312.046

Matematikai Lapok

-7
376-79

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

27. évfolyam, 1976—1979

1-2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1978. december — 27. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Császár Ákos
Szerkesztők: Lovász László, Pelikán József, Révész Pál, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest, V., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: PKHI 215-96162.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest, V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488,
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 28, Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Szász Pál (1901—1978) 1
Szász Pál tudományos munkáinak jegyzéke 3
Heinz Langer: Szőkefalvi-Nagy Béla 65 éves 7
Szőkefalvi-Nagy Béla tudományos munkáinak jegyzéke 19
Az 1978. évi Állami díjjal kitüntetett Révész Pál munkáinak jegyzéke 24
Turán Pál matematikai munkássága III. 27
1. Halász Gábor: A hatványösszegmódszer 27
2. Alpár László: Turán Pál egyes eredményei az analízis témaköréből 43
Kárteszi Ferenc: Bolyai János életműve 59
Strommer Gyula: A Bolyai geometria szerkesztéselméletéről 65
Lovász László: Gráfelmélet és diszkrét programozás 69
Juhász István: A moszkvai topológiai iskoláról 87
Ruzsa Z. Imre: Számelméleti függvények I. 95
Székely Gábor és Tusnády Gábor: Általánosított Fibonacci-számok és a „tiszta fejek" száma 147
Hoffmann Andor: (*C*, 1) szummálható sorok alkalmazása rétegbe ágyazott csőrendszer hőleadásának vizsgálatára 153
Strommer Gyula: Szabályos sokszögek abszolút szerkesztése 161
Jelentés az 1977. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről 165
Feladatrovat 181
Társulati élet 189
Könyvismertetés 201
Új könyvek 202

SZÁSZ PÁL (1901—1978)

1978. február 13-án hosszú, súlyos betegség után elhunyt Szász Pál nyugalmazott egyetemi tanár, a matematikai tudományok doktora. Személyében az Eötvös Loránd Tudományegyetem egykori professzorától, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnökétől, tanítványainak százai szeretett Pali bátyjuktól vettek búcsút.

Szász Pál neve csaknem fél évszázadon át egybeforrt a budapesti tudományegyetemen folyó matematikaoktatással. Közvetlenül a matematika-fizikaszakos tanári oklevél megszerzése után, 1924-től kezdve vett részt Fejér Lipót fiatal munkatársaként az analízis oktatásában, kezdetben gyakorlatok vezetésével, majd évtizedeken át a matematika-fizika szakos tanárjelölteknek szóló analízis-előadások megtartásával. Mint az egyetem mellett működő Középiskolai Tanárképző Intézet tanára 1933-ban egyetemi magántanári, 1943-ban egyetemi rendkívüli tanári címmel tüntették ki; 1950-ben intézeti tanári, 1952-ben docensi kinevezést nyert, majd 1958-tól kezdve egyetemi tanárként folytatta fáradhatatlan oktató munkáját.

Az analízisoktatás problémáiban való elmélyülés impozáns eredménye az 1935-ben kiadott hatalmas tankönyv, a Differenciál- és integrálszámítás elemei. Sokkal több ez a munka annál, amit szerény címe ígér. Nem csupán a valós és komplex változós függvények klasszikus analízisének nyújtja számtalan didaktikai ötlettel kicsiszolt felépítését, hanem az elemeken messze túlvezetve feldolgozza Fejér Lipótnak és tanítványainak nagyszámú mélyenfekvő eredményét, közülük nem egynek első tankönyvszerű bemutatásával. Méltán írta Fejér Lipót az első kiadás előszavában: „Szász Pál e minden ízében átgondolt, alaposságot matematikai eleganciával egyesítő könyve irodalmunk igazi nyeresége", amely „bármely országban meleg fogadtatásra találna".

A tankönyvírás és az egyetemi előadások folyvást új és új gondolatokkal való gazdagítása mellett időt talált Szász Pál arra is, hogy a matematikai tudományt elmélyült alkotó munkával művelje. Eredményei két nagy témakört ölelnek fel. Kisebb részük szorosan csatlakozik mesterének, Fejér Lipótnak interpolációelméleti kutatásaihoz; ennek módszereit finomítja, eredményeit élesíti és általánosítja, mindenkor törekedve a lehető legnagyobb egyszerűségre és eleganciára.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A terjedelemben is, mélységben is túlnyomó rész egy ettől távol eső, de hazai matematikánk történetében fényes előzményekkel tündöklő témához, a geometria alapjainak kutatásához tartozik. Szász Pál számos e gondolatkörhöz tartozó dolgozatában a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiomatikus felépítésének szinte minden ismert módszerét gazdagítja új gondolatokkal, gondosan ügyelve az eszközök megválogatására, a feleslegesnek mutatkozó feltevések elkerülésére. Mindezek eredményeképpen ennek a témakörnek nemcsak hazánkban kimagaslóan legtájékozottabb és legeredményesebb művelőjévé vált, hanem joggal keltette fel a nemzetközi matematikai közvélemény figyelmét is, ami többek között nemzetközi tudományos konferenciákra való meghívásokban nyilvánult meg. A hiperbolikus geometria megalapozására vonatkozó sok évtizedes kutatásainak szintéziseként 1973-ban jelent meg Bevezetés a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriába című munkája, amely a felhasznált eszközök egyszerűsége folytán a kezdőnek tankönyvül, az újszerű gondolatok mélysége révén a szakembernek kézikönyvül szolgálhat.

A sok évtizeden át végzett áldozatos pedagógiai munka és a külföldön is megbecsült tudományos produkció meghozta számára az igen megérdemelt elismerés külső jeleit. A Tudományos Minősítő Bizottság a tudományos fokozatok létrehozásakor a kandidátusi fokozatot ítélte oda neki, majd 1957-ben doktori értekezésének megvédésével a matematikai tudományok doktora fokozatot szerezte meg. 1956-ban megkapta a Szocialista Munkáért Érdemérmet, majd 1968-ban a Munka Érdemrend arany fokozatát. 1969-ben a Magyar Tudományos Akadémia az Akadémiai Díj első fokozatával tüntette ki. 1977-ben vette át az Akadémiai Kiadó nívódíját Bevezetés a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriába című könyvéért. Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatnak éveken át választmányi tagja volt, ennek utóda, a Bolyai János Matematikai Társulat pedig 1966-ban tiszteletbeli elnökévé választotta.

Aki azonban ismerte Pali bácsit, jól tudja, nem az elismerésnek ezek a külső jelei jelentették számára az igazi örömet. Páratlan szerénysége nemcsak könyveinek puritán egyszerűségű címeiben és előszavaiban nyilvánult meg, hanem abban is, ahogyan távol állt tőle minden törtetés, a sikerek minden hajszolása, ahogyan félrehúzódott mindenütt, hogy másokat, szeretett tanítványait, nála fiatalabbakat állítson előtérbe. Mi, akik sok százan, évtizedeken át tőle tanultuk meg, hogyan kell a napi munkát fáradhatatlanul és pontosan végezni, hogyan kell egy-egy matematikai gondolat hatóerejét cizellált aprómunkával érvényre juttatni, mi tanítványai láttuk, éreztük, tapasztaltuk, hogy Pali bácsi jó ember volt. Jó volt a szó igazi, nemesen egyszerű értelmében: soha másnak nem akart és nem tett mást, mint jót. Tanított, nevelt minket, éppen olyan szorgalommal, mint amilyennel búvárkodott a matematika irodalmában, és éppen olyan lelkesedéssel, mint amilyennel el tudott gyönyörködni egy-egy új matematikai gondolatban, egy-egy bizonyítás egyszerűsítésében, egy-egy felesleges feltevés kiiktatásában.

Pali bácsi tudományos életműve eleven cáfolata annak az elterjedt tévhitnek, hogy a tudományos alkotóerő az évtizedek előrehaladtával hamar kiapad: ő publikációinak több, mint nyolcvan százalékát ötvenedik életéve után alkotta. Példás szorgalma nyugalomba vonulása után is szüntelen alkotó munkára késztette. Több új cikk mellett ezekben az években írta könyvét a hiperbolikus geometriára vonatkozó vizsgálatainak összegezéseként. Szinte utolsó percéig dolgozott a készülő angol nyelvű kiadáson, a már egyre inkább elhatalmasodó betegségről mit sem sejtve. Amikor csendben kórházba vonult, hogy jelentéktelennek vélt panaszait kivizsgáltassa, nem gondolta, hogy a néhány hetes kórházi tartózkodás után soha többé nem fog visszatérni a rá váró korrektúrához.

Pali bácsi olyan csendben és szerényen hagyott itt bennünket, mint amilyen csendben és szerényen élt közöttünk. Életében mindenki szerette őt, most mindnyájan fájdalmasan érezzük hiányát. Példaképünk volt és marad ezután is, hogy csak emlékében és műveiben marad velünk.

SZÁSZ PÁL TUDOMÁNYOS MUNKÁINAK JEGYZÉKE

I. Dolgozatok

1. Über einen Mittelwertsatz. Mathematische Zeitschrift 25 (1926).
2. A differenciálszámítás középértéktételével kapcsolatos kérdésekről. Matematikai és Fizikai Lapok 33 (1927).
3. A differenciálszámítás egy általános középértéktételéről. Uo. 35 (1928).
4. Konvex és monoton függvényekről. Uo. 36 (1929).
5. A simuló paraboláról. Uo. 38 (1931).
6. Egy minimum-feladat a körbe beírt sokszögekre vonatkozólag. Uo. 42 (1935).
7. Megjegyzés Kürschák József egy munkájához. Uo. 47 (137).
8. Az elliptikus, az euklideszi és a hiperbolikus geometria szétválasztása. Uo. 48 (1941).
9. A hiperbolikus trigonometriáról. Uo. 48 (1941).
10. Az aequidistans interpolációról. Uo. 49 (1942).
11. Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene. Szegedi Acta 12 (1950).
12. Verwendung einer klassischen Konfiguration Johann Bolyais' bei der Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene. Uo. 14 (1952).
13. N. I. Lobacsevszkij „Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből" c. könyvéről. A MTA III. Osztályának Közleményei 2 (1952).
14. Neue Bestimmung des Parallelwinkels in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln. Szegedi Acta 14 (1952).
15. Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie durch Verwendung der Grenzkugel. Acta Math. Hung. 3 (1952).
16. A hiperbolikus trigonometria különböző elemi előállításai. A MTA III. Osztályának Közleményei 3 (1953).
17. Beweis der Hauptformel der hyperbolischen Trigonometrie anabhängig von der Stetigkeit. Szegedi Acta 15 (1953).
18. A hiperbolikus trigonometria közvetlen előállítása a tér felhasználásával. A MTA III. Osztályának Közleményei 3 (1953).
19. A hiperbolikus trigonometria új előállítása a paraszféra felhasználásával. Uo. 3 (1953).
20. A hiperbolikus trigonometria új síkbeli előállítása a klasszikus segédeszközökkel. Uo. 3 (1953).
21. Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Poincaréschen Halbebene. Szegedi Acta 15 (1954).
22. Über die Rektifikation des Kreises, des Grenzkreises und der Abstandslinie. Acta Math. Hung. 4 (1953).
23. Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie. Uo. 4 (1953).
24. Megjegyzés Fejér Lipót egy munkájához. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának 1952—53. tanévi évkönyve, 1954.
25. Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen ebenen Geometrie. Acta Math. Hung. 5 (1954).
26. Az elemi körmérésről. Matematikai Lapok 5 (1954).
27. A moduláris csoport geometriai interpretációjáról. A MTA III. Osztályának Közleményei 5 (1955).
28. Elementargeometrischer Beweis der Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie mit Hilfe des Poincaréschen Halbraumes. Acta Math. Hung. 5 (1954).
29. Elementargeometrische Herstellung des Klein—Hilbertschen Kugelmodells des hyperbolischen Raumes. Szegedi Acta 16 (1955).
30. Diverses présentations élementaires de la trigonométrie hyperbolique. Acta Math. Hung. 5 (1954). Supplementum.
31. A ciklusívek rektifikációjáról. A MTA III. Osztályának Közleményei 5 (1955).
32. A sinus-sor maradéktagjáról. Matematikai Lapok 6 (1955).
33. A hiperbolikus trigonometria leolvasása a Poincaré-féle körmodellről. A MTA III. Osztályának Közleményei 6 (1956).

34. A hyperbolikus trigonometria előállítása a Poincaré-féle félsík útján. Uo.
35. Hyperbolische Trigonometrie an dem Poincaréschen Kreismodell abgelesen. Acta Math. Hung. 7 (1956).
36. A Poincaré-féle félsík és a hiperbolikus síkgeometria kapcsolatáról. A MTA Közleményei 6 (1956).
37. A hiperbolikus sík analitikus geometriájának independens elemi felépítése a Hilbert-féle „végkalkulus" alapján. Uo.
38. Bolyai Farkas sokszögátdarabolási tételéről. Matematikai Lapok 7 (1956).
39. Begründung der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln. unabhängig von der Trigonometrie dieser Ebene. Acta Math. Hung. 8 (1957).
40. Die hyperbolische Trigonometrie als Folge der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene. Uo.
41. Ein elementargeometrischer Beweis von H. A. Schwarz vereinfacht und unabhängig von parallelen Axiom geführt. Uo.
42. On a mean-value theorem of Schwarz-Stieltjes. Szegedi Acta 19 (1958).
43. Unmittelbare Einführung Weierstrassscher homogenen Koordinaten in der hyperbolischen Ebene auf Grund der Hilbertschen Endenrechnung. Acta Math. Hung. 9 (1958).
44. A remark on Hilbert's foundation of the hyperbolic plane geometry. Uo.
45. Neuer Beweis für die Darstellung der Bewegungen und Umwendungen der hyperbolischen Ebene mit Hilfe der Hilbertschen Endenrechnung. Annales Univ. Sci. Budapestinensis etc. Sectio Math. 1. (1958).
46. New proof of the circle axiom for two circles in the hyperbolic plane by means of the endcalculus of Hilbert. Uo.
47. Direct introduction of Weierstrass homogeneous coordinates in the hyperbolic plane, on the basis of the endcalculus of Hilbert. Symposium on the Axiomatic Method, Berkeley 1957/58.
48. A halmazelmélet ekvivalencia-tételéről. Mat. Lapok 10 (1959).
49. Über die Rektifikation von Kurvenlogen im Poincaréschen Kreismodell der hyperbolischen Geometrie der Ebene. Annales Univ. Sci. Budapestinensis etc. Sectio Math. 2 (1959).
50. Remarque sur un ouvrage de M. Léopold Fejér. Uo.
51. On quasi-Hermite — Fejér interpolation. Acta Math. Hung. 10 (1959).
52. Fejér Lipót (1880—1959). A MTA III. Osztályának Közleményei 10 (1960).
53. Einfache Herstellung einer Klasse von nirgends differenzierbaren stetigen Funktionen auf Grund eines elementaren Satzes der analytische Geometrie. Publicationes Mathematicae Debrecen (1960).
54. On a theorem of L. Fejér concerning trigonometric interpolation. Szegedi Acta 21 (1960).
55. On Axioms of Congruence Due to H. G. Forder. Monatshefte für Math. 65 (1961).
56. A simplar determining of the Angle of parallelism after the method of János Bolyai. Annales Univ. Sci. Budapestinensis etc. Sectio Math. 3—4 (1960—61).
57. On a Maximum-Property Characterizing the Angles of a triangle. Monatshefte für Math. 66 (1962).
58. New Gauge Constructions of Perperidiculars Without Assuming the Parallel Axiom. Archi v der Math. 13 (1962).
59. Ein bequemer Weg zur Herleitung der Hyperbolischen Trigonometrie mit Hilfe der Grenzkugel. Annales Univ. Sci. Budapestinensis etc. Section Math. 5 (1962).
60. Einfache Herstellung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene auf Grund der Hilbertschen Endrechnung. Uo.
61. On generalized quasi-step and almost-step parabolas, respectively. Uo. 6 (1963).
62. On a Sum Concerning the Zeros of the Jacobi Polinomials with Application to the Theory of Generalized Quasi-step Parabolas. Monatshefte für Math. 68 (1964).
63. The extended Hermite—Fejér interpolation formula with application to the theory of generalized almost-step parabolas. Publicationes Mathematicae Debrecen 11 (1964).
64. On a new presentation of the hyperbolic trigonometry by aid of the Poincaré model. *(Hajós Györggyel)* Annales Univ. Sci. Budapestinensis etc. Sectio Math. 7 (1964).
65. On power series of the Fejér type. Uo. 8 (1965).
66. Application of the End-calculus of Hilbert to the Bisectors of the Defect of a triangle in the Hyperbolic Plane. Mathematische Nachrichten 33 (1967).
67. On the pseudo-euklidean geometry due to G. Hessenberg. Canadian Journal of Mathematics 19 (1967).
68. A hiperbolikus trigonometria egyszerűbb előállítása a klasszikus úton. MTA III. Oszt. Közl. 22 (1973) 11—54.
69. A remark on Hermite—Fejér interpolation. Sitzungsberichte d. math. — naturw. Kl. Abt. II. 183. Bd. 8—10. Heft.

II. Könyvismertetések

1. Karl Reinhardt, Methodische Einführung in die höhere Mathematik. Könyvismertetés, Szegedi Acta 9 (1939).
2. Ernst Lindelöf, Einführung in die höhere Analsis. Könyvismertetés. Uo. 9 (1940).
3. Gustave Verriest, Introduction a la géométry non euclidienne par la methode élémentaire. Könyvismertetés. Uo. 14 (1952).
4. R. Baldus—F. Löbell, Nichteuklidische Geometrie. Könyvismertetés. Szegedi Acta 17 (1956).

III. Könyvek

1. A differenciál- és integrálszámítás elemei. Az előszót írta Fejér Lipót. Budapest, 1935. Franklin-Társulat.
2. A differenciál- és integrálszámítás alapfogalmai. Budapest, 1948/49. Diószegi Sokszorosító.
3. A differenciál- és integrálszámítás elemei. Teljesen átdolgozott és lényegesen bővített második kiadás. Az előszót írta Fejér Lipót Budapest, 1951, Közoktatásügyi Kiadó Vállalat.
4. Bevezetés a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriába. Bp. Akad. Kiadó, 1973. 295. lap. „Disquisitiones matematicae Hungaricae, szerk. MTA Matematikai Bizottsága. Ism.: Strommer Gyula, Matematikai Lapok, 1973179—180.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA 65 ÉVES

HEINZ LANGER

Ez alkalommal köszöntjük Szőkefalvi-Nagy Bélát abból az alkalomból is, hogy 1978-ban Állami Díjjal tüntették ki matematikai munkásságáért

Szőkefalvi-Nagy Béla, Szőkefalvi-Nagy Gyula matematikus professzor fia 1913. július 29-én született Kolozsváron. Matematikát és fizikát tanult a szegedi egyetemen, ahol nagy hatással voltak rá Haar Alfréd, Riesz Frigyes és Kerékjártó Béla professzorok. 1936-ban középiskolai matematika-fizika tanári oklevelet szerzett és 1937-ben doktorált az ortogonális függvényrendszerekről írt értekezésével. Az 1937—38-as tanévben 8 hónapon át külföldi ösztöndíjasként a lipcsei egyetemen folytatta tanulmányait, ahol akkoriban B. L. van der Waerden, E. Hopf, P. Koebe és W. Heisenberg működött. Az 1939-es év első felét, ugyancsak ösztöndíjasként, Franciaországban töltötte a grenoble-i és a párizsi egyetemen J. Favard, J. Hadamard, A. Denjoy és mások mellett. 1939 szeptemberétől 1948 júniusáig a matematika tanáraként a szegedi tanárképző főiskolán dolgozott. A szegedi tudományegyetemnek már 1940-ben egyetemi magántanára, 1948 júliusa óta pedig rendes tanára; ott dolgozik ma is.

Szőkefalvi-Nagy Béla nagyszámú mély és változatos eredménnyel gazdagította a matematika különböző területeit, így az approximáció-elméletet, az ortogonális függvények elméletét, a Fourier-analízist, a geometriát és különösen a Hilbert- és Banach-térbeli lineáris operátorok elméletét; ezekkel később még valamivel részletesebben foglalkozunk. Munkásságáért Magyarországon is, külföldön is sok elismerésben és kitüntetésben részesült. A Magyar Tudományos Akadémia 1945-ben levelező, 1956-ban pedig rendes tagnak választotta meg. 1971-ben a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának külföldi tagja lett. 1973-ban az Ír Királyi Akadémia, 1976-ban a Finn Tudományos Akadémia megválasztotta tiszteletbeli tagnak. A Drezdai Műszaki Egyetem és a Turkui Egyetem 1965-ben, illetve 1970-ben tiszteletbeli doktorrá avatta. 1950-ben és 1953-ban Kossuth-díjat, 1968-ban és 1973-ban további magyar állami kitüntetéseket kapott. (Munkaérdemrend arany fokozata.)

Szőkefalvi-Nagy Béla, akit matematikus körökben kiváló előadóként ismernek és becsülnek, a nemzetközi kongresszusok gyakori vendége és ilyenkor rendszerint egy hosszabb előadás felkért előadója is. Európa, Észak-Amerika és Ázsia sok jelentős egyeteme meghívta, hogy tartson előadást vagy előadás-sorozatot. Például 1964-ben és 1970-ben egy-egy féléven át New Yorkban a Columbia Egyetemen, illetve Bloomingtonban az Indiana Egyetemen működött mint vendégprofesszor. Végül meg kell említeni, hogy az általa 1958-ban, 1964-ben és 1970-ben a Balaton mellett, valamint 1968 óta sorozatosan (P. Butzer professzorral együtt) Oberwolfachban vezetett kollokviumok — szuggesztív egyénisége és magasra értékelt kutatási eredményei következtében — mindig különleges eseményt jelentettek a lineáris operátorok elméletében és az approximáció-elméletben.

Szőkefalvi-Nagy Béla 1953 óta a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Bizottságának elnöke és számos további tudományos, állami és társadalmi tiszt-

séget visel. 1947-től kezdve a Riesz Frigyes és Haar Alfréd által alapított Acta Scientiarum Mathematicarum című folyóirat főszerkesztője. Ez a folyóirat, amelynek jellegét lényegében ő határozza meg, első megjelenése óta vezető szerepet játszik különösen a lineáris operátorok és az ortogonális sorok elméletének a fejlődésében. Szőkefalvi-Nagy Bélát főszerkesztőnek hívták meg a magyar és a szovjet tudományos akadémia által 1975 óta közösen kiadott Analysis Mathematica című folyóirathoz is. Ezenkívül az Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae és a Zentralblatt für Mathematik című folyóirat, továbbá az Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete című könyvsorozat szerkesztő bizottságának tagja. Az először említett két folyóirat, amelyet közvetlenül ő szerkeszt, központi helyet foglal el az analízis és a funkcionálanalízis nemzetközi irodalmában, és különleges elismerést jelent — elsősorban fiatalabb szerzők számára — ha egy dolgozatot az „Acta Szeged" fogad el közlésre. Hogy ezeknek a folyóiratoknak a közismert magas színvonala milyen szoros kapcsolatban van a szerkesztő személyével, mutatja az a körülmény, hogy más szerzők munkáit sokszor követik Szőkefalvi-Nagy Béla megjegyzései, amelyek a közleményt lényegesen kerekebbé és teljesebbé teszik.

Korunknak kevés matematikusa van, akinek a tankönyveit és monográfiáit olyan gyakran használnák és idéznék egyetemi hallgatóktól a kutatókig, mint az övéit. Már 28 éves korában megírta első monográfiáját, a *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* címűt. Ebben áttekintést ad azokról az eredményekről, amelyeket a 20-as és 30-as években a Hilbert-térbeli lineáris operátorok elméletében elértek, és ezeket saját hozzájárulásaival gazdagítja. A monográfia a tárgykörnek még ma is időszerű forrásmunkája. Erről nem utolsósorban az tanúskodik, hogy — az Egyesült Államokban 1947-ben kiadott utánnyomáson kívül — 25 évvel az első kiadás megjelenése után, 1967-ben új kiadás vált szükségessé. A mű alapvető szerepet játszott a Hilbert-térbeli lineáris operátorok, különösen a nem önadjungált operátorok elméletének viharos fejlődésében az elmúlt 20—30 év során.

Riesz Frigyessel közösen írt, *Leçons d'analyse fonctionnelle* című könyve az 1952-es első megjelenés óta összesen tíz kiadást ért meg francia, angol, orosz és német nyelven, továbbá lefordították japánra és egyik részét kínaira is. Bizonyos, hogy alig van funkcionálanalízis tankönyv, amely ilyen széles körű elterjedésre talált.

Szőkefalvi-Nagy Béla és C. Foiaş *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* című monográfiáját szintén lefordították angolra és oroszra. Ez a mű lényegében a szerzők saját eredményeit tartalmazza és a Hilbert-térbeli nem önadjungált operátorok elméletének egy nagyon fontos és gyümölcsöző fejlődési irányát képviseli, amely 1953 óta Szőkefalvi-Nagy Béla fő munkaterülete. Néhány ilyen eredményre a későbbiekben visszatérünk. Végül megemlítjük a szegedi egyetemen tartott előadásai alapján írt *Valós függvények és függvénysorok* című tankönyvét. Ezt, két magyar nyelvű kiadás után, szintén lefordították angolra.

A továbbiakban Szőkefalvi-Nagy Béla munkásságát néhány kiválasztott példán keresztül ismertetjük; matematikai érdeklődésének és eredményeinek sokrétűsége miatt tárgyalásunk nem ölelheti fel minden egyes alkotását.

a) Első dolgozatai algebrai-analitikus vizsgálatok a csoportelméletben és az ortogonális függvények elméletében. Ezek még szoros kapcsolatban állnak tanárai, Riesz Frigyes és Haar Alfréd kutatásaival. Riesz érdeklődését különösen a [3] munka keltette fel, amelyben a 22 éves szerző többek között új bizonyítást adott M. H. Stone-nak az unitér operátorokból álló, erősen folytonos $(U(t))_{t\geq 0}$ félcsoportok

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda$$

spektrális előállításáról szóló tételére és egyúttal kiterjesztette az eredményt normális operátorokból álló félcsoportokra (lásd még [18]). Megemlítjük, hogy Stone tétele alapvető jelentőségű az elméleti fizikában, a sztochasztikus folyamatok elméletében és más alkalmazási területeken.

Szőkefalvi-Nagy Béla doktori értekezésének az eredményeit a [6—9] dolgozatok tartalmazzák. Itt, Haar Alfréd egyik munkájához kapcsolódva, többek között megmutatja, hogy ha az R^1-beli M, ill. $\hat{M}$ alaphalmazon értelmezett (ψ_j) ill. $(\hat{\psi}_j)$ ortogonális függvényrendszernek ugyanaz a szorzási táblázata (vagyis ha

$$\int_M \hat{\psi}_j \bar{\hat{\psi}}_k \, ds = \int_M \psi_j \bar{\psi}_k \, ds, \quad \int_M \hat{\psi}_j \hat{\psi}_k \bar{\hat{\psi}}_l \, ds = \int_M \psi_j \psi_k \bar{\psi}_l \, ds$$

minden j, k, l indexre), akkor a két rendszer M mérhető részhalmazainak $\hat{M}$-ba való, kölcsönösen egyértelmű és mértéktartó halmaz- vagy pont-leképezése útján egymásba átvihető.

b) Sokoldalúan járult hozzá Szőkefalvi-Nagy Béla a Fourier-sorok elméletéhez és az approximáció-elmélethez. Korán elhunyt kollégájával, Sólyi (Strausz) Antallal közösen, H. Bohr és J. Favard vizsgálataihoz kapcsolódva, 1937-ben új bizonyítást adott ([17], lásd még [57]) az

$$|F(x)| \leqq \frac{\pi}{2U} \sup |f(x)|$$

ún. Bohr-féle egyenlőtlenségre; itt f trigonometrikus polinom,

$$f(x) = \sum_k (a_k \cos u_k x + b_k \sin u_k x),$$

amelyre $u_k \geqq U > 0$, és F a hozzá tartozó integrálfüggvény,

$$F(x) = \sum_k \frac{1}{u_k} (a_k \sin u_k x - b_k \cos u_k x).$$

A kérdéskör tanulmányozását általános formában a [19, 20] munkákban (lásd még [14, 15]) folytatta. Az alábbiakban vázlatosan ismertetjük az egyik eredményt, periodikus függvény esetére specializálva.

Jelölje K_m azoknak a 2π periódusú, mérhető f függvényeknek az osztályát, amelyekre $|f(x)| \leqq 1$ és amelyeknek a Fourier-sora a $\cos mx$-et és $\sin mx$-et tartalmazó tagokkal kezdődik (m adott nem-negatív egész szám), vagyis

$$\sum_{k=m}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

alakú. Legyen továbbá $\lambda = (\lambda(v))_{v=m, m+1, \ldots}$ megadott valós számsorozat és δ adott valós szám. E mennyiségek segítségével rendeljük hozzá az (1) sorhoz a

$$\sum_{k=m}^{\infty} \lambda(k) \left(a_k \cos\left(kx + \frac{1}{2}\delta\pi\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{1}{2}\delta\pi\right) \right) \tag{2}$$

transzformált sort. Keressük annak a feltételét, hogy a (2) transzformált sor egy folytonos függvény Fourier-sora legyen. Jelölje ezt a folytonos függvényt (ha létezik) $T^m_{\lambda\delta} f$. Fel lehet tenni a kérdést, van-e olyan az m, λ, δ mennyiségektől függő, de az $f \in K_m$ függvény megválasztásától független $M^m_{\lambda\delta}$ állandó, hogy $|(T^m_{\lambda\delta} f)(x)| \leqq M^m_{\lambda\delta}$ minden x-re. Speciálisan kereshetjük a legkisebb ilyen állandót, valamint azo-

kat az f_0 „extremális függvényeket", amelyek mellett ez a legjobb állandó eléretik. Szőkefalvi-Nagy Béla a [19] dolgozatban megmutatta, hogy ezek a feladatok szabatosan megoldhatók, ha a λ sorozat bizonyos monotonitási tulajdonságokkal rendelkezik. Ha például $m \geqq 0$, $\delta = 0$ és λ egy háromszorosan monoton zérus-sorozat (azaz λ zérus-sorozat és λ első, második és harmadik differencia-sorozata nem-negatív), akkor bármely $f \in K_m$ függvényhez található ilyen $T^m_{\lambda_0} f$ folytonos függvény, az $M^m_{\lambda_0}$ érték explicite felírható,

$$M^m_{\lambda_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda((2\nu+1)m)}{2\nu+1},$$

és az (eltolástól eltekintve egyetlen) extremális függvény $f_0(x) = \operatorname{sgn} \cos mx$. Hasonló állítás érvényes $\delta = 1$ mellett olyan kétszeresen monoton λ zérus-sorozatok esetén, amelyekre $\sum \lambda(k)/k < \infty$; ekkor

$$M^m_{\lambda_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda((2\nu+1)m)}{2\nu+1}.$$

Ezekből az igen általános eredményekből le lehetett vezetni H. A. Schwarz és P. Koebe harmonikus függvényekről szóló tételeinek bizonyos általánosításait, továbbá az (1)-hez tartozó egész vagy nem egész rendű integrálfüggvényekre vonatkozó egyenlőtlenségeket, amelyek tartalmazzák H. Bohr, Sz. Bernstein, J. Favard, N. I. Ahiezer és M. G. Krein egyes állításait, végül bizonyos folytonos függvények trigonometrikus polinomok útján történő approximációjával kapcsolatos következményeket, amelyek szintén a három utóbbi szerző állításainak kiterjesztései. Megjegyezzük, hogy ezeket a vizsgálatokat a legújabb időkben is gyakran idézik és fejlesztik tovább, főként szovjet matematikusok.

Szőkefalvi-Nagy Bélának a Fourier-sorok elméletébe vágó eredményeit számos ilyen irányú monográfia ismerteti. A [39] dolgozat szükséges és elegendő feltételeket ad meg arra, hogy egy a $[0, \pi]$ számközön értelmezett, csökkenő, Lebesgue-integrálható és alulról korlátos g függvény

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx \, dx$$

Fourier-együtthatóival képezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\gamma}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^\gamma}$$

sorok abszolút konvergensek legyenek. Ezek az eredmények magyar és külföldi matematikusok számos további kutatásának a kiinduló pontjává váltak (lásd pl. az „Ergebnisse der Mathematik..." sorozatban R. P. Boas „Integrability theorems for trigonometric transforms" című művét).

A Fourier-sorok elméletének központi kérdése, hogy mennyire jó az approximáció, ha egy f függvényt Fourier-sora részletösszegeivel vagy a részletösszegek valamilyen szummációs eljárás alapján választott közepeivel közelítünk. A [37] dolgozatban Szőkefalvi-Nagy Béla a szummációs módszereknek egy igen általános osztályát tárgyalja. Becslést ad a

$$\sigma_n = \sup_{\|f\|_\infty \leqq 1} \|\sigma_n(f)\|_\infty$$

„Lebesgue-féle állandókra", ahol $\sigma_n(f)$ a vizsgált módszerrel megalkotott n-edik közelítés, és a

$$\varrho_n = \sup_f \|f - \sigma_n(f)\|_\infty$$

approximációs állandókra, feltéve, hogy ϱ_n definíciójában f vagy valamelyik deriváltja eleget tesz egy 1 állandójú Hölder-feltételnek. Ezek a kutatások Fejér Lipót, Sz. Bernstein, D. Jackson, Ch. de la Vallée Poussin, Sz. M. Nyikoljszkij, Alexits György és mások eredményeihez csatlakoznak.

Tekintsük egy adott f függvénynek tetszés szerinti ortogonális rendszerre vonatkozó kifejtését. Jelölje $s_n(f)$ e kifejtés n-edik részletösszegét vagy n-edik Fejér-féle közepét. W. Rudin egyik munkájához kapcsolódva, amely a $p=2$ esettel foglalkozott, Szőkefalvi-Nagy Béla a [61] dolgozatban alsó becslést ad a

$$\sup \frac{\|f - s_n(f)\|_p}{N(f)}$$

mennyiségre; itt a felső határt egy bizonyos függvényosztály, például egy Lipschitz-féle osztály összes f elemére kell kiterjeszteni, $N(f)$ egy bizonyos, az osztályhoz tartozó funkcionál, például a legkisebb Lipschitz-állandó, végül $\|f\|_p$ a L_p-beli norma. Az adódik, hogy az összes ortonormális rendszer közül a trigonometrikus rendszer és a Haar-féle rendszer rendelkezik bizonyos értelemben a legjobb approximációs tulajdonságokkal.

c) A [25, 38, 66, 81] munkákban Szőkefalvi-Nagy Béla a geometria területére tett kitérőket. Ezek a művek is a bennük található megfontolások továbbvitelére ösztönöztek más matematikusokat [66], vagy például a szabályozáselmélet feladataival összefüggésben még több mint 30 év elteltével is időszerűek [25]. Mi itt csak a [81] dolgozat eredményeinek rövid ismertetését adjuk.

Ha G tetszés szerinti, nem üres ponthalmaz a síkban, amelynek zárt burka nem az egész sík, akkor — mint ismeretes — a G halmaz $t>0$ távolsághoz tartozó G_t külső parallelhalmazának az összes G-beli középpontú, t sugarú, zárt körlemezek egyesítését nevezik. Ha G konvex és korlátos, továbbá $A(G_t)$, ill $L(G_t)$ jelöli G_t területét és G_t határának a hosszúságát, akkor minden $t>0$ mellett érvényesek az

$$A(G_t) = A(G_0) + L(G_0)t + \pi t^2,$$

$$L(G_t) = L(G_0) + 2\pi t$$

Steiner-féle képletek. Egy síkbeli, nem üres, zárt G ponthalmazt (n, ν) típusúnak fogunk mondani $(n \geqq 0$ egész szám, $\nu = 0, 1)$, ha n számú korlátos és ν számú nem korlátos komponensből áll; a nem korlátos komponens mindig tartalmazza a ∞ pontnak egy teljes környezetét, azaz egy körlemez külsejét. Szőkefalvi-Nagy Béla a [81] dolgozatban Makai Endre vizsgálataihoz kapcsolódva megmutatja, hogy (n, ν) típusú G halmazra a

$$t \to A(G_t \setminus G_0) - \pi(n - \nu)t^2$$

függvény, alkalmas $\varrho^* > 0$ mellett, a $0 \leqq t < \varrho^*$ számközön folytonos és konkáv. Ebből következik, hogy az

$$L_\pm(G_t) = \lim_{h \to 0\pm} h^{-1} A(G_{t+h} \setminus G_t)$$

egyoldali deriváltak $0 \leqq t < \varrho^*$, ill. $0 < t < \varrho^*$ esetén léteznek, a t változónak

monoton függvényei, és fennáll $L_-(G_t) \leqq L_+(G_t)$. Azokra a t pontokra, ahol $L_+(G_t) = L_-(G_t) =: L(G_t)$ (legfeljebb megszámlálhatóan sok kivétellel minden pont ilyen), az

$$L(G_t) \leqq L(G_0) + 2\pi t \quad (t > 0)$$

becslés adódik; ezt korábban, valamivel speciálisabb tartományokra és a határhalmazok hosszúságának létezését feltételezve, Makai Endre bizonyította be más úton.

d) A [12, 13, 41] dolgozataiban Szőkefalvi-Nagy Béla belső jellemzéseit adja az L^2 függvénytérbe tartozó nem-negatív valós értékű függvények, ill. karakterisztikus (azaz csak a 0,1 értékeket felvevő) függvények halmazának. Így pl. [13]-ban a következőket bizonyítja be.

Legyen $\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{H}$ (szeparábilis) Hilbert-tér elemeinek egy halmaza. Ahhoz, hogy $\mathfrak{H}$-nak létezzék valamely L^2 térre való lineáris és izometrikus leképezése, amely a $\mathfrak{P}$ halmazt az L^2-beli nem-negatív valós értékű függvények halmazába viszi át, a következő feltételek teljesülése szükséges és elegendő:

A) $\mathfrak{H}$ egy u eleme akkor és csak akkor tartozik $\mathfrak{P}$-be, ha $\mathfrak{P}$ minden v elemére $(u, v) \geqq 0$.

B) Ha $\mathfrak{P}$ valamely elemnégyesére $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, akkor van $\mathfrak{P}$-ben olyan $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}$ elemnégyes is, amelyre $u_i = \sum_k w_{ik}$, $v_k = \sum_i w_{ik}$.

A tételben L^2 téren valamely L^2_σ teret értünk, ahol σ egy alkalmasan választott nem-negatív Borel-mérték a valós számegyenesen.

Ha az A) feltételt a következőre enyhítjük:

A′) $\mathfrak{P}$ 0-csúcsú zárt kúp $\mathfrak{H}$-ban, amely reprodukáló (azaz $\mathfrak{P} - \mathfrak{P} = \mathfrak{H}$) és normális is (azaz $\|u\| + \|v\| \leqq K\|u + v\|$ valamely K állandóra és minden $u, v \in \mathfrak{P}$ elempárra),

akkor A′) és B) teljesülte szükséges és elegendő arra, hogy $\mathfrak{H}$-nak létezzék egy „affin" (azaz mindkét irányban folytonos, lineáris, de nem szükségképpen izometrikus) leképezése egy L^2 térre, amely $\mathfrak{P}$-t az L^2-beli nem-negatív függvények halmazába viszi át [41].

e) Szőkefalvi-Nagy Béla matematikai tevékenységében központi helyet foglalnak el azok a művek, amelyek a Hilbert-tér lineáris operátorainak elméletével és ennek a matematikai analízis különböző területein való alkalmazásával foglalkoznak. Az eredmények változatossága miatt itt is néhány kiragadott példára kell szorítkoznunk. Szőkefalvi-Nagy Bélának egy ma már klasszikus és sokszor idézett tétele a [33] dolgozatban bebizonyított alábbi állítás: A $\mathfrak{H}$ Hilbert-tér S lineáris operátora, amelynek van (mindenütt értelmezett) S^{-1} inverze és amelynek összes pozitív és negatív egész kitevőjű hatványa közös korlát alatt marad, vagyis alkalmas $K\ (< \infty)$ állandóval

$$\|S^n\| \leqq K, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{3}$$

hasonló egy unitér operátorhoz, vagyis van olyan korlátos és korlátosan invertálható A operátor, hogy az

$$U = ASA^{-1}$$

operátor unitér. Analóg tétel érvényes olyan (S_t), $-\infty < t < \infty$, operátorseregekre, amelyek rendelkeznek az $S_0 = I$, $S_{t+u} = S_t S_u$ csoporttulajdonsággal és a $\|S_t\| \leqq K < \infty$ korlátossági tulajdonsággal $(-\infty < t, u < \infty)$.

Ezeket az eredményeket többen általánosították, különösen J. Dixmier és M. M. Day; ennek során az egész számok, ill. a valós számok additív csoportját helyettesí-

teni lehetett tetszőleges „amenábilis" csoporttal. Máig is nyitott kérdés azonban: érvényes-e az állítás tetszés szerinti Γ csoportra, vagyis igaz-e, hogy a $\mathfrak{H}$ téren korlátos és korlátosan invertálható lineáris operátorok bármely $(S(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ családja, amelyre

$$S(\gamma)^{-1}S(\delta) = S(\gamma^{-1}\delta), \quad \|S(\gamma)\| \leqq K \quad (\gamma, \delta\in\Gamma),$$

hasonló egy unitér operátorokból álló megfelelő családhoz.

Bizonyos mértékű kiegészítést nyert az idézett állítás a [83] dolgozatban, ahol Szőkefalvi-Nagy Béla bebizonyította, hogy egy teljesen folytonos (más szóval: kompakt) S operátor, amelyre a (3)-ban szereplő egyenlőtlenség csak nem-negatív n kitevők mellett teljesül, hasonló egy kontrakcióhoz, vagyis olyan operátorhoz, amelynek a normája nem nagyobb 1-nél. Később R. S. Foguel egy példa segítségével megmutatta, hogy tetszés szerinti S operátorra ez az állítás általában hamis.

Sajátértékek meghatározása során már Rayleigh műveiben szerepet kap a perturbációszámítás; Schrödinger óta pedig általánosan használatos például a kvantumelméletben. A következő feladatról van szó. Tekintsük $A(\varepsilon)$ operátoroknak egy családját, $|\varepsilon|<\delta$ (ε valós vagy komplex paraméter), ahol $A(\varepsilon)$ valamilyen értelemben folytonosan vagy analitikusan függ ε-tól. Tegyük fel, hogy a $A(0)$ operátornak van például egy izolált $\lambda(0)$ sajátértéke. Milyen a $A(\varepsilon)$ operátor spektruma $\lambda(0)$ környezetében, ha ε elég kicsiny? Speciálisan, ha $A(\varepsilon)$ analitikusan függ ε-tól, választhatunk-e szintén analitikus $\lambda_j(\varepsilon)$ függvényeket úgy, hogy $\lambda_j(0)=\lambda(0)$ és $A(\varepsilon)$ spektruma az $\varepsilon=0$ hely valamilyen környezetében éppen a $\lambda_j(\varepsilon)$ ($j=1, 2, \ldots$) pontokból áll? Hasonló kérdéseket lehet feltenni a spektrum más részeivel — nem csak izolált sajátértékekkel — kapcsolatban. Egy a Riesz-féle funkcionál-kalkulust és egy újszerű indukciós következtetést lényegesen felhasználó módszer kifejlesztésével Szőkefalvi-Nagy Bélának a [29, 30, 34, 50] dolgozatokban sikerült F. Rellich ide vonatkozó eredményeit élesíteni és kiterjeszteni, amennyiben egyrészt a fellépő hatványsorok konvergencia-tartományaira sokkal kedvezőbb becsléseket talált, másrészt számos állítást Banach-térbeli zárt operátorokra is általánosított.

A perturbáció-elmélet kérdésköréhez tartoznak az [52] dolgozatban közölt vizsgálatok is. Itt Szőkefalvi-Nagy Béla elsőnek bizonyította be, hogy zárt, nem szükségképp korlátos operátorok indexe tetszés szerinti kompakt perturbáció esetén stabilis. Mint ismeretes, az indexre vonatkozó ilyenfajta állítások fontos szerepet játszanak többek között a szinguláris integrálegyenletek elméletében.

A [71, 73, 80] munkákban Szőkefalvi-Nagy Béla — tanítványával, Korányi Ádámmal együtt — szoros összefüggést állapított meg egyrészt a Nevanlinna—Pick-feladat és az analitikus függvények elméletének hasonló kérdésfeltevései, másrészt a Hilbert-térbeli izometrikus vagy hermitikus operátorok általánosított rezolvensei között. Ismeretes, hogy a Nevanlinna—Pick-probléma a következőképpen hangzik: A komplex sík nyílt D egységkörlemezének S részhalmazán értelmezett f függvény kiterjesztendő az egész D-re úgy, hogy a kiterjesztés D-ben holomorf és valós része nem-negatív legyen. Ilyen kiterjesztés akkor és csak akkor létezik, ha a

$$k(s, t) = \frac{f(s)+\overline{f(t)}}{1-s\bar{t}}$$

magfüggvény az $S\times S$ halmazon pozitív definit. Az említett kapcsolat az izometrikus operátorok általánosított rezolvenseivel mármost abban áll, hogy e feltétel

mellett az f függvény előállítható az

$$f(s) = ib + \big((I+sU)(I-sU)^{-1}v, v\big) \quad (s \in S) \tag{4}$$

alakban, ahol U unitér operátor egy alkalmas $\mathfrak{H}$ Hilbert-téren, v a $\mathfrak{H}$ tér egyik eleme és b valós állandó. Nyilvánvaló, hogy (4) jobboldala f-nek egy kívánt tulajdonságú folytatását értelmezi. Ez az eljárás lehetővé teszi, hogy az idézett dolgozatokban operátor értékű f függvényekre vonatkozó analóg kérdések ugyanilyen módon tárgyalásra kerüljenek.

f) Az utóbbi 25 évben Szőkefalvi-Nagy Béla vizsgálatainak középpontjában a Hilbert-terek általános típusú (azaz nem szükségképpen önadjungált, unitér vagy normális) kontrakciói álltak. Ebben a témában — a már említett monográfián kívül, amelyet fiatalabb román kollégájával, C. Foiaş-sal együtt írt — több mint 65 dolgozatot közölt, közülük körülbelül 40-et szintén C. Foiaş-sal együtt. A matematika történetében kevés ilyen hosszan tartó és intenzív együttműködés fordult elő két tudós között, amely ráadásul ennyire részletesen kidolgozott elmélethez vezetett. Ma a kontrakciók elmélete — N. Dunford és J. T. Schwartz spektráloperátorai, valamint M. G. Krein és iskolája vizsgálatai mellett — a Hilbert-térbeli nem önadjungált operátorok elméletében a három fő fejlődési irány egyike; egyébként Szőkefalvi-Nagy és Foiaş elmélete szoros összefüggésben áll a szovjet iskola kutatásaival. Magától értetődik, hogy Szőkefalvi-Nagy és Foiaş mély és szép eredményei sok ország számos matematikusát indították az új elmélettel való foglalkozásra, úgyhogy napjainkra e tárgykörben rendkívül terjedelmes irodalom jött létre, a fejlődés vége pedig még nem látható.

E vizsgálatok fő célja Hilbert-téren értelmezett minél általánosabb T lineáris operátorok szerkezetének a tisztázása. Általában feltehető, hogy T kontrakció, azaz $\|T\| \leqq 1$, mert tetszés szerinti korlátos lineáris operátor teljesíti ezt a feltételt, ha alkalmas pozitív állandóval megszorozzuk. A kiinduló pontot Szőkefalvi-Nagy Béla egy eredménye képezte ([62], valamint [64, 68, 110 stb.] különféle további bizonyításokkal), amely szerint egy $\mathfrak{H}$ Hilbert-tér T kontrakciójának mindig van ún. unitér dilatációja, vagyis található egy bővebb $\mathfrak{K}$ Hilbert-téren értelmezett U unitér operátor úgy, hogy

$$T^{[n]}f = P_{\mathfrak{H}}U^n f, \quad f \in \mathfrak{H}, \tag{5}$$

$n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; itt $P_{\mathfrak{H}}$ a $\mathfrak{K}$ tér $\mathfrak{H}$-ra való merőleges vetítésének az operátora és

$$T^{[n]} = \begin{cases} T^n & \text{ha} \quad n = 0, 1, \ldots, \\ T^{*n} & \text{ha} \quad n = -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Ennek az általános tételnek előzménye volt egyrészt Halmos Pál eredménye (5) tulajdonságú unitér U_1 operátor létezéséről az $n=1$ esetben, azaz amelyre $Tf = P_{\mathfrak{H}}U_1 f$, $f \in \mathfrak{H}$, másrészt M. A. Naimark híres tétele fél-spektrálmértéknek egy (ortogonális) spektrálmérték vetületeként való előállításáról. Minthogy az unitér operátorok szerkezete eléggé jól ismert, az (5) összefüggés lehetőséget nyújt, hogy a T és U közötti kapcsolat tanulmányozása útján T szerkezetére vonatkozó felismerésekhez jussunk.

Az (5)-ben szereplő T és U közti kapcsolat valamelyes szemléltetése céljából álljon itt a J. J. Schäffertől származó mátrix konstrukció mint egyik lehetőség U megválasztására. A $\mathfrak{H}$ téren adott T kontrakcióhoz tekintsük a

$$\mathfrak{K} = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}_n \quad (\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

téren a

$$U = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & I & I & 0 & 0 \dots \\ \dots & 0 & D_T & -T^* & 0 \dots \\ \dots & 0 & \boxed{T} & D_{T^*} & 0 \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & I \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

mátrix* segítségével értelmezett U operátort, ahol $D_T := (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$, $D_{T^*} := (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$. Meg lehet mutatni, hogy ez az U rendelkezik az (5) tulajdonsággal. A bal felső és a jobb alsó sarokban álló mátrixok eltolási operátorokat reprezentálnak (a főátlók jobboldali kísérőjén kívül mindegyik elem zérus, a kísérőn pedig mindenütt az I azonos leképezés áll); az U mátrix lényeges része

$$\begin{pmatrix} U_{-1,0} & U_{-1,1} \\ U_{0,0} & U_{0,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_T & -T^* \\ T & D_{T^*} \end{pmatrix}.$$

Tehát az U operátor szerkezete megfelel annak a pl. a villamos hálózatok elméletében gyakran alkalmazott elvnek, hogy bizonyos rendszerekben a bemenet és a kimenet egyszerű eltolással előállítandó elő és magában a rendszerben lejátszódó folyamat egy középen elhelyezkedő „fekete dobozzal" írható le.

Az (5) összefüggésben szereplő U unitér dilatáció speciálisan választható minimálisnak is, vagyis olyannak, hogy az összes $U^n f$, $f \in \mathfrak{H}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, vektorok kifeszítsék a $\mathfrak{K}$ teret; ekkor unitér ekvivalenciától eltekintve U egyértelműen meg van határozva. Ha a T kontrakció teljesen nem-unitér, azaz $\mathfrak{H}$ nem tartalmaz olyan nem triviális alteret, amelyben T unitér operátort indukálna, kiderül, hogy akkor az U minimális unitér dilatáció spektrálmértéke a Lebesgue-mértékre nézve abszolút folytonos. Ennek következtében a funkcionál-kalkulust ki lehet terjeszteni polinomokról a H^∞ függvényosztály összes elemére, (azaz az egységkör belsejében korlátos, analitikus függvényekre), továbbá azokra az egységkörlemezen nem korlátos függvényekre is, amelyek egy $u \in H^\infty$ és egy $v \in K_T^\infty$ függvény uv^{-1} hányadosaként írhatók; itt K_T^∞ azoknak a $v \in H^\infty$ függvényeknek a halmaza, amelyekre a $v(T)$ operátornak van sűrűn értelmezett (általában nem korlátos) inverze.

Tetszés szerinti, teljesen nem-unitér T kontrakció esetén K_T^∞ többek között tartalmazza a H^∞-beli „külső" függvényeket (a Beurling-féle értelemben). Szőkefalvi-Nagynak és Foiaşnak ezek a 60-as évek elején elért eredményei lényegesen elősegítették a kontrakciók további tanulmányozását.

Ismeretes, hogy véges dimenziójú térben bármely T lineáris operátorhoz található olyan u ($\not\equiv 0$) polinom, hogy $u(T) = 0$. E tulajdonság általánosítása céljából Szőkefalvi-Nagy és Foiaş bevezeti a C_0 osztályt; C_0 azokból a teljesen nem-unitér T kontrakciókból áll, amelyekhez található olyan $\omega \in H^\infty$ ($\omega \not\equiv 0$) függvény, hogy $\omega(T) = 0$. Ekkor van ilyen tulajdonságú „minimális" m_T függvény is, pontosabban szólva olyan m_T „belső" függvény*, amelyre $m_T(T) = 0$ és amely, minden az $\omega(T) = 0$ feltételt teljesítő $\omega \in H^\infty$ függvénynek H^∞-beli osztója. A C_0 osztályhoz tartozó T operátorok érdekes tulajdonságai közül mutatóban felsoroljuk a következőket:

* A bekeretezés a 0, 0 indexű elemet jelzi.

* Belsőnek nevezzük a H^∞-be tartozó u függvényt, ha az egységkörön levő határértékeire majdnem mindenütt teljesül az $|u(e^{it})| = 1$ egyenlőség.

1. $n \to \infty$ esetén $T^n f \to 0$ és $T^{*n} f \to 0$ minden $f \in \mathfrak{H}$ elemre;

2. a $\sigma(T)$ spektrum m_T-nek az egységkör belsejében elhelyezkedő zérushelyeiből és az egységkörvonal azon pontjaiból áll, amelyeken keresztül m_T nem folytatható analitikusan az egységkör külsejébe;

3. T-nek van nem triviális invariáns altere;

4. a T és I által generált, (az erős operátor-topológiában) zárt algebra megegyezik a T operátor $(T)''$ bikommutánsával, valamint az $X = v(T)^{-1}u(T)$, $u \in H^\infty$, $v \in K_T^\infty$, alakban írható X operátorok osztályával.

5. T-nek akkor és csak akkor van ciklikus x_0 vektora (ez azt jelenti, hogy az egész $\mathfrak{H}$ tér a $T^n x_0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ elemek zárt lineáris burka), ha a T operátor $(T)'$ kommutánsa kommutatív.

Emlékeztetünk rá, hogy egy T operátor $(T)'$ kommutánsán azoknak az S operátoroknak a halmazát értjük, amelyek T-vel felcserélhetők (azaz $TS = ST$); a T operátor $(T)''$ bikommutánsa ennek megfelelően azokból az operátorokból áll, amelyek $(T)'$ mindegyik elemével felcserélhetők. A C_0 osztály 1.—5. tulajdonságai a véges dimenziójú terek operátoraira érvényes hasonló tények általánosításai. A bizonyítások azonban az általános esetben mélyek és bonyolultak.

g) Szőkefalvi-Nagy Béla és C. Foiaş elméletének egyik központi eredménye a teljesen nem-unitér kontrakciók unitér-ekvivalens modelljének megadása. E modell leírása céljából jelölje egy $\mathfrak{L}$ Hilbert-térre $L^2_{\mathfrak{L}}$ az egységkörvonalon értelmezett, $\mathfrak{L}$-beli vektor értékű, mérhető, négyzetesen integrálható normájú u függvények terét az

$$\|u\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|u(e^{it})\|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

normával. A $H^2_{\mathfrak{L}}$ Hardy-tér azokból az $u \in L^2_{\mathfrak{L}}$ függvényekből áll, amelyeknek a Fourier-sora $u(e^{it}) = \sum_{n \geqq 0} u_n e^{int}$ $(u_n \in \mathfrak{L})$ alakú. Továbbá legyen Θ a következőkben mindig az egységkör belsejében analitikus függvény, amelynek az értékei kontrakciók egy $\mathfrak{L}$ Hilbert-térből egy $\mathfrak{L}_*$ Hilbert-térbe és amelyre $\|\Theta(0)a\| < \|a\|$ valahányszor $a \in \mathfrak{L}$, $a \neq 0$. Az ilyen Θ függvényt $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_*$-kontraktív analitikus függvénynek nevezzük; ha ezenkívül a $\Theta(e^{it})$ peremértékek majdnem mindenütt izometrikus operátorok, azt mondjuk, hogy Θ belső függvény.

Az említett modellt először arra a speciális esetre adjuk meg, amikor a T kontrakció teljesíti a

$$T^{*n} h \to 0 \quad (h \in \mathfrak{H} \text{ és } n \to \infty) \tag{6}$$

feltételt. Legyen Θ $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_*$-kontraktív analitikus belső függvény. Képezzük a

$$\mathfrak{H}_0(\Theta) := H^2_{\mathfrak{L}_*} \ominus \Theta H^2_{\mathfrak{L}} \quad \left(\Theta H^2_{\mathfrak{L}} := \{\Theta(\lambda) v(\lambda) \colon v \in H^2_{\mathfrak{L}}\}\right)$$

Hilbert-teret és az

$$S_0(\Theta) u := P_{\mathfrak{H}_0(\Theta)}(\chi u) \quad \left(u \in \mathfrak{H}_0(\Theta)\right)$$

operátort, ahol $P_{\mathfrak{H}_0(\Theta)}$ az $L^2_{\mathfrak{L}_*}$ tér merőleges vetítése $\mathfrak{H}_0(\Theta)$-ra és $\chi(\lambda) = \lambda$. Ekkor a $T := S_0(\Theta)$ operátor (6) tulajdonságú kontrakció. Megfordítva, ha egy (6) tulajdonságú adott T kontrakcióhoz megalkotjuk a

$$\Theta(\lambda) := [-T + \lambda D_{T^*}(I - \lambda T^*)^{-1} D_T] \,|\, \overline{D_T \mathfrak{H}} \quad (|\lambda| < 1), \tag{7}$$

ún. karakterisztikus függvényt, amely a $\mathfrak{L} := \overline{D_T \mathfrak{H}}$ és $\mathfrak{L}_* = \overline{D_{T^*} \mathfrak{H}}$ választás mellett

mindig $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_*$-kontraktív, belső és analitikus, akkor T unitér ekvivalens az $S_0(\Theta)$ operátorral.

Az eddig tárgyalt (6) speciális esetben ezt a modellt más úton G. C. Rota, J. Rovnyak és H. Helson is megkapta, bár a Θ függvény (7)-nek megfelelő explicit alakja nélkül. A Szőkefalvi-Nagy és Foiaş által tetszés szerinti, teljesen nem-unitér T kontrakcióra adott általános modell mármost a következőképpen írható le. Tetszés szerinti $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_*$-kontraktív analitikus Θ függvény esetén képezzük a

$$\Delta(e^{it}) := [I_{\mathfrak{L}} - \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{\frac{1}{2}}$$

függvényt, és tekintsük a

$$\mathfrak{H}(\Theta) := (H^2_{\mathfrak{L}_*} \oplus \overline{\Delta L^2_{\mathfrak{L}}}) \ominus \{\Theta\omega \oplus \Delta\omega : \omega \in H^2_{\mathfrak{L}}\} \tag{8}$$

Hilbert-teret, ahol $\overline{\Delta L^2_{\mathfrak{L}}}$ a $\{\Delta(e^{it})v(e^{it}) : v \in L^2_{\mathfrak{L}}\}$ halmaz $L^2_{\mathfrak{L}}$-beli lezárása. A $\mathfrak{H}(\Theta)$ térben értelmezzük az

$$S(\Theta)(u \oplus v) := P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(\chi u \oplus \chi v) \tag{9}$$

operátort. Ekkor $S(\Theta)$ teljesen nem-unitér kontrakció. Megfordítva, adott T teljesen nem-unitér kontrakcióra a (7)-ből kapott Θ-val és a $\mathfrak{L} := \overline{D_T \mathfrak{H}}$, $\mathfrak{L}_* := \overline{D_{T^*} \mathfrak{H}}$ alterekkel (9) szerint megalkotott $S(\Theta)$ operátor unitér ekvivalens T-vel.

A kontrakciók Szőkefalvi-Nagytól és Foiaştól származó modellje és a vele szoros kapcsolatban álló karakterisztikus függvény ma fontos szerepet játszik a Hilbert-térbeli lineáris operátorok elméletében sok elméleti és gyakorlati kérdés tárgyalásánál. Segítségükkel például szükséges és elegendő feltételeket lehet találni arra, hogy egy kontrakció hasonló legyen valamilyen unitér operátorhoz. Felhasználásukkal a kontrakciók bizonyos osztályaira igazolni lehetett nem triviális invariáns altér létezését is; az ilyen alterek ugyanis nagyon szorosan összefüggnek a karakterisztikus függvény szorzatfelbontásaival. Ezen túlmenően a karakterisztikus függvényeknek lényeges alkalmazásai vannak a villamos hálózatok már említett elméletében és számos más gyakorlati kérdés kapcsán. Végül megjegyezzük, hogy szóráselméleti vizsgálatai során Lax Péter és R. S. Phillips bizonyos operátorosztályokra olyan modellt állított fel, amely alkalmas transzformáció útján kapcsolatba hozható Szőkefalvi-Nagy és Foiaş modelljének a (6) kikötés mellett érvényes formájával.

h) Hogy megfogalmazhassuk Szőkefalvi-Nagy és Foiaş egy további idevágó fontos kiterjedt eredményét, emlékeztetünk a $\mathfrak{H}$-beli T kontrakció minimális izometrikus dilatációjának a definíciójára. Ezen egy bővebb $\mathfrak{K}_+ \supset \mathfrak{H}$ Hilbert-tér olyan V izometrikus operátorát értjük, amelyre

$$T^n f = P_{\mathfrak{H}} V^n f \quad \text{ha} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{és} \quad f \in \mathfrak{H},$$

amelyre továbbá $\mathfrak{K}_+$ megegyezik a $V^n f$ $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ f \in \mathfrak{H})$ alakú elemek zárt lineáris burkával. T minimális izometrikus dilatációja mindig létezik és (unitér ekvivalencia erejéig) egyértelműen meg van határozva. A T kontrakció (8)—(9) modelljében $\mathfrak{K}_+ = H^2_{\mathfrak{L}_*} \oplus \overline{\Delta L^2_{\mathfrak{L}}}$ és $V(u \oplus v) = \chi u \oplus \chi v$.

Szőkefalvi-Nagy és Foiaş ún. „lifting" tétele most már a következőképpen hangzik [117, 118]: Ha a $\mathfrak{H}_i$ Hilbert-tér T_i kontrakciójának minimális izometrikus dilatációja a $\mathfrak{K}_i$-térbeli V_i $(i = 1, 2)$, és ha a $\mathfrak{H}_2$ teret $\mathfrak{H}_1$-be leképező valamely X operátorra $T_1 X = X T_2$, akkor található a $\mathfrak{K}_2$ teret $\mathfrak{K}_1$-be leképező Y operátor, amelyre $V_1 Y = Y V_2$, $P_1 Y(I - P_2) = 0$, $P_1 Y|_{\mathfrak{H}_2} = X$, és az is elérhető, hogy $\|Y\| = \|X\|$ legyen. Ez a tétel messzemenően általánosítja D. Sarason egyik eredményét, és sok

fontos alkalmazása van. Így pl. levezethető belőle T. Ando két felcserélhető kontrakció unitér dilatációjának létezését kimondó eredménye, felhasználták az S és T kontrakciókat tartalmazó $S^*XT=X$ operátoregyenlet tárgyalására, Hankel-mátrixokra vonatkozó szélsőérték feladatoknál, a fent bevezetett C_0-osztályú kontrakciók szerkezetének a vizsgálatánál, stb..

i) Azokon a modelleken kívül, amelyek egy adott operátorral unitér-ekvivalensek (ún. unitér-ekvivalencia modellek), érdeklődésre tartanak számot a hasonlósági vagy kvázihasonlósági modellek is. Például Szőkefalvi-Nagy Bélának az *e)* pont elején idézett eredménye a következőképpen is megfogalmazható: A (3) tulajdonságú S operátorok számára az unitér operátorok hasonlósági modellt szolgáltatnak. Mármost Szőkefalvi-Nagy és Foiaş a $\mathfrak{H}$ tér T operátorát és a $\mathfrak{H}'$ tér T' operátorát kvázihasonlónak nevezi, ha léteznek olyan (nem szükségképpen korlátosan) invertálható

$$X|\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}', \quad Y|\mathfrak{H}' \to \mathfrak{H}$$

operátorok, amelyeknek az értékkészlete sűrű és amelyekre

$$T'X = XT, \quad TY = YT'.$$

Véges dimenziójú térben a hasonlóság és a kvázihasonlóság fogalma nyilvánvalóan egybeesik.

A lineáris algebra egy ismert eredménye szerint véges dimenziójú térben minden operátor hasonló egy Jordan-féle operátorhoz, vagyis alkalmas bázist választva olyan blokkmátrixként állítható elő, amely a következő alakú (ún. Jordan-féle) blokkok direkt összege:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

Az utóbbi tíz évben Szőkefalvi-Nagynak és Foiaşnak, kontrakció-elméletük keretében, sikerült megadni egy operátorosztályt, az ún. Jordan-operátorokét, amely egyrészt általánosítja a mátrixok Jordan-féle normálalakját, másrészt a kontrakciók egy tág osztálya számára kvázihasonlósági modelleket szolgáltat. Ezek a Jordan-operátorok a következőképpen jellemezhetők. Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_k$ komplex értékű, H^∞-beli, nem-állandó belső függvények úgy, hogy a_{j+1} osztója a_j-nek H^∞-ben, $j=1, 2, \dots, k-1$. Képezzük az

$$S(a_1)\oplus S(a_2)\oplus \dots \oplus S(a_k) =: S(a_1, a_2, \dots, a_k) \tag{10}$$

ortogonális összeget, ahol az $S(a_j)$ operátorok értelmezése ugyanaz, mint az *f)* pontban volt. A (10) alakú operátorok teljesen nem-unitér kontrakciók; továbbá az $S(a_1, a_2, \dots, a_k)$ operátort röviden S-sel jelölve $a_1(S)=0$. Két ilyen operátor, $S(a_1, a_2, \dots, a_k)$ és $S(b_1, b_2, \dots, b_l)$, pontosan akkor lesz kvázihasonló, ha egybeesik, azaz $k=l$ és $a_j=b_j$, $j=1, 2, \dots, k$. Ezzel kapcsolatban Szőkefalvi-Nagy és Foiaş egyik fő eredménye a következő [124, 125]: A (10) Jordan-operátorok osztálya kvázihasonlósági modellként szolgál mindazon $T\in C_0$ (lásd *e)*) kontrakciók osztálya számára, amelyekhez létezik véges generáló elemrendszer, vagyis $v_1, v_2, \dots, v_k$ elemek $\mathfrak{H}$-ban úgy, hogy $\mathfrak{H}$ a $T^n v_j$ $(n=0, 1, 2, \dots; j=1, 2, \dots, k)$ elemek zárt lineáris burka; az itt fellépő minimális k szám megegyezik a megfelelő (10) Jordan-operátornál szereplő k indexszel.

Legújabb munkáiban Szőkefalvi-Nagy és Foiaş kiegészítette és tovább általánosította a fenti eredményt, de ennek a részleteire most nem térünk ki. Csak annyit jegyzünk meg, hogy az operátorok Jordan-modelljére irányuló vizsgálatok többek között kiinduló pontjai voltak az egységkörlemezen korlátos analitikus függvények H^∞ algebrája feletti (véges vagy végtelen) mátrixok egy újfajta, ún. kvázi-ekvivalencia elméletének, amelyet E. A. Nordgren (véges eset) és Szőkefalvi-Nagy Béla (végtelen eset) fejlesztett ki [144].

Mégegyszer hangsúlyozzuk, hogy a kérdéskör kutatása ma is teljes lendülettel folyik. Ennek a kiterjedt elméletnek számos más eredményét, különösen a legújabbakat, itt nem tudtuk ismertetni.

Ezek a szemelvények, amelyeket Szőkefalvi-Nagy Béla több mint 40 éves intenzív tudományos tevékenységének eredményei közül választottunk ki, bepillantást kívánnak nyújtani sokrétű és mélyreható vizsgálataiba. Gondolatainak hatása, a fentieken túlmenően, sok ország matematikusainak számtalan művében felfedezhető.

БЕЛА СЕКЕФАЛВИ-НАДЬ 65 ЛЕТ

Г. ЛАНГЕР

BÉLA SZŐKEFALVI-NAGY IS 65 YEARS OLD

H. LANGER

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA TUDOMÁNYOS MUNKÁINAK JEGYZÉKE

I. KÖNYVEK

1. *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, V/5), Berlin, Springer-Verlag, 1942. IV+80 lap. — Fotokópikus eljárással készült új kiadás az USA-ban, 1947. — 2. javított kiadás: Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1967. VI+81 lap.

2a. *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Riesz Frigyessel együtt), Budapest, Akadémiai Kiadó, 1. kiadás: 1952. VIII+449 lap. — 2. kiadás: 1953. VIII+455 lap. — 3. kiadás, 1955. VIII+488 lap. — 4. javított kiadás: 1965. VIII+490 lap. — 5. változatlan kiadás: 1968. (A harmadik kiadástól kezdve a párizsi Gauthier—Villars céggel közösen.)

2b. *Functional analysis* (Riesz Frigyessel együtt), New York, F. Ungar Publ. Co., 1955. XII+468 lap. (A 2a. alatti mű 1. kiadásának angol fordítása.)

2c. *Lekcii po funkcionalnomu analizu* (Riesz Frigyessel együtt), Moszkva, Külföldi Irodalmi Kiadó, 1954. 499 lap. (A 2a. alatti mű 2. kiadásának orosz fordítása.)

2d. *Vorlesungen über Funktionalanalysis* (Riesz Frigyessel együtt), Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 27., Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956. XI+482 lap. — 2. kiadás u. ott, 1968. (A 2a. alatti mű 3. kiadásának német fordítása, a függelékkel együtt.)

3a. *Prolongements des transformations linéaires de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace.* Budapest, Akadémiai Kiadó, 1955. 36 lap. (Megjelent külön füzetben és a 2a. alatti mű 3. kiadásában mint függelék.)

3b. *Extensions of linear transformations in Hilbert space which extend beyond this space.* Appendix to F. Riesz and B. Sz.-Nagy „Functional analysis", New York, F. Ungar Publ. Co., 1960. 37 lap. (A 3a. alatti mű angol fordítása.)

3c. Prodolženija operatorov v gilbertovom prostranstve s vyhodom iz etogo prostranstva, *Matematika*, 9:6 (1965), 109—144. (A 3a. mű orosz fordítása.)

4a. *Valós függvények és függvénysorok* (Egyetemi Tankönyv), Budapest, Tankönyvkiadó, 1954. 307 lap. — 2. bővített kiadás: 1961. 370 lap. — Utolsó újranyomás 1977.

4b. *Introduction to real functions and orthogonal expansions.* Budapest, Akadémiai Kiadó — New York, Oxford University Press, 1964. XI+447 lap. (A 4a. alatti mű 2. kiadásának angol fordítása.)

5. *Haar Alfréd összegyűjtött munkái — Alfred Haar Gesammelte Arbeiten*, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1959. (Sajtó alá rendezte Szőkefalvi-Nagy Béla.)

6a. *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (C. Foiaş-sal együtt), Budapest, Akadémiai Kiadó — Paris, Masson et Cie, 1967. XI+373 lap.

6b. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space* (C. Foiaş-sal együtt), Amsterdam—London, North-Holland Publ. Co. — Budapest, Akadémiai Kiadó, 1970. XIII+389 lap. (A 6a. alatti mű átdolgozott és bővített angol nyelvű kiadása.)

6c. *Garmoničeskij analiz operatorov v gilbertovom prostranstve* (C. Foiaş-sal együtt), Moszkva, Izdatel'stvo „Mir", 1970. 431 lap. (A 6a. alatti mű átdolgozott és bővített kiadásának orosz fordítása M. G. Krein előszavával.)

7. *Unitary dilations of Hilbert space operators and related topics*, Expository lectures from the CBMS regional conference held at the University of New Hampshire, June 7—11, 1971; American Math. Society (1974), VIII+54 lap.

II. DOLGOZATOK

1. Ein Verfahren zur Gewinnung von Atomformfaktoren, *Zeitschrift f. Phys.*, 91 (1934), 105—110.
2. Berechnung einiger neuen Atomfaktoren, *Zeitschrift f. Phys.*, 94 (1935), 229—230.
3. Über messbare Darstellungen Liescher Gruppen, *Math. Annalen*, 112 (1936), 286—296.
4. Sur la mesure invariante dans des groupes topologiques, *Comptes Rendus, Paris*, 202 (1936), 1248—1250.
5. Über eine Frage aus der Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Zeitschrift*, 41 (1936), 541—544.
6. Izomorf függvényrendszerekről, *Mat. Term. Tud. Értesítő*, 54 (1936), 712—735.
7. Über isomorphe vollständige Funktionensysteme, *Math. Zeitschrift*, 43 (1937), 1—16.
8. Über in sich abgeschlossene Funktionensysteme, *Math. Zeitschrift*, 43 (1937), 17—31.
9. Önmagában zárt ortogonális függvényrendszer szorzótáblázatáról, *Mat. Term. Tud. Értesítő*, 53 (1937), 574—591.
10. Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines in sich abgeschlossenen orthogonalen Funktionensystems, *Annali di Pisa*, 6 (1937), 211—224.
11. Zur Theorie der Charaktere Abelscher Gruppen, *Math. Annalen*, 114 (1937), 373—384.
12. Über die Gesamtheit der charakteristischen Funktionen im Hilbertschen Funktionenraum, *Acta Sci. Math.*, 8 (1937), 166—176.
13. On the set of positive functions in L_2, *Annals of Math.*, 39 (1938), 1—13.
14. Propriétés extrémales des séries de Fourier transformées par des suites absolument monotones, *Comptes Rendus, Paris*, 206 (1938), 808—811.
15. Sur des suites de facteurs multiplement monotones, *Comptes Rendus, Paris*, 206 (1938), 1342—1344.
16. Projektív sokszögekről és sokoldalakról, *Mat. Term. Tud. Értesítő*, 57 (1938), 105—120.
17. Egy Bohr-féle tételről, *Mat. Term. Tud. Értesítő*, 57 (1938), 121—135. (Strausz Antallal együtt.)
18. On semi-groups of selfadjoint transformations in Hilbert space, *Proceedings National Acad. USA.*, 24 (1938), 559—560.
19. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall, *Berichte Akad. Wiss. Leipzig*, 90 (1938), 103—134.
20. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. II. Nichtperiodischer Fall, *Berichte Akad. Wiss. Leipzig*, 91 (1939), 3—24.
21. Sur un problème d'extrémum pour les fonctions définies sur tout l'axe réel, *Comptes Rendus, Paris*, 208 (1939), 1865—1867.
22. Über ein geometrisches Extremalproblem, *Acta Sci. Math.*, 9 (1940), 253—257.
23. Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung, *Acta Sci. Math.*, 10 (1941), 64—74.
24. Egy Carlson-féle és néhány azzal rokon egyenlőtlenségről, *Mat. Fiz. Lapok*, 48 (1941), 162—175.
25. Sur un problème pour les polyèdres convexes dans l'espace n-dimensionnel, *Bulletin Soc. Math. de France*, 69 (1941), 3—4.
26. Függvények megközelítése Fourier-sorok számtani közepeivel, *Mat. Fiz. Lapok*, 49 (1942), 122—138.
27. Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math.*, 10 (1943), 202—204. (Riesz Frigyessel együtt.)
28. A Hilbert-féle tér normális átalakításainak félcsoportjairól, *Szent István Akadémia Értesítője*, 28 (1943), 87—96.
29. Perturbációk a Hilbert-féle térben. I, *Mat. Term. Tud. Értesítő*, 62 (1943), 63—79.

30. Perturbációk a Hilbert-féle térben. II, *Mat. Term. Tud. Értesítő*, 62 (1943), 63—79.
31. Sur les lattis linéaires de dimension finie, *Commentarii Math. Helvetici*, 17 (1944), 209—213.
32. Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen, *Acta Sci. Math.*, 11 (1946), 71—84.
33. On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math.*, 11 (1947), 152—157.
34. Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Commentarii Math. Helvetici*, 19 (1947), 347—366.
35. Vibrations d'une corde non homogène, *Bulletin Soc. Math. France*, 75 (1947), 193—208.
36. Expansion theorems of Paley—Wiener type, *Duke Math. Journal*, 14 (1947), 975—978.
37. Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier, *Hungarcia Acta Math.*, 1, no. 3 (1948), 14—52.
38. Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron, *Publicationes Math. Debrecen*, 1 (1949), 42—50. (Rédei Lászlóval együtt.)
39. Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées, *Acta Sci. Math.*, 13 (1949), 118—135.
40. Méthodes de sommation des séries de Fourier. I, *Acta Sci. Math.*, 12 B (1950), 204—210.
41. Une caractérisation affine de l'ensemble des fonctions positives dans l'espace L^2, *Acta Sci. Math.*, 12 A (1950), 228—239.
42. Riesz Frigyes tudományos munkásságának ismertetése, *Mat. Lapok*, 1 (1950), 170—181.
43. Méthodes de sommation des séries de Fourier. II, *Časopis pro pěstováni matematiky a fysiky*. 74 (1949), 210—219.
44. Méthodes de sommation des séries de Fourier. III, *Acta Sci. Math.*, 13 (1950), 247—251.
45. Über die Konvergenz von Reihen orthogonaler Polynome, *Math. Nachrichten*, 4 (1951), 50—55.
46. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 1 (1950), 183—187.
47. Szovjet eredmények a funkcionális analízis terén, *Mat. Lapok*, 2 (1951), 5—53.
48. Ortogonális polinomsorok konvergenciájáról, *Az első magyar matematikai kongresszus közleményei* (1953), 249—258).
49. Sajátértékfeladatok perturbációszámítása, *Magyar Tud. Akad. III. Osztályának Közleményei*, 1 (1951), 288—293.
50. Perturbations des transformations linéaires fermées, *Acta Sci. Math.*, 14 (1951), 123—137.
51. Eredmények az analízis területén, *Magy. Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, 2 (1952), 59—71.
52. On the stability of the index of unbounded operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 3 (1952), 49—52. (Orosz kiv.)
53. On a spectral problem of Atkinson, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 3 (1952), 61—66.
54. Magyar matematikusok hozzájárulása a spektrálelmélethez, *Magy. Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, 3 (1953), 85—100.
55—56. Pozitív polinomok, *Mat. Lapok*, 3 (1952), 140—147; 4 (1953), 13—17.
57. Über die Ungleichung von H. Bohr, *Math. Nachrichten*, 9 (1953), 255—259.
58. A moment problem for selfadjoint operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 3 (1952), 285—292.
59. Momentumprobléma önadjungált operátorokra, *Magy. Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, 4 (1954), 163—171.
60. Az 1952. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny, *Mat. Lapok*, 4 (1953), 126—155.
61. Approximation properties of orthogonal expansions, *Acta Sci. Math.*, 15 (1953), 31—37.
62. Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, 15 (1953), 87—92.
63. O sopražennyh konusah v gilbertovom prostranstve, *Uspehi Matem. Nauk.*, III., 5 (57) (1953), 167—168.
64. Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *Acta Sci. Math.*, 15 (1954), 104—114.
65. Kontrakciók és pozitív definit operátorfüggvények a Hilbert-térben, *Magy. Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, 4 (1954), 189—204.
66. Ein Satz über die Parallelverschiebung konvexer Körper, *Acta Sci. Math.*, 15 (1954), 169—177.
67. Riesz Frigyes 1880—1956, *Magy. Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, 6 (1956), 143—156.
68. Forsetzungen linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes mit Austritt aus dem Raum, *Schriftenreihe des Inst. für Math. bei der Deutchen Akad. d. Wiss. zu Berlin*, Heft 1 (1957), 289—302.
69. Remark on S. N. Roy's paper „a useful theorem in matrix theory", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 1.
70. Contributions en Hongrie à la théorie spectrale des transformations linéaires, *Czechoslovak Math. Journ.*, 6 (81) (1956), 166—176.
71. Remarks to the preceding paper of A. Korányi, *Acta Sci. Math.*, 17 (1956), 71—75.

72. Preobrazovanija gilbertova prostranstva, položiteljno opredelennye funkcii na polugruppe, *Uspehi Matem. Nauk.* 11 (1956), 173—182.
73. Relations d'un problème de Nevanlinna et Pick avèc la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien, *Acta Math. Akad. Sci. Hung.*, 7 (1957), 295—303. (Korányi Ádámmal együtt.)
74. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II, *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 1—14.
75. A Hilbert-tér normális transzformációinak gyengén konvergens sorozatairól, *Magy. Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, 7 (1957), 295—303.
76. Suites faiblement convergentes de transformations normales de l'espace hilbertien, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 8 (1957), 295—302.
77. Note on sums of almost orthogonal operators, *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 189—191.
78. Neumann János munkássága az operátorelmélet területén, *Mat. Lapok*, 8 (1957), 185—210.
79. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *Acta Sci. Math.*, 19 (1958), 26—45.
80. Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerung eines Problemkreises in der komplexen Funktionentheorie, *Acta Math.*, 100 (1958), 171—202. (Korányi Ádámmal együtt.)
81. Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereiche, *Acta Sci. Math.*, 20 (1959), 36—47.
82. Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint, *Acta Sci. Math.*, 20 (1959), 91—96. (C. Foiaş-sal együtt.)
83. Completely continuous operators with uniformly bounded iterates, *Magy. Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.*, 4 (1959), 89—92.
84. On the permutability condition of quantum mechanics, *Acta Sci. Math.*, 21 (1960), 78—89. (C. Foiaş-sal és Gehér Lászlóval együtt.)
85. Spectral sets und normal dilations of operators, *Proc. Internat. Congress of Math.*, 1958 (1960), 412—422.
86. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, 21 (1960), 251—259. (C. Foiaş-sal együtt.)
87. Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit des Herrn G. Brehmer, *Acta Sci. Math.*, 22 (1961), 112—114.
88. On Schäffer's construction of unitary dilations, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sect. Math., 3—4 (1960/61), 343—346.
89. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V, Translations bilatérales, *Acta Sci. Math.*, 23 (1962), 106—109. (C. Foiaş-sal együtt.)
90. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel, *Acta Sci. Math.*, 23 (1962), 130—167. (C. Foiaş-sal együtt.)
91. Remark to the preceding paper of J. Feldman, *Acta Sci. Math.*, 23 (1962), 272—273. (C. Foiaş-sal együtt.)
92. Hilbert Dávid, *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, 12 (1962), 203—216.
93. The „outer functions" and their role in functional calculus, *Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians* (1962), 421—425.
94. Un calcul fonctionnel pour les opérateurs linéaires de l'espace hilbertien et certaines de ses applications, *Studia Math.*, seria spec., 1 (1963), 119—127.
95. Modèles fonctionnels des contractions de l'espace de Hilbert. La fonction caractéristique, *Comptes Rendus, Paris*, 256 (1963), 3236—3238. (C. Foiaş-sal együtt.)
96. Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classifiquation des contractions de l'espace de Hilbert, *Comptes Rendus, Paris*, 256 (1963), 3413—3415. (C. Foiaş-sal együtt.)
97. Isometric flows in Hilbert space, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 60 (1964), 45—49.
98. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII, Triangulations canoniques. Fonction minimum, *Acta Sci. Math.*, 25 (1964), 12—37. (C. Foiaş-sal együtt.)
99. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII, Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels, *Acta Sci. Math.*, 25 (1964), 38—71. (C. Foiaş-sal együtt.)
100. Une caracterisation des sous-espaces invariants pour une contraction de l'espace de Hilbert, *Comptes Rendus, Paris*, Groupe 1, 258 (1964), 3426—3429. (C. Foiaş-sal együtt.)
101. Sur les contractions de l'espace de Hilbert, IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants, *Acta Sci. Math.*, 25 (1964), 283—316. (C. Foiaş-sal együtt.)
102. Un calcul fonctionnel pour les contractions, *Seminari dell'Instituto Nazionale di Alta Matematica*, 1962—63 (1964), 525—528.
103. Sur la structure des dilatations unitaires des opérateurs de l'espace de Hilbert, *Seminari dell'Istituto Nazionale di Alta Mathematica*, 1962—63 (1964), 529—554.
104. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. X, Contractions similaires à des transformations unitaires, *Acta sci. Math.*, 26 (1965), 79—92. (C. Foiaş-sal együtt.)
105. Positive definite kernels generated by operator valued analytic functions, *Acta Sci. Math.*, 26 (1965), 191—192.

106. Corrections et compléments aux contractions. IX, *Acta Sci. Math.*, 26 (1965), 193—196. (C. Foiaş-sal együtt.)
107. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. XI. Transformations unicellulaires, *Acta Sci. Math.*, 26 (1965), 301—324. (C. Foiaş-sal együtt.)
108. Quasi-similitude des opérateurs et sous-espaces invariants, *Comptes Rendus, Paris,* 261 (1965), 3938—40. (C. Foiaş-sal együtt.)
109. Décomposition spectrale des contractions presque unitaires, *Comptes Rendus, Paris,* 262 (1966), 440—442. (C. Foiaş-sal együtt.)
110. Positiv-definite, durch Operatoren erzeugte Funktionen, *Wiss. Zeutschr. d. Technichen Univ. Dresden,* 15 (1966), 219—222.
111. On certain classes of power-bounded operators in Hilbert-space, *Acta Sci. Math.*, 27 (1966), 17—25. (C. Foiaş-sal együtt.)
112. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. XII. Fonctions intérieures admettant des facteurs extérieurs, *Acta Sci. Math.*, 27 (1966), 27—33. (C. Foiaş-sal együtt.)
113. Forme triangulaire d'une contraction et factorisation de la fonction caractéristique, *Acta Sci. Math.*, 28 (1967), 201—212. (C. Foiaş-sal együtt.)
114. Echelles continues de sous-espaces invariants, *Acta Sci. Math.*, 28 (1967), 213—220. (C. Foiaş-sal együtt.)
115. Similitude des opérateurs de classe C_0 à des contractions, *Comptes Rendus, Paris,* série A, 264 (1967), 1063—1065. (C. Foiaş-sal együtt.)
116. Szovjet-magyar matematikai kapcsolatok a szegedi Acta Scientiarum Mathematicarum tükrében, *Ünnepi Acta* (Szeged, 1967), 45—57.
117. Dilatation des commutants d'opérateurs, *Comptes Rendus, Paris,* série A, 266 (1968), 493—495. (C. Foiaş-sal együtt.)
118. Commutants de certains opérateurs, *Acta Sci. Math.*, 29 (1968), 1—17. (C. Foiaş-sal együtt.)
119. Products of operators of classes C_ϱ, *Revue Roumaine de Math. Pures et Appl.*, 6 (1968), 897—899.
120. Vecteurs cycliques et quasi-affinités, *Studia Math.*, 31 (1968), 35—42. (C. Foiaş-sal együtt.)
121. Opérateurs sans multiplicité, *Acta Sci. Math.*, 30 (1969), 1—18. (C. Foiaş-sal együtt.)
122. Sur la norme des fonctions de certains opérateurs, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 20 (1969), 331—334.
123. Hilbertraum-Operatoren der Klasse C_0, *Abstract Spaces and Approximation* (Basel, 1969), 72—81.
124. Modèle de Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, 13 (1970), 91—115. (C. Foiaş-sal együtt.)
125. Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0, *Acta Sci. Math.*, 31 (1970), 287—296. (C. Foiaş-sal együtt.)
126. Matematika, *Magyar Tudomány* (1970), 269—283.
127. The "Lifting Theorem" for intertwining operators and some applications, *Indiana Univ. Math. Journal,* 20 (1971), 901—904. (C. Foiaş-sal együtt.)
128. Local characterization of operators of class C_0, *Journal of Functional Analysis,* 8 (1971), 76—81. (C. Foiaş-sal együtt.)
129. Vecteurs cycliques et commutativité des commutants, *Acta Sci. Math.*, 32 (1971), 177—183.
130. Sous-espaces invariants d'un opérateur et factorisations de sa fonctions caractéristique, *Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice, Septembre 1970.*, Vol. 2 (1971), 459—465.
131. Quasi-similarity of operators of class C_0, *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, 5. Hilbert space operators.* Tihany (1970), 513—517.
132. Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0. II, *Acta Sci. Math.*, 33 (1972). (C. Foiaş-sal együtt.)
133. Accretive operators: Corrections, *Acta Sci. Math.* 33 (1972), 117—118. (C. Foiaş-sal együtt.)
134. Echelles continues de sous-espaces invariants. II, *Acta Sci. Math.*, 33 (1972), 255—356. (C. Foiaş-sal együtt.)
135. Cyclic vectors and commutants, *Linear Operators and Approximation* (Basel, 1972), 62—67.
136. On the structure of intertwining operators, *Acta Sci. Math.* 35 (1973), 225—254. (C. Foiaş-sal együtt.)
137. Regular factorizations of contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 43 (1974), 91—92. (C. Foiaş-sal együtt.)
138. Injection of shifts into strict contractions, *Linear Operators and Approximation. II* (Basel, 1975) 29—37. (C. Foiaş-sal együtt.)
139. Jordan model for contractions of class C_0, *Acta Sci. Math.*, 36 (1974), 305—322. (C. Foiaş-sal együtt.)
140. On a property of operators of class C_0, *Acta Sci. Math.*, 36 (1974), 219—220.

141. Models of Hilbert space operators, *Proc. Royal Irish Academy*, 74, Sec. A (1974), 263—270.
142. An application of dilation theory to hyponormal operators, *Acta Sci. Math.*, 37 (1975) 155—159. (C. Foiaş-sal együtt.)
143. Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0. III, *Acta Sci. Math.*, 37 (1975), 313—322. (H. Bercovici és C. Foiaş társszerzőkkel.)
144. Diagonalization of matrices over H^∞, *Acta Sci. Math.* 38 (1976), 223—238.
145. Commutants and bicommutants of operators of class C_0, *Acta Sci. Math.*, 38 (1976), 311—315. (C. Foiaş-sal együtt.)
146. On contractions similar to isometries and Toeplitz operators, *Annales Acad. Sci. Fennicae*, Series A I, 2 (1976), 553—564, (C. Foiaş-sal együtt.)
147. Vecteurs cycliques et commutativité des commutants. II, *Acta Sci. Math.*, 39 (1977), 169—174. (C. Foiaş-sal együtt.)
148. Quasi-similarity of Hilbert-space operators, Proceedings International Conference on Differential Equations (Uppsala, 1977), 179—188.
149. On injections intertwining operators of class C_0, *Acta Sci. Math.*, 40 (1978). (C. Foiaş-sal együtt.)

AZ 1978. ÉVI ÁLLAMI DÍJJAL KITÜNTETETT RÉVÉSZ PÁL MUNKÁINAK JEGYZÉKE

1a. A Borsuk-féle feldarabolási problémához. Mat. Lapok 7 (1956) 108—111. (Heppes A.-ral közösen.)
1b. Zum Borsukschen Zerteilungsproblem. Acta Math. Acad. Sci Hung. 7 (1956) 159—162. (Heppes A.-ral közösen.)
2. A latin négyzet és az ortogonális latin négyzet-pár fogalmának egy új általánosítása és ennek felhasználása kísérletek tervezésére. MTA Mat. Kut. Int. Közl. 1. B (1956). (Heppes A.-ral közösen.)
3a. Lineáris metilszilikon átrendeződésének matematikai tárgyalása, II. MTA Mat. Kut. Int. Közl. 1. B (1956) 349—356. (Prékopa A.-sal közösen.)
3b. Über Kinetik und Gleichgewicht der Aequilibrierungsreaktion von linearen Methylpolysiloxanen, II. Zeitschrift für Phys. Chemie, 208 (1957) 33—41. (Lengyel B.-val, Prékopa A.-sal és Török F.-el közösen.)
4. On the convergence of sequence of random variables, MTA Mat. Kut. Int. Közl. 2. A (1957) 51—58.
5. On mixing sequences of random variables. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9 (1958) 389—393. (Rényi A.-dal közösen.)
6. On the limit distributions of sums of dependent random variables. Annales Univ. Sci. Bp. de R. Eötvös nom. Sect. Math. 1 (1958) 135—142.
7. A limit distribution theorem for sums of dependent random variables. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 10 (1959) 125—131.
8. A generalization of the zero-one law. Annales Univ. Sci. Bp. de R. Eötvös nom. Sect. Math. 2 (1959) 111—113.
9. Some remarks on the random ergodic theorem, I. MTA Mat. Kut. Int. Közl. 5. A (1960) 375—381.
10. Seminar on random ergodic theory, Aarhus Univ. 1961.
11. Some remarks on the random ergodic theorem II. MTA Mat. Kut. Int. Közl. 6. A (1961) 205—213.
12. Néhány megjegyzés Birkhoff 111. problémájáról. MTA III. Oszt. Közl. 11 (1961) 273—287.
13. Probabilistic solution of problem 111. of G. Birkhoff. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 13 (1962) 187—198.
14. A random ergodic theorem and its application in the theory of Markov chains. Ergod Theory (Proceedings of an International Symposium, New Orleans, 1961), Acad. Press, New York, 1963.
15. A study of sequences of equivalent events as special stable sequences. Publ. Math. 10 (1963) 319—325. (Rényi A.-dal közösen.)
16. On sequences of quasi-equivalent events, I. MTA Mat. Kut. Int. Közl. 8. A (1963) 73—83.
17. On sequences of quasi-equivalent events, II. MTA Mat. Kut. Int. Közl. 9. A (1964) 227—233.
18. A central limit theorem for equivalent random variables. Publ. Math 12 (1965) 293—302.
19. On the statistical properties of the Walsh functions. MTA Mat. Kut. Int. Közl. 9. A (1964) 543—554. (M. Wschebor-ral közösen.)
20. On the weighted averages of independent random variables. MTA Mat. Kut. Int. Közl. 9. A (1964) 583—587. (Komlós J.-sal közösen.)
21. On a problem of Steinhaus. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16 (1965) 311—318.

22. Some remarks on strongly multiplicative systems. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16 (1965) 441—446.
23. Ortogonalitás és függetlenség. MTA III. Oszt. Közl. 15 (1965) 411—425.
24. A convergence theorem of orthogonal series. Acta Sci. Math. 27 (1966) 253—260.
25. On momentum-equivalent random variables. Transactions of the Fourth Prague Conference, 1967, 471—477.
26. On a zero-one law. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie, 7 (1967) 43—47. (Bártfai P.-lal közösen.)
27. *M*-mixing systems I. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969) 431—442.
28a. A születési súly és kis súlyú újszülöttek (koraszülöttek) gyakoriságának alakulása hazánkban. Orvosi Hetilap 111 (1970) 145—151. (Czeizel E.-vel, Bognár Z.-nal és Tusnády G.-ral közösen.)
28b. Changes in the frequency of birth-weight and proportion of low weight-birth in Hungary. British Journal of Preventive and Social Medicine 24 (1970) 146—153. (Czeizel E.-vel, Bognár Z.-nal és Tusnády G.-ral közösen.)
29. Testing of empirical density function. Periodica Mathematica Hungarica 1 (1971) 35—44.
30. On empirical density function. Periodica Math. Hung. 2 (1972) 85—110.
31a. A budapesti populáció tenyér és ujj dermatoglifa mutatóinak „normal" értékei. Orvosi Hetilap 112/5 (1971). (Osztovics M.-sal, Tusnády G.-ral és Czeizel E.-vel közösen.)
31b. Dermatoglyphic Data in Sample of the Population of Budapest. Acta Paediatrica Academica Sci. Hung. 12 (1971) 183—198. (Osztovics M.-sal, Czeizel E.-vel és Tusnády G.-ral közösen.)
32. The law of the iterated logarithm for multiplicative systems. Indiana University Mathematical Journal 21 (1972) 557—564.
33. A note to a paper of S. Takahashi. Studia Sci. Math. Hung. 7 (1972) 25—26.
34. A note on the Robbins—Monro method. Studia Sci. Math. Hung. 7 (1972) 355—362.
35. A remark to a paper of Gaposhkin. Acta Sci. Math. Szeged 33 (1972) 237—241. (Komlós J.-sal közösen.)
36. A strong law of the empirical density function. Transaction of the Fifth Prague Conference, Prague 1973, 747—753.
37. On the rate of convergence of the Robbins—Monro method. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 25 (1972) 39—48. (Komlós J.-sal közösen.)
38. A new law of the iterated logarithm for multiplicative system. Acta Sci. Math. Szeged 34 (1973) 349—358.
39. Density estimation and pattern classification. Problems of Control and Information 2 (1973) 67—80. (Rejtő L.-val közösen.)
40. Rényi Alfréd valószínűségszámítási munkássága. Matematikai Lapok 21 (1970) 211—231.
41. A limit theorem for the Robbins—Monro approximation. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 27 (1973) 79—86. (Major P.-rel közösen.)
42. A general method for density estimation. Studia Sci. Math. Hung. 9 (1974) 81—92. (Földes A.-val közösen.)
43. Alfréd Rényi. Annals of Math. Stat. 43 (1972) 1—16. (Vincze I.-nal közösen.)
44. A modification of the Robbins—Monro process. Studia Sci. Math. Hung. 8 (1973) 329—340. (Komlós J.-sal közösen.)
45. Robbins—Monro procedure in a Hilbert space and its application in the theory of learning processes I. Studia Sci. Math. Hung. 8 (1973) 391—398.
46. Robbins—Monro procedure in a Hilbert space II. Studia Sci. Math. Hung. 8 (1973) 469—472.
47. A new method to prove the invariance principle of Strassen's type I. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 31 (1975) 255—259. (Csörgő M.-sal közösen.)
48. A new method to prove the invariance principle of Strassen's type II. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 31 (1975) 261—269. (Csörgő M.-sal közösen.)
49. A law of the iterated logarithm for weakly multiplicative systems and its applications. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 25 (1974) 425—433.
50. Some notes on the empirical distribution function and the quantile process. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 11. Limit theorems of probability theory, Keszthely, 1974. 59—71. (Csörgő M.-sal közösen.)
51. On the empirical process when parameters are estimated. Proc. Seventh Prague Conf. 1974, 87—97. (Csörgő M.-sal, Komlós J.-sal, Major P.-rel és Tusnády G.-ral közösen.)
52. On multivariate empirical density functions. Sankhya Ser A. 38 (1976) 212—220.
53. On strong approximations of the quantile process. Annals of Statistics 6 (1978) 882—894. (Csörgő M.-sal közösen.)
54. On strong approximation of the multidimensional empirical process. Annals of Probability 4 (1976) 729—743.
55. Strong approximation of the multivariate empirical process. Studia Sci. Math. Hung. 10 (1975) 427—434. (Csörgő M.-sal közösen.)

56a. Varga Tamás egy problémájáról. Mat. Lapok 24 (1973) 273—282. (Erdős P.-lal közösen.)
56b. On the length of the longest head-run. Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Information Theory, 16—Coll. 1975. 219—228. (Erdős P.-lal közösen.)
57. On the rate of convergence of Kesten's „acceleratd stochastic approximation". Studia Sci. Math. Hung. 9 (1974) 453—460.
58. How to apply the method of stochastic approximation in the non-parametric estimation of a regression function. Math. Operationsforsch. Stat. Ser. Statistics, 8 (1977) 119—129.
59. Three theorems on multivariate empirical process. Empirical Distributions and Processes, Oberwolfach 1976. Lecture Notes in Mathematics 566, Springer Verlag.
60. How big are the increments of a Wiener process? Annals of Probability 7 (1979) (sajtó alatt) (Csörgő M.-sal közösen.)
61. A strong law of the empirical density function. Periodica Math. Hung. 9 (1978) 317—324.
62. How big are the increments of a multiparameter Wiener process? Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 42 (1978) 1—12. (Csörgő M.-sal közösen.)
63. How small are the increments of a Wiener process? Stochastic processes and their applications 8 (1979) 119—129. (Csörgő M.-sal közösen.)
64. Néhány megjegyzés az 1976. évi Schweitzer Miklós emlékverseny valószínűségszámítási feladatához. Mat. Lapok 26 (1975) 161—178.
65. Véletlen-indexes határeloszlások erős invariancia-tételek segítségével. Mat. Lapok 26 (1975) 39—66 (Csörgő M.-sal, Csörgő S.-ral és Fischler R.-val közösen)
66. Strassen type limit points for moving averages of a Wiener process. The Canadian Journal of Statistics 6 (1978) 57—75 (Chan, A. H. C. és Csörgő M.-sal közösen)
67. On the standardized quantile process. Optimizing Methods in Statistics, Transactions (sajtó) alatt) (Csörgő M.-sal közösen)
68. Strong theorems on coin tossing. Proceedings of the world congress of mathematicians, Helsinki 1978 (sajtó alatt)
69. How big must be the increments of a Wiener process? Acta Math. Acad. Si. Hung. 33 (2979) 37—49 (Csáki E.-vel közösen)
70. On the nonparametric estimation of the regression function. Problems of Control and Information (sajtó alatt)
71. Approximations of the empirical process when parameters are estimated. Annals of Probability 7 (1979) (sajtó alatt) (Burke, M. D., Csörgő, M. és Csörgő, S.-ral közösen)
72. A generalization of Strassen's functional law of iterated logarithm. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie (sajtó alatt)
73. On the non-differentiability of the Wiener sheet (sajtó alatt) (Csörgő M.-sal közösen)
74. Multiplikatív rendszerek. Mat. Lapok (sajtó alatt) (Móricz F.-cel közösen)
75. A note to the Chung-Erdős-Sirao theorem (sajtó alatt)
76. Quadratic ...ity tests (sajtó alatt) (Csörgő M.-sal közösen)

Könyvek

1a. The laws of large numbers. Akadémiai Kiadó 1967 és Academic Press 1968.
1b. Die Gesetze der grossen Zahlen. Akadémiai Kiadó 1968 és Birkhäuser Verlag 1968.
2. Strong approximations in probability and statistics. (sajtó alatt) (Csörgő M.-sal közösen)

Tankönyvek és népszerűsítő dolgozatok

1a. A matematikai statisztika és a valószínűségszámítás elemei (a gimnáziumok szakosított matematikai osztályai részére). Tankönyvkiadó (1965).
1b. A matematikai statisztika és a valószínűségszámítás elemei. Matematika a matematikai osztályok számára c. tankönyv részlete. Tankönyvkiadó (1966) 417—485.
1c. 3. kiadás 1972.
2. A totó-lottójáték matematikai problémái. Matematikai érdekességek (Gondolat 1969) c. könyv részlete 78—90. old.
3. Matematika a sakktáblán. Matematikai érdekességek (Gondolat 1969) c. könyv részlete 17—24. o.
4. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika. Matematikai kisenciklopédia (Gondolat, 1968) c. könyv részlete 486—529. old.
5. Matematika. Mezőgazdasági Kiadó, 1972. (Matematikai Statisztika, Lineáris Algebra fejezete 1130—1258. old.).
6. Matematikai Kislexikon, Műszaki Könyvkiadó 1972. (Matematikai Statisztika címszava kb. 4 ív.)

TURÁN PÁL MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGA III.

1. A hatványösszegmódszer

HALÁSZ GÁBOR*

A hatványösszegmódszer Turán Pál legnagyobb, bátran mondhatjuk, korszakalkotó felfedezése. Kicsit a sors iróniája, hogy ő, aki mindig azt hangoztatta, hogy nem a bizonyítási ötletek, hanem az új összefüggéseket feltáró tételek viszik előre igazán a matematikát, mégis egy módszer kidolgozásával alkotta a legnagyobbat. Persze nincs ellentmondás: a módszer jelentősége elsősorban abban áll, hogy a legkülönbözőbb területeken vezetett ilyen újszerű tételekre. Mindezek a közös módszerrel együtt ma már széles körű elméletté fejlődtek. Az alapok lerakása és majd minden részletben a kezdeményezés az ő nevéhez fűződik, de már sokan mások is bekapcsolódtak a vizsgálatokba itthon és szerte a világon. (Nem kell már sajnálkoznunk, mint Rényi Alfrédnak Turán Pál 50-edik születésnapja alkalmából írt ismertetésében, arról, hogy kevés követője akadt e területen, bár még sok tennivaló maradt.)

A részletes ismertetésre kísérletet sem teszünk. Egy magyar nyelvű monográfiát ([66]) írt a témáról, ami németül ([67]) és átdolgozott formában kínaiul ([92]) is megjelent; az elmélet mai állásáról a közeljövőben megjelenő, lényegesen kibővített angol kiadás ([245]) ad hű, bár már korántsem teljes képet. Itt pusztán főbb eredményeinek elvi jelentőségét szeretnénk aláhúzni. Ami pedig irodalmi hatását illeti, arra csak halványan fogunk célozni, amikor néha első eredményeit mások által tökéletesített formájukban tárgyaljuk.

A módszer keletkezéséről

Itt is, mint annyiszor a matematikában, a számelméletből kell kiindulnunk. A prímszámelméletben, mint azt Riemann kiderítette, a

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

sorral definiált komplex változós függvénynek alapvető szerepe van. A prímekkel való kapcsolatot a számelmélet alaptételét kifejező

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots\right) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

* Köszönettel tartozom Dancs Istvánnak, Pintz Jánosnak és különösen Szalay Mihálynak sokoldalú segítségükért.

szorzatelőállítás magyarázza; (p a prímeken fut végig). E képletek $\operatorname{Re} s>1$ esetén értelmesek, de a függvény $s=1$-beli pólustól eltekintve valójában az egész síkra kiterjeszthető regulárisan. A prímek viselkedése érdekes módon a $0<\operatorname{Re} s<1$ sávban levő (végtelen sok) gyök eloszlásával van kapcsolatban. Például a máig is bebizonyítatlan Riemann-sejtés, ami szerint $\zeta(s)\neq 0$ a $\operatorname{Re} s>1/2$ félsíkban, ekvivalens a prímszámtétel hibatagjainak elképzelhető legjobb nagyságrendjével:

$$\pi(x)-\operatorname{Li} x=\sum_{p\leq x} 1-\int_2^x \frac{du}{\log u}=O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \tag{1}$$

Mármost Turán Pál ehhez, eltérően az ismert megközelítésektől, a következőképpen kezd hozzá. Vegyünk egy s_0 pontot a $\operatorname{Re} s=\sigma_0>1$ egyenesen és legyen $r(s_0)$ az s_0 körüli legnagyobb gyökmentes kör sugara; a Riemann-sejtés így ekvivalens azzal, hogy minden s_0-ra $r(s_0)\geqq\sigma_0-1/2$. Más szóval $r(s_0)$ a $\zeta'/\zeta(s)$ logaritmikus derivált s_0 körüli regularitási körének a sugara (feltéve, hogy $\operatorname{Im} s_0$ olyan nagy, hogy az $s=1$-beli pólus már nem okoz zavart). Így a konvergenciasugárra vonatkozó elemi Cauchy-féle képlet szerint

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu!}\left|\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)^{(\nu)}_{s=s_0}\right|}=\frac{1}{r(s_0)}$$

és itt a ζ-függvénynek pusztán a $\operatorname{Re} s>1$ félsíkban felvett értékei szerepelnek, amelyek az ott fennálló sor- és szorzatelőállítás segítségével kezelhetőek. Persze a felső határértéket reménytelen kiszámolni, a képletet előbb „végesíteni" kellene.

Klasszikus eredmény szerint $\zeta'/\zeta(s_0)$ jó közelítését adja a

$$\sum_{\varrho}{}' \frac{1}{s_0-\varrho}$$

kifejezés, ahol $\sum'_{\varrho}$-ban ϱ $\zeta(s)$ bizonyos véges sok, s_0 közelében fekvő gyökén fut végig. A formula differenciálható is:

$$\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)^{(\nu)}_{s=s_0}\sim\sum_{\varrho}{}'\frac{(-1)^{\nu}}{(s_0-\varrho)^{\nu+1}},$$

amivel az előbbi képlet még elemibb alakot ölt:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{\left|\sum_{j=1}^{n} z_j^{\nu}\right|}=\max_{j=1,\ldots,n}|z_j|,$$

ahol

$$z_j=\frac{1}{s_0-\varrho},\qquad \max_{j=1,\ldots,n}|z_j|=\frac{1}{r(s_0)}.$$

A kívánt végesítéshez komplex számok hatványösszegeire vonatkozó általános becslésre volna szükség. A végtelen ν-intervallumot n (= a tagok száma) hosszúságúra redukálva várható:

$$\max_{m+1\leq\nu\leq m+n}\frac{\left|\sum_{j=1}^{n} z_j^{\nu}\right|}{\left(\max_{j=1,\ldots,n}|z_j|\right)^{\nu}}\geqq C(m,n). \tag{2}$$

Ez a „triviális" ötlet vezetett a bevezetésben említett széles körű elmélethez.

Bizonyára sokakban felmerül a kérdés, hogy ebben nemcsak szerencséje volt-e Turán Pálnak, mint ahogyan ezt ő maga is több felfedezésével kapcsolatban szívesen hangoztatta, hiszen ilyen „primitív" ötlet egy laikusnak is eszébe juthatna. Biztos, hogy nem véletlenről van szó. Nagyon sok hasonló kezdeményezése volt. A meglevő megközelítésekkel nem lévén megelégedve, új utakat keresett. A probléma legelejéről indult el gyakran ilyen „primitív" észrevétellel, amiből azután komoly eredmények születtek, mégha jelentőségben el is maradnak a hatványösszegmódszer mögött. Másrészt pedig, bármilyen primitívnek is tűnhet a kiindulás, csak a probléma mély átlátása és nem utolsó sorban korábbi sikertelen analitikus számelméleti kísérletei során szerzett tapasztalat adhatta a bátorságot hozzá.

A vázolt kiindulási ötlettel egyébként még semmi sincs megoldva. Bár (2)-beli $C(m, n)$ számok létezése triviális, itt explicit becslésre, mégpedig nem is akármilyenre van szükség. Ezzel sokáig nem tudott megbírkózni. Persze, mint mindig mondani szokta, ha az ember nem tud valamit bebizonyítani, akkor bizonyítson be olyat, amit tud. Sokan teszik ezt rossz értelemben. Nézzük meg, hogyan kell ezt nála érteni!

Az 1. főtétel

(2) lényeges gyengítése, ha $\max |z_j|$ helyett $\min |z_j|$-t írunk. A kiindulási problémában ez használhatatlan volna, ekkor viszont mindjárt a

$$g(v) = \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^v$$

általánosított hatványösszegekre, ahol a b_j-k és z_j-k tetszőleges komplex számok, fennáll 1. főtételének nevezett

$$\max_{m+1 \leqq v \leqq m+n} \frac{|g(v)|}{(\min_{j=1,\ldots,n} |z_j|)^v} \geqq \left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^n |g(0)| \tag{3}$$

egyenlőtlensége; ($m \geqq 0$ tetszőleges egész szám) ([66]).

Egyszerű helyettesítéssel ez a diszkrét egyenlőtlenség a következő folytonos alakot ölti:

$$|f(0)| \leqq \left(\frac{2e(a+d)}{d}\right)^n \max_{\frac{an}{d} \leqq v \leqq \frac{an}{d}+n} \left|f\left(\frac{dv}{n}\right)\right| \leqq \left(\frac{2e(a+d)}{d}\right)^n \max_{a \leqq x \leqq a+d} |f(x)|, \quad (a, d > 0) \tag{4}$$

ahol

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j e^{\lambda_j x} \tag{5}$$

és $\operatorname{Re} \lambda_j \geqq 0$ ([66]).

Abban a fontos speciális esetben, amikor $\lambda_j = in_j$ egész n_j-kel, az egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy tetszőleges

$$P(z) = \sum_{j=1}^{n} b_j z^{n_j}$$

n tagú polinom origó körüli körön vett maximuma becsülhető kis íven vett maximummal ([66]):

$$\max_{|z|=1} |P(z)| \leqq \left(\frac{2e\pi}{\delta}\right)^n \max_{\substack{|z|=1 \\ |\arg z| \leqq \delta}} |P(z)|. \tag{6}$$

Ha n a fokszámot jelentené, akkor ez (sőt $2e\pi/\delta$ helyett a pontos konstanssal) klasszikus eredmény. Ha viszont a tagszám kicsi a fokszámhoz képest, polinomunk „hézagos", akkor ez sokkal élesebb becslés. Így jutunk el az első alkalmazáshoz.

Alkalmazás hézagos hatványsorokra

N. Wiener klasszikus egyenlőtlensége ugyanerre az esetre a következőt állítja:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta \leqq c(\delta) \int_{-\delta}^{\delta} |P(e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta$$

az $n_{j+1} - n_j > c/\delta$ hézagfeltétel mellett. Igaz, sem a tag-, sem a fokszám nem szerepel, de a hézagfeltétel, ami L_2-normás becslésnél valóban a természetes feltétel, erős megszorítás. Ez az oka annak, hogy bár komoly erőfeszítéseket tett, sohasem sikerült egyenlőtlensége segítségével teljes általánosságban bebizonyítania Fabry klasszikus hézagtételét. Márpedig Turán Pál maximum normás (6) egyenlőtlensége segítségével szép bizonyítást talált a tételre ([30]. Például Dinghas „Vorlesungen über Funktionentheorie" c. könyvében is ez a bizonyítás szerepel). A tétel maga azt állítja, hogy az

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j} \tag{7}$$

véges konvergencia-körű Taylor-sorral definiált függvénynek a konvergencia-kör a természetes határa, azon túl seholsem folytatható regulárisan, ha a sor úgynevezett Fabry-hézagos, azaz $n_j/j \to \infty$ $(j \to \infty)$.

Persze ez inkább csak a módszer próbaköve volt, de sok új eredményre is vezetett elsősorban hézagos egészfüggvények nagyságrendi viselkedésének az előző kérdéssel közvetlenül is kapcsolatos kiterjedt elméletében. Arról van szó, mint azt Pólya György klasszikus vizsgálatai kiderítették, hogy ha a (7)-beli $f(z)$ hézagos egészfüggvény, akkor origó körüli körökön lokálisan is olyan „nagy", mint globálisan. Turán Pál Kővári Tamás által élesített eredményeit felhasználva W. H. Fuchs bebizonyította például Pólya György régi híres sejtését, amely szerint

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \min\limits_{|z|=r} |f(z)|}{\log \max\limits_{|z|=r} |f(x)|} = 1,$$

ahol $f(z)$ Fabry-hézagos végesrendű egészfüggvény. (Egészfüggvény rendjén a

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log \max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{\log r}$$

véges vagy végtelen mennyiséget értjük.)

Alkalmazás kvázianalitikus függvényekre

Hasonló a helyzet a kvázianalitikus függvények elméletében, ahol függvények lokális eltűnéséből kell globális eltűnésükre következtetni. J. Hadamard klasszikus feladatában a lokális eltűnés a valós változós függvény és minden deriváltja egy pontban való eltűnését jelenti, és az a kérdés, hogy milyen simasági feltétel, azaz

a deriváltak nagyságrendjére vonatkozó milyen megszorítás vonja maga után, hogy a függvény azonosan eltűnik. A válasz az analitikusan kiterjeszthető függvények ebből a szempontból triviális osztályánál bővebb függvényosztály, innen a kvázi-analitikus elnevezés. Természetesen a deriváltak helyett más feltételekkel megadható függvényosztályok is fellépnek az analízisben. S. Mandelbrojt kezdeményezte az olyan vizsgálatokat, ahol periodikus függvények Fourier sorának hézagossága a feltétel. Turán Pál ennek tulajdonképpen a duálisát bizonyította be:

Ha

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{i\lambda_j x},$$

ahol a λ_j*-k tetszőleges valós számok,*

$$\sum_{j>\omega} |a_j| < e^{-\frac{2}{\alpha}\omega \log \omega} \tag{8}$$

és

$$|f(x)| < e^{-x^{-\alpha}} \quad (x \to +0),$$

akkor $f(x) \equiv 0$ ([29]).

A függvényosztályt tehát az együtthatók jellemzik, nincs viszont semmilyen megkötés a kitevőkre. Bár ismeretesek voltak együtthatókkal megadott függvényosztályok, hiszen például Fourier-sor esetén az Hadamard-féle feladatban szereplő simasági feltételt is át lehet fogalmazni az együtthatókra, az itteni osztály a λ_j-k tetszőleges volta miatt egészen más: hiába az együtthatók exponenciálisnál gyorsabb csökkenése, ebből még egyszeri differenciálhatóság sem következik. (8) kitevőjében ω^{β} $\beta < 1$-gyel már nem volna elég ([91]).

Alkalmazás egészfüggvények eltolásaira

N. Wiener híres elméletében, amelyre őt Tauber típusú tételek vezették, de amely a Fourier-transzformáció majd minden alkalmazásában előjön, arról van szó, hogy függvények eltoltjainak lineáris kombinációival milyen függvényeket lehet L_1 normában approximálni. Ennek a komplex síkra való kiterjesztéseként fogható fel A. O. Gelfond eredménye, aki valamely körben reguláris függvények

$$\sum_{j=1}^{n} b_j h(\tau_j z) \tag{9}$$

alakú függvényekkel való approximálhatóságát vizsgálta, ahol

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

adott egészfüggvény. Turán Pál az approximáció egyértelműségével foglalkozott. Többek között kimutatta:

Ha minden $m \geqq 0$, $m < \mu$, $\nu \leqq m+n$ *esetén*

$$\left|\frac{c_\mu}{c_\nu}\right| > A(m+n)^{-\omega}$$

alkalmas A, ω *pozitív konstansokkal, akkor* (9) *rendje nem lehet kisebb* $h(z)$ *rendjénél, feltéve, hogy* $\sum_{j=1}^{n} b_j \neq 0$, $\tau_j \neq 0$ ([66]).

(A c_k-k el nem tűnése Gelfondnál is fontos szerepet játszik és megfelel a Fourier-transzformált el nem tűnésének a Wiener-féle elméletben.)

A tétel effektív formája (9)-re explicit alsó becslést is ad és ez az, ami az approximáció egyértelműségeként, azaz az azonosan 0 függvény csak „kis" együtthatókkal való approximálhatóságaként értelmezhető.

A b_j-kre vonatkozó feltétel a $\tau_j \equiv 1$ esetben szükséges is. Ha viszont a τ_j-k mind különbözőek, akkor csak a $b_j \equiv 0$ esetet kell kizárni. Ezen utóbbi olyan hatványösszeg-egyenlőtlenség következménye, amelyben $\min_{i \neq j} |z_i - z_j|$ ismerete is fel van tételezve, kárpótlásul viszont a (3)-beli $g(0)$ helyett $\sum_{j=1}^{n} |b_j|$ áll. Ezt és sok más típusú egyenlőtlenséget alkalmazási területük viszonylagos korlátozottsága miatt nem is említettük.

Az utóbbi két alkalmazást sokan, talán éppen a témában jártas szakemberek biztosan nem találják túl szépnek. Azért említettük mégis, mert egyfajta tipikus Turán-tételek. Azt sohasem tartotta fontosnak, hogy tételei kinézésre szépnek tűnjenek, csupán azt, hogy új jelenségeket fejezzenek ki, mégha nem is illenek bele közvetlenül a megszokott vizsgálatokba. Anélkül, hogy el akarnánk túlozni jelentőségüket, (hiszen valóban nem szükségből, hanem a módszer természetes alkalmazásaként keletkeztek), meg kell jegyezni, hogy jellemző módon ezeket a vizsgálatokat valóban nem vitték tovább, pedig számos érdekes probléma adódik kézenfekvően.

Alkalmazás differenciálegyenletekre

(5) alakú függvények n-edrendű konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek megoldásai. Ilyenek általános megoldása

$$f(x) = \sum_{j=1}^{d} P_j(x) e^{\lambda_j x} \tag{10}$$

alakú, ahol a $P_j(x)$ polinomok fokszámainak összege $n-d$. Minthogy a (4) egyenlőtlenség a $\operatorname{Re} \lambda_j \geqq 0$ feltételtől eltekintve a λ_j-ktől teljesen független, triviális határátmenettel (4) ilyen $f(x)$-re is fennáll. Ez pedig, fordítva olvasva, mint eddig tettük, így azt fejezi ki, hogy az azonosan 0 megoldást az origóban kicsit megváltoztatva a megoldás minden $(a, a+d)$ intervallumban „elég sokat" változik. A differenciálegyenletek elméletének egyik központi problémájához, a megoldások stabilitásának, illetve instabilitásának kérdéséhez jutottunk. Konstans együtthatós egyenletek speciálisnak mondhatók, természetes törekvés általánosítani (10)-et. A végtelenben aszimptotikusan, konstans együtthatós differenciálegyenleteknek klasszikus elmélete van.

Mindjárt általánosabban legyen $X(t)$ a t valós változó n dimenziós vektor értékű függvénye, amely kielégíti a

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + W(X(t), t)$$

egyenletet, ahol A konstans mátrix és a folytonos $W(X, t)$ eleget tesz

$$|W(X, t)| \leqq k(t)|X|$$

alakú becslésnek; (| | itt a vektor hosszát jelöli). O. Perron tételének speciális esete azt állítja, hogy $k(t) \to 0$, $X(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$ esetén, ha $|X(0)|$ elég kicsi,

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\log |X(t)|}{t} \leqq \Lambda,$$

ahol Λ az A mátrix sajátértékeinek valós részei közül a legkisebb, és itt alkalmas megoldásra egyenlőség áll. Ha $\Lambda < 0$, akkor van 0-hoz tartó megoldás, de a 0-hoz tartás sebessége így alulról korlátozva van. Turán Pál ennek kvantitatív változatát bizonyította be ([245]).

Ha $\Delta \geqq \Delta_0$ és $k(t) < k_0$ $(t \geqq 0)$, ahol Δ_0 és k_0 Λ-tól és n-től, illetve A-tól, Δ-tól, és n-től függően explicite megadható és $\Lambda < 0$, akkor a pozitív félegyenes minden $\Delta^2 + \Delta$ hosszúságú részintervallumában van t_0, amelyre

$$|X(t_0)| \geqq |X(0)| e^{\left(1+\frac{2}{\Delta}\right)\Lambda t_0}.$$

Lényeges különbség Perronhoz képest, hogy t_0 erősen lokalizálva van, nem beszélve arról, hogy $k(t) \to 0$ helyett csak $k(t) < k_0$-ra van szükség, míg a tételben szereplő minden mennyiség explicit alakban van megadva, aminek gyakorlati szempontból van jelentősége.

Ha $\Lambda > 0$, akkor Perron tétele hasonló relációval azt állítja, hogy az azonosan 0 megoldás teljesen instabilis, azaz, ha $|X(0)| > 0$ elég kicsi, akkor $X(t)$ $(t \geqq 0)$ nem korlátos. Erre az esetre is érvényes hasonló explicit lokalizációs tétel ([82]).

Rokon probléma a megoldás oszcillatorikus viselkedése. Hatványösszeg-tételt erre először Dancs István használt. Itt vele közös, [245]-ben megjelenő eredményt idézünk.

Tegyük fel, hogy a

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

egyenletnek nincs gyöke az $|\mathrm{Im}\, z| \leqq \lambda$ sávban, továbbá, hogy $\varphi_\nu(t)$ ν-szer differenciálható és $|\varphi_\nu^{(l)}(t)| < H$ $(\nu = 0, \ldots, n-1;\ l = 0, \ldots, \nu)$ $\max |a_i|$-től, λ-tól és n-től függően megadható H-val. Ekkor az

$$y^{(n)} + [a_{n-1} + \varphi_{n-1}(t)] y^{(n-1)} + \ldots + [a_0 + \varphi_0(t)] y = 0$$

egyenlet tetszőleges $y(t) \not\equiv 0$ megoldása minden $n\pi/\lambda$ hosszúságú intervallumban jelet vált, ami pontos.

Az ehhez szükséges hatványösszetétel az 1. főtétel „egyoldalú" változata; erről később lesz szó.

Alkalmazás egészfüggvények értékeloszlására

(5) alakú függvények értékeloszlása is több vonatkozásban felmerült. Itt R. Tijdeman eredményét említjük.

Az (5) alatti függvénynek, amit most komplex változós függvénynek tekintünk, minden R sugarú körben legfeljebb $\frac{10}{3}(MR+n)$ gyöke van, ahol $M = \max |\lambda_j|$.

Az első ilyen tétel Turán Páltól származik, azzal a különbséggel, hogy nála $\min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|$ is szerepel a becslésben, mert a korábban már szóba került, $\min_{i \neq j} |z_i - z_j|$-et tartalmazó hatványösszegtételét használta. Tijdeman vette észre, hogy maga az 1. főtétel is használható. A lényeg az az újszerű momentum, hogy a becslés a kör középpontjától teljesen független. Mind az ilyen függvényekre vonatkozó korábbi, nem explicit becslésekben, mind az általános értékeloszláselméletben az origó rögzítése lényeges, (amit mindig ezen elméletek fogyatékosságának tartott).

Itt is felmerül a kérdés, hogy milyen általánosabb differenciálegyenlet megoldására érvényes hasonló állítás. Ha az együtthatók egészfüggvények, akkor a megoldás is és H. Wittich bizonyította be Turán Pálnak azt a merész sejtését, hogy ez nem általánosítható: Ha a megoldásnak akárcsak minden egységsugarú körben korlátos sok gyöke (vagy akármilyen fix értéke) van, akkor az egyenlet együtthatói konstansok. Az a meglepő jelenség áll tehát elő, hogy differenciálegyenletet értékeloszlással lehet karakterizálni.

Ezen utóbbi vizsgálatokra Turán Pált valószínűleg egy, a Riemann-sejtéssel kapcsolatos probléma indította, de véletlenül más számelméleti haszna lett: Tijdeman, idézett becslésének felhasználásával, kiegészítette Gelfond bizonyos transzcendens számokra vonatkozó érdekes vizsgálatait, amelyek éppen ilyen becslés híján korábban csak feltételes eredményeket adtak.

Az 1. főtétel ismertetésének befejezéseképpen kell néhány szót szólnunk a bizonyításról. Egy lineáris azonosságon múlik, amely a (3)-ban fellépő $g(v)$ $(m+1 \leqq v \leqq m+n)$ értékekből kiszámítja $g(0)$-t; az együtthatók polinomok segítségével jól becsülhető alakban adhatók meg. A tétel bizonyítása tehát elemi algebrainak mondható, láttuk pedig, hogy alkalmazása az analízisben van. Erre a körülményre sok dolgozatában és előadásában felhívta a figyelmet. Részben Weierstrass nyomán úgy képzelte, hogy a függvénytan, ami tulajdonképpen végtelen hatványsorok elmélete, véges hatványsorok, polinomok elméletéből levezethető; erre az 1. főtétel szép példával szolgál. A tételek mögött rejlő elvi kérdések általában is sokat foglalkoztatták, sokat filozofált róluk. De a „filozofáló matematikus" nem tévesztendő össze a „beszélő matematikussal". Ezt sem azért találta ki, hogy többet lehessen beszélni módszeréről: az 1. főtétel (algebrai vagy analitikus) jellegének tisztázása biztosan új és javított alkalmazásokhoz fog vezetni.

A 2. főtétel

Még mielőtt erre rátérnénk, a (2) egyenlőtlenség egy másik speciális esetét is megemlítjük, mégpedig amikor $m=0$. Az ő, majd Erdős Pál első eredményei után Atkinson bizonyította be szép sejtését, miszerint

$$\max_{1 \leqq v \leqq n} \frac{\left| \sum_{j=1}^{n} z_j^v \right|}{\left(\max_{j=1,\ldots,n} |z_j| \right)^v} \geqq c > 0$$

univerzális c konstanssal (például $c=1/3$ vehető). $\max |z_j|$ helyett itt is $\min |z_j|$-t írva, ezt még Turán Pál bizonyította be a pontos $c=1$-gyel. Ez volt az első hatványösszegbecslés. A sok hasonló, természetesen adódó érdekes extrémumfeladattal kevesebbet foglalkozott, mert mindig az alkalmazások lebegtek szeme előtt. Az előzmények után nem lepődünk meg azon, hogy ennek az esetnek is fontos alkalmazását találta.

Alkalmazás a numerikus analízisben

A Graffe—Lobacsevszkij-módszer

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

polinom (komplex) gyökeinek abszolút értékei közül a legnagyobb közelítő meghatározására szolgál és azon alapul, hogy az

$$f_{k+1}(z) = f_k(\sqrt{z}) f_k(-\sqrt{z}), \quad f_0(z) = f(z)$$

rekurzióval nyert

$$f_k(z) = z^n + a_{n-1}^{(k)} z^{n-1} + \ldots + a_0^{(k)}$$

polinom gyökei az eredeti gyökök 2^k-adik hatványai. Ha azokat z_j-vel jelöljük, akkor például

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2^k]{|a_{n-1}^{(k)}|} \lim_{k\to\infty} \sqrt[2^k]{\left|\sum_{j=1}^{n} z_j^{2^k}\right|} = \max_{j=1,\ldots,n} |z_j|$$

feltéve, hogy csak egy legnagyobb abszolút értékű gyök van. A bevezetésben is lényegében ugyanezzel az elemi képlettel találkoztunk.

A módszer egyik hátránya, hogy nem ismeretes általános eljárás annak eldöntésére, hogy valóban csak egy legnagyobb gyök van-e, és ha igen, akkor mennyivel nagyobb a többinél, amitől a hibabecslés függ. A nehézség nem pontosan ugyanaz, mint ami a bevezetésbeli határérték relációval kapcsolatban felmerült, de az itt említett explicit hatványösszeg-becslés segítségével ez is kiküszöbölhető; (ezt korábban más úton már A. Ostrowski is kiküszöbölte). Itt nem is erről, hanem egy továbbfejlesztett változatról szólunk.

Adott n-hez és ε-hoz készíthető olyan, pusztán az alapműveleteket és pozitív számból vont gyökvonást tartalmazó algoritmus, ami tetszőleges, együtthatóival megadott n-edfokú polinom valamelyik gyökét legfeljebb ε relatív hibával előállítja (azaz olyan w számot szolgáltat, amelyre $|w-z_j|<\varepsilon|z_j|$ *valamilyen j-vel) és ami a lényeg: az elvégzendő műveletek száma csak n-től és ε-tól függ (explicite kiszámítható formában), az együtthatóktól egyáltalán nem* ([178]).

A tétel érdekes elméleti vonatkozása, hogy a klasszikus Ruffini—Abel-tétel szerint ilyen eljárás gyök pontos meghatározására, (tehát amikor $\varepsilon=0$), $n\geqq 5$ esetén nem létezik. Gyakorlati oldala pedig az, hogy általános magasfokú egyenletek numerikus megoldása nyitott kérdés. Kétségtelen, hogy ezen utóbbit tartotta fontosabbnak és az alkalmazott matematika lenézésével nem vádolható: Ő, aki annyi kezdeményező munkájában megelégedett egy első eredménnyel, amit azután mások vittek teljességre, ezt egyik kedvenc témájának tartotta, többször visszatért rá javítva az eljárást és átvive más, a gyakorlatban felmerülő problémára. Azt azonban meg kell mondani, hogy módszere mai alakjában a számítástechnika mai fejlettségi szintjén gyakorlati számításokra elsősorban kerekítési és túlcsordulási problémák miatt egyelőre nem alkalmas. De olyan irányban, a polinomtól való függetlenség irányában hozott elvileg újat, amely irányban a numerikus analízis ezt igényli is, és ennek a gépi lehetőségek és az általa indított vizsgálatok tovább fejlesztésével minden bizonnyal gyakorlati haszna is lenne.

Visszatérve a kiindulásra, nem véletlen, hogy (2) sokkal nehezebb feladatnak bizonyult: (3) típusú becslés nem is érvényes $\min |z_j|$ helyett $\max |z_j|$-vel. A most tárgyalt $m=0$ esettel összehasonlítva pedig, mint azt Erdős Pál észrevette, már az

$m=1$ eset merőben új: az Atkinson-féle abszolút konstanssal szemben c^n-nél ($c<1$) több nem mondható. Végül azonban sok segédlépésen keresztül, interpolációelméleti és komplex függvénytani segédeszközökkel sikerült bebizonyítania a következő egyenlőtlenséget (a konstans itteni értékére l. [116]):

$$\max_{m+1\leqq\nu\leqq m+n}\left|\sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\nu}\right| \geqq \left(\frac{n}{8e(m+n)}\right)^n \min_{l=1,\ldots,n}\left|\sum_{j=1}^{l} b_j\right|,$$

ahol $1=|z_1|\geqq|z_2|\geqq\ldots\geqq|z_n|$.

Az 1. főtételhez képest kellemetlen b_j-függés sokszor nehézséget okoz, a fontos $b_j\equiv 1$ esetben azonban közömbös.

Alkalmazás az analitikus számelméletben

Ez a tétel megindította az analitikus számelméleti alkalmazások sorát. Előre figyelmeztetni kell a témában járatlan olvasót: a Riemann-sejtést nem bizonyította be, még csak meg sem közelítette. Eredményei sokszor, de nem mindig, elvi jelentőségű összefüggéseket tárnak fel, vagy pedig a probléma szempontjából természetes, de bebizonyítatlan hipotéziseket használnak fel. Olyan területen azonban, mint a ζ és rokon függvények elmélete, ami még nagyon messze van a teljes tisztázástól, ilyen tételeknek komoly jelentőségük lehet.

A bevezetésben vázolt út a következő tételhez vezetett.

Tegyük fel, hogy pozitív a, b, c számokkal egy elég nagy t-re érvényes a

$$\left|\sum_{N<n\leqq N'} \Lambda(n)e^{-it\log n}\right| < \frac{N\log^c N}{|t|^b} \tag{11}$$

becslés, hacsak $|t|^a<N<N'\leqq 2N$. Ekkor ugyanazzal a t-vel $\zeta(\sigma+it)\neq 0$ $\sigma>1-c'b^3/a^2$ esetén, ahol c' abszolút konstans ([31]).

Ha ilyen becslés minden t-re fennáll, akkor tehát megadható $\operatorname{Re} s>\vartheta$ ($\vartheta<1$) nem triviális gyökmentes félsík, sőt ilyen becslés ekvivalens is ezzel a kvázi Riemann-sejtésnek nevezhető, egyelőre ugyancsak bizonyítatlan állítással.

Exponenciális összegek becslésére vannak hatékony módszerek, sajnos a szükséges erősségű becslést nem adják ki. $\log n$-et a kitevőben $\log^{\gamma} n$-nal helyettesítve, ahol $1/2<\gamma<2$ kivéve éppen $\gamma=1$-et, meglepő módon Vinogradov módszerével még $b=1/2$ is elérhető ([34]). A fenti tétel mintájára ilyen összegeket is kapcsolatba hozott a ζ-függvény gyökeivel; ugyanehhez a következményhez azonban éppen $b>1/2$-re volna szükség ([66]).

A sikertelenség láttán felmerül a kétség az egész tétel értelmét illetően, hiszen a feltétel $\Lambda(n)$-en keresztül prímszámokról szól és ebből következtet a tétel a kvázi Riemann-sejtésre, ami ugyancsak prímszámokra vonatkozó, (1)-nél gyengébb becsléssel ekvivalens. Közvetlen út a gyökök megkerülésével mégsem ismeretes, és mint a módszer más, nemcsak elvi kérdésekre való sikeres alkalmazása sejtetni fogja, a feltételben szereplő exponenciális összegek már nem függnek olyan mélyen a prímszámoktól, hogy további információ nékülözhető lenne, bár persze a dolgot igazán senki sem érti.

A tétel egyik élesítésében a becslés csak $|t|^a<N<|t|^d$-re van feltéve ([187]), tehát adott magasságú gyök csak bizonyos intervallumba eső prímektől függ. Ez az

első lépés Landau kérdésének irányában, aki a

$$\sum_{n<x} \Lambda(n) = x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0)$$

(ϱ a ζ-függvény összes gyökén fut végig) pontos formulából kiindulva feltételezte, hogy bizonyos prímek bizonyos gyökökkel függnek össze, esetleg aritmetikailag is.

Másik élesítés, legalábbis feltéve az ugyancsak bebizonyítatlan, a Riemann-sejtésnél gyengébb úgynevezett Lindelöf-sejtést, miszerint

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(|t|^{\varepsilon})$$

minden pozitív ε-ra, pontosan megadja azon félsíkok felső határát, amelybe $\zeta(s)$-nek véges sok gyöke esik, éspedig ez a $\operatorname{Re} s > 1 - \sup b/a$-félsík, ahol a szuprémumot olyan (a, b) párokra kell kiterjeszteni, amelyekre fennáll a (11) becslés ([66]). A tétel a ζ-függvény sorelőállításához hasonló, ún. Dirichlet-sorokkal definiált függvények általános osztályára is kiterjeszthető, ami így érdekesen illik bele a Dirichlet-sorok általános elméletébe, ahol az együtthatók különböző formulái ismeretesek a sorok más, nevezetes félsíkjainak (abszolút, egyenletes, feltételes konvergencia-félsík) meghatározására.

Közelebb áll a mai tudásunkhoz, ha nem gyökmentes félsíkokat, hanem a $\operatorname{Re} s = 1$ egyeneshez simuló tartományokat keresünk. Egyelőre csak

$$\sigma > 1 - \frac{c(\gamma)}{\log^{\gamma}(|t|+2)} \quad (s = \sigma + it)$$

alakú tartomány gyökmentessége ismeretes, s (γ legjobb értéke $2/3+\varepsilon$). Ebből a prímszámtétel hibatagjára klasszikus úton

$$\pi(x) - \operatorname{Li} x = O(xe^{-\log^{\alpha} x})$$

következik $\alpha < 1/(1+\gamma)$-val. Bár, mint említettük, a megfelelő kérdés félsíkokra régen elintézett volt, semmilyen módszer nem állt korábban rendelkezésre annak eldöntésére, hogy valóban ez-e a legtöbb, ami nyerhető. A hatványösszegmódszer ezt is megnyugtatóan tisztázta: Ha α_0 a fenti α-k felső határa, γ_0 a γ-k alsó határa, akkor $\alpha_0 = 1/(1+\gamma_0)$ ([50]).

Kiterjedt elméletet alkotnak az ún. sűrűségi tételek. $N(\sigma, T)$-nek, a $\operatorname{Re} s \geqq \sigma$, $|\operatorname{Im} s| \leqq T$ téglalapra eső gyökök számának becsléséről van szó $\sigma > 1/2$ esetén. A probléma a Riemann-sejtés bátortalan megközelítéseként indult, de mint Hoheisel, majd utána sokan mások felfedezték, a számelmélet számos kérdésében sikerrel alkalmazható. Nevezetes a „sűrűségi hipotézis":

$$N(\sigma, T) = O(T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}) \tag{12}$$

minden rögzített $\sigma \geqq 1/2$-re, amiből például következik, hogy minden elég távoli $(x, x+x^{1/2+\varepsilon})$ intervallum tartalmaz prímszámot. Ennél több lényegében a sokkal erősebb Riemann-sejtésből sem következne.

A hatványösszegmódszer itt még hatékonyabban működik, hiszen míg gyökmentesség igazolásához (11) típusú becslés kell minden t-re, a gyökök számának vizsgálatához nyilván csak „majdnem minden" t-re. Ez pedig sokkal könnyebb feladat és a $\Lambda(n)$ együtthatók természetétől függetlenül elvégezhető.

Ingham korábban levezette a sűrűségi hipotézist a már említett Lindelöf-sejtésből; sejtés nélkül (12) csak 2-nél nagyobb konstanssal volt ismeretes. Turán Pál a Lindelöf-sejtést sokkal gyengébbel helyettesítette ([94]) és minden feltevés nélkül megmutatta, hogy a sűrűségi hipotézis fennáll $\sigma \to 1-0$ esetén aszimptotikus értelemben ([54]). Később Halász Gáborral közösen megmutatták, hogy bizonyos $(\sigma_0, 1)$ intervallumban $(\sigma_0 < 1)$ ténylegesen is fennáll, másfelől pedig, hogy a Lindelöf-sejtésből még $N(\sigma, T) = O(T^{\varepsilon})$ is következik $\sigma > 3/4$ esetén ([181]).

Ezen utóbbit sejtésként már egyik első ilyen dolgozatában kimondta $\sigma > 1/2$-re ([77]), ami $1/2 < \sigma \leqq 3/4$-re még nincs eldöntve. Akkor, Ingham eredményének fényében, nyilván senki sem hitte el neki. Most pedig, bár igaza legalábbis részben bebizonyosodott, mégis egyre kevesebbet említik a nevét az újabb rekordokat felállítók: módszerét ugyanis mással helyettesítették, ami elvileg ugyan nem, de numerikusan (például σ_0-t illetően) jobb eredményt ad. Azt azonban senki sem tagadhatja, hogy mindabban, ami az utóbbi időben a témában történt, ő a kezdeményező. Az új módszer is úgy született, hogy miután a hatványösszegmódszer rámutatott arra, hogy a ζ-függvény milyen tulajdonságai játszanak itt szerepet, ugyanezeket próbálta H. Montgomery, sikerrel, a klasszikus módszerekkel felhasználni. Annak, hogy a módszer nem ad jó numerikus eredményeket, a 2. főtételbeli $8e$ konstans az oka, ami, mint Makai Endre megmutatta, $4e$ alá nem vihető. De könnyen elképzelhető, hogy az itt szükséges $b_j \equiv 1$ esetben $(1+\varepsilon)$-nal helyettesíthető, vagy esetleg másfajta hatványösszegtételre volna szükség, mindenesetre a hatványösszeg-módszer a sűrűségi elméletben sem mondta még ki biztosan az utolsó szót.

A 3. főtétel

A hatványösszeg-egyenlőtlenség ismertetését későbbre halasztjuk, most folytatjuk a számelméleti alkalmazások sorát.

Alkalmazás az összehasonlító prímszámelméletben

Ezt a nevet adta annak az elméletnek, amely a prímszámok mod k redukált maradékosztályokban való eloszlásának egyenetlenségeit vizsgálja, szemben a számtani sorozatokra vonatkozó prímszámtétellel és az ahhoz kapcsolódó irányzattal, ami azt juttatja kifejezésre, hogy ezen maradékosztályok mindegyikébe körülbelül „ugyanannyi" prím esik.

20 dolgozatot írt erről fiatalon elhunyt lengyel munkatársával, S. Knapowskival közösen. A nála szokatlanul nagy számot az indokolja, hogy egységes elméletről korábban nem lehetett beszélni. Néhány jelenség ugyan a legegyszerűbb formában $k=4$ esetén régen ismert volt, de a hatványösszeg-módszer érdeme, hogy ezekből általános, új jelenségekkel kiegészített, bár korántsem lezárt elmélet fejlődött.

Ami az összes prím számára a ζ-függvény, az a mod k vett maradékosztályok prímjei számára a $\varphi(k)$ számú

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

ún. Dirichlet-féle L-függvény. ($\chi(n)$ karakter mod k, azaz a $\chi(n) = 0$ $((n, k) > 1)$, $\chi(1) = 1$, $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$, $\chi(n+k) = \chi(n)$ feltételeknek eleget tevő számelméleti függvény.) Közös feltevés a most következő eredményekben, hogy ezen függvények

egyike sem tűnik el $0 \leqq s \leqq 1$-re, abban a pontosabb formában, hogy ismerünk olyan $D = D(k)$ értéket, amellyel $L(s, \chi) \neq 0$ $0 \leqq \mathrm{Re}\, s \leqq 1$, $|\mathrm{Im}\, s| \leqq D$ esetén. Ez néhány k-ra ellenőrzött tény, bár nem ismeretes például, hogy végtelen sok ilyen k van.

Tipikus eredményük a következő.

Legyen

$$\psi(x, k, l) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l (\mathrm{mod}\, k)}} \Lambda(n)$$

Ekkor a $\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$ $(l_1 \not\equiv l_2 \,(\mathrm{mod}\, k))$ *függvények mindegyike jelet vált az* $[\omega, \exp(2\sqrt{\omega})]$ *intervallumban, hacsak*

$$\omega \geqq \max\left(e^{k^c}, e^{\left(\frac{2}{D}\right)^3}\right),$$

ahol c *numerikusan kiszámítható univerzális konstans* ([140]).

Az analitikus számelméletben járatlan olvasó ebből talán csak azt olvassa ki, hogy végtelen sok jelváltás van, amihez a hatványösszeg-módszer egyébként nélkülözhető lenne. Az a többlet, hogy a kimutatott jelváltások viszonylag szűk intervallumra vannak korlátozva, nem igényel külön magyarázatot. Nem megvetendő körülmény azonban az sem, hogy a becslések numerikus formában vannak megadva. Ez a probléma, az effektivitás problémája sok nehézséget okoz a számelméletben és ez alól az összehasonlító prímszámelmélet sem kivétel. Lehet nagyon jó becslésünk egy bizonyos „küszöbértéktől" kezdve, de gyakran, bármilyen meglepően is hangzik, semmilyen mód nem látszik annak kiszámítására, ami így minden konkrét esetben hasznavehetetlen. A k-tól való függés is régi, fontos probléma és Linnik nevezetes tételének továbbfejlesztése irányába mutat. (A tétel pusztán a mod k vett maradékosztályok legkisebb prímjére ad k^c alakú becslést. Ennek előkészítésében egyébként Turán Pálnak még módszere megalkotása előtt komoly szerepe volt, később pedig a hatványösszeg-módszer segítségével a rendkívül bonyolult bizonyítást ő, majd Knapowski együttesen egy áttekinthetővel helyettesítették; erre itt nem térünk ki.) Ami pedig pozitív gyök hiányát illeti, az könnyen kimutathatóan valóban a dolog természetéhez tartozik, és minden korábbi és későbbi tételben szerepel. Hogy azonban a becslések csak D-től függnek, a gyökök finomabb eloszlásától nem, ezt a hatványösszeg-módszeren kívül más módszer mind a mai napig nem tudta kimutatni. Ezután a további tételek minőségi leírására szorítkozunk, de ugyanezek a momentumok mindegyikre jellemzőek.

$\psi(x, k, l)$ prímszámhatványokat is tartalmaz. Az érdekesebb

$$\pi(x, k, l) = \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv l (\mathrm{mod}\, k)}} 1\text{-gyel} \quad ((l, k) = 1)$$

helyettesítve a probléma sokkal mélyebb és nem teljesen elintézett. Érdekes módon a helyzet l kvadratikus természetétől függ, ami azzal magyarázható, hogy a $\psi(x, k, l)$ függvényben — ez természetesebben lép fel analitikus bizonyításban — aszerint fordulnak elő prímek négyzetei, amelyek itt nem elhanyagolható adalékot adnak, hogy l kvadratikus maradék vagy sem. Ez teszi érthetővé, hogy abban az esetben tudtak $\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)$-re (lokalizált) jelváltásokat garantálni, amikor l_1 és l_2 egyszerre kvadratikus maradék, illetve nem-maradék, (legalábbis a gyökökre tett további, a Riemann-sejtéshez hasonló feltevéssel [138].) Ebben az esetben nemcsak

jelváltások, hanem „nagy" pozitív és negatív értékek is biztosíthatók. Ha viszont $l_1=1$, akkor mégis meg tudtak szabadulni l_2 kvadratikus természetétől ([132], [133]). A mondottak szerint itt nagy pozitív érték kimutatása a legnehezebb eset l_2 kvadratikus nem-maradék mellett, ami a nyert lokalizáció gyengeségében is megmutatkozik.

A bizonyítási módszerek hibájából származik ez a nehézség, vagy pedig abból, hogy kvadratikus maradékosztályok valóban szegényebbek prímekben? Csebisev szerint az utóbbi áll fenn $k=4$ $l_1=1$, $l_2=3$ esetén abban az értelemben, hogy

$$\sum_{p>2} (-1)^{\frac{p-1}{2}} e^{-px} \to -\infty \quad (x \to +0).$$

Hardy és Littlewood, illetve Landau megmutatták: ez azzal ekvivalens, hogy $L(s, \chi)\neq 0$ a $\operatorname{Re} s>1/2$ félsíkban, ($\chi \bmod 4$ nem-főkarakter), ami egyelőre nincs kizárva. A jelenség általánosítása ismét nehézségekbe ütközött. Az $\exp(-px)$ súlyokat célszerűbbel helyettesítve azt találták, hogy rögzített l kvadratikus nem-maradékra

$$\sum_{p\equiv 1 (\bmod k)} \log p e^{-a\log^2(px)} - \sum_{p\equiv l (\bmod k)} \log p e^{-a\log^2(px)} \to -\infty \quad (x \to +0)$$

akkor és csak akkor, ha $L(s, \chi)\neq 0$ $\operatorname{Re} s>1/2$ és $\chi(l)\neq 1$ esetén ([148]). Az általános helyzet csak néhány modulusra tisztázott, ahol egyforma kvadratikus természetű maradékosztályokat összehasonlítva végtelen sok jelváltás lép fel, míg különbözőeknél a végtelenhez tartás hasonló gyökmentességgel ekvivalens ([141]).

Rokon probléma $\pi(x, k, l)$ összehasonlítása a prímszámtételbeli főtagjával. Itt a $k=1$ esetre szorítkozunk. Riemann azt állította, hogy $\pi(x)<\operatorname{Li} x$; ezt prímszámtáblák már akkor 10^6-ig igazolták. Littlewood azonban kimutatta, hogy $\pi(x)-\operatorname{Li} x$ végtelen sokszor jelet vált, de csak sokkal később sikerült Skewes-nak numerikus felső korlátot adni az első jelváltásra, ami az effektivitásról korábban mondottak egyik klasszikus példája. Knapowski vette észre, hogy erre a hatványösszeg-módszer is alkalmas, sőt az x-nél kisebb jelváltások számára is nyert effektív alsó becslést. A becsléseket közös cikkeikben ([227], [231]) javították, míg nemrégen Pintz János effektív alsó becslésként $c\sqrt{\log x}/\log\log x$-et nyert, nem-effektív becslésként pedig $c\log x/(\log\log x)^3$-t, ami legalábbis abban az értelemben, hogy milyen nagy intervallumban garantálható jelváltás, (minden jelváltásszámbecslés ezen alapul), nagyon közel van a várható pontoshoz.

Ezen tételek bizonyítása olyan „egyoldalú" egyenlőtlenségeken alapul, amelyek nemcsak nagy abszolút értékű hatványösszegek létezését biztosítják, hanem nagy pozitív és nagy negatív valós részűét is, (bár érdekes módon egyes „egyoldalú" tételekhez mégis elegendő a „kétoldalú" 2. főtétel). A 2. főtételben ez még nem állítható, és ismét sok év kísérletezései kellettek, amíg megtalálta a megfelelő kiegészítő feltételt. Itt csak egyik alakját idézzük:

$$\max_{m+1\leq v\leq m+\frac{20n}{\varkappa}} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^v \geqq \left(\frac{n}{8e\left(m+\frac{20n}{\varkappa}\right)}\right)^{2n} \min_{l=1,\ldots,n} \left|\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{l} b_j\right|,$$

ahol

$$1 = |z_1| \geqq \ldots \geqq |z_n|$$

és

$$0 < \varkappa < |\arg z_j| \leqq \pi$$

és ugyanez ($-b_j$*-vel alkalmazva) nagy negatív értékekre* ([123]).

A $\min |z_j|$-vel való normálást használó 1. főtételnek megfelelő alak egy differenciálegyenletekre való alkalmazásáról korábban szóltunk.

A hatványösszegeknek a bevezetésben motivált fellépésére utalva nagyon durván azt lehet mondani, hogy az összehasonlító prímszámelméletben $1/(s_0-\varrho)$-k hatványai szerepelnek, ahol $s_0>1$ és ϱ az L-függvények $0<\mathrm{Re}\, s<1$ sávba eső gyökeit jelöli, (bár ezekben az előrehaladott alkalmazásokban már nehéz felfedezni azt az egyszerű kiindulási ötletet). A 3. főtételben az argumentumra tett feltevés így éppen pozitív gyök létét zárja ki, ami, mint említettük, a dolog természetéhez tartozik. Szinte csodálatos, hogy ez az általános módszer mennyire illik a speciális ζ- és L-függvényekhez. Ezt tulajdonképpen már a 2. főtétellel kapcsolatban is megjegyezhettük volna: Ott a becslés jósága van a ζ-függvény gyökeinek sűrűségével tökéletes összhangban, és a gyökök szolgáltatják az egyetlen ismert példát a becslés bizonyos értelemben való nem-javíthatóságára. Persze azzal lehet ezt indokolni, hogy a ζ- és L-függvények nem is olyan speciálisak, mint amilyennek kinéznek. Mindenesetre manapság, amikor speciális tulajdonságaikról olyan keveset tudunk, az egyik fő feladat általános tulajdonságaik mélyebb megértése és tökéletesebb kiaknázása. Ebben Turán Pálnak és módszerének elévülhetetlen érdeme van.

МЕТОД СТЕПЕННЫ СУММ

Г. ХАЛАС

THE POWER SUM METHOD

G. HALÁSZ

TURÁN PÁL EGYES EREDMÉNYEI AZ ANALÍZIS TÉMAKÖRÉBŐL

ALPÁR LÁSZLÓ

TURÁN PÁL szerteágazó matematikai munkásságának vannak jól körülhatárolható fejezetei mint az analitikus számelmélet, approximációelmélet, gráfelmélet stb. Egy-egy ilyen tárgykörrel számos dolgozata foglalkozik, amelyek több közös szempont szerint összefüggő egészként ismertethetők. Ezek mellett írt azonban olyan dolgozatokat is, amelyek tartalmáról csak mint különálló eredményekről lehet számot adni. Erre teszünk kísérletet az alábbiakban az analízis tárgykörébe vágó munkáival kapcsolatban, amelyeket a következőképpen csoportosítottunk: 1. Szummációs problémák és trigonometrikus összegek. 2. Hatványsorok. 3. Polinomok és racionális függvények.

TURÁN PÁL itt ismertetésre kerülő dolgozatainak jegyzékét e cikk végén közöljük, azok számozása a teljes dolgozatjegyzékre vonatkozik.

1. Szummációs problémák és trigonometrikus összegek

A Fourier- és hatványsorok Cesàro-közepeinek vizsgálatával [5] és [15] dolgozata foglalkozik.

Jelölje nem-negatív, egész n és k esetén $S_n^{(k)}$ a $\sum \mu_\nu$ sor k-adrendű n-ik Cesàro-közepét. Amidőn az

$$f(x) \sim a_0+(a_1 \cos x+b_1 \sin x)+(a_2 \cos 2x+b_2 \sin 2x)+\dots$$

valós Fourier-sorról van szó, akkor $\mu_\nu=a_\nu \cos \nu x+b_\nu \sin \nu x$ és $S_n^{(k)}=S_n^{(k)}(x)$; amikor pedig

$$f(z) = a_0+a_1 z+a_2 z^2+\dots \tag{1.1}$$

a $|z|<1$ körben reguláris függvény, akkor $\mu_\nu=a_\nu z^\nu$ és $S_n^{(k)}=S_n^{(k)}(z)$.

Ha m, ill. M az $f(x)$ alsó, ill. felső határa $[0, 2\pi]$-ben, akkor FEJÉR ismert eredménye szerint

$$m \leqq S_n^{(1)}(x) \leqq M.$$

Ezt a [15]-ben Turán így általánosítja:

Legyen

$$m_n^{(k)} = \min_{0 \leqq x \leqq 2\pi} S_n^{(k)}(x), \quad M_n^{(k)} = \max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} S_n^{(k)}(x),$$

akkor minden $k \geqq 1$ esetén

$$m \leqq m_n^{(k)} \leqq m_n^{(k+1)} \leqq M_n^{(k+1)} \leqq M_n^{(k)} \leqq M.$$

Ennek az eredményének közvetlen folyománya az alábbi, ugyancsak a [15]-ben igazolt állítás:

Legyen az egységkör $f(z)$ által létesített képének legkisebb konvex burka $\mathcal{K}$, míg jelölje $\mathcal{K}_n^{(k)}$ azt a megfelelő konvex burkot, amely az $S_n^{(k)}(z)$ leképezésnél lép fel. Akkor minden n és $k \geqq 1$ esetén

$$\mathcal{K}_n^{(k+1)} \subset \mathcal{K}_n^{(k)} \subset \mathcal{K}.$$

Rögzített n mellett $\mathcal{K}_n^{(k)}$ az a_0 pontra zsugorodik, amidőn $k \to \infty$.

Ez utóbbi jelenséggel analóg az, hogy $S_n^{(k)}(x) \to a_0$, amikor $k \to \infty$.

Különösen érdekesen viselkednek az $S_n^{(k)}(x)$ közepek, ha $f(x)$ a sinus Fourier-sorok ún. **K** osztályához tartozik, amikor is

$$f(x) \sim 0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots,$$

továbbá $f(x) \geqq 0$, és felülről konvex, ha $0 < x < \pi$.

KOSCHMIEDER bizonyította be, hogy ha $f \in \mathbf{K}$, akkor $S_n^{(0)}(x) > 0$ $(0 < x < \pi;\ n \geqq 1)$, és FEJÉR mutatta meg, hogy ekkor $0 < S_n^{(k)}(x) \leqq f(x)$ $(k \geqq 1;\ n \geqq 1;\ 0 < x < \pi)$. TURÁN viszont azt az általánosabb eredményt találta [5], hogy ha $f \in \mathbf{K}$, úgy

$$f(x) \geqq S_n^{(1)}(x) > S_n^{(2)}(x) > \ldots > 0 \quad (0 < x < \pi), \tag{1.2}$$

ami úgy értelmezhető, hogy az elsőrendű Cesàro-közepek konvergálnak leggyorsabban az ez esetben mindig létező $\lim_{h \to \infty} \frac{1}{2}[f(x+h) + f(x-h)]$ határértékhez.

[15]-ben TURÁN ismét visszatér a kérdéshez és bebizonyítja, hogy ha $f \in \mathbf{K}$, akkor

$$S_{n+1}^{(k)}(x) \geqq S_n^{(k)}(x) \quad (n \geqq 0;\ k \geqq 2,\ 0 < x < \pi). \tag{1.3}$$

Vagyis elsőnél magasabbrendű Cesàro-közepek nem csökkenően konvergálnak a $(0, \pi)$ szakaszon. Sőt az

$$S_n^{(k)}(x) \geqq S_1^{(k)}(x) = \frac{b_1 \sin x}{k+1} \geqq 0 \quad (n \geqq 1;\ k \geqq 2;\ 0 < x < \pi) \tag{1.4}$$

egyenlőtlenség is fennáll, hiszen $b_1 \geqq 0$. Az (1.2)- és (1.4)-ből következik, hogy

$$S_n^{(1)}(x) \geqq S_n^{(2)}(x) \geqq \frac{1}{3} b_1 \sin x.$$

További érdekes eredményeket talált a **K** egyik alosztályára, $\mathbf{K}_p$-re nézve, amelyhez az

$$f(x) \sim 0 + b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + b_5 \sin 5x + \ldots,$$

típusú Fourier-sorok tartoznak. Ekkor (1.3) már a $k = 1$ esetben is érvényes, és KOSCHMIEDER eredménye is javítható, amennyiben így már $S_n^{(0)}(x) \geqq \frac{2}{3} b_1 \sin x$ $(n \geqq 1;\ 0 < x < \pi)$. Ez az eredmény tiszta páratlan cosinus sorokra is átvihető a $0 < x < \pi/2$ szakaszon, ha $f \in \mathbf{K}$.

Ezt követően a [15] a hatványsorok elsőrendű Cesàro-közepeinek monoton konvergenciájával foglalkozik. FEJÉR „monoton konvergens"-nek nevez egy komplex $\{\mu_\nu\}$ sorozatot, ha $\mu_\nu \to \mu$, $\nu \to \infty$, és

$$|\mu - \mu_\nu| \geqq |\mu - \mu_{\nu+1}|.$$

TURÁN a sorozatot „szigorú értelemben monoton"-nak nevezi, ha $\mu_\nu \to \mu$ és a $\{\mathrm{Re}\,\mu_\nu\}$, valamint az $\{\mathrm{Im}\,\mu_\nu\}$ sorozatok közönséges értelemben monotonok.

FEJÉR mutatta meg, hogy ha az (1.1) hatványsor együtthatói nem negatívak és teljesen monotonok (valamennyi differencia sorozatuk nem negatív, akkor a hatványsor részletösszegei $|z|<1$-ben monoton konvergensek. Később FEJÉR és SZEGŐ bebizonyították, hogy ez már akkor is bekövetkezik, ha az együttható sorozat kétszeresen monoton, azaz

$$\text{(a) } a_n \geqq 0, \quad \text{(b) } a_n - a_{n+1} \geqq 0, \quad \text{(c) } a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqq 0.$$

FEJÉR szerint már (a) és (b) biztosítják, hogy a részletösszegek a $|z|<1/2$ körben monoton konvergáljanak.

Az elsőrendű Cesàro-közepek monoton konvergenciájára TURÁN talált összefüggéseket. Megmutatta, hogy *bármely* az (1.1) alatti, a $|z|<1$ körben konvergens hatványsor, amelyben $a_0=0$, $a_1=1$, elsőrendű Cesàro-közepei monoton konvergensek egy $|z|=\varrho=\varrho(C)$ körben, ahol $C=\max_n |a_n|^{1/n}$. Ha még azt is feltesszük, hogy $|f(z)|\leqq 1$, amidőn $|z|\leqq 1$, azaz $|a_n|\leqq 1$, akkor nyilván van egy univerzális $|z|<\alpha$ kör, amelyen belül az elsőrendű Cesàro-közepek monoton konvergálnak.

A fenti módon normált hatványsorok elsőrendű Cesàro-közepei a monoton konvergencia szempontjából is jóval kedvezőbben viselkednek, mint a közönséges részletösszegek. Ennek másik illusztrálására TURÁN olyan hatványsorra ad példát, amelynek részletösszegei nem monoton konvergensek a $|z|<r$ körben, bármilyen kis pozitív számot jelentsen is r.

Továbbá igazolta, hogy ha

$$f(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots \quad (a_n \text{ valós}),$$

akkor az előbbi eredmények úgy élesíthetők, hogy az elsőrendű Cesàro-közepek szigorú értelemben monoton konvergensek egy $|z|<\varrho_1=\varrho_1(C_1)$ körben, ahol $C_1=\max_{n\geqq 3} |a_n|^{1/n}$, és ha még $|f(z)|\leqq 1$, amidőn $|z|\leqq 1$, akkor van egy univerzális $|z|<\beta$ kör, amelyben ugyanez teljesül.

Ezek az eredmények mutatják a szerzőnek a Bloch-tétel iránti érdeklődését, amelyre már korábban, GRÜNWALD GÉZÁval együtt, [12]-ben új bizonyítást adott.

Ehhez a problémakörhöz csatlakozik [17] dolgozata is, amelyben a **K** osztályhoz tartozó Fourier-sorok részletösszegeire ad majoránst. KOSCHMIEDER és FEJÉR tételei szerint ekkor $S_n^{(0)}(x)>0$ és $S_n^{(k)}(x)\leqq f(x)$ $(k>0;\ 0<x<\pi)$. Az $S_n^{(0)}(x)<f(x)$ egyenlőtlenség azonban általában nem igaz. TURÁN megmutatja, hogy ha $f\in\mathbf{K}$, akkor

$$S_n^{(0)}(x) \leqq 2f(x), \tag{1.5}$$

ahol a 2-es tényező már nem javítható.

Az (1.5) egyenlőtlenséget FEJÉR hatványsorokra nyert tételéhez hasonlítja, amely szerint, ha az (1.1) sor együtthatói háromszorosan monoton sorozatot alkotnak, akkor $|S_n^{(0)}(z)|\leqq 2|f(z)|$. Itt és az (1.5)-ben nem $|f|$ maximuma majorálja a részletösszeget, hanem a megfelelő helyen vett abszolút érték, ill. függvényérték kétszerese.

A [17]-ben kidolgozott részeredményeket használja fel Turán a [62]-ben. FEJÉR 1910-ben mondta ki azt a sejtését, hogy

$$S_n(x) = \sum_{\nu\leqq n} \frac{\sin \nu x}{\nu} > 0, \quad \text{ha} \quad n \geqq 1;\ 0 < x < \pi.$$

Ezt többen bebizonyították, maga FEJÉR is, a [17]-ben TURÁN adott rá új bizonyítást. A fenti összefüggést [62]-ben a következőképpen általánosítja.

I. Ha $b_1, \ldots, b_n$ olyan valós számok, hogy $0<x<\pi$-ben

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 3x + \ldots + b_n \sin (2n-1)x \geqq 0,$$

akkor ugyanazzal az n-nel, $0<x<\pi$-re

$$g(x) \equiv \frac{b_1}{1} \sin x + \frac{b_2}{2} \sin 2x + \ldots + \frac{b_n}{n} \sin nx > 0.$$

II. Ha az a_ν számok valósak, és $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = 0$, továbbá

$$A(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos \nu x \geqq 0, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2\pi,$$

akkor

$$B(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1}(a_0 + a_1 + \ldots + a_{\nu-1}) \sin \nu x > 0, \quad \text{ha} \quad 0 < x < \pi.$$

[35] munkája azt is tanúsítja, hogy erősen érdekelték a negatív jellegű eredmények, amelyek azt hozták felszínre, hogy bizonyos pozitív állítások milyen határok között érvényesek.

Legyen $f(x) \in L^p[0, 2\pi]$ $(p>1)$,

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \tag{1.6}$$

és $S_n^{(0)}(x) = S_n^{(0)}(x; f)$. Ismeretes, hogy ha x_0 az $f(x)$ folytonossági pontja, és k tetszőlegesen nagy pozitív szám, akkor az (1.6) Fourier-sor az $x=x_0$ pontban a k exponenssel erősen szummálható az $f(x_0)$ értékhez, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu \leqq n} |S_\nu^{(0)}(x_0; f) - f(x_0)|^k = 0. \tag{1.7}$$

GRÜNWALD GÉZA vetette fel azt a kérdést, hogy vajon a k kitevő nem helyettesíthető-e egy olyan $k(n)$ sorozattal, amely tetszőleges lassan tart a végtelenhez. TURÁN *tagadó választ* ad e kérdésre, megmutatja, hogy előre adott $k(n)$ sorozathoz mindig szerkeszthető egy mindenütt folytonos $f(x)$ függvény úgy, hogy megfelelő x_0-ra a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu \leqq n} |S_\nu^{(0)}(x_0; f) - f(x_0)|^{k(n)} = 0 \tag{1.8}$$

reláció ne álljon fenn.

Az eljárás — mint erre rámutat — úgy módosítható, hogy (1.8) egy adott megszámlálható halmazon se teljesüljön. Ez nem zárja azonban ki azt, hogy (1.8) majdnem minden más pontban érvényes, ami feltétlenül bekövetkezik az (1.7) értelemben, ha k állandó és $p>1$. Az, hogy (1.8) teljesül-e majdnem mindenütt, akár egy mindenhol folytonos $f(x)$ esetében is, nem eldöntött kérdés.

2. Hatványsorok

TURÁN az analízis kérdéseit tárgyaló számos művében felhasználta és vizsgálta a hatványsorok elméletét. Az alábbiakban ezért azokkal a különálló [32], [37], [69], [103], [113], [120], [134], [172] dolgozataival foglalkozunk, amelyek a hatványsorok egyes problémáit tanulmányozták.

[32]-ben olyan hatványsorokat tekint, amelyek $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ együttható-sorozata valós és k szorosan monoton, azaz

$$c_n - \binom{\nu}{1} c_{n+1} + \ldots + (-1)^{\nu} \binom{\nu}{\nu} c_{n+\nu} \geqq 0 \quad \nu = 0, 1, \ldots, k; \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Ha ezenfelül $c_n \to 0$, $n \to \infty$, akkor a hatványsor az M_k osztályba tartozik. Ezek a hatványsorok nyilván konvergensek, ha $-1 < x < 1$.

FEJÉR bebizonyította, hogy a $-1 < x < 1$ szakaszon $f(x) > 0$, ha $f(x) \in M_1$, és $f(x)$ monoton, ha $f(x) \in M_2$. Általában $f^{(j)}(x) > 0$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, ha $f(x) \in M_k$ és $-1 < x < 1$. Az $f \in M_1$ függvényekről még azt is megmutatta, hogy azok monotonok, ha $-1/2 < x \leqq 1$, de nem feltétlenül azok, a teljes $-1 \leqq x \leqq 1$ szakaszon. Így jutott a következő kérdéshez. Létezik-e olyan $f \in M_1$ függvény, amelynek $(-1, 1)$-ben végtelen sok szélsőértéke van?

TURÁN egy példa szerkesztésével pozitív választ adott FEJÉR kérdésére, valamint SIDONnak egy, a FEJÉR sejtését általánosító problémájára is, mely így fogalmazható:

Legyen $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$, valós α_ν együtthatókkal, konvergens, ha $-1 < x < 1$, és tegyük fel még, hogy *bármely* egyszeresen monoton, nullához tartó

$$\beta_0 \geqq \beta_1 \geqq \ldots \geqq \beta_n \geqq \ldots \to 0 \tag{2.1}$$

sorozattal komponálva a

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \alpha_\nu x^\nu \tag{2.2}$$

hatványsor nem vált jelet valamilyen

$$1 > x \geqq x_0 = x_0(\beta_0, \beta_1, \ldots)$$

intervallumon vagy általánosabban: egyoldalúan korlátos ezen a szakaszon, akkor az

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \tag{2.3}$$

részletösszegek sorozata is egyoldalúan korlátos.

SIDON fenti állításának bizonyításából adódott, hogy van olyan $f \in M_1$, amelynek végtelen sok szélsőértéke van az $x = -1$ pont közelében. Mint megjegyzi, hasonló módszerrel igazolható, hogy van olyan $f \in M_k$ $(k \geqq 1)$ függvény, amelyre

$$\overline{\lim_{x \to -1+0}} f^{(k)}(x) = +\infty, \qquad \underline{\lim_{x \to -1+0}} f^{(k)}(x) = -\infty.$$

[32] fő célja, hogy SIDON sejtésének inverzét bizonyítsa be. Megmutatja: Ahhoz, hogy a (2.2)-vel meghatározott $g(x)$ egyoldalúan korlátos legyen az $x = +1$ pont valamilyen bal oldali környezetében, bármely a (2.1)-el értelmezett $\{\beta_\nu\}$ sorozat esetében, szükséges és elegendő, hogy a (2.3)-mal definiált $\{s_n\}$ sorozat egyoldalúan korlátos legyen.

[37]-ben új bizonyítást ad egy Carleman-típusú tételre. CARLEMAN 1918-ban igazolta, hogy létezik olyan folytonos $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ függvény, hogy bármilyen kis $\varepsilon > 0$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon}) = +\infty$, bár a Parseval-formula értelmében $\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < +\infty$. TURÁN egy konkrét $F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^\nu$ függvényt szerkeszt, amely reguláris, ha $|z| < 1$ folytonos, ha $|z| \leqq 1$, de $\sum_{\nu=0}^{\infty} |A_\nu|^{2-\varepsilon} = +\infty$ bármilyen kis pozitív értéket vegyen is fel ε. TURÁN megjegyzése: SZÁSZ OTTÓ már 1920-ban példát adott ilyen hatványsorra.

A [69] inkább didaktikai jelentőségű munka, különböző szummációs eljárásokra hívja fel a figyelmet. Ennek az írásnak különös jelentőséget kölcsönöz az a körülmény, hogy tájékoztatást nyújt TURÁN bizonyos gondolatainak fejlődéséről, ami végül is a nagy fontosságúnak bizonyult [103] dolgozat megírásához vezetett.

[103] a következő problémát vizsgálja: Legyen D a nyílt, $\bar{D}$ a zárt egységkör, ∂D pedig ennek határa. Jelöljön továbbá $\zeta \in D$ tetszőleges komplex állandót, és legyen

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

a D-ben analitikus függvény, amely D-t egy A tartományra képezi le. Akkor az

$$f_1\left(e^{i\gamma} \frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right) = f_2(z) \quad (\gamma \text{ valós állandó}) \tag{2.4}$$

kapcsolattal értelmezett függvény szintén analitikus D-ben, és azt az A-ra képezi le, hiszen az $e^{i\gamma}(z-\zeta)/(1-\bar{\zeta}z)$ függvény $\bar{D}$-nek önmagára való egyrétű leképezését valósítja meg; ha $\zeta = 0$, akkor egyszerű rotációról, ha pedig $\zeta = \gamma = 0$, akkor az identikus leképezésről van szó. Tehát az összes függvények, amelyeket a (2.4) alakú összefüggés köt össze, egy osztályba sorolhatók, azt lehet mondani, hogy „függvénytanilag ekvivalensek".

$f_2(z)$-t ekkor szintén előállítja D-ben a nulla pont körül kifejtett hatványsora:

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n = b_n(\zeta, \gamma).$$

Kérdés, hogy $f_1(z)$ és $f_2(z)$ „sorelméletileg is ekvivalensek"-e? Ez a következőket jelenti. A $\zeta = 0$ eset nyilván érdektelen, azaz legyen $0 < |\zeta| < 1$, és az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $\gamma = 0$. Legyen ezután z' és z'' két egymásnak megfelelő pont, abban az értelemben, hogy $z' = (z''-\zeta)/(1-\bar{\zeta}z'')$, és kikötjük, hogy $|z'| < 1$, vagyis $|z''| < 1$. Így, az analicitás miatt,

$$f_1(z') = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z'^\nu = f_2(z'') = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z''^n. \tag{2.5}$$

A ∂D körvonalon azonban módosulhat a helyzet. Legyen most $|z_1| = 1$, $z_1 = (z_2-\zeta)/(1-\bar{\zeta}z_2)$, azaz $|z_2| = 1$. Tegyük fel ezenfelül, hogy $f_1(z_1)$ még értelmezett azáltal, hogy a $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_1^\nu$ sor konvergens. Ekkor (2.5)-ből mindenképpen következik,

hogy

$$f_1(z_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_1^\nu = f_2(z_2),$$

de külön vizsgálatot igényel annak eldöntése, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_2^n$ sor konvergens-e vagy sem. TURÁN, aki a kérdés felvetéséhez már [69]-ben eljutott, először azt hitte, hogy a válasz egyértelműen igenlő (ezt [69]-ben és [103] lábjegyzetében meg is írja). Csak négy év múltával bizonyította be, hogy nem ez a helyzet:

Adott ζ $(0<|\zeta|<1)$ állandóhoz mindig található olyan a D-ben analitikus $f_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ függvény, amelyre a $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_1^\nu$ sor konvergens, ahol $z_1 \in \partial D$, és ha az $f_1\left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right)=f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ helyettesítéssel élünk, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_2^n$ sor divergens, ahol $z_1=(z_2-\zeta)/(1-\bar{\zeta}z_2)$, $z_2 \in \partial D$.

Ez az eredmény röviden még így is kifejezhető: Hatványsorok kerületi lokális konvergenciája nem konform invariáns.

Ez igen váratlan jelenség. A $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_1^\nu$ sor konvergenciájából ui. az következik, hogy $a_\nu \to 0$ $(\nu \to \infty)$. Ekkor azonban RIEMANN tétele szerint a konvergencia lokális tulajdonság. Viszont $f_2(z)$ értékei a z_2 pont környezetében — eltekintve egy „analitikus", tehát „szelíd átrendeződéstől" — majdnem ugyanazok, mint $f_1(z)$ értékei a z_1 pont környezetében (l. (2.5)), ezért azt várnók, hogy ez a transzformáció a kerületi konvergenciát nem szünteti meg. A kimondott tétel tartalma tehát az, hogy a kerületi lokális konvergencia igen finom tulajdonság, amelyet még a konform transzformáció is elronthat.

Még azt is igazolja, hogy a $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_1^\nu$ sor konvergenciájából következik a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ sor Abel-szummabilitása a z_2 pontban.

[103]-ban néhány más kérdést is felvet. Így pl. kérdezi: mi a helyzet, ha a $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_1^\nu$ sor $(C, 1)$-szummábilis, vagy ha $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$.

[103] jelentős érdeklődést váltott ki. Jellemző, hogy a problémakörrel kapcsolatban — tudomásunk szerint — TURÁNT is beleszámítva 14 szerző bizonyított be új eredményeket, amelyek 52 dolgozatban jelentek meg. Megvizsgálták a (C, k)- és $|C, k|$- $(k \geqq 0)$ szummabilitás, a kerületi abszolút és egyenletes konvergencia kérdéseit stb. Az eredményeket kiterjesztették Faber- és Fourier-sorokra is. A témakör több nyitott kérdése máig is megválaszolatlan.

A most említett munkák közé tartozik [172] is, amelyben CLUNIE eredményét felhasználva, TURÁN megmutatja, hogy létezik olyan, mindenütt folytonos, 2π-szerint periodikus $g(x)$ függvény, és ehhez egy $[-\pi, \pi]$-ben szigorúan monoton növő $x=h(t)$ függvény, amely a $t=0$ valamilyen környezetében analitikus, $h(-\pi)=-\pi$, $h(0)=0$, $h(\pi)=\pi$ úgy, hogy $g(x)$ Fourier-sora konvergens $x=0$-ban, míg $g[h(t)]$ Fourier-sora divergens, amikor $t=0$.

A [113] szintén olyan kérdést taglal, amely annak igazolására törekszik, hogy bizonyos eredmény már nem javítható. LITTLEWOOD egyik eredménye szerint, ha az

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

sor Abel-szummabilis a $z=1$ pontban, és $c_n=O(n^{-1})$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sor konvergens közönséges értelemben is. Ez TAUBER ismert tételének jelentékeny élesítése. LITTLEWOOD eredményéből az is következik, hogy ha $f(z)$ az $|z|\leqq 1$ körben még folytonos is, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ sor egyenletesen konvergens, ha $|z|=1$. TURÁN kérdése már most az, hogy a $c_n=O(n^{-1})$ feltétel enyhíthető-e, ha a többi kikötése különben változatlan marad. Bebizonyítja az alábbi állítást, ami mutatja, hogy LITTLEWOOD eredménye ebben a vonatkozásban nem javítható.

Legyen $\omega(n)$ pozitív, monoton növekvő, tetszőleges lassan $+\infty$-hez tartó sorozat, akkor van olyan

$$F_\omega(z) = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

hatványsor, amelynek összegfüggvénye, $F(z)$ analitikus, ha $|z|<1$, folytonos, ha $|z|\leqq 1$, együtthatói kielégítik az

$$|A_n| \leqq \frac{\omega(n)}{n}$$

feltételt, és ennek ellenére a $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ sor divergens.

Ez az eredmény és a bizonyítás módszere felhasználást nyert egyes hézagos hatvány- és Fourier-sorok vizsgálatában.

A [120] munka bizonyos végtelen rendű egész függvények értékeinek eloszlását tanulmányozza, amihez a függvény hatványsora bizonyult megfelelő eszköznek. PICARD vezette be az egész függvények kivételes értékeinek fogalmát, megmutatva, hogy egész függvény — esetleg egy kivételtől eltekintve — minden komplex értéket felvesz. BOREL ismerte fel másrészt, hogy véges rendű egész függvények esetében más típusú kivételes értékek is definiálhatók.

Legyen az $f(z)$ egész függvény rendje $\varrho<\infty$, b tetszőleges komplex szám, és jelölje az $f(z)=b$ egyenlet gyökeit, multiplicitással véve, $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$, amelyek konvergencia exponense legyen $\varrho_c(b)$. BOREL mutatta meg, hogy tetszőleges b esetén $\varrho_c(b)=\varrho$, kivéve esetleg egy b_0 értéket, amelyre $\varrho_c(b)<\varrho$. Más szóval, legfeljebb egy olyan b_0 érték van, amelyre teljesül a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu|^{-\varrho+\varepsilon} < \infty \quad (0<\varepsilon<\varrho-\varrho_c(b_0))$$

reláció. b_0-t ekkor az $f(z)$ egész függvény B-kivételes értékének nevezik.

A kivételes érték fogalma tovább általánosítható. Legyen ui. $\varphi(x)$ az $x\geqq 0$ valós féltengelyen értelmezett, valós értékű, pozitív, szigorúan monoton csökkenő, nullához tartó függvény. A [120] a b-t az $f(z)$ egész függvény φ-kivételes értékének nevezi, ha

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(|z_\nu|) < +\infty. \tag{2.6}$$

BOREL a különleges $\varphi(x)=x^{-\varrho}$ esetet vizsgálta. Ha azonban $\varphi(x)$ oly gyorsan tart nullához, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)x^a = 0$$

minden $a>0$ esetében, akkor BOREL fent idézett tétele következtében:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu|^{-\varrho-\varepsilon} < +\infty$$

bármilyen értéket vegyen is fel ε és b. Tehát ezzel a $\varphi(x)$ függvénnyel a (2.6) minden b-re φ-kivételes érték, és ennek a megkülönböztetésnek nincs semmi konkrét értelme.

Ez a körülmény vezetett ahhoz a gondolathoz, hogy talán létezik egy olyan $\varphi(x)$ függvény, amelyre minden komplex szám φ-kivételes értéke *minden* véges vagy végtelen rendű egész függvénynek. A [120]-ban bizonyítást nyer, hogy ilyen $\varphi(x)$ függvény nem létezik, sőt mi több, az is, hogy bármely adott $\varphi_0(x)$ tetszőleges gyorsan nullához tartó függvényhez található olyan *végtelen* rendű $f_0(z)$ egész függvény, amelynek nincs φ_0-kivételes értéke.

[134]-ben bizonyos hézagos hatvány-, ill. Fourier-soroknak az L_q integrálhatósággal való kapcsolatát mutatja be. PÓLYA bizonyította be, hogy ha az

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{n_\nu}$$

hatványsor konvergens a $|z|<1$ körben és

$$n_{\nu+1} - n_\nu \geqq \gamma > 1, \quad n_\nu > n_0,$$

akkor $f(z)$-nek legalább egy szingularitása van a $|z|=1$ körvonal mindegyik zárt $2\pi/\gamma$ hosszúságú ívén. Vagy némileg módosítva, ha

$$g(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \exp(n_\nu i x), \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi,$$

és $g(x)$ analitikus egy $2\pi/\gamma$-nál hosszabb szakaszon, akkor analitikus az egész $[0, 2\pi]$-ben.

WIENER egy eredménye nyomán (l. még [99], [200], [220]), hasonló tételt vártak az L_2 integrálhatóságra nézve is, amit 1936-ban INGHAM be is bizonyított. Nevezetesen érvényes az

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx \leqq \frac{2(\pi+\varepsilon)^2}{\pi\varepsilon(2\pi+\varepsilon)} \int_{\alpha-(\pi+\varepsilon)/\gamma}^{\alpha+(\pi+\varepsilon)/\gamma} |g(x)|^2 dx \tag{2.7}$$

egyenlőtlenség minden valós α-val és ε-nal. Így merült fel az a kérdés, hogy milyen hézagfeltétel mellett következik be $g(x)$ L_q-integrálhatósága ($q>2$) a $[0, 2\pi]$-ben, ha integrálható a $[0, 2\pi]$ megfelelő részintervallumán.

ERDŐS és RÉNYI bizonyították be, hogy ha $q>2$ a (2.7) analogonja nem állhat fenn, még akkor sem, ha $n_{\nu+1}-n_\nu \to \infty$, míg — mint ismeretes — a (2.7) analogonja létezik, ha a jóval erősebb $n_{\nu+1}/n_\nu \geqq a>1$ hézagfeltétel teljesül. ERDŐS és RÉNYI bizonyítása valószínűségszámítási módszereket alkalmazó egzisztencia-bizonyítás.

TURÁN ezzel szemben egy meghatározott

$$g(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \exp(2\pi i n_\nu x)$$

függvényt állít elő, amelyre ha $q>6$, j elég nagy,

$$n_{j+1}-n_j > \frac{1}{2} n_j^{1/(q+6)},$$

és teljesül az, hogy $g(x)\in L_q\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, de $g(x)\notin L_q(0, 1)$.

Itt említjük meg végül [109] cikkét, amelyben végtelen függvényszorzat alakban állít elő az egységkörben reguláris és ott el nem tűnő függvényeket.

3. Polinomok és racionális függvények

E témakörbe sorolhatók a [18], [27], [42], [49]. [64], [72], [119] és [213] dolgozatai.

A következőkben $p_n(x)$, ill. $p_n(z)$ valós, ill. komplex változós n-edfokú polinomokat jelentenek. A. A. MARKOVTÓL származó eredmény, hogy

$$\frac{\max\limits_{-1\leq x\leq 1} |p_n'(x)|}{\max\limits_{-1\leq x\leq 1} |p_n(x)|} \leq n^2;$$

míg RIESZ MARCEL azt bizonyította be, hogy

$$\frac{\max\limits_{|z|\leq 1} |p_n'(z)|}{\max\limits_{|z|\leq 1} |p_n(z)|} \leq n.$$

Azokat az extremális polinomokat vizsgálva, amelyekre nézve a fenti kifejezésekben az egyenlőség jele érvényes, TURÁN megállapította, hogy azok gyökei a $[-1, +1]$ intervallumba, ill. $|z|\leq 1$ körbe esnek. Ebből a tényből heurisztikusan azt a következtetést vonta le, hogy a fenti hányadosok értéke „nagy", és ezért azokra alsó becslés is adható. E sejtésre sikerült is a következő két tételt bizonyítania:

Ha $p_n(z)$ összes gyökei a $|z|\leq 1$ körbe esnek, akkor

$$\frac{\max\limits_{|z|\leq 1} |p_n'(z)|}{\max\limits_{|z|\leq 1} |p_n(z)|} \geq \frac{n}{2};$$

ha pedig $p_n(x)$ minden gyöke a $[-1, +1]$-ben fekszik, akkor

$$\frac{\max\limits_{-1\leq x\leq 1} |p_n'(x)|}{\max\limits_{-1\leq x\leq 1} |p_n(x)|} > \frac{1}{6}\sqrt{n}.$$

A második tételben az alsó korlát nagyságrendje pontos. Egész pontos eredményt talált ERŐD I. A második tétel lehetővé tesz egy új bizonyítást ERDŐS azon tételére, miszerint, ha $p_n(x)$ minden gyöke $[-1, +1]$-ben fekszik, akkor két olyan gyök távolsága, amelyek között $p_n(x)$ konvex vagy konkáv $\leq \frac{16}{\sqrt{n}}$. ERŐD I. erre a becslésre is megtalálta a legjobb állandót.

A [27] bizonyos valós együtthatós polinomok abszolút maximumának lokalizációjára ad becslést.

A vizsgálatok kiindulópontja LAGUERRE egyik eredménye: Ha $p_n(x)$ összes gyökei valósak, $x_1=1$ és $x_2=-1$ két konzekutív gyöke, akkor $p_n'(x)\neq 0$ az $\left(1-\frac{1}{2n}, 1\right)$ és $\left(-1, -1+\frac{1}{2n}\right)$ intervallumokban. Ez az eredmény a legjobb, amennyiben van példa rá, hogy $p_n'(x)$ éppen az $1-\frac{1}{2n}$, ill. a $-1+\frac{1}{2n}$ pontokban tűnik el. Több, élesebb eredményt is elértek. Közös tartalmuk úgy fejezhető ki, hogy bizonyos feltételek mellett a lokális szélsőérték nem lehet a gyökhöz „túl közel". Nyilván hasonló megállapítás érvényes arra a $-1\leqq\xi\leqq 1$ helyre nézve is, ahol $p_n(x)$ abszolút maximumát veszi fel:

$$\max_{-1\leqq x\leqq 1} |p_n(x)| = |p_n(\xi)|.$$

RÉNYI mutatott rá, hogy az együtthatók valós voltának feltételezése nélkül is igazolható, hogy $-1+\frac{1}{n^2}<\xi<1-\frac{1}{n^2}$. Ez, mint TURÁN megmutatta, nem a legjobb becslés, amennyiben érvényes a következő két tétel:

Ha n páros, $p_n(x)$ együtthatói valósak, $p_n(1)=p_k(-1)=0$, $p_n(x)\neq 0$, ha $-1<x<1$, akkor

$$-\cos\frac{\pi}{n} \leqq \xi \leqq \cos\frac{\pi}{n} \sim 1-\frac{\pi^2}{2n^2}.$$

Ha n páratlan, és $p_n(x)$ kielégíti az előző feltételeket, akkor

$$-\frac{3\cos\frac{\pi}{n}-1}{1+\cos\frac{\pi}{n}} < \xi < \frac{3\cos\frac{\pi}{n}-1}{1+\cos\frac{\pi}{n}} \sim 1-\frac{\pi^2}{2n^2}.$$

Ezek az eredmények nem javíthatók.

Végül, ha $\max_{|z|\leqq 1} |p_n(z)|=|p_n(1)|$, akkor $p_n(z)$ nem tűnhet el a $|z|=1$ körvonal azon ívén, amelyen $|\arg z|<\pi/n$. E tételnek fontos alkalmazásai vannak az interpolációelméletben (ERDŐSSEL [22]) és a pontsorozatok egyenletes eloszlásának elméletében (ERDŐSSEL [20]).

Mint már említettük, FEJÉR, majd SZEGŐ ismételten vizsgálták többszörösen monoton hatványsorok viselkedését. Ezek elmélete a geometriai sor

$$s_n(z) = s_n^{(0)}(z) = 1+z+z^2+\ldots+z^n$$

részletösszegeinek és iterált $s_n^{(k)}(z)$ részletösszegeinek tulajdonságain alapszik, ahol

$$s_n^{(k)}(z) = s_0^{(k-1)}(z)+s_1^{(k-1)}(z)+\ldots+s_n^{(k-1)}(z) \quad (k=1, 2, \ldots;\ n=0, 1, \ldots).$$

Láttuk, hogy ha μ nem-negatív egész szám, akkor az $s_n^{(\mu)}(z)$ polinomok μ- dik deriváltja vagy azonosan nulla, vagy pozitív a $-1<x<1$ szakaszon, azaz

$$A_n(x, \mu) = \frac{d^\mu}{dx^\mu} s_n^{(\mu)}(x) > 0 \quad (n=\mu, \mu+1, \ldots;\ -1<x<1). \tag{3.1}$$

Ez FEJÉR eredménye.

TURÁN [42]-ben viszont azt bizonyítja be, hogy ha $n=\mu+1, \mu+2, \ldots$, akkor az $A_n(x, \mu)$ polinom összes gyökei az egységkör kerületén fekszenek. Ha $\mu=0$,

ez azt a jól ismert tényt jelenti, hogy az $1+z+z^2+\ldots+z^n$ polinom összes gyökei a $|z|=1$ körvonalra esnek. $\mu=1$ esetében pedig az állítást EGERVÁRY JENŐ igazolta más eszközökkel.

E tételből következik, hogy $A_n(x, \mu)$ nem vált jelet a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumon, és így, lévén együtthatói nem-negatívok, a (3.1) is azonnal adódik. TURÁN azonban ennél többet bizonyít. Megmutatja, hogy ha n páros, akkor az $A_n(x, \mu)$ polinomok nem negatívok az egész valós tengelyen, míg ha n páratlan, akkor egyetlen egyszeres gyökük van: $x=-1$. Ezért érvényes a következő összefüggés *az egész valós tengelyen:*

$$\frac{1}{1+x^n}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\, s_{n+\mu}^{(\mu)}(x) > 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

A [49] a Legendre-féle polinomok gyökeinek eloszlásáról tesz új megállapításokat. A $P_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$ Legendre-féle polinomokat egyértelműen meghatározzák a

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)x^\nu dx = 0; \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1; \quad P_n(1) = 1$$

relációk. Ismeretes volt már régebben is, hogy a $P_n(x)$ gyökei valósak, egyszeresek és a $(-1, 1)$ intervallumban az $x=0$ pontra nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Jelölje $x_{\nu n}$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ a $P_n(x)$ gyökeit, akkor $x_{\nu n}=\cos \vartheta_{\nu n}$-t írva, a $\vartheta_{\nu n}$ számok $P_n(\cos \vartheta)$ trigonometrikus polinom zéróhelyei, és

$$0 < \vartheta_{1n} < \vartheta_{2n} < \ldots < \vartheta_{nn} < \pi.$$

Számos erőfeszítést tettek a $\vartheta_{\nu n}$ és $x_{\nu n}$ gyökök helyének becslésére. TURÁN a $P_n(x)$ és $P_{n-1}(x)$ zéróhelyeinek elhelyezkedését veti egybe, és egy ún. szeparációs tételt bizonyít be: megmutatja, hogy a $P_{n-1}(x)$ gyökei a $P_n(x)$ gyökeit elválasztják egymástól, éspedig

$$x_{\nu+1,n} < x_{\nu,n-1} < x_{\nu n} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Végső megállapítása azonban ennél pontosabb, igazolja ti., hogy

$$(3.2) \qquad x_{1n}-x_{1,n-1} < x_{2n}-x_{2,n-1} < \ldots < x_{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right],n}-x_{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right],n-1}.$$

A bizonyítás számos fontos részletet tartalmaz, amelyeket azóta is felhasználnak a Legendre-féle polinomok elméletének tárgyalása során. A legjelentősebb ezek közül a híres Turán-féle egyenlőtlenség, amely szerint

$$(3.3) \qquad \Delta_n(x) = P_n^2(x)-P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \geqq 0 \quad n = 1, 2, \ldots; \quad -1 \leqq x \leqq 1.$$

A (3.2) bizonyításához, mint megjegyzi, csak azt a tényt használta fel, hogy $\Delta_n(x)$ monoton csökkenő, amikor $(2n+1)^{-1} \leqq x \leqq 1$. Ebből vezeti le, a dolgozathoz fűzött Függelékben, a (3.3) egyenlőtlenséget is.

A Turán-féle egyenlőtlenség ismertté vált — levelezés révén — már a [49] dolgozat megjelenése előtt. SZEGŐ négy elegáns bizonyítást adott rá, amelyek közül egyik alkalmas arra, hogy kiterjesszék az összes ultraszférikus polinomokra is. SZÁSZ OTTÓ $\Delta_n(x)$-re ad értékes becslést, és (3.3) által inspirált egyenlőtlenséget ír fel Bessel-függvényekre. Érdekes általánosításokat bizonyítottak be FORSYTHE és SANSONE. BECKENBACH igazolta, hogy $\Delta_n(x)$ felülről konvex minden x-re. Azóta is több munka csatlakozott ehhez az érdekes eredményhez. Összesen kb. 60 dolgozat kapcsolódik a Turán-féle egyenlőtlenséghez.

A (3.2) szeparációs tétellel kapcsolatban Szász Ottó ért el alsó becslést:

$$|x_{in}-x_{j,n-1}| > \frac{2}{3n^{3/2}} \frac{1}{(n+1)(2n+1)^{1/2}}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

A [64] Turán előadásának szövege, amelyet az Első Magyar Matematikai Kongresszuson tartott. A szerző bizonyítások nélkül ismerteti a polinomok gyökhelyeire vonatkozó több eredményét, vizsgálatait és problémáit.

A polinomok gyökei és együtthatói között összefüggéseket találni az algebra eredeti feladatai közé tartozott. Ezzel az elmélettel — amelyet ma funkcionális algebrának lehet nevezni — igen sok kutató foglalkozott, míg az eredményekben dús vizsgálatok a témakört többé-kevésbé lezártnak tüntették fel. Új lökést adtak azonban e kutatásoknak az analízis terén felmerült problémák. Itt ezek egyikéről, a

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-s} \quad (s = \sigma + it, \ \sigma > 1)$$

kifejezéssel értelmezett Riemann-féle zéta-függvényhez kapcsolódó kérdésről van szó. Tudott dolog, hogy a számelmélet igen sok problémája megoldást nyerne, ha igazolni tudnák Riemann sejtését, miszerint a $\zeta(s)$ nem-triviális gyökei mind a $\sigma = 1/2$ egyenesen fekszenek. Belátták, hogy e konzekvenciák egy része már akkor is levonható lenne, ha megmutatnák, hogy van olyan $0 < \vartheta < 1/2$ szám, hogy a nem-triviális gyökök a $\vartheta \leqq \sigma \leqq 1-\vartheta$ sávba esnek. Ha $\zeta(s)$ helyett mármost a

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

függvényt vezetjük be, és s helyébe $s = \frac{1}{2} + iz$-t írunk, ahol $z = x + iy$, akkor $\xi\left(\frac{1}{2}+iz\right) = \Xi(z)$ olyan transzcendens egész függvény, amelynek összes gyökei valósak, ha a Riemann-sejtés igaz, és e gyökök mind az $|y| \leqq \frac{1}{2} - \vartheta$ sávba esnek, ha a fenti gyengébb feltétel teljesül.

A függvényeknek hatványsorral való előállítása azonban semmiféle tájékoztatást nem nyújt általában arról, hogy egy függvény összes gyökei valósak vagy általában, hogy egy sávban fekszenek-e. Polinomokra nézve sem ismert ilyen eljárás, bár ha a polinomokra nézve sikerülne valamit kipuhatolni, az egy lépést jelentene a cél felé. Íme a heurisztikus gondolatmenet.

Ha a polinomot a szokásos

$$V(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \tag{3.4}$$

alakban írjuk fel, amelyet Turán Viéta-kifejtésnek nevez, akkor egyszerű módon következtethetünk olyan körtartományokra, amelyek $V(z)$ összes gyökeit tartalmazzák. Ezt azzal indokolja, hogy a z^ν függvények nívóvonalai koncentrikus körök. Ha tehát a kifejtés együtthatóiból olyan sávra akarunk következtetni, amely tartalmazza a polinom minden gyökét, akkor a polinom Viéta-féle előállítása helyett azt talán olyan véges polinomsorral kellene helyettesíteni, amely polinomok nívó

vonalai „nagyjából" a valós tengellyel párhuzamos egyenesek. Ilyenek a

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2})$$

formulával értelmezett Hermite-féle polinomok. $V(z)$-t a Hermite-féle polinomok szerint átrendezve, annak Hermite-kifejtését nyerjük:

$$V(z) = H(z) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu H_\nu(z). \tag{3.5}$$

Hangsúlyozza, és ezt példákkal támasztja alá, hogy egyes konkrét esetekben előnyös lehet az első- és másodfajú Csebisev-féle vagy a Laguerre-féle polinomok szerinti kifejtést használni.

[72]-ben már a [64]-ben lefektetett programnak megfelelően bizonyított tételeket közöl (a (3.4) és (3.5) alatti jelöléseket használjuk).

a) CAUCHY klasszikus eredménye: Ha

$$\max_{\nu=0,1,\ldots,n-1} |a_\nu| = A,$$

akkor a $V(z)=0$ egyenlet gyökei mind a

$$|z| \leqq 1 + \frac{A}{|a_n|}$$

körben fekszenek, és ez a korlát nem javítható.

b) WALSHtól származik viszont a következő tétel. A $V(z)=0$ egyenlet összes gyökei a

$$|z| \leqq \left|\frac{a_0}{a_n}\right|^{1/n} + \left|\frac{a_1}{a_n}\right|^{1/(n-1)} + \ldots + \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|^{1/2} + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

körben fekszenek.

Ezeket a becsléseket általánosítja TURÁN arra az esetre, amikor $V(z)$ a Hermite-kifejtéssel van megadva.

1. Legyen $z=x+iy$ és

$$\max_{\nu=0,1,\ldots,n-1} |b_\nu| = B,$$

akkor a $H(z)=0$ egyenlet gyökei mind az

$$|y| \leqq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{B}{|b_n|}\right)$$

sávba esnek.

2. A $H(z)=0$ egyenlet összes gyökei az

$$|y| \leqq \frac{1}{2}\left(\left|\frac{b_0}{b_n}\right|^{1/n} + \left|\frac{b_1}{b_n}\right|^{1/(n-1)} + \ldots + \left|\frac{b_{n-2}}{b_n}\right|^{1/2} + \left|\frac{b_{n-1}}{b_n}\right|\right)$$

sávban vannak.

A [119]-ben TURÁN a $\pi_n(x)$ valós együtthatós legfeljebb n-ned fokú polinomok P_n osztályára vonatkozó E. Schmidt-féle kérdésre ad *pontos* választ. Meghatározandó

$$M_n^2 = \max_{\pi_n \in P_n} \frac{\int_0^\infty \pi_n'(x)^2 e^{-x} dx}{\int_0^\infty \pi_n(x)^2 e^{-x} dx}.$$

SCHMIDT e kérdésre nem ad teljes választ. TURÁN igazolja, hogy

$$M_n = \left(2 \sin \frac{\pi}{4n+2}\right)^{-1},$$

és ezt az értéket M_n akkor és csak akkor veszi fel, ha

$$\pi_n(x) = C \sum_{\nu=1}^{n} \sin \frac{\nu\pi}{2n+1} \cdot L_\nu(x),$$

ahol C tetszőleges állandó, $L_\nu(x)$ pedig a ν-edfokú Laguerre-féle polinom.

A [213] a racionális függvények egyik típusára ad meg integrál-becslést. Legyen

$$r_n(z) = u(z)/v(z),$$

ahol v n-edfokú, u n-nél alacsonyabb fokú polinom. Az $1 < p \leqq 2$ esetre az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |r_n(z_0 + \varrho e^{i\varphi})|^p \, d\varphi$$

integrál alsó becslését adják meg. Itt z_0 tetszőleges komplex szám. A becslés kizárólag $|r_n(z_0)|$-, n-, p-, ϱ-tól és a z_0 körüli legnagyobb regularitási kör sugarától függ, de „lényegében" független $u(z)$ és $v(z)$ együtthatóitól. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $z_0 = 0$ és $r_n(0) = 1$, továbbá, hogy a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ esetleg többszörös pólusok kielégítik a

$$0 < |\zeta_1| \leqq |\zeta_2| \leqq \ldots \leqq |\zeta_n| = 1 \tag{3.6}$$

feltételt, és $0 < \varrho < |\zeta_1|$, azaz $r_n(z)$ reguláris a $|z| < \varrho$ körben.

E normalizálási kikötések teljesülése esetén

$$I_p(\varrho, r_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |r_n(\varrho e^{i\varphi})|^p \, d\varphi \geqq \left\{1 + \frac{\varrho^{nq}}{\left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^p \varrho^{pk}\right]^{q/p}}\right\}^{p/q} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Ha speciálisan $p = 2$, ekkor ez az egyenlőtlenség az igen elegáns

$$I_2(\varrho, r_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |r_n(\varrho e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \geqq 1 + \frac{\varrho^{2n}}{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2 \varrho^{2k}}$$

alakot veszi fel.

Abban az esetben, amikor $r_n(z)$ a $\pi_n(z)$ n-edfokú polinom logaritmikus deriváltja, tehát a ζ_ν-k ($\nu = 1, \ldots, n$) a $\pi_n(z)$ gyökei, és (3.6) teljesül, $r_n(0) = \pi_n'(0)/\pi_n(0)$, ekkor van olyan alsó korlát, amely $|\pi_n'(0)/\pi_n(0)|$-tól sem függ:

$$I_p\left(\varrho, \frac{\pi_n'}{\pi_n}\right) > \frac{n^p \varrho^{p(n-1)}}{1 + \varrho^p + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k}^p \varrho^{pk}} \quad (0 < \varrho < |\zeta_1|).$$

[5] Über die arithmetischen Mittel der Fourierreihen. *Journ. of the London Math Soc., 10* (1935) pp. 277—280.
[12] Über den Blochschen Satz. (Grünwald Gézával), *Acta Lit. ac Scient. Szeged, 8* (1973) p. 236—240.
[15] Über die monotone Konvergenz der Cesàro—Mittel bei Fourier- und Potenzreihen. *Proc. of the Cambr. Phil. Soc., 34* (1938) p. 134—143.
[17] Über die Partial-Summen der Fourierreihe. *Journ. of the London Math. Soc.,* (1938) p. 278—282.
[18] Über die Ableitung von Polynomen. *Compositio Math.,* (1939) p. 88—95.
[20] On uniformly dense distribution of certain sequences of points. (Erdős Pállal). *Ann. of Math., 41* (1940) p. 162—173.
[22] On interpolation III. (Erdős Pállal). *Ann. of. Math., 41* (1940) p. 510—553.
[27] On rational polynomials. *Acta Univ. Szeged,* (1946), p. 105—113.
[32] On power-series whose coefficients form a multiply monotonic sequence. *Löw Immanuel emlékkönyv,* (1947) p. 300—305.
[35] On the strong summability of the Fourier-series. *Journ. of Indian Math. Soc., XII* (1948) 8—13.
[37] On some example in the theory of power series. *Bull. of. Amer. Math. Soc., 54* (1948) p. 932—936.
[42] Remark on a theorem of Fejér. *Publ. Math. Debr.,* T. I. Fasc. 2 (1949) p. 95—97.
[49] On the zeros of the polynomials of Legendre. *Časopis pro pest. mat. a fys. roč., 75* (1950) p. 113—122.
[62] On a trigonometrical sum. *Ann. de Soc. Pol. de Math.,* T. *XXV.* (1952) p. 155—161.
[64] Sur l'algèbre fonctionnelle. *Comptes Rendus du Prem. Congr. des Math. Hong.* p. 267—290.
[69] A függvénytan és sorelmélet bizonyos érintkezési pontjairól. *ELTE TTK évkönyve,* 1952—53, p. 5—13.
[72] Hermite-expansion and stripe for zeros of polynomials. *Archiv d. Math. Vol. V.* (1954) fasc. 1—3, p. 148—152.
[99] On an inequality. *Annales Univ. Sci. Budapest de Rol. Eötvös nomin. Sectio Math.,* T. *I.* (1958) p. 3—6.
[103] A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence circle. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Ac. Sebe des Sci.,* Belgrade (1958) p. 19—26.
[113] A hatványsorok elméletének egy kérdésekről. *Mat. Lapok X.* 3—4 (1959) p. 278—282.
[119] Remark on a theorem of Erhard Schmidt. *Mathematica,* Cluj. T. *2.* (25) Fasc. 2 (1960) p. 373—378.
[120] Sur la distribution des valeurs d'une fonction entière. *Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad., VI.* Ser. A. fasc. 1—2. p. 157—164 (Alpár Lászlóval).
[134] On a certain problem in the theory of power-series with gaps. *Pólya—Festschrift,* (1962) p. 404—409.
[172] Remarks on the preceding paper of J. Clunie entitled "An equivalent power series". *Acta Math. Hung.* T. *18.* Fasc. 1—2. (1967) p. 171—173.
[213] On a property of rational functions. (Q. I. Rahman-nal). *Ann. Univ Budapest de Rol. Eötvös nomin. Sect. Math.* T. *XVI.* (1973) p. 37—45.
[220] Remark to a theorem of N. Wiener. *Papers dedicated to Prof. L. Ilieff's 60th anniversary,* Sofia, 1975, p. 479—483.

РЕЗУЛТАТЫ ПАЛА ТУРАНА В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ЛАСЛО АЛПАР

ON SOME RESULTS OF PAUL TURÁN IN ANALYSIS

L. ALPÁR

e cikkben ismertetett és idézett dolgozatainak jegyzéke;
a számozás a teljes dolgozatjegyzékre vonatkozik

BOLYAI JÁNOS ÉLETMŰVE

KÁRTESZI FERENC

A matematika története Bolyai Jánost a nem-euklideszi geometria egyik első felfedezőjeként, az új geometria átfogó elméletét remek írásműben kifejtő szerzőként tartja számon. Bolyai matematikai zsenialitását más témakörökben elért, de főművénél kisebb súlyú eredményei is meggyőzően tükrözik. Rövid előadás keretében csak Bolyai főművének, az *„Appendix"* néven emlegetett, valójában *„A tér tudománya"* című korszakalkotó értekezésének ismertetésére jut idő.

Bolyai János értekezése Bolyai Farkas nagy matematikakönyvének függelékeként jelent meg, latin nyelven, 1832-ben. Gauss számára már 1831 júniusában különnyomat készült.

Történelmi tény, hogy a geometria alapját képező axiómarendszert először Bolyai Farkas vette beható vizsgálat alá. Bolyai János fetételezhette, hogy az olvasó ismeri az elődök meddő kutatásait, ill. az elért keveset mondó eredményeket, és mindazt, ami apja könyvében szerepel. Nem tartotta szükségesnek, hogy műve olvasóit az előzmények ismertetésével előkészítse az új térelmélet befogadására. Azonnal nekivág súlyos mondanivaló kifejtésének. Tömör matematikai nyelve, pontosan meghatározott tartalmú szimbólumai az olvasót feszült figyelemre és gondolkodásra kényszerítik. Mintha csak Gausshoz hasonló olvasóknak szánta volna írásművét. Ez a tömörség nemcsak a tetemes nyomtatási költség kényszerítő hatása, hiszen a *„Responsio"* c., nem nyomtatásra szánt pályaművének kézirata is éppen olyan tömör.

Egyszer egy tehetséges tanítványa azt kérdezte Hilberttől, hogy melyik könyvet javasolja a Bolyai geometria tanulmányozására. Olvassa csak az „Appendix" eredeti szövegét kellő figyelemmel — mondta Hilbert —; a későbbi szerzők megkönnyítik ugyan az „Appendix" magvasan tömör szövegének megértését, de az eredeti szöveg olvasásával járó nehézség ne riassza vissza azt, aki ismerni akarja Bolyai gondolkodásmódját.

Bolyai és Lobacsevszkij művét összehasonlító tanulmányában 1948-ban Kagan a következőket írta: *„Nem túlzás, ha azt állítjuk, hogy Bolyai a valóságban bármely állandó görbületű tér geometriájának alapjait megalkotta; vagyis kiválasztotta azt az ismeretanyagot, amely az összes állandó görbületű terekre nézve tiszta geometriai formában egyöntetűen kifejezhető. Nem mondható, hogy az Appendix felépítése ebben a tekintetben egészen szigorúan megérett, de tartalma rendkívül közel jár ehhez"*.

Íme, a következő évszázad kiváló tudósának lényegében véve elismerő véleménye se elegendő az Appendix érdemének kifejezésére. Meggyőzőbb képhez jutunk akkor, ha egy korszakalkotó felfedezést a maga korában elért tudományos ismeretekhez és gondolkodásmódhoz viszonyítva tekintjük.

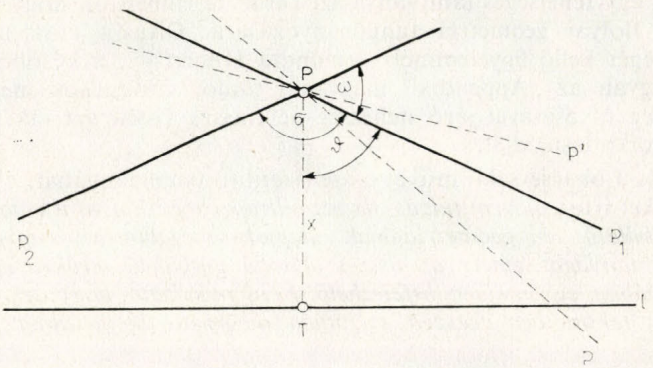
Most megkísérlem az „Appendix" tartalmának és tudományos szemléletmódjának olyan ismertetését adni, amely az érdeklődő, de nem matematikus hallgatókat érthető módon és elfogadható szinten informálja.

Bolyai János kutatómunkáját olyan felfogásmód vezérelte, ami közelebb áll a maihoz, mint bármelyik kortársáé. Bolyai éppen úgy, mint Euklidesz a geometriát nem logikai játéknak tekintette, hanem a bennünket körülvevő fizikai tér valódi szerkezetét többé-kevésbé híven visszatükröző elméletnek. Bolyai véleménye szerint többféle elmélet lehetséges, ámde annak a tisztázása, hogy melyik elmélet tükrözi hívebben a fizikai tér szerkezetét, nem a geometria feladata, hanem a fizikáé. Sőt apja ötletét továbbfejlesztve azt is kifejtette, hogy ennek a kérdésnek a tisztázására irányuló optikai úton történt mérések — amilyeneket Gauss és Lobacsevszkij végzett — nem is adhatnak megbízható tapasztalatokat; a döntő feleletet a gravitációs erőtér és a geometriai tér szerkezete közti viszony tisztázása szolgáltatja. A geometriára csak az tartozik, hogy az alapul választott axiómarendszerből vont következtetések ne vezessenek ellentmondásra; mert ha az axiómák a valóságot tükrözik, ha belső ellentmondásnélküli rendszert alkotnak, akkor következményeik is a valóságot tükrözik. Ennek a követelménynek pedig nem csak az euklideszi rendszer felel meg.

Ami pedig Bolyai térelméletének a felépítését illeti, az a következőképpen vázolható. Mindazok az axiómák, amelyekből az euklideszi geometria levezethető — ez nem azonos azzal, amit Euklidesz ki is fejezett, hanem az, amit kifejezetten és burkoltan valóban felhasznált — alkotják az *E*-rendszert. *Ebben az axiómarendszerben a párhuzamossági axióma a többitől független.*

A két évezreden át meddőnek bizonyult kutatások éppen arra irányultak, hogy a mondott függetlenség igaz, vagy hamis voltát bebizonyítsák. Bolyai műve döntő fordulatot jelentett ebben a már reménytelennek látszó küzdelemben.

Euklidesz a párhuzamossági axiómát a szögfogalom közvetítésével fejezte ki ugyan, de amint azt már az ötödik században Proklosz észrevette, a szögfogalomtól függetlenül is megfogalmazható: *Adott egyenesen kívüli ponton áthaladó egyenesek közt van egy és csak egy, amely az egyenest nem metszi.* — Ezt röviden *P*-axiómának mondjuk. — Az *E*-axiómarendszerből a *P*-axiómát elhagyva az ún. *maradékaxiómarendszerhez, M*-hez jutunk. Az *M* igaz voltának feltevéséből dedukálható tételeket Bolyai *abszolút* tételeknek nevezte, de a geometria ilyen tételeit rendszerbe



$$\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} = e^{\frac{x}{k}} \qquad p_1 \parallel t \qquad p_2 \parallel t$$

1. ábra

fogó elméletet *abszolút geometriának* nem ő nevezte el, hanem Frischauf, 1872-ben megjelent könyvében. Az abszolút geometria az euklideszi geometria egy lehetséges *általánosítása*. Ezt az állítást Bolyai következő gondolatmenete jól megvilágítja.

Az adott l egyenestől x távolságra levő P ponton áthaladó, de az l-et nem metsző p egyenesek halmaza nem üres; ez az M-ből következik. — Pontosabban egy, az ábra szerinti ω szögtartománynak semelyik, a kiegészítő σ szögtartománynak pedig minden egyenese metszi az l egyenest. A szögtartományt határoló p_1, p_2 egyeneseket nevezzük párhuzamosoknak. Az a további feltevés, hogy p_1 és p_2 egyeneseket nevezzük párhuzamosoknak. M-ből az ω szög nagysága nem vezethető le. Az a további feltevés, hogy p_1 és p_2 egybeesik az euklideszi geometriára, a $p_1 \neq p_2$ feltevés egy új, más geometriára vezet. — Bolyainak ez az elgondolása határozottabb formában 1823 november 3-án bontakozott ki, amikor apjának küldött levelében azt írta: „...semmiből egy új, más világot teremtettem...". Valószínűleg akkor jutott el az M-ből levezethető következő tételhez.

$$PT \perp l, \quad \overline{PT} = x;$$

$$\widehat{TPQ} = \vartheta \quad \sigma = 2\vartheta.$$

A ϑ szöget az x távolsághoz tartozó párhuzamossági szögnek nevezzük. A ϑ szög az x távolság függvénye.

TÉTEL:

$$(*) \qquad \operatorname{cotg} \frac{\vartheta}{2} = e^{\frac{x}{k}},$$

ahol e az Euler-féle szám ($e=2{,}718...$), k pedig egy, a teret jellemző pozitív valós szám, melyre nézve az M-ből vont következtetés útján nem lehet egyebet megállapítani.

Más szóval a k paraméter numerikus értéke (a $k>0$ megszorításon túl) az M-től független; *vagyis a k paraméter egy numerikus értékének előírása az M axiómarendszer bővítését jelenti.*

Ebből a képletből látható, hogy minél nagyobb szám a k, annál inkább megközelíti a ϑ a derékszöget, az euklideszi geometria párhuzamossági szögét. Ha pedig a k szám rögzített, és az x távolság minden határon túl csökken, a ϑ szög akkor is a derékszöghöz konvergál. Így válik érthetővé a következő két észrevétel.

1. Bolyai megmutatta, hogy Euklidesz párhuzamossági axiómájának feltételezése nélkül hogyan lehet egy olyan általánosabb térfogalmat alkotni, amely határesetként az euklideszit is magában foglalja.

2. A nem-euklideszi térben lokálisan — vagyis kellően kicsiny környezetben (megközelítőleg) — az euklideszi geometria érvényes.

Bolyai tudatosan kerülte az euklideszi szemlélethez tapadó terminológiát. Bonyolult kifejezéseket helyettesítő és új fogalmakra utaló szimbólumai is erre vallanak. Így például a $|||$ relációjel arra figyelmeztet, hogy a párhuzamossághoz tapadó euklideszi szemlélet befolyását ki kell zárni.

Egy más példa az a sugarú kör kerületének a szimbólummal való jelölése. A szimbólum a k paraméterű nem-euklideszi térben a következő képletet jelöli:

$$(**) \qquad \bigcirc a = k\pi\left(e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}\right).$$

Ezzel a szimbólummal a Pitagorasz-tétel abszolút geometriai általánosítása az eredeti tételt kifejező képlethez hasonló formát ölt:

$$(***) \qquad (\bigcirc a^2)^2 + (\bigcirc b)^2 = (\bigcirc c)^2.$$

Határmeneti meggondolással — ha a, b, c rögzített és $k \to \infty$, vagy ha k rögzített és $a, b, c \to 0$ — éppen a megfelelő euklideszi képletek következnek.

Bolyai az euklideszi és a nem-euklideszi geometriára is csak egy-egy jellel utal *Σ-rendszernek,* illetve *S-rendszernek* nevezi.

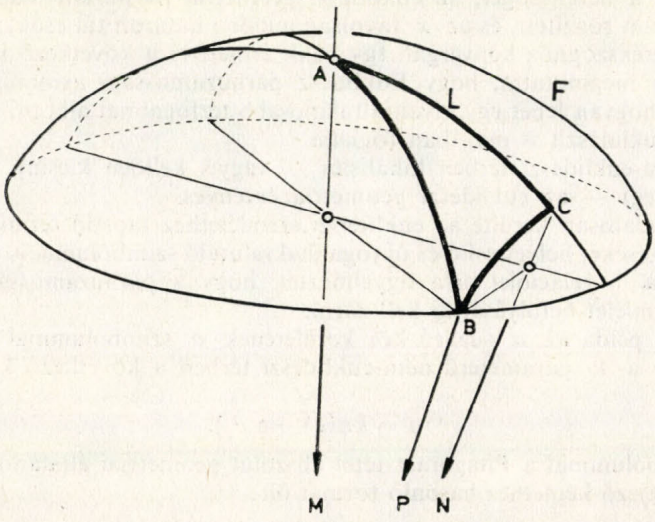
Azt, hogy a Σ ellentmondástalan, vitathatatlannak hitte. Az S ellentmondástalanságát azonban — az Appendix megjelenése után — megkísérelte bebizonyítani. Ez a törekvése sikertelen volt. Csak Bolyai halála után bizonyították be — más-más modell segítségével — hogy Σ ellentmondástalanságából S ellentmondástalansága következik (1868-ban Beltrami, *1871-ben Klein,* 1882-ben Poincaré).

Bolyai dolgozta ki először, és alkalmazta az ún. *modell-módszert* is, ami a mai matematikus nélkülözhetetlen munkaeszköze. Erről részletesebben kell megemlékeznünk, mert ezzel a módszerrel azt is bebizonyította, hogy az S ellentmondástalanságából a Σ ellentmondástalansága következik. Módszerét egyébként arra használta fel, hogy a nem-euklideszi geometria színusz-tételét rövid úton levezesse. E tételt Bolyai a $\bigcirc a : \bigcirc b = \sin \alpha : \sin \beta$ formában fejezte ki. Erre vonatkozik Bonola 1906-ban megjelent könyvéből kiragadott jelző: „*...wunderbarer Einfachheit und Eleganz...*".

Bolyai az S rendszerben egy *F-felületnek* nevezett alakzatot definiál — Gauss nyomán ma *paraszférának* mondjuk —, mégpedig a következőképpen : Az a felület, amelyet derékszögben metsző egyenesek, a felület úgynevezett *normálisai,* páronként, párhuzamosak. (Persze a párhuzamosság nem-euklideszi fogalma szerint.) Minden sík, amely a felület normálisát tartalmazza az F-felületet egy *L-vonalban* — Gauss szavával *paraciklusban* — metszi. A felület egy pontján áthaladó, de normálist nem tartalmazó sík vagy a mondott pontban érinti a felületet, vagy körben metszi. Az F-felület bármely normálisára mint tengelyre nézve forgásfelület.

Az F-felületnek ez, a gömbre emlékeztető alkata indokolta a Gauss javasolta paraszféra elnevezés elfogadását.

A paraszféra bármely két (különböző) pontját egy és csak egy paraciklus köti össze. A paraszférán két pont közti legrövidebb út az őket összekötő paraciklusnak a két pont által határolt darabja. Ezek pedig a paraszférának az euklideszi síkra, egyenesre és távolságra emlékeztető tulajdonságai.



2. ábra

Így válik érthetővé Bolyai elgondolása, az euklideszi síknak abszolút térbeli modellje. Ha a sík szerepét a paraszféra, a sík egyenesei szerepét a paraszféra paraciklusai játsszák, akkor az így előállított modellen az euklideszi axiómák teljesülnek. Az az állítás azonban, hogy tehát a paraszféra és annak paraciklusa nem más, mint az euklideszi sík és annak egyenese, az M-ből nem következik. Ez az állítás az euklideszi párhuzamossági axiómával ekvivalens. A paraszférán ártelmezett kör azonban síkgörbe (közönséges értelemben is kör). Ebből adódik az abszolút színusztétel levezetése.

Matematika-történeti tény, hogy az euklideszi síkon körrel egyenlő területű négyzet klasszikus értelemben való megszerkesztésének lehetetlenségét először Bolyai szögezte le, 50 esztendővel Lindemann előtt. Azt pedig, hogy a *nem-euklideszi síkon van négyszögesíthető kör,* bebizonyította, a szerkesztést végrehajtotta.

Bolyai művének a későbbi korok matematikája, sőt a mai matematika tükrében való méltatását számos publikációban megtalálhatjuk. Úgy vélem azonban, hogy egy korszakalkotó felfedezést a maga korában, az akkori tudomány és gondolkodásmód tükrében is látnunk kell, ha a tudós alkotó erejét és intellektuális bátorságát igyekszünk megismerni. Másfél évszázad oly hosszú idő, amely a múltba tekintést erősen megnehezíti.

Egy kutató tudós problémalátását, törekvéseit és gondolkodásmódját nemcsak kora szaktudományi ismeretei, hanem többé-kevésbé a szaktudományra vonatkozó filozófiai nézetek is befolyásolják. A XVIII. és XIX. század sok tudósára Kant kritikai filozófiája mély hatással volt, olyannyira, hogy a kanti téziseket cáfoló érveket eleve tudománytalannak minősítették. Kant szerint a tér csak formája a szemléletünknek; e forma a tapasztalattól független— velünk született, „a priori" —, e formát meghatározó axiómákat az „ész" a maga erejéből, a tapasztalattól függetlenül, képes felfedezni; az axiómák egyetlen helyes rendszere pedig az euklideszi.

Világos dolog, Kant matematikai felkészültsége elégtelen volt arra, hogy a matematikai gondolkodást is előbbre vivő filozófiai téziseket tudjon örök időkre előírni. Nem tudta — igaz, hogy nem is tudhatta — hogy az euklideszi térelmélettel logikailag egyenjogú nem-euklideszi térelmélet is lehetséges, valamint azt sem, hogy a fizikai tér szerkezetét az euklideszi térelmélet csak lokálisan tükrözi. Bolyai korában azonban Kant felfogásának helyességét csak a leghaladóbb szellemű tudósok merték kétségbe vonni. Bolyai, Gauss és Lobacsevszkij tudatosan meg is fogalmazták, hogy a nem-euklideszi geometria lehetséges volta Kant apriorisztikus felfogásának helyességét cáfolja. Bolyai az Appendix címlapján az euklideszi párhuzamossági axióma helyes, vagy téves voltáról azt írja, hogy *„a priori soha el nem dönthető"*. Gauss egy leveléből kiragadott sort idézek: „...Kantnak nem volt igaza, midőn azt állította, hogy a tér csak *formája* a szemléletünknek." Számos tudós azonban még félévszázad múlva se látta be, hogy Kant tévedhetett.

A nem-euklideszi geometriával közvetlenül és közvetve foglalkozó publikációk száma a legújabb bibliográfiai becslések szerint meghaladja a 25 ezret.

Rövid előadásban képtelen vagyok mindazt felvillantani, ami Bolyai művében úttörően új, előremutató, ami másfél évszázaddal ezelőtt forradalmi erővel kezdte sodorni a tudományt a modern matematikai gondolkodás diadalútján.

ТВОРЧЕСТВО ЯНОША БОЙАИ

ФЕРЕНЦ КАРТЕСИ

THE LIFE-WORK OF JÁNOS BOLYAI

F. KÁRTESZI

A BOLYAI GEOMETRIA SZERKESZTÉSELMÉLETÉRŐL*

STROMMER GYULA

A görög ókorban a matematika fejlődése egyes feladatokkal függ össze. Ilyen volt a kocka megkétszerezése, a szög három egyenlő részre való osztása és a kör négyszögesítése. Már a régi görögök sejtették, hogy e faladatok megoldása lehetetlen a vonalzó és körző szokásos használatával, amikor a vonalzót két adott pont összekötő egyenenesének húzására, a körzőt adott pont körül két adott pont távolságával egyenlő sugarú kör leírására használjuk, és szerkesztett pontoknak csak azokat tekintjük, amelyeket az ilyen módon megrajzolt egyenesek és körök metszéspontjai szolgáltatnak.

BOLYAI JÁNOS a bécsi mérnök-akadémián a XI. axióma bebizonyítására irányuló kísérleteivel egyidőben e kérdésekkel is foglalkozott. Csak néhány hónappal múlt 17 éves, amikor 1820 tavaszán a szögharmadolást egy megrajzolt egyenlő oldalú hiperbola segítségével körzővel és vonalzóval megoldotta.[1]

Érthető tehát, hogy az *Appendix*-ben, miután eljut a trigonometriához, az utolsó tíz cikkelyben a nem-euklideszi geometria sajátos szerkesztési feladatainak tárgyalásába bocsátkozik. Például megmutatja, hogy miképpen lehet adott ponton át adott egyenessel párhuzamos egyeneseket húzni, és valamely hegyesszög egyik szárára merőleges és egyúttal a másikkal párhuzamos egyenest rajzolni; azt is megmutatja, hogy ha nem igaz EUKLIDESZ XI. axiómája, akkor a kör négyszögesítése körzővel és vonalzóval lehetséges. Ha ti. m természetes szám és n GAUSS-féle körosztási szám, vagyis a 2 hatványain kívül csak 2^k+1 alakú törzsténye zőket tartalmaz (még pedig csak első hatványon), akkor a természetes mérőszámban $\frac{m}{n}\pi$ területű kör sugara és a vele egyenlő területű négyzet körzővel és vonalzóval szerkeszthető, feltéve, hogy $\frac{m}{n}<2$, mivel a négyszög területe kisebb 2π-nél. LOBACSEVSZKIJnél ilyenfajta kérdésekkel sehol sem találkozunk.[2]

Nem csoda, hogy BOLYAI JÁNOSnak a kör négyszögesítésére vonatkozó remek szerkesztései sok matematikus figyelmét a nem-euklideszi geometria szerkesztési

* A M. Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Osztálya és a Bolyai J. Mat. Társulat BOLYAI JÁNOS születésének 175. évfordulója alkalmából 1977. december 15-én rendezett emlékülésén elhangzott előadás.

[1] Vö. SZŐKEFALVI-NAGY GYULA: Bolyai János szögharmadolása, Mat. Lapok 4 (1953), 84—86. lap. L. még ugyanattól: A geometriai szerkesztések elmélete, 2. kiad., Budapest 1968, 119. és köv. l.

[2] Ezzel kapcsolatban F. ENGEL megjegyzi (N. I. Lobatschewskij, Zwei geometrische Abhandlungen, Leipzig 1898, 394. l.), hogy LOBACSEVSZKIJnek 1829/30-ban a «Kazáni Híradó»-ban (Kazanszkij Vesztnik) megjelent értekezésében akadunk nyomokra, melyekből nagy valószínűséggel következtethető, hogy ő is birtokában volt olyan szerkesztési módoknak, melyek az először említett két feladat megoldására szolgálhatnak.

feladataira irányították és számos értékes geometriai vizsgálatra vezettek, melyek sok esetben általánosabb természetű kérdésekre is megadták a feleletet. Ezzel a kérdéssel foglalkozók közül kitűnnek: M. SIMON, L. GÉRARD, H. LIEBMANN és M. GROSSMANN; ez utóbbi nagyszámú idetartozó feladatnak igen elegáns projektív geometriai megoldását adta. Később D. D. MORDUHAJ—BOLTOVSZKOJ foglalkozott tüzetesen a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometria szerkesztéseivel. De a legtöbb eredményt e téren M. N. NYESZTOROVICS és A. SZ. SZMOGORZSEVSZKIJ érték el; ők és tanítványaik az e tárgyra vonatkozó értekezések egész sorozatát bocsátották közre.

Újabb időben hazai vizsgálatok is történtek ebben az irányban, melyek közül csak néhányat sorolok föl.

A BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometriában *elemi szerkesztés* alatt olyan szerkesztést értünk, amely csupán egyenesek és ciklusok, azaz körök, továbbá paraciklusok és hiperciklusok segítségével vihető keresztül. Ennek megfelelően régebben úgy gondolták, hogy az elemi szerkesztések elvégzéséhez a körzőn és vonalzón kívül paraciklus és hiperciklus rajzolására szolgáló eszközre is szükség van. Miután 1927-ben MORDUHAJ—BOLTOVSZKOJ[3] kimutatta, hogy az elemi szerkesztéseknél a paraciklus rajzolására szolgáló eszköz nélkülözhető, 1938-ban NYESZTOROVICS[4] bebizonyította, hogy az elemi szerkesztések körzővel és vonalzóval elvégezhetők. E vizsgálatok mind analitikai természetűek. VERMES IMRE[5] 1964-ben ennek a fontos tételnek igen szép, teljesen elemi, tiszta geometriai bizonyítását közölte.

Ismeretes, hogy L. MASCHERONI 1797-ben Páviában megjelent „La geometria del compasso" című munkájában, amely munkát BOLYAI JÁNOS is ismer és dicsér,[6] megmutatta, hogy a körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztések csupán körzővel is elvégezhetők, feltéve, hogy az olyan feladatokat, amelyek egyenes meghatározását kívánják, megoldottnak tekintjük, ha az egyenesnek két pontját meg tudjuk szerkeszteni.

1964-ben megmutattam,[7] hogy a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometriában az összes elemi szerkesztések pusztán körzővel elvégezhetők. Sőt — mint később kimutattam[8] — a körző használatát meg lehet szorítani annyiban, hogy nem rajzolhatunk vele akármilyen nagy és akármilyen kicsiny sugarú kört, hanem csak olyant, amelynek ϱ sugarára az $r \leqq \varrho \leqq R$ egyenlőtlenség áll fenn, ahol r és R előre megadott hosszúságok és $r < R$.

[3] Geometriai szerkesztésekről Lobacsevszkij terében (O geometricseszkih posztroeniah v prosztransztve Lobacsevszkogo), In memoriam Lobatschevskiĭ, 2. köt. Kazan 1927, 1—16. l.

[4] Sur l'équivalence par rapport à la construction du complexe MB et du complexe E, C. R. (Doklady) Akad. Sci. URSS (N.S.), 22 (1939), 224—226. lap; l. még újabb dolgozatát: Sur la puissance constructive d'un complexe E sur le plan de Lobatschewski, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.), 43 (1944), 186—188. l.

[5] Rein geometrischer Beweis eines Satzes von N. M. Nestorovič, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. 7 (1964), 99—107. l.

[6] Hagyatékában egy papírlapon ezt a följegyzést olvassuk: „Mascheroni műve, Geometria del compasso, kétségtelen igen termékeny lángelmére vall, és a geometriai szerkesztéstanban korszakot alkot." Vö. P. STÄCKEL: Bolyai János térelmélete, Math. és Term.-tud. értesítő 21 (1903), 135—145. lap, s különösen 143. l.

[7] Konstruktionen allein mit dem Zirkel in der hyperbolischen Ebene, J. reine angew. Math. 214/215 (1964), 192—200. l.

[8] Konstruktionen mit Hilfe eines Zirkels mit beschränkter Öffnung in der hyperbolischen Geometrie, J. reine angew, Math. 278/279 (1975), 522—536. l. és kivonatban: Konstruktionen mit Hilfe eines Zirkels mit beschränkter Zirkelöffnung in der Bolyai—Lobatschewskyschen Geometrie. Congrès international des Mathématiciens, Nice 1970. Les 265 communications individuelles, 71. lap.

Már most az olyan geometriai szerkesztéseket, melyek az egymást nem metsző egyenesekre vonatkozó föltevéstől függetlenül helyes eredményre vezetnek, *abszolút szerkesztések*nek mondjuk. Ezek tehát úgy az euklideszi, mint a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometriában használhatók.

Egynéhány feladatnak ilynemű megoldásával már a régibb irodalomban is találkozunk,[9] de eddig csekély volt azoknak a kutatásoknak a száma, amelyek bizonyos segédeszközökkel elvégezhető szerkesztéseknek a párhuzamosok elméletétől függetlenül eszközölt vizsgálatával foglalkoznak.

Ebben az irányban az első közlemények J. HJELMSLEVtől valók. Az utolsó években ennek az elméletnek a kiépítésére irányuló eredményes hazai kutatások folytak.

Az e tárgykörbe tartozó eredmények közül csak a mai ünnepi alkalomra írt dolgozatom[10] eredményét legyen szabad röviden bemutatnom. Ez a következő.

Eddig az n-oldalú szabályos sokszög abszolút szerkesztése csupán olyan n körosztási számra volt ismeretes, melynek törzstényezőkre való bontásában a 2 hatványain kívül legfeljebb csak 3 és 5 lép föl tényezőül.

Dolgozatomban megmutatom, hogy ha n tetszés szerinti GAUSS-féle körosztási szám, akkor az n-oldalú szabályos sokszög szerkesztése abszolút szerkesztéssel megoldható. Ha a síkon rajzban meg van adva a sokszög köré írt kör és annak középpontja, akkor a szerkesztésnél a körző teljesen nélkülözhető.

Ez utóbbi eredmény azért meglepő, mert a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometriában nem lehet ily módon, a körző egyszeri használatával megoldani mindazokat a feladatokat, melyek a körző és vonalzó szabad használatával kivihetők. Így pl. valamely egyenes vonaldarab kétszerese általánosságban nem szerkeszthető meg egy, a középpontjával együtt megrajzolt kör segítségével.[11]

Mint érdekes mellékeredmény adódik, hogy a szabályos 17 oldalú sokszög STAUDT-féle szerkesztése[12] abszolút szerkesztés.

Evvel a BOLYAI JÁNOS geometriai szerkesztései nyomán keletkezett kutatásokról szóló ismertetésemet befejezem. Nem lehetett célom, hogy részletesen beszámoljak az elért eredményekről. Ebben a vázlatos áttekintésben csak BOLYAI eszméinek ma is élő hatását kívántam bemutatni.

О ТЕОРИИ КОНСТРУКЦИИ ГЕОМЕТРИИ БОЙОИ

ДЮЛА ШТРОММЕР

THE CONSTRUCTION THEORY IN THE BOLYAI GEOMETRY

GY. STROMMER

[9] E tekintetben csak a körhöz egy kívülfekvő pontból vont érintőknek ama szerkesztésére utalok, mely az EUKLIDESZ-féle „Elemek" III. könyvének 17. feladatában fordul elő.

[10] Szabályos sokszögek abszolút szerkesztése, Mat. Lapok 26 (1976), 1976, 161. l.

[11] L. pl. M. GROSSMANN: Projektive Konstruktionen in der hyperbolischen Geometrie, Math. Ann. 68 (1910), 141—144. l.

[12] CHR. V. STAUDT: Construction des regulären Siebenzehnecks, J. reine angew. Math. 24 (1842), 251. lap. L. még F. ENRIQUES: Fragen der Elementargeometrie, II. rész: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit, Leipzig 1907, 179—183. l.

GRÁFELMÉLET ÉS DISZKRÉT PROGRAMOZÁS

LOVÁSZ LÁSZLÓ

0. *Bevezetés*

Az utóbbi időben kiderült, hogy a diszkrét programozás és kombinatorika sokkal szorosabb kapcsolatban van egymással, mint ahogy korábban gondolták. A kombinatorika igen nagy része foglalkozik diszkrét struktúrák optimalizációs kérdéseivel, vagy átfogalmazható úgy, hogy ezzel foglalkozzon.

Általában a változók egész értékűek lehetnek, sőt még inkább 0 vagy 1 értékűek, és a feltételek és a célfüggvény ezek lineáris kifejezései. Így a kombinatorikai probléma lefordítható a lineáris, egész értékű programozás nyelvére. Persze, egy ilyen fordítás értéke attól függ, hogy ad-e új ötletet vagy módszert a megoldásra. Reméljük, hogy tudunk mutatni példát arra, hogy a diszkrét programozásra való áttérés nagyon hasznos, sőt nélkülözhetetlen a megoldáshoz. A továbbiakban gráfelméleti problémákra szorítkozunk.

Történetileg, a gráfelméletben az első olyan tétel, amelynek diszkrét programozási vonatkozásai vannak, a Házasítási (Párosítási) Tétel (König, 1913) volt. Lineáris programozás ebben az időben még nem is létezett, és egy fél évszázad telt el addig, amíg Ford és Fulkerson (1962) híres könyve megjelent, melyben a lineáris programozás egyik legelső alkalmazása található a gráfelméletre. Egy másik korai utalás erre a kapcsolatra Gallai (1958) cikkében található. Ma a kombinatorikai problémák lineáris programozási megfogalmazása egészen általános módszerré vált.

Ebben a cikkben először áttekintjük az egész értékű programozás néhány eredményét, melyeket sikeresen alkalmaztak a gráfelméletre, utána tárgyaljuk a gráfelmélet azon területeit, ahol az egész értékű programozási megközelítés a leghatékonyabbnak bizonyult. Nem térünk ki az olyan előrehaladottabb területekre, mint a „blokkoló" és „antiblokkoló" poliéderek elmélete és csak érintjük a gráfelmélet azon területeit, ahol a kombinatorikus, algoritmikus és diszkrét programozási ötletek egybeolvadása új tudományágat (mint a folyamelmélet, párosítások elmélete) hozott létre. Teljesen figyelmen kívül hagyjuk az algoritmikus szempontokat (bár lehet, hogy ezek a legfontosabbak). A fő célunk, hogy megmutassuk a gráfelmélet és diszkrét optimalizálás közötti kölcsönhatást; csak azokat a bizonyításokat mondjuk el, amelyek erre a legjellemzőbbek.

Másrészt, megadunk jónéhány gráfelméleti eredményt, melyeknek lineáris programozási „zamata" van, de nincs, mindezideig, ilyen úton való megoldása.

Ez a cikk (Lovász, 1978) bővített változata.

1. *Néhány előzetes tudnivaló a diszkrét programozásból*

A diszkrét (lineáris) programozás az alábbi problémával foglalkozik: keressük meg $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ maximumát (mondjuk), ahol $\mathbf{c}$ egy adott vektor, és $\mathbf{x}$ olyan rácspont (csupa egész koordinátájú vektor) mely eleget tesz egy

$$A\mathbf{x} \leqq \mathbf{b} \tag{1}$$

lineáris egyenlőtlenségnek.

(Az (1) egyenlőtlenségrendszer megoldásai egy véges sok síklap által határolt konvex halmazt, *poliédert* alkotnak. Ha egy poliéder korlátos, akkor *politopnak* hívjuk. A poliéder egy *támaszsíkja* az olyan hipersík, melynek van a poliéderrel közös pontja, de a poliéder minden pontja a hipersík által határolt egyik zárt féltérbe esik. A poliédernek és egy támaszsíkjának a metszetét *lapnak* nevezzük. *Valódi lapnak* hívjuk az olyan lapot, melyet más lap nem tartalmaz. Így a 3-dimenziós szóhasználatban a valódi lapokat nevezzük csak lapnak, a nem-valódi lapok az élek és a csúcsok.

A poliéderekre vonatkozóan számos olyan geometriai tényt, melyek jól ismertek és (legalábbis 3 dimenzióban) szemléletesen nyilvánvalóak, fel fogunk használni.)

Eldobva azt a feltételt, hogy $\mathbf{x}$ minden koordinátája egész, egy új problémához, a *folytonos relaxációhoz* jutunk, amely viszonylag könnyen megoldható. Mindenesetre a Dualitástételből levezethető az optimumra egy minimax formula.

Mivel $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ lineáris optimuma az (1) által definiált poliéder egy csúcsában éretik el (feltéve, hogy a poliéder korlátos, amit az egyszerűség kedvéért feltételezünk), ezért ha (1) csúcsai rácspontok, akkor a folytonos relaxációnak ugyanaz az optimuma, mint az eredeti diszkrét feladatnak. Így különösen fontos megtudni, hogy mikor lesznek rácspontok az (1) poliéder csúcsai. A következő tétel — különböző megfogalmazásban — benne van Gomory (1963), Chvátal (1973), Hoffman (1974), Fulkerson (1971), Edmonds és Giles (1976) eredményeiben. Itt közölt bizonyítása az említetteknél egyszerűbb.

1.1. TÉTEL. *Legyen P egy politop. Akkor és csak akkor rácspont P minden csúcsa, ha minden egész $\mathbf{c}$ vektorra* $\max\{\mathbf{cx}|\mathbf{x}\in P\}$ *egész szám.*

Bizonyítás. A tétel „csak akkor" fele triviális. Tegyük fel, hogy minden egész $\mathbf{c}$ vektorra $\max\{\mathbf{cx}|\mathbf{x}\in P\}$ egész szám, és legyen $\mathbf{x}_0$ P-nek egy csúcsa. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{x}_0$ rácspont.

Legyenek

$$\mathbf{a}_1\mathbf{x} \leqq b_1, \ldots, \mathbf{a}_p\mathbf{x} \leqq b_p$$

a P poliéder $\mathbf{x}_0$-t tartalmazó lapjai. Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ vektorok kifeszítik a teret. Ezért a

$$K = \{\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_p\mathbf{a}_p | \lambda_1, \ldots, \lambda_p \geqq 0\}$$

halmaznak van belső pontja és így természetesen van racionális belső pontja is. Ezt alkalmas egész számmal megszorozva olyan $\mathbf{c}$ vektort nyerünk, melyre

(1) $\mathbf{c}$ minden koordinátája egész, és

(2) $\mathbf{c}$-nek 1 sugarú környezete K-ban van.

Tekintsük a $\max\{\mathbf{cx}|\mathbf{x}\in P\}$ számot. Mivel $\mathbf{c}\in K$, így felírható $\mathbf{c} = \sum\lambda_i\mathbf{a}_i$ alakban, ahol $\lambda_i \geqq 0$. Így

$$\mathbf{cx} = \sum\lambda_i\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leqq \sum\lambda_i b_i,$$

másrészt

$$\mathbf{cx}_0 = \sum\lambda_i b_i,$$

tehát $\mathbf{cx}$ maximumát $\mathbf{x}_0$-ban veszi fel. Ezért $\mathbf{cx}_0$ egész szám. Jelölje $\mathbf{e}$ az $(1, 0, \ldots, 0)$ vektort. Ekkor $\mathbf{c}+\mathbf{e}\in K$ a feltétel szerint és ezért az előzőekhez hasonlóan $(\mathbf{c}+\mathbf{e})\mathbf{x}_0$ egész szám. Ezért $(\mathbf{c}+\mathbf{e})\mathbf{x}_0-\mathbf{cx}_0=\mathbf{ex}_0$ is egész szám. Ez azonban éppen $\mathbf{x}_0$ első koordinátájá. Hasonlóan adódik, hogy $\mathbf{x}_0$ többi koordinátája is egész szám.

Kérdés, hogyan lehet az (1.1) Tétel feltételének teljesülését ellenőrizni. Ez leggyakrabban úgy történhet, hogy adott $\mathbf{c}$ vektor esetén felírjuk a duális feladatot, majd megmutatjuk, hogy az ebben szereplő poliéder csúcsai rácspontok. Vagyis a tétel következménye:

1.2. KÖVETKEZMÉNY: Ha a $\max\{\mathbf{cx}|\mathbf{x}\in P\}$ feladat duálisában szereplő poliéder csúcsai $\mathbf{c}$ minden egész választása esetén rácspontok, akkor P csúcsai is rácspontok.

Néha elegendő a $\mathbf{c}$ vektorok egy szűkebb halmazát vizsgálni ebben a problémában (Lovász 1972):

1.2. TÉTEL. *Legyen A egy 0—1-mátrix. Akkor $\{A\mathbf{x}\leqq\mathbf{1},\ \mathbf{x}\geqq\mathbf{0}\}$-nak akkor és csak akkor rácspontok a csúcsai, ha*

$$\max\{\mathbf{cx}\,|\,A\mathbf{x}\leqq\mathbf{1},\ \mathbf{x}\geqq\mathbf{0}\}$$

értéke egész minden 0—1-es $\mathbf{c}$ vektorra.

Ennek az eredménynek sok változata van, legtöbbjük a gráfelméleti alkalmazások keresése során adódott (l. Lovász 1976).

A legfontosabb és leggyakrabban használt megfigyelést, amely olyan poliéderhez vezet, melynek csúcsai rácspontok, Hoffman és Kruskal (1956) találta:

1.3. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy A totálisan unimoduláris mátrix (azaz minden négyzetes almátrixának a determinánsa ±1 vagy 0), és $\mathbf{b}$ egy egész vektor. Akkor $\{\mathbf{x}|A\mathbf{x}\leqq\mathbf{b}\}$ csúcsai rácspontok.*

Bizonyítás: Minden csúcs néhány hipersík metszeteként áll elő, ahol a hipersíkok $\mathbf{a}_i\mathbf{x}=b_i$ alakúak, $\mathbf{a}_i$ az A mátrix i-edik sora és b_i a $\mathbf{b}$ vektor megfelelő koordinátája. Határozzuk meg ezt a pontot a Cramer-szabály segítségével ezekből az egyenletekből. A nevező A-nak egy nem-nulla aldeterminánsa, ezért ±1, a számlálók egészek. Így a megoldásnak is minden koordinátája egész.

Az unimodularitásnak a diszkrét programozásban játszott szerepére nézve l. A. J. Hoffman (1978) összefoglaló cikkét.

Tegyük fel most, hogy az (1) által meghatározott P poliédernek nem egészek a csúcsai. Ekkor a P-beli rácspontok $\tilde{P}$ konvex burka valódi részhalmaza P-nek. Ha fel tudunk írni egy lineáris egyenlőtlenségrendszert, amely $\tilde{P}$-ot adja meg, akkor a probléma legnehezebb részével újra készen vagyunk. Egy általános eljárás ezen egyenlőtlenségek megadására a következő.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{a}^T\mathbf{x}=b$ egy olyan hipersík, amely P-t egy csúcsában érinti, továbbá $\mathbf{a}^T$ egész vektor, de b nem az. Ekkor $\mathbf{a}^T\mathbf{x}\leqq[b]$ egy olyan egyenlőtlenség, amely levág egy darabot P-ből, de biztos, hogy semmit nem vág le $\tilde{P}$-ból. Az ily módon nyert egyenlőtlenségeket *vágásoknak* nevezzük. Gomory (1963) híres algoritmusából következik az alábbi tétel, melyet Chvátal (1973) tőle függetlenül, és közvetlenebb módon bizonyított:

1.4. TÉTEL: *Ha P politop, akkor alkalmasan választott vágásokat véve, véges sok lépésben eljutunk a P-beli rácspontok $\tilde{P}$ konvex burkához.*

A Gomory-algoritmus azt is megadja, hogy hogyan kell ezeket a vágásokat választani, de általában ez meglehetősen bonyolult. Némely esetben, pl. párosításokra, a megfelelő vágások igen elegánsan adhatók meg (Edmonds, 1965, lásd később).

Néhány jelölés a gráfelméletből

$V(G)$: a csúcspontok halmaza
$E(G)$: az élek halmaza
$\bar{G}$: a G gráf komplementere
$\nu(G)$: független élek maximális száma
$\alpha(G)$: független pontok maximális száma
$\tau(G)$: az összes élt lefogó pontok minimális száma
$q(G)$: az összes pontot lefedő élek minimális száma
$\chi(G)$: kromatikus szám
$\chi'(G)$: kromatikus index (élkromatikus szám)
$\omega(G)$: a G-ben található legnagyobb teljes gráf pontszáma.

2. *Folyamelmélet*

A diszkrét optimalizálás egy klasszikus gráfelméleti alkalmazásával kezdjük a tárgyalást.

Legyen G egy irányított gráf, két kitüntetett pontja a, b és egy $c(x, y) \geqq 0$ kapacitás legyen hozzárendelve minden (x, y) élhez.

Egy *folyam* egy olyan f függvény, amely minden élhez egy nemnegatív számot rendel hozzá úgy, hogy a Kirchoff-törvény teljesüljön, azaz

$$\sum_x f(x, p) = \sum_x f(p, x) \tag{1}$$

minden $p \neq a, b$ pontra. A folyam *értékének* nevezzük az alábbi mennyiséget:

$$v(f) = \sum_x f(a, x) - \sum_x f(x, a). \tag{2}$$

A folyam *megengedett*, ha minden (x, y) élre teljesül

$$0 \leqq f(x, y) \leqq c(x, y). \tag{3}$$

Az a feladatunk, hogy találjuk meg egy megengedett folyam maximális értékét.

Azonnal látható, hogy feladatunk egy lineáris programozási probléma; (1) és (3) a feltételek és (2) a célfüggvény. Még csak egészértékűségi feltételek sincsenek. Vegyük a feladat duálisát:

$$\min \sum_{x,y} g(x, y) c(x, y),$$

feltéve, hogy

$$g(x, y) \geqq h(x) - h(y),$$

$$g(x, y) \geqq 0,$$

$$h(a) = 1, \quad h(b) = 0.$$

ahol a $g(x, y)$ és $h(x)$ számok a változók.

Most már nagyon könnyen látható, hogy a duális feladat mátrixa totálisan unimoduláris, ezért az optimális megoldás keresése során feltehetjük, hogy $h(x)$, $g(x, y)$ egészek. Továbbá világos, hogy $0 \leqq h(x) \leqq 1$ és $g(x, y) = \max(0, h(x) - h(y))$. Így egy optimális megoldást az alábbi tulajdonságú S halmaz kijelölése ad meg:

$$a \in S, \quad b \notin S,$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in S \\ 0 & \text{ha } x \notin S \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in S, \ y \notin S \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

és így a maximális értékű megengedett folyam értéke:

$$\min_{a \in S \subseteq V(G) - b} \sum_{\substack{x \in S \\ y \notin S}} c(x, y).$$

Ez az eredmény a híres *Maximális-folyam—minimális-vágás*-tétel. Mivel az eredeti probléma mátrixa is totálisan unimoduláris, ezért ha a $c(x, y)$ kapacitások egészek, úgy valamelyik optimális folyam értéke egész.

A Maximális-folyam—minimális-vágás-tétel az említett kiegészítéssel jónéhány fontos gráfelméleti tételt tartalmaz, például a Menger-tételt (l. Berge 1973), de látszólag távoli kombinatorikai problémákra is alkalmazható, mint például bizonyos „feloldható" blokkrendszerek konstrukciója (Baranyai 1974).

Nem tudunk belemenni a folyamelmélet számos érdekes és különösen fontos kiterjesztésébe, de utalunk a következő cikkekre: Hu (1963), Rothschild és Whinston (1966), Hoffman (1974), és Hu (1970) monográfiájára.

3. *További minimax tételek*

A következő minimax tételt Robertson és Younger sejtette, és Lucchesi és Younger bizonyította 1973-ban. Lásd még Lovász (1976a).

Legyen G irányított gráf. Azt mondjuk, hogy egy S halmaz *meghatároz* egy D irányított vágást, ha $S \neq \emptyset$, $S \neq V(G)$ és nem halad él $(V(G) - S)$-ből S-be. Ekkor D-t azon élek alkotják, amelyek S-ből $(V(G) - S)$-be mennek.

3.1. TÉTEL: *Legyen G irányított gráf. Akkor a G-beli élfüggetlen, irányított vágások maximális száma egyenlő az összes irányított vágást lefogó élek minimális számával.*

Ha felírnánk a két lineáris programot, melynek egészértékű optimuma lenne a két kérdezett szám, egyik egészértékű programozási módszert sem tudnánk közvetlenül alkalmazni. Ezért némi kombinatorikus előkészítést kell előbb végeznünk.

Azt mondjuk, hogy az S_1 által definiált D_1 és az S_2 által definiált D_2 vágások *kereszteződőek*, ha $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, $S_1 \cup S_2 \neq V(G)$, $S_1 \not\subseteq S_2$ és $S_2 \not\subseteq S_1$. Ekkor $S_1 \cap S_2$ és $S_1 \cup S_2$ szintén egy-egy irányított vágást határoz meg, melyeket $D_1 \wedge D_2$, ill. $D_1 \vee D_2$-vel jelölünk.

Vizsgáljuk most az irányított vágás-pakolási feladatot. Minden irányított D vágáshoz hozzárendelünk egy x_D változót és

(1) $$\max \sum_D x_D$$

a célfüggvény, az

$$x_D \geqq 0 \quad (\forall D)$$

$$\sum_{D \ni e} x_D \leqq c(e) \quad (\forall e \in E(G)) \tag{2}$$

feltételek mellett, ahol a $c(e)$ mennyiségek tetszőleges nemnegatív egészek.

Legyenek D_1, D_2 kereszteződőek, és $0 < x_{D_1} \leqq x_{D_2}$. Legyen

$$\hat{x}_D = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad D = D_1 \\ x_{D_2} - x_{D_1} & \text{ha} \quad D = D_2 \\ x_{D_1 \wedge D_2} + x_{D_1} & \text{ha} \quad D = D_1 \wedge D_2 \\ x_{D_1 \vee D_2} + x_{D_1} & \text{ha} \quad D = D_1 \vee D_2 \\ x_D & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\hat{x}_D \geqq 0 \quad (\forall D)$$

$$\sum_{D \ni e} \hat{x}_D = \sum_{D \ni e} x_D \quad (\forall e)$$

és

$$\sum_D \hat{x}_D = \sum_D x_D.$$

Így ha (x_D) optimális megoldása (1)—(2)-nek, akkor $(\hat{x}_D)$ is az. Ezt az eljárást ismételve, könnyen látható, hogy nem kerülünk ciklusba, és véges számú lépés után eljutunk (1)—(2)-nek egy olyan optimális (x_D) megoldásához, melyre a

$$\mathscr{D} = \{D : x_D > 0\}$$

halmaz páronként nem kereszteződő irányított vágásokból áll. Ezzel (1)—(2)-t az alábbi feladattal helyettesítettük:

$$\max \sum_{D \in \mathscr{D}} x_D \tag{3}$$

feltéve, hogy

$$x_D \geqq 0 \qquad (\forall D \in \mathscr{D}),$$

$$\sum_{\substack{D \ni e \\ D \in \mathscr{D}}} x_D \leqq c(e) \quad (\forall e \in E(G)), \tag{4}$$

ahol $\mathscr{D}$ nem-kereszteződő vágások családjain fut végig. Jól ismert tény, hogy a (4) egyenlőtlenség mátrixa totálisan unimoduláris, így a Hoffman—Kruskal-tétel szerint $\sum x_D$ a maximumát csupa egész x_D értékek mellett is eléri. Speciálisan, ha $c(e) = 1$, akkor a maximum az élfüggetlen irányított vágások maximális száma lesz.

Vizsgáljuk most (1)—(2) duálisát; minden e élhez hozzárendelünk egy y_e változót; a célfüggvény

$$\min \sum_e c(e) y_e, \tag{5}$$

feltéve, hogy

$$y_e \geqq 0 \quad (\forall e),$$

$$\sum_{e \in D} y_e \geqq 1 \quad (\forall D), \tag{6}$$

A fentiek miatt tudjuk, hogy $\sum c(e) y_e$ minimuma egészértékű minden egész $c(e)$-re. Ezért az 1.2. tétel miatt, a (6) poliéder csúcsai rácspontok és így a minimum

az y_i-k egész értéke mellett is eléretik. Újra, ha $c(e)=1$, akkor a minimum az összes irányított vágásokat lefogó élek minimális számával egyenlő.

Edmonds és Giles (1976) általánosították Lucchesi—Younger tételét. Lovász (1976) bizonyította egy analogonját irányítatlan gráfokra.

A gráfelmélet egy kedvelt problémaköre különböző részgráfok pakolása. Nagyon kevés ismeretes irányított és irányítatlan körök pakolásáról; Gallai (1966) régi megoldatlan problémája, hogy az irányított körök fedési problémája és a duális probléma optimális megoldásainak a hányadosa korlátos marad-e.

Néhány eredmény ismeretes egy adott ponton átmenő körök pakolási problémáiról (Lovász 1976). Ez a kérdés igen erősen kapcsolódik az utak pakolási problémájához, amikor az utak mindkét végpontja egy kijelölt halmazra esik. Ezt a problémát vizsgálta Gallai (1966), Lovász (1970, 1976), Nash—Williams (1961), és teljesen megoldották Mader (1977) és Karzanov—Lomonoszov (1977).

Az alábbi problémák megoldottak: feszítő fák pakolása egy gráfba (Tutte 1961), gráf lefedése feszítő fákkal (Nash—Williams, 1964), adott pontban gyökerezett irányított fák pakolása (Edmonds, 1970), gyökerezett vágások pakolása (Fulkerson, 1974), gyökerezett irányított fákkal való lefedés (Frank 1977).

Véleményem szerint ezen eredmények között a mélyebb összefüggést még nem találtuk meg, különösen az egészértékű programozás szempontjából.

4. *Párosítás*

A következőkben négy fontos gráfelméleti optimalizálási problémát vizsgálunk.

a) *párosítás:* adott egy G gráf, határozzuk meg a független élek számának maximumát, $\nu(G)$-t.

b) *pontpakolás:* határozzuk meg a független pontok maximális számát, $\alpha(G)$-t.

c) *élek lefogása pontokkal:* határozzuk meg az összes élt lefogó pontok minimális számát, $\tau(G)$-t.

d) *pontok lefedése élekkel:* határozzuk meg az összes pontot lefedő élek minimális számát, $q(G)$-t.

Mindegyik esetben súlyozhatjuk az elemeket (pontokat vagy éleket) és meg akarjuk határozni a tekintett halmaz optimális teljes súlyát.

A fenti problémák nem függetlenek. Egy pont-fedés komplementere egy független ponthalmaz és viszont, ezért:

$$\alpha(G)+\tau(G) = |V(G)|.$$

A következő észrevétel kevésbé triviális:

$$\nu(G)+q(G) = |V(G)|.$$

A két utóbbi összefüggést *Gallai-azonosságoknak* nevezik. Ezek biztosítják, hogy szorítkozhatunk az a) és b) problémák megoldására.

Továbbá ez a két probléma sem független: a párosítási probléma gráf élgráfjának pontpakolási problémájával ekvivalens. De a párosítási probléma sokkal egyszerűbb abban az értelemben, hogy sokkal több mondható róla.

Ha a lineáris programozást akarjuk használni, be kell vezetnünk az alábbi fogalmat. Legyen $V(G)=\{v_1, \ldots, v_n\}$, $E(G)=\{e_1, \ldots, e_m\}$. Legyen $A=(a_{ij})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}$ a G gráf pont-él incidencia-mátrixa, azaz:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } v_i \in e_j \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyenek $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ változók. Azonosítsunk minden $S \subseteq V(G)$ halmazt a *karakterisztikus vektorával,* melyben

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } v_i \in S, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Hasonlóan, minden $T \subseteq E(G)$ halmaz egy m-dimenziós vektorral azonosítunk. Jelölje $M(G)$ és $PP(G)$ az összes párosítások, ill. az összes pont-pakolások konvex burkát. Ezek nyilván politopok. Ha felírjuk a politopokat meghatározó lineáris egyenlőtlenségrendszert, más szóval, ha megtaláljuk ezen politopok valódi lapjait, akkor, legalábbis bizonyos értelemben, megkaphatjuk az a) és b) problémák optimumát. Valóban, a $\sum_{j=1}^{m} y_j$ kifejezést maximalizálva (mondjuk) az $M(G)$ politopon, megkapjuk a független élek maximális számát, mivel mindig létezik egy olyan optimális megoldás, amely $M(G)$-nek csúcsa, azaz párosítás.

Próbáljuk meg felírni először is ezekre a politopokra érvényes egyenlőtlenségeket és akkor látni fogjuk, hogy milyen közel vagyunk a megoldáshoz. Világos, hogy minden $\mathbf{y} = (y_j)_{j=1}^{m}$ párosításra teljesül

$$A\mathbf{y} \leqq \mathbf{1} \tag{1}$$

$$\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$$

vagy részletesen kiírva:

$$\sum_{e_j \ni v_i} y_j \leqq 1 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1'}$$

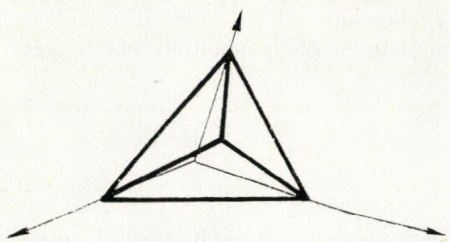
$$y_j \geqq 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

Hasonlóan, minden $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{n}$ független ponthalmazra teljesül

$$A^T\mathbf{x} \leqq \mathbf{1} \tag{2}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$

Általában az $M(G)$, $PP(G)$ politopok valódi részhalmazai az (1), (2) politopoknak. Legyen például G egy háromszög, akkor az (1) politop tartalmazza az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ pontot, amelyet nem kapunk meg párosítások konvex kombinációjaként (l. 1. ábra).



1. ábra

Azonban, az (1)-et kielégítő minden *rácspont* egy párosítás; ezért természetes, hogy az (1)- és (2)-beli pontokat *tört-párosításoknak,* ill. *tört-pontpakolásoknak* nevezzük.

Jelöljük az (1) és (2) politopokat ennek megfelelően $FM(G)$ és $FPP(G)$-vel

A páros gráfok esete nagyon egyszerű és jólismert:

4.1. TÉTEL: *A következő tulajdonságok ekvivalensek:*

(i) *G páros gráf;*

(ii) *a gráf pont-él-incidenciamátrixa totálisan unimoduláris;*

(iii) *$FM(G)$ csúcsai rácspontok, azaz $FM(G) = M(G)$;*

(iv) *$FPP(G)$ csúcsai rácspontok, azaz $FPP(G) = PP(G)$.*

A 4.1. Tételnek igen fontosak a következményei a páros gráfokra. $\nu(G)$ az egészértékű optimuma $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x}$-nek az (1) feltétel mellett. Mivel $FM(G)$ csúcsai egészek, ez megegyezik a valós optimummal. A duális probléma, $\mathbf{y} \cdot \mathbf{1}$ minimalizálása a (3) feltétel mellett, $\tau(G)$-t adja. Így a Dualitás-tételből következik:

4.2. KÖNIG-TÉTEL: *Páros gráfban* $\nu(G)=\tau(G)$.

Ha nem-páros gráfokra akarunk áttérni, akkor két kérdéssel kerülünk szembe:
a) adjuk meg az $FM(G)$, $FPP(G)$ politopok csúcsait;
b) adjuk meg $M(G)$ és $PP(G)$ valódi lapjait.
Az első kérdés könnyebb, teljesen meg van oldva (Balinski 1972, Balinski és Spielberg 1969, Nemhauser és Trotter 1974).

4.3. TÉTEL: Legyenek a G gráfban $C_1, \ldots, C_p$ független páratlan körök és legyen M egy párosítás, mely pontfüggetlen a C_i köröktől. Legyen

$$y_i = \begin{cases} 1/2 & \text{ha} \quad e_i \in C_1 \cup \ldots \cup C_p \\ 1 & \text{ha} \quad e_i \in M, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor (y_i) $FM(G)$-nek egy csúcsa és $FM(G)$ minden csúcsát megkapjuk így.

4.4. TÉTEL: *Legyen G egy gráf, továbbá $\{A, B, C\}$ legyen a pontok $V(G)$ halmazának egy olyan particiója, melyben* (a) *az A-beli pontok függetlenek,* (b) *B tartalmazza az A-beliek szomszédait, és* (c) *a C-beliek által feszített részgráfnak nincs páros gráf komponense. Ekkor*

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad v_i \in A \\ 0 & \text{ha} \quad v_i \in B \\ 1/2 & \text{ha} \quad v_i \in C \end{cases}$$

$FPP(G)$-nek lesz csúcspontja és $FPP(G)$ minden csúcspontját megkapjuk A, B, C alkalmas választása esetén.

Ezeknek az eredményeknek számos gráfelméleti alkalmazásuk van. Néhányat megemlítünk. Tutte (1953) egy élhalmazt q-faktornak nevez, ha pontdiszjunkt körökből és élekből áll, és minden pontot lefog.

4.5. TÉTEL: *Egy gráfban akkor és csak akkor van q-faktor, ha minden független pontokból álló A halmaznak legalább $|A|$ szomszédja van.*

J. Edmonds vette észre ezen eredmény következő verzióját. Egy 2-*párosítás* éleknek egy olyan halmaza, hogy bármelyik pont legfeljebb kettőhöz tartozik.
Egy 2-*lefogás* pontoknak egy olyan halmaza, hogy minden él legalább kettőt tartalmaz közülük.

4.6. TÉTEL: *Egy 2-párosításbeli élek maximális száma megegyezik a 2-lefogás pontok minimális számával.*

Vizsgáljuk most az $M(G)$ lapjainak kérdését. Ezt a problémát Edmonds (1965) oldotta meg.

4.7. TÉTEL: $M(G)$-t az alábbi egyenlőtlenségek írják le:

(I) $$y_j \geqq 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

(II) $$\sum_{e_j \ni v_i} y_j \leqq 1 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

(III) $$\sum_{e_j \subseteq S} y_j \leqq \frac{|S|-1}{2} \quad (S \subseteq V(G),\ |S| \text{ páratlan})$$

Továbbá, minden egész együtthatós lineáris célfüggvényre a duális problémának az optimális megoldása egészértékű.

Így ahhoz, hogy $FM(G)$-ből megkapjuk $M(G)$-t, csak a (3)-beli vágások szükségesek, sőt nem is az összes, mert Edmonds és Pulleyblank (1974) bebizonyították:

4.8. TÉTEL: $\sum_{e_j \subseteq S} y_j \leqq \frac{|S|-1}{2}$ *az* $M(G)$*-nek akkor és csak akkor valódi lapja, ha* S *olyan kétszeresen összefüggő* G' *gráfot feszít ki, hogy minden* $v \in S$ *pontra a* $G'-v$ *gráfban van teljes párosítás.*

A két utóbbi tételt levezethetjük az Edmonds-féle párosítási algoritmusból. Most csak vázoljuk a 4.7. tétel első felének és a 4.8. tételnek egy direkt bizonyítását.

Legyen

(3) $$\sum_{i=1}^{m} a_i y_i \leqq b$$

$M(G)$-nek egy lapja; meg akarjuk mutatni, hogy ekkor (3) ekvivalens az I, II, III típusú egyenlőtlenségek valamelyikével.

1. Eset: Tegyük fel, hogy van egy olyan i_0, melyre $a_{i_0}<0$. Ekkor minden (y_i) párosításra, amely (3)-ban az egyenlőséget adja, $y_{i_0}=0$-nak kell teljesülnie. Következésképpen, (3)-nak az $y_{i_0} \geqq 0$ lappal kell megegyeznie.

2. Eset: Tegyük fel, hogy v_j egy olyan pont, hogy minden olyan párosítás, amelyre (3)-ban az egyenlőség teljesül, tartalmaz egy olyan élt, amelyik illeszkedik v_j-hez. Ekkor minden ilyen párosításra $\sum_{e_i \ni v_j} y_i = 1$ és ezért (3)-nak egybe kell esnie a $\sum_{e_i \ni v_j} y_i \leqq 1$ lappal.

3. Eset: Tegyük fel, hogy $a_i \geqq 0$ teljesül minden i-re, és minden j csúcshoz található egy olyan párosítás, amely elkerüli v_j-t és (3)-ban az egyenlőséget adja.

Legyen G' az azon e_i élekből alkotott gráf, amelyekre $a_i>0$. Könnyen látható, hogy G' összefüggő. Megmutatjuk, hogy nincs a G gráfban olyan párosítás, amely (3)-ban egyenlőséget ad és G'-nek két pontját is elkerüli.

Tegyük fel ugyanis, hogy M_1 elkerüli $v, w \in V(G')$-t. Válasszuk v, w-t úgy, hogy G'-beli távolságuk minimális legyen. Világos, hogy v és w nem lehet összekötve G'-beli éllel, így választhatunk egy z pontot a v, w-t összekötő legrövidebb úton. Legyen M_2 egy olyan párosítás, melyre (3)-ban egyenlőség teljesül és elkerüli z-t. Az indukciós feltevés szerint, M_1 lefedi z-t és M_2 lefedi v-t és w-t is. Vegyük $M_1 \cup M_2$ azon összefüggő komponenseit, amelyek tartalmazzák v-t, illetőleg w-t. Ezek a komponensek utak, lehet hogy egybeesnek, de legalább az egyikük, mondjuk P, elkerüli z-t.

Legyen

$$M' = [M_1 - (M_1 \cap P)] \cup (M_2 \cap P)$$

és

$$M'' = [M_2 - (M_2 \cap P)] \cup (M_1 \cap P).$$

Ekkor M' és M'' párosítások, továbbá extremálisak, mert

$$2b \geqq \sum_{e_i \in M'} a_i y_i + \sum_{e_i \in M''} a_i y_i = \sum_{e_i \in M_1} a_i y_i + \sum_{e_i \in M_2} a_i y_i = 2b.$$

De így M'' olyan extremális párosítás, amely elkerüli z-t v és w egyikét, ellentétben v és w választásával.

Most már könnyen következik, hogy ha $V(G') = S$, akkor $|S|$ páratlan és minden párosítás, melyre (3)-ban egyenlőség teljesül, kielégíti a

$$\sum_{e_j \subset S} y_j = \frac{|S|-1}{2}$$

összefüggést. Következésképpen, a (3) lap (III) alakú.

Edmonds tételének fenti bizonyítása már tartalmazza a 4.8. tétel „csak akkor" felét. Az „akkor" irány bizonyítása végett tekintsük a

$$\sum_{e_j \subseteq S} y_j \leqq \frac{|S|-1}{2} \tag{4}$$

egyenlőtlenséget, ahol az S által feszített G' részgráf kétszeresen összefüggő, és bármely $v \in S$-re $G' - v$-nek van teljes párosítása. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $G' = G$; az általános eset erre könnyen visszavezethető. Ha (4) nem volna lapja G-nek, akkor volna G-nek olyan

$$\sum_{j=1}^{m} a_j y_j \leqq b \tag{5}$$

lapja, mely tartalmazza $M(G)$ minden olyan csúcsát, amely (4)-ben egyenlőséget ad. Állítjuk, (5)-ben G minden éle ugyanazzal az együtthatóval szerepel; ekkor (5) nyilván ekvivalens (4)-gyel.

Tegyük föl tehát, hogy az (5)-ben szereplő együtthatók nem mind egyenlőek. Mivel G összefüggő, van olyan v pont, melyhez illeszkedik két, (5)-ben különböző együtthatóval szereplő él. Osszuk a v-re illeszkedő éleket két osztályba, egyikbe téve az (5)-ben bizonyos súllyal fellépő éleket, a másikba a többit. Helyettesítsük v-t két ponttal, v'-vel és v''-vel úgy, hogy v'-re csak az első osztálybeli, v''-re csak a második osztálybeli élek illeszkedjenek (v-t „széthasítottuk" két pontra). Jelölje G'' a kapott gráfot. Állítjuk, hogy G''-ben van teljes párosítás. Ez könnyen adódik, ha Tutte következő klasszikus tételét használjuk:

4.9. TUTTE TÉTELE: *Egy G gráfban akkor és csakis akkor van teljes párosítás, ha bármely $X \subseteq V(G)$ halmazra a $G - X$ gráf páratlan komponenseinek száma legfeljebb $|X|$.*

(Megjegyezzük, hogy Tutte tétele Edmonds tételéből is levezethető.) A Tutte-tétel feltételei a G'' gráfra könnyen ellenőrizhetők a G'-re tett feltevéseink alapján

Legyen mármost F G''-nek egy teljes párosítása, és legyen pl. e_1, ill. e_2 F-nek v'-re, ill. v''-re illeszkedő éle. Ekkor $F - e_1$ és $F - e_2$ G-nek maximális párosításai,

és (4)-ben egyenlőséget adnak. Ezért (5)-ben is egyenlőséget kell, hogy szolgáltassanak, vagyis

$$\sum_{e_i \in F-e_1} a_i = b = \sum_{e_i \in F-e_2} a_i.$$

Innen azonban $a_1 = a_2$, ami ellentmond annak, ahogyan v-t „széthasítottuk".

Edmonds tételének számos alkalmazása van a gráfelméletben. Mint már említettük, Tutte híres feltétele teljes párosítás létezésére levezethető belőle.

Mutassunk be most egy másikat:

Egy gráf kromatikus indexét a következőképp definiáljuk: a legkisebb olyan természetes szám, ahány színnel az élek kiszínezhetők úgy, hogy közös végponttal rendelkező élek különböző színűek legyenek. Világos, hogy ez a szám legalább akkora, mint a maximális fokszám és igen gyakran nagyobb. *K-regulárisnak* nevezzük az olyan gráfot, melyben minden pont foka k. A következő eredmény Edmondstól (1965) származik.

4.10. TÉTEL: *Legyen G egy k-reguláris, k-szorosan élösszefüggő, páros sok pontú gráf. Ekkor létezik olyan t szám, hogy ha minden él helyébe t párhuzamos élt teszünk, akkor az eredményül kapott G gráf kromatikus indexe kt.*

Bizonyítás: Vegyük az $\left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right)^T$ pontot. Egyszerű számolás mutatja, hogy ez kielégíti az Edmonds-tétel mindhárom típusú egyenlőtlenségét, így $M(G)$-be tartozik. Ezért előállítható $M(G)$ csúcsainak konvex kombinációjaként:

$$\left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right)^T = \sum_{n=1}^{N} \alpha_i F_i, \quad \sum_{n=1}^{N} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqq 0,$$

az F_i-k párosítások. Világos, hogy feltehetjük, hogy az α_i-k racionálisak. Legyen P a $k\alpha_i$ számok közös nevezője, és $k\alpha_i = P_i/P$. Ekkor

$$(P, \ldots, P)^T = \sum_{i=1}^{N} P_i F_i, \quad \sum_{i=1}^{N} P_i = kP.$$

Így, ha az éleket P-szerezzük, akkor az eedményül kapott gráf felbomlik $\sum P_i = kP$ párosítás uniójára.

Megjegyzés: P minimális értéke itt nem ismeretes. Fulkerson egy sejtése szerint $k=3$-ra $P \leqq 2$. Seymour (1977) bebizonyította, hogy ha $k=3$, akkor P választható egy 2-hatványnak.

Egy második alkalmazás, amelyben az Edmonds-tétel teljes ereje használható, az ún. Kínai Postás Probléma (Edmonds és Johnson (1973)). A postásnak egy város minden utcáján át kell haladnia és vissza kell térnie a postahivatalba. Minimalizálni akarja az egész út hosszát. Más szavakkal: adott egy összefüggő G gráf, minden éléhez hozzá van rendelve egy c_i „hosszúság". Keressünk egy zárt sétát, amely minden élt legalább egyszer tartalmaz és minimális hosszúságú. Ez motiválja a következő átfogalmazást: Keressünk G-ben egy minimális összhosszúságú olyan $\mathscr{P}$ élhalmazt, amelyben minden G-beli x ponthoz illeszkedő $\mathscr{P}$-beli élek számának paritása megegyezik x fokának paritásával.

Osszuk a páratlan fokú pontokat (x_i, y_i) $(i=1, \ldots, t)$ párokba és vegyünk egy P_i utat, mely x_i-t összeköti y_i-vel. Ekkor $\mathscr{P} = \sum_{i=1}^{t} P_i$ a kívánt tulajdonságú

élhalmaz. Fordítva, könnyű látni, hogy egy optimális $\mathscr{P}$ ilyen módon származik. $\mathscr{P}$ totális hosszúsága megegyezik a P_i-k hosszának összegével. Így a problémát a következő formára hoztuk: jelölje $d(x, y)$ a minimális G-beli (x, y) út hosszát. Osszuk G páratlan fokú pontjait $(x_1, y_1), \ldots, (x_t, y_t)$ párokba úgy, hogy $\sum_{i=1}^{t} d(x_i, y_i)$ minimális legyen.

De ez ekvivalens a következő problémával: keressünk egy minimális súlyú párosítást a G-beli páratlan fokú pontok által alkotott teljes gráfon. A feladat megoldható a párosítás-elmélet módszereivel.

5. *Pont-pakolás*

A pont-pakolási politopnak sokkal bonyolultabb a szerkezete. Korábban megjegyeztük, hogy ha G páros gráf, akkor $PP(G)=FPP(G)$. Ha G nem páros, akkor $PP(G)$-nek kell, hogy legyen olyan lapja, amely bonyolultabb formájú, mint $FPP(G)$ lapjai. A következő típusú lapok rögtön szembe tűnnek:

$$\sum_{i \in C} x_i \leqq 1, \tag{6}$$

ahol C egy tetszőleges teljes részgráf (Fulkerson 1971). A páros gráfoknál bővebb azon gráfok osztálya, amelyeknél csak a (6) típusú lapok lépnek fel, és gráfelméleti szempontból nagyon érdekes.

*Perfekt*nek nevezünk egy G gráfot, ha minden G' részgráfra teljesül a $\chi(G')=\omega(G')$ egyenlőség. Ezt a fogalmat Berge (1961) vezette be. Sok példát ismerünk perfekt gráfokra. A legfontosabb valószínűleg a következő:

Legyen $V(G)$ egy részben rendezett halmaz és kössünk össze két pontot, ha összehasonlíthatók.

Legyen G egy gráf és legyenek $H_x\big(x \in V(G)\big)$ pontidegen gráfok. Tekintsük $\bigcup_x H_x$-et és vegyük hozzá a H_x és H_y közötti összes élt, ha $(x, y) \in E(G)$. Azt mondjuk, hogy az eredményül kapott gráfot G pontjait a H_x-ekkel helyettesítve kapjuk. A következő tétel ezt a konstrukciót használja (Lovász 1972); a bizonyítása egészen könnyű és elemi.

5.1. TÉTEL: *Perfekt gráfok pontjait perfekt gráfokkal helyettesítve perfekt gráfot kapunk.*

A következő eredmény újabb példákat szolgáltat (Lovász 1972).

5.2. TÉTEL: *Perfekt gráf komplementere perfekt.*

Ezt a tételt Berge (1962) sejtette. Fulkerson (1971, 1972) fedezte fel a lineáris programozással való szoros kapcsolatát, és némileg gyengébb formában be is bizonyította.

Az 5.2. Tételt a következő tétellel (Fulkerson; Chvátal 1973) együtt igazoljuk:

5.3. TÉTEL: *G akkor és csak akkor perfekt, ha az*

$$\begin{gathered} x_i \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \\ \sum_{i \in C} x_i \leqq 1 \quad (\forall\, G\text{-beli teljes } C \text{ részgráfra}) \end{gathered} \tag{7}$$

politopnak egészek a csúcsai.

Megmutatjuk, hogy ha G perfekt $\Rightarrow$ (7) csúcsai egészek $\Rightarrow \bar{G}$ perfekt. A ciklus úgy záródik, hogy G és $\bar{G}$ szerepét felcseréljük.

I. Tegyük föl először, hogy G perfekt. Legyen $\mathbf{x}$ (7)-nek egy csúcsa. Világos, hogy $\mathbf{x}$ racionális, így valamely egész $k \geqq 0$-ra, $k\mathbf{x}=(p_1, \ldots, p_n)$ rácspont. Helyettesítsünk egy p_i pontú teljes gráfot v_i helyébe $(i=1, \ldots, n)$. Legyen C' az eredményül kapott G' gráf egy teljes részgráfja és legyen C a „vetülete" G-re. Ekkor

$$|C'| \leqq \sum_{i \in C} p_i = k \sum_{i \in C} x_i \leqq k.$$

Mivel G' perfekt, ezért 3.12. szerint $\chi(G')=\omega(G') \leqq k$. Legyen $\{A_1', \ldots, A_k'\}$ A-nek egy k-színezése és legyen A_i az A_i' „vetülete" G-re és $\mathbf{a}_i$ a megfelelő vektor. G' v_i helyébe tett teljes gráf pontosan p_i darab A_i-t metsz, és ezért

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i = \mathbf{x}.$$

Mivel $\mathbf{x}$ csúcspont, ezért $\mathbf{x}=\mathbf{a}_1=\ldots=\mathbf{a}_k$, azaz $\mathbf{x}$ rácspont.

II. Tegyük fel, hogy (7) csúcsai egészek. Megjegyezzük, hogy G feszített részgráfjainak is megvan ugyanez a tulajdonsága, mivel a megfelelő politopok (7) lapjai.

(7)-nek az $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x}=\omega(G)$ lapját különböző lapok tartalmazzák, legalább egy olyan, melyiket egy $\sum_{i \in C} x_i \leqq 1$ egyenlőtlenség határoz meg. Ez kombinatorikára átfogalmazva azt jelenti, hogy a C teljes részgráf minden maximális elemszámú független halmazba belemetsz, azaz $\alpha(G-C)<\alpha(G)$. Ezt a meggondolást ismételve, $\alpha(G)$ darab teljes gráfot kapunk, melyek G összes pontját lefedik. Ez bizonyítja, hogy $\chi(\bar{G})=\alpha(G)=\omega(\bar{G})$. Mivel ez G feszített részgráfjaira is hasonlóan következik, azt kapjuk, hogy G perfekt.

Igen természetes feladat azon gráfok vizsgálata, amelyek nem perfektek, de minden részgráfjuk perfekt. Nevezzük ezeket a gráfokat kritikusan nemperfekteknek. Berge híres erős perfekt-gráf-sejtése szerint kritikusan nemperfekt gráf csak egy 5-nél nem rövidebb páratlan, húrnélküli kör, vagy ennek komplementere lehet.

Ismert (Lovász 1973), hogy

5.4. TÉTEL: *Egy kritikusan nem perfekt gráfnak* $\alpha(G)\omega(G)+1$ *pontja van.*

Padberg (1974, 1975) bizonyította be ezen gráfokra több más érdekes strukturális eredmény mellett, hogy

5.5. TÉTEL: *Ha* G *kritikusan nemperfekt gráf, akkor a* (7) *politopnak pontosan egy nem-egész csúcsa van* $\left(az\ \frac{1}{\varphi(G)} \cdot \mathbf{1}\ pont\right)$ *és ezt pontosan* n *lap tartalmazza.*

További érdekes eredményeket bizonyítottak a perfektségről Chvátal (1975), Meyniel (1976), Parthasarathy és Ravindra (1975).

Itt jegyezzük meg, hogy az úgynevezett Rosenfeld-szám, $\alpha^*(G)=\max\{\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} | (7)\}$, igen fontos szerepet játszik a kódolás-elméletben, a gráfok úgynevezett Shannon-kapacitásával kapcsolatban [Rosenfeld (1976)].

A Berge-sejtés azt sugallja, hogy $PP(G)$ valódi lapjainak további osztályai vezethetők le a G vagy $\bar{G}$-beli húrnélküli, páratlan C körökből. Tegyük fel először, hogy G egy páratlan kör. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq \frac{n-1}{2} \tag{8}$$

valódi lap. Hasonlóan, ha G egy páratlan kör komplementere, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq 2 \tag{9}$$

valódi lap. Most ha egy G páratlan kör feszített részgráfja G_1-nek, akkor (8) $PP(G_1)$-nek egy lapját szolgáltatja. Megadható ugyanis egy általános „felemelési" eljárás, amely $PP(G)$ egy lapjából $PP(G_1)$ egy lapjához vezet, ahol G a G_1 feszített részgráfja. Geometriailag ez a következőképpen írható le. Elegendő a $G=G_1-v_1$ esetet tekinteni. Legyen F G-nek egy lapja. Mivel $PP(G)=PP(G_1)\cap$ $\cap\{x_1=0\}$, F $(n-2)$-dimenziós lapja $PP(G)$-nek és így $PP(G)$ két valódi lapjának metszete. Világos, hogy az egyik ezek közül $x_1=0$, a másik F-nek a „felemeltje". Például, az ötszög $x_1+\ldots+x_5\leqq 2$ lapjának felemeltjeként az „5-kerék" $x_1+\ldots$ $\ldots+x_5+2x_6\leqq 2$ lapját nyerjük (2. ábra).

2. ábra

Így bizonyos értelemben elég azokat a „lényeges" valódi lapokat vizsgálni, amelyek nem adódnak ki más valódi lapok felemeléseként. Ezt az eljárást Padberg (1973), Nemhauser és Trotter (1974) találták.

A valódi lapok egy érdekes osztályát határozta meg Chvátal (1975). Nevezzünk egy G gráfbeli e élt *α-kritikusnak*, ha $\alpha(G-e)>\alpha(G)$.

5.6. TÉTEL: *Legyen G egy olyan gráf, melynek α-kritikus élei összefüggő, feszítő részgráfot alkotnak. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq \alpha(G) \tag{10}$$

$PP(G)$-nek egy valódi lapját határozza meg.

Bizonyítás. Világos, hogy (10) $PP(G)$ minden pontjára érvényes egyenlőtlenség. Hogy megmutassuk, hogy (10) valódi lap, elegendő bebizonyítani, hogy ha

$$\mathbf{ax} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqq b \tag{11}$$

olyan lapja $PP(G)$-nek, hogy minden maximális elemszámú független halmazra az egyenlőség teljesül, akkor $a_1=\ldots=a_n$. Tegyük fel indirekte, hogy (mondjuk) $a_1\neq a_2$. Feltehetjük, hogy v_1 és v_2 össze vannak kötve. Legyen T egy $\alpha(G)+1$ elemű független halmaz $G-(v_1, v_2)$-ben. Nyilvánvaló, hogy $v_1, v_2\in T$. Legyen $T-v_i$ karakterisztikus vektora $\mathbf{x}^{(i)}$ $(i=1, 2)$. Ekkor

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(2)} = a_2-a_1\neq 0,$$

így lehetetlen, hogy $\mathbf{x}^{(1)}$ és $\mathbf{x}^{(2)}$ mindketten egyenlőséget adjanak (11)-ben.

Ezek a lapok lehetnek lényegesek, de nem biztos, hogy lényegesek. Nagyon komplikált lehet azon gráfok szerkezete, amelyekre a 3.17. tétel alkalmazható, például az összes összefüggő α-kritikus gráf köztük van. Ez a tény már mutatja, hogy $PP(G)$ lapjainak általános leírása az Edmonds-tétel szellemében reménytelen.

Azonban lehetnek gráfoknak olyan fontos osztályai, melyekre $PP(G)$ lapjai leírhatók. Minty (1977) egy friss eredménye rámutat egy ilyen osztályra. Minty egy polinom-korlátos algoritmust ad meg $\alpha(G)$ meghatározására abban az esetben, ha G-ben nincs feszített részgráfként 3 ágú csillag vagy *karom* (azaz 4 pont, a, b, c, d, melyekre $(a, b), (a, c), (a, d) \in E(G)$, $(b, c), (c, d), (b, d) \notin E(G)$).

Mivel minden élgráf karom-mentes (de megfordítva nem), ez az eredmény jelentősen kiterjeszti Edmonds maximális párosításokra vonatkozó algoritmusát. Azt várhatnánk, hogy hasonlóan, a párosítási politop Edmond-féle leírása (amely ekvivalens az élgráf pont-pakolási politopja lapjainak leírásával) kiterjeszthető a karom-mentes gráfok lapjainak leírására. Igen érdekes, hogy a karom-mentes gráfok máshol is szerepet játszanak a függetlenségi szám vizsgálata során: Parthasarathy és Ravindra (1975) eredménye azt mondja ki, hogy az erős perfekt-gráf-sejtés igaz a karommentes gráfokra.

Nemhauser és Trotter (1975) érdekes eredményével fejezzük be ezt a témát, mely *FPP* és *PP* együttes vizsgálatának fontosságát húzza alá.

5.7. TÉTEL: *Legyen* $\mathbf{x}_0$ *$FPP(G)$-nek egy olyan csúcsa, amely* $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x}$ *maximumát adja. Ekkor $PP(G)$-nek van egy olyan* $\mathbf{x}_1$ *csúcsa, amelyre* $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x}$ *maximális (azaz egy maximális független halmaz) és mely megegyezik* $\mathbf{x}_0$*-lal mindazon koordinátákban, melyek egészek.*

Befejező megjegyzések

1. Egy további terület a lineáris programozás gráfelméleti alkalmazásaira a Hamilton-körök problémája. Ez kapcsolatban van a jólismert Utazó Ügynök Problémájával. Itt csak Chvátal (1973), Bellmore és Nemhauser (1968), Christofides (1975), Grötschel (1977) munkáit említjük.

2. A vizsgálatok egy korábbi lehetséges iránya a gráfok kromatikus számának vizsgálata. Definiálhatjuk a kromatikus számot, mint egy lineáris program diszkrét optimuma és a megfelelő folytonos optimumot vizsgáljuk. Perfekt gráfokra a kettő ugyanaz, de nagyon kevés ismeretes a kapcsolatukról általában. Lásd például M. Rosenfeld (1967), Stahl (1976), Lovász (1975) és Chen, Hilton (1977).

3. Igen gyakran érdekes kérdés, hogy egy kombinatorikus úton definiált politop két csúcsa mikor szomszédos. Ez meg van oldva $M(G)$-re és $PP(G)$-re (Chvátal 1975) és néhány más osztályra (Hausmann és Korte 1976).

Ez is mutatja, hogy milyen kevés ismeretes a nem-valódi lapok szerkezetéről általában.

4. Ha nincs is remény egy politop lapjainak teljes leírására (pl. $PP(G)$ esetén), még mindig megmarad az a lehetőség, hogy valamilyen osztályozást adjunk meg. Ezt a reményt az indokolja, hogy az α-kritikus gráfoknak megadható bizonyos osztályozása (Lovász 1977). Lehetséges, hogy $PP(G)$ lapjainak már egy osztálya nem sokkal nagyobb politopot vág le, mint $PP(G)$.

5. Igen érdekes kérdésnek tartom az operációkutatás más módszereinek, pl. a kvadratikus programozásnak az alkalmazhatóságát gráfelméleti problémákra. Ebben az irányban igen kevés történt eddig.

IRODALOM

M. L. BALINSKI, Establishing the matching polytope, *J. Comb. Th.* 13, (1972) 1—13.

M. L. BALINSKI and K. SPIELBERG, Methods of integer programming: algebraic, combinatorial and enumerative, *Progress in Operations Research,* Wiley (1969) 195—292.

E. BALAS and M. PADBERG, Set partitioning: a survey, *SIAM Review* 18, (1976) 710—760.

ZS. BARANYAI, On the factorization of the complete uniform hypergraph, *Infinite and Finite Sets,* Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10, (1974) North-Holland, 91—108.

BELLMORE—G. L. NEMHAUSER, The travelling salesman problem: a survey, *Oper. Res.* 16, (1968) 538—558.

C. BERGE, Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind, *Wiss. Z. Martin—Luther—Univ. Halle Wittenberg* (1961) 114.

C. BERGE, *Graphs and Hypergraphs,* North-Holland (1973).

C. C. CHEN and A. W. HILTON, A 4-color conjecture for planar graphs, *Proc. 5th Hung. Combin. Coll.*

N. CHRISTOFIDES, *Graph Theory: an Algorithmic Approach* (Academic Press, 1975).

V. CHVÁTAL, Edmonds polytopes and hierarchy of combinatorial problems, *Discrete Math.* 4, (1973) 305—337.

V. CHVÁTAL, On certain polytopes associated with graphs, *J. Comb. Theory* (B) 18, (1975) 138—154.

V. CHVÁTAL, Edmonds polytopes and weakly Hamiltonian graphs, *Math. Progr.* 5, (1973) 29—40.

J. EDMONDS, Maximum matching and polyhedron with 0, 1 vertices. *J. Res. Nat. Bur. of Standards* 69 B (1965) 125—180.

J. EDMONDS, Submodular functions, matroids, and certain polyhedra, *Combin, Structures and their Applications,* Gordon and Breach (1970).

J. EDMONDS and R. GILES, A min-max relation for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Math. 1.* (1977).

J. EDMONDS and E. L. JOHNSON, Matching, Euler tours and the Chinese postman, *Math. Progr.* 5 (1973) 88—124.

L. R. FORD, JR. and D. R. FULKERSON, *Flows in Networks,* Princeton University Press (1962).

D. R. FULKERSON, Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra, *Math. Progr.* 1 (1971) 168—194.

D. R. FULKERSON, Anti-blocking polyhedra, *J. Comb. Theory* 12 (1972) 50—71.

D. R. FULKERSON, Packing rooted directed cuts in weighted directed graphs, *Math. Progr.* 6 (1974) 1—13.

T. GALLAI, Maximum-minimum Sätze über Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 9 (1958) 395—434.

T. GALLAI, Maximum-minimumsätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 12 (1961) 131—173.

R. GOMORY, An algorithm for integer solutions of inear programs, *Recent Advances in Mathematical Programming,* McGraw-Hill (1963) 269—302.

M. GRÖTSCHEL, *Polyedrische Charakterisierungen kombinatorischer Optimierungsprobleme,* (Math. Systems in Econ. 36) Verlag Anton Hain (1977).

A. J. HOFFMAN, A genaralization of max flow-min cut, *Math. Progr.* 6, (1974) 352—359.

A. J. HOFFMAN, The rôle of unimodularity in applying linear inequalities to combinatorial theorem, *Annals of Discrete Math.* 2 (1978).

A. J. HOFFMAN and J. B. KRUSKAL, Integral boundary points of convex polyhedra, *Linear Inequalities and Related Systems,* (Annals of Math. Studies 38) (1956).

T. C. HU, *Integer Programming and network Flows,* Addison-Wesley (1970).

T. C. HU, Multicommodity network flows, *J. ORSA* 11, (1963) 344—360. Karzanov—Lomonosov, kézirat, 1977.

D. KÖNIG, Vonalrendszerek és determinánsok, *Math. és Term. Értesítő* 33, (1915) 221—229.

L. LOVÁSZ, Generalized factors of graphs, *Comb. Theory and its Appl.* Coll. Math. Soc. J. Bolyai 4, (1970) 773—781.

L. LOVÁSZ, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Math.* 2, (1972) 253—268.

L. LOVÁSZ, A characterization of perfect graphs, *J. Comb. Theory* B 13, (1972) 253—268.

L. LOVÁSZ, Certain duality principles in integer programming, *Annals of Discrete Math.* 1, (1977).

L. LOVÁSZ, On the ratio of optimal integral and fractional covers, *Discrete Math.* 13, (1975) 383—390.

L. LOVÁSZ, On two minimax theorems in graph theory, *J. Comb. Theory* B (1976a) 96—103.

L. LOVÁSZ, Edge-connectivity in Eulerian graphs, *Acta Math. Hung.* 28, (1976b) 129—138.

L. LOVÁSZ, 2-matchings and 2-covers of hypergraphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 26, (1975) 433—444.

L. LOVÁSZ, Some finite basis theorems in graph theory, *Proc. 5th Hungarian Combinatorial Colloquium.*

L. LOVÁSZ, Graph theory and integer programming, *Annals of Discrete Math,* 2 (1978).

C. LUCCHESI and D. H. YOUNGER, A minimax theorem for directed graphs, *Proc. London Math. Soc.*

H. MEYNIEL, On the perfect graph conjecture, *Discrete Math.* 16 (1976) 339—342.
G. MINTY, Maximum independent sets of vertices in claw-free graphs (kézirat, 1977).
C. ST. J. A. NASH—WILLAMS, Decomposition of finite graphs into open chains, *Canad. J. Math.* 13 (1961) 157—166.
C. ST. J. A. NASH—WILLAMS, Decomposition of finite graphs into forests, *J. London Math. Soc.* 39 (1964) 12.
G. L. NEMHAUSER and L. E. TROTTER, JR: Properties of vertex packing and independence system polyhedra, *Math. Progr.* 6 (1974) 48—61.
G. L. NEMHAUSER and L. E. TROTTER, JR: Vertex packings: structural properties and algorithms, *Math. Progr.* 8 (1975) 232—248.
M. PADBERG, Perfect zero-one matrices, *Math. Programming* 6 (1974) 180—196.
M. PADBERG, Characterizations of totally unimodular, balanced and perfect matrices, *Combinatorial Programming: Methods and Appliactions,* Reidel (1975) 275—286.
M. PADBERG, On the facial structure of set packing polyhedra, *Math. Programming* 5 (1973) 199—216.
PARTHASARATHY and RAVINDRA, The strong perfect graph conjecture is true for $K_{1,3}$-free graphs, J. Comb. Th. (B) 21 (1976) 212—223.
W. PULLEYBLANK and J. EDMONDS, Facets of 1-matching polyhedra, *Hypergraph Seminar*, (Lecture Notes in Math. 411) Springer (1974) 214—242.
M. ROSENFELD, On a problem of C. E. Shannon in graph theory, *Proc. Amer. Math. Soc.* 14, (1966) 1121—1129.
P. SEYMOUR, On multi-colorings of cubic graphs and conjectures of Fulkerson and Tutte (kézirat, 1977).
S. STAHL, *n*-tuple colorings and associated graphs, *J. Comb. Th.* B 20, (1976) 185—203.
W. T. TUTTE, The factorisation of linear graphs, *J. London Math. Soc.* 22, (1947) 107—111.
W. T. TUTTE, The 1-factors of oriented graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* 4, (1953) 922—931.
W. T. TUTTE, On the problem of decomposing a linear graph into *n* connected factors, *J. London Math. Soc.* 142, (1961) 221—230.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Л. ЛОВАС

GRAPH THEORY AND INTEGER PROGRAMMING

L. LOVÁSZ

A MOSZKVAI TOPOLÓGIAI ISKOLÁRÓL*

JUHÁSZ ISTVÁN

Amikor egy matematikus a moszkvai topológiai iskoláról hall, természetes dolog, hogy erről legelőször is Pavel Szergejevics Alexandrov neve jut eszébe; azé a nagyszerű tudósé, akinek matematikai és oktatói-nevelői munkája mindmáig elválaszthatatlan ennek a nemzetközi hírű iskolának létrejöttétől és tevékenységétől. Ezért ennek az előadásnak a középpontjában is az ő munkásságának ismertetése áll. Ugyanakkor azonban, figyelembe véve azt, hogy olyan iskoláról van szó, amely napjainkban is a modern topológiai kutatások egyik nemzetközi centruma — amelylyel a magyar topológusok igen szoros szakmai és baráti kapcsolatot tartanak —, igyekezni fogok némi bepillantást nyújtani az ott jelenleg folyó kutatások eredményeibe is.

P. Sz. Alexandrov 1986-ban született Bogorodszk városában (mai neve Noginszk). 1913-ban fejezte be középiskolai tanulmányait, s került a Moszkvai Egyetemre. Ettől kezdve egész élete elválaszthatatlan ettől az intézménytől.

Mikor Alexandrov az egyetemre került, ott a vezető matematikusok D. F. Jegorov és N. N. Luzin voltak. Mindkettőjük neve ismerősen cseng azok számára, akik valós függvénytant, mértékelméletet valaha is tanultak. A kettejük által fémjelzett moszkvai valós függvénytani iskola közvetlen „leszármazottjaként" tekinthető nemcsak a moszkvai topológiai iskola, jelen előadásunk tárgya, hanem az épp olyan világhírű valószínűségszámítási iskola is.

Alexandrov az első évben Jegorov szemináriumát látogatta, majd másodéves korában Luzin előadásait hallgatta. Luzin személye az összes fiatal matematikust magával ragadta, így Alexandrovot is. Ő maga a következőképpen emlékezik meg első találkozásukról:

„Luzin előadása után tanácsért fordultam hozzá: hogyan is foglalkozzam matematikával a továbbiakban? Mindenekelőtt meglepett az a figyelmesség, melyet Luzin beszélgető társa, egy 18 éves diák iránt tanúsított. Rögtön Luzin tanítványa lettem, s ez az ő alkotó tevékenységének legvirágzóbb korszakában történt. Luzint látva, ezekben az években valóban láttam, hogy mit is jelent a tudomány iránti lelkesedés, elkötelezettség. Nemcsak matematikát tanultam tőle, de leckét kaptam arról is, hogy milyen az igazi tudós, és arról is, milyen lehet, milyennek kell lennie az igazi egyetemi tanárnak. Akkor értettem meg, hogy a tudomány, valamint új ifjú embereknek a tudományba való bevonása ugyanannak a tevékenységnek — a tudós tevékenységének — két oldala."

* Elhangzott az Októberi Szocialista Forradalom 60. évfordulója alkalmából rendezett emlékülésen.

Ez a kettős tevékenység nemcsak Luzin, de Alexandrov munkásságának is jellemző vonása.

Alexandrov első tudományos eredményét 1915-ben érte el, bizonyítva azt az alapvető tételt, hogy egy Borel-halmaz (valamely euklideszi térben) vagy megszámlálható, vagy kontinuum-számosságú. Bizonyításában bevezette a következő operációt, amely a későbbiekben a deskriptív halmazelméletben alapvető fontosságú lett:

Legyen $\mathscr{H}=\{H_s\}$ olyan halmazrendszer, melynek elemei az összes véges $s=\langle n_0, n_1, \ldots, n_k\rangle$ természetes számokból álló sorozattal vannak indexelve. Ekkor képezhetjük az

$$A(\mathscr{H}) = \bigcup_{\langle n_0, n_1, \ldots\rangle} \bigcap_{k=0}^{\infty} H_{\langle n_0, \ldots, n_k\rangle}$$

halmazt, ahol az egyesítés az összes végtelen $\langle n_0, n_1, \ldots\rangle$ sorozatokon fut végig. Alexandrov megmutatta, hogy minden B Borel-halmaz előáll $B=A(\mathscr{H})$ alakban, ahol $\mathscr{H}$ elemei zárt halmazok, s ennek segítségével belátta, hogy ha B nem megszámlálható, akkor tartalmaz perfekt — azaz a Cantor-halmazzal homeomorf — részhalmazt. A fenti operációt M. Ju. Szuszlin nevezte el, Alexandrov tiszteletére, A-operációnak. Alexandrovnak ez az eredménye Lebesgue-re is mély benyomást tett, ő komoly filozófiai jelentőséget is tulajdonított neki a kontinuum-problémával kapcsolatban.

Alexandrov sohasem volt „magányos tudós", matematikai tevékenységére mindig úgy tekintett, mint őt más emberekkel összefűző kommunikációs eszközre. Ezért a tudományos élet terén elért eredményei és hatása éppen olyan értékesek, mint a szigorú értelemben vett tudományos eredményei. Egyike azon keveseknek, akiknek a szovjet matematika, és persze elsősorban a moszkvai matematikai iskola forradalom utáni páratlan felvirágzása köszönhető.

Az Októberi Forradalom utáni években, a nehéz idők ellenére, a Moszkvai Egyetemen a matematikai tudományos tevékenység igen gyors fejlődésnek indult. Nagy szerepe volt ebben a Luzin köré csoportosuló fiatal matematikusoknak, akik között — Alexandrov mellett — ilyen neveket találunk: Uriszon, Menysov, Bari, Khincsin, Ljuszternyik stb. Maga Alexandrov így idézi fel ezeket az időket egy Uriszonról szóló megemlékezésében:

„P. Sz. Uriszon életének aspiránsi időszaka, amely 1919-től 1921-ig tartott, teljes egészében a szovjet matematikai iskola kialakulásának felejthetetlen első éveire esett. Ezeket az éveket rendkívüli fellendülés és lelkesedés jellemezte, az alkotásnak hirtelen feltáruló új lehetőségeivel. Igazi felvirágzás évei voltak ezek sok fiatal ember számára, akik először kóstolhattak bele a tudománnyal való alkotó kapcsolat örömeibe, ama új, soha nem tapasztalt körülmények közepette, melyeket a forradalom nyitott meg számukra."

Érdekes „közjáték" érdemel itt említést Alexandrov pályafutásában. 1918-ban — Luzin buzdítására — a kontinuum-probléma megoldására tett kísérletet. Természetesen ezek a próbálkozásai nem vezettek, nem is vezethettek eredményre, ma már világosan látjuk, miért nem. Alexandrovot azonban ez a „kudarc" komolyan elkeserítette, olyan mértékig, hogy kételkedni kezdett saját matematikai képességeiben. Ennek következtében otthagyta az egyetemet és Moszkvát is: először Novgorod-Szeverszkijben dolgozott mint színházi rendező, majd Csernigovba (Észak-Ukrajna) ment, ahol a kormányzósági népművelési osztály színházi bizottsága elnökeként tevékenykedett. Ugyanitt előadássorozatokat tartott az orosz és külföldi irodalom

köréből: Dosztojevszkijről, Gogolról, Goethéről stb. Ezeknek az előadásoknak komoly sikere és visszhangja támadt.

Szerencsére azonban a matematika vonzása erősebbnek bizonyult az irodalomnál, két évi távollét után, 1920-ban, visszatért Moszkvába, ahol Jegorov, Luzin és a többiek nagy örömmel fogadták.

Az 1920/21-es tanévben Alexandrov a Szmolenszki Egyetemen tanított, de havonta járt Moszkvába vizsgákat tenni; ezek a vizsgák a mai aspiránsi vizsgáknak feleltek meg. Ezalatt az idő alatt ismerkedett — és barátkozott — össze P. Sz. Uriszonnal.

1921-ben Alexandrov a Moszkvai Egyetem magántanára lett. Előadásokat tartott valós függvénytanból, Galois-elméletről, és természetesen topológiáról. Az Uszpehi Mat. Nauk-ban Alexandrov 80. születésnapja alkalmából megjelent méltató cikk szerint ő tartotta az első általános topológiai előadást a Moszkvai Egyetemen. Ennek némileg ellentmond Alexandrovnak Uriszon összegyűjtött munkáihoz írott előszava, amely szerint Uriszon volt az első, aki 1921/22 telén az első topológiai előadást tartotta Moszkvában, sőt az egész országban, „A kontinuumok topológiája" címmel. E látszólagos ellentmondás könnyen feloldódik, ha meggondoljuk, hogy Uriszon szintén 1921-ben lett a Moszkvai Egyetem magántanára.

Uriszon egyébként az egyetemre kerülése idején (1915-ben) még fizikával akart foglalkozni, első publikációja, 1915-ből, a Röntgen-sugárzással foglalkozott. Később azonban ő is Luzin hatása alá került, így érdeklődése a matematika felé fordult. 1919-ben, az egyetem elvégzése után, Luzin felkérte, maradjon az egyetemen — ez mai terminológiával élve azt jelenti, hogy aspiráns lehetett. Aspiránsi időszaka, az 1919—21 közötti időszak, a fent említett viharos fejlődés időszaka a Moszkvai Egyetemen.

Uriszon első munkái az analízis, pontosabban az integrálegyenletek elméletébe tartoztak. 1921 nyarán azonban Jegorov a következő, tisztán topológiai feladatot tűzte ki számára: „Adja a vonalaknak olyan *belső* jellemzését, amely a sík részhalmazai esetében az ún. Cantor-görbéket választja ki." Mint ismeretes, a sík egy összefüggő, kompakt részhalmazát akkor nevezik Cantor-görbének, ha nincs (a síkon) belső pontja. Ez tehát *nem* belső jellemzés.

Uriszon azonnal roppant energiával látott e feladat megoldásához, amely feladat tulajdonképpen így is fogalmazható: melyek az 1-dimenzió kontinuumok? Alexandrov visszaemlékezéseiben leírja Uriszon újabb és újabb definíciós kísérleteit, majd azt, amint 1921 augusztus végén, egy reggel Uriszon már a dimenzió helyes definíciójával ébredt. Ekkor éppen többedmagukkal vidéken tartózkodtak, s felkelés után a Kljázma folyóban való fürdés közben, Uriszon méhány óra alatt kifejtette Alexandrovnak a dimenzióelmélet felépítésére vonatkozó elképzeléseit. Ezeket az elképzeléseket 1921/22 telén részletesen kidolgozta, első erre vonatkozó publikációja a francia *Comptes Rendus*-ben jelent meg 1922-ben.

Uriszon csak szeparábilis metrikus terekkel foglalkozott e munkájában, de a definíció, amit ma „kis induktív dimenziónak" hívunk és *ind*-del jelölünk, tetszőleges topologikus térre kimondható:

1. Az üres halmaz dimenziója $\operatorname{ind} \emptyset = -1$;

2. $\operatorname{ind} X \leqq n+1$ akkor és csak akkor, ha X-nek van olyan $\mathscr{B}$ bázisa, hogy $B \in \mathscr{B}$ esetén $\operatorname{ind}(FrB) \leqq n$, ahol FrB jelöli B határát.

Az egyik fő nehézséget Uriszon számára annak a nyilván alapvető jelentőségű ténynek megmutatása okozta, hogy az n-dimenziós E^n euklideszi térre $\operatorname{ind}(E^n) = n$ igaz. Ennek belátásához az alábbi tételt bizonyította: Ha X kompakt metrikus tér, akkor $\operatorname{ind} X$ úgy is definiálható, mint a legkisebb n, melyre X-nek van akármilyen

kis átmérőjű zárt halmazokból álló, legfeljebb $(n+1)$-edrendű lefedése. (Egy lefedés rendje $\leqq r$, ha bármely r-nél több elemének metszete üres.)

Ennek a tételnek számos további jelentős következményét bizonyította: megszámlálható sok *zárt* n-dimenziós altér egyesítése n-dimenziós; $\operatorname{ind}(A \cup B) \leqq \leqq \operatorname{ind}(A)+\operatorname{ind}(B)+1$ tetszőleges A-ra és B-re; továbbá $\operatorname{ind}(X)=\min\{n: X$ előáll $n+1$ darab 0-dimenziós altér egyesítéseként$\}$. Ez a tétel szolgáltatta a kiindulópontot az Alexandrov által később kifejlesztett ún. homologikus dimenzióelmélet számára is.

1922 nyarát Alexandrov és Uriszon együtt töltötték Bolsevo falu közelében, s ekkor kezdődött el igazi együttműködésük. Ettől az időtől számíthatjuk a Moszkvai Topológiai Iskola kialakulását, az igazán komoly topológiai vizsgálatok kezdetét a Szovjetunióban. A topologikus tér fogalma ekkor létezett már, M. Fréchet, Riesz Frigyes és F. Hausdorff úttörő munkája nyomán, de inkább csak mint egy általános absztrakt séma. Fréchet az analízis, Hausdorff pedig a halmazelmélet oldaláról végezte vizsgálatait. Alexandrov és Uriszon voltak az elsők, akik a topologikus tér fogalmát gazdag geometriai tartalommal kezdték megtölteni. Az ő munkássáuk nyomán vált a topologikus terek elmélete az egész matematikában szükséges eszközzé.

Első nagy közös eredményük 1922-ben a kompakt halmazok elméletének kidolgozása volt. Erről írott munkájuk „Memoár a kompakt topologikus terekről" címmel csak 1929-ben jelent meg Hollandiában. Nem véletlen, hogy éppen a kompaktság szisztematikus vizsgálatával kezdték, ennek időszerűségét mutatja, hogy tőlük függetlenül Vietoris, valamint Kuratowski és Sierpiński is végeztek ilyen irányú vizsgálatokat, bár nem jutottak olyan messzire, mint Alexandrov és Uriszon. Memoárjuk gondolatgazdagsága ma is szembetűnő, nem véletlen, hogy a Szovjetunióban pár éve külön könyvként ismét kiadták. Természetesen lehetetlen vállalkozás lenne itt akárcsak vázlatosan ismertetni e könyvet, csupán a legjelentősebb eredményeik közül sorolhatunk fel néhányat:

A kompakt és lokálisan kompakt terek fogalmának bevezetése és alapos vizsgálata; a kompaktság és abszolút zártság kapcsolatának vizsgálata; a deskriptív halmazelmélet eredményeinek kiterjesztése a tökéletesen normális kompakt T_2-terek körére; metrizációs eredmények, stb. A felhasznált módszerek jelentőségét illusztrálja például az a bizonyítás, melyben megmutatják, hogy egy tökéletesen normális kompakt T_2-tér legfeljebb kontinuum-számosságú, aholis a halmazelmélet egy fontos modern módszerét, az ún. elágazási rendszert anticipálják, vagy a függelék, amely a regresszív függvények elméletének kiindulópontja.

Egy másik alapvetően fontos területe munkájuknak a még Fréchet által felvetett *metrizációs problémá*val kapcsolatos. A probléma annak meghatározása, milyen feltételek szükségesek ahhoz, hogy egy tér topológiája metrikából legyen származtatható. Az első eredményt itt Uriszon 1922-ben éri el, bizonyítván, hogy egy kompakt T_2-tér akkor és csak akkor metrizálható, ha van megszámlálható bázisa. Ezt továbbfejlesztve 1923-ban bizonyítja a tankönyvekben ma is megtalálható nevezetes tételét, miszerint egy megszámlálható bázisú normális tér mindig metrizálható. Közös eredményük 1923-ból a legelső általános metrizációs kritérium, mely így szól: Az X T_2-tér akkor és csak akkor metrizálható, ha van reguláris kifejtése. Itt az X nyílt lefedéseinek $\{\mathcal{G}_n: n\in\omega\}$ rendszerét akkor nevezzük kifejtésnek, ha minden $p\in X$ pontra igaz az, hogy valahányszor $p\in G_n\in\mathcal{G}_n$ minden $n\in\omega$-ra, akkor $\{G_n: n\in\omega\}$ környezetbázisa p-nek, míg $\{\mathcal{G}_n: n\in\omega\}$-t akkor hívjuk regulárisnak, ha bármelz U, $V\in\mathcal{G}_{n+1}$ és $U\wedge V\neq\emptyset$ esetén van $W\in\mathcal{G}_n$, melyre $U\cup V\subset W$. Könnyű látni, hogy egy metrikus térben, ha $\mathcal{G}_n$ jelöli az $1/2^n$-nél kisebb átmérőjű nyílt gömbök halmazát, akkor $\{\mathcal{G}_n: n\in\omega\}$ reguláris kifejtés lesz.

Annak ellenére, hogy szükséges és elégséges feltételt adtak meg a metrizálhatóságra, maguk a szerzők sem tekintették ezt a probléma végleges megoldásának. Ennek oka egyrészt a feltétel némileg mesterkélt volta — a regularitás pl. nagyonis a háromszög-egyenlőtlenség „utánzása" —, másrészt az a tény, hogy nem következnek belőle Uriszonnak fenti egyszerű metrizációs tételei. A probléma teljesen kielégítő megoldása csak 1950—51-ben sikerült Bingnek, illetve Nagatának és Szmirnovnak.

Uriszon utolsó nagy munkája „Az összefüggő halmazok számosságáról" címmel íródott, három nappal halála előtt fejezte be. Ebben szerepelnek olyan, ma már klasszikus eredményei, mint az Uriszon-féle lemma a diszjunkt zárt halmazok folytonos függvénnyel való szétválaszthatóságáról normális terekben, az úgynevezett Uriszon-féle beágyazási tétel, mely szerint minden szeparábilis metrikus tér beágyazható a Hilbert-kockába, valamint nevezetes példája megszámlálható összefüggő Hausdorff-térre.

1923 és 1924 nyarát Alexandrov és Uriszon közös külföldi utazásokkal töltötték. Legtöbb időt a matematikai világ akkori központjában, Göttingenben töltöttek, ahol többek között Hilberttel is találkoztak. Érdemes talán itt felsorolni azokat a matematikusokat, akik Alexandrov szerint legnagyobb hatással voltak rá: Jegorov, Luzin, Brouwer, Emmi Noether és Hilbert. A göttingeni atmoszféra, mely sokban hasonlított Luzin körének szabad, alkotó légköréhez, mély benyomást gyakorolt a fiatal szovjet matematikusokra.

1924 nyarán Alexandrov és Uriszon Bonnba utaztak Hausdorffhoz, aki igen nagy érdeklődéssel és elismeréssel hallgatta eredményeiket. Viszont nagyon helytelenítette azt, hogy naponta mindketten átúszták a Rajnát, ami már akkor sem volt veszélytelen.

Bonn után Amsterdamba utaztak Brouwerhoz, akivel szintén hasznos és kellemes napokat töltöttek matematikával — és zenével — foglalkozva. Innen Párizsba utaztak, majd egy Batz nevű fürdőhelyre Bretagne déli részébe. Itt következett be, 1924 augusztus 17-én, Uriszon tragikus halála.

1925 tavaszától 1926 nyaráig Alexandrov ismét Hollandiában tartózkodott, ahol Brouwerral együtt Uriszon kéziratait készítették elő kiadásra. Kettejük lelkes munkájának köszönhető, hogy Uriszon eredményeiből semmi sem veszett el.

Az 1927/28-as tanévet Alexandrov H. Hopffal együtt Princetonban töltötte, ahol megismerkedett az amerikai topológusokkal: Alexanderrel, Lefshetzcel és Veblennel. Hopffal egyébként még 1926-ban találkozott Göttingenben, s kettejük között szoros személyes és szakmai barátság fejlődött ki. „Topologie" című közös könyvük, melyet hosszú együttműködés után 1935-ben fejeztek be, a topológusok generációinak volt alapvető olvasmánya.

Egy másik említésre érdemes barátság az, amely Alexandrov és Kolmogorov között szövődött, s amely 1929-re nyúlik vissza. Sokat utazgattak együtt otthon és külföldön, majd 1935-ben közös házat vettek egy Moszkvához közeli faluban, Komarovkában. Ekkor kezdődik Alexandrov életének az a korszaka, melyet saját maga „komarovkai periódus"-nak nevez. Ehhez a házhoz igen sok matematikatörténeti nevezetesség fűződik. Megfordultak itt olyan nagy tudósok, mint Hadamard, Fréchet, Banach, Hopf, Kuratowski stb., és persze a tanítványok.

Alexandrov első tanítványa A. N. Tyihonov volt, aki még 1923-ban hallgatta Alexandrov előadásait. Tyihonov elsősorban Uriszon munkáját folytatta, így legelső tudományos eredménye, még 1925-ből, Uriszon metrizációs tételének élesítése volt, melyben megmutatta, hogy a normalitás feltevése enyhíthető a regularitáséval. Legjelentősebb topológiai eredményei, amelyek 1929-ből származnak, a következők:

1. A topologikus szorzat helyes definíciója s ehhez kapcsolódva az ún. Tyihonov-tétel: kompakt terek topologikus szorzata is kompakt. Statisztikával kimutatott tény, hogy ez a matematikai irodalomban leggyakrabban idézett topológiai tétel. 2. Az ún. Tyihonov-terek bevezetése (azok a T_2-terek, melyekben egy pont s egy őt nem tartalmazó zárt halmaz folytonos függvénnyel szétválasztható), és beágyazási tétele, mely szerint minden Tyihonov-tér beágyazható a [0, 1] zárt intervallum valamely hatványába — egy Tyihonov-kockába. Mivel ez azt jelenti, hogy a Tyihonov-terek azonosak a kompakt Hausdorff-terek altereivel, ez az eredmény a kompaktifikációk elméletének kiindulópontja lett.

Az 1925 és 1929 közötti időszakban Alexandrov kidolgozta az általános topologikus terek homológiaelméletét. Ebben alapvető felfedezése a lefedés „idegének" fogalma volt. Ezalatt a következőt értjük. Ha X tetszőleges topologikus tér és $\mathcal{U}$ annak valamilyen lefedése, akkor $\mathcal{U}$ idege alatt azt az $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ absztrakt szimpliciális komplexust értjük, melynek „csúcsai" $\mathcal{U}$ elemei, és közülük $U_1, \ldots, U_n$ akkor és csak akkor alkot szimplexet, ha $U_1 \cap \ldots \cap U_n \neq \emptyset$. Ha most $\mathcal{U}$ finomítása $\mathcal{V}$-nek (azaz minden $U \in \mathcal{U}$-hoz van $V \in \mathcal{V}$, melyre $U \subset V$), akkor létezik egy természetes $\pi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}: \mathcal{N}_{\mathcal{U}} \to \mathcal{N}_{\mathcal{V}}$ szimpliciális leképezés. Ha például X kompakt és $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ végigfut X összes *véges nyílt* lefedésein, akkor az $\{\mathcal{N}_{\mathcal{U}}, \pi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\}$ inverz rendszert alkot, melyben az $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$-kat geometriai realizációikkal, azaz poliéderekkel, helyettesítve azt kapjuk, hogy $\varprojlim \{\mathcal{N}_{\mathcal{U}}, \pi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\}$, azaz az inverz rendszer limesze, homeomorf X-szel. A poliéderek az algebrai, vagy akkor szokásosabb nevén kombinatorikus topológia alapvető tárgyát képezik, így a fenti módszer lehetőséget nyitott a topológia addig egymástól függetlenül fejlődő két ágának, az algebrai és az általános topológiának szintézisére.

A módszer konkrét alkalmazásai közül megemlítjük Alexandrov következő tételét:

Egy tetszőleges n-dimenziós kompakt részhalmazát véve a Hilbert-kockának, megadható ennek minden $\varepsilon > 0$-ra egy ε-deformációja valamely n-dimenziós poliéderre. (ε-deformációnál minden pont ε-nál kevesebbet mozdul el.) Ez az eredmény szolgált alapul Nöbeling és Pontrjagin nevezetes eredményének, mely szerint minden n-dimenziós kompakt metrikus tér beágyazható a $(2n+1)$-dimenziós euklideszi térbe.

Az inverz rendszerek vizsgálata, amely ma már az egész matematikában, de főleg az algebrai topológiában alapvető fontosságú eszközzé vált, a moszkvai topológiai iskolának azóta is fő erősségei közé tartozik. Így számos értékes alkalmazásra nyert az általános topológiában is.

Az algebrai és általános topológiai módszerek szintézise a 30-as évek közepére érett be, ekkor jelent meg Alexandrov és Hopf fent már említett könyve, melyben az új elmélet először látott napvilágot. Itt érdemel említést, hogy 1935-ben Moszkvában rendezték meg az első nemzetközi topológiai konferenciát. Ez a tény is jelzi azt a nemzetközi rangot, melyet a moszkvai topológiai iskola ekkor már kivívott magának.

Feltétlenül említeni kell a fenti szintézissel kapcsolatban Alexandrovnak az 1941—42-ben Kazanyban végzett vizsgálatait „egy komplexus alakjáról és elhelyezkedéséről egy őt magában foglaló komplexusban", melyekben először jelenik meg az algebrai topológiában és a homologikus módszerekben oly alapvető *egzakt sorozat* fogalma.

A fenti, főleg algebrai topológiai vizsgálatai mellett mindvégig foglalkozott azonban általános topológiai problémákkal is. Így 1927-ben igazolta, hogy minden kompakt metrikus tér folytonos képe a Cantor-halmaznak, azaz a kétpontú diszkrét tér $\aleph_0$-adik hatványának. Ezzel elindította a diadikus kompaktumoknak — azaz a kétpontú diszkrét tér hatványai folytonos képeinek — fontos elméletét. Már itt

kimondta azt a sejtését, hogy minden kompakt topologikus csoport diadikus, ezt Ivanovszkij és Kuzminov bizonyította 1959-ben. Stone és Čech munkáit követve 1939-ben igen fontos eredményeket ért el a kompaktifikációk elméletében is.

1954-ben indította el általános topológiai szemináriumát a Moszkai Állami Egyetemen, ezt azóta is egyfolytában irányítja. Ettől kezdve kizárólag általános topológiával foglalkozik, s a fiatalokat is ebbe az irányba vezeti. Ez a szeminárium, amellett, hogy rendkívül nagy számban indított el kiváló fiatal matematikusokat, egyben nemzetközi fórum is lett. Munkájának eredményeit két nagyszabású és máig is irányt mutató összefoglaló cikkben ismertette az Uszpehi Mat. Nauk c. folyóiratban, 1960-ban és 1964-ben.

Alexandrov tanítványait — időrendben — négy csoportra lehet osztani. Az első csoportba a 20-as és 30-as években indultak tartoznak. Tyihonovról fent már megemlékeztünk. Tumarkin számos fontos és mély dimenzióelméleti eredménnyel fejlesztette tovább Uriszon eredményeit. Ide sorolható Pontrjagin is, aki már első aspiránsi éveiben számos jelentős topológiai eredményt ért el. Itt említendő még Nyemickij, Cserkaszov és Vegyenyiszov is.

A második csoport (negyvenes évek) kiemelkedő alakja Ju. M. Szmirnov. Mint már említettük, részben az ő nevéhez fűződik a metrizációs probléma teljes megoldása: Egy topologikus tér akkor és csak akkor metrizálható, ha reguláris és van olyan bázisa, amely megszámlálható sok lokálisan véges halmazrendszer uniója (Nagata—Szmirnov-féle tétel). Kevéssé ismert, hogy a lokális végesség fogalma is Alexandrovnál jelent meg először. Még 1924-ben bebizonyította, hogy egy szeparábilis metrikus tér minden nyílt lefedésének van lokálisan véges finomítása — azaz, hogy mai terminológiával élve: parakompakt! Szmirnov egy másik nagy eredménye annak belátása volt, hogy egy Tyihonov-tér topológiáját indukáló szomszédsági relációk és a tér kompaktifikációi között természetes egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ebbe a csoportba sorolható még K. A. Szitnyikov, aki Alexandrovnak az inverz rendszerekre vonatkozó eredményeit fejlesztette tovább, valamint O. V. Lokucijevszkij és J. F. Miscsenko.

Az ötvenes évek generációjából első helyen kell említeni A. V. Arhangelszkijt, aki az általános topológia szinte valamennyi területén ért el jelentős eredményeket. Leghíresebb ezek közül egy Alexandrov által még 1924-ben felvetett probléma pozitív megoldása (1969-ben!), amely szerint minden első megszámlálható kompakt Hausdorff-tér legfeljebb kontinuum számosságú. Ide tartozik V. I. Ponomarjov is, akinek az a tétele, hogy a metrikus terek folytonos nyílt képei éppen az első megszámlálható terekkel azonosak, az általános topológia egy új ágát, a terek és leképezések kölcsönös osztályozásának vizsgálatát indította meg; továbbá B. A. Jefimov, aki a diadikus kompaktumok elméletét fejlesztette tovább, és B. A. Paszinkov, aki elsősorban dimenzióelmélettel foglalkozik, s erről néhány éve Alexandrovval közösen könyvet is írt.

Végül a legfiatalabbak csoportjából kiemeljük V. V. Fedorcsukot, akinek legnevezetesebb eredményei az inverz-limesz-módszernek általános topológiai felhasználásához fűződnek. Ezzel a módszerrel sikerült neki 1974-ben az ún. $\diamondsuit$-elv segítségével $2^{2^{\aleph_0}}$ számosságú öröklődően szeparábilis kompakt teret konstruálnia, 1976-ban pedig olyan kontinuum számosságú kompakt tér létezésének konzisztenciáját belátni, amelyben nincs nemtriviális konvergens sorozat. Ebbe a csoportba tartozik még V. I. Zajcev és J. V. Scsepin.

Természetesen szólni kell még a tanítványok tanítványairól is, akik — Alexandrov szemináriumán részt véve — minden esetben közvetlenül tőle is sokat tanultak.

Ezek száma azonban olyan nagy, hogy még felsorolásuk is értelmetlen lenne. Így csupán kettőt említek meg közülük.

Az első V. Uljanov, aki Ponomarjov tanítványa. Legjelentősebb eredménye az általános topológia egyik legtöbbet vizsgált problémájának, az ún. Wallman-típusú kompaktifikációk problémájának megoldása. 1977-ben sikerült neki olyan kompaktifikációkat konstruálnia, amelyek nem Wallman-típusúak.

A másik B. Sapirovszkij, aki Arhangelszkijnek volt tanítványa. Számos jelentős eredményt ért el a halmazelméleti topológia területén, ezek közül egyet ismertetek, melyet személy szerint igen nagyra értékelek. Ez egy Hajnal A.-val közös eredményünkhöz kapcsolódik, melyet 1966-ban bizonyítottunk, s így szól: Ha egy Hausdorff-térben minden diszkrét altér megszámlálható, akkor van benne legfeljebb kontinuumszámosságú sűrű halmaz. Sapirovszkij eredménye szerint, ha még azt is feltesszük, hogy a tér kompakt, akkor azt is tudjuk, hogy van legfeljebb $\aleph_1$-számosságú sűrű halmaz — a kontinuum-hipotézis felhasználása nélkül! Ez annál is érdekesebb, mivel szintén Hajnal A.-val közös legutóbbi eredményeink szerint konzisztens olyan reguláris öröklődően Lindelöf (így csak megszámlálható diszkrét altereket tartalmazó) terek létezése, melyekben nincs kontinuumnál kisebb számosságú sűrű halmaz, s ugyanakkor a kontinuum számossága tetszőlegesen nagy.

МОСКОВСКАЯ ШКОЛА ТОПОЛОГИИ

И. ЮХАС

ON THE MOSCOW SCHOOL OF TOPOLOGY

I. JUHÁSZ

SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK I.

RUZSA Z. IMRE

TURÁN PÁL EMLÉKÉNEK

Ez a cikk a számelméleti függvények elméletét bemutató, három részesre tervezett sorozat első tagja.

Teljességre nem törekedtem, inkább a jellemző kérdéseket és módszereket akartam bemutatni. Még kevésbé teljes a cikk történeti szempontból. Ahol tudtam, adtam irodalmi utalást, de ahol nincs, az nem saját eredményt jelöl, csak nehezen kideríthető szerzőséget.

Ez a rész elsősorban elemi kérdésekkel foglalkozik. Csak minimális számelméleti előismeret szükséges, viszont némi analízisbeli jártasságot felteszünk. A számolások általában nincsenek részletezve — soha nem szerepel például $\delta=(\varepsilon/(A+7))^4$ vagy $c_{29}=2c_{28}+(c_{25}c_{26})^{c_{27}}$; véleményem szerint az ilyen részletek elterelik a figyelmet a lényegről. A cikk feladatokat is tartalmaz; ezek megoldása a folytatás megértéséhez természetesen nem szükséges.

A hivatkozási számok kettősek, az első a fejezetet jelöli, például (5.7) az 5. fejezet 7. megcímkézett egysége, ami lehet tétel, lemma, definíció, képlet, feladat. Ugyanazon a fejezeten belül egy címkére csak a második számmal hivatkozunk, például (7).

JELÖLÉSEK

$\square$	bizonyítás vége;
$\stackrel{\text{def}}{=}$	definiáló egyenlőség (így meg nem jelölt egyenlőség is definiálhat valamit; ez a jel csak hangsúlyozza, ha a szövegből nem lenne elég világos);
N, R, C	természetes, valós, komplex számok halmaza;
log	természetes logaritmus;
(m, n)	legnagyobb közös osztó;
$[x], \{x\}$	egészrész, törtrész;
$\sum_p, \prod_p$	olyan összeg, illetve szorzat, amelyben a változó a prímszámokat futja át;
$0(f)$	olyan függvény, amely az f függvénnyel osztva korlátos marad;
$o(f)$	olyan függvény, amely az f függvénnyel osztva 0-hoz tart (persze mindig meg kell mondani, hogy mikor; például „$g(x)=o(x^2)$, ha $x\to\infty$");
$f\sim g$	$f/g\to 1$ (persze itt is kell, hogy mikor);
$f\ll g$	$f=0(g)$;
$f\gg g$	$g\ll f$;
$f\asymp g$	$f\ll g$ és $g\ll f$ egyszerre.

1. *Bevezetés helyett: tökéletes számok*

Mint annyi minden a matematikában, kis jóakarattal ez a kérdéskör is az ókori görögökhöz vezethető vissza. A pithagorászi számmisztika a poraiból újjáéledő főnixmadárhoz hasonlította azokat a számokat, amelyek „részeikből", azaz osztóikból visszanyerhetők, és ezeket „tökéletesnek" nevezte.

(1.1) DEFINÍCIÓ. Egy természetes szám tökéletes, ha egyenlő pozitív, önmagától különböző osztóinak összegével.

Ilyen például a $6=1+2+3$, a 28, a 496 stb. Már Euklidésznél szerepel, hogy ha 2^p-1 prím, akkor

$$2^{p-1}(2^p-1)$$

tökéletes szám, és Euler bebizonyította, hogy az összes páros tökéletes szám ilyen alakú. Hogy van-e páratlan tökéletes szám, azt azóta sem tudjuk; mindenesetre 10^{100} alatt nincs. (Az ebben a fejezetben idézett numerikus adatokat Zagier [1] cikkéből vettem.)

(1.2) *Feladat. a)* Ha 2^p-1 prím, akkor p is az. *b)* Ha p prím, akkor 2^p-1 összes prímosztói $2kp+1$ alakúak.

Az sem ismert, hogy páros tökéletes szám (vagyis 2^p-1 alakú, úgynevezett Mersenne-prím) végtelen sok van-e. Heurisztikusan az a valószínű, hogy igen. Ugyanis annak a „valószínűsége", hogy egy kb. x nagyságú szám prím legyen, kb. $1/\log x$, $\log(2^p-1) \asymp p$ és a $\sum 1/p$ sor divergens. A $p<20\,000$ prímek közül 24 esetben lesz 2^p-1 prím, a legnagyobb

$$2^{19.937}-1$$

(Tuckerman, 1971); ez egyszersmind az ismert legnagyobb prím.

A 24 nem tűnik valami soknak a 20 000-hez képest, pedig valójában az. A $\sum 1/p$ sor ugyan divergál, de igen lassan; kb. 10^{18}-ig kell venni a prímeket, hogy a reciprokösszeg 4 legyen. Ez a 24 tehát azt mutatja (vö. a fenti feladat *b)* felével), hogy egy 2^p-1 alakú szám az átlagnál gyakrabban lesz prím.

Az (1) definíció

$$s(n) = n \tag{1.3}$$

alakú, ahol $s(n)$ jelöli n önmagánál kisebb (pozitív) osztóinak összegét. Általában a matematikában jobban kezelhető fogalmat kapunk, ha egy definícióba a végleteket is belevesszük. Legyen tehát

$$\sigma(n) = s(n)+n = \sum_{d|n} d. \tag{1.4}$$

Ekkor a (3) egyenlet a kevésbé esztétikus

$$\sigma(n) = 2n \tag{1.5}$$

alakot ölti. Cserébe a σ függvény multiplikatív lesz, vagyis $(m, n)=1$ esetén

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n), \tag{1.6}$$

ami a σ függvény értékeinek kiszámításánál és tulajdonságainak megállapításánál is praktikus. (Bizonyítás a 4. fejezetben.) Az s függvényre jóval komplikáltabb egyenletet kapnánk.

Hogy a másik végletet, az 1-et miért számították be a görögök az osztók közé, azt nem tudom, de szerencsésen tették. Különben a

$$\sigma(n) = 2n+1 \tag{1.7}$$

egyenletet kapták volna, és aligha találtak volna megoldást (ma sem tudjuk, hogy van-e).

(1.8) *Feladat.* A (7) egyenlet összes megoldása páratlan négyzetszám, és $>10^9$.

A $\sigma(n)=kn$ egyenlet megoldásait k-szorosan tökéletes számoknak nevezzük. Ezekről együtt sem tudjuk, hogy végtelen sokan vannak-e, sem azt, hogy van-e köztük páratlan. Hornfeck és Wirsing [1] bebizonyították, hogy túl sokan nem lehetnek: az x alatti, valamilyen k-val k-szorosan tökéletes számok száma $o(x^{\varepsilon})$ tetszőleges $\varepsilon>0$ mellett. (Ilyen számok pl. $n=120$, $k=3$; $n=30240$, $k=4$.)

Szintén már a görögök vizsgálták az úgynevezett „barátságos számokat", amelyek osztóinak összege egymást adja, azaz $s(m)=n$ és $s(n)=m$; a σ-függvénnyel

$$\sigma(m) = \sigma(n) = m+n.$$

(Ilyen pl. a 220 és a 284.) Ezekről sem tudjuk, hogy végtelen sokan vannak-e. Erdős [1] bebizonyította, hogy azon számok, amelyek előfordulnak egy barátságos számpárban, 0 sűrűségű sorozatot alkotnak, azaz számuk x-ig $o(x)$.

2. *Alapfogalmak*

(2.1) Definíció. Számelméleti függvénynek nevezzük az $f: N\to C$ függvényeket.

Néha szokták ezt a fogalmat általánosabban is értelmezni, az ilyen vizsgálatok azonban még gyerekcipőben járnak. Mi a fenti „klasszikus" esetre szorítkozunk.

Két példával (s és σ) találkoztunk az előző fejezetben. Még néhány konkrét függvény:

(2.2) $\tau(n) \stackrel{\text{def}}{=} n$ pozitív osztóinak száma.

(2.3) $\sigma_k(n) \stackrel{\text{def}}{=} n$ pozitív osztói k-adik hatványainak összege ($\sigma_1=\tau$, $\sigma_0=\tau$).

(2.4) $\varphi(n) \stackrel{\text{def}}{=}$ az n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím természetes számok száma (Euler-függvény).

(2.5) $\varkappa(n) \stackrel{\text{def}}{=} n$ prímosztóinak száma.

(2.6) $\nu(n) \stackrel{\text{def}}{=} n$ prímosztóinak száma, multiplicitással számolva, azaz $n=\prod p_i^{a_i}$ esetén $\nu(n)=\sum a_i$.

Továbbá az „elemi függvények":

(2.7) $$\mathrm{id}^k n \stackrel{\text{def}}{=} n^k,$$

(2.8) $$\mathrm{id}\, n \stackrel{\text{def}}{=} n, \quad (\mathrm{id} = \mathrm{id}^1)$$

(2.9) $$u(n) \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad (u = \mathrm{id}^0)$$

(2.10) $$o(n) = 0.$$

Természetesen ezután sem fogjuk n^k helyett azt írni, hogy $\mathrm{id}^k n$; ezekre a jelölésekre a következő fejezetben bevezetendő konvolúció művelete miatt lesz szükség.

Gyakran fog szerepelni a logaritmusfüggvény is; ezt mint számelméleti függvényt is a „log" jellel jelöljük (és mindig a természetes logaritmust értjük rajta).

(2.11) Definíció. Egy f számelméleti függvényt additívnak nevezünk, ha $(m, n)=1$ esetén

(2.12) $$f(mn) = f(m)+f(n),$$

teljesen additívnak, ha (12) teljesül $(m, n)>1$ esetén is, és erősen additívnak, ha additív és tetszőleges p prímszám és $k \geqq 1$ mellett $f(p^k)=f(p)$.

(2.13) DEFINÍCIÓ. Egy f számelméleti függvényt multiplikatívnak nevezünk, ha $\not\equiv 0$ és $(m, n)=1$ esetén

$$f(mn) = f(m)\, f(n), \tag{2.14}$$

teljesen multiplikatívnak, ha (14) teljesül $(m, n)>1$ esetén is, és erősen multiplikatívnak, ha multiplikatív és tetszőleges p prím és $k \geqq 1$ mellett $f(p^k)=f(p)$.

(2.15) ÁLLÍTÁS. *Az előbb definiált függvények közül* σ_k *és* φ *multiplikatív,* id^k *teljesen multiplikatív,* $\varkappa$ *erősen additív,* ν *és* log *teljesen additív.*

Az id^k-ra, ν-re, $\varkappa$-ra és log-ra vonatkozó állítások triviálisak. σ_k és φ multiplikativitását a 4. fejezetben bizonyítjuk.

(2.16) *Feladat.* Legyen

$$f(n) = \sum_{j=1}^{r} a_j n^j$$

polinom. Ha f multiplikatív, akkor $f=\mathrm{id}^k$ valamilyen k-val.

(2.17) ÁLLÍTÁS. *Legyen* h *a prímhatványokon értelmezett függvény. Pontosan egy olyan* f *multiplikatív függvény és pontosan egy olyan* g *additív függvény létezik, amelyre*

$$f(p^k) = g(p^k) = h(p^k)$$

tetszőleges prímhatványra, éspedig $n=\prod p_j^{a_j}$ *mellett*

$$f(n) = \prod h(p_j^{a_j}), \quad g(n) = \sum h(p_j^{a_j}). \tag{2.18}$$

(2.19) ÁLLÍTÁS. *Legyen* h *a prímszámokon értelmezett függvény. Pontosan egy olyan teljesen multiplikatív* f_1, *erősen multiplikatív* f_2, *teljesen additív* g_1 *és erősen additív* g_2 *létezik, amelyre*

$$f_1(p) = f_2(p) = g_1(p) = g_2(p)$$

minden p *prímszámra.*

Az egyszerű bizonyítást az olvasóra hagyjuk, csak egy részletre térünk ki. A multiplikatív függvény definíciója szerint van olyan n, amelyre $f(n)\neq 0$; ekkor

$$f(n) = f(n)\, f(1)$$

miatt $f(1)=1$ következik, a (18) képlettel összhangban. Ha az $f\not\equiv 0$ kikötést nem tettük volna, akkor a $h(p^k)\equiv 0$ esetben két megoldás lenne: o és δ, ahol

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 1 \\ 0 & \text{ha} \quad n > 1; \end{cases} \tag{2.20}$$

ezek közül csak a δ marad. Additív függvényeknél ez a probléma persze nem lép fel.

A továbbiakban additív (multiplikatív) függvényt gyakran $f(p^k)$ megadásával, teljesen (erősen) additív (multiplikatív) függvényt pedig $f(p)$ megadásával fogunk definiálni.

(2.21) *Feladat.* Határozzuk meg azokat az f additív függvényeket, amelyekre a $g(n)=f(n+1)$ függvény is additív.

(2.22) *Feladat.* Jellemezzük azokat az f számelméleti függvényeket, amelyekre $(m, n)=1$ esetén

a) $$f(mn) = \sqrt{f^2(m)+f^2(n)},$$

f a valós, a gyök pozitív értéke veendő;

b) $$f(mn) = f(m)f(n)+1.$$

(2.23) *Feladat.* Ha $f_1, \ldots, f_k$ teljesen additív függvények és

$$\prod f_j = o,$$

akkor $f_j=o$ valamelyik j-re.

(2.24) *Feladat.* Ha $f_1, \ldots, f_k$, $g_1, \ldots, g_l$ teljesen additív függvények és

$$\prod f_i = \prod g_j \neq o,$$

akkor $k=l$ és alkalmas sorrenbe rakva $g_j=c_j f_j$, c_j konstans.

3. *A konvolúció*

A számelméleti függvények körében a szokásos összeadás és szorzás mellett alapvető szerepe lesz egy harmadik műveletnek, a konvolúciónak (másnéven Dirichlet-szorzás).

(3.1) DEFINÍCIÓ. Az f és g számelméleti függvények konvolúciójának nevezzük az alábbi képlettel definiált $f*g$ függvényt:

(3.2) $$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

(Ez a valós függvények szokásos konvolúciójával együtt egy általános mértékelméleti konstrukció speciális esete; l. pl. Halmos [1].)

Ezzel a jelöléssel pl. σ_k (2.3) alatti definíciója így írható:

(3.3) $$\sigma_k = \mathrm{id}^k * u \quad (\sigma = \mathrm{id} * u,\ \tau = u * u).$$

A konvolúció, ellentétben az összeadással és a szorzással, valódi függvénymővelet, azaz $(f*g)(n)$ meghatározásához nem elég $f(n)$ és $g(n)$ ismerete. Ezért volt szükség a (2.7)—(2.10) alatti jelölések bevezetésére, hiszen pl. $\sigma=\mathrm{id}*u$ helyett a $\sigma(n)=n*1$ képletnek semmi értelme sem lenne.

(3.4) TÉTEL. *A számelméleti függvények az összeadás és a konvolúció műveleteire nézve integritási tartományt (egységelemes, nullosztómentes, kommutatív gyűrűt) alkotnak.*

E tekintetben a konvolúció felülmúlja a szorzást, mert annál a nullosztómentesség nem teljesül.

BIZONYÍTÁS. A következőket kell belátni:

(i) $f * g = g * f$,

(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(iii) létezik f_0 egységelem, amelyre $f * f_0 = f$ bármely f függvényre,

(iv) $(f+g) * h = (f * h) + (g * h)$,

(v) $f \neq o,\ g \neq o \Rightarrow f * g \neq o$.

A konvolúció (2) definícióját a szimmetrikusabb

$$(f * g)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)\, g(d_2)$$

alakba írva (i) nyilvánvaló. Hasonlóan könnyen látható, hogy

$$\big((f * g) * h\big)(n) = \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(d_1)\, g(d_2)\, h(d_3),$$

amiből (ii) következik. (iii) nyilván teljesül, ha $f_0 = \delta$, a (2.20) alatt definiált függvény. (iv) a definícióból nyilvánvaló.

Végül bebizonyítjuk (v)-öt. Legyen m, illetve n a legkisebb szám, amelyre $f(m) \neq 0$, $g(n) \neq 0$. Definíció szerint

$$(f * g)(mn) = \sum_{d \mid mn} f(d)\, g(mn/d).$$

Ha $d < m$, akkor az első tényező 0, ha $d > m$, akkor a második, egyedül a $d = m$ melletti marad meg. Tehát

$$(f * g)(mn) = f(m) g(n) \neq 0. \qquad \square$$

Az (i) és (ii) tulajdonságok miatt definiálhatjuk a konvolúcióhatvány fogalmát:

$$f^{n*} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{f * \ldots * f}_{n\text{-szer}}, \quad f^{0*} = \delta, \quad f^{1*} = f. \tag{3.5}$$

Kézenfekvő kérdés az inverz létezése.

(3.6) TÉTEL. *Egy f számelméleti függvényhez pontosan akkor található olyan g, amelyre $f * g = \delta$, ha $f(1) \neq 0$.*

Ezt a g-t (amely a nullosztómentesség miatt egyértelmű) f konvolúcióinverzének nevezzük, jelben

$$g \overset{\text{def}}{=} f^{-1*}. \tag{3.7}$$

BIZONYÍTÁS. *Ha* $f * g = \delta$, akkor

$$f(1)\, g(1) = 1 \tag{3.8}$$

és

$$\sum_{d \mid n} f(d)\, g(n/d) = 0 \quad (n > 1). \tag{3.9}$$

(8) miatt $f(1) \neq 0$ és

$$g(1) = 1/f(1). \tag{3.10}$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

(10)-et használva (9) így írható:

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d)\, g(n/d) \quad (n > 1). \tag{3.11}$$

A (10) és (11) egyenletek viszont éppen g rekurzív definícióját adják. □

Különösen fontos szerepe lesz a

$$\mu \overset{\text{def}}{=} u^{-1*} \tag{3.12}$$

úgynevezett Möbius-függvénynek. A definíció közvetlen következménye az ún. Möbius-féle inverziós formula: tetszőleges f és g számelméleti függvényekre

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu(n/d). \tag{3.13}$$

(3.14) ÁLLÍTÁS. *Ha* $n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{a_j}$, *akkor*

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{ha mindegyik} \quad a_j = 1, \\ 0 & \text{ha valamelyik} \quad a_j \geqq 2. \end{cases} \tag{3.15}$$

Bizonyítás a következő fejezetben. Gyakran a (3.15) formulát veszik μ definíciójának, és ebből vezetik le (13)-at. (13) egyfajta szitaformulának is felfogható; erről l. pl. Lovász [1].

A Möbius-függvény segítségével kifejezhetjük az Euler-függvényt is.

(3.16) ÁLLÍTÁS. $\varphi = id * \mu$ *(azaz* $\varphi * u = id$*).*

BIZONYÍTÁS. Az állítás második formáját igazoljuk. Tekintsük az $1 \leqq j \leqq n$ számokat és osszuk őket csoportokba (j, n) értéke szerint. Legyen $d|n$; $(j, n) = d$ pontosan akkor áll fent, ha $j = kd$, ahol $1 \leqq k \leqq n/d$ és $(k, n/d) = 1$. Az ilyen k számok száma éppen $\varphi(n/d)$; mivel összesen n számot csoportosítottunk, ezért

$$\sum_{d|n} \varphi(n/d) = n. \qquad \square$$

(3.17) *Feladat.* Legyen n természetes szám. Tekintsük n összes

$$n = n_1 \ldots n_k, \quad n_j \geqq 2$$

alakú előállításait (k is változhat). Legyen ezek száma $t(n)$, ahol két felbontást akkor is külön számítunk, ha csak a tényezők sorrendjében térnek el. Legyen továbbá $t(1) = 1$ (az egyetlen 0 tényezős előállítás miatt). Bizonyítandó:

$$t = (2\delta - u)^{-1*}.$$

4. *Konvolúció és multiplikativitás*

(4.1) TÉTEL. *Két multiplikatív függvény konvolúciója, valamint multiplikatív függvény konvolúcióinverze is multiplikatív.*

BIZONYÍTÁS. Legyen f és g multiplikatív függvény, $h = f * g$ és $(m, n) = 1$. Ha d_1 végigfut m osztóin, d_2 pedig n osztóin, akkor $d_1 d_2$ végigfut mn osztóin,

mindegyiken pontosan egyszer. Eszerint

$$h(mn) = \sum_{d|mn} f(d)\,g(mn/d) = \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1 d_2)\,g(mn/d_1 d_2) =$$

$$= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1)f(d_2)\,g(m/d_1)\,g(n/d_2) = h(m)h(n),$$

qu. e. d.

Legyen most f multiplikatív és $g=f^{-1*}$. Legyen g_1 az a multiplikatív függvény, amelyre

$$g_1(p^k) = g(p^k)$$

minden prímhatványra. $f*g_1$ az előzők szerint multiplikatív lesz, és mivel egy prímhatvány osztói is prímhatványok, ezért

$$(f*g_1)(p^k) = (f*g)(p^k) = \delta(p^k).$$

A multiplikatív $f*g_1$ és δ függvények tehát minden prímhatvány helyen megegyeznek, tehát egyenlők.

$$f*g_1 = f*g = \delta,$$

amiből $g=g_1$ és készen vagyunk. □

(4.2) KÖVETKEZMÉNY. *σ_k, μ, φ multiplikatívak.*

(3.14) BIZONYÍTÁSA. A multiplikativitás miatt elég prímhatványra belátni. De (3.11) miatt

$$\mu(p^k) = -\sum_{j=0}^{k-1} \mu(p^j),$$

amiből indukcióval könnyű megmutatni, hogy $\mu(p) = -1$ és $\mu(p^k)=0$ $k\geqq 2$ esetén. □

Teljesen multiplikatív függvényekre hasonló állítás nem igaz; pl. $\tau=u*u$ nem lesz telj. mult.

(4.3) *Feladat.* $(m, n)>1$ esetén

$$\sigma_k(mn) < \sigma_k(m)\sigma_k(n).$$

(4.4) *Feladat.* Legyenek f, g telj. mult. függvények. Bizonyítandó: $f*g$ pontosan akkor telj. mult., ha $fg=\delta$.

Mivel

$$\sigma_k(p^j) = \sum_{i=0}^{j} p^{ik} = \begin{cases} \dfrac{p^{k(j+1)}-1}{p^k-1} & k \neq 0 \\ j+1 & k = 0 \end{cases},$$

ezért a multiplikativitásból kapjuk a következőt:

(4.5) ÁLLÍTÁS. Ha $n=\prod p_j^{a_j}$, akkor x

$$\sigma_k(n) = \prod \frac{p_j^{k(a_j+1)}-1}{p_j^k-1} \quad (k \neq 0) \tag{4.6}$$

és

$$\sigma_0(n) = \tau(n) = \prod (a_j+1). \tag{4.7}$$

Mivel $k \geqq 1$ esetén

$$\varphi(p^k) = \sum_{j=0}^{k} \mu(p^j) p^{k-j} = p^k - p^{k-1},$$

ezért kapjuk:

(4.8) ÁLLÍTÁS. *Ha* $n = \prod p_j^{a_j}$, *akkor*

$$\varphi(n) = \prod (p_j^{a_j} - p_j^{a_j - 1}) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{4.9}$$

(4.10) *Feladat.* $\varphi(m)/m = \varphi(n)/n$ pontosan akkor, ha m és n azonos prímtényezőkből állnak.

(4.11) *Feladat.* Legyen $\tau_k(n)$ az n szám k tényező szorzatára való felbontásainak száma, a sorrendet is számítva. (Azaz $\tau_k = u^{k*}$; $\tau_1 = u$, $\tau_2 = \tau$.) Bizonyítandó: $n = \prod p_j^{a_j}$ esetén

$$\tau_k(n) = \prod \binom{a_j + k - 1}{k - 1}.$$

(4.12) TÉTEL. *Legyenek* f, g, h *számelméleti függvények,* f *teljesen multiplikatív. Ekkor*

$$fg * fh = f(g * h).$$

BIZONYÍTÁS.

$$(fg * fh)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g(d) f(n/d) h(n/d) =$$

$$= f(n) \sum_{d \mid n} g(d) h(n/d) = f(n)(g * h)(n). \qquad \square$$

Ez egy disztributivitás típusú azonosság; (vö. (5.6) feladat).

(12)-t $g = u$, $h = \mu$ választással alkalmazva

$$f * f\mu = f\delta = \delta, \tag{4.13}$$

vagyis

$$f^{-1*} = f\mu \quad (f \text{ telj mult.}) \tag{4.14}$$

adódik. $f = \mathrm{id}^{-k}$, $g = \mathrm{id}^k$, $h = u$ választással pedig a

$$\sigma_{-k} = \mathrm{id}^{-k} \sigma_k \tag{4.15}$$

azonosságot kapjuk. Kiemelem a $k = 1$ esetet:

$$\sigma_{-1}(n) = \frac{\sigma(n)}{n}. \tag{4.16}$$

(4.17) *Feladat.* Ha egy f függvényre teljesül (14), következik-e ebből, hogy teljesen multiplikatív?

5. *Dirichlet-sorok*

Egy f számelméleti függvény Dirichlet-sorának nevezzük a

$$D(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} \quad (s \in C) \tag{5.1}$$

sort. Ez konvergencia szempontjából sokféleképpen viselkedhet; ezt majd a cikk harmadik részében fogjuk tárgyalni.

(5.2) TÉTEL. *Ha* $D(f, s)$ *és* $D(g, s)$ *sora abszolút konvergens, akkor* $D(f*g, s)$*-é is az, és*

$$D(f*g, s) = D(f, s)D(g, s). \tag{5.3}$$

BIZONYÍTÁS.

$$D(f, s)D(g, s) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m)m^{-s}g(n)n^{-s} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \sum_{mn=k}^{\infty} f(m)g(n) = D(f*g, s). \qquad \square$$

(3) hasonlít a Fourier-transzformált szorzódási tulajdonságára. Valóban, alkalmas változó-transzformációkkal a Dirichlet-sor egyfajta Fourier-transzformált lesz. Belátható az is, hogy (3) mindig fennáll, ha a tényezőknek értelmük van; ezekkel a cikk további részeiben fogunk foglalkozni.

Belátható, hogy bármely számelméleti függvényt a Dirichlet-sora egyértelműen meghatároz. Ily módon a konvolúciós azonosságok egyszerű aritmetikai azonosságokra vezethetők vissza, és pl. a (3.4) tétel triviálisan következik — olyan függvényekre, amelyek Dirichlet-sora valahol konvergens. Ez utóbbi hiányosság kiküszöbölhető a formális Dirichlet-sorok elméletének felépítésével, ez az út azonban már bonyolultabb, mintha közvetlenül a konvolúcióval dolgoznánk. Jól használhatók viszont a Dirichlet-sorok heurisztikus segédeszközként, azonosságok felfedezéséhez. (Természetesen nem ez a fő alkalmazásuk, hanem az eloszlási kérdések vizsgálata analitikus eszközökkel; erről is a cikk későbbi részeiben lesz szó. Egy „igazi' alkalmazás szerepel a 20. fejezetben.)

(1)-et (egyelőre formálisan) deriválva

$$D'(f, s) = -\sum_{n=1}^{\infty} f(n)(\log n)n^{-s} = -D(f\cdot\log, s). \tag{5.4}$$

A szorzat deriválási szabályát és (3)-at használva

$$D'(f*g) = D'(f)D(g)+D(f)D'(g);$$

ezt (4) alapján továbbalakítva

$$D\big((f*g)\cdot\log\big) = D\big((f\cdot\log)*g+f*(g\cdot\log)\big),$$

azaz

$$(f*g)\cdot\log = (f\cdot\log)*g+f*(g\cdot\log)$$

adódik. Ezt most bebizonyítjuk elemien, egy hajszállal általánosabban.

(5.5) TÉTEL. *Legyenek* f, g, h *számelméleti függvények,* h *teljesen additív. Ekkor*

$$(f*g)h = (fh)*g+f*(gh).$$

BIZONYÍTÁS.

$$(f*g)(n)h(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)h(n) = \sum_{d|n}\big(f(d)g(n/d)h(d)+f(d)g(n/d)h(n/d)\big) =$$

$$= \big((fh)*g\big)(n)+\big(f*(gh)\big)(n). \qquad \square$$

(5.6) *Feladat.* Milyen Dirichlet-sorok közötti azonosságnak felel meg a (4.12) tétel az $f=\mathrm{id}^k$ esetben?

Alapvető szerepe van az u függvény sorának, az úgynevezett Riemann-féle zéta-függvénynek:

$$\zeta(s) = D(u, s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \tag{5.7}$$

A sor $\operatorname{Re} s > 1$ esetén nyilván abszolút konvergens.

(5.8) *Feladat* A (7) sor $\operatorname{Re} s \leqq 1$ esetén divergens.

(5.9) TÉTEL. $D(\mu, s) = \zeta(s)^{-1}$, *azaz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

$\operatorname{Re} s > 1$ *esetén.*

BIZONYÍTÁS. (3.14) miatt $|\mu(n)| \leqq 1$, tehát μ sora is abszolút konvergens $\operatorname{Re} s > 1$ esetén. (2) szerint tehát

$$D(\mu, s)\zeta(s) = D(\delta, s) = 1. \qquad \square$$

(5.10) *Feladat.* Fejezzük ki $D(\sigma_k)$-t és $D(\varphi)$-t a zétafüggvénnyel.

6. *Konvolúció és additivitás*

(6.1) TÉTEL. *Egy g számelméleti függvény pontosan akkor additív, ha előállítható $g = h * u$ alakban, ahol h olyan függvény, amely csak a prímhatványokon nem 0.* Ekkor

$$h(p^k) = g(p^k) - g(p^{k-1}) \quad (k \geqq 1). \tag{6.2}$$

g pontosan akkor teljesen additív, ha mindig $h(p^k) = h(p)$, és pontosan akkor erősen additív ha $g * x\, h(p^k) = 0$ $k \geqq 2$ esetén.

BIZONYÍTÁS. *a)* Ha h értéke 0 a prímhatványok kivételével, akkor $g = h * u$ additív. Ugyanis $(m, n) = 1$ esetén

$$g(mn) = \sum_{p^k \mid mn} h(p^k) = \sum_{p^k \mid m} h(p^k) + \sum_{p^k \mid n} h(p^k).$$

b) Ha g additív és h-t a (2) képlettel definiáljuk, akkor $h * u = g$ lesz. Legyen ugyanis $n = \prod p_i^{a_i}$. Mivel

$$\sum_{j=0}^{k} h(p^j) = \sum \left(g(p^j) - g(p^{j-1})\right) = g(p^k),$$

ezért

$$(h * u)(n) = \sum_i \sum_{j=0}^{a_i} h(p_i^j) = \sum_i g(p_i^{a_i}) = g(n).$$

c) Ez az egyetlen ilyen h, hiszen $h = g * \mu$ kell, hogy legyen.

d) g pontosan akkor lesz teljesen additív, ha mindig $g(p^j) = g(p^{j-1}) + g(p)$, ami (2) szerint azzal ekvivalens, hogy $h(p^j) = g(p)$ minden j-re.

e) g pontosan akkor erősen additív, ha mindig $g(p^j)=g(p^{j-1})$, azaz (2) szerint $h(p^j)=0$ $(j\geqq 2)$. □

A tételt a logaritmusfüggvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\log = \Lambda * u, \tag{6.3}$$

ahol

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{ha } n=p^k \text{ primhatvány,} \\ 0 & \text{máskor,} \end{cases} \tag{6.4}$$

az úgynevezett Mangoldt-függvény. (3) szerint

$$\Lambda = \log * \mu; \tag{6.5}$$

ennek a formulának az a jelentősége, hogy a prímeket jellemző Λ függvényt kifejezi az elemi log függvény révén.

Most (5.5) alkalmazásával levezetünk néhány azonosságot, amire később szükségünk lesz. Végig $h=\log$ lesz. Legyen először $f=u$, $g=\mu$; ekkor azt kapjuk, hogy

$$o = \log * \mu + (\mu \log) * u = \Lambda + (\mu \log) * u,$$

azaz

$$(\mu \log) * u = -\Lambda. \tag{6.6}$$

(6) konvolúcióját véve μ-vel

$$\Lambda * \mu = -\mu \log. \tag{6.7}$$

Másodszor legyen $f=u$, $g=\Lambda$; ekkor

$$\log^2 = \Lambda * \log + u * (\Lambda \log). \tag{6.8}$$

(8) konvolúcióját képezve μ-vel

$$\Lambda_2 \overset{\text{def}}{=} \log^2 * \mu = \Lambda * \Lambda + \Lambda \log. \tag{6.9}$$

Végül $f=\Lambda$, $g=\mu$ helyettesítéssel (7) szerint

$$\begin{aligned} \mu \log^2 &= -(\Lambda * \mu) \log = -(\Lambda \log) * \mu - \Lambda * (\mu \log) = \\ &= -(\Lambda \log) * \mu + \Lambda * \mu = (\Lambda * \Lambda - \Lambda \log) * \mu. \end{aligned} \tag{6.10}$$

7. *Az Euler-függvény iterációja*

Az eddig előfordult additív függvények $(\varkappa, \nu, \log)$ additivitása meglehetősen triviális volt. Most mutatunk egy jóval meglepőbb példát. Legyen $\varphi_k(n)$ a k-szor iterált Euler-függvény, azaz $\varphi_1=\varphi$, $\varphi_{k+1}(n)=\varphi(\varphi_k(n))$. Legyen most $\gamma(n)$ a legkisebb k, amelyre $\varphi_k(n)=1$, ha n páros, és ennél eggyel kisebb, ha n páratlan $(\gamma(1)=0)$.

(7.1) TÉTEL. γ *teljesen additív.*

A γ függvény definíciója „nem természetes": a természetes az lenne, ha mindig azt a k-t tekintenénk, amelyre először lesz $\varphi_k(n)=1$. Eredetileg ezt a függvényt vizsgálták; ez egy valamivel komplikáltabb függvényegyenletet elégít ki, l. Shapiro [1]. Az az észrevétel, hogy a definíciót a fenti módon megváltoztatva teljesen additív függvényt kapunk, Murányitól [1] származik.

BIZONYÍTÁS. Mivel $n\geqq 3$ esetén $\varphi(n)$ páros (ez pl. a (4.9) formulából következik, de közvetlenül is könnyen belátható), ezért γ definíciója szerint

$$\gamma(n) = \gamma(\varphi(n))+\varepsilon(n), \tag{7.2}$$

ahol

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 2|n, \\ 0 & \text{ha } 2\nmid n. \end{cases} \tag{7.3}$$

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy (2) fennáll $n=1$, 2 esetén is.

A teljes additivitást az

$$n = \prod p_j^{a_j} \Rightarrow \gamma(n) = \sum a_j \gamma(p_j) \tag{7.4}$$

formában bizonyítjuk, n szerinti teljes indukcióval. $n=1$-re igaz; tegyük fel, hogy $n<m$ esetére teljesül, belátjuk m-re is. Legyen m egyik prímosztója p,

$$m = p^k b, \quad p\nmid b.$$

Ekkor

$$\varphi(m) = (p-1)p^{k-1}\varphi(b).$$

(2) szerint

$$\gamma(m) = \gamma(\varphi(m))+\varepsilon(m). \tag{7.5}$$

$\varphi(m)<m$, tehát rá alkalmazható az indukciós feltevés, azaz

$$\gamma(\varphi(m)) = \gamma(p-1)+k\gamma(p)+\gamma(\varphi(b)). \tag{7.6}$$

(2)-t visszafelé alkalmazva

$$\gamma(\varphi(b)) = \gamma(b)-\varepsilon(b),$$

$$\gamma(p-1) = \gamma(p)-\varepsilon(p),$$

tehát (5) és (6) szerint

$$\gamma(m) = k\gamma(p)+\gamma(b)+\varepsilon(m)-\varepsilon(b)-\varepsilon(p) = k\gamma(p)-\gamma(b), \tag{7.7}$$

mert nyilván $\varepsilon(m)=\varepsilon(b)+\varepsilon(p)$. Mivel $b<m$, ezért rá is alkalmazható (4), amit (7)-be téve pont (4)-et kapjuk az $n=m$ esetben. □

(7.8) *Feladat.* Minden n-re

$$^3\log n \leqq \gamma(n) \leqq {}^2\log n;$$

egyenlőség baloldalon a 3-hatványoknál, jobboldalon a 2-hatványoknál áll. (Pillai [i] tétele.)

Lényegében az (1) tétel és a fenti feladat az összes, amit a γ függvényről tudunk. (8) miatt

$$\sum_{n\leqq x} \gamma(n) \asymp x\log x,$$

de az már nem ismert, hogy

$$\sum_{n\leqq x} \gamma(n) \sim cx\log x$$

fennáll-e alkalmas c konstanssal.

8. *Számok felbontása négyzetszámok összegére*

Ebben a fejezetben arra az előző fejezetbeli γ függvény additivitásához hasonlóan meglepő jelenségre mutatunk példát, hogy egy additív probléma nultiplikatív függvényhez vezethet. Legyen $r(n)$ az $n=x^2+y^2$ diophantikus egyenlet megoldásainak száma, a csak sorrendben vagy előjelben különböző megoldásokat is külön számolva (pl. $r(1)=4$, $r(5)=8$).

(8.1) TÉTEL. *$r'=r/4$ multiplikatív függvény.*

Az $n=x^2+y^2$ egyenlet így is írható:

$$n = |x+iy|^2. \tag{8.2}$$

A továbbiakhoz szükségünk lesz az $x+iy$ $(x, y\in Z)$ alakú, ún. Gauss-egészek néhány tulajdonságára.

(8.3) DEFINÍCIÓ. Egy $\alpha=x+iy$ Gauss-egész konjugáltjának nevezzük az

$$\bar{\alpha} = x-iy \tag{8.4}$$

számot, normájának pedig az

$$N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = x^2+y^2 \tag{8.5}$$

számot.

Ezek a fogalmak egybeesnek a „komplex konjugált", ill. „abszolútérték-négyzet" fogalmával, de valójában nem ezeknek a rokonai; más algebrai számgyűrűkben ilyen kapcsolat nincs.

A Gauss-egészek körében az oszthatóságot a szokásos módon definiáljuk. Egy Gauss-egész egység, ha minden számnak osztója. Négy egység van: $1, -1, i$ és $-i$. Egy Gauss-egész prím, ha nem egység, de nem bontható fel két egységtől különböző szám szorzatára.

(8.6) LEMMA. *A Gauss-egészek gyűrűjében érvényes az egyértelmű prímfelbontás, azaz* a) *minden Gauss-egész prímek szorzatára bontható, és* b) *ha*

$$\alpha = \pi_1 \dots \pi_k = \varrho_1 \dots \varrho_l$$

α két prímfelbontása, akkor $k=l$, és alkalmas indexezéssel $\pi_j=\varepsilon_j \varrho_j$, ahol ε_j egység.

(8.7) DEFINÍCIÓ. Két Gauss-egész asszociált, ha egyik a másiknak egységszerese.

(8.8) LEMMA. *Legyen p (közönséges) prím.*

a) *Ha $p\equiv 3 \pmod 4$, akkor p a Gauss-egészek között is prím.*

b) *Ha $p\equiv 1 \pmod 4$, akkor $p=\pi\bar{\pi}$, ahol π és $\bar{\pi}$ Gauss-prímek, melyek nem asszociáltak.*

c) *Végül $2=i(1-i)^2$, $1-i$ Gauss-prím.*

(6) és (8) bizonyítását l. pl. Turán—Gyarmati [1], 7. fejezet, vagy Hardy—Wright [1], ch. XII.

(8.9) LEMMA. *Legyen $m, n\in N$, $(m, n)=1$, α Gauss-egész és $\alpha\bar{\alpha}=mn$. Ekkor van α-nak $\alpha=\beta\eta$ felbontása, amelyben*

$$\beta\bar{\beta} = m, \quad \gamma\bar{\gamma} = n.$$

Ez a felbontás egység szorzó erejéig egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Ha $(m, n)=1$, akkor van olyan $u, v \in Z$, hogy $mu+nv=1$, amiből következik, hogy m és n a Gauss-egészek körében is relatív prímek. Legyen α prímfelbontása

$$\alpha = \pi_1 \dots \pi_k.$$

Mivel

$$\pi_1 \bar{\pi}_1 \dots \pi_k \bar{\pi}_k = mn$$

ezért mindegyik π_j osztója m és n valamelyikének. Legyen

$$\beta = \prod_{\pi_j | m} \pi_j, \quad \gamma = \prod_{\pi_j | n} \pi_j.$$

Mindenesetre $\beta\bar{\beta}\,\gamma\bar{\gamma}=mn$. Továbbá β, és így $\bar{\beta}$ is relatív prím n-hez, tehát

$$\beta\bar{\beta} | m$$

és hasonlóan

$$\gamma\bar{\gamma} | n.$$

Legyen

$$m = \beta\bar{\beta}x, \quad n = \gamma\bar{\gamma}y;$$

ekkor $xy=1$. Másrészt x, y pozitív számok, hiszen $\beta\bar{\beta}$ pozitív, tehát $x=y=1$. Az eljárásból az egyértelműség világos. □

A TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Legyen $(m, n)=1$, és tekintsünk egy olyan α-t, amelyre

$$\alpha\bar{\alpha} = mn.$$

Ehhez az α-hoz a fenti lemma szerint található olyan (β, γ) pár, amelyre

$$\beta\bar{\beta} = m, \quad \gamma\bar{\gamma} = n,$$

mégpedig négy darab:

$$(\beta, \gamma); \quad (-\beta, -\gamma); \quad (i\beta, -i\gamma); \quad (-i\beta, i\gamma).$$

Az ilyen (β, γ) párok száma összesen $r(m)r(n)$, tehát

$$4r(mn) = r(m)\, r(n),$$

ami éppen azt jelenti, hogy

$$r'(mn) = r'(m)r'(n).$$ □

$r'(n)$ egyébként egyenlő az n normájú asszociált-osztályok számával.

(8.10) ÁLLÍTÁS.

$$r'(p^k) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad p = 2 \quad \text{vagy} \quad p \equiv 3 \pmod 4 \quad \text{és} \quad 2|k, \\ 0 & \text{ha} \quad p \equiv 3 \pmod 4 \quad \text{és} \quad 2 \nmid k, \\ k+1 & \text{ha} \quad p \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

BIZONYÍTÁS. A (8) lemmát használjuk. Ha $p \equiv 3 \pmod 4$, akkor

$$p^k = \gamma\bar{\gamma} \Rightarrow \gamma = \varepsilon p^j,$$

tehát $k=2j$. $2 \nmid k$ esetén nincs megoldás, $2|k$ esetén pedig asszociáltaktól eltekintve egy van.

Ha $p \equiv 1 \pmod 4$, akkor

$$p^k = \pi^k \bar{\pi}^k,$$

tehát

$$\gamma = \pi^u \bar{\pi}^v.$$

Innen $\gamma\bar{\gamma}=p^{u+v}$, tehát $u+v=k$, ami $k+1$ módon lehetséges, és ez asszociált erejéig meg is határozza γ-t. Végül

$$2^k = i^k \pi^{2k}, \quad \pi = 1-i.$$

2^k osztói tehát a π^j számok és asszociáltjaik; ezek pontosan $j=k$ esetén szolgáltatnak megoldást. □

(1) és (10) összevonható a következőképpen.

(8.11) TÉTEL. *$r=4\chi * u$, ahol χ az a teljesen multiplikatív függvény, amelyre*

$$\chi(p) = \begin{cases} 0 & ha \quad p = 2, \\ 1 & ha \quad p \equiv 1 \pmod 4, \\ -1 & ha \quad p \equiv -1 \pmod 4. \end{cases} \tag{8.12}$$

Tudniillik a multiplikativitás miatt elég prímhatványokra belátni az azonosságot, ami a kitevő szerinti indukcióval semmi problémát sem jelent.

(8.13) DEFINÍCIÓ. Egy számelméleti függvényt kvázimultiplikatívnak nevezünk, ha alkalmas konstanssal megszorozva multiplikatív lesz.

f nyilván pontosan akkor kvázimultiplikatív, ha $f(1)\neq 0$ és $f'=f/f(1)$ multiplikatív. r tehát kvázimultiplikatív. Legyen $s(n)$ az $n=x^2+2y^2$ diophantikus egyenlet megoldásainak száma; hasonlóan belátható, hogy s is kvázimultiplikatív. Viszont, ha $t(n)$ az $n=x^2+5y^2$ egyenlet megoldásszáma, t már nem kvázimultiplikatív, hiszen $t(2)=t(3)=0$, de $t(6)=4$. Ez azon múlik, hogy az $a+i\sqrt{5}b$ $(a, b\in Z)$ alakú számok gyűrűjében már nincs egyértelmű prímfelbontás.

Legyen általában $r_k(n)$ az

$$n = x_1^2+\ldots+x_k^2$$

diophantikus egyenlet megoldásainak száma ($r=r_2$). (11)-hez hasonló előállítások ismertek k más értékeire is, például

$$r_4 = (\chi_1 \mathrm{id}) * u, \tag{8.14}$$

ahol

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 4\nmid n, \\ 0 & \text{ha} \quad 4\mid n. \end{cases} \tag{8.15}$$

$$r_6 = 16\chi * \mathrm{id}^2 - 4(\chi\,\mathrm{id}^2) * u, \tag{8.16}$$

ahol χ a (12) alatti függvény.

$$r_8 = 16(\chi_2\,\mathrm{id}^3) * u, \tag{8.17}$$

ahol

$$\chi_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 2\nmid n, \\ -1 & \text{ha} \quad 2\mid n. \end{cases} \tag{8.18}$$

χ_1 és χ_2 is multiplikatív, tehát r_4 és r_8 is kvázimultiplikatív. Nyilván r_0 és r_1 is az: $r_0=\delta$,

$$r_1(n) = \begin{cases} 2 & \text{ha } n \text{ négyzetszám}, \\ 0 & \text{máskor}. \end{cases}$$

(8.19) *Feladat.* $k\neq 0, 1, 2, 4, 8$ esetén r_k nem kvázimultiplikatív.

9. *Hatványsorok*

Generátorfüggvényként leggyakrabban a hatványsorokat használják. A mi témánknál nem annyira fontosak, mint a Dirichlet-sorok, de néhány alkalmazásuk azért van.

(9.1) ÁLLÍTÁS. *Legyenek* f, g, h *számelméleti függvények,* $h=f*g$ *és*

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n, \quad H(x)=\sum_{n=1}^{\infty} h(n)x^n.$$

Ekkor

$$H(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g(n)F(x^n), \tag{9.2}$$

ha a

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m)g(n)x^{mn}$$

sor abszolút konvergens.

Az állítás a definíciók közvetlen következménye. Nézzünk néhány speciális esetet. $f=g=u$ mellett azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{x^d}{1-x^d}. \quad (|x|<1) \tag{9.3}$$

$f=u$, $g=id$ mellett, valamint f és g felcserélésével

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)\,x^n=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{dx^d}{1-x^d}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{x^d}{(1-x^d)^2} \quad (|x|<1) \tag{9.4}$$

adódik. $f=u$, $g=\mu$ mellett

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)x^n}{1-x^n}=x. \quad (|x|<1) \tag{9.5}$$

(4) felhasználható egy nevezetes, Eulertól származó azonosság bizonyítására. Legyen

$$u_k=\frac{3k^2+k}{2}, \quad k\in Z.$$

(9.6) TÉTEL.

$$\sigma(n)=\sum_{0<u_k<n}(-1)^{k+1}\sigma(n-u_k)+\begin{cases}(-1)^m u_m, & \text{ha} \quad n=u_m,\\ 0 & \text{máskor.}\end{cases}$$

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$J(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n). \quad (|x|<1) \tag{9.7}$$

Egy szintén Eulertól származó tétel szerint (l. pl. Pólya—Szegő [1] ch. I, 54. feladat)

$$J(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{u_k}. \tag{9.8}$$

(7) logaritmikus deriváltját képezve

$$\frac{J'}{J}(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}, \tag{9.9}$$

azaz (4) szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)x^n = -x\frac{J'}{J}(x). \tag{9.10}$$

(10)-et J-vel szorozva

$$-xJ'(x) = J(x)\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k\sigma(n)x^{n+u_k} = \tag{9.11}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{0\leqq u_k<n}(-1)^k\sigma(n-u_k).$$

Másrészt (8)-ból

$$-xJ'(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k x^{u_k}. \tag{9.12}$$

(11)-ben és (12)-ben x^n együtthatóját egyenlővé téve kapjuk a tételt. □

Fontosabb szerepük van a hatványsoroknak az additív típusú problémáknál. Példaként tekintsük r_2 meghatározását. r_2 definíció szerint egy *additív* konvolúcióval keletkezik r_1-ből, éspedig

$$r_2(n) = \sum_{k=0}^{n} r_1(k)r_1(n-k), \tag{9.13}$$

ahol $r_1(0)=1$ veendő. (13) miatt pedig

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_2(n)x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty} r_2(n)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_1(n)x^n\right)^2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}\right)^2. \tag{9.14}$$

Másrészt (8.11) szerint $r=4\chi * u$; ezt (9.1)-be téve

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_2(n)x^n = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)x^n}{1-x^n} = 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{1-x^{2k+1}}. \tag{9.15}$$

A (8.11) tétel tehát ekvivalens azzal, hogy

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}\right)^2 = 1+4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{1-x^{2k+1}}. \tag{9.16}$$

Hasonlóan a (8.14), (8.16), (8.17) azonosságok a következőkkel ekvivalensek:

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}\right)^4 = 1+8\sum_{\substack{4\nmid n\\ n\geqq 1}}\frac{nx^n}{1-x^n}, \tag{9.17}$$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}\right)^6 = 1+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{1+x^{2n}} - 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)^2x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}}, \tag{9.18}$$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}\right)^8 = 1+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{1+(-1)^{n+1}x^n}. \tag{9.19}$$

Ezek a tételek közvetlenül ebben az analitikus alakjukban is bizonyíthatók; ez Jacobitól [1] származik.

(9.20) *Feladat* (Corrádi—Kátai [1] tétele). Legyen f ± 1 értékű számelméleti függvény és

$$h(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)f(n-k).$$

Bizonyítandó:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|h(n)|}{\sqrt{n}} \geqq 1.$$

10. *Szabályos additiv függvények*

Számos olyan típusú állítás ismeretes, hogy ha egy multiplikatív vagy additív függvény valamilyen értelemben szabályos, akkor az csak id^k, illetve $k \cdot \log$ lehet, k konstans. Egy egyszerű ilyen állítást tartalmaz pl. a (2.16) feladat is. A továbbiakban valós értékű additív függvényekkel foglalkozunk; a multiplikatív függvényekre vonatkozó eredmények egyszerű átfogalmazással nyerhetők.

Az első idevágó eredmények Erdős [2] következő tételei voltak:

a) Ha g additív függvény és $g(n+1)-g(n)\to 0$, akkor $g=c\cdot\log$.

b) Ha g monoton valósértékű additív függvény, akkor $g=c\cdot\log$.

Ezeknek egy közös általánosítását fogjuk most bebizonyítani.

(10.1) TÉTEL. *Ha g valósértékű additív függvény és*

$$\liminf g(n+1)-g(n) \geqq 0,$$

akkor $g=c\cdot\log$.

Megemlítünk még néhány idevágó eredményt.

(10.2) KÁTAI [1] TÉTELE. *Ha g additív és*

$$\liminf \Delta^k g(n) \geqq 0$$

valamilyen k-val (Δ^k jelöli a k-adik differenciát), akkor $g=c\cdot\log$.

(1) ennek a $k=1$ esete.

(10.3) WIRSING [1] TÉTELEI.

a) *Ha g teljesen additív és $g(n+1)-g(n)$ egy oldalról korlátos, akkor* $g=c\cdot\log$.

b) *Ha g additív és $g(n+1)-g(n)$ korlátos, akkor*

$$g(n) = c\log n + O(1).$$

Wirsing bizonyítását magyar nyelven, egyszerűsítve l. Freud [1]. Elemileg könnyen belátható (l. Ruzsa [1]), hogy ha g additív függvény és $g(n+1)-g(n)$ egy oldalról korlátos, akkor a másik oldalról is, tehát (3.b)-ben is elég egyoldali korlátosságot feltenni.

(10.4) *Feladat.* Egy g additív függvény pontosan akkor korlátos, ha

$$\sum_p \sup_k |g(p^k)| < \infty.$$

(10.5) *Feladat.* Ha g additív függvény és

$$g(n+1)-g(n) = O(1),$$

akkor van olyan g_1 teljesen additív függvény, hogy

$$g(n) = g_1(n)+O(1).$$

(Azaz (3.a)-ból következik (3.b).)

(10.6) IVÁNYI—KÁTAI [1] TÉTELE. *Ha g teljesen additív és monoton végtelen sok*

$$[K, K+(2+\varepsilon)\sqrt{K}]$$

típusú intervallumon, akkor $g=c\cdot\log$.

Most nekilátunk (1) bizonyításának.

(10.7) LEMMA. *Ha g additív függvény,*

$$\liminf g(n+1)-g(n) \geqq 0$$

és $g(q)=0$ valamilyen q-ra, akkor

$$g(n) = o(\log n).$$

BIZONYÍTÁS. Válasszunk egy ε-t és hozzá egy n_0-t, amelyre

(10.8) $$g(n+1)-g(n) > -\varepsilon \quad (n \geqq n_0).$$

Most megbecsüljük $g(n)$-et (n nagy). Legyen n' az a legnagyobb n alatti szám, amelyre

$$n' \equiv q \pmod{q^2}.$$

Nyilván $n'>n-q^2$, így

(10.9) $$g(n) > g(n')-q^2\varepsilon,$$

ha $n'\geqq n_0$. Továbbá $n'=q(n'/q)$ és itt a tényezők

$$n'/q \equiv 1 \pmod{q}$$

miatt relatív prímek, tehát

$$g(n') = g(q)+g(n'/q) = g(n'/q).$$

(9) miatt

(10.10) $$g(n) > g(n'/q)-q^2\varepsilon.$$

Legyen

$$A = \max_0 \{|g(n)| : n \leqq qn_0+3q^2\}.$$

Belátjuk, hogy minden n-re

(10.11) $$g(n) \geqq -A-\frac{q^2\varepsilon}{\log q}\log n.$$

Ez $n\leqq qn_0+3q^2$ esetén világos, a nagyobb n-ekre indukcióval bizonyítjuk. A nagyobb n-ekre $n'>n_0$, tehát (10) és az indukciós feltevés miatt

$$g(n) > g(n'/q)-q^2\varepsilon \geqq -A-\frac{q^2\varepsilon}{\log q}\log\frac{n}{q}-q^2\varepsilon = -A-\frac{q^2\varepsilon}{\log q}\log n,$$

qu. e. d.

Legyen most n'' a minimális n fölötti szám, amelyre $n''\equiv q \pmod{q^2}$.

Nyilván $n''<n+q^2$ és

(10.12) $$g(n) < g(n'')+q^2\varepsilon = g(n''/q)+q^2\varepsilon.$$

Indukcióval belátjuk, hogy

$$g(n) < A + \frac{2q^2\varepsilon}{\log q} \log n. \tag{10.13}$$

Ugyanis ez $n \leqq n_0 + 3q^2$ esetén világos, $n > n_0 + 3q^2$ esetén pedig $n'' > n_0$ és $n'' < nq^{-1/2}$ lesz, tehát az indukciós lépés így néz ki:

$$g(n) < g(n''/q) + q^2\varepsilon < A + \frac{2q^2\varepsilon}{\log q} \log nq^{-1/2} + q^2\varepsilon = A + \frac{2q^2\varepsilon}{\log q} \log n.$$

(11) és (13) miatt

$$\limsup \frac{|g(n)|}{\log n} \leqq \frac{2q^2\varepsilon}{\log q};$$

mivel ε tetszőleges volt, készen vagyunk. □

A TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Legyen $(q \geqq 2)$

$$g_q(n) = g(n) - \frac{g(q)}{\log q} \log n.$$

g_q nyilván kielégíti a lemma feltételeit, tehát

$$g_q(n) = o(\log n),$$

azaz

$$\lim \frac{g(n)}{\log n} = \frac{g(q)}{\log q}.$$

Mivel a bal oldal q-tól független, ezért $g(q)/(\log q)$ konstans. □

Az $x^+ = \max(x, 0)$ jelölés bevezetésével a tétel feltevése úgy írható, hogy

$$(g(n) - g(n+1))^+ \to 0.$$

A bizonyítás kis módosításával belátható, hogy ehelyett elég átlagos 0-hoz tartást feltenni, azaz azt, hogy

$$\sum_{n \leqq x} (g(n) - g(n+1))^+ = o(x). \tag{10.14}$$

A (7) lemma helyett a következőt kell igazolni: ha g additív függvény, kielégíti (14)-et és $g(q) = 0$, akkor

$$\sum_{n \leqq x} g(n) = o(x \log x).$$

11. *A σ függvény összegzése*

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy egy szám osztóinak összege „átlagosan" hogy viselkedik.

(11.1) TÉTEL.

$$S(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{n \leqq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \log x).$$

Tehát ha találomra veszünk egy $n \leqq x$ számot, akkor átlagosan $\sigma(n) \approx (\pi^2/12)x$ lesz. Másképpen fogalmazva átlagosan $\sigma(n) \approx (\pi^2/6)n$, ti. $(\pi^2/6)n$ az a függvény, amelynek összegzési függvénye aszimptotikusan egyenlő $S(x)$-szel. Ezt alátámasztja a következő tétel is.

(11.2) TÉTEL.

$$S_{-1}(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \leqq x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} x + O(\log x).$$

Előrebocsátunk egy általános összegzési képletet.

(11.3) TÉTEL. *Legyen* $f = g * h$ *és*

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \leqq x} f(n), \quad G(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \leqq x} g(n), \quad H(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \leqq x} h(n).$$

Ekkor

(11.4)
$$F(x) = \sum_{n \leqq x} g(n) H(x/n) = \sum_{n \leqq x} h(n) G(x/n).$$

BIZONYÍTÁS.

$$F(x) = \sum_{n \leqq x} \sum_{ab=n} g(a) h(b) = \sum_{a \leqq x} g(a) \sum_{\substack{b \\ ab \leqq x}} h(b) = \sum_{a \leqq x} g(a) H(x/a).$$

(4) másik fele g és h felcserélésével adódik. □

(1) *bizonyítása.* $\sigma = u * \mathrm{id}$ és nyilván

$$\sum_{n \leqq y} u(n) = [y],$$

(11.5)
$$\sum_{n \leqq y} \mathrm{id}\, n = \frac{1}{2}[y][y+1],$$

tehát (4)-et alkalmazva

(11.6)
$$S(x) = \sum_{n \leqq x} n \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n \leqq x} \frac{1}{2} \left[\frac{x}{n}\right] \left[\frac{x}{n} + 1\right].$$

Érdekes módon (6) egyszerűbbnek látszó első feléből csak

$$x^2/2 + O(x) \leqq S(x) \leqq x^2$$

adódik. Viszont (6) második feléből

$$[y][y+1] = y^2 + O(y)$$

alkalmazásával kapjuk, hogy

(11.7)
$$S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} x^2/n^2 + O\Big(\sum_{n \leqq x} x/n\Big).$$

(7) második tagja $O(x \log x)$, ugyanis

(11.8)
$$\sum_{n \leqq x} 1/n = \log x + \gamma + o(1),$$

γ az úgynevezett Euler-féle konstans (erről még a következő fejezetben lesz szó). A főtag így kezelhető:

(11.9)
$$\sum_{n \leqq x} n^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} - \sum_{n > x} n^{-2} = \pi^2/6 + O(1/x).$$

Itt felhasználtuk azt, hogy a végtelen sor összege $\pi^2/6$. Általában ismert, hogy egész k-ra

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}, \tag{11.10}$$

ahol a B_j-k az ún. Bernoulli-számok, amelyek pl. az

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \tag{11.11}$$

sorfejtéssel definiálhatók. (L. pl. Szász [1], I. kötet 685. oldal.) (7), (8) és (9) együtt épp (1)-et adja. □

(2) hasonlóan bizonyítható az

$$S_{-1}(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} \left[\frac{x}{n}\right]$$

formulából, vagy pedig levezethető (1)-ből parciális összegzéssel (l. a következő fejezetben).

A kapott $O(x \log x)$ hibatag valószínűleg nem optimális, hiszen az összeget elég durván, egyszerűen az egészrész-jelek elhagyásával becsültük. Túlságosan mégsem javítható.

(11.12) TÉTEL.

$$S(x) - (\pi^2/12)x^2 \neq o(x \log\log x).$$

(12) tagadásából

$$\sigma(n) = o(n \log\log n)$$

következne, és már ez sem lesz igaz. Még pontosabban:

(11.13) GRONWALL [1] TÉTELE.

$$\max_{n \leqq x} \sigma(n) \sim e^{\gamma} x \log\log x, \tag{11.14}$$

$$\max_{n \leqq x} \sigma_{-1}(n) \sim e^{\gamma} \log\log x, \tag{11.15}$$

ahol γ a (8)*-ban is szereplő Euler-konstans.*

Szükségünk lesz a következő két eredményre, amelyet majd a 19—20. fejezetben bizonyítunk.

(11.16) MERTENS [1] TÉTELE.

$$\prod_{p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim e^{-\gamma}/\log x.$$

(11.17) CSEBISEV TÉTELE.

$$\vartheta(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{p \leqq x} \log p \asymp x.$$

(13) BIZONYÍTÁSA. (15) igazolásával kezdjük. Legyen

$$n = \prod_{j=1}^{k} q_j^{a_j} \leqq x,$$

ahol $q_1<q_2<\ldots<q_k$ prímek. Legyen p_j a j-edik prím. Ekkor

$$x \geqq n \geqq \prod_{j=1}^{k} p_j = \exp \vartheta(p_k),$$

tehát (17) szerint

(11.18) $$p_k \ll \log x.$$

Másrészt (4.6) és (16) szerint

$$\sigma_{-1}(n) = \prod (1-q_j^{-1})^{-1}(1-q_j^{-a_j-1}) \leqq \prod (1-q_j^{-1})^{-1} \leqq \prod_{j=1}^{k} (1-p_j^{-1})^{-1} \sim e^{\gamma} \log p_k.$$

(18) miatt

$$\sigma_{-1}(n) \leqq (1+o(1)) e^{\gamma} \log\log x,$$

azaz (15)-ben a felső becslést beláttuk.

Rátérünk az alsó becslésre. Legyen

$$K = [\log\log x],$$

és válasszuk meg k-t úgy, hogy

$$p_1 \ldots p_k \leqq x^{1/K} < p_1 \ldots p_{k+1}$$

legyen. Ekkor (17) szerint

$$\log p_{k+1} \geqq (1+o(1)) K,$$

így (16)-ot használva

(11.19) $$\prod_{j=1}^{k+1} (1-p_j^{-1})^{-1} \sim e^{\gamma} \log p_{k+1} \geqq (1+o(1)) e^{\gamma} \log\log x.$$

Legyen

$$n = (p_1 \ldots p_k)^K,$$

ekkor

(11.20) $$\sigma_{-1}(n) = \prod_{j=1}^{k+1} (1-p_j^{-1})^{-1} \cdot (1-p_{k+1}^{-1}) \prod_{j=1}^{k+1} (1-p_j^{-K-1}).$$

$x \to \infty$ esetén $x^{1/\log\log x} \to \infty$, tehát $k \to \infty$, így (11.20) második tényezője 1-hez tart. A harmadik tényező

$$\geqq \prod_{p} (1-p^{-K-1}) \geqq \prod_{n=2}^{\infty} (1-n^{-K-1}) \to 1,$$

mert az egyes tényezők 1-hez tartanak és a szorzat $K \geqq 1$ esetén egyenletesen konvergens. (19) miatt

$$\sigma_{-1}(n) \geqq (1+o(1)) e^{\gamma} \log\log x;$$

ezzel (15)-öt teljesen bebizonyítottuk.

Rátérünk (14) bizonyítására. Egyrészt

$$\max_{n \leqq x} \sigma(n) = \max_{n \leqq x} n\sigma_{-1}(n) \leqq x \max_{n \leqq x} \sigma_{-1}(n),$$

ebből a felső becslés közvetlenül következik. Másrészt legyen

$$n = m[x/m], \quad m \leqq \sqrt{x}.$$

Ekkor

$$\sigma(n) \geqq \sigma(m)[x/m] = \sigma_{-1}(m)(m[x/m]) \geqq (x-\sqrt{x})\sigma_{-1}(m),$$

tehát

$$\max_{n\leqq x}\sigma(n)\geqq(x-\sqrt{x})\max_{m\leqq\sqrt{x}}\sigma_{-1}(m)\sim e^{\gamma}x\log\log x,$$

és ezzel az alsó becslést is beláttuk. □

(11.21) *Feladat.* (Landau [1] tétele).

$$\min_{n\geqq x}\varphi(n)/n\sim e^{-\gamma}/\log\log x,$$

$$\min_{n\geqq x}\varphi(n)\sim e^{-\gamma}x/\log\log x.$$

12. *Számítási segédeszközök*

A későbbiekben gyakran lesz szükség az előző fejezetben leírtakhoz hasonló, de bonyolultabb számolásokra. Ezeket sosem fogjuk teljesen részletezni, most viszont összefoglaljuk a két legfontosabb eszközt, a parciális összegzést és az Euler—McLaurin-formulát.

A parciális összegzés olyan

$$\sum_{i=1}^{n}A_ib_i$$

típusú összegek becslésénél hasznos, ahol A_i nagyon jól ismert, pl. elemi függvény, b_i viszont szeszélyes, csak átlagosan szabályos. Legegyszerűbb alakja

$$\sum_{i=1}^{n}A_ib_i=A_nB_n-\sum_{j=1}^{n-1}(A_{j+1}-A_j)B_j, \tag{12.1}$$

ahol

$$B_j=\sum_{i=1}^{j}b_i.$$

A bizonyítás teljes indukcióval könnyen elvégezhető.

(1) nyilván rokona a parciális integrálás képletének:

$$\int_a^b Fg=[FG]_a^b-\int_a^b F'G,\quad G=\int g. \tag{12.2}$$

(1) és (2) közös általánosítása a Stieltjes-integrálokra vonatkozó parciális integrálás képlete:

$$\int_a^b F^+(x)dG(x)=F^+(b)G^+(b)-F^-(a)G^-(a)-\int_a^b G^-(x)dF(x), \tag{12.3}$$

ahol F, G korlátos változású függvények és F^+, F^- a jobb-, illetve baloldali határértéket jelöli.

Ha a szereplő F, G függvényekre a szakadási pontokban a szokásos

$$F(x)=\frac{1}{2}(F^+(x)+F^-(x))$$

kikötést tesszük, akkor (3) a szimmetrikus

$$\int_a^b F\,dG = [FG]_a^b - \int_a^b G\,dF \tag{12.4}$$

alakot ölti. Diszkrét függvényekre visszakapjuk (1)-et, abszolút folytonos függvényekre (2)-t. Kiemelem még azt az esetet, amikor az egyik függvény diszkrét és a másik abszolút folytonos:

$$\sum_{i=1}^{n} A(i)b_i = A(n)B(n) - \int_1^n B(x)A'(x)\,dx, \tag{12.5}$$

ha A abszolút folytonos és

$$B(x) = \sum_{i \leqq x} b_i.$$

(12.6) *Feladat.* Bizonyítandó, hogy ekvivalensek a

$$\vartheta(x) \sim x, \quad \pi(x) \sim x/\log x$$

aszimptotikus egyenlőségek, ahol ϑ a (11.17)-ben definiált függvény, $\pi(x)$ pedig az x-nél nem nagyobb prímszámok számát jelöli. (A prímszámtétel két formája.)

Másik segédeszközünk az Euler—McLaurin-összegképet; főleg

$$\sum_{i=1}^{n} A(i)$$

típusú összegek becslésénél hasznos, ahol A elemi függvény.

Először definiáljuk a Bernoulli-polinomokat. Legyen $b_0(x)=1$ és $n \geqq 1$ esetére b_n-et definiáljuk a következő rekurziós formulával:

$$b_n' = b_{n-1}, \quad \int_0^1 b_n(x)\,dx = 0. \tag{12.7}$$

Könnyen látható, hogy ez egyértelműen meghatároz egy polinomsorozatot. A

$$B_n = b_n(0) \tag{12.8}$$

számok az úgynevezett Bernoulli-számok, amelyeket $\zeta(2k)$ kifejezésével kapcsolatban más módon (11.11) alatt már definiáltunk. Belátható, hogy közülük a páratlan indexűek ($n=1$ kivételével) 0-val egyenlők.

(12.9) *Euler—McLaurin-összegképlet.* Ha f $[a, b]$-ben k-szor folytonosan differenciálható függvény, a, b egész számok, akkor

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b f(t)\,dt + \sum_{j \leqq m/2} \frac{B_{2j}}{(2j)!}\,[f^{(2j-1)}]_a^b + \tag{12.10}$$

$$+ (-1)^{m+1} \int_a^b f^{(m)}(t)\,b_m(\{t\})\,dt.$$

A bizonyítást l. pl. Szász [1] I. kötet XV. fejezet.

Fontos alkalmazás az

(12.11) $$A_k(x) = \sum_{n \leqq x} n^k$$

összegek becslése.

(12.12) ÁLLÍTÁS.

(12.13) $$A_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + O(x^k) \quad (k \geqq 0);$$

(12.14) $$A_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \gamma_k + O(x^k) \quad (-1 < k < 0),$$

γ_k konstans;

(12.15) $$A_{-1}(x) = \log x + \gamma + O(x^{-1}),$$

ennek gyengébb formája (11.8);

(12.16) $$A_{-1}(x) = \log x + \gamma + 1/2x + O(x^{-2})$$

ha x egész; végül

(12.17) $$A_k(x) = \zeta(-k) + \frac{x^{1+k}}{1+k} + O(x^k) \quad (k < -1).$$

Ezeknek a levezetése igen hasonló. (16) még több taggal megtalálható, pl. Szász [1] I. kötet 693. o. Példaként bebizonyítjuk (14)-et. (10)-et $f(t)=t^k$, $m=1$ választással használjuk:

$$A_k(x) = \frac{1+x^k}{2} + \int_1^x t^k \, dt + \int_1^x k t^{k-1} b_1(\{t\}) \, dt.$$

A második integrált így becsüljük:

$$\int_1^x = \int_1^\infty - \int_x^\infty, \quad \int_x^\infty \ll \int_x^\infty t^{k-1} \, dt \ll x^k,$$

hiszen $b_1(\{t\})$ korlátos (a törtrésznek köszönhetően). Pont (14)-et kapjuk, ahol

$$\gamma_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} + \int_1^\infty k t^{k-1} b_1(\{t\}) \, dt.$$

A formula akkor is igaz, ha x nem egész, mert a főtag megváltozását az x-ről $[x]$-re való áttérésnél a maradéktag lenyeli.

13. *A zétafüggvény kiterjesztése*

Mielőtt visszatérnénk az összegzési kérdésekre, bemutatjuk az Euler—McLaurin-formulának egy váratlanabb alkalmazását. A Riemann-féle zétafüggvényt, melyet a

(13.1) $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$$

Re $s>1$ esetére konvergens sorral definiáltunk, kiterjesztjük az egész síkra.

(13.2) TÉTEL. *A zétafüggvény kiterjeszthető az egész síkon meromorf függvénnyé, amelynek az egyetlen szingularitása az* $s=1$ *pontban levő elsőrendű pólus, 1 reziduummal.*

Magyarán szólva, a

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$$

függvény az egész síkon reguláris lesz.

(13.3) KÖVETKEZMÉNY. $s\to 1$ esetén

$$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}.$$

BIZONYÍTÁS. Az Euler—McLaurin-formulát a

$$\sum_{n=1}^{N} n^{-s}$$

sorra alkalmazva, majd N-nel a végtelenhez tartva kapjuk (egyelőre $\operatorname{Re} s>1$ esetére), hogy

$$\zeta(s) = 1/2+\int_1^\infty t^{-s}\,dt+\sum_{j\leqq m/2}\frac{B_{2j}}{(2j)!}s(s-1)\dots(s-2j+2)-$$

$$-s(s-1)\dots(s-m+1)\int_1^\infty t^{-s-m}b_m(\{t\})\,dt = \tag{13.4}$$

$$=\frac{1}{s-1}+P_m(s)+Q_m(s)\int_1^\infty t^{-s-m}b_m(\{t\})\,dt,$$

ahol P_m, Q_m polinomok. Az utolsó integrál $b_m(\{t\})$ korlátossága miatt $\operatorname{Re} s>1-m$ esetén konvergens, sőt, $\operatorname{Re} s>1-m+\varepsilon$ esetén egyenletesen konvergens, tehát ebben a félsíkban egy reguláris függvényt ad. A (4) formula tehát egy $Z_m(s)$ függvényt definiál, amely a $\operatorname{Re} s>1-m$ félsíkban meromorf, és $Z_m(s)-(s-1)^{-1}$ ugyanott reguláris. Mivel bármely két Z_m függvény $\operatorname{Re} s>1$ esetén megegyezik egymással (és a zétafüggvénnyel), ezért az analitikus folytatás egyértelműsége miatt mindenütt egyenlők, ahol mindkettő értelmezve van. Definiáljuk tehát $\zeta(s)$-et mint a $Z_m(s)$, $m>1-\operatorname{Re} s$ számok közös értékét. □

14. *A* σ_k *függvény összegzése*

Legyen

$$S_k(x) = \sum_{n\leqq x}\sigma_k(n).$$

(14.1) TÉTEL. $k>1$ *esetén*

$$S_k(x) = \frac{\zeta(k+1)}{k+1}x^{k+1}+O(x^k).$$

BIZONYÍTÁS. (11.3) szerint

$$S_k(x) = \sum_{n\leqq x} A_k(x/n),$$

A_k-t (12.11)-ben definiáltuk. (12.13) miatt tehát

$$S_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \sum_{n \leqq x} n^{-k-1} + O\Big(x^k \sum_{n \leqq x} n^{-k}\Big).$$

A második szumma $k>1$ miatt korlátos, a második tag eszerint $O(x^k)$. A főtag pedig

$$\frac{x^{k+1}}{k+1} A_{-k-1}(x) = \frac{\zeta(k+1)}{k+1} x^{k+1} + O(x^k)$$

(12.17) miatt. □

$0<k<1$ esetén ugyanezzel a módszerrel

$$S_k(x) = \frac{\zeta(k+1)}{k+1} x^{k+1} + O(x)$$

adódik; ennél lényegesen jobb is elérhető.

(14.2) TÉTEL. *$0<k<1$ esetén*

$$S_k(x) = \frac{\zeta(k+1)}{k+1} x^{k+1} + \gamma_k x + O(x^{(k+1)/2}).$$

A bizonyítás (11.3) alábbi általánosításán alapul.

(14.3) TÉTEL. (11.3) *jelöléseivel, ha $x=vw$, akkor*

(14.4) $$F(x) = \sum_{m \leqq v} g(m) H(x/m) + \sum_{n \leqq w} h(n) G(x/n) - G(v) H(w).$$

BIZONYÍTÁS.

$$F(x) = \sum_{mn \leqq x} g(m) h(n).$$

Ha $mn \leqq x = vw$, akkor vagy $m \leqq v$, vagy $n \leqq w$. Az első típusú tagok összege

$$\sum_{m \leqq v} g(m) H(x/m),$$

a második típusúaké

$$\sum_{n \leqq w} h(n) G(x/n).$$

Kétszer adtuk össze azokat a tagokat, ahol egyszerre $m \leqq v$ és $n \leqq w$, ezeket tehát le kell vonni; ez adja (4)-ben a $-G(v)H(w)$ tagot. □

(2) BIZONYÍTÁSA. A (4) képletet $v=w=x^{1/2}$ választással alkalmazva adódik, hogy

$$S_k(x) = \sum_{m \leqq x^{1/2}} m^k [x/m] + \sum_{n \leqq x^{1/2}} A_k(x/n) - [x^{1/2}] A_k(x^{1/2}).$$

Az első szummát az egészrészjelek elhagyásával becsülve, az

$$x \sum_{m \leqq x^{1/2}} m^{k-1} + O\Big(\sum_{m \leqq x^{1/2}} m^k\Big) = \frac{x^{1+k/2}}{k} + \gamma_k x + O(x^{(k+1)/2})$$

(12.14) és (12.13) szerint.

A második szumma értéke (12.14), (12.13) és (12.17) szerint

$$\sum_{n\leqq x^{1/2}}(x/n)^{k+1}+O\Big(\sum_{n\leqq x^{1/2}}(x/n)^k\Big)=\frac{\zeta(k+1)}{k+1}x^{k+1}-\frac{x^{1+k/2}}{k(k+1)}+O(x^{(k+1)/2}).$$

Végül a harmadik tag (12.13) szerint

$$\frac{x^{1+k/2}}{k+1}+O(x^{(k+1)/2}).$$

Ezeket összeadva, (2)-t kapjuk. □

(14.5) TÉTEL. *$k>1$ esetén*

(14.6) $$S_k(x)=\zeta(k+1)x+O(1),$$

$0<k<1$ esetén pedig

(14.7) $$S_k(x)=\zeta(k+1)x+\frac{\gamma_k}{1-k}x^{1-k}+O(x^{(1-k)/2}).$$

BIZONYÍTÁS. (4.15) és (12.5) szerint

$$S_{-k}(x)=\sum_{n\leqq x}n^{-k}\sigma_k(n)=x^{-k}S_k(x)+k\int_1^x t^{-k-1}S_k(t)\,dt.$$

Ide (1)-et, illetve (2)-t helyettesítve kapjuk (6)-ot és (7)-et. □

15. *A τ függvény összegzése*

A σ_k függvények összegzésére vonatkozó kérdések közül egyedül a $k=0$ esetet hagytuk ki. Legyen

(15.1) $$T(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n\leqq x}\tau(n)=S_0(x).$$

(15.2) DIRICHLET TÉTELE.

$$T(x)=x\log x+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x}).$$

BIZONYÍTÁS. (14.3) szerint

(15.3) $$T(x)=2\sum_{m\leqq\sqrt{x}}[x/m]-[\sqrt{x}]^2.$$

Az első tag értéke (12.15) szerint

$$2x\sum_{m\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{m}+O(\sqrt{x})=2x(\log\sqrt{x}+\gamma)+O(\sqrt{x}),$$

a második tagé nyilván

$$x+O(\sqrt{x});$$

összeadva (2)-t kapjuk. □

Legyen

(15.4) $$R(x)\overset{\text{def}}{=}T(x)-x\log x-(2\gamma-1)x.$$

R nagyságrendjét sokat vizsgálták; Dirichlet tételét először Voronoj [1] javította lényegesen.

(15.5) VORONOJ TÉTELE.

$$R(x) = O(x^{1/3} \log x).$$

Tudtommal a jelenlegi rekord a következő:

(15.6) RICHERT [1] TÉTELE.

$$R(x) = O(x^{15/46} \log^{30/23} x).$$

A másik irányban ismert, hogy $R(x) \neq O(x^{1/4})$. Pontosabban:

(15.7) HARDY [1] TÉTELE.

$$\limsup R(x) x^{-1/4} = \infty.$$

(15.8) INGHAM [1] TÉTELE.

$$\liminf R(x) x^{-1/4} = -\infty.$$

Ezeket l. még Chandrasekharan [2]. Hogy ezek mennyivel mélyebbek, mint a (11.12) tétel, azt a következő eredmény mutatja.

(15.9) TÉTEL. *Tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *választással*

$$\tau(n) = o(n^{\varepsilon}).$$

Ezt a következő fejezetben bizonyítjuk; most rátérünk Voronoj tételére. Vinogradov [2] alábbi tételét fogjuk használni.

(15.10) LEMMA. *Legyen* f *a* $[q, r]$ *intervallumban kétszer folytonosan deriválható függvény, amely ott kielégíti az*

$$1/A \leqq f''(t) \leqq k/A \leqq 1/5$$

feltételt. Ekkor

$$\sum_{q < n \leqq r} \{f(n)\} = \frac{r-q}{2} + O(A^{-1/3}(r-q) + A^{2/3}),$$

az O-ban szereplő konstans k-tól függ.

Vinogradov ezt a tételt trigonometrikus összegek segítségével bizonyítja. Egy valamivel gyengébb formája belátható elemi úton is, l. Vinogradov [1] III. fej. 3—6. feladat. Ebből az (5)-nél egy hajszállal gyengébb

$$R(x) = O(x^{1/3} \log^2 x)$$

vezethető le.

Voronoj tétele régebbi Vinogradovénál. Voronoj eredeti bizonyítása, csakúgy, mint Richerté, az analitikus számelmélet klasszikus módszereit használja (és meglehetősen bonyolult).

(5) BIZONYÍTÁSA. Legyen $r = \sqrt{x}$. Be fogjuk látni, hogy

$$\sum_{m=1}^{r} \{x/m\} = r/2 + O(x^{1/3} \log x). \tag{15.11}$$

(3) szerint

$$T(x) = 2\sum_{m=1}^{r} x/m - 2\sum_{m=1}^{r} \{x/m\} - r^2.$$

Az első tagot (12.16), a másodikat (11) segítségével becsülve kapjuk, hogy

$$T(x) = 2x(\log r + \gamma + 1/2r) - r - r^2 + O(x^{1/3}\log x),$$

vagyis

$$R(x) = \underbrace{x\log(r^2/x) + x/r - r + x - r^2}_{R_1(x)} + O(x^{1/3}\log x).$$

Legyen $x = r^2 + a$, $0 \leqq a \leqq 2r$. Ekkor tehát

$$R_1(x) = x\log\left(1 - \frac{a}{x}\right) + a + a/r.$$

Itt a harmadik tag $0(1)$ és

$$\log\left(1 - \frac{a}{x}\right) = -a/x + O(a^2/x^2)$$

miatt az első két tag együtt

$$O(a^2/x^2) = 0(1).$$

Hátravan (11) bizonyítása. (10)-et az

$$f(t) = x/t, \quad f''(t) = x/2t^3$$

függvényre alkalmazzuk. Osszuk fel az $[1, r]$ intervallumot a következőképpen: $[1, 2x^{1/3}]$, $(2^j x^{1/3}, 2^{j+1}x^{1/3}]$, $1 \leqq j \leqq k$, végül $(2^k x^{1/3}, r]$, ahol $2^k x^{1/3} < r \leqq 2^{k+1}x^{1/3}$.

Az első intervallumban (10) nem használható, ott a triviális

$$\sum \{x/m\} - 1/2 \ll x^{1/3}$$

becslést alkalmazzuk. A $(2^j x^{1/3}, 2^{j+1}x^{1/3}]$ intervallumban (10) szerint

$$\sum_{(j)} \{x/m\} - 1/2 \ll x^{1/3} + 2^j \ll x^{1/3}$$

($A = 2^{3j+4}$), hasonlóan a végső $(2^k x^{1/3}, r]$ intervallumban. Az összegzés határát a

$$2^k \leqq x^{1/6}$$

feltétel szabja meg, a tagok száma tehát $O(\log x)$. □

(15.12) *Feladat.* A 8. fejezetben szereplő r függvényre

$$\sum_{n \leqq x} r(n) = \pi x + O(x^{1/3}).$$

Legyen

(15.13) $$\tau_k = u^{k*}, \quad T_k(x) = \sum_{n \leqq x} \tau_k(n).$$

(15.14) TÉTEL. *Alkalmas* c_1, c_2 *konstansokkal*

$$T_3(x) = \frac{1}{2}x\log^2 x + c_1 x\log x + c_2 x + O(x^{2/3}).$$

BIZONYÍTÁS. $T_3(x)$ azon (i, j, k) természetes számokból álló hármasok száma, amelyekre $ijk \leqq x$. Ekkor valamelyik tényező $\leqq x^{1/3}$. Ha például $i \leqq x^{1/3}$, a megfelelő hármasok száma

$$\sum_{i \leqq x^{1/3}} T(x/i).$$

Ezt háromszor kell venni, hiszen három tényező lehet $\leqq x^{1/3}$. Kétszer adtuk össze azokat, ahol két tényező van $x^{1/3}$ alatt, ezeket le kell vonni; végül ha mindhárom tényező $x^{1/3}$ alatt van, azt háromszor adtuk össze és háromszor levontuk, így azt még egyszer hozzá kell adni. Végeredményben a

$$T_3(x) = 3 \sum_{i \leqq x^{1/3}} T(x/i) - 3 \sum_{i \leqq x^{1/3}} \sum_{j \leqq x^{1/3}} [x/ij] + [x^{1/3}]^3 \tag{15.15}$$

formulát kapjuk. (15) első tagjába Dirichlet (2) becslését helyettesítve, (15) második és harmadik tagjában az egészrész-jelet elhagyva és a kapott összeget az Euler—McLaurin-formulával becsülve kapjuk (14)-et. □

Hasonló módon, valamicskével bonyolultabb számolással kaphatjuk a

$$T_k(x) = x\left(\frac{\log^{k-1} x}{(k-1)!} + c_{k-2}\log^{k-2} x + \ldots + c_0\right) + O(x^{1-1/k}) \tag{15.16}$$

aszimptotikát. Persze itt is jobb becslést lehetne kapni Vinogradov módszerével. — A (14) becslésnek, pontosabban annak, hogy ott a maradéktagban x kitevője kisebb, mint 1, még fontos szerepe lesz a 22. fejezetben, a prímszámtétel bizonyításánál.

16. *A τ függvény nagyságrendje*

Ebben a fejezetben a (15.9) tételre adunk két bizonyítást. Az első a következő általános tételen alapul:

(16.1) TÉTEL. *Ha f multiplikatív függvény és $p^k \to \infty$ esetén $f(p^k) \to 0$, akkor $n \to \infty$ esetén is $f(n) \to 0$.*

Belátjuk, hogy $f = \tau\, \mathrm{id}^{-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ kielégíti a feltételt, azaz

$$\frac{k+1}{p^{k\varepsilon}} \to 0 \quad (p^k \to \infty).$$

Ugyanis

$$\frac{k+1}{p^{k\varepsilon}} = \frac{k+1}{p^{k\varepsilon/2}} \frac{1}{p^{k\varepsilon/2}} \leqq \frac{k+1}{2^{k\varepsilon/2}} \frac{1}{p^{k\varepsilon/2}}.$$

Itt a második tényező nyilván $\to 0$ $p^k \to \infty$ esetén, az első viszont korlátos (pl. $\leqq 2/\varepsilon$).

(1) BIZONYÍTÁSA. Válasszunk egy pozitív ε-t, és osszuk a prímhatványokat három csoportba:

(I) $|f(p^k)| > 1$,

(II) $\varepsilon < |f(p^k)| \leqq 1$,

(III) $|f(p^k)| \leqq \varepsilon$.

Az (I) csoportban összesen csak véges sok szám van; legyen

$$A = \prod_{(I)} |f(p^k)|.$$

Ha most $n > n_0(\varepsilon)$, ahol $n_0(\varepsilon)$ az összes (I) és (II) típusú prímhatvány szorzata, akkor n felbontásában kell lennie (III) típusú prímhatványnak is. Becsüljük meg $f(n)$-et! Az n felbontásában szereplő (I) típusú prímhatványok adaléka $\leqq A$, a (II) típusúaké $\leqq 1$ és a (III) típusúaké $\leqq \varepsilon$, tehát

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f(n)| \leqq A\varepsilon.$$

Mivel A ε-tól nem függött és ε tetszőleges volt, készen vagyunk. □

Másodszor speciálisan a τ függvényre adunk egy lényegesen pontosabb becslést. Legyen

$$\log_2 x = \log\log x, \quad \log_3 x = \log\log\log x, \ldots$$

(16.2) TÉTEL.

$$\max_{n \leqq x} \tau(n) = \exp\left((\log 2)\frac{\log x}{\log_2 x} + O\left(\frac{\log x \log_3 x}{(\log_2 x)^2}\right)\right).$$

BIZONYÍTÁS. Először alulról becsülünk. Legyen p_j a j-edik prím,

$$n = p_1 \ldots p_k \leqq x < p_1 \ldots p_{k+1}.$$

Nyilván

(16.3) $$\tau(n) = 2^k.$$

Másrészt

(16.4) $$(p_{k+1})^{k+1} \geqq p_1 \ldots p_{k+1} > x.$$

Mivel

(16.5) $$p_k < ck \log k$$

alkalmas c-vel (ez Csebisev tétele, (11.17)-ből könnyen levezethető), ezért (4) miatt

$$(c(k+1)\log(k+1))^{k+1} > x,$$

amiből egyszerű számolással

$$k > \frac{\log x}{\log_2 x} + O\left(\frac{\log x \log_3 x}{(\log_2 x)^2}\right)$$

következik; ez (3) miatt adja (2)-ből az alsó becslést.

Rátérünk a felső becslésre. Legyen

$$n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k} \leqq x.$$

A prímeket két csoportba osztjuk: $p_j \leqq y$ és $p_j > y$, y-t majd később választjuk meg. Az első csoportban levő prímek száma legfeljebb y, továbbá

$$2^{a_j} \leqq p_j^{a_j} \leqq x, \quad a_j \leqq \frac{\log x}{\log 2},$$

tehát

$$\prod_{p_j \leqq y} (a_j + 1) \leqq \left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^y.$$

A második csoportban pedig

$$x > \prod_{p_j > y} p_j^{a_j} > y^{\sum' a_j}, \quad \sum' a_j < \frac{\log x}{\log y},$$

ahol a $\sum'$ jelöli, hogy az összegzés csak a $p_j > y$ esetre vonatkozik. Eszerint

$$\prod_{p_j > y} (a_j + 1) \leqq 2^{\sum' a_j} \leqq 2^{(\log x)/\log y}.$$

Összefoglalva

$$\tau(n) = \prod (a_j + 1) \leqq \left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^y 2^{(\log x)/\log y}.$$

A kívánt felső becslést kapjuk pl.

$$y = (\log x)(\log_2 x)^{-3}$$

választással. □

A tétel Wigerttől [1], a fenti bizonyítás lényegében Ramanujantól [1] származik. Ugyancsak Ramanujan [2] adott τ maximális nagyságrendjére pontosabb aszimptotikát, a maradéktagos prímszámtétel használatával.

(16.6) *Feladat.* A 8. fejezet r függvényére

$$\log \max_{n \leqq x} r(n) \sim (\log 2) \frac{\log x}{\log_2 x}.$$

17. *Az Euler-függvény összegzése*

(17.1) TÉTEL.

$$\Phi(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{n \leqq x} \varphi(n) = (3/\pi^2)x^2 + O(x \log x).$$

BIZONYÍTÁS. Teljesen analóg (11.1) bizonyításával. A $\sigma = u * \mathrm{id}$ előállítás helyett a $\varphi = \mu * id$ képletből indulunk ki. A maradéktagok becslése $|\mu(n)| \leqq 1$ miatt ugyanúgy történhet, a főtag pedig cx^2 lesz, ahol

$$c = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-2}.$$

(5.9) és (11.9) miatt azonban

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-2} = 1/\zeta(2) = 6/\pi^2.$$ □

(17.2) *Feladat.* Legyen $\varphi_k = \mathrm{id}^k * \mu$. Keressünk aszimptotikus becslést a

$$\sum_{n \leqq x} \varphi_k(n)$$

összegre.

Legyen $R(x) = \Phi(x) - (3/\pi^2)x^2$. $R(x)$ nagyságrendjét sokat vizsgálták. (1) a következőképpen javítható:

(17.3) SZALTÜKOV [1] ÉS WALFISZ [1] TÉTELE.

$$R(x) = O(x \log^{2/3} x (\log_2 x)^{1+\varepsilon})$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ *választással.*

A másik irányban a következő ismert:

(17.4) CHOWLA—PILLAI [1] TÉTELE.

$$R(x) \neq o(x \log_3 x).$$

BIZONYÍTÁS. Ez sem mehet úgy, mint a $\sigma(n)$ függvény esetében, hiszen mindig $\varphi(n) \leqq n$. Épp ellenkezőleg, olyan intervallumokat fogunk konstruálni, amelyekben végig φ aránylag kicsi.

(4) tagadásából, azaz az

$$R(x) = o(x \log_3 x)$$

becslésből parciális összegzéssel

$$\sum_{n \leqq x} \frac{\varphi(n)}{n} = (6/\pi^2)x + o(\log_3 x)$$

következne, ebből pedig

$$\sum_{m=n-k}^{n-1} \frac{\varphi(m)}{m} = (6/\pi^2)k + o(\log_3 n); \tag{17.5}$$

erről fogjuk megmutatni, hogy nem lehet igaz.

Legyen

$$P(a, b) = \prod_{a \leqq p < b} p$$

és legyen n az

$$n \equiv j \pmod{P(2^{2^{j-1}}, 2^{2^j})}, \quad j = 1, \ldots, k$$

kongruenciarendszer legkisebb megoldása. Ekkor $(a = 2^{2^{j-1}}, b = 2^{2^j})$

$$\frac{\varphi(n-j)}{n-j} \leqq \prod_{a \leqq p < b} (1 - p^{-1}) \sim \frac{\log a}{\log b} = 1/2$$

Mertens tétele (11.16) szerint. Tehát

$$\sum_{m=n-k}^{n-1} \frac{\varphi(m)}{m} \leqq k/2 + o(k). \tag{17.6}$$

Továbbá Csebisev (11.17) tételéből

$$n \leqq P(2, 2^{2^k}) \leqq \exp c \cdot 2^{2^k},$$

azaz $k \gg \log_3 n$. (5) és (6) tehát ellentmond egymásnak $(1/2 < 6/\pi^2)$. □

Erdős [3] bebizonyította, hogy ha $g(n)/\log_3 n \to \infty$, akkor

$$\sum_{m=n}^{n+g(n)} \frac{\varphi(m)}{m} \sim (6/\pi^2)g(n),$$

vagyis az előbb használt módszerrel jobb eredmény nem is érhető el.

18. *Egy általános összegzési tétel*

Ha gyengébb maradéktaggal is beérjük, akkor σ_k $(k \neq 0)$, φ és sok más függvény átlagértéke is megkapható a következő általános tételből.

(18.1) AXER [1] TÉTELE. *Legyen* $f = g * u$. *Tegyük fel, hogy*

(18.2) $\sum g(n)/n$ *konvergens,*

(18.3) $$\sum_{n \leqq x} |g(n)| = O(x).$$

Ekkor

(18.4) $$M(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim \frac{1}{x} \sum_{n \leqq x} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)/n.$$

Speciális esetként adódnak pl. az

$$M(\sigma_{-k}) = \zeta(k+1) \quad (k > 0), \quad M(\varphi \, \mathrm{id}^{-1}) = 6/\pi^2$$

formulák, és ebből parciális összegzéssel kaphatunk becslést σ_k $(k>0)$ és φ összegzésére.

Axer tételét a következő, még általánosabb eredményből fogjuk levezetni.

(18.5) ATKINSON—CHERWELL [1] TÉTELE. *Tegyük fel, hogy* L $x \geqq 1$*-re értelmezett monoton növő függvény,* $L(x) \geqq 1$ *és* $L(x)/\log x$ *monoton fogy. Legyen* $f = g * u$, *ahol* g *olyan számelméleti függvény, amelyre*

(18.6) $$\sum_{n \leqq x} g(n) = o\big(x/L(x)\big)$$

és

(18.7) $$\sum_{n \leqq x} |g(n)| = O(xe^{L(x)}).$$

Ekkor

(18.8) $$\sum_{n \leqq x} f(n) = x \sum_{n \leqq x} g(n)/n + o(x).$$

Axer tételét az $L(x) = 1$ választással kapjuk. (6) igazsága (2)-ből parciális összegzéssel könnyen következik.

BIZONYÍTÁS. Válasszunk egy kicsi $\varepsilon > 0$ számot. A szokásos

$$F(y) = \sum_{n \leqq y} f(n), \quad G(y) = \sum_{n \leqq y} g(n)$$

jelöléssel (14.3) szerint $(x = vw)$

(18.9) $$F(x) = \sum_{m \leqq v} g(m) \left[\frac{x}{m}\right] + \sum_{n \leqq w} G(x/n) - [w] G(v).$$

(9) első tagja

$$= x \sum_{m \leqq v} g(m)/m + O\Big(\sum_{m \leqq v} |g(m)|\Big) = x \sum_{m \leqq v} \frac{g(m)}{m} + O\big(ve^{L(v)}\big).$$

Itt a főtagban az összegzés $m \leqq v$-re van kiterjesztve, pedig nekünk (8)-hoz $m \leqq x$-re

vett összegzés kell. Megbecsüljük az eltérést. Parciális összegzéssel

$$\sum_{m=V}^{x} g(m)/m = \left[\frac{G(t)}{t}\right]_V^x + \int_V^x \frac{G(t)}{t^2}\,dt, \tag{18.10}$$

$V=[v]+1$. $t \geqq v$-re

$$G(t) = o\big(t/L(t)\big) = o\big(t/L(v)\big) \tag{18.11}$$

feltéve, hogy $v \to \infty$. Eszerint (10) értéke

$$o\left(\frac{1+\log x/v}{L(v)}\right). \tag{18.12}$$

(9) második tagjára (11) miatt szintén a (12) becslés adódik, szorozva x-szel. Végül (9) harmadik tagja

$$o\big(x/vL(v)\big),$$

szintén belefér (12) x-szeresébe. Összevéve a hiba

$$O\big(ve^{L(v)}\big) + o\left(x\frac{\log ex/v}{L(v)}\right). \tag{18.13}$$

Most megválasztjuk v-t. Abból, hogy L monoton nő, de $L(x)/\log x$ már fogy, következik, hogy L folytonos. Legyen v akkora, hogy

$$ve^{L(v)} = \varepsilon x.$$

$x \to \infty$ esetén nyilván $v \to \infty$. Ekkor (13) első tagja εx, második tagja pedig

$$o\left(x\frac{\log ex/v}{\log \varepsilon x/v}\right) = o(x),$$

ti.

$$\frac{\log ex/v}{\log \varepsilon x/v} = 1 + \frac{\log e/\varepsilon}{\log \varepsilon x/v} = 1 + \frac{\log e/\varepsilon}{L(v)} \leqq 1 + \log e/\varepsilon.$$

Beláttuk, hogy

$$\Big|\sum_{n\leqq x} f(n) - x\sum_{n\leqq x} g(n)/n\Big| = O(\varepsilon x) + o(x);$$

mivel ε tetszőleges volt, készen vagyunk. □

(18.14) *Feladat.* Tegyük fel, hogy $f=g*h$, $M(h)$ létezik és

$$\sum |g(n)/n| < \infty.$$

Ekkor $M(f)$ is létezik, és

$$M(f) = M(h)\sum_{n=1}^{\infty} g(n)/n.$$

(Posztnyikov [1], 3.2).

19. *Elemi primszámelmélet*

Érdekes eredményeket kaphatunk, ha az összegzési módszereket egy olyan függvényre alkalmazzuk, amelynek az összegzési függvényét különben is ki tudjuk számolni. Például a

$$\log = \Lambda * u$$

egyenlőségből és (11.3)-ból kiindulva azt kapjuk, hogy

$$L(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \leqq x} \log n = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n)[x/n]. \tag{19.1}$$

Továbbá az Euler—McLaurin-formulából nyerhető, hogy

$$L(x) = x \log x - x + O(\log x). \tag{19.2}$$

Hogy megbecsülhessük (1)-ben az egészrészjelek elhagyásából keletkező hibát, egy felső becslés kéne a

$$\psi(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n) \tag{19.3}$$

függvényre. (1) és (2) szerint

$$L(x) - 2L(x/2) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n) \left(\left[\frac{x}{n} \right] - 2 \left[\frac{x}{2n} \right] \right) = x \log 2 + O(\log x). \tag{19.4}$$

Mivel

$$\left[\frac{x}{n} \right] - 2 \left[\frac{x}{2n} \right] = \begin{cases} 0 & \text{vagy} \quad 1 \text{ mindig,} \\ 1 & \text{ha} \quad x/2 < n \leqq x, \end{cases}$$

ezért (4)-ből

$$\psi(x) \geqq L(x) - 2L(x/2) \sim x \log 2 \tag{19.5}$$

és

$$\psi(x) - \psi(x/2) \leqq L(x) - 2L(x/2) \sim x \log 2 \tag{19.6}$$

következik. (6)-ból viszont $K = [^2\log x]$ mellett

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{K} \psi(2^{-j}x) - \psi(2^{-j-1}x) \leqq (2 \log 2)x + o(x) \tag{19.7}$$

jön. (5) és (7) együtt adja a következőt:

(19.8) Állítás. $\psi(x) \asymp x$.

Ebből könnyen levezethető (11.17). Ugyanis (l. (6.4))

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{ha} \quad n = p^k, \ p \text{ prím} \\ 0 & \text{máskor,} \end{cases}$$

tehát

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \dots, \tag{19.9}$$

amiből egyrészt

$$\vartheta(x) \leqq \varphi(x), \tag{19.10}$$

másrészt

$$\vartheta(x) \geqq \psi(x) - \sum_{j=2}^{K} \psi(x^{1/j}) = \psi(x) + O(x^{1/2}) \tag{19.11}$$

(9), (10) és (8) miatt. (8), (10) és (11) pedig már adja (11.17)-et.

(11.17)-ből parciális összegzéssel könnyen belátható, hogy

$$\pi(x) \asymp x/\log x, \tag{19.12}$$

ahol $\pi(x)$ az x alatti prímszámok száma. Ugyancsak parciális összegzéssel, valamint (10) és (11) felhasználásával kapható a következő állítás.

(19.13) ÁLLÍTÁS. *A következő aszimptotikus egyenlőségek ekvivalensek:*

$$\pi(x) \sim x/\log x, \quad \vartheta(x) \sim x, \quad \psi(x) \sim x.$$

(A prímszámtétel három formája.)

Térjünk vissza az (1) összegre. Az egészrész-jelek elhagyásával keletkező hiba (8) szerint $O(x)$, tehát azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n \leqq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1). \tag{19.14}$$

Mivel

$$\sum_{p} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log p}{p^k} = \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)} \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n(n-1)} < \infty, \tag{19.15}$$

ezért (14) azt is adja, hogy

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1). \tag{19.16}$$

(14)-ből, illetve (15)-ből parciális összegzéssel kaphatók az alábbi formulák:

$$\sum_{n \leqq x} \frac{\Lambda(n)}{n \log n} = \log\log x + C_1 + O(1/\log x), \tag{19.17}$$

$$\sum_{p \leqq x} 1/p = \log\log x + C_2 + O(1/\log x) \tag{19.18}$$

(17) szoros kapcsolatban van Mertens (11.16) tételével.

(19.19) ÁLLÍTÁS.

$$\prod_{p \leqq x} (1 - 1/p) \sim \exp - \sum_{n \leqq x} \frac{\Lambda(n)}{n \log n}.$$

BIZONYÍTÁS.

$$\log(1 - 1/p) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^k},$$

tehát

$$\sum_{p \leqq x} \log(1 - 1/p) = -\sum_{n \leqq x} \frac{\Lambda(n)}{n \log n} - r,$$

ahol

$$0 < r = \sum_{\substack{p \leqq x \\ p^k > x}} \frac{1}{k p^k} \leqq \sum_{\substack{k \geqq 2 \\ p^k > x}} p^{-k} \to 0$$

$x \to \infty$ esetén, mert konvergens sor szelete (a konvergens (15) sorral majorálható). □

Így Mertens tétele azzal ekvivalens, hogy a (17) képlet konstansa

$$C_1 = \gamma. \tag{19.20}$$

Ezt a következő fejezetben bizonyítjuk.

(19.21) *Feladat.*

(19.22) $$\sum_{n\leqq x} \varkappa(n) = x \log\log x + C_2 x + O(x/\log x),$$

(19.23) $$\sum_{n\leqq x} \nu(n) = x \log\log x + C_3 x + O(x/\log x),$$

C_2 ugyanaz, mint (18)-ban.

(19.24) *Feladat.* Legyen $\pi_k(x)$ azon $n\leqq x$ számok száma, amelyekre $\nu(n)=k$. ($\pi_1=\pi$.) Bizonyítandó: $x\geqq 2$ esetén

$$\pi_k(x) \leqq c_1 \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x + c_2)^{k-1}}{(k-1)!},$$

c_1, c_2 abszolút konstansok. (Hardy—Ramanujan [1].)

(19.25) *Feladat.* Azon $n\leqq x$ számok száma, amelyekre $\tau(n)|n$, $O(x \log^{-1/2} x)$. (Az 1976/3. Schweitzer-feladat élesítése.)

20. *Az Euler-féle szorzatformula*

(20.1) TÉTEL. *Legyen f multiplikatív függvény. Ekkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k),$$

feltéve, hogy a sor abszolút konvergens.

BIZONYÍTÁS. Legyen $B^{(n)}$ azon természetes számok halmaza, amelyek legnagyobb prímosztója pontosan n. Abszolút konvergens sor akárhogy csoportosítható, tehát

(20.2) $$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m\in B^{(n)}} f(m).$$

Másrészt a

(20.3) $$\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)$$

sor egy abszolút konvergens sor része lévén maga is abszolút konvergens. Véges sok abszolút konvergens sort tagonként össze lehet szorozni; a (3) sorokat $p\leqq x$-re összeszorozva, az

$$f(p_1^{a_1}) \ldots f(p_k^{a_k}) = f(p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k})$$

azonosságot használva és ügyesen csoportosítva azt kapjuk, hogy

(20.4) $$\prod_{p\leqq x} \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k) = \sum_{n\leqq x} \sum_{m\in B^{(n)}} f(m).$$

(2)-ből és (4)-ből pedig már következik (1). □

(20.5) *Feladat.* Ha f multiplikatív, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

és a

$$\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)$$

sorok ugyanakkor lesznek abszolút konvergensek.

Különösen fontos az $f=\mathrm{id}^{-s}$, $\mathrm{Re}\, s>1$ speciális eset.

(20.6) TÉTEL. $\mathrm{Re}\, s>1$ *esetén*

$$\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}.$$

E formula logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} \quad (\mathrm{Re}\, s > 1). \tag{20.7}$$

Ennek segítségével bebizonyítjuk (19.20)-at, vagyis Mertens tételét is. A módszer a következő: (19.17) és (7) segítségével aszimptotikus formulát keresünk $\zeta(s)$-re $s\to 1$ esetén. A kapott formula tartalmazni fogja C_1-et, és azt összevetve az ismert (13.3) formulával, megkapjuk C_1 értékét.

Legyen

$$Q(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n\leqq x} \frac{\Lambda(n)}{n \log n} = \log\log x + C_1 + w(x). \tag{20.8}$$

Tudjuk, hogy $x\to\infty$ esetén $w(x)\to 0$. Parciális összegzéssel (7) szerint

$$\log\zeta(1+h) = h\int_1^{\infty} Q(t)t^{-1-h}\,dt = h\int_1^{\infty} t^{-1-h}\log\log t\,dt +$$

$$+ hC_1\int_1^{\infty} t^{-1-h}\,dt + h\int_1^{\infty} t^{-1-h}w(t)\,dt. \tag{20.9}$$

Ezt a formulát $h\to 0$ esetén fogjuk vizsgálni. Annak a bizonyításával kezdjük, hogy (9) utolsó tagja $\to 0$ (ha ez nem lenne igaz, az egész módszer nem működne). $1<t<2$ esetén

$$w(t) = O(|\log\log t\,|),$$

tehát

$$\left|h\int_1^2 t^{-1-h}w(t)\,dt\right| \ll h\int_1^2 \frac{|\log\log t|}{t}\,dt = O(h),$$

mert a jobb oldali integrál konvergens. $t\geqq 2$ esetén w korlátos; legyen

$$W = \sup_{t\geqq 2} |w(t)|.$$

Válasszunk egy pozitív ε-t és hozzá olyan nagy K-t, hogy $t\geqq K$ esetén $|w(t)|<\varepsilon$. Ekkor

$$h\int_K^{\infty} t^{-1-h}|w(t)|\,dt \leqq \varepsilon h\int_1^{\infty} t^{-1-h}\,dt = \varepsilon$$

és

$$h\int_2^K t^{-1-h}|w(t)|\,dt \leqq hW\int_2^K t^{-1-h}\,dt = W(2^{-h}-K^{-h}) \to 0;$$

ezzel beláttuk, hogy (9) utolsó tagja 0-hoz tart.

(9) utolsó előtti tagja nem jelent problémát:

$$C_1 h\int_1^\infty t^{-1-h}\,dt = C_1.$$

Végül (9) jobboldalának első tagjában az $y=\log t$, majd $z=hy$ helyettesítéseket elvégezve

$$h\int_1^\infty t^{-1-h}\log\log t\,dt = h\int_0^\infty e^{-hy}\log y\,dy = \int_0^\infty e^{-z}\log(z/h)\,dz =$$

$$= \int_0^\infty e^{-z}\log z\,dz - (\log h)\int_0^\infty e^{-z}\,dz = \gamma - \log h,$$

tudniillik

$$\int_0^\infty e^{-z}\log z\,dz = \Gamma'(1) = -\gamma$$

(l. Szász [1] II/226. o.).

Összefoglalva

$$\log\zeta(1+h) = -\log h + C_1 - \gamma + o(1);$$

ezt összevetve a (13.3) szerinti

$$\log\zeta(1+h) = -\log h + o(1)$$

becsléssel kapjuk, hogy $C_1=\gamma$. □

21. *A Möbius-függvény összegzése*

A Möbius-függvény egyszerű definíciója ellenére, összegzése nagyon nehezen kezelhető. Legyen

$$M(x) = \sum_{n\leqq x}\mu(n).$$

Természetes azt várni — és majd be is fogjuk bizonyítani —, hogy

$$M(x) = o(x); \tag{21.1}$$

tudniillik (vö. (3.14)) ez durván annyit jelent, hogy a számok fele áll páros sok és fele páratlan sok prímtényezőből. Ennek dacára (1) egyáltalán nem triviális; sőt, ki fog derülni, hogy ekvivalens a prímszámtétellel.*

Kezdjük azzal, ami azonnal adódik. Definíció szerint $\mu * u = \delta$, tehát (11.3) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\sum_{n\leqq x}\mu(n)[x/n] = \sum_{n\leqq x} M(x/n) = 1. \tag{21.2}$$

* Abban az értelemben, hogy sokkal egyszerűbb őket egymásból levezetni, mint bármelyiket bebizonyítani.

Ha (2) első felében elhagyjuk az egészrész-jeleket, a hiba

$$\leqq \sum_{n \leqq x} |\mu(n)| \leqq x,$$

tehát az alábbit kapjuk:

(21.3) TÉTEL.

$$\sum_{n \leqq x} \mu(n)/n = O(1).$$

(21.4) *Feladat. a)* Az x-nél nem nagyobb négyzetmentes számok száma

$$Q(x) = \sum_{n \leqq x} |\mu(n)| = \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \mu(n)[x/n^2].$$

b)

$$Q(x) = (6/\pi^2)x + O(\sqrt{x}).$$

Természetes kérdés, hogy a (3) alatti sor konvergens-e.

(21.5) TÉTEL. a) *Ha a* $\sum \mu(n)/n$ *sor konvergens, akkor* $M(x)=o(x)$. b) *Ha* $M(x)=o(x)$, *akkor*

$$\sum \mu(n)/n = 0.$$

BIZONYÍTÁS. A tétel a) fele triviális: parciális összegzéssel könnyen belátható, hogy tetszőleges a_n sorozatra

$$\sum a_n/n \text{ konvergens} \Rightarrow \sum_{n \leqq x} a_n = o(x).$$

A tétel b) felének bizonyításához alkalmazzuk a (14.3) képletet:

$$1 = \sum_{m \leqq v} \mu(m) \left[\frac{vw}{m}\right] + \sum_{n \leqq w} M(vw/n) - [w]M(v). \tag{21.6}$$

(6)-ot fix w és $v \to \infty$ mellett használva a 2. és 3. tag $o(vw)$, az első pedig

$$vw \sum_{m \leqq v} \mu(m)/m + O(v),$$

tehát azt kapjuk, hogy

$$\left| \sum_{m \leqq v} \mu(m)/m \right| \ll 1/w + o(1).$$

Mivel w tetszőleges volt, készen vagyunk. □

Mellékesen azt is kaptuk, hogy ha a (3) sor konvergens, értéke csak 0 lehet.

(21.7) *Feladat. a)* Bizonyítsuk be azt az állítást, hogy ha a (3) sor konvergens, akkor értéke csak 0 lehet, azon keresztül, hogy $s \to 1^+$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^s = \zeta(s)^{-1} \to 0.$$

b) Ha

$$\sum \frac{\mu(n) \log n}{n}$$

konvergens, értéke csak -1 lehet.

(21.8) TÉTEL. *Az* $M(x)=o(x)$ *állítás ekvivalens a* $\psi(x) \sim x$ *relációval (azaz a prímszámtétellel).*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel először, hogy

$$R(x) \overset{\text{def}}{=} \psi(x) - [x] = o(x).$$

(6.7) szerint $\mu \log = -\Lambda * \mu$, tehát

$$\sum_{n \leqq x} \mu(n) \log n = -\sum_{n \leqq x} \mu(n) \psi(x/n) = -1 - \sum_{n \leqq x} \mu(n) R(x/n). \tag{21.9}$$

Az összeget vágjuk szét $y = x^{1-1/\log\log x}$-nél!

$$\left| \sum_{n > y} \mu(n) R(x/n) \right| \ll x \sum_{n=y}^{x} 1/n \ll \frac{x \log x}{\log\log x},$$

és

$$\left| \sum_{n \leqq y} \mu(n) R(x/n) \right| \leqq \sum_{n \leqq y} x/n \cdot \max_{t \geqq x^{1/\log\log x}} |R(t)/t|.$$

Itt az első tényező $O(x \log x)$, a második pedig $o(1)$, mert $x \to \infty$ esetén $x^{1/\log\log x} \to \infty$. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\sum_{n \leqq x} \mu(n) \log n = o(x \log x);$$

ebből $M(x) = o(x)$ parciális összegzéssel nyerhető.

Tegyük fel most, hogy $M(x) = o(x)$. Mivel $\Lambda = \log * \mu$, ezért

$$\psi(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n) L(x/n), \tag{21.10}$$

L a (19.1)-beli függvény. Másrészt $u = \tau * \mu$, tehát

$$[x] = \sum_{n \leqq x} \mu(n) T(x/n), \tag{21.11}$$

ahol T τ összegfüggvénye (l. (15.1)). Továbbá

$$L(x) = T(x) - 2\gamma x + O(\sqrt{x}) \tag{21.12}$$

(15.2) és (19.2) miatt. Legyen

$$\beta = \log - \tau + 2\gamma u; \tag{21.13}$$

(12) pont azt jelenti, hogy

$$B(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \leqq x} \beta(n) = O(\sqrt{x}). \tag{21.14}$$

(13) miatt

$$\beta * \mu = \Lambda - u + 2\gamma\delta$$

azaz

$$\sum_{n \leqq x} (\beta * \mu)(n) = \psi(x) - [x] + 2\gamma; \tag{21.15}$$

erről kellene belátni, hogy $o(x)$. (14.3) alkalmazásával

$$R(x) + 2\gamma = \sum_{m \leqq v} \beta(m) M(x/m) + \sum_{n \leqq x/v} \mu(n) B(x/n) - B(v) M(x/v).$$

Ezt fix v és $x \to \infty$ mellett használjuk. Az első és a harmadik tag $o(x)$ lesz $M(x) =$

$=o(x)$ miatt, a második pedig (14) szerint

$$\leqq \sum_{n \leqq x/v} |B(x/n)| \ll \sum_{n \leqq x/v} \sqrt{x/n} \ll x/\sqrt{v}.$$

Azt kaptuk, hogy

$$|R(x) \ll |x/\sqrt{v} + o(x);$$

v tetszőleges volt, tehát készen vagyunk. □

22. *Selberg lemmája*

A következő két fejezet célja az $M(x)=o(x)$ reláció, és ezen keresztül a prímszámtétel bizonyítása.

A prímszámtételt először Hadamard és de la Vallée-Poussin bizonyította 1896-ban, analitikus eszközökkel. Ezek alapja a (20.7), vagy a hasonló

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-s} \tag{22.1}$$

azonosság, vagyis egy Λ függvényt tartalmazó Dirichlet-sor. Egy Dirichlet-sorból az együtthatóinak részletösszege különféle integrálformulákkal kifejezhető, és ezután komplex függvénytani módszerekkel becsülhető. (A prímszámtétel analitikus bizonyításai sok könyvben megtalálhatók; l. pl. Chandrasekharan [1, 2], Davenport [1], Rudin [1], LeVeque [1].) Nem sokkal később Hadamard bebizonyította a $\pi(x) \sim x/\log x$ relációnál sokkal erősebb

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) \tag{22.2}$$

becslést is, ahol

$$\operatorname{li} x = \int_2^x 1/\log t\, dt.$$

A prímszámtételre elemi bizonyítást először Erdős [4] és Selberg [1] adtak (ezt magyar nyelven l. Hoffmann—Surányi [1]) 1949-ben. Amit most be fogunk mutatni, az Posztnyikov—Romanov [1] bizonyítása, kis változtatásokkal. Ez a bizonyítás nem fog semmilyen maradéktagot adni, csak a puszta aszimptotikus egyenlőséget. Lehet az elemi bizonyítást úgy módosítani, hogy az is adjon maradéktagot, de egyrészt akkor már nagyon komplikált lesz, másrészt az elemi úton elért legjobb eredmény is alatta marad (2)-nek (ami még nem is az ismert legjobb).

Legyen

$$\Lambda_2 = \log^2 * \mu = \Lambda \log + \Lambda * \Lambda \tag{22.3}$$

(l. (6.9)) és

$$\psi_2(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda_2(n) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n) \log n + \sum_{mn \leqq x} \Lambda(m)\Lambda(n). \tag{22.4}$$

Minden ismert elemi bizonyítás a következő állításon alapul.

(22.5) SELBERG LEMMÁJA.

$$\psi_2(x) = 2x \log x + O(x).$$

BIZONYÍTÁS. Nyilván

$$\psi_2(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n) L_2(x/n), \tag{22.6}$$

ahol

$$L_2(t) = \sum_{n \leqq t} \log^2 n.$$

(21.8) bizonyításához hasonlóan folytatjuk.

$$L_2(t) = t \log^2 t - 2t \log t + 2t + O(\log^2 t),$$

tehát (15.2) és (15.14) felhasználásával

$$L_2(t) = 2T_3(t) + c_1 T(t) + c_2 [t] + O(t^{2/3}) \tag{22.7}$$

alkalmas c_1, c_2 konstansokkal. (6) szerint

$$\psi_2(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n)\left(2T_3(x/n) + c_1 T(x/n) + c_2 [x/n]\right) + O\Big(\sum_{n \leqq x} (x/n)^{2/3}\Big).$$

A hibatag $O(x)$, a főtag pedig éppen

$$\mu * (2\tau_3 + c_1 \tau + c_2 u) = 2\tau + c_1 u + c_2$$

összegzése, tehát

$$= 2T(x) + c_1 [x] + c_2 = 2x \log x + O(x). \qquad \square$$

23. $M(x) = o(x)$ *bizonyítása*

(23.1) LEMMA.

$$|M(x) \log^2 x| \leqq 2 \int_1^x |M(x/t)| \log t \, dt + O(x \log x).$$

BIZONYÍTÁS. Először is,

$$\Big|M(x) \log^2 x - \sum_{n \leqq x} \mu(n) \log^2 n\Big| \leqq \sum_{n \leqq x} (\log^2 x - \log^2 n) = O(x \log x). \tag{23.2}$$

Másodszor (6.10) szerint

$$\mu \log^2 = (\Lambda * \Lambda - \Lambda \log) * \mu,$$

azaz

$$\Big|\sum_{n \leqq x} \mu(n) \log^2 n\Big| = \Big|\sum_{n \leqq x} (\Lambda * \Lambda - \mu \log)(n) M(x/n)\Big| \leqq \sum_{n \leqq x} (\Lambda * \Lambda + \Lambda \log)(n) |M(x/n)| =$$

(23.3)

$$= \sum_{n \leqq x} \Lambda_2(n) |M(x/n)| = \int_1^x |M(x/t)| \, d\psi_2(t).$$

Selberg (22.5) lemmája szerint

$$\psi_2(t) = 2t(\log t - 1) + R(t), \quad R(t) = O(t).$$

(3)-at tovább alakítva tehát

$$= 2 \int_1^x |M(x/t)| \log t \, dt + \int_1^x |M(x/t)| \, dR(t). \tag{23.4}$$

Mivel

$$|M(y)| = \sum_{n \leqq y} \mu^*(n),$$

$$\mu^*(n) \overset{\text{def}}{=\!=} |M(n)| - |M(n-1)|, \quad |\mu^*(n)| \leqq 1,$$

ezért

$$\left| \int_1^x |M(x/t)|\, dR(t) \right| = \left| \sum_{n \leqq x} \mu^*(n) R(x/n) \right| \leqq \sum_{n \leqq x} |R(x/n)| \ll \sum_{n \leqq x} x/n \ll x \log x.$$

Ez pedig (2)-vel és (4)-gyel együtt adja (1)-et. □

(23.5) LEMMA. *$1 \leqq y \leqq z \leqq x$ esetén*

$$\int_y^z M(x/t)\, dt = O(x),$$

az O-ban foglalt konstans abszolút.

BIZONYÍTÁS.

$$\int_1^y M(x/t)\, dt = \sum_{n \leqq x} \mu(n) \min(y, x/n) = x \sum_{x/y < n \leqq x} \mu(n)/n + yM(x/y).$$

Itt a második tag nyilvánvalóan, az első tag pedig (21.3) miatt $O(x)$. Ugyanezt a formulát felírva y helyett z-re is, majd kivonva őket egymásból, kapjuk az állítást. □

(23.6) TÉTEL. $M(x) = o(x)$.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel az ellenkezőjét, vagyis hogy

$$b = \limsup |M(x)/x| > 0.$$

Válasszunk egy kicsi pozitív ε-t, hozzá egy akkora x_0-t, hogy

$$x \geqq x_0 \Rightarrow |M(x)| < (b+\varepsilon)x,$$

és egy nagy K-t (ezeket később pontosítjuk).

$$|M(x) \log^2 x| \leqq 2 \sum_{j=1}^{k} \int_{K^{j-1}}^{K^j} |M(x/t)| \log t\, dt + O(x \log x), \tag{23.7}$$

ahol k-t úgy választjuk, hogy

$$K^k \leqq x/x_0 < K^{k+1} \tag{23.8}$$

legyen, az O konstansa itt már függ K-tól és x_0-tól. Ugyanis az integrál kimaradó része

$$\int_{K^k}^{x} |M(x/t)| \log t\, dt \leqq \log x \int_{K^k}^{x} x/t\, dt \leqq x(\log x) \log K x_0.$$

(7)-et tovább alakítva

$$|M(x)\log^2 x| \leqq 2\sum_{j=1}^{k} j\log K \int_{K^{j-1}}^{K^j} |M(x/t)|\,dt + O(x\log x). \tag{23.9}$$

Egy ilyen belső integrált a következőképpen becsülünk. Ha $M(x/t)$ a szóban forgó intervallumon állandó előjelű, akkor

$$\int |M(x/t)|\,dt = \left|\int M(x/t)\,dt\right| \leqq cx \tag{23.10}$$

(5) miatt, c abszolút konstans. Ha pedig jelváltása van, akkor valahol eltűnik, mondjuk $M(x/y)=0$. Ebben az esetben a következőképpen becsülünk:

$$|M(x/t)| \leqq (b+\varepsilon)x/t \quad \text{mindig,} \tag{23.11}$$

$$|M(x/t)| \leqq \left|\frac{x}{t}-\frac{x}{y}\right| \leqq \frac{b}{2}\frac{x}{t}, \tag{23.12}$$

ha $t\in[y(1-b/2),\ y(1+b/2)]$. Ennek az intervallumnak vagy az $[y(1-b/2), y]$ fele, vagy az $[y, y(1+b/2)]$ fele $[K^{j-1}, K^j]$-be esik, tehát a (11) helyett (12) alkalmazásából adódó nyereség legalábbis

$$\frac{bx}{2}\log(1+b/2) = hx,$$

vagyis

$$\int_{K^{j-1}}^{K^j} |M(x/t)|\,dt \leqq [(b+\varepsilon)\log K - h]x. \tag{23.13}$$

Ez (10) miatt fennáll az állandó előjelű esetben is, ha K-t akkorára választjuk, hogy

$$b\log K - h > c$$

legyen.

(9) és (13) szerint

$$|M(x)\log^2 x| \leqq k^2\log K\big((b+\varepsilon)\log K - h\big)x + O(x\log x) \leqq$$

$$\leqq \left((b+\varepsilon)-\frac{h}{\log K}\right)x\log^2 x + O(x\log x), \tag{23.14}$$

felhasználva, hogy (8) miatt

$$k \leqq (\log x)/\log K.$$

(14)-ből limes superiort képezve, azt kapjuk, hogy

$$b \leqq b+\varepsilon-h/\log K,$$

ami ellentmondás, ha ε-t $h/\log K$-nál kisebbnek választjuk (ezt megtehetjük, mert h és K csak b-től függött). □

[1] F. V. ATKINSON, LORD CHERWELL: The mean values of arithmetical functions, *Quart. J. Oxford 20* (1949), 65—79.
[1] A. AXER: *Wiener Sitzungberichte 120* (1911), 1253—98.
[1] K. CHANDRASEKHARAN: *Introduction to analytic number theory,* Springer 1968.
[2] K. CHANDRASEKHARAN: Arithmetical functions. Springer, 1970
[2] S. CHOWLA, S. S. PILLAI: On the error terms in some asymptoticformulae in the theory of numbers, I, *J. London Math. Soc. 5* (1930), 95—101.
[1] CORRÁDI K. A., KÁTAI I.: Some problems concerning the convolutions of number-theoretical functions, *Archiv der Math. 20* (1969), 24—29
[1] H. DAVENPORT: *Multiplicative number theory,* Markham, Chicago 1967.
[1] ERDŐS P.: *Publ. Math. Debrecen 4* (1955), 108—111.
[2] ERDŐS P.: On the distribution functions of additive functions, *Ann. of. Math. 47* (1946), 1—20.
[3] ERDŐS P.: Some remarks about additive and multiplicative functions, *Bull. Amer. Math. Soc. 52* (1946), 527—537.
[4] ERDŐS P.: On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem, *Proc. Nat. Ac. Sci.* USA *35* (1949), 374—384.
[1] FREUD R.: Megjegyzések Wirsing egy tételének bizonyításához, *Mat. Lapok 22* (1971), 93—102.
[1] GRONWALL: *Trans. Amer. Math. Soc. 14* (1913), 113—122.
[1] GYARMATI EDIT—TURÁN PÁL: Számelmélet, egyetemi jegyzet.
[1] P. R. HALMOS: *Measure theory,* Van Nostrand, New York, 1950.
[1] G. H. HARDY: On the average order of the arithmetical functions $p(n)$ and $\Delta(n)$, *Proc. London Math. Soc. 15* (1916), 1—25; 192—213.
[1] G. H. HARDY, E. M. WRIGHT: *An introduction to the theory of numbers,* Clarendon, Oxford 1968.
[1] G. H. HARDY, S. RAMANUJAN: The normal number of prime factors of n, *Quart. J. Math. 48* (1917), 76—92.
[1] HOFFMANN GY., SURÁNYI L.: A prímszámtétel első aritmetikai bizonyításának ismertetése, *Mat. Lapok 23* (1972), 31—52.
[1] B. HORNFECK, E. WIRSING: Über die Häufigkeit vollkommener Zahlen, *Math. Ann. 133* (1957), 431—438.
[1] A. E. INGHAM: On two classical lattice point problems, *Proc. Cambridge Phil. Soc. 36* (1940), 131—138.
[1] IVÁNYI A., KÁTAI I.: On monotonic additive functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung. 24* (1973), 203—208.
[1] C. G. J. JACOBI: *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum,* 1829.
[1] KÁTAI I.: Characteriztion of an additive function by its local behaviour. Ann. Univ. Sci. Bp., Sect. Math. (1969), 35—37
[1] E. LANDAU: *Archiv d. Math. u. Phys. 5* (1903), 86—91.
[1] W. J. LEVEQUE: *Topics in number theory* II, Addison—Wesley, Reading 1956.
[1] LOVÁSZ L.: A szita-formuláról, *Mat. Lapok 23* (1972), 53—70.
[1] MERTENS: *Journal für Math. 78* (1874), 46—62.
[1] MURÁNYI A.: Az Euler-féle φ-függvény iterálásával nyert számelméleti függvényről, *Mat. Lapok 11* (1960), 46—67.
[1] S. PILLAI: On a function connected with $\varphi(n)$, *Bull. Amer. Math. Soc.* 1929, 837—841.
[1] PÓLYA GY., SZEGŐ G.: *Problems and theorems in analysis I—II,* Springer 1972.
[1] A. G. POSZTNYIKOV: Введение в аналитическую теорую чисел, Москва, 1977.
[1] A. G. POSZTNYIKOV, N. P. ROMANOV: Упрощение элементарного доказательства А. Сельберга асимптотического закона распределения простых чисел. *УМН 10* (1955), 75—87.
[1] S. RAMANUJAN: On the number of divisors of a number, *J. Indian Math. Soc. 7* (1915), 131—133.
[2] S. RAMANUJAN: Highly composite numbers, *Proc. London Math. Soc. 14* (1915), 347—409.
[1] H. E. RICHERT: Verschärfung der Abschätzung bei Dirichletschen Teilerproblem, *Math. Zeitschrift 58* (1953), 204—218.
[1] W. RUDIN: *Functional analysis,* McGraw-Hill, 1973.
[1] RUZSA Z. I.: Additive functions with bounded difference, *Periodica Math. Hung. 10* (1979) 67—70
[1] A. SELBERG: An elementary proof of the prime-number theorem, *Ann. of Math. 50* (1949), 305—313.
[1] H. SHAPIRO: On the iterates of a certain class of arithmetic functions, *Comm. Pure. Appl. Math. 3* (1950), 259—272.
[1] A. I. SZALTÜKOV: О функции Эйлера, Вестник Московского ун-та, *с. мат, 6* (1960), 34—50.
[1] SZÁSZ P.: *A differenciál- és integrálszámítás elemei, I—II,* Budapest 1951.
[1] I. M. VINOGRADOV: *A számelmélet alapjai,* Budapest 1968.

[2] I. M. VINOGRADOV: *Особые варианты метода тригонометрических сумм,* Москва 1976.
[1] G. F. VORONOJ: Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelque séries, *Ann. Éc. Norm. 21* (1904), 207—268; 459—534.
[1] A. WALFISZ: *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie,* Berlin 1963.
[1] WIGERT: Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier, *Arkiv för Math. 3* (1907), 1—9.
[1] E. WIRSING: A characterization of the function $\log n$ as an additive arithmetical function, *Symp. Math.* IV, 45—57, Academic Press, London—New York, 1970.
[1] D. ZAGIER: The first 50 million prime numbers, *The new Math. Intelligencer 0* (1977), 7—19.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ I.

И. З. РУЖА

ARITHMETICAL FUNCTIONS I.

by I. Z. RUZSA

This is the first, elementary part of an expository paper on the theory of arithmetical functions, planned to consist of three parts. Main subjects: perfect numbers; theory of convolution in the Dirichlet sense; the additive function, got by iterating Euler's φ function; characterization of the logarithm as an additive function, satisfying some regularity conditions; asymptotic formulas for the sum function and the maximal order of magnitude of classical functions $(\sigma, \tau, \varphi, \sigma_k)$; the theorems of Axer and of Atkinson and Cherwell on summation of arithmetical functions; elementary prime number theory; the summation of the Möbius function and the elementary proof of the prime number theorem.

ÁLTALÁNOSÍTOTT FIBONACCI SZÁMOK ÉS A „TISZTA FEJEK" SZÁMA

SZÉKELY GÁBOR és TUSNÁDY GÁBOR

Bevezetés

A valószínűségszámítás tanítása általában a relatív gyakoriság stabilitásából indul ki. Kevesen mutatják meg a kezdőknek e stabilitás viszonylagosságát. Akik mégis ezt teszik, általában a „tiszta fejek" vizsgálatát veszik alapul. A kérdés a következő: hány olyan, fejből és írásból álló n elemű sorozat van, amelyben nincs s fej egymás mellett. Jelöljük ezt a számot $F_n^{(s)}$-sel, ha volna a sorozatban s fej egymás mellett, azok együttesét s elemű „tiszta fej" blokknak neveznénk. Így annak a valószínűsége, hogy egy érmét n-szer feldobva, nem kapunk s elemű tiszta fej blokkot, $2^{-n}F_n^{(s)}$. Ez utóbbi eseményt röviden úgy mondjuk, hogy a tiszta fejek száma kisebb s-nél.

Tudomásunk szerint a tiszta fejek újabb vizsgálatát Erdős és Rényi kezdte el, ők megmutatták, hogy egy végtelen fej-írás-sorozatban a tiszta fejek száma 1 valószínűséggel $\log n$ (kettes alapú logaritmus) körül van. Ők a kérdést mindjárt általánosan, tetszőleges egyforma eloszlású változók esetén vizsgálták. Hasonlóan az általános esettel foglalkozott Komlós és Tusnády, akik meghatározták két másik, a tiszta fejekkel kapcsolatban álló mennyiség határeloszlását, de maguknak a tiszta fejeknek a határeloszlását nem adták meg. Az eredeti fej-írás esetben ezt Földes Antónia dolgozata tartalmazza, aki Erdős és Révész vizsgálatait folytatta. E témához kapcsolódva Dobó és Szajcz vetette fel a következő kérdést: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású nem-negatív valószínűségi változók, és legyen $\nu(t)$ a legnagyobb k, amelyre $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k \leqq t$. Mit mondhatunk az

$$\eta_t = \max_{1 \leqq i \leqq \nu(t)} \xi_i$$

változó aszimptotikus viselkedéséről? (Itt ξ_i az azonos dobásokból álló blokkok hosszának felel meg.) Mi e kérdés vizsgálata során visszatértünk az $F_n^{(s)}$ számok pontos előállításához, ez lesz dolgozatunk fő eredménye. Megjegyezzük, hogy a Dobó—Szajcz által felvetett kérdés megoldatlan, különösen érdekesnek látszik az az eset, amikor $E\xi_1 = \infty$. Ugyancsak itt jegyezzük meg, hogy tudomásunk szerint az $F_n^{(s)}$-re vonatkozó általunk közölt (6) alatti explicit formulát már Szádeczky-Kardos Gedeon 1972-ben írt szakdolgozata is tartalmazza, és valószínűleg sokan mások jutottak hasonló eredményre. (Az (5) összefüggés megtalálható például Montmort és Uspensky könyvében. Ugyancsak itt utalunk Erdős—Lehner cikkére.)

Jelöljük az

(1) $$x_1+x_2+\ldots+x_k=n+1$$

egyenlet

(2) $$1 \leqq x_i \leqq s, \quad x_i \text{ egész}, \quad i=1, 2, \ldots, k$$

feltételnek eleget tevő megoldásainak a számát $p_{nk}^{(s)}$-sel, és legyen

(3) $$P_n^{(s)} = \sum_{k=1}^{n+1} p_{nk}^{(s)}.$$

Ez utóbbi azt adja meg, hogy hányféleképpen lehet az $n+1$ számot s-nél nem nagyobb természetes számok összegére bontani, ezt a problémát hívják „partitio numerorum"-nak. Fej-írás dobások esetén $P_n^{(s)}$ azoknak az $(n+1)$-elemű, írással kezdődő sorozatoknak a számát adja meg, amelyekben sem s-nél több fej, sem s-nél több írás nincs egymás mellett (az x_i szám a szomszédos fejekből, illetve írásokból kialakítható i-edik blokk hosszát adja meg). Rendeljük mindegyik lehetséges sorozathoz a „marad", „változik" elemek n-elemű sorozatát úgy, hogy két szomszédos dobáshoz pontosan akkor rendeljünk „maradot", ha azok eredménye azonos. Mivel az így kapott sorozat az első dobás eredményével együtt egyértelműen meghatározza a teljes dobássorozatot, és benne pontosan akkor van s „marad" egymás mellett, ha az eredetiben s-nél több fej, vagy s-nél több írás volt egymás mellett, ezzel beláttuk, hogy

(4) $$P_n^{(s)} = F_n^{(s)}.$$

(Ez a gondolat Rejtő Lídiától származik.)

Maguk a $p_{nk}^{(s)}$ számok könnyen „kiszitálhatók". Jelöljük az $\{1, 2, \ldots, k\}$ halmaz tetszőleges G részhalmazára $q(G)$-vel (1) azon pozitív egészekből álló megoldásainak számát, amelyekben $x_i > s$ minden $i \in G$ mellett. Mint ismeretes,

$$p_{nk}^{(s)} = \sum_{G} (-1)^{|G|} q(G),$$

ahol $|G|$ a G elemeinek a számát jelöli, továbbá

$$q(G) = \binom{n-s|G|}{k-1}.$$

Ezek szerint

$$p_{nk}^{(s)} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n-sj}{k-1},$$

tehát

(5) $$F_n^{(s)} = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n-sj}{k-1}.$$

Felhasználva, hogy

$$\sum_{i=A}^{B} \binom{i}{A} \binom{B}{i} = \binom{B}{A} 2^{B-A},$$

(5)-ből az összegezés sorrendjét felcserélve kapjuk, hogy

(6) $$F_n^{(s)} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left\{ \binom{n-sj}{j-1} 2^{n-j(s+1)+1} + \binom{n-sj}{j} 2^{n-j(s+1)} \right\}.$$

Az explicit formula közvetlen bizonyítása

A már bizonyított (4) miatt elég belátnunk, hogy (6) $F_n^{(s)}$ helyett $P_n^{(s)}$-re igaz. Az első $(n+1)$ természetes szám tetszőleges G részhalmaza mellett jelöljük $h(G)$-vel azoknak az írással kezdődő fej-írás dobásoknak a számát, amelyekben G elemein s-nél hosszabb blokk kezdődik. Ha ezekből a G elemein kezdődő sorozatokból elhagyunk s elemet, $(n+1-sj)$ dobást kapunk. Ezzel minden olyan G-hez, melyre $h(G)>0$, az $(n+1-sj)$ elemű dobások egy részhalmazát rendeljük hozzá. $\binom{n-js}{j-1}$ azoknak a j elemű $G-k$-nak a száma, amelyekre $1 \in G$, és ezekre $h(G)=2^{n-j(s+1)+1}$, hiszen G elemein és az őket követő s elemen kívül mindent szabadon választhatunk, és minden választáshoz a még meg nem határozott értékek már egyértelműen adódnak. A többi j elemű pozitív gyakoriságú G száma $\binom{n-sj}{j}$, és ezekre $h(G)=2^{n-j(s+1)}$. Pontosan ezek az elemek fordulnak elő a bizonyítandó (6) összefüggésben.

Aszimptotikus formulák

Az (1) egyenlet (2)-nek eleget tevő megoldásaiban $1 \leqq x_1 \leqq s$, és x_1 minden konkrét értéke mellett az

$$x_2 + \ldots + x_k = n+1-x_1$$

egyenlet (2)-nek eleget tevő megoldásait kapjuk. Így

$$F_n^{(s)} = \sum_{j=1}^{s} F_{n-j}^{(s)}, \tag{7}$$

tehát $s=2$ mellett a Fibonacci számokat kapjuk. Emiatt tetszőleges s mellett $F_n^{(s)}$-t s-edrendű Fibonacci-számnak nevezzük.

A mellékelt táblázatban ennek alapján megadjuk az $F_n^{(s)}$ mátrix néhány kezdeti tagját

n/s	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	2	2	2	2	2
2	1	3	4	4	4	4	4	4
3	1	5	7	8	8	8	8	8
4	1	8	13	15	16	16	16	16
5	1	13	24	29	31	32	32	32
6	1	21	44	56	61	63	64	64
7	1	34	81	108	120	125	127	128
8	1	55	149	208	236	248	253	255
9	1	89	274	401	464	492	504	509
10	1	144	504	773	912	976	1004	1016
11	1	233	927	1490	1793	1936	2000	2028
12	1	377	1705	2872	3525	3840	3984	4048

Megmutatjuk, hogy ha φ_s az

(8) $$x^s = x^{s-1} + \ldots + x + 1$$

egyenlet (egyetlen) pozitív gyökét jelöli, akkor

(9) $$\varphi_s^n \leqq F_n^{(s)} \leqq 2^s \varphi_s^{n-s}.$$

Valóban, ha (9) teljesül $F_n^{(s)}$-re valamely s mellett az $n=j+1, j+2, \ldots, j+s$ értékekre, akkor (7) és (8) miatt $n=j+s+1$ mellett is teljesül. Emiatt kiindulva a $j=0$ értékből, kapjuk a bizonyítandó állítást.

Ennek alapján $F_n^{(s)}$-re jó közelítést ad φ_n^s, gondot csak φ_s meghatározása okozhat. Mivel (8) ekvivalens az

$$x = 2 - \frac{1}{x^s}$$

egyenlettel, $1 \leqq \dfrac{2-2^{-s}}{\varphi_s} \leqq 1 + s2^{1-2s}$, emiatt (9)-ből kapjuk, hogy

(10) $$\left(\frac{2-2^{-s}}{1+s2^{1-2s}}\right)^n \leqq F_n^{(s)} \leqq \frac{(2-2^{-s})^n}{(1-2^{-1-s})^s}.$$

Eszerint $F_n^{(s)}$-re már $(2-2^{-s})^n$ is jó közelítést ad, ami az explicit formulából is kiolvasható. A relatív hiba becslése ezek alapján

$$\left|\frac{F_n^{(s)}}{(2-2^{-s})^n} - 1\right| \leqq (1-2^{-1-s})^{-s} - (1+s2^{1-2s})^{-n} \leqq (1+2n2^{-s})s2^{-s},$$

ami 0-hoz tart, ha n és s úgy tart végtelenbe, hogy $n = o\left(\frac{1}{s}2^{2s}\right)$.

Általánosított Fibonacci-számok

Jelöljük $L_n^{(s)}$-sel azoknak az $(n+1)$-elemű írással kezdődő fej-írás dobásoknak a számát, amelyekben a blokkok hossza nagyobb s-nél. (7)-hez hasonlóan erre azt kapjuk, hogy

$$L_n^{(s)} = L_{n-1}^{(s)} + L_{n-s-1}^{(s)} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n-js}{j-1}.$$

Ezeket az irodalomban s-edfajú Lamé-számoknak nevezik (Netto), és $s=1$ mellett a fenti alakot a Fibonacci-számok Lucas-féle előállításának hívják.

Nevezzük általában $(r+1)$-edfokú Fibonacci-sorozatnak azokat a sorozatokat, amelyek r-edik differenciája Fibonacci-sorozat. $s=1$ esetén például

1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144

1 3 6 11 19 32 53 87 142 231

1 4 10 21 40 72 125 212 354

1 5 15 36 76 148 173 385

Belátható, hogy ezek a magasabb fokú Fibonacci-sorozatok az

$$F_{n+1}^{(s,r)} = 2F_n^{(s,r)} - F_{n-s}^{(s,r)} + c(n, r, s),$$

rekurziónak tesznek eleget, ahol a $c(n, r, s)$ számok olyan $(r-1)$-edfokú számtani haladványt alkotnak, amelyek $(r-2)$-edik differenciája s.

IRODALOM

ERDŐS, P.—LEHNER, J.: The distribution of the number of summands in the partition of a positiv integer. Duke Math. Journals, 8 (1941) 335—341.
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On a new law of large numbers. J. Analyse Math. 23 (1970) 103—111.
ERDŐS PÁL—RÉVÉSZ PÁL: Varga Tamás egy problémájáról. Matematikai Lapok. 24 (1973) 273—282.
FÖLDES ANTÓNIA: A leghosszabb „tiszta fej" hosszának határeloszlásáról. Matematikai Lapok. 26 (1975) 105—116.
JORDAN KÁROLY: Fejezetek a valószínűségszámításból. Akadémiai Kiadó 1956.
KOMLÓS, J.—TUSNÁDY, G.: On sequences "of pure heads", The Annals of Probability 3 (1976) 608—617.
HUSZÁR GÉZA: Az $x^{n+1}+x^n-1=0$ egyenlet gyökei. Matematikai és Fizikai Lapok 37 (1930) 25—35.
MONTMORT, REMOND DE: Essay d'analyse sur les jeux de hazard, 2. kiadás. Paris 1713.
NEKRASSOF, V.: Über trinomische Gleichungen. Math. Annalen. 29 (1887) 413.
NETTO, E.: Lehrbuch der Kombinatorik. Chelsea Publ. Co.
USPENSKY, J. V.: Introduction to mathematical probability. McGraw Hill Book Company New York and London 1937.

ОБОБШЁННЫЕ ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ЧИСЛО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СОСТОЯЩИХ ТОЛЬКО ИЗ ГЕРБОВ

Г. СЕКЕЙ—Г. ТУШНАДИ:

GENERALIZED FIBONACCI NUMBERS AND NUMBER OF "PURE HEADS"

G. SZÉKELY and G. TUSNÁDY

Let $F_n^{(s)}$ denote the number of the sequences of heads and tails with n elements which do not contain s consecutive heads. It is proved that for fixed s the sequence $F_n^{(s)}$ is a generalized Fibonacci sequence defined by (7). We give the explicit formulae (5) and (6) for $F_n^{(s)}$, and an inequality (10) which together with (4) shows the asymptotic properties of $F_n^{(s)}$.

(C,1) SZUMMÁLHATÓ SOROK ALKALMAZÁSA RÉTEGBE ÁGYAZOTT CSŐRENDSZER HŐLEADÁSÁNAK VIZSGÁLATÁRA

HOFFMANN ANDOR

1. Bevezetés

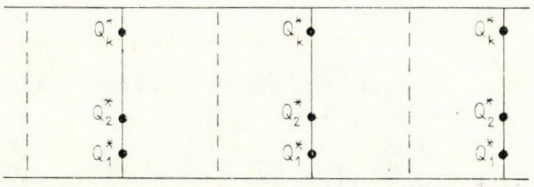
Rétegbe ágyazott csőrendszer körül kialakuló hőmérsékletmező meghatározása elméletileg és gyakorlatilag egyaránt fontos. Ilyen probléma merül fel pl. betonba vagy talajba beágyazott hőtávvezetékeknél, fűtőtestek tervezésénél stb. (l. 1. ábra). Egy csősor esetén ($k=1$) a problémára egy megoldást adott O. H. Faxén ([5], [6]) potenciálfüggvény alkalmazásával és komplex függvénytani segédeszközökkel, majd J. Gruber, csupán potenciálfüggvény megfelelő alkalmazásával [4]. A jelen dolgozat a fenti segédeszközök egyikét sem használja fel, a problémát egyszerű peremértékfeladatként kezeli úgy, hogy a forrásokat és nyelőket a peremen felvett $(C, 1)$ szummálható sorokkal reprezentálja. Ezzel a megoldás matematikai áttekintése és annak gyakorlati kiszámítása lényegesen egyszerűsödik.

2. A feladat kitűzése

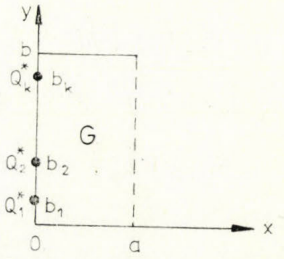
Tekintsük egy rétegbe ágyazott csőrendszer 1. ábra szerinti keresztmetszetét, ahol $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_k^*$ a csöveknek megfelelő pontszerű források. A probléma síkproblémaként tárgyalható, mivel a csövek gyakorlatilag végtelen hosszúak és a réteg anyaga homogénnek és izotrópnak tekinthető. Az 1. ábra szerinti szaggatott vonalakon a szimmetria miatt nincs hőátadás, ezért a fizikai modellt a 2. ábra szerinti téglalapra korlátozhatjuk, ahol a vízszintes oldalakon a Newton-féle peremfeltétel lesz érvényes.

Ismeretes, hogy a pontszerű forrás, ill. nyelő leírható a Dirac-féle delta disztribúcióval, amelyet itt a tároló véges kiterjedése miatt periodikussá tehetünk.

A következőkben az alanti egyszerűsítő jelöléseket használjuk:



1. ábra



2. ábra

A $2b$ szerint periódikus delta disztribúció

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y-2bn) = \delta_{2b}(y);$$

ez b_i-vel eltolva és Q_i^* erősségű hőforrást véve

$$2\frac{Q_i^*}{\lambda}\delta_{2b}(y-b_i) = \delta_{2b}^{b_i}(y);$$

majd ilyen disztribúciók összege

$$\frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{k} Q_i^*\,\delta_{2b}(y-b_i) = \delta_{2b}^{b_1,b_2,\ldots,b_k}(y) \quad 0 \leqq b_1 < b_2 < \ldots < b_k < b.$$

A folyamatot stacionáriusnak tekintjük, ezért a peremértékfeladat matematikai megfogalmazása a következő lesz:

(1) $$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{ha} \quad (x, y) \in G$$

(2a) $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\delta_{2b}^{b_1,b_2,\ldots,b_k}(y) = -\frac{1}{b\lambda}\left(\sum_{i=1}^{k} Q_i^* + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} Q_i^* \cos\frac{n\pi}{b} b_i \cos\frac{n\pi}{b} y\right)$$

(2b) $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$$

(2c) $$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = H_1 u|_{y=0}$$

(2d) $$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = -H_2 u|_{y=b}$$

A (2a) peremfeltétel a forrásokat reprezentáló Dirac-delta disztribúciókat előállító Fourier—Stieltjes-sorral van kifejezve. A (2b) azt jelenti, hogy a szaggatott vonalon (l. 2. ábra) nincs hőátadás. A (2c) és (2d) a vízszintes oldalakon levő hőátadást reprezentálják, ahol

$$H_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda}, \quad H_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda}$$

(α_1 és α_2 a megfelelő hőátadási tényező, λ pedig a vizsgált réteg hővezetési együtthatója).

3. A megoldás előállítása

Az (1), (2) peremértékfeladat megoldását vegyük fel az

(3) $$u(x, y) = C_0 + A_0 x + B_0 y + D_0(x^2 - y^2) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a} y\right)\cos\frac{n\pi}{a} x +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b} x + D_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b} x\right)\cos\frac{n\pi}{b} y$$

alakban. Ez kielégíti az (1) differenciálegyenletet, az ismeretlen együtthatókat pedig a (2) peremfeltételekből határozzuk meg. A továbbiakban a $\frac{Q_i^*}{\lambda} = Q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ jelölést használjuk.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = A_0 + \frac{\pi}{b}\sum_{n=1}^{\infty} nD_n \cos\frac{n\pi}{b}y =$$

$$= -\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^{k} Q_i + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b}b_i \cos\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Ebből

$$A_0 = -\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k} Q_i, \quad D_n = -\frac{2}{n\pi}\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b}b_i, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = -\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k} Q_i + 2D_0 a +$$

$$+\frac{\pi}{b}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(C_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}a - \frac{2}{n\pi}\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b}b_i \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}a\right)\cos\frac{n\pi}{b}y = 0$$

amelyből

$$D_0 = \frac{1}{2ab}\sum_{i=1}^{k} Q_i, \quad C_n = \frac{2}{n\pi}\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b}b_i \operatorname{cth}\frac{n\pi}{b}a. \tag{5}$$

A környezetnek való hőátadást a két vízszintes peremvonalon a (2c) és (2d) peremfeltételekkel írjuk le. Ezekből látható, hogy az $u(x, y)$ függvény a rétegben kialakult túlhőmérsékletet jelenti a környezethez képest.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = B_0 + \frac{\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty} nB_n \cos\frac{n\pi}{a}x = H_1\left[C_0 - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k} Q_i x + \frac{1}{2ab}\sum_{i=1}^{k} Q_i x^2 + \right. \tag{6}$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{a}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}x + D_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}x\right)\right],$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = B_0 - \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{k} Q_i + \frac{\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b + B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}b\right)\cos\frac{n\pi}{a}x =$$

$$= -H_2\left[C_0 - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k} Q_i x + B_0 b + \frac{1}{2ab}\sum_{i=1}^{k} Q_i (x^2 - b^2) + \right. \tag{7}$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}b + B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b\right)\cos\frac{n\pi}{a}x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(C_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}x + D_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}x\right)\right].$$

A (6) és (7) egyenlőségeket most rendezzük a következőképpen:

$$\underbrace{B_0 - H_1 C_0}_{E_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{\pi}{a}nB_n - H_1 A_n\right)}_{E_n}\cos\frac{n\pi}{a}x = H_1\left[-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k} Q_i x + \frac{1}{2ab}\sum_{i=1}^{k} Q_i x^2 + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{\infty}\left(C_p \operatorname{ch}\frac{p\pi}{b}x + D_p \operatorname{sh}\frac{p\pi}{b}x\right)\right] = f_1(x)$$

és

$$\underbrace{H_2 C_0 + (1 + H_2 b) B_0 - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{k} Q_i \left(1 + H_2 \frac{b}{2}\right)}_{F_0} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{a} n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b + H_2 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b\right) A_n + \left(\frac{\pi}{a} n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b + H_2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b\right) B_n\right]}_{F_n} \cos \frac{n\pi}{a} x =$$

(9)

$$= -H_2 \left[-\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{k} Q_i x + \frac{1}{2ab} \sum_{i=1}^{k} Q_i x^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left(C_p \operatorname{ch} \frac{p\pi}{b} x + D_p \operatorname{sh} \frac{p\pi}{b} x\right)\right] = f_2(x).$$

A (8) és (9) egyenlőségekben fellépő E_0, E_n, F_0, F_n Fourier-együtthatókat most már integrálással könnyen megkaphatjuk

$$E_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f_1(x)\, dx, \quad E_n = \frac{2}{a} \int_0^a f_1(x) \cos \frac{n\pi}{a} x\, dx$$

(10)

$$F_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f_2(x)\, dx, \quad F_n = \frac{2}{a} \int_0^a f_2(x) \cos \frac{n\pi}{a} x\, dx.$$

Felhasználva az

$$\int_0^a x \cos \frac{n\pi}{a} x\, dx = \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 [(-1)^n - 1],$$

$$\int_0^a x^2 \cos \frac{n\pi}{a} x\, dx = (-1)^n \frac{2a^3}{(n\pi)^2},$$

$$\int_0^a \operatorname{ch} \frac{p\pi}{b} x \cos \frac{n\pi}{a} x\, dx = (-1)^n \frac{a^2 bp \operatorname{sh} \frac{p\pi}{b} a}{\pi(a^2 p^2 + b^2 n^2)}$$

$$\int_0^a \operatorname{sh} \frac{p\pi}{b} x \cos \frac{n\pi}{a} x\, dx = \frac{a^2 bp}{\pi(a^2 p^2 + b^2 n^2)} \left[(-1)^n \operatorname{ch} \frac{p\pi}{b} a - 1\right]$$

határozott integrálokat a (10) együtthatókra a következő képleteket kapjuk:

(11a) $$E_0 = \frac{H_1}{a} \left[-\frac{a^2}{3b} \sum_{i=1}^{k} Q_i + \frac{2b}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{p\pi}{b} b_i\right],$$

(11b) $$F_0 = -\frac{H_2}{a} \left[-\frac{a^2}{3b} \sum_{i=1}^{k} Q_i + \frac{2b}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^2} \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{p\pi}{b} b_i\right]$$

(11c) $$E_n = H_1 \left[\frac{2a}{b(n\pi)^2} \sum_{i=1}^{k} Q_i + \frac{4ab}{\pi^2} (-1)^n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{p\pi}{b} b_i}{a^2 p^2 + b^2 n^2}\right] = H_1 E_n^*,$$

(11d) $$F_n = -H_2 \left[\frac{2a}{b(n\pi)^2} \sum_{i=1}^{k} Q_i + \frac{4ab}{\pi^2} (-1)^n \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{p\pi}{b} b_i}{a^2 p^2 + b^2 n^2}\right] = -H_2 E_n^{**}.$$

Ezután a B_0, C_0 együtthatókat a (8) és (9) egyenlőségek felhasználásával a

$$B_0 - H_1 C_0 = E_0$$

$$(1 + H_2 b) B_0 + H_2 C_0 = F_0 + \frac{1}{a}\left(1 + H_2 \frac{b}{2}\right) \sum_{i=1}^{k} Q_i \tag{12}$$

egyenletrendszerből kifejezhetjük,

$$C_0 = \frac{F_0 - (1 + H_2 b) E_0 + \frac{1}{a}\left(1 + H_2 \frac{b}{2}\right) \sum_{i=1}^{k} Q_i}{H_1 + H_1 H_2 b + H_2}, \tag{13}$$

$$B_0 = E_0 + H_1 C_0. \tag{14}$$

Az A_n és B_n együtthatókat szintén a (8) és (9) egyenlőségek felhasználásával a

$$-H_1 A_n + \frac{\pi}{a} n B_n = H_1 E_n^*$$

$$\left(\frac{\pi}{a} n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b + H_2 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b\right) A_n + \left(\frac{\pi}{a} n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b + H_2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b\right) B_n = -H_2 E_n^{**}$$

egyenletrendszerből számíthatjuk ki,

$$A_n = -\frac{1}{N_n}\left[H_2 E_n^{**} + \left(H_1 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b + \frac{H_1 H_2 a}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b\right) E_n^*\right], \tag{15}$$

$$B_n = -\frac{1}{N_n}\left[\frac{H_1 H_2 a}{n\pi} E_n^{**} - \left(\frac{H_1 H_2 a}{n\pi} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b + H_1 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b\right) E_n^*\right], \tag{16}$$

ahol

$$N_n = (H_1 + H_2) \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b + \left(\frac{n\pi}{a} + \frac{H_1 H_2 a}{n\pi}\right) \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b. \tag{17}$$

A (11c) és (11d) formula szerint

$$O(E_n^*) = O(E_n^{**}) = \frac{1}{n^2}. \tag{18}$$

Felhasználva a (4), (5), (15) és (16) formulákat a (3) megoldásfüggvényt számításra alkalmas módon felírva

$$u(x, y) = C_0 - \frac{1}{b} \sum_{i=k}^{k} Q_i x + B_0 y + \frac{1}{2ab} \sum_{i=1}^{k} Q_i (x^2 - y^2) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n}\left[H_2 E_n^{**}\left(\operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + \frac{a H_1}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y\right) + H_1 E_n^*\left(\operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} (b - y) + \right.\right. \tag{19}$$

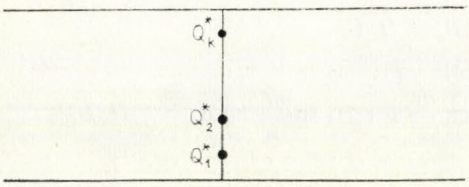
$$\left.\left. + \frac{H_2 a}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} (b - y)\right)\right] \cos \frac{n\pi}{a} x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{n\pi}{b} b_i \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} (a - x)}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \cos \frac{n\pi}{b} y.$$

A C_0 és B_0 együtthatók a (13), (14), valamint a (11a) és (11b), az E_n^* és E_n^{**} pedig a (11c) és (11d) formulákból számíthatók.

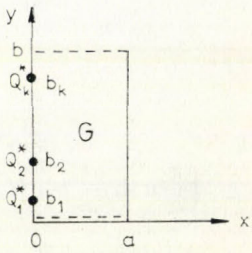
A (17) és (18) formulákat tekintetbe véve könnyen belátható, hogy a (19) megoldásfüggvény a G nyílt tartomány minden zárt résztartományában egyenletesen konvergens és kielégíti az (1) differenciálegyenletet.

4. Véges számú forrás esete

Az előbbi síkproblémát tekintve egy másik feladat, mikor csak egy függőleges vonalon helyezkedik el véges k számú hőforrás (l. 3. ábra) s a két vízszintes határvonalon nincs hőátadás.



3. ábra



4. ábra

Ennek egy közelítő fizikai modellje pl. földben lefektetett csövek, mint hőforrások; ha feltesszük, hogy a föld felszínén a levegő szigetelése miatt, bizonyos mélységben pedig a föld melege miatt gyakorlatilag nincs hőátadás. Feltesszük továbbá, hogy a $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_k^*$ források egy téglalap alakú földréteg függőleges középvonalán helyezkednek el, így a hőterjedés erre a vonalra szimmetrikus lesz. A téglalap függőleges oldalain pedig a Newton-féle hőátadási törvény érvényesül, mindkét oldalon ugyanazzal a hőátadási tényezővel.

A peremértékfeladat a következő lesz:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{ha} \quad (x, y) \in G \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\delta_{2b}^{b_1, b_2, \ldots, b_k}(y) = -\frac{1}{b}\left[\sum_{i=1}^{k} Q_i + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b} b_i \cos\frac{n\pi}{b} y\right], \tag{21a}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = -Hu|_{x=a} \tag{21b}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \tag{21c}$$

A megoldást az

$$u(x, y) = C_0 + A_0 x + B_0 y + D_0(x^2 - y^2) + \tag{22}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b} x + D_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b} x\right)\cos\frac{n\pi}{b} y$$

alakban keressük. Az ismeretlen együtthatókat a peremfeltételek segítségével könnyen meghatározhatjuk.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = A_0 + \frac{\pi}{b}\sum_{n=1}^{\infty} nD_n \cos\frac{n\pi}{b}y = -\frac{1}{b}\left[\sum_{i=1}^{k} Q_i + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b}b_i \cos\frac{n\pi}{b}y\right],$$

ebből

$$A_0 = -\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k} Q_i, \quad D_n = -\frac{2}{n\pi}\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b}b_i, \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = B_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = -2D_0 b,$$

amelyekből a (21c) peremfeltétel szerint

$$B_0 = D_0 = 0. \tag{24}$$

Most írjuk fel az $x=a$-nál a Newton-féle peremfeltételt

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = -\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k} Q_i + \frac{\pi}{b}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(C_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}a - \frac{2}{n\pi}\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b}b_i \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}a\right)\cos\frac{n\pi}{b}y =$$

(25)

$$= -H\left[C_0 - \frac{a}{b}\sum_{i=1}^{k} Q_i + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}a - \frac{2}{n\pi}\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b}b_i \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}a\right)\cos\frac{n\pi}{b}y\right].$$

A (25)-ből meghatározhatjuk a C_0 és C_n állandókat, mégpedig

$$C_0 = \frac{1}{b}\left(a + \frac{1}{H}\right)\sum_{i=1}^{k} Q_i \tag{26}$$

és

$$C_n = \frac{\left(\frac{2}{b}\operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}a + \frac{2H}{n\pi}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}a\right)\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b}b_i}{\frac{\pi}{b}n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}a + H\operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}a}. \tag{27}$$

Felhasználva a (23,) (24), (26) és (27) formulákat a (22) megoldásfüggvény számításra alkalmas módon felírva

$$u(x,y) = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k} Q_i\left(a + \frac{1}{H} - x\right) +$$

(28)

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{M_n}\left[\frac{1}{b}\operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}(a-x) + \frac{H}{n\pi}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}(a-x)\right]\cos\frac{n\pi}{b}y$$

lesz, ahol

$$M_n = \frac{n\pi}{b}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}a + H\operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}a. \tag{29}$$

A (28) és (29) formulákból könnyen belátható, hogy a (28) megoldásfüggvény a G nyílt tartomány minden zárt résztartományában egyenletesen konvergens és kielégíti a (20) differenciálegyenletet.

(C, 1) szummálható soroknak a fentiekhez hasonló alkalmazásával a Laplace-egyenlet második peremértékproblémáját is megoldhatjuk. Ennek egy fizikai interpretációja pl. víztárolóban kialakuló áramlási viszonyok meghatározása [7].

Összefoglalás

A dolgozat egy módszert ad rétegbe ágyazott csőrendszer körül kialakuló hőmérsékletmező meghatározására a Newton-féle hőátadási feltétel alapján. A csőrendszerből eredő forrásokat pontszerűeknek feltételezi és a szimmetriaviszonyok felhasználásával a peremértékfeladatot téglalap alakú tartományon oldja meg, ahol a források a peremen lépnek fel. Így a peremfeltételben szereplő függvények (C, 1) szummálható sorokkal fejezhetők ki. A megoldás egzakt, könnyen kezelhető, és a nyílt tartomány minden zárt résztartományában egyenletesen konvergens lesz.

IRODALOM

[1] Mikusiński, J.—Sikorski, R.: The elementary theory of distributions (I.) Rozprawy Matematyczne XII. Warszawa 1957.
[2] Fenyő, J.: Über eine technische Anwendung der Distributionentheorie. Per. Polyt. E. **9**. 62 (1965) Bp.
[3] Gelfand, I.—Schilow, G. E.: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I. VEB Verlag, Berlin 1967.
[4] Gruber, J.: Die Temperaturverteilung in Strahlungsheizflächen. Per. Polyt. M. **2**. 51. (1958) Bp.
[5] Körmendi, I.: Faxén módszere rétegbe ágyazott csőrendszer hőleadásának számítására. Épületgépészet **16**. 11. (1967) Bp.
[6] Faxén, O. H.: Beräkning av värmeavgivningen franrör, ingyjutna i betongplattor. Teknisk Tidskrift, Mekanik, 20, Mars 1937. Häfte 3.
[7] A. Hoffmann: Anwendung der (C, 1) summierbare Reihen auf strömungstechnische und wärmetechnische Probleme I. Per. Polyt. M. **22**. 2. (1978.).

ПРИМЕНЕНИЕ (C, 1) СУММИРЕМЫХ СЕРИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ СИСТЕМЫ ТРУД, ВЛОЖЕННОЙ В СЛОЙ

А. ХОФФМАНН

USE OF (C, 1) SUMMABILITY SERIES FOR TESTING THE HEATTRANSFER PERFORMED BY A PIPING SYSTEM EMBEDED IN A LAYER

A. HOFFMANN

Based on the Newtonian heattransfer condition the method described in this paper seems to be suitable for the determination of a temperature field arisen around a piping system embedded in a layer. The sources originating from the piping system are assumably pointlike. By making use of the symmetry-system the problem of boundary values are solved in a rectangular domain where the sources appear on the boundary. Thus the functions acting within the boundary condition can be expressed by (C, 1) summability series. The solution of this problem is exact, easily treatable and it will be uniformly convergent in any closed subdomain of the opened domain.

SZABÁLYOS SOKSZÖGEK ABSZOLÚT SZERKESZTÉSE

STROMMER GYULA

Bolyai János születésének
százhetvenötödik évfordulójára

A következőkben kimutatjuk, hogy ha n tetszés szerinti Gauss-féle körosztási szám, akkor megadható az n-oldalú szabályos sokszög szerkesztésének oly megoldása, mely bármely olyan geometriában használható, amelyben a Hilbert-féle axiómarendszer I—III. csoportban foglalt axiómáin kívül érvényes az ún. *köraxióma* is, mely szerint az olyan egyenesnek, melynek egy pontja egy körön belül fekszik, van a körrel legalább egy közös pontja.*

Evégből előre bocsátjuk a következőket.

A közönséges, euklideszi geometriában az egységsugarú körbe írt $2n$-oldalú szabályos sokszög oldalának szerkesztése — mint ismeretes — a másodfokú egyenletek oly sorozatának megoldására vezethető vissza, melyben az első egyenlet együtthatói racionális számok, minden következő egyenlet együtthatói pedig abban a számtestben vannak, amelyhez a racionális számtestből a megelőző egyenletek gyökeivel való fokozatos bővítéssel jutunk.

Már most az

$$x^2 - px + q = 0 \tag{1}$$

egyenlet gyökeit az egységsugarú kör felhasználásával csupán vonalzó segítségével a következőképp szerkeszthetjük meg (l. az ábrát):

A kör egy AB átmérőjének végpontjaiban a körhöz érintőket húzunk. (Az érintők szerkesztése a kör öt pontjából a Pascal-féle tétel alapján egyedül vonalzóval is elvégezhető szerkesztés.) Mindegyik érintőn megállapítjuk a haladás pozitív irányát, még pedig úgy, hogy a két érintő pozitív felei AB ugyanazon oldalán legyenek. Ezek után az érintőkön meghatározzuk a C és D pontokat úgy, hogy

$$AC = \frac{4}{p} \quad \text{és} \quad BD = \frac{q}{p}$$

legyen. (A teljes négyoldal ismert tulajdonságai alapján az AB átmérő és annak O felezőpontja segítségével csupán vonalzóval szerkeszthetünk AB-nek a pozitív érintő félegyenesek felé eső oldalán AB-vel párhuzamos és egyenlő irányú $A'B'$ húrt; lásd [11], 64. l. Az O pontból AB' és BA' metszéspontján keresztül húzott körsugár végpontjához tartozó érintő az 1-nek megfelelő pontban metszi a kör A-ban és B-ben vont érintőit. Ezen érintőkön adott vonaldarabokból pedig ezek

* Az ilyen geometria az euklideszi geometrián és a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometrián kívül még más geometriákat is magában foglal különös esetként. Ilyen a Forder által adott semieuklideszi geometria (l. [3], 337—338. lap) és a szerző [10] dolgozatában adott nem-Legendre-féle geometria, melyekben egy egyenesen kívül felvett ponton át végtelen sok olyan egyenes húzható, amelyek nem metszik az adott egyenest, és a háromszög szögeinek összege mégis $2R$, illetve $2R$-nél nagyobb.

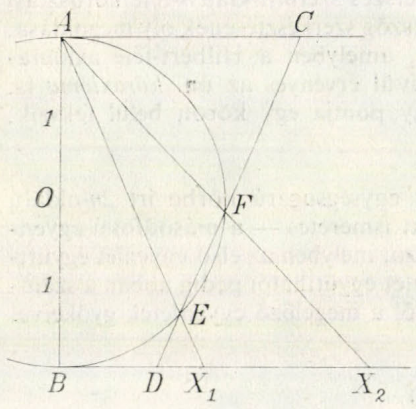
mérőszámait tartalmazó legkisebb számtest számainak megfelelő pontok szerkesztése a másik érintő segítségével csupán vonalzóval könnyen megoldható; l. [11], 66. l.

Ha most a CD egyenes a kört az E, F pontokban metszi, akkor ezen pontokat A-val összekötő egyenesek által a B-hez tartozó érintőből lemetszett BX_1 és BX_2 darabok mérőszámai éppen az (1) egyenlet gyökei. (Lásd pl. [1], 175—176. l.)

Ily módon tehát pusztán vonalzóval megszerkeszthetjük az egységsugarú körbe írt $2n$-oldalú szabályos sokszög oldalát, s ezt Steiner [9] könyvében a 18. §-ban közölt szerkesztések alapján (l. még [11], 19. §) csupán vonalzó segítségével rávihetjük a körre annak egy tetszés szerinti pontjától kezdve.

Ezt az eljárást először Staudt [8] alkalmazta 1842-ben a szabályos tizenhétszög szerkesztésére.* Később Affolter [2] szerkesztett ilyen módon szabályos 257 oldalú sokszöget.

Ezt előre bocsátva, legyen egy olyan síkgeometriában, amelyben az I—III axiómákon kívül érvényes a köraxióma is, a szerkesztendő sokszög köré írt kör K és annak középpontja O. Egészítsük ki a síkot átvitt értelemben vett pontok és egyenesek bevezetésével projektív síkká úgy, mint azt Hjelmslev tette (l. [5]). Ezen a projektív síkon értelmezzünk egy euklideszi geometriát azáltal, hogy az O pontnak a K körre vonatkozó polárisát vesszük fel végtelen távoli egyenesnek, s ezen az O-n átmenő egymásra merőleges egyenesek metszéspontjainak involúcióját abszolút involúciónak. Ekkor a síknak az O ponton átmenő egyenesekre vonatkozó nemeuklideszi és euklideszi tükrözései megegyeznek egymással. Ebből következik, hogy az O középpontú bármely körbe írt sokszög, mely az egyik mértékmegállapítás szerint szabályos, a másik mértékmegállapítás szerint is az.



1. ábra

A fenti szerkesztés tehát az adott geometriában is a körbe írt n-oldalú szabályos sokszöghöz vezet. Megjegyzendő azonban, hogy a szerkesztésben nem-tényleges pontok is felléphetnek, de a szerkesztés Desargues-tételének alkalmazásával csupán vonalzó használatával (pl. [11], 16.§ nyomán) ez esetben is elvégezhető.

Ezzel állításunk be van bizonyítva.

Az előadottak szerint a szabályos 17 oldalú sokszög Staudt—Schröter-féle szerkesztése és a szabályos 257 oldalú sokszög Affolter-féle szerkesztése a párhuzamosok axiómájától független, *abszolút* szerkesztés.

Megjegyzendő még, hogy a fenti szerkesztés az (egyszerű) elliptikus síkon és a gömbön is elvégezhető és a K körbe írt n-oldalú szabályos sokszöghöz vezet. Sőt a szerkesztések ez esetben még egyszerűbbek is, mert az elliptikus síkon, illetve gömbön a leírt módon értelmezett euklideszi geometria végtelen távoli pontjai tényleges pontok.

Befejezésül még megemlítjük a következőket:

Ha a körzővel nem rajzolhatunk kört, hanem (pl. két hegyes végével) csupán távolság átvitelére használhatjuk, akkor a körzőt *hosszátvivő*nek nevezzük. Hilbert [4]

* Chr. v. Staudt az egységsugarú körbe írt szabályos 17-szög szerkesztését bizonyítás nélkül közölte; a bizonyítást Schröter adta [7] dolgozatában.

művében (82. l.) megjegyezte, hogy a kör — bárminő n körosztási szám mellett — vonalzóval és hosszátvivővel felosztható n egyenlő részre. Utóbb Kürschák József [6] cékkében bebizonyította, hogy minden szerkesztési feladat, melyet vonalzóval és hosszátvivővel megoldhatunk, akkor is elvégezhető, ha a hosszátvivőt egy *alapmértékkel* helyettesítjük, mely csak egy bizonyos, az eszköz által megszabott hosszúságnak (mondjuk a hosszegységnek) átrakására alkalmas. Végre Vahlen [12] könyvében (59—60. l.) megmutatta, hogy a hosszátvivő még egyszerűbb eszközzel is pótolható, amellyel csak egy, mindenkorra megszabott pontból rakhatjuk fel az illető eszköz által megszabott hosszúságot. E feladat megoldására alkalmas eszközt *egységfordítónak* nevezzük.

A fentebb mondottakból következik, hogy (n alatt körosztási számot értve) az n-oldalú szabályos sokszög szerkesztése bármely olyan geometriában, amelyben az I—III axiómákon kívül érvényes a köraxióma, csupán vonalzóval és egységfordítóval elvégezhető, feltéve hogy az egység a szerkesztendő sokszög középpontjából rakható fel az onnan kiinduló félegyenesekre.

Közvetlenül világos, hogy ez az eredmény átvihető az elliptikus sík és a gömb geometriájára is.

IRODALOM

[1] ADLER, A.: Theorie der geometrischen Konstruktionen (Sammlung Schubert Bd. LII.). Leipzig 1906.
[2] AFFOLTER, FR. G.: Zur Staudt—Schröter'schen Construction des regulären Vielecks, Math. Ann. 6 (1873), 582—591.
[3] FORDER, H. G.: The Foundations of Euclidean Geometry, Cambrdige 1927.
[4] HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl., Leipzig 1903.
[5] HJELMSLEV, J.: Neue Begründung der ebenen Geometrie, Math. Ann. 64 (1907), 449—474.
[6] KÜRSCHÁK, J.: Das Streckenübertrager, Math. Ann. 55 (1902), 597—598.
[7] SCHRÖTER, H.: Zur v. Staudtschen Construction des regulären Siebenzehnecks, J. reine angew. Math. 75 (1873), 13—24.
[8] STAUDT, C. G. CHR. v.: Construction des regulären Siebenzehnecks, J. reine angew. Math. 24 (1842), 251.
[9] STEINER, J.: Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833. (Ges. Werke I, Berlin 1881, 461—522; Ostwalds Klassiker Nr. 60, Leipzig 1895.)
[10] STROMMER, GY.: Zu den Steinerschen Konstruktionen, Period. Polytechn. Mech. Engrg. 21 (1977), 83—102.
[11] SZŐKEFALVI-NAGY GY.: A geometriai szerkesztések elmélete, 2. kiad.. Budapest 1968.
[12] VAHLEN, TH.: Konstruktionen und Approximationen (Teubners Lehrbücher der math. Wiss. Bd. XXXIII), Leipzig—Berlin 1911.

АБСОЛУТНАЯ КОНСТРУКЦИЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Д. ШТОММЕР:

CONSTRUCTION OF REGULAR POLYGONS IN ABSOLUTE GEOMETRY

GY. STROMMER

A geometric construction is presented which yields for an arbitrary cyclotomic number n a regular n-gon in any geometry where the groups of axioms I, II, III of Hilbert's system and the circle axiom are valid. The construction can be carried out on the sphere and on the elliptic plane as well. If the circumscribed circle of the polygon is already drawn then the compass is completely dispensable.

Moreover, it is shown that in the above mentioned geometries the construction of a regular n-gon requires besides the ruler only such a drawing instrument which permits to measure from the center of the circumscribed circle a given segment, say the unit segment, on any half line issuing from that point.

JELENTÉS AZ 1977. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

Az 1977. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt, amelyen egyetemi és főiskolai hallgatók, középiskolai tanulók, valamint 1977-ben egyetemet, illetve főiskolát végzettek vehettek részt, a Bolyai János Matematikai Társulat 1977. november 4. és november 14. között rendezte meg. A Versenybizottság, amelynek tagjai Buzási Károly, Daróczy Zoltán, Gesztelyi Ernő, Gyires Béla, Győry Kálmán, Losonczi László, Rapcsák András, Székelyhidi László, Tamássy Lajos, Tomkó József és Turjányi Sándor voltak, a következő 10 feladatot tűzte ki megoldásra:

1. Messünk el egy ellipszoidot az O középpontján át egy σ síkkal. Mérjük fel a metszet területét az O-n átmenő, σ-ra merőleges egyenesre O-tól mindkét irányban. Milyen alakzatot képeznek az így keletkező szakaszok végpontjai, ha σ felveszi az összes lehetséges helyzetet?

2. A valós projektív síkon állítsunk elő olyan, csupa egyszeres pontból álló, egyenestől különböző folytonos vonalat, amelyet egy adott kúpszelet minden szelője és minden érintője metsz, de csak egy pontban.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a, x, y 0-tól különböző p-adikus egész számok és $p|x$, $pa|xy$, akkor

$$\frac{1}{y}\,\frac{(1+x)^y-1}{x} \equiv \frac{\log(1+x)}{x} \pmod{a}.$$

4. Legyen $p>5$ prímszám. Bizonyítsuk be, hogy a p-edik körosztási test bármely algebrai egész eleme előállítható a test véges sok, páronként különböző egysége összegeként.

5. Tegyük fel, hogy a véges $X=(P, E)$ irányítatlan gráf automorfizmuscsoportja izomorf a (8-elemű) kvaterniócsoporttal. Bizonyítandó, hogy X csúcsmátrixának van legalább 4-szeres multiplicitású sajátértéke. (A $P=\{1, \ldots, n\}$ az X gráf szögpontjainak halmaza. Az E élhalmaz a P-ből vett rendezetlen párok halmazának részhalmaza. Az X automorfizmuscsoportja P azon permutációiból áll, amelyek élt élbe visznek. X csúcsmátrixa, $M=[m_{ij}]$ $n\times n$-es mátrix, ahol $m_{ij}=1$, ha $\{i, j\}\in E$ és $m_{ij}=0$ egyébként.)

6. Bizonyítsuk be, hogy ha f a pozitív valós számok halmazán értelmezett valós függvény, amelyre $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ és $f(x+1)\leqq f(x)$ teljesül minden x, y pozitív valós számra, továbbá $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, akkor

$$f(x)+f(1-x) \geqq -x\log_2 x-(1-x)\log_2(1-x)$$

minden $x\in(0, 1)$ esetén.

7. Teljesüljön a G lokálisan kompakt feloldható csoporton értelmezett f és g komplex értékű függvényre valamely $c_1, \ldots, c_n$ (n természetes szám) komplex számokkal minden $x, y \in G$ elem esetén

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f(xy^k) = f(x)g(y).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha f korlátos függvény és G valamely χ karakterével fennáll $\inf_{x \in G} \operatorname{Re} f(x)\chi(x) > 0$, akkor g folytonos függvény. (Itt karakteren a G-nek a komplex egységkörbe való folytonos homomorf leképezését értjük.)

8. Legyen $p \geqq 1$ valós szám és $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$. Mely $g: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ folytonos függvények esetén konvex az

$$M_n(x) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) x_{i+1}^p}{\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}_+^{n+1}, \; n = 1, 2, \ldots$$

egyenlőséggel értelmezett M_n sorozat minden függvénye?

9. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ vektor komponensei az $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos valós függvények, melyek bármely nem csupa 0 valós együtthatókkal vett lineáris kombinációjának legfeljebb n gyöke van $[a, b]$-ben.

Bizonyítsuk be, hogy ha az $[a, b]$-n monoton növekvő valós értékű σ függvénnyel képzett

$$A(f) = \int_a^b \mathbf{u}(x) f(x) \, d\sigma(x), \quad f \in C[a, b]$$

operátor rangja $r \leqq n$, akkor σ-nak pontosan r növekedési helye van.

10. Legyen az $\{X_m, m \geqq 0\}$, $X_0 = 0$ valószínűségi változók sorozata véletlen bolyongás a nemnegatív egészeken

$$p_i = P\{X_{m+1} = i+1 \mid X_m = i\} > 0, \quad i \geqq 0$$

$$q_i = P\{X_{m+1} = i-1 \mid X_m = i\} > 0, \quad i > 0$$

átmenetvalószínűségekkel. Bizonyítsuk be, hogy bármely $k > 0$ egészhez létezik olyan $\alpha_k > 1$ szám, hogy a bolyongás n időegység alatti maximuma eloszlásának k-adik

$$P_n(k) = P\{\max_{0 \leqq j \leqq n} X_j = k\}$$

tagjára a

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{l} P_n(k) \alpha_k^n$$

határérték véges.

A feladatokat sorrendben Tamássy Lajos, Kárteszi Ferenc, Rédei László, Győry Kálmán, Babai László, Daróczy Zoltán és Maksa Gyula közösen, Székely-

hidi László, Losonczi László, Gesztelyi Ernő és Tomkó József bocsátották a Versenybizottság rendelkezésére.

A verseny szabályainak megsértésére vonatkozó észrevételt a Versenybizottság sem a verseny ideje alatt, sem azután nem kapott.

A kitűzött 10 feladatra összesen 138 megoldás érkezett 30 versenyzőtől. A beérkezett megoldások értékelése után a Versenybizottság a következő döntést hozta: I. díjat nyert Göndöcs Ferenc, az ELTE 1977-ben végzett hallgatója és Totik Vilmos, a JATE V. éves hallgatója. II. díjat nyert Füredi Zoltán, az ELTE V. éves hallgatója. III. díjat nyert Czédli Gábor, a JATE 1977-ben végzett hallgatója és Pálfy Péter Pál, az ELTE V. éves hallgatója. Dicséretben részesült Bara Tamás (JATE V. éves), Kiss Emil (ELTE, IV. éves), Komornik Vilmos (ELTE, IV. éves), Sebő András (ELTE, IV. éves), Simányi Nándor (ELTE, III. éves) és Veres Sándor (KLTE, III. éves).

Göndöcs Ferenc megoldotta az 1., 2., 3., 5., 6., 7., 8., 10. feladatokat és részben a 9. feladatot. Kiemelkedőek a 6., 7., 10. feladatokra adott megoldásai.

Totik Vilmos megoldotta az 1., 2., 3., 5., 7., 8., 9., 10. feladatokat és részben a 4. feladatot. Kiemelkedőek a 7., 8., 10. feladatokra adott megoldásai.

Füredi Zoltán megoldotta az 1., 2., 3., 5., 6., 8., 9., 10. feladatokat. Kiemelkedő a 10. feladatra adott megoldása.

Czédli Gábor megoldotta az 1., 2., 3., 5., 8., 9., 10. feladatokat. Kiemelkedő a 3. feladatra adott megoldása.

Pálfy Péter Pál megoldotta az 1., 2., 3., 5., 7., 8., 9. feladatokat. Kiemelkedőek az 5., 8., 9. feladatokra adott megoldásai.

Bara Tamás az 1., 3., 5., 9., 10; Kiss Emil az 1., 2., 3., 5., 8., 9.; Komornik Vilmos az 1., 2., 3., 5., 8., 10.; Sebő András az 1., 2., 3., 5., 9.; Simányi Nándor az 1., 2., 5., 8., 9., 10.; és Veres Sándor az 1., 2., 3., 5., 8., 9. feladatokat oldották meg.

Az 1. feladat megoldása.

Legyen B egy tetszőleges test és O egy pont B-ben. Jelentse $\mathscr{F}(\sigma; B, O)$ azon $P=\{P^+, P^-\}$ pontpárt, melyek az O-n átmenő σ síkra merőleges irányban O-tól olyan távolságra vannak, mint σ és B metszetének területe: $\mathrm{Ter}\,(\sigma \cap B)$. Jelentse $\Phi(B)$ a σ változtatása mellett keletkező P pontokból álló alakzatot: $\Phi(B) \doteq \{P\} = \bigcup_{\sigma} \mathscr{F}(\sigma; B, O)$. Legyen $\mathfrak{A}$ egy O-n átmenő Σ síkra merőleges irányú, $\lambda > 0$ arányú nyújtás, t egy O-ban Σ-ra merőleges egyenes. $\mathfrak{A}^*$ pedig egy t-re merőleges irányú λ arányú nyújtás. — $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{A}^*$ nyilván affinitások.

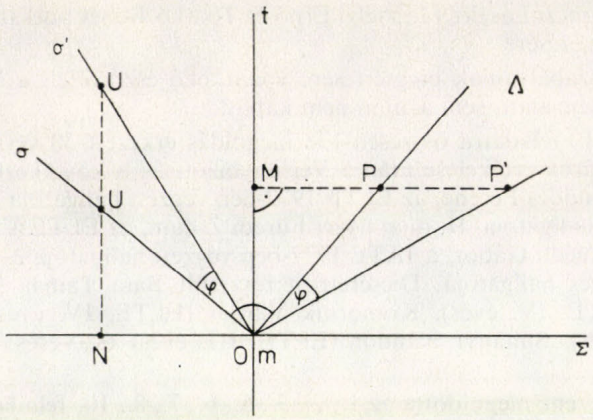
Lemma: $\mathfrak{A}^*(\Phi(B)) = \Phi(\mathfrak{A}(B))$.

Bizonyítás: Jelölje $\mathfrak{A}(\sigma)$-t a σ'. Az affinitások elemi tulajdonságai miatt

$$\mathrm{Ter}\,(\sigma' \cap \mathfrak{A}(B)) = \lambda\,\mathrm{Ter}\,(\sigma \cap B) = \lambda \cdot \overline{OP}; \qquad P = \mathscr{F}(\sigma; B, O) =$$

$$= \overline{OP'}; \qquad P' = \mathscr{F}(\sigma'; \mathfrak{A}(B), O) \equiv \mathscr{F}(\mathfrak{A}(\sigma); \mathfrak{A}(B), \mathfrak{A}(O)).$$

Egy tetszőleges σ és a hozzá tartozó σ' egy az O-n átmenő, Σ-ban fekvő m egyenesben metszi egymást.



Így P' eleme a t és P által meghatározott Λ síknak. (Az ábra az említett alakzatoknak a Λ-ban levő részét mutatja az m irányából nézve.) Mivel a $\Sigma \cap \Lambda$ egy N pontja felett a σ-n, ill. σ'-n levő U, ill. U' pontokra $(UN, UN' \perp \Sigma)$ $\overline{NU'} = \lambda \overline{NU}$, továbbá mivel $\varphi \doteq \sphericalangle(\sigma, \sigma') = \sphericalangle(OP, OP')$ és $\overline{OP'} = \lambda \overline{OP}$, ezért $PP' \perp t$ és $\overline{MP'} = \lambda \overline{MP}$, ahol M a PP' egyenes és t metszéspontja. Ez azonban $\mathfrak{A}^*(P) = P'$-t jelenti, ami a lemmát igazolja.

Ezekután legyenek a feladatban adott E ellipszoid féltengely hosszai a, b, c $(E(a, b, c))$. E egyenlete egy megfelelő koordináta rendszerben $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Tekintsük az origó középpontú, a sugarú $s^2(a)$ gömböt. $\varphi(s^2(a))$ szintén gömb: $s^2(a^2\pi)$. Legyen most $\mathfrak{A}_1$ egy $\lambda = \frac{b}{a}$ arányú nyújtás az y tengely irányában. $\mathfrak{A}_1(s^2(a))$ egy $E_1(a, b, a)$ ellipszoid, és a lemma szerint $\varphi(E_1) = \varphi(\mathfrak{A}_1(S^2(a))) = \mathfrak{A}_1^*(\varphi(S^2(a))) =$ $= \mathfrak{A}_1^*(S^2(a^2\pi)) = E_2(a\pi b, a^2\pi, a\pi b)$. — Legyen most $\mathfrak{A}_2$ egy $\frac{c}{a}$ arányú nyújtás a z tengely irányában. Ekkor $\mathfrak{A}_2(E_1)$ az adott $E(a, b, c)$ ellipszoid, és a lemma újbóli felhasználásával $\varphi(E) = \varphi(\mathfrak{A}_2(E_1)) = \mathfrak{A}_2^*(\varphi(E_1)) = \mathfrak{A}_2^*(E_2(a\pi b, a^2\pi, a\pi b)) =$ $= E_3(\pi bc, \pi ac, \pi ab)$, amit a feladatban meg kellett határozni.

Megjegyezzük, hogy a lemma állítása és annak bizonyítása lényegi változtatás nélkül igaz n-dimenziós B test és $n-1$ dimenziós hipersíkok esetében is. Így a lemma felhasználásával az n-dimenziós esetre átfogalmazott feladat is rögtön megválaszolható.

Megjegyezzük továbbá, hogy a bizonyítás alapját képező lemmában a B test és annak O pontja tetszőleges lehet. Így a lemma a feladatban szereplő körülményeknél sokkal szélesebb körben is alkalmazható.

Több versenyző megoldása alapján

Megoldották: Balogh Zoltán, Bara Tamás, Bárdossy András, Breuer Péter, Brindza Béla, Czédli Gábor, Fazekas István, Füredi Zoltán, Geréb Mihály, Göndöcs Ferenc, Hangya László, Horváth Erzsébet, Kiss Emil, Klincsik Mihály, Komornik Vilmos, Pap Gyula, Páles Zsolt, Pálfy Péter Pál, Reviczky János, Sebő András, Simányi Nándor, Sparing László, Szabó Sándor, Totik Vilmos, Tuza Zsolt, Veres Sándor, Vörös Zoltán.

A 2. feladat megoldása.

A projektív sík egy egyenesét elvéve egy euklideszi sík marad. Vezessünk be ezen (x, y) Descartes-féle koordinátákat, és legyen K a $(0, -2)$ középpontú egységsugarú kör. K egyúttal a projektív sík egy kúpszelete. A kúpszeletek projektív szempontból mind ekvivalensek, azaz létezik olyan $\mathfrak{p}$ projektivitás, mely egy tetszőleges c kúpszeletet K-ba viszi át. Ha tehát a feladatban a kúpszeletet ezen K körnek tekintjük, és erre vonatkozólag egy Γ görbe megoldás, akkor $\mathfrak{p}^{-1}(\Gamma)$ megoldás az adott C kúpszeletre, ugyanis bármely $\mathfrak{p}$ projektivitás és annak $\mathfrak{p}^{-1}$ inverze is kölcsönösen egyértelmű, egyenes tartó transzformáció, mely szelőt szelőbe és érintőt érintőbe visz át. Tehát ha Γ kielégíti a feladat követelményeit K-ra vonatkozólag, akkor $\mathfrak{p}^{-1}(\Gamma)$ is kielégíti azokat $\mathfrak{p}^{-1}(K)=C$-re vonatkozólag.

Először megmutatjuk tehát, hogy az (x, y) euklideszi síkon létezik olyan csupa egyszeres pontokból álló egyenestől különböző $\bar{\Gamma}$ folytonos vonal, melyet az említett K kör bármely az x tengellyel nem párhuzamos szelője vagy érintője pontosan egy pontban metsz. Legyen $y=f(x)$ egy a teljes x tengelyen értelmezett valós függvény, mely rendelkezik a következő tulajdonságokkal: *a)* folytonos, *b)* $0 \leqq f(x) \leqq 1$, *c)* differenciahányadosának abszolút értéke kisebb mint 1, *d)* az $x=0$-tól balra monoton növekvő, jobbra monoton csökkenő, *e)* létezik $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ és $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Belátjuk, hogy $f(x)$ egyetlen szelője sem metszheti, vagy érintheti K-t. Legyen ugyanis $l(x)$ egy lineáris függvény és legyen

$$(1) \qquad l(x_1)=f(x_1), \quad l(x_2)=f(x_2); \quad x_1 < x_2.$$

Tehát $l(x)$ legyen egy szelő. *c)* miatt $|s'(x)|=|\operatorname{tg}\alpha| \leqq 1$. Ha $\alpha=0$, akkor $l(x)$ az x tengellyel összeesik, vagy *b)* miatt a felett helyezkedik el, tehát elkerüli a K kört. Ha $\alpha>0$, akkor (1) és *b)* miatt $l(x)$ x_0 zéró helyére $x_0 \leqq x_1 < x_2$. Ekkor a $0 \leqq x_0$ feltételből, $\alpha>0$-ból és (1)-ből $f(x_1)<f(x_2)$; $0 \leqq x_1 < x_2$ következik, de ez ellentmond *d)*-nek. Ha viszont $x_0<0$ és $|\operatorname{tg}\alpha| \leqq 1$, akkor $l(x)$ elkerüli K-t. Hasonlóan látható be, hogy $l(x)$ $-1 \leqq \operatorname{tg}\alpha<0$ esetében is elkerüli K-t. Tehát $f(x)$ egyetlen szelőjének sincs közös pontja K-val; azaz K szelőinek és érintőinek legfeljebb egy közös pontja van $f(x)$ grafikonjával. K-nak az x tengellyel párhuzamos érintői és szelői (jelöljük ezek halmazát χ-vel) nyilván nem metszik $f(x)$ grafikonját. K-nak a többi érintői és szelői, melyek iránytangensei zérótól különbözőek, azonban már metszik $f(x)$ grafikonját, hiszen ez a grafikon *a)* és *b)* miatt a síkot két részre osztja, melyek közül az egyik tartalmazza az $y<0$ félsíkot, a másik pedig az $y>1$ félsíkot. K egy tetszőleges érintőjének, ill. szelőjének pedig $\alpha \neq 0$ esetén mindkét félsíkkal van közös pontja, így az ezeket elválasztó $f(x)$ grafikonjával is. Az $f(x)$ grafikonja tehát egy kívánt tulajdonságú $\bar{\Gamma}$ görbe az euklideszi síkon.

A párhuzamos egyenesekhez közös ideális pontot csatolván egészítsük ki az euklideszi síkot újra projektív síkká. Ugyanakkor a $\bar{\Gamma}$-hoz az $y=0$ (vagy $y=c=$ $=$konst., $0 \leqq c \leqq 1$) egyenes P_∞ végtelen távoli pontját csatolva a projektív síkon egy Γ görbét kapunk, mely *e)* miatt folytonos, és χ egyenesei is pontosan egy pontban, a P_∞-ben metszik Γ-t. — Γ minden pontja egyszeres, mert ilyen volt a folytonos $\bar{\Gamma}$ függvénygörbe és azt egyetlen határponttal egészítettük ki.

Végül valóban létezik az *a)*—*e)* követelményeknek eleget tevő nem lineáris függvény. Például $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ez tehát, az előzőek szerint, egy megoldást szolgáltat. De könnyen megadható más függvény is, mely eleget tesz *a)*—*e)*-nek. Ilyen az az igen egyszerű, folytonos, bár nem differenciálható függvény, melynek grafikonja úgy keletkezik az x tengelyből, ha annak $A(-2, 0)$, $C(2, 0)$ szakaszát az ABC tört-

vonallal helyettesítjük, ahol B koordinátái $(0, 1)$. Az $a)$—$e)$-nek eleget tevő függvények mindegyikéből egy megoldást kapunk. Tehát ezek a megoldási görbéknek egy elégséges feltételrendszerét képezik. Ez a feltételrendszer azonban nem szükséges.

Kiss Emil

Megoldották: Balogh Zoltán, Bárdossy András, Breuer Péter, Czédli Gábor, Füredi Zoltán, Geréb Mihály, Göndöcs Ferenc, Hangya László, Horváth Erzsébet, Kiss Emil, Komornik Vilmos, Krisztin Tibor, Pap Gyula, Páles Zsolt, Pálfy Péter Pál, Reviczky János, Sebő András, Simányi Nándor, Sparing László, Szabó Sándor, Totik Vilmos, Tuza Zsolt, Veres Sándor, Vörös Zoltán.

A 3. feladat megoldása.

Jelölje O_p a p-adikus egészek gyűrűjét. Ha $\alpha \in O_p$ $(\alpha \neq 0)$, akkor $\alpha = p^{v(\alpha)} \cdot \varepsilon$ alakba írható egyértelműen, ahol ε egység O_p-ben és $v(\alpha)$ nem negatív racionális egész szám. β-nak α pontosan, akkor osztója, ha $v(\alpha) \geqq v(\beta)$. Ezért $p|x$ és $pa|xy$ azt jelenti, hogy $v(x) \geqq 1$, ill. $v(x)+v(y) \geqq 1+v(a)$, mivel $pa|xy$ a feladat feltétele miatt. A feladat állítása a fentiek alapján azzal ekvivalens, hogy $v(A) \geqq v(a)$, ahol

$$A = \frac{1}{y} \frac{(1+x)^y - 1}{x} - \frac{\log(1+x)}{x}.$$

A feltételek alapján elegendő megmutatni, hogy $v(A) \geqq v(x)+v(y)-1$. Az

$$(1+x)^y = 1 + \binom{y}{1} x + \binom{y}{2} x^2 + \ldots + \binom{y}{n} x^n + \ldots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$$

sorok konvergensek $\binom{y}{n} \in O_p$ és $p|x$ miatt.

$$A = \left(\frac{1}{y} \binom{y}{1} + \frac{1}{y} \binom{y}{2} x + \ldots + \frac{1}{y} \binom{y}{n} x^{n-1} + \ldots \right) - \left(1 - \frac{x}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} + \ldots \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{y} \binom{y}{2} + \frac{1}{2} \right) x + \ldots + \left(\frac{1}{y} \binom{y}{n} - (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right) x^{n-1} + \ldots .$$

Ezen sor általános tagja

$$B_n = \{(y-1)(y-2)\ldots(y-(n-1)) - (-1)^{n-1}(n-1)!\} \frac{x^{n-2}}{n!} x; \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Az első tényezőből kiemelhető y, emiatt $B_n = (yc) \cdot \frac{x^{n-2}}{n!} x = c \cdot x \cdot y \cdot \frac{x^{n-2}}{n!}$, ahol c p-adikus egész. $n!$-ban p kitevője $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots < n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{n}{p-1}$. Innen $v\left(\frac{x^{n-2}}{n!}\right) > (n-2)\, v(x) - \frac{n}{p-1}$. Ez a kifejezés $p=2$ esetén $v\left(\frac{x^{n-2}}{n!}\right) > (n-2)\, v(x) -$

$-\frac{n}{p-1} \geqq (n-2)-\frac{n}{2} \geqq -2$, mivel $v(x) \geqq 1$. Ha $p>2$, akkor

$$v\left(\frac{x^{n-2}}{n!}\right) > (n-2)v(x)-\frac{n}{p-1} \geqq (n-2)-\frac{n}{2} = \frac{n}{2}-2 > -2.$$

Tehát $v\left(\frac{x^{n-2}}{n!}\right) \geqq -1$, azaz igazoltuk, hogy $v(B_n) \geqq v(x)+v(y)-1$. Alkalmazva, hogy $v(\alpha+\beta) \geqq \min\left(v(\alpha), v(\beta)\right)$, A minden részletösszegére az adódik, hogy osztható a-val, tehát A is osztható a-val.

Több versenyző megoldása alapján

A megoldások lényegében két osztályba sorolhatók aszerint, hogy az $(1+x)^y$-nek, vagy az $\exp y \log(1+x)$-nak a sorfejtését használják. Gondos és világos fogalmazásával kiemelkedik Czédli Gábor és Kiss Emil megoldása.

Megoldották: Bárdossy András, Balogh Zoltán, Bara Tamás, Czédli Gábor, Fazekas István, Füredi Zoltán, Göndöcs Ferenc, Hangya László, Kiss Emil, Komornik Vilmos, Reviczky János, Páles Zsolt, Pálfy Péter Pál, Pap Gyula, Sebő András, Totik Vilmos, Veres Sándor.

A 4. feladat megoldása.

Legyen $\zeta = e^{2\pi i/p}$ és jelölje $K_p = Q(\zeta)$ a p-edik körosztási testet. Ismeretes, hogy $1+\zeta, 1+\zeta^2, \ldots, 1+\zeta^{p-1}$ és ζ egységek K_p-ben. Így $\varepsilon_1 = (\zeta+\zeta^{-1})^2$ és $\varepsilon_2 = -(\zeta^2+\zeta^{-2})$ is egységek. Továbbá

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2 = 2. \tag{1}$$

Megmutatjuk, hogy ε_1 és ε_2 függetlenek, azaz nem léteznek olyan a és b racionális egészek, melyek közül legalább az egyik zérustól különböző és

$$\varepsilon_1^a \varepsilon_2^b = 1. \tag{2}$$

Ennek ellenkezőjét feltéve, a $4a=a'$, $-2b=b'$ jelöléssel (2)-ből

$$(\zeta+\zeta^{-1})^{a'} = (\zeta^2+\zeta^{-2})^{b'} \tag{3}$$

adódik. Jelölje d azt a legkisebb természetes számot, melyre $2^d \equiv 1 \pmod p$. Nyilván $3 \leqq d \leqq p-1$. Ismeretes, hogy K_p normális bővítése Q-nak és K_p összes különböző (Q feletti) automorfizmusai $\zeta \to \zeta^i$ ($i=1, 2, \ldots, p-1$) által meghatározottak. A $\zeta \to \zeta^2$ automorfizmust (3)-ra ismételten alkalmazva

$$\begin{aligned}
(\zeta^2+\zeta^{-2})^{a'} &= (\zeta^{2^2}+\zeta^{-2^2})^{b'} \\
(\zeta^{2^2}+\zeta^{-2^2})^{a'} &= (\zeta^{2^3}+\zeta^{-2^3})^{b'} \\
&\vdots \\
(\zeta^{2^{d-1}}+\zeta^{-2^{d-1}})^{a'} &= (\zeta^{2^d}+\zeta^{-2^d})^{b'} = (\zeta+\zeta^{-1})^{b'}
\end{aligned} \tag{4}$$

adódik. (3) és (4)-ből

$$(\zeta+\zeta^{-1})^{a'^d-b'^d} = 1$$

következik. Ha itt $a'^d \neq b'^d$, akkor $\zeta+\zeta^{-1}$ egységgyök. De $\zeta+\zeta^{-1}$ valós, ezért csak 1 vagy -1 lehetne, amikor is ζ hatodik, ill. harmadik egységgyök volna, ami nem

lehetséges. Tehát $a'^d = b'^d$ és így $a' = \pm b' \neq 0$. Ekkor viszont (3)-ból

$$[(\zeta + \zeta^{-1})(\zeta^2 + \zeta^{-2})]^{a'} = 1 \tag{5}$$

vagy

$$\left(\frac{\zeta + \zeta^{-1}}{\zeta^2 + \zeta^{-2}}\right)^{a'} = 1. \tag{6}$$

Ám (5) és (6) baloldalán valós számok $a' \neq 0$ egész kitevőjű hatványa csak úgy lehet 1, ha ezen számok 1 vagy -1-gyel egyenlők. Ez viszont azt eredményezné, hogy ζ gyöke volna egy legfeljebb 6-odfokú $\mathbf{Z}[x]$-beli polinomnak, mely különbözik a 7-edik körosztási polinomtól. Mivel ez nem lehetséges, ezért ε_1 és ε_2 valóban függetlenek.

Mint ismeretes, $\zeta_1 = 1, \zeta_2 = \zeta, \ldots, \zeta_{p+1} = \zeta^{p-2}$ egész bázisa K_p-nak, azaz ezen egységek racionális egész együtthatós lineáris kombinációjaként bármely K_p-beli algebrai egész előáll. Így K_p bármely egész eleme méginkább felírható $\pm\zeta_k \varepsilon_1^j \varepsilon_2^i$ $(1 \leqq k \leqq p-1;\ i, j \in \mathbf{Z})$ alakú egységek összegeként, s a fentebb bizonyítottak szerint ezen egységek páronként különbözők.

Legyen α egy tetszőleges algebrai egész K_p-ben és tegyük fel, hogy

$$\alpha = \sum_{i=l}^{m} \sum_{j=n}^{q} \sum_{k=1}^{p-1} a_{ijk} \zeta_k \varepsilon_1^j \varepsilon_2^i, \tag{7}$$

ahol a_{ijk} és $l, m, n, q \in \mathbf{Z}$. Feltehetjük, hogy valamely $a_{ljk} \neq 0$ és hogy (7) olyan előállítás, melyre

$$M = \sum_{i,j,k} |a_{ijk}| \tag{8}$$

minimális. M-szerinti teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy α-nak van olyan előállítása, mely

$$\alpha = \sum_{i=l}^{r} \sum_{j=n}^{s} \sum_{k=1}^{p-1} a'_{ijk} \zeta_k \varepsilon_1^j \varepsilon_2^i$$

alakú, ahol $r, s \in \mathbf{Z}$ és $a'_{ijk} = -1, 0$ vagy 1.

Az állítás $M = 1$-re triviálisan igaz. Legyen $M \geqq 2$ és tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan α-ra, melyre

$$\sum_{i,j,k} |a_{ijk}| < M.$$

Legyen α egy olyan egész elem K_p-ban (amennyiben ilyen elem létezik), mely előállítható (7) alakban a (8) tulajdonsággal. (1) miatt nyilván

$$2\zeta_k \varepsilon_1^j \varepsilon_2^i = \zeta_k \varepsilon_1^{j+1} \varepsilon_2^i + \zeta_k \varepsilon_1^j \varepsilon_2^{i+1}. \tag{9}$$

(9)-nek (7)-re való ismételt alkalmazásával bármely $|a_{ljk}| \geqq 2$ tulajdonságú a_{ljk} végül $-1, 0$ vagy 1-re redukálható. Továbbá, M minimalitása miatt $\sum_{i,j,k} |a_{ijk}|$ állandó marad a (9) helyettesítések során. Így (9) végesszámú alkalmazása után

$$\alpha = \sum_{j=n}^{t} \sum_{k=1}^{p-1} a'_{ljk} \zeta_k \varepsilon_1^j \varepsilon_2^l + \sum_{i=l+1}^{u} \sum_{j=n}^{v} \sum_{k=1}^{p-1} b_{ijk} \zeta_k \varepsilon_1^j \varepsilon_2^i, \tag{10}$$

ahol b_{ijk} és $t, u, v \in \mathbf{Z}$ és $a'_{ijk} = -1, 0$ vagy 1. Ezenkívül

$$\sum_{j,k} |a'_{ljk}| + \sum_{i,j,k} |b_{ijk}| = M$$

és

$$\sum_{j,k} |a'_{ljk}| \geqq 1,$$

ezért alkalmazhatjuk az indukciós feltevést (10) második tagjára és adódik az állítás.

Győry Kálmán

Részben megoldották: Bara Tamás, Totik Vilmos.

Megjegyezzük, hogy a feladat állítása igaz minden olyan körosztási testre, melynek fokszáma 2-nél nagyobb. Ez az eredmény körosztási testek esetén választ ad egy B. Jacobsontól származó problémára (l. pl. W. Narkiewicz, Elementary and analytic theory of algebraic numbers, Warszawa, 1974, 468. oldal, 18. Probléma), mely eddig csak másodfokú és bizonyos harmadfokú és negyedfokú számtestek esetén volt megoldott.

Győry Kálmán

Az 5. feladat megoldása

Legyen p a P halmaz egy permutációja, és A_p a hozzá tartozó permutációs mátrix, azaz A_p i-edik sorának j-edik eleme 1, ha $j=p_i$ és O egyébként. Így A_p ortogonális mátrix $A_p^T = A_p^{-1}$. Könnyen látható, hogy $A_p^{-1} M A_p$ i-edik sorának j-edik eleme éppen $m_{pi,pj}$. Ez azt jelenti, hogy

(1) $p \in \mathrm{Aut}\, X \Leftrightarrow A_p^{-1} M A_p = M$.

Fel fogjuk használni azt az ismert (és triviális) észrevételt, hogy

(2) Ha $AB=BA$ (A, B $n \times n$-es mátrixok), akkor B sajátalterei A-ra nézve invariánsak.

Legyenek M saját alterei (R^n-ben) $V_1, \ldots, V_s$; $\dim V_i = n_i$. Így a V_i alterek páronként ortogonálisak (a szokásos skaláris szorzatra nézve), és direkt összegük R^n. (Ezt mondja ki a főtengelytranszformáció, hiszen M valós szimmetrikus mátrix.) Így (2) szerint az M-mel fölcserélhető ortogonális mátrixok csoportja része az $O(V_1) \times \ldots \times O(V_s)$ csoportnak. ($\times$ direkt szorzat; $O(V)$ a V euklideszi tér ortogonális transzformációinak csoportja; $O(k)$ a $k \times k$-as valós ortogonális mátrixok csoportja.) Tehát (1) alapján $\mathrm{Aut}\, X$ izomorf az $O(n_1) \times \ldots \times O(n_s)$ csoport egy részcsoportjával. $O(1) < O(2) < O(3)$ folytán elegendő tehát a következőt igazolnunk:

(3) A kvaterniócsoport nem izomorf $O(3) \times \ldots \times O(3)$ semmilyen részcsoportjával. Ezt igazoljuk. Legyen $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ a kvaterniócsoport elemeinek szokásos jelölése. Tegyük fel, hogy $f : H \to O(3) \times \ldots \times O(3)$ beágyazás, és jelölje pr_r az $O(3) \times \ldots \times O(3)$ csoport r-edik projekcióját $O(3)$-ra. Ekkor $f_r = pr_r \circ f : H \to O(3)$ homomorfizmus. Állítjuk, hogy

(4) Bármely $h : H \to O(3)$ homomorfizmus magja tartalmazza $-1 \in H$-t. Ebből már (3) következik, hiszen így $-1 \in \mathrm{Ker}\, f_r$ minden r-re, tehát $-1 \in \mathrm{Ker}\, f$ azaz f mégsem beágyazás. Igazoljuk (4)-et. Ehhez felhasználjuk $O(3)$ véges részcsoportjainak ismert fölsorolását.

(5) $O(3)$ véges részcsoportjai az alábbi csoportokkal izomorfak:

$$A_5 \times Z_2,\ S_4 \times Z_2,\ A_4 \times Z_2,\ Z_t \times Z_2,\ D_t \times Z_2,\ A_5,\ S_4,\ A_4,\ D_n,\ Z_n,$$

ahol A_t a t-edfokú alternáló csoport, s_t a t-edfokú szimmetrikus csoport, Z_t a t-edrendű ciklikus csoport és D_t a t-edfokú ($2t$ rendű) diédercsoport. (Coxeter: A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó; 408. old. III. táblázat.)

(6) Következmény: $O(3)$-nak nincs H-val izomorf részcsoportja. Tehát $h: H \to O(3)$ nem beágyazás, azaz $\operatorname{Ker} h$ az egységelemen kívül tartalmaz egy $x \in H$-t is. De világos, hogy vagy x, vagy x^2 egyenlő -1-gyel, tehát mindenképpen $-1 \in \operatorname{Ker} h$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Babai László

Megoldották: Bara Tamás, Breuer Péter, Czédli Gábor, Füredi Zoltán, Geréb Mihály, Göndöcs Ferenc, Kiss Emil, Komornik Vilmos, Pálfy Péter Pál, Sebő András, Simányi Nándor, Totik Vilmos, Veres Sándor.

A 6. feladat megoldása.

Legyen $\varphi(n) := \frac{f(n)}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Ekkor $\varphi(nm) = \varphi(n) + \varphi(m)$ és $(n+1)\varphi(n+1) \leqq$ $\leqq n \cdot \varphi(n)$ teljesül minden $n, m \in \mathbf{N}$-re. Ezért létezik olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy $\varphi(n) = c \log_2 n$ minden $n \in \mathbf{N}$-re (lásd J. Aczél—Z. Daróczy, On Measures of Information and Their Characterizations, Academic Press New York 1975, 19. oldal). Ebből $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ miatt

$$f(n) = -n \cdot \log_2 n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel bármely x, y pozitív valós számra

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = y\left[f\left(\frac{x}{y}+1\right) - f\left(\frac{x}{y}\right)\right] \leqq 0,$$

ezért

$$f(x+y) \leqq f(x) + f(y).$$

Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $0 < x < 1$. Ekkor az előzőeket felhasználva

$$0 = f(1) = f[(x+1-x)^n] = f\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right] \leqq \sum_{k=0}^{n} f\left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right] =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \log_2 \binom{n}{k} \cdot x^k (1-x)^{n-k} + nf(x) + nf(1-x),$$

ahonnan

$$f(x) + f(1-x) \geqq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \log_2 \binom{n}{k} =: S_n(k). \tag{1}$$

Legyen most $p_k^{(n)}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Mivel ezen számok $k = [nx]$ vagy $k = [nx]+1$ indexre veszik fel maximális értéküket, ezért a Moivre—Laplace-tételből következik (lásd Rényi Alfréd, Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó 1954,

154. oldal), hogy $\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)}(x)=0$ teljesül k-ban egyenletesen. Ebből $\lim_{t\to 0^+} t\cdot\log_2 t=0$ miatt adódik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} p_k^{(n)}(x)\log_2 p_k^{(n)}(x)=0. \tag{2}$$

Másrészt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} p_k^{(n)}(x)\log_2 p_k^{(n)}(x)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\cdot\left[\log_2\binom{n}{k}+k\log_2 x+(n-k)\log_2(1-x)\right]=$$

$$=S_n(x)+x\log_2 x+(1-x)\log_2(x-1)$$

ahonnan (2) miatt

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=-x\log_2 x-(1-x)\log_2(1-x).$$

Ebből (1) miatt következik a feladat állítása.

Göndöcs Ferenc

Megoldották: Füredi Zoltán, Göndöcs Ferenc.

A 7. feladat megoldása.

Ismeretes (l. pl. Greenleaf, F. R. Invariant means on topological groups, Van Nostrand, 1969.), hogy G feloldhatósága miatt létezik a G-n értelmezett korlátos komplex értékű függvények halmazán m jobbinvariáns közép, a következő tulajdonságokkal: m lineáris komplex értékű függvény, $m(\bar{f})=\overline{m(f)}$, $m(f)\geqq 0$, ha $f\geqq 0$, $m(1)=1$, továbbá $m(f_x)=m(f)$ bármely G-n értelmezett korlátos komplex f függvény esetén, ahol $f_x(t)=f(tx)$ $(x, t\in G)$.

Legyenek f, g a tételben megadott tulajdonságú függvények és χ olyan karaktere G-nek, hogy $\inf_{x\in G}\operatorname{Re} f(x)\chi(x)>0$.

Mivel $\operatorname{Re} f\chi\geqq\inf_{x\in G}\operatorname{Re} f(x)\chi(x)$, ezért

$$m(\operatorname{Re} f\chi)\geqq m\left(\inf_{x\in G}\operatorname{Re} f(x)\chi(x)\right)=\inf_{x\in G}\operatorname{Re} f(x)\chi(x)>0,$$

s ebből

$$m(f\chi)=m(\operatorname{Re} f\chi)+im(\operatorname{Im} f\chi)\neq 0.$$

Legyen most $x, y\in G$ tetszőleges és szorozzuk be a

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f(xy^k)=f(x)g(y)$$

egyenlőség mindkét oldalát $\chi(x)$-szel:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f(xy^k)\chi(x)=f(x)\chi(x)g(y).$$

A bal oldalon alkalmazzuk a

$$\chi(x)=\chi(xy^k)\chi(y^{-k})=\chi(xy^k)\bar{\chi}^k(y)$$

egyenlőséget, akkor kapjuk

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f(xy^k)\chi(xy^k)\bar{\chi}^k(y) = f(x)\chi(x)g(y).$$

Ez az egyenlőség minden $x, y \in G$-re fennáll; alkalmazzuk mindkét oldalra, mint x függvényére az m közepet és használjuk fel, hogy

$$m_x(f(xy^k)\chi(xy^k)) = m(f\chi) \neq 0$$

(itt m_x azt jelöli, hogy az argumentum mint x függvénye tekintendő), ekkor

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \bar{\chi}^k(y) = g(y),$$

amiből látható, hogy g folytonos.

Székelyhidi László

Megjegyezzük, hogy a csoport lokális kompaktságát a bizonyításban nem használtuk fel, s ugyanezzel a módszerrel igazolható az állítás akkor is, ha az adott egyenlőség bal oldalán különböző f_k korlátos függvények szerepelnek. A feladat megoldói kimutatták, hogy az állítás tetszőleges topologikus csoporton is igaz.

Megoldották: Göndöcs Ferenc, Pálfy Péter Pál, Totik Vilmos.

A 8. feladat megoldása.

Bebizonyítjuk, hogy az M_n $(n=2, 3, \ldots)$ függvények akkor és csakis akkor konvexek, ha g konstans függvény. Ha g konstans, akkor a Minkovski-egyenlőtlenség miatt

$$M_n(x+y) \leqq M_n(x)+M_n(y) \quad (x, y \in \mathbf{R}_+^{n+1}) \tag{1}$$

és ez $M_n(\alpha x)=\alpha M_n(x)$ $(\alpha \in \mathbf{R}_+, x \in \mathbf{R}_+^{n+1})$ alapján M_n konvexitásával egyenértékű.

Megfordítva, megmutatjuk, hogy ha $M_2(x, u, 1)$ x-nek konvex függvénye bármely $u \in (1-\delta, 1+\delta)$ mellett, ahol $\delta>0$, úgy g konstans függvény. Az

$$M_2(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2, u, 1) \leqq \alpha \cdot M_2(x_1, u, 1)+(1-\alpha)M_2(x_2, u, 1)$$

$$(x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+, \ u \in (1-\delta, 1+\delta), \ \alpha \in (0, 1))$$

egyenlőtlenség mindkét oldalának p-edik hatványát véve és felhasználva a számtani és p-edik hatványközép között fennálló

$$\alpha t+(1-\alpha)s \leqq (\alpha t^p+(1-\alpha)s^p)^{\frac{1}{p}} \quad (t, s>0, \ \alpha \in (0, 1))$$

egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$M_2^p(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2, u, 1) \leqq \alpha M_2^p(x_1, u, 1)+(1-\alpha)M_2^p(x_2, u, 1)$$

vagy, mindkét oldalból $u^p=\alpha u^p+(1-\alpha)u^p$-t elhagyva,

$$\frac{g(u)(1-u^p)}{g\left(\frac{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2}{u}\right)+g(u)} \leqq \alpha \cdot \frac{g(u)(1-u^p)}{g\left(\frac{x_1}{u}\right)+g(u)}+(1-\alpha)\frac{g(u)(1-u^p)}{g\left(\frac{x_2}{u}\right)+g(u)},$$

ha $x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+$, $u \in (1-\delta, 1+\delta)$, $\alpha \in (0, 1)$. Ha $u < 1$-et helyettesítünk, $g(u)(1-u^p)$-vel való osztás és $u \to 1-0$ határátmenet után g folytonossága miatt

$$\frac{1}{g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + g(1)} \leqq \alpha \cdot \frac{1}{g(x_1)+g(1)} + (1-\alpha)\frac{1}{g(x_2)+g(1)}$$

adódik. Megismételve az előbbi gondolatmenetet $u > 1$-gyel épp a fordított egyenlőtlenség adódik, így itt egyenlőség van. Ez azt jelenti, hogy az $f(x) = \frac{1}{g(x)+g(1)}$ egyenlőséggel definiált f függvény eleget tesz a Jensen-féle

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+, \ \alpha \in (0, 1)$$

függvényegyenletnek. Az f folytonossága miatt $f(x) = Cx + D$, ahol C, D az f pozitivitása miatt nemnegatív konstansok. Így

$$Cx + D = \frac{1}{g(x)+g(1)} < \frac{1}{g(1)} = 2f(1) = 2(C+D),$$

ami $C > 0$ mellett nagy x értékekre nem teljesül, ezért $C = 0$ és g konstans.

Pálfy Péter Pál és Simányi Nándor
megoldása alapján

A megoldók egy része megjegyzi, hogy g folytonosságát nem szükséges feltételezni, az M_n konvexitásából következik. Sőt elegendő csak azt feltenni, hogy $M_2(x, u, 1)$ x-nek konvex függvénye $u \in (1-\delta, 1+\delta)$ mellett, ebből következik, hogy g folytonos, így konstans.

Megoldották: Bárdossy András, Czédli Gábor, Füredi Zoltán, Göndöcs Ferenc, Kiss Emil, Krisztin Tibor, Pálfy Péter Pál, Simányi Nándor, Totik Vilmos, Tuza Zsolt.

Részben megoldották: Breuer Péter, Komornik Vilmos, Veres Sándor.

A 9. feladat megoldása.

Mivel $Rg\, A = r \leqq n$, ezért van olyan $\mathbf{0} \neq \mathbf{c} \in \mathbf{R}^{n+1}$, amely ortogonális A képterére, azaz $(\mathbf{c}, A(f)) = 0$ minden $f \in C[a, b]$ esetén. Részletesebben

$$\int_a^b (\mathbf{c}, \mathbf{u}(t)) f(t) d\sigma(t) = 0$$

teljesül minden $[a, b]$-n folytonos f-re. Speciálisan

$$\int_a^b (\mathbf{c}, \mathbf{u}(t))^2 d\sigma(t) = 0,$$

amiből következik, hogy σ-nak legfeljebb $(\mathbf{c}, \mathbf{u}(t))$ zérushelyei a növekedési pontjai. Mivel $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, a feltevés szerint σ-nak legfeljebb n növekedési helye van. Legyenek

ezek $x_1<x_2<\ldots<x_m$ $(m\leqq n)$, s a megfelelő ugrások $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_m$. Ekkor

$$A(f) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{u}(x_i) f(x_i) \Delta\sigma_i .$$

Az $\mathbf{u}$-ra tett feltevés miatt az $\mathbf{u}(x_1), \mathbf{u}(x_2), \ldots, \mathbf{u}(x_m)$ vektorok lineárisan függetlenek, továbbá $\Delta\sigma_i>0$ $(i=1, \ldots, m)$, ezért A képtere az $\mathbf{u}(x_1), \ldots, \mathbf{u}(x_m)$ vektorok által kifeszített altér, így $Rg\, A=m$.

Gesztelyi Ernő

Megoldották: Balogh Zoltán, Bara Tamás, Breuer Péter, Czédli Gábor, Fazekas István, Füredi Zoltán, Geréb Mihály, Kiss Emil, Pap Gyula, Páles Zsolt, Pálfy Péter Pál, Sebő András, Simányi Nándor, Totik Vilmos, Veres Sándor.

Részben megoldotta: Göndöcs Ferenc.

A 10. feladat megoldása.

Legyen

$$P_n^*(k) = P\{\max_{0\leqq j\leqq n} x_j \leqq k\}$$

$$_iP_n^*(k) = P\{\max_{0\leqq j\leqq n} x_j \leqq k \quad \text{és} \quad x_n = i\} \quad (0 \leqq i \leqq k).$$

Nyilván $P_n(k)\leqq P_n^*(k)=\sum_{i=0}^{l} P_n^*(k)$. Könnyen látható, hogy érvényes a következő egyenlőtlenség

$$\sum_{i=0}^{k} {}_iP_n^*(k) p_i p_{i+1} \cdots p_{i+k+1} + P_{n+k+1}^*(k) \leqq P_n^*(k).$$

Legyen

$$\varepsilon_k = \min_{0\leqq i\leqq k} \{p_i p_{i+1} \cdots p_{i+k+1}\},$$

ekkor $0<\varepsilon_k<1$ és

$$P_{n+k+1}^*(k) \leqq (1-\varepsilon_k) P_n^*(k).$$

Teljes indukcióval kapjuk, hogy

$$P_n^*(k) \leqq (1-\varepsilon_k)^{\frac{1}{k+1}-2}$$

teljesül minden n-re. Legyen $1<\alpha_k<\left[\frac{1}{1-\varepsilon_k}\right]^{\frac{1}{k+1}-2}$, ekkor

$$P_n^*(k)\alpha_k^n \leqq (1-\varepsilon_k)^{2n-2},$$

amiből az állítás következik.

Füredi Zoltán és Totik Vilmos
megoldása alapján

Amint azt néhány megoldó megjegyzi, olyan $\alpha_k>1$ létezése is kimutatható, melyre a feladatban szereplő határérték véges pozitív érték.

Megoldották: Bara Tamás, Czédli Gábor, Füredi Zoltán, Göndöcs Ferenc, Hangya László, Komornik Vilmos, Simányi Nándor, Totik Vilmos.

REPORT ON THE 1977. M. SCHWEITZER MATHEMATICAL COMPETITION

1. Consider the intersection of an ellipsoid with a plane σ passing through its center O, and on the line pespendicular to σ and passing through O mark those two points, whose distance from O is equal to the area of the intersection. Determine the figure formed by these points when σ runs through all such planes.

2. Construct on the real projective plane a continuous curve consisting solely of simple points which is not a straight line and is intersected in a single point by every tangent and secant of a given conic.

3. Prove that if a, x, y are non-zero p-adic integers and $p|x$, $pa|xy$, then

$$\frac{1}{y}\,\frac{(1+x)^y-1}{x} \equiv \frac{\log(1+x)}{x} \pmod{a}.$$

4. Let $p>5$ be a prime number. Prove that every algebraic integer element of the p-th cyclotomic field can be represented as the sum of finitely many distinct units of the field.

5. Assume that the automorphism group of a finite non-directed graph $X=(P, E)$ is isomorphic to the group of quaternions (of 8 elements). Prove that the vertex matrix of X has an eigenvalue of multiplicity at least 4.

($P=\{1, \ldots, n\}$ is the set of vertices of the graph X. E, the set of its edges, is a subset of the set of all unordered pairs taken from P. The automorphism group of X consists of those permutations of P which carry every edge into an edge. The vertex matrix $M=[m_{ij}]$ of X is an $n\times n$-matrix such that, $m_{ij}=1$ if $\{i, j\}\in E$ and $m_{ij}=0$ otherwise.)

6. Prove that if f is a real-valued function on the set of all positive reals such that

$$f(xy) = xf(y)+yf(x) \quad \text{and} \quad f(x+1) \leqq f(x)$$

hold for all $x, y>0$, moreover $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, then

$$f(x)+f(1-x) \geqq -x\log_2 x-(1-x)\log_2(1-x)$$

holds for every $x\in(0, 1)$.

7. Suppose that f and g are complex-valued functions defined on a locally compact solvable group G such that for some $c_1, \ldots, c_n$ (n is a natural number) fixed complex numbers we have

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f(xy^k) = f(x)g(y)$$

whenever $x, y\in G$. Prove that if f is bounded and

$$\inf_{x\in G} \operatorname{Re} f(x)\chi(x) > 0$$

holds for a character χ of G, then g is continuous. (By a character of G we mean a continuous homomorphism of G into the complex unit circle.)

8. Let $p\geqq 1$ be a real number and $R_+=(0, \infty)$. For which $g: R_+\to R_+$ continuous functions is each of the following functions M_n convex:

$$M_n(x) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) x_{i+1}^p}{\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)}\right]^{1/p} \qquad \begin{array}{l} x=(x_1, \ldots, x_{n+1})\in R_+^{n+1} \\ x=1, 2, \ldots ? \end{array}$$

9. Suppose that the components of the vector $\mathbf{u}=(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ are continuous real-valued functions on the closed interval $[a, b]$ such that every non-trivial linear combination of them with real coefficients has at most n roots in $[a, b]$.

Prove that if σ is a monotonically increasing real-valued function on $[a, b]$ and the operator

$$A(f) = \int_a^b \mathbf{u}(x) f(x) d\sigma(x), \quad f \in C[a, b]$$

is of rank $r \leqq n$, then σ has exactly r places where it increases.

10. Let the sequence $\{X_m, m \geqq 0\}$, $X_0 = 0$, of random variables form a random walk on the non-negative integers with the transition probabilities

$$p_i = P\{X_{m+1} = i+1 | X_m = i\} > 0, \quad i \geqq 0,$$

$$q_i = P\{X_{m+1} = i-1 | X_m = i\} > 0, \quad i \geqq 0.$$

Prove that for each integer $k > 0$ there is a number $\alpha_k > 1$ such that for

$$P_n(k) = P\Big\{\max_{0 \leqq j \leqq n} X_j = k\Big\},$$

the k-th term of the distribution of the maximum of the random walk during n time units, the limit

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{l} P_n(k) \cdot \alpha_k^n$$

is finite.

FELADATROVAT

Szerkesztik: LOVÁSZ LÁSZLÓ és CSÁSZÁR ÁKOS

Kitűzött feladatok

1. Bizonyítandó, hogy minden polinomnak van olyan többszöröse, melyben minden kitevő prímszám.

BABAI LÁSZLÓ

2. Legyenek $C_1, \ldots, C_n$ az n pontú irányított G gráf körei. Bizonyítandó, hogy van G-ben olyan kör, melynek $C_1, \ldots, C_n$ mindegyikével legfeljebb egy közös éle van.

FRANK ANDRÁS és LOVÁSZ LÁSZLÓ

3. Legyenek az f_i $(i \in I)$ függvények $[0, 1]$-ben Riemann-integrálhatók, $a_i \leqq f_i \leqq b_i$, k pedig a $K = \underset{i \in I}{\times} [a_i; b_i]$ szorzattéren folytonos függvény. Jelölje $h: [0, 1] \to K$ azt a leképezést, melyre $h(x)$ i-edik koordinátája $f_i(x)$. Bizonyítandó, hogy ekkor $k \circ h$ is Riemann-integrálható.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megoldott feladatok

201. feladat. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{i_1+2i_2+\ldots+ni_n=n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{i_j!} \left(\frac{x}{j}\right)^{i_j} = \binom{x+n-1}{n},$$

amelyben $i_j \geqq 0$ egész számot jelent.

SURÁNYI JÁNOS

1. megoldás. Az

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!} \quad (k \geqq 1)$$

definícióból könnyen nyerhető és közismert

$$\binom{x}{k-1} + \binom{x}{k} = \binom{x+1}{k}$$

összefüggésből indukcióval rögtön kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}. \tag{1}$$

A bizonyítandó azonosság jobb oldalán álló polinomokat az $n=0, 1, \ldots, m-1$ értékekre összegezve és $\frac{x}{m}$-mel megszorozva (1) alapján

$$\frac{x}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\binom{x-1+n}{n}=\frac{x}{m}\binom{x-1+m}{m-1}=\binom{x+m-1}{m}. \tag{2}$$

Ezt az egyenlőséget a jobb oldalon álló polinomok rekurzív definíciójának is tekinthetjük; a kérdéses polinomokat ez egyértelműen meghatározza az $\binom{x+0-1}{0}=1$ kezdeti feltétellel együtt. Ha tehát a bizonyítandó azonosság bal oldalán álló polinomot (amelynek csak $n\geqq 1$ esetén van értelme) $f_n(x)$-szel jelöljük, elég megmutatni, hogy $m\geqq 1$ esetén

$$\frac{x}{m}\left(1+\sum_{n=1}^{m-1} f_n(x)\right)=f_m(x). \tag{3}$$

A bal oldalon x/m szorzóját írhatjuk

$$1+\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{i_1+2i_2+\ldots+mi_m=n}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{i_j!}\left(\frac{x}{j}\right)^{i_j} \tag{4}$$

alakban is. Az így bevezetett $i_{n+1}, \ldots, i_m$ számok ugyanis csak 0-val egyenlők lehetnek, s ezért a szorzatot csak 1-gyel egyenlő tényezőkkel gyarapítják. Most már az itt álló összeg x-szel való beszorzását úgy végezhetjük, hogy az n-edik tagban a szorzat $(m-n)$-edik tényezőjét szorozzuk meg x-szel. Ez annak felel meg, hogy az $i_1, \ldots, i_m$ számok helyébe a $k_1, \ldots, k_m$ számokat vezetjük be, ahol $k_j=i_j$, ha $j\neq m-n$, és $k_{m-n}=i_{m-n}+1$, úgyhogy

$$k_1+2k_2+\ldots+mk_m=m.$$

Eszerint (3) bal oldala a következővel egyenlő:

$$\frac{x}{m}+\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{k_1+2k_2+\ldots+mk_m=m}(m-n)k_{m-n}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{k_j!}\left(\frac{x}{j}\right)^{k_j}. \tag{5}$$

Valóban, a szorzat elé beírt tényezők éppen kompenzálják a nevezőben azáltal fellépő tényezőket, hogy i_{m-n} értékét 1-gyel megnöveltük, továbbá minden (4)-ben fellépő $i_1, \ldots, i_m$ sorozatból ezáltal egy (5)-ben fellépő $k_1, \ldots, k_m$ sorozat keletkezik, s viszont minden (5)-ben fellépő $k_1, \ldots, k_m$ sorozat előáll pontosan egy (4)-ben fellépő $i_1, \ldots, i_m$ sorozatból, kivéve azokat, amelyekben $k_{m-n}=0$; az utóbbiak azonban az $m-n$ tényező következtében az összeghez 0 értékű tagokat szolgáltatnak.

(5)-ben felcserélhetjük a két összegzés sorrendjét:

$$\frac{x}{m}+\frac{1}{m}\sum_{k_1+2k_2+\ldots+mk_m=m}\sum_{n=1}^{m-1}(m-n)k_{m-n}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{k_j!}\left(\frac{x}{j}\right)^{k_j}; \tag{6}$$

bevezetve itt az $m-n=p$ jelölést, a belső összeg

$$\sum_{p=1}^{m-1} pk_p \tag{7}$$

alakú lesz. Ez a $k_1, \ldots, k_m$ számok minden szóba jövő értékénél m-mel egyenlő, kivéve a $k_1 = \ldots = k_{m-1} = 0$, $k_m = 1$ esetet, amikor értéke 0. Más szóval (6) második tagja m-mel való rövidítés után éppen átmegy az $f_m(x)$-et definiáló összegbe azzal az eltéréssel, hogy nem tartalmazza annak egyik tagját, azt, amely a $k_1 = \ldots = k_{m-1} = 0$, $k_m = m$ választásból adódik. Ez a tag azonban x/m-mel egyenlő, vagyis éppen (6) első tagjával. A végrehajtott átalakítások után tehát (3) bal oldala valóban $f_m(x)$-szel egyenlő.

SURÁNYI JÁNOS

2. megoldás. Jelölje S_n az $1, 2, \ldots, n$ elemek összes permutációinak halmazát. Egy $P \in S_n$ permutációt tudvalevően egyértelműen ciklusokból állíthatunk elő; például a

$$(2)\,(5)\,(16)\,(39)\,(487)$$

szimbólum S_9-nek azt az elemét jelöli, amelyben 2 és 5 helyben marad, 1 és 6, valamint 3 és 9 felcserélődik, végül 4 helyébe 8, 8 helyébe 7, 7 helyébe 4 kerül. Az egyértelműség úgy értendő, hogy a ciklusok felírásának a sorrendje közömbös, és egy cikluson belül az elemeket ciklikusan felcserélhetjük anélkül, hogy más permutációhoz jutnánk.

A $P \in S_n$ permutációról azt mondjuk, hogy ciklusszerkezete $(i_1, \ldots, i_n)$, ha a fenti ciklus-előállításban a fellépő j elemű ciklusok száma i_j; ezt a ciklusszerkezetet a permutáció egyértelműen meghatározza. Természetesen csak olyan $(i_1, \ldots, i_n)$ ciklusszerkezet lehetséges, amelyben az előforduló $i_j \geqq 0$ számokra

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} j i_j = n$$

teljesül. Jelölje $m(i_1, \ldots, i_n)$ az S_n halmaz $(i_1, \ldots, i_n)$ ciklusszerkezetű elemeinek számát.

Az $m(i_1, \ldots, i_n)$ szám meghatározása céljából a következőképpen járhatunk el. Írjuk le az $(i_1, \ldots, i_m)$ ciklusszerkezetnek megfelelő zárójeleket, a közéjük írandó számokat egyelőre pontokkal jelölve:

$$(.)\ldots(.)(..)\ldots(..)\ldots(.....),$$

mégpedig a ciklusok elemszámának növekvő sorrendjében (példánkban a leghosszabb ciklus ötelemű). Most helyezzük el a pontok helyén minden lehetséges módon az $1, \ldots, n$ számokat. Az így nyert $n!$ számú szimbólum csupa $(i_1, \ldots, i_n)$ ciklusszerkezetű permutációt szolgáltat, de mindegyiket többször is előállítja, mégpedig a j elemű ciklusok sorrendjének változtatása $i_j!$-szor, minden egyes j elemű cikluson belül a ciklikus csere j-szer adja meg ugyanazt a permutációt. Végül is a fenti módon minden egyes $(i_1, \ldots, i_n)$ ciklusszerkezetű permutációt

$$\prod_{j=1}^{n} i_j!\, j^{i_j}\text{-szer}$$

kapunk meg. Ezért

$$(2) \qquad m(i_1, \ldots, i_n) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n} i_j!\, j^{i_j}}.$$

Ennek alapján a bizonyítandó állítás

$$(3)\qquad \sum_{(1)} m(i_1, \ldots, i_n) x^{i_1+\ldots+i_n} = n! \binom{x+n-1}{n} = x(x+1)\ldots(x+n-1)$$

alakban írható; a szumma jel alá írt (1) szimbólum azt fejezi ki, hogy az összegzés az (1)-nek eleget tevő nemnegatív, egész $i_1, \ldots, i_n$ számokra végzendő.

Jelöljük x^k együtthatóját a (3) jobb oldalán álló polinomban $A_{n,k}$-val. Ekkor azonnal látható, hogy

$$(4)\qquad A_{n,n} = 1, \quad A_{n,1} = (n-1)!,$$

továbbá $1 \leqq k < n$ esetén

$$(5)\qquad A_{n,k} = \sum_{1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-k} \leqq n-1} a_1 a_2 \ldots a_{n-k}.$$

Innen következik, hogy $1 \leqq k \leqq n-1$ esetén

$$(6)\qquad A_{n+1,k+1} = nA_{n,k+1} + A_{n,k}.$$

Valóban, (5)-ből

$$A_{n+1,k+1} - A_{n,k} = \sum_{1 \leqq a_1 < \ldots < a_{n-k-1} < a_{n-k} \leqq n} a_1 \ldots a_{n-k} -$$

$$- \sum_{1 \leqq a_1 < \ldots < a_{n-k-1} < a_{n-k} \leqq n-1} a_1 \ldots a_{n-k} = n \cdot \sum_{1 \leqq a_1 < \ldots < a_{n-(k+1)} \leqq n-1} a_1 \ldots a_{n-(k+1)},$$

hiszen az itt vizsgált különbség az olyan szorzatok összege, amelyekben az utolsó tényező n.

Vegyük észre, hogy a (4) kezedeti feltételek és a (6) rekurziós képlet egyértelműen meghatározza az $A_{n,k}$ számokat. Valóban, az $A_{1,1}=1$ értékből kiindulva tegyük fel, hogy ismerjük már $A_{n,k}$ értékét $n \leqq m$, $k \leqq n$ esetén. Ekkor (6)-ból kiolvashatók az $A_{m+1,2}, \ldots, A_{m+1,m}$ értékek, (4)-ből pedig $A_{m+1,1}$ és $A_{m+1,m+1}$.

Mindezek alapján elég azt belátni, hogy ha $B_{n,k}$ jelöli (3) bal oldalán x^k együtthatóját, akkor ezekre az együtthatókra is teljesülnek a (4)-nek és (6)-nak megfelelő

$$(7)\qquad B_{n,n} = 1, \quad B_{n,1} = (n-1)!,$$

$$(8)\qquad B_{n+1,k+1} = nB_{n,k+1} + B_{n,k} \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

összefüggések.

Mármost $B_{n,k}$ egyenlő az S_n-hez tartozó permutációk közül a pontosan k ciklust tartalmazók számával. n ciklus akkor lép fel, ha mindegyik egyelemű, ezért $B_{n,n}=1$. Egyetlen ciklus akkor lép fel, ha maga a permutáció ciklikus, és ha ennek az egyetlen ciklusnak a felsorolását mindig az n elemmel kezdjük, világos, hogy a ciklikus permutációk száma annyi, ahányféleképpen az $1, \ldots, n-1$ számok sorba írhatók, azaz $(n-1)!$; innen adódik (7) második egyenlősége.

Végül (8) belátására minden S_{n+1}-hez tartozó és $k+1$ ciklust tartalmazó permutációból töröljük az $n+1$ elemet. Ha ez önállóan szerepelt egy egyelemű ciklusban, akkor éppen egy S_n-hez tartozó k ciklust tartalmazó permutáció állt elő, mégpedig minden ilyen pontosan egyszer kapható meg ezen a módon. Ha viszont $n+1$ egy többelemű ciklusban szerepelt, akkor S_n-hez tartozó és ugyancsak $k+1$ ciklusból álló permutációt kapunk, de most minden ilyet n-szer kapunk meg, hiszen belőle visszafelé az $n+1$ számot bármelyik szám után írhatjuk úgy, hogy az e számot tartalmazó ciklusba kerüljön bele. Mindez (8)-at s vele a feladat állításának helyességét igazolja.

SZALAY MIHÁLY

A 201. feladat megoldását beküldte még *Freud Róbert* és *Recski András*.

Megjegyzések. 1. A feladat sajnálatosan sajtóhibával jelent meg; ezt azonban — mint a beküldött megoldások mutatják — nem volt nehéz észrevenni és kiigazítani.

2. Jelölje s_k az $x_1, \ldots, x_n$ változók k-adik hatványösszegét:

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \tag{1}$$

p_k pedig ugyanezeknek k-adik elemi szimmetrikus polinomját:

$$p_k = \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq N} x_{i_1} \ldots x_{i_k}, \tag{2}$$

legyen végül $a_k = (-1)^k p_k$. Ismeretes, hogy ekkor érvényesek Newton képletei:

$$s_m + \sum_{k=1}^{m-1} s_{m-k} a_k + m a_m = 0 \quad (m = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

(l. pl. Rédei L.: Algebra I. (Budapest, 1954), 383. oldal).

A (3) egyenlőséget mármost felfoghatjuk rekurzív definíciónak, amely tetszőlegesen előírt s_k $(k \geqq 1)$ és a_1 számok mellett értelmezi az a_k $(k \geqq 1)$ számokat, vagy pedig előírt a_k $(k \geqq 1)$ és s_1 mellett definiálja az s_k $(k \geqq 1)$ számokat. Mind a két esetben felvethető az a kérdés, van-e a rekurzívan definiált mennyiségekre explicit formula is. Az s_k-kra ilyen formulát ad Waring képlete (l. Rédei L. i.m., 384. oldal). Az a_k-kra vonatkozóan viszont a következő képletet lehet bebizonyítani:

$$a_k = \sum_{i_1 = 2i_2 + \ldots + k i_k = k} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{i_j!} \left(-\frac{s_j}{j} \right)^{i_j}. \tag{4}$$

Ha most $s_k = -x$ minden k-ra, akkor (3)-ból

$$a_m = \frac{x}{m} \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} a_k \right), \tag{5}$$

ami éppen az 1. megoldás (3) képlete az $a_k = f_k(x)$ választás mellett, ill. az ottani (2) képlet, ha

$$a_k = \binom{x+k-1}{k}.$$

Eszerint a feladat állítása a (4) képletnek speciális esete s_k mostani választása esetén.

SURÁNYI JÁNOS

202. feladat. Készítendő olyan $f \geqq 0$ egyváltozós függvény, amely seholsem differenciálható, de f^2 majdnem mindenütt differenciálható.

(GERLITS JÁNOS)

Megoldás. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{ha} \quad x = p \cdot 2^{-n},\ p \text{ páratlan}, \quad n \in N, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

(N a természetes számok halmaza). Azokon a helyeken, ahol $f(x) \neq 0$, f még csak

nem is folytonos. Ha $f(x)=0$, akkor nyilván van olyan (x_n) sorozat, hogy

$$0 < |x_n - x| \leqq 2^{-n} \quad \text{és} \quad f(x_n) = 2^{-n},$$

és természetesen olyan (y_n) sorozat is, hogy $y_n \to x$ és $f(y_n)=0$. Így f az ilyen helyeken sem differenciálható.

Viszont f^2 majdnem mindenütt differenciálható, ugyanis korlátos változású minden véges intervallumban. Ehhez elég belátni, hogy korlátos változású $[k, k+1]$-ben, ahol k egész szám. Legyen mármost $k=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=k+1$ ennek az intervallumnak egy felosztása, és tegyük fel mindjárt, hogy n páros és $f(x_i)=0$ a páros indexű x_i helyeken (ez az eredeti felosztás alkalmas finomításával elérhető). Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})| = 2\left(|f(x_1)|+|f(x_3)|+\ldots+|f(x_{n-1})|\right) \leqq$$

$$\leqq 2(4^{-1}+2\cdot 4^{-2}+2^2\cdot 4^{-3}+\ldots) = 2(2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}+\ldots) = 1.$$

Ehhez csak azt kell észrevenni, hogy $[k, k+1]$-ben 2^n olyan hely van, ahol f^2 értéke 4^{-n-1}.

CSÁSZÁR ÁKOS

A 202. feladat megoldását beküldte még *Bacsó Gábor*, továbbá (közös megoldást) *Nagy Imre* és *Szász Géza*.

Megjegyzés. Ha f^2 differenciálható az x helyen és $f(x)>0$, akkor itt f is differenciálható. Ezért a feladat kikötéseinek eleget tevő f függvény szükségképpen eltűnik majdnem mindenütt. Így az ilyen függvény nem lehet mindenütt folytonos.

BACSÓ GÁBOR

203. feladat. Legyen H az X halmazon értelmezett valós függvényekből álló halmaz. H teljes affin háló, ha

(a) $f, g \in H$ esetén $\max(f, g) \in H$, $\min(f, g) \in H$, $af+b \in H$ (a, b valós),

(b) $f_n \in H$, $f_n \to f$ esetén $f \in H$.

Legyen bármely X-en értelmezett valós f függvényre

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\},$$

és

$$Z(H) = \{Z(f) : f \in H\}.$$

Mutassuk meg, hogy egy X részhalmazaiból álló S halmazrendszerhez akkor és csak akkor található olyan H teljes affin háló, amelyre $Z(H)=S$, ha S σ-algebra.

(CSÁSZÁR ÁKOS)

Megoldás. Ha S σ-algebra, jelölje H az S-re nézve mérhető függvények halmazát. Közismert, hogy ez eleget tesz az (a) és (b) feltételnek, vagyis teljes affin háló, és $f \in H$ esetén $Z(f) \in S$. Másrészt $A \in S$ esetén f-fel jelölve az $X-A$ halmaz karakterisztikus függvényét, nyilván $f \in H$ és $Z(f)=A$. Így ekkor $Z(H)=S$.

Legyen megfordítva H teljes affin háló. Világos, hogy $f \in H$ esetén $|f| = \max(f, -f) \in H$, továbbá $\min(|f|, 1) \in H$. Ezért $Z \in Z(H)$ esetén feltehető, hogy $Z=Z(f)$, $f \in H$, $0 \leqq f \leqq 1$.

Mármost ha $Z_n \in Z(H)$ $(n=1, 2, \ldots)$, legyen $Z_n = Z(f_n)$, $f_n \in H$, $0 \leqq f_n \leqq 1$, továbbá $g_n = \max(f_1, \ldots, f_n)$, végül $g = \lim g_n$. Látszik, hogy $g \in H$ és

$$Z(g) = \bigcap_1^\infty Z(f_n).$$

Másrészt legyen adott $Z \in Z(H)$ esetén ismét $Z = Z(f)$, $f \in H$, $0 \leqq f \leqq 1$, és $h_n = \min(nf, 1)$, $h = \lim h_n$. Világos, hogy $h \in H$, és h éppen az $X - Z$ halmaz karakterisztikus függvénye. Ezért $1 - h \in H$ és $Z(1-h) = X - Z$.

A mondottakból látszik, hogy $Z(H)$ tartalmazza bármelyik elemének komplementumát, továbbá megszámlálható sok elemének metszetét. Ebből nyilván következik, hogy $Z(H)$ σ-algebra.

TÓTH JÁNOS

A 203. feladat megoldását beküldte még *Pozsonyi András.*

Megjegyzés. Tóth János felveti a következő kérdést: ha S adott σ-algebra, H teljes affin háló, és $Z(H) = S$, szükségképpen egyenlő-e H az összes S-re nézve mérhető függvények halmazával?

Erre a kérdésre a válasz igenlő. Valóban, ha $f \in H$, és c tetszőleges valós szám, akkor

$$X(f \leqq c) = \{x \in X : f(x) \leqq c\} = Z(g),$$

ahol $g = \max(f - c, 0) \in H$. Ebből látszik, hogy H minden eleme mérhető S-re nézve, ha $Z(H) = S$.

Megfordítva, láttuk a fenti megoldásban, hogy ha $Z \in S = Z(H)$, akkor az $X - Z$ halmaz h karakterisztikus függvénye H-hoz tartozik, s vele együtt magának Z-nek $1 - h$ karakterisztikus függvénye is. Ha most $f \geqq 0$ lépcsősfüggvény S-re vonatkozóan, mégpedig a diszjunkt $Z_i \in S$ halmazokon rendre a $c_i \geqq 0$ értékeket veszi fel $(i = 1, \ldots, n)$, akkor

$$f = \max(c_1 g_1, \ldots, c_n g_n),$$

ahol g_i a Z_i halmaz karakterisztikus függvénye, és innen látszik, hogy $f \in H$. Ha f tetszőleges lépcsősfüggvény, akkor valamely c-re $f - c \geqq 0$ és $f - c$ is lépcsősfüggvény, úgyhogy $f - c \in H$ és $f \in H$. Végül jól ismert, hogy minden S-re nézve mérhető függvény előállítható lépcsősfüggvények egy sorozatának limeszeként, ezért ezek is H-hoz tartoznak. Ilyenformán H éppen az S-re nézve mérhető függvényekből áll.

CSÁSZÁR ÁKOS

PROBLEMS

1. Prove that every polynomial has a multiple in which all exponents are primes.

2. Let $C_1, \ldots, C_n$ be directed cycles in the diagraph G on n points. Prove that G contains a directed cycle which has at most one edge in common with each C_i.

3. Let f_i $(i \in I)$ be Riemann integrable functions on $[0, 1]$, $a_i \leqq f_i \leqq b_i$, and let k be a continuous real-valued function on $K = \underset{i \in I}{\times} [a_i, b_i]$. Denote by $h : [0, 1] \to K$ the mapping for which the ith coordinate of $h(x)$ is $f_i(x)$. Prove that $k \circ h$ is Riemann integrable.

TÁRSULATI ÉLET

Jelentés a Farkas Gyula Emlékdíj 1977. évi odaítéléséről

A Farkas Gyula emlékdíj-bizottság a beérkezett 12 javaslat mérlegelése után az alábbi határozatot hozta:

A díj első fokozatával és 3000—3000 Ft pénzjutalommal díjazza:

ABAFFY JÓZSEFET, az MTA SZTAKI tudományos munkatársát,

ANDRÉKA HAJNALT, az MTA MKI tudományos munkatársát,

GALÁNTAI AURÉLT, az ELTE egyetemi tanársegédjét,

KNUTH ELŐDÖT, az MTA SZTAKI tudományos munkatársát,

MAKAY ÁRPÁDOT, az MTA Matematikai Logikai és Automataelméleti Tanszéki Kutató Csoport tudományos munkatársát, és

SZEREDI PÉTERT, a NIM IGÜSZI tudományos munkatársát.

Indoklás:

ABAFFY JÓZSEF

1967-től mint akadémiai ösztöndíjas dolgozott az MTA SZK Numerikus Osztályán.

A Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetemen 1971. óta részt vesz a számítástechnika oktatásában. Kezdetben integrálegyenletekkel foglalkozik, majd bizonyos típusú integrálegyenlet (1) megoldását sikerült nemlineáris egyenletek megoldására visszavezetnie. A későbbiekben a gyakorlati alkalmazásoknak megfelelően a feltétel nélküli függvényminimalizálás numerikus módszereivel foglalkozott. Az egyik gyorsítási módszerét (2) a debreceni ATOMKI-ban azóta is használják. A kvázi-Newton-módszerek gyakorlati alkalmazásánál fontos probléma a módszer kiválasztása. Emiatt Huang 5 paraméteres osztályát 3-ra redukálta [4, 9.] Doktori disszertációját ebben a témakörben 1976-ban Summa cum Laude minősítéssel védte meg.

A továbbiakban két irányban végzett kutatásokat. Egyrészt a gyakorlatban alapvetően fontos a feltétel nélküli függvényminimalizálás témakörében a kilépési feltételek meghatározása, ill. az eredmény jóságának meghatározása. Ezt a feladatot 1977-ben Galántai Auréllal együtt oldották meg, bebizonyítva, hogy az általuk adott hibabecslés optimális.

Újabban a függvényminimalizálás témakörében egyre fontosabb szerepet játszanak a dualmátrix módszerek. Ezzel kapcsolatban neki sikerült először meghatároznia egy módszerosztályt (8), (10), hasonlóan mint a kvázi-Newton-módszerek esetén 1967-ben C. G. Broydennak Ennek gyakorlati tesztelését az idén végezte el Olaszországban [12].

ABAFFY JÓZSEF FONTOSABB PUBLIKÁCIÓI

[1] Másodfokú, nemlineáris elfajult magú integrálegyenlet megoldása (1972. Számítástechnikai Közlemények).

[2] Néhány kvadratikusan konvergens feltétel nélküli függvényminimalizáló módszer (1975. Alkalmazott Matematikai Lapok).

[3] Sloboda (csehszlovák) General algoritmus generating conjugate directions and their applications (1975. Algoritmy vo vypoctovej technice, Slovenska vedeckotechnisa spolocnost).

[4] A kvázi-Newton-módszerek egy új háromparaméteres osztálya (1976. Alkalmazott Matematikai Lapok).

[5] A feltételnélküli függvényminimalizálás kvadratikus befejezésű módszerei (1976. SZTAKI Tanulmányok 47, doktori értekezés).

[6] Konjugált irány módszerek hibabecslései (1977. Alkalmazott Matematikai Lapok, elfogadva).
[7] Error estimations for conjugate directions methods (1977. Beiträge zur Numerischen Mathematik 77/7.).
[8] A dual-mátrix módszerek egy osztálya (1977. Alkalmazott Matematikai Lapok, elfogadva).
[9] A new three-parametric class of Quasi-Newton methods (előkészületben).
[10] About one class of dual-matrix methods (előkészületben).
[11] A lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy direkt módszerosztálya (előkészületben).
[12] Numerical experiment of dual-matrix methods (olasz mat. lapok számára szóbeli felkérés alapján, előkészületben).

ANDRÉKA HAJNAL

1971-ben végzett az ELTE TTK matematikus szakán. Diplomamunkája fordítóprogramok matematikai nyelvészeti és rekurzív függvénytani elméletével foglalkozott. Egyetemi doktori dolgozatát 1975-ben védte meg. Korábban a NIM IGÜSZI-ben dolgozott. 34 lektorált közleménye jelent meg, ebből 19 alkalmazási tárgyú. 1975-ben Grünwald Géza Emlékdíj II. fokozatában részesült.

A matematika közvetlen alkalmazásainak területén tevékenysége elsősorban a számítástudományra és azon belül a „programozási nyelvek szemantikája", „programhelyesség-bizonyítás" és „új elvű — vagy nagyon magas szintű — programozási nyelvek" néven ismert területekre irányul. Elméleti matematikai tevékenysége a szemantika vizsgálatához kapcsolódó matematikai területek: modellelmélet, univerzális algebra és kategóriaelmélet közös részére és számítástudományi motivációjú továbbfejlesztésére irányult. Kandidátusi disszertációjában a teljességi kérdések kaptak kiemelkedő szerepet.

A gyakorlatban legelterjedtebb programdokumentációs módszer az ún. Floyd—Hoare-módszer. Bebizonyította, hogy létezik teljes következtetési rendszer a Floyd—Hoare-nyelvhez, ha csak a standard modellben terminálló programok helyességét kívánjuk bizonyítani. Bizonyította, hogy a gyakorlatban legelterjedtebb Floyd következtetési rendszer gyengén teljes abban az értelemben, hogy a standard modellben terminálló programokhoz léteznek az ún. induktív formulák. Manna programhelyesség-bizonyítási módszerét kiterjesztette rekurzív eljáráshívást is használó programokra és bizonyította a kiterjesztett módszer teljességét. A PROLOG új elvű programozási nyelv erős teljességét bizonyította, l. [2]. A PROLOG nyelv az ún. „Horn-formulák" elméletére épül. A Horn-formulák tulajdonságaival több elméleti munkája is foglalkozik, például [12], [23], [26]. A különböző nyelvek és szemantikáik területén elért eredményei megtalálhatók [15], [26], [23] és [16]-ban. Andréka Hajnal eredményeket ért el az univerzális algebra eszköztárának kiterj esztésében is. L. [23], [16].

ANDRÉKA HAJNAL PUBLIKÁCIÓINAK JEGYZÉKE

[1] On the adequateness of predicate-logic programming; (AISB European Newsletter, Issue 23, July 1976. p. 30—32., Németi Istvánnal).
[2] The generalized completeness of Horn predicate logic as a programming language (University of Edinburgh, D. A. I. Research Report No. 21. March 1976. p. 1—10., Németi Istvánnal).
[3] On the role of mathematical language concept in the theory of intelligent systems (Advanced Papers of the Fourth International Joint Conf. on Artificial Intelligence, Tbilisi 1975. MIT Publications Dept., Massachussetts, 1975. p. 9—14., Gergely Tamással és Németi Istvánnal).
[4] Definition theory as basis for a creative problem solver (Advanced Papers of the Fourth International Joint Conf. on Artificial Intelligence, Tbilisi 1975. MIT Publications Dept., Massachussetts, 1975. p. 40—45. Gergely Tamással és Németi Istvánnal).
[5] A problémamegoldáselmélet alkalmazása nagy felhasználói programok készítését kiszolgáló szoftverre (Programozási rendszerek '72 NJSZT, p. 160—165., Németi Istvánnal).
[6] Programíró és programhelyességet bizonyító programok (Számológép Kiskönyvtár '73, 1973. p. 86—99., Németi Istvánnal).
[7] Az interdiszciplináris elméletek mint adekvát nyelvgenerátorok (Rendszerelméleti konferencia '73. A rendszer verbális és formális modellje, Sopron 1973. p. 77—78., Gergely Tamással és Németi Istvánnal).
[8] A problémamegoldás pszihokibernetikai modellje mint a mesterséges intelligencia-elmélet váza (Rendszerelméleti Konferencia '73, A kreatív gondolkodás, problémamegoldás. Sopron 1973. p. 19—33. Gergely Tamással és Németi Istvánnal).

[9] A mesterséges intelligenciakutatás logikai eszközeiről (Rendszerelméleti Konferencia '73. A kreatív gondolkodás, problémamegoldás. Sopron 1973. p. 34—42., Gergely Tamással és Németi Istvánnal).
[10] Automatikus programírók (Infelor 1175/73, 1973. p. 51—59., Németi Istvánnal).
[11] Programok helyességének bizonyítása (Infelor 1175/73, 1973. p. 66—71. Németi Istvánnal).
[12] A számítógépek nem-numerikus felhasználásának egy irányzatáról (Információ-Elektronika, 1. szám, 1975. p. 52—57., Gergely Tamással és Németi Istvánnal).
[13] Easily comprehensible Mathematical Logic and its Model theory (KFKI—75—24, 1975. p. 1—106., Gergely Tamással, Németi Istvánnal).
[14] Az n-edrendű nyelvek néhány kérdéséről (Matematikai Lapok, 1975. 1—2. szám, 24. évf., p. 63—94., Gergely Tamással és Németi Istvánnal).
[15] On Universal Algebraic Construction of Logics (Studia Logica XXXVI, 1—2. p. 9—47., Gergely Tamással és Németi Istvánnal).
[16] Formulas and ultraproducts (Beiträge zur Algebra u. Geometrie; megjelenés alatt, Németi Istvánnal).
[17] On a proof of Shelah (Bulletin de l'Academie Polonais des Sciences, Series math., Vol. XXIV, No. 1., 1976. p. 1—7., Dahn-nal és Németi Istvánnal együtt).
[18] On the congruence lattice of pseudosimple algebras (Coll. Math. Soc. J. Bolyai 17., Contribution to Universal Algebra, Szeged 1975. p. 15—20., Németi Istvánnal).
[19] Remarks on free products in regular varieties and sink-complemented subalgebras (Studia Sci. Math. Hung. 10, 1975, p. 23—31., Németi Istvánnal).
[20] A purely algebraic construction of logics (Abstracts of papers, logic Colloquium Bristol '73, 1973., Gergely Tamással és Németi Istvánnal).
[21] Completeness and compactness theorems as algebraic representation theorems (Int. Congress of Mathematicians, Abstracts of Comm. Vancouver 1974. p. 31—31., Gergely Tamással és Németi Istvánnal).
[22] An approach to abstract model theory in category theoretical frame (Oxford, Assoc. Symb. Logic conference, Oxford 1976., Gergely Tamással és Németi Istvánnal).
[23] Generalization of variety and quasivariety concept to partial algebras through category theory (MTA MKI preprint No. 5/1976. p. 1—20. Németi Istvánnal).
[24] Reduced products in categories (MTA MKI preprint No. 7/1976. p. 1—20., Márki Lászlóval, Németi Istvánnal).
[25] A parameter of smallness in categories (and model theories) (MTA MKI preprint No. 21/1977., p. 1—67. Németi Istvánnal).
[26] Univerzális algebrai vizsgálatok az algebrai logika területén (Kandidátusi értekezés. Elbírálásra benyújtva 1977. p. 1—199.).
[27] Az elsőrendű logika algebrai vizsgálata. (Egyetemi doktori dolgozat. ELTE 1973. p. 1—162.)
[28] Az univerzális algebra alkalmazása a számítógéptudományban és a nagyüzemi programkészítés megalapozásában. (Első díjjal jutalmazott „Kiváló Ifjú Matematikus" pályázat, NIM IGÜSZI 1974. p. 1—31.)
[29] Programhelyesség-bizonyítási és programspecifikációs módszerek teljességéről. (Tanulmány, MTA MKI 1977. december p. 1—112.)
[30] A programozáselmélet és programozási nyelvek szemantikája terén használatos univerzális algebrai és kategóriaelméleti eszközökről. (Tanulmány, MTA MKI 1977. november p. 1—150., Bíró Balázzsal és Pröhle Péterrel.)
[31] A számítógépes programhelyesség- és tételbizonyítás kutatásának helyzete. (OMFB tanulmány, 1977., Tsz.: Dömölki B., Gergely T., Németi I., Tóth P., Szőts M., Varga L.)
[32] Az EMG—840 számológép szoftverjéből a „Programkészítő rendszer terve". (NIM IGÜSZI tanulmány, 1972. szeptember, p. 23—55., Németi Istvánnal.)
[33] Szimulációs nyelvek átfogó értékelése. (Tanulmány, NIM IGÜSZI 1972. december. Tsz.: Bogdánffy G., Németi I.)
[34] Promlémamegoldási folyamatok szimulálására alkalmas nyelvek. (Tanulmány, NIM IGÜSZI, 1972. október, Németi Istvánnal.)
[35] Automatikus programíró és programhelyesség-bizonyító programok. (Tanulmány, NIM IGÜSZI 1973. július, p. 1—203. Tsz.: Balogh K., Emődi Z., Lábadi K., Németi I.)
[36] Autokód szintű szemantikus programellenőrző rendszer továbbfejlesztésének terve. (Tanulmány, NIM IGÜSZI, 1974. augusztus. Tsz.: Balogh K., Lábadi K., Tóth P., Németi I.)
[37] Autokód szintű szemantikus programellenőrző rendszer vázlatos terve. (Tanulmány, NIM IGÜSZI, 1973. október, p. 1—68. Tsz.: Balogh K., Emődi Z., Lábadi K., Szeredi P.)

GALÁNTAI AURÉL

1975-ben végzett az ELTE TTK matematikus szakán. [2a] értekezéséért 1975-ben avatták egyetemi doktorrá, Summa cum Laude fokozattal. Egyetemi tanulmányainak befejezése óta a Numerikus és Gépi Matematikai Tanszéken dolgozik. Alkalmazott matematikai kutatásokat egyetemi hallgató kora óta végez, V. éves korában a számítástechnikai TDK titkára volt. Három pályamunkát készített, amelyekkel Országos I. díjat [12]; Oktatási Minisztérium Kiemelt fődíjat; Kari I. díjat [6] és Kari II. díjat [4] nyert.

Fő kutatási területe a numerikus analízis. Közönséges differenciálegyenletek numerikus módszereivel kapcsolatban a következő eredményeket érte el.

Bebizonyította a lépésfelező módszer optimalitását egy széles becslésosztályban [2], [6—8], valamint pontosan megfogalmazta és igazolta a lokális hibabecslési elv gyakorlatban használt változatát [5], [7]. Változó lépéshosszú egylépéses és lineáris többlépéses módszerekre nyert konvergencia és stabilitás eredményei [7], [18] Henrici, Gear és mások eredményeinek általánosításai. Kiterjeszti Spijker kétoldali becsléseit a változó lépéshosszú esetekre is, továbbá konvergenciát bizonyít szakadásos megoldású differenciálegyenletek esetére [18]. Az alkalmazások szempontjából fontos lineáris stiff-problémával kapcsolatban elért eredményei lényegében megoldák a Dahlquist-féle A-stabilitás kiterjesztésének ismert problémáját [10], [17], [19]. Az elért eredmények lehetővé teszik a stiffség heurisztikus fogalmának jelentős pontosítását.

Polinomok közelítő megoldásával kapcsolatosak [9], [12], [13] dolgozatai. E téren elért legfontosabb eredménye a Lehmer—Schur-módszer optimalizálása a Traub-féle hatékonysági mutató segítségével. Az elért javítás mintegy 25%-os.

GALÁNTAI AURÉL PUBLIKÁCIÓINAK JEGYZÉKE

[1] Remarks on equilibrium systems (DM 75—2, Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem, 1975.).
[2a] Egylépéses módszerek lokális hibabecslése. (Egyetemi doktori értekezés, ELTE TTK, megvédve 1975. dec. 13.)
[2b] Egylépéses módszerek lokális hibabecslései. (MTA SZTAKI Tanulmányok 46/1976.)
[3] Stiff-problémák I.: lineáris k-lépéses módszerek. (ELTE TTK Numerikus és Gépi Matematikai Tanszék, 1/1976.)
[4] Relaxációs módszer általánosított mátrixinverz kiszámítására. (MTA SZTAKI Közlemények, 17/1976. 57—62, társszerző: Varga Gy.)
[5] Local error estimate of one-step methods. (MTA SZTAKI Közlemények, 17/1976. 63—66.)
[6] Közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó egylépéses módszerek automatikus hibabecsléseiről. (Alkalmazott Matematikai Lapok 1/1975. 265—274.)
[7] Convergence theorems and error analysis for one-step methods. (Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Mat., v. XIX/1976. 69—78.)
[8] On the automatic error estimates of the Runge—Kutta methods. (Beiträge zur Num. Math. 5/1976. 43—49.)
[9] On the optimization of Lehmer—Schur type methods. (ELTE TTK Numerikus és Gépi Mat. Tanszék, 6/1976.)
[10] The linear stiff problem. (ELTE TTK Numerikus és Gépi Mat. Tanszék, 7/1976.)
[11] Stiff problems II. (ELTE TTK Numerikus és Gépi Mat. Tanszék, 8/1976. Társszerző: Strehó M.)
[12] Megjegyzések algebrai egyenletek közelítő megoldásához. (Alkalmazott Matematikai Lapok, 2/1976. 115—122.)
[13] The comparison of numerical methods for solving polynomial equations. (Mathematics of Computation — megjelenés alatt.)
[14] Konjugált irány módszerek hibabecslései. (Alkalmazott Matematikai Lapok — megjelenés alatt; társszerző: Abaffy J.)
[15] Error estimations of conjugate direction methods. (Beiträge zur Num. Math. — megjelenés alatt; társszerző: Abaffy J.)
[16] On a new concept of game theory. (Proceedings of Conference on Applied Numerical Modelling, Southampton, 1977.)
[17] New stability property concerning stiff methods. (Conference on Numerical Methods, Keszthely, 1977., beküldve.)
[18] Convergence and error propagation of variable step methods (kéziratban).
[19] A lineáris stiff probléma vizsgálata (kéziratban).

KNUTH ELŐD

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikus szakát 1966-ban fejezte be. Egyetemi tudományos diákköri pályázaton dolgozatával 1965-ben első díjat nyert.

1966. óta az MTA SZTAKI munkatársa. A matematikának elsősorban gyakorlati alkalmazásai érdeklik, melyeket mindig képes mély elméleti modellekkel kapcsolatba hozni. Különösen a diszkrét matematikai módszerek számítógép tudományi alkalmazásaira vonatkozó tájékozottsága igen széles körű.

Jelentős eredményeket ért el a számítógépes rendszerszimuláció valószínűségszámítási és formális nyelvi absztrakciós módszereinek fejlesztésében. Nevéhez fűződik a SIMULA nyelven alapuló módszerek hazai elterjesztése. A SIMULA program struktúrákra — elsősorban a kvázi párhuzamos folyamat vezérlésekre — vonatkozó eredményei nemzetközileg elismertek.

1973 óta foglalkozik a számítógépes operációs rendszerek elméleti, matematikai problémáival, és egyben e hazai kutatások egyik kezdeményezője. Főbb eredményei ezen a területen a konkurrens folyamatrendszerek invariánsainak kutatásaira vonatkoznak. Ezzel a témával foglalkozik 1977-ben benyújtott kandidátusi értekezése is. Knuth Előd a tudományos kutatómunkában példamutató együttműködést alakított ki a hasonló érdeklődésű hazai fiatal kutatókkal.

Rendszeresen részt vesz az ELTE matematikus és programozó matematikus hallgatóinak oktatásában (szimuláció, operációs rendszerek, adatbázisok témakörökben).

Négy éve végzi az Operációs Rendszerek Elmélete című Téli Iskolák szakmai szervezését. Részt vesz a SZTAKI Közlemények és egy sor alkalmi kiadvány szerkesztésében. Tagja a Szocialista Akadémiák közötti Sokoldalú Együttműködési Bizottságok közül kettőnek, egyiknek titkára. Részt vesz az ESZR távlati fejlesztési bizottság, a KGST Program Dokumentációs Bizottság, az MTA Számítástudományi Bizottság és az Intézeti Software Bizottság munkájában.

KNUTH ELŐD PUBLIKÁCIÓINAK JEGYZÉKE

[1] Szabályos n-szögekkel burkolható konvex sokszögek. (Tudományos Diákköri Konferencia, 1964.)

[2] On a problem of Klee. (Acta Mathematica Hungarica, 20, 1—2, 169—177, 1969.)

[3] Egy ortogonális latin négyzettel kapcsolatos problémáról. (MTA SZK Közlemények, 1, 1967.)

[4] Egy telefon forgalmi probléma vizsgálata Monte Carló-módszerrel. (Információ-elektronika, 2, 3, 197—199, 1967.)

[5] Sztochasztikus folyamatok elemei. (Jegyzet, Tankönyvkiadó, 1969.)

[6] Matematikai statisztika földtani alkalmazásokkal. (Jegyzet, MTESZ, 1970.)

[7] ALGOL-FORTRAN programok összekapcsolása a CDC—3300 számítógépen. (MTA SZK Közlemények, 7, 15—23, 1971.)

[8] SIMULA—67 általános célú programozási nyelv. (MTA SZK Kiadványa, 1972.)

[9] Analysis of input strategies of a multiprogrammed computer system. (Proceedings of the Computer Science Conference, Székesfehérvár, 59—67, 1973.)

[10] Multiprogramozású számítógéprendszerek. (Automatika, 5, 208—211, 1974.)

[11] A SIMULA—67 szimulációs alkalmazásáról egy telefon forgalmi probléma kapcsán. (MTA SZTAKI Közlemények, 13, 47—52, 1974.)

[12] On stochastic control of multiprogramming computer systems based on a probabilistic model. (Preprint of the IFAC symp. on stochastic control, Budapest, 305—311, 1974.)

[13] A központi egység kihasználtságának szimulációs vizsgálata másodrendű autoregressziós folyamatok alkalmazásával. (MTA SZTAKI Közlemények, 15, 141—146, 1975.)

[14] On the load-store type solutions of the mutual exclusion problem. (MTA SZTAKI Közlemények, 15, 133—140, 1975.)

[15] A structured computer system model. (Computers and Mathematics with Applications, 3—4, 327—336, 1975.)

[16] Some theorems on SIMULA structures. (Preprints of the third Simula Users Conference, Brighton, 1975.)

[17] Homogeneous event indexes. (Acta Cybernetica, 3, 1, 43—55, 1976.)

[18] Telefonközpontok szimulációjáról. (Számítógépes Rendszerszimuláció Konferencia, Budapest, 1975.)

[19] Remarks on concurrent programming problems. (MTA SZTAKI Közlemények, 18, 131—137, 1977.)

[20] Simulation of chemical processes with baths and continuous units. (Proceedings of the fifth symposium on Computers in Chemical Engineering, 453—460, 1977.)

[21] Modelirovanie szlozsnüh himiko-tehnologicseszkih processzov sz ksztonovkami periodicseszkovo gyeisztvija IV. Mezsdunarodnaja Naucsno-Tehnicseszkaja konferencija, Szeged, 81/1—10, 1977.
[22] Solving synchronization problems in SIMULA models. (Proceedings of the fifth Simula Users Conference, Freiburg, 13—15, 1977.)
[23] Allocation normal forms. (Proceeding of the II. Hungarian Computer Science Conference, Budapest, 1977.)
[24] Coordination of dynamic systems of processes. (MTA SZTAKI Közlemények, közlésre leadva).
[25] Erőforrás kiosztási problémák megoldhatóságáról. (Alkalmazott Matematikai Lapok, közlésre leadva.)
[26] Monotone continuous predicates. (Acta Mathematica, közlésre leadva.)

MAKAY ÁRPÁD

A József Attila Tudományegyetem matematikus szakán szerzett kitüntetéses oklevelet 1966-ban, tanulmányi eredményeiért Felsőoktatási Tanulmányi Érdemrendet kapott.

1972-ig a József Attila Tudományegyetem Kibernetikai Laboratóriumában dolgozott. Folytatta diplomamunkájának témáját, a számítógépes nyelvészeti és dokumentációs — elsősorban alkalmazási jellegű — munkáját. A Nyelvtudományi Intézet munkatársaival együttműködésben konkordancia-szótárak készítésére, nyelvstatisztikai vizsgálatokra, automatikus szövegelemzésekre alkalmas programrendszerekkel foglalkozott. Az Országos Műszaki Könyvtár, a Széchenyi Könyvtár, a JATE Központi Könyvtára számára rendszeres bibliográfiai és szak-katalógus kiadványokat állított elő.

1972-től az MTA Matematikai Logikai és Automataelméleti Tanszéki Kutató Csoportban dolgozik. Szűkebb szakterületén — az információtároló és kereső rendszereken — kívül bekapcsolódott a perspektivikus magas szintű programozási nyelveknek az ESZR keretén belül végzett vizsgálataiba. Részt vett egy hazai számítógépes izotópdiagnosztikai software rendszer fejlesztésében és előállításában. Az oktatásba a számítógépek programozása és a rendszerprogramozás tárgyakon keresztül kapcsolódik be.

Még korábban a nyelv, illetőleg az alkalmazások lehetőségeinek oldaláról közelítette meg az információvisszakeresés problémakörét, aspirantúrája alatt olyan egzakt leírások után kutatott, amelyek egységes alapot nyújtanak a szerteágazó felhasználási területek számára. Így jutott el az algebrai módszerek alkalmazásáig, majd szerencsésen találkozott klasszikus algebrai eredmények hasznosíthatóságával.

MAKAY ÁRPÁD PUBLIKÁCIÓINAK JEGYZÉKE

[1] Matematikai statisztikai módszer diagnosztikus tesztkombinációk prognosztikus értékének kiszámítására. (Orvosi Hetilap, 109/1968, 1593—1595; Kovács Bertalannal együtt.)
[2] Spirometriás paraméterek elemzése a postoperatív cardiorespiratikus elégtelenség előrejelzése szempontjából. (Tuberkulózis és Tüdőbetegségek, 1969/22. 6, 174—176; Dr. Kovács Bertalannal együtt.)
[3] Számítógépek könyvtári és dokumentációs alkalmazásai. (Jegyzet, Országos Széchenyi Könyvtár, Budapest, 1971.)
[4] A MINSZK—22 számítógép könyvtári és dokumentációs programrendszere. (Információ-Elektronika, 1972/1, 52—54.)
[5] A MINSZK—22 számítógép egy operációs rendszere. (Információ-Elektronika, 1972/2. 115—116. Máté Eörssel és Matievics Istvánnal.)
[6] A MINORG—2 programozási nyelv és MINSZK—22 compilere. (Programozási Rendszerek '72. Szeged, 1972. aug. 28—31, 68—72. Hunya Péterrel együtt.)
[7] Információvisszakeresés az Egyetemes Tizedes Osztályozás alapján. (Programozási Rendszerek '72, Szeged, 1972. aug. 28—31. 221—225.)
[8] A MINSZK—22 ALGOL 60 fordítójának (TAM) fejlesztései a Kibernetikai Laboratóriumban. (Pr. Rendszerek '72, Szeged, 1972. aug. 28—31. 95—96; Matievics Istvánnal, Máté Eörssel, Fülöp Józseffel és Diamant Tiborral együtt.)
[9] Diagnosztikus tesztek prognosztikus értékét meghatározó eljárások. (Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban, 3. kollokvium, Szeged, 1972. pp. 157—161. Dr. Kovács Bertalannal együtt.)
[10] The Notion and some applications of the generalized initial segment. (Acta Cybernet., v. 2., 1973. pp. 47—51.)

[11] Hozzászólás a „A fordítógép tündöklése és bukása" c. cikkhez. (Tudományos és Műszaki Tájékoztatás, 20. évf. 11—12, 848—849., 1973. nov.—dec.)
[12] Belső gépi nyelv, beleértve a magasszintű nyelveket. (Szerk. Kalmár László, Tanulmány, Szeged, 1973.)
[13] Iszpolzovanyie UDK v kacsesztve IPJA dlja poiszka naucsno-tehnicseszkoj informacii. Problemü szozdanyija i razvityija MSZNTI. Vüp. 1. (1975) 49—52.
[14] Csernay László, Csirk János, Makay Árpád, Máté Eörs: Kisszámítógép izotópdiagnosztikai software rendszere. Programozási rendszerek '75, 490—496.
[15] Csirik János, Csernay László, Makay Árpád, Máté Eörs: A SEGAMS felhasználási programkönyvtára. Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és a biológiában. 6. Kollokvium, Szeged, 1975. 229. p.
[16] Makay Árpád, Csernay László, Csirik János, Kovács Anna: On-line statikus és dinamikus felvételek a SEGAMS rendszerben. Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és a biológiában. 7. Kollokvium, Szeged, 1967. 17. p.
[17] A set theoretical model of information storage and retrieval systems. Second Hungarian Computer Science Conference. Preprints (1977), pp. 644—650.
[18] J. Csirik, L. Csernay, Á. Makay: Das Auswertungsystems „SEGAMS". The use of Radioisotope in Gastroenterology. Kolozsvár, 1977.

SZEREDI PÉTER

1972-ben végezte az egyetemet. Azóta a NIM IGÜSZI-ben dolgozik, jelenleg aspiráns.

Fő területei a rendszerprogramozói nyelvek, az új elvű nyelvek és a programozási nyelvek szemantikája. Rendszerprogramozással és rendszerprogramozási nyelvekkel már egyetemi tanulmányai alatt is foglalkozott [1], [6], [10], [11]. Különösen jelentős a CDL és az ALGOL 68 implementálásához kapcsolódó munkája [6]. Ezen a területen elért eredményei és azok jelentős alkalmazása már 1973-ban elvezették ahhoz a felismeréshez, hogy a programkészítési módszerek tudományos, matematikai megalapozása hozhat csak döntő változást a számítástudományban [7], [8], [10], és ezért a logikai alapú magasszintű nyelveket helyezte kutatási középpontjába. Nemzetközileg is jelentős volt a PROLOG nyelv implementálása és annak gyakorlati alkalmazásai [9], [12], [13—15], amellyel meggyőzően bizonyította az új elvű nyelvek felhasználhatóságát.

Munkásságának értékelésekor ki kell emelni, hogy minden eredménye nemzetközi szinten is a legperspektivikusabb irányokhoz tartozott, azokkal egyidőben jött létre és fáradhatatlanul dolgozik a legmodernebb eszközök továbbfejlesztésén, elterjesztésén ismertetésén és gyakorlati alkalmazásain egyaránt.

SZEREDI PÉTER PUBLIKÁCIÓINAK JEGYZÉKE

[1] BEEL szimbolikus beviteli rendszer az ELLIOTT 803/B számológép számára. (Számítástechnikai közlemények 9, 36—47, NIM IGÜSZI 1967.)
[2] TREMP szimbolikus beviteli rendszer a National—Elliott 803/B számológép számára. (NIM IGÜSZI 1968, 106.)
[3] Kiegészítések a TREMP-jegyzethez. (NIM IGÜSZI 1968, 19.)
[4] Szimbolikus beviteli nyelv az ODRA 1013 számológép számára. (Tudományos Diákköri dolgozat a TDK IX. Országos konferenciájára, kézirat, 1970, 25.)
[5] Az NE 803 B számológép TREMP programozási rendszere. (Információ-Elektronika, 1970/4, 296—300.)
[6] Az ALGOL 68 fordítóprogram elvi működése. (Balogh Kálmánnal együtt, NIM IGÜSZI, tanulmány kézirat, 1972. 83.)
[7] Autokód szintű szemantikus programellenőrző rendszer vázlatos terve. (Andréka Hajnallal, Balogh Kálmánnal, Emődy Zoltánnal és Lábadi Katalinnal együtt; NIM IGÜSZI 1973. október, 68.)
[8] Software-készítésre alkalmas magasszintű nyelvek adaptálása és továbbfejlesztése. (NJSZT Programozási Rendszerek konferencia kiadványa, 1975. aug., 73—88.)
[9] Egy logikai alapú magasszintű programozási nyelv. (NJSZT Programozási Rendszerek konf. kiadványa, 1975. aug., 191—209.)
[10] Software-rendszerek készítésére alkalmas magasszintű nyelvek. (Kósa Mártonnal és Náray Miklóssal együtt; NIM IGÜSZI 1975. nov. 139.)
[11] Az ALEPH nyelv és fordítóprogramjának specifikációja. (NIM IGÜSZI. 1975. nov. 99, Csirmaz Lászlóval és Szoldán Judittal együtt.)

[12] Automatikus gyógyszerkölcsönhatás-kiszűrő program. (Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és biológiában c. kong. kiadványa, 1975. dec., megjelenés alatt; Darvas Ferenccel és Futó Ivánnal együtt.)
[13] Mesterséges intelligencia nyelvek — a PROLOG nyelv. (Futó Ivánnal; Információ-Elektronika 77, 2—3.)
[14] PROLOG kézikönyv. (Futó Ivánnal; Számológép 1977, megjelenés alatt.)
[15] PROLOG a Very High Level Language Based on Predicate Logic. (2nd Hung. Conf. on Computer Science, 1977. jún.)

A TÁRSULAT 1977. II. FÉLÉVI RENDEZVÉNYEI

BUDAPEST SZERVEZÉSÉBEN

VII. 3—9: Diákköri Nyári Iskola (Törökmező).
VII. 5.: E. KOUNIAS (Görögország): Monotonic lines in optimal control.
VII. 6—9.: Rátz László Vándorgyűlés, (Veszprém).
VII. 6.: H. LUGOWSKI (NDK): On certain classes of ordered semigroups and semirings (Szegeden).
VII. 8.: W. S. LOUD (USA): Bifurcation of solutions of boundaryvalue problems for ordinary differential equations.
VII. 11.: D. DAWSON (Kanada): Stochastic measure diffusion with interactions.
VII. 12.: D. DAWSON (Kanada): The critical measure diffusion process.
VII. 12.: T. BERGER (USA): Multiterminal source coding.
VII. 13.: T. BERGER (USA): Rate distortion with a fully informed decoder and partially informed ancoder.
VII. 18.: G. AZUMAYA (USA): Radicals of the endomorphism ring of a module.
VII. 22.: B. GARDNER (Ausztrália): Radicalsproperties defined locally by means of polynomial identities.
VII. 25.: B. GARDNER (Ausztrália): Ring structure on abelian groups: some recent results.
VII. 25.: CSÖRGŐ MIKLÓS (Kanada): Nem paraméteres statisztikai becslések elmélete.
VII. 26.: CSÖRGŐ MIKLÓS (Kanada): Az invariancia tétellel kapcsolatos újabb eredmények.
VII. 27.: CSÖRGŐ MIKLÓS (Kanada): A Wiener-folyamat néhány tulajdonságáról.
VII. 28.: B. GARDNER (Ausztrália): Radicals, varieties and torsion.
VII. 29.: B. GARDNER (Ausztrália): Degeneracy in non-associative radical theory.
VIII. 5.: G. KREWERAS (Franciaország): On a definition of „Regularity" of a permutation and enumeration of permutations of a given regularity.
VIII. 8.: J. GANI (Ausztrália): On the aggregation of the nucleoli.
VIII. 9.: J. GANI (Ausztrália): An interesting result on the Grachik process.
VIII. 16.: F. GALVIN (USA): Indeterminacy of point-open games.
VIII. 17.: J. G. CEDER (USA): Darboux points and continuity of real functions.
VIII. 23—27.: A matematikatanár-képzés problémái konferencia (Pécs), 53 előadás hangzott el.
VIII. 29—IX. 2.: Komplexfüggvénytani módszerek a valószínűségszámításban és a matematikai statisztikában (Debrecen), 31 előadás hangzott el.
VIII. 31.—IX. 3. 8 előadás hangzott el az előadássorozatban, melyet a középiskolai matematikatanítási kísérletben résztvevők számára rendeztünk. Az előadások témája a valós számok (O. P. I.-val közösen.)
IX. 5—9.: Numerikus módszerek Kollokviumon (Keszthely) 69 előadás hangzott el.
IX. 6.: S. WATANABE (Japán): On indicatrices of a Finsler space.
IX. 7.: B. FORTE (Kanada): Entropy functionals for canonical and grand canonical ensembles.
IX. 12.: L. REICH (Ausztria): On fractional and continuous iteration in rings of power series.
IX. 12.: H. JÜRGENSEN (NSZK): On the principal congruences in certain semigroups.
IX. 13.: N. M. BLACHMAN (USA): The output signal and noise from a nonlinearity.
IX. 14.: E. HENZE (NSZK): On multiple Markov chains.
IX. 15.: Elnökségi ülés.
IX. 16.: H. JÜRGENSEN (NSZK): On the principal congruences in certain semigroups (Szegeden).
IX. 16.: R. P. SULLIVAN (Ausztrália): On transformation semigroups
IX. 16.: U. DIETER (Ausztria): Uniform random numbers: the distribution of pairs.
IX. 16.: HÓDI ENDRE: Beszámoló a XIX. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról (I.M.K. ülése).
IX. 17.: U. Dieter (Ausztria): Non-linear random numbers
IX. 19.: U. DIETER (Ausztria): Uniform random numbers: the underlying lattice structure.
IX. 19.: P. P. SULLIVAN (Ausztrália): On the multiplicative structure of rings.
IX. 19.: F. NEWMAN (Csehszlovákia): Algebric aspects of global transformations of linear differential equations of the n-th order.

IX. 23.: J. BAUMGARTE (NSZK): Stabilization of the Keplerian equation of motion.
IX. 25—
IX. 30.: E. G. MANES (USA): Algebraic categories. (Előadássorozat, 5 előadás.)
IX. 26.: E. G. MANES (USA): Duality of Banach spaces.
IX. 26.: M. SEKANINA (Csehszlovákia): Subobject monads in some concrete categories.
IX. 28.: M. SEKANINA (Csehszlovákia): A class of complete semilattices.
X. 3.: H. LANGER (NDK): Sturm-Liouville operators with indefinite weight functions.
X. 3.: U. KRENGEL (NSZK): An inequality on betting with a prophet.
X. 4.: S. P. MUKHERJEE (India): Some general results concerning life distributions of coherent systems.
X. 5.: C. NEMÉNYI ESZTER: Az alsótagozatos új matematikai tananyag és módszertan ismertetése. (Általános iskolai előadássorozat.)
X. 6.: Az 1978-ban rendezendő Programozás-elmélet Konferencia szervező bizottsága megbeszélése.
X. 6.: Z. FROLIK (Csehszlovákia): New results in uniform spaces.
X. 7.: PÁLFY PÉTER PÁL: A véges testekről. (I. M. K. ülése.)
X. 10.: SURÁNYI JÁNOS: A középiskolai kísérlet története és a távlatok vázolása. (Középiskolai előadássorozat.)
X. 11.: CSÁSZÁR ÁKOS: Kétszáz éve született C. T. Gauss. (TIT-tel közösen.)
X. 12.: Topológia kollokvium szervező bizottsága megbeszélése.
X. 13.: M. DEZA (Franciaország): Intersection patterns of finite sets.
X. 14.: E. THOMAS (NDK): The application of the multivariate analysis of variance in agricultural and horicultural research.
X. 19.: W. EBERL (Ausztria): On decision problems between composed hypotheses.
X. 19.: VARGA TAMÁS: Felsőtagozatos tanterv; logika. (Általános iskolai előadássorozat.)
X. 19.: L. C. A. VAN LEUWEN (Hollandia): Construction new radicals from given ones.
X. 12.: Szele Tibor Emlékérem bizottság ülése az 1977-ben odaítélendő éremről.
X. 22.: Kürschák József matematikai emlékverseny.
X. 24.: PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: Feladatok. (Középiskolai előadássorozat.)
X. 25.: Külügyi bizottság összejövetele az 1978-as ki- és beutazási terv összeállítására.
X. 27.: Topológia kollokvium költségvetésének összeállítása.
X. 28.: FARKAS MIKLÓS: A szimultán tanulás dinamikai elmélete. (Alk. mat. Szakosztály előadássorozata.)
XI. 2.: VARGA TAMÁS: Halmaz-logika. (Általános iskolai előadássorozat.)
XI. 11.: KÉRI GERZSON: Egy fontos, de kevéssé ismert mátrixosztályról, amely több figyelmet érdemelne. (Alk. mat. Szakosztály előadássorozata.)
XI. 14.: BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: Vegyes feladatok. (Középiskolai előadássorozat.)
XI. 16.: VARGA TAMÁS—KOVÁCS CSONGORNÉ: Halmaz-logika. (Általános iskolai előadássorozat.)
XI. 18.: VARGA TAMÁS: A szovjet matematikatanítás 60 éve. (A NOSZF 60. évfordulója alkalmából rendezett előadás.)
XI. 18.: BERKES ISTVÁN: A valószínűségszámítás paradoxonjai. (I. M. K. ülése.)
XI. 22.: JUHÁSZ ISTVÁN: A moszkvai topológia iskoláról. (A NOSZF 60. évfordulója alkalmából rendezett előadás.)
XI. 25.: RÉVÉSZ PÁL: A regressziófüggvény nem-paraméteres becsléséről. (Alk. mat. Szakosztály előadássorozat.)
XI. 28.: URBÁN JÁNOS—BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: Függvények tanítása (középiskolai előadássorozar)
XI. 28.: A budapesti olimpiai előkészítő szakkör bemutató foglalkozása. (Vezette: Reiman István); ankét a központi olimpiai szakkörökről a szakkörvezetők részére.
XI. 30.: VARGA TAMÁS—KOVÁCS CSONGORNÉ: Függvények. (Általános iskolai előadássorozat.)
XII. 2.: SZŰTS MIKLÓS: Programtulajdonságok bizonyításának modellelméleti alapjai. (Alk. mat. Szakosztály előadássorozata.)
XII. 2.: SZÉNÁSSY BARNA: 175 éve született Bolyai János. (TIT-tel közös előadás.)
XII. 7.: W. VOGEL: Über Primidealpotenzen.
XII. 9.: Kürschák József matematikai emlékverseny eredményhirdetése.
XII. 9.: BALOGH KÁLMÁN: Egy interaktív programellenőrző rendszer. (Alk. mat. Szakosztály előadássorozata.)
XII. 12.: BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: Feladatok.
XII. 13.: A külügyi bizottság és az IMU magyar nemzeti bizottsága közös ülése.
XII. 14.: R. AHLSWEDE (NSZK): An inequality of two families of sets, their unions and intersections.
XII. 15.: Emlékülés Bolyai János születésének 175. évfordulója alkalmából. (MTA-val közös előadóülés.)

XII. 16.: Választmányi ülés.
XII. 19.: Pontfolyamatok és sorbanállási problémák kollokvium szervező bizottságának megbeszélése.
XII. 20.: Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny eredményhirdetése és díjkiosztása.
XII. 23.: Arany Dániel matematikai tanulóverseny I. bizottsága ülése.
XII. 28.: Az 1978. évi Rátz László Vándorgyűlés „Híradó"-ja szerkesztő bizottságának megbeszélése.
XII. 29.: PÁLMAY LÓRÁNT: Bolyai János élete és munkássága.
URBÁN JÁNOS: Az axiomatikus módszer a matematikában.
XII. 30.: A KöMaL legjobb megoldóinak találkozója: Ki nyeri el a KöMaL kupát? Pontverseny. (I.M.K. téli ankét.)

Baranya megyei Tagozat:

VIII. 26.: VÖRÖS GYÖRGY: A matematika tantárgy pedagógiájának helyzete, kapcsolata más tudományokkal, nehézségei.
VIII. 30.: PORONYI GÁBOR: Geometriai feladatok diszkussziója blokkvázlattal.
FRAUNHOLCZ MIHÁLY: Tanévelőkészítő.
XI. 24.: SELÉNYI GÉZA: Geometriai transzformációk; mozgáscsoport.
FRAUNHOLCZ MIHÁLY: Az új szakközépiskolai tanterv szelleme.

Bács-Kiskun megyei Tagozat:

XI. 4—5.: A műszaki főiskolák Neumann János matematikai versenye.
XI. 10.: Bács-Kiskun megyei középiskolai matematika verseny I. fordulója.
XI. 18.: HADI ISTVÁN: Beszámoló a lengyelországi tanulmányútról.
XII. 3.: Bács-Kiskun megyei középiskolai matematika verseny II. fordulója.
XII. 19.: Bács-Kiskun megyei matematika verseny eredményhirdetése.

Csongrád megyei Tagozat:

Július 6.: H. LUGOWSKI (Potsdam): Überblick über die Untersuchung gewisser Klassen geordnetes algebraischer Strukturen.
Szept. 14.: G. BUROSCH (Rostock): Többértékű és $(p\ k\ l)$ logikák.
Szept. 16.: B. GOLUBOV (Moszkva): Sorok és Fourier integrálok szférikus Riesz-közepeinek konvergenciájáról.
Szept. 16.: H. JÜRGENSEN (NSZK): Principal congruences on semigroups.
Szept. 16.: B. SULLIVAN (Ausztrália): Partial transformation semigroups.
Szept. 19.: B. GOLUBOV (Moszkva): Többszörös Fourier sorok és integrálok szférikus, Riesz közepeire vonatkozó Gibbs-jelenségről.
Szept. 21.: SZENDREI ÁGNES: Véges halmazon értelmezett lineáris függvények zárt osztályai.
Szept. 22.: GYŐRI ISTVÁN: n-edrendű differenciálegyenletek megoldásainak oszcillációjáról.
Szept. 23.: KÉRCHY LÁSZLÓ: Felcserélés és adjungálás kapcsolata (Berberian cikke).
Szept. 28.: M. SEKANINA (Brno): On a class of complete semilattices.
Szept. 29.: TERJÉKI JÓZSEF: Atomreaktorok működését leíró differenciálegyenletek stabilitási vizsgálatai.
Szept. 30.: TOTIK VILMOS: Fourier-sorok erős approximációja.
Szept. 30.: SZŰCS JÓZSEF: Gyenge konvergencia L_∞-ben.
Szept. 30.: H. HIRAMATU (Japán): Isometry of a Riemanian many fold into a sphere.
Okt. 3.: P. P. TAMELLA (Szovjetunió): Reduction of defini te quadratic form.
Okt. 5.: U. KRENGEL (Göttingen): An inequality on betting with a prophet.
Okt. 7.: H. LANGER (Dresden): Szimmetrikus relációk általánosított rezolvensei.
Okt. 10.: NAGY PÉTER: Egyparaméteres transzformáció csoportok pályája.
Okt. 12.: KLUKOVITS LAJOS: Interpoláció Malcev-varietásokban.
Okt. 13.: HATVANI LÁSZLÓ: Attraktivitási tételek nem-autonom differenciálegyenletekre.
Okt. 14.: DURSZT ENDRE: A Shields egy dolgozatáról.
Okt. 17.: NAGY PÉTER: Geodetikusgörbék fibrált terekben
Okt. 19.: KOLLÁR JÁNOS: (Bp): Injektívekben gazdag varietások.
Okt. 20.: TERJÉKI JÓZSEF: Aszimptotikusan stabilis zéró megoldással rendelkező differenciálegyenletek perturbációja.

Okt. 21.: Szőkefalvi-Nagy Béla: Még egyszer a H^∞-en vett mátrixokról.
Okt. 21.: Totik Vilmos: Fourier-sorok erős approximációja.
Okt. 27.: Győri István: Funkcionál-differenciálegyenletek megoldásainak aszimptotikus viselkedéséről.
Okt. 28.: V. Koljada (Odessza): Függvények legjobb megközelítései különböző terekben.
Nov. 11.: Dr. Leindler László: A Hölder-egyenlőtlenség bizonyos megfordításai.
Nov. 16.: Szabó László: Kísérő struktúrák konkrét előállításai.
Nov. 17.: Hatvani László: Ljapunov-függvények szemidefinit differenciálhányadossal.
Nov. 18.: V. Koljada (Odessza): Néhány beágyazási tétel.
Nov. 18.: Szűcs József: Önadjungált operátorok összege.
Nov. 23.: Ádám András (Bp.): Véges automaták és végesen megvalósítható automata leképezések leírásáról.
Nov. 24.: Hatvani László: Az előző heti előadás folytatása.
Nov. 25.: Móricz Ferenc: Többszörös sorok konvergenciájáról.
Nov. 25.: T. Ando (Sapporo): On the predual of H^∞.
Nov. 30.: Szabó László: Kísérő struktúrák konkrét reprezentációja (folytatás).
Dec. 1.: Terjéki József: Funkcionál differenciálegyenletek megoldásainak aszimptotikus viselkedéséről Ljapunov—Razumikhin-módszerrel.
Dec. 2.: A. F. Leontyev (Moszkva): Az exponenciális rendszer teljessége görbén.
Dec. 2.: Sz. A. Tyeljakovszkij: Trigonometrikus sorok integrálhatósága és lakunáris sorok tulajdonságai.
Dec. 7.: Fried Ervin (Bp.): A duális diszkriminátor-függvény az algebrában.
Dec. 8.: Klincsik Mihály: Másodlagos Ljapunov-kitevők Banach-térbeli differenciálegyenletek esetén.
Dec. 10.: Sonnevend György (Bp.): Banach-tér konvex, kompakt halmazai által generált tér tulajdonságai.

Fejér megyei Tagozat:

VIII. 30.: Szénásy Mihály: Új szempontok a matematikaoktatásban.
IX. 22.: A módszertani munkaközösségben:
Dr. Peller József: A sorozatok tanítása.
X. 24.: Dr. Urbán János: Az új matematika tantervek.
XI. 10. A módszertani munkaközösségben:
Medgyesi László: Az integrálszámítás tanítása.
XII. 14.: A Fejér megyei középiskolások matematikai versenye. I. forduló.
Ifjú Matematikusok Köre foglalkozásokat tartott: X. 4., X. 11., X. 18., XI. 1., XI. 29., XII. 13. A Kör vezetője: Pálfy Péter.
A Diákolimpiai előkészítő szakkör foglalkozásokat tartott: IX. 13., IX. 27., X. 25., XI. 8., XI. 15., XI. 22., XII. 6., XII. 20. A szakkör vezetője: Láng Hugó.

Győri Tagozat:

VIII. 29.: Elnökségi ülés.
IX. 20.: Elnökségi ülés.
IX. 21.: Olimpiai matematikai előkészítő szakkör.
X. 7.: Feladatmegoldó délután I. és II. osztályosok részére. Előadó: Szakál Péter.
X. 12.: Olimpiai matematikai előkészítő szakkör.
X. 26.: Olimpiai előkészítő szakkör.
X. 27.: Ünnepi ülés a NOSZF 60. évfordulója tiszteletére. Érdekes feladatok a Matematika v Skolje c. szovjet lapból.
X. 20.: Kibővített elnökségi ülés; tapasztalatcsere pozsonyi vendégekkel.
X. 22.: A Kürschák József-verseny lebonyolítása.
X. 28.: Urbán János: Halmazelméleti oktatás.
XI. 9.: Olimpiai matematikai előkészítő szakkör.
XI. 23.: Molnár Emil: A Kürschák József-verseny feladatainak ismertetése.
XI. 23.: Olimpiai matematikai előkészítő szakkör.
XII. 7.: Olimpiai matematikai előkészítő szakkör. Pálfi Sándor: Új módszerek az általános iskolai matematikaoktatásban. Konzultáció klubfoglalkozás keretében.
XII. 21.: Olimpiai matematikai előkészítő szakkör.

Hajdú-Bihar megyei Tagozat:

IX. 2.: S. WATANABE (Japán): On indicatrices of a Finsler-space.
IX. 16.: C. OBI (Nigéria): Nonlinear oscillations.
IX. 20.: G. BUROSCH (NDK): Die Lösung von Vollständigkeitsproblemen in der mehrwertigen Logik.
X. 11. P. P. TAMELLA (Szovjetunió): Kvadratikus formák Hermite—Minkowski-féle redukciója.
XI. 16.: TANDORI KÁROLY: Függvénysorok konvergenciájával kapcsolatos újabb vizsgálatok.
XI. 18.: BUZÁSI KÁROLYNÉ: Középfokú és felsőfokú matematikaoktatás a Szovjetunióban.
XII. 5.: A. KOTZAUER (NDK): Entwicklungstrends in der Digitalgraphik.
Középiskolások számára tartott „Bolyai-délutánok" (KÁNTOR SÁNDORNÉ).
X. 7.: Számelméleti alapfogalmak.
X. 21.: Egyenletek megoldása.
XI. 4.: Egyenlőtlenségek.
XI. 18.: Geometriai szerkesztések.
XII. 2.: Kürschák-feladatok.
XII. 16.: Apolloniusz-feladatok.

Heves megyei Tagozat:

X. 19.: BÍRÓ GÁBOR: A kvantummechanika világnézeti problémái.
XI. 14.: HETYEI GÁBOR: Gráfok és alkalmazásaik.
XI. 15.: PELLE BÉLA: Szocialista országokkal való kapcsolataink a matematika oktatásában.
XI. 23.: KISS PÉTER: Feladatok a számelmélet köréből.
XI. 28.: KISS PÉTER: Feladatok a számelmélet köréből.
XII. 6.: PELLE BÉLA: A szocialista országokkal való kapcsolataink a matematika oktatásában.
XII. 13.: KISS PÉTER: Számelméleti feladatok.
Az ifjúsági csoport rendezvényei.
X. 12.: KÁKONYI ÁGNES: Érdekes tréfás feladatok az oszthatósági szabályok alkalmazásaira.
X. 26.: SZEDMÁK ISTVÁNNÉ: Érdekes tréfás feladatok a geometria köréből.
XI. 16.: PELLE BÉLA: A szocialista országokkal való kapcsolataink a matematika oktatásában.
XI. 30.: TAMÁS MÁRIA: Színes rúdkészlet alkalmazása az általános iskolai matematikaoktatásban.
A NOSZF 60. évfordulója alkalmából rendezett feladatmegoldó verseny eredményhirdetése.
XII. 14.: BÁRDOS ENIKŐ: Dienes P. Zoltán: Építsük fel a matematikát c. könyvének ismertetése.

Komárom megyei Tagozat:

X. 26.: MOLNÁR EMIL: Geometriai szélsőérték feladatok.
XI. 17.: HORVÁTH JENŐ: Térgeometria.

Nógrád megyei Tagozat:

X. 4.: KOLLER LÁSZLÓNÉ: A szakmunkásképző intézetek tanterve.
XII. 7.: ORAVECZ LÁSZLÓ: Másodfokú függvények és egyenletek.
BARABÁS GYÖRGY: Az exponenciális és logaritmikus egyenletek tanítása.

Szabolcs-Szatmár megyei Tagozat:

XI. 14.: SÜMEGI LÁSZLÓ: A gondolkodás fejlesztése a matematika órákon.
XI. 16.: MOLNÁR EMIL: Az elemi matematika szerepe az általános iskolai tanárképzésben.
XI. 18.: SZENDREI JÁNOS: Csoportok az általános iskolai tananyagban.

Veszprém megyei Tagozat:

XI. 23.: KOVÁCS JÁNOS: Stabilitási kérdések az interpolációelméletben.

Zala megyei Tagozat:

VIII. 31.: CSEKE ZOLTÁN: Matematika új felfogásban.
XII. 6.: Megyei középiskolai matematika verseny.
XII. 16.: NAGY EMIL: A geometriai transzformációk alkalmazása a gimnáziumban.

KÖNYVISMERTETÉS

LUKÁCS OTTÓ—SCHARNITZKY VIKTOR: ÉRDEKES MATEMATIKAI GYAKORLÓ FELADATOK VI. KÖTETE

(Középiskolai Szakköri Füzetek) Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 226 oldal

Új kötettel gyarapodott az „Érdekes Matematikai Gyakorló Feladatok" című sorozat. 1969-ben jelent meg az első kötete, most a hatodik. Az első előszavában adott program szerint egy-egy kötet a Középiskolai Matematikai Lapok 10—10 éves anyagának válogatott feladatait tartalmazza. Ezzel a hatodikkal a sorozat eljutott a Lapoknak a felszabadulás utáni első tíz évéhez. Az 1947-től 1957-ig terjedő 10 évfolyam több mint ezer feladatából vehet kézbe az olvasó 180-at. Változatos összeállítás, szép megoldások jellemzői a kötetnek, a szerkesztők is 23 tárgykörbe sorolták a feladatokat és nagyobb részüknél többféle megoldást közölnek. Hasznosan forgathatják az érdeklődő tanulók. Találnak benne a gimnáziumi „törzsanyaghoz" kapcsolódó elmélyültebb gondolkodást kívánó feladatokat, és — nagyon helyesen — a tananyagban ma nem szereplőket. A tanárok munkáját is segíti, hiszen minden anyagrészhez nyújt érdekes feladatokat, hasznos ötleteket. Áttekinthetősége, tagoltsága csak növeli a használhatóságát.

Az előszó röviden — túlzottan röviden — utal az újjászületett Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztőire, a szerkesztő bizottság tagjaira. A Lapok a II. világháború utáni kötetei azonban nemcsak az érdekes matematikai feladatok miatt jelentenek értéket, hanem tanúsítják azt a szinte hősies küzdelmet is, melyet a matematikaoktatás fejlesztése kívánt. 1946. októberében indította meg Soós Paula Szegeden a Középiskolai Matematikai Lapok új sorozatának előfutárát: a sokszorosított feladatíveket. 5 „ív" összesen 100 feladatot tartalmazott. 1947. november 1-i kelettel jelent meg Soós Paula és Surányi János szerkesztésében Szegeden „állandó jellegű köntösben" a Lap I. évfolyamának 1—2. száma. A kiadás gondjai csak később csökkentek, mikor azt a Bolyai János Matematikai Társulat vette át, később a Közoktatásügyi Minisztériummal karöltve. 1952. szeptemberétől — az V. évfolyamától — jelenik meg a Lap a ma is szokásos alakban, évi tíz számban. Említést érdemel az a rövid „hír" is, mely 1957. január 4-i kelettel szerényen a szerkesztői üzenetekben jelent meg: „Hálával nyugtázzuk a sokoldalú érdeklődést és sürgetést, amely még a legsúlyosabb időkben is megnyilvánult lapunk iránt és megnyugtathatjuk olvasóinkat, hogy a szerkesztőség nem szünetelt munkájával, és mindent megtett, hogy a lap folyamatosságát biztosítsa."

A kötet tartalmi értéke mellett a 10 évi erőfeszítést, munkát ma — 30 év távlatából is — látnunk és becsülnünk kell.

HAJNAL IMRE

B. ANDRÁSFAI: INTRODUCTORY GRAPH THEORY

(Akadémiai Kiadó, Budapest — Adam Hilger Ltd, Bristol — Pergamon Press Inc., Elmsford, New York; 1977. 268 oldal)

Andrásfai Béla könyve (Ismerkedés a gráfelmélettel, Tankönyvkiadó, Budapest) két magyar kiadás után angolul is napvilágot látott. Magyarországon a gráfelmélet elemeit sokan e könyv magyar kiadása alapján ismerték meg. Tematikai változás nincs az angol változatban: Az első két fejezet a gráfelmélet lényegileg minden ágához nélkülözhetetlen alapfogalmakat tartalmazza, a 3—5. fejezetek pedig klasszikus, a gráfelméletben hagyományosan nagy szerepet játszó kérdésekkel foglalkoznak (Euler- és Hamilton-körök, faktorok). Főleg az utolsó fejezet ad ízelítőt a szerző személyes kutatási tevékenysége szempontjából is érdekes kérdésekről.

Ami Andrásfai könyvét leginkább megkülönbözteti a — ma már idegen nyelven tucatjával rendelkezésre álló — egyéb gráfelméleti munkáktól, az főleg a stílusa, tárgyalásmódja. Emiatt a folyamatos olvasás, együttgondolkodás, rajzolgatás örömét és fáradságát vállaló tehetséges középiskolás diák (vagy szakkörvezető tanár) is igen jól tudja használni.

RECSKI ANDRÁS

HUGH H. SKILLING: TEACHING C. KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

A könyv 11-edik oldalán ez áll:
Tizenegy parancsolat tanároknak.

A jó tanár szereti diákjait, és örül, ha segíthet nekik, megértheti a gondolataikat és érzéseiket. Kell, hogy

1. Emlékezzen a diákjaira, hiszen ők mérik a sikereit.
2. Legyen szerény, hiszen csak az az erénye fontos, amelyek a diákjait segíti.
3. Ismerje a tanítás egészét, és lehetőleg olyan távoli célt mutasson a tanítványának, amit ketten egyáltalán látni képesek.
4. Fogadja el olyannak a tanítványát, amilyen, és fejlessze annyira, amennyire csak tudja. A tanítványt az esze vezérli, de a szíve hajtja, ezért hát panaszkodni kár, és figyelmen kívül hagyni a motivációit, eleve kudarc.
5. Mutassa meg a diáknak a tények világát, hogy felkeltse érdeklődését, az elmélet világát, hogy megértse azt, és a kettőt együtt, hogy egymást megvilágítsák.
6. Kösse az új gondolatokat meglevő ismeretekhez, hiszen csak így tanulhatjuk meg őket. Mindig az ismerttől haladjunk az ismeretlen felé.
7. Ismételjen és ismételjen, de sose ugyanazt, minden gondolatot háromszor vizsgáljon meg, három különböző nézőpontból.
8. Dolgoztassa a diákot, hiszen a munkára még mindig emlékszünk, mikor már a szavakat rég elfeledtük. A hallás nem sokat ér, a látás már kicsit jobb, de a cselekvés a legjobb.
9. Hadd kutasson a diák, vezesse a tanár önálló felfedezésekre. Ezek lesznek tudásának legfényesebb gyémántjai.
10. Legyen világos, szabatos és nyugodt, hiszen egész munkája haszontalan, ha nem tudja az érdeklődést felkelteni.
11. Ismerje kimerítően azt, amit tanít, és azt is, hová vezet, hogy lebilincselően és lelkesen beszélhessen róla.

Mind e nemes gondolatokat neves szerzőgárdától (köztük Pólya Györgytől) összegyűjtött tanulmányok fejtik ki részletesen, így a könyvet minden kezdő tanárnak melegen ajánlhatjuk.

TUSNÁDY GÁBOR

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1975-ben jelentek meg.

A jegyzékben általános és középiskolai *tankönyvek* és felsőoktatási *jegyzetek* nem szerepelnek.

BANACH STEFAN: *Differenciál- és integrálszámítás,* (5. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 459 oldal, 56 Ft.

BARDON ALFRÉD—LŐRINCZ PÁL: *Ábrázoló geometriai példatár építészmérnök hallgatók számára,* (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 248 oldal, 25,50 Ft.

BÁRCZY BARNABÁS: *Integrálszámítás,* (3. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 359 oldal, 26 Ft.

BELLAY ÁGNES—RÁBAI IMRE: *Ez is, az is az elemi matematikából. Matematikai feladatok az egyetemi matematika tanulására készülők számára,* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1975, 508 oldal, 30 Ft.

BENKŐ JÓZSEF: *A topológia elemei,* Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár—Napoca, 1975, 260 oldal, 28 Ft. (Magyar—román közös kiadás.)

BENKŐ SAMU: (vál., bev. és jegyz.): *Bolyai levelek,* Kriterion, Bukarest, 1975, 314 oldal, 9,50 Ft. (Magyar—román közös kiadás.)

BERGER GYÖRGY: *Fejtörő játékok, játékos fejtörők,* Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár—Napoca, 1975, 150 oldal, 17 Ft. (Magyar—román közös kiadás.)

BILLINGNÉ SZŐNYI KATALIN—CSÉBFALVI KÁROLY: *Mire képes a számítógép?* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1975, 91 oldal, 9,50 Ft.

BIZÁM GYÖRGY—HERCZEG JÁNOS: *Sokszínű logika, (175 logikai feladat),* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 435 oldal, 45 Ft.

BLICKLE TIBOR—SEITZ KÁROLY: *A modern algebrai módszerek felhasználása a műszaki kémiában,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 179 oldal, 30 Ft.

BROWN, CLEMENT: *Beszélgessünk a számítógépről!* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 141 oldal, 13 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv az ideiglenes matematika tanterv 1. osztályos anyagának tanításához,* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 575 oldal, 43 Ft.

CSATÓ ISTVÁN: *A számítógép az ön szolgálatában,* Kossuth Könyvkiadó, Budapest, 1975, 317 oldal, 42 Ft.

CSER ANDOR—PÁLFY SÁNDOR: *Kézikönyv az ideiglenes matematika tanterv 5. osztályos anyagának tanításához,* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 259 oldal, 19,50 Ft.

CSER ANDOR—PÁLFY SÁNDOR: *Kézikönyv az ideiglenes matematika tanterv 6. osztályos anyagának tanításához,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 301 oldal, 24 Ft.

CZAPÁRY ENDRE—VIRÁG ISTVÁN: *Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 192 oldal, 20 Ft.

DRECIN JÓZSEF (szerk.): *Vezetési, szervezési, információs és számítástechnikai értelmező szótár,* KGM MTTI kiadása, Budapest, 1975, 547 oldal, 150 Ft.

ELŐD ISTVÁNNÉ: *Számoljunk együtt,* 7—8, Segédkönyv szülők számára, (3. kiadás). Útmutató, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 382+4 oldal, 10 Ft.

FRIED ERVIN: *Absztrakt algebra elemi úton* (2. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 331 oldal, 38 Ft.

FODOR JÁNOS—HORVÁTH ATTILA—RÁBAI IMRE—SZÉKELY JENŐ: *Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgára készülők számára I.,* (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 304 oldal, 22 Ft.

FRIGYES ANDOR—LEHEL CSABA—MEGYERI JÓZSEF: *A számítógépek alkalmazása a folyamatirányításban,* Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1975, 147 oldal, 14,50 Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ (szerk.): *Élő matematika, 1.,* (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 227 oldal, 18 Ft.

GELFAND, J. M. (ed.): *Lie groups and their representatives* (Summer School of the Bolyai János Mathematical Society), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975, 726 oldal, 450 Ft.

GERGELY JÓZSEF—HÓDI ENDRE—KELEMEN LÁSZLÓ—LUKÁCS OTTÓ—SAIN MÁRTON—SÓLYOM MIHÁLY: *A lánctörtektől a számítógépig,* (Élő matematika, 3. kötet), (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 159 oldal, 13 Ft.

GIHMAN, I. I.—SZKOROHOD, A. V.: *Bevezetés a sztohasztikus folyamatok elméletébe,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 547 oldal, 88 Ft.

GOLDSCHEIDER, PETER—ZEMANEK, HEINZ: *A számítógép az információfeldolgozás eszköze,* Statisztikai Könyvkiadó, Budapest, 1975, 195 oldal, 60 Ft.

HAJNAL, A.—RADO, R.—T. SÓS VERA (editoss): *Infinite and finites sets* (Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 10), Bolyai János Matematikai Társulat—North-Holland Publ. Co., Budapest—Amsterdam—London, 1975, 1555 oldal (3 kötetben), 1370 Ft.

HALL, G. G.: *Alkalmazott csoportelmélet,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 163 oldal, 16 Ft.

HARDY ZSIGMOND—SÓLYOM MIHÁLY: *Út a modern algebrához,* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 267 oldal, 22 Ft.

HORVÁTH ATTILA (szerk.): *Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai vizsgára készülők számára,* I. kötet, (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 304 oldal, 22 Ft.

HORVÁTH ATTILA (szerk.): *Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgára készülők számára,* II. kötet, (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 399 oldal, 28,50 Ft.

JÁNOSSY LAJOS—TASNÁDI PÉTER: *Valószínűségszámítás,* (2. kiadás), (Élő matematika, 2. kötet), Budapest, 1975, 61 oldal, 6 Ft.

KAUFMANN ARNOLD: *A döntés tudománya,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1975. 315 oldal, 36 Ft.

KERTÉSZ ANDOR: *Einführung in die transfinite Algebra,* Akadémiai Kiadó — Birkhäuser Verl.— Deutscher Verlag der Wissenschaften, Budapest—Basel—Berlin, 1975, 74 oldal, 50 Ft.

KORN, G. A.—KORN, TH. M.: *Matematikai kézikönyv műszakiaknak,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 994 oldal, 196 Ft.

KÖVES PÁL—PÁRNICZKY GÁBOR: *Általános statisztika,* (2. jav. kiadás), Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1975, 816 oldal, 139 Ft.

KŐHEGYI JÁNOSNÉ—VAJDA JÓZSEF: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben. Feladatgyűjtemény tanárok számára az ált. isk. 8. osztálya matematika oktatásához,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 198 oldal, 16 Ft.

KUROS, A. G.: *Felsőbb algebra* (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 475 oldal, 53 Ft.

LOPATNYIKOV, L. I.: *Közgazdasági-matematikai kisszótár,* Kossuth Könyvkiadó, Budapest, 1975, 161 oldal, 17 Ft.

LUKÁCS ERNŐNÉ—TARJÁN REZSŐNÉ: *Játékos matematika,* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1975, 306 oldal, 20 Ft.

LUKÁCS OTTÓ—SCHARNITZKY VIKTOR: *Érdekes matematikai gyakorló feladatok,* VI. kötet, Középiskolai Szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 226 oldal, 16 Ft.

MARCH, L.—STEADMAN, P.: *Geometria az építészetben,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 312 oldal, 61 Ft.

MARTOS BÉLA: *Nonlinear programming. Theory and methods,* Akadémiai Kiadó—North-Holland Publ., Budapest—Amsterdam—Oxford, 1975, 279 oldal, 180 Ft.

MOSONYI KÁLMÁN: *Matematikai játékok* (2. kiadás), Ált. isk. szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 143 oldal, 8 Ft.

NÁNDORI KÁLMÁN (szerk.): *Az R—20-as számítógép utasításainak áttekintő táblázata,* Statisztikai Kiadó, Budapest, 1975, 8 oldal, 13 Ft.

NAGY LAJOSNÉ—CSŐKE LAJOS: *A függvények és tanításuk az általános iskolában* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 223 oldal, 18 Ft.

C. NEMÉNYI ESZTER—MERŐ LÁSZLÓ—VARGA TAMÁS: *Kézikönyv az ideiglenes matematika tanterv 2. osztályos anyagának tanításához,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 386 oldal, 29 Ft.

OBÁDOVICS, J. GYULA: *Numerikus módszerek és programozásuk,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 304 oldal, 29,50 Ft.

PERELMAN, J. I.: *Szórakoztató algebra* (2. kiadás), Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1975, 246 oldal, 17 Ft.

PRÉKOPA, A. (editor): *Progress in operations research,* (Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 12.), Vol. I—II., North Holland Publ. Co., Amsterdam—London and János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1975, 969 oldal, 570 Ft.

RÉVÉSZ P. (editor): *Limit theorems of probability theory,* (Colloquia Mathematica Societas János Bolyai, 11.), Bolyai János Matematikai Társulat—North-Holland Publ. Co., Budapest—Amsterdam—London, 1975, 420 oldal, 370 Ft.

RUZSA IMRE: *Die Begriffswelt der Mathematik,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975, 390 oldal, 220 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából, III. kötet, 1972—1973,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 174 oldal, 13 Ft. +++++

SCHARNITZKY VIKTOR: *Differenciálegyenletek, Példatár,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 337 oldal, 25 Ft.

SKEMP, RICHARD R.: *A matematikatanulás pszichológiája,* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1975, 441 oldal, 29 Ft.

SREJDER, J. A.: *Egyenlőség, hasonlóság, rendezés,* Bevezetés a modern matematika alkalmazásába, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1975, 394 oldal, 34 Ft.

STACHÓ LAJOS: *A programozás matematikai ABC-je. Gyakorlati bevezetés a programozásba,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 201 oldal, 32 Ft.

SZÁSZ FERENC: *Radikale der Ringe,* Disquisitiones Mathematicae Hungaricae, 6., Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975, 300 oldal, 150 Ft.

SZÁSZ GÁBOR: *Hálóelmélet,* (Középiskolai szakköri füzet), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 142 oldal, 8 Ft.

SZÉKELY VLADIMIR—BENKŐ TIBORNÉ: *Karakterisztikák—diagramok—nomogramok,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 223 oldal, 33 Ft.

SZÉKELY VLADIMIR—TARNAY KÁLMÁN: *A programozás alapjai,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 147 oldal, 25 Ft.

SZÉNÁSSY BARNA: *Bolyai Farkas (1775—1856),* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975, 157 oldal, 37 Ft.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Valós függvények és függvénysorok* (5. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 370 oldal, 35 Ft.

TATÁR ISTVÁN: *Matematikai mozaik,* Szakköri előkészítő 5—6. oszt. az ált. isk. szakosított tantervű osztályok matematikájához, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 231 oldal, 12,50 Ft.

TREDE, W.—HERKELMANN, A.—SCHWARZER, E.: *Számítástechnikai alapismeretek,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 317 oldal, 59 Ft.

URBÁN JÁNOS: *Határértékszámítás,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 451 oldal, 33 Ft.

VARGA TAMÁS: *Lasst uns Mathematik spielen!* I—II., Akadémiai Kiadó, Budapest, 1957, 210 oldal, 140 Ft.

VINCZE ISTVÁN: *Matematikai statisztika ipari alkalmazásokkal* (2. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 352 oldal, 60 Ft.

WERNECK, T.—ULLMANN, *F.*: *Hálótervezés,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 309 oldal, 23 Ft.

Scharnitzky Viktor

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

CONTENTS

PAUL SZÁSZ (1901—1978) 1
The scientific works of Paul Szász 3
H. LANGER: Béla Szőkefalvi-Nagy is 65 years old 7
The scientific works of Béla Szőkefalvi-Nagy 19
List of works of Paul Révész awarded by the State Prize in 1978 24
The mathematical activity of Paul Turán III. 27
1. G. HALÁSZ: The power sum method 27
2. L. ALPÁR: On some results of Paul Turán in analysis 43
F. KÁRTESZI: The life-work of János Bolyai 59
GY. STROMMER: The construction theory in the Bolyai geometry 65
L. LOVÁSZ: Graph theory and integer programming 69
I. JUHÁSZ: On the Moscow school of topology 87
Z. I. RUZSA: Arithmetical functions I. 95
G. SZÉKELY and G. TUSNÁDY: Generalized Fibonacci numbers, and the number of "pure heads" 147
A. HOFFMANN: Use of (C, 1) summability series for testing the heattransfer performed by a piping system embeded in a layer 153
GY. STROMMER: Construction of regular polygons in absolute geometry 161
Report on the 1977. M. Schweitzer Mathematical Competition 165
Problems 181
Society life 189
Book reviews 201
New books 202

СОДЕРЖАНИЕ

Пал Сас (1901—1978) 1
Список научных трудов Пала Саса 3
Геинц Лангер: Бела Секефалви-Надь 65 лет 7
Список научных трудов Бела Секефалви-Надя 19
Список трудов лауреата награждённых Государственной Премией 1978-ого года, Пала Ревеса 24
Математическая деятельность Пала Турана III. 27
1. Габор Халас: Метод степенны сумм 27
2. Ласло Алпар: Резултаты Пала Турана в области математического анализа ... 43
Ференц Картеси: Творчество Яноша Бойаи 59
Дюла Штроммер: О теории конструкции геометрии Бойои 65
Ласло Ловас: Теория графов и дискретное программинование 69
Иштван Юхас: Московская школа топологии 87
Имре З. Ружа: Арифметические функции I. 95
Габор Секей—Габор Тушнади: Обобшённые числа Фибоначчи и число последовательностей, состоящих только из гербов 147
Андор Хоффманн: Применение (C, 1) суммиремых серий к исследованию теплопередачи системы труд, вложенной в слой 153
Дюла Шртоммер: Абсолутная конструкция правильных многоугольников 161
Доклад о математическом конкурсе памяти Миклоша Швейтцера в 1977-ом годе 165
Задачи 181
Из жизни общества 189
Обзор книг 201
Новые книги 202

Ára: 14,— Ft

Évi előfizetés: 28,— Ft

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat beérkezett: 1978 V. 16 — Terjedelem: 17,85 (A/5) ív
78-2482 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József

INDEX: 25 564
ISSN 0025—519X

J12.046

III

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

27. évfolyam, 1976—1979 3 ■ 4

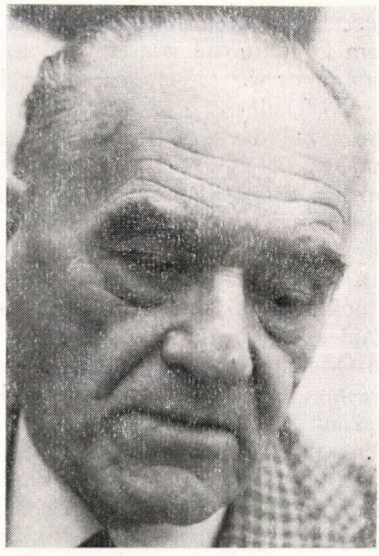
9

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1978. december — 27. évfolyam 3—4. szám.
Felelős szerkesztő: Császár Ákos
Szerkesztők: Lovász László, Pelikán József, Révész Pál, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest, V., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODÁNÁL, Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: PKHI 215-96162.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest, V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488,
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 28, Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

ALEXITS GYÖRGY (1899. jan. 5.—1978. okt. 14.) 205
HALÁSZ GÁBOR: Somorjai Gábor matematikai munkásságáról 211
SURÁNYI JÁNOS: Néhány bizonyítás az egész számok prímtényezős felbontásának egyértelműségére 213
RUZSA Z. IMRE: Számelméleti függvények II. 227
GÉCSEG FERENC és MAGNUS STEINBY: A faautomaták algebrai elmélete II. 283
FÉNYES TAMÁS és KOSIK PÁL: Az operátortest néhány speciális másodrendű differenciálegyenletéről 337
PINTZ JÁNOS: Siegel-gyökök és a prímszámtétel 355
ERDŐS L. PÉTER: Egy Ramsey-típusú tétel 361
DÉNES TAMÁS: Páros fokszámú reguláris gráfok szögpont szerinti „evolúciója" 365
MÁTYÁS FERENC: Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok elemeinek hányadosairól 379
Feladatrovat 391
Társulati élet 397
Könyvismertetés 423



ALEXITS GYÖRGY

(1899. január 5.—1978. október 14.)

A magyar matematikusok Nesztorának nyolcvanadik születésnapját készültünk megünnepelni, s fájó megdöbbenéssel vettük a lesujtó hírt: bensőséges ünnep helyett csak emlékülést tarthatunk. Elvesztettük a matematikai analízis nemzetközileg megbecsült kutatóját, matematikus nemzedékek nevelőjét, a tudománypolitika fáradhatatlan harcosát, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnökét, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagját: elvesztettük Alexits Györgyöt.*

Pályája, mint annyi kortársáé, a legsúlyosabb nehézségek között, a maradi társadalom elleni harcokban, létbizonytalanságban indult. Az érettségi után frontszolgálat, hazatérve lelkes bekapcsolódás a Szocialista Diákok Szövetségének munkájába, a Tanácsköztársaság bukása után kizáratás az egyetemről, emigráció, egyetemi tanulmányok és doktorátus Grácban, amely itthon semmiféle képesítést nem jelentett: ez volt a kezdet. Próbálkozások a legkülönfélébb foglalkozásokkal, egy év Romániában egyetemi előadóként, míg végre engedélyt kaphatott, hogy tanári oklevelet szerezzen. Már harminc éves, mikor polgári iskolai helyettes tanárként alkalmazzák, s újabb két év telik el, míg rendes tanári kinevezést kap. Eközben megindul matematikai kutató munkája a görbeelmélet területén, s oly kiváló eredménnyel, hogy meghívást kap Bécsbe, hogy ott előadást tartson. Ez végre itthon is felhívja rá a figyelmet, középiskolai beosztást kap, majd — már 42 évesen — középiskolai tanári kinevezést, lehetőséget előadások tartására a budapesti műszaki egyetemen, s végre magántanári címet.

* Alexits György tudományos munkásságának ismertetése a Matematikai Lapok 19. kötetének 221—235. lapjain található.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A nehezen kivívott elismertetés rövid életű, hiszen Alexits György nemcsak tudós, hanem kommunista is: részvétel az ellenállási mozgalomban, s a dachaui koncentrációs tábor vár rá. Hosszú életének jóval túl a felén éri a felszabadulás, s várja az ezernyi feladat.

Csodálatra méltó energiával veszi ki a részét mindebből. Előbb gimnáziumi igazgató, majd másfél évig — s milyen viharos időszakban — közoktatásügyi államtitkár, aztán egy évig a Tudományos Tanács főtitkáraként oroszlánrészt vállal a kulturális élet szocialista újjászervezéséből, kutató intézetek tucatjainak létrehozásából, a Magyar Tudományos Akadémia átszervezéséből. Az újjáalakult Akadémia első főtitkára, közben egyetemi tanári kinevezést nyer a Budapesti Műszaki Egyetem Vegyészmérnöki karának matematikai tanszékére, a Magyar Tudományos Akadémia levelező, majd egy év múlva rendes tagja lesz, s a Szegedről Budapestre települt Bolyai János Matematikai Társulat elnökévé választják.

Túl van immár ötvenedik életévén, amikor a nyugodt tudományos alkotómunka lehetőségéhez jut. Egyre jobban elmélyül az approximációelmélet, az ortogonális sorok elmélete aktuális problémáiban, s ezt számos új gondolattal, nagy horderejű felfedezésekkel gazdagítja. Hamarosan kialakul tanítványainak köre, akiknek nagy része ma már maga is elismert tudós. 1960-ban jelenik meg először németül, később több más nyelven is, az ortogonális sorok konvergenciaproblémáiról írt nagy monográfiája. 1967-ben megválva a műegyetemi tanszék vezetésétől a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézetének tudományos tanácsadójaként dolgozott tovább, időközönként számos külföldi egyetemen vállalva vendégprofesszori teendőket. Aktív tevékenységét szinte utolsó napjáig folytatta.

A fényesen kiérdemelt elismerés külső jeleit alig lehet elsorolni: Kossuth-díj és Állami díj, akadémiák tiszteletbeli tagsága, több egyetem tiszteletbeli doktori címe, a Magyar Szabadság Érdemrend, a Magyar Köztársasági Érdemrend, a Munka Érdemrend arany fokozata, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnöki tiszte, és számos további kitüntetés, megtisztelő cím, köztük nem utolsó sorban a matematika tudományos utánpótlásának nevelésében való kiemelkedő munkáért odaítélt Szele Tibor Emlékérem jelzi a társadalom háláját.

A matematikai kutatás és a matematika oktatása mellett bőven kivette a részét a tudomány népszerűsítésének feladatából is: ilyen előadásokat tartott számos témáról, ragyogóan megírt könyvben elemezte Bolyai János egyéniségét.

Lehetetlen úgy elbúcsúzni Alexits Györgytől, hogy a tudós, a tanár, a nevelő, a tudománypolitikus mellett szót ne ejtsünk az emberről is. Arról a sokszínű emberről, aki olyan széles területeken volt tájékozott, akit minden érdekelt, ami szép, ami a kultúrához tartozik, aki oly szívesen, oly lelkesen tudott elmélyült művészi, zenei ismereteiről beszélni. Elvesztése a nemzetközi matematikának, a magyar tudományos életnek, tanítványainak, barátainak mélyen megrendítő élmény, amelyet csak az a tudat enyhít, hogy műveiben továbbra is köztünk marad.

ALEXITS GYÖRGY TUDOMÁNYOS MUNKÁINAK JEGYZÉKE[1]

Könyvek

[a] Matematika vegyészek számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1951. 356 o. (Fenyő Istvánnal együtt); 2. átdolgozott kiadás, 1955. 5. kiadás, 1966.
[b] Bolyai János, Művelt Nép Könyvkiadó, Budapest, 1952. 123 o.
[c] Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960. 307 o.

[1] Ez az irodalomjegyzék kizárólag a szorosabban vett matematikai munkákat tartalmazza, így a didaktikai, tudománypolitikai, vagy filozófiai munkák ebben a jegyzékben nem szerepelnek.

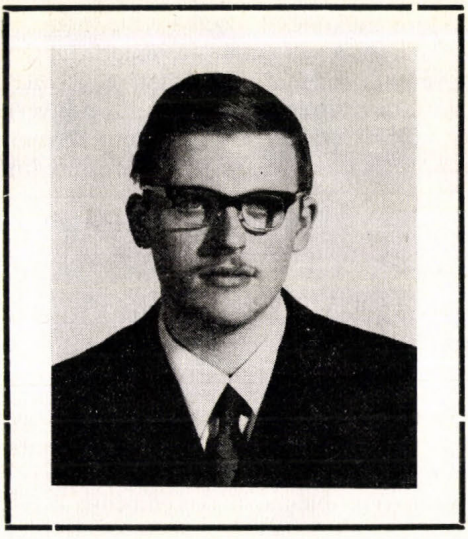
[d] Convergence problems of orthogonal series, Akadémiai Kiadó, Budapest, Pergamon Press, Oxford—London—New York—Páris, 1961. IX+350 o. (A német nyelvű kiadás kibővített változata.)
[e] Mathematik für Chemiker, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1962. VIII+449 o. (Fenyő Istvánnal együtt.) (A magyar nyelvű könyv 3. kiadásának fordítása.)
[f] Проблемы сходимости ортогональных рядов, Москва, 1963. 359 o. (Az angol nyelvű kiadás orosz fordítása.)
[g] Les méthodes mathématiques en chimie, Akadémiai Kiadó, Budapest, Masson et Cie, Paris, 1969. 427 o. (Fenyő Istvánnal együtt.) (A német nyelvű változat francia kiadása.)
[h] Bolyai János világa, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977, 69 o.

Cikkek

[1] Ein Theorem über die Laplacesche Differentialgleichung, Inauguraldissertation, Graz, 1924.
[2] Remarque sur les coefficients de Fourier d'une fonction continue, Bulletin Sci. Math. Soc. Roumaine Sci. *29* (1926), 1—3.
[3] Sur les valeurs limites d'une fonction analytique et sur les séries de puissances sur la circonférence du cercle de rayon un, Bulletin Timişoara *1* (1926), 198—212.
[4] Sur les séries trigonométriques conjuguées, Comptes Rendus, Paris *182* (1926), 1599—1601.
[5] Sur les valeurs d'une fonction analytique prises sur la circonférence du cercle à rayon unité, Comptes Rendus, Paris *183* (1926), 338—340.
[6] Über den Grad der Annäherung durch die Cesàroschen Mittel der Fourierreihe, Acta Sci. Math. *3* (1927), 32—37.
[7] Zwei Sätze über Fourier-Koeffizienten, Math. Zeitschrift *27* (1928), 65—67.
[8] Über die Annäherung einer stetigen Funktion durch die Cesàroschen Mittel ihrer Fourierreihe, Math. Annalen *100* (1928), 264—277.
[9] Über eine Hadamardsche Fragestellung, Math. Zeitschrift *30* (1929), 43—46.
[10] Über die analytische Darstellung willkürlicher Funktionen, Math. Zeitschrift *30* (1929), 47—52.
[11] Über die Erweiterung einer Baireschen Funktion, Fundamenta Math. *15* (1930), 51—56.
[12] Über das topologische Produkt der im kleinen zusammenhängenden Räume, Monatshefte für Math, und Physik *39* (1932), 263—266.
[13] Über Baumkurven, Monatshefte für Math. und Physik *40* (1933), 407—410.
[14] Über im kleinen zusammenhängende Kontinua, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums *7* (1934—35), 13.
[15] Az új görbeelmélet, Matematikai és Fizikai Lapok *44* (1937), 1—37.
[16] Homogén racionális görbékről, Matematikai és Fizikai Lapok *44* (1937), 38—39.
[17] A halmazelméleti geometria újabb fejlődése, Matematikai és Fizikai Lapok *45* (1938), 39—77.
[18] Sur la notion d'écart dans les espaces abstraits, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III *31* (1938), 36—42.
[19] Sur la structure des courbes régulières, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III *31* (1938), 104—107.
[20] A torzió fogalma metrikus terekben, Matematikai és Fizikai Lapok *46* (1939), 13—30.
[21] Über die Verteilung der irrationalen Punkte in lokal nicht zusammenhängenden Kontinua, Compositio Math. *6* (1939), 153—160.
[22] La torsion des espaces distanciés, Compositio Math. *6* (1939), 471—477.
[23] Sur un problème concernant la structure des ensembles punctiformes, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III *32* (1939), 94—99.
[24] Les espaces réguliers et le problème de métrisation, Commentarii Math. Helvetici, *13* (1940—41), 1—5.
[25] Fondements d'une théorie générale de la courbure linéaire, Commentarii Math. Helvetici *13* (1940—41), 257—276. (Egerváry Jenővel együtt.)
[26] A Fourier-sor Cesàro-közepeivel való approximáció nagyságrendjéről, Matematikai és Fizikai Lapok *48* (1941) 410—422.
[27] Über verstreute Mengen, Math. Annalen *118* (1942), 379—384.
[28] Sur la convergence des séries de polynômes orthogonaux, Commentarii Math. Helvetici *16* (1943), 200—208.
[29] Sur la sommation forte des séries orthogonales, Commentarii Math. Helvetici *18* (1945—46), 122—128.
[30] Sur la convergence des séries lacunaires, Acta Si. Math. *11* (1946—48), 251—253.
[31] Sur la convergence des séries orthogonales lacunaires, Acta Sci. Math. *13* (1949—50), 14—17.
[32] Sur la convergence d'une classe de séries orthogonales, Acta Sci. Math. *13* (1949—50), 18—20.
[33] Sur la convergence et la sommabilité presque partout des séries de polynomes orthogonaux, Acta Sci. Math. *12* B (1950), 223—225.

[34] Théorie mathématique du trafic de marchandises sous le régime du capitalisme de monopole, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *1* (1950), 17—35.
[35] Az elméleti fizika és technika sorfejtései által elérhető megközelítések nagyságrendjéről. MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl. *1* (1951), 274—278.
[36] Über die Transformierten der arithmetischen Mittel von Orthogonalreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *2* (1951), 1—9.
[37] Bolyai János, Mat. Lapok *3* (1952), 107—110.
[38] A Lebesgue-függvények jelentősége az ortogonális polinomok szerint haladó sorok konvergenciájának problémájában. Az I. Magyar Mat. Kongr. Közl. (1952), 233—248.
[39] Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *3* (1952), 29—42.
[40] Über den Annäherungsgrad der Orthogonalpolynomentwicklungen, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *3* (1952), 43—48.
[41] Sur les sommes de fonctions orthogonales, Annales de la Société Polonaise de Mathématique *25* (1952), 183—187.
[42] Bolyai János élete és munkássága. MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl. *3* (1953), 131—150.
[43] Über den Einfluss der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *4* (1953), 95—101.
[44] Sur la sommabilité des séries orthogonales, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *4* (1953), 181—189.
[45] Eine Bemerkung zur Konvergenzfrage des Lagrangeschen Interpolationsverfahrens, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *4* (1953), 233—236.
[46] Жизнь и деятельность Яноша Бояи, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *5* (1954), Supplementum, 1—20.
[47] Sur la caractérisation d'une classe de fonctions dérivables par leurs séries de Fourier, Proceedings Intern, Congr. Matem. Amsterdam *1* (1954), 443.
[48] La convergence presque partout des développements de fonctions continues en séries de polynomes orthogonaux, Proceedings Intern. Congr. Matem. Amsterdam *1* (1954), 443—444.
[49] Über die Konvergenz der Orthogonalpolynomentwicklungen, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *6* (1955), 1—4.
[50] Sur la caractérisation de certaines classes de fonctions au sens de la théorie constructive des fonctions, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *6* (1955), 41—46.
[51] Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen, Acta Sci. Math. *16* (1955), 127—129.
[52] Ein Summationssatz für Orthogonalreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *7* (1956), 5—9.
[53] Über die Bedeutung der strukturellen Eigenschaften einer Funktion für die Konvergenz ihrer Orthogonalentwicklungen, Acta Sci. Math. *18* (1957), 131—139. (Králik Dezsővel együtt.)
[54] Sur la convergence et la sommabilité des séries orthogonales lacunaires, Acta Sci. Math. *18* (1957), 179—188.
[55] Sur la convergence absolue de certains développements orthogonaux, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *8* (1957), 303—310.
[56] Die Entwicklung des allgemeinen Raumbegriffes, Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Math. *1* (1957), 85—91.
[57] Une contribution à la théorie constructive des fonctions, Acta Sci. Math. *19* (1958), 149—157.
[58] Über die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihen bei jeder Anordnung ihrer Glieder, Acta Sci. Math. *19* (1958), 158—161.
[59] Sur quelques résultats et problèmes concernant la convergence et la sommabilité des séries orthogonales générales, Revista de la Unión Matemática Argentina *20* (1960), 33—39.
[60] Über Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *11* (1960), 387—399. (Králik Dezsővel együtt.)
[61] Über das Konvergenzverhalten einer Klasse von Orthogonalreihen, Annales Univ. Sci. Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Math. *3—4* (1960—61), 15—18. (Tandori Károllyal együtt.)
[62] Über die absolute Summierbarkeit und die Konvergenz der Orthogonalreihen, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Séries A *7* (1962), 363—371. (Králik Dezsővel együtt.)
[63] Sopra l'approssimazione in senso forte delle funzioni appartenenti ad una classe di Lipschitz, Atti VII Congresso Un. Mat. Italiana Genova (1963), 322—323.
[64] Über den Annäherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Series A *8* (1963), 317—327. (Králik Dezsővel együtt.)
[65] Sur les bornes de la théorie de l'approximation des fonctions continues par polynômes, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Series A *8* (1963), 329—340.
[66] Über die Approximation im starken Sinne, On Approximation Theory, Proceedings of Conference in Oberwolfach 1963, Basel (1964), 89—95.

[67] Über die Approximation im starken Sinne, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *16* (1965), 27—32. (Leindler Lászlóval együtt.)
[68] Über die Approximation mit starken de la Vallée-Poussinschen Mitteln, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *16* (1965), 43—49. (Králik Dezsővel együtt.)
[69] Über die Approximation im starken Sinne, Acta Sci. Math. *26* (1965), 93—101. (Králik Dezsővel együtt.)
[70] Einige Beiträge zur Approximationstheorie, Acta Sci. Math. *26* (1965), 211—224.
[71] A note on the best approximation by linear forms of functions, Acta Sci. Math. *27* (1966), 49—54. (S. Knapowskival együtt.)
[72] On the characterization of classes of functions by their best linear approximation, Acta Sci. Math. *29* (1968), 107—114.
[73] Sur la caractérisation des fonctions dérivables par leur approximation trigonométrique, Studia Sci. Math. Hungarica *3* (1968), 293—297.
[74] Über die Charakterisierung von Funktionenklassen durch beste lineare Approximation, Abstract Spaces and Approximation, Proceedings of Conference in Oberwolfach 1968, Basel (1969), 126—129.
[75] On the convergence of strongly multiplicative orthogonal series, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *20* (1969), 245—251.
[76] An elementary method in the constructive theory of functions, Proceedings of the Conference on the Constructive Theory of Functions (Approximation Theory) 1969, Budapest (1972), 53—57.
[77] Remark on the law of the iterated logarithm, Studia Sci. Math. Hungarica, *5* (1970), 137—139.
[78] Characterisation of classes of functions by polynomial approximation, Acta Sci. Math. *31* (1970), 1—7. (G. Sunouchival együtt.)
[79] On the convergence of multiplicatively orthogonal series, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 22 (1971—72), 257—266. (A. Sharmával együtt.)
[80] Stochastische Unabhängigkeit und Orthogonalität, Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen *92* (1971), 1—10.
[81] The influence of Lebesgue functions on the convergence and summability of function series, Acta Sci. Math. *33* (1972), 1—10. (A. Sharmával együtt.)
[82] On the convergence of function series, Acta Sci. Math. *34* (1973), 1—9.
[83] On series of product functions, Periodica Math. Hungarica *3* (1973), 37—39. (Szép Andrással együtt.)
[84] Some remarks on the approximation in the strong sense, Analysis Math. *1* (1975), 3—8. (Králik Dezsővel együtt.)
[85] On summability of orthogonal series, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *29* (1977), 201—205. (Joó Istvánnal és Tandori Károllyal együtt.)
[86] On the absolute convergence of certain function series, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *30* (1977), 333—339. (Schipp Ferenccel együtt.)
[87] Über eine elementare reihentheoretische Methode in der Approximationstheorie, Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen *123* (1977), 143—150.



SOMORJAI GÁBOR MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGÁRÓL

HALÁSZ GÁBOR

Somorjai Gábor a Matematikai Kutató Intézet munkatársa volt. Mindössze 26 évet élt, de három, az approximációelmélethez, komplex függvénytanhoz és ezek határterületéhez tartozó témakörben is nevezetes eredményeket ért már el, amelyekről híres külföldi matematikusok is igen elismerően nyilatkoztak.

Klasszikus elmélete van annak, hogy $p(x)=\sum_{j=1}^{s} a_j x^{n_j}$ alakú hézagos polinomok, ahol $0=n_1<n_2<\ldots n_j\to\infty$ rögzített sorozat, mikor sűrűek például a [0, 1] intervallumban folytonos függvények terében. Ettől független elmélet a racionális törtfüggvényekkel való approximáció. A kettő összekapcsolásaként sejtette D. J. Newman, az approximációelmélet egyik ma élő legnagyobb művelője, hogy a fenti polinomok hányadosai már mindig sűrűek. Somorjai első eredménye ennek igazolása volt. A problémát ő maga is továbbvitte, megmutatva például, hogy a számlálóban és nevezőben „nagyon" különböző sorozatot előírva már nem igaz az állítás, és mások, köztük Newman is kapcsolódtak hozzá. A hézagos approximációk témakörében még a következő szép, eredeti eredményét említjük. Tetszőleges $\varepsilon>0$ és $M>M(\varepsilon)$ esetén azon $p(x)$ polinomok, amelyekre

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{n_j}<M,$$

sűrűek az $(\exp(-(2-\varepsilon)M), 1)$ intervallumban, de nem az $(\exp(-(2+\varepsilon)M), 1)$ intervallumban.

Komplex függvénytani működését azzal kezdte, hogy önállóan általánosította, pusztán az általánosítás létéről tudva, a meromorf függvények értékelosztásáról szóló, a komplex függvénytanban ma is meghatározó szerepet játszó Nevanlinna-féle elmélet főtételét konstans értékek helyett „függvényértékekre". (A probléma sokáig nevezetes sejtés volt és csak nemrégen oldották meg.) Hasonló szellemben általánosított egy aszimptotikus értékekre vonatkozó eredményt: Ha $f(z)$ ϱ rendű egészfüggvény, (azaz

$$\varrho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log \max_{|z|=r} |f(z)|}{\log r}\Bigg)$$

akkor legfeljebb 2ϱ számú különböző olyan 1/20-nál kisebb rendű $a(z)$ egészfüggvény található hozzá, amelyre

$$f(z)-a(z)\to 0 \quad (z\to\infty)$$

alkalmas, végtelenhez tartó görbe mentén. Konstans $a(z)$ esetén ez a híres Denjoy—Carleman—Ahlfors-tétel; a probléma 1/20 helyett a várható legjobb 1/2-del nevezetes, Hayman „Research Problems in Function Theory" c. gyűjteményében is szereplő, Denjoytól származó probléma, az ő eredménye az első ilyen irányú általános tétel.

Kővári Tamás kérdezte, hogy az egységkörben analitikus és lezártján folytonos függvényeket lehet-e „interpoláló" eljárással közelíteni; a probléma Turán Pál approximációelméleti problémagyűjteményében is szerepel. Somorjai megmutatta, hogy a függvény általános 0 mértékű halmazon való ismerete sem elegendő az approximálhatósághoz és ez a pontos válasz.

A felsoroltakon kívül más témákban is vannak eredményei, értékes megjegyzései. Itt legutolsó eredményét említjük G. Ehrling svéd kutató problémájában. Legyen $p(z)$ n-edrendű racionális törtfüggvény, (legfeljebb n-edfokú polinomok hányadosa.) Tegyük fel, hogy az egységkörvonalon nincs pólusa és legyen

$$p(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \quad (|z| = 1)$$

az ott érvényes Laurent-sora. Ekkor

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < cn\sqrt{\log n} \max_{|z|=1} |p(z)|$$

abszolút c konstanssal. Az eredmény, ($\sqrt{\log n}$-től eltekintve a várható legjobb), jelentőségben ugyan elmarad az előbbiektől, de igen szellemes bizonyítása is arról tanúskodik, csakúgy mint korábbi eredményei, hogy a matematika és ezen belül az analízis nagy reménységét vesztettük el benne.

SOMORJAI GÁBOR DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] A Müntz-type problem for rational approximation, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., *27* (1976), 197—199.

[2] On the density of quotients of lacunary polynomials, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., *30* (1977), 149—154.

[3] Müntz—Jackson type theorems via interpolation (Márki Lászlóval és Szabados Józseffel együtt), Acta Math. Acad. Sci. Hungar., *29* (1977), 185—191.

[4] On discrete linear operators in the function space A (megjelenés alatt a szófiai approximációelméleti konferencia kötetében).

[5] Befejezetlen, aszimptotikus értékekről szóló, komplex függvénytani tárgyú dolgozatát Halász Gábor rendezte sajtó alá.

NÉHÁNY BIZONYÍTÁS AZ EGÉSZ SZÁMOK PRÍMTÉNYEZŐS FELBONTÁSÁNAK EGYÉRTELMŰSÉGÉRE

SURÁNYI JÁNOS

A TÉTEL TÖRTÉNETÉRŐL

1. Egész számok tulajdonságaira vonatkozó problémák vizsgálatában döntő szerepet játszik a következő tétel.

A SZÁMELMÉLET ALAPTÉTELE: *Minden 0-tól és egységtől különböző egész szám felbontható véges sok felbonthatatlan tényező szorzatára és ez a felbontás lényegében egyértelmű.*

A „lényegében" úgy értendő, hogy ha van két felbontás, akkor ezeknek a tényezői összepárosíthatók kölcsönösen egyértelműen úgy, hogy az egymásnak megfelelő tényezők legfeljebb egység szorzóban különbözzenek.

*Egység*nek nevezzük azokat az egészeket, amelyek minden egésznek osztói, vagyis az 1-et és -1-et.[1]

*Felbonthatatlan*nak nevezünk egy 0-tól és egységtől különböző egész számot, amelyik nem bontható két nála kisebb abszolútértékű tényező szorzatára.[2]

Két egész számot, amelyek csak egység szorzóban különböznek, egymás *asszociált*jának nevezünk. Asszociáltak oszthatóság szempontjából nem különböznek lényegesen: ugyanazok az osztóik és ugyanazok a többszöröseik.

2. Elég különös a tétel története. Euklidesz Elemeiben nem esik róla említés, noha a 7. könyvben bebizonyít az alaptétellel lényegében ekvivalens tételeket, amelyekről alább még lesz szó. Különböző megjegyzések számok osztóival kapcsolatban arra mutatnak, hogy már a görögök is használták a számok felbonthatatlan tényezőkre bontását. Később a 16—18. században, a számelmélet kialakulása során minden esetre állandóan használják a számok prímtényezős felbontását, anélkül, hogy utalnának egyértelműségére, hogy az egyértelműség bizonyítását ne is említsem.

Davenport [1 19. old.][3] írja ezzel kapcsolatban: „Talán az, hogy ez a tétel hiányzik Euklidesznél, magyarázza, hogy miért siklik át fölötte magyarázat nélkül számos iskolakönyv. Egyikük (most is [1952] használatban levő) «a gondolkozás egy formája»-ként írja le, ami aztán biztosan nem."

Euklidesz rendkívüli tekintélyének minden bizonnyal döntő szerepe van a dologban, viszont az is érthetőnek tűnik, hogy nála miért nem szerepel a tétel-

[1] Azért használom ezt a kissé bonyolult fogalmazást, részben mert ez világít rá az említett számok szerepére oszthatósági kérdésekben, részben pedig azért, mert a kimondott tétel átvihető más területekre is (pl. racionális- vagy valós- vagy komplex-együtthatós polinomok), és itt az egységek köre sokkal bővebb lehet (példáinkban a 0-tól különböző konstans polinomok).

[2] Megszokottabb a prímszám elnevezés. Gauss bizonyításával kapcsolatban visszatérek rá, hogy miért helyettesítem egyelőre ezzel az elnevezéssel, amelyik különben a definícióban megfogalmazott tulajdonságot fejezi ki.

[3] A kövér számok a cikk végén levő irodalomjegyzékre utalnak.

Az ókori matematika nem beszél szorzatról csak téglalap területéről, téglatest térfogatáról. Természetesen nem szól algebráról sem, de a geometria nyelvén egész fejlett algebrát ír le, számos hasznos azonosságot, amiket azután — ugyancsak geometriai nyelven megfogalmazott — egyenletek megoldására is felhasznál. (Egyenleteinek jó része — mai megfogalmazásban — másodfokú algebrai egyenlet.) Van der Waerden [**10** 193—203. old.] az euklideszi műnek ezt a részét geometriai algebrának nevezi.

Ez a szemlélet még a 16. században is él. François Viète (1540—1603) pl., aki az elsők közt kezdi betűkkel jelölni az egyenlet együtthatóit, még „ragaszkodott a homogenitás görög elvéhez, ... nála távolságot csak távolsághoz, területet területhez, és térfogatot csak térfogathoz lehet hozzáadni. Még azzal kapcsolatban is kételyei voltak, hogy a harmadfokúnál magasabbfokú egyenleteknek van-e értelmük..."[4]

Ezek után könnyen elfogadható, hogy, ha a görögök konkrét számokat össze is tudtak szorozni, háromnál többet is, egy általános, akárhány tényezős szorzatnak még a megfogalmazására sem volt meg a kifejező eszközük.

Felmerülhet a kérdés, hogy nem magától értetődő-e a tétel, hiszen megszoktuk, használjuk és nem lett belőle még semmi probléma. Azt persze aligha lehet bizonyítani, hogy valami nem magától értetődő, de a következő példa az alaptétel esetében elég jól érzékeltetheti ezt.

Szorítkozzunk csak a páros egészekre. Ebben a számkörben is korlátlanul elvégezhető az összeadás, kivonás és szorzás, hiszen két páros szám összege, különbsége és szorzata is páros.

Mindazok az azonosságok, amik fennállnak tetszésszerinti egészek között, természetesen fennállnak speciálisan páros egészek között is. Ez a számkör tehát a műveletekkel kapcsolatos tulajdonságait illetően egész hasonlóan viselkedik, mint az egész számok (gyűrűt alkot).

Értelmezhetjük benne az oszthatóságot is ($\vdots_2$-vel fogjuk jelölni). Azt mondjuk, hogy az a páros szám osztója (a páros számok körében) a b páros számnak, ha van olyan c *páros* szám, amelyre $b = ac$. Eszerint $14 \vdots_2 168$, mert $168 = 14 \cdot 12$, és 12 páros, $6 \vdots_2 50$, $8 \vdots_2 88$, mert ugyan $88 = 8 \cdot 11$, de 11 nem páros, az meg fel sem merül kérdésként, hogy 11 osztója-e a 88-nak, mert 11 nem tartozik a páros számok közé.

Itt azok a páros számok felbonthatatlanok, amelyek az egész számok körében nem oszthatók 4-gyel; semelyik szám nem osztója önmagának és nincs olyan szám amelyik minden páros számnak osztója volna ($\vdots_2$ értelemben).

Ebben a számkörben már nem egyértelmű a felbonthatatlan tényezőkre bontás, hiszen

$$36 = 2 \cdot 18 = 6 \cdot 6,$$

$$840 = 2 \cdot 2 \cdot 210 = 2 \cdot 6 \cdot 70 = 2 \cdot 10 \cdot 42 = 2 \cdot 14 \cdot 30 = 6 \cdot 10 \cdot 14$$

egy-egy számnak csupa különböző felbontása felbonthatatlan tényezőkre.

Az alábbiakban az alaptétel hat, jellegben is lényegesen különböző bizonyítását mutatom be. Véges sok felbonthatatlan tényezőre bontás létezése könnyen következik abból, hogy egy 0-tól különböző egésznek egységtől különböző egészekre bontásában a tényezők abszolút értéke kisebb, mint az eredeti számé. Így a továbbiakban csak az egyértelműség bizonyításával foglalkozom, ezt fogom érteni alaptételen.

[4] Struik [**8** 99—100. old.].

3. Bármi volt is az oka, a tény minden esetre az, hogy bár a számelmélet, elsősorban Fermat mélyreható vizsgálatai nyomán, erősen fejlődött a 16. századtól, még Legendre 1798-ban megjelent számelmélet könyve sem tesz említést az alaptételről; azt csak Gauss 1801-ben megjelent híres Disquisitiones arithmeticae című könyve fogalmazza meg először és bizonyítja be. Gauss a következő tételt bizonyítja:

Ha egy felbonthatatlan szám nem osztója egy szorzat egyik tényezőjének sem, akkor nem osztója a szorzatnak sem.

Ebből könnyen következik az alaptétel indirekt úton. Tegyük fel ugyanis, hogy valamilyen pozitív egész kétféle felbontása pozitív felbonthatatlan tényezőkre

$$p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_l .$$

Feltehetjük, hogy a mindkét oldalon esetleg előforduló egyenlő tényezőkkel már egyszerűsítettünk, tehát minden p különbözik az összes q-tól. De ekkor p_1 nem osztója $q_1, q_2, \dots, q_l$ egyikének sem, tehát tételünk szerint a szorzatuknak sem. A bal oldal szerint viszont osztója, tehát ellentmondásra jutottunk. Nem létezhet tehát olyan egész szám, amelyiknek volna két lényegesen különböző felbontása felbonthatatlan tényezőkre.

4. Gauss bizonyítása lényegében teljes indukciós bizonyítás (megtalálható magyarul is [**6** 16—17. old.]). Itt az indukciós jelleget jobban kidomborítva adjuk a bizonyítást.

A tételt állító formában így mondhatjuk ki:

Ha egy felbonthatatlan szám osztója egy szorzatnak, akkor osztója valamelyik tényezőjének is.

A felbonthatatlan számok itt megfogalmazott tulajdonságát szokás prím tulajdonságnak nevezni. A tétel ekkor fogalmazható így:

A felbonthatatlan számoknak megvan a prím tulajdonsága. (Ezért kerültem eddig a prímszám elnevezés használatát.)

Két tényezős szorzatra bizonyítjuk a tételt. Általánosítását teljes indukcióval akárhány tényezőre az olvasóra bízzuk.

Tegyük fel, hogy egy felbonthatatlan p szám osztója az $a \cdot b$ szorzatnak. Ha osztója a-nak, akkor a tétel igaz. Ha nem osztója a-nak, akkor teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy osztója b-nek.

Ha $b=0$ $\qquad p|a\cdot 0, \quad p|0=b$

az állításnak megfelelően.

Tegyük fel, hogy $p|a\cdot b_0$, $b_0>0$, és hogyha $0\leqq b<b_0$ és $p|ab$ akkor $p|b$. (Ne felejtsük el, hogy feltettük, $p\nmid a$.)

Ha $b_0>p$, akkor $p|a\cdot(b_0-p)=a\cdot b_0-a\cdot p$. Itt $0<b_0-p<b_0$, tehát feltételünk szerint $p|b_0-p$, de akkor $p|b_0$ is fennáll.

Ha $b_0\leqq p$, akkor osszuk el p-t maradékosan b_0-lal:

$$p = b_0 c + b_1, \quad \text{ahol} \quad 0 \leqq b_1 < b_0 .$$

Szorozzuk a-val:

$$ap = ab_0 c + ab_1, \quad \text{tehát} \quad a\cdot b_1 = ap - ab_0 c$$

osztható p-vel, mert $a\cdot b_0$ osztható vele. Mivel $0\leqq b_1<b_0$ tehát indukciós feltevésünk szerint $p|b_1$, de mivel $b_1<b_0\leqq p$, ez csak úgy lehet, hogy $b_1=0$, azaz $b_0|p$.

Nem lehet $b_0=1$, mert $a\cdot 1=a$ feltétel szerint nem osztható p-vel. Mivel p felbonthatatlan és b_0 pozitív, így csak $b_0=p$ lehet, tehát b_0 osztható p-vel.

Az állítás igaz volta tehát öröklődik a b_0-nál kisebb b-ről b_0-ra és egy esetben ($b=0$) igaz, így minden nem-negatív b-re igaz.

Azt is tudjuk, hogy $a \cdot b$-vel együtt $a \cdot (-b)$ is osztható p-vel és ha $-b$ osztható p-vel, akkor b is, így könnyen látható, hogy minden egészre igaz a tétel.

EGY GEOMETRIAI BIZONYÍTÁS

5. Kalmár László [4] a következő ún. négyszám-tételből, ill. kézenfekvő általánosításából vezette le a tételt:

NÉGYSZÁM-TÉTEL *Ha az a, b, c, d egész számokra teljesül az*

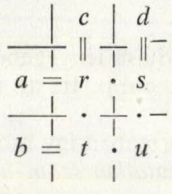
$$a \cdot b = c \cdot d$$

egyenlőség, akkor van olyan r, s, t, u egész, amelyekre

$$a = r \cdot s, \quad c = r \cdot t,$$

$$b = t \cdot u, \quad d = s \cdot u.$$

Az összefüggések az oldalt látható táblázat alapján jegyezhetők meg könnyen: A tétel az egyik, majd a másik szorzat tényezőinek száma szerinti teljes indukcióval könnyen általánosítható:



Ha az $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$ *egészekre*

$$a_i \cdot \ldots \cdot a_k = b_1 \cdot \ldots \cdot b_l,$$

akkor vannak olyan t_{ij} $i=1, \ldots, k$; $j=1, \ldots, l$ *egészek, amelyekre*

$$a_i = t_{i1} \cdot \ldots \cdot t_{il} \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$b_j = t_{1j} \cdot \ldots \cdot t_{kj} \quad j = 1, \ldots, l.$$

(A részleteket az olvasóra bízom.)

Ebből már egyszerűen következik az alaptétel. Ha

$$p_1 \ldots p_k = q_1 \ldots q_l$$

egy szám két felbontása felbonthatatlan tényezőkre, akkor p_i felbonthatatlan volta miatt $t_{i1}, \ldots, t_{il}$ egy híján egységekből áll, a nem egység pedig p_i-től legfeljebb egység szorzóban különbözik. Hasonlóan $t_{1j}, \ldots, t_{kj}$ közül az egyik q_j-hez asszociált, a többi egység. Ha t_{ij} nem egység, akkor p_i-hez is, q_j-hez is asszociált, tehát azok egymáshoz is.

Mivel minden i-hez is minden j-hez is pontosan egy egységtől különböző elem van, így $k=l$ és az egységtől különböző elemek éppen a kívánt hozzárendelést szolgáltatják.

6. A bizonyítás teljességéhez tehát a négyszám-tételt kell bebizonyítanunk. Egy rácsgeometriai bizonyítást adok rá. Szorítkozzunk először arra az esetre, amikor a, b, c, d pozitív.

Rajzoljuk meg egységnyi oldalú négyzetrácsban a rácsvonalakkal párhuzamos oldalú $ABCD$ és $AEFG$ téglalapot úgy, hogy A rácspont (egy négyzet csúcsa) legyen, AB és AE továbbá AD és AG egy-egy félegyenesre essék és

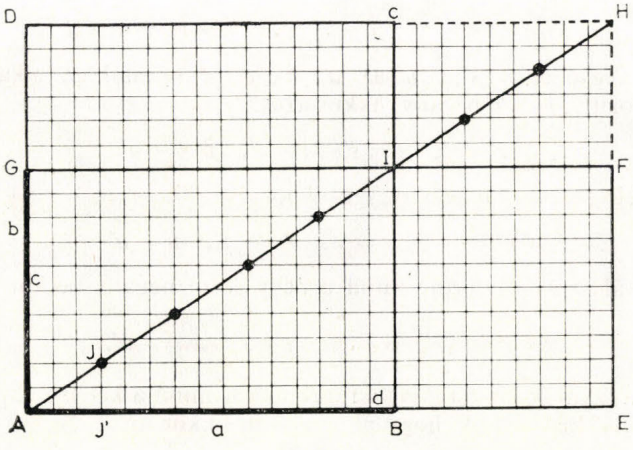
$$AB = a, \quad AD = b, \quad AE = d, \quad AG = c$$

legyen. (1. ábra) Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $a \leqq b$ és $c \leqq d$, hiszen két-két tényező felcserélése csak a fenti táblázat két sorának, ill. két oszlopának a megcserélését jelenti.

Jelöljük BC és FG metszéspontját I-vel, CD és EF meghosszabbításának a metszéspontját H-val. Az $a \cdot b = c \cdot d$ egyenlőség ez esetben azt jelenti, hogy I az AH egyenesen van. Ez könnyen látható. A teljesség kedvéért alább adom ennek a bizonyítását is.

Itt A-val együtt H és I is rácspont.

Jelöljük J-vel az AH szakasz A-hoz legközelebbi rácspontját. Az AH egyenesen végtelen sok rácspont sorakozik egymástól AJ távolságra. Toljuk el ugyanis a síkot az $\overrightarrow{AJ}$ vektorral. Ekkor a négyzetrács önmagába megy át. Ennek folytán az AJ



1. ábra

szakasz, amelyik a végpontjain kívül nem tartalmaz rácspontot — röviden *üres rácsszakasz* —, egy J kezdőpontú, ugyanilyen hosszú üres rácsszakaszba megy át, az egy következő ugyanilyen szakaszba, és így tovább. Ellenkező irányból AJ-be is egy AJ hosszúságú üres rácsszakaszt visz át az eltolás, abba egy őt megelőző üres rácsszakaszt stb.

Ebbe a rácspontsorozatba tartozik bele A, I és H is. Legyen I az A utáni r-edik rácspont, H az u-adik és J távolságát az AB, AD egyenestől jelöljük s, t-vel, akkor

$$a = r \cdot s, \quad b = t \cdot u, \quad c = r \cdot t, \quad d = s \cdot u;$$

így r, s, t, u a feladat állítását kielégítő természetes számok.

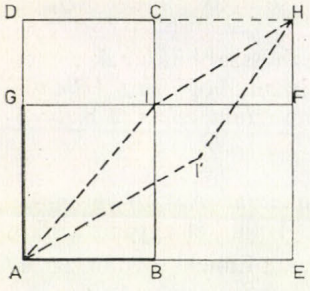
7. A bizonyítás teljességéhez azt kell még belátnunk, hogy, ha az $ABCD$ és $AEFG$ téglalapok területe egyenlő, akkor A, I és H egy egyenesre esik.

Jelöljük a síkidomok területét ugyanúgy, mint a síkidomokat, és ne tegyük fel a téglalapok területének egyenlőségét, csak kényelem kedvéért annyit, hogy a BC és FG szakaszoknak van közös pontja (2. ábra).

Ekkor

$$ABCD - AEFG = AIHD - AEHI.$$

Elhagytuk a két területből az egymással egyenlő ABI, ill. AHG féltéglalapot és hozzávettük a szintén egyenlő IHC-t, ill. IFH-t.



2. ábra

Tükrözzük a második idomot az AH szakasz középpontjára, jelöljük I tükörképét I'-vel, ekkor

$$AIHD - AEHI = AIHD - HDAI' = AIHI'.$$

Itt a jobb oldali területet pozitív előjellel kell érteni, ha a paralelogramma megadott körüljárása egyezik a két téglalapéval és negatív előjellel, ha ellentétes vele. A különbség tehát akkor és csak akkor 0, ha A, I, I' és H egy egyenesen van. Ezzel befejeztük a négyszámtétel bizonyítását pozitív egész számokra.

Ha a számok közt nem fordul elő a 0, de előfordul negatív egész, akkor fennáll az

$$|a| \cdot |b| = |c| \cdot |d|$$

egyenlőség is. Legyenek r', s', t', u' az $|a|, |b|, |c|, |d|$ számokhoz alkalmas egészek. Ha pl. a és c pozitív, b és d negatív, akkor az

$$r = r', \quad s = s', \quad t = t', \quad u = -u'$$

választás megfelel; ha a és b negatív, c és d pozitív, akkor

$$r = -r', \quad s = s', \quad t = -t', \quad u = u'$$

egy alkalmas választás, ha pedig mind a négy szám negatív, akkor megfelelő választás az

$$r = -r', \quad s = s', \quad t = t' \quad u = -u'.$$

Ha végül a számok közt a 0 is szerepel, akkor mind a két szorzat tényezői közt elő kell fordulnia. Feltehetjük, hogy pl. $a = c = 0$. Ekkor az

$$r = 0, \quad s = d, \quad t = b, \quad u = 1$$

választás megfelel, bármilyen egész is b és d.

Ezzel befejeztük a négyszám-tétel és vele együtt az alaptétel bizonyítását is.

8. Megjegyezzük, hogy a négyszám-tétel az alaptételnek nyilvánvaló következménye és L. Korselt szerint [**5** 396—397. old.] a prímtényezős felbontásból leolvasva már Euler is ismerte az állítást. Az elmondottak érdekessége az, hogy fordítva, a négyszám-tételből is következik az alaptétel, a négyszámtétel pedig egyszerűen bizonyítható az alaptétel használata nélkül.

Egy másik geometriai bizonyítás található rá [**3** 27—28. old.] alatt. A geometriai bizonyításnak szépsége mellett gyengesége is az, hogy geometriai. Gyengesége annyiban, hogy utaltam már rá, hogy az alaptétel megfelelője sok más esetben is érvényes, pl. bizonyos fajta polinomok közt. Itt már a geometriai bizonyításnak nem találunk megfelelőjét.

Könnyen átvihető viszont Kalmár bizonyítása, ő ugyanis maradékos osztást használva a-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítja a tételt. Ez a bizonyítás már átvihető polinomokra és általában minden ún. euklideszi gyűrűre.

9. A négyszám-tétel alkalmas a számelmélet több fontos tételének a bizonyítására. Így könnyen következik belőle pl. a Gauss bizonyításában használt lemma és valamivel általánosabban a következő fontos lemma, amelyik még szintén szerepel Euklidesznél:

Lemma: *Ha egy c egész osztója az a és b egészek szorzatának és a-val nincs egységtől különböző közös osztója*[5], *akkor c osztója b-nek.*

Ennek a lemmának, amit röviden euklideszi lemmának fogok a továbbiakban nevezni, a Gauss bizonyításában szereplő lemma fontos speciális esete, hiszen ha c felbonthatatlan, akkor vagy osztója a-nak, vagy nem, akkor viszont felbonthatatlan volta miatt már csak egység közös osztóik lehetnek; ekkor azonban lemmánk szerint osztója b-nek s így teljesül c-re a prím tulajdonság.

A lemma viszont így bizonyítható: Az hogy c osztója az $a \cdot b$ szorzatnak, azt jelenti, hogy van olyan d egész, amelyre

$$a \cdot b = c \cdot d.$$

Ekkor léteznek a négyszám-tételnek megfelelő r, s, t, u egészek. Második feltételünk szerint azonban r egység kell hogy legyen, és így t a c egységszerese. Ekkor a

$$b = t \cdot u$$

összefüggés szerint t, vagyis c egy egységszerese, osztója b-nek, tehát c is osztója.

Természetesen ugyanígy bizonyíthatjuk közvetlenül a négyszám-tételből azt is, hogy a felbonthatatlan számoknak megvan a prím tulajdonságuk. A továbbiakban a megszokott prím jelzőt fogom használni rájuk. További következményekre vonatkozóan utalok [4]-re.

AZ ÚGYNEVEZETT EUKLIDESZI BIZONYÍTÁS

10. Mint mondtam, Euklidesz nem is említette a számelmélet alaptételét, de minden készen állt nála a bizonyításhoz. Szerepel nála az a lemma, amelyre Gauss építette bizonyítását és az éppen bebizonyított lemma is. Ezekhez Euklidesz a legnagyobb közös osztónak a róla elnevezett algoritmussal történő meghatározásán és az algoritmusból leolvasható tulajdonságain keresztül jutott el. Számos bevezető könyv ilyen gondolatmenettel bizonyítja az alaptételt (lásd pl. [2 20—23. old.]), így ezt a bizonyítást, amit szokás röviden euklideszi bizonyításként emlegetni, nem részletezem, hanem egy újabb változatát mutatom be, bár ez is elég ismert.

A legnagyobb közös osztó az euklideszi algoritmusból következtethető egyik fontos tulajdonsága, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legnagyobb közös osztója előállítható alkalmas $u_1, u_2, \ldots, u_k$ egész számokkal

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k$$

alakban. Az alábbiakban közvetlenül ezt bizonyítjuk be.

11. Egy olyan szám létezését fogjuk bizonyítani, amelyik osztója az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok mindegyikének és amelyik ezeknek a számoknak minden közös osztójával osztható. Az ilyen osztót *kitüntetett közös osztó*nak fogjuk nevezni.

[5] Más szóval a és c *relatív prím* egymáshoz. Az utóbbi relációt azzal szokás értelmezni, hogy legnagyobb közös osztójuk 1, a legnagyobb közös osztóról eddig azonban nem volt szó. A fenti fogalmazás arra is rávilágít, hogy a relatív prímnek lenni egyszerűbb fogalom mint a legnagyobb közös osztó.

Egyáltalán nem magától értetődő, hogy létezik kitüntetett közös osztó. Ha viszont van, akkor az asszociáltjai is nyilván kitüntetett közös osztók, és ha ezek 0-tól különbözők, akkor közülük a pozitív a közös osztók legnagyobbika. Valóban egy pozitív egész nem kisebb az osztóinak abszolút értékénél és számunk pozitív és osztható $a_1, a_2, \ldots, a_k$ minden közös osztójával.

Bebizonyítjuk tehát a következőket:

Tétel: *Tetszésszerinti $a_1, a_2, \ldots, a_k$ egész számoknak van kitüntetett közös osztója.*

Csak egy nem-negatív kitüntetett közös osztó van és az előállítható alkalmas $u_1, u_2, \ldots, u_k$ egészekkel

$$a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_ku_k$$

alakban.

Bizonyítás: Képezzük az összes

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k$$

alakú számok $\mathcal{I}$ halmazát, ahol $x_1, \ldots, x_k$ tetszésszerinti egész szám.

Azt állítjuk, hogy van olyan d nem-negatív egész, hogy $\mathcal{I}$ a d többszöröseiből áll.

Ha $a_1=\ldots=a_k=0$, akkor $\mathcal{I}$ egyedül a 0-ból áll, és a 0 minden többszöröse 0, tehát $d=0$ a keresett szám.

Ha pl. $a_1\neq 0$, akkor $x_1=\frac{|a_1|}{a_1}$, $x_2=\ldots=x_k=0$ választással kapjuk, hogy $|a_1|\in\mathcal{I}$, tehát van $\mathcal{I}$-ben pozitív egész. Ekkor az $\mathcal{I}$-beli pozitív egészek közt van legkisebb. Legyen ez

$$d = a_1u_1+\ldots+a_ku_k. \tag{1}$$

Legyen továbbá

$$t = a_1x_1+\ldots+a_kx_k$$

$\mathcal{I}$ egy tetszésszerinti eleme. Osszuk el t-t d-vel:

$$t = d\cdot q+d_1, \quad \text{ahol} \quad 0 \leqq d_1 < d.$$

$$d_1 = t-d\cdot q = a_1(x_1-u_1q)+a_2(x_2-u_2q)+\ldots+a_k(x_k-u_kq)$$

is benne van $\mathcal{I}$-ben, nem negatív és kisebb mint d. Mivel d az $\mathcal{I}$ legkisebb pozitív eleme, így $d_1=0$ kell hogy legyen, azaz d/t.

Az világos, hogy d minden többszöröse benne van $\mathcal{I}$-ben. Ezzel állításunkat bizonyítottuk. Azt állítjuk, hogy d a tétel feltételeit kielégítő szám.

$x_1=\ldots=x_{i-1}=x_{i+1}=\ldots=x_k=0$ $x_i=1$ választással adódik, hogy minden a_i benne van $\mathcal{I}$-ben, tehát osztható d-vel. Az (1) alakból adódik, hogy az a_i-k minden közös osztója osztója d-nek, d tehát kitüntetett közös osztó, és (1) alakban előállítható.

Ha a nem negatív d_1 is kitüntetett közös osztó, akkor osztható d-vel, mert d közös osztó; másrészt d_1 is közös osztó, tehát osztója d-nek. De ha két nem-negatív egész mindegyike osztója a másiknak, akkor egyenlők kell, hogy legyenek, tehát

$$d_1 = d.$$

Külön megemlítem, hogy ha $a_1=\ldots=a_k=0$, akkor $d=0$, ez közös osztó és minden közös osztóval osztható. Az is igaz, hogy ez esetben a 0 az egyetlen kitüntetett

közös osztó, mert ekkor mindegyik számunk osztható 0-val[6], tehát a keresett számnak is oszthatónak kell lennie vele. Azonban a 0-val egyedül a 0 osztható. Nincs viszont legnagyobb a közös osztók közt, mert ekkor minden egész közös osztó.

12. Tételünkből könnyen következik mostmár a felbonthatatlanok prím tulajdonsága vagy az euklideszi lemma. Az utóbbi így: legyen

$$c|a \cdot b$$

és a és c relatív prímek. Ekkor legnagyobb közös osztójuk 1, s így van olyan u és v egész, hogy

$$au + cv = 1$$

teljesüljön.

Hogy másik feltételünket használhassuk, szorozzuk ezt meg b-vel:

$$abu + bcv = b.$$

Az első tag feltételünk szerint osztható c-vel és nyilvánvalóan osztható vele a második tag is. Így b osztható c-vel és ezt akartuk bizonyítani.

BIZONYÍTÁS A LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖSÖN KERESZTÜL

13. Érdekes, hogy a (nem-negatív) közös többszörösök legkisebbikéről sokkal könnyebb belátni, hogy megvan a kitüntetett közös többszörös tulajdonsága, vagyis az, hogy (közös többszörös és) minden közös többszörösnek osztója; ennek felhasználásával is bizonyítható az euklideszi lemma (vagy ugyanúgy közvetlenül a felbonthatatlan számok prím volta).

Legyenek $a_1, \ldots, a_k$ adott egészek. Ha előfordul köztük a 0, az csak a 0-nak osztója, és így nincs más közös többszörösük, mint a 0. Ez osztója a 0-nak, tehát kitüntetett közös többszörös. Ha egyik sem 0, akkor legyen T egy közös többszörösük (ilyen van, pl. $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$) és t a pozitív közös többszörösök legkisebbike. Osszuk el az utóbbival T-t:

$$T = t \cdot u + v \quad 0 \leqq v < t.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$v = T - t \cdot u$$

is közös többszörös. Mivel kisebb a legkisebb pozitívnál, így $v=0$, $t|T$ és ezt akartuk bizonyítani.

A legkisebb nem negatív közös többszöröst így fogjuk jelölni:

$$[a_1, \ldots, a_k].$$

[6] Az oszthatóság szokásos és célszerű értelmezése: a osztható b-vel, ha van olyan c egész, amelyre $a=b \cdot c$. Ebben az értelemben 0 osztható 0-val, mert ha $a=b=0$, akkor van egyenletünket kielégítő c egész, hiszen bármelyik egész megfelel. Ennyiben nem szerencsés az „osztható" elnevezés, amennyiben az, hogy a osztható b-vel, nem föltétlenül jelenti azt, hogy az $a:b$ osztás elvégeztető. Az osztás elvégezhetőségéhez ugyanis nem csak azt kívánjuk, hogy legyen az egyenlőséget kielégítő c, hanem azt is, hogy csak egyetlen ilyen c legyen. Ez azonban egyedül $a=b=0$ esetben jelent eltérést a két fogalom közt.

Az is világos a definícióból, hogy ha $b=0$, akkor egyedül az $a=0$ esetben van a követelményt kielégítő c egész, tehát 0-val csak a 0 osztható.

14. Megmutatjuk a következőt:
Ha a és b relatív prímek, akkor

$$[a, b] = |ab|.$$

Ha pl. $a=0$, akkor $[a, b]=0=ab$. Legyen most $a\neq 0$, $b\neq 0$.
Mivel ab közös többszörös, így osztható $[a, b]$-vel, azaz van olyan c egész, amelyre

$$ab = [a, b]c.$$

Másrészt van olyan d_1 és d_2 egész, amelyre $[a, b]=ad_1=bd_2$,

$$ab = ad_1c = bd_2c.$$

Innen

$$b = d_1c, \quad a = d_2c.$$

c tehát közös osztója a-nak és b-nek, tehát

$$c = \pm 1 \quad \text{és} \quad [a, b] \geqq 0 \quad \text{folytán} \quad [a, b] = |ab|.$$

Ebből már következik az euklideszi lemma. Legyen ugyanis a és b relatív prím és álljon fenn

$$a|bc.$$

Nyilván fennáll

$$b|bc$$

is, tehát

$$[a, b]|bc,$$

de $[a, b]=|ab|$, mert a és b relatív prím. Így

$$ab|bc,$$

azaz

$$a|c.$$

KÖZVETLEN BIZONYÍTÁS

15. Az eddigi bizonyítások valamilyen oszthatósági tételből következtettek az alaptételre: az első a négyszámtételből, a többi lényegében a felbonthatatlan számok prím tulajdonságából. (Ahol az euklideszi lemmát bizonyítottuk, ott is bizonyíthatjuk ezt a következményét, ha csak az alaptételhez akarunk eljutni. Az euklideszi lemmát azonban éppúgy lépten-nyomon felhasználják a számelméletben, mint az alaptételt.)

Zermelo [**11.** 43—44. old.] vette észre először, hogy be lehet közbetlenül az alaptételt is bizonyítani teljes indukcióval. Ilyen bizonyítás is sok ismeretes (lásd pl. [9]). Egy ilyen a következő. Szorítkozzunk pozitív egészek pozitív tényezős felbontásaira.

$n=2$-re és minden felbonthatatlan számra nyilván igaz a tétel.

Tegyük fel, hogy igaz a tétel, valamilyen k-nál kisebb pozitív n-ekre. Ha k felbonthatatlan, akkor rá is igaz.

Ha k összetett: $k=ab$, $1<a<k$, $1<b<k$, akkor indukciós feltételünk szerint a és b felbontása egyértelmű. Megmutatjuk, hogy van egy olyan (csak k-tól függő) felbonthatatlan osztója k-nak, amelyik vagy a vagy b felbontásában előfordul. k

legkisebb 1-nél nagyobb osztója ilyen. Jelöljük ezt p-vel. Választása szerint $p \leqq a$. Ha $p=a$, akkor szerepel a felbontásában (az ebből az egyetlen tényezőből áll). Ha $p<a$, akkor

$$0 < k_1 = (a-p)b < ab = k,$$

tehát k_1 felbontása egyértelmű, de az előáll $a-p$ és b felbontásából. De $p|k_1$, tehát valamelyik tényező felbontásában szerepel p. Ha b-ében szerepel, akkor igaz állításunk. Ha $a-p$ felbontásában szerepel p, tehát az osztható p-vel, akkor $(a-p)+p=a$ is. De a felbontása is egyértelmű, tehát elő kell fordulnia benne p-nek.

Ha tehát k-t két nála kisebb pozitív tényezőre bontjuk és beírjuk mindegyik helyébe a felbontását, akkor mindig fellép benne p. A nyert felbontás tehát p-ből és k/p egy prímfelbontásából fog állni. k/p azonban kisebb k-nál, s így az indukciós feltevés szerint a felbontása egyértelmű, de akkor $k=p\cdot(k/p)$ felbontása is egyértelmű. Az egyértelműség tehát öröklődik is a k-nál kisebb természetes számokról k-ra, s így minden egészre igaz.

FAREY-SOROZATOK

16. Az oszthatósági problémák alkalmazást nyernek a törteknél (több tört célszerű közös nevezője a nevezők legkisebb közös többszöröse, egy törtet egyszerűsíthetünk a számláló és nevező legnagyobb közös osztójával és ennél nagyobb számmal már nem). Érdekes, hogy viszont a törtek tulajdonságaiból is eljuthatunk az alaptételhez (v. ö. [7 5—11. old.]).

Természetesen vigyáznunk kell, hogy ne használjunk fel közben olyasmit, amit a számelméletből vettünk át, ezért jó lesz felsorolnunk, mit használunk fel. Nemnegatív számlálójú és pozitív nevezőjű törtekre szorítkozunk.

Az a/b és c/d törtet egyenlőnek mondjuk, ha $ad=bc$. Azt mondjuk, hogy a/b kisebb mint c/d, ha $ad<bc$. Továbbra is igaz, hogy

$$a/b = ac/bc,$$

mert $abc=bac$. Az azonban már az eddigiekből nem következik, hogy két tovább nem egyszerűsíthető tört, amelyik alakra nem azonos, feltétlenül különböző.

Ha például az egész számok helyett a páros számok köréből indulunk ki (l. a **2.** pontot), és azokból képezünk törteket, akkor ugyanúgy a racionális számok köréhez jutunk, mint az egész számokból kiindulva. Itt azonban már a 180/198 és a 420/462 törtek egyike sem egyszerűsíthető, de ugyanazt a racionális számot állítják elő ($180\cdot 462=198\cdot 420$).

Rendezzük nagyság szerint azokat a nem-negatív számlálójú, pozitív nevezőjű, nem egyszerűsíthető törteket, amelyek számlálója nem nagyobb a nevezőjénél és az nem nagyobb mint n. Ha két ilyen tört egyenlő volna, akkor az jöjjön előbb, amelyiknek a számlálója kisebb. A keletkező F_n sorozatot nevezik n-edik Farey-sorozatnak, mert Farey angol geológus vette észre, hogy

ha $j/k \leqq l/m$ két szomszédos tagja ennek a sorozatnak, akkor $kl-jm=1$. (Eszerint egyenlőség nem állhat fenn sohasem.)

Ezt bizonyítjuk n szerinti teljes indukcióval. Az F_1 sorozat 0/1, 1/1. Erre az állítás teljesül.

Tegyük most fel, hogy az állítás valamilyen n_0 esetén az F_{n_0} párjaira igaz, és a/b F_{n_0+1}-ben szerepel, de F_{n_0}-ban nem. $a\neq 0$, b, mert $b=n_0+1\geqq 2$, s így $0/b$ és b/b egyszerűsíthető. Ekkor 0/1 megelőzi a/b-t, 1/1 utána van és ezek elemei F_{n_0}-nak.

Legyenek F_{n_0}-nak az a/b-t közrefogó elemei $j/k \leqq a/b \leqq l/m$. Tekintsünk egyelőre tetszésszerinti j/k és l/m közti c/d törtet. Erre

$$\lambda = ck - dj \geqq 0 \quad \mu = -cm + dl \geqq 0.$$

Innen számítva c-t és d-t

$$\lambda l + \mu j = c(kl - mj) = c,$$

$$\lambda m + \mu k = d(-jm + lk) = d,$$

mert az indukciós feltétel szerint $kl - jm = 1$. Minden j/k és l/m közé eső tört felírható tehát nem-negatív egész λ, μ-vel

$$\frac{\lambda l + \mu j}{\lambda m + \mu k}$$

alakban. Ha c/d nem egyszerűsíthető és alakra különbözik j/k és l/m-től, akkor $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ (vagyis különbözik tőlük értékre is). Valóban, ha $\lambda = 0$, akkor a tört csak $\mu = 1$-re nem egyszerűsíthető, akkor viszont $c = j$, $d = k$, amit kizártunk. Hasonlóan nem lehet μ sem 0.

Minden ilyen tört j/k és l/m közé esik, mert

$$(\lambda l + \mu j)k - j(\lambda m + \mu k) = \lambda(lk - jm) = \lambda > 0,$$

és hasonlóan

$$l(\lambda m + \mu k) - (\lambda l + \mu j)m = \mu(lk - jm) = \mu > 0.$$

a/b a c/d törtek közül a legkisebb nevezőjű. Ilyen egy van, a $\lambda = \mu = 1$-hez tartozó. Ez nem egyszerűsíthető, mert ha egyszerűsíthető volna akkor legalább 2-vel lehetne egyszerűsíteni, tehát egyenlő volna egy olyan törttel, amelynek nevezője nem nagyobb, mint

$$(m + k)/2 \leqq (n_0 + n_0)/2 = n_0.$$

F_{n_0}-ban tehát volna tört j/k és l/m közt, holott feltettük, hogy ezek szomszédosak. Így

$$a = l + j, \quad b = m + k,$$

tehát

$$ak - bj = lk - mj = 1 \quad \text{és} \quad bl - am = kl - jm = 1$$

az indukciós feltétel szerint.

A Farey-tulajdonság tehát öröklődik F_{n_0}-ról F_{n_0+1}-re. F_1 rendelkezik vele, tehát rendelkezik minden Farey-sorozat.

17. A bizonyítás azt is adta — legalábbis 0 és 1 közti törtekre —, hogy különböző alakú nem egyszerűsíthető törtek mint törtek sem lehetnek egyenlők, ($\lambda\mu \neq 0$); az 1-nél nagyobbakra pedig azért igaz, mert a reciprokukra igaz. Azt is nyertük, hogy az n-edik Farey-sorozat két szomszédos eleme közt az $n+1$-edikben legfeljebb egy új tört léphet fel, és ez a két tört ún. mediánsa (számlálóik összege osztva a nevezőik összegével), ha annak a nevezője éppen $n+1$. Ez egyben rekurzív képzési szabályt is ad a sorozathoz: F_n két szomszédos tagja közé írjuk a mediánsukat, feltéve, hogy ennek a nevezője $n+1$. Lássunk néhány példát. (Minden sorban csak az új elemeket írjuk le.)

F_1 $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$

F_2 $\frac{1}{2}$

F_3 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

F_4 $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

F_5 $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$

F_6 $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{6}$

F_7 $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{6}{7}$

F_8 $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{8}$

F_8: $\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}$

A tételből az is következik, hogy bármilyen a és b pozitív egész szám közös osztóinak legnagyobbika előállítható alkalmas egész x és y-nal

$$ax+by$$

alakban.

Jelöljük ezt a közös osztót d-vel. Ha δ osztója a/d-nek és b/d-nek, akkor $d\delta$ is közös osztója a-nak és b-nek, tehát csak $\delta=1$ lehet. Ekkor keressük meg pl. $a \leqq b$ esetén F_b-ben az $(a/d)/(b/d)$ nem egyszerűsíthető törtet megelőző j/k törtet (ilyen van $a>0$ miatt). A Farey-sorozatok bizonyított tulajdonsága szerint

$$\frac{ak}{d}-\frac{bj}{d}=1,$$

azaz $x=k$, $y=-j$ választással

$$ax+by=d,$$

és ezt akartuk belátni.

Tudjuk már, hogy ebből következik az euklideszi lemma és abból az alaptétel.

IRODALOM

[1] H. DAVENPORT: The higher arithmetic, Hutchenson's Univ. Library, London 1952.
[2] ERDŐS P.—SURÁNYI J.: Válogatott fejezetek a számelméletből, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.
[3] K. HÄRTIG—SURÁNYI J.: Kombinatorikai és geometriai meggondolások a számelméletben, Mat. Lapok *23* (1972) 25—29 old.
[4] KALMÁR LÁSZLÓ: A számelmélet alaptételéről, Mat. és Fiz. Lapok *18* (1936) 27—45. old.
[5] L. KORSELT: Vollständige Lösung einer neuen diophantischen Aufgabe, Math. Annalen, *112* (1936), 395—410. old.
[6] KÜRSCHÁK JÓZSEF: Matematikai versenytételek, Szeged Városi Nyomda és Könyvkiadó RT. Szeged, 1929.

[7] HANS RADEMACHER: Lectures on elementary number theory, Blaisdell Publ. Co., New York, Toronto—London 1964.
[8] DIRK J. STRUIK: A matematika rövid története, Gondolat, Budapest, 1958.
[9] SURÁNYI JÁNOS: Megjegyzések a számelmélet alaptételéhez, Matematikai Lapok *11* (1960), 41—45. old.
[10] B. L. VAN DER WAERDEN: Egy tudomány ébredése, Gondolat, Budapest, 1977.
[11] E. ZERMELO: Elementare Betrachtungern zur Theorie der Primzahlen, *Nachrichten Göttingen*, Math-Phys. Klasse, Fachgruppe I. Mathematik. Neue Folge, *1* (1934) 43—46. old.

НЕСКОЛЬКО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕДИНСТВЕННОСТИ ФАКТОРИЗАЦИИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ НО ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ

ЯНОШ ШУРАНИ

SOME PROOFS ABOUT THE UNIQUENESS OF THE PRIME NUMBER FACTORIZATION OF THE INTEGERS

J. SURÁNYI

SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK II.

RUZSA Z. IMRE

Ez a cikk az előző számban megjelent első részhez (a továbbiakban röviden I) kapcsolódik, de megértéséhez annak olvasása nem elengedhetetlen; szükség van viszont a számelmélet, az analízis és a valószínűségszámítás alapjainak ismeretére.

Ebben a részben elsősorban additív függvények eloszlásával foglalkozunk. Ennek a témának Kubilius már kis híján húsz évvel ezelőtt külön monográfiát [1] szentelt. Miként Kubilius könyvének a címe („Valószínűségszámítási módszerek a számelméletben") is mutatja, ezeknek a kérdéseknek szoros kapcsolatuk van a valószínűségszámítással. A cikken végigvonul a valószínűségszámítási szemlélet és kifejezésmód. Külön felhívom az olvasó figyelmét a szokatlan $f^{(n)}$ és $\delta(\xi_1, \xi_2)$ jelölésekre (ld. 4. és 5. fejezet).

A bizonyításokban többnyire nem a legcélratörőbb utat választottam, mert szerettem vonal a gondolatokat történeti fejlődésükben bemutatni.

A közölt feladatok többsége nehéz, megoldásuk a cikk megértéséhez nem szükséges.

Jelek

$a\|b$	a osztója b-nek
$a\|\|b$	$a\|b$ és $(a, b/a)=1$
(a, b)	1. nyílt intervallum, 2. legnagyobb közös osztó
$[a, b]$	1. zárt intervallum, 2. legkisebb közös többszörös
$[a]$	egész rész
$\{a\}$	törtrész
$\{a: \ldots\}$	azon a-k halmaza, amelyekre...
$\underline{N}$, $\underline{Z}$, $\underline{R}$	természetes, egész, valós számok halmaza
$\|A\|$	1. abszolút érték, 2. halmaz számossága
$\sum_p$, $\prod_p$	olyan összeg, ill. szorzat, amelyben a változó a prímszámokon fut
$S(x)$	ha S sorozatot jelöl: a sorozat elemeinek száma x-ig
sg a	a előjele (sg $0=0$)
log	természetes logaritmus; ha nem áll utána argumentum, akkor az $f(n)=\log n$ által megadott f számelméleti függvényt jelöli
$\sigma(n)$	n osztóinak összege
$\sigma_{-1}(n)=\sigma(n)/n$	n osztóinak reciprokösszege
$f*g$	számelméleti függvények konvolúciója,

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

$f^{-1}(A)=\{n: f(n)\in A\}$ az A halmaz ősképe

$x_+ = \max(0, x)$, $x_- = (-x)_+$ x pozitív, ill. negatív része
$M(\xi)$, $D^2(\xi)$ a ξ valószínűségi változó várható értéke, ill. szórása

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ Riemann-féle zétafüggvény

$O(f)$ olyan függvény, amely az f függvénnyel osztva korlátos marad

$o(f)$ olyan függvény, amely az f függvénnyel osztva O-hoz tart (persze meg kell adni, hogy mikor; pl. „$g(x) = o(x^2)$, ha $x \to \infty$")

$f \ll g$ $f = O(g)$

$f \gg g$ $g \ll f$

Az O, $\ll$ jelekben foglalt korlát neve az „implicit konstans".

$f \sim g$ $f/g \to 1$ (itt is meg kell adni, hogy mikor)

$f \asymp g$ $f \ll g$ és $g \ll f$

$f \approx g$ „körülbelül egyenlő", pontos értelem nélkül (csak heurisztikus gondolatmenetekben)

□ bizonyítás vége

1. *Bevezetés*

Jelölje $\nu(n)$ n prímosztóinak számát, multiplicitással számolva, (azaz $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ esetén

$$\nu(n) = \sum a_i.$$

Régóta ismert (ld. I. (19.21)), hogy

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqq x} \nu(n) = \log\log x + O(1), \tag{1.1}$$

vagyis egy „átlagos" n számnak kb. $\log\log n$ darab prímosztója van. (Ugyanez igaz $\varkappa(n)$-re is, a prímosztók multiplicitás nélkül vett számára.) 1917-ben Hardy és Ramanujan [1] bebizonyították, hogy ez egy másféle értelemben is igaz: egy találomra kivett $n \leqq x$ számnak majdnem biztos, hogy kb. $\log\log x$ prímosztója lesz. Pontosabban:

(1.2) **Tétel.** *Tetszőleges pozitív ε-hoz van olyan K és x_0, hogy $x > x_0$ esetén az $n \leqq x$ számokra εx kivételével*

$$|\nu(n) - \log\log x| \leqq K\sqrt{\log\log x}. \tag{1.3}$$

Hardy és Ramanujan bizonyítása (2)-re azon alapult, hogy éles becslést adtak a $\nu(n) = k$ egyenlet megoldásainak számára: belátták, hogy

$$\pi_k(x) = |\{n : n \leqq x,\ \nu(n) = k\}| \leqq \frac{c_1 x(\log\log x + c_2)^{k-1}}{(k-1)!\log x}. \tag{1.4}$$

(4) segítségével megbecsülhető a (3) egyenlőtlenséget nem teljesítő n-ek száma, és így nyerhető (2).

17 évvel később Turán [1] új bizonyítást adott a (2) tételre. Az ő bizonyítása a

$$\sum_{n \leqq x} (\nu(n) - \log\log x)^2 \leqq cx\log\log x \tag{1.5}$$

egyenlőtlenségre épült. (5)-ből (2) azonnal következik, hiszen nyilván

$$\sum_{n \leqq x} (\nu(n) - \log\log x)^2 \geqq$$

(1.6)

$$\geqq K^2 \log\log x \left| \{n: n \leqq x, |\nu(n) - \log\log x| \geqq K\sqrt{\log\log x}\} \right|.$$

A (3)-at nem teljesítő n-ek számára a $cK^{-2}x$ felső becslést kapjuk. (Lényegében a Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmaztuk.)

(1.7) *Feladat.* Vezessük le (5)-öt (4)-ből.

Turán bizonyítása nem lényegesen egyszerűbb Hardy és Ramanujanénál, és mint a (7) feladat mutatja, kevesebb információt ad a ν függvény viselkedéséről; mégis ez a cikk új fejezetet nyitott a számelméleti függvények elméletében. Ugyanis Hardy—Ramanujan módszerével ellentétben, amely csak a függvények nagyon szűk körére alkalmazható, Turán módszere messzemenő általánosításokra nyújt lehetőséget. Az első lépést maga Turán [2] tette meg: több közbeeső lépcső után a végső, legáltalánosabb formát Kubilius ([1], 3. fej.) mondta ki.

(1.8) **Tétel.** (Turán—Kubilius-egyenlőtlenség). *Legyen f valósértékű additív függvény,*

(1.9)
$$\sum_{p \leqq x} f(p)/p = A, \quad \sum_{p^k \leqq x} p^{-k} f^2(p^k) = B^2.$$

Ekkor

(1.10)
$$\sum_{n \leqq x} (f(n) - A)^2 = O(B^2 x),$$

az implicit konstans abszolút.

Innen (6)-hoz hasonlóan adódik az alábbi:

(1.11) **Tétel.** *Legyen f additív függvény, $K > 0$, A és B a (9) által adott számok. Az $n \leqq x$ számokra $cK^{-2}x$ kivételével (c abszolút konstans)*

(1.12)
$$|f(n) - A| \leqq KB.$$

A Turán—Kubilius egyenlőtlenséget a következő fejezetben bizonyítjuk; a valószínűségszámítási hátteréről a 4. fejezetben lesz szó.

(1.13) *Feladat. a)* Minden pozitív ε-hoz van olyan K, hogy minden x-re

$$|\{n: n \leqq x, \nu(n) - \varkappa(n) > K\}| < \varepsilon x.$$

b) Vezessük le (2) megfelelőjét a $\varkappa$ függvényre.

A (2) tétel „várható" volt — majdnem minden számnak kb. annyi prímosztója van, amennyi az átlag. Most levezetünk belőle egy sokkal kevésbé várható tételt. Tudjuk, hogy

(1.14)
$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqq x} \tau(n) \sim \log x,$$

ahol $\tau(n)$ jelöli n osztóinak számát (ld. I. 15. fej.). Mégis legtöbb számnak ennél jóval kevesebb osztója van.

(1.15) **Tétel.** Tetszőleges fix $\varepsilon > 0$ mellett az $n \leqq x$ számokra $o(x)$ kivételével

$$(\log x)^{\log 2 - \varepsilon} < \tau(n) < (\log x)^{\log 2 + \varepsilon}.$$

Bizonyítás. Nyilvánvalóan (vö. I. (4.7))

$$2^{\varkappa(n)} \leqq \tau(n) \leqq 2^{\nu(n)};$$

ebből, a (2) tételből és annak a $\varkappa$ függvényre vonatkozó megfelelőjéből következik (15). □

Tehát a (14)-beli középértéket a τ függvény ritkán fellépő nagy értékei okozzák. Ezt mutatja az is, hogy a τ függvény magasabb hatványközepei sokkal nagyobb átlagértéket adnak.

(1.16) *Feladat.*

$$\sum_{n \leqq x} \tau^k(n) \sim c_k \log^{2^k-1} x.$$

(Ramanujan [1], Wilson [1].)

2. *A Turán—Kubilius-egyenlőtlenség bizonyítása*

Tekintsük a

$$D^2(t) = \frac{1}{x} \sum_{n \leqq x} (f(n)-t)^2 \tag{2.1}$$

kifejezést. Ennek minimuma a

$$t = M = \frac{1}{x} \sum_{n \leqq x} f(n) = \frac{1}{x} \sum_{p^k \leqq x} f(p^k) \left(\left[\frac{x}{p^k} \right] - \left[\frac{x}{p^{k+1}} \right] \right) \tag{2.2}$$

értéknél van, és a $D^2 = D^2(M)$ jelöléssel $D^2(a)$ egyszerűen így írható:

$$D^2(a) = D^2 + (a-M)^2. \tag{2.3}$$

A mi célunk annak a belátása, hogy az (1.9)-ben definiált A és B számokkal

$$D^2(A) \ll B^2; \tag{2.4}$$

(3) szerint ehhez azt kell megmutatni, hogy

$$D^2 \ll B^2 \tag{2.5}$$

és

$$A - M \ll B. \tag{2.6}$$

Közép gyanánt bármely olyan számot vehetünk, amelyet A helyébe írva (6) teljesül; ilyen például

$$A_1 = \sum_{p^k \leqq x} f(p^k) p^{-k}, \quad A_2 = \sum_{p^k \leqq x} f(p^k)(p^{-k} - p^{-k-1}) \tag{2.7}$$

és még sok más.

Belátjuk, hogy A, A_1, A_2 kielégítik (6)-ot. A Cauchy-egyenlőtlenséget fogjuk használni; az összes szumma a $p^k \leqq x$ prímhatványokra van kiterjesztve.

$$|M-A_2| \leqq \frac{1}{x} \sum |f(p^k)| \leqq \frac{1}{x} \left(\sum \frac{f^2(p^k)}{p^k} \sum p^k \right)^{1/2} \ll B, \tag{2.8}$$

$$|A_1-A_2| = \left| \sum \frac{f(p^k)}{p^{k+1}} \right| \leqq \left(\sum \frac{f^2(p^k)}{p^k} \sum \frac{1}{p^{k+2}} \right)^{1/2} \ll B, \tag{2.9}$$

$$|A-A_1| = \left| \sum_{k \geqq 2} \frac{f(p^k)}{p^k} \right| \leqq \left(\sum \frac{f^2(p^k)}{p^k} \sum_{k \geqq 2} \frac{1}{p^k} \right)^{1/2} \ll B. \tag{2.10}$$

A prímhatványokra vonatkozó becslések a következőképpen nyerhetők: (8)-ban p^k helyett az összes x alatti számra összegzünk, (9)-ben és (10)-ben pedig p-t futtatjuk végig az összes természetes számon, még így is a megfelelő eredményt kapjuk.

Következik a lényeg, (5) bizonyítása. Az

$$f = g * u \quad (f(n) = \sum_{d|n} g(d)) \tag{2.11}$$

előállításból indulunk ki, ahol g a következő függvény:

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ nem prímhatvány,} \\ f(p^k)-f(p^{k-1}), & \text{ha } n = p^k, \end{cases} \tag{2.12}$$

ld. I. (6.1). Azt fogjuk kapni, hogy

$$D^2 \ll \sum_{n \leqq x} g^2(n)/n; \tag{2.13}$$

ez elégséges, mert (12)-t és az

$$(x+y)^2 \leqq 2(x^2+y^2) \tag{2.14}$$

egyenlőtlenséget használva

$$\sum \frac{g^2(n)}{n} \leqq 2 \sum \frac{f^2(p^k)+f(p^{k-1})}{p^k} = 2 \sum f^2(p^k) \left(\frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}} \right) \leqq 3B^2. \tag{2.15}$$

(2.16) *Feladat.* Bizonyítsuk be (15) megfordítását:

$$\sum_{p^k \leqq x} \frac{f^2(p^k)}{p^k} \ll \sum_{n \leqq x} g^2(n)/n.$$

(13)-at először nemnegatív g függvényekre bizonyítjuk.

Nyilván

$$x^2 D^2 = x \sum_{n \leqq x} f^2(n) - \Big(\sum_{n \leqq x} f(n) \Big)^2. \tag{2.17}$$

Mindkét összeget kifejezzük g-vel; a második (vö. I. (11.3))

$$\sum_{n \leqq x} f(n) = \sum_{d \leqq x} g(d)[x/d]. \tag{2.18}$$

Az elsőhöz (11)-et négyzetreemeljük:

$$f^2(n) = \sum_{a,b|n} g(a)g(b),$$

tehát

$$\sum_{n\leqq x} f^2(n) = \sum_{a\leqq x}\sum_{b\leqq x} g(a)g(b)\left[\frac{x}{[a,b]}\right]. \tag{2.19}$$

(17), (18) és (19) szerint

$$x^2D^2 = \sum_{a,b\leqq x} g(a)g(b)\left(x\left[\frac{x}{[a,b]}\right]-\left[\frac{x}{a}\right]\left[\frac{x}{b}\right]\right). \tag{2.20}$$

(12) szerint (20)-ban csak azok a tagok számítanak, ahol a és b is prímhatvány. Nézzük először azt az esetet, ha azonos prím hatványai:

$$a = p^\alpha, \quad b = p^\beta.$$

(20)-nak az ilyen (a, b) párokhoz tartozó része

$$x^2 \sum_{p,\alpha,\beta} g(p^\alpha)g(p^\beta)p^{-\max(\alpha,\beta)}. \tag{2.21}$$

Bevezetve az $u_\alpha = g(p^\alpha)p^{-\alpha/2}$ változókat, (21)-ben egy adott p prímhez tartozó összeg így becsülhető:

$$\sum_{\alpha,\beta} u_\alpha u_\beta p^{-|\alpha-\beta|/2} \leqq \sum_{\alpha,\beta}(u_\alpha^2+u_\beta^2)p^{-|\alpha-\beta|/2} \leqq c\sum u_\alpha^2,$$

ahol

$$c = 2\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} 2^{-|\alpha|/2},$$

tehát az összegnek erre a részére a

$$c\sum_{p^\alpha\leqq x} g^2(p^\alpha)p^{-\alpha}$$

becslést találtuk.

Nézzük most (20)-nak azt a részét, ahol a és b különböző prímek hatványai,

$$a = p^\alpha, \quad b = q^\beta, \quad p \neq q.$$

Ekkor

$$x\left[\frac{x}{[a,b]}\right]-\left[\frac{x}{a}\right]\left[\frac{x}{b}\right] = x[xp^{-\alpha}q^{-\beta}]-[xp^{-\alpha}][xq^{-\beta}] \leqq x\min(p^{-\alpha}, q^{-\beta}).$$

(Ez abszolút értékre nem igaz, ezért jó, hogy g nemnegatív.) Tehát az idetartozó összeg

$$\leqq x\sum g(p^\alpha)g(q^\beta)\min(p^{-\alpha}, q^{-\beta}) = 2x\sum_{p^\alpha\leqq x} g(p^\alpha)p^{-\alpha}\sum_{q^\beta<p^\alpha} g(q^\beta). \tag{2.22}$$

A Cauchy-egyenlőtlenség szerint

$$\sum_{p^\alpha\leqq y} g(p^\alpha) \leqq \left(\sum\frac{g^2(p^\alpha)}{p^\alpha}\sum_{p^\alpha\leqq y} p^\alpha\right)^2 \leqq B_1 y, \tag{2.23}$$

tehát (22) így folytatható:

$$\leqq x\sum_{p^\alpha} g(p^\alpha)p^{-\alpha}Bp^\alpha = Bx\sum_{p^\alpha\leqq x} g(p^\alpha) \leqq B_1^2x^2,$$

ugyancsak (23) miatt.

Ha pedig g nem állandó előjelű, akkor előállítjuk

$$g = g_+ - g_-, \quad g_+(n) = \max(0, g(n))$$

alakban; itt g_+ és g_- már nemnegatív. (14)-et használva

$$D^2 \leqq 2(D_+^2 + D_-^2) \ll \sum_{n \leqq x} \frac{g_+^2(n) + g_-^2(n)}{n} = \sum_{n \leqq x} \frac{g^2(n)}{n},$$

ahol D_+, D_- úgy keletkezik, hogy D definícióját g helyett a g_+, g_- függvényekkel használjuk.

3. *A Turán—Kubilius-egyenlőtlenség és a nagy szita*

A Turán—Kubilius-egyenlőtlenség nem egyéb, mint egy kvadratikus egyenlőtlenség az $f(p^k)$ változókban. Bevezetve az

$$x_{pk} = f(p^k) p^{-k/2}$$

új változókat, azt kapjuk, hogy

$$f(n) = \sum_{p^k \| n} f(p^k) = \sum_{p^k \| n} p^{k/2} x_{pk}$$

és

$$A_1 = \sum_{p^k \leqq N} f(p^k) p^{-k} = \sum_{p^k \leqq N} p^{-k/2} x_{pk}$$

(vö. (2.7); az eddig használt x-et N-re cseréltük), tehát

$$f(n) - A_1 = \sum_{p,k} h_{pkn} x_{pk}, \tag{3.1}$$

ahol

$$h_{pkn} = \begin{cases} p^{k/2} - p^{-k/2} & \text{ha} \quad p^k \| n, \\ -p^{-k/2} & \text{máskor.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Ezekkel a jelölésekkel a Turán—Kubilius-egyenlőtlenségnek az a formája, amelyben az A_1 közép szerepel, így írható:

$$\sum_{n \leqq N} \Big(\sum_{p^k \leqq N} h_{pkn} x_{pk} \Big)^2 \leqq c_1 N \sum_{p^k \leqq N} x_{pk}^2. \tag{3.3}$$

Legyen M az N alatti prímhatványok száma, és tekintsük a következő T: $R^M \to R^N$ transzformációt: ha

$$\underline{x} = (x_{pk}) \in R^M$$

(indexnek a (p, k), $p^k \leqq N$ számpárokat használjuk), akkor

$$T\underline{x} = \underline{y} = (y_n)_{n \leqq N}, \quad y_n = \sum_{p,k} h_{pkn} x_{pk}.$$

(3) pontosan azt jelenti, hogy

$$\|T\| \leqq c_1 N. \tag{3.4}$$

Legyen T^*: $R^N \to R^M$ T adjungáltja (a transzponált mátrix által megadott operátor). Adjungáltak normája azonos, tehát

$$\|T^*\| = \|T\| \leqq c_1 N; \tag{3.5}$$

(5) részletesen kiírva adja a (3) egyenlőtlenség duálisát:

$$\sum_{p^k \leqq N} \Big(\sum_{n \leqq N} h_{pkn} y_n \Big)^2 \leqq c_1 N \sum_{n \leqq N} y_n^2. \tag{3.6}$$

Ide h_{pkn} (2) definícióját behelyettesítve kapjuk:

(3.7) **Tétel.** *Tetszőleges y_n valós számokra*

$$\sum_{p^k \leqq N} p^k \Big(\sum_{p^k \| N} y_n - p^{-k} \sum_{n=1}^{N} y_n \Big)^2 \leqq c_1 N \sum_{n=1}^{N} y_n^2. \tag{3.8}$$

Ezt Elliot [2] fedezte fel és alkalmazta szintén additív függvények vizsgálatára. Az egyenlőtlenség komplex y_n-re is érvényes; ekkor abszolútérték-négyzetet kell venni, és külön a valós és képzetes részre alkalmazni a már ismert valós esetet. A_1 helyett M-et, A-t vagy A_2-t használva három hasonló egyenlőtlenséget kaphatunk.

(8) egy „nagy szita" típusú egyenlőtlenség; hogy a kapcsolatot közelebbről is bemutathassuk, kimondjuk a nagy szita néhány formáját. A nagy szita őse Linnyiktől [1] és Rényitől származik, az alábbi erős forma Bombieritől.

(3.9) **Tétel.** (Bombieri [1]; ld. még Davenport [2], Mongomery [1]). *Legyen a_n $(1 \leqq n \leqq N)$ komplex szám,*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n e(nx),$$

ahol $e(x) = \exp 2\pi i x$. Legyenek

$$x_1, \ldots, x_m \in [0, 1], \quad \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\| = \delta > 0,$$

ahol

$$\|u\| = \min(\{u\}, 1 - \{u\}) \tag{3.10}$$

u távolsága a legközelebbi egésztől. Ekkor

$$\sum_{j=1}^{m} |S(x_j)|^2 \leqq (N + \delta^{-1}) \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2. \tag{3.11}$$

A legfontosabb speciális eset az, amikor az x_j-k befutják az y-hoz tartozó Farey-sorozatot, vagyis az összes a/q törtet, $0 \leqq a < q \leqq y$, $(a, q) = 1$. Ekkor $\delta \geqq y^{-2}$ és (11)-et átalakítva a következőt kapjuk:

(3.12) **Tétel.** *Legyenek $a_1, \ldots a_N$ komplex számok. Ekkor (q nemcsak prímeken fut)*

$$\sum_{q \leqq y} q \sum_{j=1}^{q} \Big| \sum_{d \mid q} \frac{d\mu(d)}{q} \sum_{n \equiv j \pmod d} a_n \Big|^2 \leqq (N + y^2) \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2. \tag{3.13}$$

Ha q prím, a (13)-beli belső összeg egyszerűbb formát ölt (csak $d = 1$ és $d = q$ eseteket kell venni). Így adódik:

(3.14) **Tétel.** *Ha $a_1, \ldots a^N$ komplex számok, p prímeken fut, akkor*

$$\sum_{p \leqq y} p \sum_{j=1}^{p} \Big| \sum_{n \equiv j(p)} a_n - \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{N} a_n \Big|^2 \leqq (N + y^2) \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.$$

Legyen adva egy $S \subset [1, N]$ halmaz, és alkalmazzuk a fenti tételt az

$$a_j = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad j \in S, \\ 0 & \text{ha} \quad j \notin S \end{cases}$$

sorozatra. Az alábbit kapjuk:

(3.15) **Tétel.** *Legyen* $S \subset [1, N]$, $|S| = k$,

$$|\{n: n \leqq S, n \equiv j \pmod p\}| = k_{jp}.$$

Ekkor

$$\sum_{p \leqq y} p \sum_{j=1}^{p} (k_{jp} - k/p)^2 \leqq k(N + y^2). \tag{3.16}$$

Ezen már látszik némi szitaszerűség. Alkalmazásként levezetünk egy tényleges „szita-tételt".

(3.17) **Linnyik-tétele.** *Legyen minden* p *prímhez adva egy* A_p *maradékosztály-halmaz* (mod p) *és legyen* k *azon* $n \leqq N$ *számok száma, amelyek egyetlen*

$$n \equiv j \pmod p, \quad j \in A_p \tag{3.18}$$

kongruenciát sem elégítenek ki. Ekkor

$$k \leqq \frac{2N}{\sum\limits_{p \leqq \sqrt{N}} |A_p|/p}. \tag{3.19}$$

A módszer azért kapta a „nagy szita" nevet, mert akkor ad jó eredményt, ha az A_p halmazok nagyok. Például ha A_p a négyzetes nemmaradékok halmaza, $|A_p| = (p-1)/2$, akkor (19) a $k = 0(\sqrt{N} \log N)$ becslést adja; a valóságban a négyzetszámok maradnak ki, a hiba tehát egy $\log N$ faktor.

(17) Bizonyítása. (15)-öt alkalmazzuk az egy (18) típusú kongruenciát sem teljesítő számok halmazára, $y = \sqrt{N}$. $j \in A_p$ esetén $k_{jp} = 0$, tehát

$$\sum_{p \leqq y} p\,|A_p|(k/p)^2 \leqq 2kN;$$

átrendezve (19)-et kapjuk. □

Összehasonlítva a (8) Elliott-egyenlőtlenséget és a (14) nagy szitát, több mellékes részlet mellett két fő különbséget találunk:

a) a nagy szita nemcsak a p-vel való oszthatóságot nézi, hanem az összes maradékosztályok közti megoszlást;

b) az Elliott-egyenlőtlenségben az összegezés $p^k \leqq N$-ig terjed, míg a nagy szitát csak $p \leqq \sqrt{N}$-ig érdemes használni, a jobb oldal $y > \sqrt{N}$ esetén rohamosan nő.

(3.20) *Feladat. a)* Becsüljük meg elemileg (8)-ban a $p^k > \sqrt{N}$-hez tartozó részt.

b) Vezessük le az Elliott-egyenlőtlenséget (és ezen keresztül a Turán—Kubilius-egyenlőtlenséget) a nagy szitából.

(3.21) *Feladat.* Mi lesz a nagy szita duálisa a fejezet elején ismertetett értelemben?

(3.22) *Feladat.* Legyen

$$f(n) = \sum_{p \leq \sqrt{n}} \{n/p\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy 0 sűrűségű n-et elhagyva

$$f(n)/\pi(\sqrt{n}) \to 1/2.$$

4. *A prímek függetlenségének elve*

Legyenek $p_1, \ldots, p_k$ különböző prímek. Annak a „valószínűsége", hogy egy természetes szám p_j-t az a_j-edik hatványon tartalmazza,

$$p_j^{-a_j}(1-1/p_j)$$

abban az értelemben, hogy ennyi a szóban forgó számok aszimptotikus sűrűsége. Ha most azokat a számokat tekintjük, amelyek p_1-et pontosan a_1, ..., p_k-t pontosan a_k kitevővel tartalmazzák, ezek aszimptotikus sűrűsége könnyen láthatólag

$$\prod_{j=1}^{k} p_j^{-a_j}(1-1/p_j)$$

lesz, vagyis a prímek úgy viselkednek, mintha függetlenek lennének. Ez nem marad igaz, ha végtelen sok prímtől függő „eseményeket" vizsgálunk, vagy ha aszimptotikus sűrűség helyett egy véges $[1, x]$ intervallumban vett arányt nézzük; mégis hasznos heurisztikus segédeszközt kapunk, ha előzetesen megnézzük, mi történne, ha a prímek függetlenek lennének.

Nézzük például az $[1, x]$ szakaszt és a $p \in (\sqrt{x}, x]$ prímeket. Azon számok aránya, amelyek oszthatók egy ilyen prímmel, nagy x-re

$$\approx \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} 1/p \sim \log 2;$$

azoké pedig, amelyek két ilyen prímmel oszthatók, pontosan 0, pedig, ha a prímek tényleg függetlenek lennének, kb. $\log^2 2$-nek kellene lennie. Ez azt mutatja, hogy a prímek annál függetlenebbek, minél kisebbek; ennek egy pontos megfogalmazását ld. a 14. fejezetben.

Legyen f additív függvény. A cikkben tárgyalt kérdések legnagyobb részében f viselkedésére vagyunk kíváncsiak az $[1, x]$ intervallumon, azaz

$$f^{(x)} = f|\underline{N}_x \tag{4.1}$$

eloszlására, ahol $\underline{N}_x$ jelöli az 1, 2, ... x számokból álló valószínűségi mezőt; mindegyik szám valószínűsége $1/x$. Az f additív függvényhez tehát egy valószínűségi változókból álló sorozatot rendeltünk. Ez a valószínűségszámítási megfogalmazás és szemléletmód rendkívül termékenynek bizonyult az additív függvények vizsgálatában (ez adta Kubilius [1] könyvének címét is). Nyilván

$$f = \sum_p \bar{f}_p,$$

ahol

$$\bar{f}_p(n) = f(p^k), \quad \text{ha} \quad p^k \| n.$$

Legyenek továbbá a ζ_p-k (p prím) független valószínűségi változók az alábbi eloszlással:

$$P(\zeta_p = f(p^k)) = p^{-k} - p^{-k-1} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{4.2}$$

(Ez a definíció így nem egészen precíz, hiszen az $f(p^k)$ értékek között egyenlők is lehetnek. Egy pontos definíció pl. az alábbi:

$$\zeta_p = f(\pi_p), \tag{4.3}$$

ahol π_p eloszlása

$$P(\pi_p = p^k) = p^{-k} - p^{-k-1}.) \tag{4.4}$$

A prímek függetlenségének elve alapján azt várjuk, hogy $f^{(x)}$ eloszlása közelíthető lesz

$$\eta_x = \sum_{p \leqq x} \zeta_p \tag{4.5}$$

eloszlásával. Ennek felel meg pl. az (5.16), (8.1) tétel, a 13. fejezet tételeinek nagy része.

Nézzünk egy példát. Könnyen látható, hogy ζ_p szórása

$$D^2(\zeta_p) \asymp \sum_k (f^2(p^k) p^{-k}. \tag{4.6}$$

Ezen az alapon azt várjuk, hogy $f^{(x)}$ szórása

$$D^2(f^{(x)}) \approx D^2(\eta_x) = \sum_{p \leqq x} D^2(\zeta_p) \approx \sum_{p^k \leqq x} \frac{f^2(p^k)}{p^k} \tag{4.7}$$

lesz; a Turán—Kubilius-egyenlőtlenség pont azt állítja, hogy (6)-ból legalább a $\ll$ igaz lesz.

Próbáljuk ki elvünket a logaritmikus függvényen. Egyrészt közvetlenül látható, hogy $\log^{(x)}$ eloszlása kb. olyan, mint a

$$\lambda + \log x$$

változóé, ahol λ eloszlása:

$$P(\lambda \leqq u) = \begin{cases} e^u, & u \leqq 0, \\ 1, & u \geqq 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Másrészt ha a logaritmikus függvényhez képezzük ζ_p-t, akkor a centrális határeloszlástétel szerint η_x kb. normális eloszlású lesz,

$$M \approx \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} \sim \log x$$

középpel és

$$\sigma^2 \approx \sum_{p \leqq x} \frac{\log^2 p}{p} \sim \frac{1}{2} \log^2 x \tag{4.9}$$

szórással. Elvünk tehát teljes kudarcot vallott.

Viszont bizonyos értelemben a fenti példával meg is fogtuk az összes kivételeket. Legyen g additív függvény,

$$f = g - a \log$$

(a konstans) és tekintsük a következő felbontást:

$$g = a \log + f = a \log + \sum_p \bar{f}_p. \tag{4.10}$$

Legyen ζ_p a (2)-ben definiált változó; várható, hogy $g^{(x)}$ eloszlása

$$a \log x + a\lambda + \sum_{p \leqq x} \zeta_p \tag{4.11}$$

eloszlásával lesz közelíthető, *a-t alkalmasan választva.* Ez a függetlenségi elv mélyebb formája, ennek felel meg pl. a (8.10), a (12.3) és a (13.14) tétel. Ezen elv alkalmazását megnehezíti az a körülmény, hogy az „alkalmas a" a vizsgált problémától függ és gyakran egyáltalán nem egyszerű megkeresni.

Térjünk vissza a Turán—Kubilius-egyenlőtlenségre. Közvetlen számolás mutatja, hogy $\log^{(x)}$ szórása $O(1)$ nagyságrendű; a Turán—Kubilius-egyenlőtlenség (9)-nek megfelelően $O(\log^2 x)$ becslést ad. Tekintsük egy g additív függvény (10) alatti felbontását. Alkalmazva a (2.14) egyenlőtlenséget, aztán f-re a Turán—Kubilius-egyenlőtlenséget, a logaritmikus részre pedig a közvetlen becslést, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqq x} (g(n) - A)^2 \ll B^2(a) = a^2 + \sum_{p^k \leqq x} \frac{(g(p^k) - a \log p^k)^2}{p^k} \tag{4.12}$$

az a konstans tetszőleges választásával. (12) jobb oldala a-nak másodfokú polinomja, tehát könnyű felírni, hogy milyen a értékre lesz minimális; azt is be lehet látni, hogy nagyságrendben ugyanazt kapjuk az

$$a = a_0 = \frac{1}{\log x} \sum_{p \leqq x} \frac{f(p) \log p}{p} \tag{4.13}$$

választással.

(4.14) **Sejtés.** *(D-t a 2. fejezet szerint használva)*

$$D^2 \asymp \min_a B^2(a).$$

5. *A határeloszlás létezése*

A régi görögök három csoportba osztották a természetes számokat: tökéletes, amelyre $\sigma(n) = 2n$, hiányos (deficiens), amelyre $\sigma(n) < 2n$, és bővelkedő (abundáns), amelyre $\sigma(n) > 2n$. Ismeretes (Hornfeck—Wirsing [1], vö. I. 1. fej.), hogy tökéletes szám nagyon kevés van; kérdezhető, hogy a számok java része hogyan oszlik meg a hiányos és bővelkedő számok között. Ha $D(x)$, ill. $A(x)$ jelöli ezen számok számát x-ig, nem nehéz megmutatni, hogy $x \geqq 12$-re

$$A(x) > cx, \quad D(x) > cx \quad (c > 0), \tag{5.1}$$

azaz mindegyikből elég sok van.

(5.2) *Feladat.* Legyen $1 \leqq a < b$. Ekkor van olyan $c = c(a, b) > 0$, hogy $x > x_0(a, b)$ esetén

$$|\{n: n \leqq x, \sigma_{-1}(n) \in (a, b)\}| > cx.$$

Nem ilyen könnyű belátni, hogy léteznek a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{D(x)}{x} \tag{5.3}$$

határértékek. (Ezt először Davenport [1], Behrend és Chowla bizonyította.) (Persze egyikből következik a másik.) Egyik lehetséges megközelítési mód a következő: mivel egy bővelkedő szám többszörösei is azok, a (3) képlet limeseinek létezése következne az alábbi állításból:

(5.4) Ha egy természetes számokból álló halmaz bármely számmal együtt annak összes többszörösét is tartalmazza, akkor van aszimptotikus sűrűsége.

Azonban (Besicovitch [1]) (4) nem igaz. Igaz lesz viszont (Davenport—Erdős [1, 2]) aszimptotikus helyett logaritmikus sűrűséggel. (Egy S sorozat logaritmikus sűrűségének nevezzük a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\log x}\sum_{\substack{s\in S\\ s\leqq x}}1/s \tag{5.5}$$

határértéket, ha létezik.) Ezen az úton más függvényekre is nyerhető határeloszlás, de csak az általunk tárgyalandónál gyengébb, „logaritmikus" értelemben (ld. Paul [1—3]).

Nevezzük n-et primitív bővelkedő számnak, ha $\sigma(n)\geqq 2n$, de minden d osztójára már $\sigma(d)<2d$. (Az elnevezésben az a vicces, hogy ezek nem is mind bővelkedők, köztük vannak a tökéletesek is.) Egy szám pontosan akkor bővelkedő vagy tökéletes, ha van primitív bővelkedő osztója, és Erdős [1] bebizonyította, hogy a primitív bővelkedő számok reciprokai konvergens sort alkotnak. Másrészt ha egy S sorozatból, amelyre

$$\sum_{s\in S}1/s<\infty$$

képezzük azt a T sorozatot, amely az S-beli számok többszöröseiből áll, akkor (egyszerűen látható, vö. 7. fej.) T-nek van aszimptotikus sűrűsége.

(3) így megkapható, de ha már azt kérdezzük, van-e sűrűsége azon n számok sorozatának, amelyekre $\sigma(n)>an$, a fix, akkor újabb komplikációk lépnek fel. Definiálható ugyan hasonlóan a primitív a-bővelkedő szám, de ezek reciprokösszege (l. Erdős [9, 10]) nem okvetlenül lesz konvergens. Újabb ötletekkel ez még kivédhető, de ha más függvényt akarunk vizsgálni, ez a megközelítés végképp bedöglik.

(5.6) *Feladat.* Tekintsük azokat a számokat, amelyekre $\sigma(n)>2n$, de bármely osztójukra $\sigma(d)\leqq 2d$ (a primitív bővelkedő szám alternatív definíciója). Ezek reciprokösszege divergens.

Ismerkedjünk meg egy másik, valószínűségszámítási jellegű és jóval célravezetőbb megközelítéssel, amely végül eredeti kérdésünkre is választ fog adni. A továbbiakban additív függvényekkel foglalkozunk (σ_{-1} helyett vehetjük a logaritmusát), melyekre a dolgok könnyebben megfogalmazhatók és kapcsolatba hozhatók az előző fejezetekben tárgyaltakkal.

Azt kérdezzük, hogy ha f additív függvény, mikor lesz az $f^{(x)}$ változó-sorozatnak határeloszlása. Először is ismertetjük a határeloszlás ekvivalens definícióit.

(5.7) **Definíció.** Legyenek $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy ξ_n eloszlásban konvergál ξ-hez, ha tetszőleges korlátos folytonos H valós függvényre

$$M(H(\xi_n)) \to M(H(\xi)). \tag{5.8}$$

(M jelöli a várható értéket.)

(5.9) **Ekvivalens definíció:** ha F_n, ill. F jelöli a megfelelő eloszlásfüggvényeket, akkor

$$F_n(x) \to F(x) \tag{5.10}$$

F minden folytonossági pontjában. Ennek megfelelő elnevezés: az F_n eloszlásfüggvények gyengén konvergálnak F-hez.

(5.11) **Definíció.** Az F és F^* eloszlásfüggvények Lévy-távolságának nevezzük és $\delta(F, F^*)$-gal jelöljük azon ε-ok infimumát, amelyekre tetszőleges x mellett

$$F(x-\varepsilon)-\varepsilon \leqq F^*(x) \leqq F(x+\varepsilon)+\varepsilon. \tag{5.12}$$

Ha ξ és ξ^* eloszlásfüggvénye F, F^*, akkor $\delta(F, F^*)$-ot nevezzük ξ és ξ^* Lévy-távolságának is, és $\delta(\xi, \xi^*)$-gal jelöljük.

(5.12) **Állítás.** a) *δ tényleg távolság az eloszlásfüggvények terében (a változók terében pedig félmetrika).*

b) *Az eloszlásfüggvények tere ebben a metrikában teljes.*

c) *A konvergencia ebben a metrikában ekvivalens a (9)-ben definiált gyenge konvergenciával.*

d) *Ha c konstans, akkor*

$$\delta(\xi+c, \eta+c) = \delta(\xi, \eta).$$

e) *Ha ξ, η tetszőleges változók, 0 pedig itt a 0-ba koncentrált (1 valószínűséggel 0 értékű) változót jelöli, akkor*

$$\delta(\eta, \xi+\eta) \leqq \delta(0, \xi) = \inf\{\varepsilon: P(|\xi| \geqq \varepsilon) \leqq \varepsilon\}. \tag{5.13}$$

(5.14) **Definíció.** Ha ξ_n eloszlásban konvergál ξ-hez, akkor ξ-t a ξ_n sorozat határváltozójának, ξ eloszlását pedig ξ_n határeloszlásának nevezzük.

Hogy miért használjuk inkább a változót, mint az eloszlást, annak az a magyarázata, hogy független változók összegét jóval egyszerűbb kezelni, mint eloszlásfüggvények konvolúcióját. (Hasonló okból adják meg gyakran, ld. pl. Kubilius [1, 2], az eloszlás helyett a karakterisztikus függvényt, amit szorozni lehet.) Mi a konvergencia definíciói közül leginkább a Lévy-távolságosat fogjuk használni. (9) a legáltalánosabban használt, (7) pedig a legmesszebb általánosítható, tetszőleges topologikus térbe képező változókra.

(5.15) **Definíció.** Legyen f számelméleti függvény. f határeloszlásának nevezzük az $f^{(x)}$ változók határeloszlását (amennyiben létezik).

Most már ki tudjuk mondani kérdésünkre a választ.

(5.16) **Erdős—Wintner [1] tétel.** *Legyen f additív függvény, ζ_p és η_x mint a 4. fejezetben. A következő feltételek ekvivalensek:*

a) *f-nek van határeloszlása;*
b) η_x*-nek van határeloszlása;*
c) *az*

$$\eta = \sum_p \zeta_p$$

sor 1 *valószínűséggel konvergens;*
d) *konvergensek a*

$$\sum_{|f(p)|>1} 1/p, \quad \sum_{|f(p)|\leq 1} f(p)/p, \quad \sum_{|f(p)|\leq 1} f^2(p)/p \tag{5.17}$$

sorok.

E feltételek teljesülése esetén η f határváltozója.

Ezt a tételt a 6., 8., 9. fejezetben bizonyítjuk.

Az $f(n)=\log \sigma_{-1}(n)$ függvényre $f(p)\sim 1/p$, tehát a σ_{-1} függvénynek is van határeloszlása; ezzel azonban a (3)-beli és hasonló sűrűségek létezését még nem kaptuk meg. Nézzük meg, mi a kapcsolat a határeloszlás és az $f(n)\leqq a$ által jellemzett sorozatok sűrűsége között.

(5.18) **Tétel.** *Legyen f számelméleti függvény, a valós szám*

$$S_a = f^{-1}((-\infty, a]) = \{n: f(n) \leqq a\}. \tag{5.19}$$

a) *Ha egy mindenütt sűrű halmaz elemein létezik*

$$F(a) = d(S_a), \tag{5.20}$$

továbbá

$$\lim_{-\infty} F(a) = 0, \quad \lim_{+\infty} F(a) = 1, \tag{5.21}$$

akkor f-nek van határeloszlása, az eloszlásfüggvény

$$F^*(a) = \lim_{b\to a^+} F(b).$$

b) *Ha f-nek van határeloszlása F eloszlásfüggvénnyel, akkor (20) teljesül F minden folytonossági pontjában.*

A tétel a definíciók közvetlen következménye, a részletes bizonyítást az olvasóra hagyjuk. Hogy a tételt alkalmazni tudjuk, tisztázni kell, hogy egy additív függvény eloszlása mikor lesz folytonos; a (16) tétel szerint ez egy tiszta valószínűségszámítási kérdésre redukálható.

Ismert (ld. pl. Szőkefalvi-Nagy [1], V. 2. 4. vagy Zamansky [1], X. 5. §) hogy tetszőlegesen monoton függvény — speciálisan egy eloszlásfüggvény is — egyértelműen felbontható egy tiszta ugrófüggvény, egy abszolút folytonos függvény és egy szinguláris (folytonos, m. m. 0 deriváltú) függvény összegére.

(5.22) **Tétel.** (Lévy [1], Jessen—Wintner [1]; ld. még van Kampen [1]). *Tekintsünk egy* 1 *valószínűséggel konvergens*

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

sort, amelyben a ξ_n*-ek független, diszkrét eloszlású változók. Ekkor* η *eloszlásfüggvénye vagy tiszta ugrófüggvény, vagy abszolút folytonos, vagy szinguláris. Az első lehe-*

tőség pontosan akkor következik be, ha

$$\sum_{n=1} (1-d_n) < \infty, \tag{5.23}$$

ahol

$$d_n = \max_a P(\xi_n = a).$$

Hogy a folytonos eloszlásfüggvény mikor lesz abszolút folytonos és mikor szinguláris, arra nincs jó kritérium.

A fenti tételt additív függvényekre alkalmazva adódik:

(5.24) **Tétel.** *Legyen f eloszlással rendelkező additív függvény. Ez az eloszlás vagy diszkrét, vagy abszolút folytonos, vagy szinguláris; az első eset pont akkor következik be, ha*

$$\sum_{f(p)\neq 0} 1/p < \infty. \tag{5.25}$$

Bizonyítás. (16)-ot és (22)-t alkalmazzuk. A változókra

$$\max_a P(\zeta_p = a) = P(\zeta_p = 0) =$$

$$= (1-1/p) \sum_{\substack{k \\ f(p^k)=0}} p^{-k} \begin{cases} \geqq 1-p^{-2} & \text{ha} \quad f(p)=0, \\ \leqq 1-p^{-1}+p^{-2} & \text{ha} \quad f(p)\neq 0; \end{cases}$$

ebből látható, hogy a (23) és (25) feltételek ekvivalensek. □

Ismert (Erdős [3]), hogy mindhárom lehetőség elő is fordul.

A tételnek arra a felére, amely az eloszlásfüggvény folytonosságával foglalkozik, egy közvetlen bizonyítást is adunk. Az alábbi erősebb eredményt fogjuk megmutatni:

(5.26) **Tétel.** (Erdős [5]). *Ha f additív és a (25) sor divergens, akkor tetszőleges pozitív ε-hoz található olyan $\delta>0$ és x_0, hogy bármely $x>x_0$ és a számra*

$$P(f^{(x)} \in [a, a+\delta]) < \varepsilon.$$

Bizonyítás a 12. fejezetben. A tétel pongyolán azt mondja, hogy a (25) sor divergenciája esetén a nemlétező eloszlásfüggvény is folytonos.

Sokat vizsgálták a konkrét $\sigma_{-1}(n)$ és $\varphi(n)/n$ függvények eloszlását. Legyen σ_{-1} eloszlásfüggvénye F. Ismert (Erdős [3, 6, 7]), hogy F szinguláris,

$$F(1+h) \sim A/\log(1/h) \quad (h \to 0)$$

és $x \to \infty$ mellett

$$e^{-e^{(1+\varepsilon)Ax}} < 1-F(x) < e^{-e^{(1-\varepsilon)Ax}},$$

ahol $A=e^{-\gamma}$, γ az Euler-konstans.

Ha (25) teljesül, akkor tudjuk, hogy f eloszlása diszkrét, de ebből a (19) sorozatok sűrűségére nem tudunk következtetni; másképpen kell eljárnunk.

(5.27) **Tétel.** *Ha f additív és kielégíti (25)-öt, akkor tetszőleges $A \subset \underline{R}$ halmazra (mindkét oldal létezik)*

$$d(f^{-1}(A)) = P(\eta \in A),$$

η f határváltozója.

(5.28) **Következmény.** *Ha egy f additív függvénynek van határeloszlása, akkor a (19) sorozatoknak is van sűrűségük.*

Az ilyen függvények szerkezetének részletesebb leírásához szükségünk van még néhány fogalomra. Legyen (S_j) $\underline{N}$-nek egy partíciója:

$$\underline{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j, \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{ha} \quad i \neq j. \tag{5.29}$$

(5.30) **Definíció.** A (29) partíció szabályos, ha S_j-nek van sűrűsége és

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(S_j) = 1. \tag{5.31}$$

Könnyen látható, hogy egy szabályos partícióra megszorítva a sűrűség σ-additív lesz. Pontosabban:

(5.32) **Állítás.** *Ha (S_j) szabályos partíció, $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots$, akkor*

$$d\left(\bigcup S_{k_j}\right) = \sum d(S_{k_j}).$$

Az egyszerű bizonyítást az olvasóra hagyjuk; vö. (7.15).

(5.33) **Definíció.** Egy f számelméleti függvény particionális, ha az $f^{-1}(a)$ halmazok, ahol a befutja f értékkészletét, szabályos partíciót alkotnak.

(5.34) **Állítás.** *Ha f particionális, akkor tetszőleges $f^{-1}(A)$ halmaznak van sűrűsége.* Ez (32) következménye.

(5.35) *Feladat.* (34) megfordítása: ha minden $f^{-1}(A)$ halmaznak van sűrűsége, akkor f particionális.

(5.36) **Tétel.** *Ha egy f additív függvényre teljesül (25), akkor f particionális.*

(27)-et és (36)-ot a 7. fejezetben bizonyítjuk.

Búcsúzóul megjegyzem, hogy azon additív függvények jellemzése, amelyekre $d(S_a)$ mindig létezik, megoldatlan (sőt, nem is hiszem, hogy egyszerűen megoldható). Persze ez akkor érdekes, ha a sűrűség nem teljesíti a (21) feltételt.

(5.37) *Feladat.* Konstruáljuk olyan additív függvényt, amelyre $d(S_a)$ mindig létezik, értéke a-tól függetlenül α, $\alpha \in [0, 1]$ tetszőleges előre megadott szám.

(5.38) *Feladat.* (Erdős [4]) Legyen $A(x)$ azon n-ek száma, amelyekre $\varphi(n) \leqq x$. Bizonyítandó, hogy létezik

$$\lim_{x \to \infty} A(x)/x.$$

6. *Majdnem periodikus függvények*

Ebben a fejezetben többek között bebizonyítjuk, hogy az (5.16) tétel d) feltételének eleget tevő függvényeknek van határeloszlásuk.

(6.1) **Definíció.** Egy f számelméleti függvény majdnem periodikus ($f \in W$), ha tetszőleges pozitív ε-hoz található olyan g periodikus függvény, hogy akármilyen x választással az $n \leqq x$ számokra εx kivételével

$$|f(n) - g(n)| \leqq \varepsilon.$$

(6.2) **Tétel.** *Ha f majdnem periodikus, akkor f-nek van határeloszlása.*

Bizonyítás. Ha f számelméleti függvény, legyen

$$\|f\| = \inf_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon+\sup_x \frac{1}{x}\left|\{n\colon n\leqq x,\ |f(n)|>\varepsilon\}\right.\right) = \inf_{\varepsilon}\left(\varepsilon+\sup_x P(|f^{(x)}|>\varepsilon)\right). \tag{6.3}$$

$f\in W$ nyilván azt jelenti, hogy f a fenti normában tetszőlegesen megközelíthető periodikus függvényekkel. Mivel egy periodikus függvénynek nyilván van eloszlása, ezért elég bebizonyítani az alábbit:

(6.4) **Tétel.** *Ha $\|f_m-f\|\to 0$ és f-nek van határeloszlása, akkor f-nek is van, és az f_m határeloszlásának határértéke (az (5.11)-ben definiált Lévy-távolság szerint).*

(6.5) **Lemma.** *Ha az f, g számelméleti függvényeknek van határeloszlásuk, φ, ill. γ egy határváltozójuk, akkor*

$$\delta(\varphi,\gamma)\leqq\|f-g\|.$$

Bizonyítás. (3) alapján minden x-re

$$\delta(0,f^{(x)})\leqq\|f\|,$$

ahonnan (5.13) szerint

$$\delta(f^{(x)},g^{(x)})\leqq\|f-g\|. \tag{6.6}$$

A háromszög-egyenlőtlenséget használva

$$\delta(\varphi,\gamma)\leqq\delta(\varphi,f^{(x)})+\delta(f^{(x)},y^{(x)})+\delta(g^{(x)},\gamma);$$

$x\to\infty$ esetén (5)-öt kapjuk. □

(4) bizonyítása. Legyen γ_m f_m határváltozója. (5) szerint

$$\delta(\gamma_k,\gamma_l)\leqq\|f_k-f_l\|,$$

tehát (γ_k) a δ félmetrikában Cauchy-sorozat. A teljesség miatt létezik γ, amelyre

$$\delta(\gamma_m,\gamma)\to 0.$$

Ekkor

$$\delta(f^{(x)},\gamma)\leqq\delta(f^{(x)},f_m^{(x)})+\delta(f_m^{(x)},\gamma_m)+\delta(\gamma_m,\gamma).$$

$x\to\infty$ esetén kapjuk, hogy

$$\limsup_{x\to\infty}\delta(f^{(x)},\gamma)\leqq\delta(\gamma_m,\gamma)+\|f-f_m\|;$$

innen $m\to\infty$ mellett kapjuk a tételt. □

(6.7) **Tétel.** *Ha egy f additív függvény teljesíti az (5.16. d) feltételt, akkor majdnem periodikus.*

(6.8) **Lemma.** *Legyen f additív függvény, $h>0$,*

$$A_h=\sum_{\substack{p\leqq x\\ |f(p)|\leqq h}} f(p)/p,\quad B_h^2=\sum_{\substack{p^k\leqq x\\ |f(p^k)|\leqq h}} f^2(p^k)\,p^{-k},$$

$\varepsilon>0$. Ekkor

$$P(|f^{(x)}-A_h|\geqq\varepsilon)\leqq c\varepsilon^{-2}B_h^2+\sum_{\substack{p^k\leqq x\\ |f(p^k)|>h}} p^{-k}, \tag{6.9}$$

c abszolút konstans.

Bizonyítás. Tekintsük az $f=f_1+f_2$ felbontást, ahol f_1, f_2 additív és

$$f_1(p^k) = \begin{cases} f(p^k) & \text{ha } |f(p^k)| \leqq h, \\ 0 & \text{máskor.} \end{cases}$$

Nyilván

$$P(|f^{(x)} - A_h| \geqq \varepsilon) \leqq P(|f_1^{(x)} - A_h| \geqq \varepsilon) + P(f_2^{(x)} \neq 0).$$

Az első tagra (1.11)-et alkalmazva a $c\varepsilon^{-2}B_h^2$ becslést kapjuk. Továbbá $f_2(n) \neq 0$ csak akkor lehet, ha n osztható egy prímhatvánnyal, melyre $|f_2(p^k)| > h$, tehát

$$P(f_2^{(x)} \neq 0) \leqq \frac{1}{x} \sum_{|f(p^k)|>h} [xp^{-k}] \leqq \sum_{\substack{p^k \leqq x \\ |f(p^k)|>h}} p^{-k}. \qquad \square$$

(7) bizonyítása. Legyen g_K az az additív függvény, amelyre

$$g_K(p) = \begin{cases} f(p^k) & \text{ha } p \leqq K, \\ 0 & \text{máskor.} \end{cases}$$

g_K nyilván periodikus ($K!$ periódussal). Megbecsüljük $\|g - g_K\|$-t. (8)-at alkalmazzuk $h=1$ választással. Az

$$A^{(K)} = \sup_x \Big| \sum_{\substack{K<p<x \\ |f(p)|\leqq 1}} f(p)/p \Big|$$

jelöléssel azt kapjuk, hogy $(0<\varepsilon<1)$

$$\|g - g_K\| \leqq A^{(K)} + \varepsilon + c\varepsilon^{-2} \sum_{p^k > K} \frac{\min(1, f^2(p^k))}{p^k}. \tag{6.10}$$

$K \to \infty$ esetén $A^{(K)} \to 0$ a definiáló sor konvergenciája miatt, (10) tehát azt adja, hogy

$$\limsup \|g - g_K\| \leqq \varepsilon;$$

ε tetszőleges lévén, készen vagyunk. $\square$

Megemlítünk még egy rokon fogalmat.

(6.11) **Definíció.** Legyen $0<q<\infty$. Egy f számelméleti függvény q-majdnem periodikus, $f \in W_q$, ha tetszőleges pozitív ε-hoz van olyan g periodikus függvény, hogy minden x-re

$$\sum_{n \leqq x} |f(n) - g(n)|^q \leqq \varepsilon x.$$

$f \in W_\infty$, hogyha tetszőleges pozitív ε-hoz található olyan g periodikus függvény, hogy minden x-re

$$|f(n) - g(n)| \leqq \varepsilon.$$

(6.12) *Feladat.* $q<r \Rightarrow W_q \supsetneq W_r$.

(6.13) *Feladat.* $\bigcup W_q \subsetneq W$.

(6.14) *Feladat.* $f \in W_\infty$ pontosan akkor, ha tetszőleges pozitív ε-hoz van olyan K természetes szám, hogy

$$m \equiv n \pmod K \Rightarrow |f(m) - f(n)| < \varepsilon.$$

(Azaz W_∞ egybeesik Novoszelov [1] „poliadikusan folytonos" függvényeivel; l. még Posztnyikov [1], 3. fej.)

(6.15) *Feladat.* Ha

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |g(n)| < \infty, \tag{6.16}$$

akkor $f \in W_\infty$.

(6.17) *Feladat.* Legyen f additív. $f \in W_\infty$ pontosan akkor, ha f előáll a (6.16) formában.

(6.18) *Feladat.* Legyen $f(n) = \varphi(n)\sigma(n)/n^2$. Ekkor $f \in W_\infty$.

(6.19) *Feladat.* Legyen f additív. $f \in W_2$ pontosan akkor, ha konvergensek a

$$\sum_p f(p)/p, \quad \sum_p f^2(p)/p$$

sorok. (Erdős—Wintner [2].)

7. *Particionális függvények*

E fejezetben bebizonyítjuk az (5.27) és (5.36) tételeket.

(7.1) **Definíció.** Egy f számelméleti függvény erősen majdnem periodikus, $f \in W^*$, ha tetszőleges pozitív ε-hoz található olyan g periodikus függvény, hogy minden x-re

$$|\{n: n \leqq x, f(n) \neq g(n)\}| \leqq \varepsilon x.$$

(7.2) *Feladat.* $W^* \subset W$, de W^* nem áll tartalmazási relációban semelyik W_q-val.

(7.3) *Feladat.* Tetszőleges q-ra $W_q + W^* = W$.

(7.4) **Tétel.** *Ha f additív és*

$$\sum_{f(p)\neq 0} 1/p < \infty,$$

akkor $f \in W^*$.

A következő általánosabb eredményt bizonyítjuk:

(7.5) **Tétel.** *Legyen A természetes számokból álló halmaz. Legyen f olyan számelméleti függvény, hogy $f(n)$ csak attól függ, hogy $n \in A$ elemei közül melyekkel osztható. Ha A elemeinek reciprokösszege konvergens, akkor $f \in W^*$.*

(4) ebből úgy adódik, hogy A-ba belevesszük azokat a prímeket, amelyekre $f(p) \neq 0$, és az összes, legalább 2 kitevőjű prímhatványt.

Bizonyítás. f definíciója szerint van olyan A véges részhalmazain értelmezett F függvény, hogy

$$f(n) = F(B), \quad B = \{a: a \in A, a|n\}.$$

Legyen

$$g_m(n) = F(B'), \quad B' = \{a: a \in A, a|n, a \leqq m\}.$$

g_m nyilván periodikus $m!$ periódussal, továbbá $g_m(n)=f(n)$ ha n nem osztható A semelyik m fölötti elemével. Az ezen feltételt ki nem elégítő n-ek száma x-ig

$$\leqq \sum_{\substack{a\in A\\ a>m}} [x/a] \leqq x \sum_{\substack{a\in A\\ a>m}} 1/a \leqq \varepsilon x$$

ha m elég nagy. □

(7.6) *Feladat.* Vezessük le a (6.7) tételt a (6.19) feladatból és az előző tételből.

(7.7) **Tétel.** *Az erősen majdnem periodikus függvények particionálisak.*

Bizonyítás. Legyen $f\in W^*$ és legyen g_m az (1) definíciónak $\varepsilon=1/m$ választással megfelelő periodikus függvény. Legyenek az f valamelyik g_m értékkészletében előforduló számok $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, és legyen

$$f^{-1}(\alpha_i) = S_i, \quad g_m^{-1}(\alpha_i) = S_i^{(m)}.$$

A definícióból következik, hogy minden x-re

$$\sum_i |S_i(x) - S_i^{(m)}(x)| \leqq 2x/m. \tag{7.8}$$

g_m periodikus lévén nyilván particionális, tehát $S_i^{(m)}$-nek van sűrűsége. (8)-ból csak egy tagot véve

$$|S_i(x) - S_i^{(m)}(x)| \leqq 2x/m,$$

tehát S_i-nek is van, és

$$d(S_i) = \lim_{m\to\infty} d(S_i^{(m)}).$$

(8) miatt

$$\sum_i |d(S_i) - d(S_i^{(m)})| \leqq 2/m,$$

tehát

$$\left|1 - \sum_i d(S_i)\right| \leqq 2/m.$$

m tetszőleges volt, készen vagyunk. □

(7.9) *Feladat.* A Möbius-függvény particionális, de nem majdnem periodikus.

Legyen f particionális függvény, értékei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, f^{-1}(\alpha_i)=S_i$. Legyen η valószínűségi változó az alábbi eloszlással:

$$P(\eta = \alpha_i) = d(S_i). \tag{7.10}$$

Belátjuk, hogy f határváltozója η, az eddig használtnál erősebb értelemben is.

Ha ξ_1, ξ_2 valószínűségi változók, legyen

$$D(\xi_1, \xi_2) = \sup_A |P(\xi_1\in A) - P(\xi_2\in A)|. \tag{7.11}$$

Persze ez is csak az eloszlástól függ. Ha a megfelelő eloszlásfüggvények F_1, ill. F_2, akkor $D(\xi_1, \xi_2)$ nem egyéb, mint F_1-F_2 teljes variációjának a fele; speciálisan diszkrét változókra

$$D(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \sum_\alpha |P(\xi_1 = \alpha) - P(\xi_2 = \alpha)|. \tag{7.12}$$

(7.13) *Feladat. a)* Bizonyítsuk be, hogy diszkrét változókra (11) és (12) ekvivalens.

b) Ha az eloszlás abszolút folytonos, a sűrűségfüggvények φ_1, φ_2, akkor

$$D(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\, dt.$$

A (11) definíció tetszőleges (absztrakt) változókra is értelmes. Valós változókra nyilván

$$D(\xi_1, \xi_2) \geqq \sup_t |F_1(t) - F_2(t)| \geqq \delta(\xi_1, \xi_2). \tag{7.14}$$

Ha például veszünk egy 0-ba és egy ε-ba koncentrált változót, akkor

$$D(\xi_1, \xi_2) = 1, \quad \delta(\xi_1, \xi_2) = \varepsilon,$$

vagyis D sokkal erősebb mércéje a két eloszlás különbségének.

(7.15) **Tétel.** *Ha f particionális, akkor a (10) eloszlású η változóval $x \to \infty$ esetén*

$$D(\eta, f^{(x)}) \to 0.$$

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy

$$\sum_{i=0}^{\infty} |d(S_i) - S_i(x)/x| \to 0. \tag{7.16}$$

Mivel a megfelelő előjeles összeg 0, ezért

$$\sum |d(S_i) - S_i(x)/x| = 2 \sum \left(d(S_i) - S_i(x)/x\right)_+,$$

ahol

$$x_+ = \max(x, 0).$$

Itt az egyes tagok 0-hoz tartanak és a jobb oldalon az i-edik tag legfeljebb $d(S)$ lévén a sor egyenletesen konvergens, tehát a $\sum$ és a limes felcserélhetők. □

(7.17) *Feladat.* Ha egy (S_i) partícióra (16) teljesül, akkor az szabályos.

Alkalmazásként tekintsük a következő függvényeket:

$$\Pi_p(n) = p^k \quad \text{ha} \quad p^k \| n, \tag{7.18}$$

$$\Omega_K(n) = \prod_{p \leqq K} \Pi_p(n). \tag{7.19}$$

$\Omega_K(n)$ tehát n K-nál nem nagyobb prímosztóit tartalmazza. Legyen továbbá

$$\omega_K = \prod_{p \leqq K} \pi_p, \tag{7.20}$$

ahol π_p a (4.4)-ben definiált valószínűségi változó.

(7.21) **Tétel.** *Fix K és $x \to \infty$ mellett*

$$D(\Omega_K^{(x)}, \omega_K) \to 0.$$

Erősebb formában l. a 14. fejezetben.

Bizonyítás. (5) és (7) miatt Ω_K particionális; (15) szerint tehát elég megmutatni, hogy

$$d(S_m) = \frac{1}{m} \prod_{p \leqq K} (1 - 1/p) = P(\omega_K = m), \tag{7.22}$$

ahol

$$S_m = \{n\colon \Omega_K(n) = m\}$$

és m olyan szám, amelynek összes prímosztója K alatti (Ω_K és ω_K értékkészletében nyilván csak ilyenek vannak). (22) második fele triviális; első fele abból következik, hogy $\Omega_K(n)=m$ pontosan azokra az n-ekre áll, amelyek $n=mu$ alakba írhatók, ahol u nem osztható egy K alatti prímmel sem. □

(7.23) **Állítás.** *Ha f additív és*

$$f_K(n) = \sum_{p \leqq K} \bar{f}_p(n),$$

akkor (a 4. fejezet jelöléseivel) fix K-ra

$$D(f_K^{(x)}, \eta_K) \to 0 \quad (x \to \infty).$$

Bizonyítás. Nyilván

$$f_K(n) = f(\Omega_K(n)), \quad \eta_K = f(\omega_K),$$

tehát az állítás következik (21)-ből és az alábbi észrevételből: tetszőleges ξ_1, ξ_2 változókra és H függvényre

$$D(H(\xi_2), H(\xi_2)) \leqq D(\xi_1, \xi_2). \tag{7.24}$$

(Ez a kényelmes tulajdonsága δ-nak nincs meg.) □

(7.25) *Feladat.*

$$D(\xi_1, \xi_2) = \sup_H \delta(H(\xi_1), H(\xi_2)),$$

ahol H végigfut az összes mérhető függvényeken.

Most beváltjuk a fejezet elején tett ígéretünket. (5.35) (4) és (7) következménye, (5.27) pedig (15)-é. Hogy az ott szereplő η f határváltozója, az abból következik, hogy ha $f^{(x)}$ η-hoz tart a D félmetrikában, akkor nyilván a durvább δ félmetrikában is.

8. *Határeloszlás centrálással*

Már tudjuk, hogy az (5.16. d) feltételt kielégítő függvényeknek van határeloszlásuk. E fejezetben megmutatjuk a (b), (c) és (d) feltételek ekvivalenciáját, valamint azt, hogy az eloszlás a megadott alakú, azaz a „prímek függetlenségének elve" alapján számítható. A feltétel szükségessége a következő fejezetre marad.

(5.16)-ban (b), (c) és (d) ekvivalenciája tisztán valószínűségszámítási állítás; speciális esete Kolmogorov alábbi tételének.

(8.1) **Tétel.** *Legyenek a ζ_n-ek tetszőleges független változók,*

$$\eta_n = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j.$$

A következő három feltétel ekvivalens:

(a) *η_n-nek van határeloszlása;*

(b) *az*

$$\eta = \sum \zeta_j$$

sor 1 *valószínűséggel konvergens;*

(c) a

$$\zeta_n^* = \begin{cases} \zeta_n & \text{ha } |\zeta_n| \leqq 1, \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$$

jelöléssel konvergensek az alábbi sorok:

$$\sum M(\zeta_n^*), \quad \sum D^2(\zeta_n^*), \quad \sum P(\zeta_n \neq \zeta_n^*).$$

L. Rényi [1], VI. 14. §. Ott ugyan csak (b) és (c) ekvivalenciája van kimondva, de a (b)⇒(c) implikáció bizonyításában valójában csak az (a) feltétel van kihasználva, úgyhogy a fenti tétel is kiadódik.

Most bebizonyítjuk, hogy ha az (5.16) tétel feltételei teljesülnek, akkor f határváltozója

$$\eta = \sum \zeta_p.$$

Nyomban egy általánosabb tételt bizonyítunk, amely leírja f viselkedését abban az esetben, ha a

$$\sum f(p)/p$$

sorra vonatkozó kikötést elejtjük.

(8.2) **Tétel.** *Legyen f additív függvény, amelyre*

$$\sum_p \frac{\min(1, f^2(p))}{p} < \infty \tag{8.3}$$

(ez egybefoglalja (5.16. d) első és harmadik sorát.) Legyen

$$A_x = \sum_{\substack{p \leqq x \\ |f(p)| \leqq 1}} f(p)/p. \tag{8.4}$$

Ekkor az $f^{(x)} - A_x$ változók $x \to \infty$ esetén eloszlásban konvergálnak az

$$\eta' = \sum_p \zeta_p', \quad \zeta_p' = \begin{cases} \zeta_p & \text{ha } |f(p)| > 1, \\ \zeta_p - \dfrac{f(p)}{p} & \text{máskor} \end{cases} \tag{8.5}$$

változóhoz (a sor az (1) tétel szerint 1 *valószínűséggel konvergens).*

Ha az

$$A = \sum_{|f(p)| \leqq 1} f(p)/p$$

sor konvergens, azaz $A_x \to A$, akkor (2) azt adja, hogy $f^{(x)}$ eloszlásban konvergál az

$$\eta' + A = \eta$$

változóhoz.

Bizonyítás. Az

$$f = f_K + (f - f_K)$$

előállításból indulunk ki; (7.23) miatt

$$\delta(f_K^{(x)}, \eta_K) \to 0 \quad (x \to \infty). \tag{8.6}$$

$f-f_K$ pedig majdnem konstans lesz. (6.8)-at $h=1$ választással alkalmazva kapjuk, hogy $K\to\infty$ esetén x-ben egyenletesen

$$P\big(|f^{(x)}-f_K^{(x)}-(A_x-A_K)|>\varepsilon\big)\to 0,$$

ε tetszőleges pozitív szám; tehát (5.13) miatt

$$\delta(f^{(x)}-A_x, f_K^{(x)}-A_K)\to 0 \quad (K\to\infty) \tag{8.7}$$

x-ben egyenletesen. A háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\delta(f^{(x)}-A_x, \eta')\leqq \delta(f^{(x)}-A_x, f_K^{(x)}-A_K)+\delta(f_K^{(x)}-A_K, \eta_K')+\delta(\eta_K', \eta'),$$

ahol

$$\eta_K'=\eta_K-A_K=\sum_{p\leqq K}\zeta_p'.$$

A bizonyítás befejezése (6.4)-hez hasonló: először $x\to\infty$ fix K mellett, ekkor a középső tag kiesik, (8.6) miatt, majd $K\to\infty$, ekkor az első tag (8.7) miatt, a harmadik pedig a (8.5) sor konvergenciája miatt tűnik el. Így kapjuk, hogy

$$\delta(f^{(x)}-A_x, \eta')\to 0. \tag{8.8}$$

□

Megjegyzés. (8.8) úgy is fogalmazható, hogy

$$\delta(f^{(x)}, \eta_x)\to 0. \tag{8.9}$$

(5.24)-ből következik, hogy a

$$\sum_{|f(p)|\leqq 1} f(p)/p$$

sor divergenciája esetén a határelosztás folytonos; abszolút folytonos vagy szinguláris. Erdős és Kátai [1] bebizonyították, hogy mindkét eset előfordul.

Kérdezhetjük, hogy egy additív függvényhez mikor található olyan A_x „centrum", hogy az

$$f^{(x)}-A_x$$

sorozatnak legyen határeloszlása. A „prímek függetlensége elvének" az felelne meg, ha a (2) tételben megadott függvények kimerítenék ezt az osztályt. Ez azonban nem igaz: például a logaritmikus függvény $A_x=\log x$ centrálással eloszlásban konvergál a (4.8)-ban megadott λ változóhoz. Az viszont már igaz, a függetlenségi elv mélyebb formájának megfelelően, hogy az összes additív függvény, amelynek centrálással van eloszlása, egy a (2) tételben megadott fajtájú és egy logaritmikus függvényből tevődik össze.

(8.10) **Tétel.** *Egy g additív függvénynek pontosan akkor van alkalmas centrálással határeloszlása, ha található olyan a szám, hogy*

$$\sum_p \frac{\min\big(1, (g(p)-a\log p)^2\big)}{p}<\infty. \tag{8.11}$$

Ekkor centrum gyanánt vehető

$$A_x=a\log x+\sum_{\substack{p\leqq x\\ |f(p)|\leqq 1}} f(p)/p, \tag{8.12}$$

ahol $f=g-a\log$. *Az* (5) *jelöléssel* g *határváltozója*

$$a\lambda+\eta' = a\lambda+\sum_p \zeta_p', \tag{8.13}$$

ahol a ζ_p'*-k függetlenek egymástól és* λ*-tól.*

Az elégségesség bizonyítása. A

$$g = (f_K+a\log)+(f-f_K) \tag{8.14}$$

felbontással kezdjük. Mivel f kielégíti a (3) feltételt, (14) második tagja ugyanúgy kezelhető, mint az előzőkben. Az első tagról pedig belátjuk, hogy fix K és x mellett a $\log x$ centrálással eloszlásban konvergál az $\eta_K+a\lambda$ változóhoz. Ez a következő két állításból jön ki.

(8.15) **Lemma.** *Legyen* f *határeloszlással rendelkező számelméleti függvény,* η f *határváltozója,* λ *tőle független (4.8) eloszlású változó. Ekkor az*

$$(f^{(x)}, \log^{(x)}-\log x)$$

vektorváltozók eloszlásban tartanak (η, λ)*-hoz.*

(8.16) **Lemma.** *Ha* (ξ_n, η_n) *eloszlásban tart* (ξ, η)*-hoz,* F *pedig az egész síkon folytonos függvény, akkor* $F(\xi_n, \eta_n)$ *eloszlásban tart* $F(\xi, \eta)$*-hoz.*

Először (15)-öt alkalmazzuk f_K-ra, aztán (16)-ot az $F(u, v)=u+av$ függvényre. □

(16) a határeloszlás (5.7) definíciójának közvetlen következménye. (15) bizonyításában az (5.9) definíciót fogjuk használni, tehát burkoltan alkalmazzuk e két definíció (nem egész evidens) ekvivalenciáját.

(15) bizonyítása. Belátjuk, hogy

$$P(f^{(x)} \leqq a,\ \log^{(x)}-\log x \leqq b) \to P(\eta \leqq a)P(\lambda \leqq b), \tag{8.17}$$

valahányszor a folytonossági helye η eloszlásának. $b>0$ esetén (17) mindkét oldala ugyanaz, mint $b=0$ mellett; feltehetjük tehát, hogy $b\leqq 0$. Ekkor

$$\log n-\log x \leqq b \Rightarrow n \leqq y = e^b x,$$

tehát (17) bal oldala pontosan

$$= \frac{y}{x} P(f^{(y)} \leqq a) \to \frac{y}{x} P(\eta \leqq a) = e^b P(\eta \leqq a),$$

ami azonos (17) jobb oldalával. □

(8.18) **Definíció.** Egy f számelméleti függvényt szétszórtnak nevezünk, ha $x\to\infty$ esetén u-ban egyenletesen

$$P(f^{(x)} \in [u, u+1]) \to 0.$$

Ha egy függvénynek alkalmas centrálással van határeloszlása, akkor az nyilván nem lehet szétszórt; a (10) tételben a szükségesség tehát következik Erdős [5] alábbi tételéből.

(8.19) **Tétel.** *Ha egy* g *additív függvény nem szétszórt, akkor a (11) sor alkalmas* a*-val konvergens.*

Ezt majd a 12. fejezetben bizonyítjuk (pontosabban visszavezetjük egy még erősebb tételre, amely majd a cikk harmadik részében fog szerepelni).

Végül egy történeti megjegyzés. A (10) tétel elégségességi részét és a (19) tételt is Erdős [5] bizonyította először. Különös módon azonban Erdős nem vette észre, hogy (19) magában foglalja (10) másik felét, és azt mint sejtést mondta ki. A (10) tétel teljes formájában először kereken 25 évvel később bukkan fel, egyszerre Delange [6], Elliott—Ryavec [1] és Levin—Tyimofejev [1] cikkében (más bizonyításokkal).

9. *Az Erdős—Wintner tétel: szükségesség*

E fejezetben befejezzük az Erdős—Wintner tétel bizonyítását: belátjuk, hogy ha egy additív függvénynek van határeloszlása, akkor az kielégíti az (5.16. d.) feltételt. Ehhez a karakterisztikus függvény módszerét fogjuk használni.

Egy ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvényének nevezzük a

$$\chi(t) = M(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x) \tag{9.1}$$

függvényt (F az eloszlásfüggvény). (χ tehát F Fourier—Stieltjes transzformáltja). Nekünk a következő tulajdonságokra lesz szükségünk (l. Rényi [1], V. fej.):

(9.2) A karakterisztikus függvény folytonos (sőt, az egész számegyenesen egyenletesen).

(9.3) Ha ξ_n tart ξ-hez eloszlásban, akkor a megfelelő karakterisztikus függvényekre $\chi_n(t) \to \chi(t)$ tetszőleges t-re. (Ez az (5.7) definíció közvetlen következménye. Az is igaz, l. a következő feladatot, hogy a konvergencia bármely véges intervallumon egyenletes, de erre már nem lesz szükségünk.)

(9.4) Független változók összegének karakterisztikus függvénye a karakterisztikus függvények szorzata.

(9.5) *Feladat.* Legyenek χ_1, χ_2 a ξ_1, ξ_2 változók karakterisztikus függvényei.

a) $|\chi_1(t) - \chi_2(t)| \leqq (1 + |t|)\delta(\xi_1, \xi_2)$.

b) $|\chi_1(t) - \chi_2(t)| \leqq D(\xi_1, \xi_2)$.

A karakterisztikus függvények igazi jelentőségét (3) jóval mélyebb megfordítása adja:

(9.6) Ha $\chi_n(t) \to \chi(t)$ pontonként, akkor ξ_n tart ξ-hez eloszlásban.

Erre azonban szintén nem lesz szükségünk.

Nézzük meg, mit ad (3) egy additív függvényre. Definíció szerint $f^{(x)}$ karakterisztikus függvénye

$$\chi^{(x)}(t) = x^{-1} \sum_{n \leqq x} e^{itf(n)}. \tag{9.7}$$

Itt

$$h_t(n) = e^{itf(n)} \tag{9.8}$$

unimoduláris multiplikatív függvény (unimoduláris annyit jelent, hogy mindig $|h_t(n)|=1$). Ha f-nek van határeloszlása, akkor

$$\chi^{(x)}(t) \to \chi(t) \quad (x \to \infty),$$

ahol χ a határeloszlás karakterisztikus függvénye, vagyis bármely h_t függvénynek létezik az

$$M(h_t) = \lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{n\leqq x} h_t(n) \tag{9.9}$$

középértéke, és ez t folytonos függvénye. Mivel $t=0$ esetén ez az érték 1, ezért valamilyen $T>0$ mellett

$$|M(h_t)| > 1/2 \quad (|t| \leqq T). \tag{9.10}$$

(9.11) **Lemma.** *Ha h unimoduláris multiplikatív függvény 0-tól különböző középértékkel, akkor*

$$\sum_p \frac{1-\operatorname{Re} h(p)}{p} \leqq c_1 - \log|M(h)|,$$

c_1 abszolút konstans.

Delange megadta az olyan unimoduláris multiplikatív függvények teljes leírását, amelyekre $M(h)\neq 0$; ezt, a fenti lemma bizonyításával együtt, a következő fejezetben tárgyaljuk.

(5.16.d) szükségessége. Tegyük fel, hogy f-nek van eloszlása; (10) és (11) szerint

$$\sum_p \frac{1-\operatorname{Re} h_t(p)}{p} = \sum_p \frac{1-\cos tf(p)}{p} \leqq c_2 \quad (|t| \leqq T). \tag{9.12}$$

Integráljuk (12)-t a $[0, T]$ intervallumon! Mivel

$$\int_0^T 1-\cos ty\, dt = T\left(1-\frac{\sin Ty}{Ty}\right) \geqq c_3 \min(1, y^2)$$

(c_3 itt T-től függ), ezért (12)-ből azt kapjuk, hogy

$$\sum_p \frac{\min(1, f^2(p))}{p} < \infty. \tag{9.13}$$

(8.2) szerint f-nek van határeloszlása a (8.4)-ben megadott A_x centrálással. Márpedig ha egy változó-sorozatnak van határeloszlása simán és A_x centrálással is, akkor az (A_x) sorozatnak konvergensnek kell lennie, ami éppen (5.16. d) középső sorának konvergenciáját jelenti. A két szélső sor konvergenciája (13) következménye. □

10. *Delange tétele*

E fejezetben olyan multiplikatív függvényeket vizsgálunk, melyekre

$$|h(n)| \leqq 1 \tag{10.1}$$

és

$$M(h) = \lim_{x\to\infty} H(x)/x \neq 0, \tag{10.2}$$

ahol

$$H(x) = \sum_{n \leqq x} h(n).$$

(10.3) **Delange [1, 2] tétele.** *Legyen h (1)-et kielégítő multiplikatív függvény.*

a) *Ha (2) fennáll, akkor a*

$$\sum_p \frac{1-h(p)}{p} \tag{10.4}$$

sor konvergens.

b) *Ha a (4) sor konvergens, akkor h-nak van középértéke és*

$$M(h) = \prod_p (1-1/p) \sum_{k=0}^{\infty} h(p^k) p^{-k}. \tag{10.5}$$

$M(h) \neq 0$, *kivéve, ha* $h(2^k) = -1$, $k = 1, 2, \ldots$.

A bizonyítást csak unimoduláris függvényekre részletezzük; a végén vázoljuk, hogy a gyengébb (1) feltételre hogyan lehet áttérni. (9.11)-gyel kezdjük.

(9.11) bizonyítása. A Dirichlet-sorok módszerét használjuk. Legyen $s > 1$ esetén

$$D_h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) n^{-s} = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} h(p^k) p^{-ks} \tag{10.6}$$

(vö. I. 5. és 20. fej.). A

$$H(x) = M(h)x + o(x)$$

becslésből parciális összegzéssel (l. I. 12. fej.) adódik, hogy

$$D_h(s)/(s-1) \to M(h) \quad (s \to 1). \tag{10.7}$$

Ugyanezt az azonosan 1 függvényre alkalmazva (ekkor D_h a zéta-függvény, vö. I. 5. és 13. fej.) és elosztva

$$\frac{D_h(s)}{\zeta(s)} = \prod_p (1-p^{-s}) \sum_{k=0}^{\infty} h(p^k) p^{-ks} \to M(h). \tag{10.8}$$

(8)-ban a szorzat egy tényezőjének értéke

$$= 1 + (h(p)-1)p^{-s} + O(p^{-2}). \tag{10.9}$$

Ennek megbecslésére a tetszőleges komplex α-ra érvényes

$$|1+\alpha| \leqq \exp(\operatorname{Re}\alpha + |\alpha|^2)$$

egyenlőtlenséget használjuk. (8)-ból és (9)-ből azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{D_h(s)}{\zeta(s)} \right| \leqq c_1 \exp \sum_p \frac{\operatorname{Re} h(p) - 1}{p^s}. \tag{10.10}$$

(10)-ben az $s \to 1^+$ határátmenetet végezzük. Minden tag nempozitív lévén, a kapott egyenlőtlenség igaz marad az összeg és a limes felcserélésével is, tehát

$$|M(h)| \leqq c_1 \exp \sum_p \frac{\operatorname{Re} h(p) - 1}{p}$$

jön; ez átrendezve (9.11)-et adja. □

(10.11) **Lemma.** *Legyen h unimoduláris multiplikatív függvény, amelyre*

$$\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re} h(p)}{p} < \infty. \tag{10.12}$$

Ekkor

$$H(x) = x \prod_{p \leqq x} (1 - 1/p) \sum_{k=0}^{\infty} h(p^k) p^{-k} + o(x). \tag{10.13}$$

Bizonyítás. Legyen f az

$$f(p^k) = \arg h(p^k) \quad (|f(p^k)| \leqq \pi)$$

képlettel definiált additív függvény. Nyilván

$$h(n) = e^{if(n)}$$

és

$$1 - \operatorname{Re} h(p) = 1 - \cos f(p) \asymp f^2(p),$$

tehát (12) miatt

$$\sum_p f^2(p)/p < \infty.$$

Alkalmazzuk a (8.2) tételt. $f^{(x)} - A_x$ eloszlásban η'-höz tart, tehát felírva a karakterisztikus függvényeket az 1 helyen

$$e^{-iA_x} x^{-1} \sum_{n \leqq x} h(n) \to \chi(1). \tag{10.14}$$

Na de η'-höz tart $\eta_x - A_x$ is. ζ_r karakterisztikus függvénye

$$\chi_p(t) = (1 - 1/p) \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k} \exp(itf(p^k)),$$

η_x-é pedig a (9.4) tulajdonság szerint

$$\prod_{p \leqq x} \chi_p(t).$$

Ezeket is az 1 helyen felírva

$$e^{-iA_x} \prod_{p \leqq x} (1 - 1/p) \sum_{k=0}^{\infty} h(p^k) p^{-k} \to \chi(1); \tag{10.15}$$

(14) és (15) adja (13)-at. □

Megjegyzés. A_x-et elkerülhettük volna (8.9) és (9.5. a) használatával.

A tétel bizonyítása (unimoduláris eset). Mivel

$$(1 - 1/p) \sum_{k=0}^{\infty} h(p^k) p^{-k} = 1 + (h(p) - 1)/p + O(p^{-2}),$$

a (4) sor konvergenciájából következik az (5) jobb oldalán álló szorzaté és viszont, ha a szorzat értéke nem 0. Ezekután a tétel b) fele (11) folyománya. A szorzat értéke csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője eltűnik. Könnyű látni, hogy ez csak a $p=2$-höz tartozó tényezővel fordulhat elő, és vele is csak akkor, ha $f(2^k)=-1$ $k\geqq 1$ esetén.

Az a) rész bizonyítása: a (9.11) lemmából kapjuk (12)-t. Alkalmazhatjuk tehát (11)-et, ami ad $H(x)$-re egy aszimptotikus formulát. Ezt feltevésünkkel összevetve (5)-öt kapjuk; a szorzat konvergenciájából pedig a fent említett módon adódik (4) konvergenciája. □

Az általános eset vázlata. A (9.11) lemma bizonyítása minden változtatás nélkül működik a gyengébb $|h(n)|\leqq 1$ feltétel mellett is. (11) pedig a következőképpen hozható ki. Legyen h_1 a

$$h_1(p)=\begin{cases} h(p)/|h(p)| & \text{ha} \quad h(p)\neq 0, \\ 1 & \text{ha} \quad h(p)=0 \end{cases}$$

képlettel megadott teljesen multiplikatív függvény. A h függvényt előállítjuk

$$h = h_1 * g \tag{10.16}$$

konvolúció formájában. Itt g is multiplikatív lesz, és

$$g(p^k) = h(p^k) - h(p^{k-1})h_1(p)$$

(vö. I. 4. fej.); ebből belátható, hogy

$$\sum_{p,k} |g(p^k)|\, p^{-k} < \infty,$$

amiből (l. I. 20. fej.)

$$\sum |g(n)|/n < \infty \tag{10.17}$$

következik. (16) miatt

$$H(x) = \sum_n g(n) H_1(x/n).$$

h_1-re alkalmazhatjuk a (11) lemmát; a belőle $H_1(x)$-re kapott aszimptotikus formulából és (17)-ből pedig némi számolással nyerhető a (13) formula h-ra. □

11. *Multiplikatív függvények összegzése*

Delange tétele szép kerek volt: pontosan leírta azokat az unimoduláris függvényeket, amelyekre $M(h)$ létezik és nem 0. Semmit sem mondott viszont arról, hogy mikor lesz $M(h)=0$, vagy ha $M(h)$ nem létezik, akkor hogyan viselkedik az összegzés. Például itt van a Möbius-függvény, amelyre a

$$\sum_{n\leqq x} \mu(n) = o(x) \tag{11.1}$$

reláció ekvivalens a prímszámtétellel (és a prímszámtétel ezen az úton is bizonyítható; vö. I. 21—23. fej).

(1) általánosításaként Erdős sejtette, hogy $M(h)$ létezik tetszőleges ± 1 értékű multiplikatív függvényre. (Hogy a Möbius-függvény értéke 0 is lehet, az nem jelent problémát.) Ezt 1967-ben Wirsing még általánosabban bebizonyította.

(11.2) **Wirsing [1] tétele.** *Ha h unimoduláris multiplikatív függvény és van az egységkörnek olyan íve, amely egyáltalán nem tartalmaz $h(p)$-t, akkor $H(x)$-re teljesül a (10.13) aszimptotikus formula.*

Vannak olyan függvények is, amelyekre (10.13) hibás eredményt ad. Ilyen például

$$h(n) = n^{ia}$$

(a valós); erre (10.13) $H(x)=o(x)$-et adna, noha a valóságban

$$H(x) \sim x^{1+ia}/(1+ia).$$

(Ez megfelel a logaritmikus függvény rendhagyó viselkedésének az additív függvények között.)

Unimoduláris függvényekre a kérdést teljesen megoldotta Halász [1, 2, 3].

(11.3) **Halász tétele.** *Legyen g multiplikatív függvény, $|g(n)| \leqq 1$. Tekintsük a*

$$\sum_p \frac{1-\mathrm{Re}\,(p^{ib}g(p))}{p} \tag{11.4}$$

sort.

a) *Ha ez a sor minden b-re divergesn, akkor*

$$G(x) = \sum_{n \leqq x} g(n) = o(x).$$

b) *Ha a sor egy b-re konvergens (ilyen b csak egy lehet), és*

$$g(n) = n^{ib}h(n),$$

akkor

$$G(x) = \frac{x^{1+ib}}{1+ib} \underbrace{\prod_{p \leqq x} (1-1/p) \sum_{k=0}^{\infty} h(p^k)p^{-k}}_{L(x)} + o(x). \tag{11.5}$$

$L(x)$ abszolút értékben fogyó és az alábbi értelemben lassan oszcilláló függvény:

$$L(y)-L(x) \to 0 \quad (x \leqq y \leqq x^2,\ x \to \infty)$$

y-ban egyenletesen. $G(x)=o(x)$ pontosan akkor, ha $h(2^k)=-1$ minden $k \geqq 1$ számra.

(11.6) *Feladat.* Vezessük le Wirsing tételét Halászéból. Halász tételét a cikk 3. részében bizonyítjuk. A lényeges újdonság a tétel a) fele; b) rész elemien levezethető pl. (10.11)-ből parciális összegzéssel vagy (10.11) bizonyításához hasonlóan (8.10)-ből.

(11.7) **Következmény.** *Ha g unimoduláris, akkor létezik*

$$\lim_{x \to \infty} |G(x)/x|.$$

Az eddigi tételek olyanok voltak, hogy a $H(x)=O(x)$ reláció triviális volt, „csak" azt kellett tovább finomítani. Halász [2, 3] következő tételében egy lényegesen gyengébb kikötés szerepel.

(11.8) **Tétel.** *Legyen h multiplikatív függvény, amelyre*

a) *valamely pozitív δ-val*

$$\sum_{p \leqq x} \frac{|h(p)|^{1+\delta} \log p}{p} = O(\log x)$$

(ez pl. teljesül, ha $h(p)$ korlátos);

b) $$\sum_{p} \sum_{k \geqq 2} |h(p^k)| p^{-k} < \infty;$$

c) $\operatorname{Re} s = 1$ *esetén*

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(p^k) p^{-ks} \neq 0;$$

d) *a h függvény D_h Dirichlet-sorára*

$$D_h(s) = \frac{c}{s-1} + o\left(\frac{|s|}{\operatorname{Re} s - 1}\right)$$

valamilyen c konstanssal egyenletesen ha $\operatorname{Re} s \to 1$.

Ekkor $M(h) = c$.

Ezeket a feltételeket persze nem olyan könnyű ellenőrizni.

(11.9) *Feladat.* $$\sum_{n \leqq x} \tau(n) \mu(n) = o(x).$$

Delange tételét más irányban általánosítva Elliott [4] meghatározta azokat a multiplikatív függvényeket, amelyekre $M(h) \neq 0$, csak egy „átlagos korlátosságot" feltéve.

(10.10) **Elliott tétele.** a) *Legyen h multiplikatív függvény, amelyre $M(h) \neq 0$ és*

(11.11) $$\sum_{n \leqq x} |h(n)|^2 = O(x).$$

Ekkor konvergensek a

(11.12) $$\sum_{p} \frac{h(p)-1}{p}, \quad \sum_{p} \frac{|h(p)-1|^2}{p}, \quad \sum_{p} \sum_{k \geqq 8} \frac{|h(p^k)|^2}{p^k}$$

sorok.

b) *Ha a (12) sorok konvergensek, akkor $M(h)$ létezik és a (10.5) képlettel számolható. $M(h) = 0$ pontosan akkor, ha valamilyen p-re*

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(p^k) p^{-k} = 0.$$

(11.13) *Feladat.* Vezessük le Elliott tételének b) felét Halász (8) tételéből.

12. *A koncentráció kérdése*

Próbáljuk meg a (8.10) tételt az Erdős—Wintner tétel mintájára bizonyítani. Tegyük fel, hogy g additív függvény, amelynek a B_x centrálással van határeloszlása. A határeloszlás karakterisztikus függvényét χ-vel jelölve azt kapjuk, hogy

(12.1) $$\sum_{n \leqq x} e^{itg(n)} = x \exp(itB_x) \chi(t) + o(x).$$

Mivel B_x viselkedéséről a priori semmit sem tudunk, ezért (1) alig nyújt több információt a

$$h_t(n) = e^{itg(n)}$$

multiplikatív függvényről, mint hogy

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\Big|\sum_{n\leqq x} h_t(n)\Big| = |\chi(t)| \neq 0$$

elég kis t-re. Az ilyen függvényekkel elemileg semmit sem tudunk kezdeni; viszont teljes leírásukat megadja Halász (11.3) tétele.

(12.2) *Feladat.* Vezessük le (8.10)-et Halász (11.3) tételéből.

Halász módszerével az erősebb (8.19) tétel is bizonyítható; sőt, annak a következő effektív formája is, amely nemcsak $x\to\infty$ esetén, hanem adott x-re is használható.

(12.3) **Tétel.** *Legyen g additív függvény, és tegyük fel, hogy*

$$P\big(g^{(x)}\in(b,\, b+h)\big) \geqq q \tag{12.4}$$

valamilyen b, h, x, q számokkal. Ekkor van g-nek egy

$$g = a\log + f$$

felbontása, ahol

$$|a| \leqq \mathrm{ch}\, q^{-1}\log(1+q^{-1}), \tag{12.5}$$

$$\sum_{p\leqq x}\frac{\min\big(f^2(p),\, h^2\big)}{p} \leqq ch^2q^{-2}, \tag{12.6}$$

c abszolút konstans.

Mivel az eredmény b-től nem függ, a tétel tulajdonképpen g koncentrációjára ad becslést. (Egy ξ változó koncentrációfüggvénye a

$$Q_h(\xi) = \sup_b P\big(\xi\in(b,\, b+h)\big)$$

valós függvény.)

(3) Halász publikálatlan eredménye, bizonyítani a harmadik részben fogjuk. Az alkalmazott módszer annak a módosítása, amelyet Halász [7] az alábbi tétel bizonyítására használt.

(12.7) **Tétel.** *Legyen g additív függvény,*

$$E(x) = \sum_{\substack{p\leqq x\\ g(p)\neq 0}} 1/p.$$

Ekkor tetszőleges b-re

$$|\{n\colon n\leqq x,\, g(n) = b\}| \leqq cx/\sqrt{E(x)}, \tag{12.8}$$

c abszolút konstans.

A fejezet hátralevő részében (3)-ból levezetjük (8.19)-et, (7)-et és (5.26)-ot. Megmutattam (Ruzsa [4]), hogy (5)-ben a $\log(1+q^{-1})$ tényező elhagyható; a következő „kvalitatív" alkalmazásokban azonban csak az a lényeg, hogy a-ra egyáltalán van valami korlát.

(8.19) bizonyítása. Ha g nem szétszórt, akkor található akármilyen nagy x és hozzá b úgy, hogy

$$P\big(g^{(x)}\in(b, b+1)\big) \geqq q > 0;$$

(3) szerint tehát alkalmas (x-től függő) a-val

$$\sum_{p\leqq x} \frac{\min\big(1, (g(p)-a\log p)^2\big)}{p} \leqq c_1 = cq^{-2}, \tag{12.9}$$

továbbá

$$|a| \leqq c_2 = cq^{-1}\log(1+q^{-1}). \tag{12.10}$$

Adott x-re legyen A_x a (9) és (10) feltételt kielégítő a számok halmaza. A_x nyilván zárt, (10) miatt korlátos, továbbá

$$x_1 > x_2 \Rightarrow A_{x_1} \subset A_{x_2},$$

így Cantor tétele szerint

$$A = \bigcap_x A_x \neq \emptyset.$$

Legyen $a\in A$ tetszőleges; ez az a minden x-re kielégíti (9)-et, ami nem egyéb, mint (8.11). □

(7) bizonyítása. Legyen

$$|\{n: n \leqq x,\ g(n) = b\}| = qx.$$

(3) miatt tetszőlegesen kis h-hoz van olyan a_h, hogy

$$|a_h| \leqq chq^{-1}\log(1+q^{-1}) \tag{12.11}$$

és

$$\sum_{p\leqq x} \frac{1}{p} \min\big(1, h^{-2}(g(p)-a_h\log p)^2\big) \leqq cq^{-2}. \tag{12.12}$$

$h\to 0$ esetén (11) miatt $a_h\to 0$, tehát

$$h^{-2}(g(p)-a_h\log p)^2 \to \infty$$

ha $g(p)\neq 0$. Az ilyen p-kre a min (12)-ben 1 lesz, tehát (12) arra redukálódik, hogy

$$\sum_{\substack{p\leqq x\\ g(p)\neq 0}} 1/p \leqq cq^{-2};$$

ez átrendezve éppen (8). □

(5.26) bizonyítása. Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz hogy van olyan $x_n\to\infty$, $h_n\to 0$ és b_n, hogy

$$P\big(f^{(x_n)}\in(b_n, b_n+h_n)\big) \geqq q > 0.$$

(3) miatt van olyan a_n,

$$|a_n| \leqq ch_nq^{-1}\log(1+q^{-1}) \to 0, \tag{12.13}$$

hogy

$$\sum_{p\leqq x_n} \frac{1}{p} \min\big(1, h_n^{-2}(f(p)-a_n\log p)^2\big) \leqq cq^{-2}. \tag{12.14}$$

Rögzítsük x-et; (14) miatt

$$\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} \min\left(1, h_n^{-2}(f(p)-a_n \log p)^2\right) \leqq cq^{-2}, \tag{12.15}$$

valahányszor $x_n \geqq x$. Ha most $n \to \infty$, akkor, mint az előbb,

$$h_n^{-2}(f(p)-a_n \log p)^2 \to \infty \quad (f(p) \neq 0),$$

így azt kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ f(p) \neq 0}} 1/p \leqq cq^{-2};$$

x tetszőleges lévén, a tételt bebizonyítottuk. □

13. *Határeloszlás normálással*

Tudjuk ((1.2) tétel), hogy az $n \leqq x$ számokat tekintve $\nu(n)$ értéke $\log\log x$-től legtöbbször csak $O(\sqrt{\log\log x})$-szel tér el. Ennél jóval pontosabb is állítható.

(13.1) **Tétel.** *Tetszőleges a-ra*

$$P\left(\nu^{(x)} - \log\log x < a\sqrt{\log\log x}\right) \to \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-t^2/2}\, dt,$$

vagyis $\dfrac{\nu^{(x)} - \log\log x}{\sqrt{\log\log x}}$ *eloszlása konvergál a normális eloszláshoz.*

Ez szintén messzemenően általánosítható.

(13.2) **Erdős—Kac (1, 2) tétel.** *Ha f additív függvény, $f(p)$ korlátos és*

$$\sum_{p} f^2(p)/p = \infty,$$

akkor

$$(f^{(x)} - A_x)/B_x \tag{13.3}$$

eloszlása konvergál a normális eloszláshoz, ahol

$$A_x = \sum_{p \leqq x} f(p)/p, \quad B_x^2 = \sum_{p \leqq x} f^2(p)/p. \tag{13.4}$$

Ez a feltétel még tovább gyöngíthető.

(13.5) **Tétel.** *A (2) tételben $f(p) = O(1)$ helyett elég feltenni, hogy*

$$\max_{p \leqq x} |f(p)| = o(B_x). \tag{13.6}$$

Sőt, elég feltenni, hogy (6) a prímek javarészére teljesül.

(13.7) **Tétel.** *Avégett, hogy a (3) változók eloszlása konvergáljon a standard normális eloszláshoz, elég feltenni, hogy tetszőleges pozitív ε-ra*

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ |f(p)| \geqq \varepsilon B_x}} f^2(p)/p = o(B_x^2). \tag{13.8}$$

A (8) feltétel — mint azt a 15. fejezetben közelebbről is látni fogjuk — a centrális határeloszlástétel Lindeberg-féle feltételének analogonja. Bizonyos mellékfeltevések mellett a (8) feltétel szükséges is.

(13.9) Definíció (Kubilius „H" osztálya). Egy f additív függvény a H osztályba tartozik, ha

$$B_{x^2} \sim B_x.$$

(13.10) Tétel. a) *Ha (8) teljesül, akkor* $f \in H$.

b) *Ha a (3) változók eloszlása a standard normális eloszláshoz konvergál és* $f \in H$, *akkor teljesül a (8) feltétel.*

Még akkor is kaphatunk eloszlástételt, ha (8) nem teljesül, de jól ismerjük az ott szereplő összeg viselkedését.

(13.11) Tétel. *Ha* $f \in H$ *és van olyan* K *eloszlásfüggvény, amelynek bármely folytonossági pontjában*

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ f(p) \leqq uB_x}} f^2(p)/p \to K(u), \tag{13.12}$$

akkor a (3) változóknak van határeloszlásuk, éspedig ugyanaz, mint az

$$(\eta_x - A_x)/B_x \tag{13.13}$$

változóké. Az eloszlás karakterisztikus függvénye a K *függvényből Kolmogorov formulájával nyerhető:*

$$\chi(t) = \exp \int_{-\infty}^{\infty} u^{-2}(e^{itu} - 1 - itu)\, dK(u).$$

Az (5), (7), (10), (11) tételek Kubiliustól (ld. [1]) származnak. Bizonyos mellékfeltételek mellett (12) szükséges is (Kubilius [1], 4.1 tétel). Általában meghatározható, hogy ha $f \in H$, a (3) változóknak mikor lesz határeloszlásuk (Kubilius [1], 8. fej.) Nincs viszont teljesen megoldva, hogy mi történik, ha $f \notin H$ és nem B_x-szel normálunk. Tekintsük például a

$$\log + v$$

függvényt; könnyen látható, hogy lesz határeloszlása $\log x + \log\log x$ centrálással, $\sqrt{\log\log x}$ normálással, noha

$$B_x \sim \log x.$$

A dolog nyitja az, hogy a H osztályból a logaritmikus és hozzá hasonló függvények kiestek. Egy ezt az esetet is tartalmazó, a „prímek függetlensége elvének" a 4. fejezet végén említett mélyebb formájának megfelelő eredmény Elliotté [5].

(13.14) Elliott tétele. *Legyenek* α, β *valós függvények,*

$$\beta(x) \to \infty, \quad \beta(x^2)/\beta(x) \to 1 \quad (x \to \infty)$$

és

$$\sup_{y \leqq x} \beta(y) = O(\beta(x)).$$

Legyen g additív függvény. A

$$\frac{g^{(x)}-\alpha(x)}{\beta(x)}$$

váltósorozatnak pontosan akkor létezik határeloszlása, ha található olyan a konstans, hogy képezve az

$$f = g - a \log$$

függvényt és hozzá (4.5) *szerint az η_x változókat, az*

$$\frac{\eta_x-\alpha(x)+a\log x}{\beta(x)}$$

változóknak van határeloszlásuk. Az eloszlások azonosak; $\alpha(x)$ egyik lehetséges választása

$$\alpha(x) = a\log x + \sum_{\substack{p\leqq x\\ |f(p)|\leqq\beta(x)}} f(p)/p.$$

(13.15) *Feladat.* Legyen f teljesen additív, $f(p)=\log^2 p\cdot f$-nek nem elfajuló határeloszlása van 0 centrálással, $\log^2 x$ normálással.

Elliott tételéhez hasonlót bizonyított Levin és Tyimofejev [2, 3] is, de ők az α függvényre is tettek bizonyos kikötéseket.

Több előző becslést javítva, Tyimofejev [1] bebizonyította (5) következő effektív formáját:

(13.16) **Tétel.** *A*

$$\mu(x) = B_x^{-1}\max_{p^k\leqq x}|f(p^k)|$$

jelöléssel.

$$P(f^{(x)}-A_x < uB_x) = \Phi(u)+O(\mu(x)).$$

A speciális ν függvény eloszlására jóval pontosabb eredmény is ismeretes, ld. LeVeque [1], Kubilius [1], 9. fej.

E fejezet tételei közül (7)-et fogjuk bebizonyítani a 15. fejezetben, miután a 14-ikben levezettünk egy fontos segédtételt.

14. *Kubilius függetlenségi tétele*

A 7. fejezetben bebizonyítottuk (a definíciókat is ld. ott), hogy fix K és $x\to\infty$ mellett

$$D(\Omega_K^{(x)}, \omega_K) \to 0; \tag{14.1}$$

ez annyit jelent, hogy ha csak az első néhány prímmel való oszthatóság szempontjából vizsgáljuk a számokat, akkor ezek a prímek függetlennek tekinthetők. Nem nehéz bebizonyítani (1)-et akkor sem, ha K x-szel együtt elég lassan tart végtelenhez, pl. $K=O(\log x)$. Célunk Kubilius azon jóval mélyebb tételének bizonyítása, hogy

(1) teljesüléséhez elég, hogy K lassabban tart a végtelenhez x bármely pozitív hatványánál. Pontosabban:

(14.2) **Tétel.** *Alkalmas c_1, c_2 pozitív abszolút konstansokkal*

$$D(\Omega_K^{(x)}, \omega_K) \leqq c_1 \exp\left(-c_2 \frac{\log x}{\log K}\right).$$

(14.3) **Következmény.** *Ha f additív, akkor (7.23) jelöléseivel*

$$D(f_K^{(x)}, \eta_K) \leqq c_1 \exp\left(-c_2 \frac{\log x}{\log K}\right).$$

Ennek fontos szerepe lesz a következő fejezetben.

(14.4) **Lemma.** *Legyenek $p_1, \dots p_k \leqq K$ prímek. Azon $n \leqq x$ számok száma, amelyek ezen prímek egyikével sem oszthatók,*

$$= \prod_{j=1}^{k} (1-1/p_j)\left(1+O\left(\exp\left(-c_3 \frac{\log x}{\log K}\right)\right)\right),$$

c_3 és az O-ban foglalt konstans abszolút.

Ez Selberg szitájából hozható ki, a bizonyítást mellőzzük; általánosabb formában ld. pl. Kubilius [1], 1.4. lemma. Selberg szitájának leírása megtalálható Halberstam—Roth [1] könyvében, és sok más helyen.

A tétel bizonyítása. Az

$$\alpha_m = P(\omega_K = m) - P(\Omega_K^{(x)} = m)$$

jelöléssel definíció szerint (vö. (7.11) bizonyításával)

$$D(\Omega_K^{(x)}, \omega_K) = \frac{1}{2} \sum |\alpha_m| = \sum (\alpha_m)_+. \tag{14.5}$$

Ω_K és ω_K lehetséges értékei egyaránt az olyan számok, amelyek minden prímosztója legfeljebb K. Az ilyen m-ekre

$$P(\omega_K = m) = \beta/m, \quad \beta = \prod_{p \leqq K} (1-1/p). \tag{14.6}$$

Ha S azon számok sorozata, amelyeknek nincsen K alatti prímosztójuk, akkor

$$P(\Omega_K^{(x)} = m) = x^{-1} S(x/m). \tag{14.7}$$

A (4) lemma szerint

$$S(y) = \beta y + O\left(\beta y \exp\left(-c_3 \frac{\log y}{\log K}\right)\right). \tag{14.8}$$

Különválasztják az $m \leqq \sqrt{x}$ és az $m > \sqrt{x}$ eseteket. $m \leqq \sqrt{x}$ esetén (8)-at alkalmazzuk:

$$\alpha_m = O\left(\beta m^{-1} \exp - c_3 \frac{\log (x/m)}{\log K}\right) = O\left(\beta m^{-1} \exp\left(-c_2 \frac{\log x}{\log K}\right)\right),$$

ha $c_2 \leqq c_3/2$. Így

$$\sum_{m \leqq \sqrt{x}} |\alpha_m| \ll \beta \sum_{m \leqq \sqrt{x}}' \frac{1}{m} \exp\left(-c_2 \frac{\log x}{\log K}\right) \leqq \exp\left(-c_2 \frac{\log x}{\log K}\right), \tag{14.9}$$

ahol a $\sum'$ jelöli, hogy az összegzés csak azon m-ekre van kiterjesztve, amelyek minden prímosztója legfeljebb K. Felhasználtuk, hogy

$$\sum' 1/m = 1/\beta;$$

ez pl. (6)-ból következik.

$$\alpha_m \leqq \beta/m; \tag{14.10}$$

ezt használjuk $m > \sqrt{x}$ esetén. (10) szerint

$$\sum_{m > \sqrt{x}} (\alpha_m)_+ \leqq \beta \sum_{m > \sqrt{x}}' 1/m. \tag{14.11}$$

Belátjuk, hogy

$$\sum_{m > \sqrt{x}}' 1/m \ll \beta^{-1} \exp\left(-c_2 \frac{\log x}{\log K}\right); \tag{'4.12}$$

(5), (9), (11) és (12) együtt adja a tételt.

$s \geqq 3/4$ esetén

$$\sum' m^{-s} = \prod_{p \leqq K} (1-p^{-s})^{-1} \leqq \exp\Big(\sum_{p \leqq K} p^{-s} + O\Big(\sum p^{-2s}\Big)\Big) \ll \exp\Big(\sum_{p \leqq K} p^{-s}\Big). \tag{14.13}$$

Legyen

$$s = 1-\delta, \quad \delta = 1/\log K \leqq 1/4$$

nagy K-ra. Ekkor

$$\sum_{p \leqq K} p^{-s} = \sum_{p \leqq K} 1/p + \sum_{p \leqq K} (p^{\delta}-1)/p.$$

Itt $\delta \log p \leqq 1$ miatt

$$p^{\delta} - 1 \ll \delta \log p,$$

tehát

$$\sum (p^{\delta}-1)/p \ll \delta \sum_{p \leqq K} \frac{\log p}{p} \ll 1;$$

összesítve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{p \leqq K} p^{-s} \leqq \sum_{p \leqq K} 1/p + O(1) \leqq \log\log K + O(1) \tag{14.14}$$

ha $\log K \geqq 4$; de (14) $\log K < 4$ esetén is igaz, triviálisan. (13) és (14) szerint

$$\sum' m^{-s} \ll \log K \quad (s = 1-\delta). \tag{14.15}$$

$m > \sqrt{x}$ esetén

$$1/m \leqq m^{-s} x^{-\delta/2},$$

így (15)-ből kifolyólag

$$\sum_{m > \sqrt{x}}' 1/m \leqq x^{-\delta/2} \sum' m^{-s} \ll x^{-\delta/2} \log K = (\log K) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\log x}{\log K}\right),$$

ami éppen (12), mert

$$\beta \asymp 1/\log K.$$

(Ez (13)-ból következik; pontosabb eredményt ad Mertens tétele, ld. I. (11.16) vagy Hardy—Wright [1], 22.8.) □

15. *A normálással nyert eloszlástétel bizonyítása*

E fejezetben bebizonyítjuk a (13.7) tételt és (13.10. a)-t.

(13.10. a) bizonyítása. Azt kell belátni, hogy

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqq x} f^2(p)/p = o(B_x^2). \tag{15.1}$$

(1)-ben azok a tagok, melyekben $|f(p)|>\varepsilon B_x$, $o(B_x^2)$-et adnak (13.8) miatt. A maradék pedig

$$\sum_{\substack{\sqrt{x}<p\leqq x \\ |f(p)|\leqq \varepsilon B_x}} f^2(p)/p \leqq \varepsilon B_x^2 \sum_{\sqrt{x}<p\leqq x} 1/p \ll \varepsilon B_x^2. \qquad \square$$

(13.7) bizonyítása a következőn alapul.

(15.2) **Tétel.** *Ha $f\in H$, akkor a (4.5)-beli η_x-szel*

$$\delta(B_x^{-1} f^{(x)}, B_x^{-1}\eta_x) \to 0 \quad (x\to\infty).$$

(15.3) **Következmény.** *Ha $f\in H$, akkor az $(f^{(x)}-A_x)/B_x$ és $(\eta_x-A_x)/B_x$ változósorozatoknak egyszerre van határeloszlásuk, és ha van, akkor azonos.*

A tétel bizonyítása. Az egyszerűség kedvéért erősen additív függvényekre szorítkozunk; úgyis csak olyanokra fogjuk alkalmazni.

Legyen $y=x^\varepsilon$, $\varepsilon\in(0,1)$ egyenlőre fix. Ha $f\in H$, akkor nyilván

$$B_y \sim B_x. \tag{15.4}$$

(14.3) szerint

$$D(f_y^{(x)}, \eta_y) \leqq c_1\varepsilon,$$

tehát

$$\delta(B_x^{-1} f_y^{(x)}, B_x^{-1}\eta_y) \leqq c_1\varepsilon. \tag{15.5}$$

(5)-ből (2) úgy fog következni, hogy belátjuk, hogy $f-f_y$ és $\eta_x-\eta_y$ egyaránt majdnem konstans. Az

$$A = \sum_{y<p\leqq x} f(p)/p$$

jelöléssel (1.11)-et használva

$$P(|f^{(x)}-f_y^{(x)}-A| \geqq \varepsilon B_x) \leqq \left(\frac{B_x-B_y}{\varepsilon B_x}\right)^2 \to 0 \tag{15.6}$$

adódik. Hasonlóan a Csebisev-egyenlőtlenségből

$$P(|\eta_x-\eta_y-A| \geqq \varepsilon B_x) \to 0. \tag{15.7}$$

A Lévy-távolság (5.12. d—e) tulajdonságait használva (5), (6) és (7) azt adja, hogy

$$\delta(B_x^{-1} f^{(x)}, B_x^{-1}\eta_x) \leqq c_2\varepsilon + o(1);$$

ε tetszőleges lévén készen vagyunk. □

(13.7) bizonyítása. Először is megjegyezük, hogy elég erősen additív függvényekre szorítkozni. Legyen ugyanis f_0 az $f_0(p)=f(p)$ által definiált erősen additív függvény. Könnyen látható (pl. (5.27)-ből vagy (6.8)-ból), hogy

$$P(|f_0^{(x)}-f^{(x)}|>K)\to 0 \quad (K\to\infty)$$

x-ben egyenletesen, tehát egy végtelenhez tartó normálással vizsgálva f és f_0 között nincs különbség. Márpedig (13.8) csak úgy állhat fent, ha $B_x\to\infty$.

Szükségünk lesz egy tisztán valószínűségszámítási eredményre.

(15.8) **Lindeberg tétele.** *Legyenek a ξ_j-k független valószínűségi változók M_j várható értékkel és D_j^2 szórással,*

$$S_n^2=\sum_{j=1}^{n} D_j^2.$$

Ahhoz, hogy

$$S_n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-M_j)$$

eloszlása a standard normális eloszláshoz tartson, elégséges, hody minden pozitív ε-ra

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{|u|>\varepsilon S_n} u^2\,dF_j(u)=o(S_n^2) \tag{15.9}$$

legyen, ahol F_j ξ_j-M_j eloszlásfüggvénye.

Ld. Rényi [1], VII. 1. §.

Belátjuk, hogy ζ_p teljesíti a (9) feltételt. f erősen additív lévén

$$\zeta_p=\begin{cases} f(p) & 1/p \quad \text{valószínűséggel,}\\ 0 & 1-1/p \quad \text{valószínűséggel,}\end{cases}$$

tehát

$$\int_{|u|>\varepsilon B_x} u^2\,dF_p(u)\begin{cases}\leqq f^2(p)/p & \text{mindenképpen,}\\ =0, & \text{ha} \quad |f(p)|\leqq \varepsilon B_x,\end{cases}$$

így (9) (13.8) következménye. Eszerint $(\eta_x-A_x)/B_x$ eloszlása konvergál a standard normálishoz; (3) miatt ezzel a tételt beláttuk. □

Megjegyzés. Hasonló (13.10. b) és (13.11) bizonyítása is, csak a Lindeberg-tétel Feller-féle megfordítását, illetve Gnyegyenko egy általánosabb tételét kell használni; ezeket ld. Gnyegyenko—Kolmogorov [1].

16. *Lokális kérdések*

Az eddigiektől eltérően most olyan kérdésekkel foglalkozunk, hogy hányszor lesz $f(n)$ értéke egy adott szám, f additív. Az eddigi tételek között is volt néhány ilyen jellegű; pl. (1.4), (5.36), (12.7).

Tudjuk (5.26)-ból és (5.27)-ből, hogy az $f^{-1}(a)$ sorozatnak mindig van sűrűsége, és ha

$$\sum_{f(p)\neq 0} 1/p=\infty, \tag{16.1}$$

akkor ez a sűrűség mindig 0; ha pedig (1) nem teljesül, akkor ezen sűrűségek összege 1 és a prímek függetlenségének elve alapján számíthatók.

(16.2) *Feladat.* a) Ha (1) nem teljesül, akkor f értékkészletének bármely elemére

$$d(f^{-1}(a)) > 0.$$

b) Ha $a \neq 0$, akkor

$$d(f^{-1}(a)) \leqq 1/2.$$

(Erdős—Ruzsa—Sárközy [1].)

Legyen

$$N(f, a, x) = |\{n: n \leqq x, f(n) = a\}|. \tag{16.3}$$

Az első függvény, amelyre $N(f, a, x)$ viselkedését részletesen megvizsgálták, a ν függvény volt,

$$N(\nu, k, x) = \pi_k(x);$$

erre vonatkozott Hardy—Ramanujan (1.4) tétele. Landau bebizonyította, hogy fix k-ra

$$\pi_k(x) \sim x \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!\log x}. \tag{16.4}$$

Sathe [1—4], Erdős [8], Selberg [1] bebizonyították, hogy (4) érvényes egyenletesen $k < c \log\log x$ mellett, c akármilyen fix konstans. Hasonló eredmény érvényes a $\varkappa$ függvényre is, de csak a

$$k < (2-\varepsilon)\log\log x$$

tartományban.

Ezeket Halász [4] általánosította jelentősen.

(16.5) **Halász tétele.** *Legyen f teljesen additív függvény, amelyre $f(p)$ mindig 0 vagy 1,*

$$E(x) = \sum_{\substack{p \leqq x \\ f(p)=1}} 1/p.$$

Ekkor

$$N(f, k, x) = \frac{xE(x)^k}{k!} e^{-E(x)} \left(1 + O\left(\frac{|k-E(x)|+\sqrt{E(x)}}{E(x)}\right)\right) \tag{16.6}$$

ha

$$k/E(x) \in [\delta, 2-\delta]; \tag{16.7}$$

δ tetszőleges pozitív konstans, az O jelben foglalt konstans δ-tól függ.

A fenti tétel akkor ad aszimptotikus becslést, ha $k \sim E(x)$, vagyis abban a tartományban, ahová f értékei legtöbbször esnek (vö. (1.11)).

(16.7) *Feladat.* Vezessük le (5)-ből, hogy minden ± 1 értékű multiplikatív függvénynek van középértéke.

Az (5) tétel felső becslést nyújt $N(f, k, x)$-re a (7) tartományban, nemtriviális alsó becslést azonban csak $k > (1-c)E(x)$ esetén (c valamilyen konstans). Halász [5] és Sárközy [1] kiterjesztették ezt a sávot.

(16.8) **Tétel.** *a) $k \leqq (2-\delta)E(x)$ esetén*

$$N(f, k, x) \ll xe^{-E(x)}E(x)^k/k!.$$

b) $k/E(x) \in [\delta, 2-\delta]$ *esetén*

$$N(f, k, x) \gg xe^{-E(x)} E(x)^k/k!.$$

$A \ll, \gg$ *jelekben foglalt konstansok* δ*-tól függnek.*

A tétel b) fele kis k-ra nem is igaz, pl. a ν függvényre (4) mutatja, hogy kisebb lesz a tényleges érték.

17. *Eloszlás* mod 1 *és* mod q

Sokat vizsgálták f eloszlását mod 1 (f additív), vagy másként fogalmazva, $\{f(n)\}$ eloszlását a [0, 1] intervallumban. Az első idevágó eredmény szintén Erdőstől származik: ha $f(p) \to 0$ és

$$\sum_p f^2(p)/p = \infty,$$

akkor f egyenletes eloszlású mod 1.

Ez a kérdés ma már teljesen tisztázva van (Manstavičius [1], Delange [5], Elliott [1]). Megfogalmazunk néhány idevágó tételt.

(17.1) **Tétel.** *Egy f additív függvény pontosan akkor egyenletes eloszlású* mod 1, *ha tetszőleges egész $k \neq 0$ és valós b mellett*

$$\sum_p \frac{\|kf(p) - b \log p\|^2}{p} = \infty \tag{17.2}$$

($\|u\|$ definícióját ld. (3.10)-ben).

Tehát megint a logaritmikus és hasonló függvények alkotják a kivételt.

(17.3) **Tétel.** *Tetszőleges k-hoz legfeljebb egy olyan b lehet, amelyre (2) nem teljesül. Ha van olyan $k \neq 0$, amelyre (2) nem igaz, legyen k_0 a legkisebb abszolút értékű és b_0 a hozzá tartozó b. Ekkor az összes (k, b) párokat, amelyekre* (2) *nem áll fent, a*

$$k = mk_0, \quad b = mb_0$$

paraméteres előállításból kaphatjuk meg, ahol m végigfut az egész számokon.

(17.4) **Tétel.** *Legyen f additív függvény, amely (2)-t nem mindig elégíti ki. f-nek pontosan akkor van eloszlása* mod 1, *ha a (3) tétel k_0 és b_0 számaival $b_0 = 0$, és a*

$$\sum_p \frac{\|k_0 f(p)\|^2}{p}, \quad \sum_p \frac{\|k_0 f(p)\|}{p} \operatorname{sg}(1/2 - \{k_0 f(p)\})$$

sorok konvergensek.

Nézhetjük az eloszlást centrálással is. Persze a centrálást is mod 1 érdemes végrehajtani, vagyis nem $\{f(n)\} - A_x$, hanem $\{f(n) - A_x\}$ eloszlását kell tekinteni, $n \leqq x$.

(17.5) **Tétel.** *Tetszlőeges additív függvénynek alkalmas centrálással van határeloszlása* mod 1.

(17.6) *Feladat.* Ha a centrálást az elsőnek említett módon végezzük (vagyis az $\{f^{(x)}\} - A_x$ változósorozatot nézzük), akkor csak azoknak a függvényeknek lesz határeloszlásuk, amelyeknek centrálás nélkül is van.

A tételek bizonyítása Weyl kritériumára és Halász (11.3) tételére épül. (Erre még a következő fejezetben visszatérünk).

Hasonló probléma az egészértékű additív függvények eloszlása mod q; ha $\{f(n)/q\}$-t képezzük, formálisan is visszavezettük az előzőre. Megjegyzem azonban, hogy az „egyenletesség" ebből a szempontból mást jelent.

(17.7) **Delange [3] tétele.** *Legyen f egészértékű additív függvény, q természetes szám. f-nek* mod q *mindig van eloszlása. Ez pontosan akkor egyenletes, ha q bármely kettőnél nagyobb d osztójára*

$$\sum_{f(p)\not\equiv 0 \pmod d} 1/p = \infty, \tag{17.8}$$

ha pedig q páros és $d=2$, akkor vagy (8) teljesül, vagy pedig $f(2^j)$ mindig páratlan.

(17.9) *Feladat.* Az előző tételben az eloszlás létezését vezessük le a (4) tételből.

18. *Multiplikatív függvények eloszlása*

Kiinduló kérdésünk, amelyből az additív függvényekhez jutottunk, a multiplikatív σ_{-1} függvény eloszlásának létezése volt. Ez, és általában a pozitív multiplikatív függvények esete, a logaritmust képezve egyszerűen visszavezethető volt az additív függvényekre. Mint már a Möbius-függvény is mutatja, nem ielyn egyszerű a helyzet a negatív értékeket is felvevő multiplikatív függvényekkel.

Multiplikatív függvényekre a karakterisztikus függvény módszere sem alkalmazható az eredeti formában. Az ugyanis az

$$e^{it f(n)}$$

függvény vizsgálatára vezet; ennek pedig, ha f multiplikatív, semmi jól kezelhető tulajdonsága nem lesz. A megoldás az, hogy másfajta „karakterisztikus" függvényt kell felvenni.

Miként az additív függvények eloszlása független változók összegezésével, úgy a multiplikatív függvényeké a független változók szorzásával analóg. Ez utóbbira Zolotarjev [1] fejlesztett ki analitikus módszert. Ha ξ valós valószínűségi változó, legyen

$$\chi(j, t) = M\big((\operatorname{sg}\xi)^j |\xi|^{it}\big), \quad t \in \underline{R},\ j = 0, 1; \tag{18.1}$$

tehát tulajdonképpen „karakterisztikus függvénypár" van. Ha ξ_1, ξ_2 függetlenek és $\xi = \xi_1\xi_2$, akkor a megfelelő karakterisztikus függvényekre

$$\chi(j, t) = \chi_1(j, t)\chi_2(j, t).$$

Pozitív változókra

$$\chi(0, t) = \chi(1, t),$$

és azonos a változó logaritmusának az eredeti értelemben vett karakterisztikus függvényével.

Ha f multiplikatív, a fenti módszer alkalmazásához a következő összeg vizsgálata szükséges:

$$\chi^{(x)}(j, t) = \frac{1}{x} \sum_{n \leqq x} \underbrace{(\operatorname{sg} f(n))^j |f(n)|^{it}}_{h_{jt}(n)}. \tag{18.2}$$

h_{jt} egy legfeljebb 1 abszolút értékű multiplikatív függvény, amelynek összegzése jól kezelhető Halász módszerével. Ezen az úton nyerhető például az alábbi eredmény.

(18.3) **Levin—Tuljaganov—Tyimofejev (1) tétele.** *Legyen f valósértékű, nem azonosan 1 multiplikatív függvény. Pontosan akkor található olyan A_x és B_x, hogy az*

$$(f^{(x)} - A_x)/B_x$$

változók eloszlása konvergáljon egy nem elfajuló (nem egy pontba koncentrált) eloszláshoz, ha van olyan b, amelyre

$$\sum_p \frac{\min\left(1, (|p^{-b}f(p)|-1)^2\right)}{p} < \infty. \tag{18.4}$$

Ebben az esetben vehető $A_x=0$,

$$B_x = x^b \exp\left(\sum_{p\leqq x}{}' \frac{\log|f(p)| - b\log p}{p}\right), \tag{18.5}$$

ahol a ' jelzi, hogy az összegzés csak azokra a prímekre van kiterjesztve, amelyekre

$$f(p) \neq 0, \quad |\log|f(p)| - b\log p| \leqq 1.$$

Megjegyzés. A (8.10) tétel alapján a fenti feltétel úgy fogalmazható, hogy

$$\sum_{f(p)=0} 1/p < \infty$$

és a

$$g(p) = \begin{cases} \log|f(p)| & \text{ha } f(p) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } f(p) = 0 \end{cases}$$

képlettel megadott additív függvénynek alkalmas centrálással van határeloszlása.

Általában komplexértékű multiplikatív függvények eloszlásáról nem sokat tudunk. (Ld. pl. Delange [7].) Másik teljesen tisztázott speciális eset az unimoduláris multiplikatív függvények eloszlása. Ez a kérdés tulajdonképpen az additív függvények mod 1 vett eloszlásával azonos; ha egy f valós additív függvényhez hozzárendeljük a

$$g(n) = \exp 2\pi i f(n)$$

unimoduláris függvényt, f és g eloszlása egymásból egyszerű transzformációval nyerhető. A két ekvivalens megfogalmazás közül a mostani a természetesebb; most egyszerűbb formában fogjuk kapni az eredményeket. Átfogalmazzuk az előző fejezet tételeit.

(18.6) **Tétel.** *Legyen f unimoduláris multiplikatív függvény. f pontosan akkor egyenletes eloszlású az egységkörön, ha tetszőleges $k\neq 0$ egész és b valós számot választva*

$$\sum_p \frac{1-\operatorname{Re} f^k(p)\,p^{-ib}}{p} = \infty. \tag{18.7}$$

(Ez azért ekvivalens (17.2)-vel, mert

$$1-\operatorname{Re} e^{iu} \asymp \|u\|^2.)$$

(18.8) **Tétel.** *Ha található olyan $k \neq 0$, amelyre (7) nem teljesül, legyen k_0 az egyik legkisebb abszolút értékű; legyen b_0 a hozzá tartozó b (csak egy lehet). Ekkor az összes (k, b) pár, amelyre (7) nem igaz, a*

$$k = mk_0, \quad b = mb_0 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

paraméteres előállítással adható meg.

(18.9) **Tétel.** *Legyen f unimoduláris multiplikatív függvény. f-nek pontosan akkor van határeloszlása, ha vagy a (6) tétel feltétele teljesül, vagy a (8) tétel által megadott k_0, b_0 számokkal az*

$$\sum_p \frac{1 - f^{k_0}(p)\, p^{-ib_0}}{p} \tag{18.10}$$

sor konvergens.

(18.11) *Feladat.* Lássuk be, hogy (9) ekvivalens (17.4)-gyel.

(18.12) **Tétel.** *Tetszőleges f unimoduláris multiplikatív függvényhez találhatók olyan B_x konstansok, $|B_x| = 1$, hogy az*

$$f^{(x)}/B_x$$

változósorozatnak van határeloszlása.

Bebizonyítjuk (6)-ot és (8)-at; (9) és (12) bizonyítása hasonló (kicsit komplikáltabb).

(18.13) **Lemma.** *Ha $|a| = |b| = 1$, akkor*

$$1 - \operatorname{Re} ab \leqq 2\big((1 - \operatorname{Re} a) + (1 - \operatorname{Re} b)\big).$$

Az egyszerű bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

(18.14) **Következmény.** *Ha (7) nem teljesül egy (k_1, b_1) és egy (k_2, b_2) párra, akkor nem teljesül a $(k_1 + k_2, b_1 + b_2)$ párokra sem.*

(8) bizonyítása. Ha egy k-hoz két b is tartozna, mondjuk b_1 és b_2, akkor (14) miatt (7) nem állna fent a $(0, b)$, $b = b_1 - b_2$ párra sem. Pedig ekkor a kapott

$$\sum \frac{1 - \operatorname{Re} p^{-ib}}{p} = \sum \frac{1 - \cos(b \log p)}{p}$$

sor divergens, sőt

$$\sum_{p \leqq x} \frac{1 - \cos(b \log p)}{p} \sim \log \log x \quad (b \neq 0),$$

ami a

$$\sum_{p \leqq x} 1/p = \log \log x + c + O(1/\log x)$$

formulából (ld. I. (19.18) vagy Hardy—Wright [1], 22. fej.) parciális összegzéssel könnyen következik.

Tekintsük most a „kivételes" k számokat. Mivel két számmal együtt összegük és különbségük is ilyen, egy jól ismert elemi tétel szerint (ld. pl. Hardy—Wright [1], 2.9) ezek egy k_0 többszörösei. Ha most $k = mk_0$ egy kivételes k, akkor a (7) sor mindenesetre konvergens $b = mb_0$ választással (14) szerint, ahol b_0 a k_0-hoz tartozó b; az előbb bizonyított egyértelműséggel együtt ez (8)-at adja. □

(6) bizonyítása. Weyl kritériumát alkalmazzuk: f pontosan akkor egyenletes eloszlású az egységkörön, ha

$$\sum_{n \leqq x} f^k(n) = o(x) \quad (0 \neq k \in \underline{Z}). \tag{18.15}$$

(Ld. pl. Gyarmati—Turán [1] 8. fej.). Halász (11.3) tétele szerint a (7) feltételből (15) következik.

Most tegyük fel, hogy (7) nem teljesül, de (15) igen. Halász előbb idézett tétele szerint ekkor a kivételes (k, b) párokra

$$f^k(2^j) = -2^{jb}, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{18.16}$$

De (14) miatt a (k, b) párral együtt $(2k, 2b)$ is kivételes, azaz

$$f^{2k}(2^j) = -2^{2jb}; \tag{18.17}$$

(16) és (17) pedig ellentmond egymásnak. □

19. *Többdimenziós eloszlások*

Az e fejezetben ismertetendő problémák őse Erdős [2, 5] kérdése: vajon általában n-nek vagy $n+1$-nek van több prímosztója. A válasz, mint várható, az, hogy 1/2 sűrűségű n-re lesz $\nu(n) < \nu(n+1)$ és szintén 1/2 sűrűségűre $\nu(n) > \nu(n+1)$. (A hasonló probléma n prímosztói száma helyett n maximális prímosztóját véve megoldatlan.)

Kimondjuk a fenti eredmény messzemenő általánosítását (Kubilius [1], 8. fej.). Legyenek $f_1, \ldots f_k$ additív függvények, $a_1, \ldots a_j$ természetes számok, és tekintsük az

$$F(n) = (f_1(n+a_1), \ldots, f_k(n+a_k)) \tag{19.1}$$

$\underline{R}^k$-ba képező függvényt. Legyenek A_{jx}, B_{jx} az f_j függvényekhez a (13.4) képlet által hozzárendelt mennyiségek,

$$\underline{A}_x = (A_{1x}, \ldots, A_{kx}), \quad \underline{B}_x = (B_{1x}, \ldots, B_{kx}).$$

Tekintsük az

$$(F^{(x)} - A_x)/B_x \tag{19.2}$$

változókat, ahol a vektorok osztása komponensenkénti osztást jelöl. (Ez tehát az

$$\left(\frac{f_1(n+a_1) - A_{1x}}{B_{1x}}, \ldots, \frac{f_k(n+a_k) - A_{kx}}{B_{kx}} \right), \quad n \leqq x$$

értékeket veszi fel, mindegyike $1/x$ valószínűséggel.)

(19.3) **Tétel.** Legyenek $f_1, \ldots f_k$ a (13.11) tétel feltevéseit kielégítő additív függvények, $a_1, \ldots a_k$ különböző természetes számok. Ekkor a (2)-beli változósorozatnak van határeloszlása. Ha $(f_j^{(x)} - A_{jx})/B_{jx}$ határváltozója ϑ_j, a ϑ_j-k függetlenek, akkor a (2) változóké

$$\underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$$

(vagyis az egyes függvények függetleneknek tekinthetők). Speciálisan ha f_j teljesíti a (13.8) feltételt, akkor a (2) változók eloszlása a standard normális eloszláshoz konvergál.

A tételt nem bizonyítjuk, csak vázoljuk a 14—15. fejezetben leírt bizonyításhoz képest fellépő különbségeket. Az újdonság az, hogy nemcsak az egyes prímek lesznek egymástól függetlenek, hanem az $n+a_1, \ldots n+a_k$ számok is. Ha egy fix p prímmel való oszthatóság szempontjából nézzük ezeket a számokat, nem lesznek függetlenek, hiszen (ha p elég nagy) közülük egyszerre csak egy lehet p-vel osztható; ez a függőség azonban elég gyenge.

Legyen p prím, és tekintsünk egy p elemű klasszikus valószínűségi mezőt (mindegyik elem valószínűsége $1/p$); jelöljük az elemeket magukkal az $1, \ldots p$ számokkal. Legyen

$$\zeta_{jp}(u) = \begin{cases} f_j(p), & \text{ha} \quad p \mid u+a_j, \\ 0 & \text{máskor,} \end{cases}$$

$$\underline{\zeta}_p = (\zeta_{1p}, \ldots, \zeta_{kp}).$$

Legyen továbbá ζ^*_{jp} ζ_{jp}-vel azonos eloszlású, de egymástól független és

$$\underline{\zeta}^*_p = (\zeta^*_{1p}, \ldots, \zeta^*_{kp}).$$

Ugyanúgy, mint az egydimenziós esetben, be lehet látni, hogy $F^{(x)}$ eloszlása közelíthető

$$\underline{\eta}_x = \sum_{p \leqq x} \underline{\zeta}_p$$

eloszlásával (ehhez a (14.2) tételt kell megfelelően általánosítani). Ezután (ez a lényeges új lépés) azt kell megmutatni, hogy ez körülbelül olyan, mint

$$\underline{\eta}^*_x = \sum_{p \leqq x} \underline{\zeta}^*_p$$

eloszlása; η^*_x komponensei függetlenek, így visszajutottunk az egydimenziós feladathoz.

Bonyolultabb az az eset, amikor az a_j számok között egyenlők is lehetnek. Lehetséges, hogy az

$$(f_1^{(x)} - A_{1x})/B_{1x}, \quad (f_2^{(x)} - A_{2x})/B_{2x}$$

változóknak külön-külön van határeloszlásuk, de együttesen nincs.

(19.4) *Feladat.* Konstruáljunk példát az előbb említett jelenségre.

A kérdés ebben az esetben is megoldható (ld. Kubilius [1], 8. fejezet — ott a (3) tételen kívül az az eset van tárgyalva, ha az összes a_j egyenlő; az általános eset a két részesethez képest nem jelent minőségi különbséget); az eredmény kimondásától bonyolultsága miatt eltekintünk.

Sokkal könnyebben kezelhetők a „stabil", azaz normálás nélkül határeloszlással rendelkező függvények.

(19.5) **Tétel.** *Ha az $f_1, \ldots f_k$ additív függvényeknek van határeloszlásuk, $a_1, \ldots a_k$ tetszőleges természetes számok, akkor az (1) által definiált F függvénynek is van.*

Bizonyítás. Az (5.16) és (6.7) tételek miatt az f_j függvények majdnem periodikusak, tehát nyilván F is az, tehát F-nek is van határeloszlása. □

A bizonyításban megelőlegeztük a majdnem periodikus függvény fogalmát és a (6.2) tételt $\underline{R}^k$-ba képező függvényekre; ezek a 6. fejezetben foglaltak apró módosításával adódnak.

(19.6) *Feladat.* Ha az $f_1, \ldots f_k$ additív függvényeknek van határeloszlásuk, akkor azon n számok sorozatának, melyek kielégítik az

$$f_1(n+a_1) \leqq u_1, \ldots, f_k(n+a_k) \leqq u_k$$

egyenlőtlenségrendszert, van sűrűsége.

(Pl. azon bővelkedő számoknak, amelyek rákövetkezője is bővelkedő, van sűrűsége.)

Nem sokkal nehezebb a centrálásos eset sem.

(19.7) **Tétel.** *Ha az $f_1, \ldots f_k$ additív függvényeknek van határeloszlásuk az $A_{1x}, \ldots A_{kx}$ centrálással, akkor az*

$$F^{(x)} - \underline{A}_x, \quad \underline{A}_x = (A_{1x}, \ldots, A_{kx})$$

változóknak is van határeloszlásuk.

A bizonyítás (8.10) bizonyítását követi. A függvényeket „levágjuk"; ha f_{jK} jelöli azt a függvényt, amelyet f_j-ből úgy kapunk, hogy a K-nál nagyobb prímek hatványain 0-vá tesszük, akkor

$$(f_{1K}(n+a_1), \ldots, f_{kK}(n+a_k))$$

viselkedését ismerjük az előző tételből, a „maradék" pedig a 8. fejezet módján kezelhető.

A (6) és (7) tételek feltételei szükségesek is, hiszen ha egy vektorváltozókból álló sorozatnak van határeloszlása, akkor nyilván a komponenseknek is.

20. *Amiről nem volt szó*

Az eddigiekben az additív függvények viselkedését mindig az összes természetes számok sorozatán néztük. Ezt a kérdést sokan vizsgálták más sorozatokon; pl. egy polinom értékkészletén (Uždavinys [1]), a $p+1$ sorozaton (Kátai [1], Elliott [3]), vagy általánosabb sorozatokon, amelyek megoszlása a különböző maradékosztályokban elég szabályos (Indlekofer [1, 2]). Például az Erdős—Wintner tétel igaz marad akkor is, ha az $f(p+1)$ vagy $f(P(n))$ értékek eloszlását vizsgáljuk (p a prímeken fut, P egész együtthatós polinom).

Ugyancsak sokat vizsgálták a klasszikus számelméleti függvényfogalom (természetes számokon értelmezett, valós értékű függvény) különféle általánosításait. Például a Gauss-egészeken értelmezett additív függvényeket (Kubilius [1], 10. fej.), vagy akár absztrakt félcsoportokon (Bajbulatov [1]).

Lényegesen kevesebbet foglalkoztak azzal a bizonyos értelemben természetesebb általánosítással, amikor az értelmezési tartomány marad a természetes számok halmaza, viszont az értékkészlet lesz egy absztrakt struktúra. Például az additív függvények eloszlása, a (0 értéket nem felvevő) multiplikatív függvények eloszlása vagy több additív függvény szimultán eloszlása mind része a topologikus csoportba képező additív függvények eloszlásának. (Hogy additív vagy multiplikatív függvényről beszélünk, az most már csak jelölés kérdése.) Ezt lokálisan kompakt csoportokra vizsgálta Hartman [1]; az ő tétele magában foglalja az Erdős—Wintner tételt, de a (18.3) vagy (18.6) tételt nem.

Bebizonyítottam (publikálatlan), hogy az Erdős—Wintner tétel, sőt a (8.10) tétel is átvihető Hilbert-térbe képező additív függvényekre (négyzet helyett norma-

négyzetet véve). (A Hilbert-tér nem lokálisan kompakt.) Bebizonyítottam (szintén publikálatlan) a (18.12) tétel következő általánosítását: ha f: $N \to G$ additív függvény, ahol G kompakt topologikus csoport, akkor található olyan $B_x \in G$, hogy az $f(x) - B_x$ változósorozatnak legyen határeloszlása.

Részletesen megvizsgáltam ([1, 2, 3]) a lokális kérdések általánosításait (vagyis amikor a G csoporton nem veszünk fel topológiát). Megemlítek néhány eredményt.

Ha f: $N \to G$ additív függvény, G kommutatív csoport, akkor az $f^{-1}(g)$ sorozatoknak ($g \in G$) van aszimptotikus sűrűségük.

Ha G csak félcsoport, akkor aszimptotikus sűrűség általában nem létezik, de logaritmikus sűrűség (ld. (5.5)) igen.

Legyenek $f_1, \ldots f_k$ egészértékű additív függvények, $q_1, \ldots q_k$ természetes számok. Azt mondjuk, hogy $(f_1, \ldots f_k)$ egyenletes eloszlású mod $(q_1, \ldots q_k)$, ha tetszőleges $a_1, \ldots a_k$ egész számokat véve $1/(q_1 \ldots q_k)$ azon n-ek sűrűsége, amelyekre

$$f_1(n) \equiv a_1 \pmod{q_1}, \ldots, f_k(n) \equiv a_k \pmod{q_k}.$$

Delange [4] megadta ennek (elég bonyolult) szükséges és elégséges feltételét.

Jelöljük C_q-val a mod q vett maradékosztályok additív csoportját (q elemű ciklikus csoport) és legyen

$$G = C_{q_1} \times \ldots \times C_{q_k},$$

$$f(n) = (f_1(n), \ldots, f_k(n)) \in G.$$

Delange kérdését visszavezettük egyetlen, véges csoportba képező additív függvény eloszlásának tanulmányozására. Mivel az Abel-csoportok alaptétele szerint (ld. Kuros 21. §.) bármely véges Abel-csoport ciklikus csoportok direkt szorzatára bontható, kérdésünk tulajdonképpen nem általánosabb; az eredmény viszont jóval egyszerűbben megfogalmazható lesz.

Egy véges Abel-csoportba képező additív függvényt egyenletes eloszlásúnak nevezünk, ha tetszőleges $g \in G$ esetén

$$d(f^{-1}(g)) = |G|^{-1}.$$

Tekintsük G-nek azokat a H részcsoportjait, amelyekre

$$\sum_{f(p) \notin H} 1/p < \infty.$$

f pontosan akkor lesz egyenletes eloszlású, ha az egyetlen ilyen részcsoport $H = G$ vagy pedig rajta kívül még egy ilyen H létezik, ez 2 indexű és

$$f(2^j) \notin H, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

21. *Függelék: Wirsing egy tétele*

Az I. rész 10. fejezete foglalkozott a logaritmusfüggvény jellemzésével azon tulajdonságai alapján, hogy additív és valamilyen értelemben szabályos. Említettük Wirsing [2] következő tételét: ha f additív és $f(n+1) - f(n) = O(1)$, akkor

$$f(n) = c \log n + O(1)$$

valamilyen c konstanssal. Ha f teljesen additív, akkor $f = c \log$.

I. megírása után ismertem meg Wirsing alábbi, jóval erősebb (egyelőre publikálatlan) tételeit.

(21.1) **Tétel.** *Ha f teljesen additív és*

$$f(n+1)-f(n) = o(\log n),$$

akkor $f=c\log$ valamilyen c konstanssal.

(21.2) **Tétel.** *Legyen $\alpha(x)$ pozitív, monoton növő függvény, amelyre $\alpha(x)/\log x$ már monoton fogy. Tekintsük azokat az additív függvényeket, amelyekre*

$$f(n+1)-f(n) = O(\alpha(n)) \tag{21.3}$$

teljesül. Legyen továbbá

$$a_n = e^{e^{\cdots^e}}\} \ n\text{-szer}.$$

Ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(a_n)}{\log a_n} < \infty, \tag{21.4}$$

akkor a (3) relációból

$$f(n) = c\log n + O(\alpha(n))$$

következik. Ha ellenben (4) nem áll fent, akkor (3)-ból még $f(n)=O(\log n)$ sem következik.

IRODALOM

R. Sz. Bajbulatov

[1] Теорема Эрдеша—Винтнера для нормированных полугрупп, *ДАН УзССР* (1967), 3—7.

A. S. Besicovitch

[1] On the density of certain sequences of integers, *Math. Ann. 110* (1934), 336—341.

E. Bombieri

[1] On the large sieve, *Mathematika 12* (1965), 207—25.

H. Davenport

[1] Über numeri abundantes, *Sitzungberichte Preuss. Akad. Wiss. 27* (1933), 830—37.
[2] *Multiplicative number theory*, Markham, Chicago 1967.

H. Davenport, P. Erdős

[1] On sequences of positive integers, *Acta Arithmetica 2* (1937), 147—51.
[2] On sequences of positive integers, *J. Indian Math. Soc. 15* (1951), 19—24.

H. Delange

[1] Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 78* (1961), 273—304.
[2] Application de la méthode du crible à l'étude des valeurs moyennes de certains fonctions arithmétiques, *Semin. Delange-Pisot*, Paris 1962.
[3—4] On integral-valued arithmetical functions I—II, *J. Number Theory 1* (1969), 419—30; *6* (1974), 161—170.
[5] On the distribution mod 1 of additive functions, *J. Indian Math. Soc. 34* (1970), 215—35.
[6] Sur la distribution des valeurs des fonctions arithmétiques, *Journées arithmétiques francaises*, Univ. Provence 1971.
[7] Sur la distribution des valeurs des fonctions multiplicatives complexes, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, A 276* (1973), 161—4.

P. D. T. A. Elliott

[1] On the limiting distribution of additive functions (mod 1), *Pacific J. Math. 38* (1971), 49—59.
[2] On connections between the Turán—Kubilius inequality and the large sieve: some applications, *Amer. Math. Soc. Symp.* XXIV (1973), 77—82.

[3] On the limiting distribution of $f(p+1)$ for non-negative additive functions, *Acta Arithmetica 25* (1974), 259—64.
[4] A mean-value theorem for multiplicative functions, *Proc. London Math. Soc. 31* (1975), 418—38.
[5] General asymptotic distributions for additive arithmetic functions, *Math. Proc Cambridge Philos. Soc. 79* (1976), 43—54.
[6] On two conjectures of Kátai, *Acta Arithmetica 30* (1976), 341—65.

P. D. T. A. Elliott, C. Ryavec

[1] The distribution of the values of additive arithmetical functions, *Acta Math. 126* (1971), 143—64.

Erdős Pál

[1] On the density of abundant numbers, *J. London Math. Soc. 9* (1934), 278—82.
[2] On a problem of Chowla and some related problems, *Proc. Cambridge Philos. Soc. 32* (1936), 530—40.
[3] On the smoothness of the asymptotic distribution of additive arithmetical functions, *Amer. J. Math. 61* (1939), 722—25.
[4] Some remarks on Euler's φ function and some related problems, *Bull. Am. Math. Soc. 51* (1940), 540—44.
[5] On the distribution function of additive functions, *Ann. of Math. 47* (1946), 1—20.
[6] Some remarks about additive and multiplicative functions, *Bull. Am. Math. Soc. 52* (1946), 527—37.
[7] Some remarks and corrections to one of my papers, *Bull. Amer. Math. Soc. 53* (1947), 761—3.
[8] On the integers having exactly k prime factors, *Ann. of Math. 49* (1948), 53—66.
[9—10] Remarks on number theory I—II, *Acta Arithmetica 5* (1958), 25—33; 171—77.

Erdős Pál, M. Kac

[1] On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA 25* (1939), 206—7.
[2] The Gaussian law of errors in the theory of additive number-theoretic functions, *Amer. J. Math.* (1940), 738—42.

Erdős Pál, Kátai Imre

[1] On the concentration of distribution of additive functions, megjelenőben.

Erdős Pál, Ruzsa Imre, Sárközy András

[1] On the number solutions of $f(n)=a$ for additive functions, *Acta Arithmetica 24* (1973), 1—9

Erdős Pál, A. Wintner

[1] Additive arithmetic functions and statistical independence, *Amer. J. Math. 61* (1939), 713—21.
[2] Additive functions and almost periodicity (B^2), *Amer. J. Math. 62* (1940), 635—45.

B. V. Gnyegyenko, A. N. Kolmogorov

[1] *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.

Halász Gábor

[1] On the mean value of multiplicative number theoretic functions, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 2, Number Theory, Debrecen 1968, pp. 117—121.
[2] Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung. 19* (1968), 365—403.
[3] Multiplikatív számelméleti függvények összegeinek aszimptotikus viselkedéséről. Kandidátusi értekezés, Budapest, 1968.
[4] On the distribution of additive and the mean values of multiplicative functions, *Studia Sci. Math. Hung. 6* (1971), 211—33.
[5] Remarks to my paper "On the distribution of additive and the mean values of multiplicative functions", *Acta Math. Acad. Sci. Hung. 23* (1972), 425—32.
[6] Remarks to the talk of Mr. Ruzsa, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 13, Topics in Number Theory, Debrecen, 1974, pp. 79—80.
[7] On the distribution of additive arithmetical functions, *Acta Arithmetica 27* (1975), 143—52.

Gyarmati Edit, Turán Pál

[1] Számelmélet, egyetemi jegyzet.

H. Halberstam, K. F. Roth

[1] *Sequences,* Clarendon, Oxford, 1966.

G. H. HARDY, S. RAMANUJAN

[1] The normal number of prime factors of n, *Quart. J. Math. 48* (1917), 76—92 (= *Ramanujan, Collected Papers* No. 35).

G. H. HARDY, E. M. WRIGHT

[1] *An introduction to the theory of numbers,* 4-th ed., Clarendon, Oxford, 1968.

P. HARTMAN

[1] Infinite convolutions on locally compact Abelian groups and additive functions, *Trans. Amer. Math. Soc. 214* (1975), 215—31.

B. HORNFECK, E. WIRSING

[1] Über die Häufigkeit vollkommener Zahlen, *Math. Ann. 133* (1957), 431—38.

K. H. INDLEKOFER

[1] On the distribution of values of additive arithmetical functions, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 13, Topics in number theory, Debrecen, 1974, pp. 111—28.

[2] Grenzverteilung additiver Funktionen, *Lietuvos matem. rink. 76* (1976), 81—91.

B. JESSEN, A. WINTNER

[1] Distribution functions and the Riemann zeta function, *Trans. Amer. Math. Soc. 38* (1935), 48—88.

E. R. VAN KAMPEN

[1] Infinite product measures and infinite concolutions, *Amer. J. Math. 62* (1940), 417—48.

KÁTAI IMRE

[1] On the distribution of arithmetical functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20* (1969), 69—87.

J. KUBILIUS

[1] Вероятностные методы в теории чисел, Vilnius 1959; 2. kiadás 1962; angolul "Probabilistic methods in the theory of numbers", *AMS*, Providence 1964.

[2] Вероятностные методы в теории распределения арифметических функций, сб. «Актуальные проблемы аналитической теории чисел», Минск 1974, 81—118.

A. G. KUROS

[1] *Csoportelmélet*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.

W. J. LEVEQUE

[1] On the size of certain number-theoretic functions, *Trans. Amer. Math. Soc. 66* (1949), 440—63.

B. V. LEVIN, N. M. TYIMOFEJEV

[1] Аналитический метод в вероятностной теории чисел, *Уч. зап. с. мат. Владимирского пед. ин.-та, 38* (1971), 57—150.

[2—3] Распределение значений аддитивных функций I—II, *Acta Arithmetica 26* (1973) 333—64; *33* (1977), 327—51.

B. V. LEVIN, N. M. TYIMOFEJEV, SZ. T. TULJAGANOV

[1] Распределение значений мильтипликативных функций, *Уч. зап. Владимирского пед. ин-та, с. мат. 38* (1971), 282—4.

[2] Распределение значений мультипликативных функций, *Liet. Mat. Rink. 13* (1973), 87—100.

P. LÉVY

[1] Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes, *Studia Math. 3* (1931), 119—55.

JU. V. LINNYIK

[1] Большое решето, *DAH CCCP 30* (1941), 292—4.

E. MANSTAVIČIUS

[1] Асимптотическое распределение аддитивных арифметических функций mod 1, *Liet. Mat. Rink. 13* (1973), 101—8.

H. L. MONTGOMERY

[1] *Topics in multiplicative number theory,* Springer 1971.

E. V. Novoszelov

[1] Новый метод в вероятностной теории чисел, *UAH CCCP*, с. мат. *28* (1964), 307—64.

E. M. Paul

[1—3] Density in the light of probability theory I—III, *Sankhyā A 24* (1962), 103—14; 209—12; *A 25* (1963), 273—80.

A. G. Posztnyikov

[1] *Введение в аналитическую теорию чисел*, «Наука», M 1971.

S. Ramanujan

[1] Some formulae in the analytic theory of numbers, *Messenger of Math. 45* (1916), 81—4; *Collected Papers* 133—5.

Rényi Alfréd

[1] *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

Ruzsa Z. Imre

[1] General multiplicative functions, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai 13*, Topics in Number Theory, Debrecen 1974, pp. 281—5.,
[2] General multiplicative functions, *Acta Arithmetica 32* (1977), 313—47.
[3] Absztrakt struktúrába képező számelméleti függvények, Kandidátusi értekezés, Budapest, 1977.
[4] On the concentration of additive functions, megjelenőben az *Acta Sci. Math. Hung.*-ban.

Sárközy András

[1] Remarks to a paper of G. Halász, *Periodica Mat.* Hung. *8* (1977), 135—50.

L. G. Sathe

[1—4] On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors, *J. Indian Math. Soc. 17* (1953), 63—82; 83—141; *18* (1954), 27—42; 43—81.

A. Selberg

[1] Note on a paper by G. Sathe, *J. Indian Math. Soc. 18* (1954), 83—87.

Szőkefalvi-Nagy Béla

[1] *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

Turán Pál

[1] On a theorem of Hardy and Ramanujan, *J. London Math. Soc. 9* (1934), 274—6.
[2] Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan, *J. London Math. Soc. 11* (1936), 125—33.

N. M. Tyimofejev

[1] Оценка остаточного члена в одномерных асимптотических законах, *DAH CCCP 200* (1971), 298—301.

R. Uždavinys

[1] Аналог теоримы Эрдёша—Винтнера для последовательности значений целочислеиного полинома, *Liet. Mat. Rink. 7* (1967), 329—38.

B. M. Wilson

[1] Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan, *Proc. London Math. Soc. 21* (1922), 235—55.

E. Wirsing

[1] Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikativer Funktionen II., *Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18* (1967), 411—67.
[2] A characterization of the function $\log n$ as an additive arithmetical function, *Symp. Math. IV.*, 45—57, Academic Press, London—New York, 1970.

M. Zamansky

[1] *Introduction a l'algèbre et l'analyse modernes*, Dunod, Paris, 1963.

V. M. Zolotarjev

[1] Общая теория перемножения независимых случайных величин, *DAH 142* (1962), 788—91.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ II

И. З. РУЖА

В настоящей части статьи изложены вероятностные методы для изучения распределения аддитивных и мультипликативных функций и полученные ими важнейшие результаты.

ARITHMETICAL FUNCTIONS II

I. Z. RUZSA

Present part of this expository paper deals mainly with the distribution of additive functions, with emphasis on the probabilistic methods.

Contents. Chapters 1—3: the Turán—Kubilius inequality, its applications and connections with the large sieve. Chapter 4: the principle of "independence of primes", that is, the heuristic foundations of the use of probabilistic methods. Chapters 5—9: the existence and properties of the limiting distribution of additive functions; the Erdős—Wintner theorem and its generalization to the distribution with centering; almost periodicity. Chapters 10—11; the results of Delange, Halász and Elliott on the mean value of multiplicative functions. Chapter 12: estimates on the concentration of additive functions. Chapters 13—15: limiting distribution with normalization. Chapter 16: local distribution. Chapter 17: distribution mod 1 and mod q. Chapter 18: distribution of multiplicative functions on the real line and on the unit circle. Chapter 19: distribution problems in several dimensions. Chapter 20: some ways of generalization (instead of functions mapping from the set of natural numbers into the set of reals, functions with a more general type of domain or range). Chapter 21: a recent result of Wirsing on "regular" additive functions (if $f(n+1)-f(n)=o(\log n)$ and f is completely additive, then f is a constant multiple of the logarithmic function).

A FAAUTOMATÁK ALGEBRAI ELMÉLETE II.

GÉCSEG FERENC
(József Attila Tudományegyetem)

és

MAGNUS STEINBY
(University of Turku)

Munkánk első részében a faautomatákat, mint a reguláris erdők felismerésére alkalmas rendszereket vizsgáltuk. A témakör ezen része a véges automaták és a reguláris nyelvek általánosított elméletének tekinthető. A második rész két fejezetében a faautomaták és környezetfüggetlen nyelvek kapcsolatával, valamint a fatranszformátorokkal foglalkozunk. Itt már több olyan fogalom kerül bevezetésre, amelynek nincs megfelelője a klasszikus elméletben.

A faautomaták és a környezetfüggetlen nyelvek kapcsolata nagyon fontos helyet foglal el a faautomaták elméletében. A II. fejezet tárgya ennek a kapcsolatnak a vizsgálata. Nyilvánvaló, hogy a környezetfüggetlen nyelvekre vonatkozó számos tétel származtatható a faautomaták elméletéből. Ezt néhány példával is fogjuk illusztrálni. Továbbá a II. fejezet 3. §-ban a környezetfüggetlen nyelveknek egy kevéssé ismert reprezentációját is bemutatjuk. Potenciálisan érdekes kérdés a faautomaták adott osztályaival felismerhető nyelvek osztályainak vizsgálata, amely a 4. § tárgyát képezi.

A III. fejezet a fatranszformátorokkal és az általuk indukált transzformációkkal foglalkozik. Az irodalomban a fatranszformátor számos típusa nyert bevezetést. Értelmezhető a felszálló fatranszformátor, amely egy fát a gyökerétől a levelei felé haladva dolgoz fel, valamint az ellenkező irányban működő leszálló fatranszformátor. E két legfontosabb osztály érdekes részosztályaihoz jutunk pl. a determinisztikusság megkövetelésével, vagy annak kikötésével, hogy a transzformátor nem másolhat részfákat. Ezeket az osztályokat az 1. §-ban vezetjük be, a 2. §-ban pedig indukáló kapacitásukat hasonlítjuk össze. A 3. §-ban a fatranszformációk kompozícióival foglalkozunk. Mint látni fogjuk, a vizsgált osztályok többsége nem zárt a kompozíció képzésére nézve. Másrészről a transzformációk sok esetben előállíthatók egyszerűbbek kompozícióiként. A 4. §-ban a felületi erdőket vizsgáljuk, vagyis olyan erdőket, amelyeket reguláris erdőkből fatranszformátorokkal kapunk. Ezen paragrafus legfontosabb eredménye, hogy mind a felszálló, mind a leszálló felületi erdők osztálya bővebb a reguláris erdőkénél. Az 5. §-ban megmutatjuk hogy tetszőleges n természetes számra létezik felszálló (leszálló) fatranszformációk $(n+1)$-tényezős kompozíciójával adott olyan felületi halmaz, amely nem kapható meg felszálló (leszálló) transzformációk n-tényezős kompozíciójával.

A II. rész felépítése támaszkodik az I. rész jelöléseire, fogalmaira és eredményeire, amelyeket általában nem ismételünk meg. Továbbá felhasználunk bizonyos eredményeket a véges automaták és a környezetfüggetlen nyelvek elméletéből. Ezekre vonatkozóan az olvasó a fejezet végén levő „Megjegyzések és hivatkozások" részben talál eligazítást.

Cikkünket a faautomaták elmélete és az ezzel szoros kapcsolatban álló témák eléggé teljes bibliográfiájával zárjuk.

1. §. *Környezetfüggetlen nyelvtanok és produkciós fák*

Habár feltételezzük, hogy az olvasó ismeri a környezetfüggetlen nyelvek alapvető fogalmait és eredményeit, definiálni fogjuk a cikkben használt fogalmakat. Hogy definícióink jobban illeszkedjenek a faautomaták elméletéhez, ezért bizonyos esetekben kisebb mértékben eltérnek a megszokottaktól.

Ábécén véges, nemüres halmazt értünk, amelynek elemeit *betűknek* nevezzük. Ha $\sum$ ábécé, akkor a betűiből képzett véges hosszúságú láncok, vagy *szavak* halmazát $\sum^*$ jelöli. A szavak között szerepel a λ *üres szó* is, amely egyetlen betűt sem tartalmaz. Ha $\sum^*$-ból elhagyjuk λ-t, akkor a kapott halmazra a $\sum^+$ jelölést használjuk. A $\sum^*$ halmaz részhalmazait *nyelveknek* hívjuk. Azokat a nyelveket, amelyek nem tartalmazzák λ-t, *λ-menteseknek* nevezzük. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a vizsgált nyelvek standard ábécéink valamelyikéhez tartoznak (pl. $X_n=\{x_1, \ldots, x_n\}$-hez).

1.1. definíció. Legyen n természetes szám. Akkor (n-változós) *környezetfüggetlen nyelvtanon* a $\Gamma=(N, X_n, P, S)$ rendszert értjük, ahol

(i) N a *nemterminális szimbólumok* (X_n-nel diszjunkt) véges, nemüres halmaza,

(ii) $S(\subseteq N\cup X_n)$ a *kezdőszimbólumok* halmaza,

(iii) X_n a *terminális ábécé*,

(iv) P az $a\to z$ alakú *átírási szabályok (produkciók)* véges halmaza, ahol $a\in N$ és $z\in(N\cup X_n)^*$.

Legyen Γ tetszőleges környezetfüggetlen nyelvtan. Definiáljuk a $\Rightarrow_\Gamma$ relációt a következő módon: tetszőleges $u, v(\in N\cup X_n)^*$ esetén az $u\Rightarrow_\Gamma v$ reláció akkor és csakis akkor teljesüljön, ha léteznek $u=u_1au_2$ és $v=u_1zu_2$ alakú felbontások, az $a\to z$ szabály pedig P-ben van. A $\Rightarrow_\Gamma$ reláció reflexiv-tranzitiv lezártját $\Rightarrow_\Gamma^*$ jelöli. Ennek megfelelően az $u\Rightarrow_\Gamma^* v$ reláció akkor és csakis akkor teljesül, ha valamely $k(\geqq 0)$ mellett érvényes a

$$(*) \qquad u = u_0 \Rightarrow_\Gamma u_1 \Rightarrow_\Gamma u_2 \Rightarrow_\Gamma \ldots \Rightarrow_\Gamma u_k = v$$

deriváció.

Amennyiben nem vezet félreértéshez, akkor a $\Rightarrow_\Gamma$ és $\Rightarrow_\Gamma^*$ jelölésekből elhagyjuk Γ-t.

1.2. definíció. A $\Gamma=(N, X_n, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan által *generált nyelven* az

$$L(\Gamma) = \{u\in X_n^* \mid s\Rightarrow_\Gamma^* u \text{ valamely } s(\in S) \text{ mellett}\}$$

nyelvet értjük. Egy nyelv *környezetfüggetlen,* ha generálható környezetfüggetlen nyelvtannal.

A $(*)$ derivációt *bal oldalinak* nevezzük, ha tetszőleges $i(=0, 1, \ldots, k-1)$ esetén fennállnak az

$$u_i = u_i' au_i'' \quad \text{és} \quad u_{i+1} = u_i' zu_i''$$

egyenlőségek, ahol $u_i'\in X_n^*$, az $a\to z$ szabály pedig P-ben van. Valamely nemterminális vagy terminális szimbólumból kiinduló derivációt gyakran szemléltetnek *derivációs fával.* A bal oldali derivációk és a derivációs fák között egy-egyértelmű kapcsolat van. Megemlítjük azt is, hogy $L(\Gamma)$ bármely szavának van bal oldali derivációja.

1.3. példa. Tekintsük a $\Gamma=(\{s, a\}, \{x_1, x_2\}, P, \{s\})$ környezetfüggetlen nyelvtant, ahol P az $s\to as$, $s\to x_2$, $a\to x_1 a x_1$ és $a\to x_2$ szabályokból áll. Akkor az

$$s \Rightarrow as \Rightarrow x_1 a x_1 s \Rightarrow x_1 x_2 x_1 s \Rightarrow x_1 x_2 x_1 x_2$$

bal oldali derivációnak megfelelő fát az 1. ábra szemlélteti.

A derivációs fák különböznek az I. részben bevezetett fáktól, mivel az előbbiek esetében a fa csúcsai címkéiként szereplő nemterminális szimbólumoknak több rangja is lehet. Így az előző példánkban s rangja egyidejűleg 2 és 1. Ezt a problémát általában úgy oldják meg, hogy a fa fogalmának általánosításával a műveleti szimbólumoknak több rangot is adnak. Mi azonban meg akarjuk tartani az univerzális algebrai tárgyalásmódot, ezért a derivációs fa fogalmát módosítani fogjuk. Ezen módosított derivációs fák ugyanazokat az információkat szolgáltatják a derivációkról, mint az eredetiek.

Megjegyezzük, hogy a következő definícióban az $a\to z$ szabályt egyetlen szimbólumként használjuk. A produkciók P halmazát olyan rangolt ábécének fogjuk tekinteni, amely mellett a produkciós fák n-változós P-fák lesznek (az I. rész 1. §-a értelmében). Így az $a\to z$ produkció rangja a z szó hossza lesz.

1.4. definíció. Legyen $\Gamma=(N, X_n, P, S)$ tetszőleges n-változós környezetfüggetlen nyelvtan. Minden egyes $d(\in N\cup X_n)$-hez rendeljük hozzá a P_d halmazt a következő módon:

(1) $P_{x_i}=\{x_i\}$ $(i=1, \ldots, n)$,

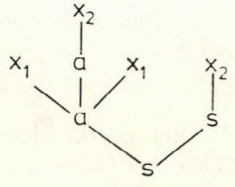
(2) ha az $a\to\lambda$ szabály P-ben van, akkor $a\to\lambda$ a P_a halmaznak is eleme,

(3) legyen az $a\to z$ szabály P-ben, ahol $z=d_1 d_2 \ldots d_k$ $(k\geqq 1, d_1, \ldots, d_k\in N\cup X_n)$. Ha $t_1\in P_{d_1}, \ldots, t_k\in P_{d_k}$, akkor $a\to z(t_1, \ldots, t_k)\in P_a$,

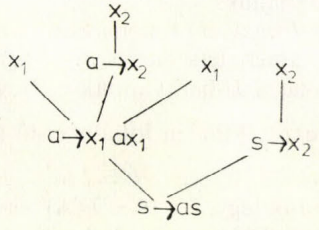
(4) P_d $(d\in N\cup X_n)$ összes eleme az (1)—(3) szabályok véges sokszor való alkalmazásával áll elő.

A P_d halmazok elemeit *produkciós fáknak* nevezzük.

1.5. példa. Az 1.3. példában szereplő derivációnak megfelelő produkciós fa az 1.2. ábrával szemléltethető.



1. ábra



1.2. ábra

1.6. definíció. Legyen $\Gamma=(N, X_n, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan. Akkor Γ *produkciós fáinak erdején* a

$$P(\Gamma)=\cup(P_s|s\in S)$$

P-erdőt értjük.

A $P(\Gamma)$-beli fák nyilvánvalóan a kezdőszimbólumokból kiinduló terminális derivációknak felelnek meg. Az 1.2. ábrával megadott fa $P(\Gamma)$-hoz tartozik, ahol Γ az 1.3. példában szereplő környezetfüggetlen nyelvtan.

A $w(\in L(\Gamma))$ szó egy derivációjához tartozó produckiós fa leveleit balról jobbra olvasva visszakapjuk a w szót. Ezt a szót a fa határának hívják. A következő definícióval értelmezni fogjuk a határ fogalmát tetszőleges F rangolt ábécére.

1.7. definíció. A p n-változós F-fa $\mathrm{fr}(p)$ *határát* a következő módon értelmezzük:

(1) ha $p=x_i$ $(1\leqq i\leqq n)$, akkor $\mathrm{fr}(p)=x_i$,

(2) ha $p=c$ $(\in F_0)$, akkor $\mathrm{fr}(p)=\lambda$,

(3) ha $p=f(p_1, \ldots, p_m)$ $(f\in F_m, m\geqq 1)$, akkor $\mathrm{fr}(p)=\mathrm{fr}(p_1)\ldots\mathrm{fr}(p_m)$.

Világos, hogy az 1.1. és 1.2. ábrákkal megadott fák határa $x_1x_2x_1x_2$.

Az $\mathrm{fr}: T_{F,n}\to X_n^*$ leképezést természetes módon terjeszthetjük ki egy olyan leképezéssé, amely tetszőleges $U(\subseteqq T_{F,n})$ erdőhöz az $\mathrm{fr}U(\subseteqq X_n^*)$ nyelvet rendeli hozzá. A következő alapvető eredmény nyilvánvaló.

1.8. tétel. Tetszőleges Γ környezetfüggetlen nyelvtanra teljesül az $L(\Gamma)=\mathrm{fr}P(\Gamma)$ egyenlőség.

2. §. *Faautomaták és környezetfüggetlen nyelvek*

Ebben a paragrafusban a környezetfüggetlen nyelvtanok, környezetfüggetlen nyelvek és faautomaták kapcsolatával foglalkozunk. Először nézhány segédfogalmat vezetünk be.

2.1. definíció. A $p(\in T_{F,n})$ fa *elágazásainak* $\mathrm{br}(p)$ halmazát a következő módon értelmezzük:

(1) ha $p\in X_n$; akkor $\mathrm{br}(p)=\emptyset$,

(2) ha $p=f(p_1, \ldots, p_m)$ $(f\in F_m,\ m\geqq 0)$, akkor $\mathrm{br}(p)=\mathrm{br}(p_1)\cup\ldots\cup\mathrm{br}(p_m)\cup\{(f, \mathrm{root}(p_1)\ldots\mathrm{root}(p_m))\}$.

2.2. definíció. Az $U(\subseteqq T_{F,n})$ erdőt *lokálisnak* nevezzük, ha van olyan $J(\subseteqq F\cup X_n)$ és $H(\subseteqq\cup(F_m\times(F\cup X_n)^m|m\geqq 0))$, hogy a $p(\in T_{F,n})$ fára a $p\in U$ tartalmazás akkor és csakis akkor teljesül, ha $\mathrm{root}(p)\in J$ és $\mathrm{br}(p)\subseteqq H$. Ekkor U-ra az $U=F(n, J, H)$ jelölést használjuk.

Adott $F(n, J, H)$ lokális erdőhöz könnyű megkonstruálni olyan n-változós F-automatát, amely tetszőleges $p(\in T_{F,n})$ fára ellenőrzi, hogy p gyökere J-ben van-e és $\mathrm{fr}(p)$ elágazásai H-ban vannak-e. Nevezetesen érvényes a

2.3. tétel. Minden lokális erdő felismerhető.

Bizonyítás. Legyen $U=F(n, J, H)$ tetszőleges lokális erdő. Elegendő megkonstruálnunk egy, az $U=T(\mathbf{A})$ egyenlőséget kielégítő $\mathbf{A}=(\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$ n-változós F-automatát. Ehhez legyen $A=F\cup X_n\cup\{*\}$, $\mathbf{a}=(x_1, \ldots, x_n)$ és $A'=J$, ahol $*$ új szimbólum. Továbbá, tetszőleges $m(\geqq 0)$, $f(\in F_m)$ és $a_1, \ldots, a_m(\in A)$ esetén legyen

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)=\begin{cases} f, & \text{ha } (f, a_1\ldots a_m)\in H,\\ * & \text{különben.}\end{cases}$$

A $p(\in T_{F,n})$ fa magassága szerinti indukcióval könnyen igazolható, hogy tetszőleges $a(\in A, a\neq *)$ esetén érvényes a

$$p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=a\Leftrightarrow(\mathrm{br}(p)\subseteqq H\wedge\mathrm{root}(p)=a)$$

ekvivalencia, amiből az $U=T(\mathbf{A})$ egyenlőség nyilvánvalóan következik. □

A következő eredmény nyilvánvaló.

2.4. tétel. Ha Γ környezetfüggetlen nyelvtan, akkor $P(\Gamma)$ lokális.

Az előző két tétel szerint tetszőleges környezetfüggetlen nyelvtan produkciós fáinak erdeje felismerhető faautomatával. Ez vezetett ahhoz a gondolathoz, hogy a faautomatákat megpróbáljuk a környezetfüggetlen nyelvek felismerésére használni.

2.5. definíció. Egy $\mathbf{A}$ n-változós F-automata által felismert nyelven az

$$L(\mathbf{A}) = \mathrm{fr}\, T(\mathbf{A})(\subseteq X_n^*)$$

nyelvet értjük.

Az 1.8., 2.3. és 2.4. tételek felhasználásával adódik a

2.6. tétel. Bármely környezetfüggetlen nyelv felismerhető faautomatával.

A 2.9. tételben meg fogjuk mutatni, hogy a 2.6. tétel megfordítottja is teljesül.

2.7. tétel. Tetszőleges $U(\subseteq T_{F,n})$ felismerhető erdőhöz létezik olyan $\Gamma = (N, X_n, P, S)$ n-változós környezetfüggetlen nyelvtan és γ: $T_{P,n} \to T_{F,n}$ projekció, amelyek mellett érvényes a $\gamma(P(\Gamma)) = U$ egyenlőség.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy U felismerhető az $\mathbf{A} = (\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$ n-változós F-automatával. Konstruáljuk meg a $\Gamma = (N, X_n, P, S)$ n-változós környezetfüggetlen nyelvtant a következő módon:

(1) $N = A \times F$,

(2) $S = A' \times F \cup \{x_i | a^{(i)} \in A'\}$,

(3) P az összes $(a, f) \to d_1 \dots d_m$ átírási szabályból áll, ahol $a(\in A)$, $m(\geqq 0)$, $f(\in F_m)$ és $d_1 \dots d_m$ eleget tesz az alábbi feltételnek: léteznek olyan $a_1, \dots, a_m (\in A)$ állapotok, hogy

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m) = a,$$

és minden $i(=1, \dots, n)$-re érvényes az (a) és (b) állítások egyike

(a) $d_i = x_j$ és $a_i = a^{(j)}$ valamely j $(1 \leqq j \leqq n)$ mellett,

(b) $d_i = (a_i, f')$ valamely $f'(\in F)$ mellett.

Vegyük észre, hogy $(a, f) \to \lambda$ akkor és csakis akkor van P-ben, ha $f \in F_0$ és $f^{\mathfrak{A}} = a$.

Legyen γ: $T_{P,n} \to T_{F,n}$ a $\gamma((a, f) \to u) = f$ egyenlőséggel értelmezett projekció, ahol az $(a, f) \to u$ szabály P-ben van.

Megmutatjuk, hogy $\gamma(P(\Gamma)) = U$. Ehhez értelmezzük a

$$\delta\colon P \cup X_n \to A$$

leképezést úgy, hogy tetszőleges P-beli $(a, f) \to d_1 \dots d_m$ átírási szabályra legyen

$$\delta((a, f) \to d_1 \dots d_m) = a,$$

továbbá teljesüljenek a $\delta(x_i) = a^{(i)}$ $(i = 1, \dots, n)$ egyenlőségek.

Ezután a $p(\in T_{P,n})$ fa magassága szerinti indukcióval igazoljuk, hogy érvényes a

$$(*)\quad \delta(\mathrm{root}(p)) = \gamma(p)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$$

egyenlőség, ha p produkciós fa.

(i) Ha $p = x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, akkor $\delta(\mathrm{root}(p)) = a^{(i)} = \gamma(p)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$.

(ii) Ha $p = (a, f) \to \lambda (\in P_0)$, akkor $f^{\mathfrak{A}} = a$, következésképpen $(*)$ mindkét oldala megegyezik a-val.

(iii) Legyen $p=(a,f)\to d_1 \dots d_m(p_1, \dots, p_m)$ $(m\geqq 1)$, és tegyük fel, hogy $(*)$ teljesül a $p_1, \dots, p_m$ fákra az

$$a_i = \delta(\mathrm{root}(p_i)) \quad (i = 1, \dots, m)$$

egyenlőségek mellett. Akkor $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m)=a$ és érvényesek a $\gamma(p_i)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=a_i$ $(i=1, \dots, m)$ összefüggések. Minthogy $\gamma(p)=f(\gamma(p_1), \dots, \gamma(p_m))$, ezért a kívánt $\gamma(p)^{\mathfrak{A}}(a)=f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m)=a=\delta(\mathrm{root}(p))$ egyenlőséghez jutunk.

Mivel produkciós fákra a $p\in P(\Gamma)$ és $\delta(\mathrm{root}(p))\in A'$ összefüggések ekvivalensek, ezért $(*)$ maga után vonja a $\gamma(P(\Gamma))\subseteq U$ tartalmazást.

Fordítva, indukcióval igazolható, hogy tetszőleges $q(\in T_{F,n})$ fához létezik a

$$\gamma(p) = q \quad \text{és} \quad \delta(\mathrm{root}(p)) = q^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$$

egyenlőségeket kielégítő $p(\in T_{P,n})$ produkciós fa. Továbbá, ha $q\in U$, akkor $q^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\in A'$, amiből következik a $p\in P(\Gamma)$ tartalmazás. Így $U\subseteqq\gamma(P(\Gamma))$. □

Az I. 4.7., 2.3., 2.4. és 2.7. tételek felhasználásával kapjuk a következő eredményt, amely megfelelője a véges automaták elméletében jól ismert.

2.8. tétel. Egy erdő akkor és csakis akkor felismerhető, ha előáll egy lokális erdő projekciójaként.

Most visszatérünk a jelen rész főkérdésének tanulmányozásához.

2.9. tétel. A faautomatákkal felismerhető nyelvek környezetfüggetlenek.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}$ n-változós F-automata. A 2.7. tétel szerint létezik a $T(\mathbf{A})=\gamma(P(\Gamma))$ egyenlőséget kielégítő Γ környezetfüggetlen nyelvtan és γ projekció. Továbbá indukcióval könnyen igazolható, hogy a projekciók megőrzik a fák határát. Következésképpen érvényes az

$$L(\mathbf{A}) = \mathrm{fr}(\gamma(P(\Gamma))) = L(\Gamma)$$

egyenlőség, vagyis $L(\mathbf{A})$ környezetfüggetlen. □

Eredményeinket a következő módon foglalhatjuk össze:

(1) Egy erdő akkor és csakis akkor felismerhető, ha előáll valamely környezetfüggetlen nyelvtan produkciós fái erdejének projekciójaként.

(2) Egy nyelv akkor és csakis akkor ismerhető fel faautomatával, ha környezetfüggetlen.

A következő példa azt mutatja, hogy fr inverze a környezetfüggetlen nyelveket nem szükségképpen viszi át felismerhető erdőkbe. Így környezetfüggetlen nyelveket nem-felismerhető erdőkből is kaphatunk.

2.10. példa. Legyen $F=F_2=\{\cdot\}$ és $n=2$. Könnyű megmutatni, hogy az $L=\{x_1^k x_2^k | k\geqq 1\}$ nyelvre $\mathrm{fr}^{-1}(L)$ nem felismerhető erdő.

Előző észrevételünkkel ellentétben érvényes a

2.11. tétel. Ha $L(\subseteqq X_n^*)$ reguláris nyelv, akkor tetszőleges F rangolt ábécére $\mathrm{fr}^{-1}(L)$ felismerhető erdő.

Bizonyítás. Minthogy L reguláris, ezért van olyan M véges monoid, $\varphi: X_n^*\to M$ epimorfizmus és $A'(\subseteqq M)$ részhalmaz, amelyek mellett érvényes az $L=\varphi^{-1}(A')$ egyenlőség. Definiáljuk az $\mathfrak{A}=(M, F)$ F-algebrát úgy, hogy tetszőleges $m(\geqq 0)$, $f(\in F_m)$ és $a_1, \dots, a_m(\in M)$ esetén teljesüljön az

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m) = a_1 a_2 \dots a_m$$

egyenlőség, ahol $a_1a_2 \dots a_m$ az $a_1, a_2, \dots, a_m$ elemek M-beli szorzatát jelöli.* Továbbá legyen

$$\mathbf{a} = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)).$$

Akkor bármely $p(\in T_{F,n})$ fára teljesül a $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = \varphi(\mathrm{fr}(p))$ összefüggés. Következésképpen $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \in A'$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $\mathrm{fr}(p) \in L$. Így $\mathrm{fr}^{-1}(L) = T(\mathbf{A})$, ahol $\mathbf{A} = (\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$. □

A 2.6. tétel következő általánosítását gyakran használják.

2.12. tétel. Bármely környezetfüggetlen nyelv felismerhető olyan faautomatával, amelynek egy 2-változós és egy 0-változós művelete van. Ha a nyelv λ-mentes, akkor csupán egy 2-változós műveletre van szükség.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $L(\subseteq X_n^+)$ λ-mentes környezetfüggetlen nyelv. Jólismert, hogy L generálható egy Greibach-normálformában adott $\Gamma = (N, X_n, P, \{s_0\})$ $(s_0 \in N)$ környezetfüggetlen nyelvtannal, vagyis olyan nyelvtannal, amely átírási szabályai $a \to x_i z$ $(a \in N, x_i \in X_n, z \in \{\lambda\} \cup N \cup NN)$ alakúak.

Legyen $F = F_2 = \{f\}$, és tekintsük azt az $\mathfrak{A} = (A, F)$ F-algebrát, amely A tartóhalmaza $X_n \cup N \cup NN$ összes részhalmazából áll. Továbbá, bármely $B, C(\in A)$ elemekre teljesüljön az

$$f^{\mathfrak{A}}(B, C) = \{z \in N \cup NN \mid z \Rightarrow^* bc \text{ valamely } b(\in B)\text{-re és } c(\in C)\text{-re}\}$$

egyenlőség. Az $\mathbf{a} = (a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$ kezdővektor i-ik $(i = 1, \dots, n)$ komponensét az

$$a^{(i)} = \{x_i\} \cup \{a \mid a \in N, a \Rightarrow^* x_i\}$$

összefüggéssel értelmezzük. Végül legyen $A' = \{B \mid B \in A, s_0 \in B\}$. Megmutatjuk, hogy erre az $\mathbf{A} = (\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$ F-automatára teljesül az $L(\mathbf{A}) = L$ egyenlőség.

I. Az $L \subseteq L(\mathbf{A})$ tartalmazás igazolására elgendő megmutatni a következő állítás helyességét:

$(*)$ Valahányszor érvényes az $a \Rightarrow^* u$ $(a \in N, u \in X_n^+)$ deriváció, mindannyiszor található az $\mathrm{fr}(p) = u$ és $a \in p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$ összefüggéseket kielégítő $p(\in T_{F,n})$ fa.

A $(*)$ állítás bizonyítását az

$$a \Rightarrow u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_k = u$$

derivációban használt lépések k száma szerinti indukcióval végezzük.

1. Ha $k = 1$, akkor $u = x_i$ valamely $i(= 1, \dots, n)$-re. Így P tartalmazza az $a \to x_i$ átírási szabályt. Következésképpen $a \in a^{(i)}$, vagyis p-nek választhatjuk az x_i fát.

2. Tegyük fel, hogy $(*)$ teljesül a k-nál kevesebb lépésből álló derivációkra, és tekintsük u-nak a-ból való fenti derivációját. Az elsőként alkalmazott produkció alakjától függően különböztessük meg a következő két esetet:

(i) $u_1 = x_i b$ vagy

(ii) $u_1 = x_i bc$,

ahol $x_i \in X_n$ és $b, c \in N$.

Az (i) esetben egy

$$b \Rightarrow u_2' \Rightarrow u_3' \Rightarrow \dots \Rightarrow u_k' = u'$$

deriváció mellett érvényesek az $u_j = x_i u_j'$ $(j = 2, \dots, k)$ egyenlőségek. Az indukciós fel-

* A 0-tényezős szorzaton M egységelemét értjük.

tevés szerint van olyan $q(\in T_{F,n})$, hogy $\mathrm{fr}(q)=u'$ és $b\in q^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$. Így $p=f(x_i, q)$ kielégíti a kívánt

$$\mathrm{fr}(p) = x_i \mathrm{fr}(q) = u$$

és

$$a\in f^{\mathfrak{A}}\left(a^{(i)}, q^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\right) = p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$$

összefüggéseket, mivel az $a\to x_i b$ átírási szabály P-ben van, $x_i\in a^{(i)}$ és $b\in q^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$.

A (ii) eset az előzőhöz hasonlóan bizonyítható.

II. Az $L(\mathbf{A})\subseteq L$ tartalmazás igazolására megmutatjuk a következő állítás helyességét.

$(**)$ Ha valamely $z(\in X_n\cup N\cup NN)$ és $p(\in T_{F,n})$ mellett teljesül a $z\in p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$ összefüggés, akkor $z\Rightarrow^*\mathrm{fr}(p)$.

A $(**)$ állítást is indukcióval bizonyítjuk.

(i) Ha $p=x_i$ $(1\leqq i\leqq n)$, úgy $z\in p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=a^{(i)}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $z\Rightarrow^* x_i=\mathrm{fr}(p)$.

(ii) Tegyük fel, hogy $(**)$ a h-nál $(h\geqq 1)$ kisebb magasságú fákra teljesül, és legyen $p(\in T_{F,n})$ magassága h. Akkor p megadható $p=f(q, r)$ alakban. Az $\mathfrak{A}$ algebra értelmezése folytán teljesül a

$$p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = \left\{z\in N\cup NN \mid z\Rightarrow^* uv \text{ valamely } u\left(\in q^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\right) \text{ és } v\left(\in r^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\right) \text{ esetén}\right\}$$

egyenlőség. Másrészt, mivel az indukciós feltevés miatt érvényesek az $u\Rightarrow^*\mathrm{fr}(q)$ $(u\in q^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}))$ és $v\Rightarrow^*\mathrm{fr}(r)$ $(v\in r^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}))$ derivációk, ezért a kívánt

$$z\Rightarrow^* \mathrm{fr}(q)\,\mathrm{fr}(r) = \mathrm{fr}(p)$$

derivációt is teljesül.

Bizonyításunk könnyen kiterjeszthető arra az esetre, amikor L tartalmazza a λ üres szót. Ekkor legyen $F=F_0\cup F_2$, ahol $F_0=\{f_0\}$. Továbbá az állapothalmazt bővítsük ki két állapottal, mondjuk 0-val és 1-gyel, a végállapotokhoz vegyük hozzá 1-gyet, és legyen $f_0^{\mathfrak{A}}=1$. Végül teljesüljön az $f^{\mathfrak{A}}(B, C)=0$ egyenlőség, ha B és C közül legalább az egyik megegyezik 0-val vagy 1-gyel. □

Megjegyezzük, hogy előző tételünket könnyebben tudtuk volna bizonyítani, ha egy Chomsky-normálformában adott invertálható nyelvtanból indultunk volna ki. Azonban az itt alkalmazott konstrukcióra szükségünk lesz a 4. §-ban.

Nyilvánvaló, hogy a környezetfüggetlen nyelvek elméletének nagyrésze — az előző eredmény alapján — származtatható a véges automaták általánosított elméletéből. Paragrafusunk hátralevő részében ennek illusztrálására néhány egyszerű példát mutatunk.

2.13. tétel. A környezetfüggetlen nyelvek osztálya zárt az egyesítésre nézve. Továbbá egy környezetfüggetlen nyelvnek reguális nyelvvel való metszete ismét környezetfüggetlen.

Bizonyítás. Tételünk első állítása következik abból a tényből, hogy az U és V felismerhető erdők egyesítése is felismerhető és hogy érvényes az

$$\mathrm{fr}(U\cup V) = \mathrm{fr}(U)\cup \mathrm{fr}(V)$$

egyenlőség. Vegyük észre, hogy itt szükségünk volt a 2.12. tételre, mivel hallgatólagosan feltételeztük, hogy két környezetfüggetlen nyelv megadható egy és ugyanazon rangolt ábécé feletti erdők határ-halmazaként.

Most legyen L környezetfüggetlen, R pedig reguláris nyelv, és tegyük fel, hogy $L, R\subseteq X_n^*$. Továbbá legyen $F=F_0\cup F_2$, ahol F_0 és F_2 egyelemű halmazok. Jelöljön

A olyan n-változós F-automatát, amely L-t ismeri fel. A 2.11. és I. 4.1. tételek szerint a $T(\mathbf{A}) \cap \mathrm{fr}^{-1}(R)$ erdő felismerhető. Másrészt nyilvánvalóan teljesül az

$$L \cap R = \mathrm{fr}\left(T(\mathbf{A}) \cap \mathrm{fr}^{-1}(R)\right)$$

egyenlőség is, azaz $L \cap R$ környezetfüggetlen. □

2.14. definíció. Legyenek L és M nyelvek, k pedig természetes szám. Az M nyelvnek L-be való x_k-*helyettesítése* az az $L \cdot_{x_k} M$ nyelv, amely az összes

$$u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots u_j v_j u_{j+1}$$

szóból áll, ahol $j \geqq 0$, $u_1 x_k u_2 x_k \ldots u_j x_k u_{j+1} \in L$, az $u_1 u_2 \ldots u_j u_{j+1}$ szóban nem fordul elő x_k, és $v_1, \ldots, v_j \in M$.

Az L nyelv x_k-*iteráltja* az

$$L^{*x_k} = \bigcup (L^{i,k} \mid i \geqq 0)$$

nyelv, ahol $L^{i,k}$-t a következő módon értelmezzük:

(1) $L^{0,x_k} = \{x_k\}$

és

(2) $L^{i,x_k} = L^{i-1,x_k} \cdot x_k (L \cup \{x_k\})$ $(i > 0)$.

2.15. tétel. Tetszőleges U, $V (\subseteqq T_{F,n})$ erdőre és k természetes számra érvényesek az

(a) $\mathrm{fr}(U \cdot x_k V) = \mathrm{fr}(U) \cdot x_k \mathrm{fr}(V)$

és

(b) $\mathrm{fr}(U^{*x_k}) = \mathrm{fr}(U)^{*x_k}$

egyenlőségek.

Bizonyítás. Az $U \cdot_{x_k} V$ erdő mindenegyes p fáját úgy kapjuk, hogy valamely $q (\in U)$ fában az x_k részfa összes előfordulását V-beli fával helyettesítjük. Tegyük fel, hogy x_k j-szer $(j \geqq 0)$ fordul elő q-ban, és ezeket az előfordulásokat balról jobbra haladva a V-beli $r_1, \ldots, r_j$ fákkal helyettesítjük. Akkor $\mathrm{fr}(q)$ felírható $u_1 x_k u_2 \ldots$ $\ldots u_j x_k u_{j+1}$ alakban, ahol az $u_1 u_2 \ldots u_{j+1}$ szóban már nem fordul elő x_k. Következésképpen $\mathrm{fr}(p) = u_1 \mathrm{fr}(r_1) u_2 \ldots u_j \mathrm{fr}(r_j) u_{j+1}$ az $\mathrm{fr}(U) \cdot_{x_k} \mathrm{fr}(V)$ nyelvhez tartozik.

Az $\mathrm{fr}(U) \cdot_{x_k} \mathrm{fr}(V) \subseteqq \mathrm{fr}(U \cdot_{x_k} V)$ tartalmazás előző eljárásunk megfordításával bizonyítható.

A (b) egyenlőség igazolásához elegendő megmutatni az

$$\mathrm{fr}(U^{i,x_k}) = \mathrm{fr}(U)^{i,x_k} \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

egyenlőségek helyességét, amelyeket (a) felhasználásával i szerinti indukcióval könnyen igazolhatunk. (A terminológiára vonatkozóan l. I. 4. §.) □

2.16. tétel. A környezetfüggetlen nyelvek osztálya megegyezik azon legszűkebb nyelvosztállyal, amely tartalmazza a véges nyelveket és zárt az egyesítésre, az x_k-helyettesítésre, valamint az x_k-iterációra nézve, ahol k tetszőleges természetes szám.

Bizonyítás. Bármely véges nyelv nyilvánvalóan környezetfüggetlen. Továbbá, ha L és M környezetfüggetlen nyelvek, akkor alkalmas U, $V (\subseteqq T_{F,n})$ felismerhető erdők mellett felírhatók $L = \mathrm{fr}(U)$ és $M = \mathrm{fr}(V)$ alakban. De az I. 4.1., I. 4.3., I. 4.5.,

2.9., 2.13. és 2.15. tételek szerint az $L \cup M = \mathrm{fr}(U \cup V)$, $L \cdot_{x_k} M = \mathrm{fr}(U \cdot_{x_k} V)$ és $L^{*x_k} = \mathrm{fr}(U^{*x_k})$ nyelvek környezetfüggetlenek.

Fordítva az erdőkre vonatkozó Kleene-tétel (l. I. 5.4. tétel) szerint minden egyes felismerhető erdő megkapható véges erdőkből az egyesítés, x_k-szorzás és x_k-iteráció véges sokszor való alkalmazásával. Következésképpen minden környezetfüggetlen nyelv megkapható véges nyelvekből a megfelelő nyelv-műveletekkel. □

3. §. *Egy másik kapcsolat*

Ha egy véges automatát unáris algebrának tekintünk, akkor az általa felismert nyelv betűi műveleti szimbólumok. Ez a szemlélet átvihető faautomatákra is: a bemenő szavakat úgy képezzük, hogy a polinom-szimbólumokból töröljük a zárójeleket, a vesszőket és a változókat.

Megjegyzés. Ebben a paragrafusban kényelmesebb lenne a lengyel prefix írásmód használata. Akkor ugyanis csak a változókat kellene törölnünk.

Az F szimbólum továbbra is rangolt ábécét fog jelölni, de közönséges ábécének is tekintjük (figyelmen kívül hagyva F rangolását).

Jelölje H a $H = F \cup X_n \cup \{(\} \cup \{)\} \cup \{,\}$ halmazt. Akkor minden egyes n-változós F-fa tekinthető H^* egy elemének. Könnyen belátható az is, hogy $T_{F,n}$ környezetfüggetlen nyelv H felett.

3.1. definíció. Legyen $\eta: H^* \to F^*$ az

$$\eta(h) = \begin{cases} h, & \text{ha } h \in F, \\ \lambda, & \text{ha } h \in H - F \end{cases}$$

összefüggéssel definiált homomorfizmus. Akkor az $\mathbf{A}$ n-változós F-automata által *felismert operációs nyelven* az $O(\mathbf{A}) = \eta(T(\mathbf{A}))$ nyelvet értjük.

3.2. tétel. Egy nyelv akkor és csakis akkor környezetfüggetlen, ha megegyezik egy faautomata által felismert operációs nyelvvel. Pontosabban érvényesek a következő állítások:

(I) Tetszőleges F rangolt ábécé, n természetes szám és $\mathbf{A}$ n-változós F-automata esetén $O(\mathbf{A})$ környezetfüggetlen.

(II) Ha L környezetfüggetlen nyelv valamely F ábécé felett, akkor megadható F-nek olyan rangolása, n természetes szám és $\mathbf{A}$ n-változós F-automata, hogy $O(\mathbf{A}) = L$.

Bizonyítás. Az (I) állítás igazolására elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges $U (\subseteq T_{F,n})$ felismerhető erdőre $\eta(U)$ környezetfüggetlen. Az I. 3. §-ban már bebizonyítottuk, hogy minden ilyen U generálható egy $\Gamma = (Q, F, P, S)$ n-változós reguláris F-nyelvtannal, ahol Q a nemterminális szimbólumok halmaza, $S (\subseteq Q)$ a kezdőszimbólumok halmaza, P pedig

(i) $a \to x_i$ $(a \in Q,\ x_i \in X_n)$,
(ii) $a \to f$ $(a \in Q, f \in F_0)$,
(iii) $a \to f(a_1, \ldots, a_m)$ $(a, a_1, \ldots, a_m \in Q,\ f \in F_m,\ m > 0)$

alakú átírási szabályok véges halmaza. De Γ-t tekinthetjük a H terminális ábécével rendelkező környezetfüggetlen nyelvtannak. Az általa generált nyelv ugyancsak U, ha U-t H^+ részhalmazaként vesszük. Most soroljuk a változókat, a zárójeleket és

a vesszőt nyelvtanunk nemterminális szimbólumai közé, és P-t bővítsük a $h \to \lambda$ $(h \in H - F)$ átírási szabályokkal. Akkor a kapott környezetfüggetlen nyelvtan az $\eta(U)$ nyelvet generálja.

A (II) állítás bizonyításához tegyük fel, hogy az $L(\subseteq F^*)$ nyelvet a $\Gamma = (Q, F, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan generálja, ahol Q a nemterminális szimbólumok halmaza, $S(\subseteq Q)$ a kezdőszimbólumok halmaza, P pedig az átírási szabályok halmaza. Először tételezzük fel, hogy L λ-mentes. Ismét élhetünk azzal a megszorítással, hogy Γ Greibach-normálformában adott, azaz átírási szabályai

(a) $a \to fbc$, (b) $a \to fb$ vagy (c) $a \to f$

alakúak, ahol $a, b, c \in Q$ és $f \in F$. Rangoljuk F-et úgy, hogy teljesüljön az $F = F_2$ egyenlőség, Γ-ból pedig konstruáljuk meg a $\Gamma' = (Q, F, P', S)$ 1-változós reguláris F-nyelvtant, ahol P'-t a következő módon kapjuk:

(1) az $a \to f(b, c)$ szabály legyen P'-ben, ha az $a \to fbc$ szabály P-ben van,

(2) az $a \to f(b, x_1)$ szabály legyen P'-ben, ha az $a \to fb$ szabály P-ben van,

(3) az $a \to f(x_1, x_1)$ szabály legyen P'-ben, ha az $a \to f$ szabály P-ben van.

Terjesszük ki az η leképezést az

$$\eta: (H \cup Q)^* \to (F \cup Q)^*$$

leképezéssé az $\eta(a) = a$ $(a \in Q)$ egyenlőséggel. Könnyen igazolható, hogy bármely Γ-beli

$$(*) \qquad a \Rightarrow u_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_k \quad (k \geqq 1)$$

derivációhoz létezik olyan Γ'-beli

$$(**) \qquad a \Rightarrow v_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_k$$

derivációt, amely mellett érvényes az $\eta(v_i) = u_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ egyenlőség. Fordítva, ha η-t alkalmazzuk egy Γ'-beli $(**)$ levezetésben szereplő minden egyes v_i $(i = 1, \ldots, k)$ szóra, akkor a kapott $\eta(v_i) = u_i$ szavakkal egy Γ-beli $(*)$ levezetést képezhetünk. Érvényes továbbá ennél a megfeleltetésnél az $u_k \in F^* \Leftrightarrow v_k \in T_{F,1}$ ekvivalencia, következésképpen $L(\Gamma) = \eta(T(\Gamma'))$. Másrészt az I. 3.3. tétel szerint van olyan $\mathbf{A}$ 1-változós F-automata, amelyre fennáll a $T(\Gamma') = T(\mathbf{A})$ egyenlőség.

Amennyiben $\lambda \in L$ is teljesül, akkor $T(\Gamma')$-t bővítsük az x_1 fával. Ekkor ismét található az $\eta(T(\mathbf{A})) = L$ összefüggést kielégítő 1-változós F-automata. □

A (II) állítás bizonyításából látható, hogy tételünk megfogalmazható abban az élesebb alakban, amelyben egyetlen változót és csupán kétváltozós műveleteket követelünk meg.

4. §. *Automaták, erdők és nyelvek osztályai*

Ebben a részben olyan erdők és nyelvek osztályait vizsgáljuk, amelyek egy adott algebra-osztályhoz tartozó algebrából konstruált faautomatákkal ismerhetők fel. Amikor algebra-osztályról beszélünk, akkor mindig feltételezzük, hogy a szóban forgó osztály elemei egy tetszőleges F rangolt ábécéhez tartozó F-algebrák. Habár elsősorban a véges algebrák érdekelnek bennünket, a definíciók és eredmények többségében a végtelen eset is megengedhető. Természetesen ekkor a faautomata fogalmát is általánosítani kell.

A következőkben n mindig természetes számot jelöl. Amikor erdőket vizsgálunk, akkor az $n = 0$ esetet is megengedjük, ha $F_0 \neq \emptyset$.

4.1. definíció. Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges F-algebra. Az $\mathfrak{A}$-val *felismerhető n-változós erdők* $\mathscr{T}_n(\mathfrak{A})$ osztályát, valamint az $\mathfrak{A}$-val *felismerhető n-változós* nyelvek $\mathscr{L}_n(\mathfrak{A})$ osztályát a következő módon értelmezzük:

(1) Az $U(\subseteq T_{F,n})$ erdő akkor és csakis akkor tartozik a $\mathscr{T}_n(\mathfrak{A})$ osztályhoz, ha $U=T(\mathbf{A})$ valamely $\mathbf{A}=(\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$ n-változós F-automatára.

(2) Az $L(\subseteq X_n^*)$ nyelv akkor és csakis akkor tartozik az $\mathscr{L}_n(\mathfrak{A})$ osztályhoz, ha $L=L(\mathbf{A})$ valamely $\mathbf{A}=(\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$ n-változós F-automatára.

4.2. segédtétel. Ha $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ algebra részalgebrája vagy epimorf képe, akkor tetszőleges n-re teljesülnek a $\mathscr{T}_n(\mathfrak{A})\subseteq\mathscr{T}_n(\mathfrak{B})$ és $\mathscr{L}_n(\mathfrak{A})\subseteq\mathscr{L}_n(\mathfrak{B})$ tartalmazások.

Bizonyítás. A részalgebra esete nyilvánvaló.

Legyen h: $\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$ epimorfizmus, és tekintsünk egy $\mathbf{A}=(\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$ n-változós F-automatát. Értelmezzük a $\mathbf{B}=(\mathfrak{B}, \mathbf{b}, B')$ n-változós F-automatát a $B'=h^{-1}(A')$ és $h(b^{(i)})=a^{(i)}$ $(i=1, \ldots, n)$ összefüggésekkel. Ekkor a $T(\mathbf{B})=T(\mathbf{A})$ egyenlőség nyilvánvalóan teljesül. Így $\mathscr{T}_n(\mathfrak{A})\subseteq\mathscr{T}_n(\mathfrak{B})$, ami maga után vonja az $\mathscr{L}_n(\mathfrak{A})\subseteq\mathscr{L}_n(\mathfrak{B})$ tartalmazás érvényességét is. □

4.3. definíció. Legyen K F-algebrák osztálya. Az $U(\subseteq T_{F,n})$ erdő akkor és csakis akkor tartozik a K által *felismert n-változós erdők* $\mathscr{T}_n(K)$ osztályához, ha K-ban van olyan $\mathfrak{A}$, hogy $U\in\mathscr{T}_n(\mathfrak{A})$. A K által *felismert* $L(\subseteq X_n^*)$ *n-változós nyelvek* $\mathscr{L}_n(K)$ osztályát hasonlóan értelmezzük.

Az alábbi 4.4. tétel következik a 4.2. segédtételből, valamint abból, hogy az $\mathfrak{A}$ algebrának egy $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$ n-változós F-automata kezdővektora által generált részalgebrája a K feletti n elem által generált szabad algebra epimorf képe, ha $\mathfrak{A}\in K$.

4.4. tétel. Legyen K F-algebrák olyan osztálya, amely felett létezik az n elem által generált $\mathfrak{F}_n(K)$ szabad algebra. Akkor $\mathscr{T}_n(K)=\mathscr{T}_n(\mathfrak{F}_n(K))$ és $\mathscr{L}_n(K)=\mathscr{L}_n(\mathfrak{F}_n(K))$.

A jelen rész vizsgálataiban matematikai szempontból a varietások a legérdekesebbek. Másrészt az automaták elméletében az érdeklődés a véges algebrákra összpontosul. Mindkét szempontot figyelembe véve mi a $\mathscr{T}_n(K^v)$ és $\mathscr{L}_n(K^v)$ osztályokat vizsgáljuk, ahol K varietás, K^v pedig K összes véges algebrájának osztálya. (Megjegyezzük, hogy F-algebrák egy *varietása* az összes olyan F-algebrából áll, amely kielégíti $p=q(p, q\in T_F(X))$ alakú azonosságok adott halmazát. Például a félcsoportok az $x_1(x_2x_3)=(x_1x_2)x_3$ azonosságot kielégítő bináris algebrák varietását alkotják.)

4.5. tétel. Legyen K F-algebrák tetszőleges varietása. Ekkor érvényes a következő két állítás:

(a) $\mathscr{T}_n(K^v)$ halmaztest $T_{F,n}$-ben,

(b) $\mathscr{L}_n(K^v)$ zárt az egyesítésre nézve.

A *bizonyítás* az I. 4.1. tétel alapján nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy $\mathscr{L}_n(K^v)$-nek az egyesítésre való zártsága következik $\mathscr{T}_n(K^v)$-nek az egyesítésre való zártságából. Viszont $\mathscr{L}_n(K^v)$ nem zárt a metszet, valamint a komplementum képzésére nézve, habár ezen műveletek egyike sem vezet ki $\mathscr{T}_n(K^v)$-ből. Végül $\mathscr{L}_n(K^v)$ nem zárt a szorzás, iteráció és a tükörkép-képzés egyikére nézve sem.

4.6. tétel. Jelölje Sg az összes félcsoport osztályát. Akkor $\mathscr{L}_n(Sg^v)$ megegyezik az X_n feletti összes λ-mentes reguláris nyelv osztályával.

Bizonyítás. Most F egy kétváltozós műveleti szimbólumból (szorzás) áll. Legyen $L(\subseteq X^+)$ tetszőleges reguláris nyelv. Akkor van olyan S véges félcsoport, h: $X_n^+\to S$

epimorfizmus és $S'(\subseteq S)$ részhalmaz, hogy teljesül az $L=h^{-1}(S)$ egyenlőség. Definiáljuk az $\mathbf{A}=(S, \mathbf{a}, S')$ n-változós F-automatát úgy, hogy $\mathbf{a}=(h(x_1), \ldots, h(x_n))$. Indukcióval könnyen igazolható, hogy tetszőleges $p(\in T_{F,n})$ fára teljesül a

$$p^S(\mathbf{a}) = h(\mathrm{fr}\,(p))$$

összefüggés, amiből következik a kívánt $L=L(\mathbf{A})(\in L_n(Sg^v))$ egyenlőség.

Fordítva, vegyük az $\mathbf{A}=(S, \mathbf{a}, S')$ n-változós F-automatát, ahol S véges félcsoport. Jelölje

$$h\colon X_n^+ \to S$$

a $h(x_i)=a^{(i)}$ $(i=1, \ldots, n)$ egyenlőséggel definiált homomorfizmust. Ekkor tetszőleges $p(\in T_{F,n})$ fára érvényes a

$$h(\mathrm{fr}\,(p)) = p^S(\mathbf{a})$$

összefüggés, így az $L(\mathbf{A})=h^{-1}(S')$ nyelv reguláris. □

Az előző bizonyítás egy egyszerű változatával belátható, hogy éppen a reguláris nyelveket lehet felismerni véges monoidokkal.

4.7. definíció. Azt mondjuk, hogy F-algebrák valamely K osztálya

(a) *erdő-teljes*, ha tetszőleges n-re $\mathscr{T}_n(K^v)$ tartalmazza az összes felismerhető n-változós F-erdőt,

(b) *nyelv-teljes*, ha bármely n-re $\mathscr{L}_n(K^v)$ tartalmazza az X_n feletti összes környezetfüggetlen nyelvet.

Világos, hogy valódi varietás nem lehet erdő-teljes. A nyelv-teljességre vonatkozóan érvényes a

4.8. tétel. Legyen F olyan rangolt ábécé, amely legalább egy kétváltozós és legalább egy 0 változós műveleti szimbólumot tartalmaz. Ekkor létezik F-algebrák nyelv-teljes valódi varietása.

Bizonyítás. Tételünket nyilvánvalóan elegendő arra az esetre igazolni, amikor F pontosan egy 2 változós és pontosan egy 0 változós műveleti szimbólumból áll. Bizonyításunkat már a 2.12. tétel bizonyításával előkészítettük. Ugyanis könnyű megmutatni, hogy az ott megkonstruált algebra tetszőleges A_1, A_2, A_3 és A_4 elemére teljesül az

$$f^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(A_1, A_2), A_3), A_4) = \emptyset$$

egyenlőség. Így bármely környezetfüggetlen nyelv felismerhető egy, az

$$f(f(f(x_1, x_2), x_3), x_4) = f(f(f(x_5, x_6), x_7), x_8)$$

azonosságot kielégítő F-algebrával. □

III. FEJEZET. FATRANSZFORMÁCIÓK

1. §. *Alapfogalmak*

Ebben a fejezetben olyan eszközöket vizsgálunk, amelyek fákat fákba transzformálnak át ahhoz hasonlóan, mint az (általánosított) szekvenciális gépek átviszik bemenő szavakat kimenő szavakba. Általában nem követeljük meg, hogy a bemenő és kimenő fák ugyanazon rangolt ábécé felettiek legyenek. Az is megengedett, hogy a változók halmazai különbözők legyenek. A következőkben a

rangolt ábécéket az F, G vagy H betűkkel jelöljük, továbbá a változók

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\}; \quad X_n = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots\}; \quad Y_n = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

és

$$Z = \{z_1, z_2, \ldots\}; \quad Z_n = \{z_1, \ldots, z_n\}$$

($n \geqq 1$) halmazait fogjuk használni. Ezenkívül szükségünk lesz a segédváltozók

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}; \quad \Xi_n = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$$

($n \geqq 1$) halmazára. A segédváltozók szerepe a részfák egy adott fában való előfordulásainak kijelölése.

Feltételezzük, hogy Ξ diszjunkt az X, Y és Z halmazok mindegyikével.

Emlékeztetünk rá, hogy az I. 1. §-ban bevezetett $T_F(S)$ az S feletti F-fák halmazát jelöli. Felhívjuk a figyelmet arra is, hogy S elemei fák is lehetnek. A jelen fejezetben vizsgált esetekben, ha S fákból áll, akkor mindig van olyan G rangolt ábécé és $\overline{Y}$ változóhalmaz, hogy a $T_F(S) \subseteqq T_G(\overline{Y})$ tartalmazás teljesül. Ennek megfelelően $T_F(S)$ elemeit $\overline{Y}$ feletti G-fáknak fogjuk tekinteni.

A $\tau(\subseteqq T_F(X_n) \times T_G(Y_m))$ alakú részhalmazokat *fatranszformációknak* nevezzük. A $(p, q) \in \tau$ tartalmazást úgy interpretáljuk, hogy τ áttranszformálhatja p-t q-ba. Ha τ-t $T_F(X_n)$ és $T_G(Y_m)$ elemei közötti relációnak tekintjük, akkor a $(\tau_1 \circ \tau_2)$ *kompozíciót* és a (τ^{-1}) *inverzt* természetes módon értelmezhetjük. Ezek ismét fatranszformációk lesznek. A τ fatranszformáció $\{p|(\exists q)((p, q) \in \tau)\}$ *értelmezési tartománya* és $\{q|(\exists p)((p, q) \in \tau)\}$ *értékkészlete* a szokásos jelentéssel fog bírni. Továbbá, ha $T \subseteqq T_F(X_n)$ és $T' \subseteqq T_G(Y_m)$, akkor

$$(\tau T) = \{q|(\exists p \in T)((p, q) \in \tau)\} \text{ és } \tau^{-1}(T') = \{p|(\exists q \in T')((p, q) \in \tau)\}.$$

Minden egyes $\tau(\subseteqq T_F(X_n) \times T_G(Y_m))$ fatranszformációhoz hozzárendeljük az X_n^*-ból Y_m^*-ba való $\{(\mathrm{fr}(p), \mathrm{fr}(q))|(p, q) \in \tau\}$ *fordítást*.

Természetesen nem minden fatranszformáció érdekes számunkra, csupán azok, amelyeket meg tudunk adni valamilyen effektív módon. Erre egy általános példa a γ: $T_{F,n} \to T_{G,n}$ projekcióval adott

$$\{(p, \gamma(p))|p \in T_{F,n}\}$$

fatranszformáció. A fatranszformációk indukálására alkalmas számos általánosabb eszközt fogunk a következőkben bevezetni; ezek a különböző típusú fatranszformátorok lesznek.

A következőkben, ha a q fában a segédváltozók közül csupán $\xi_1, \ldots, \xi_n$ fordulhatnak elő, akkor a $q(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ jelölést is használjuk. Továbbá, amennyiben $p_1, \ldots, p_n$ tetszőleges fák, akkor $q(p_1, \ldots, p_n)$ azt a fát jelöli, amelyet úgy kapunk, hogy q-ban $\xi_i (1 \leqq i \leqq n)$ mindenegyes előfordulását p_i-vel helyettesítjük.

1.1. definíció. Az $\mathbf{A} = (T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ rendszert *leszálló fatranszformátornak (l-transzformátornak)* nevezzük, ahol

(1) F és G rangolt ábécék,

(2) A olyan rangolt ábécé, amely csupa egyváltozós műveleti szimbólumból áll — az *állapothalmaz*. (Feltételezzük, hogy A diszjunkt az $\mathbf{A}$ l-transzformátor definíciójában szereplő többi halmazzal, kivéve A'-t.)

(3) $A'(\subseteqq A)$ a *végállapotok halmaza*,

(4) $\sum$ a következő két típusú átírási szabályok véges halmaza:

(i) $x_i \to a(q)$ $(x_i \in X_n, a \in A, q \in T_G(Y_m))$ és

(ii) $f(a_1(\xi_1), \ldots, a_l(\xi_l)) \to a(q(\xi_1, \ldots, \xi_l))$ $(f \in F_l;\ a_1, \ldots, a_l, a \in A;\ \xi_1, \ldots, \xi_l \in \Xi;$ $q(\xi_1, \ldots, \xi_l) \in T_G(Y_m \cup \Xi_l))$.

A $p \to q$ átírási szabályra a (p, q) alakot is fogjuk használni.

A következőkben, ha $a(\in A)$ állapot, t pedig fa, akkor $a(t)$ helyett gyakran at-t írunk. Hasonlóan, ha T tetszőleges erdő, akkor AT az $\{at | a \in A, t \in T\}$ erdőt jelöli.

1.2. definíció. Az **A** l-transzformátor *teljesen definiált,* ha tetszőleges $i(\leqq n)$, ill. $l(\geqq 0)$, $f(\in F_l)$ és $a_1, \ldots, a_l(\in A)$ esetén van olyan átírási szabály $\sum$-ban, amelynek bal oldala x_i, ill. $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l)$.

A *lineáris,* ha átírási szabályainak jobb oldalában minden egyes $\xi_i(\in \Xi)$ változó legfeljebb egyszer fordul elő.

A *nemtörlő,* ha a (ii) típusú szabályok jobb oldalában minden ξ_i $(1 \leqq i \leqq l)$ változó legalább egyszer előfordul.

A *determinisztikus,* ha nincs két olyan különböző átírási szabálya, amelyek bal oldalai megegyeznek.

Az egy-állapotú, teljesen definiált, determinisztikus l-transzformátorokat *leszálló homomorfizmusoknak* nevezzük.

Most értelmezzük az l-transzformátorokkal indukálható transzformációkat.

Legyenek $p, q(\in T_F(X_n \cup AT_G(Y_m \cup \Xi)))$ tetszőleges fák, **A** pedig az 1.1. definícióban megadott l-transzformátor. Azt mondjuk, hogy q a p fából megkapható *közvetlen derivációval* **A**-ban, ha q a p fából úgy áll elő, hogy

(i) $x_i(\in X_n)$-nek p-ben való valamely előfordulását egy $\sum$-beli $x_i \to a\bar{q}$ átírási szabály $a\bar{q}$ jobb oldalával helyettesítjük, vagy

(ii) az $f(a_1p_1, \ldots, a_lp_l)$ részfának valamely p-beli előfordulását az $a\bar{q}(p_1, \ldots, p_l)$ fával helyettesítjük, ahol az $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to a\bar{q}(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ átírási szabály $\sum$-ban van.

(Mint majd látni fogjuk, az 1.3. definícióban elegendő lenne olyan derivációkat venni, amelyeknél csak a $p, q \in T_F(X_n \cup AT_G(Y_m))$ tartalmazás teljesül. A fenti általánosabb esetre a későbbiek során lesz szükségünk.)

A közvetlen derivációra a $\Rightarrow_{\mathbf{A}}$ jelölést használjuk. A $\Rightarrow_{\mathbf{A}}$ reláció reflexív-tranzitív lezártját $\Rightarrow_{\mathbf{A}}^*$ jelöli. Ha teljesül a $p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* q$ összefüggés, akkor azt mondjuk, hogy q a p fából **A**-beli *derivációval* áll elő. Végül, amennyiben nem vezet félreértéshez, akkor a $\Rightarrow_{\mathbf{A}}$ és $\Rightarrow_{\mathbf{A}}^*$ jelölésekből elhagyjuk **A**-t.

1.3. definíció. A $\tau_{\mathbf{A}} = \{(p, q) | p \in T_F(X_n), q \in T_G(Y_m), p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* aq, a \in A'\}$ relációt az **A** l-transzformátor által indukált *leszálló fatranszformációnak (l-transzformációnak)* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy ha **A** determinisztikus, akkor $\tau_{\mathbf{A}}$ (parciális) leképezés.

Az l-transzformátorok egy fát a leveleitől a gyökere felé haladva transzformálnak át. Most egy olyan rendszert értelmezünk, amely a fákat azok gyökerétől kiindulva a levelek irányában haladva transzformál át.

1.4. definíció. Az $\mathbf{A} = (T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ rendszert *felszálló fatranszformátornak (f-transzformátornak)* nevezzük, ahol

(1) F és G rangolt ábécék,

(2) A olyan rangolt ábécé, amely csupa egy-változós műveleti szimbólumból áll — az *állapothalmaz.* (Itt is feltételezzük, hogy A diszjunkt az **A** f-transzformátor definíciójában szereplő összes többi halmazzal, kivéve A'-t.)

(4) $\sum$ az alábbi két típusú átírási szabályok véges halmaza:

(i) $ax_i \to q$ $(a \in A, x_i \in X_n, q \in T_G(Y_m))$,

(ii) $af(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to q$ $(a \in A, f \in F_l, \xi_1, \ldots, \xi_l \in \Xi, q \in T_G(Y_m \cup A\Xi_l)$.

Az **A** f-transzformátor *teljesen definiált,* ha eleget tesz az alábbi követelményeknek:

(i) bármely $a(\in A)$ állapothoz és i $(1 \leqq i \leqq n)$ természetes számhoz van olyan átírási szabály $\sum$-ban, amelynek bal oldala ax_i,

(ii) tetszőleges $l(\geqq 0)$, $f(\in F_l)$ és $a(\in A)$ esetén van olyan átírási szabály $\sum$-ban, amelynek bal oldala $af(\xi_1, \ldots, \xi_l)$.

A *lineáris,* a *nemtörlő* és a *determinisztikus* f-transzformátorokat, valamint a *felszálló homomorfizmusokat* a megfelelő l-transzformátorokhoz hasonlóan értelmezzük azzal a különbséggel, hogy a determinisztikus f-transzformátorok definíciójában az $|A'|=1$ számossági korlátozást is kikötjük. Ebben az esetben $A'(=\{a_0\})$ helyett a_0-t is írunk, és a_0-t **A** *kezdőállapotának* hívjuk.

1.5. definíció. Tekintsünk két $p, q(\in T_G(AT_F(X_n \cup \Xi) \cup Y_m))$ fát, és legyen **A** az 1.4. definícióban megadott f-transzformátor. Azt mondjuk, hogy q a p fából megkapható *közvetlen derivációval* **A**-ban, ha q a p fából úgy áll elő, hogy

(i) az ax_i $(1 \leqq i \leqq n)$ részfának valamely p-beli előfordulását egy $\sum$-beli $ax_i \to \bar{q}$ átírási szabály $\bar{q}$ jobb oldalával helyettesítjük, vagy

(ii) az $af(p_1, \ldots, p_l)$ részfának valamely p-beli előfordulását a $\bar{q}(p_1, \ldots, p_l)$ fával helyettesítjük, ahol az $af(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to \bar{q}$ átírási szabály $\sum$-ban van.

A közvetlen derivációra az f-transzformátorok esetében is a $\Rightarrow_{\mathbf{A}}$ jelölést használjuk. A $\Rightarrow_{\mathbf{A}}$ reláció reflexív-tranzitív lezártját $\Rightarrow_{\mathbf{A}}^*$ fogja jelölni. Ha teljesül a $p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* q$ összefüggés, akkor azt mondjuk, hogy q a p fából **A**-beli *derivációval* áll elő. Végül, amennyiben nem okoz félreértést, akkor a $\Rightarrow_{\mathbf{A}}$ és $\Rightarrow_{\mathbf{A}}^*$ jelölésekből elhagyjuk **A**-t.

1.6. definíció. A $\tau_{\mathbf{A}} = \{(p, q) | p \in T_F(X_n), q \in T_G(Y_m), ap \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* q, a \in A'\}$ relációt az **A** f-transzformátor által indukált *felszálló fatranszformációnak (f-transzformációnak)* nevezzük.

Az l-transzformátorokhoz hasonlóan, ha **A** determinisztikus, akkor $\tau_{\mathbf{A}}$ (parciális) leképezés.

Az 1.4. definíció szerint az f-transzformátorok (ii) típusú átírási szabályainak jobb oldalai $Y \cup \Xi$ feletti $(G \cup A)$-fák. Bizonyításaink egy részében szükségünk lesz ezen fák $a\xi_i (a \in A, \xi_i \in \Xi)$ alakú részfái előfordulásainak feltüntetésére is. Ehhez jelölje $\hat{T}_G(Y_m \cup \Xi_u)$ a $T_G(Y_m \cup \Xi_u)$ erdő azon fáinak halmazát, amelyekben mindegyes $\xi_i (1 \leqq i \leqq u)$ segédváltozó pontosan egyszer fordul elő. Akkor az 1.4. definíció (ii) átírási szabálya felírható az $af(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to \bar{q}(a_{11}\xi_1, \ldots, a_{1u_1}\xi_1, \ldots, a_{l1}\xi_l, \ldots$ $\ldots, a_{lu_l}\xi_l)$ alakban, ahol $a_{ij} \in A (1 \leqq i \leqq l, 1 \leqq j \leqq u_i, u_i \geqq 0)$ és $\bar{q} \in \hat{T}_G(Y_m \cup \Xi_u)$ $(u = u_1 + \ldots + u_l)$. Bizonyos esetekben az egyszerűbb $af(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to \bar{q}(\ldots, a_{ij}\xi_2, \ldots)$ írásmódot is használjuk.

1.7. definíció. Legyenek **A** és **B** tetszőleges l- vagy f-transzformátorok. Azt mondjuk, hogy **A** és **B** *ekvivalensek,* ha $\tau_{\mathbf{A}} = \tau_{\mathbf{B}}$.

A következőkben jelölje

$\mathscr{L}$ az l-transzformációk,
$\mathscr{F}$ az f-transzformációk,
$\mathscr{NL}$ a nemtörlő l-transzformációk,
$\mathscr{NF}$ a nemtörlő f-transzformációk,
$\mathscr{LL}$ a lineáris l-transzformációk,
$\mathscr{LF}$ a lineáris f-transzformációk,
$\mathscr{LNL}$ a lineáris, nemtörlő l-transzformációk,
$\mathscr{LNF}$ a lineáris, nemtörlő f-transzformációk
osztályát.

$\mathscr{DL}$, $\mathscr{DF}$, $\mathscr{DNL}$, $\mathscr{DNF}$, $\mathscr{DLL}$, $\mathscr{DLF}$, $\mathscr{DLNL}$ és $\mathscr{DLNF}$ rendre a determinisztikus l-, f-, nemtörlő l-, nemtörlő f-, lineáris l-, lineáris f-, lineáris nemtörlő l- és lineáris nemtörlő f-transzformációk osztályát jelöli.

A homomorfizmusok által indukált transzformációkat is *homomorfizmusnak* fogjuk nevezni, és osztályukra a $\mathscr{H}$ jelölést használjuk.

Az $\mathscr{L} \cup \mathscr{F}$ osztály elemeit *véges állapotú fatranszformációknak* nevezzük. Az ilyen fatranszformációkra a fejezet hátralevő részében számos példát talál az olvasó.

2. §. *A fatranszformációk osztályainak összehasonlítása*

Ebben a részben összehasonlítjuk az l- és f-transzformációk különböző osztályait a tartalmazás szempontjából. Mint látni fogjuk, az esetek többségében a vizsgált osztályok összehasonlíthatatlanok lesznek.

2.1. tétel. Az $\mathscr{L}$ és $\mathscr{F}$ osztályok összehasonlíthatatlanok.

Bizonyítás. Tételünk igazolásához (i) megadunk olyan l-transzformációt, amely nincs $\mathscr{F}$-ben, valamint (ii) olyan f-transzformációt, amely nem l-transzformáció.

(i) Tekintsük az $\mathbf{A}=(T_F(X_1), \{a_0, a_1\}, T_G(Y_1), a_0, \sum)$ determinisztikus, lineáris l-transzformátort, ahol $F=F_2=\{f\}$, $G=G_1=\{g\}$, $\sum$ pedig az $x_1 \to a_1 y_1$ és $f(a_1\xi_1, a_1\xi_2) \to a_0 g(\xi_1)$ átírási szabályokból áll. Akkor $\tau_{\mathbf{A}}=\{(f(x_1, x_1), g(y_1))\}$.

Ha van olyan $\mathbf{B}=(T_F(X_1), B, T_G(Y_1), B', \sum')$ f-transzformátor, amely ekvivalens $\mathbf{A}$-val, akkor a $bf(x_1, x_1) \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} g(y_1)$ $(b \in B')$ derivációban az első lépésnél az alábbi alakú $\sum'$-beli átírási szabályok egyikét használtuk fel:

$$\text{(I)}\ bf(\xi_1, \xi_2) \to b_1\xi_1, \qquad \text{(II)}\ bf(\xi_1, \xi_2) \to b_1\xi_2,$$

$$\text{(III)}\ bf(\xi_1, \xi_2) \to g(b_1\xi_1), \quad \text{(IV)}\ bf(\xi_1, \xi_2) \to g(b_1\xi_2)$$

$$\text{és}\quad \text{(V)}\ bf(\xi_1, \xi_2) \to g(y_1).$$

Látható, hogy a lehetséges öt átírási szabály mindegyike törli a ξ_1 és ξ_2 változók közül legalább az egyiket. A törölt változó helyébe — az f-transzformáció értelmezése alapján — $f(\xi_1, \xi_2)$-ben bármilyen $q(\in T_F(X_1))$ fát, a nem-törölt változó helyébe pedig az x_1 fát helyettesítve a kapott p fára fennáll a $bp \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} g(y_1)$ derivációs. Következésképpen a $(p, g(y_1)) \in \tau_{\mathbf{B}}$ tartalmazás is teljesül, vagyis $\tau_{\mathbf{A}}$ értelmezési tartománya $\tau_{\mathbf{B}}$ értelmezési tartományának valódi részhalmaza. Ezzel igazoltuk (i) helyességét.

(ii) Vegyük az $\mathbf{A}=(T_F(X_1), \{a_0, a_1, a_2\}, T_G(Y_2), a_0, \sum)$ determinisztikus f-transzformátort, ahol $F=F_1=\{f\}$, $G=G_1 \cup G_2$, $G_1=\{f\}$, $G_2=\{g\}$, $\sum$ pedig az

$$a_0 f(\xi_1) \to g(a_1\xi_1, a_2\xi_1),$$

$$a_1 f(\xi_1) \to f(a_1\xi_1), \quad a_2 f(\xi_1) \to f(a_2\xi_1),$$

$$a_1 x_1 \to y_1, \quad a_2 x_1 \to y_2$$

átírási szabályokból áll. Könnyen belátható, hogy $\tau_{\mathbf{A}}=\{(f^k(x_1), g(f^{k-1}(y_1), f^{k-1}(y_2))) \mid k=1, 2, \ldots\}$, ahol $f^0(\xi)=\xi$, és $f^k(\xi)=f(f^{k-1}(\xi))$, ha $k>0$.

Tegyük fel, hogy valamely $\mathbf{B}=(T_F(X_1), B, T_G(Y_2), B', \sum')$ l-transzformátor indukálja $\tau_{\mathbf{A}}$-t. Világos, hogy $\sum'$-nek tartalmaznia kell

$$f(b\xi_1) \to b_1 g(q_1, q_2) \quad (b, b_1 \in B)$$

alakú átírási szabályokat. Azt sem nehéz megmutatni, hogy elegendő a következő esetekkel foglalkoznunk:

(I) $q_1=f^k(y_1)$ és $q_2=f^k(y_2)$,
(II) $q_1=f^l(\xi_1)$ és $q_2=f^k(y_2)$,
(III) $q_1=f^k(y_1)$ és $q_2=f^l(\xi_1)$,
(IV) $q_1=f^m(\xi_1)$ és $q_2=f^n(\xi_1)$.

Világos, hogy a **B**-beli derivációkban az ilyen szabályok alkalmazását csak (I) alakú vagy $f(b\xi_1)\to b_1\xi_1$ alakú szabály alkalmazása követheti. Ha (I) alakú szabályt is felhasználunk, akkor a transzformáció eredménye az utoljára alkalmazott $f(b\xi_1)\to$ $\to b_1 g(f^k(y_1), f^k(y_2))$ szabály jobb oldalában szereplő $g(f^k(y_1), f^k(y_2))$ fa lesz.

Jelölje t az (I)—(III) egyenlőségekben szereplő k kitevők maximumát. Akkor az $f^{t'}(x_1)$ $(t'>t+1)$ fa transzformálása során az (I)—(IV) alakú szabályok közül utolsónak alkalmazott csak (IV) alakú lehet. Ekkor viszont a transzformált fa $q=$ $=g(f^u(y_1), f^v(y_1))$ vagy $q=g(f^u(y_2), f^v(y_2))$ alakú. Mivel $(f^{t'}(x_1), q)$ egyik esetben sincs $\tau_{\mathbf{A}}$-ban, ezért ellentmondásra jutottunk. □

Az előző tétel bizonyításában szereplő l- és f-transzformációk determinisztikusak. Így a 2.1. tétel bizonyításából azonnal adódik a

2.2. következmény. A $\mathscr{DL}$ és $\mathscr{DF}$ osztályok összehasonlíthatatlanok. Hasonló állítás igaz a $\mathscr{DL}$ és $\mathscr{F}$, valamint az $\mathscr{L}$ és $\mathscr{DF}$ osztályokra is.

Ha lineáris transzformációkra szorítkozunk, akkor a megfelelő osztályok összehasonlíthatók. Nevezetesen érvényes a

2.3. tétel. Az $\mathscr{LF}$ osztály az $\mathscr{LL}$ osztály valódi részosztálya.

Bizonyítás. A 2.1. tétel (i) állításának a bizonyításából tudjuk, hogy $\mathscr{LL}$ nem részosztálya $\mathscr{LF}$-nek. Így elegendő igazolni az $\mathscr{LF}\subseteq\mathscr{LL}$ tartalmazást.

Legyen $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ tetszőleges lineáris f-transzformátor. Akkor a $\sum$-beli átírási szabályok

(1) $ax_i\to q$ $(1\leqq i\leqq n, a\in A, q\in T_G(Y_m))$ és

(2) $af(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l)$ $(a, a_1, \ldots, a_l\in A, l\geqq 0, f\in F_l, q\in T_G(Y_m\cup\Xi_l))$ alakúak.

Ha **A** nemtörlő, akkor legyen $\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{A}$. Ellenkező esetben az $\overline{\mathbf{A}}=(T_F(X_n), \bar{A}, T_G(Y_m), A', \overline{\sum})$ lineáris f-transzformátort a következő módon értelmezzük. Vegyünk fel egy új e egyváltozós műveleti szimbólumot, és bővítsük $\sum$-t az összes $ex_i\to y_1$ $(i=1, \ldots, n)$ és $ef(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to y_1$ $(l\geqq 0, f\in F_l)$ átírási szabállyal. A kapott halmazt jelölje $\overline{\sum}$. Az $\bar{A}=A\cup\{e\}$ és $\bar{A}'=A'$ megválasztás mellett $\overline{\mathbf{A}}$ nyilvánvalóan ekvivalens **A**-val. A különbség csupán az, hogy $\overline{\mathbf{A}}$ az e állapotban azokat a részfákat is képes transzformálni, amelyek valamely **A**-beli derivációnál törlődnek.

Most konstruáljuk meg a $\mathbf{B}=(T_F(X_n), B, T_G(Y_m), B', \sum')$ l-transzformátort, ahol $B=\bar{A}$ és $B'=\bar{A}'$. Továbbá tetszőleges i $(1\leqq i\leqq n)$, $b(\in B)$ és $q(\in T_G(Y_m))$ esetén az $x_i\to bq$ szabály akkor és csakis akkor van $\sum'$-ben, ha a $bx_i\to q$ szabály $\overline{\sum}$-ban van. Ezenkívül az

$$f(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l)\to bq(\xi_1, \ldots, \xi_l) \quad (f\in F_l,\ l\geqq 0,\ b_1, \ldots, b_l,\ b\in B)$$

szabály akkor és csakis akkor van $\sum'$-ben, ha $\overline{\sum}$ tartalmazza a

$$bf(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q(c_1\xi_1, \ldots, c_l\xi_l)$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

szabályt, ahol minden $i(=1, \ldots, l)$-re

$$b_i = \begin{cases} c_i, & \text{ha } \xi_i \text{ előfordul } q\text{-ban,} \\ e & \text{az ellenkező esetben.} \end{cases}$$

Világos, hogy **B** lineáris.

A bizonyítás befejezéséhez elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges $b(\in B)$, $p(\in T_F(X_n))$ és $q(\in T_G(Y_m))$ mellett érvényes a

$$p \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} bq \Leftrightarrow bp \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q$$

ekvivalencia. Ennek igazolását a p fa $h(p)$ magassága szerinti indukcióval végezzük.

Ha $h(p)=0$, azaz $p=x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ vagy $p=f(\in F_0)$, akkor állításunk $\sum'$ értelmezése folytán nyilvánvalóan teljesül. Most legyen $p=f(p_1, \ldots, p_l)$ $(f \in F_l, l \geqq 0)$, és tegyük fel, hogy a kívánt ekvivalenciát a $h(p)$-nél kisebb magasságú fákra már igazoltuk.

(i) Teljesüljön a $p \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} bq$ deriváció. Ekkor $\sum'$-ben van olyan $f(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l) \to b\bar{q}(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ átírási szabály, hogy $q=\bar{q}(q_1, \ldots, q_l)$ és fennállnak a $p_i \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} b_i q_i$ $(i=1, \ldots, l)$ derivációk is. A $\sum'$ halmaz értelmezése alapján a $bf(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to \bar{q}(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l)$ szabály $\overline{\sum}$-ban van. Másrészt indukciós feltevésünk szerint érvényesek a $b_i p_i \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q_i$ $(i=1, \ldots, l)$ derivációk. Így a

$$bp = bf(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_{\bar{\mathbf{A}}} \bar{q}(b_1 p_1, \ldots, b_l p_l) \Rightarrow_{\bar{\mathbf{A}}}^{*} \bar{q}(q_1, \ldots, q_l) = q$$

derivációnak is teljesülnie kell.

(ii) Tételezzük fel a $bp \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q$ deriváció érvényességét. Részletesebben legyen $bp=bf(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_{\bar{\mathbf{A}}} \bar{q}(b_1p_1, \ldots, b_lp_l) \Rightarrow_{\bar{\mathbf{A}}}^{*} \bar{q}(q_1, \ldots, q_l)=q$, ahol q_i $(i=1, \ldots, l)$ egy $b_i p_i \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q_i$ derivációval adódik, továbbá $b_i=e$ és $q_i=y_1$, ha ξ_i nem fordul elő q-ban. Így az $f(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l) \to b\bar{q}(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ szabály $\sum'$-ben van. Továbbá indukciós feltevésünk folytán fennállnak a $p_i \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} b_i q_i$ $(i=1, \ldots, l)$ derivációk is. Következésképpen, $p=f(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} f(b_1q_1, \ldots, b_lq_l) \Rightarrow_{\mathbf{B}} b\bar{q}(q_1, \ldots, q_l)=bq$. □

2.4. tétel. A lineáris nemtörlő l-transzformációk osztálya megegyezik a lineáris nemtörlő f-transzformációk osztályával.

Bizonyítás. Az **A** lineáris nemtörlő f-transzformátorhoz az előző tételben megkonstruált **B** lineáris l-transzformátor nyilvánvalóan nemtörlő.

Fordítva, legyen $\mathbf{C}=(T_F(X_n), C, T_G(Y_m), C', \sum'')$ tetszőleges lineáris nemtörlő l-transzformátor. Legyen továbbá $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ a következő módon megadott f-transzformátor: $A=C$ és $A'=C'$. Ezenkívül $\sum$ az alábbi átírási szabályokból áll:

$$(ax_i, q) \in \sum \Leftrightarrow (x_i, aq) \in \sum''$$

és

$$(af(\xi_1, \ldots, \xi_l), q(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l)) \in \sum \Leftrightarrow (f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l), aq(\xi_1, \ldots, \xi_l)) \in \sum'',$$

ahol $x_i \in X_n$, $a, a_1, \ldots, a \in A$ és $f \in F_l$ $(l \geqq 0)$. Nyilvánvaló, hogy **A** lineáris nemtörlő f-transzformátor.

Most konstruáljuk meg **A**-hoz az előző tételben megadott **B** l-transzformátort. Akkor a $\mathbf{B}=\mathbf{C}$ egyenlőséghez jutunk. □

Ha determinisztikus lineáris fatranszformátorokra szorítkozunk, akkor a megfelelő osztályok összehasonlíthatatlanok.

2.5. tétel. Érvényes a következő két állítás:
(i) Van olyan transzformáció $\mathscr{DLNL}$-ben, amely nincs $\mathscr{DF}$-ben.
(ii) Van olyan transzformáció $\mathscr{DLNF}$-ben, amely nincs $\mathscr{DL}$-ben.

Bizonyítás. Az (i) állítás igazolásához vegyük az $\mathbf{A}=(T_F(X_2), \{a_0, a_1, a_2\}, T_F(Y_2), a_0, \sum)$ l-transzformátort, ahol $F=F_2=\{f\}$, $\sum$ pedig az

$$x_1 \to a_1 y_1, \quad x_2 \to a_2 y_2,$$

$$f(a_1\xi_1, a_2\xi_2) \to a_0 f(\xi_1, \xi_2), \quad f(a_2\xi_1, a_1\xi_2) \to a_0 f(\xi_1, \xi_2)$$

átírási szabályokból áll.

A $\tau_{\mathbf{A}}$ transzformáció értelmezési tartománya a $D=\{p_1=f(x_1, x_2), p_2=f(x_2, x_1)\}$ halmaz. Könnyen belátható, hogy nincs olyan determinisztikus f-transzformátor, amelynek értelmezési tartománya D volna.

A (ii) állítás bizonyításához tekintsük az $\mathbf{A}=(T_F(X_1), \{a_0, a_1, a_2\}, T_F(Y_2), a_0, \sum)$ f-transzformátort, ahol $F=F_1 \cup F_2$, $F_1=\{f_1\}$, $F_2=\{f_2\}$, $\sum$ pedig az

$$a_1 x_1 \to y_1, \quad a_2 x_1 \to y_2$$

$$a_1 f_1(\xi_1) \to f_1(a_1\xi_1), \quad a_2 f_1(\xi_1) \to f_1(a_2\xi_1),$$

$$a_0 f_2(\xi_1, \xi_2) \to f_2(a_1\xi_1, a_2\xi_2)$$

átírási szabályokból áll.

Legyen $\mathbf{B}=(T_F(X_1), B, T_F(Y_2), B', \sum')$ tetszőleges determinisztikus l-transzformátor. Rutin-munka annak igazolása, hogy elegendően nagyra választott l esetén $(f_2(f_1^l(x_1), f_1^l(x_1)), f_2(f_1^l(y_1), f_1^l(y_2)))$ nincs benne $\tau_{\mathbf{B}}$-ben, de benne van $\tau_{\mathbf{A}}$-ban. □

A 2.5. tételből azonnal kapjuk a következő eredményeket.

2.6. következmény. A $\mathscr{DLL}$ és $\mathscr{DLF}$ osztályok összehasonlíthatatlanok.

2.7. következmény. A $\mathscr{DLNL}$ és $\mathscr{DLNF}$ osztályok összehasonlíthatatlanok.

Most megmutatjuk, hogy nincs különbség a leszálló és a felszálló homomorfizmusok között.

2.8. tétel. A leszálló homomorfizmusok osztálya megegyezik a felszálló homomorfizmusok osztályával.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ tetszőleges leszálló homomorfizmus, ahol $A=A'=\{a_0\}$. Tekintsük azt a $\mathbf{B}=(T_F(X_n), B, T_G(Y_m), b_0, \sum')$ f-transzformátort, amelyre teljesül a $B=A$ egyenlőség, a $\sum'$ átírási szabályok halmaza pedig az

$$(a_0 x_i, q) \in \sum' \Leftrightarrow (x_i, a_0 q) \in \sum \quad (1 \leqq i \leqq n,\ q \in T_G(Y_m))$$

és

$$(a_0 f(\xi_1, \ldots, \xi_l), q(a_0\xi_1, \ldots, a_0\xi_l)) \in \sum' \Leftrightarrow (f(a_0\xi_1, \ldots, a_0\xi_l), a_0 q(\xi_1, \ldots, \xi_l)) \in \sum$$

$$(f \in F_l,\ l \geqq 0,\ q(\xi_1, \ldots, \xi_l) \in T_G(Y_m \cup \Xi_l))$$

összefüggésekkel van megadva. Világos, hogy $\mathbf{B}$ felszálló homomorfizmus.

A $p(\in T_F(X_n))$ fa $h(p)$ magassága szerinti indukcióval igazoljuk, hogy fennáll az

$$a_0 p \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} q \Leftrightarrow p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} a_0 q$$

ekvivalencia. Ebből nyilvánvalóan következik a $\tau_{\mathbf{A}}=\tau_{\mathbf{B}}$ egyenlőség.

(I) Legyen $h(p)=0$, azaz $p=x_i(\in X_n)$ vagy $p=f(\in F_0)$. Ekkor állításunk $\sum'$ megválasztása folytán nyilvánvalóan teljesül.

(II) Legyen $p=f(p_1, \ldots, p_l)$ $(f\in F_l, l>0)$, és tegyük fel, hogy a kívánt ekvivalenciát a $h(p)$-nél kisebb magasságú fákra igazoltuk.

(IIa) Az $a_0 p \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} q$ derivációt írjuk fel a részletesebb

$$a_0 p \Rightarrow_{\mathbf{B}} \bar{q}(a_0 p_1, \ldots, a_0 p_l) \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} \bar{q}(q_1, \ldots, q_l) = q$$

alakban, ahol $(a_0 f(\xi_1, \ldots, \xi_l), \bar{q}(a_0\xi_1, \ldots, a_0\xi_l))\in\sum'$ és érvényesek az $a_0 p_i \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} q_i$ $(i=1, \ldots, l)$ derivációk. Indukciós feltevésünk szerint fennállnak a $p_i \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} a_0 q_i$ derivációk is. Továbbá $\sum'$ megválasztása folytán az $f(a_0\xi_1, \ldots, a_0\xi_l) \to a_0\bar{q}(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ átírási szabály $\sum$-ban van. Következésképpen érvényes a

$$p = f(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} f(a_0 q_1, \ldots, a_0 q_l) \Rightarrow_{\mathbf{A}} a_0\bar{q}(q_1, \ldots, q_l) = a_0 q$$

deriváció.

(IIb) Annak igazolása, hogy az $f(p_1, \ldots, p_l)\Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} a_0\bar{q}(q_1, \ldots, q_l)$ deriváció maga után vonja $a_0 f(p_1, \ldots, p_l)\Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*}\bar{q}(q_1, \ldots, q_l)$ teljesülését, (IIa) megfordításával történhet.

Ezzel azt nyertük, hogy tetszőleges **A** leszálló homomorfizmushoz van vele ekvivalens **B** felszálló homomorfizmus.

Végül megmutatjuk, hogy bármely felszálló homomorfizmus ekvivalens egy leszálló homomorfizmussal.

Tekintsük a $\mathbf{C}=(T_F(X_n), C, T_G(Y_m), c_0, \sum'')$ felszálló homomorfizmust, ahol $C=\{c_0\}$. Vegyük azt az $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ l-transzformátort, amelyre teljesül az $A=A'=C$ egyenlőség, $\sum$ pedig az

$$(x_i, c_0 q)\in\sum \Leftrightarrow (c_0 x_i, q)\in\sum'' \quad (x_i\in X_n, q\in T_G(Y_m))$$

és

$$(f(c_0\xi_1, \ldots, c_0\xi_l), c_0 q(\xi_1, \ldots, \xi_l))\in\sum \Leftrightarrow (c_0 f(\xi_1, \ldots, \xi_l), q(c_0\xi_1, \ldots, c_0\xi_l))\in\sum''$$
$$(f\in F_l,\ l\geqq 0,\ q(\xi_1, \ldots, \xi_l)\in T_G(Y_m\cup\Xi_l))$$

összefüggésekkel adott. Világos, hogy **A** leszálló homomorfizmus. Ha **A**-hoz megkonstruáljuk a tétel bizonyításának első felében megadott **B** felszálló homomorfizmust, akkor a $\mathbf{B}=\mathbf{C}$ egyenlőséghez jutunk. □

Végül megemlítjük, hogy nyilvánvalóan teljesülnek az $\mathscr{LL}\subset\mathscr{L}$ és $\mathscr{DL}\subset\mathscr{L}$ valódi tartalmazások.

3. §. *Fatranszformációk kompozíciói és dekompozíciói*

Legyenek $\tau_1(\subseteq T_F(X_n)\times T_G(Y_m))$ és $\tau_2(\subseteq T_G(Y_m)\times T_H(Z_k))$ tetszőleges fatranszformációk. Ezeknek (mint relációknak) a $\tau_1\circ\tau_2(\subseteq T_F(X_n)\times T_H(Z_k))$ kompozíciója ismét fatranszformáció. Azt mondjuk, hogy fatranszformációk egy $\mathscr{K}$ osztálya *zárt* a kompozícióra nézve, ha $\tau_1\circ\tau_2\in\mathscr{K}$, valahányszor $\tau_1, \tau_2\in\mathscr{K}$ Mint majd látni fogjuk, a vizsgált osztályok némelyike zárt a kompozícióra nézve, mások pedig nem.

Másrészt megadjuk fatranszformációk egyszerűbb vagy más típusú fatranszformációkra való felbontását. Többek között megmutatjuk, hogy minden egyes leszálló fatranszformáció előáll egy lineáris leszálló fatranszformáció és egy homomorfizmus kompozíciójaként. Továbbá bármely leszálló (felszálló) fatranszformáció felírható két felszálló (leszálló) fatranszformáció kompozíciójaként.

Legyenek $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ fatranszformációk tetszőleges osztályai, és vezessük be a $\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2 = \{\tau_1 \circ \tau_2 | \tau_1 \in \mathcal{K}_1, \tau_2 \in \mathcal{K}_2\}$ jelölést. Ezen jelölés felhasználásával a fatranszformációk $\mathcal{K}$ osztályának a kompozícióra való zártságát a $\mathcal{K} \circ \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ tartalmazással is kifejezhetjük. Hasonlóan, az a tény, hogy a $\mathcal{K}$-beli transzformációk előállíthatók $\mathcal{K}_1$-beli transzformációknak $\mathcal{K}_2$-beli transzformációkkal való kompozíciójaként, a $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2$ összefüggéssel is megadható. Végül, ha $\mathcal{K}$ fatranszformációk osztálya, akkor legyen $\mathcal{K}^1 = \mathcal{K}$ és $\mathcal{K}^n = \mathcal{K}^{n-1} \circ \mathcal{K}$ $(n > 1)$.

3.1. tétel. Érvényesek az $\mathcal{L} = \mathcal{LL} \circ \mathcal{H} = \mathcal{LF} \circ \mathcal{H}$ egyenlőségek.

Bizonyítás. Először azt igazoljuk, hogy fennállnak az $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{LL} \circ \mathcal{H}$ és $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{LF} \circ \mathcal{H}$ tartalmazások. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{A} = (T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ l-transzformátort. Rendezzük el $\sum$ elemeit egy meghatározott sorrendben, és számozzuk meg őket 1-től $|\sum|$-ig. Ha az i-ik átírási szabály bal oldalán szerepel az $f (\in F_l)$ műveleti szimbólum, akkor legyen $f^{(i)}$ egy új l-változós műveleti szimbólum. Az így kapott $f^{(i)}$-k halmazát jelölje $\bar{F}$. Továbbá, ha a j-ik átírási szabály bal oldala $x_i (\in X_n)$, akkor legyen $x_i^{(j)}$ egy új változó. Ezen új változók halmazát $\bar{X}_n$ fogja jelölni.

Ezek után legyen $\mathbf{B} = (T_F(X_n), B, T_{\bar{F}}(\bar{X}_n), B', \sum')$ a következő módon adott l-transzformátor: $B = A$ és $B' = A'$. Emellett az $x_i \to a x_i^{(j)}$ átírási szabály akkor és csakis akkor legyen $\sum'$-ben, ha a j-ik átírási szabály $\sum$-ban $x_i \to aq$. Hasonlóan az $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to a f^{(i)}(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ szabály akkor és csakis akkor van $\sum'$-ben, ha $\sum$-ban az i-ik átírási szabály $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to aq$. Világos, hogy $\mathbf{B}$ lineáris nemtörlő l-transzformátor. Így a 2.4. tétel szerint $\tau_{\mathbf{B}}$ lineáris nemtörlő f-transzformáció is.

Most tekintsük a $\mathbf{C} = (T_{\bar{F}}(\bar{X}_n), C, T_G(Y_m), C', \sum'')$ l-transzformátort, ahol $C = C' = \{c_0\}$. Továbbá, az $x_i^{(j)} \to c_0 q$ szabály akkor és csakis akkor van $\sum''$-ben, ha $\sum$-ban a j-ik átírási szabály $x_i \to aq$, és az $f^{(i)}(c_0\xi_1, \ldots, c_0\xi_l) \to c_0 q$ szabály akkor és csakis akkor van $\sum''$-ben, ha $\sum$-ban az i-ik átírási szabály $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to aq$. Azonnal látható, hogy $\mathbf{C}$ leszálló homomorfizmus.

Megmutatjuk, hogy $\tau_{\mathbf{A}} = \tau_{\mathbf{B}} \circ \tau_{\mathbf{C}}$. Ehhez elegendő azt igazolnunk, hogy tetszőleges $p (\in T_F(X_n))$, $q (\in T_G(Y_m))$ és $a (\in A)$ esetén $p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* aq$ akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan $\bar{q} (\in T_{\bar{F}}(\bar{X}_n))$, amely mellett érvényesek a $p \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* a\bar{q}$ és $\bar{q} \Rightarrow_{\mathbf{C}}^* c_0 q$ derivációk.

Tegyük fel, hogy $p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* aq$ fennáll. Állításunk igazolását a p fa $h(p)$ magassága szerinti indukcióval végezzük. Ha $h(p) = 0$, akkor állításunk nyilvánvalóan teljesül.

Most legyen $p = f(p_1, \ldots, p_l)$ $(f \in F_l, l > 0)$. Ekkor érvényes az

$$p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* f(a_1 q_1, \ldots, a_l q_l) \Rightarrow_{\mathbf{A}} a r(q_1, \ldots, q_l) = aq \tag{1}$$

derivációban, ahol $p_i \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* a_i q_i$ $(i = 1, \ldots, l)$. Indukciós feltevésünk szerint léteznek olyan $\bar{q}_i$ fák, amelyek mellett fennállnak a $p_i \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* a_i \bar{q}_i$ és $\bar{q}_i \Rightarrow_{\mathbf{C}}^* c_0 q_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ derivációk. Tegyük fel, hogy az (1) derivációban utoljára az i-ik átírási szabályt alkalmaztuk. Akkor az $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to a f^{(i)}(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ átírási szabály $\sum'$-ben, az $f^{(i)}(c_0\xi_1, \ldots, c_0\xi_l) \to c_0 r$ átírási szabály pedig $\sum''$-ben van. Következésképpen érvényesek a keresett

$$p = f(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* f(a_1\bar{q}_1, \ldots, a_l\bar{q}_l) \Rightarrow_{\mathbf{B}} a f^{(i)}(\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_l) = a\bar{q}$$

és

$$\bar{q} \Rightarrow_{\mathbf{C}}^* f^{(i)}(c_0 q_1, \ldots, c_0 q_l) \Rightarrow_{\mathbf{C}} c_0 r(q_1, \ldots, q_l) = c_0 q$$

derivációk is.

Annak igazolása, hogy a $p \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* a\bar{q}$ és $\bar{q} \Rightarrow_{\mathbf{C}}^* c_0 q$ derivációk érvényessége maga után vonja a $p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* aq$ deriváció teljesülését, az előző bizonyítás megfordításával történhet.

Az $\mathscr{LL} \circ \mathscr{H} \subseteq \mathscr{L}$ tartalmazás igazolásához megmutatjuk, hogy egy tetszőleges l-transzformációnak valamely (leszálló) homomorfizmussal való kompozíciója ugyancsak l-transzformáció.

Legyen $\mathbf{A} = (T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ tetszőleges l-transzformátor, $\mathbf{B} = (T_G(Y_m), \{b_0\}, T_H(Z_k), \{b_0\}, \sum')$ pedig (leszálló) homomorfizmus. Terjesszük ki a $\mathbf{B}$-beli derivációkat $T_G(Y_m \cup \Xi)$-beli fákra a következő módon: tetszőleges $p(\in T_G(Y_m \cup \Xi_l))$ és $q(\in T_H(Z_k \cup \Xi_l))$ esetén legyen érvényes a $p \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b_0 q$ derivació, amennyiben fennáll a $p(b_0\xi_1, \ldots, b_0\xi_l) \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b_0 q$ derivació. Értelmezzük a $\mathbf{C} = (T_F(X_n), C, T_H(Z_k), C', \sum'')$ l-transzformátort a következő módon: $C = A$, $C' = A'$, továbbá az $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to aq$ szabály akkor és csakis akkor van $\sum''$-ben, ha az $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to aq'$ szabály $\sum$-ban van és érvényes a $q' \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b_0 q$ $(q \in T_H(Z_k \cup \Xi_l))$ derivació. Hasonlóan az $x_i \to aq$ szabály akkor és csakis akkor van $\sum''$-ben, ha $x_i \to aq'$ a $\sum$ halmazban van és fennáll a $q' \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b_0 q$ $(q \in T_H(Z_k))$ derivació. Könnyen látható, hogy $\sum''$ véges.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $a(\in A = C)$, $p(\in T_F(X_n))$ és $q(\in T_H(Z_k))$ esetén a $p \Rightarrow_{\mathbf{C}}^* aq$ derivació akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan $q'(\in T_G(Y_m))$, hogy fennállnak a $p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* aq'$ és $q' \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b_0 q$ derivációk. A bizonyítást $h(p)$ szerinti indukcióval végezzük.

Ha $h(p) = 0$, akkor állításunk $\sum''$ értelmezése folytán nyilvánvalóan teljesül.

Legyen most $p = f(p_1, \ldots, p_l)$ $(f \in F_l, l > 0)$, és teljesüljenek a

$$p = f(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* f(a_1 q_1', \ldots, a_l q_l') \Rightarrow_{\mathbf{A}} aq^*(q_1', \ldots, q_l') = aq'$$

$$(p_i \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* a_i q_i', \ i = 1, \ldots, l)$$

és

$$q^*(q_1', \ldots, q_l') \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b_0 \bar{q}(q_1, \ldots, q_l) = b_0 q \ (q_i' \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b_0 q_i, \ i = 1, \ldots, l)$$

derivációk. Ekkor indukciós feltevésünk folytán érvényesek a $p_i \Rightarrow_{\mathbf{C}}^* a_i q_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ derivációk, továbbá az $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to a\bar{q}$ átírási szabály $\sum''$-ben van. Következésképpen fennáll a kívánt

$$p = f(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_{\mathbf{C}}^* f(a_1 q_1, \ldots, a_l q_l) \Rightarrow_{\mathbf{C}} a\bar{q}(q_1, \ldots, q_l) = aq \tag{2}$$

derivació.

Fordítva, teljesüljön a (2) és a $p_i \Rightarrow_{\mathbf{C}}^* a_i q_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ derivació. Ekkor az indukciós feltevés alapján lehet találni olyan $q_i'(\in T_G(Y_m))$ fákat, hogy érvényesek a $p_i \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* a_i q_i'$ és $q_i' \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b_0 q_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ derivációk. Található továbbá olyan $q^*(\in T_G(Y_m \cup \Xi_l))$ fa, hogy az $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to aq^*$ szabály $\sum$-ban van és érvényes a $q^* \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b_0\bar{q}$ derivació. Így teljesülnek a kívánt

$$p = f(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* f(a_1 q_1', \ldots, a_l q_l') \Rightarrow_{\mathbf{A}} aq^*(q_1', \ldots, q_l') = aq'$$

és

$$q' = q^*(q_1', \ldots, q_l') \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* q^*(b_0 q_1, \ldots, b_0 q_l) \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b_0 \bar{q}(q_1, \ldots, q_l) = b_0 q$$

derivációk, ami tételünk bizonyításának befejezését jelenti. □

A 3.1. tétel bizonyításából azonnal adódik a

3.2. következmény. Teljesül a $\mathscr{DL} = \mathscr{DLL} \circ \mathscr{H}$ egyenlőség.

A kompozícióra való zártságot most a leszálló fatranszformációk osztályának részosztályaira vizsgáljuk.

3.3. tétel. Érvényesek a következő egyenlőségek:
(i) $\mathscr{LL}=\mathscr{LL}\circ\mathscr{LL}$,
(ii) $\mathscr{LL}=\mathscr{LF}\circ\mathscr{LF}$.

Bizonyítás. Az (i) állítás bizonyításához legyenek $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ és $\mathbf{B}=(T_G(Y_m), B, T_H(Z_k), B', \sum')$ lineáris l-transzformátorok. Tegyük fel, hogy $\mathbf{B}$ teljesen definiált. (Ezt, ha $\mathbf{B}$ nem teljesen definiált, akkor elérhetjük úgy, hogy B-hez hozzáveszünk egy új b^* állapotot, $\sum'$-t pedig bővítjük a $g(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l)\to b^*z_1$ $(g\in G_l, l\geqq 0, b_1, \ldots, b_l\in B\cup\{b^*\})$ és $y_i\to b^*z_1$ $(1\leqq i\leqq m)$ szabályokkal, amennyiben $\sum'$-ben nincs olyan átírási szabály, amely bal oldala $g(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l)$, ill. y_i.) Értelmezzük a $\mathbf{C}=(T_F(X_n), C, T_H(Z_k), C', \sum'')$ l-transzformátort a következő módon: $C=A\times B$, $C'=A'\times B'$, továbbá az $f((a_1, b_1)\xi_1, \ldots, (a_l, b_l)\xi_l)\to(a, b)q$ átírási szabály akkor és csakis akkor van $\sum''$-ben, ha $\sum$-ban van olyan $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l)\to aq'$ átírási szabály, amely mellett érvényes a

$$q'(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l)\Rightarrow_{\mathbf{B}}^* bq$$

deriváció. Az $x_i\to(a, b)q$ alakú $\sum''$-beli átírási szabályokat hasonlóan értelmezzük. Most is könnyű igazolni, hogy $\sum''$ véges.

Tételünk bizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges $p(\in T_F(X_n))$, $q(\in T_H(Z_k))$ és $(a, b)(\in C)$ esetén a $p\Rightarrow_{\mathbf{C}}^*(a, b)q$ deriváció akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan $q'(\in T_G(Y_m))$, amely mellett érvényesek a $p\Rightarrow_{\mathbf{A}}^* aq'$ és $q'\Rightarrow_{\mathbf{B}}^* bq$ derivációk. Bizonyításunkat $h(p)$ szerinti indukcióval végezzük. Ha $h(p)=0$, akkor állításunk $\sum''$ értelmezése folytán nyilvánvalóan igaz.

Most legyen $p=f(p_1, \ldots, p_l)$ $(f\in F_l, l>0)$, és teljesüljenek a

$$p=f(p_1, \ldots, p_l)\Rightarrow_{\mathbf{A}}^* f(a_1q_1', \ldots, a_lq_l')\Rightarrow_{\mathbf{A}} aq^*(q_1', \ldots, q_l')=aq'$$

és

$$q'=q^*(q_1', \ldots, q_l')\Rightarrow_{\mathbf{B}}^* q^*(b_1q_1, \ldots, b_lq_l)\Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b\bar{q}(q_1, \ldots, q_l)=bq$$

derivációk, ahol $p_i\Rightarrow_{\mathbf{A}}^* a_iq_i'$ $(i=1, \ldots, l)$, az $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l)\to aq^*(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ szabály $\sum$-ban van, $q_i'\Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b_iq_i$ a $\mathbf{B}$ f-transzformátor teljesen definiált volta miatt minden $i(=1, \ldots, l)$-re érvényes és $q^*(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l)\Rightarrow_{\mathbf{B}}^* b\bar{q}$. Így indukciós feltevésünk szerint fennállnak a $p_i\Rightarrow_{\mathbf{C}}^*(a_i, b_i)q_i$ $(i=1, \ldots, l)$ derivációk. Továbbá $\mathbf{C}$ értelmezése folytán az $f((a_1, b_1)\xi_1, \ldots, (a_l, b_l)\xi_l)\to(a, b)\bar{q}$ átírási szabály $\sum''$-ben van. Következésképpen érvényes a kívánt

$$p=f(p_1, \ldots, p_l)\Rightarrow_{\mathbf{C}}^* f((a_1, b_1)q_1, \ldots, (a_l, b_l)q_l)\Rightarrow_{\mathbf{C}}(a, b)\bar{q}(q_1, \ldots, q_l)=(a, b)q$$

deriváció.

A fordított állítás bizonyítása előző eljárásunk megfordításával történhet.

A (ii) állítás igazolásához elegendő megjegyeznünk a következőket: a 3.1. tétel bizonyításának első része szerint ha $\mathbf{A}$ lineáris l-transzformátor, akkor a hozzá megkonstruált $\mathbf{C}$ homomorfizmus is lineáris. Továbbá a 2.3. tétel alapján teljesül az $\mathscr{LF}\subset\mathscr{LL}$ tartalmazás. □

A 2.3. tételből, valamint az előző tételünk (ii) állításából azonnal adódik a

3.4. következmény. Az $\mathscr{LF}$ osztály nem zárt a kompozícióra nézve.
Érvényes a

3.5. tétel. A $\mathscr{DL}$ és a $\mathscr{H}$ osztály zárt a kompozícióra nézve.

A *bizonyítás* a 3.3. tétel (i) állításának bizonyításához hasonlóan történhet. □

A 3.3. tétel (i) állításának felhasználásával a 3.5. tételből közvetlenül folyik a

3.6. következmény. A $\mathscr{DLL}$ osztály zárt a kompozícióra nézve.
Igaz a

3.7. tétel. Teljesül az $\mathscr{L} \circ \mathscr{DL} = \mathscr{L}$ egyenlőség.

Bizonyítás. A 3.1. és 3.5. tételnek, a 3.2. következménynek, a 3.3. tétel (i) állításának és ismét a 3.1. tételnek ebben a sorrendben való alkalmazásával az

$$\mathscr{L} \circ \mathscr{DL} = \mathscr{LL} \circ \mathscr{H} \circ \mathscr{DL} = \mathscr{LL} \circ \mathscr{DL} = \mathscr{LL} \circ \mathscr{DLL} \circ \mathscr{H} = \mathscr{LL} \circ \mathscr{H} = \mathscr{L}$$

egyenlőséghez jutunk. □

Most áttérünk az f-transzformátorok vizsgálatára.

3.8. tétel. Érvényes az $\mathscr{F} = \mathscr{H} \circ \mathscr{LF}$ összefüggés.

Bizonyítás. Először azt igazoljuk, hogy $\mathscr{H} \circ \mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}$. Ehhez legyen $\mathbf{A} = (T_F(X_n), \{a_0\}, T_G(Y_m), a_0, \sum)$ tetszőleges (felszálló) homomorfizmus, $\mathbf{B} = (T_G(Y_m), B, T_H(Z_k), B', \sum')$ pedig egy f-transzformátor. Konstruáljuk meg a $\mathbf{C} = (T_F(X_n), B, T_H(Z_k), B', \sum'')$ f-transzformátort a következő módon: a $bf(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to q$ $(b \in B, f \in F, l \geqq 0, q \in T_H(Z_k \cup B\Xi_l))$ átírási szabály akkor és csakis akkor van $\sum''$-ben, ha az $a_0 f(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to q'(a_0\xi_1, \ldots, a_0\xi_l)$ $(q' \in T_G(Y_m \cup \Xi_l))$ szabály $\sum$-ban van és mellette érvényes a $bq' \Rightarrow^*_{\mathbf{B}} q$ deriváció. Azokat a $\sum''$-beli szabályokat, amelyek bal oldala bx_i $(b \in B, x_i \in X_n)$, hasonlóan értelmezzük

Annak bizonyítására, hogy a $\tau_{\mathbf{A}} \circ \tau_{\mathbf{B}}$ kompozíció f-transzformáció, elegendő azt igazolnunk, hogy tetszőleges $b(\in C)$, $p(\in T_F(X_n))$ és $q(\in T_H(Z_k))$ esetén a $bp \Rightarrow^*_{\mathbf{C}} q$ deriváció akkor és csakis akkor érvényes, ha van olyan $q'(\in T_G(Y_m))$, hogy $a_0 p \Rightarrow^*_{\mathbf{A}} q'$ és $bq' \Rightarrow^*_{\mathbf{B}} q$ is teljesül. Ennek igazolása $h(p)$ szerinti indukcióval történhet.

Most áttérünk az $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H} \circ \mathscr{LF}$ tartalmazás bizonyítására. Ehhez tekintsünk egy $\mathbf{C} = (T_F(X_n), C, T_H(Z_k), C', \sum'')$ f-transzformátort. Jelölje t a $\sum''$-beli szabályok jobb oldalaiban előforduló ξ_i változók multiplicitásának maximumát. Továbbá a G rangolt ábécét válasszuk meg úgy, hogy teljesüljön a $G = \cup(G_{l \cdot t} | l \geqq 0)$ egyenlőség, ahol $G_{l \cdot t} = \{f' | f \in F_l\}$ $(l = 0, 1, \ldots)$.

Jelölje $\mathbf{A} = (T_F(X_n), \{a_0\}, T_G(X_n), a_0, \sum)$ azt az f-transzformátort, ahol $\sum$ az összes

$$a_0 f(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to f'(\underbrace{a_0\xi_1, \ldots, a_0\xi_1}_{t\text{-szer}}, \ldots, \underbrace{a_0\xi_l, \ldots, a_0\xi_l}_{t\text{-szer}})$$

$$(f \in F_l,\ l \geqq 0)$$

és $a_0 x_i \to x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ átírási szabályból áll. Világos, hogy $\mathbf{A}$ (felszálló) homomorfizmus.

Adjunk meg most egy $\mathbf{B} = (T_G(X_n), C, T_H(Z_k), C', \sum')$ f-transzformátort a következő módon: a $cx_i \to q$ szabály akkor és csakis akkor legyen $\sum'$-ben, ha $\sum''$-ben van. Továbbá, ha a $cf(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to q(c_{11}\xi_1, \ldots, c_{1u_1}\xi_1, \ldots, c_{l1}\xi_l, \ldots, c_{lu_l}\xi_l)$ $(q \in \hat{T}_H(Z_k \cup \cup \Xi_u), u = u_1 + \ldots + u_l)$ szabály $\sum''$-ben van, akkor a $cf'(\xi_{11}, \ldots, \xi_{1t}, \ldots, \xi_{l1}, \ldots, \xi_{lt}) \to$ $\to q(c_{11}\xi_{11}, \ldots, c_{1u_1}\xi_{1u_1}, \ldots, c_{l1}\xi_{l1}, \ldots, c_{lu_l}\xi_{lu_l})$ szabály legyen $\sum'$-ben. (Itt ξ_{ij} $(1 \leqq i \leqq l,$

$1 \leqq j \leqq t$) a $\xi_{(i-1)t+j}$ változót jelöli. Hasonló jelölést a későbbiekben is használunk.) Világos, hogy **B** lineáris f-transzformátor.

Tetszőleges $p(\in T_F(X_n))$ fához jelölje $p'(\in T_G(X_n))$ a következő fát:

(1) ha $p=x_i(\in X_n)$, akkor $p'=x_i$,

(2) ha $p=f(p_1, \ldots, p_l)$ $(f\in F_l,\ l\geqq 0)$, akkor

$$p' = f'(\underbrace{p_1', \ldots, p_1'}_{t\text{-szer}}, \ldots, \underbrace{p_l', \ldots, p_l'}_{t\text{-szer}}).$$

Könnyű igazolni, hogy a $\tau_{\mathbf{A}}$ transzformáció éppen a $p \to p'$ $(p\in T_F(X_n), p'\in T_G(X_n))$ leképezés.

A $\tau_{\mathbf{C}}=\tau_{\mathbf{A}}\circ\tau_{\mathbf{B}}$ egyenlőség igazolásához elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges $c(\in C), p(\in T_F(X_n))$ és $q(\in T_H(Z_k))$ esetén a $cp\Rightarrow_{\mathbf{C}}^* q$ deriváció akkor és csakis akkor teljesül, ha érvényes a $cp'\Rightarrow_{\mathbf{B}}^* q$ deriváció. Ha $h(p)=0$, akkor állításunk $\sum$ és $\sum'$ megválasztása folytán nyilvánvalóan teljesül. Most legyen $p=f(p_1, \ldots, p_l)$ $(f\in F_l,\ l>0)$, és álljon fenn a $cp\Rightarrow_{\mathbf{C}}^* q$ deriváció. Részletesebben,

$$cp = cf(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_{\mathbf{C}} \bar{q}(c_{11}p_1, \ldots, c_{1u_1}p_1, \ldots, c_{l1}p_l, \ldots, c_{lu_l}p_l) \Rightarrow_{\mathbf{C}}^*$$

$$\Rightarrow_{\mathbf{C}}^* \bar{q}(q_{11}, \ldots, q_{1u_1}, \ldots, q_{l1}, \ldots, q_{lu_l}) = q$$

$$(c_{ij}p_i \Rightarrow_{\mathbf{C}}^* q_{ij},\ 1\leqq i\leqq l,\ 1\leqq j\leqq u_i).$$

Ekkor a

$$(cf'(\xi_{11}, \ldots, \xi_{1t}, \ldots, \xi_{l1}, \ldots, \xi_{lt}), \bar{q}(c_{11}\xi_{11}, \ldots, c_{1u_1}\xi_{1u_1}, \ldots, c_{l1}\xi_{l1}, \ldots, c_{lu_l}\xi_{lu_l}))\in\sum'$$

tartalmazás is teljesül. Így az indukciós feltevés miatt érvényes a

$$cp' = cf'(p_1', \ldots, p_1', \ldots, p_l', \ldots, p_l') \Rightarrow_{\mathbf{B}} \bar{q}(c_{11}p_1', \ldots, c_{1u_1}p_1', \ldots, c_{l1}p_l', \ldots, c_{lu_l}p_l') \Rightarrow_{\mathbf{B}}^*$$

$$\Rightarrow_{\mathbf{B}}^* \bar{q}(q_{11}, \ldots, q_{1u_1}, \ldots, q_{l1}, \ldots, q_{lu_l}) = q$$

deriváció is.

Annak igazolása, hogy $cp'\Rightarrow_{\mathbf{B}}^* q$ teljesülése maga után vonja $cp\Rightarrow_{\mathbf{C}}^* q$ érvényességét, előző eljárásunk megfordításával történhet. □

Fenti tételünkből, valamint a 3.1. tételből nyilvánvalóan adódik a

3.9. tétel. Tetszőleges n természetes számra teljesülnek az $\mathscr{L}^n\subseteqq\mathscr{F}^{n+1}$ és $\mathscr{F}^n\subseteqq\mathscr{L}^{n+1}$ tartalmazások.

Megjegyzés. A 2.1. tétel szerint az $\mathscr{L}$ és $\mathscr{F}$ osztályok összehasonlíthatatlanok. A 3.9. tétel alapján egy gyengébb értelemben fennáll az összehasonlíthatóság; nevezetesen bármely l-transzformáció előállítható két f-transzformáció kompozíciójaként, és tetszőleges f-transzformáció megadható két l-transzformáció kompozíciójaként.

3.10. tétel. Az $\mathscr{L}$ és $\mathscr{F}$ osztályok egyike sem zárt a kompozícióra nézve.

A *bizonyítás* a 2.1. és 3.9. tételek alapján nyilvánvaló. □

A későbbiekben többször szükségünk lesz a következő eredményre.

3.11. tétel. Érvényes az $\mathscr{L}\mathscr{F}\circ\mathscr{L}\mathscr{N}\mathscr{F}=\mathscr{L}\mathscr{F}$ egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ lineáris f-transzformátor, $\mathbf{B}=(T_G(Y_m), B, T_H(Z_k), B', \sum')$ pedig lineáris nemtörlő f-transzformátor. Konstruáljuk meg a $\mathbf{C}=(T_F(X_n), C, T_H(Z_k), C', \sum'')$ f-transzformátort úgy, hogy teljesüljön a

$C = A \times B$ és $C' = A' \times B'$ egyenlőség. Továbbá $\sum''$ álljon az alábbi átírási szabályokból: tetszőleges $(a, b)(\in C)$, $x_i(\in X_n)$ és $q(\in T_H(Z_k))$ esetén az $(a, b)x_i \to q$ átírási szabály akkor és csakis akkor legyen $\sum''$-ben, ha van olyan $\bar{p}(\in T_G(Y_m))$, hogy az $ax_i \to \bar{p}$ szabály $\sum$-ban van és teljesül a $b\bar{p} \Rightarrow_B^* q$ derivációs. Ezenkívül tetszőleges $l(\geqq 0)$, $f(\in F_l)$, (a, b), (a_1, b_1), ..., $(a_l, b_l)(\in C)$ és $\bar{q}(\in T_H(Z_k \cup \Xi_l))$ esetén az $(a, b)f(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to \bar{q}((a_1, b_1)\xi_1, \ldots, (a_l, b_l)\xi_l)$ átírási szabály akkor és csakis akkor legyen $\sum''$-ben, ha van olyan $\bar{p}(\in T_G(Y_m \cup \Xi_l))$, hogy az $af(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to \bar{p}(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l)$ átírási szabály $\sum''$-ban van és érvényes a $b\bar{p} \Rightarrow_B^* \bar{q}(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l)$ derivációs. Könnyen belátható, hogy $\sum''$ véges. Továbbá az is nyilvánvaló, hogy $\mathbf{C}$ lineáris f-transzformátor.

Mármost állításunk igazolására elegendő megmutatnunk a

$$(*) \qquad (a, b)p \Rightarrow_C^* q \Leftrightarrow (\exists p' \in T_G(Y_m))(ap \Rightarrow_A^* p' \wedge bp' \Rightarrow_B^* q)$$

ekvivalencia helyességét, ahol $(a, b) \in C$, $p \in T_F(X_n)$ és $q \in T_H(Z_k)$.

A bizonyítást $h(p)$ szerinti indukcióval végezzük. Ha $h(p) = 0$, akkor a $(*)$ ekvivalencia nyilvánvalóan igaz.

Ezután legyen $p = f(p_1, \ldots, p_l)$ $(l > 0)$, és tegyük fel, hogy $(*)$ jobb oldala igaz. Ekkor érvényesek az

$$ap = af(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_A \bar{p}(a_1 p_1, \ldots, a_l p_l) \Rightarrow_A^* \bar{p}(\bar{p}_1 \ldots, \bar{p}_l) = p'$$

és

$$bp' = b\bar{p}(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_l) \Rightarrow_B^* \bar{q}(b_1\bar{p}_1, \ldots, b_l\bar{p}_l) \Rightarrow_B^* \bar{q}(\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_l) = q$$

derivációk, továbbá fennállnak az $a_i p_i \Rightarrow_A^* \bar{p}_i$ és $b_i\bar{p}_i \Rightarrow_B^* \bar{q}_i$ derivációk is, amennyiben ξ_i $(1 \leqq i \leqq l)$ ténylegesen előforduló $\bar{p}$-ban, és így $\bar{q}$-ban is. Tehát az $af(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to \bar{p}(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l)$ átírási szabály $\sum$-ban van és teljesül a $b\bar{p} \Rightarrow_B^* \bar{q}(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l)$ derivációs. Ezért $\sum''$ értelmezése alapján az $(a, b)f(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to \bar{q}((a_1, b_1)\xi_1, \ldots, (a_l, b_l)\xi_l)$ szabály $\sum''$-ben van. Másrészt az indukciós feltevés szerint érvényesek az $(a_i, b_i)p_i \Rightarrow_C^* \bar{q}_i$ derivációk is, amennyiben ξ_i $(1 \leqq i \leqq l)$ ténylegesen előfordul $\bar{q}$-ban. Következésképpen teljesül a kívánt

$$(a, b)p = (a, b)f(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_C \bar{q}((a_1, b_1)p_1, \ldots, (a_l, b_l)p_l) \Rightarrow_C^* \bar{q}(\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_l)$$

derivációs.

Az ellenkező irányú implikáció helyessége előző eljárásunk megfordításával igazolható. □

4. §. *Felületi erdők*

A reguláris erdőknek a fatranszformációk melletti képeit felületi erdőknek nevezzük. Ebben a paragrafusban összehasonlítjuk a különböző fatranszformáció-osztályokhoz tartozó felületi erdők osztályait.

4.1. definíció. A $T'(\subseteq T_G(Y_m))$ erdőt *leszálló (felszálló) felületi erdőnek* nevezzük, ha van olyan $T(\in R(F, n))$ erdő és $\mathbf{A} = (T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ leszálló (felszálló) fatranszformátor, amelyre teljesül a $\tau_A(T) = T'$ egyenlőség.

A fatranszformációk speciális osztályaihoz tartozó felületi erdőket értelemszerűen definiáljuk.

Azt mondjuk, hogy fatranszformációk valamely osztálya *megőrzi a regularitást*, ha a hozzájuk tartozó felületi erdők regulárisak.

4.2. segédtétel. Legyen $T(\in R(F, n))$ tetszőleges reguláris erdő. Akkor létezik olyan $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_F(X_n), A', \sum)$ determinisztikus lineáris nemtörlő l-transzformátor, hogy $\tau_{\mathbf{A}}$ értelmezési tartománya és értékkészlete T, továbbá $\tau_{\mathbf{A}}$ a T erdő identikus leképezése.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B}=(\mathfrak{B}, \mathbf{b}, B')$ a T erdőt felismerő n-változós F-automata. Az $\mathbf{A}$ l-transzformátort válasszuk meg úgy, hogy teljesüljön rá az $A=B$ és $A'=B'$ egyenlőség. Továbbá legyen

$$\sum = \{x_i \to b^{(i)} x_i \mid i = 1, \ldots, n\} \cup \{f(a_1\xi_1, \ldots, a_m\xi_m) \to af(\xi_1, \ldots, \xi_m) \mid$$

$$m \geqq 0,\ f \in F_m,\ a, a_1, \ldots, a_m \in A,\ f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_m) = a\}.$$

Világos, hogy $\mathbf{A}$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. □

Ebben a fejezetben is jelölje R az összes reguláris erdő osztályát. Továbbá, ha K erdők egy osztálya, $\mathscr{S}$ pedig fatranszformációk osztálya, akkor $\mathscr{S}(K)$ jelöli a $\{\tau(T) \mid \tau \in \mathscr{S},\ T \in K\}$ osztályt.

A 4.2. segédtételből közvetlenül adódik a

4.3. következmény. A leszálló felületi erdők osztálya tartalmazza a reguláris erdők osztályát.

Továbbá a 2.4. tétel felhasználásával az alábbi következményeket kapjuk.

4.4. következmény. Tetszőleges T reguláris erdőhöz van olyan τ lineáris nemtörlő f-transzformáció, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete T, továbbá τ a T erdő identikus leképezése.

4.5. következmény. A felszálló felületi erdők osztálya tartalmazza a reguláris erdők osztályát.

Most megmutatjuk, hogy érvényes a

4.6. tétel. A lineáris l-transzformációk megőrzik az erdők regularitását.

Bizonyítás. A 4.2. segédtétel és a 3.3. tétel (i) állítása szerint elegendő azt igazolnunk, hogy tetszőleges $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ lineáris l-transzformátor esetén $\tau_{\mathbf{A}}$ értékkészlete reguláris. Belátható, hogy szorítkozhatunk arra az esetre, amikor $\sum$-ban nincs $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to a\xi_i$ alakú szabály. Továbbá feltehetjük, hogy tetszőleges $a(\in A)$ állapothoz van két olyan $p(\in T_F(X_n))$ és $q(\in T_G(Y_m))$ fa, amelyekre fennáll a $p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} aq$ deriváció.

Tekintsük az alábbi módon adott $\Gamma=(Q, G, P, S)$ m-változós reguláris G-nyelvtant a $G \cup Y_m$ terminális ábécével. Számozzuk meg a $\sum$-beli átírási szabályokat 1-től ($|\sum|=$) v-ig. Továbbá minden i-re ($1 \leqq i \leqq v$), ha $\sum$-ban az i-ik átírási szabály $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to aq(\xi_1, \ldots, \xi_l)$, akkor a $q(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l)$ fa gyökeréhez második címkeként írjunk a-t, a többi csúcs második címkéje pedig, az a_i-vel és ξ_i-vel ($i=1, \ldots, l$) címkézett csúcsok kivételével, legyen olyan, hogy különböző csúcsok különböző második címkét kapjanak. Az a_i-vel címkézett csúcsok második címkéje is a_i legyen. (A ξ_i-vel címkézett levelek nem kapnak második címkét.) Az $(x_j, aq)(\in \sum)$ alakú szabályok esetében az előzőhöz hasonlóan látjuk el a q fa csúcsait második címkékkel. Az i-ik szabályhoz az $a, a_1, \ldots, a_l$ szimbólumok kivételével ilyen módon felhasznált második szimbólumok halmaza legyen Q_i. Feltételezhetjük, hogy az $A, Q_1, \ldots, Q_v$ halmazok páronként diszjunktak. Legyen $Q=A \cup Q_1 \cup \ldots \ldots \cup Q_v$.

Minden i $(1 \leqq i \leqq v)$ esetén P_i álljon az alábbi módon értelmezett átírási szabályokból. Legyen $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to aq(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ a $\sum$-beli i-ik átírási szabály, $b(\in(Q_i \cup \{a\}))$ pedig tetszőleges cimke. Vegyük a $q(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l)$ fának azt az egyértelműen meghatározott r részfáját, amelyik nincs benne az $\{a_i\xi_i \mid i = 1, \ldots, l\}$ halmazban és gyökerénél második cimkeként b szerepel. Ha $r = y_j$ $(1 \leqq j \leqq m)$ vagy $r = g(\in G_0)$, akkor a $b \to r$ átírási szabály legyen P_i-ben. Ha $r = g(q_1, \ldots, q_s)$ $(g \in G_s, s > 0)$, és g_j $(j = 1, \ldots, s)$ (ezen előfordulásánál) gyökeréhez második címkeként a b_j szimbólum került, akkor a $b \to g(b_1, \ldots, b_s)$ átírási szabály legyen P_i-ben. Az $x_j \to aq$ alakú $\sum$-beli átírási szabályok esetében az előzőhöz hasonlóan értelmezzük P_i-t.

Legyen $P = P_1 \cup \ldots \cup P_v$ és $S = A'$.

Könnyen látható, hogy amennyiben az i-ik átírási szabály $\sum$-ban $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to aq(\xi_1, \ldots, \xi_l)$, ill. $x_j \to aq$, akkor Γ-ban érvényes az $a \Rightarrow^* q(a_1, \ldots, a_l)$, ill. $a \Rightarrow^* q$ deriváció, és ennél a derivációnál szorítkozhatunk csupán P_i-beli átírási szabályokra. Ennek a megfordítása is igaz; nevezetesen az $a' \Rightarrow_\Gamma^* q'$ $(a' \in A, q' \in T_G(Y_m))$ deriváció mindig felírható olyan $a \Rightarrow_\Gamma^* q(a_1, \ldots, a_l)$ és $a \Rightarrow_\Gamma^* q$ derivációk derivációjaként, hogy az $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to aq(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ és $x_j \to aq$ átírási szabályok $\sum$-ban vannak.

Tételünk bizonyításához az I. 3.3. tétel szerint elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges $a(\in A)$ és $q(\in T_G(Y_m))$ esetén az $a \Rightarrow_\Gamma^* q$ deriváció akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan $p(\in T_F(X_n))$, amelyre érvényes a $p \Rightarrow_A^* aq$ deriváció.

Teljesüljön az $a \Rightarrow_\Gamma^* q$ deriváció. Fenti megjegyzésünk szerint feltehetjük, hogy $\sum$-ban van egy $p' \to aq$ $(p' \in F_0 \cup X_n)$ átírási szabály, vagy pedig $a \Rightarrow_\Gamma^* q$ felírható $a \Rightarrow_\Gamma^* \bar{q}(a_1, \ldots, a_l) \Rightarrow_\Gamma^* \bar{q}(q_1, \ldots, q_l) = q$ alakban, ahol valamely $f(\in F_l, l > 0)$ műveleti szimbólumra az $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to a\bar{q}(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ átírási szabály $\sum$-ban van. Továbbá a második esetben feltehetjük azt is, hogy az $a_j \Rightarrow_\Gamma^* q_j$ deriváció érvényes mindazon j-kre, amelyekre ξ_j ténylegesen előfordul $\bar{q}$-ban és hogy ezekre a j-kre van a $p_j \Rightarrow_A^* a_j q_j$ derivációt kielégítő $p_j(\in T_F(X_n))$ fa. Azokra a j-kre $(1 \leqq j \leqq l)$ pedig, amelyekre ξ_j nem fordul elő $\bar{q}$-ban, legyen $p_j(\in T_F(X_n))$ és $q_j(\in T_G(Y_m))$ olyan, hogy teljesüljön a $p_j \Rightarrow_A^* a_j q_j$ deriváció. (Az A-ra tett megszorítások miatt mindig van ilyen p_j és q_j.)

Az első esetben p-nek választhatjuk p'-t.

A második esetben legyen $p = f(p_1, \ldots, p_l)$. Ekkor valóban teljesül a kívánt

$$p = f(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_A^* f(a_1 q_1, \ldots, a_l q_l) \Rightarrow_A a\bar{q}(q_1, \ldots, q_l) = aq$$

deriváció.

Fordítva, tegyük fel, hogy fennáll a $p \Rightarrow_A^* aq$ deriváció. Ha $h(p) = 0$, akkor nyilvánvalóan teljesül az $a \Rightarrow_\Gamma^* q$ deriváció is. Most legyen $p = f(p_1, \ldots, p_l)$ $(l > 0)$. Akkor

$$p = f(p_1, \ldots, p_l) \Rightarrow_A^* f(a_1 q_1, \ldots, a_l q_l) \Rightarrow_A a\bar{q}(q_1, \ldots, q_l) = aq$$

$$(p_i \Rightarrow_A^* a_i q_i,\ i = 1, \ldots, l).$$

Indukciós feltevésünk szerint érvényesek az $a_i \Rightarrow_\Gamma^* q_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ derivációk. Minthogy az $f(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l) \to a\bar{q}(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ átírási szabály $\sum$-ban van, ezért teljesül az $a \Rightarrow_\Gamma^* \bar{q}(a_1, \ldots, a_l)$ deriváció is. Következésképpen

$$a \Rightarrow_\Gamma^* \bar{q}(a_1, \ldots, a_l) \Rightarrow_\Gamma^* \bar{q}(q_1, \ldots, q_l),$$

ami tételünk bizonyításának befejezését jelenti. □

Fenti tételünkből a 2.3. tétel felhasználásával azonnal adódik a

4.7. következmény. A lineáris f-transzformációk megőrzik az erdők regularitását.

4.8. példa. Legyen $F=F_1=\{f\}$, $G=G_2=\{g\}$, $A=\{a_0\}$ és $\sum=\{x_1\to a_0y_1, f(a_0\xi_1)\to a_0g(\xi_1,\xi_1)\}$. Tekintsük az $\mathbf{A}=(T_F(X_1), A, T_G(Y_1), a_0, \sum)$ (leszálló) homomorfizmust. A $T=\{f(x_1)\}^{*x_1}$ reguláris erdőt τ_A vigye át a T' erdőbe. A II. 2.9. tétel szerint T' nem reguláris, mivel az $fr(T')=\{y_1^{2^n}|n=0, 1, \ldots\}$ nyelv nem környezetfüggetlen.

Példánkból közvetlenül kapjuk az alábbi eredményt.

4.9. tétel. Sem az l-transzformációk, sem az f-transzformációk nem őrzik meg az erdők regularitását.

A leszálló és felszálló felületi erdők osztályai közötti szoros kapcsolatot mutatja a

4.10. tétel. A leszálló felületi erdők osztálya megegyezik a homomorfizmusokhoz tartozó felületi erdők osztályával, amely a felszálló felületi erdők osztályának valódi részosztálya.

Bizonyítás. Tételünk első állítása közvetlenül adódik a 3.1. és 4.6. tételekből.

Ami a második állítást illeti, az nyilvánvaló, hogy a homomorfizmushoz tartozó felületi erdők osztálya a felszálló felületi erdők osztályának részosztálya. Most megmutatjuk, hogy ez a tartalmazás valódi.

Tekintsük a 2.1. tétel bizonyításában szereplő második példát. Továbbá legyen $T'=\{g(f^n(y_1), f^n(y_2))|n=0, 1, \ldots\}$. Világos, hogy ha T jelöli az $\{f(x_1)\}\cdot_{x_1}\{f(x_1)\}^{*x_1}$ reguláris erdőt, akkor teljesül a $\tau_A(T)=T'$ egyenlőség. Következésképpen T' felszálló felületi erdő.

Most tegyük fel, hogy a $\mathbf{B}=(T_H(Z_k), \{b_0\}, T_G(Y_2), b_0, \sum')$ homomorfizmusra és a $T''(\subseteq T_H(Z_k))$ reguláris erdőre teljesül a $T'=\tau_B(T'')$ egyenlőség. Ekkor $\mathbf{B}$ választható lineárisnak, mert az ellenkező esetben T'-ben van olyan fa, amelyben valamely részfa legalább kétszer fordul elő. Így a 4.6. tétel szerint T' reguláris. Viszont az I. 9.1. tétel bizonyításához hasonlóan könnyen igazolható, hogy valahányszor egy $\mathbf{C}=(\mathfrak{C}, \mathbf{c}, C')$ 2-változós G-automatára teljesül a $g(f^n(y_1), f^n(y_2))\in T(\mathbf{C})$ tartamazás és n-t elegendően nagynak választjuk, akkor van olyan $m(<n)$, amelyre a $g(f^m(y_1), f^n(y_2))$ fa is $T(\mathbf{C})$-ben van. Következésképpen T' nem reguláris. Ezzel azt kaptuk, hogy T' nem leszálló felületi erdő. □

Ezek után áttérünk a fatranszformációk inverzeinek vizsgálatára.

4.11. tétel. Legyen $\tau(\subseteq T_F(X_n)\times T_G(Y_m))$ tetszőleges l-transzformáció. Akkor τ értelmezési tartománya reguláris. Továbbá, ha $T'(\subseteq T_G(Y_m))$ reguláris erdő, akkor a $T=\tau^{-1}(T')$ erdő is reguláris.

Bizonyítás. A 4.2. segédtétel szerint a T' reguláris erdőhöz létezik olyan $\mathbf{B}$ determinisztikus l-transzformátor, amelyre τ_B értelmezési tartománya és értékkészlete T', továbbá τ_B a T' erdő identikus leképezése. Másrészt a 3.7. tétel szerint teljesül az $\mathscr{L}\circ\mathscr{D}\mathscr{L}=\mathscr{L}$ egyenlőség. Így tételünk bizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ l-transzformátorra τ_A értelmezési tartománya reguláris. Ehhez értelmezzük a $\mathbf{B}=(\mathfrak{B}, \mathbf{b}, B')$ (nemdeterminisztikus) n-változós F-automatát úgy, hogy teljesüljön rá a $B=A$ és $B'=A'$ egyenlőség. Továbbá, legyen $b^{(i)}=\{a|a\in A, (\exists q)((x_i, aq)\in\sum)\}$ $(i=1, \ldots, n)$, az $f(\in F_k, k\geqq 0)$ műveleti szimbólum realizációja pedig legyen a következő: tetszőleges $a, a_1, \ldots, a_k(\in A)$ esetén $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_k)=\{a|(\exists q)((f(a_1\xi_1, \ldots, a_k\xi_k), aq)\in\sum)\}$.

A bizonyítást azzal az észrevétellel zárjuk, hogy tetszőleges $a(\in A)$ és $p(\in T_F(X_n))$ esetén érvényes az

$$a \in p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{b}) \Leftrightarrow (\exists q \in T_G(Y_m))(p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} aq)$$

ekvivalencia. Ezt a p fa $h(p)$ magassága szerinti indukcióval igazolhatjuk. □

Legyen $\tau_1(\subseteq T_F(X_n) \times T_G(Y_m))$ tetszőleges l-transzformáció, $T_1(\subseteq T_F(X_n))$ reguláris erdő, $T_1' = \tau_1(T_1)$ pedig felületi erdő. Tekintsünk egy $T_2'(\subseteq T_G(Y_m))$ reguláris erdőt. Ha τ_2 jelöli a T_2' erdőhöz a 4.2. segédtételben megadott determinisztikus l-transzformációt, akkor érvényes a $T_1' \cap T_2' = (\tau_1 \circ \tau_2)(T_1)$ egyenlőség. Másrészt a 3.7. tétel szerint $\tau_1 \circ \tau_2$ l-transzformáció. Ezért igaz a

4.12. tétel. A leszálló felületi erdőknek reguláris erdőkkel való metszetei ismét leszálló felületi erdők.

Az f-transzformációkra az előzőkhöz hasonló eredmények kaphatók.

4.13. tétel. Legyen $\tau(\subseteq T_F(X_n) \times T_G(Y_m))$ tetszőleges f-transzformáció. Akkor τ értelmezési tartománya reguláris. Továbbá, ha $T'(\subseteq T_G(Y_m))$ reguláris erdő, akkor a $T = \tau^{-1}(T')$ erdő is reguláris.

Bizonyítás. A 3.9. tétel szerint léteznek olyan τ_1 és τ_2 l-transzformációk, amelyek mellett érvényes a $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$ egyenlőség. Ebből a 4.11. tétel alapján azonnal adódik tételünk helyessége. □

A 3.11. és 3.8. tételek szerint az f-transzformációknak lineáris nemtörlő f-transzformációkkal való kompozíciója ugyancsak f-transzformáció. Másrészt a 4.2. segédtétel szerint tetszőleges T reguláris erdőhöz van olyan τ lineáris nemtörlő l-transzformáció, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete T, továbbá τ a T erdő identikus leképezése. A 2.4. tétel miatt τ lineáris nemtörlő f-transzformáció. Így érvényes a

4.14. tétel. A felszálló felületi erdőknek reguláris erdőkkel való metszetei ugyancsak felszálló felületi erdők.

4.15. tétel. Legyen $T(\subseteq T_F(X_n))$ tetszőleges erdő, $\mathbf{A} = (T_F(X_n), A, T_G(Y_m), a_0, \sum)$ és $\mathbf{B} = (T_G(Y_m), B, T_H(Z_k), b_0, \sum')$ pedig determinisztikus f-transzformátor. Ekkor létezik olyan $\mathbf{C} = (T_F(X_n), C, T_H(Z_k), c_0, \sum'')$ determinisztikus f-transzformátor, hogy érvényes a $\tau_{\mathbf{C}}(T') = (\tau_{\mathbf{A}} \circ \tau_{\mathbf{B}})(T)$ egyenlőség, ahol $T' = T \cap \tau_{\mathbf{A}}^{-1}(\tau_{\mathbf{B}}^{-1}(T_H(Z_k)))$.

Bizonyítás. Legyen $C = A \times B$ és $c_0 = (a_0, b_0)$. A $\sum''$-be tartozó átírási szabályokat pedig értelmezzük a következő módon: az $(a, b)x_i \to q$ $((a, b) \in C, 1 \leqq i \leqq n, q \in T_H(Z_k))$ szabály legyen $\sum''$-ben, ha $\sum$-ban van olyan $ax_i \to \bar{q}$ átírási szabály, amely mellett teljesül a $b\bar{q} \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} q$ deriváció. Továbbá, ha az $af(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to \bar{q}(\ldots, a_{ij}\xi_i, \ldots)$ $(f \in F_l; l \geqq 0; a, a_{ij} \in A; 1 \leqq i \leqq l; 1 \leqq j \leqq u_i; u_1 + \ldots + u_l = u; \bar{q} \in \hat{T}_G(Y_m \cup \Xi_u)$ szabály $\sum$-ban van és érvényes a

$$b\bar{q}(\ldots, \xi_{ij}, \ldots) \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} q(\ldots, b_{ijt}\xi_{ij}, \ldots)\,(\xi_{ij} = \xi_{u_1 + \ldots + u_{i-1} + j};\ b, b_{ijt} \in B;$$

$$1 \leqq t \leqq v_{ij};\ v_{11} + \ldots + v_{1u_1} + \ldots + v_{l1} + \ldots + v_{lu_l} = v;\ q \in \hat{T}_H(Z_k \cup \Xi_v)).$$

deriváció, akkor az $(a, b)f(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to q(\ldots, (a_{ij}, b_{ijt})\xi_i, \ldots)$ átírási szabály legyen $\sum''$-ben. Világos, hogy $\mathbf{C}$ determinisztikus f-transzformátor.

Tételünk bizonyításához nyilvánvalóan elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges $(a, b)(\in C)$, $p(\in T_F(X_n))$, $\bar{q}(\in T_G(Y_m))$ és $q(\in T_H(Z_k))$ esetén az $ap \Rightarrow^*_{\mathbf{A}} \bar{q}$ és $b\bar{q} \Rightarrow^*_{\mathbf{B}} q$ deriválások egyidejű teljesülése maga után vonja az $(a, b)p \Rightarrow^*_{\mathbf{C}} q$ deriváció érvényességét. Ennek igazolása $h(p)$ szerinti indukcióval történhet. □

Megjegyezzük, hogy amennyiben a 4.15. tételben szereplő T erdő reguláris, akkor az I. 4.1. és 4.11. tételek szerint T' is reguláris.

5. §. *n-felületi erdők és n-transzformációs nyelvek*

A jelen paragrafus elsődleges célja anak igazolása, hogy az $\mathscr{F}^n \subseteq \mathscr{F}^{n+1}$ és $\mathscr{L}^n \subseteq \mathscr{L}^{n+1}$ tartalmazások valódiak. Ehhez szükségünk lesz az n-felületi erdő és n-transzformációs nyelv fogalmának bevezetésére, amelyre vonatkozóan önmagukban is érdekes tételek nyernek bizonyítást. Ugyanakkor a fatranszformációk elméletének több olyan részterületét is érintjük, amelyből csupán a céljainkhoz szükséges egy-két eredmény kerül bemutatásra, habár ezek a részterületek önálló paragrafus anyagát is képezhetnék. Továbbá azokban az esetekben, amikor egy állítás helyessége a konstrukcióból intuitíve következik, eltekintünk a bizonyítás formalizált befejezésétől. Mindezekre a korlátozásokra az így is eléggé hosszú ismertetés terjedelmének csökkentése érdekében van szükségünk.

5.1. definíció. A T erdőt *felszálló n-felületi erdőnek* nevezzük, ha teljesül rá a $T \in \mathscr{F}^n(R)$ tartalmazás, ahol n természetes szám.

A *leszálló n-felületi erdőket* értelemszerűen definiáljuk.

Legyen K erdők osztálya, $\mathscr{S}$ pedig fatranszformációk osztálya. Akkor $\mathrm{fr}\mathscr{S}(K)$ jelöli a nyelvek $\{\mathrm{fr}(T) \mid T \in \mathscr{S}(K)\}$ osztályát.

5.2. definíció. Az L nyelvet *felszálló (leszálló) n-transzformációs nyelvnek* nevezzük, ha teljesül rá az $L \in \mathrm{fr}\mathscr{F}^n(R)$ $(L \in \mathrm{fr}\mathscr{L}^n(R))$ tartalmazás.

Ha $n=1$, akkor *felszálló (leszálló) transzformációs nyelvről* is beszélünk.

A 3.8. tételből a 3.11. tétel felhasználásával azonnal adódik az

5.3. tétel. Az $\mathscr{F}^n(R)$ osztály zárt a lineáris nemtörlő f-transzformációra.

5.4. definíció. Az $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ f-transzformátort *f-átcímkézőnek* nevezzük, ha a $\sum$-beli átírási szabályok $ax_i \to y_j$ és $af(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to g(a_1\xi_1, \ldots, a_l\xi_l)$ $(a_1, \ldots, a_l, a \in A, x_i \in X_n, y_j \in Y_m, g \in G_l)$ alakúak.

Az *l-átcímkézőt* a fenti definíció nyilvánvaló módosításával kapjuk.

Világos, hogy az f- és l-átcímkéző lineáris nemtörlő transzformátor. Így az általuk indukált transzformációk, amelyeket *f-átcímkézésnek*, ill. *l-átcímkézésnek* hívunk, a 2.4. tétel bizonyítása szerint megegyeznek egymással. Ennek megfelelően a továbbiakban egyszerűen *átcímkézőről*, ill. *átcímkézésről* is beszélhetünk.

Az 5.3. tételből közvetlenül kapjuk az alábbi eredményt.

5.5. következmény. Az $\mathscr{F}^n(R)$ $(n \geqq 1)$ osztály zárt az átcímkézésre nézve.

Tekintsünk egy $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ f-transzformátort, $\alpha: ap \Rightarrow^*_{\mathbf{A}} q$ $(a \in A, p \in T_F(X_n), q \in T_G(Y_m))$ pedig legyen egy $\mathbf{A}$-beli deriváció. Legyen d a p fa valamely csúcsa (p gráf-reprezentálásánál). Ekkor *α-nak a d csúcshoz tartozó állapot-sorozatán* az $\mathbf{A}$ állapotaiból a következő módon képezett $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ sorozatot értjük:

(i) ha $p=x_i(\in X_n)$ vagy $p=f(\in F_0)$ és d a p szimbólummal címkézett csúcs, akkor α-nak d-hez tartozó állapot-sorozata $\langle a \rangle$,

(ii) Legyen $p=f(p_1, \ldots, p_l)$ $(f\in F_l, l>0)$. Ha d a p fa gyökere, akkor α-nak d-hez tartozó állapot-sorozata $\langle a\rangle$. Most legyen d a p_i részfa egy csúcsa valamely i $(1\leqq i\leqq l)$ mellett. Tekintsük az $\alpha: af(p_1, \ldots, p_l)\Rightarrow_{\mathbf{A}}\bar{q}(p_1, \ldots, p_l)\Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*}q$ deriváció első lépését, ahol az $af(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to\bar{q}$ átírási szabály $\sum$-ban van. Ha ξ_i nem szerepel $\bar{q}$-ban, akkor α-nak d-hez tartozó állapot-sorozata üres. Az ellenkező esetben tegyük fel, hogy $\bar{q}$-nak a $b\xi_i(b\in A)$ alakú részfái balról jobbra haladva $b_{i1}\xi_i, \ldots, b_{ij}\xi_i$. Legyenek $\alpha_r: b_{ir}p_i\Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*}q_r$ $(q_r\in T_G(Y_m), r=1, \ldots, j)$ az α deriváció részderivációi, $\langle a_{r1}, \ldots, a_{rt_r}\rangle$ pedig α_r-nek d-hez tartozó állapot-sorozata. Akkor α-nak d-hez tartozó állapot-sorozata $\langle a_{11}, \ldots, a_{1t_1}, \ldots, a_{j1}, \ldots, a_{jt_j}\rangle$. (A továbbiakban a d csúcshoz tartozó állapot-sorozat mellett p valamely részfájának gyökeréhez tartozó állapot-sorozatról is fogunk beszélni, ha az adott részfának a tekintett előfordulása a szövegből világosan kitűnik.)

Adott $\alpha: ap\Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*}q$ derivációnak a p fa valamely d csúcsához tartozó $\langle a_1, \ldots, a_r\rangle$ állapot-sorozatát más szavakkal az alábbi módon jellemezhetjük: legyen p' a p fának a d csúcsához tartozó részfája. Akkor az α deriváció során a p' részfának (a szóban forgó előfordulásakor) r példánya transzformálódik át, rendre az $a_1, \ldots, a_r$ állapotokban kezdve a transzformálást.

Azt mondjuk, hogy az α deriváció *k-indexű*, ha a p fa bármely d csúcsára α-nak d-hez tartozó állapot-sorozata legfeljebb k hosszúságú. Az $\mathbf{A}$ f-transzformátor *gyengén k-indexű* a $T(\subseteq T_F(X_n))$ erdőn, ha tetszőleges $w(\in \mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T)))$ szóhoz van olyan $p(\in T)$ fa és k-indexű $ap\Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*}q$ $(q\in T_G(Y_m))$ deriváció, amely eleget tesz az $a\in A'$ és $\mathrm{fr}(q)=w$ összefüggéseknek. Továbbá, $\mathbf{A}$ *k-indexű*, ha bármely $ap\Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*}q$ $(a\in A', p\in T_F(X_n), q(\in T_G(Y_m))$ deriváció k-indexű. Végül $\mathbf{A}$ *véges indexű*, ha van olyan k, amelyre $\mathbf{A}$ k-indexű.

A k-indexű f-transzformátorok által indukált transzformációk osztályára az $\mathscr{F}_k$, a determinisztikus k-indexű f-transzformátorok által indukált transzformációk osztályára pedig a $\mathscr{DF}_k$ jelölést használjuk. Továbbá $(\mathscr{F}_k)^n$ helyett $\mathscr{F}_n^k$-t, $(\mathscr{DF}_k)^n$ helyett pedig $\mathscr{DF}_k^n$-t írunk. A véges indexűek megfelelő osztályai esetében a k index helyett v-t írunk.

5.6. tétel. Legyen $T(\subseteq T_F(X_n))$ tetszőleges erdő, $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), a_0, \sum)$ pedig determinisztikus gyengén k-indexű f-transzformátor T—n. Akkor van olyan $\mathbf{B}=(T_F(X_n), B, T_G(Y_m), b_0, \sum')$ determinisztikus k-indexű f-transzformátor, hogy teljesül az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T))=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(T))$ egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $B=\{(a, \langle a_1, \ldots, a_t\rangle)|a, a_1, \ldots, a_t\in A, t=1, \ldots, k\}$ és $b_0=(a_0, \langle a_0\rangle)$. Továbbá, ha az $ax_i\to q$, ill. $af\to q$ $(f\in F_0)$ szabály $\sum$-ban van, akkor az $(a, \langle a_1, \ldots, a_t\rangle)x_i\to q$, ill. $(a, \langle a_1, \ldots, a_t\rangle)f\to q$ szabály legyen $\sum'$-ben, ahol $a_1, \ldots, a_t\in A$ és $t\leqq k$. Ezenkívül tetszőleges $l(>0)$ és $f(\in F_l)$ esetén, ha az $af(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q(\ldots, a_{ij}\xi_i, \ldots)$ és az $a_rf(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q_r$ $(r=1, \ldots, t)$ szabályok $\sum$-ban vannak, valamint lehet találni olyan $p_1, \ldots, p_l(\in T_F(X_n))$ és $\bar{q}_r(\in T_G(Y_m))$ fákat, amelyek mellett érvényesek az $\alpha_r: a_rf(p_1, \ldots, p_l)\Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*}\bar{q}_r$ derivációk, akkor az

$$(a, \langle a_1, \ldots, a_t\rangle)f(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q(\ldots, (a_{ij}, \langle b_{11}, \ldots, b_{1s_1}, \ldots, b_{t1}, \ldots, b_{ts_t}\rangle)\xi_i, \ldots)$$

szabály $\sum'$-ben van, amennyiben $s_1+\ldots+s_t\leqq k$, ahol $\langle b_{r1}, \ldots, b_{rs_r}\rangle$ az α_r derivációnak az $f(p_1, \ldots, p_l)$ fa p_i részfájának gyökeréhez tartozó állapot-sorozata. (Az I. 4.1. és 4.13. tételek alapján nyilván el lehet dönteni a kívánt $p_1, \ldots, p_l$ és $\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_r$ fák létezését.)

Konstrukciónkból látható, hogy az $\mathbf{A}$-beli és a $\mathbf{B}$-beli derivációk között a következő kapcsolat van:

Ha $p(\in T_F(X_n))$ tetszőleges fa, p' a p fa d csúcsához tartozó részfája, $q(\in T_G(Y_m))$ és $\alpha: a_0 p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} \bar{q}(\ldots, a_{i1}p', \ldots, a_{it}p', \ldots) \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} \bar{q}(\ldots, q_1, \ldots, q_t, \ldots) = q$ k-indexű derivváció, akkor $\mathbf{B}$-ben érvényes a $\beta: (a_0, \langle a_0 \rangle)p \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} \bar{q}(\ldots, (a_{i1}, \mathbf{b})p', \ldots, (a_{it}, \mathbf{b})p', \ldots) \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} \bar{q}(\ldots, q_1, \ldots, q_t, \ldots) = q$ derivváció, ahol $\mathbf{b} = \langle a_{i1}, \ldots, a_{it} \rangle$ az α derivációnak a d csúcshoz tartozó állapot-sorozata. Másrészt, ha az $\alpha: a_0 p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q$ derivváció indexe nagyobb k-nál, akkor $p \notin \tau_{\mathbf{B}}^{-1}(T_G(Y_m))$. Így $\mathbf{B}$ k-indexű f-transzformátor és teljesül rá az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(T)) = \mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T))$ egyenlőség. Az is nyilvánvaló, hogy $\mathbf{B}$ determinisztikus. □

Most egy újabb műveletet értelmezünk erdőkön.

Legyen F rangolt ábécé, Δ pedig az F-től idegen műveleti szimbólum halmaz, amely megszámlálhatóan végtelen sok unáris szimbólumból áll. Vegyük az $F \cup X$ halmaznak Δ-ba való φ egy-egyértelmű leképezését. Tetszőleges $d(\in F \cup X)$ esetén jelölje T_d a $\{\varphi(d)(\xi)\}^{*\xi}$ erdőt. Világos, hogy T_d reguláris, mivel a $\varphi(d)(\xi)$ fa ξ-iteráltja. Ezek után értelmezzük az X_n feletti F-erdőknek $T_{F \cup \Delta}(X)$ részhalmazaiba való $\bar{\varphi}$ leképezését a következő módon:

(i) ha $p \in F_0 \cup X_n$, akkor $\bar{\varphi}(p) = \{q(p) | q(\xi) \in T_p\}$,

(ii) ha $p = f(p_1, \ldots, p_m)$ $(f \in F_m, m > 0, p_1, \ldots, p_m \in T_F(X_n))$, akkor $\bar{\varphi}(p) = \{q(f(p_1', \ldots, p_m')) | q(\xi) \in T_f; p_i' \in \bar{\varphi}(p_i), i = 1, \ldots, m\}$,

(iii) ha $T \subseteqq T_F(X_n)$, akkor $\bar{\varphi}(T) = \bigcup(\bar{\varphi}(p) | p \in T)$. A $\bar{\varphi}$ leképezést a T_d *reguláris erdők egyszerű beszúrásának* nevezzük. Ha nem specifikáljuk Δ-t és φ-t, akkor *egyszerű reguláris beszúrásról* beszélünk.

A $\varphi: F \cup X \to \Delta$ leképezéssel adott egyszerű reguláris beszúrás jelentése az, hogy egy $p(\in T_F(X_n))$ fába annak minden egyes csúcsához (pontosabban csúcsa alá) beszúrunk egy T_d-beli egy-változós fát, ha a szóbanforgó csúcs címkéje $d(\in F \cup X_n)$. A $\xi(\in T_d)$ beszúrása azt jelenti, hogy a csúcsot változatlanul hagyjuk. Az elnevezés jobban kifejezi a beszúrás fogalmát, ha a fákat lengyel prefix írásmódban adjuk meg, ξ-t pedig az üres szónak tekintjük. Ebben a felfogásban a p-t megadó szóba egy T_d-beli szónak d elé történő beszúrásáról van szó.

5.7. segédtétel. Az R osztály zárt az egyszerű reguláris beszúrásra nézve.

Bizonyítás. Legyen $T(\subseteqq T_F(X_n))$ reguláris erdő, $\bar{\varphi}$ pedig a $\varphi: F \cup X \to \Delta$ leképezéssel adott egyszerű reguláris beszúrás. Jelölje $\mathbf{A} = (\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$ a T erdőt felismerő n-változós F-automatát. Legyen $\mathbf{B} = (\mathfrak{B}, \mathbf{b}, B')$ az alábbi módon értelmezett n-változós F-atuomata: $B = A \times (F \cup X_n)$, $b^{(i)} = (a^{(i)}, x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ és $B' = A' \times (F \cup X_n)$. Továbbá tetszőleges $f(\in F_m, m \geqq 0)$ és $b_1 = (a_1, p_1), \ldots, b_m = (a_m, p_m)(\in B)$ esetén legyen

$$f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_m) = (f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m), f).$$

Világos, hogy $T(\mathbf{B}) = T(\mathbf{A}) = T$.

Ezután realizáljuk a $\varphi(p)$ $(p \in F \cup X_n)$ egy-változós műveleti szimbólumot B-n a következő módon: $\varphi(p)((a, q)) = (a, q)$, ha $q = p$, és $\varphi(p)((a, q))$ nincs értelmezve a többi esetben. Jelölje $\mathfrak{B}'$ a kapott (parciális) $(F \cup \varphi(F \cup X_n))$-algebrát. A konstrukcióból nyilvánvaló, hogy $\mathbf{B}' = (\mathfrak{B}', \mathbf{b}, B')$ a $\bar{\varphi}(T)$ erdőt ismeri fel. □

58. tétel. Az $\mathscr{F}^k(R)$ $(k \geqq 1)$ osztály zárt az egyszerű reguláris beszúrásra nézve.

Bizonyítás. Tételünk igazolását k szerinti indukcióval végezzük. Ha a reguláris erdőket felszálló 0-felületi erdőknek tekintjük, akkor az 5.7. segédtétel szerint állításunk $k = 0$ esetén igaz.

Most legyen $T(\subseteqq T_G(Y_m))$ felszálló $(k+1)$-felületi erdő. Pontosabban, legyen $T'(\subseteqq T_F(X_n))$ felszálló k-felületi erdő, $\mathbf{A} = (T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ pedig f-transzformátor és teljesüljön a $\tau_{\mathbf{A}}(T') = T$ egyenlőség.

Vegyük a $\varphi\colon G\cup Y\to\Delta$ leképezéssel adott $\bar{\varphi}$ egyszerű reguláris beszúrást, $\bar{\varphi}'$ pedig legyen a $\varphi'\colon F\cup X\to\Delta'$ leképezéssel adott egyszerű reguláris beszúrás.

Konstruáljuk meg a $\mathbf{B}=(T_{F\cup\varphi'(F\cup X_n)}(X_n), B, T_{G\cup\varphi(G\cup Y_m)}(Y_m), B', \sum')$ f-transzformátort a következő módon. Legyen $B=A\cup C$ és $B'=A'$, ahol C az összes olyan (q, i, ϱ) hármasból áll, amelyre q egy $\sum$-beli átírási szabály jobb oldala, i a q fának egy nem Ξ-beli szimbólummal címkézett csúcsa, ϱ pedig i címkéje, ha az i-hez tartozó részfa nem $a\xi_j$ ($a\in A$, $\xi_j\in\Xi$) alakú, és $\varrho=a\xi_j$, amennyiben az i csúcshoz tartozó részfa $a\xi_j$. Jelölje $r(q, c)$ a q-hoz tartozó (q, i, ϱ) hármasok számát, $r(q, v)$ pedig a q-ban szereplő Ξ-beli változók indexeinek maximumát. Feltesszük, hogy $1\leqq i\leqq r(q, c)$, továbbá, hogy q gyökerének csúcsa mindig 1.

Értelmezzük tetszőleges $q(\in T_G(Y_m\cup A\Xi))$ fára $\overline{\mathrm{root}}(q)$-t a következő módon:

(i) ha $q\in G_0\cup Y_m\cup A\Xi$, akkor $\overline{\mathrm{root}}(q)=q$,

(ii) ha $q=g(q_1, \ldots, q_l)$ ($g\in G_l$, $l>0$), akkor $\overline{\mathrm{root}}(q)=g$.

Továbbá, tetszőleges $q(\in T_G(Y_m\cup A\Xi))$ esetén legyen $\overline{\mathrm{fr}}(q)$ az alábbi:

(i) ha $q\in G_0\cup Y_m\cup A\Xi$, akkor $\overline{\mathrm{fr}}(q)=q$,

(ii) ha $q=g(q_1, \ldots, q_l)$ ($g\in G_l$, $l>0$), akkor $\overline{\mathrm{fr}}(q)=\overline{\mathrm{fr}}(q_1)\ldots\overline{\mathrm{fr}}(q_l)$.

Azonnal látható, hogy $\overline{\mathrm{root}}(q)$ csupán abban tér el $\mathrm{root}(q)$-tól, hogy az $a\xi$ ($a\in A$, $\xi\in\Xi$) alakú fákra $\overline{\mathrm{root}}(a\xi)=a\xi$, míg $\mathrm{root}(a\xi)=a$. A többi fán a $\overline{\mathrm{root}}$ és a root függvény megegyezik. Hasonló különbség van az $\overline{\mathrm{fr}}$ és az fr függvények között, továbbá az, hogy $\overline{\mathrm{fr}}(g)=g$ és $\mathrm{fr}(g)=\lambda$, ha $g\in G_0$.

Értelmezzük az átírási szabályok következő halmazait:

$\sum_1=\{a\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to\varphi(\varrho)(a\xi_1), a\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to a\xi_1 | a\in A, \sigma\in F\cup X_n, \varrho\in G\cup Y_m\}$,

$\sum_2=\{a\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to g(q, i_1, \varrho_1)\xi_1, \ldots, (q, i_l, \varrho_l)\xi_1) | (a\sigma, q)\in\sum$,
$a\in A$; $\sigma\in F\cup X_n$; $q=g(q_1, \ldots, q_l)$, $g\in G_l$, $l>0$; i_j az a csúcs, amelybe a q fa gyökeréből kiinduló j-ik él vezet balról jobbra haladva; $\overline{\mathrm{root}}(q_j)=\varrho_j$, $j=1, \ldots, l\}$,

$\sum_3=\{a\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to(q, 1, a'\xi_j)\xi_1 | (a\sigma, q)\in\sum, a, a'\in A, \sigma\in F, q=a'\xi_j\}$,

$\sum_4=\{a\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to(q, 1, g)\xi_1 | (a\sigma, q)\in\sum, a\in A, \sigma\in F\cup X_n, q=g\in G_0\}$,

$\sum_5=\{a\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to(q, 1, y_s)\xi_1 | (a\sigma, q)\in\sum, a\in A, \sigma\in F\cup X_n, q=y_s\in Y_m\}$,

$\sum_6=\{(q, i, g)\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to g((q, i_1, \varrho_1)\xi_1, \ldots, (q, i_l, \varrho_l)\xi_1)$,
$(q, i, g)\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to\varphi(\varrho)((q, i, g)\xi_1)$,
$(q, i, g)\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to(q, i, g)\xi_1 | g\in G_l, l>0$; q-nak az i csúcshoz tartozó részfája $g(q_1, \ldots, q_l)$ alakú; i_j az a csúcs, amelybe az i-ből kiinduló j-ik él vezet;
$\overline{\mathrm{root}}(q_j)=\varrho_j, j=1, \ldots, l$; $\sigma\in F\cup X_n$; $\varrho\in G\cup Y_m\}$,

$\sum_7=\{(q, i, a\xi_j)\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to\varphi(\varrho)((q, i, a\xi_j)\xi_1)$,
$(q, i, a\xi_j)\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to(q, i, a\xi_j)\xi_1$,
$(q, i, g)\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to\varphi(\varrho)((q, i, g)\xi_1)$,
$(q, i, g)\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to(q, i, g)\xi_1$,
$(q, i, y_s)\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to\varphi(\varrho)((q, i, y_s)\xi_1)$,
$(q, i, y_s)\varphi'(\sigma)(\xi_1)\to(q, i, y_s)\xi_1 | q$ egy $\sum$-beli átírási szabály jobb oldala,
$1\leqq i\leqq r(q, c)$, $1\leqq j\leqq r(q, v)$, $\sigma\in F\cup X_n$, $\varrho\in G\cup Y_m$, $g\in G_0$, $1\leqq s\leqq m\}$,

$\sum_8=\{(q, i, a\xi_j)\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to a\xi_j | \sigma\in F_l, 1\leqq j\leqq l\}$,

$\sum_9=\{(q, i, g)\sigma\to g | \sigma\in F\cup X_n, g\in G_0\}$,

$\sum_{10}=\{(q, i, y_j)\sigma\to y_j | \sigma\in F\cup X_n, 1\leqq j\leqq m\}$.

A $\mathbf{B}$ f-transzformátor megadásához már csak $\sum'$ értelmezése van hátra. Legyen $\sum'=\cup(\sum_i | i=1, \ldots, 10)$.

Az **A** és **B** f-transzformátorok között a következő kapcsolat van. Vegyünk egy $q(\in T_G(Y_m))$ fát. A q fa j csúcsaihoz adjunk meg tetszőleges módon n_j nemnegatív egész számokat. Tekintsünk egy olyan $\bar{q}$ fát, amelyet úgy kapunk, hogy q-ba a j csúcsok alá a $\varphi(G \cup Y_m)$ halmaz elemeiből képzett n_j magasságú fákat szúrunk be. Úgy, ha érvényes az $ap \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q(a \in A, p \in T_F(X_n))$ derivációs, akkor van az $a\bar{p} \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} \bar{q}$ derivációt kielégítő $\bar{p}(\in \bar{\varphi}'(p'))$ fa.

Fordítva, ha $a(\in A)$, $\bar{p}(\in \bar{\varphi}'(p), p \in T_F(X_n))$ és $\bar{q}(\in T_{G \cup \varphi(G \cup Y_m)}(Y_m))$ esetén érvényes az $a\bar{p} \Rightarrow_{\mathbf{B}} \bar{q}$ derivációs, akkor arra a $q(\in T_G(Y_m))$ fára, amelyből $\bar{q}$ úgy keletkezik, hogy csúcsai alá a $\varphi(G \cup Y_m)$ halmaz elemeiből alkotott fákat szúrunk be, teljesül az $ap \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q$ összefüggés.

Állításaink helyessége a $\sum'$ halmaz megválasztása folytán nyilvánvalóan teljesül.

A $\tau_{\mathbf{B}}(\bar{\varphi}'(T'))$ erdő csupán abban tér el a $\bar{\varphi}(T)$ erdőtől, hogy benne meg nem engedett beszúrások is előfordulhatnak. Ennek orvoslására tekintsük a

$$\mathbf{D} = (T_{G \cup \varphi(G \cup Y_m)}(Y_m), D, T_{G \cup \varphi(G \cup Y_m)}(Y_m), D', \sum'')$$

l-transzformátort, ahol $D = D' = \{\bar{\varrho} | \varrho \in \varphi(G \cup Y_m)\}$. Továbbá legyen

$$\sum'' = \{y_i \to \overline{\varphi(y_i)}\, y_i | i = 1, \ldots, m\} \cup \{\varrho(\bar{\varrho}'\xi_1) \to \bar{\varrho}'\varrho'(\xi_1) | \bar{\varrho}, \bar{\varrho}' \in D\} \cup \{g(\bar{\varrho}_1\xi_1, \ldots, \bar{\varrho}_l\xi_l) \to$$

$$\to \overline{\varphi(g)}\, g(\xi_1, \ldots, \xi_l) | g \in G_l,\ l \geqq 0;\ \bar{\varrho}_1, \ldots, \bar{\varrho}_l \in D\}.$$

A **D** l-transzformátorra, a $\tau_{\mathbf{B}}(\bar{\varphi}'(T'))$ és a $\bar{\varphi}(T)$ erdők közötti különbségre tett fenti megjegyzésünk szerint, nyilvánvalóan teljesül a $\tau_{\mathbf{D}}(\tau_{\mathbf{B}}(\bar{\varphi}'(T'))) = \bar{\varphi}(T)$ egyenlőség. Másrészt **D** lineáris és nemtörlő. Így a 2.4. tétel szerint $\tau_{\mathbf{D}}$ lineáris nemtörlő f-transzformáció is. Következésképpen a 3.8. és 3.11. tételek alapján $\tau_{\mathbf{B}} \circ \tau_{\mathbf{D}}$ f-transzformáció. Minthogy $(\tau_{\mathbf{B}} \circ \tau_{\mathbf{D}})(\bar{\varphi}'(T')) = \bar{\varphi}(T)$, így indukciós feltevésünk alapján azt nyertük, hogy a felszálló $(k+1)$-felületi erdők osztálya zárt az egyszerű reguláris beszúrásra nézve. □

5.9. segédtétel. Legyen $\tau(\subseteq T_F(X_n) \times T_G(Y_m))$ tetszőleges f-transzformáció, $L(\subseteq Y_m^*)$ pedig reguláris nyelv. Akkor $\tau^{-1}(\mathrm{fr}^{-1}(L))(\subseteq T_F(X_n))$ reguláris erdő.

Bizonyítás. A II. 2. 11. tétel szerint $\mathrm{fr}^{-1}(L)$ reguláris erdő, amiből a 4.13. tétel felhasználásával azonnal adódik állításunk. □

Tetszőleges $L(\subseteq Y_m^*)$ nyelv esetén jelölje $\mathrm{reb}(L, m+1)$ (*re*guláris *b*ehelyettesítés) azt a nyelvet, amelyet az alábbi módon kapunk:

(i) ha $L = \{w\}$ $(w \in (Y \cup \{\lambda\}))$, akkor $\mathrm{reb}(L, m+1) = \{y_{m+1}^* w y_{m+1}^*\}$,

(ii) ha $L = \{w_1 w_2\}$ $(w_1, w_2 \in Y_m^*)$, akkor $\mathrm{reb}(L, m+1) = \mathrm{reb}(w_1, m+1)\,\mathrm{reb}(w_2, m+1)$,

(iii) ha $L(\subseteq Y_m^*)$ tetszőleges, akkor $\mathrm{reb}(L, m+1) = \cup(\mathrm{reb}(w, m+1) | w \in L)$.

A következő tételben és a paragrafus hátralevő részében szükségünk lesz az alábbi jelölésre.

Adott $\mathbf{A} = (T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ l-transzformátor (f-transzformátor) és $a(\in A)$ állapot esetén legyen $\mathbf{A}(a)$ a $(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), a, \sum)$ l-transzformátor (f-transzformátor).

5.10. tétel. Legyen $L(\subseteq Y_m^*)$ tetszőleges nyelv, K pedig erdők olyan osztálya, amely zárt az átcímkézésre nézve. Ha $\mathrm{reb}(L, m+1) \in \mathrm{fr}\,\mathscr{DF}(K)$, akkor $L \in \mathrm{fr}\,\mathscr{DF}_v(K)$.

Bizonyítás. Legyen $\mathrm{reb}(L, m+1)=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T))$, ahol $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_{m+1}), a_1, \sum)$ determinisztikus f-transzformátor, T-re pedig teljesülnek a $T\in K$ és $T\subseteq T_F(X_n)$ tartalmazások. Tegyük fel, hogy $G_0\neq\emptyset$. Legyen továbbá $A=\{a_1, \ldots, a_k\}$. Az $y_{i_1} y_{m+1}^{n_1} y_{i_2} y_{m+1}^{n_2} \ldots y_{i_{r-1}} y_{m+1}^{n_{r-1}} y_{i_r} (\in \mathrm{reb}(L, m+1))$ szót *szabályosnak* nevezzük, ha a benne szereplő n_i $(i=1, \ldots, r-1)$ kitevők páronként különbözők, ahol $y_{i_1} \ldots y_{i_r} \in Y_m$.

Tekintsünk egy

$$\alpha\colon a_1 p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q(\ldots, b_1 p_1, \ldots, b_2 p_1, \ldots, b_s p_1, \ldots) \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q(\ldots, r_1, \ldots, r_2, \ldots, r_s, \ldots) = \bar{q} \quad (\in T_G(Y_{m+1}))$$

derivációt, ahol $p\in T$, p_1 a p fának a d csúcshoz tartozó részfája, $\langle b_1, b_2, \ldots, b_s\rangle$ az α derivációnak a d csúcshoz tartozó állapot-sorozata és $b_i p_1 \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} r_i$ $(i=1, \ldots, s)$. Ha $\mathrm{fr}(q)$ szabályos és $b_i=b_j$ $(i\neq j)$, akkor r_i-ben (és mivel $r_j=r_i$, így r_j-ben is) Y_m-beli szimbólumoknak legfeljebb egy előfordulása lehetséges.

Tetszőleges $f(\in F_l, l>0)$ szimbólumra képezzük az (f, M) párokat, ahol M olyan k-szor l-es mátrix, amelynek elemei a $G_0 \cup Y_m \cup A\Xi_l$ halmazból valók. Legyen $\bar{F}_0=F_0$, $\bar{F}_l=\{(f, M) | f\in F_l\}$ $(l>0)$ és $\bar{F}=\cup(\bar{F}_i | i=0, 1, \ldots)$.

Jelölje T_{ij} $(i=1, \ldots, k;\ j=1, \ldots, m)$ az összes olyan $p(\in T_F(X_n))$ fa halmazát, amelyre teljesül az $\mathrm{fr}(q)\in y_{m+1}^{*} y_j y_{m+1}^{*}$ tartalmazás, ahol $q(\in T_G(Y_{m+1}))$ az $a_i p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q$ derivációval adódik. Továbbá, legyen $T_{i,m+1}$ $(i=1, \ldots, k)$ azon $p(\in T_F(X_n))$ fák halmaza, amelyekre $\mathrm{fr}(q)\in y_{m+1}^{*}$, ahol $q(\in T_G(Y_{m+1}))$ ismét az $a_i p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q$ derivációval eredménye.

Az 5.9. segédtétel szerint a T_{ij} $(i=1, \ldots, k; j=1, \ldots, m+1)$ erdők regulárisak. Így létezik a T_{ij} erdőt felismerő $\mathbf{A}_{ij}=(\mathfrak{A}_{ij}, \mathbf{a}_{ij}, A'_{ij})$ n-változós F-automata. Tekintsük a $\mathbf{B}=(T_F(X_n), B, T_F(X_n), B', \sum')$ leszálló átcímkézőt, ahol $B=B'$ a $\Pi(\mathfrak{A}_{ij} | i=1, \ldots, k; j=1, \ldots, m+1)$ algebrában az $\{(a_{11}^{(i)}, \ldots, a_{1m+1}^{(i)}, \ldots, a_{k1}^{(i)}, \ldots, a_{km+1}^{(i)}) | i=1, \ldots, n\}$ halmaz által generált részalgebrának a tartóhalmaza. Legyen továbbá $\sum'$ az alábbi $\sum_1'$ és $\sum_2'$ halmazok egyesítése:

(i) $$\sum_1' = \{x_i \to (a_{11}^{(i)}, \ldots, a_{1m+1}^{(i)}, \ldots, a_{k1}^{(i)}, \ldots, a_{km+1}^{(i)}) x_i | i = 1, \ldots, n\} \cup$$
$$\cup \{f \to (f^{\mathfrak{A}_{11}}, \ldots, f^{\mathfrak{A}_{1m+1}}, \ldots, f^{\mathfrak{A}_{k1}}, \ldots, f^{\mathfrak{A}_{km+1}}) f | f\in F_0\},$$

(ii) $\sum_2'$ álljon az összes $f(\mathbf{b}_1\xi_1, \ldots, \mathbf{b}_l\xi_l) \to \mathbf{b}(f, M)(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ $(l>0)$ átírási szabályból, ahol $\mathbf{b}_t=(b_{11}^{(t)}, \ldots, b_{1m+1}^{(t)}, \ldots, b_{k1}^{(t)}, \ldots, b_{km+1}^{(t)})$, $\mathbf{b}=(b_{11}, \ldots, b_{1m+1}, \ldots, b_{k1}, \ldots, b_{km+1})$ $(\in B, t=1, \ldots, l)$, $b_{ij}=f^{\mathfrak{A}_{ij}}(b_{ij}^{(1)}, \ldots, b_{ij}^{(l)})$, az M mátrix m_{it} eleme pedig

$$m_{it} = \begin{cases} g(\in G_0 \text{ rögzített}), & \text{ha } b_{im+1}^{(t)} \in A'_{im+1}, \\ y_u, & \text{ha } b_{iu}^{(t)} \in A'_{iu} (1 \leq u \leq m), \\ a_i \xi_t & \text{különben.} \end{cases}$$

(Világos, hogy m_{it} jól definiált, mivel $\mathbf{b}_t$-nek nincs olyan $b_{iv}^{(t)}$ és $b_{iw}^{(t)}$ $(1\leq i\leq k, 1\leq v, w\leq m+1, v\neq w)$ komponense, hogy $b_{iv}^{(t)}\in A'_{iv}$ és $b_{iw}^{(t)}\in A'_{iw}$ teljesülne.)

A konstrukcióból világos, hogy $\mathbf{B}$ az átcímkézést a következő módon végzi: Tekintsünk egy $p(\in T_F(X_n))$ fát, és legyen $f(p_1, \ldots, p_l)$ $(l>0)$ a p fának a d csúcsához tartozó részfája. Ekkor átcímkézőnk arra vonatkozóan ad információt, hogy a p fa d csúcsának l leszármazottja közül melyik transzformálódik át $\mathbf{A}(a_i)$ $(i=1, \ldots, k)$ mellett olyan fába, amely Y_m-beli betűknek (I) 0 előfordulását tartalmazza, (II) egy előfordulását tartalmazza, (III) kettőnél nem kevesebb előfordulását tartalmazza, vagy pedig a szóban forgó leszármazott nincs $\tau_{\mathbf{A}(a_i)}$ értelmezési tartományában.

Ezek után tekintsük a $\mathbf{C}=(T_F(X_n), C, T_G(Y_m), C', \sum'')$ f-transzformátort, ahol $C=A$ és $C'=\{a_1\}$. Az ax_i $(a\in A, x_i\in X_n)$ vagy af $(a\in A, f\in F_0)$ bal oldallal rendelkező $\sum$-beli szabályok jobb oldalaiban helyettesítsük y_{m+1} előfordulásait egy rögzített G_0-beli szimbólummal, és soroljuk a kapott szabályokat $\sum''$-höz. Továbbá, ha az $af(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q$ $(a\in A, f\in F_l, l>0)$ átírási szabály $\sum$-ban van, akkor az összes $a(f, M)(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q'$ átírási szabály legyen $\sum''$-ben, ahol q' úgy keletkezik q-ból, hogy q-ban $a_i\xi_j$ $(1\leqq i\leqq k,\ 1\leqq j\leqq l)$ előfordulását m_{ij}-vel, y_{m+1} előfordulásait pedig az M definíciójában rögzített $g(\in G_0)$ szimbólummal helyettesítjük.

A $\mathbf{C}$ f-transzformátor definíciója alapján nyilvánvaló, hogy teljesül az $L=\mathrm{fr}(\tau_C(\tau_B(T)))$ egyenlőség. Továbbá L elemeit már azokkal a $p(\in T)$ fákkal megkapjuk, amelyekre az $\mathrm{fr}(\tau_A(p))$ szó szabályos. Másrészt az ilyen p fákra az $a_1\tau_B(p)\Rightarrow^* cq$ $(q\in T_G(Y_m))$ derivációknak $\tau_B(p)$ bármely csúcsához tartozó állapot-sorozataiban csak különböző állapotok szerepelhetnek. Továbbá $\mathbf{C}$ nyilvánvalóan determinisztikus. Így, mivel $\mathbf{C}$-nek k állapota van, ezért $\mathbf{C}$ determinisztikus gyengén k-indexű f-transzformátor $\tau_B(T)$-n. Végül a K-ra tett megszorításainak szerint érvényes a $\tau_B(T)\in K$ tartalmazás. Ezekből az 5.6. tétel felhasználásával a kívánt $L=\mathrm{fr}(\tau_C(\tau_B(T)))\in DF_v(K)$ összefüggéshez jutunk. □

Vizsgálatainkhoz hasznos lesz a reguláris szűkítésű f-transzformátor fogalmának bevezetése.

5.11. definíció. Az $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ rendszert *reguláris szűkítésű f-transzformátornak* nevezzük, ahol $T_F(X_n)$, A, $T_G(Y_m)$ és A' ugyanazok az objektumok, mint az f-transzformátor 1.4. definíciójában. Továbbá $\sum\langle p\to q, D\rangle$ alakú szabályok véges halmaza, ahol $p\to q$ felszálló fatranszformációs átírási szabály, D pedig a p-ben előforduló $\xi_i(\in\Xi)$ segédváltozóknak a $T_F(X_n)$ halmaz reguláris részhalmazainak halmazába való leképezése. Ha $p\in A(F_0\cup X_n)$, akkor $\langle p\to q, D\rangle$ helyett az egyszerűbb $p\to q$ írásmódot használjuk.

A *determinisztikus*, ha A' egy-elemű, és valahányszor $\langle p\to q_1, D_1\rangle$ és $\langle p\to q_2, D_2\rangle$ két különböző átírási szabály $\sum$-ban, mindannyiszor van olyan i $(1\leqq i\leqq l)$, hogy $D_1(\xi_i)\cap D_2(\xi_i)=\emptyset$, ahol $\xi_1, \ldots, \xi_l$ a p-ben előforduló segédváltozók.

Világos, hogy az f-transzformátorok reguláris szűkítésű f-transzformátorok is

Az $\mathbf{A}$ reguláris szűkítésű f-transzformátor szerinti közvetlen derivációt az 1.5. definícióban megadotthoz hasonlóan értelmezzük, azzal a megszorítással, hogy az 1.5. definíció (ii) részében a p_i részfának $D(\xi_i)$-belinek kell lennie. A derivációt a közvetlen derivációt reflexív-tranzitív lezártja. A reguláris szűkítésű f-transzformátor által indukált transzformációt *reguláris szűkítésű f-transzformációnak* nevezzük.

5.12. tétel. Bármely reguláris szűkítésű τ_A f-transzformáció előállítható egy τ determinisztikus leszálló átcímkézés és egy τ_B f-transzformáció kompozíciójaként. Továbbá, ha $\mathbf{A}$ determinisztikus, akkor $\mathbf{B}$ is választható determinisztikusnak.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ tetszőleges reguláris szűkítésű f-transzformátor. Jelölje $T_1, \ldots, T_k(\subseteq T_F(X_n))$ mindazon reguláris erdőket, amelyek előfordulnak $\sum$-beli átírási szabályok változóinak értelmezési tartományaiként. Legyen U a $\{0, 1\}^k$ halmaz, azaz a 0-ból és 1-ből álló k hosszúságú sorozatok halmaza. Tetszőleges $u(\in U)$ esetén $u(j)$ $(1\leqq j\leqq k)$ jelöli az u sorozat j-ik elemét. Legyen $\bar{F}$ az a rangolt ábécé, amelyre $\bar{F}_0=F_0$ és tetszőleges $l(>0)$ esetén $\bar{F}_l=F_l\times U^l$. Így $\bar{F}_l$ $(l>0)$ egy eleme $(f, (u_1, \ldots, u_l))$ alakú, ahol $u_1, \ldots, u_l\in U$.

Most értelmezzük a τ: $T_F(X_n)\to T_{\bar{F}}(X_n)$ leképezést a következő módon:

(i) ha $p\in X_n\cup F_0$, akkor $\tau(p)=p$,

(ii) ha $p=f(p_1, \ldots, p_l)(\in T_F(X_n), f\in F_l, l>0)$, akkor $\tau(p)=\bar{f}(\tau(p_1), \ldots, \tau(p_l))$, ahol $\bar{f}=(f, (u_1, \ldots, u_l))$ és tetszőleges i $(1\leqq i\leqq l)$ és j $(1\leqq j\leqq k)$ esetén $u_i(j)=1$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $p_i\in T_j$.

Az 5.10. tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan megmutatható, hogy τ indukálható egy determinisztikus leszálló átcímkézővel.

Ezek után konstruáljuk meg azt a $\mathbf{B}=(T_F(X_n), B, T_G(Y_m), B', \sum')$ f-transzformátort, ahol $B=A$ és $B'=A'$. Továbbá, ha $ap\to q$ $(a\in A, p\in X_n\cup F_0, q\in T_G(Y_m))$ a $\sum$ halmazban van, akkor $\sum'$-nek is legyen eleme. Ezenkívül, amennyiben $\langle af(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q, D\rangle$ $\sum$-beli átírási szabály, akkor az $a(f, u)(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q$ szabály legyen $\sum'$-ben, ahol $u=(u_1, \ldots, u_l)$, (f, u) szerepel valamely $\tau(p)$ $(p\in T_F(X_n))$ fában és bármely i $(1\leqq i\leqq l)$ és j $(1\leqq j\leqq k)$ esetén $u_i(j)=1$, ha $D(\xi_i)=T_j$.

Konstrukciónkból világos, hogy teljesül a $\tau_{\mathbf{A}}=\tau\circ\tau_{\mathbf{B}}$ egyenlőség. Az is könnyen látható, hogy $\mathbf{B}$ determinisztikus, ha $\mathbf{A}$ determinisztikus. □

5.13. segédtétel. Legyen $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), a_0, \sum)$ reguláris szűkítésű determinisztikus f-transzformátor, $\mathbf{B}=(T_G(Y_m), B, T_H(Z_k), B', \sum')$ pedig determinisztikus leszálló átcímkéző. Akkor létezik olyan $\mathbf{C}=(T_F(X_n), C, T_H(Z_k), c_0, \sum'')$ reguláris szűkítésű determinisztikus f-transzformátor, hogy teljesül a $\tau_{\mathbf{A}}\circ\tau_{\mathbf{B}}=\tau_{\mathbf{C}}$ egyenlőség.

Bizonyítás. Tekintsük a $\overline{\mathbf{B}}=(T_G(Y_m), \overline{B}, T_H(Z_k), b_0, \overline{\sum}')$ l-transzformátort, ahol $\overline{B}=B\cup\{b_0\}$ $(b_0\notin B)$, $\overline{\sum}'$ pedig $\sum'$-nek a következő szabályokkal való bővítésével adódik. Ha az $y_i\to b_q(y_i\in Y_m)$ szabály $\sum'$-ben van és $b\in B'$, akkor $y_i\to b_0q$ legyen $\overline{\sum}'$-ben. Hasonlóan, amennyiben az $f(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l)\to bq$ $(f\in F_l, l\geqq 0)$ szabály $\sum'$-ben van és $b\in B'$, akkor $f(b_1\xi_1, \ldots, b_l\xi_l)\to b_0q$ legyen $\overline{\sum}'$-ben. Azonnal látható, hogy $\overline{\mathbf{B}}$ leszálló átcimkéző és teljesül a $\tau_{\overline{\mathbf{B}}}=\tau_{\mathbf{B}}$ egyenlőség. Ezek után definiáljuk $\mathbf{C}$-t. Legyen $C=A\times\overline{B}$ és $c_0=(a_0, b_0)$. Definiáljuk továbbá a $\sum''$ halmazt a következő módon:

(i) az $(a, b)p\to q$ $(a\in A, b\in\overline{B}, p\in F_0\cup X_n, q\in T_H(Z_k))$ szabály akkor és csakis akkor van $\sum''$-ben, ha van olyan $q'(\in T_G(Y_m))$ fa, hogy az $ap\to q'$ szabály $\sum$-ban van és teljesül a $q'\Rightarrow^*_{\overline{\mathbf{B}}}bq$ deriváció,

(i) legyen az $\langle af(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q'(\ldots, a_{ij}\xi_i, \ldots), D\rangle$ $(a, a_{ij}\in A, f\in F_l, l>0)$ szabály $\sum$-ban és teljesüljön a $q'(\ldots, b_{ij}\xi_{ij}, \ldots)\Rightarrow^*_{\mathbf{B}}bq(\ldots, \xi_{ij}, \ldots)$ $(b_{ij}, b\in B)$ deriváció. Akkor az $\langle(a, b)f(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q(\ldots, (a_{ij}, b_{ij})\xi_i, \ldots), D'\rangle$ szabály, valamint $b\in B'$ esetén az $\langle(a, b_0)f(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to q(\ldots, (a_{ij}, b_{ij})\xi_i, \ldots), D'\rangle$ szabály is $\sum''$-ben van, ahol tetszőleges $i(=1, \ldots, l)$-re

$$D'(\xi_i)=\bigcap\left(\tau^{-1}_{\mathbf{A}(a_{ij})}(\tau^{-1}_{\mathbf{B}(b_{ij})}(T_H(Z_K)))\right)|(a_{ij}, b_{ij}) \text{ előfordul}$$

$$q(\ldots, (a_{ij}, b_{ij})\xi_i, \ldots)\text{-ben}\Big)\cap D(\xi_i).$$

Könnyen igazolható, hogy $\mathbf{C}$ determinisztikus reguláris szűkítésű f-transzformátor. ($D'(\xi_i)$ reguláris volta következik az I. 4.1., 4.11. és 4.13. tételekből.) A $\tau_{\mathbf{A}}\circ$ $\circ\tau_{\overline{\mathbf{B}}}=\tau_{\mathbf{C}}$ egyenlőség bizonyításához elegendő megmutatni az

$$(a, b)p\Rightarrow^*_{\mathbf{C}}q\Leftrightarrow(\exists\bar{q}\in T_G(Y_m))(ap\Rightarrow^*_{\mathbf{A}}\bar{q}\wedge\bar{q}\Rightarrow_{\overline{\mathbf{B}}}bq)\,((a, b)\in C, p\in T_F(X_n), q\in T_H(Z_K))$$

ekvivalencia helyességét, ami $h(p)$ szerinti indukcióval történhet. □

A következő segédtételben szereplő általánosított szekvenciális gépek által indukált leképezésre vonatkozóan az olvasó a fejezet végén levő Megjegyzések és hivatkozások részben talál útmutatást.

5.14. segédtétel. Legyen $\sigma(\subseteq X_n^* \times Y_m^*)$ determinisztikus általánosított szekvenciális gép által indukált leképezés, $T(\subseteq T_F(X_n))$ pedig tetszőleges erdő. Ekkor van olyan G rangolt ábécé és $\mathbf{B}=(T_F(X_n), B, T_G(Y_m), b_0, \sum)$ reguláris szűkítésű determinisztikus f-transzformátor, hogy teljesül a $\sigma(\mathrm{fr}(T))=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(T))$ egyenlőség.

Bizonyítás. Tekintsük az $\mathbf{A}=(X_n, A, a_0, Y_m, \delta, A')$ determinisztikus általánosított szekvenciális gépet (az X_n bemenő halmazzal, az A állapot-halmazzal, az a_0 kezdőállapottal, az Y_m kimenő halmazzal, a δ átmenet-kimenet függvénnyel és az A' végállapot-halmazzal). Megmutatjuk, hogy létezik olyan G rangolt ábécé és $\mathbf{B}=(T_F(X_n), B, T_G(Y_m), b_0, \sum)$ reguláris szűkítésű determinisztikus f-transzformátor, amely mellett teljesül az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(p))=\tau_{\mathbf{A}}(\mathrm{fr}(p))$ egyenlőség, ha $\mathrm{fr}(p)$ $(p\in T_F(X_n))$ az $\mathbf{A}$ által indukált leképezés értelmezési tartományában van. Továbbá tetszőleges $p(\in T_F(X_n))$ fa akkor és csakis akkor van $\tau_{\mathbf{B}}$ értelmezési tartományában, ha $\mathrm{fr}(p)$ benne van $\tau_{\mathbf{A}}$ értelmezési tartományában. Ebből nyilvánvalóan következik tételünk helyessége.

Tetszőleges $a_1, a_2(\in A)$ állapotra jelölje $T(a_1, a_2)$ mindazon $p(\in T_F(X_n))$ fák halmazát, amelyekre teljesül a $\delta(a_1, \mathrm{fr}(p))=(a_2, w)$ egyenlőség, ahol $w\in Y_m^*$. A véges automaták analízise alapján az előző egyenlőséget kielégítő $\mathrm{fr}(p)$ szavak halmaza reguláris nyelvet alkot. Következésképpen a II. 2.11.tétel szerint $T(a_1, a_2)$ reguláris erdő. Definiáljuk a $\mathbf{B}=(T_F(X_n), B, T_G(Y_m), B', \sum)$ reguláris szűkítésű f-transzformátort, ahol $B=A\times A\cup\{b_0\}$ és $B'=\{b_0\}$. Ezenkívül $G=F\cup\{g_{ai}|a\in A, i=1, \ldots, n\}$, ahol g_{ai} aritása megegyezik a $\delta(a, x_i)=(b, w)$ egyenlőséggel adott w szó hosszával. (Az F-beli szimbólumok aritásai G-ben ugyanazok, mint F-ben.) Továbbá $\sum$ a következő átírási szabályokból áll:

(1) tetszőleges $l(>0), f(\in F_l)$ és $a_1, a_2, \ldots, a_{l+1}(\in A)$ esetén az $\langle(a_1, a_{l+1})f(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to f((a_1, a_2)\xi_1, \ldots, (a_l, a_{l+1})\xi_l), D\rangle$ szabály $\sum$-ban van, ahol ξ_i $(1\leqq i\leqq l)$ értékkészlete a $D(\xi_i)=T(a_i, a_{i+1})$ erdő.

(2) ha $f\in F_0$ és $a\in A$, akkor az $(a, a)f\to f$ átírási szabály $\sum$-ban van,

(3) tetszőleges i $(1\leqq i\leqq n)$ és $(a_1, a_2)(\in A\times A)$ esetén, ha $\delta(a_1, x_i)=(a_2, w)$, akkor az $(a_1, a_2)x_i\to q$ szabály (a_1-től és x_i-től függő rögzített q-ra) $\sum$-ban van, ahol $\mathrm{fr}(q)=w$ (a G rangolt ábécé megválasztása folytán mindig van ilyen q),

(4) bármely $l(>0)$, $f(\in F_l)$ és $a_1, \ldots, a_{l+1}(\in A)$ esetén, ha $a_1=a_0$ és $a_{l+1}\in A'$, akkor a $\langle b_0 f(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to f((a_1, a_2)\xi_1, \ldots, (a_l, a_{l+1})\xi_l), D\rangle$ szabály $\sum$-ban van, ahol a ξ_i $(1\leqq i\leqq l)$ változó értelmezési tartománya a $D(\xi_i)=T(a_i, a_{i+1})$ erdő,

(5) tetszőleges i $(1\leqq i\leqq n)$ esetén, ha $\delta(a_0, x_i)=(a_1, w)$ és $a_1\in A'$, akkor a $b_0 x_i\to q$ szabály $\sum$-ban van, ahol $q(\in T_G(Y_m))$ olyan (az x_i-től függő) rögzített fa, amelyre teljesül az $\mathrm{fr}(q)=w$ egyenlőség.

(6) ha $a_0\in A'$ és $f\in F_0$, akkor a $b_0 f\to f$ szabály $\sum$-ban van.

A $\mathbf{B}$ reguláris szűkítésű f-transzformátor konstrukciójából világos, hogy $\mathbf{B}$ determinisztikus és teljesül rá az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(p))=\tau_{\mathbf{A}}(\mathrm{fr}(p))$ egyenlőség, ha $\mathrm{fr}(p)$ $(p\in T_F(X_n))$ a $\tau_{\mathbf{A}}$ leképezés értelmezési tartományában van. Továbbá, ha $\mathrm{fr}(p)$ nincs $\tau_{\mathbf{A}}$ értelmezési tartományában, akkor p sincs $\tau_{\mathbf{B}}$ értelmezési tartományában. □

Legyen $L(\subseteq Z_k)$ tetszőleges nyelv. Továbbá legyen $c_1(L, k+1)=\{(wz_{k+1})^n|w\in L, n\geqq 1\}$.

5.15. tétel. Legyen L' a $c_1(L, k+1)$ $(L\subseteq Z_k^*)$ nyelv olyan részhalmaza, amely bármely $w(\in L)$ szó esetén végtelen sok n-re tartalmazza a $(wz_{k+1})^n$ szót. Vegyük erdők

olyan K halmazát, amely zárt az átcímkézésre és az egyszerű reguláris beszúrásra nézve. Ha $L' \in \mathrm{fr}\,\mathscr{DF}_v(\mathscr{F}(K))$, akkor $L \in \mathrm{fr}\,\mathscr{DF}(K)$.

Bizonyítás. Vegyük az $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), A', \sum)$ f-transzformátort, a $\mathbf{B}=(T_G(Y_m), B, T_H(Z_{k+1}), b_0, \sum')$ t-indexű determinisztikus f-transzformátort, valamint az $L'=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(\tau_{\mathbf{A}}(T)))$ egyenlőséget kielégítő $T(\in K)$ erdőt. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $A'(=\{a_0\})$ egy-elemű halmaz. (Mivel K zárt az egyszerű reguláris beszúrásra nézve, ezt megtehetjük úgy, hogy A-hoz hozzáveszünk egy új a_0 állapotot, F-hez egy f' egy-változós műveleti szimbólumot, $\sum$-t pedig az $a_0 f'(\xi_1) \to a\xi_1$ $(a \in A')$ átírási szabályokkal bővítjük.)

Az $\mathbf{A}$ f-transzformátorhoz konstruáljuk meg az $\overline{\mathbf{A}}=(T_F(X_n), \bar{A}, T_G(Y_m), \bar{A}', \overline{\sum})$ f-transzformátort a következő módon. Az A halmaz álljon az összes $(a, \mathbf{b})$ párból, ahol $a \in A$, $\mathbf{b}$ pedig B elemeiből képzett $s(=0, 1, \ldots, t)$ hosszúságú sorozat. (Az üres sorozatra az $\emptyset$ jelölést fogjuk használni.) Továbbá tekintsük az $af(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to q(\ldots, a_{ij}\xi_i, \ldots)$ $(l>0, f \in F_l)$ átírási szabályt $\sum$-ból. Ha $\mathbf{b}=\langle b_1, \ldots, b_s\rangle$ $(s>0)$, továbbá léteznek olyan $q_{ij}(\in T_G(Y_m))$ és $t_u(\in T_H(Z_k))$ fák, amelyek mellett érvényesek az α_u: $b_u q(\ldots, q_{ij}, \ldots) \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} t_u$ $(u=1, \ldots, s)$ derivációk, akkor vegyük a $\mathbf{b}'=\langle b_{11}^{(ij)} \ldots$ $\ldots, b_{1r_1}^{(ij)}, \ldots, b_{s1}^{(ij)}, \ldots, b_{sr_s}^{(ij)}$ sorozatot, ahol $\langle b_{u1}^{(ij)}, \ldots, b_{ur_u}^{(ij)}\rangle$ $(u=1, \ldots, s)$ az α_u derivációnak a q_{ij} fa gyökeréhez tartozó állapot-sorozata. Akkor az $(a, \mathbf{b})f(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to q(\ldots,$ $(a_{ij}, \mathbf{b}')\xi_i, \ldots)$ átírási szabály legyen $\overline{\sum}$-ban, ha $r_1+\ldots+r_s \leqq t$. Az $(a, \emptyset)f(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to$ $\to q(\ldots, (a_{ij}, \emptyset)\xi_i, \ldots)$ szabály szintén legyen $\overline{\sum}$-ban. Ezenkívül, ha az $ap \to q$ $(p \in X_n \cup$ $\cup F_0)$ szabály $\sum$-ban van, akkor tetszőleges $b_1, \ldots, b_s(\in B, s \leqq t)$ mellett az $(a, \langle b_1, \ldots$ $\ldots, b_s\rangle)p \to q$ szabály legyen $\overline{\sum}$-ban. Az $(a, \emptyset)p \to q$ szabályt szintén vegyük $\overline{\sum}$-hoz. Végül A' álljon az $(a_0, \langle b_0\rangle)$ elemből.

Fenti konstrukciónkból világos, hogy fennáll a $\tau_{\mathbf{A}} \circ \tau_{\mathbf{B}} = \tau_{\overline{\mathbf{A}}} \circ \tau_{\mathbf{B}}$ egyenlőség. Az $\mathbf{A}$ f-transzformátor megkonstruálására annak az alábbi tulajdonsága miatt volt szükségünk. Legyen $p(\in T_F(X_n))$ tetszőleges fa, p' pedig p-nek a d csúcsához tartozó részfája. Tekintsük az

$$\alpha\colon a_0 p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} \bar{q}(\ldots, a_1 p', \ldots, a_j p', \ldots) \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} \bar{q}(\ldots, q_1', \ldots, q_j', \ldots) = q(\in \tau_{\mathbf{B}}^{-1}(T_H(Z_{k+1})))$$

derivációt, ahol $\langle a_1, \ldots, a_j\rangle$ α-nak d-hez tartozó állapotsorozata és $a_i p' \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q_i$ $(i=$ $=1, \ldots, j)$. Az α derivációnak megfelelő $\bar{A}$-beli β derivació

$$\beta\colon (a_0, \langle b_0\rangle)p \Rightarrow_{\bar{\mathbf{A}}}^{*} \bar{q}(\ldots, (a_1, \mathbf{b}_1)p', \ldots, (a_j, \mathbf{b}_j)p', \ldots) \Rightarrow_{\bar{\mathbf{A}}}^{*} \bar{q}(\ldots, q_1', \ldots, q_j', \ldots) = q$$

lesz, ahol $\mathbf{b}_i$ $(i=1, \ldots, j)$ a $\bar{q}(\ldots, q_1', \ldots, q_j', \ldots)$ fa γ: $b_0 q \Rightarrow_{\mathbf{B}}^{*} q'(q' \in T_H(Z_{k+1}))$ derivációjának a q_i' részfa gyökeréhez tartozó állapot-sorozata. Következésképpen, ha teljesül az $(a_{i_1}, \mathbf{b}_{i_1})=(a_{i_2}, \mathbf{b}_{i_2})$ $(1 \leqq i_1, i_2 \leqq j)$ egyenlőség, akkor a γ derivációnak a q fa q_{i_1}' és q_{i_2}' részfáinak gyökereihez tartozó állapot-sorozatai megegyeznek. A következőkben az egyszerűbb írásmód kedvéért feltételezzük, hogy maga $\mathbf{A}$ rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Tekintsünk most egy $(wz_{k+1})^l$ szót $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(\tau_{\mathbf{A}}(T)))$-ből, ahol $l>2t+1$. Pontosabban, legyen $p(\in T)$ olyan fa, amely mellett az $a_0 p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q$ $(q \in T_G(Y_m))$ derivació esetén teljesül a $(wz_{k+1})^l=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(q))$ egyenlőség. Legyen p' a p fa egy részfája, és előző derivációnkat írjuk a részletesebb $\alpha\colon a_0 p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} \bar{q}(\ldots, a_1 p', \ldots, a_j p', \ldots) \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} \bar{q}(\ldots, q_1', \ldots,$ $\ldots, q_j', \ldots)=q$ alakban, ahol $\langle a_1, \ldots, a_j\rangle$ α-nak a p' részfa gyökeréhez tartozó állapotsorozata és $a_i p' \Rightarrow_{\mathbf{A}}^{*} q_i'$ $(i=1, \ldots, j)$. Tegyük fel, hogy az a állapot ismétlődéssel fordul elő az $\langle a_1, \ldots, a_j\rangle$ sorozatban, és a előfordulásai éppen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_v}$. Akkor a β: $b_0 q \Rightarrow_{B}^{*} q'$ $(q' \in T_H(Z_{k+1}))$ derivációnak a $q_{i_1}', \ldots, q_{i_v}'$ részfák gyökereihez tartozó

állapotsorozatai (**A**-ra tett feltevések szerint) megegyeznek. Legyen ez a közös állapotsorozat $\langle b_1, \ldots, b_s \rangle$ $(s \leqq t)$.

A $q'_{i_1}, \ldots, q'_{i_v}$ fák között legyen q'_{i_1} az, amelyikre az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}(b_1)}(q'_{i_1})) \ldots \mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}(b_s)}(q'_{i_1}))$ szóban a legtöbb z_{k+1} fordul elő. A q fában a $q'_{i_1}, \ldots, q'_{i_v}$ részfák tekintett előfordulásait helyettesítsük a q'_{i_1} fával, és a kapott fát jelölje $\bar{q}$. Állítjuk, hogy $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(\bar{q})) = (wz_{k+1})^{l'}$ és $l' \geqq l$. Ennek belátásához különböztessük meg az alábbi két esetet:

(i) Van olyan b_r $(1 \leqq r \leqq s)$, hogy az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}(b_r)}(q'_{i_1}))$ szóban z_{k+1} legalább kétszer előfordul. Ekkor állításunk nyilvánvalóan teljesül.

(ii) z_{k+1} legfeljebb egyszer fordul elő az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}(b_1)}(q'_{i_1})), \ldots, \mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}(b_s)}(q'_{i_1}))$ szavakban. Vegyünk egy rögzített r-t $(1 < r \leqq v)$ és az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(q))$ szónak a q'_{i_r} részfa q-ban való tekintett előfordulásának megfelelő

$$\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(q)) = w_1 \mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}(b_1)}(q'_{i_r}))w_2 \mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}(b_2)}(q'_{i_r}))w_3 \ldots w_s \mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}(b_s)}(q'_{i_r}))w_{s+1}$$

$$(w_1, \ldots, w_{s+1} \in Z^*_{k+1})$$

felbontását. Minthogy $l > 2t+1$ és $s \leqq t$, ezért van olyan w_e $(1 \leqq e \leqq s+1)$, amelyben z_{k+1} legalább kétszer fordul elő. Ebből ismét következik állításunk helyessége.

Ezzel azt kaptuk, hogy ha a-nak minden egyes $a_{i_1}, \ldots, a_{i_v}$ előfordulásánál az $ap' \Rightarrow^*_{\mathbf{A}} q'_{i_1}$ derivációt alkalmazzuk, akkor a kapott $\bar{q}$ fa **B** mellett deriváltja a $(wz_{k+1})^{l'}$ szót szolgáltatja, ahol $l' \geqq l$. Következésképpen, ha **A** átírási szabályainak ilyen módon való alkalmazását előírjuk, akkor olyan determinisztikus f-transzformátorhoz jutunk, amelynek **B**-vel való kompozíciója alkalmas $T'(\subseteq T_F(X_n))$ erdő mellett bármely $w(\in L)$ szóhoz végtelen sok $(wz_{k+1})^l$ $(l \geqq 1)$ szót, és csak ilyeneket szolgáltat. Következőként azt mutatjuk meg, hogy ez formálisan miként érhető el egy $\mathbf{A}_1$ f-transzformátor megadásával.

Tekintsük az $\mathbf{A}_1 = (T_F(\bar{X}), A_1, T_G(Y_m), A'_1, \sum_1)$ f-transzformátort, ahol $A_1 = A = \{a_1, \ldots, a_s\}$ és $A'_1 = A'$. Továbbá

(1) $\bar{X} = \{(x_i, (c_1, \ldots, c_s)) \mid 1 \leqq i \leqq n,\ c_j = (a_j x_i, q_j),$ ha $(a_j x_i, q_j) \in \sum$ és $c_j = *$ különben, $q_j \in T_G(Y_m),\ j = 1, \ldots, s\}$,

(2) $\bar{F}_l = \{(f, (c_1, \ldots, c_s)) \mid f \in F_l,\ c_j = (a_j f, q_j),$ ha $(a_j f, q_j) \in \sum$ és $c_j = *$ különben, $q_j \in T_G(Y_m \cup A\Xi_l),\ j = 1, \ldots, s\}$ $(l \geqq 0)$,

ahol az (1) és (2) pontban szereplő $*$ egy új szimbólum. Legyen $\bar{F} = \cup(\bar{F}_l \mid l = 0, 1, \ldots)$, $\sum_1$-nek pedig vegyük az alábbi $\sum'_1$ és $\sum'_2$ halmazok egyesítését:

$$\sum'_1 = \{a_j(x_i, (c_1, \ldots, c_s)) \to q_j \mid 1 \leqq j \leqq s,\ (x_i, (c_1, \ldots, c_s)) \in \bar{X},\ c_j = (a_j x_i, q_j)\},$$

és

$$\sum'_2 = \{a_j(f, (c_1, \ldots, c_s)) \to q_j \mid 1 \leqq j \leqq s,\ (f, (c_1, \ldots, c_s)) \in \bar{F},\ c_j = (a_j f, q_j)\}.$$

Világos, hogy $\mathbf{A}_1$ determinisztikus f-transzformátor.

Ezután legyen $\mathbf{D} = (T_F(X_n), \{d_0\}, T_F(\bar{X}), \{d_0\}, \sum_{\mathbf{D}})$ a

$$\sum_{\mathbf{D}} = \{x_i \to d_0(x_i, (c_1, \ldots, c_s)) \mid (x_i, (c_1, \ldots, c_s)) \in \bar{X}\} \cup$$

$$\cup \{f(d_0\xi_1, \ldots, d_0\xi_l) \to d_0(f, (c_1, \ldots, c_s))(\xi_1, \ldots, \xi_l) \mid f \in F_l,\ (f, (c_1, \ldots, c_s)) \in \bar{F}_l,\ l \geqq 0\}$$

szabály-halmazzal adott leszálló átcímkéző. Legyen $\tau_{\mathbf{D}}(T) = T'$. Mivel K zárt az átcímkézésre, így teljesül a $T' \in K$ tartalmazás. Másrészt az $\mathbf{A}_1$ f-transzformátor megkonstruálása előtt tett megjegyzéseink szerint az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(\tau_{\mathbf{A}_1}(T')))$ nyelv végtelen sok $(wz_{k+1})^l$ $(l \geqq 1)$ alakú és csak ilyen alakú szót tartalmaz.

Végül vegyük a $\mathbf{C}=(Z_{k+1}, \{c_0, c_1\}, c_0, Z_k, \delta, \{c_1\})$ determinisztikus általánosított szekvenciális gépet, amelynek δ átmenet-kimenet függvényét a $\delta(c_0, z_i)=(c_0, z_i)$ $(i=1, \ldots, k)$, $\delta(c_0, z_{k+1})=(c_1, \lambda)$ és $\delta(c_1, z_i)=(c_1, \lambda)$ $(i=1, \ldots, k+1)$ összefüggésekkel értelmezzük. Világos, hogy tetszőleges $(wz_{k+1})^l$ $(l\geqq 1, w\in Z_k)$ szóra teljesül a $\tau_{\mathbf{C}}((wz_{k+1})^l)=w$ egyenlőség. Jelölje $\mathbf{C}_1$ a $\mathbf{C}$ általánosított szekvenciális géphez az 5.14. segédtételben megadott reguláris szűkítésű determinisztikus f-transzformátort. Akkor fennáll az $L=\mathrm{fr}\,((\tau_{\mathbf{A}_1}\circ\tau_{\mathbf{B}}\circ\tau_{\mathbf{C}})(T'))$ egyenlőség. Így az 5.12. és 5.13. tételek ismételt alkalmazásával, valamint a 4.15. tétel felhasználásával (K-ra tett kikötéseink miatt) azt kapjuk, hogy $(\tau_{\mathbf{A}_1}\circ\tau_{\mathbf{B}}\circ\tau_{\mathbf{C}})(T')$ alkalmas $T''(\in K)$ mellett megadható egyetlen determinisztikus f-transzformációval is, azaz $L\in\mathrm{fr}\,\mathscr{D}\mathscr{F}(K)$. (Vegyük észre, hogy az átcimkézésre való zártság a 4.2. segédtétel miatt maga után vonja a reguláris erdőkkel való metszet képzésére való zártságot.) □

5.16. tétel. Legyen K erdők olyan osztálya, amely zárt az egyszerű reguláris beszúrásra nézve. Ha $L=\mathrm{fr}(T)(\subseteq X_n^*, T\in K)$, akkor valamely $\mathbf{A}$ lineáris nemtörlő f-transzformátorra és $T'(\in K)$ erdőre teljesül a $\mathrm{reb}(L, n+1)=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T'))$ egyenlőség.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $T\subseteq T_F(X_n)$, $\bar{\varphi}$ pedig legyen a $\varphi: F\cup X\to\Delta$ leképezéssel adott egyszerű reguláris beszúrás. Vegyük az $\mathbf{A}=(T_G(X_n), \{a_0\}, T_H(X_{n+1}), a_0, \sum)$ f-transzformátort, ahol $G=F\cup\varphi(F\cup X_n)$ és $H=G\cup\{g_0, g_3\}$ $(H_i=G_i, i=1, 2, 4, 5, \ldots; H_0=G_0\cup\{g_0\}, H_3=G_3\cup\{g_3\})$. Továbbá legyen

$$\sum=\{a_0\varphi(\sigma)(\xi_1)\to g_3(x_{n+1}, a_0\xi_1, x_{n+1}),\ a_0\varphi(\sigma)(\xi_1)\to g_3(g_0, a_0\xi_1, x_{n+1}),$$

$$a_0\varphi(\sigma)(\xi_1)\to g_3(x_{n+1}, a_0\xi_1, g_0),\ a_0\varphi(\sigma)\xi_1\to g_3(g_0, a_0\xi_1, g_0)\,|\,\sigma\in F\cup X_n\}\cup$$

$$\cup\{a_0x_i\to x_i,\ a_0f(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to f(a_0\xi_1, \ldots, a_0\xi_l)\,|\,i=1, \ldots, n;\ f\in F_l,\ l\geqq 0\}.$$

Konstrukciónkból nyilvánvaló, hogy $\mathbf{A}$ lineáris nemtörlő f-transzformátor és teljesül rá a $\mathrm{reb}(L, n+1)=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(\bar{\varphi}(T)))$ egyenlőség. Másrészt a K osztályra tett megszorításaink szerint a $\bar{\varphi}(T)$ erdő K-ban van. □

Tételünkből a 3.8., 3.11. és 5.8. tételek alapján azonnal adódik az

5.17. következmény. Tetszőleges $n(\geqq 1)$-re $\mathrm{fr}\,\mathscr{F}^n(R)$ zárt a reguláris behelyettesítésre nézve.

5.18. tétel. Legyen K erdők olyan osztálya, amely zárt az egyszerű reguláris beszúrásra nézve. Ha $L=\mathrm{fr}(T)$ $(\subseteq X_n^*, T\in K)$, akkor van olyan $\mathbf{A}$ determinisztikus f-transzformátor és $T'(\in K)$ erdő, hogy érvényes a $c_1(L, n+1)=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T'))$ egyenlőség.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $T\subseteq T_F(X_n)$, $\bar{\varphi}$ pedig legyen a $\varphi: F\cup X_n\to\Delta$ leképezéssel adott egyszerű reguláris beszúrás. Tekintsük az $\mathbf{A}=(T_G(X_n), A, T_H(X_{n+1}), A', \sum)$ f-transzformátort, ahol $G=F\cup\varphi(F\cup X_n)$, $H=G\cup\{g_0, g_3\}$ $(H_i=G_i, i=1, 2, 4, 5, \ldots; H_0=G_0\cup\{g_0\}, H_3=G_3\cup\{g_3\})$, $A=\{a_0, a_1, a_2\}$ és $A'=\{a_0\}$. Továbbá legyen

$$\sum=\{a_0\varphi(\sigma)(\xi_1)\to g_3(a_1\xi_1, a_2\xi_1, x_{n+1}),\ a_1\varphi(\sigma)(\xi_1)\to$$

$$\to g_3(a_1\xi_1, a_2\xi_1, x_{n+1})\,|\,\sigma\in F\cup X_n\}\cup\{a_2\varphi(\sigma)(\xi_1)\to a_2\xi_1\,|\,\sigma\in F\cup X_n\}\cup$$

$$\cup\{a_1x_i\to g_0,\ a_1f(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to g_0\,|\,i=1, \ldots, n;\ f\in F_l,\ l\geqq 0\}\cup$$

$$\cup\{a_2x_i\to x_i,\ a_2f(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to f(a_2\xi_1, \ldots, a_2\xi_l)\,|\,i=1, \ldots, n;\ f\in F_l,\ l\geqq 0\}.$$

Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{A}$ determinisztikus f-transzformátor kielégíti a $c_1(L, n+1)=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(\bar{\varphi}(T)))$ egyenlőséget. Másrészt mivel K zárt az egyszerű reguláris beszúrásra nézve, ezért $\bar{\varphi}(T)\in K$. □

Vegyük az $L(\subseteq X_n^*)$ nyelvet, és legyen $c_2(L, n+1)=\{wx_{n+1}w|w\in L\}$. Érvényes az

5.19. tétel. Legyen K erdők olyan osztálya, amely zárt az átcímkézésre és az egyszerű reguláris beszúrásra nézve. Ha az $L(\subseteq Y_m^*)$ nyelvre teljesül a $c_2(L, m+1)\in \in \mathrm{fr}\mathcal{F}(K)$ tartalmazás, akkor $L\in \mathrm{fr}\mathcal{DF}(K)$.

Bizonyítás. Tételünk bizonyításának ötlete hasonló az 5.15. tétel bizonyításához, de annál sokkal egyszerűbb.

Legyen $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_{m+1}), a_0, \sum)$ olyan f-transzformátor, amelyre egy $T(\in K, T\subseteq T_F(X_n))$ erdő mellett teljesül a $c_2(L, m+1)=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T))$ egyenlőség. Tekintsünk egy $a_0p\Rightarrow_{\mathbf{A}}^* q\,(p\in T, q\in T_G(Y_{m+1}))$ derivációt, és legyen $\mathrm{fr}(q)=wy_{m+1}w$. Vegyük a p fának egy d csúcsához tartozó p' részfáját, és előző derivációnkat írjuk a részletesebb

$$\alpha\colon a_0p\Rightarrow_{\mathbf{A}}^*\bar{q}(\ldots, a_1p', \ldots, a_kp', \ldots)\Rightarrow_{\mathbf{A}}^*\bar{q}(\ldots, q_1, \ldots, q_k, \ldots)=q$$

alakban, ahol $\langle a_1, \ldots, a_k\rangle$ az α derivációnak a d csúcshoz tartozó állapot-sorozata és $a_ip'\Rightarrow_{\mathbf{A}}^* q_i$ $(i=1, \ldots, k)$. Tegyük fel, hogy az a állapot legalább kétszer előfordul az $\langle a_1, \ldots, a_k\rangle$ sorozatban, és legyen a_{i_1} és a_{i_2} $(i_1<i_2)$ a két ilyen előfordulása. Akkor a q_{i_1} és q_{i_2} részfák szóban forgó előfordulásai mellett $\mathrm{fr}(q)$ felírható $\mathrm{fr}(q)=$ $=w_1\mathrm{fr}(q_{i_1})w_2\mathrm{fr}(q_{i_2})w_3$ alakban. Másrészt a $w_1\mathrm{fr}(q_{i_j})w_2\,\mathrm{fr}(q_{i_j})w_3$ $(j=1, 2)$ szó is az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T))$ halmazban van. Így teljesülnie kell az $\mathrm{fr}(q_{i_1})=\mathrm{fr}(q_{i_2})$ egyenlőségnek. Ez azt jelenti, hogy minden olyan t-re $(1\leqq t\leqq k)$, amelyre teljesül az $a=a_t$ egyenlőség, az $a_tp'\Rightarrow_{\mathbf{A}}^* q_t$ derivació helyettesíthető az $a_{i_1}p'\Rightarrow_{\mathbf{A}}^* q_{i_1}$ derivációval. Másszóval, ha $\mathbf{A}$ átírási szabályainak alkalmazását ezen lehetőségnek megfelelően előírjuk, akkor olyan determinisztikus f-transzformátorhoz jutunk, amely a $c_2(L, m+1)$ nyelvet szolgáltatja. Ehhez elegendő az 5.15. tétel bizonyításában szereplő $\mathbf{A}_1$ f-transzformátort (Y_m helyett Y_{m+1}-gyel) és a megfelelő átcímkézést vennünk. Így alkalmas $T'(\in K)$ erdő mellett teljesül a $c_2(L, m+1)=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}_1}(T'))$ egyenlőség.

Végül vegyük az 5.15. tétel bizonyításában megadott $\mathbf{C}$ determinisztikus általánosított szekvenciális gépet (Z_{k+1}, ill. z_{k+1} helyett Y_{m+1}, ill. y_{m+1}-gyel) és a megfelelő $\mathbf{C}_1$ reguláris szűkítésű f-transzformátort. Ekkor teljesül az $L=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{C}_1}(\tau_{\mathbf{A}_1}(T')))$ egyenlőség. Ebből a 4.15., 5.12. és 5.13. tételek felhasználásával azt kapjuk, hogy alkalmas $\mathbf{B}$ determinisztikus f-transzformátor és $T''(\in K)$ mellett érvényes az $L=$ $=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(T''))$ egyenlőség. □

5.20. tétel. Legyen K erdők olyan osztálya, amely zárt az egyszerű reguláris beszúrásra és a lineáris nemtörlő f-transzformációk alkalmazására nézve. Ha az $L(\subseteq X_n^*)$ nyelvre és $T(\in K)$ erdőre teljesül az $L=\mathrm{fr}(T)$ egyenlőség, akkor van olyan $\mathbf{A}$ kétindexű (felszálló) homomorfizmus és $T''(\in K)$ erdő, hogy érvényes a $c_2(L, n+1)=$ $=\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T''))$ összefüggés.

Bizonyítás. Legyen $T(\subseteq T_F(X_n))$ a tételben szereplő erdő, $\bar{\varphi}$ a $\varphi\colon F\cup X_n\to\Delta$ leképezéssel megadott egyszerű reguláris beszúrás, és tekintsük a $T'=\bar{\varphi}(T)$ erdőt.

Vegyük a $\mathbf{B}=(T_G(X_n), \{b_0, b_1\}, T_G(X_n), b_0, \sum)$ lineáris nemtörlő f-transzformátort, ahol $G=F\cup\varphi(F\cup X_n)$, a $\sum$ halmazt pedig a

$$\sum=\{b_0\varphi(\sigma)(\xi_1)\to\varphi(\sigma)(b_1\xi_1),\ b_1\varphi(\sigma)(\xi_1)\to b_1(\xi_1)|\sigma\in F\cup X_n\}\cup$$
$$\cup\{b_1f(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to f(b_1\xi_1, \ldots, b_1\xi_l)|f\in F_l,\ l\geqq 0\}\cup$$
$$\cup\{b_1x_i\to x_i|i=1, \ldots, n\}$$

egyenlőséggel definiáljuk.

Világos, hogy $T''=\tau_B(T')$ a T-beli fák gyökerei alá történő 1 hosszúságú beszúrással adódik. Továbbá K-ra tett feltevéseink szerint $T''\in K$.

Most tekintsük az $\mathbf{A}=(T_G(X_n), \{a_0\}, T_H(X_{n+1}), a_0, \Sigma')$ f-transzformátort, ahol $H=G\cup\{g\}$ $(H_i=G_i, i\neq 3;\ H_3=G_3\cup\{g\})$, Σ' pedig a

$$\Sigma' = \{a_0\varphi(\sigma)(\xi_1)\to g(a_0\xi_1, x_{n+1}, a_0\xi_1)|\sigma\in F\cup X_n\}\cup$$
$$\cup\{a_0 f(\xi_1, \ldots, \xi_l)\to f(a_0\xi_1, \ldots, a_0\xi_l)|f\in F_l,\ l\geqq 0\}\cup$$
$$\cup\{a_0 x_i\to x_i|\, i=1, \ldots, n\}$$

egyenlőséggel adódik.

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{A}$ kétindexű homomorfizmus és teljesül rá a $c_2(L, n+1)=$ $=\mathrm{fr}(\tau_A(T''))$ egyenlőség. □

5.21. segédtétel. Ha $\mathrm{fr}\,\mathscr{DF}_v(R)\subsetneqq\mathrm{fr}\,\mathscr{F}(R)$, akkor tetszőleges $n(\geqq 1)$ esetén teljesülnek az

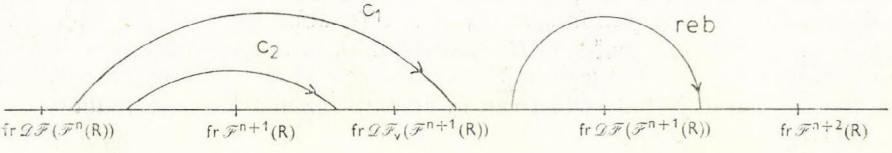
$$\mathrm{fr}\,\mathscr{F}^n(R)\subsetneqq\mathrm{fr}\,\mathscr{DF}_v(\mathscr{F}^n(R))\subsetneqq\mathrm{fr}\,\mathscr{DF}(\mathscr{F}^n(R))\subsetneqq\mathrm{fr}\,\mathscr{F}^{n+1}(R)$$

tartalmazások.

Bizonyítás. Segédtételünk bizonyítását n szerinti teljes indukcióval végezzük. (Az 5.5. következmény, ill. az 5.8. tétel szerint a felszálló n-felületi erdők zártak az átcímkézésre, ill. egyszerű reguláris beszúrásra, az 5.3. tétel szerint pedig a lineáris nemtörlő f-transzformációkra. Ezeket az eredményeket bizonyításunkban hivatkozás nélkül fogjuk felhasználni.)

Legyen $n=1$. Az 5.10. tétel és az 5.17. következmény szerint teljesül az $\mathrm{fr}\,\mathscr{DF}(R)\subsetneqq\mathrm{fr}\,\mathscr{F}(R)$ tartalmazás. Ebből az 5.19. és 5.20. tételek felhasználásával az $\mathrm{fr}\,\mathscr{F}(R)\subsetneqq\mathrm{fr}\,\mathscr{DF}_v(\mathscr{F}(R))$ összefüggéshez jutunk. Ugyancsak az $\mathrm{fr}\,\mathscr{DF}(R)\subsetneqq\mathrm{fr}\,\mathscr{F}(R)$ tartalmazásból az 5.15. és 5.18. tételek alkalmazásával az $\mathrm{fr}\,\mathscr{DF}_v(\mathscr{F}(R))\subsetneqq\mathrm{fr}\,\mathscr{DF}(\mathscr{F}(R))$ összefüggés adódik. Ezen utóbbi összefüggésből ismét az 5.10. tétel és az 5.17. következmény segítségével az $\mathrm{fr}\,\mathscr{DF}(\mathscr{F}(R))\subsetneqq\mathrm{fr}\,\mathscr{F}^2(R)$ tartalmazás adódik, ami az $n=1$ eset bizonyításának befejezését jelenti.

Az n-ről $(n+1)$-re való áttérést az alábbi ábra mutatja.



Ezzel segédtételünk bizonyítást nyert. □

A jelen rész főeredményének bizonyításához be kell vezetnünk még egy fogalmat.

Legyen n egy rögzített természetes szám, és tekintsük a nemnegatív egész számokból képzett n-esek halmazát (azaz n-dimenziós vektorokat). Ezen n-esek összeadását és egész számmal való szorzását komponensenként végezzük. Ilyen n-esek egy S halmazát *lineárisnak* nevezzük, ha van olyan $k(\geqq 0)$ egész szám és vannak olyan $v_0, \ldots, v_k$ n-esek, hogy S az összes

$$v_0+\sum_{i=1}^{k} a_i v_i$$

alakú n-esből áll, ahol a_i-k a nemnegatív egész számok halmazán futnak végig. Továbbá n-esek egy halmaza *féllineáris*, ha előáll véges sok lineáris halmaz egyesítéseként.

Tekintsük az X_n halmazt, és legyen Par az X_n^* halmaznak a nemnegatív egész számokból képzett n-esek halmazába való azon leképezése, amelyet a

$$\mathrm{Par}(w) = \left(N_{x_1}(w), \ldots, N_{x_n}(w)\right) \quad (w \in X_n^*)$$

egyenlőséggel definiálunk, ahol $N_{x_i}(w)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ az x_i szimbólum w-beli előfordulásának számát jelöli.

Ha $L(\subseteq X_n^*)$ tetszőleges nyelv, akkor legyen

$$\mathrm{Par}(L) = \{\mathrm{Par}(w) | w \in L\}.$$

A Par leképezést *Parikh-függvénynek* nevezzük.

A formális nyelvek elméletéből jól ismert az

5.22. tétel. Ha az $L(\subseteq X_n^*)$ nyelv környezetfüggetlen, akkor $\mathrm{Par}(L)$ féllineáris.

Érvényes az

5.23. tétel. Legyen $T(\subseteq T_F(X_n))$ tetszőleges erdő, $\mathbf{A} = (T_F(X_n), A, T_G(Y_m), a_0, \sum)$ pedig k-indexű determinisztikus f-transzformátor. Akkor van olyan $\mathbf{B} = (T_F(X_n), B, T_H(Y_m), b_0, \sum')$ lineáris determinisztikus f-transzformátor, hogy érvényes a $\mathrm{Par}(\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T))) = \mathrm{Par}(\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(T)))$ egyenlőség.

Bizonyítás. A $\sum$ halmazban szereplő átírási szabályok jobb oldalainak halmaza legyen $Q = \{q_1, \ldots, q_t\}$. Tetszőleges i $(1 \leqq i \leqq t)$ esetén jelölje q_i' azt a fát, amelyet úgy kapunk, hogy q_i-ben az összes $a\xi$ $(a \in A, \xi \in \Xi)$ részfát egy G_0-beli rögzített szimbólummal helyettesítjük. (Nyilván feltehetjük, hogy $G_0 \neq \emptyset$.) Továbbá legyen r az $\mathrm{fr}(q_{i_1}') \ldots \mathrm{fr}(q_{i_k}')$ $(q_{i_j} \in Q; j = 1, \ldots, k)$ szavak hosszainak maximuma, v pedig a legnagyobb olyan egész szám, amelyre $F_v \neq \emptyset$. Mármost legyen H az a hangolt ábécé, amelyre $H_i = \{h_i\}$, ha $i \leqq r + v$, és $H_i = \emptyset$ a többi esetben.

Ezek után rátérünk a $\mathbf{B}$ f-transzformátor megadására. B álljon az összes $\langle a_1, \ldots, a_u \rangle$ $(a_i \in A, i = 1, \ldots, u, 1 \leqq u \leqq k)$ sorozatból, és legyen $b_0 = \langle a_0 \rangle$. Az $\langle a_1, \ldots, a_u \rangle x_i \to h(y_{j1}, \ldots, y_{js})$ $(\langle a_1, \ldots, a_u \rangle \in B, 1 \leqq i \leqq n; y_{j1}, \ldots, y_{js} \in Y_m)$ szabály $\sum'$-ben van, ahol $h (\in H)$ az $\langle a_1, \ldots, a_u \rangle$ és i függvényében rögzített, az $a_r x_i \to q_r$ $(r = 1, \ldots, u)$ szabályok $\sum$-ban vannak és $\mathrm{fr}(q_1) \ldots \mathrm{fr}(q_u) = y_{j1} \ldots y_{js}$. Továbbá az $\langle a_1, \ldots, a_u \rangle f(\xi_1, \ldots, \xi_t) \to h(y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}, \mathbf{a}_1 \xi_1, \ldots, \mathbf{a}_l \xi_l)$ $(h \in H)$ szabály az $\langle a_1, \ldots, a_u \rangle$ és f függvényében rögzített h és $y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}$ mellett legyen $\sum'$-ben, ha az $a_i f(\xi_1, \ldots, \xi_l) \to q_i$ szabály minden i-re $(i = 1, \ldots, u)$ a $\sum$ halmazban van és érvényes az alábbi (1)—(3) állítás.

(1) $y_{i_1}, \ldots, y_{i_s} \in Y_m$,

(2) $\mathrm{fr}(q_1') \ldots \mathrm{fr}(q_u') = y_{i_1} \ldots y_{i_s}$,

(3) $\mathbf{a}_i$ $(1 \leqq i \leqq l)$ a $q_1, \ldots, q_u$ fák $a\xi_i$ $(a \in A)$ alakú részfáinak gyökerénél előforduló a állapotokból a fák ezen sorrendjének megfelelően képzett sorozat (a fákban balról jobbra haladva) és $\mathbf{a}_i$ hossza legfeljebb k. (Természetesen előfordulhat, hogy valamely i-re $(1 \leqq i \leqq l)$ nincs ilyen sorozat.)

Világos, hogy $\mathbf{B}$ lineáris determinisztikus f-transzformátor. Továbbá az is könnyen látható, hogy ha $p(\in T_F(X_n))$, $q(\in T_G(Y_m))$ és $\bar{q}(\in T_H(Y_m))$ tetszőleges fák, α: $a_0 p \Rightarrow_{\mathbf{A}}^* q$ és β: $b_0 p \Rightarrow_{\mathbf{B}}^* \bar{q}$ pedig derivációk, akkor a β derivációnak a p fa d csúcsához tartozó állapot-sorozata legfeljebb egy-elemű és ez az elem (amennyiben létezik) megegyezik α-nak a d csúcshoz tartozó állapot-sorozatával, és fordítva. Végül az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(T))$ nyelv szavai az $\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T))$ nyelv szavainak permutációi, azaz $\mathrm{Par}(\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T))) = \mathrm{Par}(\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{B}}(T)))$. □

Tételünkből a II. 2.9. és 5.22. tételek, valamint a 4.7. következmény felhasználásával azonnal adódik az

5.24. következmény. Legyen $T(\in T_F(X_n))$ reguláris erdő, $\mathbf{A}=(T_F(X_n), A, T_G(Y_m), a_0, \sum)$ pedig véges indexű determinisztikus f-transzformátor. Akkor $\mathrm{Par}(\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T)))$ féllineáris.

Ezzel minden előkészületet megtettünk a transzformációs nyelvek és a felületi halmazok hierarchiájára vonatkozó tételeink kimondásához és bizonyításához.

5.25. tétel. Teszőleges $n(\geqq 1)$ esetén teljesülnek az $\mathrm{fr}\,\mathscr{F}^n(R) \subsetneqq \mathrm{fr}\,\mathscr{DF}_v(\mathscr{F}^n(R)) \subsetneqq \subsetneqq \mathrm{fr}\,\mathscr{DF}(\mathscr{F}^n(R)) \subsetneqq \mathrm{fr}\,\mathscr{F}^{n+1}(R)$ tartalmazások.

Bizonyítás. Tételünk igazolásához az 5.21. segédtétel szerint elegendő megmutatnunk, hogy érvényes az $\mathrm{fr}\,\mathscr{DF}_v(R) \subsetneqq \mathrm{fr}\,\mathscr{F}(R)$ tartalmazás. Az 5.24. következmény alapján ezen utóbbi összefüggés bizonyítást nyer, ha megmutatjuk olyan $T(\subseteqq T_F(X_n))$ reguláris erdő és $\tau(\subseteqq T_F(X_n) \times T_G(Y_m))$ f-transzformáció létezését, amelyre $\mathrm{Par}(\mathrm{fr}(\tau(T)))$ nem féllineáris. A 4.8. példában szereplő T erdőt és az ugyanabban a példában megadott $\tau_{\mathbf{A}}$ f-transzformációt véve a $\mathrm{Par}(\mathrm{fr}(\tau_{\mathbf{A}}(T))) = \{\langle 2^k \rangle | k = 1, 2, \ldots\}$ halmazhoz jutunk, amely nyilvánvalóan nem féllineáris. □

Tételünkből közvetlenül folyik az

5.26. következmény. Tetszőleges n természetes számra érvényesek az $\mathrm{fr}\,\mathscr{F}^n(R) \subsetneqq \mathrm{fr}\,\mathscr{F}^{n+1}(R)$, $\mathscr{F}^n(R) \subsetneqq \mathscr{F}^{n+1}(R)$ és $\mathscr{F}^n \subsetneqq \mathscr{F}^{n+1}$ tartalmazások.

Most megadjuk a transzformációs nyelvek, felületi erdők és fatranszformációk további két rendszerét.

5.27. tétel. Tetszőleges n természetes számra teljesülnek az $\mathrm{fr}\,\mathscr{F}^n(R) \subsetneqq \subsetneqq \mathrm{fr}\,\mathscr{L}^{n+1}(R) \subsetneqq \mathrm{fr}\,\mathscr{F}^{n+1}(R)$ tartalmazások.

Bizonyítás. Az $\mathrm{fr}\,\mathscr{F}^n(R) \subseteqq \mathrm{fr}\,\mathscr{L}^{n+1}(R) \subseteqq \mathrm{fr}\,\mathscr{F}^{n+1}(R)$ összefüggések a 3.1. és 3.8. tételek, valamint a 4.7. következmény alapján nyilvánvalóan teljesülnek. Az 5.21. segédtétel és az 5.25. tétel bizonyításának felhasználásával azt kapjuk, hogy $\mathrm{fr}\,\mathscr{F}^n(R)$ az $\mathrm{fr}\,\mathscr{H}(\mathscr{F}^n(R))$ osztály valódi részosztálya. Továbbá a 3.1. és 3.8. tételek, valamint a 4.7. következmény szerint érvényes a $\mathscr{H}(\mathscr{F}^n(R)) = \mathscr{L}^{n+1}(R)$ egyenlőség. Ezzel igazoltuk, hogy az $\mathrm{fr}\,\mathscr{F}^n(R) \subsetneqq \mathrm{fr}\,\mathscr{L}^{n+1}(R)$ tartalmazás valódi. Végül az 5.25. tétel alapján $\mathrm{fr}\,\mathscr{H}(\mathscr{F}^n(R)) \subseteqq \mathrm{fr}\,\mathscr{DF}(\mathscr{F}^n(R)) \subsetneqq \mathrm{fr}\,\mathscr{F}^{n+1}(R)$, vagyis az $\mathrm{fr}\,\mathscr{L}^{n+1}(R) \subseteqq \mathrm{fr}\,\mathscr{F}^{n+1}(R)$ tartalmazás is valódi. □

Tételünkből a 3.1. és 3.8. tételek, valamint a 4.7. következmény figyelembevételével adódnak az alábbi eredmények.

5.28. következmény. Tetszőleges n természetes számra érvényesek az $\mathscr{F}^n(R) \subsetneqq \mathscr{L}^{n+1}(R) \subsetneqq \mathscr{F}^{n+1}(R)$ tartalmazások.

5.29. következmény. Bármely n természetes számra teljesülnek az $\mathrm{fr}\,\mathscr{L}^n(R) \subsetneqq \subsetneqq \mathrm{fr}\,\mathscr{L}^{n+1}(R)$, $\mathscr{L}^n(R) \subsetneqq \mathscr{L}^{n+1}(R)$ és $\mathscr{L}^n \subsetneqq \mathscr{L}^{n+1}$ tartalmazások.

Végül bizonyítás nélkül ismertetjük a következő két tételt.

5.30. tétel. Tetszőleges n természetes számra $\mathscr{F}^n(R)$ zárt a lineáris f-transzformációra nézve.

5.31. tétel. Bármely n természetes számra $\mathrm{fr}\,\mathscr{F}^n(R)$ a környezetfüggő nyelvek osztályának valódi részosztálya.

Megjegyzések és hivatkozások

A formális nyelvek általános elméletét illetően az olvasónak SALOMAA [1973] könyvét ajánljuk, amely a II. fejezetben felhasznált Greibach-normálforma-tételt is tárgyalja. A reguláris nyelveknek a véges monoidok segítségével való jellemzése és az általánosított szekvenciális gép fogalma — a véges automatákra vonatkozó számos egyéb eredménnyel együtt — megtalálható EILENBERG [1974] könyvében.

II. fejezet.

A faautomaták és a környezetfüggetlen nyelvek kapcsolatára először MEZEI és WRIGHT [1967] mutatott rá, explicitebb formában pedig THATCHER [1967] fogalmazta meg. A 2.3., 2.4. és 2.7. tételeken alapuló bizonyításunk technikailag közel áll a DONER [1970] és THATCHER [1970] dolgozatokban adottakhoz.

A faautomatáknak a környezetfüggetlen nyelvekre vonatkozó tételek bizonyítására történő felhasználását ROUNDS [1970a] kezdeményezte. Ebben a cikkben található meg a 2.11. és 2.13. tétel is. További hasonló példákat mutat THATCHER [1973] és ENGELFRIET [1975a].

A 2.12. tétel implicit formában megvan már a MEZEI és WRIGHT [1967] dolgozatban is. Explicitebb megfogalmazása található például a MAGIDOR és MORAN [1969], valamint a STEINBY [1977] cikkekben. A Greibach-normálformán alapuló itteni bizonyítás a GÉCSEG és HORVÁTH [1977] cikket követi.

A 3. §-ban található reprezentációs tétel FERENCI-től [1976] származik.

Az erdők osztályai és a nekik megfelelő nyelvek osztályai közötti kapcsolatokra vonatkozó első eredmények STEINBY [1977] dolgozatában találhatók; a 4. § anyagát elsősorban ebből a cikkből vettük. A 4.8. tétel egy, a teljességre vonatkozó általános kritériummal együtt a GÉCSEG és HORVÁTH [1977] munkában nyert megfogalmazást.

III. fejezet.

Az *f*-transzformátor fogalmát ROUNDS [1970b] és THATCHER [1970] vezette be a szintaxis-vezérelt transzformációk és fordítások faautomata-elméleti formalizálására. Az *l*-transzformátor fogalma THATCHER-től [1973] származik.

A 2. §. eredményeinek többségét ENGELFRIET [1975a, b] dolgozataiból vettük, míg a 3. §-ét a BAKER [1973] és az ENGELFRIET [1975a, b] munkákból. A 4. §. az ENGELFRIET [1975a, b], ROUNDS [1970b] és THATCHER [1970] cikkeken alapul. Az 5. §. alapját az ENGELFRIET és SKYUM [1976], ENGELFRIET [1977, 1978], valamint az ENGELFRIET, ROZENBERG és SLUTZKI [1977, 1978] munkák képezik.

Végül megemlítjük, hogy ZACHAR [1978] bebizonyította a determinisztikus *l*-transzformátorok ekvivalenciájának eldönthetőségét. Egy másik bizonyítás megtalálható ÉSIK [1979] dolgozatában, aki igazolta az *f*-transzformátorokra vonatkozó megfelelő állítás helyességét is. A nemdeterminisztikus esetben az *l*- és *f*-transzformátorok ekvivalenciája eldönthetetlen, mivel még az általánosított szekvenciális gépek ekvivalenciája sem dönthető el.

IRODALOM

BAKER, B. S. [1973], Tree transductions and families of tree languages. 5th Ann. ACM Symp. Theory Comp. (1973), 200—206.

DONER, J. [1970], Tree acceptors and some of their applications. J. Comp. Syst. Sc. *4* (1970), 406—451.

EILENBERG, S. [1974], Automata, languages and machines, Volume A. Academic Press (1974).

ENGELFRIET, J. [1975a], Tree automata and tree grammars. DAIMI FN—10, Inst. Math., Univ. Aarhus, Denmark (1975).

ENGELFRIET, J. [1975b], Bottom-up and top-down tree transformations — A comparison. Math. Syst. Theory *9* (1975), 198—231.

ENGELFRIET, J. [1977], Top-down tree transducers with regular look-ahead. Math. Syst. Theory *10* (1977), 289—303.

ENGELFRIET, J. [1978], A hierarchy of tree transducers. Troisième Coll. les Arbres en Algebre et en Programmation, Lille (1978), 103—106.

ENGELFRIET, J. ROZENBERG, G. és G. SLUTZKI [1977], Tree transducers, L-systems and two-way machines. Memorandum nr. 187, Technische Hogeschool Twente, Holland (1977).

ENGELFRIET, J. és S. SKYUM [1976], Copying theorems. Information Processing Letters *4* (1976), 157—161.

ÉSIK, Z. [1979], Decidability results concerning tree transducers. Acta Cybernetica *4* (1979) (megjelenés alatt).

FERENCI, F. [1977], A new representation of context-free languages by tree automata. Foundations of Control Engineering *1* (1977), 217—223.

GÉCSEG, F. és GY. HORVÁTH [1977], On representation of trees and context-free languages by tree automata. Foundations of Control Engineering *1* (1977), 161—169.

MAGIDOR M. és G. MORAN [1969], Finite automata over finite trees. Techn. Rep. No. 30, Hebrew Univ., Jerusalem, Israel (1969).

MEZEI, J. és J. B. WRIGHT [1967], Algebraic automata and context-free sets. Information and Control *11* (1967), 3—29.

ROUNDS, W. C. [1970a], Tree-oriented proofs of some theorems on context-free and indexed languages. 2nd Ann. ACM Symp. Theory Comp. (1970), 109—116.

ROUNDS, W. C. [1970b], Mappings and grammars on trees. Math. Syst. Theory *4* (1970), 257—287.

SALOMAA, A. [1973], Formal languages. Academic Press (1973).

STEINBY, M. [1977], On algebras as tree automata. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 17. Contributions to Universal Algebra (Csákány, B. és J. Schmidt ed.), North-Holland, Amsterdam (1977), 441—455.

THATCHER, J. W. [1967], Characterizing derivation trees of context-free grammars through a generalization of finite automata theory. J. Comp. Syst. Sci. *1* (1967), 317—322.

THATCHER, J. W. [1970], Generalized² sequential machine maps. J. Comp. Syst. Sci. *4* (1970), 339—367.

THATCHER, J. W. [1973], Tree automata: an informal survey. Currents in the Theory of Computing (Aho, A. ed.), Prentice-Hall (1973), 143—172.

ZACHAR, Z. [1978], The solvability of the equivalence problem for deterministic frontier-to-root tree transducers. Acta Cybernetica *4* (1979), 167—177.

BIBLIOGRÁFIA
a faautomaták, fanyelvek és fatranszformációk tárgykörében

Az alábbiakban megkíséreljük a címben jelzett témakörökben elérhető irodalmat teljes egészében felsorolni. Előrebocsátjuk, hogy az egyes intézményeknél megjelent tanulmányok (technical reports) és értekezések közül csak néhányat vettünk fel jegyzékünkbe. Továbbá, ha egy munka különböző formákban is megjelent, akkor annak utolsó változata szerepel bibliográfiánkban. Bizonyos esetekben nagyon nehéz volt meghúzni a határvonalat munkánk tárgya és a rokon területek között. Ezért is vettünk fel irodalomjegyzékünkbe olyan munkákat, amelyek az alkalmazási lehetőségekre és a más területekkel való kapcsolatokra utalnak.

A gyakrabban használt forrásokra a következő rövidítéseket használjuk:

n. Ann. ACM STC = Proceedings of the n^{th} Annual ACM Symposium on Theory of Computing

n. Coll. Lille = Les Arbres en Algébre et en Programmation n^{me} Colloque du Lille, Université de Lille I

IC = Information and Control

n. IEEE Symp. ($n \leqq 15$) = n^{th} Annual Symposium on Switching and Automata Theory

n. IEEE Symp. ($n > 15$) = n^{th} Annual Symposium on Foundations of Computer Science

J. ACM = J. Assoc. Comput. Mach.

J. CSS = J. Comput. System Sci.
LN in CS = Lecture Notes in Computer Science (Springer-Verlag)
MST = Mathematical Systems Theory
S—C—C = Systems—Computers—Controls

AHO, A. V. and ULLMAN, J. D.: Translations on a context-free grammar. IC *19* (1971), 439—475.

ALAGIĆ, S.: Categorical theory of tree processing. — Category Theory Applied to Computation and Control (Proc. Symp., San Francisco, 1974), LN in CS *25* (1975), 65—72.

ALAGIĆ, S.: Natural state transformations. — J. CSS *10* (1975), 266—307.

ARBIB, M. A. and GIVE'ON, Y.: Algebra automata I: Parallel programming as a prolegomena to the categorical approach. — IC *12* (1968), 331—345.

ARBIB, M. A. and MANES, E. G.: Machines in a category: An expository introduction. — SIAM Review *16* (1974), 163—192.

ARNOLD, A.: Rational sets of trees. — 2. Coll. Lille (1977), 20—28.

ARNOLD, A.: Systèmes d'equations dans le magmoide. Ensembles rationnels et algébriques d'arbres. — Thèse de doctorat, Université de Lille I (1977).

ARNOLD, A. et DAUCHET, M.: Theorie des magmoides. — 1. Coll. Lille (1976), 15—30.

ARNOLD, A. et DAUCHET, M.: Bimorphismes de magmoides. — 1. Coll. Lille (1976), 31—43.

ARNOLD, A. et DAUCHET, M.: Transductions de forêts recognnaissables monadiques. Forêts coré-gulières. — RAIRO Informat. Théor. *10* (1976), no. 3, 5—28.

ARNOLD, A. and DAUCHET, M.: Une théorème de duplication pour les forêts algébriques. — J. CSS *13* (1976), 223—244.

ARNOLD, A. and DAUCHET, M.: Bi-transductions de forêts. — Automata, Languages and Programming (Conf. Rec., Edinburgh, 1976), University Press, Edinburgh (1976), 74—86.

ARNOLD, A. et DAUCHET, M.: Theorie des Magmoides, Univ. Lille I (1976), 106 pp.

ARNOLD, A. and DAUCHET, M.: Forêts algébriques et homomorphismes inverses. — IC *37* (1978), 182—196.

BAKER, B. S.: Tree transductions and families of tree languages. — 5. Ann. ACM STC (1973), 200—206.

BENSON, D. B.: Semantic preserving translations. — MST *8* (1975), 105—126.

BERGER, J. and PAIR, C.: Inference for regular bilanguages. — J. CSS *16* (1978), 100—122.

BERTSCH, E.: Some considerations about classes of mappings between context-free derivation systems. — GI, 1. Fachtagung Automatentheorie Formale Sprachen (Bonn, 1973), LN in CS *2* (1973), 278—283.

BOBROW, L. S. and ARBIB, M. A.: Discrete Mathematics, Applied Algebra for Computer and Information Science. W. S. Saunders Co., Philadelphia (1974).

BRAINERD, W. S.: The minimization of tree automata — IC *13* (1968), 484—491.

BRAINERD, W. S.: Tree generating regular systems — IC *14* (1969), 217—231.

BRAINERD, W. S.: Semi-Thue systems and representations of trees. — 10. IEEE Symp. (1969), 240—244.

BRAYER, J. M. and FU, K.-S.: A note on the k-tail method of tree grammar inference. — IEEE Trans. Systems Man Cybernetics SMC — *7* (1977), 293—300.

BUDA, A.: The equivalence problem for sequential program machines. — 3. Coll. Lille (1978), 19—26.

BUTTELMANN, H. W.: On generalized finite automata and unrestricted generative grammars. — 3. Ann. ACM STC (1971), 63—77.

BUTTELMANN, H. W.: On the syntactic structures of unrestricted grammars I: Generative grammars and Phrase Structure Grammars. — IC *29* (1975), 29—80.

BUTTELMANN, H. W.: On syntactic structures of unrestricted grammars II: Automata. — IC *29* (1975), 81—101.

CASTERAN, P.: Représentation rationelle d'arbres infinis. — 3. Coll. Lille (1978), 27—39.

COSTICH, O. L.: A Medvedev characterization of sets recognized by generalized finite automata. — MST *6* (1972), 263—267.

COURCELLE, B.: Arbres algébriques et langages déterministes. — 1. Coll. Lille (1976), 60—64.

COURCELLE, B.: Frontiers of infinite trees. — 3. Coll. Lille (1978), 76—102.

CRESPI REGHIZZI, S. and DELLA VIGNA, P.: Approximation of phrase markers by regular sets. — Automata, Languages and Programming (Proc. Coll., Rocquencourt, 1972), North-Holland, Amsterdam (1973), 367—376.

ČULÍK, K. II: Structured OL-systems. — L Systems, LN in CS *15* (1974), 216—229.

ČULÍK, K. II and MAIBAUM, T. S. E.: Parallel rewriting systems on terms. — Automata, Languages and Programming (Proc. Symp., Saarbrücken, 1974), LN in CS *14* (1974), 495—511.

DAMM, W.: Languages defined by higher program schemes. — Automata, Languages and Programming (Proc. Coll., Turku, 1977), LN in CS *52* (1977), 164—179.

DAUCHET, M.: Grammaires transformationelles et bimorphismes de magmoides. — 2. Coll. Lille (1977), 249—273.
DAUCHET, M.: Transductions de forêts bimorphismes de magmoides. Thèse de doctorat, Universite de Lille I (1977).
DONER, J. E.: Decidability of the weak second-order theory of two successors. — Notices Amer. Math. Soc. *12* (1965), Abstract 65T—468, 819.
DONER, J. E.: Tree acceptors and some of their applications. — J. CSS *4* (1970), 406—451.
DUBINSKY, A.: Computation on arbitrary algebras. — Symp. on λ-calculus and Computer Science Theory (Rome, 1975), LN in CS *37* (1975), 319—341.
DUSKE, J.: Funktionenautomaten. — Automaten und Formale Sprachen (Tagung Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1969), Bibliographisches Institut, Mannheim (1970), 23—36.
EILENBERG, S. and WRIGHT, J. B.: Automata in general algebras. — IC *11* (1967), 452—470.
ELLIS, C. A.: Probabilistic tree automata — IC *19* (1971), 401—416.
ENGELFRIET, J.: A note on infinite trees. — Information Processing Lett. *1* (1972), 229—232.
ENGELFRIET, J.: Tree automata and tree grammars. — Lecture notes, DAIMI FN—10, Inst. Math., Aarhus Univ., Aarhus (1975).
ENGELFRIET, J.: Bottom-up and top-down tree transformations. A comparison. — MST *9* (1975), 198—231.
ENGELFRIET, J.: Surface tree languages and parallel derivation trees. — Theor. Comput. Sci. *2* (1976), 9—27.
ENGELFRIET, J.: Some remarks on classes of macro languages. — 1. Coll. Lille (1976), 71—79.
ENGELFRIET, J.: Top-down tree transducers with regular look-ahead. — MST *10* (1976/77), 289—303.
ENGELFRIET, J.: Macro grammars, Lindenmayer systems and other copying devices. — Automata, Languages and Programming (Proc. Coll., Turku, 1977), LN in CS *52* (1977), 221—229.
ENGELFRIET, J.: A hierarchy of tree transducers. — 3. Coll. Lille (1978), 103—106.
ENGELFRIET, J. and SCHMIDT, E. M.: IO and OI.
I — J. CSS *15* (1977), 328—353.
II — J. CSS *16* (1978), 67—99.
ENGELFRIET, J. and SKYUM, S.: Copying theorems. — Information Processing Lett. *4* (1976), 157—161.
ÉSIK, Z.: On decidability of injectivity of tree transducers. — 3. Coll. Lille (1978), 107—133.
ÉSIK, Z.: Decidability results concerning tree transducers. — Acta Cybernetica *4* (1979) (megjelenés alatt).
FERENCI, F.: A new representation of context-free languages by tree automata. — Found. Control Engrg. *1* (1976), 217—222.
FISCHER, M. J.: Grammars with macro-like productions. — 9. IEEE Symp. (1968), 131—142.
FU, K.—S. and BHARKAVA, B. K.: Tree systems for syntactic pattern recognition. — IEEE Trans. Computers *C—22* (1973), 1087—1099.
GÉCSEG, F.: Universal algebras and tree automata. — Fundamentals of Computation Theory (Proc. Symp., Poznań—Kórnik, 1977), LN in CS *56* (1977), 98—112.
GÉCSEG, F. and HORVÁTH, GY.: On representation of trees and context-free languages by tree automata. — Found Control Engrg. *1* (1976), 161—168.
GÉCSEG, F. and STEINBY, M.: Minimal ascending tree automata. — Acta Cybernetica *4* (1978), 37—44.
GÉCSEG, F. and E.-TÓTH, P.: Algebra and logic in theoretical computer science. — Mathematical Foundations of Computer Science, 1977 (Tatranska Lomnica), LN in CS *53* (1977), 78—92.
GIVE'ON, Y. and ARBIB, M. A.: Algebra automata II: the categorical framework for dynamic analysis. — IC *12* (1968), 346—370.
GOGUEN, J. A.: Semantics of computation — Category Theory Applied to Computation and Control (Proc. Symp., San Francisco, 1974), LN in CS *25* (1975), 151—163.
GOGUEN, J. A. and THATCHER, J. W.: Initial algebra semantics. 15. IEEE Symp. (1974), 63—77.
GOGUEN, J. A., THATCHER, J. W., WAGNER, E. G. and WRIGHT, J. B.: Initial algebra semantics and continuous algebras. — J. ACM *24* (1977), 68—95.
GONZALEZ, R. C., EDWARDS, J. J. and THOMASON, M. G.: An algorithm for the inference of tree grammars. — Intern. J. Comput. Information Sci. *5* (1976), 145—164.
HART, J. M.: Acceptors for the derivation languages of phrase-structure grammars. — IC *25* (1974), 75—92.
HELTON, F. J.: The semigroup of an algebra automaton. — J. CSS *12* (1976), 13—24.
HÜBLER, A.: Zur Dechiffierung von Baum-Akzeptoren mittels Mehrfachexperimenten. — Elektron, Informationsverarbeiterung Kybernetik *11* (1975), 590—593.
HÖPNER, M.: Eine Charakterisierung der Szilardsprachen. G1—4. Jahrestagung (Berlin, 1974), LN in CS *26* (1975), 113—121.

INOUE, K. and NAKAMURA, A.: Some topological properties of Σ-structure automata. — S—C—C *7* (1976), no. 5, 19—27.
ITO, T. and ANDO, S.: A complete axiom system of super-regular expressions. — Proc. IFIP Congress 74 (Stockholm, 1974), 661—665.
ITO, H. and FUKUMURA, T.: Dendrolanguage generating systems on sets of control strings. —S—C—C *5* (1974), no. 4, 9—17.
ITO, H., INAGAKI, Y. and FUKUMURA, T.: Characterization of derivation trees of context-sensitive tree generating systems. —S—C—C *4* (1973), no. 2, 24—32.
ITO, H., INAGAKI, Y. and FUKUMURA, T.: Scattered tree automata and scattered context-sensitive tree-generating systems. —S—C —C *4* (1973), no. 4, 22—28.
ITO, H., INAGAKI, Y. and FUKUMURA, T.: Hierarchy of the families of dendrolanguages. — S — C — C *4* (1973), no. 5, 48—56.
ITO, H., INAGAKI, Y. and FUKUMURA, T.: Dendrolanguage generating systems on control state sets. A hierarchy between context-free and context-sensitive dendrolanguages. — S — C — C *5* (1974), no. 5, 1—8.
JOSHI, A. K., LEVY, L. S. and TAKAHASHI, M.: A tree generating system. — Automata, Languages and Programming (Proc. Symp., Rocquencourt, 1972), North-Holland, Amsterdam (1973), 453—465.
JOSHI, A. K., LEVY, L. S. and TAKAHASHI, M.: Tree adjunct grammars. — J. CSS *10* (1975), 136—163.
KARPIŃSKI, M.: Free structure tree automata. I: Equivalence. — Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys. *21* (1973), 441—446.
II: Nondeterministic and deterministic regularity. — ibid. *21* (1973), 447—450.
III: Normalized climbing automata. — ibid. *21* (1973), 567—572.
IV: Sequential representation — ibid. *22* (1974), 87—91.
KARPIŃSKI, M.: Probabilistic climbing and sinking languages. — Bull. Acad. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys. *22* (1974), 1057—1061.
KARPIŃSKI, M.: The equivalence problems for binary EOL-systems are decidable. — Fundamentals of Computation Theory (Proc. Symp., Poznań—Kórnik, 1977), LN in CS *56* (1977), 423—434.
KARPIŃSKI, M.: Stretching by probabilistic tree automata and Santos grammars. — Mathematical Foundations of Computer Science (Proc. Symp., Jadwisin 1974), LN in CS *28* (1975), 249—255.
KOJIMA, M. and HONDA, N.: Properties of context-sensitive tree automata and characterizations of derivation trees of context-sensitive grammars. — S — C — C *3* (1972), no. 5, 23—30.
KOJIMA, M. and HONDA, N : A characterization of sets of trees acceptable by tree automata. — S — C — C *4* (1973), no. 1, 40—47.
LESCANNE, P.: Équivalence entre la famille des ensembles réguliers et la famille des ensembles algébriques. RAIRO Inform. Théor. Sér. Rouge *10* (1976), no. 8, 57—81.
LESCANNE, P.: Quelques applications des classes équationelles conformes. — 2. Coll. Lille (1977), 199—212.
LEVY, L. S.: Structural aspects of local adjunct grammars. — IC *23* (1973), 260—287.
LEVY, L. S. and JOSHI, A. K.: Some results in tree automata. — MST *6* (1973), 334—342.
LILIN, E.: S-transducterns de forêts. — 3. Coll. Lille (1978), 189—206.
MAGIDOR, M. and MORAN, G.: Finite automata over finite trees. — Technical Report 30, Hebrew University, Jerusalem (1969).
MAGIDOR, M. and MORAN, G.: Probabilistic tree automata. — Israel J. Math. *8* (1970), 340—348.
MAHN, F. K.: Primitiv-rekursive Funktionen auf Termmengen — Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. *12* (1969), 54—65.
MAIBAUM, T. S. E.: The characterization of the derivation trees of context-free sets of terms as regular sets. — 13. IEEE Symp. (1972), 224—230.
MAIBAUM, T. S. E.: A generalized approach to formal languages. — J. CSS *8* (1974), 409—439;
MARCHAND, P.: Bigrammes et systemes transformationnels. — 1. Coll. Lille (1976), 175—195;
MARÓTI, G.: Rational representation of forests by tree automata. — Acta Cybernetica *3* (1977), 309—320.
MARTIN, D. E. and VERE, S. A.: On syntax-directed transduction and tree transducers. — 2. Ann; ACM STC (1970), 129—135.
MAYER, O.: On the analysis and synthesis problems for context-free expressions. — Mathematical Foundations of Computer Science (Proc. Symp., Mariánské Lázne 1975), LN in CS *32* (1975), 308—314.
MEISSNER, H.-G.: Über die Fortsetzbarkeit von sequentiellen Baumoperatoren mit endlichem Gewicht. — Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik *11* (1976), 578—579.
MEZEI, J. and WRIGHT, J. B.: Algebraic automata and context-free sets. — IC *11* (1967), 3—29.
Модина, Л. С.: Двересные грамматики и языки. — Кибернетика (Киев) (1975), no. 5, 86—93.

MODINA, L. S.: On some formal grammars generating dependency trees. — Mathematical Foundations of Computer Science 1975 (Proc. Symp. Mariánské Lázně), LN in CS *32* (1975), 326—329.
NG, P. and YEH, R. T.: Tree transformations via finite recursive transition machines. — Mathematical Foundations of Computer Science (Proc. Symp., High Tatras 1973), 273—278.
NIVAT, M.: Languages algébriques sur le magma libre et sémantique des schemas de programme. — Automata, Langages and Programming (Proc. Symp., Rocquencourt 1972), North-Holland, Amsterdam (1973), 367—376.
OGDEN, W. F. and ROUNDS, W. C.: Compositions of n-tree transducers. — 4. Ann. ACM STC (1972), 198—206.
OPP, M.: Eine Beschreibung contextfreier Sprachen durch endliche Mengensysteme. — Automata Theory and Formal Languages (2nd GI Conf., Kaiserslautern 1975), LN in CS *33* (1975), 190—197.
OPP, M.: Allgemeine Σ-Grammatiken. — GI—5. Jahrestagung (Dortmund 1975), LN in CS *34* (1975), 420—428.
OPP, M.: Characterizations of recognizable subsets in generic algebras. — 1. Coll. Lille (1976), 164—174.
PAIR, C.: Inference for regular bilanguages. — Formal Languages and Programming (Proc. Semin., Madrid 1975), North-Holland, Amsterdam (1976), 15—30.
PAIR, C.: Les arbres en theorie des langages — 1. Coll. Lille (1976), 196—216.
PAIR, C. and QUERE, A.: Definition et étude des bilangages réguliers. — IC *13* (1968), 565—593.
PERRAULT, C. R.: Intercalation lemmas for tree transducer languages. — J. CSS *13* (1976), 246—277.
PERRAULT, C. R.: Augmented transition networks and their relation to tree transducers. — Information Sci. *11* (1976), 93—120.
PETTOROSSI, A.: Combinators as tree transducers. — 2. Coll. Lille (1976), 213—223.
PYSTER, A. and BUTTELMANN, H. W.: Semanticsyntax-directed translation. — IC *36* (1978), 320—361.
RABIN, M. O.: Mathematical theory of automata. — Mathematical Aspects of Computer Science (Proc. Symp. Appl. Math. XIX), Amer. Math. Soc., Providence (1967), 153—175.
RABIN, M. O.: Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. — Trans. Amer. Math. Soc. *141* (1969), 1—35.
RABIN, M. O.: Weakly definable relations and special automata. — Mathematical Logic and Foundations of Set Theory (Proc. Coll., Jerusalem 1968), North-Holland, Amsterdam (1970), 1—23.
RÉVÉSZ, GY.: Algebraic properties of derivation words. — 2. Coll. Lille (1977), 224—234.
RICCI, G.: Cascades of tree-automata and computations in universal algebras. — MST *7* (1973), 201—218.
ROSEN, B. K.: Tree-manipulating systems and Church-Rosser theorems. — J. ACM *20* (1973), 160—187.
ROSEN, B. K.: Syntactic complexity. — IC *24* (1974), 305—335.
ROUNDS, W. C.: Context-free grammars on trees. — 1. Ann. ACM STC (1969), 143—148.
ROUNDS, W. C.: Tree-oriented proofs of some theorems on context-free and indexed languages. 2. Ann. ACM STC (1970), 109—116.
ROUNDS, W. C.: Mappings and grammars on trees. — MST *4* (1970), 257—287.
ROUNDS, W. C.: Complexity of recognition in intermediate-level languages. — 14 IEEE Symp. (1973), 145—158.
SCHREIBER, P. P.: Tree transducers and syntax-connected transductions. — 1. Coll. Lille (1976), 217—238.
SCHÜTT, D.: Baumautomaten. — Bericht 36, Gesellschaft für Math. u. Datenverarbeiterung, Bonn (1971).
SCHÜTT, D.: Zustandsfolgenabbildungen von verallgemeinerten endlichen Automaten. — 1. Fachtagung über Automatentheorie und Formale Sprachen (Bonn 1973), LN in CS *2* (1973), 88—97.
SHEPARD, C. D.: Languages in general algebras. — 1. Ann. ACM STC (1969), 155—163.
SOMMERHALDER, R.: Monoids associated with algebras and automata. — Unpublished Report, Delft (1974).
STEINBY, M.: On algebras as tree automata. — Contributions to Universal Algebra (Record Coll. Universal Algebra, Szeged 1975), North-Holland, Amsterdam (1977), 441—455.
STEINBY, M.: On the structure and realizations of tree automata. — 2. Coll. Lille (1977), 235—248.
STEYART, J.-M.: Sur les index rationelles des feuillages de forêts lineaires. — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, t. 285 (1977), 473—476.
STEYART, J.-M.: Index rationnel des ETOL-langages. — 3. Coll. Lille (1978), 246—249.
TAKAHASHI, M.: Primitive transformations of regular sets and recognizable sets. — Automata, Languages and Programming (Proc. Coll., Roquencourt 1972), North-Holland, Amsterdam (1973), 475—480.

TAKAHASHI, M.: Generalizations of regular sets and their application to a study of context-free languages. — IC *27* (1975), 1—36.
TAKAHASHI, M.: Rational relations on binary trees. — Automata, Languages and Programming (Proc. Coll., Turku 1977), LN in CS *52* (1977), 524—538.
THATCHER, J. W.: Characterizing derivation trees of context-free grammars through a generalization of finite automata theory, — J. CSS *1* (1967), 317—322.
THATCHER, J. W.: Generalized² sequential machines. — J. CSS *4* (1970), 339—367.
THATCHER, J. W.: Tree automata: an informal survey. — Currents in the Theory of Computing (ed. A. V. AHO), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1973), 143—172.
THATCHER, J. W. and WRIGHT, J. B.: Generalized finite automata theory with an application to a decision problem of second order logic. — MST *2* (1968), 57—81.
TIURYN, J.: Fixed-points and algebras with infinitely long expressions.
I. — Mathematical Foundations of Computer Science 1977 (Proc. Symp., Tatranská Lomnica), LN in CS *53* (1977), 513—522.
II. — Fundamentals of Computation Theory (Proc. Symp., Poznań—Kórnik 1977), LN in CS *56* (1977), 332—339.
TOKURA, N. and KASAMI, T.: Automata with labelled tree inputs. — S — C — C *5* (1974), no. 3, 88—95.
TURNER, R.: An infinite hierarchy of term languages — an approach to mathematical complexity. — Automata, Languages and Programming (Proc. Symp., Rocquencourt 1972), North-Holland Amsterdam (1973), 593—608.
TURNER, R.: An algebraic theory of formal anguages. — Mathematical Foundations of Computer Science (Proc. Symp. Márianske Lázně 1975), LN in CS *32* (1975), 426—431.
WAGNER, E. G.: An algebraic theory of recursive definitions and recursive languages. — 3. Ann. ACM STC (1971), 12—23.
WAGNER, E. G., WRIGHT, J. B., GOGUEN, J. A. and THATCHER, J. W.: Some fundamentals of order-algebraic semantics. — Mathematical Foundations of Computer Science (Proc. Symp. Gdańsk 1976), LN in CS *45* (1976), 153—168.
YEH, R. T.: Some structural properties of generalized automata and algebras. — MST *5* (1971), 306—318.
ZACHAR, Z.: The solvability of the equivalence problem for deterministic frontier-to-root tree transducers. — Acta Cybernetica *4* (1979), 167—177.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕРЕВО-АВТОМАТОВ II.

ФЕРЕНЦ ГЕЧЕГ И МАГНУС СТЕЙНБЫ

THE ALGEBRAIC THEORY OF TREE AUTOMATA, II

F. GÉCSEG AND M. STEINBY

AZ OPERÁTORTEST NÉHÁNY SPECIÁLIS MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETÉRŐL

FÉNYES TAMÁS és KOSIK PÁL

Bevezetés

Ebben a dolgozatban a Mikusiński-féle operátortest néhány speciális másodrendű algebrai differenciálegyenletének (azaz s differenciálegyenletének) disszkusziójával foglalkozunk lásd Wloka [1]). Az inhomogén másodrendű algebrai differenciálegyenlet általános alakja:

$$D^2(x)+\gamma_1 D(x)+\gamma_2 x = y, \tag{1}$$

ahol D a jólismert algebrai derivált szimbóluma, γ_1, γ_2, y adott operátorok és x az ismeretlen operátor. Wloka [1] dolgozatában absztrakt algebrai módszerekkel értékes eredményeket ért el a lineáris s differenciálegyenletek vizsgálatában, amelyek részben nem kapcsolódnak klasszikus feladatok (konvolúció-típusú integrálegyenletek) megoldásához.

Tetszőleges γ_1, γ_2, y esetében (1) megoldásának explicit előállítása — vagy akárcsak a megoldások egzisztenciájának eldöntése — jelenleg még nincs megoldva. Ez a helyzet már a

$$D(x)+\gamma_2 x = y \tag{2}$$

differenciálegyenlet esetében is. Ez vonatkozik a $\gamma_2=0$ választásra is, hiszen, mint az irodalomból ismeretes, tetszőleges y operátor algebrai integrálhatóságának, illetve az integrál explicit előállításának kérdése sincs megoldva, lásd Gesztelyi [2], Schatte [3].

Ebben a cikkben γ_1 és γ_2 speciális megválasztásával — melyek explicit megadására és a speciális választás indoklására alább visszatérünk — két speciális algebrai differenciálegyenlet részletes tárgyalását fogjuk elvégezni az eredeti, a folytonos függvények gyűrűjére épült Mikusiński-féle operátortestben.

A diszkrét helyeken értelmezett függvények gyűrűjéből származtatott operátortestre vonatkozó hasonló jellegű vizsgálatokkal a cikk II. részében fogunk foglalkozni.

Megkívánjuk jegyezni, hogy e dolgozatban feltételezzük az operátorszámítás és az abban alkalmazott jelölések ismeretét.

Mivel

$$\gamma_1 = \frac{\{a_1(t)\}}{\{a_2(t)\}}, \quad \gamma_2 = \frac{\{a_3(t)\}}{\{a_4(t)\}}, \quad y = \frac{\{y_1(t)\}}{\{y_2(t)\}}$$

ahol $a_1, a_2, a_3, a_4, y_1, y_2$ lokálisan integrálható, vagy folytonos függvények $\langle 0, \infty)$-ben, (1) átírható az alábbi alakra

$$a_2 a_4 y_2 D^2(x)+a_1 a_4 y_2 D(x)+a_3 a_2 y_2 x = a_2 a_4 y_1. \tag{3}$$

Amennyiben (1) azon x megoldásaira szorítkozunk, melyek lokálisan integrálható függvények, úgy (3)-ból adódik, hogy

$$\begin{aligned}(4)\qquad &\{a_2(t)\}*\{a_4(t)\}*\{y_2(t)\}*\{t^2x(t)\}-\\ &-\{a_1(t)\}*\{a_4(t)\}*\{y_2(t)\}*\{tx(t)\}+\\ &+\{a_3(t)\}*\{a_2(t)\}*\{y_2(t)\}*\{x(t)\}=\{a_2(t)\}*\{a_4(t)\}*\{y_1(t)\},\end{aligned}$$

ahol $*$ a konvolúciót jelöli. Látható tehát, hogy a lokálisan integrálható függvények gyűrűjében (1) absztrakt differenciálegyenlet a (4) integrálegyenlettel ekvivalens. (1) azonban általánosabb (4)-nél, mivel olyan x megoldásokkal is bírhat, melyek nem identifikálhatók függvényekkel.

Fényes [4], [5], [6], [7], [8] dolgozataiban foglalkozott olyan harmadfajú konvolúcióintegrálegyenletek vizsgálatával, melyeknek az operátortestben (2) típusú egyenletek felelnek meg, vagy amelyeket az operátortestben (2) típusú egyenletekre lehetett visszavezetni. A magokra kirótt elég általános feltételek teljesülése esetén a testbeli megoldásokat explicite előállította és kritériumokat adott meg, hogy a kapott megoldások mikor állítanak elő függvényeket.

E dolgozatban az alábbi két másodrendű algebrai differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

$$\begin{aligned}&\text{A)}\quad D^2(x)+2gD(x)+[g^2+D(g)+a]x=z\\ (5)\qquad &\text{B)}\quad D^2(x)-\left(\frac{D(f)}{f}+2a\right)D(x)+\left[a\frac{D(f)}{f}+a^2-b^2f^2\right]x=z,\end{aligned}$$

ahol $g=c+f$ és f, z függvényeket, az a, c, és $b\neq 0$ operátorok pedig számokat jelölnek. Természetesen (5)-ben szereplő alapműveletek konvolúció értelemben veendők. Az f függvény origó környezetében való viselkedésére kirótt, elég általános feltételek teljesülése mellett kritériumokat adunk meg a testbeli megoldások egzisztenciájára vonatkozólag, a megoldásokat explicite előállítjuk és azt is kimutatjuk, hogy azok mikor identifikálhatók függvényekkel. Látni fogjuk, hogy minden létező megoldás végesrendű disztribúciót állít elő, vagyis olyan operátort, mely

$$x=s^k e^{\varrho s}\{u(t)\}$$

alakú, valamely nemnegatív k egész, valós ϱ és lokálisan integrálható u mellett.

Könnyen belátható, hogy ha lokálisan integrálható $x(t)$ megoldásokra szorítkozunk, úgy A egy *harmadfajú* integrálegyenlettel ekvivalens. B általában nem, csak akkor, ha a $\frac{D(f)}{f}$ operátor függvényt állít elő. Ezt azonban nem fogjuk megkövetelni.

Indokoljuk most meg, miért választottuk a speciális (5) alakú egyenleteket. Látni fogjuk, hogy az A-hoz tartozó homogén egyenlet normálalakja a legegyszerűbb, nevezetesen olyan másodrendű egyenlet, amelynek invariánsa számoperátor — és így megoldásainak egzisztenciája könnyen eldönthető. A B-hez tartozó homogén egyenlet két lineárisan független testbeli megoldása is, mint látni fogjuk, szintén könnyen felírható és így az A és B inhomogén egyenletek megoldására az állandók variálásának módszere alkalmazható. A lokálisan integrálható megoldások egzisztenciája is könnyen eldönthető az egyenletekben szereplő adott operátoroktól függően.

Az első pontban bebizonyítunk egy (1) megoldhatóságával kapcsolatos tételt és idézzük Gesztelyi [2] nevezetes algebrai integrálási tételét, ezekre szükségünk lesz (5) egyenletek vizsgálatában. A második pont *A*; a harmadik *B* differenciálegyenleteket tárgyalja.

Az alábbiakban az egyszerűbb jelölés kedvéért a $D='$ jelet fogjuk használni.

1. *Megjegyzések az algebrai integrálról*

Bebizonyítjuk Schatte [3] egy elsőrendű s differenciálegyenletekre vonatkozó tételének (1) másodrendű egyenletekre vonatkozó általánosítását. Erre szigorúan véve csak a cikk II. részében, a diszkrét esetben lesz szükségünk, azonban a tétel folytonos esetben is érvényes és így általánosabb.

1. Tétel. *Létezzék (1)-hez tartozó homogén edyenlet két lineárisan független nemtriviális x_1 és x_2 megoldása. Akkor (1) akkor és csak akkor oldható meg az operátortestben, ha az*

$$\int \frac{yx_1}{w}, \quad \int \frac{yx_2}{w}$$

algebrai integrálok léteznek, ahol

$$w = x_1x_2' - x_2x_1'$$

a Wronski determináns.

Bizonyítás. Elégségesség. A feltétel elégségessége triviális, ugyanis az állandók variálásának módszerével megkapjuk (1) egy partikuláris megoldását az

$$x_p = x_2 \int \frac{yx_1}{w} - x_1 \int \frac{yx_2}{w}$$

alakban.

Szükségesség. Megmutatjuk, hogy ha az x_p partikuláris megoldás létezik, úgy az $\frac{x_2 y}{w}$ operátor algebrailag integrálható. Az $\frac{x_1 y}{w}$ operátor algebrai integrálhatósága analóg módon bizonyítható. Számítsuk ki az

$$\frac{x_p' x_2 - x_p x_2'}{w}$$

operátor algebrai deriváltját

$$(.....)' = \frac{x_p'' x_2 - x_p x_2''}{w} - \frac{w'(x_p' x_2 - x_p x_2')}{w^2}. \tag{1.1}$$

Vegyük figyelembe, hogy mivel x_1, x_2 az (1)-hez tartozó homogén egyenlet megoldásai

$$\begin{aligned} x_2'' &= -\gamma_1 x_2' - \gamma_2 x_2 \\ x_1'' &= -\gamma_1 x_1' - \gamma_2 x_1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Mésrészről

$$\frac{w'}{w} = \frac{x_1 x_2'' - x_2 x_1''}{w} = \frac{-x_1(\gamma_1 x_2' + \gamma_2 x_2) + x_2(\gamma_1 x_1' + \gamma_2 x_1)}{w} = -\gamma_1 \frac{w}{w} = -\gamma_1. \tag{1.3}$$

(1.2) és (1.3)-ból (1.1)-re adódik, hogy

$$(\ldots\ldots)' = \frac{x_p'' x_2 + x_p(\gamma_1 x_2' + \gamma_2 x_2) + \gamma_1(x_p' x_2 - x_p x_2')}{w} =$$

(1.4)

$$= \frac{x_2(x_p'' + \gamma_1 x_p' + \gamma_2 x_p)}{w} = \frac{x_2 y}{w}$$

és ezzel a tételt bizonyítottuk.

Most idézzük Gesztelyi végesrendű disztribúciókra vonatkozó neves algebrai integráltételét a pld. Fényes [8]-ban szereplő alakjában. Előbb megállapodunk az alábbi jelölésben:

Tetszőleges $F(t)$ $\langle 0, \infty)$-ben lokálisan integrálható függvény mellett legyen $\int \frac{F(t)\,dt}{(t-a)^l}$ értéke a $t=0$-ban nulla, ha az $\frac{F(t)}{(t-a)^l}$ a $t=0$ környezetében integrálható, ahol l tetszőleges valós szám, ha $a \leqq 0$, illetve egész, ha $a > 0$.

Legyen $x = s^k e^{-\alpha s}\{F(t)\}$, *ahol* $F(t)$ *lokálisan integrálható függvény* $\langle 0, \infty)$*-ben,* $k = 0, 1, 2, \ldots$; $-\infty < \alpha < \infty$, *akkor* x *algebrailag integrálható és egy integrálja az alábbi alakú*

$$\int x = -s^{k+1} e^{-\alpha s}\{G(t)\}, \tag{1.5}$$

ahol G *szintén lokálisan integrálható* $\langle 0, \infty)$*-ben és*

$$G(t) = (t+\alpha)^k \int \frac{F(t)\,dt}{(t+\alpha)^{k+1}}. \tag{1.6}$$

Nyilvánvaló, hogy ha k nem egész szám, az x operátor szintén integrálható algebrailag, mert triviálisan felírható, mint egy végesrendű disztribúció. Érvényes Gesztelyi tételének alábbi $\alpha \geqq 0$-ra érvényes formális általánosítása (lásd Fényes [6]):

Ha $\alpha > 0$, *úgy (1.5), (1.6) tetszőleges valós* k*-ra érvényes. Ha* $\alpha = 0$, *úgy (1.5), (1.6) tetszőleges valós* $k \neq -1$ *mellett érvényes, továbbá* $\alpha > 0$ *esetén (1.5), (1.6) helyett az alábbi formulák is írhatók:*

$$\int x = -s^k e^{-\alpha s}\{G_1(t)\}, \tag{1.7}$$

$$G_1(t) = \frac{F(t)}{t+\alpha} + k(t+\alpha)^{k-1} \int \frac{F(t)\,dt}{(t+\alpha)^{k+1}}. \tag{1.8}$$

Végül, ha $\frac{F(t)}{t}$ *lokálisan integrálható, akkor (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) formulák* $\alpha = 0$*-ra is fennállnak tetszőleges valós* k *mellett.*

2. *„A" differenciálegyenlet vizsgálata*

Tekintsük az

$$x'' + 2gx' + (g^2 + g' + a)x = z \tag{2.1}$$

lineáris, másodrendű algebrai differenciálegyenletet, ahol $g = f + c$ és feltételezzük, hogy f, z egyelőre tetszőlegesen adott lokálisan integrálható függvények, az a és c operátorok pedig tetszőlegesen adott valós számok.

Vizsgáljuk először a $z=0$ választással a homogén egyenletet. Amennyiben az

$$u = x \exp \int g \tag{2.2}$$

formális helyettesítéssel az x helyére bevezetjük az u ismeretlent, úgy egyszerű számolással a (2.1)-hoz tartozó homogén egyenlet normálalakjára az

$$u'' + au = 0 \tag{2.3}$$

egyenletet nyerjük. (A klasszikus, közönséges differenciálegyenleteknél ez megtalálható Kamke [9] 420. oldalán.) Így (2.1) formális invariánsára az a számoperátor adódik és (2.3) egy operátortestbeli állandó együtthatós egyenlet. Az, hogy a helyettesítés ne csupán formális legyen, az szükséges, hogy (2.2)-ben szereplő exponenciális függvény létezzék az operátortestben. Az operátorszámítás elemeiből és az előző pontban ismertetett Gesztelyi-féle integráltételből kapjuk, hogy

$$\int g = \int f + \int c = cs - s\left\{\int \frac{f(t)}{t}\,dt\right\}$$

és

$$\exp \int g = e^{cs} \exp\left[-s\left\{\int \frac{f(t)}{t}\,dt\right\}\right]. \tag{2.4}$$

Tetszőleges lokálisan integrálható f függvényre az $\exp\left[-s\left\{\int \frac{f(t)}{t}\,dt\right\}\right]$ egzisztenciája nincs eldöntve. Most az alábbi kikötést tesszük f-re, mely biztosítja az exponenciális függvény létezését.

Létezzék $\lim_{t \to +0} f(t) = f(0)$ *és legyen* $\frac{f(t)-f(0)}{t}$ *lokálisan integrálható.*

Ha ez teljesül, úgy

$$s\left\{\int \frac{f(t)}{t}\,dt\right\} = s\left\{\int \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt\right\} + sf(0)\left\{\int \frac{1}{t}\,dt\right\} =$$

$$= \left\{\frac{f(t)-f(0)}{t}\right\} + sf(0)\{\log t\}$$

érvényes, és (2.4) az alábbi alakban írható:

$$\exp \int g = e^{cs} \exp\left\{\frac{f(t)-f(0)}{-t}\right\} \exp\left[-sf(0)\{\log t\}\right]. \tag{2.5}$$

Látható, hogy (2.5) operátor létezik, hiszen a jobb oldalon szereplő exponenciális függvények léteznek (lásd Mikusiński [10]).

Vezessük be a $h(t) = \frac{f(t)-f(0)}{-t}$ jelölést. Fennáll, hogy

$$e^h = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h^\nu}{\nu!} \tag{2.6}$$

operátoros értelemben, vagyis e^h operátor az egységelem és egy lokálisan integrálható függvény összege, másrészről

(2.7) $$\exp[-sf(0)\{\log t\}] = e^{\gamma f(0)} s^{f(0)} \quad \text{(lásd Mikusiński [11])},$$

ahol γ az Euler-féle állandó.

Ezeket felhasználva, (2.5) az alábbi igen egyszerű formára hozható

(2.8) $$\exp \int g = e^{\gamma f(0)} s^{f(0)} e^{cs} e^h.$$

Most visszatérhetünk (2.3) normálalak vizsgálatához. I. Legyen $a>0$. Megmutatjuk, hogy (2.3)-nak csak a triviális $u=0$ megoldása létezik. Egy pillanatra hozzuk vissza a D jelölést, úgy (2.3) helyett írható, hogy

(2.9) $$D^2(u)+au = (D^2+a)(u) = (D+i\sqrt{a})(D-i\sqrt{a})(u) = 0.$$

Itt alkalmaztuk a Gesztelyi [12]-ben — a lineáris operátortranszformációk τ gyűrűje elemeinek alapműveleteivel kapcsolatosan — bevezetett jelölésmódot.

Legyen $(D-i\sqrt{a})(u)=v$ úgy, (2.9)-ből

(2.10) $$D(v)+i\sqrt{a}v = 0.$$

Schatte [3] egy eredményének speciális esete gyanánt igaz, hogy (2.10)-nek az operátortestben csak a $v=0$ megoldása létezik. Ekkor azonban u ki kell, hogy elégítse a

$$D(u)-i\sqrt{a}u = 0$$

elsőrendű algebrai differenciálegyenletet. Megismételve Schatte [3]-ra tett hivatkozásunkat, adódik, hogy $u=0$.

E tényből és (2.2)-ből rögtön látható, hogy $a>0$-ra (2.1)-nek csak a triviális nulla megoldása létezik.

II. Legyen $a<0$. Ekkor (2.3) általános megoldása

(2.11) $$u = c_1 e^{\sqrt{b}s} + c_2 e^{-\sqrt{b}s} \quad (b = -a)$$

c_1, c_2 tetszőleges számok. (2.2), (2.11), (2.8)-ból kapjuk, hogy (2.1) általános megoldása

(2.12) $$x = \left(c_1 e^{-(c-\sqrt{b})s} + c_2 e^{-(c+\sqrt{b})s}\right) s^{-f(0)} e^{-h}$$

(itt az $e^{\gamma f(0)}$ számot beolvasztottuk a c_1, c_2 konstansokba!)

Azonnal látható, hogy (2.1) minden megoldása végesrendű disztribúció.

Most megvizsgáljuk, hogy a (2.12) milyen feltételek mellett állít elő függvényeket. Szükségünk lesz az alábbi lemmára.

1. Lemma. *Legyen $\mu>0$ és $k(t)$ tetszőleges lokálisan integrálható függvény. Akkor az $s^{-\mu}e^k$ operátor függvényt állít elő, mely nem tűnik el az origó semmilyen környezetében sem.*

Bizonyítás. Mivel $s^{-\mu}=\left\{\frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\right\}$ nem tűnik el az origó semmilyen környezetében sem és $e^k=1+\{H(t)\}$ alakú, valamilyen $H(t)\neq 0$ függvény mellett, adódik, hogy az $s^{-\mu}e^k$ függvény. Ezt $\{\sigma(t)\}$-vel jelölve nyerjük, hogy

$$\{\sigma(t)\} = \left\{\frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\right\} + \left\{\frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\right\}\{H(t)\}.$$

Tegyük fel, hogy $\sigma(t)=0$ a $0\leqq t\leqq\varepsilon$ intervallumon. Akkor ott fennáll az

$$\int_0^t \tau^{\mu-1}H(t-\tau)\,d\tau = -t^{\mu-1} \quad 0\leqq t\leqq\varepsilon$$

integrálegyenlet $H(t)$-re nézve. Azonban, mint ismeretes, konvolúció típusú integrálegyenletnek nincsenek sajátmegoldásai. Ellentmondás, így $\sigma(t)$ nem tűnhet el semmilyen $0\leqq t\leqq\varepsilon$ intervallumon.

Az alábbiakban több esetet fogunk megkülönböztetni.

Legyen $f(0)\leqq 0$. Megmutatjuk, hogy ha (2.12) függvény, akkor az nulla. Ui. legyen (2.12)-ben $x=\{x(t)\}$. Akkor

$$\{x(t)\}s^{f(0)}e^{h} = c_1e^{-(c-\sqrt{b})s}+c_2e^{-(c+\sqrt{b})s}. \tag{2.13a}$$

Mivel $f(0)\leqq 0$, (2.13) bal oldala függvényt állít elő, a jobb oldalán eltolási operátorok lineáris kombinációi állanak, így (2.13) jobb oldala csak a $c_1=c_2=0$ választás mellett állít elő függvényt, következésképp $\{x(t)\}=0$.

Legyen $f(0)>0$. Ezen belül most három alesetet kell megkülönböztetnünk:

Ha $c\geqq\sqrt{b}$, akkor, figyelembe véve fenti lemma első részét, az eltolási operátorok tulajdonságából azonnal adódik, hogy (2.12) c_1, c_2 tetszőleges értékére függvényt állít elő. Ebben az esetben tehát (2.1)-nek két lineárisan független függvénymegoldása van.

Ha $-\sqrt{b}\leqq c<\sqrt{b}$, akkor úgy, mint az előző esetben, az $e^{-(c+\sqrt{b})s}s^{-f(0)}e^{-h}$ operátor függvényt állít elő. Az $e^{-(c-\sqrt{b})s}s^{-f(0)}e^{-h}$ operátor azonban nem állít elő függvényt. Ui. ha függvényt állítana elő, akkor az eltolási operátorok alaptulajdonsága miatt fenti lemma első részéből következne, hogy az $s^{-f(0)}e^{-h}$ függvény eltűnne a $0\leqq t\leqq\sqrt{b}-c$ intervallumon. Ez azonban ellentmondana fenti lemma második részének.

Ebben az esetben tehát (2.12) c_2 tetszőleges és c_1 nulla értéke mellett állít elő függvényt és (2.1)-nek egy lineárisan független függvénymegoldása van.

Ha $c<-\sqrt{b}$, úgy megismételve az előző gondolatmenetet, látható, hogy az $e^{-(c+\sqrt{b})s}s^{-f(0)}e^{-h}$ $e^{-(c-\sqrt{b})s}s^{-f(0)}e^{-h}$ operátorok nem függvények. Meg fogjuk mutatni, hogy ha lineáris kombinációjuk függvény, akkor az a nulla függvény. Ui. esetünkben (2.12) úgy is felírható, hogy

$$x = [c_1e^{\alpha_1 s}+c_2e^{\alpha_2 s}]\{u(t)\} \quad \alpha_1>\alpha_2>0.$$

Tegyük fel, hogy léteznek olyan $c_1=\bar{c}_1$, $c_2=\bar{c}_2$ számok, melyekre x függvényt állít elő

$$x = \{x(t)\} = (\bar{c}_1e^{\alpha_1 s}+\bar{c}_2e^{\alpha_2 s})\{u(t)\}.$$

Ekkor azonban

$$\{x(t)\}e^{-\alpha_1 s} = (\bar{c}_1+\bar{c}_2e^{-(\alpha_1-\alpha_2)s})\{u(t)\}, \tag{2.13b}$$

melynek bal oldala $\alpha_1>0$ miatt az origó egy környezetében eltűnik. Mivel $\alpha_1>\alpha_2>0$, a lemmából következik, hogy $\bar{c}_1=0$. Ekkor azonban (2.13)-ból

$$\{x(t)\} = \bar{c}_2e^{\alpha_2 s}\{u(t)\} \tag{2.14}$$

következik. Ismét alkalmazva a lemmát, látható, hogy (2.14) jobb oldala csak akkor lehet függvény, ha $\bar{c}_2=0$. Tehát

$$\{x(t)\} = 0.$$

III. *Legyen* végül $a=0$. Ekkor (2.3) általános megoldása

$$u = c_1+c_2 s \tag{2.15}$$

és (2.2), (2.8)-ból (2.1) általános megoldására az

$$x = (c_1+c_2 s)e^{-cs}s^{-f(0)}e^{-h} \tag{2.16}$$

kifejezés adódik, amely végesrendű disztribúció. Most is megvizsgáljuk, hogy (2.16) milyen feltételek mellett állít elő függvényeket.

Az $a<0$ esethez ánalóg módon most is több lehetőséget kell megkülönböztetnünk.

Legyen $f(0)\leqq 0$. Teljesen hasonló módon, mint az $a<0$ esetben, belátható, hogy (2.16) csak a $c_1=c_2=0$-ra állít elő függvényt.

Legyen $c<0$. Kimutatjuk, hogy (2.16) csak a $c_1=c_2=0$ esetben függvény. Tegyük fel, hogy c_1 és c_2 közül legalább az egyik nem nulla és, hogy $x=\{x(t)\}$ függvény. Ekkor, feltételezve most már, hogy $f(0)>0$ (2.16)-ból

$$\frac{\{x(t)\}}{c_1+c_2 s} = e^{-cs}s^{-f(0)}e^{-h} \tag{2.17}$$

következne, ahol az egyenlet bal oldalán egy függvény szerepel, jobb oldalán pedig $c<0$ és a lemma állítása következtében egy függvényt elő nem állító operátor. Ellentmondás. Vagyis $c_1=c_2=0$ és $\{x(t)\}=0$.

Legyen $f(0)>0$ *és* $c\geqq 0$. Ezen belül most két alesetet kell megkülönböztetnünk.

Ha $f(0)>1$, (2.16) úgy is írható, hogy

$$\{x(t)\} = \left[c_1\left\{\frac{t^{f(0)-1}}{\Gamma(f(0))}\right\}+c_2\left\{\frac{t^{f(0)-2}}{\Gamma(f(0)-1)}\right\}\right]e^{-cs}e^{-h} \tag{2.18}$$

mely $c\geqq 0$ miatt c_1 és c_2 tetszőleges értékére függvényt reprezentál. Ekkor tehát (2.1)-nek ismét két lineárisan független függvénymegoldása van.

Ha $0<f(0)\leqq 1$, akkor közvetlenül belátható, hogy (2.16) csak a $c_2=0$ mellett állít elő függvényeket, ezek (2.18)-cal is előállíthatók, feltéve, hogy $c_2=0$. Most (2.1)-nek csak egy lineárisan független függvénymegoldása van. Érvényes tehát az alábbi

2. Tétel. *Tekintsük az (2.1)-hez tartozó homogén algebrai differenciálegyenletet a Mikusiński-féle operátortestben, ahol* $g=f+c$ a, c *tetszőleges valós számok,* f *tetszőleges lokálisan integrálható függvény, melyre teljesül, hogy* $\lim_{t\to 0} f(t)=f(0)$ *létezik és* $h(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{-t}$ *is integrálható. Akkor (2.1) minden létező operátortestbeli megoldása végesrendű disztribúció.*

Továbbá, $a>0$*-ra (2.1)-nek csak a triviális nulla megoldása létezik az operátortestben. Ha* $a\leqq 0$*, úgy (2.1)-nek két lineárisan független, nemtriviális megoldása léte-*

zik az operátortestben, ezek (2.12), illetve (2.16) formulákkal állíthatók elő. Legyen $b=-a$. *(2.1) lineárisan független nemtriviális integrálható függvénymegoldásainak számára érvényesek az alábbi táblázatok.*

$a<0$.

	$c \geqq \sqrt{b}$	$-\sqrt{b} \leqq c < \sqrt{b}$	$c < -\sqrt{b}$
$f(0) \leqq 0$	0	0	0
$f(0) > 0$	2	1	0

$a=0$.

	$c \geqq 0$	$c < 0$
$f(0) \leqq 0$	0	0
$0 < f(0) \leqq 1$	1	0
$f(0) > 1$	2	0

Térjünk rá a (2.1) inhomogén egyenlet vizsgálatára. Megmutatjuk, hogy (2.1)-nek létezik megoldása az operátortestben.

I. eset. $a<0$. Vezessük be az

$$x_1 = e^{-(c-\sqrt{b})s} s^{-f(0)} e^{-h},$$

$$x_2 = e^{-(c+\sqrt{b})s} s^{-f(0)} e^{-h}$$

jelöléseket, melyekkel (2.12) az

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

alakban írható. Számítsuk ki a Wronski determinánst

$$\begin{aligned}(2.19)\quad w = x_1 x_2' - x_2 x_1' = e^{-(c-\sqrt{b})s} s^{-f(0)} e^{-h} \big[-(c+\sqrt{b}) e^{-(c+\sqrt{b})s} s^{-f(0)} e^{-h} - \\ - e^{-(c+\sqrt{b})s} f(0) s^{-f(0)-1} e^{-h} - e^{-(c+\sqrt{b})s} s^{-f(0)} h' e^{-h} \big] + \\ + e^{-(c+\sqrt{b})s} s^{-f(0)} e^{-h} \big[(c-\sqrt{b}) e^{-(c-\sqrt{b})s} s^{-f(0)} e^{-h} + \\ + e^{-(c-\sqrt{b})s} s^{-f(0)-1} f(0) e^{-h} + e^{-(c-\sqrt{b})s} h' s^{-f(0)} e^{-h} \big] = -2\sqrt{b} s^{-2f(0)} e^{-2h} e^{-2cs}.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$(2.20)\qquad \begin{aligned} \frac{z x_1}{w} &= -\frac{1}{2\sqrt{b}} s^{f(0)} e^{h} e^{(\sqrt{b}+c)s} z, \\ \frac{z x_2}{w} &= -\frac{1}{2\sqrt{b}} s^{f(0)} e^{h} e^{(-\sqrt{b}+c)s} z. \end{aligned}$$

Mivel a ze^h operátor függvény, (2.20) operátorok végesrendű disztribúciók, így Gesztelyi integrálási tétele szerint algebrailag integrálhatók. Így tehát 1. Tétel első

része alapján (2.1)-nek létezik megoldása az operátortestben, melyet az

$$x_p = x_2 \int \frac{z x_1}{w} - x_1 \int \frac{z x_2}{w} \tag{2.21}$$

formulával írhatunk fel. x_1, x_2 kifejezéseit és (2.20)-at (2.21)-be helyettesítve adódik, hogy

$$\begin{aligned} x_p = {} & \frac{1}{2\sqrt{b}} e^{(\sqrt{b}-c)s} s^{-f(0)} e^{-h} \int z e^{-(\sqrt{b}-c)s} s^{f(0)} e^{h} - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{b}} e^{-(\sqrt{b}+c)s} s^{-f(0)} e^{-h} \int z e^{(\sqrt{b}+c)s} s^{f(0)} e^{h}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Mivel a Gesztelyi-tétel szerint (2.22)-ben fellépő algebrai integrálok maguk is végesrendű disztribúciók, így az x_p megoldás is az. Most *elégséges* feltételeket fogunk megadni, melyek biztosítják, hogy xp függvényt állítson elő. Bevezetjük az $\omega = \{\omega(t)\} = z e^h$ jelölést.

Legyen $c < -\sqrt{b}$. Ekkor a fellépő algebrai integrálok (1.7) és (1.8) szerint is felírhatók és kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x_p = {} & -\frac{1}{2\sqrt{b}} e^{(\sqrt{b}-c)s} s^{-f(0)} e^{-h} s^{f(0)} e^{-(\sqrt{b}-c)s} \left\{ \frac{\omega(t)}{t+\sqrt{b}-c} + \right. \\ & \left. + f(0)(t+\sqrt{b}-c)^{f(0)-1} \int \frac{\omega(t)\,dt}{(t+\sqrt{b}-c)^{f(0)+1}} \right\} + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{b}} e^{-(\sqrt{b}+c)s} s^{-f(0)} e^{-h} e^{(\sqrt{b}+c)s} s^{f(0)} \left\{ \frac{\omega(t)}{t-\sqrt{b}-c} + \right. \\ & \left. + f(0)(t-\sqrt{b}-c)^{f(0)-1} \int \frac{\omega(t)\,dt}{(t-\sqrt{b}-c)^{f(0)+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Az egyszerűsítések elvégzése után

$$\begin{aligned} \{x_p(t)\} = e^{-h} \left\{ \frac{\omega(t)}{(t-c)^2-b} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[f(0)(t-\sqrt{b}-c)^{f(0)-1} \int \frac{\omega(t)\,dt}{(t-\sqrt{b}-c)^{1+f(0)}} - \right. \right. \\ \left. \left. - f(0)(t+\sqrt{b}-c)^{f(0)-1} \int \frac{\omega(t)\,dt}{(t+\sqrt{b}-c)^{1+f(0)}} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

adódik.

(2.23), mint látható, egy lokálisan integrálható függvényt határoz meg.

Ha $c = -\sqrt{b}$ és a $\dfrac{z(t)}{t}$ is lokálisan integrálható, akkor (2.22) függvényt állít elő, melyre (2.23) érvényes. Ez közvetlen folyománya Fényes [2] alábbi megjegyzésének:

Ha $\dfrac{f_1(t)}{t}$ *és* $f_2(t)$ *lokálisan integrálható a* $\langle 0, \infty)$*-ben, akkor*

$$\frac{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau}{t}$$

is az.

Az $\omega(t)$ függvény definíciójából és előző megjegyzésből következik, hogy $\frac{\omega(t)}{t}$ integrálható, ha $\frac{z(t)}{t}$ integrálható.

Ha $c<-\sqrt{b}$, akkor (2.1)-nek általában nincs függvénymegoldása. A függvénymegoldás létezésének kritériumai eléggé komplikáltak (lásd Fényes [8]). A cikk terjedelme miatt ezzel az esettel itt nem foglalkozunk.

II. Eset. $a>0$. Mint láttuk, (2.1)-hez tartozó homogén egyenletnek csak triviális operátortestbeli megoldása van, így az állandók variálásának elve értelmét veszti. Ennek ellenére (2.1) függvénymegoldása egyszerűen felírható tetszőleges $f(0)$ és c mellett. Ui. (2.23)-ba visszaírva $-b=a$-t, látjuk, hogy az $a>0$ esetén valós értékű integrálható függvényt állít elő, melyet az alábbi alakban is írhatunk:

$$(2.24)\quad \{x_p(t)\}=e^{-h}\left\{\frac{\omega(t)}{(t-c)^2+a}+\mathrm{Re}\left[\frac{f(0)}{i\sqrt{a}}(t-i\sqrt{a}-c)^{f(0)-1}\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t-i\sqrt{a}-c)^{1+f(0)}}\right]\right\},$$

ahol ki kell választani a hatványfüggvény egy reguláris ágát.

III. eset. $a=0$. Megmutatjuk, hogy (2.1)-nek létezik megoldása az operátortestben. Bevezetve az

$$x_1=e^{-cs}s^{-f(0)}e^{-h},$$

$$x_2=e^{-cs}s^{1-f(0)}e^{-h}$$

jelöléseket, (2.16) az

$$x=c_1x_1+c_2x_2$$

alakban írható. Számítsuk ki a Wronski determinánst:

$$(2.25)\quad w=x_1x_2'-x_2x_1'=$$

$$=e^{-cs}s^{-f(0)}e^{-h}\left[-ce^{-cs}s^{1-f(0)}e^{-h}+(1-f(0))e^{-cs}s^{-f(0)}e^{-h}-e^{-cs}s^{1-f(0)}h'e^{-h}\right]+$$

$$+e^{-cs}s^{1-f(0)}e^{-h}\left[ce^{-cs}s^{-f(0)}e^{-h}+f(0)e^{-cs}s^{-f(0)-1}e^{-h}+e^{-cs}s^{-f(0)}h'e^{-h}\right]=$$

$$=s^{-2f(0)}e^{-2cs}e^{-2h}\left[-cs+1-f(0)-sh'+cs+f(0)+sh'\right]=s^{-2f(0)}e^{-2cs}e^{-2h}.$$

Ebből következik, hogy

$$(2.26)\quad \frac{zx_1}{w}=s^{f(0)}e^{h}e^{cs}z,\qquad \frac{zx_2}{w}=s^{1+f(0)}e^{h}e^{cs}z.$$

(2.20)-al analóg módon, (2.26) operátorok is végesrendű disztribúciók, így megismételve az $a<0$ eset tárgyalásánál elmondottakat, az állandók variálásának módszerével (2.1) megoldása az

$$(2.27)\quad x_p=s^{1-f(0)}e^{-cs}e^{-h}\int ze^{cs}s^{f(0)}e^{h}-s^{-f(0)}e^{-cs}e^{-h}\int ze^{cs}s^{f(0)+1}e^{h}$$

alakban adódik, mely nyilvánvalóan maga is végesrendű disztribúció. Igen egyszerű *elégséges* feltétel biztosítja az, hogy (2.27) integrálható függvényt állítson elő.

Legyen $c<0$. Ekkor (2.27)-ben fellépő algebrai integrálok (1.7), (1.8)-cal felírhatók és (2.27)-re nyerjük, hogy

$$x_p = e^{-hs}\left\{\frac{\omega(t)}{t-c}+(f(0)+1)(t-c)^{f(0)}\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t-c)^{f(0)+2}}\right\}- \tag{2.28}$$

$$-e^{-hs}\left\{\frac{\omega(t)}{t-c}+f(0)(t-c)^{f(0)-1}\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t-c)^{f(0)+1}}\right\}=$$

$$=e^{-hs}\left\{(f(0)+1)(t-c)^{f(0)}\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t-c)^{f(0)+2}}-f(0)(t-c)^{f(0)-1}\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t-c)^{f(0)+1}}\right\}.$$

A zárójelben levő függvény abszolút folytonos a nullában nulla, így végül az s differenciáloperátor alaptulajdonságából következik, hogy

$$x_p=\{x_p(t)\}=e^{-h}\left\{\frac{\omega(t)}{(t-c)^2}+f(0)(f(0)+1)(t-c)^{f(0)-1}\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t-c)^{f(0)+2}}-\right. \tag{2.29}$$

$$\left.-f(0)(f(0)-1)(t-c)^{f(0)-2}\int\frac{\omega(t)\,dt}{(t-c)^{f(0)+1}}\right\}.$$

Ezekután legyen $c=0$ és legyen $\frac{z(t)}{t^2}$ lokálisan integrálható. Ekkor (2.27) függvényt állít elő, melyre a (2.29) formula érvényes. Igazoljuk ezt! Ha $\frac{Z(t)}{t^2}$ integrálható, akkor $\frac{z(t)}{t}$ is integrálható és Fényes [2], a konvolúcióval kapcsolatos fentebb említett eredményéből közvetlenül következik, hogy (2.28) $c=0$ esetben is fennáll.

Fényes [2] előbb idézett megjegyzése könnyen általánosítható a következő értelemben:

Tetszőleges n természetes számra legyen $\frac{f_1(t)}{t^n}$ és $f_2(t)$ integrálható $\langle 0,\infty)$-ben.

Akkor $\dfrac{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau}{t^n}$ *is ilyen tulajdonságú.*

Ennek belátása az $n=1$ esettel teljesen hasonló módon történik. $n=2$ választással adódik, hogy $\frac{\omega(t)}{t^2}$ integrálható. (2.28) jobb oldalán $t^\beta\int\frac{\Omega(t)\,dt}{t^\beta}$ alakú kifejezések vannak, ha $c=0$, ahol

$$\Omega(t)=\frac{\omega(t)}{t^2}.$$

Parciális integrálással és a Bernoulli—L'Hospital szabály alkalmazásával könnyen belátható, hogy $t^\beta\int\frac{\Omega(t)\,dt}{t^\beta}$ függvény határértéke $t=0$-ban nulla, abszolút folytonos, deriváltja

$$\Omega(t)+\beta t^{\beta-1}\int\frac{\Omega(t)\,dt}{t^\beta}$$

lokálisan integrálható. (Vessük össze Gesztelyi integráltétele formális általánosításának utolsó állításával és (1.7), (1.8) képletekkel!) Tehát (2.28) és (2.29) $c=0$ esetben is biztosan ekvivalensek, ha $\frac{z(t)}{t^2}$ integrálható.

Ha $c>0$, függvénymegoldás általában nem létezik, kritériumával ebben a dolgozatban nem foglalkozunk. Érvényes tehát a

3. Tétel. *Tekintsük a (2.1) inhomogén algebrai differenciálegyenletet, az előző tétel g-re kirótt feltételei mellett. Legyen* $a=-b$ *és* $z=e^{-h}\omega$. *(2.1)-nek tetszőleges lokálisan integrálható z mellett létezik partikuláris megoldása az operátortestben, melyet az állandók variálásának módszerével határozhatunk meg. A megoldás végesrendű disztribúció.*

Ha $a<0$ *és* $c<-\sqrt{b}$, *vagy* $a<0$, $c=-\sqrt{b}$ *és* $\frac{z(t)}{t}$ *integrálható, akkor (2.1)-nek létezik függvénymegoldása, mely (2.23) formulával írható fel.*

Ha $a>0$, *akkor (2.1)-nek létezik függvénymegoldása, mely (2.24) formulával írható fel. Ha* $a=0$ *és* $c<0$ *vagy* $a=c=0$ *és* $\frac{z(t)}{t^2}$ *integrálható, akkor (2.1)-nek ismét létezik függvénymegoldása, amely (2.29) formulával írható fel.*

Megjegyzés. Természetesen (2.1) összes testbeli megoldásait megkapjuk, ha az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásához hozzáadjuk a homogén egyenlet nemtriviális megoldásait. Ez a lokálisan integrálható megoldásokra is vonatkozik.

3. „B" *differenciálegyenlet vizsgálata*

Tekintsük az

$$x''-\left(\frac{f'}{f}+2a\right)x'+\left(a\frac{f'}{f}+a^2-b^2f^2\right)x=z \tag{3.1}$$

lineáris, másodrendű differenciálegyenletet. Itt z tetszőleges adott lokálisan integrálható függvény, f pedig az előző pont premisszáinak eleget tevő adott lokálisan integrálható függvényt jelöl. Legyenek továbbá — az előző pontban alkalmazott jelölésekkel való összetévesztés veszélye nélkül — a és $b\neq 0$ tetszőlegesen adott valós számok.

A $b=0$ esettel nem foglalkozunk.

Vizsgáljuk először a homogén egyenletet ($z=0$). Ha az s operátort egy pillanatra valós (vagy komplex) változónak tekintjük, úgy (3.1) megoldása megtalálható Kamke [9] 421. oldalán:

$$x=c_1e^{as}e^{b\int f(s)\,ds}+c_2e^{as}e^{-b\int f(s)\,ds}$$

(c_1, c_2 tetszőleges számok).
Mivel az operátortestben az s szerinti integrál az algebrai integrál, azonnal adódik, hogy (3.1) formális általános megoldása

$$x=c_1e^{as}e^{b\int f}+c_2e^{as}e^{-b\int f}.$$

Mivel f eleget tesz az előző pontban előírt premisszáknak, adódik, hogy a kapott formális megoldás ténylegesen létezik és az alábbi alakban írható:

$$x = c_1 e^{as} e^{bh} s^{f(0)b} + c_2 e^{as} e^{-bh} s^{-f(0)b}, \tag{3.2}$$

ahol h és $f(0)$ ugyanazt jelöli, mint az előző pontban. Nézzük meg, mikor állít elő (3.2) függvényeket. Több esetet különböztetünk meg.

I. $a \leqq 0$. Ekkor az 1. Lemma első részéből és az eltolási operátor alaptulajdonságából következik, hogy ha $f(0)b<0$, akkor $c_2=0$ választással, ha pedig $f(0)b>0$, akkor $c_1=0$ választással kaphatunk függvényeket (3.2)-ből. Érdekes speciális eset az $f(0)=0$. Ekkor a (3.2)-ben szereplő két nemtriviális megoldás egyike sem állít elő nemtriviális integrálható függvényeket, lineáris szuperpozíciójuk azonban előállíthat. Legyen $c_2=-c_1$. Ekkor az

$$x = \{x(t)\} = 2c_1 e^{as} \operatorname{sh} \{h(t)\} \tag{3.3}$$

függvénymegoldást nyerjük.

Tehát az $a \leqq 0$ esetben pontosan egy nemtriviális lineárisan független függvénymegoldás létezik.

II. $a>0$. Ha $f(0)b>0$, vagy $f(0)b<0$, akkor teljesen hasonló gondolatmenettel, mint az előző paragrafusban tettük, ki lehet mutatni, hogy ha (3.2) függvényt állít elő, akkor $c_1=c_2=0$, tehát ekkor a nulla függvényt állítja elő. Megint érdekes speciális esetet képez az $f(0)=0$. Ekkor az 1. Lemma második részében és az eltolási operátor tulajdonságából ismét következik, hogy (3.2)-ben szereplő két megoldás egyike sem állít elő függvényeket. *Azonban a (3.3) lineáris szuperpozíció előállíthat függvényt.* Akkor és csakis akkor, ha f eltűnik a $0 \leqq t \leqq a$ intervallumon. Ui. ha a $h(t)=\dfrac{f(t)}{t}$ eltűnik az említett intervallumon, akkor — mivel feltehetjük, hogy $b=1$,

$$\operatorname{sh} \{h(t)\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

triviálisan eltűnik ugyanott. Fordítva, ha $\operatorname{sh} \{h(t)\}$ tűnik el a $0 \leqq t \leqq a$ intervallumon, akkor ott érvényes, hogy

$$0 = h + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^{2i+1}}{(2i+1)!} = \{h(t)\} + \{h(t)\} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{h^{2i}}{(2i+1)!}.$$

Vagyis $h(t)$ eleget tesz a szóban forgó intervallumon egy

$$\int_0^t h(\tau) G(t-\tau)\, d\tau = -h(t)$$

típusú integrálegyenletnek, bizonyos $G(t)$ mag mellett. Ekkor azonban $h(t)=0$, és így $f(t)=0$ a $0 \leqq t \leqq a$ szakaszon.

Viszont ha $\operatorname{sh} \{bh(t)\}$ eltűnik fenti intervallumon, akkor az eltolási operátor alaptulajdonsága miatt (3.3) valóban nemtriviális függvénymegoldást állít elő.

Látható, hogy a homogén egyenlet minden operátoros megoldása végesrendű disztribúció.

Foglalkozzunk most ezután az inhomogén egyenlettel. A Wronski determináns elemi számolással a

$$w = -2bfe^{2as}$$

alakban adódik. 1 tételből és (3.2)-ből közvetlenül adódik, hogy (3.1) egy partikuláris megoldása

$$(3.4) \qquad x_p = \frac{e^{as}e^{hb}s^{f(0)b}}{2b}\int\frac{e^{-as}e^{-hb}s^{-f(0)b}z}{f} - \frac{e^{as}e^{-hb}s^{-f(0)b}}{2b}\int\frac{e^{-as}e^{hb}s^{f(0)b}z}{f}$$

alakú, feltéve, hogy a fellépő algebrai integrálok léteznek az operátortestben. Ezek azonban tetszőleges z és f mellett általában nem léteznek. Így az alábbi megszorítást tesszük.

Legyen $z = s^k e^{-\beta s}\{g(t)\}$, *azaz legyen* $\frac{z}{f}$ *végesrendű disztribúció.*

Ekkor (3.4)-ben szereplő integranduszok is végesrendű disztribúciók. — Gesztelyi integráltételéből adódik, hogy az integrálok is azok, és maga a (3.4) partikuláris megoldás is végesrendű disztribúció, mely az alábbi alakban írható fel:

$$(3.5) \qquad x_p = \frac{e^{as}e^{hb}s^{f(0)b}}{2b}\int e^{-(a+\beta)s}s^{-f(0)b+k}\omega_1 - \frac{e^{as}e^{-hb}s^{f(0)b}}{2b}\int e^{-(a+\beta)s}s^{f(0)b+k}\omega_2,$$

ahol $\omega_1 = e^{-hb}g$, $\omega_2 = e^{hb}g$.

(3.5) részletes diszkusszióját speciális esetekben végezzük el.

Ha $a+\beta>0$, akkor (1.7), (1.8) figyelembevételével adódik, hogy

$$(3.6) \qquad \begin{aligned} x_p = \frac{e^{-\beta s}s^k}{2b}\Bigg[e^{-hb}\left\{\frac{\omega_2(t)}{t+a+\beta} + (bf(0)+k)(t+a+\beta)^{bf(0)+k-1}\int\frac{\omega_2(t)\,dt}{(t+a+\beta)^{bf(0)+k+1}}\right\} - \\ - e^{hb}\left\{\frac{\omega_1(t)}{t+a+\beta} + (-bf(0)+k)(t+a+\beta)^{-bf(0)+k-1}\int\frac{\omega_1(t)\,dt}{(t+a+\beta)^{-bf(0)+k+1}}\right\}\Bigg]. \end{aligned}$$

Látható, hogy a kapott megoldás biztosan lokálisan integrálható függvényt állít elő, ha $\beta \geqq 0$ és $k=0$, vagyis ha a $\frac{z}{f}$ operátor függvény.

Megemlítjük, hogy a $\frac{z}{f}$ operátor függvény volta egyáltalában nem szükséges ahhoz, hogy (3.6) függvény legyen.

Pl. $k=1$, $\{g(t)\}=\{1\}=\frac{1}{s}$ választással

$$\frac{z}{f} = e^{-\beta s}$$

adódik. ω_1 és ω_2 definíciójából következik, hogy ω_1 és ω_2 abszolút folytonosak, $\omega_1(0)=\omega_2(0)=1$. Alkalmazva a tetszőleges abszolút folytonos $\xi(t)$ függvényre érvé-

nyes ismert operátoros $s\{\xi(t)\}=\left\{\frac{d\xi(t)}{dt}\right\}+\xi(0)$ formulát, (3.6)-ból az alábbi képletet nyerjük:

$$(3.7)\qquad x_p=\frac{e^{-\beta s}}{2b}\left[e^{-hb}\left(1+\left\{\frac{\omega_2'(t)}{t+a+\beta}+bf(0)\frac{\omega_2(t)}{(t+a+\beta)^2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+bf(0)(bf(0)+1)(t+a+\beta)^{bf(0)-1}\int\frac{\omega_2(t)\,dt}{(t+a+\beta)^{bf(0)+2}}\right\}\Bigg)-$$

$$-e^{hb}\left(1+\left\{\frac{\omega_1'(t)}{t+a+\beta}-bf(0)\frac{\omega_1(t)}{(t+a+\beta)^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-bf(0)(-bf(0)+1)(t+a+\beta)^{-bf(0)-1}\int\frac{\omega_1(t)\,dt}{(t+a+\beta)^{-bf(0)+2}}\right\}\right)\right]=$$

$$=\frac{e^{-\beta s}}{2b}\left[-2\,\mathrm{sh}\,\{bh(t)\}+e^{-hb}\left\{\frac{\omega_2'(t)}{t+a+\beta}+bf(0)\frac{\omega_2(t)}{(t+a+\beta)^2}+\right.\right.$$

$$\left.+bf(0)(bf(0)+1)(t+a+\beta)^{bf(0)-1}\int\frac{\omega_2(t)\,dt}{(t+a+\beta)^{bf(0)+2}}\right\}-$$

$$-e^{hb}\left\{\frac{\omega_1'(t)}{t+a+\beta}-bf(0)\frac{\omega_1(t)}{(t+a+\beta)^2}-\right.$$

$$\left.\left.-bf(0)(-bf(0)+1)(t+a+\beta)^{-bf(0)-1}\int\frac{\omega_1(t)\,dt}{(t+a+\beta)^{-bf(0)+2}}\right\}\right],$$

ahol kivételesen $'$ a közönséges (nem algebrai) deriválást jelöli. $\beta\geqq 0$-ra, mint látjuk, (3.7) függvényt állít elő.

Megjegyezzük, hogy ha $\beta=0$, akkor $f=z$.

Ha $a+\beta=0$, akkor szóról-szóra megismételve az előző paragrafus (2.23) formuláját követő gondolatmenetet, arra az eredményre jutunk, hogy (3.6) érvényes marad, amennyiben kikötjük a $\frac{g(t)}{t}$ integrálhatóságát.

Ebben az esetben (3.6) $\beta\geqq 0$ és $k=0$ teljesülése esetén megint függvénymegoldást állít elő.

Az $a+\beta<0$ esetben a függvénymegoldások kritériumait nem vizsgáljuk. Érvényes tehát az alábbi

4. Tétel. *Tekintsük a (3.1) algebrai differenciálegyenletet, ahol legyenek a és* $b\neq 0$ *tetszőleges valós számok, és z, f adott lokálisan integrálható függvények. Létezzék* $f(0)=\lim_{t\to+0} f(t)$ *és legyen* $h(t)=\frac{f(t)-f(0)}{-t}$ *lokálisan integrálható. Legyen a* $\frac{Z}{f}$ *operátor tetszőleges végesrendű disztribúció, azaz* $\frac{z}{f}=s^k e^{-\beta s}\{g(t)\}$ *teljesüljön. Továbbá*

legyen $\omega_1 = e^{-hb}g$, $\omega_2 = e^{hb}g$. *Akkor (3.1) minden létező megoldása is végesrendű disztribúció. A (3.1)-hez tartozó homogén egyenletnek két nemtriviális lineárisan független operátoros megoldása létezik, melyeket (3.2) állít elő.*

Ha $a \leqq 0$, *akkor a homogén egyenletnek a lokálisan integrálható függvények konvolúciógyűrűjében pontosan egy lineárisan független nemtriviális megoldása van. Ez az alábbi:*

$$\{x(t)\} = e^{as}e^{bh}s^{f(0)b} \quad \text{ha} \quad f(0)b < 0$$

(3.8)
$$\{x(t)\} = e^{as}e^{-bh}s^{-f(0)b} \quad \text{ha} \quad f(0)b > 0$$

$$\{x(t)\} = e^{as}\,\mathrm{sh}\,\{bh(t)\} \quad \text{ha} \quad f(0) = 0.$$

Ha $a > 0$, *akkor fenti gyűrűben nemtriviális megoldás akkor és csakis akkor létezik, ha* $f(t)$ *eltűnik a* $0 \leqq t \leqq a$ *intervallumon, ez a megoldás az egyetlen lineárisan független megoldás, mely (3.8)-cal adható meg.*

A (3.1)-hez tartozó inhomogén egyenletnek létezik partikuláris megoldása az operátortestben, mely (3.5)-tel írható fel, és az alábbi feltételek teljesülése esetén integrálható függvényt reprezentál:

I. $a+\beta > 0, \quad \beta \geqq 0, \quad k = 0,$

vagy II. $a+\beta = 0, \quad \beta \geqq 0, \quad k = 0, \quad \left\{\frac{g(t)}{t}\right\}$ integrálható,

vagy III. $a+\beta > 0, \quad \beta \geqq 0, \quad k = 1, \quad \{g(t)\} = \frac{1}{s}$

I. vagy II. feltétel teljesülése esetén a partikuláris függvénymegoldást (3.6), míg III. teljesülése esetén pedig (3.7) formula állítja elő.

Megjegyzés (Lásd az előző megjegyzést.)

IRODALOM

[1] Wloka, J.: Über lineare s-Differentialgleichungen in der Operatorenrechnung. Math. Ann. *166* (1966) 233—256.

[2] Gesztelyi, E.: Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynom—Koeffizienten, Publ. Math. Debrecen *10* (1963) 215—243.

[3] Schatte, P. Funktionentheoretische Untersuchungen im Mikusińskischen Operatorenkörper, Math. Nachrichten *35* (1967) 19—56.

[4] Fényes, T. Anwendung der Mikusińskischen Operatorenrechnung zur Lösung von Integralgleichungen dritter Art vom Faltungstypus. Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl. *9* (1965) 365—399.

[5] Fényes, T. A note on the solution of integral equations of convolution type of the third kind by application of the operational calculus of Mikusiński, Studia Sci. Math. Hung. *2* (1967) 81—89.

[6] Fényes, T. On the operational solution of certain non-linear singular integral equations. Studia Sci. Math. Hung. *4* (1969) 69—91.

[7] Fényes T.: On the operational solution of certain non-linear integral equations. Studia Sci. Math. Hung. *5* (1970) 289—298.

[8] Fényes T.: On the operational solution of a convolution type integral equation of the third kind. Studia Sci. Math. Hung. (megjelenés alatt).

[9] Kamke, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig 1956. Akademische Verlagsgesselschaft.

[10] MIKUSIŃSKI, J.: Operátorszámítás. Műszaki Könyvkiadó 1961.
[11] MIKUSIŃSKI, J.: L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionelles (deuxieme partie. Annales Universitatis Mariae Curie- Sklodowska, sectio A *3* (1949) 25—33.
[12] GESZTELYI, E.: Über lineare Operatortransformationen. Publ. Math. Debrecen *14* (1967) 169—206.

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОПЕРАТОРНОГО ТЕЛА

ТАМАШ ФЕНЕШ И ПАЛ КОШИК

ABOUT SOME SPECIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER OF THE OPERATOR FIELD

T. FÉNYES and P. KOSIK

SIEGEL-GYÖKÖK ÉS A PRÍMSZÁMTÉTEL

PINTZ JÁNOS

1. Az analitikus számelmélet egyik legérdekesebb és legfontosabb problémája, hogy a mod D vett redukált maradékosztályok csoportján értelmezett χ valós karakterhez tartozó,

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{1.1}$$

ún. Dirichlet-féle L-függvényeknek lehet-e gyökük az

$$\left[1 - \frac{c}{\log D}, 1\right] \tag{1.2}$$

intervallumon tetszőleges kis fix abszolút c konstans esetén, ha $D \to \infty$. Másképp fogalmazva, hogy ha az $L(s, \chi)$ függvény legnagyobb valós gyökét $1-\delta$-val jelöljük, fennáll-e a

$$\delta \geqq \frac{c}{\log D} \tag{1.3}$$

egyenlőtlenség. A máig is legerősebb becslés δ-ra Siegeltől [7] származik, aki 1935-ben igazolta, hogy

$$\delta \geqq \frac{c(\varepsilon)}{D^{\varepsilon}}, \tag{1.4}$$

ahol $c(\varepsilon)$ csak ε-tól függő konstans. Az (1.4) becslés érdekessége és komoly hátránya, hogy a bizonyítás nem ad módot a $c(\varepsilon)$ konstans meghatározására semmilyen $\varepsilon < \frac{1}{2}$ esetén. Ha az (1.3) becslés nem teljesül, akkor azt mondjuk, hogy léteznek Siegel-gyökök. Siegel-gyökök létezése igen sok bonyodalmat okozna a számelméletben, tekintve, hogy a Dirichlet-féle L-függvények gyökei igen közvetlen kapcsolatban állnak számtani sorok prímeloszlásával. Így elképzelhető lenne Siegel-gyökök létezése esetén, hogy minden x-re

$$\pi(x, k, l_1) > \pi(x, k, l_2), \tag{1.5}$$

ahol $(k, l_1) = (k, l_2) = 1$ és $\pi(x, k, l)$ jelöli azon χ-nél kisebb prímek számát, melyek l-lel kongruensek mod k. De Siegel-gyökök létezése hatással lenne a Goldbach problémára, kvadratikus alakok osztályszámának, legkisebb kvadratikus nem maradékok és legkisebb prím kvadratikus maradékok értékeire is.

Egy másik (1.3)-mal érthetően közeli kapcsolatban álló sejtés szerint

$$L(1,\chi) > \frac{c}{\log D} \tag{1.6}$$

mod D vett χ valós karakter esetén. Hecke 1919-ben igazolta (bizonyítását ld. Landau [5]), hogy (1.3)-ból következik (1.6). Továbbá a szinte triviális

$$|L'(s,\chi)| \leqq c^1 \log^2 D \quad \text{ha} \quad 1-\frac{1}{\log D} \leqq s \leqq 1 \tag{1.7}$$

becslésből adódik, hogy (1.6)-ból következik az (1.3)-nál valamivel gyengébb (de a máig legerősebb (1.4)-nél lényegesen élesebb)

$$\delta \leqq \frac{c''}{\log^3 D} \tag{1.8}$$

egyenlőtlenség.

Azon meglepő tényt, hogy az (1.3), ill. (1.6) sejtés a ζ-függvény gyökeivel (és ezen keresztül a prímek természetes számok közti eloszlásával) kapcsolatban áll, Deuring [1] fedezte fel. Ezt a titokzatos kapcsolatot Linnyik [6] explicit formában is igazolta. Ha a mod D vett χ valós karakterhez tartozó L-függvénynek létezik $1-\delta$ valós gyöke, melyre

$$\delta < \frac{c_1}{\log D}, \tag{1.9}$$

akkor $\zeta(s)$-nek nincs gyöke a

$$\sigma > 1 - c_3 \frac{\log \frac{c_2}{\delta \log (D|t|)}}{\log (D|t|)}$$
$$|t| \leqq \frac{c^{c_1/\delta}}{D} \tag{1.10}$$

tartományban.*

Tehát ha léteznek Siegel-gyökök, akkor egy bizonyos tartományban nem léteznek ζ-gyökök. Így pl. ha léteznének Siegel-gyökök, melyre

$$\delta_n \leqq \frac{1}{e^{(\log D_n)^{1-\varepsilon}}} \quad (D_n \to \infty) \tag{1.11}$$

akkor egyszerű számolással adódik, hogy $\zeta(s) \neq 0$ a

$$\sigma > 1 - \frac{c(\varepsilon)}{\log^{2\varepsilon}(|t|+2)} \tag{1.12}$$

tartományban, és így Ingham [4], Theorem 22., 63. o. általános tétele miatt a prímek eloszlására fennállna az eddigieknél lényegesen erősebb

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O(xe^{-c'(\varepsilon)(\log x)^{1-2\varepsilon}}) \tag{1.13}$$

* Linnyik tételét nem csupán elméleti érdekessége miatt vezette le. A fenti tételnek fontos szerepe volt azon híres tételének igazolásánál, amely szerint $(l, D)=1$ esetén létezik olyan p prím, melyre $p \equiv l(D)$ és amelyre $p \leqq D^C$ (C abszolút konstans, melynek értéke ugyanakkor Linnyik eredeti bizonyításából (1.4) alkalmazása miatt nem volt effektíve meghatározható).

aszimptotikus egyenlőség, ahol

$$\text{li}\, x = \int_0^x \frac{dt}{\log t}.* \tag{1.14}$$

Jelen dolgozat tárgya azon észrevétel igazolása, hogy az (1.6) sejtés hamisságának feltételezésével egyszerű, elemi bizonyítás adódik az Hadamard [3] és de la Vallée Poussin [8] által 1896-ban igazolt

$$\pi(x) \sim \text{li}\, x \sim \frac{x}{\log x} \tag{1.15}$$

prímszámtételre, pontosabban a vele ekvivalens**

$$\sum_{n \leqq x} \lambda(n) = o(x) \tag{1.16}$$

relációra, ahol $\lambda(n)$ a Liouvielle-féle λ függvény.

Észrevételünk igazolásánál a mod D vett χ valós karakterről csak azt használjuk fel, hogy 0, 1 vagy -1 értékeket felvevő teljesen multiplikatív számelméleti függvény, melyre

$$\left|\sum_{d \leqq m} \chi(d)\right| < D \tag{1.17}$$

tetszőleges m esetén. Így állításunk általánosabban is igaz lesz a fenti tulajdonságú számelméleti függvényekre is.*

Tétel: *Ha léteznek* $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *csak* 0, 1, -1 *értéket felvevő teljesen multiplikatív számelméleti függvények, melyekre tetszőleges m-re*

$$\left|\sum_{d \leqq m} \theta_k(d)\right| < D_k \tag{1.18}$$

ahol $D_v < D_{v+1}$, *továbbá*

$$\lim_{k \to \infty} \log D_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_k(n)}{n}\right) = 0, \tag{1.19}$$

* A máig ismert legnagyobb gyökmentes tartomány a

$$\sigma > 1 - \frac{c(\varepsilon)}{\log^{2/3+\varepsilon}(|t|+2)},$$

míg az ebből származó legjobb hibatag

$$\pi(x) = \text{li}\, x + O\left(\frac{x}{e^{c'(\varepsilon)\log^{3/5-\varepsilon} x}}\right),$$

(ld. Ellison—Mendès-France [2], 423. és 425. o.)

** (1.5)—(1.6) ekvialenciája úgy értendő, hogy mindkettő viszonylag egyszerű, elemi úton levezethető a másikból. Egyébként a prímszámtétellel ekvivalensnek neveztek az erre Erdős és Selberg által 1949-ben adott első elemi bizonyítások keletkezése előtt egy állítást, ha az állításból a prímszámtétel és a prímszámtételből az állítás elemileg levezethető volt.

* Hogy állításunk valóban általánosabb-e ilyen formában, az attól függ, hogy van-e olyan 0, 1, -1 értékeket felvevő, teljesen multiplikatív számelméleti függvény, mely korlátos részletösszegű, de nem karakter. Ez jelenleg még megoldatlan probléma. Többen azt sejtik, hogy ilyen tulajdonságú függvény szükségképpen valamilyen modulushoz tartozó redukált maradékosztályok csoportján értelmezett karakter.

akkor

$$\left|\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\right| = o(x) \tag{1.20}$$

és így

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim \operatorname{li} x. \tag{1.21}$$

2. A bizonyításnál felhasználjuk a következő lemmát.

Lemma: *Ha θ a tétel feltételeit kielégítő számelméleti függvény, akkor*

$$g(n) = \sum_{d|n}\theta(d) \tag{2.1}$$

jelöléssel $Z \geqq D$-re

$$\sum_{n\leqq Z} g(n) = Z\cdot L(1,\theta)+O\left(\sqrt{DZ}\right) \tag{2.2}$$

és

$$\sum_{Y<n\leqq X}\frac{g(n)}{n} = \left(\log\frac{Y}{X}+O(1)\right)L(1,\theta)+O\left(\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{Y}}\right). \tag{2.3}$$

Legyen $U \leqq Z$ később megválasztandó szám. Ekkor $g(n)$ (2.1)-beli definícióját, (1.8)-at, valamint az Abel egyenlőtlenséget* felhasználva

* Mely szerint, ha $\{a_i\}_{i=1}^n$ pozitív, monoton csökkenő számsorozat és $\max_{1\leqq j\leqq n}\left|\sum_{i\leqq j} b_i\right| < S$, akkor $\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| < Sa_1$.

$$\sum_{n\leqq Z} g(n) = \sum_{n\leqq Z}\sum_{d|n}\theta(d) = \sum_{d\leqq Z}\theta(d)\left[\frac{Z}{d}\right] = \tag{2.4}$$

$$= Z\sum_{d\leqq Z}\frac{\theta(d)}{d} - \sum_{d\leqq U}\theta(d)\left\{\frac{Z}{d}\right\} - \sum_{U<d\leqq Z}\theta(d)\left\{\frac{Z}{d}\right\} =$$

$$= Z\left(L(1,\theta)-\sum_{d>Z}\frac{\theta(d)}{d}\right)+O(U)-\sum_{m\leqq\frac{Z}{U}}\sum_{d\in\left[\frac{Z}{m+1},\frac{Z}{m}\right]}\theta(d)\left\{\frac{Z}{d}\right\} =$$

$$= Z\left\{L(1,\theta)+O\left(\frac{D}{Z}\right)\right\}+O(U)+\frac{Z}{U}\cdot O(D).$$

Ebből $U=\sqrt{DZ}$ választással (2.2)-t kapjuk. (2.3) parciális szummációval egyszerűen adódik (2.2)-ből.

A tétel bizonyításához a következő jelöléseket vezetjük be. Legyen

$$A_j = \{n;\ p|n \to \theta(p) = j\} \quad (j=-1,0,1) \tag{2.5}$$

továbbá

$$C = \{c;\ c = ab,\ a\in A_1,\ b\in A_0\}. \tag{2.6}$$

Ekkor tetszőleges n szám egyértelműen $n=abm$ alakba írható, ahol $a\in A_1$, $b\in A_0$, $m\in A_{-1}$. Jelölje $\nu(r)$ az r különböző prímosztóinak számát. A (2.5)—(2.6) jelöléseket,

valamint az egyszeűren igazolható

$$\lambda(s) = \sum_{r|s} 2^{\nu(r)}\lambda(r) \tag{2.7}$$

azonosságot felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lambda(n) &= \lambda(b)\cdot\lambda(a)\cdot\lambda(m) = \\ &= \lambda(b)\sum_{\substack{a_i|a\\ a_i\in A_1}} 2^{\nu(a_i)}\lambda(a_i)\cdot\lambda(m) = \\ &= \lambda(b)\sum_{\substack{a_i|a\\ a_i\in A_1}} 2^{\nu(a_i)}\lambda(a_i)\theta\left(\frac{a}{a_i}\right)\theta(m) = \\ &= \sum_{\substack{b_j|b\\ b_j\in A_0}}\theta\left(\frac{b}{b_j}\right)\lambda(b_j)\sum_{\substack{a_i|a\\ a_i\in A_1}} 2^{\nu(a_i)}\lambda(a_i)\theta\left(\frac{a}{a_i}\right)\theta(m) = \\ &= \sum_{\substack{c_l|n,\ c_l\in C\\ c_l=a_lb_l}} 2^{\nu(a_l)}\lambda(c_l)\theta\left(\frac{n}{c_l}\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Másrészt a (2.1), (2.5), (2.6) formulákból következik, hogy

$$g(n) = \prod_{p_i^{\alpha_i}\| n}\left(1+\theta(p_i)+\ldots+\theta^{\alpha_i}(p_i)\right) \geqq 0 \tag{2.9}$$

minden n-re, továbbá $c\in C$, $c=ab$, $a\in A_1$, $b\in A_0$ esetén

$$g(c) = d(a) \geqq 2^{\nu(a)} = |2^{\nu(a)}\lambda(c)|. \tag{2.10}$$

Legyen most $\theta=\theta_k$ és

$$x > D_k^4 \tag{2.11}$$

Ekkor (2.8)—(2.10)-ből adódik, hogy

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\right| &= \left|\sum_{\substack{c_l\in C,\ c_l=a_lb_l\\ c_l\leqq x}} 2^{\nu(a_l)}\lambda(c_l)\sum_{d\leqq\frac{x}{c_l}}\theta_k(d)\right| \leqq \\ &\leqq \sum_{n\leqq x} g(n)\left|\sum_{d\leqq\frac{x}{c_l}}\theta_k(d)\right| \leqq D_k\sum_{n\leqq\frac{x}{D_k}} g(n) + \sum_{\frac{x}{D_k}<n\leqq x} g(n)\frac{x}{n}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Alkalmazva a lemmát, (2.11)-ből és (2.12)-ből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\right| &\leqq x\cdot L(1,\theta)+D_k\cdot O\left(\sqrt{x}\right)+x\left(\log D_k+O(1)\right)L(1,\theta)+x\cdot O\left(\frac{D_k}{\sqrt{x}}\right) = \\ &= x\left\{\left(\log D_k+O(1)\right)L(1,\theta)+O\left(\frac{1}{D_k}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Azaz (1.19)-et figyelembe véve $k\geqq k_0(\varepsilon)$-ra (2.12)-ből adódik, hogy

$$\left|\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\right| < \varepsilon x. \tag{2.14}$$

De így $x>x_0(\varepsilon)\overset{\text{def}}{=}(D_{k_0(\varepsilon)})^4$ esetén teljesül (2.13), amivel a tételt igazoltuk.

IRODALOM

[1] M. DEURING, Imaginär quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl (1), *Math. Z., 37* (1933), 405—415.
[2] W. J. ELLISON és M. MENDÈS-FRANCE, Les nombres premiers, *Actualités scientifiques et industrielles* 1366, Paris, Hermann, 1975.
[3] J. HADAMARD, Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses consequences arithmétiques, *Bull. de la Soc. Math. de France* (1896) 199—220.
[4] A. E. INGHAM, The distribution of prime numbers, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*, No. *30* (1932).
[5] E. LANDAU, Über die Klassenzahl imaginär quadratischer Zahlkörper, *Göttinger Nachrichten*, 1918, 285—295.
[6] JU. V. LINNYIK, On the least prime in an arithmetic progression II., The Deuring-Heilbronn phenomenon, *Mam. Сборник 15* (1944), 347—68.
[7] C. L. SIEGEL, Über die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper, *Acta Arithmetica 1* (1936) 83—86.
[8] de la VALLÉE POUSSIN, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Première partie. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général, *Annales de la Soc. Sci. de Bruxelles 20* (1896) 183—256.

ЗИГЕЛ-КОРНИ И ТЕОРЕМА О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

ЯНОШ ПИНЦ

SIEGEL ROOTS AND THE PRIME NUMBER THEOREM

J. PINTZ

In the present paper the following theorem is proved in an elementary way.

Theorem: If $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ are completely multiplicative functions which assume only the values 0, 1 and -1 and for which

$$\left|\sum_{d \leqq m} \theta_k(d)\right| < D_k$$

for all $m \geqq 1$ where $D_\nu < D_{\nu+1}$, and further

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\log D_k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_k(n)}{n} \right) = 0,$$

then with Liouville's λ function

$$\left|\sum_{n \leqq x} \lambda(n)\right| = o(x)$$

i.e.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim \operatorname{li} x$$

This shows that from the falsity of the conjecture

$$L(1, \chi) \geqq \frac{c}{\log D}$$

for real characters $\chi \bmod D$, the prime number theorem easily follows.

EGY RAMSEY-TÍPUSÚ TÉTEL

ERDŐS L. PÉTER

F. P. Ramsey bizonyította be 1930-ban a következő tételt:

Ramsey-tétel: *Legyenek* $t, k, i_1, \ldots, i_k$ *pozitív egész számok, ekkor létezik egy* $r=R(t; k; i_1, \ldots, i_k)$ *pozitív egész a következő tulajdonsággal: ha* H *halmazra* $|H|\geqq r$, $S=(S_1, \ldots, S_k)$ *pedig egy* k*-színezése* $[H]^t$*-nek (azaz* H*-nak* t *elemű részhalmazaiból álló halmaznak), akkor létezik olyan* j, $1\leqq j\leqq k$, *amire* H*-nak létezik olyan legalább* i_j *elemű részhalmaza, aminek minden* t*-ese* S_j*-beli.*

Ezt a tételt később igen sok irányban általánosították. Többek között Graham, Rothschild, Spencer, Nešetřil, Rödl, Choátal sok cikkében vizsgálta a kérdéskört ([4]—[11]). Ezek a cikkek elsősorban a különféle Ramsey-számok létezését bizonyították. Jó becslések a Ramsey-számokra csak speciális esetekre ismertek.

Ebben a dolgozatban bebizonyítjuk Erdős Pál ([1]), és Catherine V. Smallwood ([2]) tételeinek egy közös általánosítását, közben új bizonyítást is adunk rájuk. Noha az alábbi tétel egy szűkebb körben ismeretes volt, bizonyítását eddig senkisem közölte; jelen bizonyítás talán azért is érdemes közlésre, mert egy speciális esetre az eddig ismerteknél jobb becslést ad.

Tételünk kimondásához és bebizonyításához szükségünk van egy definícióra és egy lemmára!

Definíció: Legyenek $H_1, \ldots, H_m$ diszjunkt halmazok. Ezen halmazrendszer t-vektorainak az alábbi halmaz elemeit nevezzük:

$$[H_1, \ldots, H_m]^t := [H_1]^t \times \ldots \times [H_m]^t$$

azaz az olyan m-hosszú vektorok halmaza, amelyek i-ik koordinátája a H_i halmaz egy t elemű részhalmaza.

Lemma: *Legyen* $K_{n,n}$ *az* $n+n$ *pontú teljes páros gráf! Színezzük éleit két színnel (pl.: piros és kék színnel). Ekkor létezik olyan* $(\underline{a}, \underline{b})$ *él, hogy* $\underline{a}$*-ból is,* $\underline{b}$*-ből is további legalább* $\left(\frac{n}{2}-1\right)$, $(\underline{a}, \underline{b})$ *színével megegyező színű él indul ki.*

Bizonyítás: Legyenek $K_{n,n}$ osztályai A és B. Definiáljuk az A_1 és B_1 halmazt a következő módon:

$$A_1 := \left\{\underline{a}\in A: \underline{a}\text{-ból legalább } \frac{n}{2} \text{ darab piros él indul ki}\right\}$$

$$B_1 := \left\{\underline{b}\in B: \underline{b}\text{-ből legalább } \frac{n}{2} \text{ darab piros él indul ki}\right\}.$$

Legyen továbbá $A_2 := A - A_1$, $B_2 := B - B_1$! Világos, hogy A azon pontjai alkotják A_2-t, melyekből legalább $\frac{n}{2}+1$ kék él indul ki. (Hasonlóan B_2-re.) Ha létezik olyan $\underline{a} \in A_1$, $\underline{b} \in B_1$ pontpár, amire az $(\underline{a}, \underline{b})$ él piros, akkor megtaláltuk a keresett élt. Ha most $|A_1|+|B_1|>n$, és mondjuk $|A_1| \geqq |B_1|$, vagy $|A_1|+|B_1|=n$, de $|A_1|>|B_1|$, akkor $|A_2|<\frac{n}{2}$, így tetszőleges $\underline{b} \in B_1$-beli pontból kell piros élnek menni valamely $\underline{a} \in A_1$ ponthoz, és ekkor ez az él megfelelő. (Az $|A_1|=n$, $|B_1|=0$ eset nem fordulhat elő, mert ekkor A-ból $\geqq n \cdot \frac{n}{2}$ piros él indulna ki, még B csak $<n\frac{n}{2}$-t tudna elnyelni — és ez ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy jogos $\underline{b} \in B_1$ pontról beszélni.) Ha a fenti esetek valamelyike A_2 és B_2 halmarza teljesül, ugyanezzel az eljárással megfelelő kék élt tudunk találni. Végül is csak az $n=2k$, $|A_1|=|B_1|=k$ eset marad, de ekkor vagy van köztük piros él, és akkor az megfelelő, vagy minden köztük futó él kék, és akkor ezek bármelyike megfelelő. Ezzel a Lemmát bebizonyítottuk. (A bizonyításból világos, hogy sok, a kívánt tulajdonsággal rendelkező él van, de ez számunkra jelenleg érdektelen.)

Tétel: *Legyenek $H_1, \ldots, H_m$ tetszőleges, diszjunkt halmazok. Ekkor tetszőleges $t, k, i_1, \ldots, i_k$ természetes számokhoz $(i_1, \ldots, i_k \geqq t)$ létezik $p = P_m(t; k; i_1, \ldots, i_k)$ pozitív egész a következő tulajdonsággal: ha minden $j=1, \ldots, m$ $|H_j| \geqq p$, akkor $[H_1, \ldots, H_m]^t$ tetszőleges $S=(S_1, \ldots, S_k)$ k-színezésére létezik f, $1 \leqq f \leqq k$, hogy létezik $Q_1, \ldots, Q_m$; $Q_j \subseteq H_j$, $|Q_j|=i_f$, és $[Q_1, \ldots, Q_m]^t$ S_f-beli.*

A bizonyítást háromszoros teljes indukcióval végezzük (m-re, t-re és k-ra).

1. lépés: Vizsgáljuk az $m=2$, $t=1$, $k=2$ esetet. Ekkor az állítás a $K_{n,n}$ párosgráf éleinek 2-színezéséről szól. $P_2(1; 2; r, q)$ létét (r, q)-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Világos, hogy $(r, 1)$ esetben $p := r$, a $(1, q)$ esetben pedig $p := q$ kielégíti a követelményeket. Tegyük fel, hogy minden $(r_1, q_1) < (q, r)$ (azaz $r_1 \leqq r$, $q_1 \leqq q$ és legalább az egyik helyen határozott az egyenlőtlenség) esetén létezik a $p(r_1, q_1)$. A Lemma szerint létezik egy ott leírt tulajdonságú $(\underline{a}, \underline{b})$ él, a színe pl. piros. Legyenek ekkor A és B a $\underline{b}$, ill. $\underline{a}$ pontból induló piros élek másik végpontjai. Az indukciós feltevés miatt létezik $p(r-1, q)$, tehát ha $|A|, |B| \geqq p(r-1, q)$, akkor vagy van $Q_1 \subseteq A$, $Q_2 \subseteq B$, $|Q_j|=q$, és $[Q_1, Q_2]^1$ S_2-beli, azaz Q_1 és Q_2 közötti összes él kék; vagy $|Q_j|=r-1$, és köztük minden él piros, de akkor $\underline{a}$-t és $\underline{b}$-t hozzájuk véve megkapjuk a kívánt piros alakzatot. Azaz azt kaptuk, a $p(r, q) := 2p(r-1, q)+2$ választás megfelelő.

Így végül azt kaptuk, hogy a $P_2(1; 2; r, q) := 2^{r+q+2}$ választás megfelelő. Megjegyzésre érdemes, hogy a valószínűségi módszerrel készített alsó becslés a $P_2(1; 2; r, r) > \frac{1}{2} r \cdot e^{r+1}$. Ezek a becslések lényegében megegyeznek az [1]-ben adottakkal.

2. lépés: A k-ra vonatkozó indukció értelmében tegyük fel, hogy $m=2$, $t=1$, $k=r$ esetén létezik $P_2(1; r; i_1, \ldots, i_r)$, és lássuk be, hogy ekkor $P_2(1; r+1; i_1, \ldots, i_{r+1})$ is létezik. Legyen most $S=(S_1, \ldots, S_r, S_{r+1})$ a $[H_1, H_2]^1$ egy $(r+1)$-színezése, és készítsük el belőle $S'_r := S_r \cup S_{r+1}$ jelölés mellett az $S'=(S_1, \ldots, S_{r-1}, S'_r)$ r-színezést. Az indukciós feltevés miatt létezik a $p := P_2(1; r; i_1, \ldots, i_{r-1}, P_2(1; 2; i_r, i_{r+1}))$. Ha $|H_j| \geqq p$ $(j=1, 2)$, akkor vagy létezik f index; $1 \leqq f \leqq r-1$, hogy az S_f-ben megfelelő méretű $[Q_1, Q_2]^1$ halmaz van, és ekkor kész vagyunk, vagy az S'_r osztályban van egy

akkora $[Q_1, Q_2]^1$, hogy ennek elemei akárhogy is voltak felosztva S_r és S_{r+1} között, a $P_2(1; 2; i_r, i_{r+1})$ tulajdonságai miatt lesz kellő méretű $[Q_3, Q_4]^1$ valamelyik osztályban. Ezzel beláttuk a 2. lépés állítását is.

Ezzel a $P_2(1; k; i_1, \ldots, i_k)$ értékére olyan felső becslést nyertünk, aminek $(k-1)$-szer iterált 2-es alapú logaritmusa $\max_{j,h} \{i_j + i_h\} + 2$.

3. lépés: Tegyük most fel, hogy létezik $P_2(r; k; i_1, \ldots, i_k)$, és segítségével lássuk be, hogy létezik $p := P_2(r+1; k; i_1, \ldots, i_k)$! Ezt $(i_1, \ldots, i_k)$-ra vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Ha $i_j = r+1$ $(1 \leqq j \leqq k)$, akkor a $p := r+1$ megfelelő választás. Tegyük fel, hogy minden $(i'_1, \ldots, i'_k) < (i_1, \ldots, i_k)$ igaz az állítás, és ennek segítségével lássuk be $(i_1, \ldots, i_k)$-ra is. Legyen $p_v := P_2(r+1; k; i_1, \ldots, i_{v-1}, i_v - 1, i_{v+1}, \ldots, i_k)$. Jelöljünk ki egy $\underline{a} \in H_1$ és egy $\underline{b} \in H_2$ pontot, és ezután $[H_1, H_2]^{r+1}$ színezéséből kiindulva színezzük a $[H_1 - \{a\}, H_2 - \{b\}]^r$ elemeit oly módon, hogy $(Q_1, Q_2) \in S'_j$ akkor és csak akkor, ha $(Q_1 \cup \{a\}, Q_2 \cup \{b\}) \in S_j$. Megmutatjuk, hogy a $P_2(r+1; k; i_1, \ldots, i_k) := P_2(r; k; p_1, \ldots, p_k) + 1$ választás megfelelő. Legyen ugyanis $|H_1|$ és $|H_2|$ legalább ekkora! Ekkor a definíció szerint létezik f, $1 \leqq f \leqq k$, és létezik $Q_j \subseteq H_j$, $|Q_j| = p_f$ $(j = 1, 2)$ és $[Q_1, Q_2]^r \subseteq S'_f$, azaz az $\underline{a}$, illetve $\underline{b}$ pontot, továbbá Q_1-ből, illetve Q_2-ből $r-r$ pontot tartalmazó $(r+1)$ vektorai $[H_1, H_2]$-nek S_f-beliek. De p_f definíciója szerint ekkor vagy valamelyik S_j-ben, $j \neq f$, van megfelelő méretű, azaz i_j nagyságú, D_1 és D_2 alkotta $[D_1, D_2]^{r+1}$, és ekkor készen avgyunk;vagy pedig van S_f-ben egy, $[D_1, D_2]^{r+1}$, ahol $|D_j| = i_f - 1$. De ez utóbbi esetben az $\underline{a}$-t illetve $\underline{b}$-t továbbá D_1-ből, illetve D_2-ből $r-r$ pontot tartalmazó $(r+1)$ vektorok, S'_f definíciója értelmében, szintén S_f-beliek, így megtaláltuk a kívánt alakzatot.

C. V. Smallwood [2]-ben $P_2(2; k; r, r, \ldots, r)$ létezését bizonyítja be. Ennek értékére olyan felső becslést ad, aminek k^{kr}-szer iterált $(k+1)$-es alapú logaritmusa $2r$-rel egyenlő. A fenti bizonyításból $P_2(2; k; i_1, \ldots, i_k)$-ra olyan felső becslés adódik, aminek az $(i_1 + \ldots + i_k) \cdot k$-szor iterált 2-es alapú logaritmusa $k \cdot \max_j i_j$-vel egyenlő, azaz a Smallwood vizsgálta esetben $k \cdot r$-rel.

4. lépés: Eddig tehát bebizonyítottuk, hogy a tétel állítása $m=2$ mellett minden t-re és k-ra teljesül. Tegyük most fel, hogy $m=r$ mellett is teljesül minden t-re, k-ra, és lássuk be ugyanezt $m=r+1$-re is. Ezt újra (t, k)-ra vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Ehhez először is $P_{r+1}(1; 2; q, s)$ létezését mutatjuk meg. Legyen tehát $S=(S_1, S_2)$ a $[H_1, \ldots, H_{r+1}]^1$-nek tetszőleges 2-színezése. Továbbá legyen H a H_{r+1} halmaz egy tetszőleges, $q+s$ elemű részhalmaza, $H=\{h^1, \ldots, h^{q+s}\}$. Készítsük el ezután $[H_1, \ldots, H_r]^1$ egy 2^{q+s}-színezését a következő módon. A színek legyenek $q+s$ hosszúságú vektorok. A $(h_1, \ldots, h_r) \in [H_1, \ldots, H_r]^1$ színe az a vektor, amelynek j-ik komponense aszerint kék vagy piros, hogy a $(h_1, \ldots, h_r, h^j)$ 1-vektornak mi volt a színe. Tegyük fel, hogy $q \geqq s$. Ekkor a $P_{r+1}(1; 2; q, s) := P_r(1; 2^{q+s}; q, q, \ldots, q)$ megfelelő választás lesz. Valóban, ez utóbbi szám az indukciós feltétel szerint létezik. Másrészt, újra csak az indukciós feltevés miatt, az f-ik színvektorhoz létezik $Q_j \subseteq H_j$, $|Q_j| = q$, hogy $[Q_1, \ldots, Q_r]^1 \subseteq S'_f$. Az f színvektornak legalább q koordinátája piros, vagy ha nem, akkor legalább s kék. Teljesüljön mondjuk az első eset. S' definíciója szerint ez azt jelenti, hogy legalább q olyan eleme van H-nak, hogy bármelyikkel kiegészítve a $(h_1, \ldots, h_r) \in [Q_1, \ldots, Q_r]^1$ elemet, az S_1 osztályban lesz. A H fenti elemeinek Q_{r+1} halmazára tehát teljesül, hogy $[Q_1, \ldots, Q_{r+1}]^1 \subseteq S_1$. (Ha s db kék volt f koordinátái között, a $q \geqq s$ miatt ugyan így kész vagyunk.) Világos, hogy tetszőleges k-ra hasonlóan nyerhető $P_{r+1}(1; k; i_1, \ldots, i_k)$ is, csak H egy $(i_1 + \ldots + i_k)$ elemű részhalmaz lesz, és ugyanilyen hosszú színvektorokkal színezzük a $[H_1, \ldots, H_r]^1$ elemeit, csak minden koordináta k színt vehet fel.

Világos, hogy a 2. lépéshez hasonlóan

$$P_{r+1}(1; k+1; i_1, \ldots, i_{k+1}) := P_{r+1}(1; k; i_1, \ldots, i_{k-1}, P_{r+1}(1; 2; i_k, i_{k+1}))$$

alakban is nyerhetjük.

Ezután a t-re vonatkozó indukciót a 3. lépés teljes analógiájára végezhetjük. Így a Tétel bizonyítását lényegében befejeztük.

Végül megmutatunk egy példát a Tétel egy speciális esetének használatára. [3]-ban a szerzők bebizonyították a következő tételt:

Tétel: *Legyen k természetes szám, R pedig egy N dimenziós tégla! Ekkor létezik $n=n(k, R)$ természetes szám, hogy tetszőleges módon k-színezve egy n dimenziós euklideszi tér pontjait, keletkezik egyszínű, R-rel egybevágó idomot feszítő ponthalmaz.*

Bizonyítást az $N=2$ esetre végezzük, tetszőleges N-re ugyanígy lehet végrehajtani. Legyenek az R téglalap oldalai c és d! Legyen továbbá $p:=P_2(1; k; 2, 2, \ldots, 2)$! Jelöljük A_1, illetve A_2-vel a $(p-1)$ dimenziós euklideszi tér c, illetve d élű szabályos szimplexét! Megmutatjuk, hogy a $(2p-2)$ dimenziós euklideszi tér tetszőleges 2-színezése esetén az $A_1 \times A_2$ ponthalmazból már ki tudunk választani R-rel egybevágó, egyszínű ponthalmazt. Ehhez rendezzük az (a_i, b_j) alakú vektorokkal reprezentált $A_1 \times A_2$ direktszorzat elemeit olyan $((c^1_{i_1}, c^2_{i_2}))=M$ kétdimenziós mátrixba, ahol $c^j_{i_j}$ az A_j szimplex i_j-ik csúcsa. Mivel két pont távolsága az $A_1 \times A_2$ szorzatban, ha csak az első koordinátában térnek el, c, ha a másodikban csak, akkor d, így az M mátrix 2×2-es almátrixai éppen R-rel egybevágó ponthalmazokat reprezentálnak. A mátrix méreteinek választása miatt, ami éppen $p \times p$-es, elemeinek tetszőleges k-színezése mellett van egyszínű 2×2-es almátrixa, így a bizonyítást befejeztük. (Ez a bizonyítás kicsit egyszerűbb is az eredetinél.)

IRODALOM

[1] Erdős P.: On extremal Problems of Graphs and Generalized Graphs, *Israel J. of Math. 2* (1965) 189—190.

[2] Smallwood, C. V.: Partitions of sets of matrices, *Discrete Math.* Vol. 13 N. *3* (1975. nov.) 261—277.

[3] Erdős P.—Graham, R. L.—Montgomery, P.—Rothschild, B. L.—Spencer, J.—Strauss, E. G.: Euclidean Ramsey Theorems I., J. *of Comb. Theory* Ser A. *14* (1973) 341—363.

[4] Graham, R. L.—Leeb, K.—Rothschild, B. L.: Ramsey's Theorem for a Class of Categories, *Advanced in Mathematics 8* (1972) 417—433.

[5] Graham, R. L.—Rothschild, B. L.: Ramsey's Theorem for n-parameter Sets, *Trans. A. M. S. 159* (1971) 257—292.

[6] Graham, R. L.—Rothschild, B. L.: Ramsey's Theorem for n-dimensional arrays, *Bull. A. M. S. 75* (1969) 418—422.

[7] Spencer, J. H.: Ramsey's Theorem for Spaces, Preprint.

[8] Burr, S. A.—Erdős P.—Lovász L.: On Graphs of Ramsey Type, *Ars Combinatoria* Vol 1 (1976) 167—190.

[9] Nešetřil, J. and Rödl, V.: Ramsey property of graphs with forbidden complete subgraphs *J. Combinatorial T. (B) 20* (1976) 243—249.

[10] Nešetřil, J. and Rödl, V.: Type theory of partition problems of graphs in *"Recent Advences of Graph Theory"*, Academia, Prague 1975, 405—412.

[11] Choátal, V.: On Finite Polarized Partition Relations, Canad. Math. Bull. *12* (1969) 321—326.

ОДНА ТЕОРЕМА ТИПА РЕМСИ

ПЕТЕР Л. ЭРДЁШ

A RAMSEY TYPE THEOREM

P. L. ERDŐS

PÁROS FOKSZÁMÚ REGULÁRIS GRÁFOK SZÖGPONT SZERINTI „EVOLÚCIÓJA"

DÉNES TAMÁS

Általában érdekes a gráfok körében azt a problémát vizsgálni, hogy azonos struktúrával rendelkező, de eltérő szögpont, illetve élszámú gráfok milyen transzformációval vihetők át egymásba.

Például egy Γ_n n szögpontú teljes gráf előállítható a Γ_{n-1} $n-1$ szögpontú teljes gráfból úgy, hogy hozzáveszünk egy szögpontot és azt Γ_{n-1} minden szögpontjával összekötjük éllel. Ugyanez a transzformáció bármely más fokszámú reguláris gráfosztálynál nem vezet célhoz. Más aspektusból foglalkozott gráf evolúcióval [3]-ban Erdős Pál és Rényi Alfréd.

Jelen dolgozatban csak irányítatlan, páros fokszámú reguláris gráfokkal foglalkozunk.

A dolgozat első részében definiáljuk az evolúciós transzformációt és ezzel kapcsolatos egyszerű tételeket bizonyítunk be, a második és harmadik részben azokról a gráfokról szólunk, amelyekre nem alkalmazható a transzformáció.

1. Definíció. Legyen $\Gamma_n=(P, E)$ n szögpontú egyszerű gráf és $p_i\in P, p_j\in P$ szomszédos szögpontok, valamint p olyan szögpont, amely p_i, p_j egyikével sem szomszédos. (P és E a Γ_n gráf szögpont, illetve élhalmazát jelöli.)

A p szögponttal végzett EC transzformáción értjük a következőt:

$$EC\colon E \to E' \tag{1}$$

ahol

$$E' = E \setminus \{(p_i p_j)\} \cup \{(pp_i), (pp_j)\}$$

A továbbiakban jelöljük az összes páros reguláris gráfok halmazát $\mathscr{PR}$-rel, az összes 2, 4, ..., k (k páros) fokszámú reguláris gráfok halmazát pedig rendre $\mathscr{PR}_2$, $\mathscr{PR}_4$, ..., $\mathscr{PR}_k$-val.

Ekkor nyilván teljesül a következő:

1. $\mathscr{PR}=\mathscr{PR}_2\cup\mathscr{PR}_4\cup\ldots\cup\mathscr{PR}_k\cup\ldots$
2. $\forall i\neq j$ (i, j páros) esetén $\mathscr{PR}_i\cap\mathscr{PR}_j=\emptyset$
3. $\forall\Gamma_{n,k}\in\mathscr{PR}$ gráfhoz $\exists!\,\mathscr{PR}_k\colon\Gamma_{n,k}\in\mathscr{PR}_k$

vagyis a $\mathscr{PR}$ halmaz egy osztályozásáról van szó.

2. Definíció. Legyen $\Gamma_{n,k}\in\mathscr{PR}_k$ tetszőleges n szögpontú, k-reguláris gráf. Továbbá $\Gamma_{n,k}=(P, E)$ és $\Gamma_{n+1}=(P\cup\{p\}, E')$, ahol $p\notin P$.

A p szögponttal végzett ET transzformáción értjük a p szögponttal végzett $k/2$ EC transzformációt, azaz legyenek $(p_1p_2), (p_3p_4), \ldots, (p_{k-1}p_k)$ $\Gamma_{n,k}$-beli élek, ekkor

$$ET\colon \Gamma_{n,k} \to \Gamma_{n+1} \tag{2}$$

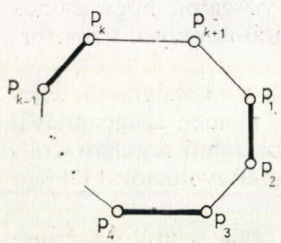
ahol

$$E' = E \setminus \{(p_1p_2), (p_3p_4), \ldots, (p_{k-1}p_k)\} \cup \{(pp_1), (pp_2), \ldots, (pp_k)\}$$

1. Tétel. *Legyen k tetszőleges páros szám. Minden $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ gráfra alkalmazható ET transzformáció.*

BIZONYÍTÁS. Elég belátnunk, hogy $\Gamma_{n,k}$-ban létezik $k/2$ független él. A bizonyításhoz felhasználjuk G. A. Dirac [2] következő tételét:

„Ha egy egyszerű gráf minden szögpontjának foka legalább r ($r>1$), akkor van a gráfban egy legalább $r+1$ hosszúságú kör."



1. ábra

Jelöljük $\Gamma_{n,k}$ egy $k+1$ hosszúságú körét K-val (az idézett tétel alapján ilyen biztos van), ekkor például az 1. ábrán látható módon kiválasztva az éleket $((p_1p_2),(p_3p_4), \ldots, (p_{k-1}p_k))$ egy pontosan $k/2$ független élből álló élhalmazt kapunk.

3. Definíció. Legyen $\Gamma_{n,k}=(P, E)\in\mathcal{PR}_k$, valamint $p\in P$ és jelöljük p_1p_2, $p_3p_4, \ldots, p_{k-1}p_k$-val a p szomszédaiból alkotott, páronként nem szomszédos szögpontpárokat. Ekkor ET^{-1} transzformáción a következőt értjük:

(3) $ET^{-1}: \Gamma_{n,k} \to \Gamma_{n-1} = (P', E'), \quad P' = P \setminus \{p\}$

$$E' = E \setminus \{(pp_1), (pp_2), \ldots, (pp_k)\} \cup \{(p_1p_2), \ldots, (p_{k-1}p_k)\}$$

4. Definíció. Legyen $\Gamma_n=(P, E)$ n szögpontú gráf, $p\in P$ és $q_1, q_2, \ldots, q_r$ a p szögpont Γ_n-beli szomszédai. A p által generált Γ_n-beli részgráfon (jelöljük ezt $G_p=(P', E')$-vel) értjük Γ_n-nek azt a részgráfját, melyre teljesül, hogy $P'=\{q_1, q_2, \ldots, q_r\}$ és $(q_iq_j)\in E' \leftrightarrow (q_iq_j)\in E$.

5. Definíció. Legyen $\Gamma_n\in\mathcal{PR}$ és $p\in\Gamma_n$. A p szögpont T-tulajdonságú, ha az általa generált Γ_n-beli részgráf komplementere tartalmaz 1-faktort.

2. Tétel. *Egy $\Gamma_{n,k}=(P, E)\in\mathcal{PR}_k$ gráfra akkor és csak akkor alkalmazható ET^{-1} transzformáció, ha létezik $p\in\Gamma_{n,k}$ T-tulajdonságú szögpontja.*

BIZONYÍTÁS. Szükségesség: Az ET^{-1} transzformáció definíciójából következik, hogy létezik $p\in\Gamma_{n,k}$ melynek szomszédaiból kiválaszthatók a p_1p_1, $p_3p_4, \ldots, p_{k-1}p_k$ páronként nem szomszédos szögpontpárok. Ezek a $p_1, p_2, \ldots, p_k$ szögpontokból alkotott $\Gamma_{n,k}$-beli részgráf komplementerében szomszédosak lesznek és éppen egy 1-faktort alkotnak, hiszen bármely két szögpontpárnak sincs közös szögpontja. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy a p szögpont T-tulajdonságú.

Elegendőség: Ebbe az irányba a bizonyítás pontosan az előző gondolatmenet megfordítása.

3. Tétel. *Minden páros $k\geqq 4$ számhoz létezik $\Gamma_{n,k}\in\mathcal{PR}_k$ gráf, amelynek nincs T-tulajdonságú szögpontja.*

Ekvivalens megfogalmazásban: Minden páros $k\geqq 4$ számhoz létezik $\Gamma_{n,k}\in\mathcal{PR}_k$ gráf, amely egyetlen $\Gamma_{n-1,k}\in\mathcal{PR}_k$ gráfból sem áll elő ET transzformációval.

BIZONYÍTÁS. Legyen k tetszőleges ($k\geqq 4$) páros szám. Tekintsünk két $k+1$ szögpontú $\Gamma^1_{k+1,k}=(P_1, E_1)$ és $\Gamma^2_{k+1,k}=(P_2, E_2)$ teljes gráfot. Legyenek $(p_{i_1}p_{j_1})\in E_1$

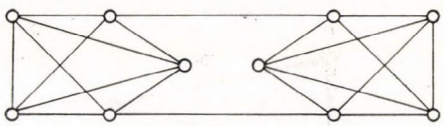
és $(p_{i_2}p_{j_2}) \in E_2$, ekkor képezzük a következő $\Gamma_{n,k}=(P, E)$ gráfot

(4) $$P = P_1 \cup P_2$$

(5) $$E = E_1 \cup E_2 \setminus \{(p_{i_1}p_{j_1}), (p_{i_2}p_{j_2})\} \cup \{(p_{i_1}p_{i_2}), (p_{j_1}p_{j_2})\}$$

$k=4$ esetén $\Gamma_{n,k}$ a 2. ábrán látható.
Bebizonyítjuk, hogy az így konstruált $\Gamma_{n,k}$ gráfnak nincs T-tulajdonságú szögpontja.

Mivel minden így konstruált $\Gamma_{n,k}$ gráf szimmetrikus, a bizonyítást elég az egyik (például $\Gamma^1_{k+1,k}$) szimmetrikus részgráf szögpontjaira elvégezni. Így két eset különböztethető meg:



2. ábra

a) p_{i_1}, p_{j_1} } szögpontot
b) bármely másik } vizsgáljuk

Az *a)* esetben jelöljük a p_{i_1} szomszédaiból alkotott részgráfot $G_1=(A_1, B_1)$-el, ekkor

(6) $$A_1 = P_1 \cup \{p_{i_2}\} \setminus \{p_{i_1}\}$$

(7) $$B_1 = E_1 \setminus \{(p_{i_1}p_r) | \forall\, p_r \in P_1 \setminus \{p_{i_1}\}\}$$

Tehát $\bar{G}_1=(A'_1, B'_1)$ a következő lesz

(8) $$A'_1 = A_1$$

(9) $$B'_1 = \{(p_{i_2}p_s) | \forall\, p_s \in P_1 \setminus \{p_{i_1}\}\}$$

így $\bar{G}_1$ nem tartalmaz 1-faktort, vagyis p_{i_1} (és ugyanilyen megfontolásokból $p_{i_2}, p_{j_1}, p_{j_2}$) nem T-tulajdonságú.

A *b)* esetben legyen $p \neq p_{i_1} \neq p_{j_1}$ és $p \in P_1$, a p szomszédaiból alkotott részgráf $G_2=(A_2, B_2)$ a következő:

(10) $$A_2 = P_1 \setminus \{p\}$$

(11) $$B_2 = E_1 \setminus \{(p_{i_1}p_{j_1}), (pp_r) | \forall\, p_r \in P_1 \setminus \{p\}\}$$

Tehát $\bar{G}_2=(A'_2, B'_2)$ az alábbi lesz:

(12) $$A'_2 = A_2$$

(13) $$B'_2 = \{(p_{i_1}p_{j_1})\}$$

így $\bar{G}_2$ szintén nem tartalmaz 1-faktort, vagyis a *b)* esethez tartozó szögpontok egyike sem T-tulajdonságú. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

$k=4$ esetén egy G_1, $\bar{G}_1$, G_2, $\bar{G}_2$ a 3/a, b, c, d ábrákon látható. (A vastag vonallal kihúzott élek és pontok tartoznak rendre a megfelelő gráfokhoz.)

6. Definíció. Egy $\mathcal{PR}$-beli gráfot VP, vagy *szögpont prím* gráfnak nevezzünk, ha nincs T-tulajdonságú szögpontja.

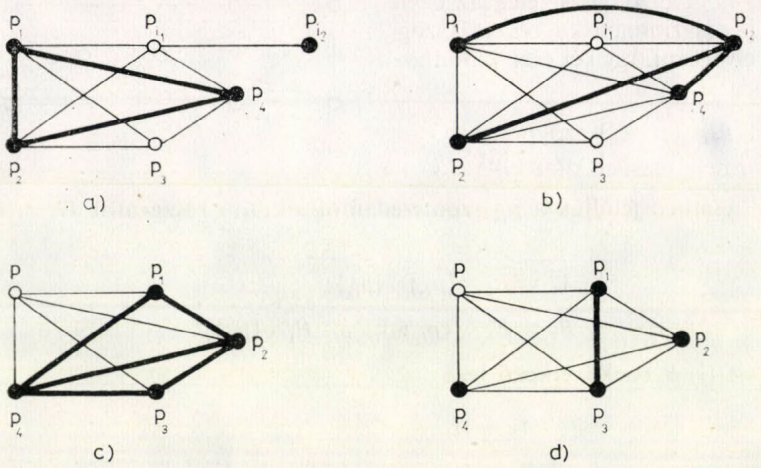
A 3. tétel tehát így is megfogalmazható: A $\mathcal{PR}_4, \mathcal{PR}_6, \mathcal{PR}_8, \ldots, \mathcal{PR}_k, \ldots$ gráfosztályok mindegyike tartalmaz VP gráfot.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett nem T-tulajdonságú egy szögpont. Felhasználjuk az alábbi ismert eredményt [1].

1. Lemma. *Egy teljes Γ_n (n páros) gráf $n-1$ elsőfokú faktor szorzatára bontható.*

4. Tétel. *Legyen $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ és $p \in \Gamma_{n,k} = (P, E)$. Ha p nem T-tulajdonságú, akkor létezik legalább $k-1$ három hosszúságú kör, amely p-t tartalmazza.*

Bizonyítás. Ha p nem T-tulajdonságú, akkor az általa generált $\Gamma_{n,k}$-beli részgráf (jelölje $G=(A, B)$) komplementere nem tartalmaz 1-faktort. Az 1. lemma szerint



3. ábra

$\bar{G}$ $k-1$ féle élfüggetlen 1-faktort tartalmazhat, így G-ben ezen faktorok mindegyikéből legalább egy élnek szerepelnie kell ahhoz, hogy $\bar{G}$-ben ne legyen l-faktor. Tehát G éleinek száma legalább $k-1$. Mivel G minden élének végpontjai p szomszédai, így p-t tartalmazó három hosszúságú kört alkotnak. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

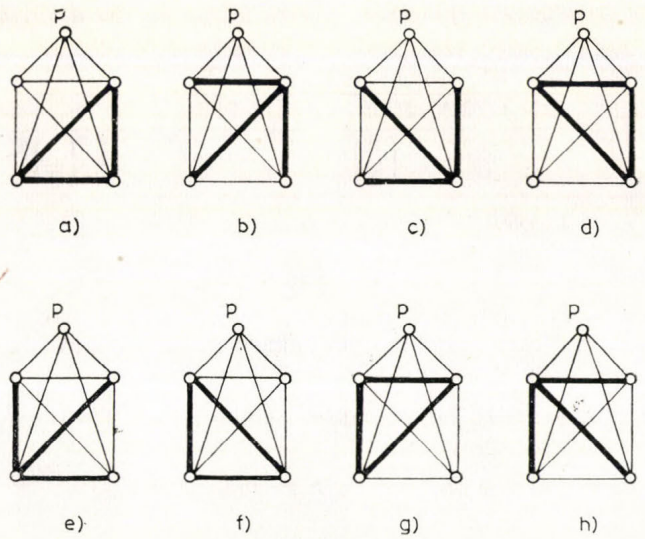
$k=4$ esetén az alábbi esetekben nem T-tulajdonságú a p szögpont (lásd 4/a, b, c, d, e, f, g, h ábra, $\bar{G}$ vastag vonallal húzva).

2. Lemma. *Legyen Γ_n n szögpontú (n páros) teljes gráf és jelöljük Γ_n összes 1-faktorainak számát F_n-nel. Ekkor*

$$F_n = \frac{\binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}. \tag{14}$$

BIZONYÍTÁS. Könnyen látható, hogy $n=2$ esetén az állítás igaz. Tegyük fel, hogy minden $k \leqq n-2$ esetén igaz az állítás, vagyis

$$F_k = \frac{\binom{k}{2} \cdot \binom{k-2}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{k}{2}\right)!}. \tag{15}$$



4. ábra

Ekkor Γ_k-hoz két szögpontot hozzávéve $k+1$ féle új szögpontpár választható ki (a két pont sorrendjét nem vesszük figyelembe), melyek mindegyikéhez F_k számú 1-faktor tartozik, melyeknek pontosan egy közös élük van, így

$$F_{k+2} = (k+1) \cdot F_k. \tag{16}$$

Figyelembevéve, hogy

$$\frac{\binom{k+2}{2}}{\frac{k+2}{2}} = \frac{2 \cdot (k+2)!}{2!\, k!\, (k+2)} = k+1. \tag{17}$$

Tehát

$$F_{k+2} = \frac{\binom{k+2}{2}}{\frac{k+2}{2}} \cdot \frac{\binom{k}{2} \cdot \binom{k-2}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{k}{2}\right)!} = \frac{\binom{k+2}{2} \cdot \binom{k}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{k+2}{2}\right)!}. \tag{18}$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Korollárium. 1. *A* (16) *összefüggés alapján* F_n *rekurzív módon is felírható:*

$$F_n = (n-1) \cdot F_{n-2}. \tag{19}$$

2. *A 2. lemma bizonyításából adódik, hogy ha* e_i *egy* Γ_n*-beli E* 1*-faktorhoz tartozó él, akkor pontosan* F_{n-2} *olyan* 1*-faktor van* Γ_n*-ben, amely E-vel pontosan az* e_i *közös élt tartalmazza.*

3. *Ha a* Γ_n*-beli éldiszjunkt* 1*-faktorok számát* FD_n*-nel jelöljük, akkor az 1. lemma és* (19) *alapján:*

$$FD_n = F_n \Leftrightarrow n-1 = (n-1) \cdot F_{n-2} \Rightarrow 1 = F_{n-2} \Rightarrow n = 4.$$

4. *A (14) összefüggést egyszerűbb alakra hozhatjuk, ha a számlálót kifejtjük, azaz*

$$F_n = \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \ldots \cdot \frac{2!}{2!0!}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!}.$$

7. Definíció. Legyen Γ_n n szögpontú gráf és

$$\mathscr{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\} \tag{20}$$

Γ_n-beli 1-faktorok egy halmaza, valamint $e_1, e_2, \ldots, e_p$ Γ_n-beli élek.

Az $e_1, e_2, \ldots, e_p$ éleket az $\mathscr{E}$ egy reprezentációjának mondjuk, ha minden $\mathscr{E}$-beli 1-faktorból legalább egy él szerepel köztük.

3. Lemma. Legyen Γ_n teljes gráf (n páros). Jelölje Γ_n összes 1-faktorainak halmazát

$$\mathscr{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_r\} \quad \text{ahol} \quad r = F_n \tag{21}$$

valamint

$$R = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\} \tag{22}$$

Γ_n-beli élek egy halmazát.

R akkor és csak akkor reprezentációja $\mathscr{E}$-nek, ha bármely $e_i \neq e_j$ esetén nincs olyan $E_k \in \mathscr{E}$, amelyre $e_i \in E_k$ és $e_j \in E_k$.

BIZONYÍTÁS. Szükségesség: Tegyük fel, hogy R reprezentációja $\mathscr{E}$-nek és létezik $e_i \neq e_j$ melyre létezik E_k, hogy $e_i \in E_k$ és $e_j \in E_k$. A 2. lemma 2. korollárium alapján az e_i él F_{n-2} $\mathscr{E}$-beli 1-faktort reprezentál, ugyanígy e_j is. Mivel mindkét él szerepel E_k-ban, így a két él által reprezentált 1-faktorok K_{ij} számára igaz, hogy

$$K_{ij} < 2 \cdot F_{n-2}. \tag{23}$$

Ha tehát feltételezzük, hogy a többi R-beli $n-3$ él mindegyike a maximális $n-1$ 1-faktort reprezentálja, akkor az R által reprezentált $\mathscr{E}$-beli elemek $K_{\mathscr{E}}$ számára igaz, hogy

$$K_{\mathscr{E}} < (n-1) \cdot F_{n-2} \tag{24}$$

ami ellentmondás, hiszen $\mathscr{E}$ elemeinek száma $(n-1) \cdot F_{n-2}$ és R $\mathscr{E}$-nek reprezentációja, tehát $K_{\mathscr{E}}$-re az egyenlőségnek kell teljesülnie.

Elegendőség: Mivel minden $E_k \in \mathscr{E}$ 1-faktor csak egy $e_i \in R$ élt tartalmaz, valamint a 2. lemma 2. korollárium alapján egy e_i él F_{n-2} $\mathscr{E}$-beli 1-faktort reprezentál, így az $n-1$ számú R-beli él $(n-1) \cdot F_{n-2}$ számút, ami $\mathscr{E}$ összes elemét jelenti.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

5. Tétel. *Egy Γ_n teljes gráf ($n>4$ páros) összes 1-faktora akkor és csak akkor reprezentálható pontosan $n-1$ éllel, ha azok egy szögpontra illeszkednek.*

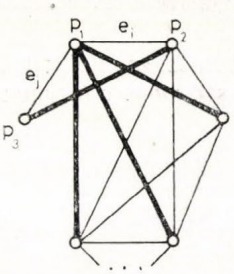
BIZONYÍTÁS. Szükségesség: Legyen $p \in \Gamma_n$ a vizsgált szögpont. Mivel minden Γ_n-beli 1-faktor tartalmaz egy p-re illeszkedő élt, így az összes ilyen él valóban a Γ_n-beli összes 1-faktorok egy $n-1$ elemű reprezentációja.

Elegendőség: Tekintsünk egy tetszőleges $(p_1 p_2) = e_i \in \Gamma_n$ élt (p_1, p_2 az e_i él végpontjai). Legyen ez az $n-1$ elemű reprezentáció első eleme. A 3. lemma alapján második elemnek csak olyan e_j él választható, amely egyetlen e_i-t tartalmazó 1-faktorban sem

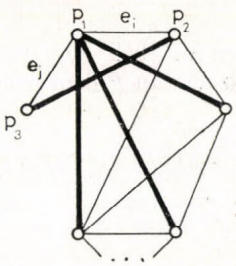
szerepel. Könnyen látható, hogy ilyen él csak azok közül választható, amelyek egyik végpontja p_1 vagy p_2. (Lásd 5. ábra.) (A vastagon kihúzott élek a választhatók.)

Tegyük fel, hogy egy $(p_1p_3)=e_j$ élt választunk a reprezentáció második elemének (lásd 6. ábra).

A 3. lemma szerint továbbra is a p_1, illetve p_2 szögpontokra illeszkedő (még választható) élek közül választhatunk, azonban most már az e_j élre is alkalmazzuk



5. ábra



6. ábra

a 3. lemmát, így a keresett reprezentációnak p_3-ra is illeszkednie kell. Ilyen él azonban csak a (p_2p_3) él lehet. Ezzel azonban a választható élek elfogytak. Ez a kiválasztás tehát akkor és csak akkor alkot reprezentációt, ha $n=4$, az összes többi esetben csak a p_1-re illeszkedő $n-1$ él választható a reprezentáció elemeiként (ez tette szükségessé az $n>4$ kikötést). Ezzel a tételt bebizonyítottuk. Az $n=4$ esetben az összes reprezentáció látható a 4. ábrán.

A továbbiakban bemutatunk egy olyan gráf típust, amelyről bizonyos feltételek mellett kimutatható, hogy *VP* gráf. Majd megvizsgáljuk, hogy adott k páros szám esetén melyik a legkisebb n szám, amelyre $\Gamma_{n,k}\in\mathscr{P}\mathscr{R}_k$ *VP* gráf.

Jelöljük az összes teljes gráfok halmazát **C**-vel, elemeit a szögpontszám szerint indexezve rendre a $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ jelekkel. (Azaz C_n jelöli az n szögpontú teljes gráfot.)

8. Definíció. Legyenek $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_t}$ **C**-beli gráfok (nem feltétlenül különbözők) és vezessük be a $C_{ij}=(P_j, E_j)$ $j=1, 2, \ldots, t$ jelölést.

A $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_t}$ gráfok t-kompozícióján (jelölése: $\boxed{t}$) értünk egy olyan $\Gamma=(P, E)$ gráfot, amelyre teljesülnek az alábbiak:

a) Γ reguláris gráf
b) $P=P_1\cup P_2\cup\ldots\cup P_t, \quad \forall i\neq j\colon P_i\cap P_j=\emptyset$
c) $E=E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_t\cup E', \quad \forall i\neq j\colon E_i\cap E_j=\emptyset,$

ahol E' az úgynevezett kötőélek halmaza.

MEGJEGYZÉSEK. 1. Az E' élhalmaz nem egyértelműen meghatározott.

2. A Γ gráf összefüggőségét E' határozza meg, hiszen ha $E'=\emptyset$, akkor Γ egy teljes részgráfokból álló, t komponensű reguláris gráf, amelyre $i_1=i_2=\ldots=i_t$.

3. Ha $\Gamma=\Gamma_{n,k}$ és $\max(i_1, i_2, \ldots, i_t)=l$, akkor $l\leqq k+1$.

6. Tétel. *Legyen* $\Gamma_n=(P, E)$ *n szögpontú összefüggő gráf. Ha létezik* Γ_n*-ben* $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ *szögpontú teljes részgráf, akkor* Γ_n*-ben nincs* 1*-faktor.* ($\bar{\Gamma}_n$ *a* Γ_n *gráf komplementer gráfját jelöli.*)

BIZONYÍTÁS. Legyen $G=(P', E')$ egy Γ_n-beli $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ szögpontú teljes részgráf. Ekkor

$$|P'| = \left[\frac{n}{2}\right]+1 \Rightarrow |P \setminus P'| = \begin{cases} \left[\frac{n}{2}\right] & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \frac{n}{2}-1 & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Valamint $\bar{\Gamma}_n$-ben a P'-beli szögpontok csak $P \setminus P'$-beli szögpontokkal lehetnek összekötve, így biztosan van P'-ben legalább egy olyan szögpont, amelynek nincs $P \setminus P'$-beli párja, azaz $\bar{\Gamma}_n$ nem tartalmaz 1-faktort.

7. Tétel. *Legyen* $\Gamma_{n,k} \in \mathscr{P}\mathscr{R}_k$, $k \geqq 4$. *Ha*

1. $C_{ij} \in \mathbf{C} \quad j = 1, 2, \ldots, t \geqq 2.$

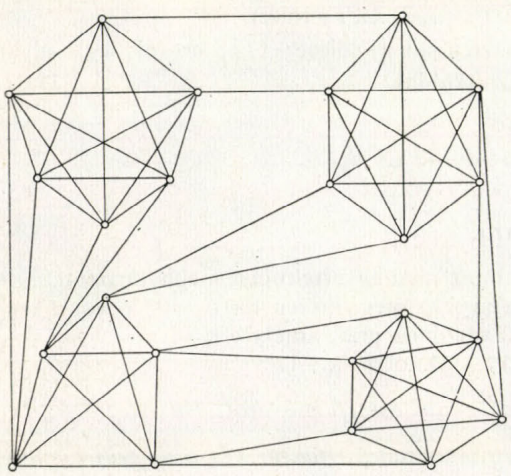
2. $\Gamma_{n,k} = C_{i_1} \overline{|t|} C_{i_2} \overline{|t|} \ldots \overline{|t|} C_{i_t}$

3. $\frac{k+4}{2} \leqq i_j \leqq k \quad j = 1, 2, \ldots, t \geqq 2$

akkor $\Gamma_{n,k}$ *VP gráf.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk egy tetszőleges $\Gamma_{n,k}$-beli p szögpontot. Ekkor a t-kompozíció *b)* tulajdonságából következik, hogy $\Gamma_{n,k}$-ban létezik C_{i_j}, melyre $p \in C_{i_j}$ és i_j-re teljesül a tétel 3. feltétele. Ha most a p által generált $\Gamma_{n,k}$-beli részgráfot tekintjük, akkor ennek k szögpontja van és tartalmazza C_{i_j}-t, amelyre $\frac{k+4}{2} \leqq i_j \leqq k$ miatt teljesül a 6. tétel feltétele, azaz a p által generált részgráf komplementere nem tartalmaz 1-faktort. Ez azt jelenti, hogy p nem T-tulajdonságú. Mivel p-re nem tettünk kikötést, így ez bármely $\Gamma_{n,k}$-beli szögpontra teljesül, azaz $\Gamma_{n,k}$ *VP* gráf.

Egy 1., 2., 3. feltételeket kielégítő gráf látható a 7. ábrán.



7. ábra

MEGJEGYZÉSEK. 1. A 7. tétel bizonyításából könnyen adódik, hogy amenynyiben $\Gamma_{n,k}$-ban van olyan $C_{i_j} \in \mathbf{C}$ részgráf, amelyre $i_j = \frac{k}{2}+1$, akkor $\Gamma_{n,k}$ nem *VP* gráf. Egy ilyen gráfot mutat a 8. ábra.

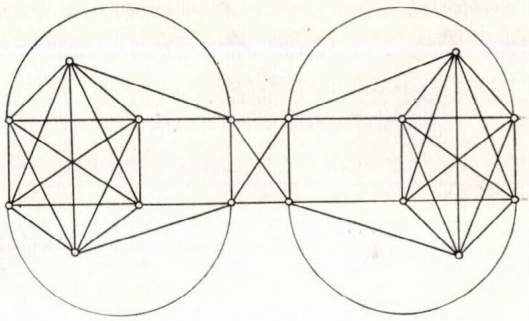
2. A 7. tétel magában foglalja a 3. tétel állítását is, így most már tudjuk, hogy nem csak a 3. tételben megkonstruált típusú *VP* gráfok léteznek bármely k páros számra.

3. Ha a 7. tétel 1. és 3. feltételeit minimális esetben vizsgáljuk, azaz

$$t = 2$$

$$i_1 = i_2 = \frac{k+4}{2},$$

akkor a $\Gamma_{n,k}=C_{i_1}\overline{|t|}\,C_{i_2}$ *VP* gráf szögpontjainak számára az $n=k+4$ értéket kapjuk. Ebből adódik a következő tétel:



8. ábra

8. Tétel. *Bármely* $k\geqq 4$ *páros szám esetén létezik* $\Gamma_{n,k}$ *VP gráf, amelyre* $n=k+4$.

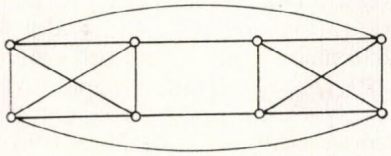
Példaként a 9. ábrán láthatunk egy $\Gamma_{8,4}$ gráfot. Mivel tudjuk, hogy bármely $\Gamma_{n,k}\in\mathscr{PR}$ esetén $n\geqq k+1$ és $\Gamma_{k+1,k}$ teljes gráf lévén nem *VP* gráf, így felmerül a kérdés, hogy adott k esetén mekkora a legkisebb $n_{\min}$ szám, amelyre létezik $\Gamma_{n,k}\in\mathscr{PR}$ *VP* gráf.

A 8. tételt figyelembevéve adódik, hogy

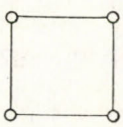
$$k+2\leqq m_{\min}\leqq k+4 \tag{25}$$

9. Tétel. Ha $\Gamma_{n,k}\in\mathscr{PR}_k$ és $n=k+2$, akkor $\Gamma_{n,k}$ nem *VP* gráf.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítást fokszám szerinti teljes indukcióval végezzük. $k=2$ esetén a 10. ábrán látható gráfot kapjuk, amelyre az állítás könnyen belátható.



9. ábra



10. ábra

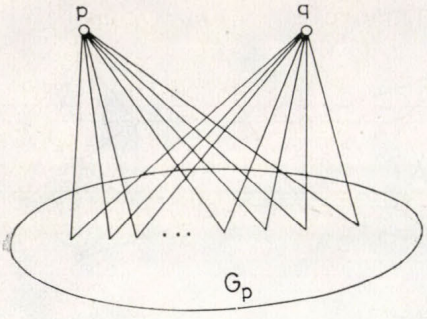
Tegyük fel, hogy $\Gamma_{k,k-2}$-re igaz az állítás. Tekintsünk egy $\Gamma_{n,k}\in\mathscr{PR}_k$ gráfot, ahol $n=k+2$ és válasszuk ki ennek tetszőleges p szögpontját. Ekkor könnyű látni, hogy $\Gamma_{n,k}$ tartalmaz pontosan még egy q szögpontot, amelynek szomszédai megegyeznek p szomszédaival, azaz a p és q által generált $\Gamma_{n,k}$-beli részgráf megegyezik (lásd 11. ábra).

Jelöljük G_p-vel a p, illetve q szögpont által generált $\Gamma_{n,k}$-beli részgráfot. G_p pontosan k szögpontú, $k-2$ fokszámú reguláris gráf, amelyre az indukciós feltétel alapján teljesül a tétel állítása, azaz G_p *VP* gráf.

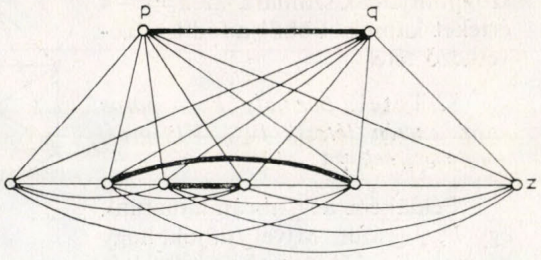
Ennek alapján bármely G_p-beli szögpontot választjuk ki, (jelöljük z-vel), az általa generált G_p-beli részgráf (G_p') komplementerében van 1-faktor. Jelöljük a z szögpont által generált $\Gamma_{n,k}$-beli részgráfot G_z-vel. Ekkor G_z pontosan a p és q szögpontokat tartalmazza G_p' szögpontjain kívül, így $\overline{G}_z$ tartalmazza a (pq) élt, tehát a $\overline{G}_p'$-beli 1-faktor és (pq) pontosan egy $\overline{G}_z$-beli 1-faktort állít elő, azaz a z szögpont T-tulajdonságú, vagyis $\Gamma_{n,k}$ nem *VP* gráf.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Példaként a 12. ábrán láthatunk egy $\Gamma_{8,6}$ gráfot, amelyen a 9. tételbeli jelöléseket használva bejelöltünk egy z szögponthoz tartozó G_z-beli 1-faktort (vastag vonallal).



11. ábra



12. ábra

10. Tétel. *Bármely* $k \geqq 2$ *szám esetén létezik olyan* $\Gamma_{n,k}$ k *reguláris gráf, melyre* $n = k+3$ *és* $\Gamma_{n,k}$ *nem tartalmaz* 1*-faktort.*

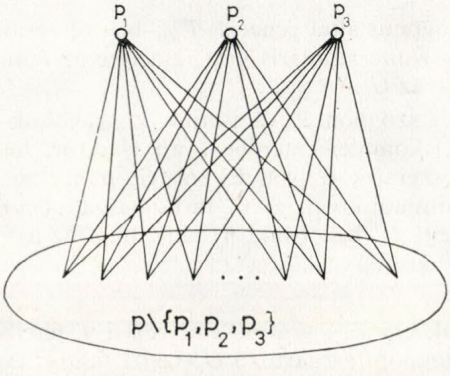
BIZONYÍTÁS. Ha $k \geqq 3$, akkor tekintsünk egy n szögpontból álló P szögponthalmazt és válasszunk ki ebből három szögpontot (jelöljük ezeket a p_1, p_2, p_3 jelekkel). Ha most a p_1, p_2, p_3 szögpontokat rendre összekötjük az összes $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ halmazbeli szögpontokkal (lásd 13. ábra), akkor e három szögpont fokszáma pontosan $k = n-3$ lesz, míg a $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ halmazbeli szögpontoké pontosan 3. Jelöljük az így keletkező gráfot G_1-gyel.

Most a $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$-beli szögpontokból képezzünk egy tetszőleges $k-3$ fokszámú reguláris gráfot, melyet G_2-vel jelölünk. Ha a G_1 és G_2 gráfokat egyesítjük, akkor pontosan egy n szögpontú, $k = n-3$ fokú reguláris $\Gamma_{n,k}$ gráfot nyerünk. Képezzük a $\bar{\Gamma}_{n,k}$ gráfot. A fenti konstrukció miatt a $\{p_1, p_2, p_3\}$-beli szögpontok egyáltalán nem lesznek szomszédosak a $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$-beli szögpontokkal $\bar{\Gamma}_{n,k}$-ben, azaz $\bar{\Gamma}_{n,k}$ két komponensre esik szét, amelynek a p_1, p_2, p_3 szögpontokat tartalmazó tagja függetlenül k páros, vagy páratlan voltától, nem tartalmaz 1-faktort, így $\bar{\Gamma}_{n,k}$ sem tartalmazhat 1-faktort.

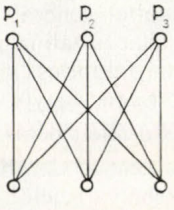
Ha $k = 2$, akkor $n = 5$, amely esetben $\bar{\Gamma}_{n,k}$ a páratlan szögpontszám miatt nem tartalmaz 1-faktort. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Könnyű belátni, hogy $k = 1$, azaz $n = 4$ esetén a tétel nem igaz.

A tételbeli konstrukcióval a $k = 3$ esetben a jól ismert Kuratowski gráf áll elő (lásd 14. ábra).



13. ábra



14. ábra

A következő tétel módot ad a (25) egyenlőtlenség pontosítására, azaz $n_{\min}$ értékének pontos meghatározására.

11. Tétel. *Bármely $k \geqq 6$ páros szám esetén létezik $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ VP gráf, amelyre $n = k+3$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\Gamma_{n,k}$ a 10. tétel konstrukciójával keletkező gráf (lásd 13. ábra), azzal a megkötéssel, hogy a (10. tétel jelöléseit használva) G_2 részgráfra teljesüljön, hogy G_2 nem tartalmaz 1-faktort. A 10. tétel alapján ezt feltehetjük, mivel legalább egy ilyen mindig van. Bebizonyítjuk, hogy minden $\Gamma_{n,k}$-beli szögpont T-tulajdonságú.

Legyen továbbá p tetszőleges $\{p_1, p_2, p_3\}$-beli és q tetszőleges G_2-beli szögpont.

1. A p szögpont által generált részgráf pontosan G_2 lesz, amelyről feltettük, hogy $\bar{G}_2$-ben nincs 1-faktor, így p nem T-tulajdonságú.

2. Jelöljük a q szögpont által generált részgráfot G_q-val, ekkor G_q szögpontjait a $\{p_1, p_2, p_3\}$-beli szögpontok és q-nak G_2-beli szomszédai (jelöljük ezek halmazát K-val) alkotják. Mivel $\{p_1, p_2, p_3\}$ minden egyes eleme szomszédos az összes K-belivel, így $\bar{G}_q$ két komponensre esik szét, amelyek szögponthalmazai $\{p_1, p_2, p_3\}$ és K lesznek. A $\{p_1, p_2, p_3\}$ szögpontokat kifeszítő $\bar{G}_q$-beli komponens azonban páratlan számú szögpontot tartalmaz, így nem lehet benne 1-faktor, ezért $\bar{G}_q$-ben sem. Tehát q szintén nem T-tulajdonságú, amivel a tételt bebizonyítottuk.

A 9. és 11. tétel alapján már pontosan tudjuk a (25) egyenlőtlenségben még csak becsült $n_{\min}$ értékét a $k \geqq 6$ esetben. Kérdés, hogy mi a helyzet a $k=2$ és $k=4$ esetekben?

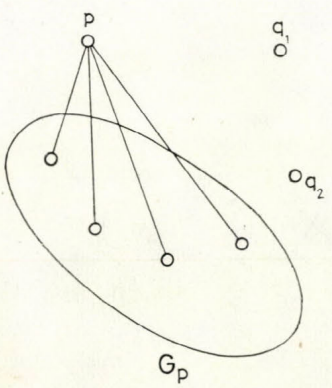
Mivel $k=2$ esetén $\Gamma_{n,2} \in \mathcal{PR}_2$ pontosan egy Hamilton kör, így könnyű belátni, hogy $\Gamma_{n,2}$ semmilyen n esetén sem *VP* gráf.

12. Tétel. *Ha $k=4$ és $n=k+3$, akkor $\Gamma_{7,4} \in \mathcal{PR}_4$ nem VP gráf.*

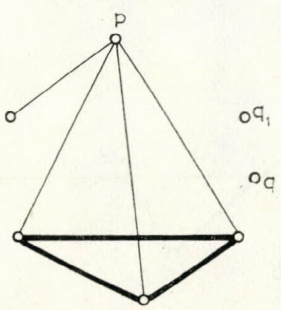
BIZONYÍTÁS. Válasszuk ki $\Gamma_{7,4}$ tetszőleges p pontját és tekintsük a p által generált G_p $\Gamma_{7,4}$-beli részgráfot. Ha p nem T-tulajdonságú, akkor G_p tartalmazza a p szomszédaiból alkotott négy szögpontú teljes gráf összes 1-faktorainak egy reprezentációját. Ez a 4. ábráról leolvashatóan csak két esetben lehetséges: vagy az a), d), f), g), vagy a b), c), e), h) típusú esetben.

Jelöljük q_1, q_2-vel $\Gamma_{7,4}$-nek azokat a pontjait, amelyek nem G_p-beliek, és nem azonosak p-vel (lásd 15. ábra).

Az első esetben G_p az első típusú 1-faktor reprezentációt tartalmazza (lásd 16. ábrán vastag vonallal).



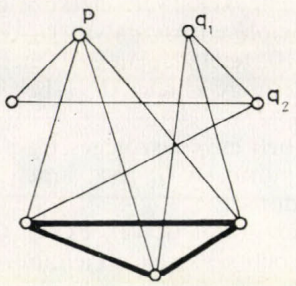
15. ábra



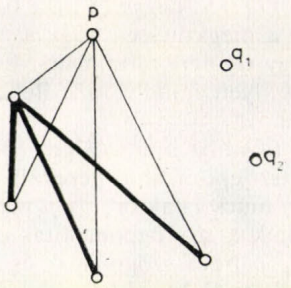
16. ábra

$k=4$ miatt a q_1 (vagy q_2) szögpontnak legalább két reprezentációbeli szögponttal kell szomszédosnak lenni, így q_2 (vagy q_1) számára maximum három szögpont marad szomszédként, azaz ebben az esetben $\Gamma_{7,4}$ nem konstruálható meg (lásd 17. ábra).

A második esetben G_p a második típusú 1-faktor reprezentációt tartalmazza lásd (18. ábrán vastag vonallal).



17. ábra



18. ábra

Ekkor azonban q_1 és q_2 számára csak egyféle összekötési lehetőség marad (a többi szögponttal) $\Gamma_{7,4}$ megkonstruálásához (lásd 19. ábra), amelyben könnyen található T-tulajdonságú szögpont (a 19. ábrán T-vel jelöltük ezeket).

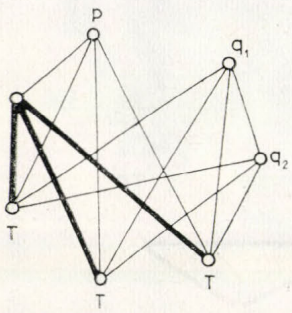
Megjegyezzük, hogy a 10. tételbeli gráf konstrukció jóval általánosabb feltételek mellett is a kívánt tulajdonságú gráfot eredményezi, azonban célunk csak az exisztencia bizonyítása volt, amihez ez is elegendőnek bizonyult.

A 8., 11. és 12. tétel alapján már pontosíthatjuk a (25) egyenlőtlenséget és kimondhatjuk az alábbi tételt:

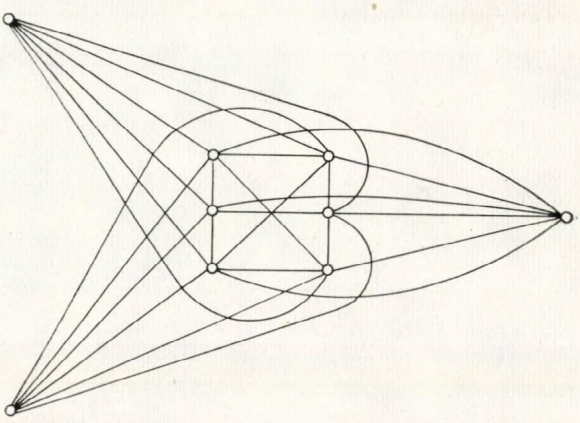
13. Tétel. *Bármely* $k\geqq 4$ *páros szám esetén a legkisebb* $n_{\min}$ *szám, amelyre* $\Gamma_{n_{\min},k}\in\mathscr{P}\mathscr{R}_k$ *VP gráf*

$$n_{\min}=\begin{cases}k+3 & \text{ha} \quad k\geqq 6\\ k+4 & \text{ha} \quad k=4.\end{cases} \tag{26}$$

A 13. tétel illusztrálására a $k=4$ eset a 9. ábrán látható, a $k=6$ esetre pedig a 20. ábrán mutatunk be egy példát.



19. ábra



20. ábra

IRODALOM

[1] C. BERGE: *Graphs and hypergraphs* North-Holland, 1973.
[2] G. A. DIRAC: Some theorems on abstract graphs *Proc. London Math. Soc.* (3), *2* (1952), 69—81.
[3] ERDŐS P., RÉNYI A.: On the evolution of random graphs. *MTA Matematikai Kutató Int. közleményei* V. évf. A sorozat 1—2 füzet, 1960.

«ЭВОЛЮЦИЯ» РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ ЧЁТНОГО ПОРЯДКА ПО ИХ ВЕРШИНАМ

ТАМАШ ДЕНЕШ

THE "EVOLUTION" OF REGULAR GRAPHS

T. DÉNES

MÁSODRENDŰ LINEÁRIS REKURZÍV SOROZATOK ELEMEINEK HÁNYADOSAIRÓL

MÁTYÁS FERENC

I.

Definiáljuk a $G=G(A, B, G_0, G_1)=\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatot az A, B, G_0, G_1 rögzített egészekkel, amelyekre $D=A^2+4B\neq 0$, és a

$$G_n = AG_{n-1}+BG_{n-2} \quad (n > 1)$$

rekurzív formulával. Ismert, hogy ha az $x^2-Ax-B=0$ egyenlet gyökei α, illetve β, akkor

$$G_n = \frac{(G_1-\beta G_0)\alpha^n-(G_1-\alpha G_0)\beta^n}{\alpha-\beta} \tag{1}$$

(lásd pl. I. Niven and H. S. Zuckerman [7], 91. oldal). A G sorozatot az $A=B=1$, $G_0=0$, $G_1=1$ esetben Fibonacci sorozatnak nevezzük és a tagokat $F_0, F_1, F_2, \ldots$-vel jelöljük.

K. Alladi [1], [2], [3]-ban az $\frac{F_i}{F_j}$ $(0\leqq i<j\leqq n$, n rögzített egész) alakú törtek véges halmazával foglalkozott, megadta a halmaz elemeinek nagyság szerinti elrendezésének algoritmusát és több tételt bizonyított e törtek monoton növekvő sorozatával kapcsolatban.

A következőkben általánosítjuk K. Alladi néhány eredményét az általánosabb G sorozatra, megadjuk a $\frac{G_i}{G_j}$ $(0\leqq i<j\leqq n$, n rögzített egész) alakú törtek véges halmazának nagyság szerinti elrendezését, rámutatunk az így nyert sorozat néhány szimmetria tulajdonságára, a $\frac{G_i}{G_j}$ $(0\leqq i<j)$ alakú összes tört eloszlására és végül egy diofantikus approximációval kapcsolatos tételt bizonyítunk. Dolgozatunkban csak olyan G sorozatokkal foglalkozunk, melyek kielégítik az alábbi feltételeket:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad A \geqq 1, \quad B \geqq 1, \\ &\text{b)} \quad 0 \leqq G_0 < G_1, \\ &\text{c)} \quad G_1-\alpha G_0 \neq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

ahol α az $x^2-Ax-B=0$ egyenlet nagyobb abszolút értékű gyöke. A feltételekből következik, hogy $\alpha>0$ és a másik gyökre $\beta<0$. Vezessük be a következő jelölést, ill. definíciókat. Jelölje

$$g_n = \left\{\frac{G_i}{G_j},\ 0<i<j\leqq n, \text{ ha } G_0=0 \middle| 0\leqq i<j\leqq n, \text{ ha } G_0\neq 0\right\}$$

rögzített n esetén a $\frac{G_i}{G_j}$ alakú törtek monoton növekvő sorozatát.

1. Definíció. A g_n sorozat két szomszédos elemét szimmetriapárnak (egy elemét szimmetriapontnak) nevezzük, ha az elempártól (elemtől) balra, illetve jobbra levő tört nevezője azonos.

2. Definíció. A g_n sorozat két szomszédos szimmetriapárja (szimmetriapontja), illetve az utolsó szimmetriapár (szimmetriapont) és a g_n sorozat utolsó eleme közötti törtek halmazát intervallumnak nevezzük. Jelölése [ ], ill. ( ). A g_n sorozatra vonatkozó tételek előtt két lemmát mondunk ki.

1. Lemma. *Legyen G a (2) feltételt kielégítő sorozat.*
a) *Ha* $(G_1-\alpha G_0)(-1)^t>0$, *akkor*

$$\frac{G_{t-1}}{G_{n-1}} > \frac{G_t}{G_n} > \frac{G_{t-2}}{G_{n-2}},$$

ahol $2\leqq t<n$.
b) *Ha* $(G_1-\alpha G_0)(-1)^t<0$, *akkor*

$$\frac{G_{t-1}}{G_{n-1}} < \frac{G_t}{G_n} < \frac{G_{t-2}}{G_{n-2}},$$

ahol $2\leqq t<n$, *ha* $G_0\neq 0$ *és* $2<t<n$, *ha* $G_0=0$.

Megjegyzés: 1. Ha a (2) feltételben megengedjük a $G_1-\alpha G_0=0$ (nyilván $G_0\neq 0$) esetet, akkor

$$\frac{G_{t-1}}{G_{n-1}} = \frac{G_t}{G_n} = \frac{G_{t-2}}{G_{n-2}} \quad (2 \leqq t < n).$$

2. Az a) állítás $\frac{G_{t-1}}{G_{n-1}}>\frac{G_t}{G_n}$ része és a *b*) állítás $\frac{G_{t-1}}{G_{n-1}}<\frac{G_t}{G_n}$ része $1\leqq t<n$-re is igaz.

2. Lemma. *Legyen G a (2) feltételt kielégítő sorozat, továbbá* α' *az* $x^2-(A^2+B)x-AB=0$ *egyenlet pozitív gyöke. Ha* $G_0\neq 0$ *és* $\alpha<\frac{G_1}{G_0}<\alpha'$, akkor

$$\frac{G_0}{G_{n-1}} < \frac{G_1}{G_n} < \frac{G_0}{G_{n-2}} \quad (2 \leqq n).$$

A továbbiakban három tételt fogalmazunk meg. Ezek következményei lehetőséget adnak rögzített n esetén a g_n sorozat előállítására.

1. Tétel. *Ha G a (2)-t kielégítő sorozat és* $G_0=0$, *akkor* $n\geqq 2$ *esetén* g_n *egyértelmű és a következő alakú:*

$$\frac{G_1}{G_n}, \frac{G_2}{G_n}, \frac{G_1}{G_{n-1}}, \frac{G_2}{G_{n-1}}, \frac{G_3}{G_n}, \frac{G_1}{G_{n-2}}, \frac{G_2}{G_{n-2}}, \ldots, \frac{G_1}{G_{n-3}}, \frac{G_2}{G_{n-3}}, \ldots,$$

$$\frac{G_1}{G_j}, \frac{G_2}{G_j}, \ldots, \frac{G_1}{G_{j-1}}, \frac{G_2}{G_{j-1}}, \ldots, \frac{G_1}{G_2},$$

ahol $\frac{G_2}{G_j}$ *és* $\frac{G_1}{G_{j-1}}$ $(3\leqq j<n)$ *törtek között a sorrend a következő: ha* $n-j$ *páros (ill. páratlan), akkor* $\frac{G_2}{G_j}$*-t követő törtek számlálóiban és nevezőiben szereplő indexek rendre*

2-vel nőnek, azaz $\frac{G_2}{G_j}, \frac{G_4}{G_{j+2}}, \frac{G_6}{G_{j+4}}, \ldots$ *a sorrend a* $\frac{G_{n-j+2}}{G_n}$ $\left(\text{ill. } \frac{G_{n-j+1}}{G_{n-1}}\right)$ *törtig, ezt követi a* $\frac{G_{n-j+1}}{G_{n-1}}$ $\left(\text{ill. } \frac{G_{n-j+2}}{G_n}\right)$ *tört, majd az indexek renrde kettővel való csökkentésével eljutunk a* $\frac{G_1}{G_{j-1}}$ *törthöz.*

Megjegyzés: 1. Ha $G_0=0$ és $A=1$, akkor $G_1=G_2$, ezért megállapodunk abban, hogy $\frac{G_1}{G_i}$ mindig a $\frac{G_2}{G_i}$ tört előtt álljon g_n-ben. Így g_n egyértelműsége ekkor is biztosítva van.

2. Ha $A=B=G_1=1$ és $G_0=0$, akkor tételünk speciális esetként megadja K. Alladi-nak az $\frac{F_i}{F_j}$ $(0<i<j\leqq n)$ törtek nagyság szerinti elrendezésére vonatkozó eredményét.

Következmények. Az 1. Tétel feltételeit kielégítő g_n *sorozat esetén:*

1. *szimmetriapont nincs,*

2. *ha* $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}$ *két tetszőleges, szomszédos* g_n*-beli elem,* $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}$ *akkor és csak akkor szimmetriapár, ha*

$$h = G_1, \quad h' = G_2 \quad \text{és} \quad k = k' = G_j$$

valamely j-vel, melyre $3\leqq j<n$,

3. *ha* $\frac{G_i}{G_k}\in g_n$, *akkor*

$$\frac{G_i}{G_k}\in\left[\frac{G_2}{G_j}, \frac{G_1}{G_{j-1}}\right] \quad (3 \leqq j < n)$$

pontosan akkor teljesül, ha $k-i=j-2$,

4. *a* g_n *sorozat két szomszédos* $\left[\frac{G_2}{G_{j+1}}, \frac{G_1}{G_j}\right]$ és $\left[\frac{G_2}{G_j}, \frac{G_1}{G_{j-1}}\right]$ $(n>j\geqq 3)$ *intervallumában a* $\frac{G_1}{G_j}, \frac{G_2}{G_j}$ *párra szimmetrikusan elhelyezkedő törtek nevezője azonos.*

2. Tétel. *Ha G a* (2) *feltételt kielégítő sorozat és* $G_0\neq 0$, *továbbá* $0<\frac{G_1}{G_0}<\alpha$, *akkor* g_n $(n\geqq 1)$ *egyértelmű és a következő alakú:*

$$\frac{G_0}{G_n}, \frac{G_1}{G_n}, \frac{G_0}{G_{n-1}}, \frac{G_1}{G_{n-1}}, \frac{G_2}{G_n}, \frac{G_0}{G_{n-2}}, \frac{G_1}{G_{n-2}}, \ldots, \frac{G_0}{G_{n-3}}, \frac{G_1}{G_{n-3}}, \ldots,$$

$$\frac{G_0}{G_j}, \frac{G_1}{G_j}, \ldots, \frac{G_0}{G_{j-1}}, \frac{G_1}{G_{j-1}}, \ldots, \frac{G_0}{G_1},$$

ahol $\frac{G_1}{G_j}$ *és* $\frac{G_0}{G_{j-1}}$ $(2\leqq j<n)$ *törtek között a sorrend a következő: ha* $n-j$ *páros (ill. páratlan), akkor* $\frac{G_1}{G_j}$*-t követő törtek számlálóiban és nevezőiben szereplő indexek rendre kettővel nőnek, azaz* $\frac{G_1}{G_j}, \frac{G_3}{G_{j+2}}, \frac{G_5}{G_{j+4}}, \ldots$ *a sorrend a* $\frac{G_{n-j+1}}{G_n}$ $\left(\text{ill. } \frac{G_{n-j}}{G_{n-1}}\right)$

törtig, ezt követi a $\frac{G_{n-j}}{G_{n-1}}\left(\text{ill. } \frac{G_{n-j+1}}{G_n}\right)$ *tört, majd az indexek rendre 2-vel való csökkentésével eljutunk a* $\frac{G_0}{G_{j-1}}$ *törthöz.*

Következmények. A 2. Tétel feltételeit kielégítő g_n sorozat esetén:

1. szimmetriapont nincs,

2. ha $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}$ két tetszőleges, szomszédos g_n-beli elem, $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}$ akkor és csak akkor alkot szimmetriapárt, ha $h=G_0$, $h'=G_1$ és $k=k'=G_j$ valamely j-vel, melyre $3\leqq j<n$,

3. ha $\frac{G_i}{G_k}\in g_n$, $\frac{G_i}{G_k}\in\left[\frac{G_1}{G_j}, \frac{G_0}{G_{j-1}}\right]$ $(2\leqq j<n)$ akkor és csak akkor, ha $k-i=j-1$,

4. a g_n sorozat két szomszédos $\left[\frac{G_1}{G_{j+1}}, \frac{G_0}{G_j}\right]$ és $\left[\frac{G_1}{G_j}, \frac{G_0}{G_{j-1}}\right]$ $(2\leqq j<n)$ intervallumában a $\frac{G_0}{G_j}, \frac{G_0}{G_j}$ párra szimmetrikusan elhelyezkedő törtek nevezője azonos.

3. Tétel. *Legyen G a (2)-t kielégítő sorozat és $G_0\neq 0$, továbbá α' az $x^2-(A^2+B)x-AB=0$ egyenlet pozitív gyöke. Ha $\alpha<\frac{G_1}{G_0}<\alpha'$, akkor g_n egyértelmű és az alábbi alakú:*

$$\frac{G_0}{G_n}, \frac{G_0}{G_{n-1}}, \frac{G_1}{G_n}, \frac{G_0}{G_{n-2}}, \frac{G_2}{G_n}, \frac{G_1}{G_{n-1}}, \frac{G_0}{G_{n-3}}, \ldots,$$

$$\frac{G_0}{G_{n-4}}, \ldots, \frac{G_0}{G_j}, \ldots, \frac{G_0}{G_{j-1}}, \ldots, \frac{G_0}{G_1}, \ldots, \frac{G_1}{G_2},$$

ahol $\frac{G_0}{G_j}$ *és* $\frac{G_0}{G_{j-1}}$ $(2\leqq j<n)$ *törtek között következő a sorrend: ha $n-j$ páros (ill. páratlan), akkor* $\frac{G_0}{G_j}$*-t követő törtek számlálóiban és nevezőiben szereplő indexek rendre 2-vel nőnek, azaz* $\frac{G_0}{G_j}, \frac{G_2}{G_{j+2}}, \frac{G_4}{G_{j+4}}, \ldots$ *a sorrend a* $\frac{G_{n-j}}{G_n}\left(\text{ill. } \frac{G_{n-j-1}}{G_{n-1}}\right)$ *törtig, ezt követi a* $\frac{G_{n-j-1}}{G_{n-1}}\left(\text{ill. } \frac{G_{n-j}}{G_n}\right)$ *tört, majd az indexek 2-vel való csökkentésével eljutunk a* $\frac{G_1}{G_{j+1}}$ *törthöz, melyet a* $\frac{G_0}{G_{j-1}}$ *követ;* $\frac{G_0}{G_1}$ *és* $\frac{G_1}{G_2}$ *törtek között a sorrend: ha $n-1$ páros (ill. páratlan), akkor* $\frac{G_0}{G_1}, \frac{G_2}{G_3}, \frac{G_4}{G_5}, \ldots$ *a* $\frac{G_{n-1}}{G_n}\left(\text{ill. } \frac{G_{n-2}}{G_{n-1}}\right)$ *törtig, ezt követi a* $\frac{G_{n-2}}{G_{n-1}}\left(\text{ill. } \frac{G_{n-1}}{G_n}\right)$ *tört, majd az indexek rendre 2-vel való csökkentésével eljutunk a* $\frac{G_1}{G_2}$ *törthöz.*

Következmények. A 3. Tétel feltételeit kielégítő g_n esetén:

1. *szimmetriapár nincs,*

2. *ha* $\frac{h}{k}$ *egy tetszőleges g_n-beli elem,* $\frac{h}{k}$ *akkor és csak akkor szimmetriapont, ha $h=G_0$ és $k=G_j$ valamely j-vel, melyre $1\leqq j<n$,*

3. *ha* $\frac{G_i}{G_k} \in g_n$,

a) $\frac{G_i}{G_k} \in \left[\frac{G_0}{G_j}, \frac{G_0}{G_{j-1}}\right)$ $(2 \leqq j < n)$ *akkor és csak akkor, ha* $k-i=j$,

b) $\frac{G_i}{G_k} \in \left[\frac{G_0}{G_1}, \frac{G_1}{G_2}\right]$ *akkor és csak akkor, ha* $k-i=1$,

4. *a* g_n *sorozat szomszédos* $\left[\frac{G_0}{G_{j+1}}, \frac{G_0}{G_j}\right)$, $\left[\frac{G_0}{G_j}, \frac{G_0}{G_{j-1}}\right)$ $(2 \leqq j < n)$ *és* $\left[\frac{G_0}{G_2}, \frac{G_0}{G_1}\right)$, $\left[\frac{G_0}{G_1}, \frac{G_1}{G_2}\right]$ *intervallumaiban a*

$$\frac{G_0}{G_j} (2 \leqq j < n), \quad \textit{ill. a} \quad \frac{G_0}{G_1}$$

elemekre szimmetrikusan elhelyezkedő törtek nevezői azonosak.

Könnyen belátható, hogy ha $\frac{G_1}{G_0} = \alpha'$, akkor $\frac{G_1}{G_3} = \frac{G_0}{G_1}$. Ezért, ha megállapodunk abban, hogy $\frac{G_1}{G_3}$ tört mindig a $\frac{G_0}{G_1}$ tört előtt álljon g_n-ben $(n \geqq 3)$, akkor g_n ebben az esetben is egyértelmű, azaz igaz a 3. Tétel $G_1 = G_0\alpha'$ esetén is. Ha $G_1 > G_0\alpha'$, akkor további feltételek nélkül a g_n sorozatokban nem adódnak az előbbiekben talált szimmetriák, ezért ezzel az esettel nem foglalkozunk. Ugyancsak nem foglalkoztunk azokkal a G sorozatokkal, melyekre a (2) feltételben megengedjük a $G_1 - \alpha G_0 = 0$ esetet, mivel ekkor az 1. Lemma 1. megjegyzése szerint a g_n sorozatnak összesen csak n különböző eleme van, nevezetesen $\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \ldots, \alpha^{-n}$; erről (1)-et alkalmazva egyszerűen meggyőződhetünk, így g_n egyértelműségéről nem beszélhetünk.

Tételeink után megfogalmazott következmények alapján egyszerű módszer adható a g_n sorozat gyors előállítására. Kövessük végig például $G_0 = 0$ és n páros esetben e módszert.

1. Induljunk ki a g_n sorozat utolsó $\left[\frac{G_2}{G_3}, \frac{G_1}{G_2}\right]$ intervallumából, ahol $j=3$. Az 1. Tétel alapján ebben az intervallumban a törtek sorrendje:

$$\frac{G_2}{G_3}, \frac{G_4}{G_5}, \frac{G_6}{G_7}, \ldots, \frac{G_{n-2}}{G_{n-1}}, \frac{G_{n-1}}{G_n}, \frac{G_{n-3}}{G_{n-2}}, \ldots, \frac{G_3}{G_4}, \frac{G_1}{G_2},$$

mivel $n-j$ páratlan.

2. Második lépésként írjuk $\frac{G_2}{G_3}$ elé a szimmetriapár első tagját $\left(\frac{G_1}{G_3}\text{-at}\right)$, majd az intervallum nevezőit rendre tükrözzük a $\frac{G_1}{G_3}, \frac{G_2}{G_3}$ szimmetriapárra mindaddig, míg a G_4 nevezőt nem tükröztük.

3. A G_4 nevezőjű tört számlálója G_2 lesz, mivel tudjuk, hogy ez egy újabb szimmetriapár második tagja. Írjuk $\frac{G_2}{G_4}$ elé a $\frac{G_1}{G_4}$ törtet, majd a $\left(\frac{G_2}{G_4}, \frac{G_1}{G_3}\right)$ intervallum nevezőit rendre tükrözzük a $\frac{G_1}{G_4}, \frac{G_2}{G_4}$ szimmetriapárra mindaddig, míg a G_5 nevezőjű törtet nem tükröztük. E tört számlálója újra G_2, — írjuk $\frac{G_2}{G_5}$ elé a $\frac{G_1}{G_5}$ törtet és kezd-

jük a tükrözést a $\frac{G_1}{G_5}, \frac{G_2}{G_5}$ szimmetriapárra. Az eljárást hasonlóan folytatva eljutunk a G_n nevezőjű törthöz, melynek számlálója szintén G_2 lesz. Végül írjuk $\frac{G_2}{G_n}$ elé a $\frac{G_1}{G_n}$ törtet.

4. Egy-egy intervallum törtjeinek számlálói a 3-as következmények miatt könnyen adódnak. (A nevező és a számláló indexeinek különbsége intervallumként állandó.) A most leírt algoritmus szerint előállítjuk a g_6 sorozatot a $G_0=0$ esetben.

1. $\frac{G_2}{G_3}, \frac{G_4}{G_5}, \frac{G_5}{G_6}, \frac{G_3}{G_4}, \frac{G_1}{G_2}$

2. $\frac{}{G_4}, \frac{}{G_6}, \frac{}{G_5}, \frac{G_1}{G_3}, \frac{G_2}{G_3}, \frac{G_4}{G_5}, \frac{G_5}{G_6}, \frac{G_3}{G_4}, \frac{G_1}{G_2}$

3. $\frac{G_1}{G_6}, \frac{G_2}{G_6}, \frac{G_1}{G_5}, \frac{G_2}{G_5}, \frac{}{G_6}, \frac{G_1}{G_4}, \frac{G_2}{G_4}, \frac{}{G_6}, \frac{}{G_5}, \frac{G_1}{G_3}, \frac{G_2}{G_3}, \frac{G_4}{G_5}, \frac{G_5}{G_6}, \frac{G_3}{G_4}, \frac{G_1}{G_2}$

4. $\frac{G_1}{G_6}, \frac{G_2}{G_6}, \frac{G_1}{G_5}, \frac{G_2}{G_5}, \frac{G_3}{G_6}, \frac{G_1}{G_4}, \frac{G_2}{G_4}, \frac{G_4}{G_6}, \frac{G_3}{G_5}, \frac{G_1}{G_3}, \frac{G_2}{G_3}, \frac{G_4}{G_5}, \frac{G_5}{G_6}, \frac{G_3}{G_4}, \frac{G_1}{G_2}$.

II.

Ismert, hogy, ha $G_0=0, G_1=1$, továbbá az A, B egészekre $A^2+4B>0$ és az $x^2-Ax-B=0$ egyenlet nagyobb abszolút értékű gyöke α, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \alpha$$

(lásd például D. Jarden [4] 50. oldal). Kiss Péter [5]-ben és [6]-ban a kvadratikus irracionális számokat approximáló racionális törtek és a másodrendű lineáris rekurzív sorozatok közötti kapcsolatokat vizsgálta. Többek között bebizonyította, hogy ha $G_0=0, G_1=1$ és α irracionális szám, akkor az

$$\left|\alpha-\frac{G_{n+1}}{G_n}\right| < \frac{1}{cG_n^2}$$

egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül végtelen sok n természetes számra, ha $B=\pm 1$ és $c\leqq\sqrt{D}$.

A továbbiakban hasonló vizsgálatokat végzünk a (2) feltételt kielégítő G sorozatokkal. Az előző részben megismert g_n sorozatok alakjából nyilvánvalóan következik, hogy $n\to\infty$ esetén a g_n sorozat intervallumainak, ill. az egyes intervallumok elemeinek a száma is végtelenhez tart. Vizsgáljuk meg, hogy egy-egy intervallum törtjei milyen határértékhez tartanak. Egy-egy intervallumban a 3-as következmények miatt csak olyan $\frac{G_i}{G_k}$ törtek vannak, ahol $k-i=$állandó, ezért a

$$\lim_{\substack{n>i \\ n\to\infty}} \frac{G_{n-i}}{G_n}$$

határértéket kell meghatározni rögzített $i>0$ egészekre.

4. Tétel. *Ha G a (2) feltételt kielégítő sorozat, $i>0$ rögzített egész és az $x^2-Ax-B=0$ egyenlet α, β gyökei közül α a pozitívat (egyben a nagyobb abszolút értékűt) jelöli, akkor*

$$\lim_{\substack{n>i \\ n\to\infty}} \frac{G_{n-i}}{G_n} = \frac{1}{\alpha^i}.$$

Következmény. A $\frac{G_i}{G_j}$ $(0\leqq i<j)$ alakú összes tört végtelen halmaza a $[0, 1]$ intervallumban nem sűrű; torlódási pontjai az α^{-i} számok ($i>0$ tetszőleges egész) és a 0.

Ha a (2) feltételt kielégítő G sorozat esetén α irracionális, akkor

$$\alpha^{-i} = \left(\frac{A+\sqrt{D}}{2}\right)^{-i}$$

($i>0$ egész) is irracionális. A 4. Tétel szerint az α^{-i} számok tetszőleges pontossággal közelíthetők $\frac{G_{n-i}}{G_n}$ alakú törtekkel. Felvetődik a kérdés, hogy α^{-i} approximálható-e másodrendben $\frac{G_{n-i}}{G_n}$ törtekkel, s mi az approximáció legjobb konstansa?

5. Tétel. *A G sorozatra teljesüljön a (2) feltétel és α legyen irracionális. Az*

$$\left|\alpha^{-i} - \frac{G_{n-i}}{G_n}\right| < \frac{1}{CG_n^2}$$

$(0<i<n$, i fix egész) egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül végtelen sok n természetes számra, ha $B=1$ és

$$C \leqq \frac{\sqrt{D}}{R_i|G_1^2 - G_0G_2|},$$

ahol R_i a $G=G(A, B, 0, 1)$ sorozat i-edik eleme.

III.

A következőkben bizonyítjuk az eddig kimondott lemmákat és tételeket.

Az *1. Lemma bizonyítása.* (Csak az a) állítás első egyenlőtlenségét igazoljuk, mivel a második egyenlőtlenség és a b) állítás teljesen hasonló módon bizonyítható.)

Induljunk ki a $(G_1-\alpha G_0)(-1)^t>0$ feltételből. $2\leqq t<n$, $\alpha>|\beta|$, $\alpha\beta=-B<0$ és $G_1-\beta G_0>0$ miatt

$$(G_1-\beta G_0)\cdot(G_1-\alpha G_0)\cdot\alpha^{t-1}\cdot\beta^{t-1}(\alpha-\beta)(\alpha^{n-t}-\beta^{n-t})<0,$$

mert

$$\alpha^{t-1}\cdot\beta^{t-1} = (-B)^{t-1} = (-1)^t\cdot(-B^{t-1}).$$

Rendezve

$$-(G_1-\alpha G_0)(G_1-\beta G_0)(\alpha^n\cdot\beta^{t-1}+\alpha^{t-1}\cdot\beta^n) >$$

$$> -(G_1-\alpha G_0)(G_1-\beta G_0)(\alpha^{n-1}\cdot\beta^t+\alpha^t\cdot\beta^{n-1})$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Adjunk mindkét oldalhoz $(G_1-\beta G_0)^2\alpha^{n+t-1}+(G_1-\alpha G_0)^2\beta^{n+t-1}$-et és alakítsunk szorzattá.

$$[(G_1-\beta G_0)\alpha^{t-1}-(G_1-\alpha G_0)\beta^{t-1}][(G_1-\beta G_0)\alpha^n-(G_1-\alpha G_0)\beta^n]>$$

$$>[(G_1-\beta G_0)\alpha^t-(G_1-\alpha G_0)\beta^t][(G_1-\beta G_0)\alpha^{n-1}-(G_1-\alpha G_0)\beta^{n-1}].$$

Ebből $G_n>0$ $(n>1)$ miatt $\alpha-\beta(>0)$-val osztva és (1)-et alkalmazva

$$\frac{G_{t-1}}{G_{n-1}}>\frac{G_t}{G_n}$$

adódik.

Az 1. Lemma után tett megjegyzéseket a bizonyításunk értelemszerű változtatásával igazolhatjuk.

A *2. Lemma bizonyítása.* Az egyenlőtlenségrendszer $\frac{G_0}{G_{n-1}}<\frac{G_1}{G_n}$ $(n\geqq 2)$ felének helyességét biztosítja az 1. Lemma 2. megjegyzése. A $\frac{G_1}{G_n}<\frac{G_0}{G_{n-2}}$ $(n\geqq 2)$ egyenlőtlenséget n-re teljes indukcióval igazoljuk. $\frac{G_1}{G_2}<\frac{G_0}{G_0}=1$ teljesül, mert (2) miatt $G_1<G_2$. $n=3$ esetén a $\frac{G_0}{G_3}<\frac{G_0}{G_1}$ egyenlőtlenséget kell igazolni. Az $x^2-(A^2+B)x-AB=0$ egyenlet gyökei különböző előjelűek és α' a pozitívat jelöli, ezért $0<\alpha<\frac{G_1}{G_0}<\alpha'$ miatt

$$\left(\frac{G_1}{G_0}\right)^2-(A^2+B)\frac{G_1}{G_0}-AB<0.$$

Innen átalakításokkal $G_1^2<G_0[(A^2+B)G_1+ABG_0]=G_0G_3$ adódik, mely $G_1>0$ és $G_3>0$ miatt ekvivalens a $\frac{G_1}{G_3}<\frac{G_0}{G_1}$ egyenlőtlenséggel. Tételezzük fel állításunk helyességét $n-2$-re és $n-1$-re $(n\geqq 4)$. Így a $\frac{G_1}{G_{n-2}}<\frac{G_0}{G_{n-4}}$, $\frac{G_1}{G_{n-1}}<\frac{G_0}{G_{n-3}}$ egyenlőtlenségekkel együtt igazak a

$$\frac{BG_{n-2}}{G_1}>\frac{BG_{n-4}}{G_0},\quad \frac{AG_{n-1}}{G_1}>\frac{AG_{n-3}}{G_0}$$

egyenlőtlenségek is. A két utóbbi egyenlőtlenséget adjuk össze, majd képezzük mindkét oldal reciprokát. Így a

$$\frac{G_1}{AG_{n-1}+BG_{n-2}}=\frac{G_1}{G_n}<\frac{G_0}{G_{n-2}}=\frac{G_0}{AG_{n-3}+BG_{n-4}}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, azaz igaz az állítás n-re is. Ezzel a 2. Lemma bizonyítását befejeztük.

Az 1., 2. és 3. Tételt n-re teljes indukcióval bizonyítjuk.

Az *1. Tétel bizonyítása.* $n=2$ esetben g_2 egyetlen $\left(\frac{G_1}{G_2}\right)$ törtből áll. Ha $n=3$, akkor g_3 $\frac{G_1}{G_3}, \frac{G_2}{G_3}, \frac{G_1}{G_2}$ alakú, mert (2) és a tétel után tett megjegyzés segítségével

$$\frac{G_1}{G_3} \leqq \frac{G_2}{G_3} < \frac{G_1}{G_2}$$

könnyen igazolható. Tételezzük fel állításunk helyességét $n-1$-re ($n \geqq 3$) és bizonyítsuk n-re. g_n a g_{n-1} sorozatból a

$$\frac{G_1}{G_n} \leqq \frac{G_2}{G_n} < \frac{G_3}{G_n} < \ldots < \frac{G_{n-1}}{G_n}$$

elemek hozzávételével áll elő. Mivel $0=G_0<G_1$, a $t=2$ esetben teljesülnek az 1. Lemma a) állításának feltételei, így $\frac{G_2}{G_n} < \frac{G_1}{G_{n-1}}$. A $\frac{G_3}{G_n}, \frac{G_4}{G_n}, \ldots, \frac{G_{n-1}}{G_n}$ törtek ugyancsak az 1. Lemma szerint rendre — az indukciós feltevés szerint szomszédos —

$$\frac{G_2}{G_{n-1}}, \frac{G_1}{G_{n-2}}; \frac{G_2}{G_{n-2}}, \frac{G_3}{G_{n-1}}; \ldots; \frac{G_{n-3}}{G_{n-2}}, \frac{G_{n-2}}{G_{n-1}}$$

törtek közé kerülnek és így a tételben állított sorrendet kapjuk. A tétel utáni megjegyzéssel a g_n sorozat egyértelműsége nyilvánvaló. Tételünk következményei nem szorulnak külön bizonyításra.

A *2. Tétel bizonyítása.* g_1 az egyetlen $\frac{G_0}{G_1}$ törtből áll. g_2 alakja $\frac{G_0}{G_2}, \frac{G_1}{G_2}, \frac{G_0}{G_1}$, mert $\frac{G_0}{G_2} < \frac{G_1}{G_2}$ a (2) feltétel miatt igaz, míg a $0<\frac{G_1}{G_0}<\alpha$ feltételből adódik $\frac{G_1}{G_2} < \frac{G_0}{G_1}$. Ugyanis $\alpha>0>\beta$ miatt

$$\left(\frac{G_1}{G_0}\right)^2 - A\frac{G_1}{G_0} - B < 0.$$

Innen $G_1^2 < G_0(AG_1+BG_0) = G_0G_2$ adódik, mely $0<G_1<G_2$ miatt ekvivalens a $\frac{G_1}{G_2} < \frac{G_0}{G_1}$ egyenlőtlenséggel. Tételezzük fel állításunk igaz voltát $n-1$-re ($n \geqq 3$) és bizonyítsuk n-re. g_n a g_{n-1} sorozatból a

$$\frac{G_0}{G_n} < \frac{G_1}{G_n} < \ldots < \frac{G_{n-1}}{G_n}$$

törtek hozzávételével áll elő. Az 1. Lemma 2. megjegyzése szerint $\frac{G_1}{G_n} < \frac{G_0}{G_{n-1}}$. Ugyancsak az 1. Lemma szerint a $\frac{G_2}{G_n}, \frac{G_3}{G_n}, \ldots, \frac{G_{n-1}}{G_n}$ törtek rendre — az indukciós feltevés szerint szomszédos —

$$\frac{G_1}{G_{n-1}}, \frac{G_0}{G_{n-2}}; \frac{G_2}{G_{n-1}}, \frac{G_1}{G_{n-2}}; \ldots; \frac{G_{n-2}}{G_{n-1}}, \frac{G_{n-3}}{G_{n-2}}$$

törtek közé kerülnek és így a tételben állított sorrendet kapjuk. Tételünk következményei nem igényelnek külön bizonyítást.

A *3. Tétel bizonyítása.* A g_1, g_2 sorozatokról könnyen igazolható, hogy a tételben állított alakúak. g_n $(n \geqq 3)$ a g_{n-1} sorozatból a

$$\frac{G_0}{G_n} < \frac{G_1}{G_n} < \ldots < \frac{G_{n-1}}{G_n}$$

törtek hozzávételével áll elő. $\frac{G_0}{G_n} < \frac{G_0}{G_{n-1}}$, mert (2) miatt $G_{n-1} < G_n$. A $\frac{G_1}{G_n}$ tört a 2. Lemma, a $\frac{G_i}{G_n}$ $(n > i \geqq 2)$ törtek az 1. Lemma szerint a tételben állított helyre kerülnek. A tétel következményei nyilvánvalóak.

A *4. Tétel bizonyítása.* $\alpha \neq \beta$ miatt használhatjuk (1)-et, így

$$\lim_{\substack{n>i \\ n\to\infty}} \frac{G_{n-i}}{G_n} = \lim_{\substack{n>i \\ n\to\infty}} \frac{(G_1-\beta G_0)\alpha^{n-i}-(G_1-\alpha G_0)\beta^{n-i}}{(G_1-\beta G_0)\alpha^n-(G_1-\alpha G_0)\beta^n} =$$

$$= \lim_{\substack{n>i \\ n\to\infty}} \frac{(G_1-\beta G_0)\alpha^{-i}-(G_1-\alpha G_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-i}\alpha^{-i}}{G_1-\beta G_0-(G_1-\alpha G_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \alpha^{-i},$$

mert $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ és $\beta < 0$ miatt $G_1-\beta G_0 \neq 0$.

Az *5. Tétel bizonyítása.* Az (1)-et alkalmazva

$$\left(\alpha^{-i}-\frac{G_{n-i}}{G_n}\right)G_n^2 = \frac{1}{\alpha^i}\left[\frac{(G_1-\beta G_0)\alpha^n-(G_1-\alpha G_0)\beta^n}{\alpha-\beta}\right]^2 -$$

$$-\frac{(G_1-\beta G_0)\alpha^n-(G_1-\alpha G_0)\beta^n}{\alpha-\beta}\cdot\frac{(G_1-\beta G_0)\alpha^{n-i}-(G_1-\alpha G_0)\beta^{n-i}}{\alpha-\beta},$$

amiből

$$\left(\alpha^{-i}-\frac{G_{n-i}}{G_n}\right)G_n^2 =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[(G_1-\beta G_0)(G_1-\alpha G_0)\alpha^{n-i}\beta^{n-i}(\alpha^i-\beta^i)-(G_1-\alpha G_0)^2\frac{\beta^{2n}}{\alpha^i\beta^i}(\alpha^i-\beta^i)\right]$$

adódik.

(1) és R_i definíciója miatt $R_i = (\alpha^i-\beta^i)/(\alpha-\beta)$ és $\alpha-\beta = \sqrt{D}$, továbbá $\beta < 0$ miatt $G_1-\beta G_0 \neq 0$, ezért

$$\left(\alpha^{-i}-\frac{G_{n-i}}{G_n}\right)G_n^2 =$$

$$= \frac{R_i}{\sqrt{D}}\alpha^{n-i}\beta^{n-i}(G_1-\alpha G_0)(G_1-\beta G_0)\left[1-\frac{G_1-\alpha G_0}{G_1-\beta G_0}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right].$$

De $\alpha+\beta = A$, $\alpha\beta = -B$, $|\beta| < \alpha$ és $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$, így

$$(G_1-\alpha G_0)(G_1-\beta G_0) = G_1^2-AG_0G_1-BG_0^2 = G_1^2-G_0G_2$$

és

$$\left|\alpha^{-i}-\frac{G_{n-i}}{G_n}\right|<\frac{1}{CG_n^2}$$

valamely rögzített C valós számra végtelen sok n természetes szám esetén akkor és csak akkor teljesül, ha

$$|B|=B=1 \quad \text{és} \quad C\leqq\frac{\sqrt{D}}{R_i|G_1^2-G_0G_2|}.$$

Ugyanis $1-\frac{G_1-\alpha G_0}{G_1-\beta G_0}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$ elég nagy n egészekre 1-nél kisebb, ha $G_1-\alpha G_0<0$ és n páratlan, vagy $G_1-\alpha G_0>0$ és n páros. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] K. ALLADI, A Farey sequence of Fibonacci numbers, *The Fibonacci Quarterly, 12,* 1975, pp. 1—10.
[2] K. ALLADI, A rapid method to form Farey Fibonacci Fractions, *The Fibonacci Quarterly, 12* 1975, pp. 31—32.
[3] K. ALLADI, Approximations of irrationals with Farey, *The F. Q., 13,* 1975, pp. 255—259.
[4] D. JARDEN, Recurring sequences, *Riveon Lematematika,* Jerusalem (Israel), 1958.
[5] P. KISS, Diophanine approximative property of the second order linear recurrences, *Periodica Math.* (megjelenés alatt).
[6] P. KISS, On second order recurrences and continued fractions, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sec. Math.* (megjelenés alatt).
[7] I. NIVEN, H. S. ZUCKERMAN, *An introduction to the theory of numbers,* John Wiley and Sons, Inc., New York—London. 1960.

О ЧАСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРЗИВНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ФЕРЕНЦ МАТЯШ

ON THE QUOTIONS OF THE ELEMENTS OF LINEAR RECURSIVE SEQUENCES OF SECOND ORDER

F. MÁTYÁS

FELADATROVAT

SZERKESZTIK: CSÁSZÁR ÁKOS ÉS LOVÁSZ LÁSZLÓ

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, Anker köz 1—3. 1061. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

Kitűzött feladatok

213. Legyen X metrikus tér, Y topologikus tér, $f: X \times Y \to R$ olyan függvény, amely rögzített y mellett x-nek, rögzített x mellett y-nak folytonos függvénye. Bizonyítandó, hogy van olyan folytonos $f_n: X \times Y \to R$ függvényekből álló sorozat, aemlyre $f_n \to f$.

CSÁSZÁR ÁKOS

214. Legyen $y(t)$ megoldása az $y'(t)+y(qt)=0$ retardált differenciálegyenletnek az $y(0)=1$ kezdőfeltétellel $(0<q<1)$. Mutassuk meg, hogy a $p=1-q$ jelöléssel $y(t)$-nek van zérushelye az $(1/ep,\ 1/p)$ intervallumban.

ELBERT ÁRPÁD

215. Legyen k és N természetes szám. A és B a következő játékot játssza: A választ egy természetes számot, B pedig ezt kiszínezi k adott szín valamelyikével. A további lépésekben A a korábbi számoktól különbözőt választ, a színek azonban ismétlődhetnek. A játék a k-adik lépés után ér véget. B nyer, ha a végén a szomszédos számok egyszínűek, és két egyszínű szám különbsége legfeljebb N. Mutassuk meg, hogy valamelyik játékosnak mindig van nyerő stratégiája.

BECK JÓZSEF

Megoldott feladatok

204. feladat. Legyen X és Y két kompakt Hausdorff-tér, és tegyük fel, hogy az X-en, ill. Y-on értelmezett nem-negatív folytonos függvények a szorzásra nézve izomorf félcsoportokat alkotnak. Bizonyítandó, hogy X és Y homeomorfak. Igaz marad-e az állítás, ha nem-negatív helyett pozitívot mondunk?

(CSÁSZÁR ÁKOS)

Megoldás. Jelöljük $P(X)$-szel az X-en értelmezett pozitív, folytonos függvények halmazát, $P_0(X)$-szel pedig a nem-negatív, folytonos függvényekét. Hasonló legyen $P(Y)$ és $P_0(Y)$ jelentése.

(a) Először $P_0(X)$-szel foglalkozunk. Legyen $F \neq \emptyset$ X-nek zárt részhalmaza, és

$$I_F = \{f \in P_0(X) \colon F \subset \operatorname{int} Z(f)\}, \tag{1}$$

ahol

$$Z(f) = \{x \in X \colon f(x) = 0\}. \tag{2}$$

Ekkor a függvények szokásos szorzásával mint félcsoport-művelettel ellátott $S = P_0(X)$ félcsoport $I = I_F$ részhalmazára teljesülnek a következő állítások:

(3) $f \in I$, $g \in S$ esetén $fg \in I$;

(4) $f \in I$-hez van olyan $g \in S$, hogy $g \neq 0$, $fg = 0$;

(5) $f, g \in I$ esetén van olyan $e \in I$, hogy $ef = f$, $eg = g$.

Ezekből (3) triviális, (4) igazolására X teljes regularitását felhasználva olyan $g \in S$ függvényt kell keresni, amely F egy pontjában 1, $Z(f)$-en kívül eltűnik, végül (5) abból látható, hogy X normalitása miatt van olyan nyílt G, amelyre

$$F \subset G \subset \bar{G} \subset \operatorname{int} Z(f) \cap \operatorname{int} Z(g),$$

s aztán olyan $e \in S$, amely $\bar{G}$-on eltűnik, a jobb oldali metszeten kívül pedig 1.

Egy 0-elemet tartalmazó S kommutatív félcsoportban a (3), (4), (5) tulajdonságú $I \neq \emptyset$ részhalmazt O-ideálnak nevezik. Eszerint az (1)-ben definiált I_F O-ideál $P_0(X)$-ben. Ezekre teljesül még a következő összefüggés is:

$$F_1 \subset F_2 \text{ pontosan akkor áll, ha } I_{F_1} \supset I_{F_2}. \tag{6}$$

Ez az egyik irányban triviális, a másik irányban pedig abból látszik, hogy

$$F = \bigcap \{Z(f) \colon f \in I_F\}, \tag{7}$$

hiszen egy $p \in X - F$ ponthoz X teljes regularitása folytán van olyan nyílt G, hogy

$$F \subset G \subset \bar{G} \subset X - \{p\},$$

s aztán olyan $f \in P_0(X)$, amely $\bar{G}$-on eltűnik, a p pontban pedig 1-gyel egyenlő.

Fenti eredményünk megfordításaként a $P_0(X)$ félcsoportban minden O-ideál I_F alakú. Valóban, legyen I O-ideál $P_0(X)$-ben. (4) alapján $f \in I$ esetén $Z(f) \neq \emptyset$, továbbá (5) következtében $f, g \in I$ esetén van olyan $e \in I$, hogy $Z(e) \subset \operatorname{int} Z(f) \cap \operatorname{int} Z(g)$. Ezért X kompaktságára tekintettel

$$\emptyset \neq F = \bigcap \{Z(f) \colon f \in I\} = \bigcap \{\operatorname{int} Z(f) \colon f \in I\}. \tag{8}$$

Erre az F halmazra $I \subset I_F$, s viszont $F \subset \operatorname{int} Z(f)$ esetén van olyan $g \in I$, hogy $Z(g) \subset \operatorname{int} Z(f)$ (ismét felhasználva X kompaktságát), s akkor a

$$h(x) = 0 \quad (x \in Z(f)), \quad h(x) = f(x)/g(x) \quad (x \in X - \operatorname{int} Z(f))$$

előírással értelmezett $h \in P_0(X)$ függvényre $f = gh$, így (3) folytán $f \in I$, s ezért $I_F \subset I$.

Az előbbi eredményből (6) alapján következik, hogy $P_0(X)$-ben a maximális O-ideálok $I_{\{p\}}$ alakúak ($p \in X$), továbbá

$$p \in F \text{ pontosan akkor áll, ha } I_F \subset I_{\{p\}}. \tag{9}$$

(b) Az (a)-ban talált eredmények szerint X elemei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők $P_0(X)$ maximális O-ideáljainak, X nemüres, zárt részhalmazai pedig

ugyancsak kölcsönösen egyértelműen az összes O-ideáloknak, s közben érvényes (9). Természetesen ugyanez mondható Y pontjairól, nemüres zárt részhalmazairól, valamint $P_0(Y)$ maximális O-ideáljairól és O-ideáljairól.

Ha tehát a $P_0(X)$ félcsoportnak meg van adva egy φ izomorfizmusa a $P_0(Y)$ félcsoportra, akkor φ $P_0(X)$ O-ideáljait természetesen $P_0(Y)$ O-ideáljaiba viszi át, ezen belül a maximális O-ideálokat a maximális O-ideálokba. Definiáljunk egy $h: X \to Y$ leképezést úgy, hogy $h(p)=q$ egyenértékű legyen a $\varphi(I_{\{p\}})=I_{\{q\}}$ összefüggéssel. Ekkor (9)-ből kiolvasható, hogy X-nek minden nemüres, zárt F részhalmazára $\varphi(I_F)= =I_{h(F)}$, ugyanis $\varphi(I_F)=I_K$ valamely Y-ban foglalt nemüres, zárt K halmazra, és $q\in K$ pontosan akkor áll, ha $I_K \subset I_{\{q\}}$, azaz ha $I_{\{q\}}=\varphi(I_{\{p\}})$ és $I_F \subset I_{\{p\}}$, ami végül is a $q=h(p)$, $p\in F$ összefüggésekkel egyenértékű. Ezért ha F befutja X összes nemüres, zárt részhalmazait, akkor $h(F)$ ugyanezt teszi Y összes nemüres, zárt részhalmazaival, más szóval h homeomorfizmus.

(c) Ha $P(X)$ és $P(Y)$ izomorf egymással, akkor X és Y nem szükségképpen homeomorf. Valóban, ha a szokásos módon $C(X)$ és $C(Y)$ jelöli az összes X-en, ill. Y-on folytonos valós függvények halmazát, akkor a $\chi(f)=\log f$ előírás $P(X)$-nek az összeadás műveletével ellátott $C(X)$ (fél)csoportra való izomorfizmusát definiálja. Így a $P(X)$ és $P(Y)$ multiplikatív izomorfiájára vonatkozó feltevés azzal egyenértékű, hogy $C(X)$ és $C(Y)$ additív csoportja izomorf. Ebből viszont X és Y homeomorfiája azért nem következik, mert még $C(X)$ és $C(Y)$ lineáris térként való izomorfiája (ami az additív csoportok izomorfiájánál nyilván erősebb kikötés) sem vonja maga után X és Y homeomorfiáját.

Valóban, legyen $X=[0, 1]$, $Y=\{(u, v): u\in[0, 1], v=0 \text{ vagy } 1\}$ az euklideszi síkból örökölt topológiával, és B maximális lineárisan független halmaz a $C(X)$ lineáris térben (ilyennek létezése a Kuratowski—Zorn-féle vagy a Tukey-féle lemmából könnyen következik). Ha $f\in B$, legyen f' és f'' az a két Y-on értelmezett függvény, amelyekre

$$f'(u, 0)=f(u), \quad f'(u, 1)=0$$

és

$$f''(u, 0)=0, \qquad f''(u, 1)=f(u).$$

Világos, hogy az összes f' és f'' függvények maximális lineárisan független halmazt alkotnak $C(Y)$-ban, jelöljük ezt B'-vel. Mivel B természetesen végtelen halmaz, azért B' számossága ugyanakkora, mint B-é. Legyen $\psi: B \to B'$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, és $f=\sum_1^n \lambda_k b_k$ $(\lambda_k\in R, b_k\in B)$ esetén $\varphi(f)=\sum_1^n \lambda_k \psi(b_k)$. Mivel egy lineáris tér elemei egyértelműen írhatók fel egy maximális lineárisan független halmaz elemeinek lineáris kombinációiként, azért $\varphi: C(X) \to C(Y)$ kölcsönösen egyértelmű és nyilván lineáris leképezés, azaz izomorfizmus a $C(X)$ és $C(Y)$ lineáris tér között. Ennek ellenére X és Y nem homeomorf egymással, hiszen az első összefüggő, a második nem.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megjegyzés. Az irodalomban több olyan tétel szerepel, amely X és Y kompakt Hausdorff-terekre $C(X)$-nek és $C(Y)$-nak valamilyen algebrai struktúrával való felruházása után ezek izomorfiájából X és Y homeomorfiájára következtet. Ezek legrégebbike Gelfand és Kolmogorov ma már klasszikus tétele, amelyben $C(X)$ és $C(Y)$ gyűrűizomorfiájáról van szó (a függvények pontonkénti összeadására és szorzására nézve), és jól ismert I. Kaplansky (Bull. Amer. Math. Soc. *53* (1947), 617—623) tétele is, amelyben $C(X)$ és $C(Y)$ hálóizomorfiája szerepel feltételként (a függ-

vények pontonkénti maximum- és minimumképzésének műveletével). A Gelfand—Kolmogorov-féle tételnek meglepő általánosítása A. N. Milgram (Duke Math. J. *16* (1949), 377—383) tétele, amelyben gyűrűizomorfia helyett mindössze $C(X)$ és $C(Y)$ multiplikatív félcsoportjának izomorfiája a feltétel.

A feladat első kérdése az utóbbi tételnek a megfelelője $C(X)$ és $C(Y)$ szerepének $P_0(X)$-re, ill. $P_0(Y)$-ra való ruházásával; az (a) és (b) alatt közölt bizonyítás pontos másolata a Milgram-féle tétel bizonyításának. Érdekes, hogy viszont $P(X)$-re és $P(Y)$-ra már nem érvényes hasonló állítás.

CSÁSZÁR ÁKOS

205. feladat. Legyen $f\colon R\to R$ akárhányszor differenciálható függvény, és tegyük fel, hogy minden $x\in R$-hez van olyan nemnegatív egész szám, hogy $f^{(n)}(x)=0$. Bizonyítandó, hogy f polinom.

(LACZKOVICH MIKLÓS)

Megoldás. Legyen Z_n azoknak az x-eknek a halmaza, amelyekben $f^{(n)}(x)=0$. Egy nyílt I intervallumot nevezzünk jónak, ha van hozzá olyan p polinom, hogy $x\in I$ esetén $f(x)=p(x)$. Jelöljük G-vel az összes jó intervallumok egyesítését.

A nyílt G halmaz sűrű, mert ha egy nyílt $J\neq\emptyset$ intervallumot tekintünk, akkor J-t befedik a zárt Z_n halmazok, és így a Baire-féle kategóriatétel szerint van olyan nyílt $I\neq\emptyset$ intervallum, amelyre $I\subset J\cap Z_n$, és akkor I-ben f megegyezik egy $(n-1)$-edfokú p polinommal, azaz I jó intervallum.

A G halmaznak mindegyik C komponense jó intervallum. Valóban, legyen $I_0\subset C$ jó intervallum, és a $b\in C$ pont tetszőleges. Ekkor található olyan jó intervallumokból álló $I_1, \ldots, I_m$ sorozat, hogy $I_{j-1}\subset I_j\neq\emptyset$ $(j=1, \ldots, m)$ és $b\in I_m$, ugyanis C-nek azok a b pontjai, amelyekhez létezik ilyen sorozat, C-nek nyilván relative nyílt s egyúttal zárt részhalmazát alkotják. Ha tehát f I_0-ban a p_0 polinommal egyezik meg, akkor ugyanezt teszi I_1-ben, ..., I_m-ben is (hiszen ha két polinom értéke egy nemüres intervallumban megegyezik, akkor a két polinom azonos), tehát $f(b)=p_0(b)$ minden $b\in C$ pontra.

Legyen $P=R-G$. P-nek nincs izolált pontja, mert ha b ilyen volna, és alkalmas $a<b<c$ mellett $f(a, b)$-ben a p_1, (b, c)-ben a p_2 polinommal volna egyenlő, akkor f folytonossága miatt még $f(b)=p_1(b)=p_2(b)$ is állna, és ebből minden n természetes számra $f^{(n)}(b)=p_1^{(n)}(b)=p_2^{(n)}(b)$ adódnék, és így p_1 és p_2 azonos volna, és b egy jó intervallum belsejében feküdnék, nem tartozhatna P-hez.

Ha a P halmaz nem volna üres, akkor ismét a Baire-féle tétel következtében volna olyan nyílt I intervallum, hogy $\emptyset\neq I\cap P\subset Z_n$ alkalmas n-re. Mivel P-nek nincs izolált pontja, azért egy függvény deriváltját egy $x\in P$ pontban már a függvénynek P-n felvett értékei is meghatározzák; ezért $I\cap P$ pontjaiban $f^{(k)}$ is eltűnik minden $k\geqq n$ mellett. Ha tehát C a G halmaznak egy I-be belemetsző komponense, akkor f legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinommal egyezik meg C-n, hiszen ennek a polinomnak k-adik deriváltja C-nek $I\cap P$-hez tartozó végpontjában $k\geqq n$ esetén f megfelelő deriváltjával együtt eltűnik. Ebből látszik, hogy $f^{(n)}$ eltűnik I-ben mindenütt, azaz I jó intervallum, ellentétben az $I\cap P\neq\emptyset$ feltevéssel. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $P=\emptyset$, $G=R$, vagyis R egyetlen jó intervallumból áll.

CSÁSZÁR ÁKOS

A 205. feladat megoldását beküldte még BORBÉLY ALBERT.

206. feladat. Legyenek A_{ij} $(i=0, 1, \ldots, n;\ j=0, 1, \ldots, m)$ az n-dimenziós euklideszi tér olyan konvex részhalmazai, hogy minden $0\leqq j_0, \ldots, j_n\leqq m$ esetén

$A_{0j_0} \cap \ldots \cap A_{nj_n} \neq \emptyset$. Bizonyítandó, hogy van olyan $0 \leqq i \leqq n$, amelyre

$$A_{i0} \cap A_{i1} \cap \ldots \cap A_{im} \neq \emptyset.$$

(LOVÁSZ LÁSZLÓ)

Megoldás. Tekintsük először az $n=1$ esetet. Ekkor tehát a számegyenesen meg vannak adva az $A_{00}, \ldots, A_{0m}$ és $A_{10}, \ldots, A_{1m}$ intervallumok úgy, hogy $0 \leqq j, k \leqq m$ esetén $A_{0j} \cap A_{1k} \neq \emptyset$, és meg kell mutatni, hogy vagy $i=0$-ra, vagy $i=1$-re

$$\bigcap_{j=0}^{m} A_{ij} \neq \emptyset.$$

Ezt m szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk be.

Az $m=0$ eset triviális. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $(m-1)$-re, és tekintsük az m-re vonatkozó esetet. Ekkor az indukciós feltevés szerint például $i=0$-ra teljesül

$$A = \bigcap_{j=0}^{m-1} A_{0j} \neq \emptyset.$$

Ha most $A \cap A_{0m} \neq \emptyset$, akkor az állítás m-re is fennáll az $i=0$ választással. Tegyük fel tehát, hogy $A \cap A_{0m} = \emptyset$.

Mivel A is intervallum, azért ebből vagy $\sup A \leqq \inf A_{0m}$, vagy pedig $\sup A_{0m} \leqq \inf A$ következik. Foglalkozzunk például az első esettel, legyen $\sup A = a$. Ekkor van olyan $0 \leqq j \leqq m-1$, hogy $\sup A_{0j} = a$. Minthogy pedig az A_{1k} intervallumok mindegyike metszi A_{0j}-t is, A_{0m}-et is, azért szükségképpen

$$a \in \bigcap_{j=0}^{m} A_{1j},$$

úgyhogy most az állítás m-re az $i=1$ választással teljesül. Ugyanez adódik a második esetben az $a = \inf A$ jelöléssel.

Ekként elintéztük az $n=1$ esetet. Most n szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Feltesszük, hogy az állítás $(n-1)$-re igaz, az n-re vonatkozó esetet tekintjük, és a szokásos $R^n = R^{n-1} \times R$ megállapodással élünk. Jelöljük p-vel és q-val a $p\colon R^n \to R^{n-1}$ és $q\colon R^n \to R$ vetítéseket.

Az indukciós feltevés feltételei teljesülnek az R^{n-1}-ben fekvő konvex $p(A_{ij})$ $(i=0, 1, \ldots, n-1;\ m=0, 1, \ldots, m)$ halmazokra. Ezért van olyan $0 \leqq i_0 \leqq n-1$, hogy alkalmas $a_0 \in R^{n-1}$ pontra

$$a_0 \in \bigcap_{j=0}^{m} p(A_{i_0 j}).$$

Most alkalmazzuk az indukciós feltevést a $p(A_{ij})$ $(0 \leqq i \leqq n,\ i \neq i_0;\ j=0, 1, \ldots, m)$ halmazokra. Azt kapjuk, hogy van olyan $i_1 \neq i_0$ és $a_1 \in R^{n-1}$, hogy

$$a_1 \in \bigcap_{j=0}^{m} p(A_{i_1 j}).$$

Végül alkalmazzuk a már elintézett $n=1$ esetet az R-en fekvő konvex $q(A_{ij})$ $(i = i_0$ vagy $i_1;\ j=0, 1, \ldots, m)$ halmazokra. Azt kapjuk, hogy vagy az $i=i_0$, vagy az $i=i_1$ választással van olyan $b \in R$, hogy

$$b \in \bigcap_{j=0}^{m} q(A_{ij}).$$

Így aztán erre az i-re

$$(a, b) \in \bigcap_{j=0}^{m} A_{ij},$$

ahol $a=a_0$ vagy $a=a_1$ aszerint, hogy $i=i_0$ vagy $i=i_1$. Így az állítás n-re is igaz.

CSÁSZÁR ÁKOS

Problems

213. Let X be a metric space, Y a topological space, $f: X \times Y \to R$ a function such that $f(x, y)$ is a continuous function of x at each fixed y and a continuous function of y at each fixed x. Prove that there exists a sequence of continuous functions $f_n: X \times Y \to R$ such that $f_n \to f$.

Á. CSÁSZÁR

214. Let $y(t)$ be a solution of the equation $y'(t)+y(qt)=0$ satisfying the initial condition $y(0)=1$ $(0<q<1)$. Prove that $y(t)$ has a zero in the interval $(1/ep, 1/p)$, where $p=1-q$.

Á. ELBERT

215. Let k and N be natural numbers. A and B play the following game: A chooses a natural number and B colours it with one of k given colours. In the following steps A chooses a number distinct from the previous ones, but the same colour may be chosen several times. The game ends after the k-th step. B wins if then numbers having difference 1 have the same colour and two numbers having the same colour have a difference not greater than N. Prove that one of the players always has a winning strategy.

J. BECK

TÁRSULATI ÉLET

JELENTÉS A SZELE TIBOR EMLÉKÉREM 1977. ÉVI KIOSZTÁSÁRÓL

A Társulat Elnöksége által kiküldött bizottság — Surányi János (elnök), Révész Pál (titkár), Császár Ákos, Heppes Aladár, Gécseg Ferenc, Lovász László, Schmidt Tamás, Tandori Károly — úgy döntött, hogy az 1977. évi Szele Tibor Emlékérmet *Fejes Tóth László* akadémikusnak, az MTA Matematikai Kutatóintézete igazgatójának adományozza.

Indoklás

Fejes Tóth László első jelentős eredményét meglehetősen korán, 19 éves korában érte el a Fourier-sorok elméletében. Figyelme azonban hamarosan a geometria felé fordult. A geometrián belül igen sok témával foglalkozott, de különösen azok a problémák vonzották, amelyek könnyen megfogalmazhatóak, előtanulmányokat nem igényelnek, szabatos megválaszolásuk azonban sokszor olyan nehéz, hogy évtizedekig állják a kutatók ostromát.

A teljesség igénye nélkül megemlítünk néhány olyan problémát, melyet Fejes Tóth László sikeresen vizsgált. Igen korán kezdett foglalkozni a legsűrűbb körelhelyezés problémájával; azt vizsgálta, hogy egybevágó, egymásba nem nyúló körök elrendezései közül melyik esetben legkisebb az egy körre eső átlagos alapterület. Ezt a problémát általánosítva a centrálszimmetrikus, kongruens, konvex lemezek legsűrűbb rendezésének kérédését is megvizsgálta. Jelentős eredményeket ért el a hiperbolikus sík kitöltési és fedési problémájával kapcsolatban. Számos dolgozata foglalkozik az izoperimetrikus problémával. A Minkowski-féle lemezelrendezésekre vonatkozó dolgozatai új kutatási területet nyitottak, amelybe számos más matematikus is bekapcsolódott. Munkásságára jellemző, ez is indokolja a Szele-éremmel való kitüntetését, hogy örömmel veszi, ha kutatásaiba mások is bekapcsolódnak, szívesen hívja fel a fiatalok figyelmét a legszebb problémákra és az érdeklődőket munkájukban lelkesen támogatja. Intézeti szemináriumát sok fiatal látogatja állandóan, de ezen kívül is segíti és irányítja mindazokat, akik a diszkrét geometriával foglalkoznak.

Fejes Tóth László tudományos tevékenységének mély hatását tükrözi a diszkrét geometria hat kandidátusi (Böröczky Károly, Fejes Tóth Gábor, Dominyák Imre, Heppes Aladár, Hortobágyi István, Vermes Imre) és két doktori (Böröczky Károly, Molnár József) disszertációja. Hatása természetesen a matematikai társadalomnak sokkal szélesebb körére is kiterjed.

Nemzetközi és hazai elismerését sok magas hazai és külföldi kitüntetés között mutatja az is, hogy a Braunschweigi Tudományos Társaság Gauss születésének 200. évfordulója alkalmából tartott ünnepi ülésén Fejes Tóth Lászlót tudományos munkásságáért Gauss Emlékéremmel tüntette ki.

JELENTÉS A GRÜNWALD GÉZA EMLÉKDÍJ 1977. ÉVI KIOSZTÁSÁRÓL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által kiküldött bizottság úgy döntött, hogy az 1977. évi Grünwald Géza Emlékdíj I. fokozatát adományozza

Beck Józsefnek,
Laczkovich Miklósnak,
Szabó Zoltánnak és
Szendrei Ágnesnek,

a II. fokozatban részesíti

Freud Róbertet és
Lajkó Károlyt.

Beck József első kombinatorikai eredménye Erdős és Lovász egy problémájával foglalkozik. Jelölje $m(n)$ a 3-kromatikus n-uniform hipergráfok élszámának minimumát. Erdős és Hajnal megmutatták, hogy $m(n) \geqq 2^{n-1}$. 1961 óta nyitva volt azonban, hogy $\frac{m(n)}{2^n}$ tart-e végtelenhez. Becknek sikerült igazolnia, hogy $m(n)/2^n \geqq c \log n$. Egy újabb dolgozatában még ennél is tovább jutott, bebizonyította, hogy $m(n)/2^n \geqq n^{1/3-\delta}$. Ez az eredmény már meglehetősen éles, mert n^2-nél tovább nem lehet jutni. A fenti eredményeknek fontos következményei vannak közönséges gráfok Ramsey-számaira vonatkozólag.

Érdeklődése igen széles körű, a kombinatorika mellett kiterjed a számelméletre, gráfelméletre, sőt a statisztikára. Példaként említsük meg egy statisztikai eredményét: egy Tusnády által felvetett problémát old meg. Bebizonyítja, hogy a statisztikában alapvető jelentőségű Stein-lemma egy kis módosítással egyenletes becsléssé tehető. Pontosabban, olyan exponenciális becslést ad a másodfajú hiba valószínűségére, amely nem tartalmaz a konkrét eloszlásoktól függő maradéktagokat. Az eredmény jelentőségét mutatja, hogy segítségével Csiszár Imrével közösen sikerült igazolniok, hogy az információelmélet Shannon-féle alaptételének ún. erős megfordításánál alig valamivel gyengébb állítás igaz végtelen ábécéjű csatornákra is. Ez azért meglepő, mert maga az erős megfordítás végtelen ábécére általában nem igaz. Módszerének továbbfejlesztésével igen általános „egyenletes" nagy eltérés tételeket bizonyított be. Az ilyen egyenletes tételek a valószínűségszámításban új irányt jelentenek, amely igen jelentősnek tűnik.

Laczkovich Miklós 1973-ban részesült a Grünwald Géza Díj II. fokozatában.

A II. fokozat elnyerésekor még figyelembe nem vett publikációk listáját megtekintve kitűnik, hogy az azóta eltelt időben egyre növekvő intenzitással folytatta munkásságát a valós függvénytan különféle területein. Dolgozatainak legnagyobb része a már korábban is vizsgált témakörrel, az első Baire-osztályba tartozó függvényekkel, különösen a derivált-függvények szerkezetével foglalkozik. Ezenkívül felölel azonban több más érdekes területet, részben olyanokat is, amelyek az alkalmazások során felmerült problémák elvi hátterét tisztázzák. Valamennyi dolgozata kitűnik az eredmények nehézsége, a módszerek finomsága és ötletessége, a megfogalmazás eleganciája által.

Egyik dolgozatában J. Staniszewska egy eredményére ad az eredetinél elemibb, közvetlen bizonyítást. Arról van szó, hogy van olyan függvény a Lip 1 osztályban, amelynek felső deriváltszáma nem tartozik az első Baire-osztályba (közismerten bármely véges függvény felső deriváltszáma legfeljebb a második Baire-osztályhoz tartozik).

Több dolgozatban vizsgálja a következő kérdést: tekintsük a [0, 1] intervallumon értelmezett függvényeknek valamely F osztályát és különböző F osztályok esetén vizsgáljuk a kérdést, hogy két halmaz mikor választható el F osztályhoz tartozó függvénnyel (azaz mikor van olyan függvény, amely az F osztályhoz tartozik, és az egyik halmazon 0, a másikon 1).

A felsoroltakon kívül számos más eredménye is indokolja kitüntetését.

Szabó Zoltán hét dolgozatot írt. Ebből 1 megjelent, további 5 közlésre el van fogadva. Kandidátusi értekezése — aspiranturán kívül — lényegében elkészült és benyújtás előtt áll. Kutatási területe a Finsler-terek elmélete. Legfontosabb eredményei a skalárgörbületű tereknek egy, Berwaldénál lényegesen elegánsabb jellemzése és az ún. Berwald-terek egy struktúratétele. Eredményeit modern, geometriai eszközökkel érte el, és azok visszhangja igen pozitív.

Szabó Zoltán igen szépen és elegánsan megmutatta, hogy hogyan lehet globális eszközökkel lokális tételeket is bizonyítani. Ilyen eljárással sikerült Szabó Zoltánnak Berwald több mint 30 éve elfogadott állításait kijavítani, illetve továbbfejleszteni. Ezzel rámutatott arra, hogy a modern, globális eszközökkel végzett vizsgálatok közben a tér struktúráját és tulajdonságait sokkal világosabban lehet látni, az összefüggések mélységei pedig közvetlenül felszínre kerülnek.

Szendrei Ágnesnek eddig négy jelentős dolgozata jelent meg és több dolgozata van sajtó alatt. Ezek közül kiemelendő a „Torsion theories in affine categories" c. dolgozata, amelyben az ún. affin kategóriák torzióelméletét vizsgálja, és messzemenően általánosít az affin modulusok kategóriájára vonatkozó számos eredményt. Legjelentősebb eredménye a modulusok idempotens retraktjaira vonatkozik, leírja bizonyos unitér modulusok idempotens retraktjait.

Freud Róbert már egyetemi hallgató korában megindult az önálló kutatás útján. Egyszerűsítette Rényi egy polinomok négyzetének tagszámára vonatkozó vizsgálatát, foglalkozott diophantoszi egyenletek megoldási módszerével. Lényegesen tudta egyszerűsíteni Wirsing egy elég mély bizonyítását, amivel Erdős egy additív számelméleti függvények karakterizálására vonatkozó sejtését bizonyította.

Újabb vizsgálatai is az utóbbi kérdéskörbe tartoznak. Szintén Erdős vetette fel a kérdést, hogy a természetes számok milyen részhalmazainak van meg az a tulajdonsága, hogy ha egy additív számelméleti függvény ezen a halmazon eltűnik, akkor azonosan eltűnik. Freud általánosítja a problémát és olyan módszereket dolgoz ki, amelyek alkalmas variálásával a felvetődő problémákat nagymértékben sikerült tisztáznia. Megmutatja például, hogy különböző kínálkozó karakterizációs feltételek

mellett minden 1 felső sűrűségű sorozat karakterizációs sorozat, de még igen erős karakterizációs feltételek mellett sem gyengíthető az 1 felső sűrűség követelménye. Ellenkező irányban hasonlóan éles eredményeket nyer karakterizációs sorozatok lehetséges növekedésének mértékére is.

Freud munkáit a kérdés lényegébe mutató problémák felvetése és megoldásukra új módszerek bevezetése, azok ötletes variálása jellemzi.

Lajkó Károly tudományos munkájának témája: függvényegyenletek. Eddig 6 dolgozata jelent meg és további 2 van megjelenés alatt. Először egy Hosszú Miklós által felvetett probléma általánosításával és megoldásával foglalkozik. Majd F. Vajzovic egy relativitáselmélettel kapcsolatos függvényegyenletét oldja meg az eredetinél lényegesen gyengébb feltételek mellett. Két dolgozatában a függvényegyenletek bővítési módszerével old meg nyitott problémákat. Egy fontos cikkében egy algebrai jellegű differenciatulajdonságot vizsgál és a kapott eredményt függvényegyenletek megoldására alkalmazza. Újabb dolgozatai valószínűségi eloszlások karakterizációs kérdéseivel foglalkoznak.

JELENTÉS A BEKE MANÓ EMLÉKDÍJ 1978. ÉVI KIOSZTÁSÁRÓL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által kiküldött Beke Manó Emlékdíj bizottság (Surányi János (elnök), Pálfy Sándor (titkár), C. Neményi Eszter, Pálmay Lóránt, Reményi Gusztávné, Széles Jenő, Tomor Benedek) az 1978. évi emlékdíjban az alábbiakat részesítette:
BARTAL ANDREA, BOGNÁR IMRÉNÉ, GÁBOS ADÉL, ILL MÁRTONNÉ, MERŐ LÁSZLÓ, PÁLFALVY JÓZSEFNÉ, SZÁLKA GYÖRGYNÉ, TUSNÁDY GÁBOR.

Indoklás

Bartal Andrea az ELTE TTK Neveléstudományi Tanszéki Csoportja tanársegédje. A matematika-fizika szakos hallgatóknak tartott didaktikai előadásaival és az ezekhez kapcsolódó iskolai gyakorlatokkal igen eredményesen segíti a korszerű tanárképzést. Céltudatos munkával törekszik hallgatóit megismertetni az oktatás feladataival, módszereivel, a tantervek korszerűsítésére irányuló hazai és külföldi törekvésekkel.

Az oktatás módszerei c. szemelvénygyűjteménye és Didaktikai példatára sajtó alatt vannak. A feladatlapok alkalmazási lehetőségeiről A magyar pedagógia c. folyóiratban jelent meg cikke.

Szerte az országban tartott előadásaival hasznosan segítette a tanárok korszerű matematikatanításra való felkészítését. Nagy sikere volt a TIT Előadói Konferenciáján az általános iskolai tanárokat a MTA és BJMT által közösen szervezett matematikatanítási kísérlet eredményeit ismertető előadásának is.

Pálfalvy Józsefnével közösen írott tankönyvpályázatukkal II. díjat nyertek. Kezdettől fogva aktív résztvevői a kísérleti tananyag kidolgozásának; a Szilágyi Erzsébet Gimnáziumban vezetett osztályaikkal pedig annak konkrét megvalósításának is. Pálfalvynéval együtt feladatsorozatokat, olvasmányanyagot és tanári módszertani útmutatót állítottak össze I. gimnáziumok számára, melyet a Társulat minden középiskolába eljuttatott. E munka alapján közösen írják a reform második évében megjelenő egyik I. gimnáziumi tankönyvet.

Bognár Imréné Nagyatádon működő tanítónő, aki 18 éve kiemelkedő oktató-nevelő munkát végez.

Oktató munkáját az állandó kísérletezés és az új módszerek keresése jellemzi. Elsők között kapcsolódott be a matematikaoktatás korszerűsítésének kísérletébe és ezt hét éve fáradhatatlanul, lendülettel és lelkesedéssel végzi.

Nem kis része van abban, hogy iskolája megyei bázis-iskola lett és igazi műhelyévé vált a matematikaoktatás korszerűsítésének. Alapos szaktárgyi és metodikai felkészültségével iskolájában ennek a munkának mozgatója lett. Tudását a Somogy megyei Továbbképzési Intézet által rendezett tanfolyamokon, illetve városi és járási „nyílt napokon" igen jó hatásfokkal adta át nevelőtársainak.

Nevelő-oktató munkáját nagyfokú tudatosság, önállóság, hatékonyság jellemzi. Kiváló nevelői és emberi egyéniségével példamutató kapcsolatot teremtett nevelőtársaival és tanítványaival egyaránt. A matematika korszerű módszereit igen szép eredménnyel alkalmazza a nyelvtan, fogalmazás és a környezetismeret tanításában is. 1974-ben az Oktatás Kiváló Dolgozója lett.

Gábos Adél középiskolai tanár 25 éve tanít, 16 éve az ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskolájában. A Budapesti Tanárképző Főiskolán kezdte matematikai tanulmányait, ami későbbi tanári munkájára nagy hatással volt, mivel Péter Rózsától tanult matematikát; Gábos Adél Péter Rózsa matematikai elképzeléseinek legjobb ismerője, ezekhez saját tapasztalataival, ötleteivel, mélyrehatóan átgondolásaival sokat adott. A matematika megszerettetése mellett mindig fontos feladatának tekintette tanítványai emberi formálását is, ezt tanulják tőle a hozzákerült tanárjelöltek is.

1973 óta, mióta a Társulat által támogatott középiskolai matematikatanítási kísérlet elindult, részt vett az anyagok írásában, szerkesztésében. A MTA Matematikai Kutatóintézete Didaktikai

Csoportjának felkérésére három éve maga is folytat kísérleteket, melyek tapasztalatairól a kísérletező tanároknak több alkalommal beszámolt.

A középiskolai matematikatanítási kísérletekhez nagy segítséget ad a még kipróbálatlan anyagrészek tanításáról alkotott elképzelések kialakításában.

Évek óta részt vesz az Oktatási Szakosztály és az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenybizottság munkájában.

Ill Mártonné általános iskolai tanár. Pécs, Csávoly és Baja általános iskoláiban való tanítás után 1972-ben Bács-Kiskun megye vezető szakfelügyelője lett, majd 1974-től a bajai Tanítóképző Főiskola Természettudományi Tanszékének vezetője.

A matematikatanítási kíséreletekbe 1965-ben kapcsolódott be. Először a programozással foglalkozott, az OPI megbízásából programokat is készített, melyeket a saját, majd a megye általános iskoláiban próbált ki. Később részt vett a Pszichológiai Intézet kísérleteiben, majd az új általános iskolai matematikai tanterv népszerűsítését, bevezetésének előkészítését, a tanárok felkészítését helyezte munkájának középpontjába.

Lelkes támogatója volt az újnak és tanfolyamok szervezésével, előadások tartásával segítette annak terjedését.

Tevékeny szerepet vállalt a bajai Tanítóképző Főiskola nyári akadémiájának szervezésében és lebonyolításában, amelynek középpontjában ismétlődően az általános iskola új matematika-tanterve és a korszerűbb matematikatanítás állt.

1974. óta kutatási munkát is végez: területe a matematika alsótagozatos tanításában alkalmazott módszerek és eljárások. Kutatására a „Felfedező matematikaoktatás lehetőségeinek vizsgálata" címen kért kandidátusi témaengedélyezést.

A matematikatanítás korszerűsítésével kapcsolatban számos cikke jelent meg és ilyeneket, valamint könyveket lektorált. A Társulat vándorgyűlésein — két alkalommal — mint témavezető, illetve előadó szerepelt, ezzel is hozzájárult a tanárok továbbképzéséhez. Bács megye továbbképzési összejövetelein rendszeresen tart előadásokat.

1969-ben Kiváló Tanári kitüntetést kapott a matematika tanításában végzett kimagasló egyéni és közösségi tevékenységéért.

Mérő László nyugdíjas tanítóképző intézeti igazgató. Korábban Tolna megyében tanított, 1963-ban a Kaposvári Tanítóképző tanára, majd 1968-tól nyugdíjazásáig az intézet igazgatója volt. A természettudományi-matematikai szakcsoport vezetőjeként irányította a tanítójelöltek matematika, illetve környezetismereti felkészítését. A szakcsoport és az intézet gyakorló iskolája 1968-ban az ő vezetésével kapcsolódott be a komplex matematikatanítás kísérletbe, s tevékeny szerepet vállalt a matematikatanítás korszerűsítését előkészítő munkabizottságban. Már a kezdeti években is rendszeresen részt vett a Somogy-megyei tanítók továbbképzésében. Ez a tevékenysége 1970-től a matematikaoktatási kísérlet kiszélesítésében, eredményeinek céltudatos kiterjesztésében teljesedett ki.

1970/71-ben megyei tanfolyamon készítette fel az ún. bázisiskolák tanítóit. Máig is ők a tantervi felkészítés kulcsemberei, a szakterület kitűnő szakmetodikusai. 1974-től minden idejét és erejét a kísérleti, illetve ideiglenes matematika-tanterv előkészítését szolgáló tanfolyamok vezetésére, szaktanácsadói hálózat segítésére, a tantárgyi eredmények vizsgálatára, mérésére fordította.

A matematikatanítás korszerűsítésével foglalkozó, A Tanító-ban megjelent cikkei mellett több, központilag kiadott tanítói kézikönyv és segédkönyv társszerzője, ill. lektora, s számatalan megyei kiadású továbbképzési anyag, segédlet készítője. A matematika tanterv megyei tapasztalatairól írt tanulmánya a Tanítóképző Intézet évkönyvében is megjelent.

Mérő László munkáját a Somogy megyei Tanács a Megyei Pedagógiai díjjal jutalmazta.

Pálfalvy Józsefné az egri Pedagógiai Főiskola budapesti tagozatának adjunktusa. A főiskolán analízisről tart előadásokat a mat.-fiz. ill. mat.-kémia szakos hallgatóknak és vezeti a hozzá kapcsolódó gyakorlatokat.

A hallgatók aktivizálásával, kiscsoportos foglalkozásokkal is törekszik a minél jobb eredmény elérésére.

Előadásaiban rámutat a témakörök iskolai vonatkozásaira is, iskolalátogatásokkal, tantervek és tankönyvek vitáival készíti elő hallgatóit jövendő munkájukra. Mintaszerűen valósítja meg a matematika tanulás-tanítást, amelynek eredményeképpen tanítványai kedvvel, örömmel vesznek részt a matematika órákon.

Bartal Andreával együtt folytattak kísérletet a Szilágyi Erzsébet gimnáziumban, együtt írták a második díjjal jutalmazott I. osztályos gimnáziumi tankönyv-pályázat kéziratát, együtt állították össze a feladatsorokat, a tanári módszertani útmutatót az I. gimnázium számára és együtt kapták a megbízást az I. osztályos tankönyv megírására is.

A matematikatanárok továbbképzését előadásokkal, cikkekkel segítette: ő is előadást tartott a dunaújvárosi vándorgyűlésen és a Nyíregyházán tartott Nemzetközi Matematikatanítási Kollokviumon.

Pálfalvy Józsefné kiemelkedő munkájával segítette a középiskola matematika tantervének kialakítását és bevezetését.

Szálka Györgyné tanítónő, az OPI megbízásából 1966-ban kapcsolódott be a komplex matematikatanítási kísérletbe és folytatta azt éveken át a VII. k. Szinyei Merse utcai 12 évfolyamos iskolában. Valamennyi alsótagozatos osztályban többször is tanított. Az egyik legmegbízhatóbb kísérletező volt, akinek a véleményére, tapasztalatára mindig építeni lehetett. Lelkes terjesztője volt az új elgondolásoknak. Iskolájában rendszeresen bemutató tanításokat tartott kollégái, valamint a kerület pedagógusai részére, sőt nem egyszer szülőknek is.

Az OPI matematikai tanszékének tanfolyamain résztvevő szakfelügyelők minden alkalommal megtekintették óráit és nagy elismeréssel szóltak munkájáról. A látottak még a kétkedőket is meggyőzték a kísérleti tanterv és az új módszerek helyességéről. Gyakori látogatói voltak igazgatók, külföldi vendégek. Állandó kapcsolatot tartott csehszlovák és jugoszláv tanítókkal, kísérletezőkkel és rendszeresen kicserélték tapasztalataikat. Ezekkel mindig gazdagította saját tárházát és ötleteket adott a kísérlet irányítóinak is.

Megbízható véleményére az OPI matematika tanszéke épített is. Bírálta az alsótagozatos ideiglenes tanterv alapján készített dokumentumokat (munkalapok, kézikönyvek) és társszerzője volt a harmadik osztályos kézikönyvnek. Ebben az évben újabb megbízást kapott a harmadik osztályos kézikönyv átdolgozására. Munkájával, lelkesedésével sikerrel járult hozzá az új matematikatanterv bevezetéséhez.

Tusnády Gábor a MTA Matematikai Kutató Intézetének tudományos munkatársa. Kutatási területe a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika. Tudományos munkásságáért 1967-ben és 1970-ben Grünwald-díjban részesült.

Intenzíven foglalkozott a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika tanításával. E témakörben többször tartott előadást vándorgyűlésen és 1968-ban, valamint 1976-ban a matematika II. tagozatos osztályok tanárainak tanfolyamán. Elképzeléseit több tanár eredményesen próbálta ki, ő maga is tanított valószínűségszámítást középiskola általános tantervű osztályában. Részt vett a Társulat irányításával megindult középiskolai matematikatanítási kísérlet anyagának kidolgozásában is.

Egy évtizede tagja az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny bizottságának, 1976-tól a matematika II. tagozatosok versenybizottságának elnöke. A KöMaL szerkesztőbizottságának lős szerkesztője. Igen nagy munkát végez a lap sokszínűvé tétele érdekében, sok eredeti ötlete, érdekes kezdeményezése valósult meg a lapban.

A KöMaL ankétok és szakkörök színvonalas megszervezésében, sikeres lebonyolításában is igen nagy munkát végez. Társszerzője a Középiskolai Versenyfeladatok több kötetének. Az Iskolarádió matematika szakkörének is egyik munkatársa.

JELENTÉS AZ 1978. ÉVI RÉNYI KATÓ EMLÉKDÍJ ODAÍTÉLÉSÉRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az 1978. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítélésére az alábbi összetételű bizottságot jelölte ki: T. Sós Vera elnök, Pintz János titkár, Győry Kálmán, Lippner György, Pollák György.

A bizottság 1978. május 22-én megtartott ülésén a beérkezett javaslatok megvizsgálása után következő határozatot hozta:

A Rényi Kató Díj I. fokozatában és az ezzel járó 2000 Ft pénzjutalomban részesül:

Füredi Zoltán, az ELTE V. éves matematikus szakos hallgatója,
Kiss Emil, az ELTE IV. éves matematikus szakos hallgatója,
Pálfy Péter Pál, az ELTE V. éves matematikus szakos hallgatója,
Pham Ngoc Anh, az ELTE V. éves matematikus szakos hallgatója és
Totik Vilmos, a JATE V. éves mat. szakos hallgatója.

A Rényi Kató Díj II. fokozatában és az ezzel járó 1000 Ft pénzjutalomban részesül:

Stépán Gábor, a BME Gépészmérnöki Kar V. éves hallgatója.

Indoklás

*Füredi Zoltán*nak 6 dolgozata van megjelenés alatt, ill. kéziratban, 1 dolgozata előkészületben. Füredi Zoltán a kombinatorika több témakörében ért el értékes eredményeket. Véges geometriákból kiinduló ötletes konstrukcióval cáfolja Meyernek a maximális metsző halmazrendszerekre vonatkozó sejtését.

Ray-Chaudhuri és Wilson eredményeit javítja bizonyos metszetfeltételnek elegettevő extremális halmazrendszereket sikerül leírnia.

Különösen kiemelendő eredménye: a metsző uniform halmazrendszerekben a maximális fokszám és élszám hányadosának pontos alsó korlátját adta meg. Ezzel egy olyan ismert sejtést igazolt, amellyel kapcsolatban Lovász és Frankl publikált részeredményeket.

Megemlítjük még a négyzetrács véletlen részgráfjaira vonatkozó eredményeit.

*Kiss Emil*nek 5 dolgozata jelent meg, ill. van közlés alatt. Ezek közül 3 gyűrűelméleti kérdésekkel foglalkozik. Modulus-elméleti eszközökkel jellemezte az egységelemes gyűrűket. Vizsgálatokat folytatott olyan gyűrűkkel kapcsolatban, amelyek részgyűrűhálója speciális kikötéseknek tesz eleget. Másik kutatási területe az univerzális algebrák témakörébe esik. A kongruencia kiterjesztési tulajdonsággal kapcsolatban is szép eredményeket ért el.

Pálfy Péter Pál a Rényi Kató Díj II. fokozatának tavalyi elnyerése óta 3 további dolgozatot írt. Ezek közül egyikben az univerzális algebrák elméletében ér el szép eredményt: a véges algebrák kongurencia-hálóival kapcsolatos Birkhoff-sejtést egy csoportelméleti kérdésre vezeti vissza. Másik szép eredménye a statisztikus csoportelmélet Turán és Erdős által kezdeményezett témakörébe tartozik: szimmetrikus csoportok Sylow részcsoportjaiban az elemek rendjének statisztikus elosztását vizsgálja.

*Pham Ngoc Anh*nak összesen 7 dolgozata jelent meg ill. van sajtó alatt, további 3 előkészületben. Érdekes eredményeket ért el az MHR gyűrűk elméletében. Vizsgálta lineárisan kompakt gyűrűk és Noether gyűrűk kapcsolatát. Ezen kívül továbbfejlesztette lineárisan kompakt gyűrűkre és modulusokra vonatkozó vizsgálatait, amelyekért tavaly a Rényi Kató Díj II. fokozatában részesült.

*Totik Vilmos*nak 2 dolgozata van megjelenés alatt, 3 további dolgozata előkészületben. Ezek témája a sorelmélet különféle, többségében klasszikusnak számító fejezeteibe tartozik. A sorelmélet és approximációelmélet határterületeibe tartozó dolgozataiban továbbfejleszti, és általánosítja Marcinkiewicz, Zygmund, Grünwald, Leindler, Szabados és Turán eredményeit. Több esetben megtalálja a tételek elérhető legjobb alakját.

*Stépán Gábor*nak 1 dolgozata van sajtó alatt. Ebben több műszaki problémában felmerülő matematikai feladatot old meg, amely retardalt differenciálegyenletek stabilitásának kérdésére vezet. Gyakorlatilag felhasználható, programozható és egzakt stabilitási feltételeket ad meg, túlhaladva a műszaki irodalomban közölt pontatlan, vagy heurisztikus módszerekkel elért eredményeket.

BESZÁMOLÓ A TÁRSULAT 1978. JÚNIUS 27-I KÖZGYŰLÉSÉRŐL

A Társulat három évenként esedékes tisztújító közgyűlésén, melyen 121 szavazattal rendelkező küldött és 7 érdeklődő jelent meg, az alábbi napirendi pontok szerepeltek:

Elnöki megnyitó
Főtitkári beszámoló (Császár Ákos)
Pénztárosi jelentés (Hajnal András)
Az ellenőrző bizottság jelentése (Merza József)
A jelölő bizottság jelentése (Szabados József)
A Társulat alapszabályának módosítása
Választás
Révész Pál: „Vesztett-e sokat valaha az, ki sokat nyere?" (A fej, vagy írás játék és a modern valószínűségszámítás.)
A főtitkári beszámoló és a pénztárosi jelentés megvitatása
A társulati lapok szerkesztő bizottságainak megbízása
Az Elnökségben képviselt négy vidéki tagozat kijelölése
Küldöttek választása a MTESZ Közgyűlésre
Indítványok
A szavazatszedő bizottság jelentése
Zárszó.

Elsőként Surányi János megbízott elnök köszöntötte a megjelent vendégeket: dr. Ajtai Miklóst, az MTESZ elnökét, és dr. Túri Istvánné MTESZ főtitkárhelyettest, majd az elhunyt tagtársakról való megemlékezés következett. Ezután került sor a főtitkári jelentéshez fűzött kiegészítésekre.

Főtitkári jelentés.

I. Bevezetés

A következő jelentés célja, hogy képet adjon a Bolyai János Matematikai Társulat működéséről az 1975. október 26-án tartott közgyűlés óta eltelt időszakban, s egyben áttekintést nyújtson az akkor megválasztott vezetőség munkájáról.

A beszámolási időszakban a Társulat tovább folytatta tevékenységét a korábban hagyományosan kialakult irányokban, új kezdeményezésekkel igyekezve elkerülni a formák megmerevedését és

alkalmazkodva a felmerülő igényekhez. Az 1975-ben tartott vezetőségválasztás alkalmával is törekedtünk arra, hogy minél több fiatalabb tagtársunkat vonjuk be a vezetőség munkájába, lendületes aktivitásukat hasznosítsuk munkabizottságaink tevékenységében, rendezvényeink megszervezésében. Mint már korábban is, most is helyesnek bizonyult ez az irányzat, a fiatalok beváltották a hozzájuk fűzött reményeket, a Társulat munkájába friss vérkeringést hoztak, így ennek az irányzatnak továbbvitele alkothatja következő időszak alapelgondolását is.

Tartalmi tekintetben irányt szab a következő periódus társulati tevékenységének az a hosszabb időre szóló cselekvési terv, amelyet az Elnökség 1977 szeptemberében vitatott meg és fogadott el, figyelembe véve a MTESZ Országos Elnökségének a MTESZ tevékenységéről szóló párthatározaton alapuló ajánlásait.

Ugyanakkor, amikor örömmel regisztráljuk, hogy az elmúlt időszakban a Társulat munkája egészségesen fejlődött és alapvető céljainkat sikeresen mozdította elő, szomorúan kell megemlékeznünk a Társulat vezetőségét ért súlyos veszteségekről:

1976. szeptember 26-án hosszú, súlyos betegség után elhunyt Turán Pál, a Társulat elnöke, s végső búcsút kellett vennünk három tiszteletbeli elnökünktől is, 1976-ban Kalmár Lászlótól, 1977-ben Péter Rózsától, 1978-ban Szász Páltól. Elvesztésük a hazai és nemzetközi matematikai élet számára is pótolhatatlan veszteség, de fájdalommal nélkülözzük őket a társulati munka számos területén is. Turán Pál halála után az Elnökség az elnöki teendők ellátására a következő közgyűlésig Surányi János alelnököt kérte fel.

2. A Társulat szervezete

A Társulat munkájának zömét hagyományosan a szakosztályok és a vidéki tagozatok végzik, egyes konkrét feladatok ellátására pedig a Választmány, az Elnökség, a szakosztályok, illetve a tagozatok vezetőségei hosszabb időre vagy egy-egy alkalomra szóló megbízással munkabizottságokat küldenek ki.

Társulatunkban az előző időszakkal megegyezően a következő három szakosztály működött:

a) Tudományos Szakosztály,
b) Oktatási Szakosztály,
c) a Matematika Alkalmazásai Szakosztály.

Vidéki tagozataink száma sem változott az előző közgyűlés óta:

1. Baranya megyei Tagozat,
2. Bács-Kiskun megyei Tagozat,
3. Békés megyei Tagozat,
4. Borsod megyei Tagozat,
5. Csongrád megyei Tagozat,
6. Fejér megyei Tagozat,
7. Győri Tagozat,
8. Hajdú-Bihar megyei Tagozat,
9. Heves megyei Tagozat,
10. Komárom megyei Tagozat,
11. Nógrád megyei Tagozat,
12. Somogy megyei Tagozat,
13. Soproni Tagozat,
14. Szabolcs-Szatmár megyei Tagozat,
15. Szolnok megyei Tagozat,
16. Vas megyei Tagozat,
17. Veszprém megyei Tagozat,
18. Zala megyei Tagozat.

Több tagozatunk keretében működik helyi csoport egy-egy olyan városban, ahol a társulati tagok száma a tízet meghaladja.

3. Szakosztályok

a) *Tudományos Szakosztály.* A kialakult gyakorlat szerint a Szakosztály munkájának zömét tudományos konferenciák és előadóülések szervezése jelenti. Az előadóülések nagy részét az MTA Matematikai Kutatóintézetével közösen szerveztük, ezeken főként a Társulat külföldi vendégei adtak elő. A Szakosztály vezetősége és a mellette működő Tudományos Bizottság következetesen arra törekedett, hogy az előadóüléseken magyar matematikusok előadásai is minél nagyobb számban szerepeljenek, elsősorban a matematika különféle ágai közti távolság csökkentését szolgáló általános témákat felölelő előadások formájában. Ezek a törekvések azonban az elmúlt időszakban csak szerény

sikereket hoztak, s bizonyos, hogy a szervezés fokozásával, vidéki előadók bevonásával további eredményeket is el lehet majd érni.

A Tudományos Bizottság fő tevékenysége a Szakosztály által szervezett konferenciák, kollokviumok tervének összeállítása. Ezekről a 6. pontban részletesen lesz szó. Ugyanott számolunk be a Tudományos Szakosztály és a Matematika Alkalmazásai Szakosztály közös szervezésében évenként megrendezett Fiatal Matematikusok Csillag Pál Találkozójáról.

Szintén a Matematika Alkalmazásai Szakosztállyal közös rendezvény a végző matematikus hallgatók számára évente tartott klubest. Ez a bevált kezdeményezés jelentékenyen hozzájárul a fiatal matematikusoknak a társulati munkába való eredményes bevonásához.

A szakosztályi munka keretébe tartozik a társulati könyvtár kezelése és fejlesztése, a folyóiratok cseréje, gondozása; mindezt Székely Gábor irányítja igen aktívan. A könyvállomány gyarapításának és a könyvtár jobb kihasználásának egyaránt ez idő szerint elháríthatatlan akadálya a szűk elhelyezés a Társulat irodahelyiségeiben. Kiadványaink tárolását sikerült raktárhelyiség bérletével megoldani, de ez az alapgondon nem segített. Az elmúlt időszakban bizottságot küldtünk ki a könyvtárfejlesztés technikai akadályainak áthidalását szolgáló lehetőségek megvizsgálására, de ennek munkája sem hozott érdemleges eredményt.

b) *Oktatási Szakosztály.* A Szakosztály munkája hagyományosan két részre oszlik: a tanárok és a tanulók körében végzett munkára. Mindkét irányban a Szakosztály vezetősége és az Oktatási Bizottság által kidolgozott munkaterv szabta meg a feladatokat. Ebben a korábban kialakult tevékenységi formák mellett részben saját kezdeményezésre, részben más szervek felkérése alapján helyet kaptak nem kis számban új kezdeményezések, így a Szakosztály munkája tartalmában és formáiban egyaránt folyamatosan alkalmazkodik a fellépő igényekhez.

A tanárok számára szervezett rendezvények középponti gondolata az volt, hogy a Szakosztály az Oktatási Minisztérium és az Országos Pedagógiai Intézet munkatársaival együttműködve hozzájáruljon az évtized végén esedékes közoktatási reformok bevezetésének előkészületi munkájához, és segítse az új általános iskolai tantervre építő középiskolai kísérleti munkát.

Ezt a célt szolgálta a Szakosztály által a beszámolási időszakban rendezett nemzetközi részvételű kollokvium a matematikatanár-képzés problémáiról (1. a 6. pontban), és ugyanez a gondolat állt az évente megrendezett Rátz László Vándorgyűlések tematikájának középpontjában is (1. uo).

Tovább folyt a beszámolási időszakban az 1973-ban megindított gimnáziumi oktatási kísérlet irányítása és továbbfejlesztése. Az első kísérleti osztályok az elmúlt tanévben érettségiztek, így most már négy év tapasztalata után sokkal pontosabban körvonalazódnak a lehetőségek és a nehézségek. Előrelépést jelent a végső cél felé, hogy a most végződő tanévben, egyelőre fél osztállyal, mód nyílt a kísérletnek olyan tanulókkal való megindítására, akik az általános iskolában a komplex matematikai tanterv alapján tanultak. Az Oktatási Bizottság s az általa kiküldött munkabizottságok rendszeresen foglalkoztak a kísérlet problémáival és tapasztalataival, az értékelés módjával, mindebben szorosan együttműködve a MTA és az OM Köznevelési Bizottságának Matematikai Munkabizottságával.

A Szakosztály 1977 őszén továbbképző jellegű előadássorozatot indított a budapesti általános- és középiskolai tanároknak. A 15—15 előadásból álló sorozatnak kettős célja van: felkészít az új általános iskolai matematikai tantervre, és megismerteti a hallgatókat az e tanterv szellemében folyó középiskolai kísérletekkel. A Szakosztály fontosnak tartja, hogy az első évi budapesti és a vidéki tagozatokban folyó ilyen jellegű munkák tapasztalatait összegezze és az előadásokat szélesítse mind tartalmi, mind területi vonatkozásban.

A Szakosztály az Elnökségtől kapott megbízás alapján 1977 elején bizottságot alapított a tudományos tevékenységet is folytató matematikatanárok támogatására szolgáló módszerek kidolgozására. A bizottság sokoldalúan vitatta meg a kérdést, és sok hasznosnak látszó gondolatot vetett fel amelyeknek egy részét várhatóan már a közeli jövőben hasznosítani lehet, más részük esetleg a távolabbi jövőben lesz megvalósítható.

A diákok körében végzett munka hagyományos formái a különféle tanulóversenyek (részletesen 1. a 8. pontban), rendszeresen folytak a Középiskolai Matematikai Délutánok, és folyamatosan működött az Ifjúsági Matematikai Kör. Ez utóbbi számára a téli és a tavaszi szünetben a korábbiakhoz hasonlóan megrendeztük a szokásos kétnapos Ülésszakot, vidéki diákok bevonásával.

A tanulóversenyek hosszú ideje kialakult formáit nem tekintettük mereven kötelezőnek. Így 1976-ban az Oktatási Minisztérium felkérésére megvitatta a Szakosztály az Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Versenyek továbbfejlesztésének módozatait. Az Arany Dániel versenyről széles körű vitát rendeztünk, amelynek alapján felmértük a verseny jelenlegi helyzetét, feltártuk az első fordulóval kapcsolatos problémákat, és keressük a megoldás módozatait. Az Úttörő Szövetséggel együtt korábban megrendezett Általános Iskolai Matematikai Versenyek rajtunk kívül álló okokból a régi formában nem voltak folytathatók; a Szakosztály felmérte a verseny új formában való megindításának lehetőségeit, előkészítő bizottságot küldött ki és 1979 tavaszára tervezzük az újjászervezett verseny újból való megindítását.

A Szakosztály hagyományos feladataihoz tartozik a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára kiküldendő tanulók szakmai felkészítése. E feladatot a mostani időszakban is elláttuk, egyúttal azonban jelentősen ki is szélesítettük, amennyiben a Szakosztály az Oktatási Minisztérium felkérésére 1976-ban megszervezte a központi olimpiai előkészítő szakkörök országos hálózatát, és megindított 11 ilyen szakkört. A Szakosztály gondoskodik a szakkörök tematikájának összeállításáról, továbbá a szakkörvezető tanárokat 1977 őszén tapasztalatcserére hívtuk össze, s velük azóta is folyamatosan konzultál a szakosztály megbízásából Reiman István tagtársunk. A szakkörök szervezéséhez szükséges költségeket az OM biztosította.

Tovább lehetne szélesíteni a diákok körében végzett munkát, ha sikerülne a Középiskolai Matematikai Délutánok résztvevőinek számát növelni, s egyúttal ezek mintájára hasonló rendezvényeket szervezni általános iskolai tanulók részére. Mindennek a helyiséghiány is gátat szab.

A Szakosztály évenként megszervezte a végző matematikatanár-jelöltek szokásos klubdélutánját. Ezek hozzájárultak a fiatal tanároknak a társulati munkába való bevonásához, de ezen a téren lehetőségeink korántsincsenek kiaknázva. Jobban kellene az egyetemi és főiskolai hallgatókat a vándorgyűléseken való részvételre mozgósítani; e célból részükre önköltséges részvételi költség befizetését kellene lehetővé tenni.

A Szakosztály vezetősége igyekezett támogatni a vidéki tagozatok tanárok és diákok körében végzett munkáját, és tervezte, hogy ebből a célból időnként meglátogat egy-egy tagozatot. Ezeket a látogatásokat mindeddig nem sikerült megvalósítani, de megindításuk hatékonyan segítené elő a Szakosztály és a tagozatok közötti kapcsolat elmélyítését.

c) *A Matematika Alkalmazásai Szakosztály.* A Szakosztály tevékenységének hagyományos formája nemzetközi részvételű konferenciák szervezése (1. a 6. pontban), továbbá a Tudományos Szakosztállyal közösen az *a)* pont alatt már említett Csillag Pál Találkozónak és a végző matematikus hallgatók klubestjének évenkénti megrendezése.

A beszámolási időszakban örvendetesen megélénkült a Szakosztály tevékenysége a matematika alkalmazásairól szóló előadások szervezése terén. Ezek az előadások egy-egy témát mutatnak be általában elég magas színvonalon, a hangsúlyt a téma pillanatnyi állásáról megbízható kép kialakítására helyezve, s kevésbé törekedve az előadó által szolgáltatott adalékok előtérbe állítására. Törekszünk arra is, hogy az előadások stílusa a témát kevéssé ismerők számára is érthető legyen, de emlékeztetjük az előadókat arra is, hogy esetleg a témát náluk lényegesen magasabb szinten ismerők is ülhetnek a hallgatóságban. Mindezen törekvések eredményeképpen az előadások többnyire sikeresek, a hasonló jellegű rendezvények átlagánál jóval nagyobb részvétellel és aktivitással.

Elősegítette a szervező munka hatékonyságát, hogy a Matematika Alkalmazásai Bizottság négy albizottságot alakított a Valószínűségszámítás és Matematikai statisztika, a Számítástudomány, az Analízis és a Numerikus módszerek területének gondozására. Az előadások szervezésében elsősorban az első két albizottság végzett komoly munkát.

A hosszabb ideje szünetelő tanfolyam-rendezési tevékenység újból való megindítására a Szakosztály elérkezettnek látta az időt, és megtette a lépéseket egy a folyó év őszén induló „Fejezetek a matematikai statisztika alkalmazásaiból" c. tanfolyam szervezésére. E tanfolyam iránt a vártnál jóval nagyobb érdeklődés mutatkozik, így sikere biztosítottnak vehető.

A Szakosztálynak a hazai matematikai élet egészére kiható fontos kezdeményezése volt 1976 augusztusában egy ankét megrendezése, amelyen a hazai alkalmazott matematika helyzetét és problémáit vitattuk meg. Az ankéton számos hozzászólás hangzott el, a vita összefoglalását a Magyar Tudományban közzétettük, s ezt a folyóirat hasábjain sokoldalú írásbeli vita követte. Az ankét alapján kialakított javaslatokat a Szakosztály elnöke a MTA Matematikai és Fizikai Osztályához továbbította, amely alapos megvitatás után a felvetett problémák egy részére vonatkozóan konkrét javaslatokat tett, más részükre viszont széles körű és sok irányú felmérő munka kiinduló pontjának fogta fel, s elindította ezt a munkát, amelynek a következő években kell lefolynia.

Ugyancsak az előbbi ankét fejleményeképpen a Szakosztály felmérést tervezett az alkalmazott matematika hazai műhelyeiről, művelőiről, helyzetükről. Ezt folyamatosan végezzük, megindításképpen összeállítottunk egy címlistát azokról az intézményekről, vállalatokról, üzemekről, ahol a matematika alkalmazásaival érdemben is foglalkoznak, illetve ahol legalább 4-5 matematikus dolgozik.

Mindennek eredményeképpen joggal remélhető, hogy a következő időszakban megjavulnak és elmélyülnek a Szakosztály kapcsolatai azokkal az intézményekkel és szervezetekkel, amelyekkel való együttműködés a matematika alkalmazásait hatékonyan képes előmozdítani, színvonalukat emelni, s az alkalmazással foglalkozó matematikusok egyre szélesebb körének helyzetét eredményesen tudja megjavítani.

4. Vidéki tagozatok

Tagozataink az ország területét csaknem teljesen behálózzák, egyedül Tolna megyében nincs még társulati tagozat. Az egyes tagozatok tevékenységének köre és intenzitása, a helyi adottságoktól függően igen széles körben változik. Mindegyikük foglalkozik a tanárok pedagógiai munkájának segítését és az érdeklődő tanulók körében végzett matematikai ismeretterjesztést szolgáló rendezvények szervezésével, egy részük pedig tudományos, ill. a matematika alkalmazásaival foglalkozó előadásokat is szervez. Valamennyi tagozat körzeműködik a Társulat által szervezett országos tanulóversenyek megrendezésében, sok tagozat emellett rendez helyi versenyeket is. A Schweitzer Miklós Emlékverseny szervezését 1975-ben a Csongrád megyei Tagozat, 1977-ben a Hajdú-Bihar megyei Tagozat végezte.

Jelentős segítséget kaptunk tagozatainktól nagyrendezvényeink szervezésében; az egyes tagozatok területén rendezett konferenciák, vándorgyűlések előkészítése és lebonyolítása elképzelhetetlen volna az ott működő tagtársak aktív közreműködése nélkül. A beszámolási időszakban kiemelendő e vonatkozásban a Csongrád megyei Tagozat (Félcsoportelméleti kollokvium, Automaták algebrai elmélete kollokvium), a Hajdú-Bihar megyei Tagozat (Komplex függvénytani módszerek a valószínűségszámításban és a matematikai statisztikában kollokvium), a Baranya megyei tagozat (A matematikatanár-képzés problémái kollokvium), a Bács-Kiskun megyei Tagozat s különösen ennek bajai helyi csoportja (Rátz László Vándorgyűlés), a Veszprém megyei Tagozat (Rátz László Vándorgyűlés), a Borsod megyei Tagozat (Differenciálegyenletek nyári iskola), a Heves megyei Tagozat (Topológiai nyári iskola).

Ebben az időszakban is akadtak kisebb tagozatok, amelyeknek munkájáról a Társulat központja csak kevéssé tudott tájékozódni. Kívánatos volna módot találni arra, hogy az éves munkatervek megküldésén túl az egyes tagozatok a végzett munkáról is rendszeresen beszámoljanak anélkül, hogy ez akár a Társulat aktíváinak, akár az apparátusnak a munkáját túlságosan megterhelné. Fejlesztendő a tagozatok egymás közötti kapcsolata is, mind a tapasztalatcsere, mind az előadók cseréje szintjén. Nem alakultak ki eléggé egységes szempontok a tagozatok költségvetésének elkészítésében sem, ami nemkívánatos egyenetlenségek forrása: a következő időszakban itt is megnyugtató megoldást kellene találni.

5. Állandó munkabizottságok

Az Emlékőrző Bizottság ebben az időszakban is igen aktívan és eredményesen működött (a Bizottság elnökének, Péter Rózsának elhunytával az elnöki tisztségre Gyires Bélát, alelnökként pedig Fried Ervint kérte fel az Elnökség). A Bizottság kezdeményezésére megünnepeltük Bolyai János születésének 175. évfordulóját két ünnepi ülés formájában, a Magyar Tudományos Akadémiával, ill. a Tudományos Ismeretterjesztő Társulattal közös szervezésben. Részt vettünk az Októberi Szocialista Forradalom 60. évfordulójának megünneplésében is két előadóülés megrendezésével, amelyeken Juhász István a moszkvai topológiai iskoláról, Varga Tamás pedig a szovjet matematikaoktatási reformtevékenységről adott áttekintést.

Ugyancsak az Emlékőrző Bizottság kezdeményezte két emléktábla felállítását a Matematikai Kutatóintézet épületében a fasizmus áldozatául esett matematikusok, ill. Rényi Alfréd emlékének megörökítésére. Mindkét emléktáblát 1976. június 15-én lepleztük le. Rendszeresen folytatta a Bizottság szokásos sírgondozó tevékenységét is.

A Felsőoktatási Bizottság a beszámolási időszakban az egyetemi felvételi vizsgák tapasztalatairól folytatott vitát, észrevételeiket eljuttattuk az Oktatási Minisztériumhoz. Változatlanul elmondható, hogy a Bizottság profiljához tartozó feladatok aktívabb munkát igényelnének.

A Könyvbizottság tevékenységét a korábbi bizottság titkárának, majd az újjáalakított Bizottság elnökének halála ebben az időszakban is csaknem végig megbénította. Csak a legutóbbi hónapokban sikerült a Bizottságot úgy újjászervezni, hogy eredményes munkája most már biztosítottnak látszik, ez azonban már csak a következő időszakban fog kibontakozni.

6. Nagyrendezvények

a) *Kollokviumok.* A beszámolási időszakban a következő kollokviumokat rendeztük meg:

V. Magyar Kombinatorikai Kollokvium (1976. június—július, Keszthely, 56 magyar és 93 külföldi résztvevő), a Tudományos Szakosztály szervezésében;

Fourier-analízis és Approximációelméleti Kollokvium (1976. augusztus, Budapest, 32 magyar és 84 külföldi résztvevő), a Tudományos Szakosztály szervezésében;

Félcsoportelméleti Konferencia (1976. augusztus, Szeged, 35 magyar és 20 külföldi résztvevő), a Tudományos Szakosztály és József Attila Tudományegyetem szervezésében;

IX. Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpozium (1976. augusztus, Budapest, 100 magyar és 450 külföldi résztvevő) a Matematika Alkalmazásai Szakosztály szervezésében, a Nemzetközi Matematikai Programozási Társaság (SIGMAP) első szocialista országban tartott rendezvényeként, annak támogatásával;

Univerzális Algebrai Kollokvium (1977. június, Esztergom, 30 magyar és 80 külföldi résztvevő), a Tudományos Szakosztály szervezésében, az IMU támogatásával;

A Matematikatanár-képzés Problémái Konferencia (1977. augusztus, Pécs, 93 magyar és 57 külföldi résztvevő), az Oktatási Szakosztály szervezésében, az ICMI és az OM támogatásával;

Komplexfüggvénytani Módszerek a Valószínűségszámításban és a Matematikai Statisztikában Kollokvium (1977. augusztus—szeptember, Debrecen, 27 magyar és 19 külföldi résztvevő) a Tudományos Szakosztály szervezésében;

Numerikus Módszerek Kollokvium (1977. szeptember, Keszthely, 60 magyar és 57 külföldi résztvevő), a Matematika Alkalmazásai Szakosztály szervezésében;

Automaták Algebrai Elmélete Kollokvium (1977. Szeged, 41 magyar és 20 külföldi résztvevő), a Tudományos Szakosztály és a József Attila Tudományegyetem szervezésében.

Kitűnik a felsorolásból, hogy nemzetközi részvételű tudományos konferenciákat a beszámolási időszakban is szép számban rendeztünk, színvonalukat és sikerüket már a résztvevők száma is meggyőzően tanúsítja. Mindegyik konferencia magához tudta vonzani a szakterület nemzetközileg elismert kiválóságainak jelentékeny részét, több esetben szinte hiánytalanul, s ennek eredményeképpen valamennyi résztvevő képet kaphatott a témakör legaktuálisabb problémáinak állásáról. A színvonalas tudományos programot minden esetben kirándulások és más szórakozási lehetőségek egészítették ki.

A kollokviumok szervezése során összegyűlt tapasztalatokat az előző időszakban született határozat alapján összegyűjtöttük, és elnökségi megvitatás után sokszorosítottuk, hogy vezérfonalul szolgáljanak az ezután szervezendő rendezvények szervező bizottságainak, elsősorban a bizottságok titkárainak. Reméljük, hogy ez az előkészítés és lebonyolítás zökkenőmentessé tételéhez hatékonyan járul majd hozzá.

A kollokviumok tematikáját a korábban kialakult gyakorlat szerint három évre előre nagy vonásokban rögzítettük, más szervekkel, külföldi partnereinkkel egyeztettük. A program végső rögzítésére és a szervező bizottság felkérésére a rendezvényt megelőző második évben került sor. Felvetődik és komolyan megfontolandó, hogy ezen a gyakorlaton változtatni kellene, előbbre hozva a szervező bizottság összeállítását s ezzel együtt a program rögzítését, mert az IMU vagy ICMI (esetleg más nemzetközi szervezet) támogatására csak akkor számíthatunk, ha igényünket minél előbb eljuttatjuk.

b) *Vándorgyűlések.* A Rátz László Vándorgyűlést az Oktatási Szakosztály 1976-ban Baján rendezte meg (370 résztvevővel), 1977-ben pedig Veszprémben (380 résztvevővel). A munka mindkét alkalommal három szekcióban folyt. Az Oktatási Bizottság a tematikák összeállításakor figyelembe vette, hogy az OPI által szervezett nyári tanfolyamok száma a korábbi évekhez képest csökkent. A vándorgyűlések témái között első helyre került az új általános iskolai tanterv, az ennek szellemében szervezett középiskolai kísérletekről tartott beszámolók és az analízis középiskolai tanítása. A témák több alkalommal szemináriumformájában kerültek feldolgozásra, így a résztvevők az új módszerek aktív művelői is lehettek. Ebbe a gondolatkörbe illeszkedett a bajai vándorgyűlésen Hanga Mária oktatási miniszterhelyettes előadása az oktatáspolitika időszerű kérdéseiről. A szakmai előadásokat pszichológiai előadások is tarkították.

Örvendetesen megnőtt a vándorgyűléseken az általános iskolai nevelők és a fiatal kartársak részvétele. Hasznos volna a vándorgyűléseket is felhasználni a matematikát különböző szinten oktató tanárok kapcsolatának a matematika egyetemi és főiskolai oktatóival való szorosabbra fűzésére. A középiskolát és a felsőoktatást egyaránt érintő témakörök közös feldolgozása igen tanulságos lehetne.

A Szakosztály vezetősége az 1976-os és 1977-es vándorgyűlésen a Társulat tagozati titkárai, valamint az általános- és középiskolai szakfelügyelők részére fórumot rendezett az aktuális társulati, ill. szakosztályi feladatok kölcsönös megbeszélésére.

Az idén Szombathelyen megrendezendő vándorgyűlésen híradót készülünk kiadni; ennek szerkesztésére a Szakosztály vezetősége Andrásfai Bélát kérte fel.

c) *Fiatal Matematikusok Csillag Pál Találkozója.* Ezt a rendezvényünket 1976-ban, 1977-ben és 1978-ban is Balatonlellén rendeztük meg. A gazdag program a kialakult hagyományoknak megfelelően lehetővé tette a matematika és az alkalmazások különféle irányaiban tevékenykedő fiatalok számára egymás eredményeinek megismerését, emellett alkalmat adott az üdülésre és a szórakozásra is. Némi gondot okozott a résztvevők növekvő száma (110, ill. 160), amely a rendezvény sikerének tanújeleként ugyan, de a program túlságos zsúfoltságának, illetőleg szétforgácsolódásának veszélyét rejti magában. Törekedni kell a szervezés olyan módozatainak a meglelésére, amelyek ezeket a veszélyeket képesek elhárítani és a bevált célkitűzések megvalósítását megnövekedett létszám mellett is lehetővé tenni.

d) *Nyári iskolák*. A Matematika Alkalmazásai Szakosztály a Borsod megyei Tagozat bevonásával Miskolcon 1977 júniusában nyári iskolát rendezett Differenciálegyenletek és műszaki alkalmazásaik címmel, elsősorban fiatal matematikusok és mérnökök számára. A mintegy 50 résztvevő számára sok hasznos információt adtak az elhangzott előadások.

Anyagi és szervezési téren egyaránt rendszeresen támogatjuk a Természettudományi Karok Matematikai Tudományos Diákköreinek évenként megrendezett nyári iskoláit. 1976-ban Egerben, 1977-ben Törökmezőn került sor erre a rendezvényre, topológia, ill. univerzális algebra témakörrel, mindkét alkalommal kb. 50 résztvevővel.

7. Emlékdíjak

A matematikai tudományos utánpótlás nevelésében kiemelkedő érdemeket szerzett kutatók részére alapított Szele Tibor Emlékérmet 1975-ben Turán Pál, 1976-ban Alexits György, 1977-ben Fejes Tóth László nyerte el.

A matematika oktatásában és népszerűsítésében elért kiváló teljesítményükért 1976-ban 7, 1977-ben ugyancsak 7 tagtársunkat részesítettük Beke Manó Emlékdíjban.

A matematikai kutatómunka területén kiemelkedő fiatal matematikusok közül 1975-ben 4 1976-ban 5, 1977-ben 6 fiatal kutatót jutalmaztunk Grünwald Géza Emlékdíjjal.

A matematika alkalmazásai terén kiváló teljesítményt nyújtó fiatalok közül 1975-ben 6, 1976-ban 6, 1977-ben 6 nyerte el a Farkas Gyula Emlékdíjat.

A jelentős önálló teljesítményt elért matematikus hallgatók részére alapított Rényi Kató Emlékdíjban 1976-ban 10, 1977-ben 4 kiváló tehetségű egyetemi hallgató részesült.

A korábbiakhoz hasonlóan ebben az időszakban is eleget tettünk a KISZ Központi Bizottsága ama kérésének, hogy a Tudományos Diákkörök Országos Konferenciáján bemutatott kiváló matematikai pályamunkák díjazására jutalmakat ajánljunk fel, mégpedig mind a természettudományi, mind a pedagógiai, mind a műszaki szekció esetében.

Állandóan visszatérő gond a jutalmazásra javaslatba hozottak nagy számának a jutalmazási keretek szükségképpen korlátozott mértékével és a díjak devalválódása elleni küzdelemmel való egybehangolása. A Grünwald Géza Emlékdíj esetében e gondon az Emlékdíj alapszabályának átdolgozása s ennek révén a jutalmazás feltételeinek szűkebbre vonása útján kívántunk segíteni. Az átdolgozott alapszabály ez évben fog első ízben alkalmazásra kerülni; reméljük, hogy meghozza a várt eredményt.

8. Versenyek

Évenként megrendeztük a következő hagyományos tanulóversenyeket:
Arany Dániel Verseny a Középiskolák I. és II. osztálya számára,
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematikából középiskolások számára,
Kürschák József Verseny érettségizettek számára,
Schweitzer Miklós Emlékverseny egyetemi hallgatók számára,
Tanárképző Főiskolák Matematika Versenye a főiskolai hallgatók számára.

A versenyek díjait részben költségvetésünkből, részben az Oktatási Minisztérium támogatásából fedeztük; a Schweitzer Miklós Emlékverseny díjait néhai Gaál Jenőné örököseinek alapítványából egészítettük ki.

A versenyek szervezését az évről évre kiküldött versenybizottságok végezték, a dolgozatok javításába a több fordulóban lebonyolított versenyek esetén számos külső munkatársat is bevontunk.

A Középiskolai Matematikai Lapok pontversenyén legjobb eredményt elért tanulókat az elmúlt időszakban is az Oktatási Minisztérium által rendelkezésre bocsátott keretből jutalmaztuk. Új kezdeményezésként évi keretet ajánlottunk fel az Iskolarádió „Törd a fejed" pályázatán benyújtott legjobb dolgozatok jutalmazására.

9. Kiadványok

a) *Folyóiratok*. A Matematikai Lapok felelős szerkesztői teendőire Turán Pál halála után az Elnökség Császár Ákost kérte fel. A lap az elmúlt időszakban is a korábban kialakult célkitűzéseknek megfelelően igyekezett ellátni feladatait. Hagyományos betegségéből, a késedelmes megjelenésből, amely most már három teljes évre felszaporodott elmaradást eredményezett, ebben az időszakban sem sikerült kigyógyítani, de a legutóbbi időben a késedelem lassú és fokozatos felszámolásának körvonalai kibontakozóban vannak, hála a Szegedi Nyomdával és az Akadémiai Kiadó illetékeseivel folyta-

tott eredményes megbeszéléseknek. Azt reméljük, hogy a most következő időszakban a határozott avulás jelei félreismerhetetlenek lesznek.

A Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztését az Oktatási Minisztérium támogatásával végezzük (1 főállású és 2 mellékfoglalkozású szerkesztő munkabére és a feladatjavításban részt vevő munkatársak díjazásának részben való fedezése hárul a Minisztériumra). A fizikai rovat szerkesztését az Eötvös Loránd Fizikai Társulat látja el.

A Lapok terjedelmének zömét ebben az időszakban is a megoldásra kitűzött Gyakorlatok és Feladatok töltik ki, lényegében véve megszabva ezzel a folyóirat profilját is. Ennek a volumenét érzékelteti, hogy egy tanévben mintegy 30 ezer megoldás érkezik be. Emellett azonban a szerkesztő bizottság határozottan törekedett arra, hogy azoknak az olvasóknak is hasznos anyagot adjon, akik a feladatmegoldásban nem kívánnak részt venni. Ezért növelte a cikkekre jutó terjedelmet, és többé-kevésbé rendszeres új rovatokat indított. Ezek körében ideiglenes jelleggel helyet kapott a Neumann János Számítógéptudományi Társaság kérésére egy számítástechnikai rovat is. A megjelenés pontosságát és ezen belül az egyes kitűzött feladatok megoldásainak feldolgozását, a megoldás közlését nagy erőfeszítések árán ugyan, de sikerült minden igényt kielégítő szinten tartani, úgyhogy igen kevés kivétellel egy kitűzött feladat megoldása a kitűzés utáni negyedik számban megjelenik. Fokozottan törekedni kell arra, hogy az átfutási idő leszorítása ne menjen a technikai szerkesztés pontosságának rovására, mert a tapasztalatlan olvasókat egy-egy sajtóhiba könnyen megzavarja és elkedvetleníti.

A Matematika Tanítása (az Oktatási Minisztériummal közös szerkesztésben) ebben az időszakban is igyekezett a matematikatanárokat változatos és az oktatásban jól felhasználható cikkanyaggal ellátni. E feladatát jelentékenyen megnehezítette, hogy papírtakarékossági rendelkezések következtében terjedelmét a korábbihoz képest lényegesen csökkentenie kellett. Különféle áthidaló megoldások keresése után most remény van e gátló körülmény elhárulására.

A Periodica Mathematica Hungarica felelős szerkesztői teendőit Turán Pál halála óta az Elnökség megbízásából Hajnal András látja el. A folyóirat a nemzetközi színvonalnak minden tekintetben megfelelő szinten látja el a kéziratok lektorálását (ami nem könnyű feladat), és így szakmai rangját szilárdan tartani tudja. A beérkezett kéziratok száma azonban egyre nő, és így még a gondos szűrés után is két-három évig tart, amíg egy benyújtott kézirat megjelenik. Ez az átfutás ijesztőnek látszik, de napjainkban, sajnos, sehol sem lényegesen jobb a helyzet. Az elmúlt időszakban a megjelenés pontossága átmenetileg visszaesett, de ezt a lemaradást már sikerült behozni. A néhány éve megindított feladatrovat (megoldatlan, tehát kutatási jellegű problémákkal) visszhangjáról mindeddig nem értesültünk, így egy idő múlva aktuális lesz a rovat fenntartását megvizsgálni. Komoly aggodalomra ad okot a folyóirat terjesztése, mert a példányszám a kezdetinek a negyedére esett vissza. Megvizsgálandó, elég kompetens cég kezében van-e a tőkés viszonylatú terjesztés.

A MTA III. Osztályának Matematikai Bizottsága 1977-ben széles körű ankéton vitatta meg a hazai tudományos matematikai folyóiratok (ennek keretében a Periodica Mathematica Hungarica és a Matematikai Lapok) problémáit. Ezen az ankéton vetődött fel az a kérdés, hogyan lehetne bekapcsolódni abba a világszerte erősödő irányzatba, amely szűkebb profilú folyóiratok kiadásának egyre inkább kedvez a szélesebb spektrumúakéval szemben. A vitában elhangzottak eredményeképpen a Társulat Elnöksége egy kombinatorikai profilú folyóirat kiadását vette tervbe. A Kiadói Főigazgatóság engedélyét a közelmúltban megkaptuk, így belátható időn belül ezt a folyóiratot is kiadványaink közé sorolhatjuk.

b) *Kollokviumi kötetek.* A Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai sorozatban a beszámolási időszak alatt a következő kötetek jelentek meg:

Progress in Operation Research
Topics in Number Theory
Lattice Theory
Differential Equations
Information Theory
Contributions to Universal Algebra
Combinatorics.

Előkészületben vannak a következő kötetek:
Fourier Analysis and Approximation Theory
Semigroups.

A felsorolás mutatja, hogy a Társulatunk e tevékenysége jelentékenyen hozzájárul a hazai matematikai könyvkiadáshoz, nem utolsó sorban megteremtve a Társulatunk célkitűzéseinek megvalósítására szolgáló anyagi eszközök jelentékeny hányadát is. Feladatunk a magas tudományos színvonal gondos megőrzése, a technikai kivitel nívójának az eddigi magas szinten tartása, s ugyanakkor az átfutási idő lehető csökkentése; egy-egy kollokvium anyagát a rendezvény időpontja után egy éven belül kellene kiadni ahhoz, hogy a kötetek aktualitása ne csökkenjen már megjelenésük pillanatában.

A kötetek kiváló színvonalú előállítása Székely Gábor irányításával Meszlényi Máriának és Monostori Lajosnénak köszönhető; fáradhatatlan munkájukért őszinte köszönet illeti őket.

10. Kapcsolatok más szervekkel

A beszámolási időszakban is állandóan tapasztaltuk a MTESZ vezetőinek nem csökkenő mértékű érdeklődését és segítőkészségét Társulatunk problémáival kapcsolatban. Megértő intézkedéseik sok nehézségen segítettek át bennünket. A társulatunk iránti érdeklődés jele volt, hogy a MTESZ Országos Elnökségének Végrehajtó Bizottsága 1977 szeptemberében megvitatta a Társulat beszámolóját az utóbbi években végzett munkáról, elismerő szavakkal regisztrálta a hazai matematikai élet fellendítésére tett erőfeszítéseinket, és készséget nyilvánított a tevékenységünket fékező tényezők elhárítására.

Társulatunk javaslatára 1975-ben MTESZ-díjjal tüntették ki Surányi Jánost, 1977-ben pedig Gábor Endrénét.

A MTESZ tagegyesületei közül kapcsolataink hagyományosan jók az Eötvös Lóránd Fizikai Társulattal, együttműködünk velük a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztésében és a végző matematika-fizika szakos tanárok klubestjeinek szervezésében. Ugyancsak a folyóiratszerkesztés területén ápoltuk kapcsolatainkat a Neumann János Számítógéptudományi Társasággal is.

Ebben az időszakban is sokoldalúan együttműködtünk a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályával, valamint a MTA Matematikai Kutatóintézetével. Számos előadóülés közös megrendezésén kívül az Intézet apparátusa technikai jellegű problémák megoldásában is folyamatosan segítségünkre volt. Az Oktatási Szakosztály szorosan együttműködött a MTA és az OM Köznevelési Bizottságának Matematikai Munkabizottságával, mindenekelőtt a középiskolai oktatási kísérlet irányításával kapcsolatos kérdések területén, s ugyanebben a munkában állandó volt a kapcsolat a MTA Matematikai Kutatóintézetének Didaktikai Csoportjában dolgozó munkatársakkal is (az év elejétől a Csoport tevékenységét az Egyetemi Számítóközpont keretében folytatja).

Az Oktatási Minisztériummal kapcsolataink az évtizedek óta kialakult jó irányban fejlődtek tovább. A szokásos együttműködési területeken (folyóiratok szerkesztése, tanulóversenyek rendezése) kívül az oktatási kísérlet szakmai irányítása és szervezése, az olimpiai szakkörök irányítására való felkérés, ismételt véleménykérés különféle oktatási kérdésekben: mindezek olyan feladatok, amelyekben a Társulatban tömörült pedagógusok eredményesen járulhattak hozzá a Minisztérium céljainak megvalósításához, s viszont saját kezdeményezéseinket sem hajthattuk volna végre a Minisztérium hatékony támogatása nélkül (a Matematikatanár-képzés Problémái Konferencia anyagi támogatása a minisztérium részéről).

Az Eötvös Loránd Tudományegyetemmel elsősorban a diákköri nyári iskolák szervezésében működtünk együtt, s hozzájárultunk a legjobb diákköri dolgozatok jutalmazásához is. A Budapesti Műszaki Egyetem előadótermek és diákszálló szobák rendelkezésünkre bocsátásával segítette munkánkat. A József Attila Tudományegyetemmel a Szegeden rendezett algebrai konferenciák (amelyek „mini" jelzőjüket már régen kinőtték) közös megrendezésében működtünk együtt, a Kossuth Lajos Tudományegyetemtől, a Pécsi Orvostudományi Egyetemtől, a Pécsi Tanárképző Főiskolától, a Ho Shi Minh Tanárképző Főiskolától, a Bajai Vízügyi Főiskolától, a Veszprémi Vegyipari Egyetemtől, a Keszthelyi Agrártudományi Egyetemtől és az Esztergomi Tanítóképző Főiskolától pedig vidéki rendezvényeink előadóhelyiség- és szállásgondjaink megoldása terén kaptunk nélkülözhetetlen segítséget.

A KISZ Központi Bizottságával folyamatos a kapcsolatunk a kétévenként megrendezett Országos Tudományos Diákköri Konferenciákon bemutatott kiváló matematikai dolgozatok részére felajánlott díjak formájában.

A Tudományos Ismeretterjesztő Társulattal való együttműködésünk hagyományos formája a Kis Matematikus Körök szakmai irányításában való részvétel. Emellett ismételten rendeztünk közösen egyes előadásokat, emlékülséseket.

A Magyar Rádió Iskolarádió c. rovatát „Törd a fejed" feladatok megoldóinak felajánlott könyvjutalom-keret formájában támogattuk.

A velünk kapcsolatban álló intézmények nagy száma mutatja, hogy a matematika egyre növekvő társadalmi szerepe olyan sokrétű feladatok megoldását teszi szükségessé, amelyekben a széles körű összefogás vezethet csak sikerre. A belénk helyezett bizalom kötelez arra, hogy a társadalom elvárásainak minden igyekezetünkkel törekedjünk megfelelni.

11. Nemzetközi kapcsolatok

Társulatunk nemzetközi kapcsolatai a beszámolási időszakban lendületesen fejlődtek, s ennek eredményeképpen tovább nőtt a Társulat jelentősége a magyar matematika nemzetközi kapcsolatainak ápolásában.

A szocialista országok matematikai, ill. matematikai és fizikai társulataival kötött csereegyezmények sora az elmúlt időszakban a Jugoszláv Matematikusok és Fizikusok Szövetségével kötött egyez-

ménnyel gyarapodott, és felemeltük az igényeknek megfelelően a csehszlovák csereegyezmény évi keretét is. Így most csereegyezményeink a következő évi kereteket biztosítják tagtársaink kiutaztatására, ill. a partneregyesületek tagjainak fogadására: Bulgária, Jugoszlávia, NDK 20-20 nap, Csehszlovákia 50 nap, Lengyelország 60 nap.

Örvendetes, hogy további csereegyezmények megkötésére is folynak többé-kevésbé előrehaladott tárgyalások: két szovjet intézménnyel (Fiatal Tudósok Tanácsa és a Novoszibirszki Matematikai Intézet), az Osztrák Matematikai Társulattal, a Finn Matematikai Társulattal és az NSZK Matematikai Társulatával.

A csereegyezményekből adódó utazási lehetőségeket főként magas részvételi díjú kollokviumokon való részvételekre igyekszünk felhasználni, de mód nyílik tanárok tapasztalatcseréjére is, valamint fiatal matematikusok olyan rövid tanulmányútjaira, amelyek során hazánkban kevéssé művelt matematikai területeken tájékozódhatnak.

További kiutazásokra nyílt lehetőség devizatámogatással, forinttámogatással, meghívásra útiokmányok beszerzésével, ill. útiköltség-térítéssel. Ilyen formákban 1976-ban szocialista országokba 9, tőkés országokba 25 fő, 1977-ben szocialista országokba 36, tőkés országokba 28 fő utazott ki társulati kiküldetésben. (1976 májusában váratlan adminisztratív korlátozások léptek életbe, amelyeket abban az évben már nem sikerült elhárítani, innen az 1976-os kiutazások alacsony száma.)

Kiküldötteinktől általában elvárjuk, hogy előadást is tartsanak, de indokolt esetben ettől eltekintünk. Fokozottan ügyelünk arra, hogy pályakezdő fiatalokat (köztük önálló eredményt elérő egyetemi hallgatókat is) a lehetőségekhez mérten minél nagyobb számban utaztassunk.

1976-ban 50, 1977-ben 88 külföldi matematikust láttunk vendégül, ezek 46, ill. 129 előadást tartottak. Több meghívott előadó hosszabb előadássorozatot is tartott. Ez különösen alkalmasnak látszik arra, hogy matematikusaink jobban megismerkedjenek egy-egy nálunk kevéssé művelt területtel, vagy pedig a mi érdeklődési területeinken egy-egy külföldi iskola munkásságával. Ezért a jövőben is meg akarunk hívni néhány elismert, elsősorban szovjet szakembert 2—4 hetes időtartamra, előadássorozat tartására. Ebben a MTA III. Osztályától és az Oktatási Minisztériumtól kaptunk és várunk a jövőben is segítséget.

A Nemzetközi Matematikai Unióban (IMU) hazánkat az IMU-Bizottság képviseli. Ennek tevékenysége az elmúlt időszakban egyrészt a rendezvényeinkhez igényelt IMU, ill. ICMI (Nemzetközi Matematikaoktatási Bizottság) támogatása iránti kérelmek továbbításából állt, másrészt az ez év augusztusában Helsinkiben rendezendő IMU-közgyűlésen és Nemzetközi Matematikai Kongresszuson való részvételünk előkészítéséből. A beszámolási időszakban rendezett konferenciák közül az IMU támogatta az Univerzális Algebrai Kollokviumot, az ICMI pedig a Matematikatanár-képzés Problémái Konferenciát.

A Társulat értesítést kapott arról, hogy Európai Matematikai Szövetség megalakulása várható. A tervezett Szövetség tagjai matematikai társulatok lennének, a helsinki kongresszus során lesz az alakuló ülés. Ezen Társulatunk is részt vesz majd. A Szövetség alapszabály- és működési tervezetével kapcsolatos állásfoglalásunkat még ezt megelőzően írásban terjesztjük elő.

Mindebből látható, hogy Társulatunk döntő tényező a hazai matematika nemzetközi képviseletében. Amilyen örvendetes e kapcsolatok állandó fejlődése, annyira megnöveli gondjainkat az ezekkel kapcsolatos adminisztratív teendők intézése, ami a Társulat apparátusán kívül az elmúlt időszakban elsősorban a Külügyi Bizottság titkárára rótt már-már elviselhetetlen terhet. A jövőben ennek a sokrétű munkának ellátása egyrészt az apparátus megerősítését teszi elkerülhetetlenné, másrészt szükségessé teszi a Külügyi Bizottság további tagjainak bevonását az operatív munkába, csökkentve ezzel a titkárra jutó terhelést.

12. A vezető szervek működése

Az alapszabály és az ügyrend keretei az elmúlt időszakban is megbízhatóan szabályozták a Társulat ügyvitelét. A választmány évente kétszer, az Elnökség általában kéthavonként tartott ülést. Tovább nőtt a vezetőségi ülések látogatottsága (igazolva ezzel a legutóbbi tisztújítás választásainak körültekintő előkészítését), így üléseink elenyésző kivétellel határozatképesek voltak. Törekedni kell a mostani választások alkalmával is arra, hogy olyan tagtársainkat küldjük a vezető szervekbe, akik tudnak és akarnak időt szakítani a Társulat munkájának irányításában való részvételre.

A hosszabb időre ideiglenesen távollevő vezetőségi tagok helyettesítését az alapszabály rendelkezéseinek megfelelően oldottuk meg.

Ebben az időszakban is folyamatosan tájékoztattuk a Választmány és az Ellenőrző Bizottság tagjait a Társulat munkájáról az időközönként kiadott tájékoztatókban. Ezek elkészítésében, s a főtitkári teendők sok más vonatkozásában is jelentős segítséget nyújtott Petruska György főtitkárhelyettesi minőségben; őt külföldi tanulmányútja alatt Urbán János helyettesítette nem kisebb igyekezettel és eredménnyel.

13. A központi apparátus munkája

Ebben az időszakban sem csökkent, sőt a Társulat tevékenységének szélesedésével inkább fokozódott a sokrétű társulati munka során adódó rengeteg szervezési és adminisztratív teendő ellátásával járó gond és felelősség. A Társulat szervezőtitkára volt az a pillér, amelyen ennek a munkának az irányítása s jelentős részben a végrehajtása is nyugodott; sajnálatosan hosszúra nyúlt betegszabadságát leszámítva kiválóan ellátta ezt a bonyolult feladatkört, nem egyszer szabad idejének jelentős részét is feláldozva.

Az apparátus többi munkatársainak személyében többször is állt be változás. Minden ilyen alkalommal, s főleg olyankor, amikor egy-egy állás hosszabb ideig is betöltetlenül állt, a többiek vállára rendkívül súlyos teher nehezedett, s helytállásukért minden köszönet megilleti őket. Elsősorban a nemzetközi kapcsolatokkal együttjáró sok teendő feltétlenül igényli az apparátus megerősítését, amihez a MTESZ mindig tapasztalt segítőkészségére van szükség. Csak ezután remélhető, hogy a fluktuáció csökkenni, az egy főre eső terhelés elviselhető mértékűvé válni, és a Társulat tartalmi munkájához méltó szintű adminisztráció állandósulni fog.

Hajnal András pénztárosi és Merza József Ellenőrző bizottsági jelentése után a Társulat tiszteletbeli elnökeiül választotta Erdős Pált és Fejes Tóth Lászlót.

Ezután a jelölő bizottság jelentését ismertette Szabados József, majd a szavazatszámláló bizottság megválasztása következett. A továbbiakban a küldöttek az alapszabály módosítására tett főtitkári javaslatot hagyták jóvá, mely szerint a korábbi egyévenként kötelező közgyűlésről a legalább háromévenkénti összehívásra tér át a Társulat. Ennek következtében az éves költségvetés jóváhagyása a Választmány hatáskörébe megy át.

Ezután Pelikán József — a szavazatszámláló bizottság elnöke — a szavazás módját ismertette majd a küldöttek leadták szavazataikat.

A délutáni program Révész Pál „Vesztett-e sokat valaha az, ki sokat nyere?" című modern valószínűségszámítási előadásával kezdődött. A közérthető, élvezetes előadás nagy érdeklődést váltott ki. Ezután került sor a jelentések feletti vitára, melyben többek közt az apparátus túlterheltsége, a Magyarországra (a Társulat meghívására) beutazó nagyszámú külföldi előadó problémája, a kollokviumok szervezése és az anyagukból kiadott kötetek kérdése, a számítástudomány és számítástechnika hazai gondjai, a Társulat előadásainak látogatottsága, az általános iskolások számára készítendő matematikai folyóirat, valamint a felsőtagozatosoknak szervezendő verseny kérdése szerepelt. Turi Istvánné hangsúlyozta azt a jelentős szerepet, amit a Társulat a matematika oktatásával kapcsolatos kérdésekben betölt, és javasolta, hogy az általános iskolások részére indítandó folyóiratban a matematika a fizikával, kémiával, biológiával együtt jelentkezzék. Ő is rátért a kollokviumok kérdésére és a kollokviumok szervezésének fontossága mellett a társulati kapacitás korlátaira hívta fel a figyelmet. Javasolta, hogy a Társulat a jövőben többet foglalkozzon a számítástechnikának a Társulat érdeklődési körébe tartozó területeivel. Részletesen foglalkozott az apparátus helyzetével, és a kollokviumok szervezési kérdéseivel. A vitát Császár Ákos összefoglaló hozzászólása zárta le. Visszatért a vitában szóvátett valamennyi problémára és részletesen megválaszolta a felmerült kérdéseket. A Közgyűlés a főtitkári és a pénztárosi jelentést elfogadta és a lelépő vezetőség részére a felmentvényt megadta. Ezután a Közgyűlés megbízta a társulati folyóiratok szerkesztő bizottságait, majd kijelölte az Elnökségben képviselt négy vidéki tagozatot, ezek a Hajdú-Bihar, Szabolcs-Szatmár, Zala és Fejér megyei tagozatok.

A következő felszólalásban Pelikán József ismertette a szavazatszámláló bizottság jelentését. A küldöttek az alábbi összetételű vezetőséget választották meg:

Tiszteletbeli elnökök: Alexits György, Erdős Pál,
Fejes Tóth László, Rédei László

Elnök: Surányi János
Budapesti alelnök: Kóváry Károly — *Vidéki alelnök:* Gyires Béla
Főtitkár: Császár Ákos
Dunáninneni titkár: Pálfy Sándor — *Dunántúli titkár:* Pálmay Lóránt
Pénztáros: Hajnal András

Tud. Szakoszt.	*Mat. Alk. Szakoszt.*	*Okt. Szakoszt.*
Elnök: Révész Pál	Prékopa András	Reményi Gusztávné
Alelnök: Győry Kálmán	Vincze Endre	Békefi Zsuzsa
Titkár: Pelikán József	Recski András	Halmos Istvánné

Külügyi Bizottság:

Elnök: Fried Ervin

Titkár: Juhász István

Tagok: Freud Róbert
Kroó András
Laczkovich Miklós
Pintz János
Bakó Zsuzsa
Csákány Béla
Demetrovits János
Szász Domokos

Póttagok: Losonczi László
Márki László
Fenyő István

Ellenőrző Bizottság:

Elnök: Knoll János

Titkár: Merza József

Tagok: id. Makai Endre
Sebestény Zoltán
Daróczy Zoltán

Póttagok: Moór Arthur
Hódi Endre

Fegyelmi Bizottság:

Elnök: Szénássy Barna

Titkár: Lee Anna

Tagok: Tomor Benedek
Szakáll Péter

Póttagok: Pollák György
Szvetits Zoltán

IMU Bizottság:

Elnök: Szőkefalvi-Nagy Béla

Titkár: Lovász László

Tagok: Császár Ákos
Surányi János
Szendrei János
Hajnal András
Tandori Károly
Rapcsák András
Révész Pál
T. Sós Vera
Varga Tamás
Leindler László

Választmányi Tagok:

Alpár László
Andrásfai Béla
Babai László
Bakos Tibor
Benczúr András
Gacsályi Sándor
Gécseg Ferenc
Hajnal Imre
Herczeg János
Katona Gyula
Kis Ottó
Lippner György
Megyesi László
Nemetz Tibor
Petruska György
Pirkó Béla
Pósa Lajos
Reményi Gusztáv
Reiman István
Schmidt Tamás
Szalay Mihály
Szendrei János
Székely Gábor
Tusnády Gábor
Urbán János
Varga Tamás

Póttagok:

Ács Pál
Kovács László Béla
Bognár Mátyás
Vincze István
Tamássy Lajos
Scharnitzky Viktor
Gábos Adél
Sárközy András

A Társulat lapjainak felelős szerkesztői:

Császár Ákos, Fried Ervinné, Hajnal András, Hódi Endre, Lovász László.

Az új tisztségviselők megbízatása 1980-ban jár le, ekkor lesz – az MTESZ vezetőségválasztó közgyűlésével egyeztetve — a következő tisztújító közgyűlés.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT NAGYRENDEZVÉNYEI 1978-BAN

CSILLAG PÁL TALÁLKOZÓ (BALATONLELLE, május 31.—junius 4.)

A találkozón a hagyományoknak megfelelően 130, harminc évnél fiatalabb matematikus vett részt. 28-an tartottak előadást a matematika legkülönbözőbb elméleti és alkalmazott fejezeteiből; többek között algebrai, analízis, geometriai, kombinatorikai, számelméleti, valószínűségszámítási előadások hangzottak el. A 15 perces előadásokat 5 perc vita követte. A BME KISZ-tábora adott ismét otthont a találkozónak. A szakmai programot filmvetítés, fonyódi kirándulás és bankett egészítette ki. A találkozó jó alkalom volt arra, hogy a fiatal matematikusok személyesen találkozzanak, és megismerjék egymás eredményeit.

RÁTZ LÁSZLÓ VÁNDORGYŰLÉS (SZOMBATHELY, július 4—7.)

A vándorgyűlésen mintegy 380 fő vett részt.

A korábbi gyakorlatnak megfelelően három szekcióban folytak az előadások az alsó-, ill. felsőtagozatos és középiskolai tanárok számára. A megnyitó napján Lovász László tartott előadást, majd főképp az új tantervek sikeres bevezetését elősegítő tájékoztató, továbbképző és módszertani témák kerültek napirendre. Örvendetes, hogy sok fiatal pedagógus résztvevő érdeklődött a Társulat által kezdeményezett és a MTA-val közösen végzett középiskolai matematikatanítási kísérlet iránt. Jól sikerült városnézés, kirándulások tették változatossá a programot, majd közös vacsora, hangulatos este zárta a vándorgyűlést.

TOPOLÓGIA KOLLOKVIUM (BUDAPEST, augusztus 7—12.)

A SZÁMOK székházában rendezett kollokviumon 24 ország 145 matematikusa vett részt, kísérőkkel együtt több, mint 200 főt láttunk vendégül. Az előadások négy szekcióban folytak: 1. halmazelméleti topológia, 2. általános topológia, 3. algebrai topológia, 4. a topológia alkalmazásai és kapcsolatai egyéb témákkal. Összesen 128 előadás hangzott el, melyek közül 6 plenáris (45 perces) előadás, 20 meghívott (30 perces) előadás és 102 további (15 perces) előadás volt. Minden előadást 5 perces vita követett. Az 1. és 3. szekció témája viszonylag egységes volt, míg a 2. és különösen a 4. szekcióban vegyesebb témák kerültek napirendre. A kollokvium tudományos programja magasszinvonalú volt, kiváló előadások hangzottak el, számos nagynevű, illusztris matematikus volt a résztvevők között. Rendkívül örvendetes, hogy a Szovjetunió nagylétszámú küldöttséggel (14 fővel) képviseltette magát. A résztvevők kirándulás keretében megtekintették Visegrádot és Esztergomot, és ezen kívül egy bankettel nyújtottunk szervezett szórakozási lehetőséget. A SZÁMOK székház ideális körülményeket biztosított a kollokvium számára, de a magas árak miatt mégsem ajánlható, hogy a Társulat itt további kollokviumokat rendezzen.

DIÁKKÖRI NYÁRI ISKOLA (NYÍREGYHÁZA, augusztus 14—19.)

A nyári iskolán 44 fő vett részt, akik a Bessenyei György Tanárképző Főiskola Kollégiumában laktak, és az előadások a Főiskolán zajlottak. Az ELTE, JATE és KLTE matematikus hallgatói közül 33, 4, ill. 3 fő utazott el a nyári iskolára, továbbá 4 meghívott előadó.

Az alábbi előadások hangzottak el:

URY LÁSZLÓ:	Bevezetés
SOÓS GYULA:	Riemann sokaságok
SOÓS GYULA:	A téridő differenciálgeometriája
SZENTHE JÁNOS:	A transzformáció csoportok modern elmélete
SZABÓ ZOLTÁN:	Egységosztási tételek
KOLLÁR JÁNOS:	Elliptikus görbék
SZŰCS ANDRÁS:	Kobordizmuselmélet

A tudományos programot nyírbátori kirándulás tette változatossá, és a szervezők ingyenes strandjegyekkel teremtettek sportolási lehetőséget.

PONTFOLYAMATOK ÉS SORBANÁLLÁSI MÓDSZEREK KOLLOKVIUM (KESZTHELY, szeptember 4—7.)

A kollokviumon, melyet a Bernoulli Society nevével támogatott, 15 külföldi ország képviseletében 44 matematikus jelent meg, s hozzájuk társult a 20 magyar résztvevő. Különösen kiemelkedő a szovjet résztvevők magas száma (10 fő) és talán csak az olasz matematikusok hiánya volt szembetűnő. A résztvevők névsorában a tudományág számos kiemelkedő képviselőjének neve is megtalálható. A kollokvium három fő témával foglalkozott: alkalmazott és elméleti tömegkiszolgálási modellek, pontfolyamatok elmélete, véletlen pontmezők.

Az alábbi előadások hangzottak el:

B. V. GNEDENKO: Some problems in queueing theory
D. A. DAWSON: Geostochastic population models
H. ROTZEÉN: Some point processes in extrem value theory
G. LINDGREN: Point processes generated by the exits of a multivariate Gaussian process and extremal theory for the X^2-process
JU. M. KABANOV: Controlled point processes
T. ROLSKI: Relations between a stochastic process and imbedded chains
R. REBOLLEDO: Martingale methods in asymptotic queueing theory
R. L. DISNEY: Some problems of queues with feedback
E. A. VAN DEOZN: Stochastic monotonicity of birth and death processes
A. HORDIJK: Weak convergence of stochastic processes and its application to netwworks of queues
P. FRANKEN: Stochastic processes with applications in queueing and stability
E. V. CHEPURIN: On goodness-of-fit tests for renewal processes
K. FLEISCHMANN: Continuity properties of clustered distributions and application in spatially homogeneous branching processes
V. V. LAWRENCE: Estimations of convergence rate and stability for regenerative processes
N. D. VERAVERBEKE: A lemma on subexponential behaviour of the compound Poisson distribution
A. J. LAWRENCE: A class of exponential point processes ERMA (p, q), with autoregressive and moving average dependence
P. LANSKY: A note to the selective interaction model of single neuron fiving trains
I. KUN: Mathematical modelling of a terminal system
K.-H. FICHNER: Convergence theorems for time evolutions of simple one-dimensional particle systems
J. FRITZ: Stochastic dynamics of infinite systems
GY. LIPPNER: First order stochastic dynamic of one-dimensional infinite point systems
H. FÖLLMER: Harmonic functions of interacting Markov chains
J. TOMKÓ: Semi Markovian analysis of E_k G 1 and G E_k 1 queues with finite waiting room
S. I. ROSENLUND: Passage time distributions for the M/M/n/N queue and for a birth-death branching process
H. TASMANOV: On the asymptotic behaviour of the queue length and waiting time for M/G/1/N queues
K. KRICKEBERG: Statistical problems about spatial point processes
J. P. RASSON: Some geometrical aspects of the entropy of line processes
E. GLÖTZL: Gibbsian description on point processes
B. RAUCHENSCHANDTNER —A. WAKOLBINGER: Some aspects of Papangelou kernel
M. ARATÓ: On a disorder problem
J. PERGEL—A. BENCZÚR: A queueing model for calculating extra computer time caused by machine failures
S. STIDHAM: On relation between time averages and customer averages in queues
J. LORIS—TEGHEM: An M/G/1 queueing system in which the service times depend on the queue length
H. C. TIJMS: A controlled damage queueing problem
D. S. SILVESTROV: Large deviation limit theorems for first passage times
A ZAHARIN: Some stochastic models with dependence on the part
N. MUHITGINOVA: On the reliability of a standby system
W. SCHLEE-KÖSSLER: A single server queue with two types of customers and alternating service in pieces of K_1 and K_2
F. ZITEK: On some queue disciplines

MATEMATIKAI LOGIKA A PROGRAMOZÁSBAN (SALGÓTARJÁN, szeptember 11—15.)

A kollokvium jelentős érdeklődést váltott ki, mert ezen a szűkebb területen első ízben nyílt alkalom a téma európai szakemberei számára egy szélesebb körű találkozóra.

A 30 külföldi és 50 magyar résztvevő számára tartott előadások téma szerint három főbb területre csoportosíthatók: 1. a szemantika megadásának logikai, modell-elméleti módszerei; 2. a klasszikus logikának programozási fogalmakkal való kiegészítéséből adódó algoritmikus logika és alkalmazásai; 3. a logikán alapuló programozási nyelvek (PROLOG) tervezésének, implementálásának problémái. Örvendetes, hogy a magyar matematikusok jelentős eredményekről számoltak be, elsősorban az első és a harmadik témakörben. A hivatalos programon kívül egy esti kerekasztal beszélgetésre is sor került, ahol elsősorban a gyakorlati alkalmazási lehetőségek kerültek megvitatásra.

A kollokviumon az alábbi előadások hangzottak el:

A. SALWICKI: Algorithmic theories of data structures representing sets
R. PLIUSKEVICIUS: On the Genzen-type theory for program analysis and synthesis
L. M. PEREIRA: The declarative and operational semantics
A. KRECZMAR: Algorithmic and dynamic logic
V. M. PONOMARJOV—V. V. ALEXANDROV: Constructive approach to knowledge representation
J. A. BERGSTRA—TH. P. VAN DER WWEIDE: Process semantics of algebraic datatypes
T. GERGELY: May the theory of programming be first order?
A. OBTULOWICZ: Algebraic theories of lambda calculi
J. ASZALÓS: Axiomatic description of multi-level program specifications
Z. MARKUSZ—M. SZŐTS: On sematics of programming defined by universal algebraic tools
B. COURCELLE: Equational theories and equivalences of programs
J. A. BERGSTRA: On the operational comparison of algebraic datatypes
P. ECSEDI-TÓTH: On logical definition of programming semantics
G. DÁVID: Structure logic
A. RIHA: A certain type of dependency trees transformations
H. ANDRÉKA: The model theory of any logic of programming can be proved to be non-classical
L. URY: Logical base for correct programming
W. RATAJCZAK: LOGLAN=a high level programming language
D. SZCZEPANSKA: SIMULATION type in Loglan—77
K. BALOGH: An interactive program verifier
P. SZEREDI: PROLOG in Hungary; Loops in PROLOG
I. FUTÓ—F. DARVAS—J. SZEREDI—GY. MÁTRAI: Knowledge-based programs for drug design problem solving
M. BRUYNOOGHE: Intelligent backtracking for an interpreter of Horn clause logic programs
M. GRABOWSKI: Full weak second order logic versus algorithmic logic
I. RATKÓ: On optimation problems of logical expressions in programming language
A. I. LITWINIUK: CPL—systems programming language
H. OKTABA: The semantics of parallel in Loglan—77
G. MIRKOWSKA: Algorithmic properties of non-deterministic programs
P. A. MIGLIOLI—M. ORNAGHI: A logically justified model for non-deterministic and parallel computations
S. RADZISZOWSKI: Complexity of parallel computations
L. STAPP: Some remarks on correctness proving for parallel programs
A BERTONI—G. C. MAURI—P. A. MIGLIOLI: Model theoretic aspects of abstract data specification
L. BANACHOWSKI: On implementations of programs with abstract data types
F. M. BROWN (előadta L. M. PEREIRA): A semantic theory for logic programming
O. STEPÁNKOVA: Normal form of proof of certain formulas of situations calculus
J. MESEGUER (előadta B. COURCELLE): Factorizations, completions and colimits for posets
I. NÉMETI: Algebraic observations in connection with least fixed point semantics

Salgótarján városa kellemes környezetet nyújtott a kollokvium lebonyolításához, de a TIT előadótermében folyó előadásokat gyakran megzavarta a vasút zaja. A résztvevők két kisebb és egy nagyobb kiránduláson ismerkedtek meg a város és a környék nevezetességeivel. A kirándulások és a záróbankett hozzájárultak a kollokvium egészét jellemző jó hangulathoz.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT RENDEZVÉNYEI

(1978. január 1.—november 15.)

Január 4.:	Arany Dániel versenybizottság ülése
Január 6.:	Pontfolyamatok bizottság ülése
Január 9.:	URBÁN János: Halmazok (középisk. tanároknak szóló előadássorozat)
Január 9.:	Prof. Rolf WASÉN (Svédország): Arithmetic problems in algebraic number fields
Január 9.:	Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny I. fordulója megírása
Január 11.:	VARGA Tamás előadása ált. iskolai tanároknak
Január 12.:	Alkalmazott szakosztály vezetőségi ülése
Január 13.:	Prof. Robert TIJDEMAN (Hollandia): Difference sets of integers
Január 20.:	Ifjúsági Matematikai Kör ülése témája: Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny I. ford. feladatai
Január 23.:	URBÁN János: Halmazok (középiskolai tanároknak szóló előadássorozat)
Január 24.:	Farkas Gyula Emlékdíj bizottság ülése
Január 25.:	KOVÁCS Csongorné előadása általános isk. tanároknak
Január 25.:	Oktatási Szakosztály Vezetősége megbeszélése
Január 26.:	BAKÓ Zsuzsa—SZABÓ Zsuzsa—VIDÉKI Gusztávné: Beszámoló a középiskolai kísérlet első osztályaiban folyó munkáról
Január 30.:	Dr. P. BLEHER (SZU): Automodell-mezők
Január 31.:	Dr. P. BLEHER (SZU): Toeplitz mátrixok
Január 31.:	Külügyi bizottság ülése
Február 1.:	Dr. P. BLEHER (SZU): Hierarchikus modellek (háromtagú előadássorozat)
Február 3.:	Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny I. ford. megírása
Február 3.:	MTESZ díj bizottság ülése
Február 6.:	HALMOS Istvánné: Függvények (középiskolai tanároknak szóló előadássorozat)
Február 8.:	KOVÁCS Csongorné: Geometria (Ált. isk. tanároknak szóló előadássorozat)
Február 10.:	MOLNÁR Emil: Rekurzióval értelmezett sorozatok (Ifjúsági Mat. Kör ülése)
Február 10.:	Grünwald Géza Emlékdíj bizottság ülése
Február 16.:	Elnökségi ülés
Február 17.:	FILEP László: Farkas Gyula élete és munkássága, az 1977. évi Farkas Gy. Emlékdíjak kiosztása
Február 20.:	Prof. G. BETSCH (NSZK): Near-rings of group mappings
Február 20.:	BARTAL Andrea: Függvények, algebra (középisk. tan. szóló előadássorozat)
Február 20.:	Prof. R. M. WEISS (USA): The authomorphism group of a very symmetric graph
Február 22.:	KOVÁCS Csongorné: Geometria (Ált. isk. e. a. sor.)
Február 23.:	„Hírharang" — vándorgyűlési híradó — szerkesztő bizottság megbeszélése
Február 23.:	Oktatási bizottság ülése
Február 23.:	DÉKÁNY Veronika: Beszámoló a középiskolai kísérlet IV. osztályos tapasztalatairól
Március 3.:	BERKES István: Megoldhatatlan geometriai szerkesztésekről (Ifj. Mat. Kör ülése)
Március 6.:	PÁLFALVI Józsefné: Algebra (középisk. tan. e. a. sor.)
Március 7.:	Prof. E. WIRSING (NSZK): Characterization for the number theoretic function log *n*.
Március 7.:	Grünwald Géza Emlékdíj Bizottság ülése
Március 8.:	VARGA Tamás: Számtanalgebra (Ált. isk. tan. e. a. sor.)
Március 10.:	CZIBERLE Tibor: A potenciálelmélet néhány hidromechanikai alkalmazása (Alk. Mat. Szo. E. a. sor.)
Március 13.:	D. M. CARLSON (USA): Minimax and interlacing theorems for matrices
Március 14.:	1978. évi végleges költségvetés megbeszélése
Március 14., 15.:	Prof. H. P. SCHUCKEWEI (NSZK): On the approximation of algebraic numbers by rationals and diophantine equations; On some problems in nonlineer diophantine approximations.
Március 16.:	„Hírharang" 1978-as Rátz László vándorgyűlési híradó szerkesztő biz. ülése
Március 20.:	T. Sós Vera: Analízis a középiskolában (középisk. tanf. e. a. sor)
Március 21.:	Arany Dániel Mat. Tanulóverseny I. bizotts. ülése
Március 21.:	Külügyi bizottság ülése
Március 22.:	Arany Dániel Mat. Tanulóverseny II. bizotts. ülése
Március 23.:	DEÁK Ervin: Az általános topológia elemeinek beépítése a középiskolai tananyagba (középisk. t. e. a. sor)

Március 24.:	Matematikai logika a programozáselméletben c. kollokvium szervező bizottsága ülése
Március 24.:	REIMAN József: Árvizek jellemző adatainak matematikai statisztikai elemzése (Alk. mat. Szo. e. a. sor)
Március 29.:	R. L. DOBRUSIN (SZU): A nem-egyensúlyi statisztikus mechanika matematikai problémái I.
Március 30.:	R. L. DOBRUSIN (SZU): A nem-egyensúlyi statisztikus mechanika matematikai problémái II.
Március 31.:	R. L. DOBRUSIN (SZU): A nem-egyensúlyi statisztikus mechanika matematikai problémái III.
Március 31.:	Arany Dániel Mat. Tanulóverseny II. biz. ülése
Április 5.:	D. E. DAYKIN (Anglia): A survey of recent results concerning inequalities in cosets and lattices
Április 6.:	Ifjúsági Matematikai Kör Tavaszi Ankétja: de.: PELIKÁN József: Polinomokkal definiált algebrai alakzatokról du.: Az Országos Tanulmányi Verseny döntőjének fel.
Április 7.:	de.: ANDRÁSFAI Béla: Gráfelméleti szélsőértékfeladatok
Április 7.:	ANDRÉKA Hajnal: Programhelyességbizonyítási módszerek modellelméleti vizsgálata (Alk. Mat. Szo. e. a. s.)
Április 7.:	Választmányi ülés
Április 12.:	„Hírharang vándorgyűlési híradó szerk. biz. ülése
Április 17.:	BARTAL A.—PÁLFALVI J.-né: Geometria az első osztályos középiskolai kísérleti anyagban (középisk. tan. e. a. sorozat)
Április 20.:	DEÁK Ervin: Az általános topológia elemeinek beépítése a középiskolai tananyagba (középisk. tan. e. a. sor)
Április 21.:	MAKAY Árpád: Inkluzív információ-rendszerek algebrai modelljei
Április 21.:	BÖRÖCZKI Károly: Elhelyezési problémákról; 1977. évi Szele T. emlékérem és az 1977. évi Grünwald G. Emlékdíj kiosztása
Április 24.:	Beke Manó Emlékdíj bizottság ülése
Április 24.:	E. ARJAS (Finnorsz.): On stochastic approximations in the theory of queues Debrecenben: Semi-Markov theory-problems connected with first exit times
Április 26.:	1979. évi Statisztikus fizika kollokvium szerző biz. ülése
Április 28.:	LACZKOVICH Miklós: Elemi függvénytan (I. M. K. ülése)
Április 28.:	H. MITSCH (Ausztria): Derivationen auf Verbandshalbgruppen und formal Sprachen
Május 3.:	Topológia kollokvium szerv. biz. ülése
Május 4.:	DEÁK Ervin: A topológia elemei a középiskolai tananyagban (Középisk. t. e. a. sor.)
Május 5.:	BAJCSAY Pál: A spline-interpolációról és néhány alkalmazásáról (Alk. Mat. Szo. e. a. sor)
Május 5.:	Prof. E. LUKÁCS (USA): Az egyenletes eloszlás elmélete
Május 8.:	H. LAUSCH (Ausztria): Some new applications of transfer in the theory of soluble groups
Május 9.:	Függvények, sorok, operátorok konferencia 1980. szerv. biz. alakuló ülése
Május 9.:	Külügyi bizottság ülése
Május 15.:	PÁLMAY Lóránt: Geometria a középiskolában (középisk. tan. e. a. sorozat)
Május 15.:	Dr. P. GANSSLER (NSZK): Selected topics on empirical processes; A summary of some recent results on Glivenko-Cantelli congruence
Május 15.:	Dr. H. HASSE (NSZK): Über einige ungelöste Probleme aus der elementaren Zahlentheorie
Május 15.:	Dr. D. GRONAU (Ausztria): Meromorphic solutions of linear partial differential equations
Május 19.:	Elnökségi ülés
Május 22.:	F. SIK (CSSR): Der Schreirer-Zassenhaus'sche Satz für Algebren
Május 22.:	Rényi Kató Emlékdíj bizottság ülése
Május 24.:	Arany Dániel II. bizottság ülése
Május 24.:	Dr. G. GENDERLEIN (NDK): Clusteranalysis
Május 24.:	Prof. R. MCKENZIE (USA): Old problems and new directions in Universal Algebra
Május 29.:	Beke Manó Emlékdíj bizottság ülése
Május 29.:	Prof. Sz. B. SLOSZMAN (SZU): Gibbsian fields, Gibbsian states and their symmetries

Május 30.:	Prof. Dr. G. MATTHIESSEN (NSZK): Algebra alkalmazásai a számítástudományban
Május 30.:	Közgyűlésen megválasztandó tisztségviselőket jelölő bizottság ülése
Május 30—Június 3.:	Csillag Pál Szimpózium, Balatonlelle
Május 31.:	Budapesti küldötteket jelölő bizottság ülése
Június 5.:	Prof. K. ISÉKI (Japán): On some new algebras
Június 9.:	Közgyűlésre küldöttválasztó ülés
Június 9.:	BJMT—ELTE végző mat-fiz., fiz-kém. hallgatók klubdélutánja; Sós Elemér és CSÁKÁNY Antalné: A fizikatanítás tervszerűsítésének kérdéseiről URBÁN János: A középiskolai matematikatanítás reformja
Június 10.:	ARANY Dániel Matematikai Tanulóverseny eredményhirdetése
Június 12.:	Prof. G. WILDENHEIN (NDK): Potentionaltheoretic aspects in the theory of boundary value problems of elliptic differential equations of higher order
Június 12.:	Prof. R. A. DAY (Canada): Congruence varieties
Június 12.:	Prof. H. NIEDERREITER (Ausztria): Pseudo-random numbers
Június 15.:	Prof. H. NIEDERREITER (Ausztria): Applications of exponential sums to algebraic coding theory
Június 16.:	Prof. A. CHARNES (USA): A Dual Optimization Framework for some Problems of Information Theory and Statistics
Június 21.:	Ellenőrző bizottság ülése
Június 16.:	1979. évi Didaktika Konferencia szerv. biz. ülése
Június 22.:	Topológia Kollokvium szerv. biz. ülése
Június 22.:	Tisztújító küldöttközgyűlés (ea.: RÉVÉSZ Pál: Vesztett-e sokat valaha az, ki sokat nyere? (A fej vagy írás játék és a modern valószínűségszámítás))
Június 30.:	Végző matematika szakos hallgatók klubdélutánja; SZABÓ ÁRPÁD előadása
Július 4.:	Prof. F. FORTE (Canada): Functional equations in deriving non symmetric entropies
Július 4—7.:	Rátz László Vándorgyűlés, Szombathely
Július 6.:	Külügyi bizottság ülése
Július 7.:	G. COHEN (Franciaország): Permutations and coding
Július 26.:	C. RYAVEC (USA): The use of integral operators in Prime Number Theory
Július 28.:	C. RYAVEC (USA): Some problems and results in Fourier analysis
Július 28.:	R. S. FREESE (USA): Variety of all modular lattices is not generated by its finite member
Augusztus 7—12.:	Topológia Kollokvium
Augusztus 16.:	ARHANGELSKII, A. V.: Some results and problems in topology
Augusztus 14—19.:	Diákköri Nyári Iskola, Nyíregyháza
Augusztus 22.:	Pontfolyamatok Kollokvium szerv. biz. ülése
Szeptember 4—8.:	Pontfolyamatok és tömegkiszolgálás c. kollokvium, Keszthely
Szeptember 4.:	M. HARADA (Japán): *a)* Small ring monomorphism *b)* Factor category of intercomposable modules
Szeptember 5.:	N. SCHMITZ (NSZK): Recent results in the sequental analisys
Szeptember 6.:	F. JELINEK (USA): Self-organization of models of speach processes from upserved data
Szeptember 10—15.:	Matematikai logika a programozáselméletben kollokvium, Salgótarján
Szeptember 12.:	R. WILLE (NSZK): Matematika és zeneelmélet
Szeptember 12.:	B. SCHWEITZER (USA): When is $f(f(z))=az^2+bz+c$ for all z?
Szeptember 13.:	R. WILLE (NSZK): Milyen hálók rajzolhatók le?
Szeptember 13.:	BERKES István: Valószínűségszámítási alapok (Fejezetek a mat. stat. alk.-ból tanf.)
Szeptember 15.:	BÁRTFAI Pál: Valószínűségszámítási alapok (Fejezetek a mat. stat. alk-ból tanf.)
Szeptember 20.:	BERKES István: Valószínűségszámítási alapok (Fejezetek a mat. sat. alk.-ból tanf.)
Szeptember 20.:	VINCZE István: Statisztikai alapok
Szeptember 21.:	R. F. ALBRECHT (Ausztria): Eine allgemeine Theorie des gerundeten Rechnens
Szeptember 21.:	F. N. SEVRIN (SZU): Végességi és végtelenségi feltételek félcsoportokban
Szeptember 22.:	BÁRTFAI Pál: Valószínűségszámítási alapok CSÁKI E.: Statisztikai alapismeretek (Fej. a mat. stat. a.-ból tanf.)
Szeptember 22.:	CSIRMAZ László: Beszámoló a XXI. Nemz. Mat. Diákolimpiáról (IMK ülése)
Szeptember 22.:	Beszámoló a szverdlovszki algebrai szemináriumon folyó kutató munkáról
Szeptember 22.:	I. LEHMANN (NDK): Umkehroperationen

Szeptember 27.:	BERKES István: Valószínűségszámítási alapok VINCZE István: Statisztikai alapismeretek (Fej. a mat. stat. a-ból tanf.)
Szeptember 28.:	Külügyi Bizottság ülése
Szeptember 29.:	BÁRTFAI Pál: Valószínűségszámítási alapok CSÁKI Endre: Statisztikai alapismeretek (Fej. a mat. stat. a-ból tanf.)
Október 2.:	M. WALDSCHMIDT (Franciaorsz.): Transcendence of the values of entire functions
Október 3.:	R. VIERTL (Ausztria): Ringe messbarer Funktionen
Október 3.:	W. WERTZ (Ausztria): Einige neue Ergebnisse auf Gebiete der Dichteschätzungen
Október 3.:	1979. évi „A matematika mindenkié" c. kollokvium szerv. biz. ülése
Október 4.:	BERKES István: Valószínűségszámítási alapok VINCZE István: Statisztikai alapismeretek (Fej. a mat. stat. a-ból tanf.)
Október 6.:	BÁRTFAI Pál: Valószínűségszámítási alapok CSÁKI Endre: Statisztikai alapismeretek (Fej. a mat. stat. a-ból tanf.)
Október 6.:	Schweitzer M. Emlékverseny biz. ülése
Október 6.:	M. H. van EMDEN: Applications of Model Theory in Semantics of Programming
Október 9.:	Olimpiai előkészítő szakkörök vezetőinek megb.
Október 11.:	K. L. E. NICKEL (NSZK): Ein Intervall-Kollokationsverfahren zur Lösung von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen
Október 11.:	R. LANG (NSZK): On the asymptotic behaviour of infinite gradient systems
Október 11.:	VINCZE István: Statisztikai alapismeretek SZÉKELY Gábor: Regressziós módszerek (Fej. a mat. stat. alk-ból tanf.)
Október 11.:	Kürschák József matematikai emlékverseny bizottságának megbeszélése
Október 12.:	Elnökségi ülés
Október 13.:	ERDŐS Pál: Problémák és eredmények a kombinatorikus geometriában (IMK ülése)
Október 13.:	CSÁKI Endre: Statisztikai alapismeretek BOGNÁR Jánosné: Regressziós módszerek (Fej. a mat. stat. alk-ból tanf.)
Október 14.:	Y. DUPAIN (Franciaország): Sequences with small discrepancy
Október 18.:	H. SACHS (Ausztria): Lineare Komplexe in isotropen Räumen
Október 18.:	SZÉKELY Gábor: Regressziós módszerek SARKADI Károly—VINCZE István: Minőségellenőrzés (Fej. a mat. stat. alk-ból tanf.)
Október 20.:	BOGNÁR Jánosné: Regressziós módszerek SARKADI Károly—VINCZE István: Minőségellenőrzés (Fej. a mat. stat. alk-ból tanf.)
Október 20.:	MÁRKUSZ Zsuzsa—SZŐTS Miklós: Programozási nyelvek szemantikájának megoldása univerzális algebrai eszközökkel
Október 21.:	Kürschák József matematikai emlékverseny megírása
Október 24.:	C. ROOS (Hollandia): A general theory for regularities of rings
Október 25.:	SZÉKELY Gábor: Regressziós módszerek SARKADI Károly—VINCZE István: Minőségellenőrzés (Fej. a mat. stat. alk-ból tanf.)
Október 26.:	Grünwald Géza emlékdíj bizottság ülése
Október 27.:	BOGNÁR Jánosné: Regressziós módszerek SARKADI Károly—VINCZE István: Minőségellenőrzés (Fej. a mat. stat. alk-ból tanf.)
Október 27.:	Statisztikus fizika kollokvium szervező bizottságának ülése
Október 27.:	M. HEJNY (Csehszlovákia): Genesis of mathematical thought
November 1.:	SZÉKELY Gábor: Regressziós módszerek SARKADI Károly—VINCZE István: Minőségellenőrzés (Fej. a mat. stat. alk-ból tanf.)
November 3.:	BOGNÁR Jánosné: Regressziós módszerek SARKADI Károly—VINCZE István: Minőségellenőrzés (Fej. a mat. stat. alk-ból tanf.)
November 3.:	Feladatmegoldások: IMK ülése
November 8.:	SZÉKELY Gábor: Regressziós módszerek SARKADI Károly—VINCZE István: Minőségellenőrzés (Fej. a mat. stat. alk-ból tanf.)
November 9.:	Tagozati titkárok megbeszélése
November 9.:	Grünwald Géza Emlékdíj bizottság ülése

November 10.: BÉDA Gyula: Egy képlékenységtani vizsgálat matematikai módszere
November 10.: BOGNÁR Jánosné: Regressziós módszerek
SARKADI Károly—VINCZE István: Minőségellenőrzés (Fej. a mat. sat. alk-ból tanf.)
November 13.: A matematika alkalmazásai bizottság ülése
November 14.: K. MARTI (Svájc): Verallgemeinerungen der Kerridge-Inaccuracy und der Kullback-Divergence
November 14.: A matematikatanárok tudományos tevékenysége támogatási módjait kidolgozó bizottság ülése
November 15.: K. MARTI (Svájc): Approximation stochastischer Programme
November 15.: SZÉKELY J. Gábor: Regressziós módszerek
GULYÁS Ottó: Statisztikus alakfelismerés (Fej. a mat. stat. alk-ból tanf.)
November 15.: Jutalmazási bizottság ülése

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT VIDÉKI TAGOZATAINAK RENDEZVÉNYEI 1978. november 15-ig

BORSOD MEGYEI TAGOZAT

Október 4.: NIKODÉMUSZ Antal: A Cauchy-feladat egy általánosítása parciális differenciálegyenletekre.
Október 11.: JÁRAI Antal: Függvényegyenletek mérhető megoldásairól.
Október 21.: SZABÓ József: Computer grafikai módszerekről.
Október 20.: NEUMANN János élete és munkássága (filmvetítés).
November 8.: SZEPESI László: Az 1977. évi Arany Dániel verseny döntős feladatainak ismertetése.

GYŐRI TAGOZAT

Január 24.: REIMAN István: Egybevágósági transzformációk
Március 2.: KRÁLIK Dezső: A függvényfogalom fejlődése Galileitől napjainkig
Március 30.: MOLNÁR Ernő: A megyei matematika verseny értékelése
Szeptember 26.: Feladatmegoldó délután a középiskolák I—II. osztályosai részére (előadó: PÁLMAY Lóránt)
Október 17.: Feladatmegoldó délután a középiskolák III—IV. osztályos tanulói részére (előadó: KECSKÉS Attila)
November 16.: KŐVÁRY Károly: A matematikai logika elemei a középiskolai matematikatanításban
November 28.: Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatai (előadó: REIMAN István)
December 12.: Feladatmegoldó délután I—II. osztályosok részére (előadó: ZSEBŐK Ottó)
December 14.: A geometria oktatása az általános iskolában (előadó: CZAPÁRY Endre)

HAJDÚ-BIHAR MEGYEI TAGOZAT

Január 12.: R. WASÉN (Svédország): On some problems connected with linear equations over algebraic number fields
Január 17.: R. TIJDEMAN (Hollandia): Applications of the Gelfond—Baker method
Január 18.: KORÁNYI Erzsébet: Az új I. osztályos gimnáziumi tankönyv ismertetése
Március 9.: E. WIRSING (NSZK): Curves that are invariant under polynomial substitutions
Március 17.: MOOÓR Arthur: Néhány megjegyzés az ellipszisről Minkowski terekben
Március 6.: NAGY Péter: Geodetikus Riemann szubmerziókban
Március 21.: SZABÓ Zoltán: Berwald terek és homogén Finsler terek
Március 14.: H. P. SCHLICKEWEI (NSZK): On the approximation of algebraic numbers by rationals and related diphantine equations
Március 29.: VINCZE Endre: A komplex számfogalom egyik megalapozása függvényegyenletek segítségével
Április 21.: E. ARJAS (Finnország): Semi-Markov theory
Május 5.: J. LOS (Lengyelország): Point and set-isomorphisms of hypergraphs
Június 2.: T. A. NAKOV (SZU): Riemann-terek binér affinorokkal

Május 17.:	BALÁZS János: Spline függvények és alkalmazásaik
Május 30.:	URBÁN János: Világnézeti nevelés lehetőségei a középiskolai matematikaoktatásban
Június 6.:	Küldöttválasztó értekezlet

HEVES MEGYEI TAGOZAT

Március 31.:	PÁLFY Sándor: A KMBK szakkörök munkája
Április 14.:	PINTZ János: A primszámok eloszlása
Szeptember 22.:	SÁRKÖZI András: Kombinatorikus számelmélet
Október 6.:	ERDŐS Pál: Számelméleti problémák
Október 25.:	ANDRÁSFAY Béla: Topológiai invariánsok (Gyöngyösön)
November 3.:	ANDRÁSFAY Béla: Topológiai invariánsok (Egerben)

AZ IFJÚSÁGI CSOPORTBAN TARTOTT ELŐADÁSOK

Március 8.:	BARTHA Katalin: „Nyelv, zene, matematika" — könyvismertetés
Március 22.:	Nemzetközi kapcsolatainkról (Előadó: PELLE Béla)
Március 29.:	TŐZSÉR József: Valószínűségi játékok
Április 12.:	BALOGH Viktória: A kombinatorika tanítása
Október 4.:	GÖNCZI Katalin: Szakköri téma ismertetése a „Mátrixok" c. szakköri füzet alapján

KOMÁROM MEGYEI TAGOZAT

Január 26.:	PELLER József: Függvénytan
Október 4.:	HORVÁTH Jenő: Térgeometriai feladatok

SOPRONI TAGOZAT

Március 1.:	PÁLFY Sándor: Az új általános iskolai matematika tanterv főbb problémái.
Április 12.:	REIMANN István: A sík egybevágósági transzformációi
Április 20.:	SZALAY István: A mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható függvényekről
Május 11.:	KRÁLIK István: A függvényfogalom kialakulása Euklidésztől napjainkig
Május 19.:	BOTTLIK István: Matematikai modell a zúzottkő termelés és szállítás együttes optimalizálására.
Szeptember 15.:	TOMOAKI Kawaguchi: Finslerian approach to electrical problems.
	TAMÁSI Lajos: Egyes differenciálgeometriai terek jellemzéséről
Október 26.:	KÁRTESZI Ferenc: A Galois-geometriák euklideszi modelljeiről

VESZPRÉM MEGYEI TAGOZAT

Február 24.:	Soós Gyula: A kozmológia néhány problémája
Március 9.:	CSÁSZÁR Ákos: Szögek és szögfüggvények
Április 21.:	KÉRI Gerzson: Egy fontos, de kevéssé ismert mátrixosztályról
Május 22.:	CZÁCH László: Differenciálszámítás Banach-terekben.

KÖNYVISMERTETÉS

ÁRPÁD SZABÓ: The beginninge of Greek mathematics

Valósággal megfejthetetlen titoknak látszott a görög matematika kibontakozása Szabó Árpád kutatásáig. Többnyire csupán érdekes feladatokat, szellemes — bár nem egyszer mesterkéltnek ható — megoldásokat, színes anekdótákat, legendákat, filozófus naivságokat láttunk a kezdeteknél, s ez az egész tarka forgatag olyan véletlenül és esetlegesen tömörült néhány hagyományosan emlegetett név körül, mint falusi vásárokon a nép a mutatványos-bódéknál. S azután egyszerre csak megjelent az euklidészi *Elemek*, a maga évezredekre példás axiomatikus tökéletességében. Nem csoda, hogy a kutatók nem nyugodtak bele ebbe a felemás helyzetbe s régóta, de legalábbis a tudománytörténet-írás tulajdonképpeni „nagykorúsodása" (azaz úgy a huszas-harmincas évek) óta, megpróbáltak segíteni rajta. Kétféle út kínálkozott. Az egyik az *Elemek*ből igyekezett kihalászni arkhaikusnak ható és a saját helyén nem könnyen „indokolható" részleteket, a másik a pre-hellén — kivált az ékírásos — matematika időközben alaposan megnövekedett ismerete (s tekintélye) alapján évezredes mezopotámiai eredmények görögre-fordításával magyarázta az euklidészi tudomány meglepően gyors kifejlődését. Az első irány képviselőiből Oscar Becker, a másodikéból Otto Neugebauer munkái váltak — méltán — leghíresebbé, s a kettőt szintetizálta nagysikerű (magyarul is olvasható) könyvében B. L. van der Waerden. Van der Waerden frappáns egyenletmegoldásokkal jeleskedő matematikát olvas ki az ékírásos táblákból, s erre építi — némi empirikus mérnöki intermezzóval — a görög matematika geometrikus „aranykor"-át. „Az anyag, amelyből a görög matematika felépült — írja —, nem volt új: építőköveit ki lehetett ásni a régi kultúrákból. Ám stílusa, amelyben az épület épült, új volt, és a görögök világos gondolkodásáról tanúskodott, arról a gondolkodásról, amely nem tűr meg homályos helyeket, nem tűri a megszerzett ismeretek bizonyosságában való kételkedés árnyékát sem!

Erősen kérdéses persze, hogy csakugyan efféle volt-e a „görög gondolkodás", s nem sokkal inkább éppen „a megszerzett ismeretek bizonyosságában való kételkedés" volt-e a nagy érdeme; annyi azonban bizonyos, hogy késői euklidészi fokon a görög matematika egy része, ha lefordítjuk az újkori algebrai képletek nyelvére, csakugyan jól csatlakoztatható az ugyanezen nyelvre lefordított, radikálisan algebraizált babilóni matematikához. Csakhogy ettől még ugyanolyan homályosak maradnak a görög matematika kezdeteire vonatkozó szórványos adataink, s teljességgel érthetetlen, még az eddiginél is érthetetlenebb a mai algebra nyelvére semmiképpen le nem fordítható kezdeti görög matematikai terminológia. Ez az a pont, ahol Szabó Árpád szilárd talajt talált, s megértve — megalkotói óta először — a régi görög matematika szakkifejezéseit, eloszlatta végre a görög matematika kezdeteit fedő sűrű homályt. Ezekről a fáradságos és rendkívüli találékonyságot igénylő, páratlan klasszika-filológiai és matematikai logikai tudást ötvöző kutatásokról számol be a jelen kötet, mely megjelent már német, újgörög, francia s japán nyelven is, és szerzőjének világhírt (s neves szakmai ellenfeleket) szerzett.

A könyv három fő részből áll. Az első a matematikai dynamisz bonyolult szótörténetét bogozza ki s szembesíti az irracionális illetve inkommenzurábilis mennyiségek legelső elméletével. A második rész az Euklidész előtti arányelmélet szakkifejezéseit fejti meg a korabeli s aránylag megbízhatóan rekonstruálható görög tudományos gondolkozás kontextusában. A harmadik rész azt mutatja meg, hogyan és miért épül — a szótörténet tanúsága szerint — ebből a genuin görög matematikai anyagból jellegéhez meglepően szépen illő új közlési forma: axiomatikus konstrukció.

A dynamisz elemzése egy múltszázadi nagy amatőr, Paul Tannery termékeny félreértéseinek korrigálásából indul ki. Tannery jól sejtette, hogy a dynamisz elnevezés valamiképpen azzal a *művelettel* függ össze, amit *mi* négyzetgyökvonásnak nevezünk, és azt is gyanította, hogy az elnevezés történetében tükröződik valahogyan a művelet irracionális mennyiségekre való kiterjesztése. De egyrészt — tévesen — azt hitte, hogy a dynamisz egyaránt jelenthette a négyzetet és a négyzet oldalát, másrészt szó szerint vette és elhitte az irracionalitás felfedezéséről szőtt későantik legendákat. Szabó Árpád mármost a dynamisz köznyelvi jelentésének alapján egyrészt kiderítette, hogy ez a szó matematikai szakkifejezésként kizárólagosan a négyzet*érték* szerinti mérhetőséget jelentette, egy tetszőleges vonalszakasznak a reá emelhető négyzet szerint vett *mértékét*, akár összemérhető volt ez a vonal-

szakasz az egységgel, akár se. A görög matematikában tehát igen régen, úgyszólván a kezdet kezdeteinél, úgylehet magánál Pythagorasnál fölbukkan már a lineárisan inkommenzurábilis mennyiség de nem csak úgy magában, hanem két, a következmények tekintetében lényegesen különböző matematikai kontextusban.

Az egyik irány tetszőleges oldalhosszúságú téglalapok négyzetté-alakításának a kérdését vizsgálta általában. Az ilyen jellegű feladatokat *mi* négyzetes egyenletekkel oldjuk meg, így hát az ebből kinövő irányt, ahogyan az később az *Elemek*-ben megjelent, a tudománytörténészek elnevezték „geometrikus algebrá"-nak. A görögök azonban nem tekintették a tetragonizmoszt algebrai feladatnak, márcsak azért sem, mert nekik nem volt fogalmuk az algebrához nélkülözhetetlen „valós szám"-ról. Az ő számaik a pozitív egész számok voltak, nekik a vonalszakaszok matematikája épp azért volt alapvetően érdekes, mert itt mennyiségekre bukkantak, amelyek az egységgel — az elemi számmal — nem voltak összemérhetők, de a reájuk emelt négyzettel mégis mérni lehetett őket. Kezdettől különös figyelmet fordítottak hát a geometriai középarányos szerkesztésére (Arisztotelész már mint közismert régi példára hivatkozik a középarányos-szerkesztésre a tetragonizmosz megoldásaként), hiszen itt szinte „magától" adódik a kérdés, hogy miféle *számok* geometriai középarányosa lehet újra *szám?* Ezzel azonban máris eljutottunk az inkommenzurábilitás másik nagy matematikai kontextusa, az *arányelmélet* sűrűjébe.

A számok és vonalszakaszok — mai szóval racionális és irracionális számok — nehezen érthető, szubtilis kapcsolatát (mely végül is az egész — standard — modern analízis alapja) világosan, példás precizitással felismerő s feltáró görög arányelmélet mindig kivívta matematikusok s matematikatörténészek bámulatát, s az elvont gondolkozás első nagy diadalaként ünnepelték. Soha senkinek még csak eszébe sem jutott Szabó Árpádig, hogy megkeresse a bámulatos absztrakció alatt a kemény empíriát. Igaz, hogy abból a szükségképpen véges számokra ís konkrét példákra korlátozódó kavics-aritmetikából, amit a történészek a matematika „pythagoreus-szintje"-ként elképzeltek, nehéz is lett volna eljutni az „Eudoxosz-szelet"-ekig. Szabó Árpád azonban az arányelmélet legelső szakkifejezéseinek gondos vizsgálatával (s zseniális találékonysággal) fölfedezte, hogy a pythagoreusok szerencsére nem is kényszerültek ilyesmire. Volt nekik egy egészen másféle, nem kevésbé empirikus ám termékeny absztrakció alapjául sokkalta alkalmasabb aritmetikájuk is: a zengő húr aritmetikája. A zenei konszonanciák legősibb elnevezései csakúgy mint az arányelmélet első szakkifejezései egyes egyedül a zengő húr aritmetikájából érthetők meg. Ez persze magában is elsőrendű filológiai fölfedezés, ám Szabó Árpád nem állott meg a filológiánál. Töredékekből, szövegrészletekből, legendákból, matematikai tételekből, szavak jelentésváltozásaiból rekonstruálta azt a bámulatosan finom hálót, amit az Euklidész előtti arányelmélet a zengő húr aritmetikájából szőtt zenei konszonanciák, számok, vonalszakaszok, számtani alapműveletek, racionális approximációk, téglalapok, négyzetek, területátalakítás köré. Egy egész elsüllyedt matematikai Atlantisz hihetetlenül gazdag és a görögökig még csak nem is gyanított anyagát hozta felszínre, azt az anyagot, amiből már csakugyan felépíthető volt — és csak ebből volt felépíthető — a görög matematika máig méltán csodált axiomatikus épülete, ha úgy tetszik az „új stílus".

A könyv az „új stílust", azaz a matematika axiomatikus fölépítését nyomozó harmadik részben is hű marad a jól bevált eljáráshoz, a szakkifejezések nyelvi, jelentéstani és matematikai analíziséhez. Szabó Árpád először mindjárt magát a „bizonyítást", a „bizonyítani" igét fogja vallatóra, s föltárja, hogy a szó miféle értelemváltozását implikálta és követelte meg az arányelméletben felszínre hozott új matematikai anyag, az egyszerű szemmel látható „megmutatás"-tól a csak értelemmel követhető s a szemmel láthatóval ellenkezni látszó „indirekt bizonyítás"-ig. Ezt az ettől—eddiget azonban nem holmi időbeli fejlődésként kell elképzelni; az indirekt bizonyítás maga is nagyon régi matematikai eljárás, századokkal Euklidész elé, az első pythagoreusok korára datálható. Szabó Árpád persze megintcsak nem elégszik meg ezzel a magában is elsőrendű matematikatörténeti fölfedezéssel. Őt az a tágasabb gondolkozástörténeti horizont érdekli elsősorban, ami egy efféle pusztán értelemre hivatkozó és a közvetlen tapasztalást visszautasító bizonyítási „stílust" kiprovokálhatott. Voltaképpen matematikatörténeti kutatásai is innét indultak el, amikor — még a negyvenes és az ötvenes évek fordulóján — a gondolkozást-fölszabadító kétely forrásait nyomon követve Szókratésztől és a szofisztikától eljutott az eleatákig. Azt azonban akkor még ő maga sem sejtette, hogy a szigorú eleata követelményeknek megfelelően s megsemmisítőnek vélt kritikájuk ellenében milyen vakmerő következetességgel építkezett alig hogy föltárt új anyagából az ifjú görög matematika, s milyen eredményesen vonult vissza a „megszámlálhatatóan végtelen" jó axiómákkal védett várába. Támadhatott Zénón a végtelen éles elmével megkonstruált paradoxonaival, a vár állta az ostromot, sőt a védők végül maguk javára fordították a támadó érvelését: Zénón paradoxonai beépültek Eudoxosz arányelméletébe, amint azt — máshonnét indulva — Tóth Imre kutatásai igazolták.

De van Szabó Árpád könyvének másik, belső mondhatni matematikai igazolása is. A *Beginnings* ugyanis tekinthető klasszikus görög értelemben analízisnek: Szabó Árpád minuciózus „fordított irányú munkával" jut el benne részben tudománytörténeti „abszurdumokhoz" (amilyen például a Theaitétosz legenda, vagy az irracionális fölfedezésének „botránya"), részben pedig „ismert vagy

már korábban elfogadott" állításokhoz. De hogy a „bizonyítás" teljes legyen, megírta a „szintézist" is; 1978-ban a „Gyorsuló idő" sorozatban megjelent mindössze 250 kicsiny oldalas könyve a *Beginnings* hézagpótló eredményei nyomán egyetlen hatalmas ívben vázolta *A görög matematika kibontakozásá*-t. Ebben a könyvben egyszeriben helyére került minden, amit az Euklidész előtti matematikából eddig szétszórt részletként vagy töredékként ismertünk; mint széttört darabokból értő restaurátor kezében a szobor, úgy emelkedik ki belőle a görög matematika teljes ifjonti és anyagától stílusáig *saját* szépségében. Joggal ajánlotta Szabó Árpád a *Beginnings*-et a „racionális történeti rekonstrukció" elvét és módszerét kidolgozó Lakatos Imre emlékének, mert a görög matematika konstrukcióját fölfedő műve valóban tökéletes történeti rekonstrukció. Ám túl ezen még valami: *Ars mathematica*, úgy, ahogyan azt az itthoni matematikatörténeti kutatások nagy inspirálója, mindnyájunk mestere, Rényi Alfréd értette s művelte.
(Akad. Kiadó, 1978.)

VEKERDI LÁSZLÓ

A. MUKHERJEA—K. POTHOVEN: REAL AND FUNCTIONAL ANALYSIS, Plenum Press, New York—London, 1978, 530 oldal.

A könyv nagyjából a hazai tudományegyetemek matematikus szakán szokásos szinten nyújt bevezetést a valós függvénytanba és a funkcionálanalízisbe. A két anyagrész — ha szerkezetileg nem is, de tartalmilag annál inkább szétválik. A valós függvénytannal foglalkozó rész az értékesebb, itt a topologikus mértékterek és a Daniell-féle integrálfogalom is tárgyalásra kerülnek.

A könyv hét fejezetre oszlik:

— halmazelméleti és topológiai alapfogalmak
— mértékelmélet
— integrál (absztrakt Lebesgue integrál)
— differenciálás (teljesen folytonos függvények, Radon—Nykodim-tétel)
— Banach-terek
— Hilbert-terek
— topologikus mértékterek

Nem túlságosan sportszerű egy ilyen könyvet a közismert és klasszikus monográfiákkal mérni, de sokat elmond: alig nyújt olyan ismeretanyagot, amelyet Dunford és Schwartz munkája ne tartalmazna. Ha viszont, mint ennek részhalmazát vizsgáljuk, így a válogatás nem túlságosan szerencsés.

Egyes részletek nagy mélységben kidolgozottak — kiemelhető például az Eberlein-féle kompaktsági tétel, mások sokkal kevésbé. Az operátorelméleti részből — többek között — hiányolható az invariáns altér probléma említése. Egészében véve a könyv kissé elavultnak tűnik, bár jelen esetben egy bevezető jellegű tankönyvnél ez talán nem is olyan nagy baj.

SZÉP ANDRÁS

ROBERT H. KASRIEL: UNDERGRADUATE TOPOLOGY. Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1977. XIV+285 o.

A szerző célja, hogy olyan bevezetést nyújtson az általános topológiába, amelyhez a differenciál- és integrálszámítás elemein kívül más előismeretre nincs szükség, s így másodéves egyetemi hallgatók haszonnal forgathatják, és megtalálják benne az analízis modernebb fejezeteinek, mindenekelőtt a komplex és valós függvénytannak, valamint a funkcionálanalízisnek tanulmányozásához szükséges topológiai tudnivalókat.

A tárgyalt anyag kiválasztása és a feldolgozás módszere ehhez a célhoz igazodik. A halmazokkal, függvényekkel, relációkkal foglalkozó bevezető fejezet magában foglalja a matematikai logika elemeit is, a halmazok számosságának fogalmát lényegében véve a véges, megszámlálható és nemmegszámlálható halmazok megkülönböztetésére szűkíti, a Zorn-féle lemmát bizonyítás nélkül közli. A voltaképpen topológiai anyagot feldolgozó fejezetek a számegyenes és az euklideszi terek ponthalmazainak tulajdonságain, majd a metrikus tereken át vezetik be fokozatosan a topológiai fogalmakat. A könyv terjedelmének nagyobb részét kitevő, a topologikus tér fogalmát előkészítő rész a Banach-tér fogalmának bevezetésével zárul.

Ezután kerül sor a topologikus terek alapvető fogalmaira, a származtatás különféle módjaira, a legfőbb szétválasztási axiómákra és a megszámlálhatósági axiómákra. A topologikus terek speciális osztályai közül a kompakt és lokálisan kompakt terek, valamint az összefüggő terek elemi tulajdonságai szerepelnek, majd egy-egy fejezet foglalkozik a kvóciensterekkel, az általánosított sorozatok és szűrők konvergenciájával, végül a szorzatterekkel.

Ebből a felsorolásból is látszik, hogy a szerző nem törekszik a témakör klasszikus alapjain túl terjedő ismereteket nyújtani; talán csak a kvóciensterekről szóló fejezetben kap helyet néhány a szakértő számára nem közismert fogalom és eredmény. Viszont ezt a szűkre szabott anyagot igen gondos didaktikai felépítésben mutatja be: a nehezebb bizonyításokat igen szépen építi fel, a könnyebbek zömét feladatként tűzi ki. Minden szakasz jónéhány tanulságos gyakorló feladattal zárul, amelyek példákat, ellenpéldákat bőségesen mutatnak a tanultakra. Külön kiemelendő az egyes definíciókat és bizonyításokat szemléltető sok ügyesen megszerkesztett illusztráció.

Mindezek alapján kialakul az olvasóban az a vélemény, hogy a szerző a maga elé tűzött viszonylag szerény célokat sikeresen valósítja meg, és a kiválasztott olvasóréteg számára hasznos, élvezetesen megírt, a további irodalomhoz kedvet ébresztő bevezető munkát adott a matematikát tanulók kezébe.

CSÁSZÁR ÁKOS

GEORGE W. MACKEY: LECTURES ON THE THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York 1977, 266 oldal.

Ez a komplex függvénytani bevezető tankönyv a szerző 1959—60-ban a Harvard egyetemen tartott kétféléves előadássorozatából készült jegyzet. A könyv a kezdet kezdetétől indul: Az első három fejezet (1—56 old.) a valós és komplex számokat vezeti be, foglalkozik metrikus terekkel és felépíti a (valós) integrál- és differenciálszámítást. Ily módon elvben — de, mint a szerző is hangsúlyozza, gyakorlatban semmiképp sem a könyv minden matematikai előismeret nélkül is olvasható. Persze önkéntelenül felmerül a kérdés: Mivel úgysem várható, hogy egy, az elemi analízisben tökéletesen járatlan olvasó kezébe vegye ezt a könyvet, — akkor végül is kik számára íródott az első három fejezet?

A negyedik fejezet a komplex differenciálással, az ötödik a komplex integrálással foglalkozik. Bebizonyítja teljes precizitással a Cauchy-féle alaptételt és ennek következményeit: a Cauchy-formulát, a reziduum tételt, Rouché-tételt stb....

A VI. fejezet címe: Egész és meromorf függvények. Szerepel itt a Weierstrass-féle szorzatelőállítás, Mittag—Leffler-tétel, egészfüggvények rendje, Γ-függvény, valamint egy rövid bevezetés az elliptikus függvények elméletébe. Ez utóbbi nagyon szerencsésen készíti elő a VIII. és a IX. fejezetet.

A VII. fejezet a konform leképezések alaptételét bizonyítja. A VIII. fejezet (Analitikus folytatás és Reimann-felületek) egy nagyon világos, sok példával illusztrált bevezetés a Riemann-felületek elméletébe. A IX. fejezet (Algebrai függvények és integráljaik) Riemann-felületeken értelmezett meromorf függvények és differenciálok létezésének kérdésével foglalkozik. Sajnos, mire a szerző előadásaiban idáig eljutott, befejeződött a tanév, s így ebben a fejezetben csak definíciók és tételek szerepelnek — Riemann—Roch-tétel, Abel-tétel —; a bizonyítások elmaradtak. Ha az algebrai függvények elméletében való elmélyedésre nem is, arra azonban biztosan alkalmas ez a kis ízelítő, hogy felkeltse az olvasó érdeklődését a komplex függvénytan e csodálatos ága iránt, és arra ösztönözze, hogy érdeklődését más, a témában messzebbre eljutó könyvekből kielégítse — a referensre mindenesetre ezt a hatást tette.

LEMPERT LÁSZLÓ

A. H. LIGHTSTONE. MATHEMATICAL LOGIC, AN INTRODUCTION TO MODEL THEORY. PLENUM PRESS, New York 1978, 338 oldal.

A könyv bevezető a matematikai logikába és a modellelméletbe. Az alapfogalmakat nagyon alaposan és világosan tárgyalja. Az első rész (Statement Systems and Propositional Calculus), az ítéletkalkulussal, azaz a kvantorok nélküli logikával foglalkozik. Tárgyalásmódja a szokottnál alaposabb, különösen azok számára ajánlatos, akik kíváncsiak arra, hogy a nyelvek, illetve bizonyítások, mint formális rendszerek pontosan hogy épülnek fel.

A második rész (Semantical System and Predicate Calculus) már a kvantorokkal ellátott elsőrendű logikát tárgyalja az első részre jellemző alaposságot megtartva a szokásosnál valamivel általánosabb módon. Az általánosabb tárgyalásnak az a célja, hogy a fogalmak jobban idomuljanak a nonstandard analízisbeli alkalmazásokhoz; ugyanakkor a szerző azt is eléri, hogy az alapvető definíciók technikailag leegyszerűsödnek. A második rész a levezethetőség fogalmával és a Gödel-féle teljességi tétellel végződik.

A harmadik rész alkalmazásokkal foglalkozik. A nonstandard analízis felépítése gyors és egyszerű. Elemi analízisbeli tételek bizonyításánál a következő tételekig jut el: Weierstrass-tétel, Bolzano-

tétel, „zárt intervallumon folytonos függvény egyenletesen folytonos". A fejezetből az olvasó viszonylag kevés munkával megtudhatja, hogy mi a nonstandard analízis.

Egy fejezet foglalkozik még a modellelmélet további felépítésével. Fő célja a Löwenheim—Skolem-tétel bizonyítása.

Az Axiomatikus halmazelmélet című fejezetből az olvasó a Zermelo—Fraenkel axiómarendszert ismerheti meg. Ennél a fejezetnél különösen ajánlatos a feladatok lelkiismeretes megoldása. (A könyv egyébként végig gazdagon el van látva feladatokkal.)

Az utolsó fejezet témája a teljes elméletek (Complete Theories). A „Vaught's Test" és a Robinson-féle modell teljesség fogalmára épülő „Robinson's Test" a fő eredmények. Ez a fejezet főleg az algebra iránt érdeklődő olvasónak lehet érdekes.

AJTAI MIKLÓS

DR. GÁSPÁR LÁSZLÓ: MÁTRIXARITMETIKAI GYAKORLATOK Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

E könyvvel a szerző egyrészt a mátrixaritmetika elsajátításához kíván gyakorló feladatokat nyújtani, másrészt a mátrixszámítás alkalmazásaira nagy változatosságban mutat be — nagyrészt a gazdasági életből vett — modelleket.

A kötet alapjául az ugyancsak a szerzőtől származó Lineáris Algebra Példatár szolgál (ismertetését lásd Matematikai Lapok 24 (1973), 181. old.), amely több kiadást is megért s annak idején az első magyar mátrixszámítási példatárként jelent meg. Szerkezetét is e példatártól örökítette: a fejezetek egyes pontjait elméleti ismertetés vezeti be, ezt követik a kapcsolódó feladatok; a megoldásokat pedig az utolsó fejezet tömöríti. Nyeresége az új kötetnek, hogy kiegészült a mátrixszámítás néhány olyan fejezetével, amelyekhez az előző példatár alig, vagy egyáltalán nem hozott feladatokat. A gyarapodást a terjedelem növekedése is tükrözi: a Lineáris Algebra Példatár 266 oldala a Mátrixaritmetikai Gyakorlatok 442 oldalává szaporodott.

E könyv 11 fejezetből áll. A feladatokat tartalmazó anyag a következő 10 fejezetbe van csoportosítva: 1. Mátrixaritmetika, 2. Az elemi bázistranszformáció és alkalmazása a mátrixaritmetikában, 3. A determináns, 4. Lineáris egyenletrendszerek megoldása és mátrixok invertálása, 5. Lineáris transzformációk, 6. Bilineáris és kvadratikus formák, 7. Az euklídeszi tér, 8. Lineáris egyenlőtlenség-rendszerek, 9. Mátrixaritmetika a komplex számok halmazán, 10. Mátrixaritmetika a gyakorlatban. Ezek közül a 3. és 9. önálló, új fejezetként került e kötetbe; s a 9. fejezet azért is fontos, mert ez tartalmazza a sajátérték-feladatot. Az 1. fejezet lényegesen bővült: kiegészült a blokkokra bontott mátrixok aritmetikájával és gazdagodott a feladat-anyaga is. A 7. fejezetben a bevezető elméleti ismertetések itt, e kötetben jobban kidolgozottak. A korábbi Lineáris Algebra Példatár 4. fejezete újabb feladatokkal gazdagodva került át e kötet 10. fejezetébe.

A könyv — ugyanúgy, mint elődje — közgazdász hallgatók segédkönyvéül készült. De nagy segítséget adhat mindazoknak, akik a gazdasági élet problémáinak elemzésével és megoldásával foglalkoznak, vagy a mátrixszámítás elsajátításához gyakorló feladatokat keresnek.

LEE ANNA

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Marton Andor
A kézirat beérkezett: 1979. február 12. — Terjedelem: 19,6 (A/5) ív
79-753 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József

MTA Könyvtára
Periodika 19[illegible] n.
30/3993
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

CONTENTS

G. Alexits (5 January 1899—14 October 1978) 205
G. Halász: On the mathematical works of G. Somorjai 211
J. Surányi: Some proofs about the uniqueness of the prime number factorization of the integers 213
I. Z. Ruzsa: Arithmetical functions II. 227
F. Gécseg and M. Steinby: The algebraic theory of the tree automata II. 283
T. Fényes and P. Kosik: About some special differential equations of second order of the operator field 337
J. Pintz: Siegel roots and the prime number theorem 355
P. L. Erdős: A Ramsey type theorem 361
T. Dénes: The "evolution" of regular graphs of even order by their vertices 365
F. Mátyás: On the quotients of the elements of linear recursive sequences of second order... 379
Problems 391
Activity of the Society 397
Book reviews 423

СОДЕРЖАНИЕ

Дьёрдь Алексич: (5 января 1899—14 октября 1978) 205
Габор Халас: О математической деятельности Габора Шоморйаи 211
Янош Шурани: Несколько доказательство единственности факторизации целых чисел но простые множители 213
Имре З. Ружа: Теоретико-численные функции 227
Ференц Гечег и Магнус Стейнби: Алгебраическая теория дерево-автоматов II. .. 283
Тамаш Фенеш и Пал Кощик: О некоторых специальных дифференциальных уравнениях второго порядка операторного тела 337
Янош Пинц: Зигел-корни и теорема о простых числах 355
Петер Л. Эрдёш: Одна теорема типа Ремси 361
Тамаш Денеш: «Эволюция» регулярных графов чётного порядка по их вершинам 365
Ференц Матяш: О частных элементов линейных рекурзивных последовательностей второго порядка 379
Задачи 391
Из жизни Общества 397
Обзор книг 423

Ára: 14,— Ft
Évi előfizetés: 28,— Ft

INDEX: 25 564
ISSN 0025—519X