312.046

Matematikai Lapok

34
1983/87

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

34. évfolyam, 1983—1987

1 - 3

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.

34. évfolyam (1983—1987), 1—3. szám

A megadott két évszám közül az első a kötet esedékességének, a második a kézirat nyomdába adásának évét jelöli.

Felelős szerkesztő: Császár Ákos

Szerkesztők: Fejes Tóth László, Lovász László, Pelikán József, Rapcsák András, Révész Pál, Surányi János, Tandori Károly

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő utca 68., II. em. 224. Telefon: 201-6974.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, 1117 Budapest, XI., Prielle Kornélia u. 19—35. Telefon: 181-2134.

A kiadvány előfizethető bármely hírlapkézbesítő postahivatalnál, a Posta hírlapüzleteiben és a Hírlapelőfizetési és Lapellátási Irodánál (HELIR) Budapest V., József nádor tér 1., 1900, közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a HELIR 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámra.

Előfizethető és példányonként megvásárolható az *Akadémiai Kiadó*-nál, (1363 Budapest, Alkotmány utca 21., tel.: 111-010), pénzforgalmi jelzőszám: 215-11-488, a *Stúdium* (1368 Budapest, Váci utca 22., tel.: 185-881) és a *Magiszter* (1052 Budapest, Városház utca 1., tel.: 382-440) Akadémiai Kiadó könyvesboltjaiban.

Előfizetési díj egy évre 72 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUSNÁDY GÁBOR és VINCZE ISTVÁN: SARKADI KÁROLY (1914—1985) 1

BIHARI IMRE: MAKAI ENDRE (1915—1987) 5

Emlékülés Hajós György születésének 75. évfordulóján 10

MOLNÁR EMIL: A Minkowski-sejtés Hajós-féle bizonyításáról 11

CORRÁDI KERESZTÉLY és SZABÓ SÁNDOR: Rédei László egy tételéről 25

CORRÁDI KERESZTÉLY és SZABÓ SÁNDOR: A Hajós—Minkowski-tétel és néhány ehhez kapcsolódó eredmény 41

BREZOVICH LÁSZLÓ és MOLNÁR EMIL: Adott tükrözéscsoportokhoz tartozó extremális gömbkitöltések a hiperbolikus térben 61

KISS PÉTER: Lucas-számok Wieferich-típusú prímosztói 93

HORVÁTH ERZSÉBET: A véges feloldható csoportok egy problémájáról 99

BUI MINH PHONG: Rotkiewicz egy problémájának általánosított megoldása 109

TRAN QUOC BINH: Q-metrikus Finsler-konnexiók 121

HORVÁTH MIKLÓS és JOÓ ISTVÁN: A Ky Fan-konvexitásról 137

BOGMÉR ANTAL: A Laplace-operátor sajátfüggvényeiről 141

BOGMÉR ANTAL, HORVÁTH MIKLÓS és JOÓ ISTVÁN: Minimax tételek és konvexitás 149

Jelentés az 1986. évi Schweitzer Miklós emlékversenyről 171

Feladatrovat 182

Társulati élet 188

Közlemények 214

Könyvismertetések 215

Új könyvek 230

SARKADI KÁROLY (1914—1985)

TUSNÁDY GÁBOR és VINCZE ISTVÁN



Sarkadi Károly 1914. szeptember 12-én Budapesten született, sok neves értelmiségit magáénak mondható családból, annak a Fröhlich tanár úrnak a fiaként*, akit a mindenkit ironizáló Karinthy Frigyes is csak a tisztelet hangján tudott aposztrofálni. Sarkadi Károly a Budapesti Tudományegyetemen nyert — matematika-fizika szakon — tanári oklevelet 1937-ben. 1937-től 1947-ig élete a történelem sodrását tükrözte. Katonai behívók, középiskolai oktatás a X. kerületi László Gimnáziumban, háborús szolgálat, ahonnan betegen tér haza, ismét tanároskodás a Lónyai utcai gimnáziumban, hadifogság, majd a Kölcsey Gimnáziumban tanít, ahol 1952-ig működik. 1948-ban megnősül és példás odaadással él családjával. 1949-ben súlyos betegség éri, és ezért tanári működését az iskolában adminisztrátori tevékenységgel váltja fel. Végre 1952-ben Fejér Lipót és Pólya György professzorok javaslatára az Alkalmazott Matematikai Intézetbe kerül, ahol 1952. december hatodikán lép munkába. Ezzel egy intenzív, tudományos eredményekben gazdag matematikusi

* A névmagyarosítás 1933-ban történt.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

pálya indul meg, amely gyengítetlenül folytatódik az élet végéig, amikor már az erő fogyóban van, de az energia, az akarás még képessé teszi az aktivitásra. Munkába lépése után rögtön vállalja, hogy egy új, hazánkban addig alig ismert, tudományosan igazán csak Jordán Károly által művelt területnek, a matematikai statisztikának legyen tanulmányozója és egész rövid időn belül tudományos kutatója. A szocialista építés, a népgazdaság fejlesztésének feladatai tették elkerülhetetlenné e tudományág intenzív művelését, és Sarkadi Károly szinte hónapokon belül megmutatta érzékét az alkalmazások, a modellek alkotása iránt, és aziránt, hogy egyre bővülő matematikai tudását ezekben csodálatra méltó ügyességgel felhasználja. Sarkadi Károly a kombinatorika mesterének mondható, de matematikai statisztikai eredményeinek eléréséhez az algebra, az analízis, geometria számos fejezetét is sok eredménnyel gyarapította, mindenkor szellemes ötletekkel egyszerűsítve elsőként kapott eredményeit, ezzel is híven követve a kiváló magyar matematikai iskolának hagyományait. Azt szokták mondani, hogy a matematikai kutatáshoz csak papiros és ceruza szükséges. Sarkadi Károly még ezekkel is takarékoskodott; szinte kizárólag fejben dolgozott, legtöbbször a már sokszorosan átgondolt, igen alaposan leegyszerűsített eredményeit vetette papírra. 1959-ben Moszkvában egyikünk megkérdezte Szmirnov professzort, a matematikai statisztika akkor élő, nemzetközi szinten egyik legismertebb művelőjét, hogy mit tart a szakma aktuális megoldatlan problémájának. Azt felelte, hogy egy egzakt statisztikai próbát a Gauss-eloszlás fennállásának ellenőrzésére. Hazajőve közölte ezt Sarkadi Károllyal, aki szokott halk hangján csak ennyit mondott: Igen, egy mezőgazdasági feladattal kapcsolatban ezt éppen most oldottam meg. Ezzel az eredményével azután magára vonta a matematikai statisztika kutatóinak, de a gyakorlati alkalmazóknak is az érdeklődését. Amikor 1964-ben Ford ösztöndíjjal Berkeleyben töltött tíz hónapot, az ötödik Berkeley Valószínűségszámítási és Matematikai Statisztikai Szimpóziumon mindenki nagy figyelemmel kísérte a témára vonatkozó eredményeit ismertető előadását.

Módszerének a megértéséhez tudnunk kell, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ független, μ várható értékű, σ szórású normális eloszlású valószínűségi változók, akkor a paraméterek becslésére használható

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

statisztikák függetlenek egymástól és az

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

elemekből álló ún. standardizált mintától. (Félreértés ne essék, csak e három dolog független egymástól, közülük a harmadik, a standardizált minta maga is több elemű, de ezek az elemek egymástól természetesen nem függetlenek.)

Legyen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mintától független és egymástól is független standard (0 várható értékű, 1 szórású) normális eloszlású elemekből álló kisegítő rendszer. Az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mintából előállított

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2,$$

$$\tilde{y}_i = \frac{y_i - \bar{y}}{z}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

statisztikák is függetlenek egymástól, és ha az első kettőt közülük az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ minta átlaga és szórása helyére tesszük, a visszatranszformált

$$\xi_i = zx_i + \bar{y}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

minta elemei független standard normális eloszlásúak lesznek.

Ezzel az egyszerű ötlettel sikerült Sarkadinak a becsléses illeszkedésvizsgálatot tiszta illeszkedésvizsgálatra redukálnia. De mivel sose fejezett be egy témát addig, amíg azt teljesen körbe nem járta, minden oldalról meg nem vizsgálta, itt sem állt meg. Miért kellene új statisztikát generálnunk, amikor a transzformációhoz használt véletlen számokat vehetnénk magából az eredeti mintából is? Addig nem nyugodott, amíg a kellő függetlenséget és megfelelő eloszlást biztosító eljárást meg nem találta. Így született meg a normalitásvizsgálat Sarkadi-féle módszere, mely az egész világon elterjedt, és a Rényi-próba mellett a hazai statisztikai kutatás leghíresebb eredményévé vált.

Kimeríthetetlen tárháza volt Sarkadi a tiszta illeszkedésvizsgálatra használható ötleteknek. Kandidátusi értekezésében a hipergeometrikus eloszlást általánosította, beillesztvén azt a binomiális, negatív binomiális és Poisson-eloszlásokból álló zárt rendszerbe, melyben a különböző elemek között egyik irányban az a priori eloszlást felhasználó Bayes-módszer, a másik irányban a feltételes eloszlás képzése közvetít. Fiatalos lendülettel dolgozott közöttünk amikor az ún. ballot-lemmára kerestünk bizonyítást, vagy a Kolmogorov-próba egzakt eloszlását kerestük. Ez utóbbira tőle származik a legegyszerűbb bizonyítás.

Gondolatai mögött mindig érezni lehetett a statisztika lényegének mély megértését. Ez vezette a döntés utáni becslési feladatok vizsgálatára. Meg az elvi tisztaság szeretete, mely — sajnos — a statisztikában nem mondható általánosnak. Ha megvizsgálunk két terméket, mondjuk az egyikből származó minta legyen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

és ezek a mintaelemek legyenek ismét független, μ várható értékű σ szórású normális eloszlású valószínűségi változók, a másik pedig legyen a ν várható értékű, σ szórású független normális változókból álló

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

minta, szeretnénk a két termék közül a jobbat választani. Tehát az elsőt választjuk, ha annak $\bar{x}$ átlaga nagyobb a második $\bar{y}$ átlagánál, különben a második terméket választjuk. De hogyan becsüljük a választott termék paramétereit? Most feltettük, hogy a szórások egyenlőek, így ez a közös szórás a szokásos módon becsülhető. De mi legyen a választott termék várható értékének a becslése?

Buta kérdés, mondhatná valaki, hát a választott minta saját átlaga? Egy minta átlaga a várható érték legjobb becslése, ezt tudjuk jól. Hol lehet itt félreértés? Az okoskodás valahol pedig sántít, mert ha $\mu = \nu$, és mi $\bar{x}, \bar{y}$ közül a nagyobbat választjuk, az nyilván felülbecsüli μ és ν közös értékét. A gyakorlatban évezredek óta használták ezt a torzított eljárást. Sarkadi Károly bebizonyította, hogy nem is létezik torzítatlan becslés. Megadott egy paraméteres becslést, melyben a paramétertől függően a torzítás tetszés szerint kicsivé tehető, viszont a szórás cserében tart végtelenbe. Ennek a témának a megbízhatóságelméletben ma már kiterjedt irodalma van, a vizsgálatok bonyolultabb döntési rendszerekre, más eloszlásokra vonatkoznak, de az alapkérdés változatlanul az, amit ő észrevett.

Legkedvesebb kérdésköre egész életében a normalitásvizsgálat maradt. Aktívan részt vett a különböző eljárások összehasonlításában, egyiknek a konzisztenciáját

bizonyította, a másikról ellenpéldával megmutatta, hogy bizonyos ellenhipotézisekkel szemben teljesen védtelen. Jól tudta, hogy a megfelelő próba kiválasztását csak széles körű erővizsgálatok tehetik lehetővé. Ezeket idős kora ellenére töretlen szorgalommal végezte haláláig Kosik Pál programozónk közreműködésével. Ezeket a vizsgálatokat doktori értekezésében foglalta össze először, de annak megírása után is rendszeresen közölték a számításaik eredményeit.

Munkája elismerésének néhány állomása:

1958-ban a matematikai tudományok kandidátusa;
1964-ben a Munka Érdemrend,
1966-ban az Állami Díj kitüntetésben részesült;
1976-ban a matematikai tudományok doktora.

Szerkesztőbizottsági tagja volt a Mathematische Operationsforschung und Statistik című NDK folyóiratnak, az Alkalmazott Matematikai Lapoknak, de lektorálási munkáját sok más hazai és külföldi folyóiratban is igénybe vették. Tisztségviselője, aktívája volt a Bolyai János Matematikai Társulatnak, a Gépipari Tudományos Egyesületnek, az Európai Minőségellenőrző Szervezet magyar tagozatának. Előadásokat, kurzusokat tartott az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, a Mérnöktovábbképző Intézetben, a BJMT tanfolyamain. Elnöke volt a Magyar Szabványügyi Hivatal Matematikai Statisztikai, továbbá a Megbízhatósági Szakbizottságának. Rendszeresen tevékenykedett a Referatyivnüj Zsurnal, a Mathematical Reviews, a Zentralblatt, a Statistical Abstracts referáló folyóiratokban. Meghívott előadója volt nagyszámú külföldi nemzetközi konferenciának, négy világrész igen sok tudományos centrumát látogatta meg. Nagyszámú könyv szerzője részesült abban a szerencsében, hogy Sarkadi Károly elvállalta a lektorálás felelősségteljes és nehéz munkáját. Szigorú bíráló volt, de evvel nagyban hozzájárult, hogy jól szerkesztett, sikeres könyvek jelenjenek meg.

A matematikai közéletben való részvétele, a munka során tanúsított megbízhatósága, alaposság, áldozatvállalása mintaszerű volt. 1964-ben segített a BJMT és a GTE által közösen szervezett statisztikai kollokvium előkészítésében, 1969-ben önállóan szervezett Tihanyban megbízhatóságelméleti kollokviumot, 1972-ben és 1980-ban együtt szerveztük az Európai Statisztikusok Találkozóját, 1981-ben és 1984-ben a statisztika különböző fejezeteiből szerveztünk nemzetközi konferenciákat.

Nagyszámú külföldi rendezvényen vett részt, meghívásainak betegsége ellenére mindig küldetésszerűen eleget tett. Kedves, halk modora, fel-felcsillanó humora segített nemzetközi kapcsolataink szélesítésében. A matematika és kollégái iránti mély érdeklődése, meleg szeretete sok barátot szerzett nemcsak neki, hanem mindnyájunknak is. Bizonyos értelemben anakronisztikus jelenség volt, egy szelíd görög bölcs a XX. században. 1985. augusztus hó 19. napján hajnalban álmában érte a halál.

КАРОЙ ШАРКАДИ (1914—1985)

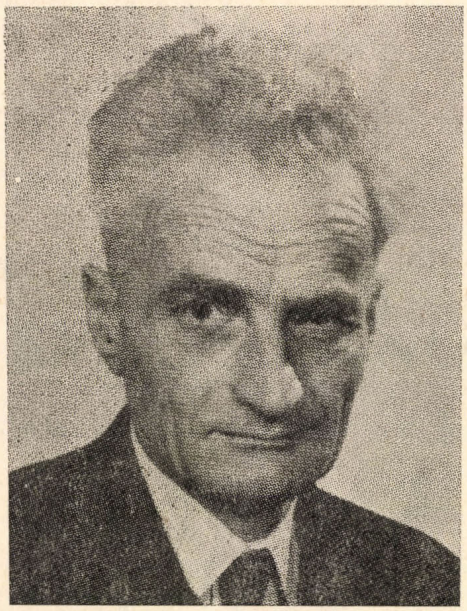
Г. ТУШНАДИ и И. ВИНЦЕ

KÁROLY SARKADI (1914—1985)

G. TUSNÁDY and I. VINCZE

MAKAI ENDRE (1915—1987)

BIHARI IMRE



Mély megdöbbenéssel és fájdalommal vettük a hírt, hogy mindannyiunk által nagyrabecsült, tisztelt és szeretett kartársunk, Makai Endre, a matematikai tudományok doktora 1987. november 8-án elhunyt. Tudtuk jó ideje, hogy beteg, de reménykedtünk, hogy állapota jobbra fordul. Nem így történt.

Emlékezzünk hát róla! Budapesten született 1915. november 5-én. Középiskolai tanulmányait a budapesti Piarista Gimnáziumban végezte. A Középiskolai Matematikai Lapokban kitűzött feladatok megoldása és egy ott kiírt pályázat megnyerése hamar magasan a gimnáziumi tanulók átlaga fölé emelte. Egyetemi tanulmányait a budapesti Pázmány Péter Tudományegyetemen végezte. Az Eötvös Loránd tanulóverseny első díja kitűnő ajánlólevél volt az Eötvös Kollégiumba való felvételre. Ez zavartalan tanulási lehetőséget biztosított számára, amit ki is használt. Alapos tudást szerzett, amiben a kollégiumban tartott magas szintű előadások és szemináriumok jelentősen segítették. Hamarosan jártas lett az irodalomban (beleértve a folyóiratokat is) való búvárkodásban. Így talált problémákra. Utolsó egye-

temi éve alatt írt első dolgozata már a következő évben megjelent a Compositio Mathematica-ban. Nehéz évek következtek. Matematikusként vagy tanárként nem tudott elhelyezkedni, de minthogy előrelátóan harmadik tárgyként felvette a kémiát, sikerült 1940-ben kémikusként állást kapnia a Chinoin Vegyészeti Gyárban. Ott is volt háborús körülmények közt, 1944-ig. A háború után 1945-ben az Egyesült Izzóba került megint csak kémikusként. Ott kitűnő kutatógárda tagjaként jelentős része volt a fénycsövek kifejlesztésében. 1951-ben a Budapesti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Kara Matematikai Tanszékére került docensként. Egy ideig a tanszéket is vezette. Ott is — mint mindenütt, ahol megfordult — kiváló (oktatói és kutatói) munkát végzett. Le tudott szállni és föl tudott emelkedni a technikusok matematikájának szintjére.

1962-től az MTA Matematikai Kutató Intézetében előbb főmunkatársként, majd 1970-től 1979-ig — nyugalomba vonulásáig — osztályvezetőként dolgozott.

Mindezek közben írta kitűnő dolgozatait. Makait akár személyesen, akár dolgozatain keresztül rendkívül éles- és gyorseszű embernek ismertük, akinek különleges képessége volt a problémában való elmélyedésre. Egy-egy problémához újra és újra visszatért. Mindig talált eddig fel nem derített tényeket, javítani valót, valamit, amit pontosabbá lehetett tenni. Például Turán Pál és mások dolgozataiban lévő egyes konstansok helyett jobb — sokszor nem javítható — konstansokat talált. Számos aszimptotikus formulát javított meg, hozott végleges alakra.

Néhány terület, ahol szép sikerrel dolgozott:

1. Sturm—Liouville-problémák, azaz közönséges másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek sajátértékproblémája. Itt az $y''+\lambda\varrho(x)y=0$, $y(a)=y(b)=0$ peremértékfeladat n-edik sajátértékére, λ_n-re, az addig ismert $\lambda_n \leqq \frac{n^2}{\varrho_{\min}}$ becslés helyett (mely $\varrho_{\min}=0$ esetén csődöt mond) a

$$\lambda_n < \left(\frac{n\pi}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)}\,dx} \right)^2$$

eredményre jut a $\varrho(x)>0$, $\varrho''(x)<0$, $x\in[a, b]$ feltétel mellett. Sőt, [2]-ben megmutatja, hogy

$$\sqrt{\lambda_n} - \frac{n\pi}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)}\,dx} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty.$$

[7]-ben a $\varrho''<0$ helyett az általánosabb $5\varrho'^2-4\varrho\varrho''\leqq 0$ feltételt veszi alapul. Ezek az eredmények (és módszerek) sok későbbi — saját és mások által végzett — kutatás kiindulópontjai lesznek.

A fordított feladat — ahol a sajátértékek ismertek — módot ad a megoldások zérushelyei eloszlásának a vizsgálatára, amit a nagyon tartalmas [7] dolgozatában végez el. Táblázatban mutatja meg a nyert közelítések pontosságát. Sok nevezetes példán illusztrálja eredményeit. Megvan a képessége, hogy eredményeit alkalmazható formára hozza egészen a numerikus fokig. Az [1] dolgozatával szemben [2]-ben nem variációs módszert alkalmaz, hanem Sturm összehasonlítási tételt (l. [10]-et is), mellyel meglepően egyszerűen ér célhoz, és amely itt hatásosabb is. Ráadásul gyengített konvexitási feltétellel dolgozik.

2. Membrán feladatoknál viszont variációs módszereket alkalmazva nyer a geometriai adatokból egyre jobb becsléseket az alapfrekvenciára és a rigiditásra.

Ezeket a vizsgálatokat kiterjeszti három dimenzióra is. Több esetben teljes ortogonális rendszert is tud konstruálni.

3. Új bizonyítást ad az elemi rácsháromszög és rácsparalelogramma alaptulajdonságára.

4. Doktori értekezésben az

$$Xy' = Ay \tag{1}$$

egyenletből indul ki, ahol A egy konstans mátrix, X diagonális mátrix, a diagonálisában $x-a_1, \ldots, x-a_n$ áll. Az $a_1, \ldots, a_n$ konstansokat alkalmasan választva egy sereg ismert és fontos differenciálegyenlethez jutunk. Hatványsor-megoldást talál, mely konvergens minden olyan körben, amely az $a_1, \ldots, a_n$ pontok egyikét sem tartalmazza. Az (1) bármely megoldása eleget tesz egy legfeljebb n-ed rendű homogén lineáris differenciálegyenletnek

$$P_n(x)y^m + \ldots + P_{n-m}(x)y = 0, \tag{2}$$

ahol $P_n(x)$ pontosan n-ed fokú polinom, a $P_{n-1}, \ldots, P_{n-m}$ polinomok fokszáma legföljebb indexükkel egyenlő. Bármely (2) típusú egyenlethez hozzárendelhetünk olyan (1) típusú rendszert, melynek y_1 megoldása tetszőleges kezdeti feltétel esetén megoldása (2)-nek. Így a (2) összes megoldását megkapjuk. A (2) a Fuchs-féle egyenletnek egy speciális esete, ún. egyszerű szinguláris pontokkal bíró egyenlet. Az általános Fuchs-féle egyenletről hasonló bizonyítható. A

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\sigma} \frac{a_{ik}^{(j)}}{x-a_j} y_k \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

(a szinguláris pontok most $a_1, \ldots, a_\sigma$), Schlesinger által kanonikusnak nevezett differenciálegyenlet-rendszer bármely megoldása előállítható egy megfelelően választott (1) típusú egyenlet megoldásai segítségével. Makai megmutatja, hogy a (2) megoldásaival bármely n-ed rendű homogén lineáris reguláris egyenlet megoldásai tetszőleges pontossággal approximálhatók. Szükséges és elégséges feltételt ad meg arra, hogy az (1)-nek, illetve (3)-nak polinommegoldása legyen. Polinomvektorok előállítására egy teljességi tételt állapít meg stb. Az értekezés gazdag tára a szép eredményeknek.

5. Sokat foglalkozik az L^2 függvényekre vonatkozó Fourier-problémával és számos részleteredményt talál. A Fourier-probléma végleges megoldásáig nem jut el.

6. Több dolgozatában foglalkozik a kvantummechanikai háromtestproblémával. Egyes speciális esetekben az ismerteknél jobb hatványsor-megoldást ad.

Ezenkívül számos más problémával is foglalkozott, pl. egyenlőtlenségekkel, minimumfeladatokkal, s mindenütt ötletesnek és mélyenszántónak bizonyult.

Munkásságát 1972-ben Állami Díjjal honorálták. Említésre méltó, hogy az Indiai Warangal Egyetemre is meghívták, ahol 1964-ben hét hónapot töltött. Ott szemináriumokat tartott és a matematikaoktatás javításához számos tanáccsal szolgált. Sok ifjú matematikusnak és kollégának volt segítségére és adott indítást. Hatása nem kis mértékben abban is állt, hogy példátlanul puritán és szerény ember volt. Szerénysége annak tudatából fakadt, hogy az ember — egy ember — csak egy töredékét tudja megragadni a valóságnak, ami számára a matematika volt. Műveinek a jegyzéke mutatja, hogy ez a töredék egy jelentős töredék volt.

Életében nagy szerencse érte. Méltó élettársra talált, akivel harmonikus családi életet élhetett és aki számára nyugodt otthont, konstruktív légkört biztosított.

Művei és példája nyomán emléke él és élni fog utódaiban, a jelen és jövő matematikusaiban.

MAKAI ENDRE DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Über eine Eigenwertabschätzung bei gewissen homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Compositio Mathematica* **6** (1939), 368—374.

[2] Asymptotische Abschätzung der Eigenwerte gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Annali della Scuola Normale di Pisa, (2)*, **10** (1941), 123—126.

[3] Bizonyos másodrendű differenciálegyenletek sajátértékeinek becslése, *Matematikai és Fizikai Lapok* **48** (1941), 510—532.

[4] A property of mean of harmonic functions, *Rend. Circolo Matem. di Palermo* **63** (1941), 33—40.

[5] Zur Berechnung der Eigenfrequenzen inhomogener Saiten, *Zeitschrift für angew. Math. u. Mech.* **22** (1942), 167—168.

[6] Rácsháromszögekről és rácsparallelogrammákról, *Matematikai és Fizikai Lapok* **50** (1943), 47—50.

[7] Über die Nullstellen von Funktionen, die Lösungen Sturm—Liouville'scher Differentialgleichungen sind, *Commentarii Mathematici Helvetici* **16** (1944), 153—199.

[8] On a monotonic property of certain Sturm—Liouville functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **3** (1952), 165—172.

[9] On systems of polynomials orthogonal in two intervals, *Publ. Math. Debrecen* **2** (1952), 222—228.

[10] A note on the solution of Heun's differential equation in a special case, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1953), 140—143.

[11] A class of systems of differential equations and its treatment with matrix methods, I, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1957), 5—37.

[12] A class of systems of differential equations and its treatment with matrix methods, II, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1958), 269—274.

[13] A class of systems of differential equations and its treatment with matrix methods, III, Contiguous systems, *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959), 204—213.

[14] On the inequality of Mathieu, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1957), 204—205.

[15] On a maximum problem, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **9** (1958), 105—109.

[16] An estimation in the theory of diophantine approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **9** (1958), 299—307.

[17] Steiner type inequalities in plane geometry, *Periodica Polytechnica, Budapest* **3** (1959), 345—355.

[18] On the principal frequency of a membrane and related problems, *Czechoslovak Math. Journal* **9** (1959), 66—70.

[19] Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **20** (1959), 33—35.

[20] The first main theorem of P. Turán, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **10** (1959), 405—411.

[21] On generalizations of an inequality due to Pólya and Szegő, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **12** (1961), 189—191.

[22] Membránok alaphangjáról, *Műszaki Egyetem Évkönyve*, Budapest, 1961, 242—246.

[23] On a minimum problem, *Annales Univ. Sci. Budapest* **4** (1961), 177—182.

[24] Principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam, *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics* (Essays in honor of G. Pólya), Stanford Univ. Press, 1962, 227—231.

[25] Sur la convergence des séries de Fourier des fonctions de carré sommable, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **257** (1963), 1893—1895.

[26] Hermite expansion and distribution of zeros of polynomials (Turán Pállal), *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **8** (1963), 157—163.

[27] Fundamental frequencies of two and three dimensional membranes, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **8** (1963), 109—123.

[28] On a minimum problem, II, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **15** (1964), 63—66.

[29] On the summability of the Fourier series of L^2 integrable functions, I, *Publ. Math. Debrecen* **11** (1964), 101—118.

[30] On the summability of the Fourier series of L^2 integrable functions, II, *Publ. Math. Debrecen* **12** (1965), 89—106.

[31] A lower estimation of the principal frequencies of simply connected membranes, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **16** (1965), 319—323.

[32] The dimensioning of gas pipe lines (Fonó Alberttel), *Acta Tech. Hungar.* **50** (1965), 64—67.

[33] Eine untere Abschätzung des Grundtons einer Membran, *Zeitschr. ang. Math. u. Mech.* **46** (1966), 124—125.

[34] A proof of Saint-Venant's theorem on torsional rigidity, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **17** (1966), 419—422.

[35] A property of Dirichlet's kernel, *Studia Sci. Math. Hungar.* **1** (1966), 11—16.
[36] On the summability of the Fourier series of L^2 integrable functions, III, *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967), 43—48.
[37] A maximum problem connected with polynomials, *Indian J. of Math.* **9** (1967), 451—455.
[38] On the torsional rigidity of a beam of convex cross section, *Zeitschr. ang. Math. u. Mech.* **49** (1969), 92—93.
[39] On the summability of the Fourier series of L^2 integrable functions, IV, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969), 383—391.
[40] A remark to the preceding paper of H. Kleindienst, *Studia Sci. Math. Hungar.* **4** (1969), 471—472.
[41] Complete orthogonal systems of eigenfunctions of three triangular membranes, *Studia Sci. Math. Hungar.* **5** (1970), 51—62.
[42] Eigenvalues of powers of functions, *Studia Sci. Math. Hungar.* **6** (1971), 161—162.
[43] A property of Dirichlet's kernel, II, *Publ. de la Fac. d'Électrotechn. de l'Univ. de Belgrade, série Math. et Phys.*, No. **357—380** (1971), 55—58.
[44] Remarks on the three-body problem in Quantum Mechanics, *Studia Sci. Math. Hungar.* **6** (1971), 467—480.
[45] Variational problems related to those which lend to the Schrödinger equation of Helium-like atoms, *Studia Sci. Math. Hungar.* **8** (1973), 133—140.
[46] An integral inequality satisfied by Bessel functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **25** (1974), 387—390.
[47] Complete systems of eigenfunctions of the wave equation in some special cases, *Studia Sci. Math. Hungar.* **11** (1976), 139—144.
[48] On zeros of Bessel functions, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotechn. Fak.*, No. **602—633** (1978), 109—110.
[49] On the Schrödinger equation of the three-body problem, II, *Studia Sci. Math. Hungar.* **12** (1977), 257—265.
[50] On a transformation of Gronwall concerning the three-body problem of quantum mechanics, *Studia Sci. Math. Hungar.* **13** (1978), 187—192.

ЭНДРЕ МАКАИ (1915—1987)

И. БИХАРИ

ENDRE MAKAI (1915—1987)

I. BIHARI

EMLÉKÜLÉS HAJÓS GYÖRGY SZÜLETÉSÉNEK 75. ÉVFORDULÓJÁN

A Magyar Tudományos Akadémia
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA,
az
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
és a
BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
1987. március 24-én
TUDOMÁNYOS EMLÉKÜLÉST
rendezett
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA FELOLVASÓ TERMÉBEN
HAJÓS GYÖRGY
születésének 75. évfordulója alkalmából

Az emlékülés napirendje:

1. MEGNYITÓ
   TARJÁN IMRE akadémiai rendes tag, az MTA Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának elnöke
2. HAJÓS GYÖRGY PEDAGÓGIAI MUNKÁSSÁGA, HATÁSA
   BÖRÖCZKY KÁROLY, a matematikai tudomány doktora
3.* A MINKOWSKI-SEJTÉS HAJÓS-FÉLE BIZONYÍTÁSÁRÓL
   MOLNÁR EMIL, a matematikai tudomány kandidátusa
4.* A RÉDEI-TÉTEL EGY ÚJ BIZONYÍTÁSA
   CORRÁDI KERESZTÉLY, a matematikai tudomány kandidátusa — SZABÓ SÁNDOR, a matematikai tudomány kandidátusa
5.* A HAJÓS-TÉTEL GEOMETRIAI ÉS ALGEBRAI ÁLTALÁNOSÍTÁSAIRÓL
   SZABÓ SÁNDOR, a matematikai tudomány kandidátusa

Az emlékülés befejezése után a Magyar Tudományos Akadémia, az Eötvös Loránd Tudományegyetem és a Bolyai János Matematikai Társulat képviselői koszorút helyeztek el HAJÓS GYÖRGY Farkasréti temetőben levő sírján.

МЕМОРИАЛЬНОЕ ЗАСЕДАНИЕ В СВЯЗИ С 75-Й ГОДОВЩИНОЙ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ДЬЁРДЯ ХАЙОША

MEMORIAL SESSION ON THE 75TH ANNIVERSARY OF THE BIRTH OF G. HAJÓS

* Az előadást, ill. kibővített változatát ebben a számban közöljük.

A MINKOWSKI-SEJTÉS HAJÓS-FÉLE BIZONYÍTÁSÁRÓL*

MOLNÁR EMIL

1. Bevezetés

Hajós György híres tétele, melyben Hermann Minkowski több mint 40 éves, sokak által sikertelenül támadott sejtését igazolta, máig a magyar matematika egyik legszebb teljesítménye. A tétel és új utakat nyitó bizonyítási módszere egyben jellemzi is szerzője matematikai ízlését, gondolkodásmódjának rugalmasságát, sokoldalúságát.

Rédei László az 1942. évi König Gyula jutalom átadása alkalmából [8] így jellemezte őt: „Rajongója a könnyűnek látszó nehéz kérdéseknek".

Minkowski sejtése valóban egy ilyen kérdés. A „Geometrie der Zahlen" című könyv, mely 1896-ban jelent meg először, ma is magával ragad bizonyításainak szemléletességével, több máig megoldatlan aktuális problémájával. A szimultán diofantikus approximáció témakörébe kapcsolódóan fogalmazta meg Minkowski az alábbi tételt:

Minkowski tétele: *Ha a valós együtthatós*

$$(1)\qquad y^1 = x^1 a_1^1 + x^2 a_2^1 + \ldots + x^n a_n^1,\quad y^2 = x^1 a_1^2 + x^2 a_2^2 + \ldots + x^n a_n^2,\ \ldots,\ y^n = x^1 a_1^n + x^2 a_2^n + \ldots + x^n a_n^n,$$

röviden $y^k = x^i a_i^k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$, i-re összegezni kell 1-től n-ig)

homogén lineáris alakok a_i^k *együtthatóira*

$$(2)\qquad \det(a_i^k) = 1,$$

akkor megadható egy $(0, 0, \ldots, 0)$*-tól különböző, egészekből álló* $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *szám* n*-es úgy, hogy ezt* (1)*-be helyettesítve, teljesülnek a*

$$(3)\qquad |y^1| \leqq 1,\ |y^2| \leqq 1,\ \ldots,\ |y^n| \leqq 1$$

egyenlőtlenségek.

Az 1. ábrán $n=2$ esetére szemléltetjük a tétel állítását. Maga Minkowski adta meg az $\mathcal{E}^n$ *n-dimenziós euklideszi térre* történő átfogalmazást. Az $\mathcal{E}^n$ térben rögzítsünk egy O *kezdőpontot*, és egy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *ortonormált bázist*. A valós számokból álló adott (a_i^k) mátrix segítségével készítsük el az

$$(4)\qquad \mathbf{a}_1 = a_1^1 \mathbf{e}_1 + a_1^2 \mathbf{e}_2 + \ldots + a_1^n \mathbf{e}_n,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n = a_n^1 \mathbf{e}_1 + a_n^2 \mathbf{e}_2 + \ldots + a_n^n \mathbf{e}_n;$$

röviden $\mathbf{a}_i = a_i^k \mathbf{e}_k$ *bázisvektorokat,*

---

* A HAJÓS GYÖRGY születésének 75. évfordulója alkalmából 1987. március 24-én rendezett akadémiai emlékülés előadásának bővített változata.

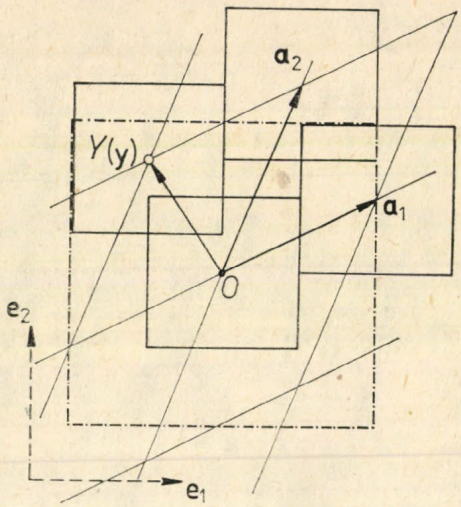
majd ezek egész együtthatós lineáris kombinációiként az

$$\mathbf{X} := \{\mathbf{y} = x^i \mathbf{a}_i = x^i a_i^k \mathbf{e}_k =: y^k \mathbf{e}_k \mid x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathbf{Z}\} \tag{5}$$

rácsot, az O kezdőpont $\mathbf{X}$ szerint eltolt képeiként pedig az

$$\mathscr{X}(O, \mathbf{X}) := \{Y \in \mathscr{E}^n \mid \overrightarrow{OY} \in \mathbf{X}\} \tag{6}$$

pontrácsot. (Jelöléseink megkísérlik összhangba hozni a klasszikus és modern írásmódot. Használjuk az Einstein-féle összegezési konvenciót: azonos alsó és felső indexekre összegezni kell 1-től n-ig.)



1. ábra

Az 1. ábrán lévő bázisvektorokat, sor-oszlop mátrix szorzással megadva:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}; \quad (y^1, y^2) = (x^1, x^2) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 5/4 \end{pmatrix}$$

fejezi ki az (1) lineáris alakokat mint $\mathbf{X}$-beli rácsvektorok ($\mathbf{e}_k$) bázisbeli koordinátáit. Teljesül (2), ami geometriailag azt jelenti, hogy az ($\mathbf{a}_i$) bázisvektorok által meghatározott paralelogramma (paralelotop vagy n-dimenziós paralelepipedon) területe (térfogata) egységnyi. A (3) egyenlőtlenségek az $\mathbf{y} = y^1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2$ vektorral teljesülnek például $(x^1, x^2) = (-1, 1)$ választásával:

$$(-1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 5/4 \end{pmatrix} = (-1/2, 3/4) =: (y^1, y^2).$$

A (3) egyenlőtlenségeket geometriailag kétféleképpen is megfogalmazhatjuk, ha definiáljuk az ($\mathbf{e}_k$) *bázissal párhuzamos helyzetű C középpontú e élhosszúságú kockát az* $\mathscr{E}^n$ *térben:*

$$\mathscr{K}(C, e) := \left\{ P \in \mathscr{E}^n \mid \overrightarrow{CP} = p^k \mathbf{e}_k, \, |p^k| \leqq \frac{e}{2}, \; k \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}. \tag{7}$$

Ekkor (3) egyrészt azt jelenti, hogy az O és $Y(\mathbf{y})$ középpontú egységkockáknak van közös pontjuk, ilyen az $\frac{1}{2}\mathbf{y}$ helyvektorú pont. Másrészt ugyanezt fejezi ki, hogy az O középpontú 2 élhosszúságú, ezért 2^n térfogatú, kocka tartalmazza az Y rácspontot.

Az utóbbi fogalmazás a tétel bizonyítását visszavezeti Minkowski híres rácspont tételére, mely a geometriai skatulyaelv alkalmazásának klasszikusan szép példája.

Minkowski rácspont tétele: *Ha egy egységnyi térfogatú n-dimenziós paralelotop által meghatározott pontrács kezdőpontjába egy centrálszimmetrikus 2^n térfogatú zárt konvex test középpontját helyezzük, akkor a test tartalmaz a kezdőponttól különböző rácspontot.*

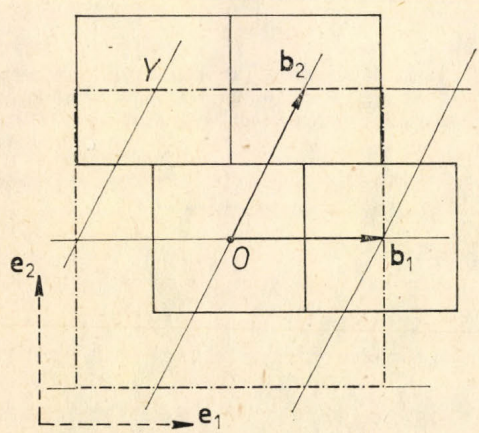
Vegyük észre, hogy az 1. ábrán szereplő példán a (2)-beli egyenlőségjelek mind elhagyhatók, ami azt jelenti, hogy az O középpontú 2 élhosszúságú négyzet *belsejében tartalmazza* az Y rácspontot, vagy másképpen, az O és Y középpontú egységnégyzeteknek van *közös belső pontjuk*.

Ezzel kapcsolatban Minkowski felvetette a *határesetek* vizsgálatát, amikor (2)-ben az egyenlőségjelek mind nem hagyhatók el, amikor az O középpontú 2 élhosszúságú kocka csupán a határán tartalmaz Y rácspontot, vagyis az O és Y középpontú egységkockáknak csak közös határpontjuk van. Ilyen *határesetet* mutat a 2. ábra, ahol az $\tilde{\mathbf{X}}$ rács $\mathbf{b}_i = b_i^k \mathbf{e}_k$ bázisvektorainak b_i^k együtthatóit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}; \quad \text{a lineáris alakokat} \quad (y^1, y^2) = (x^1, x^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

értelmezi. Szembetűnik, hogy $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1$, s a rácspontokba mint középpontokba helyezett egységnégyzetek közös belső pont nélkül (egyrétűen) lefedik a síkot. Ez a *lefedés a* $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1$ *vektor irányában „oszlopozott"*, az egységnégyzetek teljes oldalak mentén csatlakoznak egymáshoz.

Minkowski híres sejtése azt mondja ki, hogy minden n dimenzióra analóg módon jellemezhetők a határesetek.



2. ábra

Minkowski sejtése: *A* (3) *egyenlőtlenségrendszerben az egyenlőség jelek csak akkor nem hagyhatók el, ha egész együtthatós unimoduláris* (± 1 determinánsú) *helyettesítéssel a lineáris alakok az*

$$(8) \qquad (y^1, y^2, y^3, \ldots, y^n) = (x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_3^1 & b_3^2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^1 & b_n^2 & b_n^3 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

röviden

$$y^k = x^i b_i^k, \quad (x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathbf{Z})$$

alakba írhatók át.

Most $\mathbf{b}_i = b_i^k \mathbf{e}_k$ értelmezi annak az $\tilde{\mathbf{X}}$ rácsnak az alapvektorait, amely rács vektorainak az $(\mathbf{e}_k)$ ortonormált bázisra vonatkozó koordinátái a fenti (y^k) lineáris alakok lesznek.

Fontoljuk meg, hogy ha az $\tilde{\mathbf{X}}$ rácsban új $\mathbf{c}_{i'} := b_{i'}^i \mathbf{b}_i =: c_{i'}^k \mathbf{e}_k$ bázist vezetünk be, akkor a $(b_{i'}^i)$ áttérési mátrix elemei egészek úgy, hogy $\det(b_{i'}^i) = \pm 1$. Az $\tilde{\mathbf{X}}$ rács $\mathbf{y}$ rácsvektorát az $(\mathbf{e}_k)$, $(\mathbf{c}_{i'})$ és $(\mathbf{b}_i)$ bázisban is kifejezhetjük:

$$(9) \qquad y^k \mathbf{e}_k = x^{i'} \mathbf{c}_{i'} = x^{i'} c_{i'}^k \mathbf{e}_k = x^{i'} b_{i'}^i \mathbf{b}_i = x^{i'} b_{i'}^i b_i^k \mathbf{e}_k = x^i \mathbf{b}_i = x^i b_i^k \mathbf{e}_k;$$

tehát

$$y^k = x^{i'} c_{i'}^k = x^i b_i^k;$$

ahol

$$x^i = x^{i'} b_{i'}^i; \quad c_{i'}^k = b_{i'}^i b_i^k.$$

(Itt az összegzési konvenció mellett a Schouten-féle vesszős indexeket is használjuk megkülönböztetésül, de a vesszőtlenekkel azonos szereposztásban.)

A sejtésben megfogalmazott unimoduláris helyettesítés éppen azt fejezi ki, hogy ha

$$(10) \qquad y^k = x^{i'} c_{i'}^k \quad (x^{1'}, \ldots, x^{n'} \in \mathbf{Z};\ \det(c_{i'}^k) = \pm 1)$$

határesethez tartozó lineáris alakok, akkor létezik olyan egészekből álló unimoduláris $(b_{i'}^i)$ mátrix, hogy a fenti $(c_{i'}^k)$ mátrix egy (8)-beli (b_i^k) mátrixból keletkezik:

$$(c_{i'}^k) = (b_{i'}^i)(b_i^k) \quad (\det(b_{i'}^i) = \pm 1)$$

helyettesítéssel. Ekkor $x^i = x^{i'} b_{i'}^i$ fejezi ki a változók $(x^{i'}) \mapsto (x^i)$ transzformációját. Ha bevezetjük a $(b_{i'}^i)$ mátrix inverzét, az egészekből álló unimoduláris $(c_i^{i'})$ mátrixot, akkor $\mathbf{b}_i = c_i^{i'} \mathbf{c}_{i'}$, azaz $b_i^k = c_i^{i'} c_{i'}^k$ és $x^{i'} = x^i c_i^{i'}$ mutatja, hogy lehet a (10) lineáris alakokat (8) alakra hozni.

A fenti aritmetikai megfogalmazás nehézkességét feledteti a korábbi példákon már motivált, Minkowskitól származó elegáns

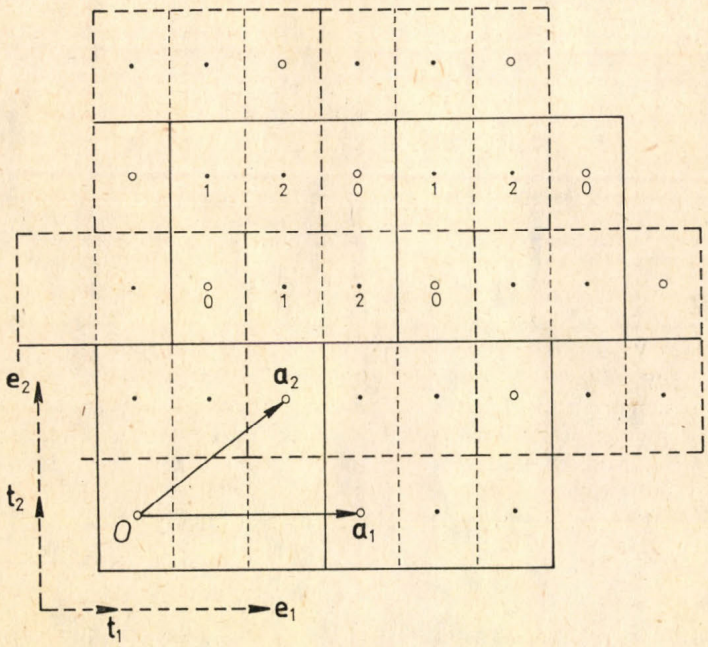
Geometriai átfogalmazás: *Ha az $\mathcal{E}^n$ euklideszi teret párhuzamos, egymást nem fedő egységkockák rácsszerűen kitöltik, akkor van e kockák között kettő, melyeknek egy-egy oldallapja teljes egészében közös.*

Ez a szemléletes fogalmazás játékkockákkal modellezhető $n=3$ esetén. Valóban tapasztaljuk, hogy *egy térkitöltő kockarács szükségképpen* valamely irányban *oszlopozott.* Minkowski $n \leqq 3$, H. Jansen $n \leqq 6$, Th. Schmidt $n \leqq 7$, O. H. Keller $n \leqq 8$, O. Perron $n \leqq 9$ esetében igazolták a sejtést egyre nehézkesebb kombinatorikus megfontolásokkal.

A sikertelen bizonyítási kísérleteket újabb és újabb átfogalmazásokkal, általánosításokkal színesítették. Ezek közül csak azokat említjük, melyekhez Hajós György is csatlakozott.

2. Többszörösen fedő kockarácsok

Furtwängler [2] fogalmazta meg 1936-ban azt a *sejtést, hogy az $\mathcal{E}^n$ teret k-szorosan fedő egységkockákból álló kockarács mindig oszlopozott,* $k=1$ esetén ebből adódna a Minkowski-sejtés. Furtwängler $n\leqq 3$ esetére igazolta sejtését. 1938-ban Hajós György [3] dolgozatában meglepő új módszerrel újra igazolta az általa akkor még nem ismert Furtwängler-féle eredményeket, másrészt azonban $n=4$ esetén igen tanulságos ellenpéldával mutatta meg, hogy *Furtwängler sejtése* $n\geqq 4$ *dimenzióra általában nem igaz.*



3. ábra

A Hajós-féle módszer illusztrálására tekintsük a 3. ábrát, mely 2-szeresen fedő ($k=2$) egységnégyzetekből álló rácsszerű kitöltést mutat. Tehát a sík bármely pontja, mely nem esik négyzetoldalra, pontosan $k=2$ négyzet belsejébe esik. Az egységnégyzeteket az $\mathbf{A}=\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle$ rács eltolásai viszik egymásba, az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ bázisvektorokat $\mathbf{a}_i=a_i^k\,\mathbf{e}_k$, konkréten

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2/3 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}$$

értelmezi. Az egységnégyzetek oldalegyenesei a síkot téglalapokra szeletelik, ezek a

téglalapok a $\mathbf{T}=\langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\rangle$ rács eltolásaival mennek át egymásba a $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ bázisvektorokat $\mathbf{t}_j = t_j^k \mathbf{e}_k$, konkréten

$$\begin{pmatrix}\mathbf{t}_1\\ \mathbf{t}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3 & \\ & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}$$

értelmezi. A 3. ábrán az O kezdőpont alkalmas választásával is szemléltetjük, hogy a $\mathscr{T} := \{T \in \mathscr{E}^2 \mid \overrightarrow{OT} \in \mathbf{T}\}$ pontrácsnak része az $\mathscr{A} := \{A \in \mathscr{E}^2 \mid \overrightarrow{OA} \in \mathbf{A}\}$ pontrács.

A $\mathbf{T}$ (kommutatív) eltoláscsoport 3 indexű részcsoportként tartalmazza az $\mathbf{A}$ eltoláscsoportot, képezhető a kommutatív, azaz Abel-féle $G = \mathbf{T}/\mathbf{A}$ faktorcsoport, mely a $Mod\ 3 = C_3 = \{1 = c^0, c^1, c^2\}$ ciklikus csoporttal izomorf. A 3. ábrán azokat a téglalapokat, melyeknek középpontjai az $\mathscr{A}$ pontrácshoz tartoznak, a C_3 csoport $1 = c^0$ egységelemével jelöljük meg. Ekkor a többi téglalapot értelemszerűen jelölhetjük meg a $\mathbf{T}$ további $\mathbf{A}$ szerinti mellékosztályaival, vagyis a C_3 csoport c^1, c^2 elemeivel. Az ábrán csak 0, 1, 2 szerepel az additív írásmód szellemében. Most tekintsük az egyik, mondjuk az O kezdőpontot tartalmazó egységnégyzetet és az általa tartalmazott téglalapokat. A c^0, c^1, c^2 csoportelemek mindegyike kétszer szerepel a kiszemelt négyzetben, annak megfelelően, hogy kétszeres fedésről van szó. Egyelőre formálisan ezt úgy fejezzük ki, hogy a C_3 csoport $\mathbf{Z}$ egészek feletti $\mathbf{Z}(C_3)$ csoportalgebrájának $2(1+c^1+c^2)$ elemét rendeljük az említett egységnégyzethez. A négyzetben vízszintesen elhelyezkedő 1, c^1, c^2 téglalapok, függőlegesen elhelyezkedő 1, c^1 téglalapok lehetséges *„páronkénti szorzatai"* adják a négyzetet alkotó téglalapokat. Ezt a C_3 csoport $\mathbf{Z}(C_3)$ csoportalgebrájában a

$$(1+c^1+c^2)(1+c^1) = 2(1+c^1+c^2) \tag{11}$$

egyenlőség teljesülése fejezi ki.

Azt is vegyük észre, hogy a bal oldalon szereplő $(1+c^1)$ *„sor (szimplex) záróeleme"* $c^2 \neq 1$. Viszont az $(1+c^1+c^2)$ sor (szimplex) záróeleme $c^2 \cdot c^1 = 1$, ami azt jelenti, hogy $1+c^1+c^2$ egy „csoportösszeg". Geometriailag pedig éppen ez a tény fejezi ki, hogy a megfelelő „vízszintes" irányban a négyzetrács oszlopozott, teljes oldalak mentén csatlakoznak a kitöltő egységnégyzetek. A fenti példa összhangban van Furtwängler eredményével, miszerint $n=2$ esetén egy k-szorosan fedő négyzetrács mindig oszlopozott.

Most következzék, Furtwängler sejtését $n=4$ dimenzióra cáfolandó,

Hajós példája [3]: *Létezik az $\mathscr{E}^4$ térben 9-szeresen fedő nem oszlopozott kockarács.*

Bizonyítás. A 3. ábrán vázolt példa eljárását visszafelé alkalmazzuk. Tekintsük azt a 24-rendű G Abel-csoportot, melyet

$$G = (R, S - R^{12} = S^2 = 1) \tag{12}$$

értelmez a szokásos jelöléssel, R 12-rendű, S 2-rendű generátorok. Definiáljuk az $n=4$ sor (szimplex) alkotóelemeit:

$$A_1 = R, \quad A_2 = RS, \quad A_3 = R^2S, \quad A_4 = R^4S. \tag{13}$$

Képezzük a $\mathbf{Z}(G)$ (kommutatív) csoportalgebrát, melynek elemei $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot G_2 + a_3 \cdot G_3 + \ldots + a_{24} \cdot G_{24}$ alakú polinomok. Az $a_1, \ldots, a_{24}$ együtthatók $\mathbf{Z}$-beliek, a $G_1 = 1, G_2, \ldots, G_{24}$ csoportelemeket mint egytagúakat a G-beli művelet szerint szorozzuk össze, az együtthatókkal a $\mathbf{Z}$-beli összeadás és szorzás szerint számolunk.

Ekkor a $\mathbf{Z}(G)$-ben érvényes az alábbi egyenlőség:

$$(14)\quad (1+A_1+A_1^2+A_1^3+A_1^4+A_1^5)(1+A_2+A_2^2+A_2^3)(1+A_3+A_3^2)(1+A_4+A_4^2) =$$
$$= 9\cdot(1+G_2+G_3+\ldots+G_{24}) =: 9\cdot(\sum G).$$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon $6\cdot 4\cdot 3\cdot 3$ „tag", a jobb oldalon ezzel összhangban $9\cdot 24$ „tag" szerepel. A részletes ellenőrzés igen tanulságos és az olvasóra bízzuk.

Most nézzük a sorok (szimplexek) záróelemeit (12) és (13) szerint:

$$(15)\quad A_1^6 = R^6 \neq 1;\quad A_2^4 = R^4S^4 = R^4 \neq 1;$$
$$A_3^3 = R^6\cdot S^3 = R^6S \neq 1;\quad A_4^3 = R^{12}S^3 = S \neq 1.$$

Most úgy definiáljuk a $\mathbf{T}$ és $\mathbf{A}$ rácsokat az $\mathscr{E}^4$ tér rögzített $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ ortonormált bázisában, hogy a $\mathbf{T}/\mathbf{A}\cong G$ izomorfizmus fennálljon és hogy egységkockákkal történő kitöltést kapjunk. Ez utóbbihoz a sorok (szimplexek) tagszámától függően kell megválasztani $\mathbf{T}$ bázisvektorait

$$(16)\quad \mathbf{T} = \left\langle \mathbf{t}_1 = \frac{1}{6}\mathbf{e}_1,\ \mathbf{t}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{e}_2,\ \mathbf{t}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{e}_3,\ \mathbf{t}_4 = \frac{1}{3}\mathbf{e}_4 \right\rangle.$$

A $\mathbf{T}$ rács $\mathbf{A}$ részrácsát az alábbi homomorfizmussal értelmezzük:

$$(17)\quad \varphi\colon \mathbf{T}\to G,\quad \mathbf{t} := x^1\mathbf{t}_1+x^2\mathbf{t}_2+x^3\mathbf{t}_3+x^4\mathbf{t}_4 \mapsto$$
$$\mapsto A_1^{x^1}A_2^{x^2}A_3^{x^3}A_4^{x^4};\quad \mathbf{A}\lhd\mathbf{T}\colon \mathbf{A}\varphi = 1(\in G).$$

Az $\mathbf{A}$ rács tehát a φ homomorfizmus magja legyen és így valóban $G\cong\mathbf{T}/\mathbf{A}$ teljesül a homomorfizmus-tétel szerint. A (17) definíció szerint megadhatjuk az $\mathbf{A}$ rács egy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ bázisát is.

Az $\mathbf{a}_1$ vektorhoz (17)-ben legyen $x^1=12$, $x^2=0$, $x^3=0$, $x^4=0$, hiszen $A_1^{12} = R^{12}=1$ G-ben, vagyis $\mathbf{a}_1 = 12\cdot\mathbf{t}_1 = 12\cdot\frac{1}{6}\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{e}_1$. Ugyanígy $\mathbf{a}_2$-höz $x^1=2$, $x^2=-2$, $x^3=x^4=0$; $\mathbf{a}_3$-hoz $x^1=1$, $x^2=1$, $x^3=-1$, $x^4=0$; $\mathbf{a}_4$-hez $x^1=3$, $x^2=1$, $x^3=0$, $x^4=-1$ választással kapjuk: $\mathbf{a}_i = a_i^k\mathbf{e}_k$, konkrét formában

$$(18)\quad \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3\\ \mathbf{a}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 1/3 & -1/2 & 0 & 0\\ 1/6 & 1/4 & -1/3 & 0\\ 1/2 & 1/4 & 0 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_4\end{pmatrix},\quad \det(a_i^k) = -\frac{1}{9}.$$

Ez utóbbi észrevétel is mutatja, hogy $\mathbf{A}$-nak egy bázisát kaptuk meg, hiszen a megfelelő paralelotop térfogata $1/9$, összhangban az egységkockákkal történő 9-szeres fedéssel.

A (15) záróelemek már mutatják, hogy az $\mathbf{A}$-ból kapott kockarács nem oszlopozott, hiszen például az $\mathbf{e}_1$ bázisvektor irányában a G-beli $1, A_1, A_1^2, \ldots, A_1^5$ elemeknek megfelelő $\mathbf{T}/\mathbf{A}$-beli mellékosztályok (16) és (17) szerint rendre

$$\mathbf{A},\ \mathbf{t}_1+\mathbf{A} = \frac{1}{6}\mathbf{e}_1+\mathbf{A},\ 2\mathbf{t}_1+\mathbf{A} = \frac{2}{6}\mathbf{e}_1+\mathbf{A},\ \ldots,\ 5\mathbf{t}_1+\mathbf{A} = \frac{5}{6}\mathbf{e}_1+\mathbf{A},$$

és az $\mathbf{e}_1$ irányában „szomszédos kockában a következő mellékosztály" az $A_1^6\neq 1$ elemnek megfelelő $6\mathbf{t}_1+\mathbf{A}=\mathbf{e}_1+\mathbf{A}$ *nem azonos* az $\mathbf{A}$ részcsoporttal.

A fenti példa leírásában „a 3. ábra képéhez igazodva" megkíséreltük érzékeltetni Hajós [3] dolgozatának nagy hatású főeredményét.

Hajós-féle kritérium: *Az $\mathscr{E}^n$-térben létezik k-szorosan fedő nem oszlopozott kockarács akkor és csak akkor, ha létezik olyan G véges Abel-csoport és a* $\mathbf{Z}(G)$ *csoportalgebrában ennek n sora* (szimplexe)

$$[A_1]_{\alpha_1} := 1+A_1+A_1^2+\ldots+A_1^{\alpha_1-1}, \quad [A_2]_{\alpha_2}, \ldots, [A_n]_{\alpha_n},$$

melyeknek záróelemeire $A_i^{\alpha_i} \neq 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *és teljesül*

$$[A_1]_{\alpha_1} \cdot [A_2]_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot [A_n]_{\alpha_n} = k \cdot (\sum G). \tag{19}$$

Vegyük észre, hogy ez a kritérium a $k=1$ esetre már tartalmazza a Minkowski-sejtés csoportalgebrai átfogalmazását, de ezt csak később mondjuk ki mint Hajós tételét.

Előbb a kritériumhoz vezető geometriai eljárás fő lépését ismertetjük.

3. Hajós-féle eltolási tétel és a Keller-sejtés

Talán meglepő volt, hogy a Hajós-féle kritériumban véges Abel-csoport szerepel, holott a térfedő kockarács rácsvektorainak $(\mathbf{e}_k)$ bázisra vonatkozó koordinátái között irracionális számok is szerepelhetnek és akkor, a 3. ábrán illusztrált eljárásban, a kockalapok síkjai nem fogják véges sok téglára bontani a kiszemelt egységkockát. Márpedig ezek a téglák jellemezték a rácsszerű kockafedéshez tartozó G Abel-csoport elemeit.

Hajós György eljárásának lényege, hogy egy egységkockákból álló, nem-oszlopozott, k-szorosan térfedő kockarácsot bizonyos kockák alkalmas eltolásával mindig deformálhatunk úgy, hogy továbbra is nem-oszlopozott k-szorosan térfedő kockarácsot kapjunk, de az utóbbi rács vektorainak $(\mathbf{e}_k)$ *bázisra vonatkozó koordinátái már mind racionális számok lesznek.*

Ha q_i jelöli ezen *racionális rács* bázisvektorai i-edik koordinátáiban a redukált nevezők legkisebb közös többszörösét, akkor $q_1 q_2 \ldots q_n$ lesz a G Abel-csoport rendje. Ezen eljárást Szabó Sándor [11, 2. pont], [12, III.] dolgozatában Hajós módszerével még tovább általánosította.

Most az eljárást biztosító tételeket általánosabb, nyomon követhetően Hajós által már ismert formában fogalmazzuk meg.

Hajós-féle eltolási tétel: *Legyen* $\Gamma=(\mathscr{K}_O, \mathbf{A})$ *az* $(O; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *koordinátarendszerbeli O középpontú* $\mathscr{K}_O$ *egységkocka* $\mathbf{A}$ *vektorhalmaz (nem feltétlenül rács) szerint eltolt példányainak az* $\mathscr{E}^n$ *teret k-szorosan fedő rendszere. Legyen* $\mathbf{A}^i$ *azon vektorok összessége* $\mathbf{A}$*-ban, melyeknek i-edik koordinátája racionális szám* $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$. *Állítás: A* $\Gamma^i := (\mathscr{K}_O, \mathbf{A}^i)$ *kockarendszer egy* $\mathbf{e}_i$ *irányú végtelen hasáb, mégpedig ha P m-szeresen fedett pontja a* Γ^i*-kockák egyesítésének, akkor a P pont bármely* $\mathbf{e}_i$ *irányú eltoltja is m-szeresen fedett pontja a* Γ^i*-kockák egyesítésének.*

Fokozatos eltologatásokkal elérhetjük, hogy a kockák középpontjainak koordinátái mind racionálisak, továbbá egy $\mathscr{H}$-val jelölt kockablokk egy $\mathbf{B}$ rács szerint ismétlődjék. Továbbá nem oszlopozott k-szorosan fedő kockarendszer továbbra is ilyen marad.

Következmények: *Ha Γ-ban nincs két szomszédos teljes $(n-1)$-lapban csatlakozó kocka (Γ* nem oszlopozott), *akkor*

1) *Létezik olyan* **B** *rács és* **H** *véges vektorhalmaz, hogy* $\mathbf{A}'=\mathbf{B}+\mathbf{H}$ *szerinti* $\Gamma':=(\mathcal{H}_0, \mathbf{A}')$ *kockarendszer is k-szorosan térfedő és nem oszlopozott.*

2) *Létezik olyan G véges Abel-csoport és a* $\mathbf{Z}(G)$ *csoportalgebrában n sor (szimplex):* $[A_1]_{\alpha_1}, \ldots, [A_n]_{\alpha_n}$, *továbbá olyan H komplexus G-ben, hogy az* $A_i^{\alpha_i}$ *záróelemekre* $(i=1, 2, \ldots, n)$

$$A_i^{\alpha_i} \neq h_i \cdot h_i'^{-1}, \quad \text{ahol} \quad h_i, h_i' \in H, \tag{20}$$

és a $\mathbf{Z}(G)$ *csoportalgebrában fennáll az alábbi egyenlőség:*

$$(\sum H)[A_1]_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot [A_n]_{\alpha_n} = k \cdot (\sum G). \tag{21}$$

Láthatjuk, hogy $H=\{1\}$ *esetén visszakaptuk a rácsszerű kockarendszerekre* vonatkozó Hajós-féle kritériumot. Ha $H \neq \{1\}$ és $k=1$, akkor viszont az O. H. Keller által megfogalmazott sejtés [6] Hajós-féle fogalmazásához juthatunk. *Ez a mindmáig eldöntetlen sejtés* (lásd Szabó Sándor előadását [13]) ugyancsak a Minkowski-sejtés általánosítására fogalmazódott 1930-ban, és eredeti geometriai formájában így szól:

O. H. Keller sejtése: *Ha egységkockák (nem szükségképpen rácsszerű) rendszere 1-szeresen fedi az n-dimenziós euklideszi teret, akkor létezik közöttük két szomszédos, melyek teljes $(n-1)$-dimenziós lapok mentén csatlakoznak egymáshoz.*

4. Hajós tétele

A Minkowski-sejtés igazolásához kulcsfontosságú kritérium [3] megtalálása után 1941-ben sikerült a döntő áttörés [4], mely a német nyelvű [5] összefoglaló dolgozat megjelenése után méltán kapott nagy nemzetközi elismerést.

Hajós tétele: *Ha egy véges, Abel-féle G csoportra és a hozzá tartozó*

$$S_i = 1 + A_i + A_i^2 + \ldots + A_i^{\alpha_i - 1} \quad (1 < \alpha_i \in \mathbf{Z}) \tag{22}$$

$(i=1, 2, \ldots, n)$ *sorokra nézve*

$$S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_n = \sum G \tag{23}$$

teljesül a $\mathbf{Z}(G)$ *csoportalgebrában, akkor valamelyik* S_i *sor ciklikus, azaz záróelemére*

$$A_i^{\alpha_i} = 1. \tag{24}$$

A tétel bizonyításához „nem vezet királyi út". Azt is csak megemlítjük, hogy az eredeti csoportalgebrai fogalmazást a 2. pontban említettek szerint csupán komplexusokkal is megfogalmazhatjuk. A bizonyítás szerkezetének feltárásához és a később még felvetődő általánosításokhoz alapvetően járultak hozzá Szele Tibor, Fuchs László, de elsősorban Rédei László. Most csak klasszikus [9] könyvére, valamint Corrádi Keresztély és Szabó Sándor előadásaira [1], [13] utalok. A véges Abel-csoportok Hajós—Rédei-féle faktorizációs elmélete [10] is erről a tőről fakad.

Az eredeti Hajós-féle bizonyítás Rédei—Szele-féle egyszerűsítését [9] *most részletesebben ismertetjük.* Néhány alapvető észrevétellel kezdjük.

$$1+A+A^2+\ldots+A^{\varepsilon}+A^{\varepsilon+1}+\ldots+A^{\varepsilon\varphi-1} = \tag{25}$$

$$= (1+A+A^2+\ldots+A^{\varepsilon-1})(1+A+A^2+\ldots+A^{(\varphi-1)\varepsilon}),$$

feltéve, hogy A rendje $o(A) \geqq \varepsilon\varphi$ és $2 \leqq \varepsilon$, $\varphi \in \mathbf{Z}$.

Ezért elég a tételt arra az esetre igazolni, amikor (23)*-ban törzssorok, Rédei László terminológiája szerint prímszimplexek szerepelnek, amikor is az összes* α_i *záró-kitevő prímszám.* Ekkor persze (23)-ban a szimplexek száma többé nem azonos a tér dimenziójával.

Vegyük észre, hogy

$$(1+A+A^2+\ldots+A^{p-1})(1-A) = 1-A^p, \tag{26}$$

továbbá

$$\sum G = (\sum G)A \quad \text{miatt} \quad (\sum G)(1-A) = 0 \tag{27}$$

bármely $A \in G$ esetén teljesül.

Ezután a Hajós-tételt a törzssorok (prímszimplexek) számára vonatkozó teljes indukcióval igazolhatjuk.

Szorozzuk meg a most már prímszimplexekre vonatkozó (23) egyenlőséget az $(1-A_n)$ csoportalgebraelemmel. Ekkor (27) szerint fennáll

$$0 = S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_{n-1} \cdot (1-A_n^{p_n}), \tag{28}$$

ahol p_n prímszám. Nem zárhatjuk ki, hogy a (28) egyenlőség fennáll esetleg néhány tényező törlése után is. Az összes szimplex biztosan nem törölhető, különben $1-A_n^{p_n}=0$ lenne és akkor készen lennénk. Az $(1-A_n^{p_n})$ tényező sem törölhető, mert ha szimplexek egy szorzata 0 lenne, akkor (23) nem lehet igaz.

Tegyük fel, hogy alkalmas átszámozással

$$0 = S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_m(1-A_n^{p_n}), \quad 1 \leqq m \leqq n-1, \tag{29}$$

és itt már egyetlen tényező sem törölhető. Azt mutatjuk meg, hogy

$$S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_m = \sum H, \tag{30}$$

ahol H valódi részcsoportja G-nek és így az indukciós feltevés szerint a tétel állítása igaz lesz.

Jelölje az S_i szimplexhez tartozó A_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ elemek generálta $U := \langle A_1, A_2, \ldots, A_m \rangle$ részcsoport rendjét u és legyen $v = p_1 p_2 \ldots p_m$, ahol p_i az S_i prímszimplexhez tartozó záró prímkitevő. *Ekkor elegendő az* $u=v$ *egyenlőséget igazolni* és akkor (30)-ban $H = \langle A_1, A_2, \ldots, A_m \rangle =: U$ teljesül.

Előbb belátjuk, hogy u többszöröse v-nek. Valóban, legyen

$$S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_m = C_1+C_2+\ldots+C_v$$

és

$$S_{m+1} \cdot \ldots \cdot S_n = D_1+D_2+\ldots+D_w.$$

Ekkor (23) szerint a

$$\sum G = C_1D_1+C_1D_2+\ldots+C_1D_w+$$
$$+C_2D_1+C_2D_2+\ldots+C_2D_w+$$
$$\ldots$$
$$+C_vD_1+C_vD_2+\ldots+C_vD_w$$

összegben csupa különböző elem szerepel. Ha egy C_rD_s elem $(1\leqq r\leqq v,\ 1\leqq s\leqq w)$ az $U:=\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ generátumhoz tartozik, akkor mivel $C_r\in U$ minden r mellett igaz, ezért $D_s\in U$ is teljesül és így a fenti s-edik oszlop minden elemére

$$C_1D_s, C_2D_s, \ldots, C_vD_s\in U.$$

Ez csak úgy lehet, hogy U rendje, u a v-nek többszöröse.

Most már csak azt kell bizonyítani, hogy u is osztója v-nek. Ebből a célból Hajós György, jóval általánosabban, igazolta az alábbi

Segédtételt: *Ha* $P\in\mathbf{Z}(G)$, $S_1, \ldots, S_s$ *az* $A_1, \ldots, A_s$ *alkotókhoz tartozó prímszimplexek,* $T_1, \ldots, T_t$ *pedig a G Abel-csoport elemei úgy, hogy a*

$$P\cdot S_1\ldots S_s(1-T_1)\ldots(1-T_t)=0 \tag{31}$$

egyenlőségből egyetlen tényező sem törölhető, akkor

$$g(P, A_1, \ldots, A_s, T_1, \ldots, T_t)-g(P)<s+t, \tag{32}$$

ahol $g(X)$ *az X-ben szereplő G-beli elemek generátumának rendjében fellépő nem feltétlenül különböző prímek számát jelöli,* $g(1)=0$.

Úgy tűnik ez a lépés a bizonyítás legfontosabb, legnehezebb része, térjünk rá később vissza.

Segédtételünket $P=1$, $s=m$, $t=1$ *mellett a* (29) *egyenlőségre alkalmazva* ($g(1)=0$ miatt)

$$g(U):=g(A_1, \ldots, A_m)\leqq g(A_1, \ldots, A_m, A_n^{p_n})<m+1. \tag{33}$$

Tehát az U csoport u rendje nem több, mint m darab prímszám szorzata, így $v|u$ és $v=p_1p_2\ldots p_m$ miatt $u=v$.

A Hajós-tételt ezzel bebizonyítottuk, ha igaz a segédtétel.

A segédtétel bizonyítását egy (32)*-höz kapcsolódó lemmával kezdjük.* Ebből a célból jelölje $\bar{B}_k$ $(1\leqq k\leqq s+t=:r)$ vagy az egyik S_i prímszimplexet $(1\leqq k\leqq s)$ $A_i=B_i$ szereposztással, vagy az egyik $1-T_j$ algebraelemet $(s+1\leqq k\leqq s+t=r)$ $T_j=B_{s+j}$ szereposztással.

Lemma. *Ha* $P\in\mathbf{Z}(G)$ *és* $P\bar{B}_1\ldots\bar{B}_k\neq 0$, *akkor érvényes a*

$$g(P, B_1, \ldots, B_r)-g(P, B_1, \ldots, B_k)\leqq \tag{34}$$
$$\leqq g(P\bar{B}_1\ldots\bar{B}_k, B_{k+1}, \ldots, B_r)-g(P\bar{B}_1\ldots\bar{B}_k)$$

egyenlőtlenség $(0\leqq k\leqq r)$.

A lemma bizonyításához definiáljuk a $V=\langle P, B_1, \ldots, B_k\rangle$ és $W=\langle P\bar{B}_1 \ldots \bar{B}_k\rangle$ csoportokat, utóbbi a megfelelő $\mathbf{Z}(G)$-beli elemben fellépő G-beli elemek generátumát jelenti. Világos, hogy $W \leqq V$. Legyen továbbá $Z=\langle B_{k+1}, \ldots, B_r\rangle \leqq G$.

Érvényes az alábbi homomorfizmus:

$$\langle W, Z\rangle/W \to \langle V, Z\rangle/V, \quad x \cdot W \mapsto x \cdot V, \quad x \in \langle W, Z\rangle, \tag{35}$$

ezért a jobb oldal rendje a bal oldal rendjének osztója:

$$g(V, Z)-g(V) \leqq g(W, Z)-g(W). \tag{36}$$

Ez éppen a lemma (35) állítása.

A segédtételt ezután a lemma előtt bevezetett jelölésekkel $s+t=r \geqq 2$ *esetére a*

$$g(B_1)+g(B_2)+\ldots+g(B_r) \tag{37}$$

összeg szerinti indukcióval bizonyítjuk. Az $r=1$ *tanulságos esetet az olvasóra bízzuk.*

Írjuk tehát (31)-et a lemma előtt bevezetett jelölésekkel

$$(P\bar{B}_1 \ldots \bar{B}_k)\bar{B}_{k+1} \ldots \bar{B}_r = 0 \quad (1 \leqq k \leqq r-1) \tag{38}$$

alakba. Minthogy ebből egyetlen $\bar{B}_{k+1}, \ldots, \bar{B}_r$ tényező sem törölhető, indukciós feltevésünk alapján előbb

$$g(P\bar{B}_1 \ldots \bar{B}_k, B_{k+1}, \ldots, B_r)-g(P\bar{B}_1 \ldots \bar{B}_k) < r-k,$$

majd a lemma szerint a bal oldalt tovább csökkentve

$$g(P, B_1, \ldots, B_r)-g(P, B_1, \ldots, B_k) < r-k \quad (1 \leqq k \leqq r-1). \tag{39}$$

Ha (37) minden tagja 1, akkor nyilván

$$g(P, B_1, \ldots, B_{r-1})-g(P) \leqq r-1.$$

Ehhez (39)-nek $k=r-1$ esetét hozzáadva, éppen a

$$g(P, B_1, \ldots, B_r)-g(P) < r \tag{40}$$

egyenlőtlenséget, tehát a segédtétel (32) egyenlőtlenségét kapjuk.

Ezután feltehető, hogy éppen $g(B_r) \geqq 2$, $o(B_r)=pq$ és p prím. Ekkor a $\bar{B}_r=1+A_s+\ldots+A_s^{p_s-1}$ és a $\bar{B}_r=1-T_t$ esetek mindegyikében (26) szerint létezik olyan $R \in \mathbf{Z}(G)$ algebraelem — $R=(1-A_s)(1+A^{p_s}+\ldots+A^{p_s(p-1)})$; illetve $R=1+T_t+\ldots+T_t^{p-1}$ —, amellyel

$$\bar{B}_r R = 1-F_r \quad \text{és} \quad 1 \leqq g(F_r) \leqq g(B_r)-1. \tag{41}$$

A (38)-at és így (31)-et ezzel az R elemmel szorozva, majd az egyenletből esetleg néhány prímszimplex tényezőt törölve, a többit átszámozva, olyan

$$P\bar{B}_1 \ldots \bar{B}_e(1-F_r) = 0 \quad (0 \leqq e \leqq r-1) \tag{42}$$

egyenletet kapunk, melyből már egyetlen prímszimplex sem törölhető és a $g(B_r) \geqq 2$ feltevés (vagyis (41) szerint $g(F_r) \geqq 1$) miatt az $1-F_r$ tényező sem törölhető. De (41) második képlete szerint (42)-höz a (37)-nek kisebb értéke tartozik, azért az indukciós feltevés szerint

$$g(P, B_1, \ldots, B_e, F_r) - g(P) \leqq e \quad (0 \leqq e \leqq r-1). \tag{43}$$

Először legyen $e=0$. Ekkor tehát $g(P, F_r)-g(P)=0$ és (41) miatt $g(P, B_r)-g(P)=1$. Ebből és (39)-nek $k=1$ esetéből következik (40), így a segédtétel.

Másodszor legyen $1 \leqq e \leqq r-1$. Minthogy (43) az F_r elhagyásával még inkább igaz, ezért a $k=e$ esetre vonatkozó (39) hozzáadásával kapjuk (40)-et vagyis a segédtételt.

Így a Hajós-tételt teljes egészében bebizonyítottuk.

* * *

Befejezésül engedtessék meg egy személyes megjegyzés. Sokadmagammal Hajós György lenyűgöző előadásain szerettem meg a geometriát. Szemináriumot, speciális előadásokat is tartott különböző geometriai témákról, pedig már nagybeteg volt akkor. Meglepő módon a Hajós-tételről a hatvanas években nem tartott előadást. Kollégáim elbeszéléséből később megtudtam, hogy nagy eredménye után egy másik „könnyűnek látszó nehéz kérdéssel" a négyszínsejtéssel foglalkozott nagyon sokáig. Amikor Kárteszi Ferencnek egy n-dimenziós térbeli keresztekkel való kitöltési problémáját sikerült megoldanom [7], [11], ő hívta fel a figyelmemet, hogy dolgozatom bizonyítási módszere őt emlékezteti a Minkowski-sejtés Hajós-féle geometriai, majd csoportelméleti eldöntési módjára. Ekkor került kezembe először Hajós György [3] magyar nyelvű dolgozata. Majd egy véletlen folytán a Matematikai és Fizikai Lapok egész évfolyamait találtuk meg felvágatlanul, a háborús időkben már nem tudták szétküldeni őket. Itt találtam meg a Hajós-tétel bizonyítását is tartalmazó [4] dolgozatot. Később Strohmajer János kollégától egy különlenyomatot is kaptam belőle. Az összefoglaló német nyelvű [5] munkát máig nem sikerült megszereznem.

Hajós György sajnos már nem élt akkor. Korai halála mindnyájunk nagy vesztesége. Már nem érhette meg az általa nyitott témakör újabb fejlődését, amelyről a következő előadások [1], [13] számolnak be.

IRODALOM

[1] Corrádi K. és Szabó S.: Rédei László egy tételéről, *Mat. Lapok* **34** (1983—1987), 25—39.

[2] Furtwängler, Ph.: Über Gitter konstanter Dichte, *Monatsh. Math. Phys.* **43** (1936), 281—288.

[3] Hajós Gy.: Többméretű terek befedése kockaráccsal, *Mat. Fiz. Lapok* **45** (1938), 171—190.

[4] Hajós Gy.: Többméretű terek egyszeres befedése kockaráccsal, *Mat. Fiz. Lapok* **48** (1941), 37—64.

[5] Hajós Gy.: Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Zeitschr.* **47** (1941), 427—467.

[6] Keller, O. H.: Über die lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln, *J. Reine Angew. Math.* **163** (1930), 231—248.

[7] Molnár E.: Sui mosaici dello spazio di dimensione n, *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **51** (1971), 177—185.

[8] Rédei L.: Jelentés az 1942. évi König Gyula jutalomról, Hajós György munkáinak ismertetése, *Mat. Fiz. Lapok* **49** (1942), 1—16.

[9] RÉDEI L.: *Algebra, I,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954. 322—326.
[10] RÉDEI L.: *Lacunary Polynomials over Finite Fields,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
[11] SZABÓ S.: Térkitöltő kockarendszerek, *Mat. Lapok* **32** (1981—1984), 49—73.
[12] SZABÓ S.: A reduction of Keller's conjecture, *Periodica Math. Hung.* **17** (1986), 265—277.
[13] CORRÁDI K. és SZABÓ S.: A Hajós—Minkowski-tétel és néhány ehhez kapcsolódó eredmény, *Mat. Lapok* **34** (1983—1987), 41—59.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ХАЙОША ГИПОТЕЗА МИНКОВСКОГО

Э. МОЛНАР

ON HAJÓS' PROOF OF MINKOWSKI'S CONJECTURE

E. MOLNÁR

RÉDEI LÁSZLÓ EGY TÉTELÉRŐL*

CORRÁDI KERESZTÉLY és SZABÓ SÁNDOR

Bevezetés

Legyen G véges Abel-csoport, $A_1, \ldots, A_s$ adott komplexusok G-ben. Azt mondjuk

$$G = A_1 \ldots A_s \tag{1}$$

a G csoport egy faktorizációja, ha a $g \in G$ elem minden rögzített választása esetén g egyértelműen áll elő

$$g = a_1 \ldots a_s, \quad a_j \in A_j, \quad 1 \leqq j \leqq s$$

alakban. Az (1) faktorizációt G egy normált faktorizációjának nevezzük, ha az A_j, $1 \leqq j \leqq s$ komplexusok mind tartalmazzák G 1 egységelemét.

Ha adott a G véges Abel-csoport (1) faktorizációja, e faktorizáció súlya alatt értsük a

$$\prod_{1 \leqq j \leqq s} \prod_{a \in A_j} |a| \tag{2}$$

kifejezést. (Ez az (1) faktorizációt adó A_j, $1 \leqq j \leqq s$ komplexusok egyesítési halmazában szereplő elemek rendjeinek szorzatát jelenti, ha az (1) faktorizáció normált.)

Ha adott a G véges Abel-csoport, s annak az (1) normált faktorizációja, e faktorizációt R-faktorizációnak fogjuk nevezni, ha (1) minden faktorának elemszáma prímszám.

Rédei László 1965-ben igazolta az alábbi állítást.

Tétel (Rédei [4], 1965): *Legyen adott a G véges Abel-csoport* (1) *R-faktorizációja.*

Ekkor van egy

$$\begin{pmatrix} j \\ i_j \end{pmatrix}, \quad 1 \leqq j \leqq s \tag{3}$$

permutáció azzal a tulajdonsággal, hogy a $k \in \mathbf{N}$ minden az $1 \leqq k \leqq n$ közbe eső értéke esetén

$$A_{i_1} \ldots A_{i_k} \tag{4}$$

G-nek részcsoportja.

---

* A dolgozat rövidített formában ismertetésre került az MTA HAJÓS GYÖRGY születésének 75. évfordulója alkalmából rendezett emlékülésén (1987. március 24.).

Rédei László idézett tétele Hajós György 1941-ben igazolt híres tételét általánosítja. Utóbbi szimplex-faktorizációk esetére állítja a (3) alatti permutáció létezését a (4) tulajdonsággal. Ha G véges Abel-csoport, $G^{\#}=G\setminus\{1\}$, $g\in G$ és $m\in\mathbf{N}$ adottak, $m\leqq|g|$, úgy a $\{g;m\}$ szimplex az alábbi

$$\{g;\ m\}\overset{\text{def}}{=}\{g^k|k\in\mathbf{N}\cup\{0\},\ 0\leqq k\leqq m-1\}. \tag{5}$$

A G véges Abel-csoport (1) faktorizációját szimplex-faktorizációnak nevezzük, ha az A_j, $1\leqq j\leqq s$ faktorok mindegyike szimplex.

Hajós György mondott tétele igazolásánál elsőként azt mutatta meg, hogy elég a szimplex-faktorizációk közül csak azokra igazolni tételét, amelyek R-faktorizációk (az ezekben szereplő szimplex-faktorokat prímszimplexeknek szokás nevezni). E redukció mutatja, Rédei tétele valóban a Hajós-tétel általánosítását jelenti.

E dolgozatban Rédei László tételének egy rövidebb új bizonyítását adjuk, amely támaszkodik az eredeti bizonyítás ideáira. Szükségesnek tartjuk, hogy röviden ismertessük a Rédei-féle bizonyítás legfontosabb alapgondolatait, valamint, hogy kimutassuk milyen pontokon, mily változásokat eszközöltünk. A munka 8 részre tagozódik. Ezek tartalma az alábbi. Az 1. és 2. rész tartalmazza a Rédei-féle bizonyítás alapideáit. A 3. részben felsoroljuk az általunk eszközölt változtatásokat. A további részek az általunk adott bizonyítás részleteit tartalmazzák; illetőleg az utolsó 8. rész két, Hajós György, ill. Rédei László mondott tételéhez kapcsolódó problémát tárgyal. A dolgozatban minden faktorizáció normált faktorizációt jelent.

1. Helyettesíthető faktorok

Legyen adott a G véges Abel-csoport. Legyen $\mathbf{C}^*$ a komplex számok multiplikatív csoportja, s vezessük be az

$$\mathcal{I}rr_{\mathbf{C}}(G)=\mathcal{H}om(G;\mathbf{C}^*)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{G}$$

jelölést. Ha $A\subseteqq G$ adott komplexus G-ben, legyen $\mathcal{A}nn(A)$ az A komplexus annulátora az alábbi

$$\mathcal{A}nn(A)\overset{\text{def}}{=}\{\chi|\chi\in\mathcal{G},\ \chi(A)=0\}. \tag{6}$$

Itt mint szokásos

$$\chi(A)=\sum_{a\in A}\chi(a).$$

α) és β) alatt fel fogjuk sorolni azt a két legfontosabb tényt, amelyre Rédei bizonyítása támaszkodik, s amelyek egyúttal a mi bizonyításunknak is alapjául szolgálnak.

α) Legyen G véges Abel-csoport, s legyenek az A_j, $1\leqq j\leqq s$ adott komplexusok G-ben. G-nek e komplexusok pontosan akkor alkotják egy (1) alatti faktorizációját, ha teljesül az alábbi (i) és (ii) feltételpár.

(i)
$$|G|=\prod_{1\leqq j\leqq s}|A_j|,$$

és

(ii)
$$\mathcal{G}^*\subseteqq\bigcup_{1\leqq j\leqq s}\mathcal{A}nn(A_j).$$

Itt $\mathcal{G}^* = \mathcal{G} \setminus \{\chi_0\}$, χ_0 G ún. főkaraktere, melyre $g \in G$ minden választása esetén $\chi_0(g) = 1$.

α) triviális következménye a karakterek ortogonalitási relációinak.

Legyen G véges Abel-csoport, A, B és C adott komplexusok G-ben. Legyen $G = A \cdot B$ G-nek egy faktorizációja. Azt mondjuk G e faktorizációjában a B faktor helyettesíthető a C-vel, ha $G = A \cdot C$ is faktorizációja G-nek.

β) Legyen G véges Abel-csoport, A, B és C komplexusok G-ben. Legyen

$$G = A \cdot B \tag{7}$$

G-nek egy faktorizációja. A (7) faktorizációban B helyettesíthető C-vel, ha egyszerre igaz az alábbi két feltétel.

$$|B| = |C|, \tag{iii}$$

és

$$\mathcal{A}nn(B) \subseteq \mathcal{A}nn(C). \tag{iv}$$

α) és β) alapján Rédei László megfogalmazott 3 észrevételt, amelyeket mi itt reprodukálunk.

1. Propozíció. *Legyen p prím, G véges Abel-féle p-csoport. Legyen $G = A \cdot B$ G-nek egy faktorizációja, amelyben $|B| = p$ áll. Ha $b \in B$ és $b \neq 1$, úgy $C = \{b; p\}$ esetén a mondott faktorizációban B C-vel helyettesíthető.*

2. Propozíció. *Legyen G véges Abel-csoport, s legyen $G = A \cdot B$ G-nek egy faktorizációja, amelyben $|B| = p$ áll, ahol p G rendjének legkisebb prímje. Legyen*

$$C = \{b_{|p} | b \in B\}$$

(itt $b_{|p}$ jelöli a b elem p-részét). Ekkor G mondott faktorizációjában B C-vel helyettesíthető.

3. Propozíció. *Legyen G véges Abel-csoport, p és $q \neq p$ G rendjének adott prímei. Legyen $G = A \cdot B$ G-nek egy faktorizációja, amelyre $|B| = p$ áll, s tegyük fel: B bármely rögzített elemének rendje nem tartalmaz p és q-tól különböző prímet. Legyen $l \in \mathbf{N}$ adott, s legyen $(l, p) = 1$. Ha*

$$C \overset{\text{def}}{=} \{b^l_{|p} | b \in B\},$$

akkor G mondott faktorizációjában B helyettesíthető C-vel.

E propozíciók bizonyításához standard módszerek kellenek, s eredményeik ismerteknek vehetők. Megjegyezzük, hogy a 2. Propozíció igazolásához kell az alábbi észrevétel. Ha $n \in \mathbf{N}$ adott, k darab n-edik egységgyök összege csak akkor lehet 0, ha $k \geqq p$, ahol p az n minimális prímje. Egyszerű bizonyítását l. Wittman [7].

2. Rédei bizonyítása

Rédei s szerinti indukciót alkalmaz tétele igazolásához. Elsőnek a p-csoportok esetét intézi el. Ha $s = 2$ és G p^2-rendű elemi Abel-csoport, amelynek adott az (1) R-faktorizációja, akkor igazolja, hogy A_1 és A_2 valamelyike csoport. Bizonyításának ezt a részét Wittman [6] lényegesen egyszerűsítette.

Ezt követően Rédei azt igazolja, hogy az (1) R-faktorizáció tartalmaz egy A_j, $1 \leqq j \leqq s$ faktort, amelynek 1-től különböző elemei mind p-rendűek. Ehhez az 1. Propozíciót és Hajós György tételének p-csoportokra vonatkozó állítását használja. Ebből a tényből már adódik, ciklikus p-csoportokra igaz Rédei tétele. Így a továbbiakban $s \geqq 3$ feltehető. Most használva az s szerinti indukciót, előbb az elemi Abel-féle p-csoportokra, majd bármely p-csoportra belátja tétele helyességét.

Abban az esetben, ha G véges összetett rendű Abel-csoport, Rédei az s szerinti indukciós bizonyítás kivitelezésében a (2) alatti súly segítségéhez folyamodik, amely lehetővé teszi tétele igazolását. Bizonyításának ez a legkevésbé áttekinthető része.

3. Változtatásaink

Új bizonyítást adunk a p^2-rendű elemi-Abel p-csoportok esetére, amely többet ad, s egyúttal egyszerűbb a Wittman-féle bizonyításnál. A p-csoportokra vonatkozó Hajós-tétel Rédei-féle bizonyítását egyszerűsítjük egy ponton úgy, hogy egyúttal megszabadítjuk e bizonyítást egyetlen olyan pontjától, amely gyűrűelméleti meggondolást igényelt. Ezzel a Rédei-bizonyítás tisztán csoportelméleti bizonyítássá válik.

Új, rövid, egységes bizonyítást adunk p-csoportok esetére. Ugyancsak egységes, új, rövid bizonyítást adunk a nem p-csoport esetre is. Utóbbi azáltal válik lehetővé, hogy a 3. Propozíciót helyettesítjük egy erősebb formájával.

4. Egy propozíció

4. Propozíció. *Legyen G véges Abel-csoport, p és $q \neq p$ G rendjének prímjei, $l \in \mathbf{N}$ adott, amelyre $(l, p)=1$. Legyen $G=A \cdot B$ G-nek faktorizációja, amelyben $|B|=p$ áll és B bármely elemének rendje nem osztható a p és q prímektől különböző prímmel. Legyen $B_0 \subseteqq B$ adott nem üres részhalmaz, amely tartalmaz 1-től különböző B-beli elemet. Ha $b \in B$, a b^* elem legyen az alábbi:*

$$b^* = \begin{cases} b|_p^l, & \text{ha} \quad b \in B_0, \\ b^l, & \text{ha} \quad b \in B \setminus B_0. \end{cases}$$

Legyen végezetül a C G-beli komplexus a

$$C \overset{\text{def}}{=} \{b^* | b \in B\}$$

módon adott. Ekkor G mondott faktorizációjában B C-vel helyettesíthető. Továbbá B helyettesíthető az elemei l-edik hatványaiból álló faktorral is.

Bizonyítás. Elég igazolni, hogy $\chi \in \mathscr{A}nn(A)$ esetén van egy $\varrho_\chi = \varrho \in \mathbf{C}$, amelyre $\varrho^p = 1$ és $\varrho \neq 1$ az alábbi tulajdonsággal:

$$\{\chi(b) | b \in B\} = \{\varrho^m | 0 \leqq m \leqq p-1\}.$$

Nevezetesen, ha ez sikerült, $b \in B$ minden rögzítése esetén $\chi(b)=\chi(b|_p)$ adódik, s így

$$\chi(C) = \sum_{b \in B_0} \chi(b|_p^l) + \sum_{b \in B \setminus B_0} \chi(b^l) = \sum_{b \in B} \chi(b)^l = \sum_{m=0}^{p-1} \varrho^{ml} = 0,$$

s vele $\mathscr{A}nn(B) \subseteq \mathscr{A}nn(C)$ adódik, ami mutatja, hogy B C-vel valóban helyettesíthető.

Elsőnek azt igazoljuk, van $b \in B$, amelyre $\chi(b)$ nem q-hatvány egységgyök. Ha ilyen b nem lenne, választhatnánk minimális $n \in \mathbf{N}$ számot, amelyre $b \in B$ minden választása esetén

$$\chi(b)^{q^n} = 1$$

teljesülne. A $b_1 \in B$ és a σ q^n-edik primitív egységgyök megválaszthatóak $\chi(b_1) = \sigma$ módon.

Legyen $b_0 = 1$, $B = \{b_k | 0 \leqq k \leqq p-1\}$ s az α_k egészeket a $0 \leqq \alpha_k \leqq q^n - 1$ közben válasszuk meg a $\chi(b_k) = \sigma^{\alpha_k}$ egyenlőségből, $0 \leqq k \leqq p-1$. Ekkor $\alpha_0 = 0$ és $\alpha_1 = 1$. Legyen

$$F(x) = \sum_{k=0}^{p-1} x^{\alpha_k} \in \mathbf{Z}[x].$$

Mivel $\chi \in \mathscr{A}nn(B)$, σ értelmezése miatt $F(\sigma) = 0$. Ha $K_{q^n}(x)$ jelöli a q^n-edik körosztási polinomot, $K_{q^n}(x)$ irreducibilis lévén $\mathbf{Q}[x]$ felett és $F(\sigma) = K_{q^n}(\sigma) = 0$ állván, van $T(x) \in \mathbf{Q}[x]$, amelyre $F(x) = K_{q^n}(x) \cdot T(x)$. Mivel $F(x)$ és $K_{q^n}(x)$ monikus $\mathbf{Z}[x]$-beli polinomok, $T(x) \in \mathbf{Z}[x]$ következik. De ekkor

$$p = F(1) = K_{q^n}(1) T(1) = q \cdot e$$

következik, ahol $e = T(1) \in \mathbf{Z}$. $p \neq q$ és p és q prím lévén ez az egyenlőség: $p = q \cdot e$ nem áll. Van tehát $b \in B$, amelyre $\chi(b)$ nem q-hatvány egységgyök.

Legyen $r \in \mathbf{N}$ minimális, amelyre $b \in B$ minden rögzített választása esetén

$$\chi(b_{|p})^{p^r} = 1.$$

$r \geqq 1$ áll az előbb mondottak miatt. Mint előbb, van $b_1 \in B$ elem és τ primitív p^r-edik egységgyök, amelyekre $\chi(b_{1|p}) = \tau$. Legyen $b_0 = 1$, $B = \{b_k | 0 \leqq k \leqq p-1\}$. A $b_k \in B$ elem egyértelműen írható

$$b_k = b_{k|p} b_{k|q} \quad (1 \leqq k \leqq p-1)$$

p-rész és q-rész szorzataként. Legyenek a $\lambda_k \in \mathbf{C}$ és $\beta_k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ egészek a

$$\lambda_k \overset{\text{def}}{=\!=} \chi(b_{k|q}), \quad \tau^{\beta_k} \overset{\text{def}}{=\!=} \chi(b_{k|p}) \quad (1 \leqq k \leqq p-1),$$

s a β_k-k legyenek $0 \leqq \beta_k \leqq p^r - 1$ módon véve.

Ha $\lambda_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, legyen

$$G(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k x^{\beta_k}.$$

Legyen $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ minimális, amelyre $k \in \mathbf{N}$ minden $1 \leqq k \leqq p-1$-beli rögzített értékére

$$\lambda_k^{q^n} = 1.$$

Legyen $R = \mathbf{Q}$, ha $n = 0$. Ha $n \geqq 1$ áll, legyen η rögzített q^n-edik egységgyök, s válasszuk az R testet $R = \mathbf{Q}(\eta)$ módon. Ekkor $G(x) \in R[x]$ és $G(\tau) = 0$. Mivel $(p^r, q^n) = 1$, $K_{p^r}(x)$ R felett irreducibilis. $G(\tau) = K_{p^r}(\tau) = 0$ miatt van $U(x) \in R[x]$, amelyre $G(x) = K_{p^r}(x) U(x)$.

Mivel $\deg G(x) \leqq p^r - 1$ és $\deg K_{p^r}(x) = p^{r-1}(p-1)$ áll, $\deg U(x) \leqq p^{r-1} - 1$ adódik. Jelölje $V(x) \in R[x]$ esetén $v(V(x))$ a $V(x)$ polinom tagjai számát.

Mivel

$$K_{p^r}(x) = \sum_{l=0}^{p-1} x^{l \cdot p^{r-1}},$$

továbbá $G(x) = U(x) K_{p^r}(x)$, így $\deg G(x)$, $\deg K_{p^r}(x)$ és $\deg U(x)$ értékei

$$v(G(x)) = v(K_{p^r}(x))\, v(U(x))$$

és

$$v(G(x)) \leqq p = v(K_{p^r}(x))$$

egyidejű fennállására vezetnek. E két összefüggésből $v(G(x)) = p$ és $v(U(x)) = 1$ adódik. Így $G(0) = 1$. Ebből $G(0) = K_{p^r}(0) U(0)$ és $K_{p^r}(0) = 1$ miatt $U(0) = 1$ adódik. Így $v(U(x)) = 1$ miatt $U(x) = 1$. Tehát $G(x) = K_{p^r}(x)$. Ez a propozíció bizonyításához szükséges állítás helyességét jelenti.

Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy e propozíció bizonyítása standard. Csupán illusztrációs és kontroll célokból lett közölve.

5. A p^2-rendű elemi-Abel-csoportok esetére adott bizonyításunk

Először igazoljuk az alábbi, Rédei Lászlótól származó állítást.

Tétel (Rédei, [5]). *Legyen G p^2-rendű elemi-Abel-csoport. Legyenek S_t, $1 \leqq t \leqq \frac{p+1}{2}$ a G páronként különböző p-ed rendű részcsoportjai. Legyen R az S_t, $1 \leqq t \leqq \frac{p+1}{2}$ részcsoportok egy közös reprezentáns rendszere G-ben. Ha R tartalmazza G egységelemét, akkor R részcsoport G-ben.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in R^{\#} = R \setminus \{1\}$, s tegyük fel indirekt, hogy $R \neq \langle \alpha \rangle$. Válasszuk $\beta \in G$-t úgy, hogy $\{\alpha, \beta\}$ bázisa legyen G-nek.

Legyen

$$S_t = \langle \alpha \cdot \beta^{b_t} \rangle, \quad 1 \leqq t \leqq \frac{p+1}{2}$$

$$R = \{\alpha^{c_n} \beta^{d_n} \mid 0 \leqq n \leqq p-1\}.$$

$1 \in R$ miatt $c_0 = d_0 = 0$ tehető. $R \neq \langle \alpha \rangle$ és $\alpha \in R$ miatt $c_1 = 1$, $d_1 = 0$ is tehető, valamint alkalmas $n \in \underline{N}$, $2 \leqq n \leqq p-1$ esetén $d_n \neq 0$. Itt természetesen

$$0 \leqq c_n, \quad d_n \leqq p-1 \quad (2 \leqq n \leqq p-1)$$

feltehető. Mivel S_t-nek R reprezentáns rendszere $\{d_n - b_t c_n \mid 1 \leqq n \leqq p-1\}$ redukált maradékrendszer modulo p. Így $l \in \underline{N}$ minden $1 \leqq l \leqq p-2$ választása esetén

$$\sum_{1 \leqq n \leqq p-1} (d_n - b_t c_n)^l \equiv 0 \pmod{p}. \tag{8}$$

Rögzítsük $l \in \mathbf{N}$ értékét az $1 \leqq l \leqq p-2$ közben. Legyen $F_l(x)$ az alábbi

$$F_l(x) = \sum_{1 \leqq n \leqq p-1} (d_n - c_n x)^l. \tag{9}$$

Minden ilyen l rögzítésnél (8) miatt az $F_l(x) \equiv 0 \pmod p$ kongruencia különböző megoldásai száma $\geqq \frac{p+1}{2}$. $\left(\text{Az } x = b_t,\ 1 \leqq t \leqq \frac{p+1}{2} \text{ ilyen megoldások}\right)$. Így az $l \in \mathbf{N}$ az $1 \leqq l \leqq \frac{p-1}{2}$ közbe eső értékeire $F_l(x)$ minden együtthatója p-vel osztható. Speciálisan

$$V_l \overset{\text{def}}{=} F_l(0) = \sum_{1 \leqq n \leqq p-1} d_n^l \equiv 0 \pmod p \quad \left(1 \leqq l \leqq \frac{p-1}{2}\right). \tag{10}$$

Legyenek $y_1, \ldots, y_{p-1}$ határozatlanok, $w_l = w_l(y_1, \ldots, y_{p-1})$ szimmetrikus alappolinomjaik, $1 \leqq l \leqq p-1$. Jelölje továbbá $W_l = W_l(y_1, \ldots, y_{p-1})$ e határozatlanok l-edik hatványainak összegét, ha $l \in \mathbf{N}$.

E hatványösszegekre vonatkozó Newton-formulák miatt $l \in \mathbf{N}$ minden $1 \leqq l \leqq p-2$-beli rögzítése esetén van egy $H_l(y_1, \ldots, y_l) \in \mathbf{Z}[y_1, \ldots, y_l]$ polinom, amelyre

$$l!\, w_l = H_l(W_1, \ldots, W_l) \quad \text{és} \quad H_l(0, \ldots, 0) = 0. \tag{11}$$

Az $l \in \mathbf{N}$ minden $1 \leqq l \leqq p-2$-beli rögzítése esetén legyen

$$v_l = w_l(d_1, \ldots, d_{p-1}) \quad \text{és} \quad V_l = W_l(d_1, \ldots, d_{p-1}).$$

Ha $l \in \mathbf{N}$ értékét $1 \leqq l \leqq \frac{p-1}{2}$-ben rögzítjük, (10) és (11) miatt

$$v_l \equiv 0 \pmod p \quad \left(1 \leqq l \leqq \frac{p-1}{2}\right) \tag{12}$$

következik.

Értelmezzük $K = GF(p)$ esetén az $F(x) \in K[x]$ polinomot az alábbi módon.

$$F(x) = \prod_{1 \leqq n \leqq p-1} (x - d_n^*). \tag{13}$$

Itt d_n^* a d_n elem $\bmod p$ vett maradékosztályával azonosítható $GF(p)$-beli elem. Legyen $G(x) = xF(x)$, s legyen $L(x) \in K[x]$ az alábbi polinom.

$$L(x) = G(x) - (x^p - x) \quad (\neq 0). \tag{14}$$

Erre az $L(x) \in K[x]$ polinomra $\deg L(x) \leqq \frac{p-1}{2}$ áll (12), (13) $G(x)$ és $L(x)$ értelmezése miatt. $G'(x) \neq 0$ áll, mivel van $n \in \mathbf{N}$, amelyre $d_n^* \neq 0$. Mivel $d_1^* = 0$ és $G(x) = xF(x)$ áll, az $x = 0$ $G(x)$-nek legalább 2-szeres gyöke. Legyen $M(x)$ az $F(x)$ különböző gyöktényezőinek szorzata. Ekkor

$$M(x) | L(x)$$

és

$$\frac{G(x)}{M(x)} | G'(x) = L'(x) - 1$$

egyszerre teljesülnek. Tehát

$$G(x)|L(x)(L'(x)-1)$$

igaz.

De $\deg G(x)=p$ és $\deg L(x)\leqq\frac{p-1}{2}$ miatt ez csak úgy lehet, ha $L'(x)=1$. Ez azonban $G'(x)=0$ teljesülését adja, ami nem áll. A kapott ellentmondás adja: R csoport kell legyen.

Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy a bizonyítás befejező része: az $L(x)$ (14) definíciójától kezdve Rédei [5] (35. old.) bizonyításának reprodukciója.

Legyen ezek után G p^2-rendű elemi-Abel-csoport, s annak (1) egy R-faktorizációja. Legyenek S_t, $1\leqq t\leqq p+1$ G különböző p-ed rendű részcsoportjai. Vannak $\chi_t\in\mathscr{I}rr_C(G)$ karakterek, amelyekre

$$S_t=\mathscr{K}er\,\chi_t \quad (1\leqq t\leqq p+1)$$

igaz. Mivel (1) G-nek egy R-faktorizációja, $t\in\mathbf{N}$, $1\leqq t\leqq p+1$ minden rögzítése esetén $\chi_t(A_1)=0$ és $\chi_t(A_2)=0$ legalább egyike áll. Így az (1) faktorai sorrendjének alkalmas választásával elérhető, hogy $\chi_t(A_1)=0$ a $t\in\mathbf{N}$ legalább $\frac{p+1}{2}$ db $1\leqq t\leqq p+1$-beli értéke esetén álljon. E t értékek esetén A_1 az S_t G-beli részcsoportok közös reprezentáns rendszere. Így az előző tétel miatt A_1 G-nek részcsoportja kell legyen. Ez befejezi Rédei tétele bizonyítását a p^2-rendű elemi-Abel-csoportok esetében.

Q.e.d.

6. Rédei tételének bizonyítása p-csoportokra

Először reprodukáljuk a véges Abel-féle p-csoportokra vonatkozó Hajós-tétel Rédei-féle bizonyítását a 3. részben említett egyszerűsítéssel.

Kell az alábbi Rédei Lászlótól származó

Lemma (Rédei [3], 1955). *Legyen G véges Abel-féle p-csoport, $|G|=p^n$. Legyen $\Omega=\{j|1\leqq j\leqq n\}$. Ha adottak G-ben az $a_j\in G$, $1\leqq j\leqq n$ elemek úgy, hogy a $\Gamma\subseteqq\Omega$ nem-üres részhalmaz bármely rögzített választása esetén*

$$\left|\langle a_j|\,j\in\Gamma\rangle\right|\geqq p^{|\Gamma|}$$

teljesül (az $\{a_j|\,j\in\Gamma\}$ elemek G-ben egy legalább $p^{|\Gamma|}$ elemszámú részcsoportot generálnak), akkor találhatóak $m_j\in\mathbf{N}$ p-hatványok, $1\leqq j\leqq n$ amelyekre $A_j\overset{\text{def}}{=}\{a_j^{m_j};\ p\}$ esetén, az A_j, $1\leqq j\leqq n$ komplexusok G egy (1) R-faktorizációját adják, s e faktorizációra létezik a (3) alatti permutáció, a (4)-beli tulajdonsággal.

Bizonyítás. Indukciót alkalmazunk n-re. Ha $n=1$ az állítás triviális. Legyen $n\in\mathbf{N}\setminus\{1\}$ minimális, amelyre az állítás még nem igazolt, s legyenek G valamint az $a_j\in G$, $1\leqq j\leqq n$ elemek úgy választva, hogy ezen elemek rendjei szorzata ugyancsak lehető minimális, amire még nem igazoltuk az állítást. Két esetet különböztetünk meg.

i) A $\Gamma\subseteqq\Omega$ nem üres valódi részhalmaz minden választása esetén

$$\left|\langle a_j|\,j\in\Gamma\rangle\right|\geqq p^{|\Gamma|+1}.$$

Ekkor az a_1^p, a_j, $2 \leqq j \leqq n$ G-beli elemekre ugyancsak érvényes a lemma állítása. Mivel ezen elemek rendjei szorzata kisebb az eredeti elemek rendjei szorzatánál, a megváltoztatott rendszerre választásunk folytán érvényes a lemma állítása. Alkalmas l_j, $1 \leqq j \leqq n$ p-hatványok választása esetén.

Ekkor azonban

$$m_j \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} pl_1, & \text{ha } j = 1, \\ l_j, & \text{ha } j \neq 1 \end{cases}$$

választást véve a lemma állítása ezen m_j, $1 \leqq j \leqq n$ p-hatványok esetén az eredeti elemekre is igaz.

ii) Van $\Gamma \subseteq \Omega$ nem üres valódi részhalmaz, amelyre érvényes az

$$\left|\langle a_j | j \in \Gamma \rangle\right| = p^{|\Gamma|}$$

egyenlőség. Legyen $H = \langle a_j | j \in \Gamma \rangle$. Ekkor az n választása miatt H-ban az a_j, $j \in \Gamma$ elemekre, G/H-ban pedig az a_j, $j \in \Omega \setminus \Gamma$ elemek $\bar{a}_j$ képeire teljesül a lemma feltétele, s így állítása is. Ezek alapján az m_j, $1 \leqq j \leqq n$ p-hatványok és a kívánt

$$\binom{j}{i_j}, \quad 1 \leqq j \leqq n$$

permutáció könnyen megkonstruálható. Ez a lemma állítását igazolja.

Q.e.d.

Ezek után a p-csoportokra vonatkozó Hajós-tétel Rédei-féle bizonyítása az alábbi.

Legyen adott a G véges p-csoport, s annak (1) R-faktorizációja, amelyben $A_j = \{a_j; p\}$, $1 \leqq j \leqq n$. A lemma miatt vannak m_j, $1 \leqq j \leqq s$ p-hatványok, amelyekre a lemma-beli permutáció létezik a mondott tulajdonsággal. A Hajós-tétel igazolásához elég igazolni, hogy $m_j = 1$ áll $1 \leqq j \leqq n$ minden választására. Tegyük fel, hogy nem minden j-re áll $m_j = 1$. A sorrendet választhatjuk úgy, hogy m_j, $1 \leqq j \leqq m_0$ 1-től különböző p-hatvány, s ha $m_0 < s$, legyen $m_{m_0+1}, \ldots, m_s$ mindegyike 1.

G-nek vegyük a

$$G = \{a_1^{m_1}; p\} \ldots \{a_s^{m_s}; p\} \tag{15}$$

R-faktorizációját. Vegyük, ez az általunk bevezetett új ötlet, az $a_1 \ldots a_{m_0} \in G$ elemet.

Mivel G-nek

$$G = \{a_1; p\} \ldots \{a_s; p\} \tag{16}$$

is egy faktorizációja, $a_1 \ldots a_{m_0} \neq 1$. Az előző, (15) faktorizáció miatt

$$a_1 \ldots a_{m_0} = \prod_{1 \leqq j \leqq s} a_j^{m_j u_j}, \tag{17}$$

ahol $u_j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $0 \leqq u_j < p$. Ebből adódik, hogy

$$\prod_{1 \leqq j \leqq s} a_j^{v_j} = 1. \tag{18}$$

Itt $v_j = m_j u_j - 1$, $1 \leqq j \leqq m_0$ és $v_j = u_j$, $m_0 + 1 \leqq j \leqq s$. Mivel $(v_j, p) = 1$, $1 \leqq j \leqq m_0$

áll, (18) ellentmond annak, hogy (16) miatt G-nek

$$G = \{a_1^{v_1};\ p\}\ldots\{a_{m_0}^{v_{m_0}};\ p\}\{a_{m_0+1};\ p\}\ldots\{a_s;\ p\} \tag{19}$$

ugyancsak faktorizációja a 3. Propozíció ismételt alkalmazása miatt. Az ellentmondás mutatja: p-csoportokra érvényes Hajós tétele.

Q.e.d.

E paragrafus maradó részét a p-csoportokra vonatkozó Rédei-tétel igazolása teszi ki.

Legyen adott a G véges Abel-féle p-csoport (1) R-faktorizációja. Elég az indukciós bizonyítás számára azt igazolni, hogy az $s \geqq 3$ minimális tényező-számot véve (1)-ben, amelyre a Rédei-tétel még nem igazolt, az A_j, $1 \leqq j \leqq s$ faktorok között van csoport. Ha A_{i_1} egy ilyen, a $\bar{G} = G/A_{i_1}$ csoport számára egy (1)-típusú R-faktorizáció adódik. Így s választása miatt erre igaz a Rédei-tétel állítása. Ez maga után vonja (az ősképeket véve), hogy G (1) R-faktorizációjára is igaz a Rédei-tétel állítása.

Feltehető tehát az s mondott választását véve, hogy G (1) R-faktorizációjában az A_j, $1 \leqq j \leqq s$ faktorok egyike sem csoport, s ebből kell ellentmondást levezetni.

Elsőként azt igazoljuk, amit Rédei is tett eredeti bizonyításban, hogy G (1) R-faktorizációja tartalmaz egy $j \in \mathbf{N}$, $1 \leqq j \leqq s$ indexnek megfelelő A_j faktort, amelynek minden 1-től különböző eleme p-ed rendű. Ha ez nem lenne igaz $j \in \mathbf{N}$, $1 \leqq j \leqq s$ minden értéke esetén volna $a_j \in A_j$, amelyre $|a_j| \equiv 0 \pmod{p^2}$ áll. Ekkor az 1. Propozíció alkalmazása adná, hogy G-nek

$$G = \{a_1, p\}\ldots\{a_s;\ p\} \tag{20}$$

egy R-faktorizációja, amelynek faktorai prímszimplexek. Ekkor Hajós bizonyított tétele miatt kell $j \in \mathbf{N}$, $1 \leqq j \leqq s$ indexnek léteznie, amelyre $\{a_j; p\} = \langle a_j \rangle$, vagy ami ezzel egyenértékű, olyan j, amelyre $a_j^p = 1$. Ellentmondás adódott az a_j, $1 \leqq j \leqq s$ elemek tett választásával. Így valóban kell $j \in \mathbf{N}$, $1 \leqq j \leqq s$ indexnek léteznie, amelyre A_j minden 1-től különböző eleme p-ed rendű. Itt $s \geqq 3$ teljesülését még nem használtuk. A kapott eredmény mutatja, hogy minden G véges ciklikus p-csoport esetén igaz a Rédei-tétel állítása. Ez az 5. rész eredményével együtt mutatja, hogy az $s \geqq 3$ egyenlőtlenség joggal feltehető.

Ismertetjük új utunkat, amely a G véges p-csoport (1) R-faktorizációja esetén minimális $s \in \mathbf{N}$-re, amely olyan, hogy (1) A_j, $1 \leqq j \leqq s$ faktorai egyike sem csoport, ellentmondást ad.

Legyen $u \in A_1$ és $H = \langle u \rangle$. Az 1. Propozíció miatt G (1) R-faktorizációjában A_1 helyettesíthető H-val, ha $|u| = p$ áll. Jelöljük A_1-gyel (1) egy olyan faktorát, amelynek minden 1-től különböző eleme p-ed rendű. Ilyen, láttuk, van. Ezt véve, e faktor H-val pótolható, s minimális választása miatt a további faktorok alkalmas indexelése esetén feltehető, hogy $j \in \mathbf{N}$, $2 \leqq j \leqq s$ minden rögzített értékére a $HA_2 \ldots A_j$ G-nek részcsoportja. Legyen $K = HA_2 \ldots A_{s-1}$. Ekkor H G-nek p-indexű maximális részcsoportja. $A_1 \nleqq K$ áll. Ellenkező esetben $K = A_1 \ldots A_{s-1}$ K-nak egy R-faktorizációja lenne, s így s választása miatt volna $j \in \mathbf{N}$, $1 \leqq j \leqq s-1$, amelyre A_j G-nek részcsoportja. Ez nem áll. Vegyünk $v \in A_1$ elemet, amelyre $v \notin K$. Legyen $L = \langle v \rangle$. Ekkor $L \cap K = 1$ és $G = LK$. Vegyük észre: G-nek az 1. Propozíció miatt $LA_2 \ldots A_s = G$ ugyancsak R-faktorizációja, s választása miatt van olyan $j \in \mathbf{N}$, $2 \leqq j \leqq s$ index, amelyre LA_j G-nek p^2-rendű részcsoportja. $j = s$ kötelező. Ha $j \neq s$ lenne, $A_j = K \cap LA_j$ adódna, s így A_j G-beli részcsoport lenne, mivel $A_j \leqq K \cap LA_j$ és $|A_j| = |K \cap LA_j| = p$ áll. Ez nem áll. Tehát $j = s$, azaz LA_s G-nek részcsoportja.

Ha LA_s ciklikus csoport lenne, $L=\Phi(LA_s)\subseteq\Phi(G)\leqq K$ adódna, ami nem áll. (Itt $\Phi(G)$ G Frattini-részcsoportja.) Így LA_s p^2-rendű elemi-Abel-féle p-csoport kell legyen. Speciálisan $A_s^{\#}$ elemei mind p-ed rendűek. Ha $w\in A_s^{\#}$ és $M=\langle w\rangle$, $G=MA_1\ldots A_{s-1}$ G-nek R-faktorizációja (ismét az 1. Propozíció miatt). Ezért s választása adja, van $j\in\mathbf{N}$ index $1\leqq j\leqq s-1$-ben, amelyre MA_j G-beli p^2-rendű részcsoport. Itt $j=1$ kötelező. Ha $j\neq 1$ lenne, $A_j=K\cap MA_j$ adódna, mint előbb, s így A_j G-beli részcsoport lenne. Ez nem áll. Így valóban $j=1$. De így LA_s és MA_1 egyszerre p^2-rendű részcsoportjai G-nek. Most L és M választása miatt $L\times M\subseteq$ $\subseteq LA_s\cap MA_1$ és $p^2=|L\times M|=|LA_s|=|MA_1|$ egyszerre állnak. Ebből $LA_s=MA_1$ adódik. Ez viszont azt jelenti, hogy A_1A_s p^2-rendű részcsoport G-ben, s ennek A_1A_s egy R-faktorizációja. Így az 5. rész eredménye miatt A_1 és A_s valamelyike G-nek részcsoportja kell legyen. Ez a végső ellentmondás.

Q.e.d.

7. A Rédei-tétel bizonyításának befejező része

Legyen G véges Abel-csoport, annak (1) egy R-faktorizációja. Válasszuk s értékét minimálisnak úgy, hogy az A_j, $1\leqq j\leqq s$ faktorok egyike sem csoport. Az ilyen választások közül vegyünk egy olyat, amelyre a (2) alatti invariáns lehető minimális. A 6. rész miatt G nem p-csoport. Jelölje p G rendje minimális prímjét, P G Sylow p-részcsoportját. G (1) faktorizációjának van olyan A_j, $1\leqq j\leqq s$ faktora, amelyre $|A_j|=p$, s az A_j nem minden eleme p-elem. Ellenkező esetben G (1) faktorizációjában az $|A_j|=p$ feltételt kielégítő faktorok P egy faktorizációját adnák. Ekkor azonban a 6. rész eredménye miatt a P faktorizációjában szereplő A_j faktorok valamelyike csoport kellene legyen. Ez nem áll. Így a kívánt A_j van. A 2. Propozíció miatt e faktor az (1) faktorizációban helyettesíthető az elemei p-részeiből álló B_1 faktorral. A keletkezett új faktorizáció (2) invariánsa kisebb, mint az (1) faktorizációé. Így a választás miatt az új faktorizáció faktorait alkalmasan rakva sorba, G-nek egy

$$G=B_1B_2\ldots B_s \tag{21}$$

R-faktorizációja adódik, amelyben $k\in\mathbf{N}$, $1\leqq k\leqq s$ minden rögzített értéke esetén $B_1\ldots B_k$ G-nek részcsoportja. Itt $B_2, \ldots, B_s$ az (1) R-faktorizáció faktorai. $|B_1|=p$ áll. Legyen $j_0\in\mathbf{N}$, $1\leqq j_0\leqq s$ minimális, amelyre $|B_{j_0}|=q\neq p$ áll. Ekkor $q\|B_1\ldots B_{j_0}|$ áll. Így ha B_{j_0} minden eleme q-elem lenne, B_{j_0} a $B_1\ldots B_{j_0}$ csoport Sylow q-részcsoportja kellene legyen, ami lehetetlen, mivel B_{j_0} nem részcsoport G-ben. A 4. Propozíció miatt a (2) invariáns választása azt adja, hogy B_{j_0}-nak egyetlen eleme van, amely nem q-elem. Mivel $2\leqq j_0\leqq s$ áll, B_{j_0} az (1) R-faktorizációnak egy faktora. A 3. Propozíció miatt G (1) R-faktorizációjában B_{j_0} helyettesíthető az elemei q-részeiből álló C_1 faktorral. A helyettesítést elvégezve G új faktorizációjára a (2) invariáns értéke kisebb, mint az (1) R-faktorizáció esetén. Így a választás miatt az új faktorizáció faktorait alkalmas sorrendbe írva e faktorizáció írható, mint

$$G=C_1C_2\ldots C_s. \tag{22}$$

Ez G egy R-faktorizációja, s a $k\in\mathbf{N}$, $1\leqq k\leqq s$ index minden választása esetén $C_1\ldots C_k$ G-nek részcsoportja. Továbbá C_j, $2\leqq j\leqq s$ esetén C_j faktor az (1) R-faktorizációban is. Legyen $L=C_1\ldots C_{s-1}$. L G-nek maximális részcsoportja.

Ha $B_{j_0} \leqq L$ állna, $L = B_{j_0} C_2 \dots C_s$ L-nek R-faktorizációja lenne, amelyben e választását figyelembe véve a faktorok valamelyike csoport kellene legyen. Mivel s faktorok valamennyien faktorai az (1) R-faktorizációnak is, ez lehetetlen. Tehát $B_{j_0} \not\leqq L$ áll. Láttuk B_{j_0}-nak egyetlen b eleme van, amely nem q-elem. Mivel b rendje csak a p és q prímekkel osztható $B_{j_0} \not\leqq L$ miatt $b \notin L$ és $|G:L| = p$ adódik.

A $G = LC_s$ faktorizációból következik, C_s elemei G-nek az L szerint egy reprezentáns-rendszerét alkotják. Van tehát $x_1 \in C_s$ elem, amelyre $b^{-1}x_1 \in L$ áll.

Legyen most $D_1 = (C_1 \setminus \{b_{|q}\}) \cup \{b^{-1}x_1\}$.

Vegyük észre, hogy

$$L = D_1 C_2 \dots C_{s-1} \tag{23}$$

az L R-faktorizációja. Így az s választása miatt D_1 csoport kell legyen. Ezért $D_1 = C_1$ és $x_1 = b_{|p}$ adódik.

Ha $k \in \mathbf{N}$, $1 \leqq k \leqq p-1$ értékét rögzítjük, $(k, pq) = 1$ áll $p < q$ miatt. G (1) R-faktorizációjában B_{j_0} helyettesíthető az elemei k-adik hatványaiból álló faktorral. Egyidejűleg ugyanezt tehetjük a G (22) R-faktorizációjában a C_1, valamint L (23) R-faktorizációjában a D_1 esetén. A (2) invariáns kontrollja mutatja, a B_{j_0}, C_1, D_1 hármasra mondottak igazak maradnak a helyettesítő hármasra is. Így speciálisan adódik $x_k \in C_s$ elem, amelyre $x_k = b^k_{|p}$. Mivel ez $1 \leqq k \leqq p-1$ minden értékére igaz, s $1 \in C_s$ teljesül, így $C_s = \{b^k_{|p} | 0 \leqq k \leqq p-1\}$. Ez azt jelenti, hogy $|b_{|p}| = p$ esetén C_s G-nek részcsoportja. Nem ez a helyzet, így $p^2 \| |b_{|p}|$ vagy ami ezzel egyenértékű, $p \| |b^p_{|p}|$ áll. A végső ellentmondás most azáltal adódik, hogy G (1) R-faktorizációjában a B_{j_0} faktort helyettesíteni lehet az elemei p-edik hatványai által adódó faktorral, $|B_{j_0}| = q$ és $q > p$ miatt. Mivel $b \in B_{j_0}$ és $p \| |b|$ áll az új faktorizációra (2) értéke kisebb, mint az eredetire volt. Így B_{j_0} elemei p-edik hatványaiból álló komplexus G-nek részcsoportja kellene legyen. De ez q-elemű és $b^p \neq 1$ benne fekvő nem q-elem, így nem lehet csoport.

A mondott ellentmondás mutatja, hogy a G (1) R-faktorizációjában az A_j, $1 \leqq j \leqq s$ faktorok legalább egyike csoport kell legyen.

Q.e.d.

8. Két probléma

E részben két problémát vetünk fel, amelyek szoros kapcsolatban vannak Hajós György és Rédei László az előzőekben vizsgált tételeivel. Elsőjük igenleges megválaszolása esetén a Hajós-tétel egy lehetséges általánosításának bizonyulna. Így fogalmazható.

1. Probléma. *Legyen G véges Abel-csoport, s legyen adott G-nek egy* (1) *normált faktorizációja. Ekkor van $k \in \mathbf{N}$, $1 \leqq k \leqq s$ index, amelyre*

$$\mathscr{G} = \langle \mathscr{A}nn(A_k) \rangle.$$

E problémával kapcsolatosan néhány észrevételt akarunk tenni. Ha G (1) faktorizációja szimplex faktorizáció, s $j \in \mathbf{N}$, $1 \leqq j \leqq s$ minden választása esetén $A_j = \{a_j^l | 0 \leqq l \leqq n_j - 1\}$, ahol $n_j \in \mathbf{N}$ és $n_j \leqq |a_j|$ áll, úgy

$$\mathscr{A}nn(A_j) = \{\chi | \chi \in \mathscr{G},\ \chi(a_j)^{n_j} = 1,\ \chi(a_j) \neq 1\}.$$

Világos, hogy a jobb oldal előáll $\mathscr{L}_j \setminus \ell_j$ alakban, ahol $\mathscr{L}_j$, ℓ_j részcsoportjai $\mathscr{G}$-nek és az alábbi módon értelmezettek.

$$\mathscr{L}_j \overset{\text{def}}{=} \{\chi | \chi \in \mathscr{G}, \chi(a_j)^{n_j} = 1\},$$

$$\ell_j \overset{\text{def}}{=} \{\chi | \chi \in \mathscr{G}, \chi(a_j) = 1\}.$$

Világos, hogy $\mathscr{L}_j \supseteq \ell_j$ áll. Hajós tétele azt állítja, hogy van $k \in \mathbf{N}$, $1 \leqq k \leqq s$ index, amelyre A_k csoport, vagy ami ezzel egyenértékű, hogy $a_k^{n_k} = 1$ ($n_k = |a_k|$). De akkor erre a k indexre $\mathscr{L}_k = \mathscr{G}$ áll. Ennélfogva

$$\mathscr{G} = \langle \mathscr{A}nn(A_k) \rangle = \langle \mathscr{L}_k \setminus \ell_k \rangle$$

teljesül, lévén $\mathscr{L}_k = \mathscr{G}$ és ℓ_k $\mathscr{G}$-nek valódi részcsoportja. Tehát az 1. Probléma szimplex-faktorizáció esetén a Hajós-tétel egy átfogalmazása. Ez első észrevételünk.

A második észrevétel arra vonatkozik, hogy az 1. Probléma állítását elegendő csupán olyan (1) normált faktorizációk esetén igazolni, amely faktorizációk irreducibilisek. Azaz olyan (1) alatti faktorizációkra, amelyekre az A_j, $1 \leqq j \leqq s$ faktor bármely választása esetén A_j nem áll elő $A_j = B_j C_j$ alakban, ahol $|B_j| \neq 1 \neq |C_j|$. Az előállíthatóság A_j minden elemének egy B_j és egy C_j-beli elem szorzataként való egyértelmű előállítását jelenti. Az R-faktorizációk példát jelentenek irreducibilis faktorizációkra.

Ha adott a G véges Abel-csoport egy (1) R-faktorizációja, akkor Rédei tétele miatt van egy $k \in \mathbf{N}$, $1 \leqq k \leqq s$ index, amelyre A_k G-nek részcsoportja. E k indexet véve

$$\mathscr{A}nn(A_k) = \{\chi | \chi \in \mathscr{G}, \ \chi|_{A_k} \neq 1_{A_k}\}.$$

Itt 1_{A_k} az A_k csoport ún. főkarakterét jelenti. Így nyerjük az

$$\mathscr{A}nn(A_k) = \mathscr{G} \setminus \mathscr{G}_k$$

előállítást, ahol $\mathscr{G}_k$ a G/A_k csoport karaktereivel 1-1 megfeleltetésbe hozható $\mathscr{G}$-beli karakterek által alkotott részcsoportját jelenti $\mathscr{G}$-nek. Ebből

$$\mathscr{G} = \langle \mathscr{A}nn(A_k) \rangle = \langle \mathscr{G} \setminus \mathscr{G}_k \rangle$$

fennállása e k index esetén triviálisan teljesül. Más kifejezéssel élve, az 1. Probléma állítása igaz R-faktorizációk esetére. Ez az 1. Problémát célzó második észrevételünk.

Ezek után rátérünk az említett 2. Probléma megfogalmazására. Ez így fogalmazható.

2. Probléma. *Legyen $K = GF(q)$ a q-elemű Galois-test, $V = V(n; K)$ n-dimenziós vektortér K felett. Legyenek V_j, $1 \leqq j \leqq n$ V-nek részhalmazai, amelyek az alábbi két feltételt kielégítik.*

i) $|V_j| = q$, $1 \leqq j \leqq n$.

ii) *V minden $v \in V$ eleme egyértelműen áll elő*

$$v = v_1 + \ldots + v_n, \quad v_j \in V_j, \quad 1 \leqq j \leqq n$$

alakban. Milyen további, lehetőleg gyenge feltétel teljesülése esetén van olyan

$$\begin{pmatrix} j \\ i_j \end{pmatrix}, \quad 1 \leqq j \leqq n$$

permutáció, amelyre a

$$W_j = V_{i_j}, \quad 1 \leqq j \leqq n$$

és

$$T_k = \langle W_j | 1 \leqq j \leqq k \rangle, \quad 1 \leqq k \leqq n$$

jelölésekben a T_k V-nek a $\dim_K T_k = k$ feltételt kielégítő altere, $1 \leqq k \leqq n$-re?

E problémát illetően is két megjegyzést teszünk. Az első, hogy q prím választása esetén nincs szükség semmi további feltételre. Ekkor a 2. Probléma állítása igaz Rédei László tételének következtében. Ekkor e tételt a p^n $(q=p)$ elemű elemi Abel-féle p-csoportokra kell alkalmazni.

Második észrevételünk, hogy a kívánt további feltétel szükséges, ha q nem prím. Legyen $q=4$, jelölje $K=GF(4)$ elemeit: 0, 1, 2, 3. K műveleti táblái az alábbiak.

+ :	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

· :	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Válasszuk ezek után $V=V(2, K)$-ban a V_1 és V_2 részhalmazokat úgy, hogy

$$V_1 \overset{\text{def}}{=} \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\},$$

$$V_2 \overset{\text{def}}{=} \{(0, 0), (2, 0), (0, 1), (2, 1)\}.$$

Az alábbi táblázat mutatja, hogy V minden $v \in V$ eleme egyértelműen áll elő

$$v = v_1 + v_2, \quad v_j \in V_j, \quad 1 \leqq j \leqq 2$$

alakban, de $\langle V_1 \rangle = V = \langle V_2 \rangle$ teljesül. Íme a táblázat.

	(0, 0)	(2, 0)	(0, 1)	(2, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(2, 0)	(0, 1)	(2, 1)
(0, 2)	(0, 2)	(2, 2)	(0, 3)	(2, 3)
(1, 0)	(1, 0)	(3, 0)	(1, 1)	(3, 1)
(1, 2)	(1, 2)	(3, 2)	(1, 3)	(3, 3)

Megjegyezzük, hogy $q=p^2$, p prím, más értékeire is lehet hasonló példát szerkeszteni. Konstrukciónk mutatja, hogy q nem prím választása esetén kell a további feltétel.

IRODALOM

[1] HAJÓS GY.: Többméretű terek egyszeres befedése kockaráccsal, *Mat. és Fiz. Lapok* **XLVIII** (1941), 37—64.
[2] G. HAJÓS: Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Z.* **47** (1942), 427—467.
[3] L. RÉDEI: Neuer Beweis des Hajósschen Satzes über die endlichen abelschen Gruppen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **VI** (1955), 27—40.
[4] L. RÉDEI: Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **XVI** (1965), 329—373.
[5] L. RÉDEI: *Lacunary Polynomials over Finite Fields*, Akadémiai Kiadó, Bp., 1973.
[6] E. WITTMAN: Einfacher Beweis des Hauptsatzes von Hajós—Rédei für elementare Gruppen von Primzahlquadratordnung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **XX** (1969), 227—230.
[7] E. WITTMAN: Über verschwindende Summen von Einheitswurzeln, *Elem. der Math.* **26**/2 (1971), 42—43.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЛАСЛО РЕДЕИ

К. КОРРАДИ и Ш. САБО

ON A THEOREM OF L. RÉDEI

K. CORRÁDI and S. SZABÓ

A HAJÓS—MINKOWSKI-TÉTEL ÉS NÉHÁNY EHHEZ KAPCSOLÓDÓ EREDMÉNY*

CORRÁDI KERESZTÉLY és SZABÓ SÁNDOR

1. Bevezetés

Hajós György 1941-ben bebizonyította H. Minkowski egy 1896-ban kimondott híres sejtését. Ez az eredmény a magyar matematika kiemelkedő eredményeinek egyike. Hajós György ezen eredményéhez kapcsolódó kutatásokból kibontakozó elméletet szokás a véges Abel-csoportok Hajós—Rédei-féle faktorizációs elméletének is nevezni. Erről az elméletről jelentek már meg összefoglaló cikkek. Rédei László 1942-ben és 1962-ben megjelent [33], illetve [40] cikkeiben ismerteti a témakör akkori állását. S. K. Stein az 1974-ben és 1986-ban megjelent [54] és [55] munkáiban a geometriai alkalmazásokra koncentrálja figyelmét, elsősorban az ún. keresztmozaikokra.

Ebben a dolgozatban ismertetjük a Hajós—Rédei-féle faktorizációs elméletnek az említett munkák által le nem fedett területeit. Ezek a többszörösen térfedő kockarendszerekre és az ún. Keller-sejtésre vonatkozó eredmények lesznek. Érinteni fogjuk a véges Abel-csoportok általános faktorizációira vonatkozó eredményeket is. Nem ismertetjük viszont a végtelen, a nem kommutatív és a topologikus csoportokra vonatkozó általánosításokat.

2. A Hajós—Minkowski-tétel

2.1. A Minkowski-sejtés. Ha egy n-dimenziós kocka rácsszerűen eltolt példányai lefedik az n-dimenziós teret és ha a különböző kockáknak nincs közös belső pontja, akkor ezt a kockarendszert rácsszerű kockamozaiknak nevezzük. A szimultán diofantoszi approximáció egyik problémája kapcsán mondta ki H. Minkowski az alábbi sejtését.

Egy n-dimenziós rácsszerű kockamozaikban mindig vannak teljes $(n-1)$-dimenziós lapok mentén csatlakozó kockák.

Tegyük fel, hogy a kockák élei párhuzamosak az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ koordináta egységvektorokkal. Ha a sejtés helyes, akkor a rácsvektorok között szerepel az egyik $\mathbf{e}_i$ vektor is, mondjuk $\mathbf{e}_1$. A rácsszerűség miatt a $k\mathbf{e}_1$ középpontú kockák egy $\mathbf{e}_1$ irányú végtelen oszlopot alkotnak, sőt az egész kockarács ilyen oszlopok rácsszerűen eltolt példányaiból áll.

Hajós György 1938-ban a sejtésnek csoportelméleti megfogalmazást adott.

---

* A dolgozat rövidített formában ismertetésre került az MTA HAJÓS GYÖRGY születésének 75. évfordulója alkalmából rendezett emlékülésén (1987. március 24.).

A rövid beszédmód kedvéért néhány elnevezést vezetünk be. Legyen G egy additív módon írt véges Abel-csoport. Ha G az $A_1, \ldots, A_n$ részhalmazainak a komplexusösszege és G minden g eleme egyértelműen áll elő

$$g = a_1 + \ldots + a_n; \quad a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$$

alakban, akkor azt mondjuk, hogy a

$$G = A_1 + \ldots + A_n$$

egyenlőség a G csoport egy faktorizációja.

A

$$\{0, g, 2g, \ldots, (q-1)g\}$$

alakú részhalmazokat szimplexeknek nevezzük és $[g, q]$-val jelöljük, feltéve, hogy a q természetes szám nem nagyobb, mint a g elem rendje. A g elem a szimplex generáló eleme és a q szám a szimplexek hossza. A qg elemet a szimplex záróelemének fogjuk hívni. Ha $q=1$, akkor a szimplex a $\{0\}$ halmaz és így a generáló eleme nem meghatározott.

Ezzel a terminológiával a Minkowski-sejtés Hajós György által adott alakja a következő.

Egy véges Abel-csoport szimplexekre faktorizált alakjában az egyik szimplex részcsoport.

2.2. A Minkowski-sejtés bizonyítása. A következő észrevétel lehetővé teszi, hogy csak olyan faktorizációkkal foglalkozzunk, amelyekben a szimplexek elemszámai prímek. Valóban, ha egy szimplex elemszáma összetett szám, akkor a szimplex további szimplexekre faktorizálható. Nevezetesen:

$$[g, q] = [g, uv] = [g, u] + [ug, v].$$

Ezt az eljárást ismételve minden szimplexet prímrendű szimplexekre faktorizálhatunk. Továbbá a faktorizációs eljárás kiinduló pontjaként szolgáló szimplex akkor és csak akkor részcsoport, ha valamelyik faktora is az. Hiszen $[ug, v]$ záróeleme azonos $[g, q]$ záróelemével és $[g, u]$ záróeleme nem lehet 0.

A bizonyítást egyszerűbb lesz a $\mathbf{Z}(G)$ csoportgyűrűben folytatni. Ezért multiplikatív írásmódra térünk át. A

$$[g, q] = \{0, g, 2g, \ldots, (q-1)g\}$$

szimplexnek a $\mathbf{Z}(G)$ csoportgyűrűben a

$$1 + g + g^2 + \ldots + g^{q-1}$$

elem felel meg, amit továbbra is $[g, q]$ fog jelölni. A

$$G = [g_1, p_1] + \ldots + [g_n, p_n]$$

faktorizáció a

$$\overline{G} = [g_1, p_1] \ldots [g_n, p_n] \tag{2.2.1}$$

összefüggésbe megy át, ahol $\overline{G}$ a G csoport összes elemének összegét mint $\mathbf{Z}(G)$-beli elemet jelöli.

A Minkowski-sejtés csoportelméleti alakját n szerinti indukcióval fogjuk igazolni. Az $n=1$ esetben nincs mit bizonyítani, ezért feltehetjük, hogy $n>1$. Akkor

sincs bizonyítani való, ha valamelyik szimplex részcsoport, azaz ha valamelyik záróelem 1. Szorozzuk meg a (2.2.1) egyenlőséget az $(1-g_n)$ elemmel. Ezzel

$$0 = [g_1, p_1] \dots [g_{n-1}, p_{n-1}](1-g_n^{p_n})$$

adódik. Ez az egyenlőség fennáll esetleg néhány tényező törlése után is. Az összes szimplex biztosan nem törölhető, mert $1-g_n^{p_n} \neq 0$. Az $1-g_n^{p_n}$ tényező sem törölhető, mert ha szimplexek egy szorzata 0 lenne, akkor (2.2.1) nem lehetne igaz.

Tegyük fel, hogy

$$0 = [g_1, p_1] \dots [g_l, p_l](1-g_n^{p_n}) \tag{2.2.2}$$

és itt már egyetlen tényező sem törölhető. Azt mutatjuk meg, hogy

$$[g_1, p_1] \dots [g_l, p_l]$$

a G csoport egy valódi részcsoportjának az összes eleméből álló összeg és így az indukciós feltevés szerint készen is leszünk.

Ha az u a $g_1, \dots, g_l$ elemek generátumának a rendje és $v = p_1 \dots p_l$, akkor elegendő az $u = v$ egyenlőséget igazolni. Az világos, hogy u többszöröse v-nek. Valóban legyen

$$A = [g_1, p_1] \dots [g_l, p_l] = \{a_1, \dots, a_v\},$$

$$B = [g_{l+1}, p_{l+1}] \dots [g_n, p_n] = \{b_1, \dots, b_w\}.$$

Ekkor $G = AB$ egy multiplikatív faktorizáció. Tehát az

$$\begin{matrix} a_1 b_1, \dots, a_1 b_w \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_v b_1, \dots, a_v b_w \end{matrix}$$

táblázat elemei különbözők. Ha az $a_i b_j$ elem eleme az A generátumnak, akkor a teljes j-edik oszlop is eleme a generátumnak.

Végül azt kell megmutatni, hogy u osztója is v-nek. Ebből a célból Hajós György tanulmányozta a (2.2.2) típusú szorzatokat és bebizonyította a következő tételt. Valójában ez a lépés az egész bizonyítás legsarkalatosabb pontja.

Ha a

$$0 = K[g_1, p_1] \dots [g_s, p_s](1-h_1) \dots (1-h_t)$$

egyenlőségből egyetlen tényező sem törölhető, akkor

$$r(K, g_1, \dots, g_s, h_1, \dots, h_t) - r(K) < s+t;$$

itt $r(A)$ az A részhalmaz generátumának rendjében fellépő (nem feltétlenül különböző) prímek számát jelöli.

A bizonyítás először $s=0$ esetén t szerinti indukcióval, majd tetszőleges t mellett s szerinti indukcióval történik.

Alkalmazzuk ezt a tételt a (2.2.2) egyenlőségre a $K=1$ választással. Azt kapjuk, hogy

$$l \geqq r(g_1, \dots, g_l, g_n^{p_n}) \geqq r(g_1, \dots, g_l).$$

Tehát u nem több mint l prím szorzata, vagyis osztója v-nek.

2.3. A Hajós-tétel élesebb formája. Most Rédei László megfontolásait követve megmutatjuk, hogyan tekinthető át egy adott véges Abel-csoport összes szimplex faktorizációja a Hajós-tétel segítségével.

A véges Abel-csoportok alaptétele szerint a véges Abel-csoportok ciklikus csoportok direkt összegei. A ciklikus csoportok természetesen szimplexek is. Így az alaptétel is ad egy szimplex faktorizációt. A következő elemi észrevételt felhasználva további szimplex faktorizációkat is szerkeszthetünk.

Ha $G=G_n$ egy véges Abel-csoport, G_{n-1} ennek egy részcsoportja és H egy teljes reprezentáns rendszere a G_n/G_{n-1} faktorcsoport mellékosztályainak, akkor $G_n=G_{n-1}+H$ egy faktorizáció. Ha most a G_n/G_{n-1} faktorcsoport ciklikus, akkor H választható egy $[g_n, q_n]$ szimplexnek is. Valóban legyen G_n/G_{n-1} rendje q_n és legyen a g_n elemet tartalmazó mellékosztály generátor eleme a G_n/G_{n-1} faktorcsoportnak.

Az eljárást folytathatjuk. Legyen G_{n-2} egy részcsoportja G_{n-1}-nek úgy, hogy G_{n-1}/G_{n-2} egy q_{n-1} rendű ciklikus csoport, amelynek generátor eleme tartalmazza a g_{n-1} elemet. Ekkor

$$G_n = G_{n-2}+[g_{n-1}, q_{n-1}]+[g_n, q_n]$$

egy újabb faktorizáció. Végül legyen

$$\{0\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G$$

egy részcsoportlánc, ahol G_i/G_{i-1} q_i rendű ciklikus csoport és a generátor mellékosztálya tartalmazza a g_i elemet. Ekkor

$$G = [g_1, q_1]+\ldots+[g_n, q_n] \tag{2.3.1}$$

egy faktorizáció.

Van tehát egy egyszerű eljárásunk szimplex faktorizációk szerkesztésére. Most azt mutatjuk meg, hogy ezen az úton a G összes szimplex faktorizációja előáll. Ennek érdekében tekintsünk egy (2.3.1) alakú tetszőleges faktorizációt. A Hajós-tétel szerint az egyik szimplex részcsoportja G-nek. Tegyük fel, hogy ez éppen az első szimplex. Jelöljük ezt G_1-gyel. Áttérve a $\bar{G}=G/G_1$ faktorcsoportra a (2.3.1) faktorizációból a

$$\bar{G} = [\bar{g}_2, q_2]+\ldots+[\bar{g}_n, q_n]$$

faktorizáció adódik, ahol $\bar{g}_i$ a g_i elemet tartalmazó mellékosztályt jelöli.

Ez az eljárás a Hajós-tétel alábbi élesebb alakját adja.

Ha (2.3.1) *egy tetszőleges szimplex faktorizáció, akkor a szimplexek egy alkalmas átrendezése után a*

$$G_1 = [g_1, q_1]$$

$$G_2 = [g_1, q_1]+[g_2, q_2]$$

$$\vdots$$

$$G_n = [g_1, q_1]+\ldots+[g_n, q_n]$$

parciális összegek egy

$$\{0\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G$$

részcsoportláncot alkotnak. Láthatóan G_i/G_{i-1} egy q_i rendű ciklikus csoport, amelynek generátor eleme tartalmazza a g_i elemet.

Megfontolásainkat összegezve elmondhatjuk, hogy van egy eljárásunk, amely elvezet bizonyos szimplex faktorizációkhoz és hogy a Hajós-tétel szerint további szimplex faktorizációk nincsenek. Ebben az értelemben nevezhetjük a Hajós-tételt a szimplex faktorizációk alaptételének.

3. Általános faktorizációk

3.1. Periodikus faktorizációk. Legyen A részhalmaza egy G véges Abel-csoportnak. Ha $0 \in A$, akkor azt mondjuk, hogy A egy normált részhalmaz. Ha az A stabilizátor részcsoportja $\mathrm{Stab}(A) \neq \{0\}$, akkor az A részhalmazt periodikusnak nevezzük. Ezt a tényt úgy is fogalmazhatjuk, hogy létezik $g \in G$, amelyre $g + A = A$ és $g \neq 0$. Ilyenkor a g elemet az A részhalmaz periódusának is nevezzük.

Vegyük észre, hogy normált periodikus A részhalmaz esetén létezik egy

$$A = \mathrm{Stab}(A) + B$$

alakú faktorizáció, ahol B a G csoport egy alkalmas részhalmaza. Továbbá észrevehetjük azt is, hogy az A részhalmaz stabilizátor részcsoportját egyszerűen a

$$\bigcap_{a \in A} (A - a)$$

összefüggéssel is definiálhatjuk.

Ha igaz lenne, hogy egy véges Abel-csoport bármely faktorizációjában a fellépő faktorok egyike mindig periodikus, akkor ebből a Hajós-tétel már következne. Ha annyit teszünk fel, hogy a faktorizáció normált faktorokból áll, akkor a periódusok részcsoportja szerinti faktorcsoportra áttérve a faktorcsoport egy faktorizációjához jutnánk. Az eljárás megismételhető. Így arra a következtetésre jutnánk, hogy a véges Abel-csoportok minden faktorizációja előállítható a csoport részcsoportláncaiból az általunk már ismert úton.

Ez a tény jelentősen általánosítaná a Hajós-tételt, miközben új megvilágításba is helyezné azt.

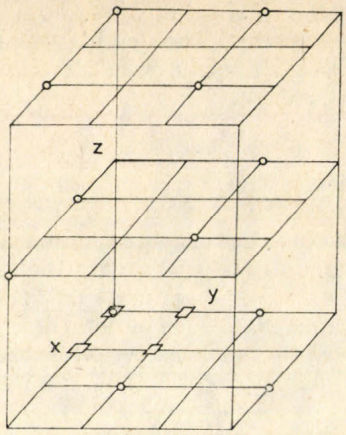
A megoldandó problémát Hajós György az 1949-ben megjelent [19] cikkében a következő módon fogalmazza meg.

Nevezzük a G csoportot „jó"-nak, ha a G minden $G = A + B$ alakú normált faktorizációjában a faktorok egyike mindig periodikus. Igaz-e, hogy minden véges Abel-csoport „jó"? Vagy általánosabban melyek a „jó" csoportok?

Ha nem feltételezzük, hogy minden véges Abel-csoport jó, akkor a jó csoportok összes faktorizációját csak úgy kaphatjuk meg egy részcsoportláncból, ha teljesül az, hogy a jó csoportok részcsoportjai is jók. Ez viszont igaz, amint azt N. G. De Bruijn [3]-ban igazolta. A bizonyítás meglepő módon nem egészen triviális. Lényeges szerepet játszik benne néhány mélyebb eredmény az elemi Abel 2-csoportok faktorizációiról. A várakozással ellentétben a véges Abel-csoportoknak csak egy elenyésző töredéke „jó". Ugyanis később Hajós György [21]-ben megmutatta, hogy három ciklikus csoport direkt összege „rossz", ha ezek között legalább kettő összetett rendű.

Az egyszerűbb fogalmazás kedvéért egy jelölést vezetünk be. A $k, l, m, \ldots$ rendű ciklikus csoportok direkt összegét $(k, l, m, \ldots)$ típusú csoportnak fogjuk nevezni. A Hajós-féle faktorizációs eljárást a formális leírás helyett csak egy példával illusztráljuk.

Tekintsünk egy (4, 4, 3) típusú csoportot. A csoport báziselemei legyenek x, y és z. A faktorizációt az 1. ábra adja meg, ahol kis körök, illetve kis négyzetek jelölik



1. ábra

az A és B faktorok elemeit. A biztonság kedvéért A és B elemeit a báziselemek együtthatóival reprezentálva a mellékelt táblázat tartalmazza.

x y z	x y z
0 0 0	0 0 0
1 0 0	0 2 0
0 1 0	2 1 0
1 1 0	2 3 0
	1 0 1
	3 0 1
	0 2 1
	2 2 1
	0 0 2
	2 0 2
	0 2 2
	2 2 2

A „jó" csoportok az alábbi listán található típusú csoportok és ezek részcsoportjai.

$$(p^\alpha, q),\ (p^2, q^2),\ (p^2, q, r),\ (p, q, r, s),$$

$$(p^3, 2, 2),\ (p^2, 2, 2, 2),\ (p, 2^2, 2),\ (p, 2, 2, 2, 2),$$

$$(p, q, 2, 2),\ (p, 3, 3),\ (3^2, 3),\ (2^\alpha, 2),$$

$$(2^2, 2^2),\ (p, p).$$

Itt p, q, r, s különböző prímeket jelölnek, amelyek közül csak p lehet 2.

Ez a teljes lista egy 15 éves periódus terméke és Hajós Gy., Rédei L., N. G. De Bruijn, A. D. Sands eredményein alapul. A fenti lista azt is mutatja, hogy a Hajós-tétel vagy egy hasonló eredmény nem vezethető le a faktorok alakjára vonatkozó valamilyen feltevés nélkül.

A faktorok szerkezetére vonatkozó feltevést használó legszebb általánosítás Rédei Lászlótól származik és a következő módon hangzik.

Ha egy véges Abel-csoport prím elemszámú normált részhalmazokra van faktorizálva, akkor a faktorok egyike periodikus.

Ez közvetlenül általánosítja a Hajós-tételt, ugyanis ez utóbbi ekvivalens azon speciális esetével, amelyben a szimplexek elemszámai prímek.

Megfontolható, hogy itt is, mint a Hajós-tételnél, érvényes az élesebb változat is, amely szerint a faktorok alkalmas átsorszámozása után a faktorok parciális összegei egy részcsoportláncot alkotnak. Továbbá, hogy minden

$$G = A_1 + \ldots + A_n$$

alakú faktorizáció, ahol az A_i faktorok prímszámú elemet tartalmaznak, egy

$$\{0\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G$$

részcsoportláncból származik úgy, hogy A_i a G_i/G_{i-1} prímrendű faktorcsoport mellékosztályainak egy teljes reprezentáns rendszere.

A „rossz" faktorizációk létezése mutatja, hogy a Rédei-tétel feltételei általában nem enyhíthetők. Ciklikus csoportokra viszont érvényes A. D. Sands élesebb tétele.

Ha véges ciklikus csoport egy faktorizációjában minden faktor normált és minden faktor elemeinek száma egy prímhatvány, akkor a faktorok egyike periodikus.

A „jó" csoportok osztályozásánál lényeges szerep hárult A. D. Sands következő tételére is.

Legyen p egy prím és G egy véges Abel-csoport, amelynek p-Sylow részcsoportja ciklikus. Ha $G=A_1+\ldots+A_n+B$ egy faktorizáció és az A_i-k elemszámai p-hatványok, akkor a faktorok egyike periodikus.

Ez a tétel azonnal adja, hogy a (p^α, q) típusú csoportok jók. A jó csoportok listája és a tétel $n=1$ speciális esete pedig azt mutatja, hogy a tétel feltételeiből nem lehet elhagyni.

3.2. Kváziperiodikus és gyengén periodikus faktorizációk. A kváziperiodikus faktorizáció fogalma is Hajós Györgytől származik. Az ismert nem periodikus $G=A+B$ faktorizációkkal kapcsolatban azt figyelte meg, hogy a faktorok egyikének, mondjuk B-nek, van $B=B_1 \cup \ldots \cup B_r$ alakú partíciója úgy, hogy

$$A+B_1 = A+B_1+0,\ A+B_2 = A+B_1+b_2,\ \ldots,\ A+B_r = A+B_1+b_r$$

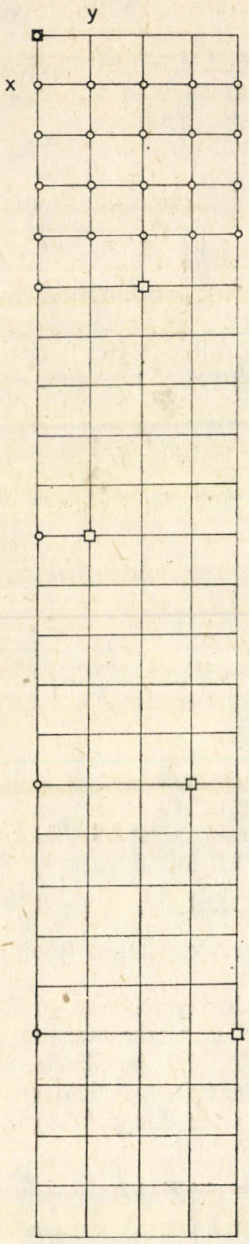
ahol $\{0=b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ részcsoportja G-nek. Nevezzük az ilyen tulajdonságú faktorizációkat kváziperiodikusnak.

Az 1. ábrán szereplő nem periodikus faktorizáció esetében a körökkel jelölt B faktor a különböző szinteken elhelyezkedő B_1, B_2, B_3 részhalmazaira particionálható és a $\{b_1, b_2, b_3\}$ részcsoport szerepét pedig $\{0, z, 2z\}$ játszhatja. Ha B periodikus, akkor rendelkezik egy $B=\mathrm{Stab}\,(B)+B'$ alakú faktorizációval. Ha most a $\mathrm{Stab}\,(B)$ részcsoport elemei $0=b_1, b_2, \ldots, b_r$ és $G=A+B$ egy faktorizáció, akkor B előáll $B=B_1 \cup \ldots \cup B_r$ alakban és

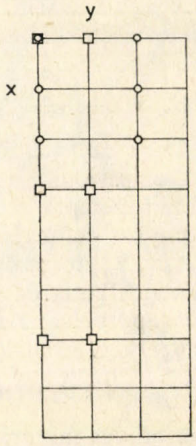
$$A+B_1 = A+B_1+b_1,\ \ldots,\ A+B_r = A+B_1+b_r,$$

vagyis egy periodikus faktorizáció mindig kváziperiodikus is. A kérdés az, hogy a véges Abel-csoportok faktorizációi kváziperiodikusak-e.

A válasz A. D. Sandstől való és nemleges. Például a (p^2, p) típusú csoportoknak van nem kváziperiodikus faktorizációja, ha p háromnál nagyobb prím. A $p=5$ esetben ábrával illusztráltuk az ellenpéldát. A faktorok elemeit kis körök, illetve kis négyzetek jelölik.



2. ábra



3. ábra

Legyen $B' = \{b_1, \ldots, b_r\}$, ekkor az

$$G = A + B = A + (B_1 \cup \ldots \cup B_r) = A + (B_1 + b_1 \cup \ldots \cup B_1 + b_r) =$$

$$= A + B_1 + \{b_1, \ldots, b_r\} = A + B_1 + B'$$

átalakítás mutatja, hogy a B faktor helyettesíthető a periodikus $B_1 + B'$ faktorral. Meg lehet-e ezt mindig tenni? Vagyis lehet-e a véges Abel-csoportok faktorizációiban a faktorok egyikét helyettesíteni egy periodikus faktorral? A válasz nem ismert. Ezzel kapcsolatban Hajós György egy élesebb kérdést fogalmazott meg. Nevezetesen egy véges Abel-csoport faktorizációban helyettesíthető-e mindig a faktorok egyike egy részcsoporttal? (Lásd [13], Problem 77.) Az előbbi 3. ábrával megadott faktorizáció is mutatja, hogy ez nem mindig lehetséges.

Van azonban a részcsoporttal helyettesíthetőségnek egy jól használható elégséges feltétele is. Ugyanis A. D. Sands [47]-ben bebizonyította az alábbi tételt.

Ha $G = A + B$ egy faktorizációja a véges G Abel-csoportnak úgy, hogy $|A| = p^\alpha$, ahol p egy prím, továbbá $|A|$ és $|B|$ relatív prímek, akkor B helyettesíthető egy részcsoporttal az előbbi faktorizációban.

Csak megemlítjük, hogy a tételnek jelentős szerep jut a faktorizációk geometriai alkalmazásaiban.

Bizonyos feltételek mellett a faktorizációk szükségképpen kváziperiodikusak. Például ha $G = A + B$ egy faktorizáció és K valódi részcsoportja G-nek úgy, hogy $K \supseteq A$ és K-nak létezik direkt összeadandó párja, mondjuk L. Ekkor felhasználva az

$$L = \{0 = l_1, l_2, \ldots, l_r\} \quad \text{és} \quad B_1 = B \cap (K + l_1), \ldots, B_r = B \cap (K + l_r)$$

jelöléseket a $G = A + B$ faktorizációból és $A \subseteq K$-ból láthatjuk, hogy $A + B_1 \subseteq K$. Következésképpen $A + B_i = A + B_1 + l_i$, vagyis a $G = A + B$ faktorizáció kváziperiodikus.

Kérdezzük rögtön általánosabban, mint ahogyan azt A. D. Sands is teszi [49]-ben, igaz-e, hogy a $G = A + B$ alakú faktorizációk esetén a faktorok egyikét mindig tartalmazza G-nek egy valódi részcsoportja? Más szavakkal igaz-e, hogy a $G = A + B$ faktorizáció mindkét faktora nem generálhatja a G csoportot? A (p^α, q^β) típusú csoportok esetére, ahol p és q különböző prímek, maga Sands adta meg az igenlő választ [51]-ben. O. Fraser és B. Gordon bizonyos p-csoportok alkalmas faktorizálásával negatív irányban döntötték el a kérdést [11]-ben.

Egy [58]-ban szereplő faktorizációs eljárás szerint ha k, l, m négynél nagyobb összetett számok, akkor a (k, l, m) típusú csoport faktorizálható úgy, hogy mindkét faktor az egész csoportot generálja. Tehát Sands tétele közel optimális.

Utolsó problémánk ebben a szakaszban Fuchs Lászlótól származik. (Lásd [13], 331. oldal, Problem 82).

Azt mondjuk, hogy egy G Abel-csoport A részhalmaza gyengén periodikus, ha létezik egy $g \in G$ elem úgy, hogy $g \neq 0$ továbbá a $g + A$ és az A halmazok kölcsönösen legfeljebb egy-egy elemben különböznek egymástól. Azaz legfeljebb egy eleme van A-nak, amely nincs $g + A$-ban és fordítva.

A g elemet most is az A részhalmaz periódusának nevezzük. Világos, hogy egy periodikus részhalmaz gyengén is periodikus és az is világos, hogy a szimplexek gyengén periodikus részhalmazok.

Fuchs László [12]-ben bebizonyítja a Hajós-tétel egy általánosítását, amelynek itt csak egy speciális esetét idézzük, de amely még így is a Hajós-tétel általánosítása marad.

Ha egy véges Abel-csoport gyengén periodikus faktorokra van faktorizálva, akkor a faktorok egyike periodikus.

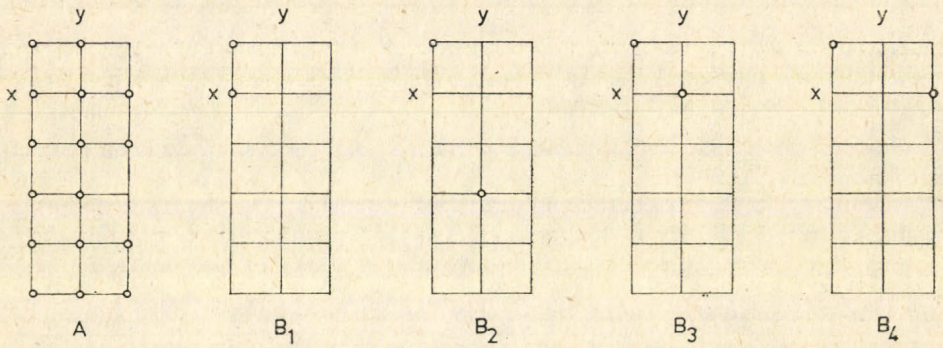
Tétele kapcsán az alábbi problémát fogalmazza meg.

Ha egy véges Abel-csoport periodikus részhalmaza gyengén periodikus részhalmazokra van faktorizálva, akkor periodikus-e a faktorok valamelyike?

A problémát O. Fraser és B. Gordon oldották meg a következő formában.

A válasz igenlő, ha az alapul vett véges Abel-csoport ciklikus vagy p-csoport és igenlő a válasz a csoport szerkezetétől függetlenül, ha a faktorizációban fellépő faktorok száma legfeljebb három.

A kimaradó esetekben a válasz nemleges, amint azt az alábbi példa is mutatja. A G csoport (6, 3) típusú. A csoport báziselemeit pedig x és y jelöli.



4. ábra

Az első diagrammal megadott $3x$ szerint periodikus A részhalmaz, a további diagramokkal illusztrált B_1, B_2, B_3, B_4, nyilvánvalóan nem periodikus, szimplexekre van faktorizálva.

4. Többszörösen térfedő kockarácsok

Tegyük fel, hogy egy n-dimenziós egységkocka eltolt példányaiból álló rendszer kielégíti az alábbi feltételeket:

— A kockák középpontjaiból álló halmaznak nincs torlódási pontja.

— Az n-dimenziós tér minden olyan pontja, amely nincs egyetlen kocka határán sem, pontosan k darab kocka által fedett.

Ekkor ezt a kockarendszert n-dimenziós k-szorosan térfedő kockarendszernek hívjuk. Röviden csak (k, n) kockarendszerről fogunk beszélni. Abban az esetben, amikor a kockák eltolásai egy rácsot alkotnak, a rendszert kockarácsnak nevezzük. Még a Minkowski-sejtés bizonyítása előtt 1936-ban Ph. Furtwängler azt sejtette, hogy a többszörösen térfedő kockarácsokban is mindig található két, teljes $(n-1)$-dimenziós lappal csatlakozó kocka. Ilyenkor a rácsszerűség miatt a kockarács rácsszerűen elhelyezkedő végtelen oszlopok uniója.

Furtwängler az $n \leqq 3$ esetben igazolta is a sejtését. A Furtwängler-sejtésnek a Minkowski-sejtéshez hasonlóan van algebrai ekvivalense. A Minkowski-sejtés algeb-

rai átfogalmazását Hajós György valójában többszörösen térfedő kockarácsok esetére adta meg.

Az algebrai ekvivalenst legkényelmesebben a $\mathbf{Z}(G)$ csoportgyűrű segítségével fogalmazhatjuk meg. A csoportgyűrű használata miatt viszont célszerű lesz ismételten a multiplikatív írásmódra áttérni. A $\mathbf{Z}(G)$ csoportgyűrű

$$1+g+g^2+\ldots+g^{q-1}$$

elemét szimplexnek fogjuk hívni és röviden most is $[g, q]$-val jelöljük. A G csoport összes elemének az összegét, amely $\mathbf{Z}(G)$-ben egy elem, $\bar{G}$ fogja jelölni. Ezek után az idézett átfogalmazás a következő.

Az n-dimenziós teret k-szorosan fedő kockarácsok akkor és csak akkor tartalmaznak teljes $(n-1)$-dimenziós lapokkal csatlakozó kockákat, ha minden véges G Abel-csoportra a

$$k\bar{G} = [g_1, q_1]\ldots[g_n, q_n] \tag{4.1}$$

egyenlőségből valamely i indexre $g_i^{q_i}=1$ következik.

Az algebra és a geometria között a kapcsolat, éppen úgy mint a Minkowski-sejtésnél, abban áll, hogy a (4.1) egyenlőség hordozza a térfedésre vonatkozó információkat, míg $g_i^{q_i}=1$ a teljes lappal csatlakozó kockákért felel.

Az algebrai kritérium segítségével Hajós György szerkesztett egy 9-szer térfedő 4-dimenziós, azaz egy $(9, 4)$, kockarácsot, amelyben nincsenek teljes 3-dimenziós lappal csatlakozó kockák. A Hajós—Minkowski-tételből azt is tudhatjuk, hogy egy ilyen kockarács nem lehet egyszeresen térfedő kockarácsok uniója.

Furtwängler sejtése tehát hamis.

Később 1979-ben R. M. Robinson részletesebben megvizsgálta a (k, n) kockarácsokat. Arra volt kíváncsi, hogy milyen k és n értékek esetén létezik teljes $(n-1)$-dimenziós lappal csatlakozó kockákat nem tartalmazó (k, n) kockarács. A kérdésre a következő teljes választ adja.

— *Ha* $n\leqq 3$, *akkor nincs alkalmas* k.
— *Ha* $n=4$, *akkor csak a páratlan prímnégyzettel osztható* k *értékek lehetségesek és ezek lehetségesek is.*
— *Ha* $n=5$, *akkor* $k=3$ *vagy* $k\geqq 5$.
— *Ha* $n\geqq 6$, *akkor* $k\geqq 2$.

Ebből az is látszik, Hajós György ellenpéldája nemcsak a lehetséges legalacsonyabb dimenziós, de ezek között még a lehetséges legkisebb multiplicitású is.

Robinson tételét természetesen nem bizonyítjuk be, de megpróbáljuk érzékeltetni, hogy hogyan lehet a szóban forgó k, n párok létét, illetve nem létét megvizsgálni. Először megmutatjuk, hogy az $n=3$ esetben nincs alkalmas k. A bizonyításhoz induljunk ki a

$$k\bar{G} = [g_1, q_1][g_2, q_2][g_3, q_3]$$

egyenlőségből és szorozzuk azt meg rendre az

$$1-g_1,\quad 1-g_2,\quad 1-g_3$$

elemekkel. A kapott

$$0 = (1-g_1^{q_1})(1-g_2^{q_2})(1-g_3^{q_3})$$

összefüggésből az

$$x_1 = g_1^{q_1},\quad x_2 = g_2^{q_2},\quad x_3 = g_3^{q_3}$$

jelölés bevezetése után azt kapjuk, hogy

$$x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3 = 1+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3.$$

Az $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$ esetek bármelyikében készen vagyunk. Tehát

$$x_1x_2x_3 = 1 \tag{4.2}$$

és így

$$x_1+x_2+x_3 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3.$$

Az $x_1=x_1x_2$, $x_1=x_1x_3$ egyenlőségekből $1=x_2$, illetve $1=x_3$ következik. Így csak az

$$x_1 = x_2x_3 \tag{4.3}$$

esetet kell megvizsgálnunk. A (4.2) és a (4.3) összefüggésekből $x_1^2=1$ majd hasonlóan $x_2^2=1$ és $x_3^2=1$ adódik. A

$$0 = [g_1, q_1](1-g_2^{q_2})(1-g_3^{q_3}) = [g_1, q_1](1-x_2)(1-x_3)$$

egyenlőség átrendezésével a

$$[g_1, q_1](x_2+x_3) = [g_1, q_1](1+x_2x_3)$$

összefüggést nyerjük. Mivel $x_2x_3=x_1$, ezért $\langle g_1\rangle$ (a g_1 elem generátuma) tartalmazza az egyenlőség jobb oldalát. Tehát tartalmazza a bal oldalt is, azaz $x_2, x_3\in\langle g_1\rangle$. Ciklikus csoportokban az $x^2=1$ egyenlet megoldása csak az egységelem lehet vagy az egységelem és a csoport egyetlen másodrendű eleme attól függően, hogy a csoport páratlan vagy páros rendű. Alkalmazzuk ezt az észrevételt az $x_2^2=1$ és $x_3^2=1$ esetekben. Ha $x_2=1$ vagy $x_3=1$, akkor készen vagyunk. Így $x_2=x_3$, mivel x_2 és x_3 megegyezik a $\langle g_1\rangle$ egyetlen másodrendű elemével. De ekkor $x_1=x_2x_3=1$ és ez az állításunkat igazolja.

Befejezésül az alkalmas k, n párok szerkesztésére mutatunk példát.

A G véges Abel-csoport karakterei kiterjeszthetők a $\mathbf{Z}(G)$ gyűrű karaktereivé. Ha χ_i a $\mathbf{Z}(G)$ i-edik karaktere és g_j a G j-edik eleme, akkor a $\chi_i(g_j)$ mátrix az ortogonalitási relációk miatt ortogonális. Tehát oszlopai lineárisan független vektorok. Ebből az adódik, hogy ha $A, B\subseteq G$ és

$$\sum_{a\in A}\chi(a) = \sum_{b\in B}\chi(b)$$

G minden χ karakterére, akkor $A=B$. Hasonlóan, ha $A, B\in\mathbf{Z}(G)$ és $\chi(A)=\chi(B)$ a $\mathbf{Z}(G)$ minden χ karakterére, akkor $A=B$. De ha $\chi(A)=\chi(B)$ csak a nem főkarakterekre áll fenn, akkor ebből csak $A=kB$ következik, ahol $k=\chi_1(A)/\chi_1(B)$ és χ_1 a főkarakter.

Nevezzük a $\chi(A)=0$ feltételt kielégítő χ karakterek halmazát az A elem annulátorának. Tehát a (4.1) egyenlőség egyenértékű azzal, hogy a $[g_1, q_1], \ldots, [g_n, q_n]$ szimplexek annulátorai lefedik $\mathbf{Z}(G)$-nek a főkaraktertől különböző karaktereit, mivel $\chi(k\bar{G})=0$, ha $\chi\neq\chi_1$.

Észrevesszük, hogy a $[g, q]$ szimplex annulátora azon karakterekből áll, amelyekre

$$(\chi(g))^q = 1 \quad \text{és} \quad \chi(g) \neq 1.$$

Ezek az észrevételek lehetőséget adnak (4.1) alakú egyenlőségek felírására.

Válasszunk egy G csoportot. Ha $g_1, \ldots, g_n$ a G elemei úgy, hogy G minden a főkaraktertől különböző χ karakterére létezik g_i amelyre

$$(\chi(g_i))^{q_i} = 1, \quad \chi(g_i) \neq 1, \quad g_i^{q_i} \neq 1$$

teljesül, akkor egy alkalmas k pozitív egésszel a (4.1) egyenlőség fennáll és a szimplexek egyike sem részcsoport.

Készítsünk egy táblázatot. A táblázat sorai G karaktereinek, az oszlopai pedig G elemeinek felelnek meg. A χ nevű sor g nevű oszlopában a $\chi(g)$ elem rendje áll. Mivel g rendje többszöröse $\chi(g)$ rendjének a g nevű oszlopban álló számok a g rendjének osztói. Olyan oszlopokat akarunk kiválasztani, amelyekben a valódi osztók lefogják az összes sort.

Elég lesz csak G összetett rendű elemeivel foglalkozni. Ha észrevesszük, hogy egy elemnek és az inverzének a rendje azonos, akkor még kevesebb oszlopot kell alkalmaznunk. A sorok között is elég mindig χ és χ^{-1} közül csak az egyiket alkalmazni.

Az eljárást egy példa kapcsán a legegyszerűbb megérteni. Legyen G egy (2, 6) típusú csoport az x és y báziselemekkel. Az $x^a y^b$ elemet röviden ab-vel jelöljük. Az ab számpár egyúttal a

$$\chi(x) = \varrho^a, \quad \chi(y) = \sigma^b$$

által definiált karaktert is jelöli, ahol ϱ és σ 2-dik, illetve 6-dik primitív egységgyökök.

A G csoport elemei és az elemek rendjei az alábbiak:

elem	00	01	02	03	04	05	10	11	12	13	14	15
rend	1	6	3	2	3	6	2	6	6	2	6	6

Végül a táblázat:

	01	11	12
01	6	6	③
11	6	③	6
12	③	6	6
03	2	2	1
02	③	③	③
13	2	1	2
10	1	2	2

A táblázat azt mutatja, hogy ha a

$$g_1 = 01, \quad g_2 = 11, \quad g_3 = 12, \quad g_4 = 01, \quad g_5 = 11$$

csoportelemeket rendre a

$$q_1 = 3, \quad q_2 = 3, \quad q_3 = 3, \quad q_4 = 2, \quad q_5 = 2$$

számokkal párosítjuk, akkor fennáll egy (4.1) alakú egyenlőség, ahol $n=5$ és $k=9$. Szerkesztettünk tehát az 5-dimenziós teret 9-szer fedő kockarácsot, amely nem tartalmaz teljes 4-dimenziós lappal csatlakozó kockákat.

A következő táblázatot egy (4, 4) típusú csoportból kiindulva szerkesztettük.

	01	10	11	12	13	21
01	4	1	4	②	4	4
10	1	4	4	4	4	②
11	4	4	②	4	1	4
12	②	4	4	4	4	1
13	4	4	1	4	②	4
21	4	②	4	1	4	4
02	②	1	②	1	②	②
20	1	②	②	②	②	1
22	②	②	1	②	1	②

A kapott g csoportelemek és a hozzájuk tartozó q számok az alábbiak:

g: 01 10 11 12 13 21

q: 2 2 2 2 2 2

Így a 6-dimenziós teret 4-szer fedő nem oszlopozott kockarácsot nyerünk.

5. Nem rácsszerű kockarendszerek

A Minkowski-sejtés bizonyítása előtt 1930-ban O. H. Keller azt a sejtést mondta ki, hogy a Minkowski-sejtés helyes marad a rácsszerűség feltételének elhagyásával is. Tehát párhuzamos állású egységkockák térkitöltő rendszerében mindig van legalább kettő teljes $(n-1)$-dimenziós lappal csatlakozó kocka.

A sejtést O. Perron az 1940-ben megjelent [31] alatti két terjedelmes dolgozatában igazolta az $n \leqq 6$ esetekre. Ez a bizonyítás a térkitöltő kockarendszer egy adott kockája körül elhelyezkedő többi kockára vonatkozó kombinatorikus és aritmetikai megfontolásokon alapszik. A diszkussziós nehézségek n növekedésével rohamosan növekszenek. Van azonban egy, a véges Abel-csoport faktorizációkat felhasználó támadási irány is. Nevezetesen a Keller-sejtés egyenértékű azzal, hogy ha

$$G = H + [g_1, q_1] + \ldots + [g_n, q_n] \tag{5.1}$$

egy faktorizációja a G véges Abel-csoportnak, akkor

$$\{q_1 g_1, \ldots, q_n g_n\} \cap (H - H) \neq \emptyset. \tag{5.2}$$

Itt H a G egy részhalmaza és $H-H=\{h-h' \colon h, h' \in H\}$. (Az olvasó bizonyára észrevette, hogy visszatértünk az Abel-csoportok additív írásmódjára.)

Ez az átfogalmazás is Hajós Györgytől származik és ez is emlékeztet a Minkowski-sejtés átfogalmazására. Az (5.1) faktorizáció a kockarendszer térkitöltő tulajdonságáért felel, az (5.2) reláció pedig azt fejezi ki, hogy a rendszerben vannak teljes $(n-1)$-dimenziós lappal csatlakozó kockák. Ha a H részhalmaz részcsoportja G-nek, akkor a Keller-sejtésnek ez a csoportelméleti alakja azonos a Hajós-tétellel.

A továbbiakban néhány olyan eredményt fogunk vázolni, amelyek kiindulópontja a sejtés csoportelméleti ekvivalense volt. A következő észrevételek triviálisak. A Hajós-tétel bizonyításánál már használt megfontolást alkalmazva láthatjuk, hogy az (5.1) faktorizációban szereplő szimplexek prímszámú elemet tartalmazó szimplexekkel pótolhatók. Ekkor természetesen a szimplexek száma megváltozhat és így

már nem feltétlenül egyenlő a tér dimenziójával. Feltehető az is, hogy H egy normált részhalmaz, azaz $0 \in H$.

Próbálkozzunk a Keller-sejtés egy indirekt bizonyításával és tegyük fel, hogy vannak ellenpéldát jelentő faktorizációk. Ekkor ezek között van olyan is, amelyre G rendje minimális. Ebből az következik, hogy H nem lehet periodikus részcsoport, mert az ellenkező esetben áttérhetnénk a Stab (H) részcsoport szerinti kisebb rendű faktorcsoportra. Másrészt a fellépő szimplexek sem lehetnek periodikusak, hiszen egy periodikus $[g, q]$ szimplex csak részcsoport lehet. Ez utóbbi szerint viszont $qg = 0 \in H - H$, vagyis a faktorizáció nem egy ellenpélda. Ha G egy „jó" csoport, akkor az (5.1) faktorizációban a faktorok egyike periodikus. De sem a szimplexek, sem H nem lehet periodikus. A Keller-sejtés tehát érvényes a „jó" csoportokra.

A „jó" csoportok listáját átnézve láthatjuk, hogy ezek (5.1) alakú faktorizációira $n \leqq 6$ szükségképpen teljesül, kivéve a (p^α, q) és a $(2^\alpha, 2)$ típusú csoportokat. Tehát csak ezeket az eseteket nem fedi le O. Perron eredménye.

Megemlítjük, hogy a (p^α) típusú csoportok, tehát ciklikus p-csoportok, esetében a Keller-sejtést Seitz K. a „jó" csoportoktól függetlenül bizonyította be.

A. D. Sands [51]-ben igazolta a Keller-sejtést a (p^α, q^β) típusú csoportokra, ahol p és q különböző prímek.

Corrádi K. és Szabó S. [6]-ban a $(p^\alpha, p, \ldots, p)$ típusú csoportokra igazolta a sejtést. Később a szerzőknek sikerült igazolni a Keller-sejtést a $(p^\alpha, q, \ldots, q)$ és a (p^α, p^β) típusú csoportokra is. Továbbá [6]-ban az is szerepel, hogy ha p egy prím, H elemeinek száma egy p-hatvány és G p-Sylow részcsoportja ciklikus, akkor sem lehet G-t ellenpéldához vezető módon faktorizálni.

A Keller-sejtés eldöntése céljából megpróbálhatjuk a sejtést a véges Abel-csoportok minél szélesebb osztályaira igazolni, ahogyan az a fenti kísérleteknél is történt. Kínálkozik azonban egy másik lehetőség is. Nevezetesen, kijelölni a véges Abel-csoportok egy lehetőleg minél szűkebb osztályát, amelyen elegendő eldönteni a sejtést.

Két ilyen jellegű eredményt említünk meg.

Az első szerint elég a sejtést a $(4, \ldots, 4)$ típusú csoportok körében vizsgálni. A második szerint a Keller-sejtés páratlan rendű csoportokra vonatkozó speciális esete a négyzetmentes rendű csoportok esetére redukálódik. A bizonyítások [59]-ben és [60]-ban találhatók.

Az első állítást pontosan is megfogalmazzuk.

Legyen G n darab 4-ed rendű ciklikus csoport direkt összege a $g_1, \ldots, g_n$ bázis-elemekkel. A Keller-sejtés egyenértékű azzal, hogy ha

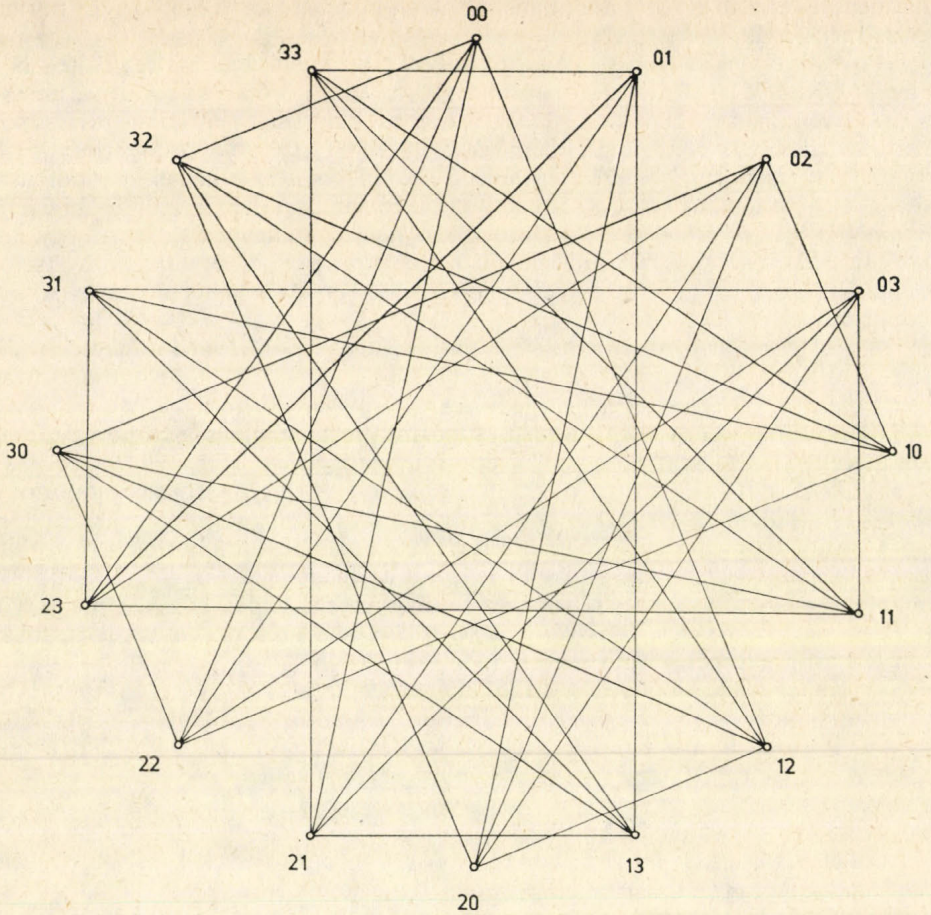
$$G = H + [g_1, 2] + \ldots + [g_n, 2]$$

egy faktorizáció, akkor

$$\{2g_1, \ldots, 2g_n\} \cap (H - H) \neq \emptyset.$$

Vegyük észre, hogy a szimplexek összege egy 2^n elemű ismert halmaz. Ha ellenpéldát akarunk szerkeszteni a Keller-sejtésre, akkor ehhez egy alkalmas 2^n elemű H részhalmazt kell csak keresnünk. Egy ilyen H halmaz keresése a következő kombinatorikai kérdéshez vezet.

Legyen Γ_n a 0, 1, 2, 3 jegyekből képzett 4^n számú szám n-esen értelmezett gráf. Az $(a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_1, \ldots, b_n)$ pontokat akkor kösse össze él, ha van olyan i index, amelyre $a_i - b_i \equiv 2$ modulo 4 és a kimaradó indexek között van j, amelyre $a_j \not\equiv b_j$ modulo 4. (A gráfot az $n = 2$ esetben az 5. ábrán láthatjuk.)



5. ábra

A kérdés pedig az, hogy van-e a Γ_n gráfban 2^n pontú teljes részgráf?

Jelölje $\mathrm{cl}(\Gamma_n)$ a Γ_n gráf maximális klikkjének a méretét. A $\mathrm{cl}(\Gamma_n)$ számról kideríthető, hogy

$$2\,\mathrm{cl}(\Gamma_n) \leqq \mathrm{cl}(\Gamma_{n+1})$$

(l. [7]). Mivel $\mathrm{cl}(\Gamma_n) \leqq 2^n$, ezért a $\mathrm{cl}(\Gamma_n)/2^n$ határértéke létezik.

Kis n értékekre a Γ_n gráf átnézésével $\mathrm{cl}(\Gamma_n)$-re az alábbi táblázatban látható alsó korlátokat találtuk.

	n	2	3	4	5	6
$\mathrm{cl}(\Gamma_n)$	alsó korlátja	2	5	12	28	57
	2^n	4	8	16	32	64

Így $\lim \mathrm{cl}(\Gamma_n)/2^n \geqq 0{,}89$.

R. M. Robinson a Keller-sejtés és a többszörösen térfedő kockarendszerekre vonatkozó Furtwängler-sejtés közös általánosításaként azt kérdezi, hogy milyen k és n értékek esetén létezik az n-dimenziós teret k-szorosan fedő, teljes $(n-1)$-dimenziós lappal csatlakozó kockákat nem tartalmazó kockarendszer?

Számelméleti és kombinatorikai elveket ötvözve megmutatja, hogy az $n \leqq 2$ esetben nincs lehetséges k, és hogy az $n=3$ esetben a $k=25, 49, 50, 74, 75, 81, 98, 99, 100$ értékek és minden $k>313$ lehetséges.

A második szerző [57]-ben a probléma csoportelméleti ekvivalensét felhasználva igazolta, hogy az $n \geqq 3$ esetben minden $k \geqq 2$ lehetséges.

IRODALOM

[1] Bernstein, H. J.: Extension of Hajós' factorization theorem to some non-abelian groups, *Comm. Pure Appl. Math.* **21** (1968), 289—311.
[2] De Bruijn, N. G.: On bases for set of integers, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1950), 232—242.
[3] De Bruijn, N. G.: On the factorization of finite abelian groups, *Indag. Math. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam* **15** (1953), 258—264.
[4] De Bruijn, N. G.: On the factorization of cyclic groups, *Indag. Math. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam* **15** (1953), 370—377.
[5] De Bruijn, N. G.: Some direct decompositions of the set of integers, *Math. of Computation* Vol. **XVIII**, No. 88 (1964), 537—546.
[6] Corrádi K.—Szabó S.: Some special cases of Keller's conjecture, *J. of Pure and Appl. Alg.* **49** (1987), 247—252.
[7] Corrádi K.—Szabó S.: A combinatorial approach for Keller's conjecture, *Periodica Math. Hungar.* (elküldve).
[8] Corrádi K.—Szabó S.: Rédei László egy tételéről, *Mat. Lapok* **34** (1983—1987), 25—39.
[9] Fáry, I.: Die Aequivalente des Minkowski—Hajósschen Satzes in der Theorie der topologischen Gruppen, *Comm. Math. Helv.* **23** (1949), 283—287.
[10] Fraser, O.—Gordon, B.: Solution to a problem of L. Fuchs, *Quart. J. Math. Oxford* **25** (1974), 1—8.
[11] Fraser, O.—Gordon, B.: Solution to a problem of A. D. Sands, *Glasgow Math. J.* **20** (1979), 115—118.
[12] Fuchs, L.: On the possibility of extension Hajós' theorem to infinite abelian groups, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1959), 338—347.
[13] Fuchs, L.: *Abelian groups*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1966.
[14] Furtwängler, Ph.: Über Gitter konstanter Dichte, *Monatsh. Math. Phys.* **43** (1936), 281—288.
[15] Gagola, S. M.—Garisson, S. C.—Pettet, M. R.: On a vanishing product in the integral group ring. *Amer. Math. Monthly*, **88** (1981), 195—196.
[16] Hajós Gy.: Többméretű terek befedése kockaráccsal, *Mat. Fiz. Lapok* **45** (1938), 171—190.
[17] Hajós Gy.: Többméretű terek egyszeres befedése kockaráccsal, *Mat. Fiz. Lapok* **48** (1941), 37—64.
[18] Hajós, G.: Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Zeitschr.* **47** (1941), 427—467.
[19] Hajós, G.: Sur la factorisation des groupes abeliens, *Časopis* **74** (1949), 157—162.
[20] Hajós, G.: Sur le problème de factorisation des groupes cycliques, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **1** (1950), 189—196.
[21] Hajós, Gy.: A ciklikus csoportok faktorizációjának problémájához, *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953), 1—6.
[22] Keller, O. H.: Über die lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln, *J. Reine Angew. Math.* **163** (1930), 231—248.
[23] Irwin, J. M.—Walker, E. A.: *Topics in Abelian Groups*, Glenview, Illinois, 1963.
[24] Kempermen, J. H. E.: On small sumsets in an abelian group, *Acta Math.* **103** (1960), 63—88.
[25] Kim, K. H.—Roush, F. W.: Robinson's conjecture on abelian groups, *J. of Pure and Appl. Alg.* **25** (1982), 113—120.
[26] Lawrence, J.: Tiling R^d by translates of the orthants, *Proc. of the Second Univ. of Oklahoma Conf. Convexity and Related Combinatorial Geom.*, ed. David. C. Kay and Marilyn Breen, 1982.

[27] LOVÁSZ L.—SCHRIJVER, A.: Remarks on a theorem of Rédei, *Studia Sci. Math. Hungar.* **16** (1981), 449—454.
[28] LYUBEZNIK, G.: An equation in abelian groups and multiple lattice tilings of n-dimensional space, *Archiv der Math.* **38** (1982), 217—225.
[29] MINKOWSKI, H.: *Geometrie der Zahlen,* Leipzig, Teubner 1896.
[30] MOLNÁR E.: A Minkowski-sejtés Hajós-féle bizonyításáról, *Mat. Lapok* **34** (1983—1987), 11—24.
[31] PERRON, O.: Über lückenlose Ausfüllung des n-dimensionalen Raumes durch kongruente Würfeln, I, II, *Math. Zeitschr.* **46** (1940), 1—26; **46** (1940), 161—180.
[32] PERRON, O.: Modulartige lückenlose Ausfüllung des R^n mit kongruenten Würfeln, I, II, *Math. Ann.* **117** (1940), 415—447; **117** (1941), 609—658.
[33] RÉDEI L.: Jelentés az 1942. évi Kőnig Gyula jutalomról, Hajós György munkáinak ismertetése, *Mat. Fiz. Lapok* **49** (1942), 1—16.
[34] RÉDEI, L.: Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski—Hajós, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **13** (1949), 21—35.
[35] RÉDEI, L.: Die Reduction des gruppentheoretischen Satzes von Hajós auf den Fall von p-Gruppen, *Monatshefte für Math. Wien* **53** (1949), 221—226.
[36] RÉDEI, L.: Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, *Commentarii Math. Helv.* **23** (1949) 272—282.
[37] RÉDEI, L.: Ein Beitrag zum Problem der Factorisation von endlichen Abelschen Gruppen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **1** (1950), 197—207.
[38] RÉDEI L.: Hazai vizsgálatok a véges csoportok elméletében, *MTA III. Oszt. Közl.* **5** (1955), 315—325.
[39] RÉDEI, L.: Die neue Theorie der endlichen Abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **16** (1965), 329—373.
[40] RÉDEI L.: Hajós György 50. születésnapjára, *Mat. Lapok* **13** (1962), 217—227.
[41] RÉDEI, L.: *Lacunary Polynomials over Finite Fields,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
[42] ROBINSON, R. M.: Multiple tilings of n-dimensional space by unit cubes, *Math. Zeitschr.* **166** (1979), 225—264.
[43] ROBINSON, R. M.: Solutions of an equations in abelian groups, *Amer. Math. Monthly* **86** (1979), 690.
[44] ROBINSON, R. M.: *Can cubes avoid meeting face to face?* The Mathematical Gardner, D. A. Klarner, ed. Prindle—Weber—Schmidt, Boston, 1980.
[45] SANDS, A. D.: On the factorisation of finite abelian groups, I, II, III, *Acta Mat. Acad. Sci. Hungar.* **8** (1957), 65—86; **13** (1962), 153—169; **25** (1974), 279—284.
[46] SANDS, A. D.: The factorization of abelian groups, I, II, *Quart. J. Math. Oxford* **10** (1959), 81—91; **13** (1962), 45—54.
[47] SANDS, A. D.: On a problem of L. Fuchs, *J. London Math. Soc.* **37** (1962), 277—284.
[48] SANDS, A. D.: Factorization of cyclic groups, *Proc. Colloquium on abelian groups,* Tihany, Hungary, Sept. 1963, 139—146.
[49] SANDS, A. D.: On a conjecture of G. Hajós, *Glasgow Math. J.* **15** (1974), 88—89.
[50] SANDS, A. D.: On the factorization of finite groups, *J. London Math. Soc.* **7** (1974), 627—631.
[51] SANDS, A. D.: On Keller's conjecture for certain cyclic groups, *Proc. Edinburg Math. Soc.* **22** (1979), 17—21.
[52] SEITZ K.: Vizsgálatok a véges Abel-csoportok Hajós-féle elmélete köréből, *MTA III. Oszt. Közl.* **21** (1972), 119—127.
[53] SEITZ, K.: Investigations in the Hajós—Rédei Theory of Finite Abelian Groups, *K. Marx Univ. Economics, Dept. Math.,* Budapest, 1975, No. 6.
[54] STEIN, S. K.: Algebraic tiling, *Amer. Math. Monthly* **81** (1974), 445—462.
[55] STEIN, S. K.: Tiling, packing, and covering by clusters, *Rocky Mount. J. of Math.* **16** (1986), 277—321.
[56] SZABÓ, S.: A new solution of a problem about a generalisation of Keller's conjecture, *K. Marx Univ. Economics, Dept. of Math.,* Budapest, 1981, No. 3, 83—90.
[57] SZABÓ, S.: Multiple tilings by cubes with no shared faces, *Aequationes Math.* **25** (1982), 83—89.
[58] SZABÓ, S.: A type of factorization of finite abelian groups, *Discrete Math.* **54** (1985), 121—124.
[59] SZABÓ, S.: Reductions of a problem of G. Hajós, *K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math.,* Budapest, 1985, No. 3, 1—13.
[60] SZABÓ, S.: A reduction of Keller's conjecture, *Periodica Math. Hungar.* **17** (1986), 265—277.
[61] SZABÓ S.: Térkitöltő kockarendszerek, *Mat. Lapok* **32** (1981—1984), 49—73.

[62] SZELE, T.: Neuer vereinfachter Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 56—62.
[63] SWENSON, C. B.: *Direct sum subset decompositions of abelian groups*, Ph. D. Thesis, Washington State Univ., 1972.
[64] WITTMAN, E.: Einfacher Beweis des Hauptsatzes von Hajós—Rédei für elementare Gruppen von Primzahlquadratordnung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969), 227—230.
[65] WITTMAN, E.: Über verschwindende Summen von Einheitswurzeln, *Elem. der Math.* **26** (1971), 42—43

ТЕОРЕМА ХАЙОША—МИНКОВСКОГО И НЕСКОЛЬКО СВЯЗАННЫХ С НЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ

К. КОРРАДИ и Ш. САБО

THE HAJÓS—MINKOWSKI THEOREM AND SOME RELATED RESULTS

K. CORRÁDI and S. SZABÓ

ADOTT TÜKRÖZÉSCSOPORTOKHOZ TARTOZÓ EXTREMÁLIS GÖMBKITÖLTÉSEK A HIPERBOLIKUS TÉRBEN

BREZOVICH LÁSZLÓ és MOLNÁR EMIL

Dolgozatunk témája olyan diszkrét egybevágósági transzformációcsoportokhoz kapcsolódik, amelyek egyszeresen összefüggő, állandó görbületű terekben értelmezhetők és melyeket hipersíkokra történő tükrözések generálnak. Ezeket Coxeter-csoportoknak nevezzük. Egy ilyen csoportban a tükrözések síkjai a teret konvex poliéderekre bontják. Ezek a csoport cellái. A háromdimenziós hiperbolikus térben kilenc darab olyan Coxeter-csoport létezik, melyeknek cellái korlátos szimplexek. A dolgozatban ezeknek az úgynevezett Lanner-féle szimplexeknek a metrikus tulajdonságait vizsgáljuk. Ezek elősegítik a hiperbolikus tér olyan gömbkitöltéseinek a vizsgálatát, melyeknél a gömbelhelyezések szimmetriacsoportjai az adott tükrözéscsoportokkal esnek egybe. Célul tűzzük ki, hogy ezen adott szimmetriacsoportokkal rendelkező gömbkitöltések közül meghatározzuk az extremális kitöltéseket. Az elemi, szintetikus geometriai megfontolásokon kívül a hiperbolikus geometria analitikus, a projektív metrikára alapozott segédeszközeit is felhasználjuk [1], [8], [9], [10], [11].

Az **1.** fejezetben a metrikus vektortér legfontosabb vonatkozásait foglaljuk össze, ez lesz a dolgozat legfontosabb algebrai segédeszköze. A **2.** fejezetben értelmezzük az előzőkre épített projektív geometriát, majd a skalárszorzat megfelelő definiálásával, a projektív metrikus geometriák keretében, lehetővé válik a hiperbolikus geometria modellezése. A projektív metrika által származtatott távolságfogalom a hiperbolikus geometria projektív modelljében is indukálja a hiperbolikus távolság fogalmát. A **3.** fejezetben a hiperbolikus tér szimplexeit jellemezzük a hozzájuk rögzített bázis segítségével. Bizonyítás nélkül megadjuk az ilyen szimplexek térfogatainak meghatározására vonatkozó formulát, mely numerikus integrálásra is alkalmas [9]. A **4.** fejezetben a Lanner-féle szimplexekhez tartozó gömbkitöltések sűrűségeit vizsgáljuk. Meghatározzuk az extremális kitöltéseket azokban az esetekben, amikor a gömbközéppont a szimplex belső pontjait, egy lapjának pontjait, egy élének pontjait futja be, illetve ha az egyik szimplexcsúcsban van. Az **5.** fejezetben ezen extremális kitöltések közül kiválasztjuk a maximális sűrűségűt. A konkrét számításoknál személyi számítógépet is alkalmaztunk.

A témát az a tény is motiválja, hogy a hiperbolikus tér egybevágó gömbökkel történő legsűrűbb kitöltéseinek problémája (mint ahogy meglepően az euklideszi téré is) még távol áll a megoldástól és nagyon nehéznek látszik. A hiperbolikus tér ilyen jellegű gömbkitöltése a következő értelemben van megoldva. FEJES TÓTH LÁSZLÓ és COXETER sejtése nyomán BÖRÖCZKY KÁROLY [3], [4] igazolta, hogy a Dirichlet-cellára vonatkoztatott gömbsűrűség nem lehet nagyobb, mint egy szabályos szimplex csúcsaiban elhelyezett, egybevágó, egymást páronként érintő négy gömbnek a szimplexre vonatkozó sűrűsége. Ezt a sűrűséget úgy kapjuk, hogy egy gömb szimplexbe nyúló részének térfogatát osztjuk a szimplex térfogatának negyed-

részével. Ez a becslés n-dimenziós állandó görbületű térre is kiterjeszthető. A tér szabályos szimplexekkel való kitöltése a háromdimenziós hiperbolikus térben még nem létezik. Csak olyan szabályos szimplexekkel lehet a hiperbolikus teret kitölteni, melynek minden csúcsa a végtelenbe nyúlik. Mivel A. FLORIAN igazolta, hogy az ilyen gömbkitöltés sűrűsége a gömbsugár monoton függvénye, ezért az ideális csúcspontú szabályos szimplexfelbontáshoz tartozó paraszférakitöltés tekinthető a maximális sűrűségűnek a háromdimenziós hiperbolikus térben. Természetesen a legsűrűbb gömbkitöltés közbülső sugarakra nagyon nehéznek tűnik. Vizsgálatunk hozzájárulhat ilyen esetekben jobb becslések megsejtéséhez.

1. Metrikus vektortér

Tekintsünk egy $\mathbf{V}=\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots\}$ és $\mathscr{V}=\{u, v, \ldots\}$ vektortér — duális vektortér párt, melyek az $\mathbf{R}=\{a, b, \ldots\}$ valós számtest felett vannak értelmezve. $\mathbf{V}$ elemeit vektoroknak, $\mathscr{V}$ elemeit formáknak nevezzük. Csak olyan vektorterekkel foglalkozunk, melyekben a lineárisan független vektorok maximális száma $n+1 \geqq 3$. Ekkor $\mathbf{V}:=\mathbf{V}^{n+1}$, tehát $(n+1)$ a *vektortér dimenziója*. A $\mathbf{V}^{n+1}$ vektortérben a tetszőleges lineárisan független $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ vektorok egy *bázis*t alkotnak, azaz egy $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{n+1}$ vektor egyértelműen írható:

$$\mathbf{x} = x^0 \cdot \mathbf{e}_0 + x^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \ldots + x^n \cdot \mathbf{e}_n =: x^i \mathbf{e}_i$$

alakban (Einstein konvenció).

A $\mathscr{V}$ duális teret azok a lineáris függvények (formák) alkotják, melyek a $\mathbf{V}$ vektorain vannak értelmezve és $\mathbf{R}$-beli értékeket vesznek fel. Jelölje $\mathbf{x}u \in \mathbf{R}$ az u formának az $\mathbf{x}$ vektoron felvett értékét. A forma linearitását leíró azonosság:

$$(a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{y})u = a \cdot (\mathbf{x}u) + b \cdot (\mathbf{y}u).$$

Tetszőleges $u, v \in \mathscr{V}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $a \in \mathbf{R}$ esetén legyen

$$\mathbf{x}(u+v) := \mathbf{x}u + \mathbf{x}v, \quad \mathbf{x}(u \cdot a) := (\mathbf{x}u) \cdot a$$

a formák összeadásának és számmal való szorzásának a definíciója. Ilyen műveleti definíciók mellett $\mathscr{V}$ is vektorteret alkot és dimenziója egyenlő $\mathbf{V}$ dimenziójával, $\mathscr{V} := \mathscr{V}_{n+1}$. A $\mathbf{V}^{n+1}$ egy $\{\mathbf{e}_i\}$ bázisát megadva értelmezhetjük az $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ $\mathscr{V}_{n+1}$-beli formákat, melyekre teljesül:

$$\mathbf{e}_i \varepsilon^k := \delta_i^k = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq k \\ 1, & \text{ha } i = k \end{cases} \quad \text{(Kronecker delta)}.$$

Ekkor $\{\varepsilon^k\}$ a $\mathscr{V}_{n+1}$ bázisa, melyet a $\mathbf{V}^{n+1}$-beli $\{\mathbf{e}_i\}$ bázis duálisának nevezünk. Ha $u = \varepsilon^k \cdot u_k$, $\mathbf{x} = x^i \cdot \mathbf{e}_i$, akkor

$$\mathbf{x}u = (x^i \cdot \mathbf{e}_i)(\varepsilon^k \cdot u_k) = x^i \cdot (\mathbf{e}_i \varepsilon^k) \cdot u_k = x^i \delta_i^k u_k = x^i u_i.$$

Az indexekre vonatkozó összegzési konvenció is kiemeli a $\mathbf{V}^{n+1}$ és a $\mathscr{V}_{n+1}$ terek szimmetrikus szerepét. A $\mathscr{V}_{n+1}$ tér duálisa azonosítható a $\mathbf{V}^{n+1}$ vektortérrel, amelyből kiindultunk.

A $\mathbf{V}$ vektortérnek egy olyan $\mathbf{U}$ részhalmazát, mely az adott műveletekkel maga is vektortér, a $\mathbf{V}$ *alter*ének nevezzük. Rögzített, $\mathcal{O}$ zérus formától különböző $u \in \mathscr{V}_{n+1}$ mellett azok a $\mathbf{V}^{n+1}$-beli $\mathbf{x}$ vektorok, melyekre $\mathbf{x}u = 0$ teljesül, egy n-dimenziós alteret alkotnak $\mathbf{V}^{n+1}$-ben. Ha $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárisan függetlenek, akkor az

általuk kifeszített legszűkebb altér tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorának ki kell elégítenie a $\det(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)=0$ feltételt. Ebből az $x^i u_i=0$ alapján, az n-dimenziós altérhez tartozó ω forma u_i koordinátái meghatározhatók. Az ω és az $\omega \cdot a$ ($a \in \mathbf{R}$) formák ugyanazt a $\mathbf{V}^{n+1}$-beli n-dimenziós alteret jellemzik.

A $\mathbf{V}^{n+1}$ vektortérnek a duális $\mathscr{V}_{n+1}$ formatérbe történő (*): $\mathbf{V}^{n+1} \to \mathscr{V}_{n+1}$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^* =: x$ leképezését *polaritás*nak nevezzük, ha

$$\text{lineáris:} \qquad (a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{y})^* = \mathbf{x}^* \cdot a + \mathbf{y}^* \cdot b = x \cdot a + y \cdot b,$$

$$\text{szimmetrikus:} \quad \mathbf{x}\mathbf{y}^* = \mathbf{x}y = \mathbf{y}x = \mathbf{y}\mathbf{x}^*,$$

tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}^{n+1}$ és $a, b \in \mathbf{R}$ esetén.

Az $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\varepsilon^k\}$ duális bázisokat megadva, $\{\mathbf{e}_i\}$ képei a polaritást egyértelműen meghatározzák. $\mathbf{e}_i^* = \varepsilon_i = \varepsilon^j a_{ij}$-ből adódik a polaritás (a_{ij}) mátrixa, mely szimmetrikus. A továbbiakban feltesszük, hogy (*) reguláris, azaz invertálható polaritás. A (*) reguláris polaritás inverze legyen a

$$(_*): \mathscr{V}_{n+1} \to \mathbf{V}^{n+1}, \quad \omega \mapsto \omega_* =: \mathbf{u}.$$

Ennek (b^{jk}) mátrixa az $\varepsilon_*^j = \mathbf{e}^j = b^{jk}\mathbf{e}_k$-ból adódik.

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i^*)_* = (\varepsilon^j a_{ij})_* = a_{ij}(\varepsilon^j)_* = a_{ij} b^{jk} \mathbf{e}_k$$

miatt

$$a_{ij} b^{jk} = \delta_i^k \quad \text{(Kronecker delta)}.$$

Ezek a polaritások lehetővé teszik a vektorok és a formák azonosítását. Így egy vektornak, formának kétféle koordinátái is lehetnek az adott $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\varepsilon^j\}$ bázispárra nézve: kontravariáns $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ alapján és kovariáns $x = \varepsilon^j x_j$ szerint. $\mathbf{x} = x_* = x_j \varepsilon_*^j = x_j b^{jk} \mathbf{e}_k$, illetve $x = \mathbf{x}^* = \mathbf{e}_i^* x^i = \varepsilon^j a_{ij} x^i$, tehát a kétféle koordináták közötti kapcsolatot

$$x_j = a_{ij} x^i \quad \text{és} \quad x^k = x_j b^{jk} \tag{1}$$

írják le.

A reguláris polaritás megadása egyenértékű egy reguláris, szimmetrikus *bilineáris forma* megadásával:

$$\langle\,;\,\rangle: \mathbf{V}^{n+1} \times \mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{R} \quad \text{avagy} \quad \langle\,;\,\rangle: \mathscr{V}_{n+1} \times \mathscr{V}_{n+1} \to \mathbf{R},$$

ahol $\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \langle x; y \rangle := \mathbf{x}y$.

Ha $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$, $x = \varepsilon^s x_s$, $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$, $y = \varepsilon^t y_t$, akkor

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = x^i y_i = y^j x_j = x^i a_{ij} y^j = y_i b^{ij} x_j = \langle x; y \rangle,$$

$$\langle \mathbf{e}_i; \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i e_j = \mathbf{e}_i \varepsilon^k a_{kj} = \delta_i^k a_{kj} = a_{ij} = \langle e_i; e_j \rangle,$$

$$\langle \varepsilon^i; \varepsilon^j \rangle = \mathbf{e}^i \varepsilon^j = b^{ik} \mathbf{e}_k \varepsilon^j = b^{ik} \delta_k^j = b^{ij} = \langle \mathbf{e}^i; \mathbf{e}^j \rangle.$$

A $\mathbf{V}^{n+1}$ vektortér önmagára történő φ: $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} := \mathbf{x}\varphi$ leképezését lineárisnak nevezzük, ha tetszőleges $a, b \in \mathbf{R}$ és $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}^{n+1}$ esetén:

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})\varphi = a(\mathbf{x}\varphi) + b(\mathbf{y}\varphi).$$

A $\mathbf{V}^{n+1}$ vektortér $\{\mathbf{e}_i\}$ bázisát megadva, legyen $\mathbf{e}_i \varphi = f_i^k \mathbf{e}_k$. Ekkor $\mathbf{y} = y^k \mathbf{e}_k = \mathbf{x}\varphi = (x^i \mathbf{e}_i)\varphi = x^i(\mathbf{e}_i \varphi) = x^i f_i^k \mathbf{e}_k$ alapján $y^k = x^i f_i^k$.

Ha $\det(f_i^k) \neq 0$, akkor a φ leképezés egy-egyértelmű. A $\mathbf{V}^{n+1}$ vektortér önmagára történő egy-egyértelmű lineáris leképezései a kompozíció műveletével cso-

portot alkotnak. A $\mathbf{V}^{n+1}$ egy-egyértelmű φ lineáris leképezése indukálja a $\mathscr{V}_{n+1}$ tér φ^* lineáris leképezését:

$$\varphi^*: v \mapsto \varphi^* v; \quad x(\varphi^* v) := (\mathbf{x}\varphi)v$$

tetszőleges $v \in \mathscr{V}_{n+1}$ és $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{n+1}$ esetén.

A $\mathscr{V}_{n+1}$ tér $\{\varepsilon^i\}$ bázisában legyen $\varphi^* \varepsilon^i := \varepsilon^k g_k^i$, ekkor

$$u = \varepsilon^k u_k =: \varphi^* v = \varphi^*(\varepsilon^i v_i) = (\varphi^* \varepsilon^i) v_i = \varepsilon^k g_k^i v_i$$

miatt

$$u_k = g_k^i v_i.$$

$$f_i^k = (\mathbf{e}_i \varphi)\varepsilon^k = \mathbf{e}_i(\varphi^* \varepsilon^k) = \mathbf{e}_i(\varepsilon^j g_j^k) = \delta_i^j g_j^k = g_i^k$$

mutatja, hogy φ és φ^* mátrixa egyaránt $(f_i^k) = (g_i^k)$, de természetesen az első az $\{\mathbf{e}_i\}$ a másik az $\{\varepsilon^k\}$ bázishoz tartozik.

Ha a $\mathbf{V}^{n+1}$ vektortéren megadunk egy reguláris polaritást, azaz egy nem elfajuló szimmetrikus bilineáris formát, az így nyert struktúrát *metrikus vektortér*nek nevezzük. A polaritás inverze a $\mathscr{V}_{n+1}$ formateret is metrikussá teszi.

A $\mathbf{V}^{n+1}$ metrikus vektortér φ egy-egyértelmű lineáris leképezését *ortogonális*nak nevezzük, ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}^{n+1}$ vektorra

$$\langle \mathbf{x}\varphi; \mathbf{y}\varphi \rangle = \langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle.$$

Ha az $\{\mathbf{e}_i\}$ bázisban φ mátrixa (f_i^k), a polaritás mátrixa (a_{ik}), akkor

$$a_{ik} = \langle \mathbf{e}_i; \mathbf{e}_k \rangle = \langle \mathbf{e}_i \varphi; \mathbf{e}_k \varphi \rangle = \langle f_i^j \mathbf{e}_j; f_k^l \mathbf{e}_l \rangle = f_i^j a_{jl} f_k^l.$$

Reguláris polaritás esetén, amikor $\det(a_{ik}) \neq 0$, következik, hogy $\det(f_i^j) = \pm 1$.

Ha $\mathbf{V}^{n+1}$-ben, ill. $\mathscr{V}_{n+1}$-ben új bázisra térünk át, formuláink átírása a következő:

$\mathbf{V}^{n+1}$ új bázisa legyen $\{\mathbf{e}_{i'}\}$, $\mathscr{V}_{n+1}$-ben az ehhez duális bázis $\{\varepsilon^{k'}\}$. Vezessük be $\mathbf{e}_{i'} = e_{i'}^i \mathbf{e}_i$ és $\varepsilon^{k'} = \varepsilon^k e_k^{k'}$ alapján az $(e_{i'}^i)$ és $(e_k^{k'})$ áttérési mátrixokat. Ekkor

$$\delta_{i'}^{k'} = \mathbf{e}_{i'} \varepsilon^{k'} = (e_{i'}^i \mathbf{e}_i)(\varepsilon^k e_k^{k'}) = e_{i'}^i (\mathbf{e}_i \varepsilon^k) e_k^{k'} = e_{i'}^i \delta_i^k e_k^{k'} = e_{i'}^k e_k^{k'}$$

mutatja, hogy a két áttérési mátrix egymás inverze. Továbbá

$$x^{i'} = x^i e_i^{i'}, \quad u_{k'} = e_{k'}^k u_k$$

lesz a vektor, ill. a forma koordinátáinak az átírása,

$$f_{i'}^{k'} = e_{i'}^i f_i^k e_k^{k'}$$

lesz a φ lineáris leképezés mátrixának átírása,

$$a_{i'k'} = e_{i'}^i a_{ik} e_{k'}^k, \quad b^{i'k'} = e_i^{i'} b^{ik} e_k^{k'}$$

lesz a reguláris polaritás mátrixának átírása.

2. Hiperbolikus projektív-metrikus tér

A vektortér fogalmának bevezetése után — erre építve — értelmezhető az n-dimenziós projektív geometria. A skalárszorzat bevezetésével, a projektív-metrikus geometriák keretében lehetővé válik az euklideszi és a nem euklideszi geometriák tárgyalása is. A vektortéren értelmezett skalárszorzat — nem elfajuló szimmetrikus bilineáris forma — adja meg a geometria metrikájának jellegét.

Tekintsük az $\mathbf{R}$ feletti $\mathbf{V}^{n+1}$, $\mathscr{V}_{n+1}$ vektortér-formatér-párt, az $\{\mathbf{e}_i\}$ bázissal és az $\{e^j\}$ duális bázissal. Vezessünk be 1-indexű bilineáris formát, azaz skalárszorzatot a következő definícióval:

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \langle x^i \mathbf{e}_i; y^j \mathbf{e}_j \rangle = x^i \langle \mathbf{e}_i; \mathbf{e}_j \rangle y^j = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + \ldots + x^n y^n. \tag{2}$$

Az így definiált „metrikus" vektortereket rendre $\mathbf{V}^{n+1} := \mathbf{V}_1^{n+1}$, $\mathscr{V}_{n+1} := \mathscr{V}_{n+1}^1$ jelöli a továbbiakban.

A $\mathbf{V}_1^{n+1}$ (és a $\mathscr{V}_{n+1}^1$) tér elemei között bevezetünk egy relációt:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \; (u \sim v) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \quad \mathbf{y} = c\mathbf{x} \; (v = uc)$$

ekvivalenciareláció indukálja a $\mathscr{P}_1^n(\mathbf{V}_1^{n+1}, \mathscr{V}_{n+1}^1) =: \mathscr{P}_1^n$ n-dimenziós *projektív metrikus teret*. $(\mathbf{x})$ jelöli az $\mathbf{x}$ vektort tartalmazó, (u) jelöli az u formát tartalmazó ekvivalenciaosztályt. A $\mathscr{P}_1^n$ tér pontjait a $\mathbf{V}_1^{n+1}$ 1-dimenziós alterei (ill. $\mathscr{V}_{n+1}^1$ n-dimenziós alterei), $(n-1)$-dimenziós hipersíkjait a $\mathbf{V}_1^{n+1}$ n-dimenziós alterei (ill. $\mathscr{V}_{n+1}^1$ 1-dimenziós alterei) jellemzik. A $\mathscr{P}_1^n$ tér r-síkjait általánosan a $\mathbf{V}_1^{n+1}$ tér $(r+1)$-dimenziós altereivel (ill. a $\mathscr{V}_{n+1}^1$ tér $(n-r)$-dimenziós altereivel) definiáljuk. A $\mathscr{P}_1^n$ tér p-síkja az r-síkhoz illeszkedik $(p \leqq r)$, ha a p-síkot $\mathbf{V}_1^{n+1}$-ben meghatározó altér része az r-síkot definiáló altérnek.

A $\mathbf{V}_1^{n+1}$ tér φ egy-egyértelmű lineáris leképezéseinek segítségével értelmezhetjük a $\mathscr{P}_1^n$ tér (φ) *projektív leképezés*eit, mely az illeszkedési relációt megtartja. Ha φ még ortogonális leképezés is, akkor (φ) a $\mathscr{P}_1^n$ térben bevezetett polaritást is megtartja.

Tetszőleges φ lineáris leképezés és $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ esetén a $c \cdot \varphi$ leképezésen értjük azt a leképezést, mely tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_1^{n+1}$ esetén

$$\mathbf{x}(c\varphi) := c(\mathbf{x}\varphi).$$

(φ) jelöli a $\varphi \sim c \cdot \varphi$ ekvivalenciarelációból adódó ekvivalenciaosztályt.

A $\mathbf{V}_1^{n+1}$ vektortér

$$\mathscr{C}^+ := \{\mathbf{x} : \langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle < 0, \; x^0 > 0\} \tag{3}$$

negatív skalárnégyzetű kúp-komponensében modellezzük az *n-dimenziós hiperbolikus teret*. A $\mathscr{H}^n$ hiperbolikus tér pontjait a $\mathscr{C}^+$-ba mutató 1-dimenziós alterek jellemzik:

$$\mathscr{H}^n := \{(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathscr{C}^+\} \subset \mathscr{P}_1^n. \tag{4}$$

A $\mathscr{P}_1^n$ térben invariáns módon, komplex értékű távolság értelmezhető és $\mathscr{H}^n \subset \mathscr{P}_1^n$ miatt, a (2) skalárszorzat a $\mathscr{H}^n$-beli távolságfogalmat is indukálja, összhangban a klasszikus hiperbolikus metrikával.

Távolság a $\mathscr{P}_1^n$-ben

Felidézzük négy egy egyenesen lévő, egymástól különböző $(\mathbf{x})$, $(\mathbf{y})$, $(\mathbf{u}_1)$, $(\mathbf{u}_2)$ $\mathscr{P}_1^n$-beli pont kettősviszonyának értelmezését. Adott $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ esetén $\mathbf{u}_1 = \alpha_1 \mathbf{x} + \beta_1 \mathbf{y}$, $\mathbf{u}_2 = \alpha_2 \mathbf{x} + \beta_2 \mathbf{y}$ alakban előállítható. Mivel minden pont különböző, egyik együttható sem lehet 0, és $\alpha_1 \beta_2 = \alpha_2 \beta_1$ sem teljesülhet $\mathbf{u}_1 \nsim \mathbf{u}_2$ miatt.

Legyen

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) := \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

A definícióból adódik, hogy $a, b, c, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ esetén:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (a\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{x}, b\mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, c\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) =$$

$$= (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, d\mathbf{u}_2).$$

Ez tükrözi azt, hogy a kettősviszony valóban az ekvivalenciaosztályokra, tehát a pontokra vonatkozik.

Igazak a következő azonosságok:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)} = \frac{1}{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)},$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2),$$

ha $(\mathbf{z})$ is az egyenesen van. Ezekből következik az alábbi definíciók célszerűsége:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) := 1, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) := 1,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) := 0, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) := 0,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) := \infty, \quad (\mathbf{u}_2, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) := \infty.$$

Tekintsük az $(\mathbf{x})$, $(\mathbf{y})$ pontokkal kijelölt egyenes tetszőleges izotrop vektorosztályhoz tartozó $(\mathbf{i})$ pontját, melyre tehát $\langle \mathbf{i}; \mathbf{i} \rangle = 0$ teljesül. Legyen $\mathbf{i} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$, ekkor a

$$(*) \qquad \alpha \cdot \alpha \cdot \langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle + 2\alpha \cdot \beta \cdot \langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle + \beta \cdot \beta \cdot \langle \mathbf{y}; \mathbf{y} \rangle = 0$$

egyenlet $\frac{\beta}{\alpha}$ megoldásai tűzik ki az izotrop vektorirányokat. Két megoldás van (két különböző valós, két egyenlő valós, két komplex konjugált).

Az $(\mathbf{x})$, $(\mathbf{y})$ $\mathscr{P}_1^n$-beli pontok $s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ távolsága:

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{\mathrm{k}}{2} \ln (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2),$$

ahol $\mathrm{k} \in \mathbf{R}^+$ metrikus konstans. A kettősviszony fenti tulajdonságaiból adódóan ez kielégíti az alábbi feltételeket: ha $(\mathbf{x})$, $(\mathbf{y})$ és $(\mathbf{z})$ egy egyenesen vannak, akkor $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + s(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, $s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$.

Távolság a $\mathscr{H}^n$ hiperbolikus térben

Ha $(\mathbf{x}), (\mathbf{y}) \in \mathscr{H}^n$, akkor

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle < 0, \quad \langle \mathbf{y}; \mathbf{y} \rangle < 0$$

és

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle < 0 \quad (x^0, y^0 > 0 \text{ miatt})$$

mindig fennáll. Két különböző, izotrop vektorosztállyal kijelölt valós pont $(\mathbf{i}_1)$, $(\mathbf{i}_2)$

van az egyenesen. Ezért (*) alapján:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{1,2} = \frac{-\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle \pm \sqrt{\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle^2 - \langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y};\mathbf{y}\rangle}}{\langle \mathbf{y};\mathbf{y}\rangle},$$

a kettősviszony pedig

$$(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2) = \frac{-\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle + \sqrt{\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle^2 - \langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y};\mathbf{y}\rangle}}{-\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle - \sqrt{\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle^2 - \langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y};\mathbf{y}\rangle}}.$$

Így $(\mathbf{x}), (\mathbf{y}) \in \mathscr{H}^n$ pontjainak távolsága:

$$(5) \qquad s(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \frac{k}{2} \ln \frac{-\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle + \sqrt{\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle^2 - \langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y};\mathbf{y}\rangle}}{-\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle - \sqrt{\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle^2 - \langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y};\mathbf{y}\rangle}}.$$

Most $(\mathbf{i}_1)$, $(\mathbf{i}_2)$ sorrendjének megválasztása miatt $s(\mathbf{x};\mathbf{y}) \geqq 0$ is fennáll. (5)-tel ekvivalens kifejezések:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \operatorname{ch}\frac{s(\mathbf{x};\mathbf{y})}{k} &= \frac{-\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y};\mathbf{y}\rangle}}, \\ \operatorname{sh}\frac{s(\mathbf{x},\mathbf{y})}{k} &= \frac{\sqrt{\langle \mathbf{x};\mathbf{y}\rangle^2 - \langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y};\mathbf{y}\rangle}}{\sqrt{\langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y};\mathbf{y}\rangle}}. \end{aligned}$$

Ezekből adódik a differenciális formában szokásos ívelem:

$$(7) \qquad ds = s(\mathbf{x}, \mathbf{x}+d\mathbf{x}) = \frac{k}{-\langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle} \sqrt{\langle \mathbf{x};d\mathbf{x}\rangle^2 - \langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle\langle d\mathbf{x};d\mathbf{x}\rangle}.$$

Ez a ds ívelem projektív metrikus jellegű. Változatlan marad $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = c\mathbf{x}$, $d\mathbf{x} \mapsto d\mathbf{y} = c\,d\mathbf{x}$ áttérésnél, valamint minden olyan ortogonális transzformációnál, mely a (2) skalárszorzatot megtartja, azaz $\mathscr{H}^n$ egybevágósági transzformációnál is. Megadható a (7) képlet általánosságának megfelelő térfogatelem is a (2)-höz tartozó ortonormált bázisban [9]:

$$(8) \qquad dV = \frac{k^n}{\{-\langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle\}^{(n+1)/2}} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot x^i\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

mely szintén projektív metrikus invariáns. Változatlan marad $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = c\mathbf{x}$, $d\mathbf{x} \mapsto d\mathbf{y} = c\,d\mathbf{x}$ áttérésnél, továbbá minden $\varphi \in \mathscr{O}_1^{n+1}$ ortogonális transzformációnál, ha a determinánsa $+1$. A (7), (8) összefüggések akkor is iránymutatóak, ha más koordinátarendszert akarunk bevezetni. Ha $\mathscr{H}^n$ vektorosztályai körében bevezetjük a

$$(9) \qquad \langle \mathbf{x};\mathbf{x}\rangle = -x^0x^0 + x^1x^1 + \ldots + x^nx^n = -k^2$$

normálást, a $\mathbf{V}_1^{n+1}$ $k \cdot i$ képzetes sugarú gömbjének egyenletét kapjuk. (9) miatt $\langle \mathbf{x};d\mathbf{x}\rangle = 0$ adódik, ezért a (7) ívelem $ds = \sqrt{\langle d\mathbf{x};d\mathbf{x}\rangle}$ alakú. Ha ezen a „gömbön" bevezetjük a „polárkoordinátázást", tehát egy pont koordinátái:

$$(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}, \varphi^n); \quad 0 \leqq \varphi^1 < \infty, \quad 0 \leqq \varphi^j \leqq \pi$$

$(j=2, \ldots, n-1)$, $0 \leqq \varphi^n < 2\pi$; akkor a két koordinátázás közötti kapcsolat [1]:

$$
\begin{aligned}
x^0 &= \mathrm{k} \cdot \mathrm{ch}\, \varphi^1, \\
x^1 &= \mathrm{k} \cdot \mathrm{sh}\, \varphi^1 \cdot \cos \varphi^2, \\
x^2 &= \mathrm{k} \cdot \mathrm{sh}\, \varphi^1 \cdot \sin \varphi^2 \cdot \cos \varphi^3, \\
&\vdots \\
x^{n-1} &= \mathrm{k} \cdot \mathrm{sh}\, \varphi^1 \cdot \sin \varphi^2 \cdot \ldots \cdot \sin \varphi^{n-1} \cdot \cos \varphi^n, \\
x^n &= \mathrm{k} \cdot \mathrm{sh}\, \varphi^1 \cdot \sin \varphi^2 \cdot \ldots \cdot \sin \varphi^{n-1} \cdot \sin \varphi^n.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Ebből a $\mathrm{d}s = \sqrt{\langle \mathbf{dx}; \mathbf{dx} \rangle}$ alapján az ívelem polárkoordinátákban:

$$
\mathrm{d}s = \mathrm{k} \sqrt{\mathrm{d}\varphi^1 \cdot \mathrm{d}\varphi^1 + \mathrm{sh}^2 \varphi^1 \cdot \mathrm{d}\varphi^2\, \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{sh}^2 \varphi^1 \cdot \sin^2 \varphi^2 \cdot \mathrm{d}\varphi^3\, \mathrm{d}\varphi^3 + \ldots} \tag{11}
$$

$$
\overline{\ldots + \mathrm{sh}^2 \varphi^1 \cdot \sin^2 \varphi^2 \cdot \ldots \cdot \sin^2 \varphi^{n-1} \cdot \mathrm{d}\varphi^n\, \mathrm{d}\varphi^n} =: \sqrt{g_{ik}\, \mathrm{d}\varphi^i\, \mathrm{d}\varphi^k}.
$$

A térfogat pedig:

$$
\mathrm{d}V = \sqrt{\det g_{ik}}\, \mathrm{d}\varphi^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\varphi^n = \tag{12}
$$

$$
= \mathrm{k}^n\, \mathrm{sh}^{n-1} \varphi^1 \sin^{n-2} \varphi^2 \ldots \sin \varphi^{n-1}\, \mathrm{d}\varphi^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\varphi^n.
$$

Ebből adódik az R sugarú gömb térfogata $n=3$ esetén:

$$
V_g = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{R/\mathrm{k}} \mathrm{k}^3\, \mathrm{sh}^2 \varphi^1 \sin \varphi^2\, \mathrm{d}\varphi^1 \right) \wedge \mathrm{d}\varphi^2 \right) \wedge \mathrm{d}\varphi^3 = \tag{13}
$$

$$
= 2\pi\, \mathrm{k}^3 \left(\mathrm{sh} \frac{R}{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{ch} \frac{R}{\mathrm{k}} - \frac{R}{\mathrm{k}} \right).
$$

Az (ω) formához tartozó $(n-1)$-dimenziós hipersík $(\mathbf{y})$ pontjai kielégítik az $\mathbf{y}\omega = \langle \mathbf{y}; \mathbf{u} \rangle = 0$ egyenletet, ahol $\mathbf{u}$ a hipersík normálvektora. Egy $(\mathbf{x})$ pontnak az (ω) síktól való távolsága (6) alapján kifejezhető. Az $\mathbf{x}$ vektornak az $\mathbf{u}$ normálvektorral párhuzamos komponense: $\dfrac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}; \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}$, így az $\mathbf{x}$ vektornak a síkra eső merőleges vetülete: $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \dfrac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}; \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}$. Ezért az $(\mathbf{x})$ pontnak az (ω) síktól való távolsága egyenlő $s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$-nal, így (6) alapján:

$$
\mathrm{sh} \frac{s(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\mathrm{k}} = \frac{\sqrt{\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle^2 - \langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}; \mathbf{y} \rangle}}{\sqrt{\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}; \mathbf{y} \rangle}} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{u}; \mathbf{u} \rangle}}, \tag{14}
$$

ahol $\langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle > 0$, $\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle < 0$, $\langle \mathbf{u}; \mathbf{u} \rangle > 0$. A távolságformula analógiájára a síkok szögét is bevezethetjük. Az (ω) és (υ) síkok α szögét $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$:

$$
-\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}; \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}; \mathbf{v} \rangle}} \tag{15}
$$

jellemzi, ha $\mathbf{v}$ nem mutat az $\mathbf{u}$ kijelölte féltérbe: $\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle < 0$. Ezt is kiterjesztjük komplex szögekre is, hogy később a síkok távolságára is információt kapjunk.

3. Szimplexek a $\mathscr{H}^n$ hiperbolikus térben

Ha adott $(n+1)$ db. $A_i(\mathbf{a}_i)$ pont $\mathscr{H}^n$-ben úgy, hogy ezek a pontok ne legyenek $\mathscr{H}^n$ egyetlen $(n-1)$-dimenziós hipersíkjában sem, akkor az adott pontokat tartalmazó legszűkebb, zárt, konvex halmazt szimplexnek nevezzük.

A szimplexeket hozzájuk rögzített bázisban lehet a legkönnyebben jellemezni. Adjuk meg a szimplex $(\mathscr{E}^i)$ lapsíkjait, ezek által az α^{ij} lapszögeket. Adott tehát:

$$b^{ij} := \langle \mathscr{E}^i; \mathscr{E}^j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ -\cos \alpha^{ij}, & \text{ha } i \neq j. \end{cases} \tag{16}$$

A polaritásból következően tudjuk, hogy a $\mathbf{b}^i$ vektor egyben a $(\mathscr{E}^i)$ lap $\mathbf{V}_1^{n+1}$-beli normálvektorát, másrészt a lap $\mathscr{P}_1^n$-beli pólusát tűzi ki, így meghatározhatók a szimplex $(\mathbf{a}_i)$ csúcsai:

$$\mathbf{a}_i \mathscr{E}^j = \langle \mathbf{a}_i; \mathbf{b}^j \rangle = \delta_i^j \quad \text{alapján.} \tag{17}$$

A polaritás bevezetésénél mondottak alapján az $\langle \mathbf{a}_i; \mathbf{a}_j \rangle =: a_{ij}$ skalárszorzatokra adódik a

$$a_{ij} b^{jk} = \delta_i^k \quad \text{összefüggés.} \tag{18}$$

A $\{\mathbf{b}^i\}$, illetve $\{\mathbf{a}_i\}$ bázisban ezért két vektor skalárszorzata:

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \langle x; y \rangle = x_i b^{ij} y_j = x^i a_{ij} y^j. \tag{19}$$

A (16)-ból és (17)-ből adódó $\mathbf{a}_i$ csúcsok nem feltétlenül $\mathscr{H}^n$-hez tartozó $\mathscr{P}_1^n$-beli pontok lesznek. Másrészt $\mathscr{P}_1^n$-ben csak olyan szimplexek léteznek, ahol a (19) bilineáris forma 1-indexű indefinit. Ennek teljesülése nyilvánvalóan (16)-tól, tehát az α^{ij} szögek megadásától függ. (18) alapján az (a_{ij}) mátrix a (b^{jk}) inverze, vagyis az $\mathbf{a}_i = a_{ij}\mathbf{b}^j$ csúcsvektorok $\{\mathbf{b}^j\}$ bázisbeli koordinátái a (16)-beli adott mátrix invertálásából adódnak.

Az $(\mathbf{a}_i)$ és $(\mathbf{a}_k)$ csúcsok d_{ik} távolsága (6) alapján:

$$\operatorname{ch} \frac{\mathrm{d}_{ik}}{\mathrm{k}} = \frac{-a_{ik}}{\sqrt{a_{ii} \cdot a_{kk}}}. \tag{20}$$

A szimplexek térfogata $\mathscr{H}^n$-ben

Ha $(\mathbf{a}_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ egy $\mathscr{H}^n$-beli szimplex csúcsai, akkor a szimplex pontjait:

$$\{(\mathbf{x}): \mathbf{x} = x^0\mathbf{a}_0 + \ldots + x^n\mathbf{a}_n;\ x^0, \ldots, x^n \geqq 0;\ x^0 + \ldots + x^n = 1\}$$

jellemzi. Ebből következően numerikus integrálásra alkalmas formulát kaphatnánk, ha a szimplexet az $\{\mathbf{a}_i\}$ bázisban adnánk meg. A (8) térfogatelem $\mathbf{V}_1^{n+1}$-beli $\{\mathbf{e}_i\}$ ortonormált bázisban adott, ezért a bázistranszformációnál adódó térfogatelemet kell meghatározni. Ismeretes, hogy

$$\mathbf{a}_i = a_{ij}\mathbf{b}^j, \quad b^{ij} = \langle \mathbf{b}^i; \mathbf{b}^j \rangle, \quad a_{ki} = \langle \mathbf{a}_k; \mathbf{a}_i \rangle,$$

$$a_{ki} \cdot b^{ij} = \delta_k^i, \quad \det(a_{ki}) \cdot \det(b^{ik}) = 1.$$

Legyen

$$\mathbf{x} = X^k \mathbf{e}_k = x^i \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{b}^j = c^{jk}\mathbf{e}_k,$$

ahol feltehetjük, hogy $\det(c^{jk}) < 0$.

$$\mathbf{a}_i = a_{ij} c^{jk} \mathbf{e}_k = d_i^k \mathbf{e}_k, \quad \det(a_{ij}) < 0 \quad \text{miatt} \quad \det(d_i^k) > 0.$$

$X^k = x^i d_i^k$ tehát $\mathrm{d}X^k = \mathrm{d}x^i d_i^k$. Most már

$$b^{ij} = \langle \mathbf{b}^i; \mathbf{b}^j \rangle = c^{ik} c^{jl} \langle \mathbf{e}_k; \mathbf{e}_l \rangle = -c^{i0} c^{j0} + c^{i1} c^{j1} + \ldots + c^{in} c^{jn}$$

alapján:

$$\det (b^{ij}) = (-1) \cdot \{\det (c^{ij})\}^2, \quad |\det (c^{ij})| = \sqrt{-\det (b^{ij})},$$

$$\det (d_i^k) = \det (a_{ij} c^{jk}) = \frac{1}{\sqrt{-\det (b^{ij})}} = \sqrt{-\det (a_{ij})}.$$

A (8) térfogatelemből adódik:

$$\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{k}^n}{\{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle\}^{(n+1)/2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k \mathrm{d}X^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}X^{k-1} \wedge \mathrm{d}X^{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}X^n =$$

$$= \frac{\mathrm{k}^n}{\{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle\}^{(n+1)/2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^i d_i^k (\mathrm{d}x^i d_i^0) \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}x^i d_i^{k-1}) \wedge (\mathrm{d}x^i d_i^{k+1}) \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}x^i d_i^n) =$$

$$= \frac{\mathrm{k}^n}{\{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle\}^{(n+1)/2}} \det (d_i^k) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \, \mathrm{d}x^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{k-1} \wedge \mathrm{d}x^{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Mivel $\det (d_i^k) = \sqrt{-\det (a_{ik})}$, ezért

$$(21) \qquad V = \int \ldots \int_{\substack{x^0, \ldots, x^n \geqq 0 \\ x^0 + \ldots + x^n = 1}} \frac{\mathrm{k}^n \sqrt{-\det (a_{ij})} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i \, \mathrm{d}x^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i-1} \wedge \mathrm{d}x^{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n}{\{-x^i a_{ij} x^j\}^{(n+1)/2}}.$$

Éljünk az $x^0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} x^j$, $\mathrm{d}x^0 = -\sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}x^j$ redukcióval, ekkor

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j \, \mathrm{d}x^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j-1} \wedge \mathrm{d}x^{j+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n =$$

$$= (1 - x^1 - \ldots - x^n) \, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n +$$

$$+ (-1) x^1 (-\mathrm{d}x^1 - \ldots - \mathrm{d}x^n) \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n +$$

$$+ (-1)^2 x^2 (-\mathrm{d}x^1 - \ldots - \mathrm{d}x^n) \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n +$$

$$\vdots$$

$$+ (-1)^n x^n (-\mathrm{d}x^1 - \ldots - \mathrm{d}x^n) \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{n-1} =$$

$$= (1 - x^1 - \ldots - x^n + x^1 + \ldots + x^n) \, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n = \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n;$$

(22)

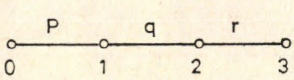
$$V = \int \ldots \int_{\substack{x^1, \ldots, x^n \geqq 0 \\ x^1 + \ldots + x^n = 1}} \frac{\mathrm{k}^n \sqrt{-\det (a_{ij})} \, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n}{\left\{-\left[a_{00} - 2 \sum_{i=1}^{n} x^i (a_{00} - a_{0i}) + \sum_{i,j=1}^{n} x^i x^j (a_{00} - a_{0i} - a_{0j} + a_{ij})\right]\right\}^{(n+1)/2}}.$$

Ez már egy numerikus integrálásra is alkalmas formula, hiszen egy euklideszi szimplexen kell integrálni az $x^1, \ldots, x^n$ változók szerint [9].

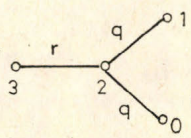
4. Lanner-féle szimplexek

Tekintsük a $\mathcal{H}^n$ tér egy olyan diszkrét egybevágósági transzformációcsoportját, melyet hipersíkokra történő tükrözések generálnak. A tükörsíkok a teret konvex poliéderekre bontják, melyek a csoport fundamentális tartományai, cellái. Ezen poliéderek szomszédos lapjainak szögei a diszkrétség miatt a π egész hányadai. Ezt a csoportot azok a tükrözések generálják, melyek tükörhipersíkjai egy tetszőleges fundamentális tartomány lapjait tartalmazzák. Ennek megfordítása is igaz: minden olyan konvex poliéder esetén, melynek lapszögei π egész hányadai, a lapjaira vonatkozó tükrözések egy diszkrét csoportot generálnak. Ezeket a csoportokat nevezik Coxeter-csoportoknak. $\mathcal{H}^n$ olyan korlátos szimplexét, mely egy ilyen Coxeter-csoport fundamentális tartománya, Lanner-féle szimplexnek nevezzük. Ilyen szimplexek és csoportok csak $n \leqq 4$ esetén léteznek. $n=3$ esetén 9 db ilyen szimplex, illetve csoport létezik [11]. Ezeket a csoportokat, illetve cellákat megadhatjuk a csoport úgynevezett Coxeter-gráfjával, vagy más néven Lanner-féle sémájával. A cella minden lapjának megfelel a séma egy-egy csúcsa, ha két lap szöge $\frac{\pi}{m}$, akkor a lapoknak megfelelő csúcsokat $(m-2)$-szeres éllel kötjük össze vagy pedig m jelzésű egyszeres éllel, kivéve $m=2$-t, amikor a megfelelő csúcsokat nem kötjük össze:

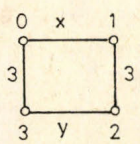
$n=3$ esetén ezek a sémák a következők:

1) 

$(p, q, r) = (3, 5, 3);$
$(4, 3, 5);$
$(5, 3, 5);$

2) 

$(r, q) = (5, 3);$

3) 

$(x, y) = (4, 3);$
$(4, 4);$
$(5, 3);$
$(5, 4);$
$(5, 5).$

Ezek között a Lanner-féle szimplexek között vannak bizonyos kapcsolatok, melyeket a jelölés is tükröz. Az 1) típusúak közül a (4, 3, 5) sémájút tükrözve az $A_1A_2A_3 = \beta^0$ lapra, az egyetlen 2) típusút kapjuk meg.

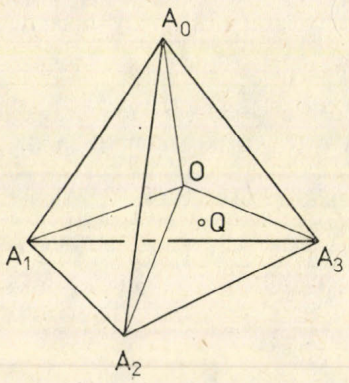
A Lanner-féle szimplexekhez tartozó gömbkitöltések

Tekintsük a $\mathcal{H}^3$ hiperbolikus tér olyan gömbkitöltéseit, ahol a gömbelhelyezések szimmetriacsoportjai éppen a Lanner-féle szimplexek által generált tükrözéscsoportok. A gömbkitöltések sűrűségének vizsgálatánál a gömbök szimplexbe eső részei térfogatának és a szimplex térfogatának az arányát kell vizsgálni. Az extre-

mális kitöltések keresésénél elegendő a gömbrészek térfogatainak az arányait vizsgálni. Ha a gömb középpontja befutja a szimplex belső pontjait, lapjait, éleit és csúcsait — mint látni fogjuk — az extremális középpontok akkor adódnak, amikor a gömb érinti a szimplex gömbközéppontot nem tartalmazó lapjait. Mivel a gömb térfogata (13) alapján szigorúan monoton függvénye a sugárnak, ezért elegendő az extremális sugarak meghatározása.

a) *A szimplexbe írható gömb sugara*

Ha a gömb Q középpontja befutja a szimplex belső pontjait és tekintjük azokat a gömböket, melyek teljes egészében a szimplexhez tartoznak, akkor ezek közül a beírt gömb térfogata lesz a maximális (1. ábra). Ugyanis a szimplex lapszögeinek



1. ábra

szögfelező síkjai a szimplexet olyan szimplexekre darabolják, melyek mindegyikének az egyik lapja egybeesik az eredeti szimplex egy lapjával és az ezzel a lappal szemközti csúcsuk közös — ez éppen a beírt gömb O középpontja. Tekintsük a szimplex egy tetszőleges Q belső pontját. Ez a pont legalább egy részszimplexnek pontja (jelen esetben $A_1A_2A_3O$-nak). A szögfelező síkok tulajdonságaiból adódóan a Q pontnak az eredeti szimplex lapjaitól való távolságai közül a β^0 laptól való távolsága a minimális. Azaz a gömb sugarának legfeljebb Q-nak β^0-tól való távolságát választhatjuk. Ez a távolság akkor lesz maximális, ha a Q pont azonos O-val, mert a részszimplex pontjai közül az O csúcsa van β^0-tól legtávolabb. Az extremális sugarat és így az extremális kitöltést is akkor kapjuk, ha a középpontnak a beírt gömb középpontját választjuk.

Legyen $(\mathbf{x})$ a gömb középpontja, r a gömb sugara, d^i az $(\mathbf{x})$ pontnak a $\mathbf{b}^i$ normálegységvektorú β^i lapsíktól való előjeles távolsága. Ekkor (14) alapján:

$$\mathrm{sh}\frac{d^i}{\mathrm{k}} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^i \rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{b}^i; \mathbf{b}^i \rangle}} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^i \rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle}}.$$

Ezért a középpont $\mathbf{x}$ vektorának meghatározása az $\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^j \rangle = \langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^k \rangle$ lineáris egyenletrendszer megoldására vezethető vissza. Tehát a fentiek és (1) szerint

$$x^j = x^k \neq 0, \quad j, k = 0, 1, 2, 3.$$

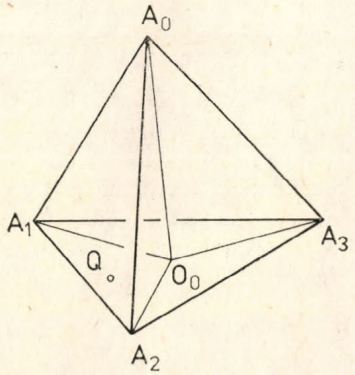
A gömb sugara:

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{sh}\frac{r}{k} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^j \rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle}} = \frac{x^j}{\sqrt{-x^k a_{kl} x^l}} = \frac{1}{\sqrt{-\sum_{k,l} a_{kl}}}.$$

A beírt gömb sugara a (b^{ij}) mátrix (a_{ij}) inverzéből a mátrix elemek összegzéséből számítható.

b) *Adott lapon lévő középpontú és a többi lapot érintő gömb sugara*

Ha a gömb Q középpontja befutja a szimplex egyik lapjának belső pontjait és tekintjük azokat a félgömböket, melyek teljes egészében a szimplexhez tartoznak, akkor ezek közül annak a félgömbnek a térfogata lesz a maximális, mely a másik három lapot érinti (2. ábra). Ugyanis tekintsük a szimplex azon lapszögeinek szög-



2. ábra

felező síkjait, melyek nem tartoznak az adott β^0 laphoz. Ezek a szimplexet olyan szimplexekre darabolják, melyek mindegyikének az egyik lapja egybeesik az eredeti szimplex egyik lapjával. Egy további lapsíkjuk egybeesik az eredeti szimplex β^0 lapsíkjával és az A_0O_0 élük közös, ahol O_0 éppen a másik három lapot érintő gömb középpontja. Tekintsük a szimplex β^0 lapjának egy tetszőleges Q belső pontját. Ez a pont legalább egy részszimplexnek pontja (jelen esetben $A_0A_1A_2O_0$-nak). A szögfelező síkok tulajdonságaiból adódóan a Q pontnak az eredeti szimplex lapjaitól való távolságai közül az $A_0A_1A_2 = \beta^3$ laptól való távolsága a minimális. Azaz a gömb sugarának legfeljebb a Q pont β^3-tól való távolságát választhatjuk. Ez a távolság akkor lesz maximális, ha a Q pont azonos O_0-val, mert a részszimplex pontjai közül O_0 van β^3-tól legtávolabb. Az extremális sugarat és így az extremális kitöltést is akkor kapjuk, ha a középpontnak a másik három lapot érintő gömb középpontját választjuk.

Legyen $(\mathbf{x})$ a gömb középpontja, rögzített i-re r^i az i-edik lapon lévő középpontú gömb sugara. Ekkor (14) alapján:

$$\operatorname{sh}\frac{r^i}{k} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^j \rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{b}^j; \mathbf{b}^j \rangle}} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^j \rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle}}, \quad j \neq i; \ \langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^i \rangle = 0.$$

Ezért a középpont $\mathbf{x}$ vektorának a meghatározása az

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^i \rangle = 0; \quad \langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^j \rangle = \langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^k \rangle, \quad j, k \neq i$$

lineáris egyenletrendszer megoldására vezethető vissza. Tehát újra (1) szerint

$$x^i = 0; \quad x^j = x^k \neq 0, \quad j, k \neq i.$$

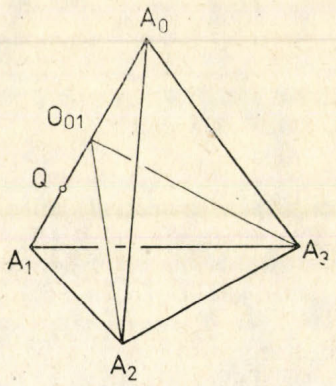
A gömb sugara:

$$\text{(24)} \qquad \operatorname{sh} \frac{r^i}{k} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^j \rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle}} = \frac{x^j}{\sqrt{-x^k a_{kl} x^l}} = \frac{1}{\sqrt{-\sum\limits_{k,l \neq i} a_{kl}}}, \quad j \neq i.$$

A gömb sugara a (b^{ij}) mátrix (a_{ij}) inverzének i-től különböző indexű elemeiből összegzéssel számítható.

c) *Adott élen lévő középpontú és az élt nem tartalmazó lapokat érintő gömb sugara*

Ha a gömb Q középpontja befutja a szimplex egyik élének belső pontjait és tekintjük azokat a gömbgerezdeket, melyek teljesen a szimplexhez tartoznak, akkor ezek közül annak a gömbgerezdnek a térfogata lesz maximális, mely az élt nem tartalmazó lapokat érinti (3. ábra). Ugyanis tekintsük a szimplex adott élét $(A_0 A_1)$



3. ábra

nem tartalmazó lapok szögfelező síkját. Ez a szimplexet két szimplexre darabolja $(A_1 A_2 A_3 O_{01}, A_0 A_2 A_3 O_{01})$, ahol O_{01} éppen a β^0 és β^1 lapokat érintő gömb középpontja. Tekintsük a szimplex adott élének egy tetszőleges Q belső pontját. Ez legalább egy részszimplex pontja (jelen esetben $A_1 A_2 A_3 O_{01}$-nek). A szögfelező síkok tulajdonságaiból adódóan a Q pontnak a β^0 és β^1 lapsíkoktól való távolságai közül a β^0-tól való távolsága a minimális. Ezért a gömb sugarának legfeljebb a Q pont β^0-tól való távolságát választhatjuk. Ez a távolság akkor lesz maximális, ha a Q pont azonos O_{01}-gyel, mert a részszimplex pontjai közül O_{01} van β^0-tól legtávolabb.

Az extremális sugarat és így az extremális kitöltést is akkor kapjuk, ha a középpontnak az élt nem tartalmazó lapokat érintő gömb középpontját választjuk.

Legyen $(\mathbf{x})$ a gömb középpontja, rögzített i-, k-ra r^{ik} az i-edik és k-adik lapon lévő középpontú gömb sugara. Ekkor (14) alapján:

$$\operatorname{sh}\frac{r^{ik}}{k} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^j\rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{b}^j; \mathbf{b}^j\rangle}} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^j\rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x}\rangle}}, \quad j \neq i, k; \ \langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^i\rangle = \langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^k\rangle = 0.$$

Ezért a középpont $\mathbf{x}$ vektorának meghatározása az

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^i\rangle = 0; \quad \langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^k\rangle = 0; \quad \langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^r\rangle = \langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^s\rangle \neq 0, \quad r, s \neq i, k$$

lineáris egyenletrendszer megoldására vezethető vissza:

$$x^i = x^k = 0; \quad x^s = x^r \neq 0, \quad r, s \neq i, k.$$

A gömb sugara:

$$(25) \qquad \operatorname{sh}\frac{r^{ik}}{k} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^j\rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x}\rangle}} = \frac{x^j}{\sqrt{-x^r a_{rs} x^s}} = \frac{1}{\sqrt{-\sum\limits_{r,s\neq i,k} a_{rs}}}, \quad j, r, s \neq i, k.$$

A gömb sugara a (b^{ij}) mátrix (a_{ij}) inverzének i-től és k-tól különböző indexű elemeiből összegzéssel számítható.

d) *Adott csúcsban lévő középpontú és a szemközti lapot érintő gömb sugara*

Ha a gömb középpontja egy adott csúcsban van, a szimplexbe eső gömbszöglet térfogata akkor maximális, ha a gömb a szemközti lapot érinti.

Legyen $(\mathbf{x})$ a gömb középpontja, rögzített i-re r_i az i-edik csúcsban lévő középpontú gömb sugara. Ekkor (14) alapján:

$$\operatorname{sh}\frac{r_i}{k} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^i\rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{b}^i; \mathbf{b}^i\rangle}} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^i\rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x}\rangle}}; \quad \langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^j\rangle = 0, \quad j \neq i.$$

Ezért a középpont $\mathbf{x}$ vektorára

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^j\rangle = 0, \quad j \neq i; \quad \langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^i\rangle \neq 0$$

alapján:

$$x^i \neq 0; \quad x^j = 0, \quad j \neq i.$$

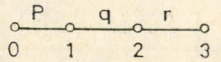
A gömb sugara:

$$(26) \qquad \operatorname{sh}\frac{r_i}{k} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{b}^i\rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}; \mathbf{x}\rangle}} = \frac{x^i}{\sqrt{-x^r a_{rs} x^s}} = \frac{1}{\sqrt{-a_{ii}}}.$$

A gömb sugara a (b^{ij}) mátrix (a_{ij}) inverzének ii-indexű eleméből számítható. Láthatjuk, hogy $a_{ii} = \langle \mathbf{a}_i; \mathbf{a}_i\rangle < 0$ esetén, amikor tehát a szimplex $A_i(\mathbf{a}_i)$ csúcsa valódi (a $\mathscr{H}^3$ hiperbolikus térhez tartozó) pont, ez a sugár valóban kiszámítható.

5. A Lanner-féle szimplexekhez tartozó extremális gömbkitöltések sűrűségének kiszámítása

Az 1) *típusú szimplexek vizsgálata*



$(p, q, r) = (3, 5, 3);$
$(4, 3, 5);$
$(5, 3, 5).$

Ezek Gram-mátrixa:

$$(b^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{\pi}{p} & 0 & 0 \\ -\cos\frac{\pi}{p} & 1 & -\cos\frac{\pi}{q} & 0 \\ 0 & -\cos\frac{\pi}{q} & 1 & -\cos\frac{\pi}{r} \\ 0 & 0 & -\cos\frac{\pi}{r} & 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsának értéke:

$$\det(b^{ij}) = 1-\cos^2\frac{\pi}{p}-\cos^2\frac{\pi}{q}-\cos^2\frac{\pi}{r}+\cos^2\frac{\pi}{p}\cos^2\frac{\pi}{r}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy $\det(b^{ij})<0$, de bármely alacsonyabb rendű főminor már pozitív. A (b^{ij}) mátrix inverz mátrixa (a_{jk}). A **3.** fejezetben láttuk, hogy a szimplex $(\mathbf{a}_k)$ csúcsát kijelölő vektort $\mathbf{a}_k = a_{ki}\mathbf{b}^i$ alapján kapjuk az (a_{jk}) mátrixból. A szimplex élhosszai (20) formula alapján számíthatók. A **4.** fejezetben szereplő gömbsugarak szintén az (a_{jk}) mátrixból adódnak.

A szimplex V térfogatát a (21) formula alapján határozhatjuk meg. Ezek után kiszámítható a gömbkitöltések sűrűsége, vagyis a szimplexbe eső gömbrészek és a szimplex térfogatának aránya. A beírt gömb esetén:

$$s = \frac{V(r)}{V}, \quad \text{tehát} \quad s = \frac{\pi \cdot \mathrm{k}^3}{V} 2\left(\mathrm{sh}\frac{r}{\mathrm{k}}\,\mathrm{ch}\frac{r}{\mathrm{k}} - \frac{r}{\mathrm{k}}\right).$$

Ha a középpont a β^0 lapon van:

$$s^0 = \frac{\frac{1}{2}V(r^0)}{V} \qquad s^0 = \frac{\pi \mathrm{k}^3}{V}\left(\mathrm{sh}\frac{r^0}{\mathrm{k}}\,\mathrm{ch}\frac{r^0}{\mathrm{k}} - \frac{r^0}{\mathrm{k}}\right),$$

hiszen a 0-indexű lapon lévő középpontú, a többi lapot érintő félgömb térfogatát kell osztanunk a szimplex térfogatával. Hasonlóan számoljuk az s^1, s^2, s^3 sűrűségeket.

Ha a középpont a β^0 és β^1 lap közös élén van:

$$s^{01} = \frac{\frac{1}{2p} V(r^{01})}{V}, \quad \text{tehát} \quad s^{01} = \frac{\pi k^3}{V} \cdot \frac{1}{p} \left(\operatorname{sh} \frac{r^{01}}{k} \operatorname{ch} \frac{r^{01}}{k} - \frac{r^{01}}{k} \right),$$

hiszen a β^0 és β^1 lap $\frac{\pi}{p}$ szöget zár be egymással, így a teljes gömb $\frac{1}{2p}$-ed része esik a szimplexbe. Ugyanígy adódnak az s^{02}, s^{03}, s^{12}, s^{13}, s^{23} sűrűségek a lapszögek alapján:

$$s^{02} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 2} V(r^{02})}{V}, \quad s^{03} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 2} V(r^{03})}{V}, \quad s^{12} = \frac{\frac{1}{2q} V(r^{12})}{V},$$

$$s^{13} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 2} V(r^{13})}{V}, \quad s^{23} = \frac{\frac{1}{2 \cdot r} V(r^{23})}{V}.$$

Ha a középpont az A_0 csúcsban van:

$$s_0 = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right) V(r_0)}{V}, \quad s_0 = \frac{\pi k^3}{V} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right) \left(\operatorname{sh} \frac{r_0}{k} \operatorname{ch} \frac{r_0}{k} - \frac{r_0}{k} \right),$$

hiszen a β^1, β^2, β^3 lapok szöglete $\frac{\pi}{q}$, $\frac{\pi}{r}$, $\frac{\pi}{2}$ szögű gömbháromszöget metsz ki a gömbből, a teljes gömb

$$\left(\frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{r} + \frac{\pi}{2} - \pi \right) \Big/ 4\pi = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right)$$

részét. Ugyanígy:

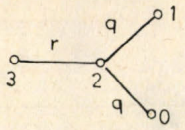
$$s_1 = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{r} V(r_1)}{V}, \quad s_2 = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p} V(r_2)}{V}, \quad s_3 = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) V(r_3)}{V}.$$

$$\operatorname{sh} \frac{r}{k} \operatorname{ch} \frac{r}{k} - \frac{r}{k} = \operatorname{sh} \frac{r}{k} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{r}{k}} - \ln \left[\operatorname{sh} \frac{r}{k} + \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{r}{k}} \right] \tag{27}$$

alapján a sűrűségek nagyságrendi viszonyai a sugarak szinusz-hiperbolikuszaiból számíthatók a (21)—(26) formulák szerint.

A 2) típusú szimplex vizsgálata

$$(r, q) = (5, 3)$$



A Gram-mátrixa:

$$(b^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cos\frac{\pi}{q} & 0 \\ 0 & 1 & -\cos\frac{\pi}{q} & 0 \\ -\cos\frac{\pi}{q} & -\cos\frac{\pi}{q} & 1 & -\cos\frac{\pi}{r} \\ 0 & 0 & -\cos\frac{\pi}{r} & 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsának értéke:

$$\det(b^{ij}) = 1 - \cos^2\frac{\pi}{r} - 2\cos^2\frac{\pi}{q}.$$

Látjuk, hogy $\det(b^{ij}) < 0$, de bármely alacsonyabb rendű főminor már pozitív. A (b^{ij}) inverz mátrixa (a_{jk}), melyből a szimplex élei, térfogata, extremális gömbkitöltések sugarai kiszámíthatók a (20)—(26) formulák alapján: A gömbkitöltések sűrűsége az előző esethez hasonlóan adódik.

A beírt gömb esetén:

$$s = \frac{V(r)}{V}, \quad \text{tehát} \quad s = \frac{\pi k^3}{V} 2\left(\mathrm{sh}\frac{r}{k}\,\mathrm{ch}\frac{r}{k} - \frac{r}{k}\right).$$

Ha a középpont a β^0 lapon van:

$$s^0 = \frac{\frac{1}{2}V(r^0)}{V}, \quad \text{azaz} \quad s^0 = \frac{\pi k^3}{V}\left(\mathrm{sh}\frac{r^0}{k}\mathrm{ch}\frac{r^0}{k} - \frac{r^0}{k}\right),$$

hiszen a β^0 lapon lévő középpontú, a többi lapot érintő félgömb térfogatát kell osztanunk a szimplex térfogatával. Hasonlóan

$$s^1 = \frac{\frac{1}{2}V(r^1)}{V}, \quad s^2 = \frac{\frac{1}{2}V(r^2)}{V}, \quad s^3 = \frac{\frac{1}{2}V(r^3)}{V}.$$

Ha a középpont a β^0 és β^1 lap közös élén van:

$$s^{01} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V(r^{01})}{V}, \quad s^{01} = \frac{\pi k^3}{V}\frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}\frac{r^{01}}{k}\,\mathrm{ch}\frac{r^{01}}{k} - \frac{r^{01}}{k}\right),$$

hiszen a β^0 és β^1 lap $\frac{\pi}{2}$ szöget zár be egymással, így a teljes gömb $\frac{\mathrm{I}}{2\cdot 2}$-ad része esik a szimplexbe. Ugyanígy

$$s^{02} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{q}V(r^{02})}{V}, \quad s^{03} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V(r^{03})}{V}, \quad s^{12} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{q}V(r^{12})}{V},$$

$$s^{13} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V(r^{13})}{V}, \quad s^{23} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r}V(r^{23})}{V}.$$

Ha a középpont az A_0 csúcsban van:

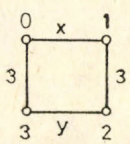
$$s_0 = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)V(r_1)}{V} = \frac{\pi k^3}{V}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{sh}\frac{r_0}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{r_0}{k}-\frac{r_0}{k}\right),$$

hiszen a β^1, β^2, β^3 lapok szöglete $\frac{\pi}{q}$, $\frac{\pi}{r}$, $\frac{\pi}{2}$ szögű gömbháromszöget metsz ki a gömbből. Ugyanígy

$$s_1 = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)V(r_1)}{V}, \quad s_2 = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}V(r_2)}{V}, \quad s_3 = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{2}{q}-\frac{1}{2}\right)V(r_3)}{V}.$$

A sűrűségek nagyságrendi viszonyai (27) alapján a sugarak szinusz-hiperbolikuszaiból eldönthetők.

A 3) típusú szimplexek vizsgálata



$(x, y) = (4, 3)$
$(4, 4)$
$(5, 3)$
$(5, 4)$
$(5, 5)$

Ezek Gram-mátrixa:

$$(b^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{\pi}{x} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\cos\frac{\pi}{x} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\cos\frac{\pi}{y} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\cos\frac{\pi}{y} & 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsának értéke:

$$\det(b^{ij}) = \frac{9}{16} - \cos^2\frac{\pi}{x} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{y} - \cos^2\frac{\pi}{y} + \cos^2\frac{\pi}{x}\cos^2\frac{\pi}{y}.$$

Látjuk, hogy $\det(b^{ij}) < 0$, de bármely alacsonyabb rendű főminor már pozitív. A (b^{ij}) mátrix inverze (a_{jk}), melyből a szimplex élei, térfogata, extremális gömbkitöltések sugarai számíthatók a (20)—(26) formulák alapján. A gömbkitöltések sűrűsége az előzőknek megfelelően adódik.

A beírt gömb esetén:

$$s = \frac{V(r)}{V}, \quad s = \frac{\pi k^3}{V} 2\left(\operatorname{sh}\frac{r}{k}\operatorname{ch}\frac{r}{k} - \frac{r}{k}\right).$$

Ha a középpont a β^0 lapon van:

$$s^0 = \frac{\frac{1}{2}V(r^0)}{V}, \quad s^0 = \frac{\pi k^3}{V}\left(\operatorname{sh}\frac{r^0}{k}\operatorname{ch}\frac{r^0}{k} - \frac{r^0}{k}\right),$$

hiszen a β^0 lapon lévő középpontú, a többi lapot érintő félgömb térfogatát kell osztanunk a szimplex térfogatával. Hasonlóan

$$s^1 = \frac{\frac{1}{2}V(r^1)}{V}, \quad s^2 = \frac{\frac{1}{2}V(r^2)}{V}, \quad s^3 = \frac{\frac{1}{2}V(r^3)}{V}.$$

Ha a középpont a β^0 és β^1 lapok közös élén van:

$$s^{01} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}V(r^{01})}{V}, \quad s^{01} = \frac{\pi k^3}{V}\cdot\frac{1}{x}\left(\operatorname{sh}\frac{r^{01}}{k}\operatorname{ch}\frac{r^{01}}{k} - \frac{r^{01}}{k}\right),$$

hiszen a β^0 és β^1 lap $\frac{\pi}{x}$ szöget zár be egymással, így a teljes gömb $\frac{1}{2x}$-ed része esik a szimplexbe. Ugyanígy adódnak a többi arányok is:

$$s^{02} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V(r^{02})}{V}, \quad s^{03} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}V(r^{03})}{V}, \quad s^{12} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}V(r^{12})}{V},$$

$$s^{13} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V(r^{13})}{V}, \quad s^{23} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}V(r^{23})}{V}.$$

Ha a középpont az A_0 csúcsban van:

$$s_0 = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{6}\right)V(r_0)}{V} = \frac{\pi k^3}{V}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{6}\right)\left(\operatorname{sh}\frac{r_0}{k}\operatorname{ch}\frac{r_0}{k} - \frac{r_0}{k}\right),$$

hiszen a β^1, β^2, β^3 lapok szöglete $\frac{\pi}{y}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ szögű gömbháromszöget metsz ki a gömbből. Ugyanígy határozható meg a többi arány is:

$$s_1 = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{6}\right)V(r_1)}{V}, \quad s_2 = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\right)V(r_2)}{V}, \quad s_3 = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\right)V(r_3)}{V}.$$

A sűrűségek nagyságrendi viszonyai (27) alapján a sugarak szinusz-hiperbolikuszaiból eldönthetők.

6. Eredmények

1.1. (p, q, r)=(3, 5, 3)

A (b^{ij}) mátrixot (16) alapján számítjuk, az (a_{ij}) inverz mátrix elemei:

$$a_{00} = -1{,}037\,855\,42 \qquad a_{12} = a_{21} = -8{,}792\,851\,50$$
$$a_{01} = a_{10} = -4{,}075\,710\,83 \qquad a_{13} = a_{31} = -4{,}396\,425\,75$$
$$a_{02} = a_{20} = -4{,}396\,425\,75 \qquad a_{22} = -8{,}151\,421\,67$$
$$a_{03} = a_{30} = -2{,}198\,212\,88 \qquad a_{23} = a_{32} = -4{,}075\,710\,83$$
$$a_{11} = -8{,}151\,421\,67 \qquad a_{33} = -1{,}037\,855\,42$$

A szimplex éleinek hossza (20) alapján:

$$d_{01} = \mathrm{k}\cdot 0{,}868\,297\,98 \qquad d_{12} = \mathrm{k}\cdot 0{,}394\,153\,37$$
$$d_{02} = \mathrm{k}\cdot 0{,}972\,659\,28 \qquad d_{13} = \mathrm{k}\cdot 0{,}972\,659\,28$$
$$d_{03} = \mathrm{k}\cdot 1{,}382\,571\,22 \qquad d_{23} = \mathrm{k}\cdot 0{,}868\,297\,98$$

A szimplexbe írható gömb sugara és térfogata:

$$r = \mathrm{k}\cdot 0{,}115\,793\,43 \qquad V = \mathrm{k}^3\cdot 6{,}520\,860\,22\cdot 10^{-3}.$$

A szimplexbe írható félgömbök sugarai és térfogatai:

$$r^3 = r^0 = \mathrm{k}\cdot 0{,}138\,405\,51 \qquad V^3 = V^0 = \mathrm{k}^3\cdot 5{,}574\,197\,87\cdot 10^{-3}$$
$$r^2 = r^1 = \mathrm{k}\cdot 0{,}177\,056\,10 \qquad V^2 = V^1 = \mathrm{k}^3\cdot 0{,}011\,698\,06.$$

A szimplexbe írható gömbgerezdek sugarai és térfogatai:

$$r^{23} = r^{01} = \mathrm{k}\cdot 0{,}237\,891\,06 \qquad V^{23} = V^{01} = \mathrm{k}^3\cdot 9{,}505\,739\,82\cdot 10^{-3}$$
$$r^{13} = r^{02} = \mathrm{k}\cdot 0{,}233\,686\,62 \qquad V^{13} = V^{02} = \mathrm{k}^3\cdot 0{,}013\,510\,53$$
$$r^{03} = \mathrm{k}\cdot 0{,}170\,946\,56 \qquad V^{03} = \mathrm{k}^3\cdot 5{,}261\,960\,48\cdot 10^{-3}$$
$$r^{12} = \mathrm{k}\cdot 0{,}383\,598\,59 \qquad V^{12} = \mathrm{k}^3\cdot 0{,}024\,349\,59.$$

A szimplexbe írható gömbszeletek sugarai és térfogatai:

$$r_3 = r_0 = \mathrm{k}\cdot 0{,}868\,297\,99 \qquad V_3 = V_0 = \mathrm{k}^3\cdot 0{,}026\,555\,25$$
$$r_2 = r_1 = \mathrm{k}\cdot 0{,}343\,461\,45 \qquad V_2 = V_1 = \mathrm{k}^3\cdot 0{,}014\,480\,46.$$

A szimplex térfogata:

$$V = k^3 \cdot 0{,}039.$$

A sűrűségek nagyságrendi viszonyai:

$$s_0 = s_3 > s^{12} > s_1 = s_2 > s^{13} = s^{02} > s^1 = s^2 > s^{01} = s^{23} > s > s^0 = s^3 > s^{03}.$$

Ennél az esetnél akkor kapjuk a maximális sűrűségű kitöltést, ha a gömb középpontja az $A_0(\mathbf{a}_0)$ vagy $A_3(\mathbf{a}_3)$ csúcsban van és a gömb a szemközti lapot érinti.

1.2. (p, q, r)=(4, 3, 5)

Az (a_{ij}) inverz mátrix elemei:

$$a_{00} = -1{,}236\,068\,14 \qquad a_{12} = a_{21} = -6{,}472\,136\,29$$
$$a_{01} = a_{10} = -3{,}162\,277\,89 \qquad a_{13} = a_{31} = -5{,}236\,068\,23$$
$$a_{02} = a_{20} = -4{,}576\,491\,46 \qquad a_{22} = -6{,}472\,136\,29$$
$$a_{03} = a_{30} = -3{,}702\,459\,35 \qquad a_{23} = a_{32} = -5{,}236\,068\,23$$
$$a_{11} = -4{,}472\,136\,29 \qquad a_{33} = -3{,}236\,068\,23.$$

A szimplex éleinek hossza:

$$d_{01} = k \cdot 0{,}808\,460\,79 \qquad d_{12} = k \cdot 0{,}626\,869\,64$$
$$d_{02} = k \cdot 1{,}061\,275\,01 \qquad d_{13} = k \cdot 0{,}842\,482\,05$$
$$d_{03} = k \cdot 1{,}226\,456\,82 \qquad d_{23} = k \cdot 0{,}530\,637\,52.$$

A szimplexbe írható gömb sugara és térfogata:

$$r = k \cdot 0{,}117\,427\,99 \qquad V = k^3 \cdot 6{,}801\,444\,35 \cdot 10^{-3}.$$

A szimplexbe írható félgömbök sugarai és térfogatai:

$$r^0 = k \cdot 0{,}143\,738\,64 \qquad V^0 = k^3 \cdot 6{,}245\,591\,33 \cdot 10^{-3}$$
$$r^1 = k \cdot 0{,}161\,572\,37 \qquad V^1 = k^3 \cdot 8{,}880\,290\,70 \cdot 10^{-3}$$
$$r^2 = k \cdot 0{,}172\,832\,42 \qquad V^2 = k^3 \cdot 0{,}010\,877\,48$$
$$r^3 = k \cdot 0{,}156\,299\,88 \qquad V^3 = k^3 \cdot 8{,}036\,302\,41 \cdot 10^{-3}$$

A szimplexbe írható gömbgerezdek sugarai és térfogatai:

$$r^{01} = k \cdot 0{,}220\,806\,79 \qquad V^{01} = k^3 \cdot 5{,}692\,063\,28 \cdot 10^{-3}$$
$$r^{02} = k \cdot 0{,}232\,431\,82 \qquad V^{02} = k^3 \cdot 0{,}013\,292\,50$$
$$r^{03} = k \cdot 0{,}203\,198\,55 \qquad V^{03} = k^3 \cdot 8{,}858\,824\,34 \cdot 10^{-3}$$
$$r^{12} = k \cdot 0{,}286\,240\,56 \qquad V^{12} = k^3 \cdot 0{,}016\,643\,50$$
$$r^{13} = k \cdot 0{,}241\,186\,78 \qquad V^{13} = k^3 \cdot 0{,}014\,864\,16$$
$$r^{23} = k \cdot 0{,}284\,431\,22 \qquad V^{23} = k^3 \cdot 9{,}795\,906\,45 \cdot 10^{-3}.$$

A szimplexbe írható gömbszögletek sugarai és térfogatai:

$$r_0 = k \cdot 0{,}808\,460\,80 \qquad V_0 = k^3 \cdot 0{,}021\,012\,11$$
$$r_1 = k \cdot 0{,}456\,816\,05 \qquad V_1 = k^3 \cdot 0{,}020\,815\,66$$
$$r_2 = k \cdot 0{,}383\,598\,60 \qquad V_2 = k^3 \cdot 0{,}015\,214\,89$$
$$r_3 = k \cdot 0{,}530\,637\,52 \qquad V_3 = k^3 \cdot 0{,}013\,793\,20.$$

A szimplex térfogata:

$$V = k^3 \cdot 0{,}036.$$

A sűrűségek nagyságrendi viszonyai:

$$s_0 > s_1 > s^{12} > s_2 > s^{13} > s_3 > s^{02} > s^2 > s^{23} > s^1 > s^{03} > s^3 > s > s^0 > s^{01}.$$

Ebben az esetben akkor kapjuk a maximális sűrűségi kitöltést, ha a gömb középpontja az $A_0(\mathbf{a}_0)$ csúcsban van és a gömb a szemközti lapot érinti.

1.3. (p, q, r) = (5, 3, 5)

Az (a_{ij}) inverz mátrix elemei:

$$a_{00} = -0{,}730\,976\,07 \qquad a_{12} = a_{21} = -3{,}827\,401\,20$$
$$a_{01} = a_{10} = -2{,}139\,604\,11 \qquad a_{13} = a_{31} = -3{,}096\,464\,09$$
$$a_{02} = a_{20} = -3{,}096\,464\,09 \qquad a_{22} = -2{,}644\,696\,14$$
$$a_{03} = a_{30} = -2{,}505\,092\,06 \qquad a_{23} = a_{32} = -2{,}139\,604\,11$$
$$a_{11} = -2{,}644\,696\,14 \qquad a_{33} = -0{,}730\,976\,07.$$

A szimplex éleinek hossza:

$$d_{01} = k \cdot 0{,}996\,384\,45 \qquad d_{12} = k \cdot 0{,}913\,632\,11$$
$$d_{02} = k \cdot 1{,}439\,106\,34 \qquad d_{13} = k \cdot 1{,}439\,106\,34$$
$$d_{03} = k \cdot 1{,}902\,847\,26 \qquad d_{23} = k \cdot 0{,}996\,384\,45.$$

A szimplexbe írható gömb sugara és térfogata:

$$r = k \cdot 0{,}156\,762\,95 \qquad V = k^3 \cdot 0{,}016\,216\,35.$$

A szimplexbe írható félgömbök sugarai és térfogatai:

$$r^3 = r^0 = k \cdot 0{,}202\,121\,23 \qquad V^3 = V^0 = k^3 \cdot 0{,}017\,435\,81$$
$$r^2 = r^1 = k \cdot 0{,}224\,061\,08 \qquad V^2 = V^1 = k^3 \cdot 0{,}023\,796\,74.$$

A szimplexbe írható gömbgerezdek sugarai és térfogatai:

$$r^{23} = r^{01} = k \cdot 0{,}353\,995\,66 \qquad V^{23} = V^{01} = k^3 \cdot 0{,}019\,052\,87$$
$$r^{13} = r^{02} = k \cdot 0{,}317\,896\,28 \qquad V^{13} = V^{02} = k^3 \cdot 0{,}034\,328\,79$$
$$r^{03} = k \cdot 0{,}274\,486\,70 \qquad V^{03} = k^3 \cdot 0{,}021\,985\,40$$
$$r^{12} = k \cdot 0{,}383\,598\,60 \qquad V^{12} = k^3 \cdot 0{,}040\,582\,65.$$

A szimplexbe írható gömbszeletek sugarai és térfogatai:

$$r_3 = r_0 = k \cdot 0{,}996\,338\,45 \qquad V_3 = V_0 = k^3 \cdot 0{,}042\,070\,67$$

$$r_2 = r_1 = k \cdot 0{,}581\,568\,67 \qquad V_2 = V_1 = k^3 \cdot 0{,}044\,074\,82.$$

A szimplex térfogata:

$$V = k^3 \cdot 0{,}093.$$

A sűrűségek nagyságrendi viszonyai:

$$s_1 = s_2 > s_0 = s_3 > s^{12} > s^{02} = s^{13} > s^1 = s^2 > s^{03} > s^{01} = s^{23} > s^0 = s^3 > s.$$

Ebben az esetben akkor kapjuk a maximális sűrűségű kitöltést, ha a gömb középpontja az $A_1(\mathbf{a}_1)$ vagy $A_2(\mathbf{a}_2)$ csúcsban van és a gömb a szemközti lapot érinti.

2. (r, q)=(5, 3)

Az (a_{ij}) inverz mátrix elemei:

$$a_{00} = -0{,}618\,034\,06 \qquad a_{12} = a_{21} = -3{,}236\,068\,13$$

$$a_{01} = a_{10} = -1{,}618\,034\,06 \qquad a_{13} = a_{31} = -2{,}618\,034\,06$$

$$a_{02} = a_{20} = -3{,}236\,068\,13 \qquad a_{22} = -6{,}472\,136\,26$$

$$a_{03} = a_{30} = -2{,}618\,034\,06 \qquad a_{23} = a_{32} = -5{,}236\,068\,13$$

$$a_{11} = -0{,}618\,034\,06 \qquad a_{33} = -3{,}236\,068\,13.$$

A szimplex éleinek hossza:

$$d_{01} = k \cdot 1{,}616\,921\,59 \qquad d_{12} = k \cdot 1{,}061\,275\,01$$

$$d_{02} = k \cdot 1{,}061\,275\,01 \qquad d_{13} = k \cdot 1{,}226\,456\,82$$

$$d_{03} = k \cdot 1{,}226\,456\,82 \qquad d_{23} = k \cdot 0{,}530\,637\,52.$$

A szimplexbe írható gömb sugara és térfogata:

$$r = k \cdot 0{,}143\,738\,64 \qquad V = k^3 \cdot 0{,}012\,491\,18.$$

A szimplexbe írható félgömbök sugarai és térfogatai:

$$r^0 = r^1 = k \cdot 0{,}174\,506\,80 \qquad V^0 = V^1 = k^3 \cdot 0{,}011\,198\,00$$

$$r^2 = k \cdot 0{,}232\,431\,82 \qquad V^2 = k^3 \cdot 0{,}026\,585\,00$$

$$r^3 = k \cdot 0{,}203\,198\,55 \qquad V^3 = k^3 \cdot 0{,}017\,717\,65.$$

A szimplexbe írható gömbgerezdek sugarai és térfogatai:

$$r^{01} = k \cdot 0{,}220\,806\,79 \qquad V^{01} = k^3 \cdot 0{,}011\,384\,13$$

$$r^{02} = r^{12} = k \cdot 0{,}325\,877\,43 \qquad V^{02} = V^{12} = k^3 \cdot 0{,}024\,678\,55$$

$$r^{03} = r^{13} = k \cdot 0{,}268\,308\,78 \qquad V^{03} = V^{13} = k^3 \cdot 0{,}020\,520\,32$$

$$r^{23} = k \cdot 0{,}456\,816\,05 \qquad V^{23} = k^3 \cdot 0{,}041\,631\,32.$$

A szimplexbe írható gömbszeletek sugarai és térfogatai:

$$r_0 = r_1 = k \cdot 1{,}061\,275\,01 \qquad V_0 = V_1 = k^3 \cdot 0{,}052\,197\,13$$
$$r_2 = k \cdot 0{,}383\,598\,60 \qquad V_2 = k^3 \cdot 0{,}030\,436\,99$$
$$r_3 = k \cdot 0{,}530\,637\,52 \qquad V_3 = k^3 \cdot 0{,}027\,586\,39.$$

A szimplex térfogata:

$$V = k^3 \cdot 0{,}072.$$

A sűrűségek nagyságrendi viszonyai:

$$s_0 = s_1 > s^{23} > s_2 > s_3 > s^2 > s^{02} = s^{12} > s^{03} > s^{13} > s^3 > s > s^{01} > s^0 = s^1.$$

Ebben az esetben akkor kapjuk a maximális sűrűségű kitöltést, ha a gömb középpontja az $A_0(\mathbf{a}_0)$ vagy az $A_1(\mathbf{a}_1)$ csúcsban van és a gömb a szemközti lapot érinti.

3.1. (x, y) = (4, 3)

Az (a_{ij}) inverz mátrix elemei:

$$a_{00} = -2{,}089\,631\,01 \qquad a_{12} = a_{21} = -2{,}306\,019\,39$$
$$a_{01} = a_{10} = -2{,}738\,796\,14 \qquad a_{13} = a_{31} = -2{,}522\,407\,76$$
$$a_{02} = a_{20} = -2{,}522\,407\,76 \qquad a_{22} = -1{,}044\,815\,51$$
$$a_{03} = a_{30} = -2{,}306\,019\,39 \qquad a_{23} = a_{32} = -1{,}783\,611\,64$$
$$a_{11} = -2{,}089\,631\,01 \qquad a_{33} = -1{,}044\,815\,51.$$

A szimplex éleinek hossza:

$$d_{01} = k \cdot 0{,}769\,139\,56 \qquad d_{12} = k \cdot 1{,}014\,814\,12$$
$$d_{02} = k \cdot 1{,}128\,383\,96 \qquad d_{13} = k \cdot 1{,}128\,383\,96$$
$$d_{03} = k \cdot 1{,}014\,814\,12 \qquad d_{23} = k \cdot 1{,}128\,383\,96.$$

A szimplexbe írható gömb sugara és térfogata:

$$r = k \cdot 0{,}169\,130\,30 \qquad V = k^3 \cdot 0{,}020\,381\,54.$$

A szimplexbe írható félgömbök sugarai és térfogatai:

$$r^1 = r^0 = k \cdot 0{,}237\,470\,43 \qquad V^1 = V^0 = k^3 \cdot 0{,}028\,365\,08$$
$$r^2 = r^3 = k \cdot 0{,}219\,853\,72 \qquad V^2 = V^3 = k^3 \cdot 0{,}022\,472\,82.$$

A szimplexbe írható gömbgerezdek sugarai és térfogatai:

$$r^{01} = k \cdot 0{,}408\,953\,41 \qquad V^{01} = k^3 \cdot 0{,}037\,028\,39$$
$$r^{03} = r^{12} = k \cdot 0{,}351\,979\,19 \qquad V^{03} = V^{12} = k^3 \cdot 0{,}031\,206\,34$$
$$r^{02} = r^{13} = k \cdot 0{,}342\,898\,34 \qquad V^{02} = V^{13} = k^3 \cdot 0{,}043\,224\,68$$
$$r^{23} = k \cdot 0{,}316\,487\,16 \qquad V^{23} = k^3 \cdot 0{,}022\,578\,84.$$

A szimplexbe írható gömbszögletek sugarai és térfogatai:

$$r_1 = r_0 = k \cdot 0{,}645\,915\,80 \qquad V_1 = V_0 = k^3 \cdot 0{,}051\,117\,39$$

$$r_2 = r_3 = k \cdot 0{,}865\,958\,94 \qquad V_2 = V_3 = k^3 \cdot 0{,}065\,800\,06.$$

A szimplex térfogata:

$$V = k^3 \cdot 0{,}086.$$

A sűrűségek nagyságrendi viszonyai:

$$s_2 = s_3 > s_0 = s_1 > s^{02} = s^{13} > s^{01} > s^{03} = s^{12} > s^0 = s^1 > s^{23} > s^2 = s^3 > s.$$

Ebben az esetben akkor kapjuk a maximális sűrűségű kitöltést, ha a gömb középpontja az $A_2(\mathbf{a}_2)$ vagy az $A_3(\mathbf{a}_3)$ csúcsban van és a gömb a szemközti lapot érinti.

3.2. (x, y)=(4, 4)

Az (a_{ij}) inverz mátrix elemei:

$$a_{00} = -0{,}571\,428\,58 \qquad a_{12} = a_{21} = -1{,}428\,571\,44$$

$$a_{01} = a_{10} = -1{,}212\,183\,06 \qquad a_{13} = a_{31} = -1{,}616\,244\,08$$

$$a_{02} = a_{20} = -1{,}616\,244\,08 \qquad a_{22} = -0{,}571\,428\,58$$

$$a_{03} = a_{30} = -1{,}428\,571\,44 \qquad a_{23} = a_{32} = -1{,}212\,183\,06$$

$$a_{11} = -0{,}571\,428\,58 \qquad a_{33} = -0{,}571\,428\,58.$$

A szimplex éleinek hossza:

$$d_{01} = k \cdot 1{,}384\,329\,68 = d_{23}$$

$$d_{02} = k \cdot 1{,}700\,042\,20 = d_{13}$$

$$d_{03} = k \cdot 1{,}566\,799\,23 = d_{12}.$$

A szimplexbe írható gömb sugara és térfogata:

$$r = k \cdot 0{,}225\,625\,73 \qquad V = k^3 \cdot 0{,}048\,604\,35.$$

A szimplexbe írható félgömbök sugarai és térfogatai:

$$r^3 = r^2 = r^1 = r^0 = k \cdot 0{,}307\,795\,86 \qquad V^3 = V^2 = V^1 = V^0 = k^3 \cdot 0{,}062\,240\,35.$$

A szimplexbe írható gömbgerezdek sugarai és térfogatai:

$$r^{23} = r^{01} = k \cdot 0{,}507\,407\,06 \qquad V^{23} = V^{01} = k^3 \cdot 0{,}072\,011\,68$$

$$r^{13} = r^{02} = k \cdot 0{,}461\,513\,85 \qquad V^{13} = V^{02} = k^3 \cdot 0{,}107\,414\,83$$

$$r^{12} = r^{03} = k \cdot 0{,}481\,211\,83 \qquad V^{12} = V^{03} = k^3 \cdot 0{,}081\,477\,38.$$

A szimplexbe írható gömbszögletek sugarai és térfogatai:

$$r_3 = r_2 = r_1 = r_0 = k \cdot 1{,}092\,321\,89 \qquad V_3 = V_2 = V_1 = V_0 = k^3 \cdot 0{,}144\,175\,43.$$

A szimplex térfogata:

$$V = k^3 \cdot 0{,}222.$$

A sűrűségek nagyságrendi viszonyai:

$$s_0 = s_1 = s_2 = s_3 > s^{02} > s^{13} > s^{03} = s^{12} > s^{01} = s^{23} > s^0 = s^1 = s^2 = s^3 > s.$$

Ebben az esetben akkor kapjuk a maximális sűrűségű kitöltést, ha a gömb középpontja valamelyik csúcsban van és a gömb a szemközti lapot érinti.

3.3. (x, y)=(5, 3)

Az (a_{ij}) inverz mátrix elemei:

$$a_{00} = -1{,}313\,592\,27 \qquad a_{12} = a_{21} = -1{,}516\,553\,43$$
$$a_{01} = a_{10} = -1{,}922\,475\,76 \qquad a_{13} = a_{31} = -1{,}719\,514\,59$$
$$a_{02} = a_{20} = -1{,}719\,514\,59 \qquad a_{22} = -0{,}250\,873\,81$$
$$a_{03} = a_{30} = -1{,}516\,553\,43 \qquad a_{23} = a_{32} = -0{,}985\,194\,21$$
$$a_{11} = -1{,}313\,592\,27 \qquad a_{33} = -0{,}250\,873\,82.$$

A szimplex éleinek hossza:

$$d_{01} = k \cdot 0{,}929\,059\,23 \qquad d_{12} = k \cdot 1{,}626\,692\,01$$
$$d_{02} = k \cdot 1{,}761\,102\,52 \qquad d_{13} = k \cdot 1{,}761\,102\,52$$
$$d_{03} = k \cdot 1{,}626\,692\,01 \qquad d_{23} = k \cdot 2{,}044\,415\,95.$$

A szimplexbe írható gömb sugara és térfogata:

$$r = k \cdot 0{,}212\,147\,90 \qquad V = k^3 \cdot 0{,}040\,356\,47.$$

A szimplexbe írható félgömbök sugarai és térfogatai:

$$r^1 = r^0 = k \cdot 0{,}307\,365\,22 \qquad V^1 = V^0 = k^3 \cdot 0{,}061\,976\,19$$
$$r^2 = r^3 = k \cdot 0{,}271\,927\,88 \qquad V^2 = V^3 = k^3 \cdot 0{,}042\,740\,56.$$

A szimplexbe írható gömbgerezdek sugarai és térfogatai:

$$r^{01} = k \cdot 0{,}599\,456\,87 \qquad V^{01} = k^3 \cdot 0{,}096\,943\,79$$
$$r^{03} = r^{12} = k \cdot 0{,}450\,936\,77 \qquad V^{03} = V^{12} = k^3 \cdot 0{,}066\,669\,80$$
$$r^{02} = r^{13} = k \cdot 0{,}433\,364\,74 \qquad V^{02} = V^{13} = k^3 \cdot 0{,}088\,488\,54$$
$$r^{23} = k \cdot 0{,}383\,598\,61 \qquad V^{23} = k^3 \cdot 0{,}040\,582\,65.$$

A szimplexbe írható gömbszögletek sugarai és térfogatai:

$$r_1 = r_0 = k \cdot 0{,}788\,292\,59 \qquad V_1 = V_0 = k^3 \cdot 0{,}096\,771\,21$$
$$r_2 = r_3 = k \cdot 1{,}442\,075\,34 \qquad V_2 = V_3 = k^3 \cdot 0{,}157\,919\,54.$$

A szimplex térfogata:

$$V = k^3 \cdot 0{,}205.$$

A sűrűségek nagyságrendi viszonyai:

$$s_2 = s_3 > s_0 = s_1 > s^{01} > s^{02} = s^{13} > s^{03} = s^{12} > s^0 = s^1 > s^2 = s^3 > s^{23} > s.$$

Ebben az esetben akkor kapjuk a maximális sűrűségű kitöltést, ha a gömb középpontja az $A_2(\mathbf{a}_2)$ vagy az $A_3(\mathbf{a}_3)$ csúcsban van és a gömb a szemközti lapot érinti.

3.4. (x, y)=(5, 4)

Az (a_{ij}) inverz mátrix elemei:

$$a_{00} = -0{,}453\,897\,67 \qquad a_{12} = a_{21} = -1{,}200\,161\,16$$

$$a_{01} = a_{10} = -1{,}055\,375\,97 \qquad a_{13} = a_{31} = -1{,}376\,330\,08$$

$$a_{02} = a_{20} = -1{,}376\,330\,08 \qquad a_{22} = -1{,}173\,373\,49$$

$$a_{03} = a_{30} = -1{,}200\,161\,16 \qquad a_{23} = a_{32} = -0{,}810\,758\,61$$

$$a_{11} = -0{,}453\,897\,67 \qquad a_{33} = -0{,}173\,373\,49.$$

A szimplex éleinek hossza:

$$d_{01} = \mathrm{k} \cdot 1{,}487\,101\,84 \qquad d_{12} = \mathrm{k} \cdot 2{,}132\,751\,24$$

$$d_{02} = \mathrm{k} \cdot 2{,}273\,111\,75 \qquad d_{13} = \mathrm{k} \cdot 2{,}273\,111\,75$$

$$d_{03} = \mathrm{k} \cdot 2{,}132\,751\,24 \qquad d_{23} = \mathrm{k} \cdot 2{,}224\,036\,19.$$

A szimplexbe írható gömb sugara és térfogata:

$$r = \mathrm{k} \cdot 0{,}253\,007\,43 \qquad V = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}068\,714\,25.$$

A szimplexbe írható félgömbök sugarai és térfogatai:

$$r^1 = r^0 = \mathrm{k} \cdot 0{,}355\,779\,40 \qquad V^1 = V^0 = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}096\,736\,16$$

$$r^2 = r^3 = \mathrm{k} \cdot 0{,}339\,643\,63 \qquad V^2 = V^3 = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}083\,944\,14.$$

A szimplexbe írható gömbgerezdek sugarai és térfogatai:

$$r^{01} = \mathrm{k} \cdot 0{,}663\,108\,66 \qquad V^{01} = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}133\,337\,62$$

$$r^{13} = r^{02} = \mathrm{k} \cdot 0{,}520\,158\,36 \qquad V^{13} = V^{02} = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}155\,562\,65$$

$$r^{12} = r^{03} = \mathrm{k} \cdot 0{,}547\,021\,13 \qquad V^{12} = V^{03} = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}121\,311\,68$$

$$r^{23} = \mathrm{k} \cdot 0{,}547\,767\,08 \qquad V^{23} = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}091\,371\,36.$$

A szimplexbe írható gömbszögletek sugarai és térfogatai:

$$r_1 = r_0 = \mathrm{k} \cdot 1{,}186\,021\,49 \qquad V_1 = V_0 = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}192\,484\,50$$

$$r_2 = r_3 = \mathrm{k} \cdot 1{,}610\,070\,08 \qquad V_2 = V_3 = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}242\,837\,23.$$

A szimplex térfogata:

$$V = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}359.$$

A sűrűségek nagyságrendi viszonyai:

$$s_2 = s_3 > s_0 = s_1 > s^{02} = s^{13} > s^{01} > s^{03} = s^{12} > s^0 = s^1 > s^{23} > s^2 = s^3 > s.$$

Ebben az esetben akkor kapjuk a maximális sűrűségű kitöltést, ha a gömb középpontja az $A_2(\mathbf{a}_2)$ vagy az $A_3(\mathbf{a}_3)$ csúcsban van és a gömb a szemközti lapot érinti.

3.5. (x, y)=(5, 5)

Az (a_{ij}) inverz mátrix elemei:

$$a_{00} = -0{,}147\,959\,42 \qquad a_{12} = a_{21} = -1{,}088\,108\,58$$
$$a_{01} = a_{10} = -0{,}746\,467\,80 \qquad a_{13} = a_{31} = -1{,}253\,532\,23$$
$$a_{02} = a_{20} = -1{,}253\,532\,23 \qquad a_{22} = -0{,}147\,959\,42$$
$$a_{03} = a_{30} = -1{,}088\,108\,58 \qquad a_{23} = a_{32} = -0{,}746\,467\,80$$
$$a_{11} = -0{,}147\,959\,42 \qquad a_{33} = -0{,}147\,959\,42.$$

A szimplex éleinek hossza:

$$d_{01} = \mathrm{k} \cdot 2{,}301\,591\,59 = d_{23}$$
$$d_{02} = \mathrm{k} \cdot 2{,}826\,428\,41 = d_{13}$$
$$d_{03} = \mathrm{k} \cdot 2{,}683\,750\,43 = d_{12}.$$

A szimplexbe írható gömb sugara és térfogata:

$$r = \mathrm{k} \cdot 0{,}274\,486\,70 \qquad V = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}087\,941\,60.$$

A szimplexbe írható félgömbök sugarai és térfogatai:

$$r^3 = r^2 = r^1 = r^0 = \mathrm{k} \cdot 0{,}379\,484\,28 \qquad V^3 = V^2 = V^1 = V^0 = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}117\,798\,48.$$

A szimplexbe írható gömbgerezdek sugarai és térfogatai:

$$r^{23} = r^{01} = \mathrm{k} \cdot 0{,}691\,285\,65 \qquad V^{23} = V^{01} = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}152\,219\,64$$
$$r^{13} = r^{02} = \mathrm{k} \cdot 0{,}566\,505\,02 \qquad V^{13} = V^{02} = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}202\,988\,56$$
$$r^{12} = r^{03} = \mathrm{k} \cdot 0{,}599\,456\,87 \qquad V^{12} = V^{03} = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}161\,572\,98.$$

A szimplexbe írható gömbszögletek sugarai és térfogatai:

$$r_3 = r_2 = r_1 = r_0 = \mathrm{k} \cdot 1{,}683\,647\,17 \qquad V_3 = V_2 = V_1 = V_0 = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}291\,001\,49.$$

A szimplex térfogata:

$$V = \mathrm{k}^3 \cdot 0{,}502.$$

A sűrűségek nagyságrendi viszonyai:

$$s_0 = s_1 = s_2 = s_3 > s^{02} = s^{13} > s^{01} = s^{23} > s^0 = s^1 = s^2 = s^3 > s^{03} = s^{12} > s.$$

Ebben az esetben akkor kapjuk a maximális sűrűségű kitöltést, ha a gömb középpontja valamelyik csúcsban van és a szemközti lapot érinti.

A gépidő nagysága miatt a szimplextérfogatokat csak két értékes jegyre tudtuk kiszámítani. Nagyobb pontosság személyi számítógépen már kb. 1 napos futási időt igényelne.

Összefoglalásul felírjuk az egyes szimplexekhez — szimmetriacsoportokhoz — tartozó maximális sűrűségeket:

1.1. (3, 5, 3): $s_0 = s_3 \approx 0{,}68$.

1.2. (4, 3, 5): $s_0 \approx 0{,}59$.

1.3. (5, 3, 5): $s_1 = s_2 \approx 0{,}47$.

2. (5, 3): $s_0 = s_1 \approx 0{,}73.$

3.1. (4, 3): $s_2 = s_3 \approx 0{,}77.$

3.2. (4, 4): $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 \approx 0{,}65.$

3.3. (5, 3): $s_2 = s_3 \approx 0{,}77.$

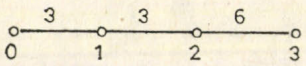
3.4. (5, 4): $s_2 = s_3 \approx 0{,}68.$

3.5. (5, 5): $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 \approx 0{,}58.$

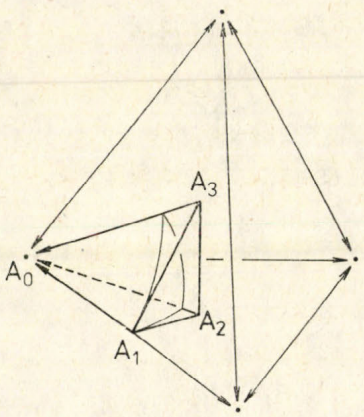
Összehasonlításul a bevezetőben említett Böröczky—Coxeter—Florian-féle felső korlát [3]

$$s_0 = \left(1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - - + + \right)^{-1} \approx 0{,}853\,276\,13.$$

Ez a



Coxeter-gráfú szimplexhez tartozik (4. ábra).



4. ábra

Ennek a szimplexnek az A_0 ideális csúcsába helyezzük el annak a paraszférának a „középpontját", mely a szimplex (ortoszkém) $\beta^0 = A_1A_2A_3$ lapját érinti az A_1 csúcsban. A paraszféra szimplexbe eső része véges térfogatú, ugyanígy az ortoszkém térfogata is véges [8]:

$$\frac{k^3}{8} \int_0^{\pi/3} -\log(2 \cdot \sin x)\,dx \approx k^3 \cdot 0{,}042\,289\,2.$$

A kettő térfogatának aránya a fenti s_0 sűrűség.

IRODALOM

[1] J. Böhm, E. Hertel: *Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*, DVW Berlin, 1980; Birkhäuser, Basel—Boston—Stuttgart 1981.
[2] Böröczky K.: Gömbkitöltések állandó görbületű terekben, I, *Matematikai Lapok* **25** (1974), 265—306.
[3] Böröczky K.: Gömbkitöltések állandó görbületű terekben, II, *Matematikai Lapok* **26** (1975), 67—90.
[4] K. Böröczky: Packing of spheres in spaces of constant curvature, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **32** (1978), 243—261.
[5] H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
[6] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser: *Generators and Relations for Discrete Groups*, 4th edition, Ergebnisse der Math. 14, Berlin—Heidelberg—New York, 1980.
[7] L. Fejes Tóth: *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.
[8] J. Milnor: Hyperbolic geometry: The first 150 years, *Bull. of the Amer. Math. Soc.* **6** (1982), 9—24.
[9] E. Molnár: Projective metrics and hyperbolic volume, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.* **32** (1989), 127—157.
[10] Radó F., Orbán B.: *A geometria mai szemmel*, Dacia Kiadó, Kolozsvár-Napoca, 1981.
[11] Э. Б. Винберг: Гиперболические группы отражений, *Успехи мат. наук* **40** (1985), 29—66.

(Beérkezett: 1986. augusztus 11-én)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ УПАКОВКИ ШАРОВ С ДАННЫМИ ГРУППАМИ ОТРАЖЕНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л. БРЕЗОВИЧ и Э. МОЛНАР

EXTREMAL BALL PACKINGS WITH GIVEN SYMMETRY GROUPS GENERATED BY REFLECTIONS IN THE HYPERBOLIC 3-SPACE

L. BREZOVICH and E. MOLNÁR

There are 9 Coxeter's reflection groups in the hyperbolic 3-space which have compact simplicial fundamental domains (Lanner simplices) with natural dihedral angles $\frac{\pi}{m(i,j)}$ between the i-th and j-th faces $(2 \leqq m(i,j)$ positive integer$)$.

In the paper we investigate regular packings by disjoint congruent balls whose symmetry groups belong to these 9 groups. In these classes we have determined the densest ball packings. The results are summarized at the end of Section 6 with notations (Coxeter diagrams) introduced in Section 4.

LUCAS-SZÁMOK WIEFERICH-TÍPUSÚ PRÍMOSZTÓI

KISS PÉTER*

Legyenek A és B zérustól különböző rögzített racionális egészek. Az egész számok $R_0=0$, $R_1=1$ kezdőelemekkel és az

$$R_n = A \cdot R_{n-1} + B \cdot R_{n-2} \quad (n > 1) \tag{1}$$

rekurzióval definiált sorozatát Lucas-sorozatnak, elemeit Lucas-számoknak nevezzük. A Lucas-sorozatoknak az $A=B=1$ speciális esete a jól ismert Fibonacci-sorozat. Az $x^2-Ax-B=0$ egyenletet a sorozat karakterisztikus egyenletének nevezzük és gyökeit α-val, illetve β-val fogjuk jelölni, nyilván feltehetjük, hogy $|\alpha| \geqq |\beta|$. Teljes indukció segítségével (1) alapján igazolhatjuk, hogy a tagok explicit alakja $A^2+4B \neq 0$ esetén

$$R_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}. \tag{2}$$

A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy a sorozat nem degenerált, vagyis α/β nem egységgyök. Ugyanis $\alpha/\beta=1$ (azaz $A^2+4B=0$) esetén teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden tagra $R_n=n\cdot\alpha^{n-1}$; ha pedig $\alpha/\beta\neq 1$, de egységgyök, akkor (2)-ből következik, hogy a tagok $R_n=q_n\cdot\alpha^n$ alakúak, ahol $q_n=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)$ egy periodikus sorozat. Az is belátható, hogy q_n minimális periódushossza legfeljebb 6. Így a degenerált sorozatok tulajdonságai visszavezethetők a hatványsorozatok tulajdonságaira.

Megjegyezzük, hogy (2) alapján $R_n \neq 0$ minden $n>0$ esetén, ha a sorozat nem degenerált, hiszen ellenkező esetben α/β egy egységgyök lenne.

Ismert, hogy ha p egy prímszám és $p \nmid B$, akkor a Lucas-sorozatban vannak $R_0=0$-tól különböző p-vel osztható tagok. Ezek között a legkisebb indexű tag indexét p előfordulási rendjének nevezzük és $r(p)$-vel jelöljük. Tehát $r(p)=n$, ha $n>0$, $p \mid R_n$ és $p \nmid R_m$, ha $0<m<n$. A p prímszámot $r(p)=n$ esetén R_n primitív prímosztójának is szoktuk nevezni. Ha $r(p)=n$, $p^k \mid R_n$, ahol k egy természetes szám, de $p^{k+1} \nmid R_n$, akkor azt mondjuk, hogy p^k az R_n egy primitív prímhatvány osztója. A következőkben ezt a k természetes számot $k(p)$-vel és egy Lucas-szám

* A kutatást (részben) az Országos Tudományos Kutatási Alap 273. sz. pályázata támogatta.

összes különböző primitív prímhatvány osztóinak szorzatát $\mathcal{R}_n$-nel jelöljük, vagyis

$$\mathcal{R}_n = \prod_{\substack{p \\ r(p)=n}} p^{k(p)},$$

és megállapodunk abban, hogy $\mathcal{R}_n=1$, ha R_n-nek nincs primitív prímosztója.

Legyen a továbbiakban $D=A^2+4B$ és p prímszámokra (D/p) a Legendre-szimbólum kikötve, hogy $(D/p)=0$, ha $p|D$.

A p prímek $(p\nmid B)$ Lucas-sorozatban való $r(p)$ előfordulási rendjéről tudjuk, hogy

$$r(p)\big|(p-(D/p)), \tag{3}$$

továbbá $p^t|R_n$ bármely $t\geqq 1$ mellett akkor és csak akkor, ha $t\leqq k(p)$ esetén $r(p)|n$, $t>k(p)$ esetén pedig $p^{t-k(p)}\cdot r(n)|n$ (lásd pl. [5]). Azt azonban nem tudjuk, hogy $k(p)$ különbözhet-e 1-től végtelen sok p prím esetén. Például a legismertebb esetben, amikor a sorozatunk a Fibonacci-sorozat, eddig nem ismerünk olyan prímszámot, melyre $k(p)\geqq 2$ teljesülne. Ez a probléma összefügg a Wieferich-prímek problémájával, amely, mint ismert, az $x^n+y^n=z^n$ Fermat-egyenlet megoldhatóságával kapcsolatos.

A p prímszámot Wieferich-prímnek nevezzük, ha $p^2|(2^{p-1}-1)$. Azonban az $R_n=2^n-1$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ sorozat az $A=3$, $B=-2$ konstansokkal meghatározott Lucas-sorozat, így az előzőek miatt p akkor és csak akkor Wieferich-prím, ha ebben a sorozatban $k(p)\geqq 2$. Indokolt tehát egy p prímet Wieferich-típusúnak nevezni egy Lucas-sorozat vonatkozásában, ha $k(p)\geqq 2$. Annak eldöntése, hogy egy Lucas-sorozatban egy prím Wieferich-típusú vagy nem, összefügg a Fermat-problémával, esetleg annak lezárásához is vezethetne. Ugyanis ismert, hogy az $x^p+y^p=z^p$ egyenletnek $p\nmid xyz$ esetben csak akkor lehet x, y, z egész megoldása, ha $p^2|(q^{p-1}-1)$ minden $q\leqq 43$ prím esetén, vagyis ha p Wieferich-típusú több Lucas-sorozatban egyidejűleg (lásd pl. [1], 225. oldal). A Fermat-egyenlet megoldhatósága és a Lucas-sorozatok tulajdonságai között néhány további kapcsolatra mutattunk rá [2]-ben.

A következőkben egy összefüggést bizonyítunk a Lucas-számok primitív prímosztóinak nagysága és a Wieferich-típusú prímek létezése között. Először azonban bevezetünk néhány jelölést.

Egy m természetes szám esetén $\omega(m)$-mel fogjuk jelölni m összes különböző prímosztóinak számát, $P(m)$ pedig m legnagyobb prímosztóját fogja jelölni $P(1)=1$ megállapodással. Tehát $\mathcal{R}_n$ definíciója miatt $P(\mathcal{R}_n)$ az R_n Lucas-szám legnagyobb primitív prímosztóját jelöli. A továbbiakban az a kifejezés, hogy majdnem minden természetes számnak megvan egy T tulajdonsága, azt rövidíti, hogy a T tulajdonsággal nem rendelkező természetes számok halmaza nulla sűrűségű (esetleg üres).

A következő tételt fogjuk bebizonyítani.

Tétel. *Legyen δ egy rögzített valós szám $0<\delta<1$ feltétellel. Ha majdnem minden n természetes számra $P(\mathcal{R}_n)<n^{1+\delta}$, akkor végtelen sok n természetes számhoz van az R_n Lucas-számnak Wieferich-típusú prímosztója (vagyis $r(p)=n$ és $p^2|R_n$) és ezen n egészek halmaza pozitív sűrűségű.*

A Lucas-számok, illetve az általánosabb lineáris rekurzív sorozatok tagjainak legnagyobb prímosztóit már sokan vizsgálták (lásd C. L. Stewart [7] és ennek igen bő, csaknem teljes irodalomjegyzékét). A Lucas-számok legnagyobb primitív

prímosztóira az eddig elért legjobb eredményt T. N. Shorey és C. L. Stewart [6] bizonyították: majdnem minden n természetes szám esetén

$$P(\mathscr{R}_n) > \frac{n \log^2 n}{f(n) \log \log n},$$

ahol $f(n)$ egy tetszőleges valós értékű függvény, feltéve, hogy $f(n) \to \infty$, ha $n \to \infty$. A fenti tételünk alapján azt lehet sejteni, hogy Shorey és Stewart eredménye tovább javítható, valószínűen $P(\mathscr{R}_n) > n^{1+\delta}$ is igaz, legalábbis a természetes számok egy pozitív sűrűségű részhalmazára. Nem valószínű ugyanis, hogy viszonylag „sok" Wieferich- vagy Wieferich-típusú prím létezik, hiszen eddig csak két Wieferich-prím ismert (1093 és 3511) és egyetlen Wieferich-típusú prímosztót sem találtak eddig a Fibonacci-sorozatban. Hasonló sejtés következik [3]-ban elért eredményeinkből is. Többek között bizonyítottuk, hogy pozitív a sűrűsége azon n természetes számok halmazának, melyekre R_n legnagyobb primitív $p^{k(p)}$ prímhatvány osztója nagyobb mint $n^2/\log n$. Azt azonban nem sikerült eldönteni, hogy általában p nagy vagy $k(p) \geqq 2$.

A tételünk bizonyításában felhasználunk néhány segédtételt.

1. Lemma. *Minden $x > 1$ valós szám esetén*

$$\sum_{n \leqq x} \log \mathscr{R}_n = \frac{3}{\pi^2} x^2 \log |\alpha| + O(x \log x).$$

Bizonyítás. A lemmát [4]-ben bizonyítottuk, de a teljesség kedvéért leírjuk a bizonyítás gondolatmenetét.

C. L. Stewart [8] bizonyította, hogy ha

$$\Phi_n(\alpha, \beta) = \prod_{d|n} (\alpha^{n/d} - \beta^{n/d})^{\mu(d)}, \tag{4}$$

akkor

$$\mathscr{R}_n = \lambda_n |\Phi_n(\alpha, \beta)|, \tag{5}$$

ahol μ a Moebius függvény és $\lambda_n = 1$ vagy $\lambda_n = \frac{1}{P(n/(3, n))}$. Mivel (4)-ből

$$\log |\Phi_n(\alpha, \beta)| = \sum_{d|n} \log \left| \alpha^{n\mu(d)/d} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n/d}\right)^{\mu(d)} \right| =$$

$$= \log |\alpha| \sum_{d|n} \frac{n}{d} \mu(d) + E_n = \varphi(n) \log |\alpha| + E_n$$

következik, ezért

$$\sum_{n \leqq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x)$$

és $|\log \lambda_n| \leqq \log n$ miatt (5) alapján

$$\sum_{n \leqq x} \log \mathscr{R}_n = \frac{3}{\pi^2} x^2 \log |\alpha| + \sum_{n \leqq x} E_n + O(x \log x).$$

Ebből már következik az állítás, mert az algebrai számok logaritmusainak lineáris formáira nyert Baker-típusú eredményekből

$$\sum_{n \leqq x} E_n = O(x \log x)$$

adódik.

2. Lemma. *Bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén az* x*-nél nem nagyobb indexű Lucas-számok összes különböző prímosztóira*

$$\sum_{n \leqq x} \omega(\mathscr{R}_n) < \left(\frac{3 \log |\alpha|}{2\pi^2} + \varepsilon\right) \cdot \frac{x^2}{\log x} \tag{6}$$

ha $x > x(\varepsilon)$.

Bizonyítás. Legyen $c = (3 \log |\alpha|)/\pi^2$ és $y = \left[\left(\frac{c}{2} + \varepsilon\right) \frac{x^2}{\log x}\right]$, ahol [ ] az egész érték függvény. Ha (6) ellenkezője volna igaz, akkor

$$\sum_{n \leqq x} \log \mathscr{R}_n \geqq \sum_{n \leqq y} \log p_n \tag{7}$$

adódna, ahol p_n az n-edik prímszám. Mivel

$$p_y > (1 - \varepsilon') y \log y,$$

ahol $\varepsilon' > 0$ tetszőlegesen kicsi lehet, ha y elég nagy, és

$$\sum_{p \leqq z} \log p = z + O(z/\log z),$$

ezért (7) és y definíciója miatt

$$\sum_{n \leqq x} \log \mathscr{R}_n \geqq (1 - \varepsilon') y \log y + O(y) \geqq (c + \varepsilon'') x^2 + O\left(\frac{x^2}{\log x}\right)$$

következne, ahol $\varepsilon'' > 0$ ha ε' elég kicsi, vagyis ha y, illetve x elég nagy. Ez azonban ellentmond az 1. Lemmának, így (6) valóban igaz.

Most rátérünk a tételünk bizonyítására.

A Tétel bizonyítása. Legyenek x és δ pozitív valós számok, $0 < \delta < 1$, és legyen S_x azon n természetes számok halmaza, melyekre $n \leqq x$ és $P(\mathscr{R}_n) > n^{1+\delta}$. Ekkor a tétel feltétele miatt az S_x halmaz számosságára

$$|S_x| < \varepsilon x \tag{8}$$

bármely $\varepsilon > 0$ esetén, ha x elég nagy. Jelöljük N_x-szel az $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \ldots, \mathscr{R}_n, \ldots$ $(n \leqq x)$ számok összes nem feltétlenül különböző prímtényezőinek számát, vagyis $k(p)$ definíciója miatt

$$N_x = \sum_{n \leqq x} \sum_{\substack{p \\ r(p) = n}} k(p) = \sum_{n \leqq x} \sum_{\substack{p \\ r(p) = n}} \frac{\log p^{k(p)}}{\log p}.$$

Ennek alapján

$$N_x > \sum_{n \leqq x} \left(\frac{1}{\log n^{1+\delta}} \sum_{\substack{p \\ r(p) = n}} \log p^{k(p)}\right) - \sum_{n \in S_x} \left(\frac{1}{\log n^{1+\delta}} \sum_{\substack{p \\ r(p) = n}} \log p^{k(p)}\right) + \tag{9}$$

$$+ \sum_{n \in S_x} \sum_{\substack{p \\ r(p) = n}} \frac{\log p^{k(p)}}{\log p}.$$

Becsléseket adunk a (9) egyenlőtlenség jobb oldalán álló első két összegre. Az 1. Lemma alapján, felhasználva az Abel-azonosságot és $\mathcal{R}_n$ definícióját,

$$(10) \qquad \sum_{n\leqq x}\left(\frac{1}{\log n^{1+\delta}}\sum_{\substack{p\\ r(p)=n}}\log p^{k(p)}\right)=\frac{1}{1+\delta}\sum_{n\leqq x}\frac{1}{\log n}\log \mathcal{R}_n=$$

$$=\frac{c}{1+\delta}\left\{\frac{x^2}{\log x}+\int_2^x\frac{t}{\log^2 t}\,dt+O(x)\right\}=\frac{c}{1+\delta}\cdot\frac{x^2}{\log x}+O\left(\frac{x^2}{\log^2 x}\right)$$

következik, ahol $c=3\log|\alpha|/\pi^2$. Mivel (2) alapján létezik egy c_1, csak a sorozattól függő konstans úgy, hogy $\log \mathcal{R}_n\leqq\log|R_n|<c_1 n$ minden $n>0$ esetén, ezért (8) és az Euler-féle összegezési formula alapján

$$(11) \qquad \sum_{n\in S_x}\left(\frac{1}{\log n^{1+\delta}}\sum_{\substack{p\\ r(p)=n}}\log p^{k(p)}\right)=\frac{1}{1+\delta}\sum_{n\in S_x}\frac{\log \mathcal{R}_n}{\log n}\leqq$$

$$\leqq\frac{c_1 x}{1+\delta}\left(\int_2^{\varepsilon x}\frac{dt}{t}+O(1)\right)<\frac{2c_1\varepsilon}{1+\delta}\cdot\frac{x^2}{\log x}.$$

(9) jobb oldalán álló harmadik összeg nyilván nemnegatív, így (10) és (11) következtében

$$N_x>\left(\frac{c}{1+\delta}-\varepsilon_1\right)\frac{x^2}{\log x},$$

ahol ε_1 tetszőlegesen kicsi pozitív szám lehet, ha x elég nagy. De $\delta<1$ és így $c/(1+\delta)>\frac{c}{2}$, ezért a 2. Lemma miatt létezik egy csak δ-tól függő δ' pozitív szám úgy, hogy

$$(12) \qquad N_x-\sum_{n\leqq x}\omega(\mathcal{R}_n)>\delta'\frac{x^2}{\log x},$$

ha x elég nagy.

Már láttuk, hogy $\mathcal{R}_n<e^{c_1 n}$ és (3) alapján $P(\mathcal{R}_n)\geqq n-1$ adódik, ezért $\mathcal{R}_n$-nek legfeljebb $c_2 n/\log n$ nem feltétlen különböző prímtényezője van minden $n>0$ esetén, ahol c_2 csak a sorozattól függő pozitív szám. Ebből következik (12) felhasználásával, hogy az $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n, \ldots$ $(n\leqq x)$ számok közül legalább $\frac{\delta'}{c_2}x$ számnak van olyan prímosztója, melyre $k(p)>1$.

Ez már bizonyítja az állításunkat.

IRODALOM

[1] Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich: *Number Theory*, New York—London, 1967.

[2] P. Kiss: Connection between second order recurrences and Fermat's last theorem, *Period. Math. Hungar.* **11** (1980), 151—157.

[3] P. Kiss: On primitive prime power divisors of Lucas numbers, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, **51** *Number Theory*, Budapest, 1987, 773—786.

[4] P. Kiss: Primitive divisors of Lucas numbers, *Applications of Fibonacci numbers* (ed. by A. N. Philippou et al.), Kluwer Acad. Publ., 1988, 29—38.

[5] D. H. LEHMER: An extended theory of Lucas' functions, *Ann. of Math.* **31** (1930), 419—448.
[6] T. N. SHOREY, C. L. STEWART: On divisors of Fermat, Fibonacci, Lucas and Lehmer numbers, II. *J. London Math. Soc. (2)* **23** (1981), 17—23.
[7] C. L, STEWART: On the greatest prime factor of terms of a linear recurrence sequence, *Rocky Mountain J. of Math.* **15** (1985), 599—608.
[8] C. L. STEWART: On divisors of Fermat, Fibonacci, Lucas and Lehmer numbers, *Proc. London Math. Soc.* **35** (1977), 425—447.

(Beérkezett: 1987. február 19-én)

ПРОСТЫЕ ДЕЛИТЕЛИ ТИПА ВИФЕРИХА ЧИСЕЛ ЛЮКА

П. КИШ

WIEFERICH-TYPE PRIME DIVISORS OF LUCAS NUMBERS

P. KISS

Let $R_n=(\alpha^n-\beta^n)/(\alpha-\beta)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, be a Lucas sequence, where α and β are the roots of the polynomial x^2-Ax-B and A, B are fixed integers. We say a prime p is Wieferich-type if $p^2|R_{p-(D/p)}$, where $D=A^2+4B$ and (D/p) is Legendre's symbol. The following results are proved: If the greatest primitive divisor of R_n is less than $n^{1+\delta}$ for almost all natural numbers n, where δ is a fixed real number with $0<\delta<1$, then there are infinitely many integers n for which R_n has a prime divisor of Wieferich-type and the set of these numbers has positive asymptotic density

A VÉGES FELOLDHATÓ CSOPORTOK EGY PROBLÉMÁJÁRÓL

HORVÁTH ERZSÉBET

Bevezetés

Legyen G véges csoport. Jelölje Irr (G) G komplex irreducibilis karaktereinek* halmazát, c.d. (G) pedig azon természetes számok halmazát, amelyek előállnak mint Irr (G)-beli karakterek fokai.

Ha G feloldható, akkor létezik egy olyan legkisebb természetes szám: d, amelyre $G^{(d)}=1$. Ezt a számot G *feloldhatósági hosszának* nevezzük és d.l. (G)-vel jelöljük. Ha a G véges csoportra teljesül az a tulajdonság, hogy minden $\chi\in\text{Irr}\,(G)$-hez található $H\leqq G$ és $\lambda\in\text{Irr}\,(H)$ lineáris karakter, melyre $\chi=\lambda^G$, akkor a G csoportot *monomiális csoportnak* (M-csoportnak) nevezzük. Minden M-csoport feloldható, sőt d.l. $(G)\leqq|\text{c.d.}\,(G)|$. G. M. Seitz az 1960-as években ennek a tulajdonságnak az alapján fogalmazta meg a következő *sejtést: Ha G véges feloldható csoport, akkor* d.l. $(G)\leqq|\text{c.d.}\,(G)|$. A sejtés igaznak bizonyult $|\text{c.d.}\,(G)|\leqq 4$ esetén, l. [10], [5]. T. R. Berger belátta a sejtést minden páratlan rendű csoportra, l. [1]. D. Gluck pedig igazolta, hogy d.l. $(G)\leqq 2|\text{c.d.}\,(G)|$ tetszőleges véges feloldható csoport esetén, l. [6].

A továbbiakban először ismertetjük a Frobenius-csoportok főbb tulajdonságait, amelyek bizonyítása megtalálható a [9], [11] és [7] könyvekben. Ezután megvizsgáljuk, hogy a fenti problémával kapcsolatban mit lehet mondani, ha G-ről még azt is feltesszük, hogy Frobenius-csoport. Feltételt adunk arra is, hogy egy Frobenius-csoport M-csoport legyen, valamint mutatunk egyéb példát is, amikor M-csoport M-csoporttal való bővítése M-csoport.

1. §

1.1. Definíció. Legyen G tranzitív permutációcsoport az Ω n-elemű halmazon. G-t *Frobenius-csoportnak* nevezzük, ha minden $g\in G^*$ esetén g-nek legfeljebb egy fixpontja van és létezik olyan $g\in G^*$, amelynek van fixpontja.

1.2. Tétel (Frobenius). *Legyen G Frobenius-csoport és $H\leqq G$ Ω egy rögzített elemének stabilizátor-részcsoportja. Ekkor G-nek azon elemei, amelyeknek nincs fixpontjuk, G egységelemével együtt G-nek egy N normálosztóját alkotják, amelynek rendje $|G:H|$.*

1.3. Megjegyzés. Ennek a tételnek csak olyan bizonyítása ismert, amely karaktereket használ.

---

* A cikkben szereplő karakterelméleti fogalmak definícióit, illetve a szereplő tételeket lásd a cikk végén található reprezentációelméleti összefoglalóban.

1.4. Elnevezés. Az 1.2 Tételben szereplő N normálosztót a G csoport *Frobenius magjának*, a H részcsoportot pedig G *Frobenius komplementumának* nevezzük.

Az előző tételből könnyen levezethető a következő

1.5. Tétel. *Legyen G Frobenius-csoport N maggal és H komplementummal. Ekkor*

i) $G=HN$, $H\cap N=1$, *azaz G N-nek H-val vett szemidirekt szorzata.*
ii) $|H|\,|N|-1$, *speciálisan* $(|H|, |N|)=1$.
iii) *A H^* elemeivel vett konjugálások N^*-on fixpontmentes automorfizmusokat indukálnak.*

Megfordítva, ha G véges csoport, $G=NH$, ahol $H\leqq G$, $N\lhd G$ és $H\cap N=1$, valamint H^* elemei fixpontmentes automorfizmusokat indukálnak N^*-on, akkor G Frobenius-csoport N maggal és H komplementummal.

A következő tétel szintén arra ad feltételt, hogy egy csoport Frobenius-csoport legyen. Időnként szokás a Frobenius-csoportokat ezzel a tulajdonságukkal definiálni.

1.6. Tétel. *Legyen $1<H<G$. Ekkor G pontosan akkor Frobenius-csoport H komplementummal, ha minden $x\in G\setminus H$ esetén $H\cap H^x=1$ és $N_G(H)=H$.*

A Frobenius-csoportok irreducibilis karaktereiről szól a következő

1.7. Tétel. *Legyen G Frobenius-csoport N maggal és H komplementummal. Ekkor*

i) *Ha* $1_N\neq\psi\in\mathrm{Irr}\,(N)$, *akkor* $\psi^G\in\mathrm{Irr}\,(G)$.
ii) *Ha* $\chi\in\mathrm{Irr}\,(G)$ *és* $N\not\equiv\mathrm{Ker}\,\chi$, *akkor létezik olyan* $\psi\in\mathrm{Irr}\,(N)$, *hogy* $\psi^G=\chi$.

A Frobenius-csoportok alapvető strukturális tulajdonságait soroljuk most föl:

1.8. Tétel. *Legyen G Frobenius-csoport N maggal és H komplementummal. Ekkor*

i) **(Thompson)** *N nilpotens.*
ii) **(Burnside)** *Legyen P p-Sylow részcsoport H-ban. Ha $p>2$, akkor P ciklikus; ha $p=2$, akkor P vagy ciklikus vagy általánosított kvaterniócsoport. Speciálisan H nem tartalmaz nem ciklikus p^2 rendű részcsoportot.*
iii) *Ha $p\neq q$ prímek, akkor H-nak minden pq-adrendű részcsoportja ciklikus.*
iv) *Ha $|H|$ páratlan, akkor H metaciklikus és minden $x\in H$ prímrendű elemre $\langle x\rangle\lhd H$ és $x\in Z(H)\cup H'$. Ha $|H|$ páros, akkor N Abel és H-ban egyetlen involúció található, amely szükségképpen $Z(H)$-beli. Mindkét esetben $Z(H)\neq 1$.*
v) *H-nak létezik egy ϱ hű, irreducibilis $\overline{\mathbf{Q}}$-reprezentációja, amelyre minden $h\in H^*$ elemre a $\varrho(h)$ mátrixnak 1 nem sajátértéke.*

Ha a Frobenius komplementum páratlan rendű, akkor feloldható is, sőt az előző tétel iv) pontja szerint szuperfeloldható, tehát speciálisan M-csoport is, l. [10], 6.22. Th. A páros esetben az is előfordulhat, hogy a Frobenius komplementum nem feloldható. Ezzel az esettel foglalkozik a következő

1.9. Tétel (Zassenhaus). *Legyen H nem feloldható Frobenius komplementum. Ekkor létezik olyan $H_0\lhd H$, amelyre $|H:H_0|\leqq 2$ és $H_0=SL(2,5)\times M$, ahol az M csoport Sylow részcsoportjai ciklikusak és $(|M|, 2\cdot 3\cdot 5)=1$.*

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

Feloldható Frobenius komplementumokról szól a következő

1.10. Tétel (Zassenhaus). *Legyen H feloldható Frobenius komplementum. Ekkor létezik olyan $H_0 \lhd H$, amelyre $H/H_0 \cong S_4$ és H_0-nak a Sylow részcsoportjai ciklikusak. Ezen kívül H_0 a következő módon áll elő: $H_0 = \langle x, y \mid x^n = 1,\ y^m = 1,\ x^{-1}yx = y^r \rangle$, ahol $(r-1, m) = 1$, $(n, m) = 1$ és $r^{n/n'} \equiv 1 \mod m$. Itt n' az n különböző prímfaktorainak szorzata.*

Ha még azt is feltesszük, hogy $Z(H)$ 2-csoport, akkor a következőket lehet belátni:

1.11. Tétel. *Legyen H olyan feloldható Frobenius komplementum, ahol $Z(H)$ 2-csoport. Legyen S egy 2-Sylow részcsoport, T pedig egy 2'-Hall részcsoport H-ban. Ekkor T ciklikus, továbbá a következő négy eset egyike teljesül:*

i) *$T \lhd H$, S ciklikus és S T tetszőleges Sylow részcsoportján nemtriviálisan hat.*
ii) *$T \lhd H$, S általánosított kvaterniócsoport, $[S', T] = 1$, és S T tetszőleges Sylow részcsoportján nemtriviálisan hat.*
iii) *$H \cong SL(2, 3)$.*
iv) *$F(H) \cong Q_8 \times T_0$, ahol $|T : T_0| = 3$, Q_8 a 8-elemű kvaterniócsoport. $\bar{H} = H/F(H) \cong S_3$ és $\bar{H}/\bar{H}'$ T_0 tetszőleges Sylow részcsoportján nemtriviálisan hat.*

2. §

Most térjünk vissza az eredeti problémánkra. Amint az [1], Th. 2.3 bizonyításából kitűnik, egy G véges csoportban a d.l. $(G) \leqq |\text{c.d.}(G)|$ egyenlőtlenség teljesülésének elégséges feltétele a következő hipotézis teljesülése G-ben.

2.1. Hipotézis. *Legyen $\chi \in \text{Irr}(G)$ és $M \lhd G$. Ha $M \leqq \text{Ker}\, \varphi$ minden olyan $\varphi \in \text{Irr}(G)$ esetén, amelyre $\varphi(1) < \chi(1)$, akkor $M' \leqq \text{Ker}\, \chi$.*

2.2. Megjegyzés.

a) A 2.1. Hipotézis a Seitz-sejtés teljesülésének nem szükséges feltétele, amint azt az $SL(2, 3)$ példája is mutatja.
b) Könnyű belátni, hogy a 2.1. Hipotézis teljesül minden M-csoportban, [1], Th. 2.2 szerint pedig teljesül minden páratlan rendű csoportban, így a 2.1. Hipotézist teljesítő csoportosztály az M-csoportok és a páratlan rendű csoportok közös általánosításának tekinthető.
c) A 2.1. Hipotézis részcsoportra nem öröklődik, mivel [12], Cor. 2.3 szerint tetszőleges feloldható csoport, így például $SL(2, 3)$ is beágyazható M-csoportba.
d) A 2.1. Hipotézis bővítésre sem öröklődik. Erre ugyancsak $SL(2, 3)$ mutat példát, amely Q_8-nak Z_3-mal való bővítésével izomorf és mind Q_8, mind Z_3 teljesíti a 2.1. Hipotézist.
Ebből a példából az is látható, hogy M-csoport M-csoporttal való bővítése nem feltétlenül M-csoport.

Nyilvánvaló, hogy egy G véges csoportban a 2.1. Hipotézis pontosan akkor teljesül, ha minden $\chi \in \text{Irr}(G)$-re teljesül a

2.1. Hipotézis (χ). *Ha $M \lhd G$ és $M \leqq \text{Ker}\, \varphi$ minden olyan $\varphi \in \text{Irr}(G)$-re, amelyre $\varphi(1) < \chi(1)$, akkor $M' \leqq \text{Ker}\, \chi$.*

A következő eredmény azt mutatja, hogy a 2.2. Megj. d) részében nem tudtunk volna olyan példát megadni, ahol a bővítés fixpontmentes automorfizmusokkal történik. Nevezetesen igaz a következő

2.3. Tétel. *Legyen G Frobenius-csoport N maggal és H komplementummal. Ekkor G-re pontosan akkor teljesül a* 2.1. *Hipotézis, ha az H-ra teljesül.*

Bizonyítás. G irreducibilis karakterei az 1.7. Tétel szerint a következő típusúak lehetnek: vagy tartalmazzák magjukban N-et, és ekkor a fokuk kisebb, mint $|G/N|$ vagy N nem fő irreducibilis karaktereiből indukálhatók, és ekkor fokuk egyenlő $|G/N|$-nel, ill. nagyobb mint $|G/N|$, attól függően, hogy N lineáris karakteréből vagy magasabb fokú irreducibilis karaktereiből vannak-e indukálva.

Tegyük fel, hogy G-re a 2.1. Hipotézis teljesül. Mivel $H \cong G/N$, elég belátni, hogy G/N-re is teljesül a hipotézis. Legyen $M/N \lhd G/N$ és tegyük fel, hogy $M/N \leqq \leqq \operatorname{Ker} \psi$ minden olyan $\psi \in \operatorname{Irr}(G/N)$-re, amelyre $\psi(1) < f_r$, ahol f_r G/N egy irreducibilis karakterfoka. Mivel G f_r-nél kisebb fokú irreducibilis karakterei mind tartalmazzák magjukban N-et, tehát a feltevés szerint M-et is tartalmazzák, és mivel G-re a 2.1. Hipotézis teljesül, ezért $M' \leqq \operatorname{Ker} \chi$ minden olyan $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$-re, amelyre $\chi(1) = f_r$, így G/N-re a 2.1. Hipotézis teljesül.

Fordítva, tegyük fel, hogy H-ra és így G/N-re a 2.1. Hipotézis teljesül. Ekkor a 2.1. Hipotézis (ψ) teljesül minden olyan $\psi \in \operatorname{Irr}(G)$-re, amelyre $\psi(1) < |G/N|$. Tegyük fel, hogy $M \lhd G$ és $M \leqq \operatorname{Ker} \chi$ minden olyan $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$-re, amelyre $\chi(1) < < |G/N|$. Ekkor $M \leqq N = \bigcap \{\operatorname{Ker} \chi \mid \chi \in \operatorname{Irr}(G), \chi(1) < |G/N|\}$. Így $M' \leqq N' \leqq \operatorname{Ker} \lambda$ minden $\lambda \in \operatorname{Irr}(N)$ lineáris karakterre, tehát $M' \leqq N' \leqq \bigcap \{(\operatorname{Ker} \lambda)^g \mid g \in G\} = \operatorname{Ker} \lambda^G$, azaz M' benne van minden $|G/N|$-edfokú irreducibilis karakter magjában. Így a 2.1. Hipotézis (ψ) teljesül minden $\psi \in \operatorname{Irr}(G)$ $|G/N|$-edfokú karakterre is. Tegyük fel most, hogy $M \lhd G$ és $M \leqq \operatorname{Ker} \chi$ minden olyan $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$-re, amelyre $\chi(1) < < \psi(1)$, ahol $\psi \in \operatorname{Irr}(G)$ rögzített és $\psi(1) > |G/N|$. Ekkor $\psi = \eta^G$ valamely $\eta \in \operatorname{Irr}(N)$-re. A feltevés szerint $M \leqq \operatorname{Ker} \vartheta^G \leqq \operatorname{Ker} \vartheta$ minden olyan $1 \neq \vartheta \in \operatorname{Irr}(N)$-re, amelyre $\vartheta(1) < \eta(1)$. Mivel az 1.8. Tétel i) szerint N nilpotens és [10], 6.14. Cor. szerint minden nilpotens csoport M-csoport, tehát N-ben a 2.1. Hipotézis teljesül. Így $M' \leqq \operatorname{Ker} \eta$, de mivel $M' \lhd G$ ezért $M' \leqq \operatorname{Ker} \eta^G = \operatorname{Ker} \psi$. Tehát a 2.1. Hipotézis (ψ) teljesül minden $\psi \in \operatorname{Irr}(G)$-re, így G-ben teljesül a 2.1. Hipotézis.

Hasonló állítás bizonyítható azzal kapcsolatban is, hogy egy Frobenius-csoportban mikor teljesül a Seitz-sejtés:

2.4. Tétel. *Legyen G véges Frobenius-csoport, N maggal és H komplementummal. Ekkor G-re pontosan akkor teljesül a Seitz-sejtés, ha az H-ra teljesül.*

Bizonyítás. Ha $|H|$ páratlan, akkor az 1.8. Tétel iv) szerint H szuperfeloldható, tehát M-csoport, így a 2.2. Megj. b) azt adja, hogy H-ban teljesül a 2.1. Hipotézis. Így az előző tétel szerint G-ben is teljesül a 2.1. Hipotézis, és így a Seitz-sejtés is. Ha $|H|$ páros, akkor az 1.8. Tétel iv) szerint N Abel. Az 1.5. Tétel iii) szerint pedig $C_N(H) = 1$. Mivel $G = HN$, így $G' = H'[N, H]$. De az 1.5. Tétel ii) szerint $(|H|, |N|) = 1$, ezért [3], Cor. 0.5 szerint $N = C_N(H) \times [N, H] = [N, H]$, azaz $G' = H'N$. Hasonlóan $G^{(k)} = H^{(k)}N$, ha $k \leqq \text{d.l.}(H)$, így $\text{d.l.}(G) = \text{d.l.}(H) + 1$. Az 1.7. Tétel esetünkben azt adja, hogy $|\text{c.d.}(G)| = |\text{c.d.}(H)| + 1$. Így ha $|H|$ páros, akkor $\text{d.l.}(G) \leqq |\text{c.d.}(G)|$ pontosan akkor teljesül, ha $\text{d.l.}(H) \leqq |\text{c.d.}(H)|$.

2.5. Következmény. *Ha a G Frobenius-csoport komplementuma páratlan rendű, akkor G-ben teljesül a Seitz-sejtés.*

2.6. Megjegyzés. Az előző következmény [10], Lemma 12.16 alapján is bizonyítható.

2.7. Következmény. *Ha a G Frobenius-csoport komplementuma páros rendű és feloldható, valamint a komplementum centruma 2-csoport, akkor G-ben teljesül a Seitz-sejtés.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy esetünkben a H Frobenius komplementumra teljesül a Seitz-sejtés, így az állítás a 2.4. Tételből már következni fog.

A feltételek szerint az 1.11. Tételbeli i), ii), iii) vagy iv) esetek fordulhatnak elő. Az i) és ii) esetekben H M-csoport, tehát H-ra teljesül a Seitz-sejtés. iii) esetén $H \cong SL(2, 3)$, amire a sejtés szintén igaz. A iv) esetben d.l. $(H) \leqq 4$ és $|\text{c.d.}\ (H)| \geqq$ $\geqq |\text{c.d.}\ (H/T_0)| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4$, így a sejtés itt is igaz.

2.8. Definíció. Legyen G véges csoport, $N \lhd G$. Azt mondjuk, hogy a $\chi \in \text{Irr}\ (G)$ relatív M-karakter N-re nézve, ha létezik olyan $N \leqq H \leqq G$ és $\psi \in \text{Irr}\ (H)$, hogy $\chi = \psi^G$ és $\psi|_N \in \text{Irr}\ (N)$.

2.9. Definíció. Legyen G véges csoport, $N \lhd G$. Azt mondjuk, hogy G relatív M-csoport N-re nézve, ha minden $\chi \in \text{Irr}\ (G)$ relatív M-karakter N-re nézve.

Most bebizonyítjuk a 2.3. Tétel és a 2.4. Tétel analogonját M-csoportokra.

2.10. Tétel. *Legyen G véges Frobenius-csoport N maggal és H komplementummal. Ekkor G pontosan akkor M-csoport, ha H M-csoport.*

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy a G Frobenius-csoportra a következő három állítás ekvivalens:

i) G M-csoport;
ii) G relatív M-csoport N-re nézve;
iii) G/N M-csoport.

i)⇒ii): Legyen $\chi \in \text{Irr}\ (G)$. Ha χ N egy irreducibilis karakteréből indukálható, akkor χ nyilvánvalóan relatív M-karakter N-re nézve. Különben $N \leqq \text{Ker}\ \chi$ teljesül. Mivel G M-csoport, $\chi = \lambda^G$ valamilyen $\lambda \in \text{Irr}\ (U)$ lineáris karakterre. Mivel $N \leqq \text{Ker}\ \lambda^G \leqq \text{Ker}\ \lambda$, tehát $N \leqq U$ és $\lambda|_N = 1_N \in \text{Irr}\ (N)$, így χ relatív M-karakter N-re nézve.

ii)⇒iii): Legyen $\chi \in \text{Irr}\ (G/N)$. Mivel χ relatív M-karakter N-re nézve ezért létezik $N \leqq U \leqq G$ és $\psi \in \text{Irr}\ (U)$, amelyre $\psi^G = \chi$ és $\psi|_N \in \text{Irr}\ (N)$. Mivel $N \leqq \text{Ker}\ \chi \leqq \text{Ker}\ \psi$, ψ szükségképpen lineáris, tehát G/N M-csoport.

iii)⇒i): Legyen $\chi \in \text{Irr}\ (G)$. Ha $N \leqq \text{Ker}\ \chi$, akkor χ a feltevés szerint M-karakter. Egyébként $\chi = \eta^G$ valamely $\eta \in \text{Irr}\ (N)$-re. Az 1.8. Tétel szerint N nilpotens, tehát N M-csoport. Így $\eta = \lambda^N$, ahol λ N egy alkalmas részcsoportjának lineáris karaktere. Az indukálás tranzitivitása miatt χ M-karakter.

2.11. Megjegyzés. Az előző bizonyításban a ii)⇒iii) következtetés tetszőleges G csoportra igaz.

2.12. Következmény. *M-csoport M-csoporttal való fixpontmentes bővítése M-csoport.*

Most megadunk még egy elégséges feltételt arra, hogy M-csoport M-csoporttal való bővítése M-csoport legyen:

2.13. Tétel. *Legyen G véges csoport, $G=AB$ és $A\cap B=1$, ahol $A\lhd G$ Abel- és B olyan M-csoport, amelynek minden részcsoportja is M-csoport. Ekkor G M-csoport.*

Bizonyítás. A bizonyítás annak a [12]-beli tételnek a gondolatmenetét követi, amelyben Seitz bebizonyítja, hogy M-csoportnak koszorúszorzata egy olyan M-csoporttal, amelynek minden részcsoportja M-csoport, szintén M-csoport. Mivel $G/A\cong B$, elég azokat a $\chi\in\mathrm{Irr}\,(G)$ karaktereket vizsgálni, amelyekre $A\not\leqq\mathrm{Ker}\,\chi$.

Clifford tétele szerint $\chi|_A=e\sum_1^n\lambda_i$ valamilyen $1_A\neq\lambda_i\in\mathrm{Irr}\,(A)$ lineáris karakterekre, ahol a Frobenius reciprocitási tétel szerint $(\chi,\lambda_i^G)\neq 0$ $i=1,\ldots,n$-re. Így elég megmutatni, hogy ha $1_A\neq\lambda\in\mathrm{Irr}\,(A)$, akkor λ^G minden irreducibilis alkotója G egy alkalmas, az alkotótól függő, részcsoportjának lineáris karakteréből indukálható. Jelölje T λ-nak G-beli inerciacsoportját. Mivel $G=AB$, a Dedekind-azonosság szerint $T=AB_0$, ahol $B_0=T\cap B$. Gallagher egy eredménye szerint, l. [4], ha egy csoport egy normálosztójához van komplementum, akkor a normálosztó minden lineáris karaktere kiterjeszthető a stabilizátorára. Esetünkben tehát λ kiterjeszthető T-nek egy $\hat{\lambda}$ karakterévé. Gallagher egy másik eredménye szerint, l. [10], 6.17 Cor., ha egy G csoport N normálosztójának ϑ irreducibilis karaktere kiterjeszthető a csoport egy χ irreducibilis karakterévé, akkor $\vartheta^G=\sum_\beta\beta(1)(\beta\chi)$, ahol β végigfut G/N összes irreducibilis karakterein. Ezenkívül a $\beta\chi$ karakterek a ϑ^G összes irreducibilis alkotói. Ezt az eredményt a T csoport A normálosztójának λ irreducibilis karakterére és annak $\hat{\lambda}$ kiterjesztésére alkalmazva azt kapjuk, hogy $\lambda^T=\sum_\omega\omega(1)(\hat{\lambda}\omega)$, ahol ω végigfut $\mathrm{Irr}\,(T/A)$-n és $\hat{\lambda}\omega\in\mathrm{Irr}\,(T)$. Így $\lambda^G=\sum_\omega\omega(1)(\hat{\lambda}\omega)^G$ és [10], 6.11. Th. szerint $(\hat{\lambda}\omega)^G\in\mathrm{Irr}\,(G)$. De $T/A\cong B_0\leqq B$ és B minden részcsoportja M-csoport, így minden ω-hoz létezik egy ω-tól függő $A\leqq R\leqq T$ és $\psi\in\mathrm{Irr}\,(R/A)$ lineáris karakter, amelyre $\psi^T=\omega$. Ekkor $(\omega\hat{\lambda})^G=(\psi^T\hat{\lambda})^G=((\psi\hat{\lambda}|_R)^T)^G=(\psi\hat{\lambda}|_R)^G$. Így λ^G minden irreducibilis alkotója G alkalmas, az alkotótól függő részcsoportjának lineáris karakteréből indukálható.

2.14. Következmény. *Ha G véges csoport, $G=AB$, $A\cap B=1$, ahol $A\lhd G$ Abel-, valamint B olyan feloldható csoport, amelyben minden $x\in B^*$-ra $C_G(x)$ nilpotens, akkor G M-csoport.*

Bizonyítás. [2], Cor. 2.-ből következik, hogy B olyan M-csoport, amelynek minden részcsoportja is M-csoport, így az előző tétel alkalmazható.

Függelék

Reprezentációelméleti összefoglaló

A csoportelmélet iránt érdeklődő, de a reprezentációelméletben járatlan olvasó számára röviden összefoglaljuk a cikkben használt — véges csoportokra vonatkozó — reprezentációelméleti fogalmakat és tételeket. A bizonyítások megtalálhatók például [10]-ben. A továbbiakban csoporton mindig véges csoportot értünk, $GL(n,\mathbf{C})$ az $n\times n$-es komplex elemű invertálható mátrixok multiplikatív csoportja, $\mathrm{tr}\,(A)$ jelöli az A négyzetes mátrix főátlóbeli elemeinek összegét (nyom, trace, Spur).

Definíció. Legyen G csoport. Egy $\varrho: G \to GL(n, \mathbf{C})$ homomorfizmust G komplex számtest feletti *reprezentációjának* nevezzük, n-et pedig a *reprezentáció dimenziójának* hívjuk.

Definíció. Legyen $\varrho: G \to GL(n, \mathbf{C})$ a G csoport egy reprezentációja. Azt a $\varphi: G \to \mathbf{C}$ függvényt, amelyre $\varphi(g) = \operatorname{tr}(\varrho(g))$ minden $g \in G$ esetén a ϱ *reprezentáció karakterének* nevezzük. Általában egy G-n értelmezett komplex értékű függvényt *karakternek* nevezünk, ha van G-nek olyan reprezentációja, amelynek ez a függvény a karaktere.

Definíció. Legyen φ a G csoport egy karaktere. Ekkor $\varphi(1)$-et a φ *karakter fokának* nevezzük. (Ez a szám megegyezik a megfelelő reprezentáció dimenziójával.) Az egydimenziós reprezentációk karaktereit *lineáris karaktereknek* hívjuk.

Példa. Legyen $G = \langle x | x^n = 1 \rangle$ n-edrendű ciklikus csoport.

a) Legyen $\varrho_1: G \to GL(2, \mathbf{C})$ az a leképezés, amely x-hez a

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

mátrixot rendeli, x^k-hoz pedig ennek a mátrixnak a k-adik hatványát, $k = 1, \ldots, n$ esetén. Ez a leképezés G-nek egy 2-dimenziós reprezentációja.

b) Legyen $\varrho_2: G \to GL(1, \mathbf{C})$ az a leképezés, amelyre $\varrho_2(x^k) = e^{i2k\pi/n}$ $k = 1, \ldots, n$. Ez a leképezés G-nek egy egydimenziós reprezentációja.

Definíció. Legyen $\varrho: G \to GL(n, \mathbf{C})$ a G csoport egy reprezentációja. Ha a G elemeihez rendelt lineáris transzformációknak nincs nemtriviális közös invariáns alterük, akkor a ϱ *reprezentációt irreducibilisnek* nevezzük, ellenkező esetben *reducibilis reprezentációról* beszélünk.

Megjegyzés. Az előző példában az a)-beli reprezentáció reducibilis, míg a b)-beli irreducibilis.

Definíció. Legyen φ egy karaktere G-nek. Azt mondjuk, hogy φ *irreducibilis karaktere G-nek,* röviden $\varphi \in \operatorname{Irr}(G)$, ha a φ-hez tartozó reprezentáció irreducibilis.

Elnevezés. Legyen $\varrho: G \to GL(n, \mathbf{C})$ az a reprezentáció, amelyre $\varrho(g) = 1$ minden $g \in G$ esetén. Ennek a lineáris reprezentációnak a karakterét G *főkarakterének* nevezzük és 1_G*-vel jelöljük.*

Definíció. Legyen $\varrho_1, \varrho_2: G \to GL(n, \mathbf{C})$ G-nek két reprezentációja. Azt mondjuk, hogy ϱ_1 *ekvivalens* ϱ_2*-vel,* ha létezik a komplex n-dimenziós térnek egy olyan M lineáris transzformációja, amelyre $M^{-1}\varrho_1(g)M = \varrho_2(g)$ minden $g \in G$ esetén.

A következő tétel azt mutatja, hogy a reprezentáció karaktere elég sok információt tartalmaz a reprezentációról.

Tétel. *Legyen* $\varrho_1, \varrho_2: G \to GL(n, \mathbf{C})$ *két reprezentáció és* φ_1, *illetve* φ_2 *a megfelelő karakterek.* ϱ_1 *pontosan akkor ekvivalens* ϱ_2*-vel, ha* $\varphi_1 = \varphi_2$.

Az irreducibilis karakterek számáról szól a következő

Tétel. $|\mathrm{Irr}\,(G)| < \infty$, *sőt* $|\mathrm{Irr}\,(G)|$ *megegyezik a G-beli konjugált osztályok számával.*

Megemlítünk két karakterelméleti eredményt, amelyek egy csoport irreducibilis reprezentációinak dimenzióival kapcsolatosak.

Tétel. *Egy G csoport irreducibilis karakterfokainak négyzetösszege megegyezik az illető csoport rendjével.*

Tétel (N. Ito). *Legyen G csoport, A Abel-féle normálosztó G-ben. Ekkor G minden irreducibilis karakterfoka osztja* $|G:A|$*-t.*

Definíció. Legyen φ a G csoportnak egy karaktere. Legyen $\varrho\colon G \to GL(n, \mathbf{C})$ a φ-hez tartozó reprezentáció. Ennek a homomorfizmusnak a magját $\mathrm{Ker}\,\varphi$-vel jelöljük és a φ *karakter magjának* nevezzük. Ha $\mathrm{Ker}\,\varphi = 1$, akkor *hű reprezentációról* beszélünk.

Példa. Legyen V egy $|G|$ dimenziós vektortér a komplex számtest felett. Indexeljük V-nek egy bázisát G elemeivel. Definiáljuk G-nek egy ϱ $|G|$-dimenziós reprezentációját a következőképpen $v_{g_i}\varrho(g) = v_{g_i g}$. Ezt a reprezentációt G *reguláris reprezentációjának* nevezzük. Könnyen látható, hogy ϱ hű és a hozzá tartozó karakter: $\varphi_\varrho(g) = \begin{cases} |G|, & \text{ha } g = 1; \\ 0, & \text{ha } g \neq 1. \end{cases}$

Megjegyzés. Könnyen látható, hogy $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = \varphi(1)\}$ és így, ha $\varphi = \sum m_i \varphi_i$, akkor $\mathrm{Ker}\,\varphi = \bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi_i$. Mivel a reguláris reprezentáció hű, ezért G minden eleméhez található olyan irreducibilis reprezentáció, amely az illető elemet nem tartalmazza a magjában, azaz $\bigcap \{\mathrm{Ker}\,\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Irr}\,(G)\} = 1$.

Ha ismert egy részcsoport valamely karaktere, akkor ezt általában nem tudjuk olyan függvénnyé kiterjeszteni, amely az egész csoportnak karaktere volna. Lehet viszont definiálni a karakter indukáltját, amely szintén karakter.

Definíció. Legyen $H \leqq G$, $\varphi \in \mathrm{Irr}\,(H)$. Legyen

$$\varphi^0(y) = \begin{cases} \varphi(y) & \text{ha } y \in H \\ 0 & \text{ha } y \in G \setminus H. \end{cases}$$

Ha $x \in G$, $\varphi^G(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \varphi^0(gxg^{-1})$. Ekkor $\varphi^G\colon G \to \mathbf{C}$ is karakter (nem feltétlenül irreducibilis), amelyet φ *indukáltjának* hívunk.

Definíció. Egy $\alpha\colon G \to \mathbf{C}$ függvényt *osztályfüggvénynek* nevezünk, ha G konjugált osztályain konstans.

Példa. Könnyen látható, hogy minden karakter osztályfüggvény.

Definíció. Legyen $N \lhd G$, $\chi \in \mathrm{Irr}\,(N)$. Legyen $g \in G \setminus N$ és definiáljuk a $\chi^g\colon N \to \mathbf{C}$ függvényt a következőképpen: $\chi^g(n) = \chi(gng^{-1})$. Ekkor $\chi^g \in \mathrm{Irr}\,(N)$. Ezt a karaktert a χ *karakter g-vel való konjugáltjának* nevezzük.

Definíció. Legyen $N \lhd G$, $\vartheta \in \mathrm{Irr}\,(N)$. Az $I_G(\vartheta) = \{g \in G \mid \vartheta^g = \vartheta\}$ csoportot a ϑ karakter G-beli *inercia-részcsoportjának* vagy *stabilizátor-részcsoportjának* nevezzük.

Definíció. Legyen $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $H \leqq G$. Jelölje χ_H a χ függvénynek a H-ra való megszorítását. Ekkor χ_H (nem felt. irred.) karaktere H-nak, melyet a χ *karakter H-ra való megszorításának nevezünk.*

Ha $N \lhd G$, akkor $\mathrm{Irr}(N)$ és $\mathrm{Irr}(G)$ között a következő összefüggés áll fenn:

Tétel (Clifford). *Legyen* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. *Ekkor található olyan e természetes szám, hogy* $\chi|_N = e \sum_{i=1}^{t} \vartheta_i$, *ahol* $\vartheta_i \in \mathrm{Irr}(N)$ *és a* ϑ_i*-k egymással konjugált karakterek, valamint* $t = |G : I_G(\vartheta_1)|$. $\left(\text{Egyébként } e = \frac{\chi(1)}{t\vartheta_1(1)}\right)$. *Ezenkívül* χ $I_G(\vartheta_1)$ *egy irreducibilis karakteréből indukálható.*

Könnyen látható, hogy a G csoporton értelmezett osztályfüggvények vektorteret alkotnak a komplex számtest felett. Ez a vektortér alkalmas skaláris szorzat bevezetésével euklideszi térré tehető:

Definíció. Legyenek $\alpha_1, \alpha_2 : G \to \mathbf{C}$ osztályfüggvények. Definiáljuk α_1 és α_2 skaláris szorzatát a következőképpen:

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha_1(g)\,\overline{\alpha_2(g)}.$$

Az így kapott euklideszi térnek egy bázisát is megadjuk:

Tétel. *A G-n értelmezett osztályfüggvények terében* $\mathrm{Irr}(G)$ *ortonormált bázist alkot.*

Definíció. Legyen χ G-nek egy tetszőleges karaktere, $\varphi \in \mathrm{Irr}(G)$. Azt mondjuk, hogy φ *alkotója* χ-nek, ha $(\varphi, \chi) \neq 0$.

Megjegyzés. A reguláris reprezentáció karaktere a csoport minden irreducibilis karakterét tartalmazza alkotóként, sőt

$$\varphi_e = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\,\chi.$$

Karakterek megszorítása és indukálása nem irreducibilis karakterekre is hasonlóan értelmezhető. Könnyen látható, hogy mindkét leképezés lineáris. A két leképezés közötti kapcsolatról szól a *Frobenius reciprocitási tétel:*

Tétel. *Legyen* χ *karaktere G-nek,* $H \leqq G$, φ *karaktere H-nak. Ekkor* $(\chi_H, \varphi) = (\chi, \varphi^G)$.

Megjegyzés és köszönetnyilvánítás. A cikk második fejezetében szereplő eredmények többségét a szerző „Véges csoportok karaktereiről" című doktori disszertációjának IV. és VI. fejezete tartalmazza. Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Corrádi Keresztély tanár úrnak az érdekes problémáért és a rendszeres konzultációs lehetőségekért. Köszönet illeti meg Pálfy Pétert és Babai Lászlót is, akik a cikk korábbi verzióját olvasva sok hasznos tanáccsal és megjegyzéssel járultak hozzá a végleges változat kialakításához.

IRODALOM

[1] BERGER, T. R.: Characters and derived length in groups of odd order, *Journal of Algebra* **39** (1976), 199—207.
[2] CORRÁDI, K.: On certain properties of centralizers hereditary to the factor group, *Publ. Math. Debrecen* **37** (1990), 203—206.
[3] GAGEN, T. M.: *Topics in finite groups*, London Math. Soc. Lecture Note Series **16,** Cambridge Univ. Press, 1976.
[4] GALLAGHER, P. X.: Group characters and normal Hall subgroups, *Nagoya Math. J.* **21** (1962), 223—230.
[5] GARRISON, S. C.: On groups with small number of character degrees, Ph. D. Thesis, Univ. of Wisconsin, Madison, 1973.
[6] GLUCK, D.: Bounding the number of character degrees of a solvable group, *J. London Math. Soc. (2)* **31** (1985), 457—462.
[7] GORENSTEIN, D.: *Finite groups,* Chelsea Publ. Co., New York, 1980.
[8] HORVÁTH E.: Véges csoportok karaktereiről, Egyetemi doktori disszertáció, 1987.
[9] HUPPERT, B.: *Endliche Gruppen, I,* Springer-Verlag, Berlin, 1967.
[10] ISAACS, I. M.: *Character theory of finite groups,* Acad. Press, New York, 1976.
[11] PASSMAN, D. S.: *Permutation groups,* Mathematics Lecture Note Series, Benjamin, New York, 1968.
[12] SEITZ, G. M.: *M*-groups and the supersolvable residual, *Math. Zeitschrift* **110** (1969), 101—122.

(Beérkezett: 1987. május 7-én)

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Э. ХОРВАТ

Мы изучаем проблему конечных разрешимых групп: $\text{d.l.}(G) \leqq |\text{c.d.}(G)|$ (где $\text{d.l.}(G)$ обозначает ступень разрешимости группы G, а $\text{c.d.}(G)$ является множеством различных размерностей неприводимых комплексных представлений группы G) когда G является группой Фробениуса. Доказивается что это условие выполняется в группе G тогда и только тогда если оно выполняется в комплементе Фробениуса группы G. Подобное утверждение верно и для мономиальных групп Фробениуса, откуда вытекает что если одна мономиальная группа индуцирует автоморфизмы без неподвижных пунктов на другой мономиальной группе, тогда их полупрямое произведение является мономиальной группой. Мы даём одно другое достаточное условие чтобы расширение мономиальной группы с мономиальной группой было мономиальном, а именно верно что: расщепляемое расширение абелевой группы с группой где каждая подгруппа является мономиальной, и само мономиально.

ON A PROBLEM OF FINITE SOLVABLE GROUPS

E. HORVÁTH

The author investigates the derived length conjecture of finite solvable groups: $\text{d.l.}(G) \leqq |\text{c.d.}(G)|$ in a special case when G is a Frobenius group. It is proved that the derived length conjecture is true for G if and only if it is true for the Frobenius complement of G. A similar statement is proved concerning Frobenius M-groups as well, giving that a fixed-point-free extension of an M-group with an M-group yields an M-group. Another sufficient condition is given for the fact that the extension of an M-group with an M-group should yield M-group, namely: the split extension of an abelian group with an M-group all of whose subgroups are M-groups yields an M-group.

ROTKIEWICZ EGY PROBLÉMÁJÁNAK ÁLTALÁNOSÍTOTT MEGOLDÁSA

BUI MINH PHONG*

1972-ben Rotkiewicz a [10] könyvében problémaként felvetette a következő kérdést: Adott $a, k \geqq 2$ egészek esetén létezik-e végtelen sok olyan összetett n szám, amely kielégíti az

$$a^{n-k} \equiv 1 \pmod{n} \tag{1}$$

kongruenciát? (Lásd [10], 18. probléma, 138. old.)

Mint jól ismert, hogy ha $a \geqq 2$ adott egész szám és $k=1$, akkor az (1) kongruencia végtelen sok összetett n számra teljesül, s az ilyen tulajdonságú összetett számokat a vonatkozású pszeudoprímeknek nevezzük. A fent felvetett problémával kapcsolatban Mąkowski [7] bebizonyította, hogy adott $k \geqq 2$ egész számhoz végtelen sok olyan összetett n szám található, amelyre tetszőleges $(a, n)=1$ feltételt kielégítő a szám esetén az (1) kongruencia teljesül. Ezt az eredményt a $k=3$ esetben Morrow [9] nyerte. Mąkowski bizonyításában megmutatta, hogy végtelen sok $n=k \cdot p$ alakú szám található, ahol p egy prímszám, mely kielégíti az (1) kongruenciát, ha $(n, a)=1$. Nyilvánvaló, hogy ezekre az n egészekre teljesül a $(k, a)=1$ feltétel, s így a fent felvetett probléma nyitott maradt, ha $a, k \geqq 2$ adott egészek és $(a, k)>1$. Ha $(a, k)>1$, akkor Rotkiewicz két esetre adott pozitív választ, mégpedig, ha $a \geqq 2$ tetszőlegesen adott és $k=3$; illetve $a=k=2$ (lásd [10], Theorem 32, 129. old.; illetve [13]).

Rotkiewicz fent felvetett problémáját Kiss Péterrel teljes mértékben megoldottuk az [5] cikkben, pontosabban bebizonyítottuk a következőt.

1. Tétel. *Legyenek $a \geqq 2$ és $k \geqq 1$ adott egészek. Ekkor végtelen sok összetett n pozitív egész létezik, mely kielégíti az*

$$a^{n-k} \equiv 1 \pmod{n}$$

kongruenciát.

A pszeudoprím számok problémái visszavezethetők másodrendű rekurzív sorozatokkal kapcsolatos problémákra is, így a másodrendű rekurzív sorozatokkal kapcsolatos eredmények jól használhatók a pszeudoprím számok vizsgálatához. A másodrendű rekurzív sorozatok körében a Lehmer-sorozatok bizonyos értelemben a legáltalánosabbak. Legyen L, M két nem-zérus egész szám, amelyre $K=L-4M \neq 0$. Definiáljuk az $U=U(L, M)=\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ Lehmer-sorozatot az L, M paraméterekkel,

* A kutatást részben az Országos Tudományos Kutatási Alap 907. sz. pályázata támogatta.

az $U_0=0$, $U_1=1$ kezdőelemekkel és az

$$U_n=\begin{cases}LU_{n-1}-MU_{n-2}, & \text{ha } 2\nmid n\\ U_{n-1}-MU_{n-2}, & \text{ha } 2\mid n\end{cases}$$

rekurzív formulával. Az $U(L, M)$ sorozatot nem degeneráltnak nevezzük, ha $(L, M)=1$ és $n>0$ esetén $U_n\neq 0$.

A. Rotkiewicz [11] a közönséges pszeudoprímek mintájára bevezette a Lehmer-pszeudoprím számok fogalmát. Mint jól ismert, ha n prímszám és $(n, 2LMK)=1$, akkor érvényes az

$$U_{n-(LK/n)}\equiv 0 \pmod n$$

kongruencia, ahol $(\cdot/n)$ a Jacobi-szimbólum. Ha n összetett és $(n, 2LMK)=1$, de a fenti kongruencia teljesül, akkor az n számot Lehmer-pszeudoprímnek nevezzük az $U(L, M)$ sorozat vonatkozásában. Ismert, hogy ha $U(L, M)$ egy nem degenerált Lehmer-sorozat, akkor végtelen sok Lehmer-pszeudoprím szám létezik az $U(L, M)$ sorozat vonatkozásában. A Lehmer-pszeudoprím számokkal kapcsolatos néhány eredmény megtalálható a Rotkiewicz [11, 12] és a szerző [3, 4] cikkeiben.

A. Rotkiewicz problémájához hasonló kérdés merül fel: Adott $k\geqq 2$ egész szám és $U=U(L, M)$ Lehmer-sorozat esetén létezik-e végtelen sok olyan összetett n egész, amely kielégíti az

$$U_{n-k(LK/n)}\equiv 0 \pmod n, \tag{2}$$

illetve az

$$U_{n-k}\equiv 0 \pmod n \tag{3}$$

kongruenciát. Nyilvánvaló, hogy ez a kérdés sokkal általánosabb, mint Rotkiewicz eredeti problémája. Speciális esetben, amikor $U=F$, vagyis U a Fibonacci-sorozat, és $k=2$, a (3) kongruenciára vonatkozó fent felvetett probléma megoldása eddig még nem volt ismeretes (lásd Rotkiewicz [14], 5. probléma, 254. old.).

A következőkben megmutatjuk, hogy adott $U=U(L, M)$ sorozat esetén található olyan $k_0=k_0(U)$ pozitív szám, amelyre minden $k\geqq k_0$ egész szám esetén végtelen sok összetett n egész elégíti ki a (2) kongruenciát. Továbbá, ha $(k, M)=1$, akkor a fentiekben felvetett kérdésre a (3) kongruencia esetén is pozitív választ adhatunk. Az a^n-b^n speciális esetben, ahol a, b adott egészek, k_0 értékét 4-nek választhatjuk.

Bizonyítjuk a következőket.

2. Tétel. *Legyenek a és b adott pozitív egész számok. Ekkor minden $k\geqq 4$ esetén végtelen sok összetett n szám található, amely kielégíti az*

$$a^{n-k}\equiv b^{n-k} \pmod n \tag{4}$$

kongruenciát. Továbbá, ha a, b, k adott egészek és

$$(a, b, k)\neq (c+1, c, 2);\quad (c+3, c, 2)\quad (c=2, 3, \ldots);$$

illetve

$$(a, b, k)\neq (2^s+1, 2^s-1, 3)\quad (s=2, 3, \ldots),$$

$$(a, b, k)\neq (5\cdot 2^t+1, 5\cdot 2^t-1, 3)\quad (t=0, 1, 2, \ldots),$$

akkor a (4) *kongruenciának végtelen sok összetett n megoldása van* $k=2$, *illetve* $k=3$ *esetében is.*

3. Tétel. *Legyen* $U=U(L, M)$ *egy nem degenerált Lehmer-sorozat. Ekkor létezik egy* $k_0=k_0(U)$ *szám úgy, hogy minden* $k\geqq k_0$ *esetén végtelen sok összetett n található, amelyre a* (2) *kongruencia teljesül. Továbbá, ha* $k\geqq 2$ *és* $(k, M)=1$, *akkor a* (3) *kongruenciának végtelen sok összetett n megoldása van.*

A tételek bizonyításához szükségünk lesz a következő néhány ismert eredményre és segédtételre.

Legyen $U=U(L, M)$ egy nem degenerált Lehmer-sorozat. Jól ismert, hogy ha n egy pozitív egész szám, amelyre $(n, M)=1$, akkor az U sorozat tagjai között találhatók n-nel osztható tagok. Jelöljük $u(n)$-nel azt a legkisebb pozitív u egész számot, amelyre $n|U_u$. Továbbá egy p prímszámot az U_n primitív prímosztójának nevezzük, ha $p|U_n$, de $p\nmid LMKU_1 \ldots U_{n-1}$. Érvényesek a következők:

I. Tétel ([15], [16], [17]). *Minden nem degenerált* $U(L, M)$ *Lehmer-sorozat esetén létezik egy abszolút konstans* n_0 *szám úgy, hogy minden* $n>n_0$ *egész szám esetén* U_n*-nek van legalább egy primitív prímosztója.*

II. Tétel ([6]). (i) *Ha p prímszám és* $p\nmid M$, *akkor*

$$u(p)|p-(LK/p).$$

(ii) *Ha n, m pozitív egész számok és* $(nm, M)=1$, *akkor*

$$u([n, m]) = [u(n), u(m)].$$

1. Lemma. *Legyen* $U=U(L, M)$ *egy nem degenerált Lehmer-sorozat és* $k\geqq 2$ *egy adott egész szám. Ha* $(k, M)=1$, *akkor végtelen sok összetett n egész található, melyre az*

$$U_{n-k} \equiv 0 \pmod{n} \tag{5}$$

kongruencia teljesül.

Bizonyítás. Legyen

$$k = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$$

a $k\geqq 2$ egész szám kanonikus alakja. Ekkor Dirichlet tétele alapján végtelen sok

$$p = 8LKT(k)x+1 \tag{6}$$

alakú prímszám található, ahol

$$T(k) = 2 \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i-1}(p_i-(LK/p_i))$$

és (LK/p_i) páratlan p_i prímre a Legendre-szimbólum vagy 0 aszerint, hogy p_i nem osztója vagy osztója LK-nak; $(LK/2)$ értéke pedig 0, -1 vagy -2 aszerint, hogy $L\equiv 0$, $L\equiv \pm 1$ vagy $L\equiv 2 \pmod 4$. Könnyen belátható, hogy ezen p prímekre $(LK/p)=1$ teljesül.

Legyen p egy tetszőleges, (6) alakú prímszám, amelyre $p>\max(k, |LMK|)$. Ekkor a II. Tétel alapján

$$u(p)|p-(LK/p) = p-1 \tag{7}$$

adódik. Másrészt $(k, M)=1$ miatt Lehmer [6] 1.12. Tétele szerint

$$u(k)|T(k),$$

vagyis

$$u(k)|p-1. \tag{8}$$

Így $p>k$ miatt, (7) és (8) felhasználásával,

$$u(pk) = [u(p), u(k)]|p-1,$$

amiből

$$u(pk)|pk-k = k(p-1)$$

következik. Így $n=p\cdot k$ választás mellett $n|U_{u(n)}$ és $u(n)|n-k$ miatt $n|U_{n-k}$ adódik. Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

Következmény. *Legyenek a, b és k pozitív egész számok $a\neq b$ feltétellel. Ha $(k, ab)=1$, akkor végtelen sok összetett n számra teljesül az*

$$a^{n-k} \equiv b^{n-k} \pmod{n}$$

kongruencia.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1. Lemmát az $U=U((a+b)^2, ab)$ sorozatra, ekkor az állítás adódik, mert

$$U_m((a+b)^2, ab)\big|a^m-b^m.$$

2. Lemma. *Legyen*

$$\Phi_n(x, y) = \prod_{d|n} (x^d-y^d)^{\mu(n/d)} \tag{9}$$

az n-edik körosztási polinom, ahol μ a Möebius-függvény. Továbbá legyenek α, β az $x^2-\sqrt{L}\,x+M$ polinom gyökei, ahol $L>0$, $M\neq 0$ adott egészek és α/β nem egységgyök. Ekkor létezik egy $k_1(U)=k_1$ effektív kiszámítható konstans úgy, hogy minden $n\geqq k_1$ egész szám esetén

$$|\Phi_n(\alpha, \beta)| > n\cdot(2n+1) \tag{10}$$

teljesül. Ha $\alpha=a$, $\beta=b$ egész számok és $a>b\geqq 1$, akkor (10) *érvényes minden $n>30$ egész számra.*

Bizonyítás.

Először legyen $K=L-4M>0$. Ekkor Ward [17] egy eredménye szerint (lásd [17], (4.1))

$$|\Phi_n(\alpha, \beta)| \gg 2^{\varphi(n)/2}. \tag{11}$$

De jól ismert, hogy

$$\varphi(n) > n^{2/3}, \tag{12}$$

ha $n>30$ (lásd pl. [8], 38. old.). Így $K>0$ esetén (11) és (12) alapján számítógéppel könnyen kimutatható, hogy

$$|\Phi_n(\alpha, \beta)| > n(2n+1),$$

ha $n>182$.

Az $L>0$, $K<0$ esetben Baker [1] egy eredményét alkalmazva, Schinzel [15] megmutatta, hogy létezik egy c effektíve kiszámítható konstans úgy, hogy minden $n>c$ egész szám esetén

$$|\Phi_n(\alpha, \beta)| > n|\alpha|^{11\varphi(n)/13}. \tag{13}$$

Mivel $K<0$, ezért $|\alpha|=\sqrt{M}\geqq\sqrt{2}$. Így $n>c$ esetén (13) miatt

$$|\Phi_n(\alpha, \beta)| > n2^{11\varphi(n)/26}$$

amiből, (12) felhasználásával,

$$|\Phi_n(\alpha, \beta)| > n\,2^{11n^{2/3}/26} > n(2n+1),$$

következik, ha $n>\max(c, 70)$. Tehát $k_1=\max(c, 182)$ választás mellett (10) igaz.

Most legyenek $\alpha=a$, $\beta=b$ és $a>b\geqq 1$. Birkhoff és Vandiver [2] bizonyította, hogy

$$|\Phi_n(a, b)| > a^{\varphi(n)-2^{\nu(n)-1}}, \tag{14}$$

ahol $\nu(n)$ az n egész szám prímosztói száma. Másrészt könnyen belátható, hogy

$$\frac{1}{3}\varphi(n) \geqq 2^{\nu(n)-1},$$

s így (12) és (14) alapján

$$|\Phi_n(a, b)| > a^{2n^{2/3}/3},$$

ha $n>30$. De

$$a^{2n^{2/3}/3} > n(2n+1),$$

ha $n\geqq 99$ és $a=2$; valamint, ha $n\geqq 35$ és $a\geqq 3$. Ha $a\geqq 3$, akkor a (10) egyenlőtlenséget csak $n=31, 32, 33$ és 34 esetekre kell bizonyítani, ami direkt módon könnyen ellenőrizhető. Tehát a (10) bizonyításához csak $a=2$, $b=1$ és $30<n<99$ eseteket kell megvizsgálni.

Ha $n>30$ és $\nu(n)=1$, akkor világos, hogy

$$\Phi_n(2, 1) > 2^{n/2} > n(2n+1).$$

Ha $n>30$ és $\nu(n)=2$, akkor $\varphi(n)\geqq n\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{n}{3}$ és (14) miatt

$$\Phi_n(2, 1) > 2^{(n/3)-2} > n(2n+1)$$

teljesül, ha $n\geqq 42$. A $30<n<42$ és $\nu(n)=2$ feltételnek eleget tevő értékekre a (10) egyenlőtlenséget direkt módon be lehet látni.

Ha $\nu(n)=3$, akkor $\varphi(n)\geqq n\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}n$ miatt

$$\Phi_n(2, 1) > 2^{(4/15)n-4} > n(2n+1),$$

ha $n\geqq 64$. De $30<n<64$ és $\nu(n)=3$ feltételeket csak $n=42=2\cdot 3\cdot 7$ és $n=60=2^2\cdot 3\cdot 5$ számok elégítik ki, amiből

$$\Phi_{42}(2, 1) > 42\cdot(2\cdot 42+1) \quad \text{és} \quad \Phi_{60}(2, 1) > 60\cdot(2\cdot 60+1)$$

miatt a lemma már következik, mert $\nu(n)\geqq 4$ esetén $n>99$.

3. Lemma. *Legyen* $U=U(L, M)$ *egy nem degenerált Lehmer-sorozat és* N_0 *olyan szám, amelyre minden* $n>N_0$ *esetén van* p *prímszám* $u(p)=n$ *feltétellel. Legyen továbbá* $k\geqq 1$ *egy adott egész szám. Ha létezik egy* m *pozitív egész szám*

$$u(m)|m-k(LK/m),\quad u(m)<m-k(LK/m)\quad \text{és}\quad m-k(LK/m)>N_0 \tag{15}$$

feltételekkel, akkor végtelen sok olyan összetett n *szám található, melyre* $u(n)|n-k(LK/n)$.

Bizonyítás. Legyen m egy pozitív egész szám, amelyre (15) teljesül. Ekkor van egy p prímszám $u(p)=m-k(LK/m)$ feltétellel. Mivel

$$u(p)|p-(LK/p),$$

ezért

$$m-k(LK/m)|p-(LK/p).$$

De $u(m)<m-k(LK/m)$ miatt $p\nmid m$, így

$$u(pm)=[u(p), u(m)]=m-k(LK/m),$$

amiből

$$u(pm)|pm-k(LK/pm)$$

következik, mert

$$pm-k(LK/pm)=p[m-k(LK/m)]+k(LK/m)[p-(LK/p)].$$

Tehát $n=pm$ számra $u(n)|n-k(LK/n)$ és könnyen belátható, hogy

$$u(n)<n-k(LK/n)\quad \text{és}\quad n-k(LK/n)>N_0.$$

Így $n=pm$ újra kielégíti a lemma feltételeit, amiből következik, hogy végtelen sok összetett n számra teljesül $u(n)|n-k(LK/n)$, ami bizonyítja a lemma állítását.

Az 1. és a 2. Tételek bizonyításához szükségünk lesz még a következő definícióra és segédtételre.

Ha a, b egész számok $a>b\geqq 1$ és $(a, b)=1$ feltételekkel, akkor minden $n\geqq 0$ egész szám esetén legyen $E=\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ egy végtelen sorozat, ahol

$$E_n=a^n-b^n.$$

Az E sorozatra vonatkozó előfordulási rendet $e(.)$ jelölje, pontosabban, ha $(m, ab)=1$, akkor $e(m)$ az a legkisebb e pozitív egész szám, amelyre $m|E_e$.

Igaz a következő állítás:

4. Lemma. *Legyenek* a, b *és* k *egész számok* $a>b\geqq 1$, $(a, b)=1$ *és* $k\geqq 1$ *feltételekkel. Ha létezik egy* m *egész szám úgy, hogy*

$$(m, ab)=1,\quad e(m)|m-k,\quad e(m)<m-k\quad \text{és}\quad m-k\geqq 2,$$

akkor végtelen sok összetett n *egész található, melyre* $e(n)|n-k$, *vagyis* $n|a^{n-k}-b^{n-k}$.

Bizonyítás. Birkhoff és Vandiver [2], valamint Zsigmondy [18] eredménye szerint minden $n\geqq 2$ egész szám esetén található olyan p prímszám, melyre $e(p)=n$, kivéve azt az esetet, amikor $(a, b, n)=(2, 1, 6)$ vagy $n=2$ és $a+b$ kettő hatványa.

Tegyük fel, hogy van olyan m, melyre $e(m)|m-k$, $e(m)<m-k$ és $m-k\geqq 2$. Megmutatjuk, hogy az ilyen m mellett található egy n egész szám, melyre $e(n)|n-k$, $e(n)<n-k$, $n-k\geqq 2$ és $m<n$, amiből az állítás következik.

Legyen először $m-k=2$ és $a+b=2^s$ $(s\geqq 1)$. Ekkor a feltételek alapján $e(m)=1$, vagyis $m|a-b$, ahol $a+b=2^s$ miatt $a-b$ is páros szám. Ha $m<a-b$, akkor az $m'=a-b$ számra $e(m')=1$, $e(m')|m'-k$ és $m'-k>2$. Tehát feltehető, hogy $m=a-b$. Ekkor $m-k=2$ miatt k páros, tehát $n=a^2-b^2=m\cdot 2^s$ számra $(ab, n)=1$, $e(n)=2|n-k$, $e(n)=2<n-k$ és $n-k\geqq 2$, amit bizonyítani akartunk.

Ha $(a, b, m-k)=(2, 1, 6)$, akkor $e(m)|6$ miatt $m=7$ következik, mert $m-k=6$ és $e(m)<6$. Így $k=1$ adódik. Ebben az esetben az állításunk igaz, mert végtelen sok pszeudoprím létezik.

Ezek után feltehető, hogy $(a, b, m-k)\neq(2, 1, 6)$ és $(a+b, m-k)\neq(2^s, 2)$. Ekkor a fent említett eredmény értelmében van p prímszám $e(p)=m-k$ feltétellel. Könnyen belátható, hogy az $n=mp$ számra $(n, ab)=1$, $e(n)|n-k$, $e(n)<n-k$ és $n-k\geqq 2$. Ezzel a lemmát bizonyítottuk.

Az 1. Tétel bizonyítása. Az 1. Tételt [5]-ben már bizonyítottuk, de a teljesség kedvéért itt közöljük a tétel egy módosított bizonyítását.

Legyen $a\geqq 2$ és $k\geqq 1$ két adott egész szám. Bizonyítani fogjuk, hogy végtelen sok összetett n szám található, melyre

$$n|a^{n-k}-1=E_{n-k}.$$

Ehhez a 4. Lemma alapján elég megmutatni, hogy van olyan m egész szám, melyre

$$(m, a)=1, \quad e(m)|m-k, \quad e(m)<m-k \quad \text{és} \quad m-k\geqq 2. \tag{16}$$

Mivel végtelen sok a vonatkozású pszeudoprím szám létezik, ezért az 1. Lemma következménye, valamint Rotkiewicz fentebb említett eredményei alapján feltehető, hogy

$$(k, a)>1, \tag{17}$$

$$k\geqq 2, \quad k\neq 3 \tag{18}$$

és

$$a=2c\geqq 4, \quad \text{ha} \quad k=2, \tag{19}$$

ahol c egy egész szám.

Először legyen $k=2$, s így (19) miatt $a=2c\geqq 4$. Ha $a=4$, akkor $m=7\cdot 11=77$ kielégíti a (16)-ot, mert $e(7)=3$, $e(11)=5$, $e(77)=15$, $m-k=75$. Ha pedig $a>4$, akkor az $m=a-1$ számra (16) teljesül, mert $e(m)=1$.

Legyen most $k\geqq 4$. Ekkor $k-1>2$ és (17) miatt $k-1\neq 6$, ha $a=2$. Tehát van olyan p prímszám, melyre $e(p)=k-1$. Másrészt Fermat kongruencia-tétele szerint $e(p)|p-1$, ezért $e(p)|p-k$, mert $p-k=p-1-(k-1)$, ezenkívül (17) miatt $p-k\neq 0$, $p-k\geqq e(p)=k-1\geqq 3$. Így az $m=p$ számra (16) teljesül, ha $e(p)=k-1\neq p-k$. Ha $e(p)=k-1=p-k$ és $e(p)=e(p^2)$, akkor az $m=p^2$ számra (16) fennáll, mert $e(p^2)|p^2-k$ és $e(p^2)=p-k<p^2-k$.

Ezek után tegyük fel, hogy

$$e(p)=k-1=p-k \quad \text{és} \quad e(p)\neq e(p^2). \tag{20}$$

Legyen $P(n)$ az n pozitív egész szám legnagyobb prímosztója. A 2. Lemma alapján bizonyítható, hogy ha p prímszámra $e(p)=(p-1)/2$ fennáll, akkor

$$\Phi_{(p-1)/2}(a, 1)>p\cdot P\left(\frac{p-1}{2}\right) \tag{21}$$

kivéve a következő eseteket: $(p, a)=(3, 4)$; $(5, 4)$; $(5, 9)$; $(7, 2)$; $(7, 4)$; $(13, 4)$; $(17, 2)$; $(41, 2)$. Ugyanis a 2. Lemma szerint (21) igaz minden $p>61$ prímszám esetén, továbbá $p\leqq 61$ prímszámokra pedig (9) képlet alapján direkt módon ellenőrizhető. A mi esetünkben $k\geqq 4$, (17) és (20) miatt $e(p)=\frac{p-1}{2}=k-1$, s így (21) igaz, kivéve $(k, a)=(4, 2)$, $(4, 4)$ eseteket. Egy TPA 11—40 számítógép segítségével kiszámoltuk, hogy a $(k, a)=(4, 2)$ esetben $m=7\cdot 73\cdot 79=40\,369$ és a $(k, a)=$ $=(4, 4)$ esetben pedig $m=19\cdot 31=589$ kielégíti a (16) feltételt.

Végül tegyük fel, hogy (20) és (21) fennállnak. Ekkor Birkhoff és Vandiver [2], valamint Zsigmondy [18] eredményei alapján van olyan q prímszám, melyre $q\neq p$ és $e(q)=\frac{p-1}{2}=k-1$. Nyilvánvaló, hogy erre a q prímszámra (16) teljesül, mert

$$e(q)|q-k=(q-1)-(k-1)$$

és $q\neq p$ miatt $e(q)<q-k$.

Tehát az 1. Tételt bebizonyítottuk.

A következő táblában néhány adott (k, a) párok esetére megadtuk azt a legkisebb összetett n számot, melyre $n|a^{n-k}-1$.

	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$a=2$	$20\,737=$ $=89\cdot 233$	$9=3^2$	$40\,369=$ $=7\cdot 73\cdot 79$	$25=5^2$	$18\,631=$ $=31\cdot 601$
$a=3$	$4=2^2$	$9299=$ $=17\cdot 547$	$8=2^3$	$25=5^2$	$8=2^3$
$a=4$	$77=7\cdot 11$	$9=3^2$	$589=19\cdot 31$	$15=3\cdot 5$	$9=3^2$
$a=5$	$4=2^2$	$9=3^2$	$6=2\cdot 3$	$62=2\cdot 31$	$8=2^3$

A 2. Tétel bizonyítása.

Legyenek a, b és k adott egész számok, amelyekre $a>b\geqq 1$ és $k\geqq 2$, ezenkívül a $k=2, 3$ esetekre a tételben felsorolt feltételek teljesülnek. Bizonyítani fogjuk, hogy végtelen sok olyan összetett n szám létezik, melyre

$$n|a^{n-k}-b^{n-k}=E_{n-k}.$$

Ehhez az 1. Lemma következménye és az 1. Tétel alapján feltehető, hogy

$$(k, ab)>1 \tag{22}$$

és

$$a>b\geqq 2,\quad (a, b)=1. \tag{23}$$

Továbbá elég megkeresni egy olyan m számot, amelyre

$$(ab, m)=1\quad e(m)|m-k,\quad e(m)<m-k\quad \text{és}\quad m-k\geqq 2 \tag{24}$$

fennállnak.

Először legyen $k\geqq 4$. Ekkor $k-1\geqq 3$ és $b\geqq 2$ miatt van egy p prímszám $e(p)=k-1$ feltétellel (lásd [2], [18]). Az 1. Tétel bizonyításához hasonlóan követ-

kezik, hogy ha $e(p)=k-1\neq p-k$, illetve, ha $e(p)=k-1=p-k=e(p^2)$, akkor $m=p$, illetve $m=p^2$ kielégítik a (24) feltételt.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a (22) és (23) feltételek mellett

$$k \geqq 4, \quad e(p) = k-1 = p-k \quad \text{és} \quad e(p) \neq e(p^2). \tag{25}$$

A 2. Lemma alapján

$$\Phi_{(p-1)/2}(a, b) > p \cdot P\left(\frac{p-1}{2}\right), \tag{26}$$

ha $p>61$. De ha a, b, k egészekre és $p\leqq 61$ prímszámra teljesül (21), (23) és (25), akkor a (9) képlet szerint direkt módon kiszámítható és ellenőrizhető, hogy (26) érvényben marad, kivéve az

$$(a, b, p) = (7, 2, 13); \quad (7, 5, 13),$$

vagyis

$$(a, b, k) = (7, 2, 7); \quad (7, 5, 7)$$

eseteket. Ugyanis, ha $13<p\leqq 61$, akkor $a>b\geqq 2$ feltétel és (9) alapján könnyen belátható, hogy (26) igaz. Ha pedig $p=13$, akkor $(p-1)/2=6$, $k=7$, s így

$$\Phi_6(a, b) = \frac{a^3+b^3}{a+b} = (a-b)^2+ab > \frac{a^2}{2},$$

vagyis $\Phi_6(a, b)>p \cdot P\left(\frac{p-1}{2}\right)=13 \cdot 3=39$, ha $a\geqq 9$. De $k=7$, ezért (22) és (23) miatt $7|a$ vagy $7|b$, amiből $a=7$ következik, mert most $a<9$ esetéről van szó és $\Phi_6(a, b)>39$, ha $a>b\geqq 7$. Ekkor

$$\Phi_6(7, 6) = 43, \quad \Phi_6(7, 5) = 39, \quad \Phi_6(7, 4) = 37$$

$$\Phi_6(7, 3) = 37, \quad \Phi_6(7, 2) = 39,$$

és belátható, hogy közülük csak $\Phi_6(7, 5)$ és $\Phi_6(7, 2)$ esetekre teljesül a (25) feltételezés, de ezekre az esetekre (26) nem áll fenn.

Ha $(a, b, k)=(7, 5, 7)$, illetve $(7, 2, 7)$, akkor $m=11 \cdot 37=407$, illetve $m=13 \cdot 67=871$ számokra (24) teljesül, mert $e(407)=20$ az első esetben és $e(871)=6$ a második esetben.

Ezek után tegyük fel, hogy (26) fennáll. Az 1. Tétel bizonyításához hasonlóan belátható, hogy létezik egy q prímszám, melyre $q\neq p$ és $m=q$ kielégíti a (24) feltételt. Tehát $k\geqq 4$ esetben mindig található olyan m szám, melyre (24) teljesül, amit bizonyítani kellett.

Most legyen $2\leqq k\leqq 3$. Ha $a-b\geqq 5$, akkor világos, hogy $m=a-b$ kielégíti a (24) feltételt, mert $e(a-b)=1$. Tehát már csak $a-b=1, 2, 3, 4$ eseteket kell megvizsgálni.

Legyen először $k=3$. Ha $a-b=1$ és $(a, b)\neq(3, 2)$, akkor az $m=a+b$ számra (24) teljesül. Ha pedig $(a, b)=(3, 2)$, akkor $m=11 \cdot 13=143$ kielégíti a (24) feltételt.

Ha $a-b=2$, akkor $(a, b)\neq(2^s+1, 2^s-1), (5 \cdot 2^t+1, 5 \cdot 2^t-1)$ miatt az $a+b=2(b+1)=2(a-1)$ számnak van 5-nél nagyobb m páratlan osztója, mert az ellenkező esetben $(ab, 3)=1$ teljesülne. Erre az m osztóra (24) fennáll.

Ha $a-b=3$, akkor $a+b=2b+3\geqq 7$ és $(a, b)=1$ miatt az $m=a+b$ számra (24) teljesül.

Ha $a-b=4$ és $(a, b)\neq(7, 3)$, akkor $(a, b)=1$ miatt b páratlan szám, s így $m=b+2$ esetén $e(m)|m-3$, $e(m)=2<m-3$ és $m-3>2$, vagyis (24) igaz. Ha pedig $(a, b)=(7, 3)$, akkor az $m=11\cdot 73=803$ számra (24) teljesül, mert $e(m)=$ $=[e(11), e(73)]=[40, 8]=40$.

A továbbiakban legyen $k=2$ és a, b egészekre

$$(a, b)\neq(c+1, c);\quad (c+3, c),$$

ahol $c=2, 3, \ldots$. Így $(ab, k)=(ab, 2)>1$ és $(a, b)=1$ miatt $a-b$ nem lehet páros szám. Tehát a fenti feltétel szerint $a-b\geqq 5$ következik. De az előzőekben már láttuk, hogy $a-b\geqq 5$ esetben végtelen sok olyan összetett n szám található, melyre $n|a^{n-k}-b^{n-k}$. Tehát a 2. Tétel minden állítását bebizonyítottuk.

A 3. Tétel bizonyítása.

Legyen $U=U(L, M)$ egy nem degenerált Lehmer-sorozat, továbbá legyen

$$k_0=\max(n_0, k_1)+1,$$

ahol n_0, illetve k, az I. Tételben, illetve 2. Lemmában meghatározott konstans.

Legyen $k>k_0$ egy tetszőlegesen adott egész szám. Ekkor az I. Tétel értelmében van olyan p prímszám, melyre $u(p)=k-1$. A II. Tétel szerint

$$u(p)|p-k(LK/p),$$

mert $u(p)|p-(LK/p)$ és

$$p-k(LK/p)=p-(LK/p)-(k-1)(LK/p).$$

Könnyen belátható, hogy $p-k(LK/p)\neq 0$, s így

$$p-k(LK/p)\geqq u(p)=k-1>n_0.$$

Tehát ha $u(p)<p-k(LK/p)$, akkor $m=p$ kielégíti a 3. Lemma feltételeit, amiből következik, hogy létezik végtelen sok olyan összetett n szám, melyre $u(n)|n-k(LK/n)$. Ha pedig $u(p)=p-k(LK/p)$ és $u(p)=u(p^2)$, akkor $p^2=m$ esetén teljesülnek a 3. Lemma feltételei, amiből az állítás már következik.

Végül legyen $u(p)=k-1=p-k(LK/p)$ és $u(p)\neq u(p^2)$. Ebben az esetben $p=k[1+(LK/p)]-1$ miatt $(LK/p)=1$, vagyis $u(p)=(p-1)/2$. Ekkor $(p-1)/2=$ $=k-1>k_1$ miatt

$$\Phi_{k-1}(\alpha, \beta)=\Phi_{(p-1)/2}(\alpha, \beta)>p\cdot P\left(\frac{p-1}{2}\right) \tag{27}$$

következik. De jól ismert, hogy ha q prímszámra $q|\Phi_n(\alpha, \beta)$ és $q\neq P(n)$, akkor $u(q)=n$ (lásd pl. [16]). Így $u(p)\neq u(p^2)$ és (27) miatt található olyan $q\neq p$ prímszám, melyre $u(q)=\dfrac{p-1}{2}=k-1$. Világos, hogy erre a q prímszámra $u(q)|q-$ $-k(LK/q)$, $u(q)<q-k(LK/q)$ és $q-k(LK/q)>n_0$. Tehát a 3. Lemmából $m=q$ mellett következik, hogy létezik végtelen sok összetett n szám, melyre $u(n)|n-$ $-k(LK/n)$.

Ezzel a 3. Tétel első felét bizonyítottuk. A második állítás pedig következik az 1. Lemmából.

Megjegyzés. A cikk megírása után jutott tudomásomra, hogy W. L. McDaniel a 2. Tételünkhöz hasonló eredményt ért el két cikkében. A bizonyítását azonban nem ismerem, mert a cikkek még nem jelentek meg.

IRODALOM

[1] A. Baker: A sharpenig of the bounds for forms in logarithms, *Acta Arith.* **21** (1972), 117—129.
[2] G. D. Birkhoff, H. S. Vandiver: On the integral divisors of a^n-b^n, *Ann. of Math.* **5** (1904), 173—180.
[3] Bui Minh Phong: Lucas- és Lehmer-pszeudoprím számokról, *Matematikai Lapok* **33** (1982—1986), 79—92.
[4] Bui Minh Phong: On super Lucas and super Lehmer pseudoprimes, *Studia Math. Hungar.* **23** (1988), 435—442.
[5] P. Kiss, Bui Minh Phong: On a problem of A. Rotkiewicz, *Math. Comp.*, **48** (1987), 751—755.
[6] D. H. Lehmer: An extended theory of Lucas' functions, *Ann. of Math.* **31** (1930), 419—448.
[7] A. Mąkowski: Generalization of Morrow's *D* numbers, *Simon Stevin* **36** (1962), 71.
[8] D. S. Mitrinovic, M. S. Popadic: *Inequalities in number theory*, Naucni Podmladak, Univ. of Nis, 1978.
[9] D. C. Morrow: Some properties of *D* numbers, *Amer. Math. Monthly* **58** (1951), 329—330.
[10] A. Rotkiewicz: *Pseudoprime numbers and their generalizations*, Univ. of Novi Sad, 1972.
[11] A. Rotkiewicz: On the pseudoprimes of the form $ax+b$ with respect to the sequence of Lehmer, *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* **20** (1972), 349—354.
[12] A. Rotkiewicz: On Euler Lehmer pseudoprimes and strong Lehmer pseudoprimes with parameters *L*, *Q* in arithmetic progressions, *Math. Comp.* **39** (1982), 239—247.
[13] A. Rotkiewicz: On the congruence $2^{n-2}\equiv 1 \pmod n$, *Math. Comp.* **43** (1984), 271—272.
[14] A. Rotkiewicz: Problems on Fibonacci numbers and their generalizations, *Fibonacci Numbers and Their Applications* (ed. by A. N. Philippou et al.), D. Reidel Publishing Company, 1986, 241—255.
[15] A. Schinzel: Primitive divisors of the expression A^n-B^n in algebraic number fields, *J. reine angew. Math.* **268/269** (1974), 27—33.
[16] C. L. Stewart: Primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers, *Transcendence Theory* (ed. by A. Baker and D. W. Masser), Acad. Press, London—New York, 1977.
[17] M. Ward: The intrinsic divisors of Lehmer numbers, *Ann. of Math.* **62** (1955), 230—236.
[18] K. Zsigmondy: Zur Theorie der Potenzreste, *Monatsh. Math.* **3** (1892), 265—284.

(Beérkezett: 1987. május 21-én)

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РОТКЕВИЧА

БУИ МИН ФОНГ

GENERALIZED SOLUTION OF ROTKIEWICZ'S PROBLEM

BUI MINH PHONG

Let L, M, K be integers such that $K=L-4M\neq 0$ and $(L, M)=1$. The Lehmer sequence $U(L, M)=\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ is defined by $U_0=0$, $U_1=1$ and for $n\geqq 2$ by

$$U_n=\begin{cases} LU_{n-1}-MU_{n-2} & \text{for } n \text{ odd} \\ U_{n-1}-MU_{n-2} & \text{for } n \text{ even.}\end{cases}$$

We assume that the sequence $U(L, M)$ is nondegenerate, i.e., $U_n\neq 0$ if $n\geqq 1$.

The following results are proved: There exists a positive k_0 such that for any integer $k>k_0$ there are infinitely many composite numbers n, which satisfy the congruence

$$U_{n-k(LK/n)} \equiv 0 \pmod n,$$

where (LK/n) is the Jacobi symbol. If a and b are fixed positive integers, then for every $k\geqq 4$ there exist infinitely many composite n such that

$$a^{n-k} \equiv b^{n-k} \pmod n.$$

Q-METRIKUS FINSLER-KONNEXIÓK

TRAN QUOC BINH

Bevezetés

A metrika és a konnexió összekapcsolása egy alapvető és régi problémája a geometriának és így a Finsler-geometriának is, amivel különböző szempontból a legutóbbi időkig sokan foglalkoztak. (Pl. Miron és Hashiguchi [13], Matsumoto [9], A. Kawaguchi [7], Obata [14], B. Hassan [6].) A kérdés tulajdonképpen olyan ∇ konnexió meghatározása, hogy az adott g metrikus tenzor ∇g kovariáns deriváltja eltűnjön. A kérdést ebben a dolgozatban úgy általánosítjuk, hogy adott g és adott megfelelő típusú Q tenzor mellett keressük azokat a konnexiókat, amelyekre $\nabla g = Q$. Az ilyen ∇-k az adott g-nek Q-metrikus konnexiói. ($Q=0$-ra a g metrikus konnexióit kapjuk.) Ez a kérdés ilyen irányú legszélesebb általánosítása, mert valamilyen Q-ra bármely ∇ Q-metrikus konnexiója az adott g-nek.

Az 1. §-ban a Finsler-konnexiók globális elméletének a dolgozatban használt fogalmait és jelöléseit gyűjtjük össze. A 2. §-ban adott (M, g) Finsler-térnek meghatározzuk az összes Q-metrikus Finsler-konnexióját (1. Tétel). Ez a tétel több, a metrikus esetre $(Q=0)$ vonatkozó korábbi (többnyire lokális) eredmény általánosítását is adja. A Q-metrikusság segítségével megfogalmazható Stavre és Klepp [17] g-relatív konnexióinak a fogalma. Így a g-relatív konnexiók épp a Q-metrikus konnexiókként adódnak ki egy konkrétan meghatározott speciális Q-ra. — Egy (M, g) Finsler-térnek több Q-metrikus konnexiója van. A 3. §-ban unicitási tételekkel foglalkozunk, azaz több olyan feltételt adunk meg, melyek közül bármelyik egyértelművé tesz egy Q-metrikus konnexiót. Először a metrikus esetet $(Q=0)$ vizsgáljuk (2. Tétel). A Tétel A) esete Hassan [6] eredményének bizonyos általánosítása. A B) esetben feltételeink Matsumotónak [9] a Cartan-konnexiót jellemző axiómáit általánosítják. Ez az eredmény lokális bizonyítással Miron [11]-nél található. A 2′. Tétel a $Q \neq 0$ esetre hasonlóan bizonyítható állításokat mond ki.

1. § Finsler-konnexiók

Legyen M egy n-dimenziós sokaság, és $\mathcal{T}_M = (TM, \pi_M, M)$ ennek tangensnyalábja. Legyen $\tilde{M} := TM - \{0\}$ és $\pi: \tilde{M} \to M$ a természetes projekció. A $\mathcal{T}_M$ és π által indukált

$$\pi^*(TM) = (\tilde{M} \times_M TM, \hat{\pi}, \tilde{M})$$

vektornyalábot, más néven pull-back nyalábot, *Finsler-nyalábnak* nevezzük. A Finsler-nyaláb totáltere

$$\tilde{M} \times_M TM := \{(u, v) \in \tilde{M} \times TM \mid \pi(u) = \pi_M(v)\}.$$

Sec $\pi^*(TM)$ elemeit *Finsler-vektormezők*nek nevezzük. Így Sec $\pi^*(TM)$ a Finsler-vektormezők $C^\infty(\tilde{M})$-modulusa.

Jelölje

$$\mathcal{T}_s^r(M) = (T_s^r(M), \pi_s^r, M)$$

az M sokaság (r, s) típusú tenzornyalábját, akkor

$$\pi^*(T_s^r(M)) = (\tilde{M} \times_M T_s^r(M), \hat{\pi}_s^r, \tilde{M})$$

indukált nyalábot *(r, s)-típusú Finsler-tenzornyaláb*nak nevezzük, Sec $\pi^*(T_s^r(M))$ elemeit pedig (r, s)-típusú Finsler-tenzormezőknek hívjuk.

Tekintsük az

$$L: T\tilde{M} \to \pi^*(TM) \tag{1}$$

$$T_p\tilde{M} \ni X \mapsto (p, (d\pi)_p X)$$

leképezést. Legyen N egy tetszőleges konnexió a $\mathcal{T}_M$ tangensnyalábban. N tekinthető mint egy $N: TM \ni q \mapsto N_q \subset T_qTM$ differenciálható disztribúció, amelyre $T_qTM = N_q \oplus V_qTM$. Világos, hogy az N disztribúció $\tilde{M}$-ra való leszűkítése egy ugyancsak N-nel jelölt, $N: \tilde{M} \ni p \mapsto N_p \subset T_p\tilde{M}$ disztribúciót határoz meg, melyre $T_p\tilde{M} = N_p \oplus V_p\tilde{M}$. $\mathcal{H}\tilde{M} := (N, \pi_{\tilde{M}}|_N, \tilde{M})$ a $\mathcal{T}_{\tilde{M}}$-nak az úgynevezett horizontális résznyalábja. (1)-ből azonnal belátható, hogy

$$L|_{\mathcal{H}\tilde{M}}: \mathcal{H}\tilde{M} \to \pi^*(TM)$$

erős nyalábizomorfizmus. Ennek inverze

$$\beta := (L|_{\mathcal{H}\tilde{M}})^{-1}: \pi^*(TM) \to \mathcal{H}\tilde{M}. \tag{2}$$

Legyen $\mathcal{V}\tilde{M}$ a $\mathcal{T}_{\tilde{M}}$ vertikális része, így $\mathcal{V}\tilde{M}$ totáltere:

$$V\tilde{M} = \{X \in T\tilde{M} \mid (d\pi)(X) = 0\}.$$

Tetszőleges $p \in \tilde{M}$ és $v \in T_{\pi(p)}M$ esetén tekintsük az $x(t) = tv + p \subset T_{\pi(p)}M$ görbét, és ennek a p pontban vett $\dot{x}(0)$ érintővektorát, ami nyilván eleme $V_p\tilde{M}$-nek. A $v \mapsto \gamma_p(v) := \dot{x}(0)$ leképezés izomorfizmus a $T_{\pi(p)}M$ és $V_p\tilde{M}$ között, s így indukál egy

$$\gamma: \pi^*(TM) \to \mathcal{V}\tilde{M} \tag{3}$$

erős nyalábleképezést. Ennek segítségével tekintsük a

$$G := \gamma^{-1}(\mathrm{id} - \beta \circ L): T\tilde{M} \to \pi^*(TM) \tag{4}$$

leképezést.

A továbbiakban γ-t, ill. β-t az N konnexióhoz tartozó *vertikális, ill. horizontális Finsler-liftnek* nevezzük. $\mathcal{T}_{\tilde{M}} = \mathcal{H}\tilde{M} \oplus \mathcal{V}\tilde{M}$ miatt $\forall X \in T\tilde{M}$ egyértelműen felírható $X = X^H + X^V$ alakban, ahol $X^H \in N$, $X^V \in V\tilde{M}$. X^H-t, ill. X^V-t az X vektormező horizontális, ill. vertikális komponensének nevezzük az N konnexióra nézve.

A $\pi^*(TM)$ Finsler-nyaláb lineáris konnexióit Finsler-konnexióknak nevezzük. Így egy Finsler-konnexió megadása ekvivalens egy a Koszul-féle axiómáknak eleget tevő kovariáns deriválás megadásával. Ennek figyelembevételével a Finsler-konnexió egy

$$\nabla: \mathfrak{X}(\tilde{M}) \times \mathrm{Sec}\, \pi^*(TM) \to \mathrm{Sec}\, \pi^*(TM)$$

$$(X, \overline{Y}) \mapsto \nabla_X \overline{Y}$$

R-bilineáris leképezés, amelyre $\forall f \in C^\infty(\tilde{M})$ esetén

$$\nabla_{fX}\overline{Y} = f\nabla_X \overline{Y} \tag{5}$$

$$\nabla_X f\overline{Y} = X(f)\overline{Y} + f\nabla_X \overline{Y}. \tag{6}$$

∇ **R**-bilinearitása, valamint (5) és (6) jelentik a Koszul-axiómákat.

Egy ∇ Finsler-konnexió L-torzió tenzora

$$T\colon \mathfrak{X}(\tilde{M}) \times \mathfrak{X}(\tilde{M}) \to \operatorname{Sec} \pi^*(TM) \tag{7}$$

$$(X, Y) \mapsto T(X, Y) := \nabla_X LY - \nabla_Y LX - L[X, Y],$$

és G-torzió tenzora

$$S\colon \mathfrak{X}(\tilde{M}) \times \mathfrak{X}(\tilde{M}) \to \operatorname{Sec} \pi^*(TM) \tag{8}$$

$$(X, Y) \mapsto S(X, Y) := \nabla_X GY - \nabla_Y GX - G[X, Y].$$

Legyen N egy tetszőleges konnexió a $\pi\colon \tilde{M} \to M$ fibrált nyalábon és ∇ egy tetszőleges Finsler-konnexió $\pi^*(TM)$-n. Akkor a (∇, N) párt Finsler-konnexiópárnak nevezzük. Továbbiakban csak Finsler-konnexiópárokkal foglalkozunk, így a (∇, N) párt egyszerűen *Finsler-konnexiónak* hívjuk.

Legyen (U, x^i) egy lokális koordináta-rendszer M-en, $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$ pedig a hozzá tartozó kanonikus lokális koordináta-rendszer $\tilde{M}$-on. Legyenek $\frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^l \frac{\partial}{\partial y^l}$ N lokális bázis vektormezői. Az itt fellépő $N_i^l(x, y)$ az N paraméterei. A továbbiakban időnként a következő jelöléseket is használjuk:

$$\delta_i := \frac{\delta}{\delta x^i}, \quad \partial_{\cdot i} := \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$$

és

$$\bar{\partial}_i\colon \tilde{M} \to \pi^*(TM), \quad \tilde{m} \mapsto \bar{\partial}_i(\tilde{m}) := (\tilde{m}, \partial_i(\pi(\tilde{m}))).$$

A (∇, N) Finsler-konnexió paraméterei a

$$\nabla_{\delta_i}\bar{\partial}_j := \Gamma_{ij}^k \bar{\partial}_k, \quad \nabla_{\partial_{\cdot i}}\bar{\partial}_j := C_{ij}^k \bar{\partial}_k$$

képletekben fellépő Γ_{ij}^k és C_{ij}^k.

Legyen g egy nem-degenerált szimmetrikus (0, 2) Finsler-tenzormező. A (∇, N) *Finsler-konnexiót metrikus*nak nevezzük g-re nézve, ha $(\nabla_X g)(\overline{Y}, \overline{Z}) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$; $\overline{Y}, \overline{Z} \in \operatorname{Sec} \pi^*(TM)$. Az $Xg(\overline{Y}, \overline{Z}) = \nabla_X g(\overline{Y}, \overline{Z})$ figyelembevételével ∇g a

$$(\nabla_X g)(\overline{Y}, \overline{Z}) = Xg(\overline{Y}, \overline{Z}) - g(\nabla_X \overline{Y}, \overline{Z}) - g(\nabla_X \overline{Z}, \overline{Y}) \tag{9}$$

alakban írható.

Megjegyezzük, hogy (9) ekvivalens a Miron [11] által bevezetett

$$g_{ij|k} = g_{ij}|_k = 0 \tag{10}$$

feltételekkel, ahol

$$g_{ij|k} := \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{li} \tag{11}$$

$$g_{ij}|_k := \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - C^l_{ki} g_{lj} - C^l_{kj} g_{li}. \tag{12}$$

Ugyanis

$$g_{ij|k} = (\nabla_{\delta_k} g)(\bar{\partial}_i, \bar{\partial}_j)$$

és

$$g_{ij}|_k = (\nabla_{\partial_{.k}} g)(\bar{\partial}_i, \bar{\partial}_k).$$

Így tenzor jellege miatt $g_{ij|k} = g_{ij}|_k = 0$ független az N konnexió megválasztásától.

2. § Az összes Q-metrikus Finsler-konnexió meghatározása

Legyen adott $\tilde{M}$-on egy g nem-degenerált szimmetrikus (0, 2) Finsler-tenzormező. Ez egy (M, g) Finsler-teret határoz meg. Legyen továbbá

$$Q: \mathfrak{X}(\tilde{M}) \times \mathrm{Sec}\, \pi^*(TM) \times \mathrm{Sec}\, \pi^*(TM) \to C^\infty(\tilde{M})$$

egy trilineáris leképezés, mely az utolsó két változójában szimmetrikus.

1. Definíció. Egy (∇, N) Finsler-konnexiót az (M, g) Finsler-tér Q-metrikus konnexiójának nevezünk, ha

$$(\nabla_X g)(\bar{Y}, \bar{Z}) = Q(X, \bar{Y}, \bar{Z}) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\tilde{M}),\ \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathrm{Sec}\, \pi^*(TM),$$

azaz ha $\nabla g = Q$.

1. Tétel. *Adott (M, g) Finsler-tér és $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$ tetszőleges (g-re nézve nem szükségképpen Q-metrikus) Finsler-konnexió esetén (M, g) összes Q-metrikus (∇, N) konnexiójában ∇-t a*

$$\langle \nabla_X \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle \mathring{\nabla}_X \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \frac{1}{2} (\mathring{\nabla}_X g)(\bar{Y}, \bar{Z}) + \tag{13}$$

$$+ \frac{1}{2} \langle A(X, \bar{Y}), \bar{Z} \rangle - \frac{1}{2} \langle A(X, \bar{Z}), \bar{Y} \rangle - \frac{1}{2} Q(X, \bar{Y}, \bar{Z})$$

összefüggés határozza meg, ahol $\langle \bar{U}, \bar{V} \rangle \equiv g(\bar{U}, \bar{V})$,

$$A: \mathfrak{X}(\tilde{M}) \times \mathrm{Sec}\, \pi^*(TM) \to \mathrm{Sec}\, \pi^*(TM) \tag{14}$$

tetszőleges $C^\infty(\tilde{M})$-bilineáris leképezés, N pedig szabadon választható.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy (13) egyértelműen meghatároz egy $X, \bar{Y} \mapsto \nabla_X \bar{Y}$ **R**-lineáris hozzárendelést, ami eleget tesz a Koszul-axiómák néven ismert tulajdonságoknak (azaz (5) és (6)-nak). Ez ugyanúgy látható be, mint a megfelelő állítás egy Riemann-tér esetén (lásd Kobayashi—Nomizu [8], 2.2. Tétel). Így $\nabla_X \bar{Y}$ egy lineáris konnexió $\pi^*(TM)$-ben. Ezután megmutatjuk, hogy tetszőleges A esetén a (13) által meghatározott ∇ Q-metrikus. Valóban, ha (9) jobb oldalán figyelembe vesszük (13)-at, akkor a $(\nabla_X g)(\bar{Y}, \bar{Z}) = Q(X, \bar{Y}, \bar{Z})$-hoz jutunk.

Fordítva, ha $\nabla g = Q$, akkor tetszőleges $\mathring{\nabla}$ Finsler-konnexió esetén létezik A, amelyre teljesül (13).

Nevezetesen legyen

$$A(X, \overline{Y}) := \nabla_X \overline{Y} - \mathring{\nabla}_X \overline{Y}, \tag{15}$$

amiből

$$\langle \nabla_X \overline{Y}, \overline{Z} \rangle = \langle \mathring{\nabla}_X \overline{Y}, \overline{Z} \rangle + \frac{1}{2} \langle A(X, \overline{Y}), \overline{Z} \rangle + \frac{1}{2} \langle A(X, \overline{Y}), \overline{Z} \rangle. \tag{15a}$$

Ekkor (9)-et a választott $\mathring{\nabla}$-ra felírva

$$X\langle \overline{Y}, \overline{Z} \rangle = (\mathring{\nabla}_X g)(\overline{Y}, \overline{Z}) + \langle \mathring{\nabla}_X \overline{Y}, \overline{Z} \rangle + \langle \mathring{\nabla}_X \overline{Z}, \overline{Y} \rangle.$$

$X\langle \overline{Y}, \overline{Z} \rangle$ ezen értékét (9)-be helyettesítve

$$(\nabla_X g)(\overline{Y}, \overline{Z}) = (\mathring{\nabla}_X g)(\overline{Y}, \overline{Z}) + \langle \mathring{\nabla}_X \overline{Y}, \overline{Z} \rangle + \langle \mathring{\nabla}_X \overline{Z}, \overline{Y} \rangle - \langle \nabla_X \overline{Y}, \overline{Z} \rangle - \langle \nabla_X \overline{Z}, \overline{Y} \rangle.$$

Ennek bal oldalán a $\nabla g = Q$ feltételünket, jobb oldalán pedig A (15) szerint megválasztását figyelembe véve

$$Q(X, \overline{Y}, \overline{Z}) = (\mathring{\nabla}_X g)(\overline{Y}, \overline{Z}) - \langle A(X, \overline{Y}), \overline{Z} \rangle - \langle A(X, \overline{Z}), \overline{Y} \rangle,$$

azaz

$$\langle A(X, \overline{Y}), \overline{Z} \rangle = (\mathring{\nabla}_X g)(\overline{Y}, \overline{Z}) - \langle A(X, \overline{Z}), \overline{Y} \rangle - Q(X, \overline{Y}, \overline{Z}).$$

$\langle A(X, \overline{Y}), \overline{Z} \rangle$ ezen kifejezését (15a)-ba helyettesítve a (13) összefüggést kapjuk.

A tételt metrikus esetben ($Q = 0$) Miron [11], ill. Miron és Hashiguchi [13], affin konnexió esetén pedig Obata [14] bebizonyította az ún. Obata-operátor segítségével. Megjegyezzük, hogy a fenti bizonyítás globális, szemben az említett szerzők lokális tárgyalásával, azoktól különbözik és rövidebb.

Az (M, g) összes Q-metrikus (∇, N) Finsler-konnexiójának paramétereit

$$\text{(16)} \quad \begin{cases} \text{a)} \; N_i^k = \mathring{N}_i^k - X_i^k \\ \text{b)} \; \Gamma_{ij}^k = \mathring{\Gamma}_{ij}^k + X_i^p \mathring{C}_{pj}^k + \frac{1}{2} g^{lk} (g_{jl}\mathring{|}_i + g_{jl}\mathring{|}_p X_i^p) + \Omega_{ij}^{kp} A_{ik}^l - \frac{1}{2} Q_{ijp} g^{pk} \\ \text{c)} \; C_{ij}^k = \mathring{C}_{ij}^k + \frac{1}{2} g^{lk} g_{lj}\mathring{|}_i + \Omega_{ij}^{pk} a_{ip}^l - \frac{1}{2} q_{ijp} g^{pk}, \end{cases}$$

adja, ahol X_i^k tetszőleges, $\Omega_{ij}^{pk} := \frac{1}{2}(\delta_i^p \delta_j^k - g_{lj} g^{pk})$ az ún. Obata-operátor [14] komponensei, $A_{ik}^l \bar{\partial}_l := A(\delta_i, \bar{\partial}_k)$, $a_{ik}^l \bar{\partial}_l := A(\partial_{\cdot i}, \bar{\partial}_k)$ a (14) szerinti A leképezés komponensei, végül $Q_{ijp} := Q(\delta_i, \bar{\partial}_j, \bar{\partial}_p)$, $q_{ijp} := Q(\partial_{\cdot i}, \bar{\partial}_j, \bar{\partial}_p)$.

A bizonyítás abból áll, hogy megmutatjuk, hogy (16b) és (16c) a (13) által meghatározott ∇ koefficiensei. Legyen (13)-ban $X = \delta_i$; $\overline{Y} = \bar{\partial}_j$, $\overline{Z} = \bar{\partial}_p$. Ekkor (13) bal oldala $\Gamma_{ij}^l g_{lp}$. Kontrahálva mindkét oldalt g^{pk}-val (16b)-hez jutunk. Ha X-et $\partial_{\cdot i}$-nek választjuk, akkor hasonló úton (16c) igazolását kapjuk. (16a) azt mondja ki, hogy N tetszőleges, ami az 1. Tétel szerint igaz.

Megjegyzések.

A) Az 1. Tétel szerint adott (M, g) Finsler-tér összes metrikus (∇, N) konnexióját a

$$(17)\qquad \begin{cases} N_i^k = \mathring{N}_i^k - X_i^k \\ \langle \nabla_X \overline{Y}, \overline{Z}\rangle = \langle \mathring{\nabla}_X \overline{Y}, \overline{Z}\rangle + \frac{1}{2}(\mathring{\nabla}_X g)(\overline{Y}, \overline{Z}) + \frac{1}{2}\langle A(X, \overline{Y}), \overline{Z}\rangle - \frac{1}{2}\langle A(X, \overline{Z})\,\overline{Y}\rangle \end{cases}$$

összefüggés határozza meg, ahol A tetszőleges. (∇, N) lokális paramétereit (16) adja $Q_{ijp}=q_{ijp}=0$ esetén. Ezen utóbbi megállapítás éppen Miron és Hashiguchi [13] eredménye.

B) Ha X_i^k, A és Q is eltűnik, akkor A. Kawaguchi [7] eredményét kapjuk, mely szerint tetszőleges $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$ Finsler-konnexió mellett az

$$(16')\qquad \begin{aligned} N_i^k &= \mathring{N}_i^k \\ \Gamma_{ij}^k &= \mathring{\Gamma}_{ij}^k + \frac{1}{2} g^{lk} g_{lj|i} \\ C_{ij}^k &= \mathring{C}_{ij}^k + \frac{1}{2} g^{lk} g_{lj}\mathring{|}_i \end{aligned}$$

az (M, g) Finsler-tér metrikus konnexiója. Ez globálisan a következőképpen fogalmazható meg. Legyen $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$ egy tetszőleges Finsler-konnexió (M, g)-n. Ekkor az

$$(17')\qquad \begin{aligned} N &= \mathring{N} \\ (\nabla_X \overline{Y}, \overline{Z}\rangle &= \langle \mathring{\nabla}_X \overline{Y}, \overline{Z}\rangle + (\mathring{\nabla}_X g)(\overline{Y}, \overline{Z}) \end{aligned}$$

által meghatározott (∇, N) már egy metrikus konnexiója az (M, g) Finsler-térnek.

C) Stavre és Klepp [17] bevezette a g-relatív konnexiók fogalmát, és lokálisan meghatározták az összes olyan (∇, N) Finsler-konnexiót, melyek egy adott $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$ konnexióval g-relatívak. Megmutatjuk, hogy ezek a konnexiók is Q-metrikus konnexióként adódnak egy speciális Q esetén. Egy (∇, N) konnexióról azt mondjuk hogy g-relatív egy $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$-val, ha $g_{ij\mathring{|}k}=g_{ij|k}$ és $g_{ij}\mathring{|}_k=g_{ij|k}$, azaz ha

$$(18)\qquad \mathring{\nabla}_{\delta_i} g = \nabla_{\delta_i} g \quad \text{és} \quad \mathring{\nabla}_{\partial_{\cdot i}} g = \nabla_{\partial_{\cdot i}} g.$$

1. Állítás. (∇, N) *pontosan akkor g-relatív* $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$*-val, ha* (∇, N) *Q-metrikus a tekintett g-re és egy olyan Q-ra nézve, melyre*

$$(19)\qquad \begin{aligned} Q(\delta_{\cdot i}, \overline{Y}, \overline{Z}) &= (\mathring{\nabla}_{\delta_i} g)(\overline{Y}, \overline{Z}) \\ Q(\partial_{\cdot i}, \overline{Y}, \overline{Z}) &= (\mathring{\nabla}_{\partial_{\cdot i}} g)(\overline{Y}, \overline{Z}), \quad \forall \overline{Y}, \overline{Z} \in \operatorname{Sec} \pi^*(TM). \end{aligned}$$

Valóban, ha (∇, N) Q-metrikus, akkor $(\nabla_X g)(\overline{Y}, \overline{Z}) = Q(X, \overline{Y}, \overline{Z})$ (19) miatt (18)-at adja, tehát (∇, N) g-relatív $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$-al, és fordítva. Az 1. Tételből az eredményt a konnexióparaméterek segítségével kapjuk

2. Állítás. *A* $(\mathring{N}_i^k, \mathring{\Gamma}_{ij}^k, \mathring{C}_{ij}^k)$ *paraméterű konnexióval pontosan azok a konnexiók a g-relatívak, melyek paraméterei*

$$N_i^k = \mathring{N}_i^k - X_i^k$$

$$\Gamma_{ij}^k = \mathring{\Gamma}_{ij}^k + X_i^p \mathring{C}_{pj}^k + \frac{1}{2} g_{jl}|_p^{\circ} X_i^p g^{lk} + \Omega_{lj}^{kp} A_{ip}^l \tag{16''}$$

$$C_{ij}^k = \mathring{C}_{ij}^k + \Omega_{lj}^{pk} a_{ip}^l.$$

Ezek az összefüggések (16)-ból adódnak (19) figyelembevételével.

3. § Metrikus Finsler-konnexiók unicitási tételei

Egy (M, g) Finsler-térnek több (∇, N) metrikus konnexiója van, azaz olyan, melyre $\nabla g = Q \equiv 0$. Megmutatjuk, hogy ezeket milyen további egyszerű követelmények tehetik egyértelművé. Tekintsük a következő követelményeket:

a) $\langle T\langle X^V, Y\rangle, LZ\rangle = \langle T(X^V, Z), LY\rangle$,

b) $S(X^V, Y^V) = 0$,

c) $T(X^H, Y^H) = 0$,

d) $\langle S(X^H, Y), GZ\rangle = \langle S(X^H, Z), GY\rangle$,

$$X^H, Y^H \in N; \quad X^V, Y^V \in V\tilde{M}; \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\tilde{M}).$$

2. Tétel. *Egy* (M, g) *Finsler-térben adott* N *esetén pontosan egy metrikus Finsler-konnexió létezik, melyre a fenti négy követelmény közül az alábbi kettő teljesedik:*

A: a) és c); B: b) és c); C: b) és d); D: a) és d).

Ez négy különböző állítás, és ezekre a továbbiakban, mint 2A) Tétel, 2B) Tétel stb., hivatkozunk. A bizonyítás előtt két megjegyzést teszünk. Ismeretes, hogy az (M, g) Finsler-térnek speciális esete a klasszikus (M, F) Finsler-tér, ahol F az alapfüggvény, és ebből a g komponensei egy (x^i, y^i) lokális koordináta-rendszerben a $g_{ij} := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ formában vannak meghatározva.

1. Megjegyzés. B. Hassan [6] (M, F) Finsler-térben lokális úton a 2A) Tételhez hasonló állítást bizonyított. Az eltérés az, hogy Hassannál a c) feltételben $X^H, Y^H \in N$ helyett $X^H, Y^H \in H := \{X \in \mathfrak{X}(\tilde{M}) \mid \nabla_X \bar{v} = 0\}$ szerepel, ahol $\bar{v} := y^i \bar{\partial}_i$ az ún. fundamentális vektormező. Így a 2A) Tétel bizonyos általánosítása Hassan eredményének.

2. Megjegyzés. A 2B) Tétel $\mathcal{T}_{\tilde{M}}$-on fellépő analógja Miron [11]-ben található. A tételben szereplő feltételek tulajdonképpen Matsumoto [9] azon feltételeinek az általánosításai, amelyek az (M, F)-ben lévő Cartan-konnexió axiómarendszerét alkotják.

A 2A) Tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy létezik egy ∇ Finsler-konnexió, mely teljesíti a 2A) Tétel feltételeit. Ekkor ∇ metrikussága miatt

$$\langle \nabla_X \overline{Y}, \overline{Z} \rangle = X\langle \overline{Y}, \overline{Z} \rangle - \langle \nabla_X \overline{Z}, \overline{Y} \rangle, \tag{20}$$

és $X = X^H + X^V$ miatt

$$\langle \nabla_X \overline{Y}, \overline{Z} \rangle = \langle \nabla_{X^H} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle + \langle \nabla_{X^V} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle. \tag{21}$$

Tekintsük a $\beta\overline{Y}, \beta\overline{Z} \in N$ vektormezőket. Világos, hogy $L \circ \beta\overline{Y} = \overline{Y}$, $L \circ \beta\overline{Z} = \overline{Z}$. Ekkor c)-ből:

$$\nabla_{X^H} \overline{Z} - \nabla_{\beta Z} LX^H - L[X^H, \beta\overline{Z}] = 0. \tag{22}$$

(21)- és (22)-ből:

$$\langle \nabla_{X^H}, \overline{Z} \rangle = X^H \langle \overline{Y}, \overline{Z} \rangle - \langle \nabla_{\beta Z} LX^H, \overline{Y} \rangle - \langle L[X^H, \beta\overline{Z}], \overline{Y} \rangle =$$

(20) alapján:

$$= X^H \langle \overline{Y}, \overline{Z} \rangle - \beta\overline{Z} \langle LX^H, \overline{Y} \rangle + \langle \nabla_{\beta Z} \overline{Y}, LX^H \rangle -$$

$$- \langle L[X^H, \beta\overline{Z}], \overline{Y} \rangle =$$

(22) alapján:

$$= X^H \langle \overline{Y}, \overline{Z} \rangle + \langle LX^H, \nabla_{\beta Y} \overline{Z} \rangle + \langle LX^H, L[\beta\overline{Z}, \beta\overline{Y}] \rangle -$$

$$- \beta\overline{Z} \langle LX^H, \overline{Y} \rangle - \langle L[X^H, \beta\overline{Z}], \overline{Y} \rangle =$$

(20) alapján:

$$= X^H \langle \overline{Y}, \overline{Z} \rangle + \beta\overline{Y} \langle LX^H, \overline{Z} \rangle - \langle \nabla_{\beta Y} LX^H, \overline{Z} \rangle +$$

$$+ \langle LX^H, L[\beta\overline{Z}, \beta\overline{Y}] \rangle - \beta Z \langle LX^H, \overline{Y} \rangle -$$

$$- \langle L[X^H, \beta\overline{Z}], \overline{Y} \rangle =$$

(22) alapján:

$$= X^H \langle \overline{Y}, \overline{Z} \rangle - \langle \nabla_{X^H} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle + \beta\overline{Y} \langle LX^H, \overline{Z} \rangle -$$

$$- \beta\overline{Z} \langle LX^H, \overline{Y} \rangle + \langle L[X^H, L[\beta\overline{Z}, \beta\overline{Y}] \rangle -$$

$$- \langle L[X^H, \beta Z], \overline{Y} \rangle - \langle L[\beta\overline{Y}, X^H], \overline{Z} \rangle.$$

Ebből:

$$2\langle \nabla_{X^H} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle = X^H \langle \overline{Y}, \overline{Z} \rangle + \beta\overline{Y} \langle LX^H, \overline{Z} \rangle - \tag{23}$$

$$- \beta\overline{Z} \langle LX^H, \overline{Y} \rangle + \langle L[\beta\overline{Z}, \beta\overline{Y}], LX^H \rangle -$$

$$- \langle L[X^H, \beta\overline{Z}], \overline{Y} \rangle - \langle L[\beta\overline{Y}, X^H], \overline{Z} \rangle.$$

Másrészt

$$T(X^V, \beta\overline{Y}) = \nabla_{X^V} \overline{Y} - \nabla_{\beta Y} LX^V - L[X^V, \beta\overline{Y}]$$

$$= \nabla_{X^V} \overline{Y} - L[X^V, \beta\overline{Y}],$$

és hasonlóan

$$T(X^V, \beta\overline{Z}) = \nabla_{X^V} \overline{Z} - L[X^V, \beta\overline{Z}].$$

a) szerint:

$$\langle \nabla_{X^V} \overline{Y} - L[X^V, \beta\overline{Y}], \overline{Z} \rangle = \langle \nabla_{X^V} \overline{Z} - L[X^V, \beta\overline{Z}], \overline{Y} \rangle, \tag{24}$$

amiből következik, hogy

$$\langle \nabla_{X^V} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle - \langle \nabla_{X^V} \overline{Z}, \overline{Y} \rangle = \langle L[X^V, \beta\overline{Y}], \overline{Z} \rangle - \langle L[X^V, \beta\overline{Z}], \overline{Y} \rangle. \tag{25}$$

∇ metrikussága miatt

$$\langle \nabla_{X^V} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle \nabla_{X^V} \bar{Z}, \bar{Y} \rangle = X^V \langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle. \tag{26}$$

A (25)-öt és (26)-ot összeadva

$$2\langle \nabla_{X^V} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = X^V \langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle L[X^V, \beta\bar{Y}], \bar{Z} \rangle - \langle L[X^V, \beta\bar{Z}], \bar{Y} \rangle. \tag{27}$$

A (23) és (25) összegéből $LX^H = LX$ figyelembevételével azonnal kapjuk:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = {} & X\langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \beta\bar{Y}\langle LX, \bar{Z} \rangle - \beta\bar{Z}\langle \beta\bar{Y}, LX \rangle + \\ & + \langle L[\beta\bar{Z}, \beta\bar{Y}], \bar{Z} \rangle - \langle L[X^H, \beta\bar{Z}], \bar{Y} \rangle - \langle L[\beta\bar{Y}, X^H], \bar{Z} \rangle + \\ & + \langle L[X^V, \beta\bar{Y}], \bar{Z} \rangle - \langle L[X^V, \beta\bar{Z}], \bar{Y} \rangle. \end{aligned} \tag{28}$$

Ha tehát létezik a tétel követelményeit kielégítő ∇, az szükségképpen eleget tesz (28)-nak. A (28) jobb oldala teljesen meghatározott az adott g által. $\bar{Z}$ tetszőleges. Így $\nabla_X \bar{Y}$-nek tetszőleges $\bar{Z}$-vel való skalárszorzatát meghatároztuk, ami g nemdegenerált volta miatt már $\nabla_X \bar{Y}$-t is meghatározza. Tehát ha létezik a tétel követelményeit kielégítő ∇, az csak a (28) által meghatározott ∇ lehet.

Fordítva, egyszerű, bár hosszadalmas számolással ellenőrizhetjük, hogy a (28) által meghatározott ∇ teljesíti a Koszul-axiómákat, így ∇ Finsler-konnexió $\pi^*(TM)$-n. Továbbá az is belátható, hogy ezen ∇ konnexió metrikus, és teljesíti a 2A) Tétel feltételeit. □

A 2A) Tétel következménye. *Az* $X=\delta_i$, $\bar{Y}=\bar{\partial}_j$, $\bar{Z}=\bar{\partial}_p$, *ill.* $X=\partial_{\cdot i}$, $\bar{Y}=\bar{\partial}_j$, $\bar{Z}=\bar{\partial}_p$ *helyettesítéssel* (28)*-ból azonnal belátható, hogy a* 2A) *Tételben szereplő Finsler-konnexió paraméterei*

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2} g^{pk}(\delta_j(g_{ip}) + \delta_i(g_{jp}) - \delta_p(g_{ij})) \\ C^k_{ij} &= \frac{1}{2} g^{kp} \partial_{\cdot i}(g_{jp}) \equiv \frac{1}{2} g^{kp} \frac{\partial g_{jp}}{\partial y^i}. \end{aligned} \tag{28*}$$

A 2B) Tétel bizonyításának vázlata. A 2A) Tétel bizonyításának az első részében csak ∇ metrikusságát és a $T(X^H, Y^H)=0$; $X^H, Y^H \in N$-et használtuk ki, amik a 2B) Tételnél is fel vannak téve. Így itt is igaz (23):

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{X^H} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = {} & X^H \langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \beta\bar{Y}\langle LX^H, \bar{Z} \rangle - \\ & - \beta\bar{Z}\langle LX^H, \bar{Y} \rangle + \langle L[\beta\bar{Z}, \beta\bar{Y}], LX^H \rangle - \\ & - \langle L[X^V, \beta\bar{Z}], \bar{Y} \rangle - \langle L[\beta\bar{Y}, X^H], \bar{Z} \rangle. \end{aligned} \tag{29}$$

A 2A) Tétel bizonyításának első részéhez hasonló úton a b) feltétel kihasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{X^V} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = {} & X^V \langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \gamma\bar{Y}\langle GX^V, \bar{Z} \rangle - \\ & - \gamma\bar{Z}\langle GX^V, \bar{Y} \rangle + \langle G[\gamma\bar{Z}, \gamma\bar{Y}], GX^V \rangle - \\ & - \langle G[X^V, \gamma\bar{Z}], \bar{Y} \rangle - \langle G[\gamma\bar{Y}, X^V], \bar{Z} \rangle. \end{aligned} \tag{30}$$

(29) és (30) összevonva:

$$(31)\qquad \begin{aligned} 2\langle \nabla_X \overline{Y}, \overline{Z}\rangle &= X\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle + \beta\overline{Y}\langle LX, \overline{Z}\rangle - \beta\overline{Z}\langle LX, \overline{Y}\rangle + \\ &+ \langle L[\beta\overline{Z}, \beta\overline{Y}], LX\rangle - \langle L[X^H, \beta\overline{Z}], \overline{Y}\rangle - \langle L[\beta\overline{Y}, X^H], \overline{Z}\rangle + \\ &+ \gamma\overline{Y}\langle GX^V, \overline{Z}\rangle - \gamma\overline{Z}\langle GX^V, \overline{Y}\rangle + \langle G[\gamma\overline{Z}, \gamma\overline{Y}], GX^V\rangle - \\ &- \langle G[X^V, \gamma\overline{Z}], \overline{Y}\rangle - \langle G[\gamma\overline{Y}, X^V], \overline{Z}\rangle. \end{aligned}$$

A 2A) Tétel bizonyításához hasonlóan belátható, hogy a (31) által definiált ∇ leképezés valóban Finsler-konnexió, és az egyetlen, mely teljesíti a 2B) Tétel feltételeit.

(31)-ből megkapjuk a 2B) Tételben szereplő konnexió paramétereit:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kp}(\delta_i(g_{jp}) + \delta_j(g_{ip}) - \delta_p(g_{ij}))$$

$$C^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kp}(\partial_{\cdot i}(g_{jp}) + \partial_{\cdot j}(g_{ip}) - \partial_{\cdot p}(g_{ij})).$$

A 2C) Tétel bizonyításának vázlata. A 2A) Tétel bizonyításához hasonlóan láthatjuk be, hogy a

$$(32)\qquad \begin{aligned} 2\langle \nabla_X \overline{Y}, \overline{Z}\rangle &= X\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle + \gamma\overline{Y}\langle GX, \overline{Z}\rangle - \\ &- \gamma\overline{Z}(GX, \overline{Y}\rangle + \langle GX, G[\gamma\overline{Z}, \gamma\overline{Y}]\rangle - \\ &- \langle G[X^V, \gamma\overline{Z}], \overline{Y}\rangle - \langle G[\gamma\overline{Y}, X^V], \overline{Z}\rangle + \\ &+ \langle G[X^H, \gamma\overline{Y}], \overline{Z}\rangle - \langle G[X^H, \gamma\overline{Z}], \overline{Y}\rangle \end{aligned}$$

képlet által definiált ∇ leképezés valóban Finsler-konnexió, és az egyetlen, mely teljesíti a 2C) Tétel feltételeit. (32)-ből azonnal kapjuk a tételben szereplő Finsler-konnexió Γ^k_{ij}, C^k_{ij} paramétereit:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kp}(\delta_i(g_{ip}) + \partial_{\cdot j}(N^l_i) g_{lp} - \partial_{\cdot p}(N^l_i) g_{lj})$$

$$C^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kp}(\partial_{\cdot i}(g_{jp}) + \partial_{\cdot j}(g_{ip}) - \partial_{\cdot p}(g_{ij})).$$

A 2D) Tétel bizonyításának vázlata. a)-ból adódik (27), mely szerint

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{X^V} \overline{Y}, \overline{Z}\rangle &= X^V\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle + L[X^V, \beta\overline{Y}], \overline{Z}\rangle - \\ &- \langle L[X^V, \beta\overline{Z}], \overline{Y}\rangle. \end{aligned}$$

Analóg módon d)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{X^H} \overline{Y}, \overline{Z}\rangle &= X^H\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle + \langle G[X^H, \gamma\overline{Y}], \overline{Z}\rangle - \\ &- \langle G[X^H, \gamma\overline{Z}], \overline{Y}\rangle. \end{aligned}$$

Ezeket összeadva

$$(33)\qquad \begin{aligned} 2\langle \nabla_X \overline{Y}, \overline{Z}\rangle &= X\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle + \langle G[X^H, \gamma\overline{Y}], \overline{Z}\rangle + \\ &+ \langle L[X^V, \beta\overline{Y}], \overline{Z}\rangle - \langle L[X^V, \beta\overline{Z}], \overline{Y}\rangle - \langle G[X^H, \gamma\overline{Z}], \overline{Y}\rangle. \end{aligned}$$

Az előzőkhöz hasonlóan látható be, hogy a (33) által definiált leképezés valóban az egyetlen Finsler-konnexió, amely teljesíti a 2D) Tétel feltételeit. □

(33)-ból következik a szóban forgó Finsler-konnexió paramétereinek a lokális leírása:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kp}(\delta_i(g_{jp}) + \partial_{\cdot j}(N_i^l) g_{lp} - \partial_{\cdot p}(N_i^l) g_{lj})$$

$$C_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kp} \partial_{\cdot i}(g_{jp}).$$

A 2A)—2D) Tételeket általánosíthatjuk azáltal, hogy metrikusság helyett csak Q-metrikusságot követelünk, azonkívül $T(X^H, Y^H) = S(X, Y^V) = 0$ helyett a jobb oldalon tetszőlegesen adott antiszimmetrikus (1, 2) tenzor állhat. Ezeket az általánosításokat a 2A) Tétel bizonyításához analóg módon nehézség nélkül bizonyíthatjuk, ezért itt csak a tételeket mondjuk ki.

Legyen

$$t, s\colon \operatorname{Sec}\pi^*(TM) \times \operatorname{Sec}\pi^*(TM) \to \operatorname{Sec}\pi^*(TM)$$

két adott $C^\infty(\tilde{M})$-bilineáris antiszimmetrikus leképezés, továbbá tekintsük a következő követelményeket:

e) $S(X^V, Y^V) = s(GX^V, GY^V)$

f) $T(X^H, Y^H) = t(LX^H, LY^H)$,

$$X^H, Y^H \in N; \quad X^V, Y^V \in V\tilde{M}.$$

Ekkor igaz a

2′. Tétel. *Egy (M, g) Finsler-térben adott N esetén pontosan egy Q-metrikus Finsler-konnexió létezik, melyre az a)—f) követelmények közül az alábbi kettő teljesedik:*

A: a) és f); B: e) és f); C: d) és e).

Megjegyezzük, hogy a 2′. Tételben szereplő Finsler-konnexiók a (28)-, (31)-, (32)-hez hasonló képletek által vannak meghatározva. Például a 2′. B) Tétel feltételeit kielégítő (∇, N) Q-metrikus Finsler-konnexiót a következő összefüggés adja meg:

$$\begin{aligned}(34)\qquad 2\langle \nabla_X \overline{Y}, \overline{Z}\rangle &= X\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle + \beta\overline{Y}\langle LX, \overline{Z}\rangle - \beta\overline{Z}\langle LX, \overline{Y}\rangle + \\ &+ \langle L[\beta\overline{Z}, \beta\overline{Y}], LX\rangle - \langle L[X^H, \beta\overline{Z}], \overline{Y}\rangle + \langle L[X^H, \beta\overline{Y}], \overline{Z}\rangle - \\ &- \gamma\overline{Z}\langle GX, \overline{Y}\rangle + \gamma\overline{Y}\langle GX, \overline{Z}\rangle + \langle G[\gamma\overline{Z}, \gamma\overline{Y}], GX\rangle - \\ &- \langle G[\gamma\overline{Y}, X^V], \overline{Z}\rangle - \langle G[X^V, \gamma\overline{Z}], \overline{Y}\rangle - \langle t(LX, \overline{Z}), \overline{Y}\rangle + \\ &+ \langle t(LX, \overline{Y}), \overline{Z}\rangle + \langle t(\overline{Z}, \overline{Y}), LX\rangle - \langle s(GX, \overline{Z}), \overline{Y}\rangle + \\ &+ \langle s(GX, \overline{Y}), \overline{Z}\rangle + \langle s(\overline{Z}, \overline{Y}), GX\rangle - Q(X, \overline{Y}, \overline{Z}) + \\ &+ Q(\beta\overline{Z}, LX, \overline{Y}) - Q(\beta\overline{Y}, \overline{Z}, LX) + Q(\gamma\overline{Z}, GX, \overline{Y}) - Q(\gamma\overline{Y}, GX, \overline{Z}).\end{aligned}$$

A $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}}$ nyalábon a 2′. B) Tétel $Q \equiv 0$ speciális esetét Miron és Hashiguchi [13] lokálisan már megvizsgálta.

IRODALOM

[1] BARTHEL, W.: Nichtlineare Zusammenhängen und deren Holonomiegruppen, *J. Reine Angew. Math.* **212** (1963), 120—149.
[2] CARTAN, E.: Les espaces de Finsler, *Actualité* **59**, Paris, 1934.
[3] DOMBROWSKI, P.: On the geometry of the tangent bundles, *J. Reine Angew. Math.* **210** (1962), 73—88.
[4] GRIFONE, J.: Structure presque tangente et connexions, I—II, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **22**/1—2. (1972), 287—334; **22**/3—4. (1972), 291—338.
[5] HASHIGUCHI, M.: On parallel displacements in Finsler spaces, *J. Math. Soc. Japan* **10** (1958), 365—379.
[6] HASSAN, B. T.: The theory of geodesics in Finsler spaces, Ph. D. Thesis, Southampton, 1967.
[7] KAWAGUCHI, A.: Beziehung zwischen einer metrischen linearen Übertragung und einer nicht-metrischen in einem allgemeinen metrischen Raum, *Acad. Wetensh. Amsterdam. Proc.* **40** (1937), 596—601.
[8] KOBAYASHI, S.—NOMIZU, K.: *Foundations of differential geometry*, Vol. 1, Interscience Publishers, 1969.
[9] MATSUMOTO, M.: *Foundation of Finsler geometry and special Finsler spaces*, Kaiseisha, Kyoto, 1986.
[10] MATSUMOTO, M.—TAMÁSSY L.: Scalar and gradient vector fields on Finsler spaces and holonomy groups of non-linear connections, *Dem. Math.* **13** (1980), 551—564.
[11] MIRON, R.: Introduction to the theory of Finsler spaces, *Proc. Sem. on Finsler spaces*, Brasov (1980), 130—183.
[12] MIRON, R.: Vector bundle Finsler geometry, *Proc. Sem. on Finsler spaces*, Brasov (1982), 147—188.
[13] MIRON, R.—HASHIGUCHI, M.: Metrical Finsler connections, *Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ.* **12** (1971), 21—35.
[14] OBATA, M.: Affin connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure, *Jap. J. Math.* **26** (1957), 43—77.
[15] RUND, H.: *The differential geometry of Finsler spaces*, Springer, Berlin, 1959.
[16] SOÓS GY.: A Finsler-féle fibrált terek elméletéhez, *MTA III. Osztály közleményei* **13** (1963), 17—64.
[17] STAVRE, P.—KLEPP, F.: Invariants of special semi-symmetric Finsler connection transformations, *Publ. Math. Debrecen* **34** (1987), megjelenés előtt.

(Beérkezett: 1987. június 22-én)

Q-МЕТРИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ ФИНСЛЕРА

ЧАН КУОК БИН

Q-METRICAL FINSLER CONNECTIONS

TRAN QUOC BINH

The essential problem of linking the metric and the connection has been investigated also in the Finsler geometry by many geometers (e.g. Miron—Hashiguchi [13], Matsumoto [9], A. Kawaguchi [7], Obata [14], B. Hassan [6]). The basic problem is the determination of a connection ∇, such that the covariant derivative ∇g of the metric tensor g vanishes. This basic problem will be generalized in this paper in such a way that given a metric tensor g and another tensor Q of appropriate type we look for and investigate those connections ∇ which satisfy $\nabla g = Q$. These ∇ are called the Q-metrical connections of the given g. This is the widest generalization of the problem in this direction since, for some Q, any ∇ is a Q-metrical connection with respect to a given g.

§ 1 collects notions and notations of the global theory of the Finsler connections used in the paper.

In § 2 the Q-metrical Finsler connections of a given Finsler space (M, g) are determined. — Let M be a differentiable manifold, and $\tilde{M} := TM - \{0\}$ the total space of the tangent bundle $\mathcal{T}M = (TM, \pi, M)$ omitting the null vectors (the null-section). Let N be a non-linear connection of the bundle $\pi: \tilde{M} \to M$, and ∇ a linear connection in the pull-back bundle $\pi^*(TM)$, i.e. in the bundle of the Finsler vectors. Then the pair (∇, N) is called a Finsler connection.

Let us be given a Finsler space (M, g), a tensor Q and an arbitrary Finsler connection $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$ on it, which is not Q-metrical in general ($\mathring{\nabla} g$ may differ of Q).

Theorem 1. *All Q-metrical Finsler connections (∇, N) of (M, g) are determined by the relation*

$$\langle \nabla_X \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle \mathring{\nabla}_X \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \frac{1}{2} (\mathring{\nabla}_X g)(\bar{Y}, \bar{Z}) + \frac{1}{2} \langle A(X, \bar{Y}), \bar{Z} \rangle - \tag{13}$$

$$- \frac{1}{2} \langle A(X, \bar{Z}), \bar{Y} \rangle - \frac{1}{2} Q(X, \bar{Y}, \bar{Z}),$$

$$X \in \mathfrak{X}(\tilde{M}); \quad \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{U}, \bar{V} \in \mathrm{Sec}\, \pi^*(TM),$$

where $\langle \bar{U}, \bar{V} \rangle \equiv g(\bar{U}, \bar{V})$ and A is an arbitrary $C^\infty(\tilde{M})$-bilinear mapping

$$A: \mathfrak{X}(\tilde{M}) \times \mathrm{Sec}\, \pi^*(TM) \to \mathrm{Sec}\, \pi^*(TM);$$

and N is arbitrary.

Sketch of the proof. First we remark that (13) uniquely determines an **R**-bilinear mapping $X, \bar{Y} \mapsto \nabla_X \bar{Y}$ satisfying the known Koszul axioms (5) and (6). This can be seen in the same way as the corresponding statement in a Riemannian space (see Kobayashi—Nomizu [8], Theorem 2.2). Thus $\nabla_X \bar{Y}$ is a linear connection in $\pi^*(TM)$. Then we prove that the ∇ determined by (13) satisfies $(\nabla_X g)(\bar{Y}, \bar{Z}) = Q(X, \bar{Y}, \bar{Z})$ for any A, i.e. ∇ is a Q-metrical connection of (M, g). Conversely, if $\nabla g = Q$, then for any linear connection $\mathring{\nabla}$ there exists an A for which (13) is fulfilled. This $A(X, \bar{Y})$ is $\nabla_X \bar{Y} - \mathring{\nabla}_X \bar{Y}$.

In the metrical case ($Q \equiv 0$) the set of metrical connections was determined by Miron [11], resp., by Miron and Hashiguchi [13]; and in the case of an affine connection by Obata [14] by using the Obata-operator. All these proofs basically differ from the present one of Theorem 1.

The local coefficients of the Finsler connections (∇, N) of Theorem 1 are given in (16), where N_i^k are the parameters of N and Γ_{ij}^k and C_{ij}^k the parameters of ∇. X_i^k are arbitrary, and the definition of the quantities appearing in (16) can be found in the Hungarian text. The local coefficients of every metrical Finsler connection of a given (M, g) arise from (16) by putting $Q_{ijp} = q_{ijp} = 0$. If moreover the range of A is the null-section, i.e. $A_{ik}^l = a_{ik}^l = 0$, and $X_i^k = 0$, then we obtain A. Kawaguchi's result [7]. According to this the parameters in (16′) are the coefficients of a metrical Finsler connection (∇, N) of the (M, g), constructed from an arbitrary (i.e. in general nonmetrical) Finsler connection $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$. This can be formulated in our global terminology in the following manner: If $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$ is an arbitrary Finsler connection of (M, g), then the Finsler connection (∇, N) determined by (17′) is already a metrical connection of it.

Stavre and Klepp [17] call two Finsler connections (∇, N) and $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$ g-relative to each other if

$$\mathring{\nabla}_{\delta_i} g = \nabla_{\delta_i} g \quad \text{and} \quad \mathring{\nabla}_{\partial \cdot i} g = \nabla_{\partial \cdot i} g \tag{18}$$

hold. $\delta_i \equiv \dfrac{\delta}{\delta x^i}$ is here the horizontal lift according to N of $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ and $\partial_{\cdot i} := \dfrac{\partial}{\partial y^i}$, where (x^i) is the local coordinate system on $U \subset M$; and (x^i, y^i) is the associated local coordinate system on $\pi^{-1}(U) \subset \tilde{M}$. Stavre and Klepp determined every Finsler connection (∇, N) g-relative to a given one $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$. We find that these (∇, N) and $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$ are Q-metrical connections for an appropriate Q.

Proposition 1. *(∇, N) is g-relative to $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$ iff ∇ is Q-metrical with respect to g, for a Q given by*

$$Q(\delta_i, \bar{Y}, \bar{Z}) = (\mathring{\nabla}_{\delta_i} g)(\bar{Y}, \bar{Z})$$

$$Q(\partial_{\cdot i}, \bar{Y}, \bar{Z}) = (\mathring{\nabla}_{\partial \cdot i} g)(\bar{Y}, \bar{Z}). \tag{19}$$

Indeed, from the definition (18) of Stavre and Klepp and from the nature of Q described by (19) we obtain $\nabla_{\delta_i} g = \mathring{\nabla}_{\delta_i} g = Q(\delta_i)$, and similarly for $\partial_{\cdot i}$. This yields also the converse.

Proposition 2. *Exactly those Finsler connections* (∇, N) *are g-relative to a given* $(\mathring{\nabla}, \mathring{N})$ *whose local connection coefficients are* (16″).

We get this from (16) taking (19) into account.

A Finsler space (M, g) has many metrical connections (∇, N) (for which $\nabla g = Q = 0$). § 3 deals with the problem of their uniqueness. We give four simple conditions. Certain pairs of these as additional requirements to $\nabla g = 0$ make the metrical connection (∇, N) unique.

In order to draft these conditions we consider the horizontal subbundle $\mathscr{H}\tilde{M}$ of $\mathscr{T}_{\tilde{M}}$ determined by the connection N. Then $\mathscr{T}_{\tilde{M}} = \mathscr{H}\tilde{M} \oplus \mathscr{V}\tilde{M}$, the last term denoting the vertical subbundle of $\mathscr{T}_{\tilde{M}}$. Let us still consider the mapping $L\colon T\tilde{M} \to \pi^*(TM)$ defined by (1). The restricted mapping $L|_{\mathscr{H}\tilde{M}}$ is then an isomorphism $\mathscr{H}\tilde{M} \to \pi^*(TM)$, whose inverse is denoted by β (see (2)). Finally, let us consider $\gamma\colon \pi^*(TM) \to \mathscr{V}\tilde{M}$ (see (3)) and the mapping $G\colon T\tilde{M} \to \pi^*(TM)$ defined as $G := \gamma^{-1}(\mathrm{id} - \beta \circ L)$ (see (4)). Then the L-torsion tensor T and the G-torsion tensor S of a Finsler connection ∇ are defined by (7), resp. (8). — X^V means the vertical, and X^H the horizontal part of a vector field $X \in \mathscr{X}(\tilde{M})$.

a) $\langle T(X^V, Y), LZ\rangle = \langle T(X^V, Z), LY\rangle$

b) $S(X^V, Y^V) = 0$

c) $T(X^H, Y^H) = 0$

d) $\langle S(X^H, Y), GZ\rangle = \langle S(X^H, Z), GY\rangle$

$$X^H, Y^H \in N; \quad X^V, Y^V \in \mathscr{V}\tilde{M}; \quad X, Y, Z \in \mathscr{X}(\tilde{M})$$

are four conditions for (∇, N).

Theorem 2. (Uniqueness): *For a given connection N there exists exactly one Finsler connection* (∇, N) *on a Finsler space* (M, g) *for which the following two of the above four conditions are satisfied:*

A: a) and c); B: b) and c);

C: b) and d); D: a) and d).

These are four different statements which will be referred to as Theorem 2A, Theorem 2B, ...

As well-known, a special case of the Finsler space (M, g) is the classical Finsler space (M, F), where F means the fundamental function from which the components of g in a local coordinate system (x^i, y^i) can be obtained in the form

$$g_{ij} := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}.$$

Remark 1. In an (M, F) B. Hassan [6] has proved in a local way a theorem similar to our Theorem 2A. The difference is that in condition c) Hassan has $X^H, Y^H \in H := \{X \in \mathscr{X}(\tilde{M}) | \nabla_X \bar{v} = 0\}$ in place of $X^H, Y^H \in N$, where $\bar{v}$ is the fundamental vector field: $\bar{v} := y^i \bar{\partial}_i$; $\bar{\partial}_i\colon \tilde{M} \to \pi^*(TM)$, $\tilde{m} \mapsto \bar{\partial}_i(\tilde{m}) := (\tilde{m}, \partial_i(\pi(\tilde{m})))$. Thus our Theorem 2A generalizes in a certain sense Hassan's theorem.

Remark 2. Conditions b), c) of Theorem 2B are actually generalizations of Matsumoto's [9] conditions forming an axiom system of the Cartan connection of an (M, F). A statement analogous to Theorem 2B on $\mathscr{T}\tilde{M}$ can be found in Miron [11].

Sketch of the proof of Theorem 2A. First we show that in consequence of the metricness of ∇ ($\nabla g = 0$) expressed by (20), of conditions a) and c), and of the form (7) of T, ∇ must satisfy (28) for any $Z \in \mathrm{Sec}\, \pi^*(TM)$. But g is nondegenerate, thus (28) determines ∇ uniquely. It can be checked by an elementary but lengthy calculation that the ∇ determined by (28) satisfies all the Koszul

axioms, and thus it is a Finsler connection in $\pi^*(TM)$. Finally, it can be seen that this ∇ is metrical and satisfies a) and c). — The connection parameters of this ∇ are given by (28*).

Proofs of Theorems 2B, 2C, 2D are essentially similar.

Lastly Theorems 2A—2D are generalized by requiring Q-metricness from ∇ in place of metricness, and by replacing b) and c) by

e) $S(X^V, Y^V) = s(GX^V, GY^V)$,

f) $T(X^H, Y^H) = t(LX^H, LY^H)$,

where

$$t, s\colon \operatorname{Sec}\pi^*(TM)\times\operatorname{Sec}\pi^*(TM) \to \operatorname{Sec}\pi^*(TM)$$

are two $C^\infty(\tilde{M})$-bilinear skew symmetric mappings.

Theorem 2′. *For a given connection N there exists exactly one Finsler connection (∇, N) on a Finsler space (M, g) for which the following two of the above conditions a)—f) are satisfied:*

A: a) and f); B: e) and f); C: d) and e).

A KY FAN-KONVEXITÁSRÓL

HORVÁTH MIKLÓS és JOÓ ISTVÁN

A játékelmélet alaptételét Neumann János bizonyította be [1]. Eszerint, ha két játékos játszik egymás ellen és véges sok stratégia közül választhatnak, akkor van olyan kevert stratégiákból álló pár, amelyik mindkét játékos számára optimális, feltéve hogy „okos" ellenféllel játszik mindkettő. Más szóval, a játék kimeneteleit leíró kifizetőfüggvénynek van nyeregpontja. Később számos konvexitásfogalom mellett bizonyítottak hasonló tételeket. Mi ezek közül egy nevezetes és eléggé „egzotikus" konvexitásfogalomra vonatkozó eredményt említünk meg. Nevezzünk egy $f\colon X\times Y\to\mathbf{R}$ függvényt az x változóban Ky Fan-konkávnak, ha

$$(1)\qquad \forall x_1, x_2\in X\quad \forall\lambda\in[0,1]\quad \exists x_0\in X\colon \forall y\in Y$$
$$f(x_0,y)\geqq\lambda f(x_1,y)+(1-\lambda)f(x_2,y).$$

A Ky Fan-konvexitás úgy értelmezendő, hogy (1)-ben az egyenlőtlenséget megfordítjuk.

A) Tétel (Ky Fan [2]). *Legyen X kompakt Hausdorff-tér, Y tetszőleges halmaz, $f\colon X\times Y\to\mathbf{R}$ egy tetszőleges függvény, amely*

a) *x-ben Ky Fan-konkáv,*
b) *y-ban Ky Fan-konvex,*
c) *az $x\mapsto f(x,y)$ függvények felülről félig folytonosak minden rögzített $y\in Y$ esetén.*

Ekkor teljesül a minimax-egyenlőség, azaz

$$(2)\qquad \sup_x \inf_y f(x,y)=\inf_y \sup_x f(x,y).$$

Joó István [7] egy ötletét továbbfejlesztve [3]-ban a szerzők egyszerű bizonyítást adtak az A) Tételre és megfogalmazták (többek között) a következő problémát. Nikaidó—Isoda-tétel néven ismert a következő eredmény.

B) Tétel ([4]). *Legyen $f_1, f_2\in C([0,1]\times[0,1])$ és tegyük fel, hogy f_1 közönséges értelemben konkáv az x változóban, f_2 pedig az y változóban. Ekkor van olyan $(x_0,y_0)\in[0,1]\times[0,1]$, hogy*

$$(3)\qquad f_1(x_0,y_0)\geqq f_1(x,y_0)\quad (x\in[0,1]),$$

$$(4)\qquad f_2(x_0,y_0)\geqq f_2(x_0,y)\quad (y\in[0,1]).$$

A [3]-ban megfogalmazott kérdés az volt, hogy igaz-e a B) Tétel a Ky Fan-konkávitással. A negatív választ Joó István adta meg a [6] dolgozatában. Az ott leírt

bizonyítás tömör és a szemléleti motivációt nem tartalmazza, emiatt nehezen érthető. Az alábbiakban a [6]-beli konstrukció módosításával megmutatjuk, hogy a B) Tétel a Ky Fan-konkavitással még simasági kikötésekkel sem menthető meg. Nevezetesen, érvényes a következő

Tétel. *Vannak olyan* $f_1, f_2 \in C^\infty([0,1]\times[0,1])$ *függvények, hogy* f_1 *Ky Fan-konkáv* x*-ben,* f_2 *pedig* y*-ban és nincs olyan* $x_0, y_0 \in [0,1]$, *amire* (3) *és* (4) *fennáll.*

A Tétel bizonyítása néhány észrevételen alapul. Először is, ha adottak a h_1, h_2: $[0,1] \to \mathbf{R}$ függvények úgy, hogy

$$(5) \qquad \forall x_1, x_2 \in [0,1] \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \exists x_0 \in [0,1]:$$

$$\lambda h_1(x_1) + (1-\lambda) h_1(x_2) \leqq h_1(x_0),$$

$$\lambda h_2(x_1) + (1-\lambda) h_2(x_2) \leqq h_2(x_0);$$

akkor a h_1, h_2 függvényeket az egységnégyzet alap és fedőlapján felvéve, a lineáris kiterjesztéssel kapott

$$f_1(x, \mu) := (1-\mu) h_1(x) + \mu h_2(x)$$

függvény Ky Fan-konkáv lesz x-ben. Az (egyszerű) bizonyítás [6]-ban található. A konstrukciót ennek alapján adjuk meg, mivel (5)-öt lényegesen könnyebb ellenőrizni, mint (1)-et. Az (5) tulajdonság geometriailag szemléltethető a következő módon. Legyen h_1, h_2: $[0,1] \to \mathbf{R}$ tetszőleges függvények. Tekintsük az

$$A := \{(h_1(x), h_2(x)) : x \in [0,1]\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

halmazt. Könnyen látható, hogy (5) pontosan akkor igaz, ha az A halmaz konvex burkának bármely pontjához van olyan pontja A-nak, mely az előbbi pontot mindkét koordinátájában majorálja.

Ezek után tegyük fel, hogy a h_1, h_2 függvényeket úgy adtuk meg, hogy

$$h_1(0) = 0, \quad h_1(1/4) = h_1(3/4) = 1/2, \quad h_1(1) \geqq 1,$$

$$h_2(0) \geqq 1, \quad h_2(1/4) = h_2(3/4) = 1/2, \quad h_2(1) = 0,$$

továbbá h_1 monoton növő $[0, 1/4]$-en és $[3/4, 1]$-en, $0 < h_1, h_2 < 1/2$ az $[1/4, 3/4]$ szakaszon, végül $h_1 + h_2 \geqq 1$ a $[0, 1/4]$ és $[3/4, 1]$ szakaszokon. Azt állítjuk, hogy a fenti kikötések mellett a h_1, h_2 függvénypár Ky Fan-konkáv, azaz (5) fennáll. Valóban, a $(h_1(x), h_2(x))$ párok $x \in [0, 1/4]$ esetén befutnak egy a $[(0, h_2(0)), (1/2, 1/2)]$ szakasz fölötti ívet, $x \in [3/4, 1]$ esetén pedig egy az $[(1/2, 1/2), (h_1(1), 0)]$ szakasz fölötti ívet. Így az A halmaz az egységnégyzet mellékátlója fölötti ívből és az alatta lévő háromszög valamely részhalmazából áll, tehát teljesül rá a fent említett geometriai tulajdonság és így (5) is. Mármost világos, hogy az $x \mapsto f_1(x, \mu)$ függvény maximumhelyeinek halmaza $0 \leqq \mu < 1/2$ esetén $\{1\}$, $\mu = 1/2$ esetén $[0, 1/4] \cup [3/4, 1]$, $1/2 < \mu \leqq 1$ esetén pedig $\{0\}$. Ebből következik, hogy a

$$C_1 := \{(x_0, y_0) : f_1(x_0, y_0) = \max_{x \in [0,1]} f_1(x, y_0)\}$$

halmazra

$$C_1 = (\{1\} \times [0, 1/2]) \cup ([0, 1/4] \times \{1/2\}) \cup ([3/4, 1] \times \{1/2\}) \cup (\{0\} \times [1/2, 1]),$$

és így C_1 nem választja szét az egységnégyzet függőleges oldalait: van olyan $\varphi\colon [0,1]\to[0,1]\times[0,1]$ folytonos görbe, hogy

$$\varphi(0)\in\{0\}\times[0,1],\quad \varphi(1)\in\{1\}\times[0,1],\quad \varphi([0,1])\cap C_1=\emptyset.$$

Feltehető még, hogy φ első koordinátája, $\mathrm{pr}_1\varphi$ szigorúan monoton növő. Adjunk meg egy olyan $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ konkáv függvényt, aminek $y=0$-ban van egyetlen maximumhelye és máshol nincs. Pl. legyen $g(y)=-y^2$. Adjunk meg rögzített $x\in[0,1]$-re $f_2(x,y)$-t úgy, hogy véve azt a $z\in[0,1]$-et, amelyre $pr_1\varphi(z)=x$, eltoljuk g-t a $\varphi(z)$ pontba. Pontosabban legyen

$$f_2(x,y):=g(y-pr_2\varphi(z))\quad (y\in[0,1]).$$

Akkor világos, hogy a

$$C_2:=\{(x_0,y_0):f(x_0,y_0)=\max_{y\in[0,1]}f(x_0,y)\}$$

halmazra $C_2=\varphi([0,1])$ és így $C_1\cap C_2=\emptyset$, ami éppen azt jelenti, hogy nem létezik (3) és (4)-et kielégítő (x_0,y_0) pontpár. A fenti konstrukcióban nem ügyeltünk a simasági kikötésekre, de ezen könnyen segíthetünk. Először is könnyen megkonstruálható olyan h_1 polinom, ami teljesíti a fenti konstrukcióban előírt feltételeket, például, könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$h_1(x)=\frac{32}{3}(x-1/4)^2(x-3/4)+1/2,\quad h_2(x)=h_1(1-x)$$

polinompár kielégíti a feltételeket. Akkor pedig az $f_1(x,y)$ függvény C^∞-beli lesz. Hasonlóan feltehető, hogy $\varphi([0,1])$ egy polinom grafikonja és akkor a $g(y)=-y^2$ függvénnyel képzett $f_2(x,y)$ is C^∞-beli függvény lesz. Ezzel a Tételt igazoltuk.

Megjegyzés. A konstrukció azon múlott, hogy olyan tulajdonságú $f_1(x,y)$ függvényt adtunk meg, amelynél a rögzített y-ra tekintett parciális függvények maximumhelyeinek uniója, a C_1 halmaz, nem választotta szét az egységnégyzet két oldallapját: létezett olyan, az oldalakat összekötő sima görbe, amely „átbújt" a C_1 halmazon. Valójában a C_1 vagy C_2 halmaz „lyukassága" egy gyengébb értelemben már szükséges is ahhoz, hogy $C_1\cap C_2=\emptyset$-t garantálni lehessen. Valóban, érvényes a következő

Állítás. *Legyen* $f_1, f_2\in C([0,1]\times[0,1])$. *Akkor nyilván* C_1 *és* C_2 *zárt halmazok. Tegyük fel, hogy* C_1 *és* C_2 *egyike sem „lyukas", azaz*

a) Nincs olyan (topológiai) komponense az $I_1\times I_2\setminus C_1$, $I_1\times I_2$*-beli nyílt halmaznak, amely egyszerre metszené* $\{0\}\times[0,1]$*-et és* $\{1\}\times[0,1]$*-et,*

b) Nincs olyan komponense $I_1\times I_2\setminus C_2$*-nek* $I_1\times I_2$*-ben, amely egyszerre metszené* $[0,1]\times\{0\}$*-t és* $[0,1]\times\{1\}$*-et.*

Akkor $C_1\cap C_2\neq\emptyset$.

Bizonyítás. Jelöljük U_1-gyel $I_1\times I_2\setminus C_1$ azon komponenseinek unióját, melyek metszik $\{0\}\times[0,1]$-et, V_1-gyel pedig a többi komponens unióját. Legyen

$$g_1(x,y):=\begin{cases}x+\mathrm{dist}((x,y),C_1), & \text{ha } (x,y)\in U_1;\\ x-\mathrm{dist}((x,y),C_1), & \text{ha } (x,y)\in V_1;\\ x, & \text{ha } (x,y)\in C_1.\end{cases}$$

Akkor nyilván $g_1 \in C([0, 1]\times[0, 1])$; másrészt

$$g_1([0, 1]\times[0, 1]) \subset [0, 1].$$

Ez onnan következik, hogy $(x, y)\in U_1$ esetén van olyan $x' > x$, $(x, y)\in V_1$ esetén pedig olyan $x' < x$, hogy $(x', y)\in C_1$ és x-től mindkét esetben az x' irányában mérjük fel $\operatorname{dist}((x, y), C_1)$-et. Hasonlóan, C_2-ből kiindulva definiálhatunk egy $g_2 \in C([0, 1]\times[0, 1])$ függvényt, amelyre $g_2([0, 1]\times[0, 1]) \subset [0, 1]$. Ezért

$$(g_1, g_2)\colon [0, 1]\times[0, 1] \to [0, 1]\times[0, 1]$$

folytonos függvény. Brouwer fixponttétele szerint (g_1, g_2)-nek van fixpontja, és ez a pont C_1 és C_2 zártsága miatt eleme a $C_1 \cap C_2$-nek is. Ezzel az Állítást igazoltuk.

Megjegyzés. A Tételben megkonstruált $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ függvények kétváltozós polinomok, tehát analitikusak abban az értelemben, hogy a Taylor-soruk előállítja őket. Nem világos azonban, hogy megadhatók-e harmonikus f_1, f_2 függvények, melyek ugyancsak kielégítik a Tétel feltételeit.

IRODALOM

[1] J. von Neumann: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.* **100** (1928), 295—320.
[2] Ky Fan: Minimax theorems, *Proc. Acad. Sci. U.S.A.* **39** (1953), 42—48.
[3] M. Horváth, A. Sövegjártó: On convex functions, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **29** (1986), 193—198.
[4] H. Nikaido, K. Isoda: Note on noncooperative convex games, *Pacific J. Math.* **5** (1955), 807—815.
[5] I. Joó, L. L. Stachó: A note on Ky Fan's minimax theorem, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **39** (1982), 401—407.
[6] I. Joó: Answer to a problem of M. Horváth and A. Sövegjártó, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **29** (1986), 203—207.
[7] I. Joó: Note on my paper "A simple proof for von Neumann's minimax theorem", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **44** (1984), 363—365.

(Beérkezett: 1987. június 25-én)

О ВЫПУКЛОСТИ КИ ФАНА

М. ХОРВАТ и И. ЙО

ON KY FAN CONVEXITY

M. HORVÁTH and I. JOÓ

We prove that the Nikaido—Isoda theorem (Theorem B above) fails even for smooth functions if concavity is replaced by the Ky Fan concavity. Namely, we have proved the following theorem.

Theorem. *There are polynomials f_1, f_2 of two variables (restricted to $[0, 1]\times[0, 1]$) such that f_1 is Ky Fan-concave in x, f_2 in y and there is no point $(x_0, y_0)\in[0, 1]\times[0, 1]$ satisfying* (3), (4).

A LAPLACE-OPERÁTOR SAJÁTFÜGGVÉNYEIRŐL

BOGMÉR ANTAL

Differenciáloperátorok sajátfüggvényei szerint sorfejtések konvergenciájának vizsgálatához számos becslés szükséges a sajátfüggvényekre (l. például [3], [5], [6]). Joó István egy becslési eljárást adott meg [1]-ben az egydimenziós Schrödinger-operátor sajátfüggvényeire, majd Komornik Vilmos igazolta [2]-ben e becslések pontosságát. Ezek a becslések a [3] dolgozat ekvikonvergencia-tételének bizonyításában alapvető szerepet játszanak. Jelen dolgozat célja a többdimenziós Laplace-operátor sajátfüggvényeire analóg felső becslést adni, Joó István módszerének megfelelő általánosításával. A dolgozat becsléseinek a két oldalán más-más kompakt halmazok szerepelnek, ezért becsléseink Komornik Vilmos [8] dolgozatának eredményeit is továbbfejlesztik.

Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ($N \geqq 1$) tetszőleges N-dimenziós tartomány, $q \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tetszőleges (komplex) függvény ($L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ jelöli az Ω tetszőleges kompakt részhalmazán Lebesgue szerint négyzetesen integrálható függvények osztályát). Tekintsük a formális Schrödinger-operátort:

$$l = -\Delta + q.$$

Legyen λ tetszőleges komplex szám. Az $u\colon \Omega \to \mathbf{C}$, $u \equiv 0$ függvényt az l operátor -1-edrendű sajátfüggvényének nevezzük. $u\colon \Omega \to \mathbf{C}$, $u \not\equiv 0$, $u \in W_2^1(\Omega)$ függvényt az l operátor i-edrendű, λ sajátértékű sajátfüggvényének nevezzük, ha $lu = \lambda u - u^*$ teljesül m. m. (majdnem mindenütt) Ω-ban, ahol u^* az l operátor $(i-1)$-edrendű, λ sajátértékű sajátfüggvénye.

Igazoljuk jelen dolgozatban a következő tételt.

Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ tetszőleges tartomány és u_0, u_1 a Laplace-operátor tetszőleges 0- és 1-rendű sajátfüggvényei $-\lambda \in \mathbf{C}$ sajátértékkel, azaz $-\Delta u_1 = \lambda u_1 + u_0$, és $-\Delta u_0 = \lambda u_0$ ($q \equiv 0$). Ekkor tetszőleges $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, és $0 < R < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$-hoz van olyan $C_i = C_i(K, R)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) állandó, amellyel fennállnak a következő becslések:*

$$\|u_0\|_{L^\infty(K)} \leqq C_1 \exp\{-C_2 |\operatorname{Im} \lambda^{1/2}|\}(|\lambda^{1/2}| + 1)\|u_0\|_{L^2(K_R)}, \tag{1}$$

$$\|u_0\|_{L^2(K)} \leqq C_3(|\lambda^{1/2}| + 1)^2 \|u_1\|_{L^2(K_R)}, \tag{2}$$

$$\|u_1\|_{L^\infty(K)} \leqq C_4(|\lambda^{1/2}| + 1)\|u_1\|_{L^2(K_R)}; \tag{3}$$

ahol

$$K_R := \{x \in \Omega\colon \operatorname{dist}(x, K) \leqq R\}.$$

A_i, $C_i > 0$ állandók nem függenek λ-tól, és az u_0, u_1 sajátfüggvényektől sem.

Megjegyzés. A (2) „antiapriori becslés" megfelelője (l. [1]) az egydimenziós Schrödinger-operátor esetén fontos szerepet játszott ezen operátor sajátfüggvényei szerinti sorfejtés konvergenciájának viszgálatánál (l. [3]). Várhatóan fontos hasonló szerepe lesz (2)-nek a többváltozós esetben.

Bizonyítás. A bizonyítás hasonlóan, mint [1]-ben, az u_i sajátfüggvényekre vonatkozó Titchmarsch-formulán alapul (l. [5], 232. o.):

$$(4)\qquad \int_\theta u_i(x_0+r\theta)\,d\theta = u_i(x_0)C_N(r\mu)^{1-N/2}J_{(N/2)-1}(r\mu)+$$

$$+\int_0^r \left(\int_\theta [qu_i-u_{i-1}](x+r\theta)\,d\theta\right)(t/r)^{(N/2)-1}\,t\cdot W_N(t\mu, r\mu)\,dt$$

$$(x_0\in\Omega,\ 0<r<\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega),\ \mu=\lambda^{1/2}).$$

A rövidség kedvéért használjuk a $p=(N/2)-1$ jelölést. $i>1$ esetén a (2)-nek megfelelő állítás bizonyításához várhatóan a (4)-nek kissé módosított alakjára lesz szükségünk, ezért először ezt igazoljuk. Megmutatjuk, hogy $x_0\in\Omega$, $0<r<\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)$ esetén fenn áll a következő egyenlőség:

$$(5)\qquad u_{i-1}(x_0)\frac{1}{2}(r\mu)^{-(p+1)}J_{p+1}(r\mu)\,r^2 =$$

$$=\int_0^r\left(\int_\theta u_{i-1}(x_0+t\theta)\,d\theta\right)W_N(t\mu, r\mu)\left(\frac{t}{r}\right)^p t\,dt-$$

$$-\int_0^r\left(\int_0^t\left(\int_\theta [qu_i-u_{i-2}](x_0+\eta\theta)\,d\theta\right)\left(\frac{\eta}{t}\right)^p tW_N(\eta\mu, t\mu)\,d\eta\right)W_N(t\mu, r\mu)\left(\frac{t}{r}\right)^p t\,dt.$$

A (4), ill. (5) formulákban $\int f(x_0+r\theta)\,d\theta$ az x_0 középpontú, r sugarú gömbfelületen vett integrált jelöli ($d\theta$ e gömbfelületen vett normált Lebesgue-mérték), $C_N=2^p\Gamma(N/2)$, továbbá $\mu=\lambda^{1/2}$ egy tetszőleges gyököt jelöl, és

$$(6)\qquad W_N(t, r) := \frac{1}{4}\pi^{-p}\Gamma(N/2)[J_p(t)Y_p(r)-J_p(r)Y_p(t)]$$

az ún. N-edik Watson-függvény, és J_p, ill. Y_p a p-edik Bessel-, ill. Neumann-függvény.

Az (5) bizonyításához először igazoljuk a következő (önmagában is érdekes) azonosságot:

$$(7)\qquad \int_0^r \frac{J_p(\mu t)}{(\mu t)^p}W_N(t\mu, r\mu)\left(\frac{t}{r}\right)^p t\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{J_{p+1}(r\mu)}{(r\mu)^{p+1}}\,r^2,$$

azaz

$$(8)\qquad \pi\int_0^r J_p(\mu t)[Y_p(r\mu)J_p(t\mu)-Y_p(t\mu)J_p(r\mu)]\,t\mu\,dt = rJ_{p+1}(r\mu).$$

A (8) mindkét oldala analitikus $\mu\neq 0$-ban, ezért a Monodrómia-tétel alapján elég (8)-at igazolni $\mu>0$-ra. A $\mu>0$ esetben viszont $\tau=\mu t$ helyettesítéssel kap-

juk (8)-ból:

$$\pi \int_0^{r\mu} J_p(\tau)[Y_p(r\mu)J_p(\tau)-Y_p(\tau)J_p(r\tau)]\frac{\tau}{\mu}\,d\tau = rJ_{p+1}(r\mu),$$

azaz elég igazolni a következő azonosságot:

$$\pi \int_0^{r} J_p(\tau)[Y_p(r)J_p(\tau)-Y_p(\tau)J_p(r)]\tau\,d\tau = rJ_{p+1}(r) \quad (r>0). \tag{9}$$

Vezessük be a következő segédfüggvényt:

$$f(r) := \pi \int_0^{r} J_p(\tau)[Y_p(r)J_p(\tau)-Y_p(\tau)J_p(r)]\tau\,d\tau,$$

és számítsuk ki az $f'(r)$, ill. $f''(r)$ mennyiségeket. Figyelembe véve a következő azonosságot:

$$J_p(r)Y_p'(r)-J_p'(r)Y_p(r) = \frac{2}{\pi r} \tag{10}$$

(l. [4], 31. o. (9.6)), kapjuk:

$$f'(r) = \pi \int_0^{r} J_p(\tau)[Y_p'(r)J_p(\tau)-Y_p(\tau)J_p'(r)]\tau\,d\tau, \tag{11}$$

$$f''(r) = 2J_p(r)+\pi \int_0^{r} J_p(\tau)[Y_p''(r)J_p(\tau)-Y_p(\tau)J_p''(r)]\tau\,d\tau. \tag{12}$$

Most definiáljuk a következő segédfüggvényt:

$$g(r) := f(r)-rJ_{p+1}(r).$$

Könnyen látható, hogy g kielégíti a következő differenciálegyenletet:

$$(Lg :=)\, r^2g''(r)+rg'(r)+(r^2-p^2)g(r) = 0. \tag{13}$$

Valóban, figyelembe véve azt a jól ismert tényt, hogy az $Lg=0$ egyenlet általános megoldása $C_1J_p+C_2Y_p$, továbbá felhasználva (11)-et, egyszerű számolással kapjuk:

$$Lg = Lf-L(rJ_{p+1}(r)) = 2r[rJ_p(r)-rJ_{p+1}'(r)+(p+1)J_{p+1}(r)] = 0. \tag{14}$$

(Az utóbbi egyenlőség jól ismert, l. például [4], 24. o.) Másrészt $g(0)=0$, ezért $g=C_1J_p$, mivel $p\geqq 0$ esetén $J_p(r)=O(1)$ és $|Y_p(r)|\to\infty$, ha $r\to+0$. Figyelembe véve az f és g definícióját, továbbá a $g=C_1J_p$ egyenlőséget, és a

$$J_p(r) = O(r^p), \quad Y_p(r) = O(r^{-p}) \quad (r>0,\ p>0)$$

$$J_p(r) = O(1), \quad Y_p(r) = O(\log r) \quad (r>0)$$

relációkat, kapjuk: $C_1=0$, azaz $g=0$. Ezzel a (7) azonosságot igazoltuk.

Most a (4)-et felírjuk $(i-1)$-re:

$$u_{i-1}(x_0)\cdot C_N\cdot\frac{J_p(t\mu)}{(r\mu)^p}=\int_\theta u_{i-1}(x_0+t\theta)\,d\theta-$$

$$-\int_0^t\Big(\int_\theta[qu_{i-1}-u_{i-2}](x_0+\eta\theta)\,d\theta\Big)(\eta/t)^p\cdot\eta\cdot W_N(\eta\mu,\,t\mu)\,d\eta.$$

Az egyenletet szorozzuk meg $W_N(t\mu,\,r\mu)\cdot(t/r)\cdot t$-vel és integráljuk 0-tól r-ig t szerint. Az egyenlet bal oldalán felhasználva (7)-et, kapjuk az (5)-öt.

Az $N=3$ esetben, $\lambda^{1/2}=\mu$ jelölést bevezetve, a 0-adrendű sajátfüggvényre a Titchmarsch-formula:

$$\int_\theta u(x+r\theta)\,d\theta=4\pi\frac{\sin r\mu}{r\mu}u(x),$$

és általában, ha

$$-\Delta u=\lambda u+u^*,$$

akkor

$$\text{(15)}\qquad\int_\theta u(x+r\theta)\,d\theta=4\pi\frac{\sin r\mu}{r\mu}u(x)-\int_0^r t\Big(\int_\theta u^*(x+t\theta)\,d\theta\Big)\frac{\sin\mu(r-t)}{\mu r}\,dt.$$

Ennek a bizonyítása hasonló az $u^*=0$ esethez. Valóban, az u, 1 függvényekre felírva a Green-formulát:

$$\int_{K(x,r)}\Delta u=\int_{\partial K(x,r)}\frac{\partial u}{\partial r}=r^2\int_\theta\frac{\partial u}{\partial r}u(x+r\theta)\,d\theta,$$

azaz

$$\int_0^r t^2\Big(\int_\theta\Delta u(x+t\theta)\,d\theta\Big)\,dt=\int_0^r t^2\Big(-\lambda\int_\theta u(x+t\theta)\,d\theta-\int_\theta u^*(x+t\theta)\,d\theta\Big)\,dt.$$

Legyen

$$\varphi(t)=\int_\theta u(x+t\theta)\,d\theta.$$

Akkor a fenti egyenlet szerint

$$r^2\varphi'(r)=-\lambda\int_0^r t^2\varphi(t)\,dt-\int_0^r t^2\Big(\int_\theta u^*(x+t\theta)\,d\theta\Big)\,dt.$$

Deriválva

$$r^2\varphi''+2r\varphi'=-\lambda r^2\varphi-r\int_\theta u^*(x+r\theta)\,d\theta.$$

Ezt kielégíti a (15) jobb oldala, azaz

$$\text{(16)}\qquad\psi:=4\pi\frac{\sin r\mu}{r\mu}u(x)-\int_0^r t\,\frac{\sin\mu(r-t)}{\mu r}\Big(\int_\theta u^*(x+t\theta)\,d\theta\Big)\,dt.$$

Valóban, $4\pi \frac{\sin \mu r}{\mu r} u(x)$-re $r^2\varphi''+2r\varphi'+\lambda r^2\varphi=0$, és a másik tagon

$$\varphi' = -\int_0^r \left(\frac{\cos \mu(r-t)}{r} - \frac{\sin \mu(r-t)}{\mu r^2}\right) t \left(\int_\theta u^*(x+t\theta)\, d\theta\right) dt,$$

$$(r^2\varphi')' = \int_0^r \mu t \cdot \sin \mu(r-t) \left(\int_\theta u^*(x+t\theta)\, d\theta\right) dt - r^2 \int_\theta u^*(x+r\theta)\, d\theta.$$

Tehát a (16)-ban definiált ψ-re

$$(r^2\psi')'+\lambda r^2\psi = -r^2 \int_\theta u^*(x+r\theta)\, d\theta = (r^2\varphi')'+\lambda r^2\varphi.$$

Azaz $(r^2(\varphi-\psi)')'+\lambda r^2(\varphi-\psi)=0$. Mivel 0-ban $(\varphi-\psi)$-nek nincs szingularitása, ezért

$$\varphi-\psi = C \cdot \frac{\sin \mu r}{\mu r}.$$

Mivel $\varphi(0)=\psi(0)=4\pi u(x)$, ezért $C=0$, azaz $\varphi=\psi$. *Ezzel* (15)*-öt beláttuk.*

Nézzük először u_0-ra. Akkor (15) szerint

$$\int_\theta u_0(x+r\theta)\, d\theta = 4\pi \frac{\sin \mu r}{\mu r} u_0(x).$$

Ezért $x \in K$-ra

$$|u_0(x)| \left|\frac{\sin \mu r}{\mu r}\right| \leqq C \int_\theta |u_0(x+r\theta)|\, d\theta \leqq C \left(\int_\theta |u_0(x+r\theta)|^2\, d\theta\right)^{1/2},$$

$$|u_0(x)|^2 \int_0^R \left|\frac{\sin \mu r}{\mu r}\right|^2 r^2\, dr \leqq C \int_0^R r^2 \int_\theta |u_0(x+r\theta)|^2\, d\theta\, dr = C \cdot \|u_0\|^2_{L^2(K_R)},$$

azaz

$$|u_0(x)|^2 \int_0^R \left|\frac{\sin \mu r}{\mu}\right|^2 dr \leqq C \cdot \|u_0\|^2_{L^2(K_R)}.$$

Tudjuk, hogy

$$|\sin \mu r|^2 = \sin^2 \varrho r + \mathrm{sh}^2 \nu r = \mathrm{ch}^2 \nu r - \cos^2 \varrho r,$$

ha

$$\mu = \varrho + i\nu.$$

Ebből következik, hogy

$$\int_0^R \left|\frac{\sin \mu r}{\mu}\right|^2 dr \geqq \begin{cases} C \int_0^R r^2\, dr \geqq C(R) > 0, & \text{ha } |\mu R| < 1/100; \\ C \cdot \dfrac{\exp\{2|\nu| R\}}{|\mu|^2}, & \text{ha } |\mu R| > 1/100; \end{cases}$$

tehát általában

$$\int_0^R \left|\frac{\sin \mu r}{\mu}\right|^2 dr \geqq C \cdot \frac{\exp\{2|\nu| R\}}{(1+|\mu|)^2} \quad \text{akármilyen } \mu\text{-re.}$$

Ez a becslés *pontos*. Könnyű látni, hogy a fölső becslés ugyanilyen nagyságrendű. Végül is azt kapjuk, hogy

$$|u_0(x)|^2 \frac{\exp\{2|\nu| R\}}{(1+|\mu|)^2} \leqq C \cdot \|u_0\|^2_{L^2(K_R)},$$

ahonnan

$$\|u_0\|_{L^\infty(K)} \leqq C \cdot \exp\{-2|\nu| R\} \cdot (1+|\mu|) \|u_0\|_{L^2(K_R)}. \tag{17}$$

Most rátérünk a (2) bizonyítására. Ehhez (15) teljes alakja kell:

$$\int_\theta u_1(x+r\theta)\, d\theta = 4\pi \frac{\sin \mu r}{\mu r} u_1(x) - \int_0^r \left(\int_\theta u_0(x+t\theta)\, d\theta \right) t \frac{\sin \mu(r-t)}{\mu r}\, dt.$$

Itt

$$\int_\theta u_0(x+t\theta)\, d\theta = 4\pi \frac{\sin \mu t}{\mu t} u_0(x)\text{-et beírva,}$$

$$\int_\theta u_1(x+r\theta)\, d\theta = 4\pi \frac{\sin \mu r}{\mu r} u_1(x) - 4\pi u_0(x) \int_0^r t \frac{\sin \mu(r-t)}{\mu r} \cdot \frac{\sin \mu t}{\mu t}\, dt. \tag{18}$$

Az

$$\int_0^r \frac{\sin \mu(r-t) \sin \mu t}{\mu^2 r}\, dt = \frac{1}{\mu^2 r} \int_0^r \frac{\cos \mu(r-2t) - \cos \mu r}{2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\mu^2 r} \left(\left[\frac{\sin \mu(r-2t)}{-2\mu} \right]_{t=0}^{r} - r \cdot \cos \mu r \right) = \frac{\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r}{2\mu^3 r},$$

tehát

$$\int u_1(x+r\theta)\, d\theta = 4\pi \frac{\sin \mu r}{\mu r} u_1(x) - 4\pi \frac{\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r}{2\mu^3 r} u_0(x). \tag{19}$$

Az előzőek mintájára ebből

$$|u_0(x)|^2 \left| \frac{\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r}{\mu^3 r} \right|^2 \leqq C \cdot |u_1(x)|^2 \left| \frac{\sin \mu r}{\mu r} \right|^2 +$$

$$+ C \int_\theta |u_1(x+r\theta)|^2\, d\theta,$$

$$|u_0(x)|^2 \int_0^R \left| \frac{\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r}{\mu^3} \right|^2 dr \leqq$$

$$\leqq C \cdot |u_1(x)|^2 \int_0^R \left| \frac{\sin \mu r}{\mu} \right|^2 dr + C \cdot \|u_1\|^2_{L^2(K_R)} \leqq$$

$$\leqq C \cdot |u_1(x)|^2 \frac{\exp\{2|\nu| R\}}{(1+|\mu|)^2} + C \cdot \|u\|^2_{L^2(K_R)}.$$

Most még az $|u_0(x)|^2$ melletti integrált kell megbecsülni a következőképpen. Világ-

gos, hogy $|\nu|>C(R)$ esetén

$$\operatorname{sh}|\nu|\, r \leqq \begin{matrix}|\sin \mu r| \\ |\cos \mu r|\end{matrix} \leqq \operatorname{ch}|\nu|\, r$$

miatt $\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r$-ből a $\mu r \cdot \cos \mu r$ dominál, ezért

$$|\nu| > C(R) \Rightarrow \int_0^R |\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r|^2\, dr \geqq C \cdot |\mu|^2 \exp\{2|\nu| R\}.$$

Ha $|\nu| \leqq c_1(R)$, de $|\varrho| \geqq c_2(R, c_1(R))$, tehát jó nagy $|\nu|$-höz képest, akkor felhasználva a

$$\operatorname{Re}(\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r) =$$

$$= \sin \varrho r \cdot \operatorname{ch} \nu r - \varrho r \cdot \cos \varrho r \cdot \operatorname{ch} \nu r + \nu r \cdot \sin \varrho r \cdot \operatorname{sh} \nu r =$$

$$= \operatorname{ch} \nu r (\sin \varrho r - \varrho r \cdot \cos \varrho r) + \nu r \cdot \sin \varrho r \cdot \operatorname{sh} \nu r$$

kifejtést, látjuk, hogy a $-\varrho r \cdot \cos \varrho r \cdot \operatorname{ch} \nu r$ tag dominál az $[R/2, R]$ szakasz azon részszakaszain, ahol pl. $|\cos \varrho r| > 1/10$. Ezért

$$\left.\begin{matrix}|\nu| < c_1(R) \\ |\varrho| > c_2(c_1(R), R)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_0^R |\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r|^2\, dr \geqq c\, |\varrho|^2 \exp\{2|\nu| R\} \geqq$$

$$\geqq c\, |\mu|^2 \exp\{2|\nu| R\}.$$

Végül egyszerűen kompaktsági okokból

$$\left.\begin{matrix}|\nu| < c_1 \\ |\varrho| < c_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_0^R \left|\frac{\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r}{\mu^3}\right|^2 dr \geqq c(R) > 0.$$

Tehát végül tetszőleges μ-re

$$\int_0^R \left|\frac{\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r}{\mu^3}\right|^2 dr \geqq c \cdot \frac{\exp\{2|\nu| R\}}{(1+|\mu|)^4}.$$

Ezt beírjuk a (19)-ből kapott becslésbe:

$$|u_0(x)|^2 \leqq c \cdot |u_1(x)|^2 (1+|\mu|)^2 + c \cdot \frac{(1+|\mu|)^4}{\exp\{2|\nu| R\}} \cdot \|u_1\|^2_{L^2(K_R)}. \tag{20}$$

Ezt integrálva $x \in K$-ra kapjuk, hogy

$$\|u_0\|^2_{L^2(K)} \leqq c \cdot \|u_1\|^2_{L^2(K_R)} \left((1+|\mu|)^2 + (1+|\mu|)^4 \exp\{-2|\nu| R\}\right), \tag{21}$$

amiből (2) adódik.

Végül nézzük (3)-at. A (19) alapján

$$|u_1(x)|^2 \left|\frac{\sin \mu r}{\mu r}\right|^2 \leqq c \cdot |u_0(x)|^2 \cdot \left|\frac{\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r}{\mu^3 r}\right|^2 dr +$$

$$+ c \int_\theta |u_1(x + r\theta)|^2\, d\theta,$$

vagyis

$$|u_1(x)|^2 \int_0^R \left|\frac{\sin \mu r}{\mu}\right|^2 dr \leqq c \cdot |u_0(x)|^2 \int_0^R \left|\frac{\sin \mu r - \mu r \cdot \cos \mu r}{\mu^3}\right|^2 dr + c \cdot \|u_1\|^2_{L^2(K_R)},$$

$$|u_1(x)|^2 \cdot \frac{\exp\{2|\nu| R\}}{(1+|\mu|)^2} \leqq c \cdot |u_0(x)|^2 \cdot \frac{\exp\{2|\nu| R\}}{(1+|\mu|)^4} + c \cdot \|u_1\|^2_{L^2(K_R)},$$

$$\|u_1\|^2_{L^\infty(K)} \leqq c \cdot \|u\|^2_{L^\infty(K)} \cdot \frac{1}{(1+|\mu|)^2} + c \cdot \|u_1\|^2_{L^2(K_R)} \cdot \frac{(1+|\mu|)^2}{\exp\{2|\nu| R\}},$$

amiből következik a kívánt (3) becslés. Ezzel a tételt igazoltuk.

IRODALOM

[1] I. Joó: Upper estimates for the eigenfunctions of the Schrödinger operator, *Acta Sci. Math.* **44** (1982), 87—93.

[2] V. Komornik: Lower estimates for the eigenfunctions of the Schrödinger operator, *Acta Sci. Math.* **44** (1982), 95—98.

[3] I. Joó, V. Komornik: On the equiconvergence of expansions by Riesz bases formed by eigenfunctions of the Schrödinger operator, *Acta Sci. Math.* **46** (1983), 357—375.

[4] B. G. Korenev: *Introduction to the theory of Bessel functions*, Nauka, Moszkva, 1971.

[5] E. C. Titchmarsh: *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, Clarendon Press, Oxford, 1958.

[6] S. A. Alimov, I. Joó: On the Riesz summability of eigenfunction expansions, *Acta Sci. Math.* **45** (1983), 5—18.

[7] V. Komornik: Upper estimates for the eigenfunctions of higher order of a linear differential operator, *Acta Sci. Math.* **45** (1983), 261—271.

[8] V. Komornik: Local upper estimates for the eigenfunctions of a linear differential operator, *Acta Sci. Math.* **48** (1985), 243—256.

(Beérkezett: 1987. július 10-én)

О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

А. БОГМЕР

ON THE EIGENFUNCTIONS OF THE LAPLACE OPERATOR

A. BOGMÉR

We proved for the eigenfunctions u_0, u_1 (with eigenvalue $\lambda \in \mathbf{C}$) of order 0 and 1 of the Laplace operator on any three dimensional domain Ω the following estimates:

$$\|u_0\|_{L^\infty(K)} \leqq C_1 \exp\{-C_2 |\mathrm{Im}\, \lambda^{1/2}|\}(|\lambda^{1/2}|+1)\|u_0\|_{L^2(K_R)},$$

$$\|u_0\|_{L^2(K)} \leqq C_3(|\lambda^{1/2}|+1)^2 \|u_1\|_{L^2(K_R)},$$

$$\|u_1\|_{L^\infty(K)} \leqq C_4(|\lambda^{1/2}|+1)\|u_1\|_{L^2(K_R)};$$

$K \subset \Omega$ is an arbitrary compact set, $0 < R < \mathrm{dist}\,(K, \partial\Omega)$, $K_R = \{x \in \Omega\colon \mathrm{dist}\,(x, K) \leqq R\}$ and the constants $C_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ depend only on K and R (and do not depend on λ, u_0 and u_1).

MINIMAX TÉTELEK ÉS KONVEXITÁS

(Brouwer-tétel, Hahn—Banach-tétel, összefüggőség)

BOGMÉR ANTAL, HORVÁTH MIKLÓS és JOÓ ISTVÁN

A konvex analízisnek egy nagy és fontos fejezetét alkotják a fixponttételek és általánosításaik. Az eddigi vizsgálatokban e területen az alábbi két fő irányzat terjedt el:

— a Hahn—Banach-tétel alkalmazása

— a Brouwer-tétel (és általánosításai), valamint a vele rokon egyéb fixponttételek alkalmazása.

Joó István [15]-ben egy olyan új eljárást adott (a „nívóhalmazok módszerét"), amely tulajdonképpen csak a topológiai összefüggőséggel operál. Ezt a lehetőséget más formában korábban több szerző is felfedezte (l. Wu [27]), azonban úgy tűnik, hogy az eddigiek közül az összefüggőséget legjobban a [15]-ben adott eljárás aknázza ki.

Dolgozatunk célja, e módszer segítségével új eredmények igazolása (ezeket $*$ jelöli), valamint régi tételekre új (egyszerűbb) bizonyítást adni, és lehetőség szerint általánosítani, továbbá a „nívóhalmazmódszer"-hez természetesen kapcsolódó konvexitásfogalmakkal foglalkozni (általánosított Helly—Carathéodory és Radon tételeket megadni), végül nyitott problémákat megfogalmazni.

1. § Minimax tételek

Legyenek X és Y tetszőleges halmazok, $f\colon X\times Y\to\mathbf{R}$ tetszőleges függvény, továbbá

$$c_* := \sup_x \inf_y f(x, y), \quad c^* := \inf_y \sup_x f(x, y),$$

$$H_y^c := H_y := \{x\colon f(x, y) > c\},$$

$$\tilde{H}_y^c := \tilde{H}_y := \{x\colon f(x, y) \geqq c\},$$

$$H_x^c := H_x := \{y\colon f(x, y) < c\},$$

$$\tilde{H}_x^c := \tilde{H}_x := \{y\colon f(x, y) \leqq c\}.$$

1. Állítás. $c_* \leqq c^*$.

Bizonyítás:

$$\sup_x f(x, y_0) \geqq f(x_0, y_0),$$

$$\inf_{y_0} \sup_x f(x, y_0) \geqq \inf_{y_0} f(x_0, y_0).$$

$$\inf_{y_0} \sup_x f(x, y_0) \geqq \sup_{x_0} \inf_{y_0} f(x_0, y_0).$$

2. Állítás.

$$c_* = \sup\{c\colon H_y^c \neq \emptyset \ \forall y \in Y\} = \sup\{c\colon \tilde{H}_y^c \neq \emptyset \ \forall y \in Y\},$$

$$c^* = \inf\{c\colon H_x^c \neq \emptyset \ \forall x \in X\} = \inf\{c\colon \tilde{H}_x^c \neq \emptyset \ \forall x \in X\}.$$

Bizonyítás.

a) Ha $c > c^*$, akkor $\exists y_0\colon c > \sup_x f(x, y_0)$, azaz $\tilde{H}_{y_0}^c = \emptyset = H_{y_0}^c$.

b) Ha $c < c^*$, akkor $\forall y\colon c < \sup_x f(x, y)$, azaz $H_y^c \neq \emptyset$. A c_*-ra vonatkozó állítás $f_1(x, y) = -f(y, x)$-szel adódik a bizonyítottakból.

Definíció. (x_0, y_0) az f leképezés *nyeregpontja,* ha

$$f(x_0, y) \leqq f(x_0, y_0) \leqq f(x, y_0) \quad \forall x \in X, \quad y \in Y.$$

3. Állítás. *Ha* (x_0, y_0) *nyeregpont, akkor* $f(x_0, y_0) = c_* = c^*$.

Bizonyítás. A nyeregpont-tulajdonság azzal ekvivalens, hogy

$$\inf_y f(x_0, y) = f(x_0, y_0) = \sup_x f(x, y_0),$$

ezért

$$\sup_x \inf_y f(x, y) \leqq f(x_0, y_0) \leqq \inf_y \sup_x f(x, y) \leqq \sup_x \inf_y f(x, y).$$

4. Állítás (∗).

a) $\sup_x \inf_y f(x, y) = \inf_y \sup_x f(x, y)$

$$\overset{1}{\Leftrightarrow} \forall c < c^*\colon \bigcap_{y \in Y} H_y^c \neq \emptyset$$

$$\overset{2}{\Leftrightarrow} \forall c < c^*\colon \bigcap_{y \in Y} \tilde{H}_y^c \neq \emptyset$$

$$\overset{3}{\Leftrightarrow} \forall c > c_*\colon \bigcap_{y \in X} H_y^c \neq \emptyset$$

$$\overset{4}{\Leftrightarrow} \forall c > c_*\colon \bigcap_{x \in X} \tilde{H}_x^c \neq \emptyset.$$

b) *Létezik nyeregpont* $\overset{5}{\Leftrightarrow} \bigcap_{y \in Y} \tilde{H}_y^{c^*} \neq \emptyset$ *és* $\bigcap_{x \in X} \tilde{H}_x^{c_*} \neq \emptyset$.

Bizonyítás.

a) $\overset{1}{\Rightarrow}$ Ha $c_* = c^*$, akkor $\forall c < c_* = c^*$-ra $\exists x_0\colon c < \inf_y f(x_0, y) \Rightarrow x_0 \in H_y^c \ \forall y \in Y.$

$$\overset{2}{\Leftarrow} x_0 \in \bigcap_{y \in Y} \tilde{H}_y^c \Leftrightarrow f(x_0, y) \geqq c \ \forall y \in Y \Leftrightarrow \inf_y f(x_0, y) \geqq c, \text{ vagyis}$$

$$c \leqq \sup_x \inf_y f(x, y) = c_* \quad \forall c < c^*\text{-ra, ahonnan } c_* \geqq c^* \Rightarrow c_* = c^*.$$

A H_x^c, illetve $\tilde{H}_x^c$-ra vonatkozó állítások (3 és 4) úgy adódnak, hogy 1, 2-t alkalmazzuk az

$$f_1(x, y) = -f(y, x)$$

függvényre.

b) $\Rightarrow c^* = f(x_0, y_0) = \inf_y f(x_0, y)$ miatt $x_0 \in \tilde{H}_y^{c^*} \quad \forall y \in Y.$

$$c_* = f(x_0, y_0) = \sup_x f(x, y_0) \text{ miatt } y_0 \in \tilde{H}_x^{c_*} \quad \forall x \in X.$$

$$\Leftarrow y_0 \in \bigcap_{x \in X} \tilde{H}_x^{c_*} \Leftrightarrow \sup_x f(x, y_0) \leqq c_*,$$

$$x_0 \in \bigcap_{y \in Y} \tilde{H}_y^{c^*} \Leftrightarrow \inf_y f(x_0, y) \geqq c^*.$$

Tehát

$$\sup_x \inf_y f(x, y) \leqq \inf_y f(x_0, y) \leqq c^* \leqq c_* \leqq \sup_x f(x, y_0) \leqq$$

$$\leqq \inf_y \sup_x f(x, y) \leqq \sup_x \inf_y f(x, y),$$

azaz

$$\inf_y f(x_0, y) = \sup_x f(x, y_0)$$

és így

$$f(x_0, y_0) = \inf_y f(x_0, y) = \sup_x f(x, y_0).$$

Beláttuk a következőket is:

5. Állítás (*).

$$(x_0, y_0) \textit{ nyeregpont} \Leftrightarrow \inf_y f(x_0, y) \geqq \sup_x f(x, y_0).$$

Bizonyítás.

$$f(x_0, y_0) \geqq \inf_y f(x_0, y) \geqq \sup_x f(x, y_0) \geqq f(x_0, y_0).$$

Láttuk, hogy a $\tilde{H}_y^c$ halmazok metszettulajdonságán múlik a minimax egyenlőség és a nyeregpont létezése is. Abban az esetben, ha egy topológiában a $\tilde{H}_y^c$ halmazok zártak és legalább egyikük kompakt, akkor a metszettulajdonság azzal lesz ekvivalens, hogy bármely véges sok halmaz metszete nem üres. Ezért lesz szükségünk a következő lemmára.

Alexander-féle szubbázis lemma ([28]). *Ha az X topologikus tér A részhalmaza nem kompakt, akkor X bármely nyílt szubbázisában van olyan A-t lefedő rendszer, aminek nincs véges A-t lefedő részrendszere.*

Bizonyítás. Tekintsük A összes „ténylegesen végtelen" fedését X-beli nyílt halmazokkal, és legyen ezek rendszere F. Nyilván F-ben bármely tartalmazás szerint rendezett lánchoz van majoráló eleme F-nek (ti. a láncot alkotó fedések uniója, mivel ez a fedés is ténylegesen végtelen és így eleme F-nek). Legyen egy maximális F-beli fedés P. Megmutatjuk: a P-be nem tartozó nyílt halmazok szűrőt alkotnak a nyílt halmazok körében. Valóban, ha $H \notin P$, akkor $P \cup \{H\}$-nak van A-t lefedő véges $H \cup P_1 \cup \ldots \cup P_n \supset A$ rendszere, így $H_1 \notin P$, $H_2 \notin P$ esetén

$$A \subset H_1 \cup P_{1,1} \cup \ldots \cup P_{1,n_1}$$

és

$$A \subset H_2 \cup P_{2,1} \cup \ldots \cup P_{2,n_2},$$

ahonnan kapjuk: $A \subset (H_1 \cap H_2) \cup P_{1,1} \cup \ldots \cup P_{2,n_2}$, így $H_1 \cap H_2 \not\subset P$. Hasonlóan, ha $H \not\subset P$ és $H \subset G$, akkor $G \not\subset P$.

Legyen $\mathscr{H}$ egy szubbázis X-ben. Belátjuk, hogy $\mathscr{H} \cap P$ ténylegesen végtelen nyílt fedése A-nak. Valóban, $x_0 \in A$-hoz $\exists G \in P$: $x_0 \in G$ és $\exists H_1, \ldots, H_n \in \mathscr{H}$ úgy, hogy $x_0 \in H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n \subset G$. Mivel $G \in P$-ből $H_1 \cap \ldots \cap H_n \in P$ következik, ezért valamely i-re $x_0 \in H_i \in P \cap \mathscr{H}$, tehát $P \cap \mathscr{H}$ valóban fedése A-nak, és persze ténylegesen végtelen. A Lemmát beláttuk.

Tekintsük az olyan topológiákat, amelyekben mondjuk a $\tilde{H}_y^c$ halmazok zártak. Ha ezek között van olyan topológia, amelyben az egyik $\tilde{H}_{y_0}^c$ halmaz kompakt, akkor a legdurvább topológia is ilyen. Ennek a topológiának az $\{X \setminus \tilde{H}_y^c : y \in Y\}$ halmazok és X alkotják a szubbázisát. Ezért az Alexander-féle szubbázis lemma alkalmazásával kapjuk a következő állítást:

6. Állítás. *Ha* $\exists y_0 \in Y$, *hogy bármely* $\tilde{H}_{y_0}^c \subset \bigcup \{X \setminus \tilde{H}_y^c : y \in Y_1\}$ *fedésből kiválasztható véges részfedés, akkor* $\bigcap_{y \in Y} \tilde{H}_y^c \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{H}_{y_i}^c \neq \emptyset$ *bármely véges rendszerre.*

Most vizsgáljuk meg a H_y^c halmazok véges metszeteit. Ehhez legyen

$$\varphi(x) := (f(x, y_1) - c, \ldots, f(x, y_n) - c)$$

és

$$K^+ := \{z \in \mathbf{R}^n : z_1 > 0, \ldots, z_n > 0\}.$$

7. Állítás [19], [24], [25].

a) $H_{y_1}^c \cap \ldots \cap H_{y_n}^c = \emptyset \Leftrightarrow c_I := \sup_x \min_i f(x, y_i) \leqq c \Leftrightarrow K^+ \cap \varphi(X) = \emptyset$;

b) $K^+ \cap \operatorname{co} \varphi(X) = \emptyset \Leftrightarrow c_{II} := \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_m \in X \\ \mu_1, \ldots, \mu_m \geqq 0 \\ \sum \mu_j = 1}} \min_i \sum_j \mu_j f(x_j, y_i) \leqq c$;

c) $c_{II} \geqq c_I$.

Bizonyítás.

a) $H_{y_1}^c \cap \ldots \cap H_{y_n}^c = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \ \exists i$: $f(x, y_i) \leqq c \Leftrightarrow \sup_x \min_i f(x, y_i) \leqq c \Leftrightarrow \forall x \ \exists i$: $\varphi(x)$ i-edik komponense nem pozitív $\Leftrightarrow K^+ \cap \varphi(X) = \emptyset$.

b) $K^+ \cap \operatorname{co} \varphi(X) = \emptyset \Leftrightarrow \forall (x_j), (\mu_j) \ \exists i$: $\sum \mu_j \varphi(x_j)$ i-edik komponense nem pozitív $\Leftrightarrow \sup_{(x_j), (\mu_j)} \min_i \sum_j \mu_j f(x_j, y_i) \leqq c$.

8. Állítás.

$$\forall y_1, \ldots, y_n \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n; \ \lambda_i \geqq 0, \ \sum \lambda_i = 1:$$

$$\sum \lambda_i f(x, y_i) \leqq \sup_{(x_j), (\mu_j)} \min_i \sum_j \mu_j f(x_j, y_i) \ \ \forall x.$$

Bizonyítás. Ha $K^+ \cap \operatorname{co} \varphi(X) = \emptyset$, akkor $\exists \lambda \in \mathbf{R}^n$: $\langle \lambda, K^+ \rangle \geqq 0$ és $\langle \lambda, \varphi(X) \rangle \leqq 0$. Az első egyenlőtlenségből $\lambda_i \geqq 0$ következik és akkor feltehető $\sum \lambda_i = 1$. A második pedig éppen azt jelenti, hogy $\sum \lambda_i f(x, y_i) \leqq c$. Az itt elérhető legjobb c a 7. Állítás b) pontja szerint éppen $\sup_{(x_j), (\mu_j)} \min_i \sum \mu_j f(x_j, y_i)$.

9. Állítás (Ky Fan tétele). *Ha*

a) $\forall x_1, x_2 \in X;\ 0 \leqq \alpha \leqq 1\ \exists x_0$:

$$f(x_0, y) \geqq \alpha f(x_1, y) + (1-\alpha) f(x_1, y)\ \ \forall y,$$

b) $\forall y_1, y_2 \in Y;\ 0 \leqq \beta \leqq 1\ \exists y_0$:

$$f(x, y_0) \leqq \beta f(x, y_1) + (1-\beta) f(x, y_1)\ \ \forall x,$$

akkor bármely $c < c^*$*-ra a* $\{H_y^c\}$ *halmazrendszer véges metszet tulajdonságú (véges metszeteik nem üresek).*

Bizonyítás. Indirekte tegyük fel, hogy $\exists c < c^*$: $\bigcap_{i=1}^{n} H_{y_i}^c = \emptyset$. Ekkor

$$f(x, y_0) \overset{①}{\leqq} \sum_i \lambda_i f(x, y_i) \leqq \sup_{(x_j),(\mu_j)} \min_i \sum_j \mu_j f(x_j, y_i) \overset{②}{\leqq} \sup_x \min_i f(x, y_i) \leqq c,$$

a 7. Állítás a) pontja alapján. Ekkor viszont $H_{y_0}^c = \emptyset$, ami ellentmond $c < c^*$-nak.

Fenti bizonyítás a Ky Fan-tételre az ① és ② becsléseken alapul. A ② ekvivalens azzal, hogy

$$\sup_{(x_j),(\mu_j)} \min_i \sum_j \mu_j f(x_j, y_i) = \sup_x \min_i f(x, y_i),$$

és azzal is, hogy

(1) $$\min_i \sum_j \mu_j f(x_j, y_i) \leqq \sup_x \min_i f(x, y_i).$$

①-ből pedig csak azt kell kihasználni, hogy

$$\sup_x f(x, y_0) \leqq \sup_x \sum_i \lambda_i f(x, y_i).$$

Mivel ① biztosítja a véges metszet tulajdonságból a metszettulajdonságot, ezért kapjuk

1. Következmény. *Ha bármely* x_j, μ_j, y_i *esetén*

(1′) $$\min_i \sum_j \mu_j f(x_j, y_i) \leqq \sup_x \min_i f(x, y_i)$$

és $\forall (\lambda_i)\ \exists y_0$:

(2′) $$\sup_x f(x, y_0) \leqq \sup_x \sum_i \lambda_i f(x, y_i),$$

vagy általánosabban, ha

(3′) $$c^* \leqq \inf_{(y_i),(\lambda_i)} \sup_x \sum_i \lambda_i f(x, y_i),$$

akkor

$$\sup_x \inf_y f(x, y) = \inf_y \sup_x f(x, y).$$

2. Következmény.

$$\forall c < c^*\ \ H_{y_1}^c \cap \ldots \cap H_{y_n}^c \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall c < c^*\ \sup_x \min_i f(x, y_i) > c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^* \leqq \sup_x \min_i f(x, y_i) \quad \textit{bármely}\ \ y_1, \ldots, y_n\textit{-re.}$$

Tehát

$$\inf_y \sup_x f(x, y) \overset{③}{\leqq} \inf_{\substack{V \subset Y \\ \text{véges}}} \sup_x \min_{y \in V} f(x, y).$$

A ③-ban valójában egyenlőség van, mivel

$$\sup_x f(x, y) \geqq \sup_x \min_{y \in V} f(x, y) \Rightarrow \inf_y \sup_x f(x, y) \geqq \sup_x \min_{y \in V} f(x, y).$$

Definíció [13]: Valamely Z halmazon egy konvexitásfogalmat megadhatunk egy $\langle \cdot \rangle : P(Z) \to P(Z)$ konvex burok operációval, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

① $$\langle \emptyset \rangle = \emptyset, \quad \langle \{x\} \rangle = \{x\} \quad \forall x \in Z,$$

② $$\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle \quad \forall A \subset Z,$$

③ $$\langle A \rangle = \cup \{\langle F \rangle : F \subset A \text{ véges}\} \quad \forall A \subset Z.$$

Definíció [16]: Egy X topologikus tér intervallumtér, ha adott egy $[.,.]: X \times X \to X$ leképezés úgy, hogy $x_1, x_2 \in [X_1, X_2]$ és $[X_1, X_2]$ összefüggő, zárt X-ben $x_1, x_2 \in X$-re.

Egy intervallumtéren konvexitás definiálható: az $X' \subset X$ halmazt konvexnek nevezzük, ha $x_1, x_2 \in X' \Rightarrow [x_1, x_2] \subset X'$.

Intervallumtérben egy $A \subset X$ halmaz konvex burka így áll elő:

$$P_1(A) := \cup \{[x_1, x_2] : x_1, x_2 \in A\},$$

$$P_n(A) := \cup \{[x_1, x_2] : x_1, x_2 \in P_{n-1}(A)\},$$

$$\operatorname{co} A := \bigcup_1^\infty P_n(A).$$

10. Állítás [16]. (Új bizonyítással, amely többet is ad.) *Ha X és Y intervallumterek és*

a) $y \to f(x, y)$ kvázikonvex és a.f.f. (alulról félig folytonos) minden intervallumon, azaz $\{y : f(x, y) \leqq c\}$ konvex és minden $[y_1, y_2]$ intervallummal vett metszete zárt,

b) $x \to f(x, y)$ kvázikonkáv és f.f.f. (felülről félig folytonos) X-en, azaz

$$K_y(c) := \{x : f(x, y) \geqq c\}$$

konvex és zárt,
akkor $\{K_y(c)\}$ véges metszet tulajdonságú.

Megjegyzés. Kicsit többet fogunk igazolni; megmutatjuk, hogy ha X topologikus tér, Y intervallumtér és

a) $\{y : f(x, y) \leqq c\}$ konvex és bármely szakasszal vett metszete zárt,

b) $\bigcap_{i=1}^n K_{y_i}(c)$ üres vagy összefüggő és zárt, akkor $\{K_y(c)\}$ véges metszet tulajdonságú.

Bizonyítás. Legyen $c_n \nearrow c^*$ tetszőleges számsorozat és $K_n(y) := K_y(c_n)$. Tudjuk, hogy $K_n(y) = \{x : f(x, y) \geqq c_n\} \neq \emptyset$.

Először igazoljuk, hogy bármely rögzített n esetén a $\{K_n(y)\colon y\in Y\}$ halmazrendszer véges metszet tulajdonságú. Tegyük fel indirekte, hogy bármely R darab halmaz metszete nem üres, de $\exists y_1, \ldots, y_{k+1}$, amelyre $\bigcap_{i=1}^{k+1} K_n(y_i)=\emptyset$.

Legyen $K_n^*=\bigcap_{i=3}^{k+1} K_n(y_i)$ ($k=1$ esetén legyen $K_n^*=X$) és $K_n^*(y)=K_n(y)\cap K_n^*$. Az indukciós feltevés szerint $K_n^*(y)\neq\emptyset$ $\forall y$, de

$$K_n^*(y_1)\cap K_n^*(y_2)=\emptyset.$$

Másrészt $y\in[y_1, y_2]$, $f(x, y_1)<c_n$, $f(x, y_2)<c_n$ esetén $f(x, y)<c_n$, ahonnan $K_n(y)\subset$ $\subset K_n(y_1)\cup K_n(y_2)$, azaz $K_n^*(y_1)\cup K_n^*(y_2)\supset K_n^*(y)$ $\forall y\in[y_1, y_2]$. Tehát $\forall z\in[y_1, y_2]$-re $K_n^*(z)\subset K_n^*(y_1)$ és $K_n^*(z)\subset K_n^*(y_2)$ közül pontosan egyik áll fenn. Valóban, tegyük fel, indirekt módon, hogy $x_1\in K_n^*(y_1)\cap K_n^*(z)$, $x_2\in K_n^*(y_2)\cap K_n^*(z)$. Ekkor $[x_1, x_2]\subset$ $\subset K_n^*(z)\subset K_n^*(y_1)\cup K_n^*(y_2)$,

$$[x_1, x_2]=\{[x_1, x_2]\cap K_n^*(y_1)\}\cup\{[x_1, x_2]\cap K_n^*(y_2)\}.$$

Ezek zárt, nem üres halmazok. Ellentmondásra jutottunk.

Legyen

$$S_i:=\{z\in[y_1, y_2]\colon K_n^*(z)\subset K_n^*(y_i)\}.$$

Nyilvánvalóan: $S_i\neq\emptyset$ és $S_1\cup S_2=[y_1, y_2]$. Az ellentmondás onnan fog adódni, hogy belátjuk: S_1 és S_2 zárt Y-ban (vagy $[y_1, y_2]$-ben, ez mindegy). Valóban,

$$z\in S_1\Leftrightarrow K_n^*(y_2)\cap K_n^*(z)=\emptyset\Leftrightarrow K_n^*(y_2)\cap K_n(z)=\emptyset\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\{x\in K_n^*(y_2)\colon f(x, z)\leqq c_n\}=\emptyset\Leftrightarrow\{x\in K_n^*(y_2)\colon f(x, z)>c_n\}=\emptyset.$$

Az utolsó ekvivalencia abból következik, hogy az indukciós feltétel miatt

$$K_n^*\cap\{x\colon f(x, z)>c_n\}\supset K_{n+1}^*(z)\neq\emptyset,$$

és ha a $K_n^*(z)\supset K_n^*\cap\{x\colon f(x, y)>c_n\}$ halmaz nem metsződik $K_n^*(y_2)$-vel, akkor a teljes $K_n^*(z)$ sem metsződhet. Azt kapjuk, hogy

$$S_1=\{z\in[y_1, y_2]\colon\forall x\in K_n^*(y_2),\ f(x, z)\leqq c_n\}=\bigcap_{x\in K_n^*(y_1)}\{z\in[y_1, y_2]\colon f(x, z)\leqq c_n\}.$$

Vagyis S_1 zárt halmaz, és ugyanúgy adódik, hogy S_2 is zárt. A nyert ellentmondás igazolja a 10. Állítást (és az utána következő megjegyzést is).

11. Állítás. *Legyen Y intervallumtér, és $y\in Y$-ra legyen $K(y)\neq\emptyset$ zárt halmaz egy X topologikus térben. Tegyük fel, hogy*

1) $K(z)\subset K(y_1)\cup K(y_2)$, ha $z\in[y_1, y_2]$;

2) $\bigcap_{i=1}^{n} K(y_i)$ vagy üres, vagy összefüggő (és zárt);

3) $y=\lim_{i\in I} y_i$, $x=\lim_{i\in I} x_i$, $x_i\in K(y_i)$ esetén $x\in K(y)$, vagyis az $\{(x, y)\colon x\in K(y)\}$ halmaz zárt;

4) $\forall y$ $K(y)$ kompakt.

Ekkor $\bigcap_{y\in Y} K(y)\neq\emptyset$.

Megjegyzés. Ha $K(y)=\{x: f(x, y)\geqq c\}$, akkor a 3. Feltétel a kétváltozós f függvény felülről félig folytonosságát jelenti.

Bizonyítás. Itt is a $K(y)$ halmazok véges metszet tulajdonságát bizonyítjuk indukcióval. Tegyük fel indirekte, hogy valamely $y_1, \ldots, y_{k+1}\in Y$ esetén

$$K(y_1)\cap \ldots \cap K(y_{k+1}) = \emptyset,$$

de bármely k darab metsződik. Legyen

$$K^*(z) := K(z)\cap K(y_3)\cap \ldots \cap K(y_{k+1}).$$

Ekkor

$$K^*(y_1)\cap K^*(y_2) = \emptyset$$

és 1) miatt

$$K^*(z) \subset K^*(y_1)\cup K^*(y_2).$$

A 2) szerint $K^*(z)$ összefüggő halmaz, ezért a

$$K^*(z) = \{K^*(z)\cap K^*(y_1)\}\cup\{K^*(z)\cap K^*(y_2)\}$$

diszjunkt zárt halmazokra való partíciója triviális. Más szóval

$$K^*(z) \subset K^*(y_1) \quad \text{vagy} \quad K^*(z) \subset K^*(y_2).$$

Azt kell belátni, hogy az

$$S_i := \{z\in[y_1, y_2]: K^*(z) \subset K^*(y_i)\}$$

halmazok zártak. Legyen például

$$z_\alpha\in S_1, \quad z_\alpha \to z_0\in[y_1, y_2].$$

Legyen $y_\alpha\in K^*(z_\alpha)$ tetszőleges, akkor $(y_\alpha)\subset K^*(y_1)$, ami kompakt, tehát részsorozat kiválasztásával elérhető, hogy $y_\alpha\to y_0\in K^*(y_1)$. A 4) miatt ekkor $y_0\in K^*(z_0)$, tehát $z_0\in S_1$, S_1 zárt és ugyanígy S_2 is zárt. Ellentmondásra jutottunk.

3. Következmény. *Legyen X kompakt intervallumtér, Y intervallumtér, f: $X\times X\to\mathbf{R}$ legyen folytonos és*

a) $f(\,.\,, y)$ kvázikonkáv,
b) $f(x, .\,)$ kvázikonvex.

Ekkor

$$\inf_y \sup_x f(x, y) = \sup_x \inf_y f(x, y).$$

Bizonyítás. A $K(y):=\{x: f(x, y)\geqq c\}$ halmazok kielégítik a 11. Állítás feltételeit.

12. Állítás (Komornik [21]). *Legyen X kompakt intervallumtér, Y egy valós topologikus vektortér konvex részhalmaza,*

a) $f(\,.\,, y)$ kvázikonkáv és f.f.f. X-en,
b) $f(x, .\,)$ kvázikonvex és f.f.f. Y bármely intervallumán.

Ekkor $\inf_y \sup_x f(x, y)=\sup_x \inf_y f(x, y)$.

Bizonyítás. A 11. Állítás bizonyítása szerint látható, hogy

$$K^*(z) \subset K^*(y_1) \quad \text{vagy} \quad K^*(z) \subset K^*(y_2).$$

Tehát az S_1, S_2 halmazokat vizsgáljuk. Ezek konvexek $K^*(z_1) \cup K^*(z_2) \supset K^*(z)$ miatt, ezért $\exists y_0 \in [y_1, y_2]$, hogy

$$K^*(z) \subset K^*(y_1) \ (z \in [y_1, y_0]), \quad K^*(z) \subset K^*(y_2) \ (z_0 \in [y_0, y_2]).$$

Legyen például $K^*(y_0) \subset K^*(y_1)$ (a másik eset hasonló). Ekkor

$$y_0' \in (y_0, y_2), \quad y_0'' \in (y_0', y_2)$$

esetén $K^*(y_0') \subset K^*(y_0) \cup K^*(y_0'')$, viszont $K^*(y_0) \subset K^*(y_1)$; $K^*(y_0''), K^*(y_0') \subset K^*(y_2)$, ezért

$$K^*(y_0') \subset K^*(y_0'').$$

Ezek a halmazok kompaktak, így:

$$\bigcap_{y_0' \in (y_0, y_2]} K^*(y_0') \neq \emptyset.$$

Legyen $x_0 \in \bigcap_{y_0' \in (y_0, y_2]} K^*(y_0')$, azaz

$$f(x_0, y_0') \geqq c \quad (y_0' \in (y_0, y_2]).$$

Mivel $f(x, .)$ f.f.f. minden intervallumon, ezért $f(x_0, y_0) \geqq c$. Másrészt $K^*(y_0) \subset K^*(y_1)$, tehát $x \in K^*(y_0)$ esetén $f(x, y_2) < c$. De láttuk: $x_0 \in K^*(y_0)$ és $x_1 \in K^*(y_2)$, s ez ellentmondás.

2. § A véges metszet tulajdonság szerepéről

Az első dolgozat, amit meg kell említeni, a Joó—Sövegjártó [17] cikk, amely általában foglalkozik konvex halmazok összemetszhetőségével, és amelynek bizonyítása mintául szolgált a későbbi hasonló jellegű tételek bizonyításában. A tétel így szól:

1. Tétel. *Legyen E topologikus vektortér, F vektortér, $K \subset F$ konvex halmaz, minden $y \in K$-hoz tartozzon egy kompakt, konvex, nem üres $H_y \subset E$ halmaz úgy, hogy*

(1) $y_1, y_2 \in K$, $y \in [y_1, y_2]$ esetén

$$H_y \subset H_{y_1} \cup H_{y_2}$$

továbbá ahogy $y \in [y_1, y_2]$ halad y_1-ből y_2-be, a H_y-nak a H_{y_1}-be eső része monoton csökken, a H_{y_2}-be eső része monoton nő.

(2) Az (1)-beli szituációban H_y-nak H_{y_1}-be eső része éppen $\bigcap_{y' \in (y, y_1]} (H_{y'} \cap H_{y_1})$.

Ekkor

$$\bigcap_{y \in K} H_y \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Elég belátni a kompaktság miatt, hogy bármely véges sok H_y metszete nem üres. Ezt is csak két halmazra látjuk be, mert n halmaz esetén indukcióval

a két halmaz esetére jutunk. Tegyük fel indirekte, hogy $H_{y_1} \cap H_{y_2} = \emptyset$. Ekkor (1) miatt bármely $y \in [y_1, y_2]$-re

$$H_y \subset H_{y_1} \quad \text{vagy} \quad H_y \subset H_{y_2}.$$

Valóban, ha $z_i \in H_y \cap H_{y_i}$, akkor, mivel $H_{y_1} \cup H_{y_2}$ nem fedheti le az összefüggő $[z_1, z_2]$ szakaszt, ezért H_y-t sem. Legyen

$$S_i := \{y \in [y_1, y_2] : H_y \subset H_{y_i}\}.$$

Ekkor $S_1, S_2 \neq \emptyset$ és (1) miatt $y \in S_i$ esetén $[y, y_i] \subset S_i$. Másrészt $S_1 \cup S_2 = [y_1, y_2]$, ezért

$$\exists y_0 \in [y_1, y_2] : S_i \subset [y_i, y_0).$$

Így viszont (2) miatt $H_y \cap H_{y_i} \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$, ez pedig ellentmondás.

I. Joó [15] dolgozatában jelenik meg a módszer, amely a minimax tételeket összeköti az alkalmasan definiált halmazrendszer véges metszet tulajdonságával.

2. Tétel. *Legyenek E, F topologikus vektorterek; $K_1 \subset E$, $K_2 \subset F$ kompakt, konvex halmazok, $f: K_1 \times K_2 \to \mathbf{R}$ folytonos, $f(\,.\,, y)$ konkáv és $f(x, .)$ konvex minden rögzített y, illetve x esetén.*

Ekkor

$$\min_y \max_x f = \max_x \min_y f.$$

Bizonyítás. Legyen $c \in \mathbf{R}$ olyan, amelyre

$$H_y := \{x : f(x, y) \geqq c\} \neq \emptyset \quad \forall y \in K_2.$$

Igazoljuk, hogy

(I) $$\bigcap_{y \in K_2} H_y \neq \emptyset.$$

Ez azt fogja jelenteni, hogy $\sup_x \inf_y f \geqq c$ $(c < c^*)$, ha c olyan, hogy $H_y \neq \emptyset$ $\forall y$, ahol (lásd 1. §)

$$c^* := \sup \{c : H_y \neq \emptyset \quad \forall y\}.$$

Ekkor $\sup_x \inf_y f \geqq c^*$. Másrészt könnyen látható, hogy $c^* \geqq \inf_y \sup_x f$, mert ellenkező esetben

$$\exists \varepsilon > 0 : c^* + \varepsilon < \sup_x f(x, y) \quad \forall y,$$

ami ellentmond c^* definíciójának. Tehát (I)-ből következik a minimax egyenlőség, ezért elég (I)-t igazolni, sőt (I)-t elég kéttagú metszetre belátni, mert n halmaz esetén indukcióval a két halmaz esetére jutunk. Az $f(x, .)$ függvények konvexitása miatt

$$H_y \subset H_{y_1} \cup H_{y_2} \quad \forall y \in [y_1, y_2],$$

így az 1. Tétel bizonyításának gondolatmenete alkalmazható.

Definíció. Az $f: X \times Y \to \mathbf{R}$ függvény gyenge nyeregfüggvény, ha

a) $\forall (y_i), (\lambda_i)$ $\exists y_0 : \sup_x f(x, y_0) \leqq \sup_x \sum_i \lambda_i f(x, y_i)$;

b) $\forall (y_i) : \sup_{(x_j), (\mu_j)} \min_i \sum_j \mu_j f(x_j, y_i) \leqq \sup_x \min_i f(x, y_i)$.

Láttuk (1. Köv.), hogy érvényes a

3. Tétel. *Ha az* $f\colon X\times Y\to\mathbf{R}$ *függvényre fennállnak:*
(i) *X kompakt és* $f(x,y)$ *f.f.f. X-en* $\forall y$*-ra,*
(ii) *f gyenge nyeregfüggvény;*
akkor

$$\inf_y \sup_x f = \sup_x \inf_y f.$$

4. Megjegyzés. Ha $f(x,y)$-ról $-f(y,x)$-re térünk, akkor a gyenge nyeregfüggvény fogalmának dualizáltja a következő két kikötést jelenti:

a) $\forall(x_i), (\lambda_i)\ \exists x_0\colon \inf_y f(x_0,y) \geqq \inf_y \sum_i \lambda_i f(x_i,y)$;

b) $\forall(x_i)\colon \inf_{(y_i),(\mu_j)} \max_i \sum_j \mu_j f(x_i,y_j) \geqq \inf_y \max_i f(x_i,y)$.

S. Simons igazolta [30]-ban a következő tételt (mi egy egyszerűbb igazolását adjuk).

5. Tétel [30]. *Legyen* $f\colon X\times X\to\mathbf{R}$ *olyan függvény, amelyre*

a) $f(x,y)+f(y,x)\leqq 0$,

b) $\forall x_1,\ldots,x_m\in X,\quad y_1,y_2\in X\quad \exists y_3\in X$:

$$f(x_i,y_3)\leqq\frac{f(x_i,y_1)+f(x_i,y_2)}{2}.$$

Ekkor a $K_x:=\{y\colon f(x,y)<\varepsilon\}$ $(x\in X)$ *halmazrendszer véges metszet tulajdonságú* $\varepsilon>0$ *esetén.*

(Ezért $\exists(y_\alpha)$ *általánosított sorozat:*

$$\lim_\alpha \sup f(x,y_\alpha)\leqq 0\quad\forall x.$$

Ha még X kompakt is, akkor ebből

$$\min_y \max_x f(x,y)\leqq 0\quad \textit{is következik.)}$$

Bizonyítás. Legyen $c_*:=\inf_{y\in X}\max_i f(x_i,y)$. A

$$\varphi(X):=\{(f(x_1,y)-c_*,\ldots,f(x_n,y)-c_*)\colon y\in X\}$$

halmaz nem metszi a negatív kúpot $\mathbf{R}^n$-ben, így b) figyelembevételével, nem metszi ezen halmaz elemeiből készített diadikusan racionális együtthatójú konvex lineáris kombinációk halmaza sem. Ebből folytonossági alapon következik, hogy semmilyen lineáris kombináció sem metszi, azaz $\operatorname{co}\varphi(X)\cap K^-=\emptyset$. Azaz:

$$\exists\lambda_i\geqq 0,\quad \sum_i\lambda_i=1\colon \sum_i\lambda_i f(x_i,y)\geqq c_*\quad\forall y.$$

Most a) miatt

$$\sum_i\lambda_i f(y,x_i)+c_*\leqq 0.$$

Speciálisan

$$\sum_i\lambda_i f(x_j,x_i)+c_*\leqq 0\quad(j=1,\ldots,n).$$

Legyen λ_i helyett $\tilde{\lambda}_i$ diadikusan racionális, akkor

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{\lambda}_i : \sum_i \tilde{\lambda}_i f(x_j, x_i) + c_* \leqq \varepsilon.$$

Most b) miatt

$$\exists \tilde{x} : f(x_j, \tilde{x}) \leqq \sum_i \tilde{\lambda}_i f(x_j, x_i) \quad (j = 1, \ldots, n), \quad \text{tehát} \quad \max_j f(x_j, \tilde{x}) + c_* \leqq \varepsilon.$$

Másrészt $c_* \leqq \max_j f(x_j, \tilde{x})$, ezért $c_* \leqq \varepsilon/2$ és akkor $\exists y_0 : \max_i f(x_i, y_0) < \varepsilon$.

Rodé és Simons [31]-ben általánosítják $f(x, y) + f(y, x) \leqq 0$-t és igazolják a következő állítást:

6. Lemma. *Ha minden* $x_1, \ldots, x_n$*-re*

$$(*) \qquad \min_j \sum_i f(x_i, x_j) \leqq 0,$$

akkor

$$\forall x_1, \ldots, x_n \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqq 0, \quad \sum_j \lambda_j = 1 : \sum_j \lambda_j f(x_i, x_j) \leqq 0.$$

Bizonyítás. Ha $p_1, \ldots, p_n$ nemnegatív egészek, akkor $x_1, \ldots, x_n$ helyett az

$$\underbrace{x_1}_{1}, \ldots, \underbrace{x_1}_{p_1}, \underbrace{x_2}_{1}, \ldots, \underbrace{x_2}_{p_2}, \ldots, \underbrace{x_n}_{1}, \ldots, \underbrace{x_n}_{p_n}$$

sorozatot véve, $(*)$-ból azt kapjuk, hogy

$$\min_j \sum_i p_i f(x_i, x_j) \leqq 0.$$

Tehát a

$$C := \left\{ p_1 g_1 + \ldots + p_n g_n : \ p_i \geqq 0 \ \text{egész és} \ g_i = \begin{pmatrix} f(x_i, x_1) \\ \vdots \\ f(x_i, x_n) \end{pmatrix} \right\}$$

halmaz kúpot alkot, $C + C \subset C$ és ez a kúp nem metszi a pozitív koordinátájú elemek kúpját. Ezért

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1 : \langle g_i, \lambda \rangle \leqq 0 \quad \forall i, \quad \text{azaz} \quad \sum_j \lambda_j f(x_i, x_j) \leqq 0 \quad \forall i.$$

7. Következmény. *Legyen* $f : X \times X \to \mathbf{R}$ *olyan függvény, amelyre*

a) $\min_j \sum_i f(x_i, x_j) \leqq 0 \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in X$;

b) $\forall x_1, \ldots, x_n; \ y_1, y_2 \ \exists y_3 :$

$$f(x_i, y_3) \leqq \frac{1}{2}\left(f(x_i, y_1) + f(x_i, y_2)\right) \quad \forall i.$$

Ekkor bármely $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\{y : f(x_1, y) \leqq \varepsilon, \ldots, f(x_n, y) \leqq \varepsilon\} \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. A 6. Lemma szerint vannak olyan $\tilde{\lambda}_i$ diadikusan racionális számok, $\tilde{\lambda}_i \geqq 0$, $\sum_i \tilde{\lambda}_i = 1$, hogy

$$\tilde{\lambda}_1 f(x_i, x_1) + \ldots + \tilde{\lambda}_n f(x_i, x_n) \leqq \varepsilon \quad \forall i.$$

Másrészt

$$\exists \tilde{x}\colon f(x_i, \tilde{x}) \leqq \tilde{\lambda}_1 f(x_i, x_1) + \ldots + \tilde{\lambda}_n f(x_i, x_n).$$

Megjegyzések.

1. Az 5. Tétel [30]-beli bizonyítása meglehetősen bonyolult módon alkalmazza a Hahn—Banach-tételt. Az általunk megadott bizonyítás a 7. Következményre [31]-ben adott bizonyítás átfogalmazása.

2. Sebestyén [24] és [26]-ban részben Joó [15] és [19], részben Simons [30] és Simons—Rodé [31] vizsgálataihoz kapcsolódik. Horváth és Sövegjártó [25] dolgozatával egyidejűleg, tőlük függetlenül, azonos alapgondolatokkal ér el különböző eredményeket.

Tudjuk az 1. §-ból, hogy

$$K_x(c) := \{y\colon f(x, y) \leqq c\}\text{-re}$$

$$K_{x_1}(c) \cap \ldots \cap K_{x_n}(c) \neq \emptyset \Leftrightarrow c > c_* := \inf_y \max_i f(x_i, y).$$

Ezért, ha belátunk egy „$c_* \leqq d$" alakú állítást, akkor azt láttuk be, hogy

$$\text{„}c > d \quad \text{esetén} \quad K_{x_1}(c) \cap \ldots \cap K_{x_n}(c) \neq \emptyset\text{"}.$$

Látszólag a

$$(**) \qquad \inf_y \max_i f(x_i, y) \leqq \inf_{(y_j),(\mu_j)} \max_i \sum_j \mu_j f(x_i, y_j)$$

egyenlőtlenség is ilyen, de itt a jobb oldal függ az (x_i) rendszertől. Valójában $(**)$ éppen a következőt állítja (l. 1. §, 7. Állítás a), b)): bármely $x_1, \ldots, x_n$; c-re

$$K_{x_1}(c) \cap \ldots \cap K_{x_n}(c) = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{co} \varphi(y) \cap K^- = \emptyset.$$

Vagyis ekvivalens azzal, hogy a szeparációs módszer alkalmazható. Ennek eredményeképpen adódik a

$$c_* = \inf_y \max_i f(x_i, y) = \inf_y \sum_i \lambda_i f(x_i, y)$$

egyenlőség alkalmas, (x_i)-től függő λ_i súlyokkal. A szummáció $(**)$-gal ellentétben f másik változójára vonatkozik, és ezt ki is tudjuk használni:

$$tc_* + (1-t) \sum_i \lambda_i f(x_j, x_i) \leqq t \sum_i \lambda_i f(x_i, x_j) + (1-t) \sum_i \lambda_i f(x_j, x_i) =$$

$$= \sum_i \lambda_i [tf(x_i, x_j) + (1-t) f(x_j, x_i)] \leqq \max_i [tf(x_i, x_j) + (1-t) f(x_j, x_i)] \quad \forall j,$$

tehát

$$c_* < tc_* + (1-t) \max_j \sum_i \lambda_i f(x_j, x_i) \leqq \max_{i,j} [tf(x_i, x_j) + (1-t) f(x_j, x_i)].$$

Ezért

$$c_* \leqq \inf_{0 \leqq t \leqq 1} \sup_{x,y} [tf(x, y) + (1-t) f(y, x)] = \sup_{x,y} \frac{1}{2} [f(x, y) + f(y, x)].$$

Ez utóbbi egyenlőséget így bizonyíthatjuk. Legyen

$$f_1(x,y) := \frac{f(x,y)+f(y,x)}{2}, \quad f_2(x,y) := \frac{f(x,y)-f(y,x)}{2}.$$

Ekkor

$$\inf_{0\leqq t\leqq 1} \sup_{x,y} [(1-t)(f_1+f_2)+t(f_1-f_2)] = \inf_{0\leqq t\leqq 1} \sup_{x,y} [f_1(x,y)+(1-2t)f_2(x,y)] =: I.$$

Rögzített t és x, y esetén vagy $f_2(x,y)$, vagy $f_2(y,x)$ előjele megegyezik $1-2t$ előjelével, ezért

$$I = \inf_{0\leqq t\leqq 1} \sup_{x,y} [f_1(x,y)+|(1-2t)f_2(x,y)|] \geqq \sup_{x,y} f_1(x,y),$$

azaz

$$\inf_{0\leqq t\leqq 1} \sup_{x,y} [tf(x,y)+(1-t)f(y,x)] \geqq \sup_{x,y} \frac{f(x,y)+f(y,x)}{2},$$

a másik irányú egyenlőtlenség pedig triviális.

A fentiekből kompaktsággal áttérve tetszőleges metszetre kapjuk az

$$\inf_y \sup_x f(x,y) \leqq \sup_{x,y} \frac{f(x,y)+f(y,x)}{2}$$

egyenlőtlenséget, amivel általánosítva van az $f(x,y)+f(y,x)\leqq 0$ esetére kimondott $\inf_y \sup_x f(x,y)\leqq 0$ egyenlőtlenség. Tehát beláttuk az 5. Tétel következő általánosítását:

5′. Tétel (∗). *Legyen* $f\colon X\times X\to \mathbf{R}$ *olyan függvény, amelyre* (∗∗) *teljesül. Akkor teljesül a következő véges metszet tulajdonság:*

$$\inf_y \max_i f(x_i,y) \leqq \sup_{x,y} \frac{f(x,y)+f(y,x)}{2}.$$

A következőkben néhány speciális halmazrendszer véges metszet tulajdonságát vizsgáljuk.

Legyen $f\colon A\times B\to \mathbf{R}$, A topologikus tér, B intervallumtér és

$$H^y := \{x\colon f(x,y) > c\}, \quad H_x := \{y\colon f(x,y) > c\}.$$

8. Állítás. *Tegyük fel, hogy*

a) $B\setminus H_x$ *konvex, bármely szakasszal vett metszete zárt* $\forall x$;

b) $\bigcap_{i=1}^{n} H^{y_i}$ *nyílt és összefüggő,* $H^y\neq\emptyset$ $\forall y, y_1, \ldots, y_n$.

Akkor $\{H^y\colon y\in B\}$ *véges metszet tulajdonságú.*

Bizonyítás. A szokásos indukciót végezzük. Tudjuk, hogy

$$H^y \subset H^{y_1}\cup H^{y_2} \quad \forall y\in[y_1,y_2],$$

mert $f(x,y_1)\leqq c$, $f(x,y_2)\leqq c \Rightarrow f(x,y)\leqq c$, hiszen $B\setminus H_x$ konvex.

Legyen

$$H^{*y} := H^y\cap H^{y_2}\cap\ldots\cap H^{y_{n+1}} = \{x\colon f(x,y) > c,\ f(x,y_3) > c,\ \ldots, f(x,y_{n+1}) > c\}.$$

Ekkor $H^{*y} \subset H^{*y_1}$ vagy $H^{*y} \subset H^{*y_2}$ ($y \in [y_1, y_2]$). Tudjuk, hogy

$$H^{*y} \subset H^{*y_1} \Leftrightarrow H^{*y} \cap H^{*y_2} = \emptyset \Leftrightarrow \exists x: f(x, y_2) > c,$$

$f(x, y_3) > c, \ldots, f(x, y_{n+1}) > c$ és $f(x, y) > c \Leftrightarrow$ minden $x \in H^{*y_2}$-re $f(x, y) \leqq c$.

Ezért

$$\{y \in [y_1, y_2]: H^{*y} \subset H^{*y_1}\} = \bigcap_{x \in H^{*y_2}} \{y: f(x, y) \leqq c\} \cap [y_1, y_2],$$

ez pedig zárt halmaz; innen a szokásos úton jutunk ellentmondáshoz.

9. Állítás. *Legyen most*

$$H^y := \{x: f(x, y) \geqq c\}, \quad H_x := \{y: f(x, y) \geqq c\}.$$

Tegyük fel, hogy minden $c < c^*$ *esetén*

a) $B \setminus H_x$ *konvex, minden szakasszal vett metszete zárt;*

b) $\bigcap_{i=1}^{n} H^{y_i}$ *zárt és összefüggő.*

Ekkor $\{H^y: y \in Y\}$ *véges metszet tulajdonságú.*

10. Állítás. *Legyen* A *kompakt topologikus tér,* $B \in T_1$ *konvex részhalmaza egy valós topologikus vektortérnek és* $f: A \times B \to \mathbf{R}$ *legyen olyan függvény, melyre a*

$$H^y = \{x: f(x, y) \geqq c\}, \quad H_x = \{y: f(x, y) \geqq c\}$$

jelölések mellett bármely $c < c^*$*-ra fennáll, hogy*

a) $B \setminus H_x$ *konvex és bármely szakasszal vett metszete (a szakasz topológiájában) nyílt halmaz;*

b) $H^{y_1} \cap \ldots \cap H^{y_k}$ *zárt és összefüggő bármely* $y_1, \ldots, y_k \in B$ *esetén.*

Akkor

$$H^{y_1} \cap \ldots \cap H^{y_k} \neq \emptyset \quad \forall y_1, \ldots, y_k \quad \forall c < c^*.$$

A fenti állítások bizonyítását illetően lásd az 1. § 10. és 12. Állítását. Mint látni fogjuk, ha a fentiekben f-ről erősebb folytonossági kikötéseket teszünk, a $B \in T_1$ tér tetszőleges intervallumtér lehet:

11. Állítás ([21], más bizonyítással). *Legyen* A *egy kompakt* T_2*-tér,* $B \in T_1$ *intervallumtér és tegyük fel, hogy* $f: A \times B \to \mathbf{R}$ *egy felülről félig folytonos függvény, melyre a* 10. *Állítás a), b) feltétele teljesül. Akkor* f *kielégíti a* 10. *Állítás konklúzióját is, azaz teljesül a véges metszet tulajdonság.*

Bizonyítás. A k-ra vonatkozó szokásos indukciót alkalmazzuk. Tegyük fel indirekte, hogy a véges metszet tulajdonság teljesül k-ra de $k+1$-re már nem, és definiáljuk az ismert módon az

$$S_1 = \{y \in [y_1, y_2]: H^{*y} \subset H^{*y_1}\}, \quad S_2 = \{y \in [y_1, y_2]: H^{*y} \subset H^{*y_2}\}$$

halmazokat. Azt fogjuk megmutatni, hogy S_1 és S_2 nyílt az $[y_1, y_2]$ szakasz topológiájában, az ebből adódó ellentmondás bizonyítja a 11. Állítást. Vegyünk tehát egy

tetszőleges $p \in S_1$ pontot; a feladatunk az, hogy megadjuk p-nek egy S_1-beli környezetét. Mivel $p \in S_1$ esetén $H^{*p} \cap H^{*y_2} = \emptyset$, ezért $x \in H^{*p}$-re $f(x, y_2) < c$ teljesül. Bevezetve a

$$G = \{(x, y): f(x, y) \geqq c\}$$

jelölést, az utóbbi észrevételt átírhatjuk a

$$(H^{*y_2} \times \{p\}) \cap G = \emptyset$$

alakba. Tudjuk, hogy $A \times B$ is T_1-tér, akkor pedig bármely (x, p) $(x \in H^{*y_2})$ pontnak van egy, a G-től diszjunkt környezete, azaz vannak olyan $x \in N_x \subset A$, $p \in N_{p,x} \subset B$ nyílt halmazok, melyekre

$$(N_x \times N_{p,x}) \cap G = \emptyset.$$

Mivel H^{*y_2} kompakt, a $H^{*y_2} \subset \bigcup \{N_x: x \in H^{*y_2}\}$ nyílt fedés tartalmaz véges részfedést:

$$H^{*y_2} \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_{x_i}.$$

Legyen

$$N_p := \bigcap_{i=1}^{n} N_{p,x_i};$$

azt állítjuk, hogy

$$y \in N_p \cap [y_1, y_2] \Rightarrow y \in S_1.$$

Valóban, tegyük fel indirekte, hogy létezik egy $x \in H^{*y} \cap H^{*y_2}$ pont. Legyen i $(1 \leqq i \leqq n)$ olyan, hogy $x \in N_{x_i}$. Akkor $(x, y) \in N_{x_i} \times N_{p,x_i}$ miatt $(x, y) \notin G$, de ez ellentmond annak, hogy $x \in H^{*y}$. Tehát beláttuk, hogy $N_p \cap [y_1, y_2] \subset S_1$ valóban S_1-beli környezete p-nek; így nyílt. Teljesen ugyanígy belátható S_2 nyíltsága is, tehát a 11. Állítást beláttuk.

3. § A Ky Fan-konvexitásról

A klasszikus értelemben egy $g(x)$ függvény akkor konvex, ha az epigráfja konvex halmaz, tehát ha $G = \{(x, c): g(x) \leqq c\} \subset X \times \mathbf{R}$ konvex. Itt X vektortér, tehát $X \times \mathbf{R}$ is. A minimax tételek bizonyításában kiderül, hogy G konvexitása helyett elég a $G|^c$ vízszintes metszetek (nívóhalmazok) konvexitását feltenni. Ez azt jelenti, hogy bármely $x_1, x_2 \in X$ esetén

$$x_1, x_2 \in G|^c \Rightarrow [x_1, x_2] \subset G|^c. \tag{1}$$

Ebben az irányban általánosítva jutunk az intervallumtérhez.

Egy *másik irányú általánosítás* a következő: G konvexitása azt jelenti, hogy bármely x_1, x_2-höz és $\lambda \in [0, 1]$-hoz van olyan $x_3 (= \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$, amire

$$(x_1, c_1), (x_2, c_2) \in G \Rightarrow (x_3, \lambda c_1 + (1-\lambda) c_2) \in G. \tag{2}$$

Definíció. A $g: X \to \mathbf{R}$ függvény Ky Fan-konvex, ha $\exists$ (egyébként tetszőleges) $x_\alpha: X \times X \to X$ $(\alpha \in [0, 1])$ leképezés, amire bármely $x_1, x_2 \in X$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ esetén

$$(x_1, c_1), (x_2, c_2) \in G \Rightarrow (x_\alpha(x_1, x_2), \alpha c_1 + (1-\alpha) c_2) \in G. \tag{2'}$$

Erre a konvexitásfogalomra is működik a minimax tétel. Megjegyezzük, hogy a (2′) szerinti $X \times \mathbf{R}$-beli konvexitás nem intervallumtér-struktúra, hanem általánosabb dolog. Valóban, $f\colon X \times Y \to \mathbf{R}$ Ky Fan-konkáv az x változóban, ha

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad \alpha \in [0, 1]\text{-hez} \quad \exists x_0\colon$$

$$(*) \qquad f(x_0, y) \geqq \alpha f(x_1, y) + (1-\alpha) f(x_2, y) \quad \text{minden } y\text{-ra.}$$

Jelöljünk egy ilyen x_0-t így:

$$x_0 = x_\alpha(x_1, x_2).$$

A $(*)$ egyenlőség azzal ekvivalens, hogy bármely c_1, c_2 valós számra

$$f(x_1, y) \geqq c_1, \quad f(x_2, y) \geqq c_2 \Rightarrow f(x_0, y) \geqq \alpha c_1 + (1-\alpha) c_2,$$

azaz a

$$K_y(c) = \{x\colon f(x, y) \geqq c\}$$

jelölés mellett fennáll

$$x_1 \in K_y(c_1), \quad x_2 \in K_y(c_2) \Rightarrow x_0 \in K_y(\alpha c_1 + (1-\alpha) c_2),$$

azaz $y \in Y$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ esetén

$$(**) \qquad x_\alpha(K_y(c_1), K_y(c_2)) \subset K_y(\alpha c_1 + (1-\alpha) c_2).$$

Másképpen: Vegyük az f függvény (fordított) epigráfját:

$$E(f, y) := \{(x, c)\colon f(x, y) \geqq c\}.$$

Legyen az $X \times \mathbf{R} = \{(x, c)\}$ halmazon értelmezve a következő intervallumstruktúra (általában nem intervallumtér):

$$[(x_1, c_1), (x_2, c_2)] := \{(x_\alpha(x_1, x_2), \alpha c_1 + (1-\alpha) c_2)\colon \alpha \in [0, 1]\}.$$

Akkor igaz a következő:

1. Állítás. *Az $f\colon X \times Y \to \mathbf{R}$ leképezés pontosan akkor Ky Fan-konkáv az x változóban, ha vannak olyan (egyébként tetszőleges)*

$$x_\alpha\colon X \times X \to X \quad (\alpha \in [0, 1])$$

leképezések, amikre a fent bevezetett konvexitásra nézve az

$$E(f, y) = \{(x, c)\colon f(x, y) \geqq c\}$$

„fordított" epigráfok minden y-ra konvexek.

A Ky Fan-tétel Horváth—Sövegjártó-féle bizonyítása [25] olyan szeparációs elven alapul, amely nem működik, ha csak a nívóhalmazok konvexitása ismert.

Joó és Stachó [18]-ban a Ky Fan-tételt linearizálással egy bilineáris minimax tételre (a Brézis—Nirenberg—Stampacchia-tételre) vezették vissza.

Kétféle linearizálást szokás csinálni:

a) Az X-en vett véges tartójú valószínűségi mértékekre terjesztjük ki lineárisan f-et (Neumann-féle kevert stratégiák).

b) Ha X kompakt T_2-tér, a $C^*(X)$ egységgömb felületének pozitív mértékeire (pozitív valószínűségi Borel-mértékekre) terjesztjük ki. Ez a konstrukció a)-val ellentétben megőrzi a kompaktságot.

Tudjuk, hogy ha a H_x és H^y halmazok véges metszet tulajdonságúak, akkor „szabad" linearizálni, azaz a kiterjesztett $\tilde{f}$ függvényre

$$\sup \inf \tilde{f} = \sup \inf f, \quad \inf \sup \tilde{f} = \inf \sup f$$

(lásd az alábbiakban). Látjuk tehát, hogy $\tilde{f}$ minimax tulajdonságánál kevesebbet mondó állítás f minimax tulajdonsága.

2. Állítás. *Ha a* $(K_y(c))$ *rendszer véges metszet tulajdonságú* $\forall c < c^*$*-ra, akkor*

$$c^* \leqq \inf_{\nu} \sup_{x} \sum_{j} \nu_j f(x, y_i),$$

ahol ν *az* Y *véges tartójú valószínűségi mértékein fut.*

Bizonyítás. Tudjuk: $(K_y(c))$ véges metszet tulajdonságú $\forall c < c^*$-ra, ha

$$c^* \leqq \sup_{x} \min_{i} f(x, y_i) \quad \forall y_1, \ldots, y_n.$$

Másrészt nyilván

$$\inf_{\{y_1, \ldots, y_n\}} \sup_{x} \min_{i} f(x, y_i) \leqq \inf_{\nu} \sup_{x} \sum_{j} \nu_j f(x, y_j).$$

3. Megjegyzés.

1) Mivel $c^* \leqq \inf_{\nu} \sup_{x} \sum_{j} \nu_j f(x, y_j)$ triviális, ezért valójában egyenlőség áll fenn a 2. Állításban.

2) Mivel rögzített x-re

$$\inf_{y} f(x, y) = \inf_{\nu} \sum_{j} \nu_j f(x, y_j),$$

ezért ha $(K_y(c))$ véges metszet tulajdonságú $\forall c < c^*$-ra, akkor

$$\inf_{\nu} \sup_{x} \sum_{j} \nu_j f(x, y_j) = \inf_{y} \sup_{x} f(x, y).$$

Másrészt

$$\sup_{x} \inf_{\nu} \sum_{j} \nu_j f(x, y_j) = \sup_{x} \inf_{y} f(x, y)$$

minden f függvénye teljesül. Eszerint ha egy f függvényre a minimax tétel teljesül, akkor ugyanez az y változóban linearizált függvényre is teljesül. Hasonló állítás szerepel 3)-ban mindkét változóra:

3) *Ha* $c_* = c^*$ *(illetve ha* $\{K_y(c) : c < c^*\}$ *és* $\{K^x(c) : c > c_*\}$ *véges metszet tulajdonságúak), akkor*

$$\inf_{y} \sup_{x} f(x, y) = \inf_{\nu} \sup_{\mu} \sum_{i,j} \mu_i \nu_j f(x_i, y_j)$$

és

$$\sup_{x} \inf_{y} f(x, y) = \sup_{\mu} \inf_{\nu} \sum_{i,j} \mu_i \nu_j f(x_i, y_j).$$

Csak az első egyenlőséget igazoljuk. A 2. Állítás szerint

$$\inf_{y} \sup_{x} f(x, y) = \inf_{\nu} \sup_{x} \sum_{j} \nu_j f(x, y_j).$$

Másrészt

$$\inf_{\nu} \sup_{x} \sum_{j} \nu_j f(x, y_j) = \inf_{\nu} \sup_{\mu} \sum_{i,j} \mu_i \nu_j f(x_i, y_j)$$

bármilyen függvényre teljesül, mivel

$$\sup_{x} \sum_{j} \nu_j f(x, y_j) = \sup_{\mu} \sum_{i} \mu_i g(x_i), \quad g(x) := \sum_{j} \nu_j f(x, y_j).$$

Tehát igazoltuk:

$$\{f\colon c_* = c^*\} \subset \{f\colon f \text{ linearizálható}\}.$$

4. Állítás. *Az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $c^* \leqq \inf_{\nu} \sup_{x} \sum_{j} \nu_j f(x, y_j)$,

(ii) $\forall \nu \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists y_0\colon \sup_{x} f(x, y_0) < \sup_{x} \sum_{j} \nu_j f(x, y_j) + \varepsilon$,

(iii) $\forall \nu \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \ \exists y_0\colon f(x, y_0) < \sum_{j} \nu_j f(x_0, y_j) + \varepsilon \ \forall x$.

Sajnos nem minden nyeregfüggvény (tehát olyan függvény, amely parciálisan konvex y-ban, és parciálisan konkáv x-ben) linearizálható, pl. az olyan intervallumterekben, ahol minden függvény nyeregfüggvény (pl. ha $[x, y] := \{x, y\}$). Viszont további topológiai feltételek mellett igaz lesz $c_* = c^*$, s így a linearizálás is.

Végül megfogalmazunk néhány problémát:

1. Probléma. Tudjuk, hogy

$$\bigcap_{y \in Y} K_y(c) \neq \emptyset \ \forall c < c^* \Leftrightarrow \bigcap_{x \in X} K^x(c) \neq \emptyset \ \forall c > c_*,$$

(mert ez a minimax egyenlőség feltétele). Hogyan lehetne ezt az ekvivalenciát direktben igazolni? Minden minimax-tételünkben kétoldali feltételek vannak (parciálisan x-ben és y-ban) s ezek az (elégséges) feltételek szimmetrikusak. Nem lehet, hogy az egyik elhagyható valamilyen módon?

2. Probléma (a fenti parafrázisa). A minimax-tételekben az egyik tér kompaktságát feltéve, ami aszimmetrikus feltétel, a szimmetrikus minimax egyenlőséghez jutunk (ami $f(x, y)$-ra pontosan akkor igaz, ha fennáll $f_1(x, y) := -f(y, x)$-ra). Nem lehetne a feltételeket szimmetrikussá tenni?

3. Probléma. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az X, Y intervallumterekre nézve egy f nyeregfüggvény linearizálható legyen? (Pl. ha f a.f.f. x-ben és f.f.f. y-ban, továbbá X kompakt $\Rightarrow c_* = c^* \Rightarrow f$ linearizálható.)

Hogy a 4. Problémát megfogalmazhassuk, vizsgáljuk meg a minimaxtétel következő, Neumann által bizonyított változatát.

5. Tétel [36]. *Legyenek* $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ *nemüres, kompakt és konvex halmazok,*

$$f\colon X \times Y \to \mathbf{R}$$

olyan folytonos függvényre, amire

a) $H_x(c_*) = \{y\colon f(x, y) \leqq c_*\}$ *nemüres és konvex;*
b) $H^y(c^*) = \{x\colon f(x, y) \geqq c^*\}$ *nemüres és konvex.*
Akkor

(I) $c_* = c^*$.

Bizonyítás. Tekintsük a következő két állítást:

(II) Legyenek $A, B \subset X \times Y$ zárt halmazok és tegyük fel, hogy

c) $A|_x = \{y\colon (x, y) \in A\} \neq \emptyset$ $\forall x$-re konvex, zárt;
d) $B|^y = \{x\colon (x, y) \in B\} \neq \emptyset$ $\forall x$-re konvex, zárt.

Akkor $A \cap B \neq \emptyset$.
(III) Legyen $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakt, konvex halmaz,

$$g\colon K \to 2^K$$

olyan halmazértékű leképezés, amely felülről félig folytonos (azaz

$$\{(x, y) \in K \times K\colon y \in g(x)\}$$

zárt $K \times K$-ban) és $g(x) \neq \emptyset$ zárt konvex halmaz $\forall x \in K$-ra. Akkor g-nek van fixpontja, azaz $\exists x_0 \in K$, hogy $x_0 \in g(x_0)$.

Látható, hogy (II)⇒(I), hiszen az

$$A = \{(x, y)\colon f(x, y) \leqq c_*\}, \quad B = \{(x, y)\colon f(x, y) \geqq c^*\}$$

halmazokra teljesülnek a (II)-beli feltételek, és akkor

$$(x_0, y_0) \in A \cap B \quad \text{esetén} \quad f(x_0, y_0) = c_* = c^*.$$

Másrészt (III)⇒(II). Valóban, definiáljuk a következő leképezést:

$$g\colon X \times Y \to 2^{X \times Y},$$

$$(x, y) \mapsto \big(x + (B|^y - x)\delta_B\big) \times \big(y + (A|_x - y)\delta_A\big),$$

ahol

$$\delta_A = \delta\big((x, y), A\big), \quad \delta_B = \delta\big((x, y), B\big).$$

Tudjuk, hogy δ_A és δ_B folytonos függvények. Az A és B zártságából következik, hogy g felülről félig folytonos, azaz

$$\left.\begin{aligned} x_n \to x_0, \quad y_n \to y_0, \quad z_n \in x_n + (B|^{y_n} - x_n)\delta_B, \quad z_n \to z_0 \\ v_n \in y_n + (A|_{x_n} - y_n)\delta_A, \quad v_n \to v_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_0 \in x_0 + (B|^{y_0} - x_0)\delta_B, \quad v_0 \in y_0 + (A|_{x_0} - y_0)\delta_A.$$

Akkor pedig van egy (x^0, y^0) fixpontja g-nek, azaz

$$x^0 \in x^0 + (B|^{y_0} - x_0)\delta_B, \quad y^0 \in y^0 + (A|_{x_0} - y_0)\delta_A.$$

ami csak úgy lehetséges, ha $(x_0, y_0) \in A \cap B$.

Megjegyzés. Belátjuk, hogy a fordított implikációk is igazak, tehát (I)⇒(II)⇒(III). Ennek közvetlenül nincs értelme, hiszen (I), (II) és (III) egyaránt igaz; de ha állítássémáknak tekintjük őket, melyeket megvizsgálhatunk tetszőleges konvexitásfogalom mellett, akkor hasznos lehet tudni, melyik vezethető le minél formálisabb módon a másikból.

(II)⇒(III) könnyen látható: legyen $A = \{(x, y) \in K \times K\colon y \in g(x)\}$ és

$$B = \{(x, x)\colon x \in K\}.$$

Akkor $(x, y) \in A \cap B$-ből $x \in g(x)$ következik.

(I)⇒(II): Indirekte legyen A, B a (II)-beli tulajdonságú halmazpár és $A \cap B = \emptyset$.

Legyen $f\colon X\times Y\to[0,1]$,

$$f(x,y):=\frac{\delta((x,y),A)}{\delta((x,y),A)+\delta((x,y),B)};$$

Most $(f=0)=A$, $(f=1)=B$. $A|_x\neq\emptyset$ miatt

$$\forall x\ \exists y\colon (x,y)\in A,\quad \text{azaz}\quad f(x,y)=0.$$

Ezért

$$c_*=\sup_x\inf_y f(x,y)=0.$$

Hasonlóan

$$c^*=\inf_y\sup_x f(x,y)=1.$$

Mivel az $A=(f\leqq c_*)$, $B=(f\geqq c^*)$ nívóhalmazokra teljesülnek az (I)-beli kikötések, ezért $c^*=c_*$-nak kellene fennállni, ami ellentmondás.

4. Probléma. A minimax-tétel fenti, Neumann-féle alakját be tudjuk-e bizonyítani a Joó és mások által kifejlesztett nívóhalmaz-módszerrel? A kérdés elvi jelentőségű: pozitív válasz esetén új módszert találnánk fixpont-tételek bizonyítására, egészen általános konvexitásfogalom mellett.

5. Probléma. Milyen általánosabb konvexitásra igazolható a Neumann-féle minimax-tétel (5. Tétel)? Adjunk meg konvexitásokat, amikre (II), ill. (III) igaz. Megvizsgálható bármely, intervallumtérből származtatott konvexitás, de más típusú konvexitások is találhatók pl. [34], [35]-ben. Megemlítjük ezzel kapcsolatban Horváth M. [29] dolgozatát, amelynek érdekessége, hogy egy egyszerű konvexitásfogalom vizsgálatát gráfelméleti kérdésekre (a [14] dolgozat egyik tételére) vezeti vissza.

A fentiekkel kapcsolatban megvizsgálható a csillagszerű konvexitás.

Definíció. Egy $K\subset\mathbf{R}^n$ halmaz csillagszerűen konvex, ha $0\in K$, és $x\in K$-ból $[0,x]\subset K$ következik.

6. Probléma. Igaz-e, hogy bármely csillagszerűen konvex, kompakt halmaz fixpont-tulajdonságú?

A sejtés triviális, ha $n=1$, az $n=2$ esetre Joó [23] adott bizonyítást. Az $n=3$ eset lenne igazán érdekes, mert S. Kinoshita [12] megadott egy háromdimenziós, pontra húzható, kompakt halmazt, ami nem fixpont-tulajdonságú. Ebből következik, hogy a 6. Problémára a válasz $n\geqq 4$ esetén tagadó: van olyan csillagszerűen konvex, kompakt halmaz (egy kúp), amelyre a fixpont-tulajdonság nem teljesül (lásd [12]-ben).

IRODALOM

[1] J. von Neumann: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.* **100** (1928), 295—320.
[2] N. N. Vorobjov: *A játékelmélet alapjai* (orosz nyelven), Nauka, Moszkva, 1984.
[3] Hegedűs Miklós, Zalai Ernő: *Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1978.
[4] Szép Jenő, Forgó Ferenc: *Bevezetés a játékelméletbe,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974.
[5] L. E. J. Brouwer: Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* **71** (1910), 97—115.
[6] E. Helly: Über Systeme abgeschlossener Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten, *Monatsh. Math.* **37** (1930), 281—302.
[7] G. Carathéodory: Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, *Rend. Circ. Math. Palermo* **32** (1911), 193—217.
[8] J. Radon: Mengen konvexer Körper die einen gemeinsamer Punkt enthalten, *Math. Ann.* **83** (1921), 113—115.

[9] F. W. Levi: On Helly's theorem and the axioms of convexity, *J. Indian Math. Soc.* **15** (1951), 65—76.
[10] I. Joó: An inequality between the Helly and Carathéodory numbers ($H \leqq C$), *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* (megjelenés alatt).
[11] K. Fan: A minimax inequality and application, in: *Inequalities, III*, Shisha ed., Academic Press, New York, 1972, 103—113.
[12] S. Kinoshita: On some contractible continua without fixed point property, *Fund. Math.* **40** (1953), 96—98.
[13] H. Komiya: Convexity on a topological space, *Fund. Math.* **111** (1981), 107—113.
[14] Zs. Baranyai: On the factorization of the complete uniform hypergraphs, in: *Infinite and finite sets*, Proc. Intern. Coll., A. Hajnal, V. T. Sós, R. Rado eds., Budapest, North-Holland, 1975, 91—108.
[15] I. Joó: A simple proof for von Neumann's minimax theorem, *Acta Sci. Math.* **42** (1980), 91—94.
[16] L. L. Stachó: Minimax theorems beyond topological vector spaces, *Acta Sci. Math.* **42** (1980), 157—164.
[17] I. Joó, A. Sövegjártó: A fixed point theorem, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **24** (1981), 9—11.
[18] I. Joó, L. L. Stachó: A note on Ky Fan's minimax theorem, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **39** (1982), 401—407.
[19] I. Joó: Note on my paper "A simple proof for von Neumann's minimax theorem", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **44** (1984), 363—365.
[20] I. Joó: On a fixed point theorem, *Publ. Math.* **36** (1989), 127—128.
[21] V. Komornik: Minimax theorems for upper semicontinuous functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **40** (1982), 159—163.
[22] I. Joó: Answer to a problem of M. Horváth and A. Sövegjártó, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **29** (1986), 203—207.
[23] I. Joó: A Brouwer-type theorem. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **53** (1989), 385—387.
[24] Z. Sebestyén: An elementary minimax theorem, *Acta Sci. Math.* **47** (1984), 109—110.
[25] H. Horváth, A. Sövegjártó: On convex functions, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **29** (1986), 193—198.
[26] Z. Sebestyén: An elementary minimax inequality, *Per. Math. Hung.* (megjelenés alatt).
[27] Wu Wen-Tsun: A remark on the fundamental theorem in the theory of games, *Sci. Rec. New Ser.* **3** (1959), 229—233.
[28] K. Kuratowski: *Topológia* (orosz nyelven), Mir, Moszkva, 1969.
[29] M. Horváth: Notes on a convexity, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **30** (1987), 259—264.
[30] S. Simons: Variational inequalities via the Hahn—Banach theorem, *Arch. Math.* **31** (1978), 482—490.
[31] G. Rodé, S. Simons: Variational inequalities for functions on convex sets, *J. Math. Anal. Appl.* **96** (1983), 449—456.
[32] J. Kindler: A minimax version of Ptak's combinatorial lemma, *J. Math. Anal. Appl.* **94** (1983), 454—459.
[33] F. E. Browder: The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, *Math. Ann.* **177** (1968), 283—301.
[34] L. Danzer, B. Grunbaum, V. Klee: Helly's theorem and its relatives, *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1963.
[35] V. P. Soltan: *Introduction to axiomatic theory of convexity, Stiinca, Kisinyov*, 1984.
[36] I. Joó: On some convexities, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **54** (1989), 163—172.
[37] I. Joó: A general minimax theorem, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* (megjelenés alatt).

(Beérkezett: 1987. augusztus 3-án)

МИНИМАКСНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ВЫПУКЛОСТЬ

А. БОГМЕР, М. ХОРВАТ и И. ЙО

MINIMAX THEOREMS AND CONVEXITY

A. BOGMÉR, M. HORVÁTH and I. JOÓ

JELENTÉS AZ 1986. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat az 1986. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny megrendezésére az alábbi összetételű bizottságot küldte ki: Császár Ákos (elnök), Soukup Lajos (titkár), Fejes Tóth László, Freud Róbert, Hajnal András, Halász Gábor, Laczkovich Miklós, Michaletzky György, T. Sós Vera. A versenybizottság 10 feladatot tűzött ki a versenyre (l. alább).

Az 1. feladat David Kelly egy problémája, amelyet először Hajnal András és Bill Weiss oldott meg. A 2. feladat Katona Gyulától, a 3. Balog Antaltól és Ruzsa Imrétől, a 4. Laczkovich Miklóstól, az 5. Pálfy Péter Páltól, a 6. Totik Vilmostól, a 7. Halász Gábortól, a 8. Szabados Józseftől, a 9. Fejes Tóth Gábortól és Fejes Tóth Lászlótól, a 10. Michaletzky Györgytől és Móri Tamástól származik.

Összesen 20 versenyző adott be dolgozatot. Összesen 105 dolgozat érkezett. Ebből 62 megoldás volt teljes.

A versenybizottság 1986. december 5-i ülésén az alábbi díjakat és dicséreteket ítélte oda:

I. díj: Tardos Gábor (ELTE V. évf.) — Valamennyi feladatot megoldotta.

II. díj: Elek Gábor (ELTE V. évf.) — Megoldotta a 2., 3., 6., 7., 9. feladatot, és a 4. feladatban a legjobb részeredményt érte el, Tardos Gábor tökéletes megoldását leszámítva.

Szabó Endre (ELTE IV. évf.) — Megoldotta az 1., 2., 3. és 6. feladatot. Lényeges részeredményeket ért el az 5. és 8. feladatban. Az 5. feladatban Tardos Gábor mellett az egyetlen, aki megtalálta a helyes konstrukciót.

Szabó Zoltán (ELTE II. évf.) — Megoldotta a 2., 3., 6., 7. és 9. feladatot.

III. díj: Erdős László (ELTE II. évf.) — Megoldotta a 2., 3., 8. és 9. feladatot.

Törőcsik Jenő (ELTE III. évf.) — Megoldotta a 2., 3., 8. és 9. feladatot.

Dicséret: Károlyi Gyula (ELTE V. évf.) — Megoldotta a 2., 6., 9. feladatot és a 7. feladatban lényeges részeredményeket ért el.

Magyar Ákos (ELTE III. évf.) — Megoldotta a 2., 6., 9. feladatot és lényeges részeredményt ért el a 3. és 7. feladatban.

Az I. helyezett 4500 Ft, a II. helyezettek 2500 Ft, a III. helyezettek 2000 Ft jutalomban részesültek. A díjak összegéből 12 000 Ft a Bolyai János Matematikai Társulattól, ebből 2000 Ft a Gál Jenőné-alapítványból; 4000 Ft pedig egy ismeretlen adakozótól származik.

Az egyes feladatok nehézségét az alábbi táblázat tartalmazza:

Feladat	Beadott dolgozatok száma	Teljes megoldások száma	
1.	4	2	
2.	20	19	Tardos megoldása kiemelkedő
3.	19	8	
4.	11	1	
5.	10	1	
6.	8	6	
7.	12	3	
8.	6	5	Tardos megoldása kiemelkedő
9.	11	10	
10.	4	3	

Az 1986. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Legyen $\langle A, \prec \rangle$ részben rendezett halmaz. $\langle A, \prec \rangle$ dimenziója, $\dim(A, \prec)$ az a legkisebb $\varkappa$ számosság, melyre létezik A teljes rendezéseinek olyan $\langle \prec_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ sorozata, amelyre $\prec = \bigcap_{\alpha<\varkappa} \prec_\alpha$. Bizonyítandó, hogy ha $\dim(A, \prec) > \aleph_0$, akkor léteznek olyan $A_0, A_1 \subset A$ részhalmazok, melyekre $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ és $\dim(A_0, \prec) > \aleph_0$, $\dim(A_1, \prec) > \aleph_0$ az A-ból öröklött $\prec$ rendezésben.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $k \leqq n/2$, akkor egy $n \times n$-es mátrixből legfeljebb $\binom{n-1}{k-1}^2$ $k \times k$-as részmátrix választható ki úgy, hogy páronkénti metszetük nem üres.

3. a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges k természetes számhoz léteznek olyan $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ pozitív egészek, amelyekre $1 \leqq i, j \leqq k$, $i \neq j$ esetén $a_i - a_j | a_i$.

b) Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $c > 0$ abszolút konstans, hogy bármely a fenti feltételeket kielégítő $a_1, \ldots, a_k$ számokra $a_1 > k^{ck}$.

4. Határozzuk meg azokat az x valós számokat, amelyekhez a $\mathbf{C}$ komplex számtestnek van olyan F valódi részteste, amelyet x-szel bővítve $\mathbf{C}$-t kapjuk.

5. Bizonyítandó, hogy van olyan c konstans, hogy minden n összetett számhoz létezik olyan csoport, amelynek az elemszáma osztható n-nel, nem tartalmaz n-edrendű elemet és a csoport rendje kisebb, mint n^c.

6. Legyen $U = \{ f \in C[0, 1] : |f(x)| \leqq 1 \text{ minden } x \in [0, 1]\text{-re} \}$. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan topológia $C[0, 1]$-en, amely $C[0, 1]$ lineáris struktúrájával együtt topologikus vektorteret alkot és amelyben U kompakt.

7. Igazoljuk, hogy $\sum_p c_p f(px)$, — ahol p a prímszámokon fut végig — akkor és csak akkor konvergens $L_2([0, 1])$-ben minden olyan 1 szerint periodikus f függvényre, amelyre $f|_{[0,1]} \in L_2([0, 1])$, ha $\sum |c_p| < +\infty$.

8. Legyenek $a_0 = 0, a_1, \ldots, a_k$ és $b_0 = 0, b_1, \ldots, b_k$ tetszőleges valós számok.

(i) Mutassuk meg, hogy elég nagy n esetén léteznek olyan legfeljebb n-edfokú p_n polinomok, amelyekre

$$p_n^{(i)}(-1) = a_i, \quad p_n^{(i)}(1) = b_i \quad (i = 0, 1, \ldots, k) \tag{1}$$

és

$$\max_{|x| \leqq 1} |p_n(x)| \leqq \frac{c}{n^2}, \tag{2}$$

ahol c csak az a_i, b_i $(i = 1, \ldots, k)$ számoktól függ.

(ii) Bizonyítsuk be, hogy (2) általában nem helyettesíthető a

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \max_{|x| \leqq 1} |p_n(x)| = 0 \tag{3}$$

relációval.

9. Tekintsük a konvex K lemez eltolt példányainak egy rácselhelyezését. Legyen t a rácselhelyezést definiáló rács alapparalelogrammájának területe, és jelöljük $t_{\min}(K)$-val t-nek az összes különböző rácselhelyezésekre vett minimumát. Van-e

olyan N természetes szám, hogy $n \geq N$-re bármely paralelogrammától különböző K-ra $n \cdot t_{\min}(K)$ mindig kisebb, mint bármely olyan konvex tartomány területe, amelyben K n eltolt példánya egymásba nem nyúlóan elhelyezhető? (K rácselhelyezésén a K lemez egymásba nem nyúló eltolt példányainak olyan halmazát értjük, amelyet úgy kapunk, hogy K-t egy rács minden vektorával eltoljuk.)

10. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $X_i \geqq 0$, ha $i = 1, 2, \ldots$. Legyen $EX_i = m$, $D^2 X_i = \sigma^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $0 < \alpha \leqq 1$ esetén

$$n \cdot D^2 \left[\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \right)^{\alpha} \right] \to \frac{\alpha^2 \sigma^2}{m^{2(1-\alpha)}},$$

ha $n \to \infty$.

A megoldások ismertetése

Az 1. feladat megoldása

Indirekte, legyen $(\lambda, \prec)$ olyan minimális számosságú részben rendezett halmaz, melyre $\dim(\lambda, \prec) > \aleph_0$ és a feladat állítása nem igaz. Legyen

$$I = \{B \subset A : \dim(B, \prec) \leqq \aleph_0\}.$$

Ekkor λ minimalitása miatt $[\lambda]^{<\lambda} \subset I$.

A következő segédtétel nyilvánvaló: Ha $\{B_n : n < \omega\} \subset I$ és $[B]^2 \subset \bigcup_{n \in \omega} [B_n]^2$, akkor $B \in I$. Ezért ha $\{B_n : n \in \omega\} \subset I$ és $B_0 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots$, akkor $\bigcup_{n \in \omega} B_n \in I$.

Ha teljesülne, hogy $B_0, B_1 \in I$ és $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ esetén $B_0 \cup B_1 \in I$, akkor I olyan ω_I-teljes prímideál lenne λ-n, melyre $[\lambda]^{<\lambda} \subset I$. Azonban egy sztenderd érvelés adja, hogy ilyen I nem létezik. Valóban, ha I ilyen lenne, akkor $\alpha < \lambda$-ra válasszuk α-nak olyan $\{\prec_{\alpha,n} : n \in \omega\}$ rendezéseit, melyekre $\prec|_{\alpha} = \bigcap_{n < \omega} \prec_{\alpha,n}$. Ha $\beta, \gamma < \lambda$, akkor legyen

$$\beta \prec_n \gamma \Leftrightarrow \{\alpha < \lambda : \beta \prec_{\alpha,n} \gamma\} \notin I.$$

Könnyű látni, hogy $\langle \lambda, \prec_n \rangle$ rendezés, ha $n < \omega$ és $\bigcap_{n < \omega} \prec_n = \prec$.

Így feltehető tehát, hogy $B_0, B_1 \in I$, $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ és $B = B_0 \cup B_1 \notin I$, valamint $\varkappa = |B_1|$ minimális. Legyen $I_1 = \{C \subset B_1 : B_0 \cup C \in I\}$. Nyilván $B_1 \notin I_1$. A segédtétel szerint I_1 olyan ω_I-teljes ideál B_1-en, melyre $[B_1]^{<\varkappa} \subset I_1$. A sztenderd érvelés megismétlése adja, hogy I_1 sem lehet prímideál. Így van $C_0, C_1 \subset B_1$, $C_0 \cap C_1 = \emptyset$, melyre $B_1 = C_0 \cup C_1$ és $B_0 \cup C_0$, $B_0 \cup C_1 \notin I$ és $C_0, C_1 \in I$, hiszen $C_0, C_1 \subset B_1 \in I$.

A fenti érvelést megismételve a C_0, B_0 párra, van $D_0, D_1 \subset B_0$, $D_0 \cup D_1 = B_0$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$, melyre $D_0 \cup C_0 \notin I$, $D_1 \cup C_0 \notin I$. A segédtétel szerint a $D_0 \cup C_1$ és a $D_1 \cup C_1$ halmazok közül valamelyik nincs I-ben, hisz $[B_0 \cup C_1]^2 \subset [B_0]^2 \cup [D_0 \cup C_1]^2 \cup [D_1 \cup C_1]^2$. Ha például $D_0 \cup C_1 \notin I$, akkor $D_0 \cup C_1$, $D_1 \cup C_0$ két diszjunkt, nem I-beli halmaz. Ezzel az 1. feladatot megoldottuk.

4 dolgozat érkezett. Megoldották: Szabó Endre (kis hibával), Tardos Gábor.

A 2. feladat megoldása

Ha minden $k\times k$-as kiválasztott M részmátrixnak megfeleltetjük saját sorainak S_M és oszlopainak O_M k-asát, akkor S_M és O_M meghatározza M-et. Ha M_1 és M_2 két kiválasztott mátrix, akkor $S_{M_1}\cap S_{M_2}\neq\emptyset$ és $O_{M_1}\cap O_{M_2}\neq\emptyset$. Így $\mathcal{S}=\{S_M\colon M \text{ kiválasztott}\}$ és $\mathcal{O}=\{O_M\colon M \text{ kiválasztott}\}$ két olyan k-uniform hipergráf n-en, hogy mind $\mathcal{S}$, mind $\mathcal{O}$ élei páronként metszik egymást. Így az Erdős—Ko—Rado-tétel szerint $|\mathcal{S}|, |\mathcal{O}|\leqq\binom{n-1}{k-1}$, azaz a kiválasztott mátrixok száma $\leqq\binom{n-1}{k-1}^2$. Természetesen $\binom{n-1}{k-1}^2$ kiválasztható, hisz egy rögzített elemet tartalmazó $k\times k$-as részmátrixok épp ennyien vannak.

20 dolgozat érkezett. Megoldották: Csizmadia György, Elek Gábor, Erdős László, Hetyei Gábor, Károlyi Gyula, Király Zoltán, Kós Géza, Magyar Ákos, Megyesi Gábor, Mócsy Miklós, Montágh Balázs, Sigray István, Stipsicz András, Szabó Csaba, Szabó Endre, Szabó Zoltán, Tardos Gábor, Tóth Géza, Törőcsik Jenő.

A 3. feladat megoldása

a) Ha $k=1$, akkor $a_1=1$ megfelelő. Tegyük fel, hogy $0<a_1<\ldots<a_k$ és $1\leqq i\neq j\leqq k$ esetén $a_i-a_j|a_i$. Legyen $b=\prod_{i=1}^{k} a_i$ és $a_0=0$. Ekkor $0<b+a_0<b+a_1<\ldots<b+a_k$ és $0\leqq i\neq j\leqq k$ esetén $(b+a_i)-(b+a_j)|(b+a_i)$, hisz $a_i-a_j|a_i$ és $a_i|b$. Így beláttuk, hogy minden k-ra van megfelelő sorozat.

b) Ha $k=1$, akkor $a_1=1$; ha $k=2$, akkor $a_1=1$ és $a_2=2$ jó és $a_1>k^{ck}$ nem teljesül egyetlen c-re sem. Így $k\geqq 3$ feltehető. Legyen $A=\prod_{i=1}^{k} a_i$.

Legyen mármost $p<a_k$ egy prímszám. Ha $a_i\equiv a_j(p)$, akkor a feltételből $a_i\equiv 0(p)$. Így legfeljebb $p-1$ darab a_i nem osztható p-vel. A többieket p-vel osztva, ismét egy jó rendszert kapunk. Így ezekből ismét legfeljebb $p-1$ darab nem osztható p-vel. Ennek alapján A prímtényezős felbontásában a p kitevője legalább

$$(k-(p-1))+(k-2(p-1))+\ldots+\left(k-\left[\frac{k}{p-1}\right](p-1)\right).$$

Ha $p<\sqrt{k}$, akkor

$$\sum_{i\leqq[k/(p-1)]}(k-i(p-1))\geqq k\left(\frac{k}{p-1}-1\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{p-1}\left(\frac{k}{p-1}+1\right)(p-1)\geqq c_1\frac{k^2}{p}.$$

Így

$$A\geqq\prod_{p\leqq\sqrt{k}} p^{c_1k^2/p},\quad \log A\geqq c_1k^2\sum_{p\leqq\sqrt{k}}\frac{\log p}{p}\geqq c_2k^2\log k.$$

Vagyis

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log a_i\geqq c_2k\log k,\quad \text{azaz}\quad a_k=\max a_i>e^{c_2k\log k}=k^{c_3k}.$$

Ekkor $a_k-a_1|a_1$, így $2a_1\geqq a_k$, azaz $a_k\geqq 3$ miatt $a_1\geqq 2$. Így $a_1=\sqrt{a_1^2}\geqq\sqrt{2a_1}\geqq$ $\geqq\sqrt{a_k}>k^{c_3k/2}$. Ezzel beláttuk, hogy van megfelelő c konstans.

19 dolgozat érkezett. Teljes megoldást adtak: Tardos Gábor (kiemelkedő), Elek Gábor, Erdős László, Kós Géza, Szabó Endre, Szabó Zoltán. Lényegében teljes megoldást adott: Törőcsik Jenő. Kis hibát tartalmazott Mócsy Miklós megoldása, b)-nél gyengébbet igazolt Magyar Ákos, további 10 fő csak a)-t igazolta, ami triviális volt.

A 4. feladat megoldása

Belátjuk, hogy ilyen F résztest pontosan akkor létezik, ha x transzcendens, vagy x algebrai, de x-nek van nem valós konjugáltja. Valóban, ha x ilyen, akkor van $\mathbf{C}$-nek olyan φ automorfizmusa, melyre $x \notin \varphi''\mathbf{R}$. Ekkor $F=\varphi''\mathbf{R}$ megfelelő résztest, $\mathbf{C}=F[x]$.

Megfordítva, belátjuk, hogy ha x algebrai és minden konjugáltja valós, akkor nincs megfelelő résztest. Indirekte tegyük fel, hogy $\mathbf{C}=L[x]$, L a $\mathbf{C}$ valódi résztest. Ekkor x algebrai L felett, azaz $\mathbf{C}$ az L véges bővítése. Használjuk az alábbi jól ismert tételt.

Tétel. Ha K algebrailag zárt test, $\operatorname{char} K=0$, K az L valódi résztest véges bővítése, akkor $|K:L|=2$.

A fenti tétel szerint $|\mathbf{C}:L|=2$.

Állítás. $i \notin L$.

Tegyük fel, hogy $x^2+cx+d=0$ és $i \in L$, $c, d \in L$. Ekkor $x=c'+\sqrt{d'}$, így $\mathbf{C}=L[\sqrt{d'}]$, ahol $d' \in L$. De így $\sqrt[4]{d}=a+b\sqrt{d}$, ahol $a, b \in L$. Így $\sqrt{d}=a^2+b^2d+2ab\sqrt{d}$, tehát $a^2+b^2d=0$ és $2ab=1$, azaz $4a^4+4a^2b^2d=0$ és $4a^2b^2=1$-ből $4a^4+d=0$, vagyis $d=-4a^4$, tehát $\sqrt{d}=\pm i2a^2$, azaz $\sqrt{d} \in L$, vagyis $L=L[\sqrt{d}]$. A kapott ellentmondás mutatja az állítás igaz voltát.

Tehát $i \notin L$, $\mathbf{C}=L[i]$ miatt L valósan zárt, így rendezhető. Legyen

$$A = \{y \in L: y \text{ algebrai}\}.$$

Ekkor A is rendezhető. De A-nak csak archimedeszi rendezése van, mivel jól ismert, hogy az algebrai számtest összes résztestének valamennyi rendezése archimedesi. Ezek szerint A izomorf a valósak egy résztestével, azaz van $\varphi: A \to \mathbf{R}$ izomorf beágyazás. Ekkor van $\varphi' \supset \varphi$, melyre φ' az algebrai számok beágyazása $\mathbf{C}$-be. Mivel $L[i]=\mathbf{C}$, így $A[i]$ az összes algebrai számot kiadja. Természetesen $\varphi'(i)=\pm i$. A φ' az x konjugáltjait egymás között permutálja, így $\varphi'(x) \in \mathbf{R}$. Ha $\varphi(x) \notin \varphi''A$, akkor $\varphi(x) \in \varphi''A[\varphi(i)]=\varphi''A[i]$, így $\varphi(x) \in \varphi''A[i] \cap \mathbf{R}=\varphi''A$. Így $\varphi(x) \in \varphi''A$, azaz $x \in A$, ami ellentmondás. Ezzel a feladatot megoldottuk.

11 dolgozat érkezett. Megoldotta: Tardos Gábor.

Az 5. feladat megoldása

Ha $n=p^k$, $k \geqq 2$, akkor $G=C_p^k$ megfelelő. Ha $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_r^{k_r}$, $r \geqq 2$, akkor legyen $G=PSL(2,q) \times C_{n/p_1p_2}$, ahol q olyan prím, hogy $q \equiv 1 \pmod{p_1}$ és $q \equiv -1 \pmod{p_2}$. Ekkor

$$|G| = \frac{(q-1)q(q+1)}{2} \cdot \frac{n}{p_1p_2} = \frac{q-1}{p_1} \cdot \frac{q+1}{p_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot n$$

osztható n-nel és $< q^3 n/p_1 p_2$. Ha G-ben volna n-edrendű elem, akkor $PSL(2, q)$-ban volna $p_1 p_2$-edrendű elem. Ám Dickson tétele (lásd: Huppert, Endliche Gruppen, I, 213. old.) szerint $PSL(2, q)$ minden ciklikus részcsoportjának rendje osztója q, $(q-1)/2$, $(q+1)/2$ valamelyikének. Ezek páronként relatív prímek és közülük $p_1 | (q-1)/2$, illetve $p_2 | (q+1)/2$, így $PSL(2, q)$-ban nincs $p_1 p_2$-edrendű elem, tehát G-ben sincs n-edrendű elem. Most q egy modulo $p_1 p_2$ meghatározott maradékosztályba eső tetszőleges prímszám. A legkisebb ilyen prímszámra Linnyik tétele (lásd: Prachar, Primzahlverteilung, 364. old.) szerint $q < (p_1 p_2)^C$ teljesül valamilyen C konstanssal. Így

$$|G| < (p_1 p_2)^{3C} \frac{n}{p_1 p_2} \leqq n^{3C}.$$

10 dolgozat érkezett. Megoldotta: Tardos Gábor. Lényeges részeredményt ért el: Szabó Endre.

A 6. feladat megoldása

A feladat megoldása során feltesszük, hogy a topologikus vektorterek a T_2 szétválasztási axiómát kielégítik.

Indirekte tegyük fel, hogy van olyan topológia $C[0, 1]$-en, amely $C[0, 1]$ lineáris struktúrájával topologikus vektorteret alkot és amelyben U kompakt. Ekkor U zárt is, hisz a topológia T_2. Ekkor minden $\delta > 0$ és $f \in C[0, 1]$ esetén zárt és kompakt lesz az $U_{f,\delta} = \{g \in C[0, 1]: |g(x) - f(x)| \leqq \delta$ minden $x \in [0, 1]$-re$\}$ halmaz is.

Ha $n \geqq 2$ természetes szám, akkor definiáljuk az $f_n, g_n \in C[0, 1]$ függvényeket a következőképpen:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}; \\ nx + 1 - \frac{n}{2}, & \text{ha } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2}; \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1; \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}; \\ nx - \frac{n}{2}, & \text{ha } \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}; \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Legyen $K_n = \{g \in C[0, 1]: g_n(x) \leqq g(x) \leqq f_n(x)$ minden $x \in [0, 1]$-re$\}$. Ekkor K_n zárt, mert $K_n = U_{f_n - 1, 1} \cap U_{g_n + 1, 1}$. Ekkor $K_2 \supset K_3 \supset \ldots$. Így $\bigcap_{n \geqq 2} K_n \neq \emptyset$. Legyen $f \in \bigcap K_n$. Ha $x < \frac{1}{2}$, akkor $f(x) = 0$; ha $x > \frac{1}{2}$, akkor $f(x) = 1$; így f nem lehet folytonos. Így beláttuk, hogy U valóban nem lehet kompakt.

8 dolgozat érkezett. Megoldották: Elek Gábor, Károlyi Gyula, Magyar Ákos, Szabó Endre, Szabó Zoltán, Tardos Gábor.

A 7. feladat megoldása

Tegyük fel, hogy $\sum |c_p| < +\infty$. Mivel $\|f(px)\| = \|f(x)\|$ az L_2-normában, így $\sum \|c_p f_p\| = \sum |c_p| \cdot \|f_p\| = \|f\| \sum |c_p| < \infty$, így az L_2 tér teljessége miatt $\sum c_p f(px)$ konvergens.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\sum |c_p|$ divergens. Először is minden p prímszámra definiáljuk az A_p: $f(x) \to f(px)$ normatartó lineáris operátort. Mivel $\sum |c_p|$ divergens, így van a prímeknek olyan véges $\{p_i\}_{i \in I}$ részsorozata, melyre $\left|\sum_{i \in I} c_{p_i}\right| > \delta$, ahol δ tetszőleges valós szám.

Legyen $S = \sum_{i \in I} c_{p_i} A_{p_i}$ és $H = \left\{\prod_{i \in J} p_i : J \subset I\right\}$. Ha $h \in H$, legyen $J_h = \{i \in I : p_i | h\}$, $\bar{h} = \prod \{p_i : i \in I \setminus J_h\}$, $v_h = \sum \{c_p : p \in J_h\}$. Tekintsük mármost az $e^{2\pi int} \in L_2[0, 1]$ függvényeket, $n \in H$. Ezek ortonormált rendszert adnak és $A_p(e^{2\pi int}) = e^{2\pi inpt}$.

Tekintsük most a $\sum_{n \in H} e^{2\pi int}$ függvényt. Ennek normája $2^{|H|/2}$. Nézzük, hogy mi $e^{2\pi int}$ együtthatója $S\left(\sum_{n \in H} e^{2\pi int}\right)$ Fourier-sorában: $\langle S(e^{2\pi ilt}), e^{2\pi int} \rangle = c_p$, ha $lp = n$ és 0 egyébként. Így a keresett együttható épp v_n lesz. Tehát

$$\left\|S\left(\sum_{n \in H} e^{2\pi int}\right)\right\|^2 \geqq \sum_{n \in H} v_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n \in H} (v_n^2 + v_{\bar{n}}^2) \geqq \frac{1}{4} \sum_{n \in H} (v_n + v_{\bar{n}})^2 =$$

$$= 2^{|I|-2} \left(\sum_{i \in I} c_{p_i}\right)^2, \quad \text{azaz} \quad \|S\|^2 \geqq \frac{1}{4} \delta^2.$$

A Banach—Steinhaus-tétel szerint, ha egy operátor minden f-re konvergens, akkor egyenletesen korlátos. Így $\sum |c_p| < \infty$ szükséges feltevés.

12 dolgozat érkezett. Megoldották: Elek Gábor, Szabó Zoltán, Tardos Gábor. Lényeges részeredményt értek el: Károlyi Gyula, Magyar Ákos.

A 8. feladat megoldása

(i) Keressük $p_n(x)$-et

$$p_n(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{s=0}^{2k+1} c_{s,n} T_{(2m+1)s}(x) \tag{4}$$

alakban, ahol

$$m = \left[\frac{n}{4k+2} - \frac{1}{2}\right] \quad (n \geqq 4k-1), \tag{5}$$

és $T_j(x) = \cos(j \arccos x)$ a j-edfokú Csebisev-polinom. Ekkor $p_n(x)$ valóban legfeljebb n-edfokú polinom, és az (1) feltételek a

$$\sum_{s=0}^{2k+1} c_{s,n} T^{(i)}_{(2m+1)s}(-1) = a_i n^2, \quad \sum_{s=0}^{2k+1} c_{s,n} T^{(i)}_{(2m+1)s}(1) = b_i n^2 \quad (i = 0, \ldots, k) \tag{6}$$

egyenletrendszerhez vezetnek. Bebizonyítjuk, hogy ez elég nagy n esetén egyértelműen megoldható. Először is $T_j^{(i)}(-1) = (-1)^{i+j} T_j^{(i)}(1)$ miatt (6)-ból összeadással

$$\sum_{s=0}^{k} c_{2s,n} T^{(i)}_{2(2m+1)s}(1) = \frac{1}{2}((-1)^i a_i + b_i) n^2 \quad (i = 0, \ldots, k) \tag{7}$$

adódik. A Csebisev-polinomokra jól ismert

$$(1-x^2)T_j''(x)-xT_j'(x)+j^2T_j(x)=0$$

differenciálegyenletet $i-1$-szer differenciálva és $x=1$-et téve, adódik

$$T_j^{(i)}(1)=\frac{j^2-(i-1)^2}{2i-1}T_j^{(i-1)}(1)=\ldots=\frac{j^2(j^2-1)\ldots\left(j^2-(i-1)^2\right)}{(2i-1)!!}=$$

$$=\frac{j^{2i}}{(2i-1)!!}+O(j^{2i-2})\quad (i=1,\ldots,k;\ j\to\infty),$$

tehát (7) az (5)-re tekintettel a

$$\sum_{s=0}^{k}c_{2s,n}\{s^{2i}+O(n^{-2})\}=\frac{(-1)^ia_i+b_i}{2^i(2m+1)^{2i}}(2i-1)!!\,n^2\quad (i=0,\ldots,k) \tag{8}$$

alakot ölti. Ha most $n\to\infty$, akkor $a_0=b_0=0$ miatt ez tart a

$$\sum_{s=0}^{k}c_{2s}s^{2i}=\frac{1}{2}(b_1-a_1)(2k+1)\delta_{i1}\quad (i=0,\ldots,k)$$

egyenletrendszerhez, ami egyértelműen megoldható, hisz determinánsa az $1^2, 2^2, \ldots, k^2$ elemek Vandermonde-determinánsa, s így 0-tól különböző. Ezért elég nagy n-re (8) is egyértelműen megoldható, és $c_{2s,n}=O(1)$ $(s=0,\ldots,k)$. Teljesen hasonlóan adódik (6)-ból, hogy $c_{2s+1,n}=O(1)$ $(s=0,\ldots,k)$. Így (4) valóban teljesíti (2)-t, hacsak c-t úgy választjuk, hogy $c\geqq\sum_{s=0}^{2k+1}|c_{s,n}|$.

(ii) Hogy (3) általában nem állhat fenn, az a Markov-egyenlőtlenségből következik: (3) ugyanis maga után vonná, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\max_{|x|\leqq 1}|p_n'(x)|=0,$$

ami ellentmondana (1)-nek, hacsak $a_1\neq 0$ vagy $b_1\neq 0$.

6 dolgozat érkezett. Megoldották: Erdős László, Hetyei Gábor, Sigray István, Tardos Gábor, Törőcsik Jenő. Félig megoldotta: Szabó Endre.

A 9. feladat megoldása

Megmutatjuk, hogy ilyen N nincs. Legyen h az $xy=1$ egyenletű hiperbolának az első síknegyedbe eső ága. Messe h-nak az $(a, 1/a)$ pontban húzott érintője az x tengelyt az A, és az $(1/a, a)$ pontban húzott érintője az y tengelyt a B pontban. Helyettesítsük h-nak az $(a, 1/a)$ és az $(1/a, a)$ pontokon „túl" eső íveit az érintőknek $(a, 1/a)$ és A, illetőleg $(1/a, a)$ és B közé eső szakaszaival. Jelöljük az így nyert, két szakaszból és egy hiperbolaívből álló görbét g-vel. Ekkor g bármely érintője és a tengelyek által határolt háromszög területe 2. Másrészt, ha $a\to\infty$, akkor g és a tengelyek közé eső rész területe is $\to\infty$. Megválaszthatjuk tehát a-t úgy, hogy e két terület aránya egy tetszőlegesen kicsi ε-nal legyen egyenlő.

Kerekítsük le az egységnégyzet két átellenes sarkát egy ilyen g ív egy-egy megfelelően kicsinyített példányával, amelyek a négyzet területéből egy-egy δ területű részt metszenek le. A lekerekített négyzetnek, q-nak a területe $1-2\delta$. Mivel q

centrálisan szimmetrikus, így $t(q)$ megegyezik a q köré írt minimális területű hatszög területével, $t(q)=1-2\varepsilon\delta$. Másrészt q-nak n eltolt példánya elhelyezhető $n-2\delta$ területű konvex tartományban. Ezért bármely n-hez ε-t úgy választva, hogy $\varepsilon n<1$ legyen, $n\cdot t(q)=n-2n\varepsilon\delta>n-2\delta$.

11 dolgozat érkezett. Megoldották: Elek Gábor, Erdős László, Károlyi Gyula, Király Zoltán, Magyar Ákos, Stipsicz András, Szabó Csaba, Szabó Zoltán, Tardos Gábor, Törőcsik Jenő.

A 10. feladat megoldása

Legyen $\overline{X}_n=\dfrac{X_1+\ldots+X_n}{n}$, $S_n=X_1+\ldots+X_n$. Ekkor $D^2\left[\left(\dfrac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)^\alpha\right]=$
$=E[(\overline{X}_n^\alpha-m^\alpha+m^\alpha-E\overline{X}_n^\alpha)^2]=E(\overline{X}_n^\alpha-m^\alpha)^2+(E\overline{X}_n^\alpha-m^\alpha)^2$.

1. állítás: $n[E(\overline{X}_n^\alpha-m^\alpha)]^2\to 0$, ha $n\to\infty$.

Ugyanis $(E\overline{X}_n)^\alpha\leqq E\overline{X}_n^\alpha$ a Jensen-egyenlőtlenség miatt. Másfelől $z\geqq -1$ esetén $1-(1+z)^\alpha\leqq(1-\alpha)z^2-\alpha z$. Így

$$0\leqq m^\alpha-E\overline{X}_n^\alpha=m^\alpha E\left(1-\left(\frac{\overline{X}_n}{m}\right)^\alpha\right)\leqq$$

$$\leqq m^\alpha\left[(1-\alpha)E\left(\frac{\overline{X}_n}{m}-1\right)^2-E\left(\frac{\overline{X}_n}{m}-1\right)\right]=(1-\alpha)\frac{m^\alpha}{m^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}.$$

2. lépés: Becsüljük meg $n\cdot E(\overline{X}_n^\alpha-m^\alpha)^2$-t!

Legyen $Z_i=\dfrac{X_i}{m}-1$. Ekkor $Z_i\geqq -1$, $EZ_i=0$, $D^2Z_i=\dfrac{\sigma^2}{m^2}$. Így

$$n\cdot E(\overline{X}_n^\alpha-m^\alpha)^2=m^{2\alpha}n\cdot E\big((1+\overline{Z}_n)^\alpha-1\big)^2=$$

$$=m^{2\alpha}\left[n\cdot E\big(((1+\overline{Z}_n)^\alpha-1)^2\chi_{(|Z_n|\leqq\varepsilon)}\big)+n\cdot E\big(((1+\overline{Z}_n)^\alpha-1)^2\chi_{(|Z_n|>\varepsilon)}\big)\right],$$

ahol $0<\varepsilon<1$ egyelőre tetszőleges pozitív szám. Az első tagban az

$$\frac{\alpha|z|}{1+|z|}\leqq|(1+z)^\alpha-1|\leqq\frac{\alpha|z|}{1-|z|},\quad\text{ha}\quad|z|<1,$$

egyenlőtlenséget, a másodikban az

$$|(1+z)^\alpha-1|\leqq|z|^\alpha,\quad\text{ha}\quad z\geqq-1,$$

egyenlőtlenséget használjuk fel. Ebből adódik, hogy a $\dfrac{|z|}{1+|z|}\geqq\dfrac{|z|}{1+\varepsilon}$, $\dfrac{|z|}{1-|z|}\leqq$
$\leqq\dfrac{|z|}{1-\varepsilon}$, ha $|z|\leqq\varepsilon$ — összefüggések alapján

$$m^{2\alpha}\left[n\frac{\alpha^2}{(1+\varepsilon)^2}E(\overline{Z}_n^2\chi_{(|Z_n|\leqq\varepsilon)})\right]\leqq n\cdot E(\overline{X}_n^\alpha m^\alpha)^2\leqq$$

$$\leqq m^{2\alpha}\left[n\frac{\alpha^2}{(1-\varepsilon)^2}E(\overline{Z}_n^2\chi_{(|Z_n|\leqq\varepsilon)})+n\cdot E(|\overline{Z}_n|^{2\alpha}\chi_{(|Z_n|>\varepsilon)})\right].$$

Elegendő tehát megmutatni, hogy

$$n \cdot E(\overline{Z}_n \chi_{(|Z_n| \leqq \varepsilon)}) \to \frac{\sigma^2}{m^2} \quad \text{és} \quad n \cdot E(\overline{Z}_n^{2\alpha} \chi_{(|Z_n| > \varepsilon)}) \to 0.$$

Legyen Φ az $N(0, 1)$ eloszlásfüggvény. Ekkor

$$\frac{\sigma^2}{m^2} = n \cdot E(\overline{Z}_n^2) \geqq n \cdot E(\overline{Z}_n^2 \chi_{(|Z_n| \leqq \varepsilon)}) = \frac{\sigma^2}{m^2} E\left[\left(\frac{\sqrt{n}\,\overline{Z}_n}{\sigma/m}\right)^2 \chi_{\left(\left(\frac{\sqrt{n}\,Z_n}{\sigma/m}\right) \leqq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma/m}\right)}\right] \geqq$$

$$\geqq (\text{ha } n \text{ elég nagy}) \geqq \frac{\sigma^2}{m^2} E\left[\left(\frac{\sqrt{n}\,\overline{Z}_n}{\sigma/m}\right)^2 \chi_{\left(\frac{\sqrt{n}\,Z_n}{\sigma/m} \leqq a\right)}\right] \to \frac{\sigma^2}{m^2} \int_{-a}^{a} y^2 \, d\Phi(y),$$

mivel $\dfrac{\sqrt{n}\,\overline{Z}_n}{\sigma/m} \to \Phi$ eloszlásban.

Ugyanakkor

$$n \cdot E(|\overline{Z}_n|^{2\alpha} \chi_{(|Z_n| > \varepsilon)}) = \varepsilon^{2\alpha} n \cdot E(|\overline{Z}_n/\varepsilon|^{2\alpha} \chi_{(|Z_n/\varepsilon| > 1)}) \leqq$$

$$\leqq n\varepsilon^{2\alpha} E(|\overline{Z}_n/\varepsilon|^2 \chi_{(|Z_n/\varepsilon| > 1)}) = n\varepsilon^{2\alpha-2} E(\overline{Z}_n^2 \chi_{(|Z_n| > \varepsilon)}) \to 0,$$

mivel $\dfrac{\sigma^2}{m^2} = n \cdot E\overline{Z}_n^2 = n \cdot E(\overline{Z}_n^2 \chi_{(|Z_n| \leqq \varepsilon)}) + n \cdot E(\overline{Z}_n^2 \chi_{(|Z_n| > \varepsilon)})$, és $n \cdot E(\overline{Z}_n^2 \chi_{(|Z_n| \leqq \varepsilon)}) \to$

$\to \dfrac{\sigma^2}{m^2}$, ha $n \to \infty$.

4 dolgozat érkezett. Megoldották: Király Zoltán, Tardos Gábor. Kis hibát tartalmazott Hetyei Gábor megoldása.

ДОКЛАД О МЕМОРИАЛЬНОМ КОНКУРСЕ ИМЕНИ МИКЛОША ШВЕЙЦЕРА 1986-ГО ГОДА

REPORT ON THE 1986 M. SCHWEITZER MEMORIAL COMPETITION

Problems of the 1986 M. Schweitzer Memorial Competition

1. Let $\langle A, \prec \rangle$ be a partially ordered set. The dimension of $\langle A, \prec \rangle$, $\dim(A, \prec)$ is the smallest cardinality $\varkappa$ for which there exists a series $\langle \prec_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ of complete orderings of A with $\prec = \bigcap_{\alpha < \varkappa} \prec_\alpha$. Prove that if $\dim(A, \prec) > \aleph_0$, then there exist subsets $A_0, A_1 \subset A$ such that $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, $\dim(A_0, \prec) > \aleph_0$ and $\dim(A_1, \prec) > \aleph_0$ in the ordering $\prec$ inherited from A.

2. Prove that if $k \leqq n/2$ then from an arbitrary $n \times n$ matrix one can choose at most $\binom{n-1}{k-1}^2$ $k \times k$ submatrix so that their pairwise intersections are not empty.

3. a) Prove that for an arbitrary natural number k there exist positive integers $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ such that for $1 \leqq i, j \leqq k$, $i \neq j$ the relation $a_i - a_j \mid a_i$ holds.

b) Prove that there exists an absolute constant $c > 0$ such that for any numbers $a_1, \ldots, a_k$ satisfying the above conditions the inequality $a_1 > k^{ck}$ holds.

4. Determine the real numbers x for which the complex field $\mathbf{C}$ has a proper subfield F, the extension of which with x is $\mathbf{C}$.

5. Prove the existence of a constant c such that for any composite number n there exists a group which does not contain elements of order n and its order is divisible by n and less than n^c.

6. Let $U=\{f\in C[0,1]: |f(x)|\leqq 1 \text{ for all } x\in[0,1]\}$. Prove that there is no topology on $C[0,1]$ forming a topological vector space the linear structure of $C[0,1]$ in which U is compact.

7. Prove that $\sum_p c_p f(px)$ — where p runs through all primes — is convergent in $L_2([0,1])$ for all 1-periodic functions f with $f|_{[0,1]}\in L_2([0,1])$ if and only if $\sum |c_p|<+\infty$.

8. Let $a_0=0, a_1, \ldots, a_k$ and $b_0=0, b_1, \ldots, b_k$ be arbitrary real numbers.
(i) Show that for sufficiently large n there exist polynomials p_n of degree at most n for which

$$p_n^{(i)}(-1)=a_i, \quad p_n^{(i)}(1)=b_i \quad (i=0,1,\ldots,k) \tag{1}$$

and

$$\max_{|x|\leqq 1} |p_n(x)| \leqq \frac{c}{n^2}, \tag{2}$$

where c depends only on the numbers a_i, b_i $(i=1,\ldots,k)$.
(ii) Prove that (2) cannot be generally substituted by the relation

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \max_{|x|\leqq 1} |p_n(x)| = 0. \tag{3}$$

9. Consider a lattice-arrangement of the translates of the convex plate K. Let t be the area of the fundamental parallelogram of the lattice defining the lattice-arrangement and let $t_{\min}(K)$ denote the minimum of t over all lattice-arrangements. Does there exist a natural number N such that for $n>N$ and for any K which is not a parallelogram $n\cdot t_{\min}(K)$ is less than the area of an arbitrary convex region containing n not interpenetrating translates of K? (A lattice-arrangement of K is a set of not interpenetrating translates of K by the vectors of a lattice.)

10. Let $X_1, X_2, \ldots$ be independent identically distributed random variables, $X_i\geqq 0$ $(i=1,2,\ldots)$. Let $EX_i=m$, $D^2X_i=\sigma^2<+\infty$. Show that for arbitrary $0<\alpha\leqq 1$

$$n\cdot D^2\left[\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)^{\alpha}\right] \to \frac{\alpha^2\sigma^2}{m^{2(1-\alpha)}}$$

if $n\to\infty$.

FELADATROVAT

SZERKESZTI: LACZKOVICH MIKLÓS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, II. Fő utca 68., 1027. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

Kitűzött feladatok

237. feladat. Legyen p $4k+3$ alakú prímszám és jelölje $F_p(x, y)$ az $(x+iy)^p$ komplex együtthatós polinom valós és képzetes részének összegét. Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b egész számra $F_p(a, b)$ minden $a-b$-hez relatív prím osztója $2kp\pm1$ alakú.

GYŐRY KÁLMÁN, SURÁNYI JÁNOS és VÁRNAI FERENC †

238. feladat. (i) Mutassuk meg, hogy minden zárt térgörbén van négy komplanáris pont, és van olyan zárt térgörbe, amely nem tartalmaz öt komplanáris pontot. (ii) Konstruáljunk olyan zárt térgörbét, amely minden n-re tartalmaz n komplanáris pontot, de nem tartalmaz végtelen sok komplanáris pontot.

RÓKA SÁNDOR

239. feladat. Legyen Φ olyan $f: X\to\mathbf{R}$ függvényekből álló halmaz, hogy $f, g\in\Phi$ esetén $\max(f, g)\in\Phi$ és $\min(f, g)\in\Phi$. Mutassuk meg, hogy ha

$$f=\sup_{i\in\mathbf{N}}\{\inf_{j\in\mathbf{N}}\{g_{ij}\}\}=\inf_{i\in\mathbf{N}}\{\sup_{j\in\mathbf{N}}\{h_{ij}\}\},$$

ahol $g_{ij}, h_{ij}\in\Phi$, akkor vannak olyan $f_n\in\Phi$ függvények, hogy $f=\lim f_n$.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megoldott feladatok

224. feladat. Milyen n, k párokra létezik az $1, 2, \ldots, n$ számoknak olyan permutációja, ahol minden elem pontosan k másikkal áll inverzióban?

FREUD RÓBERT, HANGYA LÁSZLÓ és REVICZKY JÁNOS

Megoldás. Jelöljük F-fel azon (n, k) párok halmazát, amelyekre létezik a feladatban megkívánt tulajdonságú permutáció. Azt fogjuk megmutatni, hogy $(n, k)\in F$

akkor és csak akkor, ha

$$(*) \qquad n > k, \quad nk \text{ páros, és } k > 0 \text{ esetén } n \neq 2k+1.$$

E feltételek szükségesek. Valóban, tegyük fel, hogy σ az $1, 2, \ldots, n$ számok olyan permutációja, amelyben minden elem pontosan k másikkal áll inverzióban. Nyilvánvaló, hogy ekkor $n > k$. Mivel az összes inverzió száma $nk/2$, így nk páros. Könnyű belátni, hogy $n = 2k+1$ esetén $\sigma(1) = \sigma(n) = k+1$, ez tehát csak $k = 0$-ra lehetséges. Most belátjuk, hogy $(*)$ fennállása esetén $(n, k) \in F$. Ezt k szerinti indukcióval bizonyítjuk. A $k = 0$ esetben az identikus permutáció minden n-re megfelel, ha pedig $k = 1$ és n páros, akkor vehetjük azt a σ permutációt, amelyre $\sigma(2i-1) = 2i$ és $\sigma(2i) = 2i-1$ $(i = 1, \ldots, n/2)$. Tegyük fel, hogy $k \geqq 2$ és már beláttuk, hogy ha $k' < k$ és (n, k') kielégíti a $(*)$ feltételt, akkor $(n, k') \in F$. Tegyük fel először, hogy $k < n \leqq 2k$ és nk páros. Ekkor $0 \leqq n-1-k < k$, $n(n-1-k)$ páros, továbbá $n \neq 2(n-1-k)+1$, tehát az indukciós feltevés szerint van olyan σ permutációja az $1, 2, \ldots, n$ számoknak, amelyben minden elem pontosan $n-1-k$-val áll inverzióban. Ekkor a $\sigma'(i) = \sigma(n+1-i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ permutáció szerint minden elem pontosan k másikkal áll inverzióban, tehát $(n, k) \in F$.

Most belátjuk, hogy ha $(n_1, k) \in F$, $(n_2, k) \in F$ és a, b pozitív egészek, akkor $(an_1 + bn_2, k) \in F$. Ehhez elég megmutatni, hogy $(n_1 + n_2, k) \in F$. Legyen $i = 1, 2$-re σ_i az $1, \ldots, n_i$ számok olyan permutációja, amelyben minden elem pontosan k másikkal áll inverzióban. Legyen $n = n_1 + n_2$ definiáljuk a σ permutációt a következőképpen: $\sigma(i) = \sigma_1(i)$ $(1 \leqq i \leqq n_1)$ és $\sigma(n_1 + j) = n_1 + \sigma_2(j)$ $(1 \leqq j \leqq n_2)$. Ekkor σ szerint is minden elem pontosan k másikkal áll inverzióban, tehát $(n, k) \in F$.

Tegyük fel, hogy $n > 2k+1$ és nk páros. Ekkor vannak olyan a és n' pozitív egészek, hogy $n = a(k+1) + n'$ és $k \leqq n' \leqq 2k$. Ekkor $n'k$ páros. Ha $n' = k$, akkor k páros, $a \geqq 2$ és $n = (a-2)(k+1) + 2k + (k+2)$. Mivel $(k+1, k)$, $(2k, k)$ és $(k+2, k)$ F-ben vannak, így $(n, k) \in F$. Ha pedig $n' > k$, akkor $(n, k) \in F$ abból következik, hogy $(k+1, k) \in F$ és $(n', k) \in F$.

BACSÓ GÁBOR

225. feladat. Legyenek $f, g: [0, 1] \to \mathbf{R}$ különböző, folytonos és pozitív értékű függvények, amelyekre

$$(1) \qquad \int_0^1 f\,dx = \int_0^1 g\,dx = 1.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és

$$(2) \qquad A_n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n : \prod_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{g(x_i)} < \varepsilon\right\}.$$

Bizonyítandó, hogy ekkor

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} \prod_{i=1}^{n} g(x_i)\,dx_1 \ldots dx_n = 1.$$

VERES SÁNDOR

Megoldás. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, g sűrűségű valószínűségi változók, és legyen $\eta_i = \log\left(f(\xi_i)/g(\xi_i)\right)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ekkor $\eta_1, \eta_2, \ldots$ is független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Mivel f és g folytonos és pozitív, η_i korlátos. Jelöljük M-mel η_i várható értékét; megmutatjuk, hogy $M < 0$. Valóban, az f/g

függvény folytonos és nem konstans [0, 1]-en. Így a g súllyal vett számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$1 = \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} g(x)\,dx > \exp\left[\int_0^1 \log\left(f(x)/g(x)\right)\cdot g(x)\,dx\right],$$

tehát

$$M = \int_0^1 \log\left(f(x)/g(x)\right)\cdot g(x)\,dx < 0.$$

Mármost

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^n g(x_i)\,dx_1 \ldots dx_n = P\left(\prod_{i=1}^n \frac{f(\xi_i)}{g(\xi_i)} < \varepsilon\right) =$$

$$= P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log\left(f(\xi_i)/g(\xi_i)\right) < \frac{1}{n}\log\varepsilon\right) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \eta_i < \frac{1}{n}\log\varepsilon\right).$$

A nagy számok gyenge törvénye szerint $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \eta_i < \frac{M}{2}\right) = 1$. Mivel $\frac{M}{2} < \frac{1}{n}\log\varepsilon$, ha n elég nagy, ebből a (3) állítás azonnal következik.

GÖNDŐCS FERENC †

226. feladat. Legyen $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbf{R}^n$-en. Bizonyítandó, hogy létezik olyan $|\cdot|$ euklideszi norma, melyre

$$|x| \leqq \|x\| \leqq \sqrt{n}\,|x| \tag{4}$$

minden $x \in \mathbf{R}^n$-re.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

Megoldás. Lássuk el $\mathbf{R}^n$-et egy kiindulási $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ skaláris szorzással és a hozzátartozó $|\cdot|_0$ euklideszi normával. Jelöljük U-val $\mathbf{R}^n$ összes olyan A lineáris transzformációjának halmazát, amelyre $|Ax|_0 \leqq \|x\|$ teljesül minden $x \in \mathbf{R}^n$-re. Nyilvánvaló, hogy U kompakt az $\mathbf{R}^{n^2}$ térben. Mivel a determináns a lineáris transzformáció folytonos függvénye, választhatunk egy olyan $A \in U$ lineáris transzformációt, amelynek a determinánsa maximális. A $\|\cdot\|$ és $|\cdot|_0$ normák topológiája megegyezik, ezért elég kis pozitív c-re $cI \in U$. Minthogy cI determinánsa pozitív, A determinánsa szintén pozitív lesz.

Megmutatjuk, hogy az $\langle x, y\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle Ax, Ay\rangle_0$ skaláris szorzatnak megfelelő $|x| = |Ax|_0$ euklideszi normára (4) teljesül. Mivel $A \in U$, ezért $|x| \leqq \|x\|$ minden x-re. A másik irányú egyenlőtlenséget indirekt úton igazoljuk. Tegyük fel, hogy valamely $x \in \mathbf{R}^n$-re $\sqrt{n}\,|x| < \|x\|$. Ekkor $x \neq 0$; feltehetjük, hogy $\|x\| = \sqrt{n}$ és $|x| < 1$. A Hahn—Banach-tétel szerint van olyan φ lineáris funkcionál $\mathbf{R}^n$-en, amelyre $|\varphi(y)| \leqq \|y\|$ minden $y \in \mathbf{R}^n$-re és $\varphi(x) = \sqrt{n}$. Legyen $z_1 \in \mathbf{R}^n$ olyan, hogy $\varphi(y) = \langle y, z_1\rangle$ minden $y \in \mathbf{R}^n$-re, és legyen $z = z_1/|z_1|$. Ekkor $|z| = 1$, és $\|y\| \leqq \sqrt{n}$ esetén $|\langle z, y\rangle| \leqq \langle z, x\rangle$. Nyilvánvaló, hogy $\langle z, x\rangle > 0$, továbbá a Cauchy—Schwarz-egyenlőtlenség szerint $\langle z, x\rangle \leqq |z|\cdot|x| < 1$.

Az indirekt feltevés azt mondja, hogy a $\|\cdot\|$ normabeli $\sqrt{n}$ sugarú gömb úgy helyezkedik el a $|\cdot|$ normában vett $\sqrt{n}$ sugarú gömbben, hogy z irányában nagyon keskeny, mégpedig $\langle z, x\rangle$ szélességű. Ez lehetővé teszi egy olyan B lineáris transz-

formáció A előtti közbeiktatását, amely a vektorok $\|\cdot\|$ normáját nem teszi nagyobb $|\cdot|$ normájúvá, determinánsa pedig egynél nagyobb. Nevezetesen, a z vektor irányában nagyítsunk úgy, hogy $\langle z, x\rangle$ 1-re nőjön, a rá merőleges altérben pedig kicsinyítsünk olyan arányban, hogy még a $|\cdot|$ normában $\sqrt{n}$ hosszúságú és a z irányában $\langle z, x\rangle$ vetületű vektor $|\cdot|$ normája is éppen $\sqrt{n}$ maradjon. Tekintsük tehát a következő B lineáris transzformációt:

$$By = \frac{\langle z, y\rangle}{\langle z, x\rangle} z + \sqrt{\frac{n-1}{n-\langle z, x\rangle^2}} (y - \langle z, y\rangle z) \quad (y \in \mathbf{R}^n).$$

Megmutatjuk, hogy $|By| \leqq \|y\|$ minden $y \in \mathbf{R}^n$-re.

Ezt bizonyítandó feltehetjük, hogy $\|y\| = \sqrt{n}$. Legyen $a = \langle z, x\rangle^2$, $b = \langle z, y\rangle^2$, ekkor z és y választása folytán $0 \leqq b \leqq a < 1$, és így

$$|By|^2 = \frac{b}{a} + \frac{n-1}{n-a}(|y|^2 - b) = \frac{n-1}{n-a}|y|^2 + \frac{n(1-a)}{a(n-a)} b \leqq$$

$$\leqq \frac{n-1}{n-a}\|y\|^2 + \frac{n(1-a)}{n-a} = \frac{n-1}{n-a} n + \frac{n(1-a)}{n-a} = n = \|y\|^2.$$

Beírva a $|\cdot|$ norma értelmezését azt kapjuk, hogy $|ABy|_0 = |By| \leqq \|y\|$ minden $y \in \mathbf{R}^n$-re, tehát $AB \in U$. A B lineáris transzformáció z irányában $\frac{1}{\langle z, x\rangle} = a^{-1/2}$-szeres, a z-re merőleges irányokban pedig $\sqrt{\frac{n-1}{n-a}}$-szoros nagyítást végez, ezért a determinánsa $a^{-1/2}\left(\frac{n-1}{n-a}\right)^{(n-1)/2}$. Mivel $\frac{1}{a}$ és $\frac{n-1}{n-a}$ különböző pozitív számok, így a mértani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség szerint $\sqrt[n]{\frac{1}{a}\left(\frac{n-1}{n-a}\right)^{n-1}} >$ $> \frac{n}{a + (n-a)} = 1$, tehát $\det B > 1$. Ebből következik, hogy $\det(AB) > \det A$, ami ellentmond A választásának. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy (4) fennáll.

GÖNDŐCS FERENC †

A fenti bizonyítást GÖNDŐCS FERENC néhány igen érdekes megjegyzéssel egészítette ki. A következő megjegyzések közül az első három GÖNDŐCS FERENC észrevételeit tartalmazza, néhány kiegészítéssel; a 4. megjegyzés LOVÁSZ LÁSZLÓTÓL származik.

1. Megjegyzés. A feladatban szereplő $\sqrt{n}$ konstans nem javítható, amint azt az l_0 és l_∞ normák példája mutatja. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Rögzítsünk egy koordinátarendszert $\mathbf{R}^n$-ben, és $x = (x_1, \ldots, x_n)$ esetén legyen $\|x\| = \max_i |x_i|$ az l_∞ norma. Legyen $|\cdot|$ tetszőleges euklideszi norma és tegyük fel, hogy valamely c konstanssal

$$\|x\| \leqq |x| \leqq c\|x\| \tag{5}$$

teljesül minden $x \in \mathbf{R}^n$-re. Könnyű belátni, hogy $|x|^2$ az x_i változók kvadratikus

alakja; legyen $|x|^2=\sum a_{ij}x_ix_j$. Alkalmazzuk az (5) egyenlőtlenséget az összes $(\pm x_1, \ldots, \pm x_n)$ vektorra, ekkor az oldalak négyzetre emelése után

$$\|x\|^2 \leqq \sum \pm a_{ij}x_ix_j \leqq c^2\|x\|^2$$

alakú egyenlőtlenségeket kapunk. Könnyen láthatóan a kapott $\sum \pm a_{ij}x_ix_j$ számok számtani közepe éppen $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$, és így azt kaptuk, hogy

$$\|x\|^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 \leqq c^2\|x\|^2$$

teljesül minden x-re. Ezek közül az első egyenlőtlenséget a $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ vektorokra alkalmazva $a_{ii}\geqq 1$ adódik minden i-re. Ha most az $(1, \ldots, 1)$ vektort a második egyenlőtlenségbe helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy $c^2\geqq n$. Tehát az l_∞ norma esetén a $\sqrt{n}$ konstans valóban nem javítható. Hasonló okoskodás alkalmazható az l_0 norma esetében.

2. Megjegyzés. Az euklideszi normák csak egy lineáris bijekcióval különböznek egymástól, azaz ha $|\cdot|_1$ és $|\cdot|_2$ euklideszi normák, akkor van olyan invertálható A lineáris transzformáció $\mathbf{R}^n$-ben, hogy $|x|_1=|Ax|_2$. (Az A lineáris transzformáció önadjungált pozitív definitnek is választható.) Ennek mintájára beszélhetünk egy $\|\cdot\|$ norma családjáról, mint az $x\mapsto\|Ax\|$ normák összességéről, ahol A befutja $\mathbf{R}^n$ invertálható lineáris transzformációinak halmazát. Definiáljuk két normacsalád távolságát úgy, mint azon d számok minimuma, melyekhez található az egyik családban egy $\|\cdot\|_1$ és a másikban egy $\|\cdot\|_2$ oly módon, hogy $\|x\|_1\leqq\|x\|_2\leqq e^d\|x\|_1$ minden x-re. Ezzel a normacsaládok halmazán egy metrikát értelmeztünk, és meg lehet mutatni, hogy az így kapott metrikus tér kompakt. A feladat állítása szerint az euklideszi normák családja minden más családtól legfeljebb $\frac{1}{2}\log n$ távolságra van.

3. Megjegyzés. Rögzítsünk egy $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzást $\mathbf{R}^n$-ben. Minden $\|\cdot\|$ normához hozzárendelhetjük a duális $\|y\|'=\max\{\langle x, y\rangle: \|x\|\leqq 1\}$ normát. Könnyű belátni, hogy egy családhoz tartozó normák duálisai is egy családot képeznek, amelyet nevezhetünk a normacsalád duálisának. A duális képzésénél a családok távolságai megőrződnek. Meg lehet mutatni, hogy az euklideszi normák családja megegyezik a saját duálisával. Vannak azonban nem euklideszi önduális családok is. Így például $\mathbf{R}^2$-ben az l_0 és l_∞ normák, melyek egymás duálisai és nem euklidesziek, azonos családhoz tartoznak, hiszen egy forgatva nyújtással vihetők egymásba. (Ilyen példák magasabb dimenzióban is konstruálhatóak. Például $\mathbf{R}^3$-ban a $(\max(|x_1|, |x_2|)^2+x_3^2)^{1/2}$ és $((|x_1|+|x_2|)^2+x_3^2)^{1/2}$ normák egymás duálisai, nem euklidesziek és azonos családhoz tartoznak. Ez a kiegészítés TARDOS GÁBORtól származik.) E jelenség oka az, hogy a családok képzésénél túl sok lineáris bijekciót engedtünk meg. Be lehet bizonyítani, hogy ha a normacsaládok képzésénél csak önadjungált pozitív definit lineáris transzformációkat engedünk meg, akkor az euklideszi normák családja lesz az egyetlen, amelyik megegyezik a saját duálisával.

4. Megjegyzés. Ha a $\sqrt{n}$ helyett, mondjuk, egy $(n+1)$-es faktort engedünk meg, akkor a feladat fenti megoldása algoritmikussá tehető és polinomiális idejű algoritmust ad az A mátrix meghatározására. A részletek kidolgozása után az ellipszoid módszernek egy Jugyintól és Nemirovszkijtól származó változatát kapjuk.

227. feladat. Legyen M^n az $\mathbf{R}^{n+1}$ euklideszi térbe ágyazott, végtelen sokszor differenciálható zárt hiperfelület, és tekintsük ezen a kanonikus hiperfelület-metrikát. Bizonyítandó, hogy M^n nem bontható föl nem-triviálisan két végtelen sokszor differenciálható metrikus sokaság metrikus direkt szorzatára.

SZABÓ ZOLTÁN

A feladat állítása azonnal következik az 1983. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny 11. feladatának állításából. Ennek megoldását lásd a Matematikai Lapok **32** (1981—1984) 1—3. számának 172. oldalán.

ЗАДАЧИ

PROBLEMS

Problem 237. Let p be a prime of the form $4k+3$ and let $F_p(x, y)=\mathrm{Re}\, z^p+\mathrm{Im}\, z^p$, where $z=x+iy$. Prove that if a, b are integers, q is a divisor of $F_p(a, b)$ such that q and $a-b$ are coprime then q is of the form $2kp\pm 1$.

K. GYŐRY, J. SURÁNYI and F. VÁRNAI †

Problem 238. (i) Prove that every closed curve in $\mathbf{R}^3$ contains four complanar points, and that there are closed space curves not containing five complanar points. (ii) Construct a space curve that contains n complanar points for every n but does not contain infinitely many complanar points.

S. RÓKA

Problem 239. Let Φ be a class of real valued functions defined on the set X such that $f, g\in\Phi$ mplies $\max(f, g)\in\Phi$ and $\min(f, g)\in\Phi$. Prove that if

$$f=\sup_{i\in\mathbf{N}}\left\{\inf_{j\in\mathbf{N}}\{g_{ij}\}\right\}=\inf_{i\in\mathbf{N}}\left\{\sup_{j\in\mathbf{N}}\{h_{ij}\}\right\}$$

where $g_{ij}, h_{ij}\in\Phi$, then there are functions $f_n\in\Phi$ such that $f=\lim f_n$.

Á. CSÁSZÁR

TÁRSULATI ÉLET

Jelentés a Szele Tibor Emlékérem 1986. évi odaítéléséről

A Társulat Szele Tibor Emlékérem bizottsága 1986. november 20-i ülésén az alábbi határozatot hozta:

az 1986. évi Szele Tibor Emlékérmet, tudományos és iskolateremtő munkájának elismeréséül GYŐRY KÁLMÁN-nak a KLTE tanszékvezető egyetemi tanárának ítéli oda.

Indoklás:

Győri Kálmán 1964-ben fejezte be egyetemi tanulmányait a Debreceni Egyetemen, és azóta azon a tanszéken dolgozik, melynek egykor Szele Tibor volt a vezetője. 1973-ban kandidátus, 1984-ben doktor és 1985 óta egyetemi tanár.

Legjelentősebb tudományos eredményeit a diofantikus egyenletek és az irreducibilis polinomok elméletében, valamint az algebrai számelméletben érte el. Ezen témakörök általánosan elismert kiváló művelője, rangos nemzetközi rendezvények meghívott előadója. Termékeny szerző. Eddig egy monográfiát és hetven tudományos közleményt publikált. A. Baker nevezetes módszerét az általa kidolgozott gráfmódszerrel kombinálva kifejlesztette az egész számok gyűrűje felett végesen generált integritási tartományok feletti tetszőleges ismeretlen számú széteső forma egyenletek effektív elméletét. Ezen általános eredményei lehetővé tették az algebrai számelmélet adott diszkriminánsú egészekkel és hatványegészbázisokkal kapcsolatos klasszikus problémakörének teljes általánosságban való effektív megoldását és lezárását. Igen jelentős, sok esetben tovább már nem javítható eredményeket bizonyított az egységegyenletek megoldásainak számára vonatkozóan.

Sokat tett a fiatal matematikai tehetségek felkutatásáért, kiválasztásáért, és még jóval többet alkotó matematikussá válásukért. Két évtizeden keresztül tevékeny részt vállalt a tudományos diákköri mozgalomban. Előbb a KLTE matematikus TDK-jának, majd a KLTE TTK Tudományos Diákköri Tanácsának volt a vezetője. Tanítványait tudományos problémákkal, és azok megoldásában tanácsokkal látta el. Önzetlenül és eredményesen segítette matematikusi pályafutásuk kiteljesedését.

Iskolateremtő egyéniség. Debrecenben jóformán ilyen irányú tudományos előzmények nélkül két évtized alatt egy diofantikus egyenletekkel és algebrai számelmélettel foglalkozó kutatógárdát hozott létre, melyet ma már „debreceni iskolának" neveznek. Tanítványai, Brindza Béla, Gaál István, Kovács Béla, Papp Zoltán, Pethő Attila, Reményi György, Rimán János és Turjányi Sándor eredményes és nemzetközileg is megbecsült kutató tevékenységet folytatnak, amit számos egyetemi doktorátus, kandidátusi értekezés és külföldi meghívás is jelez. Tevékenyen segíti az Egri Főiskolán dolgozó Kiss Péter főiskolai tanárt, Mátyás Ferenc és Molnár Sándor kutatókat.

Győry Kálmán nemzetközi hírű tudós. A Szele Tibor által megszervezett és egykor vezetett tanszéken Szele Tibor kutatói és iskola teremtő hagyományainak méltó folytatója.

Jelentés az 1986. évi Grünwald Géza Emlékdíj odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az alábbi bizottságot küldte ki az 1986. évi Grünwald-díj odaítélésére:

elnök: Császár Ákos
titkár: Szász Domokos
tagok: Bihari Imre, Fejes Tóth László, Fritz József, Hajnal András, Rapcsák András, Csákány Béla, Tandori Károly, T. Sós Vera.

A Bizottság 1986. október 27-én és november 11-én ülésezett. Ez évben a díjra 5 javaslat érkezett, amelyek közül kettő sajnálatosan nem felelt meg az emlékdíj Alapszabályának; a javasoltak — bár számottevő eredményeket értek el — idén már 30. életévüket töltik be.

A javaslatok alapos mérlegelése után a Bizottság az alábbi döntést hozta:

1986. évi Grünwald Géza Emlékdíjjal tünteti ki és 4500-4500 Ft pénzjutalomban részesíti a következőket:

Seress Ákos, tudományos munkatárs, MTA Matematikai Kutatóintézete;
Tardos Éva, aspiráns, ELTE TTK Számítógéptudományi Tanszék.

Indoklás:

SERESS Ákos 1958-ban született, az ELTE-n matematikus szakon végzett 1983-ban.

Tudományos munkásságát már egyetemi évei alatt elkezdte. Első munkájában [6] Kása Zoltán romániai matematikus egy problémáját oldotta meg. Pozitív egészek egy M halmazát k-összeg mentesnek nevezzük, ha semelyik k elemének összege sem egyenlő egy újabb elemével. Jelölje $f(n, k_1, k_2)$ a legnagyobb egészet, melyre az $[n, f(n, k_1, k_2)]$ intervallum két részre bontható úgy, hogy egyikük k_1, másikuk pedig k_2-összeg mentes. Kásának $f(n, k_1, k_2)$-et speciális esetekben sikerült csak meghatároznia. Seress Ákos viszont megadta az általános képletet.

Egyetemista korában elért másik eredménye a „pletyka" témakörrel kapcsolatos. Az alapfeladat: adott n pletykás néni, legalább hány telefonbeszélgetésre van közöttük szükség, hogy mindegyikük értesüljön az összes többi információjáról. Többen függetlenül bebizonyították, hogy legalább $2n-4$ beszélgetés kell. (Közöttük van Hajnal—Milner—Szemerédi is.)

Feltételezzük, hogy egy telefonbeszélgetésnél az összes információ átáramlik. Geréb Mihály azt kérdezte, hogy milyen n-ekre lehet a „pletykálódást" véghezvinni úgy, hogy mindenki minden információt pontosan egyszer halljon. Seress Ákosnak sikerült meghatároznia [1] ezen n-ek halmazát: $\{1, 2, 4, 8, 12, 16\} \cup \{20\text{-nál nagyobb egyenlő páros számok}\}$. Az eredeti problémát vizsgálták konferencia-hívások és irányított gráfok esetére is. Seress ezért előző eredményét általánosította [2] ezekre az esetekre is. A konferencia-hívások esete lényegesen nehezebb az egyébként is bonyolult közönséges esetnél.

A témakör — nyilvánvaló számítástudományi vonatkozásai miatt — nagyon népszerű Amerikában. West elkezdte vizsgálni, hogy a Geréb-feltétel esetén mi a beszélgetések minimális száma. Azonban csupán a 4-gyel osztható esetre tudott egy konstrukciót adni. Seress bizonyította, hogy kevesebb beszélgetés nem elég és elintézte az $n=4k+2$ esetet is [3]. A 45 oldalas munka komoly bizonyítóerőről tesz tanúságot. [4] ugyanezt a kérdést vizsgálja konferencia-hívások esetére. Egy rendkívül bonyolult konstrukcióval egy lineáris felső korlátot ad arra, hogy legalább hány hívás kell, ha k-konferencia-hívásokat használunk, mindenki minden információt pontosan egyszer hall (és ez egyáltalán elérhető).

Utolsó „pletykás" cikke közös munka [5]. Ebben egy érdekes általánosítást vizsgálnak. n játékos mindegyike kezdetben egységnyi „információval" bír. Ha beszélgetésükkor egyiknek a, másiknak b mennyiségű információja van, akkor a beszélgetés után mindketten $a+b$-vel rendelkeznek. Addig játszanak, amíg mindenkinél n van. A cikk aszimptotikusan meghatározza a lépések maximális számát: $\frac{1}{2} n \log n$. A lépések minimális számának igen közeli alsó és felső becslést adnak (első két tag egyezik).

[7] gráfok lokális színezésével foglalkozik, ahol a szokásos jó színezésről még fel van téve, hogy minden pont szomszédjai csak adott számú különböző színnel lehetnek kiszínezve.

[8]-as munkájában a tranzitív permutációcsoportokkal foglalkoznak. Az S_n szimmetrikus csoport egy G részcsoportja k-tranzitív, ha vele átvihető bármely k elem bármely k elembe. Ismeretes, hogy 6-tranzitív részcsoportok csak S_n és A_n. Azonban a bizonyítás felhasználja a véges csoportok osztályozását (sokezer oldal). Sikerült mintegy 60 oldalon bizonyítani az állítást 6 helyett $\frac{\log^2 n}{\log \log n}$-nel. Erre ad [8] egy kétoldalas bizonyítást.

[9]-ben bebizonyították, hogy létezik olyan algoritmus, amely polinomiálisan párhuzamos számolással $(\log n)^c$ idő alatt eldönti, hogy egy generáló elemeivel adott permutációcsoportban van-e egy adott permutáció.

Seress Ákos dolgozatainak jegyzéke

[1] Á. SERESS: Gossiping old ladies, *Disc. Math.* **46** (1983), 75—81.
[2] Á. SERESS: Gossips by conference calls, Studie **20** (1985).
[3] a) Á. SERESS: Quick gossiping without duplicate transmissions, *Graphs and Combinatorics* **2** (1986), 265—283.
b) Á. SERESS: Quick gossiping without duplicate transmissions, extended abstract, *Annals of New York Academy of Sci., Proc. of the 3rd International Conf. on Combinatorics* (benyújtva).
[4] Á. SERESS: Quick gossiping by conference calls, *SIAM J. Alg. Disc. Methods* (benyújtva).
[5] D. MIKLÓS—M. NEWMAN—Á. SERES—D. WEST: The addition game: an abstraction of a communication problem, *Disc. Math.* (benyújtva).
[6] SERESS Á.: *k*-összeg mentes felbontások, *Mat. Lapok* **31** (1978—83), 191—195.
[7] P. ERDŐS—Z. FÜREDI—A. HAJNAL—P. KOMJÁTH—V. RÖDL—Á. SERESS: Coloring graphs with locally few colors, *Disc. Math.* **59** (1986), 21—34.
[8] L. BABAI—Á. SERESS: On the degree of transitivity of permutation groups: an elementary argument, *JCT(A)* (benyújtva).
[9] L. BABAI—Á. SERESS: Permutation group management is in NC, *19th Symp. on Theory of Computing* (benyújtva).

TARDOS Éva 1957-ben született, 1980-ban végzett az ELTE TTK matematikus szakán. 1984-ig a TÁKI-ban dolgozott, majd két évet meghívásra külföldön töltött. Jelenleg az ELTE Számítógéptudományi Tanszékén aspiráns.

Fő kutatási területe a kombinatorikus optimalizáció, ezen belül a matroidok, a szubmoduláris függvények elmélete és a diszkrét programozás. Kiemelkedő eredménye egy algoritmus [13], mely minden lineáris programot olyan számú aritmetikai művelettel old meg, mely független a jobb oldal és a célfüggvény együtthatóitól. Ez az eredmény főleg kombinatorikai eredetű lineáris programokra alkalmazható; legérdekesebb speciális esete az ún. minimálköltséges folyamprobléma. Azt a kérdést, hogy ez a probléma megoldható-e erősen polinomiális algoritmussal (vagyis olyan algoritmussal, melynek lépésszáma csak a hálózat pontszámától függ, és attól polinomiálisan), Edmonds és Karp vetették fel 1969-ben. Ez a nagyon fontos kérdés Tardos Éva munkájáig [14] megoldatlan maradt. Tardos Éva algoritmusa igen nagy nemzetközi visszhangot váltott ki.

A fenti eredményt Frank Andrással [8] más irányban is továbbfejlesztették, és megmutatták, hogy igen általános feltételek mellett, ha egy kombinatorikus optimalizációs feladat megoldható polinomiális időben, akkor megoldható erősen polinomiálisan is. Ez az eredmény azért is nagyon meglepő, mert a korábban legelterjedtebb technika számparamétereket tartalmazó kombinatorikus optimalizációs feladatok megoldására, az ún. „scaling" módszer, igen erősen függött a paraméterek nagyságától. Az új módszer egy igen szellemes „diophantikus sorfejtésen" alapul; máris születtek egészen más jellegű alkalmazásai, és még számos alkalmazása várható.

Nemrégiben Z. Galil-lal igen hatékony minimálköltséges folyamalgoritmust talált, melyet az igen válogatós „FOCS" konferencia is elfogadott előadásra [10] (akárcsak a [8] dolgozat egy változatát).

Részben Frank Andrással közösen [5, 6, 9, 12], bevezették és kidolgozták az ún. általánosított polimatroidok elméletét, mely a matroidelmélet és gráfelmélet igen sok minimax tételének elegáns közös tárgyalását teszi lehetővé. Kiemelhetjük itt Tardos Éva bizonyítását U. Faigle egy szupermatroidok metszetére vonatkozó sejtésére.

Több szép eredménye van az integrált áramkörök tervezésével kapcsolatos „útvezetési" problémákról, diszkrét programok szenzitivitásáról. Egy újkeletű szellemes megjegyzése Razborov nagy port felvert komplexitáselméleti eredményeivel kapcsolatos. Razborov szuperpolinomiális alsó becslést adott több, *P*-beli és *NP*-teljes kombinatorikus feladatot megoldó monoton hálózat méretére. Ezt Alon és Boppana *NP*-teljes feladatok esetében exponenciálista javították, de úgy tűnt, hogy polinomiálisan megoldható feladatok monoton hálózattal is gyorsabban megoldhatók, mint az *NP*-teljesek. Tardos Éva megmutatta, hogy van olyan polinomiálisan megoldható feladat, melyet monoton hálózattal csak exponenciális időben lehet megoldani.

Tardos Éva dolgozatainak jegyzéke

[1] I. ABOS—A. FRANK—É. TARDOS: Algorithms for edge-disjoint paths in a rectangular grid and their applications in layout design, *Proceeding of the 7th Colloquium on Microwave Communication*, 1982, 178—181.
[2] W. COOK—A. M. GERARDS—A. SCHRIJVER—É. TARDOS: Sensitivity theorems in integer linear programming, *Mathematical Programming* **34** (1986), 251—264.

[3] A. FRANK—P. LÉVAI—J. MÓZES—P. SCSAURSZKI—É. TARDOS: Sufficient conditions for solvability of channel routing problems, *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 1984, Montreal.
[4] A. FRANK—A. SEBŐ—É. TARDOS: Covering directed and odd cuts, *Mathematical Programming Study* **22** (1984), 99—112.
[5] A. FRANK—É. TARDOS: Matroids from crossing families, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **37**, *Finite and Infinite Sets*, North Holland, 295—304.
[6] A. FRANK—É. TARDOS: An algorithm for the unbounded matroid intersection polyhedron, *Discrete Mathematics* **19**, North Holland, 1984, 129—134.
[7] A. FRANK—É. TARDOS: On routing around a rectangle, *Proceedings of the ETAN Network Theory Symposium*, Yugoslavia, 1984.
[8] A. FRANK—É. TARDOS: An application of simultaneous approximation in combinatorial optimization, *Combinatorica* (megjelenés alatt).
[9] A. FRANK—É. TARDOS: Generalized polymatroids and submodular flows (kézirat).
[10] Z. GALIL—É. TARDOS: An $O(n^2(m+n \log n) \log n)$ minimum cost flow algorithm, *Proceedings of the 27th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 1986, 1—9.
[11] C. A. J. HURKENS—A. SCHRIJVER—É. TARDOS: On fractional multicommodity flows and distance functions (kézirat).
[12] É. TARDOS: Generalized matroids and supermodular colourings, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **40**, *Matroid Theory*, North Holland, 359—382.
[13] É. TARDOS: A strongly polynomial algorithm for the minimum cost circulation problem, *Combinatorica* **5** (1985), 247—256.
[14] É. TARDOS: A strongly polynomial algorithm for solving combinatorial linear programs *Operational Research* (megjelenés alatt).
[15] É. TARDOS: The gap between monotone and non-monotone circuit complexity is exponential (kézirat).
[16] É. TARDOS—C. A. TOVEY—M. A. TRICK: Lavered augmenting path algorithms, *Mathematics of Operations Research* **11** (1986), 362—370.

Jelentés a Farkas Gyula Emlékdíj 1986. évi odaítéléséről

A kiküldött bizottság 1986. december 2-án tartotta ülését, melyen részt vettek: Vincze Endre (elnök), Farkas Miklós, Fischer János, Gulyás Ottó, Katona Gyula, Turchányi Piroska. A tagok közül ketten külföldön tartózkodtak, hárman (Csébfalvi Károly, Gyires Tibor és Recski András) kimentették magukat.

Sajnálatosnak tartjuk, hogy a díjra mindössze négy javaslat érkezett, ebből egy nem a szabályoknak megfelelően előkészítve. A jövőben gondoskodnunk kell arról, hogy a felhívás minél szélesebb körben váljon ismertté.

A Bizottság megvitatta a beérkezett javaslatokat, értékelte a jelölteknek a díj odaítélése szempontjából fontos tevékenységét és publikációs jegyzékét.

Határozata alapján alkalmazott matematikai tevékenységükért számítástechnikai módszerek fejlesztése terén végzett munkájukért a következőket részesíti Farkas Gyula emlékdíjban és 4500-4500 Ft jutalomban:

Kutas Tibor (MTA SzTAKI),
Lénárd Margit (KLTE),
Sparing László (BME).

KUTAS Tibor 1952-ben született Budapesten. Az ELTE TTK matematikus szakán szerzett diplomát 1975-ben. Az MTA SzTAKI Statisztikai Osztályán (korábban Biomatematikai Csoport) dolgozik. Tudományos tevékenységének egyik fő területe a Balaton ökoszisztémájának matematikai modellezése. Herodek Sándorral (MTA Balatoni Limnológiai Kutató Intézete) és részben Csáki Péterrel (MTA SzTAKI) kidolgozta a balatoni ökoszisztéma komplex, a tó mind a négy medencéjét leíró determinisztikus modelljét ([6], [7], [15], [18], [24]). A nemlineáris, nemautonóm differenciálegyenlet-rendszeren alapuló modell számítógépes szimulációjával a balatoni ökoszisztéma leírását adták, és eljárást dolgoztak ki egyes, a vízminőséget érintő beavatkozások hatásának előrejelzésére. Erre a kutatásra 1983-ban mindhárman akadémiai kutatási díjban részesültek.

Kutas Tibor Tóth Jánossal együtt kidolgozta a balatoni ökoszisztéma sztochasztikus, ugró Markov-folyamaton alapuló modelljét ([22], [23]). Az újszerű modell jelentőségét növeli, hogy kevés sztochasztikus ökoszisztéma modell található az irodalomban. Ezen témában benyújtott pályázatukra a Veszprémi Akadémiai Bizottság díját kapták.

Kutas Tibor másik témája a nemlineáris paraméterbecslés. Ezen belül a legkisebb négyzetes gyökbeillesztéssel foglalkozik. Új eljárást dolgozott ki, amely konvergenciasebességben a Marquardt-módszerhez hasonló, de annál kevesebbszer számolja ki a célfüggvény értékét. Ebből a témából Kutas Tibor 1983-ban egyetemi doktori címet szerzett.

Kabos Sándorral közösen statisztikai modellt és numerikus algoritmust dolgozott ki párhuzamos nemlineáris regressziók és az azokat összekötő hipotézisek megoldására ([25]).

Kutas Tibor dolgozatainak jegyzéke

[1] Különböző eredetű BCG vakcinák összehasonlító vizsgálata statisztikai módszerekkel (Csáki P., Lugosi L., Bene B., Lovas Lné, Kiss Gyné társszerzőkkel), *Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és a biológiában*, 7. Kollokvium, Szeged, 1976. kötetben, 605—612.

[2] A Balaton ökológiai folyamatainak szimulációja (Csáki P., Lovas Lné, Herodek S. társszerzőkkel), *Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és a biológiában*, 8. Kollokvium, Szeged, 1977. kötetben, 87—96.

[3] A Balaton eutrofizálódási folyamatainak leírását célzó matematikai modellek (Csáki P., Herodek S. társszerzőkkel), *Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és a biológiában*, 9. Kollokvium, Szeged, 1978. kötetben, 40—50.

[4] A Balaton nyílt vizének és üledékének ökológiai rendszerelemzése (Csáki P., Herodek S. Hoffman Gy., Wittmann Imre társszerzőkkel), *Rendszerelmélet '79, Környezetgazdálkodási rendszerek*, Sopron, 1979. kötetben, 97—113.

[5] A balatoni ökoszisztéma szimulációja (Bolla M., Csáki P., Fischer J., Herodek S., Hoffmann Gy., Telegdi L., Wittmann I. társszerzőkkel), SZTAKI Tanulmányok 93/1979.

[6] The BEM modelling approach II.: Model development for the Lake Balaton ecosystem (Csáki P. társszerzővel), in: *Proceedings of the Second Joint MTA/IIASA Task Force Meeting on Lake Balaton Modelling*, vol. I, ed.: G. van Straaten, S. Herodek, J. Fischer, I. Kovács, 1980, 94—102.

[7] The BEM modelling approach III.: Recent results in simulating the Balaton ecosystem (Herodek S. társszerzővel), in: *Proceedings of the Second Joint MTA/IIASA Task Force Meeting on Lake Balaton Modelling*, vol. I, ed.: G. van Straaten, S. Herodek, J. Fischer, I. Kovács, 1980, 103—110.

[8] Simulation of Lake Balaton ecosystem (Csáki P., Herodek S. társszerzőkkel), in: *Proceedings of Simulated of Systems in Biology and Medicine*, Prague, 1980, Vol. II, 61—69.

[9] A dermatoglypha eltérései juvenilis típusú és öregkori diabetesben (Barta L., Regölyi-Mérei A., Kammerer L. társszerzőkkel), *Orvostudomány* **30—31** (1979—80), 97—105.

[10] A nemlineáris görbeillesztés egy új módszere, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 6 (1980), 17—26.

[11] A nemlineáris görbeillesztés egy új módszere, egyetemi doktori értekezés, ELTE, 1981.

[12] Short description of Balaton Eutrophication Model (BEM) (Herodek S. társszerzővel), MTA SZTAKI Working Paper, 1982 MS/9.

[13] The complex model of Lake Balaton ecosystem (Herodek S. társszerzővel), in: *Proceedings of Simulation of Systems in Biology and Medicine*, Prague, 1982, (microfiche No. 507).

[14] The nutrient loading simulation of Lake Balaton (Bolla M. társszerzővel), in: *Proceedings of Simulation of Systems in Biology and Medicine*, Prague, 1982, (microfiche No. 515).

[15] Simulation of phytoplankton dinamics in Lake Balaton (Herodek S., Csáki P. társszerzőkkel), *ISEM Journal*, vol. **4**, Nos. 3—4 (1982), 97—126.

[16] A balatoni ökoszisztéma determinisztikus és sztochasztikus modellje (Tóth J. társszerzővel), *Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és a biológiában*, 11. Kollokvium, Szeged, 1982. kötetben, 110—113.

[17] Stochastic and deterministic approach to lake modelling (Tóth J. társszerzővel), in: *Proceedings of Simulation of Systems '83*, Prague, 1983 (microfiche, No. 827).

[18] BEM, a complex model for simulation Lake Balaton ecosystem (Herodek S. társszerzővel), in: *Eutrophication of Shallow Lakes: Modelling and Management — The Lake Balaton Case Study*, ed.: L. Somlyódy in collaboration with S. Herodek and J. Fischer, IIASA, Laxenburg, 1983.

[19] Simulation of a lake ecosystem using deterministic and stochastic models (Tóth J. társszerzővel), in: *Proceedings of the twelfth SIMULA users' conference*, Budapest, 1984, 107—110.

[20] A new method for solving nonlinear least squares problem, in: *COMPSTAT 1984, Proceedings in Computational Statistics*, ed.: T. Havránek, Z. Sidák, M. Novák, Physica Verlag, Wien, 1984, 415—420.

[21] Submodels for the nutrient loading estimation on River Zala (Bolla M. társszerzővel), *Ecological Modelling* **26** (1984), 115—184.

[22] A stochastic model of phytoplankton dinamics in Lake Balaton (Tóth J. társszerzővel), *J. of Statistical Computation and Simulation* **21** (1985), 241—264.
[23] Forecasting the future of a lake using stochastic and deterministic models, in: *Systems Analysis and Simulation 1985*, ed.: A. Sydow, M. Thoma, R. Vichnevetsky, Akademie-Verlag, Berlin, 1985, Vol. II, 209—212.
[24] A Complex Model for Simulating the Lake Balaton Ecosystem (Herodek S. társszerzővel), in: *Modelling and Managing Shallow Lake Eutrophication*, eds.: L. Somlyódy, G. van Straten, Springer-Verlag, 309—322.
[25] Simultaneous non-linear curvefitting (Kabos, S. társszerzővel), in: *COMPSTAT '86, Short Communications and Posters*, Dipartimento di Statistica Probabilitá e Statistiche Applicate Universita „La Sapiensa", Roma, 121—122.
[26] A simple dynamic eutrophication model (Herodek S. társszerzővel), in: *Proceedings of Simulation of Systems in Biology and Medicine*, Prague, 1986, (microfiche No. 511).
[27] Effects of load reductions on the water quality of a large shallow lake (Herodek S. társszerzővel), *Ecological Modelling*.
[28] A balatoni fitoplankton dinamikájának sztochasztikus modelljéről (Tóth J. társszerzővel), *Alkalmazott Matematikai Lapok*.

LÉNÁRD Margit 1952-ben született Budapesten. 1975-ben jeles diplomával fejezte be egyetemi tanulmányait a KLTE matematikus szakán. Végzés óta a KLTE Valószínűségszámítás és Alkalmazott Matematikai Tanszékén dolgozik, 1983 óta egyetemi adjunktusi beosztásban.

Lénárd Margit tudományos munkássága elsősorban az approximációelmélet egy modern fejezetéhez, az ún. spline függvényekkel való approximáció elméletéhez kapcsolódik. Ebből a témakörből készítette „Kétváltozós spline-interpoláció" című doktori disszertációját is. Módszerét alkalmazta a gyakorlat számára fontos közgazdasági idősorok előrebecslésére és sztochasztikus folyamatok approximációjára.

Eredményeit kiterjesztette az eltolt argumentumú differenciálegyenletek közelítő megoldására is. Legújabb eredményei a többváltozós spline-interpoláció, az Hermite-féle spline-interpoláció és a többdimenziós kvadratúra formulákra vonatkoznak.

Oktatói munkáját magas színvonalon, korszerűen végzi. Tanszékének számítógépes munkáiban numerikus matematika témájú programok készítésével vesz részt. Eredményeiről nyolc alkalommal tartott előadást nemzetközi konferenciákon.

Lénárd Margit dolgozatainak jegyzéke

[1] Functional differential equations by spline functions, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Comp.*, 3 (1982), 25—32 (Székelyhidi Lászlóval közösen).
[2] Approximation and short time prediction of economic time series by spline functions, *Studia Sci. Math. Hung.* **17** (1982), 235—241.
[3] Approximation of stochastic processes by piecewise polynomials, *Mathematical Statistics and Application*, Vol. B (edited by W. Grossmann et al.), *Proceedings of the 4th PSMS*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985, 201—208.
[4] A spline interpolational method for functions of several variables, *Constructive Theory of Functions, 84*, Sofia, 1984, 519—523.
[5] Spline interpolation in two variables, *Studia Sci. Math. Hung.* **20** (1985).
[6] On the two variable spline functions of Hermite-type (elfogadva a Haar Alfréd Emlékkonferencia, Budapest, 1984. kötetébe).
[7] Kétváltozós spline-interpoláció. Egyetemi doktori disszertáció, 1979, Debrecen.

SPARING László 1981-ben nyert mérnöki diplomát a Budapesti Műszaki Egyetemen, 1983-tól tanársegéd ugyanott. Még hallgatóként jelentős munkát végzett felületelemek számítógépes tervezése és dokumentálása terén.

Szép eredményeket ért el differenciálegyenletek periodikus megoldásainak számítógépes megkeresése és megjelenítése terén. Egyrészt jól működő programokat alkotott az irányítottan periodikusan perturbált van der Pol-féle differenciálegyenlet periodikus megoldásának meghatározására. Másrészt különleges programot készített a Rayleigh-féle differenciálegyenlet Hopf-bifurkáció útján keletkező periodikus megoldásainak megjelenítésére.

Négy éve tanít matematika mellett számítástechnikát is mérnök és matematikus-mérnök hallgatóknak eredményesen. Három éve dolgozik CAD rendszerek, valamint általános és speciális két- és háromdimenziós grafikus szerkesztőprogramok létrehozásán, amelyek népgazdaságilag igen fontos export részét képezik.

Sparing László dolgozatainak jegyzéke

[1] Grafikus tervező programrendszer és alkalmazásai, *Finommechanika-Mikrotechnika*, 1982. 11. szám, 337—340 (Tari István Gáborral és Lebovitsné dr. Kálmán Évával közösen).
[2] A perturbált van der Pol-differenciálegyenlet számítógépes vizsgálata, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **9** (1983), 43—49.
[3] On Hopf bifurcation of Rayleigh's equation, *Periodica Polytechnica*, 1986, vol. **30**, No. 2, 263—271 (Farkas Miklóssal és Szabó Gyulával közösen).

Jelentés a Beke Manó Emlékdíjak 1986. évi odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat 1985. szeptember 26-i ülésén az 1986. évi Beke Manó Emlékdíj bizottsága összetételére a következő határozatot hozta:

elnök: Surányi János
titkár: Szepesi László
tagok: Békefi Zsuzsanna, C. Neményi Eszter, Pálmay Lóránt, Reményi Gusztávné, Scharnitzky Viktor.

A Beke Manó Emlékdíj bizottság a Társulat helyi tagozataitól beérkezett javaslatok alapján — figyelembe véve a korábbi években felterjesztésre kerülteket is — úgy találta, hogy jóval több az olyan kollégák száma, akik kiváló matematika-oktató és népszerűsítő munkájuk miatt feltétlenül érdemesek a Beke Manó Emlékdíjra. A bizottság nehéz helyzetben volt a korlátozott számban kioszthatő díjak odaítélésekor. Három ülésen is, alapos mérlegelés után, sokoldalúan megvizgálva a jelöltek tevékenységét, végül is egyhangúlag a következő határozatot hozta:

A Bolyai János Matematikai Társulat 1986-ban a Beke Manó Emlékdíj I. fokozatával tünteti ki

Kántor Sándorné Varga Tündét, a debreceni KLTE Geometriai Tanszékének adjunktusát.

A Beke Manó Emlékdíj II. fokozatával tünteti ki

Bartha Gábort, a szentendrei Móricz Zsigmond Gimnázium tanárát;
Bige Istvánnét, a budapesti 21. sz. Katona József Szakközépiskola és Szakmunkásképző Intézet tanárát;
Czigány Tibornét, a budapesti VIII. kerület Köztársaság téri általános iskola tanárát;
Kövesdi Józsefet, a rakamazi általános iskola tanárát, a Szabolcs-Szatmár megyei általános iskolák alsó tagozatos vezető szakfelügyelőjét;
Szabó Sándornét, a budapesti 21. sz. Katona József Szakközépiskola és Szakmunkásképző Intézet tanárát.

Indoklás:

Kántor Sándorné Varga Tünde évtizedek óta aktívan részt vesz a matematikaoktatás korszerűsítésében és népszerűsítésében. Középiskolai tanárként a debreceni Fazekas Gimnáziumban tanított a speciális matematika tagozaton, ahol rendszeresen tartott országos bemutató órákat és bekapcsolódott a szaktárgy korszerűsítésével foglalkozó kísérletekbe. Tanítványai jó eredményeket értek el a különböző tanulmányi versenyeken, valamint a Középiskolai Matematikai Lapok pontszerző versenyében is.

Egyetemi oktatóként tovább folytatta a gimnáziumban megkezdett tevékenységét. Eredményeiről, tapasztalatairól több publikációja is megjelent a különböző szakfolyóiratokban. Társszerzője a „Matematikai feladatok" I—II. kötetének és a hozzátartozó tanári segédkönyvnek. Részt vesz a FEB-levelek és a tábori anyag készítésében, a FEB táborok vezetésében. A KLTE Matematikai Intézetében koordinálja és irányítja a tanterv korszerűsítésére vonatkozó munkát. Bekapcsolódott a tanártovábbképzés új formájának a kidolgozásába. Az országos bizottságban elkészítette a „Matematika története" c. tantárgy tematikáját. A KLTE gyakorló iskolájában szakfelügyelőként is dolgozik.

Készített szemléltető eszközöket, amelyeket az MM országos újításként fogadott el. Rendszeresen tart — az ország különböző városaiban — tanártovábbképző előadásokat. Többször kérték fel a Rátz László vándorgyűléseken is előadás vagy szemináriumi foglalkozás tartására.

A középiskolai tanulók számára szervezi az évtizedes hagyományokkal rendelkező Bolyai délutánokat, a megyei középiskolás tanulmányi és emlékversenyeket. Tagja az Arany Dániel és az

OKTV matematikai tanulóversenyek középbizottságának, a BJMT Oktatási Bizottságának, a matematika tantárgyi bizottságának. Részt vesz az oktatással kapcsolatos nemzetközi kollokviumok szervezésében. Az MTA felkérésére szakértői véleményt készített az új középiskolai tantervekről és tankönyvekről.

Mint a BJMT Hajdú-Bihar megyei tagozatának titkára nagy hozzáértéssel szervezi a megye tagsága számára a tudományos és továbbképző előadásokat. Bevonja az egyetemi hallgatókat a társulati munkába.

Tudományos munkája többirányú. A matematika oktatásának korszerűsítése mellett foglalkozik a tanárképzés kérdéseivel, matematika tantárgytörténeti kutatásokkal. A tudós matematikatanárokról írt hosszabb tanulmányával elnyerte a Debreceni Akadémiai Bizottság pályadíját.

Bartha Gábor matematika-fizika szakos, szakmailag kiválóan képzett és jó pedagógiai felkészültségű középiskolai tanár. A szentendrei Móricz Zsigmond Gimnázium matematika munkaközösség munkájában hatékonyan tevékenykedik, iskolájában aktív szakköri életet valósított meg. A tehetséges tanulóknak alkotó módon oktatja a matematikát, jó versenyeredményeket ért el velük, Ugyanakkor a szaktárgyakból hátrányos helyzetű tanítványaival is példamutatóan, igényesen humánusan foglalkozik.

Az elemi és felső matematikai, továbbá módszertani ismereteit állandóan gyarapítja. Az iskolai oktató-nevelő munkája mellett a matematikához kapcsolódó tevékenysége sokrétű, széles területet ölel fel.

Rendszeres feladatmegoldója a Matematika Tanítása c. folyóirat tanárok részére kiírt feladatrovatának. Kiemelkedő eredményeiért több alkalommal kapott szerkesztőségi dicséretet. A matematikatanárok részére meghirdetett Országos Feladatmegoldó versenyt ugyancsak többször is megnyerte. Részt vett a Szakmunkások Szakközépiskolája esti-levelező tagozata számára készülő matematika tankönyv lektori munkájában, a Tankönyvkiadó megbízásából egy matematika szakköri segédkönyv megírásában, valamint a Pest Megyei Tanács által kiírt pedagógiai pályázatokon, ahol társszerzőként első díjat nyert matematikai tárgyú pályázatával.

Bige Istvánné és *Szabó Sándorné* a 21. sz. Katona József Szakközépiskola és Szakmunkásképző Intézet tanárai kitüntetésének indoklását a két kartársnő esetében nem külön-külön, hanem egyszerre ismertetjük, mivel együtt végezték azt a tevékenységet, amelyért végül is a Beke Manó Emlékdíj bizottsága munkájuk elismeréséért az Emlékdíjat odaítélte.

Mindketten részt vettek 1972-ben az OPI irányításával, a szakmunkásképző intézetek részére indított matematika tanterv előkészítő kísérletben. E tevékenységük során alakult ki a szakmunkásképzés egységes matematika tanterve, amely a korábbiaktól eltérően új alapokra helyezte ebben az iskolatípusban is a szaktárgy tanítását. Az 1977-ben kötelezően bevezetett tanterv oktatási segédleteinek készítésében is jelentős munkát vállaltak. Ezek közül kiemelkedő jelentősége van a munkafüzetek elkészítésének, amelyek elsősorban a tanulók önálló problémamegoldásra neveléséhez, valamint a differenciált foglalkozások mind gyakoribbá válásához járultak hozzá. Az általuk írt Útmutatók is a korszerű szemléletmódot sugallják a tanároknak, gyakorlati tanácsokkal látva el őket, hogy mikor és milyen módon célszerű beépíteni a munkalapokat a tanítási-tanulási folyamatba. Részt vettek az új tankönyvek egyes fejezeteinek írásában is.

Mindketten többször tartottak a fővárosi pedagógusok részére bemutató órákat és szakmai előadásokat, ahol a gyakorlatban is meggyőzhették a tanárokat az új szemléletmód és módszerek hatékonyságáról. Ennek is köszönhető, hogy ezek egyre szélesebb körben elterjedtek.

Ebben az évben jelenik meg az általuk készített fóliasorozat, amely az elsőéves matematika anyag feldolgozásához ad újabb értékes segítséget. Használatuk lehetővé teszi az önálló tanulói felfedeztetés, ismeretszerzés, az egyéni és differenciált foglalkozások további elmélyültebb alkalmazását. Ezzel vált teljessé a két alkotó pedagógus munkája.

Czigány Tiborné matematika-fizika szakos általános iskolai tanár 1970 óta részt vett a komplex matematikatanítási kísérletben. Rendszeresen jár a Bolyai Társulat, az FPI továbbképzéseire, nyílt órákra. Tanítási óráin igyekszik a matematika belső kapcsolatait, összefüggéseit megláttatni tanítványaival, intellektuális élményt nyújt. Ezt érdekes, játékos formában feltett kérdésekkel, izgalmas problémafelvetésekkel éri el. Nem mond le arról, hogy a gyengébbek is szeressék, s a maguk szintjén tudják is a matematikát. Tanítványai közül igen soknak kedvenc tárgya a matematika. A jobb tanulók képességét külön feladatokkal is fejleszti. Tanulói rendszeresen részt vesznek a Törd a fejed, a Pajtás újság, az „Aki mer az nyer" versenyein.

1980 óta mint kerületi munkaközösségvezető nagy gondot fordít a kerület matematikatanárainak szakmai, módszertani fejlődésére, bemutató órákat szervez, előadókat hív. Maga is többször tartott iskolai, ill. kerületi bemutató órát. Vállalkozik az új témák (pl. valószínűségszámítás) tanításának megmutatására is. Ezeknek a bemutatóknak az a nagy jelentősége, hogy a jelenlevő kartársak láthatják, érdemes és lehetséges ezen témákat is tanítani. A tanulók örömmel vesznek részt a kísérle-

tező, felfedező munkában, gondolkodásuk nyitottabb lesz, s következetes, jó tanításával elérte, hogy tanítványai eszközjellegű ismeretei is fejlődtek.

Megtanulta a számítástechnika alapjait is, amelyeket az óráin is alkalmaz, szakköri foglalkozást is tart a témából.

1983-ban a vezetőképzőre járó, leendő igazgatók számára tartott bemutató órája jó propagandája volt az új tantervnek, a tantervben szorgalmazott módszereknek.

Kövesdi József a Szabolcs-Szatmár megyei alsó tagozatos vezető szakfelügyelő az új matematika tanterv bevezetése kezdetétől tervszerűen, nagy hozzáértéssel segítette a nevelők felkészítését a tantervi célkitűzések megvalósításában. Országos szintű tanfolyamra küldte a tárgyat eredményesen és szívesen oktató nevelőket. Megszervezte és irányította a megyei szintű továbbképzéseket. Következetesen szorgalmazta, hogy minden alsó tagozatos nevelő — a napközis nevelők is — folyamatában, I—IV. osztályig megismerkedjenek a matematikai tananyaggal és követelményekkel, a célravezető módszerekkel és a matematikatanítás korszerű szemléletével.

Kezdeményezte a bázis iskolák szervezését. Ezekben az iskolákban rendszeresen bemutató órákat tartottak, melyek elemzéséhez kapcsolódtak a gyakorlatközpontú szakmai-módszertani továbbképzések. A bemutató órákat tartó bázis-nevelők felkészüléséhez minden segítséget megadott, ha szükség volt rá, akkor országos tapasztalatszerzésben való részvétel biztosításával segítette elő a hatékonyabb felkészülést.

Óralátogatásai mindig segítő szándékúak és jellegűek. Buzdítja a nevelőket egy-egy szép módszertani ötlet, ügyes feladatmegoldás, jól megértett szakmai ismeret kiemelésével. Bírálója volt a megyében kiadott alsó tagozatos matematika feladatgyűjteménynek.

Az iskolai nevelőmunka tartalmi fejlesztése érdekében jó emberi és szakmai együttműködést valósított meg. A véleménynyilvánításban, az értékelésben tapasztalható őszinte, következetes, humánus magatartásáért becsülik, elismerik. Munkájában érzékelhető a közoktatáspolitikai tudatosság, a tervszerűség, a problémaérzékenység. Szakfelügyelői munkáját, a matematika tanítását elkiismeretesen, példamutatóan végzi.

Jelentés az 1986. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítéléséről

A Rényi Kató Emlékdíj Bizottság 1986. június 6-i ülésén az alábbi határozatot hozta:

Rényi Kató Emlékdíj I. fokozatában és 4000-4000 Ft pénzjutalomban részesül *Szenes András* az ELTE V. éves matematikus hallgatója és *Tardos Gábor* az ELTE IV. éves matematikus hallgatója.

Indoklás:

Szenes András két diákköri dolgozatot írt, amelyek publikálása nemzetközi matematikai folyóiratokban folyamatban van. Az első K. I. Koljada szovjet matematikus alábbi problémájával kapcsolatos: keresendő az a legnagyobb $\lambda=\lambda_0$ szám, amelyre a következő igaz: ha $H\subseteq\mathbf{R}$ mérhető, $\mu(H)>0$, $\mu(\mathbf{R}\setminus H)>0$, akkor létezik $x_0\in\mathbf{R}$ pont úgy, hogy

$$\lambda \leqq \liminf_{h\searrow 0} \frac{\mu\big((x_0-h, x_0+h)\cap H\big)}{2h} \leqq \limsup_{h\searrow 0} \frac{\mu\big((x_0-h, x_0+h)\cap H\big)}{2h} \leqq 1-\lambda.$$

A $\lambda_0\geqq 1/4$ állítás az 1983. évi Schweitzer Miklós emlékverseny egyik problémája volt. Szenes Andrásnak sikerült megmutatnia, hogy $0{,}2629\leqq\lambda_0\leqq 0{,}2719$; a bizonyítás mély és ötletes. Második, „On the directional entropy of two-dimensional groups" című cikkében Ja. G. Szináj egy problémájára ad pozitív feleletet. Megmutatja, hogy ha S és T egymással felcserélhető, invertálható, mértéktartó transzformációi az (X, μ) valószínűségi mezőnek, akkor

$$H(\varphi) = \lim_{\substack{m,n\to\infty \\ m/\sqrt{m^2+n^2}\to\cos\varphi \\ n/\sqrt{m^2+n^2}\to\sin\varphi}} \frac{h(S^m\circ T^n)}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

létezik és φ-nek folytonos függvénye (h az entrópiát jelöli).

Tardos Gábor legjelentősebb eredménye, miszerint létezik nyolcelemű részben rendezett halmaz, amelyen a rendezéstartó függvények klónja nem végesen generált, már eddig is jelentős nem-

zetközi visszhangot és elismerést váltott ki. Egy másik diákköri dolgozatában arra ad feltételt és algoritmust, hogy egy gráf csúcshalmazát mikor lehet két részre bontani úgy, hogy mindkét feszített részgráfban minden pont foka páratlan legyen. Végül Szegedy Márióval írt dolgozatában megmutatja, hogy pozitív tagú l_2-beli sorok mindig zárójelezhetők úgy, hogy a zárójeleken belüli részletösszegek sorozata monoton csökkenő legyen. Tardos Gábor három diákköri dolgozatot írt, ebből kettő publikálása folyamatban van.

Jelentés a Szele Tibor Emlékérem 1987. évi odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor Emlékérem bizottsága 1987. december 1-i ülésén az összes beérkezett javaslatot figyelembe véve az 1987. évi emlékérmet *Katona Gyulának* ítélte oda.

Indoklás:

Katona Gyula 1941-ben született. 1964-ben végzett az ELTE matematikus szakán. Kutatómunkáját már egyetemi hallgató korában elkezdte, elsősorban Erdős Pál, Rényi Alfréd és Turán Pál ösztönzésére. A matematikai tudományok kandidátusa címet 1971-ben, a matematikai tudományok doktora címet 1982-ben szerezte meg. Munkásságának elismeréseként Grünwald- és Rényi-díjakban részesült. Jelenleg az MTA Matematikai Kutató Intézete Diszkrét Matematikai Osztályának vezetője.

Mintegy 80 cikkének nagy része kombinatorikával foglalkozik. Legismertebb eredménye az úgynevezett Katona—Kruskal-tétel, amely azt válaszolja meg, hogy m darab k-elemű halmazban együttesen legalább hány $(k-1)$-elemű részhalmaz van. Megjegyzendő, hogy e tételre a legegyszerűbb (de még mindig nem könnyű) bizonyítást volt tanítványa, Frankl Péter találta. Katona legfontosabb eredményei mind ilyen típusúak, témájukat az „extremális halmazrendszerek" vagy az „extremális hipergráfok" névvel jellemezhetnénk. Jelenleg két volt tanítványával, Frankl Péterrel és Füredi Zoltánnal monográfiát ír a témakörről.

A fenti kombinatorikai témákban erős iskola alakult ki Budapesten, melyben Erdős Pál és az általa adott problémákon kívül a Katona által vezetett szemináriumnak is számottevő szerepe volt. Eredményeinek és iskolateremtő képessége elismeréseként tagja a Combinatorica (Budapest) és a European Journal of Combinatorics (Párizs) című folyóiratok szerkesztőbizottságának.

A matematika alkalmazásai területén figyelemre méltóak azok a kutatások, melyeket vezetése mellett a Matematikai Kutató Intézet Diszkrét Matematikai Osztálya a Mikroelektronikai Vállalattal és a SzTAKI-val karöltve folytat.

Óraadóként vagy másodállásban 1964 óta oktat az ELTE-n, főleg az Algebra és Számelmélet Tanszéken, korábban a Valószínűségszámítási Tanszéken, míg újabban a Számítógéptudományi Tanszéken is. Egyaránt szívesen foglalkozik a közepes képességű matematika-fizika szakos, a jóképességű matematikus hallgatókkal és kutatójelöltekkel. Sokan kezdték tudományos munkájukat az általa vezetett szemináriumokon.

Egyik legkiemelkedőbb tanítványa Baranyai Zsolt volt. Baranyai Zsolt viszonylag későn kezdte kutatómunkáját és sajnos fiatalon elhunyt, mégis e rövid idő alatt sikerült megoldania egy világhírű, 120 éves problémát. Frankl Péter a nemzetközi kombinatorikai világ egyik vezető egyéniségévé lépett elő, és az 1986-os berkeley-i matematikai kongresszuson meghívott előadó volt. Az ázsiai kombinatorikai folyóirat (Graph and Combinatorics) egyik főszerkesztője. Füredi Zoltán is sok fontos cikkel vitte előre az extremális halmazrendszerek elméletét és általában a kombinatorikát. Győri Ervin több neves kombinatorikai sejtést oldott meg, az ő neve is jól ismert külföldön. Győrfi László is Katona Gyula irányításával kezdte el valószínűségszámítási munkásságát, ami a Távközlési Kutató Intézetben, majd a Műszaki Egyetemen teljesedett ki: az információelmélet nemzetközileg elismert kutatója. Varecza Árpád Katona aspiránsaként dolgozott ki egy érdekes számítógéptudományi problémakört.

A fenti 6, már kandidátusi címet szerzett tanítványa mellett többé-kevésbé tanítványának tekinthető Erdős Péter (Közgazdaságtudományi Egyetem), Geréb Mihály (Harvard Egyetem graduate student), Hujter Mihály (SzTAKI), Miklós Dezső (Matematikai Kutató Intézet, Diszkrét Matematikai Osztály), Pyber László (ösztöndíjas a MKI Diszkrét Matematikai Osztályán Katona vezetésével), Racsmány Anna (Közgazdaságtudományi Egyetem), Sali Attila (MKI) és Tarján Tamás (MTA Közgazdaságtudományi Intézete).

Számos külföldi matematikussal tart fenn munkatársi-tanítvány kapcsolatot: a Rostocki Egyetemen H. D. Gronau extremális halmazrendszerekkel foglalkozik, Dr. K. Engel Katona parciálisan rendezett halmazokra vonatkozó extremális eredményeit fejlesztette tovább, míg a moszkvai A. F. Szi-

dorenko is Katona egyik témájából írta (és védte) meg kandidátusi disszertációját, Katona Gyula moszkvai tartózkodását követően.

A Bolyai János Matematikai Társulat aktív tagja; 1966-tól 1975-ig az Alkalmazási Szakosztály titkára volt, jelenleg választmányi tag.

Katona Gyula tudományos publikációinak jegyzéke

I. Tudományos tanulmányok

[1] On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem, *Studia Sci. Math. Hungar.* **1** (1966), 59—63.

[2] On separating systems of a finite set, *J. Combinatorial Th.* **1** (1966), 174—194.

[3] Intersection theorems for systems of finite sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **15** (1964), 329—337.

[4] New proofs for Turán's graph theorem and remarks on its generalizations (magyar nyelven, Nemetz Tiborral és Simonovits Miklóssal), *Mat. Lapok* **15** (1964), 228—238.

[5] On a problem of graph theory (E. Szemerédivel), *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967), 23—28.

[6] The principle of conservation of entropy in a noiseless channel (G. Tusnádyval), *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967), 29—35.

[7] A theorem of finite sets, *Theory of graphs,* Proc. Coll. held at Tihany, 1966, Akad. Kiadó, 1968, 187—207.

[8] Functions defined on a directed graph (G. Kornvinnal), *Theory of graphs,* Proc. Coll. held at Tihany, 1966, Akadémiai Kiadó, 1968, 209—213.

[9] Information sources with different cost scales and the principle of conservation of entropy (G. Tusnádyval és I. Csiszárral), *Proc. of the Coll. on Information Theory,* 1967, Bolyai János Math. Society.

[10] Information sources with different cost scales and the principle of conservation of entropy (I. Csiszárral és G. Tusnádyval), *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **12** (1969), 185—222.

[11] Some remarks on shift-register generators (magyarul, Nemetz Tiborral), *Számítástechnikai Kutató Intézet Közleményei* **5** (1969), July, 7—27.

[12] Matching problems (Szász Domokossal), *Comb. Th. and its Appl.,* Proc. Coll. held at Balatonfüred, 1969, 695—703.

[13] How many vectors can lie in a circle of radius $\sqrt{2}$?, *Comb. Th. and its Appl.,* Proc. Coll. held at Balatonfüred, 1969, Bolyai János Math. Society, 687—693.

[14] Matching problems (Szász Domokossal), *J. Combinatorial Th.* **10** (1971), 60—92.

[15] Graphs, vectors and inequalities in probability theory (magyarul), *Mat. Lapok* **20** (1969), 123—127.

[16] A generalization of some generalization of Sperner's theorem, *J. Combinatorial Th.* **12** (1972), 72—81.

[17] Families of subsets having no subset containing another one with small difference, *Nieuw Arch. Wiskunde (3),* **20** (1972), 54—67.

[18] Two applications of Sperner type theorems, *Periodica Math. Hungar.* **3** (1973), 19—26.

[19] Sperner type theorems. Kandidátusi értekezés, Budapest, 1971.

[20] A three-part Sperner Theorem, *Studia Sci. Math. Hungar.* **8** (1973), 379—390.

[21] Combinatorial Search Problems (felkérésre írt áttekintő cikk új eredményekkel), *A survey of combinatorial th.,* Szerkesztő: J. N. Srivastava, North Holland, 1973.

[22] A simple proof of the Erdős—Ko—Rado theorem, *J. of Combinatorial Th.* **A 13** (1972), 183—184.

[23] Some remarks on the construction of optimal codes, *Acta Sci. Math. Hungar.* **23** (1972), 439—442.

[24] Solution of a problem of A. Ehrenfencht and J. Mycielski, *J. of Combinatorial Th.* **A 17** (1974), 265—266.

[25] Extremal problems for hypergraphs (felkérésre írt áttekintő cikk új eredményekkel), *Combinatorics,* Szerkesztette: M. Hall, Jr. és J. H. van Lint, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht — Holland, Boston—USA, 1975, 215—244.

[26] Extensions of the Erdős—Ko—Rado theorem (C. Greene-nel és D. J. Kleitmann-nal), *Recent Advances in Graph Theory* (Proc. of the symp. held in Prague, June 1974), Academia Prague, 1975, 223—231.

[27] Huffman codes and self-information (Nemetz Tiborral), *IEEE Transactions on Inf. Th.* **IT—22** (1976), 337—340.

[28] The Hamming-sphere has minimum boundary, *Studia Sci. Math. Hungar.* **10** (1975), 131—140.

[29] Véletlen vektorok összege hosszának eloszlására vonatkozó egyenlőtlenségek (oroszul), *Teorija Verojatnosztyej i jijo prim.* **22** (1977), 466—481.
[30] Contributions to the geometry of Hamming spaces. (R. Ahlswede-vel), *Discr. Math.* **17** (1977), 1—22.
[31] Graphs with maximal number of adjacent pairs of edges (R. Ahlswede-vel), *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **32** (1978), 97—120.
[32] Continuous versions of some extremal combinatorial theorems, *Combinatorics*, Keszthely, 1976, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, 653—678.
[33] On a problem of L. Fejes Tóth, *Studia Sci. Math. Hungar.* **12** (1977), 77—80.
[34] Search using sets with small intersection, *Théorie de l'Information*, CNRS, 1978, 381—388.
[35] Continuous versions of some extremal combinatorial theorems, II, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **35** (1980), 67—77.
[36] Optimization for order ideals under a weight assignment, *Coll. Internationaux CNRS* **260**, *Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes*, 1978, 18—19 (előadáskivonat).
[37] Kombinatorikus számok, geometriai konstansok és valószínűségi egyenlőtlenségek (B. Sz. Sztyecskinnel), *Dokladü Akademii Nauk* **251** (1980), 1293—1296.
[38] On the number of maximal dependencies in a data base relation of fixed order (Békéssy Andrással, Demetrovics Jánossal, Hanák Lászlóval és Frankl Péterrel), *Discr. Math.* **30** (1980), 83—88.
[39] Sums of vectors of Turán's problem for 3-graph, *European J. of Combinatorics* **2** (1981), 145—154.
[40] Extremal Combinatorial Problems in Relational Data Base (Demetrovics Jánossal), *Fundamentals of Computation Th., Lecture Notes in Computer Science* **117**, Springer, Berlin, 1981, 110—119.
[41] If the intersection of any r sets has a size $r-1$ (Frankl Péterrel), *Studia Sci. Math. Hungar.* **14** (1979), 47—49.
[42] Sums of vectors of Turán's problem for 3-graph, *Annals of Discrete Math.* **11** (1983), 377—382.
[43] "Best" estimations on the distribution of the length of sums of two random vectors, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **60** (1982), 411—423.
[44] Extremal problems with excluded subgraphs in the cube (Tarján Tamással), *Graph Theory*, Lagów, 1981. *Lecture Notes in Mathematics* **1018**, Springer-Verlag, 1983, pp. 84—93.
[45] A relációs adatbázis extrémális problémái (Demetrovics Jánossal), *Alk. Mat. Lapok* **8** (1982), 183—193.
[46] O lokalno gamiltonovüch grafah (A. Kosztocskával és B. Sz. Sztyecskinnel), *Mat. Zametki* (leadva).
[47] Intersecting Sperner families and their convex hulls (Péter L. Erdőssel és P. Franklal), *Combinatorica* **4** (1984), 21—34.
[48] Minimal matrix representation of closure operations (J. Demetroviccsal és Z. Füredivel), *Discrete Appl. Mathematics* **11** (1985), 115—128.
[49] Minimal 2-coverings of a finite affine space based on $GF(2)$, *J. of Statistical Planning and Inference* **8** (1983), 375—388.
[50] Szvjáz mezsdu zaviszimosztyámi i csiszlom individov v szlucsaje szosztavnüch baz dannüch (J. Demetroviccsal és Z. Füredivel), *Kibernetika* (Kiev) **5** (1985) 107—115.
[51] Convex hulls of hypergraph classes (survey), *Proc. of the Fourth Yugoslav Seminar on Graph Th.*, Novi Sad, 1983, 177—190.
[52] A függőségek és az individuumok száma közötti kapcsolat összetett adatrendszer esetén, *Alk. Mat. Lapok* **9** (1983), (Demetrovics J.-vel és Füredi Z-vel).
[53] Extremal hypergraph problems and convex hulls (Péter L. Erdőssel és P. Franklal), *Combinatorica* **5** (1985), 11—26.
[54] Polytopes determined by hypergraph classes (P. Franklal), *European J. Combinatorics* **6** (1985), 233—244.
[55] Probabilistic inequalities from extremal graph results, *Annals of Discrete Math.* **28** (1985), 159—170.
[56] Convex hulls of more-part Sperner families, *Graphs and Combinatorics* **2** (1986), 123—134 (P. L. Erdőssel).
[57] A 3-part Sperner theorem (P. L. Erdőssel), *Studia Sci. Math. Hungar.* **22** (1987), 383—393.
[58] Combinatorial problems of database models, *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai* **42**. *Algebra, Combinatorics and Logic in Computer Sci.*, Győr, (4), 1983, 331—353.
[59] Eksztremalnüje problemü reljacionnoj bazü dannüch (Demetrovics J.-vel), *Kibernetika* (Kiev).
[60] On the number of unions in a family of sets, *Proc. of the 3rd International Conference on Combinatorial Math.*, New York Academy of Sciences (Demetrovics J.-vel és Pálfy P. P.-vel).
[61] Extreme more-part Sperner families, *Graphs, Hypergraphs and Applications*, Proc. of the Conf. on Graph. Th. held in Eyba, 1984, Teubner-Texte zur Math. Vol. 73, 96—101.

[62] The poset of closures as a model of changing databases (Burosch G.-vel és Demetrovics J.-vel), *Order* **4** (1987).
[63] Extremal combinatorial problems of database models (Demetrovics J.-vel), Drezdai Adatbázis konferencia kötete, Springer.

Tanfolyami jegyzetek

[64] Sperner type theorems, Dept. of Stat. Univ. North Carolina at Chapel Hill, Mimeographed Series.
[65] General theory of Noiseless Channels. Az International Centre for mechanical sciences számára tartott előadások jegyzete, Udine, 1970, No. 82, 69. oldal.
[66] Combinatorial search problems. Az International Centre for mechanical sciences számára tartott előadások jegyzete, Udine, 1972, No. 145, Springer-Verlag, 57. oldal.
[67] Véges automaták. A Matematikai Kutató Intézet tanfolyamának jegyzete, Ádám András és Katona Gyula előadásai alapján írta Bagyinszki János.

Ismeretterjesztő cikkek

[68] Kereséselmélet, *Automatizálási Kutató Intézet Közl.* **11** (1965), 251—264.
[69] Kombinatorika, *Természet Világa* **103** (1972), Nov., 517—519.
[70] A javítási időszükséglet csökkentésének útja, *Mérés és Automatika*, 1966. január.
[71] Rényi Alfréd pedagógiai munkássága (Tusnády Gáborral), *Mat. Lapok* **21** (1970), 343—344.
[72] A pongyolaság helye a matematika oktatásában (Szász Domokossal), *Magyar Nemzet*, 1974. március 8.
[73] Obituary, *J. Combinatorial Th.* **26** (1979), 275.
[74] Rényi Alfréd emlékezete, *Magyar Hírlap*, 1980. március 23.
[75] A véletlen rendje, *Népszabadság*, 1982. június 12.
[76] Elmesport vagy alkalmazott matematika?, *Népszabadság*, 1983. július 16.
[77] Hajnal András 50 éves (Juhász I.-vel és Komjáth P.-vel), *Mat. Lapok* **30** (1978—82), 285—305.
[78] Matematikáról indulatokkal, *Háttér*, 1987.
[79] Ramanujan's work in the theory of partitions, Indian Institute of Science, Bangalore, 1987.
[80] Mit kutat a Matematikai Kutató?, *Háttér*.

Jelentés az 1987. évi Grünwald Géza Emlékdíj odaítéléséről

Az 1987. évi Grünwald Géza Emlékdíj odaítélésére a Bolyai János Matematikai Társulat az alábbi bizottságot küldte ki: Császár Ákos (elnök), Lempert László (titkár), Beck József, Bihari Imre, Czédli Gábor, Fejes Tóth Gábor, Fritz József, Győry Kálmán, Hajnal András, Szász Domokos, Tandori Károly, T. Sós Vera.

A Bizottság 1987. november 24-i ülésén az alábbi határozatot hozta:

Grünwald Géza Emlékdíjjal tünteti ki, és az ezzel járó 6000-6000 Ft-tal jutalmazza

*Buczolich Zoltán*t, az ELTE TTK Analízis Tanszékének TMB ösztöndíjasát, és

*Zempléni András*t, az ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztikai Tanszékének tanársegédét.

Indoklás:

Buczolich Zoltán 1985-ben végezte el az ELTE matematikus szakát. Már egyetemi hallgató korában kitűnt színvonalas TDK dolgozataival. Ezek egyike cikk formájában is megjelent az Acta Mathematica-ban.

Érdeklődési köre a valós függvénytan, melyben már több a témakör neves kutatói által felvetett, esetenként hosszú idő óta megválaszolatlan problémát oldott meg, l. az irodalomjegyzékben a [2], [3], [4] és [6] dolgozatokat. Például a [3] dolgozatban bebizonyítja, hogy bármely folytonos függvény konvex vagy konkáv egy perfekt halmazon. Különösen nagy nemzetközi visszhangot keltett a [6] dolgozatban szereplő tétele. Ebben egy olyan Riemann-típusú integrálfogalmat épít fel kétváltozós függvényekre, mely szerint integrálható minden Lebesgue-integrálható függvény (és még sok más függvény is). Ezt a felépítést eredetileg W. Pfeffer amerikai matematikus javasolta (sejtés formájában), de hogy ez a felépítés valóban értelmes, annak bizonyítása Buczolich érdeme.

Buczolich Zoltán publikációinak jegyzéke

[1] On universal functions and series, *Acta Math. Hung.* **49** (3—4) (1987), 403—414.
[2] For every continuous f there is an absolutely continuous g such that $(f=g)$ is not bilaterally strongly porous, *Proc. Amer. Math. Soc.* **100** (3) (1987), 485—488.
[3] Sets of convexity of continuous functions, *Acta Math. Hung.* (közlésre elfogadva).
[4] Continuous functions with everywhere infinite variation with respect to sequences, *Proc. Amer. Math. Soc.* (közlésre elfogadva).
[5] An existence theorem for higher Peano derivatives in $\mathbf{R}^m$, *Real Analysis Exchange* **13** (1) (1988), (közlésre elfogadva).
[6] A general Riemann complete integral in the plane, *Trans. Amer. Math. Soc.*,(benyújtva).
[7] Nearly upper semicontinuous gage functions in $\mathbf{R}^m$, *Real Analysis Exchange* (benyújtva).

Zempléni András 1983-ban végzett az ELTE matematikus szakán. Kutatási témája a valószínűségszámításban előforduló, illetőleg azzal kapcsolatos bizonyos algebrai struktúrák vizsgálata számelméleti nézőpontból (irreducibilitás, faktorizáció stb.). Ilyen vizsgálatokat Hincsin és Linnik kezdeményeztek az eloszlásfüggvények konvolúciófélcsoportja esetében. A konvolúció független valószínűségi változók összegének felel meg. Vizsgálható emellett az eloszlásfüggvények multiplikatív félcsoportja (ami független valószínűségi változók maximumának felel meg).

Zempléni András [4], [5] cikkében jellemzi ez utóbbi félcsoportban, ill. annak egy természetesen adódó részfélcsoportjában az antiirreducíbilis elemeket (vagyis azokat, amiknek nincs irreducíbilis „valódi" osztójuk). [7] cikkében pedig megmutatja, hogy a negatív korrelációjú kétdimenziós normális eloszlás irreducíbilis.

Zempléni András publikációinak jegyzéke

[1] On irreducible measures, *Proc. of the 3rd Pannonian Symp. on Math. Stat.*, Visegrád, 1982, J. Mogyoródi, I. Vincze, W. Wertz eds., 391—409.
[2] On the arithmetical properties of the multiplicative structure of probability distribution functions, *Proc. of the 5th Pannonian Symp. on Math. Stat.*, Visegrád, 1985 (közlésre elfogadva).
[3] On the multidimensional multiplicative structure of probability distribution functions, *Proc. of the 4th European Meeting of Young Statisticians*, Varna, 1985 (megjelenés alatt).
[4] —Székely J. Gábor: Multiplicative arithmetic of distribution functions, *Proc. of the First World Congress of the Bernoulli Society*, Taskent, 1986 (közlésre elfogadva).
[5] The description of the class I_0 in the multiplicative structure of distribution functions, *Proc. of the 6th Pannonian Symp. on Math. Stat.*, Bad Tatzmannsdorf, Ausztria, 1986 (közlésre elfogadva).
[6] Arithmetic in the max-scheme, *Proc. of the 5th European Meeting of Young Statisticians*, Aarhus, Dánia, 1987, J. L. Jensen, M. Sørensen eds., 149—151.
[7] On the max-divisibility of two dimensional normal random variables, *Proc. of the Conference "Probability Measures on Groups XI"* (közlésre leadva).

Jelentés a Farkas Gyula Emlékdíj 1987. évi odaítéléséről

A Bizottság 1987. nov. 23-án tartotta ülését.

Jelen voltak: Vincze Endre (elnök), Gulyás Ottó, Heppes Aladár, Kis Ottó, László Zoltán, Rózsa Pál, Simon László, Szántai Tamás, Turchányi Piroska (titkár), Ziermann Margit.

Kimentette magát: Arató Mátyás, Farkas Miklós, Fischer János, Gécseg Ferenc, Katona Gyula.

Négy javaslat érkezett:

Javasolt	*Javaslattevő*
Fehér László (JATE)	Nagy Péter (JATE)
Fodor János (ELTE)	Kátai Imre (ELTE)
József Sándor (AKI)	Kátai Imre (ELTE)
Kiss Olivér (SzTAKI)	Demetrovics János (SzTAKI)

Hosszas vita után a Bizottság úgy döntött, hogy mivel Kiss Olivér még nem rendelkezik megfelelő szintű publikációkkal, részére díjat nem ad ki. A másik három javasoltat a Bizottság alkalmazott matematikai tevékenysége, a hazai és nemzetközi konferenciákon elhangzott előadások és színvonalas folyóiratokban megjelent publikációk alapján 1987-ben Farkas Gyula Emlékdíjjal jutalmazza. A díjjal járó pénzjutalom mindhárom nyertes esetében 6000 Ft.

A Bizottság javasolja, hogy a három díjazott a BJMT Alkalmazási Szakosztálya előadássorozatának keretében ismertesse munkásságát.

Indoklás:

Fehér László 1983-ban végzett a szegedi József Attila Tudományegyetemen, fizikus szakon. 1983-tól 1987-ig tudományos továbbképzési ösztöndíjas a JATE Geometriai Tanszéken. Jelentős eredményeket ért el a modern differenciálgeometriai módszereknek az elméleti fizikában történő alkalmazása terén. 1986 októberétől 10 hónapig a Soros Alapítvány ösztöndíjával az Oxfordi Egyetem Matematikai Intézetében végzett kutatásokat. Jelenleg kandidátusi disszertációján dolgozik. Jelentős publikációkkal büszkélkedhet a szakma vezető folyóirataiban:

Fehér László dolgozatainak jegyzéke

[1] Bounded orbits for classical motion of test particles in the Prasad—Sommerfield monopole field, *Acta Phys. Pol.* **B 15** (1984), 919—925.

[2] Quantum mechanical treatment of an isospiner scalar in Yang—Wills—Higgs monopole background, *Acta Phys. Pol.* **B 16** (1985), 217—223.

[3] Classical motion of coloured test particles along geodesics of a Kaluza—Klein spacetime, *Acta Phys. Hung.* **59** (1986), 437—444.

[4] Dynamical $O(4)$ symmetry in the asymptotic field of the Prasad—Sommerfield monopole, *J. of Phys. A: Math. Gen.* **19** (1986), 1259—1270.

[5] The $O(3, 1)$ symmetry problem of the charge-monopole interaction, *J. Math. Phys.* **28** (1987), 234—239.

[6] Dynamical $O(4)$ symmetry in long range monopole-test particle and monopole-monopole interaction, pp. 15—38 in the volume *"Non-perturbative methods in quantum field theory"* edited by Z. Horváth, World Scientific (1987).

[7] Dynamical symmetry of monopole scattering, *Phys. Lett.* **B 183** (1987), 182—186 (közös publikáció P. A. Horváthy-val).

[8] Conformal $O(3, 2)$ symmetry of the 2-dimensional inverse square potential, publikálásra elfogadva a *"J. Phys. A: Mathematical and General"*-nál.

József Sándor 1979-ben végzett az ELTE TTK matematikus szak valószínűségszámítási szakirányán. Az egyetem befejezése óta az Agrárgazdasági Kutató Intézet Gazdaságmatematikai Csoportjában dolgozik tudományos munkatársként. Feladata agrárgazdasági folyamatok, jelenségek matematikai modellezése, matematikai módszerek konkrét mezőgazdasági feladatokra történő felhasználása. Egyetemi doktori értekezését „Matematikai statisztikai módszerek az agrárökonómiában" címmel „summa cum laude" minősítéssel 1983-ban védte meg az MKKE Általános Karán. Tagja volt az 1985-ben TKA-támogatott „A termésátlagok irányzatához kapcsolódó bizonytalanság vizsgálata különböző matematikai módszerekkel, döntéseknél figyelembe vehető törvényszerűségek megállapítása céljából" c. téma (témafelelős: Sebestyén József) kutatócsoportjának, jelenleg az ELTE Számítóközpontban levelező aspiráns (aspiránsvezető: Kovács Margit). Itt részt vesz a „Bizonytalan információkkal rendelkező matematikai modellek vizsgálata a nemlineáris analízis és a lehetőségelmélet eszközeivel" c. OTKA-támogatott téma kutatásában (témavezető: Kovács Margit). Jelentős tevékenységet fejtett ki matematikai módszerek orvosi kutatásokban való felhasználására. Eddig 18 tudományos dolgozattal rendelkezik, kutatási eredményeit hazai és nemzetközi — elsősorban operációkutatási, agrárgazdasági, ill. orvosi — konferenciákon adja rendszeresen közre. József Sándor jelentős alkalmazott matematikai tevékenysége, munkáinak elméleti és gyakorlati megalapozottságára való törekvése alapján érdemes Farkas Gyula Emlékdíjra.

József Sándor dolgozatainak jegyzéke

[1] Az állami gazdaságok búza és kukorica termésátlagalakulásának vizsgálata. ELTE SzK Tájékoztató, 28—29. sz. Budapest, 1981, 89—107.

[2] A termésátlag-eloszlás alakulásának leírása és előrejelzése, *Statisztikai Szemle* **59** (1981), 10., 1015—1025.

[3] a) A hozamváltozás vizsgálatának eszközei és tapasztalatai a búza és kukoricatermesztésben.
b) Means and experience of research in changes of wheat and corn yields. In: *Proc. of International corn production Symposium*, Debrecen, 1981 (társszerzők: Gyires P., Vígh J.).
[4] On distribution of wheat and corn yield, *Biom. J.* **25** (1983) 7, 659—667.
[5] Matematikai statisztikai módszerek alkalmazása az agrárökonómiában. Egyetemi doktori értekezés, MKKE, Budapest, 1983.
[6] Klinikai adataink a calcitonin fájdalomcsillapító hatásáról, rosszindulatú daganatok okozta osteolytikus metasztázisokban, *Magyar Onkológia* **27** (1983), 210—215 (társszerző: Szántó J.).
[7] Preliminary observations on the analgesic effect of salmon calcitonin in osteolytic metastases, *Clinical Trials Journal* **20** (1983) 5, 266—274 (társszerző: Szántó J.).
[8] Természeti és gazdasági hatótényezők szerepe a búza- és kukoricatermesztésben. Agrárgazdasági Kutatóintézet, Budapest, 1983/4.
a) Rol prirodnüh i ekonomicseszkih faktorov v proizvodsztve psenyicü i kukuruzü. *AKI Bulletin*, 1984, 57, 58—65.
b) The role of natural and economic factors in the wheat and corn production, *AKI Bulletin*, 1984, 58—62. (Társszerzők: Sebestyén J., Vígh J.)
[9] Rosszindulatú daganatban szenvedő betegek fájdalomcsillapítása Calcitinnal, *Orvosi Hetilap*, 1985. 126. évf., 44. sz. 2719—2722 (társszerzőkkel).
[10] Zur quantitativen Analyse des Ertragsdurchschnittes der ungarischen Volkseigenen Güter. In: *Wiss. Beiträge, Martin Luther Universität*, Halle, 1985/8. 56—59.
[11] Pain killing with Calcitonin in patients with malignant tumours, *Oncology* **43** (1986), 69—72 (társszerzőkkel).
[12] A termésátlagok irányzatához kapcsolódó bizonytalanság vizsgálata különböző matematikai módszerekkel, döntéseknél figyelembe vehető törvényszerűségek megállapítása céljából. TKA pályázat zárótanulmánya, Budapest, 1986 (társszerzőkkel).
[13] Über die Übergänge zwischen Fuzzy-Mengen. In: *Vortragsauszüge d. Conf. Math. Optimierung-Theorie und Anwendungen*, Eisenach (DDR), 1986.
[14] Activity of epirubicin in combination chemotherapy of advanced ovarian cancer, *Oncology* **44** (1987) 2, 1—4 (társszerzőkkel).
[15] A bizonytalan (fuzzy) halmazok alapjaitól a fuzzy állapotok közötti átmenetvalószínűségekig. AKI-tanulmány (megjelenés alatt).
[16] Termésátlagingadozás törvényszerűségeinek matematikai elemzése, *SZIGMA* (társszerzők: Kovács M., M. Dobos K., Zsigmond I.) (megjelenés alatt).
[17] A fuzzy σ-algebrák generáltságáról, *Alk. Mat. Lapok* (társszerző: Benczúr A.) (elfogadott kézirat).
[18] A határozatlanság és bizonytalanság figyelembevétele a modellezésben: a fuzzy elméletről. AKI-tanulmány (kézirat).
[19] Regression mit Fuzzy-Mengen. Mathematische Optimierung-Theorie und Anwendungen, 1987, (elfogadott előadás).

Fodor János 1981-ben szerzett kitüntetéses matematikusi diplomát az ELTE TTK-n operációkutatási szakirányon. 2 évig a TTK Valószínűségszámítási Tanszéken tudományos ösztöndíjas gyakornok volt, 1983 óta dolgozik az ELTE Számítóközpont Operációkutatási Osztályán. 1981-től vesz részt az egyetemi oktatásban. Fő kutatási területei: sztochasztikus és fuzzy matematikai programozás, általánosított és fuzzy konvexitás. 1984-ben védte meg egyetemi doktori értekezését „Extremális eloszlások és alkalmazásuk a matematikai programozásban" címmel.

1986 óta tagja a „Bizonytalan információkkal rendelkező modellek vizsgálata a nemlineáris analízis és a lehetőségelmélet eszközeivel" című OTKA-támogatott témára alakult kutatócsoportnak (témafelelős: Kovács Margit), a fuzzy konvexitás vizsgálatában már vannak eredményei. Részt vesz az ugyancsak OTKA-támogatott „Nagyméretű sztochasztikus rendszerek optimalizálása, villamosenergia-rendszerek optimalizálási problémái" c. téma (témafelelős: Prékopa András) kutatásában is.

Fodor János kiemelkedőbb dolgozatai

[1] Extremális eloszlások és alkalmazásuk a matematikai programozásban. Egyetemi doktori értekezés, ELTE TTK, Budapest, 1983.
[2] Optimális lay-out tervezés. Kutatási jelentés, ELTE SzK, Budapest, 1983 (társszerzőkkel).
[3] H. Steinhaus: Matematikai kaleidoszkóp. Kiegészítő fejezet a magyar kiadáshoz. Gondolat Kiadó, 1984 (társszerző: Bezdek András).
[4] A logaritmikusan konkáv eloszlások és a kettős exponenciális eloszlás kapcsolatáról, *Alk. Mat. Lapok* **12** (1986), 239—248.

[5] Extreme order statistics with application to mathematical programming. In: *Conf. of young programmers and mathematicians.* (Ed. Iványi A.), ELTE, 1984, 139—143.
[6] Extreme order statistics applied for optimum estimation in "hard" MP problems (to appear in: *Transaction of Tenth Prague Conference,* 1987, tátsszerző: Pintér J.).
[7] Some kinds of generalized concavity appearing in stochastic systems. Working paper, ELTE, 1987 (submitted for publication).
[8] On domains of attraction of extreme value distributions via generalized concavity-convexity. Working paper, ELTE SzK, 1987 (submitted for publication).
[9] On domains of attraction of the double exponential distribution. Working paper, ELTE SzK, 1987 (submitted for publication).
[10] Elements of fuzzy convexity in linear spaces (submitted for publication).

Előadások

1. A sztochasztikus programozás *E*- és *P*-modellje. XII. Magyar Operációkutatási Konferencia Kőszeg, 1982.
2. Extremális eloszlások és alkalmazásuk a matematikai programozásban. XIII. Magyar Operációkutatási Konferencia, Balatonfüred, 1983.
3. Extreme order statistics with application to mathematical programming. Conf. of young programmers and mathematician, Budapest, 1984.
4. Egy függvény maximumának becslése a kettős exponenciális eloszlás alapján. XIV. Magyar Operációkutatási Konferencia, Kaposvár, 1984.
5. Extreme-value distributions and mathematical programming. Mathematische Optimierung-Theorie und Anwendungen, Eisenach (GDR), 1984.
6. Általánosított konvexitás és alkalmazásai. XV. Magyar Operációkutatási Konferencia, Sopron, 1985.
7. Generalized concavity with applications to probability theory. Pedagogische Hochschule, Halle (GDR), 1985.
8. Generalized concavity in nonlinear programming. Conf. Nichtlineare Optimierung, Breitenstein (GDR), 1986.
9. Optimum estimation methods based on extreme order statistics. Tenth Prague Conference, Prague, 1986 (társszerző: Pintér J.).
10. Általánosított konkáv függvények a sztochasztikus programozásban. XVI. Magyar Operációkutatási Konferencia, Balatonföldvár, 1986.
11. *T*-konvex fuzzy halmazok. XVII. Magyar Operációkutatási Konferencia, Balatonfüred, 1987.
12. Elements of fuzzy convexity in linear spaces. Mathematische Optimierung-Theorie und Anwendungen, Eisenach (GDR), 1987 (elfogadott előadás).

Jelentés a Beke Manó Emlékdíjak 1987. évi odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat elnöksége 1986. szeptember 18-i ülésén az 1987. évi Beke Manó Emlékdíj bizottsága összetételére a következő határozatot hozta:

elnök: Surányi János
titkár: Kántor Sándorné
tagok: Békefi Zsuzsanna, C. Neményi Eszter, Pálmay Lóránt, Reményi Gusztávné, Scharnitzky Viktor.

A Beke Manó Emlékdíj bizottság a Társulat helyi tagozataiból beérkezett javaslatok alapján — figyelembe véve a korábbi években felterjesztésekre kerülteket is — úgy találta, hogy jóval több az olyan kollégák száma, akik kiváló matematikaoktató és népszerűsítő munkájuk miatt feltétlenül érdemesek a Beke Manó Emlékdíjra. A bizottság nehéz helyzetben volt a díjak odaítélésekor. Három ülésen, alapos mérlegelés és sokoldalú vizsgálat után végül is egyhangúlag a következő határozatot hozta:

A Bolyai János Matematikai Társulat 1987-ben a Beke Manó Emlékdíj II. fokozatával tünteti ki:

Brenyó Mihálynét, a kecskeméti Kodály Zoltán Ének-Zenei Általános Iskola, Gimnázium és Zeneművészeti Szakközépiskola igazgatóhelyettesét;

Gehér Lászlót, a JATE Bolyai Intézetének adjunktusát;

Harsányi Lászlónét, a budapesti Földes Ferenc Kereskedelmi Szakközépiskola tanárát;
Huttmann Ferencnét, a zalaegerszegi Petőfi Sándor Általános Iskola igazgatóhelyettesét;
Koller Lászlónét, az OPI matemtikai osztályának munkatársát;
Tóth Tibornét, a mosonmagyaróvári Kossuth Lajos Gimnázium és Szakközépiskola tanárát, Győr-Sopron megyei középiskolai szaktanácsadót;
Vörös Sándort, a budapesti Varga Jenő Közgazdasági Szakközépiskola tanárát, szaktanácsadót.

Indoklás:

Brenyó Mihályné a kecskeméti Kodály Zoltán Ének-Zenei Általános Iskola, Gimnázium és Zeneművészeti Szakközépiskola igazgatóhelyettese, aki matematika—kémia—testnevelés—pedagógia szakos diplomáit a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán szerezte.

Kiemelkedő szakmai tevékenységet végez. Igen tudatosan és eredményesen tárja fel a tehetséggondozás és az egyéni képességfejlesztés lehetőségeit, a matematikai ismeretek átadásának leghatékonyabb módszereit. Megbízást kapott a komplex matematika tanítására, majd az ideiglenes és az új matematika tanterv bevezetését megelőző kísérletekben vett részt. Bemutató órákat tartott az új koncepció és az új módszerek népszerűsítése és terjesztése érdekében, szakmai tanácskozásokon, tanfolyamokon számolt be tapasztalatairól, előadásokat tartott, feladatmegoldó szemináriumokat vezetett az általános iskolai tanárok és tanítók számára. Munkaközösség-vezetőként részt vett az utógondozási munkában. Tevékenységének erőteljes szemléletformáló hatása volt.

Az iskolában szakkört vezet. Tanítványai jól szerepelnek az országos versenyeken, a rádió és a tv által szervezett versenyeken többször kaptak dicséretet.

Brenyó Mihályné fáradhatatlan, állandó megújulásra képes tanárnő, akinek munkáját Kiváló Munkáért c. kitüntetéssel is elismerték.

Gehér László a JATE Bolyai Intézetének adjunktusa évtizedek óta szervezi és tartja Csongrád megye legjobb matematikus diákjai számára a kéthetenként sorra kerülő központi szakköröket és az olimpiai szakkört. Az évek során igen sok tehetséges tanulóra volt ez a munkája nagy hatással. Diákként minden lehetséges matematika versenyen eredményt és sikereket ért el, igen kiváló feladatmegoldó, akitől a tanulók nagyon sokat tanulhatnak. Gehér László 4 évig volt középiskolai tanár, utána tudományos munkatársként dolgozott. Hatása nem csupán a tanulókra nézve jelentős. Kollégái is szívesen mondják el neki problémájukat és nagyon sokszor jó ötleteket kapnak tőle, széles körű matematikai tudásával mindig segítséget tud nyújtani.

Az egyetemi hallgatók számára az utóbbi két évben gráfelméleti előadásokat tartott. Az itt tárgyalt problémák nagyon szorosan kötődnek a középiskolai matematikatanításhoz.

A tanárok számára a tanári továbbképzéseken rendszeresen tartott előadásokat. 1985-ben a Rátz László vándorgyűlésen igen sikeres feladatmegoldó szemináriumot tartott.

Gehér László sok ember javát szolgáló, csendes, de igen jelentős munkát végzett.

Harsányi Lászlóné a budapesti Földes Ferenc Kereskedelmi Szakközépiskola matematika tanára nehéz körülmények között is igen eredményesen dolgozik. Tanítványai az első osztálytól a negyedikig sokat fejlődnek önállóságban, gondolkodási készségben, kitartó munkában, szabatos beszédben. Hallatlan türelemmel, tervszerűséggel és szakszerűséggel foglalkozik a tanulókkal. Módszerének lényege az, hogy a tanulók az órán önállóan, vagy esetleg kisebb csoportokban dolgoznak és a csoportokban differenciáltan foglalkozik a jobb, illetve a gyengébb képességű tanulókkal, órái így munkáltató jellegűek.

A matematikai munkaközösséget összetartja, szakmai és módszertani ismereteit megosztja a munkaközösség többi tagjával, sokat segít a fiatalabb kollégáknak.

Részt vett a BJMT által szervezett tanítási kísérletekben. A kísérletező tanárok, illetve a fővárosi szakközépiskolai tanárok számára többször tartott bemutató órákat.

Az ELTE TTK harmadéves matematika szakos hallgatói hospitálásuk során az ő munkáján keresztül nyertek betekintést egy iskola pedagógiai tevékenységébe, egy-egy osztályban a tanórán alkalmazható modern munkaformákba és módszerekbe.

Harsányi Lászlóné a tanítási órákhoz kapcsolódóan évek óta tart a gyengébb képességű tanulók számára felzárkóztató korrepetálást, illetve a jobb képességű, továbbtanulni szándékozó tanulóknak pedig felvételi előkészítő tanfolyamot.

Szakmai tudását, ismereteit módszeresen bővíti. Az 1985/86. tanévben kiváló eredménnyel végezte el az intenzív matematikai továbbképző tanfolyamot. A kreativitás fejlesztése a matematika tanításában c. szakdolgozatában a tanítási kísérlet során szerzett tapasztalatait összegezte.

Huttmann Ferencné a zalaegerszegi Petőfi Sándor Általános Iskola igazgatóhelyettese. Tanítónőként a matematikai ismeretterjesztés úttörője volt Zalaegerszegen. Ő értette meg a tanítókkal a

matematikatanítás időszerűségét. 1971-től eredményesen alkalmazta az esztergomi matematikai kísérletet. Ő szervezte Zalaegerszegen a legelső tanfolyamokat. Fáradhatatlan volt a munkában. Lelkesedése, ügyszeretete sok kollégával szerettette meg a matematikát. Türelmesen tanította a tanítókat is és a gyerekeket is. Tanítványai a felsőbb osztályokban jól megállták a helyüket. Az ismeretterjesztő munkát a szülők körében is nagy ügyszeretettel végezte. Szakmai munkaközösségvezetőként az új módszerek továbbadója volt.

Kisugárzó hatása megyei szinten érvényesült. Mint igazgatóhelyettes részt vesz a munkaközösségek foglalkozásain, hasznos tanácsaival segíti a kollégákat. 1975-ben Miniszteri Dicséret, 1985-ben Kiváló Munkáért c. kitüntetésekben részesült.

A matematika tantárgy tanításában, ismeretterjesztésében, a továbbképzéseken végzett munkája kiemelkedő.

Koller Lászlóné pedagógusként 1960-tól 1970-ig dolgozott előbb nevelői, aztán általános iskolai tanári beosztásban. A Szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán 1965-ben szerzett matematika-kémia szakos tanári oklevelet, majd 1969-ben az ELTE TTK matematika tanári szakán kapott oklevelet.

1970 óta az Országos Pedagógiai Intézetben dolgozik, előbb a szakképzésen, majd 1971 óta a matematika tanszéken, illetve ennek utódján, a matematikai osztályon. Feladata a szakmunkásképző iskolai matematikatanítás gondozása. A komplex matematikatanítási kísérlet koncepcióját, tapasztalatait felhasználva kísérletet indított az új szakmunkásképző iskolai matematika tanterv kidolgozására. Ennek alapján készült el 1977-ben a tanterv, majd a hozzá kapcsolódó tankönyvek, munkalapok. Az elmúlt években a dolgozók gimnáziuma számára írt matematika tankönyvsorozatot és egy 14 kötetes szakmai feladatgyűjteményt szerkesztett a szakmunkásképző iskolák matematikaoktatásának segítésére. Számos didaktikai tárgyú cikket írt A Matematika Tanításában és a Szakmunkásképzésben. Szervezi a szakmunkásképzős tanulók országos matematika versenyét. Az elmúlt év óta egy, a szakközépiskolai matematikaoktatás megújításával foglalkozó kísérlet irányítását végzi.

Módszertani, tanártovábbképző előadásokat tartott országszerte; rendszeres előadója a Társulat vándorgyűléseinek.

Nagy tapasztalattal rendelkező, segítőkész munkatárs. A korszerű matematika tanítás érdekében kifejtett sokirányú, áldozatkész munkája országosan is ismert.

Tóth Tiborné 1968-ban fejezte be tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetemen matematika-könyvtár szakon, azóta a mosonmagyaróvári Kossuth Lajos Gimnázium és Szakközépiskola tanára, középiskolai matematika szaktanácsadó.

Kiváló szakmai felkészültségét igazolja szaktanári és szaktanácsadói tevékenysége. Tanítványainak több, mint 90%-a nyert felvételt egyetemi és főiskolai intézményekbe és évről évre sikeresen szerepelnek a középiskolai tanulmányi versenyeken. Tanítási módszerei korszerűek. Diákjaiban sikerült kialakítania a matematika iránti érdeklődést, szeretetet. Ehhez nagyban hozzájárult emberi magatartása. Tanítványait megértéssel, türelemmel oktatja, neveli, akik nagy szeretettel és tisztelettel ragaszkodnak hozzá.

Szaktanácsadó munkája kiemelkedő. Korrekt irányítója a megyei szaktanári kollektívának. Kollégáit segítő szándékkal látogatja, hasznos szakmai és módszertani tanácsokkal látja el őket. Sokoldalúan gondoskodik a matematika tanításának magasabb színvonalra emelésén. Számos megyei és országos publikációja jelent meg matematikai szaklapokban. A középiskolai szakmai továbbképzéseken és TIT előadásokon magas színvonalú felkészültségével segíti a szaktanárok munkáját.

A középiskolai matematika tanárok számára indított komplex tanfolyam vezetője.

A Bolyai János Matematikai Társulat győri tagozatának alelnöke. Az 1985. évi vándorgyűlés megszervezésének irányítója, szervezője volt. Országos elismerést váltott ki a szaktanárok körében az átmenet kérdéséről szóló vitaindító előadása. Tevékenységének egyik fő területe az általános iskola és a középiskola átmeneténak problémája, amit országosan vizsgált a felmérési eredmények tükrében. Érdeklődéssel kíséri az általános iskola matematikatanítását, hasznos tanácsokkal segíti az átmenet problémáinak leküzdését a középiskola követelményeinek megismertetésével. Rendszeresen tájékoztatja az általános iskolai tanárokat a felmérés eredményeiről, útbaigazítást ad a hiányosságok pótlására.

Korszerű kezdeményezése az általános iskolai tanulók tehetséggondozása, akik számára középiskolai szakkört szervez, amelyet középiskolai tanárok vezetnek. A Kis Matematikus Baráti Körök résztvevői szép eredményeket érnek el a megyei és országos TIT versenyeken.

Gondot fordít önképzésre, 1982-ben az analízis témakörében doktorált.

Gyakran tart előadásokat. Attitűdvizsgálatainak eredményeiről a Pedagógiai Szemle hasábjain olvashatunk.

Középiskolájában nagy hozzáértéssel segíti a matematikai munkaközösség tevékenységét.

Bemutató órát vállalt. Tanítványai rendszeresen megoldják a Középiskolai Matematikai Lapok kitűzött feladatait.

1984-ben díjnyertes pályamunkát készített, majd ugyanebben az évben Kiváló Munkáért kitüntetésben részesült.

Vörös Sándor az ELTE-n 1978-ban szerzett matematika-fizika szakos középiskolai tanári diplomát. Szakmailag, pedagógiailag igen jól felkészült, ismeretei mélyek, ettől függetlenül állandóan fejleszti tudását. Rendszeresen részt vesz szervezett továbbképzésben, de egyénileg is képezi magát; ismeri és olvassa a legújabb szakmai irodalmat.

Ismeretei átadására képes, igen lelkes, segítőkész. Óráira mindig lelkiismeretesen készül, tanulóival és önmagával szemben is igényes.

Tanóráit magas fokú szakmai igényesség jellemzi. A fogalmak tisztaságára, azok kialakítására nagy gondot fordít. Módszerek tekintetében a változatosság jellemzi a munkáját (modell, feladatlap, csoportmunka, differenciált foglalkoztatás). Különös erőssége, hogy tanítványait megtanítja sejteni, vitatkozni, kérdezni, jegyzetelni. Órái jól szerkesztettek, céltudatosak, feszesek. Érett tanári munkát tükröznek a tanulói füzetek, a tanulók minősítése és eredményei.

Tanulóit önálló munkára, gondolkodásra szoktatja. Kollégáival a kapcsolata jó, a munkaközösség aktív tagja. A hetente rendszeresen tartott munkaközösségi megbeszéléseken mindig felvet valamilyen szakmai problémát, új feladatot, mellyel kollégáit is együttgondolkodásra készteti. A kollégákat és a tanulókat is bevonja a Kömal feladatainak megoldásába, és segíti az OKTV-re való felkészülést, tanulóinak továbbtanulását.

Kísérletet tesz egy-egy anyagrész megszokottól eltérő feldolgozására, mely kísérletet a munkaközösség tagjai állandóan figyelemmel kísérik. Az elért eredmények alapján kollégái is átveszik az ötletet és a következő években már így tanítják a megreformált tananyagot. Legutóbb a szögfüggvények tanítására alakított ki új feldolgozási módot.

Tanulságos bemutató órát tartott a szakmódszertani tanfolyam hallgatóinak.

Több éve dolgozik az Arany Dániel I. versenybizottságban, ahol szakmai igényességét és pontosságát kamatoztatja.

Egy év óta mint szakközépiskolai szaktanácsadó tudását s tapasztalatait szélesebb körben is hasznosítja. Ezt a munkáját is a nagyfokú precízség és segítőkészség jellemzi.

Vörös Sándor igen széles skálán tud dolgozni és munkáját igen lelkiismeretesen és megbízhatóan végzi el, mindig lehet rá számítani.

Jelentés a Rényi Kató Emlékdíj 1987. évi odaítéléséről

A Rényi Kató Emlékdíj bizottság 1987. november 10-i ülésen a következő határozatot hozta:

Rényi Kató Emlékdíj I. fokozatában és 5000 Ft pénzjutalomban részesíti DOUNG TAN THANH-t, az ELTE 1987-ben végzett hallgatóját.

A díj II. fokozatában és 4500 Ft pénzjutalomban részesíti SZABÓ TAMÁSt, a KLTE 1987-ben végzett hallgatóját.

Indoklás:

Doung Tan Thanh topologikus terek folytonos valós függvényein definiált gyűrű-, illetve hálóstruktúrával kapcsolatban ért el új eredményeket, és új, egyszerűbb bizonyításokat adott. Jó érzékkel ismerte fel azokat a lehetőségeket, amiket az ismert és részben új módszerek a meglévő tételek általánosítására kínáltak.

Szabó Tamás a Cauchy-féle függvényegyenlet általánosításaival foglalkozott. Dolgozataiban algoritmussal (sorozatokkal) adott függvényekre terjesztett ki ismert eredményeket.

Nagyrendezvények 1986—87-ben

1986:

Csillag Pál találkozó (Balatonlelle, május 30.—június 4.)

Az 1986. évi Csillag Pál találkozót május 30 és június 4 között rendeztük meg Balatonlellén, az 1979-ben vagy azután végzett matematikusok részére. A találkozón 100 fő vett részt hosszabb-rövidebb időre. Hétvégén telt ház volt, míg hétközben 60—80 fő között mozgott a létszám. Az elmúlt évekhez hasonlóan a szállás a Budapesti Műszaki Egyetem KISZ táborában volt. Sajnos a tábor állaga tavaly óta sokat romlott, — újjáépítése több, mint 1 évbe telik — meggondolandó lenne új helyszín keresése.

Az előadásokra a tábor előadótermében került sor. A találkozó tudományos programjában általában napi 4-5 előadás szerepelt, melyeket a szokásos érdeklődés kísért.

Előadások: Buczolich Zoltán: Folytonos függvények regularitási tulajdonságai, Fodor János: Általánosított konkavitás és alkalmazásai, Fullér Róbert: Regularizációs módszerek a halmazok kiszélesítésének segítségével, Gál Anna: Bináris mátrixok bonyolultsága, Mala József: Lokális hálózatok a PROPER—16 személyi számítógépekre, Márkus László: Sztochasztikus vezérlés személyi számítógépen, Mészáros András: A valamikor és a mindig ereje, Pammer Judit: A valamikor néha jobb mint mindig?, Petróczki Hedvig: A Portfolio-probléma, Simányi Nándor: Schrödinger-operátor véletlen potenciállal, Szabó Zsolt: Induktív következtetés nem teljes információból.

A számítástechnika előretörését jelzi, hogy az egyik napot csak e körbe tartozó előadásoknak szenteltük. Felvetődött az a gondolat, hogy a spontán előadásokon kívül, több (két-három) előadásból álló sorozatot is kellene tartani, előre felkért előadóval.

A „hivatalos" programokon kívül a „Csillag Pál" szokásos, vidám élete folyt, amely garantálta a megfelelő hangulatot és a spontán tapasztalat és eszmecserék sikerét. A mostohább körülmények ellenére a szimpózium sikeresnek tekinthető.

Rátz László vándorgyűlés (Nyíregyháza, július 3—6.)

Az Oktatási Szakosztály az 1986. évi Rátz László vándorgyűlését július 3 és 6 között rendezte meg Nyíregyházán a Bessenyei György Tanárképző Főiskolán. A Vándorgyűlés keretén belül július 4-én és 5-én a Felsőoktatási Bizottság Felsőoktatási Ankétot rendezett.

A teljes Vándorgyűlésre mintegy 400 pedagógus, az ankétra 40 felsőoktatásban tanító tanár jelent meg.

A Vándorgyűlésen minden szekcióban (alsó tagozatos, felső tagozatos, középiskolai) foglalkoztak a matematika tanítás időszerű kérdéseivel: szó esett a tantervi korrekciók elvi és gyakorlati feladatairól, elhangzottak a tananyagon túlmutató szakmai előadások is.

Igen nagy sikere volt Recski András gráfelméleti algoritmusokról tartott előadásának, mely a plenáris ülésen hangzott el, rendkívül érdekes műszaki alkalmazásokat is bemutatva.

Kiemelkedett a jó előadások közül is Nemetz Tibor: A valószínűségi szemlélet kialakítása 6—10 éves korban című, Kovács Csongorné: Az alsó tagozatos munka — felsős szemmel című, Szeredi Éva: Érdemes-e játszani a matematika órákon című előadása — szemléletformáló erejével. Lenyűgözte a hallgatóságot szakmai újdonságával és naprakész kutatási-eredménylistájával Győry Kálmán: Újabb eredmények a diophantikus egyenletek elméletében című előadása.

Sikeresek voltak a feladatmegoldó szemináriumok is mindhárom szekcióban. (A középiskolai szemináriumi anyagot júniusban szétküldtük a résztvevőknek.) A résztvevők egyöntetű véleménye alapján a színvonalas szemináriumok közül Rácz János és Hegyvári Norbert szemináriumai emelkedtek ki, mert a szakmai és a módszertani kérdéseket igen jól ötvözték.

Szerencsésnek bizonyult, hogy az írásos anyagból mindenki kapott. Hasznos volt a felső tagozatos szakköri anyag, amit Reményi Gusztávné állított össze.

Érdeklődés kísérte a matematika tanárok továbbképzéséről tartott ankétot, amelyet Varecza Árpád vitaindítója vezetett be. Ezen az ankéton elhangzottakat reméljük, jól tudják hasznosítani a továbbképzési intézmények is.

Külön köszönet illeti a Társulat Szabolcs-Szatmár Megyei Tagozatát, amiért 9 előadást, illetve szemináriumot a házigazdák tartottak meg.

Jól sikerült az Informatikai Bizottság program-cserés délutánja is.

A vándorgyűlés szakmai részét jól egészítette ki a nyíregyházi városnézés és a három útvonalon szervezett kirándulás.

A vándorgyűlés befejezése után az Oktatási Bizottság ülést tartott Nyíregyházán.

Partíciók irregularitásai kollokvium (Fertőd, július 7—11.)

A számelméletben és a kombinatorikában számos olyan eredmény ismeretes, amely közvetlenül vagy közvetve az egyenletes eloszlás, a diszkrepancia különböző fogalmát használja, és amely lényegében egy halmazrendszer különböző feltételek melletti partícióira vonatkozik. A fertődi kollokvium elsődleges célja az volt, hogy a két különböző módon induló, ám egymáshoz mégis közel álló területen dolgozó, élvonalbeli kutatók számára lehetőséget biztosítson a konzultációra, a problémák, eredmények és módszerek kölcsönös megismerésére.

A kollokvium július 7-én (hétfő) délután kezdődött, és 11-én (péntek) délelőtt ért véget. A nyolc országból (Ausztrália, Ausztria, Csehszlovákia, Franciaország, Lengyelország, Nagy-Britannia, NSZK, USA) érkezett 20 külföldi, valamint 19 magyar résztvevő közül összesen huszonnyolcan tartottak előadást, így nem volt szükség párhuzamos szekciók szervezésére. Négy, egyenként ötvenperces átfogó előadás hangzott el: Beck József: Irregularities of point distribution in combinatorics; W. A. Deuber (NSZK): Canonical and topological Ramsey theory; R. L. Graham (USA): Quantitative partition theorems; J. Spencer (USA): Combinatorial discrepancy theory. A többi előadás huszonöt perces volt, és egy problémafelvető ülésre is sor került. A kollokviumra a téma legjelesebb művelői jöttek el, így az előadások mindvégig igen tartalmasak és magas színvonalúak voltak. Anyagukat kötet formájában is meg kívánjuk jelentetni.

A kollokviumnak a fertődi Esterházy kastély adott otthont, amelyben ez volt az első ilyen jellegű tudományos rendezvény. A patinás épület és festői környezete a résztvevők egyöntetű lelkesedését váltotta ki, és így szerencsére alaptalannak bizonyultak a hely relatíve alacsony komfortfokozatával kapcsolatos előzetes aggályaink. Személyes tapasztalataink és az azóta kapott visszajelzések szerint is a kastély kiválóan alkalmas az ötven főnél nem nagyobb létszámú rendezvények lebonyolítására, mivel a résztvevők zavartalanul dolgozhatnak együtt. A természetes környezet pedig feszített munka mellett is biztosítja a kikapcsolódás lehetőségét. Jelen esetben a viszonylagos összezártságnak csak az előnyei mutatkoznak meg, elősegítve a tudományos együttműködést. (A reggelit és ebédet is házon belül oldottuk meg, a helybeli tsz segítségével.)

A tudományos program mellett szerveztünk egy félnapos kirándulást Sopronba és környékére, rövid orgonahangversennyel egybekötve a résztvevők költségére. Ezen kívül 10-én kora délután a kastély megtekintését követően a bálteremben sor került egy blockflötekoncertre is. (Ez utóbbiról talán érdemes megemlíteni, hogy az alkalmi együttes három tagja közül kettő matematikus volt.)

Numerikus módszerek konferencia (Miskolc, augusztus 24—30.)

A konferenciát 43 magyar és 65 külföldi matematikus részvételével tartottuk meg. A külföldiek 18 országból érkeztek, a legnépesebb csoport az NDK és az NSZK matematikusait képviselte 13-13 fővel. A konferencia az előzetes tervek szerint három szekcióban végezte munkáját: 1. differenciálegyenletek numerikus megoldása; 2. numerikus algebra; 3. alkalmazások, szoftver és egyéb témák. Új színfoltja volt a konferenciának, hogy poszter-szekcióban is lehetőséget adott a közvetlen tapasztalatcserére. A konferencián hét 50 perces plenáris előadás hangzott el, nevezetesen Kublanovszkaja (Leningrád), Greenspan (Arlington), Szamarszkij (Moszkva), Collatz és Taubert (Hamburg), Schwetlick (Halle), Viktória (Coimbra) részéről. Ezek közül különösen Greenspan, előadását követte élénk vita (amint ehhez már az előző két konferencián is hozzászoktunk). A plenáris előadások mellett húsz 30 perces előadás hangzott el (egyidejűleg legfeljebb két szekcióban) továbbá kb. hatvanöt 15 perces előadás, általában két vagy három szekcióban párhuzamosan. Egy délelőttöt szenteltünk a poszter-szekciónak, a posztereket előző este már ki lehetett függeszteni, hogy legyen elég idő a tanulmányozásukhoz. Az előadások színvonala természetesen változó volt néhány, mind tartalmában, mind az előadások stílusát tekintve kiemelkedő előadást hallottunk, de az is jó volt, hogy fiatalabb és még kisebb tapasztalattal rendelkező kollégák is lehetőséget kaptak arra, hogy széles körű hallgatóság előtt bemutassák eredményeiket. Örvendetesnek mondható, hogy kialakult a numerikus konferenciáknak egy viszonylag stabil résztvevőköre. A külföldi előadások közül kiemelkedő volt Alefeld, Berg, Bunse-Gerstner, Butcher, Fiedler, Greenspan, Maess, Schwetlick, Taubert és Tismenetsky előadása. Szerencsésnek mondható a hely megválasztása: a Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem vezetői részéről minden tőlük telhető segítséget megkaptunk, hogy sikeresen bonyolíthassuk le a konferenciát. Az elhelyezés a diákszállóban megfelelő volt, ha nem is fényűző, de legalább olcsó. Külön köszönet jár Szarka Zoltánnak, akinek mint helyi szervezőnek oroszlánrésze volt a konferencia sikeres lebonyolításában és a kisebb zökkenőkön szerencsésen átsegítette a konferenciát. Mindezek eredményeképpen az a meggyőződés alakult ki, hogy a 4. Numerikus módszerek konferencia sikeres volt és a Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem a jövőben is igénybe vehető konferenciák megrendezésére.

Operációkutatási konferencia (Balatonföldvár, szeptember 23—26.)

A konferencián több, mint 200 szakember vett részt, ami az utóbbi évek átlagának felel meg. Az elhangzott 65 előadás egy plenáris és 14 szekcióülés keretében hangzott el. Az eredetileg meghirdetett előadásoknak kb. 15%-a maradt el betegség, külföldi út stb. miatt. A megnyitó plenáris előadások keretében két, az MTA Operációkutatási Bizottsága keretében folyó felmérés fontosabb megállapításait ismertették az előadók. A témákat élénk érdeklődés kísérte, minthogy a hazai operációkutatás helyzetével foglalkoztak. Konkrét kérésként került megfogalmazásra az, hogy az előadások minden érdeklődő által hozzáférhető folyóiratban kerüljenek publikálásra. A szekcióülések több, mint egyharmadát matematikai jellegű előadások tették ki, hasonló volt az aránya a közgazdasági, ökonometriai modellezési témáknak. A többi előadás egyéb témákkal foglalkozott. Általános megítélés szerint mind a szervezés, mind a konferencia szakmai színvonala kiemelkedő volt. Ez is jelentősen hozzájárult ahhoz, hogy a résztvevők, ill. az operációkutatás terén dolgozó szakemberek közül sokan jelezték azon kérésüket, hogy a konferenciát továbbra is évente rendezze meg a három szervező társulat, miután nem hivatalos formában utalás történt arra, hogy a jövőben csak kétévente kerül megrendezésre az operációkutatási konferencia. E kérdésről a szervező testületeknek a közeljövőben dönteni kell. A szervezőbizottság megítélése szerint is sikeres volt a balatonföldvári konferencia, mert megfelelő alkalmat adott az operációkutatás terén dolgozó elméleti és gyakorlati szakemberek találkozására, egymás munkáinak megismerésére, s munkakapcsolatok kialakítására. Ezt a gyakorlatot célszerű a jövőben is folytatni.

1987:

Csillag Pál találkozó (Balatonlelle, június 5—10.)

A Szimpóziumon mintegy 60 matematikus vett részt, a szokásos eloszlás szerint, hét végén többen, míg hétköznapokon kevesebben.

A viszonylag alacsony részvétel egyrészt magyarázható az évfolyamok létszámának csökkenésével, de ez még önmagában kevés. Az elmúlt évben az időjárás nem kedvezett a találkozónak és a megfelelő fedett helyiségek hiánya miatt már tavaly többen panaszkodtak, amely kihatott az idei részvételi kedvre. Az időjárás idén is befolyásolta a Csillag Pál menetrendjét annyiban, hogy a jó időre való tekintettel — az első meleg nyári nap június 6-án volt! — a szokásos pihenőnap vasárnapról szombatra került.

A „munkanapokon" általában 4-5 előadás hangzott el a matematika és a számítástechnika köréből.

A Szimpózium során felvetődött, hogy a végzős évfolyamok létszámának csökkenése miatt a találkozó korhatárát, végzettek + 10 évben kellene megállapítani.

Érdemes külön kitérni a találkozó helyszínén, a KISZ-táborban uralkodó körülményekre: a BME KISZ-tábora jelenlegi szolgáltatási színvonalával alkalmatlan a Csillag Pál Szimpózium helyszínének. Nincsenek meg az előadások, szakmai megbeszélések minimális feltételei (pl. nincs tábla).

Az a tény, hogy a tábor szolgáltatásai korántsem felelnek meg egy szimpózium rendezéséhez — az évek során csak visszafejlődést tapasztaltunk — és emellett a szállásdíj ötszörösére nőtt (30 Ft/napról 150 Ft/napra) arra sarkall, hogy javasoljuk: a Csillag Pál találkozót a jövő évtől kezdve más helyszínen kell megrendezni.

VII. Magyar Kombinatorika kollokvium (Eger, július 5—11.)

A részvétel minden eddiginél nagyobb volt, 27 országból 236 résztvevő (a tervezett 120 helyett). Örvendetes, hogy először vett részt nagy számú szovjeg matematikus (13), közöttük a Fields-érmes Margulisz, és több országból most vettek részt először.

Kilencen tartottak 45 perces plenáris előadást: Beck József, B. Bollobás (Anglia), A. Brower (Hollandia), Erdős Pál, C. Godsil (Kanada), Lovász László, A Razborov (Szovjetunió), M. Saks (USA) és A. Schrijver (Hollandia). Ezen kívül öt párhuzamos szekcióban közel kétszáz 20 perces előadás hangzott el.

Külön szeretnénk kiemelni a Fields-érmes Margulisz és a fiatal szovjet matematikus, Alekszandr Razborov előadásait. Razborov a Boole-függvények komplexitás-elméletében ért el áttörő új eredményeket. Két éve különböző függvények kiszámításához szükséges Boole-hálózatok méretére adott alsó becsléseket; mostani előadásában polinom méretű, konstans mélységű Boole-hálózatok létezését bizonyította Ramsey-gráfok és egyéb, determinisztikusan még nem megkonstruált

objektumok előállítására. A kollokvium után Razborov három hétig Budapesten maradt, és nagysikerű előadássorozatot tartott az MTA Matematikai Kutató Intézetében.

A nagy létszám ellenére a szállással, étkezéssel különösebb problémák nem voltak; jól sikerült az aggteleki kirándulás is. Itt szeretnénk köszönetet mondani a helyi szervezőknek a kollokvium lebonyolításában nyújtott rendkívüli erőfeszítést igénylő segítségükért

Felmerült a kérdés célszerű-e, lehet-e a jövőben ilyen nagy létszámú konferenciát szervezni. Szakmai szempontból a kisebb létszám megfelelőbb. A szervezés technikai lebonyolítása a jelenlegi körülmények mellett és a program túlzsúfoltsága is sok nehézséget okoz. A korlátozás ellen szól azonban, hogy a szocialista országok nagyszámú résztvevőjének sok esetben ez az egyedülálló lehetősége a szakterület legjobbjaival való találkozásra.

Rátz László vándorgyűlés és Felsőoktatási ankét (Nagykanizsa, július 7—10.)

A teljes Vándorgyűlésen mintegy 480 pedagógus, az ankétra 30 felsőoktatásban tanító tanár jelent meg.

A Vándorgyűlésen minden szekcióban (alsó tagozatos, felső tagozatos, középiskolai) foglalkoztak a matematika tanítás időszerű kérdéseivel. Szó esett az egyes iskolatípusokban végzett tehetséggondozás kérdéseiről, a szakmunkásképzőben folyó oktatás problémáiról, az általános iskola alsó és felső tagozatának közös gondjairól is. Hasznosak voltak a közös szekcióülések, ahol mód nyílt vitára, véleménynyilvánításra is. A hallgatóság örömmel fogadta a magas színvonalú szakmai előadásokat és a feladatmegoldó szemináriumokat.

„Fergeteges" sikere volt Laczkovich Miklós: Megalapozott és megalapozatlan sejtések c. előadásának, amely a plenáris ülésen hangzott el.

Kiemelkedett a jó előadások közül is Pogáts Ferenc: Van-e legnagyobb?, Laczkovich Miklós: Függvények, Urbán János: A matematika tananyaga és gondolkodásmódja (halmazok, logika), Lengyelné Szilágyi Ágnes: Ami a geometria tantervből kimaradt (Gumi-geometria), Petruska György: Komplex függvénytan elemi módszerekkel, Simonovits Miklós: Mit tanítsunk számítástechnikából a középiskolában?, Szabó Zoltán: Klasszikus geometriák című előadása.

Mindhárom szekcióban jól sikerültek a feladatmegoldó szemináriumok. A szakmai és módszertani kérdéseket magas szinten ötvözték Fábos Lászlóné, Sáráczné Füzes Katalin alsó tagozatos, Hegyvári Norbert és Kovács Csongorné felső tagozatos, Rácz János és Kőváry Károly középiskolai szemináriumai.

Szerencsésnek bizonyult, hogy sok írásos anyagot tudtunk adni a résztvevőknek. Előzetesen minden résztvevő megkapta a középiskolai szemináriumi anyagot és a szakmunkásképző intézetek matematika versenyének 15 évre visszamenően összegyűjtött anyagát. (Ez utóbbit Koller Lászlóné szerkesztette.) A helyszínen a felső tagozatos szekcióban mindenki megkapta Lajos Józsefné szerkesztésében az 1986/87. évi általános iskolai versenyek anyagát. (Ez utóbbit a COMPORGAN Rendszerház sokszorosította kiváló minőségben.) A középiskolai tanárok is kaptak ezévi verseny és érettségi, felvételi feladatokat.

Érdeklődés kísérte a matematika tanárok továbbképzéséről tartott ankétot, amelyet Petruska György vitaindítója vezetett be, és amely visszacsatolása, folytatása volt a VI. 15-én Budapesten rendezett vitaülésnek.

Nemetz Tibor az ICME—6 konferencia titkára részletes tájékoztatást adott a vándorgyűlés résztvevőinek az 1988-ban rendezendő konferenciáról. Felvetettük annak a kérdésnek a meggondolását is, vajon a Társulat tagjainak energiáit nem köti-e le annyira a jövő évi konferencia, hogy 1988-ban nem jut energia és figyelem a vándorgyűlésre. Pontosabban: Megkérdeztük a jelenlévőket, hogy legyen-e jövőre vándorgyűlés. A válasz egyértelműen az volt: mindenképpen legyen (mindössze két fő gondolkodott másképpen).

Különös helyet foglalt el a Vándorgyűlés programjai közt az ELTE Videostúdiójának bemutatkozása, s az azt követő beszélgetés. Ezen a beszélgetésen a Társulat újjáalakulásának 40. évfordulója adta az aktualitását, hogy Surányi János elmondhassa részletesen a Társulat újjászerveződésének történetét. A jelenlévők sok érdekességgel egészítették ki a társulati munkát illetően tudásunkat.

A Vándorgyűlésen megemlékeztünk Beke Manó születésének 100. és Hajós György születésének 75. évfordulójáról. E megemlékezéseket Kántor Sándorné, ill. Reiman Istvánné tartották, a Beke-díjak átadásánál, ill. a műszaki főiskolák Hajós György matematika versenyének bemutatásakor.

A Vándorgyűlés szakmai programját jól egészítette ki a nagykanizsai városnézés és a három útvonalon szervezett kirándulás.

A Vándorgyűlés befejezése után az Oktatási Bizottság szokásához híven ülést tartott Nagykanizsán, ahol a jelenlévők megtárgyalták a Vándorgyűlés tartalmi és szervezési kérdéseit.

A következő évi Rátz László vándorgyűlés megszervezését a Hajdú-Bihar megyei tagozat vállalta Debrecenben 1988. július 6 és 9 között.

Számelméleti kollokvium (Budapest, július 20—25.)

Már a tájékoztatandók névsorának összeállításakor elhatároztuk, hogy a rendezvényt — felhagyva a korábbi hagyományokkal — nagyobb létszámú konferenciának szánjuk két különálló, analitikus és elemi, illetve diofantikus és algebrai számelméleti szekcióval. A konferencia (vagy Budapest?) iránt valóban nagy volt az érdeklődés: 113 külföldi és 25 magyar résztvevőnk volt.

Bár a két szekció között kétségtelenül volt átfedés, a kettőt a közös főelőadások voltak hivatva összekapcsolni. (Sajnálatos módon feltételeztük, hogy ez magától értetődő, de a meghívott előadók javarésze instrukciók híján a számukra rendelkezésre álló többletidőt — 45 perc a 25 perces közönséges előadással szemben — inkább a specialistákat érdeklő technikai részletekre fordította.) Meghívott előadónak egyébként elsősorban fiatalokat választottunk, akik még meredeken felfelé ívelő pályájukon haladnak, abból a meggyőződésből kiindulva, hogy első kézből tőlük tudhatjuk meg, hogy mi folyik ma a matematikában. Sajnálatos módon, valószínűleg részben emiatt, egy-két nagy név hiányzott a résztvevők közül. Mindezek ellenére a 10 közös és a kb. 110 szekcióelőadás a számelmélet kiválasztott területét jól képviselte; a tudományos színvonal a hagyományoknak megfelelően jónak mondható.

A konferenciát az Állatorvosi Egyetemen tartottuk. A modern előadótermek és a háromágyas, fürdőszobás szobákból álló diákotthon jó ajánlatnak tűnt. Sajnálatos módon későn vettük észre, hogy a kettő nem egy helyen van, de ezt a nehézséget a résztvevőket reggel a diákotthonból beszállító busz bérlésével még könnyen át tudtuk hidalni.

A fenti nehézségeken csak könnyített, hogy mint már az előzetes szervezés idején is, a Társulat munkáját saját számítógépekkel segítettük, illetve részben átvettük (borítékcímzés, nyilvántartás, sokszorosítás stb.). Természetesen mindezt a Társulatban, minden részletre kiterjedő előzetesen elkészített programokkal sokkal hatékonyabban lehetett volna elvégezni. Ennek megoldása a jövőben más hasonló konferenciák esetében sem nélkülözhető.

ICNO—XI — Nemlineáris rezgések konferencia (Budapest, augusztus 17—23.)

Az ülés augusztus 17-től 23-ig 6 munkanapon folyt a Budapesti Műszaki Egyetemen. Délelőttönként plenáris előadások hangzottak el, amelyeket meghívott előadók tartottak, délutánonként a munka párhuzamosan 6 szekcióban folyt: 1. analitikus módszerek; 2. kvalitatív módszerek; 3. numerikus módszerek; 4. mechanikai és fizikai alkalmazások; 5. elektronikus és eletromos áramkörök és rendszerek; 6. biológiai, kémiai, gazdasági és egyéb alkalmazások szekcióban.

27 országból összesen 238 regisztrált résztvevő volt: 38 a Szovjetunióból, 37 hazai, 29 lengyel, 16 egyesült államokbeli, 15 az NDK-ból, 13 csehszlovák, 13 olasz, 12 bolgár, 9 az NSZK-ból, 6 kanadai, 6 kínai, 6 jugoszláv, 5 osztrák, 5 holland, 3 belga, 3 japán, 2 finn és 9 egyéb országból 1-1 fő.

31 meghívott előadó — valamennyien a szakma prominens képviselői — tartott hosszabb előadásokat a legfrisebb, többnyire még nem publikált kutatási eredményeikről: Yu. Bibikov (SU), T. A. Burton (USA), L. O. Chua (USA), R. Conti (I), S. Crandall (USA), J. Cronin (USA), R. Faure (F), H. I. Freedman (CDN), J. R. Haddock (USA), K. P. Hadeler (D), A. Halanay (RO), P. Holmes (USA), H. W. Knobloch (D), J. Kurzweil (CS), V. Lakshmikantham (USA), W. F. Langford (CDN), S. Manolov (BG), A. A. Martinyuk (SU), J. Mawhin (B), J. A. Mitropolsky (SU), D. T. Mook (USA), A. H. Nayfeh (USA), C. Oleh (PL), L. Pust (CS), G. Schmidt (DDR), W. Szemplinska-Stupnicka (PL), K. Sigmund (A), K. Sibirskij (SU), H. Troger (A), S. Ziemba (PL), T. Yoshizawa (J).

Jelentősnek ítéljük, hogy meghívás nélkül is több kitűnő szakember eljött és növelte a konferencia színvonalát, pl.: M. I. Granero-Porati, A. Porati (I), L. Markus (USA), S. Leela (USA), W. S. Laud (USA), S. A. Lomow (SU), K. R. Schneider (DDR), S. Schwabik (CS), F. Verhults (NL), V. N. Vragov (SU). Ezen túlmenően, általában is elmondható, hogy a résztvevők többsége aktívan publikáló kutató volt.

A szekcióüléseken 148 rövid előadás hangzott el. Kiemelkedő, hogy sok új elméleti matematikai eredmény mellett a különböző mérnöki, biológiai stb. alkalmazások is komoly hangsúlyt kaptak. A 3 alkalmazási szektorban összesen 60 előadást hallhattunk. Az alkalmazások és a matematika összefonódását a résztvevők összetétele is jól mutatja: matematikusok mellett szép számban voltak jelen mechanikusok, villamosmérnökök, biológusok stb.

A jelenlegi konferenciát az jellemezte, hogy az ilyen jellegű konferenciákon szokásos számnál lényegesen több kiemelkedő tudós vett részt. Ezt a tényt és az elhangzott előadások általános színvonalát, a belőlük nyerhető új információkat, az információcserét tekintve az ICNO—XI tudományos jelentőségét számottevőnek lehet értékelni.

A rendezés, lebonyolítás gördülékeny, zökkenőmentes volt.

Végezetül hasznos a negatív anyagi tapasztalatokra, tanulságokra is kitérni, amelyeket érdemes lesz a jövőben figyelembe venni: A hazai éttermi, élelem, szállás stb. árak a szocialista országok szakemberei számára nagyon magasak. Feltehetően ez az egyik oka annak, hogy a várt résztvevőkből nagy tömeg elmaradt. A részvételi díjat igyekeztünk elviselhető szintre lenyomni, nehogy katasztrofálisan alacsony legyen a részvétel. A hazai árak mellett ugyanakkor ez az összeg messze nem volt elegendő a konferencia költségeinek fedezésére. Igyekeztünk sponzorokat beszervezni. A mai gazdasági helyzetet tekintve azonban ez igen nehéz feladat és a befolyt összeg egyelőre nem elegendő. A magasnak ítélt részvételi díj sok magyar jelentkezőt is visszatartott. Többen a részvételi díj befizetése nélkül ültek be az előadásokat meghallgatni. Ennek ellenőrzése lehetetlen volt.

ИЗ ЖИЗНИ ОБЩЕСТВА

ACTIVITY OF THE SOCIETY

KÖZLEMÉNYEK

Közlésre elfogadott dolgozatok a következő számba (a beérkezés időpontjával):

HORVÁTH MIKLÓS, JOÓ ISTVÁN és SZALKAI ISTVÁN: A „Banach—elv"-ről (1987. VIII. 7.)

JOÓ ISTVÁN: Horváth Miklós egy tételéről (1987. IX. 2.)

BANAI MIKLÓS és LUKÁCS BÉLA: Közgazdasági példák egzaktul megoldható variációs problémákra (1987. XI. 19.)

* * *

A Matematikai Lapok 33. kötetének 4. számában megjelent „Hatványok előállítása binomiális együtthatókkal" című cikkemmel kapcsolatban Láng Pál volt szíves figyelmemet felhívni arra, hogy az általam használt C-együtthatók megegyeznek a szakirodalomban meglévő Euleriánus számokkal (L. Comtet: Advanced Combinatorics, Boston, 1974, 243. oldal).

Sajnálatos, hogy ez a körülmény mind a magam, mind a kéziratot lektoráló szakemberek figyelmét elkerülte. Szeretném azonban megjegyezni, hogy egyrészt a cikkemben közölt bizonyítás lényegesen eltér az idézett helyen találhatótól, másrészt ott nem szerepel a k=prím esetre vonatkozó két kongruenciatulajdonság.

Naszádi Gábor

СООБЩЕНИЯ

COMMUNICATIONS

KÖNYVISMERTETÉSEK

J. R. Weeks: The Shape of Space: How to Visualize Surfaces and Three-Dimensional Manifolds

(Pure and Applied Mathematics, **96**), Marcel Dekker, New York, 1985, 344 oldal

Milyen alakú is a tér? Ez a bőségesen illusztrált, könnyen elsajátítható tartalmú topológiai bevezető mű kifejti eme furcsa kérdés értelmét, miközben több lehetséges választ sugall a háromdimenziós sokaság viszonylag modern fogalmára építve. Ezen modern mű, kifejtvén a geometriai tér és a fizikai Univerzum közötti kapcsolatokat, grafikusan jelenít meg topológiai fogalmakat a teljesebb megértés érdekében. Bár a könyv széles olvasói körnek íródott, a szűkebb szakterület művelőinek is ad intuitív megközelítési lehetőséget. A nagy gonddal összeállított szemléltető apparátus kézzelfoghatóvá tesz olyan fogalmakat, mint a belső tulajdonságok, továbbá érthetővé válik a különbségtétel néhány fogalompáron belül: topológia—geometria, lokális—globális tulajdonságok, homogén—inhomogén geometriák, zárt—nyílt sokaságok. A konkrét példák és feladatok segítségével a könyv a topológiát minden érdeklődő számára hozzáférhetővé teszi. A mellékelt bő bibliográfia hasznos hivatkozásokat tartalmaz az egyes részterületek további tanulmányozásához.

Simányi Nándor

J. H. Lightbourne, S. M. Rankin: Physical Mathematics and Nonlinear Partial Differential Equations

(Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **102**), Marcel Dekker, New York, 1985, 262 oldal

A kötet az 1983-ban Morgantown, West Virginiában hasonló címmel rendezett konferencia egyórás meghívott, továbbá félórás előadásainak anyagát tartalmazza. A témák között a matematikai fizikai nemlineáris parciális differenciálegyenleteinek legkülönfélébb problémái szerepelnek és a módszerek is igen változatosak. Ízelítőül néhány címrészlet: aszimptotikus stabilitás öröklődő sztochasztikus egyenletekre; nemlineáris egyenletek megoldásainak gyenge limeszei; Lax—Friedrichs és a viszkozitás-kapillaritási kritérium; folyadékáramlás szilárd, lyukacsos közegben; klasszikus megoldások globális létezése csökkenő emlékezetű anyagok mozgásegyenleteire; reakció-diffúziós egyenletek és időkésleltetés; Cauchy-probléma kétdimenziós csatolt Maxwell—Schrödinger-egyenletekre; gradiens módszer konzervatív egyenletek numerikus megoldására; gleccser-folyamok modelljei.

A gyűjtemény a matematikai fizika kutatóinak és alkalmazóinak: mérnököknek, vegyészeknek, biológusoknak stb. ajánlható.

Szász Domokos

Kósa András, Mezei István, S. Gyarmati Erzsébet: Analízis Példatár

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986, 415 oldal, 156 Ft

A könyv olyan osztályba tartozik, amelynek ismertetése a recenzens számára különös feladatot ad, hiszen egy példatár használata több az egyszerű elolvasásánál, a benne lévő feladatokat az olvasónak meg kell oldania, esetleg felhasználva a könyvben levő útmutatásokat, a megoldás ellenőrzési lehetőségét. Így kell tenni a recenzensnek is.

A szerzőhármas Analízis példatár c. munkáját úttörő jellegűnek kell tekinteni a matematikai analízis felsőfokú tanítása szempontjából, de a példatár modern szerkezete miatt is. Azok a nagy matematikus egyéniségek, akik hazánkban analízist tanítottak, mindig gondot fordítottak arra is, hogy hallgatóik számára feladatgyűjteményt adjanak tudásuk elmélyítésére. Így az első világháború idején Beke Manó a kétkötetes művében, melyet többen követtek. A matematika iránti nagyobb igény megkövetelte, hogy a korábbitól eltérően ne csak kézikönyvek, tankönyvek fejezetei végén jelenjenek meg gyakorlatok, feladatok, hanem független, erre a célra szerkesztett példagyűjtemény formájában is. A hazánkban eddig megjelent nagyobb példatárak fordítások voltak, ezek közül B. P. Gyemidovics 1987-ben megjelent könyve tett szert népszerűségre. A jelen könyv elsősorban a tudományegyetemek matematika szakos hallgatóinak tanulmányait segíti. Annak feldolgozási módszere: alapfogalmak, axiómák, definíciók, tételek, feladatok, majd az útmutatások és megoldások a matematikus jelölteket kutatómunkára is felkészítik. Jó néhány feladat kutatók számára is gondolatébresztő lehet.

Az egyes fejezetek, a halmazelmélet elemei, valós számok, függvények, sorozatok és sorok, függvények folytonossága, differenciálszámítás, integrálszámítás kristálytiszta felépítése mintaszerű, a gyakorló feladatok mellett minden fejezetben találhatók olyanok is, amelyek megoldása az olvasónak kimagasló szellemi gyönyörűséget szerez.

Az útmutatások és a megoldások nagyon hasznosak azok számára is, akik képesek megoldani a bonyolultabb feladatokat is, mert a könyv szellemes, újszerű ötleteket is ad.

A könyvet eredményesen használhatják kutató mérnökök is, legfeljebb a műszaki egyetemeken megszokott jelölésektől eltérő szimbólumok okozhatnak kezdeti nehézséget. Az ezek megismerésére fordított fáradság azonban bőven megtérül, és termékeny lehet innovációs készség fejlesztésére is.

Azok, akik már ismerik a könyvet, szívesen gondolnak annak lehetséges folytatására, megírandó fejezetekre is.

Nikodémusz Antal †

Kalmár László: Integrállevél

Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986, 267 oldal, 45 Ft

A könyv mint a matematikát megszerettetni igyekvő előadót, pedagógust mutatja be Kalmár professzort. A kötet szerkesztője, Varga Antal bevezető tanulmánya a professzor életéről, munkásságáról szól.

Kalmár jelentős szerepet játszott Szegeden a Haar és Riesz professzorok utáni matematikai élet folytonosságának fenntartásával a régi nagy iskolák továbbvitele mellett új teremtésével is. Nem zárkózott be a tudomány elefántcsonttornyába; nyitott volt más tudományágakat művelők, a matematika határterületei felé is. A gyermekien őszinte, nyíltszívű ember a különböző szakos hallgatóknak, a kezdő matematikusnak éppúgy tudott segítséget nyújtani, mint a kutatónak aszerint, hogy milyen mértékben volt szüksége a matematikára, és hogy milyen fokon volt képes magába fogadni. Az absztrakció fokának megfelelő változtatásában, az átadás művészi érzékében, pedagógiai virtuozitásában Kürschák precizitása és Fejér előadóművészete ötvöződött. Matematikát különböző fokon hallgatók és művelők serege vallja magát Kalmár tanítványának. Volt egyetemi évfolyamtársa, Péter Rózsa még mint akadémikus is mesterének tekintette. Kalmár tudományos palettája szinte körülhatárolhatatlan: a matematikának számos területén képes volt mélységbe nyúlni. Persze ha a szívéhez közel álló témákat akarjuk megnevezni, akkor a matematikai logikát, majd az ehhez kapcsolódó számítástudományt, a számelméletet, az analitikus számelméletet és az analízist kell kiemelnünk. De bárki bármely témában fordult hozzá, munkáját előbbre vivő segítséget mindig kaphatott tőle. Jellemző példa Péter Rózsától: „... tanítványomnak egy kérdésével levélben fordultam Kalmárhoz, aki akkor egy kis osztrák faluban nyaralt, ahol nyilván nem volt matematikai könyvtár. Azt válaszolta, hogy ezzel a tárgykörrel nem foglalkozott. Én ebbe nem törődtem bele: még egyszer írtam, hangsúlyozva, hogy nekem ez nagyon fontos volna. Újabb válaszában minden benne volt, amit erről a tárgykörről tudni kellett."

Az integrállevél a címet adó levélen kívül Kalmár öt előadását tartalmazza, amelyek közül csak az 1941-ben az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatban tartott A matematikai egzaktság fejlődése a szemlélettől az axiomatikus módszerig c. jelent meg nyomtatásban. Kalmárt mindig izgatta, hogy a matematikán kívül állóknak, de még a matematikus hallgatóknak is problémát jelentett az analízis Cauchy—Weierstrass-féle epszilon-deltás felépítése. A matematikát alkalmazók számára pedig olyannak tűnt, ami elfedi a lényeget. Ennek feloldására az Eötvös Társulatban tartott előadásában végigjárta az analízis alapfogalmainak fejlődését első közelítésben felrajzolható formában adva meg a fogalmakat, végül az absztrahálás legmagasabb fokára jutva arról győz meg bennünket, hogy közben a szemléletesség sem vész el, hanem az egyre elvontabb fogalmak birodalmában lassankint látni lehet azáltal, hogy könnyebben tekintjük át a viszonyokat. Az előadás arra ösztönöz, hogy vállaljuk azt a kis fáradságot, hogy megmondjuk, miként jöttünk rá, vagy jöhettünk volna rá a dolgokra. Az a jó, ha a tanítvány végül úgy érzi: nem is olyan nagy dolog ez, magam is rájöhettem volna. Másrészt óva int attól, hogy a tanításban precízségre nevelés címén axiomatizáljunk.

Ez a tanulmány az absztrahálás, axiomatizálás anatómiájának tekinthető. Péter Rózsa 1955-ben a Matematikai Lapokban Kalmár 50. születésnapjára írt cikkében mondja róla: minden sora matematikust nevel. Aktualitásából a mai napig sem veszített.

Korunk a határtudományok kora — hirdette Kalmár, és ezért alapvető feladatának tartotta, hogy nem matematikusokat is megnyerjen a matematikának. Tisztában volt azzal, hogy egy kívül állót a matematika filozófiájával lehet leginkább megfogni. Ennek szellemében a Szegedi Orvostudományi Egyetem által szervezett ideológiai tanfolyamon 1967-ben tartott három előadás anyaga következik Előadások a matematika filozófiai problémáiról címmel. Ebben a matematika csodálatos szépségei kerülnek terítékre.

A matematikai bizonyításról szóló első előadásból világos magyarázatot kaphat a nem matematikus arra, hogy a matematikai módszereket; gondolkodásmódot alkalmazó tudományok köre miért növekszik korunkban. Példázatai rendkívül meggyőzőek. Pl. említi: ... sokszor mondják azt, hogy az élő természetben a véletlennek sokkal nagyobb szerepe van, mint az élettelen természetben. Régebben ezzel akarták indokolni, hogy a biológiában nem lehet úgy kiszámítani a dolgokat, nem lehet oly mértékben alkalmazni a matematikai módszereket, mint pl. a fizikában. Csakhogy a matematika fejlődése elvezetett a valószínűségszámításhoz ..., és ezzel elvileg lehetővé vált, hogy tömegesen fellépő véletlen jelenségekről is egzakt dolgokat állapítsunk meg. Megmutatja, mi teszi lehetővé a matematikai módszerek alkalmazását olyan területeken is, amelyekre a minőségi problémák lényegesen jellemzőbbek, mint a mennyiségiek, pl. a nyelvészet területén. Ha pedig a nyelvészet már alkalmazza a matematikát, akkor vajmi kevéssé tekinthető utópiának az, hogy a biológia, a fiziológia, a patológia, általában az orvostudomány, vagy valamely más tudományág egzakt tudománnyá fejlődjék azáltal, hogy matematikai módszereket alkalmaz, hogy a matematikus gondolkodásmódját a maga területére adaptálja — olvashatjuk. Minden olyan tudománynak, amely általános megállapításokra törekszik, szüksége van absztrakcióra. Enélkül például nem volna patológia, nem volna terápia sem — szól a könyv az orvosokhoz. Megnyugtat: az absztrakció nem irreverzibilis folyamat, rekonkretizáció útján mindig „vissza lehet csinálni". Nem a valóságnak hátat fordítva kell absztrahálnunk.

Az előadás rámutat a matematika fejlődésének egy mozzanatára, amely egy dialektikusabb fogalom belépése révén adódott, ti.: ha valaki megmondja, hogy milyen pontosan kívánja megközelíteni a négyzet átlójának mértékszámát, akkor olyan pontossággal is tudunk szolgáltatni egy közelítő értéket. Ez az ókorban született eredmény szorította ki a régi metafizikus egzaktsági ideált. Tudatosan csak megközelítéssel dolgozunk. A matematika csalhatatlanságába vetett hitet is megingatja, hogy megmutassa a fejlődés útját: A tudomány hajlandó lemondani arról, hogy egzaktabbnak képzelje magát, mint amilyen. Ez nyitja meg az útját annak, hogy egzaktabbá váljon.

A második előadás a végtelenség problémáját feszegeti, mégpedig mindkét irányban: az anyag mélységével példálózva a kicsi felé, ill. a végtelen világgal a sok felé. Ismét a fejlődés útját követi. Hangsúlyozza, hogy nagy felfedezést tett az, aki először felismerte, hogy egy számot úgy is meg lehet határozni, hogy egyenlőtlenségeket állítunk fel rá, persze végtelen sokat. Érdekfeszítő látni a könyvből, hogyan kerülgették a görögök a végtelent: mint macska a forró kását, mígnem Euklidésznél már határozottan meg nem jelent a horror infiniti. Ebbe belegörcsöltek. Ám Newton és Leibniz nem sokat törődtek az egzaktsággal, annak ellenére, hogy óriási eredményeket értek el. Sőt Leibniz nagyon is meg volt elégedve e misztikus differenciálszámítással. Azután pontosítani kellett az analízist, és a fejlődés a halmazelméletbe, a számokból a számosságok világába vezetett. Így tárult fel a transzfinit számok sokkal változatosabb birodalma. Végül az antinómiák ismét megingatták a matematikának a végtelennel való kapcsolatát.

Az első látásra talán csak matematika történetnek tűnő előadás anatómiai mélysége tanulságképpen adódik: az ellentmondás nem valami ijesztő dolog, hanem a fejlődés rugója.

A megoldatlan problémákat hirdető harmadik előadás is jóval túlmutat a címén. Ugyan a klasszikus megoldatlan problémákkal kezdi, de itt már a matematika legmélyebb problémáiról

van szó. A reménytelen problémákon töprengeni is járhat haszonnal. A Fermat-probléma vezette ró pl. Kummert az ideális számok elméletének létrehozására, Hadamard-t pedig a transzcendens egész függvények elméletének kifejlesztésére. Olvashatunk a Bolyai—Lobacsevszkij-geometria létrejöttéről, Riemann vizsgálatáról a tér összes elképzelhető logikailag lehetséges szerkezeteire vonatkozóan és arról, miként jutott el egy fontos állításhoz, amit csak sejtésként kockáztatott meg kimondani: lehetséges, hogy a tér milyensége attól függ, hogy milyen anyag van benne. És a relativitáselmélet tapasztalatai őt igazolják.

A fejlődés fonalát mesterien követve eljut Gödel tételéig, amely szerint minden „valamirevaló" axiómarendszerhez lehet olyan problémát találni, amely az illető axiómarendszer eszközeivel nem oldható meg. A bizonyítás egyúttal a bővítés útját is megadja. Mesél az eldöntésproblémáról és a matematikai logika legújabb híres eredményeivel zárja a témát. Mindezt Orvostudományi Egyetemen minden bizonnyal a nagy többség számára érthető és érdekfeszítő módon.

A kibernetika néhány filozófiai problémája az 1960-ban Lipcsében rendezett filozófiai kongreszszus előadásanyagának a fordítása. Ebben Kalmár körülhatárolja a kibernetika tárgyát. E munkából is kitűnik Kalmár rendkívüli adottsága, amellyel képes volt elvont, bonyolult dolgokat világossá és érthetővé tenni. A kibernetika tárgyának általa megadott meghatározását megvitatásra javasolja. Világos példákkal illusztrálja a kibernetika törvényszerűségeit, amelyek nem fejezhetők ki speciális szaknyelv használata nélkül, mint pl. a Schrödinger-egyenlet matematikai szimbolika nélkül. Megvilágítja azt az állítást, amely szerint a kibernetikának nemcsak kvantitatív, hanem kvalitatív törvényszerűségei is vannak. Neumann János egyik meggondolása szerint megbízhatatlan alkatrészekből megbízható automata építése lehetséges. Ebben a következő kibernetikai törvényszerűség érvényesülését látja: Egy rendszer megbízhatóságának „megsokszorozás" és „szavazás" által történő emelése. Az alkalmazott kibernetika tárgyának megfogalmazásával kapcsolatban merül fel a kérdés, hogy egyáltalán lehetséges-e a magasabban szervezett anyag mozgásformáit alacsonyabban szervezett anyag mozgásformáival utánozni. Kalmár példákkal alátámasztott véleménye szerint igen. Viszont rámutat arra, hogy bizonyítékot szolgáltatni a gépek gondolkodóképességére csak erre az egészen speciális célra kiagyalt önkényes definíció alapján lehet, pl. a gép gondolkodásának értelmezésével. Ám arra a kérdésre, hogy a gondolkodó agyvelő funkciója géppel való utánzásának van-e megadható határa, a válasz a gép fogalmának dialektikus felfogásától függ.

Láthatjuk, hogy egy definíció miként szolgálhat valaminek a fejlesztésére, de válhat a fejlődés gátjává is. Különböző irányzatokról beszélhetünk a kibernetikában, nagy nevek sorolhatók fel fémjelzésükre: Neumann, Szoboljev, Kolmogorov, Kolman, Ljapunov. Egyikük a kibernetika matematikai oldalát, másikuk a műszaki vagy egyéb oldalát emeli ki definíciójában. Kalmár megkísérelte mindezeket egységesíteni olyan módon, hogy a különböző irányzatok helyes arányának megválasztásával mind az elméletet, mind a gyakorlatot művelők használható fogalomhoz jussanak.

Ha valaki levélben fordult matematikai kérdéssel Kalmárhoz, a válaszlevélben többnyire könyv-fejezetnyi anyagot kapott nyomdakész állapotban. Több ilyen levél járt hosszú ideig kézről kézre a matematikusok között. Egyikük e könyvet záró, 1947-ben íródott híres integrállevél, amely úgy keletkezett, hogy egy orvos barátja arra kérte Kalmárt, magyarázza el neki egyszerűen az újabb kémiakönyvekben egyre gyakrabban szereplő integráljel értelmét.

Játszi könnyedséggel ecseteli Kalmár az integrállal való barátkozás különböző fokozatait, kezdve a makói zenés kocsma cigányának hegedűjén levő kivágással a többes integrálok szemléletes jelentéséig. De ahhoz tartja magát, amit be is vall: Én nem az olyan könyvet tartom tudományosnak, amiből egy kukkot sem lehet érteni, hanem azt tartom a legmagasabb tudománynak, úgy megmagyarázni a dolgokat, hogy mindenki, *akit érdekel*, megérthesse. Én erre az elvre feltettem az egész életemet. Őszintén bevallja: Én, aki megjártam a matematikai egzaktság magasiskoláját, s látom, hogy az egzaktságnak nincs határa, nincs olyan precíz módon megfogalmazott definíció vagy tétel, amibe még precízebb álláspontról bele ne lehetne kötni, mégpedig nemcsak szőrszálhasogatásból és kákáncsomókeresésből, hanem alapos okkal, nem tudom többé statikus—dogmatikusan felfogni a matematikai precízséget: aki ezen innen van, nem precíz, aki túl, az precíz. Ezzel együtt elejtettem persze a matematikának, mint „abszolút igaz tudománynak" a képzetét. Nem írom, hogy kénytelen voltam elejteni, mert az a meggyőződésem, hogy épp az a szép a matematikában, hogy magán viseli az emberi alkotás minden bizonytalanságát. Félre ne érts: létezik számomra is precízség, de nem statikus, hanem dinamikus értelemben: mint precízségre törekvés. Amikor valakit matematikára tanítok, már áll a precízség valamilyen, esetleg nagyon alacsony fokán; magasabbra nem úgy jut, hogy én dogmatikusan magasabb fokra állok és lemarházom, ha ő kevésbé precíz, hanem úgy, ha meggyőzöm arról, hogy érdemes feljebb jönnie.

A megértés kontrollpéldájaként egy történetet olvashatnak a levélben, amelyben az infláció okozta adókulcsváltozás miatt egyik tanítványa egyre pontosabban akarta földjének területét kiszámítani. A tanítás befejeztéről ezt írja Kalmár: A fiú így rezümálta azt, amit megtanult tőlem: „Most aztán jól kösse fel a gatyáját az a pénzügyminiszter, aki olyan inflációt tud csinálni, hogy engem zavarba ejtsen!" Ebből láttam, hogy most már tud integrálszámítást.

Bár Kalmár rendelkezett azzal a képességgel, hogy a bonyolultat is egyszerűvé és érthetővé tudta tenni, levelét mégis ezzel zárja: Ha meg valami mégsem világos, akkor kérdezd meg, elvégre az integrálszámításban én vagyok az a vasúti portás, akitől meg lehet kérdezni, mikor indul a pesti gyors, és ha nem mondja meg érthetően, meg lehet kérdezni még egyszer.

Végül kell szólni a könyv szerkesztőjéről is. Tudjuk, hogy az anyag tervezésében még Péter Rózsa is szerepet játszott, ám Varga Antalnak komoly érdemei vannak abban, hogy e kötet a matematikai írások egy gyöngyszemének tekinthető. Olvashatjuk, miként került kapcsolatba Varga Kalmárral — kedves epizód az olvasónak, Varga számára egész további életét meghatározó mozzanat. Mondta nekem, amint Kalmár közelébe került, megpörkölődött, rajongójává vált, mint sokan mások. Látszik, hogy Varga nagy szeretettel szerkesztette e kötetet. Professzorához nemcsak szakmai, hanem emberi kötődése is sugárzik. Amint az előszóból kiderül, felbecsülhetetlen anyag van a már Kalmárológusnak tekinthető Varga birtokában, hiszen e könyvecskét csak ízelítőnek szánta. Izgalommal várjuk e jól sikerült ízelítő után a folytatást.

Ajánlom a könyvet annak, akinek tudásszomja van, aki művészi élményre vágyik, minden, matematikát tanító és tanuló könyvespolcán kéznél kell lennie.

Andrásfai Béla

Információ közlése és feldolgozása

Szerk.: Csibi Sándot, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986

Az „Információ közlése és feldolgozása" c. könyv, mely 1986 végén jelent meg a Tankönyvkiadó gondozásában, a hírközléselmélet modern összefoglalását nyújtja. A BME H. E. I. tizenegy tanára által írt könyv jellegzetessége, hogy a sztochasztikus folyamatok elméletét egységesen igyekszik alkalmazni a felölelt témakörök mindegyikében.

A könyv 16 fejezetre tagolódik és minden fejezetnek azonos a felépítése. Az elméleti kérdések áttekintése után egy-egy függelék tartalmazza azokat a matematikai jellegű részleteket, bizonyításokat, melyeknek a főszövegben való részletezése megtörné a gondolatmenet egységét. Ugyanúgy a függelékbe kerültek az egyes speciálisabb illusztrációk is. Minden fejezethez tartozik egy gyakorló feladatokat tartalmazó rész és egy összefoglalás is, mely a fontosabb fogalmakat és összefüggéseket gyűjti össze.

Az 1. fejezet, a „Bináris sorozatok továbbítása" bevezető, illusztráló jellegű. A címben foglalt egyszerű probléma tükrében igyekszik felvetni a hírközléselmélet alapvető kérdéseit. A fejezet jól mutatja a valószínűségszámításra, sztochasztikus folyamatok elméletére épített tárgyalási stílust.

A 2. fejezet a döntési és osztályozási feladatok legegyszerűbb esetével foglalkozik.

A 3., 4., 5. fejezetek a sztochasztikus folyamatok elméletét ismertetik speciális hírközléselméleti problémák kapcsán.

A 6., 7. és 8., ill. 15. fejezetek a híradástechnikában fellépő detekciós feladatokat tárgyalják az előző fejezetekben lerögzített modellek alapján.

A 9. fejezet a hírközlő csatornák lineáris torzításai miatt fellépő detekciós problémákat vizsgálja.

A 10. fejezet továbblépés sztochasztikus folyamatok elméletében: itt a spektrális felbontás kérdéseivel foglalkozik a könyv.

A további fejezetek egészen a 16. fejezetig a sztochasztikus folyamatok elméletét alkalmazzák különböző hírközléselméleti problémákra. A 11. fejezetben a mintavételezés elméletével ismerkedhetünk meg. A 12., 13. fejezetek a modulációelmélettel foglalkoznak. A 14. fejezet az analóg jelek digitális (kvantált) tárolásával és átvitelével foglalkozik.

A 16. fejezet egy rövid információelméleti összefoglalás.

A könyv borítója, mely egy akkád nyelvű, ékírásos töredéket ábrázol, ügyesen fejezi ki az információ közlésének és feldolgozásának ősi problémáját. A több ezer éves üzenet egy katonai jelentés részlete. A jelentés írója arról számol be, hogy az ellenséges törzsek titkos fáklyajelekkel kommunikálnak, és ő ezeket a fáklyajeleket még nem érti, de dolgozik a kód megfejtésén.

Vetier András

Mieczyslaw Altman: A Unified Theory of Nonlinear Operator and Evolution Equations with Applications

(Pure and Applied Mathematics, **103**), Marcel Dekker, New York, 312 oldal

A szerző célja bizonyos nemlineáris operátor egyenletek, valamint nemlineáris (Banach-térbeli) evolúciós egyenletek egységes tárgyalása az egyenletek linearizálásán alapuló különféle módszerekkel. E monográfia a szerzőnek a fenti témában 1980 óta elért eredményeit foglalja össze. M. Altman 1981-ben általánosította Kato kvázilineáris evolúciós egyenletekre vonatkozó nevezetes tételét nem reflexív Banach-terek esetére. Majd a J. Nash által bevezetett simító operátorok, és a J. Moser által bevezetett fogalom, a közelítő linearizálás foka alapján értelmezte a konvex közelítő linearizálás, valamint az elliptikus regularizálás fokának fogalmát, és ezek segítségével Kato tételét tovább fejlesztette nemlineáris evolúciós egyenletekre.

A monográfia első hat fejezete a $Px \equiv Lx + Fx + fx = 0$ alakú nemlineáris operátor egyenleteket tárgyalja, ahol L lineáris nem korlátos, F „szigorúan nemlineáris", f lokálisan Lipschitz-feltételnek eleget tevő operátor. Bizonyos szempontból eltérő feltételek mellett bebizonyítja legalább egy megoldás létezését, különféle módszerekkel. Minden esetben egy olyan x_0 elemből kiinduló sorozat limeszeként adja meg az egyenlet megoldását, amelyre $\|Px_0\|$ elég kicsi. A 7—11. fejezetekben hasonló típusú nemlineáris tagokat tartalmazó, $\frac{dx}{dt} + F(t, x) + f(t, x) = 0$ alakú evolúciós egyenleteket vizsgál a szerző analóg módszerekkel.

Sajnos, az egyes tételek feltételrendszere meglehetősen bonyolult, nehezen áttekinthető. Nem világítják meg ezt a könyvben ismertetett — különféle parciális differenciálegyenletekre vonatkozó — alkalmazások sem, mivel a szerző nem vizsgálja meg részletesen, hogy a szóban forgó differenciálegyenletre mikor alkalmazható az idézett egzisztencia tétel, vagyis mikor teljesítik a differenciálegyenletben szereplő függvények az előírt feltételeket. Így nem válik meggyőzővé a könyv módszereinek hatásossága.

Simon László

A. F. Karr: Point Processes and Their Statistical Inference

(Probability: Pure and Applied, **2**), Marcel Dekker, New York, 1986, 490 oldal

A 70-es években még kevesen jósolták volna meg, hogy az elkövetkező 10-20 évben a martingálelmélet olyan sikereket ér el, amint ez ténylegesen történt. Egyik legeredményesebb alkalmazási területének a sztochasztikus folyamatok — és ezen belül a pontfolyamatok — statisztikája bizonyult. Korábban ez az elmélet nem-szervesen összefüggő módszerek, receptek gyűjteménye volt, míg végül a martingálelméleti megfogalmazás és eszközök adták azt a fonalat, amelyre számos statisztikai eljárás és alapvetően a gondolkodásmód felfűzhető lett. Ez az átalakulás Lipcev és Sirjajev 1974-ben oroszul megjelent Sztochasztikus Folyamatok Statisztikája című monográfiájával kezdődött. Karr könyve hasonló szellemben foglalkozik véletlen pontfolyamatok statisztikájával.

Az első három fejezet bevezető jellegű, ezekben a pontfolyamatok eloszláselméletével, sűrűségelméletével és az alapvető statisztikai fogalmakkal és problémákkal ismertet meg. A negyedik és az ötödik fejezet tekinthetők a mű elméleti alappilléreinek. Előbbiben pontfolyamatok sorozatai által meghatározott empirikus folyamatokat tárgyal, utóbbiban a sűrűségen alapuló statisztikai eljárások általános elméletét adja. Ezek alapján a további fejezetekben a pontfolyamatok fontos osztályaira alkalmazza az általános módszereket: Poisson-folyamatok, duplán sztochasztikus Poisson-folyamatok (ún. Cox-folyamatok), felújítási folyamatok, stacionárius pontfolyamatok, pontfolyamatokon alapuló sztochasztikus folyamatok.

A könyv elsősorban a téma iránt érdeklődő kutatóknak íródott, de alkalmazók, aspiránsok számára is ajánlott. Nem a feltételezett előismeretek sokasága nehezíti meg az olvasását, mert ehhez elegendő egy igényesebb, a diszkrét martingálok elméletét is tárgyaló egyetemi valószínűségelmélet kurzus ismerete, hanem feldolgozásához szükségesnek tűnik bizonyos nehezen körülírható érettség és tapasztaltság. A felkészült olvasónak a mű hasznos olvasmány, amit igencsak elősegít áttekinthetősége és kulturált jellege.

Szász Domokos

C. McCrory, T. Shifrin: Geometry and Topology: Manifolds, Varieties, and Knots

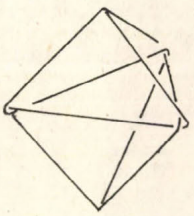
(Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **105**), Marcel Dekker, New York, 1987, 349 oldal

1961 óta nyolc évenként topológiai konferenciát rendeznek a georgiai egyetemen. Az 1985. augusztus 5 és 16 között rendezett konferencia sorrendben már a negyedik. A kötet ezen utolsó konferencia előadóinak cikkeit tartalmazza. A kötetet előszó és tárgymutató egészíti ki.

33 szerző 24 dolgozata kapott helyet a kötetben. Mindegyik cikket irodalomjegyzék egészíti ki. A dolgozatok zöme a mai kutatások lényeges kérdéseibe ad bepillantást. Nagy súllyal szerepelnek a topológia hagyományos területei, a csomóelmélet, a sokaságok elmélete, de helyet kapnak a kötetben differenciálgeometriai és algebrai geometriai vizsgálatok is. Érdekes színfolt a csomóelmélet és a kémia kapcsolatát bemutató dolgozat.

A súlyos mondanivalójú dolgozatok mellett néhány viszonylag elemi témájú matematikai csemege is található a könyvben. Az egyik az irányított felületek közti olyan folytonos nyílt leképezésekkel foglalkozik, amelyeknél minden pontnak csak véges sok ősképe van, és a zárt felületeknél ismert klasszikus eredményekkel analóg összefüggéseket tár fel nem zárt felületeknél.

Egy másik dolgozat bemutatja Kinoshita szép példáját olyan théta görbére, amelynek mind a három köre izotóp átalakítással síkban helyezhető el, de maga a görbe nem. Ennek egyik változatát mutatja az alábbi ábra:



A dolgozat új bizonyítást ad a görbe nem síkbeli voltára, és számos érdekes összefüggést tár fel a théta görbékkel és a bilincsgörbékkel kapcsolatban.

A dolgozatok zöme azonban nehezebben emészthető. Egyesek csak vázlatos áttekintést adnak a tárgyalt témáról, másutt részletesebb kifejtés található. Egy helyen hibás állítás is előfordul, az a tétel viszont már igaz, amelynek a bizonyításában erre az állításra hivatkozás történik. A tárgyalt témák legtöbbjének igazi megértéséhez az előzmények ismeretére is szükség van, és a kötet legnagyobb érdeme a topológia mai állását meghatározó legfontosabb eredményekre való utalásokon túlmenően talán éppen az, hogy az olvasót a modern topológia és geometria egy-egy kérdéskörébe való nagyobb elmélyedésre ösztönzi.

Végezetül álljon itt a tartalomjegyzék:

S. Akbulut, H. King: Introduction to resolution towers.
D. R. Anderson, H. J. Munkholm: A geometric construction of the boundedly controlled Whitehead group.
D. R. Anderson, H. J. Munkholm: An introduction to boundedly controlled simple homotopy theory.
M. D. Baker: On certain branched cyclic covers of S^3.
S. Cappell, S. Weinberger: A geometric interpretation of Siebenmann's periodicity phenomenon.
M. W. Davis: Regular convex cell complexes.
S. K. Donaldson: Gauge theory and smooth structures on 4-manifolds.
A. H. Durfee: Algebraic varieties which are a disjoint union of subvarieties.
M. Falk, R. Randell: The lower central series of generalized pure braid groups.
F. T. Farrell, L. E. Jones: Implication of the geometrization conjecture for the algebraic K-theory of 3-manifolds.
R. Friedman, J. W. Morgan: On the diffeomorphism types of certain elliptic surfaces.
W. M. Goldman, J. J. Millson: Deformations of flat bundles over Kähler manifolds.
F. Gonzáles-Acuña, W. Whitten: Imbeddings of knot groups in knot groups.
J. C. Hausmann: Geometric Hopfian and non-Hopfian situations.
D. L. Johnson: Deformations of totally geodesic foliations.

D. McCullough: Automorphisms of punctured-surface bundles.
A. Phillips, D. A. Stone: Lattice gauge fields and Chern—Weil theory.
F. Quinn: Intrinsic skeleta and intersection homology of weakly stratified sets.
L. Rudolph: Isolated critical points of maps from R^4 to R^2 and a natural splitting of the Milnor number of a classical fibred link, II.
U. Srebro, B. Wajnryb: Covering theorems for open surfaces.
M. Steinberger, J. West: Equivariant handles in finite group actions.
D. W. Sumners: The role of knot theory in DNA research.
S. Weinberger: Continuous versus discrete symmetry.
K. Wolcott: The knotting of theta curves and other graphs in S^3.

Bognár Mátyás

János Bolyai: Appendix, the Theory of Space
(With introduction, comments and addenda edited by Ferenc Kárteszi, supplement by Barna Szénássy)

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1987, 238 oldal

Az Akadémiai Kiadó végre teljesítette régi adósságát, Bolyai János Appendix, A tér tudománya c. művét Kárteszi Ferenc immár klasszikus szerkesztésében angol nyelven is megjelentette. A kiadáshoz Szénássy Barna írt rövid történeti áttekintést. Az angol fordítás Bognár János szakavatott munkája. Hármuk vállalkozása igazi tudományos szolgálat a magyar matematika tragikus sorsú nagy alakjának és művének nemzetközi megismertetésében. Napjainkban a nem-euklideszi geometriák reneszánszát éljük. A Bolyai-féle szintetikus abszolút geometriai szemlélet különösen aktuális a mai geometria túlnyomóan analitikus eszközeinek felfrissítésére. A várható nemzetközi érdeklődést is jelzi, hogy a könyv egyben a North-Holland Mathematics Studies 138. kötete.

A fordítás az 1973-as magyar kiadás alapján készült, amely az 1952. évi ünnepi emlékkönyv lényegesen átdolgozott változata volt. Kárteszi Ferenc akkor is, most is megmaradt mesterien végigvitt elképzelése mellett, hogy a művet a gondolatok születésének motiválásával, a kor társadalmi és kulturális környezetébe helyezve mutatja be.

Az I. rész a nem-euklideszi geometria felfedezésének előtörténetéről szól. Itt különösen a Legendre-féle szögtételek elemzése, Gauss és Lobacsevszkij vizsgálatainak összefoglalása, János felfedezésének rövid története emelendő ki. A Gauss-féle válasz kommentálása szinte lenyűgöző, a sorok igazságkereső nemes pátosza bizonyára az angolul olvasót is felejthetetlen élményben részesíti majd.

A II. rész János eredeti művének hű másolatát és ennek angol fordítását tartalmazza. A fordítást 5 fejezetre tagolja a szerkesztő, az alcímek a lényeges tartalmat is megragadják: I. A párhuzamosság (1. §—10. §), II. A paraciklus és a paraszféra (11. §—24. §), III. Trigonometria (25. §—31. §), IV. Az analízis módszereinek alkalmazása, a geometria és a valóság viszonya (32. §—33. §), V. Szerkesztések (34. §—43. §).

A III. rész tartalmazza a szerkesztő megjegyzéseit, melyek a Hilbert-féle axiómarendszerből kiindulva egészítik ki Bolyai művét. Elsősorban a paraszféra fogalmának kialakítására, az abszolút tételek kiemelésére, a trigonometria teljessé tételére törekszik a szerkesztő. Az ívhossz fogalom pontosításával rámutat az analízis fogalmainak korabeli általános szintjére, hiányosságaira. Ez vonatkozik a differenciál- és integrálszámítás alkalmazásaira is. A szerkesztések c. fejezet nagy jelentőségű eredménye, hogy az euklideszi párhuzamossági axióma tagadása esetén szerkeszthető olyan kör, amellyel egyenlő területű négyzet is szerkeszthető, mindkét terület egyenlő a maximális határháromszög területével.

A IV. rész: Bolyai műve a későbbi kutatások tükrében. Kárteszi Ferenc csak a legközvetlenebb vonatkozásokat vázolja, megemlítve a legfontosabb újabb monográfiákat. A Hilbert-féle végkalkulus hatását külön is kiemeli, hiszen ebből kiindulva Szász Pál példamutató módon mind Bolyai, mind Hilbert programját megvalósította. Az ellentmondásnélküliség bizonyításában alapvető modell-módszer is Bolyai művében szerepelt először. Igaz, itt még csak a tárgyalást lerövidítő eszközként használta fel, hogy a paraszféra geometriája modellezi az euklideszi síkgeometriát az abszolút geometria keretében. A Beltrami-féle modell hatása meghatározó volt a hiperbolikus geometria elfogadtatásában. A Cayley—Klein-féle és a Poincare-féle modell pedig a projektív geometria, illetve a konform geometria egységesítő hatására hívja fel a figyelmet. A topologikus tér fogalma kialakításának vázlata és a modern axiomatika újabb eredményei zárják Bolyai „új más világának" ismertetését.

Az angol kiadás újdonsága Szénássy Barna rövid Bolyai életrajza. Á két Bolyai életútját az újabb dokumentumok tükrében írja le. Bolyai Farkas legfontosabb eredményeinek hatását is nyo-

mon követi. Külön is érdeklődésre tarthat számot a Bolyai-életmű nemzetközi és magyarországi újrafelfedezésének története. A magyar olvasó részletesebb képet kaphat a szerző Schmidt Ferencnek is emléket állító cikkéből: Adalékok a két Bolyai fölfedezésének történetéhez, *Mat. Lapok* **29** (1977—81), 71—95. Bolyai és Lobacsevszkij műveinek egyenértékűségét is hangsúlyozza a hiperbolikus geometria nemzetközileg elfogadott elnevezése, mely a századforduló idején alakult ki: Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria. A Bolyai-hagyomány ápolását is ekkor vállalta fel a Magyar Tudományos Akadémia. Az 1905-ben és 1910-ben átadott Bolyai-díjjal Poincaré és Hilbert személyében a kor legnagyobb matematikusait tüntette ki.

Az irodalomjegyzék csak a legfontosabb, történetileg is jelentős munkákat tartalmazza. Ez a könyv talán a Bolyai-hagyományokat méltóképpen ápoló erdélyi magyar matematikusok és történészek munkájának eredménye is. Hiszen Dávid Lajos, Benkő Samu, Neumann Mária, Salló Ervin, Toró Tibor, Weszely Tibor és még sokan mások kutatásai is hozzájárultak mai pontosabb tudásunkhoz. A Bolyai János Matematikai Társulat tevékenysége, az évfordulós emlékülések, a könyv szerzőin kívül talán kiemelhetően Alexits György, Hajós György, Sarlóska Ernő, Szász Pál munkássága is hozzájárult ahhoz, hogy az Akadémiai Kiadó régen várt méltó kiadvánnyal tisztelegheszen a két Bolyai emlékének.

Molnár Emil

Jubileum

Jelentős kettős jubileumhoz érkezett a Bolyai János Matematikai Társulat könyvkiadása. Most jelent meg a *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* könyvsorozat 50. könyve és az első kötet éppen 20 évvel ezelőtt látott napvilágot.

A huszadik század második felében jelentősen kibővült a matematikai kutatások tematikája, emelkedett a matematikával foglalkozók létszáma, ugrásszerűen megnőtt a publikált eredmények és ennek következményeképpen a cikkek, könyvek és folyóiratok száma és terjedelme, és egyre több helyen és egyre nagyobb számban szerveztek találkozásokat, összejöveteleket, konferenciákat. Ezek az egyre inkább specializálódó konferenciák, amelyek sokszor egy-egy matematikai iskolához vagy matematikus egyéniséghez kötődtek, alkalmasak voltak arra, hogy a téma elismert, esetleg világhírű művelői egymással találkozzanak, legújabb eredményeiket megvitassák és ösztönzést adjanak nemcsak egymásnak, hanem a témában még csak az első eredményeket elért vagy a témával még csak ismerkedő matematikusoknak is. Ilyen, eleinte viszonylag szűk körű találkozókat a Bolyai János Matematikai Társulat 1953-ban kezdett el szervezni. A találkozók jelentősége, népszerűsége rohamosan növekedett, és egy évtized alatt nemzetközi konferenciákká fejlődtek a találkozók. A konferenciákon elhangzott előadások színvonala, tematikus egysége és az iránt megmutatkozó nemzetközi érdeklődés lehetővé és szükségessé tette, hogy a konferenciák anyagából kötetek szülessenek. 1967-ben jelent meg az első könyv Rényi Alfréd akadémikus szerkesztésében Proceedings of the Colloquium on Information Theory címmel. Az ezt követő 49 könyv (valójában 69 kötet, mert több könyv több kötetből áll) témája rendkívül változatos. (A kötetek címe a jubileumi kötet borítólapján megtalálható.) A leggyakrabban előforduló témák az algebra (10 könyv), a valószínűségszámítás (8 könyv) és az analízis (7 könyv) egy-egy részterületéről valók, de egy-egy kötet olyan, az utóbbi időben nagy jelentőségre szert tett kérdésekkel is foglalkozik, mint pl. a matematika szerepe a számítógéptudományban vagy az algoritmusok elmélete, és a könyvek között van emlékkötet is, pl. a Haar Alfréd emlékkötet.

Az 50 könyv több, mint 1800 cikkében, több, mint 36 000 oldalán egyaránt helyet kapták világhírű matematikusok és kezdő, de tehetséges kutatók dolgozatai. A kötetekben egy-egy témakör legújabb eredményei olvashatók és például a topológia gyors fejlődését mutatja, hogy fontos új eredményeiből hatévenként született egy-egy új kötet.

A kötetek értékét, fontosságát és az iránt megnyilvánuló nemzetközi érdeklődést bizonyítja, hogy kiadásukban és külföldi terjesztésükben közreműködik a North-Holland Publishing Company is.

A munka természetesen az 50. könyv megjelenése után sem áll meg és kívánjuk, hogy a következő kötetek mindegyike a már megjelentekéhez hasonló módon öregbítse a magyar matematika és a Bolyai János Matematikai Társulat hírnevét.

Scharnitzky Viktor

D. E. Knuth: A számítógép-programozás művészete

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987
1. kötet: *Alapvető algoritmusok,* 655 oldal, 180 Ft
2. kötet: *Szeminumerikus algoritmusok,* 690 oldal, 180 Ft

Donald E. Knuth világhírű, rendkívül elterjedt monográfiájának immár magyar kiadását üdvözölhetjük. Minden túlzás nélkül mondhatjuk, hogy a „The art of computer programming" a számítógéptudomány első számú referenciamunkája. Különleges stílusa, kitűnően összeállított anyaga, egyedi filozófiája, szellemes ötletei, feladatai dacolnak az idővel. Persze, közben avul is, ez a sorsa minden olyan kézikönyvnek, amit vakmerő szerzője egy viharosan fejlődő téma alapkönyvének szán. Azért nem válik használhatatlanná — egy régebbi állapot rögzítése hasznos kutatási-tanulmányi célból s a kezdő kutató is könnyebben igazodik el a jelenlegi érintkezési pontokon.

Mégis, egyelőre, torzóban maradt ez az úttörő vállalkozás. Noha Knuth többször is kifejti 7 kötetre tervezett munkájának felépítését, kereszthivatkozásokat is ad, eddig mindössze 3 kötet jelent meg, ezeket üdvözölhetjük immár magyarul is. De nem csüggedünk. Egyik könyvterjesztő vállalkozásunk már előjegyzéseket is vesz fel a 4—7. kötetekre, melyeket a megjelenés után, az előjegyzés sorrendjében, postaköltséget fel nem számítva kíván az olvasóknak eljuttatni.

Knuth filozófiája a matematikát és a számítógéptudományt két erősen kölcsönható, egymásnak új és új kérdéseket föltevő tudománynak tekinti. Úgy látja, hogy szinte minden gyakorlati problémából nyílik átjárás az elméletibb részek felé és viszont, a matematika bármely elvont fejezete adhatja programozási kérdés új, érdekes átvilágítását.

Ennek megfelelően a könyvben minden mozgásban van. Új utakat keres, ajánl. Kitérők, átvágások, zsákutcák vannak. Semmit sem nagyol el, de ésszerűen rövidít, ha kell. Érdekes tételek jutnak eszébe, amelyek talán nem is használhatók. A könyv egyaránt jó bevezetésnek, kézikönyvnek is, maga a szerző javasol különböző olvasási algoritmusokat. Sokszor csak elindítja az olvasót egy érdekes tétel említésével, majd „átadja" egy másik könyvnek. Ezt gazdag, útmutatással ellátott feladatanyag teszi lehetővé.

A könyv egy jó tanár egyéniségét sugározza felénk: új módszert egyszerű példán vezet be, majd bonyolultabban, de kevésbé kidolgozva. Ügyes megjegyzéseket tesz, ezekkel elindítja az olvasót, de nem árulja el, hova. Hangulatai vannak: néha nagyon bonyolult tételeket elemez, máskor, talán pihenésül, egyszerű példákat számolgat. Alapos, érdekes, szórakoztató. Jó szívvel ajánljuk matematikusoknak, programozóknak, tanároknak, diákoknak.

Az 1. kötet az alapfogalmakat ismertető 1. fejezettel indul. Először néhány példán megismerjük az algoritmus fogalmát, majd a szükséges matematikai ismeretek következnek: indukció, hatványozás, logaritmus, összegek, szorzatok, szimbolikus jelölések. Elemi számelmélet (a Legendre-szimbólumig), mátrixok, determinánsok, faktoriális, permutációk. Azonosságok binomiális együtthatókkal, a harmonikus sor, generátorfüggvények, Fibonacci-számok. Ezután egy könnyű (maximumkereső) algoritmus futásának elemzése következik, egyszerű statisztikai módszerekkel. Ezt egy aszimptotikával, O-jelöléssel, különböző összegzésekkel, sorfejtésekkel foglalkozó fejezet követi. A könyv további részeiben található programok leírásához a szerző bevezeti egy képzeletbeli gép gépi nyelvét, a MIX-et és assembly nyelvét. Számos példát is ad rögtön. Az 1. fejezet hátralevő részeiben ismertet és elemez olyan alapvető programozási fogalmakat, mint szubrutinok, korutinok, értelmező rutinok, bevitel és kivitel. Példaként egy MIX-szimulátort ad.

A 2. fejezet információs struktúrákkal foglalkozik. Először listák, tehát vermek, sorok és kétvégű sorok szerepelnek. Tanulmányozzuk tulajdonságaikat, operációikat, lehetséges reprezentációikat, többdimenziós tömbök tárolásait. Ezután fák definíciója, reprezentációi következnek. Végül a fák matematikai tulajdonságait találjuk, beleértve az irányított fákat és leszámlálási problémákat. A hulladékgyűjtési algoritmusokat tárgyaló fejezet után a többszörösen láncolt struktúrákat ismertető, majd a dinamikus tárkiosztás elemeit feldolgozó következnek.

A 2. kötet szintén két fejezetből áll. A 3. fejezet véletlenszámok generálásával foglalkozik. A különböző módszerek bemutatása és elemzése után a véletlenszerűség vizsgálati módszereit ismerteti. Az empirikus próbák leírását alapos elméleti megfontolások és sok példa követi. Más véletlen eljárások következnek, majd egy esszé arról, hogy mit nevezhetünk véletlen sorozatnak.

A 4. fejezet célja az aritmetika műveleteinek tanulmányozása. A helyiértékrendszerek ismertetése után a lebegőpontos aritmetika elveit tanulmányozzuk, majd a dupla és többszörös pontosságú számítások leírása következik. Ezután egy érdekes szakasz elemzi a különböző szorzási algoritmusok időigényét. A különböző számrendszerek közötti átváltások technikái után az úgynevezett racionális aritmetika leírása következik. Alaposan kielemezzük az euklideszi algoritmust, majd áttérünk a prímfelbontás, prímtesztelés kérdéseire. A szerző röviden ismerteti a feltörhetetlen titkos írások elvét, áttekinti a legnagyobb ismert prímszámok meghatározásánál használt módszereket. A második kötet utolsó témája a polinomok aritmetikája. A polinomok számelméletének algoritmusai után a kiértékelési eljárások következnek, végül pedig a hatványsorok műveletei.

A magyar fordítás szakmailag hibátlan, stílusában egységes. Szerencsére sikerült lelkes, a témához magas szinten értő fordítóbrigádot toborozni. Több esetben az adott szűkebb témakör egyik legjobb magyar kutatója vállalta az átültetést. A fordítás főszerkesztője pedig matematika oktatásunk és kutatásunk olyan kiemelkedő képviselője, aki a számítógéptudomány hazai elterjesztésének egyik úttörője és maga is sikerrel próbálkozott a Knuth-féle erényeket felmutató programozási ismeretterjesztéssel. A kötetek a Műszaki Könyvkiadó 1988. évi nívódíjában részesültek.

Sajnos, a kötetekben szép számmal találhatók — a megértést, igaz alig zavaró — sajtóhibák elírások.

Komjáth Péter

D. E. Knuth: A számítógép-programozás művészete

3. kötet: *Keresés és rendezés,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1988, 761 oldal, 249 Ft

A számítógép-programozás tudományának eme legjelentősebb kézikönyvének harmadik, eddig utolsó kötete a rendezési és keverési algoritmusok elemzését nyújtja, s ezzel a gyakorlati élet programozója számára talán fontosabb is, mint az előző kettő. Számos, elméleti és gyakorlati szempontból fontos eljárást ismertet, közöttük rendkívül alaposan a külső tárakat használókat is.

Mint az a fentiekből talán kitűnik, nagy anyag, jelentős mélységben van tárgyalva. A főszövegen kívül a nagy mennyiségű feladat is bőséges információt ad. A szerző minden alkalmat megragad, hogy egy-egy gyakorlati kérdés, probléma, eljárás kapcsán bevezessen a kapcsolódó matematikába. Ezek sokszor kifinomult, mély módszerek: komplex analízis, sorfejtések, becslések stb. Sokszor konkrét példákat számol, ami itt rendkívül hasznos. Az olvasónak élvezetesek ezek a „lelassulások", ilyenek találhatók a matematikai fogalmak tárgyalásánál is. Sok részlet szinte csak az olvasót segítő illusztráció, képlet, táblázat vagy történelmi visszapillantás.

A könyv, mégis, teljesen egységes stílusú. A hatalmas, de aprólékos, elemző anyag csak csodálkozásra készteti az olvasót; mindez valóban csupán egy személy műve volna? Sokszor régi, mégsem publikált, vagy alig hozzáférhető műveket ismertet tüzetesen.

A könyv fordítása, kiállítása méltó az eredetihez. A magyar résztvevők gondos, szép munkát végeztek. A szöveg gördülékeny, tiszta, magyar. A nyomdai munka eredménye jól olvasható, kellemes külsejű produktum.

Komjáth Péter

Matematikai versenytételek, I—II

Tankönyvkiadó, Budapest, 1987—1988

A Mathematikai és Physikai Társulat 1894-ben elhatározta, hogy matematikai tanulóversenyeket rendez. Ezzel kívánt maradandó emléket állítani annak, hogy a társulat elnökét, báró Eötvös Lorándot vallás- és közoktatásügyi miniszterré nevezték ki. Ezeket az írásbeli versenyeket a társulat évenként ősszel rendezte az abban az évben érettségi vizsgát tett tanulók részére Budapesten és Kolozsvárott, majd az első világháború okozta háromévi szünet után Budapesten és Szegeden. Egy-egy versenyen három-három feladatot tűztek ki és a feladatok megoldására négy óra állt a versenyzők rendelkezésére. A versenyzők minden segédeszközt, könyvet, jegyzetet szabadon használhattak. A feladatokat a versenybizottság a mindenkori középiskolai tananyaghoz igazodva választja ki, de a feladatok megoldása matematikai ötletességet, áttekintő képességet, hosszabb összpontosítást és kitartó munkát követel. (Ezek az előírások mind a mai napig változatlanul érvényben vannak.) A két legjobb dolgozat szerzője pénzjutalomban, első, illetve második Eötvös-díjban részesült, amit a társulat elnöke adott át. (Az első díj összege 1894-ben 100 aranykorona, 1988-ban 1600 Ft volt.) A díjazott dolgozatok szövege — lehetőleg változtatás nélkül — megjelent a társulat tudományos folyóiratában, a Mathematikai és Physikai Lapok című folyóiratban.

Ilyen körülmények között zajlottak le a versenyek 1943-ig. A háborús események, majd a Mathematikai és Physikai Társulat megszűnése háromévi kényszerű szünetet okozott a versenyek rendezésében. A felszabadulás után 1947-ben alakult meg a Bolyai János Matematikai Társulat és azóta megint sor kerül minden ősszel a verseny megrendezésére. A verseny 1949-től Kürschák József nevét viseli, aki élete végéig, nagy gonddal és szeretettel kísérte a matematikai versenyek ügyét. (Jelenleg az érettségizettek számára meghirdetett fizikai verseny viseli Eötvös Loránd nevét.) Bár a versenyt az abban az évben érettségizettek számára rendezik, a társulat versenybizottsága évente megengedi, hogy a versenyen középiskolás diákok is részt vegyenek és összemérhessék tudásukat az érettségizettekkel. Ez a körülmény is hozzájárult ahhoz, hogy a verseny résztvevőinek a száma, amely a felszabadulás előtt ritkán emelkedett az 50 fölé, ma már több százra rúg. A ver-

senyt például 1988-ban 19 városban rendezte meg egyidejűleg a társulat, ezen 455 fő jelent meg és 307 versenyző adott be dolgozatot. Az ünnepélyes eredményhirdetésre és a díjak átadására a társulat nyilvános előadó ülésén kerül sor. Itt a versenybizottság előadója ismerteti a feladatok megoldását, gondot fordítva többféle megoldás bemutatására, a megoldásokhoz kapcsolódó általánosítások és egyéb kérdések megvilágítására. Ezeknek az előadásoknak a szövegét 1949 óta a Középiskolai Matematikai Lapok is közli.

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny eddigi csaknem egy évszázados sikeres működése nagyon sok matematikus tehetséget fedezett fel és indított el tudományos pályán és mintául szolgált más országokban megszervezett matematikai versenyekhez is.

A Kürschák-versenyeknek nemcsak a folyóiratokban maradt nyoma, hanem a kitűzött feladatok könyv alakban is megjelentek.

A *Matematikai versenytételek* című kétrészes mű most megjelent új kiadásában e versenyeken kitűzött feladatokat és megoldásaikat veheti kézbe az olvasó. Az első rész az 1894 és 1928 közötti versenyeket, a második rész az 1929—1963. évi versenyeket dolgozza föl. Az első résznek ez a 4. javított és bővített, a második résznek ez a 3. javított és bővített kiadása. Az első rész első kiadását Kürschák József állította össze és ez 1929-ben jelent meg, a második rész Hajós György, Neukomm Gyula és Surányi János munkája, ez először 1957-ben jelent meg és a versenyeket 1955-ig dolgozta föl. A mostani kiadás bővítéseit és az átdolgozás munkáját Surányi János végezte el.

A két részben együtt összesen 189 feladat, ezek megoldása, számos, a matematika egy-egy részterületébe bepillantást nyújtó jegyzet, életrajzi adat és a díjazott versenyzők névsora található. A díjazott versenyzők között számos, később világhírűvé vált tudós van, mint például Fejér Lipót (1897), Kármán Tódor Tivadar (1898), Kőnig Dénes (1902), Haar Alfréd (1903), Riesz Marcell (1904), Szegő Gábor (1912), Radó Tibor (1913), Rédei László (1918), Kalmár László (1922), Teller Ede (1925), Gallai Tibor (1930), Szele Tibor (1936).

A könyvben közölt megoldások között szerepelnek a díjazott versenyzők eredeti megoldásai is, de a megoldások túlnyomó többségének a szövege időt rabló, aprólékos gondos munka eredménye, amely sok, külön meg nem említett versenyző és matematikus ötleteire is épít.

A kitűzött feladatok tematikai gazdagsága, szellemessége, a megoldások sokfélesége és mintaszerű megfogalmazása, a megjegyzések didaktikai hasznossága miatt a könyv nemcsak a hazai, hanem a világ matematikusainak, a matematikát oktatóknak és szeretőknek az érdeklődését is kiváltotta és a könyvet több (például angol, japán, orosz, román) nyelvre is lefordították.

A könyv egyrészt kultúrtörténeti dokumentum, hiszen egy csaknem százéves verseny minden mozzanatáról tudósít, és megmutatja, hogy mely korban milyen jellegű feladatok álltak az érdeklődés középpontjában, másrészt élő feladatgyűjtemény, amely segíti a mai matematikai oktatást, a matematikai tehetségek kibontakoztatását és a matematika szakos tanárok ön- és továbbképzését. Ezt például az is bizonyítja, hogy a könyv számos feladata megtalálható a ma forgalomban lévő középiskolai és felsőoktatási feladatgyűjteményekben, a közelmúltban kiadott hazai és külföldi szakkönyvekben. Ez a könyv továbbá példákat ad arra, hogyan kell egy kérdéscsoportot gondosan megvizsgálni, körültekintően elemezni, a felfedezett megállapításokat bizonyítani, a bizonyításokat és a következtetéseket pontosan, érthetően és ráadásul szépen megfogalmazni. Mivel ez nemcsak a matematika területén célszerű és hasznos, ezért ez a könyv olyan alapmű, amelynek minden, legalább érettségi vizsgát tett ember könyvtárában helye van.

A könyv második részében szereplő utolsó, nevezetesen az 1963. évi verseny óta eltelt 25 év már aktuálissá teszi a harmadik rész megjelenését, amire remélhetőleg már nem kell sokáig várni.

Scharnitzky Viktor

Probability Theory and Mathematical Statistics with Applications

Szerkesztők: W. Grossmann, Mogyoródi J., Vincze I. és W. Wertz
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1988, 457 oldal

A könyv a Visegrádon 1985 májusában megrendezett Ötödik Pannóniai Matematikai Statisztikai Szimpózium előadásainak válogatott kötete. Az első rész 22 valószínűségszámítási, a második rész 18 matematikai statisztikai cikket tartalmaz. Ezek jellemző — bár kétségkívül nem teljes — keresztmetszetét adják a hajdani Pannónia területén jelenleg dolgozó vagy velük szorosan együttműködő valószínűségszámítási kutatók munkáinak. E sokszínűségnek megfelelően igen sok szakember találhat e kötetben az érdeklődési köréhez tartozó cikket. A kötet megjelentetése sajnos olyan lassú volt, hogy közben már a hatodik ilyen jellegű konferenciát is megrendezték Ausztriában (1986-ban), sőt egy külföldi kiadó már ennek a későbbi konferenciának a kötetét meg is jelentette...

Székely J. Gábor

Bán István: Biomathematics and its Applications in Plant Cultivation

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1988, 204 oldal (társkiadó az Elsevier Science Publishers, The Netherlands)

A könyv ízelítő a gyorsan fejlődő, itthon is széles körben, magas színvonalon alkalmazott biometriából (biomatematikából). A szerző 1977-ben a Mezőgazdasági Kiadónál megjelent művének fordítása. Jól tájékoztat a szakterületen felmerülő, matematikai tárgyalásmódot igénylő problémákról. Kézikönyvként elsősorban szakterületen dolgozó nem-matematikusoknak ajánlom. A könyv két fejezetes. Az elsőben néhány biometriai módszer matematikai hátterét tárgyalja a szerző, egészen az elemi matematikáig visszavezetve, míg a másodikban mintegy 15 részletesen kidolgozott esettanulmány található. A pontosabb képalkotás céljával, tekintsük át az elméleti fejezet főbb gondolatait, és az alkalmazási fejezet példáit.

Először a biológiai állapot definiálódik, mint az euklideszi tér egy pontja, és a biológiai folyamat, ami a biológiai állapot időbeli változása. A biológiai állapot lehet véletlentől függő, ezért a második rész eleje a valószínűségszámítás alapvető fogalmait tárgyalja: esemény, valószínűség, eloszlás, várható érték, szórás, normális eloszlás, normalitás vizsgálat, lognormális eloszlás. Ehhez a témakörhöz tartozik még a későbbiekben szereplő probit-logit transzformáció is. Megtalálható a regresszió feladatának megoldása legkisebb négyzetek módszerével, a legegyszerűbb lineáris esetekben (egyenes, parabola, hiperbola), amit két érdekesnek látszó felvetés egészít ki, a regresszió variációs megoldásával és a többdimenziós regresszió egy dimenzióra redukálását célzó ívhossz szerinti regresszióval kapcsolatban. Az elméleti fejezet a biológiai állapotok kiértékelésére alkalmas heurisztikus eljárásokat tárgyaló részekkel zárul, úgy mint a biológiai állapothalmazok összehasonlítása, átfedési valószínűségeinek becslése, biológiai állapotok kiértékelése.

A második fejezet esettanulmányai tömör felsorolásban: Az első vizsgálat kérdése, hogy a kukorica egyedek hány százaléka ellenőrzendő a golyvásüszög és molylepke károsodottság százalékos arányának megállapításához. A másodiké hasonló, itt a levelenkénti permetlécseppszám megállapítása a cél. Ezután néhány regresszió kiszámolására visszavezetett probléma következik: összefüggés keresése a termésátlag és a növényvédelmi költség közt, a növényvédelmi védekezésszám és az exportgyümölcs-arány közt, a termelési költségek és a jövedelem, a növényvédelmi költségek közt szőlő, barack, meggy, cseresznye, málna esetén, a növényvédő szerek mennyisége és a melegvérű állatok elhullása közt, a burgonyagumó súlyeloszlása és a termelési technológia közt. Kártevők (gabonabogár, zsizsik, lisztbogár) optimális környezeti feltételeit regresszió szélsőértékeiként kapjuk meg, hasonlóan a termés mennyisége szempontjából optimális öntözésszámot, továbbá a műtrágya nitrogén- és foszfortartalmának leghatásosabb arányát. Regresszió független változói közül való választásra példa a fitoftóra járvány környezeti igényének meghatározása. A regresszió zéróhelyének megbecslésére vezetődik vissza a Caniofora cerebella gomba károsítása ellen védő nátriumpentaklór-fenol mennyiség meghatározásának feladata. Az egészséges és vírusos szilvalevelek osztályozását szolgáló levélméret a méretek sűrűségére illeszkedő regressziók metszéspontja. A Dimecron—100 légyölő hatását megadó mortalitási index kiszámolása példa arra, hogy a mérést befolyásoló több, egyszerre fennálló tényező közül hogyan szűrhető ki egy hatása. Ilyen típusú a kérdés a Fusarium gombatenyészet mágneses kezelésekor is: a gomba a táptalajtól választható el, s így a súlyváltozást a mágneses térerősségen túl a beszáradás is okozza.

Néhány kritikus megjegyzés: Az elméleti rész a biometriába való általános bevezetés igényével íródott. Mégis, például a biológiai állapotot az euklideszi tér pontjával azonosítja, leszűkítve ezzel a modellezhető biológiai jelenségek halmazát. Kizárja azokat a fontos és gyakorlati feladatokat, ahol éppen ez a megfeleltetés a modellezés központi kérdése. Visszatérő, hogy a regresszió jóságát a maradó szórás és az átlag aránya mérné, pedig ezt inkább az eredeti és a maradó szórás aránya adja meg. A variációs regresszió — ami a $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (f(x_i) + \varepsilon\varphi(x_i)))^2$ minimalizálását jelenti, ahol f a regresszió, φ a variáló függvény, (x_i, y_i) a mért adatok — leírásából nem tűnik ki, mi a haszon a tetemesen megnövekvő számolási igény mellett. Igaz, az egész eljárás is alig kiboncolható. Hasonló a probléma a többdimenziós regressziót egyváltozós, ívhossz szerinti regresszióval megoldó eljárás esetén. Az $y \sim f(x_1, \ldots, x_n)$ regressziót — y és $(x_1, \ldots, x_n)$ a mért változók, f a regresszió — egy igen számolásigényes eljárással lényegében is egyváltozósra egyszerűsíti anélkül, hogy bevallaná. Érdemes megjegyezni, hogy a könyvben az eljárások alkalmazására igazi példát nem találhatunk. Az alkalmazási rész módszerei és következtetései így is számos ponton megkérdőjelezhetők. Például: Lehet, hogy a golyvásüszög-fertőzöttség mértéke hatékonyan tényleg csak légileg deríthető fel, de a leírt elemzésből csak annyi következik, hogy a bemutatott mintavételi-statisztikai eljárás hallgatólagos feltételezése, hogy a betegség Poisson-mező szerinti, nem felel meg a valóságnak. Nem zárja ki olyan, a jelenségnek jobban megfelelő „hagyományos" mintavételi-statisztikai eljárás létét, amivel esetlegesen kielégítő eredmény érhető el. A regresszió alkalmazása sem mindenütt elég

körültekintő. Nem veszi figyelembe az adatok transzformációjának szórást módosító hatását, mint ahogy az adatok változó szórása általában is elhanyagolódik. Ez különösen élesen jelenik meg a sűrűségfüggvények regressziós közelítésénél, ahol az sem világos, hogyan veszi figyelembe — vagy el is marad? — azt, hogy a sűrűség integrálja 1. Ez persze még kétségesebbé teszi az így számolt sűrűségek metszéspontjából származó osztályozási szint tulajdonságait. Viszont nem találhatók még utalások sem az utóbbi feladatok klasszikus, gyakorlatban is bevált módszereinek létezésére sem. Sajnos nincs hely az összes vitatható rész felsorolására, különösen nem a részletes elemzésére. Így csak néhányat emeltem ki a markánsabbak közül.

Összegezve: A számítógépek az alkalmazott statisztikát jelentősen átalakították. Sajnos ebből a könyvben semmi sem érzékelhető. A klasszikus módszerek ismertetése hézagos. Néhány újítása kétes értékű. Bár a második rész esettanulmányainak módszerei és következtetései vitathatók, mezőgazdasági adatokat matematikai módszerekkel feldolgozni szándékozó kollégák számára példaértékűek lehetnek. Az első rész, mely írója szándéka szerint a biometria néhány területének matematikájába vezetné be az olvasót, véleményem szerint célját nem éri el. Okozza ezt néhány teljesen fölösleges megjegyzés (lásd: teljes indukció, a biológiai függvények ürügyén a kiválasztási axióma vagy a szerző értékelése szerint a biológiában nem is alkalmazható sztochasztikus approximáción alapuló paraméter becslés ötletének vázlata), félremagyarázott fogalmak (lásd: valószínűség, normális eloszlás stb.), és — kivételesen nem utolsósorban — számos, a magyar eredetiből örökölt (!) értelemzavaró képlethiba (lásd: eloszlásfüggvények tulajdonságai, Szmirnov-próba, regressziószámítás, biológiai állapothalmazok összehasonlítása stb.).

Általános tanulság a könyvet forgatva, hogy célszerű volna a hazai szakkönyvkiadás elkeserítő mértékben csökkenő lehetőségei közt az alaposabb lektorálás. Örvendetes a sok esetben magas színvonalú termés idegen nyelvű megjelenésének lehetősége, de valószínűleg található ennél sokkal érettebb kézirat is. Hisz ez még az olyan egyszerű teszt által is szelektálható, ami pusztán az irodalomjegyzéken alapul. A 33 címből 21 magyar nyelvű, ámbár ebből legalább hat idegen nyelvű eredetivel, vagy fordítással helyettesíthető(!).

Pröhle Tamás

Alapismereti kislexikon

Novotrade, Budapest, 1988

Az ismeretek forrása már régóta nem csupán a könyv, a nyomtatott szöveg, mégis egy-egy konkrét ismeretnek egy adott pillanatban utánanézni még ma is a legtöbb esetben csak könyvben, lexikonban lehet, ha van. Ha létezik a sokkötetes nagylexikonok és szakmai lexikonok mellett sokak számára könnyen hozzáférhető (olcsó, közérthető) és a legfontosabb fogalmakat tartalmazó kislexikon is. Bármilyen furcsának tűnhet is, ilyen lexikon eddig nem volt. Az Alapismereti kislexikon ezért alapvető hiányt szüntetett meg.

A több, mint 600 oldalas kötet csaknem 9000 címszót tartalmaz a biológia, a kémia, a fizika, a matematika, a technika, a földrajz, a történelem és az irodalom fogalmai, megállapításai, tételei közül, továbbá megemlíti azoknak a személyeknek — magyaroknak és külföldieknek — a munkásságát, akik e tudományokban alapvetően fontos eredményeket értek el.

Az alábbi megjegyzések a kislexikon csupán matematikai részére vonatkoznak.

Egy könyvismertetésnek az általános méltatáson túl nem feladata, hogy felkutassa a könyv szövegében található összes hibát, következetlenséget, ez a lektorok feladata. (Egyébként a címlap belső oldalán felsorolt alkotók között nem szerepelnek lektorok, tehát lehet, hogy nem is voltak?) Az ismertetés legfeljebb néhány olyan javaslatot tehet — ha szükséges —, amelyek a könyv egy esetleges új kiadása esetén segíthetik a hiányosságok kiküszöbölését.

Miután a kislexikon Bevezetés című fejezetében szó van arról, hogy a számítógépes adattárolás és szerkesztés, amivel ez a kötet készült, lehetővé teszi a hibák gyors és könnyű kijavítását, valamint a szöveg átszerkesztését, továbbá a szerkesztőség kifejezetten kéri az olvasók véleményét, szeretnék néhány javaslatot tenni.

Javaslataim négy csoportba sorolhatók:

1. *A megjelent szövegről.* Nagyon fontos, hogy a definíciókat jelentő szócikkek pontosak, szabatosak és rövidek legyenek. Néhány — véleményem szerint fatális sajtóhibák miatt — pontatlan, hibás, értelmetlen szócikk (a zárójelben az előfordulás helyének az oldalszáma van): abszolút konvergens sor (1), arkhimédészi pont (33), cosinustétel (91), egyenlőtlenség (125), érintő (141), fordított arányosság (168), hiperbola (223), kombináció (298), különbségi hányados (319), négyzetes mátrix (357), négyzetes közép (390), racionális függvény (455), valószínűségi változó (580). Nem engedhető meg, hogy egy-egy sajtóhiba elrontsa a definíciót, mert nincs további szöveg, amiből a hiba esetleg kiderülhetne.

2. *A szócikkek kapcsolatáról.* Úgy gondolom, hogy minden olyan fogalom, amely egy szócikkben szerepel, az önálló szócikként is jelen kell legyen. Néhány esetben azonban egy-egy szócikk olyan fogalmakra hivatkozik, amelyek a lexikonban nem szerepelnek. Például használják az abszolút érték fogalmát és jelét [négyzetgyök (390) vagy abszolút konvergens sor (1)], de az abszolút érték fogalma nem szerepel szócikként. Vagy szó van egy mátrix determinánsáról (250), de hogy mi a determináns, azt nem tudjuk meg a lexikonból. Nem tudom, hogy mi lehet az oka pl. annak, hogy a hiperbola és parabola kúpszeletes definíciója szerepel a kislexikonban, az ellipszisé nem. (A kúpé sem! A csonka kúpé igen.) Miért van az, hogy az úgynevezett addíciós tételek közül kettő (miért éppen ez a kettő?) szerepel a lexikonban (egy kicsit szokatlan formában), de a szögfüggvények definíciója nem. Igaz, a szinuszcsomó szerepel. Az is meglepő, hogy a kislexikonban két koszinusztétel is van, egy a c és egy a k betűnél, amelyek közül az első hibás. Az is nagyon helyes, hogy az egyik szócikk (323) megemlíti, hogy Lambert bizonyította be, hogy az e és a π irracionális szám, de hogy mit is jelölünk e-vel, ill. π-vel, az nincs sehol. Azt sem értem világosan, hogy a kombinációk száma miért nem szerepel a kombinációk címszóban, holott a binomiális együttható címszó létezik és ott burkoltan a kombináció fogalmát és a kombinációk számát is megemlítik.

3. *A hiányokról.* Az adott terjedelem eleve olyan korlátot jelentett, amely az alkotókat nagyon nehéz helyzetbe hozta. Nem volna korrekt számon kérni, hogy egy-egy fogalom miért nem szerepel a kislexikonban, különösen akkor, amikor a bevezetésben az alkotók bevallják, hogy a végleges szöveg „nem egyszer szubjektív választásunk" eredménye.

Mégis úgy gondolom, hogy például matematikából is a középiskolai anyag szerepeltetése egy jól indokolható felső korlát lehetett volna. Valószínű, hogy ez néhány tucat új címszó (elsősorban alapfogalom) megírását jelentené, ami nem baj, hiszen alapismereti kislexikonról van szó. Ilyen fogalmak például: alkotó, aszimptota, egyenletrendszer, extrapoláció, faktoriális, Galton-deszka, hiba, húrnégyszög, ívmérték, kamatos kamat, minta, paralelogramma-szabály, reláció, skalár, sokszög, talppont, távolság, terület, vektor. Ha olyan címszavakat kellene felsorolni, amelyek nem feltétlenül szükségesek az alapismeretekhez, például a következőket ajánlanám: abszolút konvergens sor, mátrix inverze, negatív binomiális eloszlás, teljes négyzetté kiegészítés. Egyébként úgy tűnik, hogy az alkotók tudatosan elkerülték a képletek közlését, még a legegyszerűbbekét is (pl. a síkidomok területképletei), ami nem feltétlenül helyeselhető. A címszavak pótlásához forrásmunkának pl. a Matematikai kislexikont ajánlom, mert ez, nem szerepelvén a felsorolt felhasznált irodalom kötetei között, esetleg elkerülte az alkotók figyelmét.

A kislexikonban szereplő matematikusok száma is nyilvánvalóan korlátozott, de megfontolásra javaslom még például a következő személyek megemlítését, még ha nem biztos, hogy minden középiskolás hall róluk az iskolában: J. Bernoulli, A. L. Cauchy, Haar Alfréd, Hajós György, A. N. Kolmogorov, J. I. Lagrange.

4. *A tipográfiáról.* Számos szócikk azért hibás, mert a benne előforduló jelölések rosszak, nincs nyíl, nincs kapcsos zárójel, nincsenek matematikai jelek ott, ahol kellenének. Nem szerencsés, hogy például éppen a függvény jelölése hibás. A számsorozat címszónál láttam IR és IN betűt (tehát a szedőprogramban van ilyen utasítás), akkor mindenütt másutt, ahol ugyancsak ez kellene, miért nincs? A szócikkek olvasása közben sokáig azt hittem, hogy ez a szedői eljárás nem ismeri a dőlt (kurzív) betűket, mígnem a határozott integrál címszónál láttam dőlt betűt is. Akkor milyen elvi oka volt annak, hogy a matematikában évszázadok óta dőlt betűkkel szedett kifejezéseket most álló betűkből szedték?

Mindezen fogyatékosságok ellenére is az Alapismereti kislexikon összeállítását és kiadását hasznos kezdeményezésnek tartom, mert tartalmazza a középiskolai szintű tudás ismeretanyagának jelentős részét, és így nemcsak a diákság hasznos kézikönyve lehet, hanem helyet kaphat minden család könyvtárában is.

***

Megjegyzés a korrektúránál. A fenti ismertetést 1989 nyarán adtam át a Matematikai Lapok szerkesztőségének. Mivel elképzelhető volt, hogy a könyv második kiadása esetleg előbb jelenik meg, mint az ismertetés (és ez be is következett), ezért a szöveget elküldtem a Novotrade Kiadónak is. Miután a kiadó erre nem reagált, ezúton köszönöm meg (az olvasók nevében is), hogy a szóvá tett hibák egy részét a kötet második kiadásában már nem találtam meg.

Scharnitzky Viktor

ОБЗОР КНИГ

BOOK REVIEWS

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1987-ben jelentek meg. A jegyzékben általános és középiskolai tankönyvek és felsőoktatási jegyzetek nem szerepelnek.

ÁBRAHÁM ISTVÁN—BEDŐ LÁSZLÓ—CZÉTÉNYI CSABA— IFJ. FRIGYESI MIKLÓS—JUHÁSZ ATTILA—KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika a felvételi vizsgára készülők részére* (3. kiadás), Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 584 oldal, 51 Ft.

ARNOLD, V. I.: *Katasztrófaelmélet*, Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 89 oldal, 18 Ft.

ARNOLD, V. I.: *Közönséges differenciálegyenletek*, Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 284 oldal, 87 Ft.

BAZILJEV, V. T.—DUNYICSEV, K. I.—IVANYICKAJA, V. P.: *Geometria* 1—2 kötet (2. kiadás), Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 374, 379 oldal, 49,50 Ft.

BEDŐ LÁSZLÓ: *Függvények általános és középiskolai tanulók számára* (3. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 238 oldal, 25 Ft.

BÉKEFI ZSUZSA: *Kis Matematikusok Baráti Köre*, 8. évfolyam, Útmutató, Budapest, 1987, TIT, 106 oldal, 25 Ft.

BOGNÁR KATALIN: *A viszontbiztosítás matematikai módszerei* (Biztosítási matematika 3), Budapest, 1987, Állami Biztosító, ár nélkül.

BOLYAI JÁNOS: *Appendix, the theory of space* (with introduction, comments and addenda ed. by FERENC KÁRTESZI), Budapest—Amsterdam, 1987, Akadémiai Kiadó—North Holland Publ. Co., 238 oldal, ár nélkül.

BORSODI ISTVÁN—GÖNDÖCS LÁSZLÓ: *Matematika a tanítóképző intézet első évfolyama számára*, Ideiglenes tankönyv (11. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 355 oldal, 33 Ft.

BÖRÖCZKY, K.—FEJES TÓTH, G. (editors): *Intuitive geometry*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 48, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1987, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publ. Company, 708 oldal, 980 Ft.

BRONSTEJN, I. N.—SZEMENGYAJEV, K. A.: *Matematikai zsebkönyv mérnökök és mérnökhallgatók számára* (6. átdolgozott kiadás), Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 1190 oldal, 160 Ft.

BRÜCKNER HUBA—LUKÁCS OTTÓ: *A folyamatábráktól a programozásig*, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 356 oldal, 54 Ft.

COXETER, H. S. M.: *A geometriák alapjai* (2. kiadás), Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 470 oldal, 170 Ft.

DENKINGER GÉZA: *Analízis* (3. kiadás), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 414 oldal, 46 Ft.

DENKINGER GÉZA—GYURKÓ LAJOS: *Analízis, Gyakorlatok*, Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 373 oldal, 43 Ft.

DÓSA ISTVÁN: *Felzárkóztatás, Matematika munkafüzet a középiskolák számára*, Veszprém, 1987, Megyei Pedagógiai Intézet, 135 oldal, ár nélkül.

FEKETE JÁNOS: *Feladatgyűjtemény szakmunkástanulók matematika tantárgyi versenyre való felkészítéséhez*, Kaposvár, 1987, SMPI, 119 oldal, ár nélkül.

GAÁL ISTVÁN: *Amit rosszul tudunk, Természettudományi koholmányok és balítéletek*, Budapest, 1987, Terra, 437 oldal, 169 Ft.

GÁLL ÉVA: *Vigyázat! Csak gyerekeknek* (5. kiadás), Utazások matematikaországban, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 115 oldal, 32 Ft.

GÁSPÁR LÁSZLÓ—TEMESI JÓZSEF: *Lineáris programozási gyakorlatok*, Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 547 oldal, 67 Ft.

GOLDSTINE, HERMAN H.: *A számítógép Pascaltól Neumannig*, Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 368 oldal, 110 Ft.

GORELIK, G. J.: *Miért háromdimenziós a tér?*, Budapest, 1987, Gondolat, 226 oldal, 30 Ft.

GRÁBERNÉ BŐSZE KLÁRA: *Beke Manó, 1862—1946*, Budapest, 1987, Országos Pedagógiai Könyvtár és Múzeum, 33 oldal, 15,50 Ft.

GYEMIDOVICS, B. P.: *Matematikai analízis, Feladatgyűjtemény* (3. kiadás), Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 595 oldal, 74 Ft.

HAJÓS GYÖRGY: *Bevezetés a geometriába* (8. kiadás), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 594 oldal, 63 Ft.

HAJÓS GYÖRGY—NEUKOMM GYULA—SURÁNYI JÁNOS: *Matematikai versenytételek I. rész* (4. javított, bővített és átdolgozott kiadás), Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 182 oldal, 40 Ft.

HVORECZKÝ, J.—KELEMEN, J.: *Ötlettől az algoritmusig*, Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 181 oldal, 30 Ft.

KÁLDI ÉVA—VARGA TAMÁS: *Válogatás a 4. osztályos átdolgozott matematika-munkalapok feladataiból*, Budapest, 1987, ILK, 62 oldal, 25 Ft.

KERÉKGYÁRTÓ GYÖRGYNÉ—MUNDROCZÓ GYÖRGY: *Statisztikai módszerek a gazdasági elemzésben*, Budapest, 1987, Közgazdasági és Jogi Kiadó, 332 oldal, 90 Ft.

KERTÉSZ ANDOR: *Lectures on Artinian rings*, Budapest, 1987, Akadémiai Kiadó, 427 oldal, 540 Ft.

KNUTH, D. E.: *Számok valóson innen és túl*, Budapest, 1987, Gondolat, 135 oldal, 32 Ft.

KNUTH, D. E.: *A számítógép-programozás művészete 1., Alapvető algoritmusok*, Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 654 oldal, 180 Ft.

KNUTH, D. E.: *A számítógép-programozás művészete 2., Szeminumerikus algoritmusok*, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 690 oldal, 180 Ft.

KOLLER LÁSZLÓNÉ—MOHAROS SÁNDORNÉ: *Matematika, fizika*, Tanári segédanyag a felnőtt szakmunkásképzés tanárai számára, Budapest, 1987, OPI, 89 oldal, ár nélkül.

LAVROV, I. A.—MAXIMOVA, L. L.: *Halmazelméleti, matematikai logikai és algoritmuselméleti feladatok*, Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 223 oldal, 64 Ft.

LENGYEL TAMÁS: *A cluster analízis néhány kombinatorikai és valószínűségszámítási problémája*, Budapest, 1987, SZTAKI, 17 oldal, ár nélkül.

LIGETI BÉLA—MOSONI GYÖRGY: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (7. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 175 oldal, 20 Ft.

LOPOVOK, L. M.: *Szórakoztató matematika*, Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 261 oldal, 26 Ft.

LUKÁCS OTTÓ: *Matematikai statisztika, Példatár*, Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 570 oldal, 74 Ft.

MICHALETZKY GYÖRGY: *A biztosítási kockázat mint sztochasztikus folyamat* (Biztosítási matematika 2.), Budapest, 1987, Állami Biztosító, 40 oldal, ár nélkül.

MOGYORÓDI JÓZSEF: *A biztosítási díjkalkuláció matematikai elveiről* (Biztosítási matematika 1.), Budapest, 1987, Állami Biztosító, 87 oldal, ár nélkül.

NAGY BARNABÁS: *Az axonometria felfedezése, Térgeometria gyerekeknek*, Utazások matematikaországban, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 80 oldal, 40 Ft.

NAGY BERTALAN—SZIGETI JENŐ: *Matematikai alapismeretek, Feladatgyűjtemény*, Miskolc, 1987, Nehézipari Műszaki Egyetem, 102 oldal, ár nélkül.

NAGY FERENC (összeállította): *Neumann János és a „magyar titok" a dokumentumok tükrében*, Budapest, 1987, OMIKK, 240 oldal, 114 Ft.

NAGY FERENC—NAGY DÉNES (szerk): *Magyarok a természettudomány és a technika történetében*, Életrajzi lexikon A—Z-ig és dokumentumok, Első gyűjtés, Budapest, 1987, OMIKK, 450 oldal, 160 Ft.

OBÁDOVICS JÓZSEF GYULA: *Matematika 1, 2*, Budapest, 1987, LSI Alkalmazástechnikai Tanácsadó Szolgálat, 685 oldal, 460 Ft.

PÁCZELT ISTVÁN—HERPAI BÉLA: *A végeselem-módszer alkalmazása rúdszerkezetekre*, Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 150 oldal, 45 Ft.

PÁCZELT ISTVÁN—SCHARLE PÉTER: *A végeselem-módszer a kontinuummechanikában*, Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 151 oldal, 38 Ft.

PELLER JÓZSEF: *Exponenciális és logaritmus függvény, Differenciálszámítás*, Kísérlettel megalapozott didaktikai megoldásrendszer, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 280 oldal, 38 Ft.

PETHES ENDRE: *222 ábrázoló geometriai feladat* (4. kiadás), Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 248 oldal, 89 Ft.

PÓLOS LÁSZLÓ—RUZSA IMRE: *A logika elemei*, Főiskolai tankönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 224 oldal, 28 Ft.

RÁCZ JÁNOS—RÁCZ ZSOLT: *Matematika és számítástechnika*, Budapest, 1987, Novotrade, 270 oldal, 149 Ft.

RADNAI GYULÁNÉ SZENDREI JULIANNA: *A játék matematikája* (4. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 136 oldal, 15 Ft.

RADNAI GYULÁNÉ SZENDREI JULIANNA: *Matek-játék a napközíben és otthon*, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 45 oldal, +mell., 62 Ft.

RENNER GÁBOR: *Kör approximációja a számítógépes geometriai tervezésben*, Budapest, 1986, SZTAKI, 63 oldal, ár nélkül.

RÉVÉSZ, P.—SARKADI, K.—SEN, P. K. (editors): *Goodness-of-fit*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 45, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1987, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publ. Company, 624 oldal, 600 Ft.

RÓNYAI LAJOS: *Algebrai algoritmusok*, Budapest, 1987, SZTAKI, 98 oldal, ár nélkül.

SAIN MÁRTON: *Matematikatörténeti ABC*, Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához (5. átdolgozott és bővített kiadás), Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 327 oldal, 65 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Egyetemi feladatok matematikából 1983—1985, VII. kötet*, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 288 oldal, 43 Ft.

SCHUSZTER GYULA: *Matematikai-didaktikai tanulmányok általános és középiskolai tanárok számára*, Kaposvár, 1987, Somogy Megyei Pedagógiai Továbbképző Intézet, 78 oldal, ár nélkül.

SURÁNYI PÁL: *A geometriai szerkeszthetőség algebrai elmélete*, Veszprém, 1987, Veszprém Megyei Pedagógiai Intézet, 30 oldal, ár nélkül.

SZABADOS J.—TANDORI, K. (editors): *Alfred Haar memorial conference, Vol. I—II., August 11—17, 1985 in Budapest*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1987, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publ. Company, 474, 475 oldal, 1060 Ft.

SZEVASZTYANOV, B. A.—CSISZTYAKOV, V. P.—ZUBKOV, A. M.: *Valószínűségelméleti feladatok*, Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 354 oldal, 24 Ft.

SZIKSZAI JÓZSEF: *A hatványközepek*, Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 85 oldal, 14 Ft.

SZŐKEFALVI-NAGY, B.—HATVANI, L. (editors): *Differential equations, qualitative theory I—II.*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 47, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1987, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publ. Company, 1172 oldal, 1200 Ft.

TAKÁCS JÓZSEF: *Segédanyag a gimnáziumok 2. osztályában folyó szabadsávos matematika tanításához*, Veszprém, 1987, Veszprém Megyei Pedagógiai Intézet, 25 oldal, ár nélkül.

TELEGDI LÁSZLÓ: *Bináris változók struktúrájának vizsgálata*, Budapest, 1987, SZTAKI, 147 oldal, ár nélkül.

Természettudományi kisenciklopédia (3. kiadás), Budapest, 1987, Gondolat, 980 oldal+80 tábla, 250 Ft.

TILLAINÉ BUVÁRI ANIKÓ: *Topológia és gráfelméleti érdekességek*, Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 147 oldal, 24 Ft.

TOLNAI GYULÁNÉ: *Matematikai logikára épülő anyanyelvi komplex munkaterem, Útmutató és feladatgyűjtemény*, Miskolc, 1987, AIE, 251 oldal, ár nélkül.

TÓTH IRÉN (szerk.): *Operációkutatás I.* (Matematika üzemgazdászoknak), Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 195 oldal, 19 Ft.

ÚJVÁRI ISTVÁN: *Felkészülés és felzárkózás matematikából az általános- és középiskolai tanulók számára* (4. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 158 oldal, 23 Ft.

ÚJVÁRI ISTVÁN: *Egyedül készülök a felvételire! Összefoglaló matematikából*, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 380 oldal, 56 Ft.

URBÁN JÁNOS: *Matematikai logika, Példatár* (2. kiadás), Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 273 oldal, 54 Ft.

VALKÓ PÉTER—VAJDA SÁNDOR: *Műszaki-tudományos feladatok megoldása személyi számítógéppel*, Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 342 oldal, 90 Ft.

VILENKIN, N. J.: *Kombinatorika* (2. kiadás), Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 358 oldal, 76 Ft.

VINCENT, ALAN: *Molekuláris szimmetria és csoportelmélet*, Programozott bevezetés a kémiai alkalmazásokba, Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 183 oldal, 16 Ft.

Scharnitzky Viktor

НОВЫЕ КНИГИ

NEW BOOKS

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

СОДЕРЖАНИЕ

Г. Тушнади и И. Винце: КАРОЙ ШАРКАДИ (1914—1985) 1

И. Бихари: ЭНДРЕ МАКАИ (1915—1987) 5
Мемориальное заседание в связи с 75-й годовщиной со дня рождения Дьёрдя Хайоша 10
Э. Молнар: О доказательстве Хайоша гипотеза Минковского 11
К. Корради и Ш. Сабо: Об одной теореме Ласло Редеи 25
К. Корради и Ш. Сабо: Теорема Хайоша—Минковского и несколько связанных с ней результатов 41
Л. Брезович и Э. Молнар: Экстремальные упаковки шаров с данными группами отражений в гиперболическом пространстве 61
П. Киш: Простые делители типа Вифериха чисел Люка 93
Э. Хорват: Об одной проблеме конечных разрешимых групп 99
Буи Мин Фонг: Обобщенное решение проблемы Роткевича 109
Чан Куок Бин: Q-метрические связности Финслера 121
М. Хорват и И. Йо: О выпуклости Ки Фана 137
А. Богмер: О собственных функциях оператора Лапласа 141
А. Богмер, М. Хорват и И. Йо: Минимаксные теоремы и выпуклость 149
Доклад о мемориальном конкурсе имени Миклоша Швейцера 1986-го года 171
Задачи 182
Из жизни Общества 188
Сообщения 214
Обзор книг 215
Новые книги 230

CONTENTS

G. Tusnády and I. Vincze: KÁROLY SARKADI (1914—1985) 1

I. Bihari: ENDRE MAKAI (1915—1987) 5
Memorial Session on the 75th anniversary of the birth of G. Hajós 10
E. Molnár: On Hajós' proof of Minkowski's conjecture 11
K. Corrádi and S. Szabó: On a theorem of L. Rédei 25
K. Corrádi and S. Szabó: The Hajós—Minkowski theorem and some related results 41
L. Brezovich and E. Molnár: Extremal ball packings with given symmetry groups generated by reflections in the hyperbolic 3-space 61
P. Kiss: Wieferich-type prime divisors of Lucas numbers 93
E. Horváth: On a problem of finite solvable groups 99
Bui Minh Phong: Generalized solution of Rotkiewicz's problem 109
Tran Quoc Binh: Q-metrical Finsler connections 121
M. Horváth and I. Joó: On Ky Fan convexity 137
A. Bogmér: On the eigenfunctions of the Laplace operator 141
A. Bogmér, M. Horváth and I. Joó: Minimax theorems and convexity 149
Report on the 1986 M. Schweitzer Memorial Competition 171
Problems 182
Activity of the Society 188
Communications 214
Book reviews 215
New books 230

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1990. január 18. — Terjedelem: 20,30 (A/5 ív)
90-317 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Molnár Tibor igazgató

Ára: 54 Ft
Évi előfizetés: 72 Ft

ISSN 0025—519X

312.046

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

12
h°

4

34. évfolyam, 1983—1987

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.

34. évfolyam (1983—1987), 4. szám

A megadott két évszám közül az első a kötet esedékességének, a második a kézirat nyomdába adásának évét jelöli.

Felelős szerkesztő: Császár Ákos

Szerkesztők: Fejes Tóth László, Lovász László, Pelikán József, Rapcsák András, Révész Pál, Surányi János, Tandori Károly

Szerkesztőség: 1027 Budapest, II., Fő utca 68., II. em. 224. Telefon: 201-6974.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, 1117 Budapest, XI., Prielle Kornélia u. 19—35. Telefon: 181-2134.

A kiadvány előfizethető bármely hírlapkézbesítő postahivatalnál, a Posta hírlapüzleteiben és a Hírlapelőfizetési és Lapellátási Irodánál (HELIR) 1900 Budapest XIII., Lehel út 10/A., közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a Postabank Rt. 219-98636, 021-02799 pénzforgalmi jelzőszámra. Példányonként megvásárolható az Akadémiai Kiadó *Stúdium* (1368 Budapest V., Váci u. 22., tel.: 118-5881) és *Magiszter* (1052 Budapest V., Városház u. 1., tel.: 138-2440) könyvesboltjaiban.

Előfizetési díj egy évre 72,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Szász Ferenc (1931—1989) tudományos munkái 233

Strommer Gyula: Kürschák József (1864—1933) 239

Schmidt Tamás: Kürschák József algebrai munkásságáról 247

Schmidt Tamás: Fried Ervin 60 éves 249

Horváth Miklós, Joó István és Szalkai István: A „Banach-elv"-ről 253

Joó István: Horváth Miklós egy tételéről 301

Banai Miklós és Lukács Béla: Közgazdasági példák egzaktul megoldható variációs problémákra 307

Jelentés az 1987. évi Schweitzer Miklós emlékversenyről 320

Feladatrovat 339

Könyvismertetések 343

Új könyvek, 1988 351

Új könyvek, 1989 354

Tisztelt Olvasó!

A Matematikai Lapok átalakul, 1991-től új formában, új szerkesztőkkel, új tervekkel igyekszik a Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak rendelkezésére állni. A fő cél azonban ugyanaz marad, mint amit Alexits György a Matematikai Lapok 1949-es első számában így fogalmazott meg: „A Matematikai Lapok egyik legfontosabb feladata tehát olyan enciklopédikus tartalmú értekezések közlése, amelyek a matematika fejlődésének egy-egy nagyobb fejezetét közvetítik a matematikai kutatással ugyan aktívan nem foglalkozó, de a matematikát oktató, vagy a matematika iránt mélyebben érdeklődő hazai közönség számára." Az új sorozat füzetei évente négyszer fognak megjelenni. Az előfizetéssel kapcsolatban felvilágosítást a Társulat ad. Címe: 1027 Budapest, II., Fő utca 68. II. em. 224. Telefon: 201-6974.

SZÁSZ FERENC (1931—1989)

TUDOMÁNYOS MUNKÁI

Könyv:

Radikale der Ringe, Akadémiai Kiadó — Deutscher Verlag der Wiss., Budapest—Berlin, 1975, MR 55 # 8086;
Radicals of rings, Akadémiai Kiadó — John Wiley & Sons, Budapest—London—New York, 1981, MR 84a: 16012.

Dolgozatok:

[1] On groups every cyclic subgroup of which is a power of the group, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **6** (1955), 475—477, MR 17 # 940.
[2] Csoportokról, amelyeknek összes nemtriviális hatványai ciklikus alcsoportok, *MTA III. Oszt. Közl.* **5** (1955), 491—492, MR 17 # 709.
[3] On cyclic groups, *Fund. Math.* **43** (1956), 238—240, MR 18 # 376.
[4] A characterization of the cyclic groups, *Revue Math. Pures Appl., Bucuresti,* **1** (1956), 13—16, MR 18 # 789.
[5] Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind, *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956), 83—84, MR 18 # 376; Bemerkung, *ibidem,* **23** (1962), 64—66.
[6] Két gyűrűelméleti problémáról, *MTA III. Oszt. Közl.* **6** (1956), 213—218, MR 20 # 857.
[7] On rings every subring of which is a multiple of the ring, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 237—238, MR 18 # 187.
[8] О кольцах, каждое подкольцо которых является прямым слагаемым кольца, *Mam. Сб.* **40** (1956), 269—272, MR 18 # 788.
[9] Über die homomorphen Bilder des Ringes der ganzen Zahlen und über eine verwandte Ringfamilie, *Monatsh. Math.* **61** (1957), 37—41, MR 19 # 9.
[10] Les anneaux ne contenant que des sous-anneaux propres cycliques, *Czechosl. Math. J.* **7** (1957), 21—25, MR 20 # 51.
[11] Note on rings in which every proper left ideal is cyclic, *Fund. Math.* **44** (1957), 330—332, MR 19 # 1155.
[12] Ringe, deren von Null verschiedene endlich erzeugbare Unterringe untereinander isomorph sind, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **II:** VI (1957), 1—3, MR 20 # 885.
[13] Sur les anneaux infinis ne contenant que des sous-anneaux nontriviaux de l'index fini, *Izv. Mat. Inst. Bulg. Akad. Nauk* **3:** 1 (1958), 29—31, MR 22 # 50.
[14] Reduktion eines gruppentheoretischen Problems von O. Ju. Schmidt, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **7** (1959), 369—372, MR 22 # 4760.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

[15] Die explizite Bestimmung von einigen Klassen der assoziativen Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci.* 7 (1959), 107—110, MR 21 # 7235.
[16] Az operátormodulusok Kertész-féle radikáljáról, *MTA III. Oszt. Közl.* **10** (1960), 35—38, MR 24 # A1297.
[17] Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, I, *Publ. Math. Debrecen* 7 (1960), 54—64, MR 24 # A145.
[18] Ringe, deren echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **5A** (1960), 287—292, MR 27 # 3660.
[19] Die Abelschen Gruppen, deren volle Endomorphismenringe die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale erfüllen, *Monatsh. Math.* **61** (1961), 150—153, MR 23 # A3186.
[20] Die Ringe mit lauter isomorphen nichttrivialen endlich erzeugbaren Unterringen, *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961), 196—201, MR 24 # A3178.
[21] An observation on the Brown—McCoy radical, *Proc. Japan Acad.* **37** (1961), 413—416, MR 25 # 3063.
[22] A teljesen reducibilis operátormodulusokról, *MTA III. Oszt. Közl.* **11** (1961), 417—425.
[23] Verbandstheoretische Bemerkungen zum Fuchsschen Zeroidradikal der nichtassoziativen Ringe, *Arch. Mat.* **12** (1961), 282—289, MR 24 # A2599.
[24] Bemerkungen zu assoziativen Hauptidealringen, *Koninkl. Nederland. Akad. Wetensch.* **64** (1961), 577—583, MR 26 # 6208.
[25] Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, II, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **12** (1961), 417—439, MR 26 # 6207.
[26] A főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűk, *MTA III. Oszt. Közl.* **12** (1962), 135—177.
[27] Szele Tibor egy gyűrűelméleti problémájának megoldása, *MTA III. Oszt. Közl.* **12** (1962), 47—50, MR 27 # 5793.
[28] Die Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechtsideale sind, *Acta Math. Sci. Hungar.* **13** (1962), 115—132, MR 25 # 3062.
[29] A topologikus algebrákról és gyűrűkről, I. *Mat. Lapok* **13** (1962), 256—278; II, *ibidem,* **14** (1963), 74—87, MR 34 # 5883—84.
[30] Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, III, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963), 447—461, MR 28 # 1211.
[31] Über artinsche Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **11** (1963), 351—354, MR 27 # 4835.
[32] Bemerkungen über Rechtssockel und Nilringe, *Monatsh. Math.* **67** (1963), 359—362, MR 27 # 5794.
[33] Über Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **8A** (1964), 443—453, MR 30 # 4783.
[34] Die Halbgruppen, deren endlich erzeugte echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind, *Acta Sci. Math. Szeged* **25** (1964), 135—138, MR 30 # 182.
[35] Megjegyzés az egységelemes félcsoportokról, *MTA III. Oszt. Közl.* **16** (1966), 397—400, MR 38 # 5962.
[36] Lösung eines Problems bezüglich einer Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 261—272, MR 39 # 5620.
[37] Einige Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring, *Acta Sci. Math. Szeged* **28** (1967), 31—37, MR 37 # 2812.
[38] Radikalbegriffe für Halbgruppen mit Nullelement, die dem Jacobsonschen ringtheoretischen Radikal ähnlich sind, *Math. Nachr.* **34** (1967), 157—161, MR 36 # 290.

[39] Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Rechtseinselementes in einem Ring, *Publ. Math. Debrecen* **14** (1967), 151—152, MR 36 # 6444.
[40] Eine Characterisierung des Jacobsonschen Radikals eines Ringes, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **15** (1967), 53—56, MR 38 # 5834.
[41] The sharpening of a result concerning the primitive ideals of an associative ring, *Proc. Amer. Math. Soc.* **18** (1967), 910—912, MR 37 # 244.
[42] Gyűrűk maximális jobbideáljairól, *MTA III. Oszt. Közl.* **17** (1967), 473—476, MR 39 # 244.
[43] Seres Iván élete és matematikai munkássága, *Mat. Lapok* **18** (1967), 243—276.
[44] Unabhängigkeitsfragen des Kurosschen Axiomsystems der Radikale der Ringe, *Publ. Math. Debrecen* **15** (1968), 287—292, MR 38 # 5835.
[45] Gyűrűk radikáljairól, I, *Mat. Lapok* **19** (1968), 259—301; II, *ibidem,* **20** (1969), 99—116; III, *ibidem,* **20** (1969), 311—346, MR 41 # 6889, MR 41 # 6890, MR 42 # 7692.
[46] Die Lösung eines Problems bezüglich des Durchschnittes zweier modularer Rechtsideale in einem Ring; *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969), 211—216, MR 38 # 5831.
[47] Simultane Lösung eines halbgruppentheoretischen und eines ringtheoretischen Problems, *Acta Sci. Math. Szeged* **30** (1969), 289—294, MR 40 # 5763.
[48] Ein radikaltheoretischer Vereinigungs-Endomorphismus des Idealverbandes der Ringe, *Annales Univ. Sci. Budapest.* **12** (1969), 73—75, MR 42 # 1857.
[49] On the dualization of subdirect embeddings, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969), 289—302 (Wiegandt Richárddal), MR 40 # 2739.
[50] On the duality of radical and semisimple objects in categories, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **21** (1970), 175—182 (Wiegandt Richárddal), MR 41 # 8491.
[51] Reduktion eines Problems bezüglich der Brown—McCoyschen Radikalringe, *Acta Sci. Math. Szeged* **31** (1970), 167—172, MR 41 # 8456.
[52] Beiträge zur Radikaltheorie der Ringe, *Publ. Math. Debrecen* **17** (1970), 267—272; Bemerkungen, *ibidem,* **23** (1976), 49—51, MR 50 # 7233, 54 # 5287.
[53] Some characterizations of twosided regular rings, *Acta Sci. Math. Szeged* **31** (1970), 223—228 (Lajos Sándorral), MR 43 # 283.
[54] Characterizations of strongly regular rings, I, *Proc. Japan Acad.* **46** (1970), 38—40; II, *ibidem,* **46** (1970), 287—289 (Lajos Sándorral), MR 44 # 5345, 44 # 5346.
[55] On Frattini one-sided ideals and subgroups, *Math. Nachr.* **46** (1970), 235—241, MR 42 # 7690.
[56] Notes on modules, I, II, III, *Proc. Japan Acad.* **46** (1970), 349—357, MR 52 # 5743.
[57] Generalized bi-ideals of rings, I, II, *Math. Nachr.* **47** (1970), 355—365, MR 44 # 2780.
[58] On the bi-ideals in associative rings, *Proc. Japan Acad.* **46** (1970), 505—507, MR 43 # 7456.
[59] Rings with an almost nil adjoint semigroup, *Proc. Japan Acad.* **46** (1970), 593—594, MR 43 # 7470.
[60] On radicals of semigroups with zero, I, *Proc. Japan Acad.* **46** (1970), 595—598, MR 44 # 4130.
[61] On the adjoint semigroup of rings, I, *Proc. Japan Acad.* **46** (1970), 773—775, MR 45 # 6955.

[62] Äquivalenzrelation für die Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **22** (1971), 85—86, MR 45 # 8674.

[63] Ideals of a ring with modular intersection, *Revue Roumaine Math. Pures Appl.* **16** (1971), 609—616, MR 44 # 4027.

[64] Bi-ideals in associative rings, *Acta Sci. Math. Szeged* **32** (1971), 185—193 (Lajos Sándorral), MR 46 # 5397, 42 # 319.

[65] On minimal bi-ideals of rings, *Acta Sci. Math. Szeged* **32** (1971), 333—336, MR 46 # 5397.

[66] On the idealizer of a subring, *Monatsh. Math.* **75** (1971), 65—68, MR 45 # 3472.

[67] A class of regular rings, *Monatsh. Math.* **75** (1971), 168—172, MR 44 # 4049.

[68] The radical property of rings such that every homomorphic image has no nonzero left annihilators, *Math. Nachr.* **48** (1971), 371—375; Remark, *ibidem,* **64** (1974), 393—395, MR 44 # 4031, 50 # 4648.

[69] Almost right quasiregular adjoint semigroups of rings, *Math. Nachr.* **48** (1971), 309—314, MR 44 # 6872.

[70] Rings which are radical modules, *Math. Japon.* **16** (1971), 103—104, MR 45 # 8673.

[71] Further characterization for the Jacobson radical of a ring, *Proc. Japan Acad.* **47** (1971), 810—811, MR 46 # 9094.

[72] A criterion for the existence of twosided unity element of semigroups, *Proc. Japan Acad.* **47** (1971), 812—814, MR 46 # 9209.

[73] An almost subidempotent radical property of rings, *Coll. Soc. J. Bolyai* **6** (1971, Keszthely), North-Holland, 1973, 483—499; Bemerkungen, *Estudos Mat. em homenagem ao Prof. A. Almeida Costa,* Lisboa, 1974, 127—130, MR 50 # 7234, 54 # 5288.

[74] On right residuals in lattice ordered groupoids, *Math. Nachr.* **53** (1972), 69—75, MR 48 # 8333.

[75] Certain subdirect sums of finite prime fields, *Coll. Math.* **25** (1972), 43—48, MR 46 # 1843.

[76] Short elementary proof of a ringtheoretical result, *Math. Japon.* **17** (1972), 113—114, MR 48 # 340.

[77] Some generalizations of strongly regular rings, I, *Math. Japon.* **17** (1973), 113—114; II—III, *ibidem,* **18** (1973), 87—94, MR 48 # 2178, 49 # 7302.

[78] On left magnifying elements and quasimodular right ideals of rings, *Math. Japon.* **18** (1973), 221—224, MR 50 # 411.

[79] On some simple Jacobson radical rings, *Math. Japon.* **18** (1973), 225—228, MR 50 # 379.

[80] On Hashimoto universal algebras with some properties of Hopf, *Math. Japon.* **18** (1973), 229—234, MR 50 # 210.

[81] Steinfeld Ottó egy gyűrűelméleti eredményének moduluselméleti analogonja, *MTA III. Oszt. Közl.* **21** (1972), 443—447, MR 48 # 2191.

[82] On hereditary radicals, *Periodica Math. Hungar.* **3** (1973), 235—241; Correction, *ibidem,* **6** (1975), 21 (Wiegandt Richárddal), MR 48 # 6158, 51 # 5645.

[83] On generalized subcommutative regular rings, *Monatsh. Math.* **77** (1973), 67—71, MR 47 # 5045.

[84] On some weakly supernilpotent radicals of rings, *Coll. Math.* **38** (1973), 195—201, MR 48 # 4014.

[85] Über das im Operatorring enthaltene allgemeine Radikal eines Untermoduls, *Acta Sci. Math. Szeged* **34** (1973), 371—376, MR 47 # 6754.

[86] Rings with radical maximal submodules, *Monatsh. Math.* **77** (1973), 354—356, MR 49 # 348.
[87] Vizsgálatok az algebrai struktúrák radikálelméletében, I, *MTA III. Oszt. Közl.* **22** (1973), 215—255; II, *ibidem,* **23** (1974), 1—32, MR 53 # 8118, 55 # 5677.
[88] Further characterization of strongly regular rings, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **22** (1974), 243—245, MR 49 # 7301.
[89] On strong semisimplicities of semigroups with zero, *Periodica Math. Hungar.* **5** (1974), 145—148, MR 50 # 13 339.
[90] A second almost subidempotent radical for rings, *Math. Nachr.* **66** (1975), 283—289, MR 52 # 469.
[91] The join-representation of some intersections in complete lattices, *Math. Japon.* **20** (1975), 17—19, MR 54 # 5066.
[92] On hereditary radicals of semigroups with zero, *Math. Japon.* **20** (1975), 89—92, MR 52 # 10932.
[93] The solution of a problem on upper radicals, *Math. Nachr.* **66** (1975), 101, MR 52 # 3214.
[94] Ein kurzer elementarer Beweis eines Satzes von O. Steinfeld über die einstufig nichtprimen Ringe, *Periodica Math. Hungar.* **7** (1976), 9—10, MR 54 # 7521.
[95] Ringe, in welchen jedes Element ein Linksmultiplikator ist, *Acta Sci. Math. Szeged* **38** (1976), 165—166, MR 53 # 8135.
[96] On regular rings, *Mat. Vesnik* **13** (1976), 163—165 (Lajos Sándorral), MR 56 # 3050.
[97] On the total logical independence of the axioms of S. A. Amitsur for general radicals of rings, *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.* **6** (1978), 149—151, MR 58 # 5756.
[98] On (m, n)-ideals in associative rings, *Publ. Math. Debrecen* **25** (1978), 265—273 (Lajos Sándorral), MR 80g: 16038.
[99] On the homomorphic closure of some semisimple classes, *Math. Seminar Notes, Kobe Univ.* **7** (1979), 287—290 (T. T. Hué-vel), MR 81e: 16005.
[100] A sufficient covering condition for a left duo ring to be nilpotent, *Math. Seminar Notes, Kobe Univ.* **7** (1979), 179—182 (T. T. Hué-vel), MR 80m: 16007.
[101] On the radical classes and transfree images of rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **35** (1980), 399—402 (T. T. Hué-vel), MR 82a: 16011.
[102] On the radical classes determined by regularities, *Acta Sci. Math. Szeged* **43** (1981), 131—139 (T. T. Hué-vel), MR 82k: 16006.
[103] On the extensions of nilpotent torsion rings by semisimple rings, *Bull. Austral. Math. Soc.* **24** (1981), 149—152 (I. A. Aminnal), MR 82m: 16011.
[104] On rings with (m, n)-properties, *Math. Seminar Notes, Kobe Univ.* **9** (1981), 247—252 (I. A. Aminnal), MR 83g: 16083.
[105] On rings without zero devisors, *Kyungpook Math. J.* **21** (1981), 179—190; *Proc. Conf. Algebra and Geom.,* Kuwait, 1981, 13—22, Kuwait Univ., 1982 (I. A. Aminnal), MR 83e: 16007, 84f: 16009.
[106] A topology on the class of unequivocal rings, *Math. Nachr.* **108** (1982), 307—311 (T. T. Hué-vel és Makai Endrével), MR 84f: 16011.
[107] Some notes on the upper and lower radicals, *Periodica Math. Hungar.* **13** (1982), 163—168 (T. T. Hué-vel), MR 83m: 16008.
[108] An example which shows that Thierrin's characterization for the Jacobson radical of a ring is properly new, *Kyungpook Math. J.* **23** (1983), 169—173, MR 85g: 16006.

[109] On the (m, k, n)-ideals of associative rings, *Kyungpook Math. J.* **27** (1987), 181—186, MR 89k: 16059.
[110] On Jacobson radical rings, *Serdica Bulg. Math. Publ.* **15** (1989), 174—175, MR 90i: 16005.
[111] Homological algebraic characterization of two important classes of Jacobson-semisimple associative rings, *Math. Japon.* **35** (1990), 1—7, MR 91f: 16007.

Egyéb publikációk:

[1] B. V. Kutuzov: Geometria, Tankönyvkiadó, Szoc. Nevelés Könyvtára, 91, 1954, Könyvismertetés, *Mat. Tanítása* 3 (1956), 144—146.
[2] 117. feladat, *Mat. Lapok* **11** (1960), 363, és megoldása, *ibidem,* **15** (1964), 369—372.
[3] Szász Gábor: Bevezetés a hálóelméletbe, Akadémiai Kiadó, 1959, Könyvismertetés, *Mat. Lapok* **13** (1962), 212—214.
[4] Mit jelent a társulati demokrácia? — Hozzászólás a Bolyai Társulat közgyűléséről írott cikkhez, *Műszaki Élet* **18:** 19 (1963), 2. old.
[5] V. M. Gluskov: Az automaták absztrakt elmélete, I, *MTA III. Oszt. Közl.* **13** (1963), 287—309, II, *ibidem,* **14** (1964), 72—110 (Fordítás).
[6] Hidrológiai függvények megközelítései telítetlen Hermite-féle interpoláció segítségével, és alkalmazásaik az agronómiai és műszaki vízgazdálkodásban, *Földrajzi Értesítő* **19** (1970), 233—260 (Góczán Lászlóval).
[7] A vízáteresztés és a felületi lefolyás meghatározása a lejtőszög függvényében, *Földrajzi Közlemények* **19** (1970), 108—113 (Góczán Lászlóval).
[8] A talaj látszólagos vízáteresztőképességének, mint a lejtőszög függvényének hidropedológiai vizsgálata, *Földrajzi Közlemények* **20** (1971), 261—266 (Góczán Lászlóval).

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ ФЕРЕНЦА САСА (1931—1989)

SCIENTIFIC WORKS OF FERENC SZÁSZ (1931—1989)

KÜRSCHÁK JÓZSEF*
(1864—1933)

STROMMER GYULA

> Ha bízunk önmagunkban és örömmel végezzük kötelességeinket, ha hivatásunkat nem tehernek, hanem erőink természetes érvényesítésének tekintjük, akkor nem maradhat el a siker.
>
> (*Kürschák József* beszámoló beszéde a József Műegyetem 1916/7. tanévéről, 30. l.)

Százhuszonöt évvel ezelőtt, 1864. március 14-én Budán született a hazai matematikatörténet kiemelkedő alakja, Kürschák József. Nekem jutott az a megtisztelő feladat, hogy ez alkalomból megemlékezzem életéről, tanári működéséről és tudományos közéleti tevékenységéről.

Kürschák az elemi iskola első két osztályát gyenge, beteges szervezete miatt magánúton végezte, míg a III. és IV. osztályt a kapucinusok vízivárosi iskolájában. Még tizedik évének betöltése előtt, 1873-ban beiratkozott a budapesti II. ker. áll. reáltanodába (a mai Toldy Ferenc gimnáziumba). E jónevű iskola anyakönyveit már akkor a műegyetem sok büszkeségének a neve ékesíti. Kürschák mind a nyolc osztályban az intézet jeles tanulója volt és az érettségi vizsgát is jeles eredménnyel tette le.

Már a középiskola felsőbb osztályaiban kezdett kibontakozni matematikai tehetsége, de — mint maga mondotta — ez időben még nem tanúsított különös érdeklődést a matematika iránt.

1881-ben azzal az elhatározással, hogy tanári pályára lép, beiratkozott a kir. József-műegyetem egyetemes osztályába, ahol öt évet töltött, 1886. március közepétől azonban a tanév végéig, tanulmányait abbahagyva, a debreceni főreáliskolán a matematika és ábrázoló geometria tanárát helyettesítette. Az egyetemes osztály a mérnöki, gépészi, építészi és vegyészi szakosztályok három-három évi tanfolyamára vagy matematikából és természettudományokból tanári pályára készülőknek nyújtott hivatásukhoz megkívánt kiképzést.

Tanárai közül Hunyady Jenő és különösen Kőnig Gyula voltak reá nagy hatással. A Hunyady és Kőnig által felváltva, később (1884-től) egymással párhuzamosan

---

* Kürschák József születésének 125. évfordulója alkalmából 1989. március 21-én a Magyar Tudományos Akadémián elhangzott előadás.

Kürschák József életét és működését méltató emlékbeszédek:

Rados Gusztáv: Kürschák József emlékezete. *A Magyar Tudományos Akadémia elhunyt tagjai fölött tartott emlékbeszédek,* XXII. köt. 7. szám. Budapest, 1934.

Stachó Tibor: Kürschák József. *Mat. Fiz. Lapok,* 43. köt. 1—13. l.

Ezeken kívül felhasználtam még Rados Gusztávnak Kürschák József ravatalánál mondott gyászbeszédét (*Mat. Fiz. Lapok,* 39. köt. 1—13. l.), a műegyetem levéltárában fellelhető tanácsülési jegyzőkönyveket, az egyetemes osztály 1881/82-ben és az 1882/83. tanévtől kezdve használatban volt törzskönyveit, Kürschák József 1896. június 17-én és 1900. május 5-én kelt, saját kézzel írott önéletrajzát és az 1884-től 1903/4-ig lefolyt időszakból a bölcsészdoktori szigorlatoknak a budapesti tudományegyetem levéltárában található jegyzőkönyvét, továbbá a budapesti II. ker. áll. reáliskola értesítőit, a kir. József-műegyetem programjait, rektori tanévnyitó és beszámoló beszédeit és az Akadémia Tagajánlásait. — Sok adat felkutatásában különösen Pedroni Emma Anna, a műegyetemi könyvtár levéltárosa volt szíves támogatni.

tartott szemináriumi gyakorlatokban, melyekben Kürschák másodéves korától kezdődőleg vett részt, sok leendő tanárral kedveltették meg a matematikát és sokukat vezették be a tudományos kutatás módszereibe.

Kürschák ismereteinek bővítése végett harmadéves korától kezdve a budapesti tudományegyetem bölcsészeti karán br. Eötvös Lorándnál és Fröhlich Izidornál fizikai s Kármán Mórnál pedagógiai és psichologiai előadásokat is hallgatott, valamint Eötvös fizikai praktikumában is tevékeny részt vett.

Kitűnő tanuló volt. Leckekönyve telve van szorgalmának s kitűnő készültségének bizonyságaival. Negyedéves korában pályakérdés sikeres megoldásáért díjat is nyert. Fölser István, az ábrázoló geometria tanára, bírálatában kiemeli, hogy Kürschák dolgozatában „a kitűzött kérdések meglepő egyszerű megfejtését adja."

Kőnig Gyula ösztönzésére még egyetemi hallgató korában önálló tudományos kutató munkához kezdett. Ennek első terméke „A körbe beírt és a kör körül írt sokszögekről" című értekezése, amelyet Kőnig Gyula 1887. február 12-én az Akadémia III. osztályának ülésén bemutatott. Kürschák e dolgozatában J. Steinernél lényegesen egyszerűbben és rövidebben kimutatja, hogy a körbe (illetve köré) írt közönséges *n*-szögek között a szabályosak kerülete és területe a legnagyobb (illetve legkisebb), s ezek a mérőszámok a szögpontok *bármely* szaporításánál növekedő (illetőleg csökkenő) sorozatot alkotnak. A szélsőértékek létezését Steinerrel szemben nem tételezi fel, hanem kimutatja. Ily módon — mint maga mondja — az elemi körmérés szigorú alapját adja.

Tanulmányainak befejezése után pedagógiai gyakorlat szerzése céljából két évet a budapesti középiskolai tanárképző intézet gyakorló gimnáziumában töltött és 1888-ban matematikából és fizikából kitűnő eredménnyel középiskolai tanári vizsgát tett. Az 1888/89. és az 1889/90. tanévekben a rozsnyói kath. főgimnáziumon, az 1890/91. tanévben pedig a budapesti V. ker. állami főreáliskolán helyettes tanár volt.

Ez időszakban jelennek meg első önálló dolgozatai a „Mathematikai és Természettudományi Értesítő"-ben, a „Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn"-ban és a „Mathematische Annalen"-ben.

1890-ben állt be életének legjelentősebb fordulata. Ez évben a budapesti tudományegyetem bölcsészeti karának benyújtotta „A variáció-számítás parciális differenciálegyenleteinek egy különös osztályáról" című doktori értekezését és ugyanaz év szeptember 11-én matematikából mint főtárgyból s a kísérleti és elméleti fizikából mint melléktárgyakból letette doktori szigorlatát. A szigorlati bizottság tagjai Kondor Gusztáv, Scholtz Ágost és Fröhlich Izidor voltak. A sikeresen kiállott szigorlat után az egyetem tanácsa 1890. október 11-én bölcsészdoktorrá avatta.

Még ez évben a műegyetemen matematikából sikeres magántanári próbaelőadást tartott és pályázatot nyújtott be a Hunyady Jenő halálával megüresedett matematikai tanszékre. A műegyetem tanácsa 1890. december 12-i ülésen az üresedésben álló tanszékre I. helyen a tanszék eddig is helyettes tanárát, Rados Gusztávot, II. helyen „ex aequo" Kürschák Józsefet és Schlesinger Lajost jelölte és ugyanaz napon Kürschákot matematikából műegyetemi magántanárrá képesítette.

Rados Gusztáv 1891. február 12-én ny. rk. tanárrá neveztetvén ki, az általa eddig betöltött repetitori állásra 1891. március 1-től Kürschák Józsefet nevezték ki, aki szolgálatát a rektor felkérésére már február 22. óta teljesítette is.

A repetitor a tanársegédnél magasabb, az adjunktusnál alacsonyabb beosztású segédtanerő. A matematika repetitora nincs tanszék mellé beosztva, feladata a repetitoriumok vezetése heti 6 órában, amiből 3 óra esik az analízisre és 3 a geometriára, amihez a matematika elemeinek a gimnazisták számára tartott heti 2 órás előadása járul.

A műegyetem egyik oszlopának, Szily Kálmánnak a nyugalomba vonulásával megüresedett analitikai mechanika és elméleti természettan tanszékét az 1891/92. tanévben Réthy Mór, a matematika ny. r. tanára helyettesítette, míg saját tanszékének előírt tárgyát, a geometriát, helyettes tanárként Kürschák József adta elő, heti 3 órában. Kevéssel rá, 1892. április 28-án Réthy Mórt áthelyezték az analitikai mechanika és elméleti természettan tanszékére, az üresedésbe jött matematika tanszéket pedig megszüntették, s az eddigi repetitori állás helyébe egy adjunktusi állást szerveztek, amelynek munkakörébe tartozott a szakosztályok kötelező tantervébe fölvett geometriai előadáson kívül még a matematikai gyakorlatok vezetése és a matematika elemeinek előadása is. Az újonnan szervezett adjunktusi állásra 1892 szeptemberében ideiglenes minőségben Kürschák Józsefet nevezték ki, aki az állást 1893. június 27-től mint szolgálattételre a műegyetemhez beosztott középiskolai rendes tanár tölti be.

Kürschák a heti 10—11 órás elfoglaltsága mellett heti három órás magántanári előadásokat is hirdet; kezdi az 1891/92. tanévben az elsőrendű parciális differenciálegyenletek elméletével; folytatja az 1892/93. tanévben a közönséges differenciálegyenletek elméletével; a rákövetkező tanévben az algebrai alakok elméletét adja elő; az 1894/95. tanév második felében pedig az irracionális számok elméletét.

Előadásai mellett a parciális differenciálegyenletekre vonatkozó kérdésekkel foglalkozik. A Magyar Tudományos Akadémia idevágó vizsgálatai alapján Kőnig Gyula ajánlatára 1896. május 15-én alig 32 éves korában levelező tagjává választja. Kevéssel rá, 1896. szeptember 24-én nyilvános rendkívüli tanári címben és jellegben részesül.

Kürschák az 1897/98. tanévtől kezdve eddigi előadásain kívül az építészek és vegyészek külön Analízis és geometria előadásait is tartja, heti 5 órában. A következő tanévtől ehhez még az Analízis II. folyamának előadása járul, heti 3 órában. Könnyebbséget csak az jelent, hogy a Geometria, majd egy évvel később az Analízis I. folyam gyakorlatait is Bauer Mihály tartja és 1898-ban megszüntetik a matematika elemeinek előadását a gimnáziumot végzettek számára.

A műegyetem tanácsa már 1897. március 11-én tartott üléséből a közoktatásügyi miniszterhez intézett felterjesztésében egy újabb matematikai tanszék felállítását kéri, melynek betöltésére Kürschák Józsefnek még az év szeptember havában nyilvános rendkívüli tanárrá való kinevezését javasolja, ami csak három évvel később, 1900. július 31-én történt meg.

1902-ben az Analízis II. folyam előadásait Rados Gusztáv vette át és az Analízis I. folyamának heti 4 órás előadásait a heti 3 órában Kürschák által tartott Geometriába olvasztották be. Kürschák ettől kezdve véglegesen az Analízis és geometria I. folyamának heti 6 órás előadását tartja[1], melybe a vegyészek és építészek is bekapcsolódnak. A későbbiekben csak annyiban történt változás, hogy 1911/12-ben még egy éven át tartja az építészek és vegyészek számára újból bevezetett külön Matematika heti 3 órás előadását is, melyet később König Dénes mint meghívott előadó vett át.

Közben, 1904. június 5-én, negyven éves korában, nyilvános rendes tanárrá nevezték ki.

---

[1] A tananyag: Determinánsok és elsőfokú egyenletrendszerek. A valós számok és a mérés. Komplex számok. Határértékek. — Differenciálhányados és határozatlan integrál. Véges Taylor-sor és alkalmazásai. Síkgörbék alaki viszonyai. A határozott integrál és alkalmazásai a terület és ívhossz kiszámítására. Az elemi függvények értelmezése komplex változó esetében és hatványsorba való kifejtésük. — Analitikai geometria. A síkban: a pont, az egyenes és a kúpszeletek; a térben: a pont, az egyenes, a sík és a másodrendű felületek.

Kürschák, mint 1896-tól a tanári testület tagja, 1910/11-ig különleges előadásokat is tart, heti 2-3 órában. Ezeknek tárgya volt: 1897/98. első, illetve második felében a bilineáris alakok elmélete és a függvénytan; az 1899/900. és 1903/4. tanévekben a differenciálegyenletek; 1900/901-ben és ettől kezdve minden második évben a projektív geometria; az 1901/2. és az 1909/10. tanév első felében a képzetes térelemek; 1907/8-ban pedig az elimináció. 1905/6-tól hozzájuk járulnak a tanárjelölteknek tartott heti 2 órás matematikai gyakorlatok, melyeknek anyaga évenként változott. Ezeket a gyakorlatokat az 1921/22. tanév kivételével a későbbi években is, egészen 1931-ig meghirdette. Az 1912/13. és a reá következő tanévben önként jelentkező mérnök és gépészmérnök hallgatóknak is tartott heti 2 órában gyakorlatokkal egybekötött előadásokat „Matematikai társaság" címen.

A tanárjelölteknek tartott gyakorlatokon kívül 1911/12-től fogva, mint az országos tanárvizsgáló bizottság tagja is kivette részét a tanárképzés munkájából.

Tanári tevékenységének szép eredménye az 1920-ban megjelent „Analízis és analitikus geometria" első kötete, mely előadásainak egy részét öleli fel. E műve, mely tárgyalásának tudományos szigorával, az előadás világosságával és könnyen érthetőségével tűnik ki, sajnos befejezetlen maradt, mert Kürschák a könyvet a hallgatóság igényeitől eltérőnek, s őt magát előadói szabadságában gátlónak találta.

Kürschák József a műegyetem egyik legnagyobb tiszteletnek örvendő és legnépszerűbb tanára volt, akit hallgatói nem csak nagy tanári erényeiért szerettek, hanem derűs egyéniségéért is. Számos történetet jegyeztek fel róla a műegyetem humorának évkönyvei.[2]

Hogy milyen volt mint előadó, arra nézve utóda, Stachó (később Szentmártony) Tibor volt műegyetemi ny. r. tanár véleményére támaszkodhatunk, aki 1922-től előbb tanársegédi, majd adjunktusi minőségben több mint tíz éven át közvetlen munkatársa volt. Szerinte Kürschák világos, érthető előadó volt, aki előadásaiban a lényeges összefüggésekre helyezte a fő súlyt és szántszándékkal kerülte a tisztán elméleti érdekű részleteket, anélkül, hogy pongyolaságokat követett volna el. Elsősorban matematikai gondolkodásmódra nevelt. Elve volt, hogy keveset, szabatosan és mindenekfelett önálló gondolkodásra serkentően tanítson.

Kürschák egyetemi tanári működése természetesen nem merült ki a tanításban. Élénken részt vett a kari és egyetemi ügyek intézésében is. 1906/7-től 1908/9-ig a vegyészmérnöki szakosztály és a vele kapcsolatban fenállott egyetemes osztály dékánja, az 1916/17. és az 1917/18. tanévekben pedig a műegyetem rektora volt.

A műegyetem hallgatóinak száma az 1909/10. tanévtől kezdve, amikor az új lágymányosi intézet megnyílt, rendkívüli mértékben növekedett. Ilyen körülmények között elkerülhetetlenül szükségesnek mutatkozott egy, esetleg két új műegyetem felállítása. A műegyetem tanácsa által Kürschák elnöklete alatt kiküldött bizottság a második műegyetem helyére nézve Temesvár mellett foglalt állást. A harmadik műegyetem elhelyezéséül Kassa jött szóba, ahová a selmeci bányászati, kohászati és erdészeti főiskola is áthelyezhető lett volna. Kürschák sokat fáradozott a javaslatok kidolgozásán. Emellett sok munkát adott az 1917/18. tanév második felében szabadságolt több mint kétezer katonahallgató számára tartott pótló tanfolyamok szervezése is.

Kürschák tanári működése mellett továbbra is a többváltozós variációs feladatok megoldásában szereplő parciális differenciálegyenletekre vonatkozó vizsgálatokkal foglalkozott. E tárgy iránt — mint egy helyen maga mondja — Kőnig

[2] A „Vicinális dugóhúzó", a „Megfagyott muzsikus" és a „Retorta sziporka". Aki ezekbe belekerült, az belekerült a műegyetemi ifjúság által emelt Pantheonba is.

Gyulának egy elejtett mondata keltette fel az érdeklődését másodéves hallgató korában. E vizsgálatai a figyelemre méltó értekezések hosszú sorozatában láttak napvilágot. De nagy nemzetközi sikerét csak 1912 augusztus havában Cambridgeben tartott nemzetközi matematikai kongresszuson bemutatott „Határértékképzés és általános testelmélet" című tanulmányával érte el, mely a számtestek elméletének nagy fordulatot adott és számos matematikust új munkára ösztönzött. Legismertebb eredményei azonban a geometria körébe tartoznak. Legyen szabad itt két idevágó dolgozatról röviden megemlékeznem.

Hilbert 1899-ben megjelent „Grundlagen der Geometrie" című híres ünnepi iratában azt a kérdést is vizsgálja, hogy melyek azok a geometriai feladatok, amelyek megoldásához a vonalzón kívül csak *hosszátvivő,* vagyis oly eszköz kell, amely tetszés szerinti vonaldaraboknak egyik egyenesről tetszés szerinti más egyenesre való átrakását teszi lehetővé. Kürschák 1902-ben a Math. Annalen 55. kötetében megjelent másfél oldalas dolgozatában kimutatja, hogy ezekben a szerkesztésekben a hosszátvivő *alapmérték*-kel pótolható, amellyel csak egy, egyszer s mindenkorra megszabott hosszúságú vonaldarabot tudunk átrakni. Hilbert említett művének azóta megjelent 11 kiadásában ezt az eredményt felfedezőjének nevével együtt megtaláljuk.

Másik széles körben ismert kis értekezése még 1898-ban a „Mat. und Naturw. Berichte aus Ungarn" című folyóiratban jelent meg, amelyben rendkívül szellemes és szemléletes módon minden számítás nélkül igazolja azt az ismert tényt, hogy a körbe írt szabályos tizenkétszög területe a sugár fölött emelt négyzetének a háromszorosával egyenlő.

Ezeken kívül a Tentamen — geometriai részeket tartalmazó — második kötetének újabb kiadásában segédkezik és Paul Stäckellel együtt kiadja Bolyai Jánosnak Lobacsevszkij vizsgálataira vonatkozó észrevételeit, jegyzetekkel ellátva.

Kürschák Józsefet, mint matematikust, éles kritika, egyszerűsítésre és általánosításra való képessége, intuíciójának ereje és eredeti ötletekben való gazdagság jellemzi. Ennek köszönhető az is, hogy jelentős kutatásai mellett számos előtte már ismert eredménynek egyszerűbb, jóval áttekinthetőbb bizonyítását adja és az észrevett hiányosságokat pótolja.

Tudományos érdemeinek elismerése nem maradt el. Különösen a számtestekre vonatkozó kutatásai és az „Encyclopaedie des Sciences Mathematiques"-ban a számtestek általános tulajdonságairól (Landsberg német cikke nyomán) Hadamard-ral együtt írt összefoglalása alapján Rados Gusztáv, br. Eötvös Loránd és Fejér Lipót Kürschákot az Akadémiának rendes tagul való megválasztásra ajánlotta, megállapítva, hogy „most, midőn Kőnig Gyulának, a tanítójának és mesterének elhunytával egyik rendes tagsági hely megüresedett, ennek betöltésére Kürscháknál méltóbbat, önzetlen tudományszeretetben, tudományos sikerekben gazdagabb matematikust alig találhatnánk." Az Akadémia tagválasztó gyűlése 1914. május 7-én rendes tagul meg is választotta. Székét még az év december 14-én foglalta el „A kettős integrálok variálásánál fellépő főegyenletek azonos eltűnéséről" című értekezésével. Ettől kezdve nagyobb dolgozata többé nem jelent meg.

Külföldi kitüntetésben is volt része: tudományos érdemei és a „Revue semestrielle des publications mathematiques" c. hollandiai folyóirat állandó munkatársaként 1902-től fogva kifejtett tevékenységének elismeréseként a németalföldi tudományos társaság (Nederlandsch wiskundig genotschap) 1907-ben külföldi tagjává választotta.

Az Akadémiának nemcsak tudományos életében vett részt, hanem ügyeinek intézésében is. 1901-től kezdve előbb Schafarzik Ferenc, utóbb Mauritz Béla társa-

ságában több mint harminc éven át szerkesztette a Matematikai és Természettudományi Értesítő német nyelvű változatát, a „Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn" című folyóiratot. A M. Tud. Akadémia 1931. május 15-én III. osztályának titkárává és egyszersmind igazgatósági tagjává választotta meg. Mint osztálytitkár szerkesztette az Értesítőt is.

A tanítás és a tudomány művelése mellett jelentős tevékenységet fejtett ki a tudomány terjesztésében is. A Matematikai és Fizikai Társulatnak alapítása óta egyik legtevékenyebb tagja volt. Ezt igazolják e társulat folyóiratában, a Math. és Phys. Lapokban számos könyvismertetésen, nekrológon és feladatmegoldáson kívül a körmérésről, az invariánsok elméletéről, az analitikai és az egész függvényekről írt — sok munkát és kevés tudományos sikert jelentő — terjedelmes ismertető dolgozatai, melyek a matematika fontos fejezeteinek újabb fejlődéséről nyújtanak kitűnő áttekintést. Közülük a körmérés elméletéről és történetéről írt cikksorozata valamely világnyelven, könyvalakban történt kiadása esetén — úgy vélem — magában véve elegendő volna, hogy szerzője nevét a feledéstől megóvja.

A folyóirat mellett az előadóülések voltak a társulati élet legfontosabb megnyilvánulásai. Kürschák 1902-ig évenként két, sőt néha három előadást is tartott. Később is gyakran, utoljára halála előtt nem egészen négy héttel, a Társulat Rados ünnepélyén tartott előadást.

1892-ben indultak meg a Pallas Nagy Lexikonának előmunkálatai, melyben a Társulat élénken részt vett. A lexikonba Kürschák is számos kitűnő cikket és életrajzot írt.

A Társulat 1894 óta minden év őszén az illető évben érettségi vizsgát tett tanulók közt matematikai versenyt rendezett oly célból, hogy a versenyzőknek a matematika művelésére való rátermettségét megállapítsa. A későbbi kiváló matematikusok egész sora aratta első tudományos sikerét ezeken a versenyeken. A versenyeknek ez a nagy sikere nem kis mértékben Kürschák József ügyszeretetének és hozzáértésének volt köszönhető, aki sokszor a Társulat által kiküldött bíráló bizottságnak is tagja volt. Kürschák 1929-ben „Matematikai versenytételek" címén kiadta az első 32 verseny anyagát, mely a „Középiskolai Matematikai Lapok Könyvtára" c. sorozatban jelent meg. Kürschák e könyvében, mely az elemi matematika irodalmának remeke, nemcsak mintaszerű megoldásokat közöl, hanem ezekhez jegyzeteket is csatol, melyek a kitűzött feladatok és nevezetes tudományos eredmények között fennálló kapcsolatokra világítanak rá, máskor a matematika egy egész ágába nyújtanak bepillantást, mint pl. az a 12, egymást elszórtan követő jegyzet, melyek együttvéve a számelmélet legelső elemeinek valóságos kis tankönyvét alkotják.

Kürschák a Társulat ügyeinek intézésében is élénk tevékenységet fejtett ki. Az 1898-tól 1923. évig terjedő időben a Társulat egyik jegyzője volt. 1930-ban a választmány tagjává és 1931. május 30-án a Társulat alelnökévé választották.

A közoktatás ügyét szolgálva, 1922-től 1927-ig mint az Országos Közoktatásügyi Tanács[3] előadója, részt vett a matematika új tanterveinek kidolgozásában. 1928-tól kezdve tagja volt egyébként az Országos Ösztöndíjtanácsnak is.

Mint a Felső Oktatási Egyesület igazgatósági tagja, kivette részét hazánk tanügyi mozgalmaiból is.

1933. március 23-án, életének 70. évében váratlanul ragadta el a halál.

---

[3] Az Országos Közoktatási Tanács a közoktatási minisztérium véleményező testülete volt, melynek hatásköre a közoktatási miniszter ügykörébe eső iskolákra vonatkozó elvi kérdésekre terjedt ki. A tanács elnöke a vallás- és közoktatásügyi miniszter volt, másodelnökét, titkárát, 10—12 előadóját és tagjait öt-öt évre nevezték ki. Az elnök, a titkár és az előadók együtt a tanács állandó bizottságát alkották.

Az a szép beszéd, melyet Kürschák József ravatalánál tanártársa, Rados Gusztáv mondott, úgy állítja elénk őt, mint akit pályatársai nemes tudományszeretetéért, egyenes jelleméért, szerénységéért és szókimondó bátorságáért tiszteltek, szolgálatkészségéért és jószívűségéért pedig szerettek.

Érdemekben gazdag munkás élete szolgáljon példaként a jövő nemzedékek számára.

ЙОЖЕФ КЮРШАК (1864—1933)

Д. ШТРОММЕР

JÓZSEF KÜRSCHÁK (1864—1933)

G. STROMMER

KÜRSCHÁK JÓZSEF ALGEBRAI MUNKÁSSÁGÁRÓL*

SCHMIDT TAMÁS

Algebrával foglalkozó monográfiában — szinte valamennyiben — találkozhatunk Kürschák József nevével. Talán kevéssé ismeretes, hogy a 20. században kifejlődött ún. modern algebra egyik legszebb elméletének éppen Kürschák a „szülőapja". Ezt az elméletet ma értékeléselméletnek nevezzük. Meglepő, hogy ez az elmélet, amely a gyakorlati alkalmazások szempontjából is jelentős, Kürschák egyetlen algebrai dolgozatának köszönhető (Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, *J. reine u. angew. Math.* **142** (1913), 211—253). Másrészről Kürschák József munkásságát méltató tanulmányok ezt a legjelentősebb alkotásaként említik. Jelen ismertetésben ezen elmélet lényegét szeretném bemutatni.

Mindenekelőtt azt vizsgáljuk meg, hogy a racionális számok testéből kiindulva, hogyan juthatunk el a valós számokhoz. Leggyakrabban a Dedekind-féle szeletalkotást használják, de régóta ismeretes egy másik módszer is, amely a racionális számok testének, **Q**-nak az elrendezettségén, ill. az abszolút érték fogalmán nyugszik. (Általában egy K test elrendezett, ha elemei között értelmezve van egy $\leqq$ ún. rendezési reláció, hogy bármely két elemre $a \leqq b$ vagy $b \leqq a$ teljesül, ezenkívül $a \leqq b$ és $c \leqq d$ esetén $a+c \leqq b+d$, továbbá $a \leqq b$, $0 \leqq c$ maga után vonja $ac \leqq bc$-t.) Az $a \in \mathbf{Q}$ abszolút értéke $|a|$, az a és $-a$ közül a nemnegatív. Segítségével értelmezhetjük az alapsorozatot, ami egy olyan $[a_i]=\{a_1, a_2, \ldots\}$ sorozat, hogy minden pozitív $\varepsilon \in \mathbf{Q}$-hoz létezik egy $n=n(\varepsilon)$ természetes szám, amelyre teljesül, hogy $|a_p-a_q|<\varepsilon$, valahányszor $p, q>n$. Ha $[a_j]$ és $[b_i]$ alapsorozatok, akkor képezni tudjuk ezek összegét, a $c_n=a_n+b_n$, illetve szorzatát a $d_n=a_nb_n$ szabályok segítségével. Könnyű látni, hogy ezen műveletekre nézve a **Q**-ból képezhető alapsorozatok egy R gyűrűt alkotnak. Egy $[a_i]$ sorozat nullsorozat („0-hoz konvergál"), ha minden ε-hoz létezik olyan n, amelyre $|a_p|<\varepsilon$, ha $p>n$. A nullsorozatok az R gyűrűnek egy $\mathfrak{I}$ ideálját alkotják. Az $R/\mathfrak{I}$ maradékosztálygyűrű (más néven faktorgyűrű) éppen a valós számok **R** teste. Ha $a \in \mathbf{Q}$-nak megfeleltetjük az $a, a, a, \ldots$ konstans sorozatot, úgy a **Q**-nak **R**-be való beágyazását nyerjük.

A leírt konstrukció természetesen régóta jól ismert, de Kürschák észrevette, hogy igen jelentős mértékben általánosítható. Minden valószínűség szerint elméletének megalkotásához döntő módon járult hozzá, hogy K. Hensel 1908-ban megjelent könyvében (Theorie der algebraischen Zahlen) bevezette az ún. p-adikus számok fogalmát.

Testek általában nem elrendezhetők, például a komplex számok teste sem az, hiszen amennyiben $i>0$ lenne, akkor négyzetre emelve $-1=i^2>0$ adódna, majd

* Kürschák József születésének 125. évfordulója alkalmából 1989. március 21-én a Magyar Tudományos Akadémián elhangzott előadás.

ezen két egyenlőtlenséget összeszorozva $-i>0$-t kapunk, ami ellentmond $i>0$-nak. Hasonlóan nyerünk ellentmondást, ha $i<0$. Ezt a nehézséget Kürschák a következő ötlettel hidalta át. Legyen $\mathcal{K}$ egy test és tekintsünk egy további, de elrendezett K testet (amely többnyire vagy a racionális vagy a valós számtest). Egy $\varphi: \mathcal{K} \to K$ leképezést a $\mathcal{K}$ értékelésének nevezzük, ha a következők teljesülnek:

(1) $\varphi(a) > 0$, ha $a \neq 0$ és $\varphi(0) = 0$,

(2) $\varphi(a+b) \leqq \varphi(a)+\varphi(b)$,

(3) $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Ez esetben $\mathcal{K}$ ún. értékelt test. A legegyszerűbb példa, ha $\varphi(a)=1$ minden $a \neq 0$ elemre, ez az ún. triviális értékelés. Amennyiben $\mathcal{K}$ megegyezik $\mathbf{Q}$-val, úgy $\varphi(a)=|a|$ az abszolútérték értékelés. $[a_i]$ alapsorozat, ha minden pozitív $\varepsilon \in K$-hoz létezik olyan n, hogy $\varphi(a_p - a_q) < \varepsilon$, amennyiben $p, q > n$. Egy alapsorozatnak a φ-határértéke az $a \in \mathcal{K}$, ha minden ε-hoz létezik olyan n, hogy $\varphi(a_p - a) < \varepsilon$, ha $p > n$. Nullsorozat olyan alapsorozat, amelynek létezik φ-határértéke, és az 0. A már említett módon az alapsorozatok összegét és szorzatát értelmezhetjük és ily módon egy R gyűrűt kapunk, amelynek a nullsorozatok egy $\mathcal{I}$ ideálját képezik. Tekintsük a $\overline{\mathcal{K}} = R/\mathcal{I}$ maradékosztály gyűrűt, amelyről kimutatható, hogy test, amelynek $\mathcal{K}$ részteste. Erre a $\overline{\mathcal{K}}$ testre a φ értékelést kiterjeszthetjük. Kimutatható, hogy $\overline{\mathcal{K}}$ ez ismertetett konstrukcióval tovább már nem bővíthető, azaz ha $\overline{\mathcal{K}}$ elemeiből képezünk alapsorozatokat, akkor ezeknek mindig van $\overline{\mathcal{K}}$-ban φ-határértéke. Ez indokolja az elnevezést is, ti. $\overline{\mathcal{K}}$-t a $\mathcal{K}$ perfekt burkának nevezzük. A $\mathbf{Q}$ perfekt burka az abszolútérték értékelésre nézve a valós számtest. Vajon létezik-e ettől lényegesen eltérő példa? Itt jelennek meg a már említett p-adikus számok. Legyen p egy rögzített prímszám, akkor minden r racionális szám egyértelműen írható

$$r = \frac{k}{l} \cdot p^{\omega_p(r)}$$

alakba, ahol k és l p-vel nem osztható egészek. Az r racionális szám p-adikus értékelése $\omega_p(r)$. Ennek segítségével előálló perfekt test $\mathbf{Q}_p$ (a $\mathbf{Q}$ p-adikus burka) a p-adikus számok teste. Ezek a számok $\alpha = a_m p^m + a_{m+1} p^{m+1} + \ldots$ alakban írhatók, ahol $a_i = 0, 1, \ldots, p-1$.

Kürschák elméletét A. Ostrowski fejlesztette tovább és tette teljessé. Fő tételei mutatják, hogy milyen kiváló érzékkel nyúlt az abszolútérték fogalmának általánosításához. Kimutatta ugyanis, hogy $\mathbf{Q}$ valós értékelései (tehát amikor $K=\mathbf{R}$) a triviális, az abszolútérték és a p-adikus értékelések. A másik Ostrowski tételhez szükségünk van az archimedesi elrendezésre, ami azt jelenti, hogy minden $a \in K$-hoz létezik olyan n természetes szám, amelyre $n \cdot 1 > a$ (1 a K egységeleme). Ostrowski kimutatta, hogy archimedesien értékelt perfekt test csupán kettő létezik, a valós számtest és a komplex számok teste.

Azok számára, akik részletesen meg szeretnének ismerkedni az értékeléselmélettel, Rédei László „Algebra" c. monográfiáját ajánlhatom, ahol egy teljes fejezet foglalkozik ezen elmélettel.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЙОЖЕФА КЮРШАКА

Т. ШМИДТ

ON THE ALGEBRAIC WORK OF JÓZSEF KÜRSCHÁK

T. SCHMIDT

FRIED ERVIN 60 ÉVES

SCHMIDT TAMÁS

A hazai algebrai iskola egyik legjelesebb tagja, Fried Ervin, 1989-ben töltötte be 60. évét. A magyar algebristák széles tábora szeretettel köszöntötte ebből az alkalomból. Igen jelentős tudományos tevékenysége mellett algebrista generációk sokaságát nevelte fel és indította el pályáján. Ma már legendás múltja van a 70-es évek derekán megalakított Fried-szemináriumoknak, amely sajátos varázslatával nagymértékben járult hozzá, hogy sok tehetséges matematikushallgató az algebrát választotta kutatási területéül. Ebben bizonyára nagy szerepet játszott Fried Ervinnek az a képessége, hogy viszonylag gyorsan tud mások gondolatvilágába bekapcsolódni, és így nagy segítséget tud adni mások kutatásaihoz. Közvetlen egyénisége is részese annak, hogy hallgatói mindig bátran és bizalommal fordulnak hozzá. Végül széles nemzetközi kapcsolatai révén olyan légkört tudott teremteni, hogy a fiatalok igen hamar be tudtak kapcsolódni a nemzetközi kutatásokba. Számos nyelvre lefordított könyvei is nagy elismerést váltottak ki. Tehetséges és nagyfokú aktivitásán kívül hazai algebrai életünk nélkülözhetetlen színes egyénisége. Reméljük, még sok algebrista nemzedék felnevelésében fog tevékenyen részt venni, és továbbra is sok szép eredménnyel fogja gazdagítani az algebrát.

Tudományos munkáját elsősorban a mellékelt dolgozatlista mutatja be, itt a rövidség kedvéért csak egy szubjektív válogatás alapján néhány dolgozatáról szeretnék részletesebben szólni.

Pályakezdésétől számított első 10—12 évet néhány szép elegáns dolgozat jellemzi, de összességét tekintve talán mai divatos szóhasználattal élve — a kibontakozás évei voltak. Több egymástól távol eső témával foglalkozott. Didaktikai szempontból fontosak a komplex számok bevezetésére vonatkozó eredményei ([4], [8]) és az egyenletek megoldóképleteivel kapcsolatos megjegyzései [6, 14]. Ezen időszakból származik az a dolgozata [17], amelyben a konjugált részcsoportok részben rendezett halmazát vizsgálta.

A 60-as évek második felében a tournamensek szisztematikus vizsgálatát kezdte el, ezek a hálóknak olyan általánosításai, ahol az asszociativitást nem kötjük ki. Ebben a témában igen nagyszámú dolgozatot publikált, és az eredményei igen szépek és mélyek. A téma alkalmazhatósága szempontjából is nagyon hasznosnak bizonyult [18, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 41, 48]. Korábban Fried Ervin elsősorban a „klasszikus" struktúrákkal, csoportokkal, testekkel foglalkozott. A tournamensek vizsgálata vezette el az univerzális algebrák és hálók vizsgálatához. Ezt elősegítette, hogy több évet tölthetett el Winnipegben a téma egyik legjelentősebb centrumában. A nem asszociatív hálókat választotta doktori értekezése témájául, amelyet 1970-ben védett meg. Az azóta eltelt években sokan kapcsolódtak a témához és számos vizsgálatnak Fried Ervin eredményei szolgálnak kiindulópont gyanánt.

Egy másik jelentős kutatási témáját G. Sichlerrel kezdte meg [34] dolgozatában, ahol integritási tartományok homomorfizmusait vizsgálta. Ez azután természetes módon vezetett az automorfizmusokhoz, így az automorfizmus csoportok vizsgálatához [35]. A témát egy rendkívül szép és igen érdekes eredmény zárta le [44] dolgozatában. Kollár Jánossal kimutatta, hogy minden csoport egy test automorfizmuscsoportja. Testek automorfizmuscsoportjai mellett univerzális algebrák automorfizmuscsoportjával és részstruktúrahálóinak kapcsolatával [38] is foglalkozott.

Egyik sokat idézett munkája [40] Grätzer Györggyel és R. Quackenbushsal közösen készült, amelyben univerzális algebráknál az ún. uniform kongruenciaformákkal foglalkozik.

Legjelentősebb és legszebb dolgozatai közt kell említeni A. Pixley-vel közös dolgozatát [46], ahol a korábban már ismert discriminátor függvény fogalmát dualizálják. Ezen eredmények később rendkívül hasznosnak bizonyultak, és későbbi univerzális algebrai vizsgálatok kiindulópontjaként szerepelnek. Álljon itt a review véleménye a dolgozattal kapcsolatban: „The important paper should be read by every universal algebraist."

Sikeresen bekapcsolódott a bécsi Nöbauer-iskola kutatásaiba és Márki Lászlóval, ill. H. Kaiserrel együtt több szép eredménye született az interpolációval kapcsolatban. Kiemelkedő fontosságúak az ún. kongruencia kiterjesztési tulajdonsággal kapcsolatos vizsgálatai [53], amelyekbe tanítványai közül is többen igen eredményesen kapcsolódtak be.

Az utóbbi évek eredményei között szólni kell a Grätzer Györggyel közös dolgozatáról [62], ahol varietások szorzatával foglalkoznak. Az elmúlt időben hálók ragasztásával és az amalgamation kérdésével foglalkozott. Ebben a témakörben részben Grätzer Györggyel és H. Lakserrel együtt számos szép eredményt ért el.

FRIED ERVIN MUNKÁINAK JEGYZÉKE

Tudományos dolgozatok:

[1] Über als echte Quotientenkörper darstellbare Körper, *Acta Sci. Math.* **XV** (1954), 143—144.
[2] Gyökök lineáris kombinációjáról, *MTA III. Oszt. Közl.* **IV** (1954), 155—162.
[3] Algebrailag zárt testek mint véges bővítések, *Mat. Lapok* **VI** (1956), 47—60.
[4] Über die Frage der Einführung der komplexe Zahlen (Varga Tamással), *Publ.Math.* **IV** (1956), 484—487.
[5] On Galois-modules of vector-spaces, *Publ. Math.* **VI** (1959), 101—110.
[6] Über eine Verallgemeinerung der Auflösbarkeit von Gleichungen, *Annales Univ. Sci. Budapest* **II** (1959), 67—71.
[7] Egy polinomokra vonatkozó számelméleti eredményről (Surányi Jánossal), *Mat. Lapok* **XI** (1960), 75—84.
[8] Megjegyzések a komplex számok bevezetéséhez, *Mat. Lapok* **XIV** (1963), 103—106.
[9] On the subgroups of an Abelian group that are ideals in every ring, *Proc. on Abelian Groups 1963, Tihany* (1964), 51—55.
[10] Beitrage zur Theorie der Frobenius-Algebren, *Math. Ann.* **155** (1964), 265—269.
[11] A véges Abel-csoportok alaptételének egy rövid bizonyítása, *Mat. Lapok* **XV** (1964), 225—227.
[12] A characterization of the adjoint of linear transformations, *Annales Univ. Sci. Budapest* **VIII** (1965), 101—105.
[13] Representation of partially ordered groups, *Acta Sci. Math.* **26** (1965), 15—18.
[14] Az egyenletek megoldóképletére vonatkozó néhány fogalom tisztázása, *Mat. Lapok* **XVIII** (1967), 293—296.
[15] Note on representation of partially ordered groups, *Annales Univ. Sci. Budapest* **X** (1967), 85—87.
[16] A teljes mátrixgyűrűk egy tulajdonságáról, *Mat. Lapok* **XX** (1969), 63—70.

[17] Über die teilweise geordnete Menge der konjugierten Untergruppen, *Annales Univ. Sci. Budapest* **XII** (1969), 95—100.
[18] On homogeneous tournaments, *Coll. Math. Comb. Tihany* (1969), 467—476.
[19] A generalization of ordered algebraic systems, *Acta Sci. Math.* **31** (1970), 233—244.
[20] Tournaments and non-associative lattices, *Annales Univ. Sci. Budapest* **XIII** (1970), 151—164.
[21] Preideals in modules, *Periodica Math. Hung.* **1** (1971), 163—169.
[22] Some remarks on simple tournaments (Erdős Pállal, Hajnal Andrással, Eric Milnerrel), *Alg. Univ.* **2** (1972), 238—245.
[23] A non-associative extension of the class of distributive lattices (G. Grätzerrel), *Pac. J. Math.* **49** (1973), 59—78.
[24] Weakly associative lattices with join and meet of several elements, *Annales Univ. Sci. Budapest* **XVI** (1973), 93—98.
[25] Homomorphism of commutative rings with unit elements (J. Sichlerrel), *Pac. J. Math.* **45** (1973), 485—491.
[26] Some examples of weakly associative lattices (G. Grätzerrel), *Colloquium Math.* **27** (1973), 215—221.
[27] Weakly associative lattices with congruence extension property, *Alg. Univ.* **4** (1974), 151—162.
[28] Subdirect irreducible weakly associative lattices with congruence extension property, *Annales Univ. Sci. Budapest* **XVII** (1974), 59—68.
[29] Equational classes which cover the class of distributive lattices, *Acta Sci. Math.* **37** (1975), 37—40.
[30] Weakly associative lattices and projective planes (T. Sós Verával), *Alg. Univ.* **5** (1975), 114—119.
[31] Prime factorization, algebraic extension and construction of weakly associative lattices, *Acta Math. Sci. Hung.* **26** (1975), 241—244.
[32] Connectedness and disconnectedness of graphs (Wiegandt Richárddal), *Alg. Univ.* **5** (1975), 411—428.
[33] Standard sublattices (Schmidt Tamással), *Alg. Univ.* **5** (1975), 203—211.
[34] Homomorphisms of integral domains of characteristic zero (J. Sichlerrel), *Trans. Amer. Math. Soc.* **225** (1977), 163—182.
[35] Automorphism group of integral domains fixing a given subring, *Alg. Univ.* **7** (1977), 373—387.
[36] Amalgamation and weak injectives in the equational class of modular lattices M_n (G. Grätzerrel és H. Lakserrel), *Notices* (1977).
[37] Partial and free weakly associative lattices (G. Grätzerrel), *Houston J. of Math.* **2** (1976), 501—512.
[38] On automorphisms of the subalgebra lattices induced by automorphisms of the algebra (G. Grätzerrel), *Acta Sci. Math.* **40** (1978), 49—52.
[39] On automorphism groups of subalgebras of a universal algebra (J. Sichlerrel), *Acta Sci. Math.* **40** (1978), 265—270.
[40] Uniform congruence schemes (G. Grätzerrel és R. Quackenbushsal), *Alg. Univ.* **10** (1980), 176—188.
[41] The equational classes generated by weakly associative lattices with unique bound property (G. Grätzerrel és R. Quackenbushsal), *Annales Univ. Sci. Budapest* **22—23** (1979—80), 205—211.
[42] A note on congruence extension property, *Acta Sci. Math.* **40** (1978), 262—263.
[43] Some properties of the category of integral domains, *Acta Math. Hung.* **41** (1983), 3—15.
[44] Automorphism groups of fields (Kollár Jánossal), *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **29** (1977), 293—303.
[45] Automorphism groups of algebraic number fields (Kollár Jánossal), *Math. Zeitschrift* **163** (1978), 121—123.
[46] The dual discriminator function in universal algebra (A. Pixleyvel), *Acta Sci. Math.* **41** (1979), 83—100.
[47] Equational bases for some non-associative generalization of the class of distributive lattices, *Annales Univ. Sci. Budapest* **22—23** (1979—80), 159—162.
[48] Interpolation in weakly associative lattices, *Studia Sci. Math. Hung.* **13** (1978), 193—200.
[49] A comment on automorphism group of fields, *Studia Sci. Math. Hung.* **14** (1979), 315—317.
[50] Interpolation in universal algebras (H. Kaiserrel és Márki Lászlóval), *Alg. Univ.* **15** (1982), 40—57.
[51] Abstract relational structures, I (Wiegandt Richárddal), *Alg. Univ.* **15** (1982), 1—21.
[52] Abstract relational structures, II (Wiegandt Richárddal), *Alg. Univ.* **15** (1982), 22—39.
[53] Connection between congruence lattices and polynomial properties (Kiss Emillel), *Alg. Univ.* **17** (1983), 227—262.

[54] Algebras with uniform principal congruences (Szabó Lászlóval és Szendrei Ágnessel), *Studia Sci. Math. Hung.* **16** (1981), 229—235.
[55] Congruence lattices of discrete RUCS varieties, *Alg. Univ.* **19** (1984), 177—196.
[56] Congruence lattices of filtral varieties (G. Grätzerrel), *Studia Sci. Math. Hung.* **19** (1984), 259—264.
[57] On a problem of Baldwin and Berman (Pálfy Péter Pállal), *Acta Sci. Math.* **49** (1985), 101—106.
[58] Perfect distributive lattices (G. Hansoullal, Schmidt Tamással, J. Varletval), *Contribution to general algebra* **3** (1985), 125—142.
[59] On the behaviour of congruence-functors, *Alg. Univ.* **24** (1987), 188—191.
[60] Integral domains form a universal category (J. Sichlerrel), *Proc. Conf. on algebraic aspects of combinatorics* (1975), 169—181.
[61] Notes on tolerance relations of lattices: On a conjecture of R. McKenzie (G. Grätzerrel), *Acta Sci. Math.* (megj. alatt).
[62] Generalized congruences and product of lattice varieties (G. Grätzerrel), *Acta Sci. Math.* (megj. alatt).
[63] Pasting and modular lattices (G. Grätzerrel), *Proc. Amer. Math. Soc.* **106** (1989), 885—890.
[64] Pasting infinite lattices (G. Grätzerrel), *J. Austr. Math. Soc.*, Ser. A, **47** (1989), 1—21.
[65] Projective geometries as cover preserving sublattices (G. Grätzerrel és H. Lakserrel), *Alg. Univ.* **27** (1990), 270—278.
[66] Majority reducts of lattice varieties (H. Lakserrel and R. Padmanabhannal,) (megj. alatt).
[67] Unique amalgamation property (G. Grätzerrel), *Annales Univ. Sci. Budapest* (megj. alatt).
[68] Strong amalgamation of distributive lattices (G. Grätzerrel), *J. of Algebra* **128** (1990), 446—455.
[69] Unique envelope property (G. Grätzerrel), (megj. alatt).
[70] Polynomial automorphisms of lattices (H. Lakserrel), *Alg. Univ.* **27** (1990), 371—384.
[71] Orderfunctional completeness of modular lattices, *Alg. Univ.* (átdolgozás alatt).
[72] Examples for 'CD' varieties which have 'EDPC' but not 'REDPC', *Acta Sci. Math.* (átdolgozás alatt).

Könyvek:

1. A matematikai osztályok tankönyvének „Számelmélet" c. fejezete (97—243), *Tankönyvkiadó*, 1966.
2. Matematikai Kisenciklopédia „Algebra" és „Számelmélet" c. fejezetek, *Gondolat*, 1968. Oroszul: *Akadémiai Kiadó*, 1976.
3. *Oszthatóság és Számrendszerek*. Szakköri füzet. *Tankönyvkiadó*, 1971.
4. *Absztrakt algebra elemi úton. Műszaki Könyvkiadó*, 1972, 1975. Lengyelül: *Pan'stwowe Wydawnictwo Naukowe Warsawa*, 1978. Oroszul: *Izdat'elstvo Mir*, 1979. Németül: *Akadémiai Kiadó Budapest* és *Harri Deutsch Verlag Thun-Frankfurt*, 1983.
5. *Klasszikus és lineáris algebra*. Egyetemi tankönyv. *Tankönyvkiadó*, 1977, 1981, 1985.
6. *Általános algebra*. Egyetemi tankönyv. *Tankönyvkiadó*, 1981, 1989.
7. *Algebra*. Tankönyv és Szakköri füzet. *Tankönyvkiadó*, 1985, 1987.
8. *Lineáris algebra*. Tankönyv és Szakköri füzet. *Tankönyvkiadó*, 1986.

Megjelent ezen kívül mintegy 20 ismeretterjesztő jellegű cikk.

ЭРВИНУ ФРИДУ 60 ЛЕТ

Т. ШМИДТ

ERVIN FRIED IS 60 YEARS OLD

T. SCHMIDT

A „BANACH-ELV"-RŐL

HORVÁTH MIKLÓS, JOÓ ISTVÁN és SZALKAI ISTVÁN

Bevezetés

Stefan Banach a század első évtizedeiben megalkotta a funkcionálanalízis számos klasszikus tételét, mint például a több változatban használt Banach—Steinhaus-tételt, a Hahn—Banach-tételt, a nyílt leképezés tételét, az inverz leképezés tételét, stb. (l. pl. Rudin [17] könyvében).

Általában véve munkásságának egyik fő iránya olyan tételek igazolása volt, melyek azt állítják, hogy egy konkrét módon megadott lineáris operátor folytonos. Az ő tiszteletére nevezzük Banach-elvnek a következő hipotézist:

Konstruktívan definiált Banach-téren értelmezett, konstruktívan megadott lineáris operátorok folytonosak.

(Mivel véges dimenziós Banach-tereken értelmezett lineáris funkcionálok folytonosak, így nyilvánvalóan csak végtelen dimenziós Banach-terekkel érdemes foglalkoznunk. Módszereinkben azonban a tér dimenziója nem lényeges.)

Ez még így nem egy tétel, hiszen nem mondtuk meg, mit jelent a „konstruktív" jelző. Világos, hogy transzfinit indukcióval megadható olyan lineáris operátor bármely végtelen dimenziós Banach-téren, ami nem folytonos. Másrészt a tapasztalat azt mutatja, hogy minden olyan esetben, amikor egy operátor definíciójában nem használjuk fel a kiválasztási axióma valamelyik ekvivalens alakját, az operátor folytonosságát sikerül belátni. (A transzfinit indukciós bizonyítások elfogadását a kiválasztási axióma feltételezése teszi lehetővé.) Ennek mélyebb okait tárja fel a Banach-elv valamilyen változatának igazolása. Az alábbi dolgozattal ez a célunk.

A „konstruktív" jelzőn értsük a következő formulát: „formulával definiálható". Ez célszerűnek látszik abból a szempontból is, hogy a klasszikus tételek (Banach—Steinhaus-tétel, inverz leképezés tétele) általában formulával megadható leképezésekről szólnak. Ezzel az interpretációval az egész kérdéskör átcsúszik a logika és a modellelmélet területére. A vizsgálatok legerősebb eszköze a Cohen által megalkotott forszolási technika lesz. (Ezt vázlatosan a 4. részben ismertetjük, azonban e bonyolult elmélet részletesen pl. a [4], [14], [20] művekben megtalálható.)

A modellelmélet alkalmazásának gondolata Banach munkásságának kiterjesztésében Ajtai Miklóstól származik ([1], [2]). Ebben a dolgozatban Ajtai eredményeinek bizonyos élesítéseit, illetve átfogalmazásait adjuk meg.

Az 1. részben a később felhasználásra kerülő modellelméleti eszköztárat ismertetjük. (Részletesebben erről [3], [19]-ben, illetve [9], [12] és [14] bevezető lapjain olvashatunk; illetve magyar nyelven [9], [16], [21] és [22]-ben.) A 2. részben ismertetjük Ajtai [1], [2]-beli fontosabb eredményeit és azok változatait. A 3. részben

egy példát mutatunk arra, hogy a fenti, logikai és halmazelméleti természetű eredmények segítségével milyen típusú analízis-tételek igazolhatók. Az utolsó részben Ajtai eredményeit általánosítjuk (4.15. és 4.21. tételek), előtte azonban ennek ürügyén nagyon röviden vázoljuk a forszolás elméletének elemeit. A dolgozat legvégén megfogalmazunk néhány megoldatlan problémát.

A definíciók, bizonyítások, példák végét □ jelöli.

1. Modellelméleti alkalmazások

Jelen dolgozat eredményeivel az analízisben, bizonyítási módszereivel a halmazelméletben és a logikában jártas szakemberek érdeklődésére tarthat számot. E két témakör eléggé távolálló, így célszerűnek láttuk az Olvasó dolgát megkönnyítendő egy rövid áttekintést adni a modellelmélet általunk felhasznált részeiről. (Részletesebb leírás található [3] és [19]-ben. Magyar nyelven a [9], [16], [21] és [22] művek megfelelő részeit ajánlhatjuk.) Hasznos, ha az Olvasó ismerős a (naív vagy axiomatikus) halmazelmélet elemeivel (pl. l. [9], [16], esetleg [11] és [14] bevezető fejezeteit). E rész végén nagyon röviden vázoljuk a konstruktív halmazok osztályát. Aki az alábbi (elemi logikai) fogalmakkal, valamint a konstruálható halmazokkal tisztában van, lapozzon a 2. részhez.

Először is rögzítsünk néhány standard jelölést. Legyen ω a nemnegatív egész számok halmaza, $n\in\omega$ helyett gyakran $n<\omega$-t írunk. $n\in\omega$ esetén $i\in n$ megegyezik $i<n$-nel, vagyis $n=\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. A halmazelméletben $i\leqq n$ helyett mindig $i<k$-t írunk, ahol $k=n+1$.

$$^nA = A\times\ldots\times A$$

az n-szeres Descartes-szorzat, $^0A=\{\emptyset\}$, $^\omega A$ az A-beli elemekből képzett végtelen sorozatok halmaza, amit azonosítunk az $\omega\to A$ függvények halmazával. Általában tetszőleges A, B halmazok esetén ^BA jelöli a B-ből A-ba képező (az egész B-n értelmezett) függvények halmazát. Ha f egy függvény, akkor $\mathrm{Dom}(f)$, ill. $\mathrm{Ran}(f)$ az értelmezési tartományt, ill. az értékkészletet jelöli, $H\subset\mathrm{Dom}(f)$ esetén $f\restriction H$ jelöli az f függvény H halmazra való megszorítását. Az $R\subset{}^nA$ halmazokat A-n értelmezett n-változós relációknak nevezzük. A rendezett párokat (hármasokat, stb.) $\langle a, b\rangle$ vagy (a, b)-vel ($\langle a, b, c\rangle$ vagy (a, b, c)-vel, stb.) jelöljük. Az egyenlőség reláció az

$$I_A = \{\langle a, a\rangle\in{}^2A\colon\ a\in A\}$$

halmaz. A függvényeket az $\langle x, f(x)\rangle$ rendezett párok halmazával azonosítjuk, ahol $x\in\mathrm{Dom}(f)$. Tetszőleges I (véges vagy végtelen) indexhalmaz és tetszőleges A (elemekből, függvényekből, stb. álló) halmaz esetén $\langle a_i\colon\ i\in I\rangle$ az ^IA halmaz egy tetszőleges elemét jelöli, azaz A-beli elemeknek egy „I hosszú" sorozatát. (Amit pl. $\{a_i\colon\ i\in I\}$ vagy $a\in{}^IA$, $a_i=a(i)$, $(i\in I)$ alakban is írhatunk.)

1.1. Definíció [3, § 2]:

Legyen τ', τ'' két egyváltozós függvény, melyek értelmezési tartománya ω vagy ω egy kezdőszelete (azaz $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, ahol $n<\omega$) és legyen

$$\delta' := \mathrm{Dom}(\tau'),\quad \delta'' := \mathrm{Dom}(\tau'').$$

Egy *elsőrendű nyelv*, $\mathscr{L}(\tau', \tau'')$ egy halmaz, melynek elemei

a) az $x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots$ $(m<\omega)$ változójelek;

b) a $g_0, g_1, \ldots, g_\xi, \ldots$ $(\xi\in\delta')$ műveleti- (vagy függvény-) jelek, ahol g_ξ $\tau'(\xi)$-változós műveleti- (függvény-) jel;

c) a $P_0, P_1, \ldots, P_\eta, \ldots$ $(\eta\in\delta'')$ relációjelek, ahol P_η $\tau''(\eta)$-változós relációjel, és P_0 az egyenlőség reláció szimbóluma, így $\tau''(0)=2$ (hiszen „=" kétváltozós reláció);

d) a $\vee$, $\neg$, $\exists$ logikai jelek („vagy", „nem", „létezik");

e) a (,) zárójelek.

Végül a $\langle\tau', \tau''\rangle$ párt a *nyelv típusá*nak nevezzük. □

Megjegyezzük, hogy az elsőrendű jelző arra utal, hogy az a)-beli változójelek és a d)-beli kvantorok az illető modell alaphalmazának elemeit, és nem részhalmazait futják be. (L. a kiértékelés alább megadandó definícióját.) A dolgozatban mindvégig elsőrendű nyelveket fogunk használni.

Továbbá, a 0-változós függvényeket konstansoknak nevezzük. Ezeket inkább a megszokott $c_0, c_1, \ldots, c_i, \ldots$ $(i<\omega)$ betűkkel jelöljük. Az egyváltozós relációkat *tulajdonságoknak* is nevezzük. (Lásd még az 1.4. Definíció után írt megjegyzéseket is.)

A többi megszokott logikai jel (pl. $\Rightarrow$, $\&$, $\Leftrightarrow$, $\forall$) mind kifejezhetőek a d)-ben felsorolt logikai jelekkel, vagyis csak rövidítések, így nyugodtan használjuk őket képleteinkben. (Hiszen $a\Rightarrow b$ ekvivalens $a\vee b$-vel, $a\& b$ ekvivalens $\neg((\neg a)\vee(\neg b))$-vel, $a\Leftrightarrow b$ ekvivalens $(a\Rightarrow b)\&(b\Rightarrow a)$-vel, és végül tetszőleges $\varphi(x)$ formulára $\forall(x)\varphi(x)$ ekvivalens $\neg(\exists x(\neg\varphi(x)))$-vel.)

Példa:

A halmazelmélet nyelve:

$$\delta' = \emptyset, \quad \delta'' = 2 \quad (= \{0, 1\}), \quad \tau''(0) = 2, \quad \tau''(1) = 2,$$

$$P_0 = \text{„}=\text{"}, \quad P_1 = \text{„}\in\text{"}.$$

□

A továbbiakban rögzítsünk egy

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\tau', \tau'')$$

elsőrendű nyelvet. Ezen a nyelven „*kifejezések*et" változójelekből, „*formulák*at" pedig kifejezések relációjelekbe való behelyettesítéséből kaphatunk. Pontosabban

1.2. Definíció (elsőrendű kifejezések és formulák, l. pl. [3, 3.4]):

a) A változójelek $(x_m, m<\omega)$ 0-adrendű kifejezések.

b) Ha k_j $(j<n, n<\omega)$ legfeljebb i-edrendű kifejezések és legalább egyikük $i-1$-edrendű, és g egy n-változós műveleti jel, akkor

$$g(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$$

egy i-edrendű kifejezés.

c) Ha P egy n-változós relációjel és k_j $(j<n, n<\omega)$ bármilyen rendű kifejezések, akkor

$$P(k_0, \ldots, k_{n-1})$$

egy 0-adrendű formula vagy prímformula.

d) Ha φ, ψ legfeljebb i-edrendű formulák és φ pontosan $i-1$-edrendű, akkor

$$\neg\varphi, \quad (\exists x)\varphi(x), \quad \varphi\vee\psi$$

i-edrendű formulák.

e) Egy, a nyelv elemeiből álló jelsorozatot *kifejezés*nek vagy *formulá*nak nevezünk, ha valamely $i<\omega$-ra i-edrendű kifejezés vagy i-edrendű formula.

f) Az $\mathscr{L}$ nyelv kifejezéseinek és formuláinak halmazát $K(\mathscr{L})$, illetve $F(\mathscr{L})$-lel jelöljük. □

Egy $\Gamma\subset F(\mathscr{L})$ formulahalmazt gyakran *axiómarendszer*nek vagy *elmélet*nek is szoktunk nevezni. Például ZFC-vel jelöljük a halmazelmélet szokásos axiómarendszerét, melyre gyakran fogunk a továbbiakban hivatkozni. (Például Hajnal—Hamburger [9] könyvében ZFC axiómáit részletesen megtaláljuk.) Azonban, nem szükséges ezeket az axiómákat fejből tudnunk, elég ha csak annyit jegyzünk meg: szokásos matematikai levezetéseinket, mint bebizonyítható, végső soron (csak) ZFC axiómáinak felhasználásával végezzük, az 1.10 és 1.11-ben ismertetett logikai axiómák és következtetési szabályok felhasználásával.

A φ formulában szereplő változók közül *szabad előfordulású*nak nevezzük azokat, amelyek φ-ben előfordulnak, de nincsenek lekötve kvantorokkal $(\exists x, \forall x)$. Speciálisan *zárt* egy formula, ha nincs szabad változója. A matematikában megszokott állítások mind zártak. (L. pl. [3, 3.5].)

Miután bemutattuk a nyelvtant, azaz az $\mathscr{L}$ nyelv használatának szintaxisát, rátérünk a szemantikára, tehát arra, hogyan lehet konkrét jelentéseket tulajdonítani a nyelvben leírt kifejezéseknek és formuláknak.

1.3. Definíció (l. pl. [3, 3.1]):

$\mathfrak{A}$ egy $\langle\tau',\tau''\rangle$ *típusú struktúra,* ha

$$\mathfrak{A}=\langle A,\langle f_\xi\colon \xi\in\delta'\rangle,\langle r_\eta\colon \eta\in\delta''\rangle\rangle,$$

ahol A egy nem üres halmaz (a struktúra alaphalmaza), és

$$f_\xi\colon {}^{\tau'(\xi)}A\to A, \quad r_\eta\subseteq {}^{\tau''(\xi)}A, \quad r_0=I_A. \qquad \square$$

(Azaz f_ξ $\tau'(\xi)$-változós függvény A-n, r_η $\tau''(\eta)$-változós reláció A-n, r_0 pedig az egyenlőség reláció, amit inkább az „=" jellel jelölünk.)

A struktúra tehát megmondja, hogy a formulák mire vonatkoznak: az x_n változójelek A elemein futnak, a g_ξ műveleti jelen $\mathfrak{A}$-ban az f_ξ függvényt, a P_η relációjelen pedig az r_η relációt kell érteni. Ismét ne feledjük: a 0-változós függvények konstansok, azaz $\tau'(\xi)=0$ esetén $f_\xi=d_\xi\in A$. (A τ' és f_ξ által kijelölt konstansokat időnként $d_0, d_1, \ldots$-vel jelöljük, vagyis az $\mathscr{L}$ nyelv c_i konstansjelének interpretáltja $d_i\in A$.)

Legtöbbször, ha nem okoz félreértést, a nyelv konstans-, függvény- és relációjeleit és az $\mathfrak{A}$ struktúrában nekik jelentést adó konstansokat, függvényeket, relációkat ugyanazzal a betűvel vagy szimbólummal jelöljük.

Legyen $\vec{a}=\langle a_i\colon i<\omega\rangle\in{}^\omega A$; nevezzük $\vec{a}$-t a *változók* egy A-beli *kiértékelés*ének. Ha k egy kifejezés, akkor k *kiértékelése* $\mathfrak{A}$-ban a változók fenti kiértékelése mellett, $k_{\mathfrak{A}}[\vec{a}]$ úgy kapható, hogy az x_m változójelek helyébe a_m-et $(m<\omega)$, a g_ξ műveleti jelek helyébe az f_ξ függvényt tesszük $(\xi\in\delta')$, P_η helyébe r_η-t írjuk $(\tau\in\delta'')$, [3, 3.7]. □

Az egyenlőség reláció minden nyelvben, és így minden struktúrában is szerepel, azonban ezzel, ha nincs rá külön szükség, külön nem foglalkozunk.

1.4. Definíció (Az igazság definíciója, [3, 3.8]):

Azt, hogy a változók $\vec{a}$ kiértékelése mellett a φ formula *igaz* vagy *hamis*, jelölésben:

$$\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \uparrow, \quad \text{illetve} \quad \varphi_{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = \downarrow,$$

így döntjük el:

a) Ha φ prímformula, $\varphi = P_\eta(k_0, \ldots, k_{n-1})$, akkor

$$\langle (k_0)_{\mathfrak{A}}[\vec{a}], \ldots, (k_{n-1})_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] \rangle \in r_\eta$$

esetén legyen $\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \uparrow$, máskor $\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \downarrow$.

b) Ha φ, ψ formulák és igazságukat már eldöntöttük, akkor legyen

$$(\neg\varphi)_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \begin{cases} \downarrow, & \text{ha} \quad \varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \uparrow, \\ \uparrow, & \text{ha} \quad \varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \downarrow, \end{cases}$$

$$(\varphi \vee \psi)_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \begin{cases} \downarrow, & \text{ha} \quad \varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \psi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \downarrow, \\ \uparrow & \text{máskor,} \end{cases}$$

$$(\exists x_m \varphi)_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha van olyan } b \in A, \text{ hogy } \varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}(a_m|b)] = \uparrow, \\ \downarrow & \text{máskor,} \end{cases}$$

ahol $\vec{a}(a_m|b) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, b, a_{m+1}, \ldots \rangle$ az a kiértékelés, amit az a_m tag b-re való kicserélésével kapunk. $\varphi_{\mathfrak{A}}(\vec{a})$-t a φ formulának a változók $\vec{a}$ kiértékelése melletti $\mathfrak{A}$-beli *kiértékelésének* nevezzük. □

Egyszerűség kedvéért tetszőleges $\eta \in \delta''$, $\langle a_0, \ldots, a_{m-1} \rangle \in {}^m A$ esetén $\langle a_0, \ldots, a_{m-1} \rangle \in r_\eta$ helyett inkább a megszokott $r(a_0, \ldots, a_{m-1})$ formát írjuk (az $a_0, \ldots, a_{m-1}$ elemek az r_η relációban vannak).

Egyváltozós relációk bizonyos tulajdonságú elemeket jelölnek ki, a modell alaphalmazának egy részhalmazát, amit mi $R^{\mathfrak{A}}$-val vagy R^A-val jelölünk (R a reláció, $\mathfrak{A} = \langle A, R, \ldots \rangle$ a struktúra). Formulával: $R^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} \in A : \mathfrak{A} \models R[\vec{a}]\}$. (Lásd az 1.5. Definíciót.) Vegyük észre, hogy csak nagy ritkán lesz $R^{\mathfrak{A}}$ A-nak eleme!

Általában, ha φ egyváltozós (egy szabad változót tartalmazó) formula, $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ adott struktúra (esetleg a $\mathscr{V} = \langle V, \ldots \rangle$ univerzum, az „összes halmaz és elem összessége"), akkor $\varphi^{\mathfrak{A}}$-val jelöljük az $\mathfrak{A}$-ban φ tulajdonságú elemek összességét, osztályát. Osztálynak nevezzük (valamely) formulával definiálható elemek (halmazok) összességét. Példaként említhetjük az összes elem osztályát (melyet pl. az „$x = x$" formulával definiálhatunk), a rendszámok osztályát (l. az 1.17. Definíció utáni megjegyzésekben), a konstruálható halmazok osztályát (l. az 1.26. Definíciót). Mi többnyire halmazmodelleket használunk, azaz $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ esetén A halmaz. (Halmazok és osztályok részletes leírását pl. [9] és [10] könyvekben találhatjuk meg.) Azonban hasznos lesz, ha eszünkbe jut, hogy mi nem vagyunk egy halmazba „bezárva", azaz érveléseink az összes halmazra vonatkoznak, a „világban érvényes" $\in$-relációt használjuk. Ezért szoktunk a $\mathscr{V} = \langle V, \in \rangle$, ún. „világ-modellről" beszélni, ami osztálymodell, hiszen V nem halmaz, hanem csak osztály. Akit azonban zavar ez a kettősség és az osztálymodell nem teljesen tisztázott fogalma, nyugodtan gondolja úgy, hogy egy „jó" nagy $\mathscr{V} = \langle V, \in \rangle$ halmazmodellben dolgozunk, minden érvelésünk ennek elemeire és (nem feltétlenül elemi) részmodelljeire vonatkoznak

(l. 1.15. Definíciót). Akármilyen modellben gondolkodunk is (osztály- vagy halmazmodell), érveléseinknek BÁRMELYIK modellben igaznak kell lennie! (Gondoljunk csak Gödel 1.13. teljességi tételére!) A továbbiakban mi mindig csak halmazmodellekkel foglalkozunk.

1.5. Definíció (Formula igazsága struktúrában):

A φ formula *igaz* az $\mathfrak{A}$ struktúrában, más szóval $\mathfrak{A}$ *modellje* φ*-nek,* ha minden $\vec{a} \in {}^{\omega}A$ kiértékelésre $\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \uparrow$. Jelölése: $\mathfrak{A} \models \varphi$. □

1.6. Megjegyzés:

Világos, hogy $\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}]$ csak attól függ, milyen értéket ad $\vec{a}$ a φ szabad változóinak. (Hiszen $\mathscr{L}$ és $\mathfrak{A}$ rögzített.) Más szóval, ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ kiértékelések megegyeznek minden olyan m indexre, amelyre x_m szabad változó φ-ben, akkor

$$\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{b}].$$

1.7. Megjegyzés:

A formulák felírásában teszünk néhány ésszerű egyszerűsítést. Például elhagyjuk a felesleges zárójeleket: pl. $(\exists x_1)(\exists x_2)((\ldots \exists x_m(\varphi)\ldots))$ helyett $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_m \varphi$-t írunk. Továbbá a műveleti jeleket prenex alakban írjuk prefix alak helyett: pl. $+(2, 3)$ helyett $2+3$-at írunk. Mint az 1.1. Definíció végén, bevezetjük a $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,&, $\vee$ rövidítéseket. Végül, a jelek között precedencia (elsőbbség) rögzítésével további zárójeleket takaríthatunk meg: (pl.

$$[[(x+(3 \cdot z)) \geqq y] \ \& \ (x \in z)] \Rightarrow (x \neq y)$$

helyett egyszerűen $x+3z \geqq y \& x \in z \Rightarrow x \neq y$-t írunk. □

A továbbiakban lássuk a szintaktikai és szemantikai következmény fogalmát, vagyis, hogy egy állítás mikor következik „logikai úton", és mikor következik „a valóságban" más állítások egy rendszeréből, pl. egy axiómarendszerből.

1.8. Definíció:

Legyen $\Gamma \subset F(\mathscr{L})$ az $\mathscr{L}$ nyelv formuláinak egy halmaza

a) Az $\mathfrak{A}\langle \tau', \tau'' \rangle$ típusú struktúra *modellje* Γ*-nak,* jelben

$$\mathfrak{A} \models \Gamma,$$

ha minden Γ minden φ elemére $\mathfrak{A} \models \varphi$.

b) Legyen $\psi \in F(\mathscr{L})$. Azt mondjuk, hogy ψ a Γ-nak *(szemantikai) következménye,* ha Γ minden $\langle \tau', \tau'' \rangle$ típusú modelljében ψ is igaz. Jelölésben

$$\Gamma \models \psi.$$ □

A szintaktikus (nyelvtani) következmény fogalmát néhány definícióval készítjük elő.

1.9. Definíció:

Ha k egy kifejezés és φ egy formula, akkor

$$\varphi_{x_m}[k]$$

az a formula, amit úgy, kapunk, hogy hogy az x_m változó φ-beli összes szabad előfordulásai helyébe helyettesítjük (beírjuk) a k kifejezést. Más szóval, a formulák induktív felépítését követve (prímformulákra értelem szerint)

$$(\neg\varphi)_{x_m}[k] = \neg(\varphi_{x_m}[k]),$$

$$(\varphi \vee \psi)_{x_m}[k] = (\varphi_{x_m}[k]) \vee (\psi_{x_m}[k]),$$

$$((\exists x_n)\psi)_{x_m}[k] = \begin{cases} (\exists x_n)(\varphi_{x_m}[k]), & \text{ha } n \neq m, \\ (\exists x_n)\psi, & \text{ha } n = m. \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy a $\varphi_{x_m}[k]$ helyettesítés *megengedett,* ha a helyettesítés során k egyetlen szabad változója sem válik lekötötté a $\varphi_{x_m}[k]$ formulában, valamely, a φ formulában szereplő „hatása" folytán. □

Például a

$$\varphi(x) = \text{„}(\exists y)(x = y \ \& \ z > y)\text{"}$$

formulában nem megengedett a

$$\varphi_x[y+1]$$

helyettesítés (hiszen a „helyettesítés" után a formula $\varphi_x[y+1] = \text{„}(\exists y)(y+1 = y \& z > y)\text{"}$ lenne, ami nyilvánvalóan hamis)! Azt mondjuk, hogy ψ *részformulája* φ-nek, ha — szemléletesen — φ felírásában ψ szerepel, egybefüggően. A precíz definíciótól (ami ismét a formulák induktív felépítése alapján történik) most eltekintünk.

Megszokott (matematikai) következtetéseink során az elfogadott Γ axiómarendszer mellett még logikai „alapigazságokat", és a megengedett logikai következtetési szabályokat is felhasználjuk.

1.10. Definíció (Logikai axiómák vagy tautológiák, l. pl. [3, 4.1]):

a) $(\neg\varphi)\vee\varphi$ *(állítás axióma),*

b) Ha k kifejezés és a $\varphi_{x_m}[k]$ helyettesítés megengedett, $(m<\omega)$, akkor

$$\varphi_{x_m}[k] \Rightarrow (\exists x_m)\varphi(x_m) \quad \textit{(helyettesítés axióma),}$$

c) $x_n = x_n \quad (n < \omega)$ *(egyenlőség axióma),*

d) $\xi \in \delta'$, $\eta \in \delta''$, $\tau'(\xi) = n$, $\tau''(\eta) = m$ esetén

$$(x_{i_0} = y_{i_0} \ \& \ldots \& \ x_{i_{n-1}} = y_{i_{n-1}}) \Rightarrow g_\xi(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}) = g_\xi(y_{i_0}, \ldots, y_{i_{n-1}})$$

és az

$$(x_{i_0} = y_{i_0} \ \& \ldots \& \ x_{i_{m-1}} = y_{i_{m-1}}) \Rightarrow P_\eta(x_{i_0}, \ldots, x_{i_{m-1}}) = P_\eta(y_{i_0}, \ldots, y_{i_{m-1}})$$

formulák *(identitás axiómák).* □

Pontosabban a fenti formulák (axiómák) minden szabad x_i, y_j változóját $(\forall x_i)$, $(\forall y_j)$ kvantorokkal kell lezárnunk. Továbbá helyesebb lenne a fenti axiómákat *axiómasémák*nak neveznünk, hiszen a bennük szereplő kifejezések, relációk és formulák helyére a nyelv összes lehetséges kifejezését, relációját, formuláját behelyettesíthetjük, és az így kapott végtelen sok axiómát kell tekintenünk.

1.11. Definíció (A következtetési szabályok, l. pl. [3, 4.9] előtt):

Legyenek φ, ψ, ϑ formulák. Akkor

a) $\langle \varphi | \varphi \vee \psi \rangle$ *(kiterjesztési szabály),*

b) $\langle \varphi \vee \varphi | \varphi \rangle$ *(összevonási szabály),*

c) $\langle (\varphi \vee \psi) \vee \vartheta | \varphi \vee (\psi \vee \vartheta) \rangle$ *(asszociativitási szabály),*

d) $\langle \varphi \vee \psi, \neg \varphi \vee \vartheta | \psi \vee \vartheta \rangle$ *(levágási szabály),*

e) Ha x_m szabad változója ψ-nek, akkor

$$\langle \varphi \Rightarrow \psi | (\exists x_m)\varphi \Rightarrow \psi \rangle. \quad \textit{(kvantorbevezetési szabályok).}$$ □

A fenti szabályok $\langle \pi | \varrho \rangle$ alakú formula-párok $(\pi, \varrho \in F(\mathscr{L}))$. Ezek úgy értendők, hogy ha π (premissza) már előzőleg bizonyított (vagy a feltételezett Γ axiómarendszer eleme), akkor ϱ (konklúzió) is következik. Mint könnyen látható, a logikai axiómák és a következtetési szabályok minden, az $\mathscr{L}$ nyelv típusának megfelelő $\mathfrak{A}$ struktúrán teljesülnek. Bár szerkezetük nagyon egyszerű, mint nemsokára látni fogjuk (1.13. Tétel), mégis elegendőek: segítségükkel a megszokott következtetések, érvelések mind elvégezhetők.

1.12. Definíció (Szintaktikai következmény):

Legyen Γ egy formulahalmaz, φ és φ_j $(j<m)$ legyenek $\mathscr{L}$ tetszőleges formulái $(m<\omega)$. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle \varphi_j : j < m \rangle$$

formulasorozat φ *egy bizonyítása a* Γ *axiómarendszerben,* ha $\varphi_{m-1} = \varphi$ és minden $j<m-1$ esetén az alábbi négy feltétel közül legalább az egyik igaz:

a) φ_j logikai axióma,

b) $\varphi_j \in \Gamma$,

c) van olyan $k<j$, hogy $\langle \varphi_k | \varphi_j \rangle$ következtetési szabály,

d) van olyan $k, n<j$, hogy $\langle \varphi_k, \varphi_n | \varphi_j \rangle$ következtetési szabály.

Azt mondjuk, hogy φ *bizonyítható* Γ-ból, ha van bizonyítása Γ-ból. Jelölése:

$$\Gamma \vdash \varphi.$$ □

Megemlítjük, hogy a matematika eddig megszokott érvelései is a fenti definíció szellemében készültek, legfeljebb nem ennyire aprólékosan. Pontosabban, Hilbert és még jónéhány matematikus a halmazelmélet, a geometria, stb. legtöbb tételéről sokéves munkával megmutatta, hogy valóban levezethetők a halmazelmélet, ill. a geometria axiómarendszeréből, csupán a fenti szabályok alkalmazásával.

A továbbiakban számunkra lényeges lesz a következmény szintaktikai és szemantikai fogalmának kapcsolata. Nagyon egyszerűen belátható, hogy ha $\Gamma \vdash \varphi$, akkor $\Gamma \models \varphi$, tehát ha φ (szintaktikai) tétel a Γ axiómarendszerben, akkor igaz is Γ-ban. (Vagyis, ha φ levezethető Γ-ból a szabályok betartásával, akkor igaz is Γ minden modelljében.) Ennek megfordítása is teljesül, tehát az igaz állításokat be is lehet bizonyítani:

1.13. Tétel (Gödel teljességi tétele, 1930) ([3, 4.9]):

Ha Γ axiómarendszer (azaz formulahalmaz) és φ egy formula, akkor $\Gamma \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash \varphi$. □

A tétel szerint tehát, ha Γ minden halmazmodelljében φ igaz (azaz $\Gamma \models \varphi$), akkor található φ-nek Γ-ból egy formális bizonyítása is. Ez talán meggyőzi azokat, akik kételkednek a levezetési szabályok „erősségében". No persze, mindennapi matematikai érveléseinket nem bontjuk le az 1.10—1.12. pontokban leírt elemi lépésekre, de az Olvasó elhiheti (vagy utánajárhat), hogy ez mindig megtehető.

1.14. Megjegyzés:

Definíció szerint $\Gamma \models \varphi$ azt jelenti, hogy Γ minden $\mathfrak{A}$ modelljében φ is igaz, azaz $\mathfrak{A} \models \varphi$, ha $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Ennél gyengébb állítás az, hogy *van* Γ-nak egy olyan modellje, melyben φ igaz, ezt úgy is mondják, hogy *a φ állítás Γ-val konzisztens.* Gödel fenti tétele szerint ez ekvivalens azzal, hogy $\Gamma \nvdash \neg\varphi$, azaz φ biztosan nem cáfolható Γ-ban. Ha olyan Γ-modell is van, amelyben $\neg\varphi$ igaz, azaz $\neg\varphi$ is konzisztens Γ-val, akkor φ sem bizonyítható Γ-ban. Ilyenkor azt mondjuk, hogy φ *független* a Γ axiómarendszertől. □

A következőkben felsorolunk néhány modellelméleti alapfogalmat.

1.15. Definíció [19, 5.2]:

Legyenek $\mathfrak{A} = \langle A, \langle f_\xi^A : \xi \in \delta' \rangle, \langle r_\eta^A : \eta \in \delta'' \rangle \rangle$ és $\mathfrak{B} = \langle B, \langle f_\xi^B : \xi \in \delta' \rangle, \langle r_\eta^B : \eta \in \delta'' \rangle \rangle$ $\langle \tau', \tau'' \rangle$ típusú struktúrák.

a) $\mathfrak{A}$ *részstruktúrája* $\mathfrak{B}$-nek, jelben $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, ha $A \subseteq B$ és $\xi \in \delta'$, $\eta \in \delta''$ esetén

$$f_\xi^A = f_\xi^B \restriction {}^{\tau'(\xi)}A, \quad r_\eta^A = r^B \cap {}^{\tau''(\eta)}B.$$

b) Legyen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Az $\mathfrak{A}$ *elemi része* $\mathfrak{B}$-nek, jelben

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B},$$

ha tetszőleges φ formulára és $\vec{a} \in {}^{\omega}A$ kiértékelésre

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}].$$

c) Az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ struktúrák *elemien ekvivalensek,* ha bármely zárt $\varphi \in F(\mathscr{L})$ formulára

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Jele:

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}.$$

d) Az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ struktúra izomorf, ha van olyan

$$h\colon A \to B$$

bijekció, hogy bármely $\xi \in \delta'$, $\eta \in \delta''$ és $\vec{a} \in {}^{\omega}A$ esetén

$$h\left(f_{\xi}^{A}(a_0, \ldots, a_{n-1})\right) = f^{B}\left(h(a_0), \ldots h(a_{n-1})\right)$$

és

$$r_{\eta}^{A}(a_0, \ldots, a_{m-1}) \Leftrightarrow r_{\eta}^{B}\left(h(a_0), \ldots, h(a_{m-1})\right)$$

(feltettük, hogy $\tau'(\xi)=n$, $\tau''(\eta)=m$). Jelölése:

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}. \qquad \square$$

Megjegyezzük, hogy c)-ben elég zárt formulákra szorítkoznunk, hiszen $\mathfrak{A} \models \varphi$-t éppen a

$$\mathfrak{A} \models (\forall x_{i_0})(\forall x_{i_1}), \ldots, (\forall x_{i_n})\varphi$$

formula segítségével definiáltuk, ahol $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ éppen φ szabad változói.

Nem minden részstruktúra elemi részmodell. A kiértékelési eljárást átgondolva világos, hogy az elemi rész(modell) tulajdonság a következőt jelenti: bármely $(\exists x_m)(\varphi)$ alakú formulához, ha van olyan $b \in \mathfrak{B}$, amelyre $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{B}}[\vec{a}(a_m|b)]$, akkor van olyan $a' \in A$ is, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}(a_m|a')]$. Nyilvánvalóan $(\omega, <)$ tetszőleges (véges) kezdőszelete részstruktúrája $(\omega, <)$-nek, de nem elemi része. (Véges struktúrákat izomorfia erejéig egyértelműen le lehet írni formulákkal.)

A definíciókból közvetlenül ugyan nem következik, de könnyen belátható, hogy izomorf modellek elemien ekvivalensek is. Hogy az elemi ekvivalencia gyengébb az izomorfiánál, az a

$$\langle \mathbf{Q}, < \rangle \sim \langle \mathbf{R}, < \rangle \quad \text{és} \quad \langle \mathbf{Q}, < \rangle \ncong \langle \mathbf{R}, < \rangle$$

példából látható. Ennél több is igaz: bármely két sűrűn rendezett halmaz elemien ekvivalens. Sőt. pl. $\mathbf{R}$ és $\mathbf{Q} \times \omega_1$ ($\mathbf{Q}$-t ω_1-szer egymás után téve, ahol ω_1 a legkisebb, nem megszámlálható rendszám) oly sűrűn rendezett halmazok, melyek egyike sem elemien ekvivalens a másik egyetlen részhalmazával sem! Azonban az elemi részből következik az elemi ekvivalencia. Ennek belátásához mindössze elegendő az elemi rész definícióját zárt formulákra végigondolni.

Mint a bevezetőben már említettük, formulákkal definiált objektumokkal kívánunk foglalkozni. Ehhez azonban meg kell vizsgálnunk, hogy különböző modellekben a formulák mennyire viselkednek másként. Az alkalmazott módszer (forszolás) elemi részmodelleket használ, sőt ún. standard (tranzitív megszámlálható, l. a következő definícióban) modelleket használ. Erre azért van szükség, mert tetszőleges $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ részmodellek esetén $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$, ezek elemeinek, illetve az alaphalmazok elemei elemeinek kapcsolatáról semmit sem tudunk: például $x \in a \in A$ esetén $a \in B$ ugyan, de x nem feltétlenül eleme B-nek. (Ne felejtsük el, hogy mi a halmazelmélet nyelvét akarjuk használni, ami mindössze két relációjelet tartalmaz: $=$ és $\in$.)

Az alábbi definícióban szükségünk lesz a különböző modellekben érvényes „eleme" reláció megfelelőjére. Mivel mi halmazokkal, halmazmodellekkel foglalkozunk, amelynek elemei is halmazok, rendelkezésünkre áll egy (természetes, az ún.

„világbeli") „eleme" reláció, amelyet a továbbiakban $\in^V$ vagy $\in$-vel jelölünk. Ha pedig egy $\mathfrak{A}=\langle A, E, \ldots\rangle$ struktúrában dolgozunk, rendszerint E jelöli az A elemei között értelmezett, $\mathfrak{A}$-beli „eleme" relációt, melyre időnként az $\in^A$ vagy $\in^{\mathfrak{A}}$ jelet használjuk.

1.16. Definíció (l. pl. [4, § 1 és 0.3]):

(a) Egy struktúra *megszámlálható*, ha alaphalmaza megszámlálható.

(b) Egy $\mathfrak{A}=\langle A, E, \ldots\rangle$ struktúra *tranzitív*, ha tetszőleges $a\in A$ és $x\in a$ esetén $x\in A$. (Azaz $a\subset A$.)

(c) Az $\mathfrak{A}=\langle A, E, \ldots\rangle$ struktúra $\in$-*modell*, ha tetszőleges $a, b\in\mathfrak{A}$ esetén

$$\mathfrak{A}\models \text{„}a\in b\text{"} \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad a\in b.$$

(Azaz $E=\in\cap(A\times A)$.)

(d) A $\varphi\in F(\mathscr{L})$ formula *felfelé abszolút*, ha tetszőleges tranzitív $\in$-modell esetén $\mathfrak{A}\models\varphi$-ből $\mathscr{V}\models\varphi$ következik; *lefelé abszolút*, ha $\mathscr{V}\models\varphi$-ből $\mathfrak{A}\models\varphi$ következik; és *abszolút*, ha $\mathfrak{A}\models\varphi$ és $\mathscr{V}\models\varphi$ ekvivalensek.

(e) Tetszőleges Γ elmélet (formulahalmaz) esetén φ Γ-*abszolút*, ha (d)-ben csak Γ modelljeire szorítkozunk, azaz $\mathfrak{A}\models\Gamma$, $\mathfrak{B}\models\Gamma$ és φ helyett $\mathfrak{B}\models\varphi$ áll. □

Megjegyezzük, hogy (c)-ben $\mathscr{V}=\langle V, \in\rangle$ helyett tetszőleges $\mathfrak{B}\supseteq\mathfrak{A}$ tranzitív struktúrát is írhattunk volna.

(d) és (e)-ben jelzett V az ún. „világmodell', az összes halmaz osztálya. (L. az 1.5. Definíció előtt.) Így $\mathscr{V}\models\varphi$ helyett nyugodtan írhatunk egyszerűen φ-t. (Mint például $\mathscr{V}\models a\in b$ helyett eddig is csak $a\in b$-t írtunk.)

Jelölje ZFC a halmazelmélet Zermelo—Fraenkel-féle (standard) axiómarendszerét a kiválasztási axiómával együtt (AC=Axiom of Choice). (L. pl. [8], [9], [10], [12], [14], [16], [19]-ben.)

A leszálló Löwenheim—Skolem-tétel (1.23. Tétel) szerint, ha ZFC-nek van modellje, akkor megszámlálható modellje is van. Továbbá Mostowski (l. 1.19. Tétel) szerint a (kívülről nézve) jólfundált modellek izomorfak egy tranzitív modellel. (A jólfundált modellek fogalmát az 1.18. Definícióban ismertetjük.) Vegyük észre azonban, hogy mindezekből nem következik, egy ZFC-modell létezéséből sem, hogy ZFC-nek lenne megszámlálható tranzitív (ún. standard) modellje!

A következő definícióban azt írjuk le, hogy mely objektumokat, tulajdonságokat, stb. tudunk formulákkal egyértelműen definiálni. Erre többek között a „konstruálhatóság" leírásánál lesz szükségünk.

1.17. Definíció [19, 4.6]:

Legyen $\mathscr{L}=\mathscr{L}\langle\tau', \tau''\rangle$ tetszőleges nyelv, $\Gamma\subset F(\mathscr{L})$ formulahalmaz és $\mathfrak{A}$ tetszőleges $\langle\tau', \tau''\rangle$ típusú struktúra.

a) A φ formula *egyértelműen definiál* Γ-*ban* (vagy más szavakkal Γ *felett*) egy elemet (objektumot, konstanst, stb.), ha

$$\Gamma\vdash(\exists x)\varphi(x) \;\&\; (\forall x\forall y)[\varphi(x) \;\&\; \varphi(y)\Rightarrow x=y].$$

Erre a rövidebb

$$\Gamma \vdash (\exists\,!x)\varphi(x)$$

jelölést szoktuk használni.

b) Ha a fent definiált elemnek az $\mathscr{L}$ nyelvben van neve, a c konstans (vagy konzervatív bővítéssel adjuk az $\mathscr{L}$ nyelvhez — l. pl. [9]-ben), akkor *c-t φ egyértelműen definiálja Γ felett,* ha

$$\Gamma \vdash (\exists\,!x)\varphi(x) \;\&\; \varphi(c).$$

c) A φ formula *Γ-ban egyértelműen definiál egy függvényt* (operációt), ha

$$(*) \qquad \Gamma \vdash (\forall x_0)\ldots(\forall x_{n-1})[(\exists\,!y)\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y)].$$

d) Ha a fent definiált függvénynek (operációnak) az $\mathscr{L}$ nyelvben van neve, $f \in \mathscr{L}$ (vagy konzervatív bővítéssel kerül $\mathscr{L}$-be), akkor f-et φ *Γ-ban egyértelműen definiálja,* ha $(*)$ mellett még az alábbi is teljesül:

$$\Gamma \vdash (\forall x_0)\ldots(\forall x_{n-1})(\forall y)[\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y) \Leftrightarrow y = f(x_0, \ldots, x_{n-1})].$$

e) A φ formula *Γ-ban (egyértelműen) definiálja a* nyelv *R relációját* (tulajdonságát), ha

$$\Gamma \vdash (\forall x_0)\ldots(\forall x_{n-1})[\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \Leftrightarrow R(x_0, \ldots, x_{n-1})].$$

f) A φ formula *egyértelműen definiálja $\mathfrak{A}$ felett a* $c \in A$ konstanst (az f: ${}^nA \to A$, $f \in \mathfrak{A}$ függvényt, vagy az $R \subset {}^nA$, $R \in \mathfrak{A}$ relációt), ha a fenti a)—e) pontokban „$\Gamma \vdash$" helyett „$\mathfrak{A} \models$" írható.

g) Egy elem, függvény vagy reláció Γ-abszolút, ha az őt definiáló formula abszolút a Γ axiómarendszer tetszőleges struktúrája felett. □

Az egy szabad változóval rendelkező formulákat úgy is tekinthetjük, hogy bizonyos *tulajdonságú* elemeket írnak le az $\mathscr{L}$ nyelven. Azaz φ egyváltozós R relációt definiál Γ-ban (Γ felett) — akár benne van R az $\mathscr{L}$ nyelvben, akár nem. Az R (konzervatív) bővítéssel került $\mathscr{L}$-be, ha $R \notin \mathscr{L}$ és

$$\emptyset \vdash (\forall x)(\varphi(x) \Leftrightarrow R(x)).$$

Ekkor, adott $\mathfrak{A}$ struktúra esetén

$$R^{\mathfrak{A}} := \{\vec{x} \in A\colon\ \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{x})\}.$$

Ez (A-t kívülről nézve) nyilván A egy részhalmaza, mely azonban nem feltétlenül eleme A-nak (A-t ismét kívülről nézve). A elemeiről (amik természetesen az általunk megszokott, „külső" eleme reláció szerint elemei A-nak) tudunk beszélni A-ban, sőt azokat nevezzük A-ban halmazoknak. Így R nem feltétlenül halmaz A-ban, de mindenesetre osztály A-ban, hiszen formulával definiált (az osztályok részletesebb leírását l. pl. [9], [10]-ben). Mindezek alapján könnyen definiálhatnánk egy osztály/tulajdonság abszolútságát.

Adott $\Gamma \subset F(\mathscr{L})$ elmélet (formulahalmaz, axiómarendszer) esetén a „Γ felett abszolút", „Γ-ban abszolút" elnevezések helyett a rövidebb „Γ-abszolút" kifejezést használjuk. Ha φ egy tetszőleges formula és $\mathfrak{A}$ egy struktúra, φ-nek $\mathfrak{A}$-beli igazságértékét, vagy az általa definiált objektumot általában $\varphi^{\mathfrak{A}}$-val jelöljük.

Mint láttuk, tranzitív ZFC-modellek létezése körülbelül olyan erős plusz feltételezés, mint hogy ZFC-nek létezik modellje. Azonban, ha 1.16. (d)-ben tetszőleges modellekre kívánjuk meg a feltétel teljesülését, akkor A. Tarski egy tétele szerint csak az univerzális ($\forall$) kvantorokat tartalmazó formulák elégítik ki, illetve a

velük Γ szerint ekvivalens formulák. (Két formula Γ szerint ekvivalens, ha $\Gamma \vdash (\varphi \Leftrightarrow \psi)$.)

Vegyük észre, hogy ha φ egyértelműen definiálja az R tulajdonságot, és φ abszolút, akkor tetszőleges $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ tranzitív modellre

$$R^A = R \cap A.$$

Lássunk most néhány ZFC-abszolút konstanst, operációt, illetve tulajdonságot, melyekre a későbbiekben szükségünk lesz.

$y = \cup x$ (x elemeinek uniója),

$z = x \cap y$, $z = x \cup y$, $z = \{x, y\}$, $z = \langle x, y \rangle$ (rendezett pár),

$z = x \times y$ (Descartes-szorzat), „f függvény", „f injektív", $z = \mathrm{Dom}(f)$, $z = \mathrm{Ran}(f)$, „f bijekció", „x tranzitív halmaz", $\emptyset$ (üres halmaz);

— ω (a természetes számok halmaza) — hiszen legyen

$$\psi(z) = \text{„}\emptyset \in z \ \& \ (\forall x)(x \in z \Rightarrow x \cup \{x\} \in z)\text{"},$$

majd

$$\varphi(z) = \psi(z) \ \& \ \text{„}(\forall x)(\psi(x) \Rightarrow z \subseteqq x)\text{"}$$

és könnyen láthatóan φ egyértelműen definiálja ω-t (l. még a 3. fejezetben adott Φ_0 formulát):

— $\mathcal{O}n$ (a rendszámok osztálya, l. [9], [10]-ben), mert: $\alpha \in \mathcal{O}n$ (α rendszám), ha az $(\alpha, \in)$ struktúra tranzitív és jólrendezett — hiszen

$$\varphi(x) = \text{„}\langle x, \in \rangle \text{ lineáris rendezés}$$

$$\& \ (\neg \exists f)\,[f\colon \omega \to x \text{ függvény } \& \ (\forall i < \omega)\, f(i+1) \in f(i)]\text{"}$$

és $\alpha \in \mathcal{O}n$ (azaz α rendszám) ekvivalens $\varphi(\alpha)$-val.

Továbbá minden Δ_0 formula (csak korlátos kvantorokat, vagyis $(\forall x \in a)$, $(\exists x \in a)$ alakú kvantorokat tartalmazó formulák, ahol a paraméter, vagy x-től különböző változó) szintén abszolút. (L. pl. [4], [9], [10], [12] vagy [14]-ben). Az előbb említett tulajdonságok és elemek mind leírhatók Δ_0 formulákkal. (L. még a 3.5. Állítás előtt leírt állítást, és a Levy-hierarchia definícióját 4.16-ban.)

A továbbiakban egy modellt, ha nem okozunk vele félreértést, ugyanazzal a betűvel jelöljük, mint az alaphalmazát, pl. A-t írunk $\mathfrak{U}$ helyett. Ha egy φ formula egyértelműen definál egy objektumot, mondjuk a valós számok halmazát, akkor az $\mathfrak{A}$ modellben így meghatározott elemet $\mathbf{R}^{\mathfrak{A}}$-val vagy $\mathbf{R}^A$-val jelöljük: ez különböző modellekben más és más lehet! Továbbá tetszőleges ψ formula igazságértéke függ a modelltől, a ψ $\mathfrak{A}$-beli igazságértékét $\psi^{\mathfrak{A}}$-val jelöljük. Ha N, M két modell, akkor „N-ben gondolkodni" annyit jelent, hogy a formulák, ill. konstansok N-beli kiértékelésére gondolunk. A 3. és 4. részben, sokszor fogunk egyik modellből a másikba „ugrálni". (Pontosabban: csak megszámlálható tranzitív ZFC-modelleket használunk.)

A mi világunkban, V-ben van egy $\in^V$ reláció halmazok és elemeik között. Ha azonban $\mathfrak{A} = \langle A, \in^{\mathfrak{A}} \rangle$ egy olyan struktúra, melynek típusa megegyezik a halmazelmélet nyelvének típusával, akkor a modellbeli $\in^{\mathfrak{A}}$ reláció nem feltétlenül esik egybe az $\mathfrak{A}$ modell A alaphalmaza elemei közötti „valódi" $\in^V$ relációval. Számunkra azonban hasznosak lesznek a „jó" modellek is, a lehető legjobban hasonlítanak V-re, és részmodelljeik is hasonlítanak (a bennük definiálható objektumokat tekintve) az eredeti modellre.

1.18. Definíció [4]:

Legyen az $\mathfrak{A}$ struktúra típusa ugyanaz, mint a halmazelmélet nyelvének típusa. Akkor az $\mathfrak{A}=\langle A, E\rangle$ struktúra *jólfundált,* ha E kétváltozós reláció A-n és nincs olyan $\vec{a}\in{}^{\omega}A$, melyre minden $n\in\omega$ esetén $\mathfrak{A}\models$„$a_{n+1}Ea_n$" teljesülne. □

Vegyük észre, hogy $\vec{a}$ legtöbbször nem eleme A-nak. Ennek megfelelően beszélhetünk „belülről" (csak A-beli sorozat létezését tiltanánk meg) és „kívülről" (ez erősebb feltétel) jólfundált struktúrákról. Ha csak jólfundáltat említünk, kívülről jólfundált struktúrákra gondolunk.

Nevezetes a következő

1.19. Tétel (Mostowski ún. „suvasztási" tétele, l. pl. [12], [14]):

Minden jólfundált $\in$-modell izomorf egy tranzitív modellel. □

1.20. Megjegyzés:

A hatványhalmaz — operáció nem abszolút. (Nyilván $z=P(x)$ pontosan akkor, ha $\varphi(x, z)$, ahol

$$\varphi(x, y) = \text{„}\forall y\ (y\subseteq x \Leftrightarrow y\in z)\text{"}$$

és tetszőleges $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$ tranzitív $\in$-modellek esetén $P^{\mathfrak{A}}(x)=P^{\mathfrak{B}}(x)\cap A$ minden $x\in A$-ra.) Sőt, ha pl. $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ elemei A-nak, az $\langle a_n\colon n\in\omega\rangle$ sorozat (mint egy $\omega\to A$ függvény) nem feltétlenül eleme A-nak. Hiszen, ha pl. $A\supset\omega$ egy kívülről nézve) megszámlálható ZFC-modell (l. később a Löwenheim—Skolem-tételeket), akkor nyilván van olyan természetes számokból álló sorozat, ami nincs A-ban, hiszen ${}^{\omega}A$ nagyobb számosságú, mint A. Vagyis a jólfundáltságot nem elég „belülről" definiálni (tehát csak azon $\vec{a}\in{}^{\omega}A$ sorozatokra szorítkozni, amik maguk is A-ban vannak). □

1.21. Definíció:

a) A Γ axiómarendszer *ellentmondástalan,* ha nincs olyan φ formula, hogy

$$\Gamma\vdash\varphi \quad \text{és} \quad \Gamma\vdash\neg\varphi.$$

b) Γ *konzisztens,* ha van modellje, azaz olyan struktúra, hogy

$$\mathfrak{A}\models\Gamma.$$

c) Legyen H tetszőleges halmaz és jelölje

$${}^{\omega\cong}H \quad \text{ill.} \quad {}^{\omega>}H$$

a H elemeiből képezhető összes véges vagy végtelen, illetve az összes véges sorozatok halmazát. □

A következő tételben néhány fontos modellelméleti eredményt gyűjtöttünk egy csokorba.

1.22. Tétel [3, 4.2], [19, 5.3]:

a) Ha $\Gamma \subset F(\mathscr{L})$, $\varphi \in F(\mathscr{L})$ *és* $\Gamma \models \varphi$, *akkor van olyan* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *véges axiómarendszer, hogy* $\Gamma' \models \varphi$.

b) Γ *ellentmondástalan pontosan akkor, ha konzisztens.*

c) **(Gödel kompaktsági tétele):**

Ha Γ *minden véges részének van modellje, akkor* Γ*-nak magának is van modellje.*

d) Γ *pontosan akkor ellentmondástalan, ha minden véges része ellentmondástalan.*

e) **(Felszálló Löwenheim—Skolem-tétel):**

Ha minden $n \in \omega$*-ra van* Γ*-nak* $\geqq n$ *elemű modellje, (azaz olyan* $\mathfrak{A}$, *hogy* $\mathfrak{A} \models \Gamma$ *és* $|A| \geqq n$*), akkor van tetszőlegesen nagy számosságú modellje is.* □

Megjegyezzük, hogy b) könnyen levezethető Gödel 1.13. teljességi tételéből.

a) lényege az, hogy Γ akármekkora axiómarendszer, egy tetszőleges φ állítás bizonyításához Γ-nak legfeljebb véges sok elemét használjuk fel (hiszen bizonyításunk is véges sok lépésből áll, és minden lépésben legfeljebb kettő axiómát használhatunk fel Γ-ból).

Amennyiben az $\mathscr{L}$ nyelv nem megszámlálható (sok függvény-, konstans-, reláció-, tulajdonságjelet tartalmaz), akkor az e)-ben állított modellről csak annyit tudunk biztosan mondani, hogy számossága akármilyen nagy, de legalább annyi, mint $\mathscr{L}$ számossága.

Bizonyítsuk be most e)-t c)-ből, hogy megismerjük a nyelv konstansokkal való bővítésének módszerét. Legyen $\varkappa$ tetszőleges számosság és az $\mathscr{L}$ nyelvhez vegyünk hozzá $\varkappa$ darab 0-változós függvényt (azaz konstanst), legyenek ezek c_γ $(\gamma \in \varkappa)$. Álljon Γ_1 az összes $\neg(c_\gamma = c_\delta)$ alakú formulából, ahol $\gamma \neq \delta$, $\gamma, \delta \in \varkappa$. Akkor a $\Gamma \cup \Gamma_1$ rendszer véges részeinek van modellje, így c) szerint van olyan $\mathfrak{A}$, hogy $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \Gamma_1$, akkor viszont $|A| \geqq \varkappa$. □

(A bővítésről könnyen belátható, hogy „konzervatív": durván szólva nincsenek „lényegében" új formulák és nem lehet új formulákat bizonyítani (l. pl. [9] Függelékét).) Így pl. a természetes számoknak nincs olyan axiómarendszere, amit csak megszámlálható struktúrák reprezentálhatnak.

Az e) tétel „párja" a következő

1.23. Tétel (Leszálló Löwenheim—Skolem-tétel [19, 5.3]):

Ha $\varkappa$ *végtelen számosság,* Γ*-nak van* $\varkappa$ *számosságú modellje és ha* $\lambda < \varkappa$ *is végtelen számosság (és* $\mathscr{L}$ *legfeljebb* λ *számosságú), akkor* Γ*-nak van* λ *számosságú modellje is.* □

Például, ha egy (véges vagy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen) axiómarendszer ellentmondástalan (azaz modellezhető), sőt végtelen modellje is van, akkor legfeljebb megszámlálhatóan végtelen modellje is van. Más kérdés, hogy egy ilyen modellben „belülről" általában nem tudjuk az összes elemet felsorolni, egy ilyen sorozat nem eleme a modellnek.

Végül említsük meg a konstruálhatóság fogalmát. Nagyon durván szólva egy halmaz akkor konstruálható, ha formulával leírható. (Pontosabban, ez egybeesik a

definiálhatóság 1.17-ben leírt definíciójával. A konstruálható halmazok fogalmát nemsokára pontosabban fogjuk definiálni.) Ismeretes, hogy ha ZFC-nek van modellje, akkor olyan modellje is van, melyben minden halmaz a modellen belül konstruálható (l. 1.28. Tétel). Másrészt az ilyen modellnek megvan az a különleges tulajdonsága, hogy az alaphalmaz összes eleme formulával jól rendezhető. Emiatt például a kiválasztási axióma alkalmazása bármely bizonyításban konstruktívvá (formulával definiálhatóvá) válik, mert minden halmazból a legkisebb elemet kiválasztjuk. Ennek a tulajdonságnak dolgozatunk további részében szerepe lesz. Hiszen, mint tudjuk, a kiválasztási axióma segítségével tetszőleges Banach-téren definiálható egy nem folytonos lineáris funkcionál. A fentiek alapján ez a konstruálhatósági axióma (ún. „$V=L$") teljesülése esetén konstruktív, azaz formulával definiálható. Mivel L-ben (ez egy osztálymodell) igaz $V=L$; és így az L modellben a fentiek alapján igaz a következő: Létezik formulával definiálható végtelen dimenziós Banach-tér és rajta egy formulával definiálható lineáris funkcionál, amely *nem* folytonos.

Vagyis, a bevezetésben vázolt ún. „Banach-elv" már rögtön nem igaz. Így, az 1.14. Megjegyzés alapján már csak abban reménykedhetünk, hogy a „Banach-elv" ZFC-vel konzisztens, azaz ZFC valamely modelljében igaz. Ezt Ajtai Miklós kutatásainak felhasználásával a következő fejezetben mutatjuk meg. (Vagyis végeredményben a Banach-elv független a ZFC axiómarendszertől.)

Most azonban lássuk az L modellt ([19, 9.6])!

A konstruálhatóság egzakt leírásához előrebocsátunk egy jelölést. Ezentúl $\mathcal{O}n$ jelöli a rendszámok osztályát. (A rendszámokról bővebben [9] és [10]-ben olvashatunk. Pl. ω részhalmaza, sőt kezdőszelete $\mathcal{O}n$-nak.) Ami számunkra lényeges: $x \in \mathcal{O}n$ leírható Δ_0 formulával.

A konstruálható halmazok osztályát legegyszerűbben transzfinit indukcióval (a teljes indukció általánosítása, l. pl. [9] vagy [10]-ben) kaphatjuk meg: kiindulunk az $\emptyset$ halmazból és az α-dik lépésben ($\alpha \in \mathcal{O}n$) konstruáljuk meg L_α-t, az α-dik szintet, az eddig már „elkészített" halmazok felhasználásával. Ehhez pontosan meg kell mondanunk: hogyan használjuk fel egy halmaz elemeit újabb halmazok definiálására. (A halmazelmélet nyelvét használjuk, és így többek között minden általunk használt objektum: elem, konstans, függvény, reláció nem egyéb, mint — halmaz.)

1.24. Definíció:

a) Adott X halmaz és $\mathcal{L}$ nyelv esetén $\mathcal{L}_X$ az $\mathcal{L}$ nyelv bővítése a c_x konstansjelekkel, $(x \in X)$.

b) *Az X halmazból* egy b halmaz *konstruálható,* ha van olyan $\varphi \in F(\mathcal{L}_x)$ egyváltozós formula, amelyre

$$b = \{x \in X : \langle X, \in \rangle \models \varphi(x)\}.$$

c) $\mathrm{Def}(A) := \{b : b$ definiálható A valamely eleméből$\}$. □

Itt $\langle X, \in \rangle$ az X alaphalmazból és az általunk használt „természetes", „világbeli" $\in$ eleme relációból álló struktúrát jelöli.

1.25. Definíció:

Az L_α halmazokat ($\alpha \in \mathcal{O}n$) a következésképpen definiáljuk:

a) $$L_0 = \emptyset.$$

b) Ha $\alpha = \beta + 1$ rákövetkező rendszám, akkor legyen

$$L_\alpha := \mathrm{Def}(L_\beta \cup \{L_\beta\}).$$

c) Ha α limeszrendszám, akkor legyen

$$L_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta.$$

d) *A konstruálható halmazok összessége:* $L = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}n} L_\alpha$. □

A definíció alapján könnyen belátható, hogy L_α minden α rendszámra halmaz, míg L osztály, mivel $x \in L$ formulával leírható, sőt ez a formula Δ_0, és így abszolút. Továbbá

$$L_\alpha \cup \{L_\alpha\} \subseteq L_{\alpha+1} \subseteq L_\beta \subseteq L$$

minden $\alpha < \beta \in \mathcal{O}n$ esetén; L_α mindig tranzitív halmaz, és így L tranzitív osztály; valamint $L \cap \alpha = L_\alpha \cap \alpha = \alpha$ minden $\alpha \in \mathcal{O}n$ rendszámra; és végül $\mathcal{O}n \subset L$.

1.26. Definíció:

A

$$(\forall x) \quad x \in L$$

formulát *konstruálhatósági axiómá*nak nevezzük. Elterjedtebb szimbolikus jelölésmódja:

$$V = L.$$ □

Ismertek a következő eredmények:

1.27. Tétel (Gödel, 1940):

L-ben teljesülnek ZFC axiómái és a konstruálhatósági axióma ($V = L$). □

Nem mondhatjuk, hogy L modell, mert nem halmaz, ellenben osztálymodell. Ez második példánk osztálymodellre, hiszen $L \subsetneq V$.

Eddigi jelöléseinkkel összhangban, ha M tranzitív ZFC-modell, L^M jelöli az M-ben konstruálható halmazok osztályát. (Azaz L egész fenti definícióját, amely formulával leírható, M-ben végezzük, és a kapott halmazok összességét jelöljük L^M-el.) L^M M-ben belülről nézve nem halmaz, azonban osztály, hiszen (abszolút) formulával definiálható. Az M-modellt kívülről nézve L^M azonban halmaz, hiszen M maga halmaz. Vegyük észre: ha $\mathfrak{A}$ halmazmodell és φ formula, akkor az „$\mathfrak{A} \models \varphi$", azaz „$\mathfrak{A}$ modellje φ-nek" „reláció" (a halmazmodellek osztálya és a formulák halmaza között) is leírható formulával, és értéke függ attól a modelltől, amelyben kiértékeljük. Így van értelme az $(\mathfrak{A} \models \varphi)^M$, vagy más szóval az $M \models (\mathfrak{A} \models \varphi)$ állításoknak.

1.28. Tétel:

Legyen M tranzitív $\in$-ZFC-modell. Ekkor

a) $$L^M \models \text{„ZFC } \& \ V = L\text{”},$$

b) $$L^M = L \cap M = L_{\alpha(M)}, \quad \textit{ahol} \quad \alpha(M) = M \cap \mathcal{O}_n. \qquad \square$$

a) értelmében az L^M modellben is teljesül a konstruálhatósági axióma ($V=L$), azaz minden halmazt formulával lehet definiálni. (L^M halmazmodell, hiszen $L^M \subseteq M$ és M halmazmodell volt.) Könnyen láthatóan tetszőleges M modellnek tartalmaznia kell a formulákkal definiálható halmazokat, azaz $L^M \subset M$ minden modellre. („Amiről tudok beszélni, az létezik.”) Konstruálhatósági axiómánk azt mondja, hogy más halmaz nincs is, azaz minden halmaz definiálható formulával („Amiről nem tudok beszélni, az nincs.”). Modellekre ezt az $L^M = M$ egyenlőséggel írhatjuk le, *ha* $M = L$ vagy $M = M^L$, azaz pl. $L^L = L$. Vagyis, ha L-ben újra definiáljuk a konstruálható halmazok osztályát, akkor visszakapjuk az eredeti L osztályt. A fenti gondolatmenettel bizonyítjuk be az $L \models (V=L)$ és $L^M \models (V=L)$ tételeket.

Az 1.28. Tétel (b) része következik (nem egykönnyen) az „x konstruálható” (azaz $x \in L$) formula abszolútságából. A másik egyenlőség mindössze azt a (szemléletesen érthető) tényt fejez ki, hogy az M-beli β rendszámokra L_β^M, L-nek β-dik szintjéből M-be eső része M-ben van. („Ami M-be beleférne, vagyis benne kellene, hogy legyen, az benne is van.”) Megjegyezzük, hogy $\beta < \alpha(M)$ mert $\alpha(M) \notin M$, csak $\alpha(M) \subset M$. Ez utóbbi következik a rendszámok abszolútságából (és így pl. $\mathcal{O}_n \subset L$). A fentiekből az Olvasó már bizonyára rájött, hogy L, ill. L^M a lehető legkisebb modell.

1.29. Tétel:

Van egy olyan elsőrendű φ formula, amely $V=L$ esetén az univerzumot (minden halmazt) jól rendezi, azaz az

$$x <_L y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varphi(x, y) \ \& \ (x \neq y)$$

jelölés mellett igaz a következő:

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}V = L \Rightarrow (\forall x)(\forall y)[x <_L y \vee y <_L x \vee y = x] \ \& \ (V, <_L)$$

jól fundált teljes rendezés”. $\square$

A fenti tétel segítségével a kiválasztási axióma erősebb változata igazolható: az ún. kiválasztási függvény konstruktív, azaz formulával definiálható, és így minden, a kiválasztási axiómát (és más formulával definiálható eszközöket) használó konstrukció konstruktív, azaz formulával definiálható! Ez pedig mint említettük, speciálisan a Banach-elvre is ad egy konstruktív ellenpéldát, L-ben.

A következő fejezetekben olyan modelleket keresünk, amelyekben a Banach-elvre bizonyíthatóan nincs konstruktív ellenpélda.

2. Definiálható Banach-terek

Ebben a részben ismertetjük Ajtai Miklós [1], [2]-ben megjelent néhány eredményét és néhány olyan segédállítást bizonyítunk be, amelyek lehetővé teszik ezen eredmények alkalmazását. A következő, 3. részben pedig megadjuk az analízis egy

tételének logikai úton való bizonyítását, amely sémaként szolgálhat hasonló analízistételek belátásához.

A következő két fejezetben szokásos módon bizonyítunk, valamint az analízis néhány fogalmát írjuk le részletesen (elsőrendű) formulák segítségével. Az utolsó fejezetben elsősorban különböző modelleket vizsgálunk meg (hiszen ez a forszolás alapvető módszere).

Előrebocsátunk néhány definíciót. Legyen T egy valós számtest feletti vektortér.

A

$$|.|: T \to \mathbf{R}$$

leképezést *pszeudonormának* nevezzük, ha

a) $$|x| \geqq 0 \ \& \ |x| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0} \quad (\forall x \in T),$$

b) $$|\lambda x| \leqq |x| \quad (\forall x \in T)(\forall \lambda \in \mathbf{R},\ |\lambda| \leqq 1),$$

c) $$|x+y| \leqq |x|+|y| \quad (\forall x, y \in T);$$

félnormának (vagy *Minkowski-funkcionálnak*) nevezzük, ha

a') $$|x| \geqq 0 \quad (\forall x \in T),$$

b') $$|\lambda x| = |\lambda|\,|x| \quad (\forall \lambda \in \mathbf{R})(\forall x \in T),$$

és a fenti c) teljesül.

Az

$$F: T \to \mathbf{R}$$

leképezést *racionális konvex funkcionál*nak (vagy *racionális félnormának*) nevezzük, ha

a'') $$F(x) \geqq 0 \quad (\forall x \in T),$$

b'') $$F(rx) = |r| F(x) \quad (\forall x \in T)(\forall r \in \mathbf{Q}),$$

c'') $$F(x+y) \leqq F(x)+F(y) \quad (\forall x, y \in T) \quad \text{(konvexitás).}$$ □

Érvényes a következő tétel:

2.1. Tétel (Ajtai Miklós [1], [2]):

Legyen M a ZFC egy megszámlálható tranzitív modellje. Akkor létezik egy $N \supseteq M$ tranzitív ZFC modell a következő tulajdonságokkal. Legyen $\langle T, |.| \rangle \in N$ egy teljes pszeudonormával ellátott valós vektortér, $F \in N$ egy racionális konvex funkcionál T-n és $c \in M$. Ha van olyan $\Phi(x, y, z)$ formula, melyre fennáll

$$N \models (\forall x, y)[\Phi(x, y, c) \Leftrightarrow (x = \langle T, |.| \rangle \ \& \ y = F)],$$

akkor

$$N \models \text{„}F \textit{ folytonos } T\textit{-n}\text{”}.$$ □

(A szükséges halmazelméleti fogalmakat az előző részben definiáltuk.)

A tétel bizonyításából (l. [1] vagy [2]) kitűnik, hogy $|.|$ félnorma esetén is igaz marad a tétel állítása.

A tétel tehát azt állítja, hogy minden M modellnek van egy N bővítése, amelyben bármely formulával definiált $\langle T, |.| \rangle$ Banach-téren bármely formulával definiált

F funkciónál folytonos. Eszerint „konkrét" tereken „konkrétan" megadott funkcionál folytonosságát ZFC-ben nem lehet megcáfolni. (Másfelől viszont bizonyítani sem lehet ebben az általános alakjában, mint erre utaltunk az előző részben. Ha pl. teljesül a konstruálhatósági axióma, másképpen $V=L$, akkor létezik az összes halmaznak egy formulával definiált jólrendezése, és így a kiválasztási axióma is „konstruktívvá" válik, tehát formulával definiálható egy végtelen dimenziós Banach-tér és azon egy nem folytonos lineáris funkcionál.)

A 4. részben megadjuk a tétel egy lehetséges általánosítását nem metrizálható terekre (4.21. Tétel).

2.2. Következmény:

Legyenek φ_1, φ_2, ψ olyan formulák, melyek a c_1, c_2, d paraméterekből egyértelműen definiálják a $(B_1, \|.\|_1)$ és $(B_2, \|.\|_2)$ Banach-tereket és köztük egy L lineáris operátort.

Legyen

$$N \models \text{„}\varphi_1(B_1^N) \ \& \ \varphi_2(B_2^N) \ \& \ \psi(L^N)\text{"}$$

valamilyen B_1^N, B_2^N, $L^N \in N$-re (N az előző tételben szereplő modell). Akkor

$$N \models \text{„}L^N\colon B_1^N \to B_2^N \quad \textit{folytonos}\text{"}.$$

BIZONYÍTÁS:

Végig az N modellben dolgozunk, azaz, minden objektumot, definíciót és következtetést N-ben értünk. Az

$$F\colon z \mapsto \|L^N(z)\|_2^N$$

leképezés egy racionális konvex funkcionál B_1^N-en és persze formulával definiálható, így a 2.1. Tétel alapján N-ben folytonos. Akkor pedig L konvexitása értelmében

$$x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\|_1^N \to 0 \Rightarrow F(x_n - x) \to 0 \Leftrightarrow \|L^N(x_n - x)\|_2^N. \qquad \square$$

Tekintsünk egy olyan φ formulát, amelyre (c tetszőleges paraméter):

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}(\exists\, !x, y)\varphi(x, y, c) \ \& \ (\forall x, y)[\varphi(x, y, c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \text{ metrikus topologikus vektortér az } y \text{ metrikával]}\text{"}.$$

Legyenek $M \subsetneqq N$ tetszőleges ZFC-modellek és teljesüljön

$$M \models \varphi(x^M, \varrho^M, c) \quad \text{és} \quad N \models \varphi(x^N, \varrho^N, c)$$

valamilyen $x^M, \varrho^M \in M$, $x^N, \varrho^N \in N$ objektumokra. Vizsgáljuk meg x^M és x^N viszonyát. Mindkettő részhalmaza N-nek, de általában nem áll fenn $x^M \subset x^N$, sőt még az együtthatótestre sem igaz* $\mathbf{R}^M \subset \mathbf{R}^N$. Ugyanakkor, mint látni fogjuk a 3. részben, megadható $\mathbf{R}^M$ egy „természetes" $\eta\colon \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^N$, $\eta \in N$ injekciója $\mathbf{R}^N$-be, ami izometrikus. Az x^M tér tekinthető $\eta(\mathbf{R}^M)$ feletti vektortérnek N-ben is. N-ben azonban a ϱ^M metrika már nem feltétlenül lesz teljes, hiszen N-ben lehetnek olyan Cauchy-sorozatok, amik M-ben nincsenek benne. Vegyük az x^M tér N-beli Cauchy-sorozatait és tekintsünk kettőt ekvivalensnek, ha az elemek ϱ^M szerinti távolsága tart 0-hoz.

* $\mathbf{R}^M$ a valós számok halmaza M-ben, míg $\mathbf{R}^N$ N-ben.

Az ekvivalenciaosztályok $(x^M)_c$-vel jelölt halmazán kézenfekvő módon bevezethetők a vektorműveletek és a metrika: világos, hogy $(x^M)_c$ teljes metrikával topologizálható vektortér lesz $\mathbf{R}^N$ felett. A konstans sorozatok ekvivalenciaosztályaiként beágyazható x^M az $(x^M)_c$-be és a beágyazott elemek új távolsága megegyezik az eredeti elemek ϱ^M-távolságával. Mármost az x^M és x^N terek közötti kapcsolatot keresve, józan ésszel az várható, hogy x^N „legalább akkora", mint $(x^M)_c$, pontosabban, hogy létezik egy, valamilyen értelemben természetes N-beli beágyazása $(x^M)_c$-nek x^N-be. Az alábbi állítás azt mutatja, hogy ehelyett elég az x^M „természetes" beágyazhatóságát bizonyítani.

2.3. Észrevétel:

Legyen φ egy formula és tegyük fel, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\exists!B)(\varphi(B) \;\&\; (\forall B)[\varphi(B) \Rightarrow B = \langle x, \varrho\rangle \;\&$$

$$\&\; B \textit{ teljesen metrizálható topologikus vektortér}]\text{"}.$$

Legyenek $M \subseteq N$ rögzített ZFC-modellek és tegyük fel, hogy $M \models \varphi(B^M)$ és $N \models \varphi(B^N)$. Ha van olyan $\bar{\eta} \in N$ leképezés, hogy

$$N \models \text{„}\bar{\eta}\colon B^M \to B^N \textit{ lineáris izometrikus beágyazás}\text{"},$$

akkor van olyan $\eta \in N$, hogy

$$N \models \text{„}\eta\colon (B^M)_c \to B^N \textit{ lineáris izometrikus beágyazás}\text{"}.$$

Sőt, η az $\bar{\eta}$-ból mint paraméterből elsőrendű formulával definiálható. □

2.3. lényegében azt mondja, hogy ha egy teljes metrikus tér egy sűrű alterét izometrikusan be lehet ágyazni egy másik teljes metrikus térbe, akkor az egész tér is izometrikusan beágyazható és e beágyazás is konstruktív. Erre könnyen adható formalizált bizonyítás, amit helykímélés céljából elhagyunk.

2.4. Segédtétel (Ajtai Miklós [1]):

Legyen $\varphi(x, y)$ olyan ZFC-formula, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\exists!x, y)\varphi(x, y) \;\&\; (\forall x, y)[\varphi(x, y) \Rightarrow$$

$$x \textit{ Banach-tér, } y \textit{ egy félnorma } x\textit{-en}]\text{"}.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan egyparaméteres $\Phi(z, c)$ ZFC-formula, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\forall c)[(\exists z)\Phi(z, c) \Rightarrow \exists! z\Phi(z, c)]$$

Tegyük fel továbbá, hogy M, N tranzitív ZFC-modellek esetén, ha $M \subseteq N$ és

$$M \models \varphi(X, f) \quad \textit{és} \quad N \models \varphi(X', f') \;\&\; \Phi(\eta, X_c^M),$$

akkor $\eta\colon X_c \to X'$ lineáris izometrikus beágyazás úgy, hogy tetszőleges $x \in X$ esetén

$$f(x) = f'(\eta(x)).$$

Ekkor

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\forall x, y)[\varphi(x, y) \Rightarrow y \quad \textit{folytonos } x\textit{-en}]\text{"}.$$ □

2.5. Megjegyzés:

Mint 2.6-ban látni fogjuk, 2.4-ben nem szükséges feltenni az η beágyazás konstruktíve adott voltát, elég a létezését feltételezni.

2.6. Segédtétel:

Legyenek φ_1, φ_2, ψ *formulák, amelyekre* $i=1, 2$ *esetén*

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\exists\, !B)\varphi_i(B) \;\&\; (\forall B)[\varphi_i(B) \Rightarrow B = \langle x, \varrho\rangle \quad \textit{Banach-tér}]''$$

és

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\exists\, !z)\psi(z) \;\&\; (\forall B_1, B_2, z)[\varphi_1(B_1) \;\&\; \varphi_2(B_2) \;\&\; \psi(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\colon B_1 \to B_2 \quad \textit{konvex racionális operátor}]''.$$

Tegyük fel továbbá, hogy minden tranzitív $M \subseteqq N$ *ZFC-modellpárra teljesül a következő implikáció:*

Ha

$$M \models \varphi_1(B_1) \;\&\; \varphi_2(B_2) \;\&\; \psi(L),$$

$$N \models \varphi_1(B_1') \;\&\; \varphi_2(B_2') \;\&\; \psi(L'),$$

akkor van olyan $\eta_1, \eta_2 \in N$, *hogy* $N \models$ „$\eta_i\colon (B_i)_c \to B_i'$ *lineáris izometrikus beágyazás* $i=1, 2$-*re*" *és*

$$\eta_2(L(x)) = L'(\eta_1(x)) \quad (\forall x \in X_1).$$

Ha a fentiek teljesülnek, akkor

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\forall B_1, B_2, L)[\varphi_1(B_1) \;\&\; \varphi_2(B_2) \;\&\; \psi(L) \Rightarrow L\colon B_1 \to B_2 \textit{ folytonos}]''.$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen M egy tranzitív ZFC-modell és N a 2.1-ben megadott tulajdonságú tranzitív ZFC-modell, $M \subseteqq N$.

Legyen

$$M \models \varphi_1(B_1) \;\&\; \varphi_2(B_2) \;\&\; \psi(L),$$

$$N \models \varphi_1(B_1') \;\&\; \varphi_2(B_2') \;\&\; \psi(L'),$$

akkor a 2.2. szerint

$$N \models \text{„}L'\colon B_1' \to B_2' \text{ folytonos}''.$$

Legyen $\langle x_n\colon n \in \omega\rangle \in M$ egy X_1-beli elemekből M-ben alkotott konvergens sorozat, azaz

$$M \models \text{„}(\forall n)(x_n \in X_1) \;\&\; (\exists y \in X_1)(\forall k \in \omega)(\exists n_0 \in \omega)(\forall n \in \omega)$$

$$\left[n > n_0 \Rightarrow \varrho_1(x_n, y) < \frac{1}{k}\right]''.$$

Az L' folytonosságát felhasználva kapjuk:

$$N \models \text{„}(\forall n)[\eta_1(x_n) \in X_1'] \;\&\; [\eta_1(y) \in X_1'] \;\&\; (\forall k \in \omega)(\exists n \in \omega)(\forall n \in \omega)$$

$$\left[n > n_0 \Rightarrow \varrho_1'(\eta_1(x_n), \eta_1(y)) < \frac{1}{k}\right]''$$

és

$$N \models \text{„}[L'(\eta_1(y)) \in X_1'] \ \& \ (\forall k \in \omega)(\exists n_0 \in \omega)(\forall n \in \omega)$$

$$\left[n > n_0 \Rightarrow \varrho_2'(L'(\eta_1(x_n)), L'(\eta_1(y))) < \frac{1}{k}\right]\text{”}.$$

Az $\eta_2 \circ L = L' \circ \eta_1$ egyenlőség felhasználásával adódik, hogy

$$N \models \text{„}(\forall k \in \omega)(\exists n_0 \in \omega)(\forall n \in \omega)\left[n > n_0 \Rightarrow \varrho_2'(\eta_2(L(x_n)), \eta_2(L(y))) < \frac{1}{k}\right]\text{”}.$$

Mivel η_2 izometrikus, ezért

$$N \models \text{„}(\forall k \in \omega)(\exists n_0 \in \omega)\left[n > n_0 \Rightarrow \varrho_2(L(x_n), L(y)) < \frac{1}{k}\right]\text{”}.$$

Itt csak M-beli objektumok szerepelnek és az $\langle x_n : n \in \omega \rangle \in M$ sorozat tetszőleges X_1-beli sorozat volt, ezért

$$M \models \text{„}L \text{ folytonos”}.$$

Látjuk tehát, hogy a bizonyítandó ZFC-tétel igaz minden tranzitív (és megszámlálható) ZFC-modellben. Mostowski tétele és a leszálló Löwenheim—Skolem-tétel értelmében (l. 1. rész) ugyanez igaz bármely ZFC-modellben, tehát valóban tétel ZFC-ben. □

3. Alkalmazások

Ebben a részben néhány közismert Banach-térről megmutatjuk, hogy teljesítik a 2.3. Észrevétel feltételeit, majd ezek felhasználásával egy analízis-tételt bizonyítunk. Ezekhez hasonlóan még számos tétel bizonyítható (l. még [1], [2]).

Az a tény, hogy az $\mathbf{R}$, a $C[0, 1]$ és az L^p terek elsőrendű formulákkal definiálhatók, eléggé közismert. Azonban szükségünk van e formulák által különböző modellekben definiált halmazok, struktúrák közötti kapcsolatokra. Először vizsgáljuk $C[0, 1]$-et.

3.0. Lépés: A természetes számok halmaza, ω elsőrendű formulával definiálható. Legyen ugyanis

$$\Phi_0(z) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\exists y)[(\forall x)(x \notin y) \ \& \ y \in z] \ \& \ (\forall x)[(x \in z) \Rightarrow x \cup \{x\} \in z] \ \&$$

$$\& \ (\forall t)\big[\exists y \, \forall x[(x \notin y) \ \& \ y \in t] \ \& \ (\forall x)[(x \in t) \Rightarrow x \cup \{x\} \in t] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall y)[(y \in z) \Rightarrow y \in t]\big]\text{”}.$$

Könnyen belátható:

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\exists ! z)\Phi_0(z)\text{”}. \qquad \square$$

Itt, mint eddig, ZFC a halmazelmélet Zermelo—Fraenkel-axiómarendszerét jelöli a kiválasztási axióma (Axiom of Choice) hozzávételével.

3.1. Lépés: ω-n a rendezés, összeadás, szorzás definíciója:
Legyen

$$\Phi_1(x, y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\exists z)[\Phi_0(z) \ \& \ (x \in z) \ \& \ (y \in z)] \ \& \ (\forall t)[t \in x \Rightarrow t \in y] \ \& \ \neg(x = y)\text{”},$$

akkor $\Phi_1(x, y)$ az $x<y$ relációt adja meg.

$$\Phi_1'(x, y, t) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\exists z)[\Phi_0(z) \ \& \ (x\in z) \ \& \ (y\in z) \ \& \ (t\in z)] \ \&$$
$$\& \ (\exists f)[f \text{ függvény } \& \ \mathrm{Dom}(f) = x\times\{0\}\cup y\times\{1\} \ \&$$
$$\& \ f \text{ bijektív } \& \ \mathrm{Ran}(f) = t]\text{”},$$

ez az „$x+y=t$” formulája. A $\Phi_1''(x, y, t)$ formulát, ami „$x\cdot y=t$” formulája, hasonlóan adhatjuk meg. Egyszerűen adódik, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\exists\, !R)[R\subset\omega\times\omega \ \& \ (\forall x, y\in\omega) \ R(x, y) \Leftrightarrow \Phi_1(x, y)]\text{”},$$

továbbá az alábbi képletben i helyébe '-t vagy ”-t írva megkaphatjuk az $+$ és a $\cdot$ műveletét:

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\exists\, !f)\big[f \text{ függvény } \& \ \mathrm{Dom}(f) = \omega\times\omega \ \& \ \mathrm{Ran}(f) = \omega \ \&$$
$$\& \ (\forall x, y\in\omega)\Phi_1^i(x, y, f(x, y))\big]\text{”}. \qquad \square$$

A formulákban nagyon sok rövidítést használtunk: „f függvény”, „$\mathrm{Dom}(f)$”, $\omega\times\omega$, „f bijektív” stb., ezek mind könnyen definiálhatók elsőrendű formulákkal.

3.2. Lépés: **Q** definíciója, rendezett számhármasok ekvivalencia osztályaiként:

$$\Phi_2(z) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\big[x\in z \Leftrightarrow \neg(x=\emptyset) \ \& \ (\forall y)\big(y\in x \Leftrightarrow (\exists y_1, y_2\in\omega)$$
$$(\exists y_0\in\{0, 1\})(\neg y_2 = 0) \ \& \ \langle y_0, y_1, y_2\rangle\in y$$
$$\& \ (y_1 = 0 \Rightarrow y_0 = 1)$$
$$\& \ (\forall u_0, u_1 u_2, t_0, t_1, t_2\in\omega)(\forall y\in x)$$
$$[(\langle u_0, u_1, u_2\rangle\in y \ \& \ \langle t_0, t_1, t_2\rangle\in y) \Leftrightarrow (u_1 t_2 = t_1 u_2 \ \& \ u_0 = t_0)])]\text{”}.$$

Megint egyszerűen belátható, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\exists\, !z)\Phi_2(z)\text{”}. \qquad \square$$

3.2′. Lépés: Olyan Φ_3, Φ_3', Φ_3'', Φ_3''' formulák megadása, melyek rendre az abszolútérték, a rendezés, az összeadás és a szorzás definícióját adják meg **Q**-n. Ezek megadása rutinszerű, ezért elhagyjuk. $\square$

3.3. Állítás: *ω és* **Q**, *illetve a fentiekben rajtuk definiált relációk és műveletek abszolútak.*

BIZONYÍTÁS:

Tudjuk, hogy az üres halmaz egyértelmű, azaz

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\exists\, !t)(\forall y)(\neg(y\in t))\text{”}.$$

Legyen M és N két tranzitív ZFC-modell. Akkor

(1) $\qquad M \models \text{„}x\in y\text{”}$ ekvivalens „$x\in y$”-nal,

és ugyanez áll N-re is. Ezért.

$$\emptyset^M = \emptyset^N = \emptyset,$$

tehát az üres halmaz interpretáltja mindkét halmazban saját maga. Ugyancsak (1) miatt $x \in M$ esetén van olyan $y \in M$, amelyre $M \models$ „$y = (x \cup \{x\})$" és ez utóbbi pontosan azt jelenti, hogy $y = x \cup \{x\}$ (vagyis az „$y = x \cup \{x\}$" reláció is abszolút). Ezért indukcióval látható, hogy ω elemei mind abszolútak, azaz

$$1^M = 1^N = 1, \quad 2^M = 2^N = 2, \quad \text{stb.},$$

így adódik ω abszolútsága. A **Q** abszolút volta ezekután abból adódik, hogy (1) miatt tetszőleges $x, y, z \in \omega^M$ esetén $xyz \in M$ és minden $t \in M$ esetén $M \models$ „$t = xyz$" pontosan akkor igaz, ha $t = xyz$ és ugyanúgy $M \models$ „$(x, y, z \in \omega) \& z = x \cdot y$" ekvivalens $x, y, z \in \omega$ & $z = x \cdot y$-nal. Mármost Φ_2 alapján **Q** abszolútsága következik. A műveletek és relációk abszolút volta ugyanúgy látható be. □

3.4. Lépés: R definíciója:

Ezt a racionális számokból álló Cauchy-sorozatok ekvivalenciaosztályozásával oldjuk meg. Legyen a Cauchy-sorozatok definíciója

$$\Phi_4^-(y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}y \text{ függvény } \& \operatorname{Dom}(y) = \omega \ \& \operatorname{Ran}(y) \subseteq \mathbf{Q} \ \&$$
$$\& \ (\forall k \in \omega)(\exists n_0 \in \omega)(\forall m_1, m_2 \in \omega)$$
$$\left[(m_1 > n_0 \ \& \ m_2 > n_0) \Rightarrow |y(m_1) - y(m_2)| < \frac{1}{k}\right],$$

és az ekvivalenciaosztályok definíciója

$$\Phi_4(z) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\forall x)\left[x \in z \Rightarrow \forall y\left(y \in x \Rightarrow \Phi_4^-(y)\right)\right] \ \&$$
$$\& \ (\forall y)[\Phi_4^-(y) \Rightarrow (\exists x \in z)(y \in x)] \ \& \ (\forall y_1, y_2)$$
$$\left[(\exists x \in z)\left((y_1 \in x) \ \& \ (y_2 \in x) \Leftrightarrow \left(\Phi_4^-(y_1) \ \& \ \Phi_4^-(y_2)\right) \ \&\right.\right.$$
$$\& \ (\forall k \in \omega)(\exists n_0 \in \omega)(\forall n \in \omega)$$
$$\left.\left.\left(n > n_0 \Rightarrow |y_1(n) - y_2(n)| < \frac{1}{k}\right)\right)\right]\text{”}.$$

Akkor $\mathrm{ZFC} \vdash$ „$(\exists!z)\,\Phi_4(z)$", mint könnyen belátható. □

3.5. Lépés:

(a) **R**-en a rendezés, az „$y_1 \leqq y_2$" reláció:

$$\Phi_5(y_1, y_2) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\exists z)[\Phi_4(z) \ \& \ y_1, y_2 \in z] \ \&$$
$$\& \ (\forall t_1 \in y_1)(\forall t_2 \in y_2)(\forall k \in \omega)(\exists n_0 \in \omega)$$
$$\left[n > n_0 \Rightarrow t_1(n) < t_2(n) + \frac{1}{k}\right]\text{”}.$$

(b) **Q** beágyazása **R**-be konstans sorozatok ekvivalenciaosztályaiként:

$$\Phi_5'(y, r) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\exists z)(\exists q)[\Phi_4(z) \ \& \ \Phi_2(q) \ \& \ y \in z \ \& \ r \in q] \ \&$$
$$\& \ (\exists t \in y)(\forall n \in \omega)[t(n) = r]\text{”}.$$

(c) A [0, 1] szakasz definíciója:

$$\Phi_5''(Y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\exists z)\big[\Phi_4(z) \;\&\; Y \subseteq z \;\&\; (\forall t \in z)\big[t \in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists r,\, y_0, y_1)\big\{\Phi_2(r) \;\&\; y_0, y_1 \in r \;\&$$

$$\&\; \langle 0, 0, 1\rangle \in y_0 \;\&\; \langle 0, 1, 1\rangle \in y_1 \;\&\; (\exists \hat{y}_0, \hat{y}_1)(\Phi_5(y_0, \hat{y}_0) \;\&\; \Phi_5(y_1, \hat{y}_1) \;\&$$

$$\&\; \Phi_5(\hat{y}_0, t) \;\&\; \Phi_5(t, \hat{y}_1))\big\}\big]\big]\text{”}.$$

Itt tehát Y felel meg a [0, 1] halmaznak.

(d) Az abszolút érték és a műveletek definíciója **R**-en: ezt elhagyjuk. □

MEGJEGYZÉS:

A „sorozatnak lenni” kijelentés abszolút, azaz tetszőleges $\langle M, \in\rangle$ és $\langle N, \in\rangle$ $\in$-tranzitív ZFC-modellekre, amelyekre $M \subseteq N$, $r, s \in M$,

$$M \models \text{„}r \text{ függvény, } \mathrm{Dom}(r) = \omega, \;\; \mathrm{Ran}(r) \subseteq s\text{”}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$N \models \text{„}r \text{ függvény, } \mathrm{Dom}(r) = \omega, \;\; \mathrm{Ran}(r) \subseteq s\text{”}.$$

Hasonlóan, egy $\langle r_n : n \in \omega\rangle \in M$ racionális számsorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat M-ben, ha N-ben az. Általában érvényes ugyanis a következő állítás:

Állítás: *Ha φ formula és kvantorai csak ω elemeire vonatkozhatnak, akkor φ abszolút az $\in$-modellekre nézve.* □

Másfelől **R** maga nem abszolút. Ennek az az oka, hogy N-ben lehet olyan racionális számsorozat, ami M-nek nem eleme, jóllehet a sorozat elemei elemei M-nek is. A leszálló Löwenheim—Skolem-tétel szerint ha ZFC-nek van modellje, akkor megszámlálható modellje is van, egy ilyen modellben biztosan nincs benne minden racionális Cauchy-sorozat, hiszen abból, mint tudjuk, kontinuumnyi sok van. Sőt, ha $M \subseteq N$ ZFC-modellek és $\mathbf{R}^M \in M$, $\mathbf{R}^N \in N$ olyan objektumok, hogy $M \models \Phi_4(\mathbf{R}^M)$, $N \models \Phi_4(\mathbf{R}^N)$ akkor még $\mathbf{R}^M \subseteq \mathbf{R}^N$ sem igaz, hiszen mások az ekvivalenciaosztályok a két modellben. Mégis igaz a következő állítás:

3.6. Állítás: *Legyenek $\langle M, \in\rangle$ és $\langle N, \in\rangle$ ZFC-modellek, $M \subseteq N$, és legyen $M \models \Phi_4(\mathbf{R}^M)$, $N \models \Phi_4(\mathbf{R}^N)$. Akkor N-ben definiálható $\mathbf{R}^M$-nek egy $\mathbf{R}^N$-be való lineáris izometrikus beágyazása (és a definícióban $\mathbf{R}^M$ mint paraméter szerepel).*

BIZONYÍTÁS:

Legyen

$$\Phi_6(f, r) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„ függvény } \& \; \mathrm{Dom}(f) = r \;\&$$

$$\&\; (\exists z)[\Phi_4(z) \;\&\; \mathrm{Ran}(f) \subseteq z] \;\&\; (\forall x \in r)(x \subseteq f(x))\text{”}.$$

Akkor

$$N \models \text{„}(\exists!\, f)\Phi_6(f, \mathbf{R}^M) \;\&\; (\eta : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^N \text{ izometrikus})\text{”}.$$

Ennek belátása rutinszerű, így azt elhagyjuk. □

3.7. Lépés: Az „f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény folytonos" állítást leíró formula:

$$\Phi_7(f) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}f \text{ függvény } \&\ (\exists z)[\Phi_4(z)\ \&\ \mathrm{Dom}(f)\subseteq z\ \&\ \mathrm{Ran}(f)\in z]\ \&$$

$$\&\ (\forall k\in\omega)\,(\forall x\in\mathrm{Dom}(f))\,(\exists m\in\omega)\,(\forall x'\in\mathrm{Dom}(f))$$

$$\left[|x-x'|<\frac{1}{m}\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\frac{1}{k}\right]\text{"}.$$

3.8. Lépés: A $C[0,1]$-t definiáló formula:

$$\Phi_8(c) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\forall f)\,[f\in c \Leftrightarrow \Phi_7(f)\ \&\ \Phi_5''(\mathrm{Dom}(f))]\text{"}.$$ □

3.9. Lépés: $C[0,1]$-en a maximumnorma definíciója:

$$\Phi_9(F) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}F \text{ függvény } \&\ \Phi_8(\mathrm{Dom}(F))\ \&\ (\exists z)(\Phi_4(z)\ \&\ \mathrm{Ran}(F)\subset z)\ \&$$

$$\&\ (\forall h\in\mathrm{Dom}(F))\,[(\forall x)\{(\exists y\,\Phi_5''(y)\ \&\ (x\in y))\Rightarrow|h(x)|\leqq F(h)\ \&$$

$$\&\ (\forall t)(\Phi_5(t,F(h))\ \&\ \neg(t=F(h))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\exists x\,\exists y)(\Phi_4(y)\ \&\ x\in y\ \&\ \Phi_5(t,h(x))\ \&\ t\neq h(x))\}]\text{"}.$$ □

Nyilván

$$\mathrm{ZFC}\vdash(\exists!F)[\Phi_9(F)\ \&\ (\forall c,F)(\Phi_8(c)\ \&\ \Phi_9(F)\Rightarrow\langle c,F\rangle \text{ Banach-tér})]\text{"}.$$

(F megszokottabb jelölése $\|.\|_\infty$.) □

Most $C[0,1]^M$ beágyazása $C[0,1]^N$-be a következő módon történhet. Mivel $\mathbf{Q}$ abszolútsága miatt az $\mathbf{R}^M$ 3.6. szerinti beágyazottja sűrű $\mathbf{R}^N$-ben, ezért $f\in C[0,1]^N$-et áttranszformálhatjuk $[0,1]^N$ egy sűrű részhalmazán értelmezett függvénnyé, ami, ha egyáltalán kiterjeszthető folytonosan az egész $[0,1]^N$-re, akkor ez a kiterjesztés egyértelmű.

Ennek lehetőségét mutatjuk meg a következő állításban.

3.10. Állítás: *$\langle C[0,1], \|.\|_\infty\rangle$-re teljesülnek a 2.3. Állítás feltételei.*

BIZONYÍTÁS:

Legyenek adottak az $M\subseteqq N$ modellek és $\mathbf{R}^M, F^M, c^M\in M$, $\mathbf{R}^N, F^N, c^N, \eta\in N$ úgy, hogy

$$M\models\Phi_4(\mathbf{R}^M)\ \&\ \Phi_8(c^M)\ \&\ \Phi_9(F^M),$$

$$N\models\Phi_4(\mathbf{R}^N)\ \&\ \Phi_8(c^N)\ \&\ \Phi_9(F^N)\ \&\ \Phi_6(\eta,\mathbf{R}^M).$$

Legyen

$$\Phi_{10}(\vartheta,t,r,s) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}\vartheta \text{ függvény } \&\ \mathrm{Dom}(\vartheta)=t\ \&$$

$$\&\ (\exists z)[\Phi_8(z)\ \&\ \mathrm{Ran}(\vartheta)\subseteqq z]\ \&\ (\forall f\in\mathrm{Dom}(\vartheta))(\forall x,y\in r)$$

$$[f(x)=y\Leftrightarrow(\vartheta(f))(s(x))=s(y)]\text{"}.$$

Akkor

$$N \models \text{„}(\exists!\vartheta)\,\Phi_{10}(\vartheta, c^N, \mathbf{R}^N, \eta) \;\&\; (\forall \vartheta)$$

$$[\Phi_{10}(\vartheta, c^N, \mathbf{R}^N, \eta) \subseteq \vartheta\colon\ c^M \to c^N \text{ izometrikus}]\text{''}.$$

Ennek bizonyítása a következő. Bármely $f \in C[0,1]^M$ függvény egyenletesen folytonos, ami azt jelenti, hogy $f \restriction \mathbf{Q}$ is egyenletesen folytonos: elég közeli $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$ esetén $|f(r_1)-f(r_2)|$ is elég kicsi. Ez utóbbi állítás már abszolút, tehát az N-be átvitt $f \restriction \mathbf{Q}$-ra is érvényes. Akkor pedig N-ben definiálhatjuk $f \restriction \mathbf{Q}$-nak egy $\vartheta(f)$ kiterjesztését így: ha $x \in [0,1]^N$ és $(r_n \to x)^N$ egy x-hez konvergáló racionális számsorozat, akkor $f(r_n)$ Cauchy-sorozat N-ben, így van egy $\vartheta(f)(x)$-szel jelölhető határértéke. Világos, hogy így egyértelműen megadtunk egy $\vartheta(f)\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ függvényt, ami folytonos. Másrészt, ha veszünk egy $x \in \eta([0,1]^M)$-beli pontot, és olyan racionális r_n sorozattal konvergálunk x-hez, ami M-ben is sorozat, akkor belátható hogy $f \in C[0,1]^M$ esetén az $f \circ \eta^{-1}$ beágyazott függvénynek $\vartheta(f) \in C[0,1]^N$ egy kiterjesztése lesz. Végül ϑ izometrikus volta abból következik, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}f \in C[0,1] \quad \text{esetén} \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(r)|\colon\ r \in \mathbf{Q}\}\text{''}.$$

A 3.10. Állítást ezzel beláttuk. □

A következő tér, amit vizsgálunk, a mérhető függvények tere lesz a sztochasztikus konvergenciára nézve. Ennek a térnek formulákkal való felépítéséhez a következő jólismert fogalmakat kell formulával definiálni:

a) Az $A \subseteq \mathbf{R}$ halmaz *nullmértékű,* ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van egy A-t lefedő, $< \varepsilon$ összhosszúságú intervallumsorozat, csupa racionális végpontú nyílt szakaszból.

b) Egy $H \subseteq \mathbf{R}$ halmaz $\mathcal{F}_\sigma$*-halmaz,* ha megszámlálható sok zárt halmaz uniója.

c) $A \subseteq \mathbf{R}$ *Lebesgue-mérhető,* ha van olyan $Y \in \mathcal{F}_\sigma$-halmaz, hogy az

$$A \triangle Y := (A \setminus Y) \cup (Y \setminus A)$$

szimmetrikus differencia nullmértékű. Az A halmaz Lebesgue-mértéke, amit $\mu(A)$-val jelölünk, az A-t lefedő, nyílt intervallumsorozatok összhosszúságainak infimuma.

d) Ha $A \subseteq \mathbf{R}$ egy mérhető halmaz, akkor egy $f\colon A \to \mathbf{R}$ függvény pontosan akkor *mérhető,* ha bármely $c \in \mathbf{R}$ esetén az $\{x \in A\colon f(x) > c\}$ nívóhalmazok mérhetők.

e) $L^0(0,1) :\overset{\text{def}}{=} \{f\colon [0,1] \to \mathbf{R}\colon f \text{ mérhető}\}$.

f) Ha f_n $(n \in \omega)$ és g mérhető függvények, $\mathrm{Dom}(f_n) = \mathrm{Dom}(g)$ minden $n \in \omega$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *sztochasztikusan tart g*-hez, ha minden rögzített $\varepsilon > 0$ és $n \to \infty$ esetén

$$\mu(\{x \in \mathrm{Dom}(g)\colon\ |f_n(x)-g(x)| \geqq \varepsilon\}) \to 0.$$

g) Legyenek f, g mérhető függvények, $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$.

Az f és g *távolsága* legyen

$$\varrho(f,g) :\overset{\text{def}}{=} \inf\{\alpha + \mu(\{x \in \mathrm{Dom}(f)\colon\ |f(x)-g(x)| > \alpha\})\colon\ \alpha > 0\}. \qquad \square$$

3.11. Állítás: *Léteznek olyan* $\Phi_{13}^{(a)}, \ldots, \Phi_{13}^{(h)}$ *elsőrendű formulák, hogy*

$\Phi_{13}^{a}(A) \Leftrightarrow$ „$A \subseteq \mathbf{R}$ & A *nullmértékű*",

$\Phi_{13}^{b}(F) \Leftrightarrow$ „$F \subseteq \mathbf{R}$ & $F \in F_\sigma$*-halmaz*",

$\Phi_{13}^{c}(A) \Leftrightarrow$ „$A \subset \mathbf{R}$ & A *Lebesgue—mérhető*",

$\Phi_{13}^{d}(f) \Leftrightarrow$ „Dom $(f) = A$ *mérhető*, $f\colon A \to \mathbf{R}$ *mérhető*",

$\Phi_{13}^{e}(l) \Leftrightarrow$ „$l = L(0, 1)$",

$\Phi_{13}^{f}(F, g) \Leftrightarrow$ „F *függvény* & $\mathrm{Dom}(F) = \omega$ & $(\forall n \in \omega)\, \Phi_{13}^{d}(F(n))$ &

& $\Phi_{13}^{d}(g)$ & $(F(n) \to g$ *sztochasztikusan*)",

$\Phi_{13}^{g}(F, g, r) \Leftrightarrow$ „f, g *mérhetőek* & $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ & $r \in \mathbf{R}$ & $r = \varrho(f, g)$",

$\Phi_{13}^{h}(r) \Leftrightarrow$ „$(\exists\, l)\, [\Phi_{13}^{e}(l)$ & r *függvény* &

& $\mathrm{Dom}(r) = l \times l$ & $\forall\, (f_1, f_2) \in \mathrm{Dom}(r)$ & $\Phi_{13}^{g}(f_1, f_2, r)]$. □

3.12. Állítás:

a) ZFC $\vdash$ „$(\exists\, !l, r)\, [\Phi_{13}^{e}(l)$ & $\Phi_{13}^{h}(r)]$";

b) ZFC $\vdash$ „$(\forall\, l, r)\, [\Phi_{13}^{e}(l)$ & $\Phi_{13}^{h}(r) \Rightarrow (l, r)$ *teljes metrikus tér*]. □

Most meggondoljuk, hogy a „nullmértékűnek lenni" tulajdonság lefelé abszolút:

3.13. Állítás: *Legyenek* $\langle M, \in\rangle$, $\langle N, \in\rangle$ *ZFC-modellek,* $M \subseteq N$, $M \models \Phi_4(\mathbf{R}^M)$, $N \models \Phi_4(\mathbf{R}^N)$, $N \models \Phi_6(\eta, \mathbf{R}^M)$. *Ekkor bármely*

$$A \in M \quad A \subseteq \mathbf{R}^M, \quad M \models \Phi_{13}^{a}(A)$$

esetén

$$N \models \Phi_{13}^{a}(\eta(A)).$$

A bizonyítás abból adódik, hogy ha $\left(A \subset \bigcup_{n \in \omega} I_n\right)^N$, ahol az I_n-ek racionális végpontú szakaszok, és $\left(\sum \mu(I_n) < \varepsilon\right)^M$, akkor

$$N \models \text{„}\mu(I_n) = \mu(\eta(I_n)) \;\&\; \eta(A) \subset \bigcup_{n \in \omega} \eta(I_n)\text{"}. \qquad \square$$

Mint tudjuk, van egy $\vartheta\colon C[0, 1]^M \to C[0, 1]^N$ természetes izometrikus beágyazás; mutassuk meg, hogy ϑ a ϱ metrika szerint is izometrikus:

3.14. Állítás:

$$f, g \in C[0, 1]^M \quad \text{esetén} \quad \varrho(\vartheta(f), \vartheta(g))^N = \varrho(f, g)^M.$$

BIZONYÍTÁS:

Vezessük be a

$$H(h, \alpha) := \{x \in [0, 1]\colon |h(x)| > \alpha\}$$

jelölést. Mivel folytonos f, g függvényre $H(f-g, \alpha)$ folytonosan függ α-tól, ezért

$$\varrho(f, g) = \inf\{\alpha+\mu(H(f-g, \alpha)): \alpha > 0, \alpha \in \mathbf{Q}\}.$$

Világos, hogy $H(f-g, \alpha)$ és $H(\vartheta(f)-\vartheta(g), \alpha)$ nyílt halmazok (M-ben, illetve N-ben), másrészt $\mathbf{Q}$-val vett metszetük ugyanaz a halmaz. Ebből következik, hogy $\alpha \in \mathbf{Q}$-ra

$$\mu(H(f-g, \alpha))^M = \mu(H(\vartheta(f)-\vartheta(g), \alpha))^N,$$

ami bizonyítja állításunkat. □

A valós függvénytanból ismeretes, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\forall f \in L^0(0, 1))(\exists (f_n) \subset C[0, 1]) \quad \varrho(f, f_n) \to 0 \quad (n \to \infty)\text{”}.$$

Ezért értelmes a következő definíció:

3.15. Definíció:

Legyen $f \in L^0(0, 1)^M$, akkor a $\chi(f)$ függvényt így definiáljuk: legyen $\langle f_n: n \in \omega \rangle \in M$ egy $C[0, 1]^M$-beli sorozat, ami a ϱ^M metrika szerint tart f-hez; akkor

$$\chi(f) :\overset{\text{def}}{=} \lim_{n \in \omega} \vartheta(f_n)$$

ahol „lim” a ϱ^N metrika szerint értendő. □

3.16. Megjegyzés:

A modellelméletben ismert halmazelméleti forszolási technikával (erről a 4. részben lesz szó) könnyen megadható olyan $M \subseteq N$ modellpár, ahol $\eta(\mathbf{R}^M)$ nulla mértékű $\mathbf{R}^N$-ben. (Pl. $N = M[G]$, ahol G egy véletlen valós, azaz random real, l. [15, 3.10. Lemma] vagy [18, I.4]-ben.) Mivel egy mérhető függvényt csak nullamértékű halmaztól eltekintve határoznak meg a pontban felvett értékei, ezért közvetlenül nem világos, mit kell megfeleltetni egy $L^0(0, 1)^M$-beli függvényen N-ben. Ezért kellett a beágyazást a fenti bonyolult módon megadni. A definíció jogosságát vizsgálva először is látjuk, hogy (f_n) Cauchy-sorozat M-ben, így a 3.14. Állítás miatt $\vartheta(f_n)$ is az N-ben, és mivel látható, hogy

$$N \models \text{„}\varrho \text{ teljes metrika”},$$

ezért a $(\vartheta(f_n))$ sorozatnak valóban létezik limesze, és ez a $\chi(f)$ függvény. Másrészt $\chi(f)$ független az (f_n) sorozattól, mert ha (f_n') is tart f-hez, akkor $(f_n - f_n')$ és így $(\vartheta(f_n)-\vartheta(f_n'))$ is zérussorozat. Világos, hogy χ lineáris és

$$\mu(H(\chi(f), \alpha)) = \lim_{n \in \omega} \mu(H(\vartheta(f_n), \alpha)) = \lim \mu(H(f_n, \alpha)) = \mu(H(f, \alpha)).$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

3.17. Tétel:

$$\chi\colon L^0(0,1)^M \to L^0(0,1)^N$$

izometrikus beágyazás. □

Az is könnyen ellenőrizhető, hogy χ N-ben egyértelműen definiálható olyan elsőrendű formulával, amelyben $L^0(0,1)^M$ és $\mathbf{R}^M$ paraméterek. Speciálisan tehát

$$\chi \in N.$$

Vezessük be most a π számot.

3.18. Definíció:

$$\Phi_{18}(p) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\exists z)[\Phi_4(z) \ \& \ p \in z] \ \& \ (\exists s \in p)$$

$$\left[s(0) = 4 \ \& \ (\forall n \in \omega)\left(n > 0 \Rightarrow s(n) = s(n-1) + 4\frac{(-1)^n}{2n-1}\right)\right]\text{”}. \qquad \square$$

Ebből következik, hogy $C[0, 2\pi]$ és $L^0(0, 2\pi)$ is definiálható. Az $L^p(0, 2\pi)$ terek megadásához az integrálfogalmat kell kiépíteni. A Lebesgue-integrál alábbi definícióját tudjuk könnyen formalizálni:

a) Legyen $f \geqq 0$ m.m. (majdnem mindenütt), f mérhető. Akkor az

$$\int_{\mathrm{Dom}(f)} f d\mu := \sup\Big\{\sum_{i\in\omega} \bar{f}_i \mu(A_i)\colon \bar{f}_i = \mathrm{ess}_{A_i} \inf f$$

$$\text{és } \langle A_i\colon i \in \omega\rangle \text{ a } \mathrm{Dom}(f) \text{ egy partíciója}\Big\}$$

számot f Lebesgue-integráljának nevezzük. (A képletben szereplő „$\mathrm{ess}_A \inf f$” f lényegi minimuma az A mérhető halmazon: nullmértékű halmaztól eltekintve számított minimumainak maximuma.)

b) Tetszőleges f mérhető függvényre legyen

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \quad f^- := \min\{f, 0\}$$

(f pozitív és negatív része).

Akkor $f^+, f^- > 0$ mérhető függvények, és $f = f^+ - f^-$. Definíció szerint

$$\int_{\mathrm{Dom}(f)} f d\mu := \int_{\mathrm{Dom}(f)} f^+ d\mu - \int_{\mathrm{Dom}(f)} f^- d\mu,$$

kivéve, ha a különbség mindkét tagja végtelen; ilyenkor azt mondjuk, hogy f nem Lebesgue-integrálható $\mathrm{Dom}(f)$-ben.

c) $0 < p < \infty$ esetén egy $A \subseteq \mathbf{R}$ mérhető halmazra

$$L^p(A) := \Big\{f \in L^0(A)\colon \|f\|_p \overset{\text{def}}{:=} \Big(\int_A |f|^p d\mu\Big)^{1/p} < \infty\Big\}. \qquad \square$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek mind definiálhatók elsőrendű formulákkal. Így tehát az $L^p(0, 2\pi) \subset L^0(0, 2\pi)$ terek is rendelkezésünkre állnak. Mivel χ a teljes L^0 téren értelmezett, ezért $(L^p)^M$-t is valahová $(L^0)^N$-ba viszi. ($M \subset N$). Belátjuk, hogy valójában $(L^p)^N$-be ágyazza be:

3.19. Állítás: *Tetszőleges* $0<p<\infty$ *és* $f\in L^p(0,2\pi)^M$ *esetén*

$$\chi(f)\in L^p(0,2\pi)^N \quad \text{és} \quad \|\chi(f)\|_p^N = \|f\|_p^M.$$

BIZONYÍTÁS:

A következő egyenlőségeket kell ellenőrizni:

$$\Big(\int\limits_{[0,2\pi]} |f|^p\,d\mu\Big)^M = \Big(\int\limits_{[0,\infty]} \mu(H(f,\alpha))\,\alpha^{p-1}\,d\mu(\alpha)\Big)^M =$$

$$= \Big(\int\limits_{[0,\infty]} \mu(H(\chi(f),\alpha))\,\alpha^{p-1}\,d\mu(\alpha)\Big)^N = \Big(\int\limits_{[0,2\pi]} |\chi(f)|^p\,d\mu\Big)^N.$$

Ezek közül az első és a harmadik jól ismert azonosság az integrálnak az eloszlásfüggvényből való kiszámítására. Ami a második egyenlőtlenséget illeti,

$$\mu(H(f,\alpha)) = \mu(H(\chi(f),\alpha)) \quad (\alpha\in\mathbf{R}^M)$$

miatt elég belátni a következőt: bármely $h\in C[0,\infty)$, $h\geqq 0$ esetén

$$\Big(\int\limits_{[0,\infty]} h\,d\mu\Big)^M = \Big(\int\limits_{[0,\infty]} \vartheta(h)d\mu\Big)^N.$$

De ez valóban fennáll, mert a folytonosság miatt

$$\Big(\int\limits_{[0,\infty]} h\,d\mu\Big)^M = \Big(\lim_{n\in\omega}\int\limits_{[0,n]} h\,d\mu\Big)^M =$$

$$= \left(\lim_{n\in\omega}\left[\lim_{k\in\omega}\frac{n}{k}\sum_{i=0}^{k-1} h\left(\frac{in}{k}\right)\right]\right)^M = \left(\lim_{n\in\omega}\left[\lim_{k\in\omega}\frac{n}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\chi(h)\left(\frac{in}{h}\right)\right]\right)^N =$$

$$= \Big(\lim_{n\in\omega}\Big(\int\limits_{[0,n]}\vartheta(h)\,d\mu\Big)^N = \Big(\int\limits_{[0,\infty]}\vartheta(h)\,d\mu\Big)^N. \qquad \square$$

3.20. Definíció: A $\langle c_\infty, \|.\|_\infty\rangle$ tér a korlátos valós számsorozatok halmaza a sup-normával (a formulával való felírást elhagyjuk). $\square$

A 3.6-ban definiált $\eta\colon \mathbf{R}^M\to\mathbf{R}^N$ beágyazás segítségével könnyen megadható egy

$$\delta\colon \langle c_\infty, \|.\|_\infty\rangle^M \to \langle c_\infty, \|.\|_\infty\rangle^N$$

izometrikus beágyazás.

Hosszú, fáradságos munkánk gyümölcseként lássunk egy alkalmazást. A következő részben még további példákat mutatunk a módszer alkalmazásaira (pl. 4.15. Tétel és következményei).

A Riemann—Lebesgue-lemma azt mondja, hogy bármely $f\in L^1(0,2\pi)$ függvény

$$c_n(f) \overset{\text{def}}{:=} \int\limits_{[0,2\pi]} f(x)e^{-inx}\,dx$$

Fourier-együtthatóinak sorozata tart 0-hoz, ha $n\to\infty$. Itt felmerül a kérdés: lehet-e a konvergencia sebességéről az egész L^1 függvényosztályra vonatkozóan valamit mondani. Következő tételünkben azt bizonyítjuk be, hogy a Fourier-együtthatók „tetszőlegesen lassan" tarthatnak 0-hoz, ha $f\in L^1$-et alkalmasan választjuk.

3.21. Tétel: *ZFC-ben a tétel a következő állítás. Nem létezik olyan, pozitív számokból álló* $\langle a_n : n \in \mathbf{Z} \rangle$ *nullsorozat (azaz* $\lim_{|n| \to \infty} a_n = 0$*), amely formulával egyértelműen megadható és amelyre bármely* $f \in L^1(0, 2\pi)$ *esetén*

$$|c_n(f)| \leqq c_f a_n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

teljesül valamilyen n-től független $c_f > 0$ *konstanssal.*

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel indirekt módon, hogy van ilyen $\langle a_n : n \in \mathbf{Z} \rangle$ sorozat. Akkor az

$$F: L^1(0, 2\pi) \to c_\infty, \quad F(f) := \left\langle \frac{c_n(f)}{a_n} : n \in \mathbf{Z} \right\rangle$$

operátor is formulával definiálható és lineáris. Továbbá $f \in L^1(0, 2\pi)^M$ esetén

$$(F(\chi(f))^N = \delta(F(f)^M)$$

és ezért

$$\|F(\chi(f))\|_\infty^N = \|F(f)\|_\infty^M.$$

A 2.6. Segédtételt alkalmazva látjuk, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}F \text{ folytonos”}.$$

Más szóval $\|F(f)\|_\infty \leqq K \|f\|_1$ bármely $f \in L^1$-re valamilyen f-től független $K > 0$ konstanssal. De ez nem lehet igaz. Legyen ugyanis

$$f_n(x) := \frac{e^{inx}}{2\pi} \quad (x \in [0, 2\pi]).$$

Ekkor $\|f_n\|_1 = 1$, másfelől

$$F(f_n) := \left\langle \frac{1}{a_k} \delta_{nk} : k \in \mathbf{Z} \right\rangle,$$

ami $\frac{1}{a_k} \to \infty$ miatt ellentmond F folytonosságának. □

Megjegyzés: A fenti tétel egy klasszikus funkcionálanalízisbeli eredmény, a zárt gráf tétel segítségével közvetlenül és gyorsan belátható. Mi azért adtuk mégis egy jóval hosszabb bizonyítását, mert egy módszer illusztrációjának szánjuk. A módszer jelentősége az, hogy típusbizonyítást ad meg lineáris leképezések folytonosságára és lehetőséget nyújt arra, hogy „egy csapásra” bizonyíthassuk funkcionálanalízis-tételek egész seregét és ne kelljen ad hoc bizonyításokat felkutatni minden speciális esetben. Ahhoz azonban, hogy ehhez a kérdéshez érdemben hozzáférjünk, használnunk kell a Cohen-féle forszolási technikát. Dolgozatunk következő részében egy forszolás-elméleti bevezető után a fenti kérdésekkel fogunk foglalkozni.

4. Banach néhány tételének általánosítása

Ebben a részben Ajtai Miklós eredményeit nem közvetlenül alkalmazzuk, hanem bizonyos átalakított vagy általánosított alakban használjuk fel, illetve Ajtai ötleteit felhasználva újabb tételeket bizonyítunk. Ehhez szükségünk lesz a forszolás módszerének legalább felületes ismeretére. Így e paragrafus első részében a forszolás alapjait

vázoljuk. Ennek felhasználásával két tételt bizonyítunk be (4.15. és 4.21. Tétel), melyek Ajtai [1] és [2]-ben megjelent egyik tételét általánosítják, ill. újabb alkalmazásokra nyújtanak lehetőséget. A dolgozat végén újabb alkalmazásokat említünk, és megfogalmazunk három megoldatlan problémát.

Az alábbiakban dióhéjban felsoroljuk a később szükséges alapvető forszolási ismereteket. Alaposabb és elég részletes bevezetést találhat az Olvasó pl. Burgess [4], Kunen [14] vagy Shoenfield [20] cikkében. Shelah [18] könyvében csak vázol egy-két tételt és definíciót, Jech [11] és [12] könyveiben más megközelítési módot használ. A módszert Paul J. Cohen fedezte fel, és használta először a kontinuum-hipotézis ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$) függetlenségének igazolásához. (Pontosabban, Gödel tétele szerint $V=L\Rightarrow$ $\Rightarrow 2^{\aleph_0}=\aleph_1$ és Cohen olyan generikus modellt adott, amelyben $2^{\aleph_0}>\aleph_1$.) Módszerét [5] könyvében írta le, azonban az nehezen olvasható, a kezdő olvasónak inkább a modernebb [4], [14] vagy [20] műveket ajánljuk.

Az elméletet egy példán keresztül világítjuk meg. Tegyük fel, hogy M egy megszámlálható tranzitív $\in$-ZFC-modell. Legyen A és B két M-beli végtelen halmaz, amelyek M-ben nem egyenlő számosságúak, azaz nincs $F\in M$ bijekció A és B között. Olyan modellt szeretnénk konstruálni, amely tartalmazza M-et részmodellként és van benne ilyen F bijekció. Bármennyire is meglepő, ilyen modell létezik, sőt megkonstruálható. Bár egy ilyen F leképezés nincs M-ben, de véges részei, pontosabban a

$$H:=\{f\colon A\rightharpoonup B\colon \mathrm{Dom}(f) \text{ véges}, f \text{ injektív}\}$$

halmaz M-beli (hiszen A és B elemei M-nek). Egy f függvényt azonosíthatunk az

$$\{\langle x,f(x)\rangle\colon x\in\mathrm{Dom}(f)\}$$

halmazzal; akkor $f\supseteq g$ azt jelenti, hogy f kiterjesztése g-nek. A kérdés az, milyen

$$G\subseteq H$$

halmazból lehet egy $F\colon A\rightharpoonup B$ bijekciót előállítani, abban a természetes értelemben, hogy

$$F=\bigcup G.$$

Természetesen ilyenkor

$$G\notin M.$$

Soroljuk fel G-re azokat az előírásokat, melyek teljesülése esetén $F=\bigcup G$ bijekció lesz A és B között.

a) Bármely $f_1,f_2\in G$-nek van közös kiterjesztése G-ben, azaz olyan $g\in G$, amelyre

$$g\supseteq f_1 \quad \text{és} \quad g\supseteq f_2.$$

Ha a) fennáll, akkor tehát tetszőleges $f_1,f_2\in G$ kompatibilis egymással, azaz ha $a\in A$-n mindkettő értelmezve van, akkor $f_1(a)=f_2(a)$. Így tehát $\bigcup G$ egy függvény lesz. ($\bigcup G$ nyilván pontosan akkor injektív, ha H minden eleme az.)

b) Bármely $a\in A$ és $b\in B$ esetén

$$G\cap D_a\neq\emptyset,\quad G\cap D^b\neq\emptyset,$$

ahol

$$D_a:=\{f\in H\colon a\in\mathrm{Dom}(f)\},\quad D^b:=\{f\in H\colon b\in\mathrm{Ran}(f)\}.$$

Ez a feltétel azt garantálja, hogy $a\in\mathrm{Dom}(F)$ és $b\in\mathrm{Ran}(F)$ minden $a\in A$, $b\in B$ esetén, tehát hogy $F\colon A\rightharpoonup B$ szürjektív leképezés legyen. A D_a és D^b halmazoknak két tulajdonságát említsük meg. Először is, ha $f\in H$ eleme valamelyiknek,

akkor bármely H-beli kiterjesztése is eleme. Másodszor bármely $f \in H$-nak van olyan kiterjesztése, ami D_a-nak, illetve D^b-nek eleme.

Végül technikai okokból fel szokás tenni, hogy

c) $g \in G$ esetén g minden rész-függvénye is G-beli.

Ha tehát egy fenti tulajdonságú G-t hozzáveszünk az M modellhez, akkor „törvényesítjük" az $F = \bigcup G$ bijekciót, így A és B azonos számosságú lesz. A kérdés már csak az, milyen halmazokat kell még hozzávenni M-hez, hogy újra ZFC-modellt kapjunk. (Továbbá, hogy az „összegyűjtött" halmazokból hogyan készítsünk modellt, hogyan interpretáljuk az $\in$ relációt, majd ezt Mostowski 1.19. Tétele alapján „lesuvasztva" hogyan kapunk benne M-mel izomorf részmodellt.)

A forszolás módszere erre ad választ, és arra a kérdésre, hogy milyen tételek és állítások lesznek igazak $M[G]$-ben, az új modellben.

Most vegyük sorra az általános definíciókat,

4.1. Definíció:

a) Legyen

$$\mathbf{P} := \langle P, \leqq, \mathbf{1} \rangle$$

egy parciálisan rendezett halmaz, ahol $\mathbf{1}$ a P legnagyobb eleme. Az ilyen tulajdonságú $\mathbf{P}$ struktúrát *kényszerképzet*nek *(forcing condition)* nevezünk.

b) Egy $D \subseteq P$ halmaz *sűrű* $\mathbf{P}$*-ben,* ha bármely P-beli elem minorálható D-ben, azaz

$$(\forall p \in P)(\exists d \in D) \quad d \leqq p.$$

c) A $p, q \in P$ elemek *kompatibilisek (összehasonlíthatók),* ha van P-ben mindkettőt minoráló elem:

$$(\exists r \in P) \quad (r \leqq p \ \& \ r \leqq q).$$

d) Egy $G \subseteq P$ részhalmaz *felszálló,* ha bármely elemének majoránsa is eleme G-nek: $(\forall q \in G)(\forall p \in P)[p \geqq q \Rightarrow p \in G]$.

e) Egy $G \subseteq P$ részhalmaz *filter,* ha felszálló és bármely két eleme G-ben kompatibilis:

$$(\forall p, q \in G)(\exists r \in G) \quad (r \leqq p \ \& \ r \leqq q). \qquad \square$$

4.2. Példa:

A fent részletezett példában $P = H$, $\mathbf{1}$ az üres függvény ($\mathrm{Dom}(\mathbf{1}) = \emptyset$ és $\mathrm{Ran}(\mathbf{1}) = \emptyset$) és

$$f \leqq g \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f \supseteq g.$$

Láttuk, hogy a D_a és D^b halmazok minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén sűrűek. $\square$

4.3. Megjegyzés:

A „sűrű" terminológia a topológiából származik. Ugyanis bármely $\mathbf{P}$ kényszerképzet P alaphalmazán természetes módon értelmezhetünk egy τ topológiát úgy, hogy a $p \in P$ elem környezetbázisa álljon az $\{r \in P: r \leqq q\} \cup \{p\}$ halmazokból, ahol $q \leqq p$. Könnyen belátható, hogy egy $D \subseteq P$ halmaz pontosan akkor sűrű a τ topológiában, ha 4.1. b) értelmében az. $\square$

4.4. Megjegyzés:

A „D sűrű P-ben", „G filter P-ben", „G felszálló P-ben" tulajdonságok elsőrendű formulával leírhatók és abszolútak. Azaz pl. van olyan φ formula, amelyre

$$M \models \text{„}D \text{ sűrű } P\text{-ben"} \Leftrightarrow M \models \text{„}\varphi(D) \Leftrightarrow \varphi(D)\text{"} \Leftrightarrow \text{„}D \text{ sűrű } P\text{-ben"},$$

és hasonlóan a többi tulajdonság esetén. □

4.5. Állítás: *Ha M megszámlálható ZFC-modell, $\mathbf{P}=\langle P, \leqq, \mathbf{1}\rangle$ egy kényszerképzet és $p_0 \in P$, akkor van olyan $G \subseteq P$ filter, hogy $p_0 \in G$ és G metszi P minden M-beli sűrű részhalmazát.*

BIZONYÍTÁS:

Mivel M megszámlálható, ezért P M-beli sűrű részhalmazai felsorolhatók egy $\{D_n: n \in \omega\}$ sorozatban. (E sorozat nyilván nem eleme M-nek, csak elemei, a D_n halmazok vannak M-ben.) Indukcióval definiálható egy $\{p_n: n \in \omega\}$ sorozat úgy, hogy $p_0 = \mathbf{1}$, és

$$p_{n+1} \leqq p_n, \quad p_{n+1} \in D_n \quad (\forall n < \omega).$$

Akkor a

$$G := \{p \in P;\ (\exists n \in \omega)\ p \geqq p_n\}$$

halmaz filter és nyilván metszi $\mathbf{P}$ összes M-beli sűrű részhalmazát. □

4.6. Definíció: A $G \subseteq P$ filter *generikus* (pontosabban *P-generikus M felett*), ha metsz minden $D \subseteq P$, $D \in M$ sűrű halmazt. □

4.7. Megjegyzés: A „generikus" tulajdonság nem feltétlenül abszolút, hiszen (M-ben nézve) P sűrű részhalmazainak száma lehet több, mint megszámlálható, sőt a legtöbb kényszerképzethez nincs is generikus filter M-ben! Másfelől adott M, $\mathbf{P}$ és $p_0 \in P$ esetén is több $G \subseteq P$ M felett generikus filter is lehet, ami tartalmazza p_0-t.

A következő alaptétel azt mondja, hogy bármely M modellnek van egy legszűkebb G-t tartalmazó bővítése, $M[G]$, ami szintén ZFC-modell, ahol G egy tetszőleges generikus filter egy M-beli kényszerképzetben. (Az persze előfordulhat, hogy az M modellt $\mathbf{P}$ különböző generikus G halmazaival bővítve ugyanazt a modellt kapjuk bővítésként.)

4.8. Tétel: *Legyen M megszámlálható tranzitív $\in$-ZFC-modell, $\mathbf{P}=\langle P, \leqq, \mathbf{1}\rangle$ egy kényszerképzet és $G \subseteq P$ generikus filter. Akkor létezik egyetlen, $M[G]$-vel jelölt megszámlálható tranzitív $\in$-ZFC-modell, amelyre egyrészt*

$$M \subseteq M[G] \quad \textit{és} \quad G \in M[G],$$

másrészt tetszőleges N *megszámlálható tranzitív ZFC-modellre*

$$M \subseteq N, \quad G \in N \Rightarrow M[G] \subseteq N.$$ □

A tétel bizonyítása bonyolult és hosszadalmas, mi csak egy-két lényeges részt emelünk ki belőle.

A továbbiakban rögzítsük M-et és $\mathbf{P} \in M$-et, és nézzük meg, hogyan kell felépíteni a 4.8-ban garantált $M[G]$ modellt. A következő definíció jogossága azon múlik, hogy M-ben teljesülnek a ZFC-beli axiómák, így a jólfundáltsági axióma is.

4.9. Definíció:

a) $a \in M$ **P**-*név*, ha

$$a = \{\langle b_i, p_i\rangle : i \in I\}$$

alakú valamely I indexhalmazra, $p_i \in P$ és b_i **P**-név minden $i \in I$-re.

b) $M^{\mathbf{P}} \overset{\text{def}}{:=} \{a \in M : a \text{ } \mathbf{P}\text{-név}\}$. □

Az a) rész tehát így értendő: Az üres halmaz **P**-név, mert $I = \emptyset$-ként értelmezhető, ez legyen a 0-adik szint. Az első szint elemei legyenek

$$a = \{\langle \emptyset, p_i\rangle : i \in I\}$$

alakúak, és általában bármely α rendszámra az α-dik szint álljon olyan

$$a = \{\langle b_i, p_i\rangle : i \in I\}$$

alakú elemekből, ahol a b_i-k a $< \alpha$-dik szinteken lettek megkonstruálva. Az összes szinten megkonstruált elemek összessége adja $M^{\mathbf{P}}$-t. ($M^{\mathbf{P}}$ lényegében az összes lehetséges halmaz P elemeivel „felcímkézve", és ezek közül G fogja kiválasztani azokat, amelyek majd $M[G]$-t alkotják.) Jegyezzük meg, hogy van olyan φ formula, hogy

$$\varphi(a) \Leftrightarrow \text{„}a \text{ } \mathbf{P}\text{-név"},$$

sőt φ abszolút formula.

Nézzük külön azokat a **P**-neveket, ahol az összes fellépő p_i éppen **1**.

4.10. Definíció:

a) $x \in M$ esetén x *neve*

$$\check{x} := \{\langle \check{y}, \mathbf{1}\rangle : y \in x\}$$

b)

$$\dot{G} := \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in P\}.$$ □

A fenti a) definícióban olyan **P**-neveket gyűjtöttünk össze, amelyek $M[G]$-ben (ill. l. a kiértékelés alábbi definícióját) M elemeit fogják kijelölni. A nevek halmazából G segítségével fogjuk $M[G]$ elemeit kiválasztani, és mivel minden G generikus halmaz tartalmazza **1**-et, ezzel biztosítjuk, hogy $M \subseteq M[G]$ legyen.

4.11. Definíció: Legyen $G \subseteq P$ tetszőleges rögzített generikus filter.

a) Tetszőleges $a \in M^{\mathbf{P}}$ **P**-név *kiértékelése*

$$a[G] \overset{\text{def}}{:=} \{b[G] : \langle b, p\rangle \in a \text{ valamely } p \in G\text{-re}\}.$$

b)

$$\overline{M[G]} \overset{\text{def}}{:=} \{a[G] : a \in M^{\mathbf{P}}\}.$$ □

Tehát durván szólva a kiértékelésnél az történik, hogy egy „a" **P**-nevet felírunk olyan alakban, amely csak kapcsos zárójeleket, $\varnothing$ jeleket és $\langle x, p_i\rangle$ szimbólumokat tartalmaz ($x \in M$). Ezek közül csak azokat hagyjuk meg, ahol $p_i \in G$, majd minden előfordulásnál eltüntetjük a $\langle ., p_i\rangle$ szimbólumokat, a maradékot összeolvasva kapjuk az $a[G]$-t.

Speciálisan

$$\check{x}[G] = x,$$

azaz M-beli elemek neveit kiértékelve az eredeti elemet kapjuk, így valóban $M \subset \overline{M[G]}$. Az $\overline{M[G]}$ egy megszámlálható jólfundált $\in$-struktúra, így 1.19. szerint izomorf egy (megszámlálható) tranzitív $\in$-modellel, amiről belátható, hogy ZFC-modell. Ez a modell pedig a keresett $M[G]$. A jelölések egyszerűsítése érdekében $M[G]$-t és $\overline{M[G]}$-t azonosítjuk.

Mivel $M[G]$ $\mathbf{P}$-nevek kiértékeltjeiből áll, ezért

$$(\forall y \in M[G])(\exists \dot{y} \in M^{\mathbf{P}}) \quad \dot{y}[G] = y.$$

Ez az $\dot{y}$ elem általában nem egyértelmű. Másrészt

$$G = \dot{G}[G].$$

A forszolás erejét mutatja, hogy nemcsak $M[G]$ elemeit konstruáljuk M-beli elemekből, hanem az $M[G]$-ben igaz formulákat is le tudjuk írni már M-ben:

4.12. Definíció: Legyen $n \in \omega$, $\dot{a}_i \in M^{\mathbf{P}}$ $\mathbf{P}$-nevek $(i < n)$, φ tetszőleges elsőrendű formula és $p \in P$. Azt mondjuk, hogy *p forszolja* $\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$-et, jelben

$$p \Vdash \varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1}) \quad \text{vagy} \quad p \Vdash \varphi(\dot{a}^{\rightarrow}),$$

ha minden $G \subseteq P$ M felett generikus filterre

$$p \in G \Rightarrow M[G] \models \varphi(\dot{a}_0[G], \ldots, \dot{a}_{n-1}[G]). \qquad \square$$

A következő két alapvető tétel bemutatja, hogyan lehet M-en belül eldönteni, hogy egy formula igaz-e $M[G]$-ben.

4.13. Tétel (Igazság lemma):

Tetszőleges φ formulára és a G P-generikus filterre, $\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1} \in M^P$-re

$$M[G] \models \varphi(\dot{a}_0[G], \ldots, \dot{a}_{n-1}[G]) \quad \textit{pontosan akkor, ha}$$

$$(\exists p \in P) \quad p \Vdash \varphi(\dot{a}^{\rightarrow}). \qquad \square$$

4.14. Tétel (Teljességi vagy definiálhatósági lemma):

Tetszőleges φ formulára a $p \Vdash \varphi$ reláció formulával leírható. Azaz tetszőleges φ-hez van olyan Φ formula, hogy bármely $p \in P$, $\dot{a}^{\rightarrow} \subseteq M^{\mathbf{P}}$ esetén

$$p \Vdash \varphi(\dot{a}^{\rightarrow}) \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad M \models \Phi(p, \dot{a}^{\rightarrow}). \qquad \square$$

Hangsúlyozzuk azonban, hogy mindez csak étvágygerjesztésre elegendő. Sajnos magyar nyelven (tudomásunk szerint) más olvasnivaló nincs. (Csak a bevezetőben említett művek.)

Az alábbiakban Ajtai Miklós ötleteit felhasználva újabb tételeket és alkalmazásokat mutatunk.

A következőkben a Banach—Steinhaus-tétel általánosításaképpen egy következő típusú tételt látunk be: folytonos operátorsorozatból konstruktívan definiált operátor folytonos.

4.15. Tétel: *Legyen φ egy formula, amelyről ZFC-ben beláthatók a következők:*

a) „$(\forall B, C, T^0)$ *(*B, C *teljesen metrizálható topologikus vektorterek)* & $\varphi(B, C, T^0) \Rightarrow T^0$ *minden* $\vec{F} = \langle F_n : n \in \omega \rangle$ *folytonos lineáris operátorsorozathoz,* $F_n : B \to C$, *egy* $F = T^0(\vec{F}) : B \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ *konvex racionális leképezést rendel.*"

Legyen

$$S := \{\vec{F} : \operatorname{Ran}(T^0(\vec{F})) \subseteq \mathbf{R}\}$$

és

$$T := T^0 \restriction S.$$

b) Legyenek $F_i : B \to C$ *folytonos lineáris operátorok és jelölje*

$$\langle F_i : i < n \rangle^{\rightarrow} := \langle F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}, F_{n-1}, F_{n-1}, \ldots \rangle;$$

ekkor $T(\langle F_i : i < n \rangle^{\rightarrow})$ *folytonos bármely* $n \in \omega$*-ra.*

c) Tetszőleges $\vec{F}$, $n \in \omega$ *és* $x \in B$ *esetén*

$$|T(\vec{F})(x)| > n \Leftrightarrow \left|T\left((\vec{F} \restriction m)^{\rightarrow}\right)\right| > n$$

elég nagy $m < \omega$*-ra.*

d) Ha $M \subseteq N$ *tranzitív ZFC-modellek,* $B_1, C_1 \in M$, $B_2, C_2 \in N$ *teljesen metrizálható vektorterek,* $B_1 \subseteq B_2$, $C_1 \subseteq C_2$ *sűrű és* B_2, *ill.* C_2 *metrikája* B_1, *ill.* C_1 *metrikájának kiterjesztése, továbbá, ha*

$$M \models \varphi(B_1, C_1, T_1^0), \quad N \models \varphi(B_2, C_2, T_2^0),$$

végül, ha tetszőleges $m < \omega$ *esetén az* $F_i^1 : B_1 \to C_1$, $F_i^2 : B_2 \to C_2$ $(i < m)$ *folytonos lineáris leképezésekre teljesül* $F_i^1 \subseteq F_i^2$, *akkor*

$$T_1^0(\langle F_i^1 : i < m \rangle^{\rightarrow}) \subseteq T_2^0(\langle F_i^2 : i < m \rangle^{\rightarrow}).$$

Ha a fenti négy tétel fennáll, akkor

$$ZFC \vdash \text{„}Ha\ B, C\ Banach\text{-}tér,\ \varphi(B, C, T^0)\ és\ \vec{F} \in \operatorname{Dom}(T),\ akkor\ T(\vec{F})\ folytonos\text{''}.$$

A tétel első olvasásra bonyulultnak tűnik. Azonban, ha végiggondolunk néhány, operátorsorozatok folytonosságáról szóló tételt, a 2.6. Lemma és a jelen tétel bizonyítását, és alkalmazásait, akkor már érthetőbbek a feltételei.

A tétel bizonyítását egy fogalom bevezetésével készítjük elő.

4.16. Definíció (Levy hierarchia):

a) A φ és ψ formulákat *ekvivalensnek* mondjuk a Γ *formulahalmaz felett,* ha

$$\Gamma \vdash \text{„}\varphi \Leftrightarrow \psi\text{''}.$$

b) Egy φ formula *csak korlátos kvantorokat tartalmaz,* ha a benne levő kvantorok $(\exists x \in A)$, illetve $(\forall x \in A)$ alakúak (tehát halmazokon futnak).

c) A Σ_0 és a Π_0 formulaosztály olyan formulákból áll, melyek ZFC felett ekvivalensek egy csak korlátos kvantorokat tartalmazó formulával.

d) A φ formula Σ_{n+1}*-formula* (ill. Π_{n+1}*-formula*), ha ZFC felett ekvivalens egy

$$(\exists \vec{x})\psi(\vec{x}), \quad \text{illetve egy} \quad (\forall \vec{x})\psi(\vec{x})$$

alakú formulával, ahol ψ egy Π_n (ill. Σ_n)-formula.

e) A φ formula Δ_n*-formula,* ha ZFC felett ekvivalens egy ψ Σ_n- és egy ϑ Π_n-formulával. □

Speciálisan, a Δ_0 formulaosztály egybeesik a Σ_0 és Π_0 formulaosztállyal. Könnyen belátható, hogy a Δ_0 formulák abszolútak.

4.17. Definíció: Egy X halmazon értelmezett $\leqq$ parciális rendezést *parciális jólrendezésnek* nevezzük, ha nincsen olyan $\langle x_i : i<\omega\rangle$ sorozat X-beli elemekből, hogy

$$x_{i+1} \leqq x_i \quad (\forall i \in \omega). \qquad \square$$

A következő állítás önmagában is érdekes, gyakran alkalmazhatjuk a modellelméletben.

4.18. Állítás ([3], [14]):

a) A $\varphi(X, y) =$ „$y \subseteq X \times X$ *és* y *parciális jólrendezés* X*-en" formula* Δ_1*-formula.*
b) A Δ_1*-formulák abszolútak a tranzitív* $\in$*-ZFC-modellekre nézve.*

BIZONYÍTÁS:

a) A

$$\psi(X, \leqq) := \text{„}(\forall f)[f\colon \omega \to X \text{ függvény} \Rightarrow (\exists n \in \omega) f(n+1) \not\leqq f(n)]\text{"}$$

formula Π_1,

$$\vartheta(X, \leqq) := \text{„}(\exists f)[f \text{ függvény } \& \operatorname{Dom}(f) = X \ \&$$
$$\& \ (\forall x \in X)(f(x) \text{ rendszám}) \ \&$$
$$\& \ (\forall x, y)(x \leqq y \in X \Rightarrow f(x) \leqq f(y))]\text{"}$$

pedig egy Σ_1-formula, mivel

$$\text{„}x \text{ rendszám"} = (\forall z \in x)(\forall t \in z)(\forall t \in x) \ \&(\forall z \in x)(\forall t \in x)[z = t \vee z \in t \vee t \in z]$$

nyilván Δ_0 formula.

Belátható, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}\varphi \Leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \vartheta\text{"},$$

ahonnan az a) pont következik.

b) Legyenek $M \subseteq N$ $\in$-modellek és $\bar{x} \in M$, legyen φ egy Σ_1- és ϑ egy Π_1-formula, amire

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}\psi \Leftrightarrow \vartheta\text{"}.$$

Akkor $M \models \psi(\vec{x})$-ból $N \models \psi(\vec{x})$ és $N \models \vartheta(\vec{x})$-ból $M \models \vartheta(\vec{x})$ következik; ennek igazolását az Olvasóra bízzuk. $\square$

A 4.15. Tétel bizonyítása:

Legyen M egy tranzitív ZFC-modell és tegyük fel, hogy

$$M \models \text{„}B, C \text{ teljesen metrizálható vektorterek } \& \ \varphi(B, C, T^0) \ \& \ \vec{F} \in \operatorname{Dom}(T)\text{"}.$$

Be kell látnunk, hogy $M \models$ „$T(F)$ folytonos".

Legyen

$$P_0 := \{p\colon p \text{ függvény } \& \operatorname{Dom}(p) \subseteq \omega \ \& \ \operatorname{Ran}(p) \subseteq \{0,1\},\ |p| < \omega\}$$

és legyen

$$p_0, p_1 \in P_0 \text{ esetén } p_1 \leqq_0 p_0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p_0 \subseteq p_1.$$

Akkor a

$$\mathbf{P}_0 := \langle P_0, \leqq_0, \emptyset \rangle$$

hármas egy kényszerképzet (egy ún. Cohen-kényszerképzet). Vegyünk $\mathbf{P}_0$-ban egy tetszőleges G generikus filtert és legyen

$$N = M[G].$$

Jelöljük szokás szerint B_c, C_c-vel a B, illetve C terek N-beli teljessé tételével kapott tereket, legyen adott $\vec{F}$ és $n<\omega$ esetén $\tilde{F}_n$ az F_n folytonos kiterjesztése $B_c \to C_c$ operátorrá, végül legyen $\tilde{F}^{\to} := \langle F_n\colon n<\omega\rangle$. Most d) alapján a B_c, C_c N-beli térpárba tartozó operátor T^0 kiterjesztése lesz, így bevezetjük rá a $\tilde{T}^0$ jelölést. Tudjuk, hogy $T^0(\vec{F})$ konvex racionális funkcionál. Másrészt a 2.1. Tétel (l. Ajtai [1], [2]-ben) valójában úgy szól, hogy $N=M[G]$ megfelelő modell, ha G generikus filter $\mathbf{P}_0$-ban, azaz bármely M-beli elemekből mint paraméterekből definiálható konvex funkcionál folytonos. Eszerint $\tilde{T}^0(\tilde{F}^{\to})$ folytonosságához elég annyit belátni, hogy $\tilde{T}^0(\tilde{F}^{\to})$ egy konvex racionális funkcionál; és ehhez elég tudni, hogy

$$(*) \qquad \operatorname{Ran}(\tilde{T}^0(\tilde{F}^{\to})) \subseteq \mathbf{R}.$$

Ezzel a bizonyítás is készen lesz, hiszen ha $\tilde{T}^0(\tilde{F}^{\to})$ folytonos N-ben, akkor a $T^0(\vec{F})$ megszorítása annál inkább folytonos M-ben. Bizonyítsuk tehát $(*)$-ot. Tudjuk, hogy

$$(**) \qquad \operatorname{Ran}(T^0(\vec{F})) \subseteq \mathbf{R}.$$

Definiáljuk a

$$\langle Q, \leqq \rangle$$

parciálisan rendezett halmazt, mint azon

$$q = \langle n, S \rangle$$

párok halmazát, ahol $n\in\omega$ és

$$M \models \text{„}\left(S \subseteq B \text{ zárt gömb, átmérője} \leqq \frac{1}{n}\right) \ \&$$

$$\& \ (\exists m\in\omega)(\forall x\in S)\,[T^0((\vec{F}\restriction m)^{\to})(x) > n]\text{”}.$$

A $q=\langle n, S\rangle$ és $q'=\langle n', S'\rangle$ párok parciális rendezése legyen a következő:

$$q \leqq q' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (n' > n) \ \& \ (S' \subseteq S).$$

A b) és c) feltételek alapján azonnal látható, hogy

$$(*') \qquad M \models \text{„}\langle Q, \leqq\rangle \text{ parciálisan jólrendezett”}$$

pontosan akkor igaz, ha $(*)$; továbbá

$$(**') \qquad N \models \text{„}\langle Q, \leqq\rangle \text{ parciálisan jólrendezett”}$$

pontosan akkor igaz, amikor $(**)$. Másrészt, mivel a parciális jólrendezettség abszolút a tranzitív $\in$-modelleken, $(*')$ és $(**')$ is ekvivalensek, akkor pedig $(*)$ következménye lesz $(**)$-nak, amivel a bizonyítást befejeztük. □

4.19. Megjegyzés:

Az a), b), c), d) feltételek automatikusan teljesülnek a következő egyenletes korlátossági tételekben, így azok speciális esetei a fenti tételnek.

(I) Egyenletes korlátosság tétele (ún. Banach—Steinhaus-tétel):

Ha B, C Banach-terek, F_n: $B \to C$ folytonos, lineáris és

$$\sup_n \|F_n(x)\|_C < \infty (\forall x \in B),$$

akkor

$$\sup_n \|F_n\| < \infty.$$

Ha pedig létezik az

$$F(x) := \lim_{n \to \infty} F_n(x)$$

limeszoperátor, akkor F is folytonos. □

(II) Egyenletes korlátosság tétele a m.m. **való konvergenciára:**

Ha B egy Banach-tér, F_n: $B \to L^0(0, 1)$ folytonos lineáris és

$$\sup_n |F_n(x)(t)| < \infty (\forall x \in B) (\text{m.m. } t \in (0, 1)),$$

akkor valamilyen c valós számra

$$\delta(F_n(x)) \leqq c\|x\|_B,$$

ahol δ az L^0-on a szokásos teljes metrika. (L. a 3.11. Állítás előtti definíciókat.) Ha pedig létezik az

$$F(x)(t) := \lim_{n \to \infty} F_n(x)(t) \, (\forall x \in B) (\text{m.m. } t \in (0, 1))$$

határérték, akkor F is folytonos. □

Nem ismert, hogy a c) és d) feltételek szükségesek-e a tétel állításához. Sajnos, erről többet nem tudunk.

Dolgozatunk hátralevő részében Ajtai 2.1. Tételét írjuk át olyan topologikus vektortérre, melynek topológiája nem metrizálható. Erre egy példa a $C_0^\infty(\Omega)$ tér, ami a disztribúcióelméletben az alapfüggvények tereként közismert (l. Rudin [14]). A bizonyítás részletesebb elemzéséből kitűnik, hogy más típusú topologikus vektortérben értelmezett konstruktív funkcionálok folytonosságát is be lehet bizonyítani. Pl.: legyen a V halmaz a $\langle V_n : n < \omega \rangle$ halmazsorozat növő úniója (azaz $V =$

$= \cup\{V_n\colon n<\omega\}$ és $V_n \subseteq V_{n+1}$, ha $n\in\omega$), legyen V vektortér, melynek V_n alterei ($n\in\omega$), legyen továbbá $\langle V_n, |.|_n\rangle$ Banach-tér (esetleg $|.|_n$ racionális félnorma, esetleg pszeudonorma) és tegyük fel, hogy V a $\langle V_n, |.|_n\rangle$ topologikus terek által generált gyenge topológiával teljes topologikus vektortér.

Mint tudjuk, $C_0^\infty(\Omega)$ a következőképpen adható meg:

4.20. Definíció: Legyen $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ egy nyílt halmaz (most $\mathbf{R}^n$ jelöli az ${}^n\mathbf{R}$ Descartes-szorzatot).

a) Egy $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ folytonos függvény *tartója*

$$\operatorname{supp}(f) := \{x\in\mathbf{R}^n\colon f(x)\neq 0\}.$$

b) $C_0^\infty(\Omega) := \{f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\colon \operatorname{supp}(f)$ az Ω egy kompakt részhalmaza és f akárhányadik rendű parciális deriváltjai léteznek Ω-n$\}$.

c) f_k, $f\in C_0^\infty(\Omega)$ esetén $f_k \xrightarrow{*} f$ $(k\to\infty)$, ha

c_1) van olyan K kompakt halmaz, hogy $\operatorname{supp}(f_k)\subseteq K\subseteq\Omega$ $(\forall k\in\omega)$,

c^2) $D^{\mathbf{i}}(f_k)\to D^{\mathbf{i}}(f)$ egyenletesen bármely $\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_n)\in{}^n\omega$ multiindexre

$$\left(\text{definíció szerint } D^{\mathbf{i}} = \frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}\right). \qquad \square$$

Belátjuk a következőket:

4.21. Tétel: *Legyen M tetszőleges megszámlálható, tranzitív $\in$-ZFC-modell, $\mathbf{P}_0$ a 4.15. bizonyításában definiált Cohen-kényszerképzet és legyen $G\subseteq P_0$ generikus filter M felett. Legyen φ a következő formula:*

$\mathrm{ZFC}\vdash$ „$(\exists!d)\varphi(d)$ & $(\forall d)[\varphi(d)\Rightarrow d$ *racionális konvex funkcionál $C_0^\infty(\Omega)$-ból* $\mathbf{R}$-*be*]".

Akkor

$$M[G]\models \text{„}(\forall d)[\varphi(d)\Rightarrow d \textit{ folytonos}]\text{"}.$$

A tétel bizonyításához két segédtételre lesz szükségünk.

4.22. Segédtétel: *Legyen M megszámlálható, tranzitív ZFC-modell, $\langle P, \leqq, \mathbf{1}\rangle$ egy tetszőleges kényszerképzet, $p_0\in P$, $c\in M$ és legyen $\varphi(x, y, z)$ olyan formula, mely csak a jelzett változóit tartalmazza szabadon. Ha most*

$$p_0 \Vdash (\exists!x)\varphi(x, \check{c}, \dot{G}),$$

akkor van olyan $\dot{a}\in M^P$ név, melyre

$$p_0 \Vdash \varphi(\dot{a}, \check{c}, \dot{G}). \qquad \square$$

Ez az állítás eléggé közismert, bizonyítása megtalálható pl. Shelah [18] vagy Kunen [14] könyvében és Ajtai [1], [2]-ben is. A jelölésekkel kapcsolatban jegyezzük meg, hogy az $M^{\mathbf{P}}$-beli neveket általában ponttal, de az M elemeit jelölő neveket $^\vee$ jellel jelöljük.

4.23. Definíció: Legyen $i\in\omega$-ra

$$\pi_i\colon \mathbf{P}_0 \to \mathbf{P}_0$$

olyan leképezés, melyre

a) $$\mathrm{Dom}(\pi_i(p)) = \mathrm{Dom}(p) \quad (\forall p \in P)$$

b) $$(\pi_i(p))(j) \begin{cases} = p(j), & \text{ha} \quad j \in \mathrm{Dom}(p), j \neq i; \\ \neq p(i), & \text{ha} \quad i = j \in \mathrm{Dom}(p). \end{cases}$$ □

Könnyen látható, hogy π_i rendezéstartó bijekció $\mathbf{P}_0$-on, sőt

$$\pi_i^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{P}_0} \quad (\forall i \in \omega).$$

Emiatt világos, hogy π_i sűrű halmazt sűrűbe, filtert filterbe és generikust generikusba visz. Tudjuk továbbá, hogy

$$M[\pi_i G] = M[G].$$

4.24. Segédtétel (Ajtai [1], [2]): *Legyen $\psi(x, y, z)$ olyan formula, melynek csak a jelzett változói szabadok, és nem tartalmazza a $\dot{G}$ nevet. Legyen továbbá $p_0 \in P$, $\mathrm{Dom}(p_0) \subseteq j_0 \in \omega$, $h \in \omega$, $h \geqq j_0$, továbbá $\dot{b} \in M^{\mathbf{P}}$ olyan név, amelyre*

$$p_0 \Vdash \text{„}\dot{b} \text{ függvény } \& \ \mathrm{Dom}(\dot{b}) = \check{\omega} \ \& \ (\forall n \in \check{\omega}) \psi(\dot{b}(n), n, \check{c})\text{”}.$$

Ekkor van olyan $\dot{a} \in M^{\mathbf{P}}$ név, melyre

(i) $$p_0 \Vdash \text{„}\dot{a} \text{ függvény } \& \ \mathrm{Dom}(\dot{a}) = \check{\omega} \ \& \ (\forall n \in \check{\omega}) \psi(\dot{a}(n), n, \check{c})\text{”}.$$

Továbbá bármely G' G'' M feletti P_0-generikus filterekre $p_0 \in G'$, $p_0 \in G''$, $(\bigcup G')(k) = (\bigcup G'')(k)$ $(k \geqq h)$ esetén

(ii) $$(\dot{a}[G'])(k) = (\dot{a}[G''])(k) \quad (k \geqq h).$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen

$$I := \{v : j < v < k \ \& \ (\bigcup G)(v) = 1\},$$

és

$$\pi^{(k)} := \prod_{v \in I} \pi_v, \quad G_k := \pi^{(k)}(G).$$

Mivel $\pi^{(k)}$ automorfizmus P_0-on, ezért G_k is generikus filter (nem jelöljük a rögzített j_0-tól való függést). Tudjuk továbbá, hogy

$$M[G_k] = M[G], \quad G_k \in M[G].$$

Vannak olyan paraméter nélküli φ_0 és φ_k formulák, hogy $l=0$ és $l=k$ esetén

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}(\forall x, y, z)[\varphi_l(x, y, z) \Rightarrow (x \ \mathbf{P}_0\text{-név } \& \ z \subseteq P_0)]\text{”},$$

$$M[G] \models \text{„}(\forall x, y)[\varphi_0(x, y, G) \Rightarrow (x \in M^{\mathbf{P}} \text{ név } \& \ y = x[G])]\text{”},$$

$$M[G_k] \models \text{„}(\forall x, y)[\varphi_k(x, y, G_k) \Leftrightarrow (x \in M^{\mathbf{P}} \text{ név } \& \ y = x[G_k])]\text{”}.$$

Így található ZFC-nek olyan φ formulája, hogy tetszőleges $G \subseteq P_0$ M felett generikus filterre $p_0 \in G$ esetén az $M[G] \models \text{„}\varphi(x, \dot{b}[G], G)\text{”}$ állítás pontosan akkor igaz, ha x függvény, $\mathrm{Dom}(x) = \omega$ és minden $k \in \omega$ esetén $x(k) = (\dot{b}[G_k])(k)$. Mivel $\dot{b} \in M^{\mathbf{P}}$ rögzített és a $\langle G_k : k < \omega \rangle$ sorozat eleme $M[G]$-nak, így

$$p_0 \Vdash \text{„}(\exists\, !x)\varphi, \dot{b}, \dot{G})\text{”}.$$

Most 4.22. alapján van olyan $a \in M^{\mathbf{P}}$ név, amelyre

$$(\dot{a}[G])(k) = (\dot{b}[G_k])(k) \quad (k \in \omega)$$

tetszőleges $G \subset P_0$ generikus filter esetén. Tudjuk, hogy

$$p_0 \Vdash - \text{„}(\forall k \in \check{\omega})\psi(\dot{b}[n], n, \check{c})\text{”},$$

és $p_0 \in G_k$ minden $k \in \omega$-ra, ebből pedig következik, hogy bármely G-re $p_0 \in G$ esetén

$$M[G] \models \text{„}\psi(\dot{a}[G], n, \check{c})\text{”}.$$

Ez bizonyítja (i)-t, hiszen ψ nem tartalmazza a $\dot{G}$ szimbólumot. Végül legyen G' és G'' olyan P_0-generikus filter M felett, hogy

$$(\cup G')(k) = (\cup G'')(k) \quad (k \geqq h),$$

akkor rögzített k esetén,

$$(\dot{a}[G'])(k) = (\dot{b}[G'_k])(k) = (\dot{b}[G''_k])(k) = (\dot{a}[G'']),$$

ami bizonyítja (ii)-t. □

Most rátérünk a 4.21. Tétel bizonyítására.

Legyen M tetszőleges megszámlálható tranzitív ZFC-modell és φ olyan formula, amelyről a tétel szól. Tegyük fel indirekte, hogy van olyan $G \subseteqq P_0$ generikus filter és $d \in M[G]$, hogy

$$M[G] \models \text{„}\varphi(d) \ \& \ d \text{ nem folytonos”}.$$

Jelöljük $M[G]$-t N-nel. Ha $\mathcal{O}$ jelöli N-ben az azonosan 0 függvényt $\mathbf{R}^n$-ből $\mathbf{R}$-be, akkor van olyan $\langle f_k : k \in \omega \rangle \in N$ függvénysorozat, $f_k \in C_0^\infty(\Omega)$ és $t \in \omega$, amelyre

$$N \models \text{„}(\forall_{\mathbf{i}} \text{ multiindexre } D^{\mathbf{i}} f_k \to \mathcal{O} \text{ egyenletesen}) \ \& \ (\forall k \in \omega)\left(|d(f_k)| > \frac{1}{t}\right)\text{”}.$$

Mármost (N-ben okoskodva) kiválasztható olyan $\langle f_{k_r} : r \in \omega \rangle$ részsorozat, hogy minden $\mathbf{i}$ multiindexhez van olyan $r(\mathbf{i})$, amire

$$\|D^{\mathbf{i}} f_{k_r}\|_\infty \leqq \frac{1}{10^r t} \quad (\forall r > r(\mathbf{i})),$$

ahol $\|.\|_\infty$ a szokásos supremum-norma.

Ezért találhatók olyan $0 < q_r < t$ racionális számok, hogy a

$$g_r := q_r 5^r f_{k_r}$$

jelölés mellett fennáll

$$\frac{3}{4} 5^r < d(g_r) < 5^r \quad (\forall r \in \omega).$$

Továbbá, $q_r < t$ miatt minden $\mathbf{i}$ multiindexre

$$\|D^{\mathbf{i}} g_r\|_\infty \leqq \frac{1}{2^r} \quad (\forall r \geqq r(\mathbf{i})).$$

Innen következik, hogy minden **i**-re

$$\sum_{k\in\omega} (\cup G)(k)\,\|D^{\mathbf{i}} g_k\|_\infty < \infty.$$

(Vegyük észre, hogy $\cup G$ egy ω-ból $\{0, 1\}$-be képező függvény, $(\cup G)(k)$ pedig 0 vagy 1 minden $k<\omega$-ra.) Így létezik a

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} (\cup G)(k)\, g_k$$

összegfüggvény, nevezetesen a sor konvergens a $\xrightarrow{*}$ limeszfogalomra nézve. Így tehát $h\in C_0^\infty(\Omega)$ és így $d(h)<u$ valamely $u\in\omega$ természetes számra. A fenti állításokat leírhatjuk egy ψ formulával. Mivel ψ igaz N-ben, annak teljesülését forszolja egy $p_0\in P_0$ feltétel. Azaz

$$p_0 \Vdash \text{„}(\forall_{\mathbf{i}} \text{ multiindexre})(\forall k > r(\mathbf{i}))\,\|D^{\mathbf{i}}(g_k)\| \leqq \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\check{}}$$

$$\& \quad \dot{h} = \sum_{k\in\omega} (\cup\dot{G})(k)\,\dot{g}_k \quad \& \quad \dot{d}(\dot{h}) < \check{u} \quad \&$$

$$\& \quad (\forall n\in\check{\omega})\left[\left(5^k\frac{3}{4}\right)^{\check{}} < \dot{d}(\dot{g}_k) < (5^k)^{\check{}}\right]\text{''}.$$

Legyen most

$$j_0 > \max\{u,\ \max(\mathrm{Dom}\,(p_0))\}.$$

Alkalmazzuk a 4.24-et a következő mennyiségekre.

Legyen

$$\dot{b}(k) := (\cup\dot{G})(k)\,\dot{g}_k,$$

továbbá a 4.24-beli h legyen egyenlő (k_0+1)-gyel és legyenek G', G'' generikus filterek M felett úgy, hogy

$$(\cup G')(j) = (\cup G'')(j) \Leftrightarrow j \neq j_0,$$

azonkívül $p_0\in G'$, $p_0\in G''$. Most $M[G']=M[G'']$-ben érvelve felírható a következő becsléslánc:

$$\frac{3}{4}\,5^{k_0} \leqq d(g_{k_0}) = d\Big(\sum_{k\in\omega} (\cup G')(k)\,g_k - \sum_{k\in\omega} (\cup G'')(k)\,g_k\Big) \leqq$$

$$\leqq d\Big(\sum_{k\in\omega} (\cup G')(k)\,g_k\Big) + d\Big(\sum_{k\in\omega} (\cup G'')(k)\,g_k\Big) \leqq 2n,$$

ami ellentmondás. □

Végezetül megemlítünk még egy alkalmazást Ajtai [2]-ből, mely hasonló módon is igazolható.

4.25. Tétel (Hurwitz): *Ha* $\langle f_n(z)\colon n<\omega\rangle$ $T\subseteq\mathbf{C}$*-n értelmezett komplex változós reguláris függvények egy sorozata, és* $f_n\to f$ *egyenletesen,* $f\not\equiv 0$, *akkor a*

$$(\forall z\in T)(\forall n<\omega)\quad f_n(z)\neq 0$$

feltételből következik, hogy

$$(\forall z\in T)\quad f(z)\neq 0.$$ □

Várhatóan a módszernek még további alkalmazásai kerülnek napvilágra a jövőben. Végül megfogalmazunk néhány problémát.

1. Probléma: Adjunk meg olyan formulaosztályt, amelyben érvényes a következő állítás:

Ha ilyen formulával definiálunk Banach-tereket és ezek között ható lineáris leképezéseket, majd ezek realizálását az $M \subseteq N$ tranzitív megszámlálható ZFC-modellekben, akkor megadható egy izometrikus beágyazása az M-ben realizált tereknek az N-ben realizáltakba, ami természetes abban az értelemben, hogy a formulával definiált leképezésekkel felcserélhető (l. a 2.6. Segédtételt).

2. Probléma: A 4.15. Tételből elhagyható-e, illetve egyszerűsíthető-e a c) és d) kikötés?

3. Probléma: Meddig élesíthető a 4.21. (illetve a 2.1.) Tétel?

IRODALOM

[1] Ajtai Miklós: On the boundedness of definable linear operators, *Periodica Math. Hung.* **5** (1974), 343—352.
[2] Ajtai Miklós: *Definiálható Banach-terek*, Kandidátusi értekezés, Budapest, 1974.
[3] J. Barwise: Introduction to First Order Logics, in: *Handbook of Mathematical Logic*, J. Barwise ed, North-Holland, Amsterdam, 1977 (orosz fordítás: *Справочная книга по математической логике*, Ред. Барвайс, Часть II, Наука, Москва, 1982).
[4] J. Burgess: Forcing, ugyancsak a [3] monográfiában.
[5] P. J. Cohen: *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W. A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1966 (orosz fordítás: Коэн: *Теория множеств и проблема континуума*, Москва).
[6] Császár Ákos: *Bevezetés az általános topológiába*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.
[7] Csörgő István: A helyettesítési axióma függetlenségének egyszerű bizonyítása, *Matematikai Lapok* **32** (1981—1984), 145—151.
[8] A. A. Frankel, Y. Bar-Hillel, A. Levy: *Foundations of set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973.
[9] Hajnal András, Hamburger Péter: *Halmazelmélet*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
[10] P. R. Halmos, L. E. Sigler: *Elemi halmazelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1981.
[11] J. Jech: *Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing*, Springer, Berlin, 1971 (orosz fordítás: Йэх: *Лекции по теории множеств и метод форсинга*, Мир, Москва, 1973).
[12] T. Jech: *Set Theory*, Acad. Press, New York, 1978.
[13] T. Jech: *Multiple Forcing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
[14] K. Kunen: *Set Theory — An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
[15] K. Kunen: Random and Cohen Reals, in: *Handbook of Set Theoretical Topology*, ed. K. Kunen and V. Vaughan, North-Holland, Amsterdam, 1984.
[16] Németi István: *A matematikai logika alapjai*, egyetemi előadásanyag, ELTE TTK kézirat, 1982.
[17] W. Rudin: *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973 (orosz fordítás: Рудин: *Функциональный анализ*, Москва).
[18] S. Shelah: *Proper Forcing*, Springer, Berlin, 1982.
[19] J. R. Shoenfield: *Mathematical Logics*, Addison—Wesley, Series in Logics, 1967 (orosz fordítás: Шенфилд: *Математическая логика*, Наука, Москва, 1975).
[20] J. R. Shoenfield: Unramified Forcing, in: *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. **13**, Amer. Math. Soc., Providence, 1972, 357—381 (orosz fordítás: [19] függelékében).
[21] Urbán János: *Matematikai logika*, Középiskolai tankönyv, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
[22] Ruzsa Imre, Urbán János: *Matematikai logika*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

(Beérkezett: 1987. augusztus 7-én)

О «ПРИНЦИПЕ БАНАХА»

М. ХОРВАТ, И. ЙО и И. САЛКАИ

M. Ajtai в [1], [2] доказал что если мы дадим Cohen-генерическое вещественное число к любой модели от ZFC, в новой модели следующая теорема сбытся: «Каждый линеарный оператор между пространствами Банаха (операторы и пространства определяются формулами первого порядка) непрерывный.» Когда эти формулы абсолютны в каким-том смысле, мы получим абсолютные теоремы (например Теоремы 2.4 и 2.6). Мы обобщаем эту и другие теоремы [1], [2] в теоремах 4.15 и 4.21.

Кроме того мы дадим применения: докажем абсолютные теоремы в анализе, используем методы математической логики (Теоремы 3.21 и 4.19). В статье мы напишем элементарное введение в теорию логики первого порядка и конструктивную теорию множеств (часть **1**) и метод форсинга (часть **4**).

ON „BANACH'S PRINCIPLE"

M. HORVÁTH, I. JOÓ and I. SZALKAI

M. Ajtai proved in [1] and [2] that adding a Cohen-generic real to any model of ZFC, in the generic extension every linear operator between Banach spaces (all the spaces and the operators are definable by first order formulae) is continuous.

When the formulae above satisfy certain absoluteness conditions, we can derive absolute theorems (see e.g. Theorems 2.4 and 2.6). We generalize this and Ajtai's other theorems in Theorems 4.15 and 4.21. Further, we give applications: derive absolute theorems in analysis using mathematical logical methods (Theorems 3.21 and 4.19). We also give an elementary introduction into the theory of first order logics, constructive set theory (Section **1**) and Cohen's forcing method (Section **4**).

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

HORVÁTH MIKLÓS EGY TÉTELÉRŐL

JOÓ ISTVÁN

Legyen $\mathcal{F} \subset L^0(0, 1)$ tetszőleges, függvényekből álló vektortér, amely valamely adott τ topológiára nézve topologikus vektortér. Egy $f \in \mathcal{F}$ függvényt „univerzális"-nak nevezünk, ha van olyan $\lambda_n \to 0$ valós számsorozat, amelyre $\{[f(x+\lambda_n)-f(x)]/\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ sűrű $\mathcal{F}$-ban (a τ topológiára nézve).

J. Marczinkiewicz igazolta [1]-ben, hogy $\mathcal{F} = L^0(0, 1)$ esetén létezik univerzális függvény (itt $L^0(0, 1)$-et a mértékben való konvergencia topológiájával látjuk el). A [2] dolgozat tartalmazza e tétel általánosítását (megfelelőjét) $\mathcal{F} = L^p(0, 1)$, $p < 1$ esetre, s [2]-ben szerepel nyitott problémaként a $p \geqq 1$ eset. Bogmér, Sövegjártó, Buczolich választ adtak e kérdésre [3] és [4]-ben, bizonyítva, hogy $L^p(0, 1)$-ben $p \geqq 1$ esetén nem létezik univerzális függvény. A bizonyítások módszere hasonló, a Lebesgue-féle sűrűségi pont létezésén alapul. A szerzők eredményeiket egyidejűen, egymástól függetlenül érték el, a Buczolich Zoltán bizonyítása általánosabb, többdimenzióra is megoldja a problémát. E kérdésnek a fenti szerzőktől alapvetően eltérő megoldását adta Horváth Miklós [5]-ben, bizonyítása nem használja fel a Lebesgue-féle sűrűségi pont létezését. Bizonyította a következő tételt, amelyből a felvetett problémára a negatív válasz következik, s amelynek önálló érdekessége is van.

A. Tétel (Horváth [5]): *Legyen $f \in L^p(\Omega)$, ahol $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ $(N \geqq 1)$ tetszőleges tartomány és $p \geqq 1$ továbbá tegyük fel, hogy valamely $e \in \mathbf{R}^N$, $|e| = 1$ irányban f nem állandó. Ekkor valamely $\delta_f > 0$, $C_f > 0$ csak f-től függő, de λ-tól független állandókkal fennáll a következő becslés*

$$\|f(x+\lambda_n)-f(x)\|_{L^p(\Omega_{-|\lambda|})} \leqq C_f |\lambda| \quad (|\lambda| < \delta_f), \tag{1}$$

(itt és a következőkben is $\Omega_{-s} := \{x \in \Omega \mid \varrho(x, \partial\Omega) > s\}$).

E kérdéskörtől (tudomásom szerint) látszólag független H. Brézis [6] könyvének következő tétele:

B. Tétel (Brézis [6], 153. o.): *Legyen $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p \leqq \infty$. Ekkor $u \in W^{1,p}(\Omega)$ akkor és csak akkor, ha minden $\omega \subset\subset \Omega$ tartomány és minden $h \in \mathbf{R}^N$, $|h| < \varrho(\omega, \partial\Omega)$ esetén a*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega)} \leqq C |h| \tag{2}$$

becslés teljesül, s ilyenkor $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ választható.

E két eredmény hasonlósága miatt kézenfekvő ezek kapcsolatának kutatása. Jelen dolgozat célja az A. és B. Tételek közötti kapcsolatra rámutatni és velük kapcsolatban újabb problémákat megfogalmazni. Természetes az

1. Probléma: Ha valamely $\mathcal{F}$ esetén nem létezik univerzális függvény és $f \in \mathcal{F}$ tetszőleges függvény, amely semmilyen e irányban sem konstans, akkor szükségképpen fennáll-e az (1) becslés az $\mathcal{F}$-beli normával (legyen Banach tér $\mathcal{F}$)?

Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ egy tetszőleges tartomány (összefüggő nyílt halmaz). Tekintsük a T_λ: $L^p(\Omega) \to \mathbf{R}$ $(\lambda \in \mathbf{R}^N)$, $f \to \| f(x+\lambda) - f(x) \|_{L^p(\Omega_{-|\lambda|})}$ funkcionálsorozatot. Nevezzünk egy Ω-n m.m. (majdnem mindenütt) értelmezett f függvényt konstansnak a $0 \neq e \in \mathbf{R}^N$ irányban, ha $f(x+\varepsilon e) = f(x)$ m.m. $x \in \Omega_{-\varepsilon}$-ra teljesül, bármely $\varepsilon > 0$ esetén. Érvényes a következő

1. (szaturációs) Tétel: *Legyen* $1 < p < \infty$. *Ekkor*

a) f konstans egy irányban $\Leftrightarrow \liminf_{|\lambda| \to 0} \frac{1}{|\lambda|} T_\lambda f = 0$,

b) $f \in W^{1,p}(\Omega)$, *f nem konstans semmilyen irányban* $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 < \liminf_{|\lambda| \to 0} \frac{1}{|\lambda|} T_\lambda f \leqq \limsup_{|\lambda| \to 0} \frac{1}{|\lambda|} T_\lambda f < \infty.$$

BIZONYÍTÁS:

a) Megegyezik Horváth tételének bizonyításával (és $p = 1$ esetre is érvényes),

b) Brézis [6] 153. oldalon található karakterizálás szerint $1 < p \leqq \infty$ esetén $f \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \exists C = C_f > 0$ úgy hogy bármely $\omega \subset\subset \Omega$ tartomány és $\lambda \in \mathbf{R}^N$, $|\lambda| < \varrho(\omega, \partial\Omega)$ esetén teljesül

$$\| f(x+\lambda) - f(x) \|_{L^p(\omega)} \leqq C |\lambda|.$$

Mivel a C konstans nem függ ω-tól, ezért az utóbbi egyenlőtlenségből $T_\lambda f \leqq C|\lambda|$ következik, s ez éppen a b) fennállását jelenti.

Megjegyzés: Ha $\Omega = \mathbf{R}^N$, tehát ha az eltolás nem vezet ki belőle (és így $\Omega_{-\varepsilon} = \mathbf{R}^N$-et veszünk), akkor „valódi" szaturációs tételt nyerünk: az approximációs eljárás az lesz, hogy f-et közelítjük az $S_\lambda f = f(\,.\,+\lambda)$ operátorral; a fenti tétel mutatja, hogy az irányban konstans függvényeket leszámítva ez az eljárás $|\lambda|$ rendben szaturálódik és a szaturációs osztály $W^{1,p}$ lesz.

Brézis könyvében és Horváth cikkében levő bizonyítás könnyen általánosítható n-edrendű differenciákra, $\Delta_n(f, x)$-re, amit a $\Delta_1(f, x) = f(x+h) - f(x)$, $\Delta_n(f, x) = \Delta_{n-1}(f, x+h) - \Delta_{n-1}(f, x)$ rekurzió definiál. Nevezetesen, legyen

$$T_{n,\lambda} f := \| \Delta_n^\lambda f \|_{L^p(\Omega_{-n|\lambda|})} \quad (\lambda \in \mathbf{R}^N).$$

Ekkor érvényes a

2. Tétel: $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ *esetén:*

a) Van olyan $0 \neq e \in \mathbf{R}^N$, *hogy* $\Delta_n^{ee}(f) = 0$ *m.m.* $\forall \varepsilon > 0$*-ra* $\Leftrightarrow \liminf_{|\lambda| \to 0} \frac{1}{|\lambda|^n} T_{n,\lambda} f = 0$.

b) $f \in W^{n,p}(\Omega)$ *és nincs olyan* $0 \neq e \in \mathbf{R}^N$, *amelyre az a)-beli feltétel teljesül* $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 < \liminf_{|\lambda| \to 0} \frac{1}{|\lambda|^n} T_{n,\lambda} f \leqq \limsup_{|\lambda| \to 0} \frac{1}{|\lambda|^n} T_{n,\lambda} f < \infty.$$

Felvethető a következő

2. Probléma: Hogyan kellene definiálni $\Delta_n^\lambda f$-et nem egész n-re úgy, hogy a 2. Tétel a fenti alakjában érvényes maradjon?

Megjegyzés: Horváth dolgozatában az 1. Tétel a) része annak bizonyítására szolgált, hogy $p \geqq 1$-re semmilyen $f \in L^p(\Omega)$ nem lehet univerzális a következő értelemben: nincs olyan $0 \neq \lambda_n \in \mathbf{R}^N$, $\lambda_n \to 0$ sorozat, hogy $\{[f(x+\lambda_n)-f(x)]/\lambda_n\}$ sorozat sűrű lenne bármely $L^p(\Omega_{-\varepsilon})$-ban $(\varepsilon > 0)$. A kérdéskörrel kapcsolatban l. Horváth cikkét. Felvethető a

3. Probléma: Van-e olyan $f \in L^1(\Omega)$, amely

a) univerzális a gyenge topológiában, azaz a differenciálhányadosai gyengén sűrű halmazt alkotnak bármely $L^1(\Omega_{-\varepsilon})$-ban $(\varepsilon > 0)$?

b) Univerzális a mértékben való konvergenciára nézve a mérhető függvények $L^0(\Omega)$ terében?

A 2. Tétel bizonyítása:

A bizonyítás a Lagrange-féle középértéktétel magasabbrendű differenciákra történő általánosítását igényli. Az egyszerűség kedvéért az alábbi Lemmában ezt bebizonyítjuk az $n=2$ esetre. A 2. Tételt ezután a következő módon bizonyíthatjuk be. Vegyünk egy $\{\varrho_k\}$ regularizáló sorozatot, ami a következőt jelenti: $\varrho_k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\varrho_k \geqq 0$,

$$\operatorname{supp} \varrho_k \subset S(0, k^{-1}), \quad \varrho_k(x) = \varrho_k(-x), \quad \int_{\mathbf{R}^N} \varrho_k = 1.$$

Mint az közismert, bármely L^1-beli f függvényhez L^1-normában tartanak az $f * \varrho_k \in C^\infty$ függvények. Mármost f helyett $f * \varrho_k$-t tekintve az f-re alkalmazott differenciálhányados átdobható a konvolúció másik tényezőjére, ϱ_k-ra és $\Delta_u^\lambda \varrho_k$ $|\lambda|^n$ nagyságrendű; ebből az $n=1$ esettel teljesen azonos módon adódik a 2. Tétel bizonyítása.

Lemma: *Tetszőleges* $h \in C^2[0, 1]$, $0 < t < 1/2$*-hez van olyan* $0 < \vartheta < 2$ $(\vartheta = \vartheta(t))$, *amelyre*

$$(h(2t)+h(0)-2h(t))/t^2 = h''(\vartheta t).$$

Bizonyítás: Legyen

$$F(z) := \frac{h(2t)+h(0)-2h(t)}{t^2} \cdot \frac{z^2}{2} - h(z) + az,$$

ekkor

$$F(2t)+F(0)-2F(t) = 0,$$

mert

$$[(2t)^2 - 2t^2]\frac{1}{2} = t^2.$$

Emiatt az a konstans megadható úgy, hogy $F(0)=F(t)$legyen és akkor $F(0)= =F(t)=F(2t)$. Ezért a Lemma következik Rolle tételéből.

3. Tétel: *Legyen* $1 < p \leqq \infty$, $u \in L^\infty(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^\infty$. *A következő állítások ekvivalensek:*

(i) $u \in W^{2,p}(\Omega)$,

(ii) *Van olyan* C *állandó, hogy bármely* $|\alpha| \leqq 2$ *multiindexre*

$$\left| \int_\Omega u D^\alpha \varphi \right| \leqq C \, \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega)),$$

(iii) *Van olyan* C *állandó, hogy bármely* $\omega \subset\subset \Omega$ *tartományra (azaz amelyre* $\overline{\omega} \subset \Omega$ *kompakt halmaz)*

$$\|u(x+2\lambda)+u(x)-2u(x+\lambda)\|_{L^p(\omega)} \leqq C|\lambda|^2,$$

ha

$$2|\lambda| < \varrho(\omega, \partial\Omega).$$

BIZONYÍTÁS:

(i)⇒(ii) definíció szerint érvényes

$$(u \in W^{2,p}(\Omega) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \in L^p(\Omega) \text{ és } \forall |\alpha| \leqq 2\text{-re} \exists g_\alpha \in L^p(\Omega):$$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\text{-ra} \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi.$$

(ii)⇒(i): A $\varphi \to \int_\Omega u D^\alpha \varphi$ funkcionálokra van normabecslés, tehát kiterjeszthetők $L^{p'}$-n értelmezett folytonos lineáris funkcionállá, akkor pedig $\int_\Omega u D^\alpha \varphi = \int_\Omega g\varphi$ valamilyen $g \in L^p(\Omega)$-ra.

(i)⇒(iii): Tegyük fel először, hogy $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Legyen $\lambda \in \mathbf{R}^N$ és $v(t) := u(x+t\lambda)$. Ekkor

$$|u(x+2\lambda)+u(x)-2u(\lambda)| = |v(2)+v(0)-2v(1)| =$$

$$= \left|\int_0^1 [v'(t+1)-v'(t)]\, dt\right| = \left|\int_0^1 \int_0^1 v''(\tau+t)\, d\tau\, dt\right|.$$

Mivel*

$$v'(t) = \sum_{i=1}^N u_i(x+t\lambda)\lambda_i,$$

$$v''(t) = \sum_{i,j=1}^N u_{i,j}(x+t\lambda)\lambda_i\lambda_j,$$

ezért

$$|u(x+2\lambda)+u(x)-2u(x+\lambda)|^p \leqq |\lambda|^{2p} \int_0^1 \left|\sum_{i,j=1}^N u_{i,j}(x+t\lambda)\right|^p dt,$$

(3)

$$\int_\omega |u(x+2\lambda)+u(x)-2u(x+\lambda)|^p\, dx \leqq$$

$$\leqq |\lambda|^{2p} \int_0^1 \left(\int_\omega \left|\sum_{i,j=1}^N u_{i,j}(x+t\lambda)\right|^p dx\right) dt \leqq C|\lambda|^{2p},$$

mert a belső integrál korlátos. Legyen most $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $1<p<\infty$. Ekkor van olyan $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ sorozat, hogy $u_n \to u$ $L^p(\Omega)$-ban, $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ $L^p(\omega)$-ban, minden $\omega \subset\subset \Omega$ esetén. (Felhasználtuk azt a jól ismert tényt, hogy sima határú Ω esetén $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű halmaz $W^{2,p}(\Omega)$-ban, l. Ladyzhenskaya [7].) Alkalmazhatjuk a határát-

* $u_i \overset{\text{def}}{=} D_i u$, $u_{i,j} \overset{\text{def}}{=} D_i D_j u$.

menetet (3)-ban, ahol

$$C = \int_{\Omega} \Big| \sum_{|\alpha| \leqq 2} D^{\alpha} u \Big|$$

adódik.

(iii)⇒(ii): Legyen $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, vegyünk egy olyan ω nyílt halmazt, hogy $\operatorname{supp} \varphi \subset \omega \subset\subset \Omega$. Legyen $\lambda \in \mathbf{R}^N$, $|\lambda| < \varrho(\omega, \partial\Omega)$. Tudjuk, hogy

$$\Big| \int_{\Omega} [u(x+2\lambda) + u(x) - 2u(x+\lambda)]\, \varphi(x)\, dx \Big| \leqq C\, |\lambda|^2\, \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Másrészt

$$\int_{\Omega} [u(x+2\lambda) + (ux) - 2u(x+\lambda)]\, \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{\Omega} u(y)\, [\varphi(x-2\lambda) + \varphi(x) - 2\varphi(x-\lambda)]\, dx,$$

tehát

$$\left| \int_{\Omega} u(y)\, \frac{\varphi(y-2\lambda) + \varphi(y) - 2\varphi(y-\lambda)}{|\lambda|^2}\, dy \right| \leqq C\, \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Ha most $\lambda = te_i$ és $t \to 0$, akkor adódik

$$\Big| \int_{\Omega} u(y) \varphi_{ii}(y)\, dy \Big| \leqq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Ha pedig $\lambda = t(e_i + e_j)$, akkor a Lemma alkalmazásával kapjuk, hogy ($v(t) = \varphi(y + t\lambda)$ mellett)

$$\varphi(y-2\lambda) + \varphi(y) - 2\varphi(y-\lambda) = v(-2) + v(0) - 2v(-1) =$$

$$= v''(-\vartheta) = t^2 [\varphi_{ii}(x - \vartheta\lambda) + \varphi_{jj}(x - \vartheta\lambda) + 2\varphi_{ij}(x - \vartheta\lambda)],$$

ahonnan

$$\Big| \int_{\Omega} u(y)\, \varphi_{ij}(y)\, dy \Big| \leqq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

s ezzel a 3. Tételt beláttuk.

Végezetül bemutatjuk *a 2. Tétel bizonyítását az* $n = 2$ *esetben:*

A 3. Tételt is figyelembe véve azt kell belátnunk, hogy ha nincs olyan $0 \neq e$ irány $\mathbf{R}^N$-ben, amire a 2. Tétel a) részében adott feltétel teljesül, akkor van olyan c_f, $\delta_f > 0$ konstans, hogy

$$\|f(x+2\lambda) + f(x) - 2f(x+\lambda)\|_{L^p(\Omega_{-2|\lambda|})} \geqq c_f\, |\lambda|^2 \quad (\forall\, |\lambda| < \delta_f). \tag{4}$$

Elég (4)-et $p = 1$-re belátni, mert ha Ω korlátos, akkor $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$; ha pedig Ω nem korlátos, akkor véve egy korlátos $\Omega' \subset \Omega$-t, ha Ω'-re teljesül (4), akkor Ω-ra annál inkább. Legyen tehát $p = 1$. Tegyük fel, hogy Ω korlátos tartomány és az is feltehető, hogy Ω határa sima (azaz C^{∞}-beli). Rögzítsünk egy $(\varrho_n) \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ regularizáló sorozatot. Legyen $0 < \delta' < \delta$ tetszőleges. Akkor $|\lambda| < C(\delta, \delta')$ esetén

$$\int_{\Omega_{-|\lambda|}} |f(x+2\lambda) + f(x) - 2f(x+\lambda)|\, dx \geqq$$

$$\geqq \int_{\Omega_{-\delta}} \Big| \int_{\Omega_{-\delta'}} f(z)\, [\varrho_n(x-z+2\lambda) + \varrho_n(x-z) - 2\varrho_n(x-z+\lambda)]\, dz \Big|\, dx =$$

$$= \int_{\Omega_{-\delta}} \Big| \int_{\Omega_{-\delta'}} f(z) \sum_{i,j=1}^{N} D_i D_j \varrho_n(x-z+\vartheta\lambda)\, \lambda_i \lambda_j\, dz \Big|\, dx.$$

Legyen

$$c_f := \liminf_{|\lambda|\to 0} \int_{\Omega_{-\delta}} \left| \int_{\Omega_{-\delta'}} f(z) \sum_{i,j=1}^{N} D_i D_j \varrho_n(x-z+\vartheta\lambda) \frac{\lambda_i \lambda_j}{|\lambda|^2}\, dz \right| dx.$$

Ha $c_f > 0$, akkor (4)-et beláttuk. Tegyük fel, hogy $c_f = 0$, azaz van olyan $\lambda^{(k)}$ sorozat, amelyre $|\lambda^{(k)}| \to 0$ és

$$(5) \qquad \int_{\Omega_{-\delta}} \left| \int_{\Omega_{-\delta'}} f(z) \sum_{i,j=1}^{N} D_i D_j \varrho_n(x-z+\vartheta\lambda^{(k)}) \frac{\lambda_i^{(k)} \lambda_j^{(k)}}{|\lambda^{(k)}|^2}\, dz \right| dx \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Részsorozatra térve elérhető, hogy $\lambda^{(k)}/|\lambda^{(k)}| \to e_0^{(n)}$ $(k \to \infty)$. Mivel Ω korlátos, (5)-ben elvégezhető a határátmenet, tehát azt kapjuk, hogy m.m. $x \in \Omega_{-\delta}$-ra

$$\int_{\Omega_{-\delta'}} f(z) \sum_{i,j=1}^{N} D_i D_j \varrho_n(x-z)\, e_i^{(n)} e_j^{(n)}\, dz = 0,$$

azaz

$$\sum_{i,j=1}^{N} e_i^{(n)} e_j^{(n)} D_i D_j \int_{\Omega_{-\delta'}} f(z)\, \varrho_n(x-z)\, dz = 0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az $F_n(z) := \int_{\Omega_{-\delta'}} f(z)\varrho_n(x-z)dz$, $x \in \Omega_{-\delta}$ függvényre

$$(6) \qquad \Delta_2^{\varepsilon\lambda}(F_n, x) = 0$$

m.m. $x \in \Omega_{-\delta}$-ra és minden $\varepsilon > 0$-ra (l. a Lemmát és a 3. Tételben (i)$\Rightarrow$(iii) bizonyítását). Részsorozatra térve elérhető, hogy $e_0^{(n)} \to e_0$. Mivel $f * \varrho_n \to f$ L^1-ben, ezért (6)-ból határátmenettel kapjuk, hogy

$$\Delta_2^{\varepsilon\lambda}(f, x) = 0 \quad \text{m.m.} \quad x \in \Omega_{-\delta}, \quad \forall \varepsilon > 0\text{-ra}.$$

Ezután a (4) bizonyítása megegyezik a Horváth-féle cikkben adott bizonyítással.

IRODALOM

[1] J. Marcinkiewicz: Sur les nombres dérivés, *Fund. Math.* **24** (1935), 305—308.
[2] I. Joó: On the divergence of eigenfunction expansions, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.* **32** (1989), 3—36.
[3] A. Bogmér, A. Sövegjártó: On universal functions, *Acta Math. Hung.* **49** (1987), 237—239.
[4] Z. Buczolich: On universal functions and series, *Acta Math. Hung.* **49** (1987), 403—414.
[5] M. Horváth: On multidimensional universal functions, *Studia Sci. Math. Hung.* **22** (1987), 75—78.
[6] H. Brézis: *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
[7] O. Ladyzhenskaya: *Boundary value problems of mathematical physics*, „Nauka", Moscow, 1973.

(Beérkezett: 1987. szeptember 2-án)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ МИКЛОША ХОРВАТА

И. ЙО

ON A THEOREM OF MIKLÓS HORVÁTH

I. JOÓ

KÖZGAZDASÁGI PÉLDÁK EGZAKTUL MEGOLDHATÓ VARIÁCIÓS PROBLÉMÁKRA

BANAI MIKLÓS és LUKÁCS BÉLA

0. Jelen dolgozatban az alapfüggvények egy olyan osztályát mutatjuk be, amelyekhez tartozó E.—L.-d.e.-ek megoldásai teljesítik a relatív erős maximum szükséges és elégséges feltételeit [1]. Ezek a variációs problémák közgazdasági eredetűek. Bevezetésül röviden összefoglaljuk e problémák eredetét. A közgazdasági vonatkozású részletek [2]-ben találhatók.

A következő kérdésből indulunk ki. Milyen beruházási politikát folytassunk, hogy maximális fogyasztást érjünk el az adott tervidőszakban? Ezt a kérdést egy Harrod—Domar-féle dinamikus egyszektoros gazdasági modell kereteiben fogalmazzuk meg matematikai alakban. Ehhez jelölje T a tervidőszak hosszát, $Y(t)$ a nemzeti jövedelmet a t pillanatban, legyen $K(t)$ a tőkeállomány t-ben, $s(t)$ a pillanatnyi beruházási hányad (nyilván $0 \leqq s(t) \leqq 1$, $\forall t \in [0, T]$), g a tőkehatékonysági tényező, λ pedig a pótlási hányad. Ezek között a következő összefüggések állnak fönn:

$$Y = gK, \tag{1}$$

$$\dot{K} = sY - \lambda K, \tag{2}$$

ahol ponttal az idő szerinti differenciálást jelöljük. (1) és (2) következménye, hogy

$$K(t) = K_0 \exp\left\{\int_0^t h(t')\,dt'\right\}, \quad K_0 = K(0), \tag{3}$$

ahol

$$h = sg - \lambda. \tag{4}$$

A továbbiakban λ-t időben állandónak, míg g-t s függvényének tekintjük. Az (1) egyenlet azt tételezi fel, hogy a tőke azonnal termel nemzeti jövedelmet, vagyis az időbeli késleltetést eddig nem vettük figyelembe. Ezt bizonyos körülmények között megtehetjük (1) következő módosításával:

$$Y(t) = g(t)K(t-\tau), \tag{1'}$$

ahol τ a késleltetés paramétere. Lineáris közelítés esetére szorítkozva $K(t-\tau) \cong K(t) - \tau\dot{K}(t)$, (1')-ből és (2)-ből adódóan $K(t)$ (3)-beli alakja nem változik, csupán h módosul a következőképpen:

$$h = \frac{sg - \lambda}{1 + sg\tau}. \tag{4'}$$

Természetesen a $\tau=0$ esetben a késleltetett modell visszaadja a késleltetés nélkülit.

Rátérve a fogyasztásra, nyilván ha a t pillanatban $Y(t)$-nek $s(t)$-szeresét fordítjuk beruházásra, akkor $[1-s(t)]$-szeresét fogyasztjuk el. Így a tervidőszak alatti összfogyasztást (F) a következő adja:

$$F = \int_0^T (1-s)Y\,dt. \tag{5}$$

Beírva ide (1')-ből $Y(t)$-t — a késleltetésre lineáris közelítést alkalmazva — (3) felhasználásával $s(t)$-nek a következő funkcionálját kapjuk:

$$F = K_0 \int_0^T (1-s)\frac{h+\lambda}{s} e^{\int_0^t h(t')dt'}\,dt, \tag{6}$$

ahol h (4')-ben adott. E funkcionálnak keressük $s(t)$-ben a maximumát. Vezessük be az

$$y(t) = \int_0^t h(t')\,dt' \tag{7}$$

új változót, amiből, feltételezve h invertálhatóságát, írhatjuk:

$$\dot{y}(t) = h[s(t)], \quad s = h^{-1}(\dot{y}) = \Phi(\dot{y}) \tag{8}$$

és

$$F = \int_0^T L(y, \dot{y})\,dt, \tag{9}$$

ahol

$$L(y, \dot{y}) = K_0\{[\Phi(\dot{y})]^{-1} - 1\}(\dot{y}+\lambda)e^{y} \tag{10}$$

az F alapfüggvénye.

1. Részletes vizsgálataink megkezdéséhez elsőnek vizsgáljuk általánosan a (10) alakú alapfüggvények tulajdonságait. Ehhez vezessük be a következőket (jelöléseinkkel igyekszünk [1]-et követni):

a) $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{R}^2$ adott tartomány,
$Q \overset{\text{df}}{=} \mathbf{R}^1 \times \mathcal{T}$ [Q pontjait jelöljük $(t, y(t), \dot{y}(t))$-vel].

b) $L \in \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^1 \cap C(Q)$ adott függvény,

c) $P_1=(0, y_0)$, $P_2=(T, y_T)$ $\mathbf{R}^2$ két olyan pontja, amelyekre $0<T$.

Az F funkcionál a következőképpen van értelmezve:

1° $y \in \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ megengedett ($y \in D_F$), ha

i) $y \in C_1[0, T]$;

ii) $y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T$;

iii) $(t, y(t), \dot{y}(t)) \in Q, \quad (t \in [0, T])$.

2° $\forall\, y \in D_F$:

$$F[y] \overset{\text{df}}{=} \int_0^T L(t, y(t), \dot{y}(t))\,dt.$$

Most legyen $a \in C_3(\mathbf{R}^1 \times \mathscr{A})$, $\mathscr{A} \subseteq \mathbf{R}^1$, L pedig a következő alakú:

$$L = a(t, \dot{y}) e^{y}. \tag{1.1}$$

Az ilyen alakú alapfüggvényhez tartozó F funkcionál y-ra vonatkozó Jacobi-d.e.-ben, vagyis az

$$[L_{yy}(t) - \dot{L}_{y\dot{y}}(t)]\,\eta(t) - \dot{L}_{\dot{y}\dot{y}}(t)\,\dot{\eta}(t) - L_{\dot{y}\dot{y}}(t)\,\ddot{\eta}(t) = 0 \tag{1.2}$$

d.e.-ben az $\eta(t)$ együtthatója 0, ha $y \in C_2[0, T]$ és az F stacionárius függvénye. Ui. az (1.1) alakú L kielégíti az $L_y = L$ egyenletet, így $L_{yy} - \dot{L}_{y\dot{y}} = L_y - \dot{L}_{\dot{y}} = 0$. Így (1.2) a következőre redukálódik:

$$\dot{L}_{\dot{y}\dot{y}}(t)\,\dot{\eta}(t) - L_{\dot{y}\dot{y}}(t)\,\ddot{\eta}(t) = 0. \tag{1.3}$$

Ha most $y \in D_F$ kielégíti az erősebb Legendre-féle feltételt ($L_{\dot{y}\dot{y}} < 0$), akkor (1.3) $\Delta_y(0) = 0$, $\dot{\Delta}_y(0) = 1$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldása a következő alakú:

$$\Delta_y(t) = \int_0^t e^{\int_{t'}^{t} \alpha(t'')\,dt''}\,dt', \quad \alpha = \frac{\dot{L}_{\dot{y}\dot{y}}}{L_{\dot{y}\dot{y}}}. \tag{1.4}$$

Ez a megoldás pedig — szigorúan monoton lévén — teljesíti az erősebb Jacobi-féle feltételt. E pont konklúziója tehát: az (1.1) típusú alapfüggvényekhez tartozó E.—L.-d.e.-ek $y \in C_2[0, T]$ megoldásai, az erősebb Legendre-féle feltétel teljesülése esetén, teljesítik az erősebb Jacobi-féle feltételt.

2. Most vizsgáljuk meg a Legendre-féle feltételt. Ez a feltétel nyilván akkor teljesül, ha

$$a_{\dot{y}\dot{y}}(t, \dot{y}(t)) \leqq 0 \quad (t \in [0, T]). \tag{2.1}$$

Ezért célszerű specifikálni a alakját. (10)-nek megfelelően, legyen

$$a(\dot{y}) = \left[\frac{1}{\Phi(\dot{y})} - 1\right](\dot{y} + \lambda), \tag{2.2}$$

ahol $D_a = \mathbf{R} \setminus \{\dot{y} \mid \Phi(\dot{y}) = 0\}$, $\Phi \in C_3(\mathbf{R})$ és $\lambda \in \mathbf{R}$ (tehát az y-on kívül nem függ explicite t-től sem ebben a választásban). Ekkor

$$a_{\dot{y}\dot{y}} = -2\frac{\bar{\Phi}}{\Phi^2} + (\dot{y} + \lambda) \cdot \left(2\frac{\bar{\Phi}^2}{\Phi^3} - \frac{\bar{\bar{\Phi}}}{\Phi^2}\right), \tag{2.3}$$

ahol $\bar{}$ az $\dot{y}$ szerinti differenciálást jelöli. Most (8)-nak megfelelően, legyen $\dot{y} = h(s)$ és $s = \Phi(\dot{y})$, ahol $h \in C_3[0, 1]$. A második összefüggést s szerint deriválva és használva az elsőt is, kapjuk:

$$1 = \bar{\Phi} h', \quad \bar{\Phi} = \frac{1}{h'}, \tag{2.4}$$

ismét deriválva:

$$0 = \bar{\bar{\Phi}}(h')^2 + \bar{\Phi} h'', \quad \bar{\bar{\Phi}} = -\frac{h''}{(h')^3}, \tag{2.5}$$

ahol $'$ s szerinti deriválást jelöl. Ezekkel az összefüggésekkel (2.3) a következő alakot ölti:

$$a_{\dot{y}\dot{y}} = s^{-3}(h')^{-3}[-2s(h')^2 + (h + \lambda)(2h' + sh'')]. \tag{2.6}$$

A továbbiakban szem előtt kell tartanunk, hogy (2.4) és (2.5) második egyenletének $h'=0$-ban nincs értelme és vizsgálni kell a h függvény inverzének, Φ-nek is a létezését.

A következő két esetet vizsgáljuk meg:

1. eset:

$$h(s) = -\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{2}s^2-\lambda, \quad \lambda \geqq 0, \tag{2.7}$$

e választás motivációja [3]-ban található, és (4')-nek megfelelően

2. eset:

$$h(s) = \frac{sg(s)-\lambda}{1+\tau sg(s)}, \quad g(s) = \beta s(1-s), \quad \beta > 0, \quad \tau, \lambda \geqq 0. \tag{2.8}$$

$\Delta\tau$ 1. esetben (2.3)-ba való behelyettesítés után kapjuk:

$$a_{\dot{y}\dot{y}} = s^{-3}(1-s)^{-3}\left(-\frac{2}{3}s^2+s-\frac{1}{2}\right). \tag{2.9}$$

Ez a kifejezés pedig a $0<s<1$ tartományban nyilvánvalóan negatív (lévén a 3. tényező diszkriminánsa negatív), azaz F-nek (relatív) maximumát fogjuk kapni. A $h'(s)=s(1-s)=0$ egyenlet megoldásai az $s_1=0$ és $s_2=1$. $s_1=0$-ban h-nak helyi minimuma van a $h(0)=-\lambda$ értékkel, míg az $s_2=1$-ben helyi maximuma a $h(1)=\frac{1}{6}-\lambda$ értékkel. A két pont között h szigorúan monoton nő, így a h: $(0, 1)\to$ $\to\left(-\lambda, \frac{1}{6}-\lambda\right)$ függvény inverze, Φ: $\left(-\lambda, \frac{1}{6}-\lambda\right)\to(0, 1)$ létezik és nyilvánvalóan (akárhányszor) folytonosan differenciálható. Így a (2.2) alakú a függvényt leszűkítve a $D_a=\left(-\lambda, \frac{1}{6}-\lambda\right)$ nyílt intervallumra — az előbbi Φ-vel — a (2.3—6) és (2.9) összefüggéseknek nyilván van értelmük (a $\Phi(\dot{y})=s=0$-ban $\dot{y}=h(0)=-\lambda$).

Az (1.1) típusú alapfüggvény (2.2) alakú a-val a következő E.—L.-d.e.-t adja:

$$\ddot{y} = \Phi^2\frac{\dot{y}(\dot{y}+\lambda)\Phi+\lambda(1-\Phi)}{(\dot{y}+\lambda)(2\bar{\Phi}^2-\Phi\bar{\bar{\Phi}})-2\Phi\bar{\Phi}}. \tag{2.10}$$

Felhasználva a (8) alatti összefüggéseket, (2.4)-et és (2.5)-öt, ez az $\dot{y}$-ban elsőrendű d.e. s-re a következő elsőrendű d.e.-t adja:

$$\dot{s} = sh'\frac{\lambda h's(1-s)+h(h+\lambda)}{(h+\lambda)(2h'+sh'')-2sh'^2}. \tag{2.11}$$

A (2.7)-beli h-ra kapjuk, hogy

$$\dot{s} = -s(1-s)\frac{s^2\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{2}\right)^2+\lambda\left(s^2-\frac{5}{3}s+\frac{1}{2}\right)}{\frac{2}{3}s^2-s+\frac{1}{2}}. \tag{2.12}$$

A (2.10) d.e. és a (2.12) d.e. a $-\lambda<\dot{y}<-\lambda+\frac{1}{6}$, ill. a $0<s<1$ tartományokon ekvi-

valens egymással a fentiek alapján. (2.12) egyértelmű megoldásait az $s_0=s(t=0)$ kezdő feltétel rögzítésével kapjuk, ha $0\leqq s_0\leqq 1$, akkor (2.12) megoldásai, $s(t, s_0)$, 0 és 1 között változnak, azaz $0\leqq s(t, s_0)\leqq 1$, $\forall t\in[0, T]$ és $\forall s_0\in[0, 1]$. Ezek a megoldások elemei $C_1[0, T]$-nek, mivel (2.12) nevezője pozitív (a nevező diszkriminánsa negatív). Ezek a megoldások zárt alakban előállíthatók ((2.12) a változók szétválasztásával, majd parciális törtekre való bontással integrálható). Így azt találtuk, hogy az 1. esetben (2.12) azon megoldásai, amelyekre $0<s(t, s_0)<1$, $\forall t\in[0, T]$, teljesítik az erősebb Legendre-féle feltételt és az **1.** pont alapján a Jacobi-féle feltételt is.

Most vizsgáljuk a 2. esetet. (2.8)-at behelyettesítve (2.6)-ba, kapjuk, hogy

$$a_{\dot{y}\dot{y}}=-2\frac{3s^2-3s+1}{\beta(1+\lambda\tau)[1+\beta\tau s^2(1-s)]^{-3}s^3(2-3s)^3}. \tag{2.13}$$

E tört számlálója pozitív, a $0<s\leqq 1$ tartományban előjele a nevező $(2-3s)$-t tartalmazó tényezőjének előjelétől függ, azaz $a_{\dot{y}\dot{y}}<0$, ha $0<s<\frac{2}{3}$, és $a_{\dot{y}\dot{y}}>0$, ha $\frac{2}{3}<s\leqq 1$. F-nek (relatív) maximumát fogjuk kapni a $0<s<\frac{2}{3}$ tartományban változó $s(t)$-kre, míg (relatív) minimumát a $\frac{2}{3}<s\leqq 1$ tartományban változó $s(t)$-kre. A $h'=0$ egyenlet most az $s(2-3s)=0$ egyenletet adja. Megoldásai: $s_1=0$, $s_2=\frac{2}{3}$. $s_1=0$-ban h-nak helyi minimuma van a $h(0)=-\lambda$ értékkel, $s_2=\frac{2}{3}$-ban helyi maximuma a $h\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}$ értékkel, 0 és $\frac{2}{3}$ között szigorúan monoton nő, míg $\frac{2}{3}$ és 1 között szigorúan monoton csökken. Ezért a $h\colon \left(0, \frac{2}{3}\right)\to\left(-\lambda, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}\right)$ függvénynek létezik az (akárhányszor) folytonosan deriválható $\Phi_1\colon \left(-\lambda, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}\right)\to\left(0, \frac{2}{3}\right)$ inverze, és hasonlóan a $h\colon \left(\frac{2}{3}, 1\right]\to\left(\frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}, -\lambda\right]$ függvénynek is létezik a $\Phi_2\colon \left(\frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}, -\lambda\right]\to\left(\frac{2}{3}, 1\right]$ (akárhányszor) folytonosan deriválható inverze. Így a (2.2) alakú a függvényt előbb leszűkítve a $\left(-\lambda, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}\right)$ nyílt intervallumra, a Φ_1 függvény mellett lesz értelme a (2.3—6) és (2.13) összefüggéseknek, majd a $\left[-\lambda, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}\right)$ félig zárt intervallumra a Φ_2-vel lesznek értelmezhetőek ezek az összefüggések.

A (2.8)-beli h-t (2.10)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\dot{s}=-s(1-s)(2-3s)\frac{\lambda(1-3s)+\beta s^2(1-s)}{2[1+\beta\tau s^2(1-s)](1-3s+3s^2)}. \tag{2.14}$$

A (2.10) d.e. és ez a d.e. ekvivalens a $-\lambda<\dot{y}<\frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}$ és a $0<s<\frac{2}{3}$ tartományon — (2.10)-ben Φ_1-et alkalmazva —, ill. a $-\lambda\leqq\dot{y}<\frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}$ és a $\frac{2}{3}<s\leqq 1$

tartományon, (2.10)-ben Φ_2-őt használva. (2.14) megoldásai is 0 és 1 között változnak, ha $0 \leqq s_0 \leqq 1$. Sőt azt is látjuk, hogy ha $0 \leqq s_0 \leqq \frac{2}{3}$, akkor $0 \leqq s(t, s_0) \leqq \frac{2}{3}$, $\forall t \in [0, T]$, és ha $\frac{2}{3} \leqq s_0 \leqq 1$, akkor $\frac{2}{3} \leqq s(t, s_0) \leqq 1$, $\forall t \in [0, T]$. Mivel (2.14) jobb oldalának nevezője pozitív az $s \in [0, 1]$-ben, így megoldásai elemei $C_1[0, T]$-nek. (2.14) most is zárt alakban kiintegrálható.

Tehát azt kaptuk, hogy a 2. esetben (2.14) azon megoldásai, amelyekre $0 < s(t, s_0) < \frac{2}{3}$, $\forall t \in [0, T]$, teljesítik az erősebb Legendre-féle feltételt F (relatív) maximumához, míg azok a megoldások, amelyekre $\frac{2}{3} < s(t, s_0) \leqq 1$, $\forall t \in [0, T]$, F (relatív) minimumához teljesítik ezt a feltételt.

Itt jegyezzük meg, hogy F negatív (pozitív) regularitásának eldöntéséhez még meg kell nézni: $L_{\dot{y}\dot{y}}$ vajon folytonos függvény-e változóinak. Ez viszont nyilvánvalóan teljesül, ha D_a-nak a Φ függvények értelmezési tartományait választjuk. Másik megjegyzésünk (2.14) megoldásainak viselkedésére vonatkozik. s előjelét nyilván a (2.14) jobb oldalán fellépő tört számlálója határozza meg. Z-vel jelölve e számlálót, könnyen megállapíthatjuk $Z(s)$ menetét a $0 \leqq s \leqq 1$ intervallumban. Ha $\lambda < \frac{\beta}{9}$, akkor $s = \frac{1}{3}$ alatt Z-nek egy pozitív értékű minimuma, $s = \frac{2}{3}$ fölött egy maximuma van, ezután előjelet vált. Ha $\lambda \geqq \frac{\beta}{9}$, akkor Z-nek sem minimuma sem maximuma nincs, az s tengelyt $\frac{2}{3}$ alatt és fölött is metszheti. Így a $\lambda < \frac{\beta}{9}$ esetben a 0 és $\frac{2}{3}$ közötti s_0-ról induló $s(t)$ görbék monoton csökkenők (vö. [2]).

3. Végül vizsgáljuk meg az (1.1) alakú alapfüggvény változói szerinti folytonos differenciálhatóságát. L y szerint akárhányszor folytonosan differenciálható. A (2.2) választás mellett L t-től explicite nem függ, így csupán a-nak $\dot{y}$ szerinti négyszeres folytonos differenciálhatóságát kell vizsgálnunk. $\bar{a}$-t (2.3)-ban már lejegyeztük, most írjuk fel $\dddot{\bar{a}}$-t és $\dddot{\bar{a}}$-t:

$$\dddot{\bar{a}} = \frac{4\bar{\Phi}}{\Phi^3} - \frac{3\dddot{\bar{\Phi}}}{\Phi^2} + \frac{2\bar{\Phi}^2}{\Phi^3} + \left[\frac{6\bar{\Phi}\ddot{\bar{\Phi}}}{\Phi^3} - \frac{6\bar{\Phi}^3}{\Phi^4} - \frac{\dddot{\bar{\Phi}}}{\Phi^2}\right](\dot{y} + \lambda), \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\dddot{\bar{a}} = &-\frac{12\bar{\Phi}^2}{\Phi^4} + \frac{4\dddot{\bar{\Phi}}}{\Phi^3} + \frac{16\bar{\Phi}\ddot{\bar{\Phi}}}{\Phi^3} - \frac{4\dddot{\bar{\Phi}}}{\Phi^2} - \frac{12\bar{\Phi}^3}{\Phi^4} + \\ &+ \left[\frac{6\ddot{\bar{\Phi}}^2}{\Phi^3} - \frac{36\bar{\Phi}^2\ddot{\bar{\Phi}}}{\Phi^4} + \frac{8\bar{\Phi}\dddot{\bar{\Phi}}}{\Phi^3} + \frac{24\bar{\Phi}^4}{\Phi^4} - \frac{\dddot{\bar{\Phi}}}{\Phi^2}\right](\dot{y} + \lambda).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ezeknek a kifejezéseknek (2.3)-mal egyetemben az $\{\dot{y} | \Phi(\dot{y}) = 0\}$ halmazon nincs értelmük és látjuk: a folytonos deriválhatósága Φ folytonos deriválhatóságától

függ. A (8) összefüggések alapján számoljuk ki $\overset{\equiv}{\Phi}$-t és $\overset{\equiv}{\Phi}$-t (2.4) és (2.5) mintájára:

$$(3.3)\qquad 0=\overset{\equiv}{\Phi}h'^3-\frac{3h''^2}{h'^2}+\frac{h'''}{h'},\quad \overset{\equiv}{\Phi}=\frac{1}{h'^3}\left(-\frac{h'''}{h'}+\frac{3h''^2}{h'^2}\right),$$

$$(3.4)\quad 0=\overset{\equiv}{\Phi}h'^4+2h''\frac{h'''}{h'^2}-21\frac{h''^3}{h'^3}+\frac{h''''}{h'},\quad \overset{\equiv}{\Phi}=\frac{1}{h'^4}\left[21\frac{h''^3}{h'^3}-2h''\frac{h'''}{h'^2}-\frac{h''''}{h'}\right].$$

A (2.4—5) és (3.3—4) kifejezéseknek a $h'=0$-ban nincs értelmük. Ez a feltétel a következő pontokat zárja ki: az 1. esetben $s_1=0$, $s_2=0$, ill. $\dot{y}_1=-\lambda$, $\dot{y}_2=\frac{1}{6}-\lambda$, a 2. esetben $s_1=0$, $s_2=\frac{2}{3}$, ill. $\dot{y}_1=-\lambda$, $\dot{y}_2=\frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}$. Ezek között ott van a $\Phi(\dot{y})=0$ egyenlet megoldása is ($\dot{y}_1=-\lambda$). Tehát az 1. esetben a $D_a=\left(-\lambda, \frac{1}{6}-\lambda\right)$, a 2. esetben pedig a $D_a=\left(-\lambda, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}\right)$, ill. a $D_a=\left[-\lambda, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}\right)$ halmazokon definiált a függvények négyszer folytonosan differenciálhatók.

Állapítsuk még meg az y változó lehetséges értékeinek halmazát a vizsgált esetekben. Mivel (7) alapján y a h időintegrálja, azt kapjuk, hogy az 1. esetben, ha $\lambda\leqq\frac{1}{6}$, $y\in\left(-\lambda T, \left(\frac{1}{6}-\lambda\right)T\right)$; ha $\lambda>\frac{1}{6}$, $y\in(-\lambda T, 0]$; a 2. esetben pedig a $0<s<\frac{2}{3}$ halmazon, ha $4\beta\geqq 27\lambda$, $y\in\left(-\lambda T, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}T\right)$; ha $4\beta<27\lambda$, $y\in(-\lambda T, 0]$; és a $\frac{2}{3}<s\leqq 1$ halmazon, ha $4\beta\geqq 27\lambda$, $y\in\left[-\lambda T, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}T\right)$; ha $4\beta<27\lambda$, $y\in[-\lambda T, 0]$.

4. Foglaljuk össze eredményeinket. Ehhez vezessük be a következőket:

a) $\lambda, \tau\geqq 0$, $T, \beta>0$ valós paraméterek,

b) $Q_i=I_i\times J_i$, $i=1, 2, 3$, ahol

$$I_1=\begin{cases}\left(-\lambda T, \left(\frac{1}{6}-\lambda\right)T\right), & \text{ha } \lambda\leqq\frac{1}{6},\\ (-\lambda T, 0], & \text{ha } \lambda>\frac{1}{6},\end{cases}$$

$$J_1=\left(-\lambda, \frac{1}{6}-\lambda\right),$$

$$I_2=\begin{cases}\left(-\lambda T, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}T\right), & \text{ha } 4\beta\geqq 27\lambda,\\ (-\lambda T, 0], & \text{ha } 4\beta<27\lambda,\end{cases}$$

$$J_2=\left(-\lambda, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}\right),$$

$$I_3 = \begin{cases} \left[-\lambda T,\ \dfrac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}T\right), & \text{ha } 4\beta \geqq 27\lambda, \\ [-\lambda,\ 0], & \text{ha } 4\beta < 27\lambda, \end{cases}$$

$$J_3 = \left[-\lambda T, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}\right),$$

(Q_i pontjait $(y_i, \dot{y}_i)$-tal jelöljük),

c) $L_i \in Q_i \to \mathbf{R}^1 \cap C(Q_i)$ a következőképpen adott függvények:

$$L_i(y_i, \dot{y}_i) = a_i(\dot{y}_i)e^{y_i},$$

ahol $a_1\colon J_1 \to (0, 1);\ \dot{y}_1 \mapsto \left(\dfrac{1}{\Phi_1(\dot{y}_1)} - 1\right)(\dot{y}_1+\lambda)$, Φ_1 a

$h_1\colon (0, 1) \to J_1;\ s \mapsto -\dfrac{1}{3}s^3+\dfrac{1}{2}s^2-\lambda$ függvény inverze,

$a_2\colon J_2 \to \left(0, \dfrac{2}{3}\right);\ \dot{y}_2 \mapsto \left(\dfrac{1}{\Phi_2(\dot{y}_2)} - 1\right)(\dot{y}_2+\lambda)$, Φ_2 a

$h_2\colon \left(0, \dfrac{2}{3}\right) \to J_2;\ s \mapsto \dfrac{\beta s^2(1-s)-\lambda}{1+\beta\tau s^2(1-s)}$ függvény inverze,

$a_3\colon J_3 \to \left(\dfrac{2}{3}, 1\right];\ \dot{y}_3 \mapsto \left(\dfrac{1}{\Phi_3(\dot{y}_3)} - 1\right)(\dot{y}_3+\lambda)$, Φ_3 a

$h_3\colon \left(\dfrac{2}{3}, 1\right] \to J_3;\ s \mapsto \dfrac{\beta s^2(1-s)-\lambda}{1+\beta\tau s^2(1-s)}$ függvény inverze,

d) $P_1^i = (0, 0)$, $P_2^i = (T, y_T^i)$, ahol $i = 1, 2, 3$ és $y_T^i \in I_i$.

Az F_i funkcionálok a következőképpen vannak értelmezve:

1° $y_i \in \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ megengedett ($y_i \in D_{F_i}$), ha

i) $y_i \in C_1[0, T]$;

ii) $y_i(0) = 0$, $y_i(T) = y_T^i$;

iii) $(y_i(t), \dot{y}_i(t)) \in Q_i$, $t \in [0, T]$ és $y_i\colon [0, T] \to I_1$;

$$t \mapsto \int_0^t h_i(s(t'))\,dt',$$

2° $\forall y_i \in D_{F_i}$:

$$F_i[y_i] \overset{\text{df}}{=} \int_0^T L_i(y_i(t), \dot{y}_i(t))\,dt.$$

Állítás: *Az L_i alapfüggvényhez tartozó E.—L.-d.e. zárt alakban kiintegrálható és a P_1^i-ből P_2^i-be menő megoldás az $i=1, 2$ esetekben az F_i funkcionál relatív erős maximumát, az $i=3$ esetben relatív erős minimumát adja.*

5. Hátra maradt még néhány kérdés diszkussziója.

a) Explicit időfüggés L_i-ben: A következő módosítások csupán az E.—L.-d.e. kiintegrálhatóságát befolyásolják, a többi eredményt nem. Legyen $\beta \in C_1[0, T]$ és $R_\beta \subset (0, +\infty)$, továbbá L_i-t szorozhatjuk egy $A \in C_1[0, T]$, $R_A \subset (0, +\infty)$, függvénynyel. (Természetesen ekkor $L_i \in \mathbf{R}^1 \times Q_i \to \mathbf{R}^1 \cap ([0, T] \times Q_i)$.)

b) Az F_i értelmezési tartományának bővítése: Adjuk fel az i) feltételt és engedjünk meg $y_i(t)$-ben „töréseket", $\dot{y}_i(t)$-ben „szakadásokat" szenvedő függvényeket is D_{F_i}-ben (azaz i)′ $y_i(t) \in D_1[0, T]$). Ekkor F_i relatív erős maximális (minimális) függvényének teljesítenie kell az

$$\left.\frac{\partial L_i}{\partial \dot{y}_i}\right|_{-0} = \left.\frac{\partial L_i}{\partial \dot{y}_i}\right|_{+0}, \tag{5.1}$$

$$\left.\left(L_i - \dot{y}_i \frac{\partial L_i}{\partial \dot{y}_i}\right)\right|_{-0} = \left.\left(L_i - \dot{y}_i \frac{\partial L_i}{\partial \dot{y}_i}\right)\right|_{+0} \tag{5.2}$$

Weierstrass—Erdmann-féle töréspont feltételeket [1]. Ez a két feltétel az 1. esetben a

$$16\left(s\left(\frac{3}{2} - s\right)\right)^2 - 24s\left(\frac{3}{2} - s\right) + 9 = 0, \tag{5.3}$$

a 2. esetben, $\tau = 0$-ban, pedig a

$$9(s(1-s))^2 - 6s(1-s) + 1 = 0 \tag{5.4}$$

negyedfokú egyenletre vezet. Ezeknek az egyenleteknek viszont nincs valós megoldásuk. Így az (5.1—2) feltételek nem teljesülnek, azaz az F_i funkcionál relatív erős maximális (minimális) függvénye nem lehet töréseket szenvedő függvény (vö. [3]). Miután összefüggéseink a 2. esetben τ-ban folytonosak, így megállapításunk kis τ-kra is érvényben marad, olyan τ-kra bizonyosan, amikor (1′) lineáris közelítése még érvényes.

c) A végpont-rögzítés problémája: Esetünkben a kezdőpont, P_1^i rögzített [(0, 0)], viszont a végpontban, P_2^i-ben $y_i(T)$ az I_i intervallumon futhat végig. Ez eredeti problémánkban úgy jelentkezik, hogy az F_i funkcionál értékét az E.—L.-d.e. megoldása kezdetiértékének függvényében kapjuk meg. Így egyparaméteres szélsőértékprobléma marad adott T mellett és az a megoldás szolgáltatja az optimális beruházási pályát, amelyik kezdőfeltételével az F_i értéke maximális. E problémát variációs problémánkban úgy fogalmazhatjuk meg, hogy az F_i megengedett függvényeinek végpontját T-ben szabadon hagyjuk és így keressük F_i relatív (erős) maximumát. Ekkor F_i első variációja eltűnésének feltételéből az E.—L.-d.e. mellett a

$$\left.\frac{\partial L_i}{\partial \dot{y}_i}\right|_{t=T} = 0 \tag{5.5}$$

feltétel adódik. Ez a feltétel azonban még csak azt garantálja, hogy F_i-nek — mint az E.—L.-d.e. megoldásai végpontjainak a függvénye — az (5.5) feltételből adódó $y_i(T)$ végpontban szélsőértéke legyen. Hogy ez maximum, minimum vagy inflexiós pont, azt úgy dönthetjük el, hogy F_i-t — mint az $\alpha_i = y_i(T) \in I_i$ végpontok függvényét — az (5.5)-ből adódó $\alpha_i^0 = y_i^0(T)$ pont körül másodrendig sorba fejtjük és megvizsgáljuk a másodrendű tag együtthatójának előjelét. Ez az együttható a kö-

vetkező:

$$\int_0^T \left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial Y_i^2} \overline{Y}_i^2 + 2 \frac{\partial^2 L_i}{\partial \dot{Y}_i \partial Y_i} \dot{\overline{Y}}_i \overline{Y}_i + \frac{\partial^2 L_i}{\partial \dot{Y}_i^2} \dot{\overline{Y}}^2 \right) dt, \tag{5.6}$$

ahol Y_i az E.—L.-d.e. α_i^0 pontjaiban végződő megoldása és

$$\overline{Y}_i = \lim_{\alpha_i \to \alpha_i^0} \left| \frac{Y_i(\alpha_i) - Y_i(\alpha_i^0)}{\alpha_i - \alpha_i^0} \right|, \tag{5.7}$$

$Y_i(\alpha_i)$ az E.—L.-d.e. α_i pontba futó megoldása. Ha (5.6) pozitív, akkor F_i-nek α_i^0-ban minimuma, ha negatív, akkor maximuma és ha 0, akkor inflexiós pontja van.

Az (5.5) feltétel az 1. esetben az $s(T)$-re a következőt adja:

$$s^2(T) - \frac{5}{3} s(T) + \frac{1}{2} = 0. \tag{5.8}$$

Ennek a $0<s<1$ intervallumba eső megoldása: $s(T) = \frac{5-\sqrt{7}}{6}$. A 2. esetben a következő harmadfokú egyenlet adódik $s(T)$-re:

$$\beta\tau s^3(T) - \beta\tau s^2(T) - 3s(T) + 1 = 0. \tag{5.9}$$

A $\tau=0$ esetben $s(T)=\frac{1}{3}$. Ekkor az ebbe a pontba futó megoldás F_2-nek maximumát szolgáltatja [(5.6) negatív]. (5.9) megoldása függ τ-tól, azaz $s(T)=s_T(\tau)$. Ezt a következő d.e. szolgáltatja:

$$\frac{ds_T(\tau)}{d\tau} = \frac{\beta s_T^2(\tau)[s_T(\tau)-1]}{3-\beta\tau s_T(\tau)[3s_T(\tau)-2]}. \tag{5.10}$$

Ennek az $s_T(0)=\frac{1}{3}$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása adja (5.9) megoldását. [(5.10)-et (5.9) τ szerinti differenciálásával kapjuk.]

d) A lineáris kiterjesztésről: Az (1) és (2) egyenleteket átírhatjuk n dimenziós vektoregyenletekké, amikoris g, s és λ $n\times n$-es mátrixok. Ez a modell többszektoros gazdaságot ír le. Ha feltesszük, hogy s invertálható mátrix [l. (6)], akkor módszerünk könnyen átvihető (további feltevések mellett) erre az esetre is a fogyasztás funkcionálját maximalizáló $s(t)$ meghatározására. Viszont egy reális, többszektoros gazdaságban s általában nem invertálható [4], így ott ez a módszer nem alkalmazható általánosan.

IRODALOM

[1] Kósa András: *Variációszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
[2] Banai M., Lukács B.: *Közg. Szem.* **XXXV** (1988), 1307.
[3] Banai M., Lukács B.: *Közg. Szem.* **XXXIV** (1987), 432.
[4] Bródy András: *Lassuló Idő; A gazdasági bajok magyarázatához*, Közg. és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1984.

(Beérkezett: 1987. november 19-én)

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ НА ТОЧНО РАЗРЕШИМЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

М. БАНАИ и Б. ЛУКАЧ

ECONOMIC EXAMPLES FOR EXACTLY SOLVABLE VARIATIONAL PROBLEMS

M. BANAI and B. LUKÁCS

In this paper we present a class of Lagrangians such that the solutions of the E.—L. differential eq.s belonging to these functions fulfil the necessary and sufficient conditions of the relative strong maximum [1]. These variational problems have an economic motivation: How can one determine the investment policy which producing maximal consumption in the planning period?

We formulate this question in the framework of a Harrod—Domar one sector dynamic economic model [2]. Let T be the planning horizon, $Y(t)$ the production function at time t, $K(t)$ the capital at t, $s(t)$ the investment rate at t (clearly $0 \leqq s(t) \leqq 1$, $\forall t \in [0, T]$), g the capital efficiency coefficient, and λ the amortization rate. Then in a one sector Harrod—Domar dynamic model we have

$$Y = gK, \tag{1}$$

$$\dot{K} = sY - \lambda K. \tag{2}$$

The consequence of these eq.s is

$$K(t) = K_0 \exp\left\{\int_0^t h(t')\,dt'\right\}, \quad K_0 = K(0) \tag{3}$$

where

$$h = sg - \lambda. \tag{4}$$

We consider g as a function of s, while λ is a constant in time. Eq. (1) does not include the finite gestation time that we can take into account under certain conditions by modifying eq. (1) as follows,

$$Y(t) = g(t)K(t-\tau) \tag{1'}$$

where τ is the gestation time. Restricting ourselves to linear approximation, i.e., $K(t-\tau) \simeq K(t) - -\tau\dot{K}(t)$, then the form of $K(t)$ in (3) does not change, only h modifies to

$$h = \frac{sg - \lambda}{1 + sg\tau}. \tag{4'}$$

The total consumption under the planning period is

$$F = \int_0^T (1-s)Y\,dt. \tag{5}$$

By substituting $Y(t)$ from (1'), in linear approximation, into (5) and using (3), we obtain the following functional of $s(t)$,

$$F = K_0 \int_0^T (1-s)\frac{h+\lambda}{s} e^{\int_0^t h(t')\,dt'}, \tag{6}$$

where h is given by (4').

We look for the maximum of this functional in $s(t)$. Introducing the new variable

$$y(t) = \int_0^t h(t')\,dt', \tag{7}$$

with invertible h we can write

$$\dot{y}(t) = h[s(t)], \quad s = h^{-1}(\dot{y}) = \Phi(\dot{y}) \tag{8}$$

and

$$F = \int_0^T L(y, \dot{y})\,dt \tag{9}$$

where

(10) $$L(y, \dot{y}) = K_0\{[\Phi(\dot{y})]^{-1}-1\}(\dot{y}+\lambda)e^{y}$$

is the Lagrange function of F.

Thus, for searching the maximum (respectively, minimum) of F in $s(t)$, we can apply the methods of calculus of variations [1]. The main results can be summarized as follows:

a) $\lambda, \tau \geqq 0$, $T, \beta > 0$ are real parameters,

b) $Q_i = I_i \times J_i$, $i=1, 2, 3$, where

$$I_1 = \begin{cases} \left(-\lambda T, \left(\frac{1}{6}-\lambda\right)T\right), & \text{if } \lambda \leqq \frac{1}{6}, \\ (-\lambda T, 0], & \text{if } \lambda > \frac{1}{6}, \end{cases}$$

$$J_1 = \left(-\lambda, \frac{1}{6}-\lambda\right),$$

$$I_2 = \begin{cases} \left(-\lambda T, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}T\right), & \text{if } 4\beta \geqq 27\lambda, \\ (-\lambda T, 0], & \text{if } 4\beta < 27\lambda, \end{cases}$$

$$J_2 = \left(-\lambda, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}\right),$$

$$J_3 = \begin{cases} \left[-\lambda T, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}T\right), & \text{if } 4\beta \geqq 27\lambda, \\ [-\lambda T, 0], & \text{if } 4\beta < 27\lambda, \end{cases}$$

$$J_3 = \left[-\lambda, \frac{4\beta-27\lambda}{27+4\beta\tau}\right),$$

(we denote the points of Q_i as $(y_i, \dot{y}_i)$),

c) the functions $L_i \in Q_i \to \mathbf{R}^1 \cap C(Q_i)$ are given as follows:

(11) $$L_i(y_i, \dot{y}_i) = a_i(\dot{y}_i)e^{y_i},$$

where

$$a_1\colon J_1 \to (0, 1);\ \dot{y}_1 \mapsto \left(\frac{1}{\Phi_1(\dot{y}_1)}-1\right)(\dot{y}_1+\lambda),$$

Φ_1 is the inverse of the function

$$h_1\colon (0, 1) \to J_1;\ s \mapsto -\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{2}s^2-\lambda,$$

$$a_2\colon J_2 \to \left(0, \frac{2}{3}\right);\ \dot{y}_2 \mapsto \left(\frac{1}{\Phi_2(\dot{y}_2)}-1\right)(\dot{y}_2+\lambda),$$

Φ_2 is the inverse of the function

$$h_2\colon \left(0, \frac{2}{3}\right) \to J_2;\ s \mapsto \frac{\beta s^2(1-s)-\lambda}{1+\beta\tau s^2(1-s)},$$

$$a_3\colon J_3 \to \left(\frac{2}{3}, 1\right];\ \dot{y}_3 \mapsto \left(\frac{1}{\Phi_3(\dot{y}_3)}-1\right)(\dot{y}_3+\lambda),$$

Φ_3 is the inverse of the function

$$h_3\colon \left(\frac{2}{3}, 1\right] \to J_3;\ s \mapsto \frac{\beta s^2(1-s)-\lambda}{1+\beta\tau s^2(1-s)};$$

d) $P_1^i = (0, 0)$, $P_2^i = (T, y_T^i)$, where $i=1, 2, 3$ and $y_T^i \in I_i$.

The functionals F_i are defined as

1° $y_i \in \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ are allowed $(y_i \in D_{F_i})$, if

i) $y_i \in C_1[0, T]$;

ii) $y_i(0) = 0, \quad y_i(T) = y_T^i$;

iii) $(y_i(t), \dot{y}_i(t)) \in Q_i$, $t \in [0, T]$ and y_i: $[0, T] \to I_i$; $t \mapsto \int_0^t h_i(s(t'))\, dt'$,

2° $\forall y_i \in D_{F_i}$:

$$F_i[y_i] := \int_0^T L_i(y_i(t), \dot{y}_i(t))\, dt.$$

Theorem: *The Euler—Lagrange differential eq. belonging to the Lagrange function L_i is integrable in a closed form and the solution connecting the points P_1^i and P_2^i provides a relative strong maximum of F_i in the cases $i=1$ and 2, and a relative strong minimum of F_i in the case $i=3$.*

We prove this theorem in the following steps: In Section **1** we prove that the solutions $y \in C_2[0, T]$ of the E.—L. differential eq.s belonging to the Lagrange functions of form (11) satisfy the stronger Jacobi's condition if the stronger Legendre's condition is fulfilled. In Section **2** we check that the stronger Legendre's condition holds true for the Lagrange functions specified in c) above, and we see that the corresponding E.—L. differential eq.s are integrable in closed form. Section **3** is devoted to check the necessary smoothness conditions for the Lagrange functions under consideration.

In Section **5** we discuss some further questions such as: a) the explicite time dependence in L_i, b) the extension of the domain of F_i, c) the problem of the endpoint fixing in relation to the original economic model [2] (from the theorem we obtain the optimal investment policy only for fixed initial and final capital [F_i is a function of the endpoint y_T^i], we give there a method to resolve this freedom in the model and to determine the optimal investment rate $s(t)$), d) the linear extension of the one sector economic model to many sectors.

JELENTÉS AZ 1987. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére az alábbi bizottságot kérte fel: Leindler László (elnök), Krisztin Tibor (titkár), Csákány Béla, Csirik János, Csörgő Sándor, Czédli Gábor, Durszt Endre, Ésik Zoltán, Gehér László, Gécseg Ferenc, Győri István, Kérchy László, Hatvani László, Imreh Balázs, Móricz Ferenc, Nagy Péter, Németh József, Pintér Lajos, Pollák György, Stachó László, Szalay István, Szabó László, Szendrei Ágnes, Szendrei János, B. Szendrei Mária, Szőkefalvi-Nagy Béla, Tandori Károly, Terjéki József, Totik Vilmos. A bizottság munkájában Kincses János is részt vett.

A feladatok megoldására 1987. október 30. és november 9. között tíz teljes nap állt a versenyzők rendelkezésére. A tíz feladatra 21 versenyző összesen 84 megoldást nyújtott be. A 3. feladatra nem érkezett jó megoldás, a 8. feladatot 1 versenyző oldotta meg részben. 2-2 jó megoldás érkezett a 4., 6., 7. és 10. feladatra, míg a további feladatok mindegyikére legalább 10 a jó megoldások száma.

A versenybizottság december 4-i ülésén az alábbi határozatot hozta.

I. díjban és 3000 Ft jutalomban részesíti a bizottság Magyar Ákost, az ELTE negyedéves hallgatóját. Magyar Ákos hat feladatra nyújtott be megoldást. Helyesen oldotta meg az 1., 2., 5., 6. és 9. feladatot. A 4. feladatban a kitűzöttnél lényegesen gyengébb állítást igazolt. Kiemelkedő az 1. és 2. feladatra adott megoldása.

II. díjban és 2500 Ft jutalomban részesíti a bizottság Sigray Istvánt, az ELTE ötödéves hallgatóját. Sigray István a 2., 4., 5., 6. és 9. feladatra nyújtott be megoldást. Mindegyik helyes. Megoldásai rövidek, elegánsak. A 4. és 6. feladatra adott megoldásai kiemelkedőek.

III. díjban és 2500 Ft jutalomban részesíti a bizottság Károlyi Gyulát, aki az ELTE matematikus szakán 1987-ben végzett. Károlyi Gyula az 1., 2., 5., 7., 8., 9. és 10. feladatra nyújtott be megoldást. Helyesen oldotta meg az 1., 5. és 10. feladatot. A 2. feladatra adott bizonyításában hiba van, de értékes megállapításokat is tesz. Lényegében helyes a 7. és 9. feladat megoldása: a 7. feladat megoldása nincs befejezve, de az elindulás jó, a 9. feladat megoldásában kis hiba van, de az javítható. A 8. feladat megoldásában csak részeredményt ért el.

Dicséretben és 2000-2000 Ft jutalomban részesíti a bizottság Erdős Lászlót, az ELTE harmadéves hallgatóját, Hetyei Gábort, az ELTE ötödéves hallgatóját, Kovács Sándort, az ELTE harmadéves hallgatóját és Törőcsik Jenőt, az ELTE negyedéves hallgatóját.

Erdős László az 1., 2., 4., 5. és 9. feladatra adott be megoldást. Helyesen oldotta meg az 1., 2., 5. és 9. feladatot. A 4. feladatra adott megoldása nem értékelhető, mert a kitűzöttől eltérő problémát vizsgált. Kiemelkedő a 2. feladatra benyújtott megoldása.

Hetyei Gábor a 2., 3., 5., 6., 8. és 9. feladatra adott be megoldást. Helyesen oldotta meg a 2., 5. és 9. feladatot. A 3. feladatban csak részeredményt ért el, a 6. feladatot egy további feltétel mellett vizsgálja, de abban is van hiba. Az egyik legnehezebbnek bizonyult 8. feladatban ő érte el a legértékesebb eredményt.

Kovács Sándor az 1., 2., 3., 4., 5. és 9. feladatra nyújtott be megoldást. Helyesen oldotta meg az 1., 2., 4. és 9. feladatot. A 3. feladatban csak kis részeredményt ért el. Az 5. feladatot egy igen speciális esetre oldotta meg. Kiemelkedő a 9. feladatra beadott megoldása.

Törőcsik Jenő a 2., 5., 9. és 10. feladatra nyújtott be megoldást. Mindegyik helyes. A 2. feladatra adott megoldása kiemelkedő.

A jutalmakra fordított összegből 2000 Ft Gaál Jenőné örököseinek alapítványából származik. A jutalmazásra 4000 Ft-ot ajánlott fel egy magát megnevezni nem kívánó ismeretlen adakozó.

AZ 1987. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENY FELADATAI

1. Az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmaz elemeit kiszínezzük három színnel úgy, hogy minden színből több mint $N/4$ elem van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $x=y+z$ egyenletnek van olyan megoldása, melyben x, y, z különböző színűek.

(Szekeres György)

2. Egy $\prec$ binér relációt kvázirendezésnek nevezünk, ha reflexív és tranzitív. A $\mathcal{Q}$ kvázirendezett halmaz infimuma a legbővebb $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{Q}$ részhalmaz, amelyben
   (i) minden $B \in \mathcal{Q}$-hoz van nála „kisebb" elem (vagyis olyan $A \in \mathcal{I}$, amelyre $A \prec B$ fennáll),
   (ii) ha két $\mathcal{I}$-beli elem összehasonlítható, akkor ekvivalens (vagyis $A \prec A' \Rightarrow A' \prec A$).

   Legyen X véges ábécé, X^* az X fölötti szavak halmaza, és $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\infty(X^*)$ az X^* végtelen részhalmazainak halmaza. Ha $A, B \in \mathcal{P}$, akkor $A \prec B$ jelentse azt, hogy A minden eleme (összefüggő) részszava B valamelyik elemének. Mutassuk meg, hogy a $(\mathcal{P}, \prec)$ kvázirendezett halmaznak létezik a $\mathcal{I}$ infimuma, és adjuk meg $\mathcal{I}$ elemeit.

(Pollák György)

3. Legyen A olyan véges egyszerű grupoid, amelyben minden valódi részgrupoid egyelemű, az egyelemű részgrupoidok száma legalább három, továbbá A automorfizmuscsoportjának nincs fixpontja. Bizonyítsuk be, hogy az A-t tartalmazó legszűkebb varietásban minden végesen generált szabad algebra izomorf A valamely direkt hatványával.

(Szendrei Ágnes)

4. Tegyük fel, hogy a P véges projektív geometria (véges, komplementumos moduláris háló) részhálója az L véges moduláris hálónak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor P beágyazható egy olyan Q projektív geometriába, amely az L-nek fedésőrző részhálója (azaz, ha Q egyik eleme egy másikat fed Q-ban, akkor fedi azt L-ben is).

(Fried Ervin)

5. Legyenek f és g folytonos, valós függvények, legyen továbbá $g \not\equiv 0$ kompakt tartójú. Igazoljuk, hogy létezik olyan, a g eltoltjai lineáris kombinációiból álló sorozat, amely bármely kompakt halmazon egyenletesen tart f-hez.

(Révész Szilárd György—Totik Vilmos)

6. Igaz-e, hogy ha A és B unitér ekvivalens önadjungált operátorok a $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-térben, és $A \leqq B$, akkor $A^+ \leqq B^+$? (Itt A^+ az A pozitív része.)

(Kérchy László)

7. Legyen $x: [0, \infty) \to R$ olyan differenciálható függvény, hogy x-re és x' deriváltjára teljesül az

$$x'(t) = -2x(t)\sin^2 t + (2 - |\cos t| + \cos t) \int_{t-1}^{t} x(s)\sin^2 s \, ds$$

azonosság az $[1, \infty)$ intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy x korlátos a $[0, \infty)$ intervallumon, sőt $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$. Igaz-e ugyanez az állítás az

$$x'(t) = -2x(t)t+(2-|\cos t|+\cos t) \int_{t-1}^{t} x(s)s\,ds$$

azonosságot kielégítő x függvényre is?

(Hatvani László)

8. Legyen $c>0$, $c\neq 1$ adott valós szám, legyen továbbá $x\in(0, 1)$ esetén

$$f(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1+cx^{2^k}).$$

Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x^3)}{f(x)}$$

nem létezik.

(Totik Vilmos)

9. Igazoljuk, hogy létezik egy c_k konstans úgy, hogy a k-dimenziós tér egységgömbjében adott bármely véges V ponthalmazhoz található olyan összefüggő G gráf, hogy G csúcsainak halmaza megegyezik V-vel, élei egyenes szakaszok, és az élhosszak k-adik hatványainak összege kisebb c_k-nál.

(Totik Vilmos)

10. Legyen F az origóra szimmetrikus olyan valószínűségi eloszlásfüggvény, amelyre $F(x)=1-x^{-1}K(x)$, ha $x\geqq 5$, ahol

$$K(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x\in[5, \infty)\setminus\bigcup_{n=5}^{\infty}(n!, 4n!), \\ \dfrac{x}{n!} & , \text{ ha } x\in[n!, 2n!], \quad n\geqq 5, \\ 3-\dfrac{x}{2n!}, & \text{ ha } x\in[2n!, 4n!], \quad n\geqq 5. \end{cases}$$

Megadandó a természetes számoknak egy $\{n_k\}$ részsorozata úgy, hogy ha $X_1, X_2, \ldots$ teljesen független valószínűségi változók a közös F eloszlásfüggvénnyel, akkor minden x valós számra

$$\lim_{k\to\infty} P\left\{\frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} X_j < \pi x\right\} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x.$$

(Csörgő Sándor)

A FELADATOK MEGOLDÁSAI

1. Feladat. Érkezett 14 megoldás. Helyes Csizmadia György, Elek Gábor, Erdős László, Hraskó András, Katona Gyula, Károlyi Gyula, Kovács Sándor, Magyar Ákos, Makay Géza, Mócsy Miklós, Szabó Csaba és Szabó Zoltán megoldása. Részeredményt ért el Tóth Géza.

Tegyük fel, hogy ki lehet színezni az $1, \ldots, N$ számokat úgy, hogy minden színből több mint $N/4$ van és nincs különböző színű x, y, z, amelyre $x+y=z$.

Legyen a három szín piros, kék és zöld. Feltehetjük, hogy az 1 színe piros. Ekkor nem lehet kék és zöld szám különbsége 1, indirekt feltevésünk miatt. Nevezzünk egy nemüres $S \subseteq \{1, \ldots, N\}$ halmazt intervallumnak, ha az egy intervallumba eső egész számokból áll, azaz van $1 \leqq a \leqq b \leqq N$ úgy, hogy $S = \{s \in N: a \leqq s \leqq b\}$. Ha elhagyjuk a piros színű számokat $1, 2, \ldots, N$ közül, akkor a megmaradt számok intervallumokra esnek szét. Továbbá minden intervallum egyszínű. Ugyanis, ha x, y $(x<y)$ ugyanabba az intervallumba esnének, akkor $x, x+1, \ldots, y$ mindegyike kék vagy zöld lenne. Ha x és y különböző színűek lennének, akkor $x, x+1, \ldots, y$ között lenne szomszédos kék és zöld, ami ellentmondás.

Tegyük fel, hogy van egy legalább két számból álló kék és egy legalább két számból álló zöld intervallum. Legyen A, illetve B a leghosszabb kék, illetve zöld intervallum. Ha $a \in A$ és $b \in B$, akkor $|a-b| (= a-b$ vagy $b-a)$ nem lehet piros színű. Következésképpen a $C = \{|a-b|: a \in A, b \in B\}$ halmazban nincs piros szám. C egy $|A|+|B|-1$ hosszúságú intervallum (mert ha $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ és $a_2 < b_1$, akkor $b_1 - a_2, \ldots, b_2 - a_2, \ldots, b_2 - a_1$ az $1, \ldots, N$ közötti $|A|+|B|-1$ darab egymás utáni szám; $b_2 < a_1$ esetén hasonlóan) és ezért egyszínű. Mivel $|A| \geqq 2$ és $|B| \geqq 2$, ezért $|A| < |A|+|B|-1$, $|B| < |A|+|B|-1$, ami ellentmond A és B maximális választásának.

Másrészt a kék és zöld színűek közül valamelyikből lennie kell két egymás utáninak, mert különben legalább annyi piros van, mint kék és zöld összesen, azaz legalább $N/2$, ami lehetetlen, mert minden színből $N/4$-nél több van.

Tegyük fel, hogy van két egymás utáni kék szám, azaz a leghosszabb kék intervallumra: $|B| \geqq 2$. Ha $1 \leqq s < N$ zöld színű, akkor egyrészt $s \geqq 2$, másrészt $s-1$ és $s+1$ pirosak. Tegyük fel, hogy bármely két zöld színű szám távolsága legalább 3. Ekkor zöld s esetén az $\{s-1, s, s+1\}$ blokkok diszjunktak és mindegyikben van két piros. Ha N nem zöld, akkor így legalább kétszer annyi piros van, mint zöld, ami nem lehet. Ha N zöld, akkor csak annyit tudunk, hogy $P \geqq 2Z-1$ (P és Z a pirosak, illetve zöldek száma). Ha a 2 nem zöld, akkor a piros színű 1 nincs benne a blokkokban, így $P \geqq 2Z$, ami lehetetlen. Ha a 2 zöld színű, akkor vegyük a B kék intervallumot, ahol $B = [b_1, b_2]$, $|B| \geqq 2$, $b_2 < N$. Ekkor $b_2 - 1$ kék, $b_2 + 1$ piros, a 2 zöld, vagyis $x+y=z$-nek van különböző színű megoldása, ami ellentmondás.

Beláttuk, hogy van zöld s úgy, hogy $s+2$ is zöld. Vagy $s+2 < b_1$ vagy $b_2 < s$, mivel $|B| \geqq 2$ és $B \cap \{s, s+2\} = \emptyset$. Feltehetjük, hogy $s+2 < b_1$. Tekintsük a $C = \{b-s: b \in B\} \cup \{b-s-2: b \in B\}$ halmazt. Mivel $b_1 < b_2$, C egy intervallum, amire $|C| = |B|+2$. C-ben nincs piros színű szám, ezért C egyszínű. C nem lehet zöld $|C| > 2$ miatt, de kék sem lehet B maximális választása miatt.

Így indirekt feltevésünkből ellentmondásra jutottunk.

(Magyar Ákos)

Megjegyzés. Erdős László, Magyar Ákos, Mócsy Miklós és Szabó Zoltán megjegyzi, hogy a feladat állítása éles. $N = 4k$ esetén van olyan színezés, hogy mindegyik színből legalább $N/4$ elem van és $x+y=z$ nem oldható meg különböző színű x, y, z-re.

2. Feladat. Érkezett 15 megoldás. Helyes Elek Gábor, Erdős László, Hetyei Gábor, Kós Géza, Kovács Sándor, Magyar Ákos, Radnóti László, Sigray István, Szabó Endre és Törőcsik Jenő megoldása. Részeredményt ért el Károlyi Gyula, Mócsy Miklós és Szabó Zoltán.

Nevezzük $A \in \mathcal{P}$-t minimálisnak, ha minden $w \in A$-ra A-ban csak véges számú különböző részszó nem nagyobb mint w. (A részszavának nevezzük elemei részszavait. $a \geqq b$, ha b az a részszava. A részszó végig összefüggő részszót jelöl.)

1. Lemma. *Ha A minimális, akkor bármely $B\in\mathscr{P}$ esetén $B\prec A$-ból $A\prec B$ következik.*

Bizonyítás. Legyen $w\in A$ és ha egy A-beli elem részszava hosszabb k-nál, akkor már legyen w-nél nagyobb. Legyen $b\in B$ k-nál hosszabb. $B\prec A$ miatt ez A részszava, így $w\leqq b$, tehát $A\prec B$.

2. Lemma. *Ha A nem minimális, akkor van $B\in\mathscr{P}$, hogy $A\succ B$ és $B\not\succ A$.*

Bizonyítás. Legyen $w\in A$ olyan részszó, hogy $H=\{h$: van $a\in A$, $h\leqq a$, $w\not\leqq h\}$ végtelen. Ekkor $H\in\mathscr{P}$, $H\prec A$, de $A\not\prec H$, w miatt.

3. Lemma. *Bármely $A\in\mathscr{P}$-re van $B\in\mathscr{P}$ minimális úgy, hogy $A\succ B$.*

Bizonyítás. A most következő algoritmus megad egy ilyen $B\in\mathscr{P}$-t.

1. lépés: Legyenek X elemei $a_1, \ldots, a_n$. Tegyük fel, hogy létezik A részszavai között végtelen sok a_1-et nem tartalmazó különböző. Legyen ezek halmaza H_1. $H_1\in\mathscr{P}$. $A\succ H_1$ és a_1 nem szerepel H_1-ben. Ha H_1-ben van végtelen sok különböző részszó, ami nem tartalmazza a_2-t, akkor $A\succ H_1\succ H_2$-t nyerjük, $H_2\in\mathscr{P}$, és H_2-ben sem a_1 sem a_2 nem szerepel. Az eljárást folytatjuk így tovább. Ha H_{n-1}-et is meg kellene konstruálni, akkor abban csak a_n szerepelne, így H_{n-1} eleve minimális. Feltehető tehát H_{i-1} létezése, hogy $H_{i-1}\in\mathscr{P}$ és H_{i-1}-nek csak véges sok különböző részszava nem tartalmazza a_i-t. Legyen $a_i=b_1$, $A\succ H_{i-1}=B_1$, és következzék a 2. lépés.

k-adik lépés: A $b_1\prec b_2\prec\ldots\prec b_{k-1}$ szavakat már megadtuk. Megadtunk egy $A\succ B_1\succ B_2\succ\ldots\succ B_{k-1}$ rendszert is $\mathscr{P}$ elemeiből úgy, hogy b_i a B_i-nek csak véges sok különböző részszavánál nem kisebb. Tekintsük a $b_{k-1}a_1$ szót. Ha ez B_{k-1} végtelen sok különböző részszavánál nem kisebb, akkor ezek H_1^{k-1} halmazában $b_{k-1}a_1$ nem részszó. Ugyanezt megismételve a $b_{k-1}a_2$ szóra, nyerjük H_2^{k-1}-et, stb. Ha eljutunk H_{n-1}^{k-1}-hez, akkor ehhez van m természetes szám, hogy a $2m$ hosszúságú részszavakban már az első m jelből álló szó is tartalmazza b_{k-1}-et összefüggő részszóként, de utána csak a_n jöhet. Tehát választható valamely $H_i^{k-1}\in\mathscr{P}$ B_k-nak, illetve egy $b_{k-1}a_i$ szó b_k-nak.

A fenti algoritmus ad egy $b_1\prec b_2\prec\ldots$, $B_1\succ B_2\succ\ldots$ rendszert. Legyen $L=\{b_1, b_2, \ldots\}$. Ekkor $L\prec A$ és L minimális. Valóban b_i-re: $b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots\in B_i$, így ezeknek csak véges sok különböző részszava nem nagyobb b_i-nél. A lemmát ezzel bebizonyítottuk.

Azt állítjuk, hogy a minimális elemek alkotják az infimumot. A 3. Lemma szerint a minimálisok halmaza teljesíti (i)-et, az 1. Lemma szerint (ii)-t is. A 2. Lemma mutatja, hogy a minimálisok halmaza nem bővíthető, hiszen a nem-minimális A-hoz létezik B, hogy $B\prec A$, $B\not\succ A$, létezik C minimális, hogy $C\prec B$, és így $C\prec A$, $C\not\succ A$.

(Elek Gábor)

Megjegyzések. 1. Az infimum létezését a Zorn-lemma alkalmazásával is lehetett igazolni.

2. Jelölje X^ω az X fölötti végtelen szavak halmazát, és ha $u\in X^\omega$, akkor jelölje $W(u)$ az u véges részszavainak halmazát. Könnyű látni, hogy minden $A\in\mathscr{P}$-hez van $u\in X^\omega$, hogy $W(u)\prec A$. Ezért, ha $\inf\mathscr{P}$ létezik, akkor minden eleme ekvi-

valens egy $W(u)$-val. Legyen $u, v \in X^\omega$-ra $u \prec v$, ha $W(u) \subseteq W(v)$. Elegendő $\inf X^\omega$-t megadni. Ez azért kényelmes, mert $W(u)$ zárt a részszóképzésre. A végtelen szavakkal való kapcsolatot észrevette Károlyi Gyula, Magyar Ákos és Sigray István.

3. Feladat. Érkezett 3 megoldás. Egyik sem helyes.

Megmutatjuk, hogy

(*) A véges direkt hatványainak minden részalgebrája izomorf A valamely direkt hatványával.

Tetszőleges k természetes számra legyen $\mathbf{k} = \{1, \ldots, k\}$, és ha $I \subseteq \mathbf{k}$, jelölje pr_I az $A^k \to A^I$, $(a_1, \ldots, a_k) \to (a_i)_{i \in I}$ vetítést. Nyilvánvaló, hogy ha B részgrupoidja A^k-nak, akkor $\mathrm{pr}_I B$ részgrupoidja A^I-nek. Jelölje U az A azon u elemeinek halmazát, amelyekre $\{u\}$ részgrupoidja A-nak. Használni fogjuk még a következő jelölést: $B \subseteq A^k$, $1 \leqq i < k$ és $a_{i+1}, \ldots, a_k \in A$ esetén

$$B(x_1, \ldots, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) = \{(x_1, \ldots, x_i) \in A^i : (x_1, \ldots, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in B\}.$$

Világos, hogy ha B részgrupoidja A^k-nak és $a_{i+1}, \ldots, a_k \in U$, akkor

$$B(x_1, \ldots, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$

részgrupoidja A^i-nek. Az A grupoid műveletét $\cdot$-tal fogjuk jelölni.

Első észrevételünk az, hogy $\cdot$ szürjektív. Konstans nem lehet, mert akkor A-nak egyetlen egyelemű részgrupoidja volna. Másrészt a művelet eredményeinek halmaza részgrupoid, így csak maga A lehet.

Ezután két segédállítást bizonyítunk be.

1. Állítás. *Tetszőleges $n \geqq 1$ egész számra, ha B az A^n olyan részgrupoidja, melyre $U^n \subseteq B$, akkor $B = A^n$.*

Tegyük fel, hogy valamely n-re A^n-nek van olyan B részgrupoidja, melyre $U^n \subseteq B \subset A^n$, s válasszuk n-et minimálisnak. Nyilván $n \geqq 2$. Ekkor tetszőleges $u \in U$-ra $B(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)$ olyan részgrupoidja A^{n-1}-nek, amely tartalmazza U^{n-1}-et. Így n minimalitása miatt $B(x_1, \ldots, x_{n-1}, u) = A^{n-1}$. Tehát U része az

$$S = \{a \in A : A^{n-1} \times \{a\} \subseteq B\}$$

halmaznak, amiből $|S| \geqq 3$. Másrészt $B \subset A^n$ miatt $S \subset A$. Végül a $\cdot$ szürjektivitását kihasználva könnyen ellenőrizhető, hogy S részgrupoidja A-nak. Ez az ellentmondás bizonyítja az 1. Állítást.

2. Állítás. *A^2-nek csak az alábbi részgrupoidjai vannak: (a) egyeleműek, (b) $\{u\} \times A$, illetve $A \times \{u\}$ $(u \in U)$, (c) A automorfizmusai, (d) A^2.*

Tegyük fel, hogy C a fentiektől különböző részgrupoid A^2-ben. Nyilván $\mathrm{pr}_i C = A$ $(i = 1, 2)$, továbbá minden $u \in U$ elemre $C(x, u)$ — s hasonlóan $C(u, x)$ — az A, $\{v\}$ $(v \in U)$ halmazok valamelyike. Mivel az 1. Állítás szerint $U^2 \nsubseteq C$, az előzőek figyelembevételéve) csak a következő két eset lehetséges:

(1) $C = (\{a\} \times A) \cup (A \times \{b\}) \cup C'$ valamely $C' \subseteq (A \setminus U)^2$ halmazra és $a, b \in U$ elemekre,

vagy

(2) $C = \{(u, u\sigma)\colon u \in U\} \cup C'$ valamely $C' \subseteq (A \setminus U)^2$ halmazra és

U valamely σ permutációjára.

Az (1) esetben legyen $T = \{a \in A\colon (a, a) \in C\}$. Nyilván T részgrupoidja A-nak. Mivel $T \cap U = \{a, b\}$, T valódi részgrupoid, s így $|T| = 1$ és $a = b$. Feltevésünk szerint van A-nak olyan π automorfizmusa, amelyre $a \neq a\pi$. Tekintsük a következő halmazt:

$$\tilde{C} = \{x \in A\colon \text{van olyan } y \in A, \text{ amelyre } (x, y), (x\pi^{-1}, y\pi^{-1}) \in C\}.$$

Könnyen belátható, hogy $\tilde{C}$ részgrupoidja A-nak és $\tilde{C} \cap U = \{a, a\pi\}$. Így $2 \leqq |\tilde{C}| < |A|$, ami lehetetlen.

A (2) esetben legyen

$$D = \{(x, y) \in A^2\colon \text{van olyan } z \in A, \text{ amelyre } (x, z), (y, z) \in C\},$$

és jelölje Δ az A^2 diagonálisát, azaz $\Delta = \{(a, a)\colon a \in A\}$. Egyszerűen igazolható, hogy D részgrupoidja A^2-nek, és $D \cap U^2 \subseteq \Delta$. Mivel $\mathrm{pr}_1 C = \mathrm{pr}_2 C = A$ és C maga nem permutáció, $\Delta \subset D$. Így D tranzitív lezártja az A nemtriviális kongruenciája, ami ellentmondás.

Rátérünk $(*)$ bizonyítására. n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy ha B részgrupoidja A^n-nek, akkor B izomorf A valamely direkt hatványával. Az $n = 1$ eset nyilvánvaló, ezért legyen $n \geqq 2$. Ha $B = A^n$, nincs mit bizonyítani, ha pedig valamely $i \in \mathbf{n}$ indexre $|\mathrm{pr}_i B| = 1$, akkor $B \cong \mathrm{pr}_{\mathbf{n}-\{i\}} B$, és az indukciós feltevés miatt készen vagyunk. A továbbiakban tegyük föl, hogy $B \neq A^n$ és $\mathrm{pr}_i B = A$ minden $i \in \mathbf{n}$-re. Válasszunk egy minimális olyan $I \subseteq \mathbf{n}$ indexhalmazt, amelyre $\mathrm{pr}_I B \neq A^I$; legyen $k = |I|$, $I = \{i_1 < \ldots < i_k\}$ és $C = \mathrm{pr}_I B$. Nyilván $k > 1$ és

(3) $$\mathrm{pr}_{\mathbf{k}-\{j\}} C = \mathrm{pr}_{I-\{i_j\}} B = A^{k-1} \quad \text{minden } j \in \mathbf{k}\text{-ra.}$$

Vizsgáljuk A^2-nek a $C(u_1, \ldots, u_{k-2}, x, y)$ $(u_1, \ldots, u_{k-2} \in U)$ alakú részgrupoidjait. (3) miatt $C(u_1, \ldots, u_{k-2}, x, y)$ mindkét vetülete A, ezért a 2. Állítás szerint vagy egyenlő A^2-tel, vagy A automorfizmusa. Mivel az 1. Állítás, illetve a C-re tett feltevésünk miatt $U^k \not\subseteq C$, van olyan $(u_1', \ldots, u_{k-2}') \in U^{k-2}$, amelyre $C(u_1', \ldots, u_{k-2}', x, y)$ automorfizmus. Tegyük fel, hogy olyan $(u_1'', \ldots, u_{k-2}'') \in U^{k-2}$ is van, amelyre $C(u_1'', \ldots, u_{k-2}'', x, y) = A^2$. Akkor a $C(u_1'', \ldots, u_i'', u_{i+1}', \ldots, u_{k-2}', x, y)$ $(i = 0, \ldots, k-2)$ sorozatban van két egymás utáni tag úgy, hogy az első A automorfizmusa, a második pedig A^2. Ezért feltehetjük, hogy $u_2' = u_2'', \ldots, u_{k-2}' = u_{k-2}''$. Tekintsük A^2-nek a $C' = C(x, u_2', \ldots, u_{k-2}', y, u_1')$ részgrupoidját. Nyilván $C'(u_1', y) = 1$, $C'(u_1'', y) = A$. Ez pedig a 2. Állítás szerint nem fordulhat elő. Tehát

(4) $C(u_1, \ldots, u_{k-2}, x, y)$ az A automorfizmusa minden $u_1, \ldots, u_{k-2} \in U$-ra.

Ezek után legyen

$$D = \{(x, y) \in A^2\colon \text{van olyan } z_1, \ldots, z_{k-1} \in A, \text{ hogy}$$

$$(z_1, \ldots, z_{k-1}, x), (z_1, \ldots, z_{k-1}, y) \in C\}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy D részgrupoidja A^2-nek, továbbá $\Delta \subseteq D$ (az utóbbihoz felhasználjuk (3) azon következményét, hogy $\mathrm{pr}_k C = A$). Így a 2. Állítás szerint $D = \Delta$ vagy $D = A^2$.

Tegyük fel, hogy $D=A^2$, és rögzítsünk tetszőleges $u, v\in U$, $u\neq v$, elemeket. Mivel $(u, v)\in D$, vannak olyan $a_1, \ldots, a_{k-1}\in A$ elemek, hogy $(a_1, \ldots, a_{k-1}, u)$, $(a_1, \ldots, a_{k-1}, v)\in C$. Ezért A^{k-1}-nek a $C^*=C(x_1, \ldots, x_{k-1}, u)\cap C(x_1, \ldots, x_{k-1}, v)$ részgrupoidjára $(a_1, \ldots, a_{k-1})\in C^*$. Másrészt (4) miatt

$$C^*\cap U^{k-1}=\emptyset, \tag{5}$$

amiből az is következik, hogy $a_1, \ldots, a_{k-1}$ nem mind eleme U-nak. Legyen pl. $a_1\in A\setminus U$. Mivel a_1 benne van A-nak a $\mathrm{pr}_1 C^*$ részgrupoidjában, $\mathrm{pr}_1 C^*=A$. Így minden $u_1\in U$-ra $C^*(u_1, x_1, \ldots, x_{k-2})\neq\emptyset$. Legyen $l\leqq k-2$ a legnagyobb olyan index, amelyhez vannak olyan $u_1, \ldots, u_l\in U$ elemek, hogy az

$$E=C^*(u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_{k-l-1})$$

halmaz nemüres. Az $l<k-2$ esetben l maximalitása, $l=k-2$ esetén pedig (5) mutatja, hogy $(\mathrm{pr}_1 E)\cap U=\emptyset$. Másrészt viszont $\mathrm{pr}_1 E\neq\emptyset$, hiszen $E\neq\emptyset$. Így $\mathrm{pr}_1 E$ olyan valódi részgrupoidja A-nak, amely különbözik az $\{u\}$ $(u\in U)$ egyelemű részgrupoidoktól. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $D=\Delta$.

A $D=\Delta$ egyenlőség azt mutatja, hogy a $C\to\mathrm{pr}_{k-\{k\}} C(=A^{k-1})$ vetítés injektív, tehát izomorfizmus. Következésképpen ugyanez igaz a $B\to\mathrm{pr}_{n-\{i_k\}} B$ vetítésre is. Az indukciós feltevés felhasználásával innen már triviálisan adódik a bizonyítandó állítás B-re. Ezzel a $(*)$ állítást bebizonyítottuk.

Mivel bármely véges algebra által generált varietásban a végesen generált szabad algebrák mindegyike izomorf az adott algebra valamely véges direkt hatványainak részalgebrájával, $(*)$-ból következik a feladat állítása.

(A feladat kitűzőjének megoldása)

4. Feladat. Érkezett 8 megoldás. Helyes Kovács Sándor és Sigray István megoldása.

Legyen 0 a P legkisebb eleme. Legyen $L'=\{a\in L: 0<a\}$. Ekkor L' az L-nek egy fedésőrző (moduláris) részhálója. Világos, hogy elég a feladatot L helyett L'-re megoldani. Legyen Q az L'-nek az a részhálója, amelyet azok az L'-beli atomok generálnak, amelyek 1_P-nél kisebbek (1_P a P legnagyobb eleme). Legyen δ a dimenziófüggvény Q-n. Legyen $q\in Q$. Ekkor van olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n\in Q$ L'-beli atomok véges sorozata, amelyre $1_Q=q\vee\alpha_1\vee\ldots\vee\alpha_n$, és n minimális. Ekkor $\delta(\alpha_1\vee\ldots\vee\alpha_n)=n$ (Q moduláris) és $\delta(1_Q)=\delta(q)+n$. Felhasználva a $\delta(x\vee y)+\delta(x\wedge y)=\delta(x)+\delta(y)$ összefüggést, kapjuk, hogy $\delta(q\wedge(\alpha_1\vee\ldots\vee\alpha_n))=0$, vagyis $\alpha_1\vee\ldots\vee\alpha_n$ a q komplementuma, tehát Q projektív geometria. Ha $\beta\in Q$ atom Q-ban, akkor létezik $\alpha\in L'$ atom, amelyre $\alpha\leqq\beta(\leqq 1_P)$. Így $\alpha\in Q$, és mivel β atom, $\beta=\alpha$, azaz β az L'-ben is atom. Ha $q_1, q_2\in Q$ és $q_1\prec_Q q_2$. akkor létezik $\beta\in Q$ atom, amelyre $q_2=q_1\vee\beta$ (felhasználva, hogy Q projektív geometria), de L' modularitása miatt ekkor $q_1\prec_{L'} q_2$ is igaz. Így Q az L'-nek fedésőrző részhálója.

Most pedig P-t beágyazzuk Q-ba. Legyen $p\in P$-re $f(p)=\vee\{\alpha\in L' \text{ atom}: \alpha<p\}$. Ekkor f injektív. Ha ugyanis $p_1, p_2\in P$ és $p_1\not\leqq p_2$, akkor van $r\in P$ úgy, hogy $r\leqq p_1$ és $r\wedge p_2=0$. Ekkor van $\alpha\in L'$ atom, amelyre $\alpha<r$, és így $\alpha\leqq f(p_1)$ és $\alpha\wedge f(p_2)\leqq$ $\leqq r\wedge p_2=0$, tehát $f(p_1)\neq f(p_2)$. Belátjuk, hogy $f(p_1\vee p_2)=f(p_1)\vee f(p_2)$. f definíciójából közvetlenül következik, hogy $f(p_1)\vee f(p_2)\leqq f(p_1\vee p_2)$. Azt kell belátni, hogy az egyenlőtlenség a másik irányban is fennáll. Legyen $p_2'\leqq p_2$ olyan P-beli atom, melyre $p_1\vee p_2'=p_1\vee p_2$ és $p_1\wedge p_2'=0$. Nyilván $f(p_2')\leqq f(p_2)$ és $f(p_1\vee p_2')=f(p_1\vee p_2)$, ez azt jelenti, hogy a másik irányú egyenlőtlenség bizonyításakor feltehető, hogy $p_1\vee p_2=0$. Legyen $\alpha\leqq p_1\vee p_2$ atom Q-ban. Azt kell belátnunk, hogy $\alpha\leqq f(p_1)\vee$

$\vee f(p_2)$. Ha $\alpha \leqq p_1$ vagy $\alpha \leqq p_2$, akkor ez nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $\alpha \wedge p_1 = \alpha \wedge p_2 = 0$. Legyen $\alpha_1 = p_1 \wedge (\alpha \vee p_2)$ és $\alpha_2 = p_2 \wedge (\alpha \vee p_1)$. Felhasználva L' modularitását, kapjuk, hogy α_1 és α_2 atom és $\alpha \vee p_2 = \alpha_1 \vee p_2$ és $\alpha \vee p_1 = \alpha_2 \vee p_1$. A $\delta(x) + \delta(y) = \delta(x \vee y) + \delta(x \wedge y)$-t felhasználva ($\delta$ itt az L' dimenziófüggvénye) az $x = p_1 \vee \alpha$, $y = p_2 \vee \alpha$ választással, azt kapjuk, hogy $(p_1 \vee \alpha) \wedge (p_2 \vee \alpha)$ az L'-ben kétdimenziós. Mivel $\alpha_1 \neq \alpha_2$ és $\alpha_1, \alpha_2 \leqq (p_1 \vee \alpha) \wedge (p_2 \vee \alpha)$, így $\alpha_1 \vee \alpha_2 = (p_1 \vee \alpha) \wedge (p_2 \vee \alpha)$. De emiatt $\alpha \leqq \alpha_1 \vee \alpha_2$, tehát $\alpha \leqq f(p_1) \vee f(p_2)$. Már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy $f(p_1) \wedge f(p_2) = f(p_1 \wedge p_2)$. Az $f(p_1 \wedge p_2) \leqq f(p_1) \wedge f(p_2)$ triviális f definíciójából. Mivel Q projektív geometria, elég azt belátni, hogy ha $\beta \leqq f(p_1) \wedge f(p_2)$ atom, akkor $\beta \leqq f(p_1 \wedge p_2)$. Ha $\beta \leqq f(p_1)$ és $\beta \leqq f(p_2)$ atom, akkor $\beta \leqq p_1$, $\beta \leqq p_2$, és így $\beta \leqq p_1 \wedge p_2$, ezért $\beta \leqq f(p_1 \wedge p_2)$, s pontosan ezt akartuk belátni.

(Sigray István)

Megjegyzés. Elek Gábor és Magyar Ákos abban a speciális esetben oldja meg a feladatot, amikor P disztributív. Montágh Balázs megadja az alkalmas Q-t és beágyazást, de a bizonyítást nem fejezi be.

5. Feladat. Érkezett 14 megoldás. Helyes Elek Gábor, Erdős László, Hetyei Gábor, Hraskó András, Károlyi Gyula, Kós Géza, Magyar Ákos, Sigray István, Szabó Endre, Szabó Zoltán és Törőcsik Jenő megoldása.

Ha g_n a g eltoltjainak olyan lineáris kombinációja, hogy $|g_n(x) - f(x)| < 1/n$ a $[-n, n]$ intervallumon, akkor a $\{g_n\}$ sorozat bármely kompakt halmazon egyenletesen tart f-hez. Elegendő tehát belátni, hogy minden $I(\subset R)$ véges intervallumon f tetszőlegesen megközelíthető g eltoltjainak lineáris kombinációival.

Tegyük fel indirekt módon, hogy g eltoltjainak lineáris burka nem sűrű $C[-n, n]$-ben. Ekkor a Hahn—Banach-tétel szerint van olyan $C^*[-n, n]$-beli nem-zérus L elem, amely eltűnik g minden eltoltján. Riesz tétele szerint $C^*[-n, n]$ azonosítható a $[-n, n]$-re támaszkodó előjeles mértékek szerinti integrálokkal. Legyen a fenti elem $d\mu$. Legyen $h(x) = g(-x)$. Ekkor

$$(h * d\mu)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-x)\, d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)\, d\mu(x) = \int_{-n}^{n} g(x-t)\, d\mu(x) = 0.$$

Fourier transzformáltat véve (lehet, mert h és $d\mu$ kompakt tartójú) $(\mathcal{F}h) \cdot (\mathcal{F}(d\mu)) \equiv 0$ adódik. De $\mathcal{F}h$ és $\mathcal{F}(d\mu)$ analitikusnak, ezért egyikük azonosan 0, ami ellentmondás, mert sem h, sem $d\mu$ nem azonosan nulla.

(*Elek Gábor* megoldása alapján)

Megjegyzések. 1. Kovács Sándor csak egy speciális g-re oldotta meg a feladatot. Mócsy Miklós feltételezte, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx \neq 0$.

2. A megoldások nagy része először tetszőleges polinomot közelít g eltoltjainak lineáris kombinációival. Ennek során Weierstrass approximációs tételét, függvények konvolúcióját használják. Ez elegendő is, Weierstrass tételét alkalmazva. Ez az út a fentinél lényegesen hosszadalmasabb és technikailag bonyolultabb.

6. Feladat. Érkezett 5 megoldás. Helyes Magyar Ákos és Sigray István megoldása.

Először megmutatjuk, hogy van olyan $\hat{A}$, $\hat{B}$ operátor $\mathbf{C}^2$-ben λ_1, λ_2, illetve λ_3, λ_4 sajátértékkel, amelyek önadjungáltak és $\hat{A} \leqq \hat{B}$, de $\hat{A}^+ \not\leqq \hat{B}^+$. Legyen például

$\hat{A}$ mátrixa $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\hat{B}$ mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ekkor $(x, y) \in \mathbf{C}^2$-re

$$\langle \hat{B}(x, y), (x, y)\rangle - \langle \hat{A}(x, y), (x, y)\rangle = |x|^2 + x\bar{y} + \bar{x}y + |y|^2 = |x+y|^2 \geqq 0,$$

tehát $\hat{A} \leqq \hat{B}$. A mátrixos felírásból triviális, hogy $\hat{A}$ és $\hat{B}$ önadjungált. $\hat{B}$ pozitív szemidefinit, $\hat{A}$ indefinit. Ezért $\hat{B}^+ = \hat{B}$ és $\hat{A}^+$ egy olyan pozitív szemidefinit, amelyre $\hat{A}^+(0, 1) \neq (0, 0)$, mert a $(0, 1)$ nem sajátvektora $\hat{A}$-nak. Ezért $\langle \hat{A}^+(0, 1), (0, 1)\rangle > 0$, míg $\langle \hat{B}^+(0, 1), (0, 1)\rangle = 0$, és így $\hat{A}^+ \not\leqq \hat{B}^+$.

Legyen most $\mathscr{H} = l_2$ (komplex). Az egyszerűség kedvéért $\mathscr{H}$ elemeit az l_2-ben konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ alakban írjuk, ahol $e_n = (0, \ldots, 0, \overset{n.}{1}, 0, \ldots)$. Legyen

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \hat{A}(a_1, a_2) + \sum_{n=3}^{\infty} \lambda_n a_n e_n,$$

ahol $\lambda_n = \lambda_s$, ha $n = 4k+s$, $1 \leqq s \leqq 4$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ és λ_4 fent van megadva. Itt azonosítottuk e_1-et $(1, 0)$-val, e_2-t $(0, 1)$-gyel. Legyen továbbá

$$B\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \hat{B}(a_1, a_2) + \sum_{n=3}^{\infty} \lambda_n a_n e_n.$$

A és B két önadjungált operátor összege, tehát önadjungáltak. Ekkor $B - A = \hat{B} - \hat{A}$, ezért

$$\left\langle (B-A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \right\rangle = \langle (\hat{B} - \hat{A})(a_1, a_2), (a_1, a_2)\rangle \geqq 0,$$

és így $A \leqq B$. Hasonlóan $B^+ - A^+ = \hat{B}^+ - \hat{A}^+$, s ezért $A^+ \not\leqq B^+$.

Most bebizonyítjuk, hogy A és B unitér ekvivalensek. Legyen

$$U_1\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \hat{U}_1(a_1, a_2) + \sum_{n=3}^{\infty} a_n e_n,$$

ahol $\hat{U}_1$ az az unitér koordinátatranszformáció, amely $\hat{B}$ kvadratikus alakját négyzetes alakra hozza, azaz $(\hat{U}_1 \hat{B} \hat{U}_1^{-1})(a, b) = (\lambda_3 a, \lambda_4 b)$. U_1 nyilván unitér és $(U_1 B U_1^{-1})\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \lambda_3 a_1 e_1 + \lambda_4 a_2 e_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \lambda_n a_n e_n$. Legyen

$$U_2\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} e_n,$$

ahol f N-nek a következő permutációja: $f(n) = n-4$, ha $n = 4k+3$ vagy $n = 4k+4$ alakú és $k \geqq 1$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$, és $f(n) = n+4$, ha $n = 4k+1$ vagy $n = 4k+2$, $k \geqq 0$. Ekkor

$$\left\langle U_2\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right), \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} \bar{b}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_{f^{-1}(n)} =$$

$$= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, U_2^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n\right) \right\rangle,$$

azaz U_2 is unitér. Ekkor $(U_2U_1BU_1^{-1}U_2^{-1})(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n)=\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n e_n$. Legyen végül

$$U_3(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n) = \hat{U}_3(a_1, a_2)+\sum_{n=3}^{\infty} a_n e_n,$$

ahol $(\hat{U}_3^{-1}\hat{A}\hat{U}_3)(a, b)=(\lambda_1 a, \lambda_2 b)$ és $\hat{U}_3$ unitér. E harmadik unitér transzformációval

$$(U_3U_2U_1BU_1^{-1}U_2^{-1}U_3^{-1})(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n) = A(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n),$$

tehát A és B unitér ekvivalensek.

Tehát az állítás nem igaz.

(Sigray István)

7. Feladat. Érkezett 2 megoldás. Lényegében helyes Dang Vu Giang és Károlyi Gyula megoldása.

Tekintsük az

$$x'(t) = -2a(t)x(t)+(2-|\cos t|+\cos t)\int_{t-1}^{t} a(s)x(s)\,ds$$

egyenletet, ahol $a(t)\geqq 0$ folytonos függvény. Az ezt kielégítő $x(t)$ esetén becsüljük a $D^+|x(t)|$ deriváltat:

$$D^+|x(t)| \leqq -2a(t)|x(t)|+(2-|\cos t|+\cos t)\int_{t-1}^{t} a(s)|x(s)|\,ds =$$

$$= -2a(t)|x(t)|+2\int_{t-1}^{t} a(s)|x(s)|\,ds-(|\cos t|-\cos t)\int_{t-1}^{t} a(s)|x(s)|\,ds =$$

$$= -2\Big(\int_{-1}^{0} a(t)|x(t)|\,ds-\int_{-1}^{0} a(t+s)|x(t+s)|\,ds\Big)-$$

$$-(|\cos t|-\cos t)\int_{t-1}^{t} a(s)|x(s)|\,ds = -2\frac{d}{dt}\int_{-1}^{0}\int_{t+s}^{t} a(u)|x(u)|\,du\,ds-$$

$$-(|\cos t|-\cos t)\int_{t-1}^{t} a(s)|x(s)|\,ds.$$

Így

$$(1)\quad D^+\Big(|x(t)|+2\int_{-1}^{0}\int_{t+s}^{t} a(u)|x(u)|\,du\,ds\Big) \leqq -(|\cos t|-\cos t)\int_{t-1}^{t} a(s)|x(s)|\,ds.$$

Mivel az (1) egyenlőtlenség jobb oldala nem pozitív, innen kapjuk, hogy $|x(t)|+2\int_{-1}^{0}\int_{t+s}^{t} a(u)|x(u)|\,du\,ds$ monoton csökkenő, továbbá $|x(t)|$ korlátos. Legyen $k=0, 1, 2, \ldots$ esetén $H_k=[(2k+1)\pi-1, (2k+1)\pi+1]$. Megmutatjuk, hogy

$$(2)\qquad \max_{t\in H_k}\int_{t-1}^{t} a(s)|x(s)|\,ds \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Ha (2) nem teljesül, akkor van $\alpha>0$ és egy $\{t_n\}$ sorozat úgy, hogy $t_n \in \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k$, $t_n \to \infty$ és

$$\int_{t_n-1}^{t_n} a(s)|x(s)|\,ds \geqq \alpha.$$

Ekkor a

$$\int_{t_n-1}^{t_n-1/2} a(s)|x(s)|\,ds \geqq \alpha/2, \quad \int_{t_n-1/2}^{t_n} a(s)|x(s)|\,ds \geqq \alpha/2$$

egyenlőtlenségek közül legalább az egyik fennáll. Mivel $|\cos t|-\cos t>0$ a $[(2k+1)\pi-3/2, (2k+1)\pi+3/2]$ intervallumon, $k=0, 1, \ldots$, ezért van $\beta>0$ úgy, hogy valamely, a t_n-et tartalmazó 1/2 hosszúságú intervallum minden t pontjában

$$(|\cos t|-\cos t)\int_{t-1}^{t} a(s)|x(s)|\,ds > \beta$$

minden n-re. Innen azonban (1) alapján $|x(t)|+2\int_{-1}^{0}\int_{t+s}^{t} a(u)|x(u)|\,du\,ds \to -\infty$ $(t\to\infty)$ következne, ami ellentmondás. Tehát (2) teljesül.

(2)-ből az következik, hogy

$$\max_{t\in H_k} \int_{-1}^{0}\int_{t+s}^{t} a(u)|x(u)|\,du\,ds \to 0 \quad (k\to\infty). \tag{3}$$

Felhasználva $|x(t)|+2\int_{-1}^{0}\int_{t+s}^{t} a(u)|x(u)|\,du\,ds$ monotonitását, nemnegativitását és (3)-at, $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ bizonyításához elegendő megmutatni, hogy van $\{t_n\}$ sorozat, amelyre $t_n\to\infty$, $t_n\in\bigcup_{k=0}^{\infty} H_k$ és $x(t_n)\to 0$ $(n\to\infty)$. Ha ilyen sorozat nem létezne, akkor lenne $k_0\in N$ és $\gamma>0$ úgy, hogy $|x(t)|>\gamma$, hacsak $t\in H_k$ és $k\geqq k_0$. Ez azonban ellentmond (2)-nek akár $a(t)=\sin^2 t$, akár $a(t)=t$.

(A feladat kitűzőjének megoldása)

8. Feladat. Érkezett 5 megoldás. Egyik sem teljes. Hetyei Gábor a $c>1$ esetben oldja meg a feladatot.

Tegyük fel, hogy létezik a limesz. Mivel

$$\lim_{x\to 1-0} f(x^2)/f(x) = 1/(1+c) \tag{$*$}$$

is létezik, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1-0} f(x^{2^m/3^n})/f(x)$$

is létezik bármely $m, n\in Z$-re. Mivel $\{2^m/3^n\}_{m,n\in Z}$ sűrű R_+-on, egy ismert tétel (l. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* John Wiley & Sons, New York, 1950, 275. old.) szerint

$$f(x) = (1-x)^{-\varrho} L(x), \tag{$**$}$$

ahol $\varrho \geqq 0$ és L lassú változású abban az értelemben, hogy

$$\lim_{x \to 1-0} L(x^q)/L(x) = 1$$

minden $q > 0$ esetén. Legyen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (0 < x < 1)$$

és $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Egy ismert Tauber-tétel szerint (l. G. H. Hardy, *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford, 1949, Chap. VII, Thm. 108) $(**)$-ból

$$s_n \sim p f(q^{1/n}) \quad (p > 0)$$

adódik (ahol $a_n \sim b_n$ azt jelenti, hogy $\lim_{n \to \infty} a_n/b_n = 1$) bármely rögzített $q \in (0, 1)$ esetén. Azonban

$$s_{2^m} = \prod_{0}^{m-1} (1+c) + c = (1+c)^m + c$$

és

$$s_{2^m + 2^{m-1}} = (1+c)^m + c(1+c)^{m-1} + c^2,$$

amiből

$$1 + \frac{c}{1+c} \sim \frac{s_{2^m + 2^{m-1}}}{s_{2^m}} \sim \frac{f(q^{1/(2^{m-1} \cdot 3)})}{f(q^{1/(2^{m-1} \cdot 2)})} \sim \frac{(1 - q^{1/(2^{m-1} \cdot 3)})^{-\varrho}}{(1 - q^{1/(2^{m-1} \cdot 2)})^{-\varrho}} \sim \left(\frac{2 \cdot 2^{m-1}}{3 \cdot 2^{m-1}}\right)^{-\varrho} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^{\varrho},$$

ha $m \to \infty$. Tehát

$$1 + \frac{c}{1+c} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\varrho}$$

és $(*)$, $(**)$ alapján

$$1 + c = 2^{\varrho}$$

adódik. Így $1 + 2c = 3^{\varrho}$, és ϱ-nak ki kell elégítenie a

$$3^{\varrho} - 2 \cdot 2^{\varrho} + 1 = 0$$

egyenletet, ami persze igaz $\varrho = 0$ és $\varrho = 1$ esetén, de nem igaz semmilyen más ϱ-ra, mert $3^t - 2 \cdot 2^t + 1$ konvex (második deriváltja pozitív $t > 0$ esetén). Ha $\varrho = 0$, akkor $c = 0$, ha pedig $\varrho = 1$, akkor $c = 1$, ellentmondás.

(A feladat kitűzőjének megoldása)

Megjegyzések. 1. Hetyei Gábor megmutatja, hogy ha $\lim_{x \to 1-0} f(x^3)/f(x) = A$, akkor a $(0, 1)$ intervallumon fennáll

$$(***) \qquad f(x^6) g(x^3) = A f(x^3) g(x),$$

ahol

$$g(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 + c x^{1/2^k}}{1+c}$$

analitikus függvény $(0, 1)$-en. Mivel f is analitikus, megmutatható, hogy f és g kiterjeszthető egyértelműen a komplex síkbeli $D = \{z: 0 < |z| < 1, |\arg z| < \pi/6\}$ tartományra holomorf függvénnyé. Ekkor $(***)$ minden $x \in D$-re is teljesül. Következésképp D-ben $(***)$ bal oldalának ugyanazok a zéróhelyei, mint jobb oldalá-

nak. A $c>1$ esetben a bal oldal zéróhelyeinek abszolútértéke $(1/c)^{1/(2^{k+1}\cdot 3)}$, míg a jobb oldal zéróhelyeinek abszolútértéke $(1/c)^{1/2^{k+1}}$. $2^m=3\cdot 2^k$, $m, k\in N$ lehetetlensége miatt ez ellentmondás. A $c<1$ esetre ez az ötlet nem működik, mert akkor nincs D-be eső zéróhely.

2. Károlyi Gyula és Kós Géza bebizonyítják, hogy ha a feladatbeli limesz létezik, akkor minden $\alpha>0$ esetén

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x^\alpha)}{f(x)}=\alpha^{-\log_2(1+c)}.$$

3. Észrevéve, hogy $\alpha>0$-ra

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{(1-x)^d}{(1-x)^d}=\alpha^d,$$

és a 2. Megjegyzés eredményét a

$$g(x)=\frac{f(x)}{(1-x)^{-\log_2(1+c)}}$$

függvényre alkalmazva, nyerjük, hogy bármely $q>0$-ra

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x^q)}{g(x)}=1$$

Azaz a $(**)$ előállítást kaptuk a Feller-hivatkozás nélkül.

4. Ha $c=1$, akkor $f(x)=2/(1-x)$, és így $\lim_{x\to 1-0} f(x^\alpha)/f(x)$ minden α-ra létezik.

9. Feladat. Érkezett 15 megoldás. Helyes Erdős László, Hetyei Gábor, Hraskó András, Katona Gyula, Kós Géza, Kovács Sándor, Magyar Ákos, Mócsy Miklós, Sigray István, Szabó Csaba, Szabó Zoltán, Tóth Géza és Törőcsik Jenő megoldása. Javítható hibát tartalmaz Elek Gábor és Károlyi Gyula megoldása.

I. megoldás. Legyen G egy olyan gráf, amely összefüggő, csúcsainak halmaza V, élei egyenes szakaszok, és az e tulajdonságú gráfok közül az élhosszak összege minimális. G definíciójából következően fa. Vegyük G éleinek (mint szakaszoknak) a felezőpontját és vegyünk ezek mint középpontok körül $r(\sqrt{3}-1)/4$ sugarú nyílt gömböket, ahol r az adott él hossza. Bebizonyítjuk, hogy e nyílt gömbök nem metszik egymást. Tegyük fel indirekt módon, hogy $A, B, C, D\in V$, $\varrho(A,B)=R$, $\varrho(C,D)=r$, az AB és CD szakaszok élek G-ben és $S((A+B)/2, R(\sqrt{3}-1)/4)\cap$ $\cap S((C+D)/2, r(\sqrt{3}-1)/4)\neq\emptyset$ (ϱ a távolság, $S(a,r)$ az a középpontú r sugarú nyílt gömb). Szimmetriaokból feltehetjük, hogy $R\geqq r$. Ekkor $\varrho(A,(C+D)/2)\leqq$ $\leqq\varrho(A,(A+B)/2)+\varrho((A+B)/2,(C+D)/2)<R/2+R(\sqrt{3}-1)/2=R\sqrt{3}/2$. Mivel az $(A,(C+D)/2,C)$ és $(A,(C+D)/2,D)$ szögek közül legalább egy nem tompaszög, ha $A\neq(C+D)/2$, így

$$\min\{\varrho(A,C),\ \varrho(A,D)\}\leqq(\varrho^2(A,(C+D)/2)+r^2/4)^{1/2}<((3R^2/4)+(R^2/4))^{1/2}=R.$$

Ha G-ből elhagyjuk az AB élt, akkor a részgráf két fa uniója. Feltehető szimmetriaokból, hogy B abban a fában szerepel, amelyikben C (és így D is). Ekkor viszont, ha G-ből elhagyjuk AB-t és hozzávesszük AC és AD közül azt, amelyik hossza

R-nél kisebb, akkor egy összefüggő G' gráfot kapunk, amelyre teljesülnek a G-re tett kirovások, és az élek összhossza kisebb G-énél, ami ellentmondás.

Mivel e gömbök nem metszik egymást, és benne vannak pl. a 2-sugarú gömbben, össztérfogatuk kisebb a 2-sugarú gömb térfogatánál. Vagyis

$$2^k\omega_k \geqq \sum_{AB \text{ él } G\text{-ben}} \varrho^k(A,B)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^k \omega_k,$$

ahol ω_k k-tól függő konstans. Ezért

$$\sum_{AB \text{ él } G\text{-ben}} \varrho^k(A,B) \leqq 2^k\left(\frac{4}{\sqrt{3}-1}\right)^k = c_k,$$

amit bizonyítani kellett.

(Sigray István)

II. megoldás. Elegendő a következő állítást igazolni:

Ha T olyan R^k-beli téglatest, hogy T bármely két élének a hányadosa kisebb vagy egyenlő mint 3 és $V \subseteq T$ véges ponthalmaz, akkor létezik olyan V csúcspontú $G=G(V)$ összefüggő gráf, hogy G élhosszai k-adik hatványainak összegére

$$S(G) \leqq c_k \operatorname{Vol}(T),$$

ahol c_k csak k-tól függ és $\operatorname{Vol}(T)$ a T térfogata.

Megmutatjuk V pontjai száma szerinti indukcióval, hogy $c_k = 3^{k+1}k^{k/2}$ megfelel. Legyen $|V|=n$. $n=1$, 2-re igaz az állítás, és tegyük fel, hogy már igazoltuk $1, \ldots, n-1$-re. Csökkentsük T-t (azaz T lapjait mozgassuk befelé) úgy, hogy az élek hányadosaira tett feltevés megmaradjon és $V \subseteq T$ legyen. Ezzel csak élesítjük az állítást. Ha T már nem csökkenthető és e a T egyik leghosszabb éle, valamint Q_1 és Q_2 az e-re merőleges lapok, akkor V-nek van pontja Q_1-en és Q_2-n (különben T tovább csökkenthető lenne). Legyenek T_1, T_2, T_3 azok a zárt téglatestek (sorrendben), amelyeket T-ből az e-re merőleges, e harmadoló pontjain átmenő hipersíkok metszenek ki T-ből. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy T_2-ben van-e V-nek pontja vagy nincs.

(i) eset. Nincs. Legyen $V_1 = V \cap T_1$, $V_3 = V \cap T_3$. Mivel $Q_i \cap V \neq \emptyset$, $i=1,2$, ezért $|V_i| < n$. Az indukciós feltevést T_1 és T_3-ra, valamint V_1 és V_3-ra alkalmazva kapunk olyan összefüggő $G_1 = G(V_1)$ és $G_3 = G(V_3)$ gráfokat, amelyekre $S(G_i) \leqq c_k \operatorname{Vol}(T_i) = (1/3)c_k \operatorname{Vol}(T)$, $i=1,3$. Összekötve még G_1 és G_3 egy-egy pontját egy olyan V csúcspontú összefüggő G gráf adódik, amelyre

$$S(G) \leqq S(G_1)+S(G_3)+(\sqrt{k})^k|e|^k \leqq$$

$$\leqq (2/3)c_k \operatorname{Vol}(T)+(\sqrt{k})^k 3^k \operatorname{Vol}(T) \leqq c_k \operatorname{Vol}(T)$$

c_k választása folytán.

(ii) eset. Van. Legyen $x \in V \cap T_2$, és az e-re merőleges, x-en átmenő hipersík vágja T-t a T_1^* és T_2^* zárt téglatestekre. Ekkor T_i^*-ra is fennáll, hogy bármely két oldal hányadosa nem nagyobb 3-nál. Így ismét alkalmazható az indukciós feltevés T_1^*, T_2^*-ra és $V \cap T_1^*$, $V \cap T_2^*$-ra, mivel ez utóbbi halmazoknak n-nél kevesebb pontjuk van. Tehát kapunk $G_1^* = G(V \cap T_1^*)$ és $G_2^* = G(V \cap T_2^*)$ összefüggő gráfokat, amelyekre

$$S(G_i^*) \leqq c_k \operatorname{Vol}(T_i^*) \quad (i=1,2).$$

Ha $G^*=G_1^*\cup G_2^*$, akkor G^* összefüggő, csúcsainak halmaza éppen V, és

$$S(G^*) = S(G_1^*)+S(G_2^*) \leqq c_k \operatorname{Vol}(T_1^*)+c_k \operatorname{Vol}(T_2^*) = c_k \operatorname{Vol}(T).$$

(*Kovács Sándor* és a feladat kitűzőjének megoldása alapján)

Megjegyzések. 1. A fenti tulajdonságú gráf lehet egy V-n átmenő Hamilton-kör is, de ennek igazolása nehezebb.

2. Belátható, hogy $k=2$-re $c_2=4$ megfelel még a Hamilton-kör problémára is. Érdekes probléma, hogy mik a pontos konstansok $k>2$ esetén.

(A feladat kitűzőjének megjegyzése)

10. Feladat. Érkezett 3 dolgozat. Megoldotta Károlyi Gyula és Törőcsik Jenő.

Egyelőre tetszőleges $n_k \geqq 1$ egész és $t \neq 0$ esetén a vizsgált

$$Y_{n_k} = \frac{1}{\pi n_k} \sum_{j=1}^{n_k}{}' X_j$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a függetlenség miatt az

$$Ee^{itY_{n_k}} = \left(1-\frac{\frac{1}{\pi}h_{n_k}\left(\frac{t}{\pi}\right)|t|}{n_k}\right)^{n_k}$$

alakba írható, ahol a szimmetria folytán bármely $s \neq 0$ számra

$$h_{n_k}(s) = \frac{n_k}{|s|}\left(1-Ee^{i\frac{s}{n_k}X_1}\right) = \frac{n_k}{|s|}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\cos\frac{s}{n_k}x\right)dF(x) =$$

$$= \frac{n_k}{|s|}\int_{-5}^{5}\left(1-\cos\frac{s}{n_k}x\right)dF(x)-2\int_{5|s|/n_k}^{\infty}(1-\cos y)\,d\left(\frac{1}{y}K\left(\frac{y}{|s|}n_k\right)\right).$$

A karakterisztikus függvények ilyen alakú előállítása azért természetes, mert $\{n_k\}$ megfelelő választásával éppen azt akarjuk elérni, hogy ezek az $e^{-|t|}$ függvényhez tartsanak, ami közismerten (Rényi: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, 1966, V. 3. §; Gnyegyenko és Kolmogorov: *Független valószínűségi változók összegének határeloszlásai,* Akadémiai Kiadó, 1951, 17. §) a feladat állításában határeloszlásként szereplő Cauchy-féle eloszlás karakterisztikus függvénye.

A h_{n_k} függvény fenti előállításában szereplő első tag nyilván nullához tart, ha $k\to\infty$ esetén $n_k\to\infty$, még mindig tetszőleges $\{n_k\}$ sorozatra. Az is látható, hogy ha a K függvény azonosan 1 lenne, akkor a második tag (szintén már az $n_k\equiv k$ választással) tartana a

$$2\int_0^{\infty}\frac{1-\cos y}{y^2}\,dy = \pi$$

határértékhez (és ekkor az állítás igaz lenne $n_k\equiv k$-ra is). Ezért elegendő az $\{n_k\}$ sorozatot úgy választani, hogy tetszőleges $y>0$ és $s\neq 0$ esetén $K\left(\frac{y}{|s|}n_k\right)$ tartson 1-hez, ha $k\to\infty$.

Legyen $\{a_k\}$ pozitív egészek tetszőleges olyan sorozata, hogy $a_k\to\infty$ és $a_k/k\to 0$ ha $k\to\infty$. Ekkor tetszőleges $x>0$ esetén minden elegendően nagy k-ra $4k!<$

$<a_k k!x<(k+1)!$, és így minden ilyen k-ra $K(a_k k!x)=1$. Így ha az

$$n_k = a_k k!; \quad k = 1, 2, \ldots;$$

választással élünk, akkor a P. Lévy-féle folytonossági tétel felhasználásával belátható, hogy $h_{n_k}(s)\to\pi$, amint $k\to\infty$. Ezért ekkor $E\exp(itY_{n_k})\to\exp(-|t|)$ tetszőleges $t\neq 0$ esetén, midőn $k\to\infty$, ami a folytonossági tétel újabb használatával a bizonyítandó állítást jelenti.

Megjegyzések. 1. Károlyi Gyula és Törőcsik Jenő megoldásai jóval hosszadalmasabb indirekt megoldások. Mindketten meghatározzák az $e^{-|t|}$ korlátlanul osztható karakterisztikus függvény Lévy-féle kanonikus alakját (Gnyegyenko és Kolmogorov idézett műve, 17. §), majd belátják, hogy a nem-szükségképpen azonos eloszlású valószínűségi változók részletösszegeire vonatkozó, soronként független változók végtelen háromszögmátrixa megfelelően centralizált sorösszegsorozata eloszlásainak egy adott Lévy-formájú karakterisztikus függvénnyel bíró korlátlanul osztható eloszláshoz történő konvergenciáját állító általános határeloszlástétel (Gnyegyenko és Kolmogorov: 25. §) elegendő (és egyúttal szükséges) feltételei a jelen esetben, $\{n_k\}$ megfelelő választásával teljesülnek. Törőcsik az $n_k=[\sqrt{k}\,k!]$ sorozatot választja, Károlyi $\{n_k\}$ sorozata valamivel bonyolultabb.

2. A fenti megoldásban adott bármely $n_k=a_k k!$ sorozat esetén az is belátható, hogy a K függvény felhasznált tulajdonsága x-ben egyenletesen is teljesül, azaz tetszőleges $0<a<b$ esetén van olyan k_0, hogy valahányszor $k\geqq k_0$, mindannyiszor $K(n_k x)=1$ tetszőleges x-re az $[a, b]$ intervallumból.

3. A K függvényben az azonosan 1 függvényre igen ritkán ráhelyezett kis sátortetők elrontják az azonosan 1 függvény ∞-körüli lassúváltozású mivoltát. Valóban, minden n-re $K(4n!)/K(2n!)=1/2$ és $K(2n!)/K(n!)=2$, és így K nem lassú változású a ∞ körül. Minthogy F farkának pontos rendje x^{-1}, amint $x\to\infty$, ha F beletartozna valamely, szükségképpen stabilis eloszlás vonzástartományába, azaz, hogyha léteznének $A_n>0$ és C_n konstansok úgy, hogy $A_n^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j - C_n\right\}$ eloszlásai konvergálnának egy ilyen eloszláshoz amint n növőleg átfutja az összes természetes számokat, akkor ez az eloszlás csak egy $\alpha=1$ karakterisztikus kitevőjű stabilis eloszlás lehetne, mint amilyen a feladat Cauchy-eloszlása is (Gnyegyenko—Kolmogorov: 35. §). Minthogy azonban K nem lassú változású, ez lehetetlen (l. uott). Ilyen A_n és C_n konstansok tehát nincsenek, speciálisan a feladat állítása nem lehet igaz az $n_k\equiv k$ sorozattal. A feladatbeli F így olyan eloszlásra példa, amely nincs benne a Cauchy-eloszlás vonzástartományában, de benne van annak parciális vonzástartományában. Hasonló példák egész seregét lehet bevezetni a K függvény alkalmas megváltoztatásával, sőt, tetszőleges $0<\alpha<2$ esetén a megváltozott K függvény alkalmas módosításával hasonlóan lehet olyan F-ek seregét konstruálni, amelyek nincsenek benne az α kitevős stabilis eloszlás vonzástartományában, de benne vannak annak parciális vonzástartományában (l. S. Csörgő, E. Haeusler, D. M. Mason: A probabilistic approach to the asymptotic distribution of sums of independent, identically distributed random variables, *Advances in Applied Mathematics,* 1989 (sajtó alatt); Proof of Corollary 5). Megjegyezzük még, hogy az utóbbi dolgozat, címének megfelelően egy új, teljesen valószínűségszámítási módszerről szól, úgyhogy például a fenti példák tárgyalásakor sem használ karakterisztikus függvényeket.

(A feladat kitűzőjének megoldása és megjegyzései)

Krisztin Tibor (Szeged)

ДОКЛАД О МЕМОРИАЛЬНОМ КОНКУРСЕ ИМЕНИ МИКЛОША ШВЕЙЦЕРА 1987-ГО ГОДА

REPORT ON THE 1987 M. SCHWEITZER MEMORIAL COMPETITION

PROBLEMS OF THE 1987 M. SCHWEITZER MEMORIAL COMPETITION:

1. Let the elements of the set $\{1, \ldots, N\}$ be coloured by three colours such that we have more than $N/4$ elements from any colour. Prove that the equation $x=y+z$ can be solved such that x, y, z have different colours.
2. The binary relation $\prec$ is said to be a quasi-order if it is reflexive and transitive. The „infimum" of a quasi-ordered set Q is the largest subset J of Q such that
   (i) for every $B\in Q$ there is an A in J which is „smaller than" B (i.e. $A\prec B$),
   (ii) if two elements of L are comparable then they are equivalent (i.e. $A\prec A'\Rightarrow A'\prec A$).
   Let X be a finite alphabet, X^* the set of words over X, and $P=P_\omega(X^*)$ the set of infinite subsets of X^*. For $A, B\in P$ put $A\prec B$ iff every element of A is a segment of some element of B. Show that the infimum of the quasi-ordered set $(P, \prec)$ exists, and describe its elements.
3. Let A be a finite, simple grupoid. Assume that every proper subgrupoid of A is a singleton, A has at least three one element subgrupoids and the automorphism group of A has no fixed point. Prove that every free algebra of finite rank in the variety generated by A is isomorphic to some direct power of A.
4. Let L be a finite modular lattice, let P be a sublattice of L and suppose that P is a projective geometry (i.e., P is complemented). Prove that L has a cover-preserving sublattice Q such that Q is a projective geometry and P is embeddable in Q.
   (A sublattice $S\subseteq L$ is called cover-preserving iff any covering pair $a\prec b$ in S is also a covering pair in L.)
5. Let f and g be real continuous functions such that $g\not\equiv 0$ and g has compact support. Prove that there exists a sequence of the linear combinations of the shifts of g which converges uniformly to f on any compact set.
6. Let A and B be unitary equivalent, self-adjoint operators in the complex Hilbert space H. Does $A\leqq B$ imply $A^+\leqq B^+$? (Here A^+ is the positive part of A.)
7. Let $x\colon [0, \infty)\to R$ be a differentiable function such that for x and its derivative x' the identity

$$x'(t) = -2x(t)\sin^2 t+(2-|\cos t|+\cos t)\int_{t-1}^{t} x(s)\sin^2 s\,\mathrm{d}s$$

   holds on $[1, \infty)$. Prove that x is bounded on $[0, \infty)$, moreover $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$. Is the same statement true for the function x which satisfies

$$x'(t) = -2x(t)\,t+(2-|\cos t|+\cos t)\int_{t-1}^{t} x(s)s\,\mathrm{d}s?$$

8. Let $c>0, c\neq 1$ be a given real number. For $x\in(0, 1)$ define

$$f(x) = \prod_{k=0}^{\infty}(1+cx^{2^k}).$$

   Prove that

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x^3)}{f(x)}$$

   does not exist.
9. Prove that there exists a constant c_k such that for any given finite point set V in the k-dimensional unit ball there is a connected graph G such that the set of vertices of G is V, the edges of G are straight lines, and the sum of the k-th powers of the lengths of the edges of G is less than c_k.

10. Let F be a distribution function, symmetric about the origin, given by $F(x)=1-x^{-1}K(x)$ for $x\geqq 5$, where

$$K(x)=\begin{cases} 1 & x\in[5,\infty)\setminus\bigcup_{n=5}^{\infty}(n!,4n!), \\ \dfrac{x}{n!} & x\in[n!,2n!],\quad n\geqq 5, \\ 3-\dfrac{x}{2n!} & x\in[2n!,4n!],\quad n\geqq 5. \end{cases}$$

Construct a subsequence $\{n_k\}$ of the positive integers such that if $X_1, X_2, \ldots$ are independent random variables with the common distribution function F, then for any real x we have

$$\lim_{k\to\infty} P\left\{\frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} X_j < \pi x\right\} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x.$$

FELADATROVAT

SZERKESZTI: LACZKOVICH MIKLÓS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, Fő u. 68., II. em. 224., 1027. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

KITŰZÖTT FELADATOK

240. feladat. Legyenek $a_1, a_2, \ldots$ olyan valós számok, amelyekre az $s_k = a_1 + \ldots + a_k$ összegek pozitívak minden k-ra. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k} = \infty$ és $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = \infty$ állítások közül legalább az egyik teljesül.

RÓKA SÁNDOR

241. feladat. Legyenek x, y, z olyan természetes számok, melyekre $1 < x \leqq y$ és $x!y! = z!$. Mutassuk meg, hogy ekkor $x < c \cdot \log z$, ahol c abszolút konstans.

LACZKOVICH MIKLÓS

242. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi két állítás ekvivalens.

(i) A valós számok halmaza lefedhető $\aleph_1$ nullmértékű halmazzal.

(ii) Létezik pozitív mértékű és mérhető halmazok egy nem-megszámlálható H rendszere úgy, hogy bármely x valós számra az $\{A: x \in A \in H\}$ rendszer megszámlálható.

LACZKOVICH MIKLÓS

MEGOLDOTT FELADATOK

228. feladat. Legyen V véges dimenziós vektortér a valós számok felett, és legyen $\mathcal{A}$ a V vektortér lineáris transzformációinak olyan altere, amelynek minden eleme szinguláris. Igaz-e, hogy ekkor vannak olyan M és N alterei V-nek, amelyekre $\dim N < \dim M$, és $\mathcal{A}$ minden eleme M-et N-be képezi?

LACZKOVICH MIKLÓS

Megoldás. Az állítás nem igaz. Legyen $V = \mathbf{R}^3$, és álljon $\mathcal{A}$ azokból a lineáris transzformációkból, amelyek mátrixa antiszimmetrikus. Ekkor $\mathcal{A}$ elemei szinguláris

risak. Könnyű ellenőrizni, hogy bármely $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbf{R}^3$ esetén az $\{A\mathbf{x}: A\in\mathscr{A}\}$ halmaz megegyezik az $(x_2, -x_1, 0)$, $(x_3, 0, -x_1)$ és $(0, x_3, -x_2)$ vektorok által kifeszített $N(\mathbf{x})$ altérrel. Ha $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, akkor $N(\mathbf{x})$ kétdimenziós. Így bármely $M\neq 0$ altérre az $\{A\mathbf{x}: A\in\mathscr{A}, \mathbf{x}\in M\}$ halmaz legalább kétdimenziós alteret feszít ki, ha pedig $M=V$, akkor $\{A\mathbf{x}: A\in\mathscr{A}, \mathbf{x}\in V\}=\bigcup_{\mathbf{x}\in V} N(\mathbf{x})=V$ háromdimenziós.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

Megjegyzés. A lineáris transzformációk szinguláris altereinek jellemzése az algoritmuselmélet fontos megoldatlan problémája. A kérdés történetére, valamint kombinatorikai és bonyolultságelméleti vonatkozásaira nézve lásd Lovász László „Singular spaces of matrices and their applications in combinatorics" című dolgozatát (*Bol. Soc. Bras. Mat.* **20** (1989), 87—99).

229. feladat. Legyen (X, τ) topologikus tér. Az f: $\mathbf{R}\to X$ leképezést mérhetőnek nevezzük, ha minden $G\subset X$ nyílt halmazra $f^{-1}(G)$ Borel-halmaz $\mathbf{R}$-ben. Mutassuk meg, hogy van olyan (X, τ) topologikus tér, és vannak olyan f_n: $\mathbf{R}\to X$ leképezések, amelyekre teljesül, hogy

(i) (X, τ) kompakt, T_2, szeparábilis és első megszámlálható;

(ii) f_n folytonos minden $n=1, 2, \ldots$ esetén;

(iii) az $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ limesz létezik minden $x\in\mathbf{R}$-re;

(iv) az f: $\mathbf{R}\to X$ leképezés nem mérhető.

LACZKOVICH MIKLÓS

Megoldás. Jelölje $[0, 1]^{\mathbf{R}}$ az f: $\mathbf{R}\to[0, 1]$ függvények terét a szorzattopológiával ellátva, és legyen X a monoton növő $f\in[0, 1]^{\mathbf{R}}$ függvények halmaza. Az X halmazt az altértopológiával ellátva kompakt T_2 teret kapunk, hiszen $[0, 1]^{\mathbf{R}}$ kompakt T_2 és X ennek zárt altere. Az X tér szeparábilis, mert azok a monoton növő szakaszonként lineáris függvények, melyek töréspontjai és itt felvett értékei racionálisak és amelyek konstansok az első töréspontjuk előtt, illetve utolsó töréspontjuk után, megszámlálható, sűrű halmazt alkotnak X-ben. Az is könnyen látható, hogy X kielégíti az első megszámlálhatósági axiómát. Valóban, legyen $f\in X$ tetszőleges. Álljon az S halmaz a $[0, 1]$-be eső racionális számokból és f szakadási pontjaiból, és legyen $\{x_k\}$ S egy sorozatbarendezése. Könnyű ellenőrizni, hogy az

$$U_k=\left\{g\in X: |g(x_i)-f(x_i)|<\frac{1}{k},\ i=1, \ldots, k\right\}\quad (k=1, 2, \ldots)$$

halmazok az f pont környezetbázisát alkotják X-ben.

Minden $n=1, 2, \ldots$ és $x\in\mathbf{R}$ esetén jelöljük $f_n(x)$-szel azt az X-beli függvényt, amelyre $f_n(x)(t)=0$, ha $t\leqq x-\frac{1}{n}$, $f_n(x)(t)=1$, ha $t\geqq x+\frac{1}{n}$, és amely lineáris $x-\frac{1}{n}$ és $x+\frac{1}{n}$ között. Ily módon egy folytonos f_n: $\mathbf{R}\to X$ leképezést definiáltunk minden n-re. Könnyű ellenőrizni, hogy az $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ limesz létezik minden $x\in\mathbf{R}$-re, mégpedig

$$f(x)(t)=\begin{cases}0, & \text{ha } t<x,\\ \frac{1}{2}, & \text{ha } t=x,\\ 1, & \text{ha } t>x.\end{cases}$$

Belátjuk, hogy az f: $\mathbf{R} \to X$ leképezés nem mérhető. Legyen E tetszőleges, nemmérhető halmaz $\mathbf{R}$-ben. Ekkor a

$$G = \{g \in X\colon\ \exists t \in E,\ 0 < g(t) < 1\}$$

halmaz nyílt X-ben, hiszen $G = \bigcup_{t \in E} \{g \in X\colon\ 0 < g(t) < 1\}$. Másrészt $f^{-1}(G) = E$, tehát f nem mérhető.

LACZKOVICH MIKLÓS

230. feladat. Bizonyítsuk be, hogy $n \geqq 2$ esetén

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) \log (n+1) > \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \log n.$$

LACZKOVICH MIKLÓS

Megoldás. Legyen $2 \leqq n$ és $1 \leqq k < n$. Használjuk fel a közismert $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ egyenlőtlenséget. Mindkét oldalt logaritmálva és nk-val osztva a következő alakhoz jutunk:

$$\frac{1}{n}(\log (k+1) - \log k) < \frac{1}{k}(\log (n+1) - \log n).$$

Ennek mindkét oldalát $k = 1, \ldots, n-1$-re összegezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \cdot \log n < \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)(\log (n+1) - \log n),$$

amelyből egyszerű átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

FÖLDVÁRI CSONGOR

A feladatot megoldották még GEŐCZE ZOÁRD, HERMANN TAMÁS és TÓTH JÁNOS.

231. feladat. Egy fogadáson n ember van jelen. Mindenkinek van jelen ismerőse, és van olyan $k\ (< n)$ szám, hogy bármelyik k résztvevőhöz van olyan a jelenlevők között, aki egyiküket sem ismeri. Bizonyítandó, hogy a jelenlevők közül alkalmas $2k+2$ személyt leültethetünk egy hosszú asztalhoz úgy, hogy az asztal mindkét oldalán $k+1$ személy ül, és mindegyikük a vele átellenes oldalon ülők közül egyedül a vele szemben ülőt ismeri.

HAJÓS GYÖRGY † ÉS SURÁNYI JÁNOS

Megoldás. Elegendő az állítást a feladatban szereplő legnagyobb k-ra bizonyítani. Ez azt jelenti, hogy van olyan $k+1$ résztvevő, hogy mindenki ismer valakit közülük. Válasszunk ki az ilyen $k+1$-esek közül egy olyant, hogy a köztük levő ismeretségek száma maximális legyen; legyenek ennek tagjai $A_0, A_1, \ldots, A_k$. Őket fogjuk az asztal egyik oldalához ültetni. Ha A_i-t kivesszük közülük, akkor a maradó k résztvevőhöz van valaki, aki egyiküket sem ismeri. Ha van ilyen A_i-n kívül, akkor őt ültethetjük A_i-vel szembe, mert a $k+1$ ember közül ő is ismer valakit, ez pedig csak A_i lehet. Az viszont nem fordulhat elő, hogy csak A_i nem ismeri a többi A_j-t,

és mindenki más már a k személy közül is ismer valakit. A feltétel szerint ugyanis A_i-nek is van jelen ismerőse, mondjuk C_i. Cseréljük ki A_i-t és C_i-t. Az újabb együttes közül is ismer mindenki valakit, mert A_i ismeri C_i-t, a többiek pedig már a többi k tag közül is ismernek valakit. Viszont a feltétel szerint C_i-nek is van ismerőse a többi k ember között és így az új $k+1$-esben legalább eggyel nőtt az ismeretségek száma, holott feltettük, hogy az maximális volt. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

SURÁNYI JÁNOS

ЗАДАЧИ

PROBLEMS

Problem 240. Let $a_1, a_2, \ldots$ be real numbers such that the sums $s_k = a_1 + \ldots + a_k$ are positive for every k. Prove that either $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k} = \infty$ or $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = \infty$.

S. RÓKA

Problem 241. Let x, y, z be integers with $1 < x \leqq y$ and $x!y! = z!$. Prove that $x < c \cdot \log z$ with an absolute constant c.

M. LACZKOVICH

Problem 242. Prove that the following statements are equivalent.

(i) The set of real numbers can be covered by $\aleph_1$ sets of measure zero.

(ii) There exists an uncountable system H of measurable sets with positive measure such that for every real x the system $\{A: x \in A \in H\}$ is countable.

M. LACZKOVICH

KÖNYVISMERTETÉSEK

Székely J. Gábor: Paradoxonok a véletlen matematikájában

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982, 288 oldal, 44 Ft

Ez a könyv meglehetősen szubjektíven vezeti be a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika alapfogalmait. Nem ad definíciókat, nem mond ki tételeket, csupán elmeséli a sztochasztikus gondolkodás kifejlődésének nevezetes epizódjait. E történetek többségében valamilyen tévedésről van szó, valami váratlan dolog történik. A szerző elképzelése szerint könnyebben megragad az emlékezetünkben az, amire rácsodálkozunk, ami meglepő. Ezért szól ez a könyv paradoxonokról.

A paradoxonok többsége ismert a valószínűségszámítás oktatásából: De Méré lovag paradoxona, az ajándékozási paradoxon, a Bertrand-féle paradoxon, a születésnapok paradoxona, a busz-paradoxon (többet kell várnunk a buszra, ha nyoma sincs, mint ha épp az orrunk előtt ment el). Mások váratlan, szokatlan megfogalmazásai jól ismert összefüggéseknek (például, hogy a becslés négyzete nem ugyanaz, mint a négyzet becslése). Sokszor az az ember érzése, Prokrusztész ágyába kerültek az elmélet jól ismert eredményei az általános szerkesztő elv következetes betartása miatt. A paradoxonok harmadik csoportja új eredményeket ismertet. Tulajdonképpen minden új eredmény meglepő, hiszen amíg nem ismertük a választ, azt sem tudtuk, „igen", vagy „nem" várható-e. Így válik paradoxon Student t-próbájából amiatt, hogy eltérően viselkedik fix elemszámú és szekvenciális mintavétel mellett. Vagy paradoxon a szerző Ruzsa Z. Imrével közösen elért eredménye, hogy az eloszlások körében rengeteg irreducibilis eloszlás van, prímeloszlás azonban egyáltalán nincs.

De fontos az, hogy a könyv érdekes, tanulságos és szórakoztató. Átfogja napjaink sztochasztikáját, új és eleven betekintést nyújt a véletlen világába.

Tusnády Gábor

V. I. Arnold: A differenciálegyenletek elméletének geometriai fejezetei

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1988, 276 oldal, 128 Ft

Szeretném úgy ajánlani V. I. Arnold könyvét, mint egy Olvasókönyvet. Egyrészt azért, hogy minél többen olvassák-olvasgassák, másrészt azért, mert ez a könyv valóban sokban hasonlít középiskolás éveink Magyar Irodalmi Olvasókönyveire. Szubjektív válogatás, amely bemutatja választott témájának hihetetlen gazdagságát: tanít, nevel, megszerettet és kedvet csinál.

A szerző így ír előszavában:

„A tárgyalás során igyekeztem elkerülni a deduktív-axiomatikus stílust, amelynek jellegzetes ismérve a motiválatlan, az alapvető elveket és módszereket elfedő definíció; olyan, mint a példabeszéd — csak négyszemközt magyarázzák el a tanítványnak.

A matematika — mint mondják — több mint 50 éve tartó axiomatizálása és algebraizálása olyan mennyiségű nehezen olvasható matematikai szöveget termelt ki, hogy a matematikát mindig is fenyegető veszély: a fizikával és a természettudományokkal való kapcsolat teljes elvesztése realitássá vált. Igyekeztem úgy tárgyalni az anyagot, hogy a könyvet ne csak a matematikusok használhassák, hanem a differenciálegyenletek elméletének felhasználói is.

E könyv elolvasása nem igényel túl nagy matematikai képzettséget (nagyjából két évnyi egyetemi anyag ismeretét kívánja); elegendő (de nem szükséges) pl. a V. I. Arnold: Közönséges differenciálegyenletek (Műszaki Könyvkiadó, 1986) című könyv ismerete."

Mindezzel együtt Arnold könyve nem könnyű olvasmány. Arra például, hogy az Olvasó megtanulja belőle a közönséges differenciálegyenletek geometrikus elméletét, minden valószínűség szerint alkalmatlan. Arra viszont, hogy megértse, kiválóan alkalmas. Legjobb talán — a meg-

és a felvilágosító szavakat gondosan elkerülve — rávilágosítónak neveznem. Nézzük például a harmadik fejezetet. Az első alpont címe: „A strukturális stabilitás naiv definíciója". (Egy dinamikai rendszer — vagy ha úgy tetszik, az $\dot{x}=v(x)$ differenciálegyenlet(rendszer) — strukturálisan stabilis, ha kicsit megváltoztatva, a kapott új rendszer kvalitatíve azonos marad az eredetivel). A matematikailag precíz, végleges definíció csak három oldallal később következik. Közben egyszerű szemléletes példák és magyarázatok. Ezután a differenciáltopológia egy klasszikus eredménye jön — az ún. Sard-lemma —, részletes bizonyításvázlattal, mint segédtétel. A gömbön értelmezett strukturálisan stabilis rendszerek karakterizációs tételének ábrákon történő bemutatása után ugyanez a tórusz esetében, 12 oldalas, részletesen kidolgozott, komplett bizonyítással — ebből két oldal elemi számelmélet. Ezután roppant tömör apróbetűs közbeiktatás, öt oldalon, a szakirodalomban kidolgozóik részéről KAM-elméletnek (A mint Arnold) nevezett alapvető analitikus módszer bemutatása a körvonal esetében. Most egy konkrét, a tóruszon értelmezett lineáris automorfizmus és az ennek kis környezetében lévő diffeomorfizmusok részletes elemzése, ugyancsak öt oldalon. Ezután 10 oldal szemléltető példa- és utalászcsokor következik, többek között a Lobacsevszkij-sík geodetikus folyamairól, valamint folyadékok turbulens áramlásairól. Az olvasó ugyancsak kapkodhatja a fejét. Ha azonban veszi magának a fáradságot és utánanéz a részleteknek, rájön, hogy Arnold példái mennyire a dolgok lényegét fejezik ki és hogy utalásai mennyire a dolgok közepébe találnak. A fejezetet egy kétoldalas bizonyításvázlat zárja: „A strukturálisan stabilis rendszerek nem mindenütt sűrűek." Ez a bizonyításvázlat tulajdonképpen egy konstrukció élőbeszédszerű leírása (az „orrocská"-val, mint terminus technicus-szal). Itt engedtessék meg egy kritikus megjegyzés is: a menet közben bőségesen felhasznált „fóliázás" fogalom mivolta csak egy lábjegyzetből derül ki, a „kimenő sokaság" definíciója (Arnold könyvének szellemében teljesen elegendő lenne egy naiv definíció is) pedig egyszerűen hiányzik, sehol sem szerepel.

A könyv további öt fejezetének címe: Speciális egyenletek, Elsőrendű parciális differenciálegyenletek, Perturbációelmélet, Normálformák, Lokális bifurkációelmélet.

V. I. Arnold — akit csak a glasznoszty idején, mintegy 20 év késéssel választottak a Szovjet Tudományos Akadémia (levelező) tagjává — most ismertetett könyve a világ számos országában vált referencia és inspiráció forrásává. A Műszaki Könyvkiadó minden dicséretet megérdemel azért, hogy rövid egymásutánban a szerző most már harmadik könyvét jelenteti meg magyar nyelven — a még nem említett könyv címe: „A mechanika matematikai módszerei", Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985 —, nagy eseménye ez matematikai könyvkiadásunknak.

Garay Barna

Dienes professzor játékai

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989, 160 oldal, 98 Ft

Dienes Zoltán professzor életművének talán a legtalálóbb jellemzője az, hogy a játékok nyelvére igyekszik lefordítani a matematika jelentős részeit. Az utóbbi harminc évben mint a matematikatanítás megújulásának lelkes, gondolatokban gazdag, nagyhatású apostola szerte a világban a tanfolyamok és bemutató foglalkozások ezreit tartotta, amelyeknek sikere kézzelfoghatóan bizonyította a játék és a tanulás, a játék és a matematikai gondolkodás szoros kapcsolatát, egymást segítő hatását.

Dienes Zoltán többször járt Magyarországon is. Először 1960-ban, Budapesten a Szemere utcai általános iskolában tartott bemutató órákat, legutóbb 1986 elején a Magyar Televízió hat részben sugározta játékainak egy részét.

A címben megnevezett könyv ennek a televíziós műsornak az alapjául szolgált angol nyelvű kéziratból készült fordítás átdolgozott és kiegészített változata. Az átdolgozás (az azóta elhunyt) Varga Tamás gondos, szakavatott munkája.

A kötet 6 fejezetből és 3 függelékből áll.

Az *első* fejezetben szereplő kétszemélyes játékok közös vonása az, hogy egy vagy két vagy három kupacban elhelyezett tárgyakból (pl. kavicsokból) kell a játékosoknak felváltva m, illetve n számút ($m\in\mathbf{N}$, $n\in\mathbf{N}$ a továbbiakban is) egy dobozba gyűjteni és *Az nyer, aki utóljára lép* (ez a fejezet címe is). Néhány konkrét m és n értékre a nyerő stratégiát is és a játékok táblás változatát is megtalálja az olvasó. Az utolsó alfejezet fordít a játékok egy szabályán, nevezetesen azt az esetet vizsgálja, amikor az veszít, aki utoljára lép.

A *második* fejezetben *(Számjátékok többszörösökkel)* leírt játékokhoz már egyszerű eszközök is szükségesek, nevezetesen kockák, számkártyák, korongok, papírlapok. A játékokat többen is játszhatják. A játékok lényege: összetett számok osztóinak felismerése, rendszerezése, testekkel, hálózatokkal való megjelenítése.

A *harmadik* fejezet: *Lefedős játékok*. Az alapjáték abból áll, hogy a két játékos egy 3×4 mezőből álló négyzetháló négyzeteire felváltva helyez el egy-egy korongot. Egy mező elfoglalásával a

mezőtől balra (sor) és a mező alatt (oszlop) lévő mezők is foglaltakká válnak. Ezekre a mezőkre a soron következő játékos már nem tehet korongot. A jobb felső (a sakk szabályai szerint a d3) mező eleve foglalt. Az a játékos nyer, aki utoljára tud lépni. A fejezetben a d3 játék teljes elemzése megtalálható. Érdekességként megemlítjük: belátható, hogy az egyetlen négyzetből álló játéktértől eltekintve minden téglalap alakú játéktéren az nyer, aki kezd, ha elég jól játszik. A konkrét nyerő stratégia azonban csak néhány speciális esetben, például a $2\times n$, vagy az $n\times n$, esetekben ismeretes. Az általános eset nyerő stratégiáját mindmáig még senki sem találta meg. A fejezet végén többdimenziós lefedőjátékokról is szó esik.

A *negyedik* fejezet tárgya és címe: *Ciklusjátékok*. A világ számos jelensége periodikusan ismétlődik, ciklusokból áll. Ciklusok felismerését, alkotását, átrendezését mutatja be ez a fejezet. A játékokhoz játékkészlet szükséges, de ez a mellékletben megtalálható.

Az *ötödik* fejezet *(Kockajátékok)* főszereplője ugyan a kocka, de a játékok szoros kapcsolatban állnak (nevezetesen izomorfok) egy 13 lapos kártyajátékkal (13 forgástengelye van a kockának), az ún. Abraka-dabra játékkal. További, az előzőkkel izomorf játékok: a székjáték, a helycserés játékok.

A *hatodik* fejezetben *Téglalapok kirakása* a feladat. Adott elemekből (négyzetekből, téglalapokból) adott alakú téglalapokat kell kirakni, ha ez lehetséges, vagy megállapítani, hogy ez lehetetlen.

Az *első függelék* az első fejezetben szereplő NIM játékok (a NIM játék eredetéről részletesen olvasható Eigen, M.—Winkler, R.: A játék című könyvben, Gondolat, 1981) matematikai hátteréről és a nyerő stratégiákról szól.

A *második függelék* egy ismertetett két kupac (nem NIM) játék és a Fibonacci-számok kapcsolatát mutatja meg.

A *harmadik függelékben* a harmadik fejezetben bemutatott lefedős játék további vesztőalakzatait találjuk, továbbá olyan (BASIC nyelven íródott) programot, amely sorban előállítja a vesztőalakzatokat, és egy olyat, amelynek segítségével géppel lehet játszani a fedőjátékot.

A közreadott szöveg könnyen olvasható, a játékok könnyen elsajátíthatók, sőt újak találhatók ki. Játszani pedig lehet otthon, az iskolában, nyaralás közben, lehet kettesben és társaságban.

A könyvet Varga Tamás szavaival azoknak ajánlom, „... akiknek Dienes professzor szánta: gyerekeknek, óvodásoktól fölfelé, szüleiknek, nagyszüleiknek, tanítóiknak és tanáraiknak; iskoláskorból már kikerülőknek, játszani szeretőknek, és azoknak, akikkel remélhetőleg ez a könyv kedvelteti meg majd a matematikai játékokat".

Scharnitzky Viktor

Martin C. Tangora (ed.): Computers in geometry and topology

(Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **114**.) Marcel Dekker, New York and Basel, 1989, 317+VIII oldal

1986. március 24. és 28. között az Illinois-i egyetemen Chicago-ban konferenciát rendeztek: Számítógépek a geometriában és a topológiában témakörrel. A kötet ennek a konferenciának az anyagát tartalmazza és 14 dolgozatból áll.

A számítógép mindegyik dolgozatban jelen van, de szinte dolgozatonként más és más a szerepe. Az első cikk inkább a számítógéptudomány körébe tartozik, a homotópiacsoportok gépi kiszámításának nehézségi fokát vizsgálja. Az eredmény alapján valószínűsíthető, hogy racionális homotópiacsoportok polinomiális idő alatt nem számíthatók ki.

Több dolgozat szól új gépi nyelv vagy számítástechnika kialakításáról a topológiában, illetve az algebrában. Néhány dolgozat konkrét topológiai vagy homologikus algebrai problémák gépi számítási eljárásával foglalkozik. Ilyen például a nilpotens csoportok kohomológiáinak kiszámítására szolgáló algoritmust tárgyaló L. A. Lambe-cikk, amely egyúttal a csoportbővítések és a kohomológiák közti szoros kapcsolatba is betekintést nyújt.

Érdekes csemegének számít Donald M. Davis dolgozata, amelyben a számítógép sugalmazza egy topológiai tétel bizonyításának kulcsfontosságú lépéseit, bár magában a bizonyításban gépi számolásra tulajdonképpen nincsen szükség. A történeti előzmények ismertetése után maga a tétel azt mondja ki, hogy a $2n$ dimenziós P^{2n} valós projektív térnek nincs $R^{4n-4b-2\alpha(n-b)}$-be történő immerziója, ahol $\alpha(m)$ az m bináris kifejtésében szereplő 1-esek száma, b pedig a legkisebb olyan nemnegatív egész szám, amelynél $\alpha(n-b)\leq b+1$.

A dolgozatok egy részében a computer-grafika jut szóhoz, a gép rajzeszközként működik. Ilyen például a síkbeli lokális szimmetriákról szóló P. J. Giblin cikk. Valójában a síkbeli görbék és görbeseregek bitangenciális köreinek középpontjai által leírt görbékkel és görbeseregekkel foglalkozik.

Két dolgozatnak is tárgya a fraktálok geometriájának érdekes alakzata a Mandelbrot halmaz, vagyis azon komplex μ számok halmaza, amelynél 0-nak az $f(z)=z^2+\mu$ függvény iteráltjai által nyert képei korlátos halmazban fekszenek. Különösen figyelemreméltó John Milnor több mint 40 oldalas dolgozata, ahol a számítógép által nyert képanyag sejtések egész sorát sugalmazza.

A kötetet R. F. Riley csomóelméleti cikke zárja. Vázolja annak a tételnek gépi eszközökkel történő bizonyítását, amelynek értelmében a 9_{32} csomó aszimmetrikus, vagyis a csomó komplementumának minden autohomeomorfizmusa izotóp az identitással.

A kötet előszava mindazok figyelmébe ajánlja a könyvet, akik a tiszta matematikát a számítógépek hatásától örökre elszigetelt szentélynek tekintik, de a kötet javarészének mondanivalója közel áll a gépektől elszigeteltek számára is.

Bognár Mátyás

J. Vinuesa (ed.): Orthogonal polynomials and their applications

Proceedings of the International Congress on Orthogonal Polynomials held Sept. 7—12, 1987 in Laredo, Spain (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **117**), Marcel Dekker, New York and Basel, 1989, 240 oldal

A kötet a címben említett kongresszus 6 meghívott és 11 további résztvevő előadásából készült dolgozatokat tartalmazza. (Tíz országból összesen több mint 70 résztvevő volt.) Számos, az ortogonális polinomok elméletével többé-kevésbé kapcsolatban álló téma helyet kapott a kötetben: Padé-approximáció, Töplitz-mátrixok, klasszikus gyökeloszlási, aszimptotikus és konvergencia-kérdések, alkalmazások.

A klasszikus „hányados" és „gyök" aszimptotikával foglalkozik Walter Van Assche (Belgium), „Orthogonal Polynomials: Bounded Versus Unbounded Spectrum" c. dolgozatában, és talán ez áll legközelebb ahhoz az irányzathoz, amivel több magyar, ill. magyar származású matematikus (Freud Géza, Máté Attila, Névai Pál, Szegő Gábor, Totik Vilmos) is foglalkozott.

A valószínűségszámítási szakembereket érdekelheti Erik A. van Doorn (Hollandia) „Orthogonal Polynomials and Birth-Death Processes" c. munkája. Legyen $X=\{X(t), t>0\}$ egy sztochasztikus folyamat. Itt $X(t)$ egy részecske t időpontbeli állapotát reprezentáló véletlen változó. Legyen $S=\{0, 1, 2, ...\}$ a részecske lehetséges állapotainak halmaza. X-et *születés-halál folyamatnak* nevezzük, ha a következő két feltétel teljesül: (i) Ha a részecske elérte az i ($i\in S$) állapotot, akkor abban marad annyi ideig, amely időt egy s_i ($0<s_i<\infty$) középértékű exponenciális eloszlású véletlen változó fejez ki. (ii) A részecske az i ($i\in S$) állapotból az $i+1$ állapotba p_i, az $i-1$ állapotba $q_i=1-p_i$ valószínűséggel kerül $p_i, q_{i+1}>0$, $i\in S$, $q_0=0$). A $\lambda_i=p_i/s_i$ születési és $\mu_i=q_i/s_i$ halálozási arányokból alkotott $R=\{\lambda_i, \mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ halmaz esetén a fő probléma az ún. *átmeneti valószínűségi függvények*, vagyis a

$$p_{ij} = P\{X(t) = j | X(0) = i\}, \quad t \geqq 0, \quad i, j \in S,$$

meghatározása. A dolgozat e problémának az ortogonális polinomokkal való szoros kapcsolatát tárgyalja.

További meghívott előadók és munkáik:

J. Gilewicz (Franciaország): From a numerical technique to a method in the best Padé approximation.

W. N. Everitt (Anglia)—L. L. Littlejohn (USA)—S. C. Williams (USA): Orthogonal polynomials in weighted Sobolev spaces.

P. Maroni (Franciaország): L'orthogonalité de dimension d certaines polynomes orthogonaux „classiques" de dimension deux.

J. L. Ullman (USA): Orthogonal polynomials for general measures. (Érdekességként megemlítem, hogy ez utóbbi rövid áttekintő cikk irodalomjegyzékében szerepel a következő:

4. Nevai, Paul and Freud Géza, Orthogonal polynomials and Christoffel functions, a case study, J. Approx. Theory **48** (1986), 3—167. Ez egy mulatságos baklövés, ugyanis a dolgozatot *Névai* írta *Freudról*, és annak idején meglehetős vihart kavart nem szokványos kritikai észrevételeivel.)

A könyv második fele a további résztvevők (többnyire rövidebb) dolgozatait tartalmazza.

Általában elmondhatjuk, hogy a kötet egy nagyon szűk specialista kör számára jelenthet érdekességet; semmiképpen nem ajánlanám a témával éppen megismerkedni kívánóknak.

Szabados József

Eva Lowen-Colenbunders: Function classes of Cauchy continuous maps

(Pure and Applied Mathematics: A Series of Monographs and Textbooks/**123**), Marcel Dekker, New York, 1989, 166 oldal

Cauchy-struktúrának mondjuk az X halmazon az X-beli szűrőknek olyan rendszerét, amelyre $x \in X$ esetén $\dot{x} = \{A \subset X : x \in A\}$ a rendszerhez tartozik, bármely rendszerhez tartozó szűrőnél finomabb szűrő is a rendszerben van, és $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ a rendszerben van, valahányszor $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ a rendszerhez tartozik, és $C_i \in \mathcal{C}_i$ esetén $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Ilyenre tipikus példát alkotnak egy uniform térben az összes Cauchy-szűrők (innen ered az elnevezés), vagy pedig egy Hausdorff-térben az összes konvergens szűrők. Az $(X, \mathscr{C})$ párt Cauchy-térnek mondjuk, ha $\mathscr{C}$ Cauchy-struktúra X-en. Ha $(X_1, \mathscr{C}_1)$ és $(X_2, \mathscr{C}_2)$ Cauchy-tér, f pedig az X_1 halmazból az X_2 halmazba vezető leképezés, akkor f-et Cauchy-folytonosnak nevezzük, valahányszor $\mathscr{C}_1$-nek egy $\mathcal{C}$ elemére az $f(\mathcal{C}) = \{f(C) : C \in \mathcal{C}\}$ rács X_2-ben $\mathscr{C}_2$-höz tartozó szűrőt generál. Így a Cauchy-terek és a Cauchy-folytonos leképezések topologikus kategóriát alkotnak a Herrlich-féle értelemben.

A szerző célja az olyan $\Gamma(X)$ függvényrendszerek tulajdonságainak a vizsgálata, amelyek úgy keletkeznek, hogy egy $X = (X, \mathscr{C})$ Cauchy-térben tekintjük az összes Cauchy-folytonos függvényeket, azaz az $(\mathbf{R}, \mathscr{E})$ Cauchy-térbe vezető Cauchy-folytonos leképezéseket, ahol $\mathscr{E}$ a számegyenesen az euklideszi topológiára nézve konvergens szűrőkből áll. A $\Gamma(X)$ függvényosztályok tulajdonságai nagyon hasonlítanak a $C(X)$ osztályok tulajdonságaira; itt a szokásos módon $C(X)$ jelöli az X topologikus téren folytonos valós függvények osztályát.

Például alulírott megmutatta, hogy a $C(X)$ osztályok jellemezhetők egy erős kompozíciózártságnak nevezett tulajdonsággal, viszont egy ennél gyengébb, kompozíciózártság elnevezésű tulajdonság azokat az osztályokat jellemzi, amelyek úgy jönnek létre, hogy egy X-et sűrű altérként tartalmazó Y topologikus teret tekintünk, és az Y-on folytonos valós függvényeknek X-re való megszorításait soroljuk a függvényosztályba. A könyv szerzője mármost megmutatta, hogy a kompozíciózártság tulajdonsága a $\Gamma(X)$ alakú osztályokat is jellemzi. A könyv számos további eredményt tartalmaz a $\Gamma(X)$ osztályokkal kapcsolatban, általánosabban a Cauchy-terek kategóriájára vonatkozóan, s ennek keretében megoldást ad, illetőleg részleges megoldást szolgáltat több olyan problémára, amelyek kompozíciózárt osztályokkal kapcsolatban korábban felvetődtek.

A könyv kitűnő áttekintést ad a címben megjelölt területre vonatkozó eredményekről. A bizonyítások vagy részletesen le vannak írva, vagy a meglévő irodalomból vannak idézve, úgyhogy a témakör iránt érdeklődő olvasó könnyen megismerkedhet a kategóriaelméleti topológiának egy vonzó fejezetével.

Császár Ákos

R. Sivaramakrishnan: Classical theory of arithmetic functions

(Pure and Applied Mathematics: A Series of Monographs and Textbooks/**126**), Marcel Dekker, New York, 1989, 400 oldal

Legyenek *f, g számelméleti függvények*, vagyis a pozitív egész számokon értelmezett komplex értékű függvények. Az ő *konvolúciójuk*, vagy másképpen *Dirichlet-szorzatuk* a $h(n) = \sum_{d/n} f(d)g(n/d)$ kifejezéssel megadott h függvény, szokásos jele $h = f * g$. Sok fontos számelméleti függvény származtatható ilyen módon, például $\sigma(n)$, n osztóinak összege. Ha számelméleti függvényekkel foglalkozunk, akár valamely alkalmazás, például a prímszámtétel elemi bizonyítása végett, akár öncélúan az additív és multiplikatív függvények eloszlásával (ezt nevezik általában „valószínűségi számelmélet"-nek), szükségünk van e művelet legfontosabb tulajdonságaira. (Pl. az én ismertető cikkem [Számelméleti függvények I., *Mat. Lapok* 27 (1976—79)] is ezekkel kezdődik.) De kutathatjuk ezeket az azonosságokat, e művelet általánosításait (pl. többváltozós függvényekre) és rokonait (Cauchy- avagy additív konvolúció, unitér konvolúció stb.) önzetlenül is, elfeledkezve az esetleges analitikus alkalmazásokról — erről szól a könyv. A címben szereplő „klasszikus" helyett helyesebb lett volna talán „algebrai"-t írni, kifejezve, hogy csak a függvények egyenlőségével foglalkozunk, topológiájával alig (egyenlőtlenséget vagy limest a könyvben lámpással kell keresni).

Így általában kevésbé mély, de gyakran érdekes és szórakoztató kérdésekre jutunk. Tudta-e például az Olvasó, hogy a számelméleti függvények halmazában a konvolúciót véve műveletnek érvényes lesz az egyértelmű prímfelbontás (Cashwell—Everett tétele, 2. fejezet 17. tétel)? Vagy hogy Ramanujan τ-függvénye, melyet a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24}$$

sorfejtés definiál, multiplikatív (Mordell tétele, 13. fejezet 116. tétel), valamint (120. tétel, Lehmer), noha $\tau(2), \ldots, \tau(63000)$ összetett, $\tau(63001) = 805\,616\,635\,278\,024\,063\,257\,321\,747$ mégis csak prím?

Sok mindent megtudhatunk a téma történetéről is, amit egyébként nehéz kideríteni. Például, vajon kitől származnak a Dirichlet-konvolúció alaptulajdonságai, melyek mára a matematikai „folklór" részeivé váltak? Aki Dirichlet-re gondolt, nem nyer; a helyes válasz E. T. Bell 1915-ös könyve.

Fejezetcímek: 1. Aritmetikai konvolúciók; 2. A Dirichlet-konvolúció; 3. Egyváltozós multiplikatív függvények; 4. Osztófüggvények; 5. Az Euler-féle φ-függvény; 6. A Möbius-függvény; 7. Kétváltozós multiplikatív függvények; 8. Multiplikatív függvények és véges Abel-csoportok; 9. A Ramanujan-összeg és általánosításai; 10. Körosztási polinomok; 11. Multiplikatív függvények másképpen; 12. A Ramanujan-féle τ-függvény; 13. Speciálisan multiplikatív függvények; 14. Számelméleti függvények Ramanujan-sorfejtése; 15. A (mod r) maradékosztályok algebrája; 16. (mod r) periodikus függvények; 17. Polinomokon értelmezett számelméleti függvények.

Ruzsa Z. Imre

František Latka: Matematikai képletgyűjtemény

5. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989, 150 oldal, 58 Ft

1978-ban, amikor a címben szereplő könyvecske első magyar kiadása megjelent, kissé elmarasztaló bírálatot írtam róla, mert számos megfogalmazási pongyolaságot, fordítási pontatlanságot és sajtóhibát találtam benne. Érdemnek és jó ötletnek tartottam viszont a könyv alakját, mert egy zsebben elférő pici kötet mindig kéznél lehet. A bírálatot eljuttattam a Műszaki Könyvkiadónak, de nyilvános megjelentetésétől eltekintettem, mert a könyvet nem tartottam olyan hézagpótló műnek, amelyre mindenkinek szüksége lehet, hiszen nem tartalmazott olyan ismereteket, amelyek a középiskolákban akkor használt Függvénytáblázatok című könyvben benne ne lettek volna (hibátlanul).

Az azóta eltelt idő alatt Csehszlovákiában megjelent a könyv 12, Magyarországon 5 kiadása, a könyv terjedelme jelentősen megnőtt, a Függvénytáblázatok matematikai képletanyagának mennyisége csökkent, új fordítás készült a javított 10. csehszlovák kiadás alapján, és ezt új szedésről nyomtatták ki.

Összefoglalva: új helyzet állt elő, és ebben az új helyzetben valóban szükség van arra, hogy a kötetre felhívjuk valamennyi érdekelt figyelmét.

A kötetben, melynek eredeti címe: *A matematika minilexikona,* a csehszlovák középfokú és néhány fejezet erejéig a főiskolai oktatásban előforduló matematikai képletek és szerény számban definíciók, tételek szerepelnek.

Ez a gyűjtemény lefedi a hazai középfokú matematika tananyagában előforduló képleteket, ezért a középiskolai tanulók jól felhasználható segédkönyve lehet.

A 35 fejezet ismeretanyaga a számjegyek felsorolásától néhány határozatlan integrál közléséig, az elemi algebrai műveletektől az algebrai struktúrák megemlítéséig, a százalékszámítástól a vektorszámításig terjed. A többszöri javítás és bővítés ellenére még mindig akad néhány olyan hiányosság, illetve hiba, amelyeknek a kiküszöbölése könnyű, és a kötetet teljesebbé és pontosabbá tenné.

Mutatóba megemlítek egy tucat (szerintem) hibát, amelyek között van szerzői, van fordítói hiba, és van sajtóhiba.

1. A Számrendszerek című fejezetben szerepel a 10 néhány nevezetes pozitív egész kitevőjű hatványának a neve (pl. $10^3 = 1$ ezer, $10^{30} = 1$ kvintillió), a negatív egész kitevőjűek közül azonban egy sincs megemlítve. (11. oldal.)

2. A racionális számok definíciója hibás, mert a leírt feltételeken felül az is szükséges, hogy a p/q alakban $q \neq 0$. (14. oldal.)

3. Nem értem a következő mondatot: „Nullától különböző szám osztása nullával nem értelmezett, mivel nincs jelentése. (19. oldal.)

5. A számsorozat felsorolt három tulajdonsága ma már a középiskolában sem elég egy elégséges feleléthez. Egyébként a sorozatnak hol eleme, hol tagja van. (61. oldal.)

6. Két vektor hajlásszögén a két lehetséges szög közül a 180°-osnál nem nagyobbat értjük. Ezért az egyik mintafeladat eredménye: „vagy 295° 11'" hibás. (82. oldal.)

7. Azt, hogy az azonos méretű négyzetes mátrixok szorzása nem kommutatív, helyesen állapítja meg a szerző. De hogy ezt a tényt az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$ (ahol $\mathbf{A}^T$ jelenti az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltját) egyébként hamis állítás miért bizonyítaná, azt nem tudom elképzelni. (87. oldal.)

8. A könyvben több helyen szó van a lineáris függetlenségről. De hogy ez micsoda, az ebből a könyvből nem derül ki. (88—92. oldal.)

9. Amennyiben a P_1P jel a 106. oldalon is a P_1 és P pont közötti szakasz hosszát jelenti,

akkor a szakasz osztópontjának a koordinátáira vonatkozó képletek hibásak. Ha nem ezt jelenti, akkor meg kell mondani, hogy mit.

10. A hatványfüggvények deriválásánál az n hatványkitevőre tett n egész és $n \leqq 0$ feltétel (?) miért szükséges? Ismeretes, hogy tetszőleges valós kitevőjű hatványfüggvényt is tudunk differenciálni! (113. oldal.)

11. A síkbeli görbe vonal ívhosszának második képlete hibás. (126. oldal.)

12. „A tízes alapú logaritmusok mantisszáit a függvénytáblázatból keresgetjük ki." (57. oldal.) Ha csak keresgetjük, de nem keressük meg, akkor mire megyünk a tudományunkkal?

A felsorolt (és fel nem sorolt) kifogások könnyen tisztázhatók és kijavíthatók. Ez a kétségkívül népszerű kötet (és minden olvasója) megérdemelné, hogy a legközelebbi kiadása végre már minden vonatkozásában lehetőleg hibátlan legyen.

Scharnitzky Viktor

V. N. Bolhovitinov—B. I. Koltovoj—I. K. Lagorszkij: Furfangos fejtörő feladatok

Műszaki Könyvkiadó, Budapest és Mir Könyvkiadó, Moszkva, 1989, 150 oldal, 98 Ft

Nem szorul bizonyításra, hogy a rádió, a tv vetélkedői és számos hetilap fejtörőket is közlő rovatainak a feladatai népszerűek. Noha a nyilvánosság elé csak kevesen léphetnek, mégis nagyon sokan vannak, akik csak a játék kedvéért szeretik képességeiket, gondolkodásmódjukat, leleményüket próbára tenni és kisebb-nagyobb társaságban másokkal összemérni. Évente több tízezer diák kerül abba a korba, amelyben egy-egy fejtörő feladat sikeres megoldása agytornát is jelent, tapasztalatokat is ad és szórakozást is nyújt. Ezért fontos, hogy a könyvpiacon mindig található legyen legalább egy olyan könyv, amely ezt a nemes szórakozást elégíti ki. Az elmúlt két évtizedben többször több év is eltelt anélkül, hogy ilyen típusú könyv kapható lett volna, az utóbbi két évben azonban — mintha a kiadók összebeszéltek volna (vagy éppen ellenkezőleg?) — több ilyen könyv is napvilágot látott; ezek közül a legfrissebb a címben idézett mű.

A könyvben közölt feladatokat két nagy csoportba sorolták a szerzők. Az *Esztorna* című csoportba kerültek a kézügyességet, a figyelmet, a megfigyelő képességet, a kombinatív készséget igénylő és próbára tevő feladatok, továbbá Szemfüles felügyelő legújabb nyomozásai, amelyekben az ellentmondás(ok) felderítése és a tettes leleplezése a kitűzött cél. Ez összesen 159 feladat. A *Logikai feladatok* című fejezet 38 változatos logikai feladatot, 30 számrejtvényt és 10 játékot tartalmaz. A *Megoldások* című részből természetesen minden kiderül.

A kitűzött feladatok nehézségi foka nagyon változatos. A még olvasni nem tudó gyerekeknek szóló és pl. ábrák megfigyelését igénylő egyszerű feladatoktól kezdve a bonyolult logikai kapcsolatok kibogozását igénylő feladatokig mindenféle fokozat megtalálható. A bemutatott játékok között van ismert, például a japán dámajáték, de megemlítünk néhány olyat, amelynek magyar nyelvű leírása valószínűleg ősbemutatónak számít. Ilyen például J. Kamzolov sakkfocija, egy módosított Go-játék, az afrikai bolotudu-játék, egy szenegáli dámajáték, a szudáni szidzsa-játék, Piet Hein kockajátéka.

Mivel furfangos feladatok megoldása vagy éppen a játék a világ legkomolyabb tevékenységei közé tartozik, ezért nagyon fontos, hogy az ezzel foglalkozó könyvek szövege szakszerű, világos, egyértelmű, érthető, pontos és sajtóhibáktól lehetőleg mentes legyen. Sőt fordítás esetén az eredeti könyv felfedezett hibáit is illik kijavítani. Ezeket a követelményeket azonban ez a könyv sajnos nem mindenben elégíti ki. Néhány példa különböző típusú hibákra.

1. A 157. feladat szövegében nem kapjuk meg azt a döntő információt (ti. azt, hogy a közelben patak folyik, vagy hogy a beszélgetés a tetthelyen történik), ami nélkül a feladatot az olvasó nem tudja megoldani. (Az eredeti könyv hibája.)

2. (7. feladat.) „...melyik kör illik pontosan a négyzetbe?" — mit jelent a „pontosan"? Azt, hogy belülről érinti? Akkor miért nem ezt mondjuk? És ha nem érinti, akkor pontatlanul illik bele? (Fordítási pontatlanság.)

3. (41. feladat.) „A kék sávnak mindig alul kell lennie." Az ábra egyszínű, nincs kék sáv. (Szerkesztői hiba.)

4. (53. feladat.) „Próbáld meg nagyság szerint sorba szedni őket" — nem világos utasítás, a számok értéke is és a számkép nagysága is változó az ábrán, továbbá a sorbaszedés pontosan mit is jelent? Szabad (kell?) például a megtalált számot aláhúzni, vagy le kell írni? (Szerkesztői hiba.)

5. (54. feladat.) „A számok alakja sem egyforma." Ez eleve így van, különböző szám — különböző jel. Itt azonban arról van szó, hogy az *azonos* (értékű) számok alakja sem egyforma. (Fordítási hiba.)

6. (56. feladat.) „Keresd a szabályt!" Mire, milyen szabályt? (Értelmezési hiba.)

7. (67. feladat.) „A GHAC, BADG, GEDF betűkombinációk." Ezek nem kombinációk, hanem variációk, mert a betűk sorrendje is számít. (Szakmai hiba.)

8. (80. feladat.) „Hány kockából áll ez a test és hány kockát vettünk ki belőle?" Miből vettük ki? Mi az eredeti test? Nem mindegy! (Fordítási hiba.)

9. (95. feladat.) A feladat és a megoldás ábrája egészen más, a kettő nem tartozik össze. (Rajzolói hiba.)

10. (100—101. feladatok.) A feladatok ábrái fel vannak cserélve. (Szerkesztői hiba.)

11. (143. feladat.) A feladat magyar szövege értelmetlen. Itt arról van szó, hogy legalább négyféle különböző módon kell feldarabolni a téglalapot az adott feltételek mellett. (Fordítási hiba.)

12. (47. feladat megoldása.) A rajz hibás, mert a bal felső mezőben tartózkodó macska a lerajzolt úton láthatja az egeret. (Rajzolói hiba.)

13. (56. feladat megoldása.) A megoldás 4. pontja hibás, ui. a folyó a képen balról jobbra folyik, lásd a halász zsinegét. A 4. pont állítása nem igaz, l. a Duna jobb, ill. bal partját a Dunakanyarban. (Az eredeti ábra fordítva került a könyvbe. Szerkesztői hiba.)

15. (62. feladat megoldása.) A megoldás szövege mond egy nehezen követhető eljárást (pl. „megfelelő síkidomot". Milyet? Miért éppen ezt?) minden indoklás nélkül. Ez nem tekinthető megoldásnak. (Az eredeti könyv hibája.)

16. (63. feladat megoldása.) „Ez a prímszámok sorozata." Ez így nem igaz. Ha leírunk egymás után 9 prímszámot majd három pontot, ezzel még nem adtuk meg a prímszámok sorozatát, mert más (további) utasítás híjján a 10. elemtől kezdve azt a számot választhatjuk elemnek, amelyik éppen tetszik. Az más kérdés, hogy mindmáig nem sikerült olyan $a(n)$ képletet találni, amely az n sorszám függvényében megadná bármely (egyébként valóban végtelen sok) prímszámot. (Szakmai hiba.)

17. (76. feladat megoldása.) A megoldásban félrevezető utalás van. A 2-nek az *á* felel meg és nem a *b*. (Szerkesztői hiba.)

18. (77. feladat megoldása.) Az első kurzív *l*-es fölösleges. (Sajtóhiba.)

19. (88. feladat megoldása.) A „felét" helyett „egyik részét", mert nem az összes, sőt pontosan csak egy síkidomot kell félbevágni, a többit csak kettévágni — ahogyan ez a kitűzésben is szerepel. (Szakmai hiba.)

20. (28. feladat.) „Szomszédos vagy sarkával érintkező." Egy síkidomnak csúcsai vannak, nem sarkai. (Fordítói és szakmai hiba.)

Már ez a néhány bemutatott hiba is azt bizonyítja, hogy célszerű lett volna a könyv magyar kiadásával foglalkozó csoportot egy matematikussal is bővíteni, aki talán idejében észre vette volna ezeket a könnyen kijavítható és ezért nagyon is bosszantó hibákat is.

A könyvet két színnel nyomtatták és ez nemcsak a könyv esztétikai értékét növelte, hanem a két színnek fontos szerepe volt a feladatok kitűzhetőségében, megfogalmazásában, szemléltetésében és egyes esetekben segítséget nyújtott a megoldásukhoz.

A könyv elsősorban az agytornára rendkívül fogékony tizenéveseknek ajánlható, de sok jó ötletet meríthetnek belőle tanáraik és a gondolkodni szerető idősebbek is.

Scharnitzky Viktor

ОБЗОР КНИГ

BOOK REVIEWS

ÚJ KÖNYVEK, 1988

Az alábbi felsorolásban azoknak a matematikai tárgyú könyveknek az adatai szerepelnek, amelyek 1988-ban jelentek meg Magyarországon. A jegyzékben általános és középiskolai tankönyvek, felsőoktatási és tanfolyami jegyzetek, továbbá intézmények saját kiadásban megjelent kiadványai általában nem szerepelnek.

ARNOLD, V. I.: *A differenciálegyenletek elméletének geometriai fejezetei,* Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 276 oldal, 128 Ft.

ÁBRAHÁM ISTVÁN—BEDŐ LÁSZLÓ—CZÉTÉNYI CSABA—IFJ. FRIGYESI MIKLÓS—JUHÁSZ ATTILA—KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika a felvételi vizsgára készülők számára* (4. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 584 oldal, 95 Ft.

ANDRÁSFAI BÉLA: *Versenymatek gyerekeknek,* Általános iskolai szakköri füzet (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 168 oldal, 27 Ft.

ARATÓ PÉTER: *Logikai rendszerek tervezése* (Egyetemi tankönyv), (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 475 oldal, 52 Ft.

BARTHA GÁBOR—BOGDÁN ZOLTÁN—CSÚRI JÓZSEF—DÚRÓ LAJOSNÉ DR.—DR. GYAPJAS FERENCNÉ—DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ—DR. PINTÉR LAJOSNÉ: *Matematika feladatgyűjtemény I.* a középiskolák tanulói számára, (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 556, oldal, 21 Ft.

BARTHA GÁBOR—BOGDÁN ZOLTÁN—DÚRÓ LAJOSNÉ DR.—GYAPJAS FERENCNÉ—HACK FRIGYES—DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ—DR. KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika feladatgyűjtemény II.* a középiskolák tanulói számára, (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 487 oldal, 19 Ft.

BARTHA GÁBOR—BOGDÁN ZOLTÁN—DR. CSÚRI JÓZSEF—DÚRÓ LAJOSNÉ DR.—DR. GYAPJAS FERENCNÉ—DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ—DR. PINTÉR LAJOSNÉ: *Tanári kézikönyv, Matematika feladatgyűjtemény I.,* Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 476 oldal, 105 Ft.

BÁLINTNÉ SZENDREI MÁRIA—CZÉDLI GÁBOR—SZENDREI ÁGNES: *Absztrakt algebrai feladatok,* Egyetemi tankönyv, (2. jav. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 504 oldal, 41 Ft.

BÁN ISTVÁN: *Biomathematics and its application in plant cultivation,* Budapest, 1988, Akadémiai Kiadó, 204 oldal, 160 Ft.

BENTLEY, JON LOUIS: *A programozás gyöngyszemei,* Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 175 oldal, 95 Ft.

BÉKEFI ZSUZSA: *Gráfelméleti feladatgyűjtemény,* Veszprém, 1988, Megyei Pedagógiai Intézet, 77 oldal, 65 Ft.

BOJTÁR IMRE—MOLNÁR GYÖRGY—NAGY TAMÁS: *A végeselem-módszer alkalmazása síkbeli feladatokra,* Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 142 oldal, 45 Ft.

BORSÁNYI KATALIN—HACK FRIGYES: *Matematika feladatgyűjtemény III.* a középiskolák tanulói számára, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 80 oldal, 3,50 Ft.

BOZSÁKI GÉZA: *Kirándulás a számítógépek szigetére,* Utazások Matematikaországban 6, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 96 oldal, 35 Ft.

BURRIS, S.—SANKAPPANAVAR, H. P.: *Bevezetés az univerzális algebrába,* Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 347 oldal, 46 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához,* (5. kiadás, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 424 oldal, 58 Ft.

CSÁSZÁR ÁKOS: *Valós analízis 1—2 kötet,* (2. kiadás), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 521, 668 oldal, 56, 70 Ft.

DEÁK KÁLMÁNNÉ: *Ajánlás a gimnáziumi matematika szabad sáv tananyagához,* Salgótarján, 1988, Megyei Pedagógiai Intézet, 158 oldal, ár nélkül.

DÉVÉNYI DEZSŐ—GULYÁS OTTÓ: *Matematikai statisztikai módszerek a meteorológiában*, Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 443 oldal, 49 Ft.

DÓSA ISTVÁN (összeállította): *Munkafüzet a matematika-fizika nyári tábor résztvevői számára*, Veszprém, 1988, Megyei Pedagógiai Intézet, 93 oldal, 30 Ft.

DÖMÖTÖR FERENC—HUSZTHY LÁSZLÓ—VINCZE ENDRE: *Valószínűségszámítási példatár*, (6. kiadás), Miskolc, 1988, Nehézipari Műszaki Egyetem, 33 oldal, ár nélkül.

DUKÁTI FERENC: *Termékek matematikai statisztikai ellenőrzése*, Budapest, 1988, BME Mérnök Továbbképző Intézet, 159 oldal, 120 Ft.

FÁBOSNÉ ZÁCH ENIKŐ: *Zsebszámológépek használata a 4. osztályos matematika-tantervi anyag feldolgozásához*, Budapest, 1988, Országos Pedagógiai Intézet, 60 oldal, 18 Ft.

FORGÓ, F.: *Nonconvex programming*, Budapest, 1988, Akadémiai Kiadó, 187 oldal, ár nélkül.

GÁDOR ENDRÉNÉ—GYAPJAS FERENCNÉ—HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA—DR. KORÁNYI ERZSÉBET—PÁLMAI LÓRÁNT—POGÁTS FERENC—DR. REIMAN ISTVÁN—DR. SCHARNITZKY VIKTOR: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*, (5. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 478 oldal, 58 Ft.

GERŐCS LÁSZLÓ: *A Fibonacci-sorozat általánosítása*, Középiskolai szakköri füzet, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 147 oldal, 32 Ft.

GREENSPAN, D.—RÓZSA, P. (editors): *Numerical methods*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 50, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1988, János Bolyai Mathematical Society and Elsevier Science Publishers B. V., 688 oldal, 1000 Ft.

GROSSMANN, W.—MOGYORÓDI, J.—VINCZE, I.—WERTZ, W.: *Probability theory and mathematical statistics with applications*, Proceedings of the 5th Pannonian Symposium on Mathematical Statistics, Budapest, 1988, Akadémiai Kiadó, 475 oldal, ár nélkül.

HAJNAL, A.—LOVÁSZ, L.—SÓS, V. T. (editors): *Combinatorics*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 52, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1988, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publ. Co., 596 oldal, 1500 Ft.

HAJÓS GYÖRGY—NEUKOMM GYULA—SURÁNYI JÁNOS: *Matematikai versenytételek II. rész*, (3. átdolgozott és kibővített kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 228 oldal, 46 Ft.

IMRECZE ZOLTÁNNÉ—REIMAN ISTVÁN—URBÁN JÁNOS: *Fejtörő feladatok felsősöknek, általános iskolai tanulók számára*, (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 312 oldal, 48 Ft.

KÁLOVICS FERENC: *Numerikus módszerek differenciálegyenletek megoldásához*, (2. kiadás), Miskolc, 1988, Nehézipari Műszaki Egyetem, 61 oldal, ár nélkül.

KIRILLOV, A. A.—GVISIANI, A. D.: *Feladatok a funkcionálanalízis köréből*, Egyetemi segédkönyv, (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 391 oldal, 51 Ft.

KLEIN, SÁNDOR: *The effects of modern mathematics*, Budapest, 1988, Akadémiai Kiadó, 436 oldal, 550 Ft.

KNUTH, D. E.: *A számítógép-programozás művészete 3, Keresés és rendezés*, Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 761 oldal, 249 Ft.

KORÁNYI ERZSÉBET—BARTHA—GÁBOR—GYAPJAS FERENCNÉ—HACK FRIGYES—BOGDÁN ZOLTÁN—DÚRÓ LAJOSNÉ DR.—KÁNTOR SÁNDORNÉ DR.: *Tanári Kézikönyv, Matematika feladatgyűjtemény II.*, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 370 oldal, 95 Ft.

KOSTER, C. H. A.: *Programozás felülnézetben*, Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 267 oldal, 150 Ft.

KOVÁCS MAGDA: *Angol—magyar mikroszámítógép-mikroelektronikai szótár*, Budapest, 1988, Akadémiai Kiadó, 253 oldal, 197 Ft.

LUKÁCS OTTÓ: *Gyermekmatek*, Utazások Matematikaországban, (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 96 oldal, 24 Ft.

LUKÁCS OTTÓ: *Valószínűségszámítás feladatokkal*, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 268 oldal, 70 Ft.

NAGY BARNABÁS: *Az axonometria felfedezése. Térgeometria gyerekeknek*, Utazások Matematikaországban, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 83 oldal, 1 melléklet, 40 Ft.

NOVÁK LÁSZLÓNÉ: *Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához, 5—8 osztály*, Budapest, 1987, Országos Pedagógiai Intézet, 49 oldal, ár nélkül.

NOVÁK LÁSZLÓNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 2. osztályos anyagának tanításához*, (5. kiadás) Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 287 oldal, 46 Ft.

NOVÁK LÁSZLÓNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 7. osztályos anyagának tanításához*, (3. kiadás) Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 436 oldal, 65 Ft.

PAPERT, SEYMOUR: *Észrengés. A gyermeki gondolkodás titkos útjai*, Budapest, 1988, Számítástechnika-alkalmazási Vállalat, 166 oldal, 160 Ft.

PETI ÉVA (szerk.): *Gond? Oldd meg!*, Matematika és fizika feladatmegoldó verseny általános iskolásoknak, Kecskemét, 1988, Megyei Pedagógiai Intézet, ár nélkül.

POPPER GYÖRGY: *Bevezetés a végeselem-módszer matematikai elméletébe*, Budapest, 1987, BME Mérnök Továbbképző Intézet, 142 oldal, 150 Ft.

PÓLYA GYÖRGY: *A matematikai gondolkodás művészete 1. kötet: Indukció és analógia,* Budapest, 1988, Gondolat, 308 oldal, 80 Ft.

RADNAI GYULÁNÉ SZENDREI JULIANNA: *Szakközépiskolai versenyek matematikafeladatai mindenkinek,* Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 177 oldal, 50 Ft.

RUZSA IMRE: *Logikai szintaxis és szemantika,* Budapest, 1988, Akadémiai Kiadó, 277 oldal, 98 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Válogatott egyetemi felvételi feladatok matematikából (1966—1985),* Budapest, 1988, 553 oldal, 112 Ft.

SMULLYAN, RAYMOND: *Mi a címe ennek a könyvnek? Drakula rejtélye és más logikai feladványok,* Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 247 oldal, 69 Ft.

STEGENA LAJOS: *Vetülettan,* Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 221 oldal, 28 Ft.

STROMMER GYULA: *Geometria,* Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 722 oldal, 75 Ft.

SZÁSZ GÁBOR: *Matematika I.* (Vektorok, komplex számok, egyváltozós valós függvények), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, 437 oldal, 48 Ft.

SZABÓ, L.—SZENDREI, Á. (editors): *Lectures in universal algebra,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 43, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1987, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publ. Co., 655 oldal, 600 Ft.

SZELEZSÁN JÁNOS: *Fejezetek a matematikából számítástechnikusoknak,* Budapest, 1988, SZÁMALK, 104 oldal, 230 Ft.

SZENTHE, J.—TAMÁSSY, L. (editors): *Topics in differentialgeometry I.—II.,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 46, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1988, János Bolyai Mathematical Society and Elsevier Science Publ., 1377 oldal, 1800 Ft.

SZERÉNYI TIBOR: *Analízis,* Tanárképző főiskolai tankönyv, (4. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 578 oldal, 61 Ft.

SZLUKA EMIL—SCHNEIDER LÁSZLÓ (szerk.): *Természettudományos és műszaki ki kicsoda? 2. kötet,* Budapest, 1988, OMIKK, 400 oldal, 250 Ft.

SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA: *Mátrixok az általános iskolai tanulók számára,* Általános iskolai szakköri füzet, (3. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 125 oldal, 28 Ft.

SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA (szerk.): *Kézikönyv a matematika 8. osztályos anyagának tanításához,* (3. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 467 oldal, 68 Ft.

TATÁR ISTVÁN: *Feladatok az úttörő-matematikusok vetélkedőin 2. kötet,* Általános és középiskolai tanulók számára, Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 330 oldal, 50 Ft.

Témazáró feladatlap ajánlatok matematikából a szakmunkásképző iskolák számára, Veszprém, 1988, Megyei Pedagógiai Intézet, 41 oldal, 40 Ft.

T. TÓTH SÁNDOR—SZABÓ ÁRPÁD: *Matematikai műveltségünk keretei. Középkor és reneszánsz,* Budapest, 1988, Gondolat, 209 oldal, 62 Ft.

UJVÁRI ISTVÁN: *Felkészülés és felzárkózás matematikából az általános és középiskolai tanulók számára,* Általános iskolai szakköri füzet, (5. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 158 oldal, 32 Ft.

UJVÁRI ISTVÁN: *Egyedül készülök a felvételire! Összefoglaló matematikából* (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 380 oldal, 56 Ft.

VILENKIN, N. JA.: *A végtelen kutatása,* Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 227 oldal, 40 Ft.

Scharnitzky Viktor

НОВЫЕ КНИГИ, 1988 Г.

NEW BOOKS IN 1988

ÚJ KÖNYVEK, 1989

Az alábbi felsorolásban azoknak a matematikai tárgyú könyveknek az adatai szerepelnek, amelyek 1989-ben jelentek meg Magyarországon. A jegyzékben általános és középiskolai tankönyvek, felsőoktatási és tanfolyami jegyzetek, továbbá intézmények saját kiadásban megjelent kiadványai nem szerepelnek.

ÁBRAHÁM ISTVÁN—BEDŐ LÁSZLÓ—CZETÉNYI CSABA—IFJ. FRIGYESI MIKLÓS—JUHÁSZ ATTILA—KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika a felvételi vizsgára készülők részére* (5. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 584 oldal, 95 Ft.

BAILLIF, JEAN-CLAUDE: *Logikai sziporkák*, Budapest, 1989, Gondolat, 196 oldal, 70 Ft.

BÁLINT ÁGNES—TÁTRAI FERENC: *Statisztikai eljárások Commodore 64-esen*, Budapest, 1989, Novotrade, 144 oldal, 390 Ft.

BEREZNAY GYULA—VARECZA ÁRPÁD: *Tanárképző főiskolák matematikai versenyei III. 1980—1985*, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 130 oldal, 49 Ft.

BIBÓ ISTVÁN: *A számok jelentése és a gondolkodás alapformáinak története*, Budapest, 1989, Metrum, 95+3 oldal, 68 Ft.

BOLHOVITINOV, V. N.—KOLTOVOJ, B. I.—LAGOVSZKIJ, I. K.: *Furfangos fejtörő feladatok*, Budapest, 1989, Műszaki Könyvkiadó és Moszkva, 1989, Mir Könyvkiadó, 150 oldal, 98 Ft.

CSÁSZÁR ÁKOS: *Valós analízis I. kötet*, (3. kiadás), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 521 oldal, 56 Ft.

CSERNYÁK LÁSZLÓ (szerk.): *Analízis, Matematika üzemgazdászoknak*, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 287 oldal, 29 Ft.

CZAKÓ JÁNOSNÉ—LEVELEKI JÓZSEFNÉ—POPOVICS KATALIN: *Felmérési feladatok az általános iskola 1—4. osztálya számára számtan-algebra és geometria témakörben*, Nyíregyháza, 1989, Szabolcs-Szatmár Megyei Pedagógiai Intézet, 70 oldal, ár nélkül.

DENKINGER GÉZA: *Valószínűségszámítás*, Egyetemi tankönyv, (3. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 284 oldal, 34 Ft.

DENKINGER GÉZA: *Analízis*, Egyetemi tankönyv, (4. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 414 oldal, 46 Ft.

DENKINGER GÉZA: *Valószínűségszámítási gyakorlatok*, Egyetemi segédkönyv, (4. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 340 oldal, 45 Ft.

DIENES ZOLTÁN kéziratát VARGA TAMÁS dolgozta át: *Dienes professzor játékai*, Budapest, 1989, Műszaki Könyvkiadó, 160 oldal+10 db táblázat, 98 Ft.

DOBÓ ANDOR: *Euklidész hatása a tudományos fejlődésre*, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 88 oldal, 32 Ft.

FARKAS MIKLÓS: *Speciális függvények*, I—II., Magas szinten könnyedén, Matematika, Budapest, 1989, LSI ATSZ, 103, ill. 107—239 oldal, 180 Ft, ill. 210 Ft.

FRIED ERVIN: *Általános algebra*, Egyetemi tankönyv, (2. javított kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 338 oldal, 39 Ft.

FÜSTÖS LÁSZLÓ—KOVÁCS ERZSÉBET: *A számítógépes adatelemzés statisztikai módszerei*, Egyetemi tankönyv, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 380 oldal, 43 Ft.

GÁCS PÉTER—LOVÁSZ LÁSZLÓ: *Algoritmusok*, Egyetemi tankönyv, (3. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 179 oldal, 14 Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ—GYAPJAS FERENCNÉ—HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA—DR. KORÁNYI ERZSÉBET—PÁLMAI LÓRÁNT—POGÁTS FERENC—DR. REIMAN ISTVÁN—DR. SCHARNITZKY VIKTOR: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*, (5. és 6. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 478 oldal, 58 Ft.

MTA Könyvtára
Periodika 19 92/2/54.

GÁSPÁR LÁSZLÓ—TEMESI JÓZSEF: *Matematikai programozási gyakorlatok,* Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 416 oldal, 56 Ft.

HAAS ANDRÁS: *A prím kitevőjű Fermat-egyenletekre vonatkozó tételek,* Budapest, 1989, Datamax, 26 oldal, ár nélkül.

HACK FRIGYES: *Tanári kézikönyv a Matematika feladatgyűjtemény III. c. kötethez,* Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 204 oldal, 80 Ft.

HAJDU SÁNDOR (szerk.): *Kézikönyv a matematika 5. osztályos anyagának tanításához,* Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 449 oldal, 65 Ft.

HAJDU SÁNDOR (szerk.): *Kézikönyv a matematika 6. osztályos anyagának tanításához,* Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 431 oldal, 86 Ft.

HEGYVÁRI NORBERT—POGÁTS FERENC: *Középiskolai matematikai versenyek 1985—1987,* Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 409 oldal, 99 Ft.

HETÉNYI PÁLNÉ (szerk.): *Számítástechnikai feladatok 2000-ig,* Budapest, 1989, OMIKK, 369 oldal, 138 Ft.

IMRECZE ZOLTÁNNÉ: *Aki mer, az nyer!* Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 299 oldal, 99 Ft.

International Congress on Mathematical Education (6) Budapest, 1988, Budapest, 1989, Bolyai János Mathematical Society, 220 pp.

JÁNOSSY LAJOS—TASNÁDI PÉTER: *Vektorszámítás 2. kötet, Vektorok és tenzorok differenciálása,* Egyetemi tankönyv, (2. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 253 oldal, 31 Ft.

JEGOROV, I. P.: *Geometria,* Egyetemi segédkönyv, (2. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 320 oldal, 43 Ft.

KASZATKIN, V. N.—VLADÜKINA, L. I.: *Algoritmusok és játékok,* Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 96+XVI oldal, 77 Ft.

KÁTAI IMRE: *Szabályos viselkedésű aritmetikai függvények,* Akadémiai székfoglaló, 1985. október 30., Budapest, 1989, Akadémiai Kiadó, 96 oldal, 30 Ft.

KATZ SÁNDOR: *Függvények korszerű felfogásban,* Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 95 oldal, 45 Ft.

KUPCSIKNÉ FITUS ILONA—SZELEZSÁN JÁNOS: *Matematikai feladatok gyűteménye,* Budapest, 1989, SZÁMALK, 124 oldal, 150 Ft.

KÓSA ANDRÁS: *Optimalizálási eljárások I—II. rész,* Magas szinten könnyedén, Matematika, Budapest, 1989, LSI ATSZ, 128 oldal, 195 Ft. és 101 oldal, 152 Ft.

KOVÁCS JÓZSEF—TAKÁCS GÁBOR—TAKÁCS MIKLÓS: *Analízis,* Főiskolai tankönyv, (2. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 471 oldal, 45 Ft.

LATKA, FRANTIŠEK: *Matematikai képletgyűjtemény,* (5. kiadás), Budapest, 1989, Műszaki Könyvkiadó, 150 oldal, 58 Ft.

LŐRINCZ PÁL—PETRICH GÉZA: *Ábrázoló geometria,* Egyetemi tankönyv, (4. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 323 oldal, 53 Ft.

MAGÓCS JÁNOSNÉ: *Az alsó tagozatos matematika tanterv teljesítésének vizsgálata Nógrád megye speciális (kisegítő) iskoláiban, osztályaiban,* Salgótarján, 1989, Nógrád Megyei Pedagógiai Intézet, 48 oldal, ár nélkül.

MÁRKUSZ ZSUZSA—MÁRKUSZ GÁBOR: *Logic puzzles and logic programming,* Budapest, 1989, SZTAKI, 127 oldal, ár nélkül.

Matematikai módszerek a meteorológiában, A Meteorológia Tudományos Napok előadásainak összefoglalója, Budapest, 1988, OMSZ, 27 oldal, ár nélkül.

MAYERNÉ BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: *Tankönyvi útmutató az I. osztályos matematika munkatankönyvhöz, Gimnázium,* (3. átdolgozott kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 94 oldal, 35 Ft.

MEGYESI LÁSZLÓ—PELLER JÓZSEF: *Számsorozatok, számosság, integrálszámítás,* Kísérlettel megalapozott didaktikai megoldásrendszer, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 272 oldal, 73 Ft.

B. MÉHES VERA: *Ugyanannyi,* Fejezetek a Számlépcső és a Számlétra könyvekből, Budapest, 1989, Optimum, 47 oldal, 110 Ft.

MOLNÁR EMIL: *Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947—1970,* Feladatok, megoldások, jegyzetek, Egyetemi segédkönyv, (4. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 580 oldal, 72 Ft.

NAGY FERENC—NAGY DÉNES (főszerkesztők): *Magyarok a természettudomány és technika történetében 2. kötet,* Budapest, 1989, 319 oldal, 298 Ft.

OBÁDOVICS JÓZSEF GYULA: *Közönséges differenciálegyenletek 1—2.,* Magas szinten könnyedén, Matematika, Budapest, 1989, LSI ATSZ, 123 oldal, 185 Ft, ill. 92 oldal, 142 Ft.

OBÁDOVICS JÓZSEF GYULA: *Lineáris algebra 1—2.,* Magas szinten könnyedén, Matematika, Budapest, 1989, LSI ATSZ, 85 oldal, 123 Ft, ill. 125 oldal, 181 Ft.

PÉNZES ISTVÁN (szerk.): *Évfordulóink a műszaki és természettudományokban, 1990,* Budapest, 1989, MTESZ, 168 oldal, 100 Ft.

PÓLYA GYÖRGY: *A matematikai gondolkodás művészete,* 2. kötet: *A plauzíbilis következtetés,* Budapest, 1989, Gondolat, 237 oldal, 80 Ft.

RÁBAI IMRE: *Feladatok a matematika felvételi előkészítő tanfolyamokhoz*, Budapest, 1988, BME Mérnöktovábbképző Intézet, 147 oldal, 115 Ft.

RÁCZ JÁNOS: *Matematika II.*, A gimnáziumi anyag egy lehetséges feldolgozása, Budapest, 1989, MM, 208 oldal, 135 Ft.

RECSKI ANDRÁS: *Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and in Statistics*, Budapest, 1989, Akadémiai Kiadó, 531 oldal, 950 Ft.

RÉDEI LÁSZLÓ: *Endliche p-Gruppen*, Budapest, 1989, Akadémiai Kiadó, 304 oldal, 380 Ft.

REIMANN József: *Mathematical Statistics with Application in Flood Hydrology*, Budapest, 1989, Akadémiai Kiadó, 329 oldal, 425 Ft.

REIMANN JÓZSEF—TÓTH JULIANNA: *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika*, Főiskolai tankönyv, (2. kiadás), Budapest, 1989, 269 oldal, 27 Ft.

RÉNYI ALFRÉD: *Valószínűségszámítás*, Egyetemi tankönyv, (5. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 510 oldal, 60 Ft.

RIESZ FRIGYES—SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Funkcionálanalízis*, Egyetemi tankönyv, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 534 oldal, 67 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Matematikai képletgyűjtemény főiskolásoknak*, Budapest, 1989, Műszaki Könyvkiadó, 275 oldal, 98 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Vektorgeometria és lineáris algebra*, Főiskolai tankönyv, (2. javított és bővített kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 263 oldal, 27 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR (szerk.): *Matematikai feladatok*, Főiskolai segédkönyv, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 400 oldal, 40 Ft.

SELÉNYI MIKLÓS (szerk.): *Reprezentatív tudásszintmérés matematikából Baranya megye általános iskoláinak 5. és 8. osztályaiban 1987/88 tanév, I—II.*, Pécs, 1989, Baranya Megyei Pedagógiai Intézet, 84+103 oldal, ár nélkül.

SZAMARSZKIJ, A. A.: *Bevezetés a numerikus módszerek elméletébe*, Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 271 oldal, 38 Ft.

SZARKA ZOLTÁN: *Végtelen sorozatok és sorok 1—2. rész*, Nyitott rendszerű oktatási segédlet, Budapest, 1989, LSI ATSZ, 61 oldal, 88 Ft, ill. 117 oldal, 147 Ft.

SZARKA ZOLTÁN: *Vektoranalízis és tenzoralgebra*, Magas szinten könnyedén, Matematika, Budapest, 1989, LSI ATSZ, 259 oldal, 161 Ft.

SZARKA ZOLTÁN: *Komplex függvénytan 1—2.*, Magas szinten könnyedén, Matematika, Budapest, 1989, LSI ATSZ, 91 oldal 142 Ft, ill. 92—207 oldal, 160 Ft.

SZÁSZ GÁBOR: *Matematika 2., Többváltozós és vetorfüggvények, lineáris algebra, komplex függvények, algebrai egyenletek*, Egyetemi tankönyv, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 442 oldal, 49 Ft.

SZÁSZ GÁBOR: *Matematika 3., Differenciálegyenletek, valószínűségelmélet*, Egyetemi tankönyv, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 351 oldal, 40 Ft.

SZENDREI JÁNOS: *Algebra és számelmélet*, Tanárképző főiskolai tankönyv, (4. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 475 oldal, 51 Ft.

Természettudományi Kislexikon, (3. bővített kiadás), Budapest, 1989, Akadémiai Kiadó, 1285 oldal, 400 Ft.

UJVÁRI ISTVÁN: *Felkészülés és felzárkózás matematikából az általános és középiskolai tanulók számára*, Általános iskolai szakköri füzet, (6. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 158 oldal, 32 Ft.

ZALAI ERNŐ: *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba*, Budapest, 1989, Közgazdasági és Jogi Kiadó, 389 oldal, 107 Ft.

ZÖLDNÉ ROSKA MARIETTA (szerk.): *A geometria modellezése és szemléltetése*, Budapest, 1989, OMIKK, 80 oldal, 220 Ft.

Scharnitzky Viktor

НОВЫЕ КНИГИ, 1989 Г.

NEW BOOKS IN 1989

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

СОДЕРЖАНИЕ

Научные труды Ференца Саса (1931—1989) 233
Д. Штроммер: Йожеф Кюршак (1864—1933) 239
Т. Шмидт: Об алгебраической деятельности Йожефа Кюршака 247
Т. Шмидт: Эрвину Фриду 60 лет 249
М. Хорват, И. Йо и И. Салкаи: О «принципе Банаха» 253
И. Йо: Об одной теореме Миклоша Хорвата 301
М. Банаи и Б. Лукач: Экономические примеры на точно разрешимые вариационные задачи 307
Доклад о мемориальном конкурсе имени Миклоша Швейцера 1987-го года 320
Задачи 339
Обзор книг 343
Новые книги, 1988 г. 351
Новые книги, 1989 г. 354

CONTENTS

Scientific works of Ferenc Szász (1931—1989) 233
G. Strommer: József Kürschák (1864—1933) 239
T. Schmidt: On the algebraic work of József Kürschák 247
T. Schmidt: Ervin Fried is 60 years old 249
M. Horváth, I. Joó and I. Szalkai: On "Banach's principle" 253
I. Joó: On a theorem of Miklós Horváth 301
M. Banai and B. Lukács: Economic examples for exactly solvable variational problems 307
Report on the 1987 M. Schweitzer Memorial Competition 320
Problems 339
Book reviews 343
New books in 1988 351
New books in 1989 354

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1991. február 28. — Terjedelem: 10,85 (A/5 ív)
91-2 — Borgisz Kft., Szeged — Felelős vezető: Martonosiné Csertő Brigitta ügyvezető

Ára: 18 Ft
Évi előfizetés: 72 Ft

ISSN 0025—519X