_2, b_2)$, $D = (b_2, b_3)$, $E = (b_1, b_3)$,

$F=(b_1,b_2)$ és $M=(a_1,b_3)$ (4. ábra). Az $MEFA$, ill. $MBCD$ négyszögre alkalmazva az előbbi eset okoskodását kapjuk, hogy $AM+ME \geqq EF+AF$, ill. $MB+BC \geqq CD+DM$. Ezeknek összeadásából adódik, hogy $AB+BC \geqq CD+DE+EF+FA$, vagyis $c+d \leqq a+b$,



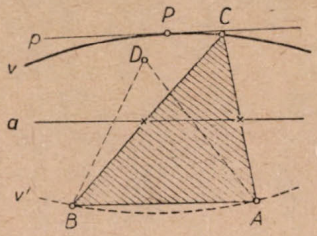
3. ábra



4. ábra

II. A kerületre és területre vonatkozó tételek kiterjesztése

A kerületre adott bizonyításaink változatlanul érvényesek hiperbolikus síkon is. Gömbfelületre csupán a beírt sokszögekre vonatkozó bizonyítás érvényes. A körülírt sokszögekre vonatkozó problémát gömbfelület esetében nem tudtam megoldani. Annyi azonban könnyen adódik, hogy az euklideszi síkon $c+d \leqq a+b$



5. ábra

belátására alkalmazott okoskodás a gömbfelületre is átvihető, ha

az a érintősokszög bármely csúcspontjának távolsága a csúcspontot szolgáltató oldalak érintési pontjaitól $\leqq \frac{\pi}{2}$.

Vajon mi a helyzet a területre vonatkozó tételeknél? DOWKER-nek a 2. D tételre vonatkozó bizonyítása minden további nélkül érvényes hiperbolikus síkon és gömbfelületen is. Hogy az 1. D tételt is kiterjeszthessük hiperbolikus síkra és gömbfelületre DOWKER eredeti bizonyítását módosítjuk. A fellépő változást α) először a hiperbolikus síkon mutatjuk be, majd a β) gömbtelületre vonatkozó okoskodás eltéréseit tárgyaljuk.

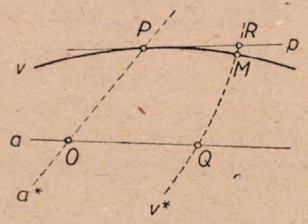
α) Bizonyításunkat a távolságvonal fogalmára építjük. Ismeretes BOLYAInak azon tétele, hogy azon C pontok mértani helye, melyek az AB szakasszal állandó területű és adott körüljárású $ABC\triangle$-et alkotnak, távolságvonal (5. ábra). Ezt az adott $ABC\triangle$ C csúcspontjához tartozó távolságvonalnak nevezzük és v-vel jelöljük. A v távolságvonal pontjai egyenlő távolságra vannak az AC és CB szakasz felezőpontjait összekötő ún. alapegyenestől, amelyet az ábrán a-val jelöltünk. A v távolságvonal és az AB egyenes között fekvő D pontra áll, hogy az $ABD\triangle$ területe kisebb az $ABC\triangle$ területénél. A v távolságvonal a alapegyenesére vonatkozó v' tükörképe szintén távolságvonal. Itt említjük meg a távolságvonalnak azon ismert tulajdonságát is, hogy bármely P pontjához tartozó p érintőjű támaszegyenese a v és v' által határolt konvex tartománynak.

A v távolságvonallal kapcsolatban két segédtételt bizonyítunk.

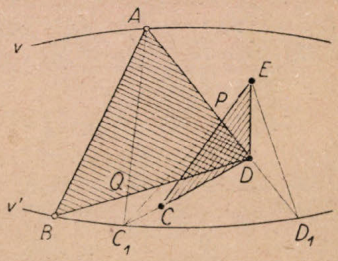
1. *segédtétel: Legyen a v távolságvonal alapegyenese a, a v^* távolságvonal alapegyenese a^*. Állítás: Ha a és a^* egymást metsző egyenesek, akkor v és v^* egy pontban metszik egymást.*

Először azt bizonyítjuk, hogy v és v^* metszik egymást. Legyen a és a^* metszéspontja O (6. ábra). Mivel a ill. a^* pontjai O-tól távolodva minden határon túl távolodnak az a^* ill. a egyenestől is, ennek folytán a^* metszi v-t P pontban és a metszi v^*-ot Q pontban. Jelöljük a v távolságvonal P-beli érintőjét p-vel. Minthogy p és a^* egymást metsző egyenesek, p metszi v^*-ot R pontban. Mivel pedig Q és R a v távolságvonal homorú ill. domború oldalán van, következik, hogy a Q és R ponton átmenő v^* távolságvonal metszi v-t.

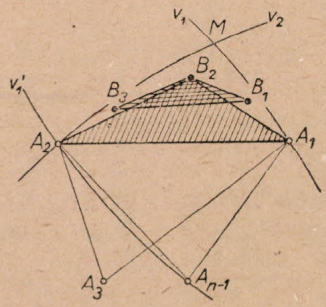
Ezek után bizonyítjuk, hogy v és v^* csak egy M pontban metszik egymást. Ui. két M, M^* metszéspont esetén, MM^* felezőmerőlegese mind v-nek, mind pedig v^*-nak szimmetriatengelye, minek következtében az erre merőleges a és a^* egyenesek, kitérő egyenesek, ami feltételünkkel ellentétes. Ezzel segédtételünk bizonyítva van.



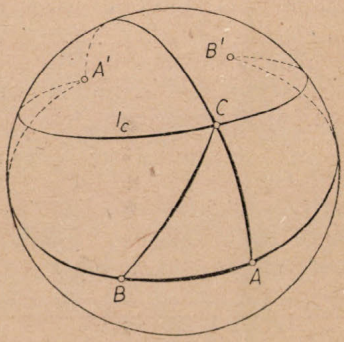
6. ábra



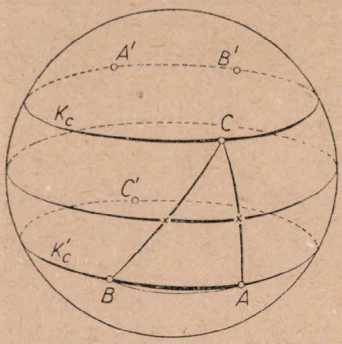
7. ábra



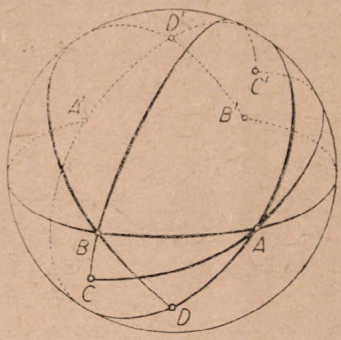
8. ábra



9. ábra



10. ábra



11. ábra

2. *segédtétel: Legyen az ABCDEF a v, v' távolságvonalpár által alkotott sávban egy olyan konvex ötszög, melynek A, ill. B pontja a v, ill. v' távolságvonalon van. Állítás: Az ABD△ területe nagyobb CDE△ területénél.*

Bizonyítás: Minthogy az AB, BD szakaszok közül valamelyiknek pl. az AD-nek van közös pontja a v, v' távolságvonalpár alapegyenesével, következik, hogy az AD egyenes belemetsz v'-be. Jelöljük a metszéspontot D_1-el (7. ábra). D_1 létezése folytán $C_1 = (CD, v')$ metszéspont is létezik. Tekintsük még a következő két metszéspontot: $P = (AD, EC_1)$, $Q = (BD, AC_1)$. Mivel a D pont a v távolságvonal és BC_1 egyenes között van, következik, hogy $ABC_1 \triangle > BDC_1 \triangle$, tehát $ABQ \triangle > QC_1D \triangle$ s így $ABD \triangle > AC_1D \triangle$. A bizonyításhoz ezek után elég belátni, hogy $AC_1D \triangle \geqq EC_1D \triangle$ $(= ECD \triangle + EC_1C \triangle)$. Mivel az E pont vagy a v távolságvonalon, vagy pedig v és C_1D_1 egyenes között van, következik, hogy $AC_1D_1 \triangle \geqq EC_1D_1 \triangle$, tehát $AC_1P \triangle \geqq EPD_1 \geqq$ $\geqq EPD \triangle$ és ezért $AC_1D \triangle \geqq EC_1D \triangle$. Ezzel segédtételünk bizonyítva van.

Az 1. és 2. segédtételünk birtokában áttérünk az 1. D tétel bizonyitására a hiperbolikus síkban, vagyis bizonyítani fogjuk, hogy $A_1B_2A_2 \triangle \cong B_1B_2B_3 \triangle$ (2. ábra), ill. $A_1PA_2 \triangle \cong B_1PB_2$ (1. ábra). Minthogy az utóbbi az előbbiből A_1 és B_1 egybeejtésével adódik, csak az előbbivel foglalkozunk. Bizonyításunkban kihasználjuk, hogy az $A \equiv A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ $(n-1)$-szög maximális területű.

Jelöljük az $A_{n-1}A_1A_2 \triangle$ A_1, ill. $A_1A_2A_3 \triangle$ A_2 csúcspontjához tartozó távolságvonalat v_1-gyel, ill. v_2-vel (8. ábra). Mivel az A $(n-1)$-szög maximális területű, a T tartomány $\overset{\frown}{A_1A_2}$ íve — eltekintve a v_1, ill. v_2 távolságvonal közös pontjaitól — a v_1 és az A_2A_{n-1} egyenes, ill. a v_2 és A_1A_3 egyenes között van. Mivel viszont v_1 és v_2 alapegyenesei A_1A_2 felezőpontjában metszik egymást, az 1. segédtételünk értelmében következik, hogy v_1 és v_2 egy M pontban metszik egymást. Ennek megfelelően a T tartomány $\overset{\frown}{A_1A_2}$ íve, mely tartalmazza a B_1, B_2, B_3 pontokat, benne van az A_1A_2 valamint a v_1, ill. v_2 távolságvonal $\overset{\frown}{A_1M}$ ill. $\overset{\frown}{A_2M}$ íve által határolt A_1MA_2 „háromszögben". E „háromszög" azonban része a v_1, v_1' távolságvonalpár által alkotott sávnak hiszen 1. segédtételük szerint v_1' és v_2 is egyetlen pontban metszik egymást. A 2. segédtétel értelmében tehát $A_1B_2A_2 \triangle > B_1B_2B_3 \triangle$, és ezzel az 1. D tétel hiperbolikus síkon bizonyítva van.

β) Gömbfelületen a távolságvonal szerepét a Lexell-kör egy íve veszi át. Jelöljük pl. A'-vel az A pont antipólusát. Ismeretes, hogy azon C pontok mértani helye, melyek az AB főkörívvel állandó

területű és adott körüljárású $ABC\triangle$-et alkotnak, az A', B' végpontokat összekötő körív (9. ábra). Ezt az adott $ABC\triangle$ C csúcspontjához tartozó Lexel-körívnek nevezzük és l_C-vel jelöljük. A Lexell-körív jól ismert tulajdonságai közül megemlítjük, hogy l_C-nek $A'C$ ívét tartalmazza az $A'BC\triangle$. Megjegyezzük még, hogy azon K_C kör, melynek l_C íve, távolságvonalként is értelmezhető (10. ábra). K_C-nek AC, ill. CB felezőpontján átmenő főkörre vonatkozó K_C' tükörképe szintén távolságvonal.

Bizonyítani fogjuk a következő segédtételt:

Segédtétel: Legyen $ABCD$ egy gömbi konvex négyszög. Állítás: az $ABD\triangle$ A csúcspontjához tartozó l_A Lexell-körív és az $ABC\triangle$ B csúcspontjához tartozó l_B Lexell-körív egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás: Tekintsük az AB főkör ugyanazon oldalán elhelyezkedő ABD és ABC gömbiháromszöget (11. ábra). Az $ABCD$ négyszög konvexitása miatt C' nem pontja az $ABD'\triangle$-nek, és D' nem pontja az $ABC'\triangle$-nek. Mivel pedig $ABD'\triangle$ tartalmazza l_A-nak $\overset{\frown}{AD'}$ ívét és $ABC'\triangle$ tartalmazza l_B-nek $\overset{\frown}{BC'}$ ívét, következik, hogy l_A-nak és l_B-nek van közös M pontjuk. Bebizonyítjuk, hogy l_A-nak és l_B-nek nem lehet két közös pontjuk. Legyen K_A, ill. K_B azon két kör, melynek l_A, ill. l_B köríve. K_A, K_B — mint gömbi körök — legfeljebb két pontban metszik egymást. Mivel l_B-nek C' végpontja K_A-n belül, a másik A' végpontja pedig K_A-n kívül van, következik, hogy l_A csak egy pontban metszi l_B-t.

Még egyszerűbben következik, hogy K_A'-nek és l_B-nek az A' közös pontjuktól eltekintve B egyetlen közös pontjuk, hiszen két gömbi körnek legfeljebb két közös pontja van.

Itt említjük meg, hogy a hiperbolikus síkra vonatkozó 2. segédtételünk bizonyításával együtt gömbfelületen is érvényes.

Ezen eredmények birtokában az 1. D tétel hiperbolikus síkon adott bizonyítása átvihető gombfelületre is.

Hálás köszönetet mondok Hajós György professzornak a dolgozat készítésével kapcsolatban tett értékes megjegyzéseiért.

О ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР

И. Мольнар

Первая часть статьи содержит доказательство следующих двух теорем:

Теорема 1: Если P_n является n-угольник с максимальным периметром вписан в одной выпуклой фигуре, то периметры удовлетворяют неравенство $P_{n-1} + P_{n+1} \leqq 2P_n$.

Теорема 2: Если p_n является n-угольник с минимальным периметром описан около одной выпуклой фигуры, то периметры удовлетворяют неравенство $p_{n-1} + p_{n+1} \geqq 2p_n$.

Во второй части автор занимается расширением на гиперболической плоскости и на шаре этих теорем и двух аналогичних теорем Даукера, относящихся к площади. На шаре проблема периметра описанного многоугольниках осталась неразрешенной.

ON INSCRIBED AND CIRCUMSCRIBED POLYGONS OF CONVEX REGIONS

J. Molnár

The first part of the paper contains the proof of the following two theorems:

Theorem 1: If P_n is an n-gon of maximum parimeter inscribed in a convex region, the perimeters satisfy the inequality $P_{n+1} + P_{n+1} \leqq 2P_n$.

Theorem 2: If p_n is an n-gon of minimum perimeter circumscribed about a convex region, the perimeters satisfy the inequality $p_{n-1} + p_{n+1} \geqq 2p_n$.

In the second part the author deals with the extension to the hyperbolic plane and to the sphere of these theorems and of Dowker's two analogous theorems wich refer to areas. The problem refering to the perimeter of circumscribed spherical poligons is unsolved.

A kínai matematika történetének egy problémájáról

Írta: L. Carlitz (Durham)

(Részlet Turán Pálhoz intézett levélből)

„... Felkeltette érdeklődésemet Li-Zsen Su

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2 \qquad (*)$$

képlete, amelyet Ön nemrég bebizonyított a Matematikai Lapok V. kötetében. Érdemesnek tartom megjegyezni, hogy (*) rövid úton bebizonyítható a következőképpen. A hipergeometrikus sorok szokásos jelölését használva (*) baloldala nyilvánvalóan a következő kifejezéssel egyenlő

$$\binom{n+2k}{2k}\sum_{r=0}^{k}\frac{(-k)_r(-k)_r(-n)_r}{r!\,r!\,(-n-2k)_r}= \\ =\binom{n+2k}{2k}{}_3F_2\left[\begin{matrix}-k,-k,n\\1,-n-2k\end{matrix}\right]. \qquad (1)$$

Az ${}_3F_2$ kifejezését *Saalschütz* tétele (lásd például: *Bailey:* Generalized hypergeometric series, p. 9) segítségével összegezve azt kapjuk, hogy

$$\binom{n+2k}{2k}\frac{(1+k)_n(1+k)_n}{(1)_n(1+2k)_n}= \\ =\frac{(n+2k)!}{n!\,(2k)!}\,\frac{(n+k)!\,(n+k)!\,(2k)!}{n!\,k!\,k!\,(n+2k)!}=\binom{n+k}{k}^2, \qquad (2)$$

ami bizonyítandó volt....“

Szerkesztő megjegyzi, hogy az általánosított hipergeometrikus függvény definíciója:

$${}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p;z\\ \varrho_1,\ldots,\varrho_q\end{matrix}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_p)_n}{(\varrho_1)_n\ldots(\varrho_q)_n}\,\frac{z^n}{n!},$$

ahol $(\alpha)_n=\Gamma(n+\alpha)/\Gamma(n)$.

Saalschütz tétele az

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

hipergeometrikus függvény

$$(1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z) = F(c-a, c-b; c; z)$$

tulajdonságából következik. Mégpedig ha az előző egyenlőség mindkét oldalán z^n együtthatóit azonosítjuk, úgy

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{(a)_r (b)_r (c-a-b)_{n-r}}{(c)_r r! (n-r)!} = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n n!}$$

azonosságra jutunk és innen *Saalschütz* tétele:

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(a)_r (b)_r (-n)_r}{(c)_r (1+a+b-c-n)_r r!} = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n}.$$

ON A PROBLEM OF THE HISTORY OF CHINESE MATHEMATICS

By L. Carlitz (Durham)

(A part of a brief to P. Turán)

Summary

„... I was interested in the formula of Le-Jen Shoo: (*) recently proved by you in Mat. Lapok, vol. 5. It may be of interest to note that (*) can be proved rapidly in the following way. Using the standard notation of hypergeometric series, the left member is evidently equal to (1). Summing ${}_3F_2$ by Saalschütz's theorem (see for example Baily's Generalised hypergeometric series, p. 9) we get (2). This evidently completes the proof of (*)...". Finally the editor recalls the definition of the generalised hypergeometric series and the proof of Saalschütz's theorem.

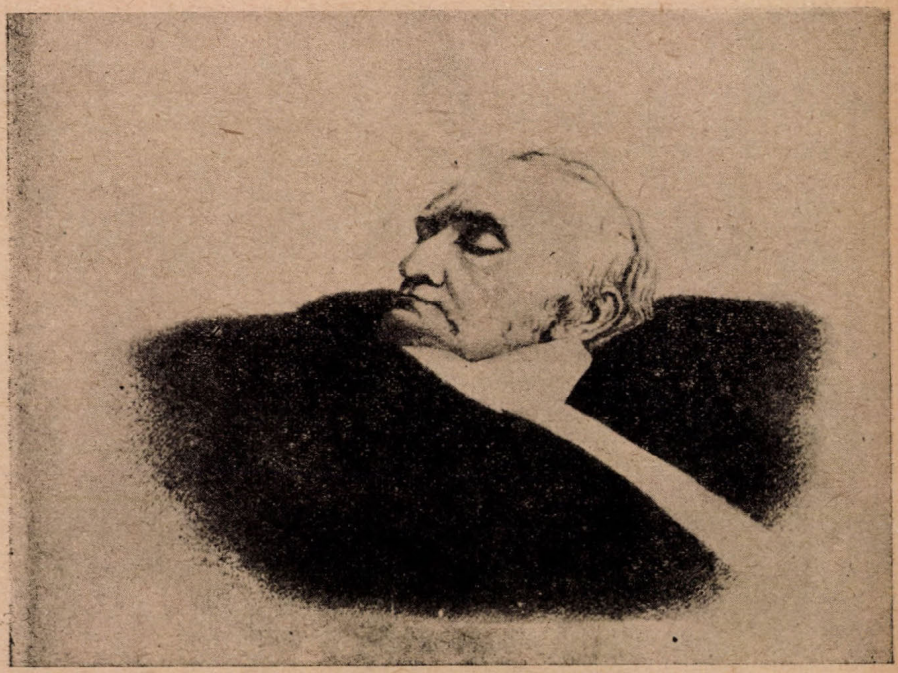
ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ИСТОРИИ КИТАЙСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Л. Карлиц (Дархэм)

(Резюме)

Автор дает краткое описание нового доказательства при помощи гипергеометрического ояда одного идентитета (см. *), о котором за последнее время в математическом журнале порторно была речь.

KARL FRIEDRICH GAUSS *(1777. április 30. — 1855. február 23)*



Megemlékezés halálának 100-ik évfordulóján

Írta: Obláth Richárd

Ez idén február 23-án volt száz éve, hogy Gauss a „princeps mathematicorum" meghalt, sőt életének ifjúkori viharos alkotó periódusa immár 150—160 év óta van mögöttünk, de ez alatt a hosszú idő alatt sem vált történeti személlyé, működése ma is eleven hajtó erő, aligha van olyan mai matematikus, aki valamilyen formában ne állna befolyása alatt.

Dicsősége 150 év óta nem csökkent. Ennek a nagy klaszszikusnak gondolatai elemi erejűeknek bizonyultak. A sima mederből kitörtek, és állandóan új, meg újabb területekre hatolnak, senki sem mellőzheti őket. Sűrűn idézik ma is, sok oly modern módszer van, amely Gauss valamely eszméjéből csírázott ki. A folyóíratok legújabb köteteiben is elég gyakran találunk Gauss idézeteket.

*

Gauss a rendkívül korán érett zsenik közé tartozik, de legmerészebb ígéreteit is túlteljesítette. Közismert, hogy nyolcéves korában magától jött rá a számtani sor összegezésének elvére. A tanító ugyanabban a teremben tanított több osztályt. Hogy az osztályt foglalkoztassa és az ne zavarja őt, feladta nekik, hogy adják össze a számokat 1-től 40-ig, de ime, alighogy a tanító kimondja a feladatot, a kis Gauss már viszi ki palatábláját és hamisítatlan dialektusban mondja „da ligget se" (itt fekszik). A tanító már rá is akar sujtani az akkor divatos fegyelmező eszközzel, a vonalzóval, amikor tekintete a palatáblán lévő helyes eredményre esik. Dicséretére legyen mondva, hogy ekkor haragja lecsillapult és megkérdezte a kis fiút, hogyan kapta az eredményt, amire a kis fiú a világ legtermészetesebb hangján feleli 40 meg 1 az 41, 39 meg 2 az 41, összesen 20 ilyen pár van, az 820. Tanítója méltányolta a kis Gauss tehetségét, a rendkívüli fiú híre egész a fejedelemig eljutott, aki azután az igen szegény gyermeket pártfogásába vette, gimnáziumi, majd egyetemi tanulmányait lehetővé tette, azután pedig gondtalan életet biztosított neki.

Az ifjú Gauss másik feltűnő teljesítménye kb. 15 éves korából származik, amikor élete első logaritmuskönyvét kapta. Ebben a könyvben a logaritmusokon kívül egyéb táblázatok is voltak, így a prímszámok sorozata. Gauss megszámlálta az egy-egy ezres számközben foglalt prímszámok számát és feljegyezte a könyvhöz kötött fehér lapokra. A prímszámok eloszlása tudvalevőleg igen szabálytalan, a serdülő Gauss azonban felismerte, hogy az ingadozások ellenére számuk átlagban a logaritmussal fordított arányban csökken. Vagyis, ha, mint szokás $\pi(x)$-szel jelölöm az x-nél kisebb prímszámok számát, akkor elég nagy x mellett

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dx}{\log x},$$

vagyis megsejtette a *prímszámtételt*. *Bebizonyítani* ezt a tételt az érett Gauss sem tudta. Bizonyítása csak jóval Gauss halála után, csak 1896. júniusában sikerült egyszerre, de egymástól függetlenül HADAMARDnak és DE la VALLÉE POUSSINnek. A komplex változó függvénytanán alapuló bizonyítást azóta többen egyszerűsítették, míg 1948-ban Atle SELBEG és ERDŐS Pál elvileg elemi, azaz a komplex függvénytant nem igénylő bizonyítását találták.

Ez a dolgozási mód később is jellemző Gaussra. Ő is, EULER is számelméleti tételeik legnagyobb részét kísérlet útján találták.

Ebben a példában csak a genius ösztönös sejtését bámulhattuk, amellyel korának annyira elébe vágott. Most olyan fiatalkori teljesítményeit fogom elmondani, amelyek már nem puszta kuriózu-

mok, hanem a világraszóló lángelmét már teljes fényében mutatják és ma is a matematika legfontosabb eredményeihez tartoznak.

1795-ben, tehát 18 éves korában fedezi fel a legkisebb négyzetek módszerét. Az első publikálás dicsősége azonban nem Gausst, hanem LEGENDRE-t illeti, aki 1806-ban közölte. Legendre Gauss prioritását kétségbevonta, Gauss ekkor csak arra hivatkozott, hogy már 1802-ben közölte OLBERSszel és a további vitában nem vett részt. Gauss igen sok felfedezését visszatartotta, ezért a prioritás kérdése sokszor felmerült. Gaussnak — amint hagyatéka megismerésénél kiderült — mindig igaza volt és mindig nobilisen viselkedett. Erre a kérdésre még visszatérek.

Arról a felfedezésről beszélek most, amely Gauss hírnevét egyszer s mindenkorra megalapította. 1796. március 30-án — tehát még 19 éves kora előtt jött rá, hogy a szabályos 17-szög körzővel és vonalzóval megszerkeszthető. Ennek a felfedezésnek a jelentőségét mutatja, hogy a szabályos sokszögek tana már a Platót megelőző időkben meg volt állapítva, évezredek során át teljesen lezártnak tekintették. Az ógörögök tudták — ha bebizonyítani nem is tudták — hogy a 7, 9, 11 stb. oldalú sokszöget nem lehet körzővel és vonalzóval megszerkeszteni, ki gondolt volna tehát arra, hogy a 17 oldalút lehet! Maga Gauss sem geometriai úton jutott felfedezéséhez, számelméleti eredményei vezették rá; a döntő gondolat a mod p vett primitív gyökök létezésének felhasználása volt. Szokatlan volt tehát már a geometriai tétel számelméleti fogalmazása is, mely szerint, ha $p=2^{2^n}+1$ prímszám, (az ún. FERMAT—GAUSS-féle prímszámok) akkor a p oldalú szabályos sokszög körzővel és vonalzóval megszerkeszthető. Ma is csak két 17-nél nagyobb Fermat—Gauss-féle prímszámot ismerünk. Gauss első felfedezése csak ennyi, a ma ismert Gauss-féle tétel, hogy ha

$$p-1=2^{\alpha}3^{\pi_1}5^{\pi_2}\cdots p_n^{\pi_n}$$

(p prímszám), akkor az

$$\frac{x^p-1}{x-1}=0$$

körosztási egyenlet megoldása α számú másod-, π_1 számú harmadfokú, π_2 számú 5-ödfokú stb. π_n számú p_n-edfokú egyenlet megoldását igényli, valamivel későbbi eredetű. Gauss braunschweigi szobrának talapzata 17 szög alapú prizma.

Gauss maga nem foglalkozott a 17-szög tényleges megszerkesztésével, de az irodalomban igen sok 17-szög szerkesztés ismeretes. A körzőt és vonalzót felhasználók közül a legrégibb az ERCHINGER-féle, nevezetesebbek a BACHMANNtól egyszerűsített SERRET-féle, geometriailag nevezetes a RICHMOND-féle. STAUDT szer-

kesztése a fix körön kivül, amelybe a poligon be van írva, csak vonalzót használ, GÉRARD és GÜNTSCHE szerkesztése csak körzőt igényel, ez utóbbié a geometrografikus.* A szabályos sokszögek szerkesztésének elmélete ma sincs még lezárva. HILBERT algebrai úton kimutatta, hogy a Gauss-féle sokszögek pusztán vonalzóval és a mértékegységgel megszerkeszthetők, de máig sem ismeretes oly szerkesztés, mely pusztán ezen redukált segédeszközökkel ér célt. Ennek oka az — s ez egy újabb nyilt kérdés — hogy az összes ismert szerkesztések a probléma algebrai megoldásából keletkeztek, mindegyik az algebrai egyenlet gyökét igyekszik megszerkeszteni, egy sem geometriai meggondolásokból ered, az utolsó egyenlet pedig a derékszögű háromszög befogójának szerkesztését kívánja az átfogóból és a másik befogóból. Ezt az utolsó feladatot nem lehet vonalzóval és átalonnal megszerkeszteni. Henri LEBESGUE (i. h. p. 150) arra figyelmeztet, hogy a primitív gyökök használata ez ideig nincs geometriailag igazolva. Referens ezeket a problémákat így foglalná össze: eddig nem sikerült a 17-szög szerkesztést az ógörög matematika eszmevilágába beolvasztani. — Az ifjú Gauss tehát oly utat nyitott meg, amelyen még ma is, fáradozásra érdemes végcélok kínálkoznak.

Ezt a felfedezést 9 nap múlva, 1796. április 8-án egy másik, még jelentékenyebb követte. Ez a quadratikus maradékok reciprocitási tételének bizonyítása volt. A körosztás problémájára évezredeken át senki sem gondolt, a reciprocitási tétel viszont *„napirenden"* volt. Az általános tételt EULER állította fel 1783-ban, halála évében. (Érdekes, hogy ezen adatot csak néhány évtizede derítette ki a matematikatörténeti kutatás, addig azt hitték, hogy a tétel LEGENDREtől ered, Euler közleménye elkerülte a figyelmet, holott a kötetet Legendre és Gauss is idézi.) Fontos speciális esetei pedig Fermat és Lagrange legnagyobb felfedezései közé tartoznak.

* A szerkesztéseket az olvasó megtalálja a geometriai szerkesztésekről szóló elterjedtebb könyvekben, így pl. ENRIQUES: *Questioni riguardanti la geometria elementare*, II Bologna 1900 és utána több kiadás, németül *Fragen der Elementargeometrie* II. Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit, Teubner 1907, utána több kiadás. Az első kiadásban a VI. cikk p. 175—188. (Bachmann—Serret, Staudt, Gérard szerkesztései), A. Adler: *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Göschen 1906. Sammlung Schubert Bd. LII. p. 215—229. (Ugyanazon szerkesztések, bemutatja a derékszöggel való szerkesztést is) VAHLEN: *Konstruktionen und Approximationen*, 1911., Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften, Bd. XXXIII p. 147—156. (Serret—Bachmann és Richmond), LEBESGUE: *Leçons sur les Constructions Géometriques*, Paris, 1950, Gauthier—Villars p. 148—150. Richmond szerkesztése megtalálható a következő elterjedt számelméleti könyvben is: G. H. HARDY and E. M. WRIGHT: *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, Clarendon Press 1938, utána még két kiadás, az első kiadásban p. 61—62.

A tételt „reciprocitási tétel"-nek hívjuk, (Gauss „theorema aureum"-nak nevezi), mert összefüggést állapít meg az

$$x^2 \equiv p \mod q \tag{1}$$

és

$$x^2 \equiv q \mod p \tag{2}$$

kongruenciák lehetősége, illetve lehetetlensége között, ha p és q két páratlan prímszám. A tétel szerint

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}},$$

ahol $\left(\frac{p}{q}\right)$ az ismert Legendre-féle symbolum.

A tétel az elemi számelmélet legfontosabb eredménye, ezért foglalkoztatta olyan intenzíven már a 18. század legnagyobb matematikusait, de általánosan bebizonyítaniok nem sikerült, holott pl. Euler a dolgozatok hosszú sorát szentelte speciális eseteinek.

Gauss egész életében foglalkozott ezzel a tétellel, sok egyéb vizsgálata is hozzá fűződik. Első hosszadalmas bizonyításán kívül még 7 bizonyítást adott rá. Ezekkel már könnyűvé tette a bizonyítást; a „harmadik" Gauss-féle bizonyítás, különösen az Eisenstein-féle geometriai alakban már egész könnyű és ma is sűrűn szerepel egyetemi bevezető előadásokban. A tétel nagy fontosságát mutatja, hogy ma közel száz bizonyítása ismeretes az irodalomban, (Magyar szerzők közül RÉDEI László adott rá több bizonyítást. egyikük rokon Gauss ötödik bizonyításával). A tétel, de csak komplex számok bevezetése után, magasabb hatványmaradékokra is kiterjeszthető, amit részben maga Gauss ért el, részben pedig programot adott a későbbi kutatóknak, akik közül csak Eisensteint említjük, de a téma az algebrai számtestek elméletében ma is fontos, elég lesz SAFAREVICS fiatal szovjet kutatónak az első magyar matematikai kongresszuson bemutatott dolgozatára hivatkoznom. A reciprocitási tételnek ez a története egyszersmind jellemző Gaussra, egyrészt végleg lezárja a múltat, másrészt irányt mutat a jövőre.

A 19 éves Gauss persze semmit sem tudott elődeiről, a problémát is, megoldását is önmaga találta. Gauss első bizonyítása még Dirichlet lényeges egyszerűsítései után is hosszadalmas, de a máig ismertek közül is kiválik azzal, hogy magából a problémából van merítve. Sok részlete egyébként hasonló LAGRANGE azon bizonyításához, amellyel a 2 kvadratikus karakterét megállapította. A tétel legnehezebb része ez; ha q valamely $8n+1$ alakú prímszám, akkor kimutatandó, hogy van oly q-nál kisebb prímszám, melynek q

nem maradéka. Míg a többi esetben a tétel tagadása egy formulával rögzíthető állításhoz vezet, amelynek lehetetlensége kimutatható, ez az eljárás itt nem használható. Ezt a nagy nehézséget Gauss csak többszöri sikertelen próbálkozás után oly gondolatmenettel küzdötte le, amelyet KRONECKER nyomán (eine Kraftprobe Gauss-schen Geistes) ma is *„erőpróbá"*nak neveznek. Az újabb számelméleti könyvek nem tartalmazzák Gauss első bizonyítását, tehát az erőpróbát bemutatom.

Bizonyítandó, hogy van oly $p = 2m+1 < q$ prímszám, melynek q kvadratikus nemmaradéka. Ha az állítással ellentétben q minden nála kisebb páratlan prímszám kvadratikus maradéka lenne és mivel $q \equiv 1 \bmod 8$ miatt 2-nek és 2 minden hatványának kvadratikus maradéka, azért az

$$1.2.3 \ldots 2m(2m+1) = (2m+1)!$$

szorzatnak is kvadratikus maradéka lenne, vagyis találhatók a

$$q \equiv k^2 \bmod (2m+1)! \tag{3}$$

feltételt kielégítő k számok, ahol $(k, (2m+1)!) = 1$, mert $2m+1 < q$ így egyszersmind $(q, (2m+1)!) = 1$. (3)-ból következik, hogy a $(2m+1)!$ modulusra.

$$k(q-1^2)(q-2^2)\cdots(q-m^2) \equiv k(k^2-1^2)(k^2-2^2)\cdots(k^2-m^2) \equiv$$
$$\equiv (k-m)(k-m+1)\cdots(k-1)k(k+1)\cdots$$
$$\cdots(k+m-1)(k+m) \bmod (2m+1)!$$

Az utolsó szám $2m+1$ számú egymásra következő szám szorzata, tehát osztható $(2m+1)!$-sal; azonban $(k, (2m+1)!) = 1$, tehát a

$$(q-1^2)(q-2^2)\cdots(q-m^2)$$

szorzat osztható $(2m+1)!$-sal, vagyis az

$$\frac{1}{m+1}\,\frac{q-1^2}{(m+1)^2-1^2}\,\frac{q-2^2}{(m+1)^2-2^2}\cdots\frac{q-m^2}{(m+1)^2-m^2}$$

szorzat egész szám.

Ez a szorzat azonban semmi esetre sem lehet egész szám, ha m gyanánt $[\sqrt{q}]$-t választjuk, mert ha $m < \sqrt{q} < m+1$, akkor a szorzat minden tényezője valódi tört. Ez a választás megfelel a feltételeknek, hiszen $2m+1 < 2\sqrt{q}+1 < q$. Erre az m számra tehát ellentmondást mutattunk ki.

Gauss híres könyve a *Disquisitiones arithmeticae* ugyan csak 1801-ben jelent meg, de már most szólok róla, mert évekkel előbb keletkezett. Gauss már 1798-ban Bolyaihoz irott levelében panasz-

kodik, míly lassan halad előre könyvének nyomása. Ez a könyv szerény címe ellenére a matematikai irodalomnak talán eszmékben leggazdagabb könyve, a számelmélet haladását egy évszázadnál jóval továbbra kijelölte, még ma sem nevezhető pusztán történeti ereklyének. A kongruencia fogalmának bevezetését maga Gauss a betűszámtan feltalálásával, vagy a differenciálszámítás LEIBNIZ-féle symbolikájával egyenlő jelentőségűnek tekinti. Megjelenésekor azonban csak a körosztást tárgyaló utolsó fejezete keltett feltűnést. Évtizedekig tartott, amíg megértették és hatása csak Dirichlet fáradozásai folytán vált általánossá.

Ilyen rendkívüli könyv sikertelenségében a szerző sem ártatlan. A Disquisitiones Arithmeticae rendkívül nehéz olvasmány. Gaussnak egész élete folyamán, már kora ifjúságában is „pauca, sed matura" volt a jelszava. Beállítottsága kora legnagyobb lángelméinek beállítottságával egyezett. Ez a kor a klasszikusok kora. Elég lesz GOETHÉre, SCHILLERre, a zenében a „bécsi nagy klaszszikusokra" gondolnunk. Gauss szigorúan vett klasszikus, aki rendkívüli súlyt helyez a külső formára is. Külső formáiban az ógörög klasszikusok a mintái, abban is, hogy eszméinek keletkezését nyomtalanul eltörli. Az olvasó érzi, hogy *így* nem lehetett a dologra rájönni. Bámulja a műalkotás szépségét, a kifogástalan levezetések tökéletességét, de hidegnek érzi, hiányolja benne az élet meleg lüktetését, semmi hivatkozás nincs a leküzdendő nehézségekre, egyforma símán halad át a könnyebb és a legnehezebb dolgokon. Elvvé emeli ezt a gondolatát: „Nem katedrális az, amelyen meglátszanak az állványok nyomai". Mikor valaki egyszer egy készülő műve iránt érdeklődött, így felelt: „Eredményeim rég megvannak, csak azt nem tudom még, hogyan fogom őket elérni." Gauss azt a munkát, amely nem titkolta el eredetét, nem tartotta közlésre érettnek. Gondolatainak keletkezését, a felfedezés útját csak levelezése és naplója — amelyről még szó lesz, de amelyet csak 1899-ben, 44 évvel halála után találtak meg — árulja el, de csak néha. Az olvasó azonban nemcsak okulni és gyönyörködni akar, hanem azt is megkívánja, hogy a tanulmányozott műből saját munkáihoz is kapjon ösztönzést és irányítást. Ezt pedig csak akkor várhatja, ha a szerző bepillantást enged saját szellemi műhelyébe. Ez utóbbival Gauss adós marad, pedig őmaga írja egyik, Bolyai Farkashoz intézett levelében: „Valóban nem a tudás, hanem a tanulás, nem a birtoklás, hanem a megszerzés, nem a lét, hanem a keletkezés az, ami a legnagyobb élvezetet nyújtja. Ha valamely dologgal teljesen tisztába jöttem, elfordulok tőle és a homályba merülök. Ilyen különös a telhetetlen ember".

1797-ben bebizonyítja az algebra alaptételét, amely 1799-ben a doktori fokozatot szerzi meg neki — in absentia. Magát a tételt

közel 200 év óta felismerték, de a Gauss előtti bizonyítási kísérletek nem sikerültek. Ma Gauss első bizonyításában is kifogásolnák, hogy felteszi, hogy a páratlan fokú egyenletnek van gyöke, vagyis ha $f(x)$ valamely polinomot jelöl és $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$, akkor $f(x)$-nek a és b között van gyöke. Ezt a tételt a szemlélettől függetlenül csak 1817-ben bizonyította be BOLZANO. Gauss egyébként disszertációjában még kerüli a komplex számok használatát és a tételt úgy fogalmazza, hogy $f(x)$ első és másodfokú tényezők szorzatára bomlik. Gauss az alaptétellel később is foglalkozott. Még 3 bizonyítást ad rá, amelyekből kiderül, mily mélyen hatolt be a komplex változó függvénytanába. A doktorátusának 50-ik évfordulójára készült 4. bizonyítás lényegében megegyezik az elsővel, de már nyiltan használja benne a komplex számokat. Ezzel kapcsolatban szóljunk néhány szót Gauss híres *szigorúságáról*. A legrégibb konvergenciavizsgálatokat Gauss végezte. A kortársaknál valósággal legendás volt Gauss bizonyításainak szigorúsága. Meine Herren, für Gausssche Strenge haben wir keine Zeit, mondta állítólag Jacobi. De maga a szigorúság fogalma változik az idők folyamán. Amit Gauss idejében megtámadhatatlannak tartottak, azon ma esetleg sok kifogásolni valót találunk. Ma a harmadéves hallgató fennakadna az első bizonyítás most említett lépésén. Gauss szigorúságát a későbbi időkben meghaladták. WEIERSTRASS szigorúbb Gaussnál és ma szigorúbbak vagyunk Weierstrassnál. Gauss álláspontját így foglalhatnók össze: *matematikai* dedukciói kifogástalanok, de az axiomatikus vizsgálatok — a párhuzamosak axiómájától eltekintve — úgyszintén az ún. logikai alapok nem érdeklik.

Gauss ifjúkorának a tiszta matematikának szentelt száguldó iramú alkotó tevékenységében, amelyben jóformán naponta tesz nagy matematikai felfedezéseket, legtöbbet az elliptikus függvények elméletének megalkotása foglalkoztatja. Erről ugyan nem publikált semmit, de említett naplójából jól követhető a felfedezés útja, amely persze nem egyezik meg azzal az úttal, amelyen a kezdő elsajátítja az elméletet. A LIOUVILLE és WEIERSTRASS óta követett tanmenet az elliptikus függvények kétszeres periódicitásából indul ki. Gauss a körosztásból kiindulva a lemniszkáta osztási egyenletéhez jut, azután innen és az „aritmetikogeometriai középből" fejleszti ki azt. Csakhamar felismeri a két probléma összefüggését, eljut az

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

lemniszkátaintegrál megfordításához, mégpedig a komplexben. Felismeri, hogy a megfordítással nyert függvények egyszerűbbek

az integráloknál, amint a trigonometrikus függvények egyszerűbbek a ciklometrikusoknál. Egyidejűleg a síkrácsokat tanulmányozza, először csak számelméleti szempontból, ezután állapítja meg a kapott függvények kettős periodicitását. 1800. május 6 és június 3 között a négyzetes rácsparallelogrammát az általánossal pótolja és ez alatt a pár nap alatt megalapozza az általános elliptikus, sőt a modulfüggvények elméletét, ezzel nemcsak azt éri el, amit 25-26 év mulva ABEL és JACOBI, hanem még túl is megy rajtuk.

Életének ez a páratlan iramú felfedező korszaka azonban 23-24 éves korában, 1801-ben egyelőre lezárul, mert utána évekig főleg alkalmazott matematikával, elsősorban csillagászattal foglalkozik. Legnevezetesebb munkájának referálására szorítkozom.

1801. január 1-ének éjszakáján PIAZZI olasz csillagász Palermóban felfedezi az első kis bolygót a Cerest, mely azonban nem egész 9 ívfoknyi pálya befutása után, 41 nap múlva eltünt. Az égitestek pályaszámításának akkori módszerei a nagy bolygók hosszú ideig megfigyelhető pályáihoz voltak szabva. Gauss tehát úgy tűzte ki maga elé a feladatot, hogy meghatározandó az égitestnek a Kepler törvények szerinti mozgása 3 teljes megfigyelésből (időpont, rectascensio, deklináció). A matematikai feladat tehát a kúpszelet meghatározása a térben, melynek fókusza (a Nap) ismeretes, amely 3 adott térbeli egyenest (az ellipszisben mozgó Földről kiinduló három látósugarat) metsz, és amelynek az ezen egyenesek közé eső ívét a Kepler törvény határozza meg. A probléma 8-adfokú egyenletre vezet, amelynek egyik megoldása — a Földpálya — ismeretes. A keresett megoldást a többi hattól, fizikai meggondolások különítik el.

Ezt a nehéz problémát teljes részletességgel numerikusan is megoldotta az akkor 24 éves Gauss. A végeláthatatlan numerikus számításokhoz Gauss szorgalmára és vasenergiájára volt szükség. Közelítő módszereket használt, amelyeket persze előbb ki kellett gondolnia. A pályaszámítást ezenkívül négy nem teljes megfigyelés alapján is elvégezte, a kétféleképp nyert eredményt a legkisebb négyzetek módszerével kapcsolta össze. Ez a módszer akkor még nem volt publikálva, de, amint már említettem, Gauss 1795 óta ismerte. Cerest 1802. januárjában Gauss számításai alapján újra feltalálták, mégpedig igen messzire, 7°-nyira azon helytől, ahol körpálya esetén lennie kellett volna. Ezen rendkívüli teljesítménye révén lett Gauss világhírű, ez alapította meg legendás hírnevét.

A Ceres pályaszámításánál használt módszereit tovább fejlesztve tartalmazza 1809-ben megjelent híres könyve a *„Theoria motus corporum coelestium“*, amely azóta az égi mechanika standard műve. De erre is áll, ami Gauss minden művére, klasszikusan tökéletes remekmű, formai szépsége teljes, de hiába keressük

benne azt, hogy szerzője hogyan jutott felfedezéséhez, ennek minden nyomát eltörli.

Gauss csillagászati tevékenysége folytatódott. Csakhamar kiderült, hogy Ceres nem a keresett bolygó Mars és Jupiter között, mert már 1802. márciusban még egyet találtak, a Pallast. (Azóta persze sok más istennővel, sőt kisebb rangúakkal is benépesült az ég.) A Pallas pályaszámítása újabb nehézségekkel járt, amiket egyedül Gauss tudott leküzdeni. Pallas pályájának rendkívüli excentricitása és az ekliptikához való nagy hajlásszöge miatt a többi bolygó részéről szokatlanul nagy háborgatásnak van kitéve. Ennek a minden képzeletet felülmúló nehézségű és terjedelmű számításnak vetette magát alá Gauss. Fáradhatatlanul éveket szentelt neki, a beláthatatlan tömegű numerikus számolás ellenére. A Jupiter és Saturnus okozta perturbáció számbavétele után munkája befejezetlenül maradt. Szóljunk egy-két szót módszeréről, mert Gauss a matematikai szigorúság nagymestere, a matematika alkalmazásaiban egyáltalán nem szigorú. Végtelen trigonometrikus sorokat használ, a számítást, amikor úgy véli, hogy a tagok elég kicsinyek, abbahagyja, de egyáltalán nem becsüli meg az elkövetett hibát.

Magától értetődik, hogy alkalmazott matematikai munkássága közben sem hanyagolja el a tiszta matematikát sem. Folyton hangsúlyozta, hogy a tiszta matézis, főleg a számelmélet gyönyörűségével nem ér fel semmi. Csak néhány kiemelkedő jelentőségű, jól ismert munkáját fogom felemlíteni.

1808-ban megjelent, a reciprocitási tétel 4. és 6. bizonyítását tartalmazó híres dolgozatában *Summatio quarumdam serierum singularium* találjuk egyik legnagyobb felfedezését az ún. *Gauss-féle szummák* meghatározását. Ezekben nyilvánul meg a kapcsolat Gauss nagy teljesítményei között és oly univerzális perspektívát nyújt szinte az egész matematikára, mint kívüle talán csak Dirichlet nevezetes dolgozata a számtani sor prímszámairól. A tétel legegyszerűbb alakja p prímszámokra specializálva

$$\sum_{r=1}^{p-1}\left(\frac{r}{p}\right)e^{\frac{2\pi ir}{p}}=\sum_{r=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{r^2}{p}}=\begin{cases}\sqrt{p} & \text{ha } p\equiv 1 \bmod 4\\ i\sqrt{p} & \text{ha } p\equiv 3 \bmod 4\end{cases}$$

A négyzetgyök előjele plus jellel veendő. A szummák a körosztás elméletében léptek fel, de a reciprocitási tétellel (Gauss 4. bizonyítása), valamint a kvadratikus alakok osztályszámával és az elliptikus függvények elméletével is összefüggnek. Sajátságos, hogy a sor abszolut értékének, vagy ha tetszik négyzetének, megállapítása könnyű. A nagy nehézség, melynek leküzdése Gaussnak csak sok évi gondolkodás után sikerült, az előjel megállapítása volt. Ez amint Gauss maga mondja, egy reggel hirtelen tisztán állt előtte. Amint valahol olvastam, Gauss egyetlen projekcióból

találta el az egész épületet. Ugyebár mondanom sem kell, hogy nagy dolgozatában publikált levezetése, melyben az összeget szorzattá alakítja át, sima gördülékenységében semmit sem árul el a nehéz küzdelemből és az elliptikus függvényekből eredő valódi hátteréből. Ma már a tételnek igen sok bizonyítása ismeretes és már egyáltalán nem félelmetes, jelentékenyen általánosították, a felsőbb számelmélet minden tankönyvében megtalálható. A modern analitikai számelmélet WEYL-féle és KLOOSTERMANN-féle szummái elődeinek tekinthetők.

1812-ben jelent meg alapvető dolgozata a *hypergeometrikus sorról*. (A név csak arra figyelmeztet, hogy a sor a geometriai sor általánosítása). Ennek a munkának nagy jelentőségű eredményein kívül fontos érdeme, hogy itt találkozunk először a mai igényeket kielégítő *konvergencia vizsgálattal*. A *mechanikus kvadratúráról* szóló, 1814-ben megjelent klasszikus dolgozata az alkalmazások talajából nőtt ki, hiszen a kérdés eminenter praktikus, hogy mikor mérjünk lázat, mikor figyeljük meg a meteorológiai adatokat. A kérdés tehát, hogy mely pontokban kell az ordinátákat meghatározni, hogy az integrált a legkevesebb számú — mondjuk észleléssel — a legpontosabban becsülhessük meg. A meglepő eredmény, hogy a Legendre polinomok gyökei a legcélszerűbb alappontok, kezdettől fogva klasszikus. Ez a munkája is beláthatatlan jelentőségű fejlődést indított meg, az *interpoláció* elméletét, mely a magyar matematika legfényesebb lapjai közé tartozik, hiszen az interpoláció modern elméletének lényeges eredményeit FEJÉR LIPÓT és tanítványai érték el.

Gauss csak tökéletes munkákat adott ki kezéből, reménytelen vállalkozás lenne, ha referálásukat, akár csak tárgykörük jelzését tovább akarnám folytatni. Mindössze két tárgykör az, amelyről még beszélni fogok.

Az egyik a *komplex számok*, a másik, amelyik mutatja, hogy a gyakorlati munka hogyan inspirálta a legmagasabb rendű tudományos produkcióra. Hogyan kapcsolódott össze nála a gyakorlati földmérés a *felületelmélettel*, a *nemeuklideszi geometriával* és a *konform leképezéssel*.

A *képzetes számok* már az újkori matematika hajnalhasadásakor jelentkeztek. Hiszen, ha a harmadfokú egyenlet mindhárom gyöke valós, a Cardan formula komplex számból való gyökvonást kíván, ami nem csekély zavarba hozta a 16. és 17. század matematikusait. A negatív számok logaritmusa körül folytatott híres vita mutatja, hogy nagynevű matematikusoknak még a 18. században is mily bizonytalan fogalmaik voltak a képzetes számokról. Nem csoda, hiszen elméletük sehogy sem volt megindokolva. Gauss az, aki a komplex számoknak, hogy saját szavait használjam, a „teljes

polgárjogot" megadta. Maga a „komplex szám" szó is tőle való. Sőt Gauss teljesen ki is akarta küszöbölni a „képzetes" szó használatát. Geometriai ábrázolásuk a sík pontjaival könnyen felfoghatóan mutatta „valós" létezésüket. Ebben Gaussnak két előde is volt. WESSEL dán mérnök 1798-ban, ARGAND (francia) 1806-ban mutatta meg geometriai ábrázolásukat. Mindkét elől műve feledésbe merült, csak a matematikatörténeti kutatás hozta őket jóval később felszínre.

Gauss érdeme nem csupán a geometriai ábrázolásuk (ami végül is külsőség), hanem felfedezte, CAUCHYt megelőzve a komplex úton vett integrálokat, sőt számelméleti vizsgálatokat végzett velük és ugyanazzal a betűvel jelölte a mennyiséget, akár valós, akár komplex. A „Gauss-féle számtestben" pl. bebizonyította FERMAT nagy tételét $n = 3$ és $n = 4$ esetében. Ez a felfedezése is messze előre mutatott a jövőbe. A kubikus és bikvadratikus maradékok reciprocitási tétele is csak a komplex számok bevezetésével vált áttekinthetővé és tárgyalhatóvá.

Referens véleménye, hogy ilyen jelentőségű az egész matematikára kiható felfedezés csak akkor számíthatott sikerre, ha nagy tekintélyű, elismert tudós száll síkra érdekében, ismeretlen nevű felfedező fáradsága kárbaveszett, mert nem ügyel rá senki.

Áttérek Gaussnak a hannoveri felméréssel kapcsolatos munkásságára. A napoleoni háborúk és a fejlődő kapitalizmus adószempontja szükségessé tették az országok szakszerű felmérését. A hannoveri királyság — ebben feküdt Göttingen — 1816-ban Gaussot kérte fel a munkálatok vezetésére. Gauss vállalta a megbízatást, sok munkatárs közreműködésével. A munka 25 évig tartott, de ez az idő sem volt meddő Gauss életében, hiszen nagy felfedezésekhez merített belőle inspirációt. Ő állapította meg a geodézia ma is használatos módszereit. Legfontosabb a legkisebb négyzetek elvének következetes alkalmazása. Továbbá az ellipszoidnak a síkra való egy különleges konform vetülete, melynél a geodetikus vonalaknak az egyenestől való eltérését maga Gauss számította ki. A módszer némely részlete azóta persze elavult, de Gauss működése oly nagy hatású volt, hogy a geodéták Gaussot a magukénak tekintik.

Gauss tudta, hogy az ellipszoid csak közelítőleg irja le a Föld alakját és a geoid (ez a szó Gauss göttingeni kartársától LISTINGtől, a topológia megalapítójától származik) közelebbi megismerésére törekedett. Az ezen komplikált felületen tapasztaltakat igyekezett átvinni az általános felületre. A fokmérést a nemeuklideszi geometriáról való spekulációival is kapcsolatba hozta. Egy találmánya segítségével oly nagy háromszög szögeit mérte meg, aminőt addig nem mértek. A háromszög szögösszegének valamikor az

experimentum crucis jelentőségét tulajdonították, hogy melyik geometriai rendszer érvényes a valóságban. A kísérlet eredménye negatív volt, a szögösszeg eltérése a 180°-tól a mérési hibák alatt maradt.

Bizonyos, hogy a géniusz röpte kifürkészhetetlen, de ezek a példák mutatják, hogy a fokmérésnek része van a gondolatsor elindításában, mely a *Disquisitiones generales circa superficies curvas* mesterművéhez vezetett. Gaussnak talán egyetlen műve sem revelálja komprimáltabban a zsenit.

Itt vezeti be a felületnek két rajta lévő görbesereggel való jellemzését, a ma is szokásos

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v)$$

előállítást. Ugyanebben a munkában vezeti be a konform leképezést, ami világosan mutatja, hogy a térképre, a görbe felületnek síkon való ábrázolására gondolt. Ugyanitt állapítja meg a *felület görbületének* ma szokásos értelmezését. Talán nem általánosan ismeretes, hogy a normálmetszetek főgörbületi sugarai segítségével GERMAIN Zsófia már előbb megkísérelte a felület görbületének definícióját, Gauss definíciója azonban sokkal nagyobb horderejűnek bizonyult, mert hajlításnál (nyújtás nélkül) nem változik.

A földmérésből való eredetre mutat az a híres tétele, mely szerint a geodetikus háromszög szferikus képének területe a szferikus excesszussal arányos. (Közbevetett megjegyzés: Gauss még nem használja a ma általános „*geodetikus*" elnevezést, ezt csak LIOUVILLE vezette be MONGE híres könyvének *Application de l'Analyse à la Géométrie* 1850. évi kiadásában. Gauss „*legrövidebb*" vonalat mond.)

A *Disquisitiones generales* ma is minden matematikus általános műveltségéhez tartozik. Mondanom sem kell, hogy ez is klaszszikus modorában van írva, legmélyebb gondolatait ebben is eltitkolja, keletkezésének útja csak jóval később, levelezésének megismerésekor derült ki. Fő mozgató rugója a geometria alapjai, a nemeuklideszi geometriának görbe felületeken való megvalósítása útján a felületelmélettel való összefüggése. Emlékeztetek két híres tételére:

Ha egy görbe felület valamely pontjából kiinduló összes geodetikus vonalakra felmérjük ugyanazt a távolságot, a végpontokat összekötő vonal mindegyikre merőleges.

Ha a görbe felületen fekvő görbe minden pontjából kiinduló ugyanazon oldalán haladó geodetikus vonalak mindegyikére ugyanazt a távolságot felmérjük, a végpontok mértani helye merőleges az összes geodetikus vonalakra.

Ki ne gondolna ezen tételek hallatára a nemeuklideszi geometriára, a Bolyai-féle äquidistans vonalra? Hogy Gauss szeme előtt csak a hiperbolikus geometria lebegett, onnan világlik ki, hogy hallgatólag felteszi, miszerint a felület két pontját általában csak egyetlen geodetikus vonal köti össze. Az állandó görbületű felületen a geodetikus kör csak igen speciális esetben, a geodetikus egyenlőközű pedig *csakis a 0 görbületű felületen* lehet geodetikus vonal. Bolyai Farkas ún. göttingai parallela elméletében a párhuzamosak axiómáját azzal akarta bebizonyítani, hogy az egyenessel egyenlőközű vonal maga is egyenes, Gauss rámutatott okoskodásának hibájára. A Disquisitiones gen. most idézett tétele mutatja, hogy Bolyai bizonyítási kísérlete nem sikerülhetett, hiszen az állítás *csak* a 0 görbületű felületen, az euklideszi síkon igaz.

Gaussnak még igen sok jelentékeny eredményt köszönhet a matematika — de abbahagyom referálásukat, hiszen a matematikának majdnem minden ágában maradandót alkotott. *Fizikai* tevékenységének ismertetésénél megelégszem a legfontosabb tárgykörök puszta megemlítésével. Természetesen fizikai munkái is hatalmas matematikai felkészültséget igényeltek. Témái elsősorban a potenciálelmélet, elektrodinamika és a földmágnesség. Ez utóbbi különösen érdekelte és egyik legnépszerűbbé vált teljesítménye a Föld mágneses déli sarkának elméleti meghatározása. A földmágnességhez fűződik beláthatatlan jelentőségű technikai találmánya, amellyel az emberiség egész életét átalakította, és amely nélkül mai életünk elképzelhetetlen lenne. Ez a *távközlés*, az elektromos távíró feltalálása. Gauss érdeklődése ugyanis csak 50 éves kora után fordult a földmágnesség felé. Ő a messzi csillagdán lakott és a fizikai laboratóriumban folyó kísérletek eredménye szerfölött érdekelte, de semmi kedve sem volt a zimankós téli időben a hosszú út megtételére. Erre elkezdett gondolkodni, hogyan kaphatna hírt anélkül, hogy szobáját el kellene hagynia. Márpedig ő azt szokta mondani, hogy őt csak szorgalma különbözteti meg a többi embertől, a gondolkozást tehát nem hagyta abba addig, amig rá nem jött a megoldásra. Felismerte találmánya rendkívüli jelentőségét, mégis találmányát üzletileg csak egy amerikai mérnök értékesítette. Ismeretes, hogy a fizikai mérésekben általánosan elterjedt *tükörleolvasás* is Gauss találmánya.

Gauss fiatalkori *naplójáról* kell még néhány szót szólnom. Ezt 1796. március 30-án, a körosztás felfedezése fölött érzett örömében kezdi vezetni és benne feljegyzi felfedezéseit. Ifjúkorában jóformán naponta tesz nagy jelentőségű matematikai felfedezéseket. Legtöbb feljegyzésében csak a tételre szorítkozik, néha sajátságos módon, úgy, hogy némelyik feljegyzés értelme ma sincs felderítve. Egyik feljegyzése pl. 1796. július 11 *EΥΡΗΚΑ*

$$n = \triangle + \triangle + \triangle$$

Ezt sikerült megfejteni, hogy ti. bebizonyította FERMATnak azt a nagy tételét, hogy minden szám három háromszögszám összege és amely a Disquisitiones Arithmeticaebe is bekerült — de ma sem könnyű. A megközelíthetetlen szigorú férfiú itt emberi közelségben mutatkozik, lelkesedik felfedezéseiért, némely nagyobb eredménye után önmagát dicséri. Furcsa, hogy ebben a füzetben a nagy felfedezések mellett banális differenciálási gyakorlatok is vannak, az elliptikus függvényekről szóló fontos felfedezését sablonos integrálási szubsztitucíók begyakorlása előzi meg. Hiába! tanulnia a lángésznek is kell. A naplóból jól követhető, hogyan hatol be mind mélyebben az elliptikus függvények elméletébe. A naplót hosszabb hézagokkal évekig vezeti, a 144. számú utolsó feljegyzés 1813. október 23-án kelt. A naplót, mely oly sok felfedezés nyitját és összefüggését adja meg, amint már említettem csak 1899-ben találták meg.

Gauss *magyar kapcsolataira* térek át. Mondókámat rövidre foghatom, mert a legfontosabb, *Bolyai* Farkassal való barátsága és levelezése közismert. Bolyai Farkas, mint az ifjú Kemény Simon báró nevelője 1796-ban került Göttingenbe, ahol ugyanakkor az ifjú Gauss is tartózkodott. Gauss mögött ekkor már világraszóló nagy felfedezések álltak, de azért hébe-korba nyilván az egyetemre is ellátogatott. Persze az öreg KÄSTNERtől nem volt mit tanulnia, le is rajzolta Kästnert, amint a táblán ép elvét egy összeadást. A rajzot Bolyainak ajándékozta.

Ott Göttingenben került össze Bolyai Farkas Gausszal és — hogy levelezésük előszavát idézzem — „mint két hasonló gondolkodású, minden nemes iránt lelkesedő ifjak szoros, meleg barátságot kötöttek." Két év mulva el kellett válniok. Levelezésük ennek az intim barátságnak igen szép tanújele. Ha Gauss néhány napra eltávozik Göttingenből, ír Bolyainak. Bolyai hazatérésekor Gauss elébe utazik, hogy még egyszer láthassák egymást. Bolyai hazaérkezésével a levelezés folytatódik. Amint az ilyenkor természetes, a levelezés eleinte sűrűbb — később ritkul. Néha sok év telik el két levél között, de a hang mindvégig igen meleg, nemcsak Bolyai, hanem Gauss részéről is. Ha Gaussot magyarok meglátogatták, ami többször megtörtént, sohasem mulasztotta el, hogy élénken ne érdeklődjék Bolyai iránt.

Bolyai Farkast már göttingeni tanulókorában foglalkoztatta a párhuzamosak problémája, bizonyítását 1804-ben elküldi Gaussnak. Gauss válaszában szerelmi ömlengések vannak menyasszonya kiválóságáról, majd néhány napi szünet után, amint írja, hogy másra is tudjon gondolni, kritikát ír Bolyai dolgozatáról és rámutat hibájára. Gauss már előbb, 1799. december 16-án is ír a parallelákról, közli Bolyaival, hogy több dologra rájött, amit a legtöbben elfo-

gadnának bizonyítás gyanánt, de ami az ő szemében semmit sem bizonyít. Ha pl. be lehetne bizonyítani, hogy található oly háromszög, melynek területe bármely megadott felszínnél nagyobb, szigorúan meg tudja alapozni az egész geometriát. A mai olvasónak a *superficies curvas* olvasásakor az a benyomása, hogy Gauss időközben eljutott a nemeuklideszi geometria gondolatáig. Gauss nagy érdeklődését a nemeuklideszi geometria iránt az is mutatja, hogy RIEMANN habilitációs előadása tárgyául minden tradició ellenére a harmadikul megjelölt, a geometria alapjairól szóló témát választotta, azzal az indokolással, miszerint kíváncsi, miképp gondolkozik egy ily fiatal ember egy ily nehéz kérdésről.

Magánlevélben ugyan megírta Gauss, hogy Bolyai Jánost elsőrangú zseninek tartja, de annál feltűnőbb, hogy egyetlen szót sem talált Bolyai János nyilvános dicséretére. Talán ALEXITS György szellemes apercuje adja ennek okát. Gauss világosan látta a nemeuklideszi geometria forradalmi voltát és ezért ez alkalommal úgy látszik az udvari tanácsos legyőzte benne a matematikust. Hiszen, ha csak annyira kiáll Bolyai, mint később LOBACSEVSZKIJ mellett, akit a göttingeni akadémia tagjául választatott meg és erről őt sajátkezű levélben értesíti, Bolyai sorsa és produktivitása valószínűleg másképp alakul, és vele a magyar matematika fejlődése is. Ez, sajnos, másképp történt, amire elfogadható magyarázatot adni nem tudunk.

Gauss más magyar tudósokkal is levelezésben állt. Így pl. PASQUICH János páterrel, a gellérthegyi csillagda igazgatójával, a pesti egyetem matematika tanárával. Pasquich Gausshoz fordult, ajánljon neki segédül egy ügyes csillagászt. Gauss igen szívélyes, kollegiális hangú levélben ENCKÉT ajánlotta, de a bécsi udvar intrikái folytán Encke, a magyar tudomány kárára, nem jöhetett Pestre. Pasquichot Gauss nyilvánosan is dicsérte, úgyszintén Csernák debreceni származású matematikust is. TITTEL Pál egerfőegyházmegyei pap, Pasquich utóda, Gauss tanítványa volt és Gauss többször említi leveleiben.

Gauss ugyan igen sokat *produkált*, de aránylag keveset *publikált*. Összes műveinek 15 kötetéből 5 kötetnyit. Ennek persze több oka van. Részben az, hogy ifjú éveiben annyi ideája volt, hogy ideje sem volt kidolgozásukra. Vele is többször megtörtént, hogy némely tárgyat nem tudott a kívánt befejezéshez juttatni. Igen érdekes ebből a szempontból egy 1837-ben DIRICHLEThez intézett levele. Ebben a levélben gratulál Dirichletnek a számtani sor prímszámairól szóló korszakalkotó dolgozatához, melynek százéves jubileuma alkalmával a Crelle Journal a levelet facsimilében közölte. Gauss felemlíti a levélben, hogy az osztályszám formulához évtizedekkel azelőtt ő is eljutott és nagyon kéri Dirichlet-t, szenteljen neki időt, jöjjön hosszabb tartózkodásra Göttingenbe,

segítsen neki iratai átnézésében és feldolgozásában, nehogy halálával mindaz elvesszen, amit alkotott. Talán nem köztudomású, hogy Gauss már jóval előbb igyekezett Dirichlet-t a göttingeni egyetem részére megnyerni.

Mégis annak, hogy a publikálás nem tartott lépést a produkcióval, legfőbb oka, *szigorú*, sőt túlszigorú *önkritikája*. Legértékesebb eredményeit és gondolatait is visszatartotta, ha az volt az érzése, hogy nem nyujthat befejezettet, hogy valahol még valami hiányzik. Néha csak azért, mert legmélyebb gondolatait nem akarta közismertekké tenni. Gaussot ma nagy útmutatónak tartjuk, de ebben sok része van a hagyatékában feltárt kincseknek és azoknak a kutatóknak is — elsősorban Dirichletnek —, akik kihámozták Gauss eredeti gondolatait, amelyek még nemzedékek múltán is gyujtani tudnak.

Gauss mint tanár és tudós, inkább a 18. mint a 19. század tipusát testesíti meg. A 18. században a tudomány székhelyei az akadémiák. A 19. században a tudomány fókuszai az egyetemek és mind nagyobb szerepe jut a tanításnak. Franciaországban ezt az átalakulást MONGE kezdeményezi és a forradalom valósítja meg. Németországban azonban — a matematikában! — csak DIRICHLET és JACOBI. Különösen az utóbbi. Gauss nem szeretett tanítani, előadásai ritkán mentek túl Euleren. Saját kutatásai közül többnyire csak a legkisebb négyzetek elméletét adta elő. A német matematikus ifjúság színe-java természetesen igyekezett Gausstól tanulni, de nem igen sikerült vele személyes kapcsolatot találniok. Oly nagy geometriai tehetségeket, mint MÖBIUS és STAUDT, csillagászatra fogott. EISENSTEIN és RIEMANN is Gauss tanítványok, ez utóbbi saját bevallása szerint nem sokat tanult tőle. Pedig a göttingeni egyetem irattárából kitetszik, hogy Gauss méltányolta Riemannt. Riemann klasszikus disszertációjáról a következő hivatalos bírálatot adta: „A Riemann úr részéről benyujtott disszertáció a szerzőnek a tárgynak az értekezésben foglalt részeiben való mély és beható kutatásainak meggyőző bizonyítéka, alkotó erőről, valódi matematikai szellemről és ragyogóan termékeny eredetiségről tanuskodik. Előadása világos és tömör, sőt néhol igen szép. Kétségtelen, az olvasók többsége jobb szeretne több világosságot az elrendezésben. Végeredményben ez egy igen tartalmas és értékes munka, mely nemcsak megfelel a doktori disszertációtól megkívánt követelményeknek, hanem azokat lényegesen meghaladja."[1] WEBER írja, hogy Riemann habilitációs előadása a geometria alapjairól — amelynek centennáriumát tavaly ünnepelték — valósággal extázisba hozta az akkor már 78-ik évében levő Gaussot.

[1] Fordításom nem a német eredetiből, hanem angol fordításának francia fordítása alapján készült. Lehetséges tehát, hogy apró nuanceokban eltér az eredetitől.

Gauss megközelíthetetlenségéről legendák keringtek. Ritkán méltányolta mások érdemeit, én a magam részéről ennek abban látom nyitját, hogy neki alig mondhattak újat. Az időközben tett és publikált nagy felfedezéseket ő már jóval, néha évtizedekkel előbb megtette, nem csoda tehát, hogy őt nem ejtették bámulatba, és megelégedett a megállapítással, hogy az új nagy eredményt ő már esetleg 30 év óta tudja. Ez azt is mutatja, hogy a megfelelő korban a problémák szinte megérnek, amikor a társadalomnak szüksége van rájuk. — Ez lehet a nyitja, hogy közepes teljesítményeket inkább elismert, mint a rendkívülieket. Ugyanez lehet a magyarázat, hogy viszont EISENSTEINt — aki kétségtelenül igen nagy matematikus — annyira túlbecsülte, hogy azt mondta: három korszakalkotó nagy matematikust ismer, ARCHIMEDEST, NEWTONt és EISENSTEINt. Ma ezt nem mondanók, de Eisenstein nagy eredményei között csak a kubikus maradékok reciprocitási tétele az, amelyet előzőleg már Gauss is megtalált.

Gauss nyelvérzéke is rendkívüli volt. Ifjúkorában habozott, filológus legyen-e vagy matematikus és csak a 17-szög döntötte el, hogy a matematikát választotta. A latinon kívül kitűnően tudta az összes fontos európai nyelveket. Ötven éves korában oroszul is megtanult és ebben is annyira vitte, hogy nemcsak az orosz szépirodalmat olvasta eredetiben, hanem orosz látogatóival oroszul társalgott.

Tekintélye már ifjúkorában — a 17-szög és a Ceres óta — abszolút és korlátlan. LAPLACEt, a nagy francia matematikust HUMBOLDT megkérdezte, ki Németország legnagyobb matematikusa. Laplace azt válaszolta: PFAFF (nála doktorált Gauss). „Hát nem Gauss?", amire Laplace azt felelte: Ön Németország legnagyobb matematikusát kérdezte, Gauss *az egész világ* legnagyobb matematikusa. Göttingai tartózkodása alatt közel 50 évig a göttingeni akadémia folyóirata csak Gauss matematikai cikkeit közölte, ami a hódolatnak elég tudománytalan módja. Élete végén, úgy mint Goethét, már szinte nem is embernek, hanem földönjáró olympusi istennek tekintették.

Említettem Dirichlethez intézett a Crelle Journalban reprodukált levelét. Ebben többek között azt is írja, hogy őt a világ igen reakciósnak tartja, holott nem az.

Néhány szóval kitérek a Gauss matematikai egyénisége körül kialakult vitákra. Vannak, akik sajnálják, hogy Gauss legproduktívebb ifjú éveiben jóformán a matematikai irodalom ismerete nélkül nőtt fel, így tehát mindent elejéről kellett kezdenie, és már rég megoldott problémák megoldására kellett idejét és erejét vesztegetnie. Mások viszont épp ebben találják Gauss nagyságának egyik nyitját, mert így fejlődött ki csodálatos eredetisége. Ugyanez a

vita ismétlődött; panaszkodtak, hogy Gauss oly sok eredményét visszatartotta és ezzel a tudomány fejlődését hátráltatta. Mily kár, mondják, hogy Abelnek, Jacobinak, Cauchynak, Bolyainak, Lobacsefszkijnak oly nagy szellemi energiát kellett fordítaniok oly feladatok megoldására, amelyeket Gauss már réges-régen megoldott. Mások szerint Abelnek és Jacobinak sem ártott, hogy a már megoldott problémába mélyedtek. Ez az a bizonyos örök vita a tudás és az eredetiség között. Nehéz a választás, mert azt hiszem, Gauss, Abel, Jacobi eredetisége valószínűleg akkor is bevált volna, ha reflexióikat kész eredményeikkel kezdhették volna.

Az előadottakkal Gauss nagy teljesítményeinek csak egy részét soroltam fel, és mégis micsoda gazdagság! Érthető, hogy Gauss hatása minden nemzet kultúrájában maradandó nyomokat hagyott. A Bolyaiak révén nagy híre Magyarországra igen korán eljutott. A Magyar Tudományos Akadémia 1847-ben választotta tagjául. SCHLESINGER LAJOS, a kolozsvári egyetem nagynevű volt professzora pedig az újabb kor egyik legkiválóbb Gauss kutatója.

Ez évben, halála 100 éves évfordulója alkalmából ugyanúgy, mint az egész világon, nálunk is számos alkalommal megemlékeztek Gaussról, a „matematika fejedelméről".

FELHASZNÁLT FŐBB FORRÁSOK

(Az áttekinthetetlenül nagy Gauss-irodalomból csak a cikkem megírásánál felhasznált munkák felsorolására szorítkozom.)

1. GAUSS, CARL FRIEDRICH, Werke, Herausgegeben von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, I—XII. Bände, Leipzig. 1870—1933. A X, 1. kötetig Teubner, a X, 2. kötettől Springer.

2. FRANZ SCHMIDT und PAUL STÄCKEL: Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai. Leipzig, 1899. Teubner.

3. Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel. Herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie d. Wissenschaften. Leipzig 1880., Engelmann.

4. G. LEJEUNE—DIRICHLET'S Werke. Zweiter Band. Briefwechsel zwischen Lejeune—Dirichlet und Gauss. 373—387. Berlin, 1897. Reimer.

5. E. T. BELL: Les grands mathématiciens. Traduction de AMI GANDILLON, Paris, 1939, Payot. Főleg a Gaussról p. 239—293, Abelről p. 334—354 és Jacobiról p. 355—367 szóló cikkek.

6. FELIX KLEIN: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I. 1926, Teil II. 1927. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band XXV.) Berlin, Springer. Főleg a Gaussról szóló fejezet, Teil I. p. 6—62.

7. JELITAI JÓZSEF: Levéltári adatok a csillagászat hazai történetéhez. Különlenyomat a Csillagászati Lapok I. és II. évfolyamából. Budapest, 1939., 32 oldal.

GAUSS közölt képmása a GOLDZIHER Károly professzor birtokában levő egykorú daguerreotip reprodukciója, sokszorosításra STROMMER Gyula professzor készítette elő. BELL 5. alatt idézett művét a szegedi egyetem Bolyai Intézetének könyvtára tette részemre hozzáférhetővé. Fogadják szivességükért valamennyien hálás köszönetemet.

COMMÉMORATION DE GAUSS (1777—1855)

par RICHARD OBLÁTH

A l'occasion du centenaire de la mort de GAUSS, le mémoire précédent apprécie l'oeuvre mathématique du „princeps mathematicorum".

Az 1953. évi Beke Manó-emlékdíj bizottságának jelentése

A Társulat által kiküldött bizottság november 11-én ült össze, hogy Beke Manó, a matematika kiváló művelője és lelkes terjesztője emlékére alapított jutalomdíj harmadik alkalommal történő odaítéléséről döntsön. A bizottság úgy határozott, hogy a rendelkezésre álló 5000 Ft összegből 4 díjat oszt ki: egy 2000 Ft-os és 3 db 1000 Ft-os díjat. Az első díjnál főleg a matematikát népszerűsítő irodalmi munkásságot, a többi díjaknál pedig különösen az oktató, előadó, szervező munkát tekinti a díj odaítélésének alapjául.

A díjazottak mellett még többen fejtettek ki igen eredményes tevékenységet, azonban a rendelkezésre álló anyagi keret nem tette lehetővé, hogy őket is jelen alkalommal jutalmazzuk. A bizottság a 2000 Ft-os jutalmat PÉTER RÓZSÁNAK ítélte oda.

PÉTER RÓZSA a matematikai tudományok doktora, a Budapesti Apáczai Csere János Pedagógiai Főiskola tanszékvezető tanára jelentős tudományos munkája mellett — amelyért Kossuth-díjjal is kitüntették — mindenkor elsőrendű feladatának tekintette a matematika megkedveltetését, hozzáférhetőbbé tételét mind az érdeklődő fiatalok, mind pedig a nem szakmabeli érdeklődők számára. Ebből a törekvésből született „Játék a végtelennel" c. könyve is, melyet még a felszabadulás előtt írt, de csak később jelenhetett meg. Beke Manó munkássága óta ez a mű volt az első irodalmunkban, mely széles rétegek számára a matematika valódi lényegét és nem annak torzképét mutatja meg. A mű nemcsak szakmai értékeivel tűnik ki, hanem könnyed, világos, élvezetes stílusával is; a Német Demokratikus Köztársaságban most van megjelenőben.*

„A számok világa" rövid terjedelméhez viszonyítva igen gazdag anyagát módszertanilag is gondosan építi fel.

Péter Rózsa társszerzője az új középiskolai tankönyvek első két kötetének. E könyvek, szakítva a tankönyvirodalmunkban mindaddig uralkodó formalista tradíciókkal, bátran mutattak rá új útakra, amelyeken haladva a matematikai tananyagot, annak összefüggéseit

* A könyv a beszámoló elkészülte óta meg is jelent.

megvilágítva lehet megértetni és megszerettetni a diákokkal. Ilyen úttörő munkában hibák elkerülhetetlenek. Azonban ez nem csökkenti e könyvek nagy jelentőségét, amelyekből nemcsak a diákok, hanem számos tanár is sokat tanult. Péter Rózsa részt vett a Petőfi diákkör megindításában és munkájában, ahol a felszabadulás után először kaptak szakmai irányítást a speciális érdeklődésű középiskolai diákok. A Pedagógiai Főiskola megalapítása óta vezeti annak matematikai tanszékét. Nagy része van a főiskola matematikai tananyagának és a tananyag felépítésének helyes megválasztásában. Minden tanítványának sorsát szívén viseli; a tehetségesek fejlődését a főiskola elvégzése után is figyelemmel kíséri és segíteni igyekszik nekik. Mindazokat, akik tanácsért fordulnak hozzá a matematika megkedveltetését célzó munkájukkal kapcsolatban, készségesen segíti alapos bírálatával, értékes javaslataival.

1000 Ft. jutalomban részesült Bede Lajos, Gádor Endréné, Szeliánszky Ferenc.

Bede Lajos Borsod megyei szakfelügyelő. Ebben a minőségben is és a Társulaton keresztül is mindent elkövet a matematika megszerettetése érdekében. Két évvel ezelőtt pl. a Középiskolai Matematikai Lapoknak Borsod megyében még nem volt megoldója. Bede kartárs munkája nyomán azonban tavaly már a megyék között az ötödik helyre kerültek. Ebben a tanévben a megye területén 90 rendszeres megoldót tart számon. Minden iskolába maga ment ki megszervezni a diákokat, útmutatásokat adott a tanároknak arra nézve, hogyan erősítsék a tanulókban a matematika iránti szeretetet. Munkáját az ötletesség, határozottság, pontosság jellemzi. Az általános és középiskolai tanárok munkáját egyformán eredményesen segíti. Tanácsai nyomán a Bolyai Társulat miskolci tagozata igen jó eredménnyel támogatja a tanárok továbbképzését.

Gádor Endréné, a Központi Pedagógus Továbbképző Intézet matematikai tanszékének vezetője, előzőleg az Oktatásügyi Minisztérium pedagógus továbbképző osztályán volt főelőadó. Igen nagy érdemei vannak közép- és általános iskolai matematika-tanárok továbbképzésének megszervezése, támogatása és irányítása körül. Ami érdemleges intézkedés történt e tekintetben az elmúlt két és félév során hazánkban, abban Gádor Endrénének jelentős szerepe van. A tanárok szakmai továbbképzése kérdésének középpontba állítása eredményezte nagyrészt azt a fejlődést, amely általános és középiskolai matematika-oktatásunkban az elmúlt évek folyamán tapasztalható. Hivatali kötelességén messze túlmenően vett részt tanári továbbképző konferenciák megszervezésében, továbbképző kiadványok szerkesztésében és kiadásában, ezzel kapcsolatban több előadást is tartott és ankétot is vezetett. A Matematika Tanítása c. módszertani lap felelős szerkesztője, a budapesti Eötvös Loránd

Tudományegyetem esti tagozatán a matematika módszertanának előadója. Gádor Endrénének a továbbképzéssel kapcsolatban kifejtett értékes munkáját az egész országban ismerik, becsülik és szeretik.

Szeliánszky Ferenc középiskolai tanár. A Társulat győri tagozatában elsősorban a diákok matematikai érdeklődését igyekszik erősíteni. Jó munkája fontos tényezője volt annak a kimagasló eredménynek, amit tavaly a Győr megyei diákok értek el a Rákosi-versenyen. Sok nehézséget leküzdve, fáradhatatlanul dolgozik a győri matematikai élet megerősítésén. Igen jó kapcsolatot sikerült kiépítenie az üzemi dolgozókkal is, sok előadást szervezett és részben tartott is számukra. A Győr—Sopron megyei tanárok továbbképzését vezeti harmadik éve. Ezzel a munkájával egyrészt már a Bolyai Társulat győri tagozatának megalakulása előtt felébresztette kartársai érdeklődését a középiskolai matematika anyagon túlmenő problémák iránt, másrészt elősegítette azt, hogy a középiskolai matematikaoktatás színvonala a megyében nagy mértékben emelkedjék.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15. Az egyes feladatok megoldását külön lapon kérjük.

Előző két számunk megjelenése előtt az azokban megoldott feladatok közül az 55. feladatra *Hosszú Miklós*, az 58. feladatra *Rejtő Péter*, az 59. feladatra *Hosszú Miklós* és *Rejtő Péter* küldött be megoldást.

Az előző számban kitűzött 79. feladat szövegét helyesbítjük. Első mondata helyesen így szól: „Az $M(x, y)$ és $N(x, y)$ folytonos függvények értékei $x < y$ esetén az (x, y), $x > y$ esetén pedig az (y, x) intervallum belsejéhez tartoznak."

Kitűzött feladatok

82. Bizonyítandó, hogy az L_2 tér teljesen folytonos lineáris transzformációjának értékkészlete nem merítheti ki az egész teret.

Czipszer János, Gehér László és Pál László

83. Legyen n adott természetes szám, továbbá (a, b) adott részintervalluma a $(-1, 1)$ intervallumnak. Mutassuk meg, hogy megadható a $(-1, 1)$ intervallumban olyan nem-negatív, legfeljebb véges sok helyen eltűnő, differenciálható súlyfüggvény, amelyhez tartozó ortogonális polinomsorozat n-edik polinomjának minden gyöke az (a, b) intervallumban van.

Vincze István

84. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számhoz található olyan euklideszi gyűrű, amelyben pontosan n prímszám van.

Fried Ervin

Megoldott feladatok

61. feladat. Legyen a adott egész szám és $f(n)$ olyan egész értékű számelméleti függvény, melyre

$$\sum_{d|n} f(d) = a^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Bizonyítandó, hogy $n | f(n)$.

Csima József

I. megoldás. A Möbius-féle inverziós formula szerint

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) a^{\frac{n}{d}}$$

ahol $\mu(d)$ a Möbius-féle függvényt jelenti. Elég kimutatnunk, hogy ha p^k szerepel n prímtényezős előállításában, akkor $p^k | f(n)$. Legyen $n = p^k m$.

Figyelembe véve, hogy $\mu(d)$ csak négyzetmentes d esetén nem 0,

$$f(n) = \sum_{d|m} \left[\mu(d) a^{\frac{n}{d}} + \mu(pd) a^{\frac{n}{pd}} \right] = \sum_{p|d} \mu(d) \left[a^{\frac{n}{d}} - a^{\frac{n}{pd}} \right],$$

tehát $b = a^{\frac{m}{d}}$ jelöléssel

$$f(n) = \sum_{d|m} \mu(d) [b^{p^k} - b^{p^{k-1}}] = \sum_{d|m} \mu(d) b^{p^{k-1}} [b^{\varphi(p^k)} - 1].$$

Ennek az összegnek minden tagja osztható p^k-val: amely tagokban $p | b$, ott $p^{k-1} \geqq k$ miatt a második tényező osztható; amelyekben $p \nmid b$, ott pedig az Euler—Fermat-féle kongruenciatétel miatt a harmadik tényező. Ezért $f(n)$ is osztható p^k-val.

Takács Lajos

II. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$ esetben az állítás nyilván helyes. Feltesszük, hogy az n-re vonatkozó állítás minden n-nél kisebb természetes számra helyes. Kimutatjuk, hogy ha n a p törzsszámnak k-adik hatványával osztható, akkor $p^k | f(n)$. Ezzel a feladat állítását igazoljuk.

n osztói vagy osztói $\frac{n}{p}$-nek is, vagy pedig p^k-val oszthatók. Ezért

$$a^n = \sum_{d|\frac{n}{p}} f(d) + \sum_{p^k | d | n} f(d).$$

Az f függvény értelmezése folytán az első összeg értéke $a^{\frac{n}{p}}$. A második összegnek egyik tagja $f(n)$, a többi tagja az indukciós feltevés szerint p^k-val osztható. Így tehát

$$f(n) \equiv a^n - a^{\frac{n}{p}} \pmod{p^k}.$$

A jobboldali különbség azonban a minden értéke mellett osztható p^k-val. Ez nyilván igaz, ha $p|a$, és akkor is igaz, ha $p \nmid a$, mert

$$\varphi(p^k) \Big| n - \frac{n}{p}.$$

Igaz tehát minden esetben, hogy $p^k | f(n)$.

Sarkadi Károly

A 61. feladat megoldását beküldötték még: *Corradi Kereszтély, Császár Ákos, Gehér László, Hosszú Miklós, Korányi Ádám, Kővári Tamás, Rejtő Péter, Surányi János, Tekse Kálmán.*

62. feladat. Bizonyítandó, hogy ha $a > 1$, akkor

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{\log(1-x)} \sum_{k=0}^{\infty} x^{a^k} = -\frac{1}{\log a}.$$

Szüsz Péter

Megoldás. Minthogy $0 < x < 1$, $a > 1$ esetén x^{a^t} monoton fogy a $0 < t < \infty$ intervallumban,

$$\int_0^{\infty} x^{a^t}\, dt < \sum_{k=0}^{\infty} x^{a^k} < \int_0^{\infty} x^{a^t}\, dt + x.$$

$u = x^{a^t}$ helyettesítéssel

$$f(x) = \int_0^{\infty} x^{a^t}\, dt = \frac{1}{\log a} \int_x^{\infty} \frac{du}{\log u},$$

ebből

$$f'(x) = -\frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{\log x},$$

és a l'Hospital-szabály szerint

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{f(x)}{\log(1-x)} = \frac{1}{\log a}, \quad \lim_{x \to 1-0} \frac{1-x}{\log x} = -\frac{1}{\log a}.$$

A fenti egyenlőtlenségből tehát a feladat állítása következik, hiszen $x \to 1-0$ esetén $x/\log(1-x) \to 0$.

Császár Ákos

A 62. feladat megoldását beküldték még: *Barna Béla, Dancs István, Gehér László, Hosszú Miklós, Korányi Ádám, Kővári Tamás, Rejtő Péter.*

Megjegyzés. A 62. feladat szerepel KNOPP: *Unendlichen Reihen* (Springer, 1931) kitűzött feladatai között (470. o.).

Ozsváth István

63. feladat. A páratlan fokszámú $P(z)$ polinom gyökhelyei szimmetrikusan helyezkednek el a polinom z_0 gyökhelyére nézve (többszörösségüket tekintve is). Bizonyítandó, hogy $P''(z_0) = 0$.

(Szőkefalvi-Nagy Béla)

I. megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $z_0 = 0$. Legyenek tehát $P(z)$ gyökhelyei a többszörösséget is figyelembe véve

$$z_0 = 0, z_1, z_2, \ldots, z_n, -z_1, -z_2, \ldots, -z_n.$$

A polinom gyöktényezős alakjából

$$P(z) = az(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2) \cdots (z^2 - z_n^2).$$

$P(z)$ tehát z-nek páratlan függvénye, és ezért valóban $P''(0) = 0$.

Makai Endre

II. megoldás. Feltehetjük, hogy $z_0 = 0$, és a polinom

$$P(z) = z^{2n+1} + a_{2n} z^{2n} + - \cdots + a_2 z^2 + a_1 z$$

alakú. Bizonyítandó, hogy $P''(0) = 0$, azaz, hogy $a_2 = 0$.

Ha s_{2n-1} a $(2n-1)$-edfokú elemi szimmetrikus kifejezést jelöli, akkor

$$a_2 = s_{2n-1}(z_0, z_1, \ldots, z_{2n}) = -s_{2n-1}(-z_0, -z_1, \ldots, -z_{2n}).$$

A gyökök szimmetrikus elhelyezkedésére vonatkozó feltevés miatt $(-z_0, -z_1, \ldots, -z_{2n})$ permutációja a $(z_0, z_1, \ldots, z_{2n})$ számoknak. Ezért elemi szimmetrikus kifejezéseik megegyeznek, és a fentiek szerint $a_2 = -a_2$, azaz valóban $a_2 = 0$.

Gehér László

A 63. feladat megoldását beküldötték még: *Császár Ákos, Dancs István, Hosszú Miklós, Korányi Ádám, Kővári Tamás, Marik Miklós, Nagy Jenő, Rejtő Péter, Sarkadi Károly, Surányi János, Személyi Kálmán, Szüsz Péter.*

Megjegyzés. A megoldások (csekély módosítással) a feladat állitásán túlmenően azt is bizonyítják, hogy:

1. Ha a $P(z)$ polinom gyökhelyei szimmetrikusan helyezkednek el a z_0 helyre nézve, akkor a z_0 helyen $P(z)$-nek minden páros, ill. páratlanrendű deriváltja eltűnik aszerint, amint $P(z)$ fokszáma páratlan, ill. páros.

Császár Ákos

2. Ha a $P(z)$ polinom gyökhelyei (többszörösségüket is tekintetbe véve) szimmetrikusan helyezkednek el a polinom z_0 gyökhelyére nézve, akkor $P''(z_0)=0$ teljesüléséhez szükséges és elegendő, hogy z_0 ne legyen pontosan kétszeres gyök.

Hosszú Miklós

64. feladat. Mely $f(z)$ függvényekre igaz az, hogy

$$n\left[f\left(z+\frac{1}{n}\right)-f(z)\right]$$

az egész számsíkon egyenletesen tart $f'(z)$-hez?

(Gehér László)

Megoldás. Ha az egyenletes konvergencia teljesül, akkor minden elég nagy n-re

$$n\left[f\left(z+\frac{1}{n}\right)-f(z)\right]-f'(z)$$

az egész számsíkon korlátos, LIOUVILLE tétele szerint tehát állandó, és deriváltja eltűnik, azaz

$$f'\left(z+\frac{1}{n}\right)=f'(z)+\frac{1}{n}f''(z).$$

Ez azt jelenti, hogy egy korlátos végtelen halmazon, ti. a $z_0+\frac{1}{n}$ helyeken, ha n elég nagy,

$$f'(z)=f'(z_0)+(z-z_0)f''(z_0).$$

E függvények ezért mindenütt megegyeznek, $f'(z)$ legfeljebb elsőfokú, $f(z)$ pedig legfeljebb másodfokú polinom.

Fordítva közvetlenül megállapítható, hogy minden legfeljebb másodfokú polinomra teljesül az állítás.

Korányi Ádám

A 64. feladat megoldását beküldötték még: *Császár Ákos, Hosszú Miklós, Kővári Tamás.*

65. feladat. Legyen a síkbeli pontrács alapparallelogrammájának területe 1. Bizonyítandó, hogy ha egy síkbeli zárt konvex tartomány szimmetrikusan helyezkedik el egy rácspontra nézve, és területe $4r$-nél nem kisebb, ahol r természetes szám, akkor legalább $2r+1$ rácspontot tartalmaz.

Turán Pál

Megoldás. Nyilván elég azt bizonyítani, hogy ha a T tartomány nyílt, és területe $4r$-nél nagyobb (továbbá változatlanul konvex és egy rácspontra nézve szimmetrikus), akkor legalább $2r+1$ rácspontot tartalmaz. Egyszerűbb szövegezés kedvéért arról a pontrácsról beszélünk, amelyet egy derékszögű koordinátarendszer egész koordinátájú pontjai alkotnak; ez nem jelenti az általánosság megszorítását.

Borítsuk le egyrétűen a síkot 2 élű rácsnégyzetekkel, majd helyezzük egymásra e rácsnégyzeteket az általuk tartalmazott tartománydarabokkal együtt. Mivel e darabok együttes területe $4r$-nél nagyobb, viszont 4 területű négyzetben helyeztük el mindannyit, kell hogy legyen ennek a négyzetnek olyan pontja, amelyet legalább $r+1$ darab fed le. Egy ilyen $(r+1)$-szeresen lefedett pontnak az eredeti tartományban $r+1$ tartománydarabnak egy-egy pontja, a $P_0, P_1, \ldots, P_r$ pontok felelnek meg. Ezek egymástól különbözők, és koordinátakülönbségeik páros számok. Jelölje P_0 a $P_0, P_1, \ldots, P_r$ pontok konvex burkának egy csúcspontját. Ezért a $P_1, \ldots, P_r$ pontok távolságainak felezőpontjai mind különböznek P_0-tól.

Legyen T szimmetriacentruma az origó. A centrális szimmetria miatt T tartalmazza a $-P_0$ pontot, és a konvexitás miatt az

$$\frac{1}{2}(P_1-P_0),\ \frac{1}{2}(P_2-P_0),\ \ldots,\ \frac{1}{2}(P_r-P_0)$$

rácspontokat. A $P_0, P_1, \ldots, P_r$ pontok különbözősége miatt ezek a rácspontok egymástól és az origótól különbözők. Nem lehet közöttük kettő az origóra nézve szimmetrikus elhelyezkedésű, mert ellenkező esetben

$$\frac{1}{2}(P_i-P_0)=-\frac{1}{2}(P_j-P_0) \quad (i,j=1,2,\ldots,r),$$

tehát $P_0=\frac{1}{2}(P_i+P_j)$ teljesülne, amit kizártunk. Az origó, a mondott r rácspont és ezeknek az origóra vonatkozó tükörképei T által tartalmazott $2r+1$ rácspontot adnak.

Kővári Tamás

A 65. feladat megoldását beküldötték még: *Császár Ákos, Gehér László, Hajagos Béla, Hajós György, Hammer József, Klafszky Emil, Rejtő Péter.*

Megjegyzés. A feladat megoldásának gondolatmenetével az is bizonyítható, hogy ha egy n-dimenziós pontrács alapparallelotopjának térfogata 1, továbbá egy rácspontra nézve szimmetrikus, zárt, konvex tartomány térfogata $2^n r$-nél nem kisebb, akkor ez a tartomány legalább $2r+1$ rácspontot tartalmaz.

Rejtő Péter

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Bolyai Társulat címére kérjük (Bp. V., Reáltanoda u. 13—15). A borítékra írjuk rá feltűnően: PÉLDAROVAT. Minden megoldást külön lapra írjunk. Kitűzésre szánt példákat, megoldással együtt, szívesen fogadunk.

Kitűzött példák

67. Ismeretes, hogy az x^2+y^2 kifejezés a valós számok körében nem bontható tényezőkre, de a komplex számok körében már igen: $x^2+y^2=(x+yi)(x-yi)$. Bizonyítsuk be, hogy $x^2+y^2+z^2$ még a komplex számok körében sem bontható fel két polinom szorzatára. Igaz-e ez háromnál több változó négyzetének összegére is?

(Balatoni Ferenc)

68. Érintkezhetik-e a háromszög köré írt kör a háromszög Feuerbach-körével? (Feuerbach-kör: a háromszög magasságainak és súlyvonalainak talppontjain áthaladó kör.)

(Obláth Richárd)

69. Egymásutáni egyenlő számközökben található prímszámokat megfigyelve azt tapasztaljuk, hogy számuk nem alkot monoton csökkenő sorozatot; pl.

1—10	4	prímszám	van	1—100	25	prímszám	van
11—20	4	„	„	101—200	21	„	„
21—30	2	„	„	201—300	16	„	„
31—40	2	„	„	301—400	16	„	„
de már				de már			
41—50	3	„	„	401—500	17	„	„

Igaz-e ez a következő általános formában: „bármely k és n természetes számok esetén, ha k-tól kezdve n-es csoportokra osztjuk a természetes számokat (eredeti sorrendjükben), e csoportokban

található prímszámok száma sohasem alkot még tágabb értelemben sem monoton csökkenő sorozatot"?

(Fried Ervin)

70. Mi azon pontok mértani helye, amelyek egy szög száraitól egyenlő távolságra vannak

a) a szögszárak meghatározta síkban;

b) a térben?

(A szögszárak félegyenesek. Két ponthalmaz távolsága: azon szakaszok hosszának minimuma, amelyek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik halmazhoz tartozik.)

Megoldott példák

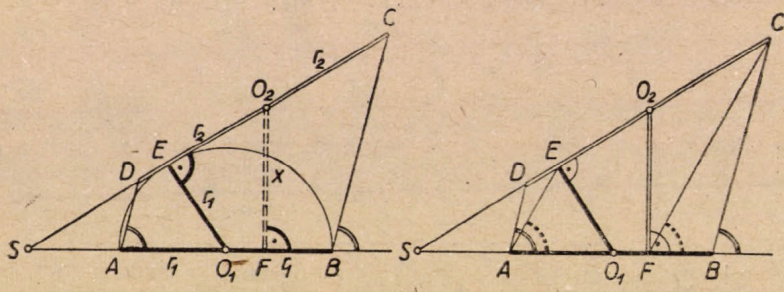
48. példa. Az $ABCD$ trapéz AB szára mint átmérő fölé ajzolt kör érintse a CD szárat egy E pontban. Bizonyítsuk be a következőket:

a) A CD szár mint átmérő fölé rajzolt kör is érinti az AB szárat. (Legyen az érintési pont F.)

b) $AE \| FC$ és $BE \| FD$.

(Surányi János)

1. megoldás. Parallelogrammákra mindkét állítás nyivánvaló a centrális szimmetria folytán. Feltehetjük tehát, hogy a trapéz AB és CD szára metszi egymást egy S pontban. Az 1. *a)* és *b)* ábra



1. ábra

mutatja az *a)* és *b)* állítást. (Az egyenlően jelölt vastagon, ill. kettős vonallal kihúzott szakaszokról és szögekről *tudjuk*, hogy egyenlők, a szaggatott vonallal jelölt szakaszokról, ill. szögekről pedig *bizonyítanunk kell*, hogy egyenlők egymással, vagy a megfelelő

folytonos vonallal jelölt elemmel.) Az *a*)-beli állítás bizonyítása után nyilván elég lesz a *b*) ábrán szaggatottan jelölt szögek egyenlőségét bizonyítani, vagyis azt, hogy $AE \| FC$; az, hogy $BE \| FD$, analóg módon adódik.

a) Hasonlítsuk össze a keresett $O_2F = x$ szakaszt az $O_1E = r_1$ szakasszal:

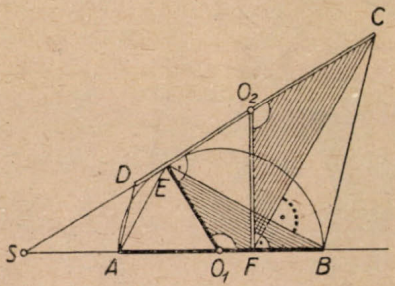
$$\frac{x}{r_1} = \frac{SO_2}{SO_1} \qquad (\text{mert } SO_2F\Delta \sim SO_1E\Delta).$$

Az utóbbi arány — minthogy $O_2O_1 \| CB$ — a sugársorok tétele szerint egyenlő az $\frac{r_2}{r_1}$ aránnyal, tehát

$$\frac{x}{r_1} = \frac{r_2}{r_1},$$

és így $x = r_2$. Tehát F az O_2 körüli r_2 sugarú kör érintési pontja az AB oldalon, és így az *a*) állítást igazoltuk.

b) Az az állítás, hogy $AE \| FC$, ekvivalens azzal, hogy $EB \perp FC$ (mert $AEB = 90°$, mint átmérőn nyugvó kerületi szög). EB az EBO_1, FC az FCO_2 egyenlőszárú háromszög alapja (2. ábra). Ezeknek a háromszögeknek az alappal szemközti szöge



2. ábra

megegyezik (száraik páronként merőlegesek, és mindkettő tompaszög), sőt, mivel egyenlőszárúak, többi szögeik is, vagyis a két háromszög hasonló. Alapjuk is merőleges tehát és így $AE \| FC$. Hasonlóan adódik (sőt az F-beli érintés miatt közvetlenül is látható), hogy $BE \| FD$.

Bukovszky Ferenc

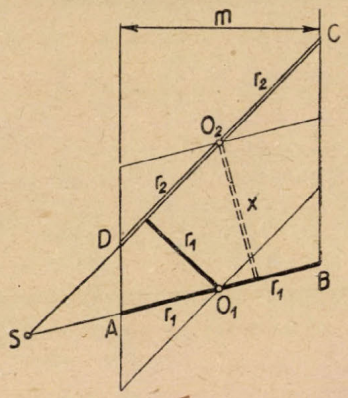
Hasonló megoldást küldött be: Reményi Gusztáv és H. Nagy István.

2. megoldás a)-ra. Területek egyenlőségével is belátható, hogy $x = r_2$. Húzzunk O_1-en át CD-vel, O_2-n át AB-vel párhuzamost. A trapéz alapvonalai és ezek a párhuzamosok egy-egy szárral együtt két olyan parallelogrammát határolnak, amelyeknek az O_1O_2 középvonala közös, és erre merőleges magassága megegyezik (3. ábra). Tehát egyenlő a területük. Ha területüket másik magasságuk alapján is kiszámítjuk, ezt kapjuk:

$$2r_1x = 2r_2r_1,$$

és innen

$$x = r_2.$$



3. ábra

Az állítás második fele most már ugyanúgy bizonyítható, mint az első megoldásban.

Bártfai Pál

Hasonló megoldást küldött be: Biczó Géza.

Megjegyzés. A fenti bizonyításokban nem használtuk ki azt, hogy az AB oldalra írt félkör a CD *oldalt* magát (annak belső vagy határpontját) érinti, csak annyit, hogy érinti ezt az *oldalegyenest;* viszont ennek alapján csupán azt bizonyítottuk be, hogy a CD oldalra írt félkör is érinti az AB egyenest, azt nem bizonyítottuk be, hogy az érintési pont magán az AB oldalon van. Bizonyításaink tehát a példa eredeti fogalmazását tekintve még hiányosak. Nem nehéz azonban belátni, hogy az állítás eredeti fogalmazásában is érvényes: ha az AB-re írt félkör a CD *szakaszt* érinti, akkor a CD-re írt félkör is az AB *szakaszt* érinti. Valóban,

$AE \| FC$ és $BE \| FD$ folytán egyrészt

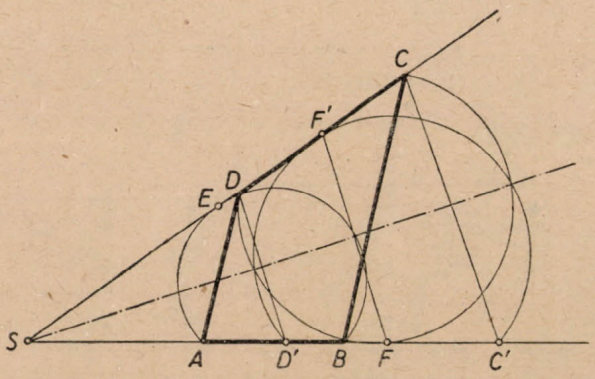
$$\frac{SF}{SA} = \frac{SC}{SE},$$

másrészt

$$\frac{SB}{SF} = \frac{SE}{SD}.$$

Ha az E pont C és D közé esik, akkor a jobboldalon lévő törtek 1-nél nagyobbak, tehát a baloldalon álló törtek is, ami viszont éppen azt jelenti, hogy F az A és B pont közé esik.

3. megoldás a)-ra. Az *a)* alatti állítást igen egyszerűen belátjuk S centrumú hasonlósági transzformáció segítségével. Kicsi-



4. ábra

nyítsük vagy nagyítsuk az SA szakaszt SD hosszúságúra; ugyanez a transzformáció az SB szakaszt SC hosszúságúra változtatja, (mert $SAD\triangle \sim SBC\triangle$) és az AB átmérőn nyugvó félkört egy olyan félkörbe viszi át, amely továbbra is érinti az SC félegyenest. Ha ezt a félkört tükrözzük az $S\sphericalangle$ szögfelezőjére, éppen a kívánt (a DC átmérőn nyugvó, az SB félegyenest érintő) félkörhöz jutunk. Ez a bizonyítás az *a)* állítás általánosítására ad lehetőséget: az AB átmérőn nyugvó félkör helyett AB-n nyugvó tetszőleges α ($0 < \alpha < 180°$) szöghöz tartozó látószög-körívről is beszélhetünk, a mondottak akkor is szóról-szóra érvényben maradnak (4. ábra).

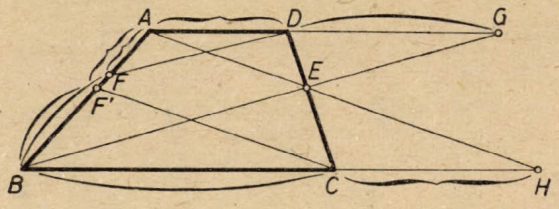
Klafszky Emil

4. megoldás. A következő gondolatmenet megmutatja, hogy nemcsak az *a)*, hanem a *b)* alatti állítás is teljesül az említett általánosabb esetben.

Legyen az $ABCD$ trapéz CD szárának egy tetszőleges pontja E, AE és BC metszéspontja H, BE és AD metszéspontja G, F és F' pedig a D, ill. C ponton át BE-vel, ill. AE-vel húzott párhuzamos metszéspontja az AB szárral (5. ábra). Könnyen belátható, hogy $F = F'$. Ugyanis a kapcsos és íves szakaszok aránya mindenütt megegyezik (az AB oldaltól elindulva negatív körüljárás szerint):

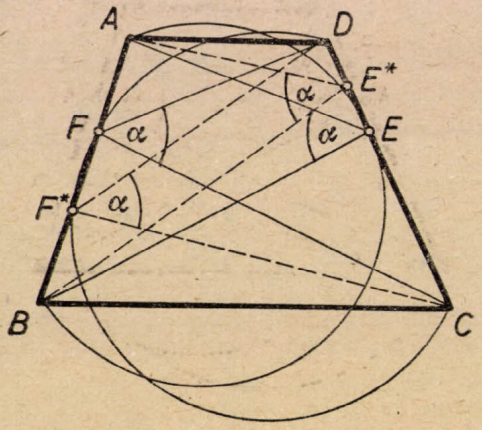
$$\frac{AF}{FB} = \frac{AD}{DG} = \frac{HC}{CB} = \frac{AF'}{F'B}.$$

Mivel F és F' nyilván A és B között van (feltéve, hogy az E pont D és C között van), ebből következik, hogy F és F' egybeesik.



5. ábra

Legyen most E speciálisan az a pont, amelyben az AB szakaszhoz tartozó α szögű két látószög-körív egyike érinti a DC szárat. Bebizonyítjuk, hogy ekkor a CD szakaszhoz tartozó α szögű, a trapéz belseje felé eső látószög-körív is érinti az AB szárat, mégpedig éppen az előbbi módon definiált F pontban.



6. ábra

Annyi biztos, hogy F ennek az ívnek pontja, hiszen a párhuzamosság folytán $DFC\sphericalangle = AEB\sphericalangle = \alpha$. Elképzelhető azonban, hogy van egy másik, F^* metszéspontja is a körívnek az AB egyenessel. De akkor az F^*D és F^*C egyenessel A-n, ill. B-n át húzott párhuzamosok a fent bizonyítottak értelmében a CD egyenesen metszenék egymást, (6. ábra) mégpedig egy E-től különböző E^* pontban, és a párhuzamosság miatt megint $AE^*B\sphericalangle = \alpha$ volna. Ez pedig ellentmond annak a feltevésünknek, hogy az AB-hez tartozó α szögű látószög-körív érinti a DC szárat. Tehát az AB oldalon is csak érintés jöhet létre, mégpedig éppen az F pontban.

Ezzel az állítás mindkét felét általánosított alakban bebizonyítottuk.

Hajnal András

Megjegyzés. Egy erősebb segédeszköz, az affinitás alkalmazásával a bizonyítás első része (az, hogy $F = F'$) triviálisan egyszerű: egyenlőszárú trapézra ez a szimmetria miatt igaz, s ebből minden más trapéz affin transzformációval keletkezik, és eközben sem a párhuzamosság nem változik, sem az illeszkedési viszonyok.

Hasonló megoldást adott, a fenti megjegyzéssel: FRIED ERVIN.

További megoldásokat küldött be: ALPÁR LÁSZLÓ, KONCZ KÁROLY, REMÉNYI GUSZTÁV.

49. példa. Általánosítsuk a 48. példát arra az esetre, amikor a trapéz egyik szára mint átmérő fölé rajzolt kör metszi a másik szárat. (Mit mondhatunk ki ekkor?)

(Surányi János)

Megoldás. Minden olyan trapéz, amelynek egyik szára metszi a másikra rajzolt félkört, egyik szárának párhuzamos eltolásával előállítható egy olyan trapézból, ahol a szóbanforgó félkört érinti a szár. Mivel az érintés kölcsönös, a metszés is az. (Ha az érintő szárból eltolással metszőt csinálunk, s a rárajzolt félkört vele mozgatjuk, az új helyzetben azt is metszeni fogja a másik szár.)

Bebizonyítjuk, hogy a kimetszett ívekhez egyenlő középponti szögek tartoznak. Ehhez elég megmutatni, hogy (7. ábra):

$$\frac{O_1T_1}{O_1E'} = \frac{O_2T_2}{O_2F'}.$$

A nevezőkben a félkörök sugara, vagyis a szárak fele áll. A számlálók viszont a 8. ábrán látható parallelogrammák CD, ill. AB oldalhoz tartozó magasságai. Ezek a parallelogrammák egyenlő területűek, (mert O_1O_2 középvonaluk és m magasságuk meg-

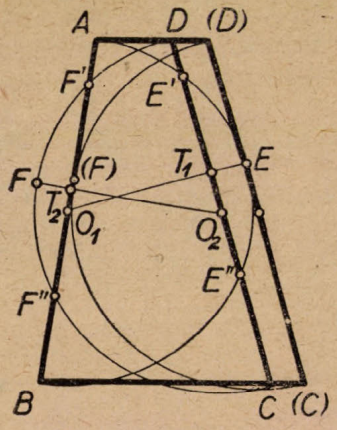
egyezik), tehát

$$AB \cdot O_2T_2 = CD \cdot O_1T_1,$$

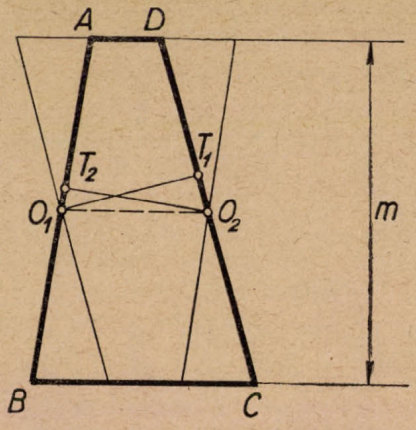
vagyis

$$2O_1E' \cdot O_2T_2 = 2O_2F' \cdot O_1T_1.$$

Ebből következik a fenti arányok egyenlősége, és így az is, hogy a kimetszett ívekhez egyenlő középponti szögek tartoznak. Más fogalmazásban ez azt jelenti, hogy a félkörök a szárakat egyenlő szögekben metszik. Ez lép tehát a **48.** példabeli érintés („0°-os metszés") helyébe.



7. ábra



8. ábra

A **48.** példában bebizonyítottuk, hogy $AE \| (F)(C)$, és így $AE \| FC$. Mivel az $E'E$ ív középponti szöge egyenlő az $F'F$ ív középponti szögével, kerületi szögeik is egyenlők:

$$E'AE\sphericalangle = FCF''\sphericalangle.$$

Tehát

$$F''C \| AE'.$$

Hasonlóképpen látható be:

$$F'C \| AE'', \quad F'D \| BE'', \quad F''D \| BE'.$$

Ezek az összefüggések lépnek a **48.** példa *b)* állítása helyébe, mint annak általánosításai.

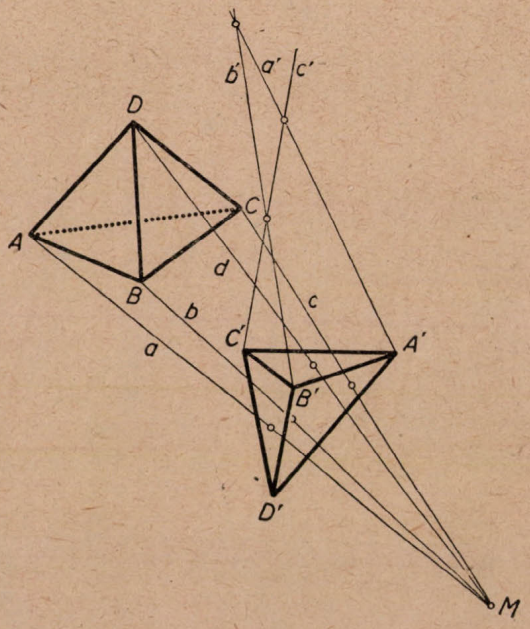
Bártfai Pál

Hasonló megoldást küldött be: ALPÁR LÁSZLÓ, BUKOVSZKY FERENC.

További megoldásokat küldött be: KONCZ KÁROLY, H. NAGY SÁNDOR, REMÉNYI GUSZTÁV.

50. példa. Bizonyítsuk be, hogy ha két tetraéder olyan helyzetű, hogy az egyiknek a csúcsaiból a másiknak a lapjaira bocsátott merőlegesek egy pontban metszik egymást, akkor ez a tulajdonság kölcsönös.

Megoldás. Legyenek az első tetraéder csúcsai A, B, C, D, a belőlük induló merőlegesek közös pontja M.



9. ábra

A C-ből a C'-vel szemközti lapra bocsátott c merőleges ennek a lapnak minden egyenesére merőleges; a D-ből a D'-vel szemközti lapra bocsátott d merőlegesről ugyanez mondható el. E két lapnak közös egyenese $A'B'$, tehát

$$c \perp A'B' \text{ és } d \perp A'B'.$$

Ekkor azonban

$$A'B' \perp [CDM],$$

és ebből

$$A'B' \perp CD.$$

Másrészt a B'-ből a B-vel szemközti lapra és A'-ből az A-val szemközti lapra bocsátott merőlegesek (b', ill. a') is merőlegesek

CD-re, és ez csak úgy lehet, hogy mindkettő az AB-n átmenő, CD-re merőleges síkban van. Minthogy pedig nem lehetnek párhuzamosak, (mert az $ABCD$ tetraéder egyetlen lapszöge sem lehet 0°-os, sem 180°-os), azt kaptuk, hogy az A', B', C' és D' csúcsokból húzott a', b', c', d' merőlegesek közül bármelyik kettő metszi egymást.

Be kell még látnunk, hogy a négy egyenes páronkénti metszéspontjai egybeesnek. Ha ez nem így volna, vagyis volna olyan egyenes, amely két másikat nem metszéspontjukban metsz, hanem egy-egy ettől különböző pontban, akkor ez a három egyenes egy síkban volna (ti. a három metszéspont meghatározta síkban). Tegyük fel, hogy a', b' és c' három ilyen egy síkba eső egyenes. Minthogy

$$a' \perp [BCD], \quad b' \perp [ACD] \quad \text{és} \quad c' \perp [ABD],$$

a három egyenes síkjára ebben az esetben az AD, BD és CD él egyaránt merőleges volna, vagyis ezek egymással párhuzamos élek volnának, ami lehetetlen. (Felhasználtuk azt a tételt, hogy ha egy egyenes egy sík — itt az $[a', b', c']$ sík — két egyenesére merőleges, akkor magára a síkra is merőleges.) Ebből az ellentmondásból következik, hogy a', b', c' és d' egy pontban metszik egymást.

Reményi Gusztáv

Hasonló megoldást küldött be: BUKOVSZKY FERENC.

Vektoralgebrai megoldást küldött be: KONCZ KÁROLY.

TÁRSULATI ÉLET

Beszámoló a Társulat balatonvilágosi differenciál-, integrál- és függvényegyenletek kollokviumáról

A Társulat 1954. szeptember 16-, 17- és 18-án rendezte meg a balatonvilágosi akadémiai nyaralóban a differenciál-, integrál- és függvényegyenletekkel foglalkozó két és félnapos kollokviumát. A kollokviumot előkészítő bizottság az előadásokat úgy csoportosította, hogy az összetartozó témájú előadások ugyanabban az ülésszakban hangozzanak el. Az előre megállapított programtól alig kellett eltérni. Az előkészítő bizottság ezen elve helyesnek bizonyult. Hasonló problematikájú előadásoknak a tömörítése koncentrálta a hallgatóság figyelmét, teret adott termékeny vitáknak és kevésbé fárasztotta a jelenlevőket. Az első napon elhangzott előadások többsége a differenciálegyenletek elméletének elvi problémáival foglalkozott, a második előadási nap délelőttjén tartott előadások az integrál- és függvényegyenletek elméletével, végül a második nap délutánján és a harmadik napon elhangzott előadások a matematikai fizika differenciálegyenleteivel, és a differenciálegyenletek alkalmazásaival foglalkoztak.

Az elhangzott előadások nagy része azóta publikálásra került, ezért ehelyütt a legtöbbet csak röviden ismertetjük. Az ismertetés általában abban a sorrendben történik, amilyen sorrendben azok a programban szerepeltek.

Makai Endre: Homogén lineáris differenciálegyenletek és egyenletrendszerek megoldása matrix számítás segítségével c. előadása olyan matrix-jelöléssel felírható differenciálegyenletrendszer típussal foglalkozott, amelynek megoldásvektora végtelen vektorhatványsor alakjában állítható elő, és e hatványsor együtthatói kéttagú rekurziós formulának tesznek eleget. Speciális esetekben ez a differenciálegyenlettípus, az irodalomban sokat szereplő differenciálegyenlet típusokkal hozható kapcsolatba.

Freud Géza előadásában az

$$(1-x^2)y''-2xy'+[p(x)+\lambda q(x)]y=0$$

alakú, másodrendű, önadjungált differenciálegyenlettel foglalkozik, ahol $p(x)$ és $q(x)$ polinomok. Kimutatta, hogy a megoldásfüggvényt $y=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ alakban előállítva az csak akkor lesz az $x=1$ és $x=-1$ közelében korlátos, ha

$$\lim_{k\to\infty} k a_k = 0.$$

Ennek a tételnek felhasználásával tetszőleges pontossággal kiszámíthatók a λ sajátértékek.

Bihari Imre előadásának címe: Egy Sturm—Liouville-tétel általánosítása és alkalmazása Bessel-függvényekre.

Turán Pál Differenciálegyenletek és interpoláció címmel tartott előadást. Előadó az $f^{(2n)}(x)=g(x)$ differenciálegyenlettel foglalkozott, ahol $g(x)$ adott és oly $f(x)$ keresendő, melyre a különböző $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken előírt y_ν és y_ν'' értékekkel

$$f(x_\nu)=y_\nu,\ f''(x_\nu)=y_\nu''. \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

E kérdés rögtön arra vezetett, vajon van-e oly legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom, melynek az x_ν-helyeken elő vannak írva függvényértékei és második deriváltjai. Előadó azon eseteket vizsgálta, mikor az x_ν-k valamely ultraszferikus polinom gyökei. Kimutatta, hogy páros n esetén ily polinom mindig létezik és egyértelmű, míg páratlan n esetén általában ilyen polinom nincs. Utóbbi tény pl. azt is jelenti, hogy páratlan n és ilyen x_ν-k esetén egy tetszőleges, legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $f(x)$ polinom e helyeken vett függvényértékei és második deriváltjai között egy univerzális (tehát f-től független a_ν és b_ν-kkel biró)

$$\sum [a_\nu f(x_\nu)+b_\nu f''(x_\nu)]=0$$

kapcsolat áll fenn.

Rényi Alfréd egy módszert mutatott be, melynek segítségével bizonyos függvényegyenletek átvihetők más, már jól ismert függvényegyenletekbe (differenciálegyenletbe, vagy integrálegyenletbe). A szóbanforgó függvényegyenlet típus egyváltozós függvényekre vonatkozik, melyekben azonban több argumentum szerepel. A függvényegyenlet $f(x)$, $f(y)$ és $f(ax+by)$-t lineárisan vagy bilineárisan tartalmazza. (Az együtthatók állandók, vagy bizonyos függvények.) A módszer lényege abban áll, hogy egy alkalmasan választott kétdimenziós tartományra integráljuk a függvényegyenlet minden tagját, ezáltal az differenciál-, integrál- vagy integrodifferenciálegyenletbe megy át. Szerző módszerét több ismert függvény-

egyenlet megoldásán mutatta be. Felvetette azt a kérdést, nem lehet-e ezt a gondolatot általános megoldási módszerré fejleszteni.

Fenyő István parciális integrálegyenletekről tartott előadást. Parciális integrálegyenletnek az alábbi típusú függvényegyenletet nevezi

$$\varphi(x_1, x_2) - \lambda \int_0^1 A(x_1, x_2, t)\varphi(t, x_2)dt - \mu \int_0^1 B(x_1, x_2, t)\varphi(x_1, t)dt -$$

$$- \nu \int_0^1 \int_0^1 C(x_1, x_2; t_1, t_2)\varphi(t_1, t_2)dt_1 dt_2 = f(x_1, x_2),$$

ahol φ az ismeretlen függvény, A, B és C korlátos magfüggvények, f adott függvény. Előadó bebizonyította, hogy ha $|\lambda|$, $|\mu|$ és $|\nu|$ elegendő kicsinyek, akkor fenti egyenletnek egy és csakis egy megoldása van. A Fredholm-féle elméletből ismert resolvens mag fogalmát általánosította parciális integrálegyenletekre és megmutatta, hogy ennek segítségével hogyan lehet a φ megoldást explicit módon előállítani. A parciális integrálegyenletek speciális típusai a quantummechanika bizonyos fejezeteiben lépnek fel.

Hosszú Miklós: „Néhány megjegyzés az asszociatív és a disztributív törvénnyel kapcsolatos függvényegyenletekről."

Az előadó az $F[G(x, y), z] = H[x, K(y, z)]$, ill. $F[G(x, y), z] = G[F(x, z), F(y, z)]$ függvényegyenletekkel foglalkozott. Bebizonyította, hogy az elsőnél a folytonos, el nem tűnő deriváltakkal rendelkező megoldások mindannyian $h[f(x) + g(y)]$ típusok; a másodiknál pedig, ha feltesszük, hogy van oly y_0 érték, amely mellett $F(x, y_0) = C$ állandó, továbbá a függvények (egyszer) folytonosan differenciálhatók, és ezen kívül $G(x, y)$ deriváltjai nem tűnnek el, akkor az általános megoldás

$$G(x, y) = f^{-1}[af(x) + bf(y) + c], \qquad F(x, y) = f^{-1}[f(x)g(y) + h(y)]$$

ahol a

$$c[g(t) - 1] = (a + b - 1)h(t), \; g(y_0) = 0, \; f'(t) \neq 0$$

megszorításoktól eltekintve a megoldásban szereplő a, b, c állandók és a folytonosan differenciálható $f(t), g(t), h(t)$ függvények tetszőlegesek. A megoldási módszer alkalmazható a másodiknál valamivel általánosabb

$$F[G(x, y), z] = H[K(x, z), L(y, z)]$$

függvényegyenletre is.

Targonszky Iván: „Analitikus függvények iterációs sorainak előállítása."

Keressük tetszőleges $f(z)$ analitikus függvény $\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n s_n(z)$ alakú sorát, ahol $s_n(z)$ egy alkalmasan választott $s(z)$ analitikus függvény n-ik iteráltja. Ha $s(z)$ néhány egyszerű feltételnek megfelel — ilyen függvény pl. z^3-z^2 — akkor bármely $f(z)$ analitikus függvény sora egy megfelelő tartományban egyenletesen és abszolút konvergál. A sor összegeként előálló analitikus függvény általában nem egyezik meg a sorbafejtett függvénnyel, azonban azzal mindig egyenlő végtelen sok pontban. Ezek a pontok a sor konvergenciatartományának szélén torlódnak.

Ha $f(z)$-t bizonyos feltételnek vetjük alá, a sor előállítja a függvényt, A ϑ_n együtthatókat egy egyszerű szerkezetű determináns szolgáltatja, gyakorlati kiszámításuk pedig rekurziós formulával történik.

Aczél János Függvényegyenletek néhány újabb alkalmazásáról c. előadásában a következő függvényegyenleteket tárgyalta:

1. Bizonyos valószínűségszámítási feladatok kapcsán fellépő

$$P(s, t)\,P(t, u) = P(s, u) \qquad a \leqq s \leqq t \leqq u$$

függvényegyenletek, ahol $P(t, u) = \| p_{jk}(t, u) \|$ függvénymatrix.

2. $$f[f(x, U), V] = f(x, U_0 V),$$

ahol x egy n dimenziós tér, U és V egy m dimenziós tér vektorait jelentik.

3. $$f[f(x+U), V] = f[x, U+V].$$

4. $$f\left(\frac{1-x^2-y^2}{2xy}\right) = f\left(\frac{1+x^2-y^2}{2x}\right) + f\left(\frac{1-x^2-y^2}{2y}\right).$$

Ez a függvényegyenlet a nemeuklidesi geometriák ortogonális transzformációival szemben invariáns, nem negatív és egy egyenesbe eső pontokra additív távolságfogalom definíciójánál lép fel.

5. $$r(x+y) = \frac{r(x) + [t(x)^2 - r(x)^2]\, r(y)}{1 - r(x) r(y)}$$

$$t(x+y) = \frac{t(x)\, t(y)}{1 - r(x) r(y)}.$$

E függvényegyenletrendszer a dialektrikumok elméletében lép fel.

6. A hővezetés bizonyos problémáiból fellépő $z = \frac{x-y}{\ln x - \ln y}$

függvény nomogrammjának tervezésénél a

$$2f\left(\frac{x-y}{\ln x-\ln y}\right)=f(x)+f(y)$$

függvényegyenlet megoldása válik szükségessé.

A kollokvium bő teret szánt a függvényegyenletek alkalmazásainak is. E témakörbe tartozó előadások sorába tartozik *Lovass-Nagy Viktor* előadása, aki *Egerváry Jenő* és saját munkáját ismertette. Az előadás címe „Végpontjaiban felfüggesztett gerenda stabilitásának vizsgálata." *Freud Géza* az Alkalmazott Matematikai Intézet Differenciálegyenletek osztályában felmerült egyik problémát ismertette. Explicit alakban előállítja a féltérre vonatkozó harmadik peremértékfeladat Green-függvényét, mely a

$$\left(g+\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{z=0}=0$$

feltételnek tesz eleget.

Borbély Samu egyik nehézipari nagyüzem megbízásából foglalkozott egy hővezetési problémával. Az ezzel kapcsolatban fellépő differenciálegyenlet közelítő megoldását ismertette. Végül *Pál Sándor* beszámolt az Alkalmazott Matematikai Intézet elektrotechnikai osztályának folyamatban lévő néhány kutatásáról.

Az előadásokat viták követték. Ezek általában termékeny és gondolatébresztők voltak. Különösen élénk volt az a vita, mely Freud Géza második előadását követte. Freud által felvetett kérdést még az ülésen más, igen érdekes módszerrel megoldotta Pál Sándor. Számos előadó több, még nyitott problémát vetett fel. Különösen Rényi Alfréd e beszámolóban ismertetett problémája, Aczél János saját, valamint lengyel tanulmány-útjáról hozott és Hosszú Miklós néhány problémája váltott ki szélesebb érdeklődést.

Végezetül megemlítjük a kollokvium mintaszerű elvi és technikai szervezését. A résztvevők egyhangúan megállapították, hogy a kollokvium programja érdekes és tanulságos volt, az előadások nem torlódtak, és így követésük sohasem vált fárasztóvá. Különösen pedig ki kell emelni a technikai szervezés kitünő voltát, amit azt biztosította, hogy a résztvevők nemcsak hasznosan, hanem igen kellemesen is töltötték a kollokvium alatti időt. Ezért külön köszönet illeti a Társulat adminisztratív apparátusát.

A balatonvilágosi algebrai kollokvium

A Bolyai János Matematikai Társulat, a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával, 1954. szeptember 20-tól 22-ig rendezte meg az 1954 évi vándorgyűlés keretében az algebrai kollokviumot.

A kollokvium a balatonvilágosi Akadémiai Üdülőben zajlott le, ahol a résztvevők igen kellemes környezetben, zavartalanul vitathatták meg a hazai algebrai kutatások aktuális problémáit. A kollokviumon 27 metematikus vett részt és 18 előadás hangzott el. Az előadások, a Társulat által rendezett kollokviumok célkitűzéseinek megfelelően, nemcsak befejezett eredményekről számoltak be, hanem a folyamatban lévő vizsgálatokról is. Emellett a jelenlevők nyilt problémákat is kitűzhettek. Az előadásokat általában számos hozzászólás követte. A hozzászólók rávilágítottak az elhangzott előadás problémáinak más matematikai problémákkal való kapcsolataira, továbbá az előadás anyagával kapcsolatban újabb kérdéseket vetettek fel.

A kollokvium túlnyomórészt a különféle algebrai strukturák vizsgálatával foglalkozott, de hangzott el előadás az algebrai számelmélet és a matematika alapjainak vizsgálata köréből is. Örömmel állapíthatjuk meg, hogy a balatonvilágosi algebrai kollokvium eredményes, jó munkát végzett. A kollokvium hű képet nyújtott a hazai algebrai kutatások helyzetéről: új eredményekről számolt be és folyamatban lévő vizsgálatokat ismertetett. A kollokviumot azért is sikeresnek kell mondanunk, mert irányt mutatott a kutatóknak a speciális kérdések vizsgálatában, de ugyanakkor feltárta az algebrai kutatások távolabbi perspektíváit is. Ebből a szempontból különösen értékes volt Kalmár László előadása, amely az algebrai vizsgálatok legmodernebb irányára, a további absztrakció útján létrejött álltalános algebrai strukturák vizsgálatára hivta fel a figyelmet.

A balatonvilágosi algebrai kollokviumon elhangzott előadásokról rövid kivonatokban a következőkben számolunk be:

1954. szeptember 20 délelőtt.

Rédei László: Elnöki megnyitó.

Szele Tibor: Végességi kritérium gyűrűkre.
Ismeretes, hogy a csoportelmélet egy mindmáig megoldatlan, mély problémája a következő: igaz-e, hogy egy alcsoportjaira nézve minimum- és maximum-követelménynek eleget tevő csoport szükségképpen véges? Előadó megoldotta e probléma gyűrűelméleti analogonját. Tétele szerint egy részgyűrűire nézve minimum- és maximum-követelménynek eleget tevő gyűrű véges. — A végtelen ferdetest példája mutatja, hogy hasonló természetű állítás nem igaz, ha a „részgyűrű" szót a „baloldali ideál" szavakkal helyettesítjük. Következményként adódik, hogy részgyűrűire nézve maximum-követelménynek eleget tevő ferdetest szükségképpen véges.

Rédei László: Zéta-függvények a csoportelméletben és Hajós tétele.

Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ egy véges Abel-csoport tetszés-szerinti részcsoportjai, $\mathfrak{N}$ az $1, \ldots, n$ számok halmaza, $\mathfrak{M}$ az $\mathfrak{N}$ részhalmaza, $A_{\mathfrak{M}}$ az $A_i (i \in \mathfrak{M})$ csoportok szorzata, jelölje (H) egy H véges halmaz esetén a számosságot (tehát H csoport esetén a rendet). A z komplex változó segítségével definiáljuk a

$$\varrho(z) = \varrho(z; A_1, \ldots, A_n) = \sum_{\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{N}} (-1)^{(\mathfrak{M})} (A_{\mathfrak{M}})^{-z}$$

függvényt. Továbbá legyen

$$\zeta(z) = \zeta(z; A_1, \ldots, A_n) = \varrho(z; A_1, \ldots, A_n)^{-1};$$

ezeket csoportelméleti zéta-függvényeknek nevezzük. A definició határátmenettel és analitikus folytatással (végtelen) Abel-féle torzió-csoportok megszámlálható sok $A_1, A_2, \ldots$ részcsoportjára is kiterjeszthető, s az így nyert általánosítás speciális esetként tartalmazza a Riemann-féle zéta-függvényt. További általánosítások is lehetségesek ferde csoportok valamint gyűrűk esetére, operátor-strukturákra, s definiálhatók még a „duális zéta-függvények" úgy, hogy részstrukturák indexét és metszetét alkalmazzuk. A fenti esetre vonatkozik, mint legérdekesebb eredmény a „véges Abel-csoportok tehetetlenségi tétele":

$$0 \geqq \varrho(z; A_1, \ldots, A_n) < 1 \qquad (z = 1, 2, \ldots)$$

amely három tekintetben éles, ugyanis (valós) $z \geqq 1$ esetén hamis, benne a 0,1 korlátok általában nem szűkíthetők, s a tétel ferde csoportokra nem terjeszthető ki. További érdekesség, hogy Hajós tétele ekvivalens bizonyos zéta-függvényeknek a $z = 1, 2, \ldots$ helyeken való pólusosságával, amelynek alapján remélhető Hajós tételének új bizonyítása.

Kertész Andor: A lineáris egyenletrendszerek általános elmélete.

Előadó tetszőleges R gyűrű fölött — akárhány ismeretlen és egyenlet esetében — definiálja a kompatibilis lineáris egyenletrendszert, majd bebizonyítja a következő tételt: egy tetszőleges R gyűrű fölött akkor és csak akkor érvényes a lineáris egyenletrendszerek megoldásának klasszikus elmélete, ha R (klasszikus értelemben vett) félig egyszerű gyűrű. Ebből a tételből számos következményen kívül következik a lineáris egyenletrendszerek ferdetest fölötti klasszikus elméletének a tetszőleges számosságú ismeretlen és egyenlet esetére való Gacsályi—Szele-féle általánosítása is.

Szép Jenő: Csoportok egy új szétbontása.
Előadó algebrai struktúráknak részstruktúrákkal való olyan lefedését vizsgálta, ahol bármely két lefedő részstruktúrának közös része (magja) ugyanaz. Ha a lefedés irreducibilis (azaz a lefedő komponensek egyike nem fedhető le ugyanolyan magú részstruktúrákkal, mint az eredeti struktúra), akkor a lefedés egyértelmű. Megemlítette ennek néhány következményét csoportok esetében.

September 20 délután.

Bognár Mátyás: Torziómentes csoportok karaktercsoportjairól.
Előadó vázlatosan ismertette a következő tételt: Két egydimenziós kompakt, összefüggő, megszámlálható bázissal rendelkező, kommutatív topologikus csoport akkor, és csak akkor izomorf, ha a két csoport topologikus tere homeomorf.

Szász Ferenc: Jacobson egyik tételének elemi bizonyítása.
Előadó Jacobson azon tételének Herstein-féle elemi bizonyítását ismertette, amely szerint a gyűrűre kiszabott bizonyos végességi feltétel maga után vonja a gyűrűben a szorzás kommutativitását. Maga a tétel a következő: Ha egy tetszőleges R gyűrű olyan, hogy bármely x elemhez van olyan x-től függő 1-nél nagyobb n kitevő, amelyre $x^n - x = 0$, akkor az R gyűrű szükségképpen kommutatív. Jacobson tétele tehát általánosítása a véges ferdetestekre vonatkozó fontos Wedderburn-féle tételnek.

Szélpál István: Operátormodulusok elemeinek rendjéről.
Legyen G tetszőleges baloldali R-modulus. Mint ismeretes G bármely elemének rendje R valamely baloldali ideálja. Előadó bebizonyította, hogy tetszőleges R-gyűrű s ennek tetszőleges L baloldali ideálja esetén van olyan GR-modulus, amelyben alkalmas g elemre a g elem rendje éppen L. A bizonyítása egy ilyen G modulus megkonstruálásával történik. Ebből az eredményből az is következik, hogy megadható olyan GR-modulus, amely esetén R bármely baloldali ideálja fellép rendideálként.

September 21 délelőtt.

Dénes Péter: Osztálytestek főideálproblémája.
A Hilbert—Furtwängler-tétel szerint minden k végesfokú algebrai számtest fölött létezik egy és csak egy osztálytest, K, amely a következő tulajdonságokkal bir:
1. K relatív-Ábeltest k fölött és relatív-Galois csoportja

k fölött izomorf k ideálosztály csoportjával. K relatív foka k fölött tehát egyenlő a k számtest h osztályszámmal.

2. K relatívdiszkriminánsa k fölött 1.

3. a K osztálytestben az alapszámtest bármely ideálosztályának prímideáljai azonos törvény szerint bomlanak prímideál tényezőkre: ha az A ideálosztály foka m, az A osztályba tartozó bármely prímideál $\frac{h}{m}$ különböző prímtényezőre bomlik.

4. a k számtest minden ideál osztálya a K osztálytestben a főosztályba megy át.

A fenti négy tételből az első három a k számtest fölött képezhető részosztálytestekben egyértelmű módon érvényesül, a következők szerint. A K számtest bármely A ideálosztályához, amelynek foka m, rendelhető a K osztálytest egy K' részteste amely k fölötti relatív-Ábeltest és relatív foka m, amelynek relatívdiszkriminánsa k fölött 1 és amelyben minden A osztálybeli prímideál $\frac{h}{m}$ prímtényezőre bomlik, vagyis prímideál marad. Ezen strukturális egyértelműségből várni lehetne, hogy ez a negyedik pontra is fennáll, vagyis K'-ben az alaptest ideál osztályai közül éppen az A osztály által megadott részideál osztálycsoport válik főosztállyá. Ez azonban általánosságban nem igaz.

Előadó az utóbbi problémával kapcsolatban a következőket bizonyította:

Az osztálytestek főideál tételének fentiekben definiált izomorfiája a részosztálytestekre a következő esetekben érvényes:

azon részosztálytestekre, amelyek relatív foka az alaptest fölött az alaptest osztályszámának teljes prímhatványozója. Ha e részosztálytest az alaptest fölött relatív-ciklikus, az izomorfia a részosztálytest k fölötti minden résztestére érvényes. Ha e részosztálytest az alaptest fölött relatív-Ábeltest az izomorfia fennáll, ha a relatív-Galois-csoport alakja $(2, 2, \ldots, 2)$. Ha e részosztálytest az alaptest fölött relatív-Ábeltest és relatívfoka páratlan prímszám hatványa, két bázisosztály esetében az izomorfia érvényesülhet, de kettőnél több bázisosztály esetében bizonyosan nem érvényesül.

Gacsályi Sándor: Egyenletrendszerek szerváns alcsoportokban.

Egy Fuchs László által felvetett probléma megoldása a következő eredménnyel: ha A szerváns alcsoportja a tetszőleges G Ábel-féle csoportnak, akkor bármely, véges sok ismeretlent tartalmazó és G-ben megoldható A-beli egyenletrendszer A-ban is megoldható. Ha viszont bármely (tetszőleges számosságú ismeretlent tartalmazó) A-beli egyenletrendszer G-beli megoldhatóságából következik az egyenletrendszer A-beli megoldhatósága, akkor A direkt összeadandója G-nek. Ez az eredmény az egyenletrendszerek megoldhatóságával kapcsolatban méri le a szerváns alcsoport és a direkt összeadandó közötti különbséget.

Kertész Andor—Szele Tibor: Kulikov egyik problémájáról.

L. Ja. Kulikov egy — két részből álló — hatalmas munkájában általánosítja az Ábel-féle p-csoportok elméletét olyan operátormodulusok esetére, amelyeknek operátortartománya a p-adikus egész számok z_p gyűrűje. Kulikov vizsgálataiban megtalálja az Ulm-féle tétel analogonját is. E tétellel kapcsolatban azonban még nem tudja, hogy a szereplő feltételek mindegyike lényeges-e? Előadók beszámoltak azokról a vizsgálataikról, amelyek Kulikov problémájának megoldására vonatkoznak. Egyszerű bizonyítást adtak a következő, Kulikov által bejelentett, de nem bizonyított tételre: bármely végtelen magasságú elem nélküli megszámlálhatóan generált torziómentes z_p-modulus ciklikus z_p-modulosok direkt összege. Egy példa megadásával továbbá azt is megmutatták, hogy van olyan megszámlálhatóan generált végtelen magasságú elem nélküli z_p-modulus, amelynek torzió-alcsoportja nem direkt összeadandója a csoportnak.

Fuchs László: Csoportok, melyekben az izomorf alcsoportok osztályai végesek.

Tetszőleges G csoport alcsoportjai osztályokba sorolhatók úgy, hogy két alcsoport akkor s csak akkor kerüljön ugyanazon osztályba, ha egymással izomorfak. Előadó azt vizsgálta, milyen szerkezetűek azok a csoportok, amelyekben ezek az osztályok mind végesek. Kimutatta, hogy egy G csoportnak akkor és csakis akkor van meg az említett tulajdonsága, ha centrumában tartalmaz oly véges indexű alcsoportot, mely izomorf az összes komplex egységgyökök (multiplikatív) csoportjának valamely alcsoportjával. Mint érdekes mellékeredmény adódik, hogy az egyes osztályokban lévő alcso-

portok száma egy (csupán a csoporttól függő, de az osztálytól független) fix korlát alatt marad. Ha minden osztályban csak egy alcsoport van, akkor Szele egyik tétele értelmében a csoport az összes egységgyökök csoportjának egy alcsoportjával izomorf; ha pedig minden osztályban ugyanannyi véges, de 1-nél több alcsoport van (kivéve természetesen a triviális alcsoportok osztályait), akkor a csoport két vagy három p-edrendű ciklikus csoport direkt összege.

September 21, délután

Rédei László: Egy elemmel generált gyűrűk.

Előadó Algebra I. c. könyvének 400—405. lapjain foglalkozik az egy elemmel generált gyűrűk kérdésével. A problémát véges gyűrűk esetére sikerült lényegében véve elintézni az idézett helyen óhajtott Tschirnhaus-féle transzformációk megadása által. A végtelen gyűrűk esete további vizsgálatra szorul.

Steinfeld Ottó: Félig egyszerű gyűrűk direkt felbontásairól.

Ismeretes, hogy a félig egyszerű gyűrűk Noether-féle alaptétele szerint az R félig egyszerű gyűrű egységelemes és véges sok minimális balideál direkt összege, az első Wedderburn—Artin-tétel szerint pedig R ferdetestek fölötti véges sok teljes mátrixgyűrű direkt összege, a második Wedderburn—Artin-tétel pedig a ferdetest fölötti teljes mátrixgyűrűről ad felvilágosítást.

Az előadó a félig egyszerű gyűrűknek egy direkt összegként való új előállítását ismertette. Bevezette ehhez a kváziideál fogalmát. Az R gyűrű α modulusát kváziideálnak nevezzük, ha α-ra teljesül az

$$R\alpha \cap \alpha R \leqq \alpha$$

összefüggés. A Noether-féle alaptétel és egyéb segédtételek segítségével kimutatható, hogy az R félig egyszerű gyűrű bizonyos speciális kváziideálok direkt összege. Ezen felbontás alapján bebizonyítható az első és második Wedderburn—Artin-tétel. A bizonyítás öt állítás ekvivalenciájának kimutatása útján történik.

Szász Gábor: A Dedekind—Birkhoff-féle tétel általánosításának problémája.

Dedekind-nek a moduláris hálókra vonatkozó vizsgálatai nyomán G. Birkhoff kimutatta a következő igen fontos tételt: Tekintsük egy L háló valamely olyan $[a, b]$ zárt intervallumát, amelynek tetszésszerinti x, y elempárja

esetén „az x követi $x \cap y$“ relációból mindig „$x \cup y$ követi y-t“ következik. Ha $[a, b]$-ben minden részlánc véges hosszúságú, akkor közöttük az összes maximális láncok hossza megegyezik.

Az előadó (s tőle függetlenül, valamivel később R. CROISOT) egy régebbi dolgozatában kimutatta, hogy az összes részláncok véges hosszúsága helyett elegendő egyetlen véges hosszúságú részlánc létezését megkívánni. Ebben az előadásban pedig azzal a kérdéssel foglalkozott lehet-e hasonló jellegű kijelentést tenni olyan $[a, b]$ intervallumokra, amelyekben minden részlánc hossza végtelen, s (ennek megfelelően, az ebben az esetben általában tartalmatlan fentebbi követési feltétel helyett) eleget tesz a félig-modularitás Croisot-féle általános feltételének? Ellenpéldával kimutatja, hogy ezekből a feltételekből az $[a, b]$ nem-bővíthető láncainak izomorfiája nem következik, ezzel szemben sejtésként mondja ki az összes ilyen láncok számosságának megegyezését.

Seres István: I. SCHUR egy sejtéséről.

Legyenek $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ egymástól különböző racionális egész számok. Az $F_n(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - a_i)^{2^n} + 1$ polinom $m > 5$, $n > 0$-ra irreducibilis a racionális számtesthez szerkesztett $\Gamma(x)$ polinom-gyűrűben.

Szeptember 22 délelőtt

Fuchs László: Az additív ideálelmélet néhány problémájának hálóelméleti tárgyalása.

Ismert tény, hogy az additív ideálelmélet bizonyos kérdéseit igen egyszerűen és áttekinthetően lehet tárgyalni hálóelméleti megfogalmazásban. Előadó továbbfejlesztve régebbi eredményeit, megmutatja, hogy az additív ideálelmélet további kérdéseinek adható igen általános, s áttekinthető tárgyalása, amely számos fontos esetet speciális esetként tartalmaz. A módszer lényege az, hogy a gyűrű ideáljainak halmaza helyett oly hálót veszünk alapul, melyben értelmezve vannak mindazon műveletek mindazon tulajdonságokkal, amelyek egy gyűrű ideáljai között elvégezhetők, ill. érvényesek. Ezenkívül feltesszük, hogy az L hálóban értelmezve van egy Ψ operáció, mely L-nek minden x eleméhez ismét L-nek valamely $\Psi(x)$ elemét rendeli hozzá. Erről az operációról általában nem kell kikötni semmit. A Ψ operáció segítségével definiálhatók L-ben bizonyos kitüntetett elemek,

mint pl. a Ψ-prím elem: igy nevezünk egy p elemet, ha $x_1 x_2 \cdots x_k \leqq p$-ből valamely i-re $x_i \leqq \Psi(p)$ következik. Előadó megmutatta, hogy véges-sok, ugyanazon Ψ-tulajdonsággal bíró (pl, Ψ-prím) elem metszeteként előállítható elemek előállításaira vonatkozóan oly egyértelműségi tételek érvényesek, amelyek igen hasonlóak a Noether-féle klasszikus eredményekhez.

Kertész Andor: Teljesen redukálható algebrai struktúrák. Teljesen redukálhatónak szokás nevezni egy olyan algebrai struktúrát, amely véges számú minimális részstruktúra direkt összegeként áll elő. Előadó bebizonyította, hogy egy tetszőleges operátormodulus akkor és csak akkor teljesen redukálható, ha van véges számú olyan maximális megengedett részmodulusa, amelyek metszete zérus. A bizonyítás annyira általánosan fogalmazható meg, hogy hasonló természetű állítás nyerhető teljesen redukálható csoportokra és gyűrűkre vonatkozólag is.

Kalmár László: Túlságosan absztrakt-e a modern algebra?
(l. 1954. május 7.-i budapesti előadás).

A Bolyai János Matematikai Társulat Budapesti és Pest megyei Tagozatának előadásai 1955. január 1-től 1955. június 30-ig

Január 7.

Medgyessy Pál: Kísérleti adatok matematikai feldolgozásának valószínűségszámítási jellegű problémái.
Egyes fizikai, biológiai stb. problémák megoldásánál szükség van Gauss-, ill. Cauchy-függvények keverékének komponensekre bontására. Az előadó ismertette az erre kidolgozott (részben saját) módszereket, majd az eljárások kiterjesztését a nem stabilis sűrűségfüggvények esetére.

Január 14.

Turán Pál beszámolt 1954. évi kínai útjáról. (Klubest.) Az előadást megelőzően osztotta ki Társulatunk a Grünwald Géza díjat.

Január 14.

Biczó Géza: A háromszög Apolloniusz körei. (Ifjúsági Matematikai Kör.)

Január 15.

Lánczi Istvánné: Additív számelméleti problémák. (Középiskolai délután.)

Január 21.

Várhelyi Ferenc: A számolási készség fejlesztése. (Előadás a BPTI-tel és a KPTI-tel közös rendezésben, ált. isk. nevelők részére.)

Január 21.

Az 1954. évi Schweitzer Miklós verseny eredményhirdetése és díjkiosztása. A versenyfeladatokat Szele Tibor ismertette. A versenyjelentés a Matematikai Lapok VI. évfolyama 4. számában fog megjelenni.

Január 26.

Császár Ákos: Elemi topológiai problémák. Előadás középiskolai tanárok részére. Az előadás szövegét az Oktatásügyi Minisztérium valamennyi gimnáziumnak elküldötte.

Január 28.

Kővári Tamás ismertette Gelfond: Differenciaszámítás c. könyvét. (Klubest.)

Február 4.

Surányi János: Elsőfokú egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságáról.

Az előadás az Eötvös Loránd Tudományegyetem 1952—53. évi évkönyvében hasonló címen megjelent eredménynek egy egyszerűsített bizonyítását és egy további, teljes indukciós bizonyítását tartalmazta.

Február 5.

Ankét a könyvkiadó vállalatokkal közös rendezésben.

Február 5.

Reiman István: Pascal és Brianchon tételéről. (Előadás középiskolás diákok részére.)

Február 11.

Kötetlen klubest.

Február 18.

Freud Géza: Ortogonális polinomokról.
Az előadó új becslési eljárást ismertet normált ortogo-

nális polinomokra, melynél csak a súlyfüggvény lokális viselkedését használja fel:
Legyen $p_n(x)$ a $w(x)$ súlyfüggvényhez $(-1 \leqq x \leqq +1)$ tartozó n-edfokú normált ortogonális polinom, $m\sqrt{1-x^2} \leqq \leqq w(x) \leqq M(1-x^2)^{-1/2}$ és rögzített ξ-re $w(x)-w(\xi) = = 0(|x-\xi|^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, akkor

$$p_n(x) = 0(n^{1-\alpha}).$$

Február 18.

Csiszár Imre: Egyenlőlapú tetraéder. (Ifjúsági Matematikai Kör.)

Február 23.

Vigassy Lajos: A kúpszeletek fogalmának kialakítása és a kúpszeletek rendszerezésének lehetősége a középiskolában. (Előadás a BPTI-tel és a KPTI-tel közös rendezésben.)

Március 4.

Hajós György: Beszámoló a Szovjetunióban tett utamról. Az előadást Alexits György, a Társulat elnöke nyitotta meg. (A Magyar—Szovjet Társasággal közös rendezés.)

Március 4.

Ligeti Béla: Számelméleti alapvetés az általános iskolában. (Előadás a BPTI-tel és a KPTI-tel közös rendezésben.)

Március 11.

Rényi Alfréd: A. Ja. Hincsin és E. B. Dünkin tételei és azok általánosítása.
Események egy sorozatát ekvivalenseknek nevezik, ha közülök bárhogy kiválasztva k eseményt, ezek együttes bekövetkezésének valószínűsége csak k-tól függ, de nem függ attól, hogy melyik k eseményt választottuk ki $(k = 1, 2, \ldots)$. A. Ja. *Hincsin* bebizonyította, hogy egy tetszőleges ekvivalens eseménysorozat előállítható, mint olyan, egy θ valószínűségi változótól, mint paramétertől függő olyan eseménysorozat, amelynek eseményei θ minden rögzített értéke mellett függetlenek és egyenlő valószínűségüek. A θ változóról nyilvánvalóan feltehető, hogy $0 \leqq \theta \leqq 1$. Ebből következik, hogy ha $p_0 = 0$ és p_k $(k = 1, 2, \ldots)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy a szóbanforgó ekvivalens eseményekből álló sorozatnak

k eseménye egyidejűleg bekövetkezik, akkor a p_k számok előállíthatók a

$$p_k = \int_0^1 t^k dF(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots) \qquad (1)$$

alakban, ahol $F(t)$ egy eloszlásfüggvény. Előadó rámutatott, hogy *Hincsin* tétele igen egyszerűen következik Hausdorffnak abból a tételéből, hogy bármely p_k abszolut monoton számsorozat előállítható az (1) alakban. Ezután előadó kimutatta, hogy Hincsin tétele a következőképpen terjeszthető ki: egy tetszőleges eseménysorozat előállítható mint egy θ valószínűségi változótól, mint paramétertől függő olyan eseménysorozat, amelynek eseményei θ minden rögzített értéke mellett függetlenek (de természetesen általában nem egyenlően valószínűek). E. B. *Dünkin* egy nemrég megjelent munkájában *Hincsin* tételét kiterjesztette ekvivalens valószínűségi változókra. Valószínűségi változók egy sorozatát akkor nevezzük ekvivalens változó sorozatnak, ha a sorozat bármely k változójának együttes eloszlásfüggvénye csak k-tól függ, de nem függ a k változó választásától. *Dünkin* kimutatta, hogy tetszőleges ekvivalens valószínűségi változókból álló sorozat előállítható, mint valószínűségi változóknak egy olyan, a θ valószínűségi változótól mint paramétertől függő sorozata, amely változók θ minden rögzített értéke mellett függetlenek és egyforma eloszlásúak. Előadó egy új, egyszerű bizonyítást adott *Dünkin*-nek erre a tételére, a *Birkhoff—Hincsin*-féle ergod-tétel segítségével, és (hasonlóan mint *Hincsin* tételét) kiterjesztette ezt a tételt tetszőleges valószínűségi változókból álló sorozatokra.

Március 11.

Csiszár Imre: Egyenlőlapú tetraéder. (II.) (Ifjúsági Matematikai Kör.)

Március 12.

Műsoros klubest az Alkalmazott Matematikai Intézettel és az ELTE Matematikai Intézetével közös rendezésben.

Március 16.

Turán Pál: A geometriai szerkeszthetőség elmélete. Előadás középiskolai tanárok részére. Az előadás szövegét az Oktatásügyi Minisztérium valamennyi gimnáziumnak elküldötte.

Március 18.
Kötetlen klubest.

Március 18.
Neukomm Gyula: Geometriai szerkesztési módszerek. (Előadás általános iskolai tanárok részére a BPTI-tel és a KPTI-tel közös rendezésben.)

Április 1.
Abád József: Arány és hasonlóság. (Előadás általános iskolai tanárok részére a BPTI-tel és a KPTI-tel közös rendezésben.)

Április 8.
Varga Tamás: A magyar matematikaoktatás fejlődése a felszabadulás óta.

Április 9.
Bognár Mátyás: Elemi topológiai kérdésekről. (Előadás középiskolás diákok részére.)

Április 15.
Mosoni György: A térgeometria tanításának problémái. (Előadás általános iskolai tanárok részére, a BPTI-tel és KPTI-tel közös rendezésben.)

Április 15.
Ifjúsági Matematikai Kör kötetlen megbeszélése.

Április 15.
Turán Pál: Grünwald Géza élete és matematikai munkássága. (Az előadás szövege megjelent lapunk előző számában.)

Április 20.
Hajós György: A geometria megalapozásának kérdéseiről. (Előadás középiskolai tanárok részére.)

Április 22.
Obláth Richárd: Megemlékezés Gaussról, halálának 100-ik évfordulója alkalmával. (Klubest.)
(Az előadás szövegét lapunk e száma közli 221. oldalon.)

Április 27.
Molnár József: Függvénytani ismeretek tanítása a középiskolában. (Előadás középiskolai tanárok részére, a BPTI-tel és a KPTI-tel közös rendezésben.)

Május 6.

Frey Tamás: Normális pontcsoportokra támaszkodó Lagrange-féle interpoláció sorozatokról.
Fejér Lipót alapvető vizsgálatai mellett Erdős Pál és Turán Pál, illetve Grünwald Géza eredményeit ismertette az előadó. Megemlítette, hogy Erdős és Turán azon sejtése, mely szerint az $\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k^{(n)})$ függvény a $[-1, 1]$ bármely belső zárt részintervallumán $O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ rendű, valószínűvé tette, hogy a normális pontcsoportokra támaszkodó interpoláció-sorozatok e belső zárt részintervallumokban épp úgy viselkednek, mint az elsőfajú Csebisev-polinomok gyökhelyeire támaszkodó interpoláció sorozatok. Az előadó ezután — Grünwald Géza: On Interpolation c. cikkében alkalmazott módszereket finomítva — bebizonyította az Erdős—Turán sejtést, továbbá az ebből következő fent említett interpolációs sajátságokat. Megemlítette az előadó, hogy módszere bizonyos ortogonális polinomok korlátosságának bizonyítására, és az ezekre támaszkodó interpolációs eljárások vizsgálatára is alkalmas.

Május 7.

Pálmay Lóránt: Mik azok a nomogrammok? (Előadás középiskolás diákok részére.)

Május 13.

Fuchs László: Megemlékezés Szele Tiborról. (Az előadás szövege megjelenik lapunk e száma 97. oldalán.)

Május 20.

Hosszú Miklós: Néhány többváltozós függvényegyenlet általánosítása. (A Grünwald-díjat nyert dolgozat ismertetése és az abban foglalt eredmények továbbfejlesztéséről beszámoló.)

Május 25.

Bognár Mátyás: A vektorok felhasználása a geometriában. (Előadás középiskolai tanárok részére.)

Május 28.

Stanislaw Mazur (Varsó): Folytonos operációk approximációja polinomokkal.
Legyenek E és E_1 lineáris metrikus és lokálisan kon-

vex terek. Egy olyan $w(x)$ operációt, amely E elemeire van értelmezve, továbbá értékkészlete E_1-hez tartozik, akkor nevezünk legfeljebb m-edfokú polinomnak, ha folytonos, továbbá ha a következő tulajdonsággal rendelkezik: E bármely két eleméhez x_0 és z_0-hoz találhatók E_1-nek olyan $a_0, a_1, \ldots, a_m$ elemei, hogy minden valós t-re teljesüljön $w(x_0 + tz_0) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$. A $w(x)$ polinomot akkor nevezzük normálisnak, ha előállítható a

$$w(x) = v(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_p(x))$$

alakban, ahol $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_p(x)$ E-ben értelmezett lineáris funkcionálok, továbbá $v(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ polinom, amelynek koefficiensei elemei E_1-nek.

Ekkor fennáll a klasszikus Weierstrass-féle tétel következő általánosítása:

Legyen Q zárt, szeparábilis és lokálisan korlátos altere E-nek; legyen továbbá $f(x)$ egy Q-ban értelmezett folytonos operáció, amelynek értékei E_1-hez tartoznak. Akkor létezik normális polinomoknak olyan $\{w_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozata, amely „Q-ban folytonosan $f(x)$-hez konvergál", vagyis a konvergencia Q minden kompakt részhalmazán egyenletes.

Az a feltevés, hogy Q lokálisan korlátos nem enyhíthető: legyen ugyanis s Fréchét-féle tér, vagyis az összes valós $x = (\xi_k)$ számsorozatok tere. Ebben az esetben nem választható ki polinomoknak egy olyan sorozata, amely az egész térben az $f(x) = \sum_k \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|}$ funkcionálhoz konvergál. Q szeparábilitása szintén lényeges, mint azt a következő A. Delczynski-től származó példa mutatja:

Legyen E az a Banach-tér, amely a t valós változó valós $x(t)$ függvényeiből áll, ahol minden természetes k-ra $|x(t)| > \frac{1}{k}$ csak véges sok t-re teljesül. Legyen továbbá $\|x\| = \sup |x(t)|$. Akkor nem létezik olyan $w_n(x)$ polinomsorozat, amely az egész térben $f(x) = \|x\|$-hez konvergál.

A Weierstrass-tétel fenti általánosításában a szokásos egyenletes konvergencia helyett folytonos konvergencia szerepel. Ezzel kapcsolatban fennáll a következő tétel: Legyen Q metrikus, szeparábilis tér, legyen továbbá

$C(Q)$ a Q-ban értelmezett valós függvények tere. $C(Q)$-ban létezik oly metrika, amelyre $C(Q)$ szeparábilis; ha f_n és f elemek ezen metrika által adott távolságát (f_n, f)-el jelöljük, akkor $(f_n, f) \to 0$-ból következik az f_n sorozat f-hez való konvergenciája. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $C(Q)$ térben létezzék oly metrika, hogy $(f_n, f) \to 0$ ekvivalens legyen az $f_n(x)$ sorozatnak a Q térben $f(x)$-hez való konvergenciájával az, hogy Q lokálisan kompakt legyen.

Június 2.

Stefan Schwarz (Bratislava): Bikompakt félcsoportok karaktereinek elméletéről.

Legyen S egy Hausdorff-féle bikompakt, kommutatív félcsoport. Az ilyen S félcsoportnak mindig van legalább egy idempotens eleme és S felírható olyan diszjunkt P_α félcsoportok halmazelméleti összegeként ($S = \sum_\alpha P_\alpha$, $P_\alpha \cap P_\beta = \Phi$), hogy minden egyes P_α-nak egyetlen $e_\alpha (\in P_\alpha)$ idempotens eleme van.

Az S félcsoportnak M ideálját primideálnak nevezzük, ha $S - M$ félcsoport. (Az Φ üres halmazt és az S-t is primideálnak tekintjük.) A bizonyítások számára fontos az a tény, hogy az S-től különböző nyitott primideálok könnyen megkonstruálhatók. Mégpedig érvényes a következő tétel:

Tekintsük az S-nek egy tetszőleges e_α idempotens elemét. Keressük meg az összes olyan e_η idempotens elemeket, melyekre $e_\alpha e_\eta \neq e_\alpha$. $I = \sum_\eta P_\eta$ egy nyitott primideál és S-nek mindegyik (S-től különböző) nyitott primideálja ilyen módon megadható.

Az S félcsoportban karakteron egy olyan χ folyamatos, komplex függvényt értünk, amely az összes $a, b (\in S)$ elemekre kielégíti a $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ feltételt.

Mindegyik $x (\in S)$ elemre és mindegyik χ karakterre $|\chi(x)| \leqq 1$ teljesül. Az S azon x elemei, amelyekre $|\chi(x)| < 1$ teljesül, egy nyitott primideált alkotnak, azon $x (\in S)$ elemek pedig, melyekre $\chi(x) = 0$, egy zárt primideált alkotnak.

Az S-nek egy $\mathfrak{p}$ zárt primideálját generálónak nevezzük, ha létezik legalább egy olyan karakter, amely a $\mathfrak{p}$-n és csak a $\mathfrak{p}$-n zéróvá válik, ha $\mathfrak{p}$ egy generáló primideál, akkor az összes olyan karakterek, amelyek pontosan a $\mathfrak{p}$-n válnak zéróvá, egy $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ félcsoportot alkotnak.

Az S összes karaktereinek S^* halmaza felírható $S^* = \sum_p \mathfrak{S}_p$ alakban, ahol p befutja az S összes generáló primideálját és az $\mathfrak{S}_p$ félcsoportok diszjunktak. Mindegyik $\mathfrak{S}_p$ félcsoportban a leosztási szabály teljesül. Az $\mathfrak{S}_p$-k közül kettő (mégpedig $\mathfrak{S}_\Phi$ és $\mathfrak{S}_S$) mindig csoport. Ha S összefüggő, akkor az $\mathfrak{S}_p$ félcsoportok közül e kettőn kívül egyik sem csoport.

Annak szükséges és elégséges föltétele, hogy $\mathfrak{S}_p$ csoport legyen az, hogy p egyidőben nyitott és zárt primideál legyen. Fordítva, minden ilyen p primideálhoz létezik egy olyan $\mathfrak{S}_p$ csoport, amely az összes olyan karakterekből áll, amelyek pontosan a p-n válnak zéróvá. Az ilyen $\mathfrak{S}_p$ csoport szerkezete leírható egy $S-p$-ben fekvő, pontosan definiált részcsoport segítségével.

Speciálisan érvényes: Ha az S véges, vagy az S csoportok halmazelméleti összege, akkor S^* diszjunkt csoportok halmazelméleti összege. Ezekben az esetekben részletesen le lehet írni, az S^* félcsoport „finom szerkezetét", ugyanis az $\mathfrak{S}_{p_\alpha} \cdot \mathfrak{S}_{p_\beta}$ szorzatok vizsgálata visszavezethető az S félcsoport bizonyos részcsoportjai karaktereinek vizsgálatára.

Ezek az eredmények részletesen a Czechoslovak Mathematical Journal-ban fognak megjelenni.

Június 3.

Stefan Schwarz (Bratislava): Bikompakt félcsoportok maximális ideáljairól (klubest).

Legyen S egy Hausdorff-féle bikompakt félcsoport és legyen az S-ben egyetlen maximális $L^*(R^*)$ bal- (jobb-) oldali ideál.

Az előadó megvizsgálja az $S-L^*(S-R^*)$ halmazokat. Érvényes a következő főtétel:

Ha L^* létezik és $S-L^*$-nak több mint egy eleme van, akkor $S-L^* = Q$ egy zárt félcsoport és $Q = \sum_\alpha G_\alpha$, ahol a G_α-k diszjunkt, topologikusan izomorf csoportok és minden G_α az S-ben zárt.

Ha L^* és R^* is létezik, akkor $L^* = R^*$, továbbá $S = L^* + G$, $L^* \cap G = \Phi$ és G egy zárt csoport.

Az előadó más hasonló jellegű eredményeit is ismertette. Továbbá rámutatott az előbbi feltételek és az S egy- (két-) oldali egységelemeinek létezése közötti összefüggésre.)

Ezek az eredmények részletesen a Czechoslovak Mathematical Journal 5 (80) kötet 2. füzetében fognak megjelenni.

Társulatunk Oktatási Szakosztálya hazánk felszabadulása 10-ik évfordulójának megünneplésére, a Magyar Szovjet Barátsági Hónap keretében, a Magyar Szovjet Társasággal közösen az alábbi iskolákban rendezett előadást:

Március 8. *Gáspár Gyula:* Algebrai egyenletek.
Könyves Kálmán fiúgimnázium. Bp. IV. Április 4. tér 1.
„ 11. *Windisch Ferencné:* Egyenlőtlenségek.
József Attila gimnázium, Bp. XI. Villányi-út 27.
„ 14. *Neninger Gyula:* Algebrai egyenletek.
Jedlik Ányos gyak. gimn. Bp. XXI. Táncsics M. u. 92.
„ 16. *Sólyom Mihály:* Algebrai egyenletek.
Toldy Ferenc gimn. Bp. I. Toldy F. u. 9.
„ 16. *Pátzai Lászlóné:* Egyenlőtlenségek.
Budai Nagy Antal gimn. Bp. XXII. Pentz K. u. 13-15.
„ 18. *Faragó László:* Feladatmegoldások.
Eötvös József gimnázium. Bp. V. Reáltanoda u. 7.
„ 19. *Lovas Antal:* Egyenlőtlenségek.
Kölcsey Ferenc gimnázium, Bp. VI. Munkácsi M. u. 26.
„ 21. *Szalkay Mária:* Egyenlőtlenségek.
Varga Katalin leánygimn. Bp. VI. Sztálin-út 65.
„ 22. *Gádor Endréné:* Feladatmegoldások.
Árpád gimn. Bp. III. Nagyszombat u. 19.
„ 23. *Tasnády István:* Egyenlőtlenségek.
Dózsa György gimn. Bp. XV. Rpalota Bartók Béla-ut 25.
„ 23. *Greff Géza:* Algebrai egyenletek.
Corvin Mátyás gimn. Bp. XVI. Mföld, Mátyás tér 4.
„ 23. *Neukomm Gyula:* Feladatmegoldások.
Széchenyi István gimn. B. VIII. Kendeffy. u. 12.
„ 23. *Horváth István:* A többszínnyomású térkép színezésével kapcsolatos feladatok megoldásai.
I. László gimn. Bp. X. Kőrösi Csoma-út 28.
„ 23. *Tolnai Jenő:* Feladatmegoldások.
Apácai Csere János Pedagógiai Főiskola, Bp. Eötvös Loránd u. 4.
„ 24. *Pásztor István:* A többszinnyomású térkép színezésével kapcsolatos feladatok megoldásai.
Fáy András gimn. Bp. IX. Mester u. 60/62.
„ 25. *László Erzsébet:* Algebrai egyenletek.
Kossuth Zsuzsa leánygimn. Bp. V. Markó u. 29.
„ 25. *Molnár József:* A Bolyai—Lobacsevszkij geometriáról.
Kossuth Lajos fiúgimn. Bp. XX. Perzsébet, Török Flóris u. 89.
„ 30. *Horvay Katalin:* Feladatmegoldások.
II. Rákóczi Ferenc gimn. Bp. II. Keleti Károly u. 37.

MATEMATIKAI ÉS SZEMÉLYI HÍREK

Külföldi hírek

Szovjetunió.

A Szovjetunió Tudományos Akadémiája, Központi Statisztikai Hivatala és Felsőoktatási Minisztériuma 1954. március 16—26-ig tudományos értekezletet tartottak a statisztika kérdéseiről. Az értekezlet célja elsősorban a statisztika tárgyának és módszerének megvitatása volt. Az értekezleten a Szovjetunió legkülönbözőbb részeiből 760, a statisztikával foglalkozó tudományos dolgozó és gyakorlati szakember vett részt, többek között matematikusok is.

A vita eredményeit K. V. Osztrovitjanov, a Szovjetunió Tudományos Akadémiája Elnökségének 1954. május 28-án megtartott ülésén mondott beszédében foglalta össze. (l. Vesztnik Akadémii Nauk, 1954. 8. sz.) Beszédéből idézzük az alábbi, — a matematikai módszerek alkalmazásaira vonatkozó — részletet.

„Felmerül a kérdés, milyen viszony áll fenn a statisztika és a matematikai statisztika között. A statisztika néha eredményesen alkalmazza a matematikai statisztika módszereit, beleértve a valószínűségszámítást is. A matematikai statisztikát a társadalomgazdasági viszonyok területén végzett kutatások során korlátozott mértékben alkalmazzák (számítások technikai módszerei, a reprezentatív módszer, a nagy számok törvénye, valószínűségszámítás).

A harc kiéleződése azok között, akik a statisztikát univerzális tudománynak és azok között, akik társadalomtudománynak tekintik, odavezetett, hogy egyes közgazdászok és statisztikusok nem merték alkalmazni a matematikai módszereket a társadalmi jelenségek vizsgálatára. Úgy látszik ez a magyarázata, hogy a statisztika matematikai módszerei úgyszólván egyáltalán nem tükröződnek a Moszkvai Gazdaságstatisztikai Intézet tankönyvének vázlatában. Pedig semmi helytelen és antimarxista vonás sincs abban, ha a társadalmi jelenségek vizsgálata során, ott ahol lehet és célravezető, a legfejlettebb matematikai módszereket alkalmazzák. Csupán a politikai-gazdasági elemzést nem helyettesíthetjük matema-

tikai képletekkel. Az a körülmény, hogy a vitás kérdések megoldása a statisztikában rendkívül elhúzódott, a harc elmélyüléséhez és kiéleződéséhez, klikkszellem kialakulásához vezetett a statisztikai tudomány dolgozói körében. Ennek következtében azok, akik a statisztikát univerzális tudománynak tekintik, lebecsülték a társadalmi-gazdasági problémák statisztikai vizsgálatát, azok pedig, akik azt vallják, hogy a statisztika társadalomtudomány, nem vettek tudomást a statisztika matematikai módszereinek alkalmazásáról a technika és a termelés terén.

A statisztika matematikai módszereinek alkalmazását a technikában, különösen a termékek minőségének vizsgálatában, minden eszközzel fejleszteni és szorgalmazni kell, függetlenül attól, hogy ez a matematikai statisztika területéhez vagy a statisztikához, mint társadalomtudományhoz tartozik-e."

Örömmel üdvözöljük Osztrovitjanov akadémikus fenti szavait, melyek egy nálunk is sokat vitatott kérdést világítanak meg. Hazai viszonylatban is tapasztaltuk, hogy az elvi kérdések tisztázatlansága bizonyos húzódozáshoz vezetett és gátolta a matematikai statisztika eredményes felhasználását társadalmi jelenségek vizsgálatára, továbbá a technika és a termelés terén. Reméljük, hogy a Szovjetunióban lefolytatott vita eredményeképpen a matematikai statisztika alkalmazása elől, — ott ahol ez szükséges és hasznos, — hazánkban is elhárulnak az akadályok.

*

A Moszkvai Matematikai Társulat Műszaki Egyetemi Tagozatának 1953. november 12-i ülésén N. A. Kriniczki tartott előadást „A Lebesgue integrál elemi tárgyalása" címmel. Előadó a Lebesgue integrál olyan egyszerű felépítését mutatta be, amely a műszaki egyetemeken előadható, tekintettel arra, hogy ma már bizonyos területeken dolgozó mérnököknek erre szükségük lehet.

A szakosztály 1953. december 10-i ülésén nagykapacitású matematikai gépek problémájával foglalkozott. Az ülés határozatot fogadott el arról, hogy a műszaki egyetemek hallgatói számára egy rövid kézikönyv irandó a modern matematikai gépekről és programozásáról.

A szakosztály február 25-i ülésén A. P. Juskevics tartott előadást „A szovjet matematikusok szerepének megvilágítása és metodológiai jellegű kérdések a műszaki egyetemek matematikai előadásaiban" címmel. Az előadó hangsúlyozta, hogy a történeti utalások a matematikai előadásban szükségesek a marxista—leninista gondolkodásmód fejlesztéséhez, az idealista torzítások elleni harchoz, továbbá a hazafiságra és más népek eredményeinek megbecsülésére való neveléshez. A matematikatörténeti ismeretek köz-

lése szükséges a hallgatók matematikai kulturája emeléséhez is. A bevezető előadásban szerepeljen a matematika tárgyának Engels által adott megfogalmazása. Rá kell mutatni a matematika fejlődésében a XVII. században történt fordulatra. Anyagul szolgálhat e célra A. N. Kolmogorov cikke, a Nagy Szovjet Enciklopédiából. A további előadásokban szükséges az új fogalmakat helyes történeti megvilágításban bevezetni, rámutatva kapcsolatukra a gyakorlati alkalmazásokkal. A befejező előadás mutasson rá a szovjet matematikusok eredményeire és arra, hogy a mai matematika messze túljutott a műszaki egyetemi előadásban tárgyalt kereteken.

*

A. I. Berg akadémikus, a Pravda április 11-i számában terjedelmes cikkben méltatja a modern elektronika fejlődését és jelentőségét. Más fontos alkalmazási területek mellett kitér a nagykapacitású matematikai gépekre, mint a modern elektronika legjelentősebb vívmányainak egyikére. A matematikai gépek széleskörű alkalmazásáról írva megállapítja: „A nagysebességű automatikus elektronikus számológépeket az utóbbi időben nagy sikerrel használják alkalmazott matematikai, fizikai, mechanikai, kémiai, statisztikai és csillagászati feladatok megoldására, továbbá összetett, automatizált termelési folyamatok irányítására, ahol a gyártási folyamatok pontos betartására van szükség... Napjainkban a számolási technika új szakaszába lépett. Az elektronikus digitális számológépek a százalék egy milliomod részéig terjedő pontosságot biztosítanak és gyors működésük következtében 10-jegyű számokkal, másodpercenként többezer műveletet végeznek el."

A közeljövőben — A. I. Berg szerint — a jelenlegi matematikai gépeknél lényegesen kisebb terjedelmű és olcsóbb gépek kifejlesztése várható, melyeknek teljesítőképessége nem fog elmaradni a nagy gépek teljesítőképessége mögött. Erre a fejlődésre különösen a tranzisztorok bevezetése révén lehet számítani.

A modern nagykapacitású számológépek, amelyekre a szovjet akadémikus cikke felhívja a figyelmet, a magyar elméleti és alkalmazott kutatás szempontjából is egyre nagyobb jelentőségűek. Aktuális technikai feladatok kapcsán mind nagyobb számban merülnek fel olyan matematikai problémák, amelyek megoldása csak ilyen matematikai gépeken lehetséges. Tudományos és ipari fejlődésünk csak azáltal biztosítható, ha ezen a területen is lépést tartunk a modern technika eredményeivel.

Egyesült Államok.

Amerikában angol nyelven kiadták B. V. Gnyegyenko és A. N. Kolmogorov „Független valószínűségi változók összegeinek határ-

eloszlásai" című könyvét. A könyvet Kai Lai Chung fordította és J. L. Doob látta el egy függelékkel. Az angol fordításnál felhasználták a könyv magyar fordítását. (Akadémiai Kiadó, 1950.)

Dánia.

A. D. Alexandrov akadémikus (Leningrad) 1954. novemberében és decemberében előadásokat tartott geometriai vizsgálatairól a koppenhágai egyetem matematikai intézetében, továbbá az Aarhus-i egyetem nemrég létrehozott matematikai intézetében.

Svédország.

1954. november 22-én Szőkefalvi-Nagy Béla előadást tartott az Uppsala-i egyetemen „Parallelverschiebungen konvexer Körper" címmel, november 23-án pedig a Stockholm-i egyetemen adott elő, „Fortsetzungen linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes mit Austritt aus dem Raume" címmel. Szőkefalvi-Nagy Béla mint a magyar Béketanács küldötte járt Stockholmban, a Békevilágtanács ülésén.

Anglia.

A Cambridge-i egyetem 1955. szeptember 12—23-ig nyári tanfolyamot tart az automatikus digitalis számológépek programozásáról.

Csehszlovák Népköztársaság.

A Csehszlovák Köztársaság Stefan Schwarz professzort, a pozsonyi műszaki egyetem matematika tanárát a Klement Gottwald állami díj első fokozatával tüntette ki. B. Bydzovsky és J. Hronec matematikusok pedig köztársasági érdemrendet, illetve munkaérdemrendet kaptak.

E. Čech akadémikus 6 hétig tartózkodott Olaszországban. Ez idő alatt különböző egyetemeken 29 előadást tartott.

M. Katetov és St. Schwarz professzorok 5 hétig voltak a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának vendégei. Meglátogatták a moszkvai és leningrádi egyetemeket. Moszkvában 2 előadást tartottak.

A Csehszlovák Tudományos Akadémia matematikai kongresszust rendez 1955. szeptember 1—8-ig Prágában. A kongresszusra több mint 40 külföldi matematikust hívnak meg.

A kongresszuson a következő szekció-ülések lesznek:

1. Algebra és számelmélet.
2. Analízis.
3. Geometria és topológia.

4. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika.
5. Elemi matematika.

A délelőtti plenáris üléseken 30, illetve 60 perces referátumok fognak elhangzani algebra, számelmélet, funkcionál analízis, differenciálegyenletek, algebrai geometria, differenciál geometria, topológia, valószínűségszámítás és matematikai logika témakörökből. Hazánkból Alexits György és Hajós György akadémikusokat, valamint Rényi Alfréd és Szőkefalvi-Nagy Béla akadémiai levelező tagokat kérték fel referátumok tartására.

Hazai hírek

1955. január 14-én adta ki Társulatunk másodízben a Grünwald Géza díjat. A bizottság Hosszu Miklós: Néhány többváltozós függvényegyenlet általánosítása c. dolgozatát 2000 forinttal jutalmazta. A bizottság jelentését későbbi számunkban közöljük.

*

A Tudományos Minősítő Bizottság elfogadta Medgyessy Pál „Valószínűségeloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire" c. disszertációját. A disszertációvitát február 4-én tartották. A disszertáció opponensei Szőkefalvi-Nagy Béla és Gyires Béla voltak. Medgyessy Pál aspiránsvezetője Rényi Alfréd volt.

*

Társulatunk könyvtára örvendetesen gyarapodott. A Magyar-Szovjet Társaság több mint 800 db szovjet matematika könyvet adományozott Társulatunknak és szinte felbecsülhetetlen értékű folyóiratadományuk is, mely tartalmazza a szovjet matematikai folyóiratok háborús és háború utáni köteteit. Ezúton is köszönetet mondunk a 10 éves fennállását ünneplő Magyar-Szovjet Társaságnak nagylelkű adományáért.

*

A Magyar Tudományos Akadémia 1955. évi nagygyűlését 1955. május 23-tól május 27-ig tartotta.

A Naggyűlés keretében a következő matematikai előadások hangzottak el:

Május 25-én Hajós György akadémikus:
Osztálytitkári beszámoló.

Május 26-án Egerváry Jenő akadémikus:
A függőhidak elméletének megalapozása és felépítése a matrixszámítás segítségével.

Május 26-án Stanislav Mazur akadémikus:
A „kiszámítható analízis“ alapjairól.

Május 26-án Rédei László lev. tag:
Hazai vizsgálatok a véges csoportok elméletében.

Május 26-án Fuchs László a matematikai tudományok doktora:
Magyar kutatók eredményei a végtelen csoportok elméletében.

*

Felhívás.

Ezúton kérjük lapunk előfizetőit és Társulatunk tagjait, hogy akiknek nélkülözhető háború előtti magyar matematikai folyóiratai vannak (egyes számok is), juttassák azokat el Társulatunk címére. (Bp. V. Reáltanoda u. 13—15.) Ilymódon szeretnénk könyvtárunk számára egy teljes sorozatot összeállítani minden eddig megjelent matematikai folyóiratból.

Könyvismertetés

Rédei László: Algebra I.

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954, 640 old.

Hazánkban a felszabadulás után kutatóink egyre intenzívebb módon kezdtek foglalkozni modern algebrával, a mai matematika eme igen rohamosan fejlődő s a matematika egyéb területeire is jelentős hatást gyakorló ágával. Az elmult évtized alatt több fiatal matematikus választotta kutatási területéül a modern algebra valamelyik fejezetét s ért el figyelemreméltó eredményeket. A modern algebra magyar kutatóinak hazai s külföldi folyóiratokban publikált eredményeit külföldön is jól ismerik s nagyra értékelik. E modern algebrai cikkek mellé most egy igen értékes és már méreteiben is impozáns mű sorakozik: RÉDEI LÁSZLÓ kitűnő könyvének most megjelent első kötete.

A mű címe nem árulja el annak közelebbi tartalmát, de az előszó és a tartalomjegyzék alapján már képet nyerhetünk a szerző célkitűzéséről, a könyv feladatáról, tartalmáról. Mindenekelőtt kiviláglik, hogy a könyv mind tartalmát, mind feldolgozását tekintve magas színvonalú munka, melyben szerző nagy alapossággal és igen mélyrehatóan mutatja be a modern algebra alapvető módszereit és eredményeit A kötet tulajdonképpen nem kezdő kezébe való: mert ha a feldolgozás módja nem is tételez fel az I. éves egyetemi hallgató algebrai anyagán túlmenő ismereteket, mégis megkövetel bizonyos matematikai érettséget, rutint a fogalomalkotásban és a módszerek alkalmazásában. A feldolgozott anyag nagyjából VAN DER WAERDEN világhírű „Moderne Algebra" c. könyve I. kötetéhez igazodik, amennyiben RÉDEI is az absztrakt algebra alapfogalmainak és alapvető eredményeinek ismertetése mellett elsősorban a testelmélet különféle fejezeteinek biztosít nagyobb teret. VAN DER WAERDENtől eltérően azonban itt a kérdések tüzetesebb megvitatásra kerülnek, több új, részben magától a szerzőtől származó eredmény is fel van dolgozva, és ezenfelül az anyag elrendezése is más, amint ez a következő rövid áttekintésből is megállapítható.

Az első fejezet az egész modern algebra szempontjából lényeges halmazelméleti ismeretekbe vezeti be az olvasót. Itt ismerkedhetünk meg a transzfinit módszerekkel, speciálisan a továbbiakban sokszor felhasznált Zorn-féle lemmával. A tulajdonképpeni algebrai rész a II. fejezetben kezdődik, ahol az alapfogalmak (művelet, operátor, algebrai struktúra stb.) bevezetése után szerző a legfontosabb algebrai struktúrákat: a félcsoportokat, csoportokat, gyűrűket, ferdetesteket, testeket definiálja, majd külön-külön alaptulajdonságaikat vizsgálja. (Sajnos a hálókat, ezeket a fontos algebrai struktúrákat szerző figyelmen kívül hagyja.) Ezután következik a generátorrendszer, a részstruktúra, izomorfizmus, homomorfizmus, kompatibilis osztályozás, faktorstruktúra vizsgálata — mindezek alapvető szerepet játszanak az egész modern algebrában. Hogy az operátortartománnyal ellátott algebrai struktúrák fontosságát hangsúlyozza, szerző az egész III. fejezetet az operátorstruktúráknak és az ezekkel kapcsolatos kérdéseknek szenteli, bár itt oly vizsgálatok is helyet kaptak, amelyek operátortartományok nélkül is elképzelhetők (szabad struktúra, egyenletekkel

definiált struktúra, direkt szorzat stb.). Struktúráknak a lényegileg HAMILTON-től származó, de tulajdonképpen csak a szerző előző vizsgálatai során jelentőssé váló ferdeszorzatának speciális eseteként van tárgyalva a Schreier-féle bővítéselmélet. Ezután szerző a vektorterekre s algebrákra fordítja figyelmét és hogy nem-kommutatív gyűrű feletti algebráknak is legyen értelmük, szerző bevezeti a duplavektortér és a duplaalgebra fogalmát. A determinánsok elmélete is szóhoz jut; ezt szerző az alternáló egységek segítségével fejti ki s eljut egészen a Laplace-féle kifejtésig. A HAMILTONTŐL felfedezett kvaterniók zárják be ezt a fejezetet s egyúttal a struktúrák általános elméletét is, minthogy a könyv további részei az algebra egyes konkrét fejezeteinek vannak szentelve.

A következő fejezetben az (általában nem-kommutatív) ún. euklideszi gyűrűk kerülnek sorra, az V. fejezet pedig a véges Abel-csoportok elméletével foglalkozik. Az alaptétel mellett a véges Abel-csoportok faktorizációjára vonatkozó Hajós-féle tétel van itten viszonylag egyszerűen bizonyítva. A rákövetkező fejezet operátormodulusokkal foglalkozik s többek között a (ferdetest feletti) lineáris egyenletrendszerek elméletét diszkutálja. A VII. fejezetben a polinomgyűrűk elméletét kapjuk. A VIII. fejezetben szerző a testek Steinitz-féle elméletével foglalkozik és mindenekelőtt az alapfogalmakkal (algebrai és transzcendens bővítés, adjunkció, felbontási test stb.) ismerteti meg az olvasót. Többek között bebizonyítja, hogy minden testnek van algebrai lezárása (miként a racionális számok testének az összes algebrai számok teste), s kimutatja, hogy ez lényegileg egyértelmű. Ebben a részben kaptak helyet a transzcendens bővítések, a véges testek, az inszeparábilis bővítésekre vonatkozó fontosabb eredmények stb. tárgyalása. A IX. fejezetben az elrendezett struktúrák elméletével ismerkedhetik meg az olvasó. Itt találjuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy modulus, test, ferdetest, vagy gyűrű elrendezhető legyen. Az utolsóelőtti fejezet a KÜRSCHÁK JÓZSEF által megalapított s újabban nagyfontosságúvá vált értékelés-elméletről szól. A limesz-fogalom bevezetése után RÉDEI megmutatja, hogy egy értékelt test miként terjeszthető ki perfektté; a módszer megegyezik azzal, ahogy CANTOR nyomán a racionális számokból a valós számokat szokás bevezetni. Az értékelés-elmélet más fontos tételeinek bemutatása után a XI., utolsó fejezetben találjuk a Galois-elméletet s alkalmazásait klasszikus problémákra, mint például a magasabbfokú egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának, körzővel és vonalzóval való szerkeszthetőségnek vizsgálatát. Be van bizonyítva, hogy a 4-nél magasabbfokú általános egyenlet nem oldható meg gyökjelekkel (RUFFINI-ABEL tétele), hogy mely szabályos sokszög szerkeszthető, hogy a szög harmadolása, a kocka duplázása, a kör négyszögesítése nem végezhető el a körző és a vonalzó megengedett használata mellett. A kötetet tankönyvekben kevésbé idézett cikkeket feltüntető bibliográfia és elég részletes tárgymutató zárja be.

A kötet hatalmas anyagot ölel fel, melynek kiválogatása igen szerencsés abból a szempontból, hogy a tárggyal kapcsolatos szinte valamennyi fontos és alapvető eredmény fel van dolgozva. Szerző arra törekedett, hogy az elvileg fontos eredmények mellett konkrét, speciális jellegű tények és számelméleti alkalmazások is szerepeljenek művében, amit csak a legnagyobb örömmel üdvözölhetünk. Ez a cél természetesen nem volt megvalósítható a terjedelem jelentős növelése nélkül; a nagy terjedelem viszont bizonyos mértékben megnehezíti a kezdő olvasó dolgát, amennyiben ilyen nagy anyagban nem könnyű eligazodni az alapvető jellegű s feltétlenül megjegyzendő részek, valamint a kisebb jelentőségű azon eredmények között, amelyek első olvasáskor nyugodtan elhagyhatók, vagy csak az algebrában elmélyedni kívánó, komolyabb olvasó érdeklődésére tarthatnak számot. Örömmel vettük volna, ha szerző könyvét kezdők számára még használhatóbbá tette volna azáltal, hogy az utóbb említett részeket valamilyen módon megjelöli. RÉDEI persze állandóan szem előtt tartja azon olvasó érdekét, aki ebből a könyvből kíván megismerkedni az

absztrakt algebra elemeivel: nagy súlyt helyez a fokozatosság elvére, a bizonyított tételek állítását fontos konkrét eseteken bemutató példákra, egyes feltételek elhagyása esetén előálló változásokra, valamint a különféle fogalmak és eredmények egymás közötti kapcsolatát megvilágító megjegyzésekre, amelyek komoly mértékben segítik elő az anyag alapos megértését és helyes értékelését. Nagy gondot fordított szerző a mű megfogalmazására is, világosságra törekedett és igyekezett elkerülni az absztrakt algebra jellegzetes tömör stílusában rejlő veszélyeket. A művet mindenre kiterjedő gondosság jellemzi és, bár a téma nehézsége miatt nem mondható könnyű olvasmánynak, annak, aki kellő türelemmel és elmélyedéssel tanulmányozza e kitűnő munkát, minden bizonnyal sok örömet fog szerezni a modern algebra szépségeinek megismerése.

Fuchs László

A Budapesti Tudományegyetem Természettudományi Kara évkönyvében közölt matematikai tárgyú dolgozatok ismertetése

Az első dolgozatot Turán Pál írta „A függvénytan és a sorelmélet bizonyos érintkezési pontjairól" címmel. A függvénytan és a sorelmélet egyik legfontosabb érintkezése a divergens sorok szummáció-elméletének fejlődése során állt elő. Az Abel-féle szummációs eljárás általánosításaként a következő eljárást tekinti: radiális limesz helyett az egységkör belsejéből a valós tengelytől különböző egyenesen közeledjünk a $z=1$ ponthoz, és a végtelen sorhoz szokott módon rendelt függvény ezen limeszét értsük a sor szummája gyanánt. Kimutatja, hogy a két eljárással szummálható sorok összesége olyan, hogy nem tartalmazza egyik a másikat. Azután a Hardy—Littlewood- és az Abel-féle eljárás kapcsolatát tárgyalja. A Hardy—Littlewood-féle eljárás, mint ismeretes, abban áll, hogy a végtelen sorhoz rendelt függvényt az egységkör egy pontja körül hatványsorba fejtjük és szumma gyanánt a hatványsor összegét értjük az 1 helyen. Hardy és Littlewood kimutatták, hogy eljárásuk reguláris, ha a (0, 1) szakasz egy pontja körüli sorfejtésből indulunk ki. A szerző kimutatja, hogy ez általában nem igaz. Sőt az $e^{\frac{1}{z-1}}$ függvény 0 körüli sora együtthatóival értelmezett sor konvergens, mint Fejér Lipót kimutatta, de a függvénynek *bármely* nem valós pont körüli sora divergens az 1 helyen. A szerző végül megemlíti Carleman következő tételének általánosítását: konvergáljon a $g(z)$ hatványsor az 1 pontban, legyen továbbá a $z=\varphi(t)$ a $|t|\leq|t_0|$ körben reguláris, és azt az z sík egységkörében fekvő oly tartományra képezze le, melynek határgörbéje az egységkört csak az 1 pontban érintse és ott elsőrendűen és legyen $\varphi(t_0)=1$, akkor $g[\varphi(t)]$ t-szerinti hatványsora $t=t_0$-ra konvergál és összege $g(1)$. A szerző bizonyítás nélkül kimondja, hogy igaz a tétel akkor is, ha $t_0=e^{i\gamma}$ (γ valós) és a határgörbe az egységkör.

A következő Szász Pál „Megjegyzések Fejér Lipót egy munkájához" című cikke. A dolgozat Fejér Lipót következő tételére ad más bizonyítást: Ha $f(x)$ folytonos a $-1\leq x\leq 1$ intervallumban és ott az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontcsoport normális eloszlású, akkor az $[x_1, f(x_1)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$ pontokon átmenő legfeljebb $(2n-1)$-edfokú parabolák között mindig van olyan, amelynek $f(x)$-től való maximális eltérése legfeljebb kétszerese az $f(x)$-t az összes legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinomok közül legjobban approximáló $T_{2n-1}(x)$ polinom $f(x)$-től való maximális eltérésének. Szász Pál kimutatja, hogy ha $f(x)=2^{2n-1}x^{2n}$ és $x_k=\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}$, akkor az x_k helyeken $f(x)$-szel megegyező legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinomok közül az $f(x)$-t legjobban megköze-

lító polinomnak $f(x)$-től való eltérése éppen kétszerese az $f(x)$-t legjobban megközelítő legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinomnak $f(x)$-től való eltérésének.

A következő cikket Surányi János írta: „Egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságáról" címmel.

$l_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqq 0\ (i = 1, \ldots n)$ egyenlőtlenségrendszer megoldása alatt olyan $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ értékrendszert ért, melyre $l_i(\xi_1, \ldots \xi_n) \geqq 0$, de nem tünik el valamennyi l_i. A valós együtthatós homogén rendszer megoldhatóságára a következő feltételt adja: A rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az egyenletek és az ismeretlenek sorrendjének alkalmas megválasztása után a rendszer együtthatómátrixának bal felső sarkában álló r-edrendű mátrix determinánsa nem nulla és ha e determináns utolsó sorát egymás után az együtthatómátrix későbbi sorainak első r elemével helyettesítjük, akkor vagy nullát, vagy az első determinánséval megegyező előjelű értéket kapunk. (r jelenti a mátrix rangját.) Közli Hajnal András egy megjegyzését. Majd Blumenthal egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságára vonatkozó tételére ad egy új bizonyítást. Foglalkozik azzal az esettel, mikor meghatározott helyeken határozottan a nagyobb jelet kívánja meg, s ennek segítségével az inhomogén rendszer megoldhatóságára a következő féltételt adja: A megoldhatóság szükséges és elégséges az, hogy legyen az együtthatómátrixnak a konstans tagokat nem tartalmazó $(r-l)$-edrendű, el nem tünő részdeterminánsa, melyet bármely sornak és a konstansok oszlopának megfelelő elemeivel kiegészítve keletkező determináns vagy az eredetivel megegyező vagy eltűnik.

Végül Fried Ervin „Valódi hányadostestként előállítható testek" c. cikkében kimutatja, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy (kommutatív) test valódi hányadostestként előállítható legyen az, hogy ne legyen a szóbanforgó test véges test algebrai bővítése. Ezután bebizonyítja, hogy egy K testhez akkor lehet találni olyan valódi I integritási tartományt, melynek K a hányadosteste és az I-beli együtthatós polinom K feletti reducibilitása maga után vonja I feletti reducibilitását is, ha K test nem véges test egyszerű algebrai bővítése.

Környei Imre

A kézirat beérkezett: 1955. V. 21. — Példányszám: 1000
Terjedelem 12¼ (A/5) ív, 26 ábra
A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Szöllössy Károly

Szegedi Nyomdaipari Vállalat 55 2916 Felelős vezető: Vincze György

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

СОДЕРЖАНИЕ

Фукс, Л.: Некролог. Жизнь и деятельность Т. Селе 97

Сас, П.: Об остаточном члене синусоидального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ . . . 130

Петер, Р.: Деятельность Л. Кальмара в области математики 138
Реньи, А.: Об одной проблеме комбинаторики 151
Бихари, И.: Обобщение одной теоремы Штурма и ее приложение к функциям Бесселя и к многочленам Лежандра 165
Фейеш Тот, Л.: Замечания о теоремах Доукера о многоугольниках . 176
Шураньи, Я.: О редукции проблемы разрешимости математической логики 180
Миколаш, М.: Об одной проблеме Фейера о бесконечных произведениях 198
Мольнар, Й.: О вписанных и описанных многоугольниках выпуклых фигур 210
Карлиц, Л.: Об одной проблеме китайской математики 219
Облат, Р.: К столетии смерти Гаусса 221
Реферат комиссии по премии Беке Мано 241
Проблемы 244
Примеры 251
Из жизни общества 261
Математические и личные известия 283
Обзор книг 289

CONTENT

L. Fuchs: Obituary. Life and works of T. Szele 97

P. Szász: On the remainder term of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 130

R. Péter: The mathematical working of L. Kalmár 138
A. Rényi: On a combinatorical problen 151
I. Bihari: Generalisation of a Theorem by Sturm and its application to Bessel functions and Legendre polynomials 165
L. Fejes Tóth: Remarks on polygon-theorems of Dowker 176
J. Surányi: On the reduction theory of the decision problem of symbolic logic 180
M. Mikolás: On a problem of Fejér relating to infinite products 198
J. Molnár: On inscribed and circumscribed polygons of convex regions 210
L. Carlitz: On a problem of the history of chinese mathematics 219
R. Oblath: Commemoration on Gauss 221
Announcement of the commettee of the Manó Beke-prize 241
Problems 244
Examples 251
Society life 261
Mathematical and personal news 283
Boolz-review. 289

Ára 14,— Ft.
Előfizetés évi 20,— Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb. szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.

312.046

MATEMATIKAI LAPOK

VI. ÉVFOLYAM

4.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1955

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.

Budapest, 1955. november VI. évfolyam 4. szám.

Felelős szerkesztő: Turán Pál.

Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd.

Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.

A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.

Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850. Csekkszámlaszám: 61 257.

Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.

Előfizetés egy évre 20.— Ft.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.

TARTALOMJEGYZÉK

Fejér Lipót: Néhány elemi természetű észrevétel a parabolikus interpolációnál fellépő alappolinomokra vonatkozólag 293

Alpár László: Egy számelméleti probléma 309

A Kossuth-díjjal kitüntetett Rédei László munkáinak jegyzéke 323

Az 1954. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny 328

Jelentés a Beke Manó emlékdíj negyedik kiosztásáról 346

Feladatrovat 351

Matematikai és személyi hírek 356

Diákkonferencia a T. T. K.-n 363

Néhány elemi természetű észrevétel a parabolikus interpolációnál fellépő alappolinomokra vonatkozólag

Írta: Fejér Lipót

Szegő Gábornak ajánlva 60. születésnapja alkalmából

Bevezetés

1. A *parabolikus* interpoláció feladata tudvalevőleg az x független változó valamely olyan racionális egész függvényének meghatározása, mely bizonyos tetszőlegesen megadott, egymástól különböző $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken rendre tetszőlegesen előírt $y_1, y_2, \ldots, y_n$ értékeket vesz fel; továbbá esetleg előírhatjuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken a keresett racionális egész függvény egy vagy több deriváltjának értékét is egy bizonyos rendszámúig bezárólag.

2. Ebben a dolgozatban a parabolikus interpoláció két legelemibb esetével foglalkozom: az ún. „Lagrange-féle" és az „Hermite-féle" interpolációval. A Lagrange-interpolációnál csak magának a keresett racionális egész függvénynek $y_1, y_2, \ldots, y_n$ értékei vannak előírva az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ interpolációs alappontokban és azt kívánjuk, hogy e polinom legfeljebb $(n-1)$-edfokú legyen. Az Hermite-interpolációnál viszont az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvényértékeken kívül még az első derivált megfelelő $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ értékeit is előírjuk, továbbá megkívánjuk, hogy az interpolációs polinom fokszáma legfeljebb $2n-1$ legyen.

Mindkét feladat esetében valóban létezik a követelményeknek megfelelő polinom, s ez egyértelműen meg van határozva. A megoldást a Lagrange-, ill. Hermite-féle interpolációs képlet szolgáltatja:

$$L(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x), \tag{1}$$

$$H(x) = y_1 h_1(x) + y_2 h_2(x) + \cdots + y_n h_n(x) + y_1' \mathfrak{h}_1(x) + y_2' \mathfrak{h}_2(x) + \cdots + y_n' \mathfrak{h}_n(x). \tag{2}$$

Itt $l_k(x)$ az ún. k-adik Lagrange-féle alappolinom (vagy alapfüggvény); ez az egyetlen pontosan $(n-1)$-edfokú racionális egész függvény, amely a k-adik interpolációs helyen, x_k-ban, az 1 értéket

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

veszi fel, az összes többi interpolációs helyeken pedig eltűnik. Továbbá $h_k(x)$ az Hermite-interpoláció ún. k-adik *elsőfajú* alapfüggvényét jelöli, amely legfeljebb $(2n-1)$-edfokú, de esetleg $(2n-2)$-edfokú is lehet; ez az x_k helyen ugyancsak az 1 értéket veszi fel, a többi helyeken értéke 0, deriváltja pedig az összes interpolációs pontokban eltűnik. Csak egy-egy racionális egész függvény van, mely az említett tulajdonságokkal rendelkezik.

Noha e bevezetésben a $\bar{h}_k(x)$ *másodfajú* alappolinomokra nem fogok kitérni, mégis megjegyzem: $\bar{h}_k(x)$ az egyetlen pontosan $(2n-1)$-edfokú racionális egész függvény, mely az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyek mindegyikén eltűnik, továbbá, melynek első deriváltja az x_k pontban az 1, a többi interpolációs helyen a 0 értéket veszi fel.

3. Bizonyos kérdések, melyek *tetszőleges folytonos függvényeknek* interpoláció útján való közelítésével kapcsolatban merültek fel, kívánatossá tették a most említett alappolinomok „menetének" közelebbi diszkusszióját. Ha van egy $a \leqq x \leqq b$ intervallum, amely az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeket magában foglalja, s melynek belsejében a $h_k(x)$ elsőfajú alappolinomok közül egyik sem válik negatívvá (mely esetben az interpolációs helyeknek $[a, b]$-ben való eloszlását „*normális*"-nak szokás nevezni), akkor az $(y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$ esetén előálló)

$$h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_n(x) = 1 \tag{3}$$

identitás segítségével mindjárt nagy lépéssel továbbjuthatunk. Innen adódik ugyanis, hogy $h_k(x)$, amely — mint mondottuk — az $x = x_k$ helyen az 1 értéket veszi fel, *az egész* $a \leqq x \leqq b$ *intervallumban nem lehet nagyobb, mint 1*, sőt ebben a speciális esetben arra jutunk, hogy még *valamennyi* $h_k(x)$ *függvény összege sem lépheti túl az 1 értéket, bármelyik helye legyen is az* x *az* $a \leqq x \leqq b$ *intervallumnak*. Így $h_k(x_k) = 1$ mindenesetre $h_k(x)$ maximumát szolgáltatja az egész $a \leqq x \leqq b$ intervallumra vonatkozólag.

4. Tekintsünk el most attól a megszorítástól, hogy az eloszlás „normális". Kérdezzük, igaz-e akkor $h_k(x)$-szel kapcsolatban legalább annyi, hogy ennek az $x = x_k$ helyen *lokális* maximuma van? A válasz *igenlő*; érvényes a következő általános

1. tétel. Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *tetszőleges egymástól különböző valós számok (interpolációs helyek) és* $h_k(x)$ *azt a* $(2n-1)$*-ed vagy* $(2n-2)$*-edfokú racionális egész függvényt jelöli, mely az* x_k *helyen az 1 értéket, az összes többi helyeken a 0 értéket veszi fel, s melynek első deriváltja valamennyi interpolációs helyen eltűnik, akkor* $h_k(x)$*-nek az* $x = x_k$ *pontban „valódi" lokális maximuma van.*

Írjuk:

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = \omega(x) \tag{4}$$

és jelölje

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$$

a $\frac{d\omega(x)}{dx}$ polinom gyökeit, tehát azt az $n-1$ (szükségképp egymástól különböző) abszcisszát, melyeknél $\omega(x)$-nek szélsőértéke van, akkor a $h_k(x)$ racionális egész függvény növekvő hatványai szerint haladó kifejtése a következő:*

$$h_k(x) = 1 - \frac{1}{12}\left\{5\left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{x_k-\xi_m}\right)^2 + 4\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(x_k-\xi_m)^2}\right\}(x-x_k)^2 + \cdots. \quad (5)$$

Mivel

$$\left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{x_k-\xi_m}\right)^2 \quad (6)$$

sohasem válik negatívvá és

$$\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(x_k-\xi_m)^2} \quad (7)$$

határozottan pozitív, az (5) képlet annak bizonyítását szolgáltatja, hogy $h_k(x)$-nek az $x = x_k$ helyen „valódi" (azaz izolált) maximuma van.**

Az 1. tétellel kapcsolatban mindjárt megjegyzem, hogy az $l_k(x)$ Lagrange-féle függvényre vonatkozó megfelelő állítás általában *nem* érvényes. Megemlítem továbbá, hogy az 1. tétel bizonyítása más úton is történhetik: az ún. „gyökök megszámlálásának

* Az analisták régebbi kifejezésmódját használva, ez az eredmény úgy fogalmazható, hogy az $x = x_k$ helyhez tartozó $h_k(x)$ Hermite-féle interpolációs alapfüggvény az x_k hely környezetében „egyenlő" az

$$1 - \frac{1}{12}\left\{5\left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{x_k-\xi_m}\right)^2 + 4\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(x_k-\xi_m)^2}\right\}(x-x_k)^2$$

polinommal, „$(x-x_k)$-ra vonatkozólag harmadrendű tagoktól eltekintve". Talán összefoglalásként még ideiktathatom, hogy $y = h_k(x)$ ordinátája az $x = x_k$ helyen 1, az $x = x_k$, $y = 1$ pontban az érintő az abszcissza-tengellyel párhuzamos, és hogy a szóbanforgó ponthoz tartozó görbület értéke

$$\frac{1}{6}\left\{5\left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{x_k-\xi_m}\right)^2 + 4\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(x_k-\xi_m)^2}\right\}.$$

** Ezt természetesen úgy értem, hogy az $x = x_k$ helynek van olyan kétoldali környezete, amelyben x_k kivételével mindenütt $h_k(x) < h_k(x_k) = 1$ érvényes. Itt felteszem, hogy legalább két interpolációs hely van adva, tehát $n = 2, 3, \ldots$. Különben a tétel egyetlen x_1 interpolációs hely esetében is érvényes, mikor $h_1(x) \equiv 1$, persze azzal a módosítással, hogy $h_1(x)$ maximuma az $x = x_1$ helyen *nem* izolált.

módszere" egészen röviden célhoz vezet. Hogy ennek ellenére a különben is figyelemreméltó (5) képletre alapítottam a tárgyalást, annak oka egyrészt az $\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ *törzspolinom* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *zérushelyeinek* és $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ *extremális helyeinek* (5) alatti előfordulása, másrészt pedig az a körülmény, hogy (6) nem-negativitása és (7) pozitivitása nagyon szemléletes módon evidenciába helyezi az 1. tétel tartalmát.

Az 1. tételnek a bevezetésében való kimondásával továbbá jelezni akartam a következőkben tárgyalt észrevételek jellegét, és hogy ezek hogyan csatlakoznak régebbi ismert tényekhez. — Nem várható, hogy egy ilyen rövid dolgozat mint ez,* felölelje az interpolációelmélet kiterjedt területére vonatkozó megfelelő irodalmi utalásokat is. Mindazonáltal megemlítem, hogy *Szegő* az *elsők* közé tartozik, akiknek az interpoláció-elmélet (s egyúttal — a szóbanforgó irány tekintetében — a mechanikus kvadratúra elmélete is) jelentős előrehaladást köszönhet; eredményeit részben kifejtette *„Orthogonal Polynomials"* (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXIII., 1939.) c. ismert fontos művében.

1. §. A $h_k(x)$ *elsőfajú alappolinomra vonatkozó*

$$h_k(x)=1-\frac{1}{12}\left\{5\left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{x_k-\xi_m}\right)^2+4\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(x_k-\xi_m)^2}\right\}(x-x_k)^2+\cdots$$

sorfejtés bizonyítása

1. Legyenek

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{1}$$

egymástól különböző valós számok (interpolációs abszcisszák) és legyen

$$\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \tag{2}$$

az (1) abszcissza-csoporthoz tartozó „törzspolinom". Akkor tudvalevőleg

$$l_k(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}, \tag{3}$$

$$h_k(x)=\left(1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)(l_k(x))^2. \tag{4}$$

* Az ábrák készítésében *Horvay Katalin*, a sajtó alá bocsátás dolgában *Balázs János, Mikolás Miklós, Molnár Ferenc* voltak segítségemre. Legyen szabad fáradozásukért e helyen is köszönetet mondanom.

Ha most az $\omega(x)$ polinomot az $x=x_k$ hely körül Taylor-sorba fejtjük, nyerjük:

$$\omega(x)=0+\omega'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2}\omega''(x_k)(x-x_k)^2+$$

$$+\frac{1}{6}\omega'''(x_k)(x-x_k)^3+\cdots, \tag{5}$$

tehát (3)-ra és (4)-re tekintettel

$$l_k(x)=1+\frac{1}{2}\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)+\frac{1}{6}\frac{\omega'''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)^2+\cdots, \tag{6}$$

$$(l_k(x))^2=1+\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)+\left[\frac{1}{3}\frac{\omega'''(x_k)}{\omega'(x_k)}+\frac{1}{4}\left(\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right)^2\right](x-x_k)^2+\ldots \tag{7}$$

és

$$h_k(x)=1-\frac{A_k}{12}(x-x_k)^2+\cdots, \tag{8}$$

ahol

$$A_k=9\left(\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right)^2-4\frac{\omega'''(x_k)}{\omega'(x_k)}. \tag{9}$$

Be kell látnunk, hogy A_k pozitív. Többet fogok bebizonyítani, amennyiben megmutatom, hogy az $\omega(x)$ törzspolinomból képezett következő racionális törtfüggvény:

$$A(x)=9\left(\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)}\right)^2-4\frac{\omega'''(x)}{\omega'(x)} \tag{10}$$

az x *minden* valós értékére véges pozitív értéket vesz fel, eltekintve $\omega'(x)$-nek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ zérushelyeitől, melyek egyúttal $\omega(x)$ összes szélsőérték-helyeit szolgáltatják; az utóbbi pontokban az $A(x)$ törtfüggvény $+\infty$-né válik. Ha t. i. x a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ értékek mindegyikétől különböző, akkor

$$\frac{d}{dx}\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)}=\frac{\omega'''(x)\omega'(x)-(\omega''(x))^2}{(\omega'(x))^2}=\frac{\omega'''(x)}{\omega'(x)}-\left(\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)}\right)^2, \tag{11}$$

úgyhogy

$$\frac{\omega'''(x)}{\omega'(x)}=\left(\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)}\right)^2+\frac{d}{dx}\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)}. \tag{12}$$

Mármost (10)-ből

$$A(x)=5\left(\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)}\right)^2-4\frac{d}{dx}\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)}. \tag{13}$$

Mivel továbbá $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ az $\omega'(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_{n-1})$ polinomnak egymástól különböző gyökei, írhatjuk:

$$\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{x-\xi_\nu}, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)} = -\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{(x-\xi_\nu)^2}; \tag{15}$$

így (13), (14), (15) felhasználásával

$$A(x) = 5\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{x-\xi_\nu}\right)^2 + 4\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{(x-\xi_\nu)^2}. \tag{16}$$

Ezzel a bevezetésben említett 1. tételt bebizonyítottuk.

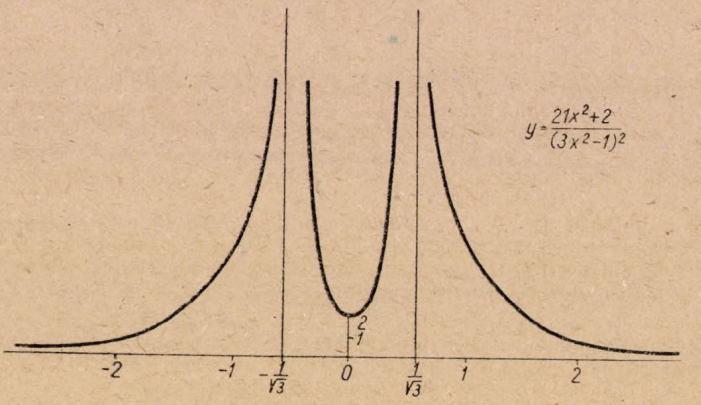
2. Lássunk egy egyszerű speciális esetet!

Legyen $n = 3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Most $\omega(x) = x^3 - x$, $\omega'(x) = 3x^2 - 1$, $\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\omega''(x) = 6x$, $\omega'''(x) = 6$, úgyhogy (10) a következőképpen alakul

$$A(x) = \frac{9(\omega''(x))^2 - 4\omega'(x)\omega'''(x)}{(\omega'(x))^2} = \frac{252x^2 + 24}{(3x^2-1)^2} = 12\frac{21x^2+2}{(3x^2-1)^2}, \tag{17}$$

azaz

$$\frac{A(x)}{12} = \frac{21x^2+2}{(3x^2-1)^2}.$$



1. ábra

2. §. A másodfajú alappolinomok összegéről

1. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismét egymástól különböző valós értékek, melyeket Hermite-interpolációs abszcisszáknak tekintünk. A bevezetésben utaltunk arra az egyszerű tényre, hogy az elsőfajú alappolinomok $h_1(x)+h_2(x)+\cdots+h_n(x)$ összege azonosan egyenlő 1-gyel. A másodfajú alappolinomok $\mathfrak{h}_1(x)+\mathfrak{h}_2(x)+\cdots+\mathfrak{h}_n(x)$ összegével először „Über Weierstrass-sche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation" c. dolgozatomban foglalkoztam. (*Mathematische Annalen*, Bd. *102* (1930), S. 707—725.) Itt kizárólag az ún. Csebisev-féle abszcisszák esete forog szóban és az idevágó (II) képlet, mely igen könnyű számolással nyerhető, a következőképpen hangzik:*

$$\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{h}_k(x)=\mathfrak{H}(x)=\mathfrak{H}(\cos\theta)=\frac{1}{n}\cos n\theta\cos(n-1)\theta= \tag{1}$$

$$=\frac{1}{2n}(\cos\theta+\cos(2n-1)\theta).$$

2. Egy másik munkámban: „Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenz Hermitescher Interpolationsreihen" (*Mathematische Zeitschrift*, Bd. *32*(1930), S. 426—457) az (1) képletet egy szélsőérték-probléma *egzakt* megoldására használom fel. A 441. oldalon álló 4. tétel ti. a következőket mondja: „Ha egy legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $g(x)$ racionális egész függvény az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Csebisev-abszcisszákra eleget tesz a

$$|g(x_k)|\leqq A,\quad |g'(x_k)|\leqq B\qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

* Különben ez a 10. §, melynek címe „Über die wichtigsten Eigenschaften der Grundfunktionen beider Art im Falle Tschebyscheffscher Abszissen" a 721. oldalon többek között egy olyan (már nem annyira könnyen bizonyítható) tételt tartalmaz, mely a $\sum_{k=1}^{n}|\mathfrak{h}_k(x)|$ összegre vonatkozik, s amelyet később különböző szerzők a szóban forgó célra kieszelt módszerekkel általánosítottak arra az esetre, midőn az abszcisszák nem szükségképp Csebisev-félék, hanem a $(-1, 1)$ interpolációs intervallumban ilyen vagy olyan értelemben „normális" eloszlású pontcsoportot alkotnak. Tételem így hangzik: „A $\mathfrak{h}_k(x)$ másodfajú alappolinomok abszolút értékeinek összege, azaz $\sum_{k=1}^{n}|\mathfrak{h}_k(x)|$, Csebisev-féle abszcisszák esetében nullához konvergál, midőn $n\to\infty$, mégpedig a $-1\leqq x\leqq 1$ intervallumban egyenletesen".

egyenlőtlenségeknek, akkor

$$|g(\pm 1)| \leqq A + \frac{B}{n}. \tag{3}$$

Itt az egyenlőségjel (adott n, A, B mellett) akkor és csak akkor érvényes, ha

$$g(x) = g(\cos\theta) = A + B\frac{\cos n\theta \cos(n-1)\theta}{n} = \\ = A + B\frac{\cos\theta + \cos(2n-1)\theta}{2n}, \tag{4}$$

vagy ugyanez a cosinus-polinom ellenkező előjellel."

3. Végül még ugyanennek a Math. Zeitschriftben közölt dolgozatomnak egy másik helyére szeretnék utalni, mégpedig a 456. oldalra, ahol ismét nem a bennünket itt foglalkoztató $\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_k(x)$ összegről, hanem a $\sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{h}_k(x)|$ összegről van szó. E helyen (19) és (20) alatt a Csebisev-féle esetben érvényes

$$\sum_{k=1}^{n} |h_k(x)| = \sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1 \qquad (-1 < x < +1), \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{h}_k(x)| \leqq 1 \qquad (-1 \leqq x \leqq +1) \tag{6}$$

képletek találhatók.

4. Nemrég vettem észre azt a majdnem triviális tényt, hogy a másodfajú alappolinomok összegének, azaz $\mathfrak{H}(x)$-nek „mindig" egymástól különböző valós nullahelyei vannak. Részletesen megfogalmazva:

2. tétel. Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tetszőleges egymástól különböző valós abszcisszák, akkor az Hermite-interpoláció

$$\mathfrak{h}_1(x), \mathfrak{h}_2(x), \ldots, \mathfrak{h}_n(x)$$

másodfajú alappolinomjai pontosan $(2n-1)$-edfokú racionális egész függvények. Ezek közül bármelyiknek összes gyökei valósak, mégpedig $\mathfrak{h}_k(x)$-nek az x_k helyen egyszeres, a többi helyen, az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$$

pontokban pedig kétszeres zérushelye van. A másodfajú alapfüggvények

$$\mathfrak{h}_1(x) + \mathfrak{h}_2(x) + \cdots + \mathfrak{h}_n(x) = \mathfrak{H}(x)$$

összege ugyancsak pontosan $(2n-1)$*-edfokú racionális egész függvény, amelynek szintén csupa különböző valós gyöke van. Ezek közül az egyszeres zérushelyek közül* n *számú magukkal az* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *interpolációs helyekkel esik egybe; a többi* $n-1$ *számú egyszeres nullahelyet növekvő sorrendben* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$*-gyel jelölve, az abszcissza-indexek megfelelő választása esetén fennáll*

$$x_1 < \eta_1 < x_2 < \eta_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < \eta_{n-1} < x_n, \tag{7}$$

tehát az $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ *intervallumok mindegyike e gyökök közül pontosan egyet tartalmaz.*

5. A tétel bizonyítása többféle úton történhetik. Állításunk természetesen közvetlen folyománya annak a ténynek, hogy a

$$\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_k(x) = \omega(x)\Omega(x) \tag{8}$$

felbontás második tényezője az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken rendre a következő zérustól különböző (véges) értékeket veszi fel:

$$\frac{1}{\omega'(x_1)}, \frac{1}{\omega'(x_2)}, \ldots, \frac{1}{\omega'(x_n)},$$

amelyek mindig előjelet váltanak, midőn az $\omega(x)$ törzspolinom valamely x_k gyökéről a következőre, x_{k+1}-re térünk át.*

Még egyszerűbben érünk célhoz a következőképpen. Írhatjuk:

$$\mathfrak{H}(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_k(x) = \sum_{k=1}^{n} (x-x_k)\,(l_k(x))^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x-x_k)\left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)\,(x-x_k)}\right)^2 = \tag{9}$$

$$= \omega(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega'(x_k)} \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)\,(x-x_k)} = \omega(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega'(x_k)}\, l_k(x),$$

azaz $\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_k(x)$ egyenlő az $\omega(x)$ törzspolinomnak és annak az $(n-1)$-edfokú polinomnak a szorzatával, amely a Lagrange-féle interpolációs képlet alapján az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken rendre a váltakozó előjelű $\frac{1}{\omega'(x_1)}, \frac{1}{\omega'(x_2)}, \ldots, \frac{1}{\omega'(x_n)}$ értékeket veszi fel.

* Vegyük figyelembe a (8)-ból adódó

$$1 = \left(\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_k(x)\right)'_{x=x_k} = \omega(x_k)\,\Omega'(x_k) + \omega'(x_k)\,\Omega(x_k) = \omega'(x_k)\,\Omega(x_k)$$

egyenletet.

Egy harmadik, talán legegyszerűbb bizonyítás így hangzik: minthogy

$$\Phi(x_1) = \Phi(x_2) = \cdots = \Phi(x_n) = 0,$$
$$\Phi'(x_1) = \Phi'(x_2) = \cdots = \Phi'(x_n) = 1,$$

azért $\Phi(x)$ az $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ (egyszeres) zérushelyek bármelyikének környezetében jobbfelé haladáskor *növekedik*, balfelé haladáskor *fogy* stb.

3. §. *A másodfajú alappolinomok összegéről. Folytatás*

1. Tekintsük a

$$k(x) = x - \sum_{k=1}^{n} \eta_k(x) = x - \Phi(x) \tag{1}$$

különbséget. Mivel $\Phi'(x_1) = \Phi'(x_2) = \cdots = \Phi'(x_n) = 1$, a $k(x)$ $(2n-1)$-ed fokú racionális egész függvény deriváltjára fennáll:

$$k'(x_1) = k'(x_2) = \cdots = k'(x_n) = 0.$$

$k(x)$ tehát egy (az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyekhez tartozó) ún. *lépcsőparabola*. Így a bevezetés (2) formulája $k(x_1) = x_1$, $k(x_2) = x_2, \ldots, k(x_n) = x_n$ folytán a

$$k(x) = x - \Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k h_k(x) \tag{2}$$

egyenlőséget szolgáltatja, melyből $\sum_{k=1}^{n} h_k(x) \equiv 1$ figyelembe vételével

$$\Phi(x) = x - \sum_{k=1}^{n} x_k h_k(x) = x \sum_{k=1}^{n} h_k(x) - \sum_{k=1}^{n} x_k h_k(x) = \\ = \sum_{k=1}^{n} (x - x_k) h_k(x). \tag{3}$$

A másodfajú alappolinomok összegére vonatkozólag tehát a

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - x_k) h_k(x) \tag{4}$$

képletet találtuk, amely — ismétlem — tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyek esetén érvényes.

4. §. *A másodfajú alappolinomok összegéről abban az esetben, ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abszcisszák az $a \leqq x \leqq b$ interpolációs alapintervallumban normális eloszlású pontcsoportot alkotnak*

1. Ha $H'(x)$ egy legfeljebb $(2n-1)$-ed fokú valós együtthatós $H(x)$ racionális egész függvénynek az x valós változó szerinti deriváltját jelöli, és e derivált n különböző valós helyen: az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban eltűnik (tehát $H'(x_1) = H'(x_2) = \cdots = H'(x_n) = 0$), akkor az $y = H(x)$ görbét, vagy a $H(x)$ polinomot magát lépcsőparabolának nevezem. Ha továbbá $a \leqq x \leqq b$ egy zárt intervallum, mely az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeket kivétel nélkül tartalmazza, míg az egyedül $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ segítségével, a

$$X_k = x_k + \frac{\omega'(x_k)}{\omega''(x_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

képlettel értelmezett $X_1, X_2, \ldots, X_n$ helyek közül egyik sem esik az $a \leqq x \leqq b$ számköz belsejébe (azaz vagy $X_k > b$, vagy $X_k < a$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$), akkor azt mondom, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyek az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban *normális eloszlásúak.**

A bevezetés (2) képlete a $H(x)$ lépcsőparabola számára a következő előállítást szolgáltatja:

$$H(x) = H(x_1)h_1(x) + H(x_2)h_2(x) + \cdots + H(x_n)h_n(x), \tag{2}$$

amely természetesen minden valós (vagy komplex) x-érték esetén érvényes.

Mivel minden x-re a $h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_n(x) \equiv 1$ azonosság érvényes és $a < x < b$ mellett fennállnak a $h_1(x) \geqq 0, h_2(x) \geqq 0, \ldots, h_n(x) \geqq 0$ egyenlőtlenségek, (2)-ből kiolvasható a következő tétel:

Ha az $a \leqq x \leqq b$ intervallum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontjai ebben a számközben normális eloszlásúak, akkor valamely az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyekhez tartozó $H(x)$ lépcsőparabola nem vehet fel nagyobb, ill. kisebb értéket az *egész* $a \leqq x \leqq b$ intervallumban, mint a

$$H(x_1), H(x_2), \ldots, H(x_n) \tag{3}$$

számcsoport maximuma, ill. minimuma.

(Tehát a $(2n-1)$-ed fokú lépcsőparabola szélsőértékeit keressük az $a \leqq x \leqq b$ *kontinuumra* vonatkozólag és ezeket már a (3) *alatti n számú érték között* megtaláljuk.)

* Ha $\omega''(x_k) = 0$, tehát az $\omega(x)$ törzsparabolának az x_k helyen, ahol metszi az x-tengelyt, inflexiós pontja van, akkor az (1) követelmény $x = x_k$-ra természetesen „teljesül". Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $X_k = \infty$.

2. Ismét az alappolinomok összegét, $\mathfrak{H}(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_k(x)$-et akarjuk vizsgálni, de most az x_k helyekre vonatkozó ama korlátozás mellett, hogy e pontok mind beleesnek egy $a \leqq x \leqq b$ intervallumba, melyben *normális* eloszlásúak.

Tekintsük a

$$\mathfrak{H}(x) - x \tag{4}$$

polinomot.

Feltehetjük, hogy a $a = -1, b = 1$. Ez a polinom $\mathfrak{H}(x)$ definíciója szerint az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken rendre a $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$ értékeket veszi fel, deriváltja pedig ugyanezeken a helyeken egyenlő 0-val. $\mathfrak{H}(x) - x$ tehát egy lépcsőpolinom, amely a $-1 \leqq x \leqq +1$ intervallumban normális eloszlású $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abszcisszacsoporthoz tartozik. A lépcsőpolinomokra vonatkozó imént említett általános lemma szerint ebben a speciális esetben:

$$\operatorname*{Min}_{k=1,2,\ldots,n} \{-x_k\} \leqq \operatorname*{Min}_{-1 \leqq x \leqq +1} \{\mathfrak{H}(x) - x\} \leqq \operatorname*{Max}_{-1 \leqq x \leqq +1} \{\mathfrak{H}(x) - x\} \leqq$$

$$\leqq \operatorname*{Max}_{k=1,2,\ldots,n} \{-x_k\},$$

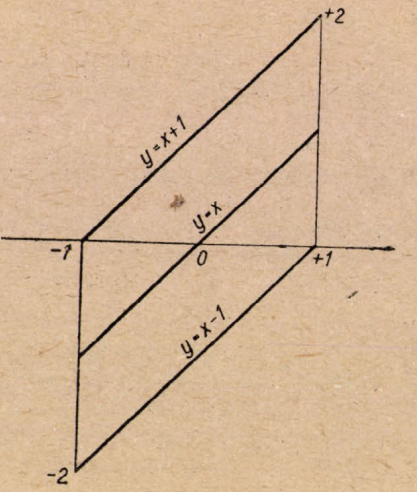
tehát

$$-1 \leqq \mathfrak{H}(x) - x \leqq 1$$

s végre

$$x - 1 \leqq \mathfrak{H}(x) \leqq x + 1.$$

Ezzel igazolást nyert a következő



2. ábra

3. tétel. Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *a* $-1 \leqq x \leqq 1$ *intervallumban normális eloszlású pontcsoport, akkor a másodfajú alappolinomok összegére fennáll az egész* $-1 \leqq x \leqq 1$ *számközben*

$$x-1 \leqq \mathfrak{h}_1(x)+\mathfrak{h}_2(x)+\cdots+\mathfrak{h}_n(x) \leqq x+1. \tag{5}$$

(5)-ből azonnal adódik

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_k(x)\right| \leqq 2 \qquad (-1 \leqq x \leqq +1). \tag{6}$$

Ez az egyenlőtlenség *minden normális* eloszlású interpolációs pontcsoportra és *n minden* értékére érvényes ($n=1, 2, 3, \ldots$). Hogy nem javítható, azt a következő példa mutatja: legyen $a=-1$, $b=+1$, $n=1$ és az egyetlen interpolációs hely, amelyet x_1-gyel jelölök, essék egybe a -1 végponttal, azaz legyen $x_1=-1$. Mivel most $h_1(x)=1$, $\mathfrak{h}_1(x)=x+1$, azért megállapíthatjuk egyfelől, hogy $x_1=-1$ normális eloszlást szolgáltat, másfelől, hogy $|\mathfrak{h}(1)|=\mathfrak{h}(1)=1+1=2$. (L. a 2. ábrát.)

5. §. Az alappolinomokra vonatkozó néhány képlet, táblázatba foglalva

Ebben a paragrafusban a Lagrange- és Hermite-féle interpoláció alappolinomjaira vonatkozó néhány képletet foglalok össze, táblázat alakjában. A dolgozatban nem minden idevágó képlet került felhasználásra, másfelől hiányzik néhány azok közül, melyek előfordultak a szövegben. Mégis hasznos lehet talán e táblázat a tárgykörtől kissé távolabb állók számára:

1. tábla

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \tag{1}$$

$$l_k(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} \tag{2}$$

$$h_k(x)=[1-2l_k'(x_k)(x-x_k)](l_k(x))^2 \tag{3}$$

$$\mathfrak{h}_k(x)=(x-x_k)(l_k(x))^2 \tag{4}$$

2. tábla

$$h_k(x)=\left(1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)(l_k(x))^2 \tag{3'}$$

$$\mathfrak{h}_k(x)=(x-x_k)(l_k(x))^2 \tag{4'}$$

3. tábla

$$\omega(x)=0+\omega'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2}\omega''(x_k)(x-x_k)^2+ \\ +\frac{1}{6}\omega'''(x_k)(x-x_k)^3+\cdots \tag{1''}$$

$$l_k(x)=1+\frac{1}{2}\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)+\frac{1}{6}\frac{\omega'''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)^2+\cdots \tag{2''}$$

$$(l_k(x))^2=1+\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)+ \\ +\left[\frac{1}{3}\frac{\omega'''(x_k)}{\omega'(x_k)}+\frac{1}{4}\left(\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right)^2\right](x-x_k)^2+\cdots \tag{2'''}$$

$$h_k(x)=1+0-\frac{A_k}{12}(x-x_k)^2+\cdots, \tag{3''}$$

ahol

$$A_k=9\left(\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right)^2-4\frac{\omega'''(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

Ha

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$$

$\frac{d\omega(x)}{dx}$ gyökei, akkor fennáll

$$h_k(x)=1-\frac{1}{12}\left[5\left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{x_k-\xi_m}\right)^2+4\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(x_k-\xi_m)^2}\right](x-x_k)^2+\cdots. \tag{3'''}$$

НЕСКОЛЬКО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗАМЕЧАНИЙ О ФУНДАМЕИТАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

Л. Фейер (Будапешт)

(Резюме)

В настоящей статье сообщаются некоторые ланные о поведении фундаментальных многочленов лагранжева и эрмитова интерполирования. В введении и в первых трех параграфах абсциссы интерполирования $x_1, x_2, \ldots, x_n$ считаются произвольными, в четвертом параграфе — нормальными относительно некоторого отрезка (a, b) $(a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b)$. В пятом параграфе приведена таблица формул. Из результатов упоминаются здесь лишь три.

1. Если $h_k(x)$ обозначает какой-нибудь фундаментальный многочлен первого порядка эрмитова интерполирования, то разложение этого многоч-

лена степени не выше $2n-1$ по степеням $x-x_k$ начинается так:

$$h_k(x)=\left[1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right](l_k(x))^2=$$

$$=1-\frac{1}{12}\left[5\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{x_k-\xi_\nu}\right)^2+4\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{(x_k-\xi_\nu)^2}\right](x-x_k)^2+\ldots,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть не совпадающие друг с другом вещественные, а во всем остальном произвольные узлы интерполирования, $\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — корни уравнения $\omega'(x)=0$. Отсюда следует, что фундаментальный многочлен первого порядка $h_k(x)$ имеет локальный максимум в точке $x=x_k$, в которой он равен единице ($k=1, 2, \ldots, n$).

2. Известно, что фундаментальные многочлены второго порядка эрминтова интерполирования $\mathfrak{h}_1(x), \mathfrak{h}_2(x), \ldots, \mathfrak{h}_n(x)$ равны нулю во всех узлах интерполирования $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Следовательно, там исчезает и их сумма

$$\mathfrak{h}_1(x)+\mathfrak{h}_2(x)+\cdots+\mathfrak{h}_n(x)=\mathfrak{H}(x).$$

В статье отмечается тот факт, что все корни этого многочлена (в точности) $2n-1$-ой степени — вещественны.

3. Если в 1 и 2 речь шла о любых простых вещественных абсциссах, то пусть теперь $-1\leqq x_1<x_2<\cdots x_n\leqq 1$ и пусть эти абсциссы нормально распределяются на отрезке $-1\leqq x\leqq 1$. Тогда на этом отрезке выполняется неравенство

$$x-1\leqq\mathfrak{H}(x)\leqq x+1$$

и, следовательно,

$$|\mathfrak{H}(x)|\leqq 2 \qquad (-1\leqq x\leqq 1).$$

В этом неравенстве 2 не может быть заменено меньшим числом, если мы не хотим ущемлять общности.

ELEMENTARY REMARKS CONCERNING THE FUNDAMENTAL POLYNOMIALS OF PARABOLIC INTERPOLATION

This paper contains contributions concerning the shape of the fundamental functions of Lagrange- resp. Hermite-interpolation. The n^{th} fundamental abscissae

$$a\leqq x_1<x_2<\cdots<x_n\leqq b$$

of the interpolation are *arbitrary* in the introduction and first three §-s of the paper and *normal* (with respect to (a, b)) in the fourth. The fifth §. of the paper contains a list of formulas. We mention among the results here only the following three.

I. Denoting by $h_k(x)$ an arbitrary fundamental function *of first kind* of the Hermite-interpolation (which is a polynom of $(2n-1)^{th}$ degree) then we have the expansion

$$h_k(x)=\left(1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)(l_k(x))^2=$$

$$=1-\frac{1}{12}\left[5\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{x_k-\xi_\nu}\right)^2+4\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{(x_k-\xi_\nu)^2}\right](x-x_k)^2+\cdots$$

if only the x_ν fundamental points are *arbitrary* different real numbers,

$$\omega(x) = (x \quad x_1) \cdots (x - x_n)$$

and $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ are the abscissae of the extremal points of $\omega(x)$ i. e. the zeros of $\omega'(x) = 0$. Consequently the $h_k(x)$ fundamental function *of first kind*, belonging to x_k (for which $h_k(x_k) = 1$), has *a local maximum* at $x = x_k$ for $k = 1, 2, \ldots, n$.

II. Denoting by $\mathfrak{h}_1(x), \ldots, \mathfrak{h}_n(x)$ the fundamental functions *of second kind* of the Hermite interpolation, then all these vanish for $x = x_1, \ldots, x = x_n$ as well-known. The same holds obviously for

$$\mathfrak{H}_n(x) = \mathfrak{h}_1(x) + \cdots + \mathfrak{h}_n(x).$$

In the text the rather plausible fact is shown that $\mathfrak{H}(x)$ (which has the exact degree $(2n-1)$) *has only real zeros.*

III. In contrary to I. and II., when $x_1, \ldots, x_n$ were arbitrary real different numbers let now

$$-1 \leqq x_1 < \cdots < x_n \leqq 1$$

and let they *normally* distributed in $[-1, +1]$. Then we have here

$$x - 1 \leqq \mathfrak{H}_n(x) \leqq x + 1$$

i. e. also

$$|\mathfrak{H}(x)| \leqq 2.$$

Here the number 2 is the best-possible constant.

Egy számelméleti probléma

ALPÁR LÁSZLÓ

Az n egész számot tökéletesnek nevezik, ha osztóinak összege $S(n)=2n$, az osztók közé számítva az egységet és magát az n számot is. Mindezideig nem sikerült még olyan általános összefüggést vagy összefüggéseket találni, amelyek a tökéletes számok kimerítő, minden esetre érvényes meghatározását megadnák. Csak annyi bizonyos, hogy ha n páros tökéletes szám, akkor feltétlenül

$$n=2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1) \tag{1}$$

alakú, ahol α pozitív egész és $2^{\alpha+1}-1$ prímszám. Nyitott kérdés azonban az, hogy vannak-e páratlan tökéletes számok is.

A következőkben némileg általánosabb kérdést vetünk fel, amelyet azonban néhány egyszerű esetben mégis könnyű megválaszolni. Ezzel egyben szűkülni fog valamelyest az egész számoknak az az osztálya, amelyben a páratlan tökéletes számok egyáltalán feltételezhetők. Olyan n számokat fogunk vizsgálni, amelyek osztóinak összege kielégít egy

$$S(n)=kn \tag{2}$$

típusú összefüggést, ahol k az egységnél nagyobb pozitív, egész szám. Az ilyen n számot röviden k-szorosan tökéletesnek nevezzük.

A 3-szorosan tökéletes számok tulajdonságait vizsgálva* R. Steuerwald arra az eredményre jut, hogy ha az $S(n)=3n$ összefüggésnek elegettevő szám osztható 6-tal, akkor n a 2 és 3 prímtényezők egyikét pontosan az első, másikát pedig az egynél magasabb hatványon tartalmazza. Majd bizonyítás nélkül kimondja azt az állítást, hogy az öt különböző prímtényezőnél kevesebbet tartalmazó n számok között csak az $N_1=2^3\cdot 3\cdot 5$, $N_2=2^7\cdot 3\cdot 7$ és az $N_3=2^9\cdot 3\cdot 11\cdot 31$ számok bírnak az $S(n)=3n$ tulajdonsággal. Ezt az állítást N_1 és N_2-re vonatkozóan a négynél

* Ein Satz über natürliche Zahlen N mit $\sigma(N)=3N$ von R. Steuerwald, Archiv der Matematik, 1. VIII. 1954. 449—451. old.

kevesebb prímtényezőt tartalmazó egész számokra nézve már több mint húsz évvel ezelőtt elemi úton bebizonyítottuk. Ezzel a kérdéssel fogunk az alábbiakban foglalkozni.

Először azt bizonyítjuk be, hogy a (2)-ben szereplő k számnak van olyan felső korlátja, amely csak az n különböző törzstényezőinek i számától függ; majd ezt az eredményt felhasználva megoldjuk a kitűzött feladatot az $i=1, i=2, i=3$ esetekben.

1.

Legyen

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i},$$

ahol $p_1<p_2<\dots<p_i$ különböző prím-, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ pozitív egész számok. Feltesszük még, hogy n kielégíti a (2) összefüggést, vagyis, hogy

$$S(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\,\frac{p_2^{\alpha_2+2}-1}{p_2-1}\dots\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}=kn,$$

amiből n-nel való osztás után a

$$k=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1^{\alpha_1}(p_1-1)}\,\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2^{\alpha_2}(p_2-1)}\dots\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)} \tag{3}$$

egyenlőséghez jutunk és ez alkalmas arra, hogy segítségével k számára céljainknak megfelelő korlátot határozzunk meg. Legyenek ui. $x>1, a\geqq 1$, de különben tetszőleges számok, akkor igaz az, hogy

$$\frac{x^{a+1}-1}{x^a(x-1)}<\frac{x^{a+1}}{x^a(x-1)}=\frac{x}{x-1}. \tag{4}$$

Alkalmazzuk a (4) egyenlőtlenséget a (3) megfelelő tényezőire, akkor a

$$k<\frac{p_1}{p_1-1}\,\frac{p_2}{p_2-1}\dots\frac{p_i}{p_i-1}=N(p_1, p_2, \dots, p_i) \tag{5}$$

egyenlőtlenséget nyerjük. k-nak az így meghatározott felső korlátja olyan még azonban, amely nem csupán i-től, hanem a $p_1, p_2, \dots, p_i$ prímszámoktól is függ. Ha az $N(p_1, p_2, \dots, p_i)$ függvényt olyannak tekintjük, amelynek változói csak egymástól különböző prímszámok lehetnek, akkor minden rögzített i-hez meghatározható az $N(p_1, p_2, \dots, p_i)$ függvénynek csak az i-től függő maximuma és az lesz egyben a k-nak csak az i-től függő felső korlátja is. E maxi-

mum meghatározása végett vegyük figyelembe, hogy az

$$\frac{x}{x-1}$$

függvény az $x > 1$ értékekre az x monoton csökkenő függvénye és az 1-hez tart, amidőn az $x \to \infty$. Rögzített i mellett tehát $N(p_1, p_2, \ldots, p_i)$, akkor lesz a legnagyobb, amikor $p_1 < p_2 < \cdots < p_i$ prímszámok mindegyike a maga lehető legkisebb értékét veszi fel, másszóval, amidőn $p_1, p_2, \ldots, p_i$ helyére az első i prímszám kerül. Jelöljük általában a j-ik prímszámot $p(j)$-vel, akkor

$$\max N(p_1, p_2, \ldots, p_i) = N(p(1), p(2), \ldots, p(i)), \tag{6}$$

ahol $p(1) = 2$, $p(2) = 3$, $p(3) = 5, \ldots$ Az (5) és (6)-ból végül is:

$$k < N(2, 3, \ldots, p(i)) \tag{7}$$

A (7) egyenlőtlenség azoknak az eseteknek a vizsgálatára alkalmas, amikor határozottan tudjuk, hogy n páros szám, vagy nem ismeretes előre az, hogy n páros-e, avagy páratlan. Ha azonban előre kimondjuk, hogy az $S(n) = kn$ egyenlőséget kielégítő páratlan n számokat keressük, akkor a (7) helyébe a

$$k < N(3, 5, \ldots, p(i+1)) \tag{8}$$

egyenlőtlenség kerül. Általában, ha sikerül valami módon kipuhatolni az n lehetséges legkisebb prímtényezőjét, $p_1 = p(j)$-t, akkor k felső korlátja javítható, a (8) helyébe a

$$k < N(p(j), p(j+1), \ldots, p(j+i)) \tag{9}$$

egyenlőtlenség lép.

Ezekután áttérünk az $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$ esetek vizsgálatára.

2.

$i = 1.$

Lévén ekkor

$$k < N(2) = \frac{2}{2-1} = 2$$

k az egységnél nagyobb egész értéket fel nem vehet, tehát $n = p^\alpha$ alakú szám nem elégítheti ki $S(n) = kn$ típusú egyenlőséget. *Prímszám hatványa* tehát *tökéletes szám nem lehet.*

3.

$i = 2.$

Irjuk fel a (7) és (8) egyenlőtlenségek segítségével k felső korlátjait az n páros és páratlan eseteire

$$k < N(2,3) = \frac{2}{2-1}\,\frac{3}{3-1} = 3 \tag{10}$$

$$k < N(3,5) = \frac{3}{3-1}\cdot\frac{5}{5-1} = \frac{15}{8} < 2. \tag{11}$$

A (10) szerint az egyetlen lehetséges érték, amelyet k felvehet, a 2. Tehát *létezhetnek páros, két prímtényezős, kétszeresen, de — annál nem többszörösen — tökéletes számok.* A (11) szerint $k < 2$ tehát *páratlan, két prímtényezős tökéletes szám nincs.*

Hátra volna még a páros, kétprímtényezős, kétszeresen tökéletes számok meghatározása. Ez azonban oly ismert kérdés, hogy megoldását itt csupán a teljesség kedvéért közöljük, sőt a későbbiek miatt azt az általánosabb tételt bizonyítjuk be, hogy ha egy kétszeresen tökéletes szám páros, akkor csak

$$2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)$$

alakú lehet, ahol α pozitív egész, $2^{\alpha+1}-1$ prímszám.

Legyen tehát

$$n = 2^{\alpha} m$$

ahol α pozitív egész, m pozitív, páratlan szám, ekkor

$$S(n) = 2n = (2^{\alpha+1}-1)S(m) = 2^{\alpha+1} m$$

vagyis

$$S(m) = \frac{2^{\alpha+1} m}{2^{\alpha+1}-1} = m + \frac{m}{2^{\alpha+1}-1}. \tag{12}$$

A (12) szerint $2^{\alpha+1}-1$ osztója m-nek és így $\frac{m}{2^{\alpha+1}-1}$ az m-nek egy másik osztója. Eszerint $S(m)$ — az m összes osztóinak összege — egyenlő az m szám és az m egyik osztójának összegével. Ez csak akkor lehetséges, ha m prímszám, és $\frac{m}{2^{\alpha+1}-1} = 1$, azaz

$$m = 2^{\alpha+1} - 1$$

törzsszám.

4.

$i = 3.$

Ismét a (7) és (8) segítségével írjuk fel a k felső korlátait az n páros és páratlan esetekben

$$k < N(2, 3, 5) = \frac{2}{2-1}\,\frac{3}{3-1}\,\frac{5}{5-1} = \frac{15}{4} < 4 \qquad (13)$$

$$k < N(3, 5, 7) = \frac{3}{3-1}\,\frac{5}{5-1}\,\frac{7}{7-1} = \frac{35}{16} < 3. \qquad (14)$$

A (13) egyenlőtlenség szerint k lehetséges értékei

$$k = 2, \quad k = 3.$$

A $k = 2$ esetet azonban a 2. értelmében ki kell zárni, mert mint láttuk a páros, kétszeresen tökéletes számoknak csak két különböző primtényezője lehet. Más szóval, *ha léteznek páros, három prímtényezős tökéletes számok, azok csak háromszorosan tökéletesek lehetnek.*

A (14) egyenlőtlenség szerint, amely a páratlan számokra vonatkozik, $k < 3$, vagyis k egyetlen lehetséges értéke a

$$k = 2.$$

Tehát *ha léteznek páratlan, háromprímtényezős tökéletes számok azok csak kétszeresen tökéletesek lehetnek.*

Ezeket a lehetőségeket kell most egyenként megvizsgálni

I. $i = 3$, $k = 3$, $p_1 = p(1) = 2$

$p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ értékeit kell meghatározni.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessünk be új jelöléseket. Legyen $p_2 = p$, $p_3 = q$; $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $\alpha_3 = \gamma$. p és q-nak ki kell elégíteniök a következő egyenlőtlenséget:

$$N(2, p, q) = \frac{2}{2-1}\,\frac{p}{p-1}\,\frac{q}{q-1} > 3, \qquad (15)$$

ami átrendezve

$$3\,\frac{p-1}{p-3} > q. \qquad (16)$$

A (16) egyenlőtlenség q bármely értékére teljesül, ha $p = 3$. A p növekedésével a $\frac{p-1}{p-3}$ függvény monoton csökken és a (16) már a $p = 5$-re is a

$$6 > q \qquad (17)$$

egyenlőtlenséghez vezet. Tekintve, hogy p és q törzsszámok, és $p < q$, nincs olyan $q > 5$ prímszám, amely a (17) egyenlőtlenséget kielégítené. Az egyetlen lehetséges érték tehát, amelyet p felvehet: $p = 3$.

Ily módon arra jutottunk, hogy

$$n = 2^{\alpha} 3^{\beta} q^{\gamma}$$

és

$$S(n) = (2^{\alpha+1} - 1) \frac{3^{\beta+1} - 1}{2} \frac{q^{\gamma+1} - 1}{q - 1} = 3n = 2^{\alpha} 3^{\beta+1} q^{\gamma} \tag{18}$$

ami így is írható:

$$2^{\alpha+1} - 1 = 3^{\beta_1} q^{\gamma_1} \tag{19}$$

$$\frac{3^{\beta+1} - 1}{2} = 2^{\alpha_2} q^{\gamma_2} \tag{20}$$

$$\frac{q^{\gamma+1} - 1}{q - 1} = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3}, \tag{21}$$

ahol $\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$ nem negatív egész számok és

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha, \quad \beta_1 + \beta_3 = \beta + 1, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma. \tag{22}$$

Vizsgáljuk meg először a (21)-t. q lévén páratlan szám, $\frac{q^{\gamma+1} - 1}{q - 1}$ csak akkor osztható 2-vel, ha $\gamma + 1$ páros. Legyen ui. $q = 1 + 2l$, akkor

$$q^{\gamma+1} = 1 + (\gamma + 1) 2l + A(2l)^2,$$

ahol A pozitív, egész szám. Így

$$\frac{q^{\gamma+1} - 1}{q - 1} = \gamma + 1 + 2Al \tag{23}$$

(23) csak akkor osztható 2-vel, ha $\gamma + 1$ páros. Ha $\gamma + 1$ páratlan, akkor a (21)-ben nyilván $\alpha_3 = 0$. Két esetet kell ezért megkülönböztetni: A) γ páros; B) γ páratlan.

A) *γ páros.* $\gamma + 1$ páratlan, $\alpha_3 = 0$ és a (21) így alakul:

$$\frac{q^{\gamma+1} - 1}{q - 1} = 3^{\beta_3} \tag{24}$$

$\frac{q^{\gamma+1} - 1}{q - 1}$-nek 3-mal való osztható sága szempontjából azt kell számításba venni, hogy minden páratlan prímszám $6l \pm 1$ alakú.

Ha $q = 6l - 1$, akkor

$$q^{\gamma+1} - 1 = 6l[(6l)^{\gamma} + \cdots] - 2$$

nem osztható 3-mal. Vagyis, ha γ páros és $q = 6l - 1$, akkor $\frac{q^{\gamma+1} - 1}{q - 1}$ sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható, ami ellentmond a (21)-ben kifejezett követelménynek. Ezt a lehetőséget tehát ki kell zárni.

Ha viszont $q = 6l + 1$, akkor

$$\frac{q^{\gamma+1}-1}{q-1} = 6l[(6l)^{\gamma-1} + \cdots] + \gamma + 1. \tag{25}$$

A (25) csak az esetben osztható (3)-mal, ha $\gamma + 1$ is osztható vele. Ám akkor $q^{\gamma+1}-1$ osztható q^3-1-gyel és

$$\frac{q^3-1}{q-1} = q^2 + q + 1 = 3(12l^2 + 6l + 1)$$

$12l^2 + 6l + 1$ nem osztható 3-mal, holott a (24) szerint $\frac{q^{\gamma+1}-1}{q-1}$-nek osztói mind 3 hatványai.

Az a feltevés, hogy γ páros, tehát mindenképpen ellentmondáshoz vezet.

B) γ *páratlan*. Ekkor $\gamma + 1 = 2\lambda$ és

$$\frac{q^{\gamma+1}-1}{q-1} = \frac{q^{\lambda}-1}{q-1}(q^{\lambda}+1) \tag{26}$$

λ nem lehet páratlan, mert különben, mint azt éppen most láttuk, $\frac{q^{\lambda}-1}{q-1}$ vagy nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, vagy osztható még egy, a 3-tól különböző páratlan számmal is. Vagyis $\lambda = 2\lambda_1$. De λ_1-re megismételhető az előző okoskodás, azaz λ_1-nek is párosnak kell lennie. És így tovább. Látható, hogy $\gamma + 1 = 2^{\nu}$. Bebizonyítjuk, hogy $\nu = 1$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\nu \geqq 2$, akkor $\gamma + 1$ osztható 4-gyel és $\frac{q^{\gamma+1}-1}{q-1}$ osztható $\frac{q^4-1}{q-1}$-gyel. Ám

$$\frac{q^4-1}{q-1} = (q+1)(q^2+1)$$

és q helyébe $6l \pm 1$-t téve

$$q^2 + 1 = 2(18l^2 \pm 6l + 1)$$

azaz q^2+1-nek olyan páratlan osztója volna, amelyik nem 3 hatványa, ami feltevésünkkel ellenkezik.

Azt találtuk tehát, hogy $\gamma + 1 = 2$, ill.

$$\gamma = 1.$$

Ebből az következik, hogy

$$q + 1 = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3},$$

továbbá a (22)-t tekintetbevéve vagy $\gamma_1 = 0$ és $\gamma_2 = 1$, vagy $\gamma_1 = 1$ és $\gamma_2 = 0$. Vizsgáljuk meg azt a két lehetőséget.

a) $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$. A (19), (20) és (21) összefüggések most ezt az alakot öltik:

$$2^{\alpha+1} - 1 = 3^{\beta_1} \tag{27}$$

$$\frac{3^{\beta+1} - 1}{2} = 2^{\alpha_2} q \tag{28}$$

$$q + 1 = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} \tag{29}$$

A (27) egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha $\alpha + 1 = 2\mu$ páros szám, azaz

$$2^{2\mu} - 1 = (2^{\mu} - 1)(2^{\mu} + 1) = 3^{\beta_1} \tag{30}$$

$2^{\mu} - 1$ és $2^{\mu} + 1$ azonban relatív prímek. A (30)-nak ezért csak akkor lehet μ-ben és β_1-ben egészszámú megoldása, ha $\mu = 1$ és $\beta_1 = 1$. Ebből és (22)-ből az következik, hogy

$$\alpha = 1, \quad \beta = \beta_3.$$

Tegyük most q-nak a (29)-ből adódó értékét a (28)-ba és vegyük figyelembe, hogy $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$:

$$3^{\beta+1} - 1 = 2^{\alpha_2+1}(2^{\alpha_3} 3^{\beta} - 1) = 4 \cdot 3^{\beta} - 2^{\alpha_2+1},$$

amiből

$$2^{\alpha_2+1} - 1 = 3^{\beta}. \tag{31}$$

A (31) a (27)-tel teljesen azonos szerkezetű és nyilván

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta = 1$$

az egyetlen lehetséges értékek. Ezzel egyben megtaláltuk α_3 és β_3 lehetséges értékeit is:

$$\alpha_3 = 0, \quad \beta_3 = 1.$$

Ezeket az értékeket a (29)-be téve azt nyerjük, hogy

$$q = 2.$$

Ez nyilván lehetetlen.

b) $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$. A (19), (20), (21) helyébe most a

$$2^{\alpha+1} - 1 = 3^{\beta_1} q \tag{32}$$

$$3^{\beta+1} - 1 = 2^{\alpha_2+1} \tag{33}$$

$$q + 1 = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} \tag{34}$$

egyenlőségek kerülnek. Induljunk ki ezúttal a (33)-ból. Világos, hogy most $\alpha_2 > 0$, azaz $\alpha_2 + 1 > 1$. Viszont $3^{\beta+1} - 1$ csak az esetben osztható 2-nek 1-nél magasabb hatványával, ha $\beta + 1$ páros

szám. 4-gyel azonban a $\beta+1$ még sem lehet osztható. Tegyük fel ui. ennek az ellenkezőjét, akkor $3^{\beta+1}-1$ osztható lenne $3^4-1=80$-nal és így 5-tel is, ami a (33) értelmében lehetetlen. Legyen tehát $\beta+1=2(2\omega+1)$

$$3^{2(2\omega+1)}-1=(3^{2\omega+1}-1)(3^{2\omega+1}+1)=2^{\alpha_2+1}$$

$3^{2\omega+1}-1$ és $3^{2\omega+1}+1$ egymásután következő páros számok, legnagyobb közös osztójuk tehát 2. Más osztóik azonban, mint 2 hatványai nem is lehetnek. Ebből az következik, hogy

$$3^{2\omega+1}-1=2$$

és így

$$\omega=1,\ \beta=1,\ \alpha_2=2. \tag{35}$$

Ezekkel az értékekkel

$$n=2^{\alpha}\cdot 3\cdot q$$

és

$$S(n)=(2^{\alpha+1}-1)\frac{8}{2}(q+1)=3n=2^{\alpha}\cdot 9\cdot q,$$

amiből

$$\frac{q+1}{q}=1+\frac{1}{q}=\frac{2^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}-1}\frac{9}{8}>\frac{9}{8}$$

vagyis

$$\frac{1}{q}>\frac{1}{8},\quad q<8$$

3-nál nagyobb, 8-nál kisebb prímszám csak kettő van, 5 és 7. Ezek q lehetséges értékei.

Feltéve, hogy $q=5$, a (34) így írható

$$6=2^{\alpha_3}3^{\beta_3}$$

és ebből $\alpha_3=1$, $\beta_3=1$. A (35) szerint $\alpha_2=2$ és így

$$\alpha=\alpha_2+\alpha_3=3.$$

Végül is n-re a következő értéket nyerjük

$$n=2^3\cdot 3\cdot 5=120.$$

A behelyettesítés meggyőz arról, hogy $S(120)=3\cdot 120$.

Tegyük fel azután, hogy $q=7$, akkor a (34)-ből

$$8=2^{\alpha_3}3^{\beta_3},$$

azaz $\alpha_3=3$, $\beta_3=0$,

$$\alpha=\alpha_2+\alpha_3=5$$

és

$$n = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672.$$

A behelyettesítés ismét igazolja, hogy $S(672) = 3 \cdot 672$.

A páros, háromprímtényezős számok között, tehát csupán két háromszorosan tökéletes szám található. Hátra van még a páratlan, háromtényezős számok vizsgálata.

II. $i = 3,\ k = 2,\ p_1 > 2.$

Az

$$N(5, 7, 11) = \frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,\frac{11}{10} = \frac{77}{48} < 2$$

egyenlőtlenség azt mutatja, hogy p_1 nem lehet 3-nál nagyobb, ui. a $p_1 > 3$ esetben

$$\max N(p_1, p_2, p_3) = N(5, 7, 11).$$

Bevezetve ismét az I.-ben használt jelöléseket, vizsgáljuk meg az

$$N(3, p, q) = \frac{3}{2}\,\frac{p}{p-1}\,\frac{q}{q-1} > 2$$

egyenlőtlenséget, amely a

$$4\,\frac{p-1}{p-4} > q \tag{36}$$

alakban is írható. A $\dfrac{p-1}{p-4}$ függvény a $p > 4$ értékekre monoton csökkenő. A $p = 5$ és $p = 7$ értékekkel a (36) a következő egyenlőtlenségeket szolgáltatja:

$$16 > q, \quad 8 > q.$$

Az első egyenlőtlenség szerint q lehetséges értékei $q = 7$, $q = 11$, $q = 13$. A második értelmében $p = 7$-re a q semmilyen értéket sem vehet fel, mert $p < q$. A $p > 7$ esetre annál inkább nem ad q-ra semmilyen lehetséges értéket a (36) egyenlőtlenség. p egyetlen lehetséges értéke: $p = 5$. A következő eseteket kell tehát tagolalni:

A) $p_1 = 3, \quad p_2 = p = 5, \quad p_3 = q = 7$

B) $p_1 = 3, \quad p_2 = p = 5, \quad p_3 = q = 11$

C) $p_1 = 3, \quad p_2 = p = 5, \quad p_3 = q = 13$

A) $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$. A kitevőket ismét α, β, γ-val jelölve

$$n = 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 7^{\gamma}$$

és feltevés szerint

$$S(n)=\frac{3^{\alpha+1}-1}{2}\,\frac{5^{\beta+1}-1}{4}\,\frac{7^{\gamma+1}-1}{6}=2n=2\cdot 3^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot 7^{\gamma} \qquad (37)$$

A (37) szerint $\frac{3^{\alpha+1}-1}{2}$ osztói lehetnek 2, továbbá az 5 és 7 hatványai. A

$$\frac{3^{\alpha+1}-1}{2}=2$$

egyenletnek nincs egészszámú megoldása, fel kell tehát tételezni, hogy $\frac{3^{\alpha+1}-1}{2}$ osztható 5-tel vagy 7-tel. A legkisebb kitevő, amely mellett $3^{\alpha+1}-1$ osztható 5-tel, az $\alpha+1=4$. Ám így $\frac{1}{2}(3^{\alpha+1}-1)$ osztható $\frac{1}{2}(3^4-1)=40$-nel, azaz 2^3-nal is, ami nem lehetséges. Ugyanígy a legkisebb kitevő, amely mellett $3^{\alpha+1}-1$ osztható 7-tel, az $\alpha+1=6$, de akkor $\frac{1}{2}(3^{\alpha+1}-1)$ osztható $\frac{1}{2}(3^6-1)=2^2\cdot 7\cdot 13$-mal is, ami ugyancsak lehetetlen.

Csak 3, 5, 7 prímtényezőkkel tehát tökéletes szám nem alkotható.

B) $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=11$.

$$n=3^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot 11^{\gamma}$$

és feltevésünk értelmében

$$S(n)=\frac{3^{\alpha+1}-1}{2}\,\frac{5^{\beta+1}-1}{4}\,\frac{11^{\gamma+1}-1}{10}=2n=2\cdot 3^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot 11^{\gamma}. \qquad (38)$$

Ismét $\frac{3^{\alpha+1}-1}{2}$ osztóit kell megnéznünk. Ezek az osztók lehetnek: 2 első hatványa, továbbá 5 és 11 magasabb hatványai. Azt már láttuk, hogy azt a feltevést el kell ejteni, hogy $\frac{1}{2}(3^{\alpha+1}-1)$ osztható 5-tel. Lehetséges azonban, hogy $\frac{1}{2}(3^{\alpha+1}-1)$ osztható legyen 11-gyel, ti., ha $\alpha+1=5$, akkor $\frac{1}{2}(3^5-1)=121=11^2$. A (38) értelmében, így $\frac{1}{10}(11^{\gamma+1}-1)$-nek kell oszthatónak lennie

5 valamelyik hatványával, azaz $11^{\gamma+1}-1$-nek oszthatónak kell lennie legalább 5^2-tel. Ennek az a feltétele, hogy $\gamma+1$ osztható legyen 5-tel, mert a legkisebb kitevő, amely mellett $11^{\gamma+1}-1$ osztható 5^2-tel éppen 5. Ám $11^5-1=2\cdot5^2\cdot3221$. Ilymódon bevezetnők a 3221 idegen prímtényezőt is, amivel $11^{\gamma+1}-1$-nek nem szabad oszthatónak lennie.

Csak a 3, 5, 11 prímtényezőkkel tehát tökéletes szám nem alkotható.

C) $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=13$.

$$n=3^{\alpha}\cdot5^{\beta}\cdot13^{\gamma}.$$

és feltevésünk szerint:

$$S(n)=\frac{3^{\alpha+1}-1}{2}\,\frac{5^{\beta+1}-1}{4}\,\frac{13^{\gamma+1}-1}{12}=2n=2\cdot3^{\alpha}\cdot5^{\beta}\cdot13^{\gamma} \quad (39)$$

$\frac{3^{\alpha+1}-1}{2}$-ről fel kell tennünk, hogy 5-tel nem osztható. Osztható lehet azonban 13-mal, mert $\frac{3^3-1}{2}=13$. A (39) miatt tehát $\frac{1}{12}(13^{\gamma+1}-1)$-nek kell oszthatónak lennie 5-tel. Ez bekövetkezik, ha $\gamma+1$ osztható 4-gyel. Ám

$$13^4-1=(13^2-1)(13^2+1)=2^4\cdot3\cdot5\cdot7\cdot17$$

és $2n$ osztható lenne 7-tel és 17-tel is, ami feltevésünkkel ellenkezik.

Csak a 3, 5, 13 prímtényezőkkel tökéletes szám nem alkotható.

Az itt ismertetett eljárás kiterjeszthető az $i=4$ esetre is, akkor azonban a vizsgálandó esetek száma ugrásszerűen emelkedik.

ОДНА ИЗ ПРОБЛЕМ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Л. Альпар

Резюме

Целое число n называется k-кратно совершенным, если сумма его делителей $S(n)=kn$, причем k есть само целое число $\geqq 2$. Доказывается, что

$$k<\frac{p_1}{p_1-1}\,\frac{p_2}{p_2-1}\,\frac{p_3}{p_3-1}\cdots\frac{p_i}{p_i-1}$$

где

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}.$$

Если подставить $p_1, p_2, \ldots, p_i$ первым первоначальным числом i, то данное выражение не уменьшается, и тем самым находим для k такой верхний предел, который зависит только от i.

Затем автор анализирует случаи $i=1$, $i=2$, $i=3$.

Если $i=1$, $k=1$. Следовательно нет совершенного числа формы p^α.

Если $i=2$, $k=2$. Если $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ было бы нечетным числом, то для верхнего предела k мы получили бы величину $\frac{3}{2}\frac{5}{4}=\frac{15}{8}<2$. Из этого следует, что нечетных совершенных чисел такой формы не существует. С другой стороны, однако, все четные вдвойне совершенные числа должны иметь известную форму

$$n=2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)$$

где $2^{\alpha+1}-1$ первоначальное число.

Если $i=3$, $k=3$ и $k=2$. Если $k=3$, то n может быть только четным, потому что $\frac{3}{2}\frac{4}{5}\frac{7}{6}=\frac{35}{16}<3$. В этом случае для n мы находим две возможные величины

$$n=120=2^3\cdot 3\cdot 5, \quad n=672=2^5\cdot 3\cdot 7.$$

Если предположить, что $k=2$, то случаи четных n могут быть заранее исключены, потому что они встречаются лишь в вышеупомянутой форме. Но даже предположение, что n является нечетным, приводит нас к исследованию лишь следуюших трех случаев: $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=7, 11, 13$, так как для любые другие нечетные величины p_1, p_2, p_3 получаем, что

$$\frac{p_1}{p_1-1}\frac{p_2}{p_2-1}\frac{p_3}{p_3-1}<2.$$

Можно, наконец, убедиться в том, что даже в этих трех случаях нет нечетного трехкратно совершенного числа.

UN PROBLÈME DE LA THÉORIE DES NOMBRES

Le nombre entier n est dit k fois parfait, si la somme de ses diviseurs $S(n)=kn$, k étant un nombre entier $\geqq 2$. On démontre que

$$k<\frac{p_1}{p_1-1}\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_i}{p_i-1}$$

où

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_i^{\alpha_i}.$$

En remplaçant $p_1, p_2, \ldots, p_i$ par les i premiers nombres premiers, l'expression en question ne diminue pas et on trouve ainsi une borne supérieure pour k ne dépendant que de i.

L'auteur examine ensuite les cas de $i=1$, $i=2$, $i=3$.

Pour $i=1$, $k=1$. Il n'existe donc pas de nombres parfaits de la forme de p^α.

Pour $i=2$, $k=2$. Si $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ était un nombre impair, la borne supérieure qu'on obtenait pour k aurait la valeur de $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{8}<2$. On en

conclut l'impossibilité des nombres parfaits impairs de cette forme. Par contre touts nombres pairs, deux fois parfaits doivent avoir la forme *connue:*

$$n = 2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)$$

où $2^{\alpha+1}-1$ est un nombre premier.

Pour $i=3$, $k=3$ et $k=2$. Lorsque $k=3$, n doit être pair, car $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}=\frac{35}{16}<3$. Et dans ce cas on trouve en effet pour n deux valeurs possibles:

$$n=120=2^3\cdot 3\cdot 5, \quad n=672=2^5\cdot 3\cdot 7.$$

En supposant $k=2$, on peut exclure d'avance les n pairs qui doivent avoir la forme susmentionée. Mais l'hypothèse d'un n impair n'impose aussi que l'examen des trois cas suivants: $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=7, 11, 13$, étant que pour toutes autres valeurs impaires de p_1, p_2, p_3

$$\frac{p_1}{p_1-1}\,\frac{p_2}{p_2-1}\,\frac{p_3}{p_3-1}<2.$$

On prouve enfin que même dans ces trois cas n'existent pas des nombres impairs trois fois parfaits.

1955. ÉVBEN KOSSUTH-DÍJJAL KITÜNTETETT RÉDEI LÁSZLÓ MUNKÁINAK JEGYZÉKE

1. Az $x^{\varphi(p^\alpha)} - 1 \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ congruentia primitív gyökének existenciatétele, Szent István Akadémia Értesítője, (1921), 199—202. o.

2. Ein neuer Beweis des quadratischen Reciprocitätssatzes, Acta Sci. Math. Szeged, 2 (1925), 134—138. o.

3. A másodfokú képzetes számtest osztályszámáról, Math. és Term. Tud. Értesítő, 44 (1927), 230—246. o.

4. Über die Klassenzahl des imaginären quadratischen Zahlkörpers, Journal f. d. reine u. angew. Math., 159 (1928), 210—219. o.

5. A másodfokú valós számtest osztályszámáról s alapegységéről, Mat. és Term. Tud. Értesítő, 48 (1931), 648—682. o.

6. A másodfokú számtest osztályszámáról, Mat. és Term. Tud. Értesítő, 48 (1931), 683—707. o.

7. A másodfokú számtest osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai, Math. és Term. Tud. Értesítő, 49 (1932), 338—363. o.

8. Die durch vier teilbaren Invarianten der Klassengruppe des quadratischen Zahlkörpers (H. Reichardtal közösen írt dolgozat), Journal f. d. reine u. angew. Math., 170 (1933), 69—74. o.

9. A másodfokú számtest osztálycsoportjának 8-cal osztható invariánsai, Math. és Term. Tud. Értesítő, 50 (1933), 195—218. o.

10. A másodfokú számtest egyik tételének új bizonyítása, Mat. és Term. Tud. Értesítő, 50 (1934), 219—230.

11. Gauss egyik számelméleti tételének kibővítéséről. A mezőtúri ref. gimn. Értesítőjéből, (1933).

12. Megjegyzés H. Rademacher úr megelőző dolgozatához, Mat. és Fiz. Lapok, 40 (1933), 35—39. o.

13. Megjegyzés K. Borsuk egyik geometriai tételéhez, Mat. és Fiz. Lapok, 41 (1934), 36—40. o.

14. Felső korlát a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsairól, Mat. és Term. Tud. Értesítő, 51 (1934) 219—226. o.

15. A másodfokú számtest alapegységéről és az abszolút osztálycsoport 8-cal osztható invariánsairól, Mat. és Term. Tud. Értesítő, 51 (1934) 227—259.

16. Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journal f. d. reine u. angew. Math., 171 (1934), 55—60. o.

17. Über die Grundheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journal f. d. reine u. angew. Math., 171 (1934), 131—148. o.

18. Eine obere Schranke der Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journal f. d. reine u. angew. Math., 171 (1934), 61—64. o.

19. Ein kombinatorischer Satz, Acta Sci. Math. Szeged, 7 (1934), 39—43. o.

20. Aufgabe 175, Jahresbericht d. Deutschen Math. Ver., 44 (1934), 69 o.

21. A $t^2 - du^2 = -1$ Pell-féle egyenletről, Math. és Term. Tud. Ért., 54 (1935), 1 44. o.

22 Néhány középértékkérdésről másodfokú számtestekben, Math. és Term. Tud. Ért. 54 (1935), 45 116. o.

23. Über die Pellsche Gleichung $t^2 - du^2 = -1$, Journal f. d. reine u. angewandte Math., 173 (1935), 193—221. o.

24. Über einige Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper, Journal f. d. reine u. angew. Math., 174 (1935) 15—55. o

25. Néhány újabb kongruenciafeltétel a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának nyolccal osztható invariánsaira, Mat. és Term. Tud. Ért., 54 (1936), 736—68. o.

26. Der Euklidische Algorithmus in quadratischen Körpern, Journal f. d. reine u. angew. Math., 174 (1936), 192 205. o (H. Behrbommal közösen írt dolgozat.)

27. Lösung der Aufgabe 175, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 46 (1936), 49—50. o.

28. A négyzetes maradékok eloszlásáról, összesített modulus esetében. Mat. és Term. Tud. Ért., 56 (1937), 54—88 o.

29. A másodfajú D-felbontásokról, 56 (1937), ugyanott 89—125. o.

30. Egy új számelméleti jel, alkalmazással a másodfokú számtestek elméletére, I. rész. ugyanott 807—847. o.

31. Másodfokú számtestek abszolút osztálycsoportjának 2-, 4-, és 8-cal osztható invariánsai. ugyanott 848—853. o.

32. Másodfokú számtestek abszolút osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsainak számosságára vonatkozó néhány középérték-kérdés. Mat. és Term. Tud. Ért., 57 (1938), 88—103.

33. Egy új számelméleti jel, alkalmazással a másodfokú számtestek elmélet re, II. rész, ugyanott 488—500. o.

34. Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper, I. Teil, Journal f. d. reine u. angew. Math., 180 (1938), 1—43. o.

35. Die Diophantische Gleichung $mx^2 + ny^2 = z^4$, Monatshefte für Math. u. Phys. 48 (1939), 43—60. o.

36. Algebrai számtestek ideálosztálycsoportjának páros részéről, Mat. és Term. Tud. Ért., (1940), 829—839 o.

37. Euklides algoritmusáról valós másodfokú számtestekben, Mat. és Fiz. Lapok, 47 (1940), 78—89. o.

38. Konvex testek támasztófüggvényéről, Mat. és Term. Tud. Ért., 60 (1941), 64—68. o.

39. Über den Fundamentalsatz der Abelschen Gruppen von endlicher Ordnung, Acta Sci. Math. Szeged, 10 (1941) 109—111. o.

40. Zur Gaussischen Theorie der Reduktion binärer quadratischer Formen, 134 -140. o. ugyanott.

41. Über den Euklidischen Algorithmus in reellquadratischen Zahlkörpern, Journal f. d. reine u. angew. Math., 183 (1941), 183 - 192. o.

42. Egy diophantosi approximatioról az algebrai számok körében, Mat. és Term. Tud. Ért. 61 (1942), 460—469. o.

43. Jelentés az 1942. évi Kőnig Gyula jutalomról (Hajós György munkássága) Mat. és Fiz. Lapok, 49 (1942), 1—16. o.

44. A rácsparallelogrammákról, 73—75. o ugyanott.

45. Zur Frage des Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern, Math. Ann., 118 (1942), 588—608. o.

46. Zu einem Approximationssatz von Koksma, Math. Zeitschrift, 48 (1942), 500—502.

47. Másodfokú számtestek gyűrűosztálycsoportjának páros részéről, a Pell-féle és az $rx^2 + sy^2 = z^{2n}$ diophantosi egyenletről, I. rész, Math. és Term. Tud. Ért., 62 (1943), 13—33. o.

48. Másodfokú számtestek gyűrűosztálycsoportjának páros részéről, a Pell-féle és az $rx^2 + sy^2 = z^{2n}$ diophantosi egyenletről, II. rész, ugyanott, 35—46. o.

49. Másodfokú számtestek gyűrűosztálycsoportjának páros részéről, a Pell-féle és az $rx^2 + sy^2 = z^{2n}$ diophantosi egyenletről, III. rész, ugyanott, 48—61. o.

50. Kurze Darstellung des fünften Gauss'schen Beweises für den quadratischen Reciprocitätssatz, Commentarii Math. Helv., 16 (1943), 264 265.

51. Megjegyzés Waldapfel László dolgozatához, Mat. és Fiz. Lapok, 50 (1943), 260 261. o.

52. Über die Klassengruppen und Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, Journal für die reine u. angew. Math., 186 (1944), 80—90. o.

53. Über einige merkwürdige Polynome in endlichen Körpern mit zahlentheoretischen Beziehungen, Acta Sci. Math. Szeged, 11 (1946), 39—54. o.

54 Zur Theorie der Gleichungen in endlichen Körpern, ugyanott, 63—70. o.

55. Über eindeutig umkehrbare Polynome in endlichen Körpern, ugyanott, 85—92. o.

56. Über die Gleichungen dritten und vierten Grades in endlichen Körpern, ugyanott, 95—105. o.

57. Bemerkung zu einer Arbeit von R. Fueter über die Klassenkörpertheorie, ugyanott, 37—38. o.

58. A hypergeometrikus sorok alkalmazása az $1-x^{p-1}$ Fermat-féle polinom bizonyos szorzatelőállításaira a törzsmodulus szerint, kapcsolatban a négyzetes maradékok elméletével. Mat. és Term. Tud. Értesítő, 62 (1944), 335—348. o.

59. A harmad- és negyedfokú egyenlet megoldása véges testekben, ugyanott, 349—364.

60. Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die Gleichungen dritten und vierten Grades in endlichen Körpern", Acta Sci. Math. Szeged, 11 (1947), 184—190. o.

61. Das „schiefe Produkt" in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören, Commentarii Math. Helv., 20 (1947), 225—264. o.

62. Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe, I. Teil, Acta Math., 79 (1947), 291 320. o. (Szele Tiborral közös dolgozat.)

63. Zwei Lückensätze über Polynome in endlichen Primkörpern mit Anwendung auf die endlichen Abelschen Gruppen und die Gaussischen Summen, Acta Math., 79 (1947) 273—290. o.

64. Vereinfacher Beweis des Satzes von Minkowski—Hajós, Acta Sci. Math., 13 (1949), 21—35. o.

65. O prjedsztavljenin csiszel $1, 2, \ldots, N$ poszrjedsztvom raznosztjej, Matematicseszkij Szbornik, 24 (66): (1949), 385 - 389. o. (Rényi Alfréddal közös dolgozat.)

66. Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron, Publ. Math. Debrecen, 1 (1949), 42—50. o. (Szőkefalvi-Nagy Bélával közös dolgozat.)

67. Die Reduktion des gruppentheorischen Satzes von Hajós auf den Fall von p-Gruppen, Monatshefte für Mathematik, Wien, 53 (1949), 221 226.

68. Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, Commentarii Math. Helv., 23 (1949), 272—281. o.

69. Über die Anzahl der Potenzreste mod p im Intervall $(1, p)$, Nieuw Archief voor Wiskunde, Groningen, 23 (1950), 150—162.

70. Elementarer Beweis und Verallgemeinerung einer Reziprozitätsformel von Dedekind, Acta Sci. Math., 12 (1950), 236—239.

71. Kurzer Beweis eines Satzes von Vandiver über endliche Körper, Publ. Math. Debrecen, 1 (1949), 99—100.

72. Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe. II., Acta Math., 82 (1950), 209—241. (Szele Tiborral közös dolgozat.)

73. Die Primfaktoren der Zahlenfolge $1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$, Portugaliae Math., 8 (19 9), 59—61.

74. Die Ringe „ersten Ranges", Acta Sci. Math. Szeged, 12 (1950), 18 - 29. (Szele Tiborral közös dolgozat.)

75. Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen, Acta Math. København, 84 (1950), 129—153.

76. Endlich-projektivgeometrisches Analogon des Minkowskischen Fundamentalsatzes, Acta Math. København, 84 (1950), 155—158.

77. Die endlichen Gruppen ohne direkt unzerlegbare Untergruppen, Math. Annalen, 122 (1950), 127—130.

78. Über das Dreieckpaar, Studii şi cercetări matematice, 1 (1950), 114—137.

79. Der Zentralsymmetrische Kern und die zentralsimmetrische Hülle von konvexen Körpern, Math. Annalen, 122 (1950) 205—220. (Fáry Istvánnal közös dolgozat.)

80. Ein Satz über quadratische Formen, Math. Annalen, 122 (1950), 340—342.

81. On factorisable groups, Acta Sci. Math. Szeged, 13 (1950) 235—238. (Szép Jenővel közös dolgozat.)

82. Über die Wertverteilung des Jacobischen Symbols, ugyanott, 242—246.

83. Über die Basen endlicher Gruppen, Math. Zeitschr., 53 (1951), 454—455.

84. Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, Journal f. d. reine u. angew. Math., 188 (1950), 201—227.

85. Einfacher Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes, Math. Zeitschr., 54 (1951), 25—26.

86. Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1 (1950), 74—98.

87. A short proof of a theorem of St. Schwarz concerning finite fields, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, 75 (1950), 211—212.

88. Über die endlichen nilpotenten Gruppen, Monatshefte für Math., 55 (1951), 200—205. (Szép Jenővel közös dolgozat.)

89. Ein Beitrag zum Problem der Faktorisation von endlichen Abelschen Gruppen, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1 (1950), 197—207.

90. Die Einfachheit der alternierenden Gruppe, Monatshefte für Math., 55 (1951), 328—329.

91. Über eine Verschärfung eines zahlentheoretischen Satzes von Thue, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 2 (1951), 76—82.

92. Eine Determinantenidentität für symmetrische Funktionen, ugyanott, 105—107.

93. Über gewisse Ringkonstruktionen durch schiefes Produkt, ugyanott, 185—189.

94. Über Ringe mit gemeinsamer multiplikativer Halbgruppe, Commentarii Math. Helv., 26 (1952), 146—151. (Steinfeld Ottóval közös dolgozat.)

95. Die Vollidealringe, Monatshefte für Math., 56 (1952), 89—95.

96. Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, Acta Sci. Math., 14 (1952), 252—273.

97. Über die Determinantenteiler, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 3 (1952), 143—150.

98. Kurzer Beweis der Waringschen Formel, ugyanott, 151—153.

99. Vollidealringe im weiteren Sinn, I., ugyanott, 243—268.

100. Eine Verallgemeinerung der Remarkschen Zerlegung, Acta Sci. Math., 15 (1953), 85—86. (Szép Jenővel közös dolgozat.)

101. Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie, Acta Sci. Math., 15 (1953), 7—11. (A. Stöhr-rel közös dolgozat.)

102. Die Existenz eines ungeraden quadratischen Nichtrestes mod p im Intervall $(1, \sqrt{p})$, Acta Sci. Math., 14 (1953), 12—19.

103. Bedingtes Artinsches Symbol mit Anwendung in der Klassenkörpertheorie, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 4 (1953), 1—29.

104. Die 2-Ringklassengruppe des quadratischen Zahlkörpers und die Theorie der Pellschen Gleichung, ugyanott, 31—87.

105. Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 5 (1954), 169—195.

105/a. Csoportok és gyűrűk holomorfelmélete, Magyar Tud. Akadémia III. Osztályának Közleményei, 4 (1954), 25—48. o.

106. Über die Kantenbasen für endliche vollständige gerichtete Graphen, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 5 (1954), 17—25. o.

107. Über das Kreisteilungspolynom, ugyanott, 27—28. o.

108. Gegenseitige Schreiersche Gruppenerweiterungen, Acta Sci. Math., 15 (1954), 243—250. o. (Steinfeld Ottóval közös dolgozat.)

109. Über die Ringe mit gegebenen Modul, ugyanott, 251—254. o.

110. Zetafunktionen in der Algebra, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 6 (1955), 5—25. o.

111. Neuer Beweis des Hajósschen Satzes über die endlichen Abelschen Gruppen, ugyanott, 27—40. o.

112. Hazai vizsgálatok a véges csoportok elméletében, Magyar Tud. Akadémia III. Osztályának Közleményei, 5 (1955), 315—325.

Az 1954. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny

A Bolyai János Matematikai Társulat 1954. november 13. és 20. között tartotta hatodik Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyét. A versenyzők egy hétig dolgozhattak a feladatok megoldásain. A kitűzött feladatokat 1954. november 13-án 13 órakor függesztették ki a különböző egyetemek, főiskolák és tudományos intézetek hirdetőtábláin. A megoldások benyújtásának, illetve postáraadásának végső határideje 1954. november 20. volt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi vagy főiskolai hallgató, továbbá mindazok, akik az egyetemet vagy főiskolát 1954-ben fejezték be.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Legyen r 1-nél nagyobb egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van — mégpedig végtelen sok — olyan végtelen mértani sor, amely csupa pozitív tagokból áll, amelynek összege 1, és amely rendelkezik a következő tulajdonsággal: Akárhogyan megválasztott $S_1, S_2, \ldots, S_r$ pozitív számok esetén, amelyek összege 1, szétszedhető a tekintett végtelen mértani sor r számú olyan végtelen (nem okvetlenül mértani) sorra úgy, hogy ezek összege rendre $S_1, S_2, \ldots, S_r$ legyen.

2. Bebizonyítandó, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(a \sin \frac{2\pi n}{N}\right) e^{b \cos \frac{2\pi n}{N}}$$

végtelen sor konvergens, ha N tetszőleges természetes szám, a és b pedig tetszőleges valós számok.

3. Lehetséges-e a $[0,1]$ zárt intervallumban folytonos $f(x)$ valós függvények mindegyikéhez egy Af valós számot úgy hozzárendelni, hogy $f(x) \leqq g(x)$, de $f(x) \not\equiv g(x)$ esetén $Af < Ag$ teljesüljön? Lehetséges-e ez a $[0,1]$ zárt intervallumon monoton növekvő valós függvények esetén?

4. Meghatározandók mindazok az egész síkon értelmezett $f(x, y)$ valós függvények, amelyekre bármely valós x, y, u, v érté-

kek esetén

$$f(x+u, y+u) = f(x, y) + u,$$

és

$$f(xv, yv) = f(x, y)v.$$

5. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ a (0,1) intervallumban egyenletes eloszlású teljesen független valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\eta_n = \sqrt{n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\xi_k}{k}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

valószínűségi változók eloszlása konvergál egy határeloszláshoz.

6. Döntsük el a következő állítások helyességét:

a) Ha $a < b$ pozitív egész számok, akkor bármely b számú egymásután következő egész szám között van két olyan, amelyek szorzata osztható $a \cdot b$-vel.

b) Ha $a < b < c$ pozitív egész számok, akkor bármely c számú egymásután következő egész szám között van három olyan, amelynek szorzata osztható $a \cdot b \cdot c$-vel.

7. Melyek azok a véges csoportok, amelyeknek egyetlen maximális (valódi) alcsoportjuk van?

8. Az R gyűrű A és B (kétoldali) ideáljainak összegén azt az ideált értjük, amely az összes $a + b$ alakú elemekből áll, ahol $a \in A$, $b \in B$. Relatív prímnek akkor nevezzük az A és B ideálokat, ha összegük R.

Bizonyítsuk be az elemi számelméletből ismert *kínai maradéktételt* következő általánosítását: Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ páronként relatív prím ideálok az egységelemes R gyűrűben, akkor R tetszőlegesen megadott $c_1, c_2, \ldots, c_n$ elemeihez található olyan x elem R-ben, amelyre $x - c_k \in A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

9. Legyen P összefüggő, önmagát nem metsző és nem záródó síkbeli törtvonal (egyenes darabokból álló lánc). Bebizonyítandó, hogy ha $\mathbf{v}$ olyan nullától különböző síkvektor, hogy P-nek van közös pontja a $P + \mathbf{v}$ törtvonallal (amely P-nek a $\mathbf{v}$ vektorral való párhuzamos eltolása útján keletkezik), akkor P-nek van közös pontja a $P + \alpha\mathbf{v}$ törtvonallal is, ahol az α valós szám egy pozitív egész szám reciproka. Igaz-e hasonló állítás más pozitív α értékekre is?

10. Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalaira, mint alapokra, kifelé az ABC_1, BCA_1 és CAB_1 hasonló egyenlőszárú háromszögeket szerkesztjük. Bizonyítsuk be, hogy az AA_1, BB_1, CC_1

egyenesek egy ponton mennek keresztül. Igaz-e ez a tétel az elliptikus és hiperbolikus geometriákban is?

A versenyen 30 versenyző vett részt és összesen 161 megoldást nyujtott be. A versenyzők közül 15 a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem, egy a budapesti Műszaki Egyetem, 7 a szegedi Tudományegyetem, 7 a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem volt, illetve jelenlegi hallgatója.

*

A verseny mind a résztvevők számát, mind a beadott jó dolgozatok számát tekintve, igen sikeresnek mondható. A versenybizottság megállapította, hogy a három díjazott és a hat dícséretben részesült versenyzőn kívül még több olyan versenyző is szerepelt, akiknek teljesítménye nem maradt el lényegesen a dícséretben részesültek mögött, és akik ennek megfelelően külön megemlítendők ebben a jelentésben. Örvendetes új jelenség I. és II. éves hallgatók olyan nagysikerű szereplése ezen a versenyen, amilyenre az előző években nem volt példa.

A versenybizottság az első díjat KOVÁCS LÁSZLÓnak, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem I. éves matematika-fizika szakos hallgatójának ítélte oda, akinek dolgozata mind tartalmát, mind megfogalmazásának gondosságát és szabatosságát tekintve a legkiválóbbnak bizonyult. Rendkívül ötletes és kifogástalanul kidolgozott megoldásokat nyújtott be az 1., 2., 3., 4., 7., 8., 9. feladatra, és az ellenpélda lényegtelen numerikus hibájától eltekintve, a 6. feladatra is elvileg helyes megoldást adott. Megoldásaiban mindig igen szellemes módszereket alkalmaz, és messzemenően általánosítja az eredményeket. A 9. feladatot egyedül ő oldja meg teljesen kifogástalanul.

A második díjat FÁY ÁRPÁDnak, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem IV. éves matematika-fizika szakos hallgatójának ítélte oda a bizottság. FÁY ÁRPÁD az 1., 2., 3., 4., 7. és 8. feladatra nyujtott be helyes megoldást, a 6. feladat a) kérdésére helyes, b) kérdésére téves választ ad, a 9. feladatbeli második problémát helyes ellenpéldával oldja meg, végül a 10. feladatra benyujtott megoldása az euklideszi geometriában helyes. Megoldásai nem mindig egyszerűek, és fogalmazásuk elmarad a másik két díjnyertes dolgozat mögött.

Harmadik díjat nyert CSÁKÁNY BÉLA, a szegedi Tudományegyetem IV. éves matematika-fizika szakos hallgatója, aki az 5. és 10. feladat kivételével mindegyik feladatra nyujtott be megoldást, ezek közül azonban a 9. feladat megoldása hibás. Megoldásaiban nem mindig találja meg a legrövidebb útat, de megoldásainak megfogalmazása kifogástalan.

A versenybizottság több feladat igen ügyes, illetve általánosított megoldásáért dícséretben részesítette a következő versenyzőket: DÖMÖLKI BÁLINT, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem II. éves matematika-fizika szakos hallgatója, ERDŐS JENŐ aspiráns, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem volt matematika-fizika szakos hallgatója, HEPPES ALADÁR, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem III. éves alkalmazott-matematika szakos hallgatója, KÁDÁR PÉTER egyetemi tanársegéd, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem volt matematika-fizika szakos hallgatója, KÁNTOR SÁNDOR, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem II. éves matematika-fizika szakos hallgatója és LÁSZLÓ ZOLTÁN, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem IV. éves matematika-fizika szakos hallgatója.

Végül kiemelendőnek tartja a versenybizottság FEKETE ANTAL, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem IV. éves matematika-fizika szakos hallgatója, PAPP ZOLTÁN, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem I. éves matematika-fizika szakos hallgatója és SZÁSZ FERENC egyetemi tanársegéd, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem volt matematika-fizika szakos hallgatója teljesítményét.

A versenybizottság:
Aczél János
Gyires Béla
Szele Tibor
Varga Ottó

A feladatok megoldásai a következők:

1. feladat

Bebizonyítjuk, hogy minden olyan 1 összegű abszolút konvergens

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

sor szétszedhető a feladatban kívánt módon, amelynek minden tagja kielégíti az

$$a_n < \frac{1}{r} \sum_{k=n}^{\infty} a_k \tag{1}$$

egyenlőtlenséget. Ezzel az általánosabb állítással megoldását adjuk a feladatnak is, hiszen minden $\frac{1}{r}$-nél kisebb kezdőtagú, 1 összegű mértani sorra teljesül ez a feltétel.

A szétszedést a következő módszerrel végezhetjük. $S_1+S_2+\cdots$ $\cdots+S_r=1$ miatt legalább egy S_i nem kisebb $\frac{1}{r}$-nél, s így nagyobb a_1-nél. Soroljuk a_1-et a legkisebb indexű ilyen részsorba. Ha már így kiosztottuk az első $n-1$ tagot, akkor a_n-et a legkisebb indexű olyan részsorba soroljuk, amelyre

$$S_i-s_i(n-1)\geqq\frac{1}{r}\sum_{k=n}^{\infty}a_k>a_n,$$

ahol $s_i(n-1)$ jelöli $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ közül az i-edik részsorba soroltak összegét (ilyen részsor

$$\sum_{i=1}^{r}[S_i-s_i(n-1)]=\sum_{k=n}^{\infty}a_k$$

miatt mindig van). Világos, hogy ennél az eljárásnál véges számú lépés után $S_i>s_i(n)$ és így az egész sor szétszedése után

$$S_i\geqq\lim_{n\to\infty}s_i(n)=s_i \qquad (i=1,2,\ldots,r). \tag{2}$$

Ámde ha valamelyik i-re $S_i>s_i$ állana, akkor a (2) egyenlőtlenségeket összeadva az

$$1=\sum_{i=1}^{r}S_i>\sum_{i=1}^{r}s_i=1$$

ellentmondáshoz jutnánk. Biztos tehát, hogy $S_i=s_i$ minden i-re teljesül, ebből azonban az is következik, hogy minden részsorba végtelen sok elemet soroltunk. Ezzel beláttuk, hogy a megadott szétszedés megfelel a feladat követelményeinek.

Könnyű megmutatni, hogy csupa pozitív tagokból álló monoton elrendezésben tekintett 1 összegű sor szétszedhetőségéhez szükséges is az (1) feltétel. Legyen ugyanis a

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

sor szétszedhető, és tekintsük tetszőleges fix n-re az

$$S_1=\sum_{k=1}^{n-1}a_k+\frac{1}{r}\sum_{k=n}^{\infty}a_k, \quad S_2=S_3=\cdots=S_r=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

előírt részletösszegeket. Minthogy ezekre is van szétszedés, ha abban $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ mindegyikét az első részsorba osztottuk be, akkor a_n elhelyezése előtt mindenütt pontosan

$$\frac{1}{r}\sum_{k=n}^{\infty}a_k$$

„hely" maradt még, s így a_n besorolásának lehetőségéből következik (1), ha viszont valamelyik a_i-t ($1 \leqq i \leqq n-1$) más részsorba soroltuk, akkor

$$a_n \leqq a_i < S_i = \frac{1}{r} \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

miatt teljesül (1).

Ha elejtjük azt a követelményt, hogy az egyes részsorok mind végtelenek legyenek, akkor (1)-ben egyenlőséget is megengedhetünk.

Kovács László

Megjegyzés. *Erdős Jenő* az $\frac{1}{3}$ kezdőtagú, $\frac{2}{3}$ hányadosú mértani sor példáján megmutatta, hogy egy csupa pozitív tagokból álló szétszedhető sor nem-monoton elrendezésben nem feltétlenül elégíti ki (1)-et.

A feladat $r = 2$ esetében Pólya—Szegő feladatgyűjteményének I. kötet 23.-ik oldalán szereplő 131. feladatába megy át.

A közölt általánosítások egyrészéhez eljutott *Bognár János*, *Erdős Jenő* és *Papp Zoltán* is. A feladatot megoldották még: *Balázs Béla*, *Csákány Béla*, *Dömölki Bálint*, *Durst Endre*, *Fáy Árpád*, *Heppes Aladár*, *Kádár Péter*, *László Zoltán*, *Szenthe János*, *Tekse Kálmán*, *Wiegandt Richárd* és *Zádor Pál*.

2. feladat

Kimutatjuk, hogy sorunkra teljesülnek az Abel-féle konvergenciatétel feltételei, amely szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$$

konvergens, ha c_n csupa pozitív tagokból álló monoton csökkenő zérósorozat, és a

$$D_m = \sum_{n=1}^{m} d_n$$

részletösszegek korlátosak.

$c_n = \frac{1}{n}$ triviálisan teljesíti a feltételt. Azt kell tehát csak kimutatnunk, hogy

$$D_m = \sum_{n=1}^{m} d_m = \sum_{n=1}^{m} \sin\left(a \sin \frac{2\pi n}{N}\right) e^{b \cos \frac{2\pi n}{N}}$$

korlátos. Szemmelláthatóan, hogy d_n periodikus és periódusa N,

továbbá $d_{kN}=0$. Ennek alapján beláthatjuk, hogy $D_{kN}=0$, hiszen

$$D_{kN}=\sum_{n=1}^{kN} d_n = k\sum_{n=1}^{N-1} d_n = \frac{k}{2}\left(\sum_{n=1}^{N-1} d_n + \sum_{n=1}^{N-1} d_{N-n}\right) = \frac{k}{2}\sum_{n=1}^{N-1}(d_n + d_{N-n})$$

és

$$d_n + d_{N-n} = \sin\left(a \sin\frac{2\pi n}{N}\right) e^{b\cos\frac{2\pi n}{N}} +$$

$$+\sin\left[a\sin\left(2\pi - \frac{2\pi n}{N}\right)\right] e^{b\cos\left(2\pi - \frac{2\pi n}{N}\right)} = 0.$$

Ha mármost $m = kN + r$ $(0 \leq r < N)$, akkor

$$D_m = D_{kN} + \sum_{n=kN}^{m} d_n = D_r$$

és így $\sup(|D_1|, |D_2|, \ldots, |D_{N-1}|)$ alkalmas korlát a D_n sorozat számára.

Kovács László
László Zoltán

Megoldották még: *Balázs Béla, Bognár János, Csákány Béla, Dömölki Bálint, Durst Endre, Erdős Jenő, Fáy Árpád, Heppes Aladár, Kádár Péter, Kántor Sándor, Kemény Péter, Papp Zoltán, Rejtő Péter, Schay Géza, Szász Ferenc, Tekse Kálmán* és *Zádor Pál.*

Megjegyzés. 1. *Kovács László* megemlíti, hogy az itt közölt módszer alkalmas olyan sorok konvergenciájának kimutatására is, amelyek a feladatban tárgyaltnál annyival általánosabbak, hogy a sin és cos függvények helyén tetszőleges periodikus páratlan, ill. páros függvényt, N helyén pedig tetszőleges racionális számot tartalmaznak.

2. Más általánosítás: ha d_n periodikus sorozat, és egy periódus összege 0, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n}$$

konvergens.

3. feladat

A feladat első kérdésére igennel válaszolhatunk: közismert, hogy

$$Af = \int_0^1 f(x)\,dx$$

megfelel a feladat követelményeinek.

A második kérdésre azonban tagadó a válasz. Ennek belátásához legyen $0 \leqq \alpha \leqq 1$ és tekintsük az

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq \alpha \\ 1, & \text{ha } \alpha < x \leqq 1 \end{cases}$$

és

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leqq x < \alpha \\ 1, & \text{ha } \alpha \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

függvényeket. Világos, hogy $f_\alpha(x) \leqq g_\alpha(x)$, de $f_\alpha(x) \not\equiv g_\alpha(x)$, továbbá $\alpha < \beta$ esetén

$$f_\beta(x) \leqq g_\beta(x) \leqq f_\alpha(x) \leqq g_\alpha(x)$$

(és természetesen $g_\beta(x) \not\equiv f_\alpha(x)$).

Ha létezne a feladatban kívánt hozzárendelés, akkor minden α-hoz volnának olyan Af_α és Ag_α számok, amelyekre $\alpha < \beta$ esetén $Af_\beta < Ag_\beta < Af_\alpha < Ag_\alpha$ teljesülne. Ekkor azonban az (Af_α, Ag_α) intervallumok diszjunktak volnának, s így halmazuk megszámlálható lenne annak ellenére, hogy kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban áll a $[0, 1]$-intervallumbeli α-k kontinuum-számosságú halmazával, ami lehetetlen.

Heppes Aladár

Megoldották még: *Csákány Béla, Dömölki Bálint, Fáy Árpád, Fekete Antal, Kádár Péter, Kántor Sándor, Kovács László, Wiegandt Richárd* és *Zádor Pál.*

4. feladat

Egyenleteinket felhasználva

$$f(x, y) = f(0 + x, y - x + x) = f(0, y - x) + x = \\ = f[0(y - x), 1(y - x)] + x = f(0, 1)(y - x) + x.$$

Eszerint az egyenleteinket kielégítő függvények mind $f(x, y) = (1 - c)x + cy$ alakúak, ha c-vel jelöljük a függvény 0, 1 helyen felvett értékét. Megfordítva: a

$$(1 - c)(x + u) + c(y + u) = [(1 - c)x + cy] + u$$

és

$$(1 - c)xv + cyv = [(1 - c)x + cy]v$$

azonosságok mutatják, hogy — bármilyen konstans legyen is c — minden $f(x, y) = (1 - c)x + cy$ alakú függvény kielégíti egyenleteinket. Könnyű észrevenni, hogy ezek a függvények éppen a súlyozott számtani közepek.

Mivel a megoldásban vizsgált függvények értelmezési tartományának — a valós számok halmazának — csak olyan tulajdonságait használtuk fel, amelyekkel bármely baloldali egységelemet tartalmazó gyűrű rendelkezik, meggondolásaink tetszőleges balegységelemes gyűrű felett értelmezett függvényekre is érvényesek.

Kovács László

Megoldották még: *Bognár János, Csákány Béla, Dömölki Bálint, Durst Endre, Erdős Jenő, Fáy Árpád, Fehér József, Fekete Antal, Heppes Aladár, Kádár Péter, Kálmán Lajos, Kántor Sándor, Kemény Péter, László Zoltán, Papp Zoltán, Pergel József, Rejtő Péter, Schay Géza, Szász Ferenc, Szenthe János, Székely László, Tábori Attila, Tekse Kálmán, Varga Gyula* és *Wiegandt Richárd.*

Megjegyzés. Ha a második egyenlet teljesülését csak pozitív v-kre kívánjuk meg, akkor ugyanezzel a módszerrel

$$f(x,y)=\begin{cases} f(0,1)(y-x)+x=(1-c)x+cy & \text{ha } y>x \\ x \quad \text{ha} \quad y=x \\ f(0,-1)(x-y)+x=(1-k)x+ky & \text{ha } y<x \end{cases}$$

nyerhető. Természetesen ez az eredmény tetszőleges rendezett balegységelemes gyűrűk felett is érvényes.

5. feladat

A Wallis-formula szerint

$$\sqrt{n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{2k}},$$

tehát elegendő megmutatni, hogy az

$$\eta_n^*=\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{\xi_k}{k}}{1-\frac{1}{2k}}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1-2\xi_k}{2k-1}\right)$$

változók eloszlásai egy határeloszláshoz konvergálnak. Legyen $\delta_k=1-2\xi_k$, akkor a $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n,\ldots$ változók teljesen függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $(-1,+1)$ intervallumban. Legyen $\zeta_n=\log\eta_n^*$; elegendő kimutatni, hogy ζ_n eloszlása konvergál egy határeloszláshoz. Ehhez viszont azt kell bebizonyítani, hogy ζ_n karakterisztikus függvénye, $\varphi_n(t)=M(e^{it\zeta_n})$ konvergál egy $\varphi(t)$

határfüggvényhez t minden valós értékére, és $\varphi(t)$ a $t=0$ helyen folytonos. Azonban

$$\varphi_n(t)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)^{1+it}-\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)^{1+it}}{2\left(\frac{1+it}{2k-1}\right)}.$$

A probléma tehát csak az, hogy kimutassuk, hogy a

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)^{1+it}-\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)^{1+it}}{2\left(\frac{1+it}{2k-1}\right)}$$

végtelen szorzat konvergens, és a szorzat által előállított függvény a $t=0$ pontban folytonos.

Ehhez elegendő megmutatni, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)^{1+it}-\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)^{1+it}-\frac{2(1+it)}{2k-1}}{\frac{2(1+it)}{2k-1}}\right|$$

sor t minden valós értékére konvergens és minden véges t intervallumon t-ben egyenletesen konvergens. Ez azonban következik az

$$\left|\frac{(1+h)^{1+it}-(1-h)^{1+it}-2(1+it)h}{2(1+it)h}\right|\leqq\frac{h^2|t|}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}\pi t}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$(0\leqq h\leqq 1)$ egyenlőtlenségből, amely a binomiális sor tagjainak megbecslésével könnyen belátható, mivel

$$\left|\frac{(1+h)^{1+it}-(1-h)^{1+it}-2(1+it)h}{2(1+it)h}\right|\leqq h^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\binom{1+it}{2n+1}\right|}{|1+it|}$$

és

$$\frac{\left|\binom{1+it}{2n+1}\right|}{|t||1+it|}\leqq\frac{1}{2n(2n+1)}\left[\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{k^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{\operatorname{sh}\pi t}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}}}{2n(2n+1)},$$

qu. e. d.

Erre a feladatra helyes megoldás nem érkezett be. Az itt közölt megoldást *Rényi Alfréd* professzor bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

6. feladat

a) Válaszunk igenlő. b számú egymást követő egész szám között biztosan van egy b-vel osztható és egy a-val osztható. Ha ezek különbözők, akkor már készen is vagyunk, hiszen szorzatuk osztható ab-vel. Ha ezek A-ban összeesnek, akkor A osztható a és b legkisebb közös többszörösével, $[a, b]$-vel. Azt kell még kihasználnunk, hogy ($a < b$ miatt) a és b legnagyobb közös osztója, (a, b), nem nagyobb b felénél, és így a tekintett egymást követő számok között biztosan van még egy (A-tól különböző) (a, b)-vel osztható B szám is, s ekkor AB osztható $[a, b]\,(a, b) = ab$-vel, qu. e. d.

b) Válaszunk tagadó: ellenpéldát konstruálunk. Legyen $a = 77 = 7 \cdot 11$, $b = 91 = 7 \cdot 13$, $c = 143 = 11 \cdot 13$ és tekintsük a következő 143 egymást követő számot:

$$5935 (= 6006 - 71), \ldots, 6006 (= 6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13), \ldots, 6077 (= 6006 + 71).$$

Megmutatjuk, hogy ezen számok közül semmiképpen nem választható ki három különböző szám úgy, hogy szorzatuk osztható legyen $abc = 7^2 11^2 13^2$-nel. Rövidség kedvéért 7-et, 11-et és 13-at kitüntetett prímszámoknak fogjuk nevezni.

Először azt gondoljuk meg, hogy a tekintett intervallumban 6006 az egyetlen olyan szám, amely két kitüntetett prímszámmal osztható, hiszen egy másik ilyen szám 6006-tól legalább $7 \cdot 11 = 77$-tel különbözik. Emiatt 6006-ot nem választhatjuk ki, hiszen akkor a másik két kiválasztott szám közül az egyiknek két kitüntetett prímszámmal kellene oszthatónak lennie. Ha viszont a kiválasztott számok közül egyik sem volna osztható két különböző kitüntetett prímszámmal, akkor mindegyiküknek más-más kitüntetett prímszám négyzetével kellene oszthatónak lennie, ámde a tekintett intervallumban egyetlen $13^2 = 169$-cel osztható szám sincs (5915 és 6084 az intervallumhoz legközelebb eső 169-cel osztható számok). Ezzel megmutattuk, hogy a kívánt kiválasztás nem végezhető el.

Csákány Béla

Megoldották még: *Dömölki Bálint* és *Kántor Sándor*. Az ellenpélda numerikus hibájától eltekintve helyes megoldást adtak be: *Balázs Béla*, *Kovács László*, *László Zoltán*, *Papp Zoltán* és *Zádor Pál*.

7. feladat

Nyilvánvaló, hogy egy G véges csoport bármely olyan eleme benne van G valamely maximális (valódi) alcsoportjában, amely nem generálja az egész G csoportot. Ezért ha G-nek egyetlen maximális (valódi) alcsoportja van, az pontosan az ilyen nem-generáló elemekből áll. Ebből következik, hogy G ciklikus csoport.

Jelöljük G egyik generáló elemét g-vel. Megmutatjuk, hogy g rendje prímszámhatvány. Tegyük fel ugyanis, hogy g rendje két különböző p és q prímszámmal osztható. Ekkor van olyan u és v egész szám, hogy $up+vq=1$, s ezért $u(pg)+v(qg)=g$. Ez azonban ellentmondást jelent, hiszen $u(pg)$ és $v(qg)$ H-beli elemek, s így összegük nem generálhatja az egész G csoportot.

Másrészt nyilvánvaló, hogy egy p^k rendű G ciklikus csoport (p prímszám, k pozitív egész szám) mindig pontosan egy maximális valódi alcsoportot alkalmaz, ti. pG-t.

Kovács László

Megoldották még: *Ádám András, Csákány Béla, Dömölki Bálint, Erdős Jenő, Fáy Árpád, Kádár Péter, Kemény Péter, László Zoltán, Papp Zoltán, Pergel József, Rejtő Péter, Szász Ferenc* és *Wiegandt Richárd.*

Megjegyzés. László Zoltán és *Szász Ferenc* észrevették, hogy a megoldás érvényes marad akkor is, ha véges csoportok helyett olyan csoportokat vizsgálunk, amelyek alcsoportjaikra nézve maximumkövetelménynek tesznek eleget. Pontosabb következtetés szerint a megoldás érvényes abban a még tágabb csoportkategóriában is, amelyet az jellemez, hogy egy csoport bármely valódi alcsoportja benne van egy maximális valódi alcsoportban; ennek a csoportkategóriának közelebbi leírása azonban nem ismeretes.

8. feladat

Legyen c_1 felbontása $R=A_1+A_2$ szerint $c_1=a_1+a_2$ ($a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$), továbbá az e egységelem felbontása $R=A_1+A_i$ szerint $e=e_i'+e_i$ ($e_i'\in A_1$, $e_i\in A_i$, $i=3,4,\ldots,n$). Tekintsük most a

$$c_1=c_1e^{n-2}=(a_1+a_2)(e_3'+e_3)(e_4'+e_4)\cdots(e_n'+e_n)$$

szorzatot. Az $a_2e_3e_4\cdots e_n=b_1'$ jelölést bevezetve $c_1=b_1+b_1'$, ahol b_1 olyan szorzatok összege, amelyeknek mindegyike tartalmaz A_1-beli tényezőt, tehát $b_1\in A_1$; továbbá $b_1'\in A_i$ minden 1-től különböző i-re.

Hasonlóképpen minden c_k felírható $c_k = b_k + b'_k$ alakban, ahol $b_k \in A_k$ és $b'_k \in A_i$ minden k-tól különböző i-re.

Megmutatjuk, hogy $x = \sum_{i=1}^{n} b'_i$ megfelel a feladat követelményeinek. Valóban:

$$x - c_k = \sum_{i=1}^{n} b'_i - (b_k + b'_k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} b'_i - b_k,$$

ahol $b'_i \in A_k$ $(i \neq k)$ és $b_k \in A_k$, s így $x - c_k \in A_k$.

Más alkalmas x-hez jutunk, ha $\sum_{i=1}^{n} b'_i$-hez tetszőleges $\bigcap_i A_i$-beli elemet hozzáadunk.

Tekintettel arra, hogy megoldásunkban az egységelemnek csak féloldali egységelem voltát használtuk ki, tételünk bármely féloldali egységelemet tartalmazó gyűrűre érvényes.

Kovács László

Megoldották: *Bognár János, Csákány Béla, Erdős Jenő, Fáy Árpád, Kádár Péter, Kemény Péter, László Zoltán, Papp Zoltán, Pergel József, Rejtő Péter, Szász Ferenc* és *Wiegandt Richárd.*

Megjegyzés. Korányi Ádám hívta fel a bizottság figyelmét arra, hogy ebben a megoldásban az egységelemet csak a c_k elemek szorzatként való előállítására használtuk fel, s így a bizonyítás — lényegtelen módosítással — egységelemes gyűrűk helyett minden olyan gyűrűre érvényes, amelynek bármely eleme előállítható legalább két tényezős szorzatok összegeként.

9. feladat

Legyen P és $P + \mathbf{v}$ egyik közös pontja A'. Ekkor biztosan P-n van az az A pont is, amelyre $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{v}$. Világos, hogy elég a törtvonalnak az A és A' közé eső szakaszát vizsgálnunk. A továbbiakban ezt a szakaszt jelöljük P-vel.

Bebizonyítjuk a következő segédtételt. Legyenek $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ párhuzamos és egyező irányítású vektorok. Ha P nem metszi sem $P + \mathbf{v}_1$-et sem $P + \mathbf{v}_2$-t, akkor nem metszheti $P + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$-t sem.

Tekintsük a síknak azt a végtelen szalagját, amelyet $P + \beta\mathbf{v}_1$ súrol, ha β végigfut a számegyenesen. Legyen BC a $P + \mathbf{v}_1$-nek olyan összefüggő darabja, amelynek két végpontja, B és C a tekintett szalag két határegyenesén fekszik, többi pontjai pedig mind a szalag belsejében vannak. P korlátos, zárt és összefüggő volta

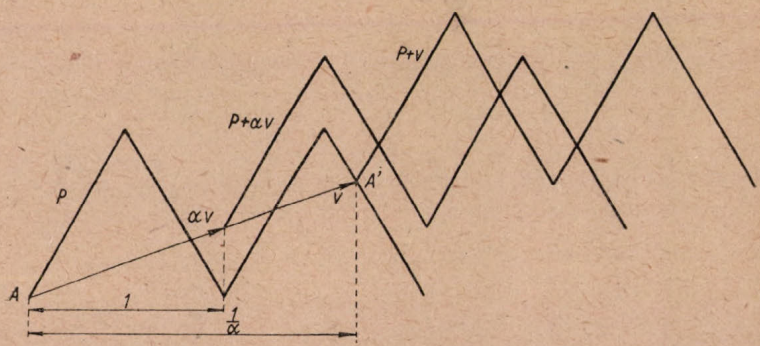
miatt ilyen BC törtvonal-darab mindig létezik, és két diszjunkt részre bontja a tekintett szalagot. P teljes egészében a szalag egyik felén fekszik, hiszen nincs közös pontja a $P+\mathbf{v}_1$-gyel; $P+\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ viszont teljes egészében a szalag másik felében fekszik, hiszen ha P nem metszi $P+\mathbf{v}_2$-t, akkor $P+\mathbf{v}_1$ sem metszheti $(P+\mathbf{v}_1)+\mathbf{v}_2$-t. Ezzel beláttuk, hogy P-nek nem lehet közös pontja $P+\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$-vel.

E segédtétel birtokában már könnyen megoldhatjuk a feladatot.

Legyen ui. $\alpha=\frac{1}{n}$. Ha P nem metszené $P+\frac{1}{n}\mathbf{v}$-t, akkor nem metszhetné $P+\frac{1}{n}\mathbf{v}+\frac{1}{n}\mathbf{v}=P+\frac{2}{n}\mathbf{v}$-t, $P+\frac{2}{n}\mathbf{v}+\frac{1}{n}\mathbf{v}=P+\frac{3}{n}\mathbf{v}$-t, stb. $P+\frac{n}{n}\mathbf{v}=P+\mathbf{v}$-t sem. Ezzel a feladat első részében kimondott tételt bebizonyítottuk.

Mivel sehol sem használtuk ki azt, hogy P egyenes darabokból áll, hanem csupán azokra a tulajdonságaira támaszkodtunk, amelyekkel minden egyszerű Jordan-féle vonal rendelkezik, tételünk törtvonalak helyett minden egyszerű Jordan-féle vonalra is érvényes.

A feladat második kérdésére tagadó választ adunk. Megmutatjuk, hogy ha $\frac{1}{\alpha}$ nem egész szám, akkor mindig van olyan P törtvonal és $\mathbf{v}$ vektor, hogy P metszi $P+\mathbf{v}$-t, de nem metszi $P+\alpha\mathbf{v}$-t.



1. ábra

Az ábra itt önmagáért beszél (P $2\left[\frac{1}{\alpha}\right]+2$ egyenesdarabból áll, minden darabja egyenlő hosszú és a bezárt szögek mind $\pi/3$ nagyságúak).

Megoldotta: *Kovács László.* Csak a feladat második kérdésére válaszoltak helyesen: *Fáy Árpád, Heppes Aladár, Kántor Sándor* és *Pergel József.*

10. feladat

„Legyen az ABC hegyesszögű háromszög. Legyenek az A_1, B_1, C_1 pontok rendre a BC, CA, AB egyenesnek a háromszöggel ellentett oldalán. Teljesüljön ezekre a pontokra nézve

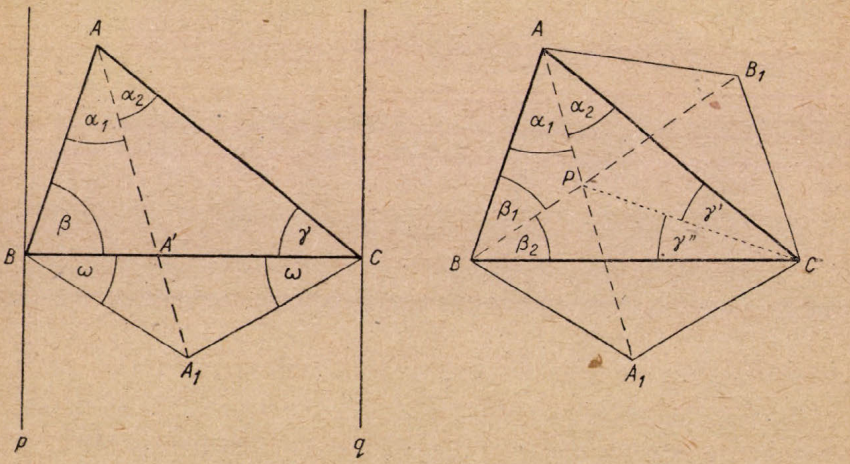
$$A_1BC\sphericalangle = B_1CA\sphericalangle = C_1AB\sphericalangle = A_1CB\sphericalangle = B_1AC\sphericalangle = C_1BA\sphericalangle =$$

$$= \omega \leqq \frac{\pi}{2}$$

E feltételek teljesülése esetén az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban találkoznak."

Ez a tétel, ha euklideszi síkról és hegyesszögű háromszögről van szó, ugyanazt fejezi ki, mint amit a feladat szövege állít. Ez az átfogalmazás azonban egy — a szó tágabb értelmében — abszolút tételt fejez ki. Más szóval azt állítjuk, hogy az euklideszi, az elliptikus és a hiperbolikus síkon egyaránt érvényes.

Bizonyítás. A Bolyai-féle sinus-tétel mindhárom geometriában érvényes. Erre támaszkodik a bizonyításunk.



1—2. ábra

Tekintsük az ABC és A_1BC háromszögeket ama tartományhoz viszonyítva, amely a BC szakasz pontjait tartalmazza, s ame-

lyet az erre a szakaszra B-ben és C-ben állított merőleges egyenesek, p és q határolnak. (1. ábra) Az A_1 szögpontra és az ω szögre vonatkozó kirovások következtében az AA_1 szakasz egy A' pontban metszi a BC szakaszt és kettévágja az ABC háromszöget, valamint a BAC szöget is. A bázisszögek egyenlősége folytán $A_1B = A_1C$, tehát a BA_1C háromszög egyenlőszárú.

Az A_1AB és A_1AC háromszögek A-nál levő szögének összege az ABC háromszög A-nál levő szögével egyenlő; az elsőnek a B-nél levő szöge $\beta+\omega$, a másiknak a C-nél levő szöge $\gamma+\omega$. Tekintsük a két háromszög mondott két szögét, s alkalmazzuk azokra a Bolyai-féle sinus-tételt:

$$\circ A_1B:\ \circ A_1A = \sin\alpha_1:\ \sin(\beta+\omega)$$
$$\circ A_1C:\ \circ A_1A = \sin\alpha_2:\ \sin(\gamma+\omega)$$

Ezekből $\circ A_1B = \circ A_1C$ folytán

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin(\beta+\omega)}{\sin(\gamma+\omega)}$$

adódik. Hasonló okoskodással még a

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{\sin(\gamma+\omega)}{\sin(\alpha+\omega)}$$
$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin(\alpha+\omega)}{\sin(\beta+\omega)}$$

is adódik. Ebből a három egyenlőségből következik a

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 = \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2 \qquad (1)$$

összefüggés.

Az AA_1, BB_1 egyenesek közös P pontját C-vel összekötő egyenes kettévágja az ABC háromszög C-nél levő szögét, γ' és γ'' részekre. Most az ABP, BCP, CAP háromszögekre alkalmazva a Bolyai-féle sinus-tételt, mégpedig a P-ben találkozó két-két oldalukra, könnyen adódik a

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma' = \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma'' \qquad (2)$$

összefüggés.

Ha egy hegyesszöget csúcspontján átmenő egyenes két szögre bont, γ' és γ''-re, akkor a

$$\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma''}$$

hányados a mondott egyenes különböző helyzeteinél különböző

értékeket vesz fel. Vessük ezt egybe az (1) és (2)-ből folyó

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma''}$$

összefüggéssel. Ilymódon beláthatjuk, hogy a CC_1 egyenes a CP egyenessel azonos, vagyis az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek a P pontban találkoznak.

Ezt a megoldást *Kárteszi Ferenc* professzor bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A feladatot megoldották *Fekete Antal, Heppes Aladár* és *Szenthe János*. Csak az euklideszi geometria esetére nyujtottak be helyes megoldást: *Durst Endre, Fáy Árpád, Kálmán Lajos, Kántor Sándor, Kemény Péter, Schay Géza* és *Tekse Kálmán*. Versenyen kivül nyujtott be egy értékes elemi megoldást az euklideszi esetre *Bártfai Pál*, a budapesti Petőfi gimnázium IV. osztályos tanulója.

Megjegyzés. Fekete Antal — aki az itt közölthöz hasonló megoldást nyujtott be — kitért a tétel néhány következményére, s azok bizonyítására is. Ezek — rövidre fogva — a következők.

1. Euklideszi síkon az itt közölt megoldást bevezető tétel akkor is igaz, ha az ABC háromszög nem hegyesszögű. Ha a C-nél levő szög nem kisebb a másik kettőnél, akkor

$$0 < BAA_1 \sphericalangle < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < ABB_1 \sphericalangle < \frac{\pi}{2};$$

ennélfogva AA_1 és BB_1 metszik egymást egy P pontban, de P nem esik feltétlenül az ABC háromszög belsejébe.

Ha $\gamma = \frac{\pi}{2}$, akkor P a háromszög belső pontja, s a bizonyítás (módosítás nélkül) ugyanúgy megy, mint a hegyesszögű háromszög esetében.

Ha $\gamma > \frac{\pi}{2}$ és $\omega < \pi - \gamma$, akkor a P belső pont, és a bizonyítás változtatás nélkül érvényes. Ha $\omega = \pi - \gamma$, akkor $P = C$ és így a tétel nem szorul bizonyításra. Ha pedig $\omega = \pi - \gamma$, akkor P külső pont, mely benne van abban a konvex négyszögben, amelynek határegyenesei a háromszög C-ben találkozó oldalegyenesei, valamint az ezekre merőleges magasságvonalai. Ebben az esetben a CC_1 egyenes kettévágja a C-nél levő szöget, de a másik két csúcspontban AC vágja ketté az $A_1AB\sphericalangle$-et és BC a $B_1BA\sphericalangle$-et. Ebben az értelemben csekély módosítással a használt bizonyítási módszer még mindig alkalmas.

2. Derékszögű ABC háromszögre is igaz a tétel, a bizonyítás ugyanis csak azt a feltevést aknázza ki, hogy a háromszög nem tompaszögű.

Ha tompaszögű a háromszög és hiperbolikus síkról van szó, bekövetkezhetik, hogy P metszéspont nincs.

Eszerint „ABC nem-tompaszögű"-re módosítva szövegünket, abszolút érvényű marad a tétel.

3. Gömbháromszögre, s azzal triéderre alkalmazva a feladat bizonyítási módszerét, adódik egy jólismert tétel, melynek alkalmazásával ismert módon levezethető Döhlemann következő tétele:

„Ha valamely tetraéder lapjaira mint alapokra gúlákat állítunk, melyeknek oldallapjai az alapokhoz egyenlő szögekkel dőlnek, s mind a négy gúla a tetraéder vele közös lapjának a tetraéderrel ellentett oldalán van, akkor a tetraéder csúcspontjait a szemközti gúla-csúccsal összekötve négy olyan egyenest nyerünk, amelyek egy hiperboloidnak — egyik alkotóseregéhez tartozó — alkotói."

Jelentés
a Beke Manó-emlékdíj negyedik kiosztásáról

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által kiküldött bizottság elnöke Surányi János, tagjai: Bede Lajos, Gádor Endréné, Lőrincz Pál, Szeliánszky Ferenc és Hódi Endre előadó voltak. A bizottság az emlékdíj szabályzatának megfelelően megállapította, hogy a díjak odaítélésével elsősorban az általános és középiskolai matematika tankönyvek, továbbá a matematikát népszerűsítő könyvek és füzetek írását, valamint az ilyen tárgyú előadások tartását kívánja jutalmazni. Az elbírálásban ugyancsak fontos szempontnak tekinti a bizottság a kiváló tanári munkát, a tanári továbbképzést elősegítő írói és előadói működést, a jó szakköri munkát, a Bolyai Társulat keretében végzett szervező munkát, végül ez évben első alkalommal a Matematikai Lapok példáinak és a Matematika Tanítása c. lap feladatainak megoldása terén elért kiemelkedő eredményt.

A bizottság e szempontoknak megfelelően az alábbi határozatot fogadta el, az Intézőbizottság és az Elnökség jóváhagyásával.

A bizottság 2000 Ft jutalommal tünteti ki Varga Tamás egy. tanársegédet; 1000—1000 Ft-tal jutalmazza Ambrózy Géza nyugalmazott gimnáziumi tanárt, Czapáry Endre szakérettségis tanárt, Tolnai Jenő főiskolai docenst és Vigassy Lajos gimnáziumi tanárt.

Indokolás

VARGA TAMÁS az Eötvös Loránd Tudományegyetem tanársegéde. Már középiskolai tanári működése idején igyekezett tudatosan keresni azt az utat, amelyen a tanulók érdeklődését felkeltve, eredményes munkát végezhet. Az egyetemen, mint a matematikai levelező tagozat vezetője, megszervezte a résztvevők munkájának rendszeres támogatását tanulókörökben. A hallgatók számára rendszeresen megjelenő, didaktikailag is értékes útmutatókat írt és szerkesztett. Megszervezte nyaranta a tagozat tanfolyamait, s azokon maga is nagy népszerűségnek örvendő előadásokat tartott.

Emellett tekintélyes részt vállalt a matematika tanárképzésben az Elemi matematika című, feladatmegoldásokra nevelő előadásokból. Nagy része van e tárgy tananyagának összegyűjtésében és tematikájának kidolgozásában. Részt vállal a módszertani előadásokból is.

Működésének legjelentősebb területe didaktikai elvi kérdésekre és tankönyvírásra vonatkozik. Megfeszített erővel elkészítette az általános iskola I—VII. osztályának matematika tankönyveit, részben társszerzők közreműködésével; ezek a könyvek kisebb-nagyobb változtatásokkal ma is használatban vannak. Általános iskolai geometriai kísérleti tankönyveinek iskolai kipróbálás utáni végleges bevezetése most van folyamatban. Általános iskolai összefoglalója, tanítóképző-intézeti tankönyv részlete és gimnáziumi érettségi összefoglalója ugyancsak komoly felkészültségről és jó kifejezőkészségről tanuskodnak.

Munkájához gondosan tanulmányozta a külföldi, főleg a szovjet tankönyv- és didaktikai irodalmat. Hamar felismerte az okoskodással megoldható feladatok rendkívüli jelentőségét. Elsőrendű szerepe van azok népszerűsítésében és bevezetésében az általános iskolába. Számos didaktikai cikkében elvileg és gyakorlati kérdéseken keresztül is igyekezett megvilágítani a változott tananyag célját és helyes tanítását.

Megindulása óta vezeti a Matematikai Lapok „Példarovatát". Ezen keresztül nemcsak pedagógusaink feladatmegoldó készségét igyekszik fejleszteni, hanem a kiválasztott feladatok tárgyával és feldolgozásmódjával tájékozottságukat is növeli, és felhívja figyelmüket egyes elhanyagolt, vagy a gyakorlatban nem mindig helyesen értelmezett kérdésekre.

Évente részt vesz az Arany Dániel-verseny központi bizottságában és a Kürschák József tanulóverseny bíráló bizottságában. Mindig lelkesen vállal részt a Társulat népszerűsítő és a tanári továbbképzéshez kapcsolódó munkájából. Rendszeresen tart előadásokat, különösen a tanári továbbképzés keretében. Ezekben is igyekszik megvilágítani a tananyag elhanyagolt, vagy nem kellő gonddal kezelt részeit. Nagy része van az évről-évre, a Magyar-Szovjet Barátsági Hónap alkalmából készített brosúrák összeállításában, melyek nagyban gazdagítják a tanárok és tanulók ismereteit és az alkalomtól függetlenül is felhasználható, értékes anyagot nyújtanak.

AMBRÓZY GÉZA nyug. középiskolai tanár, a Társulat nyíregyházi tagozatának alelnöke. 23 éves tanári működése után 1946-ban elvesztette szemevilágát, emiatt nyugalomba kellett vonulnia. Vaksága ellenére sem tért el régebbi célkitűzésétől, hogy mindazt, amit tanult, olyanoknak adja át, akik érdeklődnek a matematikai isme-

retek iránt. Ekkor is, mint régebben a Faragó Andor-féle Matematikai és Fizikai Lapok megjelenése idején, évről-évre maga köré gyűjtötte a nyíregyházi tanulóifjúság legjobbjait, támogatta és irányította matematikai fejlődésüket. Azok közül, akikkel így külön foglalkozott, később többen kiváló matematikusok, aspiránsok is lettek. 1951-ben egy Braille-írásszakértővel együtt összeállította a matematika és kémia pontírásos jeleit egyrészt a világtalan ifjúság, másrészt Braille-írásos művek másolói számára. A Vakok Szövetségének véleménye szerint ez a mű a vakok kulturális fejlődését jelentősen elősegítő, hézagpótló, jól elkészített, eredeti szakmunka, amelyért szerzője dícséretet érdemel. Ambrózy Géza másik munkája: elkészítette a vakok számára a tanítóképzők részére kiadott matematikai példatárnak megfelelően módosított pontírásos változatát. Tevékeny része volt a Társulat nyíregyházi tagozatának létrehozásában. A tagozat vezetőségének kezdettől fogva igen lelkes tagja. Sikerült elérnie, hogy a tagozat tanárai komolyan érdeklődnek a matematika és a matematika tanításának problémái iránt. Önzetlenül segítette a pedagógiai főiskolán levelező tanulmányokat folytató általános iskolai nevelőket. E munkában való közreműködéshez más középiskolai tanárokat is sikerült megnyernie.

Czapáry Endre a szombathelyi Ságvári Endre szakérettségis tanfolyam mat.-fiz. szakos tanára.

Tanári működését a szombathelyi Faludi gimnáziumban kezdte. Itt mindjárt megalakította a matematikai szakkört, tanítványai már az akkori — Szegeden megjelent — matematikai lapba igen kiváló eredménnyel dolgoztak. Később — már mint a szombathelyi Nagy Lajos gimnázium tanára — ott is megszervezte a szakkört és a szombathelyi csillagvizsgáló megindítása érdekében végzett rendkívül eredményes munkát. Jelenleg is két intézet szakkörét vezeti. Maga is buzgó feladatmegoldója a Matematikai Lapoknak és A Matematika Tanítása c. folyóiratnak. Tanítványai az országos matematikai versenyeken dícséretesen szerepeltek többször is. A Rákosi-versenybizottságnak aktív tagja.

Pedagógus munkája kiváló, szakérettségis osztálya 1952-ben az országos felmérő dolgozat alapján a három legjobb közé került; kitűnő eredménnyel alkalmazza a legújabb didaktikai módszereket.

Három évig vezette a Vas megyei matematika tanárok szakmai önképzését; a továbbképzési napokon előadásokat tartott.

Nagy része volt abban, hogy Szombathelyen megalakulhatott a Társulat tagozata, és annak alakulása óta titkára. Az eredményes szervező munka mellett számos értékes előadást is tartott. Elnöke a szombathelyi oktatási állandó bizottságnak.

A Köztársasági Érdemérem ezüstfokozatának tulajdonosa.

Tolnai Jenő az Apáczai Csere János Pedagógiai Főiskola matematika tanszékén dolgozik. 40 éve tanít. Diákkora óta foglalkozik feladatmegoldásokkal és feladatok gyűjtésével. Annakidején Eötvös versenyen első díjat nyert.

Az építőipariskolák és az építőipari technikumok számára mennyiségtani példatárat állított össze. A II.—III. és IV. gimnáziumi tankönyvek feladatainak nagy részét ő gyűjtötte. A mezőgazdasági technikumok szükségleteihez alkalmazta a II. gimn. matematika tankönyvet. A gimnáziumi II.—III.—IV. osztályos tankönyvhöz írt tájékoztatók feladatmegoldásait készítette. A pedagógus továbbképzés számára általános iskolai tanárok részére feladatokat és feladatmegoldásokat gyűjtött, a KPTI tanfolyamain hasonló tárgyú előadásokat tartott. A Matematika Tanítása c. folyóirat feladatrovatát vezeti igen nagy sikerrel. Évek óta szervezi a Bolyai Társulat középiskolai tanulódélutánjait, amelyek értékes kiegészítői a kiváló diákok iskolai matematikai tanulmányainak. A rádióban három ízben tartott matematikai népszerűsítő előadást.

Vigassy Lajos gimnáziumi tanár oktatói működését a Műegyetemen kezdte, ahol 1922—1931-ig tanársegéd volt. Ekkor a budapesti VIII. Vörösmarty Mihály gimnáziumhoz került és itt működött az elmult tanévig. A folyó tanévtől a csepeli Jedlik Ányos gyakorló gimnáziumba helyezték át, és gyakorló tanárjelöltek vezetésére kapott megbízást. 1938-tól kezdve újból bekapcsolódott a műegyetemi oktatásba is.

Az elmult 33 év alatt sokszáz tanítványával ismertette és szerettette meg a matematikát. Érdeklődő tanítványai részére szakköri munkát szervezett. Az egyetemi oktatással való kapcsolata lehetővé tette, hogy számos tanítványa fejlődését a középiskolán túl is figyelemmel kísérhesse. Oktatói munkájának egyik legszebb eredménye volt, amikor látta, hogy tanítványai később is jól megállták helyüket.

Munkásságának hatása nem korlátozódott egyetlen iskolára. 1931—1938-ig a Középiskolai Mat. és Fiz. Lapok ábrázoló geometria rovatát vezette és ezúton irányította az egész ország legjobb diákjainak fejlődését.

Oktató és nevelő munkájának sokoldalú tapasztalatait a felszabadulás után széles területen értékesítette. Tanított a műszaki főiskolán, dolgozók gimnáziumában, a gazdasági és műszaki akadémián. A szakérettségis tanfolyamokon szakfelügyelő volt. A matematika tanárok továbbképzése során bemutató tanítást tartott. Előadott a rajztanárok ábr. geom.-ra átképzőtanfolyamán (1953-54.), módszertani előadásokat tart az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán gyakorló tanárjelöltek részére. Közreműködött az új matematika tankönyvek tanári tájékoztatóinak megszerkesztésében. (I. és II. osztály.)

A Műegyetem ábrázoló geometriai tanszéke továbbképző kiadványainak keretében 3 önálló dolgozata jelent meg síkgeometriai szerkesztések térmértani megoldásáról, a projektív geometria területéről.

Az elmult évben részt vett az Arany Dániel haladók versenye bíráló bizottságában. (Korábban ilyen munkában nem vehetett részt, mert fia révén a verseny kimenetele tekintetében személyesen érdekelt volt.)

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket, az egyes feladatok megoldását külön lapon, a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Reáltanoda-u. 13—15.

Kitűzött feladatok

85. Konstruáljunk olyan hatványsort, amelyik a zárt egységkörben konvergens, és összege ott nem korlátos.

Kővári Tamás és T. Sós Vera

86. Bizonyítandó, hogy minden k természetes számhoz található végtelen sok n úgy, hogy

$$d(n) > \prod_{i=1}^{k} d(n-i)\, d(n+i),$$

ahol $d(n)$ n osztóinak számát jelenti.

Erdős Pál

87. Bizonyítandó, hogy ha egy folytonos, 2π szerint periodikus $f(x)$ függvényre és minden h-ra

$$\int_0^{2\pi} |f(x+h)-f(x)|^2\, dx \leqq Ch^2,$$

akkor $f(x)$ egy $\frac{1}{2}$ kitevőjű Lipschitz-feltételnek tesz eleget.

Alexits György

88. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportnak van p^n rendű eleme (p törzsszám), és p^{2n} a csoport rendjénél nagyobb, akkor a csoport nem lehet egyszerű.

Corrádi Keresztély

Megoldott feladatok

66. feladat. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy lineáris egyenletrendszer egy adott ismeretlenre egyértelműen legyen megoldható.

(Petheő Árpád)

Megoldás. Egy ismeretlen értéke csak akkor lehet egyértelműen meghatározott, ha a rendszernek van megoldása, azaz a rendszer kompatibilis.

Egy kompatibilis rendszerben egy ismeretlen értéke akkor és csak akkor lehet többféle, ha a homogén rendszernek van olyan megoldása, amelyben ennek az ismeretlennek értéke nem 0, hiszen az inhomogén rendszer megoldásainak különbségei a homogén rendszer megoldásait adják. Ez a 0-tól különböző érték 1-nek is választható, hiszen a homogén rendszer megoldásának többszörösei is megoldások.

Az egyértelmű megoldás feltétele ezek szerint, hogy egyrészt az eredeti rendszer kompatibilis legyen, másrészt viszont inkompatibilis legyen az az inhomogén egyenletrendszer, amelyik a homogénből az illető ismeretlen helyébe 1-et írva keletkezik.

Ha a kompatibilitásra vonatkozó ismert rangkritériumot alkalmazzuk, a következő feleletet kapjuk feladatunk kérdésére: Az $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ egyenletrendszer pl. x_1 értékét akkor és csak akkor határozza meg egyértelműen, ha az m-soros $(a_{i1}, \ldots, a_{in}, b_i)$ és $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ mátrixok rangja egyenlő és az m-soros $(a_{i2}, \ldots, a_{in})$ mátrix rangjánál nagyobb.

Egerváry Jenő

A 66. feladat megoldását beküldötték még: *Ádám András, Császár Ákos, Hajós György, Kántor Sándor, Kovács László, Kővári Tamás, Rejtő Péter.*

67. feladat. Megadandó egy intervallumon értelmezett, akárhányszor differenciálható, egyetlen részintervallumon sem állandó olyan valós függvény, amely egy pozitív mértékű halmazon valamennyi deriváltjával együtt eltűnik.

(Kővári Tamás)

Megoldás. Legyen E a zárt I intervallumnak egy seholsem sűrű, pozitív mértékű, zárt részhalmaza. Ilyen halmaz pl. az I racionális pontjait lefedő, 1-nél kisebb összhosszúságú, megszámlálható sok intervallum egyesítésének komplementuma.

Legyen $\varphi(x)$ a $[0, 1]$ intervallumban értelmezett, semmilyen szakaszon sem állandó, akárhányszor differenciálható, a végpon-

tokban valamennyi deriváltjával együtt eltűnő függvény, amilyen pl.

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}}.$$

Álljon $I-E$ a páronként idegen (a_n, b_n) nyílt intervallumokból, és legyen

$$g_n(x) = \begin{cases} \varphi\left(\dfrac{x-a_n}{b_n-a_n}\right), & \text{ha } x \in (a_n, b_n), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen

$$M_n = \sup_{x \in I} (|g_n(x)|, |g_n'(x)|, \ldots, |g_n^{(n)}(x)|).$$

Állítjuk, hogy

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{g_n(x)}{M_n}$$

megfelel a feladat követelményének.

Közvetlenül következik ugyanis M_n értelmezéséből, hogy e sort tagonkint akárhányszor differenciálva mindig egyenletesen konvergens sort kapunk. Ezért $F(x)$ akárhányszor differenciálható. Minthogy az (a_n, b_n) intervallumon belül g_n és így F sem állandó semmilyen szakaszon, E viszont seholsem sűrű, azért F nem állandó I-nek egyetlen részintervallumán sem. F végtelen sorának tagonkénti differenciálhatóságából következik, hogy a pozitív mértékü E halmazon F és valamennyi deriváltja eltűnik.

Gehér László

A 67. feladat megoldását beküldték még: *Császár Ákos, Kővári Tamás, Szűsz Péter.*

69. feladat. A minden valós számra értelmezett $f(x)$ függvények közül melyek tesznek eleget az

$$f(ax+b) = cf(x)+d$$

függvényegyenletnek, ahol a, b, c, d adott valós számok.

(Aczél János)

Megoldás. Először a

$$g(ax) = g(x) \tag{1}$$

egyenlet megoldásával foglalkozunk, kizárva az érdektelen $a = -1$, 0, 1 eseteket. Az egyenlet $g(0)$ értékére nem tartalmaz megkötést. Legyen az $x > 0$ esetben $x = e^u$ és $g(x) = p(u)$, az $x < 0$ esetben viszont $x = -e^u$ és $g(x) = q(u)$.

Ha $a > 0$, akkor a $p(u + \log a) = p(u)$, $q(u + \log a) = q(u)$ egyenletekhez jutunk. Az eredeti egyenlet megoldása tehát ebben

az esetben

$$(2)\qquad g(x)=\begin{cases} p(\log x), & \text{ha } x>0,\\ \text{tetszőleges}, & \text{ha } x=0,\\ q(\log|x|), & \text{ha } x<0,\end{cases}$$

ahol p és q tetszésszerinti, $\log a$ szerint periodikus függvények.

Ha $a<0$, akkor ugyanazzal az átalakítással (1)-ből, valamint az ebből adódó $g(a^2x)=g(x)$ egyenlet alapján a $p(u+\log|a|)=q(u)$, $p(u+\log a^2)=p(u)$ egyenletek adódnak. A megoldás tehát

$$(3)\qquad g(x)=\begin{cases} p(\log x), & \text{ha } x>0,\\ \text{tetszőleges}, & \text{ha } x=0,\\ p(\log ax), & \text{ha } x<0,\end{cases}$$

ahol p tetszésszerinti, $\log a^2$ szerint periodikus függvény.

A feladat függvényegyenletének megoldására térve több esetet különböztetünk meg. Kizárjuk a tárgyalásból a triviális $ac=0$, valamint az $a=c=1, b=0$ esetet.

1. Legyen $a=c=1, b\neq 0$. Egyenletünk a $h(x)=f(x)-\frac{d}{b}x$ függvény bevezetésével

$$(4)\qquad h(x+b)=h(x)$$

alakot ölt. A megoldás tehát

$$f(x)=\frac{d}{b}x+h(x),$$

ahol $h(x)$ tetszőleges, b szerint periodikus függvény.

2. Legyen $a=1, c\neq 1$. A $k(x)=f(x)-\frac{d}{1-c}$ függvény bevezetésével a

$$k(x+b)=ck(x)$$

egyenlethez jutunk. Csak $b\neq 0$ esetben van tehát nem triviális megoldás, és akkor a $c>0$, ill. $c<0$ esetnek megfelelően

$$k_0(x)=c^{\frac{x}{b}},\quad \text{ill.}\quad k_0(x)=(-1)^{\left[\frac{x}{b}\right]}\cdot(-c)^{\frac{x}{b}}$$

megoldás. A $h(x)=k(x)/k_0(x)$ függvény bevezetésével egyenletünk a (4) alakot ölti, a megoldás tehát

$$f(x)=\frac{d}{1-c}+k_0(x)\,h(x),$$

ahol $k_0(x)$ a fentiek szerint adott, $h(x)$ pedig tetszőleges, b szerint periodikus függvény.

3. Legyen $a \neq 1$, $c = 1$. A $g(x) = f\left(x + \frac{b}{1-a}\right)$ függvény bevezetésével a

$$g(ax) = g(x) + d$$

egyenlethez jutunk. Az $x = 0$ helyettesítés mutatja, hogy csak $d \neq 0$ esetben van megoldás, a megoldandó egyenlet tehát (1) alakú. Ezért a megoldás

$$f(x) = g\left(x - \frac{b}{1-a}\right),$$

ahol $g(x)$ az $a = -1$ esetben tetszőleges páros függvény, a többi esetben pedig (2), ill. (3) által adott.

4. Legyen $a \neq 1$, $c \neq 1$. Az $m(x) = f\left(x + \frac{b}{1-a}\right) - \frac{d}{1-c}$ függvény bevezetésével

$$m(ax) = cm(x)$$

adódik. Ha $a = -1$, akkor $m(a^2x) = c^2m(x)$ miatt csak a $c = -1$ esetben van nem triviális megoldás, s ekkor nyílván

$$f(x) = \frac{d}{1-c} + m\left(x - \frac{b}{1-a}\right)$$

a megoldás, ahol $m(x)$ tetszőleges páratlan függvény. Legyen tehát a következőkben $a \neq -1$. Az $x = 0$ helyettesítés szerint $m(0) = 0$. Ha csak az $x \neq 0$ értékeket tekintjük, az $a > 0$, $c > 0$ és $a > 0$, $c < 0$ esetben, valamint az $a < 0$, $c > 0$ és $a < 0$, $c < 0$ esetben egyenletünknek egy megoldása

$$m_0(x) = c^{\frac{\log x}{\log a}}, \quad m_0(x) = (-1)^{\left[\frac{\log |x|}{\log a}\right]}(-c)^{\frac{\log x}{\log a}},$$

$$m_0(x) = (c^2)^{\frac{\log |x|}{\log a^2}}, \quad m_0(x) = \operatorname{sg} x \cdot (c^2)^{\frac{\log |x|}{\log a^2}}.$$

Bevezetve a $g(x) = m(x)/m_0(x)$ függvényt az (1) egyenlethez jutunk. Így a keresett megoldás

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{1-c}, & \text{ha } x = \dfrac{b}{1-a}, \\ \dfrac{d}{1-c} + m_0\left(x - \dfrac{b}{1-a}\right) g\left(x - \dfrac{b}{1-a}\right) & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $m_0(x)$ a különböző esetekben fentebb definiált függvény, $g(x)$ pedig (2), ill. (3) szerint adott.

Császár Ákos

A 69. feladat megoldását beküldötte még *Surányi János.*

Matematikai és személyi hirek

Külföldi hírek

Szovjetunió

A párizsi Tudományos Akadémia ez év májusában Sz. N. Bernsteint, a kiváló matematikust, a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának tagját, levelező taggá választotta.

1955. május 11-én 70 éves korában elhunyt N. M. Krilov, akadémikus, a műszaki matematika és a matematikai fizika kiváló művelője. N. M. Krilov különösen jelentős kutatásokat végzett a nemlineáris rezgések elméletében, a variációszámítás és integrálok közelítő kiszámítása terén.

A. Ja. Hincsin szovjet matematikus, a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának levelező tagja, 1954. július 19-én töltötte be 60. életévét. Ez alkalommal B. V. Gnyegyenko ismertette matematikai munkásságát. Az 1916—1953-ig terjedő időszakban összesen 138 dolgozata jelent meg.

H. Poincaré születésének 100 éves évfordulója alkalmából 1954. november 2-án a moszkvai Tudományos Akadémia Fizikai és Matematikai Történeti Bizottsága a leningrádi egyetem Matematikai és Mechanikai karával együtt együttes rendezésben Leningrádban ünnepséget tartott, ennek keretében V. I. Szmirnov ismertette H. Poincaré függvénytan és differenciálegyenletek területén elért eredményeit, M. F. Szubbotin az égi mechanikával kapcsolatos eredményeiről emlékezett meg. N. V. Mosztyepanenko Poincaré filozófiai nézeteiről tartott előadást.

Német Demokratikus Köztársaság

Szeptember hónap folyamán tartotta Berlinben a Tudósok Világszövetsége IV. teljes ülését. Ez alkalommal Hua Lo-Ken kínai matematikus is előadott „Estimation of unitary curvature of the space of several complex variables" címen.

Kurt Schröder német matematikus a kulturális egyezmény keretében hat hétre Kínába utazott.

W. Blaschke egy évig mint meghívott vendégprofesszor a Humboldt-egyetemen működik.

W. Specht erlangeni professzor az 1955—56. tanév első felében, mint vendégprofesszor előadásokat tart a Humboldt-egyetemen.

H. Reichardt, a Humboldt-egyetem professzora, november hónap folyamán Würzburgban és Frankfurt am Main-ban tart előadásokat. Több előadást fog tartani, többek közt: „Gauss und die Zahlentheorie", „Über eine Ausstrahlungsbedingung" címmel.

Október hónap folyamán Drezdában kongresszust rendeznek, korszerű számológépekkel kapcsolatos kérdésekről.

A Berlini Matematikai Társulat 1955. február 21-től 23-ig ünnepi üléseket rendezett Karl Friedrich Gauss halálának századik évfordulója alkalmából. A következő előadások hangzottak el: Schmeidler: „Lebensbild von Gauss", Schröder: „Gauss und die reelle Analysis", Reichardt: „Gauss's Arbeiten über Algebra und Zahlentheorie", Levi: „Gauss und das Raum-Problem", R. Nevanlinna: „Gauss und die Funktionentheorie".

Olaszország

Az Olasz Matematikai Szövetség számelméleti konferenciát rendezett augusztus 16-tól 25-ig Varennában. A következő előadások hangzottak el: H. Davenport—A. Rogers: „Geometriai számelmélet", L. J. Mordell: „Diofantikus egyenletek", Erdős Pál: „A prímszámok eloszlásának egyes kérdéseiről", G. Ricci: „A prímszámok eloszlásának egyes kérdéseiről", B. Segre: „Diofantikus egyenletek és algebrai geometria". Ezt követően augusztus 26-tól szeptember 5-ig topológiai konferenciát is rendeztek ugyanott, melyen K. Kuratowski is részt vett.

Az Olasz Matematikai Szövetség (UNIONE MATEMATICA ITALIANA) 1955. október 6-tól 12-ig tartotta V. kongresszusát. A kongresszuson a következő szekció-ülések voltak:

I. Analízis.
II. Geometria.
III. Mechanika és matematikai fizika.
IV. Biztosítás- matematika, politikai számtan, valószínűségszámítás és matematikai statisztika.
V. Geodézia, csillagászattan, és asztrofizika.
VI. Alkalmazott matematika és numerikus módszerek.
VII. Matematika történet és filozófia, didaktika.

A Magyar Tudományos Akadémia képviseletében Alexits György és Hajós György akadémikusok vettek részt a kongresszuson, ahol az alábbi előadásokat tartották:

Alexits György: „Sulla convergenza quasi ovunque delle serie dei polinomi ortogonali" (Ortogonális polinomsorok majdnem mindenütt való konvergenciájáról).

Hajós György: „La colorazione dei reti" (Gráfok színezése).

Csehszlovák Köztársaság

1955. szeptember 1-től 8-ig tartották meg Prágában — mint már hirül adtuk — a IV. Csehszlovák Matematikai Kongresszust. A kongresszus céljául tűzte ki, hogy áttekintést adjon a matematika mai állásáról, fejlődéséről és perspektíváiról a Csehszlovák Népköztársaságban és a többi népi demokratikus országban, és elősegítse Csehszlovákia és más országok matematikusainak tudományos együttműködését. A délelőtti, plenáris üléseken összefoglaló előadások hangzottak el a matematika különböző fejezeteiről, délutánonként viszont szekcióülések voltak a következő szekciókban:

1. Algebra és számelmélet,
2. analizis,
3. geometria és topológia,
4. valószínűségszámítás és matematikai statisztika,
5. elemi matematika.

A kongresszuson a következő külföldi matematikusok vettek részt:

Szovjetunió: Sz. L. Szoboljev, I. N. Vekua, P. Sz. Novikov, K. A. Szitnyikov.

Bulgária: L. Csakalov, B. Petkancsin.

Olaszország: G. Sansone, M. Villa.

Magyarország: Alexits György, Császár Ákos, Erdős Pál, Fejes Tóth László, Fuchs László, Hajós György, Rényi Kató, Rényi Alfréd, Surányi János, Szőkefalvi-Nagy Béla.

Német Demokratikus Köztársaság: E. Kähler, H. Grell, H. Maruhn, E. Lehman, L. Reissig.

Lengyelország: W. Sierpinski, J. Los, J. Mikusinski, R. Sikorski, A. Plis, S. Turski, K. Urbanik, M. Stark.

Románia: G. Moisil, G. Vrănceanu, M. Nicolescu, G. Călugăreanu, N. Teodorescu, T. Ganea, M. Benado.

Svájc: W. Grauer.

A magyar matematikusok a következő előadásokat tartották:

Plenáris ülésen:

Alexits György: „Az elmúlt tíz év magyar matematikai vizsgálatairól".

Hajós György: A Minkovski-sejtés által elindított kutatásokról.
Rényi Alfréd: Magyar eredmények a valószínűségszámításban.
Szőkefalvi-Nagy Béla: Magyar eredmények a lineáris transzformációk spektrálelméletében.

Szekció-ülésen:

Alexits György: Különböző függvényosztályok konstruktív függvénytani jellemzése.
Császár Ákos: Feltételes valószínűségi mezők struktúrájáról.
Erdős Pál: Az elemi geometria bizonyos kombinatorikai problémáiról.
Erdős Pál: A prímszámok eloszlásának bizonyos problémáiról.
Fejes Tóth László: Szabályos alakzatok jellemzése szélsőérték tulajdonságaik segítségével.
Fuchs László: Gyűrűk és azok additív csoportja.
Hajós György: Gráfok színezéséről.
Rényi Kató: A hidrodinamikai komplex potenciál egyrétűségéről.
Surányi János: A matematikai logika eldöntés problémájáról.

V. Jarnik akadémikus „A matematika helyzete, szervezete és perspektívái a Csehszlovák Népköztársaságban" címmel tartott előadást, amelyben beszámolt a matematikai kutatás szervezeti kérdéseiről Csehszlovákiában. Részletesen foglalkozott a Csehszlovák Akadémia Matematikai Intézetének munkájával, továbbá a csehszlovák matematikai kutatás főbb irányairól adott áttekintést. Bejelentette, hogy a prágai Károly-egyetemen a közeljövőben matematikai kutatóintézet alakul. Jarnik akadémikus előadásának részletesebb ismertetésére még visszatérünk.

A kongresszuson elhangzott számos, nagy érdeklődést kiváltó előadás közül megemlítjük a következőket:

Sz. L. Szoboljev: Függvényterekre vonatkozó beágyazási tételek alkalmazása a parciális differenciálegyenletek elméletében.
J. Mikusinski: A parciális differenciálegyenletek kerületérték problémái az operációszámítás szemszögéből.
G. Moisil: Automatikus számológépek algebrai elmélete.
E. Lehman: Modern számológépek alkalmazásával kapcsolatos problémákról.
J. Kurzweil: Differenciálegyenletek megoldásának stabilitásáról.
E. Cech: Vonalkongruenciák differenciálgeometriája.
B. Petkancsin: Izotrop egyenesek vonalseregei elliptikus terekben.
G. Sansone: Az $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ egyenlet periodikus megoldásairól.

A kongresszus résztvevői részére F. Kahuda, a Csehszlovák Népköztársaság iskolaügyi minisztere fogadást tartott. Kahuda miniszter részt vett az 5. szekcióban az iskolai matematika oktatásról rendezett ankéten is. Ezen az ülésen többek között J. Novák

akadémikus tartott előadást a Csehszlovákiában rendezett matematikai olimpiászokról, továbbá E. Cech matematikus „Megjegyzések a középiskolai matematikai oktatás metodikájához" címen.

A csehszlovák matematikusok külföldi vendégeiket rendkívüli meleg, baráti, vendégszerető fogadtatásban részesítették. A kongresszus igen jó alkalmat nyujtott, hogy az azon résztvevő magyar matematikusok csehszlovák kollegáikkal, továbbá a kongresszuson résztvevő más külföldi matematikusokkal tudományos kapcsolataikat elmélyítsék. A kongresszus résztvevői számára a vendéglátók lehetőséget nyujtottak Prága nevezetességeinek megtekintésére, továbbá több kirándulást szerveztek, amelyeken a résztvevők Csehszlovákia természeti szépségeit megismerhették.

Román Népköztársaság

Ez év május 2. és 3-án tartotta a Román Tudományos Akadémia első matematikai ülésszakát. Számos matematikai dolgozatot mutattak be. Megvitatták a középiskolai és egyetemi matematika oktatás helyzetét is.

A Román Tudományos Akadémia matematikai és fizikai tudományok osztálya 1955. május 21 és 22-én Sztálinvárosban konferenciát tartott a valószínűségszámítás és matematikai statisztika ipari alkalmazásairól. A konferencia résztvevői meglátogatták a városban lévő „Ernst Thälmann" traktorgyárat, ahol matematikai statisztikai minőségellenőrzés folyik.

A Román Tudományos Akadémia matematikai és fizikai tudományok osztálya 1955. június 10—13. differenciál-geometria konferenciát rendezett Temesváron. S. Stoilov akadémikus nyitotta meg az ülésszakot. A következő előadások hangzottak el:

Al. Myller: A differenciálgeometria multja hazánkban.
S. Stoilov: Differenciálgeometriai problémák a komplexváltozós függvénytanban.
O. Maier: Geometriák alcsoportjairól és a Iași-i iskola kutatásai.
G. Vrănceanu: Affin összefüggő terek globális differenciál tulajdonságairól.
G. Galbura: Algebrai sokaságokon értelmezett globális differenciálgeometria.

N. Teodorescu, a Román Tudományos Akadémia lev. tagja, a kultúrális egyezmény keretében szeptember hónap folyamán a Német Demokratikus Köztársaságban tartózkodott. Berlinben három előadást tartott. Előadott még Jénában, Drezdában és Lipcsében is.

A Román Népköztársaságban ez évben a következő matematikusok kaptak Állami Díjat: S. Stoilov, Vera Myller—Lebedev és N. Teodorescu.

Hazai hírek

Turán Pál akadémikus a kulturális egyezmény keretében ez év szeptember 13-tól október 3-ig Németországban tartózkodott. Berlinben a Humboldt-egyetemen három előadásból álló előadássorozatot tartott a következő tárgyakról:

„Az analízis egy új módszeréről".

Újabb alkalmazások:

I. „A differenciálegyenletrendszerek megoldásainak labilitásáról".
II. „A Riemann-féle zetafüggvényről."

Lipcsében az első témáról tartott előadást.

A londoni egyetem meghívására Rényi Alfréd lev. tag október végén és november elején előadásokat tart Londonban „A valószínűségszámítás új axiomatikus megalapozásáról" és „A rendezett minták elméletéről" címen.

A kulturális egyezmény keretében Takács Lajos és Bognár Mátyás október 3—november 3-ig 1 hónapos tanulmányútra ment Lengyelországba.

Doktorok, kandidátusok

Makai Endre: Homogén lineáris differenciálegyenletrendszerek egy osztálya és annak vizsgálata a matrix-számítás segítségével c. doktori dissszertációjának vitáját március 18-án tartották meg. A disszertáció opponensei Egerváry Jenő, Turán Pál és Császár Ákos voltak.

Az alábbi kandidátusi disszertáció-megvédések történtek:

Február 4.: Szüsz Péter: Adalékok a diofantikus approximáció elméletéhez. Opponensek: Turán Pál és Rényi Alfréd.

Március 18.: Szász Gábor: A hálóelméleti komplementerforgalom általánosításáról. Opponensek: Fuchs László és Szele Tibor.

Április 1.: Rapcsák András: Differenciálinvariánsok teljes rendszere a reguláris Cartan-térben. Opponensek: Hajós György és Varga Ottó.

Június 20.: Mikolás Miklós: Ortogonális rendszerek bizonyos tulajdonságai és a Sturm—Liouville típusú differenciálegyenletek sajátfüggvényei. Opponensek: Császár Ákos és Tandori Károly.

Június 29.: Steinfeld Ottó: Gyűrűk és félcsoportok ideálelméletéhez. Opponensek: Fuchs László és Kertész Andor.

Július 1.: Soós Gyula: Vonalelemsokaságok folytonos transzformációs csoportjai. Opponensek: Hajós György és Rapcsák András.

1955. őszén matematikus aspiránsok lettek a következők:

Csima József, Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézete. Aspiránsvezető: Hajós György akadémikus.

Kovács István, Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete. Aspiránsvezető: Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag.

A közelmultban a következő matematikai tárgyú könyvek jelentek meg:

I. G. Petrovszkíj: Előadások a parciális differenciálegyenletekről. (Ft 50.—) Akadémiai Kiadó.

L. Sz. Pontrjagin: Kombinatorikus topológia (Ft 20.—) Akadémiai Kiadó.

A. G. Kuros: Csoportelmélet (Ft 90.—) Akadémiai Kiadó.

I. N. Bronstejn—K. A. Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv. Művelt Nép Könyvkiadó Vállalat.

L. Infeld: Akit az Istenek szeretnek (Galois-életrajz) (Ft 24.—) Művelt Nép Könyvkiadó Vállalat.

Pályázati felhívás az 1954. évi Grünwald Géza emlékdíjra

A Bolyai János Matematikai Társulat elnöksége 1952-ben a fiatalabb magyar matematikusok önálló tudományos kutatómunkára való ösztönzésére, valamint a magyar nyelvű matematikai irodalom fejlesztése érdekében emlékdíjat alapított, melyet Grünwald Gézáról, a kiváló magyar matematikusról nevezett el.

A Grünwald Géza emlékdíj szabályzata a Matematikai Lapok 1952. évi számában jelent meg.

A Bolyai János Matemetikai Társulat elnöksége ezúton hirdeti meg harmadik alkalommal a Grünwald Géza emlékdíjat és felhívja mindazokat, akik az 1954. évi munkásságuk alapján a Grünwald Géza emlékdíjra pályázni kívánnak, hogy az elbírálásnál a szabályzat szerint tekintetbe vehető magyar nyelvű dolgozatuk, ill. dolgozataik gépelt kéziratát (vagy ha megjelent, különlenyomatát) 1956. február 1.-ig juttassák el a Bolyai János Matematikai Társulat elnökségének (Budapest, VI. Reáltanoda-u. 13—15.) A pályázók tartoznak a pályázathoz mellékelni összes tudományos dolgozataik jegyzékét, és abban külön megjelölni az 1954. évben megjelent, ill. elkészült dolgozataikat. Ez évben a dolgozat tárgykörét a Bolyai János Matematikai Társulat elnöksége nem köti meg.

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége.

Diákkonferencia a T. T. K.-n

A Tudományos Diákkör I. konferenciájának előadásai április 29 és 30-án zajlottak le a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetemen. A budapesti hallgatók mellett 3 debreceni hallgató előadása is szerepelt.

Az első előadást Fekete Antal budapesti hallgató tartotta: „Megjegyzések a Desargues-féle tétel általánosításainak vizsgálatához" címmel. Munkájának kiindulópontja a következő projektív geometriai tétel:

Ha egy háromszög oldalait síkjának egy egyenesével metsszük, ezen metszéspontokat a sík egy tetszőleges pontjával összekötjük, akkor az így nyert sugárhármas involutorikus lesz azzal a sugárhármassal, mely a felvett pontból a háromszög csúcsait vetíti. (A megfeleltetést úgy értve, hogy az egyik csúcspontot vetítő sugárnak megfelel a csúccsal szemköztes oldalnak az egyenessel való metszéspontját vetítő sugár.)

Ezt a tételt használja fel előbb közismert tételek bizonyítására, majd a két nem teljesen indokolt új fogalom (a pszeudoperspektivitás és ortoperspektivitás) bevezetésével keletkező, a Desargues-tételhez hasonló tételek igazolására. A munka hátralevő része az új fogalmaknak a térre való általánosítását és egy pár szép tétel bizonyítását tartalmazza.

A második előadás Kovács László I. éves debreceni hallgatóé volt, „Testek automorfizmusai" címmel. Előadásában a racionális-, valós-, komplex-test és a kvaterniók ferdetestének összes automorfizmusait ismertette, világos, áttekinthető formában. Bebizonyította, hogy a racionális és valós számok testének csak egyetlen automorfizmusa van, az identikus leképezés, továbbá, hogy a komplex számok testének kontinuumnál nagyobb számosságú automorfizmusa van. Ilyen automorfizmus megadása azonban még nem sikerült. Utolsó tételként igazolta a következőt:

A kvaterniók ferdetestének azok és csak azok a leképezései automorfizmusok, amelyek az egyes kvaterniók valós részét változatlanul hagyják, vektori részét pedig ugyanazon pozitív determinánsu ortogonális transzformációnak vetik alá.

A harmadik előadást Heppes Aladár IV. éves alkalmazott matematika szakos budapesti hallgató tartotta „Egy szélsőértékfeladat az n-dimenziós térben“ címmel. Az alábbi tételt bizonyította:

Értsünk az n-dimenziós tér rétege elnevezésen két párhuzamos $n-1$ dimenziós altér által közrefogott részt; a réteg normálvektorán a határoló altér normálvektorát, a rétegek lineáris függetlenségén e normálvektorok lineáris függetlenségét; végül egy R rétegrendszer rétegei közt a lineárisan függetlenek maximális számát jelöljük k-val.

Tekintsük most az n-dimenziós tér végesszámú rétegének egy tetszőleges R rendszerét. Állítjuk, hogy bármely k pontból álló rendszert az R alkalmas eltolásával lefedhetünk, de mindig megadható $k+1$ pontból álló, eltolás útján lefedhetetlen $P(R)$ pontrendszer, sőt lefedhetetlen kollineáris pontrendszer is.

A negyedik — és ezen a napon utolsó — előadást újra debreceni hallgató tartotta, Kovács István IV. éves. Előadásának címe: „A végtelen ferdetest egy új jellemzése“.

Két tételt bizonyított. Az első:

Legyen R egy tetszőleges végtelen gyűrű. R összes valódi baloldali ideálja akkor és csak akkor véges, ha R ferdetest, vagy $C(p^{\infty})$ típusú, additív csoporttal rendelkező zérógyűrű.

A második tételhez állapodjunk meg a következőkben:

Jelöljük a p karakterisztikájú P_p primtest algebrai lezártját $\overline{P}_p$-vel. Legyen q tetszőleges prim ($q=p$ is lehet). A $\overline{P}_p$ test pontosan egy p^{q^k} elemű $GF(p^{q^k})$ résztestet tartalmaz ($k=0, 1, 2, \ldots$). Jelöljük $P_p(q^{\infty})$-nel az összes $GF(p)$, $GF(p^q)$, $\ldots$ résztest unióját. Ezzel a jelöléssel a 2. tétel a következőképpen szól:

Egy végtelen R gyűrű összes valódi részgyűrűje akkor és csak akkor véges, ha R vagy $P(q^{\infty})$ típusú test, vagy $C(p^{\infty})$ típusú additív csoporttal rendelkező zérógyűrű.

A rákövetkező napon, április 30-án még három előadás szerepelt.

Nagymáté Margit, IV. éves, debreceni hallgató tartott elsőnek egy összefoglaló előadást, „Abel-féle csoportok endomorfizmusai“ címmel.

A második — élénk hozzászólásokat kiváltó — előadás Révész Pál, IV. éves alk. mat. szakos budapesti hallgatóé volt. Címe: „Egy gráfelméleti feladat.“ A feladat a következő volt:

Legyen n egy tetszőleges természetes szám, vagy tetszőleges számosság és legyen valamely A gráf szögpontjainak száma (számossága) n. Legyen d n-nél nem nagyobb szám, vagy számosság. Tegyük fel, hogy A bármely d szögpontú részgráfjában van legalább

MTA Könyvtára
Periodika 3525 1961 sz.

egy él. Kérdés, hány szögpontú teljes részgráf létezése biztosítható A-ban?

A feladat eddigi történetét ismertette, majd elmondta saját eredményét is. Bebizonyította ui. a következőt:

Ha az n tetszőleges, reguláris kardinális szám egy A gráf szögpontjainak számossága, és feltesszük, hogy A bármely n számosságú részgráfjában van legalább egy él, akkor A-nak van végtelen teljes részgráfja.

A harmadik — és egyben utolsó előadást Fáy Árpád IV. éves budapesti hallgató tartotta. Címe: „A számok geometriája." Ebben teljesen új bizonyítást ad a következő tételre:

Ha ξ és η valós együtthatós, egységnyi determinánsú lineárformák (jelölje itt ξ, η a függvénykapcsolatot és a formák értékeit is, x és y független változókkal, akkor

$$\inf |\xi\eta| \leqq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ha az (x, y) párok befutják az összes egész, nem triviális értékpárokat, sőt az egyenlőség is elérhető ξ és η speciális választásával.

Ezek után ismertetett még ehhez kapcsolódó hasonló tételeket és megmutatta, hogy egyes számelméleti problémák hogyan kezelhetők aránylag könnyen a „számok geometriája" módszereivel.

Denkinger Géza

A kézirat beérkezett: 1955. X. 19. — Példányszám: 1000
Terjedelem 4½ (A/5) ív, 5 ábra
A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Szöllössy Károly

Szegedi Nyomdaipari Vállalat 55 4990 Felelős vezető: Vincze György

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

СОДЕРЖАНИЯ

Л. Фейер, Некоторые элементарные примечания к основным полиномам, получаемым при параболической интерполяции 293
Л. Альпар, Одна из проблем теории чисел 309
Список трудов лауреата премии им. Кошута Л. Редеи 323
Математическое состязание в память М. Швейтцер в 1954 году . . 328
О четвертом присвоении приза им. М. Беке 346
Проблемы 351
Сообщения из математической жизни 356
Конференция студентов факультета естествознания 363

CONTENT

L. Fejér: Elementary observations on the fundamental functions of parabolic interpolation 293
L. Alpár: A problem in number theory 309
The list of works of L. Rédei 323
Report on the N. Schweitzer Mathematical Competition in 1954. . . . 328
Report on awarding the Manó Beke prize 346
Problems 351
Mathematical and personal news 356
Mathematical conference of students 363

Ára 7,— Ft.
Előfizetés évi 20,— Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb. szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.