312.046

Matematikai Lapok

29.
1977-81

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

29. évfolyam, 1977—1981

1-3

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évente négyszer.
Budapest, 1977—1981. július — 29. évfolyam 1-3. szám.
Felelős szerkesztő: Császár Ákos.
Szerkesztők: Lovász László, Pelikán József, Révész Pál, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest, V., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODÁNÁL, Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: PKHI 215-96162.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest, V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488,
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 36,— Ft.

A megadott két évszám közül az első a kötet esedékességének, a második a tényleges megjelenésnek évét jelöli.

TARTALOMJEGYZÉK

Megemlékezés Fejér Lipót és Riesz Frigyes születésének 100-ik évfordulójáról 1

1. Szőkefalvi-Nagy Béla: Riesz Frigyes élete és személyisége 1
2. Tandori Károly: Fejér Lipót élete és munkássága 7
3. P. R. Halmos: Riesz Frigyes munkássága 13
4. J.-P. Kahane: Fejér életművének jelentősége 21
Fejes Tóth László: Megjegyzés Rényi és Sulanke egy tételéhez 33
Alpár László: Rényi Alfréd mint tudományszervező 39
Pach János: Vegyes térfogat és a van der Waerden-sejtés 49
Nemetz Tibor: Közvetítési játék; egy kódelméleti probléma 61
Szénássy Barna: Adalékok a két Bolyai felfedezésének történetéhez 71
Tóth Gábor: Az Atiyah—Singer-indextételről I—II. 97
Babcsányi István: Rees-automaták 139
Fényes Tamás és Kosik Pál: Az operátortest egy másodrendű differenciálegyenletéről 149
Major Imre: A Jordan-mérték távolságtartó leképezéssel szembeni invarianciájának egy új bizonyítása 157
Gróf József: Függvényapproximáció az egész számegyenesen, súlyozott hatványsorokkal 161
Fehér Erzsébet: A katasztrófaelmélet alapjai 171
Feladatrovat 185
Társulati élet 187
Új könyvek 227

MEGEMLÉKEZÉS FEJÉR LIPÓT ÉS RIESZ FRIGYES SZÜLETÉSÉNEK 100-IK ÉVFORDULÓJÁRÓL*

RIESZ FRIGYES ÉLETE ÉS SZEMÉLYISÉGE

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

Az a két kiváló magyar tudós, akik születésének centenáriumát ezen a konferencián ünnepeljük, közel egyidőben született: Riesz Frigyes 1880. január 22-én Győrben, Fejér Lipót pedig február 9-én Pécsen. Középiskolás éveiktől kezdve ismerték egymást, és később közeli kapcsolatba kerültek mint munkatársak és barátok. Bár személyiségük sok tekintetben különbözött, és a matematikai analízisnek részben eléggé távoleső területein dolgoztak, mindketten egyformán magas színvonalon végezték tudományos tevékenységüket, és ugyanazt az elkötelezettséget érezték a matematikai kutatással és oktatással szemben. Csakhamar világszerte ismert mesterei lettek a klasszikus analízisnek és a modern — úgynevezett funkcionál — analízisnek. Lényegesen hozzájárultak a matematika általános fejlődéséhez. Gondolataik és eredményeik mély és maradandó hatása bizonyára tükröződni fog e konferencia programjának több olyan előadásában, amelyek a matematikai analízis legkülönfélébb területeinek jelenlegi problémáiról és eredményeiről adnak számot, köztük olyan területek eredményeiről, amelyek a legszorosabban kapcsolódnak a két Mester munkásságához.

A mai ünnepélyes megnyitó ülés négy előadását Riesz Frigyes és Fejér Lipót emlékének szenteljük. Ebben az első előadásban megtisztelő feladatom röviden emlékeztetni Riesz életének főbb állomásaira, valamint egyéniségének és jellemének főbb vonásaira. Eközben fel kell idéznem egyes tudományos eredményeit, hiszen nagy emberek személyisége és élete nem választható el életművüktől. Ennek ellenére nem szándékozom Riesz matematikai tevékenysége eredményeinek részletes ismertetésébe bocsátkozni. Ezt megtettem már több alkalommal, legutóbb az akadémia Magyar Tudomány című folyóiratának lapjain. Paul Halmos professzor, a Magyar Tudományos Akadémia tiszteletbeli tagja és konferenciánk egyik tiszteletbeli elnöke, szíves volt elvállalni, hogy a következő előadásban ismertesse Riesz matematikai munkásságát. Biztos vagyok benne, hogy előadásában napjaink távlatából újszerű áttekintést fog adni Riesz gondolatainak és eredményeinek azokról a maradandó értékeiről, amelyek tudományunk modern fejlődésében is szerepet kapnak.

Riesz Frigyes apja orvos volt. Nagy gondot fordított három fia neveltetésére: Frigyes és fivére, Marcel neves matematikusok lettek, a legfiatalabb, Sándor pedig sikeres jogász.

Riesz a középiskolát szülővárosában, Győrben végezte, majd beiratkozott a zürichi Eidgenössische Technische Hochschule-ra. Néhány félév után érdeklődése fokozatosan a matematika felé fordult, és világossá vált számára, hogy hivatása a ma-

*Az előadások a „Függvények, függvénysorok, operátorok" kollokvium (1980. aug. 22—28.) ünnepélyes megnyitóján hangzottak el

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

tematikai kutatás. Így 1899-től matematikai tanulmányokat folytatott a budapesti egyetemen, ahol Kőnig Gyula és Kürschák József kitűnő matematikusok előadásai ragadták meg érdeklődését. Egy évet Göttingenben is töltött. Itt David Hilbert és Hermann Minkowski maradandó befolyása érte. Egyetemi tanulmányait 1902-ben fejezte be megszerezve a középiskolai matematika és fizika tanári oklevelet és a doktori címet.

A soron következő években középiskolai tanárként működött Lőcsén, majd 1908-tól Budapesten. Közben folytatta kutatómunkáját a matematika különböző területein. Az integrálegyenletek és a végtelen lineáris egyenletrendszerek iránti érdeklődésén túlmenően göttingeni tanulmányai hatásaként ugyanolyan mély érdeklődéssel követte a modern analízis Borel, Baire, Lebesgue és Fatou körül kialakult francia iskolájának munkásságát is. Ezeknek az új gondolatoknak a talaján érte el azt az eredményt, amely azonnal meghozta számára a nemzetközi hírnevet és elismerést. Természetesen a Riesz—Fischer tételre gondolok, amelyet ekvivalens formában, egymástól függetlenül és szinte egyidőben fedezett fel Riesz Frigyes és Ernst Fischer német matematikus. A tétel a matematikai analízis és a matematikai fizika épületének egyik alapköve lett. Ez az eredmény és további matematikai felfedezéseinek nemzetközi fogadtatása hamarosan itthon is elismertté tették: 1912-ben a kolozsvári egyetemen rendkívüli tanárrá, majd 1914-ben rendes tanárrá nevezték ki.

Intenzív és úttörő kutató tevékenysége során ebben az időben fektette le a függvényterek és lineáris transzformációk elméletének az alapjait, azaz a matematika ma funkcionálanalízisnek nevezett új ágának pilléreit. Könyve, amely 1913-ban jelent meg az Emile Borel által szerkesztett tekintélyes francia monográfia sorozatban, az első mű volt ezen a területen. Szellemével, eredményeivel és módszereivel nagyon nagy befolyása volt az új diszciplina elkövetkező fejlődésére.

Amikor sokkal később, 1948-ban a Párizsi Tudományos Akadémia levelező tagjává választotta, Riesz levelben fejezte ki háláját és megbecsülését a matematikai analízis francia iskolájának a kitüntetésért. A következőt írta:

„Si j'ai quelque mérite autour la science française, c'est que j'ai publié dans la collection Borel, il y a 35 annees, un volume sur les équations linéaires à une infinité d'inconnues, sujet initié par Appel et Poincaré, et que j'ai continué et propagé l'oeuvre de quelques géomètres français de premier rang, parmi lesquels Stieltjes, Lebesgue et Fatou..."*

A Magyar Tudományos Akadémia már sokkal korábban, 1916-ban megválasztotta Rieszt levelező tagjává. A rendes tagságra azonban még több mint 20 évet kellett várnia.

Az első világháború utáni politikai változások lehetetlenné tették Kolozsváron a magyar egyetem további működését. Minden felszerelést hátrahagyva az egyetemnek olyan helyre kellett átköltöznie, amely Magyarország új politikai határain belül feküdt. Szeged városában telepedett le, ahol korábban nem volt egyetem. A professzorok, köztük Riesz Frigyes és Haar Alfréd, még a kezdeti nehéz feltételek mellett is megpróbálták folytatni az oktatást és a kutatómunkát. A matematikusok számára a fő nehézséget a matematikai szakkönyvtár teljes hiánya okozta. Figyelemre méltó az a tény, hogy Riesz és Haar képesek voltak túljutni a nehézségeken, és Szegeden hamarosan a matematikai tevékenység új központját hozták létre. A sikerben nagy szere-

*Ha van valami érdemem a francia tudománnyal kapcsolatban, akkor az az, hogy 35 évvel ezelőtt a Borel gyűjteményben megjelentettem egy kötetet a végtelen sok ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletekről — amely téma kutatását Appel és Poincaré kezdte meg —, valamint az, hogy néhány elsőrangú francia geométer munkáit folytattam és terjesztettem, többek között Stieltjes, Lebesgue és Fatou műveit.

pe volt az „Acta Scientiarum Mathematicarum" című új nemzetközi folyóiratnak, rövidebb nevén az „Acta Szeged"-nek, amelyet 1922-től Riesz és Haar szerkesztett. A két szerkesztő nagy tudományos tekintélye és széleskörű nemzetközi kapcsolata már a kezdet kezdetén vonzotta az első rangú magyar és külföldi szerzőket. Számos matematikai folyóirat, köztük a legismertebbek is, elfogadta az ajánlatot, hogy állandó cserekapcsolatba lépjen az Acta Szegeddel. A könyvkiadók matematikai monográfiákból ingyenes példányt ajánlottak fel a folyóiratban való ismertetés céljából. Így jött létre annak a matematikai könyvtárnak az alapja, amely végül az egyik legjobb lett Európának ebben a részében.

A napjainkban 42. kötetét megjelentető Acta Szeged azóta is igyekszik megőrizni azokat a szerkesztési elveket és azt a magas színvonalat, amellyel megalapítói útjára indították. Emlékezetes, hogy Riesz egy alkalommal neves matematikus fivérének, a Svédországban élő Marcelnek is visszautasította a dolgozatát, mondván, hogy „Marci, te írtál már jobbat is". (Egyébként a dolgozat a Hilbert-féle spektráltétel nem feltétlenül korlátos önadjugált operátorra vonatkozó, Neumanntól és Stonetól származó általánosítására adott új bizonyítást.)

Ezen a ponton el kell mondanom, hogy a két testvér mindig közeli kapcsolatban maradt egymással. Gyakran együtt töltött szabadságuk maradandó emlékei közül hadd emlékeztessek az analitikus függvényeknek az értelmezési tartományuk határán való viselkedésére vonatkozó eredményükre, a nevezetes „Riesz F. és M." tételre.

A matematikában és más dolgokban egyaránt, Riesz éles szemmel tett különbséget a lényeges és a mellékes között. Általában nem titkolta el a véleményét, akár kedvező volt, akár nem, tekintet nélkül az érintett személyekre és dolgokra. Voltak, akik nem szerették ezért, de sokan — köztük jómagam is — hálásak voltunk az olykor kemény kritikájának ösztönző hatásáért. Önmagával szemben is kritikus volt. Dolgozatai amikor végül is megjelentek, tökéletes eleganciát mutattak mind a bennük foglalt matematikai gondolatok, mind pedig a tárgyalásmód tekintetében. Ezt az eleganciát nem sikerült mindig könnyen elérnie: vázlatait ismételten átdolgozta, és néha évekkel is elhalasztotta a megjelentetésüket, amíg a tárgyalás logikailag és esztétikailag tökéletes formáját megtalálta. Nem volt szokása, hogy matematikai gondolatait mindjárt az elképzelhető legáltalánosabb formában fejtse ki. Ehelyett a legegyszerűbb helyzetben próbálta megragadni és legyőzni a probléma lényeges nehézségeit, és az így kapott eredményeket terjesztette ki azután, rámutatva az inkább technikai mint elvi jellegű bonyodalmakra. A matematikai problémák ilyen, két lépésben való megközelítésének számottevő fogalmi és módszertani előnye van, mint azt a Lebesgue-integrál Riesz-féle konstrukciója is példázza: a függvénysorozat integráljára vonatkozó határérték tételt először a legegyszerűbb esetben, nevezetesen lépcsős függvények monoton sorozatára látjuk be; az általános esetre való kiterjesztés azután már többé-kevésbé rutin jellegű. 1925-ben „Elemi módszerek a felsőbb matematikában" címmel tartott rektori székfoglaló előadásában erre a megközelítési módra mutatott az előzőnél elemibb példákat is. Előadásában, amely összegyűjtött munkáiban is megtalálható, a felsőbb matematikából vett példákkal igazolta, hogy tudományunkban az olyan jelzők, mint „nehéz", „komplikált", „mély" nem állandó értékűek: ami ma még talán ilyennek tűnik, lehet hogy holnapra „könnyű", „egyszerű" vagy „magától értődő" lesz. Valójában Riesz matematikai tevékenységét talán úgy lehetne legjobban jellemezni, hogy figyelmét mindig a központi jelentőségű problémákra irányította, és ezek gyökereit felkutatva képes volt a bonyolult kérdéseket is egyszerűvé tenni. A megoldást világosan és éleslátással vázolta fel.

Riesz közvetlen kutatási területén, a matematikán túlmenően is aktív szerepet vállalt egyeteme rangjának növelésében. Az 1925/26-os tanévben az egyetem rektora

volt. Akkor is Szegeden maradt, amikor a második világháború idején az országban a politikai körülmények egyre rosszabbá váltak. Annak ellenére, hogy a náci megszállás alatt őt is veszély fenyegette, sohasem vesztette el bátorságát és szinte rendíthetetlen önuralmát. Szeged 1944 októberében történt felszabadításakor készen állt arra, hogy tanácsaival és munkájával segítse az egyetemi oktatás beindítását. 1945 tavaszán rövid ideig ismét az egyetem rektora volt. Csak később, 1947-ben, hagyta el Szegedet, hogy a budapesti egyetem meghívásának eleget téve csatlakozzék régi barátjához és kollégájához, Fejér Lipóthoz. A szűkölködéseknek, változásoknak és új remények támadásának ebben az időszakában fogtunk hozzá 1945/46 telén Riesz és jómagam — volt diákja — egy monográfia megírásához, amelyben a deriválás, integrálás és funkcionálanalízis modern elméletéről szóló előadásainkat dolgoztuk fel. A munkát az eredeti terv szerint folytattuk azután is, hogy Riesz Budapestre költözött. Évek teltek el a kézirat elkészültéig, és további évek kellettek, amíg kiadót találtunk. A könyv végül is az Akadémiai Könyvkiadó háború utáni első kötetei között jelent meg 1952-ben. Franciául írtuk: „Leçons d'analyse fonctionnelle" címmel. Az egész tudományos világban meleg fogadtatásra talált, több nyelvre lefordították, és ismételten is kiadták. Természetesen büszke vagyok erre a sikerre, de még inkább külön szerencsének és megtiszteltetésnek érzem azt, hogy e közös munka során állandó belső és alkotói kapcsolatba kerültem nagyra becsült Mesteremmel.

Életének utolsó évtizedében Riesz Frigyes számos rangos elismerésben részesült itthon és külföldön egyaránt. 1945-ben megkapta a Magyar Tudományos Akadémia Nagydíját, (amely az akkori körülmények között csak szimbolikus volt). 1948-ban Kossuth-díjat kapott (amely már nem volt csupán jelképes). 1948-ban a Párizsi Tudományos Akadémia levelező tagjává, a müncheni Bajor Tudományos Akadémia és a svédországi Lundban székelő Királyi Fiziográfiai Társaság tiszteletbeli tagjává választotta. 1946-ban, 1950-ben és 1954-ben rendre a szegedi, a budapesti és a párizsi egyetem fejezte ki elismerését a „Doctor honoris causa" címmel. A Bolyai János Matematikai Társulat őt választotta első tiszteletbeli elnökévé.

1950-ben, születésének 70. évfordulóját — Fejér Lipóttal együtt — az egész matematikus közösség megünnepelte. Az Acta Szeged ez alkalomból kiadott kettős kötetébe a világ legkülönbözőbb tájain élő kiváló matematikusok küldték el cikkeiket. A szörnyű háborús évek után a két Mester előtt kifejezett őszinte tiszteletadás volt talán az első megnyilvánulása az eredményes nemzetközi matematikai együttműködés visszaállítására irányuló általános óhajnak. Ez az óhaj jutott kifejezésre az 1950-ben Budapesten tartott Első Magyar Matematikai Kongresszuson is, amelyen sok jónevű külföldi matematikus is résztvett.

Maga Riesz aktív szerepet vállalt a kongresszuson. Igen érdekes áttekintő előadást tartott „Nullahalmazok és szerepük az analízisben" címmel. Az előadás hosszantartó matematikai kutatómunkájának számos állomását és vonatkozását érintette. Hadd emlékeztessek Riesznek arra a kitartó és eredményes erőfeszítésére, hogy az integrál és a mérték fogalmát egyszerűsítse és kiterjessze, továbbá a monoton függvények majdnem mindenütt való differenciálhatóságának általa adott különösen szép bizonyítására, az analitikus függvények kerülti viselkedésére vonatkozó, Marcel fivérével közösen talált tételére, a szubharmonikus függvények szétbontására, valamint az ergodelméleti és valószínűségszámítási alkalmazásokra. Saját életműve jelentős részének ez az érdekes, a nullamértékű halmazok egyszerű, de rendkívül gyümölcsöző fogalmára alapított elrendezésben való áttekintése Riesz Összegyűjtött Munkáiban is megjelent.

1952-ben írt utolsó dolgozatában újra visszatér fiatalkorának híres eredményeihez, a folytonos és integrálható függvények terei lineáris funkcionáljainak integrálként

való előállításához. Ebben a „hattyúdal"-ban szép és egységes tárgyalását adja a témakörnek, tökéletes harmóniában egész életének legjellemzőbb matematikai elveivel, módszereivel és stílusával.

Bár több dolgozatot nem írt, 1952-ben nagy örömmel fogadta a „Leçons d'analyse fonctionnelle" megjelenését, és érdeklődéssel, néha egy kis elégedetlenséggel, követte a matematikai irodalom gyorsan növekvő áradatát. Egyetemi előadásait egészen addig megtartotta, amíg megromlott egészségi állapota ebben meg nem akadályozta. 1956. február 28-án halt meg.

Munkájának és személyének általános elismerése nem halványult halála óta: halhatatlan gondolatai és eredményei fontos részét képezik mindannyiunk közös tudományos örökségének.

Fordította: PETZ DÉNES

LIFE AND PERSONALITY OF FREDERIC RIESZ

B. SZŐKEFALVI-NAGY

FEJÉR LIPÓT ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA

TANDORI KÁROLY

Előadásomban Fejér Lipót életének főbb állomásairól és tudományos tevékenységéről kívánok áttekintést adni.

Fejér Lipót 1880. február 9-én, Pécsett született. Elemi és középiskolai tanulmányait Pécsen végezte, itt érettségizett 1897-ben, a pécsi főreáliskolában. Matematikával a középiskola felsőbb osztályaiban kezdett intenzívebben foglalkozni; számos feladatmegoldása jelent meg az 1893—94 években indult Középiskolai Matematikai Lapokban, elsősorban geometriai feladatok megoldásával tűnt ki. Érdemes megjegyezni, hogy Fejér Lipót és Riesz Frigyes nevei egyidőben jelentek meg a Lapok feladatmegoldói között. Közvetlenül az érettségi után részt vett a Matematikai és Fizikai Társulat által az az évben érettségizettek számára rendezett matematikai versenyen (ilyen verseny megrendezésére először 1894-ben került sor hazánkban), és ott a második helyezést érte el; itt is elsősorban a geometriai feladatok szép megoldásaiban nyilvánult meg matematikai tehetsége.

1897-ben beiratkozott a budapesti műegyetem Gépészmérnöki Karára, majd fél év múlva az ún. Egyetemes Szakosztályba lépett át, ahol hasonlóan a budapesti tudományegyetem Bölcsészeti Karához, tanárképzés is folyt. Itt kezdte matematika-fizika szakos középiskolai tanári tanulmányait, amelyeket később a budapesti tudományegyetem Bölcsészeti Karán folytatott. A műegyetemen többek között Kőnig Gyula, Kürschák József, Rados Gusztáv, a tudományegyetemen pedig Beke Manó és Eötvös Loránd előadásait hallgatta, amelyek akkor nemzetközi színvonalat képviseltek. Tudományos pályája számára döntő jelentősége volt annak, hogy az 1899—1900 tanévet a berlini egyetemen töltötte. Ily módon lehetősége nyílt arra, hogy olyan nagy matematikus egyéniségek, mint G. Frobenius, L, Fuchs és H. A. Schwarz előadásait hallgassa. Itt alkult ki szoros kapcsolata C. Charathéodoryval és E. Schmidt-tel. Különösen H. A. Schwarz előadásai voltak nagy hatással rá; ő hívta fel figyelmét egy Fourier-sorokkal kapcsolatos problémára, amelynek megoldása Fejér Lipót tudományos tevékenységének talán legfőbb és egyik legismertebb eredménye lett. Ezt a problémát, a Fourier-sor számtani közepek módszerével való szummálhatóságának problémáját, Berlinből hazatérve még 1900-ban megoldotta; az erről készített előzetes közlemény is még ebben az évben jelent meg a Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris folyóiratban. Ez az eredmény lett magva matematikai szakdolgozatának és doktori disszertációjának is, amely utóbbi 1902-ben, 22 éves korában jelent meg.

Egyetemi tanulmányainak befejezése után a budapesti tudományegyetemen repetitor volt, majd az Ógyallai Csillagdában is tevékenykedett. Az 1902/03 tanév téli szemeszterét Göttingenben, majd a nyári szemesztert Párizsban töltötte. Göttingenben D. Hilbert és H. Minkowski, Párizsban pedig E. Picard és J. Hadamard előadá-

sait hallgatta, és saját eredményeiről is előadásokat tartott. Tanulmányútjáról hazatérve ismét a budapesti tudományegyetem Matematikai Intézetében kapott repetitori állást. 1905-ben a kolozsvári tudományegyetemre került repetitornak, ahol még abban az évben magántanárrá habilitálták az analízis és analitikai mechanika tárgyköréből. 1906-ban adjunktussá nevezték ki, 1908-ban pedig a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjává választották; még ebben az évben megtartotta székfoglalóját „Asymptotikus értékek meghatározása" címmel. Ezt követően, 1911-ben, 31 éves korában nyilvános rendes tanárrá nevezték ki a kolozsvári tudományegyetemre. Ilyen fiatal korban történő egyetemi tanári kinevezés most is, de akkoriban különösen kivételes esetnek számított. Eötvös Loránd közbenjárására még ebben az évben meghívták a budapesti tudományegyetem egyik matematikai tanszékére; ő a meghívást elfogadta. Ettől kezdve élete végéig a budapesti tudományegyetemen működött. Viszonylag sokára, 1930-ban választották a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagjává; ez alkalomból „A konjugált pontok felhasználása a Lagrange-féle interpolációnál" címmel, 1931-ben tartotta meg székfoglalóját. 1939-ben súlyos műtéten esett át, majd a háborús szenvedések egészségét nagyon megviselték. Élete utolsó két és fél évét súlyos betegen töltötte. 1959. október 15-én halt meg.

Eredményei világszerte ismertté tették nevét, és azok elismerése számos módon megnyilvánult. 1911-ben a Magyar Tudományos Akadémia Marczibányi mellékjutalommal tüntette ki az 1904—1910 években elért eredményeiért, elsősorban a „Folytonos függvények Fourier-sorának szingularitásairól" c. dolgozatáért, 1918-ban pedig a Magyar Tudományos Akadémia Nagyjutalmát kapta az 1911—1917 években végzett munkásságáért, elsősorban „Az interpolációról" c. értekezéséért. Külföldi elismerései közül megemlítendő, hogy 1909-ben a Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo c. folyóirat szerkesztő bizottsági tagjává választották. 1912-ben a cambridgei nemzetközi matematikai kongresszus alelnöki tisztségét töltötte be. 1917-ben a Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen külföldi levelező tagjává választották, 1918-ban a Mathematische Zeitschrift c. folyóirat szerkesztő bizottsági tagja, 1928-ban pedig a Calcutta Mathematical Society tiszteletbeli tagja lett. 1933-ban a chicagói világkiállítás alkalmából négy európai matematikust, közöttük Fejér Lipótot is meghívták az Amerikai Egyesült Államokba. E meghívás kapcsán a providencei Brown University díszdoktorává avatták, majd körülbelül tizenöt egyetem meghívásának eleget téve, előadókörutat tett. Különösen számos kitűntetésben részesült a második világháború után. 1946-ban a Magyar Tudományos Akadémia tiszteleti tagjává választották. 1948-ban az elsők között megkapta a Kossuth-díj első fokozatát. 1950-ben az Eötvös Loránd Tudományegyetem tiszteletbeli doktorává avatták, és a Népköztársasági Érdemérem kitüntetésben részesült. 1953-ban megkapta a Munka Vörös Zászló Érdemérmet. 1954-ben a Bajor Akadémia levelező tagjává, 1957-ben pedig a Lengyel Tudományos Akadémia külső tagjává választották. A Bolyai János Matematikai Társulatnak tiszteletbeli elnöke volt annak alapításától, 1947-től kezdve.

Fejér Lipót életműve 103 különböző hazai és külföldi matematikai folyóiratban megjelent közleményből áll; ezeken kívül több olyan eredménye van, amelyek saját dolgozatban nem kerültek közlésre, hanem mások dolgozatában, illetve könyvében vannak ismertetve, továbbá számos még eddig kiadatlan kéziratot hagyott hátra. Eredményei ma már könnyen hozzáférhetők. 1970-ben ugyanis Turán Pál professzor szerkesztésében kiadásra kerültek összegyűjtött munkái két vaskos kötetben. Ebben a kiadásban az egyes cikkek után szerkesztői megjegyzések is találhatók, amelyek részletesen ismertetik az eredmények jelentőségét, kihatását, felhasználásukat és továbbfejlesztéseiket.

Fejér Lipót tudományos munkássága a matematika széles körére terjedt ki. Talán legnevezetesebbek, legnagyobb hatásúak és a köztudatba leginkább átment eredményei a trigonometrikus és a Fourier-sorok elméletével kapcsolatosak.

A trigonometrikus és a Fourier-sorok alkalmazásának szükségessége már igen korán, fontos fizikai problémák kapcsán felmerült. A XVIII. században D. Bernoulli a rezgő húr problémájának tárgyalása során a rezgő húr helyzetét leíró függvény trigonometrikus sorral történő megadásának kérdéséhez jutott el. A XIX. század elején M. Fourier a hővezetés problémájának tárgyalása kapcsán ismerte fel függvények Fourier-sorba való kifejthetőségének jelentőségét. Függvények Fourier-sorba való kifejthetőségének kérdésére vezetett a potenciálok létezésére vonatkozó Dirichlet-probléma megoldása a kör esetén is. Sokan, a kor neves matematikusai vitatták az előállítás lehetőségét. A vita igen gyümölcsözőnek bizonyult . Egyrészt elvezetett például a függvényfogalom tisztázásához és a mai függvényfogalom kialakulásához, másrészt jelentős erőfeszítések után P. G. L. Dirichlet-nek a XIX. század első felében sikerült kimutatnia azt, hogy függvények elég tág osztálya esetén, ti. a véges sok monoton ívből álló folytonos függvénygörbe esetén, a függvényt Fourier-sora előállítja. Nyitott maradt viszont az a kérdés, hogy a vizsgálatokban olyan fontos szerepet játszó függvényosztály, a 2π szerint periodikus folytonos függvények osztálya esetén is előállítja-e a Fourier-sora a függvényt. A helyzetet bonyolította az, hogy 1873-ban P. Du Bois Reymond példát adott olyan 2π szerint periódikus folytonos függvényre, amelynek Fourier-sora egy pontban divergál. Ily módon a XIX. század végére a kérdéskört illetően bizonyos megtorpanás, bizonytalanság uralkodott el a szakemberek körében. Amellett, hogy kiderült, 2π szerint periodikus folytonos függvények nem mindig állíthatók elő Fourier-sor összegeként, az is kérdéses volt, hogy ha a Fourier-sor egy pontban konvergál, akkor összege megegyezik-e az illető függvény ott felvett értékével, sőt az a kérdés is megválaszolatlannak tűnt, hogy a Fourier-sor meghatározza-e valamilyen módon a kifejtett függvényt. Ilyen körülmények között a Fourier-sorok elméletének valóban új korszakot nyitó felfedezése volt Fejér Lipótnak az az 1900-ban közölt tétele, hogy bár a függvény Fourier-sorának részletösszegei divergálhatnak, azonban a részletösszegek számtani közepeinek sorozata a függvény minden x folytonossági pontjában az $f(x)$ függvényértékekhez konvergál. Továbbá, ha a függvény mindenütt folytonos, akkor a Fourier-sor számtani közepei mindenütt egyenletesen konvergálnak a függvényhez. Fejér Lipót ezen szummációs tételéből számos nevezetes következmény adódott. Kiderült, hogy a 2π szerint periodikus folytonos függvényt Fourier-sora egyértelműen meghatározza. Felhasználva azt a már akkor közismert tényt, hogy konvergens sor számtani közepeinek a sorozata is a sor összegéhez konvergál, adódott, hogy 2π szerint periodikus folytonos függvény Fourier-sora, ha konvergál, akkor a függvényhez konvergál. Felhasználva G. Frobenius tételét nyerte a körre vonatkozó Dirichlet-probléma új és egyszerű megoldását. Mivel a Fourier-sor számtani közepei trigonometrikus polinomok, közvetlenül, a korábbiaknál lényegesen egyszerűbb módon kapta a nagyon fontos Weierstrass-tételt, amely szerint 2π szerint periodikus folytonos függvény trigonometrikus polinomokkal egyenletesen megközelíthető.

A Fejér-féle felfedezés azon az észrevételen alapul, hogy a Fourier-sor számtani közepei a függvény bizonyos integráltranszformáltjaként állíthatók elő, ahol a magfüggvény, az ún. Fejér-féle magfüggvény mindenütt nem negatív.

Fejér Lipót másik egészen közismertté vált eredménye példája olyan 2π szerint periodikus folytonos függvényre, amelynek Fourier-sora egy pontban divergál. Ilyen példát korábban már P. du Bois Reymond, majd később H. A. Schwarz is konstruáltak; ezek a példák azonban bonyolultabbak voltak. Sőt P. du Bois Reymond olyan

folytonos függvényt is megadott, amelynek Fourier-sora végtelen sok pontban, sőt mindenütt sűrű halmazon divergál; ez a konstrukció azonban nem bizonyult egzaktnak, Fejér Lipótnak viszont, több dolgozatban visszatérve a kérdésre, sikerült egy egész egyszerű példát megadnia. Konstrukciója az ún. Fejér-féle polinomokon alapul, Majd egyszerű példát konstruált olyan 2π szerint periodikus folytonos függvényre is, amelynek Fourier-sora mindenütt konvergál, de nem egyenletesen.

Az előzőekben ismertetett eredmények értékeléséhez meg kell említeni, hogy ezek a felfedezésük óta eltelt évtizedekben bekerültek a matematikai analízis törzsanyagába.

Az eredmények ismertetését megszakítva és kis kitérést téve szükséges említést tenni Fejér Lipót cikkeinek stílusáról. Dolgozatait a tartalmi kiérleltség, formai szempontból pedig a nagyfokú csiszoltság jellemzi. Nagy gondot fordított eredményeinek elhelyezésére a matematika fejlődésének folyamatában. Egy-egy kérdéskörre többször is visszatért, egészen addig, míg a korábban bonyolultnak vélt kérdésre csaknem triviálisnak tűnő megoldást nem sikerült találnia. Stílusában is megnyílvánult az a magatartása, hogy a matematikát művészetnek is tekintette.

Az eddigiekben említett legismertebb eredmények mellett Fejér Lipót tudományos munkássága még számos jelentős további eredménnyel gazdagította a Fourier sorok elméletét, a rövidség kedvéért azonban ezekre nem térünk ki részletesebben.

Munkásságának másik nagy területe az interpolációelmélet volt. Interpolációelméleti vizsgálatai során többek között választ adott C. Runge nevezetes problémájára, amely arra keresett feleletet, hogy folytonos, kettős pont nélküli zárt görbén hogyan kell megadni az alappontokat, ha azt kívánjuk, hogy a megfelelő Lagrange-féle interpolációs polinomok minden a görbe által határolt zárt tartományon analitikus függvény esetén egyenletesen kovergáljanak a függvényhez.

A Lagrange-féle interpolációs eljárásnak hátránya az, hogy a függvények folytonossága nem biztosítja a megfelelő közelítést. Erre a tényre korábban S. N. Bernstein és G. Faber mutattak rá; tételükre Fejér Lipót igen egyszerű bizonyítást adott. Hatásosabbnak bizonyult a Hermite-féle interpolációs eljárás, amelynél az interpoláló polinomnak az alappontokban vett differenciálhányadosaira is feltételek vannak kiróva. Különösen számos és jelentős eredmény fűződik Fejér Lipót nevéhez a Hermite-féle interpoláció elméletében.

Egy függvény n számú alapponthoz tartozó Fejér-féle interpolációs polinomján azt a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinomot értjük, amelynek értékei az alappontokban megegyeznek a függvény értékeivel, és amelyek differenciálhányadosa az alappontokban 0-val egyenlő. Ezekre a polinomokra kimutatta például, hogy ha az alappontokat az n-edik Csebisev-polinom zérushelyeinek választjuk, akkor a Fejér-féle interpolációs polinomok a $[-1, 1]$ zárt szakaszon egyenletesen konvergálnak a függvényhez, feltéve, hogy az a $[-1, 1]$ szakasson folytonos. Ennek a tételnek a bizonyítása azon a tényen múlik, hogy az interpoláció alappolinomjai nem-negatívok. Később az ún. normális alappontrendszer fogalmának bevezetésével vizsgálatait nagymértékben általánosította.

Maradandót alkotott a konstruktív függvénytan egy másik ágában, a mechanikus kvadratúrák elméletében is.

Többek között megmutatta, hogy ha az alappontokat az n-edik Csebiseb-polinom zérushelyeinek választjuk, akkor a kvadratúra-eljárás minden a $[-1, 1]$ zárt szakaszon folytonos függvény esetére konvergál. Ez az eredmény ismét azon az észrevételen alapul, hogy ebben az esetben a kvadratúra-ejlárás ún. Côtes-számai pozitívok. Fejér Lipót konstruktív függvénytani eredményei szintén közismertek, és tankönyvek anyagát alkotják.

Fejér Lipót komplex függvénytani eredményei ugyancsak jelentősek. Kiemelendő Riesz Frigyessel közösen talált egyenlőtlensége és a konform leképezések alaptételének ugyancsak Riesz Frigyessel együtt adott egyszerű bizonyítása.

További, geometriai, differenciálegyenletekre vonatkozó, valamint mechanikai vizsgálataink méltatása már túl messzire vezetne; ezért ezek részletezésétől eltekintünk.

A tudományos eredmények ismertetése után részletesebben ki kell térni Fejér Lipót oktató munkájára és közéleti tevékenységére is. Mint tudományos munkásságát, úgy oktató tevékenységét is a széles körű érdeklődés jellemezte. A befezető differenciál- és integrálszámítási, valamint függvénytani előadásai mellett számos speciális előadást tartott, például analitikus számelméletről, variációszámításról, differenciálgeometriáról, integrálegyenletekről, kerületértékproblémákról, konform leképezésekről, kör- és gömbfüggvények szerinti kifejtésekről, halmazelméletről. Előadásai élményszámba mentek, élmény volt a felépítésük mélysége, a minden részletre kiterjedő, kristálytiszta analízis, a lényegre való törekvés, és a kérdések minden oldalról való megvilágítása. A tantermen kívüli baráti beszélgetések során megnyilvánuló nevelő hatása még talán jelentősebb volt. Bármikor fel lehetett keresni; közvetlensége, segítőkészsége gyakran megnyilvánult. Nagy eredményei és széles körű mély tudása mellett emberi tulajdonságai is nagymértékben hozzájárultak ahhoz, hogy először körülötte alakult ki jelentős matematikai iskola hazánkban. A Fejér tanítványok közé tartoznak például Pólya György, Riesz Marcell, Szász Ottó, majd Egerváry Jenő, Fekete Mihály, Lukács Ferenc, Szegő Gábor, Szidon Simon, majd a későbbi generációból Csillag Pál, Radó Tibor, és a még későbbiek közül Erdős Pál, Kalmár László és Turán Pál. Körülbelül negyvenre tehető azoknak a száma, akik nála doktoráltak. Tanítványainak sikereire mindig büszke volt. Tanítványai közül számosan kerültek külföldre és váltak nemzetközi hírű matematikussá; kapcsolatukat azonban Fejér Lipóttal és iskolájával továbbra is ápolták.

Iskolateremtő tevékenysége mellett egyéb, a matematikai közéletben végzett munkájáról is említést kell tenni. 1913—1933. között a Matematikai és Fizikai Társulat matematikai titkára, majd 1933—1944 között alelnöke, 1914—1933 között a Matematikai és Fizikai Lapok matematikai részének szerkesztője. Sok társulati versenyfeladat származik tőle. 1946—1949 között a Magyar Tudományos Akadémia igazgatósági tagja is volt.

Általános emberi tulajdonságai közül kiemelkedők jó humora, emberi melegsége, széles körű műveltsége, univerzális érdeklődése a művészetek iránt — igen jól zongorázott —, szellemes társalgó készsége. Kiterjedt baráti társaság alakult ki körülötte írókból, művészekből. Korabeli írók műveiben többször felcsillan alakja.

Fejér Lipót élete és munkássága példakép volt sokak számára, és lelkesítő példakép lesz a jövőben is. Születésének századik évfordulója alkalmából hálával és nagy tisztelettel emlékezünk meg róla.

LIFE AND WORK OF LEOPOLD FEJÉR

K. TANDORI

RIESZ FRIGYES MUNKÁSSÁGA

P. R. HALMOS*

Előszó

Riesz Frigyes nevezetes tételekkel, új bizonyításokkal és mások felfedezéseinek továbbfejlesztésével járult hozzá a matematika tudományához. Átlátása tette lehetővé, hogy az őt követő nemzedéknek megmutassa a matematikai tisztaság és egyszerűség módját, ami talán éppen olyan értékes mint tételei és bizonyításai.

Hadd kezdjem beszámolómat Riesz munkáinak áttekintésével. Összegyűjtött műveinek két kötete 95 közleményt tartalmaz. Közülük sok (pontosan 22) magyar nyelven íródott. Az a matematikus azonban, aki nem olvas ezen a nyelven nem mulaszt sokat: a magyarul írt cikkek többsége elérhető francia vagy német fordításban is; ritka kivételtől eltekintve átdolgozva, kibővítve vagy legalább összefoglalva (esetleg töredékekben vagy részekben) fellelhetők másutt is. Ami a többi nyelvet illeti, elmondható, hogy egy dolgozatot írt olaszul, négyet angolul, 25-öt németül és 41-et franciául. A két könyve először franciául jelent meg (az első 1913-ban, végtelen sok ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletekről, a Szőkefalvi-Naggyal közösen írt második pedig 1952-ben, funkcionálanalízisről). A másodikat a későbbiekben angolra is lefordították. Riesz első — E. R. Lorch-csal közösen írt — angol nyelvű dolgozata 56 éves korában jelent meg. A másik három angolul írt dolgozata ergodelméletről szóló önálló munka. Ami a társszerzőket illeti: nincs túl sok. A Lorch-csal írt dolgozatán, és a Szőkefalvi-Naggyal írt könyvén kívül mindössze öt: Fejér, Radó, Szegő, Szőkefalvi-Nagy és Riesz Marcell.

Összegyűjtött munkái kilenc fejezetre oszlanak: topológia, valós függvények, függvényterek, komplex függvények, harmonikus függvények, funkcionálanalízis, ergodelmélet, geometria és egyebek. Riesznek mindössze két geometriai témájú dolgozata van, beleértve a negyedrendű görbéket szintetikus projektív módszerekkel tárgyaló doktori dolgozatát is. 1907 után többet ehhez a témához nem tért vissza.

Nem lehetséges és nem is kívánatos áttekintést adni itt mindarról, amit Riesz valaha is írt. Ehelyett szeretném felvázolni a Riesz által kutatott területek központi kérdéseit.

Topológia

Összegyűjtött munkáinak topológiai fejezete tíz dolgozatot tartalmaz. Az első a Jordan görbe tétel Schoenfliesstől származó megfordítását bizonyítja kissé általánosított formában. A Schoenfliess tétel azt mondja ki, hogy minden olyan halmaz, amely a síkot úgy osztja két részre, mint a kör, homeomorf a körrel. Pontosabban, Riesz

* E tanulmány a Nemzeti Tudományos Alapítvány részbeni anyagi támogatásával készült.

változata a következőképpen szól: Tegyük fel, hogy P korlátos perfekt halmaz a síkon, valamint I és E (amit a halmaz belsejének és külsejének gondolunk) P komplementumának olyan particióját képezi, hogy a következő három feltétel teljesül:

1. I bármely két pontja összeköthető I-ben fekvő Jordan görbével, és ugyanez igaz E-re is.
2. P minden pontja összeköthető I bármely pontjával Jordan görbével úgy, hogy az csak kezdőpontjában metssze P-t, és ugyanez igaz E-re is.
3. Minden olyan Jordan görbe, amely I-nek egy pontját E-nek egy pontjával köti össze, metszi P-t.

Következtetés: P homeomorf a körrel.

A többi topológiai dolgozat kisebb, de néhányuk szerepet játszott a tudományág fejlődésében. Az egyik például leírja a topologikus tér fogalmának a születését és bepillantást nyújt az összefüggőség fogalmába, ami 1907-ben még távolról sem volt kialakult. Egy másik dolgozatában bizonyítja azt a tételt, amit sokunknak Heine—Borel tételként tanítottak, vagyis azt az állítást, hogy egy korlátos és zárt intervallum kompakt. Riesz szerint Borel a véges részlefedés létezését csak megszámlálható nyílt fedés esetére bizonyította!

Valós függvények

A Jegorov-tétel azt mondja, hogy ha mérhető függvényeknek egy sorozata (véges mértékű halmazon) nullamértékű halmaz kivételével mindenütt konvergál, akkor egyenletesen konvergál kivéve egy tetszőlegesen kicsi mértékű halmazt. Úgy tűnik, hogy a tétel Rieszt elgondolkoztatta. Véleménye szerint nem következtet lényegesen újra, és néhány dolgozatában elemezte a tétel bizonyításait a folytonosságon keresztül, ami — úgy gondolom — nem ragadja meg a dolog kombinatorikai lényegét.

Korai előfutára volt annak az iskolának, amely előnyben részesíti a mérték fogalmát nem használó integrálelméletet. Észrevette, hogy a nullamértékű halmaz fogalma elemibb az általános kvantitatív mértékelméletnél, és hogy ezzel az egyszerű fogalommal a Lebesgue integrál egész elmélete visszavezethető lépcsős függvényekre (a kifejezés szokásos technikai értelmében). Egyik dolgozatában bizonyítja az egyáltalán nem mértékelméleti, Osgood-tételnek nevezett állítást (ami nem más, mint egy zárt intervallumon folytonos függvényekre vonatkozó Lebesgue-féle konvergencia tétel).

Másutt Riesz nagyvonalakban kidolgozza az integrálelmélet deriváltakon való megközelítését. Alapgondolata: nevezzünk egy (zárt és korlátos intervallumon értelmezett) pozitív függvényt integrálhatónak, ha majdnem mindenütt egy monoton függvény deriváltja. Alaplemma: Minden $[a, b]$-n értelmezett integrálható f függvényre létezik egy monoton F úgy, hogy majdnem mindenütt $f = F'$ és F minimális a következő értelemben: ha G monoton, és $f \leqq G'$ majdnem mindenütt, akkor $F(d) - F(c) \leqq G(d) - G(c)$ minden $[a, b]$-ben fekvő $[c, d)$ intervallumra.

Definíció:

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c)$$

és az elmélet folytatódik.

Riesz legegyénibb hozzájárulása a valós függvények elméletéhez a „felkelő Nap lemma" és annak alkalmazásai. A „felkelő Nap lemma" az $[a, b]$-n értelmezett folytonos függvény gráfját egy hegyvonulatnak tekinti, és feltételezi, hogy napsütésben nézünk rá (amikor a Nap az $x=+\infty$-nél áll). Az állítás az, hogy azon az $[a, b]$-ben levő pontok halmaza, melyek felett a hegység árnyékban van, olyan (c, d) nyílt intervallumokból áll, hogy $f(c)=f(d)$ (hacsak nem $c=a$, amely esetben lehetséges, hogy $f(c)<f(d)$).

A lemma alkalmazásai közé tartozik a Hardy—Littlewood maximál tétel bizonyítása, a monoton függvények majdnem mindenütt való differenciálhatóságának bizonyítása, a sűrűségi pontokra vonatkozó Lebesgue-tétel bizonyítása és a Birkhoff-féle ergod tétel bizonyítása. (Az egyenlőtlenségekről szóló Hardy—Littlewood—Pólya könyvben a felfedezők a maximál tételt Riesz módszerével bizonyítják sajátjuk helyett.)

Rieszt megérdemelten ismerik el Wienerrel együtt a differenciál- és ergodelmélet közti összefüggés felismeréséért. Mindkét tárgykörben központi probléma egy bizonyos határérték létezése; az egyik esetben az alapintervallum a nullához közelít, a másikban a végtelenhez tart. A gondolatok és módszerek meglepően hasonlóak és nem hiszem, hogy végére jártunk a dolognak. Nagyon is valószínű, hogy létezik egy mindkét tárgykört átfogó elegáns elmélet, melyben a deriváltakról szóló Lebesgue-tétel és az iteráltak átlagára vonatkozó Birkhoff-tétel könnyű következményekként jelennek meg.

Két fajta ergodelmélet van: az egyik függvényekről, a másik absztrakt struktúrák (mint például a Banach-terek) elemeiről szól. Riesz főleg a második iránt érdeklődött, melynek elemzése inkább a funkcionálanalízis fejezethez tartoznék, de röviden leírom Riesz szerepét a témakör fejlődésében.

Az első ergod tétel Neumann János nevéhez fűződik, és unitér Hilbert tér operátorok iteráltjai átlagának konvergencia tulajdonságaira vonatkozik. Riesz ehhez az eredmény két irányú kiterjesztésével járult hozzá: A tér lehet L^p (nem csak $p=2$-vel, hanem bármilyen $1<p<\infty$ értékkel) és az operátor lehet bármilyen kontrakció (nem csak izometria). Riesz $p=1$-re is bizonyította az eredményt, de ebben az esetben az egységgömb nem gyengén kompakt, és ez nehézséget okoz; további feltevés szükséges (nevezetesen az átlagok egyenletes abszolút folytonossága).

Riesz az ergodelmélethez többször visszatért, csiszolta és kiterjesztette korábbi eredményeit. Egyik ilyen visszatérésének gyümölcse (egy Szőkefalvi-Naggyal közös munkában) tartalmazza az unitér Hilbert tér operátorokra vonatkozó középergod tétel talán legegyszerűbb bizonyítását. (Egészen röviden: az állított konvergencia nyilvánvaló $1-U$ magján és értékkészletén; mivel U unitér, az egész tér zárt direktösszege a két említett altérnek.) A módszer változtatás nélkül alkalmazható bármely olyan T kontrakcióra, amelynek ugyanazok a fix pontjai, mint T^*-nak. A matematika szép és kellemes meglepetése, hogy a korábbi feltétel maga után vonja az utóbbit, mint azt Riesz és Szőkefalvi-Nagy dolgozatukban bizonyították. (Bizonyítás: ha $Tf=f$, akkor $\|f-T^*f\|^2=\|f-T^*Tf\|^2=\|f\|^2-2\|Tf\|^2+\|T^*Tf\|^2\leqq-\|f\|^2+\|f\|^2=0$.)

Analitikus függvények

Riesznek a klasszikus („kemény") analízis témakörben írt számos dolgozata közül kettő emelkedik ki. Ezeket széleskörben idézik és alkalmazzák. Az egyik analitikus, a másik szubharmonikus függvényekről szól.

Riesz analitikus függvényekre vonatkozó legfontosabb eredményét fivérével, Marcellal együtt fedezte fel. Ezt „Riesz Frigyes és Marcell tétel"-ként idézik.

Először tekintsünk egy H^∞-beli függvényt (azaz a nyílt egységkörön értelmezett korlátos analitikus függvényt). Fatou munkája alapján egy ilyen függvénynek a kerület majdnem minden pontjában létezik a sugár irányában vett határértéke. Riesz Frigyes és Marcell első eredménye azt állítja, amit már Fatou is sejtett: a sugár irányába vett határérték csupán nullamértékű halmazon lehet zérus, kivéve azt az esetet, amikor az eredeti függvény azonosan nulla. Ennyit a H^∞-ről. Amint azt a Riesz fivérek azonnal megjegyezték, a tételt könnyű kiterjeszteni H^p-re, p szokásos értékei mellett $(1<p\leqq\infty)$; a $p=1$ eset a legmélyebb.

Ha $F'(z)=f(z)$ $|z|<1$-re, ahol $f\in H^p$, $1<p\leqq\infty$, akkor $F\in H^\infty$ és Fatou és Pringsheim eredményei szerint (a sugár irányában vett határértékkel kiterjesztett) F függvény folytonos a zárt körlemezen, és korlátos változású a határán. Ha F nem állandó, és ha M a körvonal egy Borel halmaza, akkor a korábbi eredmények alapján ahhoz, hogy $F(M)$ nullamértékű halmaz legyen, szükséges és elegendő, hogy M mértéke nulla legyen (az önátmetszések elkerülése céljából az F függvényt úgy gondolhatjuk, mint a körnek egy Riemann felületre történő leképezését). Riesz Frigyes és Marcell általános tétele elejti az f-re vonatkozó feltevést, és azt mondja, hogy ha F a zárt körlemezen értelmezett olyan folytonos nem állandó függvény, amely analitikus a körlemez belsejében, és korlátos változású a peremén, akkor a perem bármely M Borel halmazára vagy M és $F(M)$ egyaránt nullamértékű vagy egyik sem. (Ebben a megfogalmazásban az F' derivált H^1-ben van nem pedig valamilyen magasabb H^p-ben.)

A tétel más módon is megfogalmazható (és napjainkban rendszerint ezt teszik). Egyik formájában az állítás az, hogy F abszolút folytonos (a peremen) és a deriváltja majdnem mindenütt nullától különböző. Egy szokásosabb megfogalmazás azt mondja, hogy a peremen az analitikus mérték (vagyis egy μ Borel mérték, amelyre $\int z^n d\mu(z)=0$ $(n=1, 2, 3, \ldots$ esetén) ekvivalens a Lebesgue mértékkel (a kölcsönös abszolút folytonosság értelmében).

Szubharmonikus függvények

A szubharmonikus függvényeket illetően elmondhatjuk, hogy Riesznek — és én most csak Frigyesről szeretnék beszélni — még a fogalom megalkotásában volt szerepe. Az egyik definíció szerint a síkbeli G tartományon értelmezett u függvény szubharmonikus, ha minden olyan korlátos G_0 résztartományra, melyre $\overline{G}_0\subset G$ és minden olyan harmonikus U függvényre, amelyre $u\leqq U$ G_0 határán, ugyanez az egyenlőtlenség érvényes G_0 belsejében. A fogalmi hátránya ennek a definíciónak az, hogy u-t össze kell hasonlítani minden elképzelhető G_0 résztartományon értelmezett U harmonikus függvénnyel. Riesz kevésbé erősnek tűnő definíciója, amely valójában ekvivalensnek bizonyul, mindössze a következőt kívánja: G bármely adott pontjában u értéke kisebb kell, hogy legyen, mint az elég kicsiny sugarú adott középpontú körök peremén vett középértéke. (Riesz megjegyezte és hangsúlyozta, hogy a szubharmonikus függvények az egyváltozós konvex függvény fogalmának több változó esetére való természetes általánosításai. Az egy valós változós harmonikus függvények egyben

lineárisak, ennek megfelelően valamint következésképpen a szubharmonikus függvények maguk a konvex függvények.)

Riesz szubharmonikus függvényekre vonatkozó tétele azt állítja, hogy minden ilyen függvény egy harmonikus függvény és egy potenciál összege. Pontosabban, ha u egy síkbeli G tartományon értelmezett (nem azonosan $-\infty$) szubharmonikus függvény, akkor egyértelműen létezik G-n egy olyan μ Borel mérték, hogy G minden kompakt E részhalmazán az

$$u(x) - \int_E \log \|x-y\| \, d\mu(y)$$

különbség harmonikus E belsejében. (Itt x és y a sík vektorai.) Ez a reprezentációs tétel természetesen részleteiben és szellemében elég hasonló általánosabb és nevezetesebb reprezentációs tételekhez, melyek Riesz Frigyes nevéhez kapcsolódnak. Magasabb dimenziókra vonatkozó változatai is vannak, (Riesz csak a kétdimenziós esetet tekintette) amelyek megfogalmazása és bizonyítása majdnem pontosan ugyanaz. Amire $n>2$ esetén gondolni kell, az mindössze az, hogy a megfelelő potenciál R^n-ben $-1/\|x\|^{n-2}$-vel van értelmezve ($\log \|x\|$ helyett).

A Riesz—Fischer tétel

Megemlékezhetünk Riesz Frigyesről mint topológusról, az integrálelmélet egyik úttörőjéről, a harmonikus függvények elméletének, a komplex függvénytannak, és az ergodelméletnek elmélyült kutatójáról, de igazi területe a funkcionálanalízis volt. A modern funkcionálanalízis jelentős részének alapját maga fektette le. Egyike volt azoknak, akik előtérbe helyezték az L^p tereket (és megjegyezték az L^1, L^2 és L^∞ kiemelt fontosságát), tanulmányozták a gyenge konvergenciát és gyenge kompaktságot, bevezették, valamint használták azt a fogalmat, amelyet ma függvénykalkulusként ismerünk. Riesz neve a témakör három nagyobb fejezetéhez kapcsolható: a Riesz—Fischer tétel, a Riesz reprezentációs tétel, és a kompakt operátorok Riesz-féle elmélete.

A Riesz—Fischer tétel Riesz-féle változata azt állítja, hogy l^2 és L^2 izomorf. Pontosabban azt mutatta meg, hogy ha $\{e_n\}$ ortonormált bázis $L^2(0,1)$-ben, akkor L^2-nek $\alpha_n = \int_0^1 f(x)e_n(x)dx$ formulával definiált l^2-re való leképezése kölcsönösen egyértelmű. Riesz első bizonyításában klasszikus trigonometrikus sorokat, és folytonossági valamint differenciálhatósági meggondolásokat használt, majd l^2 megfelelő unitér transzformációja segítségével tért át tetszőleges ortonormált bázisra. (A több évtizedes távlat tette lehetővé számomra, hogy ezt a távirati stílusú összefoglalót olyan tömör fogalnak segítségével fejezzem ki, amelyek még nem voltak elérhetőek Riesz számára.)

Napjainkban a Fischer-féle változat az általánosan használt: L^2 teljes. Fischer bizonyításának szelleme valamivel modernebb mint Rieszé, de ő is használ deriváltakat és határozatlan integrálokat is. Fischer megemlíti, hogy az ő változatából a Riesz-féle megfogalmazás közvetlen következményként adódik.

A Riesz—Fischer tétel nem együttműködés eredménye; azért viseli mindkettőjük nevét, mert egyidőben fedezték fel. Riesz 1907. március 18-án nyújtotta be feljegyzéseit a párizsi akadémiára, míg Fischer március 5-én adta elő a maga változatát Brünnben (a mai Brnoban).

(Kíváncsi voltam, hogy mivel foglalkozott Fischer, és utánanéztem. A matematika néhány részterületén aktívan tevékenykedett, öt évvel volt Riesz Frigyesnél idő-

sebb, és egyidős volt Riesz Marcellal. Bécsben született, először Brnoban, majd Erlangenban oktatott, azután 1920-tól 1938-ig Kölnben volt egyetemi tanár; 1954-ben halt meg. Főleg invarianciaelméletről és determinánsokról írt, és csak alkalmi kirándulásokat tett az analízis területére.)

A tételre Riesz többször is hivatkozott. Egyszer-kétszer Fischer tételének nevezte, néha úgy emlegette, mint a „Fischerről és jómagamról" elnevezett tételt, de leggyakrabban úgy idézte, hogy „az úgynevezett Riesz—Fischer tétel". Pályafutásának későbbi időszakában (egy 1949-ben tartott előadásában) utalt a tétel felfedezésének érdekes hátterére. Azt mondta, hogy az őt érdeklő probléma megoldásához a Lebesgue integrálok alkalmazásának az ötletét a Fatou lemma néven ismertté vált eredmény adta, és az alkalmazásra Fatou disszertációjának az olvasása bátorította fel. (Riesz éleslátását jól példázza, hogy az említett lemmát az integrálás alulról való félig folytonosságaként kezelte.)

A Riesz reprezentációs tétel

Számos tétel ismert Riesz reprezentációs tételeként, de akár C, L^2, L^1, L^∞ vagy legáltalánosabban L^p szerepel bennük, a végső következtetés ugyanaz. A leghíresebb és talán a legjellemzőbb a C térre vonatkozó állítás.

Világos, hogy ha g egy rögzített C-beli függvény és φ-t a $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ formulával értelmezzük C-n, akkor egy korlátos lineáris funkcionálhoz jutunk. Hadamard régi és fontos tétele (1903-ból) a megfordításról szól: ha φ korlátos lineáris funkcionál, akkor létezik C-beli függvényeknek egy olyan $\{g_n\}$ sorozata, hogy

$$\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g_n(x)\,dx.$$

Riesz lényegretörő továbblépése az volt (1909-ben), hogy a végtelen sok Riemann integrált egyetlen Stieltjes integrállal helyettesítette: létezik olyan korlátos változású α függvény, hogy

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\,d\alpha(x).$$

Napjaink nyelvén a tétel Borel-mértékkel történő megfogalmazását részesítik előnyben, de ez inkább csak terminológiai és nem lényegi különbséget jelent.

A Riesz reprezentációs tétel minden megfogalmazása formailag azonos: minden korlátos lineáris funkcionál abba a nyilvánvaló típusba tartozik, amit az adott összefüggések sugalmaznak. Például az L^2 térre azt mondja, hogy ha φ korlátos lineáris funkcionál, akkor létezik egy olyan L^2-beli g függvény, hogy

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

minden L^2-be tartozó f-re. A bizonyítás magától értetődő útja nem triviális mértékelmélet (a Radon—Nikodým tétel) alkalmazása. Ugyanakkor az absztrakt Hilbert térre vonatkozó megfelelő állítás szokásos geometriai bizonyítása nem igényel semmi komolyat. Hogy lehet ez?

A dolog nyitja az, hogy a Riesz reprezentációs tétel és a Riesz—Fischer tétel körülbelül egyforma mélységű; ha valamelyiket ismerjük, akkor a másik bizonyítása már egyszerű. A Hilbert-térre vonatkozó reprezentációs tétel geometriai bizonyítása a tér teljességén alapszik, és L^2-re való alkalmazásához a Riesz—Fischer tételre van szükség. A másik irány könnyebb (és jelentősége is kisebb): egy normált vektortér korlátos lineáris funkcionáljainak tere mindig teljes, és a Riesz reprezentációs tétel valójában azt állítja, hogy L^2 korlátos lineáris funkcionáljainak halmaza megegyezik magával L^2-vel.

Kompakt operátorok

Nagy része annak, amit ma funkcionálanalízisként emlegetünk, Riesz első könyvéhez (1913) és az Actában megjelent nagyobb terjedelmű dolgozatához (1918) nyúlik vissza. Nevezetesen az a könyv volt az előárnyéka a mai Riesz-féle függvénykalkulusnak. Az ötlet az, hogy a T operátor f függvényét a Cauchy-féle integrálformulára emlékeztető módon az

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)(\lambda - T)^{-1}d\lambda$$

képlettel értelmezzük, és kapcsolatot hozunk létre az operátorelmélet és az analitikus függvények körében alkalmazott módszerek között.

Mind az említett könyv, mind pedig az Actában megjelent dolgozat súlypontját a kompakt operátorok Riesz-féle elmélete jelenti. Az elmélet tárgyalja az $I-C$ alakú operátorokat (ahol C kompakt), és leírja, hogy milyen összefüggés van az ilyen operátorok és adjungáltjuk között, és hogyan viszonyul egy ilyen operátor és adjungáltja magja, illetve értékkészlete egymáshoz. A tanulmány csúcsa a kompakt operátorok spektrális tulajdonságainak teljes leírása.

Riesz funkcionálanalízisbeli munkája tartalmazza a Hilbert—Schmidt-féle integrálegyenleteknek, a korlátos és nem korlátos önadjungált operátorok spektrál tételének és a vektorhálóknak a vizsgálatát. Az utóbbiakat ma Riesz-tereknek nevezik. Kutatási eredményei közül az itt leírtak a legkiemelkedőbbek.

Zárszó

Egy matematikus bizonyíthat eredeti ötleteken alapuló új eredményeket, és kerekítheti, szépítheti mások munkáját. Ritka az olyan tudós és az olyan munka, amelyre mindkét megfogalmazás ráillik. Riesz valóban sok eredetit hozott létre (és meghagyta másoknak a részletek kidolgozását), és ugyanakkor ő is csiszolta és tökéletesítette mások tételeit. Egy ilyen beszámolónak természetesen az eredeti eredményekre kell tenni a hangsúlyt, de mégsem tudok ellenállni a kísértésnek, és elmondom egy jól ismert tétel Riesztől származó ragyogó bizonyítását. A számtani-mértani közép egyenlőtlenségről van szó, amelynek bizonyítását egy Hardyhoz írt levélből idézem (1930). Mivel $\log t \leqq t-1$ minden t-re, ha f pozitív függvény (0,1)-en és integrálható, akkor

$$\log\frac{f(x)}{A(f)} \leqq \frac{f(x)}{A(f)} - 1$$

minden x-re. (Itt $A(f)=\int_0^1 f(x)dx$ a számtani közép.) Integrálás után azt kapjuk,

hogy $A(\log f)-\log A(f)\leqq 0$, és ebből hatványozással adódik a kívánt eredmény a szokásos formájában.

E beszámoló célja az volt, hogy leírja Riesz kutatómunkájának főbb eredményeit, és ezen keresztül megpróbáljon bepillantani a matematika egy olyan ágának történetébe, amely él és virágzik. Az igazi indíték egy ilyen múltba pillantáshoz nem az elsőbbségi viták elbírálása, és egyesek hírnevének erősítése, hanem a jelen és a jövő megértése. Amikor Riesz munkásságáról beszélek, nem akarom csökkenteni mások érdemeit, nem akarom azt mondani, hogy ezt, vagy azt ő, és kizárólag ő, fedezte fel, vagy, hogy ő ismerte fel először. Mindössze azt mondom, hogy egyike volt a felfedezőknek, és, hogy nélküle ez a tudományterület lassabban jutott volna előre. Munkásságával olyan mértékben járult hozzá a fejlődéshez, amire egy közönséges halandó nem lett volna képes.

Fordította: PETZ DÉNES

ТВОРЧЕСТВО ФРЕДЭРИКА РИССА

П. Р. ХАЛЬМОШ

THE WORK OF FREDERIC RIESZ

P. R. HALMOS

FEJÉR ÉLETMŰVÉNEK JELENTŐSÉGE

J.-P. KAHANE

Amikor felkértek, hogy beszéljek Fejér életművének a jelentőségéről, lelkesen elvállaltam. Annak persze tudatában voltam, hogy a tárgy meghaladja képességeimet, de arról fogalmam sem volt, hogy Fejérről már kitűnő tanulmányokat írtak.[1] Éppen most hallottuk Tandori Károly szép előadását Fejér életéről és munkásságáról. Észszerűnek tűnik tehát, ha felteszem: Fejért itt mindenki jobban ismeri, mint én, és ez nagyon megkönnyíti a feladatomat. Tőlem minden bizonnyal személyes, tehát részleges és részrehajló megjegyzéseket várnak; ezért talán nem fognak bennem csalódni, ha Fejér hatásáról távolról sem rajzolok teljes képet. Néhány utalással és példával arra szeretnék rámutatni, mennyiben gyökerezik Fejér gondolatvilága a XIX. sz. matematikájában és hogyan tükröződik a mi korunkéban. A híres Fejér-tételből indulunk ki, amelyről Tandori az előbb szólt.

1900. november 19-én a párizsi Tudományos Akadémia nyugtázza, hogy Leopold FEJEV úr Budapestről beküldött egy kéziratot, melynek címe „Bizonyítás arra a tételre, hogy egy korlátos és integrálható függvény Euler-féle értelemben analitikus". December 10-én a Comptes Rendus közli „A korlátos és integrálható függvényekről" című nevezetes cikket. Ebben vezeti be a szerzője azokat a fogalmakat, amelyeket ma Fejér-összegeknek, Fejér-magnak és Fejér-féle szummációs eljárásnak nevezünk, és itt bizonyítja be a híres Fejér-tételt is: minden folytonos függvény a Fejér-összegeinek a határfüggvénye. A Fejér névben november 19-én szereplő elírás (Fejér helyett Fejév) a december 10-i cikkben már nincs meg. Van viszont helyette másik: a Picard által bemutatott cikk szerzőjét így írják: Léopold TEJER. Ebben az alakban lép be Fejér neve a történelembe.[2]

Fejér tétele gyorsan híressé vált. Az 1910-es években már klasszikus eredménynek számított: ezt használta A. Hurwitz az egyenlő kerületű alakzatokról írt munkáiban a trigonometrikus rendszer teljességének a bizonyítására, kiterjesztették a Lebesgue-integrálható függvényekre (Fejér—Lebesgue tétel), általánosították az approximációelméletben használatos más magfüggvényekre (Ch. de la Vallée Poussin), teljesen

[1] TURÁN P., Mat. Lapok 1 (1950), 160—169. Mat. Lapok 11 (1960), 8—18.
SZÁSZ P., MTA Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl. 10 (1960), 103—107.
G. SZEGŐ, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 346—352.
G. PÓLYA, J. London Math. Soc. 36 (1961), 501—506.
J. ACZÉL, Publ. Math. Debrecen 8 (1961), 1—24. Bevezetés és megjegyzések az L. FEJÉR, Gesammelte Arbeiten c. kötetben.
J. HORVÁTH, Zentralblatt für Math. 208 (1971), 1—2.
G. SZEGŐ, Constructive theory of functions (Proc. Conf. Budapest, 1969), 19—26. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

[2] Comptes-Rendus 131 (1900), 825 és 984—987.

új, egyszerű bizonyítást adtak vele a Dirichlet—Jordan tételre (Hardy), pontosították az abszolút szummabilitás fogalma segítségével (Hardy és Littlewood)[3]; a tetejébe pedig bármely matematikus hallgató megérthette, annyira egyszerű volt. 1912-ben, a cambridge-i Nemzetközi Kongresszuson már egyetlen matematikus sem engedhette meg magának, hogy ne ismerje Fejér nevét vagy annak helyesírását — kivéve talán az ékezet helyét.

Az előző felsorolást még két dologgal ki kell egészítenem. Az első magát Fejért illeti. Szó sincs róla, hogy „egyművű szerző" lett volna. De nála jobban senki sem fogta föl a tétele jelentőségét, egész életében kereste alkalmazásait és analógjait. Egyik utolsó cikkében jegyzi meg, hogy erősen inspirálta Picardnak az egész függvényekről szóló tétele és a Gauss-féle mechanikus kvadratúra formulája. Azt hiszem, a Picard-tétel és a Gauss-féle kvadratúra között nincsen nyilvánvaló kapcsolat. Mégis azt látjuk, hogy Fejér életművében a Fejér-tétel valóban összeköti őket: egyrészt alkalmazható a harmonikus polinomok gyökeire, és ezáltal lehetővé teszi a Picard—Landau tétel pontosítását; másrészt ha a Fejér-összegek mintájára képzett Hermite—Fejér interpolációs polinomok alappontjaiul a Legendre-polinomok gyökeit választjuk, az így kapott polinomok a lehető legtermészetesebb módon lépnek fel a Gauss-féle kvadratúrában.

Második megjegyzésünk Ch. de la Vallée Poussin analízis tankönyvével kapcsolatos. A könyv első kiadása (1903—1906) a korabeli nagy analízis tankönyvek mintájára kevés helyet szentel a Fourier-soroknak, a Dirichlet-féle konvergenciatételt pedig ugyanúgy bizonyítja, ahogy annak idején, 1830-ban, Dirichlet. A második kiadásban (1912) viszont már szerepel Fejér tétele, majd Hardy módszerével levezeti belőle a Dirichlet-tételt, végül közli Fejér példáját is olyan folytonos függvényre, amelynek a Fourier-sora egy pontban divergens. A két kiadás különbségén lemérhetjük, milyen jelentős forradalom ment közben végbe.

Miben áll ez a forradalom, mi az, ami Fejérben eredeti? Hogy ezt lássuk, helyezkedjünk vissza 1900-ba!

A XIX. sz.-ban az analízisen belül óriás léptekkel haladt előre az egyváltozós komplex függvények elmélete — enne erejét jól mutatja Hadamard és de la Vallée Poussin prímszámtétele. A valós függvénytan a fizika parciális differenciálegyenletei révén fejlődött — így például a potenciálelmélet új ötleteket hozott —; fejlődés tehát itt főként a többváltozós valós függvények elméletében mutatkozott. Az egyváltozós valós függvények elméletében ezzel szemben különös, nyugtalanító dolgok születtek: sehol sem deriválható folytonos függvények (Weiertrass), olyan folytonos függvények, amelyek Fourier-sora egy pontban divergens (du Bois Reymond). Ez az a pillanat, amikor Hermite azt írja Stieltjesnek, hogy *„rémülettel és borzalommal fordul el az olyan siralmas fekélytől, mint amilyen egy sehol sem differenciálható, folytonos függvény"*. Nincs-e olyan folytonos függvény, amelynek a sora mindenütt divergens, ha egyszer vannak sehol sem differenciálható folytonos függvények? Fejér disszertációja elején azt mondja, hogy ennek a lehetősége egyáltalán nem kizárt. Nem konvergálhat-e egy Fourier-sor anélkül, hogy előállítaná a függvényt, ahogy ez bizonyos, akárhányszor differenciálható függvények Taylor-sorával előfordul? Úgy tűnik, ezt a kérdést Minkowski vetette fel — és az imént Tandori is szólt róla. Mindent egybevetve, 1900-ban a Fourier-sorok nem tűnnek valami megbízható, kényelmes eszköznek; túl sok bennük a bizarr jelenség.

[3] A. Hurwitz, Math. Annalen 57 (1903), 425—446.
H. Lebesgue, Comptes-Rendus Math. Annalen 51
Ch. de la Vallee Poussin, Bull. Acad. Royale Belgique különösen a 245. o.
G. H. Hardy, G. H. Hardy—J. L. Littlewood,

Tanulságosnak tartom Émile Picard 1891-ben megjelent analízis könyvét. Ebben *előbb* szerepel a gömbre vonatkozó Dirichlet-probléma, mint ugyanezen probléma a körben. Ez nem azért történik így, mintha a körben a megoldás körülményesebb volna, mint a gömbben; hanem mert a körbeli megoldás a „Fourier-sorok" fejezetbe illik, márpedig ez a téma nem való egy analízis tankönyv elejére!

Vegyük közelebbről szemügyre azt a néhány oldalt, amelyet Émile Picard a körre vonatkozó Dirichlet-problémának szentel — mégpedig azért, mert Fejér jól ismeri, cikkében idézi is. Picard Schwarz módszerével dolgozik, melynek lényege az

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} = 1+2\sum_1^\infty r^n \cos nt$$

függvény, az ún. „Poisson-mag" tulajdonságainak a kihasználása. Alkalmazásként Picard megmutatja, hogy ha egy, a körön folytonos függvény Fourier-sora $\sum_0^\infty (a_n \cos nt+b_n \sin nt)$, akkor ez a függvény előállítható

$$\sum_{n\leqq N(r)} (a_n \cos nt+b_n \sin nt)r^n$$

alakú trigonometrikus polinomok egyenletes limeszeként. Ezzel a Weierstrass-féle approximációs tétel új bizonyításához jutunk.

Valamivel később, 1893-ban Ch. de la Vallée Poussin is használja a Poisson-magot, ő az

$$\int F(x)f(x)\,dx = \pi\left(\frac{A_0a_0}{2}+\sum_1^\infty (A_na_{nt}+B_nb_n)\right)$$

formulát nyerte vele, amely lényegében ekvivalens a trigonometrikus rendszer teljességével. 1900-ban Adolf Hurwitz is kimondja ezt az eredményt lemmaként, amikor Fourier-sorok segítségével megoldja az izoperimetrikus problémát. Ez a dolgozata a Comptes Rendus-nak ugyanabban a kötetében jelent meg, amelyben Fejér cikke is.

Van tehát Fourier-sorokról néhány érdekes eredmény, de ezek és a problémák nincsenek összehangolva. Picard megjegyzése megoldja Minkowski problémáját, de Picard nem ismeri a Minkowski-problémát, Minkowski pedig nem tud Picard megjegyzéséről. Picard megjegyzéséből következik Ch. de la Vallée Poussin formulája, csakhogy nyilvánvalóan de la Vallée Poussin sem tud a megjegyzésről. Hurwitz pedig biztosan nem ismeri de la Vallée Poussin dolgozatát (ezt 1903-as cikkében el is ismeri). Mindezek tehát egy félreeső problémára vonatkozó, egymástól elszigetelt munkák.

Másfelől az az ötlet, hogy egy divergens sorhoz valamilyen alkalmas szummációs eljárással összeget rendeljenek, jól ismert 1900-ban. Lebesgue ezt d'Alembert-től származtatja, mégpedig az

$$\frac{1}{2}+\sum_1^\infty \cos nt \quad (0<t<2\pi)$$

sorral és a részletösszegek számtani közepének képzésével kapcsolatban. Mindenesetre ezzel foglalkozott már Abel, majd Poisson, Frobenius, Hölder, Cesàro, Borel. Abel bizonyította azt a nevezetes tételt, amely szerint

$$\lim_{r\nearrow 1}\sum_0^\infty a_nr^n = \sum_0^\infty a_n,$$

ha a jobb oldal létezik a szokásos értelemben. Piosson a baloldalt, amennyiben létezik,

a jobboldali sor általánosított összegeként definiálja (akár konvergens, akár divergens ez a sor). Frobenius általánosította Abel tételét: megmutatta, hogy

$$\lim_{r \nearrow 1} \sum_0^\infty a_n r^n = \lim_{n \to \infty} \frac{S_0 + \ldots + S_{n-1}}{n},$$

ha a jobboldal létezik; azután Hölder ezt az eredményt is általánosította a számtani közép képzésének iterálásával. Cesàro Abelnak egy másik, a sorok szorzására vonatkozó tételét általánosította, és ebből a célból bevezette azt az eljárást, amelyet (C, k)-val jelölünk. 1900-ban Cesàro kutatásai még elég újak (1890). 1895-tel kezdődően azután Émile Borel új szummációs eljárásokat definiált, és Taylor-sorok analitikus folytatására használta őket. Fejér tud Borel kutatásairól és ismeri Frobenius tételét.

Régi ötlet, hogy a körre vonatkozó Dirichlet-probléma megoldását az

$$f(r \cos t,\ r \sin t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt) r^n$$

függvényben keressük, ahol

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

a peremfüggvény Fourier-sora. Kézenfekvő volt, hogy Abel tételét alkalmazzuk, de P. du Bois Reymond példája nyomán ettől semmit sem remélhetünk. Megyünk-e valamire Frobenius tételével? Úgy tűnik, ebből indult ki Fejér.

Horváth J. szerint Fejér Berlinben ismerkedett meg a problémával. 1900 októbere végén Budapesten pár nap alatt sikerült megoldania és a megoldást leírnia. Rögtön észrevette, hogy a módszere fontosabb, mint a Dirichlet-probléma új megoldása. Dolgozatában a főtétel így hangzik:

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(S_0 + \ldots + S_{n-1})(t),$$

és a Dirichlet-probléma megoldása ennek csak egyik következménye. A tétel bizonyítása a

$$K_n(t) = \frac{1 - \cos nt}{1 - \cos t}$$

magfüggvény vizsgálatán alapszik, és nagyon közel áll a Dirichlet-probléma Schwarz-féle megoldásához, amely a

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}$$

Poisson-mag segítségével történik.

Fejér tehát *nem* vezetett be divergens sorok szummálására új eljárást; éppen ellenkezőleg, a legkézenfekvőbbet használta, amelyet már Hölder, Frobenius és Cesàro is vizsgált. *Nem* ő vezette be a pozitív magfüggvényeket a Fourier-sorok vizsgálatában. A Poisson-mag már jól ismert volt, és Picard még az 1900-as dolgozat keletkezése előtt alkalmazta Fourier-sorokra. És nem is az történt, hogy komoly módszerekkel megoldott egy nehéz sejtést.

1900-as dolgozata mindennél sokkal többet nyújtott. Egyszerű, könnyű, jól használható állítást talált ott, ahol a matematikus világ szerint a rendellenesség, a furcsaság uralkodott. A szummálási eljárások és a Fourier-sorok összekapcsolásával mind-

két elméletet a megfelelő keretek közé helyezte. Ettől fogva úgy látjuk, hogy Riemannnak és Cantornak a trigonometrikus sorokkal kapcsolatos eredményei, Poissonnak és Schwarznak a Dirichlet-problémáról szóló munkái és Weierstrassnak a hővezetés egyenletére vonatkozó kutatásai mind egy tőről fakadnak, és ezt a közös lényeget Fejér tétele fejezi ki a legegyszerűbben: egyrészt a függvényt pozitív mag segítségével simítjuk, másrészt a Fourier-sort szummációs eljárással értékeljük ki. Fejér nyomán így a Fourier-sorok jó fél évszázadra ismét alapvető szerephez jutottak az analízisben, és őrá vezethető vissza az is, hogy megélénkült az érdeklődés az *egyváltozós* valós függvények iránt.[4]

Bár más területekről és nem azonos nagyságrendű következményekről van szó, véleményem szerint Fejérnek hasonló szerepe volt az analízisben 1900-ban, mint Einsteinnek az elméleti fizikában a mozgó testek elektrodinamikájáról írt művével 1905-ben. Einsteinnek is megvoltak az elődei, és lényegében olyan elméletet munkált ki, amelynek alkotórészei már készen álltak. Einstein is azzal koronázza meg a XIX. sz. fizikáját, hogy új perspektívát nyit rá. Ezt a párhuzamot még tovább is vihetnénk. (A XIX. századot lezáró relativitáselmélet mellett a fizikusok a kvantummechanikát szeretik a XX. sz.-i fizika alapjának tekinteni; nem hasonló-e az analízisben az integrálás elméletének a szerepe?)

1900-tól fogva új fejlődésnek indult az egyváltozós valós függvények elmélete, különösen Lebesgue és Baire disszertációjával. Lebesgue-et érdekelték a trigonometrikus sorok, mert ez integrálelméletének egy alkalmazási területe volt, és meg is adta a Fejér-tétel „majdnem mindenütt" változatát. Baire, akit a függvénysorok általában érdekeltek, disszertációjában kétségtelenül Fejér egyik kedvenc témájára bukkant, a folytonos függvények határfüggvényeinek a vizsgálatára. Arról már szóltam, milyen mélyen hatott Fejér tétele Hardyra, Littlewoodra, de la Vallée Poussinra.

Alighanem érdekes lenne ezt az előadást azzal folytatni, hogy 1900-tól fogva végignézzük az irodalomban Fejér első cikkének, valamint további munkáinak a közvetlen hatását. Erre nem vagyok illetékes, de nincs rá erőm és időm sem. Említettem már néhány kiváló, Fejérről szóló tanulmányt, azok ezzel a kérdéssel kapcsolatban is sok mindenre kitérnek; különösen gazdag Aczél J. (1961) cikkének a bibliográfiája. Másrészt pedig az analízis mindazon nagy tárgyköreiről, amelyekben Fejér L. is alkotott, van olyan monográfia, amely az ő munkásságát is bemutatja. A trigonometrikus sorokkal kapcsolatban ilyen A. Zygmund: Trigonometric Series c. könyve, a jegyzeteket is beleértve; a könyvben alig van olyan tétel, amely névvel szerepel; „Fejér tétele" a ritka kivételek egyike. Az ortogonális függvényekről e célra G. Szegő: Orthogonal Polynomials (1939) c. könyvét ajánljuk. Az interpolációs polinomokat illetően Feldheim Ervinnek a Mémorial des Sciences Mathématiques-ban megjelent cikkét (1939) említjük; ezt ki kell még egészíteni Erdős és Turán későbbi munkáival.

Bár Fejér nem írt könyvet, még mindig gyakran idézi az irodalom. 1969 és 1980 között 92 olyan dolgozatra találtam, amely Fejér valamelyik munkájára hivatkozik — ezek némelyikét egyébként mérnökök vagy fizikusok írták.

Fejért azért olvassák még mindig, mert élvezet őt olvasni. Amit ír, az mind világos, érthetően motivált, és egy szóval sincs benne több, mint amennyi szükséges. Különösen tetszik nekem az, amit franciául ír. Ha a nyelvezete nem is tökéletes, meglepő

[4] A Fejér dolgozatát megelőző évtizedben a matematikusok olyan kevés figyelemre méltatták a Fourier-sorokat, hogy bárki, aki ezzel foglalkozott, a legnagyobb jóhiszeműséggel gondolhatta, hogy ő az egyetlen, akit az ilyesmi érdekel. Szót ejtettünk róla, hogy da la Vallée Poussin nem ismeri Picard eredményeit, Hurwitz pedig de la Vallée Poussinéit. Fejér dolgozata azután fölkelti a figyelmet: pl. Hurwitz azonnal fölismeri, hogy ez a leghathatósabb eszköz formulája bizonyítására, és egyben elismeri Ch. de la Vallée Poussin prioritását is.

fordulatokat használ, azt pl., hogy a pozitív magok első pillantásra mind hasonlók — ez persze nem így van, ha tovább is gondolunk —, így mondja: első pillantásra úgy hasonlítanak egymásra, mint egyik pingvin a másikra.

Másrészt viszont minden matematikus felfedezéseket tehet Fejér műveiben. Csodálatosan számol, erre jó példa az, ahogy az $(1-z)^{-\varrho}\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)$ függvény Taylor-sorának együtthatóira az

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi e}} n^{-\frac{3}{4}+\frac{\varrho}{2}} \sin\left(2\sqrt{n}+\left(\frac{3}{4}-\frac{\varrho}{2}\right)\pi\right)$$

aszimptotikus becslést nyeri. Váratlan prioritásokra is bukkanunk nála. Úgy látom pl., hogy abban az 1909-es dolgozatában, amelyben a fenti formulát adja, megtalálható a „van der Corput lemma". Az pedig biztos, hogy ez egységkörben analitikus függvények elméletében szereplő „Blaschke-faktor" megtalálható már Carathéodory és Fejér 1907-es, a Jensen-tételről írott cikkében.

Még fontosabb azonban, hogy kiemeljük Fejér közvetett hatását.

Tandori beszélt a személyiségéről, a tanításáról, a tanítványairól. Tanítványainak a névsora mennyiségi és minőségi szempontból egyaránt lenyűgöző. Ha a matematikai leszármazottjait tekintjük, vagyis a tanítványai tanítványait stb., biztosan megtaláljuk itt a magyar matematikusok többségét és igen sok matematikust Svédországból, az Egyesült Államokból, Izraelből és a világ többi részéből. Néhány témakörben — az ortogonális polinomokra és az interpolációs polinomokra gondolok — a magyar matematikusok még mindig vezető szerepet játszanak. A világ matematikájában a magyar matematikusoknak — a Magyarországon és a diaszpórában élőknek — kiemelkedő helyük van, és mindig is csodálták a többiek, hogyan születhetett egy kis országban ilyen ragyogó matematikai iskola. Pólya, Szegő, Turán arról tesz tanúságot, milyen nagy volt Fejér szerepe ennek az iskolának a kialakulásában, mind személyisége kisugárzása révén, mind pedig azáltal, hogy nagy gondot fordított rá: a magyar nyelvű folyóiratokban a lehető legszélesebb matematikai közönséghez szóljon. Ezen mindannyiunknak, a világ minden sarkában el kellene gondolkodnunk.

A következőkben arra szorítkozom, hogy néhány példán megmutassam, hogyan jelentkeznek Fejér gondolatai ma is aktuális problémákban.

Nézzük Y. Katznelson „An introduction to harmonic analysis" (1968) c. könyvét. A Fourier-sorokkal kezdődik. Rögtön az első oldalakon az

$$f(x) = \lim \frac{1}{2\pi} \int f(x-t) k_n(t)\, dt$$

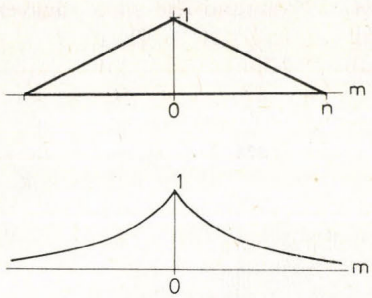
formulát úgy interpretálja, mint a körön definiált függvények Banach-terében egy egyenlőséget, feltéve, hogy a norma eltolás-invariáns, az eltolás pedig folytonos operátor. (Katznelson az ilyen tereket „homogén terek"-nek nevezi; lényegében ugyanez a fogalom megtalálható Bochner „Harmonic analysis and the theory of probability" (1955) c. könyvében is.) A $k_n(t)$ magfüggvény lehet a $K_n(t)$ Fejér-mag, vagy bármilyen más, kívánt tulajdonságú magfüggvény. Így a σ_n Fejér-összegek f-hez tartanak minden L^p térben $(1 \leqq p < \infty)$ és C-ben, a körön folytonos függvények terében.

A fenti formulában a Fejér-mag konvolúció-faktorként szerepel. A Fourier-együtthatói tehát szorzófaktorok, azaz a Fourier-együtthatók szokásos jelölésében

$$\hat{\sigma}_n(m) = \hat{K}_n(m)\hat{f}(m).$$

Itt

$$\hat{K}(m) = \sup\left(1 - \frac{|m|}{n},\ 0\right);$$

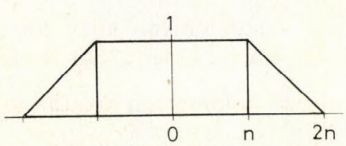


ez a $[-n, n]$ intervallumon a „háromszögfüggvény". Ha háromszögfüggvények konvex kombinációit vesszük, akkor azokat a páros, pozitív függvényeket kapjuk, amelyek a 0-tól jobbra konvexek és a végtelenben 0-hoz tartanak. Minthogy a K_n-ek 1 integrálú pozitív függvények, ezzel a következő tételhez jutunk: minden olyan $\{c_m\}$ $(m \in \mathbf{Z})$ sorozat, amely páros, pozitív, $m \geqq 0$-ban konvex és 0-hoz tart, valamely $f \in L^1$ pozitív függvény Fourier-együtthatóinak a sorozata. Speciálisan, az L^1-beli függvények Fourier-együtthatói tetszőlegesen lassan tarthatnak 0-hoz. Ez az eredmény alapvető, ha L^1-et mint konvolúcióalgebrát vizsgáljuk; nagyon egyszerűen következik pl. belőle, hogy minden $f \in L^1$ függvény $f = g * h$ $(g \in L^1,\ h \in L^1)$ alakra bontható (Salem).

A Fejér-magnak közeli rokona a

$$V_n(t) = 2K_{2n}(t) - K_n(t)$$

„de la Vallée Poussin-mag", amelynek a $\hat{V}_n(m)$ Fourier-együtthatói $[-2n, 2n]$ alapú „trapézt" alkotnak. V_n nem pozitív mag, de van két nagy előnye. Az első az, hogy az



approximációelméletben nagyon jól használható (de la Vallée Poussin egyébként 1919-ben az egyváltozós valós függvények approximációjáról szóló előadásában vezette be): a $2n$-edrendű de la Vallée Poussin-összegekkel történő approximáció körülbelül a legjobb, n-edrendű trigonometrikus polinomokkal történő approximáció. A másik előnye az, hogy a $\hat{V}_{2^{j+1}} - \hat{V}_{2^j}$ különbségek egységfelbontást alkotnak, és a tartóik, $\pm[2^j, 2^{j+2}]$, gyorsan tartanak a végtelenbe. A de la Vallée Poussin összegek szerinti felbontás tehát szoros kapcsolatban van a Fourier-sorok diadikus felbontásával:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{int} = \sum_j \sum_{2^j \leqq |n| < 2^{j+1}} c_n e^{int}.$$

A trigonometrikus polinomokkal való közelítések elméletének jó részét

$$\|(V_{2^{j+1}} - V_{2^j}) * f\|_E = O(\omega_j) \Leftrightarrow f \in F$$

alakú tételek teszik ki, ahol E és F homogén Banach-terek, ω_j pedig nullsorozat. Pl.

$$\|(V_{2^{j+1}}-V_{2^j})*f\|_C = O(2^{-j\alpha}) \Leftrightarrow f\in\Lambda_\alpha,$$

ahol $\Lambda_\alpha=\mathrm{Lip}\alpha$ $(0<\alpha<1)$, Λ_1 a Zygmund-féle sima függvények osztálya, $\alpha>1$ esetén pedig $f\in\Lambda_\alpha$ akkor és csak akkor, ha $f'\in\Lambda_{\alpha-1}$. Ha $E=L^2$ és $\omega_j=2^{-j\alpha}$, akkor F Szobolev-tér, a jellemzés egyszerűbb és könnyűszerrel kiterjeszthető $\mathbf{R}^n$ fölött $\mathbf{T}^n$-re. Nagyon hasznos az a módszer, amely úgy jár el, hogy a függvényeket diadikusan felbontjuk a spektrumuk homotetikusan transzformált sávjai szerint; sokat használta ezt Hardy, Littlewood, Paley. Ha a közönséges Fourier-sorok helyett Fourier—Walsh vagy Fourier—Haar sorokra alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, amit manapság diadikus martingáloknak neveznek.

Ha a V_n magot kissé módosítjuk és $(N+1)K_{(N+1)n}-NK_{Nn}$-t tekintjük, a konvergenciára vonatkozó eredményt kapunk: ha a c_n együtthatókra teljesül a

$$\sum_{2^j}^{2^{j+1}} |c_n| = O(1)$$

feltétel, akkor az S_n részletösszegek konvergálnak minden olyan pontban, ahol a Fejér-összegek konvergálnak, és egyenletesen konvergensek minden olyan halmazon, amelyen a Fejér-összegek egyenletesen konvergensek. Ez a feltétel pedig teljesül, ha

$$(H) \qquad c_n = O\left(\frac{1}{|n|}\right),$$

vagy ha

$$(F) \qquad \sum |nc_n|^2 < \infty.$$

A (H) feltétel Hardytól (1909) származik, és teljesül, ha f korlátos változású. Ezzel a Dirichlet—Jordan tételhez jutunk, mégpedig a lehető legrövidebb úton: ha f korlátos változású és minden pontban $f(x)=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$, akkor a sor f-hez tart, és ez a konvergencia egyenletes minden olyan zárt intervallumban, ahol f folytonos.

Az (F) feltétel Fejértől származik. Fejér annak a bizonyítására használta, hogy ha $f(z)=\sum_0^\infty c_n z^n$ az egységkörben holomorf, a határán folytonos függvény, amelynél az egységkör képe korlátos területű (alkalmas Riemann-felületen), akkor a Taylor-sor egyenletesen konvergens. Speciálisan ez a helyzet, ha $f(z)$ az egységkör konform leképezése valamely egyszerű Jordan-görbe belsejére. Ezt a tételt használta azután Pál, Bohr, majd Salem annak a bizonyítására, hogy $\mathbf{T}$-n minden folytonos, valós értékű g függvényhez létezik $\mathbf{T}$-nek olyan h homeomorfizmusa, amelyre a $g(h(t))$ összetett függvény Fourier-sora egyenletesen konvergens. Csak mostanában sikerült erre a tételre olyan bizonyítást találni, amely nem használ konform leképezést és lehetővé teszi a komplex értékű g függvények tárgyalását is.[5] Megjegyzem, nyitott probléma, hogy létezik-e minden g-hez olyan h, amelyre a $g(h(t))$ összetett függvény Fourier-sora abszolút konvergens.

Fejért nagyon érdekelte a Fourier- és a Taylor-sorok részletösszegeinek a viselkedése. E téren az ötleteit jelentősen továbbvitték. Kezdjük az egységkörön $(z=e^{it})$

[5] Long Jui-lin, P. Turán emlékkötet.

tekintett $\sum_0^\infty c_n z^n$ Taylor-sorokkal és ezek

$$S_n(t) = \sum_0^n c_m e^{imt}$$

részletösszegeivel!

Fejér egy híres példája azt mutatja, hogy $f(z)$ lehet a zárt egységkörön ($|z| \leqq 1$) folytonos, és az $S_n(t)$ részletösszegek mégis divergálhatnak t értékkészletének egy sűrű részhalmazán. Ma már tudjuk, hogy az $S_n(t)$-k tetszőleges nullmértékű halmazon divergálhatnak (ennek a bizonyítása megtalálható Katznelson könyvében), és ennél több nem is igaz. Valóban, ha $\sum |c_n|^2 < \infty$ vagy akár $f(z) \in H^p$, akkor a sor a határon majdnem mindenütt konvergens: ez Carleson (1966) híres tétele, amelyet R. Hunt kiterjesztett az L^p-kre ($p>1$). $p=1$ esetén Kolmogorov (1926) példája szerint létezik olyan $f \in H^1$, amelyre a $\sum_0^\infty c_n z^n$ sor minden, egységnyi abszolút értékű z-re divergens. Végül pedig léteznek olyan, nagyon egyszerű $f(z)$ függvények is $\left(\text{pl. } \frac{1}{1-z}\right)$, amelyekre S_n a határon mindenütt divergens, de a $\sigma_n = \frac{S_0 + \ldots + S_{n-1}}{n}$ Fejér-összegek már majdnem mindenütt konvergensek. Érdekes az olyan S_n-ek vizsgálata, amelyekre σ_n a $|z|=1$ kör egy nullánál nagyobb mértékű E részhalmazán konvergál. Ezekről az egyetlen egyszerű tétel Marcinkiewicztől és Zygmundtól (1941) származik: az S_n torlódáspontjai E-ben majdnem mindenütt „kör struktúrájúak", azaz σ_n középpontú körök egyesítését alkotják. Érdekes lenne az S_n-ek eloszlását jobban ismerni: igaz-e pl. valamilyen értelemben az, hogy az S_n-eknek a torlódáspontjaik halmazára való vetületei egyenlő eloszlásúak?

Térjünk most a Fourier-sorok részletösszegeire:

$$S_n(t) = \sum_{-n}^n c_n e^{int}, \quad c_n = \hat{f}(n).$$

Carleson tétele Fejérnek a disszertációja elején feltett kérdését válaszolja meg. Születtek-e még ezen a téren olyan eredmények, amelyek érdekelhették volna Fejért? Néhány ilyennek a bemutatására merészkedem. A **T**-n folytonos f függvények esetére fogok szorítkozni.

Az nem lehetséges, hogy az $|S_n(t)|$ abszolút értékek egy n-től független t pontban végtelenhez tartsanak. Valós f esetében ez Fejér tételéből következik, komplex f esetében pedig Hardy és Littlewood abszolút szummabilitási tételéből, amely így írható:

(*HL*) $$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} |S_j(t)| \leqq C \|f\|_\infty \quad (C \text{ abszolút konstans}).$$

Található-e olyan f és olyan t_n sorozat, amelyekre $S_n(t_n) \to \infty$? Igen, sőt még úgy is, hogy $\frac{S_n(t_n)}{\log n}$ tetszőlegesen lassan tart 0-hoz. (E. Busko, 1967).

Ugyanez a kérdés a részletösszegek egy S_{n_j} részsorozatával kapcsolatban is felvethető. $n_j = 2^j$ esetén létezik olyan f függvény, amelyre $S_{n_j}(0) \to \infty$, sőt, még olyan is, amelyre $\frac{S_{n_j}(0)}{\sqrt{\log n_j}}$ tetszőlegesen lassan tart 0-hoz. Az ellenkező irányban azt tudjuk, hogy

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} |S_{n_j}(t)| \leqq C \|f\|_\infty \sqrt{\log n_k},$$

$\sqrt{\log n_j}$ tehát itt lényeges szerepet játszik ([6]). Milyen sorozatokra igaz a (*HL*) megfelelője, vagyis

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}|S_{n_j}(t)| \leqq C\|f\|_\infty ?$$

Meglepő, hogy ha csak annyit teszünk fel, hogy az n_j sorozat konvex, a kérdés már teljesen megválaszolható: a szükséges és elegendő feltétel

$$\overline{\lim}\,\frac{\log n_j}{\sqrt{j}} < \infty \quad ([6], \text{ L. J. Lin}).$$

A harmonikus szintézisről is szeretnék szót ejteni. Történelmileg a Fejér-tétel Hardy és Wiener Tauber-típusú tételein és az $L^1(\mathbf{R})$ konvolúcióalgebra ideáljainak a struktúráján keresztül kapcsolódik L. Schwartz, Malliavin, Varopoulos stb. harmonikus szintézisről szóló munkáihoz. Elemi értelemben világos, hogy Fejér tétele harmonikus szintézis tétel. A harmonikus analízis egy függvényből leválasztja a benne foglalt harmonikus függvényeket, mindegyiket a megfelelő súllyal: ezt a célt periodikus függvények esetében a Fourier-formulákkal érjük el. A szintézis azt jelenti, hogy a függvényt előállítjuk a harmonikus komponenseiből: folytonos függvények esetében Fejér tétele az első és a legegyszerűbb ilyen eredmény, és amint azt az előbb láttuk, ez megadja a szintézist a homogén terekre is, így speciálisan $L^p(\mathbf{T})$-re ($1 \leqq p < \infty$) és $C(\mathbf{T})$-re. Fejért egész életében foglalkoztatta az a kérdés, hogyan végezhető el a szintézis első-, másod-, harmad- stb.-rendű közepek segítségével, méghozzá a lehető legkonkrétabb módon: úgy, hogy ne csak a konvergenciát bizonyítsuk, hanem azt is, hogy a függvény tulajdonságai a lehető legjobban tükröződjenek az őt közelítő összegekben.

Amint láttuk, Fejér eljárása a Fourier-együtthatók beszorzását jelenti. Kereshetünk más szintézis-eljárásokat olyan függvények segítségével, amelyek a Fourier-együtthatókon hatnak, vagyis

$$\sum F_N(c_n)e^{int}$$

alakú trigonometrikus polinomokkal. Ha itt $c_m = c_n$, akkor $F_N(c_n) = F_N(c_m)$; ha tehát a kifejtést

$$\sum \gamma_k B_k(t), \quad B_k(t) = e^{i\lambda_{k,1}(t)} + \ldots + e^{i\lambda_{k,\nu(k)}(t)}$$

alakban írjuk, akkor a közelítő polinomok mind ugyanazokat a $B_k(t)$ blokkokat tartalmazzák, mint amelyeket a közelítendő függvény. Ilyen szintézis lehetséges az L^2 térben: $|z| \geqq \frac{1}{N}$ esetén $F_N(z) = z$-t, $|z| < \frac{1}{N}$ esetén $F_N(z) = 0$-t választunk. Nem lehetséges viszont sem L^p-ben, ha $p \neq 2$, sem pedig C-ben (Bachelis és Gilbert, 1979). Itt tulajdonképpen a zárt ideálok struktúrája a kérdés, mégpedig nem magukban az L^p ($1 \leqq p < \infty$) vagy C konvolúcióalgebrákban, hanem a zárt részalgebráikban. Amint látjuk, a kérdés erősen kapcsolódik a szóban forgó konvolúcióalgebra Fourier-transzformáltjainak az algebráján ható függvények tulajdonságainak a vizsgálatához.

Ha Fejér köztünk lenne, örömmel beszélnék neki két olyan dolgozatról, amely általa is jól ismert problémákról szól.

Fejér adta 1910-ben a „Lebesgue-konstansok" első pontos becslését:

$$L_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{-N}^{N} e^{int}\right| dt = \frac{4}{\pi^2}\log N + O(1),$$

[6] Annales Inst. Fourier, 1980, 1981.

és erre a tárgyra ő is, Szegő is később még visszatért. Biztosan érdekelte Littlewood sejtése:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{1}^{N}e^{in_j t}\right|dt \geqq c\log N \quad (\text{az } n_j\text{-k különböző egész számok}),$$

vagy annak élesebb formája:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{-N}^{N}e^{in_j t}\right|dt \geqq L_N.$$

P. J. Cohen, Davenport, Pichorides és Fournier ide vonatkozó munkái után nagy haladást jelent most S. Pichorides eredménye:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{1}^{N}e^{in_j t}\right|dt \geqq C_\varepsilon\frac{\log N}{(\log\log N)^{1/2+\varepsilon}}.$$

1908-ban egy algebrai egyenlet legkisebb gyökéről szóló tétel alkalmazásaként Fejér a

$$(L) \qquad \sum_{0}^{\infty}a_j z^{\nu_j} \quad \left(\sum\frac{1}{\nu_j}<\infty\right)$$

alakú hézagos Taylor-sorokkal és ezeknek bizonyos, 0 középpontú körökben felvett értékeivel foglalkozott. Ebből fejlődött ki a hézagos hatványsorok vizsgálata, amelyek során többek között Pólya Gy. alábbi, igen szép tétele is született: ha $\frac{\nu_j}{j}\to\infty$, akkor az (L) hatványsor *minden* komplex értéket végtelen sokszor vesz föl. Ha az (L) sor konvergenciasugara véges, pl. $R=1$, akkor nyilvánvalóan két esetet kell megkülönböztetnünk: $\sum|a_j|<\infty$ vagy $\sum|a_j|=\infty$. Paley azt sejtette, hogy az olyan Hadamard-féle hézagos sorokra (ez azt jelenti, hogy $\frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}\geqq q>1$), amelyekben $\sum|a_j|=\infty$, minden komplex érték végtelen sokszor fellép. A problémára részleges megoldást adott G. és M. Weiss (elég nagy q esetében) és W. S. Fuchs ($\overline{\lim}\,|a_j|>0$-ra). Most megszületett a teljes megoldás: egy fiatal japán matematikus, Takafumi Murai bebizonyította, hogy Paley sejtése igaz.

A fentiekben arról szóltam, milyen fontosak Fejér eszméi a mai Fourier-analízisben. Bizonyára ki lehetne mutatni ugyanilyen nagy hatását az interpolációelméletben, a mechanikus kvadratúrában, az ortogonális polinomok vizsgálatában, a konform leképezések elméletében, az operátorok elméletében stb.

De a legjobban azzal fejezhetem be az előadásomat, ha Fejér műveire felhívom minden olyan matematikus figyelmét, akit ezek a témák érdekelnek. A Gesammelte Arbeiten kiadása a legnagyobb tisztelgés az emléke előtt. Ezzel nagy szolgálatot tettek mind a mai, mind a jövő matematikusoknak. Végezetül pedig mindannyiunk nevében szeretném kifejezni a hálánkat annak, aki Fejér művének egyik továbbvivője, majd e kiadás fő mozgatója volt: Turán Pálnak, akinek az elvesztését mélyen fájlaljuk.

ЗНАЧЕНИЕ ТВОРЧЕСТВА ФЕЕРА

Ж.-П. КАХАН

Fordította: MÁRKI LÁSZLÓ

THE IMPORTANCE OF THE WORK OF FEJÉR

J.-P. KAHANE

MEGJEGYZÉS RÉNYI ÉS SULANKE EGY TÉTELÉHEZ

FEJES TÓTH LÁSZLÓ

Az alábbiakban egy tartományt és annak területét ugyanazzal a szimbólummal jelöljük. Egy konvex K n-szögbe írt n-szögön olyan sokszöget értünk, amelynek csúcsai K különböző oldalain fekszenek.

A címben szereplő tétel [1, 2] így fogalmazható:

Legyen K egy konvex n-szög és k a K oldalfelezői által meghatározott K-ba írt n-szög. Legyenek továbbá $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ a k oldalai által K-ból lemetszett háromszögek. Akkor

$$\sqrt[n]{\Delta_1 \cdot \ldots \cdot \Delta_n} \leqq \frac{K}{n} \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha K affin szabályos.

Tudvalevő, hogy a geometriai közép a hatványközép határértéke, ha a kitevő nullához tart. Mivel pedig a hatványközép a kitevővel monoton nő, felmerül a kérdés, érvényben marad-e ez az egyenlőtlenség, ha a geometriai közepet egy pozitív kitevőjű hatványközéppel helyettesítjük. Fennáll-e tehát valamely n-től független pozitív α-ra és bármely n oldalú K sokszögre az

$$M_\alpha(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \leqq \frac{K}{n} \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

egyenlőtlenség, ahol

$$M_\alpha(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) = \left(\frac{\Delta_1^\alpha + \ldots + \Delta_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}.$$

Tekintsük azt az esetet, amikor K $n-3$ egymás után következő oldala mind egy ponttá zsugorodik, vagyis K egy háromszöggé fajul, amelynek területe, mondjuk, 4. Most $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = \ldots = \Delta_n = 0$, s így

$$M_\alpha(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) = \left(\frac{2}{n}\right)^{1/\alpha}.$$

Ez a példa mutatja, hogy ha van is a fenti követelményt kielégítő α, az legfeljebb $1/3$ lehet, mert a

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{1/\alpha} \leqq \frac{4}{n} \sin^2 \frac{\pi}{n} \sim \frac{4\pi^2}{n^3}$$

egyenlőtlenség nagy n-re csak az $1/\alpha \geqq 3$ esetben állhat fenn.

Amikor a fenti kérdést felvetettem, elkerülte a figyelmemet, hogy egy affin ívhosszra vonatkozó régebbi tétel [3, 4] a kérdés megoldását adja. Erre a körülményre

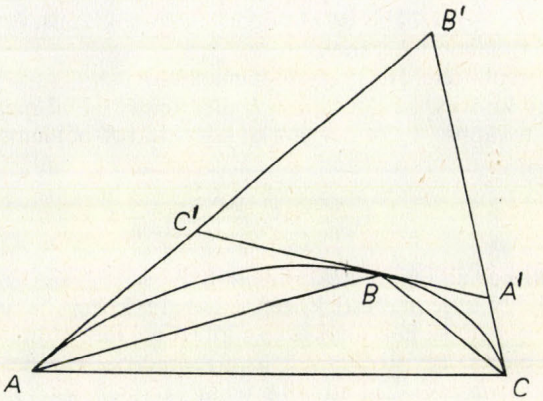
Bezdek András hívta fel a figyelmemet. Az affin ívhosszra vonatkozó szóbanforgó tétel ekvivalens a következővel:

Legyenek $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ *egy konvex* K *n-szögből egy* K*-ba írt n-szög oldalai által lemetszett háromszögek. Akkor*

$$M_{1/3}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \leqq \frac{K}{n} \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Egyenlőség csak akkor áll, ha K *affin szabályos, és a* K*-ba írt n-szög csúcsai* K *oldalfelezőibe esnek.*

Először összeállítjuk a bizonyításhoz szükséges ismereteket. Majd megkíséreljük az eredeti, kissé tömör bizonyítást részletesebben kifejteni és egy ponton egyszerűsíteni.



1. ábra

Egy konvex íven egy konvex tartomány határának egy összefüggő részét értjük. Legyen A, B és C egy sima konvex ív három pontja (1. ábra). Legyen C', A' és B' az A-n és B-n, a B-n és C-n, illetőleg a C-n és A-n átmenő érintők metszéspontja. Feküdjön B és B' az AC egyenes ugyanazon oldalán. Jelentse (XYZ) az X, Y és Z csúcspontú háromszöget. Legyen $\Delta_1=(ABC')$, $\Delta_2=(A'BC)$ és $\Delta_3=(AB'C)$. Bebizonyítjuk, hogy

$$\Delta_1^{1/3}+\Delta_2^{1/3} \leqq \Delta_3^{1/3}. \qquad (*)$$

Bevezetve az $AC'/AB'=\alpha$, $B'A'/B'C=\beta$, $C'B/C'A'=\gamma$ jelölést,

$$\Delta_1 = \gamma(AA'C'), \quad (AA'C') = \alpha(AA'B'), \quad (AA'B') = \beta\Delta_3,$$

tehát $\Delta_1=\alpha\beta\gamma\Delta_3$. Hasonlóképpen $\Delta_2=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\Delta_3$. Felhasználva a geometriai és a számtani közép közti ismert egyenlőtlenséget

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_3}\right)^{1/3}+\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+\sqrt[3]{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \leqq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{1-\alpha+1-\beta+1-\gamma}{3} = 1.$$

Egyenlőség csak akkor áll, ha $\alpha=\beta=\gamma$.

Ez a bizonyítás A. Winternitztől származik [5].

Könnyű igazolni, hogy ha az AC ív az AB' és $B'C$ egyeneseket érintő parabola íve, akkor — bárhol is vesszük fel ezen az íven a B pontot — mindig teljesül az $\alpha=\beta=\gamma$ feltétel, s így $\Delta_1^{1/3}+\Delta_2^{1/3}=\Delta_3^{1/3}$. Ez a reláció lehetőséget ad, hogy egy parabolán bevezessünk egy területtartó affinitással szemben invariáns additív ívmértéket [5]. Ez az ívmérték két érintő és az érintési pontokat összekötő egyenes által meghatározott háromszög területének a köbgyöke, vagy egy azzal arányos mennyiség. Az arányossági tényezőt 2-nek választjuk, s így egy parabola ív affin hosszát a $\lambda=2\Delta^{1/3}$ formulával definiáljuk, ahol Δ az ívhez tartozó, fentebb említett „Archimédeszi háromszög".

Egy tetszés szerinti konvex ív affin hosszát a következő módon definiáljuk. Bontsuk fel az ívet részívekre, s foglaljunk minden részívet a hozzá tartozó húron nyugvó, a részívet tartalmazó legkisebb háromszögbe. Legyenek ezek a háromszögek $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Az ív affin hosszán a $\overline{\lim}\, 2 \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^{1/3}$ határértéket értjük, ha a felosztást minden határon túl finomítjuk.

Nem nehéz megmutatni, hogy ha az ív g görbülete az egyik végponttól mért s ívhossz folytonos függvénye, akkor

$$\overline{\lim}\, 2 \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^{1/3} = \underline{\lim}\, 2 \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^{1/3} = \int g^{1/3}\, ds.$$

Ez intuitív módon látható, ha felírjuk egy r sugarú kör s hosszúságú ívéhez tartozó Archimédeszi háromszög területét:

$$\Delta = r^2 \frac{\sin^3 \frac{s}{2r}}{\cos \frac{s}{2r}},$$

s így s kis értékére

$$2\Delta^{1/3} \sim g^{1/3} s, \quad g = 1/r.$$

A fenti definíció és a $(*)$-os egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy az $AB'C$ háromszögben haladó AC konvex ívek között az AB' és CB' egyeneseket érintő parabola ívének az affin ívhossza a legnagyobb.

A tétel bizonyításához írjunk az ott szereplő háromszögekbe egy-egy parabola ívet úgy, hogy azok egy K-ba írt sima konvex tartományt határoljanak. Ennek a tartománynak az affin kerülete $\Lambda=2\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^{1/3}$, s ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség

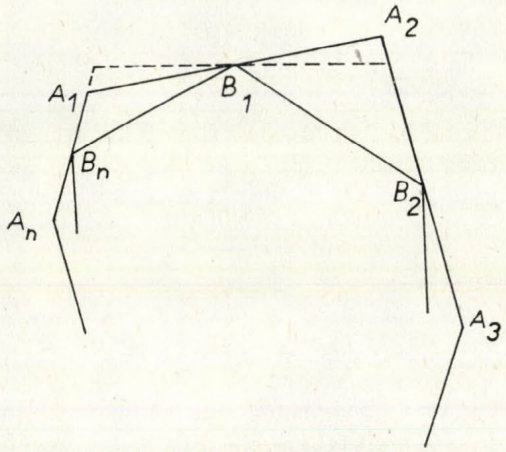
$$\Lambda^3 \leqq 8Kn^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Megmutatjuk, hogy ez az egyenlőtlenség fennáll bármely konvex tartomány affin kerülete és a tartományt tartalmazó n-szög területe közt.

Feltehetjük, hogy K a tartomány köré írt minimális területű n-szög, s ezért K oldalainak felező pontjai a tartomány határán vannak. A parabola fenti szélsőérték tulajdonsága alapján feltehetjük továbbá, hogy a tartományt n parabola ív határolja, amelyek K oldalfelezőiben érintőlegesen csatlakoznak. Mivel a Λ^3/K hányados affin invariáns, feltehetjük még, hogy K tartalmaz egy rögzített kört, és benne van egy másik, az előbbivel koncentrikus rögzített körben. A változó K n-szöget úgy tekintjük, mint e körök által határolt körgyűrűben fekvő n pont konvex burkát, amelyek

a gyűrűben úgy változnak, hogy a konvex burok tartalmazza a belső kört, és egy pont se esik a konvex burok belsejébe. Az ilyen pont-n-esek a $2n$ dimenziós térben zárt halmazt alkotnak, amelyen Δ^3/K a halmaz pontjainak folytonos függvénye. Ezért Weierstrass tétele biztosítja egy extremális n-szög létezését, amelyre Δ^3/K maximális. Nem tudjuk még azonban, hogy ez a $\overline{K}$ n-szög nem fajulhat-e el úgy, hogy több oldala egy egyenesbe, vagy több csúcsa egy pontba esik. De ha ilyen n-szöget helyettesítünk egy vele azonos ponthalmazból álló, kisebb oldalszámú nem elfajult sokszöggel, akkor abba nagyobb affin kerületű tartomány írható mint az elfajult n-szöghöz tartozó tartományba. Ezért $\overline{K}$ nem lehet elfajult n-szög. Mivel azonban $\overline{K}$ nem fajulhat ponttá vagy szakasszá, azért $\overline{K}$ csak nem elfajult, legfeljebb n oldalú sokszög lehet. Mivel továbbá $n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}$ n-nek növekvő függvénye, azért feltehetjük, hogy $\overline{K}$ nem elfajult n-szög.

Legyenek K csúcsai ciklikus sorrendben $A_1, \ldots, A_n$. Legyen az A_iA_{i+1} oldal felező pontja B_i; legyen továbbá $\Delta_i = A_iB_{i-1}B_i$ $(i=1, \ldots, n)$. A pontokat mod n számozzuk, úgy, hogy pl. $A_{n+1}=A_1$.



2. ábra

Tegyük fel, hogy $\Delta_1 < \Delta_2$. Forgassuk el K-nak A_1A_2 oldalegyenesét B_1 körül egy infinitezimális szöggel úgy, hogy Δ_1 $d\Delta_1$-gyel növekedjen (2. ábra). Ekkor $A_1B_1 = B_1A_2$ miatt Δ_2 $d\Delta_1$-gyel csökken, s így $dK=0$. Másrészt

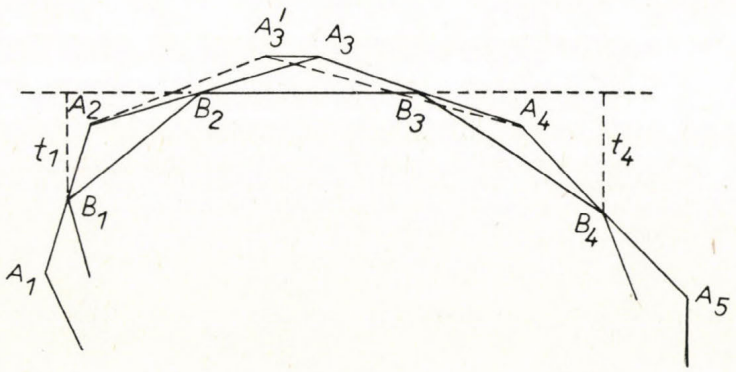
$$d(\Delta_1^{1/3} + \Delta_2^{1/3}) = \frac{\Delta_2^{2/3} - \Delta_2^{2/3}}{3(\Delta_1\Delta_2)^{2/3}} d\Delta_1 > 0.$$

Ha tehát az új Δ_1 és Δ_2 háromszögbe beírjuk a megfelelő parabola íveket, akkor az új K n-szögbe írt új tartomány affin kerülete nagyobb lesz mint az eredetié. (Most B_n és B_2 nem fekszik az új sokszög megfelelő oldalainak felező pontjaiban. Ezért az új sokszöget az új tartomány körül írt minimális területű n-szöggel helyettesítve Δ^3/K újból növekszik.) Ezzel megmutattuk, hogy az extremális $\overline{K}$ sokszögre $\Delta_1 = \ldots = \Delta_n$.

Ez a feltétel $n=3$- és 4-re meghatározza az extremális n-szögpárt. Ezért az alábbiakban feltesszük, hogy $n>4$.

Megmutatjuk, hogy K egy további feltételnek is eleget tesz: $B_iB_{i+1} \| B_{i-1}B_{i+2}$ $(i=1, \ldots, n)$. Ennek belátásához jelöljük B_1 és B_4 távolságát a B_2B_3 egyenestől t_1- és t_4-gyel, és tegyük fel, hogy $t_1 < t_4$. Az előbb bizonyított feltétellel összhangban tegyük fel továbbá, hogy $\Delta_1 = \ldots = \Delta_n = \Delta$. Toljuk el K A_3 csúcsát az $\overrightarrow{A_4A_2}$ irányban egy kis dt távolsággal az A_3' pontba, s helyettesítsük B_2-t és B_3-t a B_2B_3 egyenesnek az A_2A_3' és $A_3'A_4$ egyenessel való metszéspontjával (3. ábra). Ezáltal K területe változatlan marad, de a K-ba írt $k = B_1 \ldots B_n$ sokszög területe csökken:

$$dk = \frac{1}{4}(t_1 - t_4)\, dt < 0.$$



3. ábra

Mivel $k = K - \Delta_1 - \ldots - \Delta_n$, és a fenti művelet során csak Δ_2 és Δ_4 területe változik, azért $d\Delta_2 + d\Delta_4 = -dk$. Következésképpen

$$d(\Delta_2^{1/3} + \Delta_4^{1/3}) = \frac{1}{3}\Delta_2^{-2/3}\, d\Delta_2 + \frac{1}{3}\Delta_4^{-2/3}\, d\Delta_4 = \frac{1}{3}\Delta^{-2/3}(d\Delta_2 + d\Delta_4) =$$

$$= \frac{1}{12}\Delta^{-2/3}(t_4 - t_1)\, dt > 0.$$

K tehát valóban csak úgy lehet extremális, ha a fenti második feltétel is teljesül.

A $\overline{K}$-ra vonatkozó két feltétel ekvivalens a következőkkel:

$$A_iA_{i+1} \| A_{i-1}A_{i+2}, \quad A_{i-1}A_{i+1} \| A_{i-2}A_{i+2} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ebből a két feltételből következik, hogy K affin szabályos.

Hozzuk egy affinitással $\overline{K}$-t olyan helyzetbe, hogy $A_1A_2 = A_3A_4$, vagyis $A_1A_2A_3A_4$ egyenlő szárú trapéz legyen. Tekintsük azokat a kúpszeleteket, amelyek az A_1A_2 és A_3A_4 oldalt azok felező pontjaiban érintik. Ezek között a kúpszeletek közt van egy, amely az A_2A_3 oldalt is érinti. De az érintési pont a trapéz szimmetriája miatt A_2A_3 felező pontjában van.

Most hozzuk $\overline{K}$-t egy affinitással olyan helyzetbe, hogy $A_2A_3 = A_3A_4$ legyen. A $\overline{K}$-ra vonatkozó feltételek miatt most $A_1A_2A_4A_5$ egy egyenlő szárú trapéz ($A_1A_2 = A_4A_5$), amelynek A_3 a szimmetria tengelyére esik. Azok közt a kúpszeletek közt, amelyek az A_2A_3 és az A_3A_4 oldalt a felező pontjukban érintik, van egy, amely az

A_1A_2 egyenest is érinti. De ez a kúpszelet azonos az előbbivel, pontosabban annak affin képével, s ezért az az A_1A_2 oldalt a felező pontjában érinti. De az $A_1A_2A_4A_5$ trapéz szimmetriája miatt ez a kúpszelet az A_4A_5 oldalt is érinti, mégpedig a felező pontjában. Ilyen módon tovább haladva látjuk, hogy a tekintett kúpszelet K minden oldalát az illető oldal felező pontjában érinti. Ez a kúpszelet nyilvánvalóan csak ellipszis lehet, tehát $\overline{K}$ valóban affin szabályos. Egy szabályos n-szögre és a hozzá tartozó parabola ívek által határolt tartományra azonban $\Lambda^3/K=8n^2\sin^2\frac{\pi}{n}$.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

IRODALOM

[1] A. RÉNYI—R. SULANKE, Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählte Punkten. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* 2 (1963), 75—84.

[2] L. FEJES TÓTH, Über eine Extremaleigenschaft der affinregulären Vielecke. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 8 (1963), 299—302.

[3] L. FEJES TÓTH, Über den Affinumfang. *Math. Nachrichten* 6 (1951), 51—64.

[4] L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. Zweite Auflage. Springer-Verlag. Berlin—Heidelberg—New York 1972.

[5] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* II. *Affine Differentialgeometrie*. Springer-Verlag. Berlin 1923.

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЫ РЕНЬИ И ЗУЛАНКЕ

Л. ФЕЙЕШ ТОТ

REMARK ON A THEOREM OF RÉNYI AND SULANKE

L. FEJES TÓTH

RÉNYI ALFRÉD MINT TUDOMÁNYSZERVEZŐ*

ALPÁR LÁSZLÓ

Ez év február elsején volt tíz esztendeje annak, hogy Rényi Alfréd, egykori igazgatónk, kollegánk és barátunk örökre elhagyott bennünket. Tíz év nem hosszú idő ugyan, de ahhoz mégis elég, hogy megenyhüljön az első fájdalom, és már bizonyos távlatból szemlélhessük életét, tevékenységét, tudományos munkásságát, fontos részletek elfeledésének megkockáztatása nélkül.

E néhány bevezető sor leírása után hirtelen megállt a tollam. Rényit ui. mint tudományszervezőt kell bemutatnom, és hamarjában nem tudtam eldönteni, hogy mi az, amit okvetlenül említeni szükséges, mi az, amiről feltétlenül beszélnem kell. Olyan kérdésekről talán — mint egyesek vélik —, hogy Rényi milyen alaposan foglalkozott az Intézet részfeladataival? Ha csak, vagy főleg ilyen ügyekre korlátoznám mondanivalómat, az nem állna arányban azzal a nagyszabású szervező munkával, amelyet Rényi nem csak a Matematikai Kutató Intézetben, hanem az ország egész matematikai életében kifejtett.

Valamilyen mércét kellett találnom, aminek segítségével kiválogathattam a felsorolandó tényeket és eseményeket. Így töprengve ötlött eszembe egy mástól kölcsönzött gondolat, amelyet most visszájára fordítva használok fel. A maradandó mit ember alkotott túléli őt, minden más sírba száll vele. Rényi tudományos munkásságát méltatva e megállapítás szellemében nyilatkoztak meg számosan a távoli és a közelmúltban, és e célnak szentelik ezt a tudományos ülésszakot is. A formulák azonban semlegesek, a tételek személytelenek, vagy ha úgy tetszik mindenkihez egyformán kedvesek, és bárki annyit meríthet Rényi eredményeiből, amennyit képességei megengednek. A maradandót nem nehéz megtalálni ezen a téren, és itt nem is érintenek kényes kérdéseket.

A tudományszervezés viszont emberi kapcsolatokra vonatkozik, amelyek sohasem lehetnek mentesek szubjektív elemektől, értékelése ezért mindig sajátosan egyéni jellegű. Ennek ellenére úgy vélem, hogy Rényi mint tudományszervező is tartós értékű, mind a mai napig ható alkotások egész sorával gazdagította matematikai életünket, és tudtommal nem is vitatja ezt ma már senki sem. Munkájában természetesen nem vált mereven ketté az alkotó tudós és a tudományszervező tevékenysége, sőt azt lehet mondani, hogy tudományszervezőként elért nagy sikereinek *egyik* magyarázata éppen a tudomány területén meglepő gyorsan kivívott, különleges tekintélyében rejtett. Ez szerzett elképzeléseihez bizalmat, barátokat, munkatársakat és olyan támogatókat, akik rendelkeztek a megvalósításukhoz szükséges befolyás és anyagi ezsközök fölött.

* Rényi Alfréd halálának 10. évfordulója alkalmával az MTA III. Osztálya, Matematikai Kutató Intézete és a Bolyai János Matematikai Társulat által rendezett tudományos konferencián 1980. III. 31-én elhangzott előadás.

Tudományszervezői készségének kialakulásában bizonyára szerepet játszott az is, hogy ifjúkorának egyik rövid korszakában nem mint matematikus működött, volt hajógyári segédmunkás, tanulmányozta a biztosítási matematikát, majd a Magánalkalmazottak Biztosító Intézetének tisztviselője lett. Ily módon sok mindent látott, tapasztalt és tanult meg, amit később sikerrel alkalmazott a matematikai életben kifejtett irányító és szervező munkájában.

1946 októberében a Szovjetunióban utazott mint aspiráns, és ott már 1947 júniusában megvédte a számelmélet egyik nagy problémájára, a binér Goldbach-sejtésre vonatkozó híres disszertációját. Ám azon felül, hogy rövid néhány hónap alatt ilyen bravúros tudományos eredményt ért el, leningrádi tartózkodását arra is felhasználta, hogy tanulmányozza a szovjet matematikai életet, megismerkedjék annak intézményeivel, a tudományos képzés és minősítés módszereivel.

Hazatérése után először a Budapesti Tudományegyetemen oktatott, majd a Debreceni Tudományegyetem professzora lett, de elsősorban nem számelméletet, hanem valószínűségszámítást tanított, mert felfedezve eredményeinek valószínűségszámítási hátterét, teljes érdeklődésével e tudományág felé fordult. A klasszikus valószínűségszámításnak, *Jordan Károly* személyében, már korábban is volt nálunk egy neves képviselője, de ő, korlátozott lehetőségei miatt, csak gyér számban tudott tanítványokra vagy követőkre szert tenni. Rényi viszont nem csupán túláradó lelkesedéssel igyekezett továbbadni a valószínűségszámításnak azt a *Kolmogorov* által megalapozott modern elméletét, amelyet a Szovjetunióban megismert, hanem a meggyőzés eszközeit véve igénybe létrehozta azt az először kis tábort, amelyből azután a nemzetközileg elismert magyar valószínűségszámítási iskola kialakult, és amely napjainkban is él és működik. Ez volt szerintem Rényi egyik legelső és egyik legfontosabb „tudományszervezői" ténykedése. Méltán lett 1952-től kezdve az ELTE-n a valószínűségszámítás professzora.

A felszabadulást követő évek teendői a matematikában sem szorítkoztak pusztán az oktatás kérdéseire, hiszen ezen a tudományterületen már a háború előtt is jelentős kutatómunka folyt, a fiatal tehetségek módszeres, kiválasztásával együtt. Az új lehetőségek birtokában a matematikusokra fokozott feladatok hárultak. Hasonló problémák merültek fel más tudományterületeken is. Ezért került sor 1948-ban a Magyar Tudományos Tanács megalakítására, majd 1949-ben a Magyar Tudományos Akadémia átszervezésére. Ebben az alapvető tudománypolitikai és tudományszervező munkában döntő szerepet játszott *Alexits György*, aki mint a Tudományos Tanács, majd az Akadémia főtitkára, később mint a Közoktatásügyi Minisztérium államtitkára igen hatékony segítséget nyújtott minden olyan kezdeményezéshez, amely a matematikával valamilyen kapcsolatban állott. Így, amidőn az Akadémia, a Szovjetunió példáját követve, megkezdte kutatóintézeti hálózatának kiépítését, abban természetesen helyet kapott egy matematikai kutatóintézet is.

Rényi ezeket írta erről a Magyar Tudományban 1966-ban közölt cikkében:[1] „Amennyire vissza tudok emlékezni, az Alkalmazott Matematikai Intézet létrehozásának gondolata legelőször 1949-ben merült fel egy beszélgetés során, amelyet Alexits Györggyel a Tudományos Tanácsban folytattunk, még az Akadémia átszervezése előtt. Mindenesetre kétségtelen tény, hogy az intézet létrehozásában Alexits Györgynek mint az Akadémia főtitkárának — *Rusznyák István* elnökkel együtt — igen nagy szerepe volt. Az intézet 1950. augusztus 1-én alakult meg, 9 főnyi létszámmal. Az intézet vezetésének megtisztelő feladatával az Akadémia engem — a decreceni egyetem fiatal, 29 éves tanárát — bízott meg".

[1] RÉNYI ALFRÉD: A Matematikai Kutató Intézet 10 éve. Magyar Tudomány, 1966. 2. sz. 81—91. l.

Abban a forradalmi változásokkal telített korszakban a fiatalok egész tömege kapott fontos vezető beosztást, az Akadémián és más szervezetekben is. Mégis néha felvetették azt a kérdést: Miért éppen Rényit tették meg az új matematikai intézet igazgatójává? A felszabadulás történelmi sorsfordulót hozott az ország életébe, és az új vezetés érthetően minél több fontos tisztséget saját híveivel kívánt betölteni, bár tisztán látták, hogy jóval kevesebb az alkalmas ember mint ahányra szükség lenne. Örömmel ragadták meg tehát azt a lehetőséget, hogy a matematikai intézet élére olyan fiatal tudóst állítsanak, aki nemcsak hogy az első pillanattól fogva az új rendszerhez szegődött, de emellett igen hamar tanújelét adta ragyogó matematikai tehetségének és vezetői rátermettségének egyaránt.

Rényi igen komolyan vette igazgatói feladatát, noha szemlélete sohasem vált intézetcentrikussá. Világosan felfogta ui., hogy matematikai életünk különböző intézményeinek és fórumainak tevékenysége szorosan összefügg egymással az alapfokú oktatástól a tudományirányítás legmagasabb szintű szervezetéig, de úgy vélte, hogy sokirányú érdeklődésének megfelelően az Intézetre támaszkodva képes a legjótékonyabb hatást kifejteni. Ezért számos funkciót vállalt. Volt idő, amikor szinte egyidejűleg töltötte be az intézet igazgatói tisztét, és volt tanszékvezető egyetemi tanár, az MTA III. Osztályának osztálytitkára, a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára, majd ügyvezető alelnöke, az Országos Aspirantura Bizottság titkára, majd tagja a TMB csúcsbizottságának, az MTA Matematikai Bizottságának, a Kossuth-díj Bizottságnak; ezenkívül számos matematikai folyóirat szerkesztő bizottságában aktív tagként működött. Ez a felsorolás természetesen még hiányos is, nem is említheti azt a sok ad hoc testületet, amelynek munkájában részt vett. 1950-től 1953-ig tagja volt a VIII. ker. Tanácsnak. S ha egyik funkciója megszünt esetleg mindjárt másik kettőt kapott helyette. Ezenfelül, vállalta a párt- és szakszervezeti tagsággal járó kötelezettségeket is, ami akkor bizony nem is volt kevés. E tömör ismertetés csak részben illusztrálja, hogy milyen széles körű volt Rényi tudományszervezői tevékenysége, és ez nyilván érthetővé teszi, ha nem itt hozzuk szóba, hogy milyen részletességgel foglalkozott az intézet adminisztrációs és szervezési ügyeivel.

Külön ki kell emelni még, hogy a tudományos minősítés nálunk ma is érvényben levő rendszerének alapjait Rényi vetette meg, felhasználva a Szovjetunióban szerzett tapasztalatait. Ezirányú ügybuzgalma érthető, hiszen talán senki sem érezte nála jobban e minősítési rendszer hatékonyságát.

Önkéntelenül adódó kérdés ezek után: hogyan bírta ellátni ezt a rengeteg feladatot, mikor emellett lankadatlanul még igen intenzív és termékeny tudományos munkát is végzett? A válasz sokrétű. A kor, amelyben élt valóban forradalmi, nagy átalakulásokat hozó időszaka a magyar történelemnek; olyan anyagi, szervezeti és társadalmi feltételeket biztosított a magyar matematika fejlődése számára, amilyenek soha azelőtt nem jöttek és nem is jöhettek volna létre, és Rényi, sok más lelkes matematikussal együtt, élni tudott a lehetőségekkel. Gyors felfogó- és elhatározóképessége, kivételes emlékeztőtehetsége, nagy tetterővel és munkabírással párosult, ami nélkülözhetetlennek bizonyult a kezdeti idők áttörő lendülettel megindult munkáihoz, nagy terveinek megvalósításához. Később, ezt már nem lehetett sem megismételni, sem utánozni, és nem is lett volna helyes erre törekedni.

Az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének létrehozása kétségkívül e kor egyik legjelentősebb eseménye volt matematikai életünkben. Az intézet feladatait Rényi az Intézet Közleményei I. kötetének előszavában a következőkben jelölte meg: „A matematikának hazánkban nagy hagyományai vannak, számos magyar matematikus szerzett a múltban is dicsőséget hazánknak, azonban a matematikai kutatás nálunk a felszabadulás előtt nem találta meg a kapcsolatot a gyakorlattal. A ma-

gyar matematikusok előtt tehát a felszabadulás utáni években az a feladat állt, hogy a nálunk régebben elhanyagolt alkalmazott matematikai kutatást megindítsák és a szocializmus építése által megkívánt színvonalra emeljék."

A szándék tisztaságához, a törekvések őszinteségéhez eszerint nem fér kétség, csak éppen — tapasztalatok híján — az nem volt még világos előtte, hogy milyen roppant nehéz feladatra vállalkozott. Erről később maga is ír, amit még idézni fogunk. Ám azt már az intézeti munka első hónapjainak tapasztalataiból leszűrte, hogy mindenekelőtt több és jó munkatársakra van szüksége, és bizony nem látszott könnyű feladatnak azokat megszerezni. Akkor ui. még egészen más helyzet uralkodott mint ma, amikor a friss diplomások szívesen vállalnak állást a Matematikai Kutató Intézetben. A végző hallgatók abban az időben még idegenkedtek az intézettől, inkább az egyetemeken vagy más intézményekben kívántak elhelyezkedni. Ez a körülmény is arra ösztönözte Rényit, hogy megteremtse, legalább itt Budapesten, az alkalmazott matematikusok egyetemi képzésének feltételeit. Kezdeményezésére hozták létre 1950-ben az ELTE-n az Alkalmazott Matematikus szak nappali, majd esti tagozatát.

Ennek az oktatási formának, amely nem kívánt sem mérnök, sem matematika-fizika tanári képzés lenni, és nem támaszkodhatott előzményekre vagy hagyományokra, nem voltak tapasztalt oktatói és kiforrott tananyaga sem. Mindezt menet közben kellett kialakítani, főleg az Intézet munkatársaiból verbuválódott oktatókkal. Ezzel vette kezdetét az intézet és az egyetemi oktatás közötti kölcsönhatás. Mint érdekességet említem meg, hogy az első tananyagban még műhelygyakorlatok is szerepeltek, a hallgatók hegesztettek, reszeltek, fúrtak stb. Ma harminc év távlatából tudjuk csak igazán értékelni, hogy ez a kezdeményezés, minden kezdeti hiányossága és botladozása ellenére, milyen jelentős részévé vált matematikai felsőoktatási rendszerünknek, természetesen az idők kívánalmainak megfelelő, módosult formában. Többen vannak, és közöttük néhányan magas vezető beosztásban, akik a matematika területén sikereket értek el, és tanulmányaikat már ez új szak keretei között folytatták. Az első években Rényi, fáradtságot nem kímélve, személyesen győzött meg néhány hallgatót, hogy az alkalmazott matematika szakon végezze tanulmányait.

Oktatómunkája során sajnálattal kellett tapasztalnia, az egyetemi jegyzetek és tankönyvek hiányát, ami a háborút követő években igen erősen éreztette negatív hatását. Egyike volt az elsőknek, aki előadásairól jegyzetet készített, majd megírta terjedelmes valószínűségszámítási tankönyvét, amelyet azóta is a hallgatók nemzedékei használnak eredményesen.

De nem érte be csupán azzal, hogy a valószínűségszámítás részére gondoskodott szakirodalomról, hiszen a matematika egyéb ágaiban is hasonló bajok jelentkeztek. Az orosz nyelvű matematikai irodalom pedig bővelkedett jobbnál jobb művekben; azok lefordítása a szükségletek gyors kielégítését jelenthette. Ezért arra buzdította oroszul beszélő kollegáit, hogy minél több mű lefordításával gazdagítsák matematikai irodalmunkat. Fuksz—Sabat: Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk című könyvét saját apja fordította le. Jellemző volt különben rá, hogy egész környezetét a matematika szolgálatába kívánta állítani.

Az intézet létrehozását hamarosan új jelentős vállalkozás követte, amelyben Rényi döntő szerepet játszott: 1951-ben megrendezték az Első Magyar Matematikai Kongresszust, amely a külföldi és a magyar kutatók egyik első, nagyszabású találkozója volt. A szovjet matematika legjelesebb képviselői ezen a kongresszuson tartottak először előadásokat Magyarországon.

De térjünk vissza az intézet közvetlen problémáihoz. Amikor a létszám már kissé megnőtt, valamilyen belső szervezeti formát kellett kialakítani. Az első elképzelések szerint, ezt főleg a matematikának a műszaki gyakorlatban és a biztosításban való

felhasználása határozta meg. Érdekes ma látni, hogy az intézet első felállásában a következőképpen tagolódott: 1. Mechanikai és szilárdságtani osztály; 2. Valószínűségszámítási osztály; 3. Biztosítási és gazdasági matematikai osztály; 4. Vegyipari osztály; 5. Numerikus és grafikus módszerek osztálya; 6. Elektrotechnikai csoport; 7. Biometria csoport.

A mai ismeretek fényében ez a felosztás bizonyára túl konzervatívnak látszik, és valóban nem hiszem, hogy van ma az országban olyan számítástechnikai intézmény, amelynek ilyen lenne a szervezeti felépítése. Akkor azonban ez a forma tűnt a legalkalmasabbnak, és az első évek tapasztalatai tényleg igazolták ezt az előzetes feltevést. Az intézet, fennállásának első öt éve alatt, több száz problémát oldott meg üzemek, szövetkezetek, kutatóintézetek, egyetemek, kórházak, állami hivatalok és egyéb intézmények számára; emellett arra is kísérletet tett, hogy leküzdje a közvéleménynek a matematika felhasználhatóságával kapcsolatos előítéleteit.

A tapasztalatok azonban felszínre hoztak több bonyolult problémát is, amelyek rendezése elodázhatatlannak bizonyult. Rényi, már idézett cikkében, ezekkel a szavakkal jellemezte az intézetnek ezt a korszakát:

„Természetesen egy percig sem gondoltunk arra, hogy mi magunk alkalmazzuk a matematikát a természet- és társadalomtudományok valamennyi ágában, ..., amelyekben erre lehetőség kínálkozik, ... Ehhez még akkor sem lehettünk volna elegen, ha nem kilencen, de százszor annyian kezdünk hozzá a munkához.... Úgy gondoltuk, hogy ... felébresztjük az érdeklődést a matematika iránt és elérjük, hogy mindazok akiknek munkáját ez elősegítheti, elsajátítják azokat a matematikai ismereteket, amelyek szükségesek ahhoz, hogy a matematikát saját munkájuk szerves részévé tegyék. Munkánk propagandisztikus oldalát tehát — az ország életére való kihatását illetően — éppen olyan fontosnak éreztük, mint a munka konkrét hasznát...."

„Azt sikerült bevinnünk a köztudatba, hogy a matematikának hasznát lehet venni a gyakorlatban. Azok közül azonban, akikkel a mi munkánk megértette, hogy az ő szakterületükön a matematikai módszerek jelentős segítséget nyújthatnak, csak kevesen vonták le azt a következtetést, hogy nekik maguknak kell elsajátítaniuk a szükséges matematikai ismereteket, és maguknak kell a matematika módszereit munkaterületükön alkalmazniuk."

Rényinek ezek a megállapításai egyidejűleg adnak számot az Alkalmazott Matematikai Intézet eredményeiről és lehetőségeinek, valamint hatásának korlátairól, amit az intézet vezetői felismertek, és józanul értékeltek. A sikerek magyarázata az igazgató és más vezetők dinamizmusában, a kutatók lelkesedésében és növekvő hozzáértésében rejlett, amit azonban nyilván nem lehetett tetszőlegesen fokozni; az a 900-as létszám pedig, amelyről Rényi képletesen írt, teljesen irreálisnak látszott volna, ha ezt az akkor bizarr ötletet bárki is felveti, hiszen annak nem voltak meg sem az anyagi, sem a személyi feltételei. Pedig ez ma nem is tűnik olyan képtelenségnek, mert jelenleg kb. 2000 főre becsülik a különböző intézményekben gyakorlati feladatokkal foglalkozó matematikusok számát, és egyes szakemberek ezt még keveslik is.

Az eredmények ellenére az alkalmazott matematika meghonosodása, kívánt, remélt mértékű elterjedése elé súlyos társadalmi akadályok tornyosultak, amelyeket napjainkig is, csak egy egész emberöltőnyi idő alatt tudtak többé-kevésbé leküzdeni matematikusaink felnövekvő nemzedékei, olyan új ismeretek és számítási eszközök birtokában, amelyek az 50-es évek elején nem csak Magyarországon, de sehol a világon nem léteztek még. Ma látjuk csak teljesen tisztán, hogy a matematika széles körű, társadalmi mélységű gyakorlati alkalmazásainak a tudomány, a technika és a gazdasági élet fejlődésében gyökerező nélkülözhetetlen feltételei vannak, amelyek teljesülését nem pótolhatja sem a legnemesebb szándék, sem a legeltökéltebb akarat.

Ugyanakkor hiányzott a magas szintű központja az elméleti matematikai kutatásoknak, pedig azoknak igen fejlett hagyományait örököltük a múltból, azok folytatásának voltak meg a legkedvezőbb körülményei, és a szomszédos, baráti országokban mindenhol valóban létrehozták a megfelelő akadémiai intézeteket. Az Alkalmazott Matematikai Intézet Tudományos Tanácsa, amelyben Rényinek komoly befolyása volt, ezért messzetekintő tudományos előrelátásról, az intézet helyzetének és jövőjének felelős értékeléséről tett tanúbizonyságot, amikor már 1953-ban határozatot hozott az intézet Matematikai Kutató Intézetté való átszervezésének szükségességéről. Ez 1955. augusztus elsején tényleg megvalósult, ami az intézet történetében máig is a legmélyrehatóbb fordulatot jelentette, amelyhez foghatót azóta sem hajtottunk végre.

Ez az átalakulás lehetővé tette, hogy felhasználva az első öt év tapasztalatait az intézet belső szervezetét is módosítsák. Kiderült ui., hogy az intézetbe kerülő problémák megoldásának mikéntje nem azok eredetétől, hanem matematikai jellegétől függ, és pl. általában közömbös egy differenciálegyenlet megoldására nézve, hogy az a vegyiparban vagy az elektrotechnikában merült-e fel. Célszerűnek bizonyult tehát az Intézet szervezeti felépítését a matematika különböző ágainak megfelelően kialakítani. Az intézet több, ma is működő osztálya akkor jött létre, és később e felfogás szellemében létesítettek új osztályokat.

Az új szervezeti keretek módot adtak arra is, hogy az intézet munkájába bekapcsolódjék több akadémikusunk mint osztályvezető. Rényi ti. felismerte azt a fontos igazságot, hogy — a tehetséges kutatók alkalmazása mellett — minden a nagy tárgyi tudású, széles látókörű, problémamagazdag osztályvezetőkön múlik, akik képesek irányítani a gondjaikra bízott kutatókat az ő állandó, közvetlen beavatkozása nélkül is.

Rényi közben mindenhol kereste azokat a matematikusokat, akik már bizonyítékát adták tehetségüknek, és alkalmazta őket az intézetben, ha lehetett. Annál is inkább szükségesnek látszott ezt az utat járni, mert az újonnan megindított alkalmazott matematikus szak csak évek múlva adhatott, bár tehetséges, de mégis csak kezdő kutatókat.

Az intézet átszervezését követően az ELTE alkalmazott matematikus szakának nappali tagozatát fokozatosan matematikus szakká változtatták, amelynek tananyaga már mind az elméleti matematikai kutatásoknak, mind a matematika alkalmazásainak alapismereteit tartalmazta.

Az intézet ugyanakkor nem adta fel az alkalmazásokkal kapcsolatos törekvéseit sem, ellenkezőleg, azok élesztője, motorja kívánt lenni, de azon a szinten, amelyen a rutin feladatokat lehetőleg olyanokra hárítja, akiknek azokat tényleg el kell végezniük. Ezért nem változott meg az intézet azon osztályainak neve sem, amelyeknek funkciója ezt egyértelműen indokolta, mint pl. az országos jelentőségű Biometriai Osztály, vagy a Numerikus, grafikus és gépi matematikai Osztály; sőt új osztályok, ill. csoportok is létesültek az átszervezés után, amelyek tevékenysége szorosan kapcsolódott a gyakorlathoz; ilyen volt pl. a matematika közgazdasági alkalmazásainak csoportja, és az intézethez tartozó, de Szegeden alakult Matematikai logika és alkalmazásai Osztály.

Ettől fogva az intézetben sokszorozott hatékonysággal folyt a matematikai kutatás, amelynek eredményeit a hazai és nemzetközi fórumokon kellett ismertetni. Ennek érdekében, Rényi, az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményeit, amely addig az ő szerkesztésében magyarul jelent meg, szintén átalakította. Az intézet új kiadványa az MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei nevét vette fel, és két sorozatban jelent meg: az A sorozat, évi három füzetben, idegen nyelven, magas színvonalú, elvi jelentőségű dolgozatokat közölt, és hamarosan

neves külföldi szerzők is publikálták itt cikkeiket; az A sorozatot külföldi folyóiratokkal cseréltük, és ez tekintélyes deviza megtakarítást eredményezett; a B sorozat évi egy füzetben, magyar nyelven az alkalmazásokkal kapcsolatos eredményeket közölte.

Az átszervezett intézet fejlődése tehát igen bíztatóan indult meg, és azt az ország életében oly súlyos történelmi események sem tudták megtörni. Az 1956-os ellenforradalmat megelőző korszakban is hiányoztak az intézet belső életéből azok a politikai feszültségek, amelyek máshol esetleg elnehezítették a légkört, és így a kritikus napokban nem is került sor olyan ellentétekre az intézeti munkatársak között, amilyeneknek a híre hozzánk csak máshonnan jutott el. Az intézetben nem is választottak forradalmi bizottságot. Amint csak lehetett, Rényi kiadta a jelszót: Ilyenkor is lehet dolgozni. Problémákat tűzött ki pénzjutalommal. Néhány hét leforgása után az intézet folytatta megszokott életét.

Minden akadály azért még nem hárult el az intézet fejlődésének útjából. Először is nem volt megfelelő székháza. Három, négy helyen is szétszórva dolgoztunk, és ez sok hátránnyal járt. 1958-ban azonban sikerült megszerezni, sok szaladgálás és vita után, komoly akadémiai támogatással — hiszen két miniszter is részt vett a döntésben — a Reáltanoda utcai épületet, ami akkor valóságos palotának tűnt a régi állapotokhoz képest. Eleinte még osztozkodnunk kellett ott az Ebtenyésztők Országos Egyesületével, de az is hamarosan eltávozott.

Az átköltözés még egy igen nagy jelentőségű probléma megoldását tette lehetővé: addig ti. az intézeti könyvtárnak nem volt megfelelő helyisége. A könyvek különböző szobák szekrényeiben nyertek elhelyezést, illetve polcok és hely hiányában a földön hevertek egy, különben ebédlőnek használt helyiségben. A könyvtáros személye — rendszerint egy kutató — szintén sűrűn változott. Röviddel az átköltözés előtt, Rényi, egyik, tragikus körülmények között elhunyt, nagyon kedves kollégánkat, *Czipszer János*t kérte fel a könyvtáros nehéz feladatának ellátására. Senki nagyobb lelkesedéssel és hozzáértéssel nem csinálhatta volna ezt a munkát, mint ő. Mai könyvtárunk alapjait, már ami a berendezést és a szervezetet illeti, ő vetette meg.

1958 augusztusában, nyolc évvel az intézet megalapítása után, már együtt volt minden, amire egy korszerű matematikai kutatóintézetnek szüksége lehetett: kormány- és akadémiai határozat, amely az intézet létét és működésének anyagi feltételeit biztosította, színvonalas kutatógárda, megfelelő székház, intézeti folyóirat és könyvtár, jó kapcsolatok az egyetemekkel, a Bolyai Társulattal, az intézet igazgatója pedig kétszeres Kossuth-díjas akadémikus. *Turán* szavaival élve: „Valóban rakétaszerű emelkedés volt ez."

Az MSZMP politikája és ennek alapján az életszínvonal 1957-ben megkezdődött növekedése az intézetben is éreztette hatását, ahol kihasználták az új lehetőségeket. 1958-ban már egy népes intézeti kutatócsoport vett részt az Edinbourghi Nemzetközi Matematikai Kongresszuson, ahol Rényi egyórás, plenáris előadást tartott. 1960-ban pedig a II. Magyar Matematikai Kongresszuson, amelynek szervezésében az intézet oroszlánrészt vállalt, már több mint 50 intézeti kutató tartott előadást.

A matematikai élet egészének működése, amelyben Rényi szinte mindenhol valami pozitív szerepet játszott, ugyancsak kezdte kifejteni jótékony hatását: a matematikai osztályok létesítése a középsikolákban, a Középiskolai Matematikai Lapok gyors elterjedése, a versenyek növekvő népszerűsége, a Bolyai Társulat kollokviumai és egyéb rendezvényei, mind, mind kedvezően befolyásolták az intézeti kutatás menetét is, és ami legfontosabb, kezdtek beérni az új egyetemi matematika oktatás gyümölcsei, évről-évre kaptunk néhány tehetséges kutatót, akik akkor fejezték be tanulmányaikat.

Az Akadémia, mint fölöttes hivatali szervünk, természetesen aktívan részt vett az intézet anyagi problémáinak megoldásában és általános irányításában, de sok mindent adott át más intézetekben szerzett tapasztalataiból is. Ezek közül egyről külön is szeretnék megemlékezni. Ha nem tévedek 1962 őszén, a III. Osztály kezdeményezésére alakult meg az Intézet Vezetőség, egy rendszeres időközönként ülésező, kollektív vezetést gyakorló nyolctagú testület, amely mind a mai napig működik, ha személy szerint változtak is a tagjai.

Az MSZMP politikájának talaján a 60-as évek az intézet életében a nagy kibontakozás és fellendülés korszakává váltak. Akkor alakult meg vagy fejlődött tovább az intézet ma is működő osztályainak nagy része, több kutatónk ekkor szerzett tudományos fokozatot, lendülettel épültek ki a nemzetközi tudományos kapcsolatok. Ebben az időszakban az UNESCO két ízben is felkérte az intézetet arra, hogy továbbképző tanfolyamot tartson a fejlődő országok matematikusai részére a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika tárgyköréből.

Még egy fontos eseményt kell itt megemlíteni: az Intézeti Közlemények megjelenése 1965-ben megszűnt, és 1966-tól kezdve szerepét a Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica vette át.

Ha e konkrét tények felsorolása után, amelyek nyilván csak a leglényegesebb események ismertetésére szorítkoznak, azt a kérdést teszik fel, hogy miképpen lehet általában jellemezni Rényi tudományszervezési módszereit, erre csak igen röviden lehet válaszolni. Én legalább is csak ezeket a következtetéseket vontam le az alatt a tizenegy és fél év alatt, amelyet mint az Intézet Tudományos titkára Rényi mellett eltöltöttem.

Először is igen intenzív érdeklődés az intézet és általában matematikai életünk ügyei iránt. Ez persze nem jelenti azt, hogy személyesen foglalkozott minden apró kérdéssel; csak rossz, ügyetlen vezető jár el így. De következetesen törekedett arra, hogy olyan munkatársakkal vegye körül magát, akikre rábízhatott komoly feladatokat, és akik azokat eredményesen tudták ellátni. Erre annál is inkább rá volt utalva, mert tudományos sikereinek elismeréseképpen egyre több külföldi meghívást kapott, és az intézetet távolléte alatt is irányítani kellett. Amikor azonban egy ügyet fontosnak ítélt, azt alaposan tanulmányozta, és ha az nem volt elkerülhetetlen, nem mondott rögtönzött véleményeket. Igyekezett felkészülten megjelenni az értekezleteken, többször dolgoztunk ki részére dokumentumokat, amelyekkel érvelését alátámaszthatta.

Iparkodott a személyzeti munkát úgy irányítani, hogy minél több tehetséges matematikus gyűljön össze az intézetben, és azokat máshol is messzemenően támogatta. Ez a káderpolitika számos személyes kapcsolat kialakulásához vezetett, aminek üdvös visszahatását az intézet élvezte.

Jól ismertek a matematika népszerűsítésére tett erőfeszítései, ilyen irányú művei igen nagy olvasótáborban leltek visszhangra.

Mint a valószínűségszámítás művelője a matematika számos ágával került kapcsolatba, hiszen a valószínűségszámítás a legkülönbözőbb területeken talál problémákat, és módszerei igen sok vonatkozásban alkalmazhatók. Ez a magyarázata annak, hogy az intézet több osztályának munkájába közelebbi betekintést tudott nyerni, néha meglátogatta azok szemináriumait, és az Intézet Közleményeit, majd később a Studiát aktívan szerkesztette. A valószínűségszámítás művelése emellett igényli és fejleszti a modellalkotási készséget, ezért tudott oly sikeresen bekapcsolódni gyakorlati problémák megoldásába is.

Az intézet Rényi vezetésének húsz éve alatt a matematikai kutatás egyik nemzetközi hírű központjává vált, és ez nem kisrészben saját eredményeinek volt köszönhető.

Most, a megemlékezés ünnepélyes óráiban kegyelettel és sokan hálával gondolunk vissza rá. De ez nem elég! Ez a hangulat az élet mindennapos teendői közepette könnyen elenyészik. Ezért, ha tartós emléket akarunk állítani személyének, a tudományos munkát kell magas színvonalon tartani abban az intézetben, amelynek Rényi megteremtője, felvirágoztatója, gyakorlati és szellemi vezetője volt. Ha gondolt volna rá, hogy tudományos végrendeletet írjon, ő sem kívánhatott volna sem többet, sem jobbat, sem mást; és én szilárdan hiszem, hogy mi, az intézet jelenlegi munkatársai, mindent elkövetünk, hogy teljesítsük egykori igazgatónknak ezt a soha ki nem mondott, soha le nem írt végső akaratát.

АЛЬФРЕД РЕНЬИ КАК ОРГАНИЗАТОР НАУКИ

Л. АЛЬПАР

RÉNYI'S ORGANIZING ACTIVITY

L. ALPÁR

VEGYES TÉRFOGAT ÉS A VAN DER WAERDEN-SEJTÉS

PACH JÁNOS

A matematikai sejtések egy része úgy ér meg matuzsálemi kort, mint a teknős. Félreeső, kis zugokban meghúzódva, távol a nagy vadászemezőktől. Aztán hosszú évek, évtizedek múltán arra téved egy matematikus. Felfedezi a problémát és észreveszi, hogy az idő bizony eljárt felette: a matematika jelen eszközeivel már könnyen kezelhető, bizonyítható. (Ír is róla egy cikket.)

Nyilvánvaló, hogy van der Waerden duplán sztochasztikus mátrixokra vonatkozó híres sejtése a régóta megoldatlan problémáknak nem ehhez a csoportjához tartozik. Amióta 1926-ban — feladatként — megjelent a Jahrberichte der Deutschen Mathematischen Vereinigung 35-ödik évfolyamában, mindig is kihívást jelentett a matematikusok számára. Ez az ártalmatlannak tűnő feladat, melyről eleinte úgy látszott, hogy az analízis klasszikus eszközeivel könnyen megoldható, több mint fél évszázadon keresztül ellenállt a meg-megújuló rohamoknak. Míg aztán 1980 őszén Grigorij Petrovics Jegoricsev, krasznojarszki matematikus bebizonyította van der Waerden sejtését.*

A hír jóval előbb érkezett, mint a bizonyítás részletei, és — ahogy lenni szokott — fokozott várakozással töltötte el a matematikus világot. A kombinatorikusok gráfok 1-faktoraira vonatkozó tételeket vártak a bizonyítástól, a valószínűségszámítással foglalkozó kutatók pedig olyan extremális problémák megoldását, melyek véletlen változók együttes eloszlásával kapcsolatosak. Jogos volt ez a felfokozott várakozás? Beváltotta a bizonyítás a hozzá fűzött reményeket? Ezekre a kérdésekre még nem könnyű megadni a választ. Egy — egészen más természetű — tanulság azonban már ma levonható.

De ne vágjunk a dolgok elébe!

1. Mátrixok permanense, bevezetés

Legyen $A=(a_{ij})$ egy tetszőleges $n\times n$-es mátrix. Definiáljuk az A mátrix permanensét a következő módon:

$$\text{per}\, A = \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}, \tag{1}$$

ahol π végigfut az $1, 2, \ldots, n$ számok összes lehetséges permutációin.

* E cikk megírása után derült ki, hogy van der Waerden sejtését elsőként nem Jegoricsev bizonyította be, hanem D. I. Falikman kijevi matematikus. Erről bővebben a cikk végén található megjegyzésben lesz szó.

Ha az a_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$ számok nem negatívak, továbbá A minden sorában és oszlopában az elemek összege 1-gyel egyenlő, akkor az A mátrixot *duplán sztochasztikus*nak nevezik. Az $n \times n$-es duplán sztochasztikus mátrixok halmazát a következőkben $\mathfrak{D}_n$-nel jelöljük. Például $I_n, \mathfrak{J}_n \in \mathfrak{D}_n$, ahol I_n, ill. $\mathfrak{J}_n$ az egységmátrixot, ill. azt a mátrixot jelöli, melynek, minden eleme $1/n$.

Legyen most $A \in \mathfrak{D}_n$. Nyilvánvaló, hogy

$$\operatorname{per} A \geqq \prod_{i=1}^{n} (a_{i1} + \ldots + a_{in}) = 1,$$

és egyenlőség csak akkor állhat, ha A permutációmátrix. Másrészt könnyű belátni, hogy

$$\operatorname{per} A > 0. \tag{2}$$

Tekintsük e célból a következő páros gráfot. Legyenek G csúcspontjai $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$. u_i és v_j között akkor és csak akkor fusson él, ha $a_{ij} > 0$. Legyen $X \subseteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ tetszőleges részhalmaz. Jelöljük $V(X)$-szel $\{v_1, \ldots, v_n\}$ azon pontjainak halmazát, amelyeknek van X-beli szomszédja. Az $A \in \mathfrak{D}_n$ feltételből azonnal következik, hogy $|V(X)| \geqq |X|$, tehát alkalmazhatjuk a König—Hall-féle „házasítási" lemmát. Eszerint G-nek van 1-faktora, vagyis létezik olyan π permutáció, amelyre u_i szomszédos $v_{\pi(i)}$-vel bármely $i=1, \ldots, n$ esetén. Mivel a π-nek megfelelő tag (1)-ben határozottan pozitív, ezért per $A > 0$.

Világos, hogy $\mathfrak{D}_n$ az $n \times n$-es mátrixok terének egy $((n-1)^2$-dimenziós) kompakt halmaza. Mivel pedig per A az a_{ij} változók folytonos függvénye, ezért (2)-ből

$$\min_{A \in \mathfrak{D}_n} \operatorname{per} A > 0$$

rögtön adódik. Van der Waerden híres sejtése szerint

$$\min_{A \in \mathfrak{D}_n} \operatorname{per} A = \operatorname{per} \mathfrak{J}_n = \frac{n!}{n^n}, \tag{3}$$

sőt, minden $\mathfrak{J}_n$-től különböző duplán sztochasztikus mátrix permanense határozottan nagyobb, mint $n!/n^n$.

Ez a sejtés a következő, szemléletes módon is megfogalmazható. Tekintsünk n különböző részecskét és n tartályt. Dobjuk be a részecskéket — egymástól függetlenül — a tartályok valamelyikébe. Annak valószínűsége, hogy az i-edik részecskét a j-edik tartályba dobjuk, legyen p_{ij}.

$$\sum_j p_{ij} = 1 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Válasszuk meg a p_{ij} valószínűségeket úgy, hogy minden tartályba várhatóan egy részecske essék. Másszóval

$$\sum_i p_{ij} = 1 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Ekkor (3) így is fogalmazható: annak az eseménynek a valószínűsége, hogy minden tartályba pontosan egy részecske esik, akkor a legkisebb, ha minden p_{ij} számot $1/n$-nek választunk, vagyis a részecskéket „teljesen véletlenszerűen" dobjuk valamelyik tartályba.

Ennek a dolgozatnak az a célja, hogy — kissé kibővített formában — ismertessük a van der Waerden sejtés Jegoricsevtől származó bizonyítását és azokat az esz-

közöket, melyeket a bizonyítás használ. Végül szeretnénk felhívni a figyelmet a konvex halmazok *vegyes térfogatának* fogalmára, mely, bár a bizonyítás szempontjából nélkülözhető, mégis — úgy tűnik — alapvető szerepet játszik (és játszhat) egy sor hasonló típusú egyenlőtlenség bizonyításában.

Mielőtt rátérnénk a bizonyítások precíz ismertetésére, vizsgáljuk meg a van der Waerden sejtés egyik fontos speciális esetét: legyen A egy duplán sztochasztikus $n\times n$-es mátrix, melynek első $n-2$ oszlopában minden elem $1/n$-nel egyenlő. Bebizonyítjuk, hogy ekkor

$$\operatorname{per} A \geqq \frac{n!}{n^n}, \tag{4}$$

és egyenlőség csak az $A=\mathscr{J}_n$ esetben állhat.

Ehhez célszerűnek látszik kissé szemügyre venni a

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{per}\begin{pmatrix} 1/n & \dots & 1/n & x_1 & y_1 \\ 1/n & \dots & 1/n & x_2 & y_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/n & x_n & y_n \end{pmatrix} = \operatorname{per}(\mathbf{e}/n, \dots, \mathbf{e}/n, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

szimmetrikus bilineáris függvényt, ahol $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ tetszőleges oszlopvektorok, $\mathbf{e}$ pedig olyan vektor, melynek minden koordinátája 1-gyel egyenlő. Vegyük észre, hogy az

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ \vdots \\ -n \end{pmatrix} \tag{5}$$

vektorok páronként ortogonálisak, továbbá

$$B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } i \neq j \\ n!/n^{n-2} & , \text{ ha } i = j = 1 \\ 2\binom{i}{2}(n-2)!/n^{n-2}, & \text{ha } i = j \neq 1, \end{cases}$$

vagyis az (5) bázisban felírva $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratikus alak négyzetösszeggé redukálódik:

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2\frac{(n-2)!}{n^{n-2}}\left(\binom{n}{2}x_1^2 - \binom{2}{2}x_2^2 - \binom{3}{2}x_3^2 - \dots - \binom{n}{2}x_n^2\right). \tag{6}$$

Mivel az A mátrix első $n-2$ oszlopában $\mathbf{e}/n$ áll, ezért az $(n-1)$-edik, ill. n-edik oszlop $\frac{\mathbf{e}}{n}+\mathbf{d}$, ill. $\frac{\mathbf{e}}{n}-\mathbf{d}$ alakú, ahol $\mathbf{d}\perp\mathbf{e}=\mathbf{e}_1$. Tehát, ha $\mathbf{d}$-t felírjuk az (5) bázisban, akkor az első együttható eltűnik, vagyis

$$\mathbf{d} = d_2\mathbf{e}_2 + \dots + d_n\mathbf{e}_n,$$

(6) miatt tehát $B(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \leqq 0$, és így

$$\operatorname{per} A = B\left(\frac{\mathbf{e}}{n}+\mathbf{d}, \frac{\mathbf{e}}{n}-\mathbf{d}\right) = B\left(\frac{\mathbf{e}}{n}, \frac{\mathbf{e}}{n}\right) - B(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \geqq \frac{n!}{n^n},$$

ahol egyenlőség csak a $\mathbf{d}=0$ esetben állhat. Éppen ezt akartuk igazolni. Úgy tűnik, hogy a van der Waerden sejtés Jegoricsev-féle bizonyításának ez az egyik alapgondolata.

Végül még egy megjegyzés. Vessünk egy pillantást az izoperimetrikus probléma legegyszerűbb alakjára: Adott területű síkbeli alakzatok közül a kör kerülete a legkisebb. Az analógia szembetűnő. Itt is azt kell igazolni, mint a van der Waerden sejtés esetében: egy függvény a minimumát értelmezési tartományának „legszimmetrikusabb" helyén veszi fel. Dolgozatunk utolsó fejezetében kiderül, hogy a formális analógiánál többről van szó. A két állítás tulajdonképp egy tőről fakad.

2. Az előzmény: David London tétele

A bevezetésben láttuk, hogy per B felveszi a minimumát a duplán sztochasztikus B mátrixok $\mathcal{D}_n$ halmazán. Egy $A\in\mathcal{D}_n$ mátrixot, melyre

$$\operatorname{per} A = \min_{B\in\mathcal{D}_n} \operatorname{per} B,$$

minimálisnak nevezünk. A van der Waerden sejtés tehát úgy is fogalmazható, hogy $\mathcal{D}_n$ egyetlen minimális eleme a J_n mátrix.

J_n rendelkezik azzal a figyelemreméltó tulajdonsággal, hogy minden $(n-1)$-edrendű alpermanensének értéke $(n-1)!/n^{n-1}=n!/n^n=\operatorname{per} J_n$. Már Marcus és Newman [8] is észrevették, hogy van der Waerden sejtésének igazolásához elegendő lenne belátni, hogy bármely minimális A mátrixra és minden $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ számpárra

$$\operatorname{per} A_j^i = \operatorname{per} A, \tag{7}$$

ahol A_j^i azt az $(n-1)\times(n-1)$-es mátrixot jelöli, ami A-ból i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával keletkezik. (Jegoricsev bizonyítása, melyet a 4. fejezetben ismertetünk, szintén ezen az észrevételen alapul.) Marcus és Newman egy hibás eredményét kijavítva, David London [6] 1971-ben a következő —(7)-nél valamivel gyengébb — állítást igazolta.

1. Tétel. *Legyen $A\in\mathcal{D}_n$ minimális. Ekkor*

$$\operatorname{per} A_j^i = \operatorname{per} A \text{ ha } a_{ij} > 0, \text{ és}$$

$$\operatorname{per} A_j^i \geqq \operatorname{per} A \text{ ha } a_{ij} = 0.$$

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges $B=(b_{ij})\in\mathcal{D}_n$ mátrixot, és definiáljuk B segítségével az

$$f_B(x) = \operatorname{per}[(1-x)A+xB]$$

függvényt. Nyilvánvaló, hogy $f_B(x)$ az x változó n-edfokú polinomja, amiben a lineáris tag együtthatója

$$f_B'(0) = \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}-a_{ij}) \operatorname{per} A_j^i = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \operatorname{per} A_j^i - n \operatorname{per} A.$$

Másrészt $f_B'(0)\geqq 0$, hiszen $f_B(0)=\operatorname{per} A$ és A mátrix minimális. $B=A$ esetben persze $f_A'(0)=0$.

Ez egy kicsit más formában is megfogalmazható. Tekintsük a következő lineáris programozási feladatot, melynek változója a $\mathbf{B}=(\ldots, b_{ij}, \ldots)$ vektor:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1 \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

$$b_{ij} \geqq 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \text{ per } A_j^i = ?$$

A fentiek szerint a $\mathbf{B}=\mathbf{A}=(\ldots, a_{ij}, \ldots)$ helyen (8) felveszi az optimumát, és ez az optimális érték n per A-val egyenlő. Írjuk fel (8) duális problémáját:

$$u_i + v_j \leqq \text{per } A_j^i \quad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{8*}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) = ?$$

A dualitás-tételből könnyen következik, hogy amennyiben $\mathbf{A}$, ill. $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ (8), ill. (8*) optimális megoldásai, akkor az $\mathbf{A}=(\ldots, a_{ij}, \ldots)$ és a $(\ldots, \text{per } A_j^i - u_i - v_j, \ldots)$ n^2-dimenziós vektorok egymásra ortogonálisak, tehát (8*) optimális megoldására teljesül

$$u_i + v_j = \text{per } A_j^i, \quad \text{ha} \quad a_{ij} > 0. \tag{9}$$

Ezt felhasználva egyszerű számolás mutatja, hogy az $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ optimális megoldás eleget tesz az

$$\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{v} + A^*\mathbf{u} = (\text{per } A) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

feltételnek, vagyis $A^*A\mathbf{v}=\mathbf{v}$ és $AA^*\mathbf{u}=\mathbf{u}$. A fentiek alapján nem nehéz belátni, hogy az A^*A, (ill. AA^*) mátrix 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere nem lehet >1-dimenziós, tehát

$$\mathbf{u} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(10) figyelembevételével itt $\lambda + \mu = \text{per } A$, vagyis (8*) és (9) szerint

$$\text{per } A \leqq \text{per } A_j^i \quad (i, j = 1, \ldots, n),$$

ahol $a_{ij} > 0$ esetben egyenlőség áll.

3. Egy régebbi előzmény: Az Alekszandrov egyenlőtlenség

Itt az Alekszandrov egyenlőtlenségnek csak egy fontos speciális esetét igazoljuk, melyre a következőkben nagy szükség lesz. Az egyenlőtlenség egy sokkal általánosabb formájára, ami Alekszandrov—Fenchel egyenlőtlenség néven ismeretes, csak az utolsó fejezetben térünk ki.

2. Tétel. *Legyen M egy $n\times(n-2)$-es mátrix, melynek minden eleme pozitív. Legyenek továbbá $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n_+$ és $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$ tetszőleges vektorok. Ekkor az M-ből $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ oszlopok hozzávételéből keletkező $(M, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ négyzetes mátrixra*

$$\operatorname{per}^2(M, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq \operatorname{per}(M, \mathbf{x}, \mathbf{x}) \operatorname{per}(M, \mathbf{y}, \mathbf{y}), \tag{11}$$

*ahol egyenlőség csak az $y=\lambda x$ esetben áll.**

Első pillantásra szembeötlik, hogy (11) mennyire hasonló a Cauchy—Schwarz—Bunyakovszkij egyenlőtlenséghez. Csakhogy itt az egyenlőtlenség iránya éppen fordított. Lássuk, mi ennek az oka.

Szükségünk lesz egy jelölésre. Legyen M tetszőleges mátrix. Ekkor $M^{ij\ldots}_{kl\ldots}$ jelöli M-nek azt a részmátrixát, ami az i-edik, j-edik, ... sor és a k-adik, l-edik, ... oszlop elhagyása után marad.

A 2. Tétel alábbi bizonyítása, amely lényegében követi Alekszandrov [1] eredeti gondolatmenetét, n-re vonatkozó teljes indukcióval történik. $n=2$-re az állítás triviális. Vizsgáljuk most meg tetszőleges $n>2$ esetén a

$$B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \operatorname{per}(M, \mathbf{x}, \mathbf{x}) \tag{12}$$

kvadratikus alakot. A kifejtési tétel szerint

$$B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} (\operatorname{per} M^{ij}) x_i x_j.$$

Bebizonyítjuk, hogy $B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratikus alak nem elfajuló, vagyis a

$$\begin{pmatrix} 0 & \operatorname{per} M^{12} & \ldots & \operatorname{per} M^{1n} \\ \operatorname{per} M^{21} & 0 & \ldots & \operatorname{per} M^{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \operatorname{per} M^{n1} & \operatorname{per} M^{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

mátrixnak nincs 0 sajátértéke. Tegyük fel, indirekt módon, hogy alkalmas $\mathbf{x}$ vektora

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (\operatorname{per} M^{jk}) x_j = 0 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

másszóval

$$\operatorname{per}(M, \mathbf{x})^k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Alkalmazzuk az indukciós feltevést az $(M, \mathbf{x})^k$ mátrixra

$$0 = \operatorname{per}^2(M, \mathbf{x})^k \geqq \operatorname{per}(M, \mathbf{m}_{n-2})^k \operatorname{per}(M_{n-2}, \mathbf{x}, \mathbf{x})^k,$$

* 1981-ben Luzgin és Szidorenko megmutatták, hogy (11) következik Turán tételéből. Cikkük a Combinatóricában fog megjelenni.

ahol $\mathbf{m}_{n-2}$ jelöli M mátrix $(n-2)$-edik oszlopát, M_{n-2} pedig (szokásos módon) azt a mátrixot, ami M-ből $\mathbf{m}_{n-2}$ elhagyásával keletkezik. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\text{per}\,(M_{n-2}, \mathbf{x}, \mathbf{x})^k \leqq 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

és — rögzített k mellett — csak akkor állhat egyenlőség, ha

$$x_i = 0 \quad \text{minden } i \neq k\text{-ra.} \tag{15}$$

A (14) egyenlőtlenségeket (12)-vel összevetve az adódik, hogy az x vektorra

$$B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leqq 0,$$

és — (15) figyelembevételével — egyenlőség csak $\mathbf{x}=0$ esetben fordulhat elő. Márpedig $\mathbf{x}$ — a feltevés szerint — B_M mátrixának 0 sajátértékhez tartozó sajátvektora, vagyis $B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x})=0$ valóban fennáll. Így $\mathbf{x}=0$. Bebizonyítottuk tehát, hogy a $B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratikus alak nem elfajuló. Sőt, ennél valamivel többet is megállapíthatunk:

A bevezetésben láttuk, hogy abban a speciális esetben, amikor az M mátrix minden eleme $1/n$-nel egyenlő, a $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratikus alak nemcsak nem elfajuló, hanem $-(6)$ szerint — egy kivétellel minden sajátértéke negatív. Deformáljuk most folytonosan a csupa $1/n$-esből álló mátrixot úgy, hogy menjen át a tételben szereplő M mátrixba. Csak arra ügyeljünk, hogy a deformáció során a mátrix egyetlen eleme se váljék nullává. Mivel a sajátértékek is folytonosan változnak, és — a fentiek szerint — a $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratikus alak semmilyen közbenső helyzetben nem elfajuló, ezért a $B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratikus alakra is érvényes, hogy sajátértékei — egy kivétellel — negatívak. Másszóval alkalmas bázisban felírva

$$B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$$

alakú, ahol $x_1, \ldots, x_n$ az $\mathbf{x}$ vektor koordinátái az új bázisban.

Most már a tétel könnyen bizonyítható. Legyenek $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^n$ és $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ lineárisan független vektorok. $B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x})>0$, másrészt — a fentiek alapján — B_M nem vehet fel csupa $\geqq 0$ értéket az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ által feszített síkon. Így a

$$B_M(\mathbf{x}+t\mathbf{y}, \mathbf{x}+t\mathbf{y}) = t^2 B_M(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + 2t\, B_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

parabola két helyen is eltűnik, vagyis diszkriminánsa

$$4B_M^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 4B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x})\, B_M(\mathbf{y}, \mathbf{y}) > 0.$$

Éppen ezt kellett bizonyítani.

A fentiek alapján tehát világos, hogy a Cauchy—Schwarz—Bunyakovszkij egyenlőtlenség a definit kvadratikus formákat jellemzi. Esetünkben azért áll fordított irányú egyenlőtlenség, mert a $B_M(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratikus alak *erősen indefinit.*

4. Jegoricsev bizonyítása

Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy folytonossági okok miatt nyilvánvaló, hogy ha a 2. Tételben az M mátrixról és az $\mathbf{x}$ vektorról csak annyit teszünk fel, hogy elemeik *nem-negatívak,* akkor a (11) egyenlőtlenség érvényben marad. (Ez esetben persze egyenlőség sokféleképp fennállhat.) A következőkben az Alekszandrov egyenlőtlenségnek ezt a formáját is használni fogjuk.

Először megmutatjuk, hogy miként vezet ez az egyenlőtlenség David London tételének élesítéséhez. (Ez a bizonyítás döntő lépése.)

1′. Tétel. *Legyen* $A \in \mathfrak{D}_n$ *mátrix minimális. Ekkor*

$$\operatorname{per} A_j^i = \operatorname{per} A$$

bármely i-re és j-re $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamilyen i, j számpárra

$$\operatorname{per} A_j^i > \operatorname{per} A,$$

ellentétben a tétel állításával. Legyen $a_{ik} > 0$ az A mátrix i-edik sorának tetszőleges nem-nulla eleme. Ekkor — az Alekszandrov egyenlőtlenség miatt —

$$(\operatorname{per} A)^2 \geqq \operatorname{per}(A_k, a_j) \operatorname{per}(A_j, a_k), \tag{16}$$

ahol a_j jelöli A mátrix j-edik oszlopát, A_j pedig azt a mátrixot, ami A-ból a_j elhagyásával keletkezik. A (16) jobb oldalán álló kifejezést (a kiemelt oszlopok szerint) kifejtve

$$(\operatorname{per} A)^2 \geqq \left(\sum_{s=1}^{n} a_{sj} \operatorname{per} A_k^s \right) \left(\sum_{s=1}^{n} a_{sk} \operatorname{per} A_j^s \right).$$

Az 1. Tétel szerint nem növeljük ezt az értéket, ha per A_k^s és per A_j^s helyébe per A-t írunk $(s = 1, \ldots, n)$, sőt $s = i$ esetben feltételünk szerint a második tényező határozottan csökkent, tehát

$$(\operatorname{per} A)^2 > \left(\sum_{s=1}^{n} a_{sj} \operatorname{per} A \right) \left(\sum_{s=1}^{n} a_{sk} \operatorname{per} A \right) = (\operatorname{per} A)^2,$$

ellentmondás. *Qu. e. d.*

Most már nem okoz gondot a van der Waerden sejtés igazolása. Legyen A egy minimális mátrix. Szemeljük ki A két tetszőleges oszlopát (mondjuk a_1-t és a_2-t), és helyettesítsük mindkettőt $\frac{a_1 + a_2}{2}$-vel. Nyilvánvaló, hogy a kapott A' mátrix ismét duplán sztochasztikus. Sőt, A' *minimális,* ugyanis

$$\operatorname{per} A' = \operatorname{per}\left(A_{1,2}, \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2}, \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{per}(A_{1,2}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) + \frac{1}{2} \operatorname{per}(A_{1,2}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + \frac{1}{4} \operatorname{per}(A_{1,2}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) =$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{per}(A_2, \mathbf{a}_1) + \frac{1}{2} \operatorname{per} A + \frac{1}{4} \operatorname{per}(A_1, \mathbf{a}_2) =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \operatorname{per} A_2^i + \frac{1}{2} \operatorname{per} A + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} a_{i2} \operatorname{per} A_1^i.$$

Az 1′. Tétel értelmében itt mindkét szumma értéke per A, tehát per $A' = \operatorname{per} A$.

Rögzítsük most A (minimális) mátrix egy oszlopát, mondjuk a_n-t. Be fogjuk bizonyítani, hogy a_n minden eleme $1/n$.

Nézzük meg A i-edik sorát. Azt állítjuk, hogy az $a_{i1}, \ldots, a_{i,n-1}$ elemek között van nem-nulla. Ha ugyanis $a_{i1} = \ldots = a_{i,n-1} = 0$, akkor per $A_n^j = 0$ lenne $(j \neq i)$, ami ellentmond az 1′. Tételnek és (2)-nek.

Vegyünk ki A első $n-1$ oszlopa közül kettőt, és helyettesítsük őket az átlagukkal. Néhányszor megismételve ezt a transzformációt — a fentiek miatt — eljuthatunk egy olyan A' minimális mátrixhoz, melynek első $n-1$ oszlopában minden elem pozitív, utolsó oszlopa pedig megegyezik a_n-nel. A'-re tehát alkalmazható a 2. Tétel:

$$(17) \qquad (\operatorname{per} A')^2 \geqq \operatorname{per}(A_i', \mathbf{a}_n) \operatorname{per}(A_n', \mathbf{a}_i') =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jn} \operatorname{per} A_i'^j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a'_{ji} \operatorname{per} A_i'^j\right).$$

Mivel — 1'. Tétel szerint — (17) jobb oldalán is $(\operatorname{per} A')^2$ áll, ezért esetünkben az Alekszandrov egyenlőtlenség egyenlőséggé fajul, vagyis

$$\mathbf{a}_n = \lambda_i \mathbf{a}_i' \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$

De A' minden oszlopában az elemek összege 1, úgyhogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 1$. Így tehát A' minden oszlopa egyforma, következésképp a_n (az utolsó oszlop) elemei mind $1/n$-nel egyenlők. Ezt kellett bizonyítani.

5. *Konvex halmazok vegyes térfogata*

Láttuk, hogy a 2. Tétel szinte rutinszerű alkalmazása milyen egyszerűen vezetett a van der Waerden sejtés igazolásához. A. D. Alekszandrov ezt a tételt (illetve ennek egy általánosítását) már eredetileg is segédtételnek szánta egy lényegesen erősebb állítás, az ún. Alekszandrov—Fenchel-féle egyenlőtlenség bizonyításához. Dolgozatunk befejező részében ezt szeretnénk röviden ismertetni.

Legyen K egy tetszőleges korlátos, konvex halmaz az n-dimenziós euklideszi térben. Legyen K_λ azon pontok halmaza, melyeknek K-tól mért távolsága nem nagyobb λ-nál. K_λ-t a K halmaz λ sugara *paraleltartományának* nevezik. Nem nehéz bizonyítani, hogy K_λ térfogata λ-nak n-edfokú polinomjaként írható fel, vagyis

$$(18) \qquad V(K_\lambda) = c_n(K) + c_{n-1}(K)\lambda + \ldots + c_0\lambda^n.$$

Itt $c_n(K)$, ill. $c_{n-1}(K)$ K térfogatával, ill. felületével egyenlő, és a többi $c_i(K)$ együttható is K-nak érdekes és sokat vizsgált (i-dimenziós) paramétere. Ha feltesszük, hogy K felülete „sima", akkor pl. a következő integrálformula érvényes:

$$c_i(K) = \frac{1}{n-i} \int_{\partial K} \sum k_{j_1} k_{j_2} \ldots k_{j_{n-i-1}},$$

ahol ∂K jelöli K halmaz felületét, $k_1(x), \ldots, k_{n-1}(x)$ a főgörbületeket egy $x \in \partial K$ pontban, és a szummát az $1 \leqq j_1, \ldots, j_{n-i-1} \leqq n-1$ indexek összes lehetséges különböző választására vesszük. A (18) előállítás, amely valószínűleg Steinertől származik, már a múlt században ismeretes volt.

A most vázolt probléma általánosabb megfogalmazását Minkowski kezdeményezte. Legyen K és L két halmaz az n-dimenziós térben. K és L (Minkowski-féle) összegét, ill. a konstanssal való szorzást definiáljuk a szokásos módon:

$$K + L =: \{k + l \mid k \in K, l \in L\}$$

$$\lambda K =: \{\lambda k \mid k \in K\}.$$

Legyenek $K_1, K_2, \ldots, K_s$ tetszőleges korlátos, konvex halmazok $\mathbf{R}^n$-ben. Ekkor ezek

lineáris kombinációjának térfogata az együtthatók homogén n-edfokú polinomjaként írható, vagyis

$$V\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i K_i\right)=\sum_{i_1=1}^{s}\dots\sum_{i_n=1}^{s}V_{i_1,\dots,i_n}\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_n}. \tag{19}$$

Itt a szimmetria és az egyértelműség kedvéért feltesszük, hogy a $V_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ együttható az $i_1, i_2, \dots, i_n$ indexek minden permutációjára ugyanaz. Könnyű belátni, hogy ekkor a $V_{i_1,\dots,i_n}$ együttható csak a megfelelő $K_{i_1}, \dots, K_{i_n}$ halmazoktól függ. (Ezek között persze lehetnek azonos indexűek). Jogos tehát a következő jelölés:

$$V(K_{i_1},\dots,K_{i_n})=:V_{i_1,\dots,i_n}.$$

Ezt a számot nevezzük a $K_{i_1}, \dots, K_{i_n}$ halmazok *vegyes térfogatának*.

Ha (19)-ben $s=2$, $K_1=K$, K_2 pedig a 0 körüli B egységgömb, akkor speciális esetként (18)-at kapjuk. Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$c_i(K)=\binom{n}{i}V(\underbrace{K,\dots,K}_{i\text{-szer}},\underbrace{B,\dots,B}_{(n-i)\text{-szer}})\quad(i=1,\dots,n), \tag{20}$$

és $V(K,\dots,K)=V(K)$, $nV(K,\dots,K,B)$ pedig megegyezik K felületével.

A definíció alapján nem nehéz ellenőrizni a vegyes térfogat következő egyszerű tulajdonságait.

I. $V(K_1,\dots,K_n)$ független a halmazok sorrendjétől.

II. $V(K_1,\dots,K_n)$ függvény minden változójában lineáris, azaz
$V(\lambda_0K_0+\lambda_1K_1,K_2,\dots,K_n)=|\lambda_0|V(K_0,K_2,\dots,K_n)+|\lambda_1|V(K_1,K_2,\dots,K_n)$.

III. $V(K_1,\dots,K_n)$ függvény eltolásra invariáns, vagyis $V(K_1+\mathbf{a}_1,\dots,K_n+\mathbf{a}_n)=$
$=V(K_1,\dots,K_n)$, ahol $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ tetszőleges vektorok.

IV. Legyen A $\mathbf{R}^n$ tetszőleges lineáris transzformációja. Ekkor $V(A(K_1),\dots,A(K_n))=$
$=|\det A|V(K_1,\dots,K_n)$.

Hadwiger bebizonyította, hogy a fenti tulajdonságok a vegyes térfogatot (konstans szórzó erejéig) egyértelműen jellemzik.

Nem nehéz belátni a vegyes térfogat monotonitását, tehát, hogy amennyiben $K_i\subseteqq L_i$ $(i=1,\dots,n)$, akkor

$$V(K_1,\dots,K_n)\leqq V(L_1,\dots,L_n).$$

Lényegesen mélyebb a fentieknél az Alekszandrov—Fenchel egyenlőtlenség, ami a vegyes térfogatok következő tulajdonságát rögzíti:

$$V^2(K_1,\dots,K_{n-2},K_{n-1},K_n)\geqq V(K_1,\dots,K_{n-1},K_{n-1})V(K_1,\dots,K_{n-2},K_n,K_n). \tag{21}$$

Jegyezzük meg, hogy (21)-ből azonnal adódik

$$V^n(K_1,\dots,K_n)\geqq V(K_1)\dots V(K_n),$$

amiből $K_1=\dots=K_{n-1}=K$, $K_n=B$ speciális esetben ((20) értelmében) az izoperimetrikus egyenlőtlenséget nyerjük:

$$S^n(K)\geqq n^nv_nV^{n-1}(K),$$

ahol $S(K)$ jelöli K felületét, v_n pedig az n-dimenziós egységgömb térfogatát. (21)-ből ezen kívül levezethető Brunn—Minkowski egyenlőtlenség és az izoperimetrikus egyenlőtlenség több általános alakja.

Most lássuk, hogyan következik (21)-ből a 2. Tétel. Legyen K_i egy olyan n-dimenziós tégla, melynek oldalai $(a_{i1}, \ldots\ldots, a_{in})$ párhuzamosak a koordinátatengelyekkel $(i=1, \ldots\ldots, n)$. Könnyű belátni, hogy ekkor

$$V(K_1, \ldots, K_n) = \frac{1}{n!} \operatorname{per} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Ezekre a táglákra alkalmazva (21)-et tehát épp a 2. Tételt kapjuk. (Az egyenlőség feltétele persze így nem adódik).
(22) bizonyítása a legegyszerűbben úgy történhet, hogy felhasználjuk a

$$V(K_1, \ldots, K_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\varepsilon} (-1)^{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} V\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i K_i\right)$$

kifejezést, ahol a szummát vegyük az összes n-hosszúságú $\varepsilon=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ 0—1 sorozatra. (Ez a kifejtés (19)-ből szitálással azonnal következik).

Dolgozatunkat azzal a megállapítással kezdtük, hogy a van der Waerden sejtést születésének pillanatától kezdve nagy érdeklődés övezte, igazolásával matematikusok egész sora próbálkozott sikertelenül. És mégis, Jegoricsev bizonyításának ismeretében — némi túlzással — azt mondhatjuk, hogy az idő csendben eljárt a sejtés felett. A bizonyítás első tanulsága az, hogy érdemes kissé mélyebben megismerkednünk a vegyes térfogat fogalmával és a több mint 40 évvel ezelőtt igazolt Alekszandrov—Fenchel egyenlőtlenséggel, amely a matematika egy klasszikus ágában, az integrálgeometriában igen hatásos eszköznek bizonyult (ld. [3] és [4]).

Megjegyzés. Mint már említettük, van der Waerden sejtésének első bizonyítása Dmitrij Ieszilovics Falikman kijevi matematikustól származik. Falikman „Van der Waerden duplán sztochasztikus mátrixok permanenséről szóló sejtésének bizonyítása" című cikke [11] ugyanis 1979 május közepén érkezett be a Matyematyicseszkie Zamétki folyóirat szerkesztőségébe, míg Jegoricsev preprintje 1980 október végéről datálódik. Falikman nem bizonyítja be a minimumhely unicitását. azt viszont megmutatja, hogy

$$\min_{A \in \mathcal{D}_n} \operatorname{per} A = \frac{n!}{n^n}$$

(ez van der Waerden sejtése), továbbá, hogy ha $A \in \mathcal{D}_n$, $a_{ij} > 0$ $(i, j=1, \ldots, n)$ és $\operatorname{per} A = n! n^{-n}$, akkor $A=J$. Falikman nem használja a vegyes térfogat fogalmát és a $(\operatorname{per} A)^2 = \operatorname{per}(A_k, a_j) \operatorname{per}(A_j, a_k)$ egyenlőtlenséget sem. Viszont tőle származik a döntő felismerés: a $\operatorname{per}(M, x, y)$ kvadratikus alak vizsgálata.

IRODALOM

[1] A. D. Alekszandrov, Zur Theorie der gemischten Volumina von Körpern IV., Mat. Szbornyik 3 (45), (1938), 227—251. (Oroszul)
[2] T. Bang, On matrix functiones som med et numerisk lille deficit viser v.d. Waerdens permanenthypotese, Proc. Scandinavian Congress, Turku, 1976.
[3] T. Bonnesen—W. Fenchel, Theorie der Konvexen Körper, Springer 1934, 1974.
[4] Burago—Zalgaller, Geometricseszkije nyerávensztva, Nauka, Leningrád, 1980.

[5] G. P. JEGORICSEV, Solution of van der Waerden's permanent conjecture, Preprint 13 Fiz. Kut. Int. Krasznojarszk, 1980.
[6] D. LONDON, Some notes on the van der Waerden conjecture Lin. Alg. and Appls 4 (1971), 155—160.
[7] J. H. VAN LINT, Notes on Jegoritseff's proof of the van der Waerden conjecture, preprint.
[8] M. MARCUS, M. NEWMAN, On the minimum of the permanent of a doubly stochastic matrix, Duke Math. J. 26. (1959), 61—72.
[9] H. MINC, Permanents, Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol. 6., Addison Wesley, Reading, Mass, 1978.
[10] B. L. VAN DER WAERDEN, Aufgabe 45, Iber. d. D.N.V. 35 (1926), 117.
[11] D. I. FALIKMAN: Proof of van der Waerden's permanent conjecture, Mat. Zametki 29. (1981), b. 931—939.

СМЕШАННЫЕ ОБЪЕМЫ И ГИПОТЕЗА ВАН ДЕР ВАРДЕНА

Я. ПАХ

MIXED VOLUME AND THE VAN DER WAERDEN CONJECTURE

J. PACH

KÖZVETÍTÉSI JÁTÉK; EGY KÓDELMÉLETI PROBLÉMA

NEMETZ TIBOR

Bevezetés

Különböző matematika-tanítási kísérletek során 12—16 éves tanulókkal játszottuk a következő „közvetítési" játékot:

Két pár versenyez egymással. Mindkét párban az egyik játékos a közvetítő (információ-elméleti szóhasználattal: kódoló), a másik a tippelő (dekódoló). Közösen megállapodnak egy m pozitív egész számban (a konkrét játékok során többnyire $m=9$ volt). Ezután mindkét pár választ titkosan egy rendezett számpárt az $M=\{1, 2, \ldots, m\}$ halmazból, majd a két tippelő („dekódoló") kimegy az osztályból. A két közvetítő játékos kicseréli a választott számpárt, majd ezek ismeretében megadnak egyetlen számot ugyancsak az $1, 2, \ldots, m$ számok közül. Ezt a számot közlik visszahívott partnerükkel, akinek pusztán e szám ismeretében kell tippelnie a másik pár által választott rendezett számpárra. Akinek a tippje jobb, tehát közelebb van a valódi számpárhoz, az a pár nyer. A „távolságot" az abszolút eltérések összege adja: Ha a valódi számpár (x, y), a tipp pedig $(\tilde{x}, \tilde{y})$, akkor a távolság:

$$|x-\tilde{x}|+|y-\tilde{y}|.$$

Az a pár nyer tehát, akinél ez a távolság kisebb. Természetesen a közvetítő és a tippelő előre megállapodhat egy stratégiában, s a játék célja éppen egy „jó" stratégia keresése. Egy stratégia akkor jó, ha a „várható" távolság kicsi.

Szimmetria miatt célszerű mindkét játékospárnak a rendezett számpárt visszatevéssel kisorsolni, tehát a két számot az $1, 2, \ldots, m$ számok közül egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással kiválasztani. Ekkor a „várható" távolság már pontos matematikai értelemmel bír: a távolság várható értékét jelenti. Heurisztikusan nyilvánvaló, hogy ez a várható érték m növekedésével végtelenhez tart.

Jelen dolgozatban a várható érték nagyságrendjét határozzuk meg m függvényeként. Megfogalmazunk továbbá néhány vizsgálatra érdemes kérdést is.

Visszatérve az oktatási-kísérletekhez, pusztán megemlítjük, hogy a játékot követő megbeszélések során megvitattuk azt az általánosítást is, amikor M az összes természetes számok halmaza. A kérdés: mivel m növekedésével a várható távolság végtelenhez tart, van-e értelme a végtelen M halmaz esetén a játéknak, lehet-e jól játszani, s milyen kicsi várható távolságot lehet elérni?

A probléma matematikai megfogalmazása

Legyenek a $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$ valószínűségi változók lehetséges értékei az $1, 2, \ldots, m$ számok, együttes eloszlásuk P_k. Legyen $M=\{1, 2, \ldots, m\}$, s jelölje M^n az M halmaz n-edik hatványát, tehát M^n elemei az $1, 2, \ldots, m$ számokból álló rendezett szám-n-esek.

Legyen $1 \leqq r < k$, s jelölje $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{r,k}(m)$ a nem-randomizált

$$T: M^k \mapsto M^r$$

leképezések halmazát. Hasonlóan legyen $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{r,k}(m)$ az ugyancsak nem-randomizált

$$R: M^r \mapsto M^k$$

leképezések halmaza. Ekkor tetszőleges rögzített T, R pár esetén az

$$\{\eta_1, \ldots, \eta_k\} = R[T(\xi_1, \ldots, \xi_k)]$$

valószínűségi változó sorozat jól definiált. Definiáljuk a ξ és η sorozat átlagos távolságát a szokásos módon:

$$W_{k,r}(m, T, R) = E_{p_k}\left\{\sum_{i=1}^{k} |\xi_i - \eta_i|\right\}. \tag{1}$$

Mivel $\mathcal{T}$ és $\mathcal{R}$ véges, így létezik olyan T_0 és R_0, melyre (1) felveszi a minimális értékét. Legyen

$$D_{k,r}(m) = \min_{T,R} W_{k,r}(m, T, R) \triangleq W_{k,r}(m, T_0, R_0). \tag{2}$$

A probléma

(A): T_0 és R_0 meghatározása
vagy ennek hiányában
(B): $D_{k,r}(m)$ megadása
vagy legalább
(C): Elfogadható alsó és felső becslések keresése $D_{k,r}(m)$-re és „közel-optimális" T, R meghatározása.

Egy speciális eset

Jelen dolgozatban a (*C*) kérdésre adunk választ az eredeti játéknak megfelelő esetben, tehát amikor $k=2$, $r=1$ és ξ_1, ξ_2 független, egyenletes eloszlású az M halmazon. Egyszerűség kedvéért a $k=2$ és $r=1$ indexeket elhagyjuk a jelölésekből.

Tétel

$$mD(m) \geqq \frac{2(t-1)t(2t-1)}{3} + t\left[m - 4\binom{t}{2} - 1\right], \tag{3}$$

ahol a t egész számot a

$$4\binom{t}{2} + 1 \leqq m < 4 \cdot \binom{t+1}{2} + 1$$

egyenlőtlenség definiálja.

$$m \cdot D(m) \leqq \frac{\sqrt{2}}{3} m\sqrt{m} + 22m + 94\sqrt{m} + 91. \tag{4}$$

Megjegyzés. A (3)-ban megadott alsó becslés csak az $m=1, 2, 3, 4, 9$ esetekben pontos.

1. Következmény:

$$\lim_{(m)} \frac{D(m)}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

tehát tételünk megadja $D(m)$ növekedésének nagyságrendjét.

Mivel $D(1)=0$, így a továbbiakban mindig feltesszük, hogy $m \geqq 2$.

Megjegyzés: Mivel csak nem-randomizált leképzésekre szorítkozunk, így minden

$$T: M \times M \mapsto M$$

az $M \times M$ halmaz egy particióját definiálja:

$$A_i(T) \triangleq \{(x, y) \in M \times M: T(x, y) = i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Legyen T_0, R_0 egy optimális leképezés-pár. Mivel $m > 1$, így nyilvánvalóan igaz, hogy

$$A_i(T_0) \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Az $A_i(T)$ halmazon az R leképezés, és így η_1, η_2 is konstans. Legyen $(x_i, y_i) \triangleq R(i)$. Ekkor ugyancsak nyilvánvaló (1) következő átalakítása:

$$m^2 W(m, T, R) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{(\xi_1, \xi_2) \in A_i(T)} \{|\xi_1 - x_i| + |\xi_2 - y_i|\}. \tag{5}$$

Ez az átalakítás megmutatja, hogy adott T esetén hogyan kaphatjuk meg a legjobb $R-t$: Az x_i és y_i számokat egymástól függetlenül választhatjuk meg. Tekintsük azt az S_i statisztikai populációt, melyben az $x \in M$ szám annyiszor szerepel, ahány különböző y szám esetén $(x, y) \in A_i(T)$. Könnyű látni, hogy optimális R esetén x_i az S_i egészértékű mediánja. Azt is feltehetjük tehát, hogy $(x_i, y_i) \in A_i(T)$.

Adott R esetén a legjobb T megkonstruálása sem jelent problémát. Ekkor az (x, y) számpárokat úgy kell az $A_i(T)$ halmazok valamelyikébe beosztani, hogy az (x, y) távolsága az adott $R(i)=(x_i, y_i)$ ponttól legyen a minimális.

Az alsó korlát bizonyítása:

Legyen

$$d(n) \triangleq \min_{\substack{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n), \\ a_i, b_i \text{ egész}, i=1, \ldots, n \\ (a_i, b_i) \neq (a_j, b_j), \text{ ha } i \neq j}} \sum_{i=1}^{n} \{|a_i| + |b_i|\} \tag{6}$$

Jelöljük az $A_i(T)$ halmaz elemszámát $|A_i(T)|$-val. Akkor

$$m^2 W_m(T, R) \geqq \min_{\substack{|A_i(T)|=n_i \\ \sum n_i = m}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{(\xi_1, \xi_2) \in A_i(T)} \{|\xi_1 - x_i| + |\xi_2 - y_i|\} \geqq$$

$$\geqq \min_{\substack{n_1, \ldots, n_m \\ 0 < n_i, \sum n_i = m}} \sum_{i=1}^{m} d(n_i) \triangleq m^2 \cdot D^*(m),$$

tehát

$$D(m) \geqq D^*(m).$$

Itt a $d(n)$ függvényt könnyű meghatározni:

1. Lemma: Legyen $t=t(n)$ és $s=s(n)$ az

$$4\cdot\binom{t}{2}+1 \leqq n < 4\binom{t+1}{2}+1 \tag{7a}$$

$$s = n-4\binom{t}{2}-1 \tag{7b}$$

összefüggésekkel megadva. Akkor

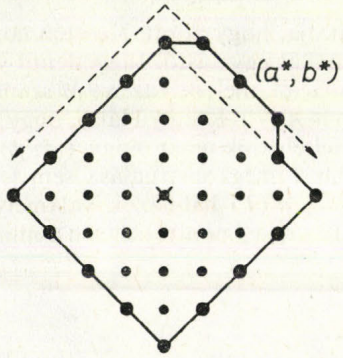
$$d(1) = 0$$

$$d(n) = \frac{2(t-1)t(2t-1)}{3}+s\cdot t, \quad n \geqq 2.$$

Bizonyítás:
Legyen $A_0=\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ egy olyan halmaz, melyre

$$d(n) = \sum_{(a_i, b_i)\in A_0} \{|a_i|+|b_i|\}.$$

Legyen továbbá $|a^*|+|b^*|=t+1$ valamilyen $(a^*, b^*)\in A_0$ és egész t esetén. Akkor tetszőleges olyan (a, b) pár, melyre $|a|+|b|\leqq t$, szintén A_0-hoz tartozik. Ez azt jelenti, hogy A_0 a sík olyan egészkoordinátájú rácspontjainak halmaza, melyek egy origó középpontú 45°-os „ferdeségű" négyzetét töltik ki, és esetleg a következő négyzet kerületéből is tartalmaznak pontokat: (1. ábra).



1. ábra

Azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre

$$|a|+|b| = c$$

nyilvánvalóan $4c$, $c=1, 2, \ldots$
Ezért

$$1+4\sum_{c=1}^{t} c = 1+4\binom{t+1}{2}$$

olyan (a, b) számpár van, melyre $|a|+|b|\leqq t$. Ha tehát n és t kielégíti (7)-et, akkor láthatjuk, hogy a $2t-1$ átmérőjű origó körüli „ferde-négyzet" része A_0-nak, és A_0 további $s=n-\left[4\binom{t}{2}+1\right]$ pontja a $2t+1$ átmérőjű „ferde-négyzet" kerületén van.

Ebből viszont azonnal adódik a lemma állítása:

$$d(n) = 4 \cdot \sum_{i=1}^{t-1} i^2 + ts = \frac{2(t-1)t(2t-1)}{3} + ts. \tag{8}$$

Megjegyzés: $0 \leqq s(n) \leqq 4t(n)$, így $d(n) = \frac{4}{3} t^3(1+\varepsilon_1(t))$

ahol $\varepsilon_1(t) \to 0$, ha $t \to \infty$.
Másrészt

$$t(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{n}(1+\varepsilon_2(n)),$$

ahol

$$\varepsilon_2(n) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty,$$

így

$$\frac{d(n)}{n\sqrt{n}} \to \frac{\sqrt{2}}{3}. \tag{9}$$

Heurisztikusan világos, hogy $D^*(m)$ definíciójában szereplő n_i számokat lényegében azonosnak kell választani. Ezt a gondolatot pontosítja a következő lemma:

2. Lemma: Ha $n_1 \leqq n_2$, akkor

$$d(n_1)+d(n_2) \geqq d\left(\left\lfloor \frac{n_1+n_2}{2} \right\rfloor\right) + d\left(\left\lceil \frac{n_1+n_2}{2} \right\rceil\right),$$

ahol határozott egyenlőtlenség áll fenn, ha

(i) vagy $\qquad t(n_1)+1 < t(n_2)$

(ii) vagy $\qquad t(n_1)+1 = t(n_2)$ és $s(n_2) \neq 0.$

($\lfloor x \rfloor$, ill. $\lceil x \rceil$ alsó, ill. felső egészrész függvényt jelöl).

Bizonyítás: Lényegében hasonlóan végezhető el, mint az előző lemma esetében, így attól eltekintünk.

2. Következmény: Elégítsék ki az $n_1^*, \ldots, n_m^*$ számok a

$$\min_{\substack{n_i;\, n_i>0 \\ \sum n_i = m^2}} \sum_{i=1}^{m} d(n_i) = d(n_1^*) + \ldots + d(n_m^*)$$

relációt. Ekkor

$$\max_i t(n_i^*) - \min_i t(n_i^*) = \begin{cases} \text{vagy } 0 \\ \text{vagy } 1, \text{ és } s(n_j^*) = 0 \\ \qquad \text{hacsak } t(n_j^*) = \max_i t(n_i^*). \end{cases}$$

3. Következmény:

$$D^*(m) = \frac{1}{m} d(m), \tag{10}$$

ami (8)-cal együtt bizonyítja (3)-at.

Példák:
Az alábbi példák mutatják, hogy a (3) becslés $m=2, 3, 4, 9$ esetén pontos.

a) $m = 2$:

$$A_1(T_0) = \{(1, 1), (1, 2)\}, \qquad R_0(1) = (1, 1),$$
$$A_2(T_0) = \{(2, 1), (2, 2)\}, \qquad R_0(2) = (2, 2).$$

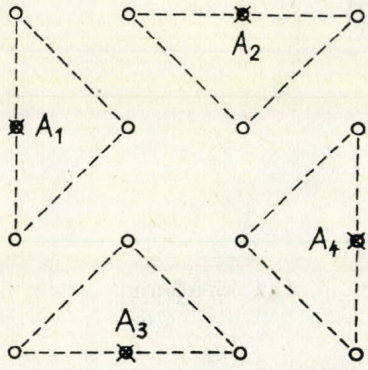
b) $m = 3$:

$$A_j(T_0) = \{(i, j),\ i = 1, 2, 3\}, \qquad R_0(j) = (2, j),\quad j = 1, 2, 3.$$

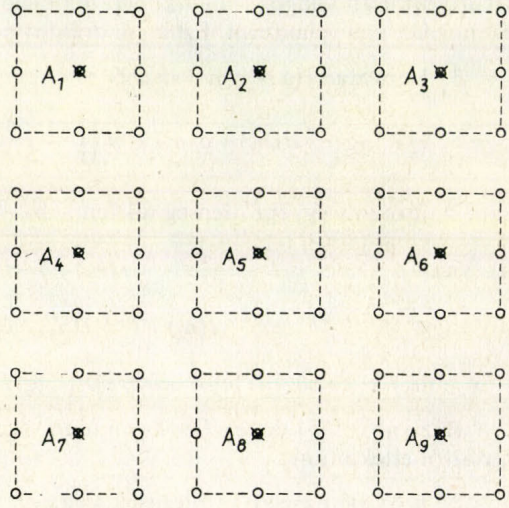
c) $m = 4$:

lásd: 2/a ábra

$$A_1(T_0) = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 2)\}, \quad R_0(1) = (2, 1),$$
$$A_2(T_0) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}, \quad R_0(2) = (1, 3),$$
$$A_3(T_0) = \{(3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}, \quad R_0(3) = (4, 2),$$
$$A_4(T_0) = \{(3, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}, \quad R_0(4) = (3, 4).$$



2/a ábra



2/b ábra

d) $m=9$ Az optimális T_0-hoz tartozó $A_i(T_0)$ halmazokat a 2/b ábrán látható négyzetek adják. A megfelelő R_0 értékei a négyzetek középpontjai.

3. Lemma: $m \geqq 14$ esetén (3)-ban szigorú egyenlőtlenség áll fenn.

Bizonyítás: A (3) egyenlőtlenség bizonyításából következik, hogy egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha minden i-re

$$\sum_{(\xi_1, \xi_2) \in A_i} \{|\xi_1 - x_i| + |\xi_2 - y_i|\} = d(|A_i|), \tag{11}$$

továbbá

$$d(|A_i|) + d(|A_j|) = d\left(\left\lfloor \frac{|A_i| + |A_j|}{2} \right\rfloor\right) + d\left(\left\lceil \frac{|A_i| + |A_j|}{2} \right\rceil\right). \tag{12}$$

Az 1. Lemma alapján tudjuk, hogy (11) fennállásához szükséges a következő:

Ha létezik olyan $(\xi_1, \xi_2) \in A_i$, hogy $|\xi_1 - x_i| + |\xi_2 - y_i| \leqq t+1$, akkor pontosan $4t$ olyan (ξ_1^*, ξ_2^*) eleme van A_i-nek, melyekre $|\xi_1^* - x_i| + |\xi_2^* - y_i| = t$. Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $(1, 1) \in A_1$. Ha viszont $|1 - x_1| + |1 - y_1| = t + 1 \geqq 3$, akkor legfeljebb $4t - 1$ ilyen pár van a természetes számok körében. Ebből következik, hogy $t(|A_1|) \leqq 1$, vagyis minden i-re

vagy $$t(|A_i|) \leqq 1$$

vagy $$t(|A_i|) = 2 \quad \text{és} \quad s(|A_i|) = 0.$$

Ennek alapján $|A_i| \leqq 13$, ahonnan

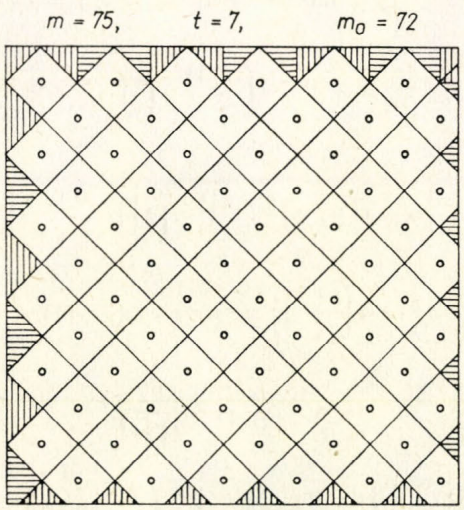
$$m^2 = \sum_{i=1}^{m} |A_i| \leqq 13\, m,$$

tehát $m \leqq 13$. Ez $m > 13$-ra bizonyítja, hogy az egyenlőtlenség szigorú.

Megjegyzés: a fennmaradó $m = 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13$ esetben is egyszerűen látható, hogy (3)-ban nem állhat fenn egyenlőség. Mivel azonban ezekre az esetekre nem ismerünk közös egyszerű bizonyítást, az egyedi esetek bizonyításától eltekintünk.

A felső becslés bizonyítása

Bizonyításunk konstruktív. Az alsó korlát bizonyításánál láttuk, hogy optimális T esetén az $A_i(T)$ halmazoknak lehetőség szerint az $R(i)$ pontok adott sugarú összefüggő környezeteinek („ferde négyzeteknek") kell lennie, s a sugaraknak is lényegében azonosnak kell lennie. Ennek megfelelően egy „jó" T leképezést várhatunk, ha az $M \times M$ „négyzetet" egybevágó ferde négyzetekkel kiparkettázzuk. Ennek során a „szegélyekről" első közelítésben megfeledkezhetünk, remélve, hogy a szegélyek járuléka az átlagos távolsághoz csak másodrendű lesz, lásd 3. ábra:



3. ábra

Jelöljük $(2t-1)$-gyel a kis négyzetek átlóján levő pontok számát. Az ábrán látható lefedés akkor lehetséges, ha

$$\left(2\left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right]-1\right)t \leqq m, \quad \text{azaz} \quad t \leqq t_0 := \left[\frac{m}{2\left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right]-1}\right]. \tag{13}$$

A világos négyzetek és négyzetcsonkok középpontjai lesznek az R leképezés egyes értékei. Az egyes pontpárok abba az i indexű A_i halmazba kerülnek, melyre az $R(i)=(x_i, y_i)$ ponttól vett távolságuk a legkisebb. Egyenlőség esetén tetszőlegesen sorolhatjuk be őket az azonos (minimális) távolságot biztosító indexű halmazok egyikébe. Ezzel a T és R leképezések definíciója befejeződött, és az R leképezés $m_0=2\cdot\left(\left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right]\right)^2 \leqq m$ különböző értéket vehet fel.

Legyen Q_i az (x_i, y_i) pont t sugarú környezete, tehát

$$Q_i = \{(x, y): |x-x_i|+|y-y_i| \leqq t-1,\ x, y \text{ egész}\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, m_0,$$

s legyen $B_i=Q_i \cap A_i$, $C_i=A_i-B_i$.

$$D(m) \leqq W(m, T, R) =$$

$$= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m_0}\left[\sum_{(x,y)\in B_i}\{|x-x_i|+|y-y_i|\}+\sum_{(x,y)\in C_i}\{|x-x_i|+|y-y_i|\}\right].$$

Itt

$$\sum_{(x,y)\in B_i}\{\ldots\} \leqq \sum_{(x,y)\in Q_i}\{\ldots\} = d\left[1+4\binom{t+1}{2}\right].$$

Másrészt

$$\sum_{(x,y)\in C_i}\{\ldots\} \leqq |c_i|\cdot\max_{(x,y)\in C_i}\{|x-x_i|+|y-y_i|\} \leqq |c_i|\cdot(4t-2),$$

továbbá

$$|C_i| \leqq (3t-1)^2-4\binom{t+1}{2}-\binom{t}{2}-2 < 9t^2.$$

Összegezve az eddigieket:

$$D(m) \leqq \frac{1}{m^2}\left[m_0\cdot d\left(1+4\binom{t_0+1}{2}\right)+\left(2\left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right]-1\right)\cdot 9t_0^2\cdot 4t_0\right]. \tag{14}$$

Viszont

$$d\left(1+4\binom{t+1}{2}\right) = \frac{2}{3}t(t+1)(2t+1),$$

és

$$t_0 \leqq \sqrt{\frac{m}{2}}\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{m}}\right),$$

tehát

$$d\left(1+4\binom{t_0+1}{2}\right) \leqq \frac{2}{3}\left[\frac{m\sqrt{m}}{\sqrt{2}}+6m+\frac{\sqrt{m}}{2}\left(\frac{29}{2}+9\sqrt{2}\right)+\left(\frac{27}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\right].$$

Másrészt

$$\left(2\left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right]-1\right)\cdot 9t_0^2\cdot 4t_0 \leqq 36m^2\frac{m}{\left(2\left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right]-1\right)^2}\leqq$$

$$\leqq 18m^2\left[1+\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{m}}+\frac{9}{2m}\right].$$

Behelyettesítve (14)-be nyerjük:

$$D(m)\leqq\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{m}+22+\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\frac{29}{3}+60\sqrt{2}\right)+\frac{1}{m}\left(90+\frac{\sqrt{2}}{8}\right).$$

A két utolsó tag együtthatóját a legközelebbi egészre kerekítve kapjuk (4)-et.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ КОДИРОВАНИЯ

Т. НЭМЕЦ

ON A PROBLEM IN CODE-THEORY

T. NEMETZ

A mathematics-teaching project uses a simple game for the introduction of the concept of cardinality. This game leads us to formulate the following problem:

Let ξ_1, ξ_2 two independent random variables taking on the values $1, 2, \ldots, m$ with equal probability. Let $M=\{1, 2, \ldots, m\}$, and consider two mappings:

$$T\colon\ M*M\mapsto M\quad\text{(“coding rule”)}$$

$$R\colon\ M\mapsto M*M\quad\text{(“decoding rule”)}$$

For any pair (T, R) the random vector

$$(\eta_1, \eta_2)=R[T(\xi_1, \xi_2)]$$

is well-defined. The goodness of the coding-decoding rules is measured by the average distortion

$$W(m, T, R)=E\{|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|\}.$$

We are concerned with the minimal distortion

$$D(m)=\min_{T,\,R}W(m, T, R)\triangleq W(m, T_0, R_0)$$

as well as with finding the optimal rules T_0, R_0. Our main result is a lower and an upper bound on $D(m)$, yielding the asymptotics

$$\lim_{(m)}\frac{D(m)}{\sqrt{m}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

The lower bound is tight in the cases $m=2, 3, 4, 9$, only. Possible generalizations are formulated, too.

ADALÉKOK A KÉT BOLYAI FÖLFEDEZÉSÉNEK TÖRTÉNETÉHEZ

SZÉNÁSSY BARNA

Rendezgetve Fejér Lipót egy szekrényt megtöltő hagyatékát, vaskos iratcsomó került elő, amely a Bolyaiakra vonatkozó leveleket, újságkivágásokat, tanulmányokat tartalmaz. A dossziéhoz csatolt — Fejér kezeírásától származó — följegyzés szerint az anyagot 1946. jan. 7-én özv. Kürschák Józsefnétől vette meg a budapesti tudományegyetem „Matematikai Szemináriuma", az eladó pénzfelvételi nyugtája pedig a szeminárium „Könyvtárügyek" c. irattartójában található. Egy másik jegyzék pontosan felsorolja a dossziéban levő iratokat.

Hogy miként került ez az anyag Fejér Lipót hagyatékába, ma már nehezen állapítható meg: egy, az ő kézjegyével ellátott, gépelt irat azt sejteti, hogy szándékában állott annak földolgozása. Részben talán megromlott egészségi állapota, részben a földolgozás kétségtelenül sok türelmet és aprólékos munkát igénylő feladata akadályozhatta meg tervének megvalósításában.

Az iratokból kitűnik, hogy a gyűjtemény eredetileg a lelkes Bolyai-kutató, Schmidt Ferenc tulajdonát képezte, és hozzá intézett leveleket, valamint általa figyelemre méltónak ítélt más emlékeket tartalmaz.

Úgy vélem, hogy a levelek szöveghű közlése ma már idejét múlt feladat, egyébként is néhány bennük szereplő adat ismert, éppen Schmidt Ferenc és levelező partnerei értekezései révén. Viszont hasznosnak látszik egy részletezőbb tanulmány összeállítása, mert olyan adatokat is találtunk, amelyekről eddig nem tudtunk. Ezek a múlt század utolsó négy évtizedének arra a lelkes munkájára világítanak rá, amikor többen — nem feltétlenül matematikusok és sokszor nem magyarok — fáradoztak azon, hogy minél világosabban álljon a világ előtt két mellőzött tudósunk élete és matematikai tevékenysége.

A következő összeállítás „féloldalas" olyan értelemben, hogy az irattartóban levő levelek alapján legföljebb következtetni tudunk az azokat megelőző vagy követő Schmidt levelek tartalmára. Márpedig minden idegen kéz által írott levélnek bizonyosan volt legalább egy, Schmidttől származó, párja. Ezt bizonyítják az idegen levelek többségének felzetén szereplő és a választ igazoló Schmidt-rögzítette dátumok.

A hagyaték anyagának ismertetésében iparkodtam követni a kronologikus rendet (eltérőleg az iratok eredeti elhelyezésétől), az összkép kialakítása céljából pedig felhasználtam más forrásokból szerezhető adatokat is. A gyakran szereplő és föltehetőleg kevésbé ismert személyekről a tanulmány végén levő „Életrajzok"-ban adok rövid tájékoztatót. Idézetek esetén a [ ]-ben levő betoldások tőlem származnak és a megértést könnyítik.

* * *

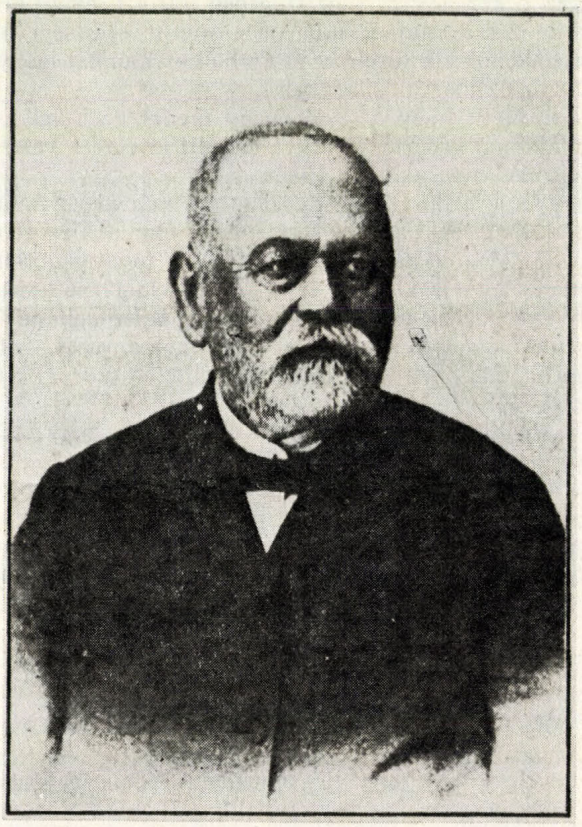
Legelőbb is a levelek címzettjének, a gyűjtemény eredeti tulajdonosának, Schmidt Ferencnek rövid életrajza.

Édesapja, Schmidt Antal építész volt, aki még Temesvárról személyesen ismerte Bolyai Jánost. Ez hasznos is volt, de némileg félrevezető is, mert néhány később közzétett téves adat az apai emlékekből eredt. A család őseinek neve eredetileg Kováts volt, ezt azonban II. József uralkodása idején Schmidtre németesítették. A család minden tagja anyanyelvi szinten beszélt magyarul és németül.

Schmidt Ferenc 1827. febr. 14-én született Temesvárott. Alap- és középfokú iskoláit szülővárosában végezte, majd a bécsi (1843—1848), illetve a müncheni (1849—1850) műegyetemen folytatta tanulmányait. Bécsben nagy hatással volt rá Petzval József (1807—1891), az ő szuggesztív erejű előadásainak tudható be, hogy egész életén át különös érdeklődést tanúsított a matematika iránt. Mérnöki diplomája megszerzése után előbb Temesvárott, majd 1869-től Pesten működött, 1901. márc. 7-én bekövetkezett haláláig.

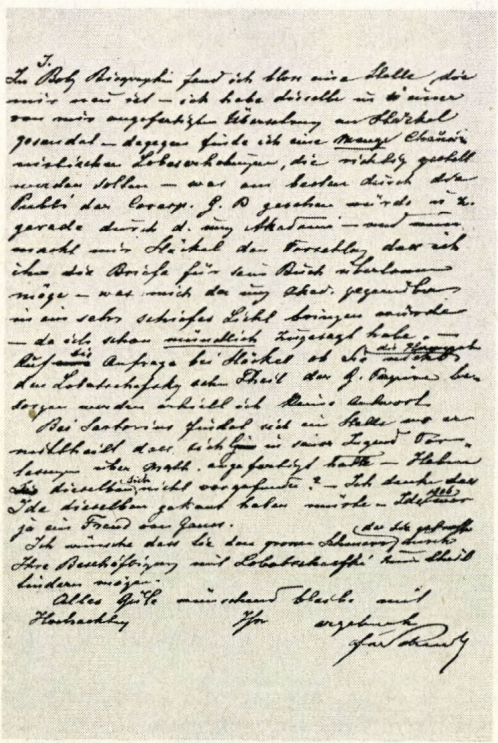
1851-ben nősült, házasságából két fiú és három leány született. Meg kell említenünk, hogy a gyermekek közül több aktívan is segítette édesapját a Bolyai-kutatásban, de különösen figyelemre méltó egyik fiának, Mártonnak (1865—1928, budapesti gimnáziumi tanár) a tevékenysége: ugyanis ő bukkant a Bolyai iratok között 1884-ben arra a levélre, amelyet 1823. nov. 3-án Bolyai János írt Temesvárról édesapjának, Farkasnak, és amelyben jelezte, hogy „semmiből egy újj, más világot" teremtett.

Schmidt Ferenc mindig figyelemmel kísérte a természettudományok, valamint a matematika fejlődését, és Európa csaknem valamennyi országából kiválasztva egy-



egy ismertebb tudóst, kért információkat az újabban megjelent szakkönyvekről. Ilyen úton meglehetős gazdag és igen válogatott művekből álló könyvtárat gyűjtött össze. A kiadványokról tájékozódó levelezésében francia partnere 1864-től a bordeaux-i egyetem fiatal professzora, Hoüel volt, ez a kapcsolat döntő jelentőségűvé vált Schmidt tudományos tevékenységének alakulására. A későbbiekben ugyanis néhány külföldi matematikus (főként Hoüel, Battaglini, Engel és Stäckel) buzdítására — terhes mérnöki munkája mellett — fáradhatatlanul gyűjtötte a két Bolyaira vonatkozó adatokat, családtagjai bevonásával németre fordította a tőlük származó magyar nyelvű autográf iratokat, Bolyai Farkas magyarul megjelent könyveinek egyes részeit és önzetlenül, anyagi áldozatokat is vállalva, bocsátotta a fordításokat a magyarul nem tudó külföldi tudósok rendelkezésére. Nyomtatásban megjelent értekezései — ezekről később még lesz szó — a két Bolyai életére vonatkoznak.

Schmidt Ferenc tevékenységét külföldön igen nagyra értékelték: a bordeaux-i akadémia 1869-ben tiszteletbeli tagjai közé választotta, de tagja volt a német Mathematische Vereinigungnak is. Itthon is megbecsülték az 1871-ben életre hívott négytagú „Bolyai Bizottság"-ban, valamint a Matematikai és Fizikai Társulatban végzett áldozatkész munkáját. 1879—1894 között az ő rendelkezésére bocsátották feldolgozás céljából a Bolyai hagyatékot. Néhány kesernyés megjegyzésből arra kell következtetnünk, hogy élete végén itthon már kissé mellőzték. Lehetséges, hogy a két Bolyaival kapcsolatos olyan matematikai kérdésekben is hallatni akarta szavát, amelyekben nem volt eléggé illetékes, és ez válthatott ki valamiféle rosszallást néhány akkori jeles tudósunkból. Talán ezzel magyarázható az is, hogy elhunyta alkalmával itthon szűk egyoldalas nekrológot írtak róla (Math. és Phys. Lapok. 10. k. 1901.



202. o.); részletesebben emlékezett meg Stäckel (Jahresbericht d. Deutschen Math. Vereinigung. 11. k. 1902. 141—146.) és Halsted (The Amer. Math. Monthly. 8. k. 1902. 107—110.).

A távoli utókornak azonban úgy kell felidéznie emlékét, mint a Bolyai ügy minden elismerést megérdemlő, legönzetlenebb harcosáét.

* * *

A Bolyaiakkal foglalkozó külföldi irodalom kezdetei Gauss halálával (1855. febr. 23.) függnek össze. Amikor ugyanis erről a 81. évében levő Bolyai Farkas újsághírek révén értesült, belátva az ügy jelentőségét, összegyűjtötte a Gauss által hozzá írt — gondosan megőrzött — leveleket és erről tájékoztatta Carl Kreilt (1798—1862), az általa személyesen is ismert bécsi csillagászt. Kreil az így szerzett értesülést — a Bolyai Farkas által írott levél fontosabb részeit szó szerint átmásolva — továbbította Sartorius von Waltershausen göttingeni professzornak, aki ekkor Gauss hagyatékát rendezte (Kreil e levelét függelékként közli a Gauss—Bolyai levelezés 143—146. oldalán). Sartorius levélbeli kérésére aztán Bolyai Farkas a nála levő Gauss-leveleket és más emléktárgyakat eljuttatta Göttingenbe, sőt Sartorius néhány konkrét kérdésére (G.—B. lev. 156—157.) külön is adott felvilágosítást (G.—B. lev. 157—160.). Ennek a közlésnek néhány részletét is felhasználva írta meg Sartorius terjedelmes, „Gauss zum Gedächtnis" c. tanulmányát, az első részletezőbb Gauss életrajzot, amely 1856-ban Lipcsében jelent meg. Kevésbé ismert, hogy ez a könyvecske 1903-ban Breznóbányán magyarul is napvilágot látott Göldner Nándor (1. később) fordításában.

Sartorius von Waltershausen többször is említi a Bolyai nevet, általában igen elismerőleg írva az akkor még élő marosvásárhelyi professzorról. Egyik helyen pl. (Göldner fordításában) a Bolyai Farkast méltató alábbi mondatok olvashatók (14. oldal):

„Az ...érdemes 80 éves aggastyán, Bolyai Farkas, Marosvásárhelyt, Erdélyben, kitűnő férfi, akiről Gauss a korábbi években mondotta, hogy egyedül ő fogta fel metaphysikai eszméit a mathematica felöl."

Ugyancsak Gausstól eredően idézi Sartorius (15. o.) a következő mondatot: „Bolyai a legritkább emberek közül való, kiket valaha láttam".

Gauss matematikai munkásságáról Sartorius írása alig mond valamit, de több helyen említi a legkisebb négyzetek elvét, mint olyat, ami Gauss egyik legjelentősebb matematikai eredménye, és amelyet már 1797-ben „szigorúan bebizonyított". Itt meg kell említenünk, hogy a legkisebb négyzetek módszerének prioritási kérdésében Gaussnak vitája is támadt Lagrange-zsal. Az elsőbbség évtizedeken át eldöntetlen ügyének tisztázására Sartorius a még élő Bolyai Farkast vélte a legilletékesebb tanúnak:

„Gauss ezen fontos felfedezését, melyet már 1795-ben tett, a következő évben közölte barátjával Bolyaival s így ő az egyetlen az élők közül, aki azon időből még tudományos tanúságot tehetne" (44. o.).

Igen nagy súlyt helyezett Sartorius von Waltershausen arra, hogy e kérdésben igazságot szolgáltasson Gaussnak. Erre bizonyíték a már említett 1856. aug. 12-én Bolyai Farkashoz intézett levelének azon mondata, vajon „Rendelkezik-e Ön ebben a kérdésben valami közelebbi följegyzéssel vagy megjegyzéssel?" (G.—B. lev. 157.).

A vitában aligha lehet perdöntőnek tekintenünk az akkor már súlyos beteg Bolyai Farkas válaszát (G.—B. lev. 159.). Bizonyságul idézzük levelének megfelelő részét:

„Kétségtelen, hogy ő [ti. Gauss] alkalomadtán említette a gyakorlati alkalmazásban hasznos elvet, azonban semmiféle följegyzést sem találok — és most már két agy-

vérzést kapva és jelenleg a harmadikat várva, amely már az Executio [=halál] lesz, állandóan gyengülök, annyira, hogy egyes neveket egy hét múltán elfelejtek — és sok mindenre képtelen vagyok emlékezni".

* * *

Sartorius von Waltershausen tanulmánya alkalmas volt arra, hogy fölhívja a matematikusok figyelmét a Bolyai névre, bár az egyik Bolyai matematikai tevékenységét sem ismertette. És itt kapcsolhatjuk be összefoglalónkba a Schmidt-dosszié legterjedelmesebb és legkevésbé ismert anyagát, a francia Guillaume-Jules Hoüel bordeaux-i professzor Schmidt Ferenchez írott 77 levelét. Az általában 4-5 oldalas, sűrűn teleírt írások sok mindent elmondanak az európai matematikai életről, főként a Bolyai kérdésnek 1864. márc. 4-től 1882-ig (az utolsó levélnek hiányzik a pontos dátuma) történt alakulásáról. A levelezés eredeti célja Schmidtnek Hoüelhez intézett azon kérése volt, hogy időről időre tájékoztassa a Franciaországban megjelent, vagy kiadásra váró matematikai, fizikai, geodéziai és valószínűségszámítási könyvekről. E kívánságot Hoüel a legutolsó levélig olyan lelkiismeretesen és pontosan teljesítette, hogy közlései az akkori francia természettudományos könyvkiadáshoz is hasznos adatokat szolgáltatnak. A levelek tartalmának mintegy a felét kitevő ilyen részeket az alábbiakban figyelmen kívül hagyom, a személyes jellegű észrevételeket is, mivel kizárólagos célom a Bolyaiakkal összefüggő adatok felsorolása.

Közbevetőleg meg kell jegyeznem, hogy a hatvanas években a két Bolyai műveiről egyesek — bel- és külföldön egyaránt — tudomást szereztek, főként Bolyai Farkas Tentamenjéről és a Kurzer Grundrissról, továbbá Bolyai János Appendixéről. Sok

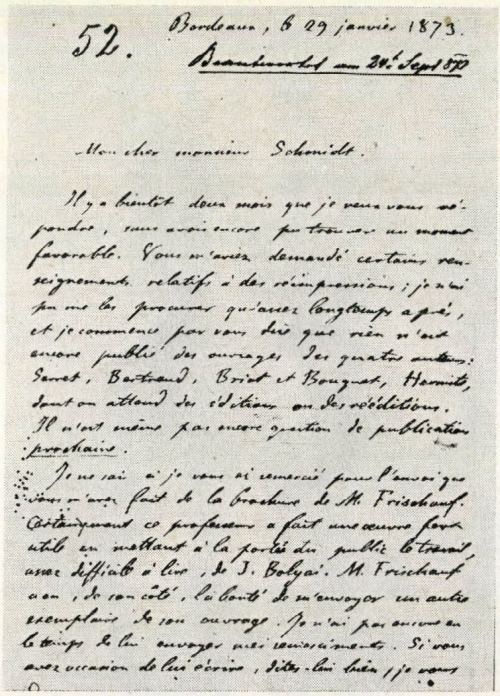
zavart okozott azonban még a magyarok, de főként a külföldiek számára az, hogy Bolyai Farkas név nélkül közölte írásait. Így pl. a külföldiek jó ideig azt sem tudták, hogy a Kurzer Grundriss és az Appendix szerzője ugyanaz a személy-e vagy sem, annál is inkább, mivel az előbbi könyvecske helyenként az Appendix-szel rokon gondolatokat is tartalmaz. Továbbmenőleg az is kérdéses volt, hogy egy vagy két Bolyai élt-e?

Hoüel rögtön a második levelében (1867. febr. 17.) kérte Schmidttől e kérdésekre a választ. Mint kiderül, Richard Baltzer drezdai professzor hívta fel figyelmét a Bolyaiak említett műveire, ezeket Hoüel csakhamar megszerezte, sőt mi több, gondosan tanulmányozta is. Már ekkor így nyilatkozott: „Cet *Appendix* est un travail de la plus grande valeur". Ugyanakkor még azt is megjegyezte, hogy teljesen egyenlő értékű Lobacsevszkij értekezéseivel.

Baltzer és Hoüel egyaránt érdekelt volt a geometria alapjai terén elért újabb eredményekben, mert monográfiát írtak e kérdéskörről. Ezért keltette fel figyelmüket Bolyai János és Lobacsevszkij tevékenysége.

„A parallelák igazi elmélete — hála Baltzernek — kezd elterjedni. Az olasz geométerek igen érdeklődnek iránta" — írta ekkor Hoüel.

Az általunk ismert történelmi adatok egyértelműen azt igazolják, hogy *a két Bolyai matematikai tevékenységére Baltzer figyelt föl legelőbb 1867 táján,* de az ő felhívására az ügy legfáradhatatlanabb matematikus harcosa mintegy másfél évtizeden át szinte egyedül Hoüel volt. Ő pedig érdeklődő kérdéseire rendkívül lelkes segítőtársat talált Schmidt Ferencben. Kezdettől fogva ugyanis szilárd meggyőződéssel vallotta, hogy a Bolyai kultusz ápolása elsődlegesen a magyarok feladata, és ő sem nélkülözheti egy magyar tudós közreműködését.


52. Bordeaux, le 29 janvier 1873.
Beantwortet am 28/I Sept 1870

Mon cher monsieur Schmidt.

Il y a bientôt deux mois que je vous ai répondu, sans avoir encore pu trouver un moment favorable. Vous m'aviez demandé certains renseignements relatifs à des réimpressions; je n'ai pu me les procurer qu'assez longtemps après, et je commence par vous dire que rien n'est encore publié des ouvrages des quatre auteurs: Serret, Bertrand, Briot et Bouquet, Hermite, dont on attend des éditions ou des rééditions. Il n'est même pas encore question de publications prochaines.

Je ne sais si je vous ai remercié pour l'envoi que vous m'avez fait de la brochure de M. Frischauf. Certainement ce professeur a fait une œuvre fort utile en mettant à la portée du public le travail assez difficile à lire, de J. Bolyai. M. Frischauf a eu, de son côté, la bonté de m'envoyer un autre exemplaire de son ouvrage. Je n'ai pas encore eu le temps de lui envoyer mes remerciements. Si vous avez occasion de lui écrire, dites-lui bien, je vous

„Kételkedem — írta ekkor —, hogy Erdély sok olyan jelentős férfiút termett volna, mint a két Bolyai, és a tudomány szeretetének hiányában a saját nemzetük iránt érzett szeretet kellene, hogy ösztökélje őket [ti. a magyarokat] a velük való foglalkozásra; ne engedjék, hogy az ő tájaiktól, országuktól idegen emberek törődjenek honfitársaik emlékének híressé tételével."

Az 1867—68-ban írott Hoüel-levelek központi problémája az Appendix francia nyelvre való fordítása, valamint Bolyai János részletező életrajzának francia nyelvű közlése volt. Ez utóbbi munkára sikerült Schmidt Ferencet megnyernie.

Szóljunk kissé részletesebben az ebben az időben írott Hoüel-levelekről: megtudjuk, hogy franciára fordítja Lobacsevszkij Pángeometriáját, felhívja Schmidt figyelmét (1867. augusztusában) Bolyai János kéziratos hagyatékára, melyben még bizonyára vannak közlésre méltó értékes dolgok. Arról is tudomást szerzünk, hogy szorgalmasan olvasgatja az Appendixet, valamint a Tentament, bár nem rejti véka alá, hogy ez utóbbi megértése nem könnyű feladat. „Kétségtelen — írja —, hogy W. Bolyai — egyéb adottságai mellett — a közérthetőség képességével nem rendelkezett. Úgy beszél, mint Pythia, ihletett hangon, sűrűn használ költői gondolatokat, amelyekből nem mindig könnyű világos tételeket levonni".

Az akkor Temesváron élő Schmidt Ferencen kívül még Szabó Sámuel marosvásárhelyi professzort is iparkodott megnyerni Hoüel a Bolyai ügynek — nem sok eredménnyel. Többszöri kérésére Szabó Sámuel csupán egy semmitmondó levélben válaszolt. Elkeseredve írta a sikertelenség hatására a következőket:

„Küldje meg nekem, kérem Önt, Bolyai jelenlegi utódjának a nevét: kolléga minőségben fogok neki írni, talán inkább hallgat majd rám, mint az irodalmár Szabó. Írni fogok — ha szükséges — a Collegium igazgatójának, a portásnak, mindenkinek..."

De más oldalról is várt megértést:

„Feltétlenül szükséges, hogy a pesti Akadémia segítsen nekünk, és főleg, hogy ne késsünk el, mert a tudomány e területe csakhamar olyan gyorsan fog fejlődni, hogy Bolyait [Jánost] megelőzik, akkor pedig műve sokat veszít abból a jelentős értékből, amelyet e pillanatban képvisel."

Hoüel egyik 1867-ben írott leveléből szerzünk tudomást arról, hogy Battaglini nápolyi professzor behatóan foglalkozik a nem-euklideszi geometriákkal, így az Appendixszel is. Kölcsönképp elküldte neki a Tentamen egyik példányát, hogy alkalma legyen Bolyai Farkas munkásságát is megismernie. Közben pedig egyre mélyebben látta — fordítói munkája során — az Appendix jelentőségét, észrevette e tanulmány tömör jelöléseinek hasznosságát is. Éppen a szokatlan jelölések miatt vélte nehéznek a francia nyelvű kiadást, mert ehhez számos, Bolyai János által igénybe vett szimbólumot külön kell majd gravíroztatnia.

Még egy jellemző adat Hoüel ügybuzgalmára és előrelátására: már 1867-ben megpendítette a Gauss—Bolyai levelezés kiadásának a gondolatát. A későbbiekben többször visszatért e kérdésre, felvetve az esetleges jogi problémák ügyét is. A terv azonban csak jóval halála után, 1899-ben valósult meg, Schmidt Ferenc és Paul Stäckel rendkívül szívós harca eredményeként. Erről a későbbiekben még szólunk.

A Schmidt Ferenc által (németül) írott Bolyai életrajz némileg késett, megérkezését 1868. jan. 3-i levelében nyugtázza Hoüel. A gyors megjelenés érdekében azonnal hozzá is kezdett annak francia fordításához. A tanulmányban — a dolog természetéből kifolyólag — magyar nevek és könyvcímek is szerepelnek: Hoüel szinte meghatóan precíz a francia kiadás előkészítésében. Egyik levelében ilyesféle kérdéseket tesz fel: mi a különbség ő és ö, u és ü között, melyik helyes Kémeny vagy Kemény, stb. Nyelvi kételyeinek háttere földeríthető: Bolyai Farkasról Wurzbach: Biographisches

Lexikon-ában (2. k. Wien, 1857. 31—33.) hosszabb cikk jelent meg — a magyar nevekben és szavakban több elírással.

Hoüel egyébként Schmidt értekezését igen jónak találta, és megérkezése után azonnal bemutatta a bordeaux-i akadémia egyik ülésén. Mint írja, a jelenlevők nagy érdeklődéssel hallgatták. *Bizonyos, hogy ez volt a két Bolyairól szóló első előadás mind hazánkat, mind a külföldet tekintve.*

A Schmidt tanulmány szakmai szempontból semmit sem mond, matematikai részek tárgyalása nem is volt célja. Életrajzi adatai is hiányosak, hiszen ebben az időben — mint a levelekből kiderül — még nem ismerték pl. Bolyai János pontos születési és halálozási dátumát.

Érdekes módon a Hoüel levelekben is fölvetődik Bolyai János párbajainak a kérdése, nyilván a temesvári pletykákra és apja elbeszélésére támaszkodva írt neki erről Schmidt. Hoüel azonban — levelei tanúsága szerint — kezdettől fogva kételkedett ezeknek az adatoknak a megbízhatóságában.

Talán a Schmidt tanulmány néhány hónapos késésének tudható be, hogy az Appendix olasz fordítása hamarabb kikerült a nyomdából, mint a francia. Ugyanis Hoüel 1868. május 21-i levelében arról ír, hogy az olasz kiadást már kézhez kapta, de bizonyosra veszi, hogy a francia sokkal gondosabb és tetszetősebb lesz. Így — Hoüel levelére támaszkodva — korrigálnunk kell egy sok helyen közölt adatot: *az Appendixnek legelőbb nem a francia, hanem az olasz fordítása jelent meg,* ezt azonban rövid idő múlva követte a francia, valamint Schmidt Ferencnek ehhez csatolt életrajzi írása. A késésnek az is oka volt, hogy a két tanulmány francia nyelvű kefelenyomatának korrekció céljából meg kellett járnia az abban az időben 6-8 hetet igénybe vevő Bordeaux—Temesvár közötti utat.

Hoüel közbenjárására a Schmidt-féle életrajz csaknem egyidejűleg németül is megjelent a Grunert-féle Archívban, az Appendix pedig a Schmidt által írott életrajzzal egybefűzve a párizsi Villars cég gondozásában különlenyomatként is napvilágot látott 300 példányban.

Összegezve: az első Appendix fordítások, valamint a vele párhuzamosan elkészült Schmidt-féle életrajzok nyomdából való kikerülését a következőként sorrendezhetjük:

1. Sulla scienza dello spazio assolutamente vera... Latinból fordította Battaglini. Giorn. Mat., 6. k. 1868. 97—116.
2. Franz Scmidt: Notice sur la vie et les travaux des deux mathématiciens hongrois W. et J. Bolyai de Bolya. Németből fordította Hoüel. Bordeaux Mem. 5. k. 1867. 5. k. 191—205.
3. La science absolue de l'espace... Latinból fordította Hoüel. Bordeaux Mem. 5. k. 1867. 207—248.
4. Franz Schmidt: Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker Wolfgang und Johann Bolyai von Bolya. Grunert Archiv. 28. k. 1867. 217—228.
5. Angelo Forti: Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgang e Giovanni Bolyai di Bolya, matematici ungheresi. Bolletino di biografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Roma, 1. k. 1868. 277—299. Ez lényegében a Schmidt-féle életrajz, Hoüel néhány szakmai kiegészítésével, A. Forti olasz fordításában.

Megjegyzés: a felsorolt írások nyomdából történt kikerülésének dátuma tehát nem mindenütt egyezik meg a közzétevő folyóiratokon feltüntetett évvel.

A megjelenés után azonnal megkezdődött a francia különlenyomatok árusítása, a tiszteletpéldányok szétküldése. Hoüel levelei arról is tájékoztatnak, hogy kiknek és

hány példányt szánt. Köztük szerepelt természetesen Schmidt Ferenc, Szabó Sámuel, Baltzer, Sartorius von Waltershausen, Grunert, a marosvásárhelyi református Kollégium, Bolyai Gergely (Farkas másodszülött fia) és sokan mások.

Az ekkor írott Hoüel levelekben egyre gyakrabban találkozunk Szabó Sámuel nevével, aki nemcsak az ő, hanem Battaglini kérdéseit is válasz nélkül hagyta. De ismételten szemrehányást tesz a magyarok nemtörődömsége miatt is:

„Fájdalommal látom — írja —, hogy Magyarország milyen kevésre értékeli saját tudományos érdemeit... Megértem, hogy Marosvásárhely képviselői — mivel maguk idegenek a tudomány területén — nem sokra becsülik olyan honfitársuk emlékét, aki életét a tudománynak szentelte..." Majd így folytatja: „A kazányi egyetem megértőbb volt, mint a marosvásárhelyi kollégium. Kérésünkre elküldte közleményeit tudományos társaságunknak, továbbá megköszönték nekem azt a fáradozást, amelyet Lobacsevszkij munkáinak terjesztése körül végeztem; kitüntettek azzal is, hogy tiszteleti taggá választottak, továbbá minden információt megígértek Lobacsevszkijről, amit csak óhajtottam."

* * *

Beékelve a Hoüel levelek közé, néhány adatot említünk, hogy miként iparkodott Schmidt Ferenc összegyűjteni a két Bolyai életrajzi adatait.

Egy olvashatatlan aláírású „sógor" német nyelvű levelében megerősíti a tényt, hogy valóban két Bolyai élt, életrajzi adataik azonban ismeretlenek. Írásaik bizonyára megkaphatók a marosvásárhelyi kollégiumban tanító Szabó Sámuel professzor révén. Bőven van belőlük, mert senki sem vásárolja, de nem is érti azokat. Csupán egy példányt rendeltek Párizsból (ebben is bizonyára szerepe volt Hoüelnek). Brassai Sámuel (1867. márc. 11.) csak néhány lényegtelen Bolyai adatot tudott közölni. Bolyai Jánosról annyit mondott, hogy mélyen gondolkodó matematikus, jeles hegedűs és kiváló vívó volt. Kívánatosnak tartotta, hogy a Bolyai Farkasról szóló „parentáció", amivel az Akadémia őt bízta meg, minél hamarabb elkészüljön, de addig nem volt ideje annak megírásához. (A Brassai-féle emlékbeszéd valójában csak húsz év múlva, 1886-ban jelent meg Kolozsváron.)

Az előbbieknél többet közölt Szabó Sámuel Schmidthez intézett két levele. Az egyikben jelzi, hogy átlapozta a Bolyai hagyatékot, ez rendkívül szennyezett és rendezetlen, hosszú időt fog még igénybe venni földolgozásuk. Ennek a levélnek legfőbb értéke hogy pontosan fölsorolja a két Bolyai nyomtatásban is megjelent műveinek bibliográfiai adatait. Hasonlóképpen érdekes Szabó Sámuel egy későbbi (1867. júl. 30.) levele; belőle megtudjuk, hogy 1867. május 29-én a református egyház főkonzisztóriuma Kolozsvárott foglalkozott a Bolyaiak ügyével, és néhány érdekes határozatot is hozott. Ezek szerint a konzisztórium lépéseket fog tenni a Bolyaiak magánlevelezésének összegyűjtése érdekében, továbbá elrendeli a kézirati hagyaték feldolgozását. A Kurzer Grundriss terjesztése érdekében meg fogják keresni a lipcsei Börsenblatt könyvkereskedést, továbbá szorgalmazzák az Appendix német nyelvű kiadását. Még a fordítók személyének a kérdését is fölvetették olyan formában, hogy vajon a munkát nem vállalná-e valamelyik marosvásárhelyi professzor, esetleg Schmidt Ferenc. Érdekes határozat volt még az, hogy a két Bolyai ismertetését, munkásságuk értékelését magyar tudósnak kell elvégeznie, és csak legyőzhetetlen akadályok esetén vehető igénybe külföldiek segítsége. Ebben az esetben a hagyaték Baltzer rendelkezésére bocsátható.

A konzisztórium tehát szép határozatokat hozott, de azok végrehajtásának akkor hiányoztak az itthoni föltételei. Bármilyen meglepően is hangzik, nem volt olyan hazai matematikusunk, aki egyáltalában megértette, értékelte volna az Appendixet,

és a kézírásos hagyaték matematikai részét színvonalasan föl tudta volna dolgozni. Hunyady Jenő (1838—1889) volt talán az egyetlen tudósunk, aki fölkészültsége és geometriai érdeklődése alapján meg tudott volna e nehéz feladattal birkózni, őt azonban — hosszabb külföldi útja után hazatérve rögtön — 1865-ben — kinevezték a műegyetem professzorává. Adataink vannak arról, hogy az első években nagyon lekötötte őt az oktatói munka, geometriai vizsgálataira is alig tudott időt szakítani. 1871-ben tagja lett ugyan a „Bolyai Bizottság"-nak, de egyre elhatalmasodó betegsége miatt annak sohasem volt igazán aktív munkása. Lényegében ez volt a helyzet a nála fiatalabb Kőnig Gyulával (1849—1913) is, aki a hetvenes évek elején minden jó szándéka ellenére sem vállalhatta ezt a feladatot. Neki azonban a későbbiekben igen komoly szerep jutott a Bolyai kultusz kialakításában.

1867-ben még Bihari Sándor marosvásárhelyi rektor professzor, továbbá Pesty Frigyes közölt néhány érdemleges adatot Schmidt Ferenccel.

Ilyen írásokból (egyes levelek bizonyára elvesztek), továbbá az apai emlékek, és a nem teljesen megbízható temesvári szóbeszéd alapján állította össze Schmidt Ferenc a két Bolyai életrajzát. *Hiányosságai és tévedései ellenére ez lett az „ősforrása" a későbbiek során megjelent számos ilyen írásnak.*

* * *

A bordeaux-i kiadvány hatására itthon is felismerték a Bolyai ügy jelentőségét. Az Akadémiai Értesítő 2. k. 1868. 224. lapjának közlése szerint Hunyady Jenő az Akadémia egyik ülésén tájékoztatta a tagokat arról, hogy megjelent francia nyelven az Appendix, valamint annak bevezetéseként a Schmidt által írott életrajz. Azt indítványozta, hogy az Akadémia kérje át Marosvásárhelyről feldolgozás céljából a Bolyai hagyatékot. A felszólalást követően az Akadémia 1865—1879 közötti főtitkára, Arany János 1868. jún. 15-én levelet írt „A Marosvásárhelyi Ref. Collegium Tisztelt Igazgatóságának", amelyben „... szíves bizalommal felszólítja és kéri az igen tisztelt Főiskolai Igazgatóságot, hogy az összes iratokat átvizsgálásra kikölcsönözni s biztos kéz által az Akadémia kézirattárába juttatni méltóztatnék". (Arany János összes művei. XIV. k. Bp. 1964. 290—291.)

A kérést azonban csak jóval később teljesítették, mások hatásos közbenjárására is szükség volt. Ezt a hosszadalmas procedurát később még részletezzük. Mindenesetre a Schmidt-dossziéban levő egyik levél, amelyet Göldner Nándor 1869. okt. 31-én írt, még csak jelzi, hogy közelesen elküldik a hagyatékot a pesti minisztériumnak, illetve a Magyar Tudományos Akadémiának.

* * *

Az Appendix francia nyelvű megjelenése után sem lankadt Hoüel Bolyaiak iránti érdeklődése. Figyelmének központjában azonban ettől kezdve inkább a hagyaték földolgozásának ügye, valamint abból az érdemesebb részek francia nyelvű közlésének terve állott. Főként Bolyai János kézirásos matematikai hagyatékát, továbbá Bolyai Farkas magyar nyelven megjelent könyveiből egy válogatást akart közzétenni. Ekkor írott leveleiben egyaránt találunk a két Bolyaira vonatkozó, és általánosabb kultúrtörténeti adatokat. A következőkben ez utóbbiakra is kitérünk.

Az 1869-es keltezésű Hoüel-levelekben többször szerepel az akkori magyar kultuszminiszter, Eötvös József báró, aki 1866-tól 1871-ig az Akadémia elnöki tisztét is betöltötte. Ugyanakkor sok helyen olvashatjuk Hoüel olasz levelezőpartnere,

herceg Boncompagni nevét is. Bennük látta Hoüel a Bolyai-hagyaték földolgozásának hathatós támogatóit. Reményeiben nem is csalódott:

„Kihasználom az alkalmat — írta ekkor —, hogy újra beszéljek vele [ti. Boncompagnival] Bolyairól, megmutattam neki az Ön levelének azt a részét, ahol fölveti Eötvös báró segítségének gondolatát. Nem tudom, hogy elszánja-e magát arra, hogy ezt megtegye..."

Az ügy megnyerése érdekében Hoüel meg is fogalmazta Boncompagninak az Eötvöshöz írandó levelet. Érdemes idéznünk:

„Éppen intézem Boncompagnival a Bolyai János írásaira vonatkozó, Eötvös bárónak írandó levelet. Küldtem a hercegnek egy tervet, amelyben nagy gonddal jellemeztem mind Bolyai Farkast, mind Bolyai Jánost.... Ön sejti, hogy mi lehet ennek a levélnek a tartalma... Hozzátettem a végén — a herceg nevében beszélve, hisz ő lesz a levél aláírója —, hogy a herceg Bulletinjében közölné az életrajzi és irodalmi adatokat, amelyeket egy felkért bizottság szolgáltatna (egy kompetens ember elküldése Marosvásárhelyre), és hogy a Physikai és Természettudományi Társulat szívesen közreműködnék Bolyai János utolsó munkáinak a kiadásában." (Itt Hoüel bizonyára Schmidt közreműködésére gondolt.)

„A herceg — tartva attól, hogy túlságosan elkötelezi magát — egy ellentervet készített, amelyből az utóbbi részt törölte és ezt közölte is velem. Éppen most készülök neki visszaküldeni a levelet, felhívom a figyelmét arra, hogy az én tervem nem tartalmaz semmi olyan kötelezettséget, amelyet ne lehetne könnyen teljesíteni. Vállaljam-e én magam a költségek egy részét, látván azt a nagyon ismert nehézséget, hogy a magyarokat igen bajos megnyerni tudományos érdekeik ügyének... Gondolom, hogy a herceg hajlik az érveimre, és az Ön minisztere rövidesen meg fogja kapni az ő levelét. Tájékoztatni fogom Önt mindenről, amit megtudok erről a tárgyalásról, és Ön is meg fogja látni, hogy felhasználhatja-e pesti tartózkodását arra, hogy segítse a herceg intézkedését."

Ez utóbbi megjegyzéssel Hoüel arra célzott, hogy ekkortájt költözött Schmidt Pestre, és ilyen módon személyes intervenciójára is számíthatott. Ugyanekkor (1869. júl. 30.) örömmel értesítette barátját, hogy eddigi fáradozásaiért a bordeaux-i akadémia 1869. júl. 29-én tiszteleti tagjai sorába választotta. Erről a kézírásos francia nyelvű értesítés szintén megtalálható a dossziéban. Sajnos ilyen magas megtiszteltetés a magyar hatóságok részéről sohasem érte Schmidt Ferencet.

Boncompagni valóban írt levelet Eötvös Józsefnek a Bolyai-hagyaték feldolgozása ügyében. Eötvös válaszolt Boncompagninak, ő pedig (egyes konvencionális részek elhagyásával) elküldte a választ Hoüel címére. Ilyen kerülő úton szerzünk tudomást Eötvös sorairól:

Buda, 1869. okt. 18.

„Uram,

megkaptam 1869. júl. 3-án írott kedves levelét, valamint a Bolyai Jánosra és Bolyai Farkasra vonatkozó publikációkat tartalmazó csomagot. Engedje meg, hogy ezért legszívélyesebb köszönetemet fejezzem ki. Mivel levele abban a pillanatban érkezett, amikor éppen indulni készültem Erdélybe, úgy gondoltam, hogy elhalasztom a választ addig, amíg közvetlenül is alkalmam lesz meggyőződni a Bolyai ügy állásáról. Utam folyamán lehetőségem nyílt arra, hogy kutatásokat folytassak ebben a dologban Marosvásárhelyen, valamint a katonai hivatalokban. Az iratok a marosvásárhelyi kollégiumban és a Magyar Tudományos Akadémia egyik tagjánál vannak, aki vállalkozott ezek átvizsgálására." (Itt Eötvös József valószínűleg Szabó Sámuelre célzott, bár ő nem volt akadémikus. A Bolyai iratok egy kis töredéke azonban tényleg nála

volt ebben az időben, mert könyvet szándékozott írni e kérdésről, tervét sohasem valósította meg.) „A munka végeztével arra törekszem, hogy Önnek a legrövidebb időn belül eljuttassam az értesítést... Fogadja, etc.

B. Jos. Eötvös".

„Látható — folytatja Hoüel —, hogy foglalkoznak a dologgal, most csak arra kell vigyáznunk, hogy ez feledésbe ne merüljön. Mivel Ön most Pesten van, ki kell használnia minden lehetőséget, hogy ez a misszió teljesülhessen."

Eötvös Józsefben valóban az ügyért lelkesedő, annak fontosságát átérző egyén vette pártfogásába a dolgok irányítását. Ha a halál 1871. febr. 2-án nem vet véget az életének, akkor bizonyára gyorsabban haladt és kedvezőbben alakult volna a Bolyai-hagyaték földolgozása.

Egyébként a Boncompagni levél hatására írta ekkor Eötvös József fiának, Lorándnak az alábbi ismert sorokat:

„...örültem és elszomorodtam egyszerre... s most nem tudom, hogy büszkék legyünk-e rá [ti. Boncompagni levelére] vagy piruljunk."

Végül is 1869 decemberében gróf Teleki Domokos személyes közvetítése útján érkezett Pestre a Bolyai-hagyatékot tartalmazó csomag és az felbontatlanul „letétetett" az Akadémia Levéltárába. Erről ismét egy, Arany János által írott levél tájékoztat (Összes Művei. XIV. k. 350. o.). Ebben Arany fölkéri Hunfalvi Pált, az Akadémia Levéltárának akkori kezelőjét, hogy a küldeményt „biztos helyen megőrizni" szíveskedjék, nehogy „eltévedjenek".

Az Arany leveleit tartalmazó említett kiadvány 635. oldalán levő 324. jegyzet hibás. Eszerint ugyanis ezeket az iratokat az MTA néhány év múlva véglegesen megkapta, és „ma is az MTA kézirattárában őrzik 6 dobozban".

Az MTA levéltárában tényleg meglehetősen sok Bolyai kézirat található (l. Fráter Jánosné: A Bolyai gyűjtemény. Bp. 1968.), ezek azonban más oldalról — főként a Bolyai utódok magánlevelezéséből és Szabó Péter hagyatékából kerültek az Akadémia birtokába. Az Eötvös József szorgalmazására 1869-ben Pestre küldött hagyaték a kollégium kérésére visszakerült Marosvásárhelyre. Ezt a tényt a kollégium 1894. júl. 6-án kelt elismervénye igazolja. Erről a későbbiekben még közelebbit is mondunk.

A Bolyai-hagyaték Pestre érkezése utáni levelek Hoüelnak az ügy meggyorsítása érdekében érzett egészséges türelmetlenségét mutatják, valamint azt az elképzelését, hogy Schmidt Ferencnek kellene átvennie a hagyatékot és elvégeznie annak feldolgozását.

„Határozottan kezdem hinni, hogy a geográfusok tévedtek, amikor Erdélyt Európába rajzolták; inkább Afrika, vagy Bokhara közepén van, és egy Livingstonra, vagy Vámbéryre lenne szükség, hogy fölfedezze [Célzás Livingston afrikai és Vámbéry Ármin középázsiai felfedező útjára]. Bizonyos, hogy ha a Bolyai iratok Japánban vagy Ausztráliában lettek volna, akkor Ön már régen megkapta volna azokat. De végül is az a lényeg, hogy a kezébe kerüljenek..."

A hetvenes évek elején kissé megritkultak a Hoüel-levelek: zavarta a tudományos kapcsolatokat a francia-német háború. Hoüel panasza szerint Baltzer is „elhidegült" tőle. Közöttük Schmidt éveken át a közvetítő szerepét játszotta.

De más tekintetben is módosult a helyzet: Eötvös József halála után Pauler Tivadart (1816—1886), az 1871—72 közötti vallás- és közoktatásügyi minisztert is meg kellett nyerni a Bolyai ügynek. Újra kezdődött Hoüel fáradhatatlan harca: kérés Boncompagnihoz, hogy vegye föl a kapcsolatot Pauler Tivadarral. „Egy herceg aláírása egy miniszter számára mindig többet ér — írja —, mint egy olyan egyszerű halandóé, amilyen én vagyok."

Hogy pedig Boncompagni tovább fáradozott, arról az a Hoüel levél tanúskodik (1871. aug. 2.), amelyben az alábbiak olvashatók:

„Boncompagni herceg Pauler minisztertől visszajelzést kapott az általa írott levél átvételéről. Ezt a választ — ahogy én azt a Boncompagni által készített másolatból megítélhettem — latinul írta. A miniszter megígéri, hogy az ügyet az Akadémia elé terjeszti."

A latin nyelvü válasz a következő (1871. aug. 25.) levélből:

„Vir aestimatissime!

Litteras Tuas 20 praeteriti mensis ad me datas rite percepi; ac pro annexo opusculo: „La Science absolue de l'espace, etc." grates refero quam maximas.

Novo documento servit illud, ...usquam (illisible) opera Bolyaiana trans limites patriae obtinuerint aestimii.

Pretiosis affectibus maneo tui obsequentissimus Theodorus Pauler

Pest, die 10 augusti 1871."

Egyik ekkortájt írt Hoüel levélben fölvetődik egy olyan talányos kérdés, amelyre biztos választ nem tudunk adni. Nyilván Schmidt közléséből szerzett arról tudomást, hogy a Pestre érkezett Bolyai-hagyatékot tanulmányozás céljából átadták egy „budai fiatal tanárnak". Vajon ki lehet az — kérdi Hoüel —, akire ezt a nagy értéket bízták? Ez a kérdés a Schmidt-dosszié még két másik iratában is szerepel. Gróf Teleki Domokos 1871. júl. 30-án Schmidthez írott hosszú levele szerint „az irományokat b. Eötvös miniszter — mint emlékszem — a budai reáltanoda egy fiatal tanárának adta át átvizsgálás és rendbeszedés végett. Hogy az imént említett tanár úr feladatának mennyiben felelt meg, azt még eddig nem tudom." Jóval később (1884. nov. 6.) az „Egyetértés" c. lap 306. számának tárcarovatában pedig ezeket olvassuk:

„A Bolyaira vonatkozó külföldi méltatások egyik buzgó gyűjtője egy fiatal tanár volt. Már meghalt. A fiatalember, a budapesti kereskedelmi akadémia egyik jeles ereje, rajongó tisztelettel viseltetett Bolyai iránt. Ami rávonatkozót talált a külföld irodalmában, azt följegyezte, megszerezte. Ő már a Gauss-ünnepélyek [1877-ben Németországban megemlékeztek Gauss születésének 100. évfordulójáról] előtt nagy Bolyaista volt, s a hírlapokban is felszólalt az Akadémia késlekedése ellen. Hová lettek jegyzetei, könyvei halála után — ki tudná. A Dalmát partokon halt meg, ahol enyhülést keresett. Korai halála okozta, hogy maga nem dolgozhatta föl, amit gyűjtött."

Az anonymus Bolyai kutató kilétét nem sikerült megfejtenem. A fentebb említett adatok még legjobban Tóth Gáborra illenek, aki 1867-től 16 éven át működött a Budapesti Kereskedelmi Akadémián 1883. febr. 9-én bekövetkezett haláláig. A Kereskedelmi Akadémia „Emlékkönyv"-e (Bp. 1907) szerint nagyműveltségű tanár volt, aki iskolájában könyvvitelt, valamint kereskedelmi és politikai számtant adott elő.

* * *

A Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának 1871. október 16-i határozata értelmében megalakult a Bolyai-hagyaték átvizsgálására hivatott négytagú „Bizottság", „...melynek elnöke Vész János s tagjai Hunyady Jenő, Dr. Kőnig Gyula és Schmidt Ferencz építész". Nyilván Schmidt közlése révén értesült erről Hoüel, és (1872. máj. 17-i levele szerint) különösen azt találta megnyugtatónak, hogy Kőnig is a Bizottság tagja. Mint leveléből kitűnik, ekkor már olvasta Kőnignek azt a tanulmányát, amelyben a hiperbolikus geometriának egy modelljét adta az euklideszi térben (Über eine reale Abbildung der s.g. Nicht-Euklidischen Geometrie. Gött. Nach-

richten, 1872. 157—164.). A tanulmányt Hoüel nagyra értékelte, a korabeli magyar sajtó is több helyen foglalkozott vele, inkább népszerűsítő cikkekben.

Hogy milyen alapossággal tájékoztatta Schmidt Hoüelt Bolyai János autográf iratainak matematikai részeiről, arra egy 1872. május 29-i levél a bizonyság. Ebben arról van szó, hogy Hoüel áttanulmányozta Bolyai Jánosnak a „négypont rendszerével" kapcsolatos följegyzéseit. Mint ismeretes, ezzel iparkodott Bolyai János térgeometriája ellentmondástalanságát igazolni. Egyébként a hagyaték e följegyzését jóval később Stäckel dolgozta föl és tette közzé.

Az 1872-ben keltezett Hoüel-levelekben fel-felbukkan az osztrák Frischauf neve is, mint olyané, aki igen eredményes munkát végez a Bolyai-geometria népszerűsítése terén.

Egy másik óhaj is állandóan visszatérő problémája az ekkori Hoüel-leveleknek: minél termékenyebb cserekapcsolatokat iparkodott kiépíteni a bordeaux-i és a Magyar Tudományos Akadémia között. Eléggé vontatottan haladt az ügy, de több évi fáradozás után termékenynek bizonyult.

Hoüel 1875. aug. 4-i levelében meglehetősen szokatlan ügyben fölbukkan Arany János neve, „Arany főtitkár információkat kér tőlem a németalföldi Bureau Central de Harlem Lipcsével való levelezésére vonatkozólag". Nem tudjuk, hogy erre az adatra miért volt Aranynak szüksége, és miért éppen Hoüelt tartotta illetékesnek a válaszadásra? A második kérdésre azt mondhatjuk, hogy Hoüel neve ekkor már eléggé ismert volt a magyar tudományos körök előtt.

* * *

Ezekben az években szaporodtak a Bolyai-hagyaték feldolgozását sürgető Hoüel sorok:

„Bosszantó, hogy a Bolyai-iratok feldolgozása ilyen kellemetlenül lassan halad. Egy kicsivel több aktivitással ki lehetett volna használni azt a pillanatot, amikor a téma még új volt és a feljegyzésekben eddig még ismeretlen eredményeket lehetett volna találni. Most sokan dolgoznak ezen a témán, sokkal átfogóbb a nézőpont, így a Bolyai iratoknak csak történeti értékük lesz; és bár az érték kétségtelenül nagy a magyar tudomány számára, de idővel csak csökkenni fog, ha olyan sokáig késlekednek. Bizonyos, hogy előnyös lenne, ha az iratok kiadásával Kőnig helyett Frischaufot bíznák meg" (1874. dec.7.).

„A magam részéről köszönettel tartozom Önnek, megkaptam a Bolyai-geometriáról szóló két kötetet" (célzás Frischauf két könyvére) „...ez azt bizonyítja, hogy a mag, amelyet Ön elvetett, csírázni kezd, és az Ön Bolyaiakról szóló írása nem volt hatástalan. Az Ön érdeme, hogy ennek a két jeles férfiúnak a neve Németországban ismertté vált."

Érdekes adatot tartalmaz Hoüel 1875. ápr. 28-i levele. Ebben arról van szó, hogy — Bordeauxban hangversenyezve — a magyar hegedűművész, Reményi Ede, tiszteletét tette Hoüelnél, és mivel nem találta otthon, a következő magyar nyelvű sorokat hagyta hátra:

„Hoüel Uram!

Nagyon sajnálom, hogy nem lehetett szerencsém kegyedet tisztelhetni, de visszatértemkor nem mulasztom el kegyednél tisztelegni. Igen hízelgő ránk magyarokra nézve, hogy Uraságod megtanulta szép nyelvünket.

Valódi rokonszenvvel maradok Uraságodnak tisztelője

Reményi

Bordeaux, April 25. 1875."

Az ezután következő francia nyelvű szöveg magyar fordítása:

„Nem tudom, hogy jól írtam-e le, teljesen tájékozatlan vagyok, mert nem értem, hogy mit jelenthet. Nagyon kielégítené a magam és a családom kíváncsiságát, ha megadná szó szerinti fordítását."

Íme egy tetten ért téves adat, és annak a legilletékesebbtől származó csattanós cáfolata. Sajnos, nem ilyen könnyű megtalálnunk a köztudatban elterjedt, Bolyai Jánosról szóló számos tévedés helyreigazítását.

1876-tól aztán ritkulnak a Hoüel levelek. A Bolyai-iratok átnézésének vontatottan haladó munkája indítja olykor egy-egy sürgető mondatra; hol elismerőleg, hol elmarasztalólag olvassuk Kőnig Gyula nevét: sokat kesereg a Bolyai-hagyaték Kőnig által irányított feldolgozásának lassú haladásán. Ezen a téren talán igazságtalanok a megjegyzései: e feladat rendkívül fáradságosnak és sok időt igénybe vevő munkának bizonyult.

Ezután még egy utolsó üzenet, valószínűleg 1882 végéről, és hosszú kihagyás után egy gyászkeretes levél 1888. dec. 9-i keltezéssel. Ebben az özvegy értesíti Schmidtet, a kedves barátot, férje elhunytáról. A levélhez csatoltan a bordeaux-i egyetem mechanika professzorának, Lespiaultnak Hoüelről írott szép nekrológja — ebből vettük az írásunk végén szereplő életrajzi adatokat.

A két „barát" személyesen sohasem találkozott, az illetékes magyar szervek pedig egyetlen elismerő hivatalos irattal, vagy kitüntetéssel sem fejezték ki Hoüel iránti hálájukat.

* * *

Ha a két Bolyai kézírásos hagyatékának földolgozása vontatottan haladt is, tudományos körein előtt egyre inkább megérlelődött a Tentamen és az Appendix eredeti latin nyelvű, de átjavított kiadásának a gondolata. Azonban ennek az előkészítő munkája is lassú volt, azonfelül anyagi nehézségek és jogi problémák is késleltették a kiadást. Az előkészítésbe már eredményesen kapcsolódtak be legjelesebb matematikusaink (Réthy Mór, Kőnig Gyula, Tőtössy Béla, Kürschák József) is. Főleg Kőnig figyelt fel ekkor a Tentamenben levő több olyan eredményre, amelyek további vizsgálatok révén újabb tételek elérését tették lehetővé (Farkas Gyula, Réthy Mór, Vályi Gyula, Schlesinger Lajos és mások). Az ide tartozó tanulmányok eléggé ismertek, részletezésüket feleslegesnek tartom.

Schmidt Ferencnek ebben a munkában nem volt említésre méltó szerepe, a doszszié ilyen emlékeket nem is tartalmaz. Ez azonban korántsem jelenti, hogy ne foglalkozott volna továbbra is a Bolyai-üggyel. A század utolsó évtizedében törekvése két régi tervének a megvalósítására irányult: az Appendix magyar nyelvű fordításának, valamint a Bolyai Farkas és Gauss közötti levelezésnek a kiadását szorgalmazta. Szinte párhuzamosan haladt e két könyv összeállítása, megjelenésük dátuma is egymáshoz közeli. A nyomdai munka anyagi terheit is vállalva 1897-ben megjelent az Appendix „előszóval, magyar fordítással és magyarázatokkal". Az előszót Suták József írta, ő fordította és látta el magyarázatokkal „A tér absolút igaz tudományá"-t. A kiadványhoz Schmidt Ferenc állította össze Bolyai János életrajzát. Két rövid megjegyzés: a „Hazánk" c. napilap 1896. jan. 14-i számában egy hosszabb cikkben a következő mondat szerepel: „A társalgási leczkék tiszteletdíjából a Mikszáth által visszamondott... 1000 frt-ot a latin eredeti [az Appendix] fordítására lehetne áldozni". Majdnem bizonyos, hogy ez nem történt meg; a másik megjegyzés: 1897-ben az Appendix nek még egy magyar nyelvű kiadása is napvilágot látott, a fordítói munkát Rados Ignác végezte (A térnek abszolút igaz tudománya. Math. és Phys. Lapok, 6. k. 1897. 145—172.).

* * *

A Schmidt-dossziéban található, Engel által írott 12 levél elsősorban az Appendix Suták-féle fordításával kapcsolatos. Az első levél kelte 1896. márc. 6., az utolsóé 1900. jan. 21.

Engel (és a később említendő Stäckel) kérdezősködő leveleinek fő célja az volt, hogy minél pontosabban tájékozódjék Bolyai János munkásságáról, mivel a paralelák történetéről könyvet állított össze. Kiderül a levelekből, hogy 1895-ben Pesten is járt, megismerkedett Schmidttel és ő vállalta, hogy Engel és Stäckel munkájának elősegítése érdekében az Appendixet németre fordítja. Szerette volna elérni, hogy a francia és az olasz fordítás után az Appendix német nyelven is megjelenjék. Ebben a törekvésében Engel meg is ígérte a segítségét. Engel 1897. febr. 24-i leveléből arról értesülünk, hogy Schmidt elküldte számára Bolyai Farkas „Theoria Parallelarum" c. 1804-ben írt — Gauss által megbírált — értekezését; ezt azonban Engel nem értette meg. Az egyik levélben olvassuk Engel rövid önéletrajzát is, erre Schmidtnek azért volt szüksége, hogy a tervezett, maga által írandó Bolyai könyvben felhasználja. E terve azonban nem valósult meg.

1897. márc. 19-én már Engel kezében volt a Suták kiadvány: ennek Schmidttől származó Bolyai János életrajzát igen jónak, ezzel szemben a Suták által írott előszót gyengének és kevesetmondónak minősítette. (A Suták-könyvet Schmidt egyik leánya németre fordította, és a fordítást Engel rendelkezésére bocsátották.) E kritikai megjegyzéseken kívül Engel szorgalmasan gyomlálgatta a Suták kiadvány képleteiben kétségtelenül szép számmal föllelhető sajtóhibákat.

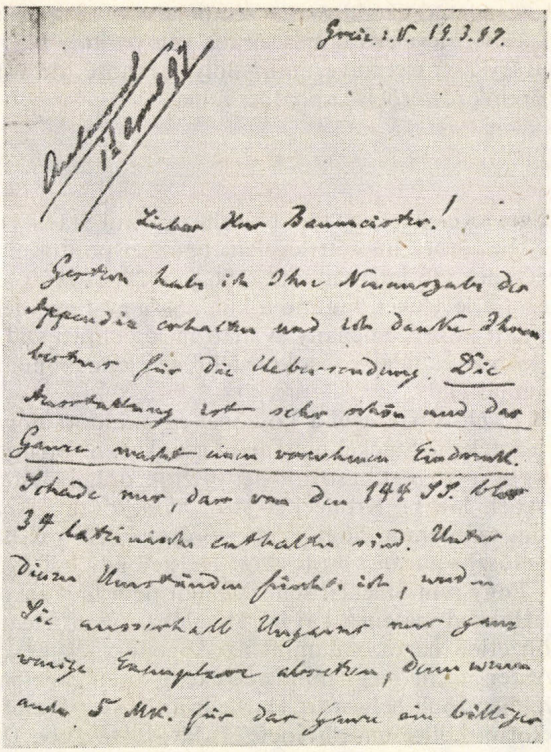
Prioritási kérdések is szerepelnek leveleiben, elfogultan, Bolyai János kárára. 1897. ápr. 4-i írásában még igaza van, amikor élesen cáfolja Suták Gaussra célzó következő megállapítását:

„...abból a körülményből, hogy nézeteivel nem mert nyilvánosan fellépni, azt lehet következtetni, hogy *Gauss*-ban egy, az *Euklides*-féle geometriától teljesen független geometriai rendszer létezésének fogalma még nem ért meg."

Suták e megállapítása — tudjuk — valóban nem helytálló. Az 1816-os évtől kezdve Gaussban egyre inkább megérlelődött egyfajta nem-euklideszi geometria lehetőségének a gondolata. Viszont nem fogadhatjuk el Engel érveit: állítását ugyanis csupán Gauss egy levélbeli közlésével támasztja alá, valamint azzal az indokkal, hogy Gauss több más eredményét sem közölte, pl. az elliptikus függvények, vagy a komplex függvénytan köréből. A Lobacsevszkij és Bolyai közti prioritásban is állást foglal ebben a levélben, alapul a közzétételt véve. Ha ezt tekintjük, akkor valóban Lobacsevszkijé az elsőbbség. Az viszont ismét következetlenség Engel eljárásában, hogy míg Gauss „abszolút" elsőbbségének eldöntéséhez leveleit elegendőnek ítélte, ugyanakkor figyelmen kívül hagyta Bolyai Jánosnak apjához 1823. nov. 3-án írott sorait („...semmiből egy újj, más világot teremtettem"). Márpedig e levelet olvasta, hisz azt Schmidt Ferencnek a Suták-kötetben levő tanulmánya közli (XXIII. oldal), ennek az értekezésnek a német fordítását Schmidt — mint föntebb említettem — elküldte Engelnek.

1897. ápr. 16-i levelében Engel még tovább is ment, ragaszkodva eredeti álláspontjához. Ebben ugyanis azt írta, hogy ha Suták mindenáron tisztázni akarja a prioritási kérdést, „...so ist (Gauss immer Acht gelassen) Schweikart der früher Entdecker". Ez az állítás igen elsietett, mert — mint látni fogjuk — munkatársa Stäckel ebben az időben lényegében még semmit nem tudott Schweikartról (még a pontos nevét sem), és Schmidttől kért információt.

1897. jún. 12-én írott levelében Engel is hangsúlyozza, hogy mennyire kívánatos lenne a teljes Bolyai Farkas és Gauss közötti levelezés kiadása, mivel az eddig közöltek igen hiányosak. Ebből a leveléből értesülünk arról, hogy Stäckel a két Bolyairól



készülő könyve ügyében közelesen hazánkba is el fog látogatni. Ezt megelőzőleg néhány nappal Schmidt ajándékaként kapta kézhez a Tentamen 2. kiadásának első kötetét, amelynek kiállítását fényűzőnek minősítette. Itt találkozunk először Engel és Stäckel kazányi levelező partnerének, Vasziljevnek a nevével, aki bőségesen küldözgeti számukra a Lobacsevszkijre vonatkozó adatokat, és a tőle származó kiadványokat. Később látni fogjuk, hogy Vasziljevvel néhány levelet Schmidt is váltott. Az 1897. dec. 31-i írásában felvetődik az azóta is sokat feltett kérdés: Bolyai János portréjának a problémája. Ismert okoknál fogva képet Schmidt sem tudott küldeni.

Engel különös előszeretettel foglalkozott Lobacsevszkij munkái német kiadásának az előkészítésével. Ezzel függhetett össze az egyik levélben (1898. aug. 2.) föltett kérdése, hogy vajon mikor ismerte meg Bolyai János Lobacsevszkij tevékenységét.

Erre a kérdésre pontosan tudunk válaszolni: a két Bolyai egy Gaussnál járt erdélyi diák újságcikke révén 1844-ben szerzett tudomást Lobacsevszkij „Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" (Berlin, 1840) c. könyvecskéjéről, de ezt csak jóval később, 1848-ban tudták megszerezni. Ismeretes, hogy mindketten nagy gonddal tanulmányozták az értekezést és igen szakszerű megjegyzéseket fűztek hozzá.

Ugyanebben az Engel levélben néhány sor a vaskancellár, Bismarck (1815—1898) elhunyta fölötti kesergésre is jut („Wir kommen jetzt ganz in das Zeitalter der Epigonen").

Az utolsó Engel levél (1900. jan. 21.) néhány szóban reflektál az időközben (1899) megjelent Gauss—Bolyai Farkas levelezésre, amelyről egy rövid recenziót is olvasott már Max Noether tollából.

Végezetül azt is megtudjuk, hogy a szentpétervári akadémia Lobacsevszkijjel kapcsolatos fáradozásaiért levelező tagjai sorába választotta. Tény, hogy Engelt jobban lekötötte Lobacsevszkij életműve, mint Bolyai Jánosé, de valamiféle elismerést a mi tudományos köreink részéről is kaphatott volna.

* * *

Csaknem az Engel levelekkel egy időben keltezte Paul Stäckel előbb Königsbergből, majd Kielből Schmidthez intézett leveleit. Egészen pontosan: a 14 levél (közte 2 levelezőlap) keltezésének idő-intervalluma 1896. jan. 24. és 1900. szept. 8.

Olvasgatva ezeket a leveleket, feltűnő a különbség az Engel-féle írásokkal szemben: Stäckel és Schmidt között e néhány év alatt meleg baráti szálak szövődtek, melyeket a budapesti személyes találkozásokon felül az egymás munkáját kölcsönösen támogató tettek is tápláltak.

Az első Stäckel levélben szerepel a köszönet egy küldött Bolyai Farkas képért. Hogy milyen nagyra értékelte Stäckel matematikusunkat, bizonyítja írásának néhány következő sora: „Nagy matematikusok képei díszitik dolgozószobámat: Lagrange, Monge, Legendre, Abel, Jacobi, Kronecker stb.; hamarosan ehhez jön Lobacsevszkij is. Kétszeres öröm számomra, hogy ezután Bolyai Farkas is házibarátom lesz".

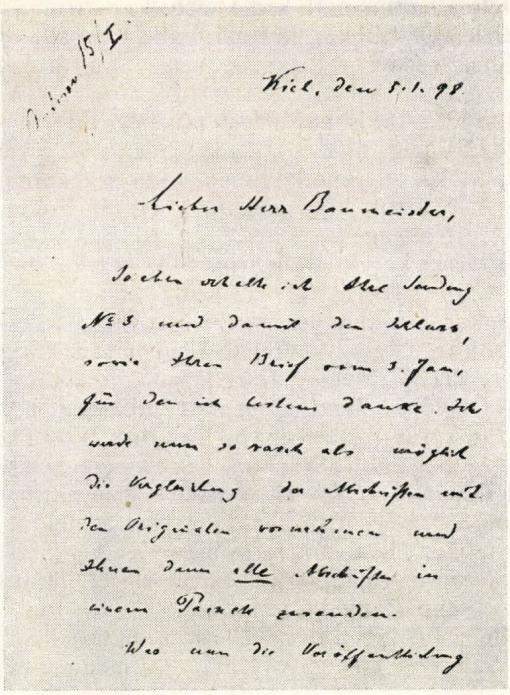
Itt találkozunk először a texasi professzor, Halsted nevével. Néhány csípős megjegyzésből kivehető, hogy sem Stäckel, sem Schmidt nem méltányolta különösebben az ő tevékenységét. Halsted matematikai írásai valóban nem jelentősek, de a Bolyai ügyben folytatott önzetlen harca, valamint az Appendixnek angol nyelvű kiadása (ez ekkor már négyszer jelent meg) mindenféleképp tiszteletet parancsol. A hazai sajtó ezekben az években több helyen írt Halstedről, Koncz József pedig „A marosvásárhelyi evang. reform. kollegium története" (Marosvásárhely, 1896) c. könyvében bő három oldalon (505—508) közli egyes külföldi matematikusok Halstedhez címzett elismerő leveleit. Ezeket nyilván maga Halsted bocsátotta Koncz rendelkezésére. 1896 nyarán a texasi matematikus Marosvásárhelyre is ellátogatott, ez alkalommal ő buzdította az ottani kollégium tanárát, Bedőházi Jánost a két Bolyai részletes életrajzának a megírására.

Ugyanebben a levélben (de a következőben is) sürgetőleg kér Stäckel részletes információkat Schmidttől Schweikartról és „könyvéről" (ilyen nem volt), mivel neki még semmit sem sikerült kinyomoznia.

Közben pedig a már betegeskedő, szembántalmakkal is bajlódó Schmidt Ferenc és fia, Márton szorgalmasan fordítgatta németre a Bolyai-hagyaték autográf írásait. Az 1897—98-ban írott levelekben Stäckel meg is köszöni az „1", „2" és „3" számú küldeményt. Ezekben olyan németre fordított részek szerepeltek a Bolyaiak hagyatékából, amelyek a pontos életrajzhoz voltak szükségesek, továbbá hozzásegítették Stäckelt Bolyai János töredékes matematikai följegyzéseinek megismeréséhez. Ez irányú vizsgálatait a századforduló táján a magyar és német nyelvű értekezések egész sorában tette közzé Stäckel — egyeseket Kürschák Józseffel közösen.

Többször is fölvetette Stäckel a Kurzer Grundriss új kiadásának a gondolatát, azonban ez elől — valószínűleg anyagi okok miatt — a Magyar Tudományos Akadémia elzárkózott.

Az 1898. jan. 24-i levélből kivehető, hogy lényegében már akkor kész volt a kétkötetes „Stäckel" (csak 1913-ban került ki a nyomdából: Wolfgang und Johann Bolyai geometrische Untersuchungen. I-II. Leipzig—Berlin). A későbbi évek során ennek az értékes munkának az anyaga lényegében csupán a Szabó Péter által fölfedezett adatokkal lett teljesebbé. Nemes gesztusra vall Stäckel azon kikötése, hogy ha



e könyv majdan kikerül a nyomdából, és az ő neve alatt jelenik meg, akkor ragaszkodik ahhoz, hogy legalább az ajánlásban ott legyen a segítőtárs, Schmidt Ferenc neve is. Ez valóban így történt. A Stäckel könyvnek mind a német, mind a következő évben megjelent magyar kiadásának az előlapján a következőt olvassuk: „Schmidt Ferenc építész, a Bolyaiak ügye fáradhatatlan előharczosa emlékének ajánlja e művet a Szerző".

A Bolyai kiadványokkal kapcsolatos különféle jogi problémákra is pontos információkat közölt Stäckel, ilyen ügyekben ő volt a tájékozottabb. E kérdések tisztázását az tette szükségessé, mivel a Bolyai-örökösök pénzügyi követelésekkel léphettek föl (mint tudjuk, föl is léptek).

Az utókor olvasója jó érzéssel látja, hogy a Gauss—Bolyai levelezés kiadása terén Schmidt és Stäckel milyen nagyvonalúan járt el. Az érdemet kölcsönösen a másiknak tulajdonították, a szerény tiszteletdíjon is barátian megosztoztak. Hozzátehetjük, hogy a szerzői díjnak többszöröse is rámehetett mindkettőjük esetében a Bolyai kutatásokra.

* * *

Elszakadva kissé a Stäckel-levelektől, e helyen részletezzük a Gauss—Bolyai Farkas levelek kiadásának előtörténetét.

Az ügy jelentőségét — mint már említettem — legelébb Hoüel ismerte föl, később Engel is hangsúlyozta. A kiadvány előkészítése azonban jóval nehezebbnek bizonyult és lassabban haladt, mint azt eredetileg képzelték.

Gaussnak Bolyai Farkashoz írt levelei Göttingenben kerültek a Gauss—Archívumba. Bolyai Farkas csaknem minden hozzá írt Gauss levelet eljuttatott oda, kivéve,

ötöt, amelyek megítélése szerint csak érdektelen, konvencionális közléseket tartalmaznak. Ezek a levelek 1905-ben kerültek elő Szabó Sámuel hagyatékából, fia Szabó Péter ezeket is közölte. A Gauss—Bolyai levelezésből tehát öt kevésbé fontos levél hiányzik.

Ernst Schering (1833—1897) göttingeni professzorhoz, a Gauss összegyűjtött művei szerkesztőjéhez Schmidt által 1877. okt. 28-án írott levélfogalmazvány arról tanúskodik, hogy az előkészítő munkát már ekkor megkezdte. Ebben a levélben Schmidt információt kért arról, hogy miként lehetne hozzájutni a Gauss—Bolyai levelek Göttingenben levő anyagához.

Nagyon sok levelezésbe került, amíg Schmidt és Stäckel Göttingenből megkapta a levelek másolatát. A Göttingeni Királyi Társaság, valamint a Magyar Tudományos Akadémia anyagi támogatásával végül is lehetővé vált a levelek kiadása. Magyar részről e munkához sok segítséget nyújtott az Akadémia akkori főtitkára, Szily Kálmán, továbbá Kőnig Gyula. A „Megjegyzések" című utószóhoz a két marosvásárhelyi tanár, Koncz József és Bedőházi János szolgáltatott adatokat, a korrektúra munkájában Engel is részt vett. Magyar oldalról az volt a kikötés, hogy a kiadvány ugyanolyan díszes formában jelenjék meg, mint a Tentamen első kötetének akkor már nyomdából kikerült második kiadása. Kőnig összeköttetéseivel magyarázható, hogy a nyomdai munkát a Franklin végezte, az igen szép fakszimiléket Schmidt bocsátotta a nyomda rendelkezésére. Ugyanakkor a kiadvány forgalmazását a berlini Teubner cég vállalta.

A Schmidt-dossziéban megtaláljuk a Teubner céggel kötött szerződést is. Ebből tudjuk, hogy a könyv 300 példányban jelent meg.

Nem vitatható, hogy a Gauss műveit és levelezését tartalmazó kiadványok közül külsejében ez a legtetszetősebb, bizonyítva a hazai nyomdaipar magas színvonalát.

* * *

1900. szept. 8-án írott leveléből tudomást szerzünk arról, hogy Stäckel 1901 húsvétja táján ismét hazánkba készült látogatni a két Bolyairól készülő művével kapcsolatban. Stäckel és Schmidt személyes találkozására azonban ekkor már nem került sor: 1901. márc. 7-én hosszabb betegeskedés után Schmidt Ferenc elhunyt.

* * *

Anélkül, hogy a legkevésbé is kisebbíteni óhajtanám Stäckelnek a Bolyai ügyben szerzett komoly érdemeit, e helyen mégis igazságot kell szolgáltatnom a hazai matematikusoknak a kétkötetes Stäckel-mű létrejöttében végzett munkájukért. Igen egyszerű ítéletet mondani a *második* kötetről: ez ugyanis olyan részeket tartalmaz, amelyeket eleve német nyelven írt Bolyai Farkas és Bolyai János (Kurzer Grundriss, Theoria Parallelarum, Raumlehre, Responsio). Ezekben inkább csak finomításokat, helyenként kiegészítéseket kellett Stäckelnek végeznie. Hogy ki végezte a latin nyelvű Tentamenből közölt részek német fordítását, nem tudjuk; az azonban a levelekből kiderül, hogy a Bolyai Farkas magyar nyelvű könyveiből idézett fejezeteket, valamint az Appendixet Schmidt Ferenc ültette át németre. A könyv végén található hat oldalas „Jegyzetek" anyagát főleg Réthy Mór, Kürschák József és Schmidt Ferenc szolgáltatta.

Kissé más a helyzet a Stäckel könyv *első* kötetével. Az ebben levő életrajzi, valamint az igen gazdag jegyzetanyag csaknem kizárólag Schmidt Ferenc gyűjtőmunkájának az eredménye. Ez a kötet jó kétharmadát alkotja. A visszamaradó egyharmad rész már valóban Stäckel matematikai tájékozottságát és odaadó munkáját dícséri.

E fejezetekben Bolyai Farkas főbb geometriai eredményei, továbbá Bolyai János kéziratos hagyatékának értékes matematikai részei szerepelnek.

A Stäckel könyv említésekor tehát elismeréssel kell gondolnunk azokra a magyar tudósokra is, akiknek segítsége lehetővé tette e nagy jelentőségű munka összeállítását.

* * *

A Schmidt-dosszié eddig említett anyagát még néhány irattal kell kiegészítenem, hogy többé-kevésbé teljes legyen a feldolgozás.

Ismeretes, hogy Bolyai Farkas 1855-ben kinyomatta meglehetős dagályos stílusú, de mély gondolatokat is tartalmazó halotti „Jelentés"-ét. Ezt a következő évben a kollégium igazgatósága újra kiadta, bővítve a „Gyász-jelentés"-sel. Mindkét kiadvány német fordítása megtalálható az irattartóban — német kiadásukra azonban nem került sor. Schmidt Ferenc szorgalommal gyűjtögette a Bolyai János katonai életére vonatkozó adatokat is. Alaposságára jellemző, hogy egyik feljegyzéséből pl. napra pontos dátumokkal és a pihenőhelyek feltüntetésével tudjuk követni Bolyai János 1823-as évi, Bécsből Temesvárra vezető útját. Két matematikusunk pontos születési és halálozási dátumait Tolnai Lajos református lelkész 1877. dec. 26-án találta meg a marosvásárhelyi matrikulában, de még akkor sem volt ismeretes Bolyai János születésének pontos adata. Megvan a dossziéban Sartorius von Walterhausen 1872. dec. 30-án Schmidt Ferenchez írott — már említett — levelének eredetije. Szabó József, a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának titkára 1879. febr. 20-án kelt iratában arról tájékoztatja Schmidt Ferencet, hogy a Kőnig Gyulánál, valamint az Akadémia levéltárában „heverő" Bolyai iratokat átadják neki tanulmányozás végett. Erre az iratra később került a következő záradék: „A Bolyai-iratokat Schmidt Ferencz építész úrtól a mai napon hiány nélkül visszakaptuk és Marosvásárhelyre elküldöttük. Budapest, 1894. június elsején. Szily főtitkár." 1896 és 1898 között írott öt levél, (illetve levelezőlap) bizonyítja, hogy Schmidt kapcsolatban állott A. V. Vasziljev kazányi professzorral is, és számára több Bolyai kiadványt elküldött. Ezek azóta az ottani „Lobacsevszkij Gyűjtemény"-nek szerves tartozékai.

* * *

Szeretném, ha írásom teljesebbé tenné a gazdag Bolyai irodalmat, és jelképes emlékmű lenne Schmidt Ferenc rég elfeledett sírhantján.

Életrajzok

Baltzer, Heinrich Richard (Meissen, 1818—1887, Giessen) a lipcsei egyetemen hallgatott archeológiát, matematikát és filozófiát; 1841-ben avatták a filozófia és a matematika doktorává. Előbb Chemnitzben (ma: Karl-Marx-Stadt), majd Drezdában működött mint tanár. 1857-ben jelent meg először „Theorie und Anwendung der Determinanten" c. munkája, amely nagymértékben járult hozzá e diszciplina népszerűsítéséhez (magyar nyelven is kiadták 1877-ben Genovában). Könyvében több olyan eredményt is tárgyalt, amelyek magyar matematikusoktól származnak (többek között a Hunyady—Scholtz-féle tételt). 1869-től haláláig a giesseni egyetem matematika professzora volt. Intenzív munkát végzett a geometria alapjainak kutatásában.

Battaglini, Giuseppe (1826—1894), a felsőbb geometria professzora volt előbb Nápolyban, 1872 és 1885 között Rómában, utána haláláig ismét Nápolyban. Egyik első lelkes híve a nem-euklideszi geometriáknak, Lobacsevszkijről könyvet is írt. A mi szempontunkból igen jelentős, hogy — Lobacsevszkij munkáival párhuzamosan

— ő fordította olaszra az Appendixet. Ez az általa alapított „Giornale di Matematiche" c. folyóiratban jelent meg. Igen széles körű levelezést folytatott sok tudóssal, az Appendix ügyében Szabó Sámuellel (1. ott) is.

Bedőházi János (Szászvesszős, 1853—1915, Marosvásárhely) tanár, író. Előbb a pesti műegyetemen, majd a kolozsvári tudományegyetemen tanult. 1881-től a marosvásárhelyi kollégium kémia—fizika szakos tanára, később igazgatója volt. Fő műve: A két Bolyai (Marosvásárhely, 1898), az első, sok szeretettel, de kevés tárgyi ismerettel megírt munka. Főleg a Bolyai János munkásságát tárgyaló rész szegényes, emellett nem mentes az akkor már bőven burjánzó Bolyai pletykák felemlítésétől sem.

Bolyai Gergely (Marosvásárhely, 1826—1890, Bolya), Farkas második házasságából született fia, a bolyai birtokon gazdálkodott. Két életrajzot írt a Bolyaiakról, előbb Szabó Sámuel, majd (kevés változtatással) id. Szily Kálmán felkérésére. Ezek az írások az MTA birtokában vannak. Tanulmányai hátrányosan befolyásolták a későbbi kutatásokat, mivel Jánosra vonatkozó adatai kedvezőtlenül elfogultak voltak, és Szily kellő rostálás nélkül közölte azokat a hazai tudományos körökkel. Viszont a Bolyai-család többi tagjával folytatott levelezése addig ismeretlen adatokat is feltárt.

Boncompagni, Baldassare (1821—1894) jómódú hercegi családban született. A római egyetemen hallgatott matematikát és fizikát, tanulmányai befejezése után egész életét a tudományok történetének kutatására szentelte. 1868-tól 1887-ig húsz kötetben saját költségén és a saját maga által felszerelt nyomdában adta ki a „Bolletino di biografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche" c. folyóiratot. Ebben számos tanulmányt írt és fontos leveleket tett közzé, pl. Tartaglia, Ferrari, Lagrange, Gauss, Laplace stb. hagyatékából. Nagy értéket képviselő kézirattára és hatalmas könyvtára egy tűzeset alkalmával megsemmisült. A matematika- és fizikatörténeti vizsgálatoknak hozzáértő és bőkezű mecénása volt.

Brassai Sámuel (Torockó, 1797—1897, Kolozsvár) „az utolsó magyar polihisztor" a kolozsvári egyetem professzora és az MTA tagja volt. Élete és munkássága számos tanulmány, könyv révén ismert. A Bolyaiakkal kapcsolatos tevékenysége nem kedvező: az Appendixet nem értette, nem is értékelte, „Emlékbeszéd Bolyai Farkas felett" (Erdélyi Múzeum, 1886. III. k. 209—241.) c. tanulmánya szakmai szempontból sok helyen szintén kifogásolható.

Engel, Friedrich (Lugau, Karl-Marx-Stadt közelében, 1861—1941, Giessen). Egyetemi tanulmányait Leipzigben és Berlinben végezte. 1884-ben Felix Klein segítségével Christianiába (ma: Oslo) került Sophus Liehez, mint asszisztens. Hazatérte után Leipzigben, Greifswaldban, majd haláláig Giessenben volt egyetemi tanár. Lievel való kapcsolata döntő jelentőségű tudományos munkásságára. Intenzív munkát végzett a jeles norvég matematikus három kötetes „Theorie der Transformationsgruppen" (1889—90) c. alapvető munkájának megírásában. Ugyancsak ő rendezte Lie összegyűjtött közleményeit sajtó alá, ez 1922-től 1937-ig hat kötetben jelent meg. A Bolyai kérdéssel kapcsolatban említendő, hogy (Stäckellel közösen) összeállította a nem-euklideszi geometriák előtörténetét (Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss... Leipzig, 1895.; Gauss, die beiden Bolyai, und die nichteuklidische Geometrie. Math. Ann. 49. k. 1897. 151—206.), továbbá németre fordította Lobacsevszkij munkáit. Számos tudományos társaság választotta tagjai sorába. Talán Felix Kleinhez fűződő kapcsolataival magyarázható a nem-euklideszi geometriák fölfedezésének prioritási kérdésében több helyen is kifejezett, és Bolyai János kárára elfogult véleménye.

Frischauf, Johann (Bécs, 1837—1924, Graz) Bécsben a tudomány- és műegyetemen végezte tanulmányait. 1860-tól az ottani obszervatóriumban működött, majd

1866-ban a gráci egyetem hívta meg a matematika katedrájára. Számos értekezése jelent meg a bécsi akadémia Közleményeiben, a Zeitschrift f. Math. und. Physikben, továbbá a Journal f. reine u. angew. Mathematikban. Didaktikailag jól felépített és a legújabb eredményeket is feldolgozó aritmetikai, geometriai, fizikai és csillagászati-geodéziai könyvei nagymértékben emelték az osztrák egyetemi oktatás színvonalát. Magyar szempontból elévülhetetlen érdemeket szerzett azáltal, hogy 1871-től kurzus-szerű előadásokat tartott a gráci egyetemen a nem-euklideszi geometriákról, főleg az Appendixből merítve anyagát. Előadásai könyvekben is megjelentek (Absolute Geometrie nach Johann Bolyai. Leipzig, 1872., Elemente der absoluten Geometrie. Leipzig, 1876.). A nem-euklideszi geometriai előadásaiért az osztrák tanügyi hatóságok hevesen támadták.

Gerling, Christian Ludwig (Hamburg, 1788—1864, Marburg) 1810 és 1817 között Göttingenben baráti kapcsolatba került Gauss-szal, annak legmeghittebb tanítványa, később legszorgalmasabb levelező partnere volt. 1817-ben a marburgi egyetem professzorává nevezték ki, haláláig itt munkálkodott. Tudományos tevékenysége csillagászati, geodéziai és fizikai tárgyú. Gauss-szal folytatott rendkívül gazdag (820 oldal!) és szakmai szempontból is igen értékes levelezésüket 1927-ben adták ki Berlinben.

Göldner Nándor (1826—1897) 1855-től hosszabb megszakítással a marosvásárhelyi kollégium német szakos tanára, valamint a jegyzőkönyvek vezetője volt.

Grunert, Johann August (Halle, 1797—1872, Greifswald) a greifswaldi egyetem matematikaprofesszora, aki 1841-ben megindította és hosszú időn át szerkesztette az „Archív der Mathematik und Physik" c. folyóiratot (1920-ban megszünt). A század közepétől kezdve egyre gyakrabban találkozunk a Grunert-féle Archív hasábjain magyar matematikusok nevével. Főként Vályi Gyula, Klug Lipót és Farkas Gyula közölte a folyóiratban tanulmányait. 1860-ban az MTA külső tagja lett. Beválasztását bizonyára az ösztönözte, hogy a magyar matematikusok közelebbi kapcsolatba kerüljenek a nagytekintélyű folyóirattal.

Halsted, Georg Bruce (Newarck, 1853—1922, New-York) tanulmányait a princetoni egyetemen végezte. Előbb az austini, ohioi és végül a coloradói egyetem tanára volt. Főleg a matematika filozófiai problémáival foglalkozott. Ez utóbbiban hatalmas munkát végzett mind az ilyen tárgyú eredeti munkák amerikai kiadása, mind önálló könyvek írása terén. Különösen Saccheri, Bolyai János, Lobacsevszkij és Poincaré tevékenysége kötötte le érdeklődését.

Hoüel, Guillaume—Jules (Thaon, 1823. ápr. 7—1886. jún. 14. Périers) Caen-ban, Bordeaux-ban, valamint Párizsban az École Normale-ban tanult, 1855-ben a Sorbonne-on doktorált. 1859-től Bordeaux-ban volt az egyetem professzora. Rendkívül széles klasszikus műveltség és gazdag nyelvismeret jellemezte. Egyik levele szerint — a spanyol és a magyar kivételével — az összes jelentősebb európai nyelven beszélt és írt. Tudományosan kezdetben a matematika néhány alapkérdésével foglalkozott. Úgy is számon tartják, mint a permanencia elvének Hankelt megelőző tudatos alkalmazóját. Egyetemi előadásai szinte a matematika egész területére kiterjedtek: a matematika alapjai, determinánsok, komplex függvénytan, az analízis különböző fejezetei stb. Sokat foglalkoztatta az égi mechanika, továbbá az asztronómiával kapcsolatos számos matematikai probléma. A csillagászati számítások elősegítése érdekében logaritmus táblázatot szerkesztett, és mások táblázatait kiadatta. Életének azonban legjellemzőbb célja az volt, hogy olyan matematikusok eredményeivel ismertesse meg a tudományos világot, akiket koruk mellőzött. E törekvésének megfelelően foglalkozott sokat Lobacsevszkij és Bolyai János munkásságával. Hihetetlen munkabírás és rendkívüli szerénység jellemezte. Széles körű levelezése az akkori idők igen sok ma-

tematikusára kiterjedt. Részletes megemlékezést G. Lespiault írt róla (Mémorial de l'Association des anciens élèves de l'École Normale. 1887.)

Koncz József (1829—1906), teológiát végzett, majd a marosvásárhelyi kollégium tanára lett. Számos irodalom- és egyháztörténeti tanulmánya, valamint könyve jelent meg. A mi szempontunkból legjelentősebb munkája: „A marosvásárhelyi ev. ref. collegium története" (Marosvásárhely, 1896). Ebben mindkét Bolyaira, de főleg az apára vonatkozó számos új adatot tett közzé.

Noether, Max (Mannheim, 1844—1921, Erlangen) matematikus, aki figyelemre méltó eredményeket ért el a komplex függvénytan terén, de jelentősek matematikatörténeti tanulmányai is. Nagy munkát végzett Riemann hagyatékának a rendezésében és kiadásában.

Pesty Frigyes (Temesvár, 1823—1889, Budapest), történész, az MTA tagja. A szabadságharc után emigrált, majd 1850-től Temesváron, 1864-től Pesten működött. Nagy szerepe volt a Magyar Történelmi Társulat létrehozásában. Számos történelmi és földrajzi könyv szerzője.

Reményi Ede (Miskolc, 1828—1898, San Francisco), világhírű magyar hegedűművész, Görgey tábori hegedűse, Brahms „fölfedezője". A szabadságharcban való részvétele miatt hosszabb ideig emigrációban élt, 1861-ben térhetett haza, de 1875-ben előbb Párizsban, majd az USA-ban telepedett le, ott is halt meg.

Sartorius von Waltershausen, Wolfgang (1809—1876), Gauss egyik tanítványa és barátja volt. 1847-től haláláig a göttingeni egyetemen a geológia professzoraként működött. „Gauss zum Gedächtnis" c. könyvecskéje Gauss temetésekor mondott gyászbeszédének bővített változata.

Schweikart, Ferdinand Karl (1780—1859), német jogász professzor. Gausshoz 1819-ben írott másféloldalnyi levelében közölte azon észrevételét, hogy kétféle rendszer képzelhető el: az euklideszi geometria, valamint az asztrális „Grössenlehre" (Schweikart levelének fakszimilijét, annak nyomtatott átírását, valamint Gaussnak a levélhez fűzött és Gerlinghez írott egyoldalnyi megjegyzését közli a Gauss—Gerling levelezés a 194—195. oldalon). Schweikart a Lambert-féle hegyesszög hipotézisből adódó két meglepő következmény alapján mondta ki az asztrálgeometria létezésének a lehetőségét. Utána unokaöccse, Taurinus (1794—1874) két rövid munkában (1825, 1826) ugyancsak megpendítette a kétféle geometria létezésének a föltételezését. Véleményem szerint azonban egy új geometria létének puszta föltételezése még nem jelenti annak fölfedezését. Hisz ugyanilyen jogcímen pl. Bolyai Farkast is az anti-euklideszi geometriák fölfedezői közé lehetne sorolnunk 1804-ben tartott tanári székfoglalójának egy megjegyzése alapján.

Stäckel, Samuel Gustav Paul (Berlin, 1862. aug. 20—1919. dec. 12., Heidelberg), szülővárosának egyetemén 1884-ben fejezte be tanulmányait. Változatos élete során Halléban, Königsbergben, Kielben, Hannoverben, Karlsruhében és végül Heidelbergben volt egyetemi tanár. Különösen az algebra, a komplex függvénytan és az elméleti mechanika problémái érdekelték. Önálló kutatásaira — amelyek eredményeit főleg a Math. Annalenben és a Crelle-féle Journalban közölte — nagy hatással voltak egyes olyan kérdések, amelyeket Euler, Lagrange, Gauss, Abel és Jacobi vetett föl. Bolyai János hagyatékából számos új matematikai eredményt dolgozott ki, és ezáltal teljesebbé tette a róla alkotott képet. Bolyai tárgyú értekezései mind magyar, mind német nyelven megjelentek. Érdemei elismeréseként az MTA 1900. május 4-én külső tagjai közé választotta.

Suták József (Szabadka, 1865—1954, Budapest) matematikus, piarista, a budapesti tudományegyetem professzora. Több analízis és geometria tárgyú könyv, valamint tanulmány szerzője.

Szabó Sámuel (1829—1905), tanár, történész. A szabadságharcban való részvétele miatt egy ideig bújdosott, 1858-tól a marosvásárhelyi, 1868-tól a kolozsvári ref. kollégium tanáraként működött. Talán éppen Kolozsvárra történt távozásával magyarázható, hogy azt a szorgalmas munkát, amelyet a Bolyai-kérdéssel kapcsolatos kutatásokban végzett, hamarosan abbahagyta, sőt — a tudománytörténet nagy kárára — a birtokában levő fontos Bolyai iratok haláláig íróasztal fiókjainak a mélyén rejtőztek. Hagyatékának feldolgozása során bukkant fia,

Szabó Péter (1867—1914), budapesti gimnáziumi tanár számos fontos Bolyai-iratra, és azokat közzé is tette. Szabó Péter a bécsi cs. és kir. hadilevéltárban is kutatott Bolyai Jánosra vonatkozó iratok után, ezek főleg matematikusunk katonai pályájára derítettek fényt. Nyomtatásban magyarul megjelent Bolyai-tanulmányait Fejér Lipót fordította németre (1908-ban) Stäckel számára. Sajnos korai halála megakadályozta munkájának befejezését. Az általa Bécsben, valamint az apja hagyatékában talált iratokat az MTA levéltára őrzi. Szabó Péter önállóan is munkálkodott a matematika terén és főként a determinánsok elméletében ért el több tetszetős eredményt. De a Bolyai-geometria sem volt idegen számára, erről is jelent meg egy kis értekezése (Az abszolút geometria egyik alaptételéről. Math. és Phys. Lapok. 12. k. 1903. 321—323.).

Teleki Domokos gróf (Marosvásárhely, 1810—1876, Kolozsvár), politikus, publicista, az abszolutizmus idején a marosvásárhelyi Teleki-könyvtár kéziratos anyagának rendezője. 1861-ben főrendiházi taggá választották. Számos történelmi tárgyú könyve jelent meg.

Tolnai Lajos (Gyórköny, 1837—1902, Budapest), regényíró, költő, prózairodalmunkban a kritikai realizmus egyik úttörője. 1868-tól 1884-ig református lelkészként Marosvásárhelyen tevékenykedett.

Vasziljev, Alexandr Vasziljevics (1853—1929). A Lobacsevszkij kultusz központja a múlt század 70-es éveitől Kazány volt, és e munkának egyik legeredményesebb művelője Vasziljev. 1874-től 1907-ig az ottani egyetemen működött. Jelentős szerepet játszott Lobacsevszkij műveinek második kiadásában, továbbá születése centenáriumának az előkészítésében. Egyike volt azon elsőknek, aki hirdette és értekezésekben fejtegette a Lobacsevszkij geometriának fizikai, fiziológiai, pszichológiai és filozófiai jelentőségét. Nagyon sokat fáradozott és utazott Lobacsevszkij elismertetése érdekében, több kortársát és tanítványát sikerült ennek az ügynek megnyernie. Jórészt ez a magyarázata annak, hogy Lobacsevszkij emlékét leghívebben jelenleg is Kazányban ápolják.

Vész (Weiss) János Ármin (Szeged, 1826—1882, Budapest). Gimnáziumi tanulmányait a szegedi liceumban végezte, utána 1848-ban mérnöki oklevelet szerzett. Rövid ideig tartó mérnöki munka után 1849-ben tanári beosztást nyert a tudományegyetemen, és ettől kezdve itt, később az ipartanodán, végül a műegyetemen volt a felsőbb mennyiségtan professzora. 1858-ban az Akadémia levelező, tíz évvel később rendes tagja lett. Több biztosítási matematikai és variációszámítási értekezése jelent meg. Legismertebb munkája: A felsőbb mennyiségtan alapvonalai (Pest, 1861, 1862) c. kétkötetes tankönyve. A Bolyai-hagyaték feldolgozása terén nem végzett számottevő munkát, ebben hosszantartó betegsége is bizonyára akadályozta.

МАТЕРИАЛЫ К ИСТОРИИ ДВУХ БОЯИ

Б. СЕНАШИ

CONTRIBUTIONS TO THE HISTORY OF THE DISCOVERY OF THE TWO BOLYAI

B. SZÉNÁSSY

AZ ATIYAH—SINGER INDEXTÉTELRŐL

TÓTH GÁBOR

I.

FIBRÁLT NYALÁBOK

1. Bevezetés

Több mint 18 év telt el azóta, hogy M. F. Atiyah és I. M. Singer megjelentették az elliptikus differenciáloperátorokra vonatkozó „indextételüket". Azóta bizonyossá vált, hogy ez a tétel a differenciáltopológia egyik legáltalánosabb és egyben legmélyebb összefüggése. Noha egy rövid bevezető keretében nem térhetünk ki az indextétel történet előzményeire, mégis, a tétel általános voltát alátámasztandó, megjegyezzük, hogy ez az eredmény közös általánosítása a differenciáltopológiából jól ismert Gauss—Bonnet tételnek, Hopf nem zérus Euler-karakterisztikájú sokaságokra vonatkozó eredményének, Hirzebruch szignatúra tételének, Lichnerowicz pozitív skalárgörbületű Riemann sokaságokra vonatkozó eredményének és a holomorf vektornyalábokra vonatkozó Riemann—Roch—Hirzebruch tételnek. Miért bizonyult az indextétel a differenciáltopológia egyik legmélyebb összefüggésének? Elsősorban azért, mert kapcsolatot teremt a differenciáltopológia analitikus eszközökkel és topológiai módszerekkel definiálható fogalmai között. Ezzel lehetővé válik az analitikus alakban megfogalmazható problémák topológiai eszközökkel történő megoldása és megfordítva.

E dolgozat célja az indextételhez szükséges matematikai apparátus felépítése és az indextétel néhány alkalmazásának bemutatása. A dolgozat írásakor a legfontosabb szempont a fogalmak világos módon történő megfogalmazása és az egyszerűbben leírható speciális esetek bemutatása volt. Ez a dolgozat méreteit jelentősen megnövelte s még így sem sikerült néhány mélyebb eredmény bizonyítását bemutatni. A fentiekből következően ezeknek a tételeknek néhány speciális esetben a bizonyításait is ismertetjük. A nem teljesen bizonyított eredményekhez minden esetben irodalmi hivatkozást csatolunk. A dolgozat szerkesztésekor elsősorban az a követelmény volt a legfontosabb, hogy a bonyolult eszközök használatát lehetőleg kerüljük, vagy csak ott használjuk, ahol feltétlenül szükség van rájuk. Így került a tapasztalat szerint nehezen megérthető konnexiófogalom az utolsó részbe. A dolgozat tartalomjegyzéke a következő:

I. FIBRÁLT NYALÁBOK

1. Bevezetés,
2. Differenciálható sokaságok,
3. Fibrált nyalábok,
4. Vektornyalábok.

II. DIFFERENCIÁLOPERÁTOROK ANALITIKUS INDEXE

1. A de Rham kohomológia elmélet,
2. Differenciáloperátorok vektornyalábokon,
3. Az Euler-karakterisztika és a szignatúra.

III. SZINGULÁRIS HOMOLÓGIÁK ÉS KOHOMOLÓGIÁK

1. Szinguláris homológiák,
2. Szinguláris kohomológiák,
3. Topológikus párok kohomológia gyűrűi,
4. CW-komplexusok és az unicitástétel,
5. Sokaságok irányítása és fundamentális homológia osztálya.

IV. GRASSMANN SOKASÁGOK ÉS KLASSZIFIKÁLÓ PRINCIPÁLIS NYALÁBOK

1. A Leray—Hirsch tétel és a Künneth formula,
2. A Thom izomorfizmus és az Euler osztály,
3. A Gysin sorozat és $H^*(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2)$, ill. $H^*(\mathbf{C}P^m; \mathbf{Z})$ kiszámítása,
4. A Milnor konstrukció,
5. Klasszikus csoportok klasszifikus principális nyalábjainak meghatározása,
6. Grassmann sokaságok cellastruktúrája.

V. KARAKTERISZTIKUS OSZTÁLYOK

1. A karakterisztikus osztályok definíciói és $H^*(G_k(\mathbf{R}^\infty); \mathbf{Z}_2)$, ill. $H^*(G_k(\mathbf{C}^\infty); \mathbf{Z})$ kiszámítása,
2. Immerziók és beágyazások,
3. A felhasználási elv,
4. A topologikus index és az Atiyah—Singer indextétel.

VI. GROTHENDIECK-CSOPORTOK

1. A K-elmélet elemei,
2. A differencia nyaláb.

VII. AZ INDEXTÉTEL NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

1. Sokaságok G-struktúrái,
2. Hirzebruch szignatúratétele,
3. Egzotikus gömbök.

VIII. SPIN SOKASÁGOK

1. Clifford algebrák,
2. Clifford modulusok,
3. Konnexiók,
4. A Dirac-operátor.

Az alábbiakban röviden áttekintjük a dolgozat főbb eredményeit. Az I—II. rész általános differenciálgeometriai bevezető; differenciálgeometriában kissé járatos olvasó számára semmi újat nem tartalmaz. A III. rész általános homológiaelméleti bevezető, amelyre ugyanaz vonatkozik, mint az első két részre. A IV—V—VI. és VII. rész a differenciáltopológia néhány alapvető konstrukcióját tárgyalja. Az V. részben igazoljuk, hogy Whitneynek a differenciálható sokaságok euklidészi terekbe történő immerzióira és beágyazásaira vonatkozó tétele éles, azaz megmutatjuk, hogy az $\mathbf{R}P^{2^r}$ valós projektív tér nem immergálható $\mathbf{R}^{2^{r+1}-2}$-be és nem ágyazható be $\mathbf{R}^{2^{r+1}-1}$-be. Továbbá igazoljuk, hogy ha $\mathbf{R}P^m$ parallelizálható, akkor szükségképpen $m+1$ kettő hatvány. A 3. fejezetben Borelnek a klasszifikáló terek leírására vonatkozó híres eredményét a $G=U(k)$ és $G=SO(k)$ Lie csoportok esetére igazoljuk. Az V. rész utolsó fejezetében az indextételt kimondjuk. A VI. rész általános K-elméleti bevezető. A VII. részben igazoljuk Hopf azon eredményét, mely szerint nem zérus Euler-karak-

terisztikájú sokaságon minden vektormezőnek van kritikus pontja. A 2. fejezetben igazoljuk, Hirzebruch szignatúratételét és ennek alkalmazásaképpen bebizonyítjuk Milnor híres eredményét, mely szerint a 7-dimenziós euklidészi gömbön van legalább két nem ekvivalens differenciálható struktúra. Az egész VIII. rész az indextételnek a Dirac operátorra vonatkozó alkalmazásáról szól. Igazoljuk Lichnerowicz azon eredményét, mely szerint egy nem zérus $\hat{\mathscr{A}}$-géniuszú spin-sokaságon nem adható meg pozitív skalárgörbületű metrika.

Végezetül köszönetemet szeretném kifejezni Szenthe Jánosnak a kézirat lektorálása során tett számos értékes megjegyzéséért; az MTA Matematikai Kutató Intézete differenciáltopológia szemináriuma résztvevőinek; közülük különösen Szűcs Andrásnak, aki a dolgozat differenciáltopológiai részeinek megírásában sok ötlettel segített, és végül, de nem utolsó sorban, Kollár Jánosnak, Lempert Lászlónak és Zoller Vilmosnak.

2. *Differenciálható sokaságok*

Legyen M megszámlálható bázisú Hausdorff-tér és m nemnegatív egész szám. Egy (U, x) párt az M tér *m-dimenziós lokális térképé*nek nevezünk, ha $U \subset M$ nyílt halmaz és $x: U \to \mathbf{R}^m$ az m-dimenziós euklidészi tér valamely nyílt halmazára képező homeomorfizmus. Ha $\pi_i: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $i=1, \ldots, m$, jelöli az i-edik tényezőre képező projekciót, akkor egy $p \in U$ pont *lokális koordinátái* az (U, x) lokális térképre nézve az $x^1(p)=\pi_1(x(p)), \ldots, x^m(p)=\pi_m(x(p))$ számok. Az M teret *m-dimenziós topologikus sokaság*nak nevezzük, ha minden $p \in M$ pontjának van olyan $U \subset M$ környezete és van olyan $x: U \to \mathbf{R}^m$ leképezés, hogy (U, x) m-dimenziós lokális térképe az M térnek.

(2.1) Példa. Tekintsük a számegyenest két példányban és az $\mathbf{R} \times \{0\} \cup \mathbf{R} \times \{1\}$ egyesítésüket lássuk el az euklidészi topológiával. A kapott topologikus téren vezessük be azt az osztályozást, amelyre két különböző (s, t), ill. (s', t') pont, $s, s' \in \mathbf{R}$ és $t, t' \in \{0, 1\}$, pontosan akkor tartozik egy osztályba, ha $s=s' \neq 0$ teljesül. Ezen osztályozás által definiált topologikus faktortér megszámlálható bázisú és minden pontjának van a számegyenessel homeomorf nyílt környezete. A $(0, 0)$ és $(0, 1)$ pontok nem választhatók szét nyílt környezetekkel, azaz a faktortér nem Hausdorff-tér és így nem topologikus sokaság.

Legyen M m-dimenziós topologikus sokaság. Az M m-dimenziós lokális térképeinek egy $\mathscr{A}=\{(U_\alpha, x_\alpha) | \alpha \in \mathscr{I}\}$ halmaza differenciálható *atlasz*, ha $M=\bigcup\{U_\alpha | \alpha \in \mathscr{I}\}$ és $\alpha, \beta \in \mathscr{I}$ különböző indexek esetén az $x_\beta x_\alpha^{-1}: x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ és $x_\alpha x_\beta^{-1}: x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ leképezések C^∞-osztályúak, azaz a $\pi_i x_\beta x_\alpha^{-1}$, ill. $\pi_i x_\alpha x_\beta^{-1}$, $i=1, \ldots, m$, komponens leképezések minden rendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, ill. $x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ nyílt altereken.
Ha az M topologikus sokaságon adott egy $\mathscr{A}$ differenciálható atlasz akkor az $(M, \mathscr{A})$ párt *differenciálható sokaság*nak nevezzük.

(2.2) Példák. (a) Az $\mathbf{R}^m$ m-dimenziós euklidészi tér differenciálható sokaság az egyetlen $(\mathbf{R}^m, \mathrm{id}_{\mathbf{R}^m})$ lokális térképből álló differenciálható atlasszal.

(b) Az $S^m=\{p=(p_1, \ldots, p_{m+1}) \in \mathbf{R}^{m+1} | \|p\|^2=\sum_{i=1}^{m+1}(p_i)^2=1\} \subset \mathbf{R}^{m+1}$ topologikus alteret differenciálható sokasággá tehetjük, ha atlasznak az $\mathscr{A}=\{(S^m-\{p\}, x_p) | p \in S^m\}$ családot választjuk, ahol $x_p: S^m-\{p\} \to \mathbf{R}^m$ a $p \in S^m$ pontból képező sztereografikus projekció. S^m az *m-dimenziós euklidészi gömb.*

(c) Definiáljunk az $\mathbf{R}^{m+1}-\{0\}\subset\mathbf{R}^{m+1}$ altéren egy relációt úgy, hogy $p, q\in\mathbf{R}^{m+1}-\{0\}$ relációban állnak, ha létezik egy $t\in\mathbf{R}-\{0\}$ szám, amelyre $t\cdot p=q$. Ez a reláció ekvivalencia és így az $\mathbf{R}^{m+1}-\{0\}$ tér egy $\mathbf{R}P^m$-mel jelölt topologikus faktorterét definiálja. Jelölje $\pi\colon \mathbf{R}^{m+1}-\{0\}\to\mathbf{R}P^m$ a természetes projekciót és $i=1, \ldots, \ldots, m+1$ esetén legyen $U_i=\{\pi(p)\in\mathbf{R}P^m \mid p\in\mathbf{R}^{m+1}$ és $p_i\neq 0\}$. Jelölje $x_i\colon U_i\to\mathbf{R}^m$ azt a leképezést, amelyre $x_i(\pi(p))=\frac{1}{p_i}(p_1, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, P_{m+1})$, ahol a $\hat{}$ azt jelenti, hogy az alatta álló komponens kimarad. Ekkor x_i jóldefiniált leképezés és az $\mathscr{A}=\{(U_i, x_i) \mid i=1, \ldots, m+1\}$ halmazzal, mint atlasszal, $\mathbf{R}P^m$ differenciálható sokasággá válik. $\mathbf{R}P^m$ a *valós m-dimenziós projektív tér*.

(d) Ha M differenciálható sokaság valamely $\mathscr{A}=\{(U_\alpha, x_\alpha) \mid \alpha\in\mathscr{I}\}$ atlasszal és $U\subset M$ nyílt altér, akkor U differenciálható sokaság az $\mathscr{A}_U=\{(U_\alpha\cap U, x_\alpha|U) \mid \alpha\in\mathscr{I}\}$ atlasszal, U az M *nyílt differenciálható részsokasága*.

(e) Ha M, ill. M' differenciálható sokaságok $\mathscr{A}=\{(U_\alpha, x_\alpha) \mid \alpha\in\mathscr{I}\}$, ill. $\mathscr{A}'=\{(U'_\beta, x'_\beta) \mid \beta\in\mathscr{I}'\}$ atlaszokkal, akkor az $M\times M'$ topologikus szorzattér differenciálható sokaság a $\mathscr{C}=\{(U_\alpha\times U'_\beta, x_\alpha\times x'_\beta) \mid \alpha\in\mathscr{I}$ és $\beta\in\mathscr{I}'\}$ atlasszal. $M\times M'$ az M és M' differenciálható sokaságok *szorzata*. Speciálisan $\mathbf{T}^m=S^1\times\ldots\times S^1$ (m-szer) az *m-dimenziós tórusz*.

Legyen M topologikus sokaság az $\mathscr{A}$ és $\mathscr{A}'$ differenciálható atlaszokkal. Az $\mathscr{A}$ és $\mathscr{A}'$ atlaszok *ekvivalensek*, ha $\mathscr{A}\cup\mathscr{A}'$ differenciálható atlasz. A Zorn lemma egyszerű következménye, hogy minden atlasz benne van egy a tartalmazásra nézve maximális atlaszban. A továbbiakban, hacsak mást nem írunk, egy atlasz megadásával az őt tartalmazó maximális atlaszt is adottnak képezjük. A VII. rész 3. fejezetében bebizonyítjuk, hogy a 7-dimenziós gömbön van olyan differenciálható atlasz, amely nem ekvivalens a (2.2) (c) példájában adott differenciálható atlasszal. A továbbiakban, ha nem vezet félreértéshez, az $(M, \mathscr{A})$ pár helyett az M jelölést használjuk. Ha a differenciálható sokaság fenti definíciójában $\mathbf{R}$ helyett a komplex számok $\mathbf{C}$ terét vesszük és az $x_\beta x_\alpha^{-1}$ és $x_\alpha x_\beta^{-1}$ leképezések differenciálhatóságát komplex értelemben használjuk, akkor a *komplex sokaság*ok fogalmához jutunk el.

(2.3) Példák. (a) A (2.2) (a) példájához hasonlóan $\mathbf{C}^m$ komplex m-dimenziós sokaság.

(b) A (2.2) (c) példájához hasonlóan a $\mathbf{C}^{m+1}-\{0\}\subset\mathbf{C}^{m+1}$ altéren definiálhatunk egy relációt úgy, hogy a $p, q\in\mathbf{C}^{m+1}-\{0\}$ pontok pontosan akkor állnak relációban, ha létezik egy $z\in\mathbf{C}-\{0\}$ szám, amelyre $z\cdot p=q$. Ez a reláció ekvivalencia és így a $\mathbf{C}^{m+1}-\{0\}$ tér egy $\mathbf{C}P^m$-mel jelölt topologikus faktorterét definiálja. A fentivel analóg módon kapjuk, hogy $\mathbf{C}P^m$ komplex m-dimenziós sokaság. $\mathbf{C}P^m$ a *komplex m-dimenziós projektív tér*.

(c) Komplex sokaságok szorzata, ill. nyílt altere komplex sokasággá tehető.

(d) Ha M komplex m-dimenziós sokaság, akkor a $\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$ azonosítással M tekinthető $(2m)$-dimenziós differenciálható sokaságnak is.

Legyenek M és M' differenciálható sokaságok és $f\colon M\to M'$ leképezés. Az f leképezés a $p\in M$ pontban *differenciálható*, ha létezik az M, ill. M' atlaszának olyan (U, x), ill. (U', x') lokális térképe, hogy $p\in U$, ill. $f(p)\in U'$ teljesülnek és emellett az $x' f x^{-1}$ leképezés az $x(p)$ pontban C^∞-osztályú.

Az $f\colon M\to M'$ leképezés *differenciálható*, ha az M minden pontjában differenciálható. Ha az $f\colon M\to M'$ leképezésnek létezik az inverze, valamint f és f^{-1} differenciálható leképezések, akkor az f leképezést *diffeomorfizmus*nak, az M és M' differenciálható sokaságokat pedig *diffeomorfak*nak nevezzük. Komplex sokaságokat használva analóg modon, a holomorf leképezés fogalmához jutunk el.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

(2.4) Példák. (a) A (2.2) utáni megjegyzés szerint a 7-dimenziós gömbön, mint topologikus sokaságon vannak olyan differenciálható atlaszok, amelyekből származó differenciálható sokaságok nem diffeomorfak. Egyúttal példát kapunk olyan differenciálható sokaságokra, amelyek homeomorfak, de nem diffeomorfak.

(b) A (2.2) (c), ill. (2.3) (b) példában definiált lokális térkép segítségével egyszerűen adódik, hogy $\mathbf{R}P^1$ és S^1 diffeomorfak ill. $\mathbf{C}P^1$, mint 2-dimenziós differenciálható sokaság, és S^2 diffeomorfak.

Legyen M m-dimenziós differenciálható sokaság. Egy $\mu\colon M\to\mathbf{R}$ differenciálható leképezést az M sokaságon értelmezett *differenciálható függvény*nek nevezünk és az általuk alkotott gyűrűre az $\mathscr{F}(M)$ jelölést használjuk. Komplex esetben a holomorf függvény elnevezést használjuk.

(2.5) Példa. Ha M kompakt komplex sokaság, akkor a maximum tétel miatt az M sokaságon értelmezett holomorf függvények állandók.

Legyen p az M differenciálható sokaság egy pontja. Egy $X_p\colon \mathscr{F}(M)\to\mathbf{R}$ leképezést az M differenciálható sokaság p pontbeli *tangensvektor*ának nevezünk, ha $t, t'\in\mathbf{R}$ és $\mu, \mu'\in\mathscr{F}(M)$ esetén $X_p(t\mu+t'\mu')=tX_p(\mu)+t'X_p(\mu')$ és $X_p(\mu\cdot\mu')=X_p(\mu)\mu'(p)+\mu(p)X_p(\mu')$ teljesülnek. A p pontbeli tangensvektorok által alkotott $T_p(M)$ lineáris tér az M differenciálható sokaság p pont feletti *tangenstere*.

Legyen (U, x) az M olyan lokális térképe, amelyre $x(U)\subset\mathbf{R}^m$ az origó középpontú egységnyi sugarú nyílt golyó és $x(p)=0$. Ekkor $\mu\in\mathscr{F}(M)$ esetén a Taylor formulát a $\tilde{\mu}=\mu x^{-1}$ függvényre alkalmazva kapjuk, hogy $\tilde{\mu}=\tilde{\mu}(0)+\sum_{i=1}^{m}\pi_i\cdot\tilde{\mu}_i$, ahol $\tilde{\mu}_i\colon x(U)\to\mathbf{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre $\tilde{\mu}_i(0)=(\partial_i\tilde{\mu})(0)$ és $\pi_i\colon \mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ az i-edik koordinátatengelyre képező projekció. A fenti egyenlőségből $\mu=\mu(p)+\sum_{i=1}^{m}x^i\cdot\mu_i$ adódik, ahol $x^i=\pi_i x$ és $\mu_i=\tilde{\mu}_i x$. Ha most X_p egy p pontbeli tangensvektor, akkor

$$X_p(\mu)=\sum_{i=1}^{m}X_p(x^i)\cdot\mu_i(p)=\sum_{i=1}^{m}X_p(x^i)\big(\partial_i(\mu x^{-1})\big)\big(x(p)\big),$$

hiszen $x^i(p)=0$. Ha $i=1, \ldots, m$ esetén $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\colon \mathscr{F}(M)\to\mathbf{R}$ az a p pontbeli tangensvektor, amelyre $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)(\mu)=\big(\partial_i(\mu x^{-1})\big)\big(x(p)\big)$, akkor kapjuk, hogy $X_p=\sum_{i=1}^{m}X_p(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. Másrészt $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)(x^j)=\delta_i^j$, $i, j=1, \ldots, m$, azaz a $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\in T_p(M)$ pontbeli tangensvektorok a p pont feletti tangenstér egy bázisát alkotják. Speciálisan, $\dim T_p(M)=m$ következik.

Legyen $I\subset\mathbf{R}$ nyílt intervallum. Egy $\gamma\colon I\to M$ differenciálható leképezést *differenciálható görbé*nek nevezünk. $t\in I$ és $\gamma(t)=p\in M$ esetén legyen $\dot{\gamma}(t)\in T_p(M)$ az a tangensvektor, amelyre $\dot{\gamma}(t)(\mu)=(\mu\gamma)^{\cdot}(t)$, $\mu\in\mathscr{F}(M)$. $\dot{\gamma}(t)$ a γ differenciálható görbe *érintővektor*a a $p\in M$ pontban. A fentiekből egyszerűen következik, hogy minden X_p p pontbeli tangensvektorhoz létezik olyan differenciálható görbe, amelynek érintővektora X_p. Az M differenciálható sokaság *tangensnyalább*ja a $T(M)=\bigcup\{T_p(M)\,|\,p\in M\}$ egyesítés. Jelölje $\pi\colon T(M)\to M$ azt a leképezést, amely az $X_p\in T_p(M)$ p pontbeli tangensvektorhoz a p pontot rendeli. Az alábbiakban a $T(M)$ tangensnyalábon egy differenciálható atlaszt értelmezünk. Legyen (U, x) az M differenciálható sokaság lokális térképe. A $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, $i=1, \ldots, m$, tangensvektorok minden $p\in U$

pont esetén értelmezettek és bázist alkotnak. Legyen $\tilde{x}$: $\pi^{-1}(U) \to x(U) \times \mathbf{R}^m$ az a leképezés, amelyre $X_p \in T_p(M)$, $p \in U$, esetén $\tilde{x}(X_p) = (x(p), X_p(x^1), \ldots, X_p(x^m))$. Ekkor $\tilde{x}$ bijekció és $\tilde{x}|T_p(M)$: $T_p(M) \to \{x(p)\} \times \mathbf{R}^m$ vektortér izomorfizmus. Lássuk el a $T(M)$ tangensnyalábot azzal a topologiával, amelyre az $\tilde{x}$ leképezések homeomorfizmusok. Ekkor $T(M)$ megszámlálható bázisú Hausdorff tér és a $(\pi^{-1}(U), \tilde{x})$ alakú párok $T(M)$ egy differenciálható atlaszát definiálják. Emellett π differenciálható leképezés. Egy X: $M \to T(M)$ differenciálható leképezést az M differenciálható sokaság *vektormezőjének* nevezzük, ha $\pi X = \mathrm{id}_M$. Az M vektormezőinek $\mathfrak{X}(M)$ halmaza egy $\mathcal{F}(M)$-modulus (a pontonkénti összeadásra és szorzásra nézve).

(2.6) Példa. Ha ismét (U, x) jelöli az M differenciálható sokaság egy lokális térképét, akkor az $U \subset M$ nyílt részsokaságon $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ vektormező, $i = 1, \ldots, m$, és minden $X \in \mathfrak{X}(U)$ vektormező előáll $X = \sum_{i=1}^{m} X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ alakban, ahol $X^i \in \mathcal{F}(U)$. A $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ vektormezők az (U, x) lokális térkép *bázismezői*.

Legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező. Egy γ: $I \to M$ differenciálható görbe az X vektormező *integrálgörbéje*, ha $t \in I$ esetén $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$ teljesül. Ha (U, x) az M sokaság lokális térképe, akkor az előbbi egyenlőségből $(x^i \gamma)^{\cdot} = (X_t x^{-1})(x^1 \gamma, \ldots, x^m \gamma)$, $i = 1, \ldots, m$, adódik, ami nem más, mint egy m egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszer az $x^i \gamma$, $i = 1, \ldots, m$, ismeretlenekre. A differenciálegyenlet-rendszerekre vonatkozó egzisztencia és unicitástétel, valamint a megoldások kezdeti értékeitől való differenciálható függésre vonatkozó tétel szerint tetszőleges pontnak van $U \subset M$ nyílt környezete és létezik $\varepsilon > 0$ szám valamint τ: $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ differenciálható leképezés úgy, hogy a következő feltételek teljesülnek:

(i) $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ esetén $\tau(t, .)$: $U \to \tau(t, U)$ diffeomorfizmus,
(ii) $t, t', t + t' \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ és $p, \tau(t', p) \in U$ esetén $\tau(t + t', p) = \tau(t, \tau(t', p))$,
(iii) $p \in U$ esetén $\tau(., p)$: $(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ az X vektormező integrálgörbéje.

A τ leképezést az X vektormező által indukált *lokális egyparaméteres transzformációcsoport*nak nevezzük. Ha M kompakt, akkor legyenek U_j és ε_j, $j = 1, \ldots, r$, úgy választva, hogy az $U_j \subset M$ nyílt halmazra és az ε_j pozitív számra teljesüljön a fenti három tulajdonság és $M = \bigcup \{U_j | j = 1, \ldots, r\}$. Ha $\varepsilon = \min \{\varepsilon_j | j = 1, \ldots, r\} > 0$, akkor $\tau(t, .)$ minden $|t| < \varepsilon$ esetén értelmezett az egész M-en. $t \in \mathbf{R}$ esetén $t = k \cdot \dfrac{\varepsilon}{2} + t'$, ahol $k \in \mathbf{Z}$ és $|t'| < \varepsilon$. Legyen ekkor $\tau(t, .) = \left(\tau\left(\dfrac{\varepsilon}{2}, .\right)\right)^k \tau(t', .)$. Ezzel egy olyan τ: $\mathbf{R} \times M \to M$ differenciálható leképezést kaptunk, amelyre $\tau(t, .)$: $M \to M$, $t \in \mathbf{R}$, diffeomorfizmus, $\tau(t + t', p) = \tau(t, \tau(t', p))$ érvényes $t, t' \in \mathbf{R}$ és $p \in M$ esetén, valamint $\tau(., p)$: $\mathbf{R} \to M$ az X vektormező integrálgörbéje. A τ leképezést az X által indukált *egyparaméteres transzformációcsoport*nak nevezzük. Ha M nem kompakt, de egy közös $\varepsilon > 0$ szám választható minden U környezetre, akkor a fenti kiterjesztés szintén egy τ egyparaméteres transzformációcsoportot szolgáltat. Ebben az esetben az X vektormezőt *teljes*nek nevezzük.

(2.7) Példa. Legyen $\dfrac{\partial}{\partial t}$ az $\mathbf{R}$ számegyenes azon bázismezője, amely az $(\mathbf{R}, \mathrm{id}_{\mathbf{R}})$ lokális térképhez tartozik. Ekkor a $\dfrac{\partial}{\partial t}$ vektormező megszorítása valamely $I \subset \mathbf{R}$ véges nyílt intervallumra az I nyílt részsokaságon nem teljes vektormező.

Ha X az M differenciálható sokaság egy vektormezője, akkor X egy $\mu\in\mathscr{F}(M)$ differenciálható függvényhez egy $X(\mu)$ differenciálható függvényt rendel az $X(\mu)(p)=$ $=X_p(\mu)$, $p\in M$, megállapodással. Így $X\colon \mathscr{F}(M)\to\mathscr{F}(M)$ olyan leképezés, amelyre $X(t\mu+t'\mu')=tX(\mu)+t'X(\mu')$ és $X(\mu\mu')=X(\mu)\mu'+X(\mu')\mu$ teljesülnek. Két vektormező kompozíciója általában nem vektormező. Viszont egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy $X, Y\in\mathfrak{X}(M)$ esetén az $XY-YX\colon \mathscr{F}(M)\to\mathscr{F}(M)$ leképezés vektormező. Ezt a vektormezőt az X és Y vektormezők *Lie szorzat*ának nevezzük és az $[X, Y]=XY-YX$ jelölést alkalmazzuk. Ezzel egy $[\,,]\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ szorzásműveletet értelmeztünk, amelyre érvényesek a következők:

(i) $[X, Y]=-[Y, X]$, $X, Y\in\mathfrak{X}(M)$, azaz a Lie szorzás antikommutatív,
(ii) $[tX+t'X', Y]=t[X, Y]+t'[X', Y]$, ahol $t, t'\in\mathbf{R}$ és $X, X', Y\in\mathfrak{X}(M)$,
(iii) A Lie szorzás nem asszociatív, viszont az asszociativitást helyettesíti a következő *Jacobi azonosság:*

$$[[X, Y], Z]+[[Z, X], Y]+[[Y, Z], X]=0,\ X, Y, Z\in\mathfrak{X}(M).$$

Tehát $\mathfrak{X}(M)$ tekinthető egy valós vektortérnek, ellátva a $[\,,]$ Lie szorzással.

Legyen most M komplex m-dimenziós sokaság. Ha (U, z) egy lokális térképe az M komplex sokaságnak, akkor a $z\colon U\to\mathbf{C}^m$ leképezés komplex komponensei $z^1=\pi_1 z, \ldots, z^m=\pi_m z$, ahol $\pi_j\colon \mathbf{C}^m\to\mathbf{C}$ a j-edik tényezőre képező projekció. Szétválasztva a valós és képzetes részeket, $z^j=x^j+iy^j$ adódik, azaz az M-nek, mint $(2m)$-dimenziós differenciálható sokaságnak, egy $(U, (x^1, y^1, x^2, y^2, \ldots, x^m, y^m))$ lokális térképét kapjuk. $p\in U$ esetén $T_p(M)$ $(2m)$-dimenziós valós vektortér. Az a leképezés, amely egy $X_p\in T_p(M)$ tangensvektorhoz az

$$(X_p(x^1)+iX_p(y^1), \ldots, X_p(x^m)+iX_p(y^m))\in\mathbf{C}^m$$

vektort rendeli a $T_p(M)$ vektortér és $\mathbf{C}^m$, mint valós vektortér között egy izomorfizmust szolgáltat. Ennek az izomorfizmusnak a segítségével $T_p(M)$ komplex m-dimenziós vektortérré tehető. A $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ és $\dfrac{\partial}{\partial y^j}$ bázismezők, $j=1, \ldots, m$, a p pont feletti $T_p(M)$ tangenstér valós bázisát adják a p pontban. A $T_p(M)$ és $\mathbf{C}^m$ vektorterek fenti izomorfizmusa alapján $i\dfrac{\partial}{\partial y^j}=-\dfrac{\partial}{\partial x^j}$. A differenciálható sokaságok tangensnyalábjának vizsgálatával analóg módon igazolható, hogy ha M komplex m-dimenziós sokaság és (U, z) lokális térkép, akkor az analóg módon értelmezett $\tilde{z}\colon \pi^{-1}(U)\to$ $\to z(U)\times\mathbf{C}^m$ leképezés segítségével $T(M)$ komplex $(2m)$-dimenziós sokasággá tehető és $\pi\colon T(M)\to M$ holomorf leképezés. Emellett $\tilde{z}|T_p(M)\colon T_p(M)\to\{z(p)\}\times\mathbf{C}^m$ komplex vektorterek izomorfizmusa.

Legyenek M és M' differenciálható sokaságok és $f\colon M\to M'$ differenciálható leképezés. Ha $X_p\in T_p(M)$, akkor legyen $f_*(X_p)\in T_{f(p)}(M')$ az a tangensvektor, amelyre $\mu\in\mathscr{F}(M')$ esetén $(f_*(X_p))(\mu)=X_p(\mu f)$. Ezzel egy $f_*\colon T_p(M)\to T_{f(p)}(M')$ lineáris leképezést értelmeztünk. Ha $\gamma\colon \mathbf{R}\to M$ differenciálható görbe és $\gamma(0)=p$, akkor $f_*\dot{\gamma}(0)=(f\gamma)^{\cdot}(0)$. Ez az f_* leképezés kiterjeszthető egy $f_*\colon T(M)\to T(M')$ differenciálható leképezéssé. Az f_* leképezést az f által *indukált leképezés*nek nevezzük.

Az $f\colon M\to M'$ leképezést *immerzió*nak nevezzük, ha $p\in M$ esetén az $f_*\colon T_p(M)\to$ $\to T_{f(p)}(M')$ lineáris leképezés injektív. Lokális térképeket használva és az implicit függvényrendszerre vonatkozó tételt alkalmazva egyszerűen adódik, hogy az $f\colon$ $M\to M'$ differenciálható leképezés pontosan akkor immerzió, ha minden $p\in M$ esetén létezik egy (U, x) lokális térkép, $p\in U$, és egy $(U' x')$ lokális térkép, $f(p)\in U'$, úgy, hogy $x^i=x'^i f$, $i=1, \ldots, m$, és $x'^j f=0$, $j=m+1, \ldots, m'$, ahol $m=\dim M$ és $m'=\dim M'$.

(2.8) Példa. Az az $f\colon S^1 \to \mathbf{R}^2$ leképezés, amelyre $f(e^{it}) = (t, \sqrt{2\cos(2t)})$, ahol $\mathbf{R}^2$-en a polárkoordinátákat használjuk, a körív immerziója a síkba. A körív képe a *lemniszkátagörbe*, amelynek az origóban kettőspontja van. Így egy immerzió nem feltétlenül injektív leképezés.

Az $f\colon M \to M'$ leképezést *beágyazás*nak nevezzük, ha immerzió és injektív. Ebben az esetben az $f(M) \subset M'$ részhalmazt az M' differenciálható sokaság *részsokaság*ának nevezzük, ha az $f(M)$-en olyan differenciálható atlasz adott, amelyre $f\colon M \to f(M)$ diffeomorfizmus. Speciálisan, ha $M \subset M'$ egy részhalmaz és az M-en adott egy differenciálható atlasz, akkor $M \subset M'$ részsokaság pontosan akkor, ha az $i\colon M \subset M'$ tartalmazás beágyazás.

(2.9) Példák. (a) Tekintsük a $\mathbf{T}^m$ m-dimenziós tóruszt és azt az $\mathrm{Exp}\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{T}^m$ leképezést, amelyre $\mathrm{Exp}(p^1, \ldots, p_m) = (e^{ip_1}, \ldots, e^{ip_m}) \in \mathbf{T}^m$. Kronecker egy számelméleti tétele szerint, [2], 380. old., létezik olyan $p \in \mathbf{R}^m$, hogy az $\{\mathrm{Exp}(np) \in \mathbf{T}^m \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{T}^m$ altér sűrű. Jelölje $\mathbf{R}p \subset \mathbf{R}^m$ azt az egyenest, amely áthalad az origón és a p ponton. $m > 1$ esetén az $f = \mathrm{Exp} \mid \mathbf{R}_p$ leképezés beágyazás, ha az $f(\mathbf{R}p) \subset \mathbf{T}^m$ részhalmazon azt a differenciálható atlaszt adjuk meg, amelyre $f\colon \mathbf{R}p \to f(\mathbf{R}p)$ diffeomorfizmus. Az $f(\mathbf{R}p) \subset \mathbf{T}^m$ részhalmazon indukált altér topológiára és az $\mathbf{R}p$ euklidészi topológiájára az $f\colon \mathbf{R}p \to f(\mathbf{R}p)$ leképezés nem lesz homeomorfizmus. Így egy differenciálható sokaság részsokaságán adott topológia általában különbözik az altértopológiától.

(b) Legyen $f\colon \mathbf{R}P^m \to \mathbf{R}^{(m+1)^2}$ az az leképezés, amely egy $p \in \mathbf{R}^{m+1} - \{0\}$ ponthoz tartozó ekvivalenciaosztályhoz a $\left(\frac{p_i p_j}{\|p\|^2}\right)_{i,j=1}^{m+1} \in \mathbf{R}^{(m+1)^2}$ mátrixot rendeli. Ekkor f az $\mathbf{R}P^m$ beágyazása $\mathbf{R}^{(m+1)^2}$-be és e beágyazás képe mindazon $A \in \mathbf{R}^{(m+1)^2}$ mátrixokból áll, amelyek nyoma 1 és $A \cdot A = A$.

(c) $S^m \subset \mathbf{R}^{m+1}$ részsokaság.

Whitney egy tétele szerint ha M kompakt m-dimenziós differenciálható sokaság, $m > 1$, akkor létezik egy $f\colon M \to \mathbf{R}^{2m-1}$ immerzió és létezik egy $g\colon M \to \mathbf{R}^{2m}$ beágyazás, [7]. Az V. rész 2. fejezetében megmutatjuk, hogy az immerzióra vonatkozó tétel éles, pontosabban azt, hogy ha az $\mathbf{R}P^{2^r}$ projektív térnek van immerziója $\mathbf{R}^m$-be, akkor $m \geqq 2^{r+1} - 1$.

A fejezet hátralevő részében a Lie csoportok és Lie transzformációcsoportok néhány elemi tulajdonságát írjuk le. Legyen G egy csoport és jelölje $\pi\colon G \times G \to G$, ill. $\iota\colon G \to G$ a szorzás, ill. az inverzképzés műveletét. Ha a G halmazon adott egy topológia, amelyre nézve π és ι folytonos leképezések, akkor G-t *topologikus csoport*nak nevezzük. $g \in G$ esetén legyen $L_g\colon G \to G$, ill. $R_g\colon G \to G$ az a leképezés, amelyre $L_g(g') = gg'$, ill. $R_g(g') = g'g$, $g' \in G$, teljesül. Ekkor L_g, ill. R_g a g elemmel való *bal-*, ill. *jobboldali eltolás*. Ezek a leképezések homeomorfizmusok.

Legyen G topologikus csoport. Ha ezenfelül G topologikus sokaság és G-n adott egy differenciálható atlasz, amelyre π és ι differenciálható leképezések, akkor G-t *Lie csoport*nak nevezzük. Akkor a bal- és jobbeltolások diffeomorfizmusok.

(2.10) Példa. Az $\mathbf{R}$ számegyenes a $\pi(t, t') = \sqrt[3]{t^3 + t'^3}$ szorzásművelettel topologikus csoport, de nem Lie csoport.

(2.11) Példák. (a) $\mathbf{R}^m$ az összeadásra nézve Lie csoport.

(b) Az 1 abszolútértékű komplex számok multiplikatív csoportja Lie csoport

(c) Az 1 normájú kvaterniók $S^3 \subset \mathbf{H} = \mathbf{R}^4$ multiplikatív csoportja Lie csoport.

(d) Jelölje $GL(m, \mathbf{R})$ az $(m\times m)$-es valós elemű nemszinguláris mátrixok csoportját. Azonosítva az összes $(m\times m)$-es mátrixok terét $\mathbf{R}^{m^2}$-tel, a determináns egy det: $\mathbf{R}^{m^2}\to\mathbf{R}$ differenciálható leképezést indukál. Az előbbi azonosítással $GL(m, \mathbf{R})\subset \subset\mathbf{R}^{m^2}$ az a nyílt részsokaság, amelyen a det függvény nem tűnik el. Így a $GL(m, \mathbf{R})$ csoporton egy differenciálható sokaság struktúrát adtunk meg. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ezzel $GL(m, \mathbf{R})$ Lie csoporttá válik. A $GL(m, \mathbf{R})$ Lie csoportot *általános lineáris csoport*nak nevezzük.

(e) Ha G és G' Lie csoportok, akkor a $G\times G'$ direkt szorzaton természetes módon Lie csoport struktúra értelmezhető. Speciálisan a $\mathbf{T}^m$ m-dimenziós tórusz Lie csoport. Legyen G Lie csoport. Egy $H\subset G$ részcsoportot a G Lie csoport *Lie részcsoport*jának nevezzük, ha H-n adott egy differenciálható sokaság struktúra úgy, hogy $H\subset G$ részsokaság és H maga is Lie csoport a G csoportstruktúrájából öröklött műveletre nézve.

(2.12) Példák. (a) A $\mathbf{C}\subset\mathbf{H}$ tartalmazás egy $S^1\subset S^3$ tartalmazást definiál. Ekkor S^1 Lie részcsoportja S^3-nak.

(b) Az $(m\times m)$-es valós elemű ortogonális mátrixok $O(m)$ multiplikatív csoportja a $GL(m, \mathbf{R})$ általános lineáris csoport Lie részcsoportja. A $GL(m, \mathbf{R})\subset\mathbf{R}^{m^2}$ beágyazásnál ugyanis az $O(m)\subset GL(m, \mathbf{R})$ részcsoport $\mathbf{R}^{m^2}$ azon részsokaságára képződik, amelyet az $x^{(i-1)m+1}x^{(j-1)m+1}+\ldots+x^{im}x^{jm}=\delta_{ij}$, $i, j=1, \ldots, m$, egyenletrendszer határoz meg. Így $O(m)\subset GL(m, \mathbf{R})$ differenciálható részsokaság. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $O(m)$ csoport szorzás, ill. inverzképzés művelete erre a differenciálható sokaság struktúrára nézve differenciálható azaz $O(m)$ Lie csoport. Egyúttal az is adódik, hogy $\dim O(m)=m^2-\binom{m}{1}-\binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2}$. Az $O(m)$ Lie csoportot *ortogonális csoport*nak nevezzük.

(c) A det: $O(m)\to\mathbf{R}$ leképezés ± 1 értékeket vesz fel. Legyen $SO(m)\subset O(m)$ az a nyílt részcsoport, amely az 1 determinánsú ortogonális mátrixokból áll.

Az $SO(m)$ Lie csoportot *speciális ortogonális csoport*nak nevezzük.

Legyenek G és G' topologikus csoportok. Egy f: $G\to G'$ homomorfizmus topologikus csoportok homomorfizmusa ha f folytonos. Ha G és G' Lie csoportok, akkor az f: $G\to G'$ homomorfizmus Lie csoportok homomorfizmusa, ha f differenciálható leképezés. A monomorfizmus, epimorfizmus és automorfizmus fogalmak hasonló módon definiálhatók. A továbbiakban, ha nem vezet félreértéshez, Lie részcsoport, Lie csoportok homomorfizmusa, stb. kifejezések helyett egyszerűen a részcsoport, homomorfizmus, stb. terminusokat használjuk.

(2.13) Példa. A (2.9) (a) példájában definiált Exp: $\mathbf{R}^m\to\mathbf{T}^m$ leképezés homomorfizmus.

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy homomorfizmus magja és képe részcsoportok. Legyen G Lie csoport. Egy $X\in\mathfrak{X}(G)$ vektormezőt *balinvariáns*nak nevezünk, ha $g, g'\in G$ esetén $(L_{g'})_* X_g=X_{g'g}$ teljesül. A jobbinvariáns vektormező fogalma analóg módon definiálható. Ha X és X' balinvariáns vektormezők és $t, t'\in\mathbf{R}$, akkor $tX+t'X'$ és $[X, X']$ balinvariáns vektormezők. A G Lie csoport $\mathfrak{g}$ *Lie algebrája* a balinvariáns vektormezők által meghatározott valós vektortér, ellátva a $[\ ,\ ]$ Lie szorzással, amely korábbi megjegyzésünk szerint antikommutatív és teljesíti a Jacobi azonosságot. Ha 1 jelöli a G egységelemét és $X_1\in T_1(G)$ adott tangensvektor, akkor létezik pontosan egy $X\in\mathfrak{g}$, amelynek az 1 pontbeli tangensvektora X_1. Valóban, $g\in G$ esetén legyen $X_g=(L_g)_* X_1$. Ekkor X balinvariáns és egyszerűen megmutatható, hogy X differenciálható. Így kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn a G Lie

csoport $\mathfrak{G}$ Lie algebrájának elemei és a $T_1(G)$ 1 pont feletti tangenstér tangensvektorai között. Speciálisan, $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

Legyen G Lie csoport $\mathfrak{g}$ Lie algebrával. $X \in \mathfrak{g}$ esetén jelölje τ az X által indukált lokális egyparaméteres transzformációcsoportot. Ekkor $\tau(t, 1) \in G$ definiált $|t| < \varepsilon$ esetén, $\varepsilon > 0$. Egyszerű számolással megmutatható, hogy X balinvarianciájából a $\tau(t, .)$ és L_g, $g \in G$, leképezések felcserélhetősége következik. Így $g \in G$ esetén $L_g(\tau(t, 1)) = \tau(t, g)$ definiált, ahol $|t| < \varepsilon$. Kaptuk, hogy az ε szám univerzálisan választható, azaz X egyparaméteres transzformációcsoportot indukál G-n. Legyen a: $\mathbf{R} \to G$, $a(t) = \tau(t, 1)$. Ekkor a homomorfizmus, amelyet az X balinvariáns vektormező *egyparaméteres részcsoportjának* nevezünk. Ekkor $\dot{a}(0) = X_1$. Definiáljuk az Exp: $T_1(G) \to G$ leképezést a következő módon:

$X_1 \in T_1(G)$ esetén jelölje X az X_1 tangensvektornak megfelelő balinvariáns vektormezőt és legyen a az X balinvariáns vektormező egyparaméteres részcsoportja. Legyen ekkor $\mathrm{Exp}(X_1) = a(1) \in G$. Egyszerűen adódik, hogy $\mathrm{Exp}(tX_1) = a(t)$ teljesül $t \in \mathbf{R}$ esetén. Az Exp: $T_1(G) \to G$ leképezést a G Lie csoport *exponenciális leképezésének* nevezzük. A $T_1(G)$ tangenstér, mint differenciálható sokaság, $0 \in T_1(G)$ pontbeli tangensterét $T_1(G)$-vel azonosítva kapjuk, hogy Exp: $T_1(G) \to T_1(G)$ identitás, hiszen $\mathrm{Exp}_*(X_1) = (\mathrm{Exp}(tX_1))'_{t=0} = \dot{a}(0) = X_1$. Az inverz függvényrendszerre vonatkozó tétel alkalmazásával adódik, hogy létezik a $0 \in T_1(G)$ elemnek egy U nyílt környezete és létezik az $1 \in G$ elemnek egy U' nyílt környezete úgy, hogy $\mathrm{Exp}\,|U$: $U \to U'$ diffeomorfizmus.

(2.14) Példák. (a) A $\mathbf{T}^m$ m-dimenziós tórusz Lie algebrája $\mathbf{R}^m$ az azonosan zérus Lie szorzással, az exponenciális leképezés pedig a (2.9) (a) példájában definiált Exp: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{T}^m$ leképezés.

(b) A $GL(m, \mathbf{R})$ általános lineáris csoport a (2.11) (d) példa szerint $\mathbf{R}^{m^2}$ egy nyílt alterével azonosítható. Legyen $M(m) = \mathbf{R}^{m^2}$ az összes $(m \times m)$-es mátrixokból álló valós vektortér ellátva a kommutátorral, mint Lie szorzással. $A \in M(m)$ esetén tekintsük az a: $t \mapsto e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \in GL(m, \mathbf{R})$ egyparaméteres részcsoport $1 \in GL(m, \mathbf{R})$ pontbeli $\bar{A}_1 \in T_1(GL(m, \mathbf{R}))$ érintővektorát. Így az $A \mapsto \bar{A}_1$ hozzárendeléssel egy $M(m) \to T_1(GL(m, \mathbf{R}))$ lineáris izomorfizmust kapunk. Ennek a leképezésnek a $T_1(GL(m, \mathbf{R})) \to \mathfrak{gl}(m, \mathbf{R}) (= GL(m, \mathbf{R})$ Lie algebrája), $\bar{A}_1 \to \bar{A}$ izomorfizmussal való kompozíciója egy $M(m) \to \mathfrak{gl}(m, \mathbf{R})$ lineáris izomorfizmust szolgáltat. Igazolni fogjuk, hogy ez a lineáris izomorfizmus Lie algebra izomorfizmus is egyben, azaz hogy $A, B \in M(m)$ esetén $\overline{[A, B]} = [\bar{A}, \bar{B}]$ teljesül. Ennek igazolásához szükségünk lesz a következő jelölésre:

Ha $U \subset \mathbf{R}^k$ nyílt halmaz és f: $U \to \mathbf{R}^l$ differenciálható leképezés, akkor $p \in U$ esetén $(Df)(p)$ jelölje az f leképezés p pontbeli Jacobi mátrixát. $k = m^2$, $U = GL(m, \mathbf{R})$ és $l = 1$ esetén

$$\bar{A}_1 f = \dot{a}(0) f = \left(a_* \frac{\partial}{\partial t}(0)\right)(f) = \frac{\partial}{\partial t}(0)(fa) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{f(e^{tA}) - f(1)\} = (Df)(1) A$$

teljesül. Legyenek most $A, B \in M(m)$ és $g \in GL(m, \mathbf{R})$. Ekkor

$$(\bar{A}\bar{B})(f)(g) = \bar{A}(\bar{B}(f))(g) = \bar{A}_1(\bar{B}(f) L_g) = (D(\bar{B}(f) L_g)(1))(A) =$$

$$= (D(\bar{B}(f))(g) D(L_g)(1))(A) = (D(\bar{B}(f))(g))(gA) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{(\bar{B}(f))(g+\operatorname{tg} A)-(\bar{B}(f))(g)\} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{\bar{B}_1(fL_{g+\operatorname{tg} A})-\bar{B}_1(fL_g)\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{(D(fL_{g+\operatorname{tg} A}))(1)B-(D(fL_g))(1)B\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{(Df(g+\operatorname{tg} A))(gB+\operatorname{tg} AB)-(Df)(g)(gB)\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{Df(g+\operatorname{tg} A)(gB)-(Df)(g)(gB)\}+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{(Df)(g+\operatorname{tg} A)(\operatorname{tg} AB)\} =$$

$$= (D^2f)(g)(gB, gA)+(Df)(g)(gAB).$$

Mivel $(D^2f)(g)$ szimmetrikus, kapjuk, hogy $[\bar{A}, \bar{B}](f)(g)=(Df)(g)(gAB-gBA)=$ $=(Df)(g)(g[A, B])=(D(fL_g)(1))([A, B])=\overline{[A, B]}_1(fL_g)=\overline{[A, B]}(f)(g)$, amivel igazoltuk, hogy az általános lineáris csoport $\mathcal{gl}(m, \mathbf{R})$ Lie algebrája izomorf az összes mátrixok Lie algebrájával, amelyben a Lie szorzás azonos a kommutátorképzéssel.

(c) Az $O(m)$ és $SO(m)$ Lie csoportok $o(m)$ Lie algebrája az $(m\times m)$-es ferdén szimmetrikus mátrixok Lie algebrájával azonos, a kommutátorképzéssel, mint Lie szorzással.

Legyenek G, ill. G' Lie csoportok $\mathfrak{g}$, ill. $\mathfrak{g}'$ Lie algebrákkal és legyen $f: G\to G'$ homomorfizmus. Ekkor az f_*: $T_1(G)\to T_1(G')$ idukált leképezés lineáris. Definiáljuk az f_*: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ leképezést a következő módon: $X\in\mathfrak{g}$ esetén legyen $f_*(X)$ az $f_*(X_1)\in T_1(G')$ tangensvektor balinvariáns kiterjesztése. f: $G\to G'$ homomorfizmus voltából egyszerűen adódik, hogy $g\in G$ esetén $f_*(X_g)=(f_*(X))_{f(g)}$. Igazoljuk most, hogy az f_* $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ lineáris leképezés Lie algebra homomorfizmus, azaz, hogy $X, Y\in\mathfrak{g}$ esetén $f_*(X, Y])=[f_*(X), f_*(Y)]$ teljesül. Valóban, $\mu\in\mathcal{F}(G)$ és $g\in G$ esetén

$$(f_*(X)(f_*(Y)(\mu)))(f(g)) = (X((f_*(Y)\mu)f))(g) = (X(Y(\mu f)))(g),$$

azaz

$$[f_*(X), f_*(Y)](\mu)(f(g)) = [X, Y](\mu f)(g) = f_*([X, Y])(\mu)(f(g)),$$

amivel igazoltuk, hogy f_*: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ Lie algebra homomorfizmus.

Ha $H\subset G$ részcsoport és i: $H\subset G$ jelöli a tartalmazást, akkor az i Exp$=$Exp i_* egyenlőségből következően i_*: $\mathfrak{H}\to\mathfrak{g}$ Lie algebrák monomorfizmusa, ahol $\mathfrak{H}$ jelöli a H Lie algebráját, azaz $\mathfrak{H}$ tekinthető a $\mathfrak{g}$ Lie algebra Lie részalgebrájának. Hasonló módon, ha f: $G\to G$ automorfizmus, akkor az f_*: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ leképezés a $\mathfrak{g}$ Lie algebra automorfizmusa. $g\in G$ esetén jelölje Ad (g): $G\to G$ a g elemmel képzett belső automorfizmust, azaz Ad $(g)(h)=ghg^{-1}$, $h\in G$. Ekkor Ad $(g)_*=$ad (g): $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}$ Lie algebra automorfizmusa. Az ad: $G\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, ad$(g, .)=$ad (g), $g\in G$, leképezést a G csoport *adjungált reprezentációjának* nevezzük.

Legyen G egy csoport és tegyük fel, hogy G-n adott egy komplex sokaság struktúra úgy, hogy a π szorzás és ι inverzképzés műveletei holomorf leképezések. Ekkor G-t *komplex Lie csoport*nak nevezzük. Ha G komplex m-dimenziós Lie csoport, akkor G komplex sokaság struktúrája helyett G $(2m)$-dimenziós differenciálható sokaság struktúráját véve alapul, a π és ι leképezések differenciálhatók, azaz G $(2m)$-dimenziós Lie csoport.

(2.15) Példák. (a) $\mathbf{C}^m$ az összeadásra nézve komplex Lie csoport.

(b) Jelölje $GL(m, \mathbf{C})$ az $(m\times m)$-es komplex elemű nemszinguláris mátrixok csoportját. A (2.11) (d) példájával analóg módon igazolható, hogy $GL(m, \mathbf{C})$ komplex Lie csoport. A $GL(m, \mathbf{C})$ Lie csoportot *komplex általános lineáris csoport*nak nevezzük. E csoport $\mathfrak{gl}(m, \mathbf{C})$ komplex Lie algebrája azonos az összes $(m\times m)$-es komples mátrixok Lie algebrájával.

(c) Az $(m\times m)$-es komplex elemű unitér mátrixok $U(m)$ csoportja Lie csoport. Az $U(m)$ Lie csoportot *unitér csoport*nak nevezzük. E csoport $u(m)$ Lie algebrája azon $X(m\times m)$-es komplex elemű mátrixokból áll, amelyekre $\bar{X}^t = -X$ teljesül.

(d) Az $(m\times m)$-es komplex elemű 1 determinánsú unitér mátrixok $SU(m)$ csoportja Lie csoport. $SU(m)$ a *speciális unitér csoport*. E csoport $su(m)$ Lie algebrája azon $X(m\times m)$-es komplex elemű, zérus nyomú mátrixokból áll, amelyekre $\bar{X}^t = -X$ teljesül.

Legyen G topologikus csoport és M topologikus tér. Egy $\tau\colon G\times M\to M$ folytonos leképezést *baloldali topologikus transzformációcsoport*nak nevezünk, ha a következő feltételek teljesülnek:

(i) $g\in G$ esetén a $\tau_g = \tau(g, .)\colon M\to M$ leképezés homeomorfizmus,

(ii) $\tau_g\tau_{g'} = \tau_{gg'}$ teljesül $g, g'\in G$ esetén.

τ *jobboldali topologikus transzformációcsoport*, ha a fentiek teljesülnek, (ii)-*t* a következő feltétellel helyettesítve:

(ii′) $\tau_g\tau_{g'} = \tau_{g'g}$, $g, g'\in G$ esetén.

Azt mondjuk, hogy a G topologikus csoport hat az M téren, ha egy $\tau\colon G\times M\to M$ topologikus transzformációcsoport adott. A τ topologikus transzformációcsoport *effektív*, ha $\tau_g = \mathrm{id}_M$ esetén $g = 1$. A τ *szabad* topologikus transzformációcsoport, ha $\tau_g(p) = p$ fennállásából $g = 1$ következik. Ha ezenfelül G Lie csoport, M differenciálható sokaság és $\tau\colon G\times M\to M$ differenciálható leképezés, akkor τ – *t Lie transzformációcsoport*nak nevezzük.

Legyen $\tau\colon G\times M\to M$ topologikus transzformációcsoport. $p\in M$ esetén a $G(p) = \{g(p)\,|\,g\in G\}\subset M$ alteret a p pontot tartalmazó *pálya*nak nevezzük. Az M tér pályákra való felbontása az M egy M/G-vel jelölt topologikus faktorterét szolgáltatja, amelyet *pályatér*nek nevezünk. Ekkor a $\tau\colon M\to M/G$ természetes projekció folytonos leképezés.

(2.16) Példák. (a) Legyen M differenciálható sokaság és X teljes vektormező M-en. Ekkor az X által indukált $\tau\colon \mathbf{R}\times M\to M$ egyparaméteres transzformációcsoport Lie transzformációcsoport. τ pontosan akkor szabad, ha nincs egypontú és körívvel homeomorf pálya.

(b) Legyen G topologikus csoport. Ekkor $\tau\colon G\times G\to G$, $\tau(g, .) = L_g$ baloldali, $\tau(g, .) = R_g$ jobboldali topologikus transzformációcsoport.

(c) $\tau\colon GL(m, \mathbf{R})\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$, $\tau(A, p) = A\cdot p$ (közönséges mátrix szorzás), $A\in GL(m, \mathbf{R})$, $p\in\mathbf{R}^m$, Lie transzformációcsoport.

(d) $\tau\colon O(m)\times S^{m-1}\to S^{m-1}$, $\tau(A, p) = A\cdot p$, $A\in O(m)$, $p\in S^{m-1}$, Lie transzformációcsoport.

(e) Legyen G Lie csoport $\mathfrak{g}$ Lie algebrával. Ekkor az $\mathrm{ad}\colon G\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ adjungált reprezentáció Lie transzformációcsoport.

Legyen $\tau\colon G\times M\to M$ *jobboldali* Lie transzformációcsoport és jelölje $\mathfrak{g}$ a G Lie algebráját. Definiálni fogunk egy $\sigma\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$ leképezést. $X\in\mathfrak{g}$ esetén $a\colon \mathbf{R}\to G$, $a(t) = \mathrm{Exp}\,(tX_1)$, $t\in\mathbf{R}$, az X által indukált egyparaméteres részcsoport. $p\in M$ esetén legyen $(\sigma(X))_p = (a(t)p)_{t=0}$. Ha $p\in M$ rögzített, akkor jelölje $\sigma_p\colon G\to M$ azt a leké-

pezést, amelyre $\sigma_p(g)=\tau_g(p)$. Ekkor $(\sigma(X))_p=(\sigma_p)_* X_1$, amiből az is adódik, hogy σ: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$ lineáris leképezés. Igazoljuk most, hogy σ Lie algebra homomorfizmus. Ehhez először egy definíciót bocsátunk előre. Legyenek M és M' differenciálható sokaságok és f: $M\to M'$ differenciálható leképezés. Az $A\in\mathfrak{X}(M)$ és $A'\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezőket *f-kapcsolt*aknak nevezzük, ha $p\in M$ esetén $f_*A_p=A'_{f(p)}$. Egyszerűen megmutatható, hogy ha A, $B\in\mathfrak{X}(M)$ és A', $B'\in\mathfrak{X}(M')$ esetén A és A' valamint B és B' f-kapcsoltak, akkor $[A, B]$ és $[A', B']$ is f-kapcsoltak.

Visszatérve a σ: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$ lineáris leképezés vizsgálatához, $X\in\mathfrak{g}$ esetén X és $\sigma(X)$ σ_p-kapcsoltak. Ha most X, $Y\in\mathfrak{g}$, akkor a fenti megjegyzés szerint $\sigma([X, Y])_p=(\sigma_p)_*[X, Y]_1=[\sigma(X), \sigma(Y)]_p$. Mivel a $p\in M$ pontot tetszőlegesen választottuk, $\sigma([X, Y])=[\sigma(X), \sigma(Y)]$ adódik. Tehát σ: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$ Lie algebra homomorfizmus. Tegyük most fel, hogy τ: $G\times M\to M$ effektív Lie transzformációcsoport. Igazoljuk, hogy ekkor σ: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$ monomorfizmus. Valóban, ha $X\in\mathfrak{g}$ esetén $\sigma(X)$ azonosan zérus M-en, akkor az X által indukált a egyparaméteres részcsoportra $\tau_{a(t)}=\mathrm{id}_M$, azaz $a(t)=1$, amiből $X_1=\dot{a}(0)=0$ és így $X=0$ következik. Tegyük fel, hogy τ: $G\times M\to M$ szabad Lie transzformációcsoport. Ekkor $X\in\mathfrak{g}$ nemzérus elem esetén $\sigma(X)$ seholsem zérus vektormező. Valóban, ha $p\in M$ esetén $\sigma(X)(p)=0$, akkor $\tau_{a(t)}(p)=p$ miatt $a(t)=1$ és így $X=0$ következik.

3. Fibrált nyalábok

Legyen G topologikus csoport, P és M topologikus terek, π: $P\to M$ folytonos leképezés és τ: $G\times P\to P$ jobboldali szabad topologikus transzformációcsoport. A π: $P\to M$ leképezést G *struktúracsoportú topologikus principális nyaláb*nak nevezzük, ha a következő feltételek teljesülnek:

(i) M azonos a P/G pályatérrel,
(ii) P lokálisan triviális, azaz minden $p\in M$ pontnak van $U\subset M$ nyílt környezete és létezik h_U: $\pi^{-1}(U)\to U\times G$ homoemorfizmus úgy, hogy $h_U=(\pi, \varkappa)$, $\varkappa$: $\pi^{-1}(U)\to G$, és $\tau(g, u)=\varkappa(u)\cdot g$ teljesül $u\in P$ és $g\in G$ esetén.

Legyen π: $P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Ekkor a P teret *totális tér*nek, az M teret *bázistér*nek és a π leképezést *projekció*nak nevezzük. $p\in M$ esetén a $\pi^{-1}(p)\subset P$ altér homeomorf G-vel. A $\pi^{-1}(p)\subset P$ alteret a p pont feletti *fibrum*nak nevezzük.

Ha π: $P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb, G Lie csoport, P és M differenciálható sokaságok, π és τ differenciálható leképezések, továbbá (ii)-ben h_U diffeomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy π: $P\to M$ G *struktúracsoportú difierenciálható principális nyaláb.*

(3.1) Példák. (a) Tekintsük az $S^m\subset\mathbf{R}^{m+1}$ m-dimenziós euklidészi gömböt és legyen $\mathbf{Z}_2=\{-1, 1\}$ a kételemű multiplikatív csoport. Definiáljunk egy τ: $\mathbf{Z}_2\times S^m\to S^m$ leképezést úgy, hogy $\tau(1, .)=\mathrm{id}_{S^m}$ és $\tau(-1, .)=-\mathrm{id}_{S^m}$. Ekkor τ Lie transzformációcsoport és a pályatér azonosítható az $\mathbf{R}P^m$ m-dimenziós projektív térrel. Jelölje π: $S^m\to\mathbf{R}P^m$ a természetes projekciót. Az (1.2) (c) példában követett módon legyen $U_i=\{\pi(p)\in\mathbf{R}P^m | p\in S^m \text{ és } p_i\neq 0\}$, $i=1, \ldots, m+1$. Ekkor az (U_i, x_i) pár $\mathbf{R}P^m$ lokális térképe, ahol x_i: $U_i\to\mathbf{R}^m$, $x_i(\pi(p))=\dfrac{1}{p_i}(p_1, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_{m+1})$. Legyen $i=1, \ldots, m+1$ rögzített és tekintsük azt a h_{U_i}: $\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times\mathbf{Z}_2$ leképezést, amelyre $p\in\pi^{-1}(U_i)\subset S^m$ esetén $h_{U_i}(p)=(\pi(p), \operatorname{sgn} p_i)$. Ekkor h_{U_i} diffeomorfizmus. Kapjuk, hogy π: $S^m\to\mathbf{R}P^m\mathbf{Z}_2$ struktúracsoportú differenciálható principális nyaláb.

(b) Tekintsük az $S^{2m+1}=\{p=(p_1, \ldots, p_{m+1})\in \mathbf{C}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1} |p_i|^2=1\}\subset \mathbf{C}^{m+1}$ $(2m+1)$-dimenziós euklidészi gömböt és jelölje $S^1\subset \mathbf{C}$ az 1 abszolútértékű komplex számok multiplikatív csoportját. Definiáljunk egy $\tau: S^1\times S^{2m+1}\to S^{2m+1}$ leképezést úgy, hogy $z\in S^1$, $(p_1, \ldots, p_{m+1})\in S^{2m+1}$ esetén $\tau(z, (p_1, \ldots, p_{m+1}))=(zp_1, \ldots, zp_{m+1})\in S^{2m+1}$ álljon. Ekkor τ Lie transzformációcsoport és egyszerűen adódik, hogy a pályatér azonosítható a $\mathbf{C}P^m$ komplex m-dimenziós projektív térrel. Jelölje $\pi: S^{2m+1}\to \mathbf{C}P^m$ a természetes projekciót. Az (1.3) (b) példában követett módon legyen $U_i=\{\pi(p)\in \mathbf{C}P^m \mid p\in S^{2m+1}$ és $p_i\neq 0\}$, $i=1, \ldots, m+1$. Ekkor az (U_i, z_i) pár $\mathbf{C}P^m$ lokális térképe, ahol $z_i: U_i\to \mathbf{C}^m$, $z_i(\pi(p))=\frac{1}{p_i}(p_1, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_{m+1})$. Legyen $i=1, \ldots, m+1$ rögzített és tekintsük azt a $h_{U_i}: \pi^{-1}(U_i)\to U_i\times S^1$ leképezést, amelyre $p\in\pi^{-1}(U_i)\subset S^{2m+1}$ esetén $h_{U_i}(p)=\left(\pi(p), \frac{p_i}{|p_i|}\right)$. Ekkor h_{U_i} diffeomorfizmus. Így $\pi: S^{2m+1}\to \mathbf{C}P^m S^1$ struktúracsoportú differenciálható principális nyaláb, amelyet *Hopf fibrálás*nak nevezünk.

Legyen X nemzérus balinvariáns vektormező az S^1 Lie csoporton. A $\tau: S^1\times S^{2m+1}\to S^{2m+1}$ Lie transzformációcsoport szabad, azaz $\sigma(X)\in \mathfrak{X}(S^{2m+1})$ sehol sem zérus vektormező. Kaptuk, hogy minden páratlan dimenziós eulidészi gömbön van sehol sem eltűnő vektormező. A (2.4) (b) példa szerint $\mathbf{C}P^1$ diffeomorf S^2-vel, azaz egy $\pi: S^3\to S^2$ S^1 struktúracsoportú differenciálható principális nyalábot kapunk.

(c) Legyen G topologikus csoport, M topologikus tér, $P=M\times G$, $\pi: M\times G\to M$ a természetes projekció és $\tau: G\times(M\times G)\to M\times G$ az a leképezés, amelyre $\tau(g, (p, h))=(p, hg)$, $g, h\in G$ és $p\in N$ esetén. Ekkor $\pi: M\times G\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb, amelyet *triviális principális nyalábnak* nevezünk.

(d) Legyen $\pi: P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Ha $N\subset M$ altér, akkor $\pi|\pi^{-1}(N): \pi^{-1}(N)\to N$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Speciálisan, minden $p\in M$ pontnak van $U\subset M$ környezete, hogy $\pi|\pi^{-1}(U): \pi^{-1}(U)\to U$ triviális.

(e) Legyen M m-dimenziós differenciálható sokaság. Egy $p\in M$ pontbeli u *lineáris m-él* a $T_p(M)$ p pont feletti tangenstér egy rendezett $(X_p^1, \ldots, X_p^m)$ bázisa. Legyen $L(M)$ az összes lineáris m-élek halmaza és $\pi: L(M)\to M$ a projekció. Legyen $\tau: GL(m, \mathbf{R})\times L(M)\to L(M)$ az a leképezés, amelyre $A=(a_{ij})_{i,j=1}^m\in GL(m, \mathbf{R})$ és $u=(X_p^1, \ldots, X_p^m)\in L(M)$ esetén $\tau(A, u)=(Y_p^1, \ldots, Y_p^m)\in L(M)$, ahol $Y_p^i=\sum_{j=1}^m a_{ji}X_p^j$. Az alábbiakban az $L(M)$ halmazon differenciálható sokaság struktúrát értelmezünk. Legyen (U, x) az M egy lokális térképe. Az (1.6) példa szerint a $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i=1, \ldots, m$, bázismezők minden $p\in U$ pontbeli tangenstérben bázist alkotnak. Definiáljuk a $h_U: \pi^{-1}(U)\to U\times GL(m, \mathbf{R})$ leképezést úgy, hogy $u=(X_p^1, \ldots, X_p^m)$ esetén $h_U(u)=(\pi(u), A)$, ahol $A=(a_{ij})_{i,j=1}^m\in GL(m, \mathbf{R})$ az a mátrix, amelyre $X_p^i=\sum_{j=1}^m a_{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$. Egyszerű számolással kapjuk, hogy az $L(M)$ halmazon differenciálható sokaság struktúrát értelmezhetünk úgy, hogy a $\pi^{-1}(U)\subset L(M)$ részhalmazok nyílt részsokaságok és a h_U leképezések diffeomorfizmusok. Ekkor a π és τ leképezések differenciálhatók, azaz $\pi: L(M)\to M$ $GL(m, \mathbf{R})$ struktúracsoportú differenciálható principális nyaláb. Ezt a principális nyalábot az M sokaság *m-él nyalábjának* nevezzük.

(f) Legyen G Lie csoport és $H \subset G$ zárt részcsoport. Jelölje $\tau: H \times G \to G$ azt a Lie transzformációcsoportot, amelyre $h \in H$ esetén $\tau(h, .) = R_h$. Mivel $R_h: G \to G$ olyan leképezés, amelyre $R_h(gH) = gHh = gH$, $g \in G$, teljesül, ezért a τ leképezésből egy $\tau': H \times G/H \to G/H$ folytonos leképezést kapunk. Ekkor $\pi: G \to G/H$ H struktúracsoportú differenciálható principális nyaláb [1], 109—111. old. Speciálisan, a G/H tér ellátható differenciálható sokaság struktúrával úgy, hogy a $\pi: G \to G/H$ projekció differenciálható leképezés. A G/H differenciálható sokaságot *homogén térnek* nevezzük. Az alábbiakban principális nyalábok származtatásának egy másik módját írjuk le. Legyen $\pi: P \to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Az (ii) tulajdonságból következően létezik az M sokaságnak egy $\{U_\alpha | \alpha \in \mathscr{I}\}$ nyílt fedése és $\alpha \in \mathscr{I}$ esetén egy $h_{U_\alpha} = (\pi, \varkappa_\alpha): \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ homeomorfizmus úgy, hogy $\varkappa(\tau(g, u)) = \varkappa_\alpha(u) \cdot g$ teljesül $g \in G$ és $u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ esetén. $\alpha, \beta \in \mathscr{I}$ esetén legyen $\psi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to G$ az a leképezés, amelyre $\psi_{\beta\alpha}(\pi(u)) = \varkappa_\beta(u)(\varkappa_\alpha(u))^{-1}$ teljesül $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. A $\psi_{\beta\alpha}$ leképezés definíciója nem függ az u pont választásától, csak a $\pi(u)$ ponttól. Egyszerűen adódik, hogy $\psi_{\gamma\alpha}(p) = \psi_{\gamma\beta}(p) \cdot \psi_{\beta\alpha}(p)$ érvényes $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ esetén. A $\psi_{\alpha\beta}$ leképezéseket *átmenet függvényeknek* nevezzük.

Legyen most M topologikus tér, G topologikus csoport, $\{U_\alpha | \alpha \in \mathscr{I}\}$ az M nyílt fedése és $\alpha, \beta \in \mathscr{I}$ esetén $\psi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to G$ olyan folytonos leképezés, amelyre $\psi_{\gamma\alpha} = \psi_{\gamma\beta}\psi_{\beta\alpha}$ érvényes $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$-n. Ekkor konstruálni fogunk egy olyan $\pi: P \to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyalábot, amelynek átmenetfüggvényei az $\{U_\alpha | \alpha \in \mathscr{I}\}$ nyílt fedésre nézve az előre adott $\psi_{\beta\alpha}$ leképezések. $\alpha \in \mathscr{I}$ esetén legyen $X_\alpha = \{\alpha\} \times U_\alpha \times G$ és $X = \cup \{X_\alpha | \alpha \in \mathscr{I}\}$. Az X téren egy $\sim$ relációt vezetünk be úgy, hogy $(\alpha, p, g) \sim (\beta, p', g')$, $\alpha, \beta \in \mathscr{I}$, $p \in U_\alpha$, $p' \in U_\beta$ és $g, g' \in G$, pontosan akkor, ha $p = p'$ és $g' = \psi_{\beta\alpha}(p)g$. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció. Legyen $P = X|\sim$ és $\pi: P \to M$ az a leképezés, amely egy (α, p, g) elem ekvivalenciaosztályát a p pontra képezi. Ekkor π folytonos leképezés. Definiáljuk a $\tau: G \times P \to P$ leképezést úgy, hogy $g' \in G$ esetén $\tau(g', .): P \to P$ az (α, p, g) elem ekvivalenciaosztályát az (α, p, gg') elem ekvivalenciaosztályára képezi. Ekkor τ topologikus transzformációcsoport és egyszerűen következik, hogy $\pi: P \to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. $\alpha \in \mathscr{I}$ esetén legyen $h_{U_\alpha}: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ az a leképezés amely az (α, p, g) elem ekvivalenciaosztályát a (p, g) elemre képezi. Ekkor ezekhez a h_{U_α}, $\alpha \in \mathscr{I}$, homeomorfizmusokhoz tartozó átmenetfüggvények az előre adott $\psi_{\beta\alpha}$ leképezések.

A fent leírt módszer alkalmazható $\pi: P \to M$ G struktúracsoportú differenciálható principális nyalábok esetére is azzal a kiegészítéssel, hogy a P téren a differenciálható sokaság struktúrát úgy kell bevezetni, hogy a $h_{U_\alpha}: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ leképezések diffeomorfizmusok legyenek.

Legyen $\pi: P \to M$ G struktúracsoportú, ill. $\pi': P' \to M'$ G' struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Egy $(\hat{f}, \tilde{f})$ párt a $\pi: P \to M$ principális nyaláb $\pi': P' \to M'$ principális nyalábba vezető *homomorfizmusának* nevezzük, ha $\tilde{f}: P \to P'$ folytonos leképezés, $\hat{f}: G \to G'$ folytonos homomorfizmus, úgy, hogy $g \in G$ és $u \in P$ esetén $\tilde{f}(\tau(g, u)) = \tau'(\hat{f}(g), \tilde{f}(u))$ teljesül, ahol $\tau: G \times P \to P$, ill. $\tau': G' \times P' \to P'$ a megfelelő principális nyalábokhoz tartozó jobboldali topologikus transzformációcsoportot jelöli. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban az $(\tilde{f}, \hat{f})$ párt egyetlen $\bar{f}$ betűvel fogjuk jelölni. Minden $\bar{f}$ homomorfizmus indukál egy $f: M \to M'$ folytonos leképezést. Principális nyalábok egy homomorfizmusa *beágyazás,* ha $\tilde{f}: P \to P'$ beágyazás és $\hat{f}: G \to G'$ monomorfizmus. Ekkor $f: M \to M'$ szintén beágyazás. Azonosítva a megfelelő tereket a leképezéseknél származó képeikkel, azt mondjuk, hogy a $\pi: P \to M$ G struktúracsoportú principális nyaláb a $\pi': P' \to M'$ G' struktúracsoportú principális nyaláb *résznyalábja*. Ha emellett $M = M'$, $f = \mathrm{id}_M$ identitás, akkor

a $\pi: P \to M$ principális nyaláb a $\pi': P' \to M'$ principális nyaláb *redukciója*. Ha $G = G'$, f=identitás és $\tilde{f}: P \to P'$ homeomorfizmus, akkor a $\pi: P \to M$ és $\pi': P' \to M$ principális nyalábokat *izomorf*aknak nevezzük. A fenti fogalmak analóg módon definiálhatók differenciálható principális nyalábok esetén is.

(3.2) Példa. Legyen M m-dimenziós differenciálható sokaság és tegyük fel, hogy $p \in M$ esetén a $T_p(M)$ p pont feletti tangenstéren adott egy $(,)_p: T_p(M) \times \times T_p(M) \to \mathbf{R}$ pozitív definit skaláris szorzás úgy, hogy ha $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ differenciálható akkor az $(X, Y): M \to \mathbf{R}$, $(X, Y)(p) = (X_p, Y_p)_p$, $p \in M$, függvény differenciálható. Ekkor $(,)$ *Riemann metrika* az M differenciálható sokaságon és az M differenciálható sokaságot, ellátva egy $(,)$ Riemann metrikával, *Riemann sokaság*nak nevezzük. Mivel M megszámlálható bázisú, ezért parakompakt [3] azaz M minden nyílt fedésének van lokálisan véges finimitása. Igazolható [3], 60. old., hogy M parakompaktságából következően M ellátható Riemann metrikával. Legyen M Riemann sokaság. Egy $p \in M$ pontbeli u ortonormált m-él a $T_p(M)$ p pontbeli tangenstér egy $(X_p^1, \ldots, X_p^m)$ ortonormált bázisa. Legyen $O(M)$ az összes ortonormált m-élek halmaza és $\pi: O(M) \to \to M$ a projekció. A (2.1) (e) példában követett módon $\pi: O(M) \to M$ $O(m)$-struktúracsoportú differenciálható principális nyaláb. Az $O(M) \subset L(M)$ tartalmazás a $\pi: L(M) \to M$ $GL(m, \mathbf{R})$ struktúracsoportú principális nyaláb redukciója a $\pi: O(M) \to M$ $O(m)$ struktúracsoportú principális nyalábra.

Legyen $\pi: P \to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb, M' topologikus tér és $f: M' \to M$ folytonos leképezés. Definiálni fogunk egy $\pi': P' \to M'$ G struktúracsoportú topologikus principális nyalábot és egy $\tilde{f}: P' \to P$ folytonos leképezést úgy, hogy az $\tilde{f} = (\tilde{f}, \mathrm{id}_G)$ principális nyalábok olyan homomorfizmusa, amelyre a

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{\tilde{f}} & P \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

diagram kommutatív.

Legyen $P' = \{(p, u) \in M' \times P \mid f(p) = \pi(u)\} \subset M' \times P$ topologikus altér. Ha $\tau: G \times \times P \to P$ jelöli a $\pi: P \to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyalábhoz tartozó topologikus transzformációcsoportot, akkor legyen $\tau': G \times P' \to P'$, $\tau'(g, (p, u)) = (p, \tau(g u))$, $g \in G$, $(p, u) \in P$. Ekkor $\pi': P' \to M'$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Legyen $\tilde{f}: P' \to P$ az a leképezés, amelyre $\tilde{f}(p, u) = u$, $(p, u) \in P$. Ekkor a fenti diagram kommutatív és állításunk egyszerűen adódik. A $\pi': P' \to M'$ G struktúracsoportú topologikus principális nyalábot a $\pi: P \to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb $f: M' \to M$ leképezés menti *visszahúzott*jának nevezzük.

A fenti fogalom a differenciálható esetben analóg módon definiálható.

(3.3) Példák. (a) A (3.1) (d) példa szerint, ha $\pi: P \to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb és $N \subset M$ altér, akkor a $\pi | \pi^{-1}(N): \pi^{-1}(N) \to N$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb nem más mint a $\pi: P \to M$ principális nyaláb $i: N \subset M$ tartalmazás menti visszahúzottja.

(b) Legyen $\pi': P' \to M'$ G struktúracsoportú triviális topologikus principális nyaláb és $\pi: G \to \{\text{pont}\}$ az egypontú tér feletti G struktúracsoportú triviális topologikus drincipális nyaláb. Ekkor a $\pi': P' \to M'$ principális nyaláb a $\pi: G \to \{\text{pont}\}$ principális nyaláb $f: M' \to \{\text{pont}\}$ leképezés menti visszahúzottja.

Legyen $\pi\colon P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb a $\tau\colon G\times P\to P$ jobboldali topologikus transzformációcsoporttal. Legyen F topologikus tér és $\lambda\colon G\times F\to F$ baloldali topologikus transzformációcsoport és jelölje $\nu\colon G\times (P\times F)\to P\times F$ azt a jobboldali topologikus transzformációcsoportot, amelyre $g\in G$, $u\in P$ és $a\in F$ esetén $\nu(g,(u,a))=(\tau(g,u),\lambda(g^{-1},a))$. Jelölje $E=P\times_G F$ a ν pályaterét és $\pi_E\colon E\to M$ azt a folytonos leképezést, amely az $(u,a)\in P\times F$ ponton átmenő pályához a $\pi(u)\in M$ pontot rendeli. $p\in M$ esetén a $\pi_E^{-1}(p)\subset E$ részhalmazt a p pont feletti *fibrum*nak nevezzük. Mivel $\pi\colon P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb, minden M-beli pontnak van $U\subset M$ nyílt környezete és létezik egy $h_U=(\pi,\varkappa)\colon \pi^{-1}(U)\to U\times G$ homeomorfizmus úgy, hogy $\tau(g,u)=\varkappa(u)\cdot g$, $u\in P$ és $g\in G$ esetén. A $\nu\colon G\times(\pi^{-1}(U)\times F)\to\pi^{-1}(U)\times F$ megszorítás egy $\nu'\colon G\times(U\times G\times F)\to U\times G\times F$ leképezést indukál úgy, hogy a

$$\begin{array}{ccc} G\times(\pi^{-1}(U)\times F) & \xrightarrow{\nu} & \pi^{-1}(U)\times F \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G\times h_U\times \mathrm{id}_F} & & \downarrow{\scriptstyle h_U\times \mathrm{id}_F} \\ G\times(U\times G\times F) & \xrightarrow{\nu'} & U\times G\times F \end{array}$$

diagram kommutatív. Ekkor $g,g'\in G$, $p\in U$ és $a\in F$ esetén $\nu'(g,(p,g',a))=(p,g'g,\lambda(g^{-1}(a)))$. A megfelelő pályaterekre áttérve kapjuk, hogy a $h_U\colon \pi^{-1}(U)\to U\times G$ homeomorfizmus egy

$$k_U\colon \pi_E^{-1}(U)\to U\times F$$

bijekciót indukál. Vezessük be az E halmazon azt a topológiát, amelyre a k_U leképezések homeomorfizmusok. Ekkor $\pi_E\colon E\to M$ folytonos leképezés. A $\pi_E\colon E\to M$ leképezést a $\pi\colon P\to M$ principális nyalábhoz asszociált *topologikus fibrált nyaláb*nak nevezzük. Az E teret *totális tér*nek, az M teret *bázistér*nek, a π_E leképezést *projekció*nak, az F teret *fibrumtípus*nak és a G topologikus csoportot *struktúracsoport*nak nevezzük. A fentiek szerint minden M-beli pontnak van nyílt környezete és létezik egy $k_U\colon \pi_E^{-1}(U)\to U\times F$ homeomorfizmus úgy, hogy a

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(U) & \xrightarrow{k_U} & U\times F \\ & {\scriptstyle \pi_E}\searrow \quad \swarrow & \\ & U & \end{array}$$

diagram kommutatív, ahol a jobb oldali nyíl az első tényezőre való projekciót jelöli. Ez utóbbi tulajdonság azt jelenti, hogy a $\pi_E\colon E\to M$ topologikus fibrált nyaláb *lokálisan triviális*. $p\in U$ esetén $k_U|\pi_E^{-1}(p)\colon \pi_E^{-1}(p)\to\{p\}\times F$ homeomorfizmus. A fenti módszer alkalmazható $\pi\colon P\to M$ G struktúracsoportú differenciálható principális nyalábból és $\lambda\colon G\times F\to F$ baloldali Lie transzformációcsoportból kiindulva is. Ekkor a $k_U\colon \pi_E^{-1}(U)\to U\times F$ leképezések az E halmazon differenciálható sokaság struktúrát definiálnak úgy, hogy $\pi_E\colon E\to M$ differenciálható leképezés. A $\pi_E\colon E\to M$ leképezést a $\pi\colon P\to M$ principális nyalábhoz asszociált differenciálható fibrált nyalábnak nevezzük.

(3.4) Példák. (a) Legyen $\pi\colon P\to M$ G struktúracsoportú triviális topologikus principális nyaláb és $\lambda\colon G\times F\to F$ topologikus transzformációcsoport. Ekkor az asszociált $\pi_E\colon E\to M$ topologikus principális nyaláb *triviális*, azaz $E=M\times F$ és $\pi_E\colon E\to M$ az első tényezőre való projekció.

(b) Legyen $\pi\colon P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb és

λ: $G\times F\to F$ topologikus transzformációcsoport. Ha $N\subset M$ altér, akkor a $\pi|\pi^{-1}(N)$: $\pi^{-1}(N)\to N$ principális nyalábhoz asszociált fibrált nyaláb nem más mint $\pi_E|\pi_E^{-1}(N)$: $\pi_E^{-1}(N)\to N$. Speciálisan, minden $p\in M$ pontnak van $U\subset M$ környezete, hogy $\pi_E|\pi_E^{-1}(U)$: $\pi_E^{-1}(U)\to U$ triviális.

(c) Legyen M m-dimenziós differenciálható sokaság és π: $L(M)\to M$ a $GL(m, \mathbf{R})$ struktúracsoportú m-él nyaláb a τ: $GL(m, \mathbf{R})\times L(M)\to L(M)$ jobboldali Lie transzformációcsoporttal. Legyen λ: $GL(m, \mathbf{R})\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ az (1.16) (c) példában definiált baloldali Lie transzformációcsoport és jelölje ν: $GL(m, \mathbf{R})\times(L(M)\times\mathbf{R}^m)\to$ $\to L(M)\times\mathbf{R}^m$ azt a jobboldali Lie transzformációcsoportot amelyre $A\in GL(m, \mathbf{R})$, $u\in L(M)$ és $p\in\mathbf{R}^m$ esetén $\nu(A, (u, p))=(\tau(A, u), \lambda(A^{-1}, p))$. Legyen $L(M)\times$ $\times_{GL(m,\mathbf{R})}\mathbf{R}^m$ a ν pályatere és π: $L(M)\times_{GL(m,\mathbf{R})}\mathbf{R}^m\to M$ az a leképezés, amely az $(u, p)\in L(M)\times\mathbf{R}^m$ ponton átmenő pályához a $\pi(u)\in M$ pontot rendeli. Tekintsük végül az M differenciálható sokaság π: $T(M)\to M$ tangensnyalábját. Legyen ϱ: $L(M)\times\mathbf{R}^m\to T(M)$ az a leképezés, amely egy $(u, a)\in L(M)\times\mathbf{R}^m$ párhoz, $u=$ $=(X_p^1, \ldots, X_p^m)$, $p\in M$, $a=(a_1, \ldots, a_m)\in\mathbf{R}^m$, a $\sum_{i=1}^{m} a_i X_p^i\in T_p(M)$ tangensvektort rendeli. A $\varrho(u, a)$ tangensvektor értéke csak az (u, a) ponton átmenő pályától függ, azaz a ϱ leképezés egy ϱ': $L(M)\times_{GL(m,\mathbf{R})}\mathbf{R}^m\to T(M)$ leképezést definiál. Egyszerű számolással kapjuk, hogy ϱ' bijekció és az

$$\begin{array}{ccc} L(M)\times_{GL(m,\mathbf{R})}\mathbf{R}^m & \xrightarrow{\varrho'} & T(M) \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\pi} & \\ & M & \end{array}$$

diagram kommutatív. Így a π: $L(M)\to M$ $GL(m, \mathbf{R})$ struktúracsoportú principális nyalábhoz és a λ: $GL(m, \mathbf{R})\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ baloldali transzformációcsoporthoz asszociált fibrált nyaláb a π: $T(M)\to M$ tangensnyaláb.

(d) Tekintsük a (2.1) (a) példában definiált π: $S^m\to\mathbf{R}P^m$ $\mathbf{Z}_2$ struktúracsoportú differenciálható principális nyalábot és legyen λ: $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ az a Lie transzformációcsoport, amelyre $\lambda(1, .)=\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ és $\lambda(-1, .)=-\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ teljesül. Legyen π_E: $E\to\mathbf{R}P^m$ az asszociált differenciálható fibrált nyaláb, amelyet röviden γ_m^1-mel jelölünk és az $\mathbf{R}P^m$ m-dimenziós projektív tér *kanonikus vonalnyalábjának* nevezzük. γ_1^1 nem más mint a (végtelen) Möbius szalag.

(e) Tekintsük a (2.1) (b) példájában definiált π: $S^{2m+1}\to\mathbf{C}P^m$ S^1 struktúracsoportú differenciálható principális nyalábot és legyen λ: $S^1\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ az a Lie transzformációcsoport, amelyre $\lambda(e^{it}, .)$ a t szögű forgatás. Legyen π_E: $E\to\mathbf{C}P^m$ az asszociált differenciálható fibrált nyaláb, amelyet szintén γ_m^1-mel jelölünk és a $\mathbf{C}P^m$ m-dimenziós komplex projektív tér *kanonikus komplex vonalnyalábjának* nevezzük.

Legyen π: $P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb τ: $G\times$ $\times P\to P$ jobboldali topologikus transzformációcsoporttal és λ: $G\times F\to F$ baloldali topologikus transzformációcsoport. Jelölje π_E: $E\to M$ az asszociált topologikus fibrált nyalábot. Ha M' topologikus tér és f: $M'\to M$ folytonos leképezés, akkor tekintsük a π: $P\to M$ principális nyaláb π': $P'\to M'$ visszahúzottját. Ekkor a

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{\tilde{f}} & P \\ {\scriptstyle\pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

diagram kommutatív. Jelölje π'_E: $E' \to M$ a π': $P' \to M'$ G struktúracsoportú topologikus principális nyalábhoz (és a λ: $G \times F \to F$ baloldali topologikus transzformációcsoporthoz) asszociált topologikus fibrált nyalábot. Az $E' = P' \times_G F$ tér egy eleme $\{(\tau'(g, (p, u))), \lambda((g^{-1}, a)) | g \in G\}$ alakú, ahol $g \in G$, $p \in M'$, $u \in P$, $f(p) = \pi(u)$, $a \in F$, és ennek az elemnek a π'_E projekciónál származó képe $p \in M'$. Ez az elem azonosítható a $\{(p, \tau(g, u), \lambda(g^{-1}, a)) | g \in G\}$ elemmel, azaz a π'_E: $E' \to M$ topologikus fibrált nyaláb megkapható úgy is, hogy

$$E' = \{(p, e) \in M' \times E \mid f(p) = \pi_E(e)\} \subset M' \times E$$

és $(p, e) \in E'$ esetén $\pi'_E(p, e) = p$ a projekció. Így a π_E: $E \to M$ topologikus fibrált nyaláb f: $M' \to M$ leképezés menti *visszahúzott*ja az a π'_E: $E' \to M$ topologikus fibrált nyaláb, amelyet a fenti egyenlőséggel értelmezünk. Így az asszociálás és a visszahúzás operációi felcserélhetők.

Legyen G Lie csoport és π: $P \to M$ G struktúracsoportú *topologikus* principális nyaláb a τ: $G \times P \to P$ jobboldali topologikus transzformációcsoporttal. Legyen $H \subset G$ zárt részcsoport és λ: $G \times G/H \to G/H$ az a baloldali topologikus transzformációcsoport, amelyre $\lambda(g, g'H) = gg'H$, $g, g' \in G$. Tekintsük a π_E: $E \to M$ asszociált topologikus fibrált nyalábot, ahol $E = P \times_G (G/H)$. Másfelől, a τ transzformációcsoport $H \subset G$ részcsoportra való megszorítása egy ϱ: $P \to P/H$ folytonos leképezést definiál. Ekkor létezik pontosan egy σ: $P/H \to M$ folytonos leképezés, amelyre a

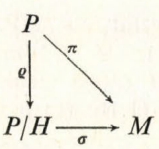


diagram kommutatív. Legyen s: $E \to P/H$ az a leképezés, amely az (u, gH), $u \in P$, $g \in G$, elem pályájához a $\tau(g, u) \in P$ elemen átmenő P/H-beli pályát feleltei meg. Egyszerű számolással kapjuk, hogy s homeomorfizmus és a

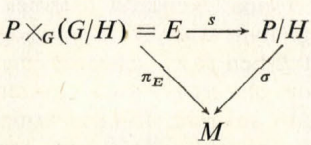


diagram kommutatív, azaz a σ: $P/H \to M$ leképezés egy G/H fibrumtípusú és G struktúracsoportú topologikus fibrált nyalábnak tekinthető. A σ: $P/H \to M$ topologikus fibrált nyaláb és a π: $G \to G/H$ H struktúracsoportú differenciálható principális nyaláb lokálisan triviális voltából egyszerűen következik, hogy ϱ: $P \to P/H$ H struktúracsoportú topologikus principális nyaláb.

A differenciálható eset analóg módon tárgyalható. Ha tehát π: $P \to M$ G struktúracsoportú differenciálható principális nyaláb, akkor a π projekció felbomlik egy ϱ: $P \to P/H$ H struktúracsoportú differenciálható principális nyaláb és egy σ: $P/H \to M$ (G/H) fibrumtípusú differenciálható fibrált nyaláb kompozíciójára.

Legyen G Lie csoport, $G' \subset G$ zárt részcsoport, π: $P \to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb τ: $G \times P \to P$ topologikus transzformációcsoporttal, π': $P' \to MG'$ struktúracsoportú topológikus principális nyaláb τ'; $G' \times P' \to P'$ topologikus transzformációcsoporttal. Tegyük fel, hogy a π': $P' \to M$ principális nyaláb a

π: $P \to M$ principális nyaláb redukciója, azaz létezik egy $\tilde{f}=(\hat{f}, \hat{f})$ homomorfizmus, ahol $\hat{f}$: $G' \subset G$ a tartalmazás. Ekkor a

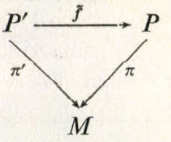


diagram kommutatív. Legyen F topológikus tér és λ: $G \times F \to F$ bal oldali topologikus transzformációcsoport. Definiáljuk az s: $P' \times_{G'} F \to P \times_G F$ leképezést az $s(\{(\tau'(g', u)), \lambda((g'^{-1}, a))|g' \in G'\}) = \{(\tau(g, \tilde{f}(u))), \lambda((g^{-1}, a))|g \in G\}$, $u \in P'$, $a \in F$, formulával. Ekkor az

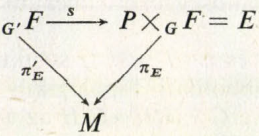


diagram kommutatív. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy s homeomorfizmus. Így a struktúracsoport redukciójánál az asszociált topologikus fibrált nyalábok változatlanok maradnak. A differenciálható eset hasonlóan tárgyalható.

(3.5) Példa. A (3.2) példa szerint, ha M Riemann-sokaság, akkor az $O(M) \subset L(M)$ tartalmazás a π: $L(M) \to M$ $GL(m, \mathbf{R})$ struktúracsoportú principális nyaláb redukciója a π: $O(M) \to M$ $O(m)$ struktúracsoportú principális nyalábra. Legyen λ: $GL(m, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ az (1.16) (c) példában definiált Lie transzformációcsoport. A fentiek szerint a $T(M) = L(M) \times_{GL(m,\mathbf{R})} \mathbf{R}^m$ és $O(M) \times_{O(m)} \mathbf{R}^m$ differenciálható fibrált nyalábok természetes módon azonosíthatók, azaz $T(M) = O(M) \times_{O(m)} \mathbf{R}^m$.

A fibrált nyalábok egy speciális esetét kapjuk, ha az F fibrumtípust diszkrét térnek választjuk. Legyen M ívszerűen összefüggő topologikus tér és E összefüggő topologikus tér. Egy π: $E \to M$ folytonos leképezést *fedés*nek nevezünk, ha minden $p \in M$ pontnak van $U \subset M$ összefüggő nyílt környezete úgy, hogy a $\pi^{-1}(U) \subset E$ altér minden összefüggő komponense nyílt E-ben és a π leképezés mellett homeomorf módon képződik U-ra. Egy π: $E \to M$ fedés *univerzális*, ha E egyszeresen összefüggő.

Legyen M differenciálható sokaság. Ekkor bármely π: $E \to M$ fedés esetén E ellátható differenciálható sokaságstruktúrával úgy, hogy π differenciálható. Ekkor létezik pontosan egy π: $\tilde{M} \to M$ univerzális fedés [6], 67—71. old. Emellett π: $\tilde{M} \to M \pi_1(M)$ struktúracsoportú principális nyaláb, ahol $\pi_1(M)$ az M fundamentális csoportját jelöli ($\pi_1(M)$ az adott bázispontú hurkok homotópiaosztályainak diszkrét csoportja). M fedései és a $\pi_1(M)$ fundamentális csoport részcsoportjainak konjugált osztályai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn. Ha $G \subset \pi_1(M)$ részcsoport, akkor az ennek megfelelő fedés a σ: $\tilde{M}/G \to M$ $\pi_1(M)/G$ fibrumtípusú differenciálható fibrált nyaláb.

(3.6) Példák. (a) A (2.9) (a) példájában definiált Exp: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{T}^m$ leképezés univerzális fedés.

(b) A (3.1) (a) példában definiált π: $S^m \to \mathbf{R}P^m$ leképezés véges fedés, amely $m \geqq 2$ esetén univerzális.

4. Vektornyalábok

Legyen M topologikus tér. Az M bázistér felett egy ξ k-rangú *topologikus vektornyaláb* egy *totális tér*nek nevezett $E(\xi)$ topologikus térből és egy *projekció*nak nevezett π: $E(\xi)\to M$ folytonos leképezésből áll úgy, hogy a következő feltételek teljesülnek:

(i) $p\in M$ esetén a $\pi^{-1}(p)\subset E(\xi)$ altéren egy k-dimenziós lineáris tér struktúra adott,

(ii) Minden M-beli pontnak van $U\subset M$ nyílt környezete és létezik k_U: $\pi^{-1}(U)\to$ $\to U\times\mathbf{R}^k$ homeomorfizmus úgy, hogy $p\in U$ esetén $k_U|\pi^{-1}(p)$: $\pi^{-1}(p)\to\{p\}\times\mathbf{R}^k$ lineáris izomorfizmus. A k_U leképezést *trivializáló leképezés*nek nevezzük. $p\in M$ esetén a $\xi_p=\pi^{-1}(p)\subset E(\xi)$ altér a p pont feletti fibrum.

A *differenciálható vektornyaláb* fogalma analóg módon definiálható. Ekkor M és $E(\xi)$ differenciálható sokaságok, π differenciálható leképezés és k_U diffeomorfizmus. Ha a $\pi^{-1}(p)\subset E(\xi)$ altéren komplex k-dimenziós vektortérstruktúra adott úgy, hogy $k_U|\pi^{-1}(p)$: $\pi^{-1}(p)\to\{p\}\times\mathbf{C}^k$, $p\in U$, komplex lineáris leképezés, akkor a *topologikus*, ill. *differenciálható komplex vektornyaláb* fogalmához jutunk.

Legyenek ξ és η topologikus vektornyalábok az M bázistér felett. ξ *izomorf* η-val, ha létezik egy f: $E(\xi)\to E(\eta)$ homeomorfizmus, amely minden $p\in M$ pontra a $\pi^{-1}(p)\subset E(\xi)$ fibrumot lineárisan a $\pi^{-1}(p)\subset E(\eta)$ fibrumra képezi. Differenciálható és komplex vektornyalábok izomorfizmusa analóg módon értelmezhető.

Legyen ξ k-rangú topologikus vektornyaláb az M tér felett és $L(\xi)=$ $=\{u\in E(\xi)\times\ldots\times E(\xi)(k\text{-szor})|\pi(u_1)=\ldots=\pi(u_k)$ és $u_1,\ldots,u_k$ lineárisan függetlenek$\}$. Jelölje π: $L(\xi)\to M$ az indukált projekciót, azaz $\pi(u_1,\ldots,u_k)=\pi(u_1)$. Legyen τ: $GL(k,\mathbf{R})\times L(\xi)\to L(\xi)$ az a jobboldali topologikus transzformációcsoport, amelyre $\tau(A,u)=u'$, $u_i'=\sum_{j=1}^{k}a_{ji}u_j$, $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{k}\in GL(k,\mathbf{R})$. Egyszerű számolással kapjuk, hogy π: $L(\xi)\to M$ $GL(k,\mathbf{R})$ struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Ha λ: $GL(k,\mathbf{R})\times\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^k$ jelöli az (1.16) (c) példában definiált baloldali Lie transzformációcsoportot, akkor a π_E: $E\to M$, $E=L(\xi)\times_{GL(k,\mathbf{R})}\mathbf{R}^k$ asszociált topologikus fibrált nyaláb fibrumtípusa $\mathbf{R}^k$. Így π_E egy k-rangú topologikus vektornyaláb projekciója.

Legyen s: $L(\xi)\times\mathbf{R}^k\to E(\xi)$ az a leképezés, amely egy $(u,p)\in L(\xi)\times\mathbf{R}^k$ párhoz a $\sum_{i=1}^{k}p_iu^i\in E(\xi)$ elemet rendeli. Az $s(u,p)$ elem értéke csak az (u,p) ponton átmenő pályától függ, azaz az s leképezés egy s': $L(\xi)\times_{GL(k,\mathbf{R})}\mathbf{R}^k\to E(\xi)$ leképezést értelmez. Egyszerű számolással kapjuk, hogy s' vektornyaláb izomorfizmus , azaz minden topologikus vektornyaláb egy topologikus principális nyalábból asszociálással származtatható. Így a vektornyaláb fogalma a fibrált nyaláb fogalmának speciális esete. A fenti konstrukció érvényes differenciálható és komplex vektornyalábokra is.

Vektornyaláb principális nyalábból való származtatásának módja a következő: Legyen G Lie csoport és V valós k-dimenziós vektortér. A τ: $G\times V\to V$ baloldali Lie transzformációcsoportot *lineáris*nak nevezzük, ha $g\in G$ esetén a $\tau(g,.)$: $V\to V$ leképezés lineáris. A V vektortér *G-modulus*, ha adott egy τ: $G\times V\to V$ lineáris Lie transzformációcsoport. Legyen π: $P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb és V G-modulus. Ekkor az asszociált π_E: $E\to M$, $E=P\times_G V$, topologikus fibrált nyaláb egy ξ k-rangú topologikus vektornyaláb projekciója. Minden topologikus vektornyaláb a fenti módon megkapható, azonban ez az előállítás, mint azt a (4.1) (a) példában látni fogjuk, nem egyértelmű. Analóg konstrukció érvényes differenciálható és komplex vektornyalábok esetén is.

(4.1) Példák. (a) Legyen M m-dimenziós differenciálható sokaság és $\pi\colon T(M)\to M$ a tangensnyalábja. Ekkor a tangensnyaláb m-rangú differenciálható vektornyaláb az M felett, amelynek struktúracsoportja $GL(m, \mathbf{R})$ vagy $O(m)$, attól függően, hogy a $\pi\colon L(M)\to M$ vagy $\pi\colon O(M)\to M$ principális nyalábot vesszük alapul.

(b) Ha M komplex m-dimenziós differenciálható sokaság, akkor a $\pi\colon T(M)\to M$ tangensnyaláb m-rangú differenciálható komplex vektornyaláb.

(c) A (3.4) (d) példában definiált γ_m^1 kanonikus vonalnyaláb 1-rangú differenciálható vektornyaláb, amelynek struktúracsoportja $\mathbf{Z}_2$. Egyszerű számolással megmutatható, hogy a γ_m^1 vektornyaláb izomorf egy $\pi\colon E\to \mathbf{R}P^m$ projekciójú vektornyalábbal, amelyre $E=\{(L,p)\in \mathbf{R}P^m\times \mathbf{R}^{m+1}\mid p\in L\}$ és $\pi(L,p)=L$. Itt az $\mathbf{R}P^m$ m-dimenziós projektív teret azonosítottuk az $\mathbf{R}^{m+1}$ origón átmenő egyeneseinek terével.

(d) A (3.4) (e) példában definiált γ_m^1 kanonikus komplex vonalnyaláb 1-rangú differenciálható komplex vonalnyaláb. A γ_m^1 vektornyaláb izomorf egy $\pi\colon E\to \mathbf{C}P^m$ projekciójú komplex vonalnyalábbal, amelyre $E=\{(L,p)\in \mathbf{C}P^m\times \mathbf{C}^{m+1}\mid p\in L\}$ és $\pi(L,p)=L$.

(e) Az η M feletti topologikus vektornyaláb a ξ M feletti topologikus vektornyaláb *résznyalábja*, ha $E(\eta)\subset E(\xi)$ és minden $p\in M$ pontra $\eta\, p$ pont feletti fibruma lineáris altere $\xi\, p$ pont feletti fibrumának. Differenciálható vektornyaláb *differenciálható résznyalábja* analóg módon definiálható. A (2.1) (b) példa szerint a $T(S^{2m+1})$ tangensnyalábnak van 1-rangú differenciálható résznyalábja. A VII. rész (3.12) tétele szerint a $T(S^{2m})$ tangensnyalábnak nincs 1-rangú résznyalábja.

(f) Legyen ξ egy M tér feletti k-rangú topologikus vektornyaláb, M' topologikus tér és $f\colon M'\to M$ folytonos leképezés. Ekkor a ξ vektornyaláb $f^*(\xi)$-vel jelölt visszahúzott nyalábja az M' tér felett egy k-rangú topologikus vektornyaláb. Hasonló állítás érvényes differenciálható és komplex vektornyalábokra.

(g) Legyenek M és M' differenciálható sokaságok és $f\colon M\to M'$ immerzió. Ekkor legyen ν az az M feletti differenciálható vektornyaláb, amelynek egy $p\in M$ pont feletti fibruma $T_{f(p)}(M')/T_{f(p)}(f(M))$. A ν vektornyalábot az f immerzió *normális nyalábjának* nevezzük. ν rangja $\dim M'-\dim M$.

Az alábbiakban általános módszert adunk arra, hogy adott vektornyalábok esetén a fibrumokon értelmezett algebrai operációkkal hogyan lehet új vektornyalábokat konstruálni. Egy tipikus példa a következő:

Legyen ξ M feletti és η M' feletti topologikus vektornyaláb. Ekkor a $\xi\times\eta$ topologikus szorzat $M\times M'$ bázistér feletti topologikus vektornyaláb. A $\xi\times\eta$ vektornyalábot a ξ és η vektornyalábok *direkt szorzatának* nevezzük.

(4.2) Példa. Legyenek M és M' differenciálható sokaságok. Ekkor a $T(M\times M')$ tangensnyaláb izomorf a $T(M)\times T(M')$ direkt szorzattal.

Ha ξ és η az M bázistér feletti topologikus vektornyalábok és $\Delta\colon M\to M\times M$, $\Delta(p)=(p,p)$, a diagonális leképezés, akkor a $\Delta^*(\xi\times\eta)$ M feletti topologikus vektornyalábot a ξ és η vektornyalábok *Whitney-összegének* nevezzük és $\xi\oplus\eta$-val jelöljük.

Ekkor a $\xi\oplus\eta$ vektornyaláb $p\in M$ pont feletti fibruma izomorf a ξ és η vektornyalábok p pont feletti fibrumainak direkt összegével.

A Whitney-összeg konstrukcióját általánosítandó, jelölje $\mathscr{V}$ az összes végesdimenziós vektorterek és a közöttük fennálló izomorfizmusok kategóriáját. $T\colon \mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}$ kétváltozós *kovariáns funktor*, ha a következők teljesülnek:

(i) V és V' végesdimenziós vektorterek esetén $T(V, V')$ végesdimenziós vektortér,

(ii) Ha $f\colon V\to W$ és $f'\colon V'\to W'$ izomorfizmusok $\mathscr{V}$-ben, akkor

$$T(f,f')\colon T(V,V')\to T(W,W')$$

izomorfizmus,

(iii) $T(\mathrm{id}_V, \mathrm{id}_{V'}) = \mathrm{id}_{T(V,V')}$,

(iv) $T(ff', gg') = T(f,g)T(f',g')$.

A T funktort folytonosnak nevezzük, ha $T(f,f')$ folytonosan függ az f-től és f'-től. (Két adott vektortér közötti izomorfizmusok halmazán egy természetes topológia adott.) Az n-változós folytonos funktor fogalma a fentivel analóg.

(4.3) Példák. (a) $\oplus\colon \mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}$, amely a V és V' végesdimenziós vektorterekhez a $V\oplus V'$ direkt összeget rendeli, kétváltozós folytonos kovariáns funktor.

(b) Hom: $\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}$, amely a V és V' végesdimenziós vektorterekhez a Hom (V, V') végesdimenziós vektorteret rendeli, kétváltozós folytonos funktor.

(c) $^*\colon \mathscr{V}\to\mathscr{V}$, amely a V vektortérhez a V^* duálisát rendeli, egyváltozós folytonos funktor.

(d) $\otimes\colon \mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}$, amely a V és V' végesdimenziós vektorterekhez a $V\otimes V'$, tenzorszorzatot rendeli [4], 408. old., kétváltozós folytonos funktor.

(e) $\Lambda^r\colon \mathscr{V}\to\mathscr{V}$, amely a V vektortérhez a $\Lambda^r(V)$ r-edik külső hatványát rendeli [4], 424. old. egyváltozós folytonos funktor.

Legyen $T\colon \mathscr{V}\times\ldots\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}$ n-változós folytonos kovariáns funktor. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ topologikus vektornyalábok egy közös bázistérfeletta $\pi_1\colon E(\xi_1)\to M, \ldots, \pi_n\colon E(\xi_n)\to M$ projekciókkal, akkor legyen $E=U\{T(\pi_1^{-1}(p), \ldots, \pi_n^{-1}(p))|p\in M\}$ és $\pi\colon E\to M$ a természetes leképezés. Állítjuk, hogy az E halmazon van olyan topológia, amelyre nézve a $\pi\colon E\to M$ leképezés egy topológikus vektornyaláb projekciója.

Minden M-beli pontnak van $U\subset M$ nyílt környezete és léteznek $k_U^i\colon \pi_i^{-1}(U)\to U\times\mathbf{R}^{k_i}$ $i=1, \ldots, n$, homeomorfizmusok úgy, hogy $p\in U$ esetén $k_U^i|\pi_i^{-1}(p)\colon \pi_i^{-1}(p)\to\{p\}\times\mathbf{R}^{k_i}$, $i=1, \ldots, n$, lineáris izomorfizmus, ahol k_i a ξ_i vektornyaláb rangja. Ha $\varrho_i\colon U\times\mathbf{R}^{k_i}\to\mathbf{R}^{k_i}$, $i=1, \ldots, n$, a második tényezőre való projekció, akkor jelölje $k_p^i=\varrho_i(k_U^i|\pi^{-1}(p))\colon \pi_i^{-1}(p)\to\mathbf{R}^{k_i}$, $p\in U$. Ekkor $T(k_p^1, \ldots, k_p^n)\colon T(\pi_1^{-1}(p), \ldots, \pi_n^{-1}(p))\to T(\mathbf{R}^{k_1}, \ldots, \mathbf{R}^{k_n})$ lineáris izomorfizmus. Legyen $k_U\colon \pi^{-1}(U)\to U\times T(\mathbf{R}^{k_1}, \ldots, \mathbf{R}^{k_n})$ az a leképezés, amelyre $a\in\pi^{-1}(U)$, $\pi(a)=p$, esetén $k_U(a)=T(k_p^1, \ldots, k_p^n)(a)$. Ekkor k_U bijekció. T folytonosságából következően létezik az E halmazon olyan topológia, amelyre nézve a k_U leképezések homeomorfizmusok. Erre a topologiára nézve a $\pi_E\colon E\to M$ leképezés folytonos. Így kapjuk, hogy a π leképezés egy $T(\xi^1, \ldots, \xi_n)$-nel jelölt topologikus vektornyaláb projekciója.

Ha M differenciálható sokaság és $\xi_1, \ldots, \xi_n$ differenciálható vektornyalábok M felett, akkor hasonló konstrukcióval egy $T_k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ differenciálható vektornyalábot kapunk M felett. Itt fel kell használni azt, hogy $T(f_1, \ldots, f_n)$ differenciálhatóan függ az $f_1, \ldots, f_n$ izomorfizmusoktól [1], 128. old. Hasonló konstrukció érvényes komplex vektornyalábokra.

(4.4) Példák. (a) Ha ξ és η topologikus vektornyalábok M felett, akkor a $\oplus$ direkt összeg funktorral a $\xi\oplus\eta$ topologikus vektornyalábot kapjuk, amely azonos a ξ és η vektornyalábok Whitney-összegével.

(b) Ha ξ és η topologikus vektornyalábok M felett, akkor Hom (ξ, η) topologikus vektornyaláb M felett.

(c) Ha ξ topologikus vektornyaláb M felett, akkor a ξ^* vektornyalábot a ξ *duálisának* nevezzük. Ha $\theta_{\mathbf{R}}$ jelöli az M feletti 1-rangú triviális topologikus vektornyalábot, akkor ξ^* és Hom $(\xi, \theta_{\mathbf{R}})$ izomorf vektornyalábok. Ha a ξ vektornyaláb egy $\pi\colon P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyalábból és egy V G-mo-

dulusból asszociálással származik, azaz $E(\xi)=P\times_G V$, akkor $E(\xi^*)=P\times_G V^*$, ahol V^* a V duális G-modulusa.

(d) Ha ξ és η topológikus vektornyalábok M felett, akkor $\xi\otimes\eta$ a ξ és η vektornyalábok *tenzorszorzata.*

(e) Ha ξ k-rangú topologikus vektornyaláb M felett, akkor $\Lambda^r(\xi)$, $r=0, \ldots, k$, a ξ vektornyaláb *r-edik külső hatványa.* A $\Lambda^*(\xi)=\Lambda^0(\xi)\oplus\ldots\oplus\Lambda^k(\xi)$ vektornyaláb a ξ vektornyaláb *külső hatványa.* Ha ξ egy $\pi\colon P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyalábból és egy V G-modulusból származik, azaz $E(\xi)=P\times_G V$, akkor $E(\Lambda^r(\xi))=P\times_G\Lambda^r(V)$, ahol a $\Lambda^r(V)$ G-modulus a V r-edik külső hatványa.

(f) Ha V valós vektortér, akkor a $V\underset{\mathbf{R}}{\otimes}\mathbf{C}$ tenzorszorzat, amelyben $\mathbf{C}$-t, mint valós 2-dimenziós vektorteret tekintjük, valós vektortér. $v\in V$ és $z, z'\in\mathbf{C}$ esetén definiáljuk $z(v\otimes z')=v\otimes(z\cdot z')$. Ezzel $V\underset{\mathbf{R}}{\otimes}\mathbf{C}$ komplex vektortérré válik, amelyet a V valós vektortér *komplexifikáltjának* nevezünk. Ha ξ topologikus vektornyaláb M felett, akkor a komplexifikáció funktorával egy $\xi\underset{\mathbf{R}}{\otimes}\mathbf{C}$ topologikus komplex vektornyalábot kapunk, amelyet a ξ *komplexifikáltjának* nevezünk. Ha ξ egy $\pi\colon P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyalábból és egy V G-modulusból származik, azaz $E(\xi)=P\times_G V$, akkor $E\left(\xi\underset{\mathbf{R}}{\otimes}\mathbf{C}\right)=P\times_G\left(V\underset{\mathbf{R}}{\otimes}\mathbf{C}\right)$ érvényes.

Legyen $\pi_E\colon E\to M$ topologikus fibrált nyaláb. Egy $\varphi\colon M\to E$ folytonos leképezést *folytonos szelés*nek nevezünk, ha $\pi_E\varphi=\mathrm{id}_M$. Differenciálható fibrált nyaláb *differenciálható szelése* analóg módon definiálható.

Ha ξ topologikus vektornyaláb M felett, akkor a ξ folytonos szeléseinek $\Gamma^0(\xi)$ halmaza, természetes módon, valós vektortérré tehető. Ha ξ differenciálható vektornyaláb M felett, akkor, hasonló módon, a ξ differenciálható szeléseinek $\Gamma^\infty(\xi)$ halmaza valós vektortér. Komplex vektornyaláb szeléseinek halmaza komplex vektortér.

(4.5) Példák. (a) Legyen $\theta_{\mathbf{R}}$ az M tér feletti 1-rangú triviális topológikus vektornyaláb. Ekkor $\Gamma^0(\theta_{\mathbf{R}})$ azonos az M-en értelmezett folytonos függvények lineáris terével. Hasonlóan, ha M differenciálható sokaság, akkor $\Gamma^\infty(\theta_{\mathbf{R}})=\mathscr{F}(M)$. Az M-en értelmezett differenciálható függvényeket *0-formák*nak is szokás nevezni.

(b) Legyen M m-dimenziós differenciálható sokaság és $T(M)$ az M tangensnyalábja. $T(M)$ differenciálható szelései nem mások, mint az M-en értelmezett vektormezők, azaz $\Gamma^\infty(T(M))=\mathfrak{X}(M)$. A $T(M)$ tangensnyaláb $T^*(M)$-mel jelölt duális nyalábját az M *kotangensnyalábjának* nevezzük. A $T^*(M)$ kotangensnyaláb differenciálható szeléseit M-en értelmezett *1-formák*nak nevezzük. Egy $\alpha\in\Gamma^\infty(T^*(M))$ 1-forma, a $T^*(M)=\mathrm{Hom}(T(M), \theta_{\mathbf{R}})$ azonosítással, egy $\alpha\colon\mathfrak{X}(M)\to\mathscr{F}(M)$ leképezésnek tekinthető, amely lineáris, valamint $X\in\mathfrak{X}(M)$ és $p\in M$ esetén $(\alpha(X))(p)$ értéke csak az $X_p\in T_p(M)$ tangensvektor értékétől függ.

Legyen (U, x) az X_p lokális térképe. Ekkor a $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\in\mathfrak{X}(U)$, $i=1, \ldots, m$, vektormezők a $T(U)$ vektornyaláb szelései, amelyek minden $p\in U$ pont feletti $T_p(M)$ tangenstérben bázist alkotnak. Jelölje $dx^i\in\Gamma^\infty(T^*(U))$, $i=1, \ldots, m$, a duális bázist, azaz $(dx^i)\left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta_{ij}$, $i, j=1, \ldots, m$. Ekkor minden α M-en értelmezett 1-forma U-ra való megszorítása $\alpha|U=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i dx^i$ alakú, $\alpha_i\in\mathscr{F}(U)$.

A $\Lambda^r(T^*(M))$, $r=0, \ldots, m$, vektornyaláb differenciálható szeléseit M-en értelmezett r-formáknak nevezzük és az általuk alkotott $\Gamma^\infty(\Lambda^r(T^*(M)))$ vektortérre a $\lambda^r(M)$ jelölést használjuk. Speciálisan $\lambda^0(M)=\mathscr{F}(M)$ és $\lambda^1(M)=\Gamma^\infty(T^*(M))$.

Egy $\alpha \in \lambda^r(M)$ r-forma egy $\alpha: \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ r-multilineáris, antiszimmetrikus leképezésnek tekinthető, amelyre teljesül az, hogy $X^1, \ldots, X^r \in \mathfrak{X}(M)$ és $p \in M$ esetén $(\alpha(X^1, \ldots, X^r))(p)$ értéke csak az $X_p^1, \ldots, X_p^r \in T_p(M)$ tangensvektorok értékeitől függ.

Ha (U, x) az M lokális térképe, akkor a dx^i, $i = 1, \ldots, m$, U-n értelmezett 1-formák minden $p \in U$ pontban $T_p^*(M)$ egy bázisát alkotják. A külső hatvány definíciója szerint a $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$ r-formák, ahol $1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq m$ és $\wedge$ a külső szorzás műveletét jelöli, minden $p \in U$ pont feletti $\Lambda^r(T_p^*(M))$ fibrumban bázist alkotnak. Így minden α M-en értelmezett r-forma U-ra való megszorítása $\alpha|U = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \alpha_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$ alakú, ahol $\alpha_{i_1 \ldots i_r} \in \mathcal{F}(U)$.

IRODALOM

[1] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groups,* Princeton University Press, 1946.
[2] G. H. HARDY, E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers,* Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1954.
[3] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry,* I. Interscience, New York, 1963.
[4] S. LANG, *Algebra,* Addison-Wesley, 165.
[5] R. S. PALAIS, *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem,* Princeton University Press, 1965.
[6] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles,* Princeton University Press, 1951.
[7] H. WHITNEY, *Geometric integration theory,* Princeton University Press, 1957.

II.

DIFFERENCIÁLOPERÁTOROK ANALITIKUS INDEXE

1. A de Rham kohomológia elmélet

Legyen M m-dimenziós differenciálható sokaság és $r = 0, 1, \ldots$ esetén tekintsük az I. rész 4. fejezetében bevezetett $\Lambda^r(T^*(M))$ differenciálható vektornyalábot M felett. ($r > m$ esetén $\Lambda^r(T^*(M))$ rangja 0.) E vektornyaláb differenciálható szeléseit r-formáknak nevezzük és az általuk alkotott $\mathcal{F}(M)$-modulusra a $\lambda^r(M)$ jelölést használjuk. Az alábbiakban egy $d^{r+1}: \lambda^r(M) \to \lambda^{r+1}(M)$ lineáris leképezést fogunk definiálni. (A d^{r+1} leképezés felső indexét, hacsak nem vezet félreértéshez, a továbbiakban elhagyjuk.)

Ha α r-forma, akkor lokális előállítása az M valamely (U, x) lokális térképére nézve $\alpha|U = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \alpha_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$ alakú, $\alpha_{i_1 \ldots i_r} \in \mathcal{F}(U)$. Legyen ekkor $(d\alpha)|U = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$. Közvetlen számolással meggyőződhetünk arról, hogy $d\alpha$ definíciója nem függ az (U, x) lokális térkép választásától. Ezzel olyan d lineáris leképezést értelmeztünk, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(i) $\mu \in \mathcal{F}(M)$ 0-forma esetén $d\mu \in \lambda^1(M)$ azaz 1-forma, amelyre $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén $(d\mu)(X) = X(\mu)$ teljesül,
(ii) $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (d\beta)$, $\alpha \in \lambda^r(M)$, $\beta \in \lambda^{r'}(M)$,
(iii) $d(\mu\alpha) = (d\mu) \wedge \alpha + \mu d\alpha$, $\mu \in \mathcal{F}(M)$, $\alpha \in \lambda^r(M)$,
(iv) $dd = 0$.

A d leképezést a *külső differenciálás operátorának* nevezzük. Egy α r-forma *zárt*, ha $d\alpha=0$. α *egzakt* r-forma, ha létezik egy β $(r-1)$-forma, amelyre $\alpha=d\beta$ érvényes. (iv) miatt minden egzakt forma zárt. A külső differenciálás lineáris leképezések egy

$$\lambda^0(M) \xrightarrow{d^1} \lambda^1(M) \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^r} \lambda^r(M) \xrightarrow{d^{r+1}} \lambda^{r+1}(M) \xrightarrow{d^{r+2}} \dots$$

sorozatát definiálja, amelyet az M sokaság *de Rham komplexusának* nevezünk. (iv) miatt $\operatorname{im} d^r/\ker d^{r+1}$ teljesül. Ha a $d^{r+1}\alpha=0$ egyenletet akarjuk megoldani, akkor két α', ill. α'' megoldás között célszerű nem tenni különbséget, ha $\alpha'-\alpha''=d^r\beta$ érvényes valamely $\beta(r-1)$-formára, hiszen az (iv) miatt ha α'' megoldás, akkor $\alpha'=\alpha''+d^r\beta$ is az. Tehát a fenti egyenlet megoldásainak terét a $\ker d^{r+1}/\operatorname{im} d^r$ lineáris tér határozza meg. Ezt a lineáris teret az M sokaság r-edik *de Rham kohomológia vektorterének* nevezzük és jelölésére a $H^r_{\text{de Rh}}(M)$ szimbólumot használjuk. E lineáris tér dimenziója (amely lehet végtelen is) az M sokaság r-edik *Betti száma*: $b_r(M)=\dim H^r_{\text{de Rh}}(M)$. A $H^r_{\text{de Rh}}(M)$, $r=0, 1, \dots$, vektorterek direkt összegét $H^*_{\text{de Rh}}(M)$-mel jelöljük.

Nevezzük a de Rham komplexust az r-edik pontban *egzaktnak* ha ott $\operatorname{im} d^r=\ker d^{r+1}$ áll. Ez pontosan akkor következik be, ha $b_r(M)=0$, azaz az r-edik de Rham kohomológia vektortér azt méri, hogy a de Rham komplexus az r-edik pontban mennyire van közel az egzaktsághoz.

Legyenek most M és M' differenciálható sokaságok és $f\colon M\to M'$ differenciálható leképezés. Ha $\alpha\in\lambda^r(M')$ akkor definiáljuk az $f^*(\alpha)\in\lambda^r(M)$ r-formát a következőképpen: $X^1_p, \dots, X^r_p\in T_p(M)$, $p\in M$, esetén legyen $(f^*(\alpha))(X^1_p, \dots, X^r_p)=\alpha(f_*(X^1_p), \dots, f_*(X^r_p))$. Az $f^*(\alpha)$ r-formát az α r-forma f-menti *visszahúzottjának* nevezzük. Ezzel $r=0, 1, \dots$ esetén $f^*\colon \lambda^r(M')\to\lambda^r(M)$ lineáris leképezéseket kapunk, amelyekre $f^*d=df^*$ teljesül, miként arról egyszerű számolással meggyőződhetünk. Ebből következik, hogy $f^*(\ker d)\subset\ker d$ és $f^*(\operatorname{im} d)\subset\operatorname{im} d$, azaz az $f\colon M\to M'$ differenciálható leképezés egy

$$f^*\colon H^*_{\text{de Rh}}(M') \to H^*_{\text{de Rh}}(M)$$

lineáris leképezést definiál. Ha M'' differenciálható sokaság és $f'\colon M'\to M''$ differenciálható leképezés, akkor $(f'f)^*=f^*f'^*$ érvényes.

Az alábbiakban szükségünk lesz a *peremes sokaságok* fogalmára. Jelölje $H^m_+=\{(p_1, \dots, p_m)\in\mathbf{R}^m \mid p_m\geqq 0\}$ az $\mathbf{R}^m$ zárt félterét. Egy M megszámlálható bázisú Hausdorff teret m-dimenziós *peremes topológikus sokaságnak* nevezzük, ha M minden pontjának van $\mathbf{R}^m$-mel vagy H^m_+- mel homeomorf nyílt környezete. M azon pontjainak $\mathring{M}$ altere, amelyeknek van $\mathbf{R}^m$-mel homeomorf nyílt környezetük, egy m-dimenziós topológikus sokaság. A $\partial M=M-\mathring{M}$ altér $(m-1)$-dimenziós topológikus sokaság, amelyet az M *peremének* nevezzük. A *peremes differenciálható sokaság* definíciója ezután a differenciálható sokaság definíciójával analóg azzal a kiegészítéssel, hogy olyan (U, x) lokális térképeket is megengedünk, amelyekre $x\colon U\to H^m_+$ homeomorfizmus. Peremes differenciálható sokaságok differenciálható leképezései, tangensnyalábjai, stb. ,értelemszerűen, a differenciálható sokaságoknál leírt definíciók egyszerű átfogalmazásai.

Legyenek M és M' topológikus terek és $f, f'\colon M\to M'$ folytonos leképezések. Az f és f' leképezések *homotópak*, jelben $f\simeq f'$, ha létezik olyan $H\colon M\times[0, 1]\to M'$ folytonos leképezés, amelyre $p\in M$ esetén $H(p, 0)=f(p)$ és $H(p, 1)=f'(p)$ érvényesek. Egy $f\colon M\to M'$ folytonos leképezés *homotópikus ekvivalencia*, ha létezik $f'\colon M'\to M$ folytonos leképezés úgy, hogy $f'f\simeq \mathrm{id}_M$ és $ff'\simeq \mathrm{id}_{M'}$, teljesülnek. Az M

és M' topológikus terek *homotópikusan ekvivalensek,* ha létezik $f\colon M\to M'$ homotópikus ekvivalencia.

Ha M és M' differenciálható sokaságok és $f, f'\colon M\to M'$ differenciálható leképezések, akkor az f és f' leképezések *differenciálhatóan homotópak*, ha létezik egy fenti tulajdonságú $H\colon M\times[0,1]\to M'$ differenciálható leképezés. A *differenciálható homotópikus ekvivalencia* és a *differenciálhatóan homotópikusan ekvivalens* sokaságok fogalmai értelemszerűen a topológikus eset meghatározásaiból kaphatóak.

Az alábbiakban igazoljuk, hogy ha $f\colon M\to M'$ differenciálható homotópikus ekvivalencia, akkor $f^*\colon H^r_{\text{de Rh}}(M')\to H^r_{\text{de Rh}}(M)$ izomorfizmus, $r=0,1,\ldots$.

Legyen M m-dimenziós differenciálható sokaság és tekintsük az $M\times[0,1]$ peremes differenciálható sokaságot. Legyenek $\pi_M\colon M\times[0,1]\to M$, ill. $\pi\colon M\times[0,1]\to[0,1]$ a megfelelő projekciók és $0\leqq t\leqq 1$ esetén jelölje $i_t\colon M\to M\times[0,1]$, $i_t(p)=(p,t)$, az M sokaság $M\times\{t\}\subset M\times[0,1]$ részsokaságra való diffeomorfizmusát. A $(p,t)\in M\times[0,1]$ pont feletti tangenstér, az I. rész (4.2) példája alapján, az alábbi Whitney-összegre bomlik:

$$T_{(p,t)}(M\times[0,1])\cong \ker\pi_*\oplus\ker(\pi_M)_*.$$

Így $\alpha\in\lambda^r(M\times[0,1])$ esetén $\alpha=\alpha_1+(dt\wedge\beta)$ áll, ahol $\alpha_1\in\lambda^r(M\times[0,1])$; $\alpha_1(X^1,\ldots,X^r)=0$, ha X^i szelése a $\ker(\pi_M)_*$ vektornyalábnak valamely $i=1,\ldots,r$ esetén, és $\beta\in\lambda^{r-1}(M\times[0,1])$ hasonló tulajdonsággal rendelkezik. (Általában, ha V és V' lineáris terek és $\alpha\in\lambda^r(V\oplus V')$, akkor $\alpha=\sum_{i+j=r}\beta^i\wedge\gamma^j$, ahol $\beta^i\in\lambda^i(V\oplus V')$ és $\gamma^j\in\lambda^j(V\oplus V')$ és $\beta^i(w^1,\ldots,w^i)=0$, ha $w^p\in V'$ valamely $p=1,\ldots,i$ esetén és $\gamma^j(w^1,\ldots,w^j)=0$, ha $w^q\in V$ valamely $q=1,\ldots,j$ esetén.)

Definiáljuk az $I_\alpha\in\lambda^{r-1}(M)$ formát az

$$I_\alpha(X^1_p,\ldots,X^{r-1}_p)=\int_0^1\beta\big((i_t)_*X^1_p,\ldots,(i_t)_*X^{r-1}_p\big)\,dt,\quad X^1_p,\ldots,X^{r-1}_p\in T_p(M),$$

egyenlőséggel.

(1.1) Lemma. $\alpha\in\lambda^r(M\times[0,1])$ esetén $i_1^*\alpha-i_0^*\alpha=dI_\alpha-I_{d\alpha}$ áll.

Bizonyítás. Legyen (U,x) az M lokális térképe és $(U\times[0,1],\bar x^1,\ldots,\bar x^m,t)$ az $M\times[0,1]$ peremes sokaság azon lokális térképe, amelyre $\bar x^i=x^i\pi_M$, $i=1,\ldots,m$. Két esetet választunk szét:

1. $\alpha=\mu\,d\bar x^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\bar x^{i_r}$.

Ekkor $d\alpha=\dfrac{\partial\mu}{\partial t}\,dt\wedge d\bar x^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\bar x^{i_r}$ + olyan tagok, amelyekben „dt" nem szerepel.

Így $I_{d\alpha}(p)=\left(\int_0^1\dfrac{\partial\mu}{\partial t}(p,t)\,dt\right)d\bar x^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\bar x^{i_r}=\big(\mu(p,1)-\mu(p,0)\big)\,d\bar x^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\bar x^{i_r}=$
$=i_1^*\alpha(p)-i_0^*\alpha(p)$. Továbbá $I_\alpha=0$, amivel a lemmát az első esetben beláttuk.

2. $\alpha=\mu\,dt\wedge d\bar x^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\bar x^{i_{r-1}}$.

Ekkor $i_1^*\alpha=i_0^*\alpha=0$. Továbbá $I_{d\alpha}(p)=-\sum_{j=1}^m\left(\int_0^1\dfrac{\partial\mu}{\partial\bar x^j}(p,t)\,dt\right)d\bar x^j\wedge d\bar x^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\bar x^{i_{r-1}}$

és $(dI_\alpha)(p)=\left(d\left(\int_0^1\mu(.,t)\,dt\right)d\bar x^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\bar x^{i_{r-1}}\right)(p)=\sum_{j=1}^m\left(\dfrac{\partial}{\partial\bar x^j}\left(\int_0^1\mu(.,t)\,dt\right)\right)(p)$.
$d\bar x^j\wedge d\bar x^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\bar x^{i_{r-1}}$, azaz $dI_\alpha-I_{d\alpha}=0$. Ezzel a lemmát igazoltuk.

(1.2) Tétel. Ha az $f, f'\colon M \to M'$ differenciálható leképezések differenciálhatóan homotópak, akkor az $f^*, f'^*\colon H^r_{\text{de Rh}}(M') \to H^r_{\text{de Rh}}(M)$ indukált leképezések azonosak, azaz $f^* = f'^*$.

Bizonyítás. Legyen $H\colon M \times [0,1] \to M'$ olyan differenciálható leképezés, amelyre $p \in M$ esetén $H(p,0) = f(p)$ és $H(p,1) = f'(p)$ teljesülnek, azaz $f = Hi_0$ és $f' = Hi_1$. Legyen $\alpha \in \lambda^r(M')$ zárt forma, azaz α egy $H^r_{\text{de Rh}}(M')$-beli osztály reprezentánsa. Ekkor $f'^*(\alpha) - f^*(\alpha) = i_1^*(H^*\alpha) - i_0^*(H^*\alpha) = dI_{H^*\alpha} - I_{dH^*\alpha} = dI_{H^*\alpha}$, azaz az $f'^*(\alpha)$ és $f^*(\alpha)$ r-formák a $H^r_{\text{de Rh}}(M)$ ugyanazon elemének reprezentánsai. Ez pontosan az $f^* = f'^*$ egyenlőséget jelenti.

(1.3) Következmény. Ha M és M' differenciálhatóan homotópikusan ekvivalens sokaságok, akkor $H^r_{\text{de Rh}}(M) \cong H^r_{\text{de Rh}}(M')$.

A fenti következmény alapján $H^r_{\text{de Rh}}(S^m) \cong H^r_{\text{de Rh}}(\mathbf{R}^{m+1} - \{0\})$. Az alábbiakban egy olyan módszert adunk, amelynél az M differenciálható sokaságot nyílt halmazok segítségével egyszerűbb részekre bontjuk, az ezekhez tartozó de Rham kohomológia vektortereket meghatározzuk és végül az egész sokaság de Rham kohomológia vektorterének és a felbontásban szereplő nyílt halmazokhoz tartozó de Rham kohomológia vektorterek kapcsolatát vizsgáljuk.

Legyen $U, U' \subset M$ nyílt halmazok és tegyük fel, hogy $U \cup U' = M$. Ekkor az

$$i_U\colon U \subset M \qquad i_{U'}\colon U' \subset M$$

$$j_U\colon U \cap U' \subset U \qquad j_{U'}\colon U \cap U' \subset U'$$

tartalmazások definiáltak. Tekintsük a következő leképezéseket:

$$\lambda^r(M) \xrightarrow{u} \lambda^r(U) \oplus \lambda^r(U') \xrightarrow{u'} \lambda^r(U \cap U'),$$

ahol $u(\alpha) = (i_U^*(\alpha), i_{U'}^*, (\alpha))$ és $u'(\beta, \gamma) = j_U^*(\beta) - j_{U'}^*(\gamma)$. Itt $i_U^*(\alpha)$ az α r-forma megszorítása U-ra, stb. Nyilván $u'u = 0$, azaz im $u \subset \ker u'$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $\ker u' \subset \text{im } u$ megfordítás is érvényes. Valóban, ha $u'(\beta, \gamma) = 0$, akkor $\beta = \gamma$ áll az $U \cap U'$ részsokaságon és így van olyan α r-forma, amelyre $\alpha = \beta$ U-n és $\alpha = \gamma$ U'-n, azaz $u(\alpha) = (\beta, \gamma)$. Kaptuk, hogy im $u = \ker u'$, azaz a fenti sorozat a középső pontban egzakt.

(1.4) Lemma. A kiegészített

$$0 \longrightarrow \lambda^r(M) \xrightarrow{u} \lambda^r(U) \oplus \lambda^r(U') \xrightarrow{u'} \lambda^r(U \cap U') \longrightarrow 0$$

sorozat minden pontban egzakt.

Bizonyítás. Ha egy α r-forma megszorítása U-ra és U'-re egyidejűleg zérus, akkor $\alpha = 0$. Így $\ker u = 0$, azaz a sorozat a $\lambda^r(M)$ pontban egzakt. A középső pontban a sorozat egzakt, mint azt fentebb láttuk. Igazolnunk kell még, hogy a sorozat a $\lambda^r(U \cap U')$ pontban is egzakt, azaz, hogy u' ráképezés. Legyenek $\mu_U\colon U \to [0,1]$ és $\mu_{U'}\colon U' \to [0,1]$ olyan differenciálható függvények, amelyekre supp $\mu_U \subset U$, supp $\mu_{U'} \subset U'$ és $\mu_U + \mu_{U'} = 1$ teljesülnek. (Ha $\mu\colon M \to \mathbf{R}$ egy függvény akkor μ tartója, supp $\mu \subset M$, annak az altérnek a lezárása, amelynek elemein μ nemzérus értéket vesz fel.) Legyen $\alpha \in \lambda^r(U \cap U')$. Ekkor $\alpha = u'(\mu_{U'}\alpha, \mu_U\alpha)$, ahol $\mu_{U'}\alpha$ a $\mu_{U'}$ tartóján kívül zérus. Kaptuk, hogy u' ráképezés, amivel az állítást bebizonyítottuk.

A d operátor alkalmazásával a következő végtelen diagramot készíthetjük el:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & \lambda^{r-1}(M) & \xrightarrow{u} & \lambda^{r-1}(U)\oplus\lambda^{r-1}(U') & \xrightarrow{u'} & \lambda^{r-1}(U\cap U') & \longrightarrow \\
 & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d\oplus d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & \\
\longrightarrow & \lambda^{r}(M) & \xrightarrow{u} & \lambda^{r}(U)\oplus\lambda^{r}(U') & \xrightarrow{u'} & \lambda^{r}(U\cap U') & \longrightarrow \\
 & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d\oplus d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & \\
\longrightarrow & \lambda^{r+1}(M) & \xrightarrow{u} & \lambda^{r+1}(U)\oplus\lambda^{r+1}(U') & \xrightarrow{u'} & \lambda^{r+1}(U\cap U') & \longrightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow &
\end{array}$$

Ha α r-forma, akkor

$$(d\oplus d)u(\alpha) = (d\oplus d)(i_U^*\alpha, i_{U'}^*\alpha) = (di_U^*\alpha, di_{U'}^*\alpha) = (i_U^* d\alpha, i_{U'}^* d\alpha) = ud\alpha$$

és ha $(\beta,\gamma)\in\lambda^r(U)\oplus\lambda^r(U')$, akkor

$$du'(\beta,\gamma) = dj_U^*\beta - dj_{U'}^*\gamma = j_U^* d\beta - j_{U'}^* d\gamma = u'(d\beta, d\gamma) = u'(d\oplus d)(\beta,\gamma),$$

azaz a diagram minden négyzete kommutatív. Az $u\colon \lambda^r(M)\to\lambda^r(U)\oplus\lambda^r(U')$ lineáris leképezés egy

$$u\colon H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U)\oplus H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U')$$

lineáris leképezést definiál. Legyen ugyanis $\alpha\in\lambda^r(M)$ a $H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M)$ egy osztályának reprezentánsa, azaz $d\alpha=0$. Ekkor $u(\alpha)=(i_U^*\alpha, i_{U'}^*\alpha)$, azaz $di_U^*\alpha=i_{U'}^* d\alpha=0$, amiből kapjuk, hogy az $(i_U^*\alpha, i_{U'}^*\alpha)$ a $H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U)\oplus H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U')$ egy elemét reprezentálja. Legyen u értéke az α reprezentánsú osztályon az $(i_U^*\alpha, i_{U'}^*\alpha)$ reprezentánsú $H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U)\oplus \oplus H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U')$-beli osztály. Könnyű látni, hogy u definíciója értelmes, azaz értékei azonos osztálybeli két reprezentánson közös osztályban vannak. Hasonló módon az $u'\colon \lambda^r(U)\oplus\lambda^r(U')\to\lambda^r(U\cap U')$ lineáris leképezés egy

$$u'\colon H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U)\oplus H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U')\to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U\cap U')$$

lineáris leképezést definiál.

Mivel a fenti végtelen diagram sorai egzaktak, ezért azt sejthetjük, hogy a

$$0\to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U)\oplus H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U')\to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U\cap U')\to 0$$

sorozat is egzakt lesz. Ez azonban nem igaz, mint azt később példával fogjuk illusztrálni. A különböző r esetén kapott

$$H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\xrightarrow{u} H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U)\oplus H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U')\xrightarrow{u'} H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U\cap U')$$

sorozatok azonban egy végtelen egzakt sorozattá fűzhetők össze, mint azt a következő tétel állítja.

(1.5) Tétel. Léteznek olyan

$$\partial\colon H^{r+1}_{\mathrm{de\,Rh}}(U\cap U')\to H^{r+1}_{\mathrm{de\,Rh}}(M)$$

lineáris leképezések, hogy a

$$0\to H^0_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\to H^0_{\mathrm{de\,Rh}}(U)\oplus H^0_{\mathrm{de\,Rh}}(U')\to H^0_{\mathrm{de\,Rh}}(U\cap U')\to H^1_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\to\dots$$

$$\dots\to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U)\oplus H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U')\to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U\cap U')\to H^{r+1}_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\to\dots$$

végtelen sorozat egzakt.

A tételben szereplő egzakt sorozatot az $M=U\cup U'$ felbontás *Mayer—Vietoris sorozat*ának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen r rögzített és tekintsük a $H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U\cap U')$ vektortér egy osztályának valamely $\alpha\in\lambda^r(U\cap U')$ reprezentánsát. Ekkor $d\alpha=0$. A fenti végtelen diagram középső sora egzakt, azaz létezik olyan $(\beta,\gamma)\in\lambda^r(U)\oplus\lambda^r(U')$, amelyre $u'(\beta,\gamma)=\alpha$. Ekkor $0=d\alpha=du'(\beta,\gamma)=u'(d\oplus d)(\beta,\gamma)$, azaz $(d\oplus d)(\beta,\gamma)\in\ker u'$. Az alsó sor egzaktsága miatt $\ker u'=\operatorname{im} u$, azaz létezik olyan $\varrho\in\lambda^{r+1}(M)$, amelyre $u(\varrho)=(d\oplus d)(\beta,\gamma)$ áll. Mivel $ud(\varrho)=(d\oplus d)u(\varrho)=(d\oplus d)(d\oplus d)(\beta,\gamma)=0$, ezért $d\varrho=0$, hiszen $\ker u=0$. Kaptuk, hogy a ϱ elem $H^{r+1}(M)$ egy osztályának reprezentánsa. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy ha $H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U\cap U')$ egyazon osztályának két α és $\bar\alpha$ reprezentánsát választjuk, akkor az ezekhez tartozó ϱ és $\bar\varrho$ elemek egyazon $H^{r+1}_{\mathrm{de\,Rh}}(M)$-beli osztályban vannak. Definiáljuk tehát a ∂ leképezését úgy, hogy az α reprezentáns osztályának feleltesse meg a ϱ reprezentáns osztályát. Ezzel a $\partial\colon H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U\cap U')\to H^{r+1}_{\mathrm{de\,Rh}}(M)$ lineáris leképezést meghatároztuk és elkészíthetjük a tételben szereplő végtelen sorozatot. A fenti végtelen diagram segítségével „diagram vadászattal" ellenőrizhető, hogy az összefűzött végtelen sorozat minden pontban egzakt. Ezt a hosszadalmas, de különösebb ötletet nem igénylő munkát az olvasóra bízzuk.

Ezzel igazoltuk, hogy létezik egy $H^*_{\mathrm{de\,Rh}}$ (egyváltozós, kontravariáns) funktor, amely minden M (peremes) differenciálható sokasághoz a $H^*_{\mathrm{de\,Rh}}(M)$ de Rham kohomológia vektorteret rendeli és minden $f\colon M\to M'$ differenciálható eképezéshez egy $f^*\colon H^*_{\mathrm{de\,Rh}}(M')\to H^*_{\mathrm{de\,Rh}}(M)$ lineáris leképezést rendel úgy, hogy teljesülnek a következő tulajdonságok:

(i) Ha $\mathrm{id}_M\colon M\to M$ az identitás leképezés, akkor $\mathrm{id}^*_M\colon H^*_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\to H^*_{\mathrm{de\,Rh}}(M)$ az identitás,

(ii) Ha $f\colon M\to M'$ és $f'\colon M'\to M''$ differenciálható leképezések, akkor $(f'f)^*=f^*f'^*$,

(iii) Ha $f,f'\colon M\to M'$ differenciálhatóan homotóp leképezések, akkor $f^*=f'^*$,

(iv) Ha $M=U\cup U'$ egy nyílt halmazokkal való felbontás, akkor létezik egy

$$0\to H^0_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\to H^0_{\mathrm{de\,Rh}}(U)\oplus H^0_{\mathrm{de\,Rh}}(U')\to H^0_{\mathrm{de\,Rh}}(U\cap U')\to H^1_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\to\dots$$

$$\dots\to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U)\oplus H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U')\to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(U\cap U')\to H^{r+1}_{\mathrm{de\,Rh}}(M)\to\dots$$

egzakt sorozat,

(v) $$H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(\mathrm{pont})\cong\begin{cases}\mathbf{R}, & \text{ha } r=0\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Az (i)—(v) tulajdonságokkal rendelkező $H^*_{\mathrm{de\,Rh}}$ funktort *de Rham kohomológia elmélet*nek, az (i)—(v) tulajdonságokat a de Rham kohomológia elmélet *axiómái*nak nevezzük. Az alábbiakban a de Rham kohomológia elmélet néhány alkalmazását mutatjuk be. Az (iv) Mayer—Vietoris sorozat segítségével a sokaságok egy részének de Rham kohomológia vektorterei és így Betti számai meghatározhatók. Példaként határozzuk meg az m-dimenziós euklidészi gömb $H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(S^m)$ de Rham kohomológia vektortereit!

(1.6) Tétel. $m\in\mathbf{N}$ esetén

$$H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(S^m)\cong\begin{cases}\mathbf{R}, & \text{ha } r=0,m\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Bizonyítás. $r>m$ esetén $H^r_{\text{de Rh}}(S^m)=0$, hiszen egy m-dimenziós differenciálható sokaságon legfeljebb m-edfokú nemzérus formák vannak. Az állítás fennmaradó részét m szerinti indukcióval igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy $H^1_{\text{de Rh}}(S^1)\cong\mathbf{R}$. $\lambda^1(S^1)$ minden eleme zárt, hiszen S^1-en minden 2-forma zérus. Ha S^1-et, mint a $\gamma\colon \mathbf{R}\to\mathbf{C}$, $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in\mathbf{R}$, differenciálható görbe képét tekintjük, akkor $\mathfrak{X}(S^1)$ minden eleme μj alakú, ahol $\mu\in\mathscr{F}(S^1)$, azaz μ (2π)-szerint periódikus differenciálható függvény. Legyen $v\in\lambda^1(S^1)$ azaz 1-forma, amelyre $v(j)=1$. Ekkor $\lambda^1(S^1)$ minden ω eleme $\mu\cdot v$ alakú, ahol μ (2π)-szerint periódikus differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy $\alpha=\mu\cdot v$ és $\alpha_0=\left(\int_0^{2\pi}\mu\right)v$ a $H^1_{\text{de Rh}}(S^1)$-ben ugyanannak az osztálynak reprezentánsai. Valóban, $\alpha-\alpha_0=\left(\mu-\int_0^{2\pi}\mu\right)v=d\mu'$, ahol a $\mu-\int_0^{2\pi}\mu$ (2π)-szerint periódikus függvénynek μ' (2π)-szerint periódikus primitív függvénye. A Newton—Leibniz formulából egyszerűen következik, hogy a const. v alkú 1-formák $H^1_{\text{de Rh}}(S^1)$ különböző osztályait reprezentálják, azaz $H^1_{\text{de Rh}}(S^1)\cong\mathbf{R}$.

Tegyük most fel, hogy az állítás igaz m-nél kisebb számokra és legyenek

$$U=S^m-\{(0,\ldots,0,-1)\}\quad\text{és}\quad U'=S^m-\{(0,\ldots,0,1)\}.$$

Ekkor U és U' az egypontú térrel és $U\cap U'$ az S^{m-1} euklidészi gömbbel differenciálhatóan homotópikusan ekvivalensek. A Mayer—Vietoris sorozat egy részlete $r\in\mathbf{N}$ esetén

$$\ldots\to H^r_{\text{de Rh}}(U)\oplus H^r_{\text{de Rh}}(U')\to H^r_{\text{de Rh}}(S^{m-1})\to H^{r+1}_{\text{de Rh}}(S^m)\to$$

$$\to H^{r+1}_{\text{de Rh}}(U)\oplus H^{r+1}_{\text{de Rh}}(U')\to\ldots.$$

A sorozat egzaktsága szerint $H^r_{\text{de Rh}}(S^{m-1})\cong H^{r+1}_{\text{de Rh}}(S^m)$, amiből következik, hogy $H^2_{\text{de Rh}}(S^m)\cong\ldots\cong H^{m-1}_{\text{de Rh}}(S^m)=0$ és $H^m_{\text{de Rh}}(S^m)\cong\mathbf{R}$. A Mayer—Vietoris sorozat eleje:

$$0\to\mathbf{R}\to\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}\to\mathbf{R}\to H^1_{\text{de Rh}}(S^m)\to 0,$$

amiből következik, hogy $H^1_{\text{de Rh}}(S^m)=0$. Ezzel a tételt igazoltuk.

(1.7) Következmény. $m\neq n$ esetén S^m és S^n nem differenciálhatóan homotópikusan ekvivalensek.

Legyen M topológikus tér $N\subset M$ altér és $f\colon M\to N$ folytonos leképezés. Az f leképezést *retrakció*nak nevezzük, ha $f|N=\mathrm{id}_N$ teljesül. Az N altér az M *retraktum*a, ha létezik egy $f\colon M\to N$ retrakció. Ha M differenciálható sokaság, $N\subset M$ részsokaság és $f\colon M\to N$ differenciálható leképezés, akkor $f|N=\mathrm{id}_N$ teljesülése esetén f *differenciálható retrakció* és N az M *differenciálható retraktum*a.

Jelölje $D^m=\left\{(p_1,\ldots,p_m)\in\mathbf{R}^m\,\middle|\,\sum_{i=1}^m(p_i)^2\leqq 1\right\}$ a zárt egységgömböt. Ekkor D^m m-dimenziós peremes differenciálható sokaság és $\partial D^m=S^{m-1}$.

(1.8) Tétel. S^{m-1} nem differenciálható retraktuma D^m-nek.

Bizonyítás. $m=1$ esetén S^0 két pontból áll és D^1 összefüggő, azaz az állítás triviális. Legyen $m>1$ és tegyük fel, hogy létezik $f\colon D^m\to S^{m-1}$ differenciálható

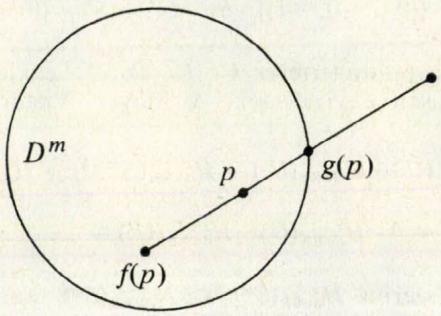
leképezés, amelyre $f|S^{m-1}=\mathrm{id}_{S^{m-1}}$. Ha i: $S^{m-1}\subset D^m$ a tartalmazás, akkor $fi=$ $=\mathrm{id}_{S^{m-1}}$, azaz a

$$\begin{array}{ccc} H^{m-1}_{\mathrm{de\,Rh}}(S^{m-1}) & \xrightarrow{\mathrm{id}^*} & H^{m-1}_{\mathrm{de\,Rh}}(S^{m-1}) \\ & {\scriptstyle f^*}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle i^*} & \\ & H^{m-1}_{\mathrm{de\,Rh}}(D^m) & \end{array}$$

diagram kommutatív. Ekkor id* az identitás leképezés, $m>1$ miatt $H^{m-1}_{\mathrm{de\,Rh}}(D^m)=0$, ami $H^{m-1}_{\mathrm{de\,Rh}}(S^{m-1})\cong\mathbf{R}$ miatt ellentmondás.

(1.9) Következmény. Bármely f: $D^m\to D^m$ differenciálható leképezésre létezik $p\in D^m$ pont, amelyre $f(p)=p$ teljesül (Brouwer fixpont tétele).

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik olyan f: $D^m\to D^m$ differenciálható leképezés, amelyre $f(p)\neq p$ teljesül $p\in D^m$ esetén. Legyen ekkor g: $D^m\to S^{m-1}$ az a leképezés, amelyet az 1. ábra mutat. Egyszerű számolással kapjuk, hogy g differenciálható leképezés. $g|S^{m-1}=\mathrm{id}_{S^{m-1}}$ miatt az (1.8) tétellel ellentmondásra jutunk.



1. ábra

Végezetül, a később felhasználásra kerülő Poincaré dualitás és a Hodge-de Rham-elmélet néhány alapvető fogalmát írjuk le.

Legyen V m-dimenziós valós vektortér és $(\,,\,)$ egy euklidészi metrika V-n, azaz egy pozitív definit, szimmetrikus bilineáris forma. Legyen γ: $V\to V^*$ az az izomorfizmus, amelyre $\gamma(v)(w)=(v,w)$, $v,w\in V$.

(1.10) Lemma. Létezik egy $\mathrm{vol}\in\Lambda^m(V)$ előjel erejéig egyértelműen meghatározott m-forma V-n, amelyre

$$\mathrm{vol}\,(v^1,\ldots,v^m)\cdot\mathrm{vol}\,(w,\ldots,w^m)=\det\left((v^i,w^j)_{i,j=1}^m\right)$$

érvényes.

A vol m-formát a $(\,,\,)$ metrika által definiált *térfogati formának* nevezzük.

Bizonyítás. $\dim\Lambda^m(V)=1$ miatt létezik egy $\alpha\in\Lambda^m(V)$ nemzérus m-forma. Rögzített $v^1,\ldots,v^m\in V$ esetén a $(w^1,\ldots,w^m)\mapsto\det\left((v^i,w^j)_{i,j=1}^m\right)$ leképezés egy antiszimmetrikus, multilineáris m-forma, azaz $\Lambda^m(V)$-nek egy eleme. Így létezik $\beta(v^1,\ldots,v^m)\in\mathbf{R}$ úgy, hogy $w^1,\ldots,w^m\in V$ esetén

$$\det\left((v^i,w^j)_{i,j=1}^m\right)=\beta(v^1,\ldots,v^m)\cdot\alpha(w^1,\ldots,w^m)$$

teljesül. A v^i és w^i, $i=1, \ldots, m$, vektorok szerepcseréjével $\beta \in \Lambda^m(V)$ adódik. Így létezik $a \in \mathbf{R}$ amelyre $\beta(v^1, \ldots, v^m) = a \cdot \alpha(v^1, \ldots, v^m)$, $v^1, \ldots, v^m \in V$, érvényes. Kapjuk, hogy $\det\left((v^i, w^j)_{i,j=1}^m\right) = a \cdot \alpha(v^1, \ldots, v^m) \cdot \alpha(w^1, \ldots, w^m)$. Ha $(e^1, \ldots, e^m) \subset V$ a $(,)$ metrikára nézve ortonormált bázis, akkor $1 = \det\left((e^i, e^j)_{i,j=1}^m\right) = a \cdot \alpha(e^1, \ldots, e^m)^2$, azaz $a > 0$. Legyen ekkor $\mathrm{vol} = \pm\sqrt{a} \cdot \alpha$.

A V vektortér két $(e^1, \ldots, e^m)$ és $(e'^1, \ldots, e'^m)$ bázisa *azonosan irányított*, ha van olyan pozitív determinánsú $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m \in GL(m, \mathbf{R})$ mátrix, amelyre $e'^i = \sum_{j=1}^m a_{ij} e^j$, $j = 1, \ldots, m$, érvényes. Az „azonosan irányítottság" ekvivalenciareláció és a V vektortér bázisait két diszjunkt osztályba sorolja. A V vektorteret *irányítottnak* nevezzük, ha a két osztály közül az egyiket előírjuk. Ha V irányított vektortér a $(,)$ skaláris szorzással, akkor $\mathrm{vol} \in \Lambda^m(V)$ egyértelműen definiálható, ugyanis ha $(e^1, \ldots, e^m)$ olyan ortonormált bázisa V-nek, amely az előírt ekvivalenciaosztályba tartozik, akkor $\mathrm{vol} = \gamma(e^1) \wedge \ldots \wedge \gamma(e^m)$ térfogati forma. Megfordítva, $\pm\,\mathrm{vol} \in \Lambda^m(V)$ előjelének megválasztása a V vektortér egy irányítását adja meg. A továbbiakban legyen $\mathrm{vol} \in \Lambda^m(V)$ rögzített.

(1.11) Lemma. $\alpha \in \Lambda^r(V)$, $r = 0, 1, \ldots, m$, esetén létezik egy egyértelműen meghatározott $*\alpha \in \Lambda^{m-r}(V)$ elem, amelyre

$$(*\alpha)(v^1, \ldots, v^{m-r}) \cdot \mathrm{vol} = \alpha \wedge \gamma(v^1) \wedge \ldots \wedge \gamma(v^{m-r})$$

érvényes $v^1, \ldots, v^{m-r} \in V$ esetén.

Bizonyítás. Rögzített $v^1, \ldots, v^{m-r} \in V$ esetén $\alpha \wedge \gamma(v^1) \wedge \ldots \wedge \gamma(v^{m-r}) \in \Lambda^m(V)$, azaz létezik olyan $(*\alpha)(v^1, \ldots, v^{m-r}) \in \mathbf{R}$ szám, hogy az állításban szereplő egyenlőség fennáll. Ezzel egy $*\alpha \in \Lambda^{m-r}(V)$ elemet kapunk, amivel az állítást igazoltuk.

(1.12) Lemma. Legyen $(e^1, \ldots, e^m) \subset V$ a $(,)$ metrikára nézve ortonormált bázis úgy, hogy a $(\gamma(e^1), \ldots, \gamma(e^m)) \subset V^*$ duális bázisra $\mathrm{vol} = \gamma(e^1) \wedge \ldots \wedge \gamma(e^m)$ teljesül. Legyen $\{i_1, \ldots, i_r\}$ az $\{1, \ldots, m\}$ sorozat monoton részsorozata és $\{j_1, \ldots, j_{m-r}\}$ a komplementer monoton részsorozat. Ekkor $*(\gamma(e^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \gamma(e^{i_r})) = \varepsilon(i_1, \ldots, i_r) \cdot \gamma(e^{j_1}) \wedge \ldots \wedge \gamma(e^{j_{m-r}})$ érvényes, ahol $\varepsilon(i_1, \ldots, i_r)$ az $\{i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_{m-r}\}$ permutáció előjele.

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

(1.13) Tétel. $\alpha \in \Lambda^r(V)$ esetén $**\alpha = (-1)^{r(m-r)}\alpha$, azaz a $*: \Lambda^r(V) \to \Lambda^{m-r}(V)$ lineáris leképezés izomorfizmus, amelynek inverze $(-1)^{r(m-r)}*$.

A tételben szereplő $*: \Lambda^r(V) \to \Lambda^{m-r}(V)$ izomorfizmust *Poincaré dualitás*nak nevezzük.

Bizonyítás. Az (1.12) lemmában használt jelölésekkel

$$** \left(\gamma(e^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \gamma(e^{i_r})\right) = \varepsilon(i_1, \ldots, i_r) \cdot \varepsilon(j_1, \ldots, j_{m-r}) \gamma(e^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \gamma(e^{i_r}) =$$
$$= (-1)^{r(m-r)} \gamma(e^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \gamma(e^{i_r}),$$

amivel az állítást igazoltuk, hiszen a $\gamma(e^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \gamma(e^{i_r})$ alakú r-formák $\Lambda^r(V)$ egy bázisát alkotják.

(1.14) Tétel. $\alpha, \beta \in \Lambda^r(V)$ esetén $\alpha \wedge (*\beta) = \beta \wedge (*\alpha)$ áll.

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

Az alábbiakban a Poincaré dualitást Riemann sokaságokra definiáljuk. Legyen M differenciálható sokaság. Az M sokaság *irányítható*, ha létezik az M-en adott

atlasszal ekvivalens $\mathcal{A}=\{(U_\varrho, x_\varrho)|\varrho\in\mathcal{I}\}$ differenciálható atlasz úgy, hogy $\varrho, \sigma\in\mathcal{I}$ esetén az $x_\sigma x_\varrho^{-1}$: $x_\varrho(U_\varrho\cap U_\sigma)\to x_\sigma(U_\varrho\cap U_\sigma)$ diffeomorfizmus Jacobi mátrixának determinánsa pozitív az $x_\varrho(U_\varrho\cap U_\sigma)$ altér minden pontjában. Az M *irányított* differenciálható sokaság, ha M-en egy fenti tulajdonságú atlasz adott.

(1.15) Lemma. Legyen M m-dimenziós irányított Riemann sokaság. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott volt $(M)\in\lambda^m(M)$ m-forma úgy, hogy $X^1, \ldots, X^m, Y^1, \ldots, Y^m\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$\mathrm{vol}\,(M)(X^1, \ldots, X^m)\cdot \mathrm{vol}\,(M)(Y^1, \ldots, Y^m) = \det\left((X^i, Y^j)_{i,j=1}^m\right),$$

ahol $(,)$ az M Riemann metrikáját jelöli. A $\mathrm{vol}(M)$ m-formát az M Riemann sokaság *térfogati formájának* nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}=\{(U_\varrho, x_\varrho)|\varrho\in\mathcal{I}\}$ az adott differenciálható atlasza M-nek, azaz amelyre $x_\sigma x_\varrho^{-1}$, $\varrho, \sigma\in\mathcal{I}$, Jacobi mátrixának determinánsa $x_\varrho(U_\varrho\cap U_\sigma)$ minden pontjában pozitív. Jelölje $E^1, \ldots, E^m\in\mathfrak{X}(\mathbf{R}^m)$ az $\mathbf{R}^m$-nek az $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^m}$ lokális térképéhez tartozó bázismezőit. $p\in M$ és $(U_\varrho, x_\varrho)\in\mathcal{A}$, $p\in U_\varrho$, esetén legyen $(X_p^1, \ldots, X_p^m)\subset T_p(M)$ a $T_p(M)$ m-dimenziós vektortér olyan ortonormált bázisa, hogy az $((x_\varrho)_* X_p^1, \ldots, (x_\varrho)_* X_p^m)\in T_{x_\varrho(p)}(\mathbf{R}^m)$ bázist az $(E^1_{x_\varrho(p)}, \ldots, E^m_{x_\varrho(p)})\in T_{x_\varrho(p)}(\mathbf{R}^m)$ bázisba átvivő $A\in GL(m, \mathbf{R})$ mátrix determinánsa pozitív. Legyen ekkor $\mathrm{vol}(M)_p = \gamma(X_p^1)\wedge\ldots\wedge\gamma(X_p^m)\in\Lambda^m(T^*(M))_p$, ahol γ: $T_p(M)\to T_p^*(M)$ a $(,)_p$ Riemann metrika által indukált izomorfizmust jelöli. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy $\mathrm{vol}(M)_p$ definíciója nem függ az $(X_p^1, \ldots, X_p^m)$ ortonormált bázis és az (U_ϱ, x_ϱ) lokális térkép választásától és hogy ezzel egy olyan $\mathrm{vol}(M)\in\lambda^m(M)$ m-formát kaptunk, amelyre teljesül az állításban szereplő egyenlőség.

Legyen M m-dimenziós irányítható Riemann sokaság $\mathrm{vol}\,(M)\in\lambda^m(M)$ térfogati formával. $r=0,1, \ldots, m$ és $\alpha\in\lambda^r(M)$ esetén legyen $*\alpha\in\lambda^{m-r}(M)$ az a forma, amelyet $\alpha\wedge\gamma(X^1)\wedge\ldots\wedge\gamma(X^{m-r}) = (*\alpha)(X^1, \ldots, X^{m-r})\cdot\mathrm{vol}(M), X^1, \ldots, X^{m-r}\in\mathfrak{X}(M)$, egyenlőség értelmez. Ezzel egy $*$: $\lambda^r(M)\to\lambda^{m-r}(M)$ izomorfizmust kapunk, amelyet *Poincaré dualitás*nak nevezünk. Az (1.13) tétel szerint $**\alpha=(-1)^{r(m-r)}\alpha$ teljesül $\alpha\in\lambda^r(M)$ esetén, az (1.14) tétel szerint pedig $\alpha, \beta\in\lambda^r(M)$ esetén $\alpha\wedge(*\beta)=\beta\wedge(*\alpha)$ érvényes. Az (1.12) lemmából egyszerűen következik, hogy $\alpha\in\lambda^r(M)$ esetén $\alpha\wedge(*\alpha)=\mu\,\mathrm{vol}\,(M)$, ahol $\mu\in\mathcal{F}(M)$ és, ha $\alpha_p\neq 0$ valamely $p\in M$ pontra, akkor $\mu(p)>0$.

Az alábbiakban szükségünk lesz a formák integrálásának fogalmára.

Legyen $U\subset\mathbf{R}^m$ nyílt halmaz és $\alpha=\mu dx^1\wedge\ldots\wedge dx^m\in\lambda^m(U)$ olyan m-forma U-n, amelyre $\mu\in\mathcal{F}(U)$ tartója kompakt. Jelölje λ az $\mathbf{R}^m$ Lebesgue mértékét. Ekkor az $\int_U \mu\, d\lambda$ számot az α m-forma *integrál*jának nevezzük és erre az $\int_U \alpha$ jelölést használjuk.

Ha $U'\subset\mathbf{R}^m$ nyílt halmaz és f: $U'\to U$ olyan diffeomorfizmus, amelynek Jacobi mátrixának determinánsa U' minden pontjában pozitív, azaz f *irányítástartó*, akkor

$$\int_U \mu d\lambda = \int_{U'} (\mu f)\cdot\det\left(\left(\frac{\partial(\pi_i f)}{\partial x^j}\right)_{i,j=1}^m\right) d\lambda$$

azaz $\int_U \alpha = \int_{U'} f^*(\alpha)$ teljesül.

Legyen M m-dimenziós kompakt irányított differenciálható sokaság. Legyen $\mathcal{A}=\{(U_\varrho, x_\varrho)|\varrho\in\mathcal{I}\}$ az M atlaszának egy véges sok lokális térképből álló részatlasza. Ekkor $\varrho\in\mathcal{I}$ esetén létezik μ_ϱ: $M\to\mathbf{R}$ differenciálható függvény, amelyre $\mathrm{supp}\,\mu_\varrho\subset$

$\subset U_\varrho$ és $\sum_{\varrho\in\mathscr{I}} \mu_\varrho \equiv 1$ (lásd [2], 272. old.) Legyen $\alpha\in\lambda^m(M)$ és definiáljuk az α m-forma M-en vett $\int_M \alpha$ integrálját a $\sum_{\varrho\in\mathscr{I}} \int_{x_\varrho(U_\varrho)} (x_\varrho)^*(\mu_\varrho\cdot\alpha)$ összeggel. Egyszerű számolással ellenőrizhetjük, hogy $\int_M \alpha$ definíciója nem függ a μ_ϱ függvények és az $\mathscr{A}$ atlasz választásától. A Stokes tétel szerint [3], 104. old., $\alpha\in\lambda^{m-1}(M)$ esetén $\int_M d\alpha = 0$.

Legyen M m-dimenziós kompakt irányított Riemann sokaság $\mathrm{vol}\,(M)\in\lambda^m(M)$ térfogati formával. $\alpha, \beta\in\lambda^r(M)$ esetén az α és β r-formák *skaláris szorzata* az $(\alpha, \beta)\in\mathscr{F}(M)$ függvény, amelyre $\alpha\wedge(*\beta)=(\alpha, \beta)\,\mathrm{vol}\,(M)$ teljesül. Az α és β r-formák *globális skaláris szorzata* az

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \int_M \alpha\wedge(*\beta) = \int_M (\alpha, \beta)\,\mathrm{vol}\,(M)$$

szám. Az (1.14) tétel szerint $\langle\ ,\ \rangle$ szimmetrikus pozitív definit bilineáris forma.

(1.16) Tétel. A Poincaré dualitás ortogonális a globális skaláris szorzásra nézve, azaz $\alpha, \beta\in\lambda^r(M)$ esetén $\langle *\alpha, *\beta\rangle = \langle\alpha, \beta\rangle$ teljesül.

Bizonyítás.

$$\langle *\alpha, *\beta\rangle = \int_M (*\alpha)\wedge(**\beta) = \int_M (*\alpha)\wedge(-1)^{r(m-r)}\beta =$$

$$= (-1)^{r(m-r)}\int_M (*\beta)\wedge\alpha = \int_M \alpha\wedge(*\beta) = \langle\alpha, \beta\rangle.$$

Mint azt korábban láttuk, $r=0, 1, \ldots$ esetén a $d\colon \lambda^r(M)\to\lambda^{r+1}(M)$ külső differenciálás operátora egy olyan lineáris leképezés, amelyre teljesülnek a fejezet elején leírt (i)—(iv) tulajdonságok. A *külső kodifferenciálás operátora* az a $\partial\colon \lambda^r(M)\to\lambda^{r-1}(M)$ lineáris leképezés, amelyre $\partial=(-1)^r * {}^{-1}d *$ áll. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $\partial\partial=0$ érvényes.

(1.17) Tétel. A külső kodifferenciálás operátora a külső differenciálás operátorának adjungáltja a globális skaláris szorzásra nézve.

Bizonyítás. $\alpha\in\lambda^r(M)$ és $\beta\in\lambda^{r+1}(M)$ esetén

$$d(\alpha\wedge(*\beta)) = (d\alpha)\wedge(*\beta)+(-1)^r\alpha\wedge d(*\beta) = (d\alpha)\wedge(*\beta)-\alpha\wedge(*(\partial\beta)).$$

A Stokes-tétel szerint $\int_M d(\alpha\wedge(*\beta))=0$, azaz $\int_M (d\alpha)\wedge(*\beta)-\int_M \alpha\wedge(*\partial\beta)=0$. Ez pont azt jelenti, hogy $\langle d\alpha, \beta\rangle=\langle\alpha, \partial\beta\rangle$.

A külső differenciálás és kodifferenciálás operátorai segítségével értelmezhetjük a $\Delta\colon \lambda^r(M)\to\lambda^r(M)$ *Laplace-operátort* a $\Delta=d\partial+\partial d$ formulával. Az (1.17) tételből egyszerűen következik, hogy a Laplaceoperátor önadjungált, azaz $\alpha, \beta\in\lambda^r(M)$ esetén $\langle\Delta\alpha, \beta\rangle=\langle\alpha, \Delta\beta\rangle$ teljesül. Egy $\alpha\in\lambda^r(M)$ r-formát *harmonikus*nak nevezünk, ha $\Delta\alpha=0$ teljesül. Ez pontosan akkor áll fenn, ha $d\alpha=0$ és $\partial\alpha=0$. A Hodge-de Rham elmélet alaptétele a következő: Minden $\alpha\in\lambda^r(M)$ r-forma előáll

$$\alpha = d^{r-1}\beta+\partial^r\gamma+\omega, \quad \beta\in\lambda^{r-1}(M), \quad \gamma\in\lambda^{r+1}(M),$$

alakban, ahol ω harmonikus r-forma és a $d^{r-1}\beta$, $\partial^r\gamma$ és ω r-formákat az α egyértelműen meghatározza. A tétel bizonyítása megtalálható [1]-ben.

(1.18) Tétel. $H^r_{\text{de Rh}}(M)$ minden osztálya pontosan egy harmonikus r-formát tartalmaz.

Bizonyítás. Legyen $\alpha\in\lambda^r(M)$ a $H^r_{\text{de Rh}}(M)$ egy osztályának reprezentánsa. Ekkor α zárt, azaz $d\alpha=0$. teljesül. Az $\alpha=d\beta+\partial\gamma+\omega$ dekompozícióval $d\partial\gamma=0$. adódik. $\langle\partial\gamma, \partial\gamma\rangle=\langle\gamma, d\partial\gamma\rangle=0$ miatt $\partial\gamma=0$, azaz $\alpha-\omega=d\beta$, amivel igazoltuk, hogy az ω harmonikus r-forma és α ugyanazt az osztályt reprezentálják $H^r_{\text{de Rh}}(M)$-ben. Az ω egyértelműsége szintén a fenti tételből következik.

A fenti tétel szerint az M-en értelmezett harmonikus r-formák $\mathscr{H}^r(M)$ lineáris tere izomorf a $H^r_{\text{de Rh}}(M)$ vektortérrel.

2. *Differenciáloperátorok vektornyalábokon*

Legyenek V és V' végesdimenziós komplex vektorterek és θ_V, ill. $\theta_{V'}$ az $\mathbf{R}^m$ bázisterű és V ,ill. V' fibrumú triviális differenciálható komplex vektornyalábok. Ekkor $\Gamma^\infty(\theta_V)$, ill. $\Gamma^\infty(\theta_{V'})$ elemei azonosíthatók az $\mathbf{R}^m$-en értelmezett és a V, ill. V' komplex vektortérbe vezető differenciálható leképezésekkel. Egy

$$D_0\colon \Gamma^\infty(\theta_V)\to\Gamma^\infty(\theta_{V'})$$

lineáris leképezést *k-adrendű differenciáloperátor*nak nevezünk, ha $\varphi\in\Gamma^\infty(\theta_V)$ esetén

$$D_0\varphi=\sum_{|\alpha|\leqq k}A_\alpha D^\alpha\varphi,$$

ahol $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ multiindex, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_m$, $D^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^{\alpha_m}$ és $A_\alpha\colon \mathbf{R}^m\to L(V, V')$ differenciálható leképezés ($L(V, V')$ a V-n értelmezett és V'-be vezető lineáris leképezések vektorterét jelöli). A D_0 k-adrendű differenciáloperátor *szimbóluma* egy

$$\sigma_k(D_0)\colon \mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m\to L(V, V')$$

leképezés, amelyre $\sigma_k(D_0)(v, y)=\sum_{|\alpha|=k}v^\alpha A_\alpha(y)$, $v, y\in\mathbf{R}^m$, ahol $v^\alpha=v_1^{\alpha_1}\ldots v_m^{\alpha_m}\in\mathbf{R}$. Így a szimbólum egy mátrix együtthatós többváltozós polinom, amely a D_0 differenciáloperátor „főrészétől" függ. Ha $v, y\in\mathbf{R}^m$ és $v\neq0$ esetén $\sigma_k(D_0)(v, y)$ izomorfizmus, akkor a D_0 differenciáloperátort *elliptikus*nak nevezzük.

(2.1) Példa. Legyenek $V=V'=\mathbf{C}$ és $k=2$. Ha $i, j=1, \ldots, m$, akkor jelölje ij azt az $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ multiindexet, amelyere $i\neq j$ esetén $\alpha_i=\alpha_j=1$ és a többi komponens zérus; $i=j$ esetén pedig $\alpha_i=\alpha_j=2$ és a többi komponens zérus. Ekkor a D_0 differenciáloperátor alakja

$$D_0=\sum_{i,j=1}^m A_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\text{lineáris rész},$$

azaz $(v, y)\in\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m$ esetén $\sigma_k(D_0)(v, y)=\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(y)v_iv_j$ kvadratikus alak. A D_0 differenciáloperátor elliptikus pontosan akkor, ha az $A(y)=(A_{ij}(y))_{i,j=1}^m$ mátrix nemelfajuló $y\in\mathbf{R}^m$ esetén.

Legyen M m-dimenziós differenciálható sokaság, ξ és ξ' differenciálható komplex vektornyalábok M felett és $D\colon \Gamma^\infty(\xi)\to\Gamma^\infty(\xi')$ lineáris leképezés. D *lokális operátor*,

ha $\varphi\in\Gamma^\infty(\xi)$, $U\subset M$ nyílt altér és $\varphi|U=0$ esetén $(D\varphi)|U=0$ következik. Legyen (U, x) az M olyan lokális térképe, amelyre $x(U)=\mathbf{R}^m$ és léteznek h_U: $\xi|U\to U\times V$ és h'_U: $\xi'|U\to U\times V'$ trivializáló leképezések. Ekkor $\varphi\in\Gamma^\infty(\xi)$ esetén

$$\tilde{\varphi}=h_U\varphi x^{-1}\in\Gamma^\infty(\theta_V) \quad \text{és} \quad \varphi'\in\Gamma^\infty(\xi') \quad \text{esetén} \quad \tilde{\varphi}'=h_U\varphi' x^{-1}\in\Gamma^\infty(\theta_{V'}),$$

azaz D egy

$$D_0\colon \Gamma^\infty(\theta_V)\to\Gamma^\infty(\theta_{V'})$$

lineáris leképezést határoz meg a $D_0\tilde{\varphi}=\widetilde{D\varphi}$ megállapodással. Nevezzük a D lokális operátort a ξ vektornyalábból a ξ' vektornyalábba vezető *k-adrendű differenciáloperátor*nak, ha minden (U, x) lokális térképre és h_U, h'_U trivializáló leképezésekre D_0 k-adrendű differenciáloperátor. D_0 a D differenciáloperátor *lokális előállítás*a. A ξ vektornyalábból a ξ' vektornyalábba vezető k-adrendű differenciáloperátorok halmazára a $\mathrm{Diff}_k(\xi, \xi')$ jelölést használjuk.

Legyen $D\in\mathrm{Diff}_k(\xi, \xi')$. Jelölje $T'(M)$ azt az M feletti differenciálható fibrált nyalábot, amely a $T^*(M)$ (π projekciójú) vektornyalábból a zérus szelés elhagyásával származik. A D differenciáloperátor szimbóluma egy olyan $\sigma_k(D)$ leképezés, amely minden $v\in T'(M)$ elemhez egy $\sigma_k(D)(v)$: $\xi_p\to\xi'_p$, $p=\pi(v)$, lineáris leképezést rendel a következőképpen: $v\in T'(M)$ és $e\in\xi_p$ esetén válasszunk olyan $\mu\in\mathscr{F}(M)$ és $\varphi\in\Gamma^\infty(\xi)$ elemeket, hogy $(d\mu)_p=v$ és $\varphi(p)=e$ teljesüljön.

Legyen ekkor

$$\sigma_k(D)(v)e=D\left(\frac{1}{k!}(\mu-\mu(p))^k\cdot\varphi\right)(p)\in\xi'_p.$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a $\sigma_k(D)$ szimbólum definíciója nem függ a μ és φ választásától. $v=0$ esetén legyen $\sigma_k(D)(v)=0$. Ha most D_0: $\Gamma^\infty(\theta_V)\to$ $\to\Gamma^\infty(\theta_{V'})$ k-adrendű differenciáloperátor, akkor a szimbólum utóbbi értelmezése szerint egy $(v, y)\in(\mathbf{R}^m-\{0\})\times\mathbf{R}^m=T'(\mathbf{R}^m)$ elemhez és $e\in V$-hez választani kell olyan $\mu\in\mathscr{F}(\mathbf{R}^m)$ és $\varphi\in\Gamma^\infty(\theta_V)$ elemeket, amelyekre $(d\mu)(y)=v$ és $f(y)=e$ teljesülnek. Legyenek $\mu=\sum_{i=1}^m v_i(x_i-y_i)$ és $\varphi=e$. Ekkor $\sigma_k(D_0)(v, y)e=\frac{1}{k!}D_0((\mu-\mu(y))^k\varphi)(y)=$ $=\sum_{|\alpha|=k}v^\alpha A_\alpha(y)$, azaz a szimbólum korábbi definíciója speciális esete az utóbbinak. A $D\in\mathrm{Diff}_k(\xi, \xi')$ differenciáloperátor *elliptikus*, ha $v\in T'(M)$ esetén $\sigma_k(D)(v)$: $\xi_p\to$ $\to\xi'_p$, $p=\pi(v)$, izomorfizmus.

A differenciáloperátorok definíciójából egyszerűen következik, hogy $\mathrm{Diff}_0(\xi, \xi')=$ $=\mathrm{Hom}(\xi, \xi')$. Ha ξ, ξ' és ξ'' differenciálható komplex vektornyalábok M felett és $D\in\mathrm{Diff}_k(\xi, \xi')$, $D'\in\mathrm{Diff}_l(\xi', \xi'')$, akkor $D'D\in\mathrm{Diff}_{k+l}(\xi, \xi'')$ és $\sigma_{k+l}(D'D)(v)=$ $=\sigma_l(D')(v)\sigma_k(D)(v)$, $v\in T'(M)$. Továbbá, ha két k-adrendű differenciáloperátor szimbóluma azonos, akkor ezek egy $(k-1)$-edrendű differenciáloperátorban különböznek egymástól.

Legyenek most ξ és ξ' Hermite vektornyalábok M felett, azaz ξ, ill. ξ' komplex differenciálható vektornyalábok, amelyek fibrumai $(,)_\xi$, ill. $(,)_\xi$, Hermite skaláris szorzásokkal vannak ellátva úgy, hogy $\varphi, \varphi'\in\Gamma^\infty(\xi)$, ill. $\psi, \psi'\in\Gamma^\infty(\xi')$ esetén $(\varphi, \varphi')_\xi\in\mathscr{F}(M)$, ill. $(\psi, \psi')_{\xi'}\in\mathscr{F}(M)$ teljesülnek. Legyen M irányított differenciálható sokaság $\mathrm{vol}(M)\in\lambda^m(M)$ térfogati formával és definiáljuk a megfelelő $\langle,\rangle_\xi=$ $=\int_M(,)_\xi\,\mathrm{vol}(M)$, ill. $\langle,\rangle_{\xi'}=\int_M(,)_{\xi'}\,\mathrm{vol}(M)$ globális skaláris szorzásokat a ξ, ill. ξ' vektornyalábok kompakt tartójú szeléseire. Egy $D\in\mathrm{Diff}_k(\xi, \xi')$ k-adrendű differenciáloperátor *adjungált*ja olyan $D^*\in\mathrm{Diff}_k(\xi', \xi)$ k-adrendű differenciáloperátor, amely-

re $\varphi\in\Gamma^\infty(\xi)$ és $\varphi'\in\Gamma^\infty(\xi')$ kompakt tartójú szelések esetén $\langle D\varphi, \varphi'\rangle_{\xi'}=\langle\varphi, D^*\varphi'\rangle_\xi$ érvényes. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy ha a D operátornak van adjungáltja, akkor az egyértelmű. A differenciáloperátorok lokális előállításából következik, hogy ha minden (U, x) lokális térkép esetén a $D|U\in\mathrm{Diff}_k(\xi|U, \xi'|U)$ differenciáloperátornak van adjungáltja, ahol $\xi|U$ és $\xi'|U$ triviálisak, akkor a D differenciáloperátornak is van adjungáltja. Az adjungált létezése szempontjából tehát elegendő azzal az esettel foglalkozni, amikor $M=\mathbf{R}^m$, $\xi=\theta_V$, $\xi'=\theta_{V'}$ és $\mathbf{R}^m$-en az integrálás a λ Lebesgue mérték szerint történik. Legyenek $(\,,)_V$ ill. $(\,,)_{V'}$, a V, ill. V' komplex vektortereken adott Hermite skaláris szorzások. Ekkor léteznek olyan A, A': $\mathbf{R}^m\to L(V, V')$ pozitív operátorokra képező differenciálható leképezések, amelyekre $(v, v')_\xi=(A(y)v, v')_V$ és $(w, w')_{\xi'}=(A'(y)w, w')_{V'}$, ahol $v, v'\in\xi_y$ és $w, w'\in\xi'_y$. Legyen a D operátor lokális alakja

$$D\varphi=\sum_{|\alpha|\leqq k} C_\alpha(D^\alpha\varphi),\quad \varphi\in\Gamma^\infty(\theta_V).$$

$\varphi, \varphi'\in\Gamma^\infty(\theta_V)$ kompakt tartójú szelések esetén

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi, \varphi')_V=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \varphi'\right)_V+\left(\varphi, \frac{\partial\varphi'}{\partial x^i}\right)_V,$$

amiből egyszerű indukcióval $\int\limits_M (D^\alpha\varphi, \varphi')_V d\lambda-\int\limits_M(\varphi, (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi')_V d\lambda=0$ adódik. Ekkor

$$\langle D\varphi, \varphi'\rangle_{\xi'}=\sum_{|\alpha|\leqq k}\int\limits_M (A'C_\alpha D^\alpha\varphi, \varphi')_{V'}\,d\lambda=\sum_{|\alpha|\leqq k}\int\limits_M (D^\alpha\varphi, C_\alpha^*A'\,\varphi')_V\,d\lambda=$$

$$=\int\limits_M(\varphi, \sum_{|\alpha|\leqq k}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(C_\alpha^*A'\varphi'))_V\,d\lambda=\int\limits_M(\varphi, D^*\varphi')_\xi\,d\lambda=\langle\varphi, D^*\varphi'\rangle_\xi,$$

ahol

$$D^*\varphi'=\sum_{|\beta|\leqq k}(-1)^{|\beta|}A^{-1}D^\beta(C_\beta^*A'\varphi')=\sum_{|\alpha|\leqq k}\left(\sum_{\alpha\leqq\beta}(-1)^{|\beta|}\binom{\beta}{\alpha}A^{-1}D^{\beta-\alpha}(C_\alpha^*A')\right)D^\alpha\varphi'.$$

Így kapjuk a következő tételt:

(2.2) Tétel. Ha ξ és ξ' Hermite vektornyalábok az M irányítható differenciálható sokaság felett, akkor minden $D\in\mathrm{Diff}_k(\xi, \xi')$ k-adrendű differenciáloperátornak egyértelműen létezik $D^*\in\mathrm{Diff}_k(\xi', \xi)$ adjungáltja és $\sigma_k(D^*)=(-1)^k\sigma_k(D)^*$ áll.

Funkcionálanalízisbeli eszközök segítségével megmutatható, hogy ha M kompakt irányított differenciálható sokaság, ξ és ξ' komplex vektornyalábok M felett és $D\in\mathrm{Diff}_k(\xi, \xi')$ k-adrendű elliptikus differenciáloperátor, akkor $\ker D\subset\Gamma^\infty(\xi)$ végesdimenziós (lásd [1]). Ekkor a D differenciáloperátor *analitikus indexe* az

$$i_a(D)=\dim_{\mathbf{C}}\ker D-\dim_{\mathbf{C}}\ker D^*\in\mathbf{Z}$$

szám.

(2.3) Példa. Legyen M m-dimenziós differenciálható sokaság és tekintsük a $\xi=\bigoplus_{r=0}^{m}\xi^r$, $\xi^r=\Lambda^r(T^*(M))\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ differenciálható komplex vektornyalábot M felett. A $\Gamma^\infty(\xi^r)=\lambda^r_{\mathbf{C}}(M)$ komplex vektortér elemeit M-en értelmezett *komplex értékű r-formák*nak nevezzük. $\alpha\in\lambda^r_{\mathbf{C}}(M)$ és (U, x) lokális térkép esetén $\alpha|U=\sum_{i_1<\ldots<i_r}\alpha_{i_1\ldots i_r}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}$, ahol $\alpha_{i_1\ldots i_r}$ az U-n értelmezett komplex értékű differen-

ciálható függvény; azaz $\alpha_{i_1\dots i_r}=\alpha'_{i_1\dots i_r}+i\alpha''_{i_1\dots i_r}$, ahol $\alpha'_{i_1\dots i_r}, \alpha''_{i_1\dots i_r}\in\mathscr{F}(U)$ és $i\in\mathbf{C}$ a komplex egység. A külső differenciálás d operátorának értelmezése a valós és képzetes részek szétválasztásával történik és így kapjuk az M sokaság

$$\lambda^0_{\mathbf{C}}(M)\xrightarrow{d}\lambda^1_{\mathbf{C}}(M)\xrightarrow{d}\dots\xrightarrow{d}\lambda^r_{\mathbf{C}}(M)\xrightarrow{d}\lambda^{r+1}_{\mathbf{C}}(M)\xrightarrow{d}\dots$$

*komplex de Rham komplexus*át. A $H^r_{\text{de Rh}}(M, \mathbf{C})$ r-edik *komplex de Rham kohomológia vektortér* a valós esethez hasonlóan definiálható, továbbá egyszerű számolással kapjuk, hogy $\dim_{\mathbf{C}} H^r_{\text{de Rh}}(M, \mathbf{C})=\dim_{\mathbf{R}} H^r_{\text{de Rh}}(M)=b_r(M)$ teljesül. Hasonlóan, a $H^r_{\text{de Rh}}(.\,, \mathbf{C})$ (egyváltozós kontravariáns) funktorra érvényesek a de Rham kohomológia elmélet axiómái, ha **R** helyébe **C**-t helyettesítünk.

Legyen M m-dimenziós kompakt irányított Riemann sokaság $\text{vol}\,(M)\in\lambda^m(M)$ térfogati formával. Ekkor a $*\colon \lambda^r_{\mathbf{C}}(M)\to\lambda^{m-r}_{\mathbf{C}}(M)$ *Poincaré dualitás*t a valós esethez analóg módon értelmezve kapjuk, hogy $**\alpha=(-1)^{r(m-r)}\alpha$ és $*(\bar{\alpha})=\overline{*\alpha}$, $\alpha\in\lambda^r_{\mathbf{C}}(M)$. Az M Riemann metrikája a ξ^r komplex vektornyaláb egy $(\,,\,)$ Hermite struktúráját definiálja. Ekkor $\alpha\wedge(*\bar{\beta})=(\alpha, \beta)\,\text{vol}\,(M)$ teljesül. Legyen az $\alpha, \beta\in\lambda^r_{\mathbf{C}}(M)$ r-formák *globális skaláris szorzat*a $\langle\alpha, \beta\rangle=\int\limits_M \alpha\wedge(*\bar{\beta})=\int\limits_M (\alpha, \beta)\,\text{vol}\,(M)$. Ekkor $\langle\,,\rangle$ Hermite skaláris szorzás a $\lambda^r_{\mathbf{C}}(M)$ komplex vektortéren. A d operátornak erre a Hermite skaláris szorzásra vonatkozó adjungáltja $\partial=(-1)^r *^{-1} d *$ a $\lambda^r_{\mathbf{C}}(M)$-en. Komplex értékű formák Δ *Laplace operátor*a a valós esethez hasonlóan tárgyalható. A Laplace operátor magja $\lambda^r_{\mathbf{C}}(M)$-ben a *komplex harmonikus r-formák* $\mathscr{H}^r_{\mathbf{C}}(M)$ végesdimenziós komplex vektortere. A Hodge-de Rham elmélet alaptételéből ((1.18) tétel) következik, hogy létezik egy $H^r_{\text{de Rh}}(M, \mathbf{C})\cong\mathscr{H}^r_{\mathbf{C}}(M)$ komplex vektortér izomorfizmus.

A $d\in\text{Diff}_1(\xi, \xi)$ differenciáloperátor szimbólumának megállapításához a korábbi jelöléseket használva kapjuk, hogy $\sigma_1(d)(v)(e)=d((\mu-\mu(p))\varphi)(p)=((d\mu)\wedge\varphi)(p)=v\wedge e$, azaz $\sigma_1(d)(v)$ a v elemmel való külső szorzás. A ∂ operátor szimbólumának megállapításához egy új operációt vezetünk be. Legyen először $X\in\mathfrak{X}(M)$ és definiáljuk a $\iota_X\colon\lambda^r(M)\to\lambda^{r-1}(M)$ *belső szorzás*t a $(\iota_X\alpha)(Y^1, \dots, Y^{r-1})=r\cdot\alpha(X, Y^1, \dots, Y^{r-1})$, $Y^1, \dots, Y^{r-1}\in\mathfrak{X}(M)$, formulával. Ekkor $\alpha\in\lambda^r(M)$ és $\beta\in\lambda^{r'}(M)$ esetén $\iota_X(\alpha\wedge\beta)=(\iota_X\alpha)\wedge\beta+(-1)^r\alpha\wedge(\iota_X\beta)$ teljesül. Emellett $X\in\mathfrak{X}(M)$, $\alpha\in\lambda^r(M)$ és $\beta\in\lambda^{r+1}(M)$ esetén $(\gamma(X)\wedge\alpha, \beta)=(\alpha, \iota_X\beta)$ érvényes, ahol $\gamma\colon\mathfrak{X}(M)\to\lambda^1(M)$ az M Riemman metrikája által definiált izomorfizmust jelöli. A belső szorzás vektormező helyett tangensvektorokra (pontonként) is értelmezhető, valamint természetes módon kiterjeszthető $\lambda^r_{\mathbf{C}}(M)$ elemeire is. A (2.2) tétel szerint $\sigma_1(\partial)(v)=\sigma_1(d^*)(v)=-(\sigma_1(d)(v))^*=-(v\wedge)^*=-\iota_{\gamma^{-1}(v)}$. Így

$$\sigma_2(\Delta)(v)e=\sigma_2((d+\partial)^2)(v)e=\sigma_2(d\partial)(v)e+\sigma_2(\partial d)(v)e=\sigma_1(d)(v)(\sigma_1(\partial)(v)e)+$$

$$+\sigma_1(\partial)(v)(\sigma_1(d)(v)e)=\sigma_1(d)(v)(-\iota_{\gamma^{-1}(v)}e)+\sigma_1(\partial)(v)(v\wedge e)=-v\wedge(\iota_{\gamma^{-1}(v)}e)-$$

$$-\iota_{\gamma^{-1}(v)}(v\wedge e)=-\|v\|^2 e,\quad\text{azaz}\quad\sigma_2(\Delta)(v)\quad\text{a}\quad-\|v\|^2\in\mathbf{R}$$

nemzérus számmal való szorzás operátora. Kaptuk, hogy a Laplace operátor elliptikus és, mivel önadjungált, analitikus indexe zérus. Egyszerű számolással kapjuk, hogy a $d+\partial\in\text{Diff}_1(\xi, \xi)$ Laplace operátor „négyzetgyöke" szintén elliptikus és önadjungált differenciáloperátor. $\ker(d+\partial)=\bigoplus\limits_{r=0}^{m}\mathscr{H}^r_{\mathbf{C}}(M)$ az összes harmonikus formák tere, amely $d+\partial$ elliptikus volta miatt végesdimenziós. Speciálisan a $b_r(M)$, $r=0, \dots, m$, Betti számok végesek.

3. *Az Euler karakterisztika és a szignatúra*

Legyen M m-dimenziós kompakt irányított Riemann sokaság és tekintsük a (2.2) példában definiált $\xi^r = \Lambda^r(T^*(M)) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$, $r=0, 1, \ldots, m$, komplex vektornyalábokat M felett. Legyen $\xi^{ev} = \bigoplus_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \xi^{2i}$ és $\xi = {}^{od}\bigoplus_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \xi^{2i+1}$. Ekkor a $d+\partial$ differenciáloperátor megszorítása a ξ^{ev} M feletti vektornyalábra egy $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^{ev}, \xi^{od})$ elsőrendű differenciáloperátort definiál, amelynek adjungáltja a $d+\partial$ operátor ξ^{od} vektornyalábra való $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^{od}, \xi^{ev})$ megszorítása. A (2.2) példa szerint ezek az operátorok elliptikusak.

(3.1) Tétel. A $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^{ev}, \xi^{od})$ elsőrendű differenciáloperátor analitikus indexe $i_a(d+\partial) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i b_i(M)$, amely nem más, mint az M sokaság jól ismert Euler karakterisztikája.

Bizonyítás. A $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^{ev}, \xi^{od})$ differenciáloperátorra $\dim_{\mathbf{C}} \ker (d+\partial) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \dim_{\mathbf{C}} \mathscr{H}_{\mathbf{C}}^{2i}(M)$ és adjungáltjára $\dim_{\mathbf{C}} \ker (d+\partial)^* = \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \dim_{\mathbf{C}} \mathscr{H}_{\mathbf{C}}^{2i+1}(M)$. Így állítsunk a $\dim_{\mathbf{C}} \mathscr{H}_{\mathbf{C}}^{r}(M) = \dim_{\mathbf{R}} \mathscr{H}^r(M) = \dim_{\mathbf{R}} H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M) = b_r(M)$ egyenlőségből következik.

Differenciálhatóan homotópikusan ekvivalens sokaságok Euler karakterisztikája az (1.3) következmény szerint azonos. Az (1.6) tétel szerint a páros dimenziós gömbök Euler karakterisztikája 2, míg a páratlan dimenziósaké zérus.

Legyen V valós m-dimenziós irányított vektortér $(\ ,\ )$ skaláris szorzással és tegyük fel, hogy $m=2r$ páros. Legyen

$$o\colon \Lambda^*(V) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C} \to \Lambda^*(V) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$$

az a leképezés, amelyre $o|\Lambda^j(V) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C} = i^{j(j-1)+r} *$, ahol $i \in \mathbf{C}$ a komplex egység. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy $o^2 = \mathrm{id}$. Így $\Lambda^*(V) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C} = \Lambda_+(V) \oplus \Lambda_-(V)$, ahol $\Lambda_\pm(V)$ komplex vektorterek az o leképezés ± 1 sajátértékeihez tartozó sajátalterek.

Legyen M m-dimenziós kompakt irányított Riemann sokaság, $m=2r$ páros és tekintsük a fenti ξ^j, $j=0, 1, \ldots, m$, komplex vektornyalábok ξ Whitney összegét. Az előbbi definíciót és a ξ vektornyalábra kiterjesztett Poincaré dualitást használva egy $o \in \mathrm{Hom}(\xi, \xi)$ leképezést kapunk, amelyre $o^2 = \mathrm{id}$.

$\xi^\pm$-szal jelölve az $o \pm 1$ sajátértékeihez tartozó sajátaltereket, egy $\xi = \xi^+ \oplus \xi^-$ Whitney összegre bontást kapunk. Az o leképezés definíciójából egyszerűen következik, hogy $o(d+\partial) = (d+\partial)o$, azaz a $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi, \xi)$ operátor megszorításai $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^+, \xi^-)$ és $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^-, \xi^+)$ operátorokat határoznak meg, amelyek egymás adjungáltjai. A $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^+, \xi^-)$ differenciáloperátor analitikus indexének meghatározásához az M sokaság *szignatúrájának* fogalmát adjuk meg. Ha az M sokaság dimenziója nem osztható néggyel, akkor M szignatúrája legyen zérus. Legyen most M dimenziója $m=4n$. Legyen $\langle | \rangle$ az a skaláris szorzás a $\mathscr{H}^{2n}(M)$ lineáris téren, amelyre $\alpha, \beta \in \mathscr{H}^{2n}(M)$ esetén $\langle \alpha | \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge \beta$. A $\langle | \rangle$ skaláris szorzás szimmetrikus,

bilineáris és nemelfajuló, viszont általában indefinit. Legyen az M sokaság szignatúrája egyenlő a $\langle|\rangle$ skaláris szorzás szignatúrájával (azaz, ha $(e_1, \ldots, e_k; e'_1, \ldots, e'_{k'}) \subset \mathscr{H}^{2n}(M)$ olyan bázis a $\langle|\rangle$ skaláris szorzásra nézve, amelyre $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}, \langle e'_{i'}, e'_{j'}\rangle = -\delta_{ij}$, $\langle e_i|e'_{j'}\rangle = 0$, $i, j = 1, \ldots, k$, $i', j' = 1, \ldots, k'$, akkor $\langle|\rangle$ szignatúrája $k-k'$). Az M sokaság szignatúráját sign (M)-mel jelöljük.

(3.2) Tétel. Legyen M m-dimenziós kompakt irányított Riemann sokaság, $m=2r$ páros. Ekkor a $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^+, \xi^-)$ elliptikus differenciáloperátor analitikus indexe sign (M).

Bizonyítás. $o(d+\partial) = -(d+\partial)o$ miatt $o \in \mathrm{Hom}(\xi, \xi)$ felcserélhető a $\Delta = (d+\partial)^2$ operátorral, azaz o a komplex harmonikus formák terét önmagára képezi. A $\mathscr{H}^r_{\mathbf{C}}(M) \cong H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M, \mathbf{C})$ izomorfizmussal egy o: $H^*_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C}) \to H^*_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C})$ automorfizmust határoztunk meg, amelyre $o^2 = \mathrm{id}$. Így o sajátaltereire való felbontás

$$H^*_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C}) = H^*_+(M; \mathbf{C}) \oplus H^*_-(M; \mathbf{C})$$

alakú. A $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^+, \xi^-)$ elliptikus differenciáloperátor analitikus indexe

$$\dim_{\mathbf{C}} H^*_+(M; \mathbf{C}) - \dim_{\mathbf{C}} H^*_-(M; \mathbf{C}).$$

$0 \leqq k < r$ esetén o a $H^k_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C})$ komplex vektorteret $H^{m-k}_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C})$-be képezi, azaz a

$$H^k_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C}) \oplus H^{m-k}_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C}) \quad \text{és} \quad H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C})$$

komplex vektorterek az o leképezéssel szemben invariánsak. $0 \leqq k < r$ esetén legyen

$$H^k_\pm(M; \mathbf{C}) = \{\alpha \in H^k_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C}) \oplus H^{m-k}_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C}) | o(\alpha) = \pm\alpha\}$$

és definiáljuk a $H^l_\pm(M; \mathbf{C})$ komplex vektortereket hasonló módon. Ekkor $H^*_\pm(M; \mathbf{C}) = \bigoplus_{0 \leqq k \leqq l} H^l_\pm(M; \mathbf{C})$. $0 \leqq k < r$ esetén $H^k_\pm(M; \mathbf{C}) = \{\alpha \pm o(\alpha) | \alpha \in H^k_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C})\}$, amiből $\dim_{\mathbf{C}} H^k_\pm(M; \mathbf{C}) = \dim_{\mathbf{C}} H^k_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C})$ adódik. Így a tétel igazolásához elegendő belátni, hogy a $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^+, \xi^-)$ operátor $\dim_{\mathbf{C}} H^r_+(M; \mathbf{C}) - \dim_{\mathbf{C}} H^r_-(M; \mathbf{C})$ analitikus indexe azonos sign (M)-mel.

1. Eset. $r = 2n+1$ páratlan.

Ekkor sign $(M) = 0$ definíció szerint. Az o leképezés definíciójából adódóan o: $H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C}) \to H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C})$ nem más mint $i*$. Így $\alpha \in H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C})$ esetén $o(\bar{\alpha}) = i*(\bar{\alpha}) = i*\overline{\alpha} = -i\overline{(*\alpha)} = -\overline{o(\alpha)}$. Ebből következik, hogy a konjugálás egy $H^r_-(M; \mathbf{C}) \cong H^r_+(M; \mathbf{C})$ izomorfizmust definiál, amivel ezt az esetet letárgyaltuk.

2. Eset. $r = 2n$ páros.

Az o leképezés definíciójából adódóan $o = *$ a $H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M; \mathbf{C})$ téren. Legyen

$$H^r_\pm(M; \mathbf{R}) = H^r_\pm(M; \mathbf{C}) \cap H^r_{\mathrm{de\,Rh}}(M).$$

Mivel $*$ a konjugálással felcserélhető, ezért $H^r_\pm(M; \mathbf{C}) \cong H^r_\pm(M; \mathbf{R}) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$, mint komplex vektorterek. Így a $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^+, \xi^-)$ operátor analitikus indexe $\dim_{\mathbf{R}} H^r_+(M; \mathbf{R}) - \dim_{\mathbf{R}} H^r_-(M; \mathbf{R})$. Legyen $(e_1, \ldots, e_k; e'_1, \ldots, e'_{k'})$ a $\langle\ ,\ \rangle$ pozitív definit skaláris szorzásra nézve ortonormált rendszer úgy, hogy $(e_1, \ldots, e_k) \subset H^r_+(M; \mathbf{R})$ és $(e'_1, \ldots, e'_{k'}) \subset H^r_-(M; \mathbf{R})$ bázisok. Ekkor egyszerű számolással adódik, hogy $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, k$, és $\langle e'_{i'}|e'_{j'}\rangle = -\delta_{i'j'}$, $i', j' = 1, \ldots, k'$, azaz $d+\partial \in \mathrm{Diff}_1(\xi^+, \xi^-)$ analitikus indexe $k-k' = \mathrm{sign}(M)$.

IRODALOM

[1] J. F. Boutot, Théorème de Hodge, *Astérisque* 17, (1974), 3—27.
[2] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry, I.* Interscience, New York, 1963.
[3] R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds,* Masson&Cie, Editeur—Paris, North-Holland Publ. Comp. Amsterdam, 1968.
[4] R. S. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem,* Princeton University Press, 1965.

О ТЕОРЕМЫ АТЬИЯ—ЗИНГЕРА ОБ ИНДЕКСЕ

Г. ТОТ

ON THE ATIYAH—SINGER INDEX THEOREM

G. TÓTH

REES-AUTOMATÁK

BABCSÁNYI ISTVÁN

1. Bevezetés

Automatának nevezünk minden olyan $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ rendszert, ahol $F=F(X)$ az $X(\neq\Phi)$ halmaz által generált szabad félcsoport, δ az $A\times F(X)$ halmaznak A-ba való olyan egyértelmű leképezése, amely bármely $a\in A, p\in F(X), x\in X$ esetén teljesíti a

$$\delta(\delta(a, p), x) = \delta(a, px)$$

feltételt. A-t az automata *állapothalmazának*, $F(X)$-et *bemenő félcsoportjának*, δ-t pedig *átmenetfüggvényének* mondjuk. A elemeit $\mathbf{A}$ *állapotainak*, $F(X)$ elemeit $\mathbf{A}$ *bemenő szavainak* hívjuk. (Általában $F(X)$-et egységelemesnek tekintjük, azaz hozzávesszük az e üres szót, amelyre minden $a\in A$ esetén a $\delta(a, e)=a$ kikötést teszszük.)

Ha most az automata definíciójában $F(X)$ helyett tetszőleges F félcsoportot tekintünk és tetszőleges $a\in A$; $f, g\in F$ elemekre

$$\delta(\delta(a, f), g) = \delta(a, fg)$$

teljesül, akkor a *kváziautomata* fogalmához jutunk (l. GÉCSEG F.—PEÁK I. [4, 5] S. GINSBURG [6], PEÁK I. [9]). Megjegyezzük, hogy F nem feltétlenül monoid. Látható, hogy egy automata olyan kváziautomata, amelynek bemenő félcsoportja szabad. Mivel nem okoz zavart, a továbbiakban kváziautomata helyett egyszerűen automatát mondunk.

A $\varphi\colon A\to B$ leképezést az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ automata $\mathbf{B}=(B, F, \delta')$ automatába való *homomorf leképezésének* nevezzük, ha bármely $a\in A, f\in F$ esetén

$$\varphi(\delta(a, f)) = \delta'(\varphi(a), f)$$

teljesül. Ha φ az A-nak B-re leképezése, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ *homomorf képe*. Ha ezenkívül még φ egy-egyértelmű is, akkor $\mathbf{A}$-t és $\mathbf{B}$-t *izomorfaknak* nevezzük.

Az $\mathbf{A}'=(A', F, \delta')$ automatát az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ automata *A-részautomatájának* nevezzük, ha $A'\subseteq A$ és δ az $A'\times F$ halmazon megegyezik δ'-vel. Az egyszerűbb tárgyalás kedvéért bevezetjük az üres automata fogalmát. *Üres automatának* nevezzük azt a rendszert, amely az üres halmazból (Φ) és tetszőleges F félcsoportból áll.

Ebben a dolgozatban a félcsoportelméletből ismeretes Rees-féle faktorfélcsoportok fogalmát általánosítjuk automatákra. A félcsoport ideáljának szerepét az automata A-részautomatája veszi át (l. A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON [2], J. L. RHODES—B. L. TILSON [11]). Az így kapott Rees-féle faktorautomatákra többek között bebizonyítjuk a csoportelméletből ismert, normálosztókra vonatkozó több tétel analogonját (a csoportelmélet két izomorfiatétele, Zassenhaus lemmája, Schreier-féle finomítási tétel, Jordan—Hölder tétel, l. A. C. KUROS [7, 8], RÉDEI L. [10]). Foglal-

kozunk még az automata A-részautomatahálójával (1. G. BIRKHOFF [1], SZÁSZ G. [13]), maximális A-részautomatáival és fő A-részautomata sorozataival. Megjegyezzük, hogy a félcsoportelméletben a Rees-féle faktorfélcsoportok segítségével hasonló tételek kaphatók (1. A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON [2], J. L. RHODES—B. L. TILSON [11]).

Az automaták vizsgálata önmagában is érdekes, de szoros kapcsolatban van a formális nyelvekkel is. A formális nyelvek elméletében az automata mint nyelvfelismerő rendszer szerepel. Ezenkívül az információátalakító rendszerek vizsgálatánál is fontos szerepet játszik. Ha ugyanis egy szekvenciális gép kimenő félcsoportját és kimenetfüggvényét elhagyjuk, akkor egy automatát kapunk (1. S. GINSBURG [6], PEÁK I. [9], A. SALOMAA [11]).

2. *Rees-féle faktorautomaták*

Legyenek $\mathbf{T}=(T, F, \delta_T)$ és $\mathbf{R}=(R, F, \delta_R)$ automaták az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ automata tetszőleges A-részautomatái. Legyen továbbá r_A ($\notin A$) egy tetszőleges jel és $T/R=(T\setminus R)\cup\langle r_A\rangle$. Definiáljuk a $\delta_{T/R}$: $T/R\times F\to T/R$ függvényt a következőképpen:

$$\delta_{T/R}(a, f)=\begin{cases}\delta(a, f), & \text{ha } a, \delta(a, f)\in T\setminus R,\\ r_A & \text{különben.}\end{cases} \tag{1}$$

Nem nehéz számolással ellenőrizhető, hogy a $\mathbf{T}/R=(T/R, F, \delta_{T/R})$ automata jól-definiált. $\mathbf{T}/R$-et $\mathbf{T}$ $\mathbf{R}$-*szerinti Rees-féle faktorautomatájának* nevezzük. (Megjegyezzük, hogy ha $T\cap R=\Phi$, akkor $T/R=T\cup\langle r_A\rangle$.) Definiáljuk a következő η_R^T: $T\to T/R$ leképezést:

$$\eta_R^T(a)=\begin{cases}a & \text{ha } a\in T\setminus R,\\ r_A & \text{ha } a\in T\cap R.\end{cases} \tag{2}$$

Ha $T\cap R\neq\Phi$, akkor η_R^T a $\mathbf{T}$ homomorf leképezése $\mathbf{T}/R$-re. Ha $T\cap R=\Phi$, akkor η_R^T a $\mathbf{T}$ identikus leképezése.

Jelöljük $\mathcal{U}$-val $\mathbf{A}$ A-részautomatáinak halmazát. Legyenek $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\in\mathcal{U}$. Definiáljuk $\mathcal{U}$-ban az egyesítés és metszés műveletét a következőképpen: $\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2=(A_1\cup A_2, F, \delta')$ és $\mathbf{A}_1\cap\mathbf{A}_2=(A_1\cap A_2, F, \delta'')$, ahol δ' és δ'' a δ átmenetfüggvény restrikciója az $A_1\cup A_2$ és $A_1\cap A_2$ halmazokra (1. A. C. FLECK [3]). Könnyen belátható, hogy $\mathcal{U}$ az egyesítés és metszés műveletére nézve disztributív háló, amelynek van legkisebb és legnagyobb eleme (Φ és $\mathbf{A}$). Legyenek

$$\mathcal{U}/R=\langle\mathbf{T}/R|\mathbf{T}\in\mathcal{U}\rangle, \tag{3}$$

$$\mathbf{R}/\mathcal{U}=\langle\mathbf{R}/T|\mathbf{T}\in\mathcal{U}\rangle, \tag{4}$$

$$\mathcal{U}_R=\langle\mathbf{T}|\mathbf{T}\in\mathcal{U},\ T\supseteq R\rangle \tag{5}$$

és

$$\mathcal{U}^R=\langle\mathbf{T}|\mathbf{T}\in\mathcal{U},\ T\subseteq R\rangle \tag{6}$$

Ha $R, T_1, T_2\subseteq A$, akkor

$$(T_1\setminus R)\cup(T_2\setminus R)=(T_1\cup T_2)\setminus R, \tag{7}$$

$$(T_1\setminus R)\cap(T_2\setminus R)=(T_1\cap T_2)\setminus R, \tag{8}$$

$$(R\setminus T_1)\cup(R\setminus T_2)=R\setminus(T_1\cap T_2), \tag{9}$$

$$(R\setminus T_1)\cap(R\setminus T_2)=R\setminus(T_1\cup T_2). \tag{10}$$

Mivel $\mathcal{U}/R$ az $\mathbf{A}/R$ A-részautomatáinak egy halmaza, ezért (7) és (8) miatt definiálható benne az egyesítés és metszés művelete:

$$\mathbf{T}_1/R \cup \mathbf{T}_2/R = (\mathbf{T}_1 \cup \mathbf{T}_2)/R, \tag{11}$$

$$\mathbf{T}_1/R \cap \mathbf{T}_2/R = (\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{T}_2)/R. \tag{12}$$

Definiáljuk $\mathbf{R}/\mathcal{U}$-ban a következő műveleteket:

$$\mathbf{R}/T_1 \sqcup \mathbf{R}/T_2 := \mathbf{R}/T_1 \cap T_2, \tag{13}$$

$$\mathbf{R}/T_1 \sqcap \mathbf{R}/T_2 := \mathbf{R}/T_1 \cup T_2. \tag{14}$$

Könnyen belátható, hogy $\mathcal{U}/R$ a (11) és (12), illetve $\mathbf{R}/\mathcal{U}$ a (13) és (14) műveletekre nézve disztributív háló. Jelöljük ezeket a hálókat szintén $\mathcal{U}/R$-rel, illetve $\mathbf{R}/\mathcal{U}$-val.

$\mathbf{R}/\mathcal{U}$-ban a (11) és (12) műveletek általában nem jól-definiáltak (Dang Huu Dao megjegyzése). Erre vonatkozólag tekintsük a következő egyszerű példát:

$$A = \langle 1, 2, 3\rangle, \quad X = \langle x, y\rangle, \quad F = F(X) \quad \text{és}$$

δ	1	2	3
x	2	2	3
y	3	2	3

Legyen $R=A$, $T_1=\langle 2\rangle$ és $T_2=\langle 3\rangle$. Akkor $1 \in A/T_1 \cap A/T_2 = A \setminus (T_1 \cup T_2)$, azonban

$$2 = \delta(1, x) = \delta_{A/T_2}(1, x) \neq \delta_{A/T_1}(1, x) = r_A,$$

mivel $2 \in A \setminus T_2$, de $2 \notin A \setminus T_1$.

1. Tétel. *$\mathcal{U}/R$ ($\mathbf{R}/\mathcal{U}$) az $\mathcal{U}$-nak homomorf (duális homomorf) képe. $\mathcal{U}_R(\mathcal{U}^R)$ az $\mathcal{U}$ olyan részhálója, amely izomorf (duális izomorf) $\mathcal{U}/R$-rel ($\mathbf{R}/\mathcal{U}$-val).*

Bizonyítás. A φ: $\mathbf{T} \to \mathbf{T}/R$ és a ψ: $\mathbf{T} \to \mathbf{R}/T$ ($\mathbf{T} \in \mathcal{U}$) leképezés nyilvánvalóan egyértelmű. A (11) és (12) egyenletekből következik, hogy φ az $\mathcal{U}$-nak $\mathcal{U}/R$-re való homomorfizmusa. Hasonlóan a (13) és (14) egyenletekből látható, hogy ψ az $\mathcal{U}$-nak $\mathbf{R}/\mathcal{U}$-ra való duális homomorfizmusa.

Az is könnyen látható, hogy $\mathcal{U}_R(\mathcal{U}^R)$ az $\mathcal{U}$-nak részhálója. (Megjegyezzük, hogy $\mathbf{R}$ $\mathcal{U}_R$-nek legkisebb, $\mathcal{U}^R$-nek pedig legnagyobb eleme.) Bármely $\mathbf{T}(\in \mathcal{U})$ esetén

$$(\mathbf{T} \cup \mathbf{R})/_R = \mathbf{T}/_R \tag{15}$$

és

$$\mathbf{R}/_T = \mathbf{R}/_{T \cap R}, \tag{16}$$

azaz minden $\mathbf{T}'(\in \mathcal{U})$-hoz van olyan $\mathbf{T} \in \mathcal{U}_R$, illetve $\mathbf{T} \in \mathcal{U}^R$, hogy $\mathbf{T}'/R = \mathbf{T}/R$, illetve $\mathbf{R}/T' = \mathbf{R}/T$. Legyenek most $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 (\in \mathcal{U}_R)$ olyanok, hogy $\mathbf{T}_1/R = \mathbf{T}_2/R$, azaz $T_1 \setminus R = T_2 \setminus R$. Mivel $T_1, T_2 \supseteq R$, így $T_1 = T_2$. Hasonlóan, ha a $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 (\in \mathcal{U}^R)$ automatákra $\mathbf{R}/T_1 = \mathbf{R}/T_2$, akkor $R \setminus T_1 = R \setminus T_2$. Mivel $T_1, T_2 \subseteq R$, így $T_1 = T_2$. Az előbbiekből látható, hogy $\varphi(\psi)$ $\mathcal{U}_R$-re ($\mathcal{U}^R$-re) való restrikciója $\mathcal{U}_R$-nek ($\mathcal{U}^R$-nek) $\mathcal{U}/R$-re ($\mathbf{R}/\mathcal{U}$-ra) való izomorfizmusa (duális izomorfizmusa).

Megjegyezzük, hogy általában $\mathcal{U}/R$ nem egyezik meg $\mathbf{A}/R$ A-részautomatáinak halmazával, de az utóbbi nagyon könnyen megkapható az előbbiből úgy, hogy hozzávesszük azokat a $\mathbf{T}(\in \mathcal{U})$ automatákat, amelyekre $T \cap R = \Phi$.

1. Lemma. *Legyen a* $\mathbf{B}=(B, F, \delta')$ *automata az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *automata homomorf képe a* φ *homomorfizmus mellett, továbbá* $\mathbf{R}$ **A***-nak,* $\mathbf{P}$ *pedig* **B***-nek egy A-részautomatája. Ha* $\varphi(R)\subseteq P$, *akkor van* $\mathbf{A}/R$*-nek olyan* ψ *homomorf leképezése* $\mathbf{B}/P$*-re, hogy a következő diagram kommutatív:*

(17)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ {\scriptstyle \eta_R^A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_P^B} \\ A/R & \xrightarrow{\psi} & B/P \end{array}$$

(η_R^A és η_P^B (2) típusú leképezések.)

Bizonyítás. Egy megfelelő homomorfizmus a

$$\psi\colon \eta_R^A(a) \to \eta_P^B\varphi(a) \quad (a\in A)$$

leképezés.

Az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ automatát *Rees-automatának* nevezzük, ha van egyállapotú A-részautomatája. Ha $(\langle s\rangle. F, \delta')$ az **A**-nak egyállapotú A-részautomatája, akkor s-et **A** *halálállapotának* (vagy *konstansállapotának*) nevezzük. Megjegyezzük, hogy az automaták Rees-féle faktorautomatái Rees-automaták.

2. Tétel. *Legyen a* $\mathbf{B}=(B, F, \delta')$ *automata az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *automata homomorf képe a* φ *homomorfizmus mellett.* **B** *akkor és csak akkor Rees-automata, ha van* **A***-nak olyan* **R** *A-részautomatája, hogy a következő diagram kommutatív:*

(18)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & {\scriptstyle \eta_R^A}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \psi} & \\ & A/R & \end{array}$$

Bizonyítás. Legyen **B** Rees-automata és s a **B**-nek egy halálállapota. Legyen továbbá $R=\langle a|a\in A, \varphi(a)=s\rangle$. Nyilvánvaló, hogy **R** **A**-nak A-részautomatája. R-re és $P=\langle s\rangle$-re teljesülnek az 1. lemma feltételei. Mivel ebben az esetben η_P^B izomorfizmus, ezért (17)-ből következik (18). Fordítva, ha a (18) diagram kommutatív, akkor **B** Rees-automata, mivel $\mathbf{A}/R$ Rees-automata és Rees-automata homomorf képe is Rees-automata.

2. Lemma. *Legyenek* $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{R}_1$ *és* $\mathbf{R}_2$ *az* **A** *automata A-részautomatái.* $\mathbf{T}_1/R_1=\mathbf{T}_2/R_2$ *akkor és csak akkor, ha* $T_1\setminus R_1=T_2\setminus R_2$.

Érvényes a csoportelméletből ismeretes Zassenhaus-lemma következő analogonja:

3. Tétel. *Legyenek* $\mathbf{R}_1$ *és* $\mathbf{R}_2$ *az* **A** *automata A-részautomatái, továbbá* $\mathbf{R}_1'$ $\mathbf{R}_1$*-nek,* $\mathbf{R}_2'$ *pedig* $\mathbf{R}_2$*-nek A-részautomatája. Akkor*

$$[\mathbf{R}_1'\cup(\mathbf{R}_1\cap\mathbf{R}_2)]/[R_1'\cup(R_1\cap R_2')] = [\mathbf{R}_2'\cup(\mathbf{R}_2\cap\mathbf{R}_1)]/[R_2'\cup(R_2\cap R_1')]. \tag{19}$$

Bizonyítás. Ha $a\in[R_1'\cup(R_1\cap R_2)]\setminus[R_1'\cup(R_1\cap R_2')]$, akkor $a\in R_1\cap R_2$, de $a\notin R_1'$ és $a\notin R_1\cap R_2'$. Mivel $a\in R_1$, így $a\notin R_2'$. Kaptuk végül, hogy $a\in R_1\cap R_2$, de $a\notin R_1'$ és $a\notin R_2'$, azaz $a\in R_2'\cup(R_2\cap R_1)$, de $a\notin R_2'\cup(R_2\cap R_1')$, tehát $a\in[R_2'\cup(R_2\cap R_1]\setminus[R_2'\cup(R_2\cap R_1')]$. A fordított tartalmazás hasonlóan igazolható, így

$$[R_1'\cup(R_1\cap R_2)]\setminus[R_1'\cup(R_1\cap R_2')] = [R_2'\cup(R_2\cap R_1)]\setminus[R_2'\cup(R_2\cap R_1')].$$

A 2. lemma szerint ez már bizonyítja a tétel állítását.

A következő két tétel a csoportelmélet első és második izomorfiatételének analogonja.

4. Tétel. *Ha* $\mathbf{R}_1$ *és* $\mathbf{R}_2$ *az* $\mathbf{A}$ *automata A-részautomatái, akkor*

$$(\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2)/R_1 = \mathbf{R}_2/R_1 \cap R_2. \tag{20}$$

Bizonyítás. A tétel a 3. tétel speciális esete. Ha ugyanis (19)-be $\mathbf{R}_1'$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2'$ helyett rendre $\mathbf{R}_1$-et, $\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$-t, Φ-t írunk, akkor

$$(\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2)/R_1 = (\mathbf{R}_1 \cup [(\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2) \cap \mathbf{R}_2])/(R_1 \cup [(R_1 \cup R_2) \cap \Phi]) =$$

$$= (\Phi \cup [\mathbf{R}_2 \cap (\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2)])/[\Phi \cup (R_2 \cap R_1)] = \mathbf{R}_2/R_2 \cap R_1.$$

Megjegyezzük, hogy a 4. tétel állítása a (15) és a (16) összefüggésekből is megkapható.

5. Tétel. *Ha* $\mathbf{R}_1$ *és* $\mathbf{R}_2$ *az* $\mathbf{A}$ *automata olyan A-részautomatái, amelyekre* $R_1 \subseteq R_2$, *akkor* $\mathbf{R}_2/R_1$ *az* $\mathbf{A}/R_1$*-nek olyan A-részautomatája, amelyre*

$$(\mathbf{A}/R_1)/(R_2/R_1) = \mathbf{A}/R_2. \tag{21}$$

Bizonyítás. $(A/R_1)/(R_2/R_1) = [((A \setminus R_1) \cup \langle r_A \rangle) \setminus ((R_2 \setminus R_1) \cup \langle r_A \rangle)] \cup \langle r_A \rangle =$ $= (A \setminus R_2) \cup \langle r_A \rangle = A/R_2$, azaz $(\mathbf{A}/R_1)/(R_2/R_1)$ és $\mathbf{A}/R_2$ állapothalmaza megegyezik. (1) miatt:

$$\delta_{(A/R_1)/(R_2/R_1)}(a, f) = \begin{cases} \delta_{A/R_1}(a, f) & \text{ha } a, \delta_{A/R_1}(a, f) \in (A \setminus R_1) \setminus (R_2 \setminus R_1) = A \setminus R_2, \\ r_A & \text{különben.} \end{cases}$$

Mivel $R_1 \subseteq R_2$, így $A \setminus R_2 \subseteq A \setminus R_1$, azaz

$$\delta_{A/R_1}(a, f) \in A \setminus R_2 \Rightarrow \delta_{A/R_1}(a, f) \in A \setminus R_1,$$

ezért $\delta_{A/R_1}(a, f) = \delta(a, f)$, azaz $\delta_{(A/R_1)/(R_2/R_1)} = \delta_{A/R_2}$.

Az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{A}'(\neq \Phi)$ A-részautomatáját $\mathbf{A}$ *valódi A-részautomatájának* hívjuk, ha $A \setminus A' \neq \Phi$, és erre az $\mathbf{A} \supset \mathbf{A}'$ jelölést használjuk. Az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{A} = \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n$ A-részautomata sorozatát $\mathbf{A}$ *n hosszúságú (A-részautomata) sorozatának* nevezzük, ha $\mathbf{R}_{i+1}$ A-részautomatája $\mathbf{R}_i$-nek $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ és $\mathbf{R}_n = \Phi$, azaz

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_0 \supseteq \mathbf{R}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{R}_n = \Phi. \tag{22}$$

Az $\mathbf{R}_i/R_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ automatákat a (22) *sorozat Rees-faktorainak* nevezzük. Az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_m$ sorozatát az $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n$ sorozat *finomításának* mondjuk, ha minden $\mathbf{R}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ automatához van olyan $\mathbf{Q}_j$ $(0 \leqq j \leqq m)$ automata, amelyre $\mathbf{R}_i = \mathbf{Q}_j$. Az $\mathbf{A} = \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n$ sorozatot *valódinak* hívjuk, ha (22)-ben $\supseteq$ helyett mindenütt a $\supset$ jel áll. Végül *kompozíciósorozatnak* nevezünk minden olyan valódi sorozatot, amely nem finomítható.

Érvényes a csoportelmélet Schreier-féle finomítási tételének következő megfelelője:

6. Tétel. *Az* $\mathbf{A}$ *automata bármely két A-részautomata sorozata finomítható úgy, hogy ezután a két sorozat Rees-faktorai sorrendtől eltekintve páronként egyenlők.*

Bizonyítás. Legyen

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_0 \supseteq \mathbf{R}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{R}_n = \Phi, \tag{23}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \supseteq \mathbf{Q}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{Q}_m = \Phi \tag{24}$$

az **A** automata két A-részautomata sorozata. A kívánt finomítások úgy állnak elő, hogy a (23) sorozatban mindegyik $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{R}_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ pár közé az

$$\mathbf{R}_{i,j} = \mathbf{R}_{i+1} \cup (\mathbf{R}_i \cap \mathbf{Q}_j) \quad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

automatákat, a (24) sorozatban pedig minden $\mathbf{Q}_j$, $\mathbf{Q}_{j+1}$ $(j=0, 1, \ldots, m-1)$ közé a

$$\mathbf{Q}_{i,j} = \mathbf{Q}_{j+1} \cup (\mathbf{R}_i \cap \mathbf{Q}_j) \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

automatákat iktatjuk be. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i,0} \supseteq \mathbf{R}_{i,1} \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{R}_{i,m} = \mathbf{R}_{i+1}$$

és

$$\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}_{0,j} \supseteq \mathbf{Q}_{1,j} \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{Q}_{n,j} = \mathbf{Q}_{j+1}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\mathbf{R}_{i,j}/\mathbf{R}_{i,j+1} = \mathbf{Q}_{i,j}/\mathbf{Q}_{i+1,j},$$

azaz

$$[\mathbf{R}_{i+1} \cup (\mathbf{R}_i \cap \mathbf{Q}_j)]/[R_{i+1} \cup (R_i \cap Q_{j+1})] =$$

$$= [\mathbf{Q}_{j+1} \cup (\mathbf{R}_i \cap \mathbf{Q}_j)]/[Q_{j+1} \cup (R_{i+1} \cap Q_j)].$$

Alkalmazzuk a 3. tételt az $\mathbf{R}'_1 = \mathbf{R}_{i+1}$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_i$, $\mathbf{R}'_2 = \mathbf{Q}_{j+1}$, $\mathbf{R}_2 = \mathbf{Q}_j$ esetre, akkor azonnal adódik az állítás.

Könnyen látható, hogy érvényes a csoportelméletből ismert Jordan—Hölder-tétel analogonja is:

7. Tétel. *Ha egy automatának van kompozíciósorozata, akkor minden valódi A-részautomata sorozata kompozíciósorozattá finomítható és bármely két kompozíciósorozatának Rees-faktorai sorrendtől eltekintve páronként egyenlők.*

3. Maximális A-részautomaták

Az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ automatát *teljesen szeparáltnak* nevezzük, ha minden állapota halálállapot. **A**-t *gyengén összefüggőnek* mondjuk, ha minden valódi A-részautomatája teljesen szeparált.

A-t *erősen összefüggőnek* nevezzük ,ha nincs valódi A-részautomatája. (Megjegyezzük, hogy az irodalomban az ezzel ekvivalens következő definíciót szokták használni: Bármely $a, b (\in A)$ párhoz van olyan $f (\in F)$, hogy $\delta(a, f)=b$.) Nyilvánvaló, hogy minden erősen összefüggő automata gyengén összefüggő is.

Jelöljük az **A** automata halálállapotainak halmazát H-val. **A**-t *halhatatlannak* (vagy *transzcendensnek*) nevezzük, ha az $\mathbf{A}_H=(A \setminus H, F, \delta')$ A-részautomatája jól-definiált. Ebben az esetben H elemeit **A** *transzcendens állapotainak* mondjuk. Ha **A** erősen összefüggő és $|A|>1$, akkor $H=\Phi$, $\mathbf{A}_H=\mathbf{A}$; ha pedig $|A|=1$, akkor $\mathbf{A}_H=\Phi$. Tehát $\mathbf{A}_H$ jól-definiált, ezért minden erősen összefüggő automata halhatatlan.

3. Lemma. *Ha az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ gyengén összefüggő automata nem teljesen szeparált, akkor ciklikus. Ha még **A** halhatatlan is, akkor erősen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $A_a=\langle \delta(a, f) | f \in F \rangle$ $(a \in A)$. Ha van olyan $a \in A$, hogy $A_a=A$, akkor **A**-t *ciklikusnak* nevezzük. Ha $a \in A \setminus H$, akkor $|A_a|>1$, azaz $\mathbf{A}_a$ nem teljesen szeparált. Mivel **A** gyengén összefüggő, így $\mathbf{A}=\mathbf{A}_a$, azaz **A** ciklikus. Legyen még **A** halhatatlan is, azaz $\mathbf{A}_H$ jól-definiált. Mivel **A** nem teljesen szeparált, ezért $A \setminus H \neq \Phi$. Ha $H=\Phi$, akkor **A** erősen összefüggő. Ha $H \neq \Phi$, akkor $\mathbf{A}_H$ valódi

A-részautomatája $\mathbf{A}$-nak, és így teljesen szeparált. Ez azt jelenti, hogy $A=H$, ami a feltevés miatt lehetetlen.

Ezek szerint a gyengén összefüggő halhatatlan automaták teljesen szeparáltak vagy erősen összefüggők.

Az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{A}'(\neq\mathbf{A})$ A-részautomatáját $\mathbf{A}$ *maximális A-részautomatájának* nevezzük, ha nincs $\mathbf{A}$-nak olyan $\mathbf{R}$ A-részautomatája, amelyre

$$\mathbf{A}' \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{A}$$

teljesül. Az $\mathbf{A}$ egy $\mathbf{S}$ A-részautomatáját $\mathbf{A}$ *stabil A-részautomatájának* (vagy *stabilizátorának*) hívjuk, ha minden $a(\in A)$-hoz van olyan $f(\in F)$, hogy $\delta(a,f)\in S$. Ha S egyelemű, akkor S elemét $\mathbf{A}$ *stopállapotának* mondjuk.

4. Lemma. *Ha az $\mathbf{A}'=(A', F, \delta')$ automata az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ automata maximális A-részautomatája, akkor a következő két eset lehetséges:*

1. *Az $\mathbf{A}\setminus\mathbf{A}'=(A\setminus A', F, \delta'')$ automata erősen összefüggő,*

2. *$\mathbf{A}'$ az $\mathbf{A}$ automata stabilizátora.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}'$ nem stabilizátora $\mathbf{A}$-nak, akkor van olyan $a\in A\setminus A'$, hogy $A_a=\langle\delta(a,f)|f\in F\rangle\subseteq A\setminus A'$. A_a azonban nem lehet valódi része $A\setminus A'$-nek, mert akkor $\mathbf{A}'\subset\mathbf{A}'\cup\mathbf{A}_a\subset\mathbf{A}$ miatt $\mathbf{A}'$ nem lenne $\mathbf{A}$ maximális A -részautomatája. Ezért $A_a=A\setminus A'$, azaz $\mathbf{A}\setminus\mathbf{A}'$ ciklikus. Legyen most $b(\in A\setminus A')$ olyan állapot, amelyhez van olyan $g(\in F)$, hogy $\delta(b,g)\in A'$. Az előbbiek szerint b-hez van olyan $f(\in F)$ is, hogy $b=\delta(a,f)$, azaz $\delta(a,fg)=\delta(b,g)\in A'$, ami lehetetlen. Kaptuk, hogy minden $b(\in A\setminus A')$-re $A_b=A\setminus A'$, azaz $\mathbf{A}\setminus\mathbf{A}'$ erősen összefüggő.

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ az $\mathbf{A}$ két maximális A-részautomatája, akkor $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2$ vagy $\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2=\mathbf{A}$.

Az $\mathbf{A}$ automatát *egyszerűnek* nevezzük, ha $|A|\neq 2$ esetén egyetlen halálállapota van, $|A|=2$ esetén pedig egy vagy kettő, s *robotnak,* ha egyszerű és a halálállapota ($|A|=2$ esetben az egyik, ha kettő van) stopállapota is $\mathbf{A}$-nak.

8. Tétel. *Ha az $\mathbf{A}'$ automata az $\mathbf{A}$ automata maximális A-részautomatája, akkor $\mathbf{A}/A'$ egyszerű halhatatlan automata vagy gyengén összefüggő robot.*

Bizonyítás. A 4. lemma szerint $\mathbf{A}\setminus\mathbf{A}'$ erősen összefüggő vagy $\mathbf{A}'$ az $\mathbf{A}$ stabilizátora. Ha $\mathbf{A}\setminus\mathbf{A}'$ erősen összefüggő, akkor $\mathbf{A}/\mathbf{A}'$ egyszerű halhatatlan automata. Ha $\mathbf{A}'$ az $\mathbf{A}$ stabilizátora, akkor $\mathbf{A}/A'$ gyengén összefüggő robot.

Az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ automata $\mathbf{R}_i(i=0, 1, 2, \ldots)$ A-részautomatáinak egy sorozatát $\mathbf{A}$ *fő A-részautomata sorozatának* nevezzük, ha

$$\mathbf{A}=\mathbf{R}_0\supset\mathbf{R}_1\supset\mathbf{R}_2\supset\ldots \tag{25}$$

azaz, ha $\mathbf{R}_{i+1}$ maximális A-részautomatája $\mathbf{R}_i$-nek ($i=0, 1, 2, \ldots$). Nyilvánvaló, hogy egy automata minden kompozíciósorozata az automata fő A-részautomata sorozata is. (A sorozat utolsó előtti tagja erősen összefüggő, az utolsó tagja pedig az üres automata.) Ha a (25) sorozat az $\mathbf{A}$ automata fő *A-részautomata* sotozata, akkor az $\mathbf{R}_i/R_{i+1}$ Rees-faktorok a 8. tétel szerint egyszerű halhatatlan automaták vagy gyengén összefüggő robotok.

Legyen $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ tetszőleges automata, továbbá $a\in A$ és $A(a)=A_a\cup\langle a\rangle$, ahol $A_a=\langle\delta(a,f)|f\in F\rangle$. Ha $\mathbf{A}'$ az $\mathbf{A}$ maximális A-részautomatája, akkor bármely $a(\in A\setminus A')$ esetén $A=A(a)\cup A'$. Jelöljük $\mathcal{J}(a)$-val azon $b(\in A(a))$ elemek halmazát, amelyekre $A(b)\neq A(a)$. Az $\mathbf{A}(a)/\mathcal{J}(a)$ automatát $\mathbf{A}$ egy *fő faktorának* nevezzük

(1. A. H. CLIFFORD—G.B. PRESTON [2] 11.3. §). Könnyen belátható, hogy $\mathscr{I}(a)=$ $=A'\cap A(a)$, ezért a 4. tétel szerint $\mathbf{A}/A'=\mathbf{A}(a)/\mathscr{I}(a)$. Ha a (25) sorozat az $\mathbf{A}$ automata egy fő A-részautomata sorozata, akkor minden $a(\in A)$-hoz van olyan $\mathbf{R}_i$, hogy $a\in R_i$, de $a\notin R_{i+1}$. Így az előbbiek szerint $\mathbf{R}_i/R_{i+1}=A(a)/\mathscr{I}(a)$. Ezek szerint érvényes az A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON [2] 2.40. tételéhez hasonló:

9. Tétel. *Bármely automata tetszőleges fő A-részautomata sorozatának Rees-faktorai valamilyen sorrendben megegyeznek az automata fő faktoraival.* (DANG HUU DAO megjegyzése.)

$B(\subseteq A)$-t az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ automata *erősen összefüggő állapothalmazának* nevezzük, ha bármely $a, b(\in B)$ párhoz van olyan $f(\in F)$, hogy $\delta(a, f)=b$. Megjegyezzük, hogy egy automata erősen összefüggő állapothalmaza nem mindig állapothalmaza az automata valamely (erősen összefüggő) A-részautomatájának. Erre vonatkozólag tekintsük a következő példát:

$$A=\langle 1, 2, 3\rangle, \quad X=\langle x, y\rangle, \quad F=F(X) \quad \text{és}$$

δ	1	2	3
x	2	1	3
y	3	3	1

Az $\langle 1, 2\rangle$ halmaz $\mathbf{A}$ erősen összefüggő állapothalmaza, de $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, így nincs valódi A-részautomatája.

Az automata fő faktoraira vonatkozik A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON [2] 11.5. lemmája, amely szerint, ha $\mathbf{A}(a)\neq A_a$, akkor $A_a=\mathscr{I}(a)$ és $\mathbf{A}(a)/\mathscr{I}(a)=\mathbf{A}(a)/A_a=$ $=(\langle a, r_A\rangle, F, \delta_a)$, ahol minden $f(\in F)$-re $\delta_a(a, f)=\delta_a(r_A, f)=r_A$; ha viszont $A(a)=$ $=A_a$, akkor $A(a)\setminus\mathscr{I}(a)$ az $\mathbf{A}$ automata egy erősen összefüggő halmaza.

10. Tétel. *Legyenek az* $\mathbf{R}_i(i=0, 1, 2, \ldots)$ *és az* $\mathbf{R}$ *automaták az* $\mathbf{A}$ *automata olyan A-részautomatái, amelyekre ha* $\mathbf{R}_i\neq\mathbf{R}_j$ $(i, j=0, 1, 2, \ldots)$, *akkor* $\mathbf{R}_i\cap\mathbf{R}\neq$ $\neq\mathbf{R}_j\cap\mathbf{R}$. *Ha* $\mathbf{R}_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ *az* $\mathbf{A}$ *automata fő A-részautomata sorozata, akkor az* $\mathbf{R}_i\cap\mathbf{R}$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ *sorozata az* $\mathbf{R}$ *automata fő A-részautomata sorozata.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{T}$ az $\mathbf{A}$ olyan A-részautomatája, amelyre

$$\mathbf{R}_i\cap\mathbf{R}\supseteq\mathbf{T}\supseteq\mathbf{R}_{i+1}\cap\mathbf{R} \quad (i=0, 1, 2, \ldots).$$

Akkor

$$\mathbf{R}_{i+1}=(\mathbf{R}_{i+1}\cap\mathbf{R})\cup\mathbf{R}_{i+1}\subseteq\mathbf{T}\cup\mathbf{R}_{i+1}\subseteq(\mathbf{R}_i\cap\mathbf{R})\cup\mathbf{R}_{i+1}\subseteq(\mathbf{R}_i\cap\mathbf{R})\cup\mathbf{R}_i=\mathbf{R}_i,$$

azaz

$$\mathbf{R}_{i+1}\subseteq\mathbf{R}_{i+1}\cup\mathbf{T}\subseteq\mathbf{R}_i.$$

Mivel $\mathbf{R}_{i+1}$ az $\mathbf{R}_i$-nek maximális A-részautomatája, ezért $\mathbf{R}_{i+1}=\mathbf{R}_{i+1}\cup\mathbf{T}$, vagy $\mathbf{R}_{i+1}\cup\mathbf{T}=\mathbf{R}_i$. Ha $\mathbf{R}_{i+1}=\mathbf{R}_{i+1}\cup\mathbf{T}$, akkor $\mathbf{T}\subseteq\mathbf{R}_{i+1}$, de $\mathbf{R}_i\cap\mathbf{R}\supseteq\mathbf{T}$ miatt $\mathbf{T}\subseteq\mathbf{R}$, így $\mathbf{T}\subseteq\mathbf{R}_{i+1}\cap\mathbf{R}$. A feltevés miatt $\mathbf{T}=\mathbf{R}_{i+1}\cap\mathbf{R}$. Ha $\mathbf{R}_{i+1}\cup\mathbf{T}=\mathbf{R}_i$, akkor $\mathbf{R}_i\cap\mathbf{R}=$ $=(\mathbf{R}_{i+1}\cup\mathbf{T})\cap\mathbf{R}=(\mathbf{R}_{i+1}\cap\mathbf{R})\cup(\mathbf{T}\cap\mathbf{R})\subseteq\mathbf{T}\cap(\mathbf{T}\cap\mathbf{R})=\mathbf{T}$, így szintén a feltevés miatt $\mathbf{R}_i\cap\mathbf{R}=\mathbf{T}$.

Legyen $\mathbf{R}_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ és $\mathbf{Q}_j$ $(j=0, 1, 2, \ldots)$ az $\mathbf{A}(\neq\Phi)$ automata két fő A-részautomata sorozata. Bármely $\mathbf{R}_i, \mathbf{Q}_j(i, j=0, 1, 2, \ldots)$ pár esetén $\mathbf{R}_i\cap\mathbf{Q}_j\neq\Phi$, vagy van olyan $i, j(\geqq 1)$, hogy $\mathbf{R}_i\cap\mathbf{Q}_j=\Phi$. Az utóbbi esetre vonatkozik a

11. Tétel. *Ha* $\mathbf{R}_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ *és* $\mathbf{Q}_j$ $(j=0, 1, 2, \ldots)$ *az* $\mathbf{A}(\neq\Phi)$ *automata olyan fő A-részautomata sorozatai, amelyekhez vannak olyan* i_1 *és* j_1 *természetes számok,*

hogy $\mathbf{R}_{i_1} \cap \mathbf{Q}_{j_1} = \Phi$, *akkor vannak olyan* $1 \leqq n \leqq i_1$, $1 \leqq m \leqq j_1$ *természetes számok is, amelyekre* $\mathbf{R}_n \cap \mathbf{Q}_m = \Phi$, *de* $\mathbf{R}_n \cap \mathbf{Q}_{m-1} \neq \Phi$ *és* $\mathbf{R}_{n-1} \cap \mathbf{Q}_m \neq \Phi$. *Továbbá,* $\mathbf{R}_n \cap \mathbf{Q}_{m-1}$ *és* $\mathbf{R}_{n-1} \cap \mathbf{Q}_m$ *erősen összefüggő automaták, amelyekre*

$$R_n \cap Q_{m-1} = Q_{m-1} \setminus Q_m$$

és

$$R_{n-1} \cap Q_m = R_{n-1} \setminus R_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan van olyan legkisebb n természetes szám, amelyre $R_n \cap Q_{j_1} = \Phi$ $(1 \leqq n \leqq i_1)$, és van olyan legkisebb m természetes szám, hogy $R_n \cap Q_m = \Phi$ $(1 \leqq m \leqq j_1)$, azaz

$$R_n \cap Q_m = \Phi,$$

$$R_n \cap Q_{m-1} \neq \Phi,$$

$$R_{n-1} \cap Q_m \neq \Phi.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$R_n \subseteq R_{n-1} \cap (R_n \cup Q_m) \subseteq R_{n-1}.$$

Mivel $\mathbf{R}_n$ az $\mathbf{R}_{n-1}$ maximális A-részautomatája, ezért a következő két eset lehetséges:

(26) $$R_n = R_{n-1} \cap (R_n \cup Q_m) = R_n \cup (R_{n-1} \cap Q_m)$$

vagy

(27) $$R_{n-1} = R_{n-1} \cap (R_n \cup Q_m) = R_n \cup (R_{n-1} \cap Q_m).$$

(26)-ból $R_{n-1} \cap Q_m \subseteq R_n$ adódik, azonban $R_n \cap Q_m = \Phi$, így $R_{n-1} \cap Q_m = \Phi$, ami lehetetlen. Tehát csak a (27) eset lehetséges, azaz, mivel $R_n \cap Q_m = \Phi$:

$$R_{n-1} \cap Q_m = R_{n-1} \setminus R_n.$$

Hasonlóan látható be, hogy

$$R_n \cap Q_{m-1} = Q_{m-1} \setminus Q_m.$$

Legyen most $\Phi \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{R}_{n-1} \cap \mathbf{Q}_m$. Akkor $R_n \subset R_n \cup R \subseteq R_{n-1}$, így $R_n \cup R = R_{n-1}$, azaz $R = R_{n-1} \setminus R_n = R_{n-1} \cap Q_m$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{R}_{n-1} \cap \mathbf{Q}_m$ erősen összefüggő. Hasonlóan bizonyítható be, hogy $\mathbf{R}_n \cap \mathbf{Q}_{m-1}$ is erősen összefüggő.

Végül köszönetet mondok PEÁK ISTVÁN kandidátusnak és DANG HUU DAO aspiránsnak értékes tanácsaikért.

IRODALOM

[1] BIRKHOFF, G., Lattice theory, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1948.
[2] CLIFFORD, A. H.—G. B. PRESTON, The algebraic theory of semigroups, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, v. 1, 1961, v. 2, 1967.
[3] FLECK, A. C., Preservation of structure by certain classes of functions on automata and related group theoretic properties, Computer Laboratory Michigan State University, 1961, (sokszorosításban)
[4] GÉCSEG, F.—PEÁK I., Az automaták algebrai elmélete, *Matematikai Lapok,* **17**, 1966, 77—134.
[5] GÉCSEG, F.—PEÁK, I., Algebraic theory of automata, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
[6] GINSBURG, S., An introduction to mathematical machine theory, Addison—Wesley, Palo Alto—London, 1962.
[7] KUROS, A. G., Csoportelmélet, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
[8] KUROS, A. G., Gruppentheorie I, Akademie-Verlag, Berlin, 1970.
[9] PEÁK, I., Bevezetés az automaták elméletébe, I—II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1977/78. (Egyetemi jegyzet.)
[10] RÉDEI, L., Algebra I, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.

[11] RHODES, J. L.—B. R. TILSON, Local structure theorems for finite semigroups, Algebraic theory of machines, languages and semigroups (szerk.: A. C. ARBIB, Academic Press, New York—London, 1968, 147—189.
[12] SALOMAA, A., Theory of automata, Pergamon Press, New York—London, 1969.
[13] SZÁSZ, G., Bevezetés a hálóelméletbe, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.

РИСОВСКИЕ АВТОМАТЫ

И. БАБЧАНИ

REES-AUTOMATA

I. BABCSÁNYI

We denote briefly that $\mathbf{T}=(T, F, \delta')$ is a proper A-subautomaton of the automaton $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ with $\mathbf{T}\subset\mathbf{A}$. We define the *empty automaton* $\mathbf{\Phi}$, where the state set is the empty set, the input semigroup is arbitrary and the transition function is not defined. ($\mathbf{\Phi}\subseteq\mathbf{A}$ for every $\mathbf{A}$.)

Let $\mathbf{T}$, $\mathbf{R}\subseteq\mathbf{A}$ and let $r_A(\notin A)$ be arbitrary fixed sign. Furthermore let $T/R=(T\setminus R)\cup\langle r_A\rangle$ and

$$\delta_{T/R}(a,f)=\begin{cases}\delta(a,f) & \text{if } a,\delta(a,f)\in T\setminus R\\ r_A & \text{otherwise}\end{cases}\qquad(f\in F)$$

The automaton $\mathbf{T}/R=(T/R, F, \delta_{T/R})$ is said to be *Rees factor automaton of* $\mathbf{T}$ *induced by* $\mathbf{R}$.

The set $\mathcal{U}$ of all A-subautomata of $\mathbf{A}$ with operations $\cup$ and $\cap$ (union and intersection of A-subautomata, s. [3]) is a distributive lattice. (3) and (4) with the operations (11), (12) and (13), (14) are distributive lattices, respectively.

(3) ((4)) is a (dual) homomorphic image of $\mathcal{U}$. The sublattice (5) ((6)) of $\mathcal{U}$ is (dual) ismorphic with (3) ((4)). (Theorem 1.)

We prove analogous theorems with Zassenhaus Lemma (Theorem 3., s. (19), where $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2\subseteq\mathbf{A}$, $\mathbf{R}_1'\subseteq\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2'\subseteq\mathbf{R}_2$), First Isomorphism Theorem (Theorem 4., s. (20), where $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2\subseteq\mathbf{A}$.), Second Isomorphism Theorem (Theorem 5., s. (21), where $\mathbf{R}_1\subseteq\mathbf{R}_2\subseteq\mathbf{A}$.), Schreier Theorem (Theorem 6.) and Jordan—Hölder Theorem (Theorem 7.) of the group theory. This is already well-known in the semigroup theory (s. [3], [11]).

The automaton $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ is said to be a *Rees-automaton,* if there exists at least one A-subautomaton $(\langle s\rangle, F, \delta')$ of $\mathbf{A}$ with one state $s.s$ is called a *death state* (or *constant state*) of $\mathbf{A}$.

The automaton $\mathbf{B}=(B, F, \delta')$ is a Rees-automaton if and only if there exists an A-subautomaton $\mathbf{R}=(R, F, \delta'')$ of the automaton $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ such that the diagram (18) is commutative. (η_R^A is the natural homomorphism of $\mathbf{A}$ onto $\mathbf{A}/R$.) (Theorem 2.)

$\mathbf{A}$ is called *completely separated,* if its every state is death state. $\mathbf{A}$ is *weakly connected,* if its every proper A-subautomaton is completely separated. (Obviously every strongly connected automaton is weakly connected.) Denote H the set of all death states of $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}$ is said to be *transcendent* (or *deathless*), if the automaton $\mathbf{A}_H=(A\setminus H, F, \delta')$ is well-defined.

If a weakly connected automaton $\mathbf{A}$ is not completely separated, then it is cyclic. If $\mathbf{A}$ is also transcendent, then it is strongly connected. (Lemma 3.)

$\mathbf{A}'(\subset\mathbf{A})$ is called a *maximal* A-*subautomaton* of $\mathbf{A}$, if there exists not an A-subautomaton $\mathbf{R}$ of $\mathbf{A}$ such that $\mathbf{A}'\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{A}$ holds. $\mathbf{S}(\subseteq\mathbf{A})$ is said to be a *stabilizator* of $\mathbf{A}$, if for every $a(\in A)$ there exists $f(\in F)$ such that $\delta(a,f)\in S$. If $S=\langle s\rangle$, then s is called a *stop state* of $\mathbf{A}$. If $\mathbf{A}'(\subset\mathbf{A})$ is a maximal A-subautomaton of $\mathbf{A}$, then the automaton $(A\setminus A', F, \delta')$ is strongly connected or $\mathbf{A}'$ is a stabilizator of $\mathbf{A}$. (Lemma 4.)

$\mathbf{A}$ is called *simple*, if in the case $|A|\neq 2$ it has exactly one death state and in the case $|A|=2$ it has one or two death states. $\mathbf{A}$ is called a *robot,* if it is simple and its death state (if $|A|=2$, then only one) is its stop state, too. If $\mathbf{A}'$ is a maximal A-subautomaton of $\mathbf{A}$, then $\mathbf{A}/A'$ is simple transcendent or a weakly connected robot. (Theorem 8.) We note that $\mathbf{A}/A'=\mathbf{A}(a)/I(a)$, where $A(a)=\langle\delta(a,f)|f\in F\rangle\cup\langle a\rangle$ $(a\in A\setminus A')$ and $I(a)=\langle b|b\in A(a), A(b)\neq A(a)\rangle$. (s. lemma 11.5. and theorem 2.40. of [2]).

The series (25) is a *principal* A-*subautomaton series* of A, if $\mathbf{R}_{i+1}$ is a maximal A-subautomaton of $\mathbf{R}_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$. Let $\mathbf{R}_i(i=0, 1, 2, \ldots)$ be a principal A-subautomaton series of $\mathbf{A}$. If $\mathbf{R}\subseteq\mathbf{A}$ such that $\mathbf{R}_i\cap\mathbf{R}\neq\mathbf{R}_j\cap\mathbf{R}$ for every pair $\mathbf{R}_i\neq\mathbf{R}_j$ $(i, j=0, 1, 2, \ldots)$ then the series $\mathbf{R}_i\cap\mathbf{R}(i=0, 1, 2, \ldots)$ is a principal A-subautomaton series of $\mathbf{R}$. (Theorem 10.) If $\mathbf{R}_i(i=0, 1, 2, \ldots)$ and $\mathbf{Q}_j(j=0, 1, 2, \ldots)$ are principal A-subautomaton series of $\mathbf{A}(\neq\mathbf{\Phi})$ such that $\mathbf{R}_{i_1}\cap\mathbf{Q}_{j_1}=\mathbf{\Phi}$ for some natural numbers i_1 and j_1, then there exist natural numbers $1\leqq n\leqq i_1$, $1\leqq m\leqq j_1$, such that $\mathbf{R}_n\cap\mathbf{Q}_m=\mathbf{\Phi}$, but $\mathbf{R}_n\cap\mathbf{Q}_{m-1}\neq\mathbf{\Phi}$ and $\mathbf{R}_{n-1}\cap\mathbf{Q}_m\neq\mathbf{\Phi}$ and they are strongly connected A-subautomata of $\mathbf{A}$, furthermore $R_n\cap Q_{m-1}=Q_{m-1}\setminus Q_m$ and $R_{n-1}\cap Q_m=R_{n-1}\setminus R_n$ hold. (Theorem 11.)

AZ OPERÁTORTEST EGY MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETÉRŐL

FÉNYES TAMÁS—KOSIK PÁL

Bevezetés

(1) dolgozatban a Mikusínski-féle M operátortest néhány speciális másodrendű algebrai differenciálegyenletének diszkussziójával foglalkoztunk. Az (1)-ben megkezdett vizsgálatainkat ebben a dolgozatban folytatva a

$$D^2(y)-[f^2+D(f)]\,y = z \tag{1}$$

alakú másodrendű differenciálegyenlettel kívánunk foglalkozni, ahol f és z adott Mikusínski operátorok, y az ismeretlen operátor, D pedig a Mikusínski-féle algebrai deriválást jelöli. Az alábbiakban feltételezzük, hogy $f=g+c$, ahol g a $0\leqq t<\infty$ intervallumon értelmezett lokálisan integrálható függvény, c valós szám, továbbá z végesrendű disztribúcióval identifikálható operátor. (Egy $x\in M$ operátort akkor nevezünk végesrendű disztribúcióval identifikálhatónak, ha $x=s^{\alpha}e^{\beta s}\{h(t)\}$ alakban írható, ahol α, β valós számokat h lokálisan integrálható függvényt jelöl, s, illetve $e^{\beta s}$ az ismert differenciáloperátort, illetve eltolási operátort jelöli.)

A g függvénynek az origó környezetében való viselkedésére kirótt feltételek mellett kimutatjuk (1) M-beli megoldásainak egzisztenciáját, a megoldásokat explicit alakban előállítjuk. Látni fogjuk, hogy minden megoldás végesrendű disztribúcióval identifikálható operátor. Az említett, a g-re kirótt feltétel teljesülése mellett az (1)-hez tartozó homogén egyenlet vizsgálatánál megadjuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy valamely nemtriviális megoldása lokálisan integrálható függvényt állítson elő, másrészt a $c=0$ esetben a z-re vonatkozó elégséges feltételt adunk meg, amely biztosítja, hogy (1)-nek legyen lokálisan integrálható függvénymegoldása.

A dolgozatban feltételezzük az operátorszámítás elemeinek és az abban alkalmazott jelölésmód ismeretét, melyet általában e dolgozatban is alkalmazunk. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük az alábbiakat:

D helyett az egyszerűbb $'$ jelölést fogjuk használni. Két függvény konvolúcióját — amennyiben a félreértés veszélye nem áll fenn —, $*$-gal is fogjuk néhol jelölni. Tetszőleges $x\in M$-re, $\int x$ az x operátor határozatlan algebrai integrálját jelöli, feltéve, ha az integrál egyáltalán létezik. Tetszőleges $0\leqq t<\infty$-en definiált lokálisan integrálható $F(t)$ függvény esetében $\int \frac{F(t)\,dt}{(t-a)^l}$ jelölje azt a primitív függvényt, melynek értéke a $t=0$-ban nulla, feltéve, hogy $\frac{F(t)}{(t-a)^l}$ a $t=0$ környezetében integrálható. l tetszőleges valós szám, ha $a\leqq 0$ és tetszőleges egész, ha $a>0$.

Ha (1)-ben a z operátort függvénynek választjuk és (1) megoldásait a lokálisan integrálható függvények konvolúciógyűrűjében keressük ,úgy abban (1) nyilvánvalóan

ekvivalens az alábbi harmadfajú konvolúció-típusú integrálegyenlettel:

$$(t^2-c^2)y(t)-(g*g+2cg-tg(t))*y(t)=z(t). \tag{2}$$

Szükségünk lesz a dolgozatban az ún. Gesztelyi—Fényes—Kosik-féle algebrai integráltételre (lásd [1]), melyet itt is ismertetünk.

Legyen $x=s^k e^{-\alpha s}\{F(t)\}$, *ahol* $F(t)$ *lokálisan integrálható függvény* $<0, \infty)$*-ben,* $k=0, 1, 2, \ldots j; -\infty< <\infty$; *akkor* x *algebrailag integrálható és egy integrálja az alábbi alakú*

$$\int x = -s^{k+1}e^{-\alpha s}\{G(t)\}, \tag{3}$$

ahol G *szintén lokálisan integrálható* $<0, \infty)$*-ban és*

$$G(t)=(t+\alpha)^k\int\frac{F(t)\,dt}{(t+\alpha)^{k+1}}. \tag{4}$$

Ha $\alpha>0$ *(3), (4) tetszőleges valós* k*-ra érvényes. Ha* $\alpha=0$*, úgy (3), (4) tetszőleges* $k\neq -1$ *mellett érvényes, továbbá* $\alpha>0$ *esetén (3), (4) helyett az alábbi formulák is fennállanak.*

$$\int x = -s^k e^{-\alpha s}\{G_1(t)\}, \tag{5}$$

$$G_1(t)=\frac{F(t)}{t+\alpha}+k(t+\alpha)^{k-1}\int\frac{F(t)\,dt}{(t+\alpha)^{k+1}}. \tag{6}$$

Végül, ha $\dfrac{F(t)}{t}$ *lokálisan integrálható, akkor (3), (4), (5), (6) formulák* $\alpha=0$*-ra is érvényesek tetszőleges valós* k *mellett.*

1. *A homogén egyenlet vizsgálata*

Tekintsük az (1)-hez tartozó homogén egyenletet

$$y''-(f^2+f')y=0 \tag{1.1}$$

Ha ezt egy pillanatra az x és y változók között fennálló közönséges differenciálegyenletnek tekintjük, úgy annak két partikuláris megoldása

$$y_1=e^{\int f(x)\,dx},\quad y_2=e^{\int f(x)\,dx}\int e^{-2\int f(x)\,dx}\,dx.$$

Ennek megfelelően keressük az $y_1, y_2\in M$-beli megoldásokat

$$y_1=e^{\int f},\quad y_2=e^{\int f}\int e^{-2\int f}$$

alakban. Ez jogos, ha a szereplő algebrai integrálok és exponenciális függvények léteznek az operátortestben.

Nézzük meg először y_1-et.

A Bevezetésben megadott integráltétel alapján formálisan adódik, hogy

$$y_1=e^{\int f}=e^{\int(g+c)}=e^{cs}e^{\int g}=e^{cs}\exp\left[-s\left\{\int\frac{g(t)}{t}\,dt\right\}\right]. \tag{1.2}$$

Az (1.2) jobboldalán szereplő utolsó exponenciális függvény egzisztenciája tetszőleges $g(t)$ mellett nem ismeretes. Hogy ezt a nehézséget megkerülhessük, az alábbi kikötést tesszük $g(t)$-re.

Létezzék a $\lim_{t\to+0} g(t)=g(0)$ *véges határérték és legyen* $(g(t)-g(0))/t$ *lokálisan integrálható.*

Ezt figyelembevéve a szóbanforgó operátoros exponenciális függvény egzisztenciája már biztosított, ugyanis

$$\exp\left[-s\left\{\int\frac{g(t)}{t}\,dt\right\}\right]=\exp\left[-s\left\{\int\frac{g(t)-g(0)}{t}\,dt\right\}\right]\exp\left[-g(0)s\{\log t\}\right]=$$

$$=\exp\left\{\frac{g(t)-g(0)}{-t}\right\}e^{\gamma g(0)}s^{g(0)},$$

ahol γ az Euler-féle állandó. (Lásd [1].)

Bevezetve a $h(t)=\dfrac{g(t)-g(0)}{-t}$ jelölést, az $e^{\gamma g(0)}$ számszorzó elhagyásával kapjuk, hogy (1.1) egy partikuláris megoldása

$$y_1=e^{cs}e^{h}s^{g(0)}. \tag{1.3}$$

Az operátorszámítás elemeiből ismeretes, hogy $e^h=1+\left\{h+\dfrac{h^2}{2!}+\ldots\right\}$, következésképp y_1 végesrendű disztribúciót állít elő, mely akkor és csakis akkor azonosítható függvénnyel, ha

$$g(0)<0 \quad \text{és} \quad c\leqq 0.$$

Vizsgáljuk meg az y_2 partikuláris megoldást.

(1.3) alapján formálisan

$$y_2=e^{cs}e^{h}s^{g(0)}\int e^{-2cs}e^{-2h}s^{-2g(0)}. \tag{1.4}$$

Az algebrai integráltételből azonnal következik, hogy y_2 létezik M-ben és végesrendű disztribúciót képez.

Bevezetjük az $\{\omega(t)\}$ függvényt az $e^{-2h}=1+\{\omega(t)\}$ definícióval. Az alábbiakban megkülönböztetjük a $c>0$, $c=0$, $c>0$ eseteket.

I. $c>0$. Az (1.4)-ben szereplő algebrai integrálokat felírva kapjuk, hogy

$$\int e^{-2cs}\omega s^{-2g(0)}=-s^{-2g(0)}e^{-2cs}\left\{\frac{\omega(t)}{t+2c}-2g(0)(t+2c)^{-2g(0)-1}\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t+2c)^{-2g(0)+1}}\right\}$$

$$\int e^{-2cs}s^{-2g(0)}=\int e^{-2cs}s^{-2g(0)+1}\{1\}=$$

$$=-s^{-2g(0)+1}e^{-2cs}\left\{\frac{1}{t+2c}-(2g(0)-1)(t+2c)^{-2g(0)}\int\frac{dt}{(t+2c)^{2-2g(0)}}\right\}= \tag{1.5}$$

$$=-\frac{e^{-2cs}}{2c}s^{-2g(0)}+e^{-2cs}s^{-2g(0)}\{2g(0)(2c)^{2g(0)-1}(t+2c)^{-2g(0)-1}\}.$$

Így az y_2 operátoros megoldás az alábbi alakú lesz

$$y_2 = e^{-cs}s^{-g(0)}e^h\left[\left\{-\frac{\omega(t)}{t+2c}+2g(0)(t+2c)^{-2g(0)-1}\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t+2c)^{-2g(0)+1}}+\right.\right.$$

(1.6)

$$\left.\left.+g(0)2^{2g(0)}c^{2g(0)-1}(t+2c)^{-2g(0)-1}\right\}-\frac{1}{2c}\right].$$

Az operátorszámítás elemeiből azonnal következik, hogy (1.6) akkor, és csakis akkor állít elő lokálisan integrálható függvényt, ha $g(0)>0$.

II. $c=0$. Ekkor az I. esethez analóg módon az algebrai integrálokat felírva kapjuk, hogy

$$\int s^{-2g(0)} = \begin{cases} \dfrac{s^{-2g(0)+1}}{1-2g(0)}, & g(0)\neq\dfrac{1}{2}, \\ -s\{\log t\}, & g(0)=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(1.7)

$$\int \omega s^{-2g(0)} = \begin{cases} -s^{-2g(0)+1}\left\{t^{-2g(0)}\displaystyle\int\frac{\omega(t)\,dt}{t^{-2g(0)+1}}\right\}, & g(0)\neq\dfrac{1}{2}, \\ -s\left\{\displaystyle\int\frac{\int_0^t\omega(\tau)\,d\tau}{t}\,dt\right\}, & g(0)=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

és így

$$y_2 = s^{-g(0)+1}e^h\left[\left\{-t^{-2g(0)}\int\frac{\omega(t)\,dt}{t^{-2g(0)+1}}\right\}+\frac{1}{1-2g(0)}\right], \quad g(0)\neq\frac{1}{2},$$

(1.8)

$$y_2 = -s^{3/2}e^h\left\{\log t+\int\frac{\int_0^t\omega(\tau)\,d\tau}{t}\,dt\right\}, \quad g(0)=\frac{1}{2}.$$

(1.8) akkor és csakis akkor állít elő lokálisan integrálható függvényt, ha $g(0)>1$. Ha $g(0)\neq\frac{1}{2}$, úgy ez ismét azonnal következik az operátorszámítás elemeiből. $g(0)=\frac{1}{2}$ esetben pedig (1.8)-at átírhatjuk

$$-y_2s^{-3/2}e^{-h} = \left\{\log t+\int\frac{\int_0^t\omega(\tau)\,d\tau}{t}\,dt\right\} \tag{1.9}$$

alakra. Tegyük fel, hogy y_2 függvény. Ekkor (1.9) baloldalán álló kifejezés szintén függvényt állít elő, mely nullához tart, ha $t\to+0$. (1.9) jobboldalán álló függvény ezt nem produkálhatja, mivel az origó környezetében nem korlátos. Ellentmondásra jutottunk és így y_2 nem állíthat elő függvényt, ha $g(0)=\frac{1}{2}$.

III. $c<0$. Megmutatjuk, hogy az (1.4) operátor nem állíthat elő lokálisan integrálható függvényt.

Ha $g(0)>0$, akkor az (1.4)-ben szereplő algebrai integrálok:

$$\int e^{-2cs}s^{-2g(0)} = \int e^{-2cs}\left\{\frac{t^{2g(0)-1}}{\Gamma(2g(0))}\right\} = \frac{-e^{-2cs}}{\Gamma(2g(0))}\, s\left\{\int \frac{t^{2g(0)-1}}{t+2c}\, dt\right\}$$

(1.10)

$$\int e^{-2cs}s^{-2g(0)}\omega = -\frac{e^{-2cs}}{\Gamma(2g(0))}\, s\left\{\int \frac{t^{2g(0)-1} * \omega(t)}{t+2c}\, dt\right\}.$$

(1.10)-et (1.4)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$y_2 = -\frac{e^{-cs}e^{h}s^{g(0)+1}}{\Gamma(2g(0))}\left\{\int \frac{t^{2g(0)-1}+t^{2g(0)-1}*\omega(t)}{t+2c}\, dt\right\}. \tag{1.11}$$

Tegyük fel, hogy y_2 függvény, úgy (1.11)-et az

$$-y_2 e^{-h}s^{-g(0)-1}e^{cs}\Gamma(2g(0)) = \left\{\int \frac{t^{2g(0)-1}+t^{2g(0)-1}*\omega(t)}{t+2c}\, dt\right\} \tag{1.12}$$

alakban felírva, az eltolási operátor alaptulajdonságából következik, hogy (1.12) baloldalán álló függvény eltűnik a $0 \leqq t < -c$ intervallumon. Következésképp

$$t^{2g(0)-1}+t^{2g(0)-1}*\omega(t) = 0, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq t < -c.$$

Ez azonban lehetetlen, mivel konvolúció-típusú integrálegyenletnek nincsenek saját megoldásai. Ellentmondás.

Ezek után legyen $g(0)\leqq 0$. Ha először $g(0)=-\frac{m}{2}$, ahol m nemnegatív egész, akkor (1.4)-ben szereplő algebrai integrálok:

$$\int e^{-2cs}s^{m} = -e^{-2cs}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{m!\, s^{m-k+1}}{(m+1-k)!\,(2c)^k} \quad \text{(lásd [2])},$$

(1.13)

$$\int e^{-2cs}\omega s^{m} = -s^{m+1}e^{-2cs}\left\{(t+2c)^m\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t+2c)^{m+1}}\right\}.$$

(1.13) első integráljában egyszerűbb [2] egy eredményét alkalmazni, mint az integráltételt. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y_2 &= -e^{-cs}e^{h}\left[s^{\frac{m}{2}+1}\left\{(t+2c)^m\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t+2c)^{m+1}}\right\}+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{m!\, s^{\frac{m}{2}-k+1}}{(m+1-k)!\,(2c)^k}\right] = \\ &= -e^{-cs}e^{h}s^{\frac{m}{2}+1}\left\{(t+2c)^m\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t+2c)^{m+1}}+\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}\frac{t^{k-1}}{(2c)^k}\right\}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Tegyük fel, hogy az (1.14) operátor függvényt állít elő. Ekkor

$$-y_2 e^{cs}e^{-h}s^{-\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \left\{(t+2c)^m\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t+2c)^{m+1}}+\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}\frac{t^{k-1}}{(2c)^k}\right\}.$$

Az egyenlőség baloldalán álló függvény az eltolás miatt eltűnik a $0\leqq t<-c$ szakaszon. Jobboldalán viszont olyan függvény áll, mely az origó környezetében folytonos

és tart $\frac{1}{2c}$-hez, ha $t \to +0$. Ellentmondásra jutottunk, így (1.14) nem lehet függvény.

Ha most $g(0)<0$, $g(0) \neq -\frac{m}{2}$, akkor az algebrai integrálok felírásához célszerű a $g(0)$ számot a $g(0)=-\frac{n}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$, $0<\varepsilon<1$, $n=1, 2, 3, \ldots$, alakban felírni. A megfelelő algebrai integrálok:

$$\int e^{-2cs} s^{n-\varepsilon} = \int e^{-2cs} s^n \left\{\frac{t^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)}\right\} = -\frac{s^{n+1} e^{-2cs}}{\Gamma(\varepsilon)} \left\{(t+2c)^n \int \frac{t^{\varepsilon-1}\, dt}{(t+2c)^{n+1}}\right\},$$

(1.15)

$$\int e^{-2cs} s^{n-\varepsilon} \omega = \int e^{-2cs} s^n \left\{\frac{t^{\varepsilon-1} * \omega(t)}{\Gamma(\varepsilon)}\right\} = -\frac{s^{n+1} e^{-2cs}}{\Gamma(\varepsilon)} \left\{(t+2c)^n \int \frac{[\omega(t) * t^{\varepsilon-1}]\, dt}{(t+2c)^{n+1}}\right\}.$$

Ily módon

$$y_2 = -\frac{e^{-cs} e^{hs^{\frac{n+\varepsilon}{2}+1}}}{\Gamma(\varepsilon)} \left\{(t+2c)^n \int \frac{[t^{\varepsilon-1} + t^{\varepsilon-1} * \omega(t)]}{(t+2c)^{n+1}}\, dt\right\}. \tag{1.16}$$

Annak belátása, hogy (1.16) sem állíthat elő függvényt, a $g(0)>0$ esetben ismertetett gondolatmenettel történik.

Érvényes tehát az alábbi

1. Tétel

Tekintsük az (1)-hez tartozó homogén egyenletet és legyen $f=g+c$, ahol c tetszőleges szám és g tetszőleges olyan integrálható függvény, melyre teljesül, hogy

$$\lim_{t \to +0} g(t) = g(0) \tag{1.20}$$

létezik és véges, és $\frac{g(t)-g(0)}{t}$ is integrálható, akkor (1) differenciálegyenletnek két lineárisan független megoldása van M-ben, melyek végesrendű disztribúciókkal identifikálhatók. A lokálisan integrálható nemtriviális függvénymegoldások egzisztenciájára vonatkozóan az alábbi táblázat érvényes:

	$c<0$	$c=0$	$c>0$
$g(0)<0$	y_1	y_1	—
$g(0)=0$	—	—	—
$0<g(0)\leqq 1$	—	—	y_2
$g(0)>1$	—	y_2	y_2

2. *Az inhomogén egyenlet vizsgálata*

Tekintsük az

$$y''-(f^2+f')y = z \tag{2.1}$$

inhomogén algebrai differenciálegyenletet. Az állandók variálásának módszerével formálisan megkaphatjuk ennek egy partikuláris megoldását az

$$y_p = y_2 \int \frac{y_1 z}{w} - y_1 \int \frac{y_2 z}{w} \tag{2.2}$$

alakban, ahol w jelöli a Wronski determinánst. Ha a (2.2)-ben szereplő algebrai integrálok léteznek M-ben, akkor (2.2) nem csupán formális, hanem tényleges megoldása (2.1)-nek.

A Wronski determinánst kiszámítva kapjuk, hogy

$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{\int f}\left(e^{\int f} \int e^{-2\int f}\right)' - \left(e^{\int f}\right)' e^{\int f} \int e^{-2\int f} =$$

$$= f e^{2\int f} \int e^{-2\int f} + 1 - f e^{2\int f} \int e^{-2\int f} = 1$$

és

$$y_p = y_2 \int y_1 z - y_1 \int y_2 z. \tag{2.3}$$

Mivel feltettük, hogy a z operátor végesrendű disztribúcióval identifikálható, és az előző pontban megmutattuk azt, hogy az y_1, y_2 operátorok is ilyenek, az algebrai integráltételből és abból, hogy a végesrendű disztribúcióval identifikálható operátorok az M egy részgyűrűjét képezik, azonnal következik, hogy (2.3) végesrendű disztribúcióval identifikálható operátort állít elő, mely (2.1)-nek egy tényleges partikuláris megoldása.

y_1 és y_2 explicit kifejezéseit (2.3)-ba helyettesítve, parciális algebrai integrálással adódik, hogy

$$y_p = e^{\int f} \int \left(e^{-2\int f} \int z e^{\int f}\right), \tag{2.4}$$

és (1.3) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$y_p = e^{cs} e^h s^{g(0)} \int \left(e^{-2cs} e^{-2h} s^{-2g(0)} \int e^{cs} e^h s^{g(0)} z\right). \tag{2.5}$$

Az algebrai integráltétellel a kapott kifejezés diszkutálható. Megjegyezzük, hogy (2.5) operátor általában nem állít elő függvényt, még akkor sem, ha a z operátor függvény. Azonban a $c=0$ esetben könnyen megadható egy z-re vonatkozó elégséges feltétel, mely biztosítja, hogy (2.5) függvény legyen.

Érvényes az alábbi

2. Tétel. *Legyen $c=0$, $z(t)$ olyan lokálisan integrálható függvény, melyre $z(t)/t^2$ is lokálisan integrálható. Akkor (2.5) lokálisan integrálható függvényt állít elő, mely az alábbi alakban írható:*

$$y_p = e^h \left\{ -g(0) \frac{\mathscr{H}(t)}{t^2} + g(0)(g(0)-1) t^{-g(0)-1} \int \frac{\mathscr{H}(t)\,dt}{t^{2-g(0)}} + \frac{1}{t} \frac{d\mathscr{H}(t)}{dt} \right\}, \tag{2.6}$$

ahol

$$\mathscr{H} = e^{-2h} \left\{ t^{g(0)} \int \frac{\Omega(t)\,dt}{t^{g(0)+1}} \right\},$$

és

$$\Omega = e^h z.$$

A tétel bizonyítását ebben a dolgozatban mellőzzük, mert az az [1]-ben szereplő 3. tétel utolsó állításának bizonyításához teljesen hasonlóan történhet (lásd [1] 349).

IRODALOM

[1] FÉNYES TAMÁS ÉS KOSIK PÁL, „Az operátortest néhány speciális másodrendű differenciál egyenletéről" *Matematikai Lapok*. 27. évf. 3-4. sz. (337—354).
[2] FÉNYES T.—KOSIK P., „Über das algebraische Integral der Mikusinskischen Operatoren" *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézet Közl.* 9 (1964), (21—34).
[3] GESZTELYI, E.: „Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynom-Koeffizienten" *Publ. Math. Debrecen* 10 (1963), 215—243.

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОПЕРАТОРНОГО ПОЛЯ

Т. ФЕНЕШ—П. КОШИК

ON A SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION OF THE OPERATOR FIELD

T. FÉNYES and P. KOSIK

A JORDAN-MÉRTÉK TÁVOLSÁGTARTÓ LEKÉPEZÉSSEL SZEMBENI INVARIANCIÁJÁNAK EGY ÚJ BIZONYÍTÁSA

MAJOR IMRE

Célunk, hogy a következő ismert tételre adjunk egyszerű bizonyítást:

1. Tétel. Ha φ: $R^n \to R^n$ izometria (vagyis távolságtartó bijekció) és $A \subseteq R^n$ Jordan-mérhető halmaz, akkor $\varphi(A)$ is Jordan-mérhető, és $V(\varphi(A)) = V(A)$, ahol V az R^n-beli Jordan-mértéket jelöli.

Megjegyzés: Az R^n-beli (zárt) T tégla térfogatát $t(T)$ jelöli. A „páronkint közös belső pont nélküli" kifejezést p. k. b. n. rövidíti.

Legyen most $A \subseteq R^n$ korlátos, és

$$I(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{k} t(T_i) \mid T_i \subseteq A, \quad T_k \quad R^n\text{-beli p. k. b. n. téglák}\right\},$$

$$O(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{k} t(T_i) \mid T_1, \ldots, T_k \quad R^n\text{-beli téglák és } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} T_i\right\}.$$

$A-t$ tudvalevőleg akkor mondjuk Jordan-mérhetőnek, ha $I(A)=O(A)$. Ekkor: $V(A)=I(A)=O(A)$.

Legyen továbbá

$$I_B(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{k} V(B_i) \mid B_i \subseteq A, \; B_1, \ldots, B_k \; R^n\text{-beli (zárt) p. k. b. n. gömbök}\right\},$$

$$O_B(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{k} V(B_i) \,\middle|\, B_1, \ldots, B_k \; R^n\text{-beli (zárt) gömbök}, \; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_i\right\}.$$

A régebbi bizonyítások az integráltranszformációs tétel speciális eseteiként adódtak, vagy azon alapultak, hogy a φ izometria forgatás, eltolás és (esetleg) tükrözés szorzatára bontható. Ez utóbbi esetben pl. a forgatással bajok voltak, mert az R^n-beli téglák élei a „koordinátatengelyekkel párhuzamosak", és ezt a forgatás elrontotta.

A mi bizonyításunk azon alapszik, hogy megmutatjuk:

2. Tétel. Minden $A \subseteq R^n$ korlátos halmazra $I_B(A)=I(A)$ és $O_B(A)=O(A)$.

Ebből következik, hogy

$A \subseteq R^n$ Jordan mérhető $\Leftrightarrow I_B(A)=O_B(A)$, továbbá ekkor: $V(A)=I_B(A)=O_B(A)$.

A 2. tételből az 1. tétel triviálisan következik, hiszen a φ izometria az A-ba írt p. k. b. n. gömbrendszert a $\varphi(A)$-ba írt p. k. b. n. gömbrendszerbe viszi (és viszont),

továbbá a megfelelő gömbök azonos sugarúak. Hasonló mondható a lefedő gömbrendszerekről. Márpedig azonos sugarú R^n-beli gömbök azonos térfogatúak, mert ezek eltolással is egymásba vihetők, az eltolás pedig egy R^n-beli T téglának olyan T' téglát feleltet meg, amelyre $t(T)=t(T')$.

Ugyanez a meggondolás azt is mutatja, hogy $I(\varphi(A))=I(A)$, $O(\varphi(A)=O(A)$ minden korlátos $A\subseteq R^n$ halmazra.

A 2. tétel bizonyítása során a Jordan-mértékre vonatkozó következő tételeket használjuk:

1. Állítás. Minden $G\subseteq R^n$ gömb Jordan-mérhető.

2. Állítás. Ha $A_1, \ldots, A_k$ Jordan-mérhető és $\operatorname{int} A_i \cap \operatorname{int} A_j=\emptyset$ $(i\neq j)$, akkor $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ is Jordan-mérhető, és

$$V\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} V(A_i).$$

3. Állítás. Ha A és B Jordan-mérhető, akkor $A\setminus B$ is az, és $B\subseteq A$ esetén $V(A\setminus B)=V(A)-V(B)$,

4. Állítás. $I(A)\leqq O(A)$ minden korlátos A halmazra.

1. Lemma. Az r sugarú zárt gömbben elfér $\frac{1}{n^n}(2r)^n$ térfogatú kocka.

(Emlékeztetünk arra, hogy n a tér dimenziószáma)

Bizonyítás. Egy a élű kocka bármely pontjának a középponttól mért távolsága nem nagyobb, mint $n\cdot\frac{a}{2}$. Ha $n\cdot\frac{a}{2}=r$, akkor a kocka térfogata $\left(\frac{2r}{n}\right)^n$.

2. Lemma. Bármely R^n-beli T téglában el lehet helyezni p. k. b. n. gömböket úgy, hogy össztérfogatuk legalább $\frac{t(T)}{(2n)^n}$.

Bizonyítás: Jelölje T legkisebb élének hosszát $2r$. Mérjük fel ezt T minden élére ahányszor csak lehet. Ha az i-edik élre k-szer lehet, akkor

$$t(T) \leqq (k_1+1)\cdot\ldots\cdot(k_n+1)\cdot(2r)^n \leqq 2^n\cdot k_1\ldots k_n\cdot(2r)^n.$$

Van $k_1\cdot\ldots\cdot k_n$ számú $2r$ élű p. k. b. n. kockánk T-ben. Helyezzünk el ezekben r sugarú gömböket. Ekkor ezek össztérfogata legalább $k_1\cdot\ldots\cdot k_n\cdot\frac{(2r)^n}{n^n}$, vagyis legalább $\frac{t(T)}{(2n)^n}$.

3. Lemma. Bármely R^n-beli T téglához léteznek olyan $B_1, \ldots, B_m$ gömbök, hogy $\sum_{i=1}^{m} V(B_i)\leqq(2n)^n\, t(T)$ és $T\subseteq\bigcup_{i=1}^{m} B_i$.

Bizonyítás: Megint felmérjük a legkisebb oldalt mindegyik élre, csak most eggyel többször, mint lehet (megint k_i-szer lehet); $2r$ ismét a legrövidebb él hossza. Ekkor $k_1\cdot\ldots\cdot k_n\cdot(2r)^n\leqq t(T)$.

Egy ilyen $2r$ élű kocka köré lehet írni $n \cdot r$ sugarú gömböt, és ezt bele lehet foglalni egy $2 \cdot n \cdot r$ élű kockába. T-t tehát le lehet fedni $m=(k_1+1) \cdot \ldots \cdot (k_n+1)$ számú ilyen gömbbel. Ezek össztérfogata

$$\sum_{i=1}^{m} V(B_i) \leqq (k_1+1) \cdot \ldots \cdot (k_n+1) \cdot (n)^n (2r)^n \leqq 2^n \cdot (n)^n (2r)^n k_1 \cdot \ldots \cdot k_n \leqq (2n)^n t(T).$$

4. Lemma. Ha A korlátos, akkor

$$I_B(A) \leqq I(A) \leqq O(A) \leqq O_B(A).$$

Bizonyítás: $\varepsilon>0$ esetén $I_B(A)-\varepsilon$-hoz $B_1, \ldots, B_k$ legyen beírt p. k. b. n. gömbrendszer, amelyre $I_B(A)-\varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{k} V(B_i)$.

A B_i-k Jordan-mérhetők. Mindegyikhez választva $\frac{\varepsilon}{k}$-nál jobban közelítő p. k. b. n. téglarendszert, látható, hogy $I_B(A)-2\varepsilon \leqq I(A)$, vagyis $I_B(A) \leqq I(A)$. $O(A) \leqq O_B(A)$ teljesen hasonlóan látható.

3. Tétel. Minden $T \subseteqq R^n$ téglára $I_B(T)=I(T)$, $O_B(T)=O(T)$ (ahol természetesen $I(T)=O(T)=V(T)$).

Bizonyítás: Tegyük fel először indirekten, hogy $V(T)-I_B(T)=\eta>0$! $\frac{\eta}{(2n)^n}=$ $=\varepsilon$-nal írjunk T-be $B_1, \ldots, B_k$ p. k. b. n. gömböket úgy, hogy $I_B(T)-\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{i=1}^{k} V(B_i)$ legyen. Ekkor $T_0=T \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ Jordan-mérhető és térfogata legalább η.

Írjunk T_0-ba p. k. b. n. téglarendszert legalább $\frac{3}{4}\eta$ össztérfogattal. Ebben a 2. lemma miatt elhelyezhető p. k. b. n. gömbrendszer legalább $\frac{\frac{3}{4}\eta}{(2n)^n}=\frac{3}{4}\varepsilon$ össztérfogattal. Jelölje ezt $B_1', \ldots, B_m'$. Ekkor a vesszős és vesszőtlen gömbök T-be írt p. k. b. n. gömbrendszert adnak legalább $\frac{3}{4}\varepsilon+I_B(T)-\frac{\varepsilon}{2}=I_B(T)+\frac{\varepsilon}{4}$ össztérfogattal: ellentmondás.

Az állítás másik felének bizonyítása:

Az imént láttuk be, hogy $V(T)=I_B(T)$. Legyen $\varepsilon>0$, és $B_1, \ldots, B_k$ p. k. b. n. gömbrendszer, $B_i \subseteqq T$, $V(T)-\frac{\varepsilon}{2(2n)^n}<\sum_{i=1}^{k} V(B_i)$. Így $T_0=T \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ Jordan-mérhető és $V(T_0)<\frac{\varepsilon}{2(2n)^n}$. T_0-t be lehet fedni legfeljebb $\frac{\varepsilon}{(2n)^n}$ össztérfogatú téglákkal, ezeket pedig a 3. lemma értelmében $(2n)^n \cdot \frac{\varepsilon}{(2n)^n}=\varepsilon$-nál kisebb össztérfogatú gömbökkel. Így T befedhető legfeljebb $V(T)+\varepsilon$ össztérfogatú gömbökkel: $V_B(T) \leqq V(T)$.

A 2. tétel bizonyítása. Legyen $A \subseteq R^n$ korlátos. Azt láttuk, hogy $I_B(A) \leqq I(A)$, és hogy $O(A) \leqq O_B(A)$. $I(A)-\varepsilon$-hoz legyenek $T_1, \ldots, T_k$ A-ba írt p. k. b. n. téglák úgy, hogy $I(A)-\varepsilon < \sum_{i=1}^{k} V(T_i)$. $\frac{\varepsilon}{k}$-hoz írjunk mindegyikbe legalább $V(T_i)-\frac{\varepsilon}{k}$ össztérfogatú p. k. b. n. gömböket! Ekkor A-ba írtunk legalább $I(A)-2\varepsilon$ össztérfogatú gömböket. Ezért $I(A) \leqq I_B(A)$. $O_B(A) \leqq O(A)$ teljesen analóg módon látható.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИНВАРИАНТНОСТИ МЕРЫ ЖОРДАНА ОТНОСИТЕЛЬНО ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

И. МАЙОР

NEW PROOF OF THE INVARIANCE OF THE JORDAN MEASUR UNTER ISOMETRIC TRANSFORMATIONS

I. MAJOR

FÜGGVÉNYAPPROXIMÁCIÓ AZ EGÉSZ SZÁMEGYENESEN, SÚLYOZOTT HATVÁNYSOROKKAL

GRÓF JÓZSEF

I. Bevezetés

Szász Ottó a Bernstein-polinomok (1. pl. [1], [4]) végtelen intervallumra való általánosításának nevezte az általa [5] és mások által is bevezetett

$$(1) \qquad S_n(f;\, x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \quad (n > 0)$$

alakú súlyozott hatványsorokat, ahol f a $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett valós értékű függvény. Szász Ottó [5]-ben többek között bebizonyította, hogy

(A) ha f korlátos minden véges intervallumon és folytonos x_0-nál, továbbá, ha $f(x)=0(x^k)$ $(x\to\infty)$, ahol k valamilyen pozitív szám, akkor $S_n(f; x_0)\to f(x_0)$ $(n\to\infty)$;

$$(B) \qquad \text{ha} \quad |f(x_2)-f(x_1)| < A\frac{|x_2-x_1|^{\varrho}}{(x_2+x_1)^{\varrho/2}} \quad (0 < x_1 < x_2 < \infty),$$

ahol A, ϱ konstansok, $0<\varrho\leqq 1$, akkor

$$(2) \qquad |S_n(f;\, x)-f(x)| \leqq \frac{A}{\sqrt{n^{\varrho}}} \quad (0 < x < \infty).$$

Említett dolgozatában Szász O. felveti az egész számegyenesen való approximáció kérdését, ezzel összefüggésben rámutat arra, hogy S_n-ből könnyen alakíthatunk olyan operátort, amellyel a számegyenes negatív oldalán approximálhatunk: mindössze n helyére $-n$-et kell írnunk (1) jobboldalán. Megmarad azonban a probléma: Ha az egész számegyenesen (vagy bármely, az origót belsejében tartalmazó intervallumon) kívánunk valamely függvényt megközelíteni, akkor ehhez a fenti operátorok alkalmatlanok. A kérdést egy új operátor (H_n-nel fogjuk jelölni) bevezetésével oldjuk meg.

Legyen n és x valós szám, $n>0$, f pedig legyen a valós számok halmazán értelmezett valós értékű függvény. $H_n(f; x)$ definíciója a következő:

$$(3) \qquad H_n(f;\, x) = \frac{1}{2 \operatorname{ch} nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{k}{n}\right)+(-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right)\right] \frac{(nx)^k}{k!}$$

(feltéve, hogy a sor konvergens).

Az alábbiakban a $H_n(f, x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$ konvergencia kérdéseit vizsgáljuk. Megjegyezzük, hogy a vizsgálatokban nélkülöznünk kell a pozitív lineáris operátorok approximációs tulajdonságaival kapcsolatos tételeket, hiszen H_n nem pozitív operátor. Felhasználunk azonban néhány, S_n-re vonatkozó eredményt.

Itt említjük meg, hogy a fenti (*A*) állításról 1968-ban sikerült belátni: az $f(x)=0(x^k)$ feltétel $f(x)=0(e^{kx})$-re enyhíthető [2]. 1976-ban Hermann Tamás tovább enyhítette e feltételt: bebizonyította ([3], 397. o), hogy

(C) ha $\alpha>0$, $A>0$, akkor van olyan M és c pozitív szám, hogy elég nagy n-re

$$e^{-nx}\sum_{k\leqq 2An}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha\frac{k}{n}}\frac{(nx)^k}{k!}<Me^{-cn}\quad(0\leqq x\leqq A).$$

Ebből az említett (*A*)-beli feltételnek $f(x)=0(x^{\alpha x})$-re való enyhíthetősége egyszerűen következik (ld. II. fejezet, 2—4. segédtétel).

Itt mondok köszönetet Balázs Jánosnak, aki sok hasznos tanáccsal segítette munkámat.

II. Pontonkénti konvergencia az egész számegyenesen

1. Tétel. Legyen f a valós számok halmazán értelmezett valós értékű függvény, amely minden korlátos intervallumon korlátos. Tegyük fel, hogy $f(t)=0(|t|^{\alpha|t|})$ $(t\to\pm\infty)$, ahol α valamilyen pozitív szám.

Ekkor bármely x valós számra igaz, hogy ha f az x és $-x$ helyen folytonos, akkor

$$\lim_{n\to\infty}H_n(f;\,x)=f(x). \tag{4}$$

Megjegyzés. Kissé meglepőnek tűnhet, hogy az x helyen történő approximáció kedvéért a $-x$ helyen való folytonosságot is feltételezzük. Ha azonban e kikötést elhagynánk a tételből, a (4) állítás nem feltétlenül teljesülne. Ellenpéldára a III. fejezetben kerül sor.

A tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány segédtételre. Ezekben és a továbbiakban is használni fogjuk a következő jelölést:

$$p_{n,k}(x)=e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}.$$

1. segédtétel. Ha x és n valós szám, $x\geqq 0$, $n>0$, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 p_{n,k}(x)=\frac{x}{n}, \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right| p_{n,k}(x)\leqq\sqrt{\frac{x}{n}}. \tag{6}$$

Bizonyítás. (4) baloldalán a kijelölt négyzetreemelést elvégezve az egyenlőség fennállása egyszerűen látható. (6)-ot (5)-ből a Bunyakovszkij—Schwarz egyenlőtlenség felhasználásával kaphatjuk.

2. segédtétel. Legyen x, n és λ valós szám, $x\geqq 0$, $n>0$, $\lambda>0$. Ekkor

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqq\lambda} p_{n,k}(x)\leqq\frac{x}{n\lambda^2}.$$

Bizonyítás.

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqq\lambda}\lambda^2 p_{n,k}(x)\leqq\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqq\lambda}\left|\frac{k}{n}-x\right|^2 p_{n,k}(x),$$

(5) szerint tehát

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqq\lambda}\lambda^2 p_{n,k}(x)\leqq\frac{x}{n},$$

amiből az állítás nyilvánvaló.

3. segédtétel. Legyen $x\geqq 0$, $\alpha>0$, $r>0$, legyen

$$h(t)=\begin{cases}t^{\alpha t}, & \text{ha} \quad t>0,\\ 1, & \text{ha} \quad t=0.\end{cases} \tag{7}$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqq r} h\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x)=0.$$

Bizonyítás. Legyen $A>x+r$. Ekkor

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqq r} h\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x)=\sum_{\substack{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqq r,\\ \frac{k}{n}\leqq 2A}} h\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x)+\sum_{\frac{k}{n}>2A} h\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x).$$

A jobboldal első tagjának nullához tartása h-nak [0, 2A]-beli korlátossága miatt a 2. segédtételből következik, a második tagé a bevezetés (C) állításából látható.

4. segédtétel. Ha φ korlátos a $[0,\infty)$ intervallum bármely korlátos részintervallumán és folytonos az $x\geqq 0$ helyen, továbbá ha $\varphi(t)=0(t^{\alpha t})$ $(t\to\infty)$, ahol α valamilyen pozitív szám, akkor $S_n(\varphi, x)\to\varphi(x)$ $(n\to\infty)$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon>0$, $r>0$ és

$$\varphi^*(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{ha} \quad 0\leqq t\leqq x+r,\\ 0, & \text{ha} \quad t>x+r.\end{cases}$$

Ekkor

$$S_n(\varphi;\, x)-\varphi(x)=S_n(\varphi^*;\, x)+\sum_{\frac{k}{n}>x+r}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x)-\varphi^*(x).$$

Mivel van olyan K pozitív szám, amelyre igaz, hogy $|\varphi(t)|\leqq Kh(t)$ $(0\leqq t<\infty)$ (h a (7)-ben definiált függvény), ezért írhatjuk:

$$|S_n(\varphi;\, x)-\varphi(x)|\leqq|S_n(\varphi^*;\, x)-\varphi^*(x)|+K\sum_{\frac{k}{n}>x+r} h\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x).$$

A jobboldal első tagja a bevezetés (A) állítása szerint, második tagja pedig a 3. segédtétel szerint zérushoz tart, midőn $n\to\infty$.

5. segédtétel. Legyen n, x valós szám, $n>0$. Definiáljuk a g függvényt a következő egyenlőséggel: $g(t)=f(-t)$ $(-\infty<t<\infty)$. Ekkor

$$H_n(g;\,-x)=H_n(f;\,x).$$

Bizonyítás.

$$H_n(g,\,-x)=\frac{1}{2\operatorname{ch}(n(-x))}\sum_{k=0}^{\infty}\left[g\left(\frac{k}{n}\right)+(-1)^k g\left(-\frac{k}{n}\right)\right]\frac{(n(-x))}{k!}=$$

$$=\frac{1}{2\operatorname{ch} nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(-\frac{k}{n}\right)(-1)^k+f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\frac{(nx)^k}{k!}=H_n(f;\,x).$$

Az első tétel bizonyítása.

1° Legyen $x\geqq 0$. Felhasználva azt, hogy $H_n(1;\,x)=1$, íthatjuk:

$$H_n(f;\,x)-f(x)=\frac{1}{2\operatorname{ch} nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)+(-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right)\right]\frac{(nx)^k}{k!}-$$

$$-\frac{f(x)}{2\operatorname{ch} nx}\sum_{k=0}^{\infty}[1+(-1)^k]\frac{(nx)^k}{k!}=\frac{1}{2\operatorname{ch} nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]\frac{(nx)^k}{k!}+$$

$$+\frac{1}{2\operatorname{ch} nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(-\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]\frac{(-nx)^k}{k!}\overset{\text{def}}{=}T+U.$$

$$T=\frac{e^{nx}}{2\operatorname{ch} nx}[S_n(f;\,x)-f(x)]\to 0\quad(n\to\infty),$$

a 4. segédtétel szerint. U-t az $f(x)=f(-x)+[f(x)-f(-x)]$ egyenlőség felhasználásával két részre bontjuk:

$$U=\frac{1}{2\operatorname{ch} nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(-\frac{k}{n}\right)-f(-x)\right]\frac{(-nx)^k}{k!}+$$

$$+\frac{1}{2\operatorname{ch} nx}\sum_{k=0}^{\infty}[f(-x)-f(x)]\frac{(-nx)^k}{k!}\overset{\text{def}}{=}V+Z.$$

Mivel $Z=[f(-x)-f(x)]\dfrac{e^{-nx}}{2\operatorname{ch} nx}$, nyilvánvaló, hogy $x=0$ esetén $Z=0$, $x>0$ esetén $Z\to 0$ $(n\to\infty)$. Márcsak V-vel kell foglalkoznunk.

Legyen $\varepsilon>0$. Mivel f folytonos $-x$-nél, ezért van olyan $\delta>0$, hogy ha $|y-(-x)|<\delta$, akkor $|f(y)-f(-x)|<\varepsilon$. Egy ilyen δ-t rögzítünk.

$$|V|\leqq\frac{1}{2\operatorname{ch} nx}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left|f\left(-\frac{k}{n}\right)-f(-x)\right|\frac{(nx)^k}{k!}+$$

$$+\frac{1}{2\operatorname{ch} nx}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqq\delta}\left|f\left(-\frac{k}{n}\right)-f(-x)\right|\frac{(nx)^k}{k!}\overset{\text{def}}{=}V_1+V_2.$$

$V_1<\varepsilon$, hiszen a $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|<\delta$ egyenlőtlenségből következik az $\left|-\dfrac{k}{n}-(-x)\right|<\delta$

egyenlőtlenség teljesülése. V_2 zérushoz tartása f-nek véges intervallumokon való korlátossága és az $f(t)=0(|t|^{\alpha|t|})$ $(t\to-\infty)$ feltevésből a 3. segédtétel alapján következik.

2° Most legyen $x<0$. A $g(t)=f(-t)$ $(-\infty<t<\infty)$ egyenlőséggel értelmezett g függvényre teljesülnek a tétel feltételei és $-x>0$, ezért az 1° alatt bizonyítottak szerint $H_n(g;\ -x)\to g(-x)$ $(n\to\infty)$. Mivel pedig $g(-x)=f(x)$, továbbá az 5. segédtétel szerint $H_n(g;\ -x)=H_n(f;\ x)$, így azt kaptuk, hogy $H_n(f;\ x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$.

III. Egy ellenpélda

Ellenpéldánk az 1. tétel utáni megjegyzésben foglaltakra vonatkozik.

Jelöljük A-val a negatív racionális számok azon részhalmazát, amelynek bármely t elemére igaz, hogy ha $t=-\frac{p}{q}$ (ahol p és q természetes szám, p, q relatív prímek), akkor p páros. Ezek után az f függvényt a következőképpen értelmezzük:

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{ha } t\in A,\\ 0, & \text{ha } t \text{ valós, } t\notin A.\end{cases}$$

Legyenek a prímszámok nagyságszerinti (növekvő) sorrendben: $q_1, q_2, q_3, \ldots$. Legyen v természetes szám, $v>1$, azaz $q_v>2$, és legyen $x>0$. Ekkor

$$H_{q_v}(f;\ x)=\frac{1}{2\operatorname{ch} q_v x}\sum_{k=0}^{\infty}\left[0+(-1)^k f\left(-\frac{k}{q_v}\right)\right]\frac{(q_v x)^k}{k!}=$$

$$=\frac{1}{2\operatorname{ch} q_v x}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(-\frac{k}{q_v}\right)\frac{(-q_v x)^k}{k!}.$$

Ha k páratlan, akkor $f\left(-\frac{k}{q_v}\right)=0$. Ha k és q_v relatív prímek, akkor ez nyilvánvaló. Ha nem azok, akkor $k=mq_v$ (ahol m természetes szám), hiszen q_v prímszám. Az is világos, hogy m páratlan szám. Tehát van olyan r természetes szám, hogy $m=2r+1$, így $\frac{k}{q_v}=\frac{2r+1}{1}$, tehát $f\left(-\frac{k}{q_v}\right)=0$. Hasonlóan látható, hogy ha k páros, akkor $f\left(-\frac{k}{q_v}\right)=1$. Ezek szerint

$$H_{q_v}(f;\ x)=\frac{1}{2\operatorname{ch} q_v x}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-q_v x)^{2r}}{(2r)!}=\frac{1}{2}\neq f(x)=0.$$

Ebből már nyilvánvaló, hogy $x>0$ esetén $H_n(f;\ x)$ nem tart $f(x)$-hez (midőn $n\to\infty$), pedig f folytonos x-nél.

IV. Egyenletes konvergencia a $[-a, a]$ alakú korlátos és zárt intervallumokon

2. Tétel. Legyen f a valós számok halmazán értelmezett valós értékű függvény, amely minden korlátos intervallumon korlátos. Tegyük fel, hogy $f(t)=0(|t|^{\alpha|t|})$ $(t\to\pm\infty)$, ahol α valamilyen pozitív szám. Ekkor bármely $a>0$ számra igaz, hogy ha $b>a$ és f folytonos a $[-b, b]$ intervallumon, akkor elég nagy n-re

$$|H_n(f; x)-f(x)| < K\omega_{[-b,b]}\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (-a \leqq x \leqq a), \tag{8}$$

ahol K csak f-től, a-tól és b-től függő, n-től független állandó, $\omega_{[-b,b]}$ pedig a $[-b, b]$ intervallumra vonatkozó folytonossági modulus:

$$\omega_{[-b,b]}(f; \delta) = \sup\{|f(t_1)-f(t_2)|: t_1, t_2 \in [-b, b], |t_1-t_2| \leqq \delta\}. \tag{9}$$

Bizonyítás.

1° Legyen $0 \leqq x \leqq a$, $g(t)=f(-t)$ $(-\infty < t < \infty)$.

Az 1. tétel bizonyításában követett módon, most is írhatjuk:

$$H_n(f; x)-f(x) = T+V+Z,$$

ahol

$$T = \frac{1}{2\operatorname{ch} nx} \sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]\frac{(nx)^k}{k!},$$

$$V = \frac{1}{2\operatorname{ch} nx} \sum_{k=0}^{\infty}\left[g\left(\frac{k}{n}\right)-g(x)\right]\frac{(-nx)^k}{k!},$$

$$Z = \frac{e^{-nx}}{2\operatorname{ch} nx}[f(-x)-f(x)].$$

Nyilvánvaló, hogy $|T| \leqq T^*$ és $|V| \leqq V^*$, ha T^*, ill. V^* jelentése;

$$T^* = \sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| p_{n,k}(x), \quad V^* = \sum_{k=0}^{\infty}\left|g\left(\frac{k}{n}\right)-g(x)\right| p_{n,k}(x).$$

T^* becsléséhez írjuk fel:

$$T^* \leqq \sum_{\frac{k}{n}\leqq b}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| p_{n,k}(x) + \sum_{b<\frac{k}{n}\leqq 2b}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x) +$$

$$+ \sum_{\frac{k}{n}>2b}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x) + |f(x)| \sum_{\frac{k}{n}>b} p_{n,k}(x) \overset{\text{def}}{=} T_1^*+T_2^*+T_3^*+T_4^*.$$

$$T_1^* \leqq \sum_{\frac{k}{n}\leqq b} \omega_{[-b,b]}\left(f; \left|\frac{k}{n}-x\right|\right) p_{n,k}(x).$$

Felhasználjuk a folytonossági modulus ismert tulajdonságát, mely szerint

$$\omega_{[-b,b]}(f; \lambda\delta) \leqq (\lambda+1)\omega_{[-b,b]}(f; \delta) \quad (\lambda > 0). \tag{10}$$

Ezzel látható, hogy

$$T_1^* \leqq \sum_{\frac{k}{n} \leqq b} \left(\sqrt{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|+1\right) \omega_{[-b,b]}\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) p_{n,k}(x) \leqq$$

$$\leqq \omega_{[-b,b]}\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\sqrt{n} \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right| p_{n,k}(x)\right).$$

Az 1. segédtétel (6) sora és a $0 \leqq x \leqq a$ feltevés szerint tehát

$$T_1^* \leqq \omega_{[-b,b]}\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(1+\sqrt{a}).$$

T_2^* és T_4^* becslésekor kihasználjuk a 2. segédtételt:

$$T_4^*+T_2^* \leqq \left(|f(x)|+\sup_{b \leqq t \leqq 2b}|f(t)|\right) \sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|>b-a} p_{n,k}(x) \leqq$$

$$\leqq \frac{a}{n(b-a)^2} 2 \sup_{0 \leqq t \leqq 2b}|f(t)|.$$

T_3^* becsléséhez vegyük figyelembe az f-re vonatkozó feltevéseket és a bevezetés (C) állítását. Ezek szerint van olyan M és c pozitív szám, hogy

$$T_3^* \leqq Me^{-cn}.$$

V^* becslését T^*-éval analóg módon végezhetjük, s nyilvánvaló, hogy $\omega_{[-b,b]}(f; \delta)= =\omega_{[-b,b]}(g; \delta)$.

Már csak Z vizsgálata van hátra. Ismét felhasználjuk (10)-et:

$$|Z| \leqq e^{-2nx}\omega_{[-b,b]}(f; 2x) = e^{-2nx}(2x\sqrt{n}+1)\omega_{[-b,b]}\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Könnyen látható, hogy a $\varphi_n(x)=e^{-2nx}2x\sqrt{n}$ $(x>0)$ függvény maximuma $x= =\frac{1}{2n}$-nél van, vagyis $\varphi_n(x) \leqq \frac{1}{e\sqrt{n}}$, tehát $n \geqq 1$-re

$$|Z| \leqq 2\omega_{[-b,b]}\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Az eddigieket összefoglalva láthatjuk: van olyan $K_1>0$ szám, hogy elég nagy n-re

$$|H_n(f; x)-f(x)| \leqq K_1\omega_{[-b,b]}\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (0 \leqq x \leqq a). \tag{11}$$

2° Most legyen $-a \leqq x \leqq 0$. A g függvényre (ahol $g(t)=f(-t)$ teljesülnek a tétel feltételei és $0 \leqq -x \leqq a$, ezért a bizonyítás 1° része alapján van olyan $K_2>0$, hogy elég nagy n-re

$$|H_n(g; -x)-g(-x)| \leqq K_2\omega_{[-b,b]}\left(g; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (0 \leqq -x \leqq a).$$

Mivel $g(-x)=f(x)$ és $\omega_{[-b,b]}(g; \delta)=\omega_{[-b,b]}(f; \delta)$, továbbá az 5. segédtétel szerint $H_n(g; -x)=H_n(f; x)$, ezért írhatjuk:

$$|H_n(f; x)-f(x)| \leqq K_2\omega_{[-b,b]}\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (-a \leqq x \leqq 0), \tag{12}$$

ha n elég nagy. (11)-ből és (12)-ből a tétel állításához jutunk.

3. Tétel. Legyen f a valós számok halmazán értelmezett valós értékű függvény, n pedig pozitív szám.

Feltesszük, hogy létezik olyan A és ϱ szám, $A>0$, $0<\varrho\leqq 1$, hogy ha $-\infty<t_1<t_2\leqq 0$ vagy $0\leqq t_1<t_2<\infty$, akkor

$$|f(t_2)-f(t_1)|\leqq A\frac{|t_2-t_1|^{\varrho}}{|t_2+t_1|^{\varrho/2}}. \tag{13}$$

Ekkor igaz, hogy

$$|H_n(f;\,x)-f(x)|\leqq\frac{2A}{\sqrt{n^{\varrho}}}+\frac{A}{\sqrt{n}}\quad(-\infty<x<\infty). \tag{14}$$

Bizonyítás. $x=0$-ra az állítás nyilvánvaló.

1° Legyen $x>0$. A 2. tétel bizonyításában alkalmazott jelölésekkel írhatjuk:

$$|H_n(f;\,x)-f(x)|\leqq T^*+V^*+|Z|.$$

Most kihasználjuk, hogy a bevezetés (B) állításának bizonyításakor Szász O. a (2)-nél erősebb

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|p_{n,k}(x)\leqq\frac{A}{\sqrt{n^{\varrho}}}\quad(0<x<\infty)$$

egyenlőtlenséget bizonyítja ([5], 241. old.). Mivel g is kielégíti a (B) állítás feltételeit máris láthatjuk, hogy $T^*+V^*\leqq 2A/\sqrt{n^{\varrho}}$. Márcsak a $|Z|\leqq A/\sqrt{n}$ egyenlőtlenséget kell kell belátnunk. Ehhez írjuk fel, hogy

$$|f(x)-f(-x)|\leqq|f(x)-f(0)|+|f(0)-f(-x)|,$$

tehát a tétel feltételei szerint

$$|f(x)-f(-x)|\leqq\frac{2Ax^{\varrho}}{x^{\varrho/2}}=2A\sqrt{x^{\varrho}},$$

így $|Z|\leqq 2A\sqrt{x^{\varrho}}\,e^{-2nx}$. Megkeressük az $F_n(x)=\sqrt{x^{\varrho}}\,e^{-2nx}$ $(x>0)$ függvény maximumát. $F_n'(x)=\left(\frac{\varrho}{2}x^{-\varrho/2}-2nx^{\varrho/2}\right)e^{-2nx}$, ahonnan látszik, hogy F_n maximuma $x=\left(\frac{\varrho}{4n}\right)^{1/\varrho}$-nál van, tehát

$$F_n(x)\leqq F_n\left(\left(\frac{\varrho}{4n}\right)^{1/\varrho}\right)=\sqrt{\frac{\varrho}{4n}}\exp\left[-2n\left(\frac{\varrho}{4n}\right)^{1/\varrho}\right]\leqq\frac{1}{2\sqrt{n}},$$

ebből azonban már nyilvánvaló, hogy $|Z|\leqq\frac{A}{\sqrt{n}}$.

A bizonyítással $x\geqq 0$-ra készen vagyunk.

2° Most legyen $x<0$, $g(t)=f(-t)$ $(-\infty<t<\infty)$. g-re teljesülnek a tétel feltételei és $-x>0$, ezért a bizonyítás 1° része alapján

$$|H_n(g;\,-x)-g(-x)|\leqq\frac{2A}{\sqrt{n^{\varrho}}}+\frac{A}{\sqrt{n}}\quad(0<-x<\infty).$$

Mivel pedig $g(-x)=f(x)$, az 5. segédtétel szerint pedig $H_n(g;\,-x)=H_n(f;\,x)$, ezért írhatjuk, hogy

$$|H_n(f;\,x)-f(x)|\leqq\frac{2A}{\sqrt{n^{\varrho}}}+\frac{A}{\sqrt{n}}\quad(-\infty<x<0),$$

vagyis a bizonyítást befejeztük,

4. Tétel. Ha f folytonos $(-\infty, \infty)$-ben, továbbá létezik és véges az $L_1 = \lim_{x\to\infty} f(x)$ és az $L_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ határérték, akkor $H_n(f; x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$ az egész számegyenesen egyenletesen.

Bizonyítás.

1° Legyen $x\geqq 0$. A feltevések szerint van olyan $K>0$ szám, hogy $|f(x)|\leqq K(-\infty<x<\infty)$; továbbá minden $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $R>1$, hogy ha $x>R$, akkor $|f(x)-L_1|<\varepsilon$ és ha $x<-R$, akkor $|f(x)-L_2|<\varepsilon$. Legyen $\varepsilon>0$ és rögzítsünk egy ilyen K, ill. R számot.

A 2. tétel szerint elég nagy n-re

$$|H_n(f; x)-f(x)| < \varepsilon \quad (0 \leqq x \leqq 2R).$$

Most legyen $x>2R$. A 2. tétel bizonyításában bevezetett jelölésekkel élve most is írhatjuk:

$$|H_n(f; x)-f(x)| \leqq T^*+V^*+|Z|.$$

T^*-ot két részre bontjuk:

$$T^* = \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\frac{x}{2}} \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqq\frac{x}{2}} \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x) \overset{\text{def}}{=} T_a^*+T_b^*.$$

Ha $\left|\frac{k}{n}-x\right|<\frac{x}{2}$, akkor $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-L_1\right|<\varepsilon$, hiszen $x<2R$. Másrészt $x>2R$ miatt $|f(x)-L_1|<\varepsilon$, így $T_a^*<2\varepsilon$.

T_b^* becsléséhez kihasználjuk f korlátosságát majd a 2. segédtételt $\lambda=\frac{x}{2}$-vel, továbbá azt, hogy $x>1$:

$$T_b^* \leqq 2K\frac{x}{n\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{8K}{nx} < \frac{8K}{n},$$

tehát $T_b^*<\varepsilon$, ha n elég nagy.

T^*-hoz hasonló módon becsülhetjük meg V^*-ot is. Végül $x>1$ miatt nyilvánvaló, hogy van olyan n_0, hogy $n>n_0$-ra $|Z|<\varepsilon$.

Mindent összevetve azt kaptuk, hogy elég nagy n-re $|H_n(f; x)-f(x)|<7\varepsilon$ $(0\leqq x<\infty)$.

2° $x<0$-ra a bizonyítás a 3. tétel bizonyításának 2° részéhez hasonló módon végezhető.

IRODALOM

[1] Bernstein, S. N., Démonstration du théoreme de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités (Харьков, *Сообщ. матем. об.* 13 (2) (1912), 1—2.)

[2] Gróf J., A Szász O.-féle operátor approximációs tulajdonságairól (*MTA III. Oszt. Közl.* 20 (1971), 35—44.)

[3] Hermann, T., Approximtion of unbounded functions on unbounded interval (*Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 29 (3—4), (1977), 393—398.)

[4] Lorentz, G. G., *Bernstein polynomials*, Toronto, 1953.

[5] Szász, O., Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval (*Journal of Research of the Nat. Bur. of Standards* 45 (1950), 239—245.)

АППРОКСИМАЦИЯ НА ВСЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

ЙОЖЕФ ГРОФ

Операторы H_n (см. (3)), введенные в этой работе, обладают похожими свойствами в отношении аппроксимации, как операторы О. Саса S_n (см. (1)). С помощью операторов S_n приближение возможно не более на отрезке $[0, \infty)$, а с помощью H_n на всей действительной оси:

Теорема 1.
(✳) Пусть f — функция, заданная на отрезке $(-\infty, \infty)$, ограничена на всякой ограниченной отрезке. Предположим, что $f(t)=0(|t|^{\alpha|t|})$ $(t\to\pm\infty)$, где α — положительное число. Если функция f удовлетворяет условию (✳), то для всех действительных значений x будет справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} H_n(f; x)=f(x)$, если функция f непрерывна в точках x и $-x$.

Теорема 2.
Предположим, что функция f удовлетворяет условию (✳). Если $0<a<b$ и функция f непрерывна на отрезке $[-b, b]$, то имеет место оценка (8), в которой постоянная K не зависит от n.

Теорема 3.
Предположим, что неравенство (13) будет верны, если имеет место $-\infty<t_1<t_2<0$ или $0<t_1<t_2<\infty$. Тогда при $n>0$ следует неравенство (14).

Теорема 4.
Если функция f непрерывна на отрезке $(-\infty, \infty)$ и обладает конечными пределами $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, то последовательность $H_n(f; x)$ равномерно сходится на всей действительной оси к $f(x)$.

APPROXIMATION AUF DER GANZEN REELLEN ACHSE DURCH POTENZREIHEN MIT BELEGUNGSFUNKTION

J. GRÓF

Die Operatoren H_n (s. (3)), die in dieser Arbeit eingeführt wurden, besitzen ähnliche Approximationseigenschaften, wie die Operatoren S_n (s.(1)) von O. Szász. Mit Hilfe von S_n kann man höchstens im Intervall $[0, \infty)$ approximieren, mit H_n aber auf der ganzen reellen Achse:

Satz 1.
(✳) Es sei f eine im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte reelwertige Funktion, die in allen beschränkten Intervallen beschränkt ist. Es wird vorausgesetzt: $f(t)=0(|t|^{\alpha|t|})$ $(t\to\pm\infty)$, wobei α eine positive Zahl ist.
Wenn f die Voraussetzung (✳) erfüllt, dann gilt für alle reelle x: Ist f im Punkt x und im Punkt $-x$ stetig, so gilt: $H_n(f; x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$.

Satz 2.
Genüge f der Voraussetzung (✳), ferner sei $0<a<b$ und f im Intervall $[-b, b]$ stetig. Dann gilt die Abschätzung (8), wobei K eine von n unabhängige Konstante ist.

Satz 3.
Es soll die Ungleichung (13) erfüllt sein falls $-\infty<t_1<t_2<0$ oder $0<t_1<t_2<\infty$ ist. (Hierbei sind A, ϱ reelle Zahlen, $A>0$, $0<\varrho\leqq 1$.) Dann gilt für $n>0$ die Ungleichung (14).

Satz 4.
Besitzt die im Intervall $(-\infty, \infty)$ stetige Funktion f endliche Grezwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, so konvergiert $H_n(f; x)$ auf der ganzen reellen Achse gleichmäßig gegen $f(x)$.

A KATASZTRÓFAELMÉLET ALAPJAI

FEHÉR ERZSÉBET

1. Bevezetés

Csaknem minden folyamatot elég sokáig megfigyelve hirtelen változásokat, diszkontinuus jelenségeket vehetünk észre. A változások struktúrájának és a változás, a katasztrófa utáni állapot előrejelzésének sokáig nem volt meg a matematikai elmélete. René Thom francia matematikus nagy vitát kavart [2] művében fejtette ki először az ún. *katasztrófaelmélet* alapjait, amely pontosan az ilyen események leírásával foglalkozik.

A katasztrófaelmélet által vizsgált természeti jelenségek olyanok, melyek állapotai egy X állapot-tér — rendszerint egy elég sok dimenziós euklideszi tér — pontjaival jellemezhetők. A rendszer állapota függhet további paraméterektől, melyeket egy másik, p dimenziós euklideszi térből veszünk. A gyakorlatban a $p \leqq 4$ esetnek van a legnagyobb jelentősége, itt a paraméter-tér a négydimenziós tér-időt jelentheti.

Feltételezzük azt is, hogy a rendszert valamely potenciálfüggvény vezérli. Ezen azt értjük, hogy minden $x \in X$ állapothoz és u paraméterhez egy $F(x, u) \in R$ potenciált rendeltünk, és a rendszer összes lehetséges állapotai közül azokat veszi fel, amelyekben (u-t rögzítettnek tekintve) az $F(x, u)$-nak lokális minimuma, (illetve maximuma) van. Ha rögzített u mellett több ilyen minimum, (illetve maximum) is létezik, akkor a rendszernek több stabil állapota is lehet. Az $F(x, u)$ potenciálfüggvényről feltesszük, hogy végtelen sokszor differenciálható.

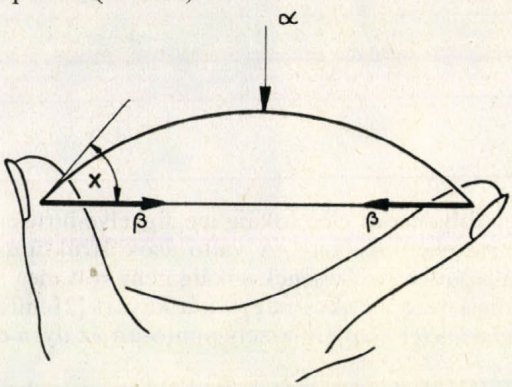
Az u paraméter változtatásával a jelenség állapota (azaz $F(x, u)$ minimumhelye) is változik, mégpedig általában folytonosan. Bizonyos esetekben azonban hirtelen, „ugrásszerű" változások is történhetnek, az állapot tovább már nem folytonos függvénye a paraméternek. Az ilyen nem folytonos változások leírására, osztályozására szolgál a katasztrófaelmélet.

Az elméletet többen továbbfejlesztették, és elsősorban E. C. Zeeman munkái nyomán egyre szélesebb körben alkalmazzák. Ám mindeddig legnagyobb hatását a matematikára fejtette ki, pontosabban a matematikának azon részeire, melyek a katasztrófaelmélet tételeinek bizonyításához szükségesek voltak.

A fizikában és a műszaki matematikában már jónéhány jelenség katasztrófaelméleti modelljét kidolgozták. Így például a minimális felszínű felületek, a nemlineáris oszcillációk, a diffúzió, a rugalmasság problémáira van már modell [4]. R. Thom [2] művében sokat foglalkozik az embriológiával, de a biológusok körében még kevéssé terjedt el az elmélet alkalmazása. Zeeman katasztrófamodellt készített többek között a szívdobogásra, az idegimpulzusok haladására, az agy működésére, és a börtönlázadásokra is [5].

2. Egy egyszerű példa

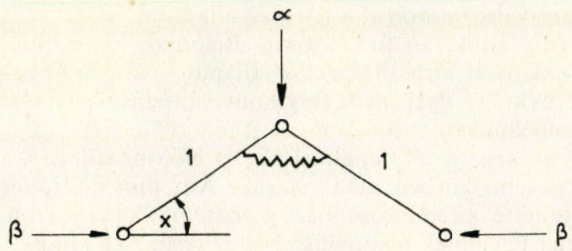
Hogy a katasztrófajelenségek mennyire mindennaposak, mutatja a következő, mindenki által elvégezhető kísérlet. Tartsunk hüvelyk- és mutatóujjunk között egy kártyalapot, és a közepét lassan nyomjuk lefelé. A kártyalap egyre jobban benyomódik, majd hirtelen átpattan (1. ábra).



1. ábra

A lapra három erő hat: két vízszintes irányú, ellentétes értelmű, egyenlő nagyságú β erő, és egy függőleges irányú α erő. A lap pillanatnyi állapotát az ábrán látható x szöggel mérjük. Ha β-t állandónak tartjuk és α értékét folyamatosan növeljük, akkor x értéke egy ideig folyamatosan változik. A katasztrófa abban a pillanatban következik be, amikor x értéke hirtelen megváltozik, azaz amikor a kártyalap átpattan.

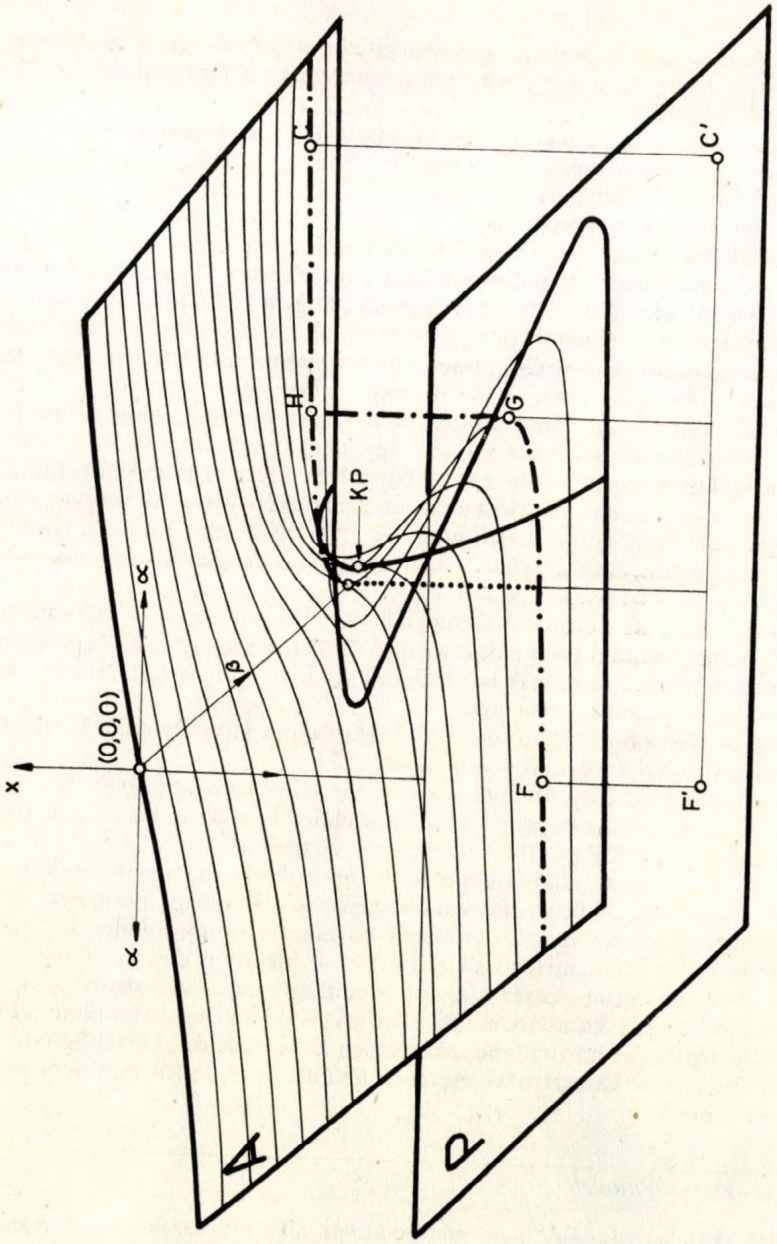
A számítások könnyebb elvégezhetősége végett a következő egyszerűsítéseket vezetjük be. A kártyalapot két, egységnyi hosszúságú merev rúddal helyettesítjük, melyek csuklóban találkoznak, és az α nyomóerő ebben a pontban hat rájuk (2. ábra). A csuklónál egy rugó köti össze a két darabot, amely mindig igyekszik azokat kiegyenesíteni.



2. ábra

Feladatunk az, hogy α és β függvényében meghatározzuk x-et. Ennek érdekében írjuk fel a rendszer adott (α, β, x) hármashoz tartozó összes energiáját. Ha μ a rugóállandó, akkor felhasználva, hogy a rudak egységnyi hosszúságúak:

a rugó energiája	$\frac{1}{2}\mu(2x)^2$
az α erő ellenében nyert energia	$\alpha \sin x$
a β erő ellenében vesztett energia	$2\beta(1-\cos x)$
az összes energia tehát	$E=2\mu x^2+\alpha \sin x-2\beta(1-\cos x).$



3. ábra

A rendszer ott van egyensúlyban, ahol E-nek x szerint lokális szélsőértéke van, vagyis ahol

$$(*) \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = 4\mu x + \alpha \cos x - 2\beta \sin x = 0.$$

A 3. ábrán $\mu = 1/2$ választással a $(*)$-ot kielégítő (α, β, x) hármasok által meghatározott felületnek az (α, x) síkkal párhuzamos szintvonalait láthatjuk az $|\alpha| \leqq 2$ és $0 \leqq \beta \leqq 1{,}5$ intervallumban.

Jól látható, hogy a felület KP-vel (katasztrófapont) jelölt, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $x = 0$, koordinátájú pontjában szétnyílik, azaz az addig egyszintű felület háromrétegűvé válik. E háromrétegű felület alsó és felső levele a stabil, középső levele pedig az instabil egyensúlyi állapotot reprezentálja.

Rögzítsük β-t például az 1,3 értéken és α változtatásával kövessük végig az ábrán a kártyalap viselkedését. Induljunk ki a paramétertér C' pontjából és növeljük α értékét folyamatosan. (Itt $\alpha < 0$, ami azt jelenti, hogy a rudakat a csuklónál „felfelé" húzzuk.) Kezdetben a felület C pontja reprezentálja a rendszer egyetlen stabil állapotát. A reprezentáló pont a C-n átmenő szintvonalon halad H felé. H-t elérve továbbra is a felső szinten mozog, noha itt már a másik egyensúlyi helyzet is elképzelhető lenne. A pont mégis a felső szinten marad, hiszen ahhoz, hogy a másik levélre menjen át, energiát kellene közölnünk vele. Így jut el a pont D-ig, ahol a felület aláhajlik, gyakorlatilag megszűnik. Ha az α-t bármilyen kicsivel is megnöveljük, a pont kénytelen leesni az alsó levélre. Most a paraméter értékének kis változása az állapotjelzőnek nagy változását vonja maga után. A jelenség diszkontinuussá válik, bekövetkezik a katasztrófa, azaz átpattan a kártyalap. Az α értékét tovább növelve a pont az alsó levélen halad tovább egészen F-ig.

Ugyanezt az utat visszafelé is megtehetjük. Induljunk ki a paramétersík F' pontjából. A reprezentáló pont ekkor az alsó felületen mozog F-től egészen G-ig. Itt egy újabb katasztrófa következik be, melynek során a pont H-ba ugrik fel. α értékét tovább csökkentve a pont C felé tart.

Ha β-t 1-nél kisebb értéken rögzítjük, akkor nincs katasztrófa, a kártyalap mindig folyamatosan tudja követni α változását.

Látható, hogy az állapotfelület leírja a lehetséges katasztrófákat. Így a katasztrófák tanulmányozásához elegendő az állapotfelületek, és azon belül azok szinguláris pontjai (esetünkben a KP pont) környezetének vizsgálata.

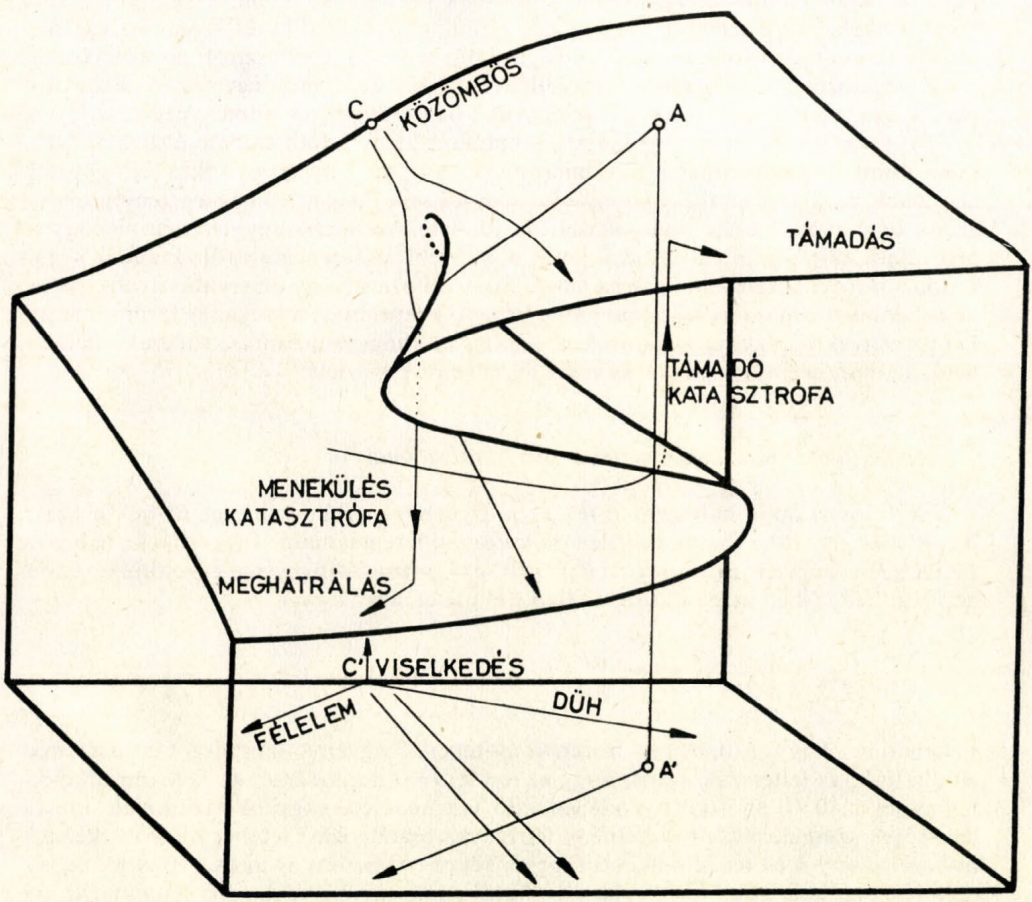
A most bemutatott állapotfelület a katasztrófaelmélet egyik tipikus felülete, az általa reprezentált katasztrófát *csúcskatasztrófának* (cusp) nevezzük. R. Thom később ismertetendő osztályozási tételéből következik, hogy minden két paraméter által vezérelt folyamathoz tartozó állapotfelület — bizonyos degenerálódásoktól eltekintve — topológiailag megegyezik az itt bemutatott csúcskatasztrófával. Ezért nem véletlen, hogy a csúcskatasztrófa az alkalmazásokban leggyakrabban előforduló típus. Az állapotfelület háromdimenziós térben ábrázolható, „kézzelfogható" felület míg a többdimenziós katasztrófák esetében az állapotfelületről már nem lehet ilyen szemléletes képünk.

3. Az agresszió-modell

A csúcskatasztrófa egy nem matematikai alkalmazásának illusztrálására [4] alapján bemutatjuk a kutya agresszió-modelljét. A kutya támadó — meghátráló viselkedése két fő paramétertől függ, úgymint a dühtől és a félelemtől. A kutya dühének látható jele lehet a nyitott száj és a vicsorgás, félelmét pedig a hátrasunyított fül

mutatja. Ha az emocionális faktorok (dühítés és megfélemlítés) közül az egyik dominál, akkor a kutya érzelmi válaszát könnyű megjósolni. Ha a kutya nem fél és bőszítik, akkor valamilyen agresszív viselkedés, például támadás várható. Amikor a kutya rémült, de nem provokálják, akkor az egresszió megjelenése valószínűtlen, az állat inkább elmenekül. Mi történik, ha a kutyát egyszerre dühítik és félemlítik?

A modell megkonstruálásához a paramétersík koordinátáin a félelem és a düh nagyságát mérjük, az állapotfelületet pedig az ehhez tartozó legvalószínűbb viselkedést jelző pontok alkotják. Ezzel a 4. ábrán látható csúcskatasztrófa felületéhez jutunk.



4. ábra

Tegyük fel, hogy a kutya emocionális állapota kezdetben közömbös, ezt a paramétersík C' pontja mutatja. Ha növeljük a kutya dühét anélkül, hogy félelme változna, a viselkedés változása sima, az állapotfelületen felfelé irányul egy agresszívabb helyzethez. Ha a düh eléggé megnőtt, a kutya támad. Ha most a kutya félelmét kezdjük növelni, miközben a dühe marad egy megemelt szinten, a viselkedést mutató pont A-ból indulva a felső levélen mozog, egészen a ránc széléig. A félelem egészen kis növelésével a pont leesik az alsó levélre, hiszen a felső lap agresszív állapota tovább

nem lehetséges. Egy hirtelen és valóban katasztrófális változás során a kutya egy jóval „gyávább" viselkedési formára tér át. A modell így megjósolja, hogy ha egy feldühített kutyát fokozatosan egyre jobban megfélemlítenek, akkor a támadás hirtelen megtörik és az állat meghátrál. A viselkedésnek ez a megváltozása a *menekülés katasztrófa.* Az ellenkező formájú viselkedés, amikor a megfélemlített kutya dühét fokozatosan növelve az hirtelen támad, a *támadó katasztrófa.*

Végül tekintsük azt az esetet, amikor a kutya kezdetben közömbös, és a dühöt és a félelmet egyidejűleg növeljük. A viselkedési pont kezdetben a C'-ben van, és az ellentétes ingerek hatására egyenesen halad előre az állapotfelületen. A katasztrófapontban, ahol a felület meggyűrődik, a pontnak vagy a felső lapon kell haladnia, ahol a kutya sokkal agresszívabb, vagy az alsó lapon, ahol sokkal kevésbé agresszív. Hogy melyik lapon halad tovább, az attól függ, hogy a kutya a katasztrófapontot közvetlenül megelőzően milyen állapotban volt. A folyamat divergens: egy nagyon kis változás a kezdeti feltételekben a végső állapotban nagy változást eredményezhet.

A katasztrófaelmélet gyakorlati alkalmazásaival kapcsolatban érdemes idéznünk John Guckenheimer [1] véleményét: „Ahogyan a mért adatokra a legkisebb négyzetek módszerével illesztett egyenes semmit sem magyaráz meg a jelenség lényegéből, ugyanúgy, ha egy csúcskatasztrófa felülete illeszkedik egy jelenség megfigyelhető állapotaira, ez nem mond semmit a mélyebb összefüggésekről. Például a gáz kritikus pontja közelében a gáz halmazállapot változásait egy csúcskatasztrófa írja le, de ez semmit nem mond a jelenség mögött levő kvantummechanikai és termodinamikai törvényekről. Így ha valamiről megállapítjuk, hogy csúcskatasztrófával jellemezhető, az nem jelentheti a kutatás végét, hanem csak kezdetét".

4. A katasztrófaelmélet matematikai alapfogalmai

A valós számok halmazát R-rel, az n dimenziós euklideszi teret R^n-nel jelöljük. Az R^n-ből az R-be ható végtelen sokszor differenciálható függvények halmaza $C^\infty(R^n, R)$. Legyen $F(x, u) \in C^\infty(R^{n+p}, R)$ egy potenciálfüggvény, és jelöljük A_F-fel az F által R^{n+p}-ben meghatározott állapotfelületet, azaz legyen

$$A_F = \left\{(x, u) \in R^{n+p} : \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, u) = 0 \quad \text{minden} \quad 1 \leqq i \leqq n\text{-re}\right\}.$$

Feltehetjük, hogy $F(0, 0) = 0$, hiszen a potenciálfüggvényt tetszőleges konstanssal eltolhatjuk, és feltesszük azt is, hogy az $x = 0$, $u = 0$ pont eleme A_F-nek. Az állapotfelületnek a (0, 0) pont környezetében való viselkedésére vagyunk kíváncsiak, annak lehetséges szingularitásait szeretnénk leírni. Az osztályozási tétel egyik következménye szerint $p \leqq 4$ esetén a potenciálfüggvényekre tett bizonyos megszorítások mellett ezek a szingularitások 7 osztályba sorolhatók, s az egy osztályba eső szingularitások bizonyos értelemben diffeomorfak. Ezt a fogalmat később pontosítani fogjuk.

Mivel a vizsgálatok egyetlen, nevezetesen a (0, 0) pont környezeteire vonatkoznak, vagyis lokális jellegűek, elegendő volna megkövetelnünk, hogy a függvények csak ennek a pontnak egy-egy környezetében legyenek értelmezve, és ott teljesítsék a kívánt feltételeket.

Legyen f és g is eleme $C^\infty(R^n, R)$-nek. (Előző megjegyzésünk értelmében elegendő volna, hogy f és g a $0 \in R^n$ egy-egy környezetében legyen értelmezve, és ott végtelen sokszor differenciálható legyen.) Azt mondjuk, hogy f *ekvivalens* g-vel, jelben $f \cong g$, ha van $0 \in R^n$-nek olyan R^n-beli környezete, melyben f és g megegyezik. Más

szóval $f \cong g$, ha létezik olyan pozitív $\varepsilon \in R$, hogy minden $x \in R^n$-re $|x| < \varepsilon$ esetén $f(x) = g(x)$. Az

$$[f] = \{g \in C^\infty(R^n, R): f \cong g\}$$

ekvivalenciaosztály neve az f függvény $0 \in R^n$-beli *csírája* (germ). A továbbiakban nem teszünk különbséget függvény és csírája között, ez sehol sem fog félreértést okozni.

A $\varphi: R^n \to R^n$ függvény *lokális diffeomorfizmus*, ha léteznek $0 \in R^n$-nek olyan U és V környezetei, hogy $\varphi(U) = V$, φ-nek U-ra való megszorítása bijekció U és V között, továbbá φ az U-n és φ^{-1} a V-n végtelen sokszor differenciálható.

Vezessük még be a következő jelöléseket:

$$E(n) = \{[f]: f \in C^\infty(R^n, R)\}$$

$$m(n) = \{[f] \in E(n): f(0) = 0\}.$$

$E(n)$ elemei gyűrűt alkotnak, ha az összeadást és a szorzást a szokásos módon, azaz függvények pontonkénti összegeként illetve szorzataként értelmezzük. Ebben a gyűrűben $m(n)$ maximális ideál, azaz $m(n)$ az $E(n)$ gyűrű minden valódi ideálját tartalmazza. Az

$$m(n) \cdot m(n) \cdot \ldots \cdot m(n) \quad (r+1 \text{ tényező})$$

komplexusszorzással definiált ideált $m(n)^{r+1}$ jelöli. Ennek elemei azok a függvények, (illetve azok csírái), melyek előállnak $r+1$ darab $m(n)$-beli függvény szorzataként, azaz melyek összes, legfeljebb r-edrendű parciális deriváltjai a 0 helyen a 0 értéket veszik fel.

Az f csíra *r-determinált*, amennyiben abból, hogy $f - g \in m(n)^{r+1}$ (azaz f-nek és g-nek a legfeljebb r-edrendű parciális deriváltjait a 0 helyen tekintve, az egymásnak megfelelők páronként egyenlők), következik, hogy létezik olyan $\varphi: R^n \to R^n$ lokális diffeomorfizmus, melyre $f = g \circ \varphi$. Egy csíra *végesen determinált*, ha létezik olyan r, amelyre r-determinált.

Tekintsük a $C^\infty(R^n, R)$ függvénytéren azt a topológiát, melyben az $f \in C^\infty(R^n, R)$ egy báziskörnyezetét az alábbi halmaz adja meg:

$\{g \in C^\infty(R^n, R)$: minden $|x| < N$-re f-nek és g-nek a legfeljebb s-edrendű parciális deriváltjait az x helyen tekintve, az egymásnak megfelelők legfeljebb ε-nal térnek el egymástól$\}$,

itt ε és N tetszőleges pozitív valós, s pedig tetszőleges természetes szám. A függvénytérnek ezt a topológiáját Whitney-topológiának szokás nevezni. Azok a függvények, melyek csírái r-determinálnak, ebben a topológiában nyílt halmazt, a végesen determinált csírájú függvények pedig egy sűrű-nyílt halmazt alkotnak. Ez azt jelenti, hogy a $C^\infty(R^n, R)$ függvények körében „nem végesen determinált csírájú függvénynek lenni" instabil tulajdonság: egy nem végesen determinált függvény akármilyen kis (Whitney-) környezetében találunk végesen determinált függvényt. Ugyanakkor a „végesen determinálatnak lenni", sőt „r-determinálatnak lenni" ebben az értelemben már stabil tulajdonság, hiszen egy ilyen függvénynek van olyan környezete, melyben minden más függvény rendelkezik ugyanezzel a tulajdonsággal.

Mindezeket azért bocsátottuk előre, mert Thom osztályozási tételének érvényességéhez szükséges, hogy az $F(x, u)$ potenciálfüggvény valamilyen hasonló stabilitási kritériumnak is eleget tegyen. Ezeket a megszorításokat a tétel alkalmazásakor nem szokták ellenőrizni, mondván „egy kísérletet sohasem lehet teljes pontossággal, hanem csak annak kisebb-nagyobb közelítésével végrehajtani. Így a kísérlet eredményét sem az elméletileg számított $F(y, u)$ potenciálfüggvény, hanem egy ahhoz közeli $F^*(x, u)$ függvény határozza meg. Így instabil potenciálfüggvény a gyakorlatban nem fordulhat elő."

Legyen $f \in m(n)^2$ egy tetszőleges csíra. A $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ parciális deriváltak $E(n)$-ben egy ideált generálnak, ezt az ideált $\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$-szel jelöljük. Mivel $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in m(n)$ minden

$1 \leqq i \leqq n$-re, azért $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$ ideál lesz $m(n)$-ben is. Az $m(n) \Big/ \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$ faktorgyűrűt tekinthetjük R feletti vektortérnek is, ennek a vektortérnek a dimenzióját (ami persze lehet végtelen is) nevezzük f kodimenziójának, és codim f-fel jelöljük.

Tekintsük például az $f(x)=x^k$ függvényt valamilyen $k \geqq 2$ egészre, ez eleme $m(1)^2$-nek. Most

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \{x^{k-1} \cdot g(x) \colon g \in E(1)\},$$

tehát $m(1) \Big/ \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \{$azok a legfeljebb $(k-2)$-edfokú polinomok, melyek konstans tagja 0$\}$. Ezek pedig R felettt egy $k-2$ dimenziós vektorteret alkotnak, hiszen $k-2$ egymástól függetlenül választható együttható van. Azt kapjuk tehát, hogy codim $x^k = k-2$.

A továbbiakban alapvető fontosságú a kisímítás (unfolding) fogalma. Legyen $f \in m(n)$. Az $F \in m(n+r)$ csírát az f *kisímításának* nevezzük, ha $F(x, 0) = f(x)$ minden $x \in R^n$ esetén. A kisímítást az (F, r) párral jelöljük, és r-et a kisímítás kodimenziójának nevezzük. A kisímító F függvény első n változóját rendszerint x-szel, az utolsó r változóját u-val vagy v-vel jelöljük.

Az $f \in m(n)$ csíra két kisímítása, (F, r) és (G, s) közül (F, r) *bővebb* mint (G, s), jelben $(F, r) \succ (G, s)$, ha léteznek olyan

$$\Phi(x, v) \colon R^{n+s} \to R^n$$

$$\Psi(v) \colon R^s \to R^r$$

$$\alpha(v) \colon R^s \to R$$

végtelen sokszor differenciálható függvények, melyekre

$$\Phi(x, 0) = x \quad \text{minden } x \in R^n\text{-re},$$

$$\Psi(0) = 0$$

$$\alpha(0) = 0,$$

továbbá

$$G(x, v) = F\big(\Phi(x, v),\ \psi(v)\big) + \alpha(v) \text{ minden } x \in R^n,\ v \in R^s \text{ esetén.}$$

Ez azt jelenti, hogy minden rögzített $v \in R^s$-hez található olyan $u \in R^r$ (ez lesz a $\psi(v)$), hogy a $g(x) = G(x, v)$ szintfelület „lényegileg" megegyezik az $f(x) = F(x, u)$ szintfelülettel, belőle legfeljebb egy eltolással kapható meg (ez lesz az $\alpha(v)$). A két szintfelület azért egyezik meg „lényegileg", mert $\Phi(x, 0) = x$, és elegendően kis v-re $\Phi(x, v)$-nek $\Phi(x, 0)$-tól való eltérése elhanyagolható. Más szavakkal G minden szintfelülete megtalálható F szintfelületei között. A „bővebb" reláció tranzitív és reflexív de nem szimmetrikus.

Az (F, r) és (G, s) kisímítások *ekvivalensek*, ha mind a kettő bővebb a másiknál, azaz ha $(F, r) \succ (G, s)$ és $(G, s) \succ (F, r)$. Az előbbiek szerint ez valóban ekvivalencia-reláció.

Az (F, r) kisimítás *stabil*, ha minden más kisimításnál bővebb, azaz ha tetszőleges (G, s) kisimításra $(F, r) \succ (G, s)$. Egy kisimítás *univerzális*, ha stabil, és nincs nála kisebb kodimenziójú stabil kisímítás.

Az alábbi táblázatban az $f(x)=x^3$ $m(1)$-beli csíra néhány kisimítását és azok kodimenzióját soroljuk fel.

kisimítás	kodimenzió
$F(x, u) = x^3+u^3$	1
$G(x, u) = x^3+ux$	1
$H(x, w, v) = x^3+wx^2+vx$	2
$K(x, v) = x^3+3vx^2$	1

Ezek között a következő relációk állnak fenn:

$$(H, 2) \succ (G, 1) \succ (H, 2) \succ (K, 1) \succ (F, 1).$$

A $(H, 2)$ és $(G, 1)$ stabil kisímítások, és $(G, 1)$ univerzális kisímítás is. A $(K, 1)$ nem stabil kisímítás, hiszen $(K, 1) \not\succ (H, 2)$.

5. *Thom osztályozási tétele*

A most következő tételeket bizonyítás nélkül, vagy csak egészen vázlatos bizonyítással közöljük. A bizonyításokhoz ugyanis több, meglehetősen bonyolult technikai segédeszköz bevezetésére volna szükség, melyek a katasztrófaelmélet nem matematikai alkalmazásaiban nem játszanak fontos szerepet. Maguk a bizonyítások megtalálhatók például [3]-ban.

1. Tétel. (Stabil kisímítások egzisztencia tétele) Az $f \in m(n)^2$ csírának akkor és csak akkor létezik stabil kisímítása, ha f végesen determinált.

Ennek a tételnek egy élesítése a

2. Tétel. Ha az $f \in m(n)^2$ csíra végesen determinált, akkor f-nek (az 1. tétel szerint létező) univerzális kisímításának kodimenziója megegyezik f kodimenziójával.

Legyen $f \in m(n)$ és $g \in m(k)$ két csíra, legyen továbbá $k \geqq n$. Azt mondjuk, hogy f *redukáltja* a g-nek, ha létezik olyan φ: $R^k \to R^k$ lokális diffeomorfizmus, melyre $g=h \circ \varphi$, ahol

$$h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_n) \pm x_{n+1}^2 \pm \ldots \pm x_k^2$$

az előjelek valamilyen megválasztása mellett. Az f a g-nek valódi redukáltja, ha $n<k$, és g *irreducibilis,* ha g-nek nincs valódi redukáltja. Nyilvánvaló, hogy ha f a g-nek, g pedig a h-nak redukáltja, akkor f redukáltja a h-nak is. Ha $f \in m(n)^3$ akkor f-nek nem lehet valódi redukáltja, azaz f irreducibilis. A következő tétel ennek megfordítását mondja ki.

3. Tétel. Minden $g \in m(k)^2$ csírához található olyan $n \leqq k$ és olyan $f \in m(n)^3$, melyre f a g-nek redukáltja.

Ez a tétel a jól ismert Morse-lemma egy általánosítása, és a bizonyításban már fel lehet használni az elmélet korábbi eredményeit. Segítségével bizonyítható az osztályozási tétel alapjául szolgáló

4. Tétel. Minden olyan $f \in m(n)^2$ csíra, melyre $\operatorname{codim} f \leqq 4$ az alábbi táblázatba foglalt 10 irreducibilis csíra valamelyikére redukálható.

csíra	n	kodimenzió
x^3	1	1
x^4	1	2
x^5	1	3
x^6	1	4
$-x^4$	1	2
$-x^6$	1	4
x^3+y^3	2	3
x^3-xy^2	2	3
x^2y+y^4	2	4
x^2y-y^4	2	4

Bizonyítás. A 3. tétel alapján feltehetjük, hogy $f \in m(n)^3$. Közvetlen számolással kapjuk, hogy ebben az esetben $\operatorname{codim} f \geqq \frac{n(n+1)}{2}$, így csak az $n=1$ és az $n=2$ eseteket kell megvizsgálnunk.

Az $n=1$ esetén $\operatorname{codim} f \leqq 4$-ből következik, hogy f-nek van nem nulla deriváltja is, az első ilyen legyen a k-adik ($k \geqq 3$). Ekkor

$$f(x) = \pm x^k(a+h(x)),$$

ahol $a>0$ és $\lim_{x \to 0} h(x)=0$, vagyis $h \in m(1)$. A

$$\varphi(x) = x \cdot \sqrt[k]{a+h(x)}$$

egyenlőséggel definiált függvény egy $R \to R$-beli lokális diffeomorfizmus, valamint $f = \pm x^k \circ \varphi = \pm \varphi^k$, azaz f-nek a $\pm x^k$ redukáltja. Páratlan k esetén az előjel a φ-be beolvasztható. Könnyű látni, hogy egy csírának és redukáltjának a kodimenziója megegyezik, tehát $\operatorname{codim} f = \operatorname{codim} \pm x^k = k-2$, azaz $4 \geqq \operatorname{codim} f$ miatt csak a $k=3$, 4, 5, 6 esetek lehetségesek. Ezek adják a táblázat első hat sorát.

Ha $n=2$, akkor abból indulunk ki, hogy $f \in m(n)^4$ esetén $\operatorname{codim} f \geqq \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{3} = 7$, tehát $f \notin m(2)^4$. Így $f(x, y)$ felírható a következő alakban:

$$(a+\alpha(x,y))x^3+(b+\beta(x,y))x^2y+(c+\gamma(x,y))xy^2+(d+\delta(x,y))y^3,$$

ahol az a, b, c, d konstansok nem mindegyike nulla, és $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in m(2)$. Innen az előzőhöz hasonló, csak bonyolultabb számolással kapjuk az $a \neq 0$ esetben a táblázat hetedik és nyolcadik, az $a=d=0$ esetben a táblázat kilencedik és tizedik sorát.

A $\operatorname{codim} f = 5$ esetben is csak az $n=1$ és az $n=2$ eset jöhet szóba, és minden legfeljebb 5 kodimenziójú csíra véges sok irreducubilis csíra valamelyikére redukálódik. A $\operatorname{codim} f = 6$ esetén már $n=3$ is lehetséges, ekkor az osztályok száma már végtelen.

Legyenek $f \in m(n)^2$ és $g \in m(k)^2$ végesen determinált csírák, és legyen (F, r) az f-nek, (G, s) pedig a g-nek az 1. tétel szerint létező stabil kisímítása. Azt mondjuk, hogy (F, r) *redukáltja* (G, s)-nek, ha az alábbi (i) és (ii) feltételek fennállnak:

(i) f redukáltja a g-nek, azaz létezik olyan $\varphi: R^k \to R^k$ lokális diffeomorfizmus, melyre $g = h \circ \varphi$, ahol

$$h(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_n) \pm x_{n+1}^2 \pm \ldots \pm x_k^2$$

(ii) az (F', r) és a (G', s) kisímítások ekvivalensek, ahol

$$F'(x_1, \ldots, x_k, u) = F(x_1, \ldots, x_n, u) \pm x_{n+1}^2 \pm \ldots \pm x_k^2$$

valamint

$$G'(x, v) = G(\varphi^{-1}(x), v).$$

Az (F, r) a (G, s)-nek valódi redukáltja, ha $k > n$, és (G, s) *irreducibilis*, ha nincs valódi redukáltja. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy kisímítás redukáltjának redukáltja az eredeti kisímításnak is redukáltja.

5. Tétel. (Thom osztályozási tétele) Legyen $f \in m(n)^2$ egy végesen determinált csíra, és legyen (F, r), $r \leqq 4$ ennek egy stabil kisímítása. Ekkor (F, r) a következő hét irreducibilis kisímítás valamelyikére redukálódik:

név	csíra	kisímítás	kodimenzió
fold	x^3	x^3+ux	1
csúcs	x^4	x^4+ux^2+vx	2
fecskefarok	x^5	$x^5+ux^3+vx^2+wx$	3
pillangó	x^6	$x^6+ux^4+vx^3+wx^2+tx$	4
hiperbolikus umbilikum	x^3+y^3	$x^3+y^3+uxy+vx+wy$	3
elliptikus umbilikum	x^3-xy^2	$x^3-xy^2+u(x^2+y^2)+vx+wy$	3
parabolikus umbilikum	x^2y+y^4	$x^2y+y^4+ux^2+vy^2+wx+ty$	4

Bizonyítás. Legyen (G, s) olyan irreducibilis kisímítás, amely (F, r)-nek redukáltja. Mivel egy kisímítás redukálása során annak kodimenziója nem nő és (G, s) stabil kisímítása g-nek, azért a 2. tétel szerint g kodimenziója is legfeljebb 4. Ha most g nem lenne irreducibilis csíra, a kisímítást tovább lehetne redukálni. Így a 4. tétel alapján elegendő az ott felsorolt 10 irreducibilis csíra univerzális kisímításait vizsgálnunk. Ám nem mind a 10 csíra vezet különböző kisímításokhoz, így például az x^6 és a $-x^6$ csírákhoz egymásra redukálható univerzális kisímítások tartoznak.

Az osztályozási tétel alapján az állapotfelületek által reprezentált katasztrófákat is osztályozhatjuk. E célból a potenciálfüggvényeket, illetve azok csíráit kisímításoknak, pontosabban az $F(x, u)$: $R^{n+p} \to R$ potenciálfüggvényt az $f(x) = F(x, 0)$ függvény kisímításának tekintjük. A 4. pontban tett megállapodásainknak megfelelően feltesszük, hogy $F(0, 0) = 0$, valamint hogy az $x = 0$, $u = 0$ pont az A_F állapotfelületen van, azaz $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ ha $1 \leqq i \leqq n$, vagy más szavakkal $f \in m(n)^2$.

6. tétel Legyen $f \in m(n)^2$ egy végesen determinált csíra, és legyen (F, p), $p \leqq 4$ ennek egy stabil kisímítása. Ekkor található az 5. tételben felsoroltak között olyan $g \in m(k)^2$ csíra és annak szintén az 5. tételből való (G, r) irreducibilis kisímítása, továbbá olyan $\Phi(x, u)$: $R^{n+p} \to R^{n+p}$ lokális diffeomorfizmus, melyekre teljesülnek az alábbi (i)—(iv) feltételek:

(i) $k \leqq n$ és $r \leqq p$
(ii) $\Phi(x, 0) = (\varphi(x), 0)$ és φ: $R^n \to R^n$ egy lokális diffeomorfizmus

(iii) $\Phi^{-1}(A_F)=A_{F\circ\Phi}$, vagyis az (x, u) pont akkor és csak akkor van az $F\circ\Phi$ által meghatározott $A_{F\circ\Phi}$ állapotfelületen, ha a $\Phi(x, u)$ pont rajta van az A_F állapotfelületen

(iv) az $(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p)$ pont akkor és csak akkor van rajta az $A_{F\circ\Phi}$ állapotfelületen, ha $x_{k+1}=\ldots=x_n=0$, és az $(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_r)$ pont eleme az A_G állapotfelületnek.

Bizonyítás. Az 5. tétel alapján az (F, p) kisímítás az ott felsorolt hét irreducibilis kisímítás valamelyikére, mondjuk (G, r)-re redukálódik. Ez megadja a 6. tételben szereplő k és r értékeket. A Φ lokális diffeomorfizmust a redukált definíciója alapján három lépésben konstruáljuk meg.

1. Legyen $\varphi: R^n \to R^n$ egy lokális diffeomorfizmus, $u\in R^p$ és legyen $F'(x, u)=$ $=F(\varphi^{-1}(x), u)$. Ekkor az (F, p) valamint az (F', p) kisímításokhoz tartozó állapotfelületeket a $\Phi_1(x, u)=(\varphi(x), u)$ lokális diffeomorfizmus egymásba viszi át.

2. Ha az (F', p) és a (G', r) kisímítások ekvivalensek, akkor például $(F', p)\prec$ $\prec(G', r)$ és így vannak olyan

$$\Phi(x, u)\colon R^{n+p} \to R^n, \quad \Psi(u)\colon R^p \to R^r \quad \text{és} \quad \alpha(u)\colon R^p \to R$$

függvények, hogy $\Phi(x, 0)=x$, $\psi(0)=0$ és

$$F'(x, u) = G'\big(\Phi(x, u), \Psi(u)\big)+\alpha(u).$$

Ez utóbbi összefüggés mindkét oldalát x szerint parciálisan deriválva kapjuk, hogy az (x, u) pont akkor és csak akkor tartozik az F' által meghatározott állapotfelülethez, ha a $\big(\Phi(x, u), \psi(u)\big)$ pont a G' által meghatározott állapotfelülethez tartozik. Ha most feltesszük, hogy (F', p) stabil, és (G', r) univerzális (ami esetünkben fennáll), akkor ψ értékkészletében a $0\in R^r$ valamely környezete teljes egészében benne van. Ez azt jelenti, hogy van olyan $\psi^*\colon R^p \to R^p$ lokális diffeomorfizmus, hogy $\psi^*(u)$ értékének első r koordinátáját éppen $\psi(u)$ adja meg. Így a $\Phi_2(x, u)=\big(\Phi(x, u), \psi^*(u)\big)$ lokális diffeomorfizmus az F'-höz tartozó állapotfelületet éppen az (iii)-ben leírt módon transzformálja.

3. Végül ha $G'(x, u)=G(x_1, \ldots, x_k, u)\pm x_{k+1}^2\pm\ldots\pm x_n^2$, akkor a G'-höz és a G-hez tartozó állapotfelület megegyezik, és az előbbiben $x_{k+1}=\ldots=x_n=0$.

A konstrukcióból világos, hogy az 1., illetve 2. alatt definiált Φ_1, illetve Φ_2-ből készített $\Phi=\Phi_2\circ\Phi_1$ lokális diffeomorfizmus eleget tesz az (ii)–(iv) feltételeknek.

Ha az $f\in m(n)^2$ csírának van legfeljebb 4 kodimenziójú stabil kisímítása, akkor a 2. tétel alapján f kodimenziója is legfeljebb 4 lehet. A 6. tétel bizonyításában lényegében ezt a tényt használtuk ki, és arra a kikötésre sincs feltétlenül szükség, hogy az (F, p) kisímítás stabil legyen (bár ekkor az (iv) ponton kissé módosítani kell). Az osztályozási tétel segítségével tehát az olyan katasztrófákat tudtuk leírni, melyek egy végesen determinált, legfeljebb négy kodimenziójú csíra kisímításai. Annak ellenőrzése, hogy ez a feltétel valóban teljesül-e, szinte kivétel nélkül hiányzik a katasztrófaelméletet „alkalmazó" dolgozatokból. S legalább egy esetben — a Duffing-egyenlet vizsgálatánál [1] — a feltétel nem teljesült, és felállított katasztrófaelméleti modell hibás eredményeket adott.

IRODALOM

[1] J. GUCKENHEIMER, The catastrophe controversy, *The Mathematical Intelligencer* 1 (1978) pp. 15—20.
[2] RENÉ THOM, *Structural stability and morphogenesis,* Benjamin, 1975.
[3] YUNG-CHEN LU, Singular theory and an introduction to catastrophe theory, *Lecture Notes,* Springer, 1976.
[4] E. C. ZEEMAN, Catastrophe theory, *Scientific American,* April 1976, 65—83.
[5] E. C. ZEEMAN, Brain modelling, Prison distrusbances, in: *Structural stability, Lecture Notes,* Springer, 1976.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Э. ФЕХЕР

FUNDAMENTALS OF CATASTROPHE THEORY

E. FEHÉR

KITŰZÖTT FELADATOK

222. Feladat. Hány Riemann-integrálható függvény van a [0, 1] intervallumon, ha két függvényt azonosnak tekintünk, ha

(a) egy Lebesgue szerint 0 mértékű,

(b) egy Jordan szerint 0 mértékű halmazon különböznek?

GEHÉR LÁSZLÓ

223. Feladat. Legyenek $C_1, \ldots, C_n$ az n pontú irányított G gráf bizonyos irányított körei. Bizonyítandó, hogy kiválasztható minden C_i körnek egy-egy éle úgy, hogy az így kiválasztott élek között legyenek olyanok, melyek egy irányított kört alkotnak.

FRANK ANDRÁS és LOVÁSZ LÁSZLÓ

224. Feladat. Milyen n, k párokra létezik az $1, 2, \ldots, n$ számoknak olyan permutációja, ahol minden elem pontosan k másikkal áll inverzióban?

FREUD RÓBERT, HANGYA LÁSZLÓ és REVICZKY JÁNOS

Megoldott feladatok

210. Feladat. Bizonyítandó, hogy minden polinomnak van olyan többszöröse, melyben minden kitevő prímszám.

BABAI LÁSZLÓ

Megoldás. Legyen adva az $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ polinom. Olyan (természetesen 0-tól különböző) $g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$ polinomot keresünk, melyre $f(x)\cdot g(x)$-ben minden nem-prím kitevőhöz tartozó együttható 0, vagyis

$$(*) \qquad \sum_{i=\max(0,\,k-m)}^{\min(k,\,n)} a_i b_{k-i} = 0 \quad \text{minden nem-prím } 0 \leqq k \leqq m+n \text{ esetén.}$$

A $(*)$ feltételt mint homogén lineáris egyenletrendszert tekintve a $b_0, \ldots, b_m$ ismeretlenekre látjuk, hogy annak van nem-triviális megoldása, ha az ismeretlenek száma nagyobb, mint az egyenleteké, vagyis ha

$$m+1 > m+n+1-\pi(m+n),$$

azaz

$$\pi(m+n) > n.$$

Mivel végtelen sok prímszám van, ilyen m létezik. $(*)$ bármely nem-triviális megoldása szolgáltat egy $g(x)\neq 0$ polinomot, melyre $f(x)\cdot g(x)$-ben minden kitevő prím. Nyilvánvaló, hogy $f(x)$, $g(x)\neq 0$ esetén az $f(x)\cdot g(x)$ sem azonosan 0.

Látható, hogy a prímszámok halmaza helyett bármely más, pozitív egész számokból álló végtelen halmazra is igaz az állítás.

SZALKAI ISTVÁN

211. Feladat. Legyenek $C_1, \ldots, C_n$ az n pontú irányított G gráf körei. Bizonyítandó, hogy van G-ben olyan kör, melynek $C_1, \ldots, C_n$ mindegyikével legfeljebb egy közös éle van.

FRANK ANDRÁS és LOVÁSZ LÁSZLÓ

Megjegyzés. A feladat szövege hibás, hiszen ha pl. $C_1, \ldots, C_n$ a G összes körei, akkor a kívánt tulajdonságú további kör nem létezhet; erre GAÁL LÁSZLÓ hívta föl a figyelmet. Ugyanő megjegyezte azt is, hogy ha irányítatlan gráfról van szó, és $C_1, \ldots, C_n$ a gráf valamely F feszítő fájához tartozó alapkörei, akkor az állítás igaz. Valóban, legyen $C_i - F = \{e_i\}$, akkor $e_1, \ldots, e_n$ egy n pontú, n élű gráfot alkotnak, mely tartalmaz legalább egy kört, és ez a kör eleget tesz a követelményeknek.

A feladat kitűzői által eredetileg elgondolt feladatot 223. feladatként fogalmaztuk meg.

212. Feladat. Legyenek az $f_i (i \in I)$ függvények $[0, 1]$-ben Riemann-integrálhatók, $a_i \leqq f_i \leqq b_i$, k pedig a $K = \bigtimes_{i \in I} [a_i, b_i]$ szorzattéren folytonos függvény. Jelölje h: $[0, 1] \to K$ azt a leképezést, melyre $h(x)$ i-edik koordinátája $f_i(x)$. Bizonyítandó, hogy ekkor $k \circ h$ is Riemann-integrálható.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megoldás. Mivel K kompakt és k folytonos, ezért k korlátos is. Így $k \circ h$ is korlátos. Elegendő ezért azt bebizonyítani, hogy $k \circ h$ majdnem mindenütt folytonos. Ehhez nyilván elég azt bebizonyítani, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén a számegyenes azon pontjai, ahol $k \circ h$ oszcillációja nagyobb, mint ε, 0 mértékű halmazt alkotnak. Mivel k folytonos, K minden y pontjának van olyan V_y báziskörnyezete (vagyis $\{(y_i)\colon y_i \in U_i$ ha $i \in I_y\}$ alakú környezete, ahol $I_y \subseteqq I$ véges és $U_i \subseteqq [a_i, b_i]$ nyílt minden $i \in I_y$-ra), melyen k oszcillációja kisebb, mint ε. K kompakt, ezért e V_y környezetek közül már véges sok is lefedi K-t. Legyen I_0 ezen véges sok V_y-hoz tartozó I_y-ok egyesítése.

Állítjuk, hogy ha egy $x \in [0, 1]$ pontban a véges sok $f_i (i \in I_0)$ függvény mindegyike folytonos, akkor itt a $k \circ h$ függvény oszcillációja kisebb, mint ε. Valóban, az $y = (f_i(x)\colon i \in I)$ pont benne van valamely kiválasztott V_y-ban.

Legyen $V_y = (\bigtimes_{i \in I_0} U_i) \times (\bigtimes_{i \in I - I_0} [a_i, b_i])$. Legyen $U = \bigcap_{i \in I_0} f_i^{-1}(U_i)$, ekkor mivel f_i folytonos x-ben minden $i \in I_0$-ra, következik, hogy U környezete x-nek, és $h(U) \subseteqq \subseteqq V_y$. Ezért V_y definíciója szerint k oszcillációja $h(U)$-n, vagyis $k \circ h$ oszcillációja U-n, kisebb mint ε.

Azon pontok halmaza, ahol bármelyik $f_i (i \in I_0)$ is szakad, az f_i függvények Riemann-integrálhatósága miatt 0 mértékű. Tehát $k \circ h$ oszcillációja majdnem mindenütt kisebb, mint ε, amit bizonyítani akartunk.

GEHÉR LÁSZLÓ

PROBLEMS

222. How many Riemann integrable functions are there on [0,1] if two functions are identified provided they differ only on a set of (a) Lebesgue measure 0, (n) Jordan measure 0?

223. Let $C_1, \ldots, C_n$ be certain directed cycles of a directed graph G on n points. Prove that it is possible to select one line from each cycle C_i such that some of these lines form a directed cycle.

224. For what pairs n, k does there exist a permutation of the numbers 1, ... n such that every element is in inversion with exactly k other elements?

TÁRSULATI ÉLET

Jelentés a Grünwald Géza emlékdíj 1980. évi kiosztásáról

Az Elnökség az 1980. évi Grünwald Géza Emlékdíj odaítélésére a következő bizottságot küldte ki:

Elnök: Császár Ákos
Titkár: Szász Domokos
Tagok: Bihari Imre, Fejes Tóth László, Hajnal András, Rapcsák András, Révész Pál, Sárközy András, Schmidt Tamás, Tandori Károly, T. Sós Vera. A Bizottság második ülésén részt vett Elbert Árpád is.

A Bizottság két ülést tartott: 1980. november 4-én és 18-án. A Bizottság munkáját nehezítette az az örömteli körülmény, hogy mind a javasoltak száma (14 szemben a tavalyi 9-cel), mind ezek átlagszínvonala igen magas volt. A díjak számának az alapszabályban lefektetett korlátozása miatt így az idén nem díjazottak között is vannak olyanok, akiknek a munkássága a díjra egyébként feltétlen méltó volna. Végül is a Bizottság alapos mérlegelés után így döntött: 1980. évi Grünwald Géza Emlékdíjban és 4500—4500 Ft pénzjutalomban részesíti a következő fiatal matematikusokat:

Csirmaz Lászlót, a MTA MKI tudományos munkatársát,
Füredi Zoltánt, a MTA MKI tudományos segédmunkatársát,
Székelyhidi Lászlót, a KLTE Analízis tanszékének tanársegédjét,
és *Tóth Gábort*, a MTA MKI tudományos segédmunkatársát.

A díjazottak munkásságának rövid ismertetése:

*Csirmaz László*nak eddig 13 tudományos dolgozata jelent meg, illetve van megjelenés alatt, ezenkívül hat tanulmányt és 13 ismeretterjesztő cikket közölt. Nemzetközi viszonylatban is számottevő elméleti eredményeket ért el programhelyességi vizsgálatokban, Ezek közül is kiemelkedik egy, a Floyd—Hoare programhelyesség vizsgálati módszerre vonatkozó teljességi tétele [17], mely az úgynevezett nemsztandard futások fogalmát használja. (Érdekes eredményeket ért el a kombinatorikus halmazelméletben is.) Itt elsősorban végtelen teljes információjú játékokkal, a Go-Moku játék transzfinit általánosításaival foglalkozott. Részben Ajtai Miklóssal és Nagy Zsigmonddal közösen e játékoknak egész kis elméletét alakította ki, és ezek vizsgálata során számos önmagában is érdekes halmazelméleti tételt és függetlenségi bizonyítást nyert.

Csirmaz László publikációinak jegyzéke

[1] Algol—68 interpreter az ICL—1903A számológépen, Számológép, 5 (1975).
[2] Az ALEPH nyelv és fordítóprogramjának specifikációja, tanulmány, NIM 1976, Szeredi P., és Szoldán J.
[3] Az ALEPH résznyelv fordítóprogramjának dokumentációja, tanulmány, NIM 1976.
[4] Az ALEPH fordítóprogram IBM—ESZR változatának dokumenctációja, az ALEPH továbbfejlesztésének vizsgálata, tanulmány, NIM, 1977.
[5] ALEPH reference manual, NIM, 1977.
[6] On definability in Peano arithmetic, Bulletin of Section of Logic, 8 (1979), 148—153,
[7] Structure of program runs of non-standard time, Acta Cybernetica, 4 (1980) 325—331.

[8] On a combinatorial game with an application to Go-Moku, Discrete Math, 29 (1980) 19—23.
[9] Remarks on Floyd-Hoare derivability, elfogadva a Bulletin of section of Logic-ban.
[10] Iterated grammars, elfogadva az Acta Cybernetica-ban.
[11] Programs and program verifications in a general setting, elfogadva a Theoretical Computer Science-nél.
[12] On a generalization of the game Go-Moku, I. Ajtai M. és Nagy Zs., elfogadva a Studia-ban.
[13] On the completeness of proving partial correctness, elfogadva az Acta Cybernetica-ban.
[14] On a generalization of the game Go-Moku, II. Nagy Zs., elfogadva a Stucia-ban.
[15] The limits of Floyd—Hoare derivability, elfogadva a CL&CL-ben.
[16] More complete logics for reasoning about programs, Andréka H., Németi I., Sain I., preprint, 1980.
[17] Completeness of Floyd—Hoare program verification, benyújtva a Journal of Math. Logic-hoz.
[18] Results in program verification, preprint, 1980.

Ismeretterjesztő cikkek

1. A szófogadó legyek, avagy néhány szó a spirálisokról, KöMaL, 53 (1976).
2. Ki mit tud a prímszámokról, KöMaL 54 (1977).
3. Télvan, 55 (1977).
3a. Es ist winter, ALPHA 12 (1978).
4. Olimpiai előkészítő feladatok, KöMaL 55—58 (1977—1979) (9 feladatsor)
5. Euler prímek, KöMaL 56 (1978).
6. A XX. Nemzetközi Diákolimpia feladatainak megoldása, KöMaL 57 (1978).
7. A bűvös hatszög, KöMaL 57 (1978).
8. Mit tudunk az amőbákról? KöMaL 57 (1978).
9. Labirintusok, KöMaL 57 (1978), 58 (1979).
10. A sárkánygörbe, KöMaL 58 (1979).
11. Hány testőre volt Artur királynak? 59/1979, KöMaL.
12. Mozoghat-e valaki, akit síklapokkal határolt páncélba öltöztettünk? KöMaL 59 (1979).
13. Megjegyzés a 2194-es feladathoz, KöMaL, (1979).

Füredi Zoltán kombinatorikában és geometriában ért el jelentős eredményeket. 18 dolgozata jelent meg, ill. van megjelenés alatt. Legtöbb dolgozata extremális halmazrendszerekre vonatkozó vizsgálatokat tartalmaz. Szinte mindegyik dolgozatában sokak és neves matematikusok (Erdős, Chodd, Ray-Chaudhuri, Wilson, Ryser, Frankl P., Lovász) által vizsgált kérdésekkel, sejtésekkel kapcsolatban bizonyít be olyan tételeket, amelyek a témakörben legerősebb, korábbi eredményeket messze túlhaladó állításokat tartalmaznak.

Külön kiemelkedők azon tételei, amelyekben előírt metszetfeltételnek (és ezen túl előírt fokszámfeltételnek) eleget tevő halmazrendszerekre vonatkoznak, továbbá Lovász metsző rendszerek törtlefogására vonatkozó sejtésével kapcsolatos eredménye. Érdekesek és meglepőek hézagos metszetfeltételeknek eleget tevő halmazrendszerekre vonatkozó valamint az Erdős—Ko-Rado-tétel további különböző általánosítására vonatkozó eredményei.

Szép eredményeket tartalmaz a véletlen mátrixokra és véletlen gráfokra vonatkozó dolgozata. Utóbbi a statisztikus fizika szempontjából is érdekes.

Több dolgozata geometriai témájú, ezek közül kiemelendő Fejes Tóth Lászlónak a síkbeli irányított egyenes éllel meghatározott ún. irányított tartományok számára vonatkozó sejtésének bizonyítása.

Dolgozatai rendkívüli bizonyító erőről, matematikai invencióról tanúskodnak.

Füredi Zoltán dolgozatainak jegyzéke

[1] Su un teorema di Kárteszi nella geometria combinatoria, Archimede, 2 (1977) 71—76 (E. Borossal).
[2] On maximal intersecting families of finite sets, J. Combinatorial Theory, A 28 (1980), 282—289.
[3] On a problem of Deza and Frankl, Ars Combinatoria, (közlésre elfogadva).
[4] Erdős—Ko-Rado type theorems with upper bounds on the maximal degree, Algebraic methods in graph theory, (Szeged, Hungary, 1978) Coll. Math. Soc. J. Bolyai 26 (közlésre elfogadva).
[5] On automorphisms of line-graphs, European J. Combinatorics (Peter L. Erdős-sel) (közlésre elfogadva).
[6] The Erdős—Ko-Rado theorem for integer sequences, SIAM J. of Algebraic and Discrete Methods 1 (1980), (P. Frankl-lal) (közlésre elfogadva).

[7] Maximum degree and fractional matchings in uniform hypergraphs, Combinatorics 1 (1980) (közlésre elfogadva).
[8] On connectedness of random graph with a small number edges, Studia Sci. Math. Hung. (közlésre elfogadva).
[9] A new generalization of the Erdős—Ko-Rado theorem, Bull. London Math. Soc. (benyújtva) (P. Frankl-lal).
[10] Disjoint r-tuples in an r-graph with given maximal degree, Quart. J. Math. Oxford (benyújtva) (P. Frankl-lal).
[11] A short proof for a theorem of Harper about the Hammingspheres, Discrete Math. (benyújtva) (P. Frankl-lal).
[12] Set-systems with prescribed cardinalities for pairwise intersections, (kézirat)
[13] The number of well-oriented regions, (kézirat).
[14] Graphs without quadrilaterals, (kézirat).
[15] An intersecting problem with 6 extremes, (kézirat).
[16] The eigenvalues of random symmetric matrices, (kézirat) (J. Komlós-sal).
[17] Set-systems with prescribed cardinalities for pairwise intersections II., (kézirat).
[18] Finite set-systems without a set covered by somme others, (kézirat) (P. Erdős-sel).

Székelyhidi László (szül. 1952. V. 11.) 1975-ben szerzett matematikusi diplomát a Kossuth Lajos Tudományegyetemen. Első két dolgozatát egyetemi hallgató korában készítette, Az [1] dolgozatban tetszőleges nyílt halmazon érvényes Cauchy-féle függvényegyenlet általános megoldását adja meg (korábban csak összefüggő nyílt halmaz esetére volt ismeretes megoldás). A [2] (Lajkó Károllyal és Daróczy Zoltánnal közös) dolgozatban egy algebrai jellegű differencia tulajdonság vizsgálatával és annak függvényegyenletek megoldására való alkalmazásával foglalkozik. A differencia tulajdonság fogalmát de Bruijn vezette be, ő és mások analitikus jellegű tulajdonságokat vizsgáltak. [2] egyik fő eredménye annak igazolása, hogy egy rendezett test pozitív elemeinek multiplikatív csoportján értelmezett Abel-csoportbeli értékű függvényekre a Jensen-tulajdonság (a Jensen egyenlet teljesülése) differencia tulajdonság. A [3] dolgozatban McKiernannak eltűnő n-edik differenciájú függvények előállítására vonatkozó tételére ad elemi bizonyítást. [4] és [6] a Graz-i és debreceni nemzetközi függvényegyenletek kollokviumokon tartott előadásainak kivonatai. [5] fő eredménye az, hogy bizonyos függvényegyenletek minden korlátos megoldása majdnem periódikus függvény. Hasonló témával foglalkozik a [10] dolgozata is melyben megmutatja, hogy bizonyos esetekben a Fourier-transzformáció felhasználható a majdnem periódikus megoldások meghatározására. Ezzel a módszerrel a [9] dolgozatban jelentősen egyszerűsíti O'Connon eredményeinek bizonyítását. Székelyhidi László 1978-ban doktorált. A disszertáció eredményeit, melyek lineáris függvényegyenletekre vonatkozó kiterjesztési tételekkel és topologikus algebrai struktúrákon értelmezett függvényegyenletekkel kapcsolatosak a [7], [8] dolgozatok tartalmazzák. [11]-ben azt mutatja ki, hogy kommutatív topologikus csoportokon értelmezett folytonos komplexértékű függvények minden eltolásinvariáns vektortere exponenciális polinomokból áll, [12]-ben topologikus csoportokon értelmezett exponenciális polinomok jellemzését adja függvényegyenletek segítségével.

Újabb dolgozatai függvényegyenletekre vonatkozó stabilitási tételekkel ([14], [15], [16]) és eltolt argumentum differenciálegyenletek adott kezdeti feltételek melletti megoldásának numerikus közelítésére alkalmas spline interpolációs módszerrel foglalkoznak ([13], Lénárd Margittal közös).

Székelyhidi László a függvényegyenletek elméletének több fontos területén ért el jelentős eredményeket. Így, a függvényegyenletek kiterjesztési kérdéseiben, polinomok és exponenciális polinomok függvényegyenletekkel való jellemzésében, és stabilitási kérdések vizsgálatában jelentenek komoly előrelépést jelentő dolgozatai. Sikeresen alkalmaz topologiai és funkcionálanalízisbeli módszereket topologikus algebrai struktúrákon tekintett függvényegyenletek vizsgálatára. Székelyhidi László invenciózus, széles látókörű matematikus, eredményei nemzetközileg is elismertek.

Székelyhidi László publikációinak jegyzéke

[1] Nyílt ponhalmazon additív függvény általános előállítása, MTA III. Osztályközlemények, 21 (1972), 503—509.
[2] Functional equations on ordered fields, Publ. Math. Debrecen, 24 (1977), 173—179. (Daróczy Zoltánnal és Lajkó Károllyal).
[3] Remark on a paper of M. A. McKiernan, Ann. Polon. Math. 36 (1979), 245—247.
[4] Polynomials on groups (Reports of Meetings, Graz, Austria, 1978.) Aeq. Mathematicae 19 (1979).
[5] Almost periodic functions and functional equations, Acta Sci. Math. Szeged , 42 (1980), 165—169.

[6] Almost periodic functions and functional equations (Report on the Second International Symposium on Functional Equations and Inequalities, Debrecen, Hungary, 1979. (Publ. Math. Debrecen, 27/1980).
[7] On a class of linear functional equations (megjelenőben a Publ. Math. Debrecen c. folyóiratban).
[8] An extension theorem for a functional equation (megjelenőben a Publ. Math. Debrecen c. folyóiratban).
[9] Remark on a paper of T. O'Connor (megjelenőben az Aeq. Mathematicae c. folyóiratban).
[10] Almost periodic solutions of functional equations (megjelenőben az Aeq. Mathematicae c. folyóiratban).
[11] Note on exponential polynomials (megjelenőben a Pacific J. of Math. c. folyóiratban)
[12] Functional equations on Abelian groups (megjelenőben az Acta Math. Acad. Sci. Hung. c. folyóiratban).
[13] Functional differential equations by splines (Lénárd Margittal, közlésre beküldve a Journal of Differential Equations, c. folyóirathoz).
[14] Note on a stability theorem (közlésre beküldve a Canadian Math. Bull. c. folyóirathoz).
[15] On a theorem of Baker, Lawrence and Zorzitto (közlésre beküldve a Proc. Amer. Math. Soc. c. folyóirathoz).
[16] The stability of linear functional equations (közlésre beküldve az Acta Math. Acad. Sci. Hung. c. folyóirathoz).

Pályamunkák, disszertációk

1. Kiterjesztési tételek a Cauchy-egyenletre, Egyetemi pályamunka, Debrecen, 1972.
2. Megjegyzések additív deviációkról, Egyetemi pályamunka, Debrecen, 1973.
3. Nyílt ponthalmazon additív függvények általános előállítása, Diákköri dolgozat, Debrecen, 1973.
4. Differencia-tulajdonságok, Diákköri dolgozat, Debrecen, 1975.
5. Lineáris függvényegyenletek egy osztályáról, Diákköri dolgozat, Debrecen, 1977.
6. Lineáris függvényegyenletek egy osztályáról, Doktori disszertáció, Debrecen, 1978.

Tóth Gábor már az egyetemen is eredményesen foglalkozott olyan témával, mely a differenciálegyenletek, dinamikai rendszerek és a topologia határterületén fekszik. Újabban a differenciálgeometria terén ér el igen jelentős eredményeket. Eddig 18 cikkét fogadták el és több cikke megjelenésre vár. Cikkei közül 8 differenciálegyenletekkel, 2 topologikus dinamikai rendszerekkel, 7 Riemann terekkel foglalkozik, 2 pedig magyar nyelvű ismertetés a differenciáltopologiáról.

A differenciálegyenletek területén fő eredménye a háromszögesítés problémájának egy széles egyenlet osztályon való megoldása. Nagyon röviden: az ún. reguláris két dimenziós rendszerekhez gráfokat rendel és ezek szerkezetéből olvassa le, hogy a rendszer háromszögesíthető-e vagy sem. Ennek alapján megállapítja, hogy pl. az Emden—Fowler egyenlet háromszögesíthető , bár a transzformáció, mellyel ez elérhető, nem ismeretes. Viszont a van der Pol egyenlet esetén, mely nem tartozik ebbe az osztályba, a válasz negatív.

Dinamikai rendszereknél kimutatta, hogy a legfeljebb kétdimenziós fázisterű rendszerek egyetlen homeomorfizmussal jellemezhetők, míg a legalább négydimenziós rendszerek nem. Három dimenzió esetén a probléma eddig eldöntetlen.

A differenciálgeometriában az Eells—Sampson-féle homotópia-tétel egy speciális esetére adott rendkívül egyszerű bizonyítást. További dolgozatai nagy részében a Riemann sokaságok tórusz feletti harmonikus fibrálásaival foglalkozik. Általánosítja Lichnerowicz fibrációs tételét, faktorizációs tételét pedig élesíti, amiből több klasszikus és néhány új eredmény speciális esetként adódik. Általánosítja J. Cheeger és D. Gromoll kompakt Riemann sokaságok véges fedőtereinek szerkezetére vonatkozó eredményeit. Analog tételeket komplex sokaságokra is bizonyított.

Tóth Gábor közleményeinek jegyzéke

[1] On the triangularizability of planar orthogonal differential equations, Period. Math. Hungar. Vol. 8 (3—4), (1977), 243—251.
[2] Characterization of aperiodic R-actions by their discrete subgroups on 2-manifolds, Proc. of the Faculty of Sci., Tokai University, Japan, Vol. XIII., (1977), 55—63.
[3] On the global triangularizability of planar differentiable dynamical systems, Studia Sci. Math. Hungar. 11 (1976), 211—228.
[4] Counterexample on non-equivalent dynamical systems which have common translation, „Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai" 23. Topology, Budapest, Hungary, (1978), 1173—1179.

[5] Extension of a theorem of A. Lichnerowicz, Proc. of the Faculty of Sci., Tokai University, Japan, Vol. XV., (1979), 29—32.
[6] Triangularization methods in the transformation theory of dynamical systems I. Graph representation of totally regular dynamical systems, Period. Math. Hungar. Vol. 11 (3), (1980), 197—211.
[7] Triangulatization methods in the transformation theory of dynamical systems II. Classification of triangularizable dynamical systems, Period. Math. Hungar., Vol. 11 (4), (1980).
[8] Triangularization methods in the transformation theory of dynamical systems III. Second order equations. Application. Period. Math. Hungar. (megjelenőben)
[9] On homotopy classes of mappings into flat Riemannian manifolds, Publicationes Mathematicae, 28—3/4, (1981).
[10] On the triangularizability of planar differential systems without critical points, Period. Math. Hungar. (megjelenőben)
[11] On a transformation problem of autonomous differential systems from stability theoretical viewpoint, Studia Sci. Math. Hungar. (megjelenőben)
[12] Toroidal Lie group actions on compact Riemannian manifolds and their relations with the fibering problem, in Banach Center Publications, Differential Geometry, Warsaw, Poland, 1979.
[13] On the reduction of differential systems to triangular form, in „Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai", Differential Equations, Szeged, Hungary, (1979).
[14] Fibrations of compact G-manifolds with finite isotropy groups, "Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai", Differential Geometra, Budapest, Hungary, (1979).
[15]—[16] Az Atiyah—Singer indextételről I—VIII. (I—II. rész lektorálva) Mat. Lapok (1981).
[17] Harmonic submersions onto nonnegatively curved manifolds, Acta Math. Hungar. (megjelenőben)
[18] Fibrations of compact Riemannian manifolds, Acta Math. (Szeged), (megjelenőben)
[19] On variations of harmonic maps into spaces of constant curvature, Studia Sci. Math. Hungar. (megjelenőben).

Jelentés a Farkas Gyula Emlékdíj 1980. évi kiosztásáról

A Társulat Elnöksége az 1980. évi Farkas Gyula Emlékdíj odaítélésére a következő bizottságot küldte ki: Prékopa András elnök, Vincze Endre alelnök, Recski András titkár,

A beérkezett 13 javaslat és ezek referátumai alapján a Bizottság az alábbi határozatot hozta:

Az alkalmazott matematikai kutatásokban, a modellalkotásban, illetve a számítástechnikai módszerek fejlesztésében nyújtott munkásságuk alapján az 1980. évi Farkas Gyula Emlékdíj I. fokozatában, és egyenként 3500 Ft jutalomban részesül:

ÉSIK ZOLTÁN, a JATE Számítástudományi Tanszékének adjunktusa,
FIALA TIBOR, az ELTE Numerikus és Gépi Matematika Tanszékének tanársegédje, és
KUN ISTVÁN, az MTA SzTAKI tudományos munkatársa;

az Emlékdíj II. fokozatában és 2500—2500 Ft jutalomban részesül:

KÁLOVICS FERENC, a Miskolci NME Analízis Tanszékének adjunktusa,
LENGYEL TAMÁS, az MTA SzTAKI tudományos munkatársa, és
TARJÁN TAMÁS, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos munkatársa.

Indoklás:

Ésik Zoltán 1951-ben született; programtervező matematikusi diplomáját 1974-ben szerezte. Eddig nyomtatásban megjelent három dolgozata mindegyikében egy-egy hosszabb idejig nyitott kérdés megoldását adja meg. További négy dolgozata van megjelenés alatt. Ezek mellett segédanyagot készített a rendszerprogramozás című tárgy oktatásához, továbbá egy, az OMFB-vel kötött szerződés keretében tanulmányt írt a programozási nyelvek szintaxisának és szemantikájának vizsgálatában alkalmazott ill. alkalmazható algebrai módszerekről. Ésik Zoltán kezdetben sztochasztikus automatákkal foglalkozott, s még hallgató korában megoldotta Saloma a két problémáját. Érdeklődése hamarosan a szintaxis-vezérelt fordítások matematikai modelljeként szolgáló fatranszformátorok felé fordult. Munkásságának nemzetközi elismerését mutatja, hogy Joost Engelfriet, a terület egyik vezető szakembere, 1979-ben Santa Barbarában részletesen ismertette Ésik Zoltánnak a determinisztikus fatranszformátorok ekvivalenciájának eldöntésére alkalmas eljárását.

Ésik Zoltán dolgozatainak jegyzéke

[1] On two problems of A. Salomaa, Acta Cybernetica, Tom 2., Fasc. 4, 1975, 299—306.
[2] On decidability of injectivity of tree transformations, Actes, Colloque de Lille sur les arbes en algébre et en programmation, 1978, 107—133.
[3] On functional tree transducers, Proceedings, Conference on Fundamentals of Computation Theory, ed. Budach, L., Akademie Verlag, Berlin, 1979, 121—127.
[4] Decidability results concerning tree-transducers I, Acta Cybernetica, megjelenés alatt.
[5] Identities in iterative and rational algebraic theories, CL and LC, megjelenés alatt.
[6] Remarks on commutative automata, Acta Cybernetica, megjelenés alatt (Imreh Balázzsal).
[7] Subdirectly irreducible commutative automata, Acta Cybernetica, megjelenés alatt (Imreh Balázzsal).
[8] Egy egyszerű fordítóprogram, oktatási segédanyag, Szeged, 1976. (Dévényi Károllyal).
[9] Algebrai módszerek programozási nyelvek szintaktikájának és szemantikájának vizsgálatára, tanulmány, Szeged, 1979.
[10] Eldönthetőségi kérdések a fatranszformációk körében, egyetemi doktori disszertáció, Szeged, 1978.

Fiala Tibor 1951-ben született, 1975-ben kitüntetéses diplomával végzett, 1976-ban megkapta a Felsőoktatási Tanulmányi Érdemérmet. 1975-től négy évig a Bánki Donát Gépipari Műszaki Főiskolán dolgozott, tanársegédi beosztásban. [1] dolgozatában az ütemezéselmélet klasszikus problémájával az ún. Flow. shop problémával foglalkozik, amely 2-nél több gép esetén NP-teljes. Erre geometriai modellt konstruált, és egy hatékony közel optimális megoldást szolgáltató algoritmust ad. A [7] dolgozatban megmutatta, hogy az Open-shop probléma rögzített gépszám, és korlátos műveleti idők esetén nem NP-teljes, hanem polinom-algoritmussal megoldható. Olyan hatékony algoritmust készített, amely nagyszámú munkadarab esetén állásidő nélkülki ütemezést biztosít. Itt használta először az úgynevezett egésszé tevési technikát, melynek az a lényege, hogy egy lineáris program valós megoldásában a változók értékeit úgy kerekítjük fel- vagy lefelé, hogy ezzel a megfelelő egészértékű programozási feladat közelítő megoldását kapjuk. A [8] dolgozat az egészsé tevés módszerében fellépő egész-, ill. valós értékű megoldások távolságára nézve tartalmaz felső becslést. Ipari megbízások alapján számos témában is részt vett elméleti és gyakorlati kutatásokban. Tanulmányt írt pl. „Háromértékű logikai függvények minimalizálásáról", numerikus módszert dolgozott ki a hazai erőműrendszer villamosenergia termelésének és tüzelőanyag elosztásának optimalizálására, amelyik egy nagyméretű nemlineáris programozási feladat.

Fiala Tibor Dolgozatainak jegyzéke

[1] Közelítős algoritmus a három gép problémára Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (1977) 389—398.
[2] Nemesszeghy—Fiala; Háromértékű elektronikus logikai áramkörök Híradástechnika XXIV. évf. 1. sz. 13—19. (1978).
[3] Termelésirányítás vektoralgebrai módszerrel. Bánki Közlemények, 1979/1. 57—65.
[4] Fekete—Fiala—Pallinger—Schubert; A hazai erőműrendszer Villamosenergiatermelésének és tüzelőanyagelosztásának együttes optimalizációja Bánki Donát GMF Jubileumi Kiadványai (1979).
[5] Matematika III. (Vektoralgebra, Vektoranalízis) főiskolai jegyzet, Műszaki Könyvkiadó, 1979.
[6] Ütemezési algoritmusok Egyetemi doktori értekezés 1979.
[7] An algorithm for the Open shop problem, ELTE Numerikus tsz. kiadványai 15 /1980. (megjelenőben a Mathematics of Operations Research-nél).
[8] J. Beck—T. Fiala; Integer making theorems. Megjelenőben a Discrete Mathematics-nél.

Kun István 1947-ben született, 1970-ben végezte el az ELTE TTK operációkutatási szakát, azóta a SzTAKI Operációkutatási Osztályán dolgozik. Főleg a tömegkiszolgálás-elmélettel, ennek rokonterületeivel és alkalmazásaival foglalkozik, de ezen kívül szép eredményei vannak a matematikai programozás geometriai problémái és a szimulációs módszerek gyakorlati akalmazásai terén is. Az [1] dolgozatban új bizonyítást ad a végesen generált konvex kúpok zártságára, továbbá egy szeparációs tételen keresztül a véges és végtelen sok homogén lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó ismert (Farkas, Csrnyikov) tételekre. A [2] tanulmányban Kun István készítette el az integrált gyártó rendszer szimulációjáról szóló fejezetet. A fejezet a termelésirányítási programrendszerekben a szimulációs módszerek felhasználási lehetőségeit tárgyalja. A [3] dolgozat Markov-jellegű tömegkiszolgálási rendszerekben a kiszolgálások számáról bizonyít sztochasztikus konvergenciát, ennek felhasználásá-

val pedig az összes foglaltsági időre centrális határeloszlástételt. A [4] dolgozat markovi tömegkiszolgálási rendszerek diszkantált költségfüggvényeivel foglalkozik. Bebizonyítja az eloszlásfüggvény folyamatosságát egy adott időpontig fellépő diszkantált költségekre, valamint ennek időbeli határértékére. Az [5] cikk egy kisszámítógépes terminálkezelő rendszer tömegkiszolgálási modellezésének problémáival foglalkozik. A [6] dolgozat az [1] dolgozat angol nyelvű változata. A [7] cikk az integrált gyártórendszer szimulációjának módszertani és programozástechnikai problémáival foglalkozik, A [8] cikk egyprocesszoros, sokcsatornás számítógépekre ad matematikailag kezelhető tömegkiszolgálási modellt. A [9] tanulmány a Dunai Vasmű hideghengerműve egy üzemrészének szimulációját ismerteti, ezen belül a szimuláció software-fejlesztési és egyéb felhasználási lehetőségeit, valamint a szimulációs program vázát. A [10] cikk egy terminálkezelő rendszer tömegkiszolgálási modelljére ad dekompozíciós algoritmust.

Kun István mind az elmélet, mind a gyakorlati alkalmazás terén fontos és szép eredményekkel rendelkezik.

Kun István dolgozatainak jegyzéke

[1] Geometriai bizonyítások a lineáris egyenlőtlenségrendszerek elméletében, Alk. Mat. Lapok 1/1975, 391—396.
[2] Az integrált gyártó rendszer (IGyR—630) számítógépes termelésirányításának előterve SzTAKI 1976. (társszerzőként).
[3] A Central Limit Theorem for Markovian Queuing Systems, Math. Op. forsch. und Stat. Ser. Opt. Vol. 8/1977. No. 3, 411—418.
[4] On the Discounted Cost of Markovian Queuing Systems, Math. Op. forsch. und Stat. Ser. Opt. Vol. 8/1977. No. 4. 565—569.
[5] Mathematical Modelling of the R12 UNTER MTA SZTAKI Közlemények, 23/1979. 37—42.
[6] A Geometrical Approach to the Theory of Linear Inequalities, Proceedings of the IX. Int. Conf. on Math. Progr. Budapest, 1979, 63—67.
[7] The Simulation of an Integrated Production System Workshop on SIMULA and Industrial Users. MTA SzTAKI Working Paper, 1980. 50—53.
[8] Zur bedienungstheoretischen Modellierung der Datenverarbeitungsanlagan mit mehreren I/0 Kanälen MTA SzTAKI Working Paper, 1980.
[9] A nagydaraboló szimulációs programjának előzetes vázlata. SzTAKI 1980.
[10] The Mathematical Model of a Terminal System, Proceedings of the Colloquium on Point Processes and Queuing Theory, Keszthely, 1978, megjelenés alatt.

Kálovics Ferenc 1947-ben született, 1971-ben szerzett matematika—fizika szakos diplomát Szegeden, pár évet a kazincbarcikai Vegyipari és Automatizálási Főiskolai Kar Matematika tanszékén oktatott, majd a miskolci NME Matematikai Intézetében lett tanársegéd, később adjunktus. Szakmai tevékenységének súlypontja a nemlineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának vizsgálatára és a megoldások tényleges numerikus előállítására esik. Nagy figyelmet érdemel több erre vonatkozó eredménye. Ezek szerint, ha az említett egyenletrendszernek véges számú megoldása van, akkor egy olyan n-dimenziós konvergens téglasorozatot tud konstruálni, mely a megoldáshoz tetszés szerinti pontossággal elvezet. Eljárása hatékony, és az eljárásnak jól kezelhető hibabecslése van. A megadott algoritmusok viszonylag enyhe feltételek mellett érvényesek, és egyben alkalmazhatók globális szélsőérték-feladatok megoldására is. E vizsgálatoknak széleskörű műszaki alkalmazhatósága van elsősorban áramlástani és mechanikai feladatok megoldásainál. A fentieken felül Kálovics Ferenc a NME Matematikai Intézetében a numerikus módszerek tárgy témafelelőse és egyik előadója.

Kálovics Ferenc dolgozatainak jegyzéke

[1] Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása, Egyetemi doktori értekezés, Miskolc, 1977.
[2] Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása érintőparaboloid módszerrel, *NME Közleményei*, IV. Sorozat, Természettudományok, *23* (1977), 19—33.
[3] Kizárási tételek többváltozós polinom zérushelyeinek kereséséhez, *NME Közleményei*, IV. Sorozat, *Természettudományok, 25* (1979), 31—40.
[4] Globális minimum meghatározása kizárásos módszerrel, *Alkalmazott Matematikai Lapok, 5* (1979), ... (sajtó alatt).
[5] Numerische Anwendungen einer Ausschaltungstheorie, *Numerische Mathematik*, ... (Erdélyi Zoltánnal közösen; sajtó alatt).

Lengyel Tamás 1950-ben született, egyetemi tanulmányait az ELTE TTK matematikus szakán végezte. Másfél évet a BME-n tevékenykedett, 1976 óta az MTA SzTAKI Valószínűségszámítási osztályán dolgozik. Fő érdeklődési területe a többdimenziós statisztikai módszerek, a clusteranalízis, a sztochasztikus approximáció elmélete és gyakorlati problémáinak megoldása. Legfontosabb elméleti jellegű eredményei: a legkisebb csoporton belüli szórásnégyzet összeg kritériumra vonatkozó clusterező eljárás veszteségfüggvényének vizsgálata és aszipmtotikájának meghatározása. Ez rámutat a Fisher és Van Ness által a clusterek számának megválasztására vonatkozó javaslatának hibájára is. Az alkalmazott módszer a clusteranalízis néhány problémájának hasznos bizonyítási eszközéül szolgálhat, mint ahogyan az a reflekciókból kiderült. Bebizonyította, hogy az m-dimenziós euklideszi térben elhelyezkedő n darab pont olyan k-particionálásainak a száma, ahol a partició halmazai konvexek és diszjunktak, n-nek polinomiális függvényei. Ez az eredmény a fenti kritériumra vonatkozó clusterezés keresésének feladatát egész értékű programozási feladatként tárgyaló megközelítés szempontjából fontos, hiszen addig csak bizonyos speciális feltételek mellett sikerült elkerülni, hogy n-nek exponenciális függvénye számú particiót kelljen figyelembe venni az optimálizálás során. Ez egyben M. R. Rao cikkének egyik nyílt problémájára is választ ad. A hierarchikus clusterező eljárások témájában is ért el eredményeket; az ilyen módszerek lehetséges számának aszimptotikájával kapcsolatban. Ezek a vizsgálatok többek között a clusteranalízis és a matematikai statisztika, illetve a diszkrét geometria (főleg Dirichlet cellák elmélete) mélyebb összefüggéseire világítanak rá. Meg kell említeni, hogy az eredmények közvetlen gyakorlati alkalmazására is sor került egy szerződéses munka keretében. Eredményeiről számos nemzetközi konferencián is beszámolt, előadásainak visszhangja igen jó. A sztochasztikus approximáció témában született egy új, deriváltmentes módszerük Gerencsér Lászlóval közösen, amely komoly visszhangot kapott a Nemparaméteres módszerek a statisztikában konferencián. Megjelent egy dolgozata a kanonikus korreláció eddig még nem ismert extremális tulajdonságairól. Az ebben a témában végzett sikeres alkalmazásról (szívkoszorúér megbetegedés előrejelzéséről) már egy korábbi cikkében is beszámolt. Az ELTE TTK és a JATE végző hallgatói számára szakdolgozati témavezetőként működött, és működik.

Lengyel Tamás dolgozatainak jegyzéke

[1] A kanonikus korrelációanalízis alkalmazása szívkoszorúér megbetegedések előrejelzésében, Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és a biológiában, 8. Neumann-kollokvium, Szeged, 1977, Előadás kivonatok.

[2] A kanonikus korrelációanalízis alkalmazása szíkoszorúér megbetegedések előrejelzésében, Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és a biológiában, 8. Neumann-kollokvium, Szeged, 1977, Előadások, 11—17. o.

[3] Legkisebb négyzetes eljárások a clusteranalízisben, kisdoktori disszertáció, ELTE TTK, 1978.

[4] On the asymptotic behaviour of the loss function of the minimum within — class variance clustering procedure, 11th European Meeting of Statisticians, Oslo, 1978, Abstracts of papers. (Társszerző: Ruda Mihály)

[5] Az egyenlőtlenség tudat vizsgálata clusteranalízissel, Szociológia, 1979, No—1. (Társszerző: Kolosi Tamás).

[6] A note on the number of clusterings, 12th European Meeting of Statisticians, Várna, 1979, Abstracts of papers.

[7] A note on the number of clusterings, MTA SzTAKI Working Paper IV./5, 1979.

[8] A kanonikus korrelációanalízis és néhány kapcsolódó probléma, Alkalmazott Matematikai Lapok, 1979, No—1.

[9] Egyváltozós regressziós függvény gyökhelyének adaptív becsléséről, Working Paper, IV/10, MTA SzTAKI, 1980.

[10] Sztochasztikus kvázi Newton-módszerek, III, (Deriváltmentes módszerek), Working Paper, IV/8, MTA SzTAKI, 1980 (Társszerző: Gerencsér László).

[11] A derivative-free stochastic Newton-method, Colloquium on Nonparametric Statistical Inference, Budapest, 1980, Abstracts (Társszerző: Gerencsér László).

[12] A derivative-free stochastic Newton-method, megjelenik a Colloquium on Nonparametric Statistical Inference, Budapest, 1980 kötetében (Társszerző: Gerencsér László).

[13] A BMDP programok rövid összefoglalása, Working Paper, IV/13, MTA SzTAKI, 1980. (Társszerzők: Bornemissza E.—H. Gaudi I.— Kiss A.—Marosi J.—Rudas T.—Szántó Gy.).

[14] A personal computerek alkalmazási lehetőségei a kórházi adatnyilvántartásban és egyéb egészségügyi területeken, 10. Neumann-kollokvium, Szeged, 1980, Előadáskivonatok (Társszerzők: Hannák L.—Kovács K.).

[15] Egy megjegyzés a hierarchikus clusterezési módszerek számáról, Working Paper, előkészületben, 1980.

Tarján Tamás 1949-ben született, matematikusi diplomáját 1972-ben szerezte Budapesten. [1] munkája egy zenepedagógiai kísérletsorozat statisztikai kiértékelésével foglalkozik. [2] és [3] munkája a „Switching theory" témakörébe tartozik. Sikerült bizonyos gráfosztályokra meghatároznia a legbonyolultabb logikai függvényt, azaz azt az n-változós logikai függvényt, amelynek kapcsolókkal való realizálása a legtöbb kapcsolót igényli az adott gárfosztály (mint kapcsolóhálózat) használata mellett. Ezen eredményeit a témakör egyik vezető egyénisége, a szovjet Lupanov is nagyra értékelte. [3]-ban az e témakörben ekvivalensen felvetődő kombinatorikai problémával foglalkozik. Egy ilyen, Katona Gyulával közösen felvetett gráfelméleti problémájára egy amerikai és egy novoszibirszki kutató egymástól függetlenül adta meg a választ. [4] dolgozatában ezen eredményeit foglalja össze. Az [5] dolgozat azzal foglalkozik, hogyan és milyen módszerekkel lehet a társadalom nyiltságát vizsgálni a vegyes házasságok eloszlásáról rendelkezésre álló statisztikai adatokból. A [6] dolgozat a beruházások folyamatára állít fel egy szép, matematikailag egzakt modellt, amely különféle hasznos közgazdasági következtetésekre ad módot. A cikk intenzíven használja a differenciálegyenletek elméletét. Végül a [7] dolgozat az alapkutatás, az alkalmazott kutatás, és a fejlesztés együttes és egymáshoz való arányaival foglalkozik. Matematikailag a sztochasztikus folyamatok előrejelzésének elméletét alkalmazza.

Tarján Tamás dolgozatainak jegyzéke

[1] Dr. Szende Ottó—Tarján Tamás, A játszott hangszer hatása a hangköz hallásra Parlando, 14. l. (1972) 10—20.
[2] Tarján T. G., On complexity of switching circuits, Problems of Control and Information Theory, 3, 3 (1974) 183—196.
[3] Tarján T. G., Complexity of lattice-configurations, Studia Sci. Math. Hungar, 10 (1975).
[4] Tarján Tamás, Kombinatorikus módszerek az információelméletben, ELTE doktori értekezés, (1975).
[5] Kovács János—Tarján Tamás. A családi struktúra gazdasági jelentőségéhez Közgazdasági Szemle, 23, 3 (1976) 302—310.
[6] Tarján Tamás—Tényi György, Kísérlet a beruházási folyamat modellezésére, SZIGMA (1977/1—2)
[7] Kovács János—Tarján Tamás, A K+F-ben foglalkoztatott létszám és várható alakulása az ezredfordulóig (megjelenés alatt).

Jelentés a Beke Manó Emlékdíj 1980. évi kiosztásáról

A Társulat Elnöksége az 1980. évi Beke Manó Emlékdíj odaítélésére a következő bizottságot küldte ki: Surányi János elnök, Némethy Katalin titkár, C. Neményi Eszter, Reményi Gusztávné, Salamon Éva, Scharnizky Viktor, Urbán János tagok. A beérkezett javaslatok és azok kiegészítései után a Bizottság a következő határozatot hozta: az 1980. évi Beke Manó emlékdíj I. fokozatában részesül:

PÁLMAY LÓRÁNT, budapesti vezető szakfelügyelő,

a díj II. fokozatában részesülnek:

BOGDÁN ZOLTÁN, Pest megyei szakfelügyelő,

DANYI ISTVÁNNÉ, a salgótarjáni Petőfi Sándor Általános Iskola tanítója,

ELŐD ISTVÁNNÉ, a Tankönyvkiadó Vállalat felelős szerkesztője,

KOVÁCS CSONGORNÉ, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium vezető tanára, és

KŐHIDI TIBORNÉ, a budapesti Tárnok utcai Általános Iskola tanítója.

Indoklás:

Pálmay Lóránt matematika—fizika szakos tanári oklevelét 1952-ben kapta az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. 1952-től 1976-ig az Eötvös Loránd Tudomány Egyetem Természettudományi Karának Geometriai Tanszékén oktatott előbb tanársegéd, majd adjunktusként. Közben 1955 és 1976 között tanított a Budapesti I. László Gimnáziumban. 1976-tól dolgozik jelenlegi munkahelyén, félállásban továbbra is részt vesz az ELTE Geometriai Tanszékének munkájában.

Egyetemi munkáját jellemzi a szakmai igényesség, és a hallgatókkal való jó emberi kapcsolat. Pontos munkájával a hallgatók példaképe, segíti tanítványaiban a tanári egyéniséget kibontakozni. Nagy szerepe van a hallgatók hivatástudatának tanári kialakításában és megerősítésében. Hosszú

évek óta részt vesz a tanárjelöltek gyakorlati tanításain és tanácsaival mind a hallgatók, mind a vezetőtanárok munkáját előbbreviszi. Tanítványainak gondjait is ismeri, és számos társadalmi funkciójában (mint például évfolyam felelős tanár, vagy elhelyezési bizottság elnöke) segíti őket ezek megoldásában.

Középiskolai tanári munkájával sok tanulónak adta meg a matematika szépségének élményét, számos versenyzőt nevelt. Módszertani elképzeléseit a maga gyakorlatában próbálta ki elsőként tanórán és szakkörön.

Vezető szakfelügyelőként ugyanezeket valósítja meg a tanárok irányításában és továbbképzésében. Szakmai és emberi tekintélyét a metematikai oktatás fejlesztése érdekében gyümölcsözteti. Saját igényességét, emberségét, munkabírását adja példaképül a tanároknak.

Számos más területen is munkálkodik a matematikaoktatás fejlődésének érdekében: 1968—72-ig az Oktatási Minisztérium tantervi reformbizottságának tagja volt. 1970-től a Társulat dunántúli titkára, és mint ilyen, a tanárok továbbképzésében nemcsak szűkebb munkahelyén fáradozik. A Társulat irányításának aktív részese.

Több mint 20 éve rendszeres előadója a TIT matematikai szakosztályának, például a József Attila Szabadegyetem előadásain népszerűsíti a matematika egy-egy fejezetét.

Hosszú évek óta több versenybizottság tagja.

Szakirodalmi munkássága széleskörű: társszerzője volt az 1966-tól érvényes középiskolai matematika tankönyveknek (Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák számára I.—IV.) és a hozzájuk tartozó tanári segédkönyveknek (Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák számára a matematika tanításához, I.—IV.). Sok oktatási segédlet szerzője és társszerzője. Cikkei jelentek meg a Középiskolai Matematikai Lapokban, a Szakmódszertani Közleményekben, az Útközben kiadványban, a Pedagógiai Szemlében, a Természet Világa folyóiratban. Cikkeiben foglalkozott a tanulói felfedezéssel, a dolgozat javítás problémájával, a felvételi vizsgákkal, Bolyai Farkas munkásságával, a grafikus módszerekkel, a nomogramokkal.

Minden tekintetben kiemelkedő tevékenységének eddigi elismerései: KISZ Aranykoszorús jelvény, az Oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetés, és 1963-ban a Beke Manó díj II. fokozata.

Bogdán Zoltán 1955-ben szerzett matematika—fizika szakos tanári oklevelet a József Attila Tudományegyetemen. 25 éve dolgozik első munkahelyén a ceglédi Kossuth Lajos Gimnáziumban. Jó szakmai felkészültsége gazdag tapasztalataival párosulva jó mukájának záloga. Tanítási óráit úgy szervezi, hogy azok munkaórák legyenek, és mind a jobbaknak, mind a gyengébbeknek legyen alkalma önálló munkára. Pontos tervezéssel valósítja meg a differenciált foglalkoztatást. Szívesen kísérletezik új módszerekkel. A tanórán kívül mindig vállalja mind az iskolai korrepetáló segítségnyújtást, mind a színvonalas tehetség gondozást. Tanítványai között sokszor van olyan, aki a Középiskolai Matematikai Lapok eredményes feladatmegoldója, többen jól szerepelnek az Arany Dániel és az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyeken.

1966 óta megyei szakfelügyelő. Szakfelügyelői hitvallásában elsődlegesnek a tanárok segítését tartja. Versenyekre előkészítő feladatgyűjteményét az egész megye tanárai használják. Nagy gonddal tervezi és szervezi a megye tanárainak továbbképzését. Egyik szervezője a „3 megye" matematikai versenynek.

Munkájára, véleményére igényt tart az Oktatási Minisztérium, az Országos Pedagógiai Intézet, a Tankönyvkiadó Vállalat. Tantervet, tankönyvet bírál, lektorál. 1972 óta vesz részt a Fakultációs Tantárgycsoportos kísérlet kimunkálásában, kipróbálásában. Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny bizottságának tagja. Tevékenyen vesz részt több korszerű szemléltető eszköz kipróbálásában. 1974-ben az Oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetést kapott.

A tanításban elért kimagasló eredmények mellett gondot fordít állandó önképzésére is. Elvégezte a vezetőképző tanfolyamot. Állandóan tanulmányozza a szakirodalmat. A Matematika Tanítása folyóirat rendszeres feladatmegoldója. A Társulat metamatikatanárok számára kiírt feladatmegoldó versenyén két ízben díjat kapott.

Danyi Istvánné 1970-től kisebb kitérővel jelenlegi munkahelyén tanít.

Fő jellemzője a lelkiismeretes munka és az új utak keresése. 1972-ben a megyében elsőként kapcsolódott be az új tanterv bevezetésével kapcsolatos előmunkálatokba, az esztergomi Tanárképző Főiskola és az Országos Pedagógiai Intézet tanfolyamai révén. Változatos feladatsorok tervezésével, a tanulói tevékenység szervezésével, lendületes óravezetéssel elérte, hogy tanítványai szeretik a matematikát, jól felismerik a problémákat, fejletten gondolkodnak. Óráinak légköre oldott, felszabadult.

Tudását, tapasztalatait mindig nagy buzgalommal ismertette meg kartársaival iskoláján belül és túl. 1973-tól városi munkaközösség vezető volt. Készségesen tartott bemutató órákat, előadásokat, eszköz ismertetéseket, munkaközösségi foglalkozásokat. 1976-tól 78-ig mint a Megyei Továbbképző Kabinet felügyelője tett sokat az új tanterv bevezetésének sikeréért. Ő ismertette meg a megyében az új módszereket, folyamatosan készítette a kollégákat az új matematika tanítására, miközben jelenlegi iskolájának egy osztályában óraadóként a matematikát tanítva gyakorlati bemutatókkal is

alátámasztotta módszertani előadásait. 1979-ben az ő javaslatára alakult meg a megyében az alsó tagozatos alkotói munkaközösség, mely a nevelők felkészülését, és így közvetve a tanulói sikereket hivatott segíteni.

Önképzésére, a matematikai ismeretek minél mélyebb elsajátítására sok gondot fordít. Példaképül állítható ügyszeretete, alaposság, lelkiismeretessége. Munkájának egyik legfontosabb eredménye, hogy környezetével megszerettette a matematika tanítását.

Előd Istvánné 1951-ben a Budapesti Pedagógiai Főiskolán matematika—fizika—kémia—testnevelés szakos általános iskolai tanári, majd 1954-ben az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika-ábrázológeometria szakos középiskolai tanári oklevelet szerzett. Rövid általános iskolai tanári gyakorlat után a Tankönyvkiadó Vállalathoz került, ahol a matematikai kiadványok egész sora az ő szerkesztői munkája segítségével látott napvilágot.

A tankönyvek közül az 1960-as években a felső tagozatos és a gimnáziumi új tankönyveket szerkesztette. 1974-től az általános iskolai ideiglenes, 1978-tól a jelenleg használatos tankönyvek kimunkálásán fáradozik. Az ő érdeme is, hogy az 1960-as évek reform könyveivel egyidőben jelenhettek meg a hozzájuk tartozó tanári segédkönyvek. Az általa szerkesztett könyvek használhatóságát mindig figyelemmel kísérte. Utóbírálatokat, ankétokat szervezett szerte az országban. Az ezeken elhangzó véleményeket az újranyomásoknál hasznosította.

A tanulók matematikai fejlődése érdekében szakköri füzetek megjelentetését kezdeményezte és szerkesztette azokat. A szülők segítésére maga írt könyvet a 70-es években „Szülők könyve" címen arról, hogy hogyan segítheti a szülő a gyermekét a matematika tanulásában. A tanárok módszertani kultúrájának ápolása érdekében létrehozta az „Élő matematika" és az „Új utak a matematika tanításában" sorozatokat. Évek óta A Matematika Tanítása a folyóirat szerkesztő bizottságának tagja. Saját maga is több cikket írt a folyóiratban.

A matematikai kultúra fejlődését szolgálta úgy, is hogy közel 30 év alatt sok fiatal szerzőt vezetett be a könyvírás szakmai ismereteibe, és tanácsaival segítette munkájukat.

Kovács Csongorné 1972-ben szerzett középiskolai tanári oklevelet az Eötvös Loránd Tudomány egyetem matematika—fizika szakán. 1972-től Budapesten, a XV. kerületben, majd 1974-től jelenlegi munkahelyén tanít. 1977-től vezető tanár. Már egyetemi hallgató korában is elmélyülten érdeklődött a matematika módszertana iránt. Tanárként mind szakmai, mind módszertani szempontból évek óta kiemelkedő munkát végez. Tanítványai szeretik és tudják a tantárgyat. Tanórai munkáján túl szakkört vezet a Kis Matematikusok Baráti Körének keretében. Szakkörösei nagy sikerrel szerepeltek az országos versenyeken.

Az új matematika elterjesztésében és népszerűsítésében sokoldalú szerepet vállalat. Mint vezetőtanár, a Fővárosi Pedagógiai Intézet szemináriumain, bemutató óráin, komplex matematikai tanfolyamok konzultációin tette ezt. Meggyőzően ismertette meg a résztvevőket az új anyag és módszerek hatékonyságával. Több ízben tartott tanterv és tankönyv ismertetést tanároknak. A szülők számára is tartott ismertetéseket. A Pedagógiai Szemlében cikket írt az új tantervről. Az Iskola TV-ben kiváló órarészletekkel szolgálta az új matematika elterjedését. A Kis Matematikus Baráti Körök szakkörvezetőinek országos konferenciáján előadásokat tartott. Tagja a TIT országos versenybizottságának. A gyengénlátók matematikai tananyaga reformálásában is közreműködik.

Az új általános iskolai tankönyvsorozat egyik szerzője. Ebből eddig az 5. és 6. osztályos jelent meg, a 7. és 8. osztályos könyv megjelenése folyamatban van. Szerzője a tankönyvsorozathoz tartozó tanári segédkönyveknek is, és a csatlakozó feladatlap-sorozatnak az alkotó szerkesztője. Ebben való munkája is kiváló, mert ezek a könyvek kiválóan oldják meg a tantervi célkitűzéseket.

Kőhidi Tiborné 1960-ban szerzett tanítói oklevelet a kaposvári Tanítóképző Intézetben. Munkáját osztatlan tanulócsoportban kezdte. 1967-től a budapesti Bartók Béla úti Általános Iskolában dolgozott, itt kapcsolódott be 1971-ben az új matematika oktatásának kísérletébe. 1975 óta jelenlegi munkahelyén gyümölcsözteti kiváló elméleti felkészültségét és gyakorlati szaktudását. Precíz, lelkiismeretes munkát végez. Tanítványai nemcsak tudják, hanem rajongásig szeretik is a matematikát. Iskolájának nevelőit, mint az alsó tagozatos munkaközösség vezetője segíti abban, hogy őhozzá hasonló lelkesedéssel és hozzáértéssel tanítsák a matematikát. A szülők körében is nagy szeretetnek és tiszteletnek örvend.

1976-tól az Iskola-TV pedagógusoknak szóló továbbképzésében 5 alkalommal órarészletek tartásával működött közre. 1977-től a Fővárosi Pedagógiai Intézetben az új tanterv tanításának előkészítésére egyrészt tanfolyamot vezetett, és a tanfolyamon gyakorlati foglalkozásokat tartott.

1979-től a Budapesti Tanítóképző Intézet szakvezető tanítója, és mint ilyen gyakran tart a hallgatóknak bemutató tanításokat. Ezzel a Főiskola vezetőinek elismerését is kiérdemelte.

Jelentés az 1980. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítéléséről

A Társulat Elnöksége az 1980. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítélésére az alábbi összetételű bizottságot küldte ki: T. Sós Vera elnök, Totik Vilmos titkár, Fried Ervin, Győry Kálmán, Kántor Sándor, Lippner György, Pollák György.

A Bizottság 1980. májusi ülésén a beérkezett javaslatok alapján az alábbi határozatot hozta:

A Rényi Kató Emlékdíj I. fokozatában és 3000—3000 Ft pénzjutalomban részesíti:

HORVÁTH LAJOS-t a JATE IV. éves matematikus hallgatóját és

PÁLES ZSOLT-ot a KLTE V. éves matematikus hallgatóját.

Indoklás:

Horváth Lajos számottevő önálló tudományos eredményeket ért el a valószínűségszámításban és a matematikai statisztikában. Első eredményei valószínűségi változók véletlen indexes határeloszlásaira vonatkoztak. Később általánosítja a Prékopa-féle készletgazdálkodási modellt, majd véletlenül cenzorált mintákra épülő folyamatok egy (részében társszerzőkkel elért) igen általános, teljes mértékben új erős approximációs elméletének alapjait veti meg. Ez az elmélet, melynek kiindulópontja a nevezetes Komlós—Major—Tusnády tétel cenzorált mintákra történő kiterjesztése, széleskörűen alkalmazható, például a megbízhatóság-elméletben és a túlélés-függvények becslésének klinikai gyakorlatában. Kilenc dolgozata van sajtó alatt, ill. kéziratban.

Páles Zsolt az egyenlőtlenségek és függvényegyenletek terén ért el új tudományos eredményeket. Első munkáiban invariáns mértékekről és lineáris normált téren értelmezett középértékekről bizonyított tételeket. Egyenlőtlenségeket igazol bizonyos közepekre, általánosítja a Hölder-egyenlőtlenséget, továbbá (Daróczy Zoltánnal közösen) jellemzi a multiplikatív középértékeket. Öt dolgozata van sajtó alatt, ill. előkészületben.

A Bolyai János Matematikai Társulat nagyrendezvényei 1980-ban

CSILLAG PÁL TALÁLKOZÓ (Balatonlelle, 1980. június 5—10.)

A *Csillag Pál Találkozót* ebben az évben június 5—10. között rendeztük Balatonlellén az 1973-ban vagy azután végzett matematikusok részére. A találkozón 116-an vettek részt (7 kísérő is jelen volt). A szállás az elmúlt évekhez hasonlóan a Budapesti Műszaki Egyetem Balatonlelle-i KISZ táborában volt, az előadásokra is a tábor előadótermében került sor. Az ebédet és a vacsorát a Centrál V. V. balatonszemesi konyhájáról hoztuk, a reggelit a tábor közelében levő üzletben szereztük be.

A rendezvény tudományos programját 28 egyenként 20 perces előadás alkotta:

Győry György:	Enkéz párhuzamos folyamatok vizsgálatára.
Barthaly Judit:	A clusteranalízis alkalmazás a hosszútávú időjáráselőrejelzésben.
Tutsek Endre:	Meteorológiai vektormezők tipizálása clusteranalízissel.
Megyeri György:	A nempermanens vízmozgás egynéhány problémája.
Csupor László:	Számítógépes rajzolas és tervezés.
Tasnádi Ágnes:	Lineáris szűrők.
Balogh Zoltán:	Q-halmazok topológikus terekben.
Sztrik János:	Gépkiszolgálási problémákról.
Gáspár Csaba:	A perem-integrálegyenlet módszerről.
Pap Gyula:	Gauss mértékek Hilbert terekben.
Kormos János:	Mátrix értékű AR idősor MA előállítása.
Sanda Lajos—Petrócki Ágnes:	Egy interaktív felhasználói rendszer fejlesztésének tapasztalati.
Hablicsek László:	Matematikai modellek a demográfiában.
Lenkehegyi Attila:	Disztributív bővítésekről.
Pálfy Péter Pál:	A rovatgyűjtő matematikus (egyszerű csoportok)
Rónyai Lajos:	Függvényteljes algebrák.
Pethő Attila:	Algebrai kódok kódtávolságáról.
Pach János:	A békés egymás mellett élés (a diszkrét geometria ürügyén).
Ury László:	Az isteni sugallatok használati értékéről (az algoritmuselmélet új eredményei).
Császár Gyula—Schuller Attila:	Téves kapcsolás (távközlésforgalom és megbízhatőság együttes vizsgálata).
Nagy András:	Bonyolult LP feladat egyszerű megoldása.
Terlaky Tamás:	Ip-programozás.

O. Nagy István:	Közvetlen műholdas műsorszórás.
Rudas Tamás:	Nominális változók statisztikai vizsgálata.
Molnár László:	Egy adatredukciós eljárás vizsgálata.
Föglein János:	Képfeldolgozás az SZKI-ban és matematikai problémái.
Ruzsa Imre:	Nyereséges játékok.
Sütő József:	Általánosított entrópiák a kódoláselméletben.

A tudományos programot
5-én este filmvetítés (A lakihegyiek, Hajnalok) és 8-án kirándulás (Keszthely, Hévíz, Csillagvár) egészítette ki.

NEMPARAMÉTERES MÓDSZEREK A MATEMATIKAI STATISZTIKÁBAN KOLLOKVIUM

(Budapest, 1980. június 23—28.; résztvevők száma: 131 fő)

A kollokvium nemzetközi szervezőbizottságának tagjai: D. R. Cox (GB), B. V. Gnedenko (SU), J. Jureckova (CS), M. L. Puri (USA), P. Revesz, K. Sarkadi, I. Vincze (elnök), R. van Zweet (NL); a helyi szervező bizottság tagjai: Arató M., Bártfai P., Csáki E., Gyires B., Tusnády G.; titkárok: Krámli A., Móri T., Rejtő L. voltak.

A kollokviumot a Bernoulli Society és a Központi Statisztikai Hivatal támogatta. A Társulat és a Bernoulli Society nevében tartott megnyitóbeszéd után plenáris előadások hangzottak el a megnyitó napján. A rendezvényen hét 45 perces plenáris előadást és 85 húszperces szekcióelőadást hallgatott a konferencia négy napja alatt a 131 résztvevő (93 külföldi és 38 magyar), a következő témákból: statisztikus próbák, becslések, rendezett minták, rank statisztikák és kiválasztás, tapasztalati eloszlás, regresszió és szochasztikus folyamatok. A resztvevő tehetséges fiatal statisztikusok mellett olyan szaktekintélyek is hozzájárultak a konferencia sikeréhez, mint: J. R. Blum, D. R. Cox, B. Epstein, B. de Finetti, Z. Govindorajulu, P. K. Sen, R. van Zweet. A konferencia előadásaiból készülő kötetbe mintegy 60 résztvevő küldte be, illetve fogja elküldeni dolgozatát. A tudományos programot egésznapos kirándulás egészítette ki; a résztvevők Tihany—Balatonfüred, illetve dunakanyari utak közül választhattak. A konferencia sikeréhez nagymértékben hozzájárult a Bernoulli Society és a Központi Statisztikai Hivatal.

ANGOL—FINN—MAGYAR—SVÉD MATEMATIKAI TANULÓVERSENY

(Mariehemn, 1980. június 28—július 4.; résztvevők: 8 diák, 2 kísérő)

A Finn Matematika- Fizika- és Kémiatanárok Egyesületének (MAOL) meghívására jún. 29. és júl. 4. között nyolc középiskolás diák és két kísérő vett részt a Finnországban rendezett Nemzetközi Matematikai Versenyen. A kinntartózkodás teljes költségét a meghívók fedezték, a repülőjegyekről a Társulat gondoskodott az OM által az olimpiák részére kiutalt összegből. A versenyen Finnország, Anglia, Svédország és Magyarország csapata vett részt, szervezésük lényegében a Nemzetközi Matematikai Olimpiák szokásai szerint történt. A kétnapos versenyen diákjaink relative jól szerepeltek, a feladatok átlagos nehézsége a legnehezebb olimpiákéval volt azonos; megoldásaik között néhány igen értékes is volt, elmaradtunk azonban a többi versenyzőtől a matematikai kifejezőkészség fejlettsége terén. A versenyen nem állapítottak meg díjkategóriákat, hanem csupán sorrendet. A magyar versenyzők helyezései (zárójelben a maximális 40 pontból elért pontszámuk):

1. Bohus Géza, Bp. Fazekas M. Gyak. Gimn. IV. (28)
3. Benkő Bálint, Szfehérvár, Teleki B. Gimn. IV. (20)

5— 6. Simonyi Gábor, Bp. Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn. III. (18)

9—10. Tardos Gábor, Bp. Berzsenyi D. Gimn. II. (16)
Umann Gábor, Bp. Fazekas M. Gyakorló G. IV. (16)

12—13 Károlyi Gyula, Bp. Fazekas M. Gyak. Gimn. II. (12)

11. Kiss György, Miskolc, Földes F. G. IV. (15)

18—21. Elek Gábor, Bp. Eötvös J. Gimn. III. (9)

Az egyes országok pontszámai: Magyarország 134, Anglia 84, Svédország 76, Finnország 60. A rendezők valamennyi résztvevőt megjutalmaztak, az élmezőnyben szereplők rendkívül értékes ajándékokat kaptak.

A csapat Helsinkibe érkezett meg, innen Turkuba utazott, majd hajóval tovább az Ahvenanmaa (Aland) szigetek Maarianhamina (Mariehemn) nevű városába, a verseny színhelyére, így a diákoknak a versenyen kívül is számos maradandó élményben volt részük. A vendéglátás és rendezés a nemzetközi matematikai versenyek történetében eddig még nem tapasztalt magas színvonalat ért el.

RÁTZ LÁSZLÓ VÁNDORGYŰLÉS (Salgótarján, 1980. július 7—11. résztvevők száma: 277 fő)

A 25. vándorgyűlést a Pénzügyi és Számviteli Főiskolán rendeztük meg. A szállást és az étkezést a Furák Teréz Középiskolai kollégium és a Főiskola diákotthona szolgáltatta. Az ellátás és a külső körülmények zavartalan biztosítása a központi és helyi szervező bizottság alapos és körültekintő munkájának eredménye. A résztvételi díjak megállapítása a rendezvényen nyújtott szolgáltatásokkal teljes összhangban történt. Arra azonban ügyelni kell a jövőben, hogy a kiosztásra kerülő anyagokból minden résztvevő kaphasson, ezeket úgy kell össszeállítani, hogy abban a vándorgyűlés minden résztvevője találjon számára hasznosíthatót! (Jobban oda kell figyelni az alsótagozatban tanító nevelőkre!)

A vándorgyűlés idei témaválasztásában a fő hangsúly az új tantervek tartalmi és módszertani kérdéseinek megvitatása volt. Az alsótagozati szekció nemcsak módszertani ajánlásokat mutatott be, hanem egy-két problémát (gráfok, a matematika egsége) elméleti oldalról is megvilágított. Igen hasznos vol a „Honnan-hová" kérdés alapos körüljárása a 4. osztályos anyagban. (Előadó: Ill Mártonné, Baja, Tanítóképző). Ezt az előadást a felsőtagozati szekció hallgatóinak kérésére meg kellett ismételni. A jövőben ki kell elégíteni az alsó-felsős közös előadások, viták igényét. (Mit ad az alsótagozat, mit vár a felső?) Hasonló próbálkozások vannak a felsőtagozati és középiskolai szekció munkájában is. Ennek jegyében hangzott el Pálmay Lóránt: Mit vár a középiskola az általános iskola matematikatanításától? — a felsőtagozati szekcióban. A jövőben keresni kell a határterületeket, s azokat mind elméleti mind pedig módszertani oldalról a felsőtagozati és középiskolai szekciónak közösen kell feldolgozni. Hasznosnak és jónak bizonyult a tankönyvszerzők által vezetett ankét az új tankönyvekről (6. osztály — vezette Kovács Csongorné és Sztrókay Kálmánné; 4. osztály — vezette Kőhidi Tiborné). Nem volt kellően hatékony azonban az új középiskolai tankönyvek bemutatása. Nagy port kavart a felsőoktatási szekcióval közösen rendezett vita a „Matematikai jelölésekről" (vitaindító: Császár Ákos). Sajnálatos módon a vita nem a vitaindítóban világosan megfogalmazott kérdésekről, hanem az új I. gimnáziumi tankönyvről bontakozott ki. A vita ilyetén alakulására a jelenlevő középiskolai tanárok nem készültek fel, és érdemben nem nyilatkoztak az új tankönyv használatának a tanítási gyakorlatban fellépő problémáiról. Jó lenne, ha egyetemi oktatók és középiskolai tanárok az „ügyről" (a matematika középiskolai tanításának bevált módszereiről és a felmerülő problémákról) tudnának hasonló fórumokon beszélgetni, vitázni. Ehhez az is szükséges, hogy a program összeállítói pl. Oktatási bizottság elé vigyék a kész programot. A megbeszélésen az egyes területek felelősei vállalják a viták előkészítését. (Érdemben vitatkozni ugyanis csak felkészülve lehet.)

A 25. Vándorgyűlés sokrétű és változatos munkát végzett. A résztvevők véleményét, igényeit figyelembevevő feljegyzéseinket a jövő évi rendezvény előkészítésénél feltétlenül fel kell használni.

FELSŐOKTATÁSI ANKÉT (Salgótarján, július 9—10.)

A Felsőoktatási Bizottság ankétot szervezett I. „A matematikatanár-képzés és tanítóképzés problémáiról" és a II. Matematika egyetemi és főiskolai oktatásáról (matematikus és tanári szakoktól különböző képzésben)". A két szekció közös témája volt a matematikai jelölések kérdése, amelynek vitaindító előadását Császár Ákos tartotta. Az I. szekcióban az egyes vitapontokhoz bevezető referátumot tartottak: Kántor Sándorné (KLTE), Szendrei János (JATE), Pósa Lajos (ELTE), a II. szekcióban: Klafszki Emil (NME), Lőcs Gyula (BME), Havass Iván (BME), Rózsa Pál (BME), Vincze Endre (NME), Paál Györgyné (KMF). Az igen színvonalas és számos gondolatot, javaslatot tartalmazó referátumoknak is köszönhető, hogy szinte minden érintett kérdésben aktív és hasznos vita volt, sok értékes javaslat hangzott el. A vita kiértékelése, az illetékes fórumokhoz továbbítandó javaslatok összegezése a bizottság további feladata.

DIÁKKÖRI NYÁRI ISKOLA (Veszprém, 1980. augusztus 10—17.; résztvevők száma: 50 fő)

A Nyári Iskola témája komplex függvénytan volt, délelőttönként 4—5, délutánonként kb. kétórányi előadást tartottak; mind a két utazási napon is voltak előadások. Meghívott előadók: Beck József, Lempert László, Petruska György voltak. Az 50 diák ellátása (szállás, étkezés) biztosítása a tavalyihoz képest idén még nehezebbnek bizonyult. Hosszas keresés után végül a veszprémi Szabó Gáspár Leánykollégiumban kaptunk szállást, előadótermet pedig egy közeli iskola biztosított. A Nyári Iskola eredményesnek mondható.

„FÜGGVÉNYEK, SOROK, OPERÁTOROK" KONFERENCIA (Budapest, 1980. augusztus 21—28.; résztvevők száma: 201 + 26 fő)

A Társulat és a Magyar Tudományos Akadémia Fejér Lipót és Riesz Frigyes születése 100. évfordulója alkalmából rendezte a konferenciát. Tekintettel a kiemelkedő jelentőségű eseményre, a rendezvényt az IMU is támogatta (500—500 $ támogatást adott 4 résztvevő utazásának elősegítésére). A konferencia szervező bizottsága a következő összetételű volt: P. Halmos (USA), †R. Nevanlinna (SF), Sz. M. Nikolskii (SU), Gy. Pólya (USA), G. Szegő (USA), tiszteletbeli elnökök; Szőkefalvi-Nagy Béla, elnök; Császár Ákos, Leindler László, Tandori Károly, alelnökök; Bognár János, Szabados József, titkárok; Daróczi Zoltán, Halász Gábor, Révész Pál, Mróicz Ferenc, Schipp Ferenc. A megnyitó ünnepség az Akadémia dísztermében volt, ahol Polinszky Károly, az Akadémia alelnöke megnyitó szavai után Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikus, majd ezt követően Paul Halmos professzor méltatta Riesz Frigyes életét és munkásságát. Fejér Lipót életművéről Tandori Károly akadémikus és J.-P. Kahane professzor (F) emlékezett meg. Végül felolvasásra került Pólya György professzor személyes jellegű megemlékezése Fejér Lipótról (sajnálatos módon Pólya György betegsége miatt személyesen nem tudott részt venni a konferencián).

A megnyitót követően a Társulat, az Akadémia, a Művelődési Minisztérium, valamint a Deutsche Mathematische Gesellschaft képviselői néhány résztvevő jelenlétében megkoszorúzták a két világhírű tudósnak a Mező Imre úti temetőben levő sírját.

A konferencián 22 országból 201 matematikus és 26 fő kísérő vett részt. A Társulat, ill. az Akadémia által vendégül látott résztvevők (P. Halmos, Sz. M. Nikolskii, P. L. Butzer, Z. Ciesielski, T. H. Ganelius, L. G. Iliev, J.-P. Kahane, R. S. Phillips) hosszabb plenáris előadásokon számoltak be kutatási eredményeikről, míg 171 résztvevő a három szekció (valós és komplex függvénytan; approximációelmélet és függvénysorok; operátorelmélet) valamelyikében tartott rövidebb előadást. Az előadások témakörét a szervező bizottság igyekezett úgy korlátozni, illetve csoportosítani, hogy azok minél inkább megfeleljenenek a két névadó által művelt területeknek. Az utolsó napon két problémaszekcióra is sor került A résztvevők, valamint kísérőik számára a szervező bizottság fogadást adott a Budapesti Műszaki Egyetem dísztermében. A programban még egy egésznapos visegrádi hajókirándulás is szerepelt, az ottani nevezetességek megtekintésére. A jelentős évforduló, valamint a konferencia magas színvonala indokolttá teszi az elhangzott előadások megjelentetését a Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai sorozatban.

HÁLÓELMÉLETI KOLLOKVIUM (Szeged, 1980. augusztus 25—29.; résztvevők száma 60 fő; a Csongrád megyei Tagozat és JATE közös rendezvénye)

A kollokvium résztvevőiből 25 szocialista országokból, 26 tőkés országokból 9 pedig Magyarországról érkezett. Összesen 43 előadás hangzott el. A konferencia előzetese öt további előadás kivonatát is tartalmazta. Ezek szerzői különböző okokból nem tudtak résztvenni a konferencián. A konferencián a szervező bizottság ezúttal megkülönböztetett plenáris előadókat és a konferencia vendégeit. Plenáris előadást tartottak, és ezért előadói díjat kaptak, de nem voltak a konferencia vendégei G. Bruns (CAN), N. Filippov (SU), T. Fofanova (SU), G. Grätzer (CAN), J. Hion (SU), R. Wille (D). A konferencián a Társulat vendégeként vett részt A. Day (CAN), C. Herrmann (D), G. Kalmbach (D), T. Katrinak (CS). Kiemelkedő eredmények, előadások: ezen a konferencián vált általánosan ismertté, hogy J. B. Nation megoldotta a szabad hálók véges részhálóinak jellemzésére vonatkozó Jónsson-problémát. Nation nem vett részt a konferenciá n, de A. Day ismertette az eredményt. C. Herrmann a 4 elem által generált normálosztóhálók teljes klasszifikációját adta, ezzel tízéves nyitott problémát oldva meg. V. Slavik nem-moduláris varietások egy seregéről bizonyította, hogy annak elemei nem tesznek eleget az amalgam-tulajdonságnak. (A moduláris nem-disztributív varietásokra ez ismert volt.) Ez a válogatás a szervező bizottság alelnöke egyéni ízlését tükrözi, mások — minden bizonnyal — más előadásokat is kiemelendőnek tartottak volna. Örvendetes, hogy minden előadás magas színvonalú volt. A konferencia résztvevői a következő országokból érkeztek: Szovjetunió, Lengyelország, Csehszlovákia, Románia, NDK, NSZK, USA Kanada, Ausztrália, Japán, Ausztria, Franciaország, Belgium.

Program: A konferencia öt napig tartott; augusztus 25-én délig érkeztek meg a résztvevők, az előadások délután kezdődtek meg. Összesen hét ülés volt, átlagosan 6-6 előadással. A plenáris előadások 45 percesek, a többi — az előadó választásától függően — 15, 25 vagy 35 perces volt. A nyitott problémákkal foglalkozó ülést az Egyetemi Füvészkertben tartották. Kulturális programként ismerkedési est, Füvészkerti látogatás, illetve városnézés szerepelt.

TISZTÚJÍTÓ KÖZGYŰLÉS (1980. december 30.)

Társulatunk 1980. december 30-ára Közgyűlést hívott össze, melynek napirendjén alapszabály módosítás és tisztújítás is szerepelt. A Közgyűlésen 169 küldött (86 budapesti és 83 vidéki) jelent meg. Ezek közül 162 adott le szavazatot a tisztújítás alkalmából. Az Alapszabály szerint 205 küldött megválasztására volt lehetőség, ebből 202 került ténylegesen megválasztásra, a kaposvári és a szolnoki tagozat nem állított küldötteket.

Surányi János elnök megnyitójában köszöntötte vendégeinket, dr. Ajtai Miklóst, a MTESZ társelnökét és dr. Jéki László főtitkárhelyettest. Megemlékezett az előző közgyűlés óta elhunyt tagtársakról, köztük Alexits György és Rédei László tiszteletbeli elnökről. Surányi János javaslatot tett a szavazatszámláló bizottságra. Ezt a közgyűlés egyhangúan elfogadta. Ezután Császár Ákos főtitkár fűzött néhány megjegyzést az alábbiakban olvasható — a küldötteknek írásban előre kiküldött — főtitkári jelentéshez.

Főtitkári jelentés

1. Bevezetés

A következő jelentés célja, hogy képet adjon a Bolyai János Matematikai Társulat működéséről az 1978. június 27-én tartott közgyűlés óta eltelt időszakban, s egyben áttekintést nyújtson az akkor megválasztott vezetőség munkájáról. Az azóta eltelt időszak mintegy félévvel rövidebb a szokásos hároméves periódusnál, amit az tett szükségessé, hogy a MTESZ a szövetség és a tagegyesületek vezetőségválasztásait időben össze kívánja hangolni az ötéves tervciklusokkal. Ennek megfelelően a most megválasztandó vezetőséget öt évi időtartamra fogjuk a Társulat irányításával megbízni; az Alapszabály ilyen értelmű módosítása éppen a jelen közgyűlés egyik napirendi pontjaként szerepel.

A beszámolási időszakban a Társulat tovább folytatta tevékenységét a korábban hagyományosan kialakult irányokban, új kezdeményezésekkel igyekezve elkerülni a formák megmerevedését és alkalmazkodva a felmerülő igényekhez. Tartalmi tekintetben iránymutatónak tekintettük azt a cselekvési tervet, amelyet az Elnökség 1977 szeptemberében fogadott el, figyelembe véve a MTESZ Országos Elnökségének a MTESZ tevékenységéről szóló párthatározaton alapuló ajánlásait. Ennek értelmében a Társulati munka súlypontja egyrészt magas szintű konferenciák szervezése volt a korszerű matematika legélénkebben fejlődő fejezeteiből s a matematika gyakorlatilag is legfontosabb alkalmazásaiból, másrészt a matematika oktatásának elősegítése a matematika különböző szintű oktatóinak folyamatos tájékoztatása, tapasztalatcseréjük elősegítése révén, valamint a kiemelkedő matematikai tehetségek felkutatásában nyújtott segítség által. Az oktatás előmozdítására irányuló munkában végig kiemelten kezeltük az általános iskola új matematikai tanterve minél jobb végrehajtásának támogatását, valamint a középiskolai tantervek továbbfejlesztésére irányuló kísérletező munkát s az ezzel kapcsolatos tapasztalatcserét. Megélénkült a Társulat tevékenysége a matematika felső szintű oktatásának kérdéseit taglaló viták területén; ezen a téren a Társulat egyre inkább betölti azt a szerepet, amelyet társadalmunk joggal vár el tőle.

A népgazdaság általános helyzetével kapcsolatos nehézségek nem kerülhették el a MTESZ tagegyesületeit sem. Az erőforrások minél hatékonyabb kihasználása céljából a Szövetség éppen a beszámolási időszak folyamán vezetett be új gazdálkodási rendet; ezzel kapcsolatban nem kevés, remélhetőleg átmeneti nehézség merült fel, az átállás jelentékeny többletmunkát rótt a Társulat aktíváira és apparátusára, és az ő odaadó munkájuk, valamint a MTESZ vezetőinek segítőkészsége maximálisan szükséges volt ahhoz, hogy a társulati tevékenység tartalmának minden lényeges csorbítása nélkül folytathassuk munkánkat az elmúlt években.

Azt a jóleső érzést, hogy a Társulat az utolsó vezetőségválasztás óta eltelt időszakban minden nehézség ellenére is eredményesen tudta megvalósítani feladatait, beárnyékolja a vezetőség időközben elhunyt tagjainak elvesztése fölött érzett fájdalom. Tiszteletbeli elnökeink közül 1978. október 14-én elveszítettük Alexits Györgyöt, 1980. november 21-én pedig Rédei Lászlót. A matematika tudományának mind a ketten kiemelkedő, iskolateremtő egyéniségei voltak, akiket méltán gyászol nemcsak a hazai, hanem a nemzetközi matematikai élet is; ezen túl azonban Társulatunk életében is jelentős szerepet töltöttek be, hiszen a Társulatnak a második világháború befejezését követő újjáalakulása után Rédei László volt az első elnöke, majd a Társulat központjának Szegedről Budapestre való áthelyezése után őt Alexits György követte az elnöki tisztségben.

Érzékenyen sújtotta a Társulatot a gödöllői helyi csoport elnökének, Hosszú Miklósnak, a Vas megyei Tagozat elnökének, Horváth Bélának, valamint a dunáninneni titkárnak, Pálfy Sándornak elhunyta is. Bennük a Társulat céljaiért mindenkor önfeláldozóan küzdő tagtársainkat veszítettük el, akikre mindnyájan szeretettel gondolunk vissza.

2. A Társulat szervezete

A Társulat munkájának zömét hagyományosan a szakosztályok és a vidéki tagozatok végzik, egyes konkrét feladatok ellátására pedig a Választmány, az Elnökség, a szakosztályok, illetve a tagozatok vezetőségei állandó jelleggel vagy egy-egy alkalomra szóló megbízással munkabizottságokat küldenek ki.

Társulatunkban az előző időszakkal megegyezően a következő három szakosztály működött:

a) Tudományos Szakosztály,

b) Oktatási Szakosztály,

c) A Matematika Alkalmazásai Szakosztály.

Vidéki tagozataink száma sem változott az előző közgyűlés óta: Baranya megyei T., Bács-Kiskun megyei T., Békés megyei T., Borsod megyei T., Csongrád megyei T., Fejér megyei T., Győri T., Hajdú-Bihar megyei T., Heves megyei T., Komárom megyei T., Nógrád megyei T., Somogy megyei T., Soproni T., Szabolcs-Szatmár megyei T., Szolnok megyei T., Vas megyei T., Veszprém megyei T., Zala megyei T.

Több tagozatunk keretében működik helyi csoport egy-egy olyan városban, ahol a társulati tagok száma a tizet meghaladja.

3. Szakosztályok

a) Tudományos Szakosztály. A kialakult gyakorlat szerint a Szakosztály munkájának zömét tudományos konferenciák és előadóülések szervezése jelenti. Az előadóülések túlnyomó részét a MTA Matematikai Kutatóintézetével közösen szerveztük; ezeken részben a Társulat külföldi vendégei adtak elő, részben az Intézet egyes munkatársai mint az intézeti szemináriumok sorozatának előadói. A Szakosztály vezetőségének és a mellette működő Tudományos Bizottságnak minden igyekezete ellenére sem sikerült számottevően fokozni a matematika egyes ágait vagy új eredményeit nagy vonásokban ismertető, más területek szakemberei számára is tanulságos előadások számát; elsősorban vidéki matematikusok Budapesten tartott előadásait hiányolhattuk.

A Tudományos Bizottság fő tevékenysége a Szakosztály által szervezett konferenciák, kollokviumok tervének összeállítása volt; ezekről a 6. pontban részletesen lesz szó. Ugyanott számolunk be a Tudományos Szakosztály és a Matematika Alkalmazásai Szakosztály közös szervezésében évenként megrendezett Fiatal Matematikusok Csillag Pál találkozójáról is.

Szintén a Matematika Alkalmazásai Szakosztállyal közös rendezvény a végző matematikus hallgatók számára évente tartott klubest. Ez a bevált kezdeményezés jelentékenyen hozzájárult a fiatal matematikusoknak a társulati munkába való eredményes bevonásához. Felvetődött az a gondolat, hogy nem lehetne-e a Társulat életébe már egyetemi éveik alatt fokozottabban bevonni az erre alkalmas hallgatókat; több vidéki tagozatban történtek ilyen irányban sikeres lépések, és a következő periódusban kívánatos volna az ilyen kezdeményezéseknek másutt való meghonosítása is.

A szakosztályi munka keretébe tartozik a társulati könyvtár kezelése és fejlesztése, a folyóiratok cseréje, gondozása. Ezt a munkát Székely Gábor irányítja nagy igyekezettel. A könyvállomány gyarapításának és a könyvtár jobb kihasználásának egyaránt elháríthatlan akadálya a szűk elhelyezés a Társulat irodahelyiségeiben. Kiadványaink tárolását sikerült már korábban raktárhelyiség bérletével megoldani, de ez az alapgondon nem segített, s ezen a téren a jövő sem bíztat semmi jóval.

b) Oktatási Szakosztály. A Szakosztály munkája hagyományosan két részre oszlik: a tanárok és a tanulók körében végzett munkára. Mindkét irányban a Szakosztály vezetősége és az Oktatási Bizottság által kidolgozott évi munkatervek szabták meg a feladatokat, de a menet közben felmerült kérdéseket is rugalmasan programba iktatták.

A Szakosztály ebben az időszakban is részt vett az új általános iskolai tantervre épülő középiskolai kísérlet irányításában. Az Oktatási, ill. Művelődési Minisztérium és az Országos Pedagógiai Intézet munkatársaival együttműködve figyelemmel kísérte az új tantervek bevezetésével kapcsolatos nehézségeket, és segítette a minél zökkenőmentesebb bevezetést. A most életbe lépő Bartal—Pálfalviné-féle tankönyvsorozat a Tásulat által kezdeményezett középiskolai kísérlet alapján jött létre. A Szakosztály nagy erőfeszítéseket tett azért, hogy ezt a tankönyvsorozatot a tanárok sikerrel használják.

A budapesti tanárok részére továbbképző jellegű előadássorozatot szervezett a Szakosztály. Szervezési nehézségek miatt két évi szünet után ebben a tanévben a sorozatot újra megindítjuk. Ezen az előadássorozaton amellett, hogy a Bartal—Pálfalviné-féle munkatankönyvekkel megismertetjük a tanárokat, szó lesz távlati tervekkel kapcsolatos kísérletekről is, fő célként a szaktárgyi továbbképzésre helyezve a hangsúlyt. Emellett szükség volna olyan előadássorozatokra is, ahol a hallgatók a matematika alkalmazásaival és számítástechnikai ismeretekkel találkoznának.

Az általános iskolák tanárainak szóló előadássorozat a hallgatóság korábbi kérésére egy-egy évfolyamon bevezetésre kerülő új tankönyvekhez kapcsolódik, miközben több irányban fejleszti

matematikai műveltségüket. Szükség volna alsó tagozatos nevelők részére is az igényeknek megfelelő előadássorozat szervezésére.

A Szakosztály létrehozott egy bizottságot a tudományos tevékenységet is folytató matematikatanárok segítésére alkalmas módszerek felkutatására. E bizottság javaslatára 1979-ben és 1980-ban megrendeztük a matematikatanárok versenyét. Ennek előkészítése vándorgyűlési előadások keretében folyt. A sikeresen szereplő tanárok erkölcsi és anyagi elismerésben részesültek. Jó volna olyan lehetőséget biztosítani az általános iskola felső tagozatában tanító tanárok számára is, amely szakmai fejlődésüket segíti; gondolni lehet esetleg évenként értékelendő feladatmegoldó versenyre valamilyen folyóiratban vagy pedig pályázatszerű versenyre. Ennek megtervezésére bizottságot kellene kiküldeni; ilyen lehetőség megteremtése több év óta felmerülő igény a felső tagozatos tanárok részéről.

A korábbiakhoz hasonló jelleggel működtettük a diákolimpiára felkészítő szakköröket. Nagyon sajnálatos, hogy a magyar diákok számára nem nyílt minden évben lehetőség az olimpián való részvételre, s kívánatos, hogy a diákolimpiák hosszú időn át jól bevált rendszerében visszaálljon a folyamatosság; ez természetesen Társulatunkon kívül álló tényezők függvénye, de mi mindenesetre megteszünk minden tőlünk telhetőt ennek érdekében.

Fontos feladata volt a Szakosztály vezetőségének a Rátz László Vándorgyűlés évenként való megrendezése, programjának összeállítása (erről részletesebben 1. a 6. pontot).

Örvendetes lenne, ha az egri példa nyomán több egyetemen és főiskolán alakulnának hallgatói csoportok a társulati tagozatokban. Ez biztosíthatná a Szakosztályban dolgozók utánpótlását.

A diákok körében végzett munka hagyományos formái a különféle tanulóversenyek (8. pont). Rendszeresen folytak a Középiskolai Matematikai Délutánok, és folyamatosan működött az Ifjúsági Matematikai Kör. Ez utóbbi számára a téli és a tavaszi szünetben megrendeztük a szokásos kétnapos ülésszakot, vidéki diákok bevonásával. Tovább lehetne szélesíteni a tanulók körében végzett munkát, ha sikerülne a matematikai délutánok résztvevőinek számát növelni, s egyúttal hasonló rendezvényeket szervezni általános iskolai tanulók részére. Mindennek a helyiséghiány is gátat szab.

A Szakosztály évenként megszervezte a végző matematikatanár jelöltek szokásos klubdélutánját. Ezek hozzájárultak a fiatal tanároknak a társulati munkába való bevonásához, de a lehetőségek ezen a téren még nincsenek eléggé kiaknázva. Jobban kellene az egyetemi és főiskolai hallgatókat a vándorgyűléseken való részvételre mozgósítani, aminek többek között anyagi nehézségek is útját állják.

c) A Matematika Alkalmazásai Szakosztály. Ez a Szakosztály is a vezetőség és a Matematika Alkalmazásai Bizottság által kidolgozott évi munkatervek alapján végezte a munkát. Tevékenységének hagyományos formája nemzetközi részvételű konferenciák szervezése (6. pont), továbbá a Tudományos Szakosztállyal közösen az a) alatt már említett Csillag Pál Találkozónak és a végző matematikus hallgatók klubestjének évenkénti megrendezése.

Már az előző periódusban négy albizottság alakult a Matematika Alkalmazásai Bizottságon belül; ez a szervezeti felépítés bevált, és ebben az időszakban is eredményesen működött. Változatlanul úgy látjuk, hogy elsősorban a „Valószínűségszámítás és statisztika" és a „Számítástudomány" albizottságok tevékenysége a legaktívabb.

Tovább folytatódott a Szakosztály tevékenysége a matematika alkalmazásairól szóló előadások szervezése terén. Az előadások színvonala és látogatottsága változatlanul jó.

Nagy érdeklődés kísérte a „Fejezetek a matematikai statisztika alkalmazásaiból" c. tanfolyamot (108 résztvevő), melyet a Szakosztály 1978—79-ben rendezett 112 előadással. A tanfolyam anyagából kétkötetes jegyzet jelent meg.

Előreléptünk a MTESZ többi tagegyesületeivel való együttműködés terén, elsősorban rendezvények közös szervezésében. Ezt a tendenciát folytatni és szélesíteni kívánjuk a következő időszakban is.

4. Vidéki tagozatok

Tagozataink az ország területét csaknem teljesen behálózzák, egyedül Tolna megyében nincs még társulati tagozat. Az egyes tagozatok tevékenységének köre és intenzitása, a helyi adottságoktól függően, igen széles körben változik. Mindegyikük foglalkozik a tanárok pedagógiai munkájának segítését és az érdeklődő tanulók körében végzett matematikai ismeretterjesztést szolgáló rendezvények szervezésével, közreműködnek a Társulat által szervezett országos tanulóversenyek megrendezésében, emellett sok helyen szerveznek tudományos, ill. a matematika alkalmazásaival foglalkozó előadásokat is. A Schweitzer Miklós Emlékverseny szervezését 1979-ben a Csongrád megyei Tagozat végezte.

Jelentős segítséget kaptunk tagozatainktól nagyrendezvények szervezésében. Az egyes tagozatok területén rendezett konferenciák, vándorgyűlések előkészítése és lebonyolítása elképzelhetetlen volna az ott működő tagtársak aktív közreműködése nélkül. Ezen a téren kiemelkedő munkát végzett

a Csongrád megyei Tagozat (Algebrai módszerek a gráfelméletben kollokvium, Differenciálegyenletek kvalitatív elmélete kollokvium, Véges algebrák és többértékű logikák kollokvium, Hálóelméleti kollokvium), de igen eredményes volt a Szabolcs-Szatmár megyei Tagozat (Diákköri nyári iskola, Rátz László Vándorgyűlés), a Nógrád megyei Tagozat (Matematikai logika a programozásban kollokvium, Rátz László Vándorgyűlés), a Vas megyei Tagozat (Rátz László Vándorgyűlés), a Veszprém megyei Tagozat (A matematika mindenkié konferencia, Diákköri nyári iskola), a Győri Tagozat (IX. Operációkutatási konferencia), a Baranya megyei Tagozat (Diákköri nyári iskola) munkája is. Őszinte köszönetet kell mondanunk mindazoknak a tagtársainknak, akik ebben a rengeteg időt, utánajárást igénylő szervező munkában segítségünkre voltak.

Sikerült előrelépni a vidéki tagozatokkal való kapcsolattartás és a tagozatok egymás közötti tapasztalatcseréje terén, továbbá a munkatervek és a költségvetések elkészítésében korábban mutatkozott bizonytalanságokat megszüntetni, vagy legalábbis csökkenteni; ez elsősorban a tagozati titkárok, és a vidéki tagozatokkal kapcsolatot tartó két társulati itkár jó munkájának eredménye. Mindezek ellenére van néhány kisebb tagozat, amellyel kapcsolatunk változatlanul meglehetősen laza; a jövő feladata, hogy ezekkel a tagozatokkal is megjavítsuk a kapcsolatot, amihez elsősorban helyi tagtársaink együttműködési készségére van fokozottabban szükség.

5. Állandó munkabizottságok

a) Az *Emlékőrző Bizottság* változatlanul aktívan dolgozott ebben az időszakban is, gondoskodva — számos esetben a MTA III. Osztályával együttműködésben — a hazai matematika nagyjaival kapcsolatos évfordulók megünnepléséről, valamint sírjaik gondozásáról. 1979. január 4-én a MTA III. Osztályával közösen rendezett tudományos ülésszakon emlékeztünk meg Alexits György születésének 80. évfordulójáról, 1980. március 31-én pedig a MTA III. Osztályával és a MTA Matematikai Kutatóintézetével közösen szervezett ülésszakon Rényi Alfrédra emlékeztünk vissza halálának 10. évfordulója kapcsán. Ugyancsak a MTA III. Osztályával közösen rendeztük meg 1980. március 26-án az emlékülést Kalmár László és Péter Rózsa születésének 80. évfordulója alkalmából. Rényi Alfréd sírját 1980. február 1-én, halálának 10. évfordulóján a MTA III. Osztályával, a MTA Matematikai Kutatóintézetével és az ELTE Valószínűségszámítási Tanszékével közösen megkoszorúztuk. 1980. április 11-én avattuk fel Beke Manónak a II. kerületi Tanács által készített emlékművét egykori lakásának közelében.

Legnagyobb szabású, nemzetközi részvételű emlékünnepségünk Fejér Lipót és Riesz Frigyes születésének 100. évfordulóját ünnepelte meg. 1980. január 30-án a MTA III. Osztályával együtt felavattuk Riesz Frigyesnek a róla elnevezett utcában (Budapest, XVIII. kerület) a kerületi Tanács által készített emléktábláját, valamint megkoszorúztuk Fejér Lipótnak a Budapest, XI. kerületi Fejér Lipót utcában levő emléktábláját. Mindkettőjükről a TIT-tel közösen rendezett előadásban is megemlékeztünk ez év márciusában. Végezetül teljesen e nevezetes évforduló megünneplésének volt szentelve az 1980. augusztusában rendezett „Függvények, sorok, operátorok" konferencia, amelynek megnyitó ülésén kiemelkedő magyar és külföldi matematikusok elemezték behatóan kettejük életművét és ennek hatását a XX. századi matematika fejlődésére. Ezt követően a konferencia résztvevőinek jelenlétében a Magyar Tudományos Akadémiával, az Eötvös Loránd Tudományegyetemmel és a Művelődési Minisztériummal együtt koszorút helyeztünk el a Mező Imre úti temetőben levő sírjaikon. Magának a konferenciának tudományos programja jóformán minden egyes előadásában azt tanúsította, hogy e két kiválóságunk munkássága mennyire átszövi ma is a matematikai analízis számos ágát, mennyire termékenyen hat és élteti még napjainkban is a kutatásokat.

b) A *Felsőoktatási Bizottság* aktivitása a beszámolási időszakban jelentősen fokozódott. 1979-ben két ankétot szervezett a Bizottság, amelyeken a matematikai tanárképzés, ill. a műszaki egyetemeken és főiskolákon folyó matematikaoktatás problémáit vitatták meg a jelentős számban megjelent tagtársak. E két ankét sikerén felbuzdulva 1980-ban a Rátz László Vándorgyűlés keretében is szerveztünk felsőoktatási szekciót, nagy érdeklődést kiváltó előadásokkal és vitákkal. Úgy látszik, hogy ez a kezdeményezés bevált, és az oktatók évenkénti találkozója ezután ezzel a szinfolttal is gazdagabbá válik majd.

c) A *Könyvbizottság* munkája ugyancsak örvendetesen élénkebbé és eredményessé vált ebben az időszakban. Merza József lemondása az elnöki tisztségről csak rövid időre gátolta a Bizottság munkáját; az Elnökség Rózsa Pált kérte fel a Bizottság elnöki tisztére, s ő hamarosan teljes sikerrel kapcsolódott be a munkába.

A Bizottság fő feladatául a következőket tekintette:

Javaslatok kidolgozása matematikai tárgyú könyvek kiadására.

Az egyes könyvkiadók (matematikai irányú) terveinek a meghallgatása, esetleges egyeztetése, tanácsadás.

Adatszolgáltatás a Magyarországon megjelent matematikai tárgyú könyvekről.

Tanácsadás lektorok, bírálók, fordítók, ellenőrző szerkesztők megbízásával kapcsolatban.

A már megjelent könyvek népszerűsítése.

A Bizottság ebben az időszakban ülésein számos témával foglalkozott. Ezek közül a legfontosabbak a következők.

Elkészült egy elemző munka az 1975—77 években megjelent matematikai tárgyú könyvekről. Elkészült az 1968 és 1979 között megjelent matematikai tárgyú könyvek teljes listája. Elkészült egy lista azokról a matematikai könyvekről, amelyek a Bizottság véleménye szerint állandóan kaphatók legyenek. Minden érdekelt könyvkiadó beszámolt matematikai tárgyú könyvkiadási terveiről. A Bizottság javaslatokat tett könyvek, könyvsorozatok kiadására, ill. újra kiadására.

Az egyes könyvkiadóknak a Bizottságban részt vevő képviselői egyöntetűen úgy látják, hogy a Bizottság léte és tevékenysége hézagpótló, mert ez az egyetlen olyan fórum, amely módot nyújt a tapasztalatcserére, terveik, elképzeléseik egyeztetésére.

6. Nagyrendezvények

a) Kollokviumok. A beszámolási időszakban a következő kollokviumokat rendeztük meg.

A Tudományos Szakosztály szervezésében:

Topológiai kollokvium (1978. augusztus, Budapest, 19 magyar és 135 külföldi résztvevő),

Pontfolyamatok és sorbanállási problémák kollokvium (1978. szeptember, Keszthely, 20 magyar és 44 külföldi résztvevő), a Bernoulli Society erkölcsi támogatásával,

Sztochasztikus mezők kollokvium (1979. június, Esztergom, 17 magyar és 110 külföldi résztvevő), a Bernoulli Society erkölcsi támogatásával,

Differenciálgeometriai kollokvium (1979. szeptember, Budapest, 16 magyar és 82 külföldi résztvevő),

Nemparaméteres módszerek a matematikai statisztikában kollokvium (1980. június, Budapest, 19 magyar és 112 külföldi résztvevő), a Bernoulli Society és a Központi Statisztikai Hivatal támogatásával,

Függvények, sorok, operátorok konferencia (1980. augusztus, Budapest, 28 magyar és 173 külföldi résztvevő), a Nemzetközi Matematikai Unió támogatásával.

A Matematika Alkalmazásai Szakosztály szervezésében:

Matematikai logika a programozáselméletben kollokvium (1978. szeptember, Salgótarján, 50 magyar és 30 külföldi résztvevő),

IX. Operációkutatási Konferencia (1979. augusztus, Győr, 220 magyar résztvevő), a Neumann János Számítógéptudományi Társaság és a Magyar Közgazdasági Társaság közreműködésével,

A differenciálegyenletek kvalitatív elmélete kollokvium (1979. augusztus, Szeged, 44 magyar és 75 külföldi résztvevő),

részt vett továbbá ez a szakosztály is a Pontfolyamatok és sorbanállási problémák és a Nemparaméteres módszerek a matematikai statisztikában c. kollokvium megrendezésében, valamint a következő rendezvények szervezésében:

Nemzetközi matematikai programozási szeminárium (SZTAKI, 1980. Visegrád, 50 résztvevő),

X. Operációkutatási Konferencia (Magyar Közgazdasági Társaság, 1980, Debrecen, 450 résztvevő).

A Csongrád megyei Tagozat és a JATE szervezésében:

Algebrai módszerek a gráfelméletben kollokvium (1978. augusztus, Szeged),

Véges algebrák és többértékű logikák kollokvium (1979. augusztus, Szeged, 33 magyar és 73 külföldi résztvevő),

Hálóelméleti kollokvium (1980. augusztus, Szeged, 9 magyar és 51 külföldi résztvevő).

Megrendeztük továbbá a Matematika Tanításának Tanulmányozásával és Megjavításával Foglalkozó Nemzetközi Bizottság (Comission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, CIEAEM) felkérésére a Bizottság XXXI. nemzetközi találkozóját (1979. augusztus, Veszprém) „A matematika mindenkié" címmel, a Bizottság támogatásával (170 résztvevő).

Mindegyik megrendezett kollokviumról elmondható, hogy magához tudta vonzani a témakör számos szakértőjét, közöttük a nemzetközileg is legkiválóbbak jónéhányát, s hogy a külföldi résztvevők jelentékeny része családjával együtt érkezett, a résztvevők számát néhány tucat további vendéggel gyarapítva. A tudományos program magas színvonala ekként eleve biztosítva volt; a résztvevők képet kaphattak a témakör terén folyó legfrissebb kutatásokról. A résztvevők tapasztalatcseréjét változatos kiegészítő programokkal (kirándulás, fogadás) igyekeztünk biztosítani. Az alkalmanként adódó kisebb-nagyobb, részben rajtunk, de nagyobb részben rajtunk kívül álló okokból bekövetkező szervezési zökkenők ellenére is elmondhatjuk, hogy valamennyi ilyen rendezvényünk szép sikerrel zárult.

Kollokviumaink megrendezését hagyományainkhoz híven több évre előre megtervezzük; a minél hosszabb távú tervezés némileg csökkenti ugyan a rugalmasságot, de elkerülhetetlen, különö-

sen olyan esetekben, amikor más szervek, elsősorban nemzetközi szervezetek segítségét kívánjuk igénybe venni. Így a jövőben is a hosszabb időszakra szóló tematikai tervek kidolgozásának irányában kell haladnunk.

Sok gondot jelentettek a rendezvények megszervezésében a különféle költségek rohamosan emelkedő irányzata és a MTESZ gazdálkodási rendjének módosítása következtében szükségessé vált költségvetési változások. Mindennek eredménye a részvételi díjak állandó növekedése, ami elsősorban itthoni, ill. szocialista országokból érkező résztvevőinket sújtja érzékenyen. Alig szolgálhat vigasztalásul, hogy ez a tendencia világjelenség, s hogy a matematikai rendezvények más tudományok konferenciáihoz viszonyítva még mindig aránylag olcsók. A jövőben nagy körültekintéssel kell megkeresni az optimumot e vonatkozásban, folytatva azt a kialakult gyakorlatot, hogy a konferenciák szervezési költségeinek egy részét kiadványaink bevételéből fedezzük.

b) Vándorgyűlések. A Rátz László Vándorgyűlést az Oktatási Szakosztály szervezésében a beszámolási időszakban a következő városokban rendeztük meg:

1978 Szombathely, 1979 Nyíregyháza, 1980 Salgótarján.

A már kialakult gyakorlat szerint a vándorgyűlések munkája három szekcióban folyt, rengeteg hasznos és tanulságos információt nyújtva az alsó tagozatos, felső tagozatos és középiskolában dolgozó tanárok számára egyaránt mind a szakmai, mind a szakdidaktikai továbbképzés terén. 1980-ban a Felsőoktatási Bizottság ankétját is a vándorgyűléssel összekapcsolva rendeztük meg, elősegítve ezáltal is azt, hogy az egyetemi és főiskolai matematikaoktatók megtalálják a kapcsolat a közoktatásban tevékenykedő kartársaikkal.

Jelentékeny nehézséget okozott, hogy 1979-től kezdve a pénzügyi megkötések miatt a megyei tanácsok kevesebb kiküldetést adhattak a vándorgyűlésre; ez okozta, hogy a résztvevők száma a korábbi 380—400-ról mintegy 280-ra csökkent. Örvendetes viszont, hogy egyre több a fiatal nevelők száma. Megfontolandó, nem lehetne-e a vándorgyűlést a jövőben továbbképző tanfolyam jellegűvé alakítani, ami kedvezőbb pénzügyi szabályozók tekintetbevételével járhatna. Kérni kellene a megyei tanácsok segítségét arra is, hogy a vándorgyűlésre nagyobb számban küldjenek elsősorban iskolában tanító kartársakat, jelenleg ugyanis főként csak a szakfelügyelők részvételét biztosítják.

Ennek az időszaknak általános elismerést aratott kezdeményezése, hogy a vándorgyűlések résztvevői Hirharang címmel tartalmas szakmai és híranyagot felölelő tájékoztatót kaphattak kézbe. A gondos szerkesztői munkáért Andrásfai Bélának tartozunk köszönettel.

c) Fiatal Matematikusok Csillag Pál Találkozója. Ebben az időszakban is minden évben megrendeztük ezt a találkozót a jól bevált helyen (Balatonlelle). 1979-ben a szokásos júniusi időpont helyett szeptemberre tolódott a találkozó, ez többeknek nem felelt meg, ezért a résztvevők száma 91-re csökkent, de 1980-ban ismét júniusban tudtuk a megrendezést biztosítani 116 résztvevővel.

Ez a jól bevált évi rendezvény ebben az időszakban is hatékonyan szolgálta célját: a különböző területeken dolgozó fiatal matematikusok számára lehetőséget nyújtott arra, hogy kollégáik munkájával megismerkedjenek, problémáikról tájékozódjanak, a közeli területeken dolgozók pedig értékes, munkájukban felhasználható ötleteket kapjanak egymástól.

d) Nyári iskolák. Ebben az időszakban is anyagi és szervezési segítséget nyújtottunk a Természettudományi Karok Matematikai Tudományos Diákköreinek évenként megrendezett nyári iskoláihoz. 1978-ban Nyíregyházán, 1979-ben Pécsett, 1980-ban Veszprémben került sor erre a rendezvényre, a résztvevők száma mindegyik alkalommal 40 és 50 között volt.

7. *Emlékdíjak*

A matematikai tudományos utánpótlás nevelésében kiemelkedő érdemeket szerzett kutatók részére alapított Szele Tibor emlékérmet a beszámolási időszakban Szőkefalvi-Nagy Béla és Fried Ervin nyerte el.

A matematika oktatásában és népszerűsítésében elért kiváló teljesítményükért 1978-ban 8, 1979-ben, 7, 1980-ban 6 kartársunk részesült Beke Manó emlékdíjban.

A matematikai kutatómunka területén kiemelkedő fiatal matematikusok jutalmazását szolgáló Grünwald Géza emlékdíj szabályzatát még a megelőző időszakban módosítottuk egyrészt a kiadható díjak számának évenkénti 4-ben való maximálása és a két fokozat megszüntetése, másrészt a díj elnyerésének szorosabb korhatárhoz való kötése útján. A jelen periódusban már az új szabályzat szerint történt a díj odaítélése, mind a három évben 4 kiváló fiatal matematikai kutatónak. Magát az emlékérmet 1978-ban még Somorjai Gábornak is posztumusz odaítéltük; ő a szabályzat követelményeinek minden tekintetben eleget tett, és a díj odaítélését megelőzően hunyt el tragikus hirtelenséggel.

A matematika alkalmazásai terén kiváló teljesítményt nyújtó fiatalok közül 1978-ban 4, 1979-ben 5 nyerte el a Farkas Gyula emlékdíjat.

A jelentős önálló teljesítményt elért matematikus hallgatók részére alapított Rényi Kató emlékdíjat a beszámolási időszakban 7 egyetemi hallgatónak adtuk át. Ezzel kapcsolatban gondot okoz,

hogy rendszeresen eleget teszünk a KISZ Központi Bizottsága ama kérésének, hogy a Tudományos Diákkörök Országos Konferenciáján bemutatott kiváló matematikai pályamunkák díjazására jutalmakat ajánljunk fel. Ezt a társulati célkitűzéseinkkel teljesen összhangban álló gyakorlatot feltétlenül folytatni kívánjuk, viszont azt is el kell kerülnünk, hogy valaki ugyanazért a teljesítményért kétféle formában is kapjon társulati elismerést. Az emlékdíj bizottsága ismételten foglalkozott ennek a nehézségnek legmegfelelőbb áthidalási módjával, és várható, hogy javaslatot fog tenni az emlékdíj szabályzatának célszerű módosítására.

Sajnálatos, hogy az egyes emlékdíjakra fordítható pénzügyi keretek összege egyre kevésbé teszi lehetővé a jutalmazott teljesítménnyel arányos díjösszegek odaítélését, így emlékdíjaink fokozottan a — nem lebecsülendő — erkölcsi elismerés jellegét öltik.

8. Tanulóversenyek

Évenként megrendeztük a következő hagyományos tanulóversenyeket:
Kürschák József Verseny érettségizettek számára,
Schweitzer Miklós emlékverseny egyetemi hallgatók számára,
Tanárképző Főiskolák Matematikai versenye a tanárképző főiskolák hallgatói számára.

Megrendeztük minden évben a középiskolák I. és II. osztályos tanulói számára az Arany Dániel versenyt is. Ezzel kapcsolatban több gondunk is volt, részben a versenyzők nagy számából eredő szervezési nehézségek, részben a kitűzött feladatok színvonalával kapcsolatos tartalmi problémák formájában. Az Oktatási Szakosztály széleskörű vitákban igyekezett megtalálni a célnak legmegfelelőbb utat, de a megnyugtató megoldást még nem sikerült megtalálni.

Hagyományosan részt vettünk a beszámolási időszakban is az Országos Középiskolai Tanulmányi verseny matematikai szekciójának megrendezésében, azonban egy idő óta úgy látszik, részvételünk jellege nincs eléggé tisztázva; az Oktatási Szakosztály vezetősége arra törekszik, hogy ebben a kérdésben is létrejöjjön a célt legjobban szolgáló megegyezés.

A régebben megrendezett és hosszabb ideje szünetelő általános iskolai matematikai versenyeket sikert ígérő előkészítő tárgyalások után az Úttörő Szövetséggel együttműködve az 1979—80. tanévben ismét megrendeztük. A gondos előkészítés ellenére — rajtunk kívül álló okokból — több sajnálatos zökkenő mutatkozott a lebonyolítás során; így ebben a kérdésben is újabb igen körültekintő egyeztetésre lesz szükség.

A versenyek díjait részben költségvetésünkből, részben az Oktatási Minisztérium támogatásából fedeztük. A Schweitzer Miklós emlékverseny díjait néhai Gaál Jenőné örököseinek alapítványából egészítettük ki.

A versenyek szervezését az évről-évre kiküldött versenybizottságok végezték, a dolgozatok javításában a több fordulóban lebonyolított versenyek esetén számos külső munkatársat is bevontunk.

A Középiskolai Matematikai Lapok pontversenyén legjobb eredményt elért tanulókat az elmúlt időszakban is az Oktatási Minisztérium által rendelkezésre bocsátott keretből jutalmaztuk. Hozzájárultunk az Iskolarádió „Törd a fejed" pályázatára benyújtott legjobb dolgozatok jutalmazásához is.

Felmerült az a gondolat, hogy az általános iskolák tanulói részére is indítsunk valamely folyóiratban pontversenyt; az ebben az irányban megtett eddigi lépések még nem bizonyultak eredményesnek, azonban a gondolat feltétlenül megérdemli, hogy további próbálkozásokat tegyünk érdekében.

9. Kiadványok

a) Folyóiratok. A beszámolási időszakban az egyes társulati folyóiratok szerkesztő bizottságai szokásos beszámolójukon túl a MTESZ Országos Elnökségének határozata alapján külön is válaszoltak a folyóiratok tartalmi és technikai problémáival, terjesztési gondjaival kapcsolatos kérdésekre; a válaszokat felkért opponensek véleménye alapján megvitatta Elnökségünk, s a vita alapján elfogadott szöveget terjesztettük fel.

A Matematikai Lapok a hagyományosan kialakult célkitűzéseknek megfelelően igyekezett ellátni feladatait. A rendkívüli mértékűvé vált késedelmes megjelenés felszámolására az Akadémiai Kiadóval és a Szegedi Nyomdával ismételt tárgyalásokat folytattunk, és konkrét megállapodás jött létre a lemaradás behozására. Néhány bíztató jel után sajnos megtorpant ez a kedvező folyamat, így újabb erőfeszítések lesznek a következő időszakban is szükségesek, hogy ha hosszú idő alatt is, de végül egyenesbe jöjjön a lap megjelenése.

A Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztését az Oktatási, ill. Művelődési Minisztérium támogatásával végeztük ebben az időszakban is, a fizikai rovat szerkesztését pedig az Eötvös Loránd Fizikai Társulat látta el. A lap terjedelmének nagyobb részét változatlanul a megoldásra kitűzött gyakorlatok és feladatok, s ezek megoldásai töltötték ki, de a szerkesztőség ebben az időszakban a korábbiakhoz képest több cikk közlésére talált lehetőséget, és más rovatokkal is színesítette a lap

profilját. Ezek keretében folytatódott többek között a számítástechnikai rovat is. A megjelenés pontosságát igyekeztünk biztosítani, ami a szerkesztésben résztvevő munkatársak minden dicséretet megérdemlő összehangolt munkájával sem volt mindig lehetséges.

A Matematika Tanítása (az Oktatási, ill. Művelődési Minisztériummal közös szerkesztésben) ebben az időszakban is igyekezett a tanárok számára változatos és a tanításban jól felhasználható anyagot nyújtani. Korábbi terjedelmi nehézségei csökkentek, így céljait valamivel kevesebb nehézséggel küzdve tudta megvalósítani.

A Periodica Mathematica Hungarica hasznosan tölti be helyét a nemzetközi olvasóközönségnek szánt hazai matematikai folyóiratok között. A kéziratok átfutási ideje a kívánatosnál mindenesetre lényegesen nagyobb, ez azonban olyan világjelenség, amely alól alig akad kivétel. A szerkesztőktől mindenesetre továbbra is elsősorban a színvonal lelkiismeretes megőrzését várjuk, ehhez a lehetőség szerint az átfutási idő csökkentésére való igyekezetet is hozzákapcsolva.

A megelőző időszakban kaptuk meg az engedélyt a Combinatorica című, meghatározott profilú idegen nyelvű matematikai folyóirat kiadására. Ezt követően megindult a szerkesztés munkája, a kéziratok gyűjtése, így a folyóirat első száma rövidesen megjelenik.

b) Kollokviumi kötetek. A Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai sorozatban a beszámolási időszak alatt a következő kötetek jelentek meg: Fourier analysis and approximation theory, Algebraic theory of semigroups, Analytic function methods in probability theory, Numerical methods, Topology (19—23. kötet).

Előkészületben vannak a következő kötetek: Algebraic methods in graph theory, Point processes and queuing problems, Mathematical logic in programming, Random fields, Differential equations, Finite algebras and multiple-valued logic, Differential geometry.

Ezeknek a köteteknek a kiadása immár hosszú évek óta jelentékeny részét alkotja a hazai matematikai könyvkiadásnak, egyúttal megteremtve a Társulat működéséhez szükséges anyagi eszközök túlnyomó részét is. Nemzetközi sikerüket bizonyítja, hogy a North Holland Publishing Company mindegyikből 900—1200 példányt vesz át terjesztésre. Minden erőnkkel azon kell lennünk, hogy e tevékenység színvonalát mind a tudományos tartalom minden igényt kielégítő voltának a megőrzésével, mind a technikai kivitel példamutató jellegének biztosításával továbbra is az eddigi magas szinten tartsuk; emellett az átfutási idő lehető csökkentése sem elhanyagolható feladat, hiszen egy-egy rendezvény időpontja után egy éven belül válik igazán hasznossá, ezen az időszakon túl rohamosan csökken az anyag időszerűsége. Mindez a kötetek előállításában részt vevő munkatársainkon (szerkesztők, technikai szerkesztő és a gépelést végzők) kívül, akik tudásuk legjavát adják, a megrendezett kollokviumok tematikájának körültekintő megtervezését is megkívánja, tehát a Társulat vezetőinek céltudatos együttműködését is szükségessé teszi. Sajnálatos, hogy a beszámolási időszakban előfordult néhány kötet megjelenésének, nem mindig rajtunk múló okból, jelentékeny elhúzódása; mindent meg kell tenni azért, hogy ez a jövőben ne fordulhasson elő.

A kötetek kiemelkedő színvonalú előállításáért Székely Gábor irányításával Meszlényi Máriának és Monostori Lajosnénak tartozunk köszönettel.

10. Kapcsolatok más szervekkel

A beszámolási időszakban is állandóan tapasztaltuk a MTESZ vezetőinek érdeklődését és segítőkészségét Társulatunk problémáival kapcsolatban. A Szövetség új főtitkára és főtitkárhelyettese hivatalbalépése után hosszú megbeszélést folytatott Társulatunk vezetőivel, valamennyi gondunkat megértően meghallgatta és biztosított a nehézségek elhárítására vonatkozó minden lehetséges erőfeszítésre való készségről. Biztosra vesszük, hogy együttműködésünk az ezután következő időszakban is zavartalan és gyümölcsöző lesz; erre annál is inkább szükség van, mert a gondokkal teli gazdasági helyzetben csak a kölcsönös megértés teheti zökkenőmentessé a feladatok ellátását.

Társulatunk javaslatára 1980-ban MTESZ-díjjal tüntették ki Szénássy Barna tagtársunkat.

A MTESZ tagegyesületei közül hagyományos az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal való együttműködésünk a lapszerkesztés, továbbá a végző matematika—fizika szakos tanárok klubestjeinek megrendezése területén. Nagyrendezvények szervezésében ápoltuk kapcsolatainkat a Neumann János Számítógéptudományi Társasággal és a Magyar Hidrológiai Társasággal.

Folyamatos volt együttműködésünk a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályával, valamint Matematikai Kutatóintézetével. A III. Osztállyal közösen vettünk részt számos konferencia, ülésszak, megemlékező ülés megrendezésében, mint legkiemelkedőbbet talán csak a „Függvények, sorok, operátorok" konferenciát megemlítve. A Kutatóintézettel közösen rendeztünk nagyszámú előadóülést, legtöbbször az Intézet helyiségeit is igénybe véve. Külön hálával tartozunk azért, hogy ebben az időszakban is vállalta az Intézet a kollokviumi köteteket előállító munkatársaink elhelyezését. Az Oktatási Szakosztály szorosan együttműködött a MTA és az OM Köznevelési Bizottságának Matematikai Munkabizottságával a középiskolai oktatási kísérlet irányításával kapcsolatos elvi kérdések területén.

Különösen megtisztelő és örömmel vállalt feladatunk volt, hogy a MTA III. Osztálya részéről felkérést kaptunk arra, hogy a hazai matematika helyzetéről készített helyzetelemző tanulmány tervezetéhez hozzászóljunk. Az Elnökségünk beható vitája után elkészített hozzászólásunkkal igyekeztünk alkotóan hozzájárulni ahhoz, hogy a tanulmány reális képet fessen a matematika kutatásának, oktatásának, alkalmazásainak, nemzetközi kapcsolatainak, valamint a matematikai közéletnek helyzetéről, és alapja lehessen olyan körültekintő tudománypolitikai döntéseknek, amelyek a helyzet megjavítására irányulnak.

Az Oktatási, ill. Művelődési Minisztériummal is kialakultak már hagyományos együttműködési területeink. Ilyenek a folyóiratok szerkesztése, tanulóversenyek rendezése, az oktatási kísérlet szakmai irányítása és szervezése, az olimpia szakkörök irányítása, véleményadás és javaslattétel az oktatás különféle kérdéseiben. Mindezek olyan feladatok, amelyekkel Társulatunk eredményesen járulhatott hozzá a Minisztérium céljainak megvalósításához. Ebben az időszakban is állandóan éreztük, hogy a Minisztérium vezetői igénylik és értékelik Társulatunk ilyen tevékenységét, részt vesznek vándorgyűléseinken és ankétjainkon, mindig készséggel meghallgatják és orvosolni igyekeznek a matematikaoktatás kérdéseivel kapcsolatos gondjainkat, felhasználni törekszenek minden tőlünk kiinduló javaslatot.

Közös rendezvények szervezésében jutott kifejezésre együttműködésünk a Központi Statisztikai Hivatallal és a Magyar Közgazdasági Társasággal. Számos intézmény járult hozzá egy-egy rendezvényünk sikeréhez helyiségek és szálláslehetőségek rendelkezésre bocsátásával (Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza; Bolyai Gimnázium Salgótarján; Budapesti Műszaki Egyetem; Eötvös Loránd Tudományegyetem; Esztergomi Tanárképző Főiskola; Kossuth Lajos Tudományegyetem; Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola Győr; Lovassy Gimnázium Veszprém; Pénzügyi és Számviteli Főiskola Salgótarján; Szombathelyi Tanárképző Főiskola; Veszprémi Vegyipari Egyetem). Külön kiemelendő hagyományos együttműködésünk a József Attila Tudományegyetemmel a szegedi algebrai konferenciák megrendezésében. Valamennyi természettudományi karral kapcsolatba kerültünk a diákkörök nyári iskolájának megszervezése révén.

Ugyancsak hagyományosnak mondható ma már kapcsolatunk a KISZ Központi Bizottságával a kétévenként megrendezett Országos Tudományos Diákköri Konferenciákon bemutatott kiváló matematikai dolgozatok részére felajánlott díjaink formájában.

Az Úttörő Szövetséggel közösen rendeztük meg újra a matematikai versenyt az általános iskolák tanulói részére; további erőfeszítésekre van szükség ahhoz, hogy ezek a jövőben zökkenőmentesen bonyolódjanak le.

A Tudományos Ismeretterjesztő Társulattal részben a Kis Matematikus Körök szakmai irányításában való részvétel, részben számos közös előadás, megemlékezés keretében ápoltuk hagyományosan jó kapcsolatainkat.

A Magyar Rádió Iskolarádió c. rovatát „Törd a fejed" feladatok megoldóinak felajánlott könyvjutalmak révén támogattuk.

A velünk kapcsolatban álló szervezetek, intézmények nagy száma mutatja, hogy társadalmunk igényli a matematikusok közreműködését olyan feladatokban, amelyek csak széleskörű összefogással oldhatók meg kielégítően. A belénk helyezett bizalom kötelez arra, hogy ezeknek az elvárásoknak minden igyekezetünkkel törekedjünk megfelelni.

11. Nemzetközi kapcsolatok

Társulatunk a beszámolási időszakban is fontos feladatának tartotta, hogy tevékenyen kivegye a részét a hazai matematika nemzetközi kapcsolatainak ápolásában; mind a Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága, mind pedig a Nemzetközi Matematikai Unió magyar nemzeti bizottságának a szerepét ellátó IMU Bizottság jó munkájának eredményeképpen változatlanul elmondhatjuk, hogy ezen a téren Társulatunk tevékenysége kiemelkedően fontos és sikeres.

Az IMU 1978 augusztusában Helsinkiben tartotta közgyűlését és nemzetközi matematikai kongresszusát. A közgyűlésen háromtagú küldöttséggel vettünk részt; Szőkefalvi-Nagy Bélát az IMU „Fejlesztési és cserekapcsolatok bizottsága" tagjának választották meg. A közgyűlésen résztvevő szocialista delegációk nézeteinek összehangolására előzőleg Moszkvában Szőkefalvi-Nagy Béla és Surányi János vett részt egy egyeztető ülésen. Az itt elfogadott álláspontot képviselte a magyar delegáció is, így a mi részvételünk is hozzájárult annak a határozatnak az elfogadásához, hogy az IMU tevékenységében a nemzeti bizottságoknak nagyobb aktivitással kell részt venniük. A közgyűlés egyetértéssel fogadta azt a lengyel részről bejelentett javaslatot, hogy 1982-ben az IMU közgyűlést és kongresszust Varsóban rendezzék meg.

Az IMU kongresszuson kérésünkre 4 fiatal magyar matematikus az IMU anyagi támogatásával vehetett részt. Társulatunk 8 fő részvételét tudta biztosítani, és kezdeményezte, hogy más szervek is küldjenek ki a kongresszusra résztvevőket, így végül is a kongresszus magyar résztvevőinek száma meg-

felelt a nemzetközi matematikai életben betöltött szerepünknek. A felkért előadók között egy magyar matematikus (Révész Pál) szerepelt.

Az IMU Bizottság javaslatát elfogadva az IMU anyagi támogatásában részesítette a „Függvények, sorok, operátorok" konferenciát; ebből néhány kiemelkedő külföldi előadó utiköltségeihez tudtunk segítségét nyújtani. A konferencián az IMU E. Hewitt és J.-P. Kahane professzorokkal képviseltette magát.

A varsói kongresszus előkészítésében az elfogadott helsinki határozatnak megfelelően nagyobb szerepet fog kapni az IMU Bizottság, ami fokozott felelősséget ró a most megválasztandó bizottságra.

A Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága (ez a MTESZ által javasolt és a mostani közgyűlésen alapszabálymódosítás révén törvényesítendő terminológia, eddig Külügyi Bizottság) munkájának jobb megosztása céljából bevezettük azt a rendszert, hogy a Bizottság egy-egy tagja vállalta a titkár munkájának segítését egy-egy részterület feladatainak folyamatos intézésével. Ez az újítás bevált, és a most megválasztandó bizottságnak is figyelmébe ajánlható. A Bizottságra háruló munka volumene és fontossága egyaránt maga után vonja, hogy ez a Társulat egyik legnagyobb aktivitású, állandóan készenlétben álló testülete.

A Bizottság munkájának fő területei a következők:

a) csereegyezmények kötése és az azokból eredő feladatok ellátása,

b) magyar matematikusok és matematikatanárok szakmai célú kiutazásainak elősegítése,

c) külföldi matematikusok vendégüllátása előadások és tapasztalatcsere céljából.

Folyamatosan fenntartottuk a szocialista országok matematikai társulataival kötött csereegyezményeinket a korábbi keretek között (Bulgária 20 nap, Csehszlovákia 50 nap, NDK 20 nap, Lengyelország 60 nap,) a csehszlovák egyezmény keretét ebben az évben még külön 20 nappal megemeltük szegedi és pozsonyi matematikusok közvetlen cseréje céljából. Az NDK Matematikai Társulatával — az ő kezdeményezésükre — olyan megállapodást kötöttünk, hogy az évi keretből 10-10 nap átvihető a következő évre.

A csereegyezményeinkből adódó utazási lehetőségeket főleg magas részvételi díjú konferenciákon való részvételekre igyekeztünk felhasználni, de ezekből tudtunk tapasztalatcsere lehetőséget biztosítani tanárok részére is.

Sajnálatos, hogy rajtunk kívül álló okokból nem valósult meg a Novoszibirszki Matematikai Intézettel és a Fiatal Tudósok Tanácsával tervezett csereegyezmény. Ezért a szovjet tudósokkal való kapcsolattartást csak egyéni meghívások útján tudjuk biztosítani.

A Jugoszláv Matematikusok és Fizikusok Szövetségével megkötött egyezmény sajnálatunkra nem léphetett életbe az ottani szervezet túlságosan szétforgácsolt jellege miatt.

Életbe lépett viszont a beszámolási időszakban a Finn Matematikai Társulattal és a NSZK Matematikai Társulatával kötött megállapodásunk. Ezekben a viszonylatokban főként a magas utiköltség okoz gondot.

A kiutazási lehetőségről a Bizottság időnként körlevélben tájékoztatta a tagtársakat. Figyelmet fordított arra, hogy a támogatások mértékében ne legyenek feltűnő aránytalanságok. Kiküldötteinktől általában elvárjuk, hogy előadást tartsanak, de indokolt esetben eltekintünk ettől, elsősorban pályakezdő fiatalok kiutaztatásakor.

Ugyancsak körlevélben kértünk javaslatot külföldi matematikusok meghívására. Ezeknek elbírálásakor fő szempontunk az volt, hogy matematikusaink jobban megismerkedjenek egy-egy nálunk kevéssé művelt területtel, vagy pedig a bennünket intenzíven foglalkoztató területeken másutt folyó munkával. Előnyben részesítettük a szovjet matematikusokat, akik közül többeket hosszabb időre (2-4 hét) is vendégül láttunk; egyébként meghívottaink itt-tartózkodását 2—3 napra tudjuk szabni. Preferáltuk az Európában tartózkodó tengerentúli matematikusok meghívását is. Általában egy-egy személy meghívási javaslatai közül évenként egynél többet nem tudunk elfogadni.

Végül is a kiutazások száma a 1978-ban (az egész naptári évben) 73 volt (47 szocialista országba, 26 tőkés országba), 1979-ben 54 (41+13), 1980-ban 41 (21+20). A beutazások száma 1978-ban 74, 1979-ben 50, 1980-ban 62.

A nemzetközi kapcsolatok fenntartása mind a Bizottság aktívái, mind a Társulat apparátusa számára rengeteg adminisztratív munkát jelent, amelyet azonban az ügy fontosságának tudatában minden nehézség ellenére is örömmel vállalunk. Kevésbé örvendetes, hogy egyes általános pénzügyi és adminisztratív rendelkezések, nem tudván kellően figyelembe venni sajátos viszonyainkat és szempontjainkat, külön megkötéseket tartalmaznak s ezáltal korlátozzák a lehetőségeket. Újra és újra el kell mondanunk, hogy bevételeink döntő része kollokviumi kiadványainkból származik, s ezek csak kellően sikeres kollokvium alapján készülhetnek, ami viszont külföldi kapcsolataink intenzív ápolását feltételezi. Ha kapcsolatainkat csökkentenünk kell (aminek veszélyére a fenti számok már rámutatnak), annak előbb-utóbb rendezvényeink színvonala vallja kárát, bevételeink csökkenése pedig a Társulatnak minden tevékenységét szükségképpen korlátozza.

Az európai országok matematikai társulatainak többsége úgy találta, hogy kívánatos lenne, ha e társulatok jobb együttműködésük érdekében egy Európai Matematikai Szövetséget hoznának létre.

A társulatok képviselői a helsinki IMU kongresszus alkalmával tartott ülésükön elhatározták, hogy ennek előkészítésére Európai Matematikai Tanácsot alkotnak, a társulatok egy-egy képviselőjének részvételével. Társulatunk kezdettől fogva azt szorgalmazta, hogy a szocialista országok matematikai társulatai vegyenek részt ezekben a munkákban, és igyekezzenek ezáltal kellő befolyást biztosítani a Szövetség létrejöttekor. Ennek megfelelően részt veszünk a Tanács munkájában, sőt annak megalakulásakor a Tanács öttagú vezetőségébe Fried Ervint is beválasztották. A Tanács 1980-ban tartott ülésén őt akadályoztatása miatt Márki László helyettesítette.

12. A vezető szervek működése

Az alapszabály és az ügyrend keretei az elmúlt időszakban is megbízható iránymutatóul szolgáltak a Társulat ügyvitelében; a szükségesnek mutatkozó változtatásokat időnként végrehajtva állandóan nyomon követjük a változó szükségleteket. A jelen közgyűlésen is javasoljuk az alapszabály néhány részletének módosítását, mindenekelőtt az MTESZ általános irányelveivel való összhang megteremtése céljából.

A választmány évenként kétszer, az elnökség általában kéthavonként tartott ülést. A vezetőségi ülések látogatottsága ebben a periódusban is biztosította mindenkor a határozatképességet. A mostani választások alkalmával is törekedni kell arra, hogy olyan tagtársakat küldjünk a vezető szervekbe, akik tudnak és akarnak időt szakítani a Társulat munkájának irányításában való részvételre.

A hosszabb időre ideiglenesen távollevő vezetőségi tagok helyettesítését az alapszabály rendelkezéseinek megfelelően oldottuk meg.

Ebben az időszakban is folyamatosan tájékoztattuk a Választmány és az Ellenőrző Bizottság tagjait a Társulat munkájáról az időközönként kiadott tájékoztatókban. Ezek elkészítésében s a főtitkári teendők sok más vonatkozásában is jelentős segítséget nyújtott Petruska György főtitkárhelyettesi minőségben. Sajnálatos, hogy az ezért neki juttatott anyagi elismerést pénzügyi rendelkezések következtében ez évben meg kellett szüntetnünk.

13. A központi apparátus munkája

A Társulat sokrétű tevékenységével kapcsolatos hatalmas szervező és adminisztratív munka irányítása és jelentékeny részben való elvégzése Szabados Józsefné szervezőtitkár vállán nyugszik. Az ő éjt nappallá tevő munkája a Társulat életének minden rezdülésén megérződik. Hosszabb külföldi tartózkodása alatt igen rátermetten és eredményesen vette át munkáját Radnainé Sallai Melánia tagtársunk, aki viszont egy idő után súlyos betegsége miatt nem tudta a jól megkezdett munkát folytatni.

Mindezek a körülmények a Társulat apparátusára hatalmas feladatot róttak, amelynek zökkenőmentes ellátása még akkor is csaknem lehetetlen lett volna, ha az általános munkaerőhelyzet következtében nem lett volna egy-egy munkahely csaknem állandó jelleggel betöltetlen. Így csak arra lehetett törekedni, hogy a szoros határidejű, halaszthatatlan teendők el legyenek látva, a hosszú távon esedékes munkák óhatatlanul háttérbe szorultak, s nem egyszer a napi feladatokat is csak a legnagyobb nehézségek árán s olykor késedelmesen lehetett megoldani. Sajnálatosan krónikussá vált a gépírói kapacitásnak csaknem teljes hiánya, s e helyen nem tehetünk többet, mint hogy az MTESZ apparátusának segítségét kérjük e súlyos gondunk megoldásához, valamint hogy megköszönjük az apparátus helytálló dolgozóinak fáradhatatlan áldozatvállalását társulati céljaink megvalósításáért.

Császár Ákos a továbbiakban a jövő legfontosabb feladatairól beszélt. Többek között a következőkre hívta fel a figyelmet:

a) Fontos feladata a Tudományos Szakosztálynak, hogy több olyan előadást szervezzen, amely a matematika egy-egy területéről átfogó képet nyújt, és ezek megfelelő látogatottságát biztosítsa.

b) Több tagozatunknak kellene követni azt a kezdeményezést, mely már az egyetemi és főiskolai hallgatókat is bevonja a Társulat munkájába.

c) Az Oktatási Szakosztály fontos feladata, hogy szaporítsa azoknak az előadásoknak a számát, amelyek a tanárokat a matematika különféle irányú alkalmazásairól és a számítástechnikáról tájékoztatják.

d) Kívánatos volna erősíteni az alsó tagozatos nevelőkkel való foglalkozást.

e) Hasznos volna a felső tagozatos általános iskolai tanárok számára a középiskolai tanárokéhoz hasonló feladatmegoldó versenyeket szervezni.

f) Növelni kellene a fiatalság körében végzett ismeretterjesztő munka hatékonyságát.

g) Kívánatos volna, hogy az Alkalmazási Szakosztály munkájának és a MTESZ más egyesületeinek örvendetesen fokozódó együttműködése a következő periódusban tovább folytatódjék.

h) Néhány vidéki tagozatunk alig működik. Módot kellene találni ezeknek a tagozatoknak az aktivizálására.

i) Kívánatos volna, hogy rendezvényterveinket minél hosszabb időszakra megbízhatóan lerögzítsük.

j) Foglalkozni kell a vándorgyűlések megrendezésével kapcsolatban felmerült anyagi problémák leküzdésével.

k) Pontosan tisztázni kell részvételünk jellegét azoknak a versenyeknek a szervezésében, melyeket más szervekkel közösen rendezünk.

l) Jó volna, ha az általános iskolások részére valamilyen pontversenyt lehetne indítani, hasonlóan a középiskolások számára a Középiskolai Matematikai Lapok hasábjain folyó pontversenyhez (Szendrei János későbbi hozzászólásában javasolta, hogy a Csongrád megyében tíz éve rendszeresen folyó általános iskolai pontversenyt próbáljuk esetleg országos jellegűvé szélesíteni).

m) Kiadványainkkal kapcsolatban egyik legfontosabb feladatunk, hogy időben való megjelenésüket biztosítsuk. Ezt számos nehézség akadályozza, az evvel kapcsolatos problémákkal az új vezetőségnek foglalkozni kell.

n) A nemzetközi kapcsolatok a matematika kutatása, alkalmazása és oktatása terén egyaránt nélkülözhetetlenül fontosak. E kapcsolatok intenzív ápolása az új vezetőség egyik lefontosabb feladata kell, hogy legyen.

o) A Társulat központi apparátusa az állandó munkaerőgondok ellenére jó munkát végzett. Itt a munkaerőgondok megoldására a MTESZ illetékeseinek további segítségét kell kérnünk.

Beszámolóját Császár Ákos a következő gondolattal fejezte be. Megértve a MTESZ és az egész ország nehéz gazdasági helyzetét, takarékoskodnunk kell és takarékoskodni akarunk, de ésszerűen úgy, hogy arról mondunk le, ami nem feltétlenül szükséges, és azt, ami a matematika művelése és fellendítése szempontjából fontos, mindenképpen tovább szeretnénk csinálni.

A főtitkári beszámoló után Hajnal András ismertette a pénztárosi jelentést, majd Moór Arthur terjesztette be az Ellenőrző Bizottság jelentését. Az Ellenőrző Bizottság több, a főtitkáréival egybehangzó, javaslatot tett a társulati munka javítására, és további információkat kért a társulat Combinatorica című új folyóiratáról.

A szünetet követően az Alapszabály módosítására vonatkozó javaslat került megtárgyalásra. Császár Ákos főtitkár indokolta az egyes változtatásokat. Ezek közül a lényegesebbek a következők: *a)* Ezentúl tartósan Magyarországon tartózkodó külföldi állampolgár is tagja lehet a társulatnak. *b)* A Külügyi Bizottság neve ezentúl Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága. *c)* Ezentúl nem a Közgyűlés, hanem a Választmány állapítja meg a rendes tagok tagdíjának összegét. *d)* A tisztségviselőket ezentúl (a MTESZ központi szerveivel összhangban) nem három, hanem öt évre választjuk. *e)* A Közgyűlést ezentúl legalább három évenként kell összehívni. *f)* Ezentúl a Választmány jelöli ki egy-egy évre azt a négy vidéki tagozatot, amely képviselőt küld az Elnökségbe. *g)* A Választmány határozatai ellen ezentúl nem lehet a közgyűléshez fellebbezni. *h)* A tiszteletbeli Elnökök ezentúl az IMU bizottságnak is tagjai. Eddig csak a közgyűlési küldöttek jogaival bírtak és tagjai voltak a Választmánynak és az Elnökségnek.

A közgyűlés az alapszabály-módosítást elfogadta. Az *a)—g)* pontok elfogadását a közgyűlés egyhangúan támogatta. Érdemi vita csak a *h)* pont körül alakult ki. Szőkefalvi-Nagy Béla és Megyesi László, a Csongrád megyei tagozat elnöke és titkára, írásbeli javaslatot tett, hogy a tiszteletbeli elnököket ezentúl csak a közgyűlési küldött joga és a választmányi tagság illesse meg automatikusan. Ezt a javaslatot a közgyűlés 119 szavazattal 15 ellenében elutasította, és az Elnökség által javasolt, a *h)* pontban megfogalmazott, javaslatot fogadta el.

A vita során néhány küldött kifogásolta, hogy a közgyűlési anyagot késedelmesen kapta kézhez, és így nem volt elegendő ideje, hogy körültekintő írásbeli javaslatokat tegyen. Császár Ákos főtitkár rámutatott, hogy ha a sajnálatos adminisztratív nehézségek miatt sok helyre későn érkező anyag hosszas tanácskozást nem is tett lehetővé, mégis módot adott arra, hogy a küldöttek javaslataikat megtegyék és számosan éltek is ezzel a lehetőséggel. A közgyűlés vitája során még több, az Alapszabály és az Ügyrend módosítására irányuló javaslat is felmerült. Ezekkel kapcsolatban a közgyűlés a következő határozatokat hozta: További Alapszabály-módosítást nem tartott szükségesnek, az Ügyrend módosítására vonatkozó konkrét javaslatokkal pedig nem foglalkozott, mert azok a Választmány hatáskörébe tartoznak. Javasolta azonban a Választmánynak, hogy a mindennapi élet szükségleteinek megfelelően, és a közgyűlésen elhangzott javaslatok ismeretében az Ügyrendet vizsgálja felül, és szükség esetén módosítsa.

A Társulat új Alapszabálya a következő lett:

A Bolyai János Matematikai Társulat Alapszabálya

I. Általános rendelkezések

1. §

(1) A Társulat neve: Bolyai János Matematikai Társulat
A Társulat neve angolul: János Bolyai Mathematical Society
A Társulat neve franciául: Societé Mathématique János Bolyai
A Társulat neve németül: János Bolyai Mathematische Gesellschaft
A Társulat neve oroszul: Математическое Общество им. János Bolyai
(2) A Társulat a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének (továbbiakban: Szövetség) tagegyesülete.
(3) A Társulat a Nemzetközi Matematikai Unió (International Mathematical Union, továbbiakban: IMU) tagja.
(4) A Társulat a Közgyűlés és a Szövetség hozzájárulásával tagja lehet más nemzetközi tudományos szervezeteknek is.
(5) A Társulat az 1891-ben alapított „Mathematikai és Physikai Társulat" matematikai tevékenységét folytatja.
(6) A Társulat pecsétje: köriratban „Bolyai János Matematikai Társulat, a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének tagja".
(7) A Társulat székhelye: Budapest, működési területe a Magyar Népköztársaság.

II. A Társulat célja és tevékenysége

2. §

(1) A Társulat a Magyar Népköztársaság Alkotmányának szellemében az alábbi célokat követi: Elősegíti
a) a matematikai tudományos kutatásokat;
b) a matematika alkalmazásainak fokozottabb meghonosítását és széles körű elterjesztését;
c) a matematika oktatásával kapcsolatos kérdések megoldását;
d) a matematika népszerűsítését és mindezek keretében társadalmunk világnézeti nevelését.
(2) E célok elérése érdekében a Társulat feladata tömöríteni mindazokat a magyar állampolgárokat, akik a matematikai tudomány művelésével, alkalmazásaival, oktatásával vagy népszerűsítésével foglalkoznak, vagy pedig a matematikával kapcsolatban tudománypolitikai tevékenységet fejtenek ki.
(3) E célok és feladatok megvalósítása végett a Társulat
a) szervezett lehetőséget biztosít matematikai eredmények ismertetésére, népszerűsítésére, a matematika elvi kérdéseinek haladó szellemű tudományos világnézeten alapuló elemzésére, időszerű tudomány- és oktatáspolitikai kérdések megvitatására;
b) kongresszusokat, kollokviumokat stb. rendez önállóan vagy más szervekkel együtt;
c) matematikai folyóiratokat, szakkönyveket szerkeszt, támogatja a szakirodalmi tájékoztatást;
d) megvitatja és társadalmi úton elősegíti matematikai életünk kérdéseinek megoldását és ennek érdekében szükség esetén javaslatokat dolgoz ki állami szervek részére, illetve ezek felkérésére szakvéleményt ad;
e) felkutatja a matematikai tehetségeket, előmozdítja továbbképzésüket, tanulmányi és emlékversenyeket szervez, pályadíjakat és emlékdíjakat tűz ki;
f) kiépíti és ápolja a tudományos és pedagógiai kapcsolatokat külföldi hasonló egyesületekkel, intézményekkel.

III. A Társulat tagjai

3. §

(1) A Társulat tagjai rendes tagok, tiszteletbeli tagok vagy pártoló tagok.
(2) A Társulat rendes tagja lehet minden olyan magyar állampolgár, továbbá a Szövetség hozzájárulásával minden olyan tartósan Magyarországon tartózkodó külföldi állampolgár, aki elfogadja a Társulat célkitűzéseit, megvalósításukra képes, részt kíván venni a Társulat tevékenységében, elfogadja a Társulat Alapszabályát és vállalja, hogy rendszeresen fizeti a tagsági díjat.
(3) A Társulat tiszteletbeli tagja lehet minden olyan külföldi állampolgár, aki elfogadja a Társulat célkitűzéseit és Alapszabályát.

(4) A Társulat pártoló tagja lehet minden olyan természetes vagy jogi személy, aki elfogadja a Társulat célkitűzéseit, s erkölcsileg és anyagilag támogatja a Társulat tevékenységét.
(5) A rendes és pártoló tagokat a megfelelő tagozat vezetőségének javaslatára az Elnökség veszi fel. Tiszteletbeli tagokat a Szövetség hozzájárulásával a Választmány vesz fel.
(6) Tagfelvételi kérelem elutasítása ellen 15 napon belül a Választmányhoz lehet fellebbezni.

4. §

(1) A rendes tagok jogai:
a) részt vehetnek a Társulat minden rendezvényén, továbbá a Társulat vagy a Szövetség megbízásából részt vehetnek külföldi tanulmányutakon, rendezvényeken stb.;
b) kérhetik a Társulat támogatását a Társulat céljaival összefüggő javaslatok megvalósítására;
c) felszólalhatnak a Társulat Közgyűlésén;
d) választójoguk van a Küldöttválasztó Értekezleten;
e) megválaszthatók bármely társulati tisztségre egy évi társulati tagság után;
f) javaslatot, beadványt, panaszt intézhetnek a Társulat bármely testületéhez;
g) megbírálhatják a Társulat bármely testületének vagy tagjának társulati tevékenységét.
(2) A rendes tagok kötelességei:
a) megtartani a Társulat Alapszabályát és Fegyelmi Szabályzatát;
b) részt venni a Társulat céljainak megvalósításában;
c) megtartani a Társulat szerveinek határozatait;
d) rendszeresen fizetni a tagsági díjat, a felvétel évét is beleértve.
(3) A tiszteletbeli tagok jogai megegyeznek a rendes tagok jogaival, kivéve a 4. §. (1) bekezdés d) és e) pontjában felsorolt jogokat.
(4) A tiszteletbeli tagokra a 4. §. (2) bekezdés a) pontjában felsorolt kötelességek vonatkoznak.

5. §.

(1) A természetes személy pártoló tag jogai megegyeznek a rendes tagok jogaival.
(2) A jogi személy pártoló tag jogai:
a) képviseltetheti magát a Társulat és a Szövetség rendezvényein;
b) igényt tarthat arra, hogy dolgozói részére a Társulat rendezvényeket szervezzen;
c) kérheti a Társulat segítségét tudományos problémáinak megoldásához és dolgozóinak szakmai továbbképzéséhez.
(3) A természetes személy és jogi személy pártoló tagok kötelességei ugyanazok, mint a rendes tagok kötelességei; tagsági díjukat velük egyetértésben az Elnökség külön állapítja meg.

IV. A Társulati tagság megszűnése

6. §.

(1) A Társulati tagság a következő okok folytán szűnik meg:
a) haláleset;
b) kilépés;
c) a tagok sorából való törlés;
d) kizárás.
(2) A Társulatból kilépni az Elnökséghez intézett írásbeli bejelentés útján lehet. A tagsági jogok és kötelességek a kilépés bejelentését követő hónap első napjával szűnnek meg.
(3) A Társulati tagság szünetel, ha a tag legalább két évi tagsági díj befizetésével elmaradt, mindaddig, amíg tagsági díj tartozását nem rendezi.
(4) Azt a tagot, aki legalább két évi tagsági díj hátralékát ismételt írásbeli felszólítás ellenére sem fizeti meg, a Választmány törli a tagok sorából.
(5) A Társulatból kizárható az a tag, aki az alapszabályt megszegte, vagy társulati taghoz nem méltó magatartást vagy tevékenységet tanúsított. A kizárás csak fegyelmi határozat alapján történhet. (15. §. (2) bekezdés).
(6) A Társulat tagjai sorából kizárt vagy törölt személy a Választmány határozata ellen 15 napon belül a Közgyűléshez fellebezhet. A Fegyelmi Bizottság kizárási javaslatától a fellebbezés elintézéséig a tagság szünetel.
(7) Az érdekelt személyt tagságának megszüntetéséről vagy szüneteléséről a Társulat írásban értesíti.
(8) A Társulatba való újrafelvétel indokolással kérhető a tagság megszűnését kimondó jogerős határozatot követő fél év elteltével.

V. A Társulat testületei

7. §.

(1) A Társulat testületei:
a) a vezető szervek,
b) a központi szervek,
c) a szakosztályok,
d) a tagozatok,
e) a Választmány, illetve az Elnökség által kiküldött állandó és időszaki bizottságok,
f) a Küldöttválasztó Értekezlet.

(2) A Társulat vezető szervei:
a) a Közgyűlés,
b) a Választmány,
c) az Elnökség.

(3) A Társulat központi szervei:
a) az Ellenőrző Bizottság,
b) a Fegyelmi Bizottság,
c) az IMU Bizottság,
d) a Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága

VI. A Társulat működésének és vezetésének jellege

8. §.

(1) A Társulat a társulati demokrácia és a kollektív vezetés elvei alapján működik.
(2) A Társulat vezető és központi szerveinek minden tagját választják.
(3) A választott szervek és tisztségviselő tagok tevékenységükről beszámolnak a Társulat magasabb vezető szerveinek.
(4) A magasabb szerv határozatai kötelezők az alacsonyabb szervre.

VII. A Közgyűlés

9. §.

(1) A Közgyűlés a Társulat legfőbb vezető szerve. A Társulatot érintő bármely kérdésben dönthet. A Társulat Közgyűlése küldöttgyűlés.
(2) A Közgyűlés
a) megalkotja és szükség esetén módosítja a Társulat Alapszabályát;
b) megvitatja a Társulatnak a legutóbbi Közgyűlés óta végzett munkáját, meghatározza a soron következő időszak legfontosabb feladatait;
c) és dönt mindazokban a kérdésekben, amelyeket a Választmány vagy az Elnökség elé terjeszt;
d) megtárgyalja a tagok által a Közgyűlés időpontja előtt legalább két héttel írásban beterjesztett javaslatokat, illetve dönt e javaslatok érdemi elintézésének előkészítésére vonatkozólag;
e) megvitathatja a Szövetség munkáját és erre vonatkozólag javaslatokat tehet;
f) megvitatja a Társulat pénztárosának jelentését, határoz a fontosabb vagyoni jogügyletek, szerződések ügyében, illetve jóváhagyja a Választmánynak erre vonatkozó határozatait;
g) megadja a felmentvényt a leköszönő vezető és központi szerveknek, felelős tisztségviselő tagoknak; kellő indoklással visszahívhat a Közgyűlés által megválasztott tisztségviselő tagokat;
h) megválasztja névre és tisztségekre szólóan öt évre a vezető és központi szervek tagjait és behívási sorrendjük meghatározásával póttagjait, a szakosztályok vezetőit, megbízza a Társulat lapjainak szerkesztő bizottságát, javaslatot tesz az illetékes minisztériumnak a közös lapok szerkesztő bizottságára;
i) megválasztja határidő nélkül a Társulat tiszteletbeli elnökeit;
j) megválasztja a küldötteket a Szövetség Közgyűlésére, ezek megbízatása a Társulat legközelebbi Közgyűléséig tart;
k) dönt a Szövetségből való kilépés, más egyesületbe való be- és kilépés, egyesülés, részekre való szétválás és megszűnés kérdésében és javaslatot tesz a Szövetségnek az utóbbi két esetben a Társulat vagyonának további sorsa ügyében.

10. §.

(1) Az Elnökség rendes Közgyűlést szükség szerint, de legalább három évenként köteles összehívni. Ha a választott tisztségviselők megbízatása lejár, a Közgyűlés napirendjére kell tűzni a tisztújítást.
(2) Az Elnökség rendkívüli Közgyűlést bármikor összehívhat. Ha a Társulat teljes taglétszámának legalább egyharmada vagy Választmányának legalább fele — a cél megjelölésével — kéri rendkívüli Közgyűlés összehívását, akkor a rendkívüli Közgyűlést az Elnökség köteles összehívni és 60 napon belül megtartani.
(3) Minden Közgyűlés előkészítése a Küldöttválasztó Értekezletek összehívásával kezdődik a tagozatok székhelyein. Ezen az értekezleten a tagozat bármely tagja felszólalhat és szavazhat.
(4) A Küldöttválasztó Értekezleteket a Közgyűlés napja előtt legalább 3 héttel, de legfeljebb 5 héttel kell összehívni. A Küldöttválasztó Értekezletek időpontját és helyét az értekezlet napja előtt legalább 10 nappal kell írásban közölni a Társulat minden érdekelt rendes és pártoló tagjával.
(5) A Küldöttválasztó Értekezleten a tagozatok minden tíz nem jogi személy tag után egy-egy küldöttet választanak.
(6) A Küldöttválasztó Értekezleten a küldöttek megválasztása jelölt-lista alapján, titkos szavazással történik. A jelöltlistát a tagozat vezetősége által felkért jelölőbizottság készíti. A küldöttek megválasztására a 20. §. szabályai vonatkoznak. A Küldöttválasztó Értekezlet határozatképességét az Ügyrend szabályozza.
(7) A megválasztott küldöttek megbízatása egy Közgyűlésre érvényes.
(8) A Közgyűlés időpontjáról, helyéről és napirendjéről a Társulat minden rendes és pártoló tagját a Közgyűlés időpontja előtt legalább 15 nappal írásban értesíteni kell.
(9) Minden jogi személy pártoló tag egy megbízottal képviseltetheti magát a Közgyűlésen.
(10) Ha a Közgyűlés napirendjén tisztújítás vagy alapszabálymódosítás is szerepel, akkor a Közgyűlés időpontját és helyét a napisajtóban is meg kell hírdetni.

11. §.

(1) A Közgyűlést a Társulat elnöke vagy az Elnökség egyik tagja vezeti. Ő a Közgyűlés elnöke, előterjeszti a Közgyűlés tárgysorozatát, a beérkezett írásbeli indítványokat. Javaslatot tehet mandátumvizsgáló, szavazatszedő stb. bizottságnak a kiküldésére.
(2) A Közgyűlés tárgysorozatához és megvitatandó kérdéseihez bármely tárulati tag hozzászólhat, de csak a megválasztott, küldött tagok szavazhatnak. A küldöttek szavazati jogukat csak személyesen gyakorolhatják.
(3) A közgyűlésen a választások titkos szavazással történnek. Kellő indoklással más kérdésben is elrendelhető titkos szavazás.
(4) A Közgyűlés határozatképessége, határozatérvényessége, tisztségekre jelölés és választás tekintetében a 18., 20. §. irányadó.

VIII. A Választmány

12. §.

(1) A Választmány a Közgyűlésnek alárendelt, az Elnökségnek fölérendelt vezető szerv. Foglalkozik az Alapszabály szerint hatáskörébe tartozó, valamint a Társulat más szervei által eléje terjesztett ügyekkel.
(2) A Választmány a Közgyűlés által megválasztott Elnökségből, a Közgyűlésen megválasztott 26—28 választmányi tagból, a Fegyelmi Bizottság, az IMÜ Bizottság elnökéből, a tagozatok egy-egy képviselőjéből és a társulati lapok felelős szerkesztőiből áll. A Közgyűlés az esetleg megüresedő választmányi tagsági helyek betöltésére 8—10 választmányi póttagot választ meg, meghatározott behívási sorrenddel. A póttagoknak a behívás előtt tanácskozási joguk van. Tanácskozási joggal részt vehetnek a Választmány ülésein további meghívott személyek is.
(3) A Választmány
a) vezeti és ellenőrzi a Társulat munkáját két Közgyűlés között;
b) figyelemmel kíséri a Társulat alapszabályszerű működését;
c) kiküld állandó és időszaki bizottságokat, megszabja feladatukat és hatáskörüket, beszámoltatja őket tevékenységükről és szükség esetén visszahívhatja tagjaikat;
d) felvesz tiszteletbeli tagokat; dönt a vitás tagfelvételi ügyekben; töröl, fegyelmi eljárás alapján kizár a tagok sorából egyes személyeket;
e) határoz tagozatok kialakítása ügyében; jóváhagyja a tagozatok vezetőségválasztásait;
f) kidolgozza és jóváhagyás végett a Közgyűlés elé terjeszti a Társulat Ügyrendjét;

g) jóváhagyja a Társulat Fegyelmi Szabályzatát és dönt a Fegyelmi Bizottság megfellebbezett határozataival kapcsolatban;
h) dönt a Társulat éves költségvetéséről és megtárgyalja az évi beszámolót, megállapítja a Szövetség ajánlásait is figyelembe véve a rendes tagok tagsági díját;
i) kijelöli azt a négy vidéki tagozatot, amely a következő évben az Elnökségbe képviselőt küld.

(4) A Választmányt az Elnökség évente legalább kétszer hívja össze. Össze kell hívni akkor is, ha ezt a Társulat tagjainak legalább negyede, vagy a Választmány tagjainak legalább a fele kéri.

IX. Az Elnökség

13. §.

(1) Az Elnökség a Közgyűlésnek és a Választmánynak alárendelt társulati vezető szerv. Foglalkozik az Alapszabály szerint hatáskörébe tartozó, továbbá a más társulati testületek által eléje terjesztett ügyekkel.

(2) Az Elnökség összetétele: elnök, egy budapesti és egy vidéki alelnök, főtitkár, pénztáros, a szakosztályok elnökei és titkárai, a Nemzetközi Kapcsolatok Bizottságának elnöke és titkára, egy-egy titkár a dunántúli és a dunán inneni tagozatok ügyeinek intézésére, továbbá a vidéki tagozatok négy képviselője.

(3) Az Elnökség tagjait a Közgyűlés választja meg, kivéve a vidéki tagozatok 4 képviselőjét. Ezeket a Választmány által kijelölt 4 vidéki tagozat választja egy évi időtartamra. Törekedni kell arra, hogy az Elnökségben a Társulat tagságának minden rétege megfelelően képviselve legyen.

(4) Az Elnökség
a) vezeti és ellenőrzi a Társulat munkáját két választmányi ülés között;
b) elkészíti a Társulat évi munkatervét;
c) megvitatja és a Választmány elé terjeszti a Társulat éves költségvetését, megállapítja a pártoló tagok tagsági díját;
d) gondoskodik a vezető és központi szervek határozatainak végrehajtásáról;
e) irányítja és ellenőrzi a szakosztályok, tagozatok, állandó és időszaki bizottságok munkáját;
f) segíti és ellenőrzi a Társulat lapjainak szerkesztését;
g) kiküld állandó és időszaki bizottságokat, megbízottakat, megszabja feladataikat, beszámoltatja őket tevékenységükről és szükség esetén visszahívhatja tagjaikat;
h) előkészíti a Közgyűlést és a Választmány üléseit;
i) javaslatot tesz a Közgyűlésnek és a Választmánynak a Szövetség munkájával kapcsolatosan;
j) felvesz a tagozatok vezetőségének javaslatára rendes és pártoló tagokat;
k) intézkedik az időközben megüresedett tisztségek betöltéséről a 13. §. (5) bekezdés szerint;
l) dönt a társulati jutalmak kiosztásáról.

(5) Olyan tisztség megüresedése esetén, amelyet a Közgyűlés névre szólóan töltött be, az Elnökség ideiglenesen megbíz egy tagot a tisztség ellátásával. A tisztséget a legközelebbi Közgyűlés választás útján tölti be a legközelebbi tisztújításig. Ha az így ideiglenesen megbízott tisztségviselők száma eléri a Közgyűlés által névre szólóan tisztségekre megválasztottak számának 25%-át, akkor 60 napon belül rendkívüli Közgyűlést kell összehívni tisztújítás céljából.

(6) Az Elnökség határozatai ellen 15 napon belül a Választmányhoz lehet halasztó hatály nélkül fellebbezni.

(7) Az Elnökséget az elnök vagy a főtitkár hívja össze.

(8) Az Elnökség kéthavonként legalább egyszer ülésezik.

14. §.

(1) Az elnök vezeti a Társulat vezető szerveinek üléseit, képviseli a Társulatot más egyesületek, szervek stb. irányában. Felelős a Társulat alapszabályszerű működéséért. Felelősség terhe mellett utalványozhatja a Társulat kifizetéseit.

(2) Az elnököt akadályoztatása esetén az általa felkért egyik alelnök helyettesíti.

(3) A tiszteletbeli elnökök tudományos és közéleti tekintélyükkel támogatják a Társulat tevékenységét. Őket a Közgyűlés határidő nélkül választja. Számuk legfeljebb 5. A Társulat vezető szerveiben és az IMU bizottságban az e szervek választott tagjait megillető jogokat gyakorolhatják, a Közgyűlésen a küldöttek jogai illetik meg őket.

(4) A főtitkár biztosítja a vezető szervek határozatainak végrehajtását, ellátja a két elnökségi ülés között a Társulat folyamatos ügyintézését, elkészíti a vezető szervek elé terjesztendő beszámolókat, gondoskodik a Fegyelmi, az IMU és a Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága, a szakosztályok, a tagozatok, az állandó és időszaki bizottságok és megbízottak munkájának irányításáról és ellen-

őrzéséről. Eljár a Társulat ügyeiben különféle szervek előtt. Felelősség terhe mellett utalványozhatja a Társulat kifizetéseit és elkészíti a pénztárossal együtt a Társulat éves költségvetési tervét. Akadályoztatása esetén valamelyik általa felkért elnökségi tag helyettesíti.

(5) A pénztáros felelősség terhe mellett intézi a Társulat pénzügyeit, utalványozza a Társulat kifizetéseit, elkészíti a főtitkárral együtt a Társulat évi költségvetési tervét, valamint a Közgyűlés elé terjesztendő jelentést. Okmányszerűen köteles igazolni a kifizetések jogosultságát. Működését az elnök, a főtitkár, az Ellenőrző Bizottság és a Szövetség bármikor ellenőrizheti.

(6) A vidéki ügyeket intéző két titkár a főtitkár irányításával intézi a vidéki tagozatok szervezési ügyeit. Működésüket az Ügyrend szabályozza.

X. A központi szervek

15. §.

(1) Az Ellenőrző Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból, 3 tagból és 2 tanácskozási jogú póttagból áll. Tagjai a Társulatban semmilyen más tisztséget nem viselhetnek. Az Ellenőrző Bizottság a Társulat alapszabályszerű működését és a Társulat költségvetési tervének megtartását ellenőrzi. Betekintési joga van a Társulat vezető és központi szerveinek, szakosztályainak, tagozatainak, állandó és időszaki bizottságainak munkájába. Észrevételeiről szükség esetén tájékoztatja a Választmányt és az Elnökséget. Működéséről beszámol a Közgyűlésnek.

(2) A Fegyelmi Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból, 2 tagból és 2 tanácskozási jogú póttagból áll. Kidolgozza és a Választmány elé terjeszti a Társulat Fegyelmi Szabályzatát. Az Alapszabályt vagy a Fegyelmi Szabályzatot megszegő társulati tagok ellen fegyelmi eljárást indít akár a vezető szervek, akár az Ellenőrző Bizottság utasítására. Ezekben az ügyekben határoz, kivéve ha kizárást tart szükségesnek; erre a Választmánynak tesz javaslatot. Határozatai ellen 15 napon belül halasztó hatállyal lehet a Választmányhoz fellebbezni.

(3) Az IMU Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból és 6—10 tagból áll. Képviseli a Társulatot az IMU-ban. Munkájához tervet készít és tevékenységéről beszámol a Választmánynak.

(4) A Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága a Közgyűlés által megválasztott elnökökből, titkárból, 6—8 tagból és 3 tanácskozási jogú póttagból áll. Ápolja a Társulat külföldi kapcsolatait, határoz a Társulat külföldi rendezvényeken való képviseletéről és külföldi vendégek meghívásáról. Munkáját a Szövetség illetékes szervével egyetértésben végzi. Évi munkatervet készít és tevékenységéről beszámol a Választmánynak.

XI. A szakosztályok

16. §.

(1) A Közgyűlés a Társulat nagyobb, állandó feladatainak önálló intézésére szakosztályokat létesít. A szakosztályok a szakterületi adottságoknak megfelelő tagokat tömörítik és ellátják a Társulat céljainak megfelelő előadások, kollokviumok, vándorgyűlések, ankétok stb. szervezésével kapcsolatos teendőket.

(2) A szakosztályokat a Közgyűlés által megválasztott elnököből, alelnökből és titkárból álló vezetőség irányítja. Működésüket az Ügyrend szabályozza.

(3) A szakosztály vezetősége munkájáról évente legalább egyszer beszámol az Elnökségnek.

XII. A tagozatok, helyi csoportok

17. §.

(1) A választmány tagozatokat létesíthet, ott, ahol erre igény merül fel, működési területük kijelölésével.

(2) A tagozat működési területén helyi csoportokat alakíthat. Működési területüket kijelöli és tevékenységüket irányítja.

(3) A tagozatok működését elnökből, alelnökökből és titkárokból álló vezetőség irányítja. Ezeket maga a tagozat választja meg öt évre, megválasztásukat a Választmány hagyja jóvá. A vezetőségválasztás módját az Ügyrend szabályozza. A vezetőség a tagozat munkájáról időközönként beszámol az Elnökségnek.

XIII. A testületek határozatképessége

18. §.

(1) A társulat bármely testületének határozatképességére vonatkozó alábbi szabályokat a testület ülésének teljes időtartamára alkalmazni kell.
(2) A küldöttválasztó értekezletek határozatképességét az Ügyrend szabályozza.
(3) A Társulat minden egyéb testülete akkor határozatképes, ha a testület ülésén jelen van a testület szavazati joggal rendelkező tagjainak több mint fele.
(4) Határozatképtelenség esetén a testületet 30 napon belül újabb ülésre kell összehívni. Ennek tárgysorozatán az ülésen elintézetlenül maradt napirendi pontok szerepelnek. Ez az ülés mindenképpen határozatképes.

XIV. Határozathozatal

19. §.

(1) A testületek határozataikat általában nyílt szavazással, egyszerű szótöbbséggel hozzák. Az Ügyrend által meghatározott esetekben elrendelhető titkos szavazás is. Ugyancsak az Ügyrend szabályai alkalmazandók szavazategyenlőség estén.
(2) A Közgyűlés a 9. §. (2) bekezdés a) és k) pontjaiban felsorolt kérdésekben legalább kétharmados szótöbbséggel dönt, és a döntés érvényességéhez az is szükséges, hogy a 10. §. szerint megválasztott teljes küldöttlétszámnak legalább a fele megszavazza a javaslatot.
(3) A testületek határozatainak megszavazásakor nem rendelkeznek szavazati joggal a testület olyan tagjai, akik a határozatban személy szerint közvetlenül érdekeltek. (Választásokra ez a rendelkezés nem vonatkozik.)

XV. Választások

20. §.

(1) A Küldöttválasztó Értekezleteken megválasztandó küldöttekre a tagozat vezetősége által felkért jelölőbizottság tesz javaslatot. A Küldöttválasztó Értekezleteken a jelöltlistát bármely szavazásra jogosult tag javaslatára további nevekkel kell kiegészíteni.
(2) A Közgyűlésen megválasztandó tisztségviselőkre a Választmány által felkért jelölőbizottság tesz javaslatot. Lehetőséget kell adni arra, hogy a küldöttek a jelölőbizottság javaslatát kiegészítsék.
(3) A választások titkosak. A Közgyűlésen a szavazólapra új név is beírható.
(4) A választások részletes lebonyolításának módját a Társulat Ügyrendje szabályozza.

XVI. A Társulat kiadványai

21. §.

(1) Céljainak hathatósabb előmozdítására a Társulat tudományos, didaktikai, népszerűsítő vagy kultúrpolitikai kérdéseket elemző kiadványokat, füzeteket, könyveket, folyóiratokat szerkeszthet, vagy ilyenek kiadását kezdeményezheti.
(2) A Társulat lapjainak szerkesztőbizottságait a Közgyűlés bízza meg; egyéb kiadványokhoz a szerkesztői megbízást a Választmány adja. Feladatukat az Ügyrend szabja meg.

XVII. A függetlenített titkárság

22. §.

(1) A Társulat függetlenített titkárságának munkatársait (a társulati titkárt és további alkalmazottakat) a Szövetség alkalmazza. Ők látják el a Társulat és a Szövetség határozatainak végrehajtásával kapcsolatos folyamatos ügyintéző és szervező munkát.
(2) Társulati munkájáért a függetlenített titkárság a Társulat Elnökségének és végső soron a Szövetség főtitkárának felelős.
(3) A függetlenített titkárság munkáját a Társulat főtitkára közvetlenül irányítja.

XVIII. A Társulat pénzgazdálkodása

23. §.

(1) A Társulat jövedelmének forrásai:
a) a rendes és pártoló tagok által fizetett tagdíjak;
b) a Szövetség és állami szervek által biztosított pénzügyi támogatás;
c) a Társulat rendezvényeire befizetett hozzájárulások;
d) egyéb bevételek.
(2) A Társulat pénzgazdálkodását éves költségvetés alapján végzi.

XIX. Felsőbb felügyelet

24. §.

(1) A Társulat felett a felügyeletet a MTESZ Országos Elnökségének Végrehajtó Bizottsága — az Ellenőrző Bizottság közreműködésével — látja el.

XX. Vegyes rendelkezések

25. §.

(1) Mindazokban a kérdésekben, amelyekről a Társulat Alapszabálya nem rendelkezik, a Társulat Ügyrendjét, Fegyelmi Szabályzatát és Szövetség Alapszabályát kell figyelembe venni.
(2) A jelen Alapszabály hatályba lépése után a korábbról visszamaradt elintézetlen ügyekben is a jelen Alapszabály szerint kell intézkedni.

26. §.

Ezt az Alapszabályt a Társulat Közgyűlése 1966. július hó 1. napján elfogadta, és az Alapszabály 1968. év május hó 20. napján hatályba lépett.

Az Alapszabály 9. §. (2) f; 13. §. (4) c; 23. §. (2); és 24. §. (1) bekezdését a Közgyűlés 1975. október hó 26-án módosította.

Az Alapszabály 9. §. (2); 10. §. (1); 12. §. (3); 13. §. (4) c pontját a Közgyűlés 1978. június 27-én módosította.

Az Alapszabály 3. §. (2); 73§. (3); 9. §. (2); 10. §. (1); 12. §. (3) b, g, h, i; 12. §. (4), (5); 13. §. (2), (3); 14. §. (3), (4); 15. §. (4) és 17. §. (3) bekezdését a Közgyűlés 1980. december 30-án módosította.

A választások megkezdése előtt Császár Ákos ismertette az Elnökség javaslatát Surányi János tiszteletbeli elnökké választására. A közgyűlés úgy döntött, hogy erről a javaslatról a többi tisztségviselő megválasztásával egyidejűleg, titkosan szavaz. Ezek után Bognár Mátyás, a jelölőbizottság elnöke ismertette és részletesen indokolta a jelölőbizottság javaslatát a Társulat tisztségviselőire. Bejelentette továbbá, hogy több, a jelölőbizottság javaslatától eltérő, írásbeli javaslat is érkezett és ismertette azokat. Ezek közül a fontosabbak a következők voltak. 31 küldött Prékopa András javasolta főtitkárnak, 27 küldött javasolta, hogy amennyiben Prékopa András főtitkárnak jelölnék, Tusnády Gábort jelöljék A Matematika Alkalmazásai Szakosztály elnökének, 19 küldött javasolta, hogy Szendrei János legyen az Oktatási Szakosztály elnöke, és hogy Békefi Zsuzsa legyen a szakosztály alelnöke. Szőkefalvi-Nagy Béla részletesen indokolta ezeket a módosító javaslatokat. Az élénk, de tárgyilagos hangú vita után a közgyűlés nyílt szavazással úgy döntött, hogy Prékopa András és Békefi Zsuzsa, mint A Matematika Alkalmazásai Szakosztály, illetve az Oktatási Szakosztály elnökei kerüljenek a szavazólapra. A szavazólapok elkészítéséhez szükséges technikai szünetben Prőhle Tamás, a szavazatszámláló-bizottság elnöke ismertette a szavazás módját, majd a szavazásra került sor, és ezzel a délelőtti program véget ért.

Az ebédszünet után a főtitkári és a pénztárosi jelentés vitájára került sor. A vitában Kálmán Attila tanár és Szendrei János főiskolai tanár szólalt fel és vetett fel néhány, az oktatás problémáival kapcsolatos gondolatot. Kálmán Attila többek között felvetette a határainkon kívül élő magyar anyanyelvű diákok magyar nyelvű matematika könyvekkel való ellátásának problémáját. Szendrei János elsősorban az egyes vidéki tagozatokban meglevő jó kezdeményezések átvételének és elterjesztésének szükségességét hangsúlyozta. Lovász László röviden ismertette a Társulat Combinatorica című új lapjával kapcsolatos tudnivalókat. Császár Ákos válaszolt a hozzászólásokra.

Ezek után a közgyűlés a főtitkári és pénztárosi beszámolót egyhangúan elfogadta, és megadta a felmentvényt az eddigi vezetőségnek.

Az elnöklést Szőkefalvi-Nagy Béla vette át. A közgyűlés a társulati lapok szerkesztő bizottságait a következő összetételben hagyta jóvá:

PERIODICA MATHEMATICA HUNGARICA:

Főszerkesztő: Erdős Pál
Felelős szerkesztő: Hajnal András
Szerkesztő bizottság: Ádám András, Császár Ákos, Fejes Tóth László, Gyires Béla, Juhász István, Leindler László, Lovász László, Merza József, Moór Arthur, Prékopa András, Rapcsák András, Révész Pál, Rózsa Pál, Steinfeld Ottó, Surányi János, Szemerédi Endre, Szendrei János, Szép Jenő, Szőkefalvi-Nagy Béla, Tandori Károly, Vincze István.

MATEMATIKAI LAPOK

Felelős szerkesztő: Császár Ákos
Szerkesztő bizottság: Fejes Tóth László, Lovász László, Pelikán József, Rapcsák András, Révész Pál, Surányi János.

A MATEMATIKA TANÍTÁSA:

Felelős szerkesztő: Hódi Endre
Szerkesztő bizottság: Ács Pál, Bereznai Gyula, Bige Istvánné, Előd Istvánné, Kovács Zoltán, Némethy Katalin, Nyilas Dezső, Pálmay Lóránt, Peller József, Pogáts Ferenc, Reményi Gusztávné, Sztanó Tamásné.

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI LAPOK:

Felelős szerkesztő: Fried Ervinné
A szerkesztő bizottság vezetője: Tusnády Gábor
Szerkesztő bizottság: Ada—Winter Péter, Ács Pál, Bakos Tibor, Csirmaz László, Lukács Ottó, Pataki János, Ratkó István, Tolnai Jenő.

COMBINATORICA:

Tiszteletbeli főszerkesztő: Erdős Pál
Főszerkesztő: Lovász László
Technikai szerkesztő: Babai László
Tanácsadó szerkesztők: R. L. Graham, Hajnal András, Katona Gyula, T. Sós Vera
Szerkesztők; külföldiek: C. Berge, C. P. Cameron, J. Edmonds, B. Grünbaum, A. J. Hoffman, R. M. Karp, D. Kleitman, M. Las Vergnas, W. Mader, A. Margulis, E. C. Milner, J. Nesetril, R. Rado, D. K. Ray-Chaudhuri, G. C. Rota, B. Rotchild, H. Sachs, J. J. Seidel, J. P. Sloane, J. H Spencer, G. Szekeres, W. T. Tutte, D. J. A. Welsh, A. A. Zykov.

Magyarok: Andrásfai Béla, Gallai Tibor, Komlós János, Recski András, Simonovits Miklós, Szemerédi Endre.

Ezután az indítványok című napirendi pont keretében a közgyűlés Szalai András javaslatával foglalkozott, aki az alsó tagozatos nevelők továbbképzésének szükségességét hangsúlyozta. Ezt az indítványt a közgyűlés, jóváhagyólag, az Oktatási Szakosztály figyelmébe ajánlotta. Ismét szünet következett, mely után Prőhle Tamás ismertette a szavazás eredményét. Bejelentette, hogy a közgyűlés Surányi Jánost a Társulat tiszteletbeli elnökévé választotta. A Társulat főbb tisztségviselőire a közgyűlés a jelölőbizottság javaslatát fogadta el.

A megválasztott új vezetőség névsora:

Tiszteletbeli elnökök: (Erdős Pál, a MTA r. tagja; Fejes Tóth László, a MTA r. tagja, kut. int. igazgató); Surányi János egyetemi tanár
Elnök: Császár Ákos, a MTA r. tagja, egyetemi tanár
Budapesti alelnök: Kőváry Károly, középiskolai tanár
Vidéki alelnök: Gyires Béla, ny. egyetemi tanár
Főtitkár: Hajanal András, a MTA lev. tagja, tudományos tanácsadó
Dunán inneni titkár: Scharnitzky Viktor, főiskolai tanár
Dunántúli titkár: Pálmay Lóránt, vezető szakfelügyelő
Pénztáros: Révész Pál, tudományos tanácsadó

Tudományos szakosztály:

Elnök: Csákány Béla, egyetemi tanár
Alelnök: Győry Kálmán, egyetemi docens
Titkár: Pelikán József, egyetemi adjunktus

A matematika alkalmazásai szakosztály

Elnök: Prékopa András, a MTA lev. tagja, egyetemi tanár
Alelnök: Vincze Endre, egyetemi tanár
Titkár: Recski András, tudományos főmunkatárs

Oktatási szakosztály:

Elnök: Békefi Zsuzsa, középiskolai tanár
Alelnök: Pálfalvi Józsefné, főiskolai adjunktus
Titkár: C. Neményi Eszter, előadó

Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága

Elnök: Fried Ervin, egyetemi tanár
Titkár: Juhász István, tudományos főmunkatárs
Tagok: Fenyő István, egyetemi tanár
Freud Róbert, egyetemi adjunktus
Fritz József, tudományos főmunkatárs
Huhn András, egyetemi docens
Laczkovich Miklós, egyetemi adjunktus
Márki László, tudományos munkatárs
Póttagok (behívásuk sorrendjében): Pintz János, tudományos munkatárs
Losonczi László, egyetemi docens
Bakó Zsuzsa, középiskolai tanár

Ellenőrző bizottság:

Elnök: Láng Hugó, középiskolai tanár
Titkár: Vértesi Péter, tudományos főmunkatárs
Tagok: Elbert Árpád, tudományos főmunkatárs
Moór Arthur, egyetemi tanár
Reményi Gusztáv, középiskolai tanár
Póttagok: Sebestyén Zoltán, egyetemi adjunktus
Daróczy Zoltán, egyetemi tanár

Fegyelmi bizottság:

Elnök: Szénássy Barna, egyetemi tanár
Titkár: Lee Anna, tudományos főmunkatárs
Tagok: Knoll János, középiskolai tanár
Szakál Péter, szakfelügyelő
Póttagok: Szvetits Zoltán, középiskolai tanár
Tomor Benedek, egyetemi docens

IMU bizottság:

Elnök: Szőkefalvi-Nagy Béla, a MTA r. tagja, egyetemi tanár
Titkár: Lovász László, a MTA lev. tagja, egyetemi tanár
Tagok: Császár Ákos, a MTA r. tagja, egyetemi tanár
Hajnal András, a MTA lev. tagja, tudományos tanácsadó
Leindler László, a MTA lev. tagja, egyetemi tanár
Prékopa András, a MTA lev. tagja, egyetemi tanár
Rapcsák András, a MTA lev. tagja, egyetemi tanár
Révész Pál, tudományos tanácsadó
Szendrei János, főiskolai tanár
Tandori Károly, a MTA r. tagja, egyetemi tanár
T. Sós Vera, egyetemi docens
Varga Tamás, főelőadó

Választmányi tagok:

Alpár László, tudományos tanácsadó
Andrásfai Béla, egyetemi docens
Ács Pál, főszerkesztő
Bakos Tibor, ny. középiskolai tanár
Bognár Jánosné, egyetemi adjunktus
Csébfalvi Károly, tudományos tanácsadó
Gécseg Ferenc, egyetemi tanár
Gyarmati Edit, egyetemi adjunktus
Halász Gábor, tudományos főmunkatárs
Halmos Istvánné, középiskolai tanár
Herczeg János, szerkesztő
Katona Gyula, tudományos főmunkatárs
Kovács Csongorné, tanár
Nemetz Tibor, tudományos főmunkatárs
Petruska György, egyetemi docens
Pollák György, tudományos főmunkatárs
Pósa Lajos, egyetemi tanársegéd
Reiman István, egyetemi docens
Rományi Gusztávné, középiskolai tanár
Rózsa Pál, egyetemi tanár
Sárközy András, tudományos főmunkatárs
Simonovits Miklós
Szalai Mihály, egyetemi adjunktus
Székely Gábor, tudományos munkatárs
Tamássy Lajos, egyetemi tanár
Tandori Károly, a MTA r. tagja, egyetemi tanár
T. Sós Vera, egyetemi docens
Urbán János, előadó

Póttagok:

Prőhle Péter, műszaki ügyintéző
Bognár Mátyás, egyetemi tanár
Varga Tamás, főelőadó
Bogdán Zoltán, középiskolai tanár

Vincze István, tudományos tanácsadó
Gábos Adél, középiskolai tanár
Kiss Péter, főiskolai adjunktus
Kis Ottó, egyetemi tanár
Lippner György, egyetemi tanársegéd
Genzwein Ferenc, kut. int. igazgató

A Társulat lapjainak felelős szerkesztői:

A Matematika Tanítása: Hódi Endre, osztályvezető
Combinatorica: Lovász László, a MTA lev. tagja, egyetemi tanár
Középiskolai Matematikai Lapok: Fried Ervinné
Matematikai Lapok: Császár Ákos, a MTA r. tagja, egyetemi tanár
Periodica Mathematica Hungarica: Hajnal András, a MTA lev. tagja, tudományos tanácsadó

A választás eredményének ismertetése után Szőkefalvi-Nagy Béla jó munkát kívánt az új vezetőségnek. A közgyűlés a megválasztott új elnök rövid zárszavával fejeződött be.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BUDAPESTI RENDEZVÉNYEI

(1980. május 1-től 1981. február 1-ig.)

Május 7.: R. E. MACHOL (USA): The ORSA report — the question of professinal etics
Május 9.: Bekė Manó emlékdíj bizottság ülése
Május 12.: A matematikatanárok versenye bizottság ülése
Május 12.: K. H. INDLEKOFER (D): On the distribution of multiplicative arithmetical functions
Május 12.: Az 1982. évi „GAMM" konferencia szervező bizottságának ülése
Május 26.: Rényi Kató emlékdíj bizottság ülése
Május 26.: Az Arany Dániel matematikai tanulóverseny I. és II. bizottságának ülése
Május 26.: T. ZAMPHIRESCU (D): On planar families of curves. Most convex mirrors are magic
Május 27.: P. ELLIOTT (GB): On the differences of additive arithmetic functions
Május 30.: I. L. REILLY (Új-Zéland): Topological anti-properties
Június 4.: J. MERLIER (F): On ordered semigroups
Június 4.: A Beke Manó emlékdíj bizottság ülése
Június 5.: HAJNAL ANDRÁS: Befejeződött-e a matematika megalapozása? A végző matematikusok klubestje keretében
Június 5—10.: Csillag Pál találkozó
Június 6.: PÓSA LAJOS: Matematikai játékok
SAS ELEMÉR: Gondolatok a fizika tanításáról
A végző matematika-fizika szakos hallgatók klubestjén (az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezés)
Június 6.: F. NEUMAN (CS): Transformations os linear differential equations és Canonical forms of linear differential equations című előadásai
Június 6.: G. KREVERAS (F): Several decompositions of the André numbers
Június 7.: Az Arany Dániel matematikai tanulóverseny eredményhírdetése
Június 17.: A. FLORIAN (A): Durschlössigkeit von Schichten konvexer Scheiben
Június 19.: Elnökségi ülés
Június 19.: W. SAUER (CAN): Chain, antichain and cofinality of partially ordered sets
Június 20.: A Külügyi bizottság ülése
Június 23—28.: Nemparaméteres módszerek a matematikai statisztikában kollokvium
Július 7—11.: Rátz László vándorgyűlés
Július 9—10.: Felsőoktatási Ankét
Július 24.: J. SMITH (GB): Kongruencia-felcserélhető varietások, és Kvázicsoportok című előadásai
Augusztus 8—16.: Diákköri Nyári Iskola
Augusztus 19.: R. M. BURSTALL (CAN): Clear specification language, és Electric category theory című előadásai (A Matematika Alkalmazásai Szakosztály előadássorozata keretében)
Augusztus 19.: B. DAVEY: Topological representation of algebras in a dual discriminator variety
Augusztus 21.: B. DAVEY: A concrete version of Freyd's representability theorem and its application to duality theory
Augusztus 21—28.: Függvények, sorok, operátorok konferencia
Augusztus 21.: R. A. DAY (USA): Desargues hálók koordinációja
Augusztus 25—29.: Hálóelméleti kollokvium

Augusztus 28.: J. L. Massey (USA): On the capacity of the Poisson multiple-access channel and the rates of certain coding schemes
Szeptember 25.: A Jutalmazási Bizottság ülése
Szeptember 25.: H. Zessin (D): Stability of equilibria of large systems
Szeptember 26.: Reiman István: Beszámoló a finnországi Nemzetközi matematikai versenyről (az IMK ülése)
Október 1.: A Függvények, sorok, operátorok konferencia kötete szerkesztő bizottságának ülése
Október 1.: A Kürschák József matematikai tanulóverseny szervező bizottságának ülése
Október 2.: Elnökségi ülés
Október 3.: A Felsőoktatási bizottság ülése
Október 4—11.: D. Lutz (D): Operátorwertige Cosinus-funktionen (konzultációk Nagy Bélával)
Október 8.: A Schweitzer Miklós emlékverseny szervező bizottsága ülése
Október 9.: Deák Ervin: Általános topológia az iskolai matematika szemszögéből I. (A középiskolai kísérletben résztvevő tanárok számára)
Október 9.: Tagozati titkárok összejövetele
Október 17.: Sztochasztikus programozás konferencia szervező bizottságának látogatása Kőszegen
Október 17.: Molnár Emil: Szélsőérték a geometriaban (IMK előadása)
Október 21.: Recski András: Egy matematikus kalandjai Indiában (TIT-tel közösen)
Október 22.: Deák Ervin: Általános topológia az iskolai matematika szemszögéből II.
Október 30.: A Közgyűlésen megválasztandó tisztségviselőkre jelölő bizottság ülése
Október 30.: G. G. Walter: (USA) Some empirical Bayes estimation methods
Október 31—November 10.: Schweizter Miklós Matematikai Emlékverseny
November 1.: Kürschák József Matematikai Tanulóverseny
November 4.: Grünwald Géza emlékdíj bizottság ülése
November 5.: N. S. Sinkov (SU) Gaihler sokaságok holomorf projektív leképezéseiről
November 6.: Deák Ervin: Általános topológia az iskolai matematika szemszögéből III.
November 11.: Algebrai ülésszak Rédei László 80. születésnapja alkalmából
Csákány Béla: A szegedi algebrai műhely 40 éve
Steinfeld Ottó: Újabb eredmények a gruppoid-hálók témaköréből
Szász Gábor: Félcsoportok ideáljairól
Szendrei János: Algebrai struktúrák bővítéselméletéről
Wiegandt Richard: Általános radikálelmélet
Pollák György: Félcsoportok varietáshálójáról
November 12.: A budapesti közgyűlési küldöttekre jelölő bizottság ülése
November 14.: Választmányi ülés
November 14.: Vincze István: A játékok matematikai elmélete (IMK) ülése)
November 18. Grünwald Géza emlékdíj bizottság ülése
November 19., 25., 26. December 2., 3. : M. I. Graev (SU): Bevezetés az integrálgeometriába
November 27.: Az Arany Dániel verseny bizottságának ülése
November 27.: A Közgyűlésen megválasztandó tisztségviselőkre jelölő bizottság ülése
November 28.: Külügyi bizottság ülése
December 4.: Kürschák József Matematikai tanulóverseny szervező bizottságának ülése
December 5.: Budapesti küldöttválasztó értekezlet
December 10.: IMU bizottság ülése
December 11.: Elnökségi ülés
December 12.: Kürschák József Matematikai tanulóverseny eredményhírdetése
December 15.: P. L. Hammer (CAN): Graphs and pseudo-Boolean functions
December 17.: W. Weiss (CAN): Eredmények a halmazelméleti topológiában
December 18.: Az Arany Dániel matematikai verseny bizottságának ülése
December 19.: Grünwald Géza, Farkas Gyula Emlékdíjak kiosztása; a Schweitzer Miklós Emlékverseny és a Matematikatanárok versenye eredményhírdetése
December 22.: A Szele Tibor Emlékérem bizottság ülése
December 28.: Az Ellenőrző bizottság ülése
December 29—30.: Az Ifjúsági Matematikai Kör téli ankétja
Kollár János: A polinomok geometriája
Elekes György: A konvex tartományok néhány érdekesebb tétele
Az előre kiküldött feladatok megoldásainak megbeszélése
Csirmaz László: Hogyan kell nyerni, ha lehet?
December 30.: Tisztújító Küldött-közgyűlés

1981:

Január 7.: Arany Dániel bizottság ülése
Január 12.: Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny I. fordulója dolgozatainak megírása matematikából
Január 28.: A Számelméleti Kollokvium szervező bizottságának ülése
Január 29.: Az Oktatási szakosztály vezetőségének megbeszélése
Január 30.: Az OKTV I. fordulója feladatainak megbeszélése (IMK ülése)

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1979-ben jelentek meg.

A jegyzékben általános- és középiskolai *tankönyvek* és felsőoktatási *jegyzetek* nem szerepelnek.

BAKOS TIBOR (szerk.): *Középiskolai matematikai versenyek 9—10, 1975/76, Budapest, 1979,* Tankönyvkiadó, 218 oldal, 16,50 Ft.

BARANYAI KÁROLY: *A biológiai modellezés matematikai alapjai,* 1. kötet, Budapest, 1979, Medicina, 359 oldal, 45,— Ft

BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: *Tankönyvi útmutató az I. osztályos matematika munkatankönyvhöz. Gimnázium,* Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 91 oldal, 8,— Ft.

BÁRCZY BARNABÁS: *Integrálszámítás,* (Példatár), (4. kiadás), Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 359 oldal, 26,— Ft.

DÁVID LAJOS: *A két Bolyai élete és munkássága,* (2. bővített kiadás), Budapest, 1979, Gondolat, 430 oldal, 55,— Ft.

DROMERNÉ TAKÁCS VIOLA (szerk.): *Sejtautomaták,* Budapest, 1979, Gondolat, 288 oldal, 40,— Ft.

FARKAS MIKLÓS (főszerkesztő): *Matematikai kislexikon,* (3. kiadás), Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 443 oldal, 82,— Ft.

FRIED ERVIN: *Oszthatóság és számrendszerek,* (4. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 147 oldal, 8,50 Ft.

GÁLL ÉVA: *Vigyázat! Csak gyerekeknek!* (Utazások Matematikaországban, 1.), (2. kiadás), Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 115 oldal, 7,— Ft.

GÁLL ÉVA: *Matematikaország határán,* (Utazások Matematikaországban 2.), (2. kiadás), Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 63 oldal, 8,— Ft.

GYIRES, B. (editor): *Analytic Function Methods in Probability Theory,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 21, Amsterdam—Oxford—New York and Budapest, 1979, North, Holland Publishing Company and János Bolyai Mathematical Society, 379 oldal, 220, —Ft.

HAJÓS GYÖRGY: *Bevezetés a geometriába,* (6. kiadás), Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 594 oldal, 61,— Ft.

HALMAI ERZSÉBET: *Lineáris algebra,* Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 339 oldal, 37,— Ft.

HÁMORI MIKLÓS: *Relációk,* (2. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 189 oldal, 10,50 Ft.

HARDY ZSIGMOND—SÓLYOM MIHÁLY: *Út a modern algebrához,* (3. kiadás), Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 277 oldal, 27,50 Ft.

IMRECZE ZOLTÁNNÉ: *Nem nehéz a matematika,* (2. javított kiadás), Budapest, 1979, MRT—Minerva, 206 oldal, 37,— Ft.

JÁVOR ANDRÁS—BENKŐ TIBORNÉ: *Diszkrét rendszerek szimulációja,* Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 199 oldal, 47,— Ft.

KALUZSNYIN, L. A.: *Bevezetés az absztrakt algebrába,* Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 473 oldal 45,— Ft.

KLEINROCK, LEONARD: *Sorbanállás — kiszolgálás,* Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe, Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 351 oldal, 91,— Ft.

KÓSA ANDRÁS (főszerkesztő): *Optimumszámítási modellek,* Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 865 oldal 83,— Ft.

LOVÁSZ, L.: *Combinatorical Problems and Exercises,* Budapest, 1979, Akadémiai Kiadó, 551 oldal, 870,— Ft.

MANDICS GYÖRGY—M. VERESS ZSUZSANNA: *Bolyai János jegyzeteiből,* Bukarest, 1979, Kriterion Kiadó, 95 oldal, 10,50 Ft. (Megjelent a Magyar Népköztársaság és a Román Szocialista Köztársaság könyvkiadási megállapodása keretében.)

PÁLFAI PÁL (szerk.): *Felvételi feladatok. Matematika, fizika, szabadkézi rajz,* Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 773 oldal, 86,— Ft.

PELLE BÉLA: *Geometria,* (2. kiadás), Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 478 oldal, 64,— Ft.

PERELMAN, Ja. L.: *Matematikai történetek és rejtvények*, Budapest, 1979, Gondolat, 185 oldal, 19,— Ft.

POLLÁK, G. (editor): *Algebraic Theory of Semigroups*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 20, Amsterdam—Oxford—New York and Budapest, 1979, North-Holland Publishing Company and János Bolyai Mathematical Society, 753 oldal, 660,— Ft.

PRÉKOPA, A. (editor): *Survey of Mathematical Programming*, Proceedings of the 9th International Mathematical Programming Symposium, Budapest, August 23—27, 1976, Vol. I—III., Budapest, 1979, Akadémiai Kiadó, 550+589+413 oldal, 1300,— Ft.

RÁBAI IMRE: *Elemi matematikai példatár* 4. kötet, Függvények. Jól felkészültem-e az érettségire és a felvételire? Budapest, 1979, Gondolat, 367 oldal, 24,— Ft.

RADNAINÉ SZENDREI JÚLIA: *Kivi és Apó*, (Utazások Matematikaországban, 4.) Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 122 oldal, 8,50 Ft.

RÁKOSI MIKLÓS: *Az RPG programozási nyelvek*, Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 330 oldal, 35,— Ft.

RÉVÉSZ GYÖRGY: *Bevezetés a formális nyelvek elméletébe*, Budapest, 1979, Akadémiai Kiadó, 254 oldal, 50,— Ft.

ROHOVSZKY RUDOLF: *Matematika*, Középiskolára előkészítő tanfolyamok anyaga, (4. kiadás), Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 131 oldal, 8,— Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Differenciálegyenletek*, (példatár), (2. kiadás), Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 337 oldal, 25,— Ft

SCHARNITZKY VIKTOR: *Mátrixszámítás* (Példatár), (3. kiadás), Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 340 oldal, 25,— Ft.

SOLT GYÖRGY: *Valószínűségszámítás*, (Példatár), (4. kiadás), Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 265 oldal, 20,— Ft.

SKLARSZKIJ, D. O.—CSENCOV, N. N.—JAGLOM, I. M.: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből*, 1 rész: *Aritmetika és algebra*, (4. kiadás), Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 339 oldal, 45,— Ft.

SZEDERKÉNYI ANTAL: *Topológia*, (2. bővített kiadás), Középiskolai szakköri füzet, Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 254 oldal, 15,50 Ft.

SZENTIVÁNYI TIBOR (szerkesztő): *Neumann János élete és munkássága*, Budapest, 1979, MTESZ Neumann János Számítógéptudományi Társaság, 175 oldal, 40,— Ft.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA—GEHÉR LÁSZLÓ—NAGY PÉTER: *Differenciálgeometria*, Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 256 oldal, 64,— Ft.

VIGASSY LAJOS: *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben*, Budapest, 1979, Tankönyvkiadó, 170 oldal, 9,50 Ft.

VLAGYIMIROV, V. Sz.: *Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe*, Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 464 oldal, 103,— Ft.

WEAVER, WARREN: *Szerencse kisasszony, A valószínűség elmélete*, Budapest, 1979, Gondolat, 337 oldal, 25,50 Ft.

WIGNER JENŐ: *Csoportelméleti módszer a kvantummechanikában*, Budapest, 1979, Akadémiai Kiadó, 391 oldal, 102,— Ft.

YOUNG, D. M.: *Nagy lineáris rendszerek iterációs megoldása*, Budapest, 1979, Műszaki Kiadó, 463 oldal, 110,— Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1980-ban jelentek meg.

A jegyzékben általános iskolai és középiskolai *tankönyvek* és felsőoktatási *jegyzetek* nem szerepelnek.

BALOGH ALBERT—DUKÁTI FERENC—SALLAY LÁSZLÓ: *Minőségellenőrzés és megbízhatóság*, Budapest, 1980, Műszaki Kiadó, 538 oldal, 127,— Ft.

M. BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: *Tankönyvi útmutató a 2. osztályos matematika munkatankönyvhöz. Gimnázium*, Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 64 oldal, 7,— Ft.

M. BARTAL ANDREA—JAKAB ALBERT—JAKAB ALBERTNÉ—KÁNTOR SÁNDORNÉ—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ—PELLE BÉLA—RADOS MIHÁLY—RÁCZ JÁNOS: *Ismerkedés kísérleteinkkel*, (Új utak a matematika tanításában 4.), Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 301 oldal, 29,50 Ft.

BÁRCZY BARNABÁS: *Differenciálszámítás* (Példatár), (5. kiadás), Budapest, 1980, Műszaki Kiadó, 280 oldal, 27,— Ft.

BOGNÁR JÁNOSNÉ—NEMETZ TIBOR—TUSNÁDY GÁBOR: *Ismerkedés a véletlennel*, Szakköri füzet az általános és a középiskolai tanulók számára, Budaprest, 1980, Tankönyvkiadó, 238 oldal, 17,— Ft.

BRÓDY ANDRÁS: *Ciklus és szabályozás.* Kísérlet a klasszikus piac és cikluselmélet matematikai modelljének megfogalmazására, Budapest, 1980, Közgazdasági és Jogi Kiadó, 271 oldal, 56,— Ft.

BRONSTEJN, I. N.—SZEMENGYAJEV, K. A.: *Matematikai zsebkönyv mérnökök és mérnök-hallgatók számára,* (4. kiadás), Budapest, 1980, Műszaki Kiadó, 768 oldal, 90,— Ft.

CHINN, W. G.—STEENROD, N. E.: *Bevezetés a topológiába.* A szakaszok, görbék, körök és körlemezek leképezéseinek geometriája, Budapest, 1980, Gondolat, 253 oldal, 24,— Ft.

CSÁSZÁR, Á. (Editor): *Topology I—II,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 23, Budapest and Amsterdam — Oxford —New York, 1980, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 1260 oldal, 780,— Ft.

CZAPÁRI ENDRE—SOÓS PAULA: *Geometriai feladatok gyűjteménye* 2. kötet, (9. kiadás), Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 350 oldal, 18,— Ft.

FREGE GOTTLOB: *Logika, szemantika, matematika.* Válogatott tanulmányok, Budapest, 1980, Gondolat, 249 oldal, 37,— Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ—GYAPJAS FERENCNÉ—HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA—PÁLMAY LÓRÁNT—PATAKI JÁNOS—POGÁTS FERENC—REIMAN ISTVÁN—SCHARNITZKY VIKTOR: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából,* Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 384 oldal, 29,50 Ft.

GÁSPÁR LÁSZLÓ (szerkesztő): *Döntéselőkészítés programozással* (Esettanulmányok), Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 290 oldal, 34,— Ft.

JABLONSZKIJ, Sz. V.—LUPANOV, O. B. (szerkesztők): *Diszkrét matematika a számítástudományban,* Budapest, 1980, Műszaki Kiadó, 354 oldal, 75,— Ft.

JÁNOSSY LAJOS—TASNÁDI PÉTER: *Vektorszámítás,* 1. kötet, Vektor- és tenzoralgebra, Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 287 oldal, 34,— Ft.

KAZARINOFF, N. D.: *Geometriai egyenlőtlenségek,* Budapest, 1980, Gondolat, 213 oldal, 21,50 Ft.

KLEIN SÁNDOR: *A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata,* Budapest, 1980, Akadémiai Kiadó, 349 oldal, 62,— Ft.

KOMLÓSSY LÁSZLÓNÉ: *Csupaszám országban,* Nyitnikék, Kisiskolások könyve, 3, (5. kiadás), Budapest, 1980, RTV—Minerva, 63 oldal, 28,— Ft.

KOVÁCS CSONGORNÉ (szerkesztő): *Kézikönyv a matematika 6. osztályos anyagának tanításához,* Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 397 oldal, 39,— Ft.

LATKA FRANTISEK: *Matematikai képletgyűjtemény,* (2. jav. kiadás), Budapest, 1980, Műszaki Kiadó, 134 oldal, 9,50 Ft.

MÁTÉ LÁSZLÓ: *Rekurzív sorozatok,* Középiskolai szakköri füzet, Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 125 oldal, 11,50 Ft.

MIKOLÁS MIKLÓS: *Valós függvénytan és ortogonális sorok,* (Utánnyomás), Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 393 oldal, 59,— Ft.

OBÁDOVICS JÓZSEF GYULA: *Matematika,* Középiskolai, technikumi tanulók, egyetemi hallgatók és technikusok számára, gyakorlati alkalmazásokkal, (11. kiadás), Budapest, 1980, Műszaki Kiadó, 807 oldal, 80,— Ft.

PELLER JÓZSEF: *Ponthalmazok, számhalmazok, polinomok, függvények, algebra,* Kísérlettel megalapozott didaktikai megoldásrendszer, Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 220 oldal, 21,50 Ft.

PÓLYA GYÖRGY—SZEGŐ GÁBOR: *Feladatok és tételek az analízis* köréből, I. kötet, Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 426 oldal, 55,— Ft.

PONOMARJOV, K. K.: *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása,* (Gyakorlati feladatok), (2. kiadás), Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 258 oldal, 22,— Ft.

RÓZSA, P. (Editor): *Numerical Methods,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 22, Budapest and Amsterdam — Oxford —New York, 1980, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 631 oldal 400,— Ft.

SAIN MÁRTON: *Matematikatörténeti ABC,* Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához, (4. kiadás), Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 253 oldal, 35,— Ft.

SPERANZA, F.: *Relációk és struktúrák,* Budapest, 1980, Tankönyvkiadó, 218 oldal, 20,50 Ft.

STACHÓ LAJOS: *A programozás matematikai ABC-je,* Gyakorlati bevezetés a programozásba, (2. kiadás), Budapest, 1980, 201 oldal, 39,— Ft.

VARGA LÁSZLÓ: *Rendszerprogramok elmélete és gyakorlata,* (Utánnyomás), Budapest, 1980, Akadémiai Kiadó, 566 oldal, 112,— Ft.

VARGHA BALÁZS—DIMÉNYI JUDIT—LOPARITS ÉVA: *Nyelv—Zene—Matematika,* (2. kiadás), Budapest, 1980, RTV—Minerva, 217 oldal, 65,— Ft.

VLAGYIMIROV, V. SZ.: *Parciális differenciálegyenletek,* Feladatgyűjtemény, Budapest, 1980, Műszaki Kiadó, 274 oldal, 64,— Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1981. máj. 13. — Terjedelem: 20,30 (A/5) ív
Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György
81-2366 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József igazgató

CONTENTS

Commemoration of the 100-th anniversary of the birth of Leopold Fejér and Frederic Riesz 1

1. B. Szőkefalvi-Nagy: Life and personality of Frederic Riesz 1
2. K. Tandori: Life and work of Leopold Fejér 7
3. P. R. Halmos: The work of Frederic Riesz 13
4. J.-P. Kahane: The importance of the work of Fejér 21
L. Fejes Tóth: Remark on a theorem of Rényi and Sulanke 33
L. Alpár: Alfréd Rényi's organizing activity 39
J. Pach: Mixed volume and the van der Waerden conjecture 49
T. Nemetz: On a problem on coding theory 61
B. Szénássy: Contributions to the history of the discovery of the two Bolyai-s 71
G. Tóth: On the Atiyah—Singer index theorem I-II. 97
I. Babcsányi: Rees automata 139
T. Fényes and R. Kosik: On a second order differential equation of the operator field 149
I. Major: New proof of the invariance of the Jordan measure under isometric transformations .. 157
J. Gróf: Approximation of functions by weighted power series on the whole real line 161
E. Fehér: Foundations of catastrophe theory 171
Problems 185
Activity of the Society 187
Book reviews 227

СОДЕРЖАНИЕ

Ознаменование столетия со дня рождения Леопольда Феера и Фредэрика Рисса 1

1. Б. Секефальви-Надь: Жизнь и личность Фредэрика Рисса 1
2. К. Тандори: Жизнь и творчество Леопольда Феера 7
3. П. Р. Хальмош: Творчество Фредэрика Рисса 13
4. Ж.-П. Кахан: Значение творчества Феера 21
Л. Фейеш Тот: Замечание к теореме Реньи и Зуланке 33
Л. Альпар: Альфред Реньи как организатор науки 39
Я. Пах: Смешанные объемы и гипотеза ван дер Вардена 49
Т. Нэмец: Об одной проблеме кодирования 61
Б. Сенаши: Материалы к истории двух Бояи 71
Г. Тот: О теореме Атьия—Зингера об индексе 97
И. Бабчани: Ризовские автоматы 139
Т. Фенеш—П. Кошик: Об одном дифференциальном уравнении второго порядка операторного поля 149
И. Майор: Новое доказательство инвариантности меры Жордана относительно изометрических преобразований 157
Й. Гроф: Приближение функций весовыми степенными рядами на всей 161
Э. Фехер: Основы теории катастроф 171
Задачи 185
В математическом обществе 187
Новые книги 227

Ára: 27,— Ft
Évi előfizetés: 36,— Ft

INDEX: 25 564
ISSN 0025—519X

312.046

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

29. évfolyam, 1977—1981

4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1981. — 29. évfolyam 4. szám.
Felelős szerkesztő: Császár Ákos.
Szerkesztők: Lovász László, Pelikán József, Révész Pál, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest, V., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODÁNÁL, 1900 Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: PKHI 215-96 162.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11 488,
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: 1368 Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 36,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

FILEP LÁSZLÓ: Farkas Gyula élete és munkássága 231
REIMANN ISTVÁN: Schopp János (1910—1980) 245
TÓTH GÁBOR: Az Atiyah—Singer-indextételről III. 247
SZEPESVÁRI ISTVÁN: Az uniform poliéderek számáról I.—II. 273
PETZ DÉNES: Lokálisan kompakt csoportok: csoport Neumann-algebra és dualitás 329
MAGYAR ZOLTÁN: Egy számnégyesekre vonatkozó rekurzió 345
Jelentés az 1980. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről 349
Társulati élet 363

FARKAS GYULA ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA

FILEP LÁSZLÓ

Ötven évvel ezelőtt, 1930. december 26-án halt meg Farkas Gyula, a kiváló magyar matematikus és fizikus, az MTA rendes, a Matematikai és Fizikai Társulat tiszteleti tagja. Halála után személye és eredményei jórészt feledésbe merültek; napjainkban azonban az optimalizálás elméletében és a mechanikában elért eredményei reneszánszukat élik.

1. Életútja

1847. március 28-án első gyermekként született a Fejér megyei Sárosdon, régi, de már elszegényedett nemesi családból. Apja uradalmi intéző volt a Sárosdhoz tartozó egyik majorságban: Pusztasárosdon. (Így került be a lexikonokba tévesen Farkas Gyula születési helyéül Pusztasárosd.) Szülei rövidesen Veszprém megyébe, Rédére költöztek, ahol apja tiszttartó lett az Esterházy grófok uradalmában. A népes család (hét gyermek született, de csak négyen érték el a felnőttkort) később Győrbe költözött. Farkas Gyula itt végezte a középiskolát a bencések híres gimnáziumában. Nem volt jó tanuló; eredményei a mai közepesnek feleltek meg. Tehetsége először a zenében jelentkezett. Már diákkorában megjelentek első, zeneelméleti cikkei a Zenészeti Lapokban [1, 2, 3], amelyek helyet biztosítottak számára a Zenei Lexikonban is (Budapest, 1965. 1. kötet 602. oldal).

Az érettségi megszerzése után a pesti tudományegyetem jogi karára íratkozott be 1866 őszén, és egyúttal felvételi vizsgát tett a felsőbb zongoraiskolába is. Sikeresen felvételizett, de mégsem íratkozott ide be. Erről később így vall önéletrajzában (közölve [98]-ban): „néhány velem együtt vizsgált ifjú oly mesés hallásbeli képességet tanúsított, amilyen nekem nem jutott osztályrészül: zenei törekvéseimmel szakítottam, de azért lelkes zongorázó maradtam". Jogi tanulmányait is meg kellett szakítania, mert apja — aki pedig gazdasági kérdésekben tájékozott, gazdasági lapokba cikkeket írogató ember volt — egy vállalkozásban tönkrement. Farkas Gyula kénytelen volt magántanítónak elszegődni, először vidékre (Tolnára), majd Pestre. Eközben kezd érdeklődése a fizika felé fordulni. Átíratkozik bölcsésznek a természettan-vegytan szakra „ott érintkezésem Jedlikkel, meg a matematika professzoraival végképp eldöntötte a sorsomat" — írja már idézett önéletrajzában [98].

1870-ben, az egyetem elvégzése után a székesfehérvári reáltanoda tanára lett, és ott működött 1874-ig. Szaktárgyai tanítása mellett zeneoktatást is szervezett és vezetett, valamint nagysikerű nyilvános zongorahangversenyeket adott. Cikkeket írt az iskola Értesítőibe [4, 9, 10]; a tanítóegylet megbízásából fizika tankönyvet írt népiskolák számára [7]. Az Akadémiának is küldött be egy értekezést [13]. A dolgozatot Eötvös Loránd bírálta az Akadémia részéről — kedvezőtlenül.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Farkas Gyula ifjúkori arcképe

Két tanártársával együtt 1874-ben hetilapot alapított Székesfehérvári Figyelő címmel. A lap bíráló cikkei, kritikai szelleme kiélezte a viszonyt a város vezetői és a tanári kar között. A viszály következményeiről így ír az iskola történetét feldolgozó mű [78]: „Az intézet veszteségére lőn legelsőbben az, hogy két jeles tanára: Farkas Gyula és Persz Adolf eltávozott." A szerző értékelése szerint ezzel megszűnt az intézet virágzása.

Életének következő állomása a gróf Batthyány Géza gyerekei melletti házitanítóskodás 1874 és 1880 között. Ezek az évek döntőnek bizonyultak tudóssá válása szempontjából. A gróf fizikai laboratóriumot rendezett be számára. Sokat tartózkodtak külföldön, ahol Farkas Gyula kapcsolatba került neves matematikusokkal (pl. Hermite, Villarçeau), akiknek hatására a matematika problémái iránt kezd érdeklődni. Feladatokat old meg és tűz ki a Műegyetemi Lapokban. Saját költségén matematikai tanulmányokat tesz közzé [15, 16, 17]; Genfben kiadatja Baltzer német matematikus determinánsokról szóló könyvének első részét [14]. Kőnig Gyula könyvismertetésében (Műegyetemi Lapok, 1877, 188—189) fontosnak mondta a könyv magyar nyelven való megjelentetését, jónak tartotta, hogy Farkas Gyula önálló eredményeket is tartalmazó kiegészítésekkel, magyarázatokkal látta el a könyvet. A mű valóban elősegítette a determinánselmélet meghonosodását és szaknyelvi szempontból is irányadó lett. Folyóiratokban is egyre több matematikai publikációja jelenik meg

Az idős Farkas Gyula

Farkas Gyulának, különösen a párizsi akadémia Comptes Rendus-iben [18, 19, 22, 23, 24, 25]. E dolgozatok főként függvénytani problémákkal foglalkoztak.

Miután magántanítványai leérettségiztek, 1880-ban Budapestre költözött. 1881-ben doktorált a budapesti tudományegyetemen matematikából. Nem sokkal ezután magántanári képesítést szerzett komplex függvénytanból. Előadásaiban olyan témakörökkel foglalkozott, amelyekről magyar egyetemen még nem igen esett szó (pl. kvaterniók, Fourier-féle integrálok és sorok).

1887-ben került a kolozsvári egyetem elméleti fizikai tanszékére Réthy Mór (1848—1925) utódaként. Itteni huszonnyolc évi tartózkodása idején fejtette ki tudományos munkásságának legnagyobb részét, valamint jelentős közéleti tevékenységét. Hétszer volt a kar dékánja, egy tanévben pedig az egyetem rektora. Nagy szerepe volt abban, hogy az egyetem természettudományi kara európai színvonalra emelkedett. Az ő révén került Kolozsvárra Schlésinger Lajos, Fejér Lipót, Riesz Frigyes és Haar Alfréd is.

Jelentős szerepet töltött be Erdély tudományos egyesületében, az Erdélyi Múzeumegyletben; hosszú évekig volt elnöke a természettudományi szakosztálynak. Sokat tett azért (mint szerkesztő és cikkíró), hogy a szakosztály Értesítője színvonalas folyóirattá váljék.

Részt vett a „Mathematikai és Physikai Társulat" alapító mozgalmában és ülésein. A későbbiekben is fontos szerepet töltött be a Társulat életében: választmányi

tag (1918), tiszteleti tag (1924), két ízben a Kőnig Gyula-díjat odaítélő bizottság tagja (1922, 1924). A Társulat ünnepi ülésen emlékezett meg 80. születésnapjáról, amelyen tanítványa és tanszéki utóda Ortvay Rudolf (1885—1945) ismertette tudományos munkásságát [97].

Az egyetem küldötte volt a Padovában 1892-ben tartott Galilei ünnepségeken, ahol díszdoktorrá avatták. Ekkor vált fő kutatási területévé a Galileiig visszanyúló mechanikai egyensúlyi elv: a virtuális munka elve. Ennek továbbfejlesztése, az elvvel kapcsolatban a lineáris egyenlőtlenségek vizsgálata során elért eredményei lettek munkásságának legkiemelkedőbb részei.

A következő években egyre több publikációja jelent meg az elméleti fizika különböző területeiről és a lineáris egyenlőtlenségekről. Hazai tudományos tekintélye nagymértékben emelkedett, amikor 1896-ban megjelent a neves göttingeni professzor, W. Voigt kétkötetes „Mathematische Physik"-je: a könyv előszavában és függelékében elismerő sorok olvashatók Farkas Gyula néhány termodinamikai és hidrodinamikai eredményéről. 1898-ban az MTA levelező, majd 1914-ben rendes tagja lett (ajánlói a rendes tagságra: Eötvös Loránd, Réthy Mór, Fröhlich Izidor).

Farkas Gyulának a Bolyai-kultusz kialakításában is jelentős érdemei vannak. 1881-ben megjelent cikke [29] nyomán nevezik Bolyai-algoritmusnak Bolyai Farkas gyökközelítő eljárását az $x^m = a + x$ egyenletre. Ő mondta az avató beszédet a Bolyai János szülőházán elhelyezett emléktábla avatásakor [59], és ő képviselte az Akadémiát a Bolyaiak síremlékének avatásán is [68, 69].

Keveset tudunk a zárkózott, utód nélkül maradt Farkas Gyula magánéletéről. Kolozsvárra kerülése után nősült először; felesége rákban halt meg 1903 körül. Másodszor valószínűleg 1908-ban nősült. Gyermeke nem volt.

Egyéniségéről az 1980-ban elhunyt tanítványa Morvai Ferenc elbeszéléséből és Ortvay Rudolf írásai alapján alkothatunk képet. Sarkalatos tulajdonsága volt hajthatatlan igazságszeretete, igényessége önmagával és másokkal szemben. Nem volt túl közlékeny, nem törekedett népszerűségre, önmagát állandóan képző, elmélyedő természet volt. „Nemcsak kiváló kutató és a legnemesebb értelemben vett tanár volt, hanem kiváló egyéniség is, akinek mindig feltétlenül tiszta és nemes intenciója egész környezetére vezérlő és nemesítő hatást gyakorolt, ki körül mondhatjuk megtisztult a légkör, ami érthetővé teszi ama megbecsülést, melyben azoktól is részesült, kik tudományos értékeit — azoktól túlságosan távol állva — kellően nem értékelhették." — írja róla Ortvay Rudolf [98].

1915-ben erősödő szembaja (glaucoma) miatt nyugdíjaztatta magát, majd feleségével Budapestre költözött. Második felesége is nemsokára meghalt, így sokáig élt magányosan. Életének utolsó éveit egyik unokahúga családjával töltötte. Pestszentlőrincen halt meg 1930. december 26-án éjjel 11 órakor, ott is van eltemetve. Sírja teljesen elhanyagolt, minden jelzés nélküli. A Bolyai Társulat maradandóbb emléket állított Farkas Gyulának: 1973-ban Farkas Gyula emlékdíjat alapított, amit évente osztanak ki a matematika alkalmazása terén legjelentősebb eredményeket elért ifjú kutatóknak.

2. Matematikai munkássága

Első cikkeiben különböző algebrai és függvénytani problémákkal foglalkozott. Eredményeit gyakran idézték a korabeli folyóiratok, ma már azonban legtöbbjük elavultnak tekinthető.

Első, folyóiratban publikált cikkében [18] lineáris egyenletrendszerek megoldásait egy általa definiált k-ad fokú egész függvény differenciálhányadosaival határozta

meg. [19]-ben a $\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x^k = 0$ egyenlet (ahol x exponenciális alakban adott komplex szám) hamis gyökeivel, azok felléptének elkerülésével foglalkozik. Az $x^m + a \cdot x^n = b$ egyenlet (m és n valós számok, $m > 0$, $n > 0$) gyökeinek hatványait fejezi ki a és b hatványai szerint haladó hatványsorokkal [20]-ban. Három esetet különböztet meg aszerint, hogy

$$\left| \frac{b^\mu - 1}{a^\mu} \right| \gtreqless \frac{(\mu-1)^{\mu-1}}{\mu^\mu}, \quad \text{ahol} \quad \mu = \frac{m}{n}.$$

Ehhez a dolgozatához kapcsolódik a Bolyai-algoritmust tárgyaló cikk [29]. Egy általánosabb egyenletből indult ki, mint Bolyai Farkas és az arra adott gyökközelítő sorozat konvergenciájára ad meg feltételeket. A cikkhez kapcsolódóan az algoritmus általánosításával, a nyitott konvergenciaproblémák vizsgálatával később sokan foglalkoztak. Felsorolásukat lásd [101] 267. oldalán.

Két dolgozatban [24, 25] is foglalkozott a magasabbrendű sinusszal, amelyet az alábbi végtelen sor definiál:

$$\Phi_{m-1}(x) = \frac{x^{m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)} \pm \frac{x^{2m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (2m-1)} + \frac{x^{3m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (3m-1)} \pm \ldots .$$

Alkalmazta azt egyes lineáris differenciálegyenletek megoldásában, összegzési tételeket állapított meg stb.

Több cikkben tárgyalta az elliptikus integrálok elméletét. [21]-ben az olyan alakúakat, ahol a gyökjel alatti függvény három lineáris tényező szorzata. Ebből kiindulva és felhasználva néhány általa levezetett formulát, összegzési tételeket állapított meg több függvényre, valamint megadta a

$$\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}} + a_1 \cdot \frac{d^m y}{dx^m} + a_2 \cdot y = x$$

differenciálegyenlet megoldását [22, 23]. Az elliptikus integrálok sorbafejtését is tárgyalta [28].

A komplex függvénytan egyik klasszikus eredményének, a kis Picard-tételnek (egy nem-konstans egész függvény értékkészlete, legfeljebb egy véges érték kivételével, az összes komplex számokat tartalmazza) általánosítását tartalmazza [31]:

„Ha ‚u' a Z-nek olyan egyértékű függvénye, amelynek csak véges számú lényeges szinguláris pontja van és egyéb diszkontinuitásai nincsenek, és ha kivételes értékeknek nevezzük az olyan értékeket, amelyeket lényeges szinguláris pontokon kívül a függvény sohasem vesz fel, akkor u-ra nem lehet kettőnél több kivételes érték."

Legjelentősebb, legtöbbet idézett függvénytani dolgozata az előkelő Liouville Journal-ban megjelent [33] cikk. Tárgya az „iterált függvények" elmélete, amellyel addig csak E. Schröder két dolgozata foglalkozott. Farkas Gyula a cikkben először megadja az iterált függvény definícióját: $f(z)$ komplex változós függvény k-ad fokú iteráltja, amit $f^k(z)$-vel jelölünk, az $f^k(z) = f[f^{k-1}(z)]$, $f^0(z) = z$ rekurzív definícióval van értelmezve. Az iteráltakat konvergensnek nevezzük egy T tartományban, ha $f(z)$ a T-ben holomorf, mindegyik iterált pontjai T-ből valók és $A = \lim_{k \to \infty} f^k(z)$ létezik és véges. („A" nyilvánvalóan kielégíti az $A = f(A)$ egyenletet.) Fentiek előre-

bocsátása után a következő tételt állapítja meg és bizonyítja: Az iterációs sorozat konvergens, ha minden $Z \in T$ esetén $f(z) \in T$ teljesül, akkor is, ha T egy pontra zsugorodik.

Farkas Gyula a vektoralgebra és vektoranalízis első önálló művelője hazánkban. Könyvet is írt e tárgykörből [56], amely az elmélet rendszerezésen túl önálló eredményeket is tartalmaz. A potenciálegyenlet (Laplace-egyenlet) létezését és megoldását az addigiaknál tágabb feltételek mellett vizsgálja. A vonal-, felületi és térfogati integrálnak a szokásosnál egyszerűbb definícióját adja meg. A térfogati integrálok felületi-, illetve vonalintegrálra való visszavezetését is a szokásostól eltérően tárgyalja.

Alapvető eredményeket ért el a lineáris egyenlőtlenségek elméletében, amelynek megalapozása az ő és Hermann Minkowski (1864—1909) német matematikus nevéhez fűződik. Eredményeik első továbbfejlesztője Haar Alfréd (1885—1933) volt. Farkas Gyula mondta ki és bizonyította be a homogén lineáris egyenlőtlenségek alaptételét (Farkas-tétel); megadta a megoldások egy paraméteres előállítását. Ezek az eredmények a matematikai programozás elméletében is alapvetőknek bizonyultak.

A Farkas-tétel a következőket mondja ki (mai megfogalmazásban és jelölésekkel):

A

$$\mathbf{g}_1' \cdot \mathbf{x} \leqq 0,\ \mathbf{g}_2' \cdot \mathbf{x} \leqq 0,\ \ldots,\ \mathbf{g}_m' \cdot \mathbf{x} \leqq 0 \tag{2.1}$$

egyenlőtlenségeknek akkor és csak akkor következménye a $\mathbf{g}' \cdot \mathbf{x} \leqq 0$ egyenlőtlenség, ha a $\mathbf{g}$ vektor a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \ldots \mathbf{g}_m$ vektoroknak nem-negatív súlyokkal vett lineáris kombinációja, azaz

$$\mathbf{g} = \lambda_1 \mathbf{g}_1 + \lambda_2 \mathbf{g}_2 + \ldots + \lambda_m \mathbf{g}_m \quad (\lambda_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.2}$$

A tétel geometriai interpretációja (felhasználva az n dimenziós euklideszi tér és a konvex halmazok elméletének elemeit) [91] alapján a következő:

Jelölje G a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \ldots g_m$ n dimenziós vektorhalmazt és egyúttal (2.1) együtthatóinak mátrixát, akkor (2.1) a következő alakba írható:

$$G \cdot \mathbf{x} \leqq \mathbf{0}, \tag{2.3}$$

amelynek megoldásai véges (poliedrikus) kúpot alkotnak (G^*):

$$G^* = \{\mathbf{x}:\ \mathbf{g}_i' \cdot \mathbf{x} \leqq 0,\ \mathbf{g}_i \in G,\ i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

A $\mathbf{g}_i$ vektorok a kúp határoló hipersíkjainak „kifelé" mutató normálisai. Szokás G^*-ot G polárisának nevezni.

A G véges vektorhalmaz konvex kúp burkának nevezzük az illető vektorok nemnegatív lineáris kombinációinak $G^<$-vel jelölt halmazát:

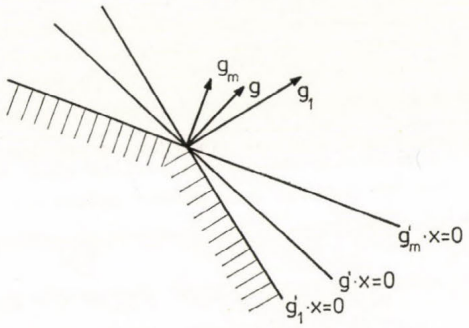
$$G^< = \{\mathbf{x}:\ \lambda_1 \cdot \mathbf{g}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{g}_2 + \ldots + \lambda_m \mathbf{g}_m = \mathbf{X};\ \lambda_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Ezekkel a jelölésekkel a Farkas-tétel:

$$G^{**} = G^<,$$

vagyis G polárisának a polárisa megegyezik G konvex kúp burkával.

A tétel szemléletes tartalmát az alábbi ábra mutatja:



Vagyis: ha a $\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \leqq 0$ egyenlőtlenség következménye (2.1)-nek, akkor $\mathbf{g}$ benne van a $\mathbf{g}_i$ vektorok konvex kúp burkában. (Ennek megfordítása triviálisan teljesül.)

Farkas Gyula a tételt először 1894-ben mondta ki [46] cikkében:

„Definitiók. Egyszerűsödnek képzeteink, ha minden adott egyenlőtlenséget $\geqq 0$-ra, vagy mind $\leqq 0$-ra jegyezzük. Kövessük az elébbi módot. Az ismeretleneket $u, v, \ldots$-vel jelölve, legyenek az adott egyenlőtlenségek

$$(4) \qquad \begin{cases} A_1 u + B_1 v + \ldots \geqq 0 \\ A_2 u + B_2 v + \ldots \geqq 0 \\ \qquad \text{stb.} \end{cases}$$

közös megoldásaikat rendszerük megoldásainak nevezzük.

Ha még egy egyenlőtlenséget csatolunk 4-hez, úm.

$$(5) \qquad A_0 u + B_0 v + \ldots \geqq 0,$$

akkor a (4) megoldásainak rendszere nyilvánképpen vagy változatlan marad, vagy megszűkül, a szerint, a mint a (4)-nek minden megoldása (5)-nek is megoldása, vagy nem. Ennek megfelelően azt mondjuk az (5)-ről, hogy nem új, vagy azt, hogy új a (4)-re nézve. Egy közös megoldás mindenesetre van, ti. $u=0, v=0, \ldots$.

Szembe szökő, hogy ha egy egyenlőtlenség (5) baloldala mások (4) baloldalainak lineáris függvényeként pozitív multiplikátorokkal kifejezhető, akkor nem új emezeknek a rendszerére nézve. Állítom, hogy fordítva: *Ha valamely egyenlőtlenség* (5) *mások* (4) *rendszerére nem új, akkor mindig kifejezhető ezek pozitív sokszorosainak összegével.* Ez az állítás már éppenséggel nem evidens és bebizonyítása már részletes következtetés keresztülvitelét követeli." (Megjegyezzük, hogy akkor a „pozitív" nemnegatívat jelentett. A mai értelemben vett „pozitív" helyett szigorúan pozitívat írtak.) Farkas Gyula multiplikátoros tételnek nevezte tételét.

A bizonyítás során valójában tételének kontrapozíciós megfogalmazását igyekszik igazolni, vagyis (mai megfogalmazásban): Ha $\mathbf{g}$ nem állítható elő (2.2) alakban, akkor a $\mathbf{g}' \cdot \mathbf{x} \leqq 0$ egyenlőtlenség nem következménye (2.1)-nek. Ez az állítás Minkowski—Farkas-lemma néven ismert a szakirodalomban és szemléletesen azt jelenti, hogy ha $\mathbf{g}$ nincs benne $G^<$-ben, akkor van olyan $\mathbf{y}$ vektor, amely tompa szöget zár be $\mathbf{g}$-vel és hegyes- vagy derékszöget zár be a $\mathbf{g}_i$ vektorok mindegyikével.

A [46]-ban közölt bizonyításban Farkas Gyula lényegében a lineáris programozás (Lemke-féle) duál szimplex módszerét alkalmazta [94]. Ez azonban nem mindig véges (ciklizálás léphet fel), amint az később többen észrevették. Prékopa András megmutatta [99, 100], hogy a duál módszer lexikográfikus változatának alkalmazásá-

val Farkas Gyula bizonyítása kijavítható. Bizonyításának hiányosságait, maga Farkas Gyula is észrevette. Tételének másik bizonyítását 1896-ban közölte Farkas Gyula [49], azonban ez sem volt teljes. Az első (teljes indukción alapuló) helyes bizonyítás 1898-ból származik [52]. Ez található meg az [56] könyvben, és a híres, sokat idézett Crelle Journal cikkben is [58]. Minkowski a Farkas-tételhez nagyon közelálló eredményt ért el 1896-ban [95]. A Farkas-tételt újra felfedezte H. Weyl 1935-ben [103].

A homogén lineáris egyenlőtlenségek megoldásainak egy paraméteres előállítását először 1898-ban közölte Farkas Gyula [55], majd [56]-ban és teljesebben [58]-ban is. Módszerét később újra felfedezte és a lineáris programozásban alkalmazta Kuhn [90] és Uzawa [102]. Említett művében Minkowski is adott a megoldások paraméteres előállítására egy eljárást az „élmegoldások" (äusserste Lösungen) segítségével. Minkowski-tétel néven ismert az az eredmény, amely szerint a (2.3)-ban szereplő G-hez létezik olyan H (véges) vektorhalmaz, amelyre $G^{<}=H^{*}$. A tételt valóban Minkowski közölte 1896-ban (lásd [95] második kiadásának 45. oldala), de bizonyítás nélkül. A bizonyítást Farkas Gyula adta meg [58]-ban a 9. oldalon.

Érdekes dokumentum a tárgyalt eredményekkel kapcsolatban Farkas Gyulának Réthy Mórhoz írt 1903. május 21-i levele (MTA Kézirattár):

„Kedves Barátom!

Az 1896-ban Math. és Phys. Lapokban közölt bizonyításom is hézagos. Azonban az Értesítőben közölt és a vele teljesen egyezően a Crelleben közölt bizonyításom teljes és minden részében egészen korrekt. Ezt úgy tudom, mint $2\times 2=4$... . A Math. és Phys. Lapok 1898. évi kötetében közölt dolgozatom egy rendszer paraméteres megoldását szolgáltatja, amiben a multiplikátoros tételre támaszkodik. Ez Crelleben a VI. pontban van. Róla is egészen bizonyos vagyok benne, hogy teljes és korrekt, valamint mindenről, amit Crelleben közöltem... .

Ez alkalommal tudatom veled, hogy mikor Crelleben dolgozatom megjelent, levelet kaptam Minkowskitól (aki most göttingeni professzor), hogy az általam tárgyalt kérdések nagy részét ő is elintézte „Geometrie der Zahlen" (1896) munkájában. Ebben (Erste Lieferung) a 40., 41., 42., 43. lapon a paraméteres megoldás egy módját adja: a 44. és 45. lapon a multiplikátoros tételhez ugyancsak geometriai fogalmakat használ persze többdimenziós térben.

A legmelegebben üdvözöl igaz barátod

Farkas Gyula."

Haar Alfréd lineáris egyenlőtlenségekkel kapcsolatos eredményeit két cikk tartalmazza: [88] és német nyelvű változata [89]. Általánosította és élesítette a Farkas-tételt végtelen sok egyenlőtlenségből álló rendszerre; a Farkas-tételt felhasználva bebizonyította az inhomogén egyenlőtlenségek alaptételét (Haar-tétel); megadta a homogén lineáris egyenlőtlenségek megoldásai előállításának egy módját. Levezetéseit a konvex testek elméletének akkor ismert eredményeire, valamint főleg Minkowski gondolataiból kiindulva végezte.

A Haar-tétel a következőket mondja ki: Ha a $\mathbf{g}'\cdot\mathbf{x}\geqq b$ egyenlőtlenség következménye a $\mathbf{g}_1'\mathbf{x}\geqq b_1, \mathbf{g}_2'\cdot\mathbf{x}\geqq b_2 \ldots \mathbf{g}_m'\cdot\mathbf{x}\geqq b_m$ egyenlőtlenségekből álló rendszernek, akkor vannak olyan $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m, \lambda$ nem-negatív számok, hogy

$$\mathbf{g}'\cdot\mathbf{x}-b=\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{g}_i'\cdot\mathbf{x}-b_i)+\lambda.$$

A tételt, illetve annak némileg módosított alakját inhomogén Farkas-tételként is szokták emlegetni, mivel könnyen következik a Farkas-tételből. A Fourier-elv [46]-ban található alakja lineáris esetben lényegében a Haar-tételt adja.

Réthy Mórhoz 1903. május 14-én írt levele szerint Farkas Gyula explicite is ismerte a Haar-tételt jóval annak közlése előtt.

„Megjegyzem, hogy itt bebizonyított tételedből indulva, el lehet jutni a nemhomogén lineáris egyenlőtlenségek multiplikátoros tételéhez is, amelyet már régebben más úton kaptam, de majd csak akkor fogok közzétenni, ha lesz annyi békességem, hogy megírhatok egy újabb mechanikai dolgozatot."

Sajnos, Haar cikkét megelőzően erre nem került sor. Később két cikket is írt Haar eredményeihez kapcsolódva [74, 75]. Ezekben saját tételéből kiindulva levezeti annak Haar-féle élesítését. Egy egyszerű segédtétel felhasználásával újabb algebrai bizonyítását adja tételének. Levezeti a Haar-tételt is, majd megmutatja, hogy az visszavezethető a homogén esetre (vagyis a Farkas-tételre). Utolsó tudományos dolgozatában [77] geometriai eszközökkel igyekszik levezetni későbbi eredményeit, de a közölt bizonyítás nem tekinthető egzaktnak, csak szemléltetésnek fogadható el.

Farkas Gyula és Haar Alfréd eredményei nem keltettek különösebb feltűnést. A lineáris egyenlőtlenségekről írt dolgozatok inkább Minkowskira hivatkoztak. Eredményeiknek reneszánsza az optimumszámítás kialakulásával jött el.

Neumann János a dualitás elvét kimondó kéziratában [96] hivatkozik a Farkas-tételre, de név említése nélkül. A Farkas-tétel 1951 óta vált ismertté, amikor megjelent Kuhn és Tucker [92] munkája. Ebben mondták ki a matematikai programozás alaptételét: a Kuhn—Tucker-tételt. A tétel szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy lehetséges megoldás mikor optimalizálja a célfüggvényt. A tétel lehetővé teszi a feltételes szélsőértékszámítás Lagrange-féle multiplikátoros módszerének általánosítását arra az esetre, amikor a feltételeket nemcsak egyenletek, hanem egyenlőtlenségek is kifejezik. A szükségesség bizonyítását Kuhn és Tucker a Farkas-tétel alapján végezte el. A Farkas-tétel ebben a megközelítésben a lineáris programozási feladatok megoldhatóságára ad szükséges feltételt.

A Farkas-tételt tartalmazó Crelle-cikk [58] ettől kezdve vált állandó hivatkozássá a programozási irodalomban és a lineáris egyenlőtlenségek elméletében. A tétel általánosításával is sokan foglalkoztak; lásd pl. [79, 80, 81]. Felismerték a Haar-tétel (inhomogén Farkas-tétel) és a dualitás elvének szoros kapcsolatát. A tétel úgy is fogalmazható, hogy ha egy lineáris programozási feladatnak van megengedett megoldása és véges optimuma, akkor a duális feladatnak is van megengedett megoldása. Innen már egyszerűen adódik az erős dualitási tétel: ha primál és duál feladatok közül valamelyiknek van megengedett megoldása és véges optimuma, akkor a másiknak is van, és a két optimum-érték megegyezik. Braunschweiger [79]-ben megmutatta, hogy az inhomogén Farkas-tétel speciális esete Duffin végtelen programokra vonatkozó dualitási tételének [82].

Miután Dantzignak 1951-ben sikerült megmutatnia, hogy a lineáris programozás egy primál-duál feladatpárja ekvivalens egy mátrix-játékkal, a játékelmélet alaptétele is a Farkas-tétel korollárriumaként volt bizonyítható. (A játékelmélet alaptételét: a minimax tételt először Neumann János bizonyította be 1928-ban más módon.)

3. Fizikai munkássága

Farkas Gyulát joggal tekinthetjük a hazai elméleti fizikai kutatások egyik elindítójának. Ortvay Rudolfon kívül tanárának, illetve mesterének tekintette őt pl. Gyulai Zoltán, Széll Kálmán, Károly J. Irén is.

Nem vállalkozhatunk a sok területre kiterjedő és mélyreható fizikai munkásságának részletes ismertetésére, csak a főbb eredmények rövid bemutatására.

Legfontosabb fizikai eredményei a mechanikai egyensúly feltételeinek megadásával kapcsolatosak. A mechanika általános egyensúlyi elve a virtuális munka (virtuális elmozdulás, virtuális sebesség) elve. Nem vezethető le Newton axiómáiból, így önálló posztulátumnak vehetjük. Gyökerei Galileiig nyúlnak vissza, de először J. Bernoulli mondta ki 1717-ben. Paraméteres megoldását a Lagrange-féle multiplikátorokkal Lagrange adta meg 1788-ban [93].

Egy mechanikai rendszerre ható $P_1, P_2 \ldots$ erők virtuális munkáján a

$$P_1 \delta s_1 + P_2 \delta s_2 + \ldots \tag{3.1}$$

(skaláris) szorzatösszeget értjük, ahol $\delta s_1, \delta s_2, \ldots$ a virtuális elmozdulások, vagyis a kényszerfeltételek által megengedett végtelen nagy sebességű (nulla idő tartamú) elmozdulások. Ha a kényszerfeltételeket egyenletek fejezik ki, akkor a virtuális munka elve (Bernoulli-elv) szerint a rendszer egyensúlyban van, ha a (3.1) összeg nullával egyenlő. Az elv továbbfejlesztett alakját, egyenlőtlenségekkel megadott kényszerfeltételek esetére Fourier mondta ki 1798-ban [87]. Ez esetben az egyensúly szükséges feltétele az, hogy a (3.1) összeg ne legyen pozitív (Fourier-elv).

Ha a V potenciál létezik és

$$P_1 = -\frac{\partial V}{\partial s_1}; \quad P_2 = -\frac{\partial V}{\partial s_2}; \quad \ldots, \tag{3.2}$$

akkor az az állítás, hogy (3.1) nem-pozitív felírható

$$\frac{\partial V}{\partial s_1} \delta s_1 + \frac{\partial V}{\partial s_2} \delta s_2 + \ldots \geqq 0 \tag{3.3}$$

alakban. Ha itt $\delta s_1, \delta s_2, \ldots$ helyébe a $ds_1, ds_2 \ldots$ differenciálokat írjuk, akkor V teljes differenciálját kapjuk. Fourier azt is kimondta (bizonyítás nélkül), hogy ha egyenlőtlenségi elve kifejezhető (3.3) alakban, akkor az egyensúlyi állapot a V függvény minimalizálásával határozható meg. A Fourier-elv eléggé ismeretlen maradt, később többen újrafelfedezték, illetve továbbfejlesztették: Poinsot, Cournot, Gauss, Osztrogradszkij, Hamel. A részletekre vonatkozóan utalunk [100]-ra.

Cournot és Osztrogradszkij is megadta az elv megoldását jelentő egyenletet, ami mai jelölésekkel felírva:

$$\mathbf{X} + \lambda_1 \cdot \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + \ldots + \lambda_m \cdot \nabla g_m(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}', \tag{3.4}$$

ahol $\mathbf{X}$ a rendszerre ható erő; $\mathbf{x}^*$ valamely egyensúlyi pont; $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ nemnegatív konstansok, $\mathbf{g}_i$-k pedig a korlátozó feltételeket kifejező függvények.

A (3.4) egyenlet érvényességét, vagyis a Fourier-elv megoldását Farkas Gyula bizonyította be, az akkori ismereteknek megfelelő egzakt módon. Ezt a munkát [46]-ban végezte el. Ennek bevezető részében a következőket olvashatjuk: „Az itt előadandók fő-czélja kimutatni, hogy bizonyos módosítással a Lagrange-féle multiplikátoros módszer Fourier elvét is megilleti". Ehhez először bebizonyítja a Farkas-tételt — amit Osztrogradszkij bizonyítás nélkül használt fel —, majd Fourier nyomán elfogadva a (3.3) feltétel mindenkori fennállását, levezeti tételének segítségével a (3.4) egyenlet egy specializált alakját. A bizonyítás hibája, hogy a (3.3) egyenlőtlenség egyensúly esetén nem mindig áll fenn, ehhez szükség van még az optimalizáláselméletből ismert ún. Kuhn—Tucker regularitási feltételre.

Farkas Gyula még több cikkben foglalkozott a Fourier-elvvel [47, 49, 57, 67]. Mozgásban levő rendszerekre is általánosította, valamint új módon tárgyalta [60]-ban. A virtuális elmozdulás fogalmát megszabadította a végtelen nagy sebesség fel-

tételezéséből, így lehetővé vált a Fourier-elv beépítése a relativitáselméletbe, amit Farkas Gyula el is végez [67]-ben. Fényes Imre szerint [83] hasonló értelmezésekkel találkozhatunk az újabb szovjet tankönyvirodalomban is, sajnos Farkas Gyula nevének említése nélkül.

1895-ben mondta ki a klasszikus (vagy fenomenologikus) termodinamika fontos elvét:

„Adiabatikusan, azaz puszta mechanikai műveletekkel egy test, vagy testrendszer sem juttatható oly állapotba, amelybe puszta hőkezeléssel, azaz hőnek be- vagy kivezetése által pusztán a hőfok megváltozásával juthat" [48].

Az elvet a mai szakirodalom Farkas Gyula-féle elvként idézi. Lényegében ekvivalens az ismertebb Caratheodory-féle elvvel, aminek felfedezése csak 1914-ben történt meg.

Másik fontos termodinamikai eredménye akadémiai székfoglalójában található [70]. A biztos termodinamikai egyensúly feltételeit addig a

$$d\varepsilon - T\,d\eta - d\mu$$

kifejezés (ε: a rendszer teljes energiája; η: a rendszer entrópiája; $d\mu$: a rendszerrel dt idő alatt közölt munka; T pedig az abszolút hőmérséklet) teljes differenciállá való alakíthatóságában adták meg. Farkas Gyula megmutatta, hogy lehetséges biztos egyensúly a feltétel teljesülése nélkül is. Az általa adott más feltételeket néhány speciális esetre alkalmazta is.

Több dolgozata foglalkozik elektrodinamikai kérdésekkel. Az elektromágneses térről vallott felfogása szerint a töltés az alapvető realitás, nem a tér. Alapegyenletnek a töltés megmaradását kifejező kontinuitási egyenletet tekinti:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

ahol ϱ a töltés, t az idő, $\mathbf{j}$ pedig az áramsűrűség. A Maxwell-egyenletek ezen egyenlet paraméteres megoldásaiként adódnak [54]. Ez az eljárás módot ad az egész elektrodinamika újszerű felépítésére. Az elektronok létét elfogadta, de elvetette a korpuszkula hipotézist. Felépítette az elektromos tér folytonossági elméletét. Megmutatta, hogy az elektronelmélet eredményeinek jelentős része független a korpuszkula-hipotézistől [57, 67].

Farkas Gyula egyike volt az elsőknek a relativitáselmélet megértői, alkalmazói, oktatói között. Einstein 1905-ben publikálta a speciális relativitás elméletét, Farkas Gyula 1906-ban és 1907-ben a Physikalische Zeitschrift-ben megjelent két dolgozatában [62, 64] az elméletnek az elektrodinamikára való alkalmazhatóságát vizsgálta. Később is több cikkben foglalkozott a relativitás elméletével [67, 71, 76]. Sőt, már egy 1901-ben megjelent cikkében [57] a relativitás elvén állva tárgyalt több mechanikai problémát. Gondolatait bővebben kifejtette [67]-ben.

Valószínűleg az első volt a világon, aki relativitáselméletet adott elő egyetemen. Előadásainak anyagát az „Az energia terjedése" (Kolozsvár, 1908) című litografált jegyzet tartalmazza. Ebben közölte a Lorentz-transzformációnak egy szokásostól eltérő feltételekből való levezetését is. Eredménye ismeretlen maradt; egy későbbi felfedezője nevéhez fűződik.

Reméljük, ebből a vázlatos ismertetésből is kitűnik, hogy Farkas Gyula fizikai munkásságában sok eredeti gondolat, fontos eredmény található. Szükség lenne ezek avatott és részletes ismertetésére is.

IRODALOM

I. *Farkas Gyula munkái*

[1] A zene erkölcsi szempontból. (Kisbarnaky néven) Zenészeti Lapok, 1865. november 9.
[2] Némely hangzat tilos voltának az oka. (Kisbarnaky néven) Zenészeti Lapok, 1865. dec. 14.
[3] Hogyan eszközölhető, hogy nyelvünk versmértéke megegyezzék a ráírt dal mértékével (Kisbarnaky néven) Zenészeti Lapok, 1866. január 10.
[4] A gyűlencsék képtávolának általános pontos képlete, és egyszersmind a concav-convex lencsének kétneműsége. A székesfehérvári alreáliskola. Évkönyve. 1870—1871. 1—7. oldal.
[5] Die Diatonische-Durscala wissenschaftlich begründet. Pest, 1870. Különlenyomat a Zenészeti Lapokból.
[6] Egy homályos pont a betűszámtanokban. A székesfehérvári tanítóképezdei póttanfolyam Értesítője, 1871.
[7] Természettan elemei. Tankönyv népiskolák számára. Székesfehérvár, 1872. 1—63.
[8] Válasz Mauritz Dezsőnek a „Természettan elemei"-ről írt bírálatára. Néptanítók Lapja, 1872. 820. oldal.
[9] Főreáltanodai zeneiskola. Ismertetés Farkas Gyulától. A székesfehérvári főreáliskola Évkönyve, 1872—1873.
[10] Photometrikus észleletek. A székesfehérvári főreáliskola Évkönyve, 1873—74.
[11] A természettan köréből. A felnőtteknek tartott előadások rövid vázlata. Négy folytatásban. Székesfehérvári Figyelő, 1874.
[12] A rövidlátás okai. Tíz folytatásban. Székesfehérvári Figyelő, 1874.
[13] A fénysugarak törésmutatója és rezgésszáma közt fennálló törvény. Különlenyomat. Székesfehérvár, 1874. 1—8.
[14] A determinánsok elmélete. Baltzer művének magyarázatokkal ellátott első szakasza. Genève, 1877. 1—116.
[15] Mathematikai tanulmányok I. A derivatio elmélete. Budapest, 1878. 1—79.
[16] Vegyes *m*-ed fokú egyenlet egyik gyökének meghatározása sorbafejtés által. Budapest, 1878. 1—16.
[17] A háromtagú algebrai egyenlet megfejtése: A gyökök hatványai és logaritmusai. Győr, 1878. 1—78.
[18] Solution d'un système d'équations linéaires. Comptes Rendus 87 (1878). 523—526.
[19] Note sur la détermination des racines imaginaires des équations algèbriques. (Négy folytatásban) Comptes rendus 87 (1878). 791—793; 1027—1029; 88 (1879). 273—275, 565—567.
[20] Auflösung der dreigliedrigen algebraischen Gleichung. Archiv der Mathematik und Physik 64 (1879). 24—30.
[21] Généralisation du logarithme et de l'exponentielle. Budapest, 1879. 1—122.
[22] Sur une classe des deux fonctions doublement périodiques. Comptes Rendus 90 (1880). 1269—1271.
[23] Sur les fonctions elliptiques. Comptes Rendus 90 (1880). 1482—1484.
[24] Sur l'application de la théorie de Sinus des ordres supérieurs à l'integration des équations différentielles lineaires. Comptes Rendus 90 (1880). 1542—1545.
[25] Sur la théorie de Sinus des ordres supérieurs (Három részben). Comptes Rendus 91 (1880). 209—211; 278—281, 544—547.
[26] Mittlerer verticaler Druck des symmetrischen Pendels auf seine Axe. Archiv der Mathematik und Physik 65 (1880). 435—438.
[27] Die Summe gleichartiger Potenzen von den Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Archiv der Math. u. Phys. 65 (1880). 433—435.
[28] Sur la développement des intégrales elliptiques de première et de deuxième. Comptes Rendus 92 (1881). 181—183.
[29] A Bolyai-féle algoritmus. Értekezések a Mathematikai Tudományok Köréből 8 (1881). 1—8.
[30] Pascal biga-vonalának elemzése. Budapest, 1881. 1—23.
[31] Sur les fonctions uniformes. Comptes Rendus 96 (1883). 1646—1647.
[32] Généralisation du théorème de Jacobi sur les équations de Hamilton. Comptes Rendus 98 (1894). 352—353.
[33] Sur les fonctions itératives. Journal de Mathématiques 10 (1884). 101—108.
[34] Elmélkedések a modern chemia némely hypothézisei és theóriái körül. Vegytani Lapok 5 (1887). 49—65 és 112—128.
[35] Állandó elektromos áram a szén oxydálása által. (Fabinyi Rudolffal közösen) Vegytani Lapok 5 (1887). 97—112. Ugyanez franciául: Comptes Rendus 106 (1887).
[36] A Galilei-féle látcső látóterének elmélete és hármas decentrálás alkalmazása kettős látcső hibáinak redukálására. Erdélyi Múzeumegylet Orvos-természettudományi Értesítője (a továbbiakban EME) 12 (1887). 273—298. Ugyanott németnyelvű kivonat: 363—365.

[37] A chemiai és elektromos energia vonatkozásairól. EME Értesítője 13 (1888). 33—38. Ugyanez németül: Zeitschrift für allgemeine Chemie. 1888. 3. füzet.
[38] A thermodynamika második főtételének általánosságáról. EME Értesítője 13 (1888). 241—248. Ugyanott németül; 279—288.
[39] A természet felfogásának újabb módjairól. EME Értesítője 13 (1888). 25—42.
[40] A felületek elméletéhez I. Az egymásra teríthető felületek problémájáról. EME Értesítője 14 (1889). 260—265.
[41] A Lagrange-féle mozgási egyenletek thermodynamikai értelmezéséről. EME Értesítője 15 (1890). 289—304.
[42] Észrevételek az egyenletes és állandó elektromos áramlás elméletéről. EME Értesítője 17 (1892). 165—240.
[43] Galileiről s a páduai Galilei-ünneplésről. Math. és Phys. Lapok 2 (1893). 65—77. Kivonat ugyanerről: Természettudományi Közlöny 24 (1893). 196—201.
[44] A virtuális sebességek elve Galileinél. Math. és Phys. Lapok 2 (1893). 78—95.
[45] Az Ampère-féle elemi törvények aequivalenseinek meghatározása. Értekezések a Mathematikai Tudományok Köréből 15 (1893). 1—50. Kivonal ugyanerről franciául: Math. und Nat. Berichte aus Ungarn (a továbbiakban M.N.B.U.). 11 (1893). 161—182.
[46] A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásai. Mat. és Termtud. Értesítő 12 (1894). 457—472. Ugyanez németül: M.N.B.U. 12 (1894). 263—281.
[47] A Fourier-féle mechanikai elv története és némely speciális alkalmazása I—II—III. EME Értesítője 20 (1895). 43—45, 212—221, 326—335.
[48] A Carnot—Clausius-féle tétel egyszerűsített levezetése. Math. és Phys. Lapok 4 (1895). 7—11. Ugyanez németül: M.N.B.U. 12 (1895). 282—286.
[49] A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapjáról. Math. és Phys. Lapok 5 (1896). 49—54. Ugyanez németül: M.N.B.U. 16 (1899). 154—157.
[50] Beszéd Brassai Sámuel koporsója mellett. Ima és beszédek Brassai Sámuel koporsója mellett. Kolozsvár, 1897.
[51] A Huygens-féle elv új levezetése. Mat. és Termtud. Értesítő 15 (1897), 283—287.
[52] A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásainak algebrai alapja. Mat. és Termtud. Értesítő 16 (1898), 361—364. Ugyanez németül: M.N.B.U. 16 (1899). 25—40.
[53] A gáz-diffusió Kirchhoff-féle egyenleteinek reductiója. Mat. és Termtud. Értesítő 16 (1898) 201—217. Ugyanez németül: M.N.B.U. 16 (1899), 97—110.
[54] Pótlások a vector-tanhoz és az elektromágnesség tanához. Mat. és Termtud. Értesítő 16 (1898), 321—360. Ugyanez németül: M.N.B.U. 16 (1899), 111—153.
[55] Paraméteres módszer Fourier mechanikai elvéhez. Math. és Phys. Lapok 7 (1898), 63—71.
[56] Vektor-tan és az egyszerű inaequatiók tana. Kolozsvár, 1900. 1—165.
[57] Általános mechanikai elvek az aether számára. Mat. és Termtud. Értesítő 19 (1901). Ugyanez az „Archiv Nederlandaises Livre jubilaire dédié à H. A. Lorentz"-ben. 1900, 56—75.
[58] Theorie der einfachen Ungleichungen. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 124 (1901), 1—27.
[59] Beszéde Bolyai János szülőházán elhelyezett emléktábla avatásakor. Acta Reg. Scient. Univ. Claudiopolitanae, 1902/03.
[60] Beiträge zu der Grundlagen der analytischen Mechanik. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 131 (1906). 165—201.
[61] Über die Ableitung der Impulsgleichung gewöhnlicher Stosswellen. Math. Annalen 62(1906). 582—584.
[62] Über den Einfluss der Erdbewegung auf elektromagnetische Erscheinungen. Physikalische Zeitschrift, 7(1906). 654—657.
[63] Véleményes jelentés Károly J. Irén magántanári képesítése tárgyában. Kolozsvár, 1906. 1—3.
[64] Über das Postulat der Relativität. Physikalische Zeitschrift, 8 (1907). 169—171.
[65] Rektori székfoglaló beszéd az 1907—08 tanév megnyitásakor. Acta Reg. Scient. Univ. Claudiopolitanae, 1907/08.
[66] Farkas Gyala lelépő rektor zárójelentése. Acta Reg. Scient. Univ. Claudipolitanae, 1908/09.
[67] Alapvetés az elektromosság és mágnesség folytonossági elméletéhez. Mat. és Termtud. Értesítő **28** (1910). 1—25, és 29 (1911). 777—809. Kivonat németül: M.N.B.U. 31 (1913). 46—64.
[68] Jelentése Bolyai János hamvainak atyja mellé helyezéséről Akadémiai Értesítő, 1911. 524.
[69] Beszéde Bolyai János hamvainak atyja mellé helyezése alkalmából. Akadémiai Értesítő, 1911. 526.
[70] Biztos egyensúly potential nélkül. Mat. és Termtud. Értesítő 32 (1915). 339—354. Németül: M.N.B.U. 32(1922), 43—59.
[71] Michelson negatív kísérletének magyarázatai. Mat. és Termtud. Értesítő 33 (1915). 355—361.
[72] Multiplicatoros módszer négyzetes alakhoz. Mat. és Termtud. Értesítő 35 (1917). 51—53.

[73] Nem-vonalas egyenlőtlenségek vonalassá tétele. Mat. és Termtud. Értesítő 35 (1917). 41—50.
[74] Egyenlőtlenségek alkalmazásának új módja. Mat. és Termtud. Értesítő 36 (1918). 297—308.
[75] A lineáris egyenlőtlenségek következményei. Mat. és Termtud. Értesítő 36 (1918). 397—408.
[76] Einstein-féle gravitáció régi elméletéből. Mat. és Termtud. Értesítő 39 (1922). 156—163. Ugyanez németül: M.N.B.U. 1922.
[77] Alapvetés az egyszerű egyenlőtlenségek vektorelméletéhez. Mat. és Termtud. Értesítő 43 (1926). 1—3. Ezenkívül litografált jegyzetek, könyvismertetések; az MTA kézirattárában őrzött kéziratok, levelek.

II. *Egyéb irodalom*

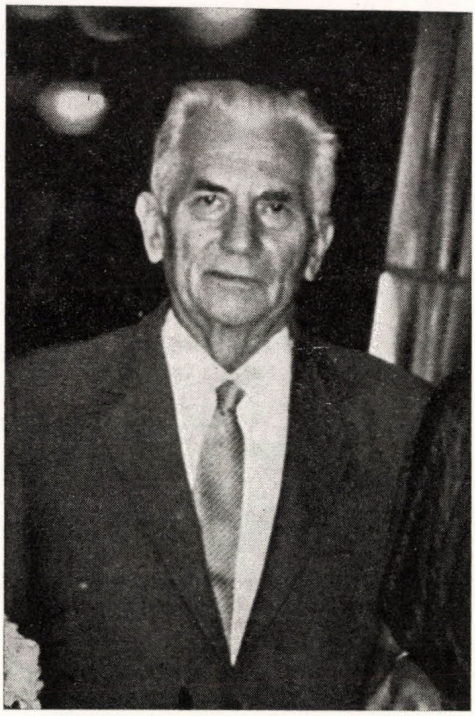
[78] Borostyán Sándor: A székesfehérvári reáliskola története 1854—1894. Székesfehérvár, 1896.
[79] Braunschweiger, C. C.: An extension of the nonhomogeneous Farkas theorem. American Mathematical Monthly 69 (1962). 969—975.
[80] Braunschweiger, C. C.—Clark, H. E.: An extension of the Farkas theorem. American Mathematical Monthly 69 (1962). 272—277.
[81] Charnes, A.—Cooper, W. W.: The strong Minkowski—Farkas—Weyl theorem for vector spaces over ordered field. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 44 (1958). 914—916.
[82] Duffin, R. J.: Infinite programs. Linear inequalities and related systems. Annals of Mathematical Studies, No. 38. Princeton, 1956. 157—170.
[83] Fényes Imre: Megjegyzések és kiegészítések a mechanika elveinek Farkas Gyula-féle tárgyalásmódjához. Fizikai Szemle 4 (1954). 99—102.
[84] Filep László: Farkas Gyula élete és munkássága. Kézirat. Egyetemi doktori értekezés. Debrecen, 1977.
[85] Filep László: Farkas Gyula eredményei a lineáris egyenlőtlenségek elméletében. Acta Academiae Paedagogicae Nyiregyháziensis, Nyíregyháza, 1980. 29—35.
[86] Filep László: A Farkas-tétel egy algebrai bizonyítása és egy következménye. Acta Academiae Paedagogicae Nyiregyháziensis, Nyíregyháza, 1980. 25—28.
[87] Fourier, J.: Mémoire sur le statique. Journal de l'École Polytechnique 5 (1798).
[88] Haar Alfréd: A lineáris egyenlőtlenségekről. Mat. és Termtud. Értesítő 36 (1918). 279—296.
[89] Haar, A.: Über lineare Ungleichungen. Acta Scientiarium Mathematicarum 2 (1924). 1—14.
[90] Kuhn, H. W.: Solvability and consistency for Systems of linear equations and inequalities. American Mathematical Monthly 63 (1956). 217—232.
[91] Kuhn, H. W.—Tucker, A. W.: Linear inequalities and related systems. Annals of Mathematical Studies, No. 38, Princeton, 1956.
[92] Kuhn, H. W.—Tucker, A. W.: Nonlinear programming. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, 1950. 481—492.
[93] Lagrange, J. L.: Mécanique Analytique I—II, (Paris, 1788).
[94] Lemke, C. E.: The dual method for solving the linear programming problem. Naval Research Logistics Quarterly, 1 (1954). 36—47.
[95] Minkowski, H.: Geometrie der Zahlen. (Leipzig, első kiadás 1896, második kiadás 1910).
[96] Von Neumann, J.: Discussion of a maximum principle. Collected Works, Vol. VI. 89—95.
[97] Ortvay Rudolf: Farkas Gyula tudományos működése. Mathematikai és Physikai Lapok, 34 (1927). 5—25.
[98] Ortvay Rudolf: Farkas Gyula rendes tag emlékezete. Az MTA elhunyt tagjai felett tartott emlékbeszédek. 21 (1933). 15. füzet, 4—7.
[99] Prékopa, A.: On the development of optimization theory. American Mathematical Monthly 87 (1980), 527—542.
[100] Prékopa András: Az optimalizáláselmélet kialakulásának történetéről. Alk. Matematikai Lapok 4 (1978), 165—191.
[101] Szénássy Barna: A magyarországi matematika története (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970).
[102] Uzawa, H.: An elementary method for linear programming. Studies in Linear and Nonlinear Programming (Stanford, 1958), 179—188.
[103] Weyl, H.: Elementare Theorie der konvexen Polyeder, Comm. Math. Helv. 7 (1935), 290—306.

ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО Д. ФАРКАША
Л. ФИЛЕП

LIFE AND WORK OF GYULA FARKAS
L. FILEP

SCHOPP JÁNOS (1910—1980)

REIMAN ISTVÁN



1980. október 25-én elhunyt Schopp János, a Budapesti Műszaki Egyetem Geometria Tanszékének nyugalmazott docense.

A Pázmány Péter Tudományegyetemen szerzett 1934-ben matematika-ábrázoló geometria szakos tanári képesítést. 1948-ig biztosítási matematikusként működött, majd három évig a dombóvári gimnáziumban tanított; 1951-től 1975-ös nyugdíjazásáig a Budapesti Műszaki Egyetemen dolgozott.

Schopp János annak a lelkiismeretes tanártípusnak volt képviselője, amely az oktatási munka mellett mindenkor fontosnak tartotta a tudományos munkával való foglalkozást is. Érdeklődési köre az elemi és diszkrét geometria felé fodult. Fejes Tóth László és mások eredményeihez csatlakozva foglalkozott az n-dimenziós szimplexek körében érvényes egyenlőtlenségekkel, majd pedig körök, illetve állandó szélességű tartományok elhelyezési kérdéseivel. Ezeken a területeken több érdekes és az irodalomban többször idézett eredményt ért el.

Lelkes feladatmegoldó volt, az Elemente der Mathematik számos feladatát és megoldását közölte, feladatai jelentek meg a Középiskolai Matematikai Lapokban, és Kúpszeletek című szakköri füzetet is írt a középiskolások számára.

[1] Über eine Extremaleigenschaft des Simplex im n-dimensionalen Raum. Elem. Math. 13 (1958), 106—107.
[2] Extremaleigenschaften der Ecktransversalen des n-dimensionalen Simplex. Elem. Math. 14 (1959), 61—62.
[3] The inequality of Steenholt for an d-dimensional simplex. Amer. Math. Monthly 66 (1959), 896—897.
[4] Über einen Kreisüberdeckungssatz und seine Aequivalenz mit dem Gallaischen Kreisabstechensproblem. Zweiter Ungarischer Mathematischer Kongreß, Budapest, 24—31. August 1960. I. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961. (II) 57—59.
[5] Simplexungleichungen. Elem. Math. 16 (1961), 13—16.
[6] Über den Zusammenhang zwischen zwei Abdeckungsproblemen von n-dimensionalen Hyperkugelbereichen. Elem. Math. 16 (1961), 35—37.
[7] Verschärfung eines Kreisabdeckungssatzes. Elem. Math. 17 (1962), 12—14.
[8] Über die n-dimensionalen Axonometrien. Elem. Math. 19 (1964), 108—111.
[9] Über die Newtonsche Zahl einer Scheibe konstanter Breite. Studia Sci. Math. Hungar. 5 (1970), 475—478.
[10] Überdeckungsprobleme ebener Bereiche von konstantem Durchmesser. Period. Polytechn. Mech. Engrg. 21 (1977), 103—109.

Я. ШОПП (1910—1980)

И. РЕЙМАН

JÁNOS SCHOPP (1910—1980)

I. REIMAN

AZ ATIYAH—SINGER-INDEXTÉTELRŐL III. SZINGULÁRIS HOMOLÓGIÁK ÉS KOHOMOLÓGIÁK

TÓTH GÁBOR

1. Szinguláris homológiák

A II. rész 1. fejezetében a de Rham-elmélet elemeivel ismerkedtünk meg. A de Rham-kohomológia vektorterek azonban csak igen szűk térosztály objektumaira, a differenciálható sokaságokra vannak értelmezve és minden differenciálható sokasághoz algebrai szempontból egyszerű objektumokat, lineáris terek sorozatait rendelik. Felmerül tehát az a kérdés, hogy van-e olyan elmélet, amely egyrészt általánosabb térosztály objektumaihoz, például topologikus terekhez, másrészt algebrailag gazdagabb struktúrákat, például Abel-csoportokat rendel a de Rham kohomológiáknál megismert tulajdonságokkal.

Az alábbiakban konstruálni fogunk egy H_*^Δ (egyváltozós, kovariáns) funktort, amely minden M topologikus térhez és $r \geqq 0$ egész számhoz egy $H_r^\Delta(M)$-mel jelölt Abel-csoportot és minden $f: M \to M'$ folytonos leképezéshez egy $f_*: H_r^\Delta(M) \to H_r^\Delta(M')$ homomorfizmust rendel úgy, hogy teljesülnek a következő tulajdonságok:

(i) Ha $\mathrm{id}_M: M \to M$ az identikus leképezés, akkor $\mathrm{id}_{M^*}: H_r^\Delta(M) \to H_r^\Delta(M)$ az identitás,

(ii) Ha $f: M \to M'$ és $f': M' \to M''$ folytonos leképezések, akkor $(f'f)_* = f'_* f_*$,

(iii) Ha $f, f': M \to M'$ homotóp folytonos leképezések, akkor $f_* = f'_*$,

(iv) Ha $M = U \cup U'$ egy nyílt halmazokkal való fedés, akkor létezik egy

$$\ldots \to H_{r+1}^\Delta(M) \to H_r^\Delta(U \cap U') \to H_r^\Delta(U) \oplus H_r^\Delta(U') \to H_r^\Delta(M) \to \ldots$$

$$\ldots \to H_1^\Delta(M) \to H_0^\Delta(U \cap U') \to H_0^\Delta(U) \oplus H_0^\Delta(U') \to H_0^\Delta(M) \to 0$$

egzakt sorozat,

(v) $$H_r^\Delta(\text{pont}) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{ha } r = 0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az (i)—(v) tulajdonságokkal rendelkező H_*^Δ funktort (abszolút) *szinguláris homológia elmélet*nek nevezzük és M topologikus tér esetén a $H_r^\Delta(M) = \bigoplus_{\substack{r \geqq 0 \\ r \text{ egész}}} H_*^\Delta(M)$ jelölést fogjuk alkalmazni.

Látható, hogy a $H_{\mathrm{de\,Rh}}^*$ és H_*^Δ funktorokat formailag megkaphatjuk egymásból, ha az alsó és felső indexeket felcseréljük; a „de Rh" szimbólumot a „Δ" szimbólumra változtatjuk; az indukált leképezéseket reprezentáló nyilakat ellentétes irányúra cseréljük és végül **R**-modulusok (azaz vektorterek) helyett **Z**-modulusokat (azaz Abel-csoportokat) írunk az **R** és a **Z** felcserélésével.

Az alábbiakban a H_*^Δ funktort fogjuk megkonstruálni. A $\Delta_r = \{(t_0, \ldots, t_r) \in \mathbf{R}^{r+1} \mid t_i \geqq 0, \sum_{i=0}^{r} t_i = 1\} \subset \mathbf{R}^{r+1}$ konvex halmazt *standard r-szimplex*nek nevezzük.

Legyen M topologikus tér. Egy $\sigma: \Delta_r \to M$ folytonos leképezést az M *szinguláris r-szimplex*ének nevezzük. Az M szinguláris 0-szimplexei az M pontjaival az M szinguláris 1-szimplexei M görbéivel azonosíthatók. Ha σ az M szinguláris r-szimplexe és $i=0, \ldots, r$, akkor legyen $\partial_i\sigma$ az M azon szinguláris $(r-1)$-szimplexe, amelyre $(\partial_i\sigma)(t_0, \ldots, t_{r-1})=\sigma(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{r-1})$ áll. $\partial_i\sigma$ a σ *i-edik oldala.* Legyen $S_r(M)$ az M szinguláris r-szimplexei, mint generátorrendszer által generált szabad Abel-csoport. Ekkor $S_r(M)$ elemei $\sum_\sigma n_\sigma \cdot \sigma$ alakú lineáris kombinációk, ahol az n_σ egész számok véges sok kivétellel zérusok és σ az M szinguláris r-szimplexe. $S_r(M)$ elemeit az M *szinguláris r-láncai*nak nevezzük. $i=0, \ldots, r$ esetén a ∂_i operátor a $\partial_i\left(\sum_\sigma n_\sigma \cdot \sigma\right)=\sum_\sigma n_\sigma \cdot (\partial_i\sigma)$ megállapodással egy $\partial_i: S_r(M) \to S_{r-1}(M)$ homomorfizmussá terjeszthető ki. Definiáljuk a $\partial^r: S_r(M) \to S_{r-1}(M)$ *határoperátor*t a

$$\partial^r = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 + \ldots + (-1)^r \partial_r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \partial_i$$

egyenlőséggel. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy $\partial^r\partial^{r+1}=0$ érvényes. Az r felső indexet, hacsak nem vezet félreértéshez, a továbbiakban elhagyjuk.

Az M tér *szinguláris komplexus*a az $S_*(M)$-mel jelölt

$$\ldots \xrightarrow{\partial^{r+2}} S_{r+1}(M) \xrightarrow{\partial^{r+1}} S_r(M) \xrightarrow{\partial^r} \ldots \xrightarrow{\partial^2} S_1(M) \xrightarrow{\partial^1} S_0(M)$$

sorozat. Az M tér r-edik *szinguláris homológiacsoportja* a

$$H_r^\Delta(M) = \ker \partial^r / \operatorname{Im} \partial^{r+1}$$

Abel-csoport.

Ha M és M' topologikus terek és $f: M \to M'$ folytonos leképezés, akkor f egy $f_\#: S_r(M) \to S_r(M')$ homomorfizmust indukál az $f_\#(\sigma)=f\sigma$ megállapodással, ahol σ szinguláris r-szimplexe M-nek. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az

$$\begin{array}{ccc} S_r(M) & \xrightarrow{f_\#} & S_r(M') \\ {\scriptstyle\partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ S_{r-1}(M) & \xrightarrow{f_\#} & S_{r-1}(M') \end{array}$$

diagram kommutatív. Ebből következik, hogy $f_\#(\ker\partial) \subset \ker\partial$ és $f_\#(\operatorname{Im}\partial) \subset \operatorname{Im}\partial$, azaz f egy $f_*: H_r^\Delta(M) \to H_r^\Delta(M')$ homomorfizmust indukál. Ezek után nem kell mást tennünk, mint megmutatni, hogy (i)—(v) érvényesek. Az (i), (ii) és (v) tulajdonságok fennállása közvetlenül adódik. Az alábbiakban először (iii), majd (iv) érvényességét mutatjuk ki.

1.1. Lemma. *Ha* $M \subset \mathbf{R}^m$ *konvex, akkor* $r>0$ *esetén* $H_r^\Delta(M)=0$.

Bizonyítás. Legyen $p \in M$ rögzített és $\sigma: \Delta_r \to M$ szinguláris r-szimplex, $r \geqq 0$. Definiáljuk a $T(\sigma): \Delta_{r+1} \to M$ szinguláris $(r+1)$-szimplexet a

$$(T(\sigma))(t_0, \ldots, t_{r+1}) = \begin{cases} (1-t_0)\sigma\left(\dfrac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \dfrac{t_{r+1}}{1-t_0}\right) + t_0 p, & \text{ha} \quad t_0 < 1 \\ p, & \text{ha} \quad t_0 = 1 \end{cases}$$

formulával. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy $T(\sigma)$ folytonos. A konstrukcióból következően $\partial_0 T(\sigma)=\sigma$. A T hozzárendelés egy $T: S_r(M) \to S_{r+1}(M)$ homomorfizmussá terjeszthető ki, amelyre $\partial_0 T=$identitás. Ha σ szin-

guláris r-szimplex, akkor

$$\partial_i(T\sigma)(t_0, \ldots, t_r) = (T\sigma)(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_r) =$$

$$= (1-t_0)\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{i-1}}{1-t_0}, 0, \frac{t_i}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_r}{1-t_0}\right) + t_0 p$$

és

$$T(\partial_{i-1}\sigma)(t_0, \ldots, t_r) = (1-t_0)\,\partial_{i-1}\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_r}{1-t_0}\right) + t_0 p =$$

$$= (1-t_0)\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{i-1}}{1-t_0}, 0, \frac{t_i}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_r}{1-t_0}\right) + t_0 p,$$

azaz $i=1, \ldots, r+1$ esetén $\partial_i T\sigma = T\partial_{i-1}\sigma$ érvényes. Ebből következik, hogy

$$\partial T\sigma = \partial_0 T\sigma + \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i \partial_i T\sigma = \partial_0 T\sigma + \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i \partial_i T\sigma -$$

$$-\left\{\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i T\partial_{i-1}\sigma + \sum_{j=0}^{r}(-1)^j T\partial_j\sigma\right\} = \sigma - T\partial\sigma$$

érvényes. Így konstruáltunk egy olyan $T: S_r(M) \to S_{r+1}(M)$ homomorfizmust, amelyre $\partial T + T\partial$ identitás $S_r(M)$-en, $r \geqq 1$. Legyen most $z \in \ker \partial^r$. Ha $r>1$, akkor $(\partial T + T\partial)z = z$. De $\partial z = 0$, amiből kapjuk, hogy $z = \partial(Tz)$, azaz $z \in \operatorname{Im} \partial^{r+1}$. Tehát $H_r^A(M) = 0$, ami éppen az állítás.

1.2. Tétel. *Ha $f, f': M \to M'$ homotóp folytonos leképezések, akkor $f_* = f'_*$.*

Bizonyítás. Legyen $H: M \times [0, 1] \to M'$ az f és f' leképezéseket összekötő homotópia, azaz $p \in M$ esetén $H(p, 0) = f(p)$ és $H(p, 1) = f'(p)$ teljesülnek. Legyen $i_t: M \to M \times [0, 1]$, $t \in [0, 1]$, az a leképezés, amelyre $i_t(p) = (p, t)$, $p \in M$ teljesül. Ekkor $f = Hi_0$ és $f' = Hi_1$.

Tegyük fel, hogy $r \geqq 0$ esetén létezik olyan $T: S_r(M) \to S_{r+1}(M \times [0, 1])$ homomorfizmus, amelyre $\partial T + T\partial = i_{0\#} - i_{1\#}$. Ekkor $H_\# \partial T + H_\# T\partial = \partial(H_\# T) + (H_\# T)\partial = f_\# - f'_\#$ érvényes. Ha $z \in \ker \partial^r$ a $H_r^A(M)$ egy reprezentánsa, akkor $f_\#(z) - f'_\#(z) = \partial H_\#(Tz)$, ami azt jelenti, hogy $f_* = f'_*$. Elegendő tehát a T homomorfizmus létezését igazolni.

Legyen $\sigma_r \in S_r(\Delta_r)$ a Δ_r identikus leképezése. Ha $\sigma: \Delta_r \to M$ tetszőleges szinguláris r-szimplexe M-nek, akkor az indukált $\sigma_\#: S_r(\Delta_r) \to S_r(M)$ homomorfizmusra $\sigma_\#(\sigma_r) = \sigma$ áll, azaz M minden szinguláris r-szimplexe előáll σ_r valamely homomorfizmusnál származó képeként.

A T leképezést r szerinti indukcióval konstruáljuk. Először az indukció általános lépését hajtjuk végre. Tegyük fel, hogy $r>0$ és hogy minden M térre és $i<r$ egészre létezik olyan $T: S_i(M) \to S_{i+1}(M \times [0, 1])$ homomorfizmus, amelyre $\partial T + T\partial = i_{0\#} - i_{1\#}$ áll. Tegyük fel továbbá, hogy T természetes hozzárendelés, azaz, hogy ha adott egy M'' topologikus tér és egy $f'': M \to M''$ folytonos leképezés, akkor az

$$\begin{array}{ccc} S_i(M) & \xrightarrow{T_M} & S_{i+1}(M \times [0, 1]) \\ {\scriptstyle f''_\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f'' \times id)_\#} \\ S_i(M'') & \xrightarrow{T_{M''}} & S_{i+1}(M'' \times [0, 1]) \end{array}$$

diagram kommutatív $i<r$ esetén. Elegendő a T homomorfizmust szinguláris r-szimplexekre definiálni. Legyen $\sigma: \Delta_r \to M$ szinguláris r-szimplexe M-nek. Mint azt fentebb láttuk, $\sigma_\#(\sigma_r)=\sigma$ áll. Tehát, ha a $T_{\Delta_r}: S_r(\Delta_r) \to S_{r+1}(\Delta_r \times [0,1])$ homomorfizmust definiáljuk, akkor $T_M(\sigma)=T_M(\sigma_\#(\sigma_r))=(\sigma \times id)_\#(T_{\Delta_r}(\sigma_r))$ miatt T_M is definiálva van. Így elegendő a T_{Δ_r} homomorfizmust definiálni.

Legyen σ' szinguláris r-szimplexe Δ_r-nek és tekintsük a

$$\sigma'' = i_{0_\#}(\sigma') - i_{1_\#}(\sigma') - T_{\Delta_r}(\partial\sigma')$$

szinguláris r-láncot $S_r(\Delta_r \times [0,1])$-ben. Ekkor

$$\partial\sigma'' = \partial i_{0_\#}(\sigma') - \partial i_{1_\#}(\sigma') - \partial T_{\Delta_r}(\partial\sigma') = i_{0_\#}(\partial\sigma') - i_{1_\#}(\partial\sigma') -$$
$$- \{i_{0_\#}(\partial\sigma') - i_{1_\#}(\partial\sigma') - T_{\Delta_r}(\partial\partial\sigma')\} = 0,$$

azaz σ'' a $H_r^A(\Delta_r \times [0,1])$ csoport egy elemének reprezentánsa. Az (1.1) lemma szerint $H_r^A(\Delta_r \times [0,1])=0$, azaz létezik $\sigma''' \in S_{r+1}(\Delta_r \times [0,1])$, amelyre $\partial\sigma'''=\sigma''$. Legyen ekkor $T_{\Delta_r}(\sigma')=\sigma'''$. Ekkor $\partial T\sigma' + T\partial\sigma' = i_{0_\#}(\sigma') - i_{1_\#}(\sigma')$ teljesül. Ha $\sigma: \Delta_r \to M$ szinguláris r-szimplex, akkor legyen

$$T_M(\sigma) = (\sigma \times id)_\# T_{\Delta_r}(\sigma_r)$$

és terjesszük ki az így kapott leképezést egy $T_M: S_r(M) \to S_{r+1}(M \times [0,1])$ homomorfizmussá. Egyszerű számolással ellenőrizhetjük, hogy T_M fenti definíciója a hozzárendelés természetességét megtartja.

Az indukció első lépését az általános lépés konstrukciójából olvashatjuk ki. Tekintsük $S_0(\Delta_0 \times [0,1])$ azon láncát, amelyre $\sigma = i_{0_\#}(\sigma_0) - i_{1_\#}(\sigma_0)$ érvényes. Legyen σ' a $\Delta_0 \times [0,1]$ tér azon szinguláris 1-szimplexe, amelyre $\partial\sigma'=\sigma$ teljesül és definiáljuk $T_{\Delta_0}(\sigma_0)=\sigma'$. A fentiekhez hasonlóan ez definiálja T-t a 0-láncokra, amivel a bizonyítás kész. Ezzel igazoltuk, hogy (iii) fennáll.

Mielőtt rátérnénk (iv) bizonyítására, célszerű az eddig megismert fogalmakat általánosítani. A geometriai tartalom ezáltal sok helyen elvész, viszont a bizonyítások sok esetben lényegesen könnyebben érthetők lesznek. A de Rham-kohomológiák és a szinguláris homológiák esetén az alábbiakban bevezetendő homologikus algebrai fogalmak szemléletes jelentéssel bírnak.

G graduált (Abel) csoport, ha $G=\{G_r\}_{r\in\mathbf{Z}}$ Abel-csoportok sorozata a komponensenként végrehajtott művelettel. G és G' graduált csoportok esetén $f: G \to G'$ *homomorfizmus,* ha $f=\{f_r\}_{r\in\mathbf{Z}}$ olyan sorozat, amelyre $f_r: G_r \to G'_{r+k}$ homomorfizmus valamely rögzített $k\in\mathbf{Z}$ számra. k az f homomorfizmus *foka.* G és H graduált csoportok esetén H *részcsoportja* G-nek, ha H_r részcsoportja G_r-nek. A G/H graduált kvócienscsoport természetes módon értelmezhető. Abel-csoportok és homomorfizmusok egy

$$\ldots \xrightarrow{\partial^{r+1}} C_r \xrightarrow{\partial^r} C_{r-1} \xrightarrow{\partial^{r-1}} \ldots$$

sorozata *lánckomplexus,* ha $\partial^{r-1}\partial^r=0$, azaz egy $C=\{C_r\}_{r\in\mathbf{Z}}$ graduált csoport lánckomplexus, ha adott egy (-1)-edfokú $\partial: C \to C$ homomorfizmus, amelyre $\partial\partial=0$. Ha C és C' lánckomplexusok, akkor $\Phi: C \to C'$ *láncleképezés,* ha Φ 0-adfokú homomorfizmusa a graduált csoportoknak és $\partial'\Phi_r=\Phi_r\partial$ áll. Ha C lánckomplexus, akkor legyenek $Z_*(C)=\ker\partial$ és $B_*(C)=\operatorname{Im}\partial$ és képezzük a $H_*(C)=Z_*(C)/B_*(C)$ graduált csoportot. Ez a C lánckomplexus *homológiája.* $Z_r(C)$ elemeit *r-ciklus*oknak, $B_r(C)$ elemeit *r-határ*oknak nevezzük. Ha $\Phi: C \to C'$ láncleképezés, akkor $\Phi(Z_*(C)) \subset Z_*(C')$ és $\Phi(B_*(C)) \subset B_*(C')$ miatt Φ egy $\Phi_*: H_*(C) \to H_*(C')$ homomorfizmust indukál.

Megjegyzés. Ha M topologikus tér, akkor $S_*(M)=\{S_r(M)\}_{r\in\mathbf{Z}}$ a ∂ operátorral egy lánckomplexust definiál ($S_r(M)=0$, ha $r<0$), továbbá $H_*(S_*(M))=H_*^A(M)$. Ha M és M' topologikus terek és $f: M\to M'$ folytonos leképezés, akkor az $f_\#: S_*(M)\to S_*(M')$ láncleképezés egy $f_*: H_*^A(M)\to H_*^A(M')$ homomorfizmust indukál a szinguláris homológiákon.

Abel-csoportok és homomorfizmusok egy $G\xrightarrow{f} G'\xrightarrow{f'} G''$ sorozatát a középső pontban *egzakt*nak nevezzük, ha $\operatorname{Im} f=\ker f'$. Abel-csoportok és homomorfizmusok egy

$$\dots\to G_{r-1}\xrightarrow{f^{r-1}} G_r\xrightarrow{f^r} G_{r+1}\to\dots$$

sorozata egzakt, ha minden pontban egzakt. A $0\to G\xrightarrow{f} G'\xrightarrow{f'} G''\to 0$ egzakt sorozatot *rövid*nek nevezzük. Ekkor f monomorfizmus és f' epimorfizmus.

Megjegyzés. A II. rész 1.4. lemmájában szereplő

$$0\to\lambda^r(M)\xrightarrow{u}\lambda^r(U)\oplus\lambda^r(U')\xrightarrow{u'}\lambda^r(U\cap U')\to 0$$

sorozat rövid egzakt sorozat.

Az alábbiakban a de Rham-kohomológiák Mayer—Vietoris sorozatának konstrukcióját fordítjuk le a homologikus algebra nyelvére. Tegyük fel, hogy $C=\{C_r\}_{r\in\mathbf{Z}}$, $C'=\{C'_r\}_{r\in\mathbf{Z}}$ és $C''=\{C''_r\}_{r\in\mathbf{Z}}$ lánckomplexusok és

$$0\to C\xrightarrow{f} C'\xrightarrow{f'} C''\to 0$$

rövid egzakt sorozat, azaz f és f' 0-fokú láncleképezések, f monomorfizmus, f' epimorfizmus és $\operatorname{Im} f=\ker f'$ áll. Ekkor $r\in\mathbf{Z}$ esetén adott homológiacsoportok egy

$$H_r(C)\xrightarrow{f_*} H_r(C')\xrightarrow{f'_*} H_r(C'')$$

sorozata. Így a következő kommutatív diagramot készíthetjük el:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & \downarrow\partial & \downarrow\partial & \downarrow\partial & & \\
0 & \to & C_r & \xrightarrow{f} & C'_r & \xrightarrow{f'} & C''_r \to 0 \\
 & & \downarrow\partial & \downarrow\partial & \downarrow\partial & & \\
0 & \to & C_{r-1} & \xrightarrow{f} & C'_{r-1} & \xrightarrow{f'} & C''_{r-1} \to 0 \\
 & & \downarrow\partial & \downarrow\partial & \downarrow\partial & & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}$$

Legyen $z''\in Z_r(C'')$ r-ciklus. Mivel f' epimorfizmus, ezért létezik olyan $z'\in C'_r$, amelyre $f'(z')=z''$. Ekkor $f'(\partial z')=\partial(f'(z'))=\partial z''=0$, azaz $\partial z'\in\ker f'=\operatorname{Im} f$. Legyen $z\in C_{r-1}$ olyan elem, amelyre $f(z)=\partial z'$ áll. Mivel f monomorfizmus, $\partial z=0$, azaz $z\in Z_{r-1}(C)$. A $z''\mapsto z$ megfeleltetés nem egyértelmű, hiszen függ a z' és z választásától. Állítjuk azonban, hogy ez a megfeleltetés a homológia csoportok között egy egyértelmű leképezést definiál. Legyenek z''_1 és z''_2 homológ r-ciklusok $Z_r(C'')$-ben, azaz létezik olyan $w''\in C''_{r+1}$, amelyre $z''_1-z''_2=\partial w''$. Legyenek $z'_1, z'_2\in C'_r$ és $z_1, z_2\in C_{r-1}$ olyanok, hogy $f'(z'_1)=z''_1$, $f'(z'_2)=z''_2$, $f(z_1)=\partial z'_1$ és $f(z_2)=\partial z'_2$. Meg kell mutatnunk, hogy z_1 és z_2 homológ ciklusok. Létezik olyan $w'\in C'_{r+1}$ elem, amelyre $f'(w')=w''$. Ekkor $f'(\partial w')=\partial f'(w')=\partial w''=z''_1-z''_2$, azaz $z'_1-z'_2-\partial w''\in\ker f'=\operatorname{Im} f$.

Legyen $w \in C_r$ olyan elem, amelyre $f(w)=z_1'-z_2'-\partial w''$ áll. Ekkor $f(\partial w=)$ $=\partial f(w)=\partial(z_1'-z_2'-\partial w'')=\partial z_1'-\partial z_2'=f(z_1)-f(z_2)=f(z_1-z_2)$, azaz $\partial w=z_1-z_2$, amiből következik, hogy z_1 és z_2 homológ ciklusok. Ezzel egy

$$\Delta\colon H_r(C'') \to H_{r-1}(C)$$

leképezést definiáltunk, amelyről könnyen ellenőrizhető, hogy homomorfizmus. Δ a

$$0 \to C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{f'} C'' \to 0$$

rövid egzakt sorozat *összekötő homomorfizmus*a.

1.3. Tétel. *Ha* $0 \to C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{f'} C'' \to 0$ *lánckomplexusok és láncleképezések rövid egzakt sorozata, akkor az*

$$\ldots \xrightarrow{f_*} H_r(C') \xrightarrow{f'_*} H_r(C'') \xrightarrow{\Delta} H_{r-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{r-1}(C') \to \ldots$$

sorozat egzakt.

Bizonyítás. Diagram vadászattal. A de Rham-kohomológiák esetén a fenti algebrai konstrukcióból a Mayer—Vietoris-sorozatot származtattuk, amely abból állt, hogy az M differenciálható sokaságot két nyílt halmazzal lefedtük, majd a formákat ezekre a halmazokra megszorítva vizsgáltuk. A szinguláris homológiák esetén ennél általánosabb konstrukció érvényes, amelyet az alábbiakban írunk le. Legyen M topologikus tér és $\mathfrak{A}$ az M részhalmazainak egy rendszere. Ekkor legyen $\operatorname{int}\mathfrak{A}=\{\operatorname{int} U \mid U \in \mathfrak{A}\}$ és tegyük fel, hogy $\operatorname{int}\mathfrak{A}$ fedése M-nek. Jelölje $S_r^{\mathfrak{A}}(M)$ az $S_r(M)$ azon részcsoportját, amelyet olyan $\sigma\colon \Delta_r \to M$ szinguláris r-szimplexek generálnak, amelyekre $\sigma(\Delta_r) \subset U$ valamely $U \in \mathfrak{A}$ esetén. Ekkor a határ operátor $S_r^{\mathfrak{A}}(M)$-re való megszorítására $\partial\colon S_r^{\mathfrak{A}}(M) \to S_{r-1}^{\mathfrak{A}}(M)$ érvényes, azaz $S_*^{\mathfrak{A}}(M)$ lánckomplexus. Legyen $i\colon S_*^{\mathfrak{A}}(M) \subset S_*(M)$ a tartalmazás.

1.4. Tétel. *Ha* $\mathfrak{A}$ *olyan M-beli halmazrendszer, amelyre* $\operatorname{int}\mathfrak{A}$ *fedése M-nek, akkor* $i_*\colon H_r(S_*^{\mathfrak{A}}(M)) \to H_r^{\Delta}(M)$ *izomorfizmus minden* $r \in \mathbf{Z}$ *esetén.*

A tétel azt állítja, hogy az M minden szinguláris r-szimplexe felbontható olyan szinguláris r-szimplexek láncára, amelyek mindegyike benne van az $\operatorname{int}\mathfrak{A}$ fedés valamely tagjában. A bizonyítás technikailag kissé hosszadalmas, ezért mellőzzük (lásd [4], Appendix I, 201—208. old.).

Az 1.4. tétel azon speciális esete, amikor $\mathfrak{A}=\{U, U'\}$ két nyílt halmazból áll a szinguláris homológiák Mayer—Vietoris-sorozatát adja. Legyenek

$$u\colon S_r(U \cap U') \to S_r(U) \oplus S_r(U'),$$

$u(\sigma)=(\sigma, -\sigma)$, $\sigma \in S_r(U \cap U')$, és

$$u'\colon S_r(U) \oplus S_r(U') \to S_r^{\mathfrak{A}}(M),$$

$u'(\sigma, \sigma')=\sigma+\sigma'$, $\sigma \in S_r(U)$, $\sigma' \in S_r(U')$. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy

$$0 \to S_r(U \cap U') \xrightarrow{u} S_r(U) \oplus S_r(U') \xrightarrow{u'} S_r^{\mathfrak{A}}(M) \to 0$$

rövid egzakt sorozat. Az 1.3. tétel szerint létezik egy

$$\ldots \xrightarrow{\Delta} H_r^{\Delta}(U \cap U') \xrightarrow{u_*} H_r(S_*(U) \oplus S_*(U')) \xrightarrow{u'_*} H_r(S_*^{\mathfrak{A}}(M)) \xrightarrow{\Delta} H_{r-1}^{\Delta}(U \cap U') \xrightarrow{u_*} \ldots$$

egzakt sorozat, ahol $S_*(U)\oplus S_*(U')$ azt a lánckomplexust jelöli, amelyre $(S_*(U)\oplus S_*(U'))_r = S_r(U)\oplus S_r(U')$. Nyilvánvalóan, $H_r(S_*(U)\oplus S_*(U'))\cong H_r^A(U)\oplus \oplus H_r^A(U')$ és az 1.4. tétel szerint $H_r(S_*^{\mathfrak{U}}(M))\cong H_r^A(M)$. Ezzel adódik a következő:

1.5. Tétel. *Ha* $U, U'\subset M$ *olyan halmazok, amelyekre* $\operatorname{int} U\cup \operatorname{int} U' = M$, *akkor létezik egy*

$$\ldots \xrightarrow{\Delta} H_r^A(U\cap U') \xrightarrow{u_*} H_r^A(U)\oplus H_r^A(U') \xrightarrow{u'_*} H_r^A(M) \xrightarrow{\Delta} H_{r-1}^A(U\cap U') \xrightarrow{u_*} \ldots$$

egzakt sorozat.

1.6. Példa. Legyen $M = S^1\subset \mathbf{C}$, $z=(0,1)$, $z'=(0,-1)$, $x=(1,0)$, $x'=(-1,0)$ és legyenek $U = S^1-\{z\}$ és $U' = S^1-\{z'\}$. Ekkor a Mayer—Vietoris-sorozat a következő

$$H_1^A(U)\oplus H_1^A(U') \xrightarrow{u'_*} H_1^A(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0^A(U\cap U') \xrightarrow{u_*} H_0(U)\oplus H_0(U').$$

(iii) és (v) miatt az első tag zérus és így Δ monomorfizmus. Tehát $H_1^A(S^1)\cong \operatorname{Im}\Delta \cong$ $\cong \ker u_*$. $H_0^A(U\cap U')\cong \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ egy eleme $ax+a'x'$ alakban írható, ahol $a, a'\in\mathbf{Z}$. Ha $i: U\cap U'\subset U$ és $i': U\cap U'\subset U'$ jelölik a megfelelő tartalmazásokat, akkor $u_*(ax+a'x') = (i_*(ax+a'x'), -i'_*(ax+a'x'))$. Mivel U és U' ívszerűen összefüggők, $i_*(ax+a'x')=0$ pontosan akkor áll, ha $a=-a'$ és hasonlóan i'-re. Így $\ker u_*$ az $ax-ax'$ alakú elemekből áll, azaz $H_1^A(S')\cong\mathbf{Z}$. A de Rham-kohomológiáknál bemutatott indukcióhoz hasonlóan kapjuk az alábbit:

1.7. Tétel.

$$H_r^A(S^m)\cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{ha } r=0, m \\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Így $m\neq n$ *esetén* S^m *és* S^n *nem homotopikusan ekvivalensek.*

1.8. Következmény. $m\neq n$ *esetén* $\mathbf{R}^m$ *és* $\mathbf{R}^n$ *nem homeomorfak.*

Bizonyítás. Legyen $f: \mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ homeomorfizmus. Ekkor az Alexandrov kompaktifikációkon f egy $\bar f: S^m\to S^n$ homeomorfizmust indukál, ami ellentmondás.

A II. rész (1.8) és (1.9) állításai is élesíthetők, nevezetesen, S^{m-1} nem retraktuma D^m-nek és bármely $f: D^m\to D^m$ folytonos leképezésre létezik $p\in D^m$ pont, amelyre $f(p)=p$ teljesül.

Az alábbiakban bevezetésre kerülő „relatív homológia csoportok" segítségével egy adott topologikus tér altereinek homologikus viszonyait is vizsgálhatjuk. Először a megfelelő homologikus algebrai fogalmakat vezetjük be.

Legyen $C=\{C_r\}_{r\in\mathbf{Z}}$ egy lánckomplexus és $D\subset C$ részkomplexusa, azaz $D_r\subset C_r$ és D_r határoperátora a C_r határoperátorának D_r-re való megszorítása. Ekkor a $C/D=\{C_r/D_r\}_{r\in\mathbf{Z}}$ lánckomplexus természetes módon értelmezhető.

Létezik egy természetes rövid egzakt sorozat

$$0\to D\xrightarrow{i} C\xrightarrow{\pi} C/D\to 0,$$

ahol i a tartalmazás és π a kanonikus projekció. Az 1.3 tétel szerint létezik egy

$$\ldots \xrightarrow{\Delta} H_r(D)\xrightarrow{i_*} H_r(C)\xrightarrow{\pi_*} H_r(C/D)\xrightarrow{\Delta} H_{r-1}(D)\xrightarrow{i_*}\ldots$$

egzakt sorozat.

Térjünk most vissza a relatív homológiacsoportok definiálására. (M, N) *pár*, ha M és N topologikus terek és N altere M-nek. (A továbbiakban az $(M, \emptyset)$ párt azonosítjuk M-mel.) Ekkor $S_*(N)$ részkomplexusa $S_*(M)$-nek. Az M *tér szinguláris lánckomplexusa modulo* N *az*

$$S_*(M, N) = S_*(M)/S_*(N)$$

lánckomplexus. Az M *tér relatív homológiája modulo* N a $H_*^A(M, N) = H_*(S_*(M, N))$ graduált csoport. A

$$0 \to S_*(N) \xrightarrow{i} S_*(M) \xrightarrow{\pi} S_*(M, N) \to 0$$

rövid egzakt sorozatból készíthető a következő

$$\ldots \xrightarrow{\Delta} H_r^A(N) \xrightarrow{i_*} H_r^A(M) \xrightarrow{\pi_*} H_r^A(M, N) \xrightarrow{\Delta} H_{r-1}^A(N) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

egzakt sorozat. Ezt a sorozatot az (M, N) pár *egzakt homológiasorozatának* nevezük. (M, N) és (M', N') párok esetén $f: (M, N) \to (M', N')$ *pár leképezés*, ha $f: M \to M'$ folytonos leképezés és $f(N) \subset N'$. Ekkor f egy $f_\#: S_*(M, N) \to S_*(M', N')$ homomorfizmust és így egy $f_*: H_*^A(M, N) \to H_*^A(M', N')$ homomorfizmust indukál. Két $f, f': (M, N) \to (M', N')$ pár leképezés *homotóp*, ha létezik olyan $H: (M \times [0, 1], N \times [0, 1]) \to (M', N')$ pár leképezés, amelyre $p \in M$ esetén $H(p, 0) = f(p)$ és $H(p, 1) = f'(p)$.

Az 1.2. tétel analogonja az alábbi:

1.9. Tétel. *Ha* $f, f': (M, N) \to (M', N')$ *homotóp pár leképezések, akkor* $f_* = f'_*$ *a relatív homológiacsoporton.*

A bizonyítás analóg az 1.2. tétel bizonyításával. A relatív homológiacsoportok egy alábbiakban leírt tulajdonságához szükségünk van a következő lemmára:

1.10. Öt-lemma. Tegyük fel, hogy az Abel-csoportokból és homomorfizmusokból álló

$$\begin{array}{ccccccccc} G_1 & \to & G_2 & \to & G_3 & \to & G_4 & \to & G_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ G_1' & \to & G_2' & \to & G_3' & \to & G_4' & \to & G_5' \end{array}$$

kommutatív diagram minden sora egzakt. Ekkor, ha f_1, f_2, f_4, f_5 izomorfizmusok, akkor f_3 is az.

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

A relatív homológiacsoportok definíciójából kiolvasható, hogy az $N \subset M$ altér azon pontjai, amelyek $M - N$-től „távol vannak" nem számítanak a $H_*^A(M, N)$ relatív homológiacsoportban. A pontos állítás a következő:

1.11. Tétel. *Legyen* (M, N) *pár és* $U \subset N$ *olyan altér, amelyre* $\overline{U} \subset \operatorname{int} N$. *Ekkor az* $i: (M - U, N - U) \subset (M, N)$ *tartalmazás a relatív homológiacsoportok között egy*

$$i_*: H_*^A(M - U, N - U) \to H_*^A(M, N)$$

izomorfizmust indukál.

A fenti állítást a relatív homológiacsoportok *kivágási tulajdonságának* nevezzük.

Bizonyítás. $\mathfrak{U} = \{M - U, \operatorname{int} N\}$ az M fedése és $\mathfrak{U}' = \{N - U, \operatorname{int} N\}$ az N fedése. Az 1.4 tétel szerint $i: S_*^{\mathfrak{U}}(M) \subset S_*(M)$ és $i': S_*^{\mathfrak{U}}(N) \to S_*(N)$ tartalma-

zások a homológiákon izomorfizmusokat indukálnak. $S_*^{\mathfrak{A}'}(N) \subset S_*^{\mathfrak{A}}(M)$ miatt létezik egy

$$j\colon S_*^{\mathfrak{A}}(M)/S_*^{\mathfrak{A}'}(N) \to S_*(M)/S_*(N) = S_*(M, N)$$

láncleképezés. Így a következő diagramot készíthetjük el:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & H_r(S_*^{\mathfrak{A}'}(N)) & \to & H_r(S_*^{\mathfrak{A}}(M)) & \to & H_r(S_*^{\mathfrak{A}}(M)/S_*^{\mathfrak{A}'}(N)) & \to & H_{r-1}(S_*^{\mathfrak{A}'}(N)) & \to \ldots \\ & \downarrow{\scriptstyle i'_*} & & \downarrow{\scriptstyle i_*} & & \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \downarrow{\scriptstyle i'_*} & \\ \ldots \longrightarrow & H_r^{\Delta}(N) & \longrightarrow & H_r^{\Delta}(M) & \longrightarrow & H_r^{\Delta}(M, N) & \longrightarrow & H_{r-1}^{\Delta}(N) & \longrightarrow \ldots \end{array}$$

Az öt-lemma szerint j_* izomorfizmus. $S_*^{\mathfrak{A}}(M)$ definíciója szerint

$$S_*^{\mathfrak{A}}(M) = S_*(M-U) + S_*(\operatorname{int} N)$$

és

$$S_*^{\mathfrak{A}'}(N) = S_*(N-U) + S_*(\operatorname{int} N)$$

(komplexusösszeg és nem direkt összeg!). Ekkor $S_*^{\mathfrak{A}}(M)/S_*^{\mathfrak{A}'}(N) \cong S_*(M-U)/S_*(N-U) \cong S_*(M-U, N-U)$. Kapjuk, hogy $H_*^{\Delta}(M-U, N-U) \cong H_*^{\Delta}(S_*^{\mathfrak{A}}(M)/S_*^{\mathfrak{A}'}(N)) \cong H_*^{\Delta}(M, N)$ amivel a bizonyítás kész.

1.12. Tétel. *Legyen G tetszőleges Abel-csoport. Ekkor létezik egy olyan $H_*^{\Delta}(.,.;G)$ kovariáns funktor, amely minden (M, N) párhoz egy $H_*^{\Delta}(M, N; G)$ graduált Abel-csoportot; minden $f\colon (M, N) \to (M', N')$ pár leképezéshez egy $f_*\colon H_*^{\Delta}(M, N; G) \to H_*^{\Delta}(M', N'; G)$ homomorfizmust rendel és létezik egy $\partial\colon H_r^{\Delta}(M, N; G) \to H_{r-1}^{\Delta}(N; G)$ homomorfizmus, amelyekre teljesülnek a következők:*

(1) *Ha $id\colon (M, N) \to (M, N)$ az identitás, akkor $id_*\colon H_*^{\Delta}(M, N; G) \to H_*^{\Delta}(M, N; G)$ az identitás homomorfizmus.*

(2) *Ha $f\colon (M, N) \to (M', N')$ és $f'\colon (M', N') \to (M'', N'')$ pár leképezések, akkor $(f'f)_* = f'_* f_*$.*

(3) *Ha $f\colon (M, N) \to (M', N')$ pár leképezés, akkor $\partial f_* = (f|N)_* \partial$.*

(4) *Ha $i\colon N \subset M$ és $j\colon M \subset (M, N)$ tartalmazások, akkor*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_r^{\Delta}(N; G) \xrightarrow{i_*} H_r^{\Delta}(M; G) \xrightarrow{j_*} H_r^{\Delta}(M, N; G) \xrightarrow{\partial} H_{r-1}^{\Delta}(N; G) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

egzakt sorozat.

(5) *Ha $f, f'\colon (M, N) \to (M', N')$ homotóp pár leképezések, akkor $f_* = f'_*$.*

(6) *Ha (M, N) pár, $U \subset N$ és $\overline{U} \subset \operatorname{int} N$, akkor az $i\colon (M-U, N-U) \to (M, N)$ tartalmazás egy $i_*\colon H_*^{\Delta}(M-U, N-U; G) \to H_*^{\Delta}(M, N; G)$ izomorfizmust indukál.*

(7) $H_0^{\Delta}(\text{pont}; G) \cong G$ *és* $H_r^{\Delta}(\text{pont}; G) = 0$, *ha* $r \neq 0$.

Az alábbi bizonyításban konstruált és az (1)—(7) tulajdonságokkal rendelkező $H_*^{\Delta}(.,.;G)$ funktort *G-beli együtthatójú (relatív) szinguláris homológia elméletnek* nevezzük; az (1)—(7) tulajdonságok a homológia elmélet *axiómái*. Az elnevezést az indokolja, hogy az (1)—(7) tulajdonságok segítségével a homológia elmélet legtöbb alapvető állítása levezethető függetlenül attól, hogy mi a $H_*^{\Delta}(.,.;G)$ funktor konkrét jelentése. Megjegyezzük, hogy $G = \mathbf{Z}$ esetén a fenti tétel korábbi vizsgálataink összefoglaló eredménye, hiszen ekkor $H_*^{\Delta}(.,.;\mathbf{Z}) = H_*^{\Delta}$ választható. Ezért (M, N) pár esetén a $H_*^{\Delta}(M, N) = H_*^{\Delta}(M, N; \mathbf{Z})$ csoportot az (M, N) pár *egész együtthatós szinguláris (relatív) homológiacsoport*jának nevezzük. Az egyszerűség kedvéért a $\mathbf{Z}$ együttható csoportot, hacsak nem vezet félreértéshez, külön nem tüntetjük fel.

A fenti tétel bizonyításához némi algebrai előkészület szükséges. Először igazoljuk a következő lemmát:

1.13. Lemma. *Ha* $G \xrightarrow{f} G' \xrightarrow{f'} G'' \to 0$ *Abel-csoportok és homomorfizmusok egzakt sorozata, akkor bármely* $\hat{G}$ *Abel-csoportra a*

$$G \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \hat{G} \xrightarrow{f\otimes id} G' \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \hat{G} \xrightarrow{f'\otimes id} G'' \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \hat{G} \to 0$$

sorozat egzakt.

Bizonyítás. Legyen $\alpha: G''\times\hat{G}\to G'\otimes\hat{G}/\mathrm{Im}\,(f\otimes id)$ az a leképezés, amelyre $(g'', \hat{g})\in G''\times\hat{G}$ esetén $\alpha(g'', \hat{g})=\{g'\otimes\hat{g}\}$, ahol $g'\in G'$ olyan elem, amelyre $f'(g')=g''$ és $\{.\}$ az $\mathrm{Im}\,(f\otimes id)$ részcsoporttal képzett mellékosztályt jelöli. Egyszerű számolással igazolható, hogy α definíciója nem függ $g'\in G'$ választásától és így jól definiált. Mivel α bilineáris, ezért egy $\bar{\alpha}: G''\otimes\hat{G}\to G'\otimes\hat{G}/\mathrm{Im}\,(f\otimes id)$ homomorfizmust definiál. Másfelől $f'\otimes id$ zérus az $\mathrm{Im}\,(f\otimes id)\subset G'\otimes\hat{G}$ részcsoporton, azaz $f'\otimes id$ egy $\bar{\alpha}_0: G'\otimes\hat{G}/\mathrm{Im}\,(f\otimes id)\to G''\otimes\hat{G}$ homomorfizmust indukál. Könnyű látni, hogy $\bar{\alpha}$ és $\bar{\alpha}_0$ egymás inverzei. Kapjuk, hogy $G'\otimes\hat{G}/\mathrm{Im}\,(f\otimes id)\cong G''\otimes\hat{G}$, ami éppen a lemma állítása.

Megjegyzés. Nem igaz általában, hogy egy rövid egzakt sorozat minden tagját egy $\hat{G}$ Abel-csoporttal tenzoriálisan szorozva a kapott sorozat egzakt lesz.

Egy $0\to G\xrightarrow{f} G'\xrightarrow{f'} G''\to 0$ rövid egzakt sorozatot *felhasadó*nak nevezünk, ha az f' homomorfizmusnak létezik jobb oldali inverze, azaz, ha létezik egy $f_0': G''\to G'$ homomorfizmus, amelyre $f'f_0'=$identitás.

1.14. Lemma. *Egy* $0\to G\xrightarrow{f} G'\xrightarrow{f'} G''\to 0$ *rövid egzakt sorozat pontosan akkor felhasadó, ha az* f *homomorfizmusnak létezik bal oldali inverze.*

Bizonyítás. Legyen $f_0': G''\to G'$ az f' bal oldali inverze és legyen $f'': G\oplus G''\to G'$ az a homomorfizmus, amelyre $f''(g, g'')=f(g)+f_0'(g'')$. Ekkor a

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G & \xrightarrow{f} & G' & \xrightarrow{f'} & G'' & \to & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle f''} & & \uparrow{\scriptstyle id} \\ 0 & \to & G & \xrightarrow{i} & G\oplus G'' & \xrightarrow{\pi} & G'' & \to & 0 \end{array}$$

diagram kommutatív, ahol $i(g)=g$ és $\pi(g, g'')=g''$, $g\in G$, $g''\in G''$. Az öt-lemma szerint f'' izomorfizmus, azaz létezik $f_0'': G'\to G\oplus G''$ inverze. Legyen ekkor $f_0: G'\to G$, $f_0(g')=p(f_0''(g'))$, ahol $p: G\oplus G''\to G$ az első tagra való projekció. A fenti diagram második négyzetéből $f_0 f=p f_0'' f=id$, azaz f_0 az f bal oldali inverze. A megfordítás hasonló módon igazolható.

Ha $0\to G\xrightarrow{f} G'\xrightarrow{f'} G''\to 0$ rövid egzakt sorozat és G'' szabad Abel-csoport, akkor ez a sorozat felhasadó. Legyen ugyanis $B\subset G''$ bázisa G''-nek és $b\in B$ esetén legyen $f_0'(b)\in G'$ olyan elem, amelyre $f'f_0'(b)=b$ teljesül. Terjesszük ki ezután f_0'-t egy $f_0': G''\to G'$ homomorfizmussá. Ekkor f_0' jobb oldali inverze f'-nek.

1.15. Lemma. *Ha* $0\to G\xrightarrow{f} G'\xrightarrow{f'} G''\to 0$ *rövid egzakt felhasadó sorozat, akkor tetszőleges* $\hat{G}$ *Abel-csoportra* $0\to G\otimes\hat{G}\xrightarrow{f\otimes id} G'\otimes\hat{G}\xrightarrow{f'\otimes id} G''\otimes\hat{G}\to 0$ *is rövid egzakt felhasadó sorozat.*

Bizonyítás. Az 1.13 lemma szerint $G\otimes\hat{G}\xrightarrow{f\otimes id} G'\otimes\hat{G}\xrightarrow{f'\otimes id} G''\otimes\hat{G}\to 0$ egzakt sorozat. Ha $f_0: G'\to G$ az f baloldali inverze, akkor $f_0\otimes id$ az $f\otimes id$ bal

oldali inverze, azaz egyrészt $f\otimes id$ injektív, másrészt az 1.14. lemma szerint a

$$0 \to G\otimes\hat{G} \xrightarrow{f\otimes id} G'\otimes\hat{G} \xrightarrow{f'\otimes id} G''\otimes\hat{G} \to 0$$

rövid egzakt sorozat felhasadó.

Az 1.12. tétel bizonyítása. Legyen G tetszőleges Abel-csoport. (M, N) pár esetén legyen $S_*(M, N; G)$ az a lánckomplexus, amelyre $S_r(M, N; G) = S_r(M,N)\otimes G$ és határoperátora $\partial\otimes id$. Legyen $H_*^A(M,N; G)=H_*(S_*(M,N; G))$. Ha $f: (M, N)\to(M', N')$ pár leképezés, akkor az $f_\#\otimes id$: $S_*(M, N; G)\to S_*(M', N', G)$ homomorfizmus egy $f_*: H_*^A(M, N; G)\to H_*^A(M', N'; G)$ homomorfizmust indukál. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy (1)—(3) teljesülnek. Mivel $S_*(M, N)$ szabad Abel-csoport, ezért a

$$0 \to S_*(N) \xrightarrow{i} S_*(M) \xrightarrow{\pi} S_*(M, N) \to 0$$

rövid egzakt sorozat felhasadó, azaz az 1.15. lemma szerint

$$0 \to S_*(N; G) \xrightarrow{i} S_*(M; G) \xrightarrow{\pi} S_*(M, N; G) \to 0$$

rövid egzakt sorozat. Az 1.3. tétel alkalmazásával (4)-et kapjuk. (5) bizonyításában a T operátor helyett a $T\otimes id_G$ operátort kell vennünk. (6) bizonyítása a $G=\mathbf{Z}$ esettel analóg. (7) fennállása az $S_*(M, N; G)$ lánckomplexus definíciójából következik.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

2. Szinguláris kohomológiák

Ha C és G Abel-csoportok, akkor $\mathrm{Hom}(C, G)$ szintén Abel-csoport. Ha $f: C\to C'$ Abel-csoportok homomorfizmusa, akkor létezik egy $f^\#: \mathrm{Hom}(C' G)\to \mathrm{Hom}(C, G)$ indukált leképezés, $f^\# c' = c' f$, $c'\in\mathrm{Hom}(C', G)$. Ha $f': C'\to C''$ Abel-csoportok homomorfizmusa, akkor $(f'f)^\# = f^\# f'^\#$ érvényes.

Legyen $C=\{C_r\}_{r\in\mathbf{Z}}$ lánckomplexus és G Abel-csoport. Ekkor $C^r=\mathrm{Hom}(C_r, G)$ Abel-csoport és így $(\partial^r)^\#=\delta^r: C^{r-1}\to C^r$ jelöléssel egy olyan

$$\ldots \xrightarrow{\delta^{r-1}} C^{r-1} \xrightarrow{\delta^r} C^r \xrightarrow{\delta^{r+1}} C^{r+1} \xrightarrow{\delta^{r+2}} \ldots$$

sorozatot kapunk, amelyre $\delta^{r+1}\delta^r=0$. A felső indexet, hacsak nem vezet félreértéshez, a továbbiakban elhagyjuk.

Abel-csoportok és homomorfizmusok egy

$$\ldots \xrightarrow{f^{r-1}} G^{r-1} \xrightarrow{f^r} G^r \xrightarrow{f^{r+1}} G^{r+1} \xrightarrow{f^{r+2}} \ldots$$

sorozatát *kolánc-komplexus*nak nevezzük, ha $f^{r+1}f^r=0$ teljesül. Az előbbiek szerint minden C lánckomplexusból egy G Abel-csoport segítségével egy $\mathrm{Hom}(C, G)$ kolánckomplexus készíthető. A $\delta=\partial^\#$ operátort *kohatár-operátor*nak nevezzük.

Megjegyzés. A de Rham-komplexus egy olyan kolánckomplexus, amelynek kohatár operátora d.

Legyen C kolánckomplexus és legyenek $Z^r(C)=\ker\delta^{r+1}$ és $B^r(C)=\mathrm{Im}\,\delta^r$. $Z^r(C)$ elemei az *r-kociklusok*, $B^r(C)$ elemei az *r-kohatárok*. A C kolánckomplexus *r-edik kohomológia csoportja* $H^r(C)=Z^r(C)/B^r(C)$. Ha $0\to C\to C'\to C''\to 0$ kolánckomplexusok rövid egzakt sorozata, akkor az 1.3. tétel bizonyításához analóg módon

konstruálható egy

$$\ldots \to H^r(C) \to H^r(C') \to H^r(C'') \to H^{r+1}(C) \to \ldots$$

egzakt sorozat.

Legyen most G Abel-csoport és (M, N) pár. Az (M, N) pár *G-beli együtthatójú szinguláris kolánc-komplexusa* $S^*(M, N; G)$, ahol $S^r(M, N; G) = \mathrm{Hom}\,(S_r(M, N), G)$ és $\delta = \partial^\#$. Az (M, N) pár *G-beli együtthatójú r-edik szinguláris kohomológia csoportja* a

$$H^r_\Delta(M, N; G) = H^r\big(S^*(M, N; G)\big)$$

csoport. Ha $f: (M, N) \to (M', N')$ pár leképezés, akkor az $f_\#: S_*(M, N) \to S_*(M', N')$ homomorfizmus egy $f^\#: S^*(M', N'; G) \to S^*(M, N; G)$ homomorfizmust, majd egy

$$f^*: H^*_\Delta(M', N'; G) \to H^*_\Delta(M, N; G)$$

homomorfizmust indukál.

2.1. Tétel. *Legyen G tetszőleges Abel-csoport. Ekkor létezik egy olyan $H^*_\Delta(.\,, .\,; G)$ kontravariáns funktor, amely minden (M, N) párhoz egy $H^*_\Delta(M, N; G)$ graduált Abel-csoportot, minden $f: (M, N) \to (M', N')$ pár leképezéshez egy $f^*: H^*_\Delta(M', N'; G) \to H^*_\Delta(M, N; G)$ homomorfizmust rendel és létezik egy $\delta: H^r_\Delta(N; G) \to H^{r+1}_\Delta(M, N; G)$ homomorfizmus, amelyre teljesülnek a következők:*

(1) *Ha $id: (M, N) \to (M, N)$ az identitás, akkor $id^*: H^*_\Delta(M, N; G) \to H^*_\Delta(M, N; G)$ az identitás homomorfizmus.*

(2) *Ha $f: (M, N) \to (M', N')$ és $f': (M', N') \to (M'' N'')$ pár leképezések, akkor $(f'f)^* = f^* f'^*$.*

(3) *Ha $f: (M, N) \to (M', N')$ pár leképezés, akkor $\delta(f|N)^* = f^*\delta$.*

(4) *Ha $i: N \subset M$ és $j: M \subset (M, N)$ tartalmazások, akkor*

$$\ldots \xrightarrow{i^*} H^{r-1}_\Delta(N; G) \xrightarrow{\delta} H^r_\Delta(M, N; G) \xrightarrow{j^*} H^r_\Delta(M; G) \xrightarrow{i^*} H^r_\Delta(N; G) \xrightarrow{\delta} \ldots$$

egzakt sorozat.

(5) *Ha $f, f': (M, N) \to (M', N')$ homotóp pár leképezések, akkor $f^* = f'^*$.*

(6) *Ha (M, N) pár $U \subset N$ és $\overline{U} \subset \mathrm{int}\, N$, akkor az $i: (M-U, N-U) \subset (M, N)$ tartalmazás egy $i^*: H^*_\Delta(M, N; G) \to H^*_\Delta(M-U, N-U; G)$ izomorfizmust indukál.*

(7) $H^0_\Delta(\mathrm{pont}; G) \cong G$ *és* $H^r_\Delta(\mathrm{pont}; G) = 0$, *ha* $r \neq 0$.

Az (1)—(7) tulajdonságokkal rendelkező és fentebb definiált $H^*_\Delta(.\,, .\,; G)$ funktort *G-beli együtthatójú (relatív) szinguláris kohomológia elmélet*nek nevezzük; az (1)—(7) tulajdonságok a kohomológia elmélet *axiómái*.

A 2.1. tétel bizonyítása az $S_*(M, N)$ lánckomplexusra vonatkozó ismereteink alapján az előzőekhez analóg módon végezhető el.

A homológia és kohomológia elméletek közti kapcsolat felderítésére induljunk ki az $S^r(M, N; G) = \mathrm{Hom}\,(S_r(M, N), G)$ egyenlőségből. Ha $c \in S^r(M, N; G)$ és $\sigma \in S_r(M, N)$, akkor jelöljük $\langle c, \sigma \rangle = c(\sigma)$. Így a

$$\langle\,,\,\rangle: S^r(M, N; G) \times S_r(M, N) \to G$$

leképezés bilineáris, azaz egy

$$\langle\,,\,\rangle: S^r(M, N; G) \otimes S_r(M, N) \to G$$

homomorfizmust indukál. A ∂ és δ operátorok egymás adjungáltjai, azaz $\langle c, \partial\sigma \rangle = \langle \delta c, \sigma \rangle$, $c \in S^r(M, N; G)$, $\sigma \in S_{r+1}(M, N)$; továbbá, ha $f: (M, N) \to (M', N')$ pár

leképezés, akkor $\langle c, f_{\#}(\sigma)\rangle = \langle f^{\#}(c), \sigma\rangle$ áll, $c \in S^r(M', N'; G)$, $\sigma \in S_r(M, N)$. Ha $c \in S^r(M, N; G)$ r-kociklus és $\sigma \in S_r(M, N)$ r-ciklus, akkor $c' \in S^{r-1}(M, N; G)$ és $\sigma \in S_{r+1}(M, N)$ esetén $\langle c+\delta c', \sigma+\partial\sigma'\rangle = \langle c, \sigma\rangle + \langle c, \partial\sigma'\rangle + \langle \delta c', \sigma\rangle + \langle \delta c', \partial\sigma'\rangle = \langle c, \sigma\rangle$ miatt egy

$$\langle\ ,\ \rangle\colon H^r_\Delta(M, N; G) \otimes H^\Delta_r(M, N) \to G$$

homomorfizmust kapunk. Ez egy

$$\varkappa\colon H^r_\Delta(M, N; G) \to \mathrm{Hom}\left(H^\Delta_r(M, N); G\right)$$

homomorfizmust indukál, amelyet *Kronecker index*nek nevezünk.

3. Topologikus párok kohomológiagyűrűi

Legyen R egységelemes kommutatív főideálgyűrű. Ekkor R Abel-csoportjával tenzoriálisan szorozva az $S_r(M)$ Abel-csoportot, M topologikus tér, egy $S_r(M; R) = S_r(M) \otimes R$ R-modulust kapunk. Ez a modulus azonos az M szinguláris r-szimplexei, mint generátorrendszer által generált szabad R-modulussal. $S_*(M; R)$ modulusokból és homomorfizmusokból álló lánckomplexus és így $H^\Delta_*(M; R)$ graduált R-modulussá válik. (Ha $R = \mathbf{Z}$, akkor, mivel az Abel-csoportok azonosak a $\mathbf{Z}$-modulusokkal, a korábbi definíciót kapjuk.) Hasonlóan, $S^*(M; R) = \mathrm{Hom}\left(S_*(M), R\right)$ R-modulus és így $H^*_\Delta(M; R)$ graduált R-modulussá válik. A fenti módszer relatív homológiákra és kohomológiákra is alkalmazható, azaz (M, N) pár esetén $H^\Delta_*(M, N; R)$ és $H^*_\Delta(M, N; R)$ R-modulusok.

A homológia és kohomológia elméletek axiómái minden további nélkül érvényesek maradnak, ha a G Abel-csoport helyébe az R gyűrűt írjuk be (a definíciók értelemszerű átvitelével) és Abel-csoportok helyett R-modulusokat írunk.

Az alábbiakban a $H^*_\Delta(M; R)$ kohomológia modulusban szorzás műveletet fogunk értelmezni. Legyenek evégből $c \in S^m(M; R)$ és $c' \in S^{m'}(M; R)$ tetszőleges elemek és definiáljuk a $c \cup c' \in S^{m+m'}(M; R)$ elemet. Legyen $\sigma\colon \Delta_{m+m'} \to M$ szinguláris $(m+m')$-szimplexe M-nek. σ *elülső* m*-lapja* a $\sigma q_m\colon \Delta_m \to M$ szinguláris m-szimplex, amelyre $q_m(t_0, \ldots, t_m) = (t_0, \ldots, t_m, 0, \ldots, 0)$; *hátsó* m'*-lapja* a $\sigma q'_{m'}\colon \Delta_{m'} \to M$ szinguláris m'-szimplex, amelyre $q'_{m'}(t_m, \ldots, t_{m+m'}) = (0, \ldots, 0, t_m, \ldots, t_{m+m'})$ áll. A σ szinguláris $(m+m')$-szimplex egy $\sigma \in S_{m+m'}(M; R)$ generátorelemet definiál. Legyen $c \cup c' \in S^{m+m'}(M; R)$ az az elem, amelyre $\langle c \cup c', \sigma\rangle = (-1)^{mm'} \cdot \langle c, \sigma q_m\rangle \langle c', \sigma q'_{m'}\rangle \in R$ áll. Ez a $\cup$ szorzás művelete bilineáris, asszociatív, de nem kommutatív. Az egységelem $1 \in S^0(M; R)$. Könnyű látni, hogy

$$\delta(c \cup c') = (\delta c) \cup c' + (-1)^m c \cup (\delta c')$$

érvényes. Ebből következik, hogy létezik egy

$$\cup\colon H^m_\Delta(M; R) \otimes H^{m'}_\Delta(M; R) \to H^{m+m'}_\Delta(M; R)$$

homomorfizmus. Egyszerű számolással adódik, hogy $c \in H^m_\Delta(M; R)$ és $c' \in H^{m'}_\Delta(M; R)$ esetén $c \cup c' = (-1)^{mm'} c' \cup c$ érvényes. Egy $\{R_r\}_{r \in \mathbf{Z}}$ graduált gyűrűt kommutatívnak nevezünk, ha $x \in R_m$ és $x' \in R_{m'}$ esetén $R_{m+m'}$-ben $xx' = (-1)^{mm'} x'x$ áll. Így $H^*_\Delta(M; R)$ graduált kommutatív gyűrű. A továbbiakban, hacsak nem okoz félreértést, a szorzásra külön jelet nem használunk; a $c, c' \in H^*_\Delta(M; R)$ elemek szorzatát így cc' jelöli.

Az alábbiakban a kapott szorzás műveletét kiterjesztjük párok kohomológia modulusaira. Legyen (M, N) pár és $c \in S^m(M, N; R)$. Ekkor $c \in \mathrm{Hom}\left(S_m(M)/\right.$

$S_m(N), R)$, azaz $c \in S^m(M)$ az $S_m(N)$ részcsoporton zérus. Ha most $c' \in S^{m'}(M; R)$, akkor $cc' \in S^{m+m'}(M, N; R)$. Így kaptunk egy

$$H_\Delta^m(M, N; R) \otimes H_\Delta^{m'}(M; R) \to H_\Delta^{m+m'}(M; R)$$

homomorfizmust, amely a $\cup$ szorzás kiterjesztése.

Legyenek végül (M, N) és (M, N') olyan párok, amelyekre N és N' relatíve nyíltak az $N \cup N'$ altérben. Ekkor a

$$H_\Delta^m(M, N; R) \otimes H_\Delta^{m'}(M, N'; R) \to H_\Delta^{m+m'}(M, N \cup N'; R)$$

szorzás művelete a következő módon definiálható:

Jelölje $\hat{S}^i(M; N, N') = S^i(M, N; R) \cap S^i(M, N'; R) \subset S^i(M; R)$. Ekkor $c \in S^m(M, N; R)$ és $c' \in S^{m'}(M, N'; R)$ esetén $cc' \in \hat{S}^{m+m'}(M; N, N')$. Igazoljuk most, hogy az

$$i\colon S^*(M, N \cup N'; R) \subset \hat{S}^*(M; N, N')$$

tartalmazásra $i^*\colon H^*(\hat{S}^*(M; N \cup N')) \to H_\Delta^*(M, N \cup N'; R)$ izomorfizmus. Ha ezt igazoljuk, akkor a fenti szorzás művelete az (M, N) és (M, N') párok kohomológia modulusaira definiálva van. Tekintsük a

$$0 \to S^*(M, N \cup N'; R) \xrightarrow{i} \hat{S}^*(M; N, N') \to \hat{S}^*(N \cup N'; N, N') \to 0$$

sorozatot. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ez egy rövid egzakt sorozat. Áttérve a kohomológia modulusokra, ebből a

$$\ldots \to H^r(\hat{S}^*(N \cup N'; N, N')) \to H^r(\hat{S}^*(M; N, N')) \xrightarrow{i^*} H_\Delta^r(M, N \cup N'; R) \xrightarrow{\Delta}$$

$$\xrightarrow{\Delta} H^{r+1}(\hat{S}^*(N \cup N'; N, N')) \to \ldots$$

egzakt kohomológia sorozatot készíthetjük el. Ha kimutatjuk, hogy

$$H^*(\hat{S}^*(N \cup N'; N, N')) = 0,$$

akkor a fenti sorozat egzaktsága miatt i^* izomorfizmus. Ez utóbbi egyenlőség kimutatásához tekintsük a

$$0 \to \hat{S}^*(N \cup N'; N, N') \to S^*(N \cup N'; R) \to \mathrm{Hom}(S_*^{\mathfrak{A}}(N \cup N'); R) \to 0$$

rövid egzakt sorozatot, ahol $\mathfrak{A} = \{N, N'\}$ az $N \cup N'$ altér nyílt fedése. Ebből egy

$$\ldots \to H^r(\mathrm{Hom}(S_*^{\mathfrak{A}}(N \cup N'), R)) \to H_\Delta^r(N \cup N'; R) \to$$

$$\to H^r(\hat{S}^*(N \cup N'; N, N')) \to H^{r+1}(\mathrm{Hom}(S_*^{\mathfrak{A}}(N \cup N'), R)) \to \ldots$$

egzakt sorozat készíthető. Az 1.4. tétel kohomológia elméleti változata szerint $H^r(\mathrm{Hom}(S_*^{\mathfrak{A}}(N \cup N'), R)) \cong H_\Delta^r(N \cup N'; R)$, azaz $H^*(\hat{S}^*(N \cup N'; N, N')) = 0$, amivel az állítást igazoltuk.

Az előző fejezetben bevezetett Kronecker-index, (M, N) topologikus pár esetén, egy

$$\varkappa\colon H_\Delta^r(M, N; R) \to \mathrm{Hom}_R(H_r^\Delta(M, N), R)$$

R-modulusok homomorfizmusa.

3.1. Tétel. *Legyen M topologikus tér és tegyük fel, hogy $H^A_{r-1}(M; R)$ zérus vagy szabad R-modulus. Ekkor*

$$\varkappa\colon H^r_A(M; R) \to \mathrm{Hom}_R\left(H^A_r(M), R\right)$$

izomorfizmus. Hasonló állítás érvényes párokra is.

Bizonyítás. Igazoljuk először, hogy $\varkappa\colon H^r_A(M; R)\to\mathrm{Hom}_R\left(H^A_r(M); R\right)$ ráképezés. Mivel $\partial^r\colon S_r(M; R)\to\mathrm{im}\,\partial^r$ ráképezés, ezért $S_r(M; R)/\ker\partial^r\cong\mathrm{Im}\,\partial^r\subset$ $\subset S_{r-1}(M; R)$. Az $S_{r-1}(M; R)$ R-modulus szabad, és így minden részmodulusa, tehát $S_r(M; R)/\ker\partial^r$ is szabad, [1]. Ez viszont azt jelenti, hogy a $\ker\partial^r\subset S_r(M; R)$ részmodulus direkt összeadandó, azaz minden $\ker\partial^r\to R$ homomorfizmus kiterjeszthető egy $S_r(M; R)\to R$ homomorfizmussá.

Legyen most $f\in\mathrm{Hom}_R\left(H^A_r(M; R), R\right)$ tetszőleges elem. Így a

$$\ker\partial^r \to H^A_r(M; R)\xrightarrow{f} R$$

kompozíció kiterjeszthető egy $\tilde{f}\colon S_r(M; R)\to R$ homomorfizmussá úgy, hogy $\tilde{f}$ az r-határokon eltűnik, azaz $\delta\tilde{f}=0$. Legyen $x\in H^r_A(M; R)$ az $\tilde{f}$ r-kociklusnak megfelelő kohomológia osztály. Legyen $\sigma\in S_r(M; R)$ egy $y\in H^A_r(M; R)$ osztály reprezentánsa. Ekkor $\varkappa(x)y=\langle x, y\rangle=\langle\tilde{f}, \sigma\rangle=\tilde{f}(\sigma)=f(y)$ amivel igazoltuk, hogy $\varkappa$ ráképezés. Igazoljuk most, hogy $\varkappa\colon H^r_A(M; R)\to\mathrm{Hom}_R\left(H^A_r(M); R\right)$ injektív. Legyen $c\in S^r(M; R)$ olyan r-kociklus, amelyre $\langle c, \sigma\rangle=0$ minden $\sigma\in S_r(M; R)$ r-ciklusra. Igazolnunk kell, hogy c r-kohatár. Mivel c az r-ciklusokon zérus, ezért $c\partial^{-1}\colon\mathrm{Im}\,\partial^r\to R$ jóldefiniált. Mivel $\ker\partial^r{}^{-1}/\mathrm{Im}\,\partial^r=H^A_{r-1}(M; R)$ zérus vagy szabad R-modulus, $\mathrm{Im}\,\partial^r\subset\ker\partial^r{}^{-1}$ direkt összeadandó, azaz $\mathrm{Im}\,\partial^r$ az $S_{r-1}(M; R)$-ben is direkt összeadandó. Így $c\partial^{-1}$ kiterjeszthető egy $f\colon S_{r-1}(M; R)\to R$ homomorfizmussá. Ha $\sigma\in S_r(M; R)$ egy $y\in H^A_r(M; R)$ osztály reprezentánsa, akkor $\langle\delta f, \sigma\rangle=\langle f, \partial\sigma\rangle=c\partial^{-1}\partial\sigma=\langle c, \sigma\rangle$, amiből $\delta f=c$ adódik. Így $\varkappa$ injektív, azaz állításunkat igazoltuk.

4. CW-komplexusok és az unicitástétel

$$m = 0, 1, \ldots \quad \text{esetén a} \quad D^m = \left\{(p_1, \ldots, p_m)\in\mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} p_i^2 \leqq 1\right\}$$

térrel homeomorf tereket *zárt m-cellá*knak, az $\mathrm{int}\,D^m$ térrel homeomorf tereket *nyílt m-cellá*knak nevezzük. $m=0$ esetén $D^0=\mathrm{int}\,D^0=\{0\}$.

Egy *CW-komplexus* egy K Hausdorff-térből és K részhalmazainak egy diszjunkt $\{e_\alpha\}$ rendszeréből áll úgy, hogy teljesülnek a következők:

(i) e_α nyílt $m(\alpha)$-cella, $m(\alpha)\geqq 0$, és minden e_α cellához létezik egy $f\colon D^{m(\alpha)}\to K$ folytonos leképezés, amelyre $f|\mathrm{int}\,D^{m(\alpha)}\colon\mathrm{int}\,D^{m(\alpha)}\to e_\alpha$ homeomorfizmus (f az e_α cella *karakterisztikus leképezése*).

(ii) $\bar{e}_\alpha-e_\alpha$ minden pontja benne van egy e_β cellában és $m(\alpha)>m(\beta)$. Ha a K CW-komplexus *véges*, azaz az $\{e_\alpha\}$ rendszer véges, akkor a fenti két feltételt elegendő kirónunk. K egy zárt részhalmaza K *(véges) részkomplexus*a, ha az (véges sok) e_α halmazok egyesítése.

(iii) K minden pontja benne van K egy véges részkomplexusában.

(iv) K topológiája olyan, hogy K egy részhalmaza pontosan akkor zárt, ha minden véges részkomplexussal vett metszete a részkomplexusban zárt.

S^m alaptere egy CW-komplexusnak, hiszen S^m egy 0-cella és egy m-cella egyesítése.

Minden M differenciálható sokaság homotopikusan ekvivalens egy K CW-komplexussal, és ha M kompakt, akkor K végesnek is választható, [2].

Az alábbiakban a CW-komplexusok homologikus jellemzésével foglalkozunk. Legyen K CW-komplexus és jelölje $K^m \subset K$ azon cellák egyesítését, amelyek dimenziója $\leqq m$. K^m a K CW-komplexus *m-váza*.

4.1. Lemma. *$H_r^A(K^m, K^{m-1}; R)=0$, ha $r \neq m$ és $H_m^A(K^m, K^{m-1}; R)$ szabad R-modulus és minden K-beli m-cellához pontosan egy generátorelem tartozik.*

Mielőtt a lemma bizonyításához kezdenénk, néhány új fogalmat vezetünk be. Legyen (M, N) pár és jelölje $i: N \subset M$ a tartalmazást. *N deformációs retraktuma* M-nek, ha létezik olyan $r: M \to N$ folytonos leképezés, hogy $ri = id_N$ és $ir \simeq id_M$. Ebben az esetben $i: N \subset M$ homotopikus ekvivalencia. Így $i_*: H_*^A(N; R) \to H_*^A(M; R)$ izomorfizmus, azaz az (M, N) pár egzakt homológia sorozatából kapjuk, hogy $H_*^A(M, N; R)=0$. Legyen (M, N, N') hármas, azaz $N' \subset N \subset M$. Ekkor

$$0 \to S_*(N, N'; R) \to S_*(M, N'; R) \to S_*(M, N; R) \to 0$$

rövid egzakt sorozat, azaz az 1.3. tétel alapján létezik egy

$$\ldots \to H_r^A(N, N'; R) \to H_r^A(M, N'; R) \to H_r^A(M, N; R) \to H_{r-1}^A(N, N'; R) \to \ldots$$

egzakt sorozat. Ezt az (M, N, N') *hármas egzakt homológiasorozatának* nevezzük.

A 4.1. lemma bizonyítása. Minden K-beli e nyílt m-cellából válasszunk egy $p_e \in e$ pontot és az általuk alkotott diszkrét halmazt jelölje S. Könnyű látni, hogy K^{m-1} a $K^m - S$ deformációs retraktuma. A $(K^m, K^m - S, K^{m-1})$ hármas egzakt homológiasorozata

$$\ldots \to \underbrace{H_r^A(K^m - S, K^{m-1}; R)}_{=0} \to H_r^A(K^m, K^{m-1}; R) \to$$

$$\to H_r^A(K^m, K^m - S; R) \to \underbrace{H_{r-1}^A(K^m - S, K^{m-1}; R)}_{=0} \to \ldots$$

azaz $H_r^A(K^m, K^{m-1}; R) \cong H_r^A(K^m, K^m - S; R)$. A kivágási axióma szerint

$$H_r^A(K^m, K^m - S; R) \cong H_r^A(\cup e, \cup (e - p_e); R),$$

ahol $\cup e$ a K-beli nyílt m-cellák unióját jelöli. Nyilván $H_r^A(\cup e, \cup (e - p_e); R) \cong \oplus H_r^A(e, e - p_e; R)$. Viszont $H_r^A(e, e - p_e; R) \cong H_r^A(D^m, S^{m-1}; R) \cong H_{r-1}^A(S^{m-1}; R)$ (az utóbbi a (D^m, S^{m-1}) pár egzakt homológiasorozatából adódik) azaz állításunk az 1.7. tételből következik.

4.2. Következmény. Legyen K véges CW-komplexus. Ekkor $H_r^A(K^m; R)=0$ ha $r > m$ és $H_r^A(K^m; R) \cong H_r^A(K; R)$, ha $r < m$. Hasonló állítás igaz kohomológiákra.

Bizonyítás *(homológiákra)*. $r > 0$ esetén $H_r^A(K^0; R)=0$. A

$$H_r^A(K^{m-1}; R) \to H_r^A(K^m; R) \to H_r^A(K^m, K^{m-1}; R)$$

egzakt sorozatot használva m szerinti indukcióval adódik, hogy $H_r^A(K^m; R)=0$, ha $r > m$. Ha $r < m$, akkor a fenti sorozattal $H_r^A(K^m; R) \cong H_r^A(K^{m+1}, R)$ és így

indukcióval

$$H_r^A(K^m; R) \cong H_r^A(K^{m+1}; R) \cong \ldots \cong H_r^A(K; R).$$

Az állítás kohomológiákra hasonlóan igazolható.

Legyen K CW-komplexus. A $H_r^A(K^r, K^{r-1}; R)$ szabad R-modulust a K CW-komplexus *r-edik lánc-csoportjának* nevezzük és $C_r(K; R)$-rel jelöljük. Hasonlóan a $H_A^r(K^r, K^{r-1}; R)$ R-modulust a K CW-komplexus *r-edik kolánc-csoportjának* nevezzük és $C^r(K; R)$-rel jelöljük. A 3.1. tétel szerint $C^r(K; R) \cong \mathrm{Hom}_R(C_r(K; R), R)$ azaz speciálisan $C^r(K; R)$ szabad R-modulus.

A $\partial_{r+1}: C_{r+1}(K; R) \to C_r(K; R)$ „határ operátor" a (K^{r+1}, K^r, K^{r-1}) hármas egzakt sorozatában fellépő leképezés. Hasonlóan a $\delta^{r+1}: C^r(K; R) \to C^{r+1}(K; R)$ kohatár operátor is definiált. Így a K CW-komplexushoz konstruáltunk egy

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{r+2}} C_{r+1}(K; R) \xrightarrow{\partial_{r+1}} C_r(K; R) \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1}(K; R) \xrightarrow{\partial_{r-1}} \ldots$$

sorozatot, amelyről az alábbiakban kimutatjuk, hogy lánckomplexus, azaz $\partial_{r-1}\partial_r = 0$.

A (K^{r+1}, K^r, K^{r-1}) hármas egzakt homológiasorozatában szereplő $\partial_r: C_{r+1}(K; R) \to C_r(K; R)$ határoperátor faktorizálható, azaz $\partial_r = i_*^{r-1}\partial_r'$, ahol $i^{r-1}: (K^{r-1}, \emptyset) \subset (K^{r-1}, K^{r-2})$ tartalmazás és $\partial_r': H_r^A(K^r, K^{r-1}; R) \to H_{r-1}^A(K^{r-1}; R)$ a (K^r, K^{r-1}) pár egzakt homológiasorozatának összekötő homomorfizmusa. Így kapjuk a

$$\begin{array}{ccccc} & & H_{r-2}^A(K^{r-2}; R) & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle \partial_{r-1}'} \quad \searrow{\scriptstyle i_*^{r-2}} & & \\ H_r^A(K^r, K^{r-1}; R) & \xrightarrow{\partial_r} & H_{r-1}^A(K^{r-1}, K^{r-2}; R) & \xrightarrow{\partial_{r-1}} & H_{r-2}^A(K^{r-2}, K^{r-3}; R) \\ & \searrow{\scriptstyle \partial_r'} \quad \uparrow{\scriptstyle i_*^{r-1}} & & & \\ & & H_{r-1}^A(K^{r-1}; R) & & \end{array}$$

kommutatív diagramot. A függőleges oszlop a (K^{r-1}, K^{r-2}) pár egzakt homológiasorozatából való, azaz $\partial_{r-1}' i_*^{r-1} = 0$, amiből $\partial_{r-1}\partial_r = i_*^{r-2}\partial_{r-1}' i_*^{r-1}\partial_r' = 0$ következik. Hasonlóan a K CW-komplexus egy

$$\ldots \xrightarrow{\delta^{r-1}} C^{r-1}(K; R) \xrightarrow{\delta^r} C^r(K; R) \xrightarrow{\delta^{r+1}} C^{r+1}(K; R) \xrightarrow{\delta^{r+2}} \ldots$$

kolánc komplexust határoz meg.

4.3. Tétel. *Legyen K véges* CW*-komplexus. Ekkor* $H_r(C_*(K; R)) \cong H_r^A(K; R)$, $r \in \mathbf{Z}$. *Hasonló állítás érvényes kohomológiákra.*

Bizonyítás *(homológiákra)*. Tekintsük a

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ C_{r+1}(K; R) & \to & H_r^A(K^r, K^{r-2}; R) & \to & H_r^A(K^{r+1}, K^{r-2}; R) & \to & 0 \\ & \searrow{\scriptstyle \partial_{r+1}} & \downarrow & & & & \\ & & C_r(K; R) & & & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial_r} & & & & \\ & & C_{r-1}(K; R) & & & & \end{array}$$

kommutatív diagramot, amelyben a vízszintes sor a (K^{r+1}, K^r, K^{r-2}) hármas, a függőleges oszlop pedig a (K^r, K^{r-1}, K^{r-2}) hármas egzakt homológiasorozatából való. Ekkor $Z_r(C_*(K; R)) \cong H_r^A(K^r, K^{r-2}; R)$ és $Z_r(C_*(K; R))/B_r(C_*(K; R)) \cong \cong H_r^A(K^{r+1}, K^{r-2}; R)$. A 3.2. következmény szerint $H_r^A(K^{r+1}, K^{r-2}; R) \cong \cong H_r^A(K^{r+1}; R) \cong H_r^A(K; R)$, amivel állításunkat igazoltuk. Kohomológiákra a bizonyítás analóg módon történik.

Befejezésképpen megmutatjuk, hogy az (1)—(7) tulajdonságokkal rendelkező $H_*^A(.,.;R)$, ill. $H_A^*(.,.;R)$ funktorok az R gyűrű rögzítésével véges CW-komplexusokra egyértelműen meghatározottak. Ehhez először egy fogalmat bocsájtunk előre.

Egy (M, N) pár esetén azt mondjuk, hogy az N altér az M *erős deformációs retrektuma*, ha létezik egy $f: M \times [0, 1] \to M$ leképezés, amelyre $p \in M$ esetén $f(p, 0) = p$ és $f(p, 1) \in N$, valamint $t \in [0, 1]$ és $q \in N$ esetén $f(q, t) = q$ teljesülnek.

4.4. Lemma. *Legyen (M, N) kompakt Hausdorff-pár, azaz M kompakt Hausdorff-tér és $N \subset M$ zárt altere, valamint tegyük fel, hogy N erős deformációs retraktuma M-nek. Jelölje $\pi: M \to M/N$ a természetes projekciót és b a $\pi(N) \in M/N$ pontot. Ekkor $\{b\}$ erős deformációs retraktuma M/N-nek.*

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

4.5. Tétel. *Legyen (M, N) kompakt Hausdorff-pár és tegyük fel, hogy az $N \subset M$ altérnek van olyan $U \subset M$ zárt környezete úgy, hogy N erős deformációs retraktuma U-nak. Ha $\pi: (M, N) \to (M/N, \{b\})$ a természetes projekció, akkor*

$$\pi_*: H_*^A(M, N; R) \to H_*^A(M/N, \{b\}; R)$$

izomorfizmus.

Bizonyítás. Az előző lemma szerint $\{b\}$ erős deformációs retraktuma a $\pi(U)$ térnek. Az $(M/N, \pi(U), \{b\})$ hármas egzakt homológiasorozata

$$\ldots \to H_r^A(\pi(U), \{b\}; R) \to H_r^A(M/N, \{b\}; R) \to H_r^A(M/N, \pi(U); R) \to$$

$$\to H_{r-1}^A(\pi(U), \{b\}; R) \to \ldots,$$

amiből $H_*^A(\pi(U), \{b\}; R) = 0$ miatt $H_*^A(M/N, \{b\}; R) \cong H_*^A(M/N, \pi(U); R)$ következik. $\operatorname{int} U$ az $N \subset M$ zárt alteret tartalmazó nyílt altér, azaz létezik egy $U' \subset M$ nyílt altér, amelyre $N \subset U' \subset \overline{U}' \subset \operatorname{int} U$ teljesül. A kivágási axióma szerint $H_*^A(M - U', U - U'; R) \cong H_*^A(M, U; R)$. Mivel N erős deformációs retraktuma U-nak, ezért $H_*^A(M, N; R) \cong H_*^A(M, U; R)$. Az előbbi két izomorfizmussal

$$H_*^A(M, N; R) \cong H_*^A(M - U', U - U'; R)$$

adódik.

Hasonló módon a kivágási axiómát az $(M/N, \pi(U))$ párra és $\pi(U')$-re alkalmazva kapjuk, hogy $H_*^A(M/N, \{b\}; R) \cong H_*^A(M/N, \pi(U); R) \cong H_*^A(M/N - \pi(U'), \pi(U) - \pi(U'); R)$. A π leképezés megszorítása egy $\pi: (M - U', U - U') \to (M/N - \pi(U'), \pi(U) - \pi(U'))$ homeomorfizmust ad, amely a homológiákon izomorfizmust indukál. Ezzel a tételt igazoltuk.

Legyenek (M, N) és (M', N') párok és $f: (M, N) \to (M', N')$ pár leképezés. f *relatív homeomorfizmus*, ha $f|M - N: M - N \to M' - N'$ homeomorfizmus.

4.6. Relatív homeomorfizmus tétel. *Legyenek (M, N) és (M', N') kompakt Hausdorff-párok és tegyük fel, hogy N, ill. N' egy M-beli, ill. M'-beli kompakt környezetének erős deformációs retraktuma. Ekkor, ha $f: (M, N) \to (M', N')$*

relatív homeomorfizmus, akkor

$$f_*\colon H_*^A(M, N; R) \to H_*^A(M', N'; R)$$

izomorfizmus.

Bizonyítás. Legyenek $\pi\colon M \to M/N$, $\pi(N)=b$, és $\pi'\colon M' \to M'/N'$, $\pi'(N')=b'$, a megfelelő projekciók. Az $f\colon M \to N$ leképezés egy $f'\colon M/N \to M'/N'$ homeomorfizmust szolgáltat úgy, hogy az

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ M/N & \xrightarrow{f'} & M'/N' \end{array}$$

diagram kommutatív. A homológiákon ez a diagram a

$$\begin{array}{ccc} H_*^A(M, N; R) & \xrightarrow{f_*} & H_*^A(M, N'; R) \\ {\scriptstyle\pi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'_*} \\ H_*^A(M/N, \{b\}; R) & \xrightarrow{f'_*} & H_*^A(M'/N', \{b'\}; R) \end{array}$$

kommutatív diagramot indukálja. A 4.5. tétel szerint π_* és π'_* izomorfizmusok, ezért f_* izomorfizmus.

4.7. Tétel. *Legyen* (K, L) *véges* CW*-pár, azaz* K *véges* CW*-komplexus és* $L \subset K$ *részkomplexusa. Ekkor* L *egy kompakt környezetének erős deformációs retraktuma.*

Bizonyítás. Jelölje m a $K-L$-ben levő nyílt cellák számát. Ha $m=0$, akkor az állítás triviális. Ha $m=1$, akkor az állítás egyszerű konstrukcióval igazolható. Legyen $m>1$ és m szerinti teljes indukcióval bizonyítsunk. Tegyük fel, hogy a tétel igaz minden (K', L') CW-párra, amelyre $K'-L'$ legfeljebb $m-1$ nyílt cellából áll. Legyen (K, L) olyan véges CW-pár, amelyre $K-L$ pontosan m nyílt cellából áll és válasszunk $K-L$-ben egy e maximális dimenziós nyílt cellát. $K'=K-e$ jelöléssel (K', L) véges CW-pár, amelyre indukciós hipotézisünk alkalmazható. Így létezik az $L \subset K'$ altérnek egy K'-beli U' kompakt környezete úgy, hogy L erős deformációs retraktuma U'-nek K'-ben. Az e cella f karakterisztikus leképezése egy $f\colon (D^n, S^{n-1}) \to (\bar{e}, \bar{e}-e)$ relatív homeomorfizmust indukál, ahol e dimenziója n. Legyen $r\colon D^n - \{0\} \to S^{n-1}$ az a leképezés, amelyre $r(p) = \dfrac{p}{\|p\|}$, $p \in D^n - \{0\}$ érvényes. Mivel $U' \subset K'$ kompakt, ezért $f^{-1}(U') \subset S^{n-1}$ is kompakt. Legyen $U = \{f(p) | p \in D^n, \|p\| \geqq \dfrac{1}{2}$ és $r(p) \in f^{-1}(U')\}$. Ekkor $U \subset K$ kompakt altér, amelynek $U \cap U'$ erős deformációs retraktuma. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $L \subset \operatorname{int}(U \cup U')$, azaz az $U \cup U'$ altérnek L erős deformációs retraktuma, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

Ezek után rátérhetünk a homológia elmélet unicitásának kimutatására. A kohomológia elmélet unicitása analóg módon bizonyítható.

Legyen $H_*(.,.;R)$, ill. $H'_*(.,.;R)$ homológia elmélet (azaz olyan funktor, amely teljesíti az 1.12. tétel (1)—(7) tulajdonságait a G helyébe az R gyűrűt írva) és jelölje ∂, ill. ∂' a határoperátort. $h\colon H_*(.,.;R) \to H'_*(.,.;R)$ *természetes transzformáció,* ha (M, N) pár esetén $h(M, N)\colon H_*(M, N; R) \to H'_*(M, N; R)$

homomorfizmus úgy, hogy $f: (M, N) \to (M', N')$ pár leképezés esetén a

$$\begin{array}{ccc} H_*(M, N; R) & \xrightarrow{h(M,N)} & H'_*(M, N; R) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H_*(M', N'; R) & \xrightarrow{h(M',N')} & H'_*(M', N'; R) \end{array}$$

diagram kommutatív és (M, N) pár, valamint $r \in \mathbf{Z}$ esetén a

$$\begin{array}{ccc} H_r(M, N; R) & \xrightarrow{h(M,N)} & H'_r(M, N; R) \\ {\scriptstyle \partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ H_{r-1}(N; R) & \xrightarrow{h(N,\emptyset)} & H'_{r-1}(N; R) \end{array}$$

diagram kommutatív.

4.8. Tétel. *Legyenek* $H_*(.,.;R)$ *és* $H'_*(.,.;R)$ *homológia elméletek és* $h: H_*(.,.;R) \to H'_*(.,.;R)$ *olyan természetes transzformáció, amelyre* $h(\mathrm{pont}): H_*(\mathrm{pont}; R) \to H'_*(\mathrm{pont}; R)$ *izomorfizmus. Ekkor minden* (K, L) *véges* CW*-pár esetén* $h(K, L): H_*(K, L; R) \to H'_*(K, L; R)$ *izomorfizmus.*

Bizonyítás. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a 4.5. és 4.6. tételek akármilyen homológia elméletre érvényesek, minthogy igazolásukban csak az axiómákat használtuk.

A zérus dimenziós gömb S^0 két x és x' pontból áll. Ha $i: \{x'\} \subset (S^0, \{x\})$ a tartalmazás, akkor

$$\begin{array}{ccc} H_r(\{x'\}; R) & \xrightarrow{i_*} & H_r(S^0, \{x\}; R) \\ {\scriptstyle h(\{x'\})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h(S^0, \{x\})} \\ H'_r(\{x'\}; R) & \xrightarrow{i_*} & H'_r(S^0, \{x\}; R) \end{array}$$

kommutatív diagram és a kivágási axióma szerint a vízszintes nyilak izomorfizmusok. Így $h(S^0, \{x\}): H_r(S^0, \{x\}; R) \to H'_r(S^0, \{x\}; R)$ izomorfizmus. Tekintsük a

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{r+1}(S^0, \{x\}; R) & \xrightarrow{\partial} & H_r(\{x\}; R) & \to & H_r(S^0; R) & \to & H_r(S^0, \{x\}; R) & \to & H_{r-1}(\{x\}; R) \\ {\scriptstyle h(S^0,\{x\})}\downarrow & & {\scriptstyle h(\{x\})}\downarrow & & {\scriptstyle h(S^0)}\downarrow & & {\scriptstyle h(S^0,\{x\})}\downarrow & & {\scriptstyle h(\{x\})}\downarrow \\ H'_{r+1}(S^0, \{x\}; R) & \xrightarrow{\partial'} & H'_r(\{x\}; R) & \to & H'_r(S^0; R) & \to & H'_r(S^0, \{x\}; R) & \to & H'_{r-1}(\{x\}; R) \end{array}$$

kommutatív diagramot. Az öt-lemma szerint $h(S^0): H_r(S^0; R) \to H'_r(S^0; R)$ izomorfizmus. Tegyük fel, hogy $h(S^{m-1}): H_r(S^{m-1}; R) \to H'_r(S^{m-1}; R)$ izomorfizmus, $m > 0$. A D^m golyó homotopikusan ekvivalens az egypontú térrel és így $h(D^m)$: $H_r(D^m; R) \to H'_r(D^m; R)$ izomorfizmus. A

$$\begin{array}{ccc} H_r(D^m, S^{m-1}; R) & \xrightarrow{\pi_*} & H_r(S^m, \{x\}; R) \\ {\scriptstyle h(D^m, S^{m-1})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h(S^m, \{x\})} \\ H'_r(D^m, S^{m-1}; R) & \xrightarrow{\pi_*} & H'_r(S^m, \{x\}; R) \end{array}$$

diagram kommutatív, amelyben $\pi: (D^m, S^{m-1}) \to (S^m, \{x\})$ relatív homeomorfizmus, azaz π_* izomorfizmus. A (D^m, S^{m-1}) pár egzakt homológia sorozata és az öt-lemma szerint $h(D^m, S^{m-1})$ izomorfizmus, azaz $h(S^m, \{x\})$ izomorfizmus. Az öt-lemma ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $h(S^m): H_r(S^m; R) \to H'_r(S^m; R)$ izomorfizmus. Így m szerinti indukcióval kapjuk, hogy $h(S^m)$ izomorfizmus minden m esetén.

Legyen most K CW-komplexus és jelölje k a K nyílt celláinak számát. k szerinti indukcióval igazoljuk, hogy $h(K)$ izomorfizmus. $k=1$ esetén az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy h izomorfizmus legfeljebb $k-1$ nyílt cellát tartalmazó CW-komplexusokra. Legyen $e\subset K$ egy maximális dimenziós nyílt cella és $L=K-e$. Ekkor L $k-1$ nyílt cellát tartalmazó CW-komplexus. Az e cella karakterisztikus leképezése egy $f:(D^n, S^{n-1})\to(K, L)$ relatív homeomorfizmust definiál, ahol e dimenziója n. A

$$\begin{array}{ccc} H_r(D^n, S^{n-1}; R) & \xrightarrow{f_*} & H_r(K, L; R) \\ \downarrow{\scriptstyle h(D^n, S^{n-1})} & & \downarrow{\scriptstyle h(K, L)} \\ H'_r(D^n, S^{n-1}; R) & \xrightarrow{f_*} & H'_r(K, L; R) \end{array}$$

kommutatív diagram szerint $h(K, L)$ izomorfizmus. Az indukciós hipotézis szerint $h(L)$ izomorfizmus, azaz az öt-lemma alkalmazásával kapjuk, hogy

$$h(K):\ H_r(K; R) \to H'_r(K; R)$$

izomorfizmus.

Véges CW-párokra az állítás ismét az öt-lemma alkalmazásával adódik. Ezzel a tételt igazoltuk.

A továbbiakban az R gyűrűhöz tartozó homológia, ill. kohomológia elméletet Δ jel nélkül, a $H_*(.,.;R)$, ill. $H^*(.,.;R)$ jelöli.

5. Sokaságok irányítása és fundamentális homológia osztálya

Legyen M m-dimenziós topologikus sokaság. Először $H_r(M, M-K; R)$ alakú homológia modulusokat vizsgálunk, ahol $K\subset M$ kompakt altér. Ha $K\subset K'\subset M$, akkor az $(M, M-K')\subset(M, M-K)$ tartalmazás által indukált homomorfizmust

$$\varrho_K:\ H_r(M, M-K'; R) \to H_r(M, M-K; R)$$

jelöli.

5.1. Lemma. *$r>m$ esetén $H_r(M, M-K; R)=0$. Továbbá $x\in H_m(M, M-K; R)$ zérus pontosan akkor, ha $\varrho_{\{p\}}(x)\in H_m(M, M-\{p\}; R)$ zérus minden $p\in K$ esetén.*

Bizonyítás. A lemma igazolását hat lépésben végezzük el. Az első négy lépésben $M=\mathbf{R}^m$.

1. Lépés. Tegyük fel, hogy $K\subset\mathbf{R}^m$ konvex kompakt altér. Legyen $p\in K$ és S egy p középpontú $(m-1)$-dimenziós gömb, amely K-t a belsejében tartalmazza. Ekkor S az $M-\{p\}$ és $M-K$ terek deformációs retraktuma, azaz

$$H_r(M, M-K; R) \cong H_r(M, M-\{p\}; R),$$

amivel az első lépés igazolását befejeztük.

2. Lépés. Tegyük fel, hogy a lemma érvényes valamely K', K'', $K'\cap K''$ konvex kompakt halmazokra. Igazoljuk, hogy a lemma igaz $K=K'\cup K''$-re is.

Legyenek $U'=M-K'$, $U''=M-K''$ és

$$\hat{S}_r(M; U', U'') = S_r(M; R)/\big(S_r(U'; R)+S_r(U''; R)\big),$$

ahol $S_r(U'; R)+S_r(U''; R)\subset S_r(U'\cup U''; R)$ azon szinguláris r-szimplexek által generált részmodulus, amelynek képei vagy U'-ben vagy U''-ben vannak. Ekkor

$$0 \to S_*^{\mathfrak{U}}(U'\cup U''; R) \to S_*(U'\cup U''; R) \to \hat{S}_*(U'\cup U''; U', U'') \to 0$$

rövid egzakt sorozat, ahol $\mathfrak{A}=\{U', U''\}$. Az 1.4. tétel szerint $H_*(\hat{S}_*(U'\cup U''; U', U''))=0$. Továbbá

$$0 \to \hat{S}_*(U'\cup U''; U', U'') \to \hat{S}_*(M; U', U'') \to S_*(M, U'\cup U''; R) \to 0$$

rövid egzakt sorozat, amiből következik, hogy az

$$\hat{S}_*(M; U', U'') \to S_*(M, U'\cup U''; R)$$

homomorfizmus a homológia modulusokon izomorfizmust indukál. Az

$$\begin{array}{ccccc} & & S_r(M, U'; R) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ S_r(M, U'\cap U''; R) & & & & \hat{S}_r(M; U', U'') \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & S_r(M, U''; R) & & \end{array}$$

diagram kommutatív és így

$$0 \to S_r(M, U'\cap U''; R) \xrightarrow{\text{összeg}} S_r(M, U'; R)\oplus$$

$$\oplus S_r(M, U''; R) \xrightarrow{\text{különbség}} \hat{S}_r(M; U', U'') \to 0$$

rövid egzakt sorozat, amely a

$$\ldots \to H_{r+1}(M, M-(K'\cap K''); R) \xrightarrow{\Delta} H_r(M, M-K; R) \xrightarrow{s} H_r(M, M-K'; R)\oplus$$

$$\oplus H_r(M, M-K''; R) \to \ldots$$

egzakt sorozatot definiálja; $s(x)=(\varrho_{K'}(x), \varrho_{K''}(x))$, $x\in H_r(M, M-K; R)$. Ebből az állítás következik.

3. Lépés. $K\subset M$ és $K=K_1\cup\ldots\cup K_n$, ahol K_i, $i=1, \ldots, n$, kompakt konvex alterek. Ez az eset az előző lépés felhasználásával n szerinti indukcióval adódik.

4. Lépés. $K\subset\mathbf{R}^m$ tetszőleges kompakt altér. Legyen $x\in H_r(M, M-K; R)$. Ekkor az x elem egy reprezentánsa az $S_r(M, M-K; R)=S_r(M; R)/S_r(M-K; R)$ modulusban van. Legyen $\sigma\in S_r(M; R)$ olyan r-lánc, amelynek képe az $S_r(M; R)\to$ $\to S_r(M, M-K; R)$ epimorfizmus mellett az x egy reprezentánsa. Ekkor $\partial\sigma$ a K halmaztól diszjunkt. Legyen K' a K olyan kompakt környezete, amely a $\partial\sigma$-tól diszjunkt. Ekkor σ képe az $S_r(M; R)\to S_r(M, M-K'; R)$ epimorfizmus mellett $H_r(M, M-K'; R)$ olyan x' elemét reprezentálja, amelyre $\varrho_K(x')=x$. Fedjük le a K kompakt halmazt $D_1, \ldots, D_n$ gömbökkel úgy, hogy $D_i\subset K'$ és $D_i\cap K'\neq\emptyset$, $i=1, \ldots, n$. Ha $r>m$, akkor $\varrho_{D_1\cup\ldots\cup D_n}(x')=0$, azaz $x=0$. Ha $r=m$ és $\varrho_{\{p\}}(x)=0$, $p\in K$, akkor $\varrho_{\{p\}}(x')=0$, $p\in D_1\cup\ldots\cup D_n$ esetén. Kapjuk, hogy $\varrho_{D_1\cup\ldots\cup D_n}(x')=0$, azaz $x=0$.

5. Lépés. Legyen M tetszőleges és tegyük fel, hogy a $K\subset M$ kompakt halmaznak van olyan nyílt környezete, amely homeomorf $\mathbf{R}^m$-mel.

Ha $U\subset M$ egy ilyen környezet, akkor a kivágási axióma szerint

$$H_*(M, M-K; R) \cong H_*(U, U-K; R),$$

amivel ezt az esetet az előzőre vezettük vissza.

6. Lépés. $K \subset M$ tetszőleges. Ekkor $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$, ahol K_i, $i = 1, \ldots, n$, az 5 lépés értelmében kicsi. Ekkor n szerinti indukciót alkalmazunk. Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

Legyen M m-dimenziós topologikus sokaság. Az M sokaság *homologikus irányítása* egy ν leképezés, amely minden $p \in M$ ponthoz a $H_m(M, M - \{p\}; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ csoport egy ν_p generátorelemét rendeli úgy, hogy ν „folytonos" a következő értelemben:

Minden M-beli pontnak van olyan K kompakt környezete és van olyan $\nu_K \in H_m(M, M - K; \mathbf{Z})$ elem, amelyre $p \in K$ esetén $\varrho_{\{p\}}(\nu_K) = \nu_p$ teljesül. Ha az M sokaságon adott egy ν homologikus irányítás, akkor M-et *homologikusan irányított* sokaságnak nevezzük. A homologikus irányítás fogalma $\mathbf{Z}$ helyett tetszőleges R gyűrűre is értelmezhető. Könnyű látni, hogy minden topologikus sokaság $\mathbf{Z}_2$ felett irányítható.

Az alábbiakban igazoljuk, hogy differenciálható sokaságok esetén az irányítás homologikus fogalma azonos a II. rész 1. fejezetében bevezetett differenciálgeometriai irányítás fogalmával.

Emlékeztetünk arra, hogy $U, U' \subset \mathbf{R}^m$ összefüggő nyílt halmazok esetén egy $f: U \to U'$ diffeomorfizmus *irányítástartó* egy $p \in U$ pontban, ha f p pontbeli Jacobi-mátrixának determinánsa pozitív; ellenkező esetben az f a p pontban *irányításváltó*. Legyen $O(f): U \to \{-1, 1\}$ az a leképezés, amelyre $O(f)_p = 1$, ha f a p pontban irányítástartó és ellenkező esetben $O(f)_p = -1$. Mivel f diffeomorfizmus, ezért $O(f)$ definíciója értelmes és U összefüggősége miatt $O(f)$ állandó U-n. Ha $U'' \subset \mathbf{R}^m$ összefüggő nyílt halmaz és $f': U' \to U''$ diffeomorfizmus, akkor $O(f'f) = O'(f')O(f)$.

Az alábbiakban az $O(f)$ leképezést homologikus úton vizsgáljuk. Ha M topologikus tér, akkor az $M \to \{\text{pont}\}$ leképezés egy $H_*(M; \mathbf{Z}) \to H_*(\text{pont}; \mathbf{Z})$ homomorfizmust indukál. Az M tér $\tilde{H}_*(M; \mathbf{Z})$ *redukált homológiája* e homomorfizmus magja. Könnyű látni, hogy $H_0(M; \mathbf{Z}) \cong \tilde{H}_0(M; \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}$ és $r \neq 0$ esetén $H_r(M; \mathbf{Z}) \cong \tilde{H}_r(M; \mathbf{Z})$.

$H_*(S^m; \mathbf{Z})$ meghatározásánál a Mayer—Vietoris-sorozatból egy $H_m(S^m; \mathbf{Z}) \to H_{m-1}(S^{m-1}; \mathbf{Z})$, $m \neq 0$ izomorfizmus adódott. Másfelől, ismét a Mayer—Vietoris-sorozatból egy $\tilde{H}_0(S^0; \mathbf{Z}) \leftarrow \tilde{H}_1(S^1; \mathbf{Z})$ izomorfizmus adódik. Így minden m-re létezik egy

$$s: \tilde{H}_m(S^m; \mathbf{Z}) \to \tilde{H}_{m+1}(S^{m+1}; \mathbf{Z})$$

izomorfizmus. $m = 0, 1, \ldots$ esetén legyen $y_m \in \tilde{H}_m(S^m; \mathbf{Z})$ olyan generátorelem, amelyre $S(y_m) = y_{m+1}$. Legyen $U \subset \mathbf{R}^m$ összefüggő nyílt halmaz, $p \in U$ és $D_t(p) \subset U$ p középpontú, t sugarú golyó. Ekkor az alábbi leképezések izomorfizmusok

$$\tilde{H}_{m-1}(S^{m-1}; \mathbf{Z}) \leftarrow H_m(D^m, S^{m-1}; \mathbf{Z}) \to H_m(D^m, D^m - \{0\}; \mathbf{Z}) \to$$

$$\to H_m(D_t(p), D_t(p) - \{p\}; \mathbf{Z}) \to H_m(U, U - \{p\}; \mathbf{Z}),$$

ahol az első izomorfizmus a (D^m, S^{m-1}) pár egzakt homológiasorozatából való, a második a $(D^m, S^{m-1}) \subset (D^m, D^m - \{0\})$ homotópikus ekvivalenciából, a harmadik egy hasonlósági transzformációból, a negyedik pedig a kivágási axiómából származik.

Legyen $y_{m-1} \in \tilde{H}_{m-1}(S^{m-1}; \mathbf{Z})$ képe a fenti izomorfizmusok mellett

$$y_p \in H_m(U, U - \{p\}; \mathbf{Z}).$$

5.2. Lemma. *Ha $U, U' \subset \mathbf{R}^m$ tartományok és $f: U \to U'$ diffeomorfizmus, akkor*

$$f_*(y_p) = O(f)_p y_{f(p)}, \quad p \in U.$$

Bizonyítás. Legyen $p_0 \in U$ rögzített. Feltehető, hogy $0=p_0=f(p_0)$. Legyen $f(p)=L(p)+g(p)$, ahol L lineáris, $g(0)=0$ és g tangens leképezése a 0 pontban 0 (Taylor-formula). Ha az f leképezést $f: (U, U-\{p_0\}) \to (\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m-\{0\})$ pár leképezésnek fogjuk fel, akkor létezik egy az f-et és az L-et összekötő H homotópia, amelyre $H(p,t)=L(p)+(1-t)g(p)$, $p \in U$, azaz az állítás redukálható arra az esetre, amikor f lineáris. Egy másik homotópiával elérhető, hogy f ortogonális legyen, azaz $f=r_1 \dots r_n$, ahol r_i, $i=1, \dots, n$, egy hipersíkra való tükrözés. Könnyű látni, hogy $(r_i)_*(y_0) = -y_0$, amiből az állítás következik.

5.3. Tétel. *Az alábbi állítások M differenciálható sokaság esetén ekvivalensek:*

(1) *M homologikusan irányítható,*

(2) *M irányítható,*

(3) *A $T(M)$ tangensnyaláb struktúracsoportja redukálható $SO(m)$-re.*

Bizonyítás. (1)⇒(2). Legyen ν az M egy homologikus irányítása és az M maximális $\mathscr{A}=\{(U_\varrho, x_\varrho) | \varrho \in I\}$ differenciálható atlaszából válasszuk ki azt az $\mathscr{A}'$ részatlaszt, amely olyan (U_ϱ, x_ϱ) lokális térképekből áll, amelyekre $p \in U_\varrho$ esetén $\nu_p=(x_\varrho^{-1})_*(y_m)$ áll, ahol $y_m \in H_m(x_\varrho(U_\varrho), x_\varrho(U_\varrho)-x_\varrho(p); \mathbf{Z})$ a korábban definiált generátor. Az 5.2. lemma miatt az $\mathscr{A}'$ differenciálható atlasz az M sokaság egy irányítását adja meg.

(2)⇒(1). Legyen $\mathscr{A}'$ az M sokaság olyan differenciálható atlasza, amely M-et irányíthatóvá teszi. $p \in M$ esetén válasszunk olyan $(U_\varrho, x_\varrho) \in \mathscr{A}'$ lokális térképet, amelyre $p \in U_\varrho$. A $\nu_p=(x_\varrho^{-1})_*(y_m)$ definícióval ν homologikus irányítás M-en.

(2)⇒(3). Legyen $\mathscr{A}'$ az M sokaság olyan differenciálható atlasza, amely M-et irányítottá teszi. Ekkor (U_ϱ, x_ϱ), $(U_\sigma, x_\sigma) \in \mathscr{A}'$ esetén $\det (x_\sigma x_\varrho^{-1})_* > 0$ miatt az $(x_\sigma x_\varrho^{-1})_*$ indukált leképezés egy $\psi_{\sigma\varrho}: U_\varrho \cap U_\sigma \to GL^+(m, \mathbf{R})$ leképezést definiál, ahol $GL^+(m, \mathbf{R}) \subset GL(m, \mathbf{R})$ az a részcsoport, amely a pozitív determinánsú mátrixokból áll. $SO(m, \mathbf{R}) \subset GL^+(m, \mathbf{R})$ deformációs retraktum, azaz $\psi_{\sigma\varrho}$ egy $\overline{\psi}_{\sigma\varrho}: U_\varrho \cap U_\sigma \to SO(m)$ leképezést definiál. A $\overline{\psi}_{\sigma\varrho}$, $\varrho, \sigma \in I$, leképezésekkel, mint átmenet függvényekkel az I. rész 3. fejezetében leírt módon konstruált M feletti vektornyaláb izomorf $T(M)$-mel.

(3)⇒(2) Triviális.

5.4. Tétel. *Legyen M m-dimenziós irányított sokaság ν homologikus irányítással. Ekkor minden $K \subset M$ kompakt altérhez létezik pontosan egy $\nu_K \in H_m(M, M-K; \mathbf{Z})$ elem, amelyre $\varrho_{\{p\}}(\nu_K)=\nu_p$ áll $p \in K$ esetén.*

Speciálisan, ha M kompakt, akkor a $\nu_M=[M] \in H_m(M; \mathbf{Z})$ elemet az M sokaság *fundamentális homológia osztályá*nak nevezzük. $[M]$ reprezentáló ciklusai a *fundamentális ciklusok*.

Bizonyítás. ν_K egyértelműsége az 5.1. lemmából következik. Az egzisztenciát három lépésben igazoljuk.

1. Lépés. Ha K valamely M-beli pont elegendően kis környezetben van, akkor ν_K létezése az irányítás definíciójából következik.

2. Lépés. Tegyük fel, hogy $K=K' \cup K''$ és $\nu_{K'}$, $\nu_{K''}$ léteznek. Az 5.1. lemmában szereplő egzakt sorozat

$$\to 0 \to H_m(M, M-K; \mathbf{Z}) \xrightarrow{s} H_m(M, M-K'; \mathbf{Z}) \oplus$$

$$\oplus H_m(M, M-K''; \mathbf{Z}) \xrightarrow{t} H_m(M, M-(K' \cap K''); \mathbf{Z}) \to$$

ahol

$$s(x) = (\varrho_{K'}(x), \varrho_{K''}(x)), \quad x \in H_m(M, M-K; \mathbf{Z}),$$

és

$$t(x', x'') = \varrho_{K' \cap K''}(x') - \varrho_{K' \cap K''}(x''), \quad x' \in H_m(M, M-K'; \mathbf{Z}),$$

$$x'' \in H_m(M, M-K''; \mathbf{Z}), \quad t(v_{K'}, v_{K''}) = 0$$

az egyértelműség miatt. Kapjuk, hogy létezik olyan $v_K \in H_m(M, M-K; \mathbf{Z})$, amelyre $(v_{K'}, v_{K''}) = s(v_K)$.

3. Lépés. K tetszőleges. Ekkor $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$, ahol K_i, $i = 1, \ldots, n$, az első lépés értelmében kicsi. Ekkor n szerinti indukciót alkalmazunk, amivel a bizonyítás kész.

IRODALOM

[1] I. KAPLANSKY, *Infinite Abelian groups,* Univ. Michigan Press, 1954.
[2] J. R. MUNKRES, Elementary differential topology, *Annals of Math. Studies* 54, Princeton Univ. Press, revised ed. 1966.
[3] R. S. PALAIS, *Seminar on the Atiyah—Singer index theorem,* Princeton Univ. Press, 1965.
[4] J. W. VICK, *Homology theory*, Academic Press, 1973.

О ТЕОРЕМЕ ОБ ИНДЕКСА АТЬЯ—ЗИНГЕРА, III.

Г. ТОТ

ON THE ATIYAH—SINGER INDEX THEOREM III.

G. TÓTH

AZ UNIFORM POLIÉDEREK SZÁMÁRÓL I.—II.

SZEPESVÁRI ISTVÁN

I. Ekvivalens csúcsokkal, és egyenlő élekkel rendelkező (uniform) poliédereket keresünk. A csúcsok ekvivalenciája azt jelenti, hogy bármely csúcs bármely csúcsba átvihető kongruens transzformációval, miközben a poliéder önmagába megy át.

A csúcsok ekvivalenciája miatt a poliéder gömbbe írható. Az élek egyenlőségéből következik a lapok szabályossága.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező poliéderekkel foglalkoznak H. S. M. Coxeter és mások az [1] dolgozatban.

Nem bizonyították azonban, hogy az összes lehetséges uniform poliédert megadták-e.

Sz. P. Szopov [2] (1970), majd J. Skilling [3] (1975) különböző módon bebizonyította, hogy az uniform poliéderek [1]-ben megadott listája teljes. Háromnál magasabb dimenzióban azonban a probléma megoldása (pl. 4 dimenzióban konkáv esetben) eddig nem ismeretes. Az ebben a cikkben ismertetett, [2]-től és [3]-tól eltérő módszerrel minden létező uniform poliéder megkonstruálható. Az eljárás (részben) háromnál magasabb dimenzióra is tovább vihető. Négy dimenzióban egy bizonyos poliéder osztályról egy következő cikkben lesz szó.

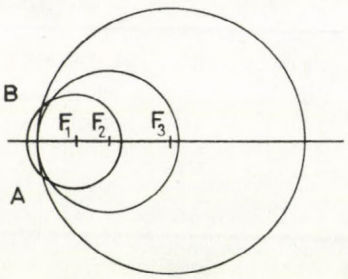
A bizonyítás vázlatosan a következő lépésekből áll:

1. Ismeretes, (a dolgozat elején (Lemma 2) is kiderül), hogy egy (gömbi) uniform poliéder tetszőleges lapján bármely A_1, A_2, B_1, B_2 csúcsot (a négy közül két csúcs meg is egyezhet) véve az A_1-et A_2-be és a B_1-et B_2-be vivő két szimmetria operációban (centrális inverziót kivéve) szereplő két forgáscentrum távolsága csak bizonyos néhány értéket vehet fel.
   Szabályos (gömbi) poliéder csúcsai, lapközéppontjai, ill. oldalfelező pontjai lehetnek csak a forgáscentrumok. A keresett uniform gömbi poliéder bizonyos alkotórészeinek számát korlátozó tételek bizonyítása (1.§.) után gömbháromszögtani ismereteken alapuló egyenleteket állítunk fel (2.§.), melyben ismeretlen a gömbi uniform poliéder élhossza.
2. Az összes lehetséges élhossz megadása után a szimmetria operációkat figyelembe véve azt is megállapíthatjuk, hogy egy bizonyos élhosszal milyen laphoz milyen lap csatlakozhat (élben), és hogyan (a két gömbi lapnak van-e közös része, vagy nincs), az összes lehetséges módon (3.§.).
3. Egy-egy csúcs köré a lehetséges lapokból próbáljuk meg felépíteni a (gömbi) poliédert [2]-t és a 11. tételt figyelembe véve. Ha az egy csúcs körüli lapszögek összege 2π többszöröse (feltéve, hogy egy élhez pontosan 2 lap csatlakozhat), akkor lehet, hogy uniform poliéderről van szó. Ellenkező esetben a konfigurációt elvetjük (4.§.).

1. §. Korlátokat megadó tételek

Esetünkben a direkt kongruenciák csak a forgatások (szögei $2\pi/n$ egész számú többszörösei, $n \geqq 2$, egész) lehetnek, mert a poliéder centruma helyben marad.

Egy poliédernek véges sok csúcsa van (definíció szerint), és a csúcsokat ekvivalens módon egymásba vivő S transzformációk is emiatt véges sokan vannak. (A továbbiakban csak ilyen fajta elmozgatásokkal foglalkozunk.) Ugyanis egy alakzat szimmetria operációi vagy mind direktek, vagy a fele oppozíciós, fele direkt. Ha viszont végtelen sok forgáscentrum lenne, akkor ugyanez állna legalább egy poliéder-csúcspárra nézve, (A-t B-be forgatás vinné) de ezek végtelen sok poliéder csúcsot indukálnának (1. ábra).



1. ábra

Írjunk g gömböt a keresett P poliéder köré, és vetítsük lapjait g középpontjából (O) centrálisan g-re. Ekkor egy g gömbi poliédert kapunk, és ha P uniform, akkor G is az. Mivel egy bizonyos G-ből lényegében egyértelműen kapjuk a neki megfelelő P-t, a továbbiakban elég a G gömbi uniform poliéderekkel foglalkozni.

Egy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ g gömbi sokszögön azt a gömbfelületet értjük, amelyet az $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$ (O csúcsú) konvex szöglet (O a gömb középpontja) metsz ki a gömbfelületből. Ismeretes a következő ([4], 70. oldal).

Tétel 1. *Az izometriák véges csoportjai csak a diéder, az oktaéder, vagy az ikozaéder szimmetriacsoportjai, illetve ezek részcsoportjai lehetnek.* A következőkben számunkra csak az oktaéder és az ikozaéder szimmetriacsoportjaiban fellépő transzformációk az érdekesek. Ugyanis a diéder szimmetriacsoportjainak megfelelő alakzatok (szabályos sokszögek, prizmák, antiprizmák) esete tisztázott.

Lemma 1/a. *Egy szabályos poliéder esetén a direkt szimmetria operációkat jellemző π, vagy annál kisebb szögű, egymástól különböző forgatások szögei abszolút értékben:* $\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$ *és csak ezek lehetnek.* (Az 0, 2π szögű helybenhagyást nem számítjuk.)

Definíció: n-es forgáscentrum (F_n, $5 \geqq n \geqq 2$) az, ahol $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgás (és ennek tetszőleges egész számú többszöröse a lehető legnagyobb n-re) előfordul.

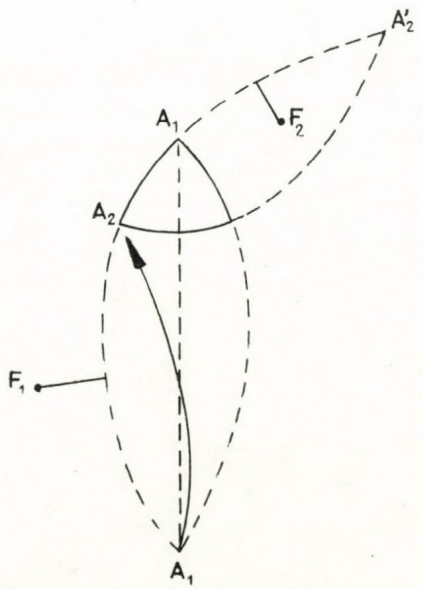
Lemma 1/b. *Esetünkben tetszőleges indirekt transzformáció $I \cdot F$ alakban fogható fel, azaz a centrális inverzió (I), és egy Lemma 1/a-beli forgás (F) kombinációjaként* ([4]).

Az $I \cdot F_2$ transzformáció (azaz inverzió, és félfordulat egymásutánja) síkra, illetve félkörre való tükrözésnek fogható fel. Az oktaéder és ikozaéder szimmetriacsoportjainak indirekt transzformációit is tartalmazó részcsoportjai közül csak a tetraéder szimmetriacsoportja (TS) nem tartalmaz centrális inverziót.

A TS-ben indirekt transzformáció csak tükrözés és $I \cdot F_4$ lehet; és tetszőleges 4-es forgásnak (F_4) megfelelő forgáscentrum (F_4') centrális inverziós pontjában is van 4-es forgáscentrum (F_4''). De az F_4''-beli 4-es forgás csakis inverzióval kombinálva fordulhat elő TS-ben. Ez a kocka szimmetria operációit vizsgálva nyilvánvaló.

Lemma 2/a. *Egy G uniform gömbi poliéder (amely a g gömbön van) tetszőleges szimmetriaoperációjában (ha az nem az identitás, vagy az inverzió) előfordul — legalábbis résztranszformációként — forgatás.* Ugyanis bármely indirekt operáció $I \cdot F$ alakban írható. Ezeknek az F forgatásoknak a centrumai csak a g gömbön levő valamely szabályos gömbi poliéder csúcsaiban, lapközéppontjaiban, vagy oldalfelező pontjaiban lehetnek.

Egy példa FI (IF) alakú transzformációra a 2. ábrán. A_1-et A_2-be vigye IF operáció. Ekkor A_1-et a gömb középpontjára kell tükrözni (A_1'), (A_1' az A_1 centrális inverziós pontja), majd A_1'-et A_2-be F_1 körüli forgatás viszi. Mostantól kezdve — mivel mindig gömbfelületen dolgozunk — az ábrákat a gömbön kell elképzelnünk.



2. ábra

Az A_2-t A_1-be vivő IF transzformáció hasonlóan történik.

Lemma 2/b. *Ha létezik az A_1-et A_2-be vivő indirekt (IF) transzformáció (tetszőleges poliédercsoport vagy részcsoport esetén), akkor létezik az A_2-őt A_1-be vivő (IF') indirekt transzformáció is. Ha IF átviszi A_1-et A_2-be, akkor FI is átviszi (megfelelően végrehajtva) A_1-et A_2-be.*

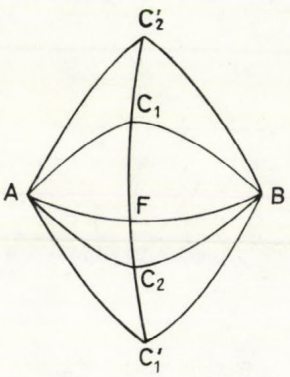
Ismeretes ([5]) a következő tétel (a forgások szorzástétele).

Tétel 2. *Legyenek* $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ *szögei egy ABC gömbháromszögnek (aszerint, hogy a csúcsokat pozitív vagy negatív körüljárás szerint vesszük). Ekkor az A, B, C körüli* α, β, γ *szögű forgatások szorzata az identitás.*

Definíció. Ha egy P_s szabályos sokszögnek n oldala van, és az oldalakon végigfutó pont d-szer járja körül P_s centrumát, akkor egy oldalhoz tartozó középponti szög $2\pi\, d/n$; n, és d olyan relatív prímek, hogy $2 \cdot d < n$. Az ilyen sokszöget $\{n/d\}$-vel jelöljük.

Lemma 3. *Tekintsük a gömbön az A pontot B-be vivő* $\frac{2k\pi}{n}$ *szögű forgatást. Ilyen forgatás (adott k, n-re) négy pontban:* C_1, C_1', C_2, C_2' *lehet, (ha a forgatás nem a félfordulat), és másutt nem lehet. Ha az AB főkörív (a rövidebb) felezőpontja F, akkor* $\overset{\frown}{C_1F} = \overset{\frown}{C_2F}$, $\pi - \overset{\frown}{C_1'F} = \overset{\frown}{C_1F}$, $\pi - \overset{\frown}{C_2'F} = \overset{\frown}{C_2F}$, $AC_1B\sphericalangle = \frac{2\pi k}{n}$.

Ha a forgatás a félfordulat, akkor két ilyen pont van $(C_1, C_1', \overset{\frown}{C_1C_1'} = \pi$, (3. ábra)).



3. ábra

Lemma 4/a. *Ha a G gömbi poliéder A csúcsát A' csúcsába (S-beli) indirekt transzformáció viszi, akkor az* $\overset{\frown}{AA'}$ *(rövidebb) főkörív hosszára a következő áll:*

Inverzió esetén: $\overset{\frown}{AA'} = \pi$

IF_3 (ahol F_3 a $\frac{2\pi}{3}$ *szögű forgatást jelöli) esetén:* $\overset{\frown}{AA'} \geqq \frac{\pi}{3}$,

IF_4 (ahol F_4 a $\frac{2\pi}{4}$ *szögű forgatást jelöli) esetén:* $\overset{\frown}{AA'} \geqq \frac{\pi}{2}$,

IF_5 (ahol F_5 a $\frac{2\pi}{5}$ *szögű forgatást jelöli) esetén* $\overset{\frown}{AA'} \geqq \frac{3\pi}{5}$,

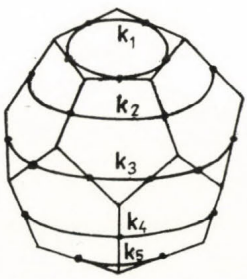
$IF_{\frac{5}{2}}$ (ahol $F_{\frac{5}{2}}$ a $\frac{4\pi}{5}$ *szögű forgatást jelöli) esetén* $\overset{\frown}{AA'} \geqq \frac{\pi}{5}$.

Lemma 4/b. *Két egymásutáni tükrözést, amelyek* α*-szöget bezáró főkörívekre történnek, a főkörívek metszéspontja körül* 2α*-szögű forgatással lehet helyettesíteni.*

Lemma 5. *Egy szabályos poliédernek nem lehet* 5*-ös és* 4*-es forgáscentruma, egyszerre (az S-beli forgáscentrumok között).* Definíciónk szerint az *S*-beli forgatások, illetve szimmetria operációk a poliédert önmagába viszik.

Lemma 6. *Egy szabályos (gömbi) poliéder (diédert, prizmát, antiprizmát most nem tekintünk) esetén a* π *szögű (S-beli) forgáscentrumból maximálisan* 10 *lehet egy gömbi körön,* $\frac{2\pi}{3}$ *szögű forgáscentrumból legfeljebb* 8, $\frac{2\pi}{5}$ *illetve* $\frac{4\pi}{5}$ *szögűből legfeljebb* 6, $\frac{2\pi}{4}$ *szögűből pedig maximum* 4 *lehet egy gömbfelületen levő körön.*

Bizonyítás: A π-szögű forgáscentrumok az élek felezőpontjaiban (és oktaéder esetén a csúcsokban is) helyezkednek el, és máshol nem. Az összes élfelezőpont dodekaéder esetén könnyen ráhelyezhető 5 körre (4. ábra). Ezek bármelyikén 5,



4. ábra

vagy 10 felezőpont van. Tetszőleges további körnek legfeljebb 5×2 metszéspontja lehet ezzel az 5 körrel. A többi szabályos poliéder, és a további forgáscentrumok esetén hasonló módszerrel adódik az állítás.

Lemma 7/a. *Tekintve egy szabályos poliéder tetszőleges* 5*-ös* F *(S-beli) forgáscentrumát (ha van ilyen), az összes többi* 5*-ös, és az összes* 3*-as forgáscentrum az* F*-en átmenő pontosan* 5 *főköríven van (melyek metszési szöge* $\frac{2\pi}{10}$*, illetve ennek egész számú többszöröse).*

Bizonyítás: Vizsgálva az ikozaédert, amelynek csúcsaiban 5-ös, lapközéppontjaiban 3-as forgáscentrumok vannak (és ilyenek másutt nincsenek) könnyen adódik az állítás.

Tétel 8/a. *Tekintsük egy uniform* G *gömbi poliéder (a továbbiakban* G*-n mindig ezt értjük) egy* 5*-ös forgáscentrumát (ha ilyen van), valamint* G *egy* A *csúcsát.* ($F\not\equiv A$, *és* $FA\neq\pi$). *Ekkor az* F *középpontú* $\widehat{FA}$ *sugarú gömbi körön legfeljebb* 15 *csúcsa lehet* G*-nek, ha* $FA\neq\frac{\pi}{2}$, *és* 20 *csúcsa, ha* $FA=\frac{\pi}{2}$.

Bizonyítás:

a) Legyen $\widehat{FA}\neq\frac{\pi}{2}$, és $\widehat{A_1T_1}=\widehat{A_5T_1}$ az 5/b ábrán. Tegyük fel, hogy az $\widehat{A_1A_5}$ ív (5/a ábra) belsejében legalább három csúcs (B_1, B_2, B_3) van. $A\equiv A_1$, és az

A_1FA_5 szög$=\frac{2\pi}{5}$. Tekintsük az A_1, A_5, B_1, B_2, B_3 csúcsokat egymásba vivő transzformációkat. (Az ábrákon $F_5 \equiv F$.)

1. Tegyük fel, hogy az izometriák között van tükrözés (t_1), mely metszi az $\widehat{A_1A_5}$ ív belsejét. Ekkor kell lenni egy másik, az A_1A_5 ívet metsző tükrözésnek (t_2). (Több tükrözés itt nyilván nem lehet.) t_1, illetve t_2 szöge $\frac{2\pi}{10}$. t_1 az A_1-et, illetve t_2 az A_5-öt a B_1-be viszi. Feltehető, hogy $A_1B_1 \leqq \frac{2\pi}{10}$. (A t_2 és A_1A_5 egyik metszéspontja T.)

   I. 5/a ábra: egy (következő) B_2 pontot, amely az A_1B_1 ív belsejében van, t_1 szintén az íven levő B_3 pontba viszi. Ekkor A_1-et B_2-be, A_1-et B_3-ba, B_2-t B_1-be csak forgatás (centrumok: F_1, F_2, F_3) viheti, mert ezen íveknek megfelelő főkörívek rövidebbek $\frac{2\pi}{10}$-nél. Ha 2-es forgatás is van, akkor tekintsük az F-nek erre való tükörképét (F_t) (ami nem azonos F-nek a G középpontjára vonatkozó tükörképével) azért, hogy csak 5-ös, illetve 3-as forgáscentrumok szerepeljenek a Lemma 7/a felhasználásához.

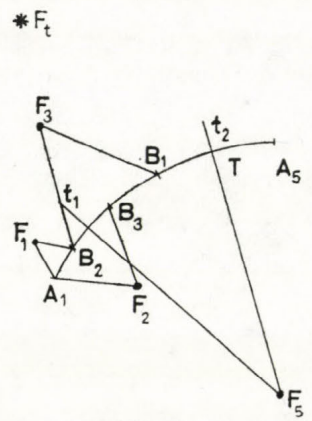
   II. 5/b ábra: ha B_2 a $\widehat{T_1T}$ ív belsejében (vagy T_1-ben) van, akkor B_1-et B_2-be, A_5-öt B_2-be, A_5-öt B_3-ba csak (F_1, F_2, F_3) forgatás viheti, hiszen még ha B_2 a T_1 ívfelező pontban van, akkor is $\widehat{A_5B_2} < \frac{2\pi}{10}$, mert $\widehat{FA} \neq \frac{\pi}{2}$.

   III. 5/c ábra: ha B_2 a $\widehat{B_1T_1}$ belsejében van, akkor B_1-et B_2-be, A_1-et B_2-be, A_5-öt B_3-ba csak forgatás viheti (F_1, F_2, F_3). Ha B_2 a $\widehat{TA_5}$ íven van — akár annak csúcsaiban is —, akkor cseréljük fel B_2-t B_3-mal, és már ismert esethez jutunk.

Ezzel az összes lehetséges tükrözéses esetet megvizsgáltuk.

2. Ha a transzformációk között tükrözés nincs, akkor a fentiekhez hasonlóan könnyen találhatunk (legalább) három forgatási izometriát, (F_1, F_2, F_3).

b) Legyen $\widehat{FA} = \frac{\pi}{2}$. Ekkor a fenti eljárással mindenképpen találhatunk legalább két

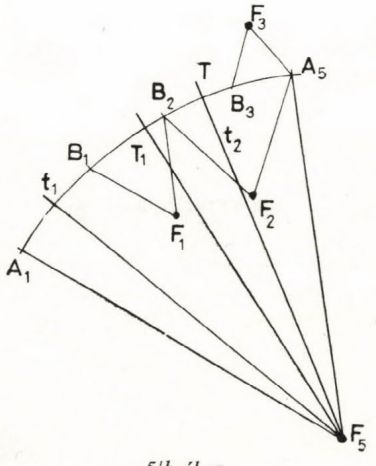


5/a. ábra

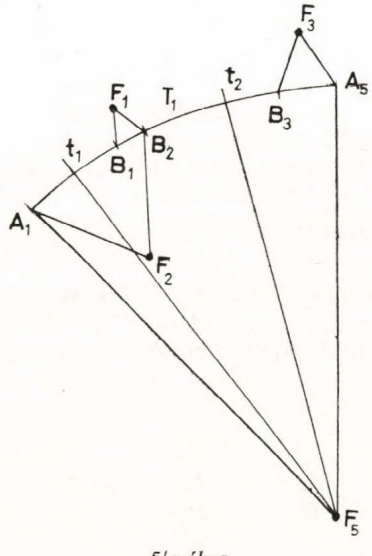
forgatást (csak 2-t akkor, ha B_2 az $\widehat{A_1A_5}$ felezőpontjában van, és tükrözés is van. Ilyenkor: $\widehat{A_1B_2}=\frac{2\pi}{10}$). Egy további B_4 csúcs még (legalább) három forgatást adna, az a) pontot alkalmazva. Ezen összesen (legalább) öt forgatás közül kettő (maximum) lehet a félfordulat.

(Lemma 6/a. *Minden esetben* [a), b)] *az* F_1, F_2, F_3 *forgáscentrumok különbözőek, és az* $A_1FA_5F_t$ *gömbkétszög belsejében vannak.*)

Ily módon legalább 5×3 különböző 5-ös, illetve 3-as (4-es forgáscentrum a Lemma 5 miatt nem lehet) forgáscentrumot kapnánk (F-et, F_t-t nem számolva), és ezek minimálisan $\left[\frac{5\cdot3}{2}\right]+1$ F-en átmenő főköríven vannak. A Lemma 7/a szerint azonban ellentmondásra jutnánk.



5/b ábra



5/c ábra

Lemma 7/b. *Tekintve egy szabályos poliéder tetszőleges* 4*-es* F *(S-beli) forgáscentrumát (ha ilyen van) az összes többi* 4*-es, és az összes* 3*-as forgáscentrum az* F*-en átmenő pontosan* 4 *főköríven van.*

Bizonyítás: Az előzőekhez hasonlóan most az oktaéder vizsgálatával adódik a lemma.

Tétel 8/b. *Tekintsük* G *egy* 4*-es* F *forgáscentrumát (S-beli), valamint* G *egy* A *csúcsát* ($F\neq A$, *és* $\widehat{FA}\neq\pi$). *Ekkor az* F *középpontú* $\widehat{FA}$ *sugarú körön legfeljebb* 16 *csúcs lehet.*

Bizonyítás: A tétel 8/a-hoz hasonlóan.

Lemma 7/c. *Ha egy szabályos poliédernek csak* 3*-as, és* 2*-es szimmetriacentruma van (azaz tetraéderről van szó), akkor véve egy tetszőleges* 3*-as* F *forgáscentrumát, az összes többi* 3*-as forgáscentrum az* F*-en átmenő pontosan* 3 *főköríven van.*

Tétel 8/c. *Ha G-nek csak 3-as, és 2-es forgáscentruma van, tekintsük egy 3-as F szimmetriacentrumát, valamint G egy A csúcsát* ($F \neq A$, *és* $\widehat{FA} \neq \pi$), *ekkor az F középpontú* $\widehat{FA}$ *sugarú körön legfeljebb* 12 *csúcs lehet.*

Tétel 9. *G-nek maximálisan* 240 *csúcsa lehet.*

Bizonyítás: Ha G-nek van 5-ös F szimmetriacentruma, tekintsük ennek (S-beli) F transzformáltjait. Vegyük G-nek egy tetszőleges A csúcsát ($F \neq A$ és $\widehat{FA} \neq \pi$) és az $\widehat{FA}$ sugarú F középpontú K gömbi kört. Minden F_i-nek (ha $\widehat{FA} \neq \frac{\pi}{2}$) egy-egyértelműen megfelel egy F_i középpontú $\widehat{FA}$ sugarú K_i kör. Ha $\widehat{FA} = \frac{\pi}{2}$, akkor 2 F_i-nek felel meg egy K_i kör. K bármely (S-beli) transzformációja így csak valamely $K_i^!$ körhöz vezethet. Ha a tetszőleges A csúcsot tetszőleges A_i csúcsba visszük, eközben K egy (fenti) K_i körbe megy át. G bármely csúcsa tehát csak az említett körökön lehet. Ezen körök száma nem több 12-nél, így ez esetben 12×20 a legnagyobb csúcsszám, figyelembe véve a 8/a tételt. Ha nincs 5-ös, de van 4-es (S-beli) forgáscentruma G_i-nek, akkor felhasználva a tétel 8/b-t kapjuk, hogy 6×16, illetve ha csak 3-as és 2-es szimmetriacentruma van, akkor a tétel 8/c-t, hogy 4×12 a maximális csúcsszám.

Tétel 10. *G tetszőleges* $\left\{\frac{n}{d}\right\} L$ *lapjára* $n \leqq 24$.

Bizonyítás: Ha G-nek van 5-ös (S-beli) forgáscentruma, akkor az összes csúcs a tétel 9 szerint rajta van (legfeljebb) 12 körön (melyeken a tétel 8/a miatt 20-nál több csúcs nem lehet). Mivel L csúcsai egy K_L körön vannak, K_L-nek legfeljebb $2 \times 12 = 24$ metszéspontja lehet ezzel a 12 körrel. Ha nincs 5-ös, de van 4-es szimmetriacentruma G_i-nek, akkor hasonló módon $n \leqq 12$. Ha csak 3-as és 2-es forgás van, akkor pedig $n \leqq 8$.

Megjegyzés: A 8. és 10. tételek helyett igen egyszerűen, de az előzőnél jóval magasabb felső korlátot kapunk a következő tételben.

Tétel 10/a. *G tetszőleges* $\left\{\frac{n}{d}\right\} L$ *lapjára* $n \leqq 42$.

Bizonyítás: Minthogy összesen 20 db 3-as, 12 db 5-ös, 8 db 4-es forgáscentrum lehetséges, egy gömbi körön maximálisan 10 db 2-es forgáscentrum lehet, könnyen adódik az $n < 20 + 12 + 10$ korlát.

Tétel 11. *Ha az egy csúcsból kiinduló élek maximális száma* k ($k \geqq 3$) *és G (G egységsugarú gömbön van) csúcsszáma* C_g, *akkor*

$$k + 1 + (k-3)(k-2)/2 \leqq C_g,$$

ha a gömbi poliéder r élhosszára $r \neq \frac{\pi}{2}$, *illetve*

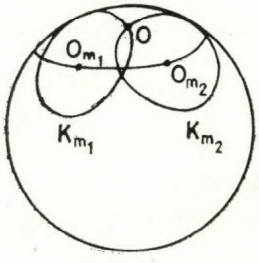
$$(2l-4)l + 2l + 2 \leqq C_g, \quad \text{ha} \quad k = 2l \quad \text{és} \quad r = \frac{\pi}{2}$$

és

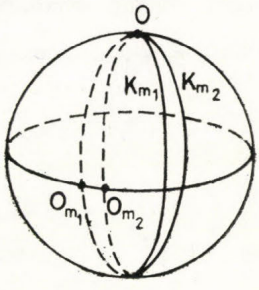
$$(2l-4)(l+1)+(2l+1)+2 \leqq C_g, \quad ha \quad k=2l+1 \quad és \quad r=\frac{\pi}{2}.$$

Bizonyítás: a) Legyen $r \neq \frac{\pi}{2}$. Szemeljünk ki egy O csúcsot, az ebből kiinduló élek másik végpontjai egy r sugarú K_0 körön vannak. $(O_{m_1}, O_{m_2}, \ldots, O_{m_k})$. Az O_{m_i}-ből kiinduló élek másik végpontjai szintén egy r sugarú K_{m_i} körön vannak (mivel $r \neq \frac{\pi}{2}$, a K_{m_i}-k mind különbözők). A K_{m_1} körön levő csúcsokkal az eddigi $k+1$ csúcsszámot (a K_0-on levők és az O) legalább $(k-3)$-mal növeljük, ugyanis K_0-nak és K_{m_i}-nek két közös pontja van, és O is rajta van K_{m_1}-en. Az O_{m_2} középpontú r sugarú K_{m_2} körrel legalább $(k-4)$-gyel növeljük a csúcsszámot. Egy O_{m_1} középpontú r sugarú K_{m_1} kör hozzávétele minimálisan $k-i-2$ csúccsal növeli a csúcsszámot. Ugyanis K_{m_i}-nek az előző i kör közül a K_{m_1}-gyel, ..., $K_{m_{i-1}}$-gyel — az O-t nem számítva — $i-1$ különböző metszéspontja lehet. K_0-at (2 metszéspont) és O-t is számítva kapjuk a $k-(i+2)$-t. (6/a ábra)

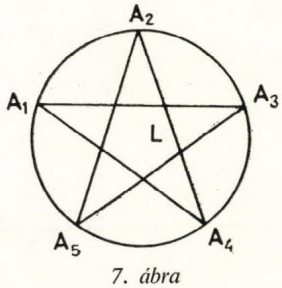
A fentiek igazak, akármilyen sorrendben választottuk is ki a K_{m_i}-ket. Teljes indukciót alkalmazva kapjuk az első állítást. b) Ha $r=\frac{\pi}{2}$, akkor a K_{m_i} körök nem feltétlenül különbözők, és két O_i-nek egy kör is megfelelhet. Hasonló meggondolással (6/b ábra), mint előbb, kapjuk a másik 2 egyenlőtlenséget. A fentiek szerint, ha van 5-ös szimmetriacentruma G-nek, akkor $k \leqq 23$, ha nincs 5-ös, de van 4-es, akkor $k \leqq 15$, ha csak 3-as és 2-es forgás van, akkor $k \leqq 11$.



6/a ábra



6/b ábra



7. ábra

Vegyük G egy $\left\{\frac{n}{d}\right\}(L)$ lapjának körülírt körét. A körön haladva tekintsük az egymás után következő $A_1, A_2, \ldots, A_n$ csúcsokat (7. ábra) és a körön szomszédos

(A_1, A_{i+1}) csúcsokat egymásba vivő szimmetriaoperációkat (S_L). (Ha $d>1$ lenne, akkor is a $d=1$ esetet vesszük.)

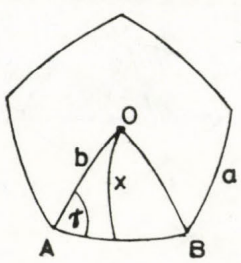
Lemma 8. *Mivel a keresett uniform poliédernek van legalább 2 különböző lapja, ezért (figyelembe véve, hogy az* IF_5*-ös mozgatás esetén 2 csúcs távolsága* $\geqq \frac{3\pi}{5}$*)* IF_5*-ös transzformáció nem szerepelhet az* S_L*-ek között, kivéve ha csak* $\{3\}$ *van.* Ugyanis most $d=1$, és csak $n=3$ lehet egy $\left\{\frac{n}{d}\right\}$ lapra. Az IF_4 eset csak olyan két csúcsnál fordulhat elő, melyek távolsága $\frac{\pi}{2}$, és ekkor $n\leqq 4$. Hasonló módon kapjuk, hogy az IF_3 eset csak $n\leqq 6$-ra ($n=6$ csak akkor, ha a hatszög csúcsai főkörön vannak), és az $IF_{5/2}$ eset csak $n\leqq 10$-re fordulhat elő. ($n=10$ csak akkor, ha $\left\{\frac{10}{d}\right\}$ csúcsai főkörön vannak.) Az inverzió nyilvánvalóan nem lehet az S_L transzformációk között. Ha $n>10$, akkor tehát a tükrözést kivéve indirekt mozgatás nem szerepelhet közöttük. A továbbiakban — tudva, hogy a lemma 2 szerint egy lap A_i csúcsát A_j-be, illetve A_k csúcsát A_l-be vivő két S_L szimmetriaoperációban szereplő két forgáscentrum távolsága csak bizonyos értékeket vehet fel — egyenleteket állítunk fel, amelyben ismeretlen az L lap oldalhossza.

Lemma 9. *Ha egy szabályos gömbi sokszög nem főkörön van, és* $n\geqq 6$*, akkor létezik legalább két azonos típusú mozgatás az* S_L*-ek között, azaz vagy két* $F_{n/d}$*, vagy két* $IF_{5/2}$*-es transzformáció.*

Bizonyítás: A különböző S_L operációk egy poliéderlapnál $F_2, F_3, F_5, F_{5/2}, IF_{5/2}$ $\left(\text{ha az élhossz} < \frac{\pi}{3}\right)$, vagy $F_2, F_3, F_4, IF_4, IF_3$.

2. §. Az egyenletek felállítása és az összes lehetséges poliéder-élhossz kiszámítása

A továbbiakban felhasználjuk a következő összefüggéseket: legyen egy egységsugarú gömbön egy $\left\{\frac{n}{d}\right\}$ szabályos gömbi sokszög (8. ábra). Ekkor egyszerű gömbháromszögtani számításokkal (gömbi sinus- és cosinus-tétel felhasználásával):



8. ábra

$b=\widehat{OA}$ (főkörív), $x=\widehat{OF}$ (főkörív), $OAB\sphericalangle=\gamma$ (az OAB gömbháromszög szöge). $AOB\sphericalangle=\frac{2\pi d}{n}$, $AB=a$ (egyenes szakasz, gömbi húr, az ehhez tartozó a' ívre:

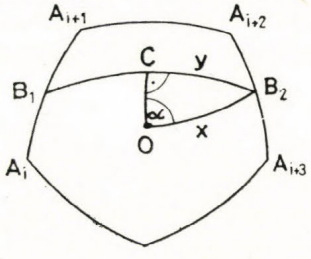
$\sin\frac{a'}{2}=\frac{a}{2}\Big)$

(1) $$x=\arccos\sqrt{\frac{1-\left(\frac{a}{2\sin\frac{d\pi}{n}}\right)}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\leqq b,$$

(2) $$O<b=\arcsin\frac{a}{2\sin\frac{d\pi}{n}}\leqq\frac{\pi}{2},$$

(3) $$O<\gamma=\arcsin\frac{\sin x}{\sin b}=\arcsin\frac{\cos\frac{\pi d}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\leqq\frac{\pi}{2}.$$

A következőkben általában az [1]-ben is alkalmazott jelöléseket alkalmazzuk a szabályos lapokra és (félig szabályos) poliéderekre. Pl. $\{3\}\equiv$szabályos háromszöglap.



9. ábra

Tegyük fel, hogy van két félfordulat az S_L-ek között (9. ábra). Például A_i-t A_{i+1}-be és A_{i+2}-t A_{i+3}-ba félfordulat viszi. Az ezeknek megfelelő forgáscentrumok nyilván az $\widehat{A_iA_{i+1}}$ rövidebb vagy hosszabb főkörív, illetve az $\widehat{A_{i+2}A_{i+3}}$ rövidebb vagy hosszabb főkörív felezőpontjában lehet (B_1, B_2). Vegyük az L gömbi sokszöget rövidebb főkörívekkel. A gömbi sinus-tétellel:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 90^\circ}=\frac{\sin y}{\sin x}$$

továbbá (1)-et felhasználva:

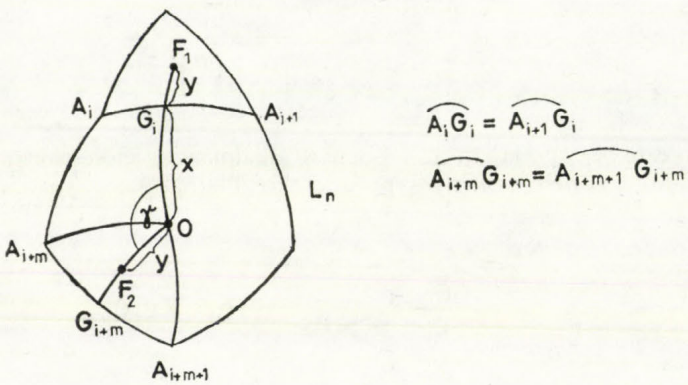
(4) $$\frac{\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\sin\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}=\pm\sin\frac{\pi l}{k}\quad 2l<k\leqq 10,\quad \alpha=\frac{m\pi}{n},\quad 2m\leqq n.$$

Ugyanis $\widehat{B_1B_2}$ (a rövidebb ív)$=\widehat{B_1'B_2'}=\widehat{B_1B_2'}-\pi=\widehat{B_2B_1'}-\pi$, ahol B_1', illetve B_2' a B_1 illetve B_2 inverziós pontja. Így

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\sin^2\frac{\pi l}{n}}{\sin^2\frac{\pi l}{k}+\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{m\pi}{n}\right)^2}.$$

Persze figyelembe kell venni, hogy

$$\left|\frac{\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right|\leqq 1.$$



10. ábra

Tegyük fel, hogy (10. ábra) az A_i-t A_{i+1}-be, illetve A_{i+m}-t A_{i+m+1}-be vivő k-as ($k\geqq 3$) forgáscentrumok $\left(F_1, F_2 \text{ és } \widehat{F_1G_i}=\widehat{G_{i+m}F_2}\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ egy O körüli forgatással nem vihetők át egymásba (antiszimmetrikus eset). Ekkor a következő egyenletnek kell fennállni, gömbi cosinus tétellel, az OF_1F_2 gömbháromszögre alkalmazva. (F_1, F_2-t mindig meg tudjuk határozni így: tudjuk úgy kiválasztani O-t, és az íveket, hogy OF_1F_2 gömbháromszög legyen. Ha $\widehat{OF_1}>\pi$, illetve $\widehat{OF_2}>\pi$, akkor az $\widehat{OF_1}$, illetve $\widehat{OF_2}$ főkörív helyett a π-nél rövidebb $\widehat{OF_1}$, ill. $\widehat{OF_2}$ ívet vegyük.)

$$\cos(x+y)\cos(x-y)+\sin(x+y)\sin(x-y)\cos\frac{l2\pi}{n}=\cos c_j, \tag{5}$$

ahol x és y az (1) képletből adódik. $\left(\gamma=\frac{l2\pi}{n},\ c=\cos c_j,\ (j=1,2,\ldots,8),\ c_j=\widehat{F_1F_2},\right.$ a lehetséges $\cos c_j$ értékeket — a szabályos poliéderek csúcstávolságai alapján — később ismertetjük.)

Ha F_1 vagy F_2 helyett annak pólusa szerepel forgáscentrumként, akkor $\pi-(x+y)$, illetve $\pi-(x-y)$ szerepel $x+y$, ill. $x-y$ helyett. Ezenkívül, ha csak

az egyiknek szerepel a pólusa, akkor $\cos\left(\pi-\frac{l2\pi}{n}\right)$ lesz $\cos\frac{l2\pi}{n}$ helyett. Tehát pl.:

$$\cos(\pi-(x+y))\cos(x-y)+\sin(\pi-(x+y))\sin(x-y)\cos\left(\pi-\frac{l2\pi}{n}\right)=\cos c_j,$$

azaz

$$\cos(x+y)\cos(x-y)+\sin(x+y)\sin(x-y)\cos\frac{l2\pi}{n}=-\cos c_j.$$

Mivel a k-as forgáscentrumok távolsága koszinuszai között azok negatívja is előfordul, így tulajdonképpen új egyenletet nem kaptunk.

Tovább alakítva (5)-öt:

$$\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y+(\sin^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\sin^2 y)\cos\gamma=c$$

$$\frac{1-\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi d_1}{n_1}}\right)^2}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi d_2}{n_2}}\right)^2}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+$$

$$+\left[\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi d_2}{n_2}}\right)^2}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{1-\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi d_1}{n_1}}\right)^2}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right]\cos\gamma=c.$$

Legyen

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=u,\quad\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}=b_1,\quad\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}=b_2,\quad\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}=\beta_1,\quad\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}=\beta_2.$$

Ekkor:

$$[b_1b_2-\beta_1\beta_2-(\beta_1b_2-\beta_2b_2)\cos\gamma-c]u^2+[(\beta_1-\beta_2)\cos\gamma-b_1-b_2+2c]u+1-c=0.$$

Ennek az egyenletnek az $u=1$ mindig gyöke, amely számunkra érdektelen. Ezért a másik gyök:

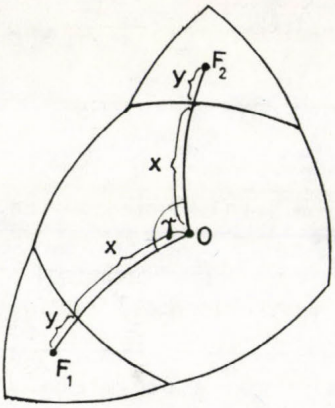
$$u=\frac{1-c}{b_1b_2-\beta_1\beta_2-(\beta_1b_2-\beta_2b_1)\cos\gamma-c}.$$

Tegyük fel most, hogy az A_i-t A_{i+1}-be, illetve az A_{i+m}-t A_{i+m+1}-be vivő forgáscentrumok egy O-körüli forgatással átvihetők egymásba.

Ekkor:

$$\cos(x+Iy)\cos(x+Iy)+\sin(x+Iy)\sin(x+Iy)\cos\frac{2\pi l}{n}=\cos c_j, \tag{6}$$

ahol $I=\pm1$.



11. ábra

Ugyanez állna ($\cos c_j$ helyett $-\cos c_j$), ha F_1, illetve F_2 helyett azok pólusát (a gömb középpontjára vett tükörképét) vettük volna forgáscentrumként. Továbbá:

$$(\cos x \cos y - I \sin x \sin y)^2 \left(1-\cos\frac{l\cdot 2\pi}{n}\right)+\cos\frac{l\cdot 2\pi}{n} = \cos c_j \equiv c_j$$

$$\left(\frac{1}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\left[\sqrt{\left(1-\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi d_1}{n_1}}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi d_2}{n_2}}\right)^2\right)}-I\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{\cos\frac{\pi d_1}{n_1}\cos\frac{\pi d_2}{n_2}}{\sin\frac{\pi d_1}{n_1}\sin\frac{\pi d_2}{n_2}}\right]\right)^2 \cdot$$

$$\cdot\left(1-\cos\frac{l\,2\pi}{n}\right)+\cos\frac{l\,2\pi}{n} = 1-\frac{c_j^2}{2}$$

$$\left(\left(1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\sqrt{\frac{1-\frac{c_j^2}{2}-\cos\frac{2l\pi}{n}}{1-\cos\frac{2l\pi}{n}}}+I\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\operatorname{ctg}\frac{\pi d_1}{n_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\right)^2 =$$

$$= \left(1-\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi d_1}{n_1}}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi d_2}{n_2}}\right)^2\right)$$

$$\left(-2Ig\operatorname{ctg}\frac{\pi d_1}{n_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}+g^2\right)u^2+$$

$$+\left(-2Ig\operatorname{ctg}\frac{\pi d_1}{n_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}-2g^2\right)u+g^2-1=0,$$

ahol

$$g = \sqrt{\frac{1-\frac{c_j^2}{2}-\cos\frac{2l\pi}{n}}{1-\cos\frac{2l\pi}{n}}}.$$

Most is könnyen látható, hogy $u=1$ mindig gyöke az egyenletnek.

A másik gyök:

$$u = \frac{g^2-1}{\left(g-I\operatorname{ctg}\frac{\pi d_1}{n_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\right)^2-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}}.$$

Lemma 10. *Ha* $n>6$, *akkor:*

a) *vagy létezik az* S_L*-ek között két* F_x, *és két* F_y $(x\neq y)$ *(vagy két* $IF_{\frac{5}{2}}$, *ha* $n\leqq 10$*),*

b) *vagy létezik* $3F_x$, *ill.* $IF_{\frac{5}{2}}$ *transzformáció.*

Így, ha $n>10$, akkor a (4), (5), (6) egyenletek segítségével két oldalhosszat kapunk az a), ill. b) esetben. Ha ezek különböznek (a kerekítési hibákat is figyelembe véve), akkor el kell vetni a lehetőséget.

A paramétereknek a következő értékei lehetnek:

$$10 < n_1 \leqq 24, \quad d_1 = 1; \quad 1 \leqq l \leqq 5$$

d_2	1	1	1	2	1
n_2	3	4	5	5	$n_2 = 2$
$\cos c_j, j$:	3–6	2	7–8	7–8	$m = 1, \ldots, 5$
				·	$k = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
				·	$l = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$
				·	2 2 3 2 3
				·	3 4

$2\times5\times9$ a nem kettes, és $2\times5\times15$ a kettes forgatások esetén a lehetséges oldalhosszak száma egy bizonyos n-re. Ezek között azonosak nincsenek, így n nem lehet 10-nél nagyobb. Hasonló számítást kell végrehajtanunk $3\leqq n\leqq 10$-re, és

$n=3$-ra, ahol $l=1$,

$4\leqq n\leqq 5$ esetén: $1\leqq l\leqq 2$,

$6\leqq n\leqq 7$ esetén: $1\leqq l\leqq 3$,

$8\leqq n\leqq 9$ esetén: $1\leqq l\leqq 4$,

$n=10$ esetén: $1\leqq l\leqq 5$,

és figyelembe véve azt is, hogy ha $\frac{n}{2}=2$, akkor $\cos c_j = -1$ is lehet. Ugyanis:

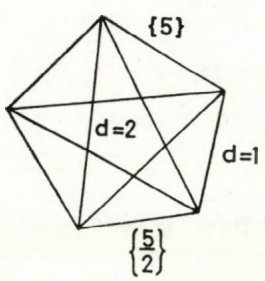
Lemma 11. *Egy ABC háromszög* $\widehat{BC}$ ($\widehat{AC}$, $\widehat{AB}$) *oldala akkor és csak akkor lehet* π *hosszúságú, ha* $BAC\sphericalangle = \pi$ ($ABC\sphericalangle = \pi$, $ACB\sphericalangle = \pi$).

$3 \leqq n \leqq 10$ esetén a (4), (5), (6) egyenletekből kapott oldalhosszakat nagyság szerinti sorrendbe állítjuk.

Számításba kell vennünk azokat az eseteket is a (6) egyenletben, (amint ez később kiderül) amikor (elég $l=2$-re):

n_1	d_1	n_2	d_2
10	3	10	3
10	1	10	1
8	3	8	3
8	1	8	1
8	3	8	1
6	1	6	1
8	1	6	1
8	3	6	1
10	1	6	1
10	3	6	1
10	3	5	2
10	3	5	1
5	2	5	2
8	3	3	1
10	3	3	1
6	1	4	1
10	3	4	1
10	1	4	1
8	3	4	1
8	1	4	1
5	2	3	1

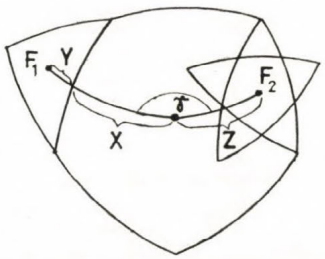
Figyelembe vesszük a lehetséges $\cos c$ távolságokat, és amennyiben $d=1$-re (a lemma 10-ben) lehetséges volt egy távolság lapoldalnak, akkor $d>1$-re is a $d=1$-nek megfelelő oldalhosszat figyelembe kell venni (ha ilyen lap lehetséges). Pl.:



12. ábra

A (4), (5), (6) egyenletekből — az összes lehetséges paraméter értékeket véve — 986 lehetséges érték adódik $\left(\frac{a}{2}\right)^2$-re (ami 1-nél kisebb, 0-nál nagyobb), közöttük természetesen több egyforma. A számokat nagyság szerint növekvő sorrendbe állítjuk, melléjük n_1, d_1, n_2, d_2, l és $\cos c$ értékét írjuk, valamint $n_2=2$ esetén a k és l értékeket. Azt is kiírjuk, hogy a (4), (5) vagy a (6) egyenletről van-e szó.

Előfordulhat olyan eset is, amikor F_1-ben és F_2-ben különböző fajta forgatások vannak (13. ábra).



13. ábra

Ekkor a keresett gömbi poliéder egy oldalának a meghatározására a következő egyenletnek kell fennállni.

(7) $\cos(X+I*Y)\cos(X+J*Z)+\sin(X+I*Y)\sin(X+J*Z)\cos\gamma=\cos c,$

ahol $I=\pm 1, \quad J=\pm 1$

$$\cos X=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}, \qquad \sin X=\frac{\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_1}{n_1}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$

$$\cos Y=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}, \qquad \sin Y=\frac{\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$

$$\cos Z=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}, \qquad \sin Z=\frac{\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Elég figyelembe venni a pozitív négyzetgyököket, később a négyzetreemeléseknél úgyis eltűnnek a négyzetgyökök. Behelyettesítések után, $\left(\text{és } x \equiv \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$:

$$I\frac{\sqrt{x}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}}{\sqrt{1-x}}\sqrt{\frac{1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}}{1-x}}\frac{\sqrt{x}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_1}{n_1}}{\sqrt{1-x}}\sqrt{\frac{1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}}{1-x}}(\cos\gamma-1)+$$

$$+J\sqrt{\frac{1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}}{1-x}}\frac{\sqrt{x}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}}{\sqrt{1-x}}\sqrt{\frac{1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}}{1-x}}\frac{\sqrt{x}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_1}{n_1}}{\sqrt{1-x}}(\cos\gamma-1)=$$

$$=\cos c-I\cdot J\cdot\frac{\sqrt{x}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}}{\sqrt{1-x}}\frac{\sqrt{x}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{x\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}}{1-x}+\frac{1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}}{1-x}\cos\gamma\right)-$$

$$-\sqrt{\frac{1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}}{1-x}}\sqrt{\frac{1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}}{1-x}}\left(\frac{1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}}{1-x}+\frac{x\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}}{1-x}\cos\gamma\right).$$

Végigszorozva $(1-x)^2$-tel, majd mindkét oldalt négyzetreemelve:

$$I^2x^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}\right)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}\right)(\cos\gamma-1)^2+$$

$$+J^2x^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\frac{\pi d_1}{n_1}}\right)(\cos\gamma-1)^2+$$

$$+2IJx^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}(\cos\gamma-1)^2\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}\right)\times$$

$$\times\sqrt{\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}\right)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}\right)}=\left[\cos c(1-x)^2-IJx\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}(fx+g)\right]^2+$$

$$+Ax+B)^2\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}\right)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}\right)-$$

$$-2\left[\cos c(1-x)^2-IJx\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}(fx+g)\right](Ax+B)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}\right)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}\right),$$

ahol

$$f=\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}-\frac{\cos\gamma}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}\right),$$

$$g=\cos\gamma,\quad A=\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}\cdot\cos\gamma-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}},\quad B=1.$$

A gyökös tagokat egy oldalra gyűjtve, újabb négyzetreemelés után:

(7a)

$$\left\{2\left[\cos c(1-x)^2-Lx\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}(fx+g)\right](Ax+B)+2Lx^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}(\cos\gamma-1)^2*\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}\right)\right\}^2\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}\right)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}\right)=$$

$$=\left\{\left[\cos c(1-x)^2-Lx\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}(fx+g)\right]^2+(Ax+B)^2\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}\right)\times\right.$$

$$\times\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}\right)-x^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}(\cos\gamma-1)^2\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}\right)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}\right)-$$

$$\left.-x^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_1}{n_1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}(\cos\gamma-1)^2\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}\right)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi d_1}{n_1}}\right)\right\}^2,$$

ahol $L=I\cdot J=\pm 1$.

Legyen:

$$C=\cos-\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}\cdot f$$

$$D=-\left(2\cos c+\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}g\right)$$

$$E=\cos c$$

$$H1=1$$

$$H2=-\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}\right)$$

$$H3=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi d_2}{n_2}\cdot\sin^2\frac{\pi d_3}{n_3}}$$

$$A1 = (\cos\gamma - 1)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_1}{n_1} \Big/ \sin^2 \frac{\pi d_1}{n_1}$$

$$B1 = -(\cos\gamma - 1)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_1}{n_1}$$

$$C1 = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_3}{n_3}$$

$$D1 = -\left(\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2}}{\sin^2 \frac{\pi d_3}{n_3}} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_3}{n_3}}{\sin^2 \frac{\pi d_2}{n_2}} \right)$$

$$Q3 = 2 \cdot A \cdot C - L \cdot 2 (\cos\gamma - 1)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_1}{n_1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} \operatorname{ctg} \frac{\pi d_3}{n_3} \Big/ \sin^2 \frac{\pi d_1}{n_1}$$

$$Q2 = 2(B \cdot C + A \cdot D) + 2 \cdot L \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_1}{n_1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} \operatorname{ctg} \frac{\pi d_3}{n_3} (\cos\gamma - 1)^2$$

$$Q1 = 2(B \cdot D + A \cdot E)$$

$$Q0 = 2 \cdot B \cdot E$$

$$T6 = Q3 \cdot Q3$$

$$T5 = 2 \cdot Q2 \cdot Q3$$

$$T4 = Q2 \cdot Q2 + 2 \cdot Q1 \cdot Q3$$

$$T3 = 2 \cdot Q1 \cdot Q2 + 2 \cdot Q3 \cdot Q0$$

$$T2 = Q1 \cdot Q1 + 2 \cdot Q0 \cdot Q2$$

$$T1 = 2 \cdot Q0 \cdot Q1$$

$$T0 = Q0 \cdot Q0$$

$$U4 = A1 * D1 + C^2 + A^2 \cdot H3$$

$$U3 = A1 * C1 + B1 * D1 = 2 * C * D + A^2 * H2 + 2 * A * B * H3$$

$$U2 = B1 * C1 + 2 * C * E + D^2 + A^2 * H1 + 2 * A * B * H2 + B^2 * H3$$

$$U1 = 2 * D * E + 2 * A * B \cdot H1 + B^2 \cdot H2$$

$$U0 = B^2 \cdot H1 + E^2$$

$$D8 = H2 * T6$$

$$D7 = H2 * T5 + H1 * T6$$

$$D6 = H2 * T4 + H1 * T5 + H0 * T6$$

$$D5 = H2 * T3 + H1 * T4 + H0 * T5$$

$$D4 = H2 * T2 + H1 * T3 + H0 * T4$$

$$D3 = H2*T1+H1*T2+H0*T3$$

$$D2 = H2*T0+H1*T1+H0*T2$$

$$D1 = H1*T0+H0*T1$$

$$D0 = H0*T0$$

$$E8 = U4*U4$$

$$E7 = 2*U3*U4$$

$$E6 = 2*U2*U4+U3*U3$$

$$E5 = 2*U1*U4+2*U2*U3$$

$$E4 = 2*U0*U4+2*U1*U3+U2*U2$$

$$E3 = 2*U0*U3+2*U1*U2$$

$$E2 = 2*U0*U2+U1*U1$$

$$E1 = 2*U0*U1$$

$$E0 = U0*U0$$

Négyzetreemelések, összeszorzások, rendezések után 8-ad fokú egyenletet kapunk x-re:

$$c_8x^8+c_7x^7+c_6x^6+c_5x^5+c_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0,$$

ahol

$$C_k = DK-EK, \quad k = 0, 1, \ldots, 8; \quad K = 0, 1, 2, \ldots, 8.$$

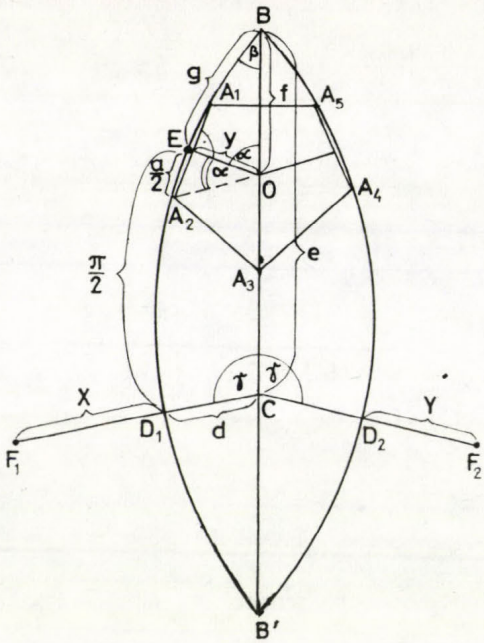
Mivel $\cos c$ pozitív és negatív előjellel is előfordul, azért a négyzetreemelések miatt 7/a-ból kiderül, hogy elegendő az $L = +1$ esettel foglalkozni. Legyen most az $\{n\}$ lap (L) két oldalát jellemző két operáció általános inverziós viszonyban.

Tekintsük most az $A_1, A_2, \ldots, A_n \left\{\frac{n}{d}\right\} (d=1)$ szabályos G gömbi sokszöget. Tegyük fel, hogy A_1-et A_2-be, és pl. A_{n-1}-et A_n-be IF_x transzformáció viszi át (ahol $x=3$, vagy $\frac{5}{2}$). (Ha $x=2$, akkor tükrözésről van szó, így valamelyik szimmetrikus esettel van dolgunk.) Az $\widehat{A_1A_2}$ és $\widehat{A_{n-1}A_n}$ főkörív metszéspontja legyen B. G csúcsai ne legyenek mind egy főkörön. Ekkor (14. ábra) B nincs az $\widehat{A_1A_n}$ (rövidebb) íven.

Az F_x-nek megfelelő forgáscentrum F_1-ben, ill. F_2-ben legyen. Legyen az $\widehat{A_1A}$ (rövidebb) ív középpontja E_1, $\widehat{BE_1}=g$, $BOE_1\sphericalangle=\alpha_1$, $BB'=\pi$, $\widehat{E_1D_1}=\frac{\pi}{2}$, $A_1D_1C\sphericalangle=\frac{\pi}{2}$, $BCD_1\sphericalangle=\gamma$, $\widehat{D_1C}=d=\widehat{CD_2}$, $F_1D_1=X$, $F_2D_2=Y$, $\widehat{BO}=f$, $\widehat{E_1O}=y$, $\overline{A_1A_2}=a$. Mivel $\alpha_1 \leqq \frac{\pi}{2}$ (így választjuk az oldalakat) és $y \leqq \frac{\pi}{2}$, azért $g \leqq \frac{\pi}{2}$. Így a D_1 pont a $\widehat{BB'}$ íven van (esetleg $D_1 \equiv B'$, ha G főkörön van).

Gömbi színusz és koszinusz tétellel:

$$\frac{\sin\beta}{\sin y} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin g}, \quad \cos y \cos g = \cos f, \quad \frac{\sin y}{\sin\beta} = \frac{\sin f}{\sin 90^\circ}$$



14. ábra

f és β kiküszöbölése után:

$$\cos^2 g = \frac{\cos^2 \alpha_1}{1-\sin^2 \alpha_1 \cos^2 y}, \quad \sin^2 g = \frac{\sin^2 y \sin^2 \alpha_1}{1-\sin^2 \alpha_1 \cos^2 y}.$$

Továbbá:

$$\frac{\sin e}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin d}{\sin \beta}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+g\right)\cos d = \cos e$$

e-t kiküszöbölve:

$$\sin^2 d = \frac{\sin^2 g - 1}{\sin^2 g - \dfrac{1}{\sin^2 \beta}} = \frac{\cos^2 g \sin^2 \beta}{1-\sin^2 g \sin^2 \beta}.$$

A fentieket is felhasználva, kapjuk a következő egyenlőségeket:

$$\cos^2 X = 1-\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} \frac{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad \sin^2 X = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} \frac{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\cos^2 Y = 1-\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_3}{n_3} \frac{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad \sin^2 Y = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_3}{n_3} \frac{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\sin^2 d = \frac{\cos^2 \alpha_1}{1-\sin^2 y \sin^2 \alpha_1}, \quad \cos^2 d = \frac{\cos^2 y \sin^2 \alpha_1}{1-\sin^2 y \sin^2 \alpha_1}.$$

Ha $\sin y=1$, és $\sin\alpha_1=1$, akkor $D_1\equiv B'$, és $d=0$. Ezen esetekben is:

$$1-\cos 2\gamma = 2(1-\sin^2 y\sin^2\alpha_1).$$

Fenn kell állni a következő egyenletnek (általános inverziós eset):

$$\cos(d+IX)\cos(d+JY)+\sin(d+IX)\sin(d+JY)\cos 2\gamma=\cos c,$$

ahol

$$I=\pm 1,\quad J=\pm 1,$$

továbbá

$$\begin{aligned}\cos X\cos Y\left(1+\sin^2 d(\cos 2\gamma-1)\right)+\sin X\sin Y\left(1+\cos^2 d(\cos 2\gamma-1)\right)+\\ +(J\cos X\sin Y+I\sin X\cos Y)\sin d\cos d(\cos 2\gamma-1)=\cos c.\end{aligned}\tag{8}$$

Behelyettesítések után $\left(x\equiv\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$:

$$\sqrt{\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}\frac{1-x}{x}\right)\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}\frac{1-x}{x}\right)}(1-2\cos^2\alpha_1)+$$

$$+\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-x}{x}}\,(1-2\cos^2 y\sin^2\alpha_1)+$$

$$+\left(J\sqrt{\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}\frac{1-x}{x}\right)\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}\frac{1-x}{x}}+I\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}\frac{1-x}{x}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}\frac{1-x}{x}\right)}\right)\times$$

$$\times(-1)\cos y\cos\alpha_1\cdot 2\sin\alpha_1=\cos c;$$

ahol

$$\cos^2 y=\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha_2}{x}}{1-x}.$$

Legyen

$$v=\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}\left(2\cdot\frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha_2}-1\right)$$

$$b=\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}\cos 2\alpha_1$$

$$a=\cos c-v.$$

Átrendezve és négyzetreemelve:

$$4\cdot\frac{1-\dfrac{x}{\sin^2\alpha_2}}{1-x}\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_1(1-x)\left[\left(x-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}(1-x)\right)\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}+\right.$$

$$\left.+\left(x-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}(1-x)\right)\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}+\right.$$

$$\left.+2\cdot I\cdot J\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}\sqrt{\left(x-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}(1-x)\right)\left(x-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}(1-x)\right)}\right]=$$

$$=\left[ax-b-(1-2\cos^2\alpha_1)\sqrt{\left(x-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}(1-x)\right)\left(x-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}(1-x)\right)}\right]^2.$$

A gyökös tagokat egy oldalra gyűjtve, majd ismét négyzetre emelve:

$$\left\{4\cdot 2\cdot L\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi d_2}{n_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi d_3}{n_3}\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_1\left(1-\frac{x}{\sin^2\alpha_2}\right)+2(ax-b)(1-2\cos^2\alpha_1)\right\}^2\times$$

$$\times\left\{x\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}\right)-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}\right\}\left\{x\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}\right\}-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}\right\}=$$

$$=\left\{-4\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_1\left(1-\frac{x}{\sin^2\alpha_2}\right)\left[\left\{x\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{d_2\pi}{n_2}\right)-\operatorname{ctg}^2\frac{d_2\pi}{n_2}\right\}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_3}{n_3}+\right.\right.$$

$$+\left\{x\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{d_3\pi}{n_3}\right)-\operatorname{ctg}^2\frac{d_3\pi}{n_3}\right\}\operatorname{ctg}^2\frac{d_2\pi}{n_2}\left.\right]+(ax-b)^2+(1-2\cos^2\alpha_1)^2\left\{x\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{d_2\pi}{n_2}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{ctg}^2\frac{d_2\pi}{n_2}\right)\left\{x\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{d_3\pi}{n_3}\right)-\operatorname{ctg}^2\frac{d_3\pi}{n_3}\right\}\right\}^2,\quad \text{ahol}\quad L=\pm 1.$$

A négyzetreemelések és a rendezések elvégzése után negyedfokú egyenletet kapunk:

$C_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0=0$, ahol:

$c_4 = T4-H4$

$c_3 = T3-H3$

$c_2 = T2-H2$

$c_1 = T1-H1$

$c_0 = T0-H0$,

továbbá

$T4 = U2\cdot U2$

$T3 = 2\cdot U0\cdot U1$

$T2 = U1^2+2\cdot U2\cdot U2$

$T1 = 2\cdot U0\cdot U1$,

ahol

$T0 = U0^2$

$U2 = C2+C2^2\cdot G2+A^2$

$U1 = C1+C2^2\cdot G1-2\cdot A\cdot B$

$U0 = C0+C2^2\cdot A0+B^2$,

ahol

$C2 = A1\cdot B1$

$C1 = A0\cdot B1+A1\cdot B0$

$C0 = A0\cdot B0$

$$B1 = CN1 + CN2 + 2 \cdot CN1 \cdot CN2$$

$$B0 = -2 \cdot CN1 \cdot CN2$$

$$A1 = 4 \cdot (CAL \cdot SIL / SI2)$$

$$A0 = -4 \cdot CAL \cdot SIL$$

$$H4 = F1^2 \cdot G2$$

$$H3 = 2 \cdot F0 \cdot F1 \cdot G2 + F1^2 \cdot G1$$

$$H2 = 2 \cdot F0 \cdot F1 \cdot G1 + F1^2 \cdot G0 + F0^2 \cdot G2$$

$$H1 = F0^2 \cdot G1 + 2 \cdot F0 \cdot F1 \cdot G0$$

$$H0 = F0^2 \cdot G0$$

$$G2 = (1 + CN1)(1 + CN2)$$

$$G1 = -B1$$

$$G0 = CN1 \cdot CN2$$

$$F1 = 2 \cdot A \cdot C12 + F3$$

$$F0 = P0 - 2 \cdot C12 \cdot B$$

$$F3 = -P0 / SI2$$

$$P0 = 8 \cdot L \cdot CT1 \cdot CT2 \cdot CAL \cdot SIL$$

$$A = C - V$$

$$V = CT1 * CT2 * (2 * SIL / SI2 - 1)$$

$$B = CT1 * CT2 * CON$$

$$C12 = 1 - 2 * CAL$$

$$CAL = \cos^2 \alpha_1 = \cos^2 (ld_1 \pi / n_1)$$

$$SIL = 1 - CAL$$

$$CON = \cos^2 (2ld_1 \pi / n_1)$$

$$CN1 = CT1^2$$

$$CN2 = CT2^2$$

$$CT1 = \operatorname{ctg} (d_2 \pi / n_2)$$

$$CT2 = \operatorname{ctg} (d_3 \pi / n_3)$$

$$SI2 = \sin^2 (d_2 \pi / n_2)$$

l egész, $\leqq 4$.

Az inverziós szimmetrikus esetben $(X = Y)$ a következő egyenletnek kell fennállni.

$$\cos^2 (d + IX) + \sin^2 (d + IX) \cos 2\gamma = \cos c,$$

tovább alakítva:

$$\sin^2(d+IX)(\cos 2\gamma-1)=\cos c-1$$

$$(\sin^2 d\cos^2 X+2I\sin d\cos d\cos X\sin X+\cos^2 d\sin^2 X)(1-\sin^2 y\sin^2\alpha_1)=\frac{1-\cos c}{2}$$

$$\left[\frac{\cos\alpha_1}{1-\sin^2 y\sin^2\alpha_1}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}\frac{1-x}{x}\right)+\right.$$

$$(9)\qquad +2\cdot I\sqrt{\frac{\cos^2\alpha_1\cdot\cos^2 y\cdot\sin^2\alpha_1}{(1-\sin^2 y\sin^2\alpha_1)^2}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}\frac{1-x}{x}\right)\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}\frac{1-x}{x}}+$$

$$\left.+\frac{\cos^2 y\sin^2\alpha_1}{1-\sin^2 y\sin^2\alpha_1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d_2}{n_2}\frac{1-x}{x}\right]\cdot(1-\sin^2 y\sin^2\alpha_1)=\frac{1-\cos c}{2},$$

ahol

$$\sin^2 y=\frac{x\operatorname{ctg}^2\alpha_2}{1-x}.$$

Gyöktelenítés, rendezés után másodfokú egyenletet kapunk:

$$c_2x^2+c_1x+c_0=0,$$

ahol

$c_0 = T0-H0$

$c_1 = T1-H1$

$c_2 = T2-H2$

$T0 = U0^2$

$T1 = 2U0\cdot U1$

$T2 = U1^2$

$U0 = (CAL-SIL)\cdot CT$

$U1 = C-CAL\cdot(1+CT)+SIL\cdot CT/SI2$

$H0 = -4\cdot CAL\cdot CT^2\cdot SIL$

$H1 = 4\cdot CAL\cdot CT\cdot SIL\cdot(1+CT+CT/SI2)$

$H2 = -4\cdot CAL\cdot SIL\cdot CT(1+CT)/SI2$

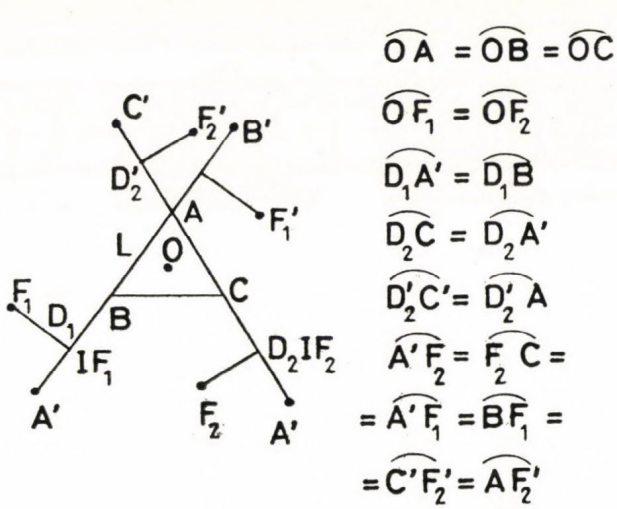
$CT = \operatorname{ctg}^2(\pi d_2/n_2)$

$C = \dfrac{1-\cos c}{2}$

CAL, *SIL*, *SI2* mint az általános inverziós esetben.

Tétel 12. *Ha az L lap két élének végpontjait egymásba vivő két operáció* (IF_1, IF_2) *antiszimmetrikus inverziós viszonyban van (azaz pl. a 15. ábrán az* AD_1F_1 *háromszöget O körüli forgatás a* $CD_2'F_2'$ *háromszögbe viszi) és az* $\widehat{F_1F_2}$ *távolság (lehetséges) rögzített, akkor az L élhosszától nem függ ez a transzformációs lehetőség.*

Bizonyítás: $\cos(d+X)\cos(d-X)+\sin(d+X)\sin(d-X)\cos 2\gamma=I\cdot\cos c$ ($I=\pm1$), $\cos^2 d\cos^2 X-\sin^2 d\sin^2 X+(\sin^2 d\cos^2 X-\cos^2 d\sin^2 X)\cos 2\gamma=I\cdot\cos c$



15. ábra

$$\cos^2 X - \sin^2 X + (1-\cos 2\gamma)(\cos^2 d \sin^2 X - \sin^2 d \cos^2 X) = I \cdot \cos c$$

$$1 - 2\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} \frac{1-x}{x} + 2(1-\sin^2 y \sin^2 \alpha_1)\left[\frac{\cos^2 y \sin^2 \alpha_1}{1-\sin^2 y \sin^2 \alpha_1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} \frac{1-x}{x} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^2 \alpha_1}{1-\sin^2 y \sin^2 \alpha_1}\left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} \frac{1-x}{x}\right)\right] = I \cdot \cos c$$

$$\frac{I \cdot \cos c - 1}{2} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} -$$

$$- \left[\frac{1 - \dfrac{x}{\sin^2 \alpha_2}}{1-x} \sin^2 \alpha_1 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} \frac{1-x}{x} - \cos^2 \alpha_1 \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} \frac{1-x}{x}\right)\right].$$

Vagyis, ha a két forgáscentrum közti távolság (c) koszinusza cos (c), akkor — mivel az x kiesik — fenn kell állnia:

$$\left(\frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2} - 1\right) \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2} + \cos^2 \alpha_1 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d_2}{n_2}\right) = \frac{1 - I \cos c}{2},$$

ahol

$$\alpha_1 = \frac{d\pi}{n}, \quad \alpha_2 = \frac{ld\pi}{n}, \quad (2l < n), \quad d = 1.$$

Lemma 12. *A keresett uniform poliédert legalább két különböző típusú lap alkotja. Létezik ezért egymáshoz élben kapcsolódó két különböző lap:*

$$L_1 \equiv \left\{\frac{n_1}{d_1}\right\}, \quad L_2 = \left\{\frac{n_2}{d_2}\right\}.$$

1) Ha $L_1 \equiv \{3\}$, és L_1 mindhárom oldalát jellemző operációk egymással antiszimmetrikus inverziós viszonyban vannak, és az operációkban ($IF_{(1)}$, $IF_{(2)}$, $IF_{(3)}$; ahol a forgatások azonos típusúak, de nem félfordulatok) szereplő forgáscentrumok

közti minden távolság lehetséges, akkor L_1 középpontjában van forgáscentrum (3-as). Ez a szabályos testek szimmetriaoperációinak vizsgálatával könnyen adódik.

2) a) Legyen $n_2=4$, azaz $L_2 \equiv \{4\}$. Ekkor, ha L_2 (legalább) 3 oldalát jellemző operációk egymással antiszimmetrikus inverziós viszonyban vannak (mint az előbb), akkor L_2 középpontjában kell lenni forgáscentrumnak (2-es vagy 4-es). Ez szintén a szabályos testek vizsgálatával könnyen adódik.

Így, ha L_1 középpontjában is van forgáscentrum, akkor a (6) egyenlet alkalmazható.

Ha $L_1 \equiv \{3\}$, és középpontjában nincs forgáscentrum, akkor L_1-re nézve alkalmazzuk a (7) egyenletet, hiszen L_2 középpontjában van forgáscentrum (2-es vagy 4-es) és L_1 egy másik oldalára is (feltevés szerint) kell, hogy forgási operáció legyen jellemző (l. a 16. ábrán levő transzformációs viszonyt).

b) Ha $n_2=5$, akkor hasonló feltételek esetén mint 2)a)-ban az L_2 középpontjában 5-ös forgáscentrumnak kell lenni.

c) Ha $n_2=5$, akkor hasonlóan; mint az előzőekben könnyen látható, hogy L_2-nek kevesebb, mint 5 oldala lehet egymáshoz képest antiszimmetrikus inverziós viszonyban.

d) Ha $n_2=8$ vagy 10, akkor a 2a) vagy b) esetre visszavezethető esetre jutunk.

A 3-as (4-es, 5-ös) forgáscentrumok (azonos fajták: 3-as — 3-as stb.) közti lehetséges távolságok egységsugarú gömb esetén: $\left(\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

$R_1 = 0.$

$R_2 = 2$ (4-es forgáscentrumok esetén)

$R_3 = 2 \Big/ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

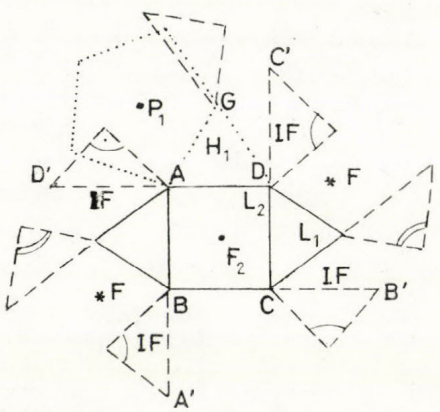
$R_4 = 2/\sqrt{3}$ (3-as forgáscentrumok esetén)

$R_5 = 2/(\sqrt{3} \cdot \tau)$

$R_6 = 2\tau/\sqrt{3}$

$R_7 = 2/(5^{1/4} \cdot \sqrt{\tau})$ (5-ös forgáscentrumok esetén)

$R_8 = 2\sqrt{\tau}/5^{1/4}.$



16. ábra

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös forgáscentrumok (különböző típusúak is) közti lehetséges (szög-) távolságok koszinuszai d_I ($I=1, \ldots, 33$):

$d_1 = 0$

$d_i = 1 - R_I \cdot R_I/2 \quad I = 2, \ldots, 8$

$$d_9 = \sqrt{1-\left(\frac{R_2}{2}\right)^2}$$

$$d_{10} = \sqrt{1-\left(\frac{R_2}{2\cdot\sin\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

$$d_{11} = \sqrt{1-\left(\frac{R_3}{2}\right)^2} \qquad d_{15} = \sqrt{1-\left(\frac{R_7}{2}\right)^2}$$

$$d_{12} = \sqrt{1-\left(\frac{R_4}{2}\right)^2} \qquad d_{16} = \sqrt{1-\left(\frac{R_8}{2}\right)^2}$$

$$d_{13} = \sqrt{1-\left(\frac{R_5}{2}\right)^2} \qquad d_{17} = \sqrt{1-\left(\frac{R_7}{2\sin\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

$$d_{14} = \sqrt{1-\left(\frac{R_6}{2}\right)^2} \qquad d_{18} = \sqrt{1-\left(\frac{R_8}{2\sin\frac{\pi}{3}}\right)^2}.$$

A kettes forgáscentrumok közti összes lehetséges távolsági koszinusza (közülük nem mindegyik valósul meg):

$$d_i = \cos(LL_I/KK_I) \quad i = 19, \ldots, 33, \quad I = i-18, \ldots,$$

ahol

$$\left.\begin{aligned} KK_I &= I+2 \\ LL_I &= 1 \end{aligned}\right\} I = 1, 8$$

$KK_9 = 5$ $\qquad$ $KK_{12} = 8$

$LL_9 = 2$ $\qquad$ $LL_{12} = 3$

$KK_{10} = 7$ $\qquad$ $KK_{13} = 9$

$LL_{10} = 2$ $\qquad$ $LL_{13} = 2$

$KK_{11} = 7$ $\qquad$ $KK_{14} = 9$

$LL_{11} = 3$ $\qquad$ $LL_{14} = 4$

$KK_{15} = 10$

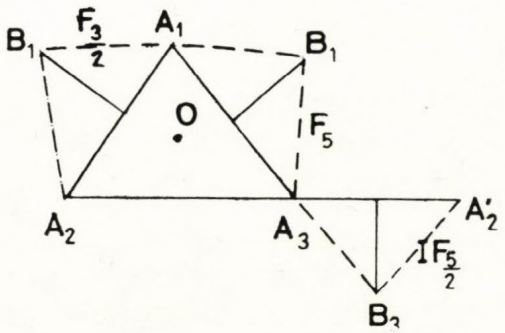
$LL_{15} = 3$. (l. lemma 10: c_j, $j \equiv$ I)

Tétel 13. *Legyen* $\left\{\frac{n}{d}\right\} \equiv A_1, A_2, \ldots, A_n$ *középpontja* O. *Tegyük fel, hogy az egyik oldalára jellemző direkt transzformáció forgáscentruma* (F_1) $(F_1 \neq 0, \widehat{F_1O} \neq \pi)$ O *körüli forgatással átvihető egy másik oldalára jellemző transzformáció forgáscentrumába* (F_2). *Ha* $F_1F_2 = R_I$ (R_I *értékeit lásd előbb*), $n \equiv NC$, *és* $F_1OF_2 \sphericalangle = \frac{2\pi}{n} * KI$, *akkor az alábbi táblázat szerint* O*-ban a következő forgáscentrumoknak kell lenni az egyes esetekben:*

	NC	*KI*	forgáscentrum (*n*-es)	
R_2	3	1	3	
	6	2	3	
	4	1	4	
	8	2	4	
	4	2	2	
	6	3	2	
	8	4	2	
R_3	3	1	3	ha tetraéder-csoportról van szó
	4	2	4	
	6	3	4	
	8	4	4	
	10	5	4	
R_4	4	1	4	
	8	2	4	
	4	2	2	
	6	3	2	
	8	4	2	
	10	5	2	
	5	2	5	
	10	4	5	
	3	1	3	
	6	2	3	
R_5	5	1	5	
	10	2	5	
	4	2	2	
	6	3	2	
	8	4	2	
	10	5	2	
R_6	5	2	5	
	10	4	5	

	NC	*KI*	forgáscentrum (*n*-es)
R_7	3	1	3
	6	2	3
	5	1	5
	10	2	5
	4	2	2
	6	3	2
	8	4	2
	10	5	2
R_8	5	2	5
	10	4	5
	3	1	3
	6	2	3
	4	2	2
	6	3	2
	8	4	2
	10	5	2

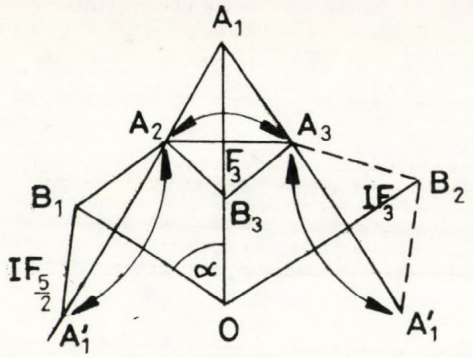
Lehetséges transzformációk $n=3$-ra (17. ábra).
a) Legalább két forgás van.
(Minden lehetséges forgáscentrum elhelyezkedést figyelembe veszünk: szimmetrikus, antiszimmetrikus eset, $I=\pm 1$, $J=\pm 1$ stb.)



17. ábra

F_x,	F_y
$x=5$	$y=\frac{5}{2}$
5	5
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
3	3
3	$\frac{5}{2}$
3	5
2	5
2	$\frac{5}{2}$
3	4
4	4
2	4
2	3
2	2

b) Legalább két *IF* típusú transzformáció van (18. ábra).

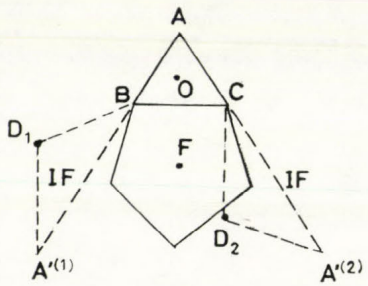


IF_x	IF_y
$IF_{\frac{5}{2}}$	$IF_{\frac{5}{2}}$
$IF_{\frac{5}{2}}$	IF_3
IF_3	IF_3
IF_4	IF_3
IF_4	IF_4
IF_5	IF_5

18. ábra

(Természetesen most is (és a következőkben is) minden lehetséges forgáscentrum-elhelyezkedést figyelembe kell venni.)

Talán leginkább kérdéses az a transzformáció-összeállítás, amikor egy háromszöglap (ABC, középpontja O) két oldalának (AB, AC) végpontjait (A-t B-be, A-t C-be és viszont) egymással antiszimmetrikus inverziós viszonyban levő két IF típusú transzformációs (a bennük szereplő forgáscentrumok D_1 és D_2) viszi át egymásba, B-t C-be (és viszont) pedig forgatás (19. ábra).



$\widehat{BD_1} = \widehat{CD_2}$

$\widehat{AD_1} = \widehat{A'D_2}$

19. ábra

Ugyanis ekkor nem kapunk oldalhosszat a megfelelő egyenletből, és abból, hogy D_1-ben és D_2-ben van forgáscentrum, általában nem következik, hogy O-ban is van. Könnyen látható — az egyenletekből —, hogy minden más transzformáció-összeállításnál két egymáshoz kapcsolódó lap esetén mindig kapunk élhosszat a megfelelő egyenletből. A fenti esetben BC-hez csak $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ közül csatlakozhatnak lapok. Tegyük fel ugyanis, hogy BC-hez $\{6\}$, $\{8\}$, $\left\{\frac{8}{3}\right\}$, $\{10\}$ vagy $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ (L_2) illeszkedik. Ekkor L_2 középpontjában van forgáscentrum (F_2) (2.§. 13. lemma). Ha B-t C-be forgatás (F_3) viszi ($F_3 \neq F_2$), akkor a (4) vagy (6) egyenlet alkalmazható. Ha pedig B-t C-be IF típusú elmozgatás viszi, akkor ABC három oldalát jellemző

operáció IF típusú. Így vagy van O-ban forgáscentrum, vagy a (6), (9) egyenletek (ha IF tükrözés), illetve a (8) egyenletek valamelyikét alkalmazhatjuk.

A 20. ábrán példát mutatunk arra, hogy elképzelhető egy csúcs körül olyan lapkonfiguráció (a lapszögek összege 2π többszöröse), amelynél csak a 19. ábrának megfelelő és antiszimmetrikus transzformáció-összeállítások szerepelnek. (Könnyen látható, hogy ekkor egy csúcs körül két $\left\{\frac{5}{n}\right\}$ ($n=1$ vagy 2) lap között legalább három $\{3\}$ lap kell hogy legyen, különben rögtön ellentmondásra jutnánk.) Emiatt szükség van új típusú, szögösszegre vonatkozó nemlineáris egyenletek megoldására. A lapszögekösszege egy (gömbi) poliédernél 2π többszöröse kell hogy legyen:

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad f(x) = 2\cdot(I\cdot K1\cdot\alpha_{\frac{5}{2}} + J\cdot K2\cdot\alpha_5 + K3\cdot\alpha_3) + K\cdot 2\pi = 0, \\ &\text{b)} \quad g(x) = 2\cdot(I\cdot K4\cdot\alpha_4 + K3\cdot\alpha_3) + K\cdot 2\pi = 0, \end{aligned}$$

ahol az a) egyenletben:

$$I = \pm 1, \quad J = \pm 1, \quad |K| < 12, \quad K1+K2+K3 \leqq 23, \quad K1+K2 \leqq 7, \quad K1 \geqq 0,$$

$$K2 \geqq 0, \quad K3 \geqq 2$$

egész számok

$$\alpha_{\frac{5}{2}} = \arcsin\frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}, \quad \alpha_5 = \arcsin\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}, \quad \alpha_3 = \arcsin\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}},$$

$$x \equiv \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

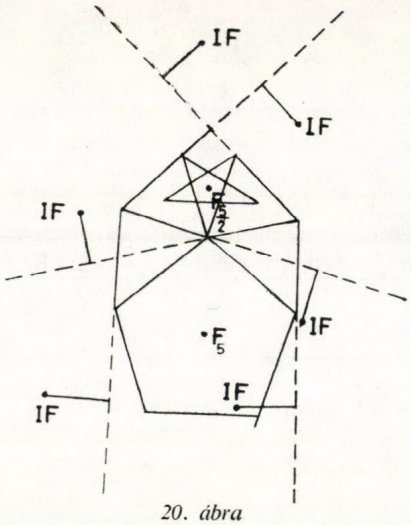
A b) egyenletben hasonlóan:

$$\alpha_4 = \arcsin\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}, \quad K3+K4 \leqq 23, \quad K3 \geqq 2, \quad K4 \geqq 1, \quad I = \pm 1.$$

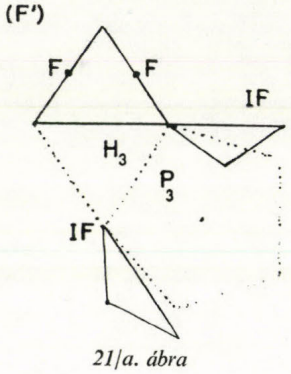
Ennek érdekében meghatározzuk, hogy az $f(x)$ (és $g(x)$) egyenletek milyen intervallumokban szigorúan monotonok, és ezekben az intervallumokban legfeljebb egy gyökük lehet.

Ezért az $f'(x)=0$ ($g'(x)=0$) egyenleteket kell megoldani, ami az $f'(x)=0$ típusú egyenletek esetén x-ben negyedfokú egyenletek megoldását jelenti.

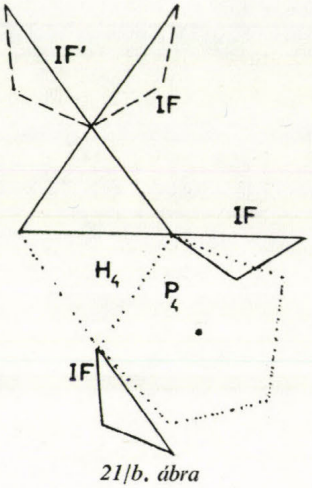
A (10)a, (10)b egyenletek megoldásánál kihasználjuk, hogy $18° \leqq \alpha_{\frac{5}{2}} \leqq 23°$, $54° \leqq \alpha_5 \leqq 90°$, $30° \leqq \alpha_3 \leqq 39°$, ($60° \leqq \alpha_4 \leqq 90°$) (10)c. Így több esetben nem is lehet 2π többszöröse $f(x)$ (ill. $g(x)$), így ilyenkor nem kell megoldani az $f(x)=0$ (ill. $g(x)=0$) egyenletet. Ha $J=+1$, akkor könnyen megmutatható, hogy $f(x)$ szigorúan monoton növekvő, az egész kérdéses intervallumban, így csak 1 gyöke lehet. Emiatt csak $J=-1$ esetén kerül sor az $f'(x)=0$ negyedfokú egyenlet megoldására ((10)c figyelembevételével), a megfelelő lehetséges paraméterek alkalmazásával. ($1 \leqq K2 \leqq 6$, $1 \leqq K1 \leqq 6$, aminek megfelelően változik $K3$ értéke ($4 \leqq K3 \leqq 21$)).
Lehetséges transzformációk $n=4$ esetben.



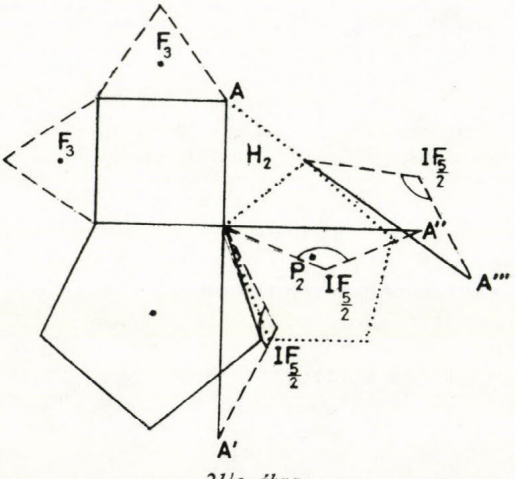
20. ábra



21/a. ábra

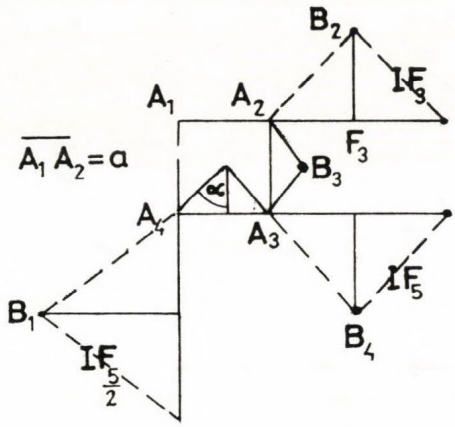


21/b. ábra



21/c. ábra

a) Legalább 2 *IF* típusú operáció van (22. ábra).

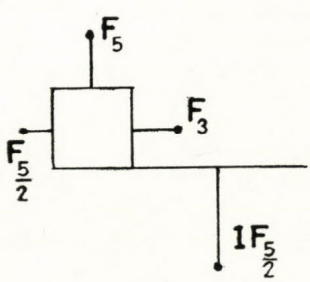


22. ábra

IF_x	IF_y
$IF_{\frac{5}{2}}$	IF_3
$IF_{\frac{5}{2}}$	$IF_{\frac{5}{2}}$
IF_3	IF_3

$\alpha = \frac{\pi}{4} \cdot KI$. IF_4 csak $a = \frac{2}{\sqrt{2}}$ oldalhosszal lehet. (A négyzet főkörön van.)

b) Legalább 2 *F* típusú operáció van (ha az a) eset nem teljesül). Pl.: 23. ábra.

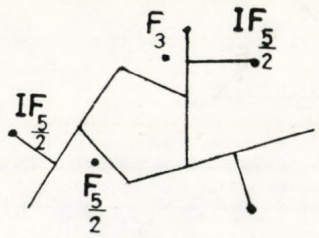


23. ábra

F_x	F_y	
$x=5$	$y=\frac{5}{2}$	
5	5	
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	
3	3	
3	5	
2	5	
2	$\frac{5}{2}$	
3	4	
4	4	
2	4	
2	3	
2	2	$KI=1, 2$

Lehetséges transzformációk $n=5$-re.

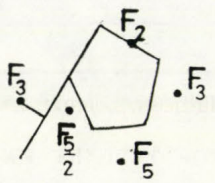
a) Legalább 2 $IF_{\frac{n}{d}}$ típusú operáció van ($n \neq 2$) (24. ábra).



IF_x	IF_y
$IF_{\frac{5}{2}}$	IF_3
$IF_{\frac{5}{2}}$	$IF_{\frac{5}{2}}$
IF_3	IF_3

24. ábra

b) Különböző F típusú forgatások mellett legfeljebb 1 IF operáció van (25. ábra).



25. ábra

Állítás 1. {5} esetén (ha a forgatási operációk minden oldalra nézve különbözők) a következő transzformáció párokból (legalább) 2 előfordul.

$IF_{5/2}, IF_3$ $\quad F_2, F_3$

$IF_{5/2}, IF_{5/2}$ $\quad F_2, F_5$

$IF_3, \quad IF_3$ $\quad F_3, F_5$.

Ahhoz, hogy egy fenti transzformációs lehetőséget egy lap esetén ne vessünk el, szükséges, hogy legalább két különböző egyenletből (vagy, hogy egy egyenletből két különböző paraméter rendszer esetén) ugyanazt az élhosszat kapjuk a hibahatáron belül.

Állítás 2. {6} esetén (ha a forgatási operációk minden oldalra nézve különbözők) a következő transzformáció párokból (legalább) 2 előfordul:

$IF_{5/2}, IF_3$ (csak ha a {6} főkörön van)

$IF_3, \quad IF_3$ (csak ha a {6} főkörön van)

$IF_{5/2}, IF_{5/2}$

$F_2, \quad F_3$.

Állítás 3. Ahhoz, hogy minden esetet megkapjunk (forgatási operációk esetén) a (7)-es egyenletet (vagy annak 8-adnál alacsonyabb fokú változatait) a következő esetekben kell alkalmazni: $\left(n_1 \equiv NC,\ n_2 \equiv NL,\ d_2 \equiv LL,\ n_3 \equiv N3,\ d_3 \equiv L3,\ \gamma = \frac{2\pi \cdot KI}{n_1}\right)$

	NL	LL	$N3$	$L3$	$KI=1$
$NC=3$	5	1	5	2	
	5	1	3	1	
	5	1	2	1	
	5	2	3	1	
	5	2	2	1	
	3	1	2	1	
	4	1	3	1	
	4	1	2	1	
$NC=4$	mint $NC=3$-nál				$KI=1, 2$
$NC=5$	5	1	2	1	$KI=1, 2.$

Az {5} esetében ellenőrzésképpen az

NL	LL	$N3$	$L3$
5	1	3	1
5	1	2	1
3	1	2	1

esetekben kell vizsgálni.

A {6} esetében ellenőrzésképpen az

NL	LL	$N3$	$L3$
3	1	2	1

eseteket kell vizsgálni.

A (8) egyenletet a következő paraméterekre kell alkalmazni: (hogy minden esetet figyelembe vegyünk), $n_2 \equiv N1$, $d_2 \equiv L1$, $n_3 \equiv N2$, $d_3 \equiv L2$, $n_1 \equiv NC$;

	$N1$	$L1$	$N2$	$L2$
$NC=3$	3	1	5	1
	3	1	5	2
	5	1	5	2
	3	1	4	1
$NC=4$	3	1	5	2
	3	1	4	1
	3	1	5	2
$NC=5$	3	1	5	2

A (9) egyenletet pedig ($n_2 \equiv NL$, $d_2 \equiv LL$, $n_1 \equiv NC$)

NC	NL/LL	NC	NL/LL
3	5/1, 5/2, 3/1, 4/1	7—10-ig	5/2
4	5/2, 3/1, 4/1		
5	5/2, 3/1		
6	5/2, 3/1		

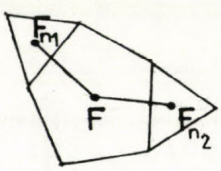
$C3$ és KI lehetséges értékeit az előzőekhez hasonlóan — értelemszerűen — adjuk meg. Példaképpen a (7) egyenletnek megfelelő (a legbonyolultabban adódó) 8-ad fokú egyenlet megoldásának eredményeit mutatjuk be az 1. listán az összes lehetséges paraméterértékre.

I. Induljunk ki abból, hogy L középpontjában nincs forgáscentrum (az ilyen lapot I típusúnak nevezzük).

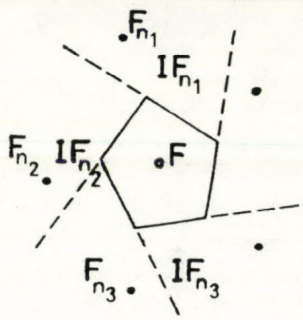
Ekkor a (4)—(10) egyenletek felhasználásával — az összes lehetséges eset figyelembevételével — kapjuk az oldalhosszakat.

Lemma 13. *Ha* $n \geqq 5$, *akkor tetszőleges* $\left\{\frac{n}{d}\right\}$ (L) *lap középpontjában van forgáscentrum.*

Bizonyítás: A (4)—(10) egyenletekből (azonos $n \geqq 5$-re, $d=1$) adódó egyforma oldalhosszakat vegyük, az S_L transzformációkat ismerve. Ezután alkalmazhatjuk vagy a) a forgások szorzástételét (26. ábra), b) a 12. lemmát (27. ábra), c) vagy L-et rá tudjuk helyezni egy már ismert testre (T), és belátható, hogy L operációi egybeesnek T bizonyos operációival, így viszont T-nek L lapja középpontjában van forgáscentrum. Ezzel mindegyik transzformációs esetet figyelembe vettünk.



26. ábra



27. ábra

II. Induljunk ki most abból, hogy L középpontjában van forgáscentrum (az ilyen lapot II típusúnak nevezzük). Például a szomszédos csúcsokat tükrözés viszi át egymásba. (Ilyenkor — legalábbis első lépésben, mint I.-ben — nem tudjuk alkalmazni a (4)—(9) egyenleteket.)

a) Vegyünk egy II típusú L_1 lapot (tehát L_1 középpontjában van forgáscentrum, de L_1 oldalhossza még nem ismert). Ha ehhez egy hasonló típusú L_2 lap (középpontjában van forgáscentrum) csatlakozik (L_1-hez L_2 nem kapcsolódhat úgy, hogy L_1 egybeessen L_2-vel), akkor a (6) egyenletet alkalmazzuk, kivéve ha

b) $L_1 \equiv L_2 \equiv \{4\}$, és középpontjukban 2-es forgáscentrum van, nem 4-es. Ha L_2 középpontjában nincs forgáscentrum, akkor az I. esethez jutunk.

Így igaz a következő

Tétel 14. *A* (4)—(10) *egyenletek segítségével — az összes lehetséges transzformáció-összeállítást és paramétert figyelembe véve — az összes lehetséges oldalhosszat megkapjuk, (a hibahatárt figyelembe véve) és természetesen azt is tudjuk, hogy milyen lapoknál fordulhatnak elő.* A II. b) eset is rendben van, ugyanis nem állhat csak négyzetből a keresett uniform poliéder, azaz kell, hogy valamelyik négyzethez négyzettől különböző lap kapcsolódjék. Ekkor viszont a (4)—(10) egyenletek valamelyikét tudjuk alkalmazni.

Jelmagyarázat a most következő 1. listához
$x=c\cdot 10^d$ alakban van, ahol d az E utáni szám.

$p_1=n_1 \qquad p_3=n_2 \qquad p_5=n_3$

$p_2=d_1 \qquad p_4=d_2 \qquad p_6=d_3.$

A 3. oszlopban szereplő számok arra vonatkoznak, hogyan helyezkednek el a 9. ábra konfigurációjának lapjai egymáshoz képest, illetve mekkora az $\widehat{F_1F_2}$ távolság.

1. LISTA

$x=\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$p_1p_2p_3p_4p_5p_6$		$x=\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$p_1p_2p_3p_4p_5p_6$	
0.186344203E−03	415152	957782	0.528149607E−01	412152	−751712
0.106179548E−01	612131	−567761	0.531277088E−01	412131	411112
0.106179548E−01	612131	511112	0.531277088E−01	412131	−461712
0.129785831E−01	512131	−567782	0.533285041E−01	612131	−417182
0.129785831E−01	512131	511112	0.533285041E−01	612131	411112
0.190681593E−01	512151	−751712	0.537906940E−01	312131	−561711
0.190681593E−01	512151	711112	0.537907551E−01	312151	711111
0.195372816E−01	412131	−567782	0.537907551E−01	312151	−761711
0.195372816E−01	412131	511112	0.537907397E−01	313151	711111
0.205660708E−01	513151	711112	0.537906940E−01	312131	511111
0.258667456E−01	412151	711112	0.570438084E−01	513151	−761711
0.258667456E−01	412151	−761712	0.601282043E−01	412131	−517182
0.262189229E−01	413151	711112	0.601282043E−01	412131	511112
0.293201541E−01	612131	−461712	0.502109015E−01	512151	−861712
0.293201541E−01	612131	411112	0.602109015E−01	512151	811112
0.299005124E−01	612131	−567781	0.627817015E−01	412141	−161712
0.299005124E−01	612131	511111	0.627817015E−01	412141	111112
0.318551005E−01	512131	−567781	0.648226772E−01	512131	−517181
0.318551005E−01	512131	511111	0.648226772E−01	512131	511111
0.340657001E−01	513151	−711712	0.652547670E−01	413141	111112
0.356803831E−01	512131	−461712	0.659945794E−01	413151	−761711
0.356803831E−01	512131	411112	0.663786606E−01	612131	−361712
0.367157473E−01	412131	−567781	0.663786606E−01	612131	311112
0.367157473E−01	412131	511111	0.754937826E−01	413152	−761112
0.411893658E−01	512151	−751711	0.761314959E−01	512131	−417182
0.411893658E−01	512151	711111	0.761314959E−01	512131	411112
0.436910401E−01	412151	−751711	0.793124076E−01	415152	711112
0.436910401E−01	412151	711111	0.800265724E−01	512131	−361712
0.475030338E−01	413152	711112	0.800265724E−01	512131	311112
0.501397606E−01	413151	−711712	0.800860189E−01	412151	−861712
0.501397351E−01	413151	711111	0.800850189E−01	412151	811112
0.515373920E−01	513151	711111	0.812792338E−01	612131	−461711
0.521385949E−01	612131	−517181	0.812792338E−01	512131	411111
0.521385949E−01	512131	511111	0.839865982E−01	513151	811112
0.528149607E−01	412152	711112	0.858397757E−01	512131	−461711

$x=\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$p_1p_2p_3p_4p_5p_6$		$x=\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$p_1p_2p_3p_4p_5p_6$	
0.858397757E−01	512131	411111	0.153922352E+00	312152	−761711
0.920300352E−01	413152	711111	0.153922271E+00	315152	711111
0.947461655E−01	412152	711112	0.153922352E+00	312152	711111
0.947461655E−01	412152	−717182	0.154187392E+00	413151	−811112
0.954910044E−01	513151	−711111	0.154451878E+00	612131	−647582
0.954914708E−01	313151	−711711	0.154451878E+00	612131	641512
0.954940257E−01	513151	−711112	0.155764899E+00	512131	−417181
0.976755992E−01	412131	411111	0.155764899E+00	512131	411111
0.976755992E−01	412131	−461711	0.157103582E+00	415152	811111
0.981479597E−01	412131	511111	0.163500782E+00	412151	961712
0.981479597E−01	412131	−517181	0.163727279E+00	412151	961712
0.993727802E−01	412152	711111	0.165756193E+00	412152	711111
0.993727802E−01	412152	−761711	0.165756193E+00	412152	−717181
0.996577211E−01	612131	−661712	0.170208130E+00	413141	−111711
0.996577211E−01	612131	611112	0.170500411E+00	412131	611112
0.104091727E+00	413151	811112	0.170500411E+00	412131	−661712
0.109179812E+00	412141	111111	0.172536846E+00	413152	−717711
0.109179812E+00	412141	−161711	0.176076327E+00	413152	811112
0.109681202E+00	415152	811112	0.176345260E+00	413151	−811712
0.110933914E+00	612131	−317182	0.179551744E+00	512131	261712
0.110933914E+00	612131	311112	0.179551744E+00	512131	261712
0.116676356E+00	412131	311112	0.181517915E+00	513151	811712
0.116676356E+00	412131	−361712	0.181817178E+00	612131	−361711
0.117123630E+00	413152	−717712	0.181817178E+00	612131	311111
0.117574072E+00	313152	711111	0.186741162E+00	512131	−361711
0.119092172E+00	512131	−661712	0.186741162E+00	512131	311111
0.119092172E+00	512131	611112	0.192214163E+00	412151	−717181
0.123836574E+00	413152	−751111	0.192214163E+00	412151	711111
0.127059823E+00	513151	−841712	0.196865746E+00	315152	811111
0.127207136E+00	512151	961712	0.196865827E+00	313152	−761111
0.127321357E+00	512151	811111	0.196866046E+00	313151	811111
0.127321357E+00	512151	−861711	0.199628947E+00	513151	−811711
0.127322250E+00	512151	711111	0.199885095E+00	412141	261712
0.127322250E+00	512151	−717181	0.200115007E+00	412141	261712
0.127323651E+00	512151	741512	0.201277654E+00	512151	861712
0.127323651E+00	512151	−747582	0.201277654E+00	512151	−811112
0.127393581E+00	612131	−417181	0.201910203E+00	413151	811111
0.127393581E+00	612131	411111	0.206654974E+00	412131	311111
0.127437007E+00	512151	951712	0.206654974E+00	412131	−351711
0.127585011E+00	513151	−841712	0.208267958E+00	612131	−615162
0.127739627E+00	413141	−111712	0.208267968E+00	612131	665762
0.127739596E+00	413141	111111	0.209010344E+00	612131	217182
0.131223798E+00	412151	811111	0.209010344E+00	612131	217182
0.131223798E+00	412151	−851711	0.209132706E+00	415152	811112
0.134023962E+00	413151	−711111	0.209433695E+00	512131	−617182
0.138460702E+00	312131	411111	0.209433695E+00	512131	611112
0.138460702E+00	312131	−461711	0.219279855E+00	413151	−861711
0.138460777E+00	313141	111111	0.224277413E+00	412131	411111
0.138460733E+00	312141	111111	0.224277413E+00	412131	−417181
0.138460733E+00	312141	−161711	0.227971081E+00	413151	711112
0.142857144E+00	415152	711111	0.228407818E+00	612131	−317181
0.147504808E+00	412131	411112	0.228407818E+00	612131	−317181
0.147504808E+00	412131	−417182	0.228407818E+00	612131	311111
0.152691784E+00	612131	261712	0.231706208E+00	513151	−711112
0.152691784E+00	612131	261712	0.238530336E+00	512131	−611112
0.153174822E+00	412152	811112	0.238530336E+00	512131	651712
0.153174822E+00	412152	−861712	0.241978875E+00	413151	811712
0.153727417E+00	512131	−317182	0.242283633E+00	412152	−817182
0.153727417E+00	512131	311112	0.242283633E+00	412152	811112
0.153922082E+00	312151	811111	0.245104477E+00	612131	−611112
0.153922082E+00	312151	−861711	0.245104477E+00	612131	611112

$x=\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$p_1p_2p_3p_4p_5p_6$		$x=\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$p_1p_2p_3p_4p_5p_6$	
0.246536749E+00	412151	−811112	0.333016273E+00	412141	261711
0.246536749E+00	412151	861712	0.333139419E+00	415152	911782
0.249570224E+00	412131	261712	0.333315030E+00	512131	−411112
0.249977974E+00	413152	−861112	0.333315030E+00	512131	411112
0.249996933E+00	413141	−111112	0.333324343E+00	513151	845112
0.250000538E+00	313141	−111711	0.333332374E+00	412141	−117182
0.250001465E+00	413141	−111111	0.333332374E+00	412141	161712
0.250007199E+00	413151	−711112	0.333332923E+00	415152	811111
0.250431994E+00	412131	261712	0.333333120E+00	413152	−817712
0.256777064E+00	412151	961711	0.333333252E+00	413151	711111
0.260732400E+00	415152	711112	0.333333199E+00	413151	711112
0.268475916E+00	412152	−861711	0.333333333E+00	415152	711111
0.268475916E+00	412152	811111	0.333333313E+00	413152	811111
0.272242477E+00	412131	311112	0.333333367E+00	313151	811111
0.272242477E+00	412131	−317182	0.333333484E+00	413151	−711112
0.274602853E+00	513151	841711	0.333333813E+00	313152	−711711
0.275634532E+00	512151	961711	0.333333973E+00	315152	811181
0.276224553E+00	312151	961711	0.333333937E+00	412141	−147581
0.276386473E+00	512151	761712	0.333333937E+00	412141	141511
0.276386473E+00	512151	−711112	0.333334122E+00	413152	711111
0.276390819E+00	512131	−315162	0.333334294E+00	513151	−845112
0.276390819E+00	512131	365762	0.333334941E+00	513151	845111
0.276391416E+00	513151	−811112	0.333338179E+00	413152	861112
0.276391844E+00	512131	−661711	0.333339908E+00	413151	−811111
0.276391844E+00	512131	611111	0.333527024E+00	415152	911782
0.276392217E+00	513151	741111	0.333651803E+00	412141	261711
0.276393208E+00	312131	−361711	0.334924783E+00	512151	845562
0.276393264E+00	313151	−741181	0.334924783E+00	512151	−845562
0.276393208E+00	312131	311111	0.336371200E+00	513151	745112
0.276393308E+00	512131	311111	0.337328986E+00	512131	−611111
0.276393355E+00	313151	741111	0.337328986E+00	512131	611111
0.276393297E+00	312151	741511	0.337446767E+00	512131	−411112
0.276393308E+00	512131	−317181	0.337446767E+00	512131	411112
0.276393297E+00	212151	−747581	0.339737847E+00	512131	−311112
0.276393454E+00	312131	−517181	0.339737847E+00	512131	311112
0.276393454E+00	312131	511111	0.343591001E+00	513151	845112
0.276393558E+00	313151	−841711	0.344696983E+00	312152	−717181
0.276393971E+00	512131	217182	0.344696983E+00	312152	711111
0.276393971E+00	512131	217182	0.344697168E+00	315152	711111
0.276394619E+00	512151	811112	0.344697596E+00	312151	861711
0.276394619E+00	512151	−817182	0.344697596E+00	312151	−817181
0.276395324E+00	513151	−711182	0.344701824E+00	512151	967781
0.276395831E+00	512151	841511	0.344744236E+00	412151	861711
0.276395831E+00	512151	−847581	0.344744236E+00	412151	−817181
0.276397917E+00	513151	−841111	0.345366788E+00	512151	967782
0.276403930E+00	513151	711712	0.345616121E+00	512151	967782
0.276561918E+00	312151	961711	0.346263942E+00	512151	967781
0.277169146E+00	512151	961711	0.348807732E+00	412131	+617182
0.284466100E+00	412152	961712	0.348807732E+00	412131	611112
0.284466100E+00	412152	961712	0.367010710E+00	412131	−311112
0.290152457E+00	413151	861711	0.367010710E+00	412131	361712
0.294403617E+00	412131	611111	0.368527922E+00	412152	811111
0.294403617E+00	412131	−661711	0.368527922E+00	412152	−817181
0.294913667E+00	512151	−711112	0.369165807E+00	312141	261711
0.294913667E+00	512151	761712	0.369630591E+00	312141	261711
0.304168062E+00	412151	−711112	0.373191288E+00	413152	−811111
0.304168062E+00	412151	761712	0.373769570E+00	413141	111712
0.321728407E+00	512131	−611112	0.374782423E+00	412131	−317181
0.321728407E+00	512131	617182	0.374782423E+00	412131	311111
0.323098919E+00	412131	661712	0.374855821E+00	413152	−711512
0.323198919E+00	412131	−611112	0.375382250E+00	312131	611111

$x=\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$p_1p_2p_3p_4p_5p_6$		$x=\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$p_1p_2p_3p_4p_5p_6$	
0.375382250E+00	312131	−661711	0.499880992E+00	412141	267782
0.375382279E+00	312152	811111	0.499999903E+00	313141	111711
0.375382279E+00	312152	−861711	0.500000014E+00	412131	−411112
0.375382347E+00	313152	811111	0.500000014E+00	412131	467782
0.386065335E+00	412152	917182	0.500000244E+00	312141	161711
0.386065335E+00	412152	917182	0.500000244E+00	312141	−117181
0.391347536E+00	412152	865762	0.500000426E+00	312131	441511
0.391347536E+00	412152	−815162	0.500000426E+00	312131	−447581
0.412794971E+00	413152	817712	0.500005684E+00	413141	145712
0.417014528E+00	412131	−411112	0.500032461E+00	313152	−811111
0.417014528E+00	412131	461712	0.500056996E+00	413141	145711
0.427790560E+00	412131	261711	0.500118811E+00	412141	267782
0.428121433E+00	412131	217182	0.500206833E+00	413152	845711
0.429019067E+00	412131	217182	0.500320451E+00	412141	267781
0.429370091E+00	412131	261711	0.500366582E+00	312131	261711
0.445293489E+00	413152	811112	0.500797208E+00	412131	267781
0.446547656E+00	412131	−511112	0.505112939E+00	412152	967781
0.446547656E+00	412131	561712	0.580177226E+00	312152	961711
0.447521623E+00	413152	761112	0.580177226E+00	312152	961711
0.449912999E+00	412131	−647581	0.600887588E+00	313152	811111
0.449912999E+00	412131	641511	0.600888071E+00	312152	−817181
0.453119509E+00	412152	761712	0.600888071E+00	312152	811111
0.453119509E+00	412152	−711112	0.600888416E+00	312131	−611111
0.460495741E+00	413141	−111112	0.600888416E+00	312131	661711
0.460495643E+00	413141	111711	0.654508697E+00	313152	−811711
0.468084183E+00	412152	817182	0.666670144E+00	312131	361711
0.468084183E+00	412152	−811112	0.666670144E+00	312131	−317181
0.469813555E+00	412152	961711	0.723603082E+00	312131	611111
0.475262474E+00	412131	611112	0.723603082E+00	312131	−617181
0.475262474E+00	412131	−611112	0.723605141E+00	312152	865761
0.482672782E+00	412141	145562	0.723605141E+00	312152	−815161
0.482672782E+00	412141	−145562	0.723606654E+00	313152	−815111
0.486445734E+00	413152	−811112	0.723606835E+00	312131	−311111
0.486449124E+00	413152	845711	0 723606835E+00	312131	361711
0.489120942E+00	412152	967781	0.723607371E+00	313152	815711
0.491201602E+00	413152	711112	0.723608302E+00	312152	917181
0.492277056E+00	412131	−311112	0.723608302E+00	312152	917181
0.492277056E+00	412131	311112	0.723703876E+00	313152	715111
0.494959154E+00	413152	−711112	0.741384664E+00	313152	711111
0.496229865E+00	412131	−511112	0.743158678E+00	313152	811111
0.496229865E+00	412131	511112	0.743160345E+00	312152	−811111
0.496663581E+00	313141	−111181	0.743160345E+00	312152	811111
0.496334502E+00	412152	711112	0.743162140E+00	312131	−645561
0.496834502E+00	412152	−711112	0.743162140E+00	312131	645561
0.499186272E+00	412131	267781	0.749613472E+00	312131	267781
0.499634197E+00	312131	261711	0.750385587E+00	312131	267781
0.499678321E+00	412141	267781			

II. Az uniform poliéderek számáról

Az I. részben a keresett uniform (gömbi) poliéderek bizonyos alkotórészeinek számát korlátozó tételeket bizonyítottunk. Ezután egyenletek segítségével meghatároztuk az összes lehetséges poliéderhosszat. Ebben a részben sor kerül az összes lehetséges uniform poliéder megkonstruálására.

3.§. Annak vizsgálata, hogy egy bizonyos élhosszal milyen laphoz milyen lap csatlakozhat (élben) és hogyan (a két gömbi lapnak van-e közös része vagy nincs).

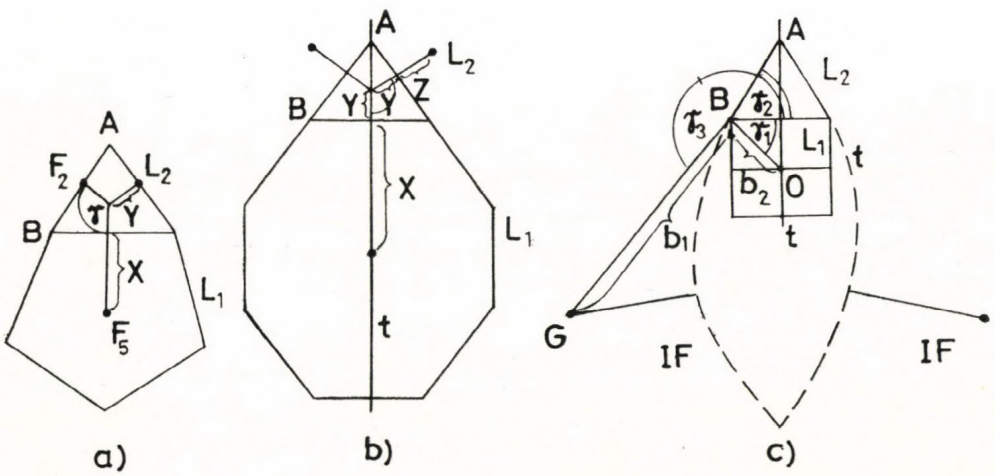
Tudjuk már az összes lehetséges élhosszat elegendő (legalább 10^{-6}) pontossággal a konstruálandó gömbi poliéderek számára. Határozzuk meg ezután, hogy egy L_1 laphoz, annak egy oldalához milyen L_2 lap csatlakozhat és hogyan.

A) Ha L_1 és L_2 középpontjában is van forgáscentrum, akkor a (6) egyenlet és a 14. tétel alapján rendben vagyunk.

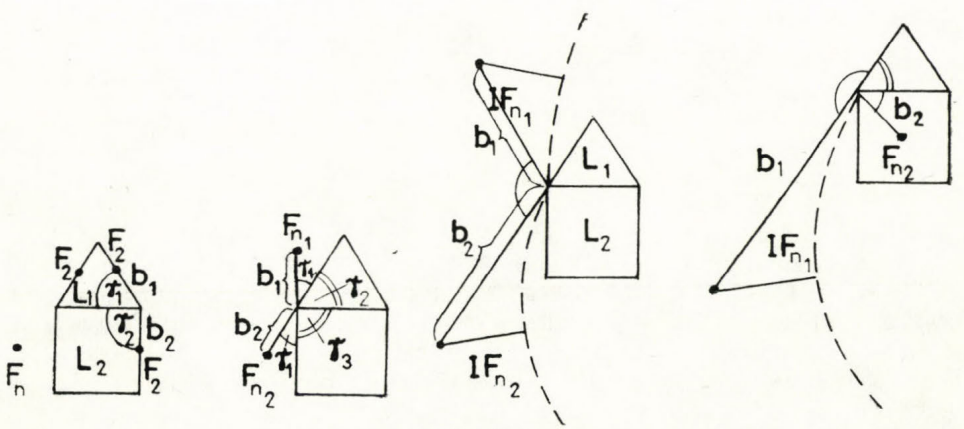
B) L_1 középpontjában van, L_2 középpontjában nincs forgáscentrum.

$L_2 \equiv \{4\}$ vagy $\{3\}$ lehet csak ekkor (a 13. lemma miatt). Ekkor az ellenőrző számítások számára az összes lehetséges transzformációeset-típust a 28. ábrán mutatjuk meg, (ezeket természetesen gömbön kell elképzelnünk). Az L_2 lap A csúcsát B-be átviheti forgatás (félfordulat vagy nem az), illetve IF_n típusú mozgatás ($n \neq 2$ ugyanis ha $n=2$, akkor a gömbfelületen egy főkörívre való tükrözésről van szó, és ekkor már ismert esetre ((6) egyenlet) jutunk). L_1 $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\left\{\frac{5}{2}\right\}$, $\{6\}$, $\{8\}$, $\left\{\frac{8}{3}\right\}$, $\{10\}$, $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ lehet.

t főkörívre való tükrözést jelent.



28. ábra



29. ábra

A 29. ábrán $L_1 \equiv \{3\}$, $L_2 = \{4\}$, de természetesen $L_1 \equiv \{3\}$, $L_2 \equiv \{3\}$, illetve $L_1 = \{4\}$, $L_2 = \{4\}$ is lehet.

A feltételezett forgáscentrum-távolságokat a következő módokon határozhatjuk meg (az összes lehetséges oldalhossz, és így X, Y, Z ismert):

$$a_1 = \cos Y \cos(X+Y) + \sin Y \sin(X+Y) \cos\gamma,$$

$$a_2 = \cos(Y+Z) \cos(Y+X) + \sin(Y+Z) \sin(Y+X) \cos\gamma,$$

$$a_3 = \cos b_1 \cos b_2 + \sin b_1 \sin b_2 \cos(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \equiv \widehat{OG}.$$

Vagyis, ha a megfelelő esetekben a_1 vagy a_2 vagy a_3 lehetséges forgáscentrum-távolság, akkor L_1-hez kapcsolódhat L_2.

C) Most már csak olyan eseteket kell vizsgálni, amikor L_1 és L_2 $\{3\}$ vagy $\{4\}$, és egyik középpontjában sincs forgáscentrum, (29. ábra). Ezzel a függelék 4. pontjában foglalkozunk.

Felmerül a kérdés, hogy nem illeszthető-e a 19. ábra transzformáció-összeállításának megfelelő lapkettős egy — már ismert élhosszú — konfigurációhoz. Ha minden lap középpontjában van forgáscentrum, figyelembe véve a számítási eredményeket is, erre nyilvánvalóan nem kerülhet sor. A 29. ábrának megfelelő ellenőrző számítási eredményeket is ismerve, erre más esetben sem kerülhet sor. Az összes ilyen esettípust a 21/c., illetve a 31. ábrán a $\{4\}$ megfelelő oldalához kapcsolódó háromszög-ötszög lapkettős (H_1 és P_1, illetve H_2 és P_2 pontozott vonallal), valamint a 21/a., 21/b. ábrán a $\{3\}$ megfelelő oldalához kapcsolódó H_3 és P_3, illetve H_4 és P_4 lapkettős szemlélteti. Tehát a $\{4\}$, illetve a $\{3\}$ (legalább) egy oldalára IF típusú (nem tükrözés) transzformáció jellemző, a többi oldalak közül pedig ($\{4\}$-nél legalább) kettőre forgatás vagy IF típusú (nem tükrözés) jellemző.

4. §. A poliéderek konstrukciója

Egy kívánt uniform (gömbi) poliédert oly módon kezdünk előállítani, hogy a gömb egy pontja mint poliédercsúcs köré egymás után illesztjük — az előbbiek szerint — lehetséges, ismert élhosszúságú lapokat ($L_1, L_2, \ldots$) Ekkor a következő eseteket különböztetjük meg:

1. Tudjuk, hogy (egy csúcs körül) minden lap középpontjában van forgáscentrum. (Ezzel az esettel a függelék 1. pontjában foglalkozunk.)

2. $L_1, L_2, \ldots$ között csak 1 lap középpontjában van forgáscentrum (feltevés). Ekkor a következő próbát hajtjuk végre (függelék 2.):

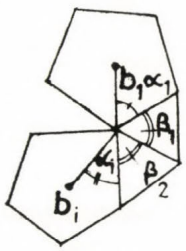
$$\cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i\right) \quad (k_i = \pm 1,\ \alpha_i \text{ az } i\text{-edik lap lapszöge},\ m = 1, 2, \ldots, 22)$$

egyenlő-e 1-gyel a hibahatáron belül? Természetesen az első m-re, amelyre (közelítően) 1-et kapunk, ezt a próbát befejezzük.

3. Két lap (L_1, L_i) középpontjában van forgáscentrum, és a közöttük levők ($L_2, \ldots, L_{i-1}$) középpontjában (a feltevés szerint) nincs forgáscentrum (függelék 3.). A 11. tétel miatt elegendő, ha $i \leqq 11$. Most a feltételezett forgáscentrum-távolságokat (t) ily módon számítjuk (30. ábra). (Hasonló ellenőrzést hajtunk végre az 1.-ben.)

$t = \cos b_1 \cos b_2 + \sin b_1 \sin b_2 \cos(\alpha_1 \pm \beta_2 \pm \ldots \pm \beta_{i-1} \pm \alpha_i)$.

4. Egyik lap középpontjában sincs — feltevésünk szerint — forgáscentrum. Ekkor csak {3}-ról, vagy {4}-ról lehet szó. (Függelék 4.) A konstrukcióknál kiderül, hogy egy bizonyos (gömbi) uniform poliéder esetén legfeljebb egy fajta lap, leginkább {3}, egyetlen esetben $\left(L_1=\{3\},\ L_2=\{4\},\ L_3=\left\{\frac{5}{2}\right\},\ L_4=\{4\},\ L_5=\{3\},\ L_6=\{4\},\right.$ $\left.L_7=\left\{\frac{5}{2}\right\},\ L_8=\{4\}\right)$ pedig {4} középpontjában nem lehet forgáscentrum.



30. ábra

A számítások pontossága. (A számításokat a CDC 3300 számítógépen végeztük.) Az oldalhosszak meghatározásánál a legtöbb műveletet a (7) egyenlet megoldása igényli. Belátható (elemi hibaszámítást felhasználva), hogy dupla pontosságú aritmetikát felhasználva (ekkor 22 értékes jegyre számol a gép) a 8-adfokú egyenlet együtthatói legfeljebb 10^{-15}-tel térnek el a pontostól, és a kapott gyökök hibakorlátja kevesebb, mint 10^{-10}. A behelyettesítéses ellenőrzéseknél a hibakorlát 10^{-4}-nél kisebbre vehető. A (7) egyenletet kivéve, elegendő szimpla pontos aritmetikával számolni. A gyököket 10^{-6} pontossággal elég meghatározni. A már ismert oldalhosszakat (pl. szabályos testeknél) az egyenletekből legalább ilyen pontossággal meg lehet határozni. Ugyanez áll az újonnan adódó gyökökre.

Vannak egyenletek, amelyeknek valamely két (vagy több) gyöke közelebb van egymáshoz, mint $\frac{1}{2}10^{-3}$. Ezek a legtöbb esetben többszörös gyökök. Ezt a tényt azonban több esetben nem tudjuk bebizonyítani az egyenletből. (Ez csak akkor lehetséges, ha az összes gyököt nem tizedestörtes alakban is meg tudjuk adni.) Még sincs probléma ezekben az esetekben sem:

0,27639
0,58017
0,72360
0,50000
0,6545
0,3333
0,6666
0,2500
0,2567
0,1273

Ezek a gyökök megfelelnek (minden transzformáció-összeállítás esetén) egy, vagy több már ismert poliéderélnek legalább négy tizedesig. Az eddig ismert poliéder hosszokon kívül ezen élhosszak $\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$ sugarú környezetében más élhossz nem lehet-

séges. Ugyanis pl. a $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0{,}27639\ldots$ esetén csak a következő esetekben lehet a lapszögek összege 2π többszöröse (egy bizonyos hibahatáron belül).

$$f(a) = \sum_1^5 2 \arcsin \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}} = 2k\pi$$

vagy

$$g(a) = \sum_1^5 2 \arcsin \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Azonban $f(a)$, ill. $g(a)$ szigorúan monoton függvények, mert deriváltjuk >0:

$$f'(a) = \frac{5\cos\frac{\pi}{5}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{5}-\left(\frac{a}{2}\right)^2}} \frac{\frac{a}{2}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Így legfeljebb egy valós gyökük lehet. A többi esetben is — $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}$-ot kivéve — hasonlóan lehet eljárni. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}$ esetén lehetséges, hogy

$$f'(a) = 3\frac{\frac{a}{2}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2} \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{5}-\left(\frac{a}{2}\right)^2}} - \frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{\sqrt{\sin^2\frac{2\pi}{5}-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $f'(a)$ ($a=0$-át kivéve) nem lehet 0. Tudjuk most már, hogy egy bizonyos oldalhosszal milyen lapok létezhetnek, és ezek hogyan kapcsolódhatnak egymáshoz, és az összes ilyen esetet ismerjük.

Ezek után egy kiválasztott L laphoz kapcsolódóan, annak egy A csúcsa körül kíséreljük meg egy gömbi poliéder felépítését. Ily módon megkapjuk az összes eddig ismert uniform poliédert, először az egy csúcsa körüli lapokat, de azután a forgásszimmetriákat kihasználva az egész poliédert.

Az eddig ismert 53 nem-konvex, nem-szabályos uniform poliéderen kívül újabbat nem kaptunk. Így, számításunk szerint, Coxeter és mások [1]-ben közölt sejtését bebizonyítottuk.

Függelék

1. Uniform poliéder konstrukciója abban az esetben, ha olyanok a szimmetriaoperáció viszonyok, hogy minden lap középpontjában van forgáscentrum. ({4}-nél 4-es vagy 2-es). Ha

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{11+4\sqrt{5}} = 0{,}050139709\ldots,$$

akkor csakis a következőképpen kapcsolódhatnak egymáshoz az egyes lapok:

$\{3\}$-hoz $-\{10\}$ és $\{4\}$ $\quad$ $\{4\}$-höz $\pm\{10\}$, $\{3\}$ és $\{5\}$

$\{5\}$-höz $\{4\}$, $\{10\}$ $\quad$ $\{10\}$-hez $-\{3\}$, $\pm\{4\}$, $\{5\}$.

Tudjuk azt ([1]), hogy ilyen él esetén a következő uniform poliéderek valósulnak meg: $(10, -3, 10, 5)$; $(3, 4, 5, 4)$; $(-4, -10, 4, 10)$. Számítással nem nehéz ellenőrizni, hogy ilyen $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ esetén

$$\alpha_3+\alpha_4=\alpha_{10}, \quad \text{illetve} \quad \alpha_4+\alpha_5+\alpha_{10}=2\pi,$$

ahol

$$\alpha_i=\arcsin\frac{\cos\frac{\pi}{i}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}, \quad \text{és } \alpha_i \text{ az } \{i\} \text{ egyik szöge.}$$

Mindezeket figyelembe véve azt kell megvizsgálnunk, hogy a következő (4 lapból álló) konfigurációk esetén az első, és negyedik lap középpontja közti távolság a lehetséges 3 távolság között van-e (a hibahatárt is figyelve):

$$(-10,\ 3,\ -10,\ -5)$$

$$(-10,\ 3,\ -10,\ -4)$$

$$(\ 4,\ 3,\ \ 4,\ 10)$$

$$(\ 5,\ 4,\ -10,\ -4)$$

$$(\ 5,\ 4,\ -10,\ -5)$$

Nem nehéz belátni, hogy a még lehetséges konfigurációkat az eddigiek tartalmazzák, (forgások szorzástétele), vagy a következőkben felsorolt okok miatt nem szükséges őket vizsgálni. Pl. egy élhez 3 lap is csatlakozna; vagy tudjuk, hogy a poliéder megvalósul. Azt pedig, hogy pl. a $\{4\}$, $\{10\}$, $\{4\}$ vagy az $\{5\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ összeállítás (egymás után véve a lapokat) nem lehetséges, a számításokból lehet látni. Kiderül végül, hogy ezzel az éllel másfajta poliéder nem létezhet.

Ha $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{2}{17+3\sqrt{5}}=0{,}084358984$, akkor a következő szomszédos lapelhelyezések lehetnek (és más nem):

$\{3\}$-höz $\{6\}$, $\{10\}$

$\left\{\frac{5}{2}\right\}$-höz $\{6\}$, $-\{10\}$

$\{6\}$-höz $\{3\}$, $-\left\{\frac{5}{2}\right\}$, $\pm\{10\}$

$\{10\}$-höz $\{3\}$, $-\left\{\frac{5}{2}\right\}$, $\pm\{6\}$.

A lehetséges megvalósuló poliéderek:

$$\left(3,\ 6,\ \frac{5}{2},\ 6\right);\quad \left(10,\ -\frac{5}{2},\ 10,\ 3\right);\quad (10,\ 6,\ -10,\ -6).$$

Ellenőrizhető, hogy $\alpha_{\frac{5}{2}}+\alpha_6=\alpha_{10}$; $\alpha_3+\alpha_6+\alpha_{10}=2\pi$. A vizsgálandó konfigurációk:

$$6\quad 3\quad 6\quad -10$$

$$10\quad 3\quad 10\quad -\frac{5}{2}$$

$$10\quad 3\quad 10\quad -\ 6$$

$$6\quad \frac{5}{2}\quad 6\quad -10$$

$$-10\quad \frac{5}{2}\quad -10\quad 6$$

$$-10\quad \frac{5}{2}\quad -10\quad -6.$$

Ha $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{5+2\sqrt{2}}=0{,}12773958\ldots$, a szomszédos lapelhelyezkedések:

{3}-höz {4}, $-\{8\}$, {4}-höz {3}, {4}, $\pm\{8\}$ {8}-höz $-\{3\}$, $\pm\{4\}$.

A lehetséges megvalósuló poliéderek:

$$(3,\ 4,\ 4,\ 4);\quad (8,\ 4,\ -4,\ -8);\quad (8,\ -3,\ 8,\ 4).$$

Ellenőrizhető, hogy: $\alpha_3+\alpha_4=\alpha_8$.

A vizsgálandó konfigurációk:

$$-8\quad 3\quad -8\quad -4$$

$$4\quad 3\quad 4\quad 8.$$

Ha $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{7}=0{,}14285714\ldots$, akkor a szomszédos lapelhelyezkedések:

{4}-höz {5}, $\left\{\frac{5}{2}\right\}$, {6}

{5}-höz {4}, {6}

$\left\{\frac{5}{2}\right\}$-höz {4}, $-\{6\}$

{6}-höz $\pm\{4\}$, {5}, $-\left\{\frac{5}{2}\right\}$, {8}, $\left\{\frac{8}{3}\right\}$

{8}-höz {6}, $\left\{\frac{8}{3}\right\}$

$\left\{\frac{8}{2}\right\}$-höz {8}, {6}.

A lehetséges megvalósuló poliéderek:

$$\left(4, \frac{5}{2}, 4, 5\right); \quad \left(6, 8, \frac{8}{3}\right); \quad (6, 4, -6, -4); \quad \left(6, -\frac{5}{2}, 6, 5\right).$$

Ellenőrizhető, hogy $\alpha_4+\alpha_{\frac{5}{2}}=\alpha_6$, és $\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=2\pi$. A vizsgálandó konfigurációk:

$$4 \quad 5 \quad 4 \quad -6$$

$$4 \quad \frac{5}{2} \quad 4 \quad 6$$

$$4 \quad 6 \quad -\frac{5}{2} \quad 6$$

$$-4 \quad 6 \quad 5 \quad 6$$

Ha $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{2}{17-3\sqrt{5}}=0{,}19432954\ldots$, a szomszédos lapelhelyezkedések:

$\{3\}$-höz $-\{6\}$, $\left\{\frac{10}{3}\right\}$; $\{5\}$-höz $\{6\}$, $\left\{\frac{10}{3}\right\}$

$\{6\}$-höz $-\{3\}$, $\{5\}$, $\pm\left\{\frac{10}{3}\right\}$; $\left\{\frac{10}{3}\right\}$-höz $\{3\}$, $\{5\}$, $\pm\{6\}$.

A lehetséges megvalósuló poliéderek:

$$\left(3, \frac{10}{3}, 5, \frac{10}{3}\right); \quad \left(-\frac{10}{3}, -6, \frac{10}{3}, 6\right); \quad (-3, 6, 5, 6)$$

Ellenőrizhető, hogy $\alpha_3+\alpha_{\frac{10}{3}}=\alpha_6$, és $\alpha_5+\alpha_6+\alpha_{\frac{10}{3}}=2\pi$.

A vizsgálandó konfigurációk:

$$6 \quad -3 \quad 6 \quad \frac{10}{3}$$

$$\frac{10}{3} \quad 3 \quad \frac{10}{3} \quad 6$$

$$6 \quad 5 \quad 6 \quad -\frac{10}{3}$$

$$\frac{10}{3} \quad 5 \quad \frac{10}{3} \quad -6$$

Ha $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, akkor az összes lehetséges szomszédos lapelhelyezkedések:

$\{3\}$-höz $\{4\}$, $\pm\{6\}$

$\{4\}$-höz $\{3\}$, $\pm\{6\}$

$\{5\}$-höz $\left\{\frac{5}{2}\right\}$, $\pm\{6\}$

$\left\{\frac{5}{2}\right\}$-höz $\{5\}$, $\pm\{6\}$

$\{6\}$-höz $\pm\{3\}$, $\pm\{4\}$, $\pm\{5\}$, $\pm\left\{\frac{5}{2}\right\}$.

A lehetséges megvalósuló poliéderek:

$$(-3,\ 6,\ 3,\ 6);\quad \left(5,\ \frac{5}{2},\ 5,\ \frac{5}{2}\right);\quad (-4,\ 6,\ 4,\ 6);$$

$$(-5,\ 6,\ 5,\ 6);\quad \left(-\frac{5}{2},\ 6,\ \frac{5}{2},\ 6\right);\quad (\ 4,\ 3,\ 4,\ 3).$$

Ellenőrizhető, hogy $\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6=2\pi$, $\alpha_5+\alpha_{\frac{5}{2}}+\alpha_6=2\pi$.

A kivizsgálandó konfigurációk:

$$\begin{array}{llll}
6\ 3\ \pm6\ 5 & & 6\ 3\ \pm6\ \pm4 \\
6\ 3\ \pm6\ \frac{5}{2} & & 6\ \pm5\ 6\ \pm4 \\
6\ 4\ \pm6\ 5 & & 6\ \pm5\ 6\ \pm3 \\
6\ 4\ \pm6\ \frac{5}{2} & & 6\ \pm\frac{5}{2}\ 6\ \pm4 \\
6\ 3\ \pm6\ -5 & & 6\ \pm\frac{5}{2}\ 6\ \pm3 \\
6\ 3\ \pm6\ -\frac{5}{2} & & 6\ \pm5\ 6\ \pm\frac{5}{2} \\
6\ 4\ \pm6\ -5 & & \\
6\ 4\ \pm6\ -\frac{5}{2} & & \\
6\ 4\ \pm6\ -3 & & \\
6\ 4\ -6\ 3 & &
\end{array}$$

Erre az oldalhosszra vonatkozóan l. a függelék 4. pontját.

Ha $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{5-2\sqrt{2}}=0{,}460495713$, akkor az összes lehetséges szomszédos lapelhelyezkedések:

$$\begin{array}{lll}
\{3\}\text{-höz:} & -\{4\}, & \left\{\frac{8}{3}\right\}, \\
\{4\}\text{-höz:} & -\{3\}, \quad \{4\}, & \pm\left\{\frac{8}{3}\right\}, \\
\left\{\frac{8}{3}\right\}\text{-höz:} & \{3\}, & \pm\{4\}.
\end{array}$$

A lehetséges megvalósuló poliéderek:

$$\left(\frac{8}{3},\ 4,\ \frac{8}{3},\ 3\right),\quad (-3,\ 4,\ 4,\ 4),\quad \left(4,\ -\frac{8}{3},\ -4,\ \frac{8}{3}\right),\quad \left(4,\ 4,\ \frac{8}{3}\right):\ \text{prizma.}$$

Ellenőrizhető, hogy: $\alpha_3+\alpha_{\frac{8}{3}}=\alpha_4$.

A vizsgálandó konfigurációk:

$$-4 \quad 3 \quad -4 \quad \frac{3}{8}$$

$$-4 \quad 3 \quad -4 \quad -\frac{8}{3}$$

$$-4 \quad 4 \quad \frac{8}{3} \quad -4$$

Ha $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{\tau}{2}\right)^2=0{,}654508497\ldots$ $\left(\text{ahol } \tau=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, akkor az összes lehetséges szomszédos lapelhelyezkedések:

$$\{3\}\text{-höz} \quad \left\{\frac{5}{2}\right\}, \quad \pm\left\{\frac{10}{3}\right\}$$

$$\left\{\frac{5}{2}\right\}\text{-höz} \quad \{3\}, \quad \pm\left\{\frac{10}{3}\right\}$$

$$\left\{\frac{10}{3}\right\}\text{-höz} \quad \pm\{3\}, \quad \pm\left\{\frac{5}{2}\right\}.$$

A lehetséges megvalósuló poliéderek:

$$\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, -\frac{5}{2}\right), \quad \left(\frac{10}{3}, 3, \frac{10}{3}, -3\right), \quad \left(\frac{5}{2}, 3, \frac{5}{2}, 3\right).$$

A vizsgálandó konfigurációk:

$$3 \quad \frac{10}{3} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{10}{3}$$

$$-3 \quad \frac{10}{3} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{10}{3}$$

$$3 \quad \frac{10}{3} \quad -\frac{5}{2} \quad \frac{10}{3}$$

$$-3 \quad \frac{10}{3} \quad -\frac{5}{2} \quad \frac{10}{3}.$$

Ha $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{11-4\sqrt{5}}=0{,}486445656$, akkor az összes lehetséges szomszédos lapelhelyezkedések:

$$\{3\}\text{-höz} \quad \{4\}, \quad \left\{\frac{10}{3}\right\},$$

$$\{4\}\text{-höz} \quad \{3\}, \quad -\left\{\frac{5}{2}\right\}, \quad \pm\left\{\frac{10}{3}\right\},$$

$$\left\{\frac{5}{2}\right\}\text{-höz} \quad -\{4\}, \quad \left\{\frac{10}{3}\right\},$$

$$\left\{\frac{10}{3}\right\}\text{-höz} \quad \{3\}, \quad \pm\{4\}, \quad \left\{\frac{5}{2}\right\}.$$

A lehetséges megvalósuló poliéderek:

$$\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, 3\right), \quad \left(-\frac{10}{3}, 4, \frac{10}{3}, -4\right), \quad \left(3, 4, -\frac{5}{2}, 4\right).$$

Ellenőrizhető, hogy $\alpha_{\frac{5}{2}}+\alpha_{\frac{10}{3}}=\alpha_4$ és $\alpha_3+\alpha_4+\alpha_{\frac{10}{3}}=2\pi$.

A vizsgálandó konfigurációk:

$$-\frac{5}{2} \quad 4 \quad \frac{10}{3} \quad -4$$

$$-\frac{5}{2} \quad 4 \quad -\frac{10}{3} \quad -4$$

$$-\frac{5}{2} \quad 4 \quad \frac{10}{3} \quad \frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2} \quad 4 \quad -\frac{10}{3} \quad -3$$

$$\frac{10}{3} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{10}{3} \quad 4$$

$$4 \quad \frac{10}{3} \quad -4 \quad -3.$$

Ha $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2=0{,}095491\ 5028\ldots$, $\left(\text{ahol } \tau=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, akkor az összes lehetséges szomszédos lapelhelyezkedések:

$$\begin{aligned} \{3\}\text{-höz} \quad & \{5\}, \ \pm\{10\} \\ \{5\}\text{-höz} \quad & \{3\}, \ \pm\{10\} \\ \{10\}\text{-höz} \quad & \pm\{3\}, \ \pm\{5\}\ . \end{aligned}$$

A lehetséges megvalósuló poliéderek: (10, 5, 10, −3), (10, 3, 10, −3), (5, 3, 5, 3).

A vizsgálandó konfigurációk:

$$3 \quad 10 \quad 5 \quad 10$$

$$-3 \quad 10 \quad 5 \quad 10$$

$$3 \quad 10 \quad -5 \quad 10$$

$$-3 \quad 10 \quad -5 \quad 10$$

2. Olyan élhosszak (a), amelyeknél előfordulhat, hogy egyetlen lap (L_1) középpontjában lehet csak forgáscentrum az egy csúcs körül elhelyezkedő lapok közül, a következők lehetnek (ha a (10) egyenletet most nem vesszük figyelembe), ha $L_1 \equiv \{5\}$, $\left\{\frac{5}{2}\right\}$, és a többi lap $\{4\}$, illetve $\{3\}$.

$L_i = \{4\}, \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \ldots$	$L_i = \{3\}, \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \ldots$
0,0954915...	0,0537906...
0,0976755...	0,1175740...
0,0985130...	0,1539220...
0,1045340...	0,2510479...
0,1384607...	0,3369743...
0,1603574...	0,3446969...
0,2242774...	0,37548257...
0,2567771...	0,5801846...
0,2641204...	0,6008893...
0,3441301...	0,6545086...
0,3670107...	0,6558342...
0,3693975...	0,6756035...
0,4198212...	0,6913165...
0,4285758...	0,7052382...
0,43081275...	0,7078444...
0,4517020...	0,7131514...
0,4749301...	0,7387384...
0,492277...	0,7413855...
	0,7417182...
$i > 1$	$i > 1$

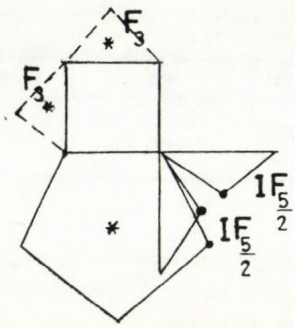
Az első oszlopnál, {4}-nél természetesen kétfajta egyenletből is megkapjuk az élhosszakat. 0,09549...-nél és 0,6545...-nél $L_1 = \{10\}$ vagy $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ is lehet.

A (10) egyenlet esetében a 19. ábrán mutatott transzformáció-viszonyoknak megfelelő forgáscentrum-távolság ellenőrzéseket kell végrehajtani. Ez azonban új poliéder létezésének lehetőségét kizárta.

3. a) Feltevésünk szerint most az egy csúcs körüli lapok közt van kettő (legalább) (L_1, L_2), amelyek középpontjában van forgáscentrum, és közöttük maximálisan 10 {3}, illetve {4} helyezkedhet el (a 11. tétel miatt). A (10) egyenletből kapott oldalhosszakkal most nem foglalkozunk. L_1 és L_2 lehetséges esetei: $\left\{\frac{5}{2}\right\}$, {5}, {3}, {4}. Az előző számításokból (pl. (6) egyenlet) kiderül, hogy a másfajta L_1, L_2 lapokat el kell vetnünk. Most is a (2)-beli élhosszakra hajtunk végre a szögösszegekre, illetve a forgáscentrum-távolságokra — más ismertetett (4.§.) — ellenőrző számításokat. Ezeknél a hibahatár 10^{-4} volt, mivel a gyököket legalább 10^{-6} pontossággal ismertük.

Az 1. esetben előfordult, hogy hibahatáron belülre esett bizonyos szögek összege. Így $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0{,}0985130...$-nál 10 {4} és 1 {5} alkotott volna egy (konkáv) poliéderszögletet. Ez az alakzat azonban nem fordulhat elő, mert az {5}-höz kapcsolódó {4} egy (másik) oldalára jellemző transzformáció 3-as forgatás lehet csak. (Ugyanis csak két esetben — (6) és (8) egyenlet — kaptunk ilyen oldalhosszat (31. ábra).) A (7) egyenletből azonban {5}, {4}, {3}, összeállításnál ilyen élhosszat nem kaptunk. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0{,}104534...$ esetén 19 {4} és 1 $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ lapokkal szintén konkáv uniform poliéder

lehetősége forgott fenn. Végül ez sem lehetséges, mert — mint előbb — mindenképpen elő kellene fordulni, hogy egy {4} két oldalára jellemző transzformáció egy 5-ös, illetve egy $\frac{5}{2}$-es forgatás legyen. A (7) egyenletből azonban ilyen oldalhossz nem adódik. Más élhosszaknál is hasonló módon lehet ezt a problémát megoldani.



31. ábra

A 3. a) pontban is kaptunk hibahatáron belül levő eseteket, amelyek végül is nem lehetségesek. Az elvetés oka vagy az előzőhöz hasonló ok, vagy a szögösszeg vizsgálat eredménye a forgáscentrum-távolság ellenőrzés eredményével ellentmondásba kerülne.

3. b) A (10) egyenlet esetében — a (2) végéhez hasonlóan — végzünk ellenőrző számításokat a forgáscentrum-távolságokra.

Végül is azt kapjuk, hogy a fenti oldalhosszakkal az eddig ismerteken kívül új poliéder nem létezhet. A számítások azt is igazolják, hogy a már ismert poliéderekre a kívánt próbák eredményei jóval a hibahatáron belül maradnak.

4. Olyan eset, amikor egy bizonyos élhosszal kétfajta lap (csak {3} vagy {4} lehet) is előfordulhat, amelynél nem állíthatjuk, hogy középpontjában forgáscentrumnak kell lenni, és {3}-ön és {4}-ön kívül esetleg másfajta lap is létezhet — a számítások szerint — csak 2 lehet: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0{,}25$ vagy 0,5. A számítások szerint nem fordulhat elő olyan eset, amikor $\left(\text{akár } \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0{,}25\text{-dal, akár 0,5-del}\right)$ csak egyetlen {3}-tól vagy {4}-től eltérő lap lenne egy csúcs körül. (Ugyanis a lapszögek összege nem lehetett 2π egész számú többszöröse.) Vegyük azokat az eseteket, amikor legalább két másfajta lap (L_1, L_2) is van a {3}, illetve {4}-eken kívül. Legyen $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0{,}25$. Ekkor L_1 és L_2 $\left\{\frac{5}{2}\right\}$, {5} és {6} lehet. Tudjuk, hogy $\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_{\frac{5}{2}} = \pi$, és hogy a (3, 4, 3, 4), $\left(\frac{5}{2}, 5, \frac{5}{2}, 5\right)$ (3, 6, −3, 6), (5, 6, −5, 6), $\left(\frac{5}{2}, 5, \frac{5}{2}, 5\right)$, (4, 6, −4, 6) poliéderek valósulnak meg. A 3.§. B) pontjában ismertetett próbákból kiderül, hogy {4}-höz nem kapcsolódhat élben {3} úgy, hogy a két lapnak (a gömbön) legyen közös belső része. Ugyancsak nem kapcsolódhat {4}-höz {4} és {3}-höz {3}, valamint {3} vagy {4} két

egymásutáni oldalához $\{5\}\left(\text{illetve } \left\{\frac{5}{2}\right\}\right)$. $\{4\}$-höz (illetve $\{3\}$-höz) $\{6\}$ és $\{5\}\left(\text{vagy } \left\{\frac{5}{2}\right\}\right)$ nem csatlakozhat. A számításokból azt kapjuk, hogy két 5-ös forgáscentrummal rendelkező (azonos) lap között csak azonos számú $\{3\}$ és $\{4\}$ lehet. Elegendő megvizsgálni a $\left(-\frac{5}{2}, 4, 3, +\frac{5}{2}, 3, 4\right)$ (P_L) 2π szögösszegű, egy csúcs körüli lapösszeállítást. Tovább építve azonban a lapokat egy P_L-beli $\{3\}$-höz egy (újabb) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ csatlakozna (mert 4, 3, 4-es részkonfiguráció itt könnyen láthatóan nem lehetséges egy csúcs körül), majd P_L-beli $\{4\}$-höz két $\left\{\frac{5}{2}\right\}$, ez azonban ellentmondás a számításokkal.

A $(-5, 4, 3, 5, 3, 4)$ összeállítás lehetetlenségét hasonlóan igazolhatjuk. A $\pm\{3\}$, $\{6\}$ (illetve $\pm\{4\}$, $\{6\}$) konfiguráció ismétlődése sem eredményez új poliédert.

Nem illeszthető $2l$ ($l=1, 2, \ldots$) darab $\{3\}$ (sem $\{4\}$) — közülük l pozitív, l negatív előjellel az egy csúcs körüli $2\pi k$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$) szögösszegű lapok közé. A felsorolt feltételek miatt $\left(\frac{a}{2}\right)^2=0{,}25$-dal nem létezik uniform poliéder az ismerteken kívül, az összes lehetséges lapkapcsolódásokat figyelembe véve. Különben például egy élhez kettőnél több lap csatlakozna, vagy már ismert esettel van dolgunk, vagy egyéb említett korlátozás miatt nem lehetséges az összeállítás.

Legyen $\left(\frac{a}{2}\right)^2=0{,}5$. Tudjuk, hogy $\alpha_4=\pi$, $\alpha_3=\frac{\pi}{2}$. Emiatt nem lehetséges a $(4, 3, 3)$; $(4, -3, -3)$; $(4, 4, 3, 3)$; $(4,3, 4, 3)$ összeállítás. Tudjuk, hogy a $(3, 3, 3, 3)$, $(-3, 4, 3, 4)$, $\left(3, 3, 3, -\frac{5}{2}, 3, +\frac{5}{2}\right)$, $\left(4, \frac{5}{2}, 4, 3, 4, -\frac{5}{2}, 4, -3\right)$ esetek megvalósuló poliéderek. A számításokat figyelembe véve kiderül, hogy két $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ lap között csak páratlan számú $\{3\}$ lehet. $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ egy $\{4\}$ két egymásutáni oldalához nem csatlakozhat. Nem illeszthető az egy csúcs körüli $2\pi k$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$) szögösszegű lapok közé $2l$ $\{3\}$ (ill. $\{4\}$) (+-szal és −-szal, mint előbb ($l=1, 2, \ldots$)) úgy, hogy új poliédert kapnánk.

Hasonlóan az előző esethez azt kapjuk — az összes lehetséges összeállítás vizsgálata után —, hogy $\left(\frac{a}{2}\right)^2=0{,}5$-del az eddig ismerteken kívül új poliéder nem létezik.

5. Azoknál az eseteknél, amelyeknél az oldalhossz szabályos poliéder élhossza, figyelembe véve az adott transzformáció viszonyokat, minden alkalommal egy szabályos poliéder vagy szabályos összetétel (compound) éleiből álló alakzat adódik.

6. Az $\left(\frac{a}{2}\right)^2=0{,}27639\ldots$ vagy 0,25, illetve 0,5 esetekben lép fel a következő probléma. Két nagyon közeli (x_1, x_2) gyöke van az egyenletnek a gépi számítás szerint. (Valószínűleg többszörös gyökök, de ezt azonnal nem tudjuk bizonyítani.) Az egyik gyök biztos, hogy egy szabályos test (vagy ismert poliéder) élhossza (a transzformáció viszonyok miatt ilyennek kell lenni). $\left(\frac{a}{2}\right)^2=0{,}27639\ldots$ esetén előfordulhat, hogy a lapszögek összegére:

$$f(a) = 2\left(k_3\alpha_3(a) \pm k_5\alpha_5(a) \pm k_{\frac{5}{2}}\alpha_{\frac{5}{2}}(a)\right)$$

$|f(a)-2\pi k|<\varepsilon$, valamely k egész számra, ahol $k_3+k_5+k_{\frac{5}{2}}\leqq 23$; $0\leqq k_3, k_5, k_{\frac{5}{2}}$ egész számok.

$$\alpha_3(a)=\arcsin\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2},\quad \alpha_5(a)=\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2},\quad \alpha_{\frac{5}{2}}(a)=\frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Belátható, hogy $f'(a)>0$ $a=2\sqrt{0{,}27639\ldots}$ környezetében. Így vagy ismert poliéderre jutunk, vagy egy élhez 3 lap is csatlakozna. Kiderül tehát, hogy $x_1=x_2$ többszörös gyökök. $\left(\frac{a}{2}\right)^2=0{,}25$ és 0,5 esetén is hasonlóan, felhasználva az eddigi vizsgálatokat adódik a többszörös gyökök lehetőségének megoldása.

IRODALOM

[1] Coxeter, H. S. M.; Longuet—Higgins, M. S. and Miller, J. C. P. (1954); Uniform Polyhedra, *Phil. Trans. Roy. Soc. London,* A 264, 401—450.

[2] С. П. Сопов (1970): Доказательство полноты перечня элементарных однородных многогранников, *Украинский геометрический сборник*, вып. 8, 139—156.

[3] J. Skilling (1975); The complete set of uniform polyhedra, *Phil. Trans. Roy. Soc. London,* A 278, 111—135.

[4] L. Fejes Tóth (1964); *Regular Figures* (Pergamon Press).

[5] Coxeter, H. S. M. (1948); *Regular Polytopes,* London.

О ЧИСЛЕ ОДНОРОДНЫХ МНОГОГРАННИКОВ, I—II.

И. СЕПЕШВАРИ

ON THE NUMBER OF UNIFORM POLYHEDRA I-II.

I. SZEPESVÁRI

LOKÁLISAN KOMPAKT CSOPORTOK: CSOPORT NEUMANN-ALGEBRA ÉS DUALITÁS

PETZ DÉNES

A lokálisan kompakt csoportok analízise kiterjedt elmélet, ezért egy jól meghatározott témakörre, a dualitási tételekre, összpontosítjuk a figyelmünket. Ha G kommutatív csoport, akkor létezik úgynevezett duális csoportja, amely ugyancsak kommutatív lokálisan kompakt csoport, és amelynek duálisa Pontrjagin nevezetes tétele szerint maga G. A nem-kommutatív esetben Tannaka bizonyított dualitási tételt kompakt csoportokra 1938-ban, és Stinespring unimoduláris csoportokra 1959-ben. (Az unimoduláris csoportok osztálya magában foglalja a kommutatív és a kompakt csoportokat.) A 7.§-ban tárgyalt dualitási tételt Eymard—Saito dualitási tételnek lehetne nevezni. Ezzel nem merítettük ki a dualitási tételek sorát. A 70-es években, elsősorban csoport hatásokra vonatkozóan, számos dualitás jellegű eredmény született, amelyekre egyáltalán nem térünk ki.

A dolgozat feltételez bizonyos előismereteket. Főképpen az analízis és a funkcionálanalízis alapjainak alapos ismeretét, másrészt elemi jártasságot a Banach-algebrák elméletében és a klasszikus Fourier-analízisben. A szerző bevezető jellegű kiegészítő olvasmányként Loomis, Rudin és Topping (az irodalom jegyzékben pontosan idézett) könyvecskéit javasolja.

1. §. Invariáns mérték lokálisan kompakt csoportokon

Ha a G csoporton adva van egy olyan topológia, amelyre a $(t, s) \mapsto t^{-1}s$ leképezés $G \times G \to G$ értelemben folytonos, akkor G-t topologikus csoportnak mondjuk. Jelölésben a topológiát nem tüntetjük fel külön. G lokálisan kompakt, ha minden elemének van kompakt környezete. Mivel az $s \mapsto ts$ eltolások homeomorfizmusok minden $t \in G$ mellett, ez ekvivalens azzal, hogy az e egységelemnek van kompakt környezete. A továbbiakban csoport mindig lokálisan kompakt Hausdorff-féle topologikus csoportot fog jelenteni. Természetesen minden csoport lokálisan kompakt topologikus csoporttá válik, ha a diszkrét topológiával látjuk el. Kevésbé triviális példák: $\mathbf{R}^n$ additív csoportja az euklideszi topológiával, a nem 0 valós számok multiplikatív csoportja, az $n \times n$-es invertálható valós mátrixok multiplikatív csoportja az $\mathbf{R}^{n^2}$-ből örökölt topológiával (jelölése: $GL(n, \mathbf{R})$), $GL(n, \mathbf{R})$ nevezetesebb részcsoportjai: az 1 determinánsú mátrixok $SL(n, \mathbf{R})$ és az unitér mátrixok $U(n)$ csoportja. Az utóbbi csoport kompakt.

Ha f G-n értelmezett függvény és $t \in G$, akkor legyen

$$f_t(s) = f(ts), \quad f^t(s) = f(st^{-1}) \quad (s \in G).$$

f_t és f^t az f függvény t-vel való bal oldali, illetve jobb oldali eltoltja. G szokásos

függvényalgebrái általában zártak az eltolásokra. Vonatkozik ez például $\mathscr{K}(G)$-re, a kompakt tartójú folytonos komplex függvények algebrájára. A harmonikus analízis kiindulópontja a következő

1.1. Tétel. *$\mathscr{K}(G)$-n létezik egy pozitív, nem nulla, a bal oldali eltolásokkal szemben invariáns I funkcionál, azaz*

(1a) $I(f) \geqq 0$ ha $f \geqq 0$,
(1b) $I(f) = I(f_t)$ ha $f \in \mathscr{K}(G)$ és $t \in G$.

Továbbá, I állandó szorzótól eltekintve egyértelmű.

A Riesz reprezentációs tétel szerint I előáll egy μ Radon-féle mérték szerinti integrálásként. μ-t Haar-mértéknek, I-t pedig Haar-integrálnak hívják. A Haar-mérték létezését Haar Alfréd bizonyította metrizálható csoportokra 1933-ban, a tétel fenti változata azonban több névhez kapcsolható (Kakutani, Neumann, A. Weil). μ legfontosabb tulajdonságai a következők:

(1c) $\mu(K) < \infty$, ha K kompakt,
(1d) $\mu(U) > 0$, ha U nyílt,
(1e) $\mu(U) = \sup \{\mu(K) : K \subset U \text{ kompakt}\}$, ha U nyílt,
(1f) $\mu(B) = \mu(tB)$, ha $t \in G$ és B mérhető.

Speciálisan, ha G kompakt, akkor μ véges. (Egyébként ez az állítás meg is fordítható.)

$\mathbf{R}^n$ additív csoportján a Haar-mérték maga a Lebesgue-mérték. További példák: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ multiplikatív csoportján a Haar-integrál $I(f) = \int \frac{f(t)}{|t|} dt$ alakú; $GL(2, \mathbf{R})$-en

$$I(f) = \iiint \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{(x_1 x_4 - x_2 x_3)^2} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

(tehát a Haar-mérték abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre vonatkozóan, és Radon—Nikodym-deriváltja $\det^{-2}$).

Legyen $t \in G$-re $I^t(f) = I(f^t)$ $(f \in \mathscr{K}(G))$. Ekkor I^t rendelkezik az (1a) és (1b) tulajdonságokkal, ezért a tétel szerint I-nek egy $\Delta(t)$ állandó szorosa: $I(f^t) = \Delta(t) I(f)$ minden $f \in \mathscr{K}(G)$-re. $\Delta : G \to \mathbf{R}^+$ folytonos csoporthomomorfizmus, a G csoport moduláris függvénye. $\Delta \equiv 1$ azt jelenti, hogy a Haar-integrál nem csak a bal oldali, hanem a jobb oldali eltolásokkal szemben is invariáns. Ha egy csoportra ez teljesül, akkor unimodulárisnak mondjuk. Természetesen minden diszkrét és kommutatív csoport unimoduláris. Ha G kompakt, akkor $f \equiv 1 \in \mathscr{K}(G)$, így $I(f) = I(f^t) = \Delta(t) I(f)$ alapján adódik, hogy $\Delta(t) = 1$ minden $t \in G$-re. Tehát a kompakt csoportok is unimodulárisak. $GL(2, \mathbf{R})$ nem kommutatív és nem kompakt unimoduláris csoportra példa.

Az integrálás mindig a balinvariáns Haar-mértékre vonatkozik, jelölésben μ-t nem tüntetjük fel. Használni fogjuk a következő integrál helyettesítési formulákat:

$$d(st) = dt, \quad d(ts) = \Delta(s) dt, \quad d(t^{-1}) = \Delta(t)^{-1} dt.$$

Közülük az első μ balinvarianciáját fejezi ki, a második lényegében a moduláris függvény definíciója, és a harmadikból pedig adódik, hogy a Haar-mérték pontosan akkor inverz invariáns, ha a csoport unimoduláris.

$L^1(G)$, $L^2(G)$, $L^\infty(G)$ stb. a megfelelő L^p teret jelöli a Haar-mértékre vonatkozóan. Gyakran felhasználjuk, hogy $\mathscr{K}(G)$ sűrű altér $L^p(G)$-ben $(1 \leqq p < \infty)$. $t \in G$-re $\lambda(t)\colon L^2(G) \to L^2(G)$ $(\lambda(t)h)(s) = h(t^{-1}s)$ unitér operátor az $L^2(G)$ Hilbert-téren. Nyilván $\lambda(t)\,\lambda(r) = \lambda(t \cdot r)$, $\lambda(e) = id$ és $\lambda(t)^* = \lambda(t^{-1})$. λ-t G balreguláris reprezentációjának nevezzük.

2. §. Az $L^1(G)$ csoportalgebra

$L^1(G)$ Banach-tér a pontonkénti műveletekkel. Integrálható függvények szorzata általában nem integrálható, de $L^1(G)$ mégis algebrává válik, ha a valós esetből jól ismert konvolúciót tekintjük szorzásnak. Ha $f, g \in L^1(G)$, akkor $f * g$ konvolúciójuk az $f * g(t) = \int f(ts) g(s^{-1})\, ds$ képlettel értelmezhető. A Fubini-tétel alapján az integrál majdnem minden t-re létezik.

2.1. Tétel. $L^1(G)$ Banach-*-algebra a konvolúció szorzással és az $f \mapsto f^*$, $f^*(t) = \overline{f(t^{-1})}\Delta(t)$ izometrikus involúcióval.

Egyszerűen belátható (a Fubini-tétel segítségével), hogy a konvolúció asszociatív és disztributív az összeadásra nézve. Nézzük az L^1-norma szubmultiplikatív voltát:

$$\int |f * g(t)|\, dt \leqq \iint |f(ts) g(s^{-1})|\, ds\, dt = \int |g(s^{-1})| \int |f(ts)|\, dt\, ds =$$
$$= \int |g(s^{-1})| \int |f(t)| \Delta(s^{-1})\, dt\, ds = \int |g(s)|\, ds \cdot \int |f(t)|\, dt.$$

Az involúció tulajdonságai közül az $(f * g)^* = g^* * f^*$ azonosságot látjuk be. Egyrészt $(f * g)^*(t) = \overline{f * g(t^{-1})}\, \Delta(t^{-1}) = \Delta(t^{-1}) \int \overline{f(t^{-1}s)}\, \overline{g(s^{-1})}\, ds$, másrészt $g^* * f^*(t) = \int g^*(ts) f^*(s^{-1})\, ds = \int \overline{g(s^{-1}t^{-1})}\, \Delta(s^{-1}t^{-1})\, \overline{f(s)} \Delta(s)\, ds = \Delta(t^{-1}) \int \overline{g(s^{-1})}\, \overline{f(t^{-1}s)}\, ds$. $L^1(G)$ tehát involutív Banach-algebra, de nem C^*-algebra ($\|g^* * g\| = \|g\|^2$ általában nem teljesül). Ha a G csoport diszkrét, akkor egységelemének δ_e karakterisztikus függvénye $L^1(G)$-ben egységelem:

$$(\delta_e * f)(t) = \sum_s \delta_e(ts) f(s^{-1}) = f(t).$$

Ha G nem diszkrét, akkor $L^1(G)$-ben nincs egység, viszont létezik ún. approximatív egység. Legyen $(V_\alpha)_\alpha$ G egységelemének kompakt halmazokból álló környezetbázisa, és az index halmaz parciális rendezése kövesse a környezetek tartalmazás szerinti rendezését. Válasszunk egy $u_\alpha \in \mathscr{K}(G)$ függvényt úgy, hogy $u_\alpha \geqq 0$, $\operatorname{supp} u_\alpha \subset V_\alpha$ és $\int u_\alpha(t)\, dt = 1$. Ekkor $f \in L^1(G)$-re

$$\|f - u_\alpha * f\| \to 0 \quad \text{és} \quad \|f - f * u_\alpha\| \to 0.$$

Ha a G csoport metrizálható, akkor az index halmaz választható a természetes számok halmazának, és ilyenkor (u_α) a szokásos értelemben vett sorozat.

A G-n értelmezett komplex függvények halmazán a fentitől különböző involúciók is értelmezhetők: például $\tilde{f}(t) = \overline{f(t^{-1})}$ és $\bar{f}(t) = \overline{f(t)}$. Emlékeztetünk rá, hogy $L^\infty(G)$-t az utóbbi (konjugálás) involúcióval tekintettük. Ha G unimoduláris, akkor $\tilde{f} = f^*$.

A G csoport folytonos unitér reprezentációja a $\mathscr{H}$ Hilbert-téren azt jelenti, hogy minden $t \in G$-re adott egy $\pi(t) \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ unitér operátor úgy, hogy $\pi(e) = I$ és a $\pi(t)\pi(r) = \pi(tr)$ kompozíciós szabály teljesül, és $\xi, \eta \in \mathscr{H}$-ra a $t \mapsto \langle \pi(t)\xi, \eta \rangle$ függvény folytonos. Az előző részben bevezetett balreguláris λ reprezentáció folytonos

unitér reprezentáció. A továbbiakban unitér reprezentáció mindig folytonos unitér reprezentációt jelent. $L^1(G)$ reprezentációja egy olyan $L^1(G)\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ hozzárendelés, amely megtartja az algebrai műveleteket (beleértve az involúciót is). G és $L^1(G)$ reprezentációi között szoros összefüggés van. Ennek megfogalmazásához azonban még egy további definícióra lesz szükségünk. A $\pi: L^1(G)\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ reprezentáció nem-elfajuló, ha $\xi\in\mathcal{H}$, $\xi\neq 0$ esetén van olyan $f\in L^1(G)$, hogy $\pi(f)\xi\neq 0$.

2.2. Tétel. *Ha* $\pi: G\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *G-nek unitér reprezentációja, akkor a*

$$\langle\bar{\pi}(f)\xi,\eta\rangle=\int\langle\pi(t)\xi,\eta\rangle f(t)\,dt \tag{2a}$$

képlet $L^1(G)$*-nek egy nem-elfajuló* $\bar{\pi}$ *reprezentációját határozza meg.* $L^1(G)$ *minden nem-elfajuló reprezentációja egyértelműen kapható meg így.*

Ha $f\in L^1(G)$, akkor $(\xi,\eta)\mapsto\int\langle\pi(t)\xi,\eta\rangle f(t)\,dt$ korlátos bilineáris forma $\mathcal{H}$-n, normája legfeljebb $\|f\|$, tehát definiál egy $\bar{\pi}(f)$ operátort, amely eleget tesz a (2a) egyenlőségnek. Ellenőrizhető, hogy $\bar{\pi}$ megtartja az algebrai műveleteket. Példaképpen megmutatjuk, hogy $\bar{\pi}(f^*)=\bar{\pi}(f)^*$:

$$\langle\bar{\pi}(f^*)\xi,\eta\rangle=\int\langle\pi(t)\xi,\eta\rangle f^*(t)\,dt=\int\langle\pi(t)\xi,\eta\rangle\overline{f(t^{-1})}\,\Delta(t^{-1})\,dt=$$
$$=\int\langle\pi(t^{-1})\xi,\eta\rangle\overline{f(t)}\,dt=\int\langle\xi,\pi(t)\eta\rangle\overline{f(t)}\,dt=$$
$$=\overline{\int\langle\pi(t)\eta,\xi\rangle f(t)\,dt}=\overline{\langle\bar{\pi}(f)\eta,\xi\rangle}=\langle\xi,\bar{\pi}(f)\eta\rangle.$$

$\bar{\pi}$ nem elfajuló. Valóban, ha $\bar{\pi}(f)\xi=0$ minden $f\in L^1(G)$-re, akkor $0=\langle\bar{\pi}(f)\xi,\eta\rangle=$ $=\int\langle\pi(t)\xi,\eta\rangle f(t)\,dt$, és így $\langle\pi(t)\xi,\eta\rangle=0$ minden $\eta\in\mathcal{H}$-ra. Ebből $0=\langle\pi(t)\xi,\pi(t)\xi\rangle=$ $=\|\xi\|^2$.

A tétel másik részének bizonyítása technikaibb jellegű. Legyen $\bar{\pi}: L^1(G)\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ nem-elfajuló reprezentáció. Ekkor $\mathcal{H}_0=\{\bar{\pi}(f)\xi: \xi\in\mathcal{H}, f\in L^1(G)\}$ sűrű altér $\mathcal{H}$-ban. Ha $\eta\in\mathcal{H}$ és $\eta\in\mathcal{H}_0^{\perp}$, akkor $\|\bar{\pi}(f)\eta\|^2=\langle\bar{\pi}(f)\eta,\bar{\pi}(f)\eta\rangle=\langle\eta,\bar{\pi}(f^**f)\eta\rangle$. Mivel $\bar{\pi}$-ot nem-elfajulónak tételeztük fel, $\eta=0$.

$\mathcal{H}_0$-on definiálunk egy $\pi(t)$ operátort $t\in G$-re. A $(\bar{\pi}(u_\alpha t*f)\xi)_\alpha$ sorozatról kimutatható, hogy konvergens (mert Cauchy-féle), és a limeszét definiáljuk $\pi(t)\bar{\pi}(f)\xi$-nek. $\pi(t)$ a folytonosság alapján kiterjeszthető $\mathcal{H}$-ra. π G-nek folytonos unitér reprezentációja.

$\bar{\pi}$-t π kiterjesztésének fogjuk mondani, bár ez a szóhasználat nem egészen pontos. Mi lesz G balreguláris reprezentációjának kiterjesztése $L^1(G)$-re?

$$\langle\bar{\lambda}(f)g_1,g_2\rangle=\iint g_1(t^{-1}s)\overline{g_2(s)}\,ds f(t)\,dt=$$
$$=\iint g\big((st)^{-1}s\big)g_2(s)f(st)\,ds\,dt=\int f*g_1(s)\overline{g_2(s)}\,ds=\langle f*g_1,g_2\rangle,$$

következésképpen $\bar{\lambda}(f)g=f*g$ $(f\in L^1(G),\ g\in L^2(G))$. Vagyis $\bar{\lambda}$ $L^1(G)$-nek balról történő konvolúció szorzásként való reprezentációja $L^2(G)$-n. $\bar{\lambda}$ helyett is λ-t fogunk írni, és $L^1(G)$ balreguláris reprezentációjáról beszélünk.

3. §. Neumann-algebrák

Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, és $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ $\mathcal{H}$ korlátos lineáris operátorainak összessége. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebrai és topológiai struktúrával egyaránt rendelkezik. A szokásos algebrai műveleteken kívül fontos szerepet kap az adjungálás involúció. $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *-részalgebra, ha adjungálásra zárt részalgebra, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ szokásos topológiái

közül a norma topológiát (u) és a gyenge operátor topológiát (wo) emeljük ki. $A_\alpha \xrightarrow{wo} A$ jelentése $\langle A_\alpha \xi, \eta\rangle \to \langle A\xi, \eta\rangle$ minden $\xi, \eta \in \mathscr{H}$-ra.

Az $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *-részalgebrát Neumann-algebrának hívjuk, ha $I \in \mathscr{G}$ és zárt a gyenge operátor topológiára nézve. Az utóbbi követelmény ekvivalens azzal, hogy egységgömbje kompakt legyen ebben a topológiában. A legegyszerűbb példa Neumann-algebrára maga $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Más példa: Legyen $\mathscr{H} = L^2(G)$ és $\varkappa : L^\infty(G) \to \mathscr{B}(L^2(G))$, $(\varkappa(f)g)(t) = f(t)g(t)$, azaz K nem más mint $L^\infty(G)$ elemeivel való szorzás. $\varkappa(L^\infty(G)) = \mathscr{G}(G)$ kommutatív, adjungálásra zárt részalgebra $\mathscr{B}(L^2(G))$-ben. $\varkappa$ az $L^\infty(G)$ Banach-*-algebrának izometrikus reprezentációja. Be fogjuk látni, hogy $\mathscr{A}(G)$ egységgömbje kompakt $\mathscr{B}(L^2(G))$-ben a gyenge operátor topológiára. $L^\infty(G)$ egységgömbje kompakt az $L^1(G)$-ből származó gyenge* topológiában (w^*), így elég megállapítani, hogy $\varkappa$ (w^*, wo)-folytonos az egységgömbre megszorítva. Tegyük fel, hogy $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ és $\|f_\alpha\| \leqq 1$. Ekkor $\|\varkappa(f_\alpha)\| \leqq 1$ és $\varkappa(f_\alpha) \xrightarrow{w0} \varkappa(f)$ számára szükséges és elegendő, hogy

$$\langle K(f_\alpha)h_1, h_2\rangle \to \langle K(f)h_1, h_2\rangle$$

teljesüljön minden $h_1, h_2 \in K(G)$-re. Ez a reláció azt jelenti, hogy $\int f_\alpha(t)h_1(t)\overline{h_2(t)}\,dt \to \int f(t)h_1(t)\overline{h_2(t)}\,dt$. Mivel $h_1\overline{h_2} \in L^1(G)$, ez adódik $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ alapján.

Legyen λ G balreguláris reprezentációja. $\mathscr{B}(L^2(G))$-ben $\lambda(G)$ unitér operátorok összessége, és lineáris burka *-részalgebra. Lezárva ezt a wo-topológiában jutunk az $\mathscr{M}(G)$ csoport Neumann-algebrához. $\mathscr{M}(G)$-ben definíció szerint sűrű halmazt alkotnak a $\sum_t x(t)\lambda(t)$ alakú elemek, ahol $x(\cdot)$ a véges tartójú $G \to \mathbf{C}$ függvényeken fut végig. Megjegyezzük, hogy $\mathscr{M}(G)$ pontosan akkor kommutatív, ha maga G az. (Ellenben $\mathscr{A}(G)$ mindig kommutatív.)

Tegyük fel, hogy $\mathscr{A}$ Neumann-algebra a $\mathscr{H}$ Hilbert-téren. $\xi, \eta \in \mathscr{H}$-ra $\omega_{\xi,\eta}(A) = \langle A\xi, \eta\rangle$ korlátos lineáris funkcionált definiál $\mathscr{A}$-n. Jelölje $\mathscr{A}_*$ $\{\omega_{\xi,\eta} : \xi, \eta \in \mathscr{H}\}$ lineáris burkának lezárását $\mathscr{A}^*$-ban Így $\mathscr{A}_*$ Banach-tér, és egy J. Dixmiertől származó tétel szerint $\mathscr{A}_*$ duálisa izometrikusan izomorf $\mathscr{A}$-val. (Ez indokolja a jelölést.) Más szóval, ha $\Phi \in (\mathscr{A}_*)^*$ akkor létezik olyan $A \in \mathscr{A}$, hogy $\Phi(\omega) = \omega(A)$ $(\omega \in \mathscr{A}_* \subset \mathscr{A}^*)$ és $\|\Phi\| = \|A\|$. Beszélhetünk tehát $\mathscr{A}$-n a gyenge* topológiáról, amit w-topológiának fogunk rövidíteni. $\mathscr{A}_*$ a korlátos w-folytonos funkcionálok tere. $\varphi \in \mathscr{A}^*$ pontosan akkor w-folytonos, ha minden növekvő korlátos (általánosított) sorozatra

$$\varphi(\sup A_\alpha) = \sup \varphi(A_\alpha).$$

(Megjegyezzük, hogy a mondott sorozatoknak mindig létezik legkisebb felső korlátjuk $\mathscr{A}$-ban.) A w-topológia gyakorlati kezelését megkönnyíti az a tény, hogy az egységgömbön megegyezik a gyenge operátor topológiával, és $\varphi \in \mathscr{A}^*$ pontosan akkor w-folytonos, ha az egységgömbre megszorítva wo-folytonos.

Legyen $\mathscr{A}_i \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ Neumann-algebra ($i = 1, 2$). $\delta : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ homomorfizmus, ha megtartja az algebrai műveleteket (az adjungálást és az egységet is). δ folytonos, ha folytonos a w-topológiára vonatkozóan. Ha létezik olyan $U : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ unitér, hogy $\delta(A) = U \cdot A \cdot U^{-1}$ $(A \in \mathscr{A}_1)$, akkor a $\delta = AdU$ jelölést használjuk, és δ-t térszerűnek mondjuk. Térszerű homomorfizmus mindig folytonos és egy-egyértelmű. (Bizonyítható, hogy a homomorfizmusok normacsökkentőek, tehát a norma topológiában mindig folytonosak.) Nyilvánvaló, hogy a $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$ és $\mathscr{B}(\mathscr{H}_2)$ Neumann-algebrák pontosan akkor izomorfak, ha $\dim \mathscr{H}_1 = \dim \mathscr{H}_2$, és ilyenkor térszerűen is izomorfak. Lehetséges, hogy két Neumann-algebra izomorf, de nem térszerűen izomorf.

Szükségünk lesz Neumann-algebrák tenzorszorzatára, amit a hordozó Hilbert-terek tenzorszorzata segítségével egyszerűen definiálhatunk. (Egyébként „tér mentes" definíció is lehetséges, az azonban jóval bonyolultabb.) Legyen $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ $(i=1, 2)$ Neumann-algebra. A $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ tenzorszorzat Hilbert-tér az algebrai tenzorszorzat teljes burka. (Például $L^2(G) \otimes L^2(G)$ azonosítható $L^2(G \times G)$-vel.) $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ természetes módon beágyazható $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$-be, így jutunk $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-höz $(A \otimes B(\xi \otimes \eta) = A\xi \otimes B\eta)$. $\overline{\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2}$ az $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ által generált Neumann-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$-ben.

4. §. Bepillantás a nem-kommutatív integrálelméletbe

Az elmélet alapjait Segal építette ki 1953-ban, de azóta az épületre számos emelet került. Mi itt megelégszünk a legalapvetőbb eredményekkel.

Legyen $\mathcal{M}$ Neumann-algebra. $\tau: \mathcal{M}_+ \to [0, +\infty]$ nyom, ha

(4a) $$\tau(A+B) = \tau(A)+\tau(B), \quad A, B \in \mathcal{M}_+;$$

(4b) $$\tau(\lambda A) = \lambda \tau(A), \quad \lambda \geqq 0, \quad A \in \mathcal{M}_+;$$

(4c) $$\tau(A^*A) = \tau(AA^*), \quad A \in \mathcal{M}.$$

A τ nyom hű, ha $\tau(A) > 0$ minden nem 0 $A \in \mathcal{M}_+$ esetén, véges, ha $\tau(I) < +\infty$, félig véges, ha nem zérus $A \in \mathcal{M}_+$ esetén létezik olyan nem-zérus $B \in \mathcal{M}_+$, hogy $\tau(B) < +\infty$ és $B \leqq A$, normális, ha $\tau(\sup A_\alpha) = \sup \tau(A_\alpha)$ minden növekedő korlátos (A_α) (általánosított) sorozatra.

Nézzünk néhány példát! Az $\mathcal{A}(G)$ Neumann-algebra $L^\infty(G)$ izometrikus reprezentációja. $\varkappa$ $L^\infty(G)$ pozitív kúpját $\mathcal{A}(G)$ pozitív kúpjára képezi, ezért a

$$\tau(\varkappa(f)) = \int f(t)\, dt \quad (f \in L^\infty_+(G))$$

képlet $\mathcal{A}(G)_+$-on egy függvényt értelmez. Ez nyilván nyom, és $\mathcal{A}(G)$ Haar-féle nyomának szokás nevezni.

Legyen M_n az $n \times n$-es mátrixok algebrája. $M_n = \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ a természetes azonosítással $(\dim \mathcal{H}_n = n)$, így M_n Neumann-algebra. A szokásos mátrix nyom nyom a fenti értelemben is (és ez az elnevezés eredete). Ha végtelen dimenzióra térünk át, és $\{e_i\}$ ortonormált bázis $\mathcal{H}$-ban, akkor $\tau(A^*A) = \sum_i \|Ae_i\|^2$ továbbra is nyomot definiál, azonban τ értékei között már a $+\infty$ is előfordul.

A felsorolt nyomok hűek és normálisak. A mátrix nyom félig véges, és véges dimenzióban véges is. A Haar-féle nyom normalitását a monoton konvergencia tétel biztosítja.

Ebben a részben τ mindig félig véges, hű és normális nyomot fog jelenteni. Legyen

$$\mathcal{N}_\tau = \{A \in \mathcal{M}: \ \tau(A^*A) < +\infty\}.$$

Mivel $(A+B)^*(A+B) \leqq 2(A^*A+B^*B)$ és $(AB)^*(AB) \leqq \|A\|^2 B^*B$, egyszerűen adódik, hogy $\mathcal{N}_\tau$ balideál $\mathcal{M}$-ben. τ (4c) tulajdonsága miatt $\mathcal{N}_\tau$ önadjungált is, ezért ideál. Következésképpen

$$\mathcal{M}_\tau = \left\{ \sum_{i=1}^{n} A_i B_i: \ A_i, B_i \in \mathcal{N}_\tau, \ n \in \mathbf{N} \right\}$$

szintén ideálja $\mathcal{M}$-nek. Technikai jellegű a következő állítás:

4.1. Lemma. $\mathcal{M}_\tau \cap \mathcal{M}_+ = \{A \in \mathcal{M}_+ : \tau(A) < +\infty\}$, *továbbá* τ *kiterjeszthető egy* $\dot{\tau} : \mathcal{M}_\tau \to \mathbf{C}$ *lineáris funkcionállá, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:*

$$\dot{\tau}(A^*) = \overline{\dot{\tau}(A)}, \quad A \in \mathcal{M}_\tau,$$

$$\dot{\tau}(AB) = \dot{\tau}(BA), \quad A \in \mathcal{M}_\tau, \quad B \in \mathcal{M},$$

$$\dot{\tau}(ST) = \dot{\tau}(TS), \quad T, S \in \mathcal{M}_\tau \cap \mathcal{M}_+.$$

A következőkben nem különböztetjük meg az $\mathcal{M}_\tau$-ra kiterjesztett funkcionált az eredeti nyomtól, vagyis τ tetejéről elhagyjuk a pontot. $\mathcal{M}_\tau$-t τ definíciós ideáljának nevezzük. Megjegyezzük, hogy τ pontosan akkor félig véges, ha definíciós ideálja w-sűrű.

Ha τ a Haar-féle nyom, akkor $\mathcal{N}_\tau = L^2(G) \cap L^\infty(G)$ és $\mathcal{M}_\tau = L^1(G) \cap L^\infty(G)$. A másik példában, amikor τ az operátor nyom, $\mathcal{N}_\tau$ az ún. Hilbert—Schmidt-operátorok, $\mathcal{M}_\tau$ pedig a nyom operátorok ideálja.

$A \in \mathcal{M}_\tau$-ra $\|A\|_1 = \tau(|A|)$ $\left(|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}\right)$ normát definiál. Ez adódik az itt nem bizonyított

(4d) $$\tau(|A|) = \sup\{|\tau(AB)| : B \in \mathcal{M}, \ \|B\| \leqq 1\}$$

összefüggésből. $A \in \mathcal{M}_\tau$-ra legyen $\omega_A : \mathcal{M} \to \mathbf{C}$

$$\omega_A(S) = \tau(SA) \quad (S \in \mathcal{M}).$$

Ekkor $|\omega_A(S)| = |\tau(SA)| \leqq \|S\| \tau(|A|) = \|S\| \cdot \|A\|_1$. Így ω_A korlátos lineáris funkcionál, és $\omega_{(.)} : \mathcal{M}_\tau \to \mathcal{M}^*$ normacsökkentő leképezés. A (4d) formula éppen azt fejezi ki, hogy izometrikus. ω_A τ normalitásából adódóan normális, tehát $\omega_A \in \mathcal{M}_*$ minden $A \in \mathcal{M}_\tau$-ra.

4.2. Tétel. *Legyen* τ *normális, hű és félig véges nyom az* $\mathcal{M}$ *Neumann-algebrán, és* $\mathcal{M}_\tau$ τ *definíciós ideálja. Ekkor az*

$$(S, A) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}_\tau \mapsto \tau(SA) \in \mathbf{C}$$

bilineáris forma dualitássá terjeszthető ki $\mathcal{M}$ *és* $(\mathcal{M}_\tau, \|\cdot\|_1)$ $L^1(\mathcal{M}, \tau)$*-val jelölt teljes burka között. Így* $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ *duálisa* $\mathcal{M}$.

A fenti előkészítés után mindössze annyit kell bizonyítani, hogy $\{\omega_A : A \in \mathcal{M}_\tau\}$ sűrű $\mathcal{M}_*$-ban. Ha $0 \neq S \in \mathcal{M}$, akkor van olyan $A \in \mathcal{M}_\tau \cap \mathcal{M}_+$, hogy $A \cdot |S| \cdot A \neq 0$, hiszen $\mathcal{M}_\tau$ w-sűrű $\mathcal{M}$-ben. Legyen $S = V \cdot |S|$ S poláris felbontása, és $B = A^2V^*$. Most

$$\omega_B(S) = \tau(SB) = \tau(SA^2V^*) = \tau(V^*SA^2) = \tau(AV^*SA) =$$

$$= \tau(AV^*V|S|A) = \tau(A|S|A) \neq 0.$$

Ebből következik, hogy $\{\omega_B : B \in \mathcal{M}_\tau\}$ teljes rendszer $\mathcal{M}_*$-ban. Mivel $(\mathcal{M}_*)^* = \mathcal{M}$, a Hahn—Banach-tételből adódik, hogy $\{\omega_B : B \in \mathcal{M}_\tau\}$ normában sűrű $\mathcal{M}_*$-ban. $\mathcal{M}_*$ tehát izometrikusan izomorf $L^1(\mathcal{M}, \tau)$-val. A τ funkcionál korlátos $\mathcal{M}_\tau$-n, és kiterjeszthető $L^1(\mathcal{M}, \tau)$-ra. A kiterjesztést is τ-val fogjuk jelölni. $\omega_{(.)} : \mathcal{M}_\tau \to \mathcal{M}_*$ kiterjeszthető $L^1(\mathcal{M}, \tau) \to \mathcal{M}_*$ izometriává.

A dualitás alapján $\mathcal{M}_*$ elemei $(\mathcal{M}_\tau, \|\cdot\|_1)$ teljes burkával azonosíthatók. Melyek azonban $\mathcal{M}_*$ azon elemei, amelyek magának $\mathcal{M}_\tau$-nak az elemeinek felelnek meg? A válasz a következő tételben van.

4.3. Tétel. $\omega \in \mathcal{M}_*$ ω_A *alakú valamely* $A \in \mathcal{M}_\tau$*-ra pontosan akkor, ha*

$$\|\omega\|_\infty = \sup \{|\omega(B)|: B \in \mathcal{M}_\tau, \|B\|_1 \leqq 1\} < +\infty.$$

Ebben az esetben $\|\omega\|_\infty = \|A\|$.

Először lássuk be a feltétel szükségességét. Tegyük fel, hogy $\omega = \omega_A$ valamely $A \in \mathcal{M}_\tau$-ra. Ekkor

$$\sup \{|\omega_A(B)|: B \in \mathcal{M}_\tau, \|B\|_1 \leqq 1\} = \|\omega_A\| = \|A\|.$$

Megfordítva, legyen $\|\omega\|_\infty < +\infty$. Így ω korlátos, ha $\mathcal{M}_\tau$-n a $\|\cdot\|_1$ normát tekintjük, és kiterjeszthető normájának megtartásával $L^1(\mathcal{M}, \tau)$-ra. Az előző tétel szerint van olyan $A \in \mathcal{M}$, hogy $\omega(R) = \tau(AR)$ $(R \in L^1(\mathcal{M}, \tau))$. Ha A poláris felbontása $A = U \cdot |A|$, akkor

$$\tau(|A|) = \tau(U^* A) = \tau(AU^*) = \omega(U^*) < +\infty.$$

Tehát $A \in \mathcal{M}_\tau$ és $\omega = \omega_A$. $\|A\| = \|\omega\|_\infty$ következik a 4.2. tételből.

A kommutatív esetben mindkét bizonyított tétel állítása jól látható. Legyen (X, μ) lokálisan véges mértéktér. (A feltétel ekvivalens azzal, hogy az integrál L_+^∞-on félig véges.) Ekkor $L^1(X, \mu)^* = L^\infty(X, \mu)$ és L^1 valóban a teljes burka $L^1 \cap L^\infty$-nek. Az analógia alapján $L^1(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{M}$ miatt $\mathcal{M}$-et $L^\infty(\mathcal{M}, \tau)$-nak is lehet mondani. Ebben a felfogásban $\mathcal{M}_\tau = L^1(\mathcal{M}, \tau) \cap L^\infty(\mathcal{M}, \tau)$. Ezekután nem meglepő a nemkommutatív L_p-terek létezése.

Az $\mathcal{N}_\tau$ ideálon definiálunk egy belső szorzatot. $A, B \in \mathcal{N}_\tau$-ra legyen $\langle A, B \rangle = \tau(B^* A)$. ($B^* A$ τ definíciós ideáljában van, ezért $\tau(B^* A)$-nak van értelme.) Mivel τ hű $0 \neq A \in \mathcal{N}_\tau$ esetén $\langle A, A \rangle = \tau(A^* A) > 0$. Tehát pre-Hilbert-térhez jutunk, amelynek teljes burkát $L^2(\mathcal{M}, \tau)$-val fogjuk jelölni. Ugyanúgy, ahogy $L^\infty(G)$-t szorzásként reprezentáltuk $L^2(G)$-n, $L^\infty(\mathcal{M}, \tau)$ reprezentálható szorzásként $L^2(\mathcal{M}, \tau)$-n. Mivel jelen esetben a szorzás nem kommutatív, tekintettel kell lennünk a tényezők sorrendjére.

5. §. Pozitív definit függvények

A folytonos $f: G \to \mathbf{C}$ függvényt pozitív definitnek nevezzük, ha van G-nek olyan π unitér reprezentációja egy $\mathcal{H}_\pi$ Hilbert-téren, és olyan $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ vektor, hogy minden $t \in G$-re $f(t) = \langle \pi(t)\xi, \xi \rangle$. A folytonos pozitív definit függvények halmazát $CP(G)$ fogja jelölni.

5.1. Tétel. *Legyen* $f: G \to \mathbf{C}$ *folytonos függvény. Ekkor* $f \in CP(G)$ *akkor és csakis akkor, ha minden* $g \in \mathcal{K}(G)$*-re*

$$\langle f, g^* * g \rangle \geqq 0 \tag{5a}$$

azaz $\iint g(s)\bar{g}(t) f(t^{-1}s)\, ds\, dt \geqq 0$.

Ha $f \in CP(G)$, akkor $f(t) = \langle \pi(t)\xi, \xi \rangle$ valamely $\pi: G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ reprezentációra és $\xi \in \mathcal{H}$-ra. π kiterjeszthető $L^1(G)$-re a 2.1. tétel szerint, és

$$\langle f, g^* * g \rangle = \int \langle \pi(t)\xi, \xi \rangle \overline{g^* * g(t)}\, dt = \langle \pi(\overline{g^* * g})\xi, \xi \rangle = \|\bar{\pi}(\bar{g})\xi\|^2 \geqq 0.$$

Tegyük most fel, hogy (5a) teljesül minden $g \in \mathscr{K}(G)$-re, és vezessünk be $\mathscr{K}(G)$-n egy $(\cdot, \cdot)_f$ belső szorzatot:

$$(g_1, g_2)_f = \int g_1(t^{-1}s)\bar{g}_2(t^{-1})\Delta^{-\frac{1}{2}}(s)f(s)\,ds\,dt.$$

Ha $g_1 = g_2 = g$, akkor

$$(g, g)_f = \iint g(t^{-1}s)\bar{g}(t^{-1})\Delta^{-\frac{1}{2}}(s)f(s)\,ds\,dt = \iint g(s)\bar{g}(t^{-1})\Delta^{-\frac{1}{2}}(ts)f(ts)\,ds\,dt =$$

$$= \iint g(s)\bar{g}(t)\Delta^{-\frac{1}{2}}(t^{-1}s)f(t^{-1})\,\Delta(t^{-1})\,ds\,dt =$$

$$= \iint (g\Delta^{-\frac{1}{2}})(s)(g\Delta^{-\frac{1}{2}})(t)f(t^{-1}s)\,ds\,dt \geqq 0$$

a feltétel szerint. Faktorizálás és teljessé tétel után egy $\mathscr{H}_f$ Hilbert-teret kapunk.

Definiáljuk $\mathscr{H}_f$-en G-nek egy σ unitér reprezentációját: $\sigma(r)g = g_{r^{-1}}\Delta^{\frac{1}{2}}(r)$ $(r \in G,\ g \in \mathscr{K}(G))$, azaz $(\sigma(r)g)(s) = g(r^{-1}s)\Delta^{\frac{1}{2}}(r)$. Egyszerű számolással

$$\|\sigma(r)g\|_f^2 = (\sigma(r)g, \sigma(r)g)_f = \iint g(r^{-1}t^{-1}s)\Delta^{\frac{1}{2}}(r)\,g(r^{-1}t^{-1})\Delta^{\frac{1}{2}}(r)$$

$$\Delta^{-\frac{1}{2}}(s)f(s)\,ds\,dt = \iint g(t^{-1}s)\,g(t^{-1})\Delta^{-\frac{1}{2}}(s)f(s)\,ds\,dt = (g, g)_f = \|g\|_f^2.$$

Adódott, hogy $\sigma(r)$ izometria, és kiterjeszthető $\mathscr{H}_f$-re. A kiterjesztést is $\sigma(r)$-rel jelöljük. σ reprezentáció volta világos, és folytonossága is látható (g_s s-nek folytonos függvénye).

Legyen (u_α) a 2.§-ban bevezetett approximatív egység. (u_α) konvergál $\mathscr{H}_f$-ben egy ξ vektorhoz. Állítjuk, hogy $f(r) = (\sigma(r)\xi, \xi)_f$. Fel fogjuk használni, hogy minden $F \in C(G \times G)$ függvény esetén $\lim \iint u_\alpha(s)u_\alpha(t)F(s, t)\,ds\,dt = F(e, e)$. Integrálhelyettesítéssel

$$(\sigma(r)u_\alpha, u_\alpha)_f = \iint u_\alpha(r^{-1}t^{-1}s)\Delta^{\frac{1}{2}}(r)u_\alpha(t^{-1})\Delta^{-\frac{1}{2}}(s)f(s)\,ds\,dt =$$

$$= \iint u_\alpha(s)u_\alpha(t)f(t^{-1}rs)\Delta^{-\frac{1}{2}}(t^{-1}s)\Delta(t^{-1})\,ds\,dt =$$

$$= \iint u_\alpha(s)u_\alpha(t)f(t^{-1}rs)\Delta^{-\frac{1}{2}}(ts)\,ds\,dt \to f(r).$$

Tételünkből nyomban kiolvasható, hogy $CP(G)$ összeadásra zárt. Abból a célból, hogy példát mutassunk pozitív definit függvényekre, tekintsük G balreguláris reprezentációját. $f \in L^2(G)$-re $\langle \lambda(t)\bar{f}, \bar{f} \rangle = \int \overline{f(t^{-1}s)}f(s)\,ds = \int \bar{f}(s^{-1}t)f(s)\,ds =$ $= \int f(ts)\bar{f}(s^{-1})\,ds = f * \tilde{f}(t)$, és így $f * \tilde{f} \in CP(G)$.

Ha $f \in \mathscr{K}(G)$, akkor $f * u_\alpha \to f$ nem csupán L_1-normában, de egyenletesen is teljesül. A

$$4f * g = (f * g) * (f + g)^{\sim} - (f - g) * (f - g)^{\sim} +$$

$$+ i(f + ig) * (f + ig)^{\sim} - i(f - ig) * (f + ig)^{\sim}$$

azonosság alapján $f * g$ folytonos pozitív definit függvények lineáris kombinációja. Igaz ez $f * u_\alpha$-ra is. Tehát $CP(G)$ lineáris burkának L^∞-normában való lezárása tartalmazza $\mathscr{K}(G)$-t. $CP(G)$ lineáris burkát $B(G)$-vel szokták jelölni. $f : G \to \mathbf{C}$

pontosan akkor tartozik $B(G)$-hez, ha létezik G-nek olyan unitér reprezentációja, hogy

$$f(t) = \langle \pi(t)\xi, \eta \rangle \quad (t \in G)$$

bizonyos ξ és η vektorokra.

Végül érdekességképpen megemlítjük Pólya György egy tételét: ha $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ folytonos páros függvény és $\mathbf{R}^+$-on fogyó és konvex, akkor pozitív definit. Így például pozitív definit a $t \mapsto \exp(-t^2)$ függvény.

6. §. Kommutatív csoportok

Ha G kommutatív, akkor $L^1(G)$ kommutatív Banach-algebra, és alkalmazható rá a Gelfand-elmélet. $L^1(G)$ nem azonosan 0 multiplikatív lineáris funkcionáljai 1 normájúak, összességüket jelölje $\Gamma \cdot L^1(G)^*$ egységgömbjében $\Gamma \cup \{0\}$ zárt a pontonkénti konvergencia topológiájára, így $\Gamma \cup \{0\}$ kompakt és Γ lokálisan kompakt. Γ elemei kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozhatók $L^1(G)$ reguláris maximális ideáljaival. A Gelfand-transzformáció $f \in L^1(G)$-hez $\hat{f} \in C_0(\Gamma)$-t rendeli az $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$ képlet szerint.

A folytonos $G \to \mathbf{T}$ homomorfizmusokat G karaktereinek nevezzük. ($\mathbf{T}$ az egységnyi abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportja.) A karakterek nem egyebek mint az egy dimenziós unitér reprezentációk. $\hat{G}$-pal jelölt halmazuk csoport a pontonként végzett szorzásra nézve, és topologikus csoporttá válik, ha a kompakt halmazokon való egyenletes konvergencia topológiájával látjuk el.

6.1. Tétel. *A* $\varphi(f) = \int f(t)\chi(t)\,dt$ *formula kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít* Γ *és* $\hat{G}$ *elemei között* ($\varphi \in \Gamma$, $\chi \in \hat{G}$, $f \in L^1(G)$). *Ráadásul ez a megfeleltetés homeomorfizmus.*

Ha $\chi \in \hat{G}$, akkor a 2.1. tétel szerint χ éppen a fenti formulával terjeszthető ki $L^1(G)$ reprezentációjává. Nevezetesen, φ multiplikatív és lineáris.

Megfordítva, legyen $\varphi \neq 0$ multiplikatív lineáris funkcionál $L^1(G)$-n. Így $\|\varphi\| = 1$ és $\varphi(f) = \int f(t)g(t)\,dt$ valamely $g \in L^\infty(G)$ függvényre, $\|g\|_\infty = 1$. Ellenőrizhető, hogy $\varphi(f) = g(t)\varphi(f^t)$ majdnem minden $t \in G$-re. Ezért g folytonosnak is választható, és ekkor multiplikatív is lesz. Mivel $|g(t)| \leqq 1$ és $|g(t)|^{-1} = |g(t^{-1})| \leqq 1$ egyaránt teljesül, $|g(t)| = 1$ és $g \in \hat{G}$.

Γ és $\hat{G}$ nem bizonyított homeomorfiája miatt $\hat{G}$ lokálisan kompakt csoport, és G duális csoportjának nevezzük. A tétel átfogalmazása: $L^1(G)$ nem 0 komplex homomorfizmusainak tere $\hat{G}$-pal homeomorfan izomorf. A $\Gamma = \hat{G}$ azonosítás után a Gelfand-transzformáció

$$\hat{f}(\chi) = \int f(t)\chi(t)\,dt \quad (f \in L^1(G))$$

alakot ölt. Ebben a nevezetes esetben a Gelfand-transzformációt Fourier-transzformációnak nevezik. (Valójában a Fourier-transzformáció és a kommutatív $L^1(G)$ sajátosságai vezettek a kommutatív Banach-algebrák Gelfand-féle elméletének kiépüléséhez.) A Gelfand-elméletből tudjuk, hogy a Fourier-transzformáció $A(\hat{G})$ értékkészlete elválasztja $\hat{G}$ pontjait, és így $A(\hat{G})$ a Stone—Weierstrass-tétel szerint sűrű $C_0(\hat{G})$-ben.

A Fourier-analízisben alapvető a következő eredmény.

6.2. Tétel. *Ha* $f \in L^1(G) \cap B(G)$, *akkor* $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$, *és* $\hat{G}$ *Haar-mértékének alkalmas normálása mellett*

$$f(t) = \int \hat{f}(\chi)\overline{\chi(t)}\, d\chi. \tag{6a}$$

A Fourier-transzformáció $L^2(G)$ *sűrű alterét izometrikusan képezi le* $L^2(\hat{G})$ *sűrű alterére, és kiterjeszthető egy* $J: L^2(G) \to L^2(\hat{G})$ *unitér operátorrá.*

J-t Plancherel-transzformációnak fogjuk hívni, (6a) inverziós formula néven ismeretes.

6.3. Tétel. *A Plancherel-transzformáció térbeli izomorfizmust létesít az* $\mathscr{A}(G)$ *és* $\mathscr{M}(\hat{G})$, *illetve* $\mathscr{M}(G)$ *és* $\mathscr{A}(\hat{G})$ *Neumann-algebrák között.*

Belátjuk, hogy $g \in \mathscr{K}(G)$ esetén $\operatorname{Ad} J(k(g)) = \hat{\lambda}(\hat{g})$, ahol $\hat{\lambda}$ $\hat{G}$ balreguláris reprezentációja. $f \in \mathscr{K}(G)$-re

$$(\operatorname{Ad} J(\varkappa(g))\hat{f})(\gamma) = (J\varkappa(g)J^{-1}\hat{f})(\gamma) = (J\varkappa(g)f)(\gamma) =$$

$$= \int (\varkappa(g)f)(t)g(t)\gamma(t)\, dt = \int f(t)\gamma(t)\, dt = \widehat{g \cdot f}(\gamma) = \hat{g} * \hat{f}(\gamma).$$

Ezért $(\operatorname{Ad} J\varkappa(g))\hat{f} = \hat{g} * \hat{f} = \hat{\lambda}(\hat{g})\hat{f}$, s így valóban $\operatorname{Ad} J\varkappa(g) = \hat{\lambda}(\hat{g})$.

Mivel $\mathscr{K}(G)$ sűrű $L^1(G)$-ben, $\{\hat{g}: g \in \mathscr{K}(G)\}$ sűrű $A(\hat{G})$-ban, és következésképpen $L^1(\hat{G})$-ban is. Tehát $\{\hat{\lambda}(\hat{g}): g \in \mathscr{K}(G)\}$ generálja az $\mathscr{M}(\hat{G})$ csoport Neumann-algebrát. Ugyanakkor $\{\varkappa(g): g \in \mathscr{K}(G)\}$ w-sűrű $\mathscr{G}(G)$-ben. Bebizonyítottuk tehát, hogy $\operatorname{Ad} J$ térbeli izomorfizmus $\mathscr{A}(G)$ és $\mathscr{M}(\hat{G})$ között. Hasonlóan látható, hogy a Plancherel-transzformáció izomorfizmust hoz létre $\mathscr{M}(G)$ és $\mathscr{A}(\hat{G})$ között.

Az utóbbi tétel dualitásként is felfogható. Adva van egy G csoport, és ehhez hozzárendeltünk egy $(\mathscr{G}(G), \mathscr{M}(G))$ algebra párt. Ha G-ről $\hat{G}$-ra térünk át, akkor a pár tagjai felcserélődnek. Így a $\hat{\hat{G}}$ második duálishoz rendelt pár ugyanaz, mint amit az eredeti csoporthoz rendeltünk. Igaz-e, hogy $G = \hat{\hat{G}}$? Válasz: Pontrjagin dualitási tétele.

6.4. Tétel. *A* $\Phi: G \to \hat{\hat{G}}$, $\Phi(t)\chi = \chi(t)$ *csoporthomomorfizmus homeomorfizmus* G *és* $\hat{\hat{G}}$ *között.*

Ez a lokálisan kompakt kommutatív csoportok dualitásának klasszikus megfogalmazása. Megindokolja, hogy miért írnak gyakran $\chi(t)$ helyett $\langle \chi, t \rangle$-t: $\langle \cdot, t \rangle$ $\hat{G}$-nak, $\langle \chi, \cdot \rangle$ G-nek a karaktere.

Az algebra párokkal megfogalmazott dualitás látszatra gyengébb, mint a Pontrjagin-féle. Kérdés, hogy a $G \mapsto (\mathscr{G}(G), \mathscr{M}(G))$ hozzárendelés egy-egyértelmű-e. (Az igenlő választ a következő részben nem feltétlenül kommutatív csoportokra is bebizonyítjuk.) Az $(\mathscr{G}(G), \mathscr{M}(G))$ pár tulajdonságai vezettek a bialgebra fogalmának megalkotásához, és az úgynevezett Kac-algebrák vizsgálatához. Erre az új és fejlődésben levő területre most nem térhetünk ki, helyette átfogalmazzuk a Pontrjagin-dualitást:

Legyen G kommutatív csoport. Ekkor az $\mathscr{M}(G)$ csoport Neumann-algebra preduálisa kommutatív Banach-algebra, és komplex homomorfizmusai G-vel homeomorfan izomorf teret képeznek.

Valóban, $\mathscr{M}(G)$ izomorf $\mathscr{A}(\hat{G})$-pal, ennek preduálisa $L^1(\hat{G})$. $L^1(\hat{G})$ komplex homomorfizmusainak tere a 6.1. tétel (átfogalmazott változata) szerint $\hat{\hat{G}}$. Így az

iménti megfogalmazás pontosan azt mondja, hogy $G=G$. Ha G nem kommutatív, akkor $\hat{G}$ nem létezik (lehetséges, hogy karakter nem is létezik), tehát az eredeti Pontrjagin-féle dualitás fel sem vethető. Az átfogalmazás viszont továbbra is értelmes marad, és általános dualitási tételt hordoz magában.

7. §. A dualitási tétel

Definiáljuk a $W : L^2(G\times G)\to L^2(G\times G)$ operátort a $(Wf)(t, s)=f(t, ts)$ képlettel $(f\in L^2(G\times G))$. Ekkor $\int\int|Wf(t, s)|^2\,dt\,ds=\int\int|f(t, ts)|^2\,dt\,ds=\int\int|f|t, s)|dtds$, és ezért W izometria. Mivel W-nek létezik inverze $((W^{-1}f)(t, s)=f(t, t^{-1}s)$, $f\in L^2(G\times G))$, W unitér operátor. $A\in\mathcal{M}(G)$-re legyen $\Phi(A)=(\mathrm{Ad}\,W^{-1})(A\otimes I)$. Φ folytonos $\mathcal{M}(G)\to\mathcal{B}\big(L^2(G\times G)\big)$ homomorfizmus, hiszen $A\mapsto A\otimes I$ homomorfizmus, és $\mathrm{Ad}\,W^{-1}$ automorfizmus. Belátjuk, hogy $\Phi\big(\mathcal{M}(G)\big)\subset\mathcal{M}(G)\overline{\otimes}\mathcal{M}(G)$. Ehhez elegendő

$$\Phi\big(\lambda(t)\big)=\lambda(t)\otimes\lambda(t)\quad(t\in G)$$

ellenőrzése. Egyrészt

$$\big(\lambda(t)\otimes\lambda(t)\big)(f\otimes g)(s, r)=f(t^{-1}s)g(t^{-1}r),$$

másrészt

$$\big(\Phi(\lambda(t))f\otimes g\big)(s, r)=\big(\lambda(t)\otimes I\big)Wf\otimes g(s, s^{-1}r)=(Wf\otimes g)(t^{-1}s, s^{-1}r)=$$
$$=f(t^{-1}s)g(t^{-1}s\,s^{-1}r)=f(t^{-1}s)g(t^{-1}r).$$

(Azt is mondhatnánk, hogy a $\lambda\otimes\mathrm{id}$ és a $\lambda\otimes\lambda$ reprezentációk unitér ekvivalensek, és W valósítja meg az ekvivalenciát.)

$\mathcal{M}(G)_*$-on bevezetünk egy konvolúciót és egy involúciót:

$$F*H(A)=(F\otimes H)\big(\Phi(A)\big)\quad(A\in\mathcal{M}(G)),$$

$$\tilde{F}(A)=\overline{F(\tilde{A})},\quad\Big(\sum_t x(t)\lambda(t)\Big)^{\sim}=\sum\overline{x(t)}\lambda(t)\quad(A\in\mathcal{M}(G)).$$

7.1. Lemma. *$\mathcal{M}(G)_*$ involutív Banach-algebra a fenti konvolúció szorzással és a $\sim$ izometrikus involúcióval.*

Ha $F, H\in\mathcal{M}(G)_*$, akkor $F*H$ korlátos lineáris funkcionál $\mathcal{M}(G)$-n, és a definiáló képletből közvetlenül látszik, hogy $F*H$ w-folytonos is, és valóban $\mathcal{M}(G)_*$-hoz tartozik.

Az involúció tulajdonságai evidensek. $F*H$-t és $H*F$-et elegendő a $\sum_t x(t)\lambda(t)$ alakú elemeken összehasonlítani.

$$F*H\big(\Sigma x(t)\lambda(t)\big)=F\otimes H\big(\Sigma\,x(t)\Phi(\lambda(t))\big)=$$

$$F\otimes H\big(\Sigma x(t)\lambda(t)\otimes\lambda(t)\big)=\Sigma\,x(t)F\big(\lambda(t)\big)H\big(\lambda(t)\big).$$

A kapott kifejezés F-ben és H-ban szimmetrikus, ami bizonyítja a kommutativitást.

A norma szubmultiplikatív voltát nem mutatjuk meg.

7.2. Lemma. *$F\in\mathcal{M}(G)_*$ esetén $\hat{F}: t\mapsto F\big(\lambda(t)\big)$ korlátos folytonos függvény G-n, továbbá $\overline{\hat{F}(t)}=\hat{\tilde{F}}(t)$.*

$\hat{F}=F\circ\lambda$ folytonos leképezések kompozíciója, és $\big|F\big(\lambda(t)\big)\big|\leqq\|F\|\cdot\|\lambda(t)\|=\|F\|$.

7.3. Lemma. *Ha* $F, H \in \mathcal{M}(G)_*$, *akkor* $\hat{F} \cdot \hat{H} = \widehat{F * H}$.

Gyors ellenőrzéssel, $\widehat{F * H}(t) = F * H(\lambda(t)) = F(\lambda(t)) H(\lambda(t)) = \hat{F}(t) \cdot \hat{H}(t)$.

7.4. Lemma. *A kommutatív involutív* $\mathcal{M}(G)_*$ *Banach-algebra félig egyszerű. Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van* $\mathcal{M}(G)_*$ *komplex homomorfizmusai és* $\mathcal{M}(G)$ *azon* R *elemei között, amelyek az*

(7a) $$R \otimes R = \Phi(R) \quad \text{és} \quad \tilde{R} = R$$

feltételeknek tesznek eleget. A megfeleltetés a $\sigma(F) = F(R)$ *képlettel adható meg, ahol* $F \in \mathcal{M}(G)_*$, $R \in \mathcal{M}(G)$ *és* σ $\mathcal{M}(G)_*$ *homomorfizmusa.*

Legyen σ $\mathcal{M}(G)_*$ komplex homomorfizmusa. Ekkor σ folytonos, és létezik olyan $R \in \mathcal{M}(G)$, hogy $\sigma(F) = F(R)$. Bármely $F, H \in \mathcal{M}(G)_*$ esetén $F \otimes H(\Phi(R)) = F * H(R) = \sigma(F * H) = \sigma(F)\sigma(H) = F(R) \cdot H(R) = (F \otimes H)(R \otimes R)$, ami azt mutatja, hogy $\Phi(R) = R \otimes R$.

Ha $\sigma(F) = \sigma(H)$ minden σ komplex homomorfizmusra, akkor $F(R) = H(R)$ minden (7a)-nak megfelelő $R \in \mathcal{M}(G)$-re. $R = \lambda(t)$ kielégíti (7a)-t, ezért $F(\lambda(t)) = H(\lambda(t))$ és $F(\Sigma x(t)\lambda(t)) = H(\Sigma x(t)\lambda(t))$. F és H sűrű halmazon megegyeznek, ezért azonosak. Ezzel beláttuk $\mathcal{M}(G)_*$-ról, hogy félig egyszerű.

A lemma további részei kis számolással megkaphatók. Az $\{R \in \mathcal{M}(G) : R \otimes R = \Phi(R), \tilde{R} = R\}$ halmazt jelöljük röviden Γ-val. Az előző bizonyításból kiemeljük azt a tényt, hogy $\lambda(t) \in \Gamma$ és így rendelkezünk egy $\theta : G \to \Gamma$ leképezéssel. Γ w-zárt $\mathcal{M}(G)$ egységgömbjében, és ezért w-kompakt. Ebből adódóan $\hat{\hat{G}} = \Gamma \setminus \{0\}$ lokálisan w-kompakt. A jelölés már talán sugallja is fő tételünket.

7.5. Tétel. *Ha* G *lokálisan kompakt csoport, akkor az* $\mathcal{M}(G)$ *csoport Neumann-algebra preduálisa kommutatív involutív Banach-algebra, és nem nulla komplex homomorfizmusainak tere homeomorfan izomorf* G*-vel.*

Rövidebben: $\theta : G \to \hat{\hat{G}}$ ráképezés és homeomorfizmus.

7.6. Lemma. *Legyen* $E, F \in \mathcal{M}(G)_*$ *olyan, hogy* $\hat{E}, \hat{F} \in L^2(G)$. $A \in \mathcal{M}(G)$*-re definiáljuk* E_A*-t az* $E_A(B) = E(AB)$ *képlettel* $(B \in \mathcal{M}(G))$. *Ekkor*

$$\langle \hat{E}_A, \hat{F} \rangle = \langle \hat{E}, A\hat{F} \rangle.$$

$\{\lambda(t) : t \in G\}$ lineáris burka w-sűrű $\mathcal{M}(G)$-ben, ezért a bizonyítandó egyenlőséget elég $\lambda(t)$-re ellenőrizni, ami egyszerűen megtehető:

$$\langle \hat{E}_{\lambda(t)}, \hat{F} \rangle = \int E(\lambda(t)\lambda(s)) \overline{F(\lambda(s))}\, ds = \int E(\lambda(s)) \overline{F(\lambda(t^{-1}s))}\, ds = \langle \hat{E}, \lambda(t)\hat{F} \rangle.$$

7.7. Lemma. $f, g \in \mathcal{K}(G)$ *esetén van olyan* $F \in \mathcal{M}(G)_*$, *hogy* $\hat{F} = g * f$.

Valóban, $h_1, h_2 \in \mathcal{K}(G)$ függvényeket véve

$$\Omega_{h_1, h_2}(A) = \langle Ah_1, h_2 \rangle \quad (A \in \mathcal{M}(G))$$

$\mathcal{M}(G)_*$ egy elemét határozza meg. A $h_1 = (\Delta^{-1}\bar{f})^*$ és $h_2 = \bar{g}$ választással azt kapjuk, hogy $\hat{\Omega}_{h_1, h_2}(t) = \langle \lambda(t)(\Delta^{-1}\bar{f})^*, \bar{g} \rangle = \int g(ts) f(s^{-1})\, ds = g * f(t)$.

Ez a lemma biztosítja az $\hat{F}$ alakú függvények sűrűségét $C_0(G)$-ben, és ebből adódóan $L^2(G)$-ben. A 7.4. lemma alapján $\mathcal{M}(G)_*$ elemei végtelenben eltűnő foly-

tonos függvényeknek tekinthetők $\hat{\hat{G}}$-on, és elválasztják $\hat{\hat{G}}$ pontjait. A Stone—Weierstrass-tétel szerint $\mathcal{M}(G)_*$ sűrű $C_0(\hat{\hat{G}})$-ban. Legyen $f, g \in L^2(G) \cdot F \mapsto \langle \hat{F}f, g\rangle$ folytonos lineáris funkcionál $\mathcal{M}(G)_* \subset C_0(\hat{\hat{G}})$-on, és kiterjeszthető $C_0(\hat{\hat{G}})$-ra. A Riesz reprezentációs tétel szerint van $\hat{\hat{G}}$-on olyan $\mu_{f,g}$ Radon-mérték, hogy

$$\langle \hat{F}f, g\rangle = \int_{\hat{\hat{G}}} F(R)\, d\mu_{f,g}(R).$$

7.8. Lemma. *Ha* $E, F, U, V \in \mathcal{M}(G)_*$ *és* $\hat{E}, \hat{F}, \hat{U}, \hat{V} \in L^2(G)$, *akkor*

$$E(R)\overline{F(R)}\, d\mu_{U,V}(R) = U(R)\overline{V(R)}\, d\mu_{\hat{E},\hat{F}}(R).$$

$\mathcal{M}(G)_*$ félig egyszerű voltát kihasználva igazolható, $H \in \mathcal{M}(G)_*$-ot kell integrálni mindkét mérték szerint.

7.9. Lemma. *Létezik* $\hat{\hat{G}}$-*on olyan* $\hat{\mu}$ *Radon-féle mérték, hogy* $E, F \in \mathcal{M}(G)_*$ *és* $\hat{E}, \hat{F} \in L^2(G)$ *mellett*

(7b) $$\langle \hat{E}, \hat{F}\rangle = \int E(R)\overline{F(R)}\, d\hat{\mu}(R)$$

(7c) $$d\mu_{\hat{E},\hat{F}}(R) = E(R)\overline{F(R)}\, d\hat{\mu}(R),$$

teljesül.

Tegyük fel, hogy $F \in \mathcal{M}(G)_*$ és $\hat{F} \in L^2(G)$. Az $U_F = \{R \in \hat{\hat{G}} : F(R) \neq 0\}$ halmaz nyílt $\hat{\hat{G}}$-ban. A 7.7. lemma következtében az U_F alakú halmazok $\hat{\hat{G}}$ fedését alkotják. Ha $\mathcal{K}(U_F) = \{f \in \mathcal{K}(\hat{\hat{G}}) : \operatorname{supp} f \subset U_F\}$, akkor

(7d) $$\mu_F(f) = \int \frac{f(R)}{|F(R)|^2}\, d\mu_{\hat{F},\hat{F}}(R) \quad (f \in \mathcal{K}(U_F))$$

pozitív Radon-mérték U_F-en. Az előző lemma miatt az $f \in \mathcal{K}(U_F) \cap \mathcal{K}(U_E)$ függvényekre $\mu_E(f) = \mu_F(f)$. Így az $(U_F, \mu_F)_F$ család definiál egy $\hat{\mu}$ Radon-mértéket $\hat{\hat{G}}$-on, amelynek U_F-re való megszorítása éppen μ_F. (7c) az $E = F$ esetben (7d) következménye, és az E, F párra a polarizációs azonosság alapján következik.

Válasszunk egy olyan $(H_\alpha) \subset \mathcal{M}(G)_* \subset C_0(\hat{\hat{G}})$ sorozatot, hogy $H_\alpha \to 1$ minden kompakt halmazon egyenletesen. (7c)-t használva $\int H_\alpha(R)|F(R)|^2 d\,\hat{\mu}(R) = \int H_\alpha(R)\, d\mu_{\hat{F},\hat{F}}(R) = \langle \hat{H}_\alpha \hat{F}, \hat{F}\rangle$. Határátmenettel kapjuk, hogy $\langle \hat{F}, \hat{F}\rangle = \int |F(R)|^2\, d\hat{\mu}(R)$, és ismét alkalmazva a polarizációs azonosságot, kapjuk (7b)-t. A lemma bizonyítása teljes.

7.10. Lemma. *Ha* $R \in \hat{\hat{G}} \subset \mathcal{M}(G)$, *akkor* $\{Q \in \hat{\hat{G}} : RQ \in K\}$ *kompakt minden* $K \subset \hat{\hat{G}}$ *kompakt halmazra.*

Az állítást nem bizonyítjuk.

A tétel bizonyítása: $\hat{\hat{G}}$ *-félcsoport, hiszen ha $R_1, R_2 \in \hat{\hat{G}}$, akkor $R_1 \cdot R_2$ és R_1^* is eleget tesz a (7a) feltételnek, tehát $\hat{\hat{G}}$-hoz tartozik. Be fogjuk látni, hogy $\hat{\mu}$ bal invariáns mérték $\hat{\hat{G}}$-on. Legyen $R \in \hat{\hat{G}}$. A 7.6. és 7.9. lemmák alapján

$$\int E(RQ)\overline{F(Q)}\, d\hat{\mu}(Q) = \langle \hat{E}_R, \hat{F}\rangle = \langle \hat{E}, R\hat{F}\rangle = \int E(Q)\overline{F(R^*Q)}\, d\hat{\mu}(Q)$$

és minden $f, g \in \mathscr{K}(\hat{\hat{G}})$ függvényre

$$\int f(RQ)\overline{g(Q)}\, d\hat{\hat{\mu}}(Q) = \int f(Q) g(R^*Q)\, d\hat{\hat{\mu}}(Q). \tag{7e}$$

Legyen $\operatorname{supp} f = K$. A 7.10. lemma szerint $\{Q \in \hat{\hat{G}} : RQ \in K\}$ kompakt. Válasszunk olyan $g \in \mathscr{K}(\hat{\hat{G}})$ függvényt, hogy $g(Q)=1$, ha $RQ \in K$ és $g(R^*Q)=1$, ha $Q \in K$. Ebben az esetben (7e) azt adja, hogy

$$\int f(RQ)\, d\hat{\hat{\mu}}(Q) = \int f(Q)\, d\hat{\hat{\mu}}(Q)$$

minden $f \in \mathscr{K}(\hat{\hat{G}})$-ra, ami $\hat{\hat{\mu}}$ bal invarianciája.

Most belátjuk, hogy $\hat{\hat{G}}$ része $\mathscr{M}(G)$ unitér csoportjának. $R \in \hat{\hat{G}}$-ra

$$\langle RR^*\hat{E}, \hat{F}\rangle = \langle R^*\hat{E}, R^*\hat{F}\rangle = \int E(RQ)\overline{F(RQ)}\, d\hat{\hat{\mu}}(Q) =$$

$$= \int E(Q)\overline{F(Q)}\, d\hat{\hat{\mu}}(Q) = \langle \hat{E}, \hat{F}\rangle.$$

Következésképpen $RR^* = I$ és hasonlóan $R^*R = I$.

$\hat{\hat{G}}$ lokálisan kompakt csoport, és $\hat{\hat{\mu}}$ a Haar-mérték $\hat{\hat{G}}$-on. A $\theta : G \to \hat{\hat{G}}$, $t \mapsto \lambda(t)$ leképezés folytonos. Ha V kompakt környezete az egységnek G-ben, akkor válasszunk olyan $f \in \mathscr{K}(G)$ függvényt, hogy $\|f\|_2 = 1$ és $\operatorname{supp} f = K$-ra $KK^{-1} \subset V$ teljesüljön. Ha $t \in G$-re $\|\lambda(t)f - f\|_2 < 1$, akkor $t \in V$ kell, hogy legyen. Valóban, ha $t \notin V$, akkor f és $\lambda(t)f$ tartója diszjunkt, és $\|\lambda(t)f - f\|^2 = 2$. Ezzel igazoltuk az inverz folytonosságát $\hat{\hat{G}}$-on az operátorok pontonkénti konvergenciáját tekintve. Ez elegendő is, hiszen az unitér csoporton a pontonkénti konvergencia topológiája megegyezik a gyenge operátor topológiával.

Hátra van még annak megmutatása, hogy θ ráképezés. $\theta(G)$ $\hat{\hat{G}}$-nak zárt részcsoportja. Van $\hat{\hat{G}}$-on olyan Radon-mérték, amelynek $\theta(G)$-re való megszorítása a Haar-mértéket adja $\theta(G)$-n. $f \in \mathscr{K}(\hat{\hat{G}})$-re

$$\int f(Q)\, dv(Q) = \int f(\lambda(t))\, dt$$

(a bal oldali integrálás $\hat{\hat{G}}$-on, a jobb oldali G-n történik). Ha $F, H \in \mathscr{M}(G)_*$ és $\hat{F}, \hat{H} \in L^2(G)$, akkor $f = F \cdot \overline{H}$-ra

$$\int f(Q)\, dv(Q) = \int F(Q)\overline{H(Q)}\, dv(Q) = \int F(\lambda(t))\overline{H(\lambda(t))}\, dt = \int \hat{F}(t)\overline{\hat{H}(t)}\, dt = \langle \hat{F}, \hat{H}\rangle.$$

A 7.6. lemma szerint $\hat{E}_{R^*} = R\hat{E}$ majdnem minden $t \in G$-re, ezért

$$\int f(R^*Q)\, dv(Q) = \langle R\hat{F}, R\hat{H}\rangle = \langle \hat{F}, \hat{H}\rangle = \int f(Q)\, dv(Q).$$

Megállapíthatjuk, hogy v bal invariáns integrált határoz meg a $\sum F_i \overline{H}_i$ alakú függvényeken. Mivel ezek sűrűn vannak $C_0(\hat{\hat{G}})$-ban, v csak a Haar-mérték lehet $\hat{\hat{G}}$-on. A Haar-mérték (1d) tulajdonsága miatt $\theta(G) = \hat{\hat{G}}$, és a tétel bizonyítása teljes.

IRODALOM

[1] J. DIXMIER: *Les C*-algèbres et leurs represéntations,* Gauthier-Villars, 1965.
[2] P. EYMARD: L'algébre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France,* 92 (1964), 181—236.
[3] A. GUICHARDET: *Analyse harmonique commutative,* Dunod, 1968.
[4] E. HEWITT, K. A. ROSS: *Abstract harmonic Analysis* I, II. Springer-Verlag, 1966 és 1970.
[5] L. H. LOOMIS: *An introduction to abstract harmonic analysis,* Van Nostrand, 1953.
[6] М. А. НАЙМАРК: *Нормированные колца,* Гостехиздат, 1956.
[7] Y. NAKAGAMI és M. TAKESAKI: Duality for crossed products of van Neumann algebras, *Lecture notes in Math.*, 731.
[8] W. RUDIN: *Fourier analysis on groups,* Interscience Publishers, 1962.
[9] K. SAITO: On a duality for locally compact groups, *Tôhoku Math. J.*, 20 (1968), 355—367.
[10] I. E. SEGAL: A non-commutative extension of abstract integration, *Ann. Math.*, 57 (1953), 401—457.
[11] I. E. SEGAL és R. A. KUNZE: *Integrals and operators,* Springer-Verlag, 1968 és 1978.
[12] M. TAKESAKI: *Operator algebras,* Springer-Verlag, 1979.
[13] M. TAKESAKI: Duality and von Neumann algebras, *Lecture notes in Math.*, 247 (1972), 666—749.
[14] N. A. TATSUUMA: A duality theorem to locally compact groups, *J. Math. Kyoto Univ.*, 6 (1967), 187—293.
[15] D. M. TOPPING: *Lectures on von Neumann algebras,* Van Nostrand, 1971.

ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ: ГРУППОВАЯ АЛГЕБРА НЕЙМАНА И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Д. ПЕЦ

LOCALLY COMPACT GROUPS: GROUP VON NEUMANN ALGEBRA AND DUALITY

D. PETZ

EGY SZÁMNÉGYESEKRE VONATKOZÓ REKURZIÓ

MAGYAR ZOLTÁN

Egy ismert feladat szerint, ha az egész számokból álló (a, b, c, d) számnégyesre többször egymás után alkalmazzuk a

$$P(a, b, c, d) = (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$$

operációt, akkor véges sok lépés után a $(0, 0, 0, 0)$ számnégyeshez jutunk. Ha valós számokból indulunk ki, akkor ez nincs mindig így. Tekintsük a $p(x)=x^3+2x^2-2$ polinomot. Mivel p' gyökei $-\frac{4}{3}$ és 0, és $p\left(-\frac{4}{3}\right)<0$, $p(0)<0$, valamint $p(1)>0$, azért p-nek egyetlen valós gyöke van, λ_0, amelyre $0<\lambda_0<1$. Ha a

$$z = \left(1, 1+\lambda_0, (1+\lambda_0)^2, (1+\lambda_0)^3\right) \tag{1}$$

számnégyesből indulunk ki, akkor könnyen láthatóan $P(z)=\lambda_0 z$, és így $P^n(z)=\lambda_0^n z$ $(n=1, 2, \ldots)$, tehát sosem jutunk a $(0, 0, 0, 0)$ számnégyeshez. Ha $k>0$, akkor nyilván $P^n(kz)=kP^n(z)=\lambda_0^n kz$, tehát a kz számnégyes hasonló tulajdonsággal rendelkezik.

Meg fogjuk mutatni, hogy a fenti kz számnégyesek kivételével lényegében bármilyen (a, b, c, d) számnégyes esetén $P^n(a, b, c, d)=(0, 0, 0, 0)$, ha n elég nagy. Állításunk pontosabb megfogalmazásához vezessük be a következő jelöléseket.

Ha $v=(v_1, v_2, v_3, v_4)\in\mathbf{R}^4$, akkor legyen

$$lv = (v_2, v_3, v_4, v_1),$$

$$tv = (v_4, v_3, v_2, v_1).$$

Legyen G az l és t által generált csoport. Mivel $lt=tl^3$ és $t^2=l^4=1$, azért

$$G = \{t^i l^j;\ i = 0, 1,\ j = 0, 1, 2, 3\}$$

8 elemű. Legyen $u\sim v$, ha van olyan $g\in G$, hogy $u=gv$; ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció. Közvetlen számolással adódik, hogy minden $v\in\mathbf{R}^4$ esetén

$$Plv = lPv \quad \text{és} \quad Ptv = tl^3 Pv.$$

Ebből következik, hogy

$$u \sim v \Rightarrow Pu \sim Pv.$$

Tétel. *„Lényegében egy" kivétellel minden $v\in\mathbf{R}^4$ számnégyesre $P^n v=0$, ha $n\geqq n_0$. Pontosabban, $P^n v\neq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$ akkor és csak akkor, ha van olyan $k>0$,*

hogy

$$Pv \sim k \cdot z,$$

ahol z *az* (1) *alatti számnégyes. Ekkor* $P^n v \sim \lambda_0^{n-1} kz$ *minden* n*-re.*

Bizonyítás. Jelöljük Av-vel v sorbarendezettjét, azaz legyen $Av=(a, b, c, d)$ úgy, hogy $a \leqq b \leqq c \leqq d$, és $\{a, b, c, d\}=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Először a következő állítást fogjuk belátni.

Lemma. *Ha* $P^6 v \neq 0$, *akkor* v *elemei különbözők, és* $v \sim Av$.

Könnyű ellenőrizni, hogy tetszőleges $p, q, t \in \mathbf{R}$-re $P^4(t, p, t, q)=0$. Ezért a lemma igazolásához elég megmutatni, hogy ha v elemei nem mind különbözők, vagy $v \nsim Av$, akkor

(2) $$P^2 v \sim (t, p, t, q) \quad \text{alkalmas } p, q, t\text{-vel.}$$

Legyenek r és s azok a permutációk, amelyek $v=(v_1, v_2, v_3, v_4)$-hez az $rv=(v_1, v_2, v_4, v_3)$, illetve az $sv=(v_1, v_3, v_2, v_4)$ számnégyest rendelik. Mind r, mind s, mind pedig rs^{-1} olyan, hogy két „szemközti" (tehát 1. és 3. vagy 2. és 4.) elemből nem szemköztit csinál, viszont G elemei a szemköztiséget meghagyják. Ebből következik, hogy G, Gr és Gs diszjunktak, és így együtt az egész S_4-et alkotják.

Ha $Av=(a, b, c, d)$, akkor tehát (a, b, c, d) bármely permutációja, így v is ekvivalens Av, rAv és sAv valamelyikével. Ha $v \nsim Av$, akkor eszerint $v \sim rAv$ vagy $v \sim sAv$. Ha a, b, c, d nem mind különbözők, akkor $a=b$ vagy $c=d$ esetén $Av \sim rAv$, $b=c$ esetén pedig $Av=sAv$. Tehát indirekt feltevésünk esetén vagy $v \sim rAv$, vagy pedig $v \sim sAv$. Egyszerű számolás mutatja, hogy mind $P^2 rAv$-ben, mind pedig $P^2 sAv$-ben vannak egyenlő szemközti elemek. Például

$$PrAv = P(a, b, d, c) = (b-a, d-b, d-c, c-a),$$

és így $P^2 rAv$-ben a 2. és a 4. elem egyaránt $c-b$. Így $P^2 v$-ben is vannak egyenlő szemközti elemek, amivel (2)-t beláttuk.

Most rátérünk a tétel bizonyítására; elegendő az állítás „csak akkor" részét bizonyítani. Tegyük fel, hogy egy rögzített $v_0 \in \mathbf{R}^4$-re $P^n v_0 \neq 0$ minden n-re, és vezessük be az $A(P^n v_0)=(a_n, b_n, c_n, d_n)$ jelölést. Ekkor a lemma szerint a_n, b_n, c_n, d_n különbözők minden $n \geqq 0$-ra, és így $a_n > 0$ minden $n \geqq 1$-re. Ugyancsak a lemma állítása szerint

(3) $$(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}) = A(P^{n+1} v_0) \sim P^{n+1} v_0 \sim P\big(A(P^n v_0)\big) =$$

$$= (b_n-a_n, c_n-b_n, d_n-c_n, d_n-a_n) \overset{\text{def}}{=} (\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Mivel $\delta=\alpha+\beta+\gamma$, azért δ a legnagyobb, és így

(4) $$d_{n+1} = d_n - a_n \quad (n \geqq 0),$$

továbbá

(5) $$d_n = a_n + b_n + c_n \quad (n \geqq 1).$$

Mivel az ekvivalencia megtartja a szemköztiséget, azért (3)-ból és (4)-ből következik, hogy $b_{n+1}=c_n-b_n$. Végül, $n \geqq 1$ esetén (5)-ből $d_n-c_n=a_n+b_n > b_n-a_n$ következik, tehát $a_{n+1}=b_n-a_n$ és $c_{n+1}=d_n-c_n=a_n+b_n$.

Így a $h_n=(a_n, b_n, c_n)$ jelöléssel

$$h_{n+1}=Th_n,$$

ahol

$$T=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(4) szerint $a_n, b_n, c_n<d_n<d_{n-1}<\ldots<d_1$, így

$$\|T^n h_1\|^2=\|h_{n+1}\|^2<3d_1^2 \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Kiszámítva T karakterisztikus polinomját, $p(x)=x^3+2x^2-2$ adódik. Mint láttuk, p-nek egyetlen valós gyöke van, λ_0, amely 0 és 1 közé esik. Ha a két komplex gyököt λ_1, λ_2-vel jelöljük, akkor $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$, és p konstans tagja -2 lévén, $\lambda_0\lambda_1\lambda_2=$ $=\lambda_0|\lambda_1|^2=2$, tehát $0<\lambda_0<1$ miatt $|\lambda_1|=|\lambda_2|>1$.

Legyenek w_0, w_1, w_2 a $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$-höz tartozó sajátvektorok $\mathbf{C}^3$-ben, w_0-nak választhatjuk $(1, 1+\lambda_0, (1+\lambda_0)^2)$-et. Mivel a λ_i-k különbözők, azért a w_i-k függetlenek, tehát

$$h_1=\sum_0^2 \alpha_i w_i$$

alkalmas komplex $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$-vel. A w_i-k függetlensége miatt mindegyik pozitív távolságra van a többi által generált altértől, ezért $|\lambda_1|=|\lambda_2|>1$-ből következik, hogy ha α_1, α_2 bármelyike nullától különböző lenne, akkor $\|T^n h_1\|\to\infty$ lenne (6)-tal ellentétben. Így $\alpha_1=\alpha_2=0$, $h_1=\alpha_0 w_0$. Figyelembe véve, hogy h_1 és w_0 elemei pozitívak, azért $\alpha_0>0$, és mivel $d_1=a_1+b_1+c_1$, így $d_1=\alpha_0(1+\lambda_0)^3$ (az átalakítás $\lambda_0^3+2\lambda_0^2-$ $-2=0$ alapján végezhető). Tehát $Pv_0\sim APv_0=(a_1, b_1, c_1, d_1)=\alpha_0 z$, amivel a tételt bebizonyítottuk.

ОДНА РЕКУРСКИЯ О ЧЕТВЕРТКАХ ЧИСЕЛ

З. МАДЯР

ON A RECURSION CONCERNING QUADRUPLES OF NUMBERS

Z. MAGYAR

JELENTÉS AZ 1980. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1980. október 31. és november 10. között rendezte meg az 1980. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi és főiskolai hallgató, középiskolás diák, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1980-ban fejezték be. A verseny feladatai az alábbiak voltak:

1. Jelölje valós x esetén $\|x\|$ a legközelebbi egésztől való távolságot. Legyen $0 \leqq x_n < 1$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\varepsilon > 0$. Bizonyítsuk be, hogy van végtelen sok olyan (n, m) indexpár, hogy $n \neq m$ és $\|x_n - x_m\| < \min\left(\varepsilon, \frac{1}{2|n-m|}\right)$.

2. Jelölje $\mathscr{H}$ a legfeljebb $2^{\aleph_0}$ számosságú alaphalmazon értelmezett, teljes $\aleph_1$-es részgráfot nem tartalmazó gráfok osztályát. Bizonyítsuk be, hogy $\mathscr{H}$-ban nincs olyan gráf, amelynek minden $\mathscr{H}$-beli gráf részgráfja.

3. Egy hálóban kössük össze éllel az $a \wedge b$, $a \vee b$ elemeket minden összehasonlíthatatlan a, b elempár esetén. Lássuk be, hogy az így kapott gráf összefüggő komponensei részhálók.

4. Legyen $T \in SL(n, \mathbf{Z})$, G nem-szinguláris, egész elemekből álló $n \times n$-es mátrix, $S = G^{-1}TG$. Igazoljuk, hogy van olyan k természetes szám, amelyre $S^k \in SL(n, \mathbf{Z})$.

5. Legyen G az S_{25} szimmetrikus csoport S_{25}-től és A_{25}-től különböző tranzitív részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy G rendje nem osztható 23-mal!

6. A folytonos $f: [a, b] \to \mathbf{R}^2$ leképezést nevezzük reducibilisnek, ha van kétszer befutott íve (azaz, ha van $a \leqq \alpha < \beta \leqq \gamma < \delta \leqq b$ úgy, hogy létezik szigorúan monoton és folytonos $h: [\alpha, \beta] \to [\gamma, \delta]$, amelyre $f(t) = f(h(t))$ minden $\alpha \leqq t \leqq \beta$ esetén), ellenkező esetben irreducibilisnek. Készítsünk irreducibilis $f: [a, b] \to \mathbf{R}^2$ és $g: [c, d] \to \mathbf{R}^2$ leképezést úgy, hogy $f([a, b]) = g([c, d])$, és

a) f is, g is rektifikálható, de ívhosszuk különböző;

b) f rektifikálható, de g nem.

7. Legyen $n \geqq 2$ természetes szám és $p(x)$ olyan valós együtthatós, legfeljebb n-edfokú polinom, amelyre

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |p(x)| \leqq 1, \quad p(-1) = p(1) = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$|p'(x)| \leqq \frac{n \cos \frac{\pi}{2n}}{\sqrt{1-x^2 \cos^2 \frac{\pi}{2n}}} \quad \left(-\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2n}} < x < \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2n}} \right).$$

8. Legyen $f(x)$ a $(0, 2\pi)$ intervallumban értelmezett nem-negatív, integrálható függvény, amelynek Fourier-sora: $f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(n_k x)$ alakú, ahol az n_k természetes számok közül egyik sem osztója egy másiknak. Igazolandó, hogy $|a_k| \leqq a_0$.

9. Bontsunk fel egy egységnyi területű négyszöget bizonyos számú egyenessel n részsokszögre és írjunk minden részsokszögbe egy-egy kört. Mutassuk meg, hogy a körök kerületösszege legfeljebb $\pi\sqrt{n}$ (az egyenesek egyike sem metszhet egy kijelölt sokszöget).

10. Tegyük fel, hogy az X izolált pont nélküli T_3-térben nem adható meg megszámlálhatónál több páronként diszjunkt nemüres nyílt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy X lefedhető legfeljebb kontinuum sok seholsem sűrű halmazzal.

Az 1. feladatot T. Sós Vera, a 2.-at Fred Galvin, a 3.-at Ajtai Miklós, a 4.-et Szekeres György, az 5.-et Pelikán József, a 6.-at Császár Ákos, a 7.-et Szabados József, a 8.-at Halász Gábor, a 9.-et Fejes Tóth Gábor és László, a 10. feladatot pedig Juhász István bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére.

A kitűzött feladatokra 19 versenyző nyújtott be megoldásokat, összesen 64-et. A bizottság sajnálattal állapítja meg, hogy a verseny iránti érdeklődés csökkenőben van: mindössze öten oldottak meg négy vagy több feladatot, ez az öt versenyző az ELTE két évfolyamáról kerül ki. A 2. feladatra nem érkezett be helyes megoldás, a 3.-ra mindössze kettő. A többi feladat mindegyikére szép számmal érkeztek megoldások.

A versenybizottság 1980. november 26-i ülésén a következő határozatot hozta:

I. díjat és 4500 Ft pénzjutalmat kap Kollár János, az ELTE végzett hallgatója.

II. díjat és 3500 Ft pénzjutalmat kap Seress Ákos, az ELTE harmadéves hallgatója.

III. díjat és 2500 Ft pénzjutalmat kap Simányi Nándor, az ELTE végzett hallgatója.

Első dicséretben részesül és 1000 Ft pénzjutalmat kap Ivanyos Gábor, második dicséretben részesül és 500 Ft-os könyvjutalmat kap Magyar Zoltán, mindketten az ELTE harmadéves hallgatói.

Kollár János a 2. kivételével mindegyik feladatra ad be alaposan kidolgozott, világos megoldást. Javítja az 1-es és 10-es feladat eredményét, az 5-ös, 8-as és 9-es példára valamennyi versenyző közül a legegyszerűbb bizonyítást adja.

Seress Ákos szintén a 2. kivételével mindegyik feladatra ad be megoldást. A 3. feladatot a moduláris esetben oldja meg, a 9. feladat állítását háromszögekből és négyszögekből álló felosztásra igazolja. Bizonyításai általában meglehetősen bonyolultak.

Simányi Nándor az 1., 4., 5., 6., 7., 8., 10. feladatokra nyújtott be megoldást. A 7. feladat becslését csak egy körülbelül 4-es faktor erejéig bizonyítja.

Ivanyos Gábor a 4., 5., 7., 8., 10.-edik feladatokra adott be megoldást. A 7. példára adott megoldása hibás, bár a hiba könnyen javítható. A 10. feladatra rendkívül ügyes, a halmazelméleti fa fogalmát elkerülő megoldást adott.

Magyar Zoltán a 4., 6., 8., 9. feladatot oldotta meg, a 6. feladatot élesíti: egydimenziós példát ad.

A versenybizottság: Császár Ákos (elnök)
Fejes Tóth László
Hajnal András
Halász Gábor
Pelikán József
T. Sós Vera
Komjáth Péter (titkár)

A feladatok megoldásai

Az 1. feladat megoldása

Legyen $\varepsilon>0$ rögzített. Belátjuk, hogy ha n elég nagy természetes szám, $0\leqq x_i<1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, van legalább egy i, j indexpár, amire $\|x_i-x_j\|<$ $<\min\left(\varepsilon, \frac{1}{2|i-j|}\right)$. Ez elég, mert a végtelen $x_1, x_2, \ldots$ sorozatot n-es blokkokra osztva mindegyikben található egy alkalmas indexpár, az $|i-j|$ indexkülönbség pedig nyilván nem változik, ha i-t is j-t is a blokkbeli sorszámmal helyettesítjük.

Alkalmas f: $\{1, 2, \ldots, n\}\to\{1, 2, \ldots, n\}$ permutáció az x-eket növő sorrendbe állítja: $0\leqq x_{f(1)}\leqq\ldots\leqq x_{f(n)}<1$. Feltehető, hogy minden $1\leqq i\leqq n$-re $\|x_{f(i+1)}-x_{f(i)}\|\geqq$ $\geqq\min\left(\varepsilon, \frac{1}{2|f(i)-f(i+1)|}\right)$ (különben készen vagyunk). Jelölje A azon $1\leqq i\leqq n$ indexek halmazát, amelyekre $\|x_{f(i+1)}-x_{f(i)}\|\geqq\varepsilon$. Mivel a (ciklikusan számított) $[x_{f(1)}, x_{f(2)})$, $[x_{f(2)}, x_{f(3)}, \ldots, [x_{f(n)}, x_{f(1)})$ intervallumok lefedik a (két végén összekötött) intervallumot, adódik

$$1\geqq\sum_{i=1}^{n}\|x_{f(i)}-x_{f(i+1)}\|\geqq\sum_{i\in A}\varepsilon+\sum_{i\notin A}\frac{1}{2|f(i)-f(i+1)|},$$

továbbá $|A|\leqq\frac{1}{\varepsilon}$. Azaz, $1-|A|\varepsilon\geqq\frac{1}{2}\sum_{i\notin A}\frac{1}{|f(i)-f(i+1)|}$. A számtani közép és a harmonikus közép közti egyenlőtlenség felhasználásával $\sum_{i\notin A}|f(i)-f(i+1)|\geqq\frac{(n-|A|)^2}{2(1-|A|\varepsilon)}$. A $\sum_{i=1}^{n}|f(i)-f(i+1)|$ összegben minden $j\in\{1, 2, \ldots, n\}$ szám kétszer fordul elő, mindkétszer a ±1 előjelek valamelyikét kapja, a $2n$ darab előjel összege zérus. Nyilván akkor a legnagyobb az összeg, ha a nagy számok $+2$, a kicsik -2 együtthatókat kapnak. Innen adódik, hogy $\sum_{i=1}^{n}|f(i)-f(i+1)|\leqq\frac{n^2}{2}$, illetve $\frac{n^2-1}{2}$, aszerint, hogy n páros, illetve páratlan.

Összevetve a fenti egyenlőtlenséggel $1-|A|\varepsilon\geqq\left(1-\frac{|A|}{n}\right)^2$ adódik, ami $|A|\geqq1$ esetén elég nagy n-re ellentmondás. $A=\emptyset$-re $1=1$ adódik, ami azt jelenti, hogy az n páros, az $|f(i+1)-f(i)|$ értékek egyenlőek (számtani közép—harmonikus közép),

de ha $f(i)>\frac{n}{2}$, $f(i)$ kétszer is $+1$ együtthatóval szerepel, azaz $f(i)>f(i+1)$, $f(i)>f(i-1)$, ahonnan $f(i-1)=f(i+1)$, $n\leqq 2$ adódik. Egyenlőség így ekkor sem lehet, ellentmondásra jutottunk.

Kollár János

Megoldotta: Hajnal Péter, Kollár János, Seress Ákos, Simányi Nándor, Szegedy Márió.

Megjegyzések:

1. Lényegében minden megoldás ezen az úton halad, különbség csak a $\sum_{i=1}^{n} |f(i+1)-f(i)| \leqq \frac{n^2}{2}$ egyenlőtlenség igazolásában adódik.

2. Kollár János igazolja $\|x_i-x_j\|<\min\left(\varepsilon, \frac{1}{\tau|i-j|}\right)$-t $\tau=2+\frac{1}{13}$-dal és belátja, hogy $\tau>\sqrt{5}$-re ez nem lehet igaz, hiszen ebből adódik, hogy irracionális α-ra van végtelen sok racionális $\frac{p}{q}$, amire $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\tau q^2}$. Valójában az állítás $\tau=\sqrt{5}$-tel is igazolható, csak a bizonyítás jóval bonyolultabb.

A 2. feladat megoldása

A következőt kell belátnunk: adott (V, G) gráfhoz, ha $|V|=2^{\aleph_0}$ és G-ben nincs teljes $\aleph_1$-es, van ugyanilyen tulajdonságú (W, H) gráf, ami (V, G)-be nem ágyazható be. Legyen tehát adva (V, G). Először W-t definiáljuk: tartozzanak bele azok az injekciók, amelyek valamelyik megszámlálható rendszámot (akár $0=\emptyset$-t) G egy teljes részgráfjába képezik. Az f és g W-beli függvényeket összekötjük, ha valamelyik kiterjesztése a másiknak (ezzel H is definiálva lett). Nyilván $|W|=\sum_{\alpha<\omega_1} |\alpha\to V| \leqq \aleph_1\cdot(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

Ezután belátjuk, hogy W-ben nincs teljes $\aleph_1$-es. Ha az f_α: $\alpha<\omega_1$ függvények páronként össze vannak kötve és feltesszük rögtön azt is, hogy a $\mathrm{Dom}\,(f_\alpha)$ rendszámok növően vannak felsorolva, H definíciója szerint $\beta<\alpha<\omega_1$-re f_α f_β-nak kiterjesztése, így az összes f_α egy olyan $f\colon \omega_1\to V$ függvényt definiál, amely injektív és értékkészlete teljes $\aleph_1$-es, de ez lehetetlen.

Végül belátjuk, hogy (W, H) (V, G)-be nem ágyazható be. Valóban, legyen $h\colon W\to V$ beágyazás. Transzfinit rekurzióval definiáljuk $\alpha<\omega_1$-re az $f_\alpha\in W, f_\alpha\colon \alpha\to V$ függvényt és az $x_\alpha=h(f_\alpha)\in V$ pontot. Legyen f_0 az üres függvény: $\mathrm{Dom}\,(f_0)=0$. Ez nyilván eleme W-nek. Általában, ha $\beta<\alpha$-ra f_β definiált és $x_\beta=h(f_\beta)$, továbbá az f_β-k különbözőek és egymás kiterjesztései, az $\{x_\beta\colon \beta<\alpha\}=h\{f_\beta\colon \beta<\alpha\}$ teljes részgráf lesz G-ben, így a $\mathrm{Dom}\,(f_\alpha)=\alpha$, $\beta<\alpha$-ra $f_\alpha(\beta)=x_\beta$-val definiált f_α függvény W-beli lesz. Be kell látni, hogy $f_\alpha\neq f_\beta(\beta<\alpha)$, ami nyilvánvaló, továbbá, hogy $\beta<\alpha$-ra f_α f_β kiterjesztése. De a definíció szerint $\gamma<\beta$-ra $f_\alpha(\gamma)=f_\beta(\gamma)=x_\gamma$. Tehát $\alpha<\omega_1$-re f_α definiálható, azaz $\{x_\alpha\colon \alpha<\omega_1\}$ teljes részgráf G-ben, ellentmondás.

(Fred Galvin és Richard Laver)

A feladatra nem érkezett be helyes megoldás.

A 3. feladat megoldása

Az egyszerűség kedvéért jelöljük $a \sim b$-vel azt a tényt, hogy a és b a gráf azonos komponensében van. Be kell látnunk, hogy ha $b_1, \ldots, b_n$ gráfbeli út, akkor $b_1 \sim b_1 \vee b_n$, ez viszont arra redukálható, hogy $b_1 \vee b_{n-1} \sim b_1 \vee b_n$.

Állítás. Legyen $x \lneqq y$, $a = x \vee y$, $b = x \wedge y$, z tetszőleges. Ekkor az alábbi két eset valamelyike teljesül:

(a) $a \vee z \sim b \vee z$,

(b) a, b, z egyike $\sim a \vee z$, továbbá a, b, z egyike $\sim b \vee z$.

Ez elég a feladat állításának bizonyításához, hiszen $b_{n-1} = x \vee y$, $b_n = x \wedge y$ esetén $a = b_{n-1}$, $b = b_n$, $z = b_1$ szereposztással az (a) esetben már készen vagyunk, a (b) esetben pedig az adódik, hogy b_1, b_{n-1} vagy b_n valamelyike $\sim b_1 \vee b_n$-nel és ez elég. Ha $b_{n-1} = x \wedge y$, $b_n = x \vee y$ hasonlóan érünk célt.

Lássunk az állítás bizonyításához! Először az $a \vee z$-vel kapcsolatos részt igazoljuk.

1. Ha $a \lneqq z$, $a \vee z = a$, z így (b) első fele adódik.

2. Legyen $a \nleqq z \vee y$. Innen $x \ngeqq z \vee y$ adódik, hiszen $x \geqq z \vee y$ esetén $x \geqq y$ is állna, ha $x \leqq z \vee y$, úgy $a = x \vee y \leqq z \vee y$ lenne. Ezért $a \vee z = x \vee y \vee z > x \wedge (y \vee z)$. $x \wedge a = x$ miatt ez így írható tovább: $x \wedge (y \vee z) = x \wedge (a \wedge (y \vee z)) < x \vee (a \wedge (y \vee z))$ és ehhez be kell látni, hogy $x \ngeqq a \wedge (z \vee y)$. Valóban, ha $x \leqq a \wedge (z \vee y)$, akkor $y \leqq a \wedge (z \vee y)$ miatt $a = x \vee y \leqq a \wedge (z \vee y)$, amit kizártunk, ha pedig $x \geqq a \wedge (z \vee y)$, $y \leqq a \wedge (z \vee y)$ miatt $y \leqq x$, ami lehetetlen.

De $x \vee (a \wedge (y \vee z)) = a$, mert $x, a \wedge (y \vee z) \leqq a$ és $a \wedge (z \vee y) \geqq y$, tehát $x \vee (a \wedge (y \vee z)) \geqq x \vee y = a$. Így $a \sim a \vee z$ adódott. Hasonlóan intézhető el az $a \nleqq z \vee x$ eset is.

3. Tegyük fel, hogy $a \leqq z \vee x$, $a \leqq z \vee y$ és $a \ngeqq z$. Innen $x \leqq z \vee y$, ezért $z \vee a = z \vee y$. Hasonlóan $y \leqq z \vee x$, $z \vee x = z \vee a = z \vee y$. Továbbá feltehető $x \ngeqq z$, $y \ngeqq z$ is. ($x \leqq z$ esetén ugyanis $a \vee z = y \vee z \sim a$. Ha $x \geqq z$ vagy $y \geqq z$, nyilván $a \geqq z$. Hasonló az $y \leqq z$ eset is.)

Így $z \vee a \sim z \wedge a = ((z \vee b) \wedge z) \wedge a = ((z \vee b) \wedge a) \wedge z < ((z \vee b) \wedge a) \vee z = z \vee b$.

Az utóbbi egyenlőségből $\leqq$ világos, a másik irányhoz megjegyezzük $b \leqq (z \vee b) \wedge a$-t. Az utolsó egyenlőtlenséghez be kell látni $z \ngeqq (z \vee b) \wedge a$-t. $z \leqq (z \vee b) \wedge a \leqq a$ kizárt, így $z > (z \vee b) \wedge a \geqq b$ lenne, azaz $z = z \vee b$.

4. Tehát feltehető $z = z \vee b$, $z \vee x = z \vee y = z \vee a$. Ha $z \wedge x = b$, úgy $z \vee a = z \vee x > z \wedge x = b$, így $z \vee a \sim b$, hasonló adódik $z \wedge y = b$-re is.

5. Az ellenkező esetben legyen $t = ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$. Ekkor $z \vee a = z \vee x > z \wedge x = x \wedge t$, mivel $z \geqq t$ és $z \wedge x \leqq t$. $x \ngeqq t$, mert $x \leqq t \leqq z$-ből $x \leqq z$ jönne és $x \geqq t$-ből $x \wedge y \geqq y \wedge z > b$, ami lehetetlen. Ezért $x \wedge t < x \vee t = x \vee (y \wedge z)$. $x \ngeqq y \wedge z$, mert $x \leqq y \wedge z \leqq y$ kizárt és $x \geqq y \wedge z$-re $x \wedge y \geqq y \wedge z > b$, ellentmondás.

Így $x \vee (y \wedge z) > x \wedge (y \wedge z) = b$, hiszen $b \leqq z$. Azaz adódott $a \vee z \sim b$. Ezzel az állítást $a \vee z$-re beláttuk.

6. Igazoljuk az állítás $b \vee z$-re vonatkozó részét! $b \gtrless z$ esetén $b \vee z = b, z$. Egyébként pedig $b \vee z > b \wedge z$ és az állítás már bizonyított részét a duális hálóban felírva kapjuk, hogy $b \wedge z \sim a, b, z$ valamelyikével vagy $a \wedge z$-vel. Ha $a \gtrless z$, $a \wedge z = a, z$, ha pedig $a \ngtr z$, $a \vee z > a \wedge z$ miatt $a \vee z \sim b \vee z$ és az állítást beláttuk.

Kollár János

Megoldotta: Kollár János, Szegedy Márió.
Részeredményt ért el: Seress Ákos.

A 4. feladat megoldása

Ha G determinánsának abszolút értéke a $d > 0$ természetes szám, G^{-1} minden eleme d nevezőjű tört alakjában írható. Nyilván S^k determinánsa 1 $k = 1, 2, \ldots$ esetén. Mivel $S^k = G^{-1} T^k G = G^{-1}(T^k - I)G + I$, elég belátni, hogy van olyan $k > 0$ egész, amire $T^k - I$ minden eleme d-vel osztható egész szám.

A skatulya elv alkalmazásával belátható, hogy a $T^0 - I$, $T^1 - I$, ..., $T^{d^{n^2}} - I$ sorozatban van két mátrix, amelyek azonos helyen szereplő elemei azonos maradékot adnak d-vel osztva. De, ha az indexek k és l $(k > l)$ $(T^k - I) - (T^l - I) = T^k - T^l = T^l(T^{k-l} - I)$ minden eleme d-vel osztható s itt $T \in SL(n, \mathbf{Z})$ miatt beszorozhatunk az egész elemekből álló T^{-l} mátrixszal.

Seress Ákos

Megoldotta: Csikós Balázs, Hajnal Péter, Ivanyos Gábor, Kollár János, Magyar Zoltán, Pyber László, Sali Attila, Seress Ákos, Simányi Nándor, Szegedy Márió.

Az 5. feladat megoldása

Ha az alaphalmaz x pontja esetén stab (x) x stabilizátor-részcsoportját jelöli, a tranzitivitás miatt a stab (x)-ek izomorf permutációcsoportok. A feltétel szerint stab (x)-ben van 23-ciklus. Ha stab (x) nem tranzitív, a kimaradó y pontot véve stab (y)-nál éppen x marad ki, így az alaphalmaz 25 pontját párokba oszthatnánk, ami lehetetlen. Ezért G 2-tranzitív, s mivel stab (x, y)-ban van 23-ciklus, G 3-tranzitív. Kaptuk, hogy a 23-ciklusok tranzitívak az alaphalmazon, föltehető, hogy G ezek generátuma. Így $G \leqq A_{25}$ és 3-tranzitív.

Ismert tétel: (Wielandt: Permutation groups 13.10.) miatt G rendje 11-gyel nem lehet osztható. stab (x, y) prímfokú és tranzitív. Burnside tétele (Wielandt, 7.3.) miatt 2-tranzitív, vagy részcsoportja a $GF(23)$ test fölötti $z \mapsto az + b$ $(a, b \in GF(23))$ függvények csoportjának (alkalmasan megfeleltetve az alaphalmaz elemeit $GF(23)$ elemeinek). Az első esetben G 4-tranzitív, így rendje osztható $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$-vel, azaz 11-gyel is, amit kizártunk. Tehát stab (x, y) $z \mapsto az + b$ alakú függvényekből áll, ezek száma $2 \cdot 11 \cdot 23$. Láttuk, hogy a 11-es tényező nem szerepelhet. Az esetleges másodrendű elem $z \mapsto z + b$ alakú függvény, ez 11 transzpozíció szorzata, tehát páratlan és így nem A_{25}-beli. Így stab (x, y) 23 elemű, G élesen 3-tranzitív, de ekkor Zassenhaus tétele (Wielandt 20.5.) szerint $25 - 1 = 24$ prímhatvány, ami nem igaz.

Kollár János

Megoldotta: Ivanyos Gábor, Kollár János, Pyber László, Seress Ákos, Simányi Nándor.

A 6. feladat megoldása

1. *megoldás.*

a) Legyen $A \subset [0, 1]$ Cantor-típusú halmaz, a kiemelt intervallumok hosszának összege 1/2. Ha I a kiemelt intervallumok egyikének lezárása, legyen I' és I'' az I végpontjait az alsó, illetve felső félsíkban összekötő poligon, melyeknek hossza I hosszának kétszerese. Legyen még $B=[0, 1]-A$. f-et így definiáljuk: $f(x)=(x, 0)$, ha $x \in A$, ha pedig $x \in B$, és $x \in (\alpha, \beta)$, ahol (α, β) a kiemelt intervallumok egyike, akkor $f(x)$ fussa be I-t, I'-t visszafelé, majd I''-t, miközben $x \in I=[\alpha, \beta]$ első, második és harmadik harmadát futja be. Könnyű belátni, hogy f hosszúsága $5 \cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$ ($f: [0, 1] \to \mathbf{R}^2$). $g: [0, 3] \to \mathbf{R}^2$ értelmezésében legyen $g(x)=(x, 0)$, ha $x \in [0, 1]$; $g(x)=(2-x, 0)$, ha $x \in [1, 2]$ és $x-1 \in A$, és, ha $x-1$ az (α, β) kiemelt intervallumot futja be, akkor $g(x)$ fussa be I'-t visszafelé (ismét $I=[\alpha, \beta]$); $g(x)=(x-2, 0)$, ha $x \in [2, 3]$ és $x-2 \in A$, s ha $x-2$ $[\alpha, \beta]$-t futja be, akkor $g(x)$ fussa be I''-t. Most g hosszúsága $1+2 \cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2 \cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4$. Evidens, hogy f és g irreducibilis és $f([0, 1])=g([0, 3])$.

b) Legyen $a_n=\frac{1}{n^3}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$, $h_n=a_n+b_n$, $s=\sum_{n=1}^{\infty} h_n$. A $[0, s]$ intervallumot rakjuk ki egymásba nem nyúló h_n hosszúságú intervallumokból, az n-edik legyen H_n, és H_n-ben helyezzünk el egy b_n mértékű Cantor-típusú halmazt, úgy, hogy a H_n-ből kiemelt intervallumok hosszúságainak összege a_n legyen. A H_n-ből kiemelt (α, β) intervallumok mindegyikének végpontjait kössük össze a síkban $2n-1$ más közös pontot nem tartalmazó poligonnal, melyeknek hossza $\beta-\alpha$ és $2(\beta-\alpha)$ közé esik.

$f: [0, s] \to \mathbf{R}^2$ legyen úgy értelmezve, hogy $f(x)=(x, 0)$, ha x egyik kiemelt intervallumba sem esik, ha pedig x befutja a H_n-ből kiemelt (α, β) intervallumot, akkor $f(x)$ járja be az előbbi $2n-1$ poligont ide-oda. f irreducibilis és rektifikálható, hosszúsága legfeljebb

$$\sum_{1}^{\infty} b_n+2 \sum_{1}^{\infty} (2n-1)a_n < +\infty.$$

$g: [0, 1] \to \mathbf{R}^2$-et értelmezzük így: amíg x 0-tól 1/2-ig nő, $g(x)$ fussa be a (0, 0) és $(s, 0)$ közötti utat, a kiemelt szakaszok végpontjai között mindenütt az első poligonon végighaladva. Amikor x 1/2-től 3/4-ig fut, akkor $g(x)$ térjen vissza $(s, 0)$-ból $(h_1, 0)$-ba a kiemelt szakaszok között a második poligonokon, majd menjen vissza $(s, 0)$-ba, de most a harmadik poligonokon. A $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$ szakasz befutásakor $g(x)$ először visszatér $(h_1+h_2, 0)$-ba a negyedik poligonokon, és ismét $(s, 0)$-ba az ötödikeken; stb. g is irreducibilis, de nem rektifikálható, mert készíthető olyan beírt poligonja, amely a divergens $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)(a_n+b_n)$ sor bármelyik részletösszegénél hosszabb. Ismét evidens, hogy $f([0, s])=g([0, 1])$.

Császár Ákos

2. *megoldás.*

Az f görbe az a) és b) feladatban egyaránt a következő lesz: $A \subset [0, 1]$ a Cantor-halmaz, E egységszakasz a síkon, $f : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ görbe lesz. Ismeretes, hogy van $\varphi : A \to E$ monoton növő, folytonos szürjekció: $x \in A$-t hármas számrendszerben felírva, jegyeit 2-vel osztva és kettes számrendszerben leolvasva kapjuk $\varphi(x)$-et. Legyen $f|_A = \varphi$, a Cantor-halmaz képzésekor kimaradó $\frac{1}{3^n}$ hosszú intervallumokon f járjon be $\frac{1}{3^n}$ kerületű köröket $\left(\text{tehát } \frac{1}{3} \text{ és } \frac{2}{3} \text{ között } f \text{ egy } E\left(\frac{1}{2}\right)\text{-hez illeszkedő } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\pi} \text{ sugarú kört, } \frac{1}{9} \text{ és } \frac{2}{9}, \text{ valamint } \frac{7}{9} \text{ és } \frac{8}{9} \text{ közt } f \text{ egy } E\left(\frac{1}{4}\right)\text{-hez, illetve } E\left(\frac{3}{4}\right)\text{-hez illeszkedő } \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2\pi} \text{ sugarú kört jár be stb.}\right)$. Meggondolható, hogy f folytonos, irreducibilis és rektifikálható. Az a) esetben $g : [-1, 1] \to \mathbf{R}^2$ $[-1, 0]$-n menjen $E(1)$-ből $E(0)$-ba a $g(t) = E(-t)$ lineáris leképezéssel, míg $g|_{[0,1]} = f$. g is irreducibilis lesz, és ívhossza 1-gyel nagyobb f ívhosszánál. A b) esetben osszuk fel a diadikusan racionális számokat), amelyek rendezéstartó módon megfeleltethetők a Cantor-halmaz kiemelt intervallumainak, így az f által bejárt köröknek) megszámlálható sok, $[0, 1]$-ben mindenütt sűrű diszjunkt részre, legyenek ezek $S_0, S_1, \ldots, g : [-1, 1] \to \mathbf{R}^2$ paraméter-intervallumát osszuk fel az egymásutáni $I_0, I_1, \ldots$ intervallumokra, I_n hossza $\frac{1}{2^n}$. I_1-en g $E(0)$-ból $E\left(\frac{1}{2}\right)$-be megy, bejárva az S_1 által kijelölt, erre az intervallumra illeszkedő köröket, I_2-n $E(1/2)$-ből $E(0)$-ba S_2 köreit bejárva, I_3-on $E(0)$-ból $E\left(\frac{1}{3}\right)$-ba stb. Végül I_0-on definiáljuk g-t úgy, hogy $E(1)$-ből $E(0)$-ba menjen és járja be az S_0 által kijelölt körök mellett a többi S_i által kijelölt, de fel nem használt köröket is. g folytonosságát egyedül az 1 pontban kell meggondolni, de itt is nyilván folytonos. Az S_i-k mindenütt sűrű volta miatt g irreducibilis, és nem rektifikálható, mert minden n-re van $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$ hosszú beírt poligon.

Seress Ákos

3. *megoldás.*

Egydimenziós ellenpéldákat fogunk adni, tehát olyan $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvényt, amely a) korlátos változású, de totális variációja $\max_{t \in [a,b]} f(t) - \min_{t \in [a,b]} f(t)$-nél nagyobb, illetve b) nem korlátos változású (természetesen mindkét esetben irreducibilis).

Legyen $p \in [0, 1]$ transzcendens. Definiáljuk az $F_p^{(n)}(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, 0 \leqq t \leqq 1)$ függvényeket a következőképpen: $F_p^{(0)}(t) = t$, $F_p^{(n)}(t)$ töröttvonal-függvény, csak a $t = \frac{k}{2^n}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n)$ pontokban törik, páros k-ra $F_p^{(n)}\left(\frac{k}{2^n}\right) = F_p^{(n-1)}\left(\frac{k}{2^n}\right)$, páratlan k-ra

$$F_p^{(n)}\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{(1-p) F_p^{n-1}\left(\frac{k-1}{2^n}\right) + (1+p) F_p^{(n-1)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right)}{2}.$$

Nyilván minden $F_p^{(n)}$ növő, rögzített t-re $F_p^{(n)}t \leqq F_p^{(n+1)}(t) \leqq 1$, és létezik $F_p(t) = \lim_{n\to\infty} F_p^{(n)}(t)$. E konstrukcióról könnyen belátható (l. pl. Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok, 164. oldal), hogy F_p szigorúan monoton nő, folytonos és m.m. $F_p' = 0$. Nyilvánvaló, hogy ha $t = \frac{k}{2^n}$, $F_p^{(n)}(t) = F_p^{(n+1)}(t) = \ldots$, így $F_p(t) = F_p^{(n)}(t)$. n szerinti indukcióval látható, hogy $k = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i 2^{n-i}$ $(\varepsilon_i = 0, 1)$, $\alpha = \frac{k}{2^n}$, $\beta = \frac{k+1}{2^n}$ mellett $F_p(\beta) - F_p(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1+(-1)^{\varepsilon_i} p}{2}$. Legyen $G_p(t) = F_p(t) - t$, erről a függvényről belátunk három állítást.

A. Állítás. $G_p(t)$ variációja $[t_1, t_2]$-n $F_p(t_2) - F_p(t_1) + t_2 - t_1$.

Bizonyítás: Mivel $F_p'(t) = 0$ m.m. t-re, $G_p(t) = F_p(t) - t$ abszolút folytonos része $-t$, szinguláris része $F_p(t)$, ezek monotonok, így az állítás következik a Lebesgue- és Jordan-féle felbontás felcserélhetőségéről szóló tételből.

B. Állítás.

$$\min_{0 \leqq t \leqq 1} G_p(t) = 0, \quad \lim_{p \to 0} \left(\max_{0 \leqq t \leqq 1} G_p(t) \right) = 0.$$

Bizonyítás. Az első állítás $t = F_p^{(0)}(t) \leqq F_p(t)$ és $G_p(0) = 0$-ból következik. Rögzített n mellett $F_p^{(n)}(t)$ $p \to 0$ mellett, a töréspontjaiban t-hez tart (hisz ekkor $F_p^{(n)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F_p^{(n)}\left(\frac{k}{2^n}\right) \to \frac{1}{2^n}$), így van olyan $\varepsilon_n > 0$, hogy $p < \varepsilon_n$ mellett $F_p^{(n)}t - t \leqq \frac{1}{2^n}$ $\left(t = \frac{k}{2^n},\ k = 0, 1, \ldots, 2^n\right)$. De F_p monoton nő, így $t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$-re $G_p(t) = F_p(t) - t \leqq$ $\leqq F_p\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \frac{k}{2^n} = F_p^{(n)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \frac{k}{2^n} \leqq \frac{2}{2^n}$, azaz $p < \varepsilon_n$-re $\max_{0 \leqq t \leqq 1} G_p(t) \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$, qu.e.d.

C. Állítás. G_p-nek pontosan a diadikus törtekben van szigorú lokális minimuma.

Bizonyítás. Legyen $t_0 = \frac{k}{2^n}$, $u_m = t_0 - \frac{1}{2^{n+m}}$, $v_m = t_0 + \frac{1}{2^{n+m}}$, ekkor $F_p(t_0) -$ $- F_p(u_m) \leqq \frac{(1-p)^m (1+p)^n}{2^{m+n}}$, míg $F_p(v_m) - F_p(t_0) \geqq \frac{(1+p)^m (1-p)^n}{2^{m+n}}$. Így ha m elég nagy, $F_p(t_0) - F_p(u_m) < \frac{1}{2^{m+n}} = t_0 - u_m$, $F_p(v_m) - F_0(t_0) > \frac{1}{2^{n+m}} = v_m - t_0$, azaz, mivel $F_p^{(n+m)}$ u_m, t_0, v_m-ben F_p-vel egyezik meg, egyébként $[u_m, t_0]$, $[t_0, v_m]$-ben lineáris, így adódik, hogy $u_m \leqq t \leqq v_m$, $t \neq t_0$ esetében $F_p^{(n+m)}(t) > F_p(t_0) + t - t_0$, de $F_p \geqq F_p^{(n+m)}$ miatt t_0 lokális minimumpont. Ha t_0 nem diadikus, legyen $\frac{k_n}{2^n} < t_0 < \frac{k_n+1}{2^n}$. Belátjuk, hogy $\left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n}\right]$-ben t_0 nem minimumpont. Valóban, itt $F_p^{(n)}(t)$ és $F_p^{(n)}(t)$-t is lineáris, tehát valemelyik határpontra (legyen ez γ) $F_p^{(n)}(\gamma) - \gamma \leqq F_p^{(n)}(t_0) - t_0$. Innen $G_p(\gamma) < G_p(t_0)$ adódik.

A továbbiakban belátjuk, hogy G_p irreducibilis (itt lesz szükségünk arra a kikötésre, hogy p transzcendens). Tegyük fel indirekte, hogy van $0 \leqq \alpha < \beta \leqq \gamma < \delta \leqq 1$, $h: [\alpha, \beta] \to [\gamma, \delta]$ szigorúan monoton folytonos, amire $G_p \circ h = G_p$ $[\alpha, \beta]$-n. Nyilván az (α, β)-beli szigorúan lokális minimumhelyeket h ugyanilyenekbe viszi, tehát a

C. Állítás szerint diadikus törtet diadikus törtbe. Legyen $t_0 \in [\alpha, \beta]$ diadikus, $t_1 = h(t_0)$. Alkalmas n-re $t_0 = \frac{k}{2^n}$, $t_1 = \frac{l}{2^n}$. Így $F_p(t_1) - F_p(t_0) = \sum_{i=k}^{l} \left(F_p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - F_p\left(\frac{i}{2^n}\right) \right)$, ami lehetetlen, mert a bal oldal $G_p(t_0) = G_p(t_1)$ miatt $t_1 - t_0 = \frac{l-k}{2^n}$, tehát racionális, a jobb oldal pedig p-nek nemkonstans polinomja. G_p variációja nagyobb lesz, mint a $G_p([0, 1])$ szakasz hossza, mivel G_p nem monoton.

Legyen a b) feladat megoldásához $p_1 > p_2 > \ldots$ trancendens számok olyan sorozata, hogy

$$\omega_i = \max_{0 \leqq t \leqq 1} G_{p_i}(t) \leqq \frac{1}{2^i}, \quad G_{p_i}(t_i) = \omega_i.$$

Mivel $G_{p_i}(t)$ teljes változása $[0, 1]$-en (az A. Állítás szerint) $F_{p_i}(1) - F_{p_i}(0) + 1 = 2$, $[0, t_i]$ és $[t_i, 1]$ közül valamelyik szakaszon a teljes változása legalább 1, az első esetben legyen $\lambda_i(t) = G_{p_i}(t \cdot t_i)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, a másodikban $\lambda_i(t) = G_{p_i}(1 - (1 - t_i)t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. Így olyan irreducibilis λ_i függvényt kaptunk, ami folytonos, 0-ban 0 minimummal és 1-ben $\omega_i \leqq \frac{1}{2^n}$ maximummal. Definiáljuk a $\Lambda : [0, 1] \to \left[0, \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i\right]$ függvényt a következőképpen:

$$t = 1 - \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{x}{2^i}\text{-re} \quad (0 \leqq x < 1)$$

$$\Lambda(t) = \lambda_i(x) + \sum_{j<i} \omega_j, \quad \Lambda(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j.$$

Tehát a λ_i görbék átparaméterezéseit egymáshoz ragasztottuk. Λ nem lehet reducibilis, mert akkor valamelyik λ_i is az lenne, folytonos, teljes változása pedig a λ_i-k teljes változásainak összege, azaz végtelen.

Magyar Zoltán

Megoldották: Kollár János, Krisztin Tibor, Magyar Zoltán, Seress Ákos, Simányi Nándor, Székely László.

A 7. feladat megoldása

1. *megoldás.* Legyen $c = \cos\frac{\pi}{2n}$. Elég belátni, hogy $|x| \leqq \frac{1}{c}$-re $|p(x)| \leqq 1$, mert a $\left[-\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right]$ intervallumra alkalmazva a klasszikus Bernstein-egyenlőtlenséget, adódik

$$|p'(x)| \leqq \frac{n}{\sqrt{\left(\frac{1}{c} - x\right)\left(\frac{1}{c} + x\right)}} = \frac{nc}{\sqrt{1 - c^2x^2}} \cdot \left(|x| < \frac{1}{c}\right).$$

Legyen $\tau > 1$ a legkisebb abszolút értékű, 1-nél nagyobb abszolút értékű valós szám, amire $|p(\tau)| = 1$, belátjuk, hogy $\tau = \frac{1}{c}$.

Elég belátni, hogy ha $-1 \leqq x \leqq 1$-re $|p(x)| \leqq 1$, $|p(1)| = 1$, akkor $c < x \leqq 1$-re $p(x) \neq 0$. (τ-val leosztva.) Tegyük fel az ellenkezőjét és legyen $T_n(x)$ az n-edfokú elsőfajú Csebisev-polinom. Van olyan $1 = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = -1$ sorozat, hogy $T_n(x_i) = (-1)^i$. Továbbá $T_n(c) = 0$ és c-től jobbra pozitív. Belátjuk, hogy $p - T_n$-nek $n+1$ gyöke van, ami nem lehet. Egyik ilyen gyök az $x = 1$. $i > 0$-ra az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumba esik gyök. Ha végpontba esik, akkor kétszeres, így $[-1, x_1]$-ben van legalább $n-1$ gyök (az esetleges x_1-et csak egyszer számolva). A feltétel miatt van $x_1 < x < 1$, amire $0 = p(x) < T_n(x)$ így $[x_1, x]$-en $p - T_n$ még egyszer eltűnik, azaz legalább $n+1$ gyöke van, ami nem lehet, mert $p(x) < T_n(x)$ miatt $p - T_n$ nem azonosan 0.

Az is belátható, hogy egyenlőség csak $p(x) = \pm T_n(x)$-re lehet.

Kollár János

2. *megoldás.* Ismét elég belátni, hogy a fenti jelöléssel $|x| \leqq \frac{1}{c}$-re $|p(x)| \leqq 1$.

Legyen $\omega(x) = \frac{\sin n \arccos cx}{\sqrt{1-c^2x^2}}$, az $n-1$-edfokú másodfajú Csebisev-polinom a cx helyen, ennek gyökei $x_k = \frac{1}{c} \cos \frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. A feltételek szerint $\frac{p(x)}{1-x^2}$ egy legfeljebb $n-2$-fokú polinom, így azonos az ω polinom gyökeire vonatkozó Lagrange-interpolációs polinomjával.

$$\frac{p(x)}{1-x^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} \cdot \frac{p(x_k)}{1-x_k^2} = \frac{\omega(x)}{nc} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cdot p(x_k) \frac{1-c^2x_k^2}{(x-x_k)(1-x_k^2)}.$$

Így, ha $x > 1$,

$$|p(x)| \leqq \frac{\omega(x)(x^2-1)}{cn} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-c^2x_k^2}{(x-x_k)(1-x_k^2)}.$$

Felhasználva a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x-x_k} = \frac{\omega'(x)}{\omega(x)}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-x_k} = \frac{\omega'(1)}{\omega(1)} = \frac{c^2}{1-c^2}$$

és a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+x_k} = -\frac{\omega'(-1)}{\omega(-1)} = \frac{c^2}{1-c^2}$$

relációkat, adódik

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-c^2x_k^2}{(x-x_k)(1-x_k^2)} = \frac{1-c^2}{2(x-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-x_k} + \frac{1-c^2}{2(x+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+x_k} -$$

$$- \frac{1-c^2x^2}{x^2-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x-x_k} = \frac{xc^2}{x^2-1} - \frac{(1-c^2x^2)\omega'(x)}{(x^2-1)\omega(x)}.$$

Innen, mivel $x > 1$-re $\omega'(x) > 0$, $|p(x)| \leqq \frac{xc\,\omega(x)}{n} - \frac{(1-c^2x^2)\omega'(x)}{cn} \leqq \frac{cx\,\omega(x)}{n}$ $(x > 1$-re$)$,

azaz $1 < x \leqq \frac{1}{c}$-re $|p(x)| \leqq \frac{\omega\left(\frac{1}{c}\right)}{n} = 1$. $-\frac{1}{c} \leqq x \leqq -1$-re hasonlóan okoskodhatunk.

Szabados József

Megoldotta: Horváth László, Kollár János, Krisztin Tibor, Seress Ákos, Tóth-Abonyi Mihály.

Részeredményt ért el: Ivanyos Gábor, Simányi Nándor.

A 8. feladat megoldása

Legyen $K_n(x)=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cos x+\ldots$ az n-edik Fejér-mag. Ismert, hogy $K_n(x)\geqq 0$. Integrálással $0\leqq\int_0^{2\pi} f(x)K_n(n_k x)=\pi\left(a_0+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)a_{n_k}\right)$ adódik, $n\to\infty$ mellett tehát $a_{n_k}\geqq -a_0$. $K_n(x-\pi)=\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cos x+\ldots$ így

$$0\leqq\int_0^{2\pi} f(x)K_n(n_k x-\pi)=\pi\left(a_0-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)a_{n_k}\right),$$

honnan $n\to\infty$ mellett $a_{n_k}\leqq a_0$.

Karsai János—Kollár János

Megoldotta: Ivanyos Gábor, Karsai János, Kollár János, Krisztin Tibor, Magyar Zoltán, Seress Ákos, Simányi Nándor, Székely László.

A 9. feladat megoldása

Ismeretes, hogy az R sugarú kör köré írt érintő n-szög T területe legalább $R^2 n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$. Négyszögünkbe egymásután egyeneseket húzva, összeszámoljuk a keletkező tartományok számát és szögösszegét. Egy új egyenest behúzva, a sokszögek száma nő k-val, szögösszegük pedig legfeljebb $2k\pi$-vel aszerint, hogy a behúzott új egyenes az előző felosztás csúcspontjai közül mennyin ment keresztül. Ily módon adódik, hogy ha a keletkezett felosztás oldalszámai rendre $k_1, k_2, \ldots, k_n$, úgy

$$\sum_{i=1}^{n}(k_i-4)\leqq 0.$$

Legyen az i-edik tartomány területe T_i, a beírt kör kerülete K_i. Tudjuk, hogy

$$K_i^2\leqq\frac{4\pi^2}{k_i\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{k_i}}T_i.$$

Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n}K_i\leqq\pi\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{k_i\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{k_i}}}\cdot\sqrt{T_i}\leqq\pi\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{k_i\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{k_i}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}T_i},$$

a Cauchy—Bunyakovszkij-egyenlőtlenség értelmében. Elegendő tehát belátni, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4}{k_i \operatorname{tg} \frac{\pi}{k_i}} \leqq n.$$

Ha $k_i=4$, a megfelelő tag éppen 1. Ha $k_i \geqq 5$, $\sum (k_i-4) \leqq 0$ miatt e tagnak megfeleltethetünk k_i-4 darab háromszöget, ezért elég látni, hogy $k \geqq 5$-re

$$\frac{4}{k \operatorname{tg} \frac{\pi}{k}} + (k-4) \frac{4}{3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} \leqq k-3.$$

Mivel

$$\frac{4}{3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} < 0{,}7699, \quad \text{elég } k \geqq 5\text{-re} \quad \frac{4}{k \operatorname{tg} \frac{\pi}{k}} < 0{,}23\, k + 0{,}079\text{-}$$

-et igazolni. A baloldal kisebb, mint $\frac{4}{\pi}$, ez $k \geqq 6$-ra elég is. $k=5$-re a baloldal kisebb 1,11-nél, a jobboldal több 1,2-nél.

Kollár János

Megoldotta: Hajnal Péter, Kollár János, Magyar Zoltán.
Részeredményt ért el: Seress Ákos.

A 10. feladat megoldása

1. *megoldás.* $\alpha<\omega_1$-re transzfinit rekurzióval definiáljuk X-beli nyílt halmazok egy családját, az indexhalmaz az α hosszúságú, természetes számokból álló sorozatok, másszóval az $f: \alpha \to \omega$ függvények halmaza lesz. $\alpha=0$-ra az egyetlen szóba jövő függvény az üres halmaz, legyen $G_\varnothing=X$. Ha α limeszrendszám és $f: \alpha \to \omega$ függvény, legyen $G_f=\operatorname{int}(\cap G_g)$, ahol g végigfut f kisebb rendszámokra vett megszorításain. Ha $\alpha=\beta+1$ alakú rendszám és $f: \beta \to \omega$ függvény, továbbá $G_f=\emptyset$, $G_g=\emptyset$-t definiáljuk f-nek minden $g: \beta+1 \to \omega$ kiterjesztésére. Ha $G_f \neq \emptyset$, nem állhat egy pontból (hiszen nincs izolált pont) így definiálhatjuk nyílt $H_1, H_2, \ldots$ halmazoknak olyan sorozatát, hogy $\overline{H}_n \subset G_f$, $H_n \cap H_m=\emptyset$, $H_n \neq \emptyset$ minden $m \neq n$ indexpárra fennálljon, továbbá $H_1, H_2, \ldots$ nemüres G_f-beli nyílt halmazoknak maximális rendszere legyen. (Itt kihasználtuk X regularitását és a feladatban megfogalmazott tulajdonságát is. Könnyen elkerülhető az is, hogy rendszerünk véges legyen.) Indexeljük a $H_1, H_2, \ldots$ halmazokat $f\,\beta+1$-re vett kiterjesztéseivel: $g_1, g_2, \ldots$, ezek száma is éppen megszámlálhatóan végtelen: $\{H_1, H_2, \ldots\}=\{G_{g_1}, G_{g_2}, \ldots\}$. Ezzel G_f-et minden $f: \alpha \to \omega$ $(\alpha<\omega_1)$ függvényre definiáltuk. Könnyen látható, hogy $f, g: \alpha \to \omega$, $f \neq g$-re $G_f \cap G_g=\emptyset$, $f \subset g$-re $G_f \supseteq G_g$.

Először belátjuk, hogy nincs olyan $p \in X$ pont, amelyik tetszőleges nagy α-ra benne van egy G_f-ben $f: \alpha \to \omega$-val. Valóban, ekkor előbbi megjegyzéseink értelmében minden α-ra lenne pontosan egy $f_\alpha: \alpha \to \omega$ függvény, amire $p \in G_{f_\alpha}$ állna, ezek a függvények egyetlen $F: \omega_1 \to \omega$ függvény megszorításaiból állnának. Ekkor tehát a G_{f_α} halmazok egyike sem üres, ha elkészítjük a $g_\alpha: \alpha+1 \to \omega$, $g_\alpha(\xi)=f_\alpha(\xi)$ $(\xi<\alpha)$, $g_\alpha(\alpha)=f_{\alpha+1}(\alpha)+1$ függvényeket, a konstrukció szerint G_{g_α}-k nemüres, nyílt, páronként diszjunkt halmazok lennének, feltételeinkkel ellentétben.

Ezek szerint minden $p \in X$ pont valamelyik szinten „kihal". Így az X tér lefedhető az alábbi módon:

$$X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \bigcup_{f:\alpha\to\omega} \Big(G_f - \bigcup_{\substack{g:\alpha+1\to\omega \\ g\supset f}} G_g\Big) \cup \bigcup_{\substack{\alpha<\omega_1 \\ \text{limesz}}} \bigcup_{f:\alpha\to\omega} \Big(\bigcap_{g\subsetneq f} G_g - G_f\Big).$$

Azonnal látható, hogy ez valóban $2^{\aleph_0}$ halmazzal való lefedés, igazolnunk kell még, hogy az egyes tagok sehol sem sűrű halmazok. $G_f - \bigcup_{\substack{g:\alpha+1\to\omega \\ g\supset f}} G_g$ nem lehet valahol sűrű, mert ekkor lenne belső pontja is, így a G_g-k rendszere nem lenne maximális. A második esetben, ha $\beta<\alpha$ esetén g_β-val jelöljük f β-ra történő megszorítását,

$$\overline{\bigcap_{\beta<\alpha} G_{g_\beta}} \subseteq \bigcap_{\beta+1<\alpha} \overline{G_{g_{\beta+1}}} \subseteq \bigcap_{\beta<\alpha} G_{g_\beta},$$

így egy zárt halmazból hagytuk el a belsejét, de zárt halmaz határa sehol sem sűrű.

Csikós Balázs—Székely László

2. *megoldás.* Legyen $\{G_\alpha : \alpha<\lambda\}$ X nemüres, nyílt részhalmazainak egy jólrendezése. Mivel izolált pont nincs, minden $\alpha<\lambda$-ra van olyan nemüres, nyílt $G_\alpha^{(0)}$ és $G_\alpha^{(1)}$ halmaz, hogy $G_\alpha^{(0)} \cap G_\alpha^{(1)} = \emptyset$. $G_\alpha^{(0)} \cup G_\alpha^{(1)} \subseteq G_\alpha$. Legyen $p \in X$ tetszőleges pont, α-ra transzfinit rekurzióval definiáljuk a $H(\alpha, p)$ halmazt. Tételezzük fel, hogy $\beta<\alpha$-ra definiáltuk $H(\beta, p)$-t! Ha $\big(\bigcup_{\beta<\alpha} H(\beta, p)\big) \cap G_\alpha \neq \emptyset$, legyen $H(\alpha, p) = \emptyset$. Ha $\big(\bigcup_{\beta<\alpha} H(\beta, p)\big) \cap G_\alpha = \emptyset$ és $p \in G_\alpha^{(0)}$, legyen $H(\alpha, p) = G_\alpha^{(1)}$, egyébként pedig $H(\alpha, p) = G_\alpha^{(0)}$. Legyen továbbá $F_p = X - \bigcup_{\alpha<\lambda} H(\alpha, p)$. Nyilván F_p p-t tartalmazó zárt halmaz lesz, továbbá sehol sem sűrű, mert ha lenne nyílt része, lenne p-t nem tartalmazó nyílt része, mondjuk G_α, de a konstrukcióval ekkor $G_\alpha^{(0)}$-t kihagynánk F_p-ből.

Hátra van annak bizonyítása, hogy különböző F_p halmaz csak kontinuum sok lehet.

Minden p-re csak megszámlálható sok olyan α érték lehet, hogy $H(\alpha, p) \neq \emptyset$. (Hiszen a $H(\alpha, p)$ halmazok diszjunktak.) Legyen ezek halmaza $\{\alpha_\xi(p) : \xi<\varphi\}$, ahol $\varphi = \varphi(p) < \omega_1$ rendszám. Igazoljuk, hogy ha p és q olyan pontok, hogy $\varphi(p) = \varphi(q)$, és minden $\xi<\varphi(p)$-re $H(\alpha_\xi(p), p) = G^{(i)}_{\alpha_\xi(p)}$ esetén $H(\alpha_\xi(q), q) = G^{(i)}_{\alpha_\xi(q)}$, azaz minden $\xi<\varphi(p)$-re p és q „azonos irányban ágazik el", akkor $F_p = F_q$. Ezzel készen is leszünk, hiszen a különböző F_p halmazok összeszámlálásához elég megszámolni a megszámlálható rendszámokkal indexezett 0—1 sorozatokat, ezek száma pedig valóban kontinuumnyi. Hátra van az állítás igazolása. Transzfinit indukcióval igazoljuk, hogy $\alpha_\xi(p) = \alpha_\xi(q)$ (és ez elég). Ha $\zeta<\xi$-re $\alpha_\zeta(p) = \alpha_\zeta(q)$, nyilván $H(\alpha_\zeta(p), p) = H(\alpha_\zeta(q), q)$ és $\alpha_\xi(p)$ az első $\alpha \cong \sup\{\alpha_\zeta : \zeta<\xi\}$ rendszám, amire $G_\alpha \cap \big(\bigcup_{\zeta<\xi} H(\alpha_\zeta, p)\big) = \emptyset$ és nyilván azonos az első α rendszámmal, amire $G_\alpha \cap \big(\bigcup_{\zeta<\xi} H(\alpha_\zeta, q)\big) = \emptyset$ így $\alpha_\xi(p) = \alpha_\xi(q)$.

Ivanyos Gábor

Megoldotta: Csikós Balázs, Ivanyos Gábor, Kollár János, Sali Attila, Seress Ákos, Simányi Nándor, Székely László.

Megjegyzés: A versenyzők közül Kollár János általánosította a feladat állítását: az itt közölt 1. megoldás módosításával belátta, hogy az T_2-térre is igaz. Valójában a 2. megoldás nem is használta a regularitást, bár közlője ezt nem vette észre.

TÁRSULATI ÉLET

Jelentés a Szele Tibor Emlékérem 1980. évi kiosztásáról

A Társulat Elnöksége az 1980. évi Szele Tibor Emlékérem odaítélésére a következő bizottságot küldte ki: elnök: T. Sós Vera; titkár: Juhász István; tagok: Balogh Zoltán, Császár Ákos, Lovász László, Pollák György, Szabados József, Wiegandt Richárd.

A bizottság a beérkezett javaslatokat megvitatta és egyhangúlag az alábbi döntést hozta: az 1980. évi Szele Tibor Emlékérmet és a vele járó 7000 Ft pénzjutalmat Hajnal András akadémiai levelező tagnak, az MTA Matematikai Kutató Intézete tudományos osztályvezetőjének ítéli oda.

Hajnal András a halmazelmélet, halmazelméleti topológia és kombinatorika területén ért el kimagasló eredményeket, melyeknek hazai és nemzetközi elismerését bizonyítják akadémiai és állami díjai, az 1974-es vancouveri IMU kongresszusra való meghívott előadói felkérése, s még számos további vendégprofesszori és egyéb előadói meghívása.

Kivételes képességei nem csak matematikai eredményeiben nyilvánulnak meg, hanem abban a pezsgő, és a fiatalok számára igen vonzó, alkotó légkörben is, amelyet maga körül több évtizede teremtett. Ebben nyilván szerepet játszott az is, hogy tudományos indíttatását Kalmár Lászlótól és Erdős Páltól — a Szele Tibor Emlékérem két első nyertesétől — kapta.

1956 óta folyamatosan oktat az ELTE TTK Analízis I. tanszékén, speciális előadásai mindig sok kiváló hallgatót vonzanak, akik közül számosan ezeken az előadásokon kapták meg első igazán tudományos ismereteiket. 10 évig vezette itt a Matematikus Diákkört is, amely ez alatt az idő alatt elnyerte a „Kiváló Diákkör" címet.

A Matematikai Kutatóintézetben 1970 óta vezeti a halmazelméleti szemináriumot, T. Sós Verával közösen pedig az egyetemi előadásként is meghirdetett kombinatorikai szemináriumot. Mindkét szeminárium nemzetközileg elismert, jelentős tudományos műhely, amely fiatal tudósok és az egyetemi hallgatók képzésében jelentős szerepet vállal.

Mindezek mellett ki kell emelnünk — hivatalos címkékkel meg nem jelölhető — személyes vonzerejét is, azt a képességét, hogy — igen széles érdeklődési területén belül — szinte bárkivel és bárhol tud eredményesen együttműködni, azaz matematikai problémákon dolgozni. Jól mutatják ezt az alábbi adatok: a mai napig 89 közös dolgozatot publikált összesen 29 társszerzővel, akik közül 15 nála lényegesen fiatalabb.

Tanítvány-munkatársai közül Szemerédi Endre az MTA lev. tagja, s Juhász István a tudományok doktorai. Részben vagy egészben tanítványai voltak Csirmaz László, Elekes György, Gerlits János, Komjáth Péter, Máté Attila, Nagy Zsigmond, Petruska György és Pósa Lajos, de sokat tanult tőle szinte az egész fiatalabb magyar kombinatorikus nemzedék. Végül számos neves külföldi matematikus is (pl. J. Baumgartner, F. Galvin és J. Mycielski) mesterei közé sorolja.

Úgy véljük, hogy — Erdős Pált leszámítva — nincs ma olyan magyar matematikus, aki a Hajnal Andráséhoz hasonló eredményességgel tudta volna kombinálni a magas szintű kutató munkát a fiataloknak a matematikai kutatásba való bevezetésével, segítésével, irányításával.

Jelentés a Beke Manó Emjékdíj 1981. évi kiosztásáról

A Társulat Elnöksége az 1981. évi díjak odaítélésére az alábbi bizottságot küldte ki: elnök: Surányi János, titkár: Pálmay Lóránt, tagok: Békefi Zsuzsa, Bogdán Zoltán, C. Neményi Eszter, Scharnitzky Viktor. A Bizottság 1981. április 23-án és június 4-én megtárgyalta a beérkezett javaslatokat és egyhangúlag a következő döntést hozta: az 1981. évi emlékdíjban az alábbiakat részesíti:

I. fokozat: *Reményi Gusztávné*, az ELTE Ságvári Endre Gyakorló Iskola vezetőtanára;
II. fokozat: *Hubert Tibor*, a budapesti Kvassay Jenő Ipari Szakközépiskola tanára, *Kántor Józsefné*, az esztergomi Tanítóképző Főiskola Gyakorló Iskolájának tanítója, *Pósa Lajos*, az ELTE TTK Analízis I. tanszékének tanársegéde, *Schmauser Károlyné*, a miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Matematikai Intézetének adjunktusa és *Suták Mihályné*, a nyíregyházi 5. számú Általános Iskola tanítója.

INDOKOLÁS

Reményi Gusztávné több, mint húsz éve a budapesti Ságvári Endre Gyakorló Iskola vezető tanára. Kiemelkedő szerepet vállalt az új általános és középiskolai tantervek kimunkálásában és kikísérletezésében. Négy évet tanított óraadóként a Váci utcai általános iskolában kísérleti osztályban. Saját iskolájában önálló kísérletet folytatott a tér- és ábrázoló geometria általános iskolai tanításával kapcsolatban. A térszemlélet fejlesztése terén komoly eredményeket ért el. Az elsők között kísérletezett differenciált foglalkozással, csoportmunkával, feladatlapokkal. Az 1973-ban indult Bolyai Társulati kísérletben a geometriai fejezetek feldolgozásához munkalapokat készített. Kezdettől fogva kísérletezik az új fakultatív tantervek témaköreinek feldolgozásával. A fakultációt kipróbáló tíz iskola matematika munkaközösségének vezetője.

Kísérleteiről sok esetben számolt be budapesti munkaközösségek előtt, vidéki tagozatokban, vándorgyűléseken. A beszámolók egy részében bemutató tanítást is vállalt. Rendszeresen tartott továbbképző előadásokat. Állandó előadója volt az OPI szervezésében rendezett továbbképző tanfolyamoknak. Az FPI új matematikára felkészítő tanfolyamain tartott előadásokon a tanítókat, tanárokat aktivizálni is tudta. Éveken keresztül a társulati tanfolyamok kezdeményezője, szervezője, vezetője és előadója volt.

Iskolai tanításában külön gondot fordít a jóképességű tanulókkal való foglalkozásra, tanítványai közül többen kiváló eredményeket értek el különböző versenyeken. A Bolyai Társulat vidéki tagozataiban sokszor tartott középiskolai, ill. általános iskolai tanulóknak városi szintű szakkört.

Számos tankönyvet, kézikönyvet, feladatgyűjteményt lektorált. Tankönyv-pályázatok bíráló bizottságában dolgozott. A Matematika Tanítása szerkesztő bizottságának tagja. Gazdag tapasztalatairól több cikkben is beszámolt.

Két évtizede foglalkozik az V. éves hallgatók tanítási gyakorlataival mint vezető tanár. Kezdeményezte és a matematikai munkaközösség tagjaival kidolgozta az V. éves tanárjelöltek gyakorlati képzéséhez kapcsolódó szemináriumi rendszert, melynek célja az új tantervek bevezetését elősegítő felkészítés hatékonyságának növelése.

Négy év óta a budapesti Ho Si Minh Tanárképző Főiskolán matematika módszertanból előadásokat tart, gyakorlatokat vezet, segíti a vezetőtanárok továbbképzését, önképzését.

A TIT Matematikai Szakosztálya választmányának tagja. A Kis Matematikusok Baráti Körében a tanárok felkészítő tanfolyamai szervezőbizottságának tagja, ezeken több előadást tartott.

A Bolyai Társulat Oktatási Szakosztályának éveken keresztül volt alelnöke, majd elnöke. Kezdeményezéseivel, fáradhatatlan szervező munkájával a szakosztály eredményes tevékenységéhez nagymértékben járult hozzá. Egyik kezdeményezője volt a vándorgyűlések jelenlegi gyakorlata kialakításának, a szekciók létrehozásának. Oroszlánrészt vállalt a tartalmas, a modern tanári szemléletet fejlesztő, programok összeállításában.

Kiváló munkájáért 1961-ben a Beke Manó Emlékdíj II. fokozatát, 1962-ben Miniszteri dicséretet, 1965-ben a Munkaérdemrend bronz fokozatát, 1970-ben Kiváló Tanár, 1980-ban Kiváló Pedagógus kitüntetést kapott.

Hubert Tibor mat.-fiz. szakos tanár. Tanulmányait az ELTE-n 1970-ben végezte. 1969 óta tanít a budapesti Kvassay Jenő szakközépiskolában. Nevelő munkáját a tantárgy és a tanulók szeretete jellemzi. Idejét nem kímélve reggeltől estig tanítványai körében van. Óráin a tanulók felszabadultan dolgoznak, sikeresen aktivizálja tanítványait. Differenciálással, feladatsorokkal eléri, hogy a jobb képességűek nagyobb teljesítményeket érjenek el, ugyanakkor a gyengéknek is biztosít sikerélményt.

A budapesti szakközépiskolai tanárok továbbképzésében bemutató órákat, ill. előadásokat tart. Ezek a nagy gonddal előkészített foglalkozások a résztvevők körében nagy elismerést arattak. Az órán látott jó feladatokat, módszereket mások is igyekeztek átvenni.

Saját továbbképzésével sokat törődik, rendszeresen részt vesz továbbképző foglalkozásokon.

Tevékenyen részt vesz annak a bizottságnak a munkájában, mely egy korszerűbb szakközépiskolai tantervet, és annak alapján indítandó kísérletet készít elő.

Hubert Tibor sokat tesz a számítástechnika, a zsebszámológépek tanításba való bevonása érdekében. Nyolc évvel ezelőtt indította az első számítástechnikai szakkört az iskolában. E tanévben 4 szakköri csoporttal foglalkozott. A tanulók számára versenyeket szervezett, pályázatokat írt ki. A pályamunkák színvonala a szakembereket is meglepte. A tanulók munkáiból két alkalommal rendezett iskolai kiállítást. Budapesti tanároknak, ill. a számítástechnika oktatásával foglalkozó szakembereknek bemutató szakkört, s utána sikeres előadást tartott. Ennek anyagát stencilezve adta át a bemutató résztvevőinek.

Mint szakközépiskolai tanár, komoly feladatának tekinti, hogy megteremtse a szakmai tárgyakkal a tantárgyi koncentrációt.

Kántor Józsefné az esztergomi Tanítóképző Főiskola Gyakorló Iskolájának tanítója, közel másfél évtizede sokat tesz az új általános iskolai tanterv elterjesztésének érdekében. 1967-től egyénileg kezdett a komplex matematikatanítási kísérlet alapján tanítani, majd egyik fő részese lett az 1968/69-ben induló ún. esztergomi átmeneti matematikatanítási kísérletnek. E sikeres kísérlet után engedélyezte az MM Közoktatási Főosztálya 1971/72-től 37 iskola részére a kísérletet, ami nagy hatással volt az 1978-ban életbe lépő új matematika tanterv összeállítására. A kísérlet 2. osztályához az óravázlatokat Kántor Józsefné készítette, (megjelent az esztergomi Tanítóképző Intézet „Tanulmányok" című folyóiratában). Ő állította össze a 2. osztály részletes, órákra lebontott tanmenetét. (OPI kiadvány.) 1968-tól városi, járási, megyei szinten bemutató órák sokaságával népszerűsítette az új tantervet. 1971—74 között az esztergomi kísérletben résztvevők számára, 1975-től az új matematika tanterv felkészítésére vezetett továbbképzéseket Komárom, ill. Nógrád megye pedagógusai részére. Az új tanterv bevezetése óta a napközis nevelők számára is tartott továbbképzést. Rendszeresen tartott előadást a szülőknek is. 1975-ben a színes rudak használatáról készült film főszereplői Kántor Józsefné tanítványai.

A Tanítóképző Főiskolán 1976-tól kifejlesztett zártláncú televíziós rendszer segítségével több matematika órájáról készült képmagnós felvétel, melyet jól hasznosítanak a főiskolai oktatásban. A tanítóképzőben 1959 óta vezeti a hallgatók felkészítését a tanításra. 1972-ben jó munkájáért Kiváló Tanító kitüntetésben részesült.

Pósa Lajos 1971-ben szerzett matematikus oklevelet az ELTE-n. Azóta az egyetem Analízis I. tanszékén tanársegéd. Előadásai, gyakorlatai mellett egyénileg is sokat foglalkozik az érdeklődő hallgatókkal. Kombinatorikai, halmazelméleti, analízis feladatai, amelyeket a szemináriumokon és egyéni foglalkozásokon ad fel hallgatóinak, nagymértékben segítik őket abban, hogy a matematika e területeiről helyes képet alakítsanak ki.

Érdeklődése és ambíciója, amely a matematikai kutatásra és oktatásra egyaránt kiterjed, nem áll meg az egyetemi hallgatókkal való foglalkozásnál, a matematika közkinccsé tételén fáradozik általános és középiskolai tanulók között is. A Berzsenyi, Eötvös, Fazekas, Radnóti Gimnáziumban is vannak olyan, a matematikával intenzíven foglalkozó tanulók, akiknek rendkívüli szakkört tartott.

Egyetemi oktató munkája mellett éveken keresztül ismerkedett az általános és középiskolai matematikatanítás helyzetével, kialakított egy elgondolást a középiskolai kísérleti anyagra. Elképzeléseit 1976 óta próbálta ki, előbb egy általános iskolai kísérleti osztályban. A kísérlet alapján igen jó ötleteket adott az új tantervhez készülő felső tagozatos munkalapokhoz. 1977-től az Eötvös és a Radnóti Gimnáziumban próbálja ki a halmazelmélet, kombinatorika és az analízis középiskolai taníthatóságával és tanításával kapcsolatos elképzeléseit. Az általa összeállított anyagok jól mutatják a matematika különböző területeinek mély összefüggéseit. Életszerű és érdekes feladatsorokon át a tanulók maguk jutnak el mély tartalmú matematikai fogalmak — például a sorozat határértéke, végtelen sorok konvergenciája stb. — felismeréséig, megfogalmazásáig. Tanításában szerencsésen ötvöződik a heurisztikus út és a világos matematikai gondolkodás, bizonyítás. Órái az önálló matematikai gondolkodás műhelyei. Tanítványai nagyon szeretik őt, s rajta keresztül a matematikát. Javaslatára a tanulók kis csoportokban dolgozva, önálló, 32 oldalas munkát írtak szabad idejükben „Érdekességek a Fibonacci-sorozatról" címmel. E munka sokszorosítva is megjelent.

A kísérletben résztvevő tanároknak előadássorozatot tartott a valós számfogalom kialakításáról. Érdeklődő tanároknak halmazelméleti szemináriumot vezetett. Több vándorgyűlésen tartott nagy érdeklődéssel kísért előadást. A készülő gimnáziumi munkatankönyvek nem hivatalos lektorálásával igen komoly segítséget nyújtott a tankönyvíróknak.

Több év óta tart rendszeresen szakkört és matematikai klubfoglalkozást a budapesti Kossuth nevelőotthonban, továbbá matematikai foglalkozásokat nyári kulturális építőtáborokban és olvasótáborokban különböző korú tanulóknak.

Schmauser Károlyné egyetemi adjunktus, a miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Matematika Intézetének oktatója, mat.-fiz. szakos oklevelét 1964-ben szerezte a KLTE-n. Kezdettől

fogva részt vesz az alkalmazott mechanikai ágazaton, a leginkább matematika igényes ágazaton, a hallgatók oktatásában. Társszerzővel jól használható egyetemi jegyzetet készített „Példatár a Felsőbb analízis III-hoz" címmel. Az analízis témakörben több, tudományos eredményeket is tartalmazó előadást tartott. Az egyetem feladatmegoldó versenyén versenybizottsági tag, a tudományos diákköri munka aktív támogatója.

Kiemelkedő szorgalommal, hozzáértéssel vezette éveken keresztül a miskolci Városi Ifjú Matematikusok Körének foglalkozásait. Tanítványai közül több, azóta már eredményeket elért fiatal pályafutását indította el. 1965 óta tagja az OKTV dolgozatokat elbíráló megyei bizottságnak, rendszeresen részt vesz az Arany Dániel dolgozatok javításában, a Borsod megyei középiskolás diákköri pályázatok elbírálásában. Ezen munkáit átlagon felüli lelkiismeretességgel, jó didaktikai érzékkel, a versenyzők számára hasznos kritikai észrevételekkel végezte.

Egyik kezdeményezője, beindítója és négy éven keresztül aktív résztvevője volt társadalmi munkában a miskolci Földes Ferenc Gimnázium speciális matematika tagozatos osztályaiban a számítástechnika tanításának.

Schmauser Károlyné mind középiskolai, mind egyetemi szinten több mint másfél évtizede igen sokat tesz a fiatal tehetségek felkutatásában és képzésében, a matematika iránti érdeklődés felkeltésében.

Suták Mihályné 1975 óta tanít a nyíregyházi 5. számú Általános Iskolában. Tantárgycsoportos oktatási formában a reáltantárgyakat tanítja. Szakmai felkészültsége igen alapos, önképzése igényes, sokoldalú. Az új matematikatantervet értő, azt igen magas szinten megvalósítani képes pedagógus. Óratervezéseinek kiemelkedő erénye, hogy a tantervi anyagot problémákba öltöztetve dolgoztatja fel, egy-egy órán sokféle ismeretanyagot mozgósít. A gyengébb tanulókkal külön is foglalkozik. Előbb egyszerűbb feladatokat oldat meg velük, majd újra nekiláthatnak nehezebb feladatoknak is. Játék és munka, tudatos matematizálás jellemzi jóhangulatú óráit.

Állandóan képezi magát, részt vesz a különböző szakmai módszertani továbbképzéseken. Mint ún. bázis nevelő, fáradhatatlanul dolgozik, igen sok órában készíti fel kollégáit az új matematika tanítására. A gyakorló tanárok nagyra értékelik azt a sok konkrét segítséget, amit a tanterv megvalósításához nyújt. A halmazok, logika, kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika témaköröket hozzáértéssel dolgozza fel előadásaiban. Eredményesen alkalmazza a csoportos, egyéni és differenciált tanítási módszereket, tanítványait algoritmikus szemléletre neveli. Sokan járnak bemutató óráira a városból és a megyéből. Nagy példagyűjteménye van.

Iskolájának felső tagozatos tanárai óralátogatásokon, beszélgetéseken állandóan tájékozódhatnak munkájáról, ez nagyon megkönnyíti a tanulók beilleszkedését a felső tagozatos munkába.

Tanítványai rendszeresen előkelő helyezéseket érnek el a különböző versenyeken.

Jelentés a Rényi Kató Emlékdíj 1981. évi kiosztásáról

A Bolyai János Matematikai Társulat Választmánya az 1981. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítélésére az alábbi bizottságot jelölte ki: elnök: Babai László; titkár: Totik Vilmos; tagok: Győry Kálmán, Lippner György és Pollák György. A bizottság május 21-én tartott ülésén a beérkezett javaslatok alapján a következő határozatot hozta:

A Rényi Kató díj I. fokozatában és 4200 Ft pénzjutalomban részesül:

Balog Antal az ELTE V. éves matematikus szakos hallgatója és

Krisztin Tibor a JATE V. éves matematikus szakos hallgatója.

A Rényi Kató díj II. fokozatában és 3500 Ft jutalomban részesül:

Bezdek András az ELTE V. éves matematikus szakos hallgatója,

továbbá 1200 Ft-os jutalomban

Fridli Sándor az ELTE V. éves matematika-fizika szakos hallgatója,

Illés Ágnes az ELTE V. éves matematika-fizika szakos hallgatója, és

Tran Viet Trung az ELTE V. éves matematikus szakos hallgatója.

INDOKLÁS

Balog Antal a számelméleti függvények, valamint a prímszámok elemi és analitikus elméletében ért el kimagasló eredményeket. Egy Selberg-féle azonosság általánosításából kiindulva maradéktagot is szolgáltató elemi bizonyítást ad a prímszámtételre. Erdős és Turán egy becslését élesítve pontos aszimptotikát bizonyít adott fokú szimmetrikus csoportba ágyazható adott, a foknál nagyobb rendű csoportok számára, végül „Numbers with a large prime factor" c. dolgozatában lényegesen javítja a címben szereplő számok rövid intervallumokban való eloszlásáról

szóló ismert eredményeket, alkotó módon felhasználva és kombinálva ezen téma igen bonyolult elemi és analitikus technikáit. 3 dolgozata van megjelenés alatt.

Krisztin Tibor eredményei a manapság gyors fejlődést mutató funkcionál-differenciálegyenletek elméletéhez kapcsolódnak. Megoldja Bernfeld és Haddock egy problémáját, és e témát folytatva értékes, új eredményeket ér el funkcionál-differenciálegyenletek megoldásainak konvergenciájáról, ill. aszimptotikus viselkedéséről. 2 dolgozata van megjelenés alatt.

Bezdek András a diszkrét geometriában ért el érdekes eredményeket, ezek közül a fontosabbak a következők: Kongruens körrendszerekkel kapcsolatban igazolja Fejes Tóth László egy sejtését, „Solid packing of circles in the hyperbolic plane" c. dolgozatában bebizonyítja, hogy a szabályos $\{p, 3\}$ $(p \geqq 8)$ mozaik beírt köreinek rendszerén túl akkor is szolíd körrendszert kapunk, ha egy kört elhagyunk. 4 dolgozata van megjelenés alatt.

Fridli Sándor elsősorban Vilenkin-féle periodikus multiplikatív rendszerek szerinti sorfejtésekkel, ill. approximációval foglalkozik. Egy sor klasszikus approximációs eredmény megfelelőjét igazolja a Butzer—Wagner-féle derivált felhasználásával: számos tételt bizonyít a legjobb megközelítés, a folytonossági modulus a derivált stb. kapcsolatáról. Végül eredményeket ér el bizonyos nem korlátos generáló sorozat esetére is.

Illés Ágnes főként körelhelyezési problémákkal foglalkozik. Az $n+k \leqq 6$ esetben meghatározta a gömbfelület n, ill. k egyenlő sugarú körrel történő legsűrűbb kitöltéseit. Homogén körrendszerekkel kapcsolatban megadja a legsűrűbb körkitöltéshez, ill. a legritkább körfedéshez vezető középpont-rendszereket.

NAGYRENDEZVÉNYEK

CSILLAG PÁL TALÁLKOZÓ (JÚNIUS 6—11., BALATONLELLE)

A találkozón az 1974-ben, vagy azután végzett matematikusok közül, minden eddigi felülmúlóan — 129-en vettek részt. A szállás az elmúlt évekhez hasonlóan, a Budapesti Műszaki Egyetem balatonlellei KISZ táborában volt, az előadásokra is a tábor előadótermében került sor. Ebédelni és vacsorázni a tábortól kb. 500 méterre levő Tünde bisztróban lehetett, a reggelit a tábor közelében levő üzletből szerezték be a szervezők.

A találkozó tudományos programját 18, egyenként 20 perces előadás, illetve két egyéb tájékoztató alkotta:

Gáspár Csaba: Seidel-típusú iterációs módszerek peremérték feladatokra.
Szigeti Gábor: Kanonikushoz közel álló tartományok konform leképezésének konstruktív előállítása.
Balog Antal: A prímek egy tulajdonságáról.
Tóth Gábor: SU (3).
Sztrik János: A gépkiszolgálási problémáról.
Füredi Zoltán: A geometria él.
Császár Gyula: Telefonközponti kezelők forgalmi terhelése.
Solti György: Síkjában terhelt szerkezetek megoldása végeselem módszerrel.
József Sándor: Eloszlásvizsgálatok a termésátlag-elemzésben.
Szeredi János: Néhány párhuzamos algoritmus és programjaik.
Lempert László: Diktatúra és matematikai szükségszerűség.
Voloncs György: Esztergaszámok matematikai modellezése.
Balogh Zoltán: Öröklődő tulajdonságok a topológiában.
Ablonczy Péter: Egy furcsa kód.
Járai Antal: Függvényegyenletek regularitási tulajdonságai.
Simon Éva: Számítógépes kísérlet magyar szavak morfológiai tagolására.
Soltész János: A rizikó függvényről.
Molnár László: Elméleti megfontolások rekordelhelyezések optimalizálására.

A fentieken kívül röviden ismertette tervező programjait Csupor László és a leírást az érdeklődők rendelkezésére bocsájtotta. Rövid leírás formájában függesztette ki Pozsonyi András: Matematikai programozás a Videoton számítógépein címmel bejelentett előadását.

A nem tudományos szervezett program egy kirándulásból (8-án Tihany—Balatonfüred útvonalon) és egy filmvetítésből (9-én: Ripacsok) állt.

A találkozó jól sikerült, hasznos tapasztalatcserére adott lehetőséget, kellemes körülmények között. Kedvezőtlen jelenség azonban az előadások számának csökkenése.

VI. MAGYAR KOMBINATORIKA KOLLOKVIUM (JÚLIUS 6—11., EGER)

A konferencia fő célja az volt, hogy átfogó képet adjon a ma folyó kombinatorikai és kombinatorikus halmazelméleti kutatásokról. Mivel Magyarországon a kombinatorika szinte valamennyi ágának vannak művelői, nem tettünk a témákban megszorításokat. A résztvevőket is minden területről hívtuk. Többek között ennek is eredménye, hogy a résztvevők számának tekintetében a konferencia minden eddigi kombinatorika kollokviumot felülmúlt. Sajnálatos viszont, hogy néhány meghívott nagyság nem jött el. Sikerült elérnünk, hogy a résztvevők nemzetiségi megoszlása is sokrétű legyen, kiemelnénk a tengerentúli és a szocialista vendégek nagy számát.

Az előadások átlagszínvonala jó volt, de viszonylag kevés kiemelkedő előadás hangzott el. Meg kell azonban említeni R. L. Graham valós számsorozatok irregularitásairól, M. Las Vergnas irányított matroidokról, B. Rothschild páratlan köröket nem tartalmazó gráfokról, E. G. Straus projektív színezésekről, és A. Schrijver páros gráfok l-faktorainak számáról szóló előadását. A magyarokról általában elmondható, hogy igyekeztek kitenni magukért.

A mai magyar kombinatorikai eredmények, a téma iránti hazai érdeklődés, és a kombinatorika erőteljes fejlődése alapján feltétlenül indokolt az immár hagyományosnak mondható kombinatorika kollokviumok sorozatának folytatása, de egyre indokoltabbnak látszik az ilyen nagy konferenciák között kisebb, a kombinatorika egy-egy területét felölelő konferencia szervezése is.

A résztvevők száma 177 volt; 102 külföldi, 59 magyar és 16 kísérő.

SZÁMELMÉLETI KONFERENCIA (1981. JÚLIUS 20—27., BUDAPEST)

Az elsődleges cél az volt, hogy a konferencia általános képet adjon a ma folyó fontosabb számelméleti kutatásokról, különösen a hagyományosan magyar témákban, a klasszikus elemi, analitikus és algebrai számelméletben. A szervezők — Halász Gábor (elnök), Sárközy András, T. Sós Vera (társelnökök), Pintz János (titkár), Győry Kálmán, Kátai Imre, Surányi János, Szemerédi Endre — nem törekedtek arra, hogy az összejövetel nagy létszámú legyen. A kitűzött célt elsősorban a résztvevők kiválasztásával igyekeztek elérni. Kiemelt előadás nem volt, kivéve az elsőt, melyet A. Schinzel (PL) tartott Turán Pál munkásságáról. A résztvevők összetétele nagyjából megfelelt a célnak, bár néhányan a terület kiemelkedő művelői közül nem voltak jelen; különösen sajnálatos, hogy a Szovjetunióból meghívottak közül csak nagyon kevesen tudtak résztvenni a konferencián. Így a másik célt, nevezetesen, hogy a konferencia egyfajta kelet—nyugati számelméleti találkozó is legyen, ami jelentős hiányt pótolna, csak részben sikerült elérni.

Igen komoly eredményekről (az automorf függvények elméletének analitikus számelméleti alkalmazásairól) számolt be előadásában H. Iwaniec, ezenkívül igen érdekes, a hazai matematikusokat közvetlenül érintő előadást tartott a külföldiek közül H. Montgomery, R. Vaughan, E. Wirzing (az eddig felsoroltakat a Társulat vendégül látta), R. Heath-Brown, Stepanov, L. Straus. A külföldiek által is elismerten igen szépen szerepeltek a magyarok, elsősorban a fiatalok. Elmondható, hogy az előadások átlagszínvonala is jó volt, gyenge előadás alig hangzott el.

A konferencia 128 résztvevője (73 külföldi, 28 magyar és 27 kísérő) a kulturális programként szervezett félnapos szentendrei kiránduláson, vagy budapesti városnézésen vehetett részt.

DIÁKKÖRI NYÁRI ISKOLA (AUGUSZTUS 5—12., ESZTERGOM)

A Nyári Iskola 31 fős hallgatósága az alábbi előadásokon vett részt:
Kiss Emil: Bevezetés a topologikus csoportok elméletébe, Pontrjagin dualitás.
Simányi Nándor: Algebrai topológia (előkészítés), Spektrál tétel.
Kollár János: Végesdimenziós reprezentációelmélet.
Lempert László: Riemann geometria (előkészítés).
Tóth Gábor: Lie-csoportok klasszifikációja.
Szűcs András: Morse-elmélet és a Bott-periodicitás tétel.
Kollár János: Végtelendimenziós reprezentációelmélet.

SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI KONFERENCIA (AUGUSZTUS 24—28, KŐSZEG)

A konferencia az 1974-ben Oxfordban, majd az 1979-ben Oberwolfachban megrendezett nemzetközi sztochasztikus programozási konferenciák után a harmadik nemzetközi konferencia volt a matematikai programozáselmélet e részterületén. Megrendezésével a Társulat lehetőséget szándékozott biztosítani a témakörrel foglalkozó hazai és külföldi kutatóknak újabb eredményeik ismertetésére, a sztochasztikus programozás különböző alkalmazásainak bemutatására, modellezési kérdések megtárgyalására, és annak megvitatására, hogy melyek a gyakorlat szempontjából legfontosabb irányzatok, melyik az a kérdéskör, melynek tárgyalása várhatóan a sztochasztikus programozás alkalmazásának fellendülését eredményezi.

A konferencián, melynek 63 résztvevője volt (34 magyar és 17 nemzet 29 képviselője), 35, egyenként félórás előadás hangzott el, ezen felül sor került egy kerekasztal beszélgetésre is. Kulturális programként félnapos kirándulást és fogadást szerveztünk. Az egyik ülésen (2 előadás) az ugyanebben az időszakban Veszprémben megrendezett III. Balaton-modellezési konferencia résztvevői közül néhányan is résztvettek; ekkor a Balaton témakörhöz kapcsolódó előadások hangzottak el.

Kőszeg ideális helynek bizonyult; a Jurisich Miklós Művelődési Központ és a szállodák kifogástalan körülményeket biztosítottak.

A TÁRSULAT RENDEZVÉNYEI 1981. FEBRUÁR 1-TŐL AUGUSZTUS 31-IG

Február 2.	Az Arany Dániel Matematikai Verseny I. fordulója dolgozatainak megírása.
Február 20.	SURÁNYI JÁNOS: Geometriai módszerek a számelméletben (az IMK ülése).
Február 23—27.	A.-M. SÄNDIG (NDK) tapasztalatcsere beszélgetései a Budapesti Műszaki Egyetemen.
Február 27.	F. GALVIN (USA): On paths in countable graphs; a Szele Tibor Emlékérem kiosztása alkalmából.
Március 2—6.	W. WESSEL (NDK) tapasztalatcsere beszélgetései az MTA Matematikai Kutatóintézetben.
Március 7.	Koszorúzás Riesz Frigyes halála 25. évfordulója alkalmából (az MTA-val közös rendezvény).
Március 11.	KOVÁCS CSONGORNÉ előadása az általános iskola 7. osztályában tanítók számára (a sorozat többi előadása: március 26., április 8., 22., május 6., 29.).
Március 13.	SIMONOVITS MIKLÓS: Függvények és hatványsorok (az IMK ülése).
Március 3—április 5.	E. KOPEC, H. KAKOL (PL), tapasztalatcsere látogatása az ELTE-n, R. MAZUR, M. SKOWIERAK (PL), óralátogatásai középiskolákban és tapasztalatcseréjük az OPI-ban.
Április 21.	T. BETH (NSZK): Discrete Fourier transform in data processing.
Április 24.	SURÁNYI JÁNOS: Paralelogramma-rácsok és lánctörtek (az IMK ülése).
Április 27.	K. WOLFSDORF (NSZK): Partitions of power sets.
Április 29.	Az Arany Dániel Matematikai Verseny II. fordulója.
Május 1.	P. N. STEWART (CDN): Normal extensions of associated rings.
Május 2.	K. CIESIELSKI (PL): Topological properties of genetic graphs.
Május 3—16.	HO HUNG KHOAI (Vietnam), tapasztalatcsere látogatása.
Május 8.	HÓDI ENDRE: Az „amerikai verseny" eredményei és a feladatok megoldásának ismertetése (az IMK ülése).
Május 16.	D. BUSCHBAUM (USA): Resolutions of determinal ideals.
Május 29.	GULYÁS OTTÓ: Nemparaméteres statisztikai módszerek meteorológiai alkalmazásai. KATONA GYULA: Beszélgetés végzős matematikus hallgatókkal. Az 1981. évi Rényi Kató Emlékdíjak átadása (Végző matematikusok estje).
Június 6—11.	Csillag Pál Találkozó.
Június 8.	L. DEVROY (B): Recent results in nonparametric discrimination.
Június 12.	P. ORLIK (USA): P'-sets in regular spaces.
Június 13.	Az Arany Dániel Matematikai Verseny eredményhirdetése; a feladatok megoldásának ismertetése, díjkiosztás.
Június 15.	J. D. MONK (USA): Independence and related concepts in Boolean algebras.
Június 15.	J. N. SRIVASTAVA (USA): Some recent advances in factorial design.
Június 18.	J. D. MONK (USA): Recent problems concerning Boolean algebras.

Június 24.	V. Dlab (CDN): On the recent developments in the representation theory of algebras.
Június 26.	O. Lehto (SF): On the development of the value distribution theory of meromorphic functions; a historical survey.
Július 3—10.	F. Indan (PL) tapasztalatcsere látogatása.
Július 6—11.	VI. Magyar kombinatorika kollokvium.
Július 7—11.	Rátz László vándorgyűlés.
Július 8.	B. Courcelle (F): On the recent developments in algebraic theory of programming.
Július 10.	B. Courcelle (F): The semantics of programming languages.
Július 20—26.	Számelméleti kollokvium.
Augusztus 12.	E. Lukács (USA): Újabb eredmények az egydimenziós karakterisztikus függvények elméletében.
Augusztus 13., 17.	L. Fuchs (USA): Modules over valuation ring I., II.
Augusztus 24—28.	Félcsoportelméleti kollokvium.
Augusztus 24—28.	Sztochasztikus programozási konferencia.
Augusztus 26.	N. V. Krülov (SU): Sztochasztikus kontrol.
Augusztus 27.	N. V. Krülov (SU): Irányított diffúziós folyamatok.
Augusztus 28.	N. V. Krülov (SU): Félcsoportok ternárisan zárt részhalmazai.

MTA Könyvtára
Periodika 1982/5014 m.
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1982. február 4. — Terjedelem: 12,6 (A/5) ív
Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György
82-471 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

CONTENTS

L. Filep: Life and work of Gyula Farkas 231
I. Reimann: János Schopp (1910—1980) 245
G. Tóth: On the Atiyah—Singer index theorem III. 247
I. Szepesvári: On the number of uniform polyhedra 273
D. Petz: Locally compact groups: von Neumann group algebra and duality 329
Z. Magyar: On a recursion concerning quadruples of numbers 345
Report on the 1980 M. Schweitzer Mathematical Competition 349
Activity of the Society 363

СОДЕРЖАНИЕ

Л. Филеп: Жизнь и творчество Д. Фаркаша 231
И. Реиман: Я. Шопп (1910—1980) 245
Г. Тот: О теореме об индекса Атья—Зингера, III. 247
И. Сепешвари: О числе равномерных многогранников, I—II. 273
Д. Пец: Локально компактные группы: групповая алгебра Неймана и двойственность .. 329
З. Мадяр: Одна рекурсия о четвертках чисел 345
Доклад о Математическом Конкурсе им. М. Швейцера 1980 г. 349
Из обшества 363

Ára: 9,— Ft
Évi előfizetés: 36,— Ft

INDEX: 25 564
ISSN 0025—519X