MATEMATIKAI LAPOK

XVII. ÉVFOLYAM

MATEMATIKAI LAPOK

1966. évi XVII. évfolyamának tartalma

	Oldal
CZÁCH LÁSZLÓ: Ortogonális polinomrendszerek teljességéről	156—164
DARÓCZY ZOLTÁN: Az $f[x+yf(y)] = f(x)f(y)$ függvényegyenlet folytonos megoldásairól Hilbert-terekben	339—343
ERDŐS PÁL: Számelméleti megjegyzések V. Extremális problémák a számelméletben, II.	135—155
FENYŐ ISTVÁN: Disztribuciók, operátorok, III.	309—338
GÉCSEG FERENC és PEÁK ISTVÁN: Az automaták algebrai elmélete	77—134
HAJNAL ANDRÁS: A kontinuum-problémára és a kiválasztási axiómára vonatkozó axiomatikus vizsgálatok történetéről és jelenlegi állásáról	253—260
LOSONCZI LÁSZLÓ: Lineáris függvényegyenletek, néhány általánosításuk és alkalmazásuk	180—214
SZOLEM MANDELBROJT és LAURENT SCHWARTZ: Jacques Hadamard (1865—1963)	6—18
RÉNYI ALFRÉD: Véges geometriák kombinatorikai alkalmazásai	33—76
SERES IVÁN: Bizonyos polinomok irreducibilitása	1—5
SZÉNÁSSY BARNA: Társulatunk 75 éve	295—308
TURÁN PÁL: Az összehasonlító prímszámelmélet egyes problémáiról	19—32
VEKERDI LÁSZLÓ: Descartes érintőszerkesztési módszere	165—179
VISKI MÁRIA: Szinguláris homológiák I.	261—294
Jelentés az 1965. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről	344—366
Feladatrovat	215—222, 367—372
Hírek	373—380
Társulati élet	223—249, 381—405
Könyvismertetés	250—252, 406—409

Szegedi Nyomda 67-5745

312.046
17
1966

MATEMATIKAI LAPOK

XVII. ÉVFOLYAM

1-2.

SZÁM

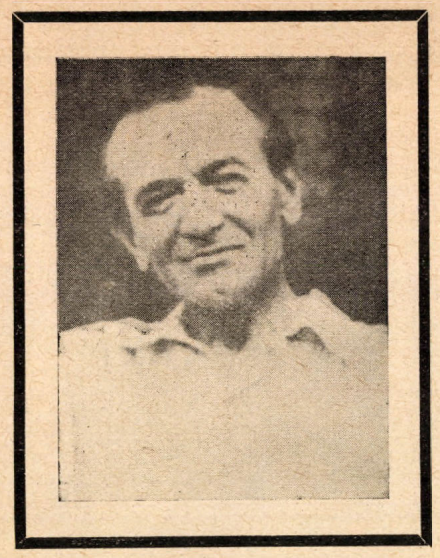
BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1966

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer. Budapest, 1966. november, XVII. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rapcsák András, Rényi Alfréd.
Szerkesztőség: Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest V., Alkotmány utca 21. III. Telefon: 111—010.
A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.
A kiadvány előfizethető vagy példányonként megvásárolható:
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest V., Alkotmány utca 21; telefon: 111-010; MNB egyszámlaszám: 46; csekkbefizetési számla: 05.915.111-46;
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, Budapest V., Váci u. 22; telefon: 185-612;
a POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODA 1. számú HÍRLAPBOLTJÁ-ban, Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76 és bármely postahivatalban. Csekkszámlaszám: egyéni 61.257, közületi: 61.066, MNB egyszámlaszám: 8.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

SERES IVÁN: Bizonyos polinomok irreducibilitása 1
SZOLEM MANDELBROJT és LAURENT SCHWART: Jacques Hadamard (1865—1963) 6
TURÁN PÁL: Az összehasonlító prímszámelmélet egyes problémáiról 19
RÉNYI ALFRÉD: Véges geometriák kombinatorikai alkalmazásai I. 33
GÉCSEG FERENC és PEÁK ISTVÁN: Az automaták algebrai elmélete 77
ERDŐS PÁL: Számelméleti megjegyzések V. Extremális problémák a számelméletben, II. 135
CZÁCH LÁSZLÓ: Ortogonális polinomrendszerek teljességéről 156
VEKERDI LÁSZLÓ: Descartes érintőszerkesztési módszere 165
LOSONCZI LÁSZLÓ: Lineáris függvényegyenletek, néhány általánosításuk és alkalmazásuk 180
Feladatrovat 215
Társulati élet 223
Könyvismertetés 250



SERES IVÁN

1907. dec. 15—1966. febr. 25.

Bizonyos polinomok irreducibilitása

SERES IVÁN

Adjuk meg az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqq 13)$ egész számokat a negyedik körosztási testből, a K_4-ből. Ezek alakja $r+is$, ahol r és s racionális egész számok. Válasszuk az indexezést úgy, hogy az a_1-től balra húzott függőleges egyenesre már ne essék rácspont a komplex síkon. Az indexezést rendezzük úgy, hogy az a_1-en átmenő függőleges egyenesen a megadott pontok közül azt nevezzük a_1-nek, amelynek imaginárius összetevője a legkisebb.

A) Képezzük a következő polinomot:

$$F(x) = \prod_{k=1}^{n} (x-a_k) + i^q.$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Állítjuk, hogy a polinom az $n \geqq 13$ *esetben irreducibilis a* K_4 *fölött, ahol* $q = 1, 2, 3$, *ill.* 4 *és* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *egymástól páronként különböző egészek a* K_4*-ből.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $F(x)$ a K_4 fölött reducibilis:

$$F(x) = G(x) \cdot H(x),$$

ahol a $G(x)$ és $H(x)$ polinomok együtthatói a K_4-ből való egész számok és $G(x)$, $H(x)$ főegyütthatói legyenek $= 1$.

Legyen $G(x)$ foka nem nagyobb, mint $H(x)$ foka, ezért

$$\text{(1)} \qquad \text{Grad } G(x) \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$$

Vegyük a $P_1 = a_1$ pont körül található olyan $P_i = a_i$ rácspontokat A, amelyeknek távolsága a_1-től legfeljebb 2 és amelyek a_1-től jobbra, vagy a_1 felett vannak:

$$\begin{aligned} P_2 &= a_1 + 1, & P_3 &= a_1 + i, \\ P_4 &= a_1 + i + 1, & P_5 &= a_1 + 2, \\ P_6 &= a_1 + 2i; & P_7 &= a_1 + 1 - i \end{aligned}$$

B, azon P_s rácspontokat, melyek távolsága $P_1 = a_1$-től nagyobb mint 2. Ezek ily alakúak:

$$a_1 + r + ti,$$

ahol $r + |t| > 2$ (az r és a t racionális egész számok). Ugyanis, ha $P_s = a_1 + r + ti$,

a) $\quad r = 0, \quad t \geqq 3, \quad |P_1 - P_s| \geqq 3 > 2,$

b) $\quad r = 1, \quad |t| \geqq 2, \quad |P_1 - P_s| = |1 + ti| \geqq \sqrt{5} > 2,$

c) $\quad r = 2, \quad |t| \geqq 1, \quad |P_1 - P_s| = |2 + ti| \geqq \sqrt{5} > 2,$

d) $\quad r \geqq 3, \quad |t| \geqq 0, \quad |P_1 - P_s| \geqq 3 > 2.$

Az $(a_1 - a_s) | (G(a_1) - G(a_s))$ oszthatósági reláció fennáll $s = 1, 2, \ldots, n$-re.

A $G(a_1)$, $H(a_1)$, valamint a $G(a_s)$, $H(a_s)$, $(s = 2, 3, \ldots, n)$ egészek és szorzatuk az i^q egység, ezért $G(a_s)$, $(s = 1, 2, \ldots, n)$ egység.

A K_4-ben négy egység lehetséges: $1, i, -1, -i$, ezért a $G(a_1) - G(a_s)$-re a következő értéket kaphatjuk:

I. $\quad G(a_1) - G(a_s) = 0$

II. $\quad G(a_1) - G(a_s) = 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i,$

III. $\quad G(a_1) - G(a_s) = 2, 2i, -2, -2i.$

Ha $s \geqq 8$, akkor $|a_1 - a_s| > 2$,

$$(a_1 - a_s) | (G(a_1) - G(a_s)).$$

Ez csak akkor lehet, ha $G(a_1) = G(a_s)$, $(s = 8, 9, \ldots, n)$, azaz

$$G(a_1) = G(a_8) = G(a_9) = \ldots = G(a_n).$$

A Grad $G(x)$ legfeljebb $\left[\frac{n}{2}\right]$, azaz Grad $G(x) = \tau \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$. A $G(x)$ polinom $n-6$ különböző helyen veszi fel a $G(a_1)$ értéket és ha $n-6 > \left[\frac{n}{2}\right]$, akkor a $G(x)$ polinom konstans. Ha $n = 13$, akkor még teljesül a fenti egyenlőtlenség

$$13 - 6 > \left[\frac{13}{2}\right].$$

Ha a megadott a_v rácspontok száma legalább 13, akkor az $F(x)$ irreducibilitása fennáll, q. e. d.

B) Vizsgáljuk a következő polinomot

$$F_1(x) = Q(x) \cdot \prod_{k=1}^{n} (x - a_k) + i^q, \qquad (q = 1, 2, 3, \text{ ill. } 4),$$

ahol $a_2, a_2, \ldots, a_n$ a K_4-ből való egész számok (egymástól páronként különböznek), $Q(x)$ oly polinom, melynek főegyütthatója 1, a többi együttható a K_4-ből való egész, $0 \leqq \text{Grad } Q(x) \leqq n-13$. *Állítjuk, hogy* $F_1(x)$ *irreducibilis a* K_4 *felett.*

Bizonyítás. Feltesszük, hogy $F_1(x)$ reducibilis polinom a K_4 számtest felett,

$$F_1(x) = G_1(x) \cdot H_1(x),$$

ahol $G_1(x)$, $H_1(x)$ egész együtthatós polinomok a K_4-ből való együtthatókkal. A $G_1(x)$ és $H_1(x)$ főegyütthatója legyen 1. Legyen $G_1(x)$ szintén a legkisebb fokú irreducibilis tényezőknek egyike: $G_1(a_1)$, $G_1(a_2)$, ..., $G_1(a_n)$ egységek lesznek,

$$(a_1 - a_s) | (G(a_1) - G(a_s)), \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$
$$G_1(a_1) = G_1(a_s), \quad \text{ha} \quad |a_1 - a_s| > 2.$$

Ez kellő indexezéssel bekövetkezik $s \geqq 8$-ra.

$$G_1(a_1) = G_1(a_8) = G_1(a_9) = \ldots = G_1(a_n).$$

Ezen tagok száma $n-6$.

Viszont a $G_1(x)$ fokszáma nem haladja meg $\left[\frac{n+n-13}{2}\right] = n-7$-et, azaz Grad $G_1(x) = \tau < n-6$.

Ismét azt kapjuk, hogy $G_1(x)$ legalább $n-6$ helyen veszi fel a $G_1(a_1)$ értéket, míg a $G_1(x)$ foka kisebb mint $n-6$ tehát $G_1(x)$ konstans, ha $n \geqq 13$. q. e. d.

О НЕПРИВОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Иван Шереш

а) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Гауссовые целые, попарно не равные между собой числа, $n \geqq 13$. Тогда многочлен

$$F(x) = \prod_{k=1}^{n} (x-a_k) + i^r, \qquad r = 1, 2, 3, \text{ соотв. } 4,$$

неприводим над полем K_4 деления круга.

б) Для таких же чисел $a_1, a_2, \ldots a_n (n \geqq 13)$ многочлен

$$F_1(x) = Q(x) \prod_{k=1}^{n} (x-a_k) + i^r, \qquad r = 1, 2, 3, \text{ соотв. } 4,$$

неприводим над полем K_4, если Grad $Q(x) \leqq n-13$.
(Коэффициенты многочлена $Q(x)$ Гауссовые целые числа, коэффициент с наибольшим индексом равен единице).

ÜBER DIE IRREDUZIBILITÄT GEWISSER POLYNOME

I. Seres

Es werden folgende Sätze bewiesen.

a) Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Gaussische ganze Zahlen, $a_1 \neq a_k$ wenn $i \neq k$ und $n \geqq 13$. Dann ist das Polynom

$$F(x) = \prod_{k=1}^{n} (x-a_k) + i^r, \qquad r = 1, 2, 3 \text{ oder } 4,$$

irreduzibel über dem Kreisteilungskörper K_4.

b) Für dieselben Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqq 13)$ ist das Polynom

$$F_1(x) = Q(x) \cdot \prod_{k=1}^{n} (x-a_k) + i^r, \quad r = 1, 2, 3, \text{ oder } 4,$$

irreduzibel über K_4, wenn Grad $Q(x) \leqq 13$. (Die Koeffizienten des Polynoms $Q(x)$ sind Gauss'sche ganze Zahlen, der Koeffizient mit dem höchsten Index ist gleich Eins.)

UTÓSZÓ

A szerző már nem láthatta e dolgozatát kinyomtatva. Nehéz élet után hajtotta fejét örök nyugalomra. Megjelent munkáit az alábbiakban soroljuk fel.

1. „Egy kombinatorikus összefüggésről" Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1933. IX. 9—10. sz. 1—4. (Szerzője a cikket Spitz Iván néven jegyezte.)

2. Megjegyzések, kiegészítések, helyreigazítások „H. L. Dorwart and O. Ore: Criteria for the irreducibility of polinomials" c. dolgozathoz, Ann. of Math. 34 (1933) 81.

3. Egy polinom irreducibilitásáról, Mat. Lapok 3 (1950) 148—150.

4. Über eine Aufgabe von Schur, Publ. Math. Debrecen, 3 (1953—54) 138—139.

5. Lösung und Verallgemeinerung eines Schur'schen Irreduzibilitätsproblems für Polynome, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956) 151—157.

6. I. Schur egy sejtésének igazolása, MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl. VI. 2. (1956) 219—224.

7. Bizonyos polinomok irreducibilitása a körosztási testekben, MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl. X. 3. (1960) 341—351.

8. Egy polinom irreducibilitásáról, MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl. XI. 2. (1961) 131—134.

9. Über die Irreduzibilität gewisser Polynome, Acta Arithm. VIII. (1963—64) 321—341.

10. Irreducibility of polynomials, Journal of Algebra, Vol. 2. No 3 (1965) 283—286.

11. Bizonyos polinomok irreducibilitásáról, Mat. Lapok, XVII. (1966) 1—2.

12. Praktische und theoretische Zillmerung, Versicherungsarchiv (1939—40) 140—148.

Munkái közül különösen az 5. dolgozata emelhető ki, mely kandidátusi értekezése volt és melyben egy I. Schur által felvetett régen fennálló kérdést oldott meg igen elegánsan. Emlékét kegyelettel őrizzük.

A szerkesztőség

Jacques Hadamard (1865–1963)

SZOLEM MANDELBROJT és LAURENT SCHWARTZ

Jacques Hadamard, akinek matematikai munkássága csaknem háromnegyed évszázadra terjed ki, 1963. október 17-én költözött el az élők sorából, majdnem 98 éves korában; 1865. december 8-án született.

A legutóbbi száz esztendő matematikusai közül csak nagyon kevesen hagytak hátra olyan gazdag örökséget olyan sok területen, mint Hadamard. Tény, hogy a matematika főbb fejezetei között csak nagyon kevés van, melyet ne befolyásolt volna mélyen az ő géniusza. Többen a legfontosabbak közül Hadamardnak köszönhetik természetük alapvonásait és kutatási módszereiket, egyesek pedig éppenséggel egész létezésüket.

Mikor 1944-ben a London Mathematical Society tiszteletbeli tagjává választotta Hadamard-t és ez alkalommal Hardy beszámolt Hadamard legmeglepőbb felfedezéseiről, a matematika „élő legendájának" nevezte őt.

Itt a legfontosabb eszmékre és eredményekre kell szorítkoznom azok közül, melyek végig vezetnek ezen az egész legendás életművön.

Hadamard első fontos munkái az analitikus függvényekkel, pontosabban mondva egy Taylor-sora által definiált analitikus függvény természetének vizsgálatával foglalkoztak. Weierstrass, valamint Franciaországban Méray, szigorúan definiálva egy ilyen sor analitikus folytatásának jelentését, ezt a sort vették kiindulási pontnak egy analitikus függvény definíciójában. Ez azonban csupán egy egzisztencia- és unicitási tétel, és csaknem érintetlenül maradt az a probléma, hogy miképpen lehet az együtthatók tulajdonságainak alapján az így definiált függvény sajátságaira *ténylegesen* következtetni.

Néhány eredmény ismeretes volt az inverz problémát illetően. Így például Eisenstein és Csebisev megmutatták az algebrai függvények együtthatóinak első aritmetikai tulajdonságait; Lecornu megadott még egy másik tételt is, melynek megfogalmazása hamis volt. Az inverz problémát Darboux is tárgyalta néhány mozzanatában. Ő azt vizsgálta, hogy milyen összefüggés van az együtthatók növekedése és a függvénynek a konvergenciakörön mutatkozó viselkedése között.[1]

[1] Ezzel összefüggő témákról Worpitzky írt néhány érdekes cikket 1860 körül, melyek egy nagyon kevéssé ismert folyóiratban jelentek meg és csak ennek az évszázadnak az elején fedezték fel őket ujra.

Azonban Hadamard volt az igazi megalkotója annak az elméletnek, mely lehetővé teszi egy Taylor-sor analitikus folytatása szingularitásainak (és azok természetének) megállapítását (l. a doktori disszertációját 1892-ből, valamint néhány azt megelőző cikkét a Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris hasábjain).

Először megadta a konvergenciasugár értékét $A_n^{-\frac{1}{n}}$ $(f(z=\Sigma A_n z^n)$ limes superior-jának bevezetésével. Egészen addig csak abban az esetben lehetett a sugár értékét kiszámítani, amikor létezik ennek a kifejezésnek a határértéke (Cauchy).

Ezután egy az A_n együtthatókra vonatkozó szükséges és elégséges feltételét adta meg annak, hogy a konvergenciakör kerületének egy adott pontja szingularitás legyen. Ez a feltétel, mely véges számú együtthatót tartalmazó kifejezések limes superior-ja által van megadva, azóta a fontos eredményeknek egy egész sorát szolgáltatta, részben eredeti alakjában, részben pedig megfelelően átalakítva. Mindenekelőtt a híres „Hadamard-féle hézagtétel": ha $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqq \lambda > 1$, akkor a $\sum A_n z^{\lambda n}$ sor konvergenciaköre (ha véges) természetes határ. Ez a tétel speciális esete egy igen gazdag tartalmú eredménynek, mely a szingularitásokra vonatkozó kritériumból következik.

A Taylor-sorra, vagy a Fourier-sorra alkalmazva, a hézagosság (lakunaritás) eszméje azóta egy fontos vizsgálati elvvé fejlődött ki: számos olyan tételt sikerült bebizonyítani, melyeknek értelmében ha egy függvény egy hely valamely környezetében rendelkezik egy bizonyos tulajdonsággal és Taylor-, ill. Fourier- sora eleget tesz egy meghatározott hézagossági feltételnek, akkor a kérdéses tulajdonság átterjed az egész értelmezési tartományra,

Az A_n-el kezdődő $2m+1$ (m rögzített) számú egymás után következő együtthatóból képezett szimmetrikus $D_{n,m}$ determinánsok alkalmazása a $\limsup |D_{n,m}|^{1/n}$ értékének különböző m-ek esetében való vizsgálata révén egy feltételt ad arra, hogy a függvény valamely az origó körül írt adott körön belül meromorf legyen.

Az ide vonatkozó tételek és bizonyítási módszerek rendkivül elegánsak.

Hadamard a konvergenciakörön fellépő szingularitásokat „rendjük" szerint osztályozta. A rend azon α számok infimuma, melyekre a sor $-\alpha$-rendű Riemann—Liouville-féle tört deriváltja (vagy inkább annak Hadamard-féle verziója), mint a konvergenciakörön az argumentum függvénye folytonos és a szingularitás egy bizonyos környezetében „véges eltérésű" (d'écart fini). A $\varphi(\vartheta)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon véges eltérésű, ha az $|n \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\vartheta) e^{in\vartheta} d\vartheta|$ kifejezések számára $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$-re egy α, β és n-től független állandó adható meg, mint felső korlát. Felelet-

képpen egy kérdésre, melyet Hadamard a doktori értekezésben vetett fel, azóta bebizonyították, hogy léteznek olyan folytonos véges eltérésű függvények, melyek nem korlátos variációjú függvények. A függvénynek a „konvergenciakörre vonatkozó rendje", vagyis a körön levő szingularitások rendjei közül a legnagyobb, egy formula által van adva, mely igen szuggesztív módon emlékeztet a konvergenciasugár formulájára.

Úgy tűnik nekünk, hogy a fiatalabb generációkhoz tartozó matematikusok nem aknázták ki teljesen Hadamard-nak a rendre vonatkozó ideáját. Bizonyára sokkal mélyebb eredményeket lehetett volna nyerni ebből a tartalomban oly gazdag fogalomból, mint azok, melyeket Hadamard egyik követője a huszas évek elején egy ezzel a tárggyal foglalkozó monográfiában összefoglalt. A determinánsok vizsgálata is, melyeket szintén a doktori disszertációban vezetett be és amelyek a rend fogalmával hasonlóképpen függnek össze, mint a $D_{n,m}$-ek a meromorfizmussal, nagy lehetőségeket nyújtanának fontos kutatások számára.

Hadamard 1898-ban bizonyította be a szingularitások kompozíciójára vonatkozó tételét. Nem nagyon szigorú fogalmazásban ez a következőképpen szól: $\Sigma A_n B_n z^n$-nak nincsenek más szingularitásai, mint azok, melyek kifejezhetők $\alpha\beta$ alakú szorzatok alakjában, ahol α a $\Sigma A_n z^n$, β pedig a $\Sigma B_n z^n$ valamelyik szingularitása.

A tétel bizonyítása a Parseval-féle integrálon alapul, melyet Hadamard a Dirichlet-féle sorra alkalmazott (1898 és 1928), nem az összetett sor szingularitásainak a vizsgálatára, hanem a Riemann-féle ζ-függvény, vagy különböző típusú ζ-függvények különböző helyeken felvett értékei között fennálló érdekes összefüggések tanulmányozására.

A Taylor-sor analitikus folytatásáról szóló, imént említett két dolgozat, valamint a „La série de Taylor et son prolongement analytique" című csodálatos kis monográfia, melyet Hadamard 1901-ben írt, sok nagynevű matematikust serkentettek további munkára és túlzás nélkül lehet mondani, hogy a Bieberbach analitikus folytatással foglalkozó új monográfiájában idézett 150 szerző 350 publikációja közül csaknem valamennyi közvetlenül, vagy közvetve Hadamard-nak az előzőkben ismertetett munkássága által volt inspirálva.

Az 1892. év hozta a leggazdagabb termést a komplex függvénytan történetében, mert nem csak Hadamard disszertációja jelent meg akkor, hanem az egész függvényekről szóló híres munkája is, mely néhány évvel később (1896) lehetővé tette számára, hogy megoldja a számelmélet egyik legrégibb és legfontosabb problémáját.

A nyert általános eredmények egy összefüggést állapítottak meg egy egész függvény együtthatóinak abszolút értékei csökkenésének mértéke és a függvény neme között (Poincaré tételének megfordítása); ezt az összefüggést a $\zeta(z)$-vel kapcsolatos $\xi(z)$ egész függvényre alkalmazva,

Hadamard azt találta, hogy (amint azt már korrekt bizonyítás nélkül Riemann állította) ennek a függvénynek a neme zérus, ha z^2 függvényeként tekintjük. (Általános egész függvények esetére) ezt az egész függvény zérushelyeinek abszolút értékei és a függvény együtthatóinak csökkenése közt fennálló összefüggést a disszertáció fentemlített eredményeinek felhasználásával és egy alkalmasan választott meromorf függvény (a vizsgált egész függvény inverze) $D_{n,m}$ determinánsainak alkalmazásával vezette le.

Az egész függvényekről szóló ezen munkával a Grand Prix de l'Académie des Sciencesra pályázott 1892-ben. Érdemes megemlíteni azt a körülményt, hogy a párizsi matematikai világ biztosra vette, hogy a díjat Stieltjes fogja elnyerni, aki azt hitte, hogy sikerült bebizonyítania a híres „Riemann-féle sejtést". Azt hiszem, érdekes idézni egy mondatot Hadamard 1896-os nagyhírű értekezéséből, melynek szuggesztív címe: „Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques". Hadamard ezt írja: „Riemann sejtéseivel összhangban, Stieltjes kimutatta, hogy ezek a zérushelyek valamennyien $\frac{1}{2}+ti$ alakúak (ahol t valós szám), azonban bizonyítása sohasem lett közzétéve és még csak az sem ismeretes, hogy a ζ-függvénynek nincsenek zérushelyei az $R(s)=1$ egyenesen. Én éppen ennek az utóbbi állításnak az igazolását tűzöm ki célul magam elé".

A feladat „szerénysége" és nagysága: bebizonyítani, hogy $\sigma=1$-re $\zeta(s)\neq 0$ $(s=\sigma+it)$, miután Stieltjes azt állította, hogy „bebizonyította" a Riemann-féle sejtést, különösen megkapó. Annál is inkább, mivel ennek a bizonyításnak az alapján Hadamard ugyanabban az 1896-os dolgozatában be tudta bizonyítani a törzsszámok eloszlására vonatkozó legfontosabb állítást: ha $\pi(x)$ az x-nél kisebb törzsszámok számát jelenti $(x>0)$, akkor $\pi(x)\sim x/\log x$ $(x\to\infty)$.

Ennek az eseménynek nagy történeti jelentősége volt. A múlt század elején Legendre feltételezte, hogy $\pi(x)=x(\log x-A(x))$, hol $A(x)$ egy véges határértékhez tart. Csebisev kimutatta, hogy $0{,}92129\leqq\pi(x)\log x/x\leqq 1{,}10555...$, de nem bizonyította be, hogy ez a kifejezés egy határértékhez tart és semmi remény sem volt arra, hogy az ő módszere egy ilyen bizonyítást szolgáltathasson. Számos matematikusnak, köztük Sylvester-nek is sikerült a Csebisev-féle módszerek alkalmazásával megjavítani ezeket az egyenlőtlenségeket. Azonban ezekben a javításokban nem volt semmi lényegesen új. Idézzük (Landau nyomán), amit Sylvester 1881-ben erről a témáról írt: „Azonban ahhoz, hogy a $\lim \pi(x)\log x/x=1$, reláció bizonyítva legyen, valószínűleg addig kell várnunk, míg olyan valaki születik erre a világra, aki belátásával és gondolatainak mélységével annyira fogja Csebisevet felülmúlni, amennyire ezen tulajdonságok tekintetében Csebisev felette áll az emberek átlagának".

Mint Landau megjegyzi, amikor Sylvester ezeket a sorokat írta, Hadamard már megszületett.

Megemlítendő, hogy Hadamard-tól függetlenül és vele egy időben de la Vallée—Poussin is bebizonyította, hogy a ζ-függvény nem tűnik el a $\sigma = 1$ egyenesen, miáltal bebizonyította a törzsszámtételt is; azonban Hadamard bizonyítása sokkal egyszerűbb.

Hadamard-nak a $\zeta(s)$ zérushelyeinek halmazára vonatkozó vizsgálatai arra a fentemlített eredményre támaszkodnak, melyet a $\xi(z)$ nemét illetőleg 1892-ben írt azon dolgozatában adott meg, mellyel a Grand Prix-re pályázott.

Fontosnak tűnik számunkra, hogy kitérjünk az „események láncolatára", mely Hadamard felfedezéseiben megmutatkozik: egy meromorf függvény pólusainak helyzete és Taylor-sorának együtthatói közti összefüggés; ez az eredmény vezet később egy egész függvény neméhez Taylor-együtthatói csökkenésének vizsgálata révén; ebből következnek négy évvel később a ζ-függvény fontos tulajdonságai, melyek végül is a törzsszámtételt vonják maguk után.

Úgy látszik, hogy az analitikus folytatás egyik legszebb elmélete, bármilyen jelentős legyen is önmagában véve és bármilyen gazdag legyen is következményeiben, Hadamard gondolatvilágában, akár tudatosan akár nem, egyetlen egy cél felé, nevezetesen a törzsszámtételre irányult.

Hadamard bebizonyította azokat az analóg tételeket is, melyek egy adott számtani haladvány törzsszámainak eloszlására vonatkoznak, mivel az ő módszereivel vizsgálni tudta azokat a Dirichlet-sorokat is, melyek ezen törzsszámok tekintetében ugyanazt a szerepet játsszák, mint a ζ-függvény az összes törzsszámok tekintetében.

Miután éppen a „Hadamard-féle determinánsokról" beszéltünk, említsük meg azokat a becsléseket, melyeket általános determinánsok értéke számára adott (1893), valamint a komplex változós függvénytanban az ő híres „háromkörtételét": Ha $M(r)$ egy az $|z| < R$ körben reguláris függvény abszolút értékének az $|z| < R$ körben reguláris függvény abszolút értékének az $|z| = r < R$ körön felvett maximumát jelenti, akkor $\log M(r)$ a $\log r$ változónak konvex függvénye.

Nem hagyhatjuk el a függvénytant anélkül, hogy meg ne említenők a végtelenül sokszor differenciálható függvényekre vonatkozólag a kvazi-analicitásnak Hadamard által egy 1912-es rövid cikkben kitűzött problémáját, világosan elkülönítve ezt a komplex tartományban értelmezett analitikus függvények fogalma általánosításának problémájától. Erre a problémára a hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-probléma adatainak tulajdonságai (a megoldás deriváltjának az $x = 0$ határon fennálló Holmgren-féle tulajdonságai) vezették rá Hadamard-t.

Meg kell itt említenünk, hogy Hadamard volt az első, aki egy összefüggést állapított meg egy függvény, valamint első és második deriváltja abszolut értékeinek az egész valós tengelyen felvett maximumai között (1919), egy olyan összefüggést, mely később általánosítva fontos szerepet játszott a végtelenül sokszor differenciálható függvények elméletében.

Egy teljesen más eszmevilágban, átlépve a klasszikus differenciálgeometria területére, Hadamard maximumokra és minimumokra vonatkozó elég elemi meggondolásokkal általános felületek valós geodetikus vonalainak viselkedését tanulmányozta. Különösen érdekes és egyszerű eredményeket talált abban az esetben, mikor a felület görbülete mindenütt pozitív (1897) (Prix Bordin de l'Académie des Sciences).

Miután azonban, a differenciálgeometriát topológiai meggondolások, vagy helyesebben mondva az váltotta fel, amit analysis situs-nak neveztek, a negatív görbületű felületek geodetikus vonalainak vizsgálata lett Hadamard egyik legszebb dolgozatának tárgya (1898). (Az analysis situs-nak a differenciálegyenletek vizsgálatában mutatkozó jelentőségére Poincaré munkássága hívta fel a figyelmet, melynek Hadamard mindig a legnagyobb csodálattal adózott.)

Ebben a munkában Hadamard teljesen elejtett mindenféle feltevést a felület analitikus természetét illetően, minek következtében eredményei lényegesen általánosabb jellegűek, mint azok, melyek a pozitív görbületű felületekre vonatkoznak.

A Hadamard által vizsgált negatív görbületű felületeken, melyek véges sok végtelenbe nyúló palásttal rendelkeznek, a geodetikus vonalak olyan viselkedést tanúsítanak, mely egy fizikusok és csillagászok számára érdekes filozófiai problémára vezet.

Vannak zárt geodetikus vonalak, és olyanok, melyek ilyen zárt geodetikus vonalakhoz aszimptotikusan közelednek; vannak továbbá olyan geodetikus vonalak is, melyek valamelyik palást on a végtelenbe tartanak. Van azonban ezeken a felületeken a geodetikus vonalaknak még egy harmadik kategóriája is: azoké, melyeknek egymást követő szakaszai zárt geodetikus vonalak sorozatán elhelyezkedő görbeszakaszokhoz közelednek, s ez utóbbiak hossza állandóan növekszik.

Azonban a legfigyelemreméltóbb vonás a következő: valamely ponton áthaladó és véges távolságban maradó geodetikus vonalak érintőinek E halmaza *perfekt és sehol sem sűrű*, továbbá minden olyan geodetikus vonal környezetében, melynek érintője E-hez tartozik (irány-környezet), van olyan geodetikus vonal mely egy tetszőlegesen választott választott palást on a végtelenbe tart. Minden ilyen környezetben vannak a harmadik kategóriához tartozó geodetikus vonalak, vagyis olyanok, melyek egyre szorosabban közelítik meg a zárt geodetikus vonalaknak egy megszámlálható halmazát.

Más szóval, „egy véges távolságban maradó geodetikus vonal irányának a legkisebb megváltoztatása elegendő ahhoz, hogy a görbének teljesen tetszőleges végső irányt adjon, az új geodetikus vonal a fentebb állított formák közül bármelyiket felveheti".

És Hadamard felveti a kérdést, vajon hasonló körülményekkel találkozhatunk-e a mechanika egyéb problémáival kapcsolatban is? Többek között felmerülhetnek-e az égitestek mozgásának vizsgálatában is? Hadamard szerint valószínű, hogy az ilyen nehéz esetekben talált eredmények analógak a szóban forgó cikkben közölt eredménnyel. De egy fizikai problémában valamely időpontra vonatkozó adatok csekély módosítása csak kis befolyást gyakorolhat a megoldás jövőbeli alakulására, mivel mindig csak közelítő adatokat ismerünk.

Eszerint egy pálya *végső* viselkedése függhet az integrációs állandók *aritmetikai* sajátságaitól.

Hadamard-t nagyon érdekelte Volterra funkcionális kalkulusa. Tény, hogy Hadamard hozta javaslatba a „fonctionnelle" kifejezést Volterra korábbi „fonction de ligne" kifejezése helyett. Meg kell említeni, hogy Hadamard már a század legelején (1903) egy általános kifejezést adott meg az egy intervallumon folytonos függvények osztályán értelmezett lineáris funkcionálok számára. Ez a kifejezés, mely az

$$U(f) = \lim_{\mu \to \infty} \int_a^b f(x) \Phi(x, \mu)\, dx$$

alakú határérték által van adva, Riesz Frigyes híres tételének előfutára.

Bevezetve egy a peremfelület funkcionáljának (és a két belső pont függvényének) tekintett Green-függvény Volterra-féle értelemben vett funkcionális deriváltjának fogalmát, Hadamard a megfelelő függvényegyenlet integrációja révén meg tudta határozni a $\Delta U = 0$ egyenletnek megfelelő Green-függvényt, ha az adva van egy adott felületen.

Hadamard mindig érdeklődött a mechanika és a differenciálegyenletek iránt és ezekről a témákról különböző érdekes dolgozatokat közölt, melyek közül egyesek tartalmazzák már azokat a fő gondolatokat, melyeket fizikai vizsgálódásaiból merített. Azonban az ő parciális differenciálegyenletekre vonatkozó munkássága, melyet viszonylag későn kezdett meg, egyike lett azon legfontosabb adalékoknak, melyekkel a tudomány fejlődését előmozdította. Az ezen tárgynak szentelt dolgozatai közül egy 1900-ból, kettő pedig 1901-ből való. 1903-ban jelent meg a „Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique". Fő eszméi a következő években alakultak ki. Állhatatosan kitartott mellettük, hogy meggyőzze fontosságukról a matematikusokat és a fizikusokat. Gondosan vizsgálta a különböző fajta problémákat. A másodrendű parciális differenciálegyenletekre vonatkozó Dirichlet-problémákban a

peremadatok egyetlen egy függvény által vannak adva, míg a Cauchy-problémákban két adat van adva a $t=0$ résztér minden pontjában; egy elliptikus operátor, például a Δ Laplace-operátor esetében a Dirichlet-probléma korrektül van kitűzve (ez a probléma abban áll, hogy a $\Delta u=f$ egyenlet számára egy olyan megoldást kell találni, mely értelmezve van az R^m térnek egy Ω nyílt halmazán és az $u=u_0$ peremértékekkel rendelkezik, ahol u_0 egy adott, az Ω halmaz S határán értelmezett függvény), míg egy hiperbolikus operátor, például a $\Box = \partial^2/\partial t^2 - \Delta_x$ hullámoperátor esetében a Cauchy-probléma kitűzése korrekt (ez abban áll, hogy a $\Box u=f$ egyenlet számára egy olyan megoldást kell keresni, mely felveszi az $u(x, 0)=u_0(x)$, $\partial u(x, 0)/\partial t=u_1(x)$ kezdeti értékeket.

Természetesen ezek a gondolatok jelenleg nagyon jól ismeretesek, azonban abban az időben ez nem volt így, ami részben annak volt tulajdonítható, hogy az érdeklődés túlnyomóan az egyszerű differenciálegyenletek felé fordult, részben pedig az analitikus parciális differenciálegyenletekre vonatkozó Cauchy—Kovalevszkaja-féle eredménynek; az egyenletek, illetve a problémák különféle típusai nem voltak annyira tisztázva, mint jelenleg és valószínűleg éppen mi, az ő kortársai és követői vagyunk neki lekötelezve azért, hogy ragaszkodott ehhez az osztályozáshoz. Sőt ezenfelül nem csak azt követelte meg, hogy egy „korrekt kitűzésű" problémában tetszőleges adatokhoz egy és csak egy megoldás létezzék, hanem azt is, hogy a megoldásnak folytonosan kell függnie az adatoktól. Ezt a követelést azzal indokolja, hogy ha az adatok csekély megváltoztatása maga után vonja a megoldás jelentékeny megváltozását, akkor ez a fizika szempontjából nézve nem valódi megoldás, mert a fizikai világban sohasem ismerjük teljesen az adatokat, hanem csak egy korlátolt pontossággal, ami azt jelentené, hogy a valóságban nem ismerjük a megoldást. Ezt a gondolatot állandóan ismételte, úgy hogy még jelenleg is akkor mondjuk egy problémáról, hogy „Hadamard-féle értelemben korrekt kitűzésű", ha a megoldás folytonosan függ az adatoktól. Ez az eszme még gyümölcsözőbbnek bizonyult, mint ahogy ő maga gondolta volna; ugyanis, mint később megjegyezte, az analízis művelői most már kötelezve voltak arra, hogy „a környezetek és a folytonosság különféle típusait" vizsgálják, ami elkerülhetetlenül vezetett a függvényterekhez, az általános topológiához és a funkcionálanalízishez; ez bizonyára a funkcionálanalízis egyik forrása és mindmáig annak egyik alkalmazási területe. A parciális differenciálegyenletek megoldásának modern módszerei „a priori becsléseket" használnak, ami azt jelenti, hogy a megoldás egzisztenciáját és unicitását azáltal mutatjuk ki, hogy először az adatoktól való függésének folytonosságát igazoljuk, majd ezután a funkcionálanalízis (lényegileg Banach és Riesz Frigyes) tételei szolgáltatják az eredményt. Másrészről Banach híres tétele, az úgynevezett „zárt gráf-tétel" később megmutatta, hogy a legtöbb eset-

ben a megoldás egzisztenciája és unicitása maga után vonja az adatoktól való folytonos függését. A parciális differenciálegyenletekre vonatkozó ezen vizsgálatok, együtt az integrálegyenleteknek Fredholm által való bevezetésével és Hilbert módszereivel (Hilbert-terek) váltak az operátorok modern elméletének forrásává. Hangsúlyozni kell azt is, hogy Hadamard mindig arra törekedett, hogy szorosan a fizikához tartsa magát; egy matematikus szigorúságával és egy fizikus gyakorlati érzékével szeretett dolgozni és szivesen ismételgette Poincaré következő szavait: „La physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes ..., elle nous fait pressentir la solution." Azonban Hadamard legfontosabb adaléka a parciális differenciálegyenletek elméletéhez a normális hiperbolikus típushoz tartozó másodrendű egyenletek teljes megoldása az elemi megoldás felhasználásával (ő előnyben részesítette ezt az elnevezést az „alapmegoldás" kifejezéssel szemben; manapság angolul alapmegoldást (fundamental solution), franciául pedig elemi megoldást (solution élémentaire) mondanak. Az első ismert alapmegoldás a Laplace-egyenleté volt: a potenciálelmélet $1/r$ magja. Az elliptikus esetben Picard, E. E. Levi, Hilbert (a híres parametriks-szel), Fredholm, Herglotz, Leroux és Zeilon sikerrel tanulmányoztak általánosabb egyenleteket, sőt még magasabb rendűeket is, állandó vagy változó együtthatókkal. A hiperbolikus eset azonban tisztázatlan maradt. A Riemann-függvény csak a nagyon speciális kétdimenziós esetre volt értelmezve és nem volt közvetlenül általánosítható. Poisson megoldotta a hullámegyenletet a négydimenziós esetben (három térbeli és egy idődimenzió). A megoldást az inhomogén tag és a kezdeti adatok egy explicit kifejezésével állította elő, azonban ez a megoldás egyszerűen csak fel lett írva, mint olyan, mindennemű módszer megjelölése nélkül, hogy miképpen lehet a megoldást megtalálni; ezért nem is lehetett ezt az eredményt általánosítani nehezebb esetekre, vagy éppenséggel négynél több dimenzió esetére. Kirchhoff (Zur Theorie der Lichtstrahlen), Volterra és Tedone gondosan vizsgálták ezt a problémát; ők meg tudták határozni magasabb dimenzió-számú hullámegyenletek teljes megoldását, azonban indirekt módszerekkel; előállították a megoldásoknak bizonyos tetszőlegesen választott vonalak mentén vett többszörös integráljait, melyekből maguk a megoldások differenciálás révén adódtak. Megjegyzendő, hogy ez az indirekt eljárás nem elvetendő, amennyiben a probléma belső természetéből folyó indokolással támasztható alá, de nem szolgáltat egyszerű és direkt kifejezést a megoldás számára, továbbá a megoldás csak egy nagyon bonyodalmas eljárás eredményeképpen adódik ki és nem lehet látni, hogy miképpen lehetne ezt az eljárást általánosítani változó együtthatók esetére. Hadamard híres könyvében, melynek címe „Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques", ki van fejtve, hogy miképpen kapható meg a teljes megoldás az elemi megoldás

vizsgálata révén. Ez a könyv, mely az ő 1920-ban a Yale-egyetemen tartott előadásait tartalmazza, tartalmánál, előadásának világosságánál és gondolatbőségénél fogva valóságos remekmű, melyből inspirációt merítettek a következő generációhoz tartozó mindazon matematikusok, akik parciális differenciálegyenletek vizsgálatával foglalkoztak. Mindenek előtt megkonstruálta az elemi megoldást, úgy definiálva azt, mint a homogén egyenlet azon megoldását, melynek egy adott típusú szingularitása van a karakterisztikus kúpon; ha $\Gamma = 0$ ennek a kúpnak a normálegyenlete, akkor a megoldásnak páratlan m esetében (m a tér dimenzióinak száma) $U/\Gamma^{(m-2)/2}$ alakúnak, páros m esetében pedig $U/\Gamma^{(m-2)/2} + V \log \Gamma$ alakúnak kell lennie, ahol U és V reguláris függvények. A páratlan és a páros dimenziószám között mutatkozó ezen különbséget már az elliptikus egyenletekkel kapcsolatban is megfigyelték és ez még a jelenlegi kutatásban is lényeges szerepet játszik. Hogyan lehet már most egy adott Cauchy-probléma megoldását felépíteni ebből az elemi megoldásból? A normális eljárást a Green-formula szolgáltatja, mely azonban divergens integrálokhoz vezet. Ezen a ponton Hadamard egy új eljárást vezetett be divergens integrálok kiszámítására azáltal, hogy levonta belőle a nem egész rendű „végtelen részt"; a fennmaradó részt a „divergens integrál véges részének" nevezte. Ez a módszer nagyon hatásosnak bizonyult és valóban, legalább is páratlan m esetében teljesen ki tudta fejezni a probléma megoldását („synthèse de la solution") egy Green-formula segítségével az elemi megoldás által; ez a kifejezés magában foglalja divergens integrálok véges részeit is. Páros m esetében ez az eljárás nem vált be; ekkor a „méthode de descente" alkalmazásához folyamodott, először megoldva a problémát az $m+1$ dimenziószám esetére, majd innen leszállva az m dimenziószámra. Ez a leszállás természetesen egy nagyon triviális gondolat, azonban itt egy bámulatos egyszerűsítést tesz lehetővé és egyszerűsége ellenére egy szép és gyümölcsöző matematikai ötlet. Az a kifejezés, melyet a megoldás számára páros m esetében talált, merőben különbözik a páratlan m esetében érvényes kifejezéstől; ennek az eredménynek is sok fontos következménye van, melyeket utána sok más szerző vizsgált. Ma már tudjuk, hogy különösen a páros esetben az elemi, vagy alapmegoldás fogalmát egy kissé másképpen kell definiálni, a Dirac δ-disztribuciót használva, mint inhomogén tagot; ezt azonban Hadamard megoldási módszere és a divergens integrálok véges részei nélkül sohasem lehetett volna felismerni.

A megoldás integrálkifejezése elárulja, hogy miképpen függ a kezdeti adatoktól. Mindenek előtt, a megoldás egzisztenciája feltételezi az adatok számos deriváltjának egzisztenciáját, melyeknek száma a tér dimenzióinak a számától függ. Ez elég meglepő, mivel egy másodrendű egyenlet esetében nem természetes azt feltételezni, hogy a megoldásnak, vagy az adatoknak kettőnél több deriváltjuk van. Itt be kell vallani, hogy

a fizikai szellemét félrevezető volna. A magasabb rendű deriváltaknak ez a fellépése a későbbi vizsgálatokban szintén fontos szerepet játszott. A Hilbert-féle függvényterek bevezetése egy módszert nyújt ezek elkerülésére („energiaintegrálok"). Azonban a megoldás másféleképpen is függhet az adatoktól: ahhoz, hogy ismerjük a megoldást a térnek egy korlátos tartományában, elegendő az adatokat egy rögzített korlátos tartományban ismerni („rayon d'action" des données). E tartományok határainak pontos kitűzésénél fontos szerepet játszanak a bikarakterisztikus vonalak, vagyis azok a sugarak, melyeknek mentén a hullámok tovaterjednek; a fény hullámelméletében a fénysugarak játszák ezeknek a szerepét. Értelmezni lehet továbbá a hullámfelületeket és Huygens elvét is. Hadamard újrafogalmazta ezt az elvet, gondosan megkülönböztetve egymástól kétféle Huygens-elvet: az egyik egy általános törvény; bármilyen fejlődési folyamatot leíró egyenlet esetében egyszerűen a transzformációk egy gruppoidjának egzisztenciáját fejezi ki, úgy fejezve ki a t időponttól a t'' időpontba való átmenet, mint egy t-től t'-be való átmenet és egy t'-től t''-be való átmenet kompozícióját (mégis ez az elv, különféle típusú egyenletekre kalkulálva, számos érdekes addiciós formulát szolgáltat a Bessel-féle hipergeometrikus thetafüggvények számára); a másik elv az elemi megoldások „hézagainak" egzisztenciáját fejezi ki; ezzel kapcsolatban Hadamard bevezette a hullámok diffúziójának vagy nem-diffúziójának a fogalmát; a páratlan-dimenziós esetben, valamint két dimenzió esetében (rezgő húr) mindig van diffúzió; a kettőnél nagyobb páros dimenziószámok esetében nem tudta megtalálni az általános eredményt, ami az újabb matematikusok számos igen figyelemreméltó munkájához szolgáltatott indítékot.[2]

Hadamard tanulmányozta a hiperbolikus egyenletekkel kapcsolatban az úgynevezett „vegyes feltételű problémákat" is; ezeknél mind a $t=0$-ra vonatkozó Cauchy-féle kezdeti adatok, mind a térbeli tartomány peremén a Dirichlet-féle adatok elő vannak írva. Munkájának ez a része tartalmaz néhányat a legnehezebb vizsgálatok közül; követi a sugarakat a peremen való visszaverődésük után és vizsgálja a „gyújtófelületet". Ha a hullámok tovaterjednek, ha a mozgás időbeli lefolyását sugarak segítségével nyomon lehet követni, akkor mért ne lehetne ugyanígy eljárni olyan peremértékproblémák esetében, ahol visszaverődések is vannak? Mégis úgy látszik, hogy ez a tárgyalásmód túl nehéz. A peremértékproblémák megoldására szolgáló modern módszerek legnagyobb részben globális eljárások, például olyanok, melyek magukban foglalják a Laplace-transzformációt, vagy a félcsoportok elméletét, vagy sajátfüggvényeket és stacionárius hullámokat, vagy

[2] Hadamard alig vizsgált kettőnél magasabb rendű egyenleteket, melyek jelenleg a legtöbb publikáció tárgyát képezik.

operációs módszereket, azonban elsikkad a tovaterjedés és a visszaverődés eszméje.

Hadamard egészen élete végéig érdeklődött a parciális differenciálegyenletek iránt. Látni lehetett őt minden ilyen tárgyú kollokviumon és szemináriumon, ahol mindent gondosan követett és a végén kérdéseket tett fel. A terminológia időközben annyira megváltozott, hogy sokszor még jól ismert gondolatokat is nehéz volt felismerni, azonban ő mindig észrevette az új fogalmak és a régi gondolatok közti hasonlóságot. Hozzá kell tenni, hogy sohasem tiltakozott a tudományos nyelvezet és a fogalmak megújítása ellen és arra törekedett, hogy megértse az újításokat; a matematikát nem tekintette statikus tudománynak, hanem úgy fogta fel, hogy szakadatlanul előre halad és tudta, hogy ez a változás, mely nem csak a módszerekben, hanem magában a matematika alakjában is megmutatkozik, az ára ennek a haladásnak. Új eszmék mindig lelkes támogatóra találtak benne.

Közülünk azok, akiknek osztályrészül jutott, hogy Hadamard szemináriumait látogathatták a Collège de France-on, ahol 1909-től 1937-ig tanított,[3] aligha tudnak visszaemlékezni olyan órákra, melyekben mélyebb matematikai inspirációban lett volna részük. Az egész világon jól ismert matematikusok megtiszteltetésnek és néha félelmetes feladatnak tekintették, ha felszólította őket, hogy ismertessék új eredményeiket, vagy mások által az ő kutatási területükön talált eredményeket. Azonban anélkül, hogy csökkenteni igyekeznénk az előadók tehetségét és jelentőségét, azt kell mondanunk, hogy túlnyomó részben az volt az érzésünk, hogy inspirációnk gazdagsága és kedvünk a további munkához, vagy legalább ahhoz, hogy tovább gondolkozzunk a szemináriumban tárgyalt témákról, Hadamard elemzéseiből, kritikai megjegyzéseiből, közbeszólásaiból és a tárgy jövőjét illető prognózisaiból származott.

Hadamard szemináriumának egyik jellegzetessége változatosságában állt. Ez a szeminárium nem a matematika valamely ágára vonatkozott, hanem az egész matematikára, mind a tiszta, mind az alkalmazott matematikára, beleértve a matematika filozófiáját és a numerikus analízist egyaránt. Az előadás gyakran jelentett egy fontos matematikai eseményt, ahol első ízben tettek közzé egy igen jelentős eredményt. Néha magában a szemináriumban születtek új eredmények, melyeket néhány héttel később publikáltak a párizsi Akadémia Comptes Rendusiben.

[3] Hadamard az École Polytechnique és az École Centrale tanára is volt. Oktató pályáját (mint Franciaországban a húszas évek végéig mindenki, még a legnagyobbak is) középiskolai tanárként kezdte el, azután Maître de Conférences lett a Bordeaux-i egyetemen, ahonnan a Sorbonne-ra ment, míg a Collège de France professzorává választották.

A húszas és a harmincas években a párizsi matematikai életet nagy részben ez a két szó írta le: „Séminaire d'Hadamard".

Fordította: Földes István

ЖАК АДАМАР (1865—1963)

Шолем Манделбройт и Лоран Шварц

JACQUES HADAMARD (1865—1963)

S. MANDELBROJT and L. SCHWARTZ

Az összehasonlító primszámelmélet egyes problémáiról[1]

TURÁN PÁL

Azon jelentésben, melyet 1871 június 19-i dátummal terjesztettek a berlini Akadémia elé P. L. Csebisev akadémiai kültaggá való beválasztása érdekében és melyet nem kisebb nagyságok írtak alá, mint Kronecker Kummer és Weierstrass, találjuk a következő sorokat:

[2]„...Endlich ist Herr Tchebychew der erste Mathematiker, welcher für die Anzahl der Primzahlen bis zu einer hohen Grenze den Überschuss der Primzahlen der Form $4n+3$ über diejenigen von der Form $4n+1$ constatiert und für den asymptotischen Ausdruck $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$ angegeben hat..."

Mi volt eme sorok mögött? Dirichlet 1837-ben megjelent klasszikus dolgozatában nemcsak azt mutatta meg, hogy $(k, l)=1$ mellett végtelen sok prímszám van, mely $\equiv l, \bmod k$, hanem azt is, hogy egy gyenge értelemben minden redukált maradékosztályban mod k aszimptotikusan ugyanannyi prímszám van. 16 évvel később Csebisev megjegyezte, hogy bizonyos jelenségek épp ellenkező fogalmazást is lehetővé tesznek. Egy levelében, melyet később publikált is, két állítást tett. Az első oly $x_1 < x_2 < \ldots < \to +\infty$ sorozat létezését állította, melyre[3]

$$(1) \qquad \frac{\pi(x_\nu, 4, 3) - \pi(x_\nu, 4, 1)}{\left(\frac{\sqrt{x_\nu}}{\log x_\nu}\right)} \to 1$$

[1] A DDR Matematikai Társulata meghívására Lipcsében, 1966. feruár 11-én tartott előadás.

[2] „... végül Csebisev úr az első matematikus, aki megállapította a $4k+3$ alakú és a $4n+1$ alakú prímek számának különbségét egy magas határig és erre aszimptotikus érték gyanánt $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$-et adta meg..."

[3] $\pi(x, k, l)$, mint szokásos, azon p prímek számát jelenti, amelyek $\equiv l \bmod k$ és $p \leqq x$.

a második pedig, mely lényegesebb, azt, hogy a

$$\sum_{p>2} (-1)^{\frac{p-1}{2}} e^{-\frac{p}{x}} \tag{2}$$

függvény $(-\infty)$-hez konvergál, ha $x \to +\infty$. Ez utóbbi állítás tényleg bizonyos formában úgy interpretálható, hogy „több" $(4n+3)$-alakú prím van, mint $(4n+1)$-alakú. Mindenesetre mutatja ez, hogy a prímszámelmélet azon két iránya, mely a prímek eloszlásában egyenletesség ill. eltérések kimutatását tűzi ki céljául, kb. egyidejűleg kezdődött. Feltűnő azonban, hogy, míg az első irányzat a közbülső időben számos lényeges haladást tett, a második a több, mint 100 év alatt alig fejlődött. Ezen második irányzat problémáit jellemezte O. Toeplitz egy litografált szemináriumi előadásban, 1930-ban, mint „fast unangreifbar bei der heutigen Stand der Wissenschaft". Ezen második irányzat az, melyet összehasonlító prímszámelméletnek nevezünk.

Az előadást a tárgy egy szűkítésével kezdjük meg. Pl. azon prímek számának összehasonlítása, melyeket az egész együtthatós $ax^2+bxy+cy^2$ quadratikus alak az (x, y)-sík különböző szögtereiben elő tud állítani, szintén ezen elmélethez tartozik; itt azon kérdésekre fogunk szorítkozni, melyek mod k különböző maradékosztályok prímszámainak összehasonlítására vonatkoznak.

Mik voltak ezen elmélet lényeges eredményei 1955-ig? Csebisev sohasem publikálta fenti állításai bizonyítását. Az (1) állítást Phragmén még a múlt században bebizonyította; a tétel nem túl mély. Ami a (2) állítást illeti, azt ma úgy fogalmazhatnánk, hogy a

$$\sum_{p>2} (-1)^{\frac{p-1}{2}} \tag{3}$$

Abel-eljárása szerint szummálva a szumma $(-\infty)$. Ezen állítás helyessége rögtön következne, ha meg lehetne mutatni, hogy a (3) sor részletösszegei $(-\infty)$-hez konvergálnak; ez mutatná a $(4n+3)$-alakú prímek számának preponderanciáját a $(4n+1)$ alakúakkal szemben a legvilágosabban. De Littlewood 1914-ben bebizonyította, hogy ez nem igaz, sőt a

$$\pi(x, 4, 1) - \pi(x, 4, 3) \tag{4}$$

részletösszegek mindkét irányban korlátlanok; ez már önmagában is mutatja a (2) alatti állítás mélységét. Landau és Hardy—Littlewood az első világháború idején foglalkoztak Csebisev állításának (2) alatti formájával is; megmutatták, hogy ha igaz, akkor nagyon mély. Megmutatták ugyanis, hogy a (2) állítás *ekvivalens* azzal, hogy a komplex $s =$

$= \sigma + it$ — síkon a $\sigma > 0$ félsíkban a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s}$ sor által definiált függvény a $\sigma > \frac{1}{2}$ félsíkban nem tűnik el.[4] Ezen kapcsolat különben e vizsgálatoknál csak további fontosságot ad.

Mint mondottuk, a (4) függvény végtelen sokszor vált jelet. De ezen jelváltások helyéről, ami pedig a prímszámeloszlás finom-struktúrájáról adna, felvilágosítást semmi nem volt ismert; kb. olyan volt e téren a helyzet, mint magában a prímszámelméletben Eratoszthenész idején. És, ha ez volt a helyzet $k = 4$ esetén, mikoris a páratlan prímek két maradékosztályban oszlanak el, el lehet képzelni, mi volt $\varphi(k) \geqq 4$-re; még ma is messze vagyunk pl. azon állítás *teljes* bizonyításától, hogy a

$$\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2) \tag{5}$$
$$((l_1, k) = (l_2, k) = 1, \quad l_1 \not\equiv l_2 \bmod k)$$

függvények mind végtelen sokszor jelet váltanak. Egy további karakterisztikus nehézség az első irányzathoz tartozó tételeknél is fellép. Ha pl. Dirichlet tételét úgy akarjuk szigorítani, hogy jó felső becslést adjon (k-ban, l-től függetlenül) a *legkisebb* prímre, mely $\equiv l \bmod k$, lényeges újabb nehézségek lépnek fel, melyeket Linnik csak 1945-ben, több mint 100 évvel Dirichlet után tudott legyőzni. Az első ilyen jellegű kérdés a második említett irányzatnál a $\pi(x) - \operatorname{Li} x$ függvény *legkisebb* jelváltási helyére vonatkozott, ahol $\pi(x)$ jelenti, mint szokás, az x-et meg nem haladó prímek számát, $\operatorname{Li} x$ az $\int_2^x \frac{dv}{\log v}$ függvényt. Mint ismert, Riemann 1859-es híres dolgozatában azt állította, hogy $x > 2$-re $\pi(x) < \operatorname{Li} x$, azaz jelváltási hely egyáltalán nincs $x > 2$-re. Ezt prímszámtáblák $x < 10^9$-ig meg is erősítették; Littlewood mégis kimutatta végtelen sok jelváltás *létezését* 1914-ben. De módszerét a legelső jelváltási hely egy *explicit* (szükségképp igen nagy) numerikus felső korlátjának megadására finomítani — az ő, Ingham és mások további lényeges előmunkálatai után — tanítványa, Skewes csak 1955-ben tudta. El lehet képzelni, hogy egy olyan $A = A(k)$ megadása, hogy az $1 \leqq x \leqq A(k)$ közben az (5) alatti függvények mindegyikének legalább egy jelváltása legyen, mennyivel nehezebb további feladat.

[4] Ez $k = 4$-re vonatkozó speciális esete azon alapvető fontosságú, mindmáig bebizonyítatlan (Riemann—Piltz) sejtésnek, hogy ha $\chi(n)$ a mod k-hoz tartozó redukált maradékosztályok multiplikatív csoportjához tartozó karakter, úgy a $\sigma > \frac{1}{2}$ félsíkban $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$ által értelmezett $L(s, k, \chi)$ „Dirichlet-féle L-függvények" a $\sigma > \frac{1}{2}$ félsíkban nem tűnnek el. $\chi_0(n)$ jelenti a karakterek közül a főkaraktert, mely tehát 1, ha $(n, k) = 1$ és 0 különben.

Legyen

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p \\ 0 \end{cases} \quad \text{ha} \quad n = \begin{cases} p^{\alpha} \\ \text{különben} \end{cases}$$

és, mint szokásos,

$$\psi(x, k, l) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \bmod k}} \Lambda(n).$$

Egy göttingai előadásban, 1957-ben azt az állítást kockáztattam meg, hogy azon módszerek, melyeket korábban a prímszámelmélet, különböző kérdéseinek tárgyalására vezettem be, a Riemann—Littlewood ideakör továbbfejlesztésekép kiépíthetők úgy, hogy velük egy *explicit* $B(k)$ meghatározható úgy, hogy az $1 \leqq x \leqq B(k)$ közben a

$$\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2) \tag{6}$$

$$((l_1, k) = (l_2, k) = 1, \quad l_1 \not\equiv l_2 \bmod k)$$

függvények mindegyike jelet vált. E kiépítés, melyről később egy pár szót szólni fogok, 1959-ben valóban sikerült; az alkalmazásokat 1963 óta közöljük S. Knapowski lengyel munkatársammal. Az eredmények igen sokan vannak; még csak vázlatos ismertetésük teljességéről is le kell mondanom, tekintve, hogy eddig 13 megjelent értekezésünk tárgyát képezik. E vizsgálatok során kiderült, hogy adott k mellett minden attól függ, hogy a hozzátartozó $L(s, k, \chi)$-függvényeknek van-e pozitív gyökük vagy sem; e körülménynek eddig semmi lényeges aritmetikai jelentőséget nem tulajdonítottak. A függvényegyenlet[5] szerint elég lenne ezt az $\frac{1}{2} \leqq s \leqq 1$ szakaszra követelni. Valamivel szigorúbban egy k-értéket nevezzünk „jó"-nak, ha van oly $D = D(k)$, hogy az $L(s, k, \chi)$-függvények egyike se tünjön el a komplex sík

$$\tfrac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1, \quad |t| \leqq D(k) \tag{7}$$

parallelogrammjában. Mármost kimutattuk, hogy jó k mellett a (6) alatti függvények mindegyike jelet vált az[6]

$$1 \leqq x \leqq \max\left\{e_1(k^{c_1}), e_2\left(\frac{1}{D(k)}\right)\right\} \tag{8}$$

[5] Ennek itt számbajövő következménye az, hogy ha egy $L(s, k, \chi)$ függvény a $0 < \sigma < 1$ sáv egy $s = \varrho_0$-helyén eltűnik, akkor az $L(s, k, \overline{\chi})$-függvény az $s = 1 - \varrho_0$ helyen szintén eltűnik.

[6] Itt $e_1(k) = e^k$ és $e_{v+1} = e_v(e_1(k))$; c_1 és a továbbiakban $c_2, \ldots$ pozitív numerikusan explicite megadható állandók. Továbbá $\log_2 T = \log\log T$ és $\log_v T = \log(\log_{v-1} T)$

intervallumban. Az (5) alatti függvényekre, mint ismert, a dolog jóval mélyebb. Általánosabban jó k-kra sikerült kimutatni, hogy a

$$\pi(x, k, 1) - \pi(x, k, l) \tag{9}$$
$$l \not\equiv 1 \bmod k$$

függvények az

$$1 \leqq x \leqq \max\left\{c_2, e_5(k), e_1\left(\frac{1}{D(k)}\right)\right\} \tag{10}$$

közben jelet váltanak, sőt

$$T \geqq \max\left\{c_2, e_5(k), e_1\left(\frac{1}{D(k)}\right)\right\} \tag{11}$$

-ra a

$$\log_3 T \leqq x \leqq T \tag{12}$$

közben van minden szóbanforgó l-re oly x_1 és x_2, hogy

$$\begin{aligned} \pi(x_1, k, 1) - \pi(x_1, k, l) &> \frac{\sqrt{x_1}}{\log x_1} \\ \pi(x_2, k, 1) - \pi(x_2, k, l) &< -\frac{\sqrt{x_2}}{\log x_2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ezek közül az első jóval mélyebb. A $k=4$ esetben, mivel $k=4$ „jó", a (13)-nak megfelelő egyenlőtlenségek tehát $T > c_3$-ra feltevések nélkül adódnak.

E tételek már mutatják a (7) feltétel jelentőségét. De természetes kérdés, vajon ez a dolog lényegéhez tartozik-e vagy csupán a bizonyítási módszer hozza magával. Könnyű meggondolás mutatja, hogy legalábbis azon esetben, ha fix k mellett az $L(s, k, \chi)$ függvények legnagyobb valós részű gyöke *egyedül* egy pozitív szám (mely eshetőség eddig kizárva nincs), akkor az összes eddigi (és későbbi) megállapítások másképp alakulnak. Tehát a (7) feltétel fellépését a dolog természete hozza magával.

Mit lehet a „jó" k-modulusokról állítani? Barclay Rosser kimutatta, hogy $k \leqq 300$-ra *valós* χ-karakterhez tartozó L-függvénynek nincs pozitív gyöke; tudomásom szerint a fiatalon elhalt C. B. Haselgrove volt az első, aki legalább $k/24$-re és egyéb pár k-ra az első pár gyököt (és így $D(k)$ értékét) explicite megadta. Ezek tehát mind „jók"; kívánatos volna ezek számát növelni. Nincs bebizonyítva jelenleg még, hogy a „jó" k-modulusok száma végtelen; természetesen ez is igen fontos volna.

Mit lehet az (5) alatti függvényekről kimondani egyéb esetekben? Az előbbinél kevésbé teljes tételt találtunk oly párokra, melyek „ugyanolyan kvadratikus természetűek", azaz az

$$x^2 \equiv l_1 \bmod k, \qquad y^2 \equiv l_2 \bmod k \tag{14}$$

kongruenciák egyszerre megoldhatók vagy nem. Ez esetben amellett, hogy k „jó", fel kellett tennünk, hogy a k-hoz tartozó $L(s, k, \chi)$-függvények a

$$\sigma > \tfrac{1}{2}, \quad |t| \leqq c_4 k^{10} \tag{15}$$

parallelogrammában nem tűnnek el; ez az előbb említett Riemann—Piltz sejtésnél jóval gyengébb és a bizonyítás alkalmas módosításával valószínűleg elejthető lesz. Mindenesetre (15) és (7) feltételezésével azt találtuk, hogy a (14)-et kielégítő $(\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2))$ függvények az

$$1 \leqq x \leqq \max\left\{c_5, e_2(k^{20}), e_1\left(c_6\left(k^{20} + \frac{1}{D(k)}\right)\right)\right\} \tag{16}$$

közben mind jelet váltanak és azt is, hogy

$$T > \max\left\{c_5, e_2(k^{20}), e_1\left(c_6\left(k^{20} + \frac{1}{D(k)}\right)\right)\right\}$$

mellett a $[T^{1/3}, T]$ közben van oly x', hogy

$$\pi(x', k, l_1) - \pi(x', k, l_2) > \sqrt{T} e^{-\sqrt{\log T}}.$$

Ha $l_1 = 1$ és l_2 kvadratikus maradék mod k, akkor persze előbbiek szerint a (15) alatti feltétel elejthető. Így tehát az egyetlen eset, melyekben a végtelen sok jelváltást még a teljes Riemann—Piltz sejtés feltételezésével sem tudtuk igazolni, az, mikor l_1 kvadratikus maradék $\not\equiv 1 \bmod k$ és l_2 kvadratikus nem-maradék. Így $k = 5$ esetében a

$$\pi(x, 5, 4) - \pi(x, 5, 2) \quad \text{és} \quad \pi(x, 5, 4) - \pi(x, 5, 3)$$

függvények.

Eddig a $\pi(x, k, l)$ függvényeket egymással hasonlítottuk össze fix k mellett. Ezen tételek azonban nem adnak felvilágosítást arra, hogy hogyan viselkedik $\pi(x, k, l)$ az ő „jogos részével" $\frac{\pi(x)}{\varphi(k)}$ -vel összehasonlítva, tehát a

$$\pi(x, k, l) - \frac{\pi(x)}{\varphi(k)} \tag{17}$$

függvényekre vonatkozólag. A legnehezebb eziránvú kérdés valószínűleg az, hogy a (17) alatti függvények közül hány lehet *egyszerre* (ti. u. a. x-re és k-ra) pozitív. Riemann és Littlewood említett vizsgálatai folytatásaképp érdekes továbbá $\pi(x, k, l)$-et az aszimptotikus értékével összehasonlítani, tehát a

$$\pi(x, k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Li} x \tag{18}$$

függvények oszcillációs tulajdonságait vizsgálni. (17) és (18) alatti függvényekre vonatkozólag kimutattuk „jó" k-modulusokra, hogy a (10) alatti intervallum tartalmazza a

$$\pi(x, k, 1) - \frac{\pi(x)}{\varphi(k)}, \qquad \pi(x, k, 1) - \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Li} x$$

függvények legkisebb jelváltási helyeit és ezen felül a (11) alatti megszorítás mellett a (12) intervallumban van oly x_1, x_2, x_3 és x_4, hogy

$$\pi(x_1, k, 1) - \frac{\pi(x_1)}{\varphi(k)} > \frac{\sqrt{x_1}}{\log x_1}$$

$$\pi(x_2, k, 1) - \frac{\pi(x_2)}{\varphi(b)} < -\frac{\sqrt{x_2}}{\log x_2}$$

$$\pi(x_3, k, 1) > \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Li} x_3 + \frac{\sqrt{x_3}}{\log x_3}$$

$$\pi(x_4, k, 1) < \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Li} x_3 - \frac{\sqrt{x_4}}{\log x_4}.$$

Természetesen pl. $k = 4$-re vagy $k = 8$-ra ezen egyenlőtlenségek minden feltevés nélküliek. Ha azonban $l \not\equiv 1 \bmod k$, akkor igen távol állunk a megfelelő problémák *teljes* megoldásától éppúgy, mint — hogy csak a legegyszerűbb feladatot említsem — annak igazolásától, hogy alkalmas

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \ldots \to +\infty$$

sorozatra *egyidejűleg* fennállanak az

$$\pi(y_\nu, 4, 1) > \tfrac{1}{2} \operatorname{Li} y_\nu$$

$$\pi(y_\nu, 4, 3) > \tfrac{1}{2} \operatorname{Li} y_\nu,$$

egyenlőtlenségek.

Állandó preponderancia tehát valószínűleg semelyik $\pi(x, k, l_1)$-re sem áll fenn egy másik $\pi(x, k, l_2)$-vel szemben. Triviálisan fennáll azonban minden elég nagy x-re a $\pi(x, 5, 1) < \pi(x, 4, 1)$ egyenlőtlenség, mivel $\varphi(5) > \varphi(4)$. A „korrekt" probléma azonban csak oly $\pi(x, k_1, l_1)$ és $\pi(x, k_2, l_2)$ függvények összehasonlítása, melyekre

$$\varphi(k_1) = \varphi(k_2). \tag{19}$$

Ez esetben a kérdés ekvivalens

$$\sum_{l \in H_1} \pi(x, k, l) \quad \text{és} \quad \sum_{l \in H_2} \pi(x, k, l) \tag{20}$$

összehasonlításával, ahol $k = [k_1, k_2]$ és H_1, H_2 a mod k vett redukált maradékosztályok bizonyos diszjunkt részhalmazai. Különösen érdekes azon eset, mikor $k = q$ prím, H_1 a mod q kvadratikus maradékok, H_2 a nem-maradékok halmaza.

A fentemlített tételek valamelyest fényt vetnek az (5) alatti függvények oszcillációs tulajdonságaira. Amit azonban ezek a preponderanciára vonatkozólag mutatnak, az csak annyi, hogy azon intervallumok, melyben

$$\pi(x, k, 1) - \pi(x, k, l_2) \qquad l_2 \text{ kvadr. nem-maradék}$$

jelváltása garantálható, jóval hosszabbak, mint azok, melyekben *ugyanolyan kvadratikus természetű* l_1 és l_2-hez tartozó $\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)$ függvények jelváltása garantálható, mintegy jeléül annak, hogy előbbi „jóval ritkábban" fordul elő. Hogy áll a dolog Csebisev állításának *eredeti* formájával, mely a *tartós* preponderanciára több lehetőséget hagy nyitva? Már Hardy—Littlewood és Landau észrevették, hogy a (2) függvény helyett a

$$\sum_{p>2} (-1)^{\frac{p-1}{2}} \log p \, e^{-\frac{p}{x}} \tag{21}$$

függvényt vizsgálva ugyanazon jelenség lép fel (melyet nevezhetünk Csebisev-jelenségnek) és *ezen* függvény vizsgálata jóval könnyebb. Kézenfekvő tehát a Csebisev-jelenséget más modulusok esetén inkább a (21) alatti alakon tanulmányozni, mint a (2) alakon (bár utóbbi önmagában is érdekes). A $\varphi(k) = 2$ feltételt kielégítő többi modulusok ($k = 3$ és $k = 6$) esetén a korábbi módszerek mutatis mutandis ugyanolyan tényállásra vezettek, mint $k = 4$ esetén. A következő eseteket azon k-modulusok alkotják, melyekre $\varphi(k) = 4$, azaz $k = 5, 8, 10, 12$. Kissé több fáradsággal kiderült pl. a $k = 5$ esetben a

$$\sum_{p \equiv l_1 \bmod 5} \log p \, e^{-\frac{p}{x}} - \sum_{p \equiv l_2 \bmod 5} \log p \, e^{-\frac{p}{x}} \tag{22}$$

függvények végtelen sok jelváltást mutatnak $x \to +\infty$-re, ha l_1 és l_2 mod 5 azonos kvadratikus természetűek, míg különböző kvadratikus természetű l_1 és l_2 esetén ezek $(-\infty)$-hez tartanak akkor és csak akkor, ha az $L(s, 5, \chi)$ függvények $\chi \neq \chi_0$-ra nem tűnnek el a $\sigma > \frac{1}{2}$ félsíkban. Ha azonban magasabb modulusokra térünk át, könnyen látható, hogy utóbbi tényállás igazolása hamarosan leküzdhetetlennek látszó új nehézségbe ütközik, már $l_1 = 1$ esetén is talán nem is igaz. 1963-ban azt találtuk Knapowskival, hogy e nehézségek enyhülnek, ha az $e_1\left(-\frac{p}{x}\right)$ „Abel-faktorok" helyett

$$e_1\left(-\frac{1}{r(x)} \log^2 \frac{p}{x}\right)$$

faktorokat veszünk alkalmas (lehetőleg kis) $r(x)$-el, azaz (22) helyett a

$$(23) \qquad \sum_{p \equiv l_1 \bmod k} \log p \, e^{-\frac{1}{r(x)} \log^2 \frac{p}{x}} - \sum_{p \equiv l_2 \bmod k} \log p \, e^{-\frac{1}{r(x)} \log^2 \frac{p}{x}}$$

függvényeket tekintjük. Legyen ugyanis k „jó"; a (7) alatti $D(k)$-ról az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy

$$D(k) \leqq \frac{\sqrt{\log k}}{k}.$$

Ekkor fennáll a következő tétel.

Alkalmas c_7-el $r(x)$-et x-től függetlenül

$$r(x) = c_7 \frac{\log k}{D(k)^2} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a}$$

-nek választva annak, hogy egy fix l kvadratikus nem-maradékra, $x \to +\infty$-re

$$(24) \qquad \sum_{p \equiv 1 \bmod k} \log p \, e^{-a \log^2 \frac{p}{x}} - \sum_{p \equiv l \bmod k} \log p \, e^{-a \log^2 \frac{p}{x}} \to -\infty$$

legyen, szükséges és elégséges, hogy minden oly $\chi(n)$ karakterre, melyre $\chi(l) \neq 1$, az $L(s, k, \chi)$ függvények a $\sigma > \frac{1}{2}$ félsíkban ne tűnjenek el.

A (23) alatti függvényeket egyező kvadratikus természetű l_1 és l_2-re vizsgálva „jó" k-kra ki lehetett mutatni az oszcillációs viselkedést részint további feltételes állítások nélkül, részint a Riemann—Piltz sejtés (15)-höz hasonló jellegű gyengített formáinak feltételezésével. E tételeket itt nem részletezzük, de egyes következményeire visszatérünk.

Megjegyezhető, hogy a (24) tételnek $k=4$-re is van jelentősége. E tétel egyik felét $k=4$-re ugyanis a következő pontosabb formában is ki lehet mondani.

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(2n+1)^{-s}$ függvény a $\sigma>\frac{1}{2}$ félsíkban nem tűnik el, úgy alkalmas c_8, c_9 és c_{10}-el $x>c_8$-ra

$$(25)\qquad \sum_{p\equiv 1 \bmod 4} \log p\, e^{-c_9 \log^2 \frac{p}{x}} - \sum_{p\equiv 3 \bmod 4} \log p\, e^{-c_9 \log^2 \frac{p}{x}} < -c_{10}\sqrt{x}$$

A bizonyítást ki lehet dolgozni úgy, hogy c_9 (explicit numerikus) értéke lehetőleg nagy legyen; ekkor minden x-re a (25) alatti összeghez csak az x-hez „nem túl távoli" prímek járulnak lényegesen hozzá. (13)-ból következik oly x_0-k létezése, hogy x_0-ig „lényegesen több" $(4n+1)$ alakú prímszám van, mint $(4n+3)$ alakú; azt lehet gondolni, hogy x_0 alatt, ha az már elég nagy, van már oly $x_1>c_8$, melynek kétoldali környezetében a $(4n+1)$ alakú prímek különösen sűrűek a $(4n+3)$ alakúakhoz képest. Ekkor (25)-öt *ezen* $x=x_1$-el alkalmazva elképzelhető, hogy az első összeg nagyobb, mint a második, ami azt jelentené, hogy a Riemann—Piltz sejtés $k=4$-re hamis. E következtetési mód — ha szükséges — a

$$\sum_{p\equiv 1 \bmod 4} \log p\, e^{-c_9 \log^4 \frac{p}{x}} - \sum_{p\equiv 3 \bmod 4} \log p\, e^{-c_9 \log^4 \frac{p}{x}}$$

függvények alapulvételével még erősíthető. Ezen, erősen elektronikus számológépigényes vizsgálatok folyamatban vannak. Mindenesetre e meggondolás is érzékelteti az *effektív* tételek jelentőségét ezen elméletben, nem is szólva arról, hogy aritmetikai parameterek, fellépése esetén (mint pl. a k modulus) az ezektől való függés ismerete nyilván a dolog lényegéhez tartozik.

Van-e alapja a $(4n+1)$-alakú prímek „összesűrűsödéséről" előbb mondottaknak? Kissé általánosabban beszélve említettük, hogy „jó" k-modulusokra a $\pi(x,k,1)-\pi(x,k,l)$ függvények végtelen sokszor váltanak jelet és amplitudójuk mindkét irányban „nagy". E tétel még pontos (8) alatti formájában is csak kevés felvilágosítást ad arról, hogy az időnkénti „túltengések" *hogyan* jönnek létre. A (23) alatti függvényekre talált eredményeink módot adnak annak megmutatására, hogy ezen „túltengések" „relatíve rövid" intervallumokban már jelentkeznek. Így pl. a következő tétel áll fenn.

Ha k „jó", l kvadratikus maradék mod k és

$$T>\max\left\{c_{11}, e_2(4k), e_1\left(\frac{1}{D(k)}\right)\right\},$$

úgy léteznek oly U_1, U_2, U_3, U_4 számok, hogy

$$Te^{-\sqrt{\log T}} \leqq U_1 < U_2 \leqq T$$

(26)

$$Te^{-\sqrt{\log T}} \leqq U_3 < U_4 \leqq T$$

úgy, hogy

$$\sum_{\substack{U_1 \leqq p \leqq U_2 \\ p \equiv 1 \bmod k}} 1 - \sum_{\substack{U_1 \leqq p \leqq U_2 \\ p \equiv l \bmod k}} 1 > \sqrt{T_1}\, e_1(-\log^{5/6} T)$$

(27)

$$\sum_{\substack{U_3 \leqq p \leqq U_4 \\ p \equiv 1 \bmod k}} 1 - \sum_{\substack{U_3 \leqq p \leqq U_4 \\ p \equiv l \bmod k}} 1 < -\sqrt{T}\, e_1(-\log^{5/6} T).$$

Mármost a $k=4$ esetre térve azt sikerült kimutatnunk, hogy $T > c_{12}$-re léteznek $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ számok úgy, hogy

$$\log_3 T \leqq \xi_2 e^{-\sqrt{\log \xi_2}} \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq T$$

(28)

$$\log_3 T \leqq \xi_4 e^{-\sqrt{\log \xi_4}} \leqq \xi_3 < \xi_4 \leqq T$$

hogy

$$\sum_{\substack{\xi_1 \leqq p \leqq \xi_2 \\ p \equiv 1 \bmod 4}} \log p - \sum_{\substack{\xi_1 \leqq p \leqq \xi_2 \\ p \equiv 3 \bmod 4}} \log p > \sqrt{\xi_2}$$

(29)

$$\sum_{\substack{\xi_3 \leqq p \leqq \xi_4 \\ p \equiv 1 \bmod 4}} \log p - \sum_{\substack{\xi_3 \leqq p \leqq \xi_4 \\ p \equiv 3 \bmod 4}} \log p < -\sqrt{\xi_4}\,.$$

(29) első egyenlőtlensége tényleg azt mutatja, hogy „aránylag rövid" intervallumon is lehetséges a $(4n+1)$-alakú prímek túltengése. A lényeges (29)-ben persze az, hogy $\log p$ áll és nem $\Lambda(n)$; utóbbi esetben (28) helyett

$$Te^{-\sqrt{\log T}} \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq T$$

(30)

$$Te^{-\sqrt{\log T}} \leqq \xi_3 < \xi_4 \leqq T$$

is állítható.

Jegyezzük meg a (28)—(29) tétel egy érdekes következményét. Eszerint, ha $T > c_{12}$, úgy léteznek *konzekutív* p_ν és $p_{\nu+1}$ prímek, hogy

$$\log_3 T \leqq p_\nu < p_{\nu+1} \leqq T$$

(31)

$$p_\nu \equiv p_{\nu+1} \equiv 1 \bmod 4.$$

Ha ugyanis ez nem volna igaz, akkor (29) első egyenlőtlensége szerint

$$\sqrt{\xi_2} < \sum_{\substack{\xi_1 \leqq p \leqq \xi_2 \\ p \equiv 1 \bmod 4}} (\log p - \log(p+2)) + \log \xi_2 < \log \xi_2,$$

volna, ami nem áll. Hasonló gondolatmenettel adódik a (30)-hoz tartozó tételből oly *konzekutív* p_μ és $p_{\mu+1}$ prímek létezése, melyekre

$$Te^{-\sqrt{\log T}} \leqq p_\mu < p_{\mu+1} \leqq T$$

(32)

$$p_\mu \equiv p_{\mu+1} \equiv 3 \bmod 4.$$

Elemi bizonyítást (32) és (31)-re még abban az egyszerűbb formában sem sikerült találnom, hogy van végtelen sok μ ill. ν index, hogy

$$p_\mu \equiv p_{\mu+1} \equiv 3 \bmod 4$$

$$p_\nu \equiv p_{\nu+1} \equiv 1 \bmod 4.$$

Csupán végtelen sok oly $\varkappa, \lambda$ — index létezése evidens, hogy

$$p_\varkappa \equiv 1 \bmod 4, \qquad p_{\varkappa+1} \equiv 3 \bmod 4$$

$$p_\lambda \equiv 3 \bmod 4, \qquad p_{\lambda+1} \equiv 1 \bmod 4.$$

De már végtelen sok ϱ-index létezését, melyekre pl.

$$p_\varrho \equiv p_{\varrho+1} \equiv p_{\varrho+2} \equiv 1 \bmod 4$$

volna, nem sikerült igazolni eddig.

Ami a fentemlített tételek bizonyításait illeti, azok nem egyszerűek. Ezek általában alkalmasan választott „pontos" formulákon alapulnak, melyek egy egészszámú ν paramétert tartalmaznak és egy, csupán a vizsgált prímszámhalmaz prímjeitől függő összeget kapcsolnak össze L-függvények gyökeitől függő összeggel. E pontos formuláknak még ezen felül olyanoknak is kell lenniök, hogy az utóbbi összeg a ν-tól való függés szempontjából — mindazon tagok adalékának triviális megbecslése után, melyek egy véges tartományon kívül vannak —

$$g(\nu) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu$$

alakú legyen, ahol a b_j és z_j-számok a gyököktől függenek, *de ν-tól nem.* Ha ilyen formula konstrukciója sikerült, akkor tehát a bizonyítás arra van redukálva, hogy ha ν egy alkalmas I intervallumra van korlátozva, úgy megadható I-ben oly egész ν_1 és ν_2, hogy

(33) $$g(\nu_1) > E, \qquad g(\nu_2) < -E$$

egy „nem túl kicsi" E-vel. Hogy ilyen jellegű tételek viszont tényleg találhatók és ezek látszólag igen távolálló matematikai diszciplinákban felhasználhatók, azt „Über eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen" c. könyvemben mutattam meg. Azon tétel, melyre a korábbi prímszámelméleti alkalmazásokat alapoztam, a következő volt:

Ha m pozitív egész, a b_j-k tetszőleges komplex számok és

$$1 = |z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n|, \tag{34}$$

akkor van oly v egész, melyre

$$m+1 \leqq v \leqq m+n \tag{35}$$

és

$$\left| \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^v \right| \geqq \left(\frac{n}{8e(m+n)} \right)^n \min_{l=1,\ldots,n} |b_1 + b_2 + \ldots + b_l|. \tag{36}$$

Ezen egyenlőtlenség kétoldali: (32) egyoldali egyenlőtlenségeket tartalmaz. Fenti tétel a z_j-számokra lényegileg semmi megkötést nem tartalmaz; könnyű példák mutatják, hogy (36) bizonyítására a z_j-kra vonatkozó megszorítás nélkül ilyen tétel nem várható. Azt találtam azonban, hogy már egy olyan egyszerű megszorítás, mint

$$(0<)\varkappa \leqq |\arg z_j| \leqq \pi \qquad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{37}$$

már segít, ha a (35) intervallumot az

$$m+1 \leqq v \leqq m+\frac{20n}{\varkappa} \tag{38}$$

közzel helyettesítjük. Ekkor (34) és (37) mellett e közben már garantálható oly v_1 és v_2 egész számok létezése, hogy

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{v_1} \geqq \left(\frac{n}{8e\left(m+\frac{20n}{\varkappa}\right)} \right)^{2n} \min_{l=1,\ldots,n} \left| \sum_{j=1}^{l} R b_j \right|$$

és

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{v_2} \leqq -\left(\frac{n}{8e\left(m+\frac{20n}{\varkappa}\right)} \right)^{2n} \min_{l=1,\ldots,n} \left| \sum_{j=1}^{l} R b_j \right|.$$

E tétel alkalmazásánál a (37) feltétel verifikálása okoz nehézséget; ezt Knapowski egy szellemes ötletével lehetett sok esetben áthidalni. Újab-

ban észrevettük, hogy a ma említett tételek egy része — bár gyengébb formában — mégis nyerhető már a (34)—(36) alatti régebbi tételemből. E megjegyzés jelentősége abban áll, hogy a (37) alatti mellékfeltétel verifikálása, mely több esetben nem sikerül, esetleg elkerülhető lesz...

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Пал Туран

ON SOME PROBLEMS OF THE COMPARATIVE PRIME-NUMBER THEORY

P. Turán

Lecture delivered in Leipzig on 11th February 1966.

Véges geometriák kombinatorikai alkalmazásai I.

RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

A véges geometriák alkalmazása egyike a kombinatorika kevés általános módszerének. A kombinatorika újabb fejlődésének vázolására nemrégiben tettem kísérletet (lásd [1]) és ennek során rámutattam, hogy a kombinatorika mai állapotára jellemző a konkrét eredmények gazdagsága és ugyanakkor az, hogy kevés általános módszer ismeretes. A véges geometriáknak a kísérletek tervezésénél való felhasználása (ortogonális latin négyzetek és kiegyensúlyozott blokkrendszerek konstruálására stb.) jól ismert a külföldi szakirodalomban (lásd pl. [2], [3]), de magyar nyelven e témakörről nem jelent még meg részletes ismertetés. A véges geometriák azonban számos más kombinatorikai problémánál is alkalmazhatók az információelméletben, a gráfelméletben stb.

Jelen dolgozatban igyekszem az ezúton elérhető eredmények széles skáláját bemutatni, anélkül, azonban hogy teljességre törekednék.

Az 1. § a véges testekre vonatkozó, a továbbiak megértéséhez szükséges alapismereteket foglalja össze. E dolgozat terjedelme nem teszi lehetővé a felsorolt tételek bizonyításának közlését; az érdeklődő a bizonyításokat megtalálhatja számos tankönyvben és monográfiában (l. pl. [4], [5], [6]).

A 2. § a véges geometriákra vonatkozó, a továbbiak megértéséhez szükséges tudnivalókat foglalja össze. A további §-ok a véges geometriák egy-egy tipikus alkalmazását mutatják be, a kísérletek tervezése, továbbá (a dolgozat II. részében) a gráfelmélet és az információelmélet bizonyos problémáira.

A véges geometriák szimmetriákban és más szabályosságokban rendkívül gazdag struktúrák; ez az oka annak, hogy olyan sokféle — egymástól meglehetősen távoleső — kombinatorikai probléma megoldásánál használhatók fel sikerrel. Meggyőződésünk, hogy a véges geometriák ilyen jellegű alkalmazási lehetőségei még távolról sincsenek kimerítve. E dolgozat fő célja éppen az, hogy ezekre a csak kis részben kiaknázott lehetőségekre felhívja a figyelmet.

A kombinatorika e dolgozatban tárgyalt fontos és érdekes problémái még csak kis részben vannak megoldva. Célszerűnek tekintettük azt is, hogy ezekre a megoldatlan problémákra rámutassunk.

A szakirodalomban járatos olvasó észre fogja venni, hogy a tárgyalásmód számos ponton eltér a szokásostól; a tárgyalt tételekre sok esetben az ismert bizonyításoktól eltérő, a dolgozat felépítésébe jobban beilleszkedő, ill. egyszerűbb bizonyítást adunk.

1. §. Véges testek

A teljesség kedvéért néhány jól ismert algebrai fogalom definícióját adjuk itt meg.

Kommutatív egységelemes gyűrű-nek nevezünk egy G halmazt, ha abban értelmezve van két művelet, melyeket összeadásnak és szorzásnak nevezünk (jelölés: $a+b$ ill. $a\cdot b$), amelyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. Ha a és b G tetszőleges elemei, $a+b$ és $a\cdot b$ is G eleme.
2. Mindkét művelet kommutatív és asszociatív:[1]

$$a+b = b+a, \quad a+(b+c) = (a+b)+c \overset{\text{def}}{=} a+b+c$$
$$ab = ba \quad a(bc) = (ab)c \overset{\text{def}}{=} abc$$

és érvényes a disztributív törvény: $a(b+c) = ab+ac$.

3. G-ben van két (egymástól különböző) kitüntetett elem, melyeket 0-val és 1-gyel jelölünk: ezekre nézve minden $a \in G$-re fennáll, hogy $a+0 = a$ és $a\cdot 1 = a$.

4. Az $a+x = 0$ egyenlet minden G-re megoldható G-ben; megoldását $-a$-val jelöljük, tehát $a+(-a) = 0$.

Az $a \in G$ elemet a $b \in G$ elem osztójának nevezzük, ha az $ax = b$ egyenlet G-ben megoldható.

A G kommutatív egységelemes gyűrűt *integritás-tartomány*nak nevezzük, ha nullosztómentes, vagyis, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal:

5. Ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$ akkor $ab \neq 0$.

*Test*nek nevezünk egy integritástartományt, ha eleget tett az alábbi feltételnek:

6. Az $ax = 1$ egyenletnek minden $a \neq 0$ esetében van megoldása. E megoldást a^{-1}-gyel, vagy $\frac{1}{a}$-val jelöljük.

[1] $\overset{\text{def}}{=}$ azt jelenti, hogy ezen egyenlőség az egyenlőség egyik oldalán álló kifejezést a másik oldalon álló — már előzőleg definiált — kifejezés segítségével definiálja.

A véges testeket szokás *Galois-test*eknek vagy *Galois-mező*knek is nevezni. Az egységelem osztóit *egység*eknek nevezzük. Egy testben tehát bármely 0-tól különböző elem osztója bármely más elemnek, vagyis egység.

Egy gyűrű (és így egy integritástartomány és egy test is) mindig (Abel-féle) csoportot alkot az összeadásra nézve; egy testből a 0 elemet elhagyva a megmaradó elemek a szorzásra nézve is (Abel-féle) csoportot alkotnak.

Könnyen belátható, hogy *minden véges integritástartomány test.* Végtelen integritástartományra amely nem test példa az egész számok halmaza (az összeadás és szorzás szokásos értelmezése mellett).

Legyen a a T integritástartomány egy tetszőleges 0-tól különböző eleme. Vizsgáljuk meg az $a, 2a, \ldots, na, \ldots$ sorozatot, ahol $2a \overset{\text{def}}{=} a+a$, $3a \overset{\text{def}}{=} 2a+a$ s. í. t. Ha e sorozatban előfordul a 0, legyen m_a a legkisebb n természetes szám, amelyre $na=0$; ha az na sorozatban 0 nem fordul elő, legyen $m_a = +\infty$. Könnyen belátható, hogy ha b T egy tetszőleges másik a-tól különböző eleme, akkor $m_b = m_a$; ugyanis ha $a \neq 0$ és $na=0$, akkor $nab = nba = 0$ tehát $nb=0$.

Az $m_a = m$ számot a T integritástartomány *karakterisztikájának* nevezzük. Könnyen belátható, hogy *egy véges test karakterisztikája mindig prímszám.*

A legegyszerűbb példa véges testre egy p prímszámra vonatkozó maradékosztályok teste. Ezt a testet $GF(p)$-vel jelölik.[2] A $GF(p)$ test elemei legyenek a $0, 1, \ldots, p-1$ számok; az összeadást és szorzást úgy definiáljuk, hogy elvégezzük a kijelölt műveletet és az eredményt „modulo p" (röviden: „mod p") redukáljuk, vagyis az $a+b$ „összeget' ill. „szorzatot" úgy számítjuk ki, hogy az a és b számok közönséges összegét ill. szorzatát p-vel elosztjuk és a maradékot vesszük. (Pl. a $GF(7)$ testben $5+5 = 3$ és $5 \cdot 5 = 4$) $GF(p)$ karakterisztikája nyilván p, hiszen a számelmélet alaptétele szerint egy szorzat akkor és csak akkor osztható egy p prímszámmal, ha legalább az egyik tényező osztható p-vel.

Megjegyzendő, hogy a mod m vett maradékosztályok gyűrűje nem test (és így nem is integritástartomány) ha m nem prímszám.

Vizsgáljuk most meg az összes polinomok halmazát a $GF(p)$ test fölött, vagyis az összes $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ alakú kifejezések összességét, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n$ a $GF(p)$ test elemei. Két polinom összegét ill. szorzatát úgy definiáljuk, hogy a polinomokat a szokásos módon összeadjuk ill. összeszorozzuk, és az együtthatókat mod p redukáljuk. A műveletek ilyen értelmezése mellett a szóbanforgó polinomok kommutatív egység-

[2] *GF* a Galois field (Galois mező) rövidítése.

elemes gyűrűt alkotnak, amelynek nulla-eleme az azonosan 0 polinom, egységeleme az 1 polinom ($a_0 = 1$, $a_k = 0$, ha $k \geqq 1$). E gyűrűt $\Pi(p)$-vel jelöljük.

Könnyű belátni, hogy a $\Pi(p)$ polinomgyűrűben a konstansok az egyetlen egységek. Bármely $P(x)$ és $Q(x)$ polinomhoz létezik azok legnagyobb közös osztója, amely konstans faktortól eltekintve egyértelműen definiálva van; ez egy olyan $R(x)$ polinom, amely osztója $P(x)$-nek és $Q(x)$-nek, és ha $S(x)$ egy olyan polinom amely osztója $P(x)$-nek és $Q(x)$-nek, akkor $S(x)$ osztója $R(x)$-nek is.

A legnagyobb közös osztót a jól ismert Euklideszi algoritmussal határozhatjuk meg. Például $GF(5)$-ben a $3+x+x^2$ és a $2+x+2x^2$ polinomok legnagyobb közös osztója a $4+x$ polinom:

$$(4+x)(2+x) = 3+x+x^2 \bmod 5$$

$$(4+x)(3+2x) = 2+x+2x^2 \bmod 5$$

*Ideál*nak nevezzük egy G gyűrű egy olyan I nemüres részhalmazát, amelyre

1. Ha $a \in I$, és $b \in I$, akkor $a-b \in I$

2. Ha $a \in I$ és $c \in G$, akkor $ac \in I$

Egy I ideált *főideál*nak nevezünk, ha I az ax ($x \in G$) alakban előállítható elemek összessége, ahol a a G gyűrű egy rögzített eleme. Egy polinomgyűrűben minden ideál főideál.

Egy I ideált *prímideál*nak nevezünk, ha a következő tulajdonsággal bír: Ha $a \notin I$ és $b \notin I$, akkor $ab \notin I$.

Egy a $\Pi(p)$ gyűrűhöz tartozó polinomot $\Pi(p)$-ben irreducibilisnek (mod p *irreducibilis*nek) nevezünk, ha nem állítható elő $\Pi(p)$-ben nála alacsonyabb fokú polinomok szorzataként. Például a $\Pi(3)$ gyűrűben az x^3+2 polinom nem irreducibilis[3], hiszen $x^3+2 \equiv (x+2)(x^2+x+1) \bmod 3$; ezzel szemben x^3+x^2+2 irreducibilis. Ezt úgy lehet belátni, hogy az $x^3+x^2+2 \equiv 0 \bmod 3$ kongruenciának nyilvánvalóan nincs megoldása[4] (hiszen ha $x = 0, 1, 2$, akkor x^3+x^2+2 rendre a 2, 1, 2 értékeket veszi fel), míg ha x^3+x^2+2 nem volna irreducibilis, előállít-

[3] Bár közönséges értelemben (az összes egész együtthatós polinomok gyűrűjében) irreducibilis.

[4] Az, hogy a $Q(x) \equiv 0 \bmod p$ kongruencia nem oldható meg, harmadfokú $Q(x)$ polinom esetében nem csak szükséges, hanem egyben elégséges feltétele annak, hogy $Q(x)$ irreducibilis legyen mod p; magasabbfokú polinomokra azonban ez már nem áll; a feltétel szükséges, de nem elégséges. Pl. az $x^4+x^3+x+2 \equiv 0 \bmod 3$ kongruenciának nincs megoldása, viszont az x^4+x^3+x+2 polinom nem irreducibilis mod 3, hiszen $(x^4+x^3+x^2+2) \equiv (x^2+1)(x^2+x+2) \bmod 3$.

ható volna egy első- és egy másodfokú polinom szorzataként mod 3 és ha az elsőfokú tényező $ax+b$, ahol $a \neq 0$ akkor $x = -b/a$ megoldása volna az $x^3+x^2+2 \equiv 0 \bmod 3$ kongruenciának.

Ki lehet mutatni, hogy *egy $Q(x)$ polinom többszöröseiből álló főideál akkor és csak akkor prímideál $\Pi(p)$-ben, ha $Q(x)$ irreducibilis* mod p.

Legyen I egy ideál a G gyűrűben. G elemeit I-re nézve (maradék-) osztályokba sorolhatjuk a következőképpen: tartozzanak a és b ugyanabba az osztályba (jelölés: $a \equiv b \bmod I$) ha $a-b \in I$. Könnyen belátható, hogy az $a \equiv b \bmod I$ reláció szimmetrikus, reflexív és tranzitív, tehát 1. ha $a \equiv b \bmod I$ akkor $b \equiv a \bmod I$; 2. $a \equiv a \bmod I$; 3. ha $a \equiv b \bmod I$ és $b \equiv c \bmod I$ akkor $a \equiv c \bmod I$. Nyilvánvaló, hogy ha $a \equiv a' \bmod I$ és $b \equiv b' \bmod I$ akkor $a+b \equiv a'+b' \bmod I$ és $ab \equiv a'b' \bmod I$. Így tehát definiálhatjuk a mod I maradékosztályok összeadását és szorzását: az A és B maradékosztályok összegén (ill. szorzatán) azt a maradékosztályt értjük, amelybe A egy tetszőleges elemének és B egy tetszőleges elemének az összege (szorzata) esik: e műveletekre nézve a mod I maradékosztályok nyilván kommutatív egységelemes gyűrűt alkotnak; e gyűrű 0-eleme a G gyűrű 0 elemét tartalmazó (tehát az I ideál elemeiből álló) osztály, egységeleme a G gyűrű egységelemét tartalmazó osztály. Ezt a gyűrűt a G gyűrűnek az I ideálra vonatkozó maradékosztály-gyűrűjének nevezzük és G/I-vel jelöljük. Meg lehet mutatni, hogy a *G/I gyűrű akkor és csak akkor integritástartomány, ha I prímideál.*

A mondottakból következik, hogy érvényes az

1. tétel. *Legyen p prímszám $Q(x)$ egy* mod p *irreducibilis pontosan n-edfokú polinom ($n \geqq 2$). Jelölje I_Q a $Q(x)$ többszöröseiből álló (prím-) ideált a $\Pi(p)$ polinom gyűrűben. Akkor a $\Pi(p)/I_Q$ maradékosztálygyűrű egy p^n elemű test.*

Bebizonyítható, hogy ha p tetszőleges prímszám és $n \geqq 2$ tetszőleges természetes szám, létezik $\Pi(p)$-ben mod p irreducibilis pontosan n-edfokú polinom; tehát minden p^n prímszámhatványra létezik egy p^n elemű véges test.

Be lehet bizonyítani, hogy bármely két egyenlő elemszámú véges test izomorf, vagyis megadható a két test között egy olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés, amely az összes műveleteket megtartja, továbbá meg lehet mutatni, hogy minden véges test elemszáma a test karakterisztikájának hatványa, tehát minden véges test elemeinek száma prímszámhatvány.

Így tehát az 1. tételben leírt konstrukcióval megkapjuk (izomorfiától eltekintve) az összes véges testeket, és *minden p^n prímszámhatványra ($n \geqq 2$, p prím) izomorfiától eltekintve egyetlen egy p^n elemszámú véges test létezik; ezt a testet $GF(p^n)$-nel jelöljük.*

Ha $Q(x) = q_0 + q_1 x + \ldots + q_n x^n$ egy pontosan n-edfokú mod p irreducibilis polinom, akkor a $GF(p^n)$ test a következőképpen állítható elő: a test elemei az $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$ polinomok, ahol $a_0, a_1, \ldots \ldots a_{n-1}$ egymástól függetlenül felveszik a $0, 1, \ldots, p-1$ értékeket; így tehát p^n különböző polinomot kapunk. Két polinom összegét úgy képezzük, hogy az azonos x-hatványt tartalmazó tagokat összevonjuk és a kapott együtthatókat mod p redukáljuk; két polinom szorzatát úgy képezzük, hogy a polinomokat összeszorozzuk a szorzatot elosztjuk $Q(x)$-el és vesszük a mardékát, majd ennek együtthatóit mod p redukáljuk. (Az eredményen az sem változtat, ha az együtthatókat már a $Q(x)$-el való osztás előtt redukáljuk mod p). Ha az $A(x)$ és $B(x)$ polinomok szorzatának ilyen redukciója után a $C(x)$ polinomot nyerjük ezt úgy jelöljük, hogy $A(x)B(x) \equiv C(x)$ modd $(p, Q(x))$.

Például $Q(x) = x^3 + x^2 + 2$ mint láttuk irreducibilis mod 3. Az $1 + 2x^2$ és $1 + x + x^2$ polinomok szorzatát a következőképpen számítjuk ki modd $(3, Q(x))$.

$$(1 + 2x^2)(1 + x + x^2) = 1 + x + 3x^2 + 2x^3 + 2x^4 =$$

$$= 2x(x^3 + x^2 + 2) + 3(x^2 - x) + 1$$

tehát

$$(1 + 2x^2)(1 + x + x^2) \equiv 1 \text{ modd } (3, x^3 + x^2 + 2).$$

A fentebb mondottakat úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $A(x)B(x) \equiv C(x)$ modd $(p, Q(x))$ ha (a közönséges polinomszorzás értelmében)

$$A(x)B(x) = D(x)Q(x) + pE(x) + C(x)$$

ahol $D(x)$ és $E(x)$ egész együtthatós polinomok.

A mondottak megvilágítása érdekében vizsgáljuk meg közelebbről a páratlan prímszámnégyzet-elemszámú véges testeket. Legyen p egy páratlan prímszám. Mivel $(p-x)^2 \equiv x^2 \bmod p$ és ha $x + y \not\equiv 0 \bmod p$ és $x \not\equiv y \bmod p$ akkor $x^2 \not\equiv y^2 \bmod p$ tehát az $1^2, 2^2, \ldots, (p-1)^2$ négyzetszámok $\frac{p-1}{2}$ (0-tól különböző) maradékosztályban helyezkednek el mod p, mégpedig mindegyikbe két ilyen szám esik; az ezen maradékosztályokba eső számokat *négyzetes maradék*oknak nevezik mod p, a többi 0-tól különböző számot *négyzetes nem-maradék*nak.

Legyen s egy négyzetes nem-maradék mod p. (Mint láttuk s az $1, 2, \ldots, p-1$ számok közül $\frac{p-1}{2}$-féleképpen választható ki.) Akkor az $x^2 - s$ polinom irreducibilis mod p hiszen ha nem volna az, előállítható volna mod p két elsőfokú polinom szorzataként is így az $x^2 \equiv s \bmod p$ kongruenciának feltevésünkkel ellentétben volna meg-

oldása. Így tehát az $a+bx$ alakú polinomok $(a, b=0, 1, \ldots, p-1)$ egy p^2 elemű véges testet alkotnak, ha az összeadást mod p értelmezzük, míg a szorzást a következőképpen

$$(a_1+b_1x)(a_2+b_2x) = a_3+b_3x$$

ahol

$$a_3 \equiv a_1a_2+b_1b_2\,s \bmod p$$

és

$$b_3 \equiv a_1b_2+a_2b_1 \bmod p$$

Egy másik lehetséges írásmódot úgy kapunk, ha x helyett szimbolikusan $\sqrt{s}$-et írunk. Ez esetben tehát $GF(p^2)$ elemei az $a+b\sqrt{s}$ alakú kifejezések $(a, b=0, 1, \ldots, p-1)$ és ezeket úgy szorozzuk, hogy elvégezzük formálisan a szorzást, $(\sqrt{s})^2$ helyett s-et írunk és a $\sqrt{s}$-et nem tartalmazó tagot valamint $\sqrt{s}$ együtthatóját mod p redukáljuk. Például $s=2$ négyzetes nem-maradék mod 13; az $a+b\sqrt{2}$ „számok" $(a, b=0, 1, \ldots, 12)$ tehát egy 169 elemű véges testet alkotnak; a műveletek elvégzését a következő példa szemlélteti

$$(2+7\sqrt{2})+(12+6\sqrt{2}) = 1$$

$$(2+7\sqrt{2})(12+6\sqrt{2}) = 4+5\sqrt{2}$$

Vegyük észre, hogy az az eljárás, amellyel a $GF(p^2)$ testet megkonstruáltuk, lényegében azonos azzal, amellyel a komplex számokat be szokták vezetni. Abból a célból, hogy ezt még jobban kiemeljük, jegyezzük meg, hogy ha a p prímszám $4k+3$ alakú, akkor -1 kvadratikus nemmaradék mod p és így a fenti konstrukciónál $s=-1$ választható, vagyis a $GF(p^2)$ test elemei $a+ib$ alakban írhatók $(i=\sqrt{-1}, a, b=0, 1, \ldots$ $\ldots, p-1)$ és ezen „komplex" egész számokkal a műveletek úgy végzendők el, hogy i^2 helyett -1-et írunk (ill. $p-1$-et) és p többszöröseit elhagyjuk. Például ha $p=3$, akkor a $GF(9)$ test elemei a $0, 1, 2, i$, $1+i, 2+i, 1+2i, 2+2i$ „számok" és a szorzás az alábbi táblázat szerint végzendő el:

	1	2	i	$1+i$	$2+i$	$2i$	$1+2i$	$2+2i$
1	1	2	i	$1+i$	$2+i$	$2i$	$1+2i$	$2+2i$
2	2	1	$2i$	$2+2i$	$1+2i$	i	$2+i$	$1+i$
i	i	$2i$	2	$2+i$	$2+2i$	1	$1+i$	$1+2i$
$1+i$	$1+i$	$2+2i$	$2+i$	$2i$	1	$1+2i$	2	i
$2+i$	$2+i$	$1+2i$	$2+2i$	1	i	$1+i$	$2i$	2
$2i$	$2i$	i	1	$1+2i$	$1+i$	2	$2+2i$	$2+i$
$1+2i$	$1+2i$	$2+i$	$1+i$	2	$2i$	$2+2i$	i	1
$2+2i$	$2+2i$	$1+i$	$1+2i$	i	2	$2+i$	1	$2i$

A teljesség kedvéért állítsuk elő a $GF(4)$ testet is. Egyetlen egy mod 2 irreducibilis másodfokú polinom létezik, ti. a x^2+x+1 polinom. A $GF(4)$ test elemei tehát a 0, 1, x és $x+1$ polinomok; $GF(4)$-ben az összeadás eredményét az alábbi táblázat tünteti fel, ahol két elem összegét úgy találjuk meg, hogy megkeressük az első elemnek megfelelő sorban a második elemnek megfelelő oszlopban álló elemet:

	0	1	x	$1+x$
0	0	1	x	$1+x$
1	1	0	$1+x$	x
x	x	$1+x$	0	1
$1+x$	$1+x$	x	1	0

összeadás $GF(4)$-ben.

A szorzás eredményét az alábbi táblázat tünteti fel:

	1	x	$1+x$
1	1	x	$1+x$
x	x	$1+x$	1
$1+x$	$1+x$	1	x

$GF(4)$ szorzástáblája.

(A 0-val való szorzás eredménye mindig 0; ezért a szorzástáblából a 0-t kihagytuk.) Látható e táblázatból, hogy $x^2 = 1+x$; $x^3=1$; a $GF(4)$ test 0-tól különböző elemei tehát 3-adrendű *ciklikus* csoportot alkotnak.

Általában a $GF(p^n)$ véges test bármely x eleme eleget tesz az $x^{p^n}=x$ egyenletnek és így ha $x\neq 0$ az $x^{p^n-1}=1$ egyenletnek, és van $GF(p^n)$-ben olyan ω elem (ún. „primitív gyök") amelyre az ω^k elemek ($k=1, 2, \ldots, p^n-1$) mind különbözőek, tehát ω^k alakban ($1\leqq k\leqq p^n-1$) $GF(p^n)$ minden 0-tól különböző eleme előállítható. Másszóval *a $GF(p^n)$ test 0-tól különböző elemei a szorzásra nézve ciklikus csoportot alkotnak.* A $GF(p^n)$ véges testben pontosan $\varphi(p^n-1)$ primitív gyök van, ahol $\varphi(m)$ az Euler-féle φ-függvény.

A véges testekre vonatkozó fent felsorolt eredmények bizonyítása megtalálható pl. RÉDEI LÁSZLÓ Algebra c. könyvében [6], ahol a fent elmondottak a 236. tételben vannak összefoglalva (437. o.). A bizonyítások a *testbővítés* elméletén alapulnak, amelyre itt nem térhetünk ki.

2. §. Véges geometriák

Véges (projektív sík-) geometriának nevezzük *pontok*nak nevezett elemek egy véges halmazát, ha abban bizonyos részhalmazok ki vannak tüntetve, amelyeket *egyenesek*nek (és a hozzátartozó pontokat az egyenesen fekvő pontoknak) nevezzünk, és ha teljesülnek a következő axiómák:

I. Két tetszőleges ponthoz egy és csak egy egyenes van, amelyen a két pont rajtafekszik (amely a két ponton áthalad).

II. Két különböző egyenesnek egy és csak egy közös pontja van.

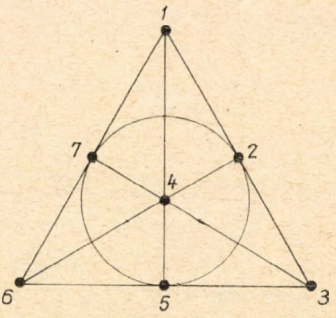
III. Van négy pont, amelyek közül bárhogy választunk ki 3 pontot, azok nem fekszenek egy egyenesen.[5]

Be lehet bizonyítani, hogy egy véges geometriában minden egyenesen ugyanannyi pont fekszik; ha az egy egyenesen fekvő pontok száma $r+1$, akkor $r \geqq 2$, továbbá minden ponton át $r+1$ egyenes halad át és a véges geometria összes pontjainak száma r^2+r+1, továbbá összes egyeneseinek száma is r^2+r+1.

A „legkisebb" véges geometria tehát 7 pontból áll. Jelöljük e pontokat az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokkal. Egy egyenest jellemezzünk a rajta fekvő pontok felsorolásával. A 7 pontból álló geometria egyértelműen jellemezhető összes egyenesei megadásával. Ha például a geometria „egyenesei" a következők

(1 2 3)
(1 4 5)
(1 6 7)
(2 4 6)
(2 5 7)
(3 4 7)
(3 5 6)

úgy könnyen ellenőrizhetjük, hogy az I., II. és III. axiómák teljesüljenek.



1. ábra

Ezt a 7 pontból álló geometriát a következőképpen lehet ábrázolni: A geometria pontjai legyenek egy szabályos háromszög csúcsai, súlypontja és oldalainak felezőpontjai, „egyenesei" legyenek a háromszög oldalai, súlyvonalai valamint a háromszögbe írt kör (l. 1. ábra).

Könnyen belátható, hogy a pontok számozásától eltekintve ez az egyetlen 7 pontból álló geometria. A pontok megszámozása egyébként 30-féleképpen végezhető el.

Megjegyzendő, hogy igaz a következő tétel (l. pl. M. Hall, [7] 20. 8. 1. tétel 422. o.): Ha egy véges H halmazban kijelölünk r^2+r+1

[5] A III. axióma csak ahhoz szükséges, hogy bizonyos triviális eseteket kizárjunk.

részhalmazt, amelyek mindegyike $r+1$ elemet tartalmaz, és bármely 2 elemhez egy és csak egy kijelölt részhalmaz van amely mindkettőt tartalmazza, akkor a halmaz elemeinek száma r^2+r+1, minden elem $r+1$ kijelölt részhalmazhoz tartozik és bármely két kijelölt részhalmaznak egy és csak egy közös eleme van.[6] Ha egy véges geometria r^2+r+1 pontot tartalmaz, a geometriát *r-edrendű*nek nevezzük. Nem minden $r \geqq 2$-re létezhet r-edrendű véges geometria. *Bruck* és *Ryser* [7] bebizonyították, hogy ha $r \equiv 1 \bmod 4$ vagy $r \equiv 2 \bmod 4$ és r nem állítható elő két négyzetszám összegeként, vagyis ha r négyzetmentes része tartalmaz egy $4k+3$ alakú prímszámot, akkor nem létezik r-edrendű véges geometria. Tehát pl. 6-odrendű vagy 21-edrendű véges geometria nem létezhet. Az egyetlen 2-rendű geometriát az előbb már megkonstruáltuk. Ismeretes hogy 3-ad, 4-ed és 5-ödrendű geometria is lényegében csak egyetlen egy van, mégpedig az, amit a következőkben avéges testek segítségével meg fogunk konstruálni. Általánosságban nyitott az a probléma, hogy r mely értékeire létezik r-edrendű geometria, és mely r-ekre létezik csak egyetlen ilyen geometria.

Egy véges geometriát *Desargues-félé*nek nevezünk, ha teljesül benne a Desargues-tétel, vagyis ha az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek átmennek egy O ponton, akkor az A_1C_1 és A_2B_2 egyenesek metszéspontját C_3-al, az A_1C_1 és A_2C_2 egyenesek metszéspontját B_3-al, a B_1C_1 és B_2C_2 egyenesek metszéspontját A_3-al jelölve, az A_3, B_3 és C_3 pontok egy egyenesen fekszenek. A fent leírt 7 pontból álló geometriáról könnyű belátni, hogy Desargues-féle.[7]

Egy véges geometria pontjai halmazának önmagára való egy-egyértelmű $Q \leftrightarrow Q'$ leképezését *kollineáció*nak nevezzük, ha e leképezés minden egyenest egyenesbe visz át, vagyis ha abból, hogy Q_1, Q_2, Q_3 egy egyenesen fekszenek, következik, hogy Q_1', Q_2', Q_3' is egy egyenesen fekszenek. A pontok leképezése tehát egyértelműen meghatározza a véges geometria egyenesei halmazának egy önmagára való (szintén egy-egyértelmű) $e \leftrightarrow e'$ leképezését is, olymódon, hogy ha a Q pont az e egyenesen fekszik, akkor a Q' pont az e' egyenesen fekszik. Ha $Q'=Q$, a Q pontot a kollineáció fixpontjának, ha $e'=e$, az e egyenest a kollineáció fix egyenesének nevezzük.

[6] E tétel visszavezethető a 6. §-ban bebizonyított tétel egy speciális esetére.

[7] Kárteszi Ferenc „Incidenciageometria" c. cikkében (Matematikai Lapok, 14 /1963/246—263/ azt állítja, (lásd 250. old.), hogy a 7 pontból álló geometria nem Desargues-féle, azzal az indokolással, hogy a Desargues-tétel 10 egyenes (és 10 pont) helyzetviszonyáról szól. Kárteszi figyelmét elkerülte, hogy e 10 egyenes (10 pont) nem szükségképpen különböző. Kárteszinek az a megállapítása, hogy a Desargues-tétel független az incidencia-axiomáktól, természetesen helytálló, azonban ezt nem a 7 pontból álló geometria létezése, hanem a nem-Desargues féle geometriák létezése bizonyítja.

Ha egy (fix) egyenes minden pontja fixpont, az egyenest a kollineáció tengelyének nevezzük; ha egy (fix) ponton átmenő minden egyenes fix egyenes, azt a kollineáció centrumának nevezzük. Könnyen belátható, hogy ha egy kollineációnak egynél több centruma vagy egynél több tengelye van, akkor az a minden pontot önmagába átvivő *azonos* kollineáció. Egy olyan kollineációt, amelynek van egy centruma és egy tengelye, *centrális kollineáció*nak neveznek. Ha a centrum rajta fekszik a tengelyen, a centrális kollineációt *elációnak*, ha nem fekszik rajta, *homológiá*nak nevezik. A véges geometriák kollineációinak elméletét részletesen tárgyalja pl. Marshall Hall könyve [8].

Ha a geometria Desargues-féle, akkor akárhogyan írunk elő egy O pontot, egy l egyenest és két, az O ponttal egy egyenesen fekvő, de attól különböző A_1, A_2 pontot, amelyek egyike sem fekszik rajta l-en, egy és csak egy olyan kollineáció adható meg, amelynek O a centruma, l a tengelye és amely az A_1 pontot A_2-be viszi át. Ugyanis legyen B_1 egy tetszőleges, a O centrumtól különböző és nem az l tengelyen fekvő pont. $B_2 = B_1'$ rajta kell, hogy feküdjön az OB_1 egyenesen, továbbá ha C_3-al jelöljük az A_1B_1 egyenes és l metszéspontját, akkor $B_2 = B_1'$ rajta kell, hogy feküdjék a C_3A_2 egyenesen is, tehát B_2 nem lehet más, mint az OB_1 és A_2C_3 egyenesek metszéspontja. Így tehát a véges geometria minden pontjának megkonstruálhatjuk a képét; abból, hogy a geometria Desargues-féle, következik, hogy az így konstruált leképezés valóban kollineáció.

Centrális kollineációk egy adott O centrummal és l tengellyel létezhetnek nem-Desargues-féle geometriákban is. Ha egy megadott O centrumra és l tengelyre, továbbá bármely A_1, A_2 pontpárra, amelyek O-val egy egyenesen fekszenek, attól különböznek és nem fekszenek az l tengelyen, megadható egy centrális kollineáció, amelynek O a centruma, l a tengelye és amely A_1-t A_2-be viszi át, akkor a geometriát $O-l$-*tranzitív*nek nevezzük.

Ha egy geometria egy megadott l egyenesre és bármely azon fekvő O pontra $O-l$ tranzitív, akkor azt *tranzlációs*nak (tranzláció-síknak) nevezik l-re nézve. Az olyan véges geometriákat, amelyek minden l egyenesükre nézve tranzlációsak, *Moufang*-féle geometriáknak nevezik, Ruth Moufang után, aki e geometriákat elsőnek vizsgálta. A mondottakból látható, hogy egy Desargues-féle geometria egyben Moufang-féle is.

Ha P prímszámhatvány, $P = p^n$ $(n \geqq 1)$, a következőképpen konstruálhatunk meg egy P-edrendű véges geometriát. Vizsgáljuk a $GF(P)$ véges test elemeiből képezett összes olyan (x_1, x_2, x_3) elemhármasokat, amelyek elemei nem mind egyenlők 0-val. Ha λ a $GF(P)$ test tetszőleges 0-tól különböző eleme, az (x_1, x_2, x_3) és $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ számhármasokat tekintsük ugyanazon pont különböző előállításainak. Az x_1, x_2, x_3 $GF(P)$-beli elemeket a szóban forgó pont *projektív koordi-*

*nátái*nak nevezzük. Egy pont projektív koordinátái tehát csak egy faktortól eltekintve vannak meghatározva. Ha a következőkben „az (x_1, x_2, x_3) pont"-ról beszélünk, ezen azt a pontot értjük, amelynek (x_1, x_2, x_3) *egyik* lehetséges projektív koordináták segítségével való előállítása. Ha tehát $\lambda \neq 0$, (x_1, x_2, x_3) és $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ ugyanazon pont különböző előállításai projektív koordináták segítségével, ugyanúgy, mint a projektív geometriában. Ily módon tehát minden pontnak $P-1$ előállítása van, és mivel az összes (x_1, x_2, x_3) hármasok száma (a (0, 0, 0) hármastól eltekintve) P^3-1, tehát ilyenmódon $\frac{P^3-1}{P-1} = P^2+P+1$ pontot definiáltunk. Bármely három a_1, a_2, a_3 $GF(P)$-beli elemhez, amelyek nem mind egyenlők 0-val, az $[a_1, a_2, a_3]$ „*egyenest*" mint azon (x_1, x_2, x_3) pontok halmazát definiáljuk, amelyek eleget tesznek ($GF(P)$-ben) az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{2.1}$$

egyenletnek. Nyilván ha (2. 1) fennáll, akkor

$$a_1 \cdot \lambda x_1 + a_2 \cdot \lambda x_2 + a_3 \cdot \lambda x_3 = 0 \tag{2.2}$$

tehát annak megállapításához, hogy egy pont rajta fekszik-e egy egyenesen, mindegy, hogy a pont mely projektív koordináta előállításából indulunk ki. Nyilvánvaló továbbá, hogy ha $\lambda \neq 0$, a $[\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3]$ és az $[a_1, a_2, a_3]$ egyenesek azonosak. Az a_1, a_2, a_3 elemeket az $[a_1, a_2, a_3]$ egyenes projektív koordinátáinak nevezzük. Amikor „az $[a_1, a_2, a_3]$ egyenes"-ről beszélünk, ezen tehát egy olyan egyenest értünk, amelynek $[a_1, a_2, a_3]$ egy lehetséges projektív koordinátákkal való előállítása. Így P^2+P+1 egyenest definiáltunk. Bizonyítsuk be, hogy a pontok és egyenesek ilyen definíciója mellett teljesülnek az I., II. és III. axiómák.

I. igazolása. Legyenek (x_1, x_2, x_3) és (y_1, y_2, y_3) különböző pontok. Az

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0 \\ a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

egyenletrendszer mindig megoldható (a_1, a_2, a_3-ra); hiszen $x_1y_2 - x_2y_1$, $y_3x_1 - x_3y_1$, $x_2y_3 - x_3y_2$ nem lehetnek mind 0-val egyenlők, mert akkor (x_1, x_2, x_3) és (y_1, y_2, y_3) ugyanazon pont koordinátái lennének. Ha például $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$, akkor a (2. 3) egyenletrendszernek egy és csak egy olyan megoldása van, amelyre $a_3 = 1$; tehát az $[a_1, a_2, a_3]$ egyenes egyértelműen meg van határozva a (2. 3) egyenletrendszer által.

II. igazolása: pontosan ugyanúgy végezhető el, mint I. igazolása, hiszen az egyenesek és pontok között teljes analógia (dualitás) áll fenn.

Ha $[a_1, a_2, a_3]$ és $[b_1, b_2, b_3]$ különböző egyenesek, ezek közös pontja az az (x_1, x_2, x_3) pont, amelynek projektív koordinátái a

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \tag{2.4}$$

egyenletrendszernek tesznek eleget.

III. igazolása. Könnyen belátható, hogy az (1, 0, 0), (0, 1, 0) (0, 0, 1) és (1, 1, 1) pontok közül nem fekszik 3 egy egyenesen. Ezt pl. úgy láthatjuk be, hogy először kimutatjuk, hogy — ugyanúgy, mint a projektív geometriában — az (x_1, x_2, x_3) (y_1, y_2, y_3) és (z_1, z_2, z_3) pontok akkor és csak akkor fekszenek egy egyenesen, ha az

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

determináns értéke 0.

Közvetlenül is könnyen belátható, hogy egy tetszőleges $[a_1, a_2, a_3]$ egyenesen $P+1$ pont fekszik, hiszen az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{2.6}$$

egyenletnek eleget tevő (x_1, x_2, x_3) pontok számát a következőképpen határozhatjuk meg: feltevésünk szerint a_1, a_2, a_3 nem mind egyenlők 0-val; legyen pl. $a_1 \neq 0$. Ha $a_2 = a_3 = 0$, akkor a (2.6) egyenletnek a $(0, 1, x)$ $(x \in GF(P))$ és a (0, 0, 1) pontok és csak ezek tesznek eleget, tehát az $[a_1, 0, 0]$ egyenesen $P+1$ pont fekszik. Ha $a_2 \neq 0$ és $a_3 = 0$, akkor a (2.6) egyenletnek az $(a_2, -a_1, x)$ $(x \in GF(p))$ és a (0, 0, 1) pontok tesznek eleget. Hasonlóképpen $P+1$ pont fekszik az $[a_1, a_2, a_3]$ egyenesen, ha $a_2 = 0$ és $a_3 \neq 0$. Végül, ha a_1, a_2, a_3 mindhárman 0-tól különböznek, akkor a (2.6) egyenletnek a $(0, a_3, -a_2)$ pont, továbbá az $\left(1, x, -\frac{a_1 + a_2x}{a_3}\right)$ $(x \in GF(P))$ pontok, tehát megint csak $P+1$ pont tesz eleget. Hasonlóképpen látható be persze, hogy minden ponton át $P+1$ egyenes halad.

Az így megkonstruált P-edrendű véges geometriát $PG(P)$-vel jelöljük.[8]

Nem nehéz bebizonyítani, hogy $PG(P)$ Desargues-féle geometria; ennek igazolása azonos a Desargues-tétel projektív koordináták segítségével való bizonyításával a közönséges projektív geometriában (l. pl. [9]).

[8] *PG* a „projektív geometria" rövidítése.

A fentebb megkonstruált 7 pontból álló véges geometria azonos a $PG(2)$ geometriával; az 1. ábrán 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7-tel jelölt pontok projektív koordinátái a következők:

1 (1, 1, 1)
2 (1, 1, 0)
3 (0, 0, 1)
4 (1, 0, 1)
5 (0, 1, 0)
6 (0, 1, 1)
7 (1, 0, 0)

Az egyenesek projektív koordinátái a következők:

Az 1, 2, 3 pontokon átmenő egyeneseké [1, 1, 0]
Az 1, 4, 5 pontokon átmenő egyeneseké [1, 0, 1]
Az 1, 6, 7 pontokon átmenő egyeneseké [0, 1, 1]
A 2, 4, 6 pontokon átmenő egyeneseké [1, 1, 1]
A 2, 5, 7 pontokon átmenő egyeneseké [0, 0, 1]
A 3, 4, 7 pontokon átmenő egyeneseké [0, 1, 0]
A 3, 5, 6 pontokon átmenő egyeneseké [1, 0, 0].

Konstruáljuk meg további példaként a $PG(3)$ véges geom etriát E célból kiindulunk a $GF(3)$ testből, tehát a mod 3 maradékosztályok testéből, melynek elemeit 0, 1, 2-vel jelöljük. A $PG(3)$ geometriának $3^2+3+1 = 13$ pontja van; legyenek ezek $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{13}$; e pontok projektív koordináták segítségével a következőképpen állíthatók elő:

Q_1: (1, 0, 0)
Q_2: (0, 1, 0)
Q_3: (0, 0, 1)
Q_4: (1, 1, 0)
Q_5: (1, 0, 1)
Q_6: (0, 1, 1)
Q_7: (1, 1, 1)
Q_8: (1, 2, 0)
Q_9: (1, 0, 2)
Q_{10}: (0, 1, 2)
Q_{11}: (1, 1, 2)
Q_{12}: (1, 2, 1)
Q_{13}: (2, 1, 1)

Az alábbi táblázat feltünteti, hogy e geometria 13 egyenese mely 4—4 ponton halad át.

Egyenes jele	egyenes projektív koordinátái	az egyenesen fekvő pontok
E_1	[1, 0, 0]	Q_2 Q_3 Q_6 Q_{10}
E_2	[0, 1, 0]	Q_1 Q_3 Q_5 Q_9
E_3	[0, 0, 1]	Q_1 Q_2 Q_4 Q_8
E_4	[1, 1, 0]	Q_3 Q_8 Q_{12} Q_{13}
E_5	[1, 0, 1]	Q_2 Q_9 Q_{11} Q_{13}
E_6	[0, 1, 1]	Q_1 Q_{10} Q_{11} Q_{12}
E_7	[1, 1, 1]	Q_7 Q_8 Q_9 Q_{10}
E_8	[1, 2, 0]	Q_3 Q_4 Q_7 Q_{11}
E_9	[1, 0, 2]	Q_2 Q_5 Q_7 Q_{12}
E_{10}	[0, 1, 2]	Q_1 Q_6 Q_7 Q_{13}
E_{11}	[1, 1, 2]	Q_5 Q_6 Q_9 Q_{12}
E_{12}	[1, 2, 1]	Q_4 Q_6 Q_9 Q_{12}
E_{13}	[2, 1, 1]	Q_4 Q_5 Q_{10} Q_{13}

E táblázatból könnyen elkészíthetünk egy másikat, amely megadja, hogy egy ponton mely egyenesek haladnak át:

Pont jele	Pont projektív koordinátái	A ponton áthaladó egyenesek
Q_1	(1, 0, 0)	E_2 E_3 E_6 E_{10}
Q_2	(0, 1, 0)	E_1 E_3 E_5 E_9
Q_3	(0, 0, 1)	E_1 E_2 E_4 E_8
Q_4	(1, 1, 0)	E_3 E_8 E_{12} E_{13}
Q_5	(1, 0, 1)	E_2 E_9 E_{11} E_{13}
Q_6	(0, 1, 1)	E_1 E_{10} E_{11} E_{12}
Q_7	(1, 1, 1)	E_7 E_8 E_9 E_{10}
Q_8	(1, 2, 0)	E_3 E_4 E_7 E_{11}
Q_9	(1, 0, 2)	E_2 E_5 E_7 E_{12}
Q_{10}	(0, 1, 2)	E_1 E_6 E_7 E_{13}
Q_{11}	(1, 1, 2)	E_5 E_6 E_8 E_{11}
Q_{12}	(1, 2, 1)	E_4 E_6 E_9 E_{12}
Q_{13}	(2, 1, 1)	E_4 E_5 E_{10} E_{13}

Figyeljük meg, hogy a két táblázat között az az egyszerű összefüggés áll fenn, hogy ha az E_i egyenesen a Q_{j_1}, Q_{j_2}, Q_{j_3} és Q_{j_4} pontok fekszenek, akkor a Q_i ponton az E_{j_1}, E_{j_2}, E_{j_3} és E_{j_4} egyenesek haladnak át. Ez nemcsak a $PG(3)$ geometriában van így, hanem minden $PG(P)$ véges geometriában, ha a pontokat és egyeneseket úgy számoztuk meg, hogy ha Q_i projektív (pont-) koordinátái (x_i, y_i, z_i), ekkor az ugyanilyen sorszámú E_i egyenes projektív (vonal-) koordinátái $[x_i, y_i, z_i]$; ugyanis definíció szerint a $Q_i=(x_i, y_i, z_i)$ pont akkor és csak akkor fekszik rajta az $E_j=[a_j, b_j, c_j]$ egyenesen, ha

$$a_j x_i + b_j y_i + c_j z_i = 0 \tag{2.7}$$

és (2. 7)-ből következik, hogy ez esetben a (a_j, b_j, c_j) pont is rajta fekszik az $[x_i, y_i, z_i]$ egyenesen.

Jelöljük T-vel azt a leképezést, amely minden Q pontnak a vele azonos projektív koordinátákkal bíró $E = TQ$ egyenest feleltteti meg és megfordítva; egy E egyenesnek a vele azonos koordinátákkal bíró $Q = TE$ pontot. E leképezés tehát a következő tulajdonsággal bír:

Ha a Q pont rajta van az E egyenesen, akkor a TQ egyenes átmegy a TE ponton.

Ebből következik, hogy ha E a Q_1 és Q_2 pontokon átmenő egyenes, akkor a TQ_1 és TQ_2 egyenesek metszéspontja a TE pont és megfordítva: ha Q az E_1 és E_2 egyenesek metszéspontja, akkor TQ a TE_1 és TE_2 pontokon átmenő egyenes. Az is nyilvánvaló, hogy a T leképezés involutorikus azaz $T(TQ) = Q$ ill. $T(TE) = E$.

Vizsgáljuk meg, hogy e leképezésnél melyek azok a Q pontok, amelyek rajta fekszenek a nekik megfelelő TQ egyenesen. Ha a Q pont projektív koordinátái (x_1, x_2, x_3), akkor a TQ egyenes projektív koordinátái $[x_1, x_2, x_3]$ és Q akkor és csak akkor fekszik rajta a TQ egyenesen, ha

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{2. 8}$$

Egy

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 = 0$$

alakú másodfokú egyenletnek eleget tevő pontok összességét a véges geometriában (ahol a c_1, c_2, c_3 elemek nem mind egyenlők 0-val) *kúpszelet*nek nevezzük. (2. 8) tehát egy kúpszelet egyenlete, vagyis azon Q pontok összessége, amelyek rajta fekszenek a T leképezésnél nekik megfelelő TQ egyenesen, egy kúpszeletet alkotnak. (A (2. 8) egyenletnek eleget tevő pontok összességét körnek is nevezhetnénk, azonban a kúpszeletek különböző fajtáinak megkülönböztetésének a véges geometriában nincs értelme.)

A T leképezés tehát felfogható egy kúpszeletre vonatkozó pólus-poláris megfeleltetésnek: TQ a Q pont polárisa, ill. TE az E egyenes pólusa a (2. 8) kúpszeletre nézve.

Vizsgáljuk most meg azt a kérdést, hogy hány pont fekszik a (2. 8) kúpszeleten. Először tegyük fel, hogy P páratlan. Vizsgáljuk meg, hogy ha x végigfut a $GF(P)$ test 0-tól különböző elemein, x^2 hány különböző értéket vesz fel. Mivel $x^2 \neq 0$, ha $x \neq 0$, továbbá $x^2 = (-x)^2$ és $x^2 = y^2$ akkor és csak akkor, ha $x = y$ vagy $x = -y$, tehát x^2 $\frac{P-1}{2}$ különböző értéket vesz fel, és mindegyiket kétszer. A $GF(P)$ test nem 0 elemei

közül tehát pontosan a feléből lehet négyzetgyököt vonni.[9] Megjegyzendő, hogy ha ω egy $P-1$ rendű elem $GF(P)$-ben, amelynek hatványai tehát előállítják $GF(P)$ összes nem 0 elemeit, úgy azok az elemek, amelyeknek van négyzetgyökük, nyilván ω páros hatványaiként állíthatók elő, amelyeknek nincs, azok ω páratlan hatványai.

A (2. 8) egyenletnek eleget tevő (x_1, x_2, x_3) pontokat osszuk két csoportba: azokra, amelyekben $x_1 = 0$ és azokra, amelyekben $x_1 \neq 0$. Ha $x_1 = 0$, akkor $x_2 \neq 0$, hiszen egyébként x_3 is 0 volna, ami lehetetlen; feltehetjük tehát, hogy $x_2 = 1$; ez esetben $x_3^2 = -1$. Ilyen pont létezése azon múlik tehát, hogy -1-nek van-e $GF(P)$-ben négyzetgyöke. Mivel $(-1)^2 = 1$, ha ω egy primitív gyök, $-1 = \omega^{\frac{P-1}{2}}$, és így a mondottak szerint -1-nek akkor és csak akkor van négyzetgyöke, ha $\frac{P-1}{2}$ páros, vagyis ha P $4k+1$ alakú, vagyis p vagy $4k+1$ alakú, vagy p $4k+3$ alakú és n páros. Az első esetben tehát a (2. 8) kúpszeleten 2 olyan pont fekszik, amelyre $x_1 = 0$, míg a második esetben ilyen pont nincs. Vizsgáljuk most azokat a (2. 8) kúpszeleten fekvő pontokat, amelyekre $x_1 \neq 0$ ez esetben feltehetjük, hogy $x_1 = 1$, vagyis az

$$x_2^2 + x_3^2 = -1 \tag{2.9}$$

egyenlet $GF(P)$-beli (x_2, x_3) megoldásainak számát kell meghatároznunk.

Megint külön kell választanunk a $P \equiv 1 \bmod 4$ és $P \equiv 3 \bmod 4$ esetet. Ha $P \equiv 1 \bmod 4$, akkor legyen $P \equiv 4R+1$ és ω egy primitív gyök. Legyen $\omega^R = \alpha$ akkor tehát $\alpha^2 = -1$ és így (2. 9)-ből

$$x_2^2 + x_3^2 = x_2^2 - \alpha^2 x_3^2 = -1 \tag{2.10}$$

Mármost J. B. KELLY [10] bebizonyította,[10] hogy ha $P \equiv 1 \bmod 4$ akkor bármely $d \neq 0$ $\frac{P-1}{4}$-féleképpen állítható elő $a_1 - a_2 = d$ alakban, ahol a_1 és a_2 $GF(P)$ olyan elemei, amelyeknek van négyzetgyökük; mivel a_1-nek és a_2-nek $2-2$ négyzetgyöke van, (2. 10)-nek $P-1$ megoldása van, és így a (2. 8) kúpszeleten összesen $P+1$ pont fekszik. Ha viszont $P \equiv 3 \bmod 4$, akkor jelölje A $GF(P)$ azon nem 0 elemeinek halmazát, amelyeknek van négyzetgyöke és B azon $\neq 0$ elemeinek halmazát, amelyeknek nincs négyzetgyöke, akkor KELLY idézett tétele szerint

[9] Ezt úgy is mondhatjuk, hogy $GF(P)$-ben $\frac{P-1}{2}$ négyzetes maradék van, ennek speciális esete az a jólismert tény, hogy ha p primszám, akkor $\frac{p-1}{2}$ négyzetes maradék van mod p.

[10] A $P \equiv 3 \bmod 4$ esetre nézve lásd a 4 §. lemmáját.

$GF(P)$ minden $d \neq 0$ eleme $\frac{P+1}{4}$ féleképpen állítható elő $a-b=d$ alakban, ahol $a \in A$ és $b \in B$. Mivel $x_2^2 \in A$ és $-x_3^2 \in B$, ebből következik, hogy a (2. 8) kúpszeleten ez esetben is $P+1$ pont fekszik.

Ha $P=2^n$ akkor könnyen belátható, hogy $GF(P)$ minden elemének egy és csak egy négyzetgyöke van. Így tehát a (2. 8) egyenlet megoldásai a következők: a (0, 1, 1) pont, továbbá az $(1, x, \sqrt{1+x^2})$ pontok, $x \in GF(P)$, tehát a (2. 8) kúpszeleten ez esetben is $P+1$ pont fekszik. Tehát minden véges geometriában a (2. 8) kúpszeleten $P+1$ pont fekszik. (Megjegyzendő, hogy a $P=2$ esetben a (2. 8) kúpszelet azonos az [1, 1, 1] egyenessel.)

Példaként vizsgáljuk meg először a $P=5$ esetet. Ez esetben a (2. 8) kúpszeleten fekvő 6 pont a következő:

$$(0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (2, 0, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 0)$$

A $P=7$ esetben a (8) kúpszeleten fekvő 8 pont a következő:

$$(1, 3, 2), (1, 2, 3), (1, 4, 2), (1, 2, 4), (1, 3, 5), (1, 5, 3), (1, 4, 5), (1, 5, 4)$$

R. Baer [11] bebizonyította, hogy egy N-edrendű véges geometriában minden polaritásnál[11] van legalább $N+1$ olyan pont, amely rajta fekszik a hozzárendelt egyenesen.

A fent definiált polaritást a (2. 8) kúpszeletre vonatkozó polaritásnak nevezzük. E polaritás segítségével definiálhatjuk a (2. 8) kúpszelet „belsejét" ill. külsejét is. Könnyen belátható, hogy egy tetszőleges egyenes a (2. 8) kúpszeletet legfeljebb 2 pontban metszi. Ha a Q pont polárisa nem metszi a (2. 8) kúpszeletet, azt mondjuk, hogy Q a (2. 8) kúpszelet „belsejében" fekszik; ha Q polárisa 2 ponton metszi a (2. 8) kúpszeletet, azt mondjuk, hogy Q a kúpszelet „külsejében" fekszik; könnyű belátni, hogy Q polárisának akkor és csak akkor van egyetlen közös pontja a (2. 8) kúpszelettel, ha maga Q rajta fekszik a kúpszeleten.

Azokat az egyeneseket, amelyeknek egy közös pontjuk van a (2. 8) kúpszelettel, a kúpszelet *érintői*nek nevezzük. Ki lehet mutatni, hogy egy a kúpszeleten kívül fekvő ponton a kúpszeletnek két különböző érintője halad át, míg egy a kúpszelet belsejében fekvő ponton nem halad át egyetlen érintő sem. Lehet tehát a külső és belső pontok definíciójául azt választani, hogy külső pontnak azokat a pontokat nevezzük, amelyeken át a kúpszelethez 2 érintő húzható.

[11] Polaritás alatt itt egy olyan leképezést értünk, amely egy véges geometria minden pontjához egy egyenest rendel hozzá, úgy, hogy egy egyenesen fekvő pontok képei mind egy ponton haladnak át.

A $PG(5)$ véges geometria 31 pontja közül 10 fekszik a (2. 8) kúpszelet belsejében és 15 a (2. 8) kúpszeleten kívül; a többi 6, mint láttuk, a (2. 8) kúpszeleten fekszik. Belső pontok az

$$(1, 1, 0),\ (1, 0, 1),\ (0, 1, 1),\ (1, 4, 0),\ (1, 0, 4),\ (0, 1, 4),\ (1, 1, 1),\ (1, 1, 4),$$
$$(1, 4, 1),\ (1, 4, 4)$$

pontok, külső pontok az

$$(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1),\ (1, 1, 2),\ (1, 2, 1),\ (1, 2, 2),\ (1, 1, 3),$$
$$(1, 3, 1),\ (1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (1, 3, 3),\ (1, 2, 4),\ (1, 4, 2),\ (1, 3, 4),\ (1, 4, 3)$$

pontok.

Általában $\binom{P+1}{2}$ külső pont és $\binom{P}{2}$ belső pont van. Ugyanis a külső pontok polárisa 2 pontban metszi a kúpszeletet; mivel a kúpszeleten $P+1$ pont van, $\binom{P+1}{2}$ olyan egyenes van, amely 2 pontban metszi a kúpszeletet és ezek pólusai a külső pontok.

A „belső" és „külső" pontokkal kapcsolatban azonban nem szabad abba a hibába esni, hogy a szemléletben bízva azt képzeljük, hogy a helyzet ugyanaz minden tekintetben, mint az euklideszi geometriában. A szemlélet alapján ugyanis pl. azt gondolhatnánk, hogy egy a (2. 8) kúpszeletet nem-metsző egyenes minden pontja külső pont; ez azonban nem így van: egy nem-metsző egyenesen $\frac{P+1}{2}$ külső és *ugyanannyi* belső pont van. Egy metsző egyenesen viszont a két érintési pont mellett $\frac{P-1}{2}$ belső és $\frac{P-1}{2}$ külső pont van. Ezzel szemben egy érintőn minden az érintési ponttól különböző pont külső pont. Egy külső ponton át 2 érintő, $\frac{P-1}{2}$ metsző és $\frac{P-1}{2}$ nem-metsző egyenes halad át; egy belső ponton át viszont $\frac{P+1}{2}$ metsző és *ugyanannyi nem metsző* egyenes halad át.

A véges geometriákra vonatkozólag — a már idézett [2] és [7] könyveken kívül — lásd a [12], [13] és [14] műveket. [13]-ban található egy példa egy 9-edrendű nem-Desargues-féle geometriára, továbbá annak a bizonyítása, hogy két egyenlő sok pontból álló Desargues-féle geometria mindig izomorf egymással (vagyis csak a pontok megszámozásában különböznek).

3. §. Ortogonális latin négyzetek

*Latin négyzet*nek (pontosabban: n-edrendű latin négyzetnek) nevezünk egy olyan, n különböző jelből képezett $n \times n$-es mátrixot, amelynek minden sorában és minden oszlopában az n jel egy-egy permutációja áll ($n = 2, 3, \ldots$). Az A és B jelekből 2 latin négyzet készíthető:

$$\begin{matrix} A & B \\ B & A \end{matrix} \quad \text{és} \quad \begin{matrix} B & A \\ A & B \end{matrix}$$

amelyek tulajdonképpen azonosak, hiszen a sorok felcserélésével nyerhetők egymásból. Az A, B, C jelekből 12 latin négyzet készíthető:

$$\begin{matrix} A & B & C & A & B & C & A & C & B & A & C & B & B & A & C & B & A & C & B & C & A & B & C & A \\ B & C & A & C & A & B & C & B & A & B & A & C & A & C & B & C & B & A & A & B & C & C & A & B \\ C & A & B & B & C & A & B & A & C & C & B & A & C & B & A & A & C & B & C & A & B & A & B & C \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} C & A & B & C & A & B & C & B & A & C & B & A \\ A & B & C & B & C & A & A & C & B & B & A & C \\ B & C & A & A & B & C & B & A & C & A & C & B \end{matrix}$$

Figyeljük meg, hogy az első sorban álló permutáció és egyetlen egy további elem megválasztása egyértelműen meghatározza a latin négyzetet, továbbá az első latin négyzetből a továbbiak a sorok és oszlopok permutációjával nyerhetők. Általában igaz, hogy egy latin négyzetből a sorok tetszőleges egymás közötti permutálása és az oszlopok egymás közötti tetszőleges permutálása útján újból egy latin négyzetet kapunk. Ha $n \geqq 4$, akkor azonban már nem lehet ily módon egyetlen latin négyzetből megkapni az összeset, hiszen az

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{matrix} \quad \text{és} \quad \begin{matrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \\ C & D & A & B \\ D & A & B & C \end{matrix}$$

latin négyzetek az említett transzformációkkal nyilván nem vihetők át egymásba. Ezt úgy láthatjuk be, hogy 4 olyan elem, amelyek két sorban és két oszlopban (vagyis egy téglalap négy csúcsában) helyezkednek el, a sorok és oszlopok bármely átrendezése után is ilyen helyzetben marad; mármost a második latin négyzetben van 4 ilyen elem, amelyek közül kettő azonos, kettő nem, az elsőben viszont nincs.

Az is nyilvánvaló, hogy ha a jeleknek egy tetszőleges permutációját hajtjuk végre egy latin négyzetben, akkor újból egy latin négyzetet kapunk: a két első 3-adrendű latin négyzetből ilyen módon megkaphat-

juk a többi 10-et. A fentemlített két 4-edrendű latin négyzet azonban még úgy sem vihető át egymásba ha a sorok és oszlopok permutációján kívül a jeleket is permutáljuk.

Egy véges csoport szorzástáblája mindig latin négyzet. Legyen ugyanis G egy n-elemű csoport, elemeit tetszőleges sorrendben elrendezve jelöljék $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Legyen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ ugyanezen G csoport elemeinek egy tetszőleges más elrendezése, vagyis legyen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ a $g_1, g_2, \ldots, g_n$ elemek egy permutációja. (Ez lehet speciálisan az identikus permutáció, vagyis $h_i = g_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$).

Legyenek az A $n \times n$-es mátrix elemei $a_{ij} = g_i h_j$ $(1 \leqq i \leqq n;\ 1 \leqq j \leqq n)$. Akkor nyilvánvalóan A egy $n \times n$-es latin négyzet. Például mind a két fentebb példaként felhozott két 4-edrendű latin négyzet csoporttábla: az első egy olyan 4 elemű Abel-csoporté, amely két kételemű csoport direkt szorzata, a második a negyedrendű ciklikus csoporté. Ha ugyanis az első csoport generátorai a és b $(a^2 = b^2 = e)$, a másodiké c $(c^4 = e)$, ahol e mindkét esetben az egységelem akkor szorzástábláik

	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

	e	c	c^2	c^3
e	e	c	c^2	c^3
c	c	c^2	c^3	e
c^2	c^2	c^3	e	c
c^3	c^3	e	c	c^2

Az első esetben e, a, b, ab a második esetben e, c, c^2, c^3 helyett A, B, C, D-t írva kapjuk a két előbbi latin négyzetet. Nyilvánvaló, hogy ha egy csoport szorzástáblájának sorait és oszlopait tetszőlegesen cserélgetjük, ezáltal ugyanannak a csoportnak egy másik (a csoport elemeinek két másik permutációjához tartozó) szorzástábláját kapjuk meg, tehát két különböző struktúrájú csoport szorzástáblái ilyen módon nem alakíthatók át egymásba.

Nem minden latin négyzet állítható elő mint egy csoport szorzástáblája. Például az

A	B	C	D	E
B	C	A	E	D
E	D	B	A	C
C	E	D	B	A
D	A	E	C	B

5-ödrendű latin négyzetről könnyű belátni, hogy nem csoporttábla. Ha ugyanis egy $A = (a_{ij}) = (g_i\ h_j)$ csoporttáblából kiválasztunk 4 olyan

elemet, amelyek két sort és két oszlopot fognak le, tehát az a_{ik}, a_{il}, a_{jk}, a_{jl} elemeket ($i \neq j$, $k \neq l$) akkor

$$(a_{ik})^{-1} a_{il} = (g_i h_k)^{-1} (g_i h_l) = h_k^{-1} h_l$$

és

$$(a_{jk})^{-1} a_{jl} = (g_j h_k)^{-1} (g_j h_l) = h_k^{-1} h_l,$$

tehát $(a_{ik})^{-1} a_{il} = (a_{jk})^{-1} a_{jl}$. Ez azt jelenti, hogy egy téglalap négy sarkában álló elem közül három egyértelműen meghatározza a negyediket; a fent példaként felhozott 5-ödrendű latin négyzet azonban nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, hiszen van benne 2 téglalap, amelynek 3—3 csúcsában ugyanaz a 3 elem áll, de a negyedikben nem, amint azt az alábbi ábra mutatja

A	B	C	D	E
B	C	A	E	D
E	D	B	A	C
C	E	D	B	A
D	A	E	C	B

Megjegyzendő, hogy minden latin négyzet értelmezhető mint egy *kvázi-csoport* szorzástáblája és megfordítva: minden véges kvázi-csoport szorzástáblája latin négyzet. Véges kvázi-csoportnak nevezünk egy véges halmazt, ha abban definiálva van egy művelet, melyet szorzással jelölve igaz, hogy ha $a \neq b$ és c tetszőleges akkor $ac \neq bc$ és $ca \neq cb$. Egy véges kvázi-csoport akkor és csak akkor csoport, ha az ab művelet asszociatív. Az is könnyen belátható, hogy egy latin négyzet akkor (és mint láttuk csak akkor) csoport szorzástábla, ha rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy benne egy „téglalap" három csúcsában álló elem meghatározza a negyediket, tehát ha abból, hogy $a_{i_1 k_1} = a_{i_2 k_2}$, $a_{i_1 l_1} = a_{i_2 l_2}$ és $a_{j_1 k_1} = a_{j_2 k_2}$ következik, hogy $a_{j_1 l_1} = a_{j_2 l_2}$. Ha ugyanis (a_{ij}) $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ egy n-edrendű latin négyzet, az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jelekből, amelyben egy „téglalap" 3 csúcsa meghatározza a negyediket, feltehetjük, hogy az első sor és az első oszlop elemei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (ebben a sorrendben); ezt a sorok és oszlopok átrendezésével elérhetjük. Definiáljuk az $A_1, \ldots, A_n$ elemekből álló G kvázi-csoportot úgy, hogy $A_u A_v = a_{uv}$. Ha $A_j A_k = A_l$ és $A_i A_j = A_l$, akkor

$$a_{1j} = a_{j1}, \quad a_{1l} = a_{jk} \quad \text{és} \quad a_{1j} = a_{11}$$

tehát $a_{il} = a_{1k}$ vagyis $A_i(A_j A_k) = (A_i A_j) A_k$. Ezzel bebizonyítottuk az asszociatív törvényt abban a speciális esetben, amikor $A_i A_j = A_1$. Ebből azonban már könnyen nyerjük, hogy az általános esetben is igaz az

asszociatív törvény, ugyanis, legyen $A_iA_j=A_r$, $A_sA_j=A_1$ és $A_jA_k=A_t$ akkor

$$a_{ij}=A_r=a_{r1}, \quad a_{sj}=A_1=a_{11}$$

és

$$a_{st}=A_sA_t=A_s(A_jA_k)=(A_sA_j)A_k=A_1A_k=a_{1k}$$

tehát $a_{it}=a_{rk}$ vagyis $A_i(A_jA_k)=(A_iA_j)A_k$, amit bizonyítani akartunk.

A latin négyzeteket leggyakrabban mezőgazdasági (növénytermelési és növénynemesítési) kísérletek tervezésénél használják. Ha például n különböző vetőmagot vagy n-féle kezelést (trágyázást stb.) akarunk összehasonlítani, és a talajminőség két egymásra merőleges irányban való változásának hatását a lehetőségekhez képest ki akarjuk küszöbölni, célszerű a kísérletek céljára rendelkezésre álló földterületen egy n^2 egyforma négyzetalakú parcellából álló területen elvetni az n féle magot (ill. alkalmazni az n kezelést) úgy, hogy mindegyik magfajtát (ill. kezelést) n parcellában vetjük el (ill. alkalmazunk) egy latin négyzetnek megfelelően. Ha most egyszerre akarunk n magfajtát és n kezelést összehasonlítani, kívánatos olyan kísérleti elrendezést választani, amelynél minden magfajta minden kezeléssel egy (és csak egy) parcellán van kombinálva. Ez esetben, ha az i-edik sor j-edik parcellájában a k-adik magfajtát vetjük el és az l-edik kezelést alkalmazzuk, akkor legyen $a_{ij}=k$ és $b_{ij}=l$. A kísérlet akkor nyújtja tehát a legtöbb információt az egyes magfajták és a kezelések összehasonlítására, ha amellett, hogy (a_{ij}) és (b_{ij}) egy-egy az $1, 2, \ldots, n$ számokból álló n-edrendű latin négyzetet alkot, az a feltétel is teljesül, hogy az (a_{ij}, b_{ij}) rendezett számpárok $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ mind különbözőek; ez esetben az (a_{ij}) és (b_{ij}) latin négyzeteket *ortogonális*nak nevezzük.

Például az előbb felsorolt 12 3-adrendű latin négyzet közül az első és a második ortogonálisak, amit beláthatunk úgy, hogy szuperponáljuk őket, vagyis egy 3×3-as mátrix minden mezőnyébe egy rendezett jelpárt írunk be, amelyek első eleme az első latinnégyzet eleme, második eleme a második latin négyzet megfelelő eleme:

$$\begin{matrix} AA & BB & CC \\ BC & CA & AB \\ CB & AC & BA \end{matrix}$$

Előfordul olyan eset is, amikor nemcsak kétféle tényező (pl. vetőmag és műtrágya-összetétel megválasztása) hatását akarjuk egyetlen kísérletből kiértékelni, hanem ezeken kívül más további tényezőket is variálni akarunk (pl. a vetés időpontja, az öntözés mennyisége stb.). Ehhez még összetettebb kísérleti elrendezésekre van szükségünk, mégpedig kettőnél több ortogonális latin négyzetre. Általában m darab

n-edrendű latin négyzetből álló rendszert *ortogonális rendszer*nek nevezünk, ha bármely két a rendszerhez tartozó latin négyzet ortogonális.

Véges testek segítségével a következőképpen lehet ortogonális latin négyzet-rendszereket konstruálni.

Legyenek a $GF(P)$ véges test elemei $g_0, \ldots, g_{P-1}$, ahol $g_0 = 0$ a test 0-eleme. A $GF(P)$ test elemeiből álló L_h $(h = 1, 2, \ldots, P-1)$ P-edrendű latin négyzetet definiáljuk a következőképpen: $L_h = (a_{hij})$, ahol

$$a_{hij} = g_h g_i + g_j \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, P-1).$$

Nyilvánvaló, hogy minden h-ra L_h valóban latin négyzet, tekintettel arra, hogy a $g_h g_i + g_j$ elemek $(i = 0, 1, \ldots, P-1)$ minden rögzített j-re $GF(P)$ elemeinek egy-egy permutációját alkotják és hasonlóképpen a $g_h g_i + g_j$ $(j = 0, 1, \ldots, P-1)$ elemek is minden rögzített i-re egy-egy permutációját adják $GF(P)$ elemeinek, hacsak $h \neq 0$. Azt is könnyű belátni, hogy az L_h $(h = 1, 2, \ldots, P-1)$ latin négyzetek közül bármely kettő ortogonális, hiszen ha $h_1 \neq h_2$ a

$$g_{h_1} g_{i_1} + g_{j_1} = g_{h_1} g_{i_2} + g_{j_2}$$

$$g_{h_2} g_{i_1} + g_{j_1} = g_{h_2} g_{i_2} + g_{j_2}$$

egyenletekből következik, hogy $g_{h_1}(g_{i_1} - g_{i_2}) = g_{h_2}(g_{i_1} - g_{i_2})$ tehát $g_{i_1} = g_{i_2}$ és így $g_{j_1} = g_{j_2}$, vagyis az $(a_{h_1 ij}, a_{h_2 ij})$ elempárok mind különbözőek. Például legyen $P = 5$, akkor ezzel az eljárással a következő 4 páronként ortogonális 5-ödrendű latin négyzetet nyerjük (0 helyett 5-öt írunk).

5 1 2 3 4	5 1 2 3 4
1 2 3 4 5	2 3 4 5 1
2 3 4 5 1	4 5 1 2 3
3 4 5 1 2	1 2 3 4 5
4 5 1 2 3	3 4 5 1 2

5 1 2 3 4	5 1 2 3 4
3 4 5 1 2	4 5 1 2 3
1 2 3 4 5	3 4 5 1 2
4 5 1 2 3	2 3 4 5 1
2 3 4 5 1	1 2 3 4 5

Vegyük észre, hogy a 4 latin négyzet ugyanazoknak a soroknak a permutációiból áll. Érdekes megjegyezni, hogyha e 4 latin négyzetet szuperponáljuk az így nyert mátrix az 1, 2, 3, 4, 5 számok 25 olyan 4 elemű ismétléses variációját fogja tartalmazni, amelyek közül bármely kettő legfeljebb egy helyen egyezik meg.

5	5	5	5	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5	1	4	5	1	2	5	1	2	3
2	4	1	3	3	5	2	4	4	1	3	5	5	2	4	1	1	3	5	2
3	1	4	2	4	2	5	3	5	3	1	4	1	4	2	5	2	5	3	1
4	3	2	1	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	5

Könnyen belátható, hogy e rendszer nem bővíthető, tehát egy tetszőleges az 1, 2, 3, 4, 5 számokból képezett 4-edrendű variáció a fenti mátrixban álló valamelyik variációval legalább 2 helyen megegyezik.

Ilyen módon tehát megmutattuk, hogy ha P prímszámhatvány, akkor konstruálható $P-1$ darab páronként ortogonális P-edrendű latin négyzet. Nyilvánvaló, hogy N darab páronként ortogonális N-edrendű latin négyzet semmilyen N-re nem létezhet ($N=2, 3, \ldots$). Legyenek ugyanis $L_1, \ldots, L_r$ páronként ortogonális N-edrendű latin négyzetek. Ha két latin négyzet ortogonális, az elemeiket bárhogyan is permutálva (átjelölve) ortogonálisak maradnak; feltehetjük tehát, hogy az $L_1, \ldots, L_r$ latin négyzetek mindegyikében az első sorban az $1, 2, \ldots, N$ számok állnak természetes sorrendben; legyenek most az $L_1, L_2, \ldots, L_r$ latin négyzetek második sorának első elemei rendre c_i ($i=1, 2, \ldots, r$). Nyilvánvaló, hogy a c_i ($i=1, 2, \ldots, r$) számok egymástól és 1-től különbözők kell, hogy legyenek, tehát $r \leqq N-1$. Vagyis a fenti konstrukció minden P prímszámhatványra maximális számú páronként ortogonális latin négyzetet szolgáltat.

Speciálisan ha $N=2$, akkor tehát nem adható meg két ortogonális latin négyzet. Ha N nem prímszámhatvány $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_s$ prímszámok ($s \geqq 2$) és $\alpha_i \geqq 1$, akkor a $GF(p_i^{\alpha_i})$ véges testek segítségével megkonstruálhatunk $r = \min\limits_i (p_i^{\alpha_i}-1)$ számú ortogonális N-edrendű latin négyzetet. Az egyszerűség kedvéért az eljárást csak arra az esetre mutatjuk be, ha N két különböző törzstényezőt tartalmaz, vagyis $N=P\cdot Q$ ahol $P=p^{\alpha}$, $Q=q^{\beta}$, p és q különböző prímszámok, Vizsgáljuk a $c=(a, b)$ párokat ahol $a \in GF(P)$ és $b \in GF(Q)$. Az (a, b) párokra a következő módon definiáljuk az összeadást és a szorzást

$$(a_1, b_1)+(a_2, b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$$

$$(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$$

ahol természetesen az $a_1 + a_2$ és $a_1 \cdot a_2$ műveletek $GF(P)$-ben, a $b_1 + b_2$, $b_1 \cdot b_2$ műveletek $GF(Q)$-ban végzendők el.

Az (a, b) $(a \in GF(P), b \in GF(Q))$ párok Γ halmaza e műveletek fenti értelmezése mellett egységelemes kommutatív gyűrűt alkot, amely azonban nem test, hiszen nem zérusosztómentes, mivel a gyűrű 0-eleme nyilván a $(0, 0)$ elem és $(0, 1) \cdot (1, 0) = (0, 0)$. E gyűrűben azoknak és csak azoknak az (a, b) elemeknek van inverze, amelyekre $a \neq 0$ és $b \neq 0$. Ha $GF(P)$ elemeit $a_0 = 0, a_1, a_2, \ldots, a_{P-1}$, $GF(Q)$ elemeit $b_0 = 0$, $b_1, b_2, \ldots, b_{Q-1}$ jelölik, és $P < Q$, vizsgáljuk a Γ gyűrű $\gamma_n = (a_n, b_n)$ elemeit $(h = 1, 2, \ldots, P-1)$; ezek mindegyikének van tehát inverze Γ-ban, és a $\gamma_h - \gamma_{h'}$, elemeknek $(h, h' = 1, 2, \ldots, P-1; h \neq h')$ szintén van inverzük.

Legyen $\gamma_0 = (0, 0)$ és jelöljék Γ többi (tehát $PQ - P$ elemét valamilyen sorrendben $\gamma_P, \gamma_{P+1}, \ldots, \gamma_{PQ-1}$, és definiáljuk az $L_h = (a_{hij})$ mátrixokat $(h = 1, 2, \ldots, P-1; i, j = 0, 1, \ldots, P_{Q-1})$ a következőképpen:

$$a_{hij} = \gamma_h \gamma_i + \gamma_j,$$

ahol a műveletek a Γ gyűrűben végzendők. Nyilvánvalóan L_h PQ-rendű latin négyzet $(h = 1, 2, \ldots, P-1)$, és azt is könnyen beláthatjuk, hogy e latin négyzetek páronként ortogonálisak.

E konstrukció segítségével bármely olyan $m > 1$ pozitív egész számra, amely $4k$, $4k+1$ vagy $4k+3$ alakú, tudunk konstruálni két m-edrendű ortogonális latin négyzetet, hiszen egy ilyen számot felírva prímszámhatványok szorzataként $m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$ alakban $\min_i (p_i^{\alpha_i} - 1) \geqq 2$. Ha azonban az m szám $4k+2$ alakú, e konstrukció nem alkalmazható, mert akkor $p_1 = 2, \alpha_1 = 1$ és így $\min_i (p_i^{\alpha_i} - 1) = 1$. TARRY [15] 1901-ben bebizonyította — amit már EULER sejtett — hogy nem is létezik két ortogonális 6-od rendű latin négyzet.

EULER azt is sejtette, hogy általában semmilyen $4k+2$ alakú m számra nem létezhet két ortogonális m-edrendű latin négyzet. Csak 1960-ban bizonyították be BOSE, SHRIKANDE és PARKER [16], hogy EULER sejtése csak 6-ra igaz, tehát minden 6-nál nagyobb $4k+2$ alakú m számra létezik két ortogonális m-edrendű latin négyzet.[12]

Jelölje $r(m)$ az m-edrendű páronként ortogonális latin négyzetek maximális számát. A mondottak szerint tehát $r(m) \geqq 2$ hacsak $m \geqq 3$ és $m \neq 6$, és ha m prímszámhatvány, akkor $r(m) = m - 1$. Az $r(m)$ függvény pontos értékének meghatározása összetett m-ekre megoldatlan. Ismeretes, hogy ha $m \equiv 1 \bmod 4$ vagy $m \equiv 2 \bmod 4$ és m nem állít-

[12] [1]-ben szerepel explicite két 10-edrendű ortogonális latin négyzet.

ható elő két négyzetszám összegeként, akkor $r(m) < m-1$. Ez BRUCK és RYSER [8] már említett tételéből következik, mely szerint ilyen m-ekre nem létezik m-edrendű véges geometria. Ugyanis R. C. BOSE [17] bebizonyította, hogy ha egy m számra $r(m) = m-1$, akkor létezik m-edrendű véges geometria (lásd [18]-at is).

Ahhoz, hogy belássuk, hogy $m-1$ m-edrendű ortogonális latin négyzet exisztenciájából következik. hogy létezik m-edrendű véges geometria, először a $P-1$ darab P-edrendű ortogonális latin négyzetre az előbb adott konstrukcióra adunk egy geometriai interpretációt.

A $PG(P)$ véges geometriában jelölje E_0 az $[1, 0, 0]$ egyenest, és jelöljék A és B az azon fekvő pontok közül a $(0, 1, 0)$ ill. $(0, 0, 1)$ pontokat. Az E_0 egyenesen az A és B pontokon kívül további $P-1$ pont fekszik, amelyeket a következőképpen jelölünk: legyen Q_z a $(0, z, 1)$ pont ahol z végigfut $GF(P)$ összes 0-tól különböző elemein. Minden z-re $(z \in GF(P), z \neq 0)$ definiáljuk az L_z mátrixot a következőképpen: Legyen $E_z(x, y)$ az az egyértelműen meghatározott egyenes, amely a Q_z és $(1, -x, y)$ pontokon áthalad.

Nyilván ha $E_z(x, y) = [a, b, c]$, akkor

$$a0 + bz + c = 0$$

és

$$a - bx + cy = 0$$

tehát $c = -bz$, és $a = b(yz + x)$.

Mivel $b \neq 0$ (mert egyébként $a = b = c = 0$ volna) választhatjuk b értéket 1-nek, tehát

$$E_z(x, y) = [zy + x, 1, -z].$$

Mármost ha a_{zxy}-al jelöljük $E_z(x, y)$ első koordinátáját, tehát $a_{zxy} = zy + x$, akkor nyilván $L_z = (a_{zxy})$ (ahol x és y $GF(P)$ elemein futnak végig meghatározott sorrendben) minden z-re latin négyzet lesz, és ez a $P-1$ latin négyzet páronként ortogonális lesz.

Megfordítva, legyen adva $m-1$ darab páronként ortogonális m-edrendű $L_z = (a_{zxy})$ latin négyzet, amelynek elemei az $1, 2, \ldots, m$ számok, ahol $x, y = 1, 2, \ldots, m$, $z = 1, 2, \ldots, m-1$. Ezen ortogonális latin négyzet-rendszer segítségével a következőképpen konstruálhatunk egy m-edrendű Γ véges geometriát. Γ pontjai legyenek egyrészt a (x, y) számpárok, $(x, y = 1, 2, \ldots, m)$ továbbá a z számok $(z = 1, 2, \ldots, m-1)$, végül az A és B szimbólumok; így összesen $m^2 + m + 1$ „pont"-ot definiáltunk. Γ egyenesei legyenek a következők:

1. Az E_0 egyenes, amely az $1, 2, \ldots, m-1$, A és B „pontok"-at tartalmazza.

2. Minden z-re és j-re azok az (x, y) számpárok, amelyekre $a_{zxy}=j$ továbbá a z „pont", alkossanak egy egyenest ($z = 1, 2, \ldots, m-1$; $j=1, 2, \ldots, m$).

3. y ($1 \leqq y \leqq m$) minden rögzített értékére az (x, y) számpárok ($x=1, 2, \ldots, m$) és az A pont alkossanak egy egyenest.

4. x ($1 \leqq x \leqq m$) minden rögzített értékére az (x, y) számpárok ($y=1, 2, \ldots, m$) és a B pont alkossanak egy egyenest.

Ilyen módon $1+m(m-1)+2m = m^2+m+1$ „egyenest" definiáltunk, amelyek mindegyikén nyilvánvalóan $m+1$ pont fekszik; az is könnyen belátható, hogy minden „ponton" $m+1$ „egyenes" halad át. A latin négyzetek feltételezett ortogonalitásából következik, hogy akárhogy választunk egy (x, y) és egy (x', y') elempárt úgy, hogy $x \neq x'$ és $y \neq y'$ van egy és csak egy z, amelyre $a_{zxy}=a_{zx'y'}$. Ennek felhasználásával könnyen belátható, hogy bármely két „egyenes"-nek egy és csak egy közös „pont"-ja van, és bármely két „pont"-on át egy és csak egy „egyenes" halad. Nyilvánvalóan az A, B, $(1, 0)$ és $(0, 1)$ „pont"-ok közül nem fekszik 3 egy egyenesen. Ilyen módon ha egy m számra létezik $m-1$ ortogonális latin négyzet, akkor létezik egy m-edrendű véges geometria is, és éppen ezt akartuk bebizonyítani.

4. §. Hadamard-mátrixok

Egy $A=(a_{ij})$ $n \times n$-es mátrixot, amelynek elemei mind $(+1)$-gyel vagy (-1)-gyel egyenlők, Hadamard-féle mátrixnak neveznek, ha sorvektorai páronként ortogonálisak, vagyis

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{hj} = 0, \quad \text{ha} \quad 1 \leqq i < h \leqq n. \tag{4.1}$$

Ebből már következik, hogy az A mátrix transzponáltja is Hadamard mátrix.

Az Hadamard-mátrixok eredetileg az Hadamard-féle determinánstétellel kapcsolatban merültek fel. E tétel szerint ha $A=(a_{ij})$ egy tetszőleges valós elemű $n \times n$-es mátrix, és ennek determinánsa $|A|$ akkor

$$|A|^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \tag{4.2}$$

Ha A elemei mind $+1$-gyel vagy -1-gyel egyenlők, (4. 2)-ben akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha A Hadamard mátrix; ugyanis

ha A Hadamard mátrix, akkor az $A_1 = \left(\frac{a_{ij}}{\sqrt{n}}\right)$ mátrix ortonormált, tehát determinánsának értéke ± 1, vagyis ha A Hadamard mátrix

$$|A|^2 = |A_1|^2 n^n = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right). \tag{4.3}$$

Megfordítva, mivel n egységvektor determinánsa az egységvektorok által kifeszített szimplex térfogatának $n!$-szorosa, abból, hogy ez a determináns 1 következik, hogy az egységvektorok páronként ortogonálisak, tehát ha egy ± 1 elemekből álló $A=(a_{ij})$ mátrixra (4. 2)-ben egyenlőség áll fenn, az szükségképpen Hadamard-mátrix (lásd ezzel kapcsolatban SZEKERES GYÖRGY és TURÁN PÁL [19] dolgozatát). Az Hadamard-mátrixok újabban fontos alkalmazásra találtak az információelméletben, a hibajavító ill. hibajelző kódok elméletében. Ezért újabban még fokozottabb érdeklődéssel vizsgálják az Hadamard-mátrixok exisztenciájának és konstrukciójának problémáját. A probléma azonban általánosságban még megoldatlan. $n=2$-re nyilván létezik Hadamard-mátrix, t. i. az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix. Könnyen belátható, hogy ha $n>2$, n-edrendű Hadamard-mátrix csak n-nek 4-gyel osztható értékeire létezhet. Ha ugyanis $A=(a_{ij})$ egy $+1$-edrendű Hadamard-mátrix, feltehetjük, hogy első sora csupa $+1$-ből áll; ugyanis ha egy Hadamard-mátrix tetszőlegesen kiválasztott oszlopait -1-gyel végigszorozzuk, a nyert mátrix újból Hadamard-mátrix marad. Ha az első sor csupa $+1$-ből áll, akkor a második sorban ugyanannyi $+1$-nek és -1-nek kell állnia, tehát n szükségképpen páros. Feltehetjük, hogy a második sor első $\frac{n}{2}$ eleme $+1$ és utolsó $\frac{n}{2}$ eleme -1, ugyanis egy Hadamard-mátrix oszlopait tetszőlegesen permutálva újból Hadamard-mátrixot nyerünk. Legyen most a harmadik sor első $\frac{n}{2}$ eleme között k darab $+1$, akkor az utolsó $\frac{n}{2}$ elem között $\frac{n}{2}-k$ darab $+1$-nek kell lennie, ahhoz, hogy a harmadik sor az elsővel ortogonális legyen; ahhoz azonban, hogy a harmadik sor a másodikkal is ortogonális legyen az kell, hogy $k = \frac{n}{2}-k$, tehát $k=\frac{n}{4}$ legyen, vagyis n szükségképpen 4-gyel osztható szám kell, hogy legyen. Igen valószínű, hogy minden 4-gyel osztható n-re létezik n-edrendű Hadamard-mátrix, ez azonban nincs bizonyítva. A Kronecker-féle determináns-szorzás (lásd [20] 69. o.) segítségével

könnyen belátható, hogy ha létezik n-edrendű és m-edrendű Hadamard-mátrix, akkor létezik nm-edrendű Hadamard-mátrix is. E §-ban meg fogjuk mutatni, hogy ha $P=p^n$, ahol p páratlan prímszám, $n \geqq 1$ és $P \equiv 3 \bmod 4$, akkor a $GF(P)$ véges test segítségével konstruálható egy $P+1$-rendű Hadamard mátrix. Így pl. n alábbi értékeire tudunk konstruálni n-edrendű Hadamard-mátrixot:

2, 4, 8, 12, 20, 24, 28, 32, 44, 48, 60, 68, 72, 80, 84, 104, 108, 112.

Mivel $16=4\cdot 4$, $40=2\cdot 20$, $56=2\cdot 28$, $64=2\cdot 32$, $88=2\cdot 44$, $96=2\cdot 48$, tehát a fentemlített megjegyzés szerint ezen értékeire is konstruálható n-edrendű Hadamard-mátrix. Ha $n=36$, 52, 76, 92 és 100, más módszerrel (lásd [21], [22]) sikerült Hadamard-mátrixot szerkeszteni; így n legkisebb értéke, amelyre még ismeretlen, hogy létezik-e n-edrendű Hadamard-mátrix, $n=116$.

A fentemlített konstrukció (lásd [21]) a következőképpen végezhető el. Legyen $P \equiv 3 \bmod 4$ és ω egy primitív gyök $GF(P)$-ben, legyen $g_0=0$ és $g_i=\omega^{i-1}$ $(i=1, 2, \ldots, P-1)$.

Legyen $n = P+1$. Az A $n \times n$-es mátrix sorait és oszlopait számozzuk meg 0-tól $P=(n-1)$-ig. Az első sora és oszlopa álljon csupa $+1$-esből; legyen továbbá $a_{i+1\ j+1}=1$ $(0 \leqq i \leqq p-1, 0 \leqq j \leqq p-1)$, ha g_i-g_j négyzetes maradék $GF(P)$-ben, vagyis ha $g_i-g_j = g_{2k}$; ellenkező esetben legyen $a_{i+1\ j+1} = -1$. Bebizonyítjuk, hogy az így konstruált mátrix Hadamard-féle. Ugyanis az i-edik sorban nyilván eggyel több $+1$ áll, mint ahány j-re g_i-g_j négyzetes maradék, tehát $\frac{P-1}{2}+1 = \frac{P+1}{2}$ és így ugyanannyi -1 áll. Mármost a h-adik és i-edik sorban eggyel többször áll két megfelelő helyen $+1$ ahány j-re g_h-g_j és g_i-g_j mindketten négyzetes maradékok.

Mármost, ha $g_h-g_j = x^2$ és $g_i-g_j = y^2$, akkor $g_h-g_i = x^2-y^2$ és megfordítva: g_h-g_i minden x^2-y^2 alakban való előállításához tartozik j-nek egy értéke, amelyre $g_h-g_j = x^2$ és $g_i-g_j = y^2$. Mármost mivel már említettük, (lásd [10]) érvényes a következő

Lemma: Ha $P \equiv 3 \bmod 4$ a $GF(P)$ test minden $a \neq 0$ eleme $\frac{P+1}{4}$-féleképpen állítható elő a $GF(P)$ testben két négyzet különbségeként.

Bizonyítás. Legyen $P \equiv 3 \bmod 4$; legyen ω egy primitív gyök $GF(P)$-ben és jelölje A $GF(P)$ azon elemeinek halmazát, amelyek „négyzetes maradékok", tehát amelyek ω^{2k} alakban állíthatók elő (és így van négyzetgyökük $GF(P)$-ben) $\left(k=0, 1, \ldots, \frac{P-3}{2}\right)$. Jelölje B $GF(P)$ azon 0-tól különböző elemeinek halmazát, amelyek nem négyzetes maradé-

kok, tehát amelyek ω^{2k+1} alakban $\left(k=0, 1, \ldots, \frac{P-3}{2}\right)$ állíthatók elő. A és B egyaránt $\frac{P-1}{2}$ elemet tartalmaznak, és együttvéve a 0 kivételével $GF(P)$ összes elemeit tartalmazzák. Jelölje $N(d)$ az $a-a'=d$ egyenlet megoldásainak számát, ahol a és a' A tetszőleges elemei. Nyilván ha $a-a'=1$, akkor $ax^2-a'x^2=x^2$; mivel ha $a\in A$ és $x\neq 0$, akkor $ax^2\in A$ és megfordítva, tehát ha $d\in A$, $N(d)=N(1)$. Mivel $-1\in B$, tehát ha $a\in A$, akkor $-a\in B$ és megfordítva, ha $b\in B$, akkor $-b\in A$. Ily módon, ha $d\in B$ akkor $N(d)=N(-d)$, vagyis $N(d)=N(1)$ akkor is, ha $d\in B$. Végül $N(0)=\frac{P-1}{2}$. Mivel az $a-a'$ különbségnek száma $\left(\frac{P-1}{2}\right)^2$, ha $N(1)=N$ akkor

$$\left(\frac{P-1}{2}\right)^2=\frac{P-1}{2}+(P-1)N$$

tehát

$$N=\frac{P-3}{4}$$

vagyis az $a-a'=d$ egyenletnek minden $d\neq 0$-ra $\frac{P-3}{2}$ megoldása van. Ebből következik, hogy ha $N^*(d)$ jelöli d előállításának számát $d=\alpha-\alpha'$ alakban, ahol α és α' az A halmaz elemeiből és a 0-ból álló A^* halmaz elemei, — más szóval $N^*(d)$ jelöli d előállításainak számát $GF(P)$-ben, két *négyzet* különbségeként, akkor tehát $N^*(d)=\frac{P+1}{4}$ ha $d\neq 0$ $\left(\text{és } N^*(0)=\frac{P+1}{2}\right)$. Ezzel a lemma állítását bebizonyítottuk.

E lemma szerint, ha $h\neq i$, pontosan $\frac{P+5}{4}$ olyan j van, amelyre $a_{hj}=a_{ij}=1$. Vizsgáljuk meg most, hogy hány olyan j van, amelyre $a_{hj}=a_{ij}=-1$. Ez nyilván akkor teljesül, ha $g_h-g_j=-x^2$ és $g_i-g_j=-y^2$, ahol $x\neq 0$ és $y\neq 0$, tehát ha $g_i-g_h=x^2-y^2$; mivel g_i-g_h a lemma szerint $\frac{P-3}{4}$ féleképpen állítható elő két 0-tól különböző négyzet különbségeként, tehát a h-adik és az i-edik sorban $\frac{P+5}{4}+\frac{P-3}{4}=\frac{P+1}{2}$ helyen áll ugyanaz a szám, tehát j-nek $\frac{P+1}{2}$ értékére

lesz $a_{h_j} - a_{i_j} = +1$ és így ugyanannyi j-re lesz $a_{h_j} - a_{i_j} = -1$, vagyis a mátrix h-adik és i-edik sora valóban ortogonális.

Példaként konstruáljunk a fenti módszerrel egy 8-adrendű Hadamard mátrixot; mivel mod 7 a négyzetes maradékok 1, 2, 4 és 3 primitív gyök mod 7, a szóbanforgó mátrix a következő lesz:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1
\end{array}$$

Ha $A = (a_{ij})$ egy n-edrendű, ± 1 elemekből álló mátrix, definiáljuk a $[0, 1)$ intervallumban az $f_i(x)$ függvényeket $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a következőképpen: $f_i(x) = a_{ij}$ ha $\frac{j-1}{n} \leqq x < \frac{j}{n}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Nyilvánvaló, hogy ha A Hadamard-mátrix, az $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ függvények ortonormált függvényrendszert alkotnak a $[0, 1)$ intervallumban és megfordítva: ha az $f_i(x)$ függvények páronként ortogonálisak, akkor A Hadamard-mátrix.

Vegyük észre, hogy a fentebb megkonstruált 8-adrendű Hadamard-mátrixhoz tartozó $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ függvények azonosak az első 8 Walsh-függvénnyel. Az egyes sorokhoz tartozó függvények az $R_0(x)$, $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ Rademacher-függvényekkel a következőképpen fejezhetők ki:

$$f_1(x) = R_0(x), \quad f_2(x) = R_3(x), \quad f_3(x) = R_2(x)R_3(x), \quad f_4(x) = R_1(x)R_2(x),$$
$$f_5(x) = R_1(x)R_2(x)R_3(x), \quad f_6(x) = R_1(x),$$
$$f_7(x) = R_1(x)R_3(x), \quad f_8(x) = R_2(x)$$

(ahol $R_i(x) = \operatorname{sign}(\sin 2^i \pi x)$ $i = 0, 1, 2, 3$; $0 \leqq x < 1$); megfordítva az első 2^n Walsh-függvény segítségével minden n-re konstruálhatunk egy 2^n-edrendű Hadamard-mátrixot.[13] Ily módon konstruálhatunk pl. egy 16-odrendű ill. 64-edrendű Hadamard-mátrixot amely esetben a véges testekre alapozott konstrukció nem használható közvetlenül, hiszen 15 ill. 63 nem prímszámhatványok.

[13] 2^n-rendű Hadamard-matrixot már Sylvester konstruált; lásd [23].

5. §. Differencia-bázisok

Legyen G egy n elemű Abel-csoport; a csoportművelet legyen összeadásként jelölve. (A csoport egységelemét tehát 0-val jelöljük.) Legyen D a G csoport elemeinek egy k különböző eleméből álló részhalmaza, amelynek az a tulajdonsága van, hogy G bármely $g \neq 0$ eleme pontosan λ-féleképpen írható fel $g = d - d'$ alakban, ahol $d \in D$ és $d' \in D$. Egy ilyen D halmazt (n, k, λ)-*differencia-bázis*nak nevezünk. A definícióból azonnal következik, hogy

$$\lambda(n-1) = k(k-1) \tag{5. 1}$$

hiszen D elemeiből $k(k-1)$ számú $d - d'$ $(d \neq d', d, d' \in D)$ differencia képezhető, és ha G minden 0-tól különböző eleme λ-szor állítható elő, akkor (5. 1)-nek teljesülnie kell. Nyilvánvaló, hogy ha $D = (d_1, \ldots, d_k)$ egy (n, k, λ) differencia-bázis G-ben és g a G csoport egy tetszőleges eleme, akkor $(d_1 + g, d_2 + g, \ldots, d_k + g)$ is egy (n, k, λ) differencia-bázis G-ben.

Az a kérdés, hogy mely (n, k, λ) számhármasokra létezik egy n-edrendű G csoport és abban egy (n, k, λ)-differencia-bázis, nincs teljes általánosságban eldöntve. Több szükséges feltétel és különböző konstrukciós eljárások ismeretesek; ezek közül mi itt csak azokkal fogunk foglalkozni, amelyek a véges testek és véges geometriák elméletéből nyerhetők.

Minden n-edrendű G Abel-csoportban $D = G$ egy triviális (n, n, n) differencia-bázis; továbbá ha D G-ből a 0 elem kihagyásával származik, akkor D nyilván $(n, n-1, n-2)$ differencia-bázis; e triviális esetekkel nem fogunk foglalkozni.

Először egy *Singer*től [24] származó konstrukciót mutatunk be; az egyszerűség kedvéért arra az esetre szorítkozunk, amikor $P = p$ prímszám, bár a konstrukció tetszőleges P prímszámhatványra is végrehajtható.

Legyen p egy prímszám, akkor egy $(p^2 + p + 1, p + 1, 1)$ differencia-bázist a következőképpen konstruálhatunk. Legyen $GF(p)$ a mod p maradékosztályokból álló véges test, és $PG(p)$ a $GF(p)$ segítségével konstruált véges geometria. A $GF(p^3)$ véges testet, mint láttuk, előállíthatjuk egy mod p irreducibilis 3-adfokú $Q(x) = x^3 + q_2x^2 + q, x + q_0$ polinom segítségével, mint az $a_0 + a_1x + a_2x^2$ polinomok összességét, amelyben a műveletek modd $(p, Q(x))$ végzendők el. Mármost legyen ω egy primitív gyök $GF(p^3)$-ben. Könnyen belátható, hogy ez esetben ω eleget tesz egy ($GF(p^3)$-ben) egy $Q(\omega) = 0$ egyenletnek, ahol $Q(x) = x^3 + q_2x^3 + q_1x + q_0$ egy mod p irreducibilis polinom. Állítsuk elő a $GF(p^3)$ testet ezen $Q(x)$ polinom segítségével, mint az $a_0 + a_1x + a_2x^2$ polinomok testét modd $(p, Q(x))$.

A $PG(p)$ véges geometria pontjaiból a következőképpen konstruálhatunk egy G csoportot. Az (a_0, a_1, a_2) és (b_0, b_1, b_2) pontok „összegét" definiáljuk a következőképpen:

$$(a_0, a_1, a_2)+(b_0, b_1, b_2) = (c_0, c_1, c_2)$$

ha $GF(p^3)$-ben

$$(a_0+a_1x+a_2x^2)(b_0+b_1x+b_2x^2) = c_0+c_1x+c_2x^2.$$

Könnyen belátható, hogy a szorzás fenti definíciója független attól, hogy a pontok mely projektív koordinátákkal való előállítását választjuk. Az egységelem szerepét nyilván az (1, 0, 0) pont játssza. Az, hogy a definiált műveletre nézve $PG(p)$ pontjai valóban csoportot alkotnak, abból következik, hogy $GF(p^3)$ test.

Megmutatjuk most, hogy az így konstruált G csoport ciklikus; ugyanis, mivel ω primitív gyök $GF(p^3)$-ben, nyilvánvalóan $GF(p^3)$ 0-tól különböző elemei ω^k alakban is előállíthatók ($k = 1, 2, \ldots, p^3-1$) és mivel $GF(p)$ elemei nem mások, mint $GF(p^3)$ azon x elemei, amelyekre $x^{p-1}=1$, tehát $GF(p)$ elemei azonosak az $\omega^{l(p^2+p+1)}$ ($l = 1, 2, \ldots, p-1$) elemekkel. Ennélfogva ha $a_0+a_1\omega+a_2\omega^2 = \omega^k$ és λ egy tetszőleges maradék mod p, akkor $\lambda=\omega^{l(p^2+p+1)}$ tehát

$$\lambda a_0+\lambda a_1\omega+\lambda a_2\omega^2 = \omega^{k+l(p^2+p+1}),$$

Így tehát, ha $\omega^k = a_0^{(k)}+a_1^{(k)}\omega+a_2^{(k)}\omega^2$, ahol $k = 1, 2, \ldots, p^2+p+1$, akkor $(a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, a_2^{(k)})$ $PG(p)$-nek különböző pontjai lesznek, vagyis így megkapjuk $PG(p)$ összes pontjait. Mivel a G csoportban definiált csoportművelet úgy is leírható, hogy ha $a_0+a_1\omega+a_2\omega^2 = \omega^i$ és $b_0+b_1\omega+b_2\omega^2 = \omega^j$, akkor

$$(5.2) \qquad (a_0, a_1, a_2)+(b_0, b_1, b_2) = (c_0, c_1, c_2)$$

ahol $c_0+c_1\omega+c_2\omega^2 = \omega^{i+j}$, tehát a G csoport nyilvánvalóan ciklikus, és generátoreleme pl. a (0, 1, 0) elem.

Mármost bebizonyítjuk, hogy az így definiált $n = p^2+p+1$ rendű csoportban egy tetszőleges egyenes $p+1$ pontja $(p^2+p+1, p+1, 1)$ differencia-bázist alkot. A bizonyítást a rövidség kedvéért csak az $E=[0, 0, 1]$ egyenesre végezzük el, amelynek pontjai azok az (a_0, a_1, a_2) pontok, amelyekre $a_2=0$. Mármost vizsgáljuk meg, hogy a G csoport egy tetszőleges $(b_0, b_1, b_2)\neq(1, 0, 0)$ eleme hányféleképpen állítható elő, mint az E egyenesen fekvő két pont „különbsége" a G-ben definiált csoportművelet értelmében. Ehhez azt kell csak megvizsgálni, hogy hány különböző $(a_0, a_1, 0)$ pontra lesz $(a_0, a_1, 0)+(b_0, b_1, b_2) = (c_0, c_1, 0)$. Ha $Q(x) = x^3+q_2x^2+q_1x+q_0$ akkor ez a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(5.3) \qquad a_0b_2+a_1(b_1-b_2q_2) = 0$$

Viszont az (5. 3) egyenlet a $b_2 \neq 0$ esetben csak az $(a_0, a_1, 0) = (b_2 q_2 - b_1, b_2, 0)$ pontra teljesül, míg a $b_2 = 0, b_1 \neq 0$ esetben csak az (1, 0, 0) pontra teljesül.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az E egyenes pontjai $(p^2+p+1, p+1, 1)$-differencia-bázist alkotnak a G csoportban.

Az $(n, k, 1)$ differencia-bázisokat *egyszerű differencia-bázis*oknak nevezzük.

Az előző §-ban bebizonyított lemma szerint, ha $P \equiv 3 \bmod 4$, akkor a $GF(P)$ test négyzetes maradékai egy $\left(P, \frac{P-1}{2}, \frac{P-3}{4}\right)$ differencia-bázist alkotnak ($GF(P)$ additív csoportjában), míg a négyzetek (a négyzetes maradékok és a 0) egy $\left(P, \frac{P+1}{2}, \frac{P+1}{4}\right)$-differencia-bázist alkotnak. ($GF(P)$ additív csoportjára nézve).

Bebizonyítható, (l. [25] 92. o.) hogy ha p egy $16l^2+16l+5$ alakú prímszám, akkor a 4-ik hatványok $GF(p)$-ben egy $\left(p, \frac{p-1}{4}, 2\right)$ differenciabázist alkotnak. Pl. az 1, 7, 9, 10, 12, 16, 26, 33, 34 számok (37, 9, 2) differencia-bázist alkotnak a mod 37 maradékosztályok additív csoportjában.

Az összes eddig konstruált differencia-bázisok ciklikus csoportokra vonatkoznak; az ilyen bázisokat *ciklikus differencia-bázisok*nak nevezik. Ha G egy ciklikus csoport, legyen x G egy generátora, és írjuk a csoportot most multiplikatívan; ha D a G csoport elemeinek egy részhalmaza, amely (n, k, λ)-differencia-bázis, legyenek D elemei $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_k}$, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_k$ maradékok mod n; az, hogy $D(n, k, \lambda)$ differencia-bázis, azt jelenti, hogy az $a_i - a_j$ differenciák $(i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, k) \bmod n$ minden maradékosztályt pontosan λ-szor állítanak elő. Tehát egy ciklikus (n, k, λ)-differencia-bázis egyértelműen definiál egy (n, k, λ)-differencia-bázist a mod n maradékosztályok additív csoportjában.

Ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ mod n maradékok, amelyek a mod n maradékosztályok additív csoportjában (n, k, λ)-differencia-bázist alkotnak, legyen

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} x^{a_i} \tag{5.4}$$

Ez esetben fennáll, hogy

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = k - \lambda + \lambda(1 + x + \ldots + x^{n-1}) \bmod (x^n - 1). \tag{5.5}$$

(5. 5)-be $x=e^{\frac{2\pi il}{n}}$-et helyettesítve, ahol l tetszőleges egész szám, $l\not\equiv 0 \bmod n$, következik, hogy

$$\left|P\left(e^{\frac{2\pi il}{n}}\right)\right|^2 = k-\lambda \tag{5.6}$$

Speciálisan tehát, ha p $4k+3$ alakú prímszám, azt kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{r=0}^{\frac{p-1}{2}} e^{\frac{2\pi ilr^2}{p}}\right|^2 = \left|\sum_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} e^{\frac{2\pi ilr^2}{p}}\right|^2 = \frac{p+1}{4}. \tag{5.7}$$

Legyen

$$A=\sum_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos\frac{2\pi lr^2}{p} \quad \text{és} \quad B=\sum_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{2\pi lr^2}{p}$$

Akkor tehát

$$A^2+B^2=(1+A)^2+B^2=\frac{p+1}{4}$$

tehát $A=-\frac{1}{2}$ és

$$\left|\sum_{r=0}^{\frac{p-1}{2}} e^{\frac{2\pi ilr^2}{p}}\right|^2 = (1+2A)^2+4B^2=p \tag{5.8}$$

Ez az eredmény jól ismert a Gauss-féle összegek elméletéből; tudjuk ugyanis, hogy ha $p\equiv 3 \bmod 4$, akkor

$$\sum_{r=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi ilr^2}{p}} = i\sqrt{p} \qquad (l=1, 2, \ldots, p-1). \tag{5.9}$$

Megfordítva, (5. 9)-ből levezethető a 4. § lemmája.

Valószínűnek látszik, hogy ha létezik $(n, k, 1)$ differencia-bázis, akkor $k-1$ szükségképpen prímszámhatvány kell, hogy legyen; ezt $k\leqq 1600$-ra verifikálták, általában azonban nincs bebizonyítva. Az összes (n, k, λ) ciklikus differencia-bázisok ismeretesek $k\leqq 50$-re; általános eljárás azonban az összes ciklikus differencia-bázisok megkonstruálására sem létezik.

Ha G egy csoport és $D=(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ egy differencia-bázis G-ben, akkor a t egész számot a D differenciabázis multiplikátorának nevezzük, ha a $(td_1, td_2, \ldots, td_k)$ sorozat sorrendtől eltekintve megegyezik a $(d_1+g, d_2+g, \ldots, d_k+g)$ sorozattal, ahol g a G csoport egy alkalmasan választott eleme. Például, ha D a négyzetes maradékokból álló differencia-bázis a mod p maradékok additív csoportjában, és t négyzetes maradék mod p, akkor t multiplikátora D-nek. Az (1, 7, 9, 10, 12, 16,

26, 33, 34) differenciabázisnak pl. 7 multiplikátora. (Mindkét esetben $g=0$.) A multiplikátorok vizsgálata fontos eredményekre vezetett. Igaz pl. a következő tétel: Ha D egy (n, k, λ) — differencia-bázis a mod n maradékok additív csoportjában, akkor $k-\lambda$ minden p prímtényezője, amelyre $(p, n)=1$ és $p>\lambda$, multiplikátora D-nek. Speciálisan, ha $\lambda=1$, akkor $n=k(k-1)+1$ tehát $k-1$ minden prímtényezője szükségképpen relatív prím n-hez; ez esetben tehát $k-1$ minden p prímtényezője multiplikátora D-nek. Így például p multiplikátora a fentebb konstruált $(p^2+p+1, p+1, 1)$ differencia-bázisnak.

6. §. Blokk-rendszerek

*Nem-teljes kiegyensúlyozott blokk-rendszer*nek (röviden: *blokkrendszer*nek) nevezik egy n elemű H_n halmaz $B_1, B_2, \ldots, B_b$ részhalmazaiból (blokkjaiból) álló rendszert, ha az a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Minden B_i blokk a H_n halmaz k különböző elemét tartalmazza,
2. H_n minden eleme pontosan r darab B_i blokkban fordul elő,
3. A H_n halmaz bármely két különböző eleme pontosan λ blokkban fordul elő együtt.

Egy blokk-rendszert tehát 5 szám jellemez: az összes elemek száma: n; a blokkok száma: b; a blokkok elemszáma: k; az elemek előfordulási száma: r; az elempárok előfordulási száma: λ. Ezen 5 szám közül azonban nyilvánvalóan fennáll a következő két egyenlet:

$$b \cdot k = n \cdot r \tag{6. 1}$$

$$r(k-1) = \lambda(n-1). \tag{6. 2}$$

(6. 1) a blokkok elemszámai összegének kétféleképpen való kiszámítása útján adódik; b blokk mindegyike k elemet tartalmaz, így elemszámaik összege bk; másrészt viszont a blokkokban n elem mindegyike r-szer fordul elő. (6. 2) úgy adódik, hogy kétféleképpen kiszámítjuk, hogy hány párt lehet képezni egy blokkban levő elemekből; a párok száma egyrészt $b \cdot \frac{k(k-1)}{2}$, másrészt (mivel minden pár λ blokkban fordul elő) $\lambda \frac{n(n-1)}{2}$ így tehát

$$b \cdot k \cdot (k-1) = \lambda n(n-1) \tag{6. 3}$$

(6. 3)-at r-el beszorozva és bk-val osztva, tekintettel (6. 1)-re adódik (6. 2).

Szimmetrikus (n, k, λ)*-blokk-rendszer*nek nevezünk egy blokk-rendszert, ha $b=n$ és $r=k$; ez esetben a (6. 1) egyenlet triviálisan teljesül, míg (6. 2) ez esetben a

$$k(k-1) = \lambda(n-1) \tag{6. 4}$$

alakban írható fel. Vegyük észre, hogy a (6. 4) összefüggés azonos az (n, k, λ)-differencia-bázisok létezéséhez szükséges feltétellel. A két fogalom között valóban szoros kapcsolat áll fenn, ugyanis ha $D=(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ egy (n, k, λ)-differencia-bázis a G n-edrendű csoportban és G minden g elemére a B blokk a $(d_1+g, d_2+g, \ldots, d_k+g)$ elemekből áll, akkor a B_g blokkok $(g \in G)$ egy szimmetrikus (n, k, λ) blokk-rendszert alkotnak; hiszen G minden h eleme a $B_{h-d_1}, B_{h-d_2}, \ldots, B_{h-d_k}$ blokkokban — tehát k blokkban — fordul elő, továbbá ha h_1 és h_2 G két különböző eleme, akkor feltevés szerint h_1-h_2 λ-féleképpen állítható elő $h_1-h_2 = d_{j_1}-d_{j_2}$ alakban és a h_1 és h_2 elemek a $B_{h1-dj_1} = B_{h2-dj_2}$ blokkokban, tehát pontosan λ blokkban fordulnak elő együtt.

Például

B_1: (1 2 3)
B_2: (1 4 5)
B_3: (1 6 7)
B_4: (2 4 6)
B_5: (2 5 7)
B_6: (3 4 7)
B_7: (3 5 6)

egy szimmetrikus (7, 3, 1)-blokk-rendszer. (Vegyük észre, hogy ez a blokk-rendszer azonos a $PG(2)$ véges geometria egyenesei pontjaiból álló halmazok rendszerével.)

A blokk-rendszereknek nagy jelentősége van a statisztikai kísérletek tervezésénél; ha pl. n vetőmag-fajtát kívánunk összehasonlítani, és ezeket egy blokk-rendszernek megfelelően vetjük el úgy, hogy minden blokk k darab egyforma parcellából áll, az a feltétel, hogy minden vetőmag-fajta ugyanannyi blokkban fordul elő, azt jelenti, hogy mindegyiket ugyanakkora földterületen vetettük el, és az a feltétel, hogy bármely két vetőmag-fajta ugyanannyi blokkban fordul elő együtt, az egyes vetőmagfajták terméshozamának statisztikai kiértékelését könnyíti meg, és azt biztosítja, hogy bármely 2 fajta hozamát ugyanannyi adat alapján tudjuk összehasonlítani, úgy, hogy a különböző blokkok termőtalajának eltérő minősége az eredményt nem torzítja el. (Feltesszük, hogy egy-egy blokkon belül a talajminőség nem változik lényegesen.)

Teljes általánosságban nincsen megoldva az a kérdés, hogy mely (n, b, k, r, λ) számötösökre létezik blokk-rendszer, mely (n, k, λ) szám-

hármasokra létezik szimmetrikus blokk-rendszer. Blokk-rendszerek konstruálására különböző módszerek ismeretesek, amelyek közül mi itt elsősorban a véges testek és geometriák elméletén alapuló konstrukciókkal fogunk foglalkozni.

Vizsgáljuk például meg a következő egyszerű konstrukciót. Legyen P prímszámhatvány, $n = P^2+P+1$ és H_n a $PG(P)$ véges geometria pontjainak halmaza. Legyenek a $E_1, E_2, \ldots, E_n$ a $PG(P)$ véges geometria egyenesei és legyen a B_i blokk az E_i egyenesen fekvő pontok halmaza. Mivel, mint tudjuk, minden ponton át $P+1$ egyenes és bármely két ponton át egy egyenes halad, így egy $(P^2+P+1, P+1, 1)$ szimmetrikus blokk-rendszerhez jutunk.

Ha a $PG(P)$ véges geometriában egy tetszőleges E_0 egyenest kitüntetünk és azt összes pontjaival együtt $PG(P)$-ből kihagyjuk, a kapott rendszert *véges euklideszi geometriá*nak nevezzük és $EG(P)$-vel jelöljük, azokat az egyeneseket, amelyek metszéspontja $PG(P)$-ben, E_0 egy pontja, melyek tehát $EG(P)$-ben nem metszik egymást, $EG(P)$-ben *párhuzamos*nak nevezzük. A kihagyott E_0 egyenes játssza tehát a végtelen távoli egyenes szerepét. $EG(P)$-ben nyilván P^2 pont és P^2+P egyenes van. Legyen H_n $(n=P^2)$ az $EG(P)$ geometria pontjainak halmaza; legyenek $E_1, \ldots, E_{P^2+P}$ $EG(P)$ egyenesei és a B_i blokk álljon E_i pontjaiból. Ily módon egy olyan blokk-rendszert nyerünk, amelyre $n=P^2, b = P^2+P, k=P, r = P+1$ és $\lambda=1$. (Könnyű belátni, hogy a (6. 1) és (6. 2) összefüggések teljesülnek.)

Például a $PG(3)$ geometria segítségével ily módon a következő (13, 4, 1) szimmetrikus blokk-rendszert nyerjük (l. 2. §). (Az elemeket 1, 2, ..., 13-al jelöljük.)

B_1: (2 3 6 10)
B_2: (1 3 5 9)
B_3: (1 2 4 8)
B_4: (3 8 12 13)
B_5: (2 9 11 13)
B_6: (1 10 11 12)
B_7: (7 8 9 10)
B_8: (3 4 7 11)
B_9: (2 5 7 12)
B_{10}: (1 6 7 13)
B_{11}: (5 6 8 11)
B_{12}: (4 6 9 12)
B_{13}: (4 5 10 13)

Ha pl. az $E_7=[1, 1, 1]$ egyenest választjuk végtelen távoli egyenesnek, és az ezen fekvő 4 pont (Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}) kihagyása után megmaradó

9 pontot átszámozzuk, a következő (9, 12, 3, 4, 1) blokk-rendszert kapjuk:

$$\begin{array}{ll} B_1: & (2\ 3\ 6) \\ B_2: & (1\ 3\ 5) \\ B_3: & (1\ 2\ 4) \\ B_4: & (3\ 8\ 9) \\ B_5: & (2\ 7\ 9) \\ B_6: & (1\ 7\ 8) \\ B_7: & (3\ 4\ 7) \\ B_8: & (2\ 5\ 8) \\ B_9: & (1\ 6\ 9) \\ B_{10}: & (5\ 6\ 7) \\ B_{11}: & (4\ 6\ 8) \\ B_{12}: & (4\ 5\ 9) \end{array}$$

Az előbbi konstrukció általánosítható oly módon, hogy bevezetjük a *véges d-dimenziós geometriák*at, ahol $d \geqq 3$. A $PG(3, P)$ véges projektív térgeometriát a következőképpen definiáljuk: $PG(3, P)$ pontjai legyenek az $GF(P)$ test elemeiből képezett összes (x_1, x_2, x_3, x_4) elemnégyesek, kivéve a $(0, 0, 0, 0)$ négyest; ha $\lambda \neq 0$ a $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ és (x_1, x_2, x_3, x_4) elemnégyeseket tekintsük ugyanazon pont projektív koordinátákkal való előállításának. Az (x_1, x_2, x_3, x_4) és (y_1, y_2, y_3, y_4) pontokon átmenő egyenest $PG(3, P)$-ben mint az összes $(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4)$ alakban előállítható pontok összességét definiáljuk, ahol λ és μ $GF(P)$ elemei, amelyek közül legalább az egyik $\neq 0$. Síknak nevezzük $PG(3, P)$-ben az $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_2 + a_4x_4 = 0$ egyenletnek eleget tevő (x_1, x_2, x_3, x_4) pontok összességét, ahol a_1, a_2, a_3, a_4 $GF(P)$ elemei, amelyek nem mind egyenlők 0-val; e síkot az $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ síknak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a $[\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4]$ és $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ síkok azonosak, ha $\lambda \neq 0$, $\lambda \in GF(P)$. Könnyen belátható, hogy érvényesek a következő állítások:

1. $PG(3, P)$-ben $P^3 + P^2 + P + 1$ pont, ugyanennyi sík és $(P^2 + P + 1)(P^2 + 1)$ egyenes van.

2. Bármely 2 síknak egy közös egyenese van.

3. Bármely síkban $P^2 + P + 1$ pont és $P^2 + P + 1$ egyenes fekszik és ezek egy $PG(P)$ véges síkgeometriát alkotnak.

4. Bármely 3 nem egy egyenesen fekvő ponton át egy sík halad.

5. Bármely pont $P^2 + P + 1$ síkhoz tartozik; bármely egyenesen át $P + 1$ sík halad.

6. Bármely ponton $P^2 + P + 1$ egyenes halad át.

A $PG(3, P)$ tér egyenesei tehát egy (n, b, k, r, λ) blokk-rendszert alkotnak, ahol

$$n = P^3 + P^2 + P + 1$$
$$b = (P^2 + P + 1)(P^2 + 1)$$
$$k = P + 1$$
$$r = P^2 + P + 1$$
$$\lambda = 1$$

A $PG(3, P)$ tér síkjai viszont egy szimmetrikus (n, k, λ)-blokk-rendszert alkotnak, melyben

$$n = P^2 + P^2 + P + 1$$
$$k = P^3 + P + 1$$
$$\lambda = P + 1$$

Ha a $PG(3, P)$ térből egy síkot (a „végtelen távoli" síkot) az összes abban fekvő pontokkal és egyenesekkel együtt eltávolítjuk, az $EG(3, P)$ *véges euklideszi térgeometriát* nyerjük. Ezen geometria egyenesei egy olyan (n, b, k, r, λ) blokkrendszert alkotnak, amelyre

$$n = P^3$$
$$b = P^4 + P^3 + P^2$$
$$k = P + 1$$
$$r = P^2 + P + 1$$
$$\lambda = 1$$

míg $EG(3, P)$ síkjai egy olyan blokk-rendszert alkotnak, amelyre

$$n = P^3$$
$$b = P^3 + P^2 + P$$
$$k = P^2$$
$$r = P^2 + P + 1$$
$$\lambda = P + 1.$$

Befejezésül még bebizonyítjuk, hogy egy (n, k, λ) szimmetrikus blokk-rendszer bármely két blokkjának pontosan λ közös eleme van. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Számozzuk meg az elemeket és a blokkokat 1-től n-ig. Definiáljuk az $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es mátrixot úgy, hogy

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ ha az } i\text{-edik elem előfordul a } j\text{-edik blokkba} \\ 0 \text{ egyébként} \end{cases}$$

Az A 0 és 1 elemekből álló mátrixnak tehát a következő tulajdonságai vannak:

1. A bármely sorában k db. 1-es és $n - k$ db. 0 áll.
2. A bármely oszlopában k db. 1-es és $n - k$ db. 0 áll.

3. A bármely két sorvektorának skalárszorzata λ. Ily módon, ha A^T jelöli A transzponáltját,

$$AA^T = (k-\lambda)I+\lambda E$$

ahol I az egységmátrix, amelynek főátlójában 1-esek állnak, többi eleme 0, E viszont az az $n\times n$-es mátrix, amelynek minden eleme 1.

Igaz továbbá, hogy $EA=AE=kE$. Így tehát

$$A\left(A^T-\frac{\lambda}{k}E\right) = (k-\lambda)I$$

vagyis $\frac{1}{k-\lambda}\left(A^T-\frac{\lambda}{k}E\right)$ az A mátrix inverz-mátrixa, tehát

$$\left(A^T-\frac{\lambda}{k}E\right)A = (k-\lambda)I,$$

vagyis

$$A^TA = (k-\lambda)I+\lambda E = AA^T$$

Ez viszont éppen azt jelenti, hogy A bármely két különböző oszlopvektorának skalárszorzata λ-val egyenlő, tehát, hogy bármely két blokknak λ közös eleme van. A fenti (13, 4, 1) szimmetrikus blokk-rendszer példáján ezt az állítást verifikálhatjuk.

A most bebizonyított állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy (n, k, λ) szimmetrikus blokk-rendszerhez tartozó $0-1$ mátrix transzponáltja is egy (n, k, λ) szimmetrikus blokk-rendszert definiál. A fenti példában szereplő blokk-rendszer mátrixa

0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1

mátrix; ennek transzponáltjához tartozó blokk-rendszer azonos az eredeti blokk-rendszerrel, mivel a mátrix szimmetrikus.

Ha azonban transzponálás előtt a mátrix sorait permutáljuk, akkor a szimmetria megszűnik és így az új mátrix transzponáltja egy látszólag különböző (valójában az eredetitől csak az elemek számozásában különböző) blokk-rendszerre vezet.

Vegyük észre, hogy egy $n = 4m$-rendű Hadamard-mátrixból, amelynek első sora és oszlopa csupa $+1$-esből áll, az első sort és oszlopot elhagyva és a -1-ek helyett 0-kat írva, egy olyan $(4m-1) \times (4m-1)$-es mátrixot nyerünk, amely egy szimmetrikus $(4m-1, 2m-1, m-1)$ blokk-rendszert definiál.

Így például a 4. §-ban megkonstruált 8-adrendű Hadamard-mátrixból ez úton a

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

mátrixot nyerjük, amely (a sorok sorrendjétől eltekintve) a már jólismert és a 7 pontból álló véges geometriából származtatható

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \end{matrix}$$

szimmetrikus (7, 3, 1) blokk-rendszernek felel meg.

IRODALOM

[1] Rényi A.: Új módszerek és eredmények a kombinatorikus analízisben, I. *MTA III. O. Közl.* 16 (1966) 77-105

[2] H. B. Mann, Analysis and design of experiments, *Dover, New York*, 1949.

[3] W. G. Cochran—G. M. Cox, Experimental designs, *Wiley*, 2. kiad. *New York*, 1957.

[4] R. D. Carmichael: Introduction to the theory of groups of finite order, *Dover, New York*, 1956.

[5] G. Birkhoff—S. MacLane, A survey of modern algebra, *MacMillan, New York*, 1953.

[6] Rédei László, Algebra I., *Akadémiai Kiadó, Budapest*, 1954.

[7] Marshall Hall, Jr.: The theory of groups, *MacMillan, New York*, 1959

[8] R. H. BRUCK—H. J. RYSER, The nonexistence of certain finite projective planes. *Canadian Journal of Math.* **1** (1949) 88—93.
[9] K. KOMMERELL, Vorlesungen über analytische Geometrie der Ebene, *Koehler et Amelang, Leipzig*, 1953, 100. o.
[10] J. B. KELLY, A characteristic property of quadratic residues, *Proc. Amer. Math. Soc.* **5** (1954) 38—46.
[11] R. BAER, Polarities in finite projective planes. *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946) 77—93.
[12] O. VEBLEN—J. W. YOUNG, Projective geometry, Vol. 1. *Ginn and Co.* 1910.
[13] G. PICKERT, Projektive Ebenen, *Springer*, 1955.
[14] F. W. LEVI, Finite geometrical systems, *Univ. of Calcutta*, 1942.
[15] G. TARRY, Le problème des 36 officiers, *Comptes Rendus Association Français pour l'Avancement des Sciences* **1** (1900) 122—123 és **2** (1901) 170—203.
[16] R. C. BOSE—S. S. SHRIKHANDE,—E. T. PARKER: Further results on the construction of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture, *Canadian Journal of Math.* **12** (9) (1960) 189—203.
[17] R. C. BOSE, On the application of the properties of Galois fields to the problem of construction of hyper-Graeco-Latin-squares, *Sankhya, Indian Journal of Statistics*, **3** (1938) 323—338.
[18] H. B. MANN, On orthogonal latin squares, *Bulletin American Math. Soc.* **50** (1944) 249—257.
[19] SZEKERES GY.—TURÁN P.: Egy szélsőértékfeladat a determinánselméletben, *Mat. és Term. Tud. Értesítő* **56** (1937) 796—804.
[20] BEKE MANÓ: Determinánsok, *Atheneum, Budapest*, 1912.
[21] R. E. A. C. PALEY, On orthogonal matrices, *Journal of Math. and Phys.* 1933, 311—320.
[22] L. BAUMERT—S. W. GOLOMB—M. HALL, Jr: Discovery of an Hadamard matrix of order 92, *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962) 237—238.
[23] I. I. SYLVESTER, Thoughts on inverse orthogonal matrices, *Phil. Mag.* **24** (1867) 461—475.
[24] I. SINGER, A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* **43** (1938), 377—385.
[25] H. B. MANN, Addition theorems, *Interscience, New York*, 1965.

ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ В КОМБИНАТОРИКЕ I.

Альфред Реньи

COMBINATORIAL APPLICATIONS OF FINITE GEOMETRIES, I.

A. RÉNYI

This is the first part of an expository paper dealing with applications of finite geometries in combinatorics. § 1 contains the necessary background concerning finite fields. § 2 deals with the construction of the finite projective plane geometries $PG(p^n)$ by means of the Galois field $GF(p^n)$ where p is a prime number. § 3 deals with the construction of orthogonal Latin squares. § 4 is devoted to Hadamard matrices and § 5 to difference sets. § 6 deals with balanced incomplete block designs.

In a forthcoming second part applications of finite geometries in information theory and graph theory will be discussed.

Az automaták algebrai elmélete

GÉCSEG FERENC és PEÁK ISTVÁN

TARTALOM

Bevezetés

I. Analízis és szintézis
1. Az automata fogalma
2. A δ és λ függvények értelmezésének kiterjesztése
3. Kváziautomaták
4. Automata által indukált leképezés
5. Automaták ekvivalenciája
6. Automaták analízise és szintézise
7. Véges automaták analízise és szintézise
8. Az esemény fogalma. Esemény-algebra
9. Reguláris események
10. Események előállítása véges automatákban
11. Véges automaták (általános értelemben vett) analízise
12. Véges automaták (általános értelemben vett) szintézise
13. Automata-leképezések és események kapcsolata
14. Az automata és az általa indukált leképezés kapcsolata az események nyelvén
15. Véges automaták által indukálható leképezések

II. Automata-szorzatok
16. Az automata-szorzat definíciója
17. Automaták teljes rendszerei
18. Automaták R-szorzatai
19. Automaták speciális R-szorzatai
20. Automaták R-teljes rendszerei
21. Automata-leképezések közelítő előállítása

III. Automaták és félcsoportok
22. Az automata félcsoportja
23. Automaták direkt szorzata és félcsoportok
24. Az automata endomorfizmus-félcsoportja
25. Az automata automorfizmus-csoportja
26. Ciklikus automaták
27. Kommutatív ciklikus automaták
28. Erősen összefüggő és perfekt kváziautomaták

Irodalom

Bevezetés

Az automaták bizonyos típusú információ-átalakításra alkalmas rendszerek. Elméletük a kibernetikai matematikának, a matematika e modern ágának egyik jelentős fejezete, amely rövid, egy-másfél évtizedes fejlődése alatt máris komoly sikereket ért el elméleti és gyakorlati téren egyaránt.

Az automaták matematikai vizsgálatának igényét a legszorosabb értelemben vett gyakorlat vetette fel. Tágabb értelemben automatának tekinthető ugyanis minden olyan rendszer, amely környezetéből jeleket képes felfogni, majd ezek hatására belső állapota megváltoztatása árán környezetével jeleket képes közölni. Ebben a megfogalmazásban az automaták közé sorolhatók az ember által megalkotott gépek, a gyakorlatban előforduló különféle szolgáltató és a termelésben felhasznált berendezések, az automata telefonközpont, a gyorsműködésű elektronikus számológép, de maga az ember, sőt általánosabban, minden élő szervezet vagy az emberi társadalom bármely egysége is. Az automaták matematikai fogalma messzemenő absztrakció eredménye és az ilyen rendszerek matematikai modelljeként tekinthető.

Az automaták matematikai elmélete felhasználja a matematika több ágának, így az algebrának, a gráfelméletnek, a matematikai logikának, a Boole-féle függvények elméletének módszereit és eredményeit.

A matematikai elmélet tisztán algebrai eszközökkel is felépíthető. Ebben az irányban az első lépéseket M. O. Rabin és D. Scott [36], valamint V. M. Gluskov [19] tették meg. Ma már joggal beszélhetünk az automaták algebrai elméletéről, amely (a kimenő jel nélküli automaták esetében) az univerzális algebrák elmélete részének tekinthető (l. Ju. I. Szorkin [39]). Megjegyezzük, hogy kísérletek történtek az automaták matematikai elméletének a relációk nyelvén való felépítésére is (l. M. A. Szpivak [41]). Az algebrai tárgyalás az elmélet igen szabatos felépítését tette lehetővé és annak tárgyában is jelenetős bővülést eredményezett.

Mi ebben a dolgozatban a diszkrét, teljesen definiált, determinisztikus automaták algebrai elméletének néhány fejezetét ismertetjük. Az I. rész az automaták és az automata-leképezések kapcsolatát, az elmélet kettős alapfeladatát (analízis és szintézis) tárgyalja, a II. rész az automatáknak más automatákból mint komponensekből való felépítésével kapcsolatos néhány kérdéssel foglalkozik, a III. rész pedig az automatáknak más algebrai struktúrákkal való kapcsolatait teszi algebrai vizsgálat tárgyává.

I. Analízis és szintézis

1. Az automata fogalma. *Mealy-féle automatának* (l. G. H. MEALY [30]) nevezünk minden olyan $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ rendszert, amely áll a (nem üres) A, X és Y halmazokból és az $A\times X$ szorzat-halmazon értelmezett $\delta: A\times X\to A$ és $\lambda: A\times X\to Y$ függvényekből. Az A halmazt az **A** automata *(belső) állapotai* halmazának, az X és Y halmazokat pedig az **A** *bemenő jelei*, ill. *kimenő jelei* halmazának nevezzük. Az $A\times X$ szorzat-halmazon értelmezett δ és λ függvényeket az automata *átmenet-függvényének*, ill. *kimenet-függvényének* mondjuk. Ha az **A** automata valamely időpillanatban egy bizonyos $a(\in A)$ belső állapotban van és ebben az állapotban egy $x(\in X)$ bemenő jelet kap, akkor az x jel hatására **A** átmegy a $\delta(a, x)\,(\in A)$ állapotba, miközben kiadja a $\lambda(a, x)\,(\in Y)$ kimenő jelet.

A *Moore-féle automata* (l. E. F. MOORE [32]) a Mealy-féle automatának olyan speciális esete, amikor az automata kimenet-függvénye $\lambda(a, x)=\mu(\delta(a, x))\,(a\in A, x\in X)$ alakú, ahol $\mu(a)\,(\in Y)$ a belső állapotok valamely egyértékű függvénye. Nyilvánvaló, hogy a δ függvénnyel együtt a μ függvény egyértelműen meghatározza az automata viselkedését. Így a Moore-féle automatákat $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \mu)$ alakban adhatjuk meg. A μ függvényt az **A** automata *jel-függvényének*, $\mu(a)$-t pedig az a belső állapot *jelének* nevezzük.

Szokás élni további specializálással is. Ha valamely $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore-féle automata esetén az A és Y halmazok azonosak és a μ jel-függvény az A halmaznak önmagára való identikus leképezését adja, akkor az Y halmaztól és a μ függvénytől eltekinthetünk és az A automatát $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ alakban adhatjuk meg. Az ilyen automatákat *kimenő jel nélküli* vagy *Medvegyev-féle automatáknak* szokás nevezni (l. JU. T. MEDVEGYEV [31]).

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az algebrai elmélet szemszögéből a Moore-féle automata fogalma a Mealy-féle automata-fogalomhoz képest csak látszólagos specializálást jelent, másrészt megemlítjük, hogy a vizsgálatok során sok esetben elegendő kimenő jel nélküli automatákra szorítkozni.

Megjegyezzük, hogy a legáltalánosabb értelemben vett (Mealy-féle) automatákra megadott minden fogalom specializálással (és esetleg kevés módosítással) átvihető Moore-féle és Medvegyev-féle automatákra is. Ezért mi a továbbiakban az egyes fogalmakat legtöbbször Mealy-féle automaták esetére definiáljuk.

Ha a következőkben (a dolgozat III. részét kivéve, ahol kizárólag kimenő jel nélküli automatákkal lesz dolgunk) automatát mondunk és semmi további kikötést nem teszünk, akkor ezen Mealy- vagy Moore-féle automaták bármelyikét érthetjük.

Egy automatát *iniciálisnak* mondunk, ha valamely belső állapota ki van tüntetve. Ezt a kitüntetett állapotot az automata *kezdő állapotának* nevezzük. Úgy tekintjük, hogy az iniciális automata működésének kezdetén a kezdő állapotban van. Egy iniciális Mealy-féle automatát $\mathbf{A}=(A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ alakban adhatunk meg, ahol $a_0(\in A)$ az $\mathbf{A}$ automata kezdő állapota.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából elsőrendű fontossággal bírnak azok az automaták, amelyekhez tartozó minden halmaz véges. Az ilyen automatákat *véges automatáknak* nevezzük.

Egy véges automatát igen szemléletesen megadhatunk az automata átmenet-kimenet-táblázatával. Az $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy-féle automata átmenet-kimenet-táblázata olyan téglalap alakú táblázat, amelynek sorait és oszlopait rendre az $\mathbf{A}$ automata bemenő jelei, ill. belső állapotai jelölik meg és bármely $a(\in A)$, $x(\in X)$ esetén az x-szel jelölt sor és az a-val jelölt oszlop metszetében a $(\delta(a, x), \lambda(a, x))$ kétdimenziós vektor áll. Az $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore-féle automata átmenet-kimenet-táblázata az előbbi táblázattól csak abban különbözik, hogy az x-szel jelölt sor és az a-val jelölt oszlop metszetében csak $\delta(a, x)$ áll és emelett az a-val jelölt oszlop fölé az $a(\in A)$ állapot $\mu(a)(\in Y)$ jele kerül. Egy véges Mealy-, ill. Moore-féle automata átmenet-kimenet-táblázata tehát a következő kulcs szerint használandó:

	a
	$\vdots$
x	$\ldots(\delta(a, x), \lambda(a, x))$

	$\mu(a)$
	a
	$\vdots$
x	$\ldots\delta(a, x)$

Az algebrai struktúrák elméletéből ismert sok fogalom, így a részstruktúra, homorfizmus, izomorfizmus stb. fogalma természetes módon átvihető automaták esetére is.

Az $\mathbf{A}_1=(A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$ automatát az $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata *részautomatájának* nevezzük, ha $A_1 \subseteq A$, $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$, továbbá a δ és λ függvények az $A_1 \times X_1$ szorzat-halmazon egybeesnek a δ_1, ill. λ_1 függvényekkel. Ha speciálisan még $X_1=X$ és $Y_1=Y$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}_1$ az $\mathbf{A}$ automata *A-részautomatája.*

Legyenek $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ és $\mathbf{A}'=(A', X', Y', \delta', \lambda')$ tetszőleges automaták. Akkor mondjuk, hogy az egyértelmű $\psi_1: A \to A'$, $\psi_2: X \to X'$ és $\psi_3: Y \to Y'$ leképezésekből megalkotott (ψ_1, ψ_2, ψ_3) leképezésrendszer $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{A}'$-be való *homomorfizmusa*, ha bármely $a(\in A)$, $x(\in X)$ esetén a

$$\begin{aligned} \psi_1(\delta(a, x)) &= \delta'(\psi_1(a), \psi_2(x)), \\ \psi_3(\lambda(a, x)) &= \lambda'(\psi_1(a), \psi_2(x)) \end{aligned} \tag{1}$$

összefüggések teljesülnek. Ha a ψ_1, ψ_2 és ψ_3 leképezések az A, X és Y halmazokat az A', X', ill. Y' halmazokra képezik le, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}'$ az $\mathbf{A}$ homomorf képe. Speciálisan, ha ψ_1, ψ_2 és ψ_3 egy-egyértelmű leképezések, akkor a (ψ_1, ψ_2, ψ_3) leképezés-rendszert *izomorfizmusnak*, magukat az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ automatákat pedig egymással izomorfaknak mondjuk. Algebrai szempontból az egymással izomorf automatákat nem tekintjük különbözőknek. Ha az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ automatákra $X = X'$ és $Y = Y'$, továbbá a ψ_2 és ψ_3 leképezések az X, ill. Y halmazok önmagukra való identikus leképezései, akkor a ψ_2 és ψ_3 leképezésektől eltekinthetünk és a (ψ_1, ψ_2, ψ_3) leképezés-rendszer az egyetlen $\psi (= \psi_1)$ leképezésbe megy át, az (1) feltételek pedig a

$$\psi(\delta(a, x)) = \delta'(\psi(a), x) \tag{2}$$

$$\lambda(a, x) = \lambda'(\psi(a), x) \tag{3}$$

alakot öltik fel. Az ilyen típusú homomorfizmusokat (izomorfizmusokat) *A-homomorfizmusoknak (A-izomorfizmusoknak)* nevezzük. Az automaták elméletében a homomorfizmusok (és ezzel együtt az izomorfizmusok) további típusai is fellépnek. Így pl. beszélhetünk *X-homomorfizmusokról*, *Y-homomorfizmusokról*, *(A, X)-homomorfizmusokról*, *(A, Y)-homomorfizmusokról* és *(X, Y)-homomorfizmusokról.*

Megjegyezzük, hogy szokás olyan általánosabb értelemben vett automatákat is vizsgálni, amelyeknél a δ, ill. λ függvények nem minden $a(\in A), x(\in X)$ párra vannak értelmezve. Noha az ilyen, ún. parciális automaták vizsgálata gyakorlati szempontból is igen fontos, e dolgozatban mi csak a fentiekben megadott, ún. *teljesen definiált* (nem parciális) automatákkal foglalkozunk.[1]

2. A δ és λ függvények értelmezésének kiterjesztése. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ tetszőleges Mealy-féle automata és jelölje $F(A)$, $F(X)$ és $F(Y)$ rendre az A, X, ill. Y halmazok által generált egységelemes szabad félcsoportokat. A δ és λ függvények értelmezését kiterjesztjük a következő módon: Legyen $\delta: A \times F(X) \to F(A)$ és $\lambda: A \times F(X) \to F(Y)$ úgy, hogy ha $a(\in A)$ tetszőleges állapot és $p = x_1 x_2 \ldots x_k \ (\in F(X))$ tetszőleges szó, akkor az $a(\in A), p(\in F(X))$ párhoz tartozó függvényértékeket a

$$\delta(a, p) = a_1 a_2 \ldots a_k \qquad (a_1, \ldots, a_k \in A) \tag{4}$$

és

$$\lambda(a, p) = y_1 y_2 \ldots y_k \qquad (y_1, \ldots, y_k \in Y) \tag{5}$$

képletek szolgáltassák, ahol $a_1 = \delta(a, x_1), a_2 = \delta(a_1, x_2), \ldots, a_k =$

[1] A parciális automatákra vonatkozóan l. pl. V. M. GLUSKOV [22].

$= \delta(a_{k-1}, x_k)$ és $y_1 = \lambda(a, x_1)$, $y_2 = \lambda(a_1, x_2)$, ..., $y_k = \lambda(a_{k-1}, x_k)$. A (4) formulában fellépő $a_k (\in A)$ állapotra használni fogjuk a rövid *ap* jelölést: $a_k = ap$. $F(X)$-et az **A** automata *bemenő félcsoportjának*, $F(Y)$-t pedig az **A** *kimenő félcsoportjának* nevezzük, továbbá az $F(X)$ és $F(Y)$ félcsoportok elemeit az **A** automata *bemenő szavainak*, ill. *kimenő szavainak* mondjuk.

Az algebrai elméletben $F(X)$ szavai jelentik a bemenő, $F(Y)$ szavai pedig a kimenő információt. A (4) és (5) egyenletek azt mutatják, hogy egy Mealy-féle automata úgy működik, hogy bármely $p = x_1 x_2 \ldots x_k$ bemenő szó hatására állapotoknak egy, a (4) formula által meghatározott $a_1 a_2 \ldots a_k$ sorozatán megy át, miközben kimenő jelek egy (5) sorozatát adja ki.

Megjegyezzük, hogy a δ és λ függvények kiterjesztése értelemszerűen adódik Moore- és Medvegyev-féle automatákra.

3. Kváziautomaták. Ha a δ és λ függvények fenti kiterjesztését az automata definíciójához hozzászámítjuk, az így nyert fogalom természetes általánosításával a kváziautomata fogalmához jutunk. Kváziautomatának nevezünk minden olyan $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ rendszert, amely áll a (nem üres) A halmazból, a tetszőleges F félcsoportból és amelyre δ az $A \times F$ szorzat-halmaznak az A-ba való olyan (egyértelmű) leképezése, hogy $\delta(a, fg) = \delta(\delta(a, f), g)$ $(a \in A; f, g \in F)$ teljesül (l. pl. S. GINSBURG [17]). Világos, hogy ily módon a kimenő jel nélküli automaták egy kézenfekvő általánosítását nyertük. Valóban, bármely $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automata olyan $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ kváziautomataként fogható fel, amelyre $F = F(X)$. Más szóval, a kimenő jel nélküli automaták olyan kváziautomaták, amelyek bemenő félcsoportja szabad.

A kimenő jel nélküli automatákra eddig megadott elnevezéseket és fogalmakat könnyűszerrel átvihetjük kváziautomatákra is. Itt hívjuk fel azonban a figyelmet arra, hogy kváziautomaták esetén a bemenő jeleket nem különböztetjük meg a bemenő szavaktól. Éppen ennek következménye az a fontos tény, hogy — noha a kváziautomata fogalma az automatáénál általánosabb — a fogalmak egy részét speciálisan, automatákra célszerű definiálni, majd általánosítani kváziautomatákra és nem megfordítva. A továbbiakban mi is így fogunk eljárni.

4. Automata által indukált leképezés. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy-féle automata bármely $a (\in A)$ állapota indukálja az $F(X)$ szabad félcsoportnak az $F(Y)$ szabad félcsoportba való

$$\varphi_a(p) = \lambda(a, p) \qquad (p \in F(X)) \tag{6}$$

leképezését. Az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ iniciális Mealy-féle *automata*

által indukált leképezésen az **A** automata $a_0 (\in A)$ kezdő állapota által indukált

$$\varphi_{a_0}(p) = \lambda(a_0, p) \qquad (p \in F(X))$$

leképezését értjük.[2]

A definícióból közvetlenül adódik, hogy ez a $\varphi_{a_0}: F(X) \to F(Y)$ leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(a) megtartja a szavak hosszát, azaz bármely $p(\in F(X))$ szóra $|p| = |\varphi_{a_0}(p)|$ teljesül és

(b) egy szó bármely kezdőszeletét a képszó megfelelő kezdőszeletébe viszi át.[3]

Megfordítva, tetszőleges $F(X)$ és $F(Y)$ szabad félcsoportok esetén bármely, az (a) és (b) feltételeknek eleget tevő $\varphi: F(X) \to F(Y)$ leképezéshez van olyan iniciális automata, amely a φ leképezést indukálja. Egy megfelelő automatát így konstruálhatunk meg: Legyen $\mathbf{A} = (F(X), e, X, Y, \delta, \lambda)$, ahol e az $F(X)$ szabad félcsoport üres szava és legyen

$$\delta(p, x) = px,$$

továbbá

$$\lambda(p, x) = \varphi(px) \text{ utolsó betűje.}$$

Könnyű belátni, hogy **A** indukálja az adott φ leképezést, más szóval, a φ és φ_e leképezések megegyeznek.

Az (a) és (b) feltételeket kielégítő $\varphi: F(X) \to F(Y)$ leképezéseket *automata-leképezéseknek* nevezzük.

Ezzel eljutottunk a következő tételhez:

1. tétel. *A $\varphi: F(X) \to F(Y)$ alakú leképezések közül automaták által éppen az automata-leképezések indukálhatók.*

Legyen X tetszőleges véges halmaz és jelölje H_X az $F(X)$ szabad félcsoport olyan önmagába való leképezéseinek halmazát, amelyek véges automata által indukálhatók.

2. tétel (G. N. Raney [37]). *H_X a leképezések (szokásos) szorzására nézve félcsoportot alkot.*

Bizonyítás. Tekintsük a tetszőleges $\varphi, \psi (\in H_X)$ leképezéseket és legyenek $\mathbf{A} = (A, a_0, X, X, \delta_1, \lambda_1)$ és $\mathbf{B} = (B, b_0, X, X, \delta_2, \lambda_2)$ olyan véges automaták, amelyek a ψ, ill. φ leképezéseket indukálják. Elegendő megmutatni, hogy létezik olyan véges iniciális automata, amely a $\varphi\psi$

[2] A φ_{a_0} leképezést az **A** iniciális automatában előállított leképezésnek is mondjuk.

[3] Valamely $p = x_1 x_2 \ldots x_k$ $(\in F(X))$ szó kezdő szeletein az összes $p_i = x_1 x_2 \ldots x_i$ $0 \leqq i \leqq k$) alakú szavakat, a p szó hosszán pedig a $|p| = k$ számot értjük. Az $e(\in F(X))$ üres szót bármely $p(\in F(X))$ szó kezdő szeletei közé soroljuk.

leképezést indukálja. Tekintsük e célból azt a $\mathbf{C}=(C, c_0, X, X, \delta', \lambda')$ automatát, amelyre $C=A\times B$, $c_0=(a_0, b_0)$ a δ' és λ' függvényekre pedig bármely $a_i(\in A)$, $b_j(\in B)$ és $x(\in X)$ esetén

$$\delta'((a_i, b_j), x)=(\delta_1(a_i, x), \delta_2(b_j, \lambda_1(a_i, x)),$$

ill.

$$\lambda'((a_i, b_j), x)=\lambda_2(b_j, \lambda_1(a_i, x))$$

teljesül.

Jelölje ϑ a $\mathbf{C}$ automata által indukált leképezést. Megmutatjuk, hogy $\vartheta=\varphi\psi$, azaz bármely $p=x_1x_2\ldots x_k\,(\in F(X))$ bemenő szóra $\vartheta(p)=\varphi(\psi(p))$ teljesül. Valóban,

$$\vartheta(p)=\lambda'((a_0, b_0), p)=$$
$$=\lambda'((a_0, b_0), x_1)\cdot\lambda'(\delta'((a_0, b_0), x_2), x_1)\ldots\lambda'(\delta'((a_{k-2}, b_{k-2}), x_{k-1}), x_k)=$$
$$=\lambda_2(b_0, \lambda_1(a_0, x_1))\lambda_2(\delta_2(b_0, \lambda_1(a_0, x_1)), \lambda_1(\delta_1(a_0, x_1), x_2))\ldots$$
$$\ldots\lambda_2(\delta_2(b_{k-2}, \lambda_1(a_{k-2}, x_{k-2})), \lambda_1(\delta_1(a_{k-2}, x_{k-1}), x_k))=$$
$$=\lambda_2(b_0, \psi(p))=\varphi(\psi(p)),$$

amivel a 2. tételt bebizonyítottuk.

Legyen X véges halmaz és legyen G_X az $F(X)$ szabad félcsoport olyan kölcsönösen egyértelmű önmagára való leképezéseinek halmaza, amelyek véges automata által indukálhatók.

3. tétel (G. N. Raney [37]). *G_X a H_X félcsoport részcsoportja.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításából és abból a megjegyzésből, hogy $F(X)$ két önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezésének szorzata ismét $F(X)$ önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése, következik, hogy G_X részfélcsoportja H_X-nek. Másrészt, mivel $F(X)$ önmagára való identikus leképezése nyilván indukálható véges automatával, azért G_X egységelemes. Ily módon elegendő megmutatni, hogy bármely $\varphi(\in G_X)$-re φ^{-1} is indukálható véges automatával. Legyen $\mathbf{A}=(A, a_0, X, X, \delta, \lambda)$ olyan véges összefüggő[4] automata, amely a φ leképezést indukálja. Könnyű látni, hogy ilyen $\mathbf{A}$ létezik. Legyen ezek után $\mathbf{A}'=(A, a_0, X, X, \delta', \lambda')$ az az automata, amelyre bármely $a(\in A)$ és $x(\in X)$ esetén

$$\delta'(a, x)=\delta(a, x')$$

és

$$\lambda'(a, x)=x'$$

teljesül, ahol $\lambda(a, x')=x$ $(x'\in X)$.

[4] Akkor mondjuk, hogy egy $\mathbf{A}=(A, a_0, X, \delta)$ automata összefüggő, ha bármely $a(\in A)$ állapothoz van olyan $p(\in F(X))$, hogy $a=a_0p$ teljesül.

Mivel az **A** automata által indukált φ leképezés kölcsönösen egyértelmű, azért az $x \to \lambda(a, x)$ hozzárendelés az X halmaz egy permutációját adja minden $a(\in A)$-ra, következésképpen a δ' és λ' függvények jól definiáltak.

A 2. tétel bizonyításában szereplő konstrukciót **A**-ra és **A'**-re alkalmazva most olyan **C** automata adódik, amely által indukált ϑ leképezés $F(X)$ önmagára való identikus leképezése és így az **A'** automata által indukált ψ leképezés $F(X)$ önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése és emellett $\psi = \varphi^{-1}$. Ezzel a 3. tételt bebizonyítottuk.

A 2. és 3. tételben megfogalmazott állításokat elsőként G. N. RANEY [37] bizonyította be 1958-ban, de külön tételek formájában nem mondta ki azokat. Később, 1961-ben J. HOŘEJŠ [25] és 1964-ben V. P. ZAROVNÜJ [47] egymástól és RANEY-től függetlenül ismét bebizonyították ezeket az állításokat, de jóval bonyolultabb úton, mint RANEY. Az itt közölt bizonyítások az említettek mindegyikétől különböznek és RANEY [37] bizonyításainál nem bonyolultabbak.

5. Automaták ekvivalenciája. Tekintsük a közös bemenő és kimenő halmazzal bíró $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ és $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ Mealy-féle automatákat. Az **A** automata $a(\in A)$ és a **B** automata $b(\in B)$ állapotait *ekvivalenseknek* mondjuk, ha bármely $p(\in F(X))$ esetén $\lambda(a, p) = \lambda'(b, p)$ teljesül, ami más szóval azt jelenti, hogy az $\mathbf{A} = (A, a, X, Y, \delta, \lambda)$ és a $\mathbf{B} = (B, b, X, Y, \delta', \lambda')$ iniciális automaták ugyanazt a leképezést indukálják.

A közös bemenő és kimenő halmazzal bíró **A** és **B** Mealy-féle automatákat *ekvivalenseknek* nevezzük, ha **A** bármely a állapotához van **B**-nek a-val ekvivalens b állapota és megfordítva, **B** tetszőleges b állapotához található **A**-nak olyan a állapota, amely ekvivalens b-vel.

Hasonlóan definiáljuk az állapotok, ill. automaták ekvivalenciáját abban az esetben, ha az **A** és **B** automaták közül akár az egyik, akár mindkettő Moore-féle automata. A Moore-féle automatákra azonban az előbbinél erősebb ekvivalencia-fogalmat is megadunk. Nevezetesen, a közös bemenő és kimenő halmazzal bíró $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ és $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \mu')$ Moore-féle automaták $a(\in A)$ és $b(\in B)$ állapotait *Moore-ekvivalenseknek* mondjuk, ha a és b az előbbi értelemben ekvivalensek és emellett $\mu(a) = \mu'(b)$ teljesül. A közös bemenő és kimenő halmazzal rendelkező **A** és **B** Moore-féle automatákat *Moore-ekvivalenseknek* nevezzük, ha **A** bármely állapotához van a **B**-nek vele Moore-ekvivalens állapota és fordítva.

Világos, hogy ha két Moore-féle automata Moore-ekvivalens egymással, akkor ekvivalensek is, a fordított irányú következtetés azonban általában hamis.

Különösen a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos kérdés, vajon egy **A** automatával ekvivalens (vagy ha **A** Moore-féle automata, akkor esetleg **A**-val Moore-ekvivalens) automaták közül ki tudunk-e választani olyan automatát, amelynek állapot-halmaza a lehető legkisebb számosságú. Erre vonatkozóan érvényes a következő

4. tétel. *Tetszőleges adott* **A** *automatával ekvivalens automaták* $\mathfrak{A}$ *halmazában létezik olyan (A-izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott)* $\overline{\mathbf{A}}$ *automata, amely bármely* $\mathfrak{A}$*-beli automatának A-homomorf képe.*

Bizonyítás. Az adott $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata állapot-halmazát osztályozzuk oly módon, hogy az $a(\in A)$ és $a'(\in A)$ állapotok akkor és csak akkor kerüljenek egy osztályba, ha a és a' ekvivalensek. Az $a(\in A)$ által reprezentált osztályt jelölje $\bar{a}$, az osztályok halmazát pedig $\bar{A}$. Tekintsük most azt az $\overline{\mathbf{A}}=(\bar{A}, X, Y, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$ automatát, amelyre $\bar{\delta}(\bar{a}, x)=\overline{\delta(a, x)}$ és $\bar{\lambda}(\bar{a}, x)=\lambda(a, x)$ $(a\in A, x\in X)$. Nyilvánvaló, hogy az **A** és $\overline{\mathbf{A}}$ automaták ekvivalensek, de $\overline{\mathbf{A}}$-nak nincs két egymással ekvivalens állapota. Legyen $\mathbf{B}=(B, X, Y, \delta', \lambda')$ $(\in\mathfrak{A})$ tetszőleges automata és jelölje $\psi: B\to\bar{A}$ azt a leképezést, amely a **B** egy tetszőleges $b(\in B)$ állapotához az $\overline{\mathbf{A}}$ automata b-vel ekvivalens (és nyilvánvalóan b által egyértelműen meghatározott) $\bar{a}$ állapotát rendeli hozzá. Megmutatjuk, hogy ψ a **B** automata A-homorfizmusa $\overline{\mathbf{A}}$-ra. Valóban, ha $b(\in B)$ és $\bar{a}(\in A)$ ekvivalensek, akkor bármely $x(\in X)$ esetén $\delta'(b, x)$ és $\bar{\delta}(\bar{a}, x)$ is ekvivalensek egymással, ahonnan $\psi(\delta'(b, x))=\bar{\delta}(\psi(b), x)$ következik.

Világos továbbá, hogy ha **C** bármely $\mathfrak{A}$-beli automata A-homomorf képe, akkor az $\overline{\mathbf{A}}$ és **C** automaták A-izomorfak. Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

Egy **A** automata állapot-halmazának a 4. tétel bizonyítása során megadott osztályozását az **A** minimizálásának mondjuk, az így előálló $\overline{\mathbf{A}}$ ún. faktor-automatát pedig *redukált* vagy *minimális* automatának nevezzük. Az automaták minimizálására több, a gyakorlatban is jól használható eljárás ismeretes. Ilyenek pl. D. D. Aufenkamp és F. E. Hohn [1], valamint V. M. Gluskov [21].

Már az 1. pontban jeleztük, hogy az *algebrai elmélet szemszögéből* a Moore-féle automata csak látszólag speciális esete a Mealy-féle automatának. Ez abban az értelemben igaz, hogy már Moore-féle automaták által indukálhatók mindazok a leképezések, amelyek Mealy-féle automatákban előállíthatók. Kimutatható ugyanis (l. A. Gill [16], A. S. Bloch [4] és V. M. Gluskov [19]) a következő

5. tétel. *Bármely iniciális Mealy-féle automatához létezik vele ekvivalens iniciális Moore-féle automata.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}=(A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ tetszőleges iniciális Mealy-féle automata. Egy **A**-val ekvivalens Moore-féle automatát a következő módon konstruálhatunk meg: Tekintsük azt az $\mathbf{A}'=(A', a_0, X, Y, \delta', \lambda')$ automatát, amelyre az A' halmaz az $a_0(\in A)$ állapotból és az összes (a, x_α) $(a\in A, x_\alpha\in X)$ párból áll, a δ' és λ' függvényekre pedig bármely $a'(\in A')$, $x_\beta(\in X)$ esetén

$$\delta'(a', x_\beta)=\begin{cases}(a_0, x_\beta) & \text{ha} \quad a'=a_0,\\ (\delta(a, x_\alpha), x_\beta) & \text{ha} \quad a'=(a, x_\alpha)\end{cases} \tag{7}$$

és

$$\lambda'(a', x_\beta)=\begin{cases}\lambda(a_0, x_\beta) & \text{ha} \quad a'=a_0,\\ \lambda(\delta(a, x_\alpha), x_\beta) & \text{ha} \quad a'=(a, x_\alpha)\end{cases} \tag{8}$$

teljesül.

Elegendő megmutatni, hogy a most megkonstruált **A**′ automata Moore-féle és **A**-val ekvivalens. A

$$\lambda'(a_0, x_\beta)=\lambda(a_0, x_\beta)=\lambda(\delta'(a_0, x_\beta))$$
$$\lambda'((a, x_\alpha), x_\beta)=\lambda(\delta(a, x_\alpha), x_\beta)=\lambda(\delta'((a, x_\alpha), x_\beta)),$$

számolással adódik, hogy **A**′ valóban Moore-féle automata, hiszen e két utolsó egyenlet szerint **A**′ jel-függvényeként választható egyenesen a $\mu=\lambda$ függvény. Másrészt (7) és (8) alapján nem nehéz belátni, hogy az **A** és **A**′ automaták egymással ekvivalensek.

A konstrukcióból látható, hogy ha **A** véges, akkor **A**′ is véges. Érvényes tehát a tételnek az a fontos kiegészítése is, hogy *bármely véges iniciális Mealy-féle automatához van vele ekvivalens véges iniciális Moore-féle automata.*

Az 5. tétel lehetőséget ad arra, hogy a leképezések automatákban való előállítása tekintetében Moore-féle automatákra szorítkozzunk. Gyakorlati meggondolásokból kiindulva azonban mégsem célszerű ezt tenni, mert előfordulhat, hogy egy automata-leképezéshez található olyan Mealy-féle automata, amely ezt a leképezést indukálja és amely kevesebb állapotot tartalmaz, mint bármely, az adott leképezést indukáló Moore-féle automata. Erre vonatkozóan érvényes a

6. tétel (J. Hartmanis [24]). *Ha a véges* $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \mu)$ *Moore-féle automatának nincs két különböző Moore-ekvivalens állapota, akkor abban és csak abban az esetben található nála kevesebb állapottal bíró és vele ekvivalens Mealy-féle automata, ha van* **A**-*nak két olyan egymástól különböző* $a, a'(\in A)$ *állapota, amelyekre bármely* $x(\in X)$ *esetén* $\delta(a, x)=\delta(a', x)$ *teljesül.*

Bizonyítás. A feltétel szükségességének bizonyításához tegyük fel, hogy van olyan $\mathbf{B}=(B, X, Y, \delta', \lambda')$ Mealy-féle automata, amely **A**-val ekvivalens és amelyre $|B|<|A|$.[5] Tekintsük az **A** automata A állapot-halmazának azt az osztályozást, amelyben az egymással ekvivalens állapotok kerülnek egy osztályba. Világos, hogy van olyan osztály, amely legalább két különböző a és a' állapotot tartalmaz. Állítjuk, hogy az a és a' állapotokra bármely $x(\in X)$ esetén $\delta(a, x)=$ $=\delta(a', x)$ teljesül. Valóban, mivel az a és a' állapotok ekvivalensek, azért bármely $x(\in X)$ esetén a $\delta(a, x)$, $\delta(a', x)$ állapotok Moore-ekvivalensek, és mivel **A**-nak nincs két különböző Moore-ekvivalens állapota, azért $\delta(a, x)=\delta(a', x)$ minden $x(\in X)$-re teljesül.

Az elegendőség bizonyításához tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore-féle automatának van két olyan egymástól különböző $a, a'(\in A)$ állapota, hogy bármely $x(\in X)$-re $\delta(a, x)=\delta(a', x)$ teljesül. Akkor az a és a' állapotok ekvivalensek és így a minimizálást elvégezve olyan $\mathbf{B}=(B, X, Y, \delta', \lambda')$ automatához jutunk, amely **A**-val ekvivalens és amelyre $|B|<|A|$. Ezzel a 6. tétel bizonyítását befejeztük.

6. Automaták analízise és szintézise. A bevezetésben azt mondottuk, hogy az automaták információk bizonyos típusú átalakítására képes rendszerek. Ha valamely $\varphi: F(X) \to F(Y)$ leképezés esetén az $F(X)$ és $F(Y)$ szabad félcsoportok szavait a bemenő, ill. kimenő információ „hordozóiként" fogjuk fel, a φ leképezést pedig az információ-átalakítás módjának tekintjük, akkor az 1. tétel alapján azt mondhatjuk, hogy az automaták olyan információ-átalakításra alkalmas rendszerek, amelyek automata-leképezésekkel adhatók meg és az automaták szerepe abban rejlik, hogy bizonyos típusú (ti. az (a) és (b) feltételeknek eleget evő) $\varphi: F(X) \to F(Y)$ alakú leképezések leírását teszik lehetővé.

Az automaták és az automata-leképezések kapcsolatát tekintve két alapvetően fontos kérdés fogalmazható meg:

(1) Valamely előre megadott automatához hogyan lehet az automatától függetlenül leírni azt a leképezést, amelyet ez az automata indukál? E feladat megoldását *analízisnek* nevezzük.

(2) Adott automata-leképezéshez hogyan lehet megadni (legalább egy) olyan automatát, amely ezt a leképezést indukálja? Ennek a feladatnak a megoldását *szintézisnek* mondjuk.

Megjegyezzük, hogy a szintézis feladata nem egyértelmű, hiszen egy adott automata-leképezés általában több egymással nem izomorf automatában is előállítható. Egyértelművé lehet azonban tenni azzal, hogy a keresett automatára további kikötéseket is teszünk.

[5] A továbbiakban jelölje $|H|$ a H halmaz számosságát.

7. Véges automaták analízise és szintézise. Az analízis és szintézis feladata a fenti megfogalmazásban túlságosan általános. Ezért kiragadunk egy szűkebb automata-osztályt, nevezetesen, a véges automaták osztályát, és az analízis és a szintézis feladatát csak véges automatákra fogalmazzuk meg pontosan. Ezzel kapcsolatban egy további probléma is felvetődik:

(0) Meg kell adnunk a véges automatákban előállítható automata-leképezéseknek az automatáktól független leírását. Más szóval, keresnünk kell tehát olyan írásmódot, olyan nyelvet, amelyben mindenekelőtt el kell tudnunk dönteni, hogy valamely, e nyelven megadott automata-leképezés előállítható-e véges automatában vagy sem.

Ezek után véges automatákra az analízis és szintézis így fogalmazható meg:

(1′) Bármely adott véges automata esetén meg kell adnunk az említett nyelvben azt a leképezést, amelyet ez az automata indukál.

(2′) Ha ebben a nyelvben adva van egy véges automata által indukálható leképezés, akkor meg kell tudnunk szerkeszteni azt a véges automatát, amely az adott leképezést indukálja és belső állapotainak halmaza minimális számosságú.

Kimutatható, hogy ilyen megfogalmazásban a szintézis feladata már egyértelmű, mert az ott kívánt automata A-izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott (l. 4. tétel).

8. Az esemény fogalma. Esemény-algebra. Most olyan nyelvet ismertetünk, amely rendelkezik a (0) alatt megkívánt tulajdonságokkal, amelyben tehát le lehet írni az automatáktól függetlenül azokat a leképezéseket, amelyek véges automaták által indukálhatók. Ilyen nyelvül szolgálhat az események nyelve (l. S. C. KLEENE [27]).

Tekintsük a véges X halmaz által generált $F(X)$ egységelemes szabad félcsoportot. *Eseménynek* nevezzük az $F(X)$ félcsoport bármely S részhalmazát. Speciálisan, az események közé soroljuk $F(X)$ üres e szavát, az X halmaz elemeit (egyelemű események), magát $F(X)$-et (univerzális esemény) és azt az eseményt, amely egyetlen $F(X)$-beli szót sem tartalmaz (lehetetlen esemény). Az e üres szót, mint eseményt, továbbá az egyelemű eseményeket *elemi eseményeknek* nevezzük. Az $F(X)$ félcsoport összes részhalmazaiból álló $E(X)$ eseményhalmazban az alábbi műveleteket definiáljuk. Legyen $S_1, S_2 \in E(X)$. Azt az $S_1 \cup S_2$ eseményt, amely azokból és csak azokból az $F(X)$-beli szavakból áll, amelyek az S_1 és S_2 közül legalább az egyikben benne vannak, az S_1 és S_2 események *összegének*, azt az $S_1 S_2$ eseményt, amely az összes $p_1 p_2$ ($p_1 \in S_1, p_2 \in S_2$) alakú szavakból áll, az S_1 és S_2 események *szorzatának* nevezzük. Az $S(\in E(X))$ esemény *iteráltján* azt az $\{S\}$ eseményt értjük, amely az összes $p_1 p_2 \ldots p_k (p_i \in S;\ k = 1, 2, \ldots)$ alakú szavakból

áll. $E(X)$-et a most bevezetett összeadás, szorzás és iteráció műveletével együtt az X halmazhoz tartozó *esemény-algebrának* nevezzük. Könnyen látható, hogy az esemény-algebrában a műveletekre nézve érvényesek (az algebrai struktúrákban szokásos vagy azokhoz hasonló) alábbi azonosságok: ha $S_1, S_2, S_3 \in E(X)$ és $\varnothing$ a lehetetlen eseményt jelöli, akkor

$$S_1 \cup S_1 = S_1,$$

$$(S_1 \cup S_2) \cup S_3 = S_1 \cup (S_2 \cup S_3),$$

$$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1,$$

$$(S_1 S_2) S_3 = S_1 (S_2 S_3),$$

$$S_1 e = e S_1 = S_1,$$

$$(S_1 \cup S_2) S_3 = S_1 S_3 \cup S_2 S_3,$$

$$S_1 (S_2 \cup S_3) = S_1 S_2 \cup S_1 S_3,$$

$$\{\{S_1\}\} = \{S_1\},$$

$$S_1 \supseteq S_2 \Rightarrow \{S_1\} \supseteq \{S_2\},$$

$$S_1 \{S_1\} = \{S_1\} S_1,$$

$$\{S_1\} = e \cup S_1 \{S_1\},$$

$$S_1 \cup \varnothing = S_1,$$

$$S_1 \varnothing = \varnothing S_1 = \varnothing,$$

$$\{\varnothing\} = e.$$

9. Reguláris események. Az X véges halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra egy S eseményét *regulárisnak* nevezzük, ha S vagy a lehetetlen esemény, vagy pedig az elemi eseményekből az összeadás, szorzás és iteráció műveletének véges sokszor való alkalmazásával áll elő.

Megjegyezzük, hogy az előző pontban említett azonosságok miatt az S reguláris esemény ilyen előállítása nincs egyértelműen meghatározva. Az S minden ilyen előállítását, amely tehát azt mutatja meg, hogy S a mondott műveletek segítségével hogyan áll elő az elemi eseményekből, az S esemény *reguláris kifejezésének* nevezzük. (Ha S a lehetetlen esemény, akkor S reguláris kifejezéséül bármilyen speciális jelet választhatunk, pl. az üres halmaz $\varnothing$ jelét is.)

Az esemény-algebra azonosságainak alkalmazásával az esetek többségében nehéz, sőt gyakorlatilag lehetetlen eldönteni, hogy két regu-

láris kifejezés mikor állítja elő ugyanazt a reguláris eseményt. Ezért néhány szerző speciális reguláris eseményeknek olyan alakú reguláris kifejezését igyekszik megadni, amely már az illető reguláris esemény által egyértelműen meghatározott. Ilyen céllal vezette be J. A. BRZOZOWSKI [6] a definit esemény fogalmát.

Az X véges halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra egy $R(\in E(X))$ eseményét *definitnek* nevezzük, ha előállítható az

$$R = S_1 \cup \{X\}S_2 \tag{9}$$

alakban, ahol S_1, $S_2(\in E(X))$ véges események. (Az $S(\in E(X))$ eseményt végesnek mondjuk, ha S az $F(X)$-nek véges részhalmaza.)

A definit események (9) alakban való előállítása általában nem egyértelmű, ui. előfordulhat, hogy az alábbi két szabály alkalmazásával — mint erről könnyen meggyőződhetünk — bizonyos egyszerűsítések hajthatók végre.

1. szabály. Ha egy $p(\in S_1)$ (vagy $q(\in S_2)$) szó valamely $r(\in S_2)$ szóra végződik, azaz $p = sr$ (vagy $q = sr$), akkor a p-nek S_1-ből (vagy a q-nak S_2-ből) való elhagyásával előálló esemény megegyezik az eredeti R eseménnyel.

2. szabály. Ha valamely $p(\in S_1)$ szóra $R \supset \{X\}p$ teljesül, akkor az S_1 esemény összes p-re végződő szavainak elhagyása után megmaradó esemény megegyezik az R eseménnyel.

Egy definit esemény R reguláris kifejezését *kanonikus alakúnak* nevezzük ha teljesülnek, a következő feltételek:

a) R definit esemény, azaz $R = S_1 \cup \{X\}S_2$, ahol S_1, S_2 $(\in E(X))$ végesek,

b) R az 1. és 2. szabályok egyikével sem egyszerűsíthető,

c) S_1 és S_2 szavai lexikografikus sorrendben következnek egymásra.[6] Egy R definit esemény kanonikus alakú reguláris kifejezését R *kanonikus alakjának* is nevezzük.

Érvényes a következő

7. tétel (J. A. BRZOZOWSKI [6]). *Bármely definit esemény kanonikus alakja egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Legyenek $P = S_1 \cup \{X\}S_2$ és $Q = S_1' \cup \{X\}S_2'$ a véges X halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra valamely eseményének kanonikus alakjai. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy $S_1 \subseteq S_1'$ teljesül. Valóban, ellenkező esetben található lenne olyan $p(\in S_1)$ szó, amelyre

[6] Itt feltételezzük, hogy az X halmaz elemei valamilyen módon sorozatba vannak rendezve.

$p \notin S_1'$ állna, tehát valamilyen $h(\in S_2')$ mellett $p = Sh$ adódna. Mivel pedig Q és így P is tartalmazza $\{X\}h$-t, azért ez esetben $P \supset \{X\}sh = \{X\}p$ is teljesülne, következésképpen P a 2. szabály felhasználásával egyszerűsíthető lenne, ami lehetetlen, hiszen P a feltételezés szerint kanonikus alak volt. Hasonló módon látható be, hogy $S_1' \subseteq S_1$, tehát $S_1 = S_1'$ is teljesül.

Továbbá, mivel a feltételezés szerint sem P, sem pedig Q nem egyszerűsíthető az 1. szabállyal, azért $S_1 \cap \{X\}S_2 = S_1' \cap \{X\}S_2' = \varnothing$. Ebből és a már bizonyított $S_1 = S_1'$ egyenlőségből pedig tüstént folyik, hogy $P = Q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\{X\}S_2 = \{X\}S_2'$. Megmutatjuk, hogy $S_2 \subseteq S_2'$. Valóban, ellenkező esetben legyen $p \in S_2$, de $p \notin S_2'$. Akkor $p = sh\ (h \in S_2')$ és mivel $\{X\}$ az e üres szót is tartalmazza, azért $h \in \{X\}h$, következésképpen $h \in \{X\}S_2$, tehát valamilyen $q\ (\in S_2)$ mellett $h = rq$ és így $p = srq$, ami azt mutatja, hogy a P kifejezés az 1. szabállyal egyszerűsíthető. De ez a feltételezés szerint lehetetlen, tehát $S_2 \subseteq S_2'$ teljesül. Analóg módon mutatható ki, hogy $S_2' \subseteq S_2$, következésképpen $S_2 = S_2'$, amivel a tétel bizonyítását is befejeztük.

További speciális típusú reguláris események bizonyos kitüntetett alakban való egyértelmű előállításával foglalkozik még M. YOELY [46] is. Mindkét szerző nyitva hagyja azonban azt a kérdést, vajon egy tetszőleges reguláris kifejezés esetén lehetséges-e áttérni kanonikus alakra és ha lehetséges, akkor hogyan juthatunk el a kanonikus alakhoz.

10. Események előállítása véges automatákban. A véges automaták analízisének és szintézisének feladatát az esemény fogalmának felhasználásával a 11. pontban nagymértékben általánosítjuk és a megoldással is előbb ebben az általánosságban foglalkozunk. Csak a 15. pontban térünk vissza az analízis és szintézis 7. pontbeli megfogalmazásához. Ebben a pontban most még néhány definíciót adunk meg.

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges kimenő jel nélküli automata. Akkor mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ a nem üres $p = x_1 x_2 \ldots x_k\ (\in F(X))$ szó hatására az $a(\in A)$ állapotból az ax_1, ax_1x_2, ..., $ax_1x_2 \ldots x_{k-1}(\in A)$ *közbülső állapotokon* keresztül a $b(\in A)$ állapotba *megy át*, ha $ap = b$. Az $e(\in F(X))$ üres szó hatására $\mathbf{A}$ természetesen bármely $a(\in A)$ állapotból (közvetlenül, közbülső állapotok nélkül) ugyanabba az a állapotba megy át.

Az általánosabb értelemben vett analízis és szintézis megfogalmazásához és e feladatok megoldásához szükségünk lesz az eseményeknek véges automatákban az állapot-halmaz részhalmazaival való előállításának fogalmára. Azt mondjuk, hogy a kimenő jel nélküli véges iniciális $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ automata az $E(X)$ esemény-algebra egy S eseményét az A állapot-halmaz egy M részhalmazával *előállítja*, ha S azokból és csak azokból a bemenő szavakból áll, amelyek hatására $\mathbf{A}$ az a_0 kezdő állapotból M-beli állapotba megy át.

11. Véges automaták (általános értelemben vett) analízise. A véges automaták analízisének a 7. pontban megadott fogalmát a következőképpen általánosítjuk:

A véges automaták analízise jelentse olyan algoritmus megadását, amelynek segítségével bármely kimenő jel nélküli véges iniciális $\mathbf{A}=(A, a_0, X, \delta)$ *automatához és* $\mathbf{A}$ *állapot-halmazának tetszőleges* M *részhalmazához meg tudjuk adni annak az* $S(\in E(X))$ *eseménynek valamilyen reguláris kifejezését, amelyet az* $\mathbf{A}$ *automata az* M $(\subseteq A)$ *halmazzal előállít.*

Ilyen algoritmus létezését elsőnek S. C. KLEENE [27] bizonyította be. Mi az alábbiakban R. F. MCNAUGHTON és H. YAMADA [29] algoritmusának V. M. GLUSKOV [19] által közölt változatát ismertetjük. A mondott algoritmus megadása egyben a következő tétel bizonyítását is szolgáltatja:

8. tétel. *Ha a véges* X *halmazhoz tartozó* $E(X)$ *esemény-algebra valamely* S *eseményét egy véges kimenő jel nélküli iniciális* $\mathbf{A}=(A, a_0, X, \delta)$ *automata valamilyen* $M(\subseteq A)$ *halmazzal előállítja, akkor az* $S(\in E(X))$ *esemény reguláris.*

A kívánt algoritmus megadásához nyilvánvalóan elegendő olyan algoritmust megkonstruálni, amely lehetővé teszi bármely véges iniciális automatában egyetlen állapot által előállított esemény reguláris kifejezésének felírását. Valóban, egy tetszőleges véges iniciális automatában az állapot-halmaz bármely részhalmaza által előállított esemény megegyezik a szóban forgó részhalmaz egyes állapotai által, az automatában előállított események összegével.

A keresett algoritmus megadása céljából legyen most már $\mathbf{A}=(A, 1, X, \delta)$ olyan véges iniciális automata, amelyre $A=\langle 1, 2, \ldots, n\rangle$ és jelölje S_{ij}^{k} $(i, j=1, 2, \ldots, n;\ k=0, 1, \ldots, n)$ az $E(X)$ esemény-algebra azon eseményét, amely azokból és csak azokból a nem üres bemenő szavakból áll, amelyek hatására az $\mathbf{A}$ automata az i $(\in A)$ állapotból a j $(\in A)$ állapotba megy át, mégpedig, legfeljebb az $1, 2, \ldots, k$ közbülső állapotokon keresztül. Speciálisan, S_{ij}^{0} ekkor azt az eseményt fogja jelölni, amely pontosan azokból a bemenő szavakból áll, amelyek hatására $\mathbf{A}$ az i állapotból (közbülső állapotok nélkül) a j állapotba megy át.

Az előbb tett megjegyzés szerint elegendő megmutatni, hogy az S_{1l}^{n} esemény bármely l $(=1, 2, \ldots, n)$-re reguláris és elegendő megadni az ilyen események egy reguláris kifejezését. A továbbiakban azonban ennél többet fogunk kimutatni. Nevezetesen, megmutatjuk, hogy bármely S_{ij}^{k} $(i, j \in A;\ k=0, 1, \ldots, n)$ esemény reguláris és rekurzív formulát adunk meg minden ilyen esemény reguláris kifejezésének felírásához. A bizonyítást k szerinti teljes indukcióval végezzük.

Legyen $k=0$. Mivel az S_{ij}^0 $(i, j \in A)$ események mindegyike vagy a lehetetlen esemény vagy pedig az X bemenő-halmaz bizonyos elemeinek, mint egyelemű eseményeknek az összege, azért bármely S_{ij}^0 esemény reguláris és bármely S_{ij}^0 esemény reguláris kifejezése közvetlenül felírható.

Legyen most már $k \geqq 0$ és tételezzük fel, hogy az $S_{ij}^0, S_{ij}^1, \ldots, S_{ij}^{k-1}$ események minden i, j $(=1, 2, \ldots, n)$ esetén regulárisak és ismeretesek azok valamilyen reguláris kifejezései. Mindenekelőtt kimutatjuk az

$$S_{ij}^k = S_{ij}^{k-1} \cup S_{ik}^{k-1}\{S_{kk}^{k-1}\}S_{kj}^{k-1} \quad (i, j=1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

rekurziós formula helyességét. Ha a (10) formula jobb oldalán álló eseményt röviden R-el jelöljük, akkor világos, hogy $R \subseteqq S_{ij}^k$. Másrészt, legyen p az S_{ij}^k esemény tetszőleges szava. Ha $p\,(\in F(X))$ az $\mathbf{A}$ automatát az $i\,(\in A)$ állapotból úgy viszi át a $j\,(\in A)$ állapotba, hogy k a közbülső állapotok között nem lép fel, akkor $p \in S_{ij}^{k-1}$, következésképpen $p \in R$. Ha pedig k a közbülső állapotok között előfordul, akkor, mint könnyen belátható, p előáll a $p=p_1 p_2 \ldots p_m$ $(m \geqq 2)$ alakban, ahol $p_1 \in S_{ij}^{k-1}$, $p_l \in S_{kk}^{k-1}$ $(l=2, \ldots, m-1)$ és $p_m \in S_{kj}^{k-1}$, tehát ismét $p \in R$, amivel a (10) formulát bebizonyítottuk. De az indukció-feltevésből a (10) formula alkalmazásával közvetlenül adódik, hogy az S_{ij}^k esemény reguláris és a formula segítségével S_{ij}^k egy reguláris kifejezését is megadhatjuk.

Ezzel az általános értelemben vett analízis feladatát véges automatákra megoldottuk és egyben a 8. tételt is bebizonyítottuk. Az analízis további algoritmusaira vonatkozóan l. pl. D. D. Aufenkamp és A. E. Hohn [1], V. M. Gluskov [18], Ju. Ja. Baziljevszkij [2] stb.

12. Véges automaták (általános értelemben vett) szintézise. A véges automaták szintézisével foglalkozó dolgozatok száma meglehetősen nagy. Idevágó dolgozatok pl. S. C. Kleene [27], V. M. Gluskov [21], Ju. V. Kapitonova [26], V. G. Bodnarcsuk [5] stb.

A véges automaták szintézisének 7. pontban megadott fogalmát a következőképpen általánosítjuk:

A véges automaták szintézise jelentse olyan algoritmus megadását, amelynek segítségével bármely véges X halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra tetszőleges, reguláris kifejezés által megadott S reguláris eseményéhez meg tudunk konstruálni olyan véges $\mathbf{A}=(A, a_0, X, \delta)$ kimenő jel nélküli iniciális automatát, amely az adott S eseményt az A állapot-halmaz valamely M részhalmazával előállítja.

Egy ilyen algoritmus megadása egyben a következő tétel bizonyítását is szolgáltatja:

9. tétel. *Egy véges X halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra bármely S reguláris eseményéhez van olyan véges $\mathbf{A}=(A, a_0, X, \delta)$ kimenő jel nélküli iniciális automata, amely valamely $M\,(\subseteqq A)$ halmazzal ezt az s eseményt előállítja.*

A kívánt algoritmus közvetlenül adódik a reguláris esemény definíciójából és az alábbi lemmákból:

1. lemma. *A véges X halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra bármely elemi eseménye előállítható egy véges kimenő jel nélküli iniciális automata egyetlen állapotával.*

Bizonyítás. Világos, hogy az az $\mathbf{A}=(A, a_0, X, \delta)$ automata, amelyre $A=\langle a_0, a\rangle$ és bármely $x(\in X)$ esetén $\delta(a_0, x)=\delta(a, x)=a$ teljesül, az $a_0(\in A)$ állapottal az $e(\in F(X))$ üres szót előállítja.

Legyen most x az $E(X)$ tetszőleges egyelemű eseménye és tekintsük azt az $\mathbf{A}=(A, a_0, X, \delta)$ automatát, amelyre $A=\langle a_0, a_1, a_2\rangle$, továbbá

$$\delta(a_0, x_j)=\begin{cases} a_1 & \text{ha} \quad x_j=x, \\ a_2 & \text{ha} \quad x_j\neq x \end{cases}$$

és

$$\delta(a_i, x_j)=a_2 \qquad (x_j\in X;\ i=1, 2).$$

Könnyű belátni, hogy $\mathbf{A}$ az $a_1(\in A)$ állapottal elállítja az x egyelemű eseményt.

2. lemma. *Legyen S_1 és S_2 a véges X halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra két eseménye. Ha az $\mathbf{A}=(A, a_0, X, \delta)$ és $\mathbf{B}=(B, b_0, X, \delta')$ véges automaták az S_1 és S_2 eseményeket az $A'(\subseteq A)$ ill. $B'(\subseteq B)$ halmazokkal előállítják, akkor az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ automatákból kiindulva megadható olyan $\mathbf{C}=(C, c_0, X, \delta_c)$ véges automata, amely az $S_1\cup S_2$ eseményt valamely $C'(\subseteq C)$ halmazzal előállítja.*

Bizonyítás. Egyenesen azt mutatjuk meg, hogy az a $\mathbf{C}=(C, c_0, X, \delta_c)$ automata, amelyre $C=A\times B$, $c_0=(a_0, b_0)$ és $\delta((a, b), x)=(\delta(a, x), \delta'(b, x))$ $(a\in A, b\in B, x\in X)$ teljesül, az $S_1\cup S_2$ eseményt a $C'=(A'\times B)\cup(A\times B')$ halmazzal előállítja. Valóban, ha $p\in S_1\cup S_2$, akkor vagy $p\in S_1$ vagy $p\in S_2$. Legyen pl. $p\in S_1$. Akkor a δ_c átmenet-függvény definíciója folytán a $\delta_c((a_0, b_0), p)$ szó utolsó betűje benne van $A'\times B$-ben, minthogy a $\delta(a_0, p)$ szó utolsó betűje A'-ben van. Következésképpen, $\mathbf{C}$ a $p(\in S_1)$ szó hatására valamely $(A'\times B)\cup(A\times B')$-beli állapotba megy át. Analóg módon tárgyalható a $p\in S_2$ eset.

Megfordítva, legyen $p(\in F(X))$ olyan bemenő szó, amelyre $(a_0, b_0)p=(a, b)$ $(\in C')$ teljesül. Megmutatjuk, hogy akkor $p\in S_1\cup S_2$. A feltételből következik, hogy vagy $(a, b)\in A'\times B$ vagy $(a, b)\in A\times B'$. Ha pl. $(a, b)\in A'\times B$, akkor $a_0p=a\in A'$, vagyis $p\in S_1$ $(\subseteq S_1\cup S_2)$. Ha pedig $(a, b)\in A\times B'$, akkor hasonlóan nyerjük, hogy $p\in S_2$ $(\subseteq S_1\cup S_2)$, amivel a 2. lemmát bebizonyítottuk.

3. lemma. *Legyen S_1 és S_2 a véges X halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra két eseménye. Ha az $\mathbf{A}=(A,a_0,X,\delta)$ és $\mathbf{B}=(B,b_0,X,\delta')$ véges automaták az S_1 és S_2 eseményeket az $A'(\subseteq A)$, ill. $B'(\subseteq B)$ halmazokkal előállítják, akkor az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ automatákból kiindulva megadható olyan $\mathbf{C}=(C, c_0, X, \delta_c)$ véges automata, amely az S_1S_2 eseményt valamely $C'(\subseteq C)$ halmazzal előállítja.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{C}=(C, c_0, X, \delta)$ az az automata, melyre C az $A \cup B$ halmaz összes nem üres részhalmazainak halmaza, $c_0=\langle a_0\rangle$ és a δ_c átmenet-függvény legyen a

$$\delta_c(\langle a\rangle, x)=\langle\delta(a, x)\rangle, \text{ ha } a\in A\setminus A';$$

$$\delta_c(\langle a\rangle, x)=\langle\delta(a, x), \delta'(b_0, x)\rangle, \text{ ha } a\in A';$$

$$\delta_c(\langle b\rangle, x)=\langle\delta'(b, x)\rangle, \text{ ha } b\in B;$$

$$\delta_c(\langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k\rangle, x)=$$

$$=\langle\delta_c(\langle a_1\rangle, x)\cup \ldots \cup\delta_c(\langle a_s\rangle, x)\cup\delta_c(\langle b_1\rangle, x), \ldots, \delta_c(\langle b_k\rangle, x)\rangle,$$

$$\text{ha } s+k \geqq 2,\ a_i\in A,\ b_j\in B\ (i=1, \ldots, s; j=1, \ldots, k)$$

formulák által definiálva. Állítjuk, hogy a most megkonstruált $\mathbf{C}$ automata az S_1S_2 eseményt előállítja azzal a $C'(\subseteq C)$ halmazzal, amely az $A\cup B$ egyesítési halmaznak azokból és csak azokból a részhalmazaiból áll, amelyek legalább egy B'-beli elemet tartalmaznak, ha $e\notin S_2$. Ha $e\in S_2$, akkor C' az $A\cup B$ összes olyan részhalmazaiból álljon, amelyek legalább egy A' vagy B'-beli elemet tartalmaznak. Valóban, ha $r\in S_1S_2$ és $e\notin S_2$, akkor $r=pq\,(p\in S_1, q\in S_2)$ és minthogy $\langle a_0\rangle r=\langle a_0\rangle pq=$ $=\langle\langle a_0\rangle p\rangle q$ és $\langle a_0\rangle p\in A'$, azért a δ_c függvény értelmezése folytán az $\langle a_0\rangle r=\langle\langle a_0\rangle p\rangle q$ halmaz tartalmaz legalább egy B'-beli elemet, következésképpen $\langle a_0\rangle r\in C'$. Megfordítva, legyen $r(\in F(X))$ tetszőleges olyan bemenő szó, amelyre $\langle a_0\rangle r\in C'$ teljesül. Ez utóbbi azonban a konstrukcióból következően csak úgy teljesülhet, ha az $r(\in F(X))$ szónak van olyan $r=r'r''$ előállítása, hogy $\langle a_0\rangle r'$ tartalmaz legalább egy A'-beli elemet, az $\langle a_0\rangle r'r''=\langle\ldots, b_0, \ldots\rangle r''$ halmaz pedig legalább egy B'-beli elemet, vagyis $r'\in S_1$ és $r''\in S_2$, ahonnan $r\in S_1S_2$ következik. Az $e\in S_2$ esetben ehhez hasonlóan végezhető el a lemma bizonyítása. Ezzel a 3. lemma bizonyítását befejeztük.

4. lemma. *Ha az $\mathbf{A}=(A, a_0, X, \delta)$ véges automata az $E(X)$ esemény-algebra egy S eseményét az $A'(\subseteq A)$ halmazzal előállítja, akkor $\mathbf{A}$-ból kiindulva megadható olyan $\mathbf{C}=(C, c_0, X, \delta_c)$ véges automata, amely az $\{S\}$ eseményt valamely $C'(\subseteq C)$ halmazzal előállítja.*

Bizonyítás. Tekintsük azt a $\mathbf{C}=(C, c_0, X, \delta_c)$ automatát, amelyre C az A halmaz összes nem üres részhalmazaiból és egy tetszőleges c_0 szimbólumból álló halmaz, a δ_c függvényre pedig

$$\delta_c(\langle a\rangle, x)=\begin{cases}\langle\delta(a, x)\rangle & \text{ha } a\in A\setminus A',\\ \langle\delta(a, x), \delta(a_0, x)\rangle & \text{ha } a\in A',\end{cases}$$

továbbá

$$\delta_c(c_0, x)=\delta_c(\langle a_0\rangle, x)$$

és

$$\delta_c(\langle a_1, \ldots, a_k\rangle, x)=\langle\delta_c(\langle a_1\rangle, x), \ldots, \delta_c(\langle a_k\rangle, x)\rangle \text{ ha } k\geqq 2,$$

teljesül. Álljon továbbá C' a c_0 állapotból és az A halmaz összes olyan (nem üres) részhalmazából, amelyek tartalmaznak legalább egy A'-beli elemet. Annak kimutatása, hogy a $\mathbf{C}$ automata az $\{S\}$ eseményt a C' halmazzal előállítja, a 3. lemma bizonyításához hasonló meggondolással történhet, csupán azt kell még megjegyeznünk, hogy érvényes az $\{S\}=\bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$ előállítás, ahol $S^0=e$ és $S^n=S\ldots S$ (n-szer), ha $n\geqq 1$.

Világos, hogy ha egy S reguláris esemény reguláris kifejezéssel van megadva, akkor az S esemény reguláris kifejezésében fellépő elemi eseményekből kiindulva az 1—4. lemmák bizonyításában szereplő konstrukciók véges sokszor való alkalmazásával eljuthatunk olyan véges automatához, amely az S eseményt az állapot-halmaz egy részhalmazával előállítja.

A 8. és 9. tételben megfogalmazott állításokat a következő tételben foglalhatjuk össze:

10. tétel. *Egy véges halmazhoz tartozó esemény-algebra valamely eseménye akkor és csak akkor reguláris, ha véges automatában az állapot-halmaz egy részhalmazával előállítható.*

Néhány szerző (pl. M. A. Szpivak [40]) a metszetképzést is az esemény-algebra műveletei közé sorolja. Ilyen felfogás mellett — mivel két reguláris esemény metszete is reguláris — a reguláris eseményt az elemi eseményekből az összeadás, szorzás, metszetképzés és iteráció véges sokszor való alkalmazásával előálló eseményként definiálhatjuk.

Ha egy S reguláris esemény reguláris kifejezésében a metszetképzés is szerepel, akkor az S-t előállító automatának az S reguláris kifejezéséből történő felépítésére alkalmazható az alábbi, könnyen igazolható

5. lemma. *Legyen S_1 és S_2 a véges X halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra két eseménye. Ha az $\mathbf{A}=(A, a_0, X, \delta)$ és $\mathbf{B}=(B, b_0, X, \delta')$ véges automaták az S_1 és S_2 eseményeket az $A'(\subseteqq A)$, ill. $B'(\subseteqq B)$ halmazokkal előállítják, akkor az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ automatákból kiindulva megadható olyan $\mathbf{C}=(C, c_0, X, \delta_c)$ véges automata, amely az $S_1\cap S_2$ eseményt valamely $C'(\subseteqq C)$ halmazzal előállítja.*

13. Automata-leképezések és események kapcsolata. Legyenek X és Y tetszőleges véges halmazok és legyen $\varphi: F(X) \to F(Y)$ valamilyen automata-leképezés. Megmutatjuk, hogy az ilyen φ leképezések események bizonyos rendszerével jellemezhetők. Jelölje S_y minden $y(\in Y)$-ra azon $p(\in F(X))$ szavak halmazát, amelyekre a $\varphi(p)$ $(\in F(Y))$ képszó utolsó betűje y és tekintsük az ilyen S_y $(\in E(X))$ események H halmazát. Nyilvánvaló, hogy H rendelkezik a következő tulajdonságokkal: $\alpha)$ H véges számosságú, $\beta)$ ha $y \neq y'(y, y' \in Y)$, akkor $S_y \cap S_{y'} = \emptyset$, $\gamma)$ bármely $p(\neq e, \in F(X))$ szóhoz van olyan $y(\in Y)$, hogy $p \in S_y$ és $\delta)$ bármely $y(\in Y)$-ra $e \notin S_y$.

Általában, egy véges halmazhoz tartozó esemény-algebra eseményeinek olyan rendszerét, amely az $\alpha)$—$\delta)$ feltételeknek eleget tesz, *automata-eseményrendszernek* nevezünk.

Ha tehát X és Y véges halmazok, akkor minden $\varphi: F(X) \to F(Y)$ automata-leképezéshez hozzárendelhető az $E(X)$ esemény-algebra egy automata-eseményrendszere. Könnyű belátni, hogy megfordítva, az X véges halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra bármely H automata-eseményrendszere a (véges) Y halmaz elemeinek jelölésétől eltekintve egyértelműen meghatározza azt a $\varphi: F(X) \to F(Y)$ automata-leképezést, amelyhez a fenti módon tartozó automata-eseményrendszer éppen H.

Ezzel nyertük, hogy az automata-leképezések bizonyos osztálya és az események között szoros kapcsolat van. Algebrai szempontból egyértelműen jellemezni tudtuk ugyanis az események nyelvén azokat a leképezéseket, amelyek olyan $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ iniciális automaták által indukálhatók, amelyekre az X és Y halmazok végesek.

14. Az automata és az általa indukált leképezés kapcsolata az események nyelvén. E pontban csak olyan iniciális automatákat tekintünk, amelyeknél mind a bemenő, mind a kimenő jelek halmaza véges.

Legyen $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ ilyen Mealy-féle automata és legyen $y(\in Y)$ az $\mathbf{A}$ tetszőleges kimenő jele. Jelölje S_y azoknak a $p(\in F(X))$ szavaknak a halmazát, amelyekre a $\varphi_{a_0}(p)$ $(\in F(Y))$ szó utolsó betűje y. Fussa be y az $\mathbf{A}$ automata Y kimenő halmazát és jelölje H_A az eközben előálló $S_y(\in E(X))$ események összességét. A H_A eseményrendszert az $\mathbf{A}$ automatához tartozó *kanonikus eseményrendszernek* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy egy automatához tartozó kanonikus eseményrendszer mindig automata-eseményrendszer.

Másrészt, a definícióból közvetlenül adódik a

11. tétel. *Egy olyan* $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ *automata, amelyre az* X *és* Y *halmazok végesek, akkor és csak akkor indukál valamely* $\varphi: F(X) \to F(Y)$ *automata-leképezést, ha a* φ*-hez tartozó automata-eseményrendszer egybeesik az* $\mathbf{A}$ *automatához tartozó kanonikus eseményrendszerrel.*

Ennek megfelelően, olyan $\mathbf{A}=(A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ automaták esetén, amelyekre az X és Y halmazok végesek, a 7. pontban tárgyalt analízis és szintézis így fogalmazható át:

(1″) adott automatához meghatározandó a hozzátartozó kanonikus eseményrendszer, majd az ehhez a 13. pont értelmében rendelt automata-leképezés;

(2″) ha adott egy $\varphi: F(X) \to F(Y)$ (X és Y véges halmazok) automata-leképezés, meghatározandó a φ-hez a 13. pont értelmében tartozó automata-eseményrendszer, majd megszerkesztendő olyan automata, amelyhez tartozó kanonikus eseményrendszer egybeesik a φ-hez rendelt automata-eseményrendszerrel.

15. Véges automaták által indukálható leképezések. Az előző pontban olyan iniciális Mealy-féle automatákkal foglalkoztunk, amelyeknél mind a bemenő, mind a kimenő jelek halmaza véges. Most tovább szűkítjük a vizsgált automaták osztályát. Nevezetesen, a továbbiakban a belső állapotok halmazának a végességét is feltételezzük, más szóval, csak véges automatákkal foglalkozunk.

Arra vonatkozóan, hogy milyen leképezések indukálhatók véges automaták által, érvényes a következő

12. tétel (S. C. KLEENE [27]). *Egy $\varphi: F(X) \to F(Y)$ (X és Y véges halmazok) automata-leképezés akkor és csak akkor indukálható véges iniciális Mealy-féle automata által, ha a φ-hez rendelt automata-eseményrendszerhez tartozó minden esemény reguláris.*

Bizonyítás. A feltétel szükségességének bizonyítása céljából legyenek X és Y tetszőleges véges halmazok és tegyük fel, hogy a $\varphi: F(X) \to F(Y)$ leképezést az $\mathbf{A}=(A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ véges iniciális Mealy-féle automata indukálja. Az 5. tétel szerint létezik olyan $\mathbf{A}'=(A', a_0, X, Y, \delta', \mu)$ véges iniciális Moore-féle automata, amely ekvivalens $\mathbf{A}$-val. Jelölje A'_y minden $y\,(\in Y)$-ra az $\mathbf{A}'$ automata y-nal jelölt állapotainak halmazát és legyen $S'_y(\in E(X))$ az az esemény, amelyet az $\mathbf{A}''=(A', a_0, X, \delta')$ véges iniciális kimenő jel nélküli automata az A' állapot-halmaz A'_y részhalmazával előállít. A 8. tétel felhasználásával nyerjük, hogy $S'_y (y \in Y)$ reguláris esemény.

De mivel a 11. tétel szerint a φ leképezéshez tartozó automata-eseményrendszer megegyezik az $\mathbf{A}$ automatához tartozó kanonikus eseményrendszerrel, másrészt, minthogy az egymással ekvivalens $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ automaták kanonikus eseményrendszerei nyilvánvalóan egybeesnek, azért elegendő megmutatni, hogy bármely $y\,(\in Y)$-ra $S_y = S'_y$ teljesül, ahol $H_{A'} = \langle S_y | y \in Y \rangle$. Ez az egyenlőség pedig a következő $\mathbf{A}'$-*beli* számolással adódik: Legyen $p = x_1 x_2 \ldots x_k\,(\in F(X))$ tetszőleges bemenő

szó és legyen $\delta'(a_0, p) = a'_1 a'_2 \ldots a'_k$ $(\in F(A'))$, továbbá $\varphi_{a_0}(p) = y_1 y_2 \ldots y_k = \mu(a'_1)\mu(a'_2)\ldots\mu(a'_k)$ $(\in F(X))$. Könnyen belátható, hogy bármely $y(\in Y)$-ra $p \in S_y \Leftrightarrow y_k = y$ és $p \in S'_y \Leftrightarrow \mu(a'_k) = y$. Ha $p \in S_y$, akkor $y = y_k = \mu(a'_k)$, azaz $a_0 p \in A'_y$, vagyis $p \in S'_y$. Megfordítva, ha $p \in S'_y$, akkor $a_0 p \in A'_y$, vagyis $y_k = \mu(a_0 p) = y$, azaz $p \in S_y$. Ezzel nyertük, hogy bármely $y(\in Y)$-ra $S_y = S'_y$ teljesül, amivel a szükségesség bizonyítását is befejeztük.

Az elegendőség bizonyításához legyen $\varphi: F(X) \to F(Y)$ (X és Y véges halmazok) olyan automata-leképezés, amelyről feltesszük, hogy a hozzá tartozó $H_\varphi = \langle S_{y_1}, \ldots, S_{y_k} \rangle$ automata-eseményrendszer minden S_{y_i} $(i = 1, \ldots, k)$ eseménye reguláris. Akkor a 9. tétel értelmében megadhatók olyan véges $\mathbf{A}_i = (A_i, a_{i0}, X, \delta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ iniciális kimenő jel nélküli automaták, amelyek az S_{y_i} $(\in E(X))$ eseményeket valamilyen $A'_i (\subseteq A_i)$ halmazokkal rendre előállítják.

Legyen $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \mu)$ az a véges iniciális Moore-féle automata, amelyre $A = A_1 \times \ldots \times A_k$, $a_0 = (a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{k0})$ a δ és μ függvényekre pedig

$$\delta((a_1, \ldots, a_k), x) = (\delta_1(a_1, x), \ldots, \delta_k(a_k, x)) \qquad (x \in X, a_i \in A_i),$$

ill.

$$\mu((a_1, \ldots, a_k)) = \begin{cases} y_i, \text{ ha pontosan egy } i(=1, \ldots, k)\text{-re } a_i \in A'_i, \\ \text{tetszőleges } y(\in Y) \text{ az összes több esetben} \end{cases}$$

teljesül.

Állítjuk, hogy $\varphi_{a_0} = \varphi$. Legyen $p(\in S_{y_i})$ $(1 \leqq i \leqq k)$. Elegendő kimutatni, hogy akkor $\varphi_{a_0}(p)$ utolsó betűje y_i. Legyen $a_0 p = (a_1, \ldots, a_k)$. Minthogy $y_i \neq y_j$ esetén $S_{y_i} \cap S_{y_j} = \varnothing$, továbbá $a_{i0} p \in A'_i \Leftrightarrow p \in S_{y_i}$, azért a μ jel-függvény értelmezése folytán $\mu(ap) = \mu((a_1, \ldots, a_k)) = y_i \Leftrightarrow p \in S_{y_i}$, amiből az állítás már következik. Ezzel a 12. tétel bizonyítását befejeztük.

A 12. tétel bizonyításából az is látható, hogy ezzel a véges automaták 7., ill. 14. pontban megfogalmazott analízise és szintézise is megoldást nyert, mégpedig az általánosabb értelemben vett analízis és szintézis keretein belül.

II. Automata-szorzatok

Általában, a különféle algebrai struktúrák (félcsoportok, csoportok, gyűrűk stb.) leírásában fontos felvilágosítással szolgál annak a kérdésnek a tanulmányozása, hogy a vizsgált algebrai struktúra hogyan épül fel más (esetleg egyszerűbb) algebrai struktúrákból. Az ilyen jellegű vizsgálatok az automaták elméletében is fontos helyet foglalnak el, hiszen a reális automaták, így pl. az elektronikus számológépek is, több egyszerűbb automata kompozíciójaként állnak elő. A dolgozatnak

ebben a részében definiáljuk az automaták szorzatát, majd erre a szorzatra, ill. annak egyes nevezetes speciális eseteire vonatkozó eredményeket ismertetünk.

16. Az automata-szorzat definíciója. Legyenek $\mathbf{A}_i = (A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tetszőleges Mealy-féle automaták, X és Y tetszőleges (nem üres) halmazok, φ és ψ pedig az $A_1 \times \ldots \times A_n \times X$ szorzat-halmaznak az $X_1 \times \ldots \times X_n$ szorzat-halmazba, ill. az Y halmazba való egyértelmű leképezései. Az $A_1, \ldots, A_n$ automatáknak (az X és Y halmazokkal, valamint a φ és ψ függvényekkel megadott) *szorzatán* értjük azt az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automatát, amelyre $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, továbbá a δ és λ függvényekre bármely $(a_1, \ldots, a_n)$ $(\in A)$ és $x (\in X)$ esetén

$$\delta((a_1, \ldots, a_n), x) = (\delta_1(a_1, x_1), \ldots, \delta_n(a_n, x_n))$$

és

$$\lambda((a_1, \ldots, a_n), x) = \psi(a_1, \ldots, a_n, x)$$

teljesül, ahol $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(a_1, \ldots, a_n, x)$.

Megjegyezzük, hogy az automaták szorzatának most megadott, V. M. GLUSKOV-tól származó definíciója (l. V. M. GLUSKOV [19]) a reális automaták felépítésénél használatos legáltalánosabb kompozíciók messzemenő absztrakciója útján jött létre. Világos továbbá, hogy az automaták szorzata a szorzatban szereplő komponensek által nincs egyértelműen meghatározva, hanem a szorzás eredményeként automaták egy osztálya adódik.

Legyen $\mathfrak{A}$ automaták tetszőleges véges vagy végtelen halmaza. Az $\mathfrak{A}$ halmazbeli automaták valamely szorzatán olyan szorzatot értünk, amelynek komponensei az $\mathfrak{A}$ halmazból valók.

17. Automaták teljes rendszerei. Mint már említettük, a gyakorlatban használt automaták általában számos egyszerűbb automata kompozícióiként (absztrakt megfogalmazásban: szorzataiként) állnak elő. Éppen ezért fontos kérdés, hogy lehet-e találni véges automaták olyan — lehetőleg véges — halmazát, hogy ezen halmazbeli automaták tetszőleges példányszámban való felhasználásával bármely előre megadott, véges automata által indukálható leképezéshez a szorzás műveletének felhasználásával fel tudjunk építeni olyan automatát, amely az adott automata-leképezést indukálja. Ez a kérdés elvezet bennünket a következő általános definícióhoz:

Legyen $\mathfrak{A}$ automaták egy tetszőleges osztálya és legyen $\mathfrak{A}'$ az $\mathfrak{A}$ egy valódi részrendszere. Akkor mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}'$ rendszer az $\mathfrak{A}$-*ban teljes*, ha bármely $\mathfrak{A}$-beli automatához találhatók olyan $\mathfrak{A}'$-beli

automaták, amelyeknek valamely szorzata ekvivalens az adott $\mathfrak{A}$-beli automatával. Az $\mathfrak{A}'$-t *véges teljes rendszernek* nevezzük $\mathfrak{A}$-ban, ha az $\mathfrak{A}'$-beli automaták között csak véges sok páronként nem izomorf van.

Különösen fontos az a kérdés, hogy automaták valamely osztályának mikor van véges teljes rendszere és hogyan lehet megadni ilyen rendszereket. Mi a továbbiakban a véges automaták osztályával foglalkozunk és kimutatjuk, hogy ebben az osztályban létezik véges teljes rendszer, továbbá, meg is adunk ilyen rendszereket. Ezzel kapcsolatban nevezetes eredményként fog adódni, hogy a véges automaták osztályában létezik olyan véges teljes rendszer is, amelyhez tartozó bármely két automata izomorf egymással.

A véges automaták osztályában speciális teljes rendszerek az ún. izomorfan teljes rendszerek.

Véges automaták egy $\mathfrak{A}$ rendszerét *izomorfan teljesnek* nevezzük, ha bármely előre megadott $\mathbf{A}$ véges automatához megadható az $\mathfrak{A}$ rendszerbeli automaták egy olyan (véges) szorzata, amelynek van az $\mathbf{A}$ automatával A-izomorf A-részautomatája.

Az alábbi tétel szerint a véges automaták osztályában létezik véges, sőt egyetlen automatából álló izomorfan teljes rendszer.

13. tétel (V. M. Gluskov [19]). *Véges automaták valamely $\mathfrak{A}$ rendszere akkor és csak akkor izomorfan teljes, ha $\mathfrak{A}$-ban található legalább egy olyan $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata, amelynek van két olyan egymástól különböző $a_0, a(\in A)$ állapota, továbbá négy olyan (egymástól nem feltétlenül különböző) $x_1, x_2, x_3, x_4 (\in X)$ bemenő jele, hogy $a_0x_1=a_0$, $a_0x_2=a$, $ax_3=a$ és $ax_4=a_0$ teljesül.*

Bizonyítás. A szükségesség bizonyítása céljából az $\mathfrak{A}$ rendszer $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ automatái véges szorzatának A-részautomatája gyanánt vegyük azt az $\mathbf{A}=(\langle a_0, a\rangle, \langle x, y\rangle, \delta)$ kimenő jel nélküli automatát, amelynek δ átmenet-függvényére $\delta(a_0, x)=\delta(a, y)=a$ és $\delta(a, x)=\delta(a_0, y)=a_0$ teljesül. A szorzat definíciója szerint az a_0 és a állapotokra $a_0=(a_{10}, \ldots, a_{k0})$, ill. $a=(a_1, \ldots, a_k)$ $(a_{i0}, a_i \in A_i;\ i=1, \ldots, k)$ teljesül. Ugyancsak a szorzat értelmezése folytán, a $\delta(a_0, x)=\delta(a, y)=a$ és $\delta(a, x)=\delta(a_0, y)=a_0$ összefüggések teljesülése azt jelenti, hogy van olyan $(x_1, \ldots, x_k), (x_1', \ldots, x_2'), (y_1, \ldots, y_k)$ és $(y_1', \ldots, y_k')$ $(x_i, x_i', y_i, y_i' \in X_i)$, hogy tetszőleges $i\ (=1, \ldots, k)$ esetén érvényesek a $\delta_i(a_{i0}, x_i)=\delta_i(a_i, y_i')=a_i$ és $\delta_i(a_{i0}, y_i)=\delta_i(a_i, x_i')=a_{i0}$ összefüggések. Minthogy $a_0 \neq a$, azért van olyan i $(1 \leqq i \leqq k)$, amelyre $a_{i0} \neq a_i$, vagyis az $\mathfrak{A}$ rendszer ezen i-hez tartozó $\mathbf{A}_i$ automatájának a_{i0} és a_i állapotai, valamint x_i, x_i', y_i és y_i' bemenő jelei eleget tesznek a tételben megadott feltételeknek.

Megfordítva, az elegendőség bizonyításához tekintsünk egy tetszőleges n állapottal bíró $\mathbf{B}=(B, X, Y, \delta, \lambda)$ automatát és vegyünk egy, a tételben megadott feltételeknek eleget tevő $\mathbf{A}$ automatát k példányban,

ahol $k \geqq {}^2\log n$. Ekkor a **B** automata állapothalmaza és az a_0-ból és a-ból képezett k hosszúságú sorozatok halmazának alkalmas részhalmaza között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető. Minthogy a tétel feltételei bármely két ilyen sorozat között biztosítják az átmenetet, azért a szorzat definíciójában szereplő φ és ψ leképezések megadhatók oly módon, hogy az adott hozzárendelés A-izomorfizmus legyen. Ezzel a 13. tétel bizonyítását befejeztük.

Véges automaták egy $\mathfrak{A}$ rendszerét *homomorfan teljesnek* nevezzük, ha bármely véges **A** automatához található $\mathfrak{A}$-beli automaták olyan véges szorzata, amelynek van az **A**-ra A-homomorf módon leképezhető A-részautomatája.

Világos, hogy ha a véges automaták egy rendszere izomorfan teljes, akkor homomorfan is teljes.

Érvényes A. A. LETICSEVSZKIJ [28] tételének alábbi átfogalmazása:

14. tétel. *Véges automaták valamely* $\mathfrak{A}$ *rendszere akkor és csak akkor homomorfan teljes, ha* $\mathfrak{A}$ *tartalmaz legalább egy olyan* $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ *automatát, amelynek van olyan* $a\,(\in A)$ *állapota és* $x_1, x_2\,(\in X)$ *bemenő jele, továbbá olyan* $p_1, p_2\,(\in F(X))$ *bemenő szava, hogy* $\delta(a, x_1) \neq \delta(a, x_2)$ *és* $ax_1p_1 = ax_2p_2 = a$ *teljesül.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{A}$ rendszerbeli $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ automaták valamely szorzatának van olyan $\mathbf{A}'=(A', X', Y', \delta', \lambda')$ A-részautomatája, amely A-homomorf módon leképezhető arra az $\bar{\mathbf{A}}=(\bar{A}, \bar{X}, \bar{X}, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$ Mealy-féle automatára, amelyre $\bar{A}=\langle a_0, a_1\rangle$, $\bar{X}=\langle x, y\rangle$, a $\bar{\delta}$ és $\bar{\lambda}$ függvényekre pedig a $\bar{\delta}(a_0, x)=\bar{\delta}(a_1, x)=\bar{\delta}(a_1, y)=$ $=a_0$, $\bar{\delta}(a_0, y)=a_1$, ill. a $\bar{\lambda}(a_0, x)=\bar{\lambda}(a_1, y)=x$, $\bar{\lambda}(a_0, y)=\bar{\lambda}(a_1, x)=y$ összefüggések teljesülnek. Jelölje χ az $\mathbf{A}'$-nek $\bar{\mathbf{A}}$-ra való valamely A-homomorfizmusát.

Mindenekelőtt azt mutatjuk meg, hogy $\mathbf{A}'$-nek van olyan erősen összefüggő[7] $\mathbf{A}''$ A-részautomatája, amelynek az $\bar{\mathbf{A}}$ automata A-homomorf képe. Ebből ugyanis a tételben megadott feltétel szükségessége közvetlenül adódik. Valóban, legyen $a^{(0)}=(a_1^{(0)}, \ldots, a_k^{(0)})$ $(\in A'')$ az a_0 valamely őse a mondott A-homomorfizmusnál és legyen $a^{(1)}=$ $=(a_1^{(1)}, \ldots, a_k^{(1)})=(a_1^{(0)}, \ldots, a_k^{(0)})x$, $a^{(2)}=(a_1^{(2)}, \ldots, a_k^{(2)})=(a_1^{(0)}, \ldots, a_k^{(0)})y$. Minthogy $\mathbf{A}''$ erősen összefüggő, azért van olyan $p^{(1)}$ és $p^{(2)}$ bemenő szó, hogy $a^{(1)}p^{(1)}=a^{(2)}p^{(2)}=a$ teljesül. De $a^{(1)} \neq a^{(2)}$ miatt van olyan $i\,(1 \leqq i \leqq k)$ hogy $a_i^{(1)} \neq a_i^{(2)}$. Íly módon a szorzat értelmezése folytán feltétlenül találhatók az $\mathbf{A}_i$ automata $a_i^{(0)}$ állapotához olyan x_i és y_i

[7] Egy $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatát erősen összefüggőnek nevezünk, ha bármely $a, b\,(\in A)$-hoz van olyan $p\,(\in F(X), \neq e)$, hogy $ap=b$.

bemenő jelek, továbbá olyan $p_i^{(1)}$ és $p_i^{(2)}$ bemenő szavak, hogy $a_i^{(0)}x_i(=a_i^{(1)}) \neq (a_i^{(2)}=)a_i^{(0)}y_i$ és $a_i^{(1)}p_i^{(1)}=a_i^{(2)}p_i^{(2)}=a_i^{(0)}$ teljesülnek. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az $\mathfrak{A}$ rendszer $\mathbf{A}_i$ automatája a tétel feltételeinek eleget tesz.

Elegendő tehát kimutatni a fenti tulajdonságú $\mathbf{A}''$ automata létezését. Legyen e célból B_0 és B_1 az a_0, ill. a_1 állapotok teljes ősképe a $\chi: \mathbf{A}' \to \bar{\mathbf{A}}$ A-homomorfizmusnál. Ha az $\mathbf{A}'$ automata nem erősen összefüggő, akkor vannak olyan $b, c(\in A')$ állapotok, hogy bármely $p(\in F(X'))$ bemenő szóra $bp \neq c$ teljesül. Vegyük most $\mathbf{A}'$-nek azt a $\mathbf{C}_1$ A-részautomatáját, amelynek állapot-halmazát maga a b állapot, továbbá az összes $bp(p \in F(X'))$ állapotok alkotják. Minthogy $\bar{\mathbf{A}}$ erősen összefüggő és $\mathbf{A}'$-nek homomorf képe, azért $B_0 \cap C_1 \neq \emptyset$ és $B_1 \cap C_1 \neq \emptyset$, vagyis $\bar{\mathbf{A}}$ a $\mathbf{C}_1$-nek is A-homomorf képe és a $\mathbf{C}_1$ automata állapotainak száma kisebb az $\mathbf{A}'$ automata állapotainak számánál. Ha a $\mathbf{C}_1$ automata nem erősen összefüggő, akkor ezt az eljárást folytatva — minthogy $\mathbf{A}'$ véges — véges számú lépésben eljutunk a kívánt $\mathbf{C}_i=\mathbf{A}''$ erősen összefüggő A-részautomatához.

Most megmutatjuk, hogy a tétel feltételeinek eleget tevő $\mathfrak{A}$ rendszer homomorfan teljes. Legyen e célból $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)(\in \mathfrak{A})$ olyan automata, amelyre van olyan $a_0(\in A)$, x_0, $y_0(\in X)$ és $p, p'(\in F(X))$, hogy az $a_0x_0=a_1 \neq a_1'=a_0y_0$ és $a_1p=a_1'p'=a_0$ összefüggések teljesülnek. Legyen továbbá $\delta(a_1, p)=a_2 \ldots a_{m-1}a_0$ és $\delta(a_1', p')=a_2' \ldots a_{n-1}'a_0$. Ez azt jelenti, hogy bármely a_i-hez van olyan x_i, hogy

$$a_i x_i = a_{i+1 \,(\mathrm{mod}\, m)} \tag{11}$$

és bármely a_i'-höz van olyan y_i, hogy

$$a_i' y_i = a_{i+1 \,(\mathrm{mod}\, n)}'. \tag{12}$$

Legyen most $\mathbf{B}=(B, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ tetszőleges véges automata és k olyan természetes szám, amelyre $k \geqq {}^2\log |B|$ teljesül. Jelölje V az $A^{(m+n)k}$ hatvány-halmaz azon elemeinek halmazát, amelyekben minden $t(0 \leqq t < k)$-re a $t(m+n)+1$ és $(t+1)(m+n)$ számok által határolt intervallumban az $a_1, \ldots, a_{m-1}, a_1', \ldots, a_{n-1}'$ elemek szerepelnek egyszeres komponensként az a_0 pedig kétszeres komponensként. (Ha bizonyos állapotokra az $a_i=a_j'$ egyenlőség teljesül, akkor az ilyen állapotokat vegyük kétszeresen, egyszer a_i-ként, egyszer pedig a_j'-ként.) A V halmaz elemeit soroljuk osztályokba úgy, hogy két elem akkor és csak akkor kerüljön egy osztályba, ha rájuk tetszőleges $t(0 \leqq t < k)$-re egyidejűleg teljesül, hogy a $t(m+n)+1$ és $(t+1)(m+n)$ számok által határolt intervallumba eső komponenseik közül vagy (α) a_1 megelőzi a_1'-t, vagy (β) a_1' előzi meg a_1-et. Nyilvánvaló, hogy ily módon a V halmaz egy

osztályozása áll elő. Az osztályok halmazát jelölje $\overline{\mathbf{V}}$. A $\overline{\mathbf{V}}$ halmaz rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely két $\overline{V}_1, \overline{V}_2 (\in \overline{\mathbf{V}})$ osztályhoz található olyan bemenő jel (az **A** automata bemenő jeleiből álló $(m+n)k$ hosszúságú vektor), amelynek hatására a $\overline{V}_1$ osztály minden eleme a $\overline{V}_2$ osztályba megy át. Valóban, könnyű találni olyan bemenő jelet, amely az a_i komponenst $a_{i+1 \pmod m}$-be, az a_i' komponenst pedig $a'_{i+1 \pmod n}$-be viszi át $(i \neq 0)$ (l. (11) és (12)). Másrészt, ezek egyike sem lehet a_1 vagy a_1'. Hogy a $\overline{V}_1$ osztály elemei milyen osztályba mennek át, az csak azon múlik, hogy a $t(m+n)+1$ és $(t+1)(m+n)$ $(t=0,1,\ldots,k-1)$ számok által határolt intervallumba eső két a_0-ás komponens közül az előbb állóhoz alkalmazzuk az x_0 jelet, a később állóhoz pedig az y_0 jelet, vagy pedig fordítva. Ezzel együtt bizonyítást nyert az is, hogy az $\mathfrak{A}$ rendszer homomorfan teljes, mert $\overline{\mathbf{V}}$-nak a B halmaz számosságával megegyező számosságú részhalmazát egy-egyértelmű módon leképezve B-re — a fentiek szerint — $A^{(m+n)k}$-ban lehet találni olyan φ és ψ függvényeket, hogy a kapott szorzat **V** részautomatájának a **B** automata A-homomorf képe. (Vö. az izomorfan teljes rendszer létezésére vonatkozó 13. tétel bizonyításával.) Ezzel a 14. tétel bizonyítását befejeztük.

A fentebb megadott általános definíció értelmében a véges automaták egy $\mathfrak{A}$ rendszerét *teljesnek* nevezzük, ha bármely, véges automata által indukálható automata-leképezéshez megadható $\mathfrak{A}$-beli automaták olyan szorzata, amely valamely állapotával mint kezdőállapottal iniciális automataként tekintve, az adott automata-leképezést indukálja.

Nyilvánvaló, hogy ha véges automaták egy $\mathfrak{A}$ rendszere izomorfan vagy homomorfan teljes, akkor $\mathfrak{A}$ teljes is. Megfordítva, érvényes a következő

15. tétel. *Véges automaták minden teljes rendszere homomorfan is teljes.*

Bizonyítás. Tekintsük azt a ϑ automata-leképezést, amelyet valamely állapottal mint kezdő állapottal iniciálisnak tekintett, a 14. tétel bizonyítása során megadott $\overline{\mathbf{A}}$ automata indukál. Minthogy az $\overline{\mathbf{A}}$ automata redukált, azért $\overline{\mathbf{A}}$ a ϑ leképezést indukáló valamennyi automata valamely A-részautomatájának A-homomorf képe. Innen a bizonyítás a 14. tétel „csak akkor" állításának bizonyításához hasonlóan folytatható.

18. Automaták *R*-szorzatai. Az automaták bizonyos speciális kompozíciói, az ún. hurokmentes kompozíciók jól használhatók azokban a vizsgálatokban, amelyek az automaták „gazdaságos kódolásával" kapcsolatosak. Az ilyen irányú kutatásokat J. HARTMANIS [23] indította el. A következőkben, cikkünk algebrai előadásmódjához igazodva,

nem a hurokmentes kompozíció eredeti (az automaták strukturális elméletében használt) fogalmát vezetjük be, hanem az R-szorzat fogalmát, amely az eredeti fogalomnak az algebrai szemléletnek megfelelő ekvivalens átfogalmazása.

Legyen $R=\langle 1, \ldots, k\rangle$ a $\prec$ rendezéssel adott véges parciálisan rendezett halmaz. Minden $i(\in R)$-nek feleltessünk meg egy $\mathbf{A}_i = (A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i)$ automatát (nem feltétlenül egy-egy értelmű módon). Az R-hez a fenti módon hozzárendelt $\mathbf{A}_i$ automatáknak az X, Y halmazokkal, valamint φ, ψ függvényekkel megadott *R-szorzatán* azt az $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ automatát értjük, amelyre

1. $A = A_1 \times \ldots \times A_k$,

2. $\delta((a_1, \ldots, a_k), x) = (\delta_1(a_1, x_1), \ldots, \delta_k(a_k, x_k))$, ahol $(x_1, \ldots, x_k) = \varphi(a_1, \ldots, a_k, x) = (\varphi_1(a_1, \ldots, a_k, x), \ldots, \varphi_k(a_1, \ldots, a_k, x))$ és $\varphi_i(a_1, \ldots, a_k, x)$ $(1 \leqq i \leqq k)$ csak az i-nél a $\prec$ rendezésben nagyobb indexű automaták állapotaitól és az X elemeitől függ ténylegesen,

3. $\lambda((a_1, \ldots, a_k), x) = \psi(a_1, \ldots, a_k, x)$ teljesül. (A definícióból világos, hogy a φ és ψ függvények, mintleképezések, $\varphi: A_1 \times \ldots \times A_k \times X \to X_1 \times \ldots \times X_k$ és $\psi: A_1 \times \ldots \times A_k \times X \to Y$ alakúak.)

Az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ kimenő jel nélküi automata A állapot-halmazának egy π osztályozását az $\mathbf{A}$ automata *kongruens felosztásának* nevezzük, ha bármely $a_i, a_j (\in A)$ és $x(\in X)$ esetén

$$a_i \equiv a_j(\pi) \Rightarrow \delta(a_i, x) \equiv \delta(a_j, x)\,(\pi)$$

teljesül.

Legyenek $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r$ a H halmaz különböző, nem feltételenül az összes osztályozásai. Legyen ezek közül π_0 és π_r minden esetben a H azon osztályozása, amelynél H maga egyetlen osztály, ill. H minden eleme egyedül alkot egy-egy osztályt. Akkor mondjuk, hogy a π_i nagyobb π_j-nél, jelekben, $\pi_i \succ \pi_j$, ha π_j a π_i finomítása, más szóval, ha H bármely két a, b elemére

$$a \equiv b(\pi_j) \Rightarrow a \equiv b(\pi_i)$$

teljesül. Ezzel a H halmaz osztályozásai (páronként idegen halmazokra való *felosztásai*) $\langle \pi_0, \ldots, \pi_r\rangle$ halmazában egy parciális rendezést definiáltunk. A továbbiakban jelölje π_i^* $(i=1, \ldots, r)$ a $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r$ felosztások közül azoknak a metszetét, amelyek π_i-nél nagyobbak.

Legyen megadva véges automaták egy $\mathfrak{A}$ rendszere. Akkor mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ automata *izomorf módon beágyazható* $\mathfrak{A}$-beli automaták valamely R-szorzatába, ha van $\mathfrak{A}$-beli automatáknak olyan R-szorzata, amely tartalmaz az $\mathbf{A}$-val A-izomorf A-részautomatát.

Ha egy automatát további automaták R-szorzataként akarunk realizálni, a gyakorlatban fontos lehet, hogy ezt „minél kisebb", minél kevesebb állapottal bíró automaták felhasználásával tudjuk megtenni. Erre vonatkozóan érvényes a következő

16. tétel (F. GÉCSEG). *Egy* **A** *véges automata akkor és csak akkor ügyazható be izomorf módon adott, l-nél nem több állapottal bíró automaták egy R-szorzatába, ha van* **A**-*nak olyan* $T=\langle\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k\rangle$ *kongruens felosztás-halmaza, hogy minden* $i\,(=1, \ldots, k)$-*re a* π_i *felosztásnak a* π_i^* *felosztás egy osztályába eső osztályai számának maximuma l-nél nem nagyobb.*

Bizonyítás. A szükségesség bizonyítása céljából tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata izomorf módon beágyazható az $\mathbf{A}_i=(A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i)$ $(i=1, \ldots, k)$ automaták egy, a φ és ψ függvények által megadott $\bar{\mathbf{A}}=(\bar{A}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$ R-szorzatába és legyen $|A_i|\leqq l$ $(1\leqq i\leqq k)$. Ekkor **A** állapotai felfoghatók mint $a=(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k)$ $(a\in A;\ a_i\in A_i)$ alakú k-dimenziós vektorok. Az **A** automata π_i $(i=1, \ldots, k)$ felosztásait a következőképpen definiáljuk: Legyen $(a_1, \ldots, a_k)\equiv(a_1', \ldots, a_k')\,(\pi_i)$ akkor és csak akkor, ha $a_i=a_i'$ és $a_{i_r}=a_{i_r}'$, ahol a_{i_r} és a_{i_r}' az $(a_1, \ldots, a_k)$, ill. $(a_1', \ldots, a_k')$ elemeknek az $\mathbf{A}_i$-nél az R parciális rendezés mellett a nagyobb $\mathbf{A}_{j_r}$ automatába eső komponensei. Nyilvánvaló, hogy ily módon az $\bar{A}$ halmaz osztályozásaihoz jutottunk. Megmutatjuk, hogy π_i $(i=1, \ldots, k)$ kongruens felosztás. Legyen $a=(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k)$, $a'=(a_1', \ldots, a_i', \ldots, a_k')$, $a\equiv a'(\pi_i)$ és legyen $x(\in X)$ tetszőleges bemenő jel. Akkor $a_i=a_i'$ és $a_{i_r}=a_{i_r}'$ miatt a $\varphi(a_1, \ldots, a_k, x)=(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$ és $\varphi(a_1', \ldots, a_k', x)=(x_1', \ldots, x_i', \ldots, x_k')$ vektorokra $x_i=x_i'$ és $x_{i_r}=x_{i_r}'$ teljesül. Következésképpen, a

$$\delta(a, x)=(\delta_1(a_1, x_1), \ldots, \delta_i(a_i, x_i), \ldots, \delta_k(a_k, x_k))$$

és

$$\delta(a', x)=(\delta_1(a_1', x_1'), \ldots, \delta_i(a_i', x_i'), \ldots, \delta_k(a_k', x)_k')$$

állapotokra

$$\delta_i(a_i, x_i)=\delta_i(a_i', x_i')$$

és

$$\delta_{i_r}(a_{i_r}, x_{i_r})=\delta_{i_r}(a_{i_r}', x_{i_r}')$$

teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy $\delta(a, x)\equiv\delta(a', x)(\pi_i)$. Ezzel nyertük, hogy az **A** automata π_i $(i=1, \ldots, k)$ felosztásai valóban kongruens felosztások.

Megmutatjuk továbbá, hogy a π_i felosztásnak a π_i^* felosztás egy osztályba eső osztályai maximuma bármely $i\,(=1, \ldots, k)$ esetén l-nél nem nagyobb. Valóban, könnyen belátható, hogy a π_i^* felosztásnál az $a=(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k)$ és $a'=(a_1', \ldots, a_i', \ldots, a_k')$ állapotok akkor és csak akkor vannak egy osztályban, ha $a_{i_r}=a_{i_r}'$. Az (a állapotot tartalmazó) $\pi_i^*(a)$ osztályban levő π_i-beli osztályok száma pedig nem lehet több az $\mathbf{A}_i$ automata állapotainak számánál (mivel adott komponensekhez ennyiféle módon választható különböző a_i komponens), ez a szám pedig a

feltételezés szerint l-nél nem nagyobb. Ezzel a szükségesség bizonyítását befejeztük.

Megfordítva, az elegendőség bizonyítása céljából tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ automatának van a tételben megfogalmazott feltételeknek eleget tevő $T=\langle \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k \rangle$ kongruens felosztás-halmaza. Jelölje T_1 a $T \setminus \langle \pi_0 \rangle$ halmaz maximális elemeinek halmazát és általában, T_j a $T \setminus \langle \langle \pi_0 \rangle \cup T_1 \cup \ldots \cup T_{j-1} \rangle$ halmaz maximális elemeinek halmazát.

A T-beli kongruens felosztások segítségével megkonstruálunk olyan $\mathbf{A}_i=(A_i, X_i, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, k)$ kimenő jel nélküli automatákat, amelyeket alkalmas módon kimenő jellel bíró automatákká kiegészítve, olyan, a tételben megkívánt automatákhoz jutunk, amelyek egy R-szorzatába az $\mathbf{A}$ automata izomorf módon beágyazható.

Ha $\pi_i \in T_1$, akkor legyen A_i a π_i felosztáshoz tartozó osztályok halmaza, legyen $X_i=X$ és a δ_i átmenet-függvényre teljesüljön

$$\delta_i(\pi_i(a), x)=\pi_i(\delta(a, x)) \qquad (a \in A, x \in X).$$

Jelölje $M_i(a)$ $(i=1, \ldots, k)$ a $\pi_i^*(a)$ osztályba eső π_i-hez tartozó osztályok halmazát. Ha $\pi_i \notin T_1$ akkor A_i legyen tetszőleges olyan absztrakt halmaz, amelyre $|A_i|=\max_{a \in A} |M_i(a)|$ teljesül. Legyen továbbá ξ_i a π_i felosztás osztályai halmazának az A_i halmazba való olyan egyértelmű leképezése, amely minden $a(\in A)$-ra az $M_i(a)$ halmazon kölcsönösen egyértelmű. Ha pedig $\pi_i \in T_1$, akkor ξ_i a π_i felosztás osztályai halmazának önmagára való identikus leképezésével essék egybe.

Tetszőleges $\pi_j(\in T \setminus (T_1 \cup (\pi_0)))$ felosztáshoz tartozó $\mathbf{A}_j$ automata állapot-halmaza legyen az A_j absztrakt halmaz, legyen továbbá $X_j=A_{j_1} \times \ldots \times A_{j_e} \times X$, ahol A_m $(m=j_1, \ldots, j_e)$ a π_j felosztásnál nagyobb összes $\pi_m(\in T)$ felosztáshoz tartozó automata állapot-halmaza, a δ_j átmenet-függvényre pedig teljesüljön.

$$\delta_j(a_j, (a_{j_1}, \ldots, a_{j_e}, x))=\xi_j(\pi_j(\delta(a, x))) \qquad (x \in X, a_v \in A_v, v=j, j_1, \ldots, j_e)$$

abban az esetben, ha van olyan $a(\in A)$, hogy $\xi_v(\pi_v(a))=a_v$ $(v=j, j_1, \ldots, j_e)$, más esetben pedig legyen δ_j tetszőleges. Megmutatjuk, hogy ilyen $a(\in A)$ létezése esetén $\pi_j(a)$ a ξ_i-k $(i=1, \ldots, k)$ rögzítése után már egyértelműen meghatározott. Tegyük fel, hogy $a'(\in A)$-re is teljesül $\xi_v(\pi_v(a'))=a_v$ $(v=j, j_1, \ldots, j_e)$. Ha $\pi_m \in T_1(m \in \langle j_1, \ldots, j_e \rangle)$, akkor a ξ_m értelmezése miatt $a \equiv a'(\pi_m)$ teljesül. Tegyük fel, hogy $a \equiv a'(\pi_m)$ teljesülését már minden $m(\in \langle j_1, \ldots, j_e \rangle)$-re kimutattuk. Akkor $a \equiv a'(\pi_j^*)$ is teljesül, azaz $\pi_j(a), \pi_j(a') \in M_j(a)$. De ξ_j az $M_j(a)$ halmazon kölcsönösen egyértelmű, azért $\xi_j(a)=\xi_j(a')=a_j$ csak úgy állhat fenn, ha $\pi_j(a)=\pi_j(a')$. Ezzel megmutattuk, hogy a δ_j átmenet-függvény értelmezésében szereplő a $(\in A)$ állapot a π_j kongruenciától eltekintve egyértelműen meghatározott, ami (rögzített ξ_i $(1 \leqq i \leqq k)$ leképezések mellett) biztosítja δ_i definíciójának egyértelműségét.

Világos, hogy az $\mathbf{A}_i (i = 1, \ldots, k)$ automaták állapotainak száma l-nél nem nagyobb.

Értelmezzünk az $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}_i | i = 1, \ldots, k \rangle$ halmazon egy R parciális rendezést oly módon, hogy legyen

$$\mathbf{A}_m > \mathbf{A}_n \Leftrightarrow \pi_m > \pi_n \qquad (\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_n \in \mathfrak{A})$$

és tekintsük az $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ automatáknak az X, Y halmazokkal és a φ, ψ függvényekkel a következő módon megadott $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{A}, X, Y, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$ R-szorzatát: legyen

$$\varphi(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k, x) = (\ldots, (a_{j_1}, \ldots, a_{j_e}, x)(= x_j), \ldots),$$

ahol $a_{j_1}, \ldots, a_{j_e}$ az $(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k)$ vektornak az $\mathbf{A}_j$-nél nagyobb automatákban levő komponensei és legyen

$$\psi(a_1, \ldots, a_k, x) = \lambda(a, x),$$

ha van olyan $a (\in A)$, hogy $\xi_i(\pi_i(a)) = a_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, más esetekben pedig legyen $\psi(a_1, \ldots, a_k, x)$ tetszőleges.

Könnyen látható, hogy φ ilyen megválasztása mellett minden olyan $(a_1, \ldots, a_k)$ vektorra, amely $(\xi_1(\pi_1(a)), \ldots, \xi_k(\pi_k(a)))$ $(a \in A)$ alakban előáll,

$$\bar{\delta}((a_1, \ldots, a_k), x) = (\xi_1(\pi_1(ax)), \ldots, \xi_k(\pi_k(ax)))$$

teljesül.

Legyen ϑ az A halmaznak $\bar{A}$ ba való olyan leképezése, amely bármely $a (\in A)$-hoz a $(\xi_1(\pi_1(a)), \ldots, \xi_k(\pi_k(a)))$ vektort rendeli hozzá. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy a ϑ leképezés kölcsönösen egyértelmű. Valóban, legyen $\vartheta(a) = \vartheta(a')$ $(a, a' \in A; a \neq a')$ és legyen $\pi_j (\in T)$ az a felosztás, amelyre $a \not\equiv a'(\pi_j)$, de bármely $\pi_i (\in T; \pi_i > \pi_j)$-re $a \equiv a'(\pi_i)$. Ekkor $a \equiv a'(\pi_j^*)$ is teljesül. De ξ_j az $M_j(a)$ halmazon kölcsönösen egyértelmű, azért $a \not\equiv a'(\pi_j)$ miatt $\xi_j(\pi_j(a)) \neq \xi_j(\pi_j(a'))$, ami ellentmond a $\vartheta(a) = \vartheta(a')$ feltételnek. Ezzel egyszersmind az R-szorzat megadásában szereplő ψ függvény értelmezésének egyértelműségét is kimutattuk.

Legyen végül a és x az $\mathbf{A}$ automata tetszőleges állapota, ill. tetszőleges bemenő jele. Akkor

$$\vartheta(\delta(a, x)) = (\xi_1(\pi_1(ax)), \ldots, \xi_k(\pi_k(ax))) =$$

$$= \bar{\delta}((\xi_1(\pi_1(a)), \ldots, \xi_k(\pi_k(a))), x) = \bar{\delta}(\vartheta(a), x),$$

azaz a $\vartheta: A \to \bar{A}$ az $\mathbf{A}$-nak $\bar{\mathbf{A}}$-ba való A-izomorfizmusa. Ezzel a 16. tétel bizonyítását befejeztük.

A most bebizonyított tétel jól használható automaták R-szorzatokra nézve teljes rendszereinek vizsgálatánál.

19. Automaták speciális *R*-szorzatai. Az $\mathbf{A}_i=(A_i, X_i, \delta_i)(i=1, \ldots, n)$ kimenő jel nélküli automaták *direkt szorzatán* azt az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatát értjük, amelyre $A=A_1\times\ldots\times A_n$, $X=X_1\times\ldots\times X_n$, a δ átmenet-függvényre pedig bármely $(a_1, \ldots, a_n)\,(\in A)$ és $(x_1, \ldots, x_n)\,(\in X)$ esetén

$$\delta((a_1, \ldots, a_n), (x_1, \ldots, x_n))=(\delta_1(a_1, x_1), \ldots, \delta_n(a_n, x_n))$$

teljesül. Speciálisan, a közös X bemenő halmazzal bíró $\mathbf{A}_i=(A_i, X, \delta_i)$ kimenő jel nélküli automaták *A-direkt szorzatán* azt az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatát értjük, amelyre $A=A_1\times\ldots\times A_n$, a δ átmenet-függvényre pedig bármely $(a_1, \ldots, a_n)\,(\in A)$ és $x(\in X)$ esetén

$$\delta((a_1, \ldots, a_n), x)=(\delta_1(a_1, x), \ldots, \delta_n(a_n, x))$$

teljesül.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ Mealy-féle automaták olyanok, hogy $\mathbf{A}_1$ kimenő halmaza egybeesik az $\mathbf{A}_1$ bemenő halmazával, azaz legyen $\mathbf{A}_1=(A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$ és $\mathbf{A}_2=(A_1, Y_1, Y_2, \delta_2, \lambda_2)$. Az $\mathbf{A}_1$-nek $\mathbf{A}_2$-vel való *szuperpozícióján* értjük azt az $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ automatát, amelyre $A=A_1\times A_2$, $X=X_1$, $Y=Y_2$ a δ és λ függvényekre pedig bármely $(a_1, a_2)\,(\in A)$ és $x\,(\in X)$ esetén a

$$\delta((a_1, a_2), x)=(\delta_1(a_1, x), \delta_2(a_2, \lambda_1(a_1, x))),$$

ill.

$$\lambda((a_1, a_2), x)=\lambda_2(a_2, \lambda_1(a_1, x))$$

definíciós összefüggések teljesülnek.

A szuperpozíció fogalma természetes módon általánosítható tetszőleges, de véges sok $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ automata esetére. Ha $n>2$ akkor *általánosított szuperpozícióról* beszélünk.

Az $\mathbf{A}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ automatát az $\mathbf{A}'=(A', X', Y', \delta', \lambda')$ automatánál *egyszerűbbnek* nevezzük, ha $|A|<|A'|$. Tetszőleges automatának két egyszerűbb automata szuperpozíciójaként való előállíthatóságát illetően M. Yoely [46] és K. Čulik [9] egymástól függetlenül lényegében ugyanarra az eredményre jutottak:

17. tétel. *Egy* $\mathbf{A}$ *Mealy-féle automata akkor és csak akkor izomorf nála egyszerűbb két automata szuperpozíciójával, ha van* $\mathbf{A}$*-nak olyan nem triviális kongruens felosztása, amelynél bármely két osztály számossága megegyezik.*

Ennek a tételnek a bizonyítását a 16. tétel bizonyításának ismeretében az olvasó is minden nehézség nélkül elvégezheti. Elegendő csupán annyit megjegyeznünk, hogy a szuperpozícióban szereplő első automata kimenő jeleiként a $(\pi(a), x)$ párokat választhatjuk, ahol π az $\mathbf{A}$ automatának a tételben megadott tulajdonságú kongruens felosztása, a és x pedig $\mathbf{A}$ tetszőleges állapota, ill. bemenő jele.

Megjegyezzük, hogy az I. rész 4. pontjában fellépő automatakonstrukciók nem mások, mint automaták szuperpozíciói. Így az alábbi tétel bizonyításához annyit kell csak megmutatnunk, hogy adott véges X halmaz esetén nincs véges sok olyan véges automata, amelyek általánosított szuperpozíciójaként minden olyan véges automata előállna, amely az $F(X)$ szabad félcsoport valamely önmagára való és véges automata által indukálható leképezését indukálná.

18. tétel (F. GÉCSEG [12]). *Ha* $|X| \geqq 2$, *akkor sem a* H_X *félcsoportnak, sem a* G_X *csoportnak nincs véges generátorrendszere.*

20. Automaták *R*-teljes rendszerei. Ha az automaták teljes, homomorfan teljes és izomorfan teljes rendszerei definíciójában tetszőleges automata-szorzatok helyett csupán R-szorzatokra szorítkozunk, akkor az automaták *R-teljes*, *homomorfan R-teljes* és *izomorfan R-teljes rendszerei* fogalmához jutunk.

A 17. pontban bebizonyított tételek általában nem vihetők át R-teljes, homomorfan R-teljes és izomorfan R-teljes rendszerekre. Érvényes azonban a 15. tételnek megfelelő

19. tétel (F. GÉCSEG). *Véges automaták egy rendszere akkor és csak akkor R-teljes, ha homomorfan R-teljes.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha véges automaták egy $\mathfrak{A}$ rendszere homomorfan R-teljes, akkor R-teljes is.

Megfordítva, legyen $\mathfrak{A}$ véges automaták egy R-teljes rendszere. Megmutatjuk, hogy bármely véges $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta, \lambda)$ automatához megadható $\mathfrak{A}$-beli automaták olyan R-szorzata, amely tartalmaz a $\mathbf{B}$-re A-homomorf módon leképezhető A-részautomatát. Ha a $\mathbf{B}$ automata nem összefüggő, akkor bemenő halmazához vegyünk hozzá egy új x' jelet úgy, hogy $\mathbf{B}$-ből egy összefüggő $\mathbf{B}'$ automata álljon elő. Világos, hogy ezt megtehetjük és $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}'$-nek X-részautomatája lesz. Tekintsük ezután a $\mathbf{B}' = (B, X \cup \langle x' \rangle, \delta')$ kimenő jel nélküli automata által indukált $\varphi_{B'}$ leképezést. Minthogy $\mathbf{B}'$ kimenő jel nélküli automata, azért a $\varphi_{B'}$-t indukáló automaták közül minimális és így az 5. pont szerint a $\varphi_{B'}$-t indukáló automaták mindegyike tartalmaz a $\mathbf{B}'$-re A-homomorf módon leképezhető A-részautomatát. De mivel az $\mathfrak{A}$ rendszer R-teljes, azért létezik $\mathfrak{A}$-beli automaták olyan $\mathbf{A}$ R-szorzata, amely a $\varphi_{B'}$ leképezést indukálja, azaz, az előbb mondottak miatt $\mathbf{A}$ tartalmaz a $\mathbf{B}'$-re A-homomorf módon leképezhető A-részautomatát. Világos, hogy $\mathbf{A}$-ból az x' bemenő jel elhagyása után előálló $\mathbf{A}'$-nak, mint kimenő jel nélküli automatának van $\mathbf{B}$-re, mint ugyancsak kimenő jel nélküli automatára A-homomorf módon leképezhető A-részautomatája. Mármost az $\mathbf{A}'$ R-szorzat megadásában szereplő ψ függvényt úgy megválasztva, hogy

tetszőleges $b(\in B)$ állapotnak a mondott homomorfizmusnál vett minden $a=(a_1, \ldots, a_k)$ ősére bármely $x(\in X)$ bemenő jel esetén $\psi(a_1, \ldots, a_k, x)=$ $=\lambda(b, x)$ teljesüljön, a kívánt A-homomorfizmust kapjuk. Ezzel a 19. tételt bebizonyítottuk.

A 17. pontban megmutattuk, hogy a véges automaták halmazának léteznek teljes, homomorfan teljes, ill. teljes *véges* rendszerei. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy hasonló állítás R-teljes, homomofan R-teljes és izomorfan R-teljes rendszerekre nem igaz. Ennek kimutatásához előkészületeket végzünk.

Legyen $X=\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ tetszőleges véges halmaz és tekintsük az $\mathbf{A}=(A, X, X, \delta, \lambda)$ automatát. Az $\mathbf{A}$ automatából kiindulva bármely (a, x_i) $(a\in A, x_i\in X)$ párra definiálunk egy $\mathbf{A}^{(a, i)}$ iniciális automatát a következő módon: Legyen

$$\mathbf{A}^{(a, i)}=\left(\langle ax_i^k | k=0, 1, \ldots\rangle, a, \langle x_i\rangle, X, \delta', \lambda'\right),$$

ahol a δ' és λ' függvények az (ax^k, x_i) $(k=0, 1, \ldots; x_i\in X)$ párokon [8] essenek egybe a δ és λ függvényekkel.

6. lemma (F. GÉCSEG [12]). *Ha az* $\mathbf{A}=(A, X, X, \delta, \lambda)$ *automata az* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_r$ *automaták egy R-szorzatával A-izomorf, akkor bármely* $\mathbf{A}^{(a, i)}$ $(a\in A, x_i\in X)$ *automatának van olyan* $T'=\langle\pi_k' | k=0, 1, \ldots, s\rangle$ *kongruens felosztás-halmaza, hogy bármely* $\pi_i'(\in T')$ *felosztásnak a* $\pi_k'^*$ *felosztás bármely osztályába eső osztályainak száma nem nagyobb az* $l=\max\limits_{1\leqq j\leqq r}|A_j|$ *számnál és a* $\bigcap\limits_{k=0}^{s}\pi_k'$ *felosztás triviális.*

Bizonyítás. A 16. tétel bizonyításában követett úton belátható, hogy az $\mathbf{A}$ automatának van olyan $T=\langle\pi_k | k=0, 1, \ldots, r\rangle$ kongruens felosztás-halmaza, hogy bármely $\pi_j(\in T)$ felosztásnak a π_j^* felosztás bármely osztályába eső osztályainak száma $k_j=|A_j|$ és így $k_j\leqq l$.

Legyen π_j' $(j=0, 1, \ldots, r)$ az $\mathbf{A}^{(a, i)}$ automatának az a felosztása, amelyre bármely $a', a''(\in A^{(a, i)})$ esetén

$$a'\equiv a''(\pi_j')\Leftrightarrow a'\equiv a''(\pi_j)$$

teljesül. Más szóval, a π_j' felosztás osztályai a π_j felosztás osztályainak az $\mathbf{A}^{(a, i)}$ automata $A^{(a, i)}$ állapot-halmazával való metszetei. Ha most a $\langle\pi_j' | j=0, 1, \ldots, r\rangle$ felosztás-halmaz elemeit osztályokba soroljuk oly módon, hogy egy osztályba az egymással egybeeső felosztások kerüljenek és minden osztályból csak egy felosztást tartunk meg, akkor a kapott $T'=\langle\pi_k' | k=0, 1, \ldots, s\rangle$ felosztás-halmaz eleget tesz a 6. lemmában megadott feltételeknek.

[8] Itt $ax_i^0=a$ és $k=1, 2, \ldots$ esetén $x_i^k=x_ix_i\ldots x_i$, $(|x_i^k|=k)$.

Érvényes a következő

20. tétel (F. GÉCSEG [13]). *A véges automaták halmazában nincs véges R-teljes rendszer.*

Bizonyítás. Legyen $\langle \mathbf{B}_j | j=1, \ldots, v\rangle$ véges automaták tetszőleges véges halmaza. Legyen továbbá $l = \max\limits_{1 \leqq j \leqq v} |B_j|$, $p(>l)$ tetszőleges prímszám és tekintsük az $1, \ldots, n$ elemek egy (az identikustól különböző) $\begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ 1' \ldots n' \end{pmatrix}$ permutációját.

Legyen végül $\mathbf{A}=(A, a_0, X, X, \delta, \lambda)$ olyan iniciális Mealy-féle automata, amelyre $A=\langle a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}\rangle$, $|X|=n \geqq 2$, továbbá

$$\delta(a_k, x_i) = \begin{cases} a_{k+1} & \text{ha } 0 \leqq k \leqq p-2, \\ a_0 & \text{ha } k=p-1 \end{cases}$$

és

$$\lambda(a_k, x_i) = \begin{cases} x_i & \text{ha } 0 \leqq k \leqq p-2, \\ x_{i'} & \text{ha } k=p-1. \end{cases}$$

Az $\mathbf{A}$ automata által indukált leképezést jelölje γ. Megmutatjuk, hogy a γ leképezést indukáló egyetlen $\mathbf{B}=(B, b_0, X, X, \delta', \lambda')$ véges automata sem A-izomorf a $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_v$ automaták egyetben R-szorzatával sem.

Tekintsük a $\mathbf{B}$ automata összes olyan $b(\in B)$ állapotait, amelyek valamilyen u hosszúságú $q=x_i \ldots x_i (x_i \in X)$ bemenő szóval előállnak a $b=b_0 q_u$ alakban. Mivel $\mathbf{B}$ véges, azért van olyan q_u, $q_v (\in F(X); u<v)$, hogy $b_0 q_u = b_0 q_v$ teljesül. Legyen v rögzített u mellett a legkisebb ilyen tulajdonságú szám és tekintsük a $\mathbf{B}^{(b_0 q_u, i)}$ automatát. Világos, hogy $\mathbf{B}^{(b_0 q_u, i)}$ állapotainak száma $v-u$, másrészt a $\mathbf{B}$ automata $b_0 q_u$ állapota ekvivalens az $\mathbf{A}$ automata $a_0 q_u$ állapotával. De az $\mathbf{A}$ automata $a_0 q_w$ és $a_0 q_{w'}$ állapotai akkor és csak akkor ekvivalensek egymással, ha $w \equiv w' (\mathrm{mod}\, p)$, következésképpen $u \equiv v (\mathrm{mod}\, p)$, azaz a $\mathbf{B}^{(b_0 q_u, i)}$ automata állapotainak száma tp, ahol t valamilyen természetes szám.

Ezzel nyertük, hogy $\mathbf{B}^{(b_0 q_u, i)}$, mint kimenő jel nélküli automata A-izomorf azzal a $\mathbf{C}=(C, c_0, \langle x_i\rangle, \delta'')$ kimenő jel nélküli automatával, amelyre

$$C = \langle c_0, c_1, \ldots, c_{tp-1}\rangle; \; t \geqq 1$$

és

$$\delta''(c_j, x_i) = \begin{cases} c_{j+1} & \text{ha } 0 \leqq j \leqq tp-2, \\ c_0 & \text{ha } j=tp-1 \end{cases}$$

teljesül.

A $\mathbf{C}$ automata kongruens felosztásai és a tp szám osztói között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető úgy, hogy tp bármely

t_i osztójának megfelelő π_i kongruens felosztás osztályainak száma t_i. Valóban, a **C** automata tetszőleges π_i kongruens felosztása osztályai f_i számosságára és az osztályok t_i számára $f_i|tp$ és $t_i|tp$ teljesül. Továbbá, nem nehéz megmutatni, hogy a c_k, $c_l(\in C)$ állapotokra

$$c_k \equiv c_l(\pi_i) \Leftrightarrow k \equiv l \pmod{t_i}.$$

Megfordítva, ha $t_i|tp$ és π_i a **C** automata azon felosztását jelöli, amelyre $c_k \equiv c_l(\pi_i) \Leftrightarrow k \equiv l \pmod{t_i}$, akkor π_i kongruens felosztás és π_i osztályainak száma t_i. Egyidejűleg azt is nyertük, hogy a **C** automata π_i, π_j kongruens felosztásaira $\pi_i > \pi_j \Leftrightarrow t_i|t_j$ teljesül.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a **B** automatára a 6. lemma konklúziói nem teljesülnek, amivel tételünk is bizonyítást nyer. Legyen e célból $T = \langle \pi'_0, \pi'_1, \ldots, \pi'_s \rangle$ a **C** automata kongruens felosztásainak tetszőleges olyan halmaza, amely tartalmazza **C**-nek azt a π'_0 kongruens felosztását, amelynél bármely két állapot egy osztályba esik. Mint már korábban, jelölje T_1 a $T \setminus \langle \pi'_0 \rangle$ halmaz maximális elemeinek halmazát és általában T_i $(i \geqq 2)$ a $T \setminus \langle \langle \pi'_0 \rangle \cup T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_{i-1} \rangle$ halmaz maximális elemeinek halmazát. Tegyük fel, hogy bármely $\pi'_i(\in T \setminus \langle \pi'_0 \rangle)$-re $g_i = \frac{f_i^*}{f_i} < p$ teljesül, ahol f_i^* a $\pi_i'^*$ felosztásban fellépő osztályok számossága, azaz hogy a $\pi_i^{*\prime}$ felosztás bármely osztályában levő π'_i-beli osztályok g_i száma kisebb p-nél. Megmutatjuk, hogy ekkor lehet találni a **C** automatának olyan nem triviális π' felosztását, hogy $\pi'_i \geqq \pi'$ teljesül bármely $\pi'_i(\in T)$-re, azaz a $\pi'_0 \cap \pi'_1 \cap \ldots \cap \pi'_s$ metszet nem triviális. Valóban, π'-ként a t számnak megfelelő felosztást választhatjuk. Ennek kimutatását a T_i halmazok indexei szerinti teljes indukcióval végezzük. Ha $\pi'_i \in T_1$, akkor $t_i|tp$ és $t_i < p$ miatt $t_i|t$, következésképpen, $\pi'_i > \pi'$. Tegyük fel, hogy az állítást már minden j-nél kisebb indexre bebizonyítottuk és legyen $\pi'_j \in T_j$. Akkor az indukció-feltevés szerint $\pi_j'^* \geqq \pi'$, következésképpen, a $\pi_j'^*$ felosztás osztályai t_j^* számára $t_j^*|t_j$ teljesül, azaz $f_j^* = np$. Továbbá, $g_j|np$ és $g_j < p$, tehát $p|f_j$ és így $t_j|t$, más szóval $\pi'_j \geqq \pi'$. Mivel a **C** automata a $\mathbf{B}^{(b_0 q_{u,i})}$ automatával A-izomorf, azért ellentmondásba kerültünk a 6. lemma konklúziójával. Ezzel a 20. tételt bebizonyítottuk.

A 20. tételből a 19. tétel felhasználásával közvetlenül adódik, hogy a véges automaták halmazában nincs véges homomorfan R-teljes rendszer és (annál inkább) véges izomorfan R-teljes rendszer sem.

A 20. tétel bizonyításából látható, hogy ha a bizonyításban szereplő $\mathbf{B}_j$ $(j = 1, \ldots, v)$ véges automaták közös X bemenő és kimenő halmazzal rendelkeznek és az $F(X)$ szabad félcsoport önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését indukálják, továbbá a $\langle \mathbf{B}_j | j = 1, \ldots, v \rangle$ halmaz bármely $\mathbf{B}_j$ automatával együtt azt a $\mathbf{B}_k$ automatát is tartalmazza,

amely a $\mathbf{B}_j$ automata által indukált leképezés inverzét indukálja, akkor a 18. tétel bizonyítását nyerjük.

21. Automata-leképezések közelítő előállítása. A diszkrét automatákkal gyakorlatilag csak véges hosszúságú bemenő szavak leképezéseit tudjuk megvalósítani. Ezért az automaták teljes rendszereinél ún. topologikusan teljes rendszerek keresésére szorítkozhatunk.

Legyen X és Y tetszőleges két (nem üres) halmaz. Az $F(X)$ szabad félcsoportnak az $F(Y)$ szabad félcsoportba való automata-leképezései halmazában *parciális metrikát* definiálunk a következő — CSÁKÁNY BÉLA által bevezetett (l. [8]) — módon: Akkor mondjuk, hogy a $\varphi: F(X) \to F(Y)$ és $\psi: F(X) \to F(Y)$ automata-leképezések *távolsága* $1/n$, ha bármely n-nél kisebb hosszúságú $p(\in F(X))$ szóra $\varphi(p) = \psi(p)$ teljesül, de van olyan n hosszúságú $q(\in F(X))$ szó, hogy $\varphi(q) \neq \psi(q)$.

Akkor mondjuk, hogy automaták egy $\mathfrak{A}$ rendszere *topologikusan teljes (topologikusan R-teljes)*, ha bármely φ automata-leképezéshez és bármely n természetes számhoz megadható $\mathfrak{A}$-beli automaták olyan szorzata (R-szorzata), hogy e szorzat (R-szorzat) által indukált ψ leképezésnek a φ leképezéstől való távolsága $1/n$-nél nem nagyobb.

Világos, hogy automaták minden teljes (R-teljes) rendszere topologikusan is teljes (R-teljes). Következésképpen, a véges automaták halmazában van véges topologikusan teljes rendszer.

A 20. tétellel ellentétben topologikus R-teljes rendszerekre érvényes az alábbi eredmény, amelyet, akárcsak az utána következő két tételt, bizonyítás nélkül közlünk:

21. tétel (F. GÉCSEG [14]). *A véges automaták halmazában létezik véges topologikusan R-teljes rendszer.*

Megjegyezzük, hogy a véges automaták halmazában van olyan véges topologikusan R-teljes rendszer is, amely két állapottal bíró kimenő jel nélküli automatákból áll.

Legyen X tetszőleges (nem üres) véges halmaz. Az $F(X)$ szabad félcsoport összes önmagára való kölcsönösen egyértelmű automata-leképezései a leképezések szokásos szorzására és a fenti parciális metrikára nézve egy S_X topologikus csoportot alkotnak.

22. tétel (B. CSÁKÁNY és F. GÉCSEG [8]). *Ha* $|X| \geqq 2$, *akkor az* S_X *topologikus csoportnak nincs véges bázisa.*

23. tétel (B. CSÁKÁNY és F. GÉCSEG [8]). *Az* S_X *topologikus csoportnak van minimális bázisa.*

(Az S topologikus csoport egy H bázisát minimálisnak mondjuk, ha bármely $h(\in H)$ elemet elhagyva a $H \setminus h$ halmaz már nem bázisa S-nek.)

Végül megjegyezzük, hogy mindeddig nyitott kérdés, vajon az $F(X)$ szabad félcsoport összes önmagára való kölcsönösen egyértelmű automata-leképezései G'_X csoportjának, ill. $F(X)$ összes önmagára való kölcsönösen egyértelmű és véges automaták által indukálható automata-leképezései G_X csoportjának van-e minimális (nem topologikus) generátorrendszere.

III. Automaták és félcsoportok

Az automaták *algebrai* elméletének kialakulása az elmélet egy új fejezettel való gazdagodását eredményezte. Nevezetesen, az automaták tisztán algebrai fogalma lehetővé és természetessé tette, hogy az automatához további algebrai struktúrákat (félcsoportokat, csoportokat) rendeljünk hozzá, majd az automaták és a hozzájuk különféle módon rendelt algebrai struktúrák kapcsolatát algebrai vizsgálat tárgyává tegyük. Ilyen jellegű vizsgálatok már — az algebrai elmélet kialakítása szempontjából alapvető — M. O. RABIN és D. SCOTT [36], továbbá V. M. GLUSKOV [19] dolgozatokban is fellépnek.

Mivel a csoport- és félcsoportelméleti kutatások már előrehaladottabb stádiumban vannak, azért a most említett vizsgálatoktól azt várnánk, hogy azok segítséget nyújtsanak az automaták vizsgálatában, amennyiben, egy automatához rendelt félcsoportok és csoportok ismeretéből következtethetnénk az illető automata szerkezetére és viselkedésére. Egyelőre azonban az idevágó eredmények többsége éppen az ellenkező irányban szolgáltat felvilágosítást, ti. egy automata ismeretében az automatához rendelt algebrai struktúrákról ad információt.

Megjegyezzük, hogy az automaták és a hozzájuk rendelt algebrai struktúrák kapcsolatainak vizsgálatában egyrészt kimenő jel nélküli automatákra szokás szorítkozni, másrészt igen sokszor automatákról kváziautomatákra lehet és célszerű áttérni, és a szerzők egy része él is ezzel az általánosítási lehetőséggel.

Egy automatához többféle módon lehetséges további algebrai struktúrát hozzárendelni és az irodalomban több ilyen hozzárendelést tanulmányoztak. Ebben a részben mi ezekkel a vizsgálatokkal fogunk foglalkozni. A tárgyalás megkezdése előtt azonban néhány definíciót adunk meg.

Egy $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatát a *bemenetekre nézve redukáltnak* nevezünk, ha bármely $x_1, x_2 (\in X)$ esetén

$$\bigwedge_{a \in A} a[\delta(a, x_1) = \delta(a, x_2)] \Rightarrow x_1 = x_2$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy $a_0 (\in A)$ az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata *generátoreleme*, ha bármely $a (\in A)$ állapothoz van olyan $p (\in F(X))$, hogy

$a = a_0 p$. Az **A** automatát *ciklikusnak* nevezzük, ha van generátoreleme és *erősen összefüggőnek* mondjuk, ha **A** minden állapota generátoreleme **A**-nak. Akkor mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata *kommutatív*, ha bármely $a(\in A), p, q(\in F(X))$ esetén $apq = aqp$ teljesül.

Megjegyezzük végül, hogy ebben a részben így már az előbbi definíciókban is $F(X)$ mindig az X halmaz által generált *egységelem nélküli* szabad félcsoportot fogja jelenteni, továbbá, az itt nem definiált félcsoportelméleti és általános algebrai fogalmakra vonatkozóan az A. H. CLIFFORD és G. B. PRESTON [7],valamint G. BIRKHOFF [3] könyvekre utalunk.

22. Az automata félcsoportja. Bármely $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata esetén az egységelem nélküli $F(X)$ szabad félcsoportbeli

$$p \equiv q(\varrho(A)) \Leftrightarrow \bigwedge_{a \in A} a[ap = aq] \qquad (p, q \in F(X))$$

kongruencia-relációt az **A** automata által indukált kongruencia-relációnak nevezzük, a hozzá tartozó $F(X) \setminus \varrho(A)$ faktor-félcsoportot pedig az **A** *automata félcsoportjának* mondjuk és $S(A)$-val jelöljük (l. J. R. MYHILL eredményei a [36] dolgozatban, továbbá V. M.GLUSKOV [19], [20]). Megjegyezzük, hogy $S(A)$-t a továbbiakban mint absztrakt félcsoportot fogjuk tekinteni. Másrészről azt mondjuk, hogy az **A** automata egy S félcsoporthoz tartozik, ha az $S(A) \approx S$ izomorfia fennáll. Nyilvánvaló, hogy egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata esetén az $S(A)$ félcsoport úgy is megadható, hogy vesszük az A állapot-halmaz összes η_x: $a \to \delta(a, x)$ $(a \in A, x \in X)$ alakú önmagába való leképezései által generált félcsoportot.

Ismeretes, hogy bármely félcsoport fellép valamilyen automata félcsoportjaként. Valóban, egy tetszőleges S félcsoport esetén tekintsük azt az $\mathbf{A}_S = (A, X, \delta)$ automatát, amelyre A és X az $|A| = O(\bar{S})$ és $|X| = O(S)$ feltételeket kielégítő tetszőleges halmazok[9], a δ átmenetfüggvényre pedig

$$\delta(a, x) = f(f^{-1}(a) g^{-1}(x)) \qquad (a \in A, x \in X)$$

teljesül, ahol f és g az $\bar{S}$ félcsoportnak A-ra, ill. az S félcsoportnak X-re való valamely kölcsönösen egyértelmű leképezései. Világos, hogy ez a konstrukció független az f és g leképezések megválasztásától, így az $\mathbf{A}_S$ automatát a kiindulási S félcsoport izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározza. Könnyen belátható továbbá, hogy $S(A_S) \approx S$ és $\mathbf{A}_S$ a bemenetekre nézve redukált. Ha pedig S egységelemes, akkor az $\mathbf{A}_S$

[9] Bármely S félcsoportra jelölje $O(S)$ az S rendjét és legyen az $S\bar{S}$-ből az egységelem szokásos (külső) adjunkciójával előálló félcsoport, ha S-nek nincs egységeleme, ill. legyen $\bar{S} = S$ abban az esetben, ha S egységelemes.

automata ciklikus, mégpedig, generátoreleméül választható pl. az $f(e)$ ($\in A$) állapot, ahol e az S félcsoport egységelemét jelöli.

Könnyű belátni, hogy egymással izomorf automaták félcsoportjai is izomorfak. Megfordítva azonban, adott félcsoporthoz általában egymással nem izomorf automaták egy egész osztálya tartozik. Ily módon az automaták egy osztályozásához juthatunk el, egy osztályba sorolva azokat az automatákat, amelyek egy és ugyanazon félcsoporthoz tartoznak. Az automaták halmazának további, az előbbinél durvább osztályozásához juthatunk el, ha egy osztályba soroljuk azokat az automatákat, amelyek a félcsoportok valamely osztályozásában egy-egy félcsoport-osztályhoz tartozó félcsoporthoz tartoznak. Bizonyos típusú félcsoport-osztályokhoz tartozó automata-osztályok leírásával foglalkozik L. N. SEVRIN [38].

A következőkben az automaták félcsoportjára vonatkozóan néhány általános megjegyzést teszünk.

Nem nehéz példát találni arra, hogy egy automatának valamely másik automatába való izomorf beágyazhatóságából nem következik hasonló beágyazhatóság az automaták félcsoportjaira. Valóban (l. [34]), tekintsük az

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	1	0	3	2	5	8	7	10	9	4	11	6
y	2	3	0	1	6	11	8	5	10	7	4	9

automatát és vegyük **A**

A′	0	1	2	3
x	1	0	3	2
y	2	3	0	1

részautomatáját. Könnyen belátható, hogy $S(A)$ a kvaternió-csoport, $S(A')$ pedig a Klein-féle négyes-csoport és világos, hogy az utóbbi nem ágyazható be izomorf módon az előbbibe. Érvényesek viszont a következő megállapítások: Ha egy **A** automata izomorf módon beágyazható egy **B** automatába, akkor az $S(A)$ félcsoport az $S(B)$ félcsoport egy részfélcsoportjának homomorf képe. Speciálisan, ha az automaták állapot-halmaza közös és a beágyazás A-izomorf, akkor $S(A)$ izomorf $S(B)$ egy részfélcsoportjával (l. [34]).

23. Automaták direkt szorzata és félcsoportok. Abból, hogy egy **A** automata az $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ automaták direkt szorzata, nem következik $S(A) \approx S(A_1) \otimes \ldots \otimes S(A_n)$. Valóban, tekintsük az

$\mathbf{A}_1$	a_0	a_5
x	a_5	a_0

és

$\mathbf{A}_2$	b_1	b_2	b_3	b_4
y	b_2	b_3	b_4	b_3

automatákat. Az

A	1	2	3	4	5	6	7	8
z	6	7	8	7	2	3	4	3

automata izomorf az $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ automaták $\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2$ direkt szorzatával, mégpedig az a (φ, ψ) leképezés-pár, amelyre φ bármely (a_i, b_k) $(i=0, 5;\ k=1, 2, 3, 4)$ párhoz a $\frac{4}{5} i+k$ természetes számot rendeli hozzá, ψ-re pedig $\psi((x, y))=z$ teljesül, máris a kívánt izomorfizmus. Másrészt a megfelelő félcsoportokra nézve nyerjük[10], hogy

$S(A_1)$	$C[x]$	$C[x^2]$
$C[x]$	$C[x^2]$	$C[x]$
$C[x^2]$	$C[x]$	$C[x^2]$

$S(A_2)$	$C[y]$	$C[y^2]$	$C[y^3]$
$C[y]$	$C[y^2]$	$C[y^3]$	$C[y^2]$
$C[y^2]$	$C[y^3]$	$C[y^2]$	$C[y^3]$
$C[y^3]$	$C[y^2]$	$C[y^3]$	$C[y^2]$

és emellett $S(A) \approx S(A_2)$. Világos tehát, hogy $S(A) \approx S(A_1) \otimes S(A_2)$ nem teljesül. Teljes általánosságban csak a következőt állíthatjuk:

24. tétel (I. Peák [34]). *Ha az* $\mathbf{A}$ *automata az* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *automaták direkt szorzata, akkor* $S(A)$ *az* $S(A_1), \ldots, S(A_n)$ *félcsoportok szubdirekt szorzata.*

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata az $\mathbf{A}_i=(A_i, X_i, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, n)$ automaták direkt szorzata. Akkor bármely $p(\in F(X))$ bemenő szó megadható a

$$p = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})(x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}) \ldots (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \tag{13}$$

alakban, ahol bármely $j\ (=1, \ldots, k)$ esetén $(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}) \in X$. Tekintsük azt a leképezést, amely a (13)-ban megadott $p(\in F(X))$ szóhoz az $F(X_1) \otimes \ldots \otimes F(X_n)$ félcsoport

$$(x_1^{(1)} x_1^{(2)} \ldots x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(1)} x_n^{(2)} \ldots x_n^{(k)})$$

elemét rendeli hozzá. Világos, hogy ennél a leképezésnél az $F(X_i)$-beli $x_i^{(1)} x_i^{(2)} \ldots x_i^{(k)}$ szavak hossza minden $i\ (=1, \ldots, n)$-re megegyezik. Ily módon az $F(X)$ szabad félcsoportnak az $F(X_1) \otimes \ldots \otimes F(X_n)$ direkt szorzat egy részhalmazára való olyan

$$p \to (p_1, \ldots, p_n) \qquad (p \in F(X);\ p_i \in F(X_i)) \tag{14}$$

[10] A továbbiakban egy $\mathbf{A}=(A, x, \delta)$ automata esetén az $S(A)$ félcsoport elemeit mint az $F(X)$ félcsoportnak a $\varrho=\varrho(A)$ osztályozásához tartozó osztályait adjuk meg. Ily módon $S(A)$ elemeire a C, C_ϱ, $C[p]$, $C_\varrho[p]$ $(p \in F(X))$ jelöléseket használjuk, ahol $C[p]$ vagy $C_\varrho[p]$ a $p(\in F(X))$ által reprezentált osztályt jelöli.

leképezéséhez jutottunk, amely azokból és csak azokból a $(p_1, \ldots, p_n)$ $(p_i \in F(X_i))$ vektorokból áll, amelyek a $|p_1| = \ldots = |p_n|$ feltételt kielégítik. Könnyen belátható, hogy a (14) leképezés $F(X)$ izomorfizmusa $F(X_1) \otimes \ldots \otimes F(X_n)$-be, másrészt, ha a (14) leképezésben még

$$q \to (q_1, \ldots, q_n) \qquad (q \in F(X); q_i \in F(X_i)),$$

akkor

$$p \equiv q(\varrho(A)) \Leftrightarrow \underset{i=1,\ldots,n}{\forall} i[p_i \equiv q_i(\varrho(A_i))]. \tag{15}$$

Tekintsük most azt a

$$C_\varrho[p] \to (C_{\varrho_1}[p_1], \ldots, C_{\varrho_n}[p_n]) \qquad (p \in F(X); p_i \in F(X_i)) \tag{16}$$

leképezést, ahol a $(p_1, \ldots, p_n)$ $(\in F(X_1) \otimes \ldots \otimes F(X_n))$ vektor a $p(\in F(X))$ szó képe a (14) leképezésnél. Mivel (14) az $F(X)$ szabad félcsoportnak $F(X_1) \otimes \ldots \otimes F(X_n)$-be való izomorfizmusa, azért (15) miatt könnyen adódik, hogy a (16) leképezés az $S(A)$ félcsoportnak az $S(A_1) \otimes \ldots$ $\ldots \otimes S(A_n)$ direkt szorzatba való izomorf leképezése.

A bizonyítás teljessé tételéhez még azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges rögzített $i\,(=1, \ldots, n)$ esetén bármely $C_{\varrho_i}(\in S(A_i))$ elemhez található olyan $C_\varrho(\in S(A))$ elem, amelynek a (16) leképezés által szolgáltatott képe i-edik komponense megegyezik az adott C_{ϱ_i}-vel. Ilyen C_ϱ megadása céljából legyen $p_i(\in F(X_i))$ tetszőleges olyan szó, amelyre $C_{\varrho_i} = C_{\varrho_i}[p_i]$ teljesül és legyenek $p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n$ rendre az $F(X_1), \ldots, F(X_{i-1}), F(X_{i+1}), \ldots, F(X_n)$ szabad félcsoportok olyan szavai, amelyek mindegyikének hossza megegyezik a p_i szó hosszával. Legyen továbbá $p(\in F(X))$ olyan szó, amelyre az előbbi $p_1, \ldots, p_n$ szavakkal együtt (14) teljesül. Akkor a $(C_{\varrho_1}[p_1], \ldots, C_{\varrho_n}[p_n])$ vektor a $C_\varrho[p]$ $(\in S(A))$ elem képe a (16) leképezésnél és $C_{\varrho_i} = C_{\varrho_i}[p_i]$. Ezzel nyertük, hogy az $S(A)$ félcsoport az $S(A_1), \ldots, S(A_n)$ félcsoportok szubdirekt szorzata, amit bizonyítanunk kellett.

A most bebizonyított tételből közvetlenül adódik a következő egyszerű, de gyakran hasznos

25. tétel (I. Peák [34]). *Ha az* $\mathbf{A}_i = (A_i, X_i, \delta_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *automaták direkt szorzataként előálló* $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ *automatának van a* $\underset{a \in A}{\forall} a[\delta(a, x) = a]$ *feltételt kielégítő* $x(\in X)$ *bemenő jele, akkor* $S(A) \approx$ $\approx S(A_1) \otimes \ldots \otimes S(A_n)$.

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy a tétel feltételei mellett a (16) leképezés az $S(A)$ félcsoportnak az $S(A_1) \otimes \ldots \otimes S(A_n)$ félcsoportra való leképezését szolgáltatja. Ebből a célból tekintsük az $S(A_1) \otimes \ldots \otimes S(A_n)$ direkt szorzat egy tetszőleges $(C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n})$ elemét

és legyen $p_1, \ldots, p_n$ $(p_i \in F(X_i);\ |p_i| = l_i\ (i = 1, \ldots, n))$ szavaknak egy olyan sorozata, amelyre $C_{\varrho_i} = C_{\varrho_i}[p_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a (16) leképezésnél $(C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n})$ is fellép képelemként.

A feltételekből adódik, hogy bármely $\mathbf{A}_i$ automatának is van olyan $x_i (\in X_i)$ bemenő jele, amelyre $\underset{a \in A_i}{\forall} a[\delta_i(a, x_i) = a]$ teljesül. Ha most az előbb kiválasztott $p_1, \ldots, p_n$ szó-sorozat esetén valamely k $(1 \leqq k \leqq n)$ mellett $l_k \geqq l_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor egészítsük ki a p_i szót minden $i (= 1, \ldots, n)$-re úgy, hogy írjuk hozzá jobbról az x_i jelet $(l_k - l_i)$-szer. Ily módon szavaknak egy olyan $p_1', \ldots, p_n'$ $(p_i' \in F(X_i))$ sorozatához jutunk, amelyre $|p_1'| = \ldots = |p_n'|$ $(= l_k)$ és $\underset{i=1,\ldots,n}{\forall} i \underset{a \in A_i}{\forall} a\ [ap_i = ap_i']$ teljesül. Következésképpen, van olyan $p (\in F(X))$, amelyre a (14) leképezésben $p \to (p_1', \ldots, p_n')$ és így $C_{\varrho_i} = C_{\varrho_i}[p_i] = C_{\varrho_i}[p_i']$ $(i = 1, \ldots, n)$ miatt a (16) leképezésben $C_\varrho[p] \to (C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n})$, ami bizonyítandó volt.

24. Az automata endomorfizmus-félcsoportja. Egy tetszőleges $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata esetén az A állapot-halmaznak egy önmagába való η leképezését az $\mathbf{A}$ automata *endomorfizmusának* nevezzünk, ha az

$$\eta(\delta(a, x)) = \delta(\eta(a), x) \qquad (a \in A, x \in X) \tag{17}$$

feltétel X minden elemére teljesül. Az $\mathbf{A}$ automata összes endomorfizmusai a leképezések szorzására, mint műveletre nézve félcsoportot alkotnak. Ezt a félcsoportot $E(A)$-val jelöljük és az $\mathbf{A}$ automata *endomorfizmus-félcsoportjának* mondjuk.

Világos, hogy ha az $\mathbf{A}$ automata kommutatív, akkor $S(A)$ izomorf $E(A)$ egy részfélcsoportjával.

25. Az automata automorfizmus-csoportja. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata olyan endomorfizmusait, amelyek az A állapot-halmaz önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezéseit szolgáltatják, az automata *automorfizmusainak* nevezzük. Az $\mathbf{A}$ automata összes automorfizmusai az $E(A)$ endomorfizmus-félcsoport egy $G(A)$ részcsoportját alkotják. $G(A)$-t az $\mathbf{A}$ automata *automorfizmus-csoportjának* mondjuk (l. A. C. FLECK [10]).

26. Ciklikus automaták. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}' = (A', X', \delta')$ automata az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata *parciális X-homomorf képe*, ha megadható X-nek olyan (nem üres) X'' részhalmaza, továbbá olyan (φ, ψ) leképezés-pár, hogy φ az A-t A'-re, ψ az X''-t X'-re képezi le és bármely $a (\in A)$ és $x (\in X)$ esetén

$$\varphi(\delta(a, x)) = \delta'(\varphi(a), \psi(x)) \qquad (a \in A, x \in X'') \tag{18}$$

teljesül.

Akkor mondjuk, hogy az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata *X-izomorf módon beágyazható* az $\mathbf{A}'=(A', X', \delta')$ automatába, ha találhatók olyan φ és ψ kölcsönösen egyértelmű leképezések, hogy φ az A-t A'-re, ψ pedig X-et X'-be képezi le és bármely $a(\in A), x(\in X)$ esetén (18) teljesül.

Érvényes a következő

26. tétel (F. GÉCSEG és I. PEÁK [15]). *Bármely, a bemenetekre nézve redukált ciklikus* $\mathbf{A}$ *automata az* $\mathbf{A}_{S(A)}$ *automatának parciális X-homomorf képe.*

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ ciklikus automata a bemenetekre nézve redukált és tekintsük az $\mathbf{A}_{S(A)}=(A', X', \delta')$ automatát, amelyre $|A'|=O(\overline{S(A)})$, $|X'|=O(S(A))$ és $\delta'(a', x')=f(f^{-1}(a')g^{-1}(x'))$ $(a'\in A', x'\in X')$, ahol f és g az $\overline{S(A)}$-t A'-re, ill. $S(A)$-t X'-re képezi le kölcsönösen egyértelmű módon. Jelölje továbbá $a_0(\in A)$ az $\mathbf{A}$ automata egy generátorelemét.

Tekintsük most azt a $\varphi: A'\to A$ leképezést, amely — egységelemes $S(A)$ félcsoport esetén — bármely $a'(\in A')$ állapothoz hozzárendeli az $\mathbf{A}$ automatának azt az $a(\in A)$ állapotát, amelyre

$$a=a_0 p \qquad (p\in F(X), C_\varrho[p]=f^{-1}(a')), \tag{18}$$

ill. — egységelem nélküli $S(A)$ félcsoport esetén — bármely $a'(\in A', \neq f(e))$ állapothoz hozzárendeli a (18) feltételt kielégítő $a(\in A)$ állapotot és emellett $\varphi(f(e))=a_0$, ahol e az $\overline{S(A)}$ félcsoport egységelemét jelöli. Világos, hogy φ az A' halmaznak az A halmazra való egyértelmű leképezése.

Legyen továbbá X'' az X' halmaz azon részhalmaza, amely az $\mathbf{A}_{S(A)}$ automatának azokból és csak azokból az x' bemenő jeleiből áll, amelyekre létezik olyan $x(\in X)$, hogy $C_\varrho[x]=g^{-1}(x')$ és tekintsük azt a $\psi: X''\to X$ leképezést, amely az $\mathbf{A}_{S(A)}$ automata bármely $x'(\in X'')$ bemenő jeléhez az $\mathbf{A}$ automatának azt az $x(\in X)$ bemenő jelét rendeli hozzá, amelyre $C_\varrho[x]=g^{-1}(x')$ teljesül. Mivel az $\mathbf{A}$ automata a bemenetekre nézve redukált, azért ψ az X'' halmaznak az X halmazra való egyértelmű leképezése.

Azt kell még megmutatnunk, hogy e φ és ψ leképezésekre $\varphi(\delta'(a', x'))=\delta(\varphi(a'), \psi(x'))$ teljesül. Legyen e célból $a'(\in A', \neq f(e))$ tetszőleges állapot és $x'(\in X'')$ bemenő jel. Akkor létezik olyan $p(\in F(X))$ és $x(\in X)$, hogy $a'=f(C_\varrho[p])$, $x'=g(C_\varrho[x])$ és így

$$\varphi(\delta'(a', x'))=\varphi(f(f^{-1}(a')g^{-1}(x')))=\varphi(f(C_\varrho[p]C_\varrho[x]))=$$
$$=\varphi(f(C_\varrho[px]))=a_0 px=\delta(a_0 p, x)=\delta(\varphi(a'), \psi(x')).$$

Ha pedig $a'=f(e)\,(\in A')$ és $x'=g(C_e[x]\,(\in X'')$, akkor

$$\varphi(\delta'(a', x'))=\varphi(f(eg^{-1}(x')))=\varphi(f(g^{-1}(x')))=\varphi(f(C_e[x]))=$$

$$=a_0x=\delta(a_0, x)=\delta(\varphi(a'), \psi(x')),$$

amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

Könnyen belátható, hogy kommutatív esetben a fenti φ és ψ leképezések kölcsönösen egyértelműek, tehát érvényes a

27. tétel (F. GÉCSEG és I. PEÁK [15]). *Bármely, a bemenetekre nézve redukált kommutatív ciklikus* **A** *automata X-izomorf módon beágyazható az* $\mathbf{A}_{S(A)}$ *automatába.*

A 26. és 27. tételből közvetlenül adódik a

28. tétel (F. GÉCSEG és I. PEÁK [15]). *Egy tetszőleges S félcsoport esetén jelölje* $\mathfrak{M}_S$ *az S félcsoporthoz tartozó összes, a bemenetekre nézve redukált ciklikus automaták halmazát. Ha* $\mathfrak{M}_S\neq\emptyset$, *akkor létezik olyan* $\mathbf{A}_0$ *automata, hogy bármely* $\mathbf{A}\,(\in\mathfrak{M}_S)$ *automata az* $\mathbf{A}_0$*-nak parciális X-homomorf képe. Továbbá, ha az S félcsoport egységelemes, akkor* $\mathbf{A}_0\in\mathfrak{M}_S$ *és ha S még kommutatív is, akkor bármely* $\mathbf{A}\,(\in\mathfrak{M}_S)$ *automata X-izomorf módon beágyazható* $\mathbf{A}_0$*-ba. Speciálisan, véges S esetén* $\mathbf{A}_0$ *(izomorfiától eltekintve) egyértelműen meghatározott.*

Valóban, $\mathbf{A}_0$ gyanánt vehető az $\mathbf{A}_S$ automata. (Felhívjuk az olvasó figyelmét arra, hogy a ciklus automata fenti definíciója folytán egységelem nélküli S félcsoport esetében álltalában $\mathbf{A}_s\notin\mathfrak{M}_s$.)

A 28. tétel — durván szólva — azt jelenti, hogy egy egységelemes félcsoporthoz tartozó, a bemenetekre nézve redukált ciklikus automaták halmazában található olyan automata, amely bizonyos értelemben maximális.

A 26. tétel megfordítása nem igaz. Ha azonban teljesebb megfogalmazását adjuk ennek a tételnek, akkor már megfordítható lesz. Erre vonatkozik a következő állítás, amely — lényegében — egy S félcsoport esetén az $\mathbf{A}_S$ automata bizonyos parciális X-homomorf képei közül kiválasztja azokat az automatákat, amelyek az S félcsoporthoz tartoznak.

29. tétel (F. GÉCSEG és I. PEÁK [15]). *Legyen S tetszőleges véges félcsoport és legyen a bemenetekre nézve redukált ciklikus* $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ *automata az* $\mathbf{A}_S$ *automata parciális X-homomorf képe valamely* (φ, ψ) *parciális X-homomorfizmus mellett. Úgy* $S(A)\approx S$ *akkor és csak akkor teljesül, ha a* $g^{-1}(x')$ $(x'\in X'')$ *elemek halmaza az S félcsoportnak generátorrendszere és az* $S\cap\bar{S}$ *félcsoportnak a* $\varphi f\colon\bar{S}\to A$ *leképezést kísérő*

$\pi_{\varphi f}$ *osztályozásába nem írható bele az S félcsoportnak semmilyen, a triviálistól különböző kompatibilis osztályozása.*[11]

A 29. tétel bizonyítását annak hosszadalmassága miatt elhagyjuk.

Érdekes kérdés, hogy milyen feltételek mellett határozza meg (izomorfiától eltekintve) az $S(A)$ félcsoport az **A** automatát, más szóval, melyek azok az automata-osztályok, amelyekhez tartozó bármely két automata akkor és csak akkor izomorf, ha azok félcsoportjai izomorfak. A következő tétel ezzel a kérdéssel foglalkozik egy speciális esetben.

30. tétel (F. Gécseg és I. Peák [15]). *Ha a véges A és X halmazok megegyező számosságúak, úgy a bemenetekre nézve redukált kommutatív ciklikus* $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ *és* $\mathbf{A}'=(A, X, \delta')$ *automaták akkor és csak akkor izomorfak, ha a megfelelő* $S(A)$ *és* $S(A')$ *félcsoportok is izomorfak.*

A bizonyítás közvetlenül adódik abból a megjegyzésből, hogy egyrészt a tétel feltételei mellett az $S(A)$ és $S(A')$ félcsoportok egységelemesek (ami egyébként a 33. tételből is közvetlenül adódik), másrészt $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_{S(A)}$ és $\mathbf{A}' \approx \mathbf{A}_{S(A')}$ teljesül.

A továbbiakban néhány, a ciklikus kváziautomaták endomorfizmusfélcsoportjára vonatkozó eredményt ismertetünk. Előkészületül néhány definíciót és jelölést adunk meg.

Legyen S tetszőleges félcsoport és jelölje T_S az S félcsoport összes jobbról stabil ekvivalencia-relációinak[12] halmazát. A T_S halmazban parciális rendezést definiálunk a szokásos módon: Legyen $\alpha, \beta \in T_S$ esetén $\alpha \leqq \beta$ akkor és csak akkor, ha S bármely két a, b elemére

$$a \equiv b(\alpha) \Rightarrow a \equiv b(\beta).$$

Legyen $\alpha \in T_S$ és $a \in S$. Az (α, a) párhoz mindig hozzárendelhetünk egy újabb $\alpha_a (\in T_S)$ jobbról stabil ekvivalencia-relációt a következő módon: Ha $\alpha \in T_S$ és $a \in S$, akkor legyen $\alpha_a (\in T_S)$ az a jobbról stabil ekvivalencia-reláció, amelyre bármely $b, c (\in S)$ esetén

$$b \equiv c(\alpha_a) \Leftrightarrow ab \equiv ac(\alpha)$$

teljesül. Bármely $\alpha (\in T_S)$-ra jelölje $N_S(\alpha)$ az S félcsoport azon a elemeinek halmazát, amelyekre $\alpha \leqq \alpha_a$. $N_S(\alpha)$-t az $\alpha (\in T_S)$ *normalizátorának* nevezzük S-ben.

[11] A tétel megfogalmazásánál a 26. tétel bizonyításában használt jelöléseket követtük.

[12] Akkor mondjuk, hogy az S félcsoport egy osztályozásához tartozó ϱ ekvivalencia-reláció jobbról stabil, ha bármely $a, b, c (\in S)$-re $a \equiv b(\varrho)$-ból $ac \equiv bc(\varrho)$ következik.

Érvényesek a következő megállapítások:

7. lemma (R. H. OEHMKE [33]). *Ha* $\alpha \in T_S$, *akkor* $N_S(\alpha)$ *az* S *félcsoport részfélcsoportja.*

8. lemma (R. H. OEHMKE [33]). *Ha* $\alpha \in T_S$, *akkor* $N_S(\alpha)$ *az* S *félcsoport bizonyos számú* α*-osztályainak egyesítési halmaza.*

Tekintsük az $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ ciklikus kváziautomatát. Az $\mathbf{A}$ bármely $a_0 (\in A)$ generátoreleméhez jelölje ϱ_{A, a_0} azt a jobbról stabil ekvivalencia-relációt F-ben, amelyre

$$f \equiv g (\varrho_{A, a_0}) \Leftrightarrow a_0 f = a_0 g \qquad (f, g \in F).$$

Világos, hogy adott $\mathbf{A}$ kváziautomatára a különböző a_0 és a_0' generátorelemekhez tartozó ϱ_{A, a_0} és $\varrho_{A, a_0'}$ relációk általában különbözők. Másrészt nyilvánvaló, hogy kommutatív esetben bármely $\varrho_{A, a_0} (a_0 \in A)$ reláció egybeesik az $\mathbf{A}$ kváziautomata által indukált $\varrho(A)$ kongruencia-relációval.

31. tétel (R. H. OEHMKE [33]). *Ha* $a_0 (\in A)$ *az* $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomata generátoreleme, akkor* $E(A)$ *az* $N_F(\varrho_{A, a_0})$ *félcsoport homomorf képe.*

Bizonyítás. Az $N_F(\varrho_{A, a_0})$ félcsoport bármely f eleméhez rendeljük hozzá azt az $\varepsilon_f : A \to A$ leképezést, amelyre bármely $a (\in A)$ esetén $\varepsilon_f(a) = a_0 fg$, ahol $g \in F$ és $a = a_0 g$. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy az ε_f leképezés jól definiált. Valóban, ha $a = a_0 g = a_0 h$ $(g, h \in F)$, akkor $g \equiv h (\varrho_{A, a_0})$, tehát $f \in N_F(\varrho_{A, a_0})$ miatt $fg \equiv fh (\varrho_{A, a_0})$, ahonnan $a_0 fg = a_0 fh$, következésképpen $\varepsilon_f(a_0 g) = \varepsilon_f(a_0 h)$. Másrészt, bármely $k (\in F)$ esetén $\varepsilon_f(ak) = \varepsilon_f(a_0 gk) = a_0 f(gk) = (a_0 fg)k = \varepsilon_f(a_0 g)k = \varepsilon_f(a)k$, azaz $\varepsilon_f \in E(A)$. Ezzel nyertük, hogy az $f \to \varepsilon_f (f \in N_F(\varrho_{A, a_0}))$ hozzárendelés $N_F(\varrho_{A, a_0})$-nak az $E(A)$ endomorfizmus-félcsoportba való leképezése. Megmutatjuk, hogy e leképezés $E(A)$-ra történik. Legyen e célból $\varepsilon (\in E(A))$ az $\mathbf{A}$ kváziautomata tetszőleges endomorfizmusa és legyen $\varepsilon(a_0) = a_0 f$ $(f \in F)$. Kimutatjuk, hogy $f \in N_F(\varrho_{A, a_0})$ és $\varepsilon = \varepsilon_f$. Valóban, ha $g \equiv h (\varrho_{A, a_0})$ $(g, h \in F)$, akkor $a_0 g = a_0 h$ és így $a_0 fg = (a_0 f)g = \varepsilon(a_0)g = \varepsilon(a_0 g) = \varepsilon(a_0 h) = \varepsilon(a_0)h = (a_0 f)h = a_0 fh$, azaz $fg \equiv fh (\varrho_{A, a_0})$, tehát $\varrho_{A, a_0} \leqq (\varrho_{A, a_0})_f$, ami éppen azt jelenti, hogy $f \in N_F(\varrho_{A, a_0})$. Másrészt bármely $a = a_0 l$ $(l \in F)$ esetén $\varepsilon(a) = \varepsilon(a_0 l) = \varepsilon(a_0)l = a_0 fl = \varepsilon_f(a_0 l) = \varepsilon_f(a)$, tehát valóban $\varepsilon = \varepsilon_f$.

Végül megmutatjuk, hogy az $f \to \varepsilon_f (f \in N_F(\varrho_{A, a_0}))$ hozzárendelés homomorf. Legyen e célból f és g az $N_F(\varrho_{A, a_0})$ félcsoport két tetszőleges eleme. Akkor bármely $a = a_0 h$ $(h \in F)$ állapotra $\varepsilon_f(\varepsilon_g(a)) = \varepsilon_f(a_0 gh) = a_0 fgh = \varepsilon_{fg}(a_0 h) = \varepsilon_{fg}(a)$, amivel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

A ciklikus kváziautomaták endomorfizmus-félcsoportjaira vonatkozóan bizonyítás nélkül megemlítjük még a következő eredményt:

32. tétel (R. H. Oehmke [33]). *Bármely* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomatára* $O(E(A)) \leqq |A|$ *teljesül.*

27. Kommutatív ciklikus automaták. Már említettük, hogy egy kommutatív ciklikus $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata bármely $a_0 (\in A)$ generátorelemére a ϱ_{A, a_0} és $\varrho(A)$ relációk egybeesnek és $N_{F(X)}(\varrho_{A, a_0})=F(X)$ teljesül. Ily módon a 31. tételből specializálással nyerjük, hogy egy kommutatív ciklikus $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata $E(A)$ endomorfizmus-félcsoportja az $F(X)$ szabad félcsoport homomorf képe. Ennél azonban jóval többet mond a következő tétel, amely egyben a 32. tételnek kommutatív automaták esetére való élesítését is szolgáltatja:

33. tétel (I. Peák [35]). *Bármely kommutatív ciklikus* $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ *automatára az* $S(A)$ *és* $E(A)$ *félcsoportok izomorfak és* $O(E(A))=|A|$.

Bizonyítás. Legyen $a_0 (\in A)$ az **A** automata egy generátoreleme. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy $O(S(A))=|A|$ teljesül. Tekintsük e célból **A** egy tetszőleges $a (\in A)$ állapotát és legyen $a=a_0 p$ $(p \in F(X))$. Ha e mellett még $a=a_0 p'$ $(p' \in F(X))$, akkor bármely $b (=a_0 r, r \in F(X))$ esetén $bp=a_0 rp=a_0 pr=a_0 p' r=a_0 rp'=bp'$, azaz $p \equiv p' (\varrho(A))$. Ez azt jelenti, hogy definiálhatjuk az A halmaznak az $S(A)$ félcsoportba való $a \to C[p]$ $(a \in A, p \in F(X), a=a_0 p)$ leképezését. Világos, hogy ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű és az A halmazt $S(A)$-ra képezi le. Ily módon nyertük, hogy $O(S(A))=|A|$ teljesül.

Továbbá, mivel **A** kommutatív, azért bármely $p (\in F(X))$ esetén az $\eta_p: a \to ap$ $(a \in A)$ leképezés **A**-nak endomorfizmusa és emellett $\eta_p=\eta_q \Leftrightarrow p \equiv q (\varrho(A))$ $(p, q \in F(X))$ teljesül. Másrészt, nem nehéz belátni, hogy a $C[p] \to \eta_p$ $(p \in F(X))$ leképezés az $S(A)$ félcsoport izomorfizmusa $E(A)$-ba.

Végül megmutatjuk, hogy a $C[p] \to \eta_p$ $(p \in F(X))$ leképezés az $S(A)$ félcsoportot az $E(A)$ félcsoportra képezi le. Ehhez elegendő kimutatni, hogy bármely $\eta (\in E(A))$-hoz van olyan $p (\in F(X))$, amelyre $\eta=\eta_p$. Legyen e célból $\eta(a_0)=a$, $a=a_0 p$ $(p \in F(X))$. Akkor bármely $b (=a_0 r; r \in F(X))$ állapotra $\eta(b)=\eta(a_0 r)=\eta(a_0) r=ar=a_0 pr=a_0 rp=$ $=bp$ adódik, azaz valóban $\eta=\eta_p$. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyezzük, hogy a 33. tétel nem fordítható meg. Valóban, az

A	0	1	2	3
x	0	1	2	3
y	1	0	2	3
z	0	1	3	2

automata kommutatív, teljesülnek rá a 33. tétel konklúziói, de nyilvánvalóan nem ciklikus.

Érvényes viszont a következő

34. tétel (I. PEÁK [35]). *Ha egy ciklikus* $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ *automata állapot-halmaza véges, továbbá az* $E(A)$ *félcsoport kommutatív és* $O(E(A))=|A|$, *akkor az* $\mathbf{A}$ *automata is kommutatív.*

Bizonyítás. Legyen $a_0(\in A)$ az $\mathbf{A}$ automata egy generátoreleme és tekintsük az $E(A)$ félcsoportnak az A halmazba való $\eta \to \eta(a_0)$ $(\eta \in E(A))$ leképezését. Könnyen adódik, hogy ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű és $O(E(A))=|A|$ miatt $E(A)$-t A-ra képezi le. Ily módon bármely $a(\in A)$-hoz található olyan $\eta(\in E(A))$, hogy $\eta(a_0)=a$.

Tegyük fel most, hogy $\mathbf{A}$ nem kommutatív. Akkor léteznek olyan $a(\in A), p, q(\in F(X))$, hogy $apq \neq aqp$. Legyen $\eta(\in E(A))$ az $\mathbf{A}$ automata azon endomorfizmusa, amelyre $\eta(a_0)=a$. Akkor $\eta(a_0pq)=\eta(a_0)pq=apq$ és $\eta(a_0qp)=\eta(a_0)qp=aqp$ és így $apq \neq aqp$ miatt $a_0pq \neq a_0qp$ adódik. Ha végül η_1 és η_2 az $\eta_1(a_0)=a_0p$ és $\eta_2(a_0)=a_0q$ feltételeket kielégítő endomorfizmusok, akkor $\eta_1\eta_2(a_0)=\eta_1(\eta_2(a_0))=\eta_1(a_0q)=\eta_1(a_0)q=a_0pq$ és $\eta_2\eta_1(a_0)=\eta_2(\eta_1(a_0))=\eta_2(a_0p)=\eta_2(a_0)p=a_0qp$, következésképpen, $\eta_1\eta_2(a_0) \neq \eta_2\eta_1(a_0)$, ami ellentmond az $E(A)$ félcsoport kommutativitásának. Ezzel a 34. tételt bebizonyítottuk.

A 24. és 33. tételből közvetlenül adódik a

35. tétel (I. PEÁK [35]). *Ha egy véges kommutatív ciklikus* $\mathbf{A}$ *automata az* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *automaták direkt szorzata, akkor az* $S(A)$ *félcsoport is direkt szorzata az* $S(A_1), \ldots, S(A_n)$ *félcsoportoknak.*

Ha pedig automaták direkt szorzata helyett annak egy speciális esetét, A-direkt szorzatot tekintünk, akkor a végesség feltételezése nélkül kimondhatjuk a következő tételt:

36. tétel (I. PEÁK [35]). *Egy kommutatív ciklikus* $\mathbf{A}$ *automata akkor és csak akkor áll elő automaták* A*-direkt szorzataként, ha az* $S(A)$ *félcsoport félcsoportok direkt szorzatára bomlik. Pontosabban, az* $\mathbf{A}$ *automata akkor és csak akkor áll elő az* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *automaták* A*-direkt szorzataként, ha* $S(A) \approx S(A_1) \otimes \ldots \otimes S(A_n)$ *teljesül.*

Bizonyítás. A bizonyítást elegendő $n=2$-re elvégezni. Legyen $a_0(\in A)$ a kommutatív ciklikus $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata egy generátoreleme és tételezzük fel, hogy az $S(A)$ félcsoport direkt tényezők szorzatára bomlik. A 33. tétel szerint $S(A) \approx E(A)$ és így az $E(A)$ félcsoport is előáll valamely S_1 és S_2 félcsoportok direkt szorzataként: $E(A) \approx$ $\approx S_1 \otimes S_2$. A továbbiakban $E(A)$-t azonosíthatjuk az $S_1 \otimes S_2$ félcsoporttal. Tekintsük ezek után azt az $\mathbf{A}_1=(S_1, X, \delta_1)$ automatát,

amelynek δ_1 átmenet-függvényére $\delta_1(s_1, x) = s_1 x_1 (\in S_1)(s_1 \in S_1, x \in X)$ teljesül, ahol $x_1 (\in S_1)$ az $\eta_x (\in E(A)) : a \to \delta(a, x)$ endomorfizmus első komponense az $E(A) \approx S_1 \otimes S_2$ direkt felbontásban és az $s_1 x_1$ szorzat az S_1 félcsoportban értendő. Hasonló módon definiáljuk az $\mathbf{A}_2 = (S_2, X, \delta_2)$ automatát is.

Jelölje $\mathbf{A}' = (S_1 \times S_2, X, \delta')$ az $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ automaták A-direkt szorzatát. Elegendő megmutatni, hogy $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}'$ teljesül. Tekintsük e célból azt a (φ, ψ) leképezés-párt, amelyre a $\varphi : S_1 \times S_2 \to A$ leképezés az $\mathbf{A}'$ automata bármely (s_1, s_2) állapotához hozzárendeli az $\mathbf{A}$ automatának azt az a állapotát, amely az (s_1, s_2) $(\in S_1 \otimes S_2)$ endomorfizmusnál az $a_0 (\in A)$ állapot képe, a $\psi : X \to X$ leképezés pedig legyen X-nek önmagára való identikus leképezése. A 33. tétel szerint φ az $S_1 \times S_2$ halmaznak A-ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése, másrészt bármely (s_1, s_2) $(\in S_1 \times S_2)$ és $x (\in X)$ esetén

$$\varphi(\delta'((s_1, s_2), x)) = \varphi((\delta_1(s_1, x), \delta_2(s_2, x))) =$$
$$= \varphi((s_1 x_1, s_2 x_2)) = \varphi((s_1, s_2)(x_1, x_2)) = \varphi((s_1, s_2)\eta_x) =$$
$$= ((s_1, s_2)\eta_x)(a_0) = \eta_x((s_1, s_2)(a_0)) = \eta_x(\varphi(s_1, s_2)) = \delta(\varphi(s_1, s_2), x)$$

adódik. Ezzel nyertük, hogy $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}'$ teljesül, amivel az elegendőség bizonyítását befejeztük.

Megfordítva, legyen a kommutatív ciklikus $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata az $\mathbf{A}_1 = (A_1, X, \delta_1)$ és $\mathbf{A}_2 = (A_2, X, \delta_2)$ automaták A-direkt szorzata. Nyilvánvaló, hogy ekkor $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ is kommutatív ciklikus automaták. Legyen $a_0 (\in A)$ az $\mathbf{A}$ automata egy generátoreleme. Ha az $\mathbf{A}$ automatát azonosítjuk az $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ automaták $\mathbf{A}' = (A_1 \times A_2, X, \delta')$ A-direkt szorzatával, akkor az $a_0 = (a_0^{(1)}, a_0^{(2)})$ feltételt kielégítő $a_0^{(1)} (\in A_1)$ és $a_0^{(2)} (\in A_2)$ állapotok az $\mathbf{A}_1$, ill. $\mathbf{A}_2$ automata generátorelemei lesznek. Tekintsük most azt a leképezést, amely az $S(A)$ félcsoport bármely $C[p]$ $(p \in F(X))$ elemének megfelelteti az $S(A_1) \otimes S(A_2)$ direkt szorzatnak azt a $(C_1[p_1], C_2[p_2])$ $(p_1, p_2 \in F(X))$ elemét, amelyre az $a_0^{(1)} p_1 = a_1$, $a_0^{(2)} p_2 = a_2$ és $a_0 p = (a_1, a_2)$ $(a_i \in A_i)$ összefüggések teljesülnek. Nem nehéz belátni, hogy ez a leképezés $S(A)$-nak $S(A_1) \otimes S(A_2)$-re való izomorf leképezése. Ezzel a 36. tétel bizonyítását befejeztük.

Arra az érdekes kérdésre, vajon minden egységelemes félcsoport fellép-e valamilyen automata endomorfizmus-félcsoportjaként, félcsoportelméleti eszközökkel a teljes általánosság mellett pozitív válasz adható (l. P. M. Cohn, *Universal Algebra*, New York, 1965) Kommutatív esetben azonban erre a kérdésre a 33. tétel felhasználásával is könnyű választ adni. Érvényes ugyanis a

37. tétel (I. Peák [35]). *Bármely egységelemes kommutatív S félcsoporthoz található olyan (ciklikus)* $\mathbf{A}$ *automata, amelyre* $E(A) \approx S$ *teljesül.*

Bizonyítás. Valóban, ilyen S félcsoport esetén az $\mathbf{A}_S$ automata kommutatív és ciklikus, így a 33. tétel szerint $E(A_S) \approx S(A_S)$, ahonnan $S(A_S) \approx S$ miatt $E(A_S) \approx S$ adódik.

28. Erősen összefüggő és perfekt kváziautomaták. Legyen $a_0 (\in A)$ az $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ ciklikus kváziautomata egy generátoreleme és jelölje $N'_F(\varrho_{A, a_0})$ az F félcsoport azon f elemeinek halmazát, amelyekre $\varrho_{A, a_0} = (\varrho_{A, a_0})_f$ teljesül. Könnyű belátni, hogy $N'_F(\varrho_{A, a_0})$ az $N_F(\varrho_{A, a_0})$ normalizátor részfélcsoportja.

38. tétel (R. H. Oehmke [33]). *Egy tetszőleges erősen összefüggő* $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ *kváziautomata* $G(A)$ *automorfizmus-csoportja az* $\mathbf{A}$ *bármely* $a (\in A)$ *állapotához tartozó* $N'_F(\varrho_{A, a})$ *félcsoportnak homomorf képe.*

Bizonyítás. Tekintsük az $\mathbf{A}$ kváziautomata egy tetszőleges, de rögzített $a (\in A)$ állapotát és rendeljük az $N'_F(\varrho_{A, a})$ félcsoport bármely f eleméhez azt az ε_f: $A \to A$ leképezést, amelyre $\varepsilon_f(b) = afg$ $(b = ag;\ g \in F)$ teljesül. A 31. tétel bizonyítása során láttuk, hogy $\varepsilon_f \in E(A)$. Most megmutatjuk, hogy $\varepsilon_f \in G(A)$ is teljesül. Legyen e célból $\varepsilon_f(b) = \varepsilon_f(c)$ $(b = ag,\ c = ah;\ g, f \in F(X))$. Akkor ε_f definíciója szerin $afg = afh$, azaz $fg \equiv fh (\varrho_{A, a})$, tehát $g \equiv h((\varrho_{A, a})_f)$, ahonnan $f \in N'_F(\varrho_{A, a})$ miatt $g \equiv h(\varrho_{A, a})$, más szóval, $(b =) ag = ah (= c)$ adódik. Ezzel nyertük, hogy ε_f kölcsönösen egyértelmű. Megmutatjuk, hogy ε_f az A halmazt önmagára képezi le. Legyen e célból $b (= ah;\ h \in F)$ az $\mathbf{A}$ tetszőleges állapota. Mivel $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, azért létezik olyan $g (\in F)$, amelyre $(af)g = b$. Ha most $c = ag$, akkor $\varepsilon_f(c) = afg = (af)g = b$. Ezzel nyertük, hogy ε_f bármely $f (\in N'_F(\varrho_{A, a}))$ esetén az $\mathbf{A}$ kváziautomata automorfizmusa. Mivel az $f \to \varepsilon_f$ leképezés homomorf voltát a 31. tétel bizonyítása során már kimutattuk, azért azt kell még megmutatnunk, hogy $\mathbf{A}$ bármely ε automorfizmusa előáll $\varepsilon = \varepsilon_f$ $(f \in N'_F(\varrho_{A, a}))$ alakban. A 31. tétel bizonyítása során láttuk, hogy bármely $\varepsilon (\in E(A))$-hoz van olyan $f (\in N_F(\varrho_{A, a}))$, amelyre $\varepsilon = \varepsilon_f$ teljesül. Elegendő megmutatni, hogy abban a speciális esetben, amikor $\varepsilon \in G(A), f \in N'_F(\varrho_{A, a})$ adódik. Mivel most $(\varepsilon =) \varepsilon_f$ kölcsönösen egyértelmű azért bármely $k, l (\in F)$ esetén $k \equiv l(\varrho_{A, a}) \Leftrightarrow ak = al \Leftrightarrow \varepsilon_f(ak) = \varepsilon_f(al) \Leftrightarrow afk = afl \Leftrightarrow fk \equiv fl(\varrho_{A, a}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k \equiv f((\varrho_{A, a})_f)$, tehát valóban $f \in N'_F(\varrho_{A, a})$. Ezzel a 38. tétel bizonyítását befejeztük.

Specializálással adódik a következő

39. tétel (R. H. Oehmke [33]). *Ha az* $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ *kváziautomata erősen összefüggő és valamely* $a (\in A)$ *állapotra a* $\varrho_{A, a}$ *reláció kongruenciareláció, akkor* $\mathbf{A}$ *bármely önmagára való endomorfizmusa automorfizmusa* $\mathbf{A}$*-nak és* $G(A)$ *az* F *félcsoport homomorf képe, mégpedig,* $F / \varrho_{A, a} \approx G(A)$.

Egy kváziautomatát *perfektnek* nevezünk, ha kommutatív és erősen összefüggő (l. A. C. Fleck [10]). Könnyen adódik, hogy egy per-

fekt $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ kváziautomata bármely $a(\in A)$ állapotára a $\varrho_{A,a}$ reláció kongruencia-reláció és $\varrho_{A,a}=\varrho(A)$. Innen a 39. tétel alkalmazásával közvetlenül adódik a

40. tétel (A. C. Fleck [11]). *Bármely perfekt* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *kváziautomatára* $S(A)\approx G(A)$ *teljesül.*

Érvényes továbbá a tételnek az a kiegészítése is, hogy $O(G(A))=|A|$.

Könnyű belátni, hogy a 36. tétel perfekt kváziautomatákra is érvényes (l. A. C. Fleck [11]). Ebből a megjegyzésből és a 40. tételből a véges Abel-csoportok alaptételének felhasználásával adódik a

41. tétel (A. C. Fleck [11]). *Bármely véges perfekt kváziautomata felbontható olyan kváziautomaták* A*-direkt szorzatára, amelyek automorfizmus-csoportjai ciklikusak.*

A véges A halmaz egy G permutációcsoportját regulárisnak mondjuk, ha G bármely π eleme A-nak vagy egyetlen elemét sem hagyja fixen, vagy π az A halmaznak önmagára való identikus leképezése. Ha G a véges A halmaz egy reguláris permutációcsoportja, akkor $O(G)$ osztója $|A|$-nak (l. G. P. Weeg [42]). Továbbá, G akkor és csak akkor tranzitív[13], ha $O(G)=|A|$ teljesül.

42. tétel (G. P. Weeg [44]). *Bármely véges erősen összefüggő* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *kváziautomata* $G(A)$ *automorfizmus-csoportja* A*-nak reguláris permutációcsoportja.*

Bizonyítás. Legyen α a véges erősen összefüggő $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ kváziautomata tetszőleges automorfizmusa. Elegendő megmutatni, hogy ha valamely $a(\in A)$ esetén $\alpha(a)=a$, akkor α az A halmaz önmagára való identikus leképezése. Legyen e célból $b(\in A)$ tetszőleges és legyen $af=b$ $(f\in F)$. Akkor $\alpha(b)=\alpha(af)=\alpha(a)f=af=b$, amivel a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy erősen összefüggő automaták direkt szorzata nem szükségképpen erősen összefüggő. A közös bemenő halmazzal bíró $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ és $\mathbf{A}'=(A', X, \delta')$ automatákat *erősen kapcsoltaknak* nevezzük, ha bármely $a, b(\in A)$ párhoz és bármely $a', b'(\in A')$ párhoz létezik olyan $x(\in X)$, hogy $\delta(a, x)=b$ és $\delta'(a', x)=b'$ (l. A. C. Fleck [10]). Könnyen belátható (l. A. C. Fleck [10]), hogy a közös bemenő félcsoporttal bíró $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ kváziautomaták A-direkt szorzata akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ erősen kapcsoltak.

Bizonyítás nélkül megemlítjük, a következő tételt:

43. tétel (G. P. Weeg [45]). *Ha* G *és* H *a véges* A *és* B *halmazok ciklikus reguláris permutációcsoportjai, akkor léteznek olyan* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$

[13] Az A véges halmaz egy G permutációcsoportját tranzitívnak nevezzük, ha bármely $a, b(\in A)$ párhoz van olyan $\pi(\in G)$, hogy $\pi(a)=b$.

és $\mathbf{B}=(B, F, \delta')$ *erősen kapcsolt kváziautomaták, amelyekre* $G(A)\approx G$, $G(B)\approx H$ *és amelyek A-direkt szorzatának automorfizmus-csoportja izomorf a* $G\otimes H$ *direkt szorzattal.*

Legyen $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ tetszőleges véges erősen összefüggő kváziautomata és legyen $A=\langle 1, 2, \ldots, n\rangle$. Akkor bármely $i, j(\in A)$-ra jelölje T_{ij} azon $f(\in F)$ elemek halmazát, amelyekre $if=j$ teljesül. Az A halmaz bármely $i(\in A)$ eleméhez rendeljük hozzá azt a T_i rendszert, amely azokból és csak azokból a T_{ij} $(\subseteq F)$ halmazokból áll, amelyekre valamely $\alpha(\in G(A))$ mellett $j=\alpha(i)$, majd definiáljunk T_i-ben egy $*_i$ műveletet úgy, hogy legyen $T_{ij}*_i T_{ik}=T_{il}$ akkor és csak akkor, ha $T_{ij}T_{ik}\subseteq T_{il}$ teljesül, ahol $fg\in T_{ij}\,T_{ik}\Leftrightarrow f\in T_{ij}, g\in T_{ik}(f, g\in F)$. Kimutatható, hogy a T_i halmaz a $*_i$ műveletre nézve csoportot alkot. Ezt a csoportot T_i^*-gal jelöljük.

Érvényes a következő

44. tétel (G. P. Weeg [45]). *Ha* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *véges erősen összefüggő kváziautomata és* $A=\langle 1, 2, \ldots, n\rangle$, *úgy* $G(A)$ *akkor és csak akkor tranzitív, ha* $T_{11}=T_{22}=\ldots=T_{nn}$ *teljesül.*

Speciálisan, kommutatív esetre, a 40. tétel kiegészítésének felhasználásával tüstént adódik a

45. tétel (A. C. Fleck [10]). *Bármely véges perfekt* $\mathbf{A}$ *kváziautomatára* $G(A)$ *tranzitív reguláris permutációcsoport.*

Az erősen összefüggő kváziautomaták automorfizmus-csoportjáról további felvilágosítással szolgál a következő

46. tétel (G. P. Weeg [43]). *Ha* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *véges erősen összefüggő kváziautomata és* $A=\langle 1, 2, \ldots, n\rangle$, *akkor a* $G(A)$ *automorfizmus-csoport izomorf* T_i^**-gal.*

Legyen $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ tetszőleges véges automata és legyen $A=\langle 1, 2, \ldots, n\rangle$. Az A halmaz egy π permutációjához hozzárendeljük azt az $n\times n$ típusú $P_\pi=(p_{ik})$ mátrixot, amelyre

$$p_{ik}=\begin{cases}1 & \text{ha} \quad \pi(i)=k,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Továbbá, az $\mathbf{A}$ automata *átmenet-mátrixán* értjük azt az $n\times n$ típusú $M(A)=(a_{ik})$ mátrixot, amelyre

$$a_{ik}=\begin{cases}\langle x(\in X)\,|\,\delta(i, x)=k\rangle & \text{ha} \quad \exists\limits_{x\in X} x[\delta(i, x)=k],\\ 0 \text{ különben.}\end{cases}$$

A P_π és $M(A)$ mátrixok szorzatát a szokásos módon értelmezzük, azzal a megjegyzéssel, hogy összeadáson halmazelméleti egyesítést értünk és az X halmaz egy részhalmazának 1-gyel és 0-val való formális szorzatát természetes módon definiáljuk, azaz bármely $X'(\subseteq X)$-re legyen $1 \cdot X' = X' \cdot 1 = X'$ és $0 \cdot X' = X' \cdot 0 = 0$.

A továbbiakban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy mikor lesz egy kváziautomata állapot-halmazának egy permutációja a kváziautomata automorfizmusa.

9. lemma (G. P. WEEG [42]). *Egy véges* $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ *kváziautomata esetén az* A *halmaz egy* π *permutációja akkor és csak akkor lesz* **A***-nak automorfizmusa, ha* $P_\pi M(A) P'_\pi = M(A)$ *teljesül.*[14]

Bizonyítás. A feltétel elegendőségének bizonyításához legyen $A = \langle 1, 2, \ldots, n \rangle$ és tegyük fel, hogy a $\pi: A \to A$ permutációra $P_\pi M(A) P'_\pi = M(A)$ teljesül. Tekintsük az **A** kváziautomata tetszőleges $i(\in A)$ állapotát és legyen $if = j$ $(f \in F)$. Akkor $a_{ij} \neq 0$ és ha $\pi(i) = k$, $\pi(j) = l$, akkor $P_\pi M(A) P'_\pi = M(A)$ miatt a $P_\pi M(A) P'_\pi$ mátrix ij-edik eleme a_{kl}, azaz $a_{ij} = a_{kl}$, tehát $f \in a_{ij}$-ből $f \in a_{kl}$ következik, ahonnan $\pi(\delta(i,f)) = \pi(j) = l = \delta(k,f) = \delta(\pi(i), f)$.

Megfordítva, ha a π leképezés homomorf, akkor valahányszor $\pi(i) = k$ és $\pi(j) = l$, mindannyiszor $a_{ij} = a_{kl}$. Valóban, ha $f \in a_{ij}$, akkor $kf = \pi(i)f = \pi(if) = \pi(j) = l$, azaz $f \in a_{kl}$ és így $a_{ij} \subseteq a_{kl}$. A fordított irányú tartalmazás hasonló módon adódik. Ezzel a 9. lemmát bebizonyítottuk.

10. lemma (G. P. WEEG [45]). *Ha* $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ *véges erősen összefüggő kváziautomata és* $A = \langle 1, 2, \ldots, n \rangle$, *akkor* A *egy* π *permutációjára* $\pi \in G(A)$ *akkor és csak akkor teljesül, ha bármely* $i(\in A)$*-re* $T_{1i} = T_{\pi(1)\pi(i)}$.

A 42. tétel megfordításaként tekinthető a következő

47. tétel (G. P. WEEG [44]). *Ha* G *egy* n *elemű halmaz valamely reguláris permutációcsoportja, akkor létezik olyan (erősen összefüggő)* **A** *kváziautomata, amelyre* $G(A) \approx G$ *teljesül.*

Másrészt, kommutatív esetre a 40. tétel felhasználásával könnyen bebizonyítható a

48. tétel (I. PEÁK [35]). *Bármely* G *Abel-csoporthoz található olyan* **A** *(perfekt) kváziautomata, amelyre* $G(A) \approx G$ *teljesül.*

[14] P'_π a P_π mátrix transzponáltját jelöli.

IRODALOM

[1] D. D. Aufenkamp—F. E. Hohn, Analysis of sequential machines, *E. Trans. Electronic Comput.*, **6** (1957), №. 4. 276—285.

[2] Ю. Я. Базилевский, О некоторых преобразованиях конечных автоматов, *Теория и прим. дискр. автом. систем,* Москва, АН СССР, 1960, 371—378.

[3] G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York, 1948.

[4] А. Ш. Блох, О задачах, решаемых последовательностными машинами, *Проблемы кибернетики,* 3 (1960), 81—88.

[5] В. Г. Боднарчук, Автоматы и события, *Укр. матем. журнал,* 14 (1962), № 4, 351—361.

[6] J. A. Brzozowski, Canonical regular expressions and minimal graphs for definite events, *Proc. Symp. Math. Theory of Automata*, New York, 1962, 529—562.

[7] A. H. Clifford—G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Providence, R. I., 1961.

[8] B. Csákány—F. Gécseg, О группе автоматных подстановок, *Кибернетика*, 1:5 (1965), 10—13.

[9] K. Čulík, Rozklad konečneho automatu a poznamka k jeho analyse, *Aplikace mat.*, **8** (1963), №. 4, 292—301.

[10] A. C. Fleck, Preservation of structure by certain classes of functions on automata and related group theoretic properties, *Computer Laboratory, Michigan State University*, 1961 (sokszorosításban).

[11] A. C. Fleck, Isomorphism groups of automata, *Journ. Assoc. Comp. Machinery*, **9** (1962), 469—476.

[12] F. Gécseg, О группе взаимно однозначных преобразований, определенных конечными автоматами, *Кибернетика,* 1:1 (1965), 37—39.

[13] F. Gécseg, О композиции автоматов без петель, *Acta Sci. Math*, **26** (1965), 269—272.

[14] F. Gécseg, On *R*-products of automata, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* (megjelenés alatt).

[15] F. Gécseg—I. Peák, Автоматы с изоморфными полугруппами, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 43—47.

[16] A. Gill, Comparison of finite-state models, *IRE Trans. Circuit Theory*, **7** (1960), № 2, 178—179.

[17] S. Ginsburg, Some remarks on abstract machines, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **96** (1960), 400—444.

[18] В. М. Глушков, Про один метод аналізу абстрактных автоматів, *Доповіді АН УРСР*, 1960, № 9, 1151—1154.

[19] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *Успехи матем. наук*, **16:5(101)** (1961), 3—62. (Magyarul megjelent: V. M. Gluskov, Az automaták absztrakt elmélete, I. rész, *Magy. Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **13** (1963), 287—309; II. rész, ugyanott, **14** (1964), 71—110.)

[20] В. М. Глушков, Абстрактные автоматы и разбиение свободных полугрупп, *ДАН* СССР, **136** (1961), 765—767.

[21] В. М. Глушков, Некоторые проблемы синтеза цифровых автоматов. *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, **1** (1961), № 3, 371—411.

[22] В. М. Глушков, *Синтез цифровых автоматов,* Москва, 1962.

[23] J. Hartmanis, Loop-free structure of sequential machines, *Inform. and Control*, **5** (1962), № **1**, 25—43.

[24] J. Hartmanis, The equivalence of sequential machine models, *IEEE Trans. Electronic Comput.*, **12** (1963), 18—19.

[25] J. Hořejš, Преобразования, определенные конечными автоматами, *Проблемы кибернетики*, **9** (1963), 23—26.
[26] Ю. В. Капитонова, Об одном методе синтеза конечных абстрактных автоматов, *Вычисл. матем. и техн.*, Киев, АН УССР, 1962, 114—120.
[27] S. C. Kleene, Representation of events in nerve nets and finite automata, *Automata Studies*, Princeton, 1956, 3—41.
[28] А. А. Летичевский, Условия полноты для конечных автоматов, *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, 4 (1961), 702—710.
[29] R. F. McNaughton—H. Yamada, Regular expressions and state graphs for automata, *IRE Trans. Electronic Comput.*, **9** (1960), № 1, 39—48.
[30] G. H. Mealy, A method for synthesizing sequential circuits, *Bell System Techn. Journ.*, **34** (1955), 1045—1079.
[31] Ю. Т. Медведев, О классе событий, допускающих представление в конечном автомате, *Сборник „Автоматы"*, 1956, 385—401.
[32] E. F. Moore, Gedanken-experiments on sequential machines, *Automata Studies*, Princeton, 1956, 129—153.
[33] R. H. Oehmke, On the structures of an automaton and its input semigroup, *Journ. Assoc. Comp. Machinery*, **10** (1963), 521—525.
[34] I. Peák, Автоматы и полугруппы I, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 193—201.
[35] I. Peák, Автоматы и полугруппы II, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 49—54.
[36] M. O. Rabin—D. Scott, Finite automata and their decision problem, *IBM Journ. Res. Dev.*, **3** (1959), 114—125.
[37] G. N. Raney, Sequential functions, *Journ. Assoc. Comp. Machinery*, **5** (1958), 177—180.
[38] Л. Н. Шеврин, О некоторых классах абстрактных автоматов, *Előadás a IV. Összövetségi Algebrai Kollokviumon*, Kiev, 1962.
[39] Ю. И. Соркин, Теория определяющих соотношений для автоматов, *Проблемы кибернетики*, **9** (1963), 45—69.
[40] М. А. Спивак, Разложение регулярного выражения по базису и его применения, ДАН СССР, 162 (1965), № 3, 520—522.
[41] М. А. Спивак, Трактовка теории автоматов методами теории отношений, *Проблемы кибернетики*, **12** (1964), 69—97.
[42] G. P. Weeg, Some group theoretic properties of strongly connected automata, *Computer Laboratory, Michigan State University*, 1961 (sokszorosításban).
[43] G. P. Weeg, The structure of an automaton and its operation preserving transformation group, *Journ. Assoc. Comp. Machinery*, **9** (1962), 345—349.
[44] G. P. Weeg, The group and semigroup associated with automata, *Proc. Symp. Math. Theory of Automata*, New York, 1962, 257—266.
[45] G. P. Weeg, The automorphism group of the direct product of strongly related automata, *Journ. Assoc. Comp. Machinery*, **12** (1965), 187—195.
[46] M. Yoely, The cascade decomposition of sequential machines, *IRE Trans. Electronic Comput.*, **10** (1961), № 4, 587—592.
[47] В. Л. Заровный, Автоматные подстановки и сплетения групп, *Кибернетика*, **1:1** (1965), 29—36.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ

Ференц Гечег и Иштван Пэак

THE ALGEBRAIC THEORY OF AUTOMATES

F. Gécseg and I. Peák

Számelméleti megjegyzések V.
Extremális problémák a számelméletben, II.

ERDŐS PÁL

E cikk első fejezetében, az „Extremális problémák a számelméletben, I."-ben (Mat. Lapok 13(1962), 228—255, e cikket röviden I-ként fogom idézni) diskutált problémákról írok, amennyiben e kérdésekről I megjelenése óta történt említésre méltó haladás. A cikk második fejezetében új, részben I megjelenése óta felvetett problémákat és eredményeket diszkutálok. Ellentétben I-el, nem szorítkozunk véges intervallumokra vonatkozó extrém problémákra, s így sok érdekes új kérdésre jutunk. $a, a_1, \ldots, b, b_1, \ldots l, d \ldots$ pozitív egész számokat fog jelölni, p, q prímszámokat.

1.

I. 9. K. F. Roth a következő kérdést vizsgálta: Legyen $\varphi(k) = \pm 1$, $1 \leqq k \leqq n$.

$$G(n) = \min_{\varphi} \max_{a,d,m} \left| \sum_{k=0}^{m} \varphi(a+kd) \right| \qquad (a+md \leqq n)$$

Milyen gyorsan tart $G(n)$ a végtelenhez?

Én I. 9-ben azt sejtettem, hogy ha

$$F(n) = \min_{\varphi} \max_{m,d} \left| \sum_{\substack{k=1 \\ md \leqq n}}^{m} \varphi(kd) \right|$$

akkor $F(n) \to \infty$, ha $n \to \infty$, sőt azt is sejtettem, hogy $F(n) > c_1 \log n$. $G(n)$-ből $F(n)$-et úgy nyerjük, hogy csak az $a = 0$ esetet tekintjük. Természetesen várható, hogy $G(n)$ sokkal gyorsabban tart a végtelenhez, mint $F(n)$. Roth be is bizonyította, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén, ha $n > n_0(\varepsilon)$ $G(n) > n^{1/4-\varepsilon}$ és sejti, hogy $G(n) > n^{1/2-\varepsilon}$. Továbbá megjegyzi, hogy elemi valószínűségszámítási eredményekből nyerhető, hogy van oly $\varphi(k) = \pm 1$, amelyre $G(n) < c(n \log n)^{1/2}$ alkalmas c-re. Először is bebizonyítjuk, hogy $G(n) < Cn^{1/2}$ alkalmas elegendő nagy

C-re, ($C, c, c_1, \ldots$ mindig alkalmasan választott pozitív abszolút konstansokat fog jelölni).

Hogy állításunkat bebizonyítsuk, elsősorban is megjegyezzük, hogy a $\varphi(k) = \pm 1, 1 \leqq k \leqq n$ függvényt 2^n-féle módon választhatjuk meg. Ismeretes továbbá a következő Kolmogoroff féle tétel: Legyen $\varphi(k) = \pm 1, 1 \leqq k \leqq m$ (így $\varphi(k)$ 2^m féleképpen választható). Jelölje $M(t)$ $\varphi(k)$ azon választásainak számát, amelyekre

$$\max_{1 \leqq l \leqq m} \left| \sum_{k=1}^{l} \varphi(k) \right| > tm^{1/2}$$

és $m(t)$ azon választások számát, melyekre

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \varphi(k) \right| > tm^{1/2}.$$

Fennáll

$$M(t) \leqq 2m(t) < c_1 e^{-c_2 t^2} 2^m. \tag{1}$$

(1)-ben az első egyenlőtlenség való Kolmogorofftól, a második természetesen régóta ismert a binomiális eloszlás elméletéből. Jelölje $M_1(2t)$ azon $\varphi(k) = \pm 1$ függvények számát, melyekre

$$\max_{1 \leqq u < v \leqq m} \left| \sum_{u}^{v} \varphi(k) \right| > 2tm^{1/2}$$

(1)-ből nyilvánvaló, hogy

$$M_1(2t) \leqq 2m(t) < c_1 e^{-c_2 t^2} 2^m. \tag{2}$$

(2)-ből mármost nyilvánvaló, hogy azon $\varphi(k) = \pm 1, 1 \leqq k \leqq n$ függvények száma, melyekre fix a és d $(0 < a \leqq d)$ mellett van oly $0 \leqq u < v \leqq n/d$, hogy

$$\left| \sum_{u}^{v} \varphi(a+kd) \right| \geqq 2t \left(\frac{n}{d} \right)^{1/2}$$

kisebb, mint $c_1 e^{-c_2 t^2} 2^n$ (ti. ha $k \not\equiv a \pmod{d}$), akkor feltételünk semmi megkötést se jelent, s az $a+kd$ alakú számokra (2) alkalmazható). Tehát ha $t = Cd^{1/2}/2$, akkor nyerjük, hogy azon $\varphi(k)$ függvények száma, melyekre van oly u és v, hogy

$$\left| \sum_{u}^{v} \varphi(a+kd) \right| > Cn^{1/2} \tag{3}$$

kisebb, mint

$$c_1 e^{-c_2 C^2 d/4} 2^n \tag{4}$$

Minthogy a, d féleképpen, választható (4)-ből nyerjük, hogy azon $\varphi(k)$ függvények száma, melyekre van oly a, u, v, hogy

$$\sum_{u}^{v} |\varphi(a+kd)| > Cn^{1/2}$$

kisebb, mint

$$c_1 d e^{-c_2 C^2 d/4} 2^n. \tag{5}$$

(5)-ből nyerjük d-re való szummálással ($d=1, 2, \ldots$) hogy azon φ $\varphi(k) = \pm 1$ függvények száma, melyekre $G(n) > Cn^{1/2}$, azaz melyekre van oly a, d, u, v hogy

$$\left| \sum_{u}^{v} \varphi(a+kd) \right| > Cn^{1/2}$$

kisebb, mint

$$2^n \sum_{d=1}^{\infty} c_1 d e^{-c_2 C^2 d/4} < 2^n \tag{6}$$

ha C elegendő nagy. (6)-ból nyilván következik, hogy van oly $\varphi(k)$ függvény, melyre $G(n) \leqq Cn^{1/2}$.

Valószínűnek látszik, hogy minden $c>0$-ra, ha $n > n_0(c)$, akkor $G(n) < cn^{1/2}$, azaz

$$\lim_{n=\infty} G(n)/n^{1/2} = 0. \tag{7}$$

(7) bizonyítása azonban eddig nem sikerült.

Cantor, Schreiber, Strauss és én konstruáltunk (egymástól függetlenül) olyan $\varphi(n) = \pm 1$ függvényt, melyre minden a és d mellett

$$\sup_{l=\infty} \left| \sum_{k=1}^{l} \varphi(a+kd) \right| = l(a, d) < \infty \tag{8}$$

Ugyanis ha $\varphi(u) = -\varphi(m+u)$, $1 \leqq u \leqq m$, akkor minden $d|m$ esetén, ha $0 \leqq a < d$

$$\sum_{0 \leqq l < \frac{m}{d}-1} \varphi(a+ld) = 0.$$

E megjegyzésből a fenti tulajdonságú $\varphi(n)$ könnyen nyerhető.

Könnyű belátni azonban, hogy az $l(a, d)$, $0 \leqq a < d$, $1 \leqq d < \infty$ számok nem lehetnek korlátosak. Legyen $L(d) = \max_a l(a, d)$ $L(d)$-re nincs jó alsó becslésünk, példánk kidolgozva $L(d) < c^d d!$ felső becslést ad s nem tudjuk, mily közel van e becslés a valódi határhoz.

Felvetettük még a következő kérdést: Legyenek $\zeta^{(i)} = \{n_1^{(i)} < n_2^{(i)} < \ldots\}$ $1 < i < \infty$ egész számok sorozatai, akkor van oly $\varphi(n) = \pm 1$ függvény, hogy

$$\sup_{l=\infty} \left| \sum_{j=1}^{l} \varphi(n_j^{(i)}) \right|$$

minden i-re véges. A válasz bizonyára igenlő lesz.

K. F. Roth, Remark concerning integer sequences, Acta Arithmetica, IX(1964), 257—260).

I. 11. Legyen $a_1 < a_2 < \ldots < a_Z \leqq n$ olyan sorozat, hogy a

$$\prod_{i=1}^{Z} a_i^{\varepsilon_i}, \qquad \varepsilon_i = 0 \quad \text{vagy} \quad 1$$

szorzatok mind különbözők. Sejtettem, I-ben, hogy

$$Z < \pi(n) + cn^{1/2}/\log n. \tag{1}$$

(1)-et azóta bebizonyítottam. Hogy (1)-et beláthassuk, az a-kat két részre osztjuk, az első osztályban vannak azon $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$-ek, melyeknek minden primfaktora $< n^{1/2}$. Kimutatjuk, hogy

$$r < c_1 n^{1/2}/\log n. \tag{2}$$

Feltevés szerint a

$$\prod_{j=1}^{r} a_{ij}^{\varepsilon_i} \qquad \varepsilon_i = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \tag{3}$$

szorzatok mind különbözőek s a (3) alatti számok száma nyilván 2^r. A (3) alatti számok számát most egy más módon fogjuk megbecsülni. A (3) alatti számok minden primfaktora $\leqq n^{1/2}$ s ezért ezek $U \cdot V$ alakba írhatók, ahol U minden primfaktora $\leqq n^{1/3}$, s V minden p primfaktorára $n^{1/3} < p \leqq n^{1/2}$. Megbecsüljük mármost, hogy hányféleképpen választható meg U. Nyilván $U < n^r$ (ti. a (3) alatti számok is kisebbek, mint n^r) s így a p primszám kitevője U-ban nyilván legfeljebb (ha $n > n_0$)

$$1 + \frac{r \log n}{\log p} \leqq 1 + \frac{r \log n}{\log 2} < r^2 \tag{4}$$

féleképpen választható. (4) és (3) miatt U legfeljebb

$$(r^2)^{\pi(n^{1/3})} < r^{2n^{1/3}} < n^{2n^{1/3}} \tag{5}$$

féleképpen választható.

Vizsgáljuk mármost, hogy V hányféleképpen választható meg. a_{i_j} legfeljebb két $n^{1/3}$-nál nagyobb primszámmal lehet osztható, s ezért

ha $p_1, \ldots, p_s$ jelenti az $n^{1/3}$ és $n^{1/3}$ közötti primszámokat s α_i jelenti, hogy p_j hány a_{i_j}-ban fordulhat elő, nyilván (ha $p^2 | a_{i_j}$, akkor 2-t számítunk)

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \leqq 2r \tag{6}$$

(6), (3) és az aritmetikai s geometriai közép egyenlőtlensége miatt V-re legfeljebb

$$\prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1) \leqq \left(\frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1) \right)^s \leqq \left(\frac{2r+s}{s} \right)^s \tag{7}$$

választásunk van. (5) és (7) miatt $U \cdot V$-re, azaz a (3) alatti számokra legfeljebb

$$n^{2n^{1/3}} \left(1 + \frac{2r}{s} \right)^s \tag{8}$$

választásunk van. $s < c_2 (n/\log n)^{1/2}$ miatt egyszerű számolással adódik, hogy ha (2) elegendő nagy c_1-re nem igaz, akkor a (8) alatti kifejezés $< 2^r$, azaz a (3) alatti szorzatok nem lehetnek mind különbözők s ezzel (2) be van bizonyítva.

A második osztálybeli számok $p \cdot b$ alakúak, ahol $p > n^{1/2}$. Az $n^{1/2}$-nél nagyobb primszámokat két osztályba osztjuk, az első osztályban azon primszámok vannak, melyekhez legfeljebb egy pb alakú szám van. Legyenek $p_1, \ldots, p_j$ a második osztálybeli primszámok, $p_i b_i^{(k)}$, $1 \leqq i \leqq j$; $1 \leqq k \leqq t_i$ legyenek az e primszámokhoz tartozó második osztálybeli számok. A második osztálybeli számok száma nyilván kisebb, mint

$$\pi(n) + \sum_{i=1}^{j} t_i . \tag{9}$$

(2) és (9) miatt (1) be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy

$$T = \sum_{i=1}^{j} t_i < c_3 n^{1/2} / \log n \tag{10}$$

A

$$\prod_{i=1}^{j} \prod_{k=1}^{t_i} (p_i b_i^{(k)})^{\varepsilon_{i,k}}, \qquad \varepsilon_{i,k} = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \tag{11}$$

alakú számok száma nyilván 2^T. A (11) alatti számok $U'V'$ alakba írhatók, ahol U' minden primfaktora kisebb, mint $n^{1/2}$ és V' minden primfaktora $\geqq n^{1/2}$. Ugyanúgy, mint az első osztálybeli számoknál megbecsüljük, hogy U' és V' hányféleképpen választható. V' nyilván

$$\prod_{i=1}^{j} (t_i + 1)$$

féleképpen választható, ti. p_i kitevője a (11) alatti szorzatokban csak a 0, 1, ... t_i számok valamelyike lehet. Minthogy a geometriai közép nem nagyobb, mint az aritmetikai, fennáll

$$\prod_{i=1}^{j}(t_i+1) \leqq \left(\frac{T+j}{j}\right)^j \leqq 3^{T/2} \tag{12}$$

(12) második egyenlőtlensége $T \geqq 2j$-ből és abból következik, hogy $\left(\frac{T+j}{j}\right)^j$ j-nek monoton növekvő függvénye.

Legyen $\varepsilon > 0$ elegendő kicsi, pl. $\varepsilon = \frac{1}{10}$ s legyen c_3 elegendő nagy s tegyük fel, hogy (10) nem teljesül.(8)-ból egyszerű számítással nyerjük, (r. (8)-ban most T-vel helyettesítendő), hogy U' számára legfeljebb $(1+\varepsilon)^T$ választásunk lehet, s így (12) miatt a (11) alatti számokra legfeljebb

$$3^{T/2}(1+\varepsilon)^T < 2^T$$

választásunk lehet — azaz a (11) alatti számok nem lehetnek mind különbözők, ami ellentmondás. Ezzel (10), s így (1) be van bizonyítva.

Nem lehetetlen, hogy

$$\max Z = \pi(n) + \pi(n^{1/2}) + o\left(\frac{n^{1/2}}{\log n}\right) \tag{13}$$

de (13) igazságát nem tudom eldönteni. Első pillanatban sejteni lehetne, hogy

$$\max Z = \sum_{k=0}^{\infty} \pi(n^{1/2^k})$$

de Pósával megjegyeztük, hogy ez nem igaz. Legyen az $a_1 < \ldots < a_Z \leqq n$ sorozat következőképpen definiálva: Ha $p > n^{1/7}$, akkor p, p^2, p^4 előfordul az a-k között, amíg ezek nem nagyobbak n-nél. Ha $p \leqq n^{1/7}$ p^3, p^5, p^6, p^7 fordul elő az a-k között. A $\prod_{i=1}^{Z} a_i^{\varepsilon_i}$ alakú számok nyilván mind különbözők s

$$Z = \pi(n) + \pi(n^{1/2}) + \pi(n^{1/4}) + \pi(n^{1/7}). \tag{14}$$

Legyen $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, ahol $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i = 0$ vagy 1, összegek mind különbözők. Legyen $b_k = \min a_k$. (14) mintájára könnyű belátni, hogy

$$\max Z \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \pi(n^{1/b_k}) \tag{15}$$

Talán (15)-ben egyenlőség áll fenn.

I. 11-ben továbbá kérdeztem: megadható-e $n(1-\varepsilon)$ szám n-ig úgy, hogy $\prod_{r=1}^{l_1} a_{i_r} = \prod_{r=1}^{l_2} a_{j_r}$ csak akkor oldható meg, ha $l_1 = l_2$. Selfridge konstruált $\frac{1}{e}$ sűrűségű ily sorozatot az eredeti kérdés azonban még nincsen elintézve.

I. 13. Jelentse $u_l(n)$ azt a legnagyobb számot, melyre van oly $a_1 < \ldots < a_{u_l(n)} \leqq n$, hogy az $a_i a_j = m$ egyenletnek minden m-re l-nél kevesebb megoldása legyen. Bebizonyítottam, hogy

$$u_{2^l}(n) = (1+o(1))\frac{n(\log\log n)^{l-1}}{(l-1)!\log n} = (1+o(1))\pi_l(n)$$

A bizonyítás igen komplikált.

P. Erdős, On the multiplicative representation of integers, Israel Journal of Math. 2(1964). 251—261

I. 14. Legyen $a_1 < \ldots < a_l \leqq n$ olyan sorozat, hogy nincs k, a_i melyeknek páronként ugyanaz a legnagyobb közös osztójuk. Bebizonyítottam, hogy minden k-ra és $\varepsilon > 0$-ra, ha $n > n_0(\varepsilon, k)$ (max $l = A_k(n)$)

$$2^{c_k \log n/\log\log n} < A_k(n) < n^{3/4+\varepsilon} \tag{1}$$

Valószínűnek látszik, hogy

$$A_k(n) < 2^{c'_k \log n/\log\log n}. \tag{2}$$

(2) következne egy Radoval való kombinatorikus sejtésünkből. Legyen $g(k, t)$ az a legkisebb szám, melyre ha $A_1, A_2, \ldots A_s$ $s = g(k, t)$ legfeljebb k elemű halmazok, akkor mindig megadható t oly A, melyeknek páronként ugyanaz a közös részük. Sejtettük, hogy

$$g(k, t) < c_1^k (t-1)^k \tag{3}$$

(3) helyett csak $g(k, t) < k!\,(t-1)^k$ bizonyítása sikerült. (3)-nak több alkalmazása lenne számelméleti kérdésekben.

Még a következő kérdést szeretném megemlíteni.

Igaz-e, hogy minden α-hoz van $n_0(\alpha)$ ugy, hogy ha $n > n_0(\alpha)$ és

$$1 \leqq a_1 < \ldots < a_l \leqq n,\ l > \alpha n,$$

akkor mindig van három a, melyeknek páronként ugyanaz a legkisebb közös többszöröse? Ha α elég közel van 1-hez, úgy ez triviális, az általános kérdés megoldása eddig nem sikerült.

P. Erdős, On a problem in elementary number theory and a combinatorial problem, Math. of Computation, 18(1964), 644—646.

P. Erdős and R. Rado, Intersection theorems for systems of sets, J. London Math. Soc. 35(1960), 85—90.

I. 18. Fennáll-e, hogy

$$\lim_{k=\infty} \max_n f(n, k)/\pi(k) = \lim_{k=\infty} \max_n F(n, k)/\pi(k) =$$

$$= \lim_{k=\infty} \min_n F(n, k)/\pi(k) = 1.$$

I. 20. Selfridge bebizonyította Stein sejtését, mely szerint ha $a_i (\mathrm{mod}\, n_i)$, $1 < n_1 < \ldots < n_k$ oly kongruenciarendszer, hogy nincs oly szám, mely közülük egynél több kongruenciát kielégít, akkor van oly $0 < u \leqq 2^k$ szám, mely ezen kongruenciák egyikét sem elégíti ki. Selfridge eredménye még nincs publikálva.

Én sejtettem, hogy ha $a_i (\mathrm{mod}\, n_i)$, $1 \leqq i \leqq k$ ($n_{i_1} \neq n_{i_2}$ nincs feltételezve) olyan, hogy mindig van egy szám, mely nem elégíti ki e kongruenciák egyikét sem, akkor mindig van u, $0 < u \leqq 2^k$, mely e kongruenciák egyikét sem elégíti ki. Selfridge ezt $0 < u \leqq e^k$-val bizonyította be.

Legyen $\sum_{l=1}^{k} 1/n_i \leqq 1 - \frac{1}{2^k}$, $a_i (\mathrm{mod}\, n_i)$, $1 \leqq i \leqq k$ tetszőleges kongruenciarendszer. Igaz-e, hogy van oly u, $0 < u \leqq 2^k$, mely e kongruenciák egyikét se elégíti ki?

I. 21. Daykin és Baines bebizonyították D. Newman sejtését, mely szerint ha $1 \leqq a_1 < \ldots < a_{n+1} \leqq 2n$, akkor mindig van közöttük kettő, melyre

(1) $$(a_i, a_j) = 1, \quad a_i \leqq n.$$

Newman továbbá sejtette, hogy minden $m \geqq n$-hez van az $1, 2, \ldots, n$ számoknak oly $i_1^{(m)}, \ldots, i_n^{(m)}$ permutációja, melyre

(2) $$(r, m + i_r^{(m)}) = 1, \quad 1 \leqq r \leqq n.$$

(2)-t $m = n$ esetén bebizonyították, s ebből nyerték (1)-et.

Legyen $a_1 < \ldots < a_{n+1} \leqq 2n$, $f(2n; a_1, \ldots, a_{n+1})$ jelentse az $(a_i, a_j) = 1$ párok számát. Legyen $u_k = 3 \cdot 5 \ldots p_k$ az első k páratlan primszám szorzata, továbbá legyen $u_r < 2n < u_{r+1}$. Bebizonyítottam, hogy ha $n > n_0$, akkor $f(2n; a_1, \ldots, a_{n+1})$ minimumát a következő sorozat adja: az a-k a páros számok és u_r. A bizonyítás hasonló, mint I. 21-ben a (14) bizonyítása. Valószínűnek látszik, hogy ha $a_1 < \ldots < a_{n+1} \leqq 2n$, akkor mindig van egy a, mely sok más a-hoz relatív prim, de nem tudtam bebizonyítani, hogy ezeknek száma n-nel végtelenhez tart. E kérdés eldöntése valószínűleg nem lesz nehéz. (1966 szept.: Sárközi és Szemerédi e sejtést bebizonyították).

Felvethető a következő kérdés: Legyen $a_1 < \ldots < a_{n+2} \leqq 2n$. Minden a-t helyettesítsünk egy ponttal s a_i-t éllel összekötjük a_j-vel, ha $(a_i, a_j) = 1$. Igaz-e, hogy az így nyert gráfban van kör, sőt talán négyszög is? (Sárközi és Szemerédi ezt is bebizonyították).

D. E. Daykin and M. J. Baines, Coprime mappings between sets of consecutive integers, Matematika 10(1963), 132—136.

I. 24. Legyen $|Z_i| = 1$, $1 \leqq i < \infty$.

$$A_n = \max_{|Z|=1} \left| \prod_{i=1}^{n} (Z - Z_i) \right|$$

Igaz-e, hogy $\limsup_{n=\infty} A_n = \infty$? E kérdés nem látszik könnyűnek.

I. 26. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$ oly sorozat, melyre

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i, \qquad \varepsilon_i = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \tag{1}$$

összegek mind különbözők. L. Moser bebizonyította, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \geqq \frac{4^k - 1}{3} \tag{2}$$

egyenlőség, csak ha $a_i = 2^{i-1}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

(1)-ből könnyen adódik, hogy

$$k < \frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log \log x}{2 \log 2} + O(1). \tag{3}$$

$\frac{\log \log x}{2 \log 2}$ javítása nem látszik könnyűnek. $k < \frac{\log x}{\log 2} + 0(1)$ sejtés még nincs eldöntve. Könnyen belátható, hogy ha $a_1 < \ldots$ végtelen sorozat, melyre az (1) alatti összegek minden k-ra különbözők, akkor végtelen sok k-ra $a_k \geqq 2^{k-1}$.

I. 27. Nagyon érdekes kérdésekre jutunk, ha végtelen sorozatokat is megengedünk. Legyen $a_1 < a_2 < \ldots$ végtelen sorozat, melyre az $a_i + a_j$ összegek mind különbözők. E sorozatokat Sidon, ki tudtommal elsőnek foglalkozott e kérdésekkel, B_2 sorozatoknak nevezte. Legyen

$$A(x) = \sum_{a_i \leqq x} 1$$

Fennáll

$$\liminf_{x=\infty} A(x)/x^{1/2} = 0 \tag{1}$$

sőt

$$\liminf_{n=\infty} A(x)\,(\log x)^{1/2}/x^{1/2} < \infty \tag{2}$$

lehet, hogy (2) még élesíthető, de ez eddig nem sikerült s talán nehéz lesz. Megadható viszont oly B_2 sorozat, melyre

$$\limsup_{x=\infty} A(x)/x^{1/2} \geqq 1/2. \tag{3}$$

Ugyanazzal a módszerrel, melyre (1) és (2) bizonyítható, kimutattam, hogy egy B_2 sorozatra

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{\log x} \sum_{a_i < x} 1/a_i^{1/2} = 0. \tag{4}$$

(3) miatt viszont van olyan B_2 sorozat, melyre $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i^{1/2}$ divergens. (4) valószínűleg élesíthető, de nem tudom, hogy mennyire. Krickeberg bebizonyította, hogy van oly B_2 sorozat, melyre

$$\limsup A(x)/x^{1/2} \geqq 2^{-1/2}. \tag{5}$$

(5) talán tovább élesíthető, de Turánnal bebizonyítottuk, hogy $A(x) < x^{1/2} + O(x^{1/4})$.

Chowla és Mian rekurzióval a következő módon definiáltak egy B_2 sorozatot: $b_1 = 1$, tegyük fel, hogy $b_1, \ldots, b_{v-1}$ már definiálva van. b_v a legkisebb szám, mely nem állítható elő $b_i + b_j - b_l$, $1 \leqq i, j, l \leqq v-1$ alakba. Krickeberg $v = 25\,000$-ig kiszámította b_v-t, valószínűnek látszik, hogy ha $\varepsilon > 0$ elegendő kicsi, akkor $v > v_0(\varepsilon)$-ra $b_v > v^{1/2+\varepsilon}$, de még

$$\lim_{v=\infty} b_v/v^2 = \infty \tag{6}$$

sincsen bebizonyítva. Könnyű oly b_v sorozatot konstruálni, melyre $b_v < v^3$ minden v-re, azaz $A(x) = O(x^{1/3})$, de nem sikerült eddig oly B_2 sorozatot konstruálni, melyre $b_v = o(v^3)$. Rényivel bebizonyítottuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra van oly $a_1 < a_2 < \ldots$ sorozat, melyre ha $i > i_0(\varepsilon)$, $a_i < i^{2+\varepsilon}$ és $f(n) < c_\varepsilon$ minden n-re, ahol $f(n)$ jelenti az $n = a_i + a_j$ egyenlet megoldásainak számát. Turánnal sejtettük, hogy ha minden n-re $f(n) > 0$, akkor

$$\limsup_{n=\infty} f(n) = \infty. \tag{7}$$

Valószínűnek látszik, hogy (7) már akkor is következik, ha csak azt tesszük fel, hogy $a_k < ck^2$ minden k-ra, de (1) szerint az $a_k < ck^2$ feltevésből csak azt tudjuk, hogy az $a_i + a_j$ összegek nem lehetnek mind különbözőek.

E kérdések igen nehezeknek látszanak. Érdekes, hogy a problémák multiplikativ analogonjait sikerült elintéznem. (Lásd 1. 13).

P. Erdős and P. Turán, On a problem of Sidon in additive number theory and some related problems, J. London Math. Soc. 16(1941), 212—215, lásd még ugyanott 19(1944) 208.

F. Krickeberg, B_2 Folgen und verwandte Zahlenfolgen, J. reine u. angew. Math. 206(1961)53—60.

A. Stöhr, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe, J. reine u. angew. Math 194(1955), 132—134.

I. 28. Heilbronnal a következő tételeket bizonyítottuk be: Legyen $k/p^{2/3} \to \infty$ (p primszám), és $r_1, \ldots, r_k$ k különböző maradék mod p. Minden t-re a

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i r_i \equiv t (\mathrm{mod}\, p), \qquad \varepsilon_i = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \tag{1}$$

kongruencia megoldásainak száma $(1+o(1))2^k/p$. A $k/p^{2/3} \to \infty$ feltétel nem javítható, $k > cp^{2/3}$ nem elég.

Ha $k > 3\sqrt{6}\, p^{1/2}$, akkor az (1) kongruenciák minden t-re megoldhatók, ez valószínűleg már $k > 2p^{1/2}$ esetén is igaz.

Sejtettük még, hogy ha $r_1, \ldots, r_k$ különböző maradékok mod n és $k > cn^{1/2}$, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i r_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, n), \qquad \varepsilon_i = 0 \quad \text{vagy} \quad 1$$

megoldható. Flohr és én ezt csak $k > cn^{\alpha}$ esetén bizonyítottuk be, ahol α, $\frac{1}{2}$-nél nagyobb állandó.

P. Erdős and H. Heilbronn, On the addition of residue classes mod p, Acta Arithmetica, 9(1964), 149—59.

I. 29. és I. 30. M. G. Murdeshwar disszertációjában Czipszer és az én eltolási problémámmal kapcsolatos több eredményt élesített s számos új problémát vet fel.

M. G. Murdeshwar, Thesis, Univ. of Alberta, Edmonton 1964. Murdeshwar eredményei rövidesen publikálva lesznek.

I. 34. Hanani sejtette, hogy ha $a_1 < a_2 < \ldots$ és $b_1 < b_2 < \ldots$ két végtelen sorozat, melyekre minden n előállítható $a_i + b_j$ alakba, akkor ha $A(x) = \sum_{a_i < x} 1$ és $B(x) = \sum_{b_j < x} 1$

$$\limsup_{x=\infty} A(x)B(x)/x > 1. \tag{1}$$

Narkiewicz (1)-et néhány speciális esetben bebizonyította, de Danzer (1)-et megcáfolta. Danzerrel sejtettük, hogy ha minden n-re $n = a_i + b_j$

megoldható és $\lim_{x=\infty} A(x)B(x)/x = 1$, akkor

$$\lim_{x=\infty} \left(A(x)B(x) - x\right) = \infty \tag{2}$$

E sejtést Sárközi és Szemerédi nemrég bebizonyították.

Meglepő, hogy a következő egyszerű kérdést nem sikerült elintéznem. Van-e oly $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$, $k > cx/\log x$, hogy minden $m < x$ $2^u + a_i$ alakban előállítható. Lorenz általános tétele csak

$$k < cx \log x/\log x\text{-et ad.}$$

L. Danzer, Über eine Frage von Hanani aus der additiven Zahlentheorie, J. reine u. angew. Math. 214—215 (1964), 392—397.

W. Narkiewicz, Remarks on a conjecture of Hanani in number theory, Colloqu. Math. 7 (1960), 161—165.

P. Erdős, Some results on additive number theory, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 847—853.

G. G. Lorenz, On a problem of additive number theory, Ibid. 838—891.

2.

1. Legyen $a_1 < a_2 < \ldots$ oly végtelen sorozat, melynek egyik tagja se osztható a másikkal, ily sorozatot primitív sorozatnak fogjuk nevezni. Besicovitch volt az első, aki bebizonyította azt a váratlan tényt, hogy egy primitív sorozat felső sűrűsége lehet positív, sőt, ha $\alpha < \frac{1}{2}$, akkor van oly primitív sorozat, melynek felső sűrűsége α, de minden primitív sorozat felső sűrűsége $< \frac{1}{2}$. Behrend és én bebizonyítottuk, hogy minden primitív sorozat alsó sűrűsége 0, pontosabban Behrend bebizonyította, hogy

$$\sum_{a_i < x} 1/a_i < c_1 \log x/(\log\log x)^{1/2} \tag{1}$$

és Pillai bebizonyította, hogy minden x-hez van oly primitív $a_1 < \ldots < a_k < x$, melyre

$$\sum_{a_i > x} 1/a_i > c_2 \log x/(\log\log x)^{1/2} \tag{2}$$

Sárközi, Szemerédi és én kimutattuk, hogy

$$\lim_{x=\infty} \max \sum_{a_i < x} 1/a_i \frac{(\log\log x)^{1/2}}{\log x} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}. \tag{3}$$

(3)-ban a maximum az összes $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$ primitiv sorozatra van kiterjesztve. Mint már I.-ben megjegyeztem, nem látszik könnyűnek meghatározni, mely primitív sorozatra maximális $\sum_{a_i \leqq x} 1/a_i$.

Sárközi, Szemerédi és én kimutattuk, hogy végtelen primitív sorozatra

$$\sum_{a_i < x} 1/a_i = o\left(\log x/(\log\log x)^{1/2}\right) \tag{4}$$

továbbá kimutattuk, hogy (4) nem javítható.

Én bebizonyítottam, hogy minden primitív sorozatra

$$\sum_i 1/a_i \log a_i < C \tag{5}$$

ahol C abszolút konstans. Nem tudom, mekkora $\sum_i 1/a_i \log a_i$ maximális értéke, talán $\sum_p 1/p \log p$.

Talán érdekes lenne a következő kérdést vizsgálni: Legyen $b_1 < b_2 <$ végtelen sorozat. Mikor létezik $a_1 < \ldots$ primitív sorozat, melyre $a_k < cb_k$? E kérdés valószínűleg igen nehéz lesz.

Davenport és én bebizonyítottuk, hogy ha $a_1 < \ldots$ végtelen sorozat, melyre fennáll végtelen sok x-re

$$\sum_{a_i < x} 1/a_i > c \log x \tag{6}$$

ahol van egy végtelen részsorozat a_{i_k}, melyre $a_{i_k}/a_{i_{k+1}}$. Sárközi, Szemerédi és én azt is bebizonyítottuk, hogy ha (6) helyett végtelen sok x-re

$$\sum_{a_i < x} 1/a_i \log a_i > c \log\log x$$

áll fenn, akkor az $a_{i_k}/a_{i_{k+1}}$ részsorozat úgy választható, hogy végtelen sok k-ra $a_{i_k} < \exp\exp c_1 k$ ($\exp z = e^z$).

Továbbá azt is bebizonyítottuk, hogy ha $a_1 < \ldots$ alsó sűrűsége pozitív, akkor

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{a_i \mid a_j \\ a_j < x}} 1 = \infty.$$

Legyen $\alpha_1 < \ldots$ valós számok végtelen sorozata, melyre minden i, j, k egész számokra

$$|k\alpha_i - \alpha_j| \geqq 1. \tag{7}$$

Fennáll-e ekkor (1) és (5)? Ha az $\alpha - k$ egész számok, akkor (7) azt jelenti, hogy egy α sem osztható egyetlen másikkal. Azt se sikerült bebizonyítanom, hogy (7)-ből következik, hogy

$$\sum_{\alpha_i < x} 1/\alpha_i \log \alpha_i = o(\log\log x).$$

vagy

$$\sum_{\alpha_i < x} 1/\alpha_i = o(\log x).$$

Sárközi, Szemerédi és én bebizonyítottuk, hogy ha $a_1 < \ldots$ pozitív alsó sűrűségű, akkor $[a_i, a_j] = a_r$ mindig megoldható különböző számokban. Kérdezhetjük, maximálisan hány szám adható meg x-ig úgy, hogy $[a_i, a_j] = a_r$ ne legyen megoldható különböző egész számokban.

F. Behrend, On sequences of numbers not divisible one by another, J. London Math. Soc. 10 (1935) 42—45.

P. Erdős, Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, ibid. 126—128.

H. Davenport and P. Erdős, On sequences of positive integers, Acta Arithmetica 2 (1937) 147—151, lásd még Indian J. of Math. 15 (1951) 19—24.

Sárközivel és Szemerédivel való eredményeink még nincsenek publikálva.

Végül még egy megjegyzés: Legyen $a_1 < a_2 < \ldots$ végtelen sorozat, melyre $a_i \cdot a_j \neq a_r$. Könnyű belátni, hogy e sorozat sűrűsége < 1, de 1-hez tetszőlegesen közel jöhet. Könnyű belátni, hogy a felső sűrűség kisebb, mint $1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r / a_1^r$, s ezen értékhez tetszőlegesen közel jöhet. Mily nagy lehet az alsó sűrűség?

2. Legyen $a_1 < \ldots < a_n$ különböző számok sorozata. Jelölje $f(n; a_1, \ldots, a_k)$ az $n = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i = 0$ vagy 1 egyenlet megoldásainak számát. Moserral sejtettük, hogy

$$f(n; a_1, \ldots, a_k) < c 2^k / k^{3/2}. \tag{1}$$

(1) helyett csak

$$f(n; a_1, \ldots, a_k) < c 2^k (\log k)^{3/2} / k^{3/2}$$

bizonyítása sikerült. Sárközi és Szemerédi azonban nemrég bebizonyították (1)-et. (Acta Arithmetica, XI (1965), 205-208)

Nem lehetetlen, hogy ha $k = 2l + 1$, akkor

$$\max_{n; a_1, \ldots, a_{2l+1}} f(n; a_1, \ldots, a_{2l+1}) = f(0; -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l) \tag{2}$$

(2) bebizonyítása nem sikerült, s nem sikerült $f(0; -l, \ldots, 0, \ldots, l)$-re formulát találni. (van Lint aszimptotikus formulát talált).

Valószínűnek látszik, hogy az

$$n = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = t$$

egyenletrendszer megoldásainak száma $< c 2^k / k^2$.

Legyen $a_1 < \ldots < a_n$. Moserrel bebizonyítottuk, hogy mindig van egy részsorozat $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, $k \geqq \frac{n}{3}$, melyre $a_{i_{j_1}} + a_{i_{j_2}} \neq a_{i_{j_3}}$, $1 \leqq j_1 \leqq j_2 \leqq j_3 \leqq k, \frac{n}{3}$ bizonyára javítható lesz, azonban A. J. Hilton kimutatta, hogy $7n/15$-nél több már nem igaz még akkor sem, ha csak a $j_1 \neq j_2$ összegeket engedjük meg. Hilton példája

$$100^r t, \quad 0 \leqq r \leqq \frac{n}{15}, \quad 1 \leqq t \leqq 12, \quad \text{továbbá} \quad t = 14, 16, 17.$$

P. Erdős, Extremal problems in number theory, Proc. Symp. Pure Math. Vol. VIII. Theory of Numbers, 181—189, e cikkben több ide vonatkozó probléma van diszkutálva.

3. Grünwald Géza és Lázár Dezső kérdezték: Mekkora az a legnagyobb $f(k)$ szám, melyre megadható $a_1 < \ldots < a_{f(k)}$ úgy, hogy a $\prod_{1 \leqq i \leqq j \leqq f(k)} (a_i + a_j)$ szorzatnak legfeljebb k prímfaktora van. Turánnal bebizonyítottuk, hogy

$$c_1 k \log k < f(k) < 3 \cdot 2^{k-1}$$

Surányi szerint $f(k) \leqq 2^k$, de $f(k)$ valódi nagyságrendjéről sejtelmünk sincsen.

Nem tudok csak k-tól függő $g(k)$-t találni, melyre ha $a_1 < \ldots < a_{g(k)}$; $b_1 < \ldots < b_{g(k)}$ két sorozat, akkor a $\prod_{1 \leqq i,\, j \leqq g(k)} (a_i + b_j)$ szorzatnak k-nál több prímfaktora van. Igen valószínű, hogy ily $g(k)$ létezik.

Bebizonyítottam, hogy ha $a_1 < \ldots$ végtelen sorozat, akkor az $a_i + a_j$ számok közül mindig kiválasztható egy végtelen részsorozat úgy, hogy egyik tagja se osztható egyetlen másikkal, sejtettem, hogy ugyanez igaz az $a_i + b_j$ számokra, de Trostrum ezt megcáfolta.

P. Erdős and P. Turán: On a problem in the elementary theory of numbers, Amer. Math. Monthly 41 (1934) 608—610.

P. Erdős ibid 57 (1950) 567.

G. B. Trostrum, On sequences of integers, Mathematica 5 (1958) 38—39.

4. Legyen $m \leqq n$ s $f(n)$ legyen az a legkisebb szám, hogy minden m-re van oly u, v, melyre

$$0 \leqq u, v \leqq f(n), \quad (m+u, m+v) = 1.$$

Moser és én kimutattuk, hogy végtelen sok n-re

$$f(n) > (1-\varepsilon)(\log n / \log\log n)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Másrészt kimutattam, hogy minden n-re

$$(2) \qquad f(n) < c \log n / \log \log n \left(c < \frac{\pi^2}{12} + \varepsilon \right), \quad \text{ha} \quad n > n_0(\varepsilon).$$

(1) és (2) között jelentős hézag van, melyet nem lesz könnyű áthidalni. E kérdés úgy keletkezett, hogy Moser kérdezte, van-e tetszőlegesen nagy négyzet a síkban, hogy a négyzetben levő rácspontok koordinátái ne legyenek relatív prímek.

P. Erdős, On an elementary problem in number theory, Can. Math. Bull. 1 (1958), 5—8.

5. Legyen $n_1 < \ldots$ véges vagy végtelen sorozat. Mikor adható meg oly $a_1, \ldots$ sorozat, hogy az $a_i (\mathrm{mod}\, n_i)$ kongruenciákhoz ne legyen oly u, mely egynél több kongruenciát kielégít? Nyilván $\sum 1/n_i \leqq 1$ és $(n_i, n_j) > 1$ szükséges feltételek. I. 21-ben Steinnel sejtettük, hogy minden ε-hoz van oly x_0, hogy ha $x > x_i$, akkor $\sum_{n_i < x} 1 < \varepsilon x$ teljesül.

6. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ tetszőleges sorozat, $b_1 < \ldots$ legyen azon számok sorozata, melyek legalább egy a-nak többszörösei. Igaz-e, hogy minden $m > n$ esetén

$$(1) \qquad \frac{B(m)}{m} < \frac{2B(n)}{n}, \quad B(x) = \sum_{b_i \leqq x} 1.$$

(1) ha igaz, nyilván nem javítható, az $a_1 < \ldots$ sorozat álljon csak az a_1-ből, $n = 2a_1 - 1$, $m = 2a_1$. Megjegyezhetjük még, hogy nincs oly $\varepsilon > 0$, melyre

$$B(m)/m > \varepsilon B(n)/n$$

minden $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ sorozatra, s $m > n$-re fennálljon. Legyenek ugyanis az a-k az $n/2$ és n közötti számok és legyen $m = m(n)$ elegendő nagy. Ha $n > n_0(\varepsilon)$, akkor $B(m)/m < \varepsilon/2$. (P. Erdős, Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, J. London Math. Soc. 10 (1935), 126—128.

7. Jelölje $f(n; a_1, \ldots, a_k)$ azon számok számát n-ig, melyek legalább egy a-val oszthatók. Mekkora $(k + f(n; a_1, \ldots, a_k))/n$ maximuma, ha $[a_i, a_j] > n$, $1 \leqq i \leqq j \leqq k$? Mekkora a maximum, ha $a_i \nmid a_j$, $1 \leqq i < j \leqq k$?

8. $g(n)$ legyen az a legkisebb szám, melyre az $n, n+1, \ldots, n+g(n)$ számok legalább egyike foglaltatik a többi szorzatában. Könnyű belátni, hogy $g(k!) = k$ és ha $n > k!$, akkor $g(n) > k$.

Be tudom bizonyítani, hogy végtelen sok n-re

$$(1) \qquad g(n) > \exp\left((\log n)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right).$$

$g(n)$-re nincs jó felső becslésem. Be tudom bizonyítani, hogy $g(n) < cn^{1/2}$, de valószínűleg $g(n) = o(n^\varepsilon)$, sőt talán $g(n) < \exp\left((\log n)^{1/2+\varepsilon}\right)$, ha $n > n_0(\varepsilon)$. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ azon számok sorozata, melyeknek minden prímfaktoruk $< n^\varepsilon$. $g(n) = o(n^\varepsilon)$ következne, ha be tudnók bizonyítani, hogy

$$\max_{1 \leqq i < k} (a_{i+1} - a_i) < \frac{1}{2} n^\varepsilon. \tag{1}$$

(1) bizonyítása azonban valószínűleg nem lesz könnyű (lásd I. 16).

9. Ismeretes, hogy $a(a+d)(a+2d)(a+3d) = k^2$ lehetetlen, tehát négy egymásután következő szám egy számtani sorban nem lehet négyzetszám. $h(k)$ jelentse azt a legnagyobb számot, melyre van egy k tagú számtani sor, mely $h(k)$ négyzetszámot tartalmaz. Sejtettem, hogy $\lim_{k=\infty} h(k)/k = 0$. Rudin sejtette, hogy $h(k) < ck^{1/2}$, de eddig semmit se sikerült bebizonyítani.

10. Legyen $a_1 < \ldots$ véges vagy végtelen sorozat. $f_i(n; a_1, \ldots)$ jelölje azon számok számát n-ig, melyek pontosan i a-val oszthatók. Mekkora

$$\max_{a_1 < \ldots} \lim_{n=\infty} f_i(n; a_1, \ldots)/n = \alpha_i.$$

Bizonnyára $\alpha_1 = \frac{1}{2}$. (D. Lubell ezt nemrég bebizonyította)

11. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$, tegyük fel, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i = \sum_{i=1}^{k} \delta_i a_i \qquad \varepsilon_i = 0 \text{ vagy } 1, \quad \delta_i = 0 \text{ vagy } 1 \tag{1}$$

csak akkor lehetséges, ha $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{k} \delta_i$. Bebizonyítottam a Linnik—Rényi-féle nagy szita segítségével, hogy akkor $k < Cx^{5/6}$. A nagy szita Bombieri—Roth-féle élesítésének segítségével bebizonyítottam, hogy $k < Cx^{2/3-\varepsilon}$, lehetséges azonban, hogy $k < Cx^{1/2}$ is fennáll. Talán ha $x = (n+1)^2$, akkor $\max k = 2n+1$. Könnyű belátni, hogy ha ez igaz, akkor nem javítható, mert ha az a-k az $n^2+1, \ldots, (n+1)^2$ számok, akkor ha $\sum_{i=1}^{2n+1} \delta_i > \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i$ akkor, $\sum_{i=1}^{2n+1} \delta_i a_i > \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i a_i$. Könnyű belátni továbbá, hogy ha $a_1 < \ldots < a_k \leqq (n+1)^2$ és ha $\sum_{i=1}^{k} \delta_i > \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$ feltételből következik, hogy $\sum_{i=1}^{k} \delta_i a_i > \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i$, akkor $k \leqq 2n+1$.

Straus sejti: Legyen $a_1 < \ldots < a_k$, akkor az $a_{i_1} + \ldots + a_{i_r}$, $i_1 < \ldots < i_r$ alakú összegek legalább $rk - \binom{r}{2} - r + 1$ különböző számot állítanak

elő. Egyenlőség csak akkor, ha az $a-k$ számtani sort alkotnak. Straus megjegyzi, hogy e sejtésből $k<Cx^{1/2}$, $c<(\sqrt{3}+\varepsilon)$-al könnyen következik. (Straus sejtését nemrég bebizonyította)

12. Legyen $a_1<\ldots<a_k\leqq n$.

$$Q(b,p)=\sum_{a_i\equiv b(\mathrm{mod}\ p)} 1$$

A nagy szitával kapcsolatos vizsgálataiban Rényi bebizonyította, hogy

$$(1)\qquad \sum_{p<n^{1/3}} p \sum_{b=0}^{p-1}\left(Q(b,p)-\frac{k}{p}\right)^2<c_1 kn.$$

A legutóbbi időben Barban, Roth és Bombieri lényegesen élesítették (1)-et. Roth és Bombieri érték el a legmesszebbmenő eredményeket. Először Roth bebizonyította, hogy (1)-ben $p<n^{1/3}$, $p<n^{1/2}/(\log n)^{1/2}$-el helyettesíthető, s Bombieri ezt $p<n^{1/2}$-re élesítette. Egyszerű valószínűségszámítási meggondolásokkal kimutattam, hogy elegendő nagy c_2-re

$$(2)\qquad \sum_{p<c_2(n\log n)^{1/2}} p \sum_{b=0}^{p-1}\left(Q(b,p)-\frac{k}{p}\right)^2<c_1 kn$$

nem lehet igaz minden sorozatra, sőt, legfeljebb $o(2^n)$ sorozatra lehet igaz (az összes $a_1<\ldots<a_k\leqq n$ sorozatok száma nyilván 2^n). (2) bizonyításának csak a gondolatmenetét ismertetem: Egyszerű kombinatorikai vagy valószínűségszámítási okoskodással beláthatjuk, hogy $o(2^n)$ sorozat kivételével minden p-re (k mint ismeretes $o(n)$ sorozat kivételével $\frac{n}{2}+o(n)$)

$$(3)\qquad \sum_{b=0}^{p-1}\left(Q(b,p)-\frac{k}{p}\right)^2>c_2 k$$

(3)-ból (2) azonnal következik a prímszámtételből.

Davenport különben megjegyezte, hogy már a négyzetszámok példája is mutatja, hogy (2) nem igaz, de az én komplikáltabb példámnak talán megvan az az érdekessége, hogy nálam $k>cn$, míg a négyzetszámok kevesen vannak, s így itt a nagy szita hatástalansága kevésbé meglepő.

Barban cikke az Akadémia matematikai intézetének közleményeiben fog megjelenni. K. F. Roth, On the large sieves of Linnik and Rényi, Mathematika 12 (1965), 1—9.

13. Elliot bebizonyította, hogy ha $n>n_0(\varepsilon)$ és $a_1<\ldots<a_k\leqq n$, $k>(2+\varepsilon)\frac{n}{\log n}$, akkor mindig van oly p, melyre az a-k teljes maradék-

sort alkotnak. $2+\varepsilon$ valószínűleg $(1+\varepsilon)$-al helyettesíthető, de e kérdést eldönteni igen nehéz lesz. Davenport adott példát olyan sorozatra, melyben $k=\frac{n}{\log n}+o(n/(\log n)^2)$ és nincs oly p, melyre az a-k teljes maradéksort alkotnak.

Davenport példája: $2n-q$, $n<q<2n$. Nyilván nincs oly a, melyre $a\equiv 2n(\mathrm{mod}\, p)$ (ti. $2n-q\not\equiv 2n(\mathrm{mod}\, p)$). Nem tudjuk, vajon Davenport példája élesíthető-e, azaz nem tudjuk, mekkora k maximális értéke, melyre van $a_1<\ldots<a_k\leqq n$, s mely egyetlen prímszámra sem ad teljes maradéksort.

Kérdezhetjük még, hogy mily nagynak kell lennie k-nak, hogy az $a_1<\ldots<a_k\leqq n$ sorozathoz legyen legalább két prímszám, p_1 és p_1, melyre az a-k teljes maradéksort alkotnak.

Davenporttal kérdezhetjük: Legyen $k>n^{1/2}$. Van-e akkor oly p, melyre az a-k több mint $(p+1)/2$ maradékosztályban vannak? Mekkorának kell lennie k-nak, hogy legyen egy p, melyre az a-k $p(1-\varepsilon)$ maradékosztályban vannak?

P. D. T. Elliot, On sequences of integers Quarterly J. of Math. 16 (1965), 30—45.

Selfridgetől való a következő kérdés: Legyenek $a_1<\ldots<a_k<2^k$ egész számok és tegyük fel, hogy ha (c_i-k egész számok)

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{k} c_i a_i=0 \qquad \text{akkor} \qquad \min_{1\leqq i\leqq k} c_i\geqq -1.$$

Igaz-e, hogy akkor $a_1=2^{k-1}$, $a_2=2^{k-1}+2^{k-2}$, ..., $a_k=2^k-1$?

Tudtommal e kérdés még nincs elintézve.

Selfridge bebizonyította, hogy ha (1) fennáll, akkor $a_1\geqq 2^{k-1}$ (itt nem kell az $a_k<2^k$ feltevés).

Selfridge problémáján gondolkozva a következő kérdésre jutottam: Legyen $a_1<\ldots<a_k\leqq x$ és tegyük fel, hogy egy a se foglaltatik más a-k összegében. Mekkora k maximuma?

Jelöljük e maximumot $f(x)$-el. Én először azt sejtettem, hogy $f(x)<\frac{\log x}{\log 2}+O(1)$.

Graham és Straus azonban kimutatták, hogy sejtésem teljesen elhibázott, ugyanis ők bebizonyítják, hogy ($\exp z=e^z$)

$$(2)\qquad f(x)>\exp[c_1(\log x)^{1/2}].$$

Nem nehéz bebizonyítani, hogy $f(x)<x^{1-\alpha}$ ha $\alpha>0$ elegendő kicsi. Valószínűnek látszik, hogy $f(x)=o(x^{\varepsilon})$.

Graham és Straus a következő érdekes kérdést vetik fel: Legyen $b_1 < \ldots < b_l \leqq x$ és tegyük fel, hogy egy b se számtani közepe más b-knek. Mekkora l maximuma? (lásd I. 8.).

Legyen $\max l = F(x)$. Világos, hogy $F(x) \geqq f(x)$. Graham és Straus kimutatják, hogy

$$F(x) > \exp[c_2(\log x)^{1/2}] \tag{3}$$

és hogy (3)-ból (2) könnyen nyerhető.

(3)-ra a következő nagyon egyszerű bizonyítást találtam: Legyen $t = t(x)$ egész szám és legyen u meghatározva a következő egyenlőtlenségből

$$\sum_{i=0}^{u-1} t^i \leqq x < \sum_{i=0}^{u} t^i. \tag{4}$$

Legyenek a $b_1 < \ldots < b_l \leqq x$ számok az összes

$$\sum_{i=0}^{u-1} \varepsilon_i t^i, \quad \varepsilon_i = 0 \quad \text{vagy} \quad 1, \; i = 0, 1, \ldots, u-1$$

alakú számok. Nyilván $l = 2^u$. Legyen mármost t az a legkisebb szám, melyre még fennáll $t > 2^u = l$. Egyszerű számolás mutatja, hogy t ily választása mellett

$$l = \exp\left[(1 + o(1))(\log x \log 2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

és $t > l$ miatt egyszerű meggondolással beláthatjuk, hogy egyetlen b se számtani közepe más b-knek. A részleteket az olvasóra bízzuk.

Valószínűnek látszik, hogy $F(x) = o(x^{\varepsilon})$, de itt még $F(x) < x^{1-\alpha}$ sincs bebizonyítva.

I. 8. Igaz-e, hogy minden c és k-hoz van oly n_0, hogy ha $n > n_0$ és $a_1 < \ldots < a_n$ oly valós számok, hogy az $a_j - a_i$ különbségek között legfeljebb cn különböző van, akkor az a-k tartalmaznak k-tagú számtani sort?

$k = 3$-ra ez talán Roth módszerével igazolható, de az általános eset ha igaz, igen nehéznek látszik. Talán visszavezethető $r_k(n) = o(n)$ sejtésre.

I. 11. Legyenek $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$ valós számok. Tegyük fel, hogy

$$|a_i a_j - a_r a_s| \geqq 1 \tag{1}$$

minden $1 \leqq i, j, r, s \leqq k$ értékre. Ha az a-k egész számok, az (1) feltétel épp azt jelenti, hogy az $a_i a_j$ szorzatok mind különbözőek. Mekkora k maximuma?

Ha az a-k egész számok, akkor bebizonyítottam, hogy $\max k = \pi(x) + O(x^{3/4}/(\log x)^{2/3})$ (lásd I. 11), de az általános esetben $k = o(x)$ bizonyítása se sikerült.

ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ ЧИСЕЛ V. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ II.

Пал Эрдёш

REMARKS ON NUMBER THEORY V.

P. Erdős

The author continues the investigation of extremal problems in number theory started in „Remarks on number theory IV", Mat. Lapok 12 (1962), 228—255. In this summary I just state a few of the problems and results considered.

Let $a_1 < \ldots < a_z \leqq n$ be a sequence of integers such that the products $\prod_{i=1}^{z} a_i^{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i = 0$ or 1 are all different. Then $z < \pi(n) + c_1 n^{1/2}/\log n$ (this was conjectured in IV). Perhaps $z < \pi(n) + \pi(n^{1/2}) + o(n^{1/2}/\log n)$.

Let $a_1 < a_2 < \ldots$ be an infinite sequence of integers for which the sums $a_i + a_j$ are all distinct. Can one have $a_k = o(k^3)$?

Let $a_1 < a_2 < \ldots$ be an infinite sequence of integres no a divides any other. Sárközi, Szemerédi and I proved (sharpening a previous result of Behrend) that $\sum_{a_i < x} 1/a_i = o(\log (x/\log\log x)^{1/2})$.

Ortogonális polinomrendszerek teljességéről

CZÁCH LÁSZLÓ

Ismeretes, hogy a klasszikus ortogonális polinomok (Legendre-, Csebisev-, Jacobi-, Hermite- és Laguerre-polinomok) teljes ortogonális rendszert alkotnak. Általában valamely súlyfüggvényre vonatkozólag ortogonális polinomrendszer teljessége véges intervallum esetén könnyen adódik Weierstrass ismert approximációs tételéből, végtelen intervallum esetén azonban nehézségek lépnek fel, sőt előfordulhat, hogy valamely súlyfüggvényre vonatkozólag ortogonális polinomrendszer nem alkot teljes rendszert.

I. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos típusú súlyfüggvények esetén a megfelelő ortogonális polinomok végtelen intervallumban is teljes rendszert alkotnak. Ennek igazolására felhasználjuk az

$$F\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \varphi(y)\, dy \tag{1}$$

ún. Fourier-féle operátor azt a tulajdonságát, hogy, ha a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban integrálható $\varphi(x)$ függvényre $F\varphi = 0$ majdnem mindenütt, akkor $\varphi(x) = 0$ majdnem mindenütt a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban. (*l.* [1])

Legyen (a, b) tetszőleges véges vagy végtelen intervallum, $\varrho(x)$ az (a, b) intervallumban értelmezett nem negatív, nem majdnem mindenütt eltűnő Lebesque-mérhető függvény, melyre létezik oly $p > 0$ szám, hogy

$$\int_a^b e^{2p|x|}\, \varrho(x)\, dx < +\infty \tag{2}$$

A fenti feltétel azt jelenti, hogy $\varrho(x)$ előállítható $\varrho(x) = \varrho_0(x) e^{-2p|x|}$ alakban, ahol $\varrho_0(x)$ integrálható (a, b)-ben. Nyilvánvaló, hogy $\varrho(x)$ maga is integrálható (a, b)-ben.

Jelöljük $\mu(x) = \int_a^x \varrho(t)\, dt$, $x \in (a, b)$ és jelentse μ a $\mu(x)$ monoton növekvő függvény által indukált Lebesgue—Stieltjes mértéket, továbbá

jelöljük $L_\mu^2(a, b)$-vel ezen μ-mértékkel négyzetesen integrálható függvények összességét az (a, b) intervallumban. $L_\mu^2(a, b)$ az

$$(f, g) = \int_a^b f \cdot \bar{g}\, d\mu = \int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, \varrho(x)\, dx$$

skalárszorzattal Hilbert teret alkot. (2) alapján nyilvánvaló, hogy $x^n \in L_\mu^2(a, b)$ minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén.

Alkalmazzuk az $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ függvénysorozatra az $L_\mu^2(a, b)$ Hilbert térben a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást és jelöljük $\{p_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$-el az így nyert ortonormált polinomsorozatot.

Tétel: A $\{p_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ ortonormált polinomsorozat teljes az $L_\mu^2(a, b)$ Hilbert térben*.

Bizonyítás: Legyen $f(x) \in L_\mu^2(a, b)$ oly függvény, melyre

$$(f, p_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Nyilvánvaló, hogy a fenti egyenlőségek fennállása ekvivalens az

$$\int_a^b f(x) x^n\, d\mu = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

egyenlőségek fennállásával, így elegendő bizonyítani, hogy a (3) feltétel teljesülése esetén $f(x) = 0$ majdnem mindenütt a μ mértékre nézve. Legyen $z = x + iy$ tetszőleges komplex változó és jelöljük

$$F(z) = \int_a^b e^{izt} f(t)\, d\mu \tag{4}$$

Jelentse S_p a komplex síkon az x-tengely köré húzott p-sugarú sávot, azaz $S_p = \{z;\ z = x + iy,\ |y| < p\}$, akkor tetszőleges $z \in S_p$ esetén $|e^{izt}| \leqq e^{p|t|}$, amiből (2) alapján következik, hogy $e^{izt} \in L_\mu^2(a, b)$, így a (4) alatti integrál minden $z \in S_p$ esetén létezik.

Legyen $0 < r < p$. Megmutatjuk, hogy $F(z)$ differenciálható az S_r sávban. Tetszőlegesen $z \in S_r$ esetén ui.

$$|ite^{izt} f(t)| \leqq |t| e^{r|t|} |f(t)| \leqq \frac{1}{p - r} e^{p|t|} |f(t)|.$$

* A tétel egy más bizonyítása megtalálható Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok c. könyvének 1961-es kiadásában (272. o.). Az itt közölt bizonyítás valamivel egyszerűbb és egyetemi előadásokban 1959-től szerepelt.

Figyelembe véve, hogy $\int_a^b e^{p|t|}|f(t)|d\mu < +\infty$, úgy a fentiekből következik, hogy az $\int_a^b ite^{izt}f(t)d\mu$ integrál — mint z függvénye —, az S_r sávban egyenletesen konvergens, amiből már következik, hogy $F(z)$ differenciálható az S_r sávban és deriváltja nyerhető az integrál alatti differenciálással.

Fentiekből következik, hogy $F(z)$ reguláris függvény az S_r sávban és az összes deriváltja nyerhető az integrál alatti differenciálással, speciálisan

$$F^{(n)}(0) = i^n \int_a^b t^n f(t)\, d\mu,$$

amiből (3) alapján következik, hogy $F^{(n)}(0) = 0$ minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén. Mivel $|z| < r$ estén $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n$, azért $F(z) \equiv 0$ a $|z| < r$ körben, amiből könnyen belátható, hogy $F(z) \equiv 0$ az egész S_r sávban, speciálisan $F(x) \equiv 0$ minden valós x-re, azaz

$$\int_a^b e^{ixt} f(t)\, d\mu = \int_a^b e^{ixt} f(t)\varrho(t)\, dt = 0$$

Terjesszük ki az (a, b)-ben értelmezett $f(x)$ és $\varrho(x)$ függvényeket az egész $(-\infty, +\infty)$ intervallumra úgy, hogy legyen $f(x) = \varrho(x) = 0$, ha $x \notin (a, b)$, akkor az így kiterjesztett függvényekre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)\varrho(t)\, dt = 0 \quad \text{minden } x \text{ esetén}$$

Itt $f(t)\varrho(t)$ integrálható $(-\infty, +\infty)$-ben, így az (1) alatti Fourier-operátor már említett tulajdonsága alapján $f(t) \cdot \varrho(t) = 0$ majdnem mindenütt a μ-mértékre nézve, amiből következik, hogy $\int_a^b |f(t)|d\mu = 0$, azaz $f(x) = 0$ majdnem mindenütt a μ-mértékre nézve, amivel a tételt igazoltuk.

Következmények: Véges intervallum esetén a (2) feltétel ekvivalens avval, hogy $\varrho(x)$ integrálható az (a, b) intervallumban, így a

fentiekből következik, hogy a Jacobi-polinomok, valamint ennek speciális esetei, a Legendre és a Csebisev polinomok teljes ortogonális rendszert alkotnak.

Az Hermite-polinomok esetén $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ és $\varrho(x) = e^{-x^2}$, míg a Laguerre-polinomok esetén $(a, b) = (0, +\infty)$ és $\varrho(x) = e^{-x}$, tehát a (2) feltétel mindkét esetben fennáll, így a fentiekből következik e polinomrendszerek teljessége is.

II. Általános esetben, valamely súlyfüggvényre nézve ortogonális polinomsorozat teljességének kérdése szoros kapcsolatban van a momentumproblémával. A momentumprobléma alapján megadható annak szükséges és elegendő feltétele, hogy valamely súlyfüggvényre nézve ortogonális polinomsorozat teljes rendszert képezzen. E kérdésben alapvető jelentőségűek Riesz Marcellnek az 1920-as évek elején nyert eredményei, melyek nem általánosan ismertek, ezért a továbbiakban röviden összefoglaljuk őket. (l. [2], [3], [4], [5])

Mint ismeretes, a momentumprobléma abban áll, hogy adott $\{\mu_n\}_0^\infty$ számsorozathoz létezik-e a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban értelmezett oly monoton növekedő $\mu(x)$ függvény, melyre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\mu(x) = \mu_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

Általában felteszik, hogy $\mu_0 = 1$ és a vizsgálatból kizárják azokat a $\mu(x)$ függvényeket, melyek véges sok közös pont nélküli intervallumon állandó értékűek.

A momentumprobléma két $\mu_1(x)$ és $\mu_2(x)$ megoldását azonosnak veszik, ha $\mu_1(x) - \mu_2(x)$ azonosan állandó értéket vesz fel minden oly x pontban, melyben $\mu_1(x) - \mu_2(x)$ folytonos.

Valamely valós számokból álló $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ számsorozatot nevezzünk pozitív sorozatnak, ha $\mu_0 = 1$ és a

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \mu_{i+k} \xi_i \xi_k$$

kvadratikus alak minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén pozitív definit. Hamburgertől származik a következő eredmény (l. [6]): annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a momentumproblémának létezzék legalább egy $\mu(x)$ megoldása, az, hogy a $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ sorozat pozitív sorozat legyen.

Legyen most $\mu_0(x)$ egy tetszőleges monoton növekedő függvény a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban és jelentse μ_0 e függvény által meghatározott Lebesgue—Stieltjes-féle mértéket, továbbá jelentse $L^2_{\mu_0}$ a μ_0-

mértékre nézve négyzetesen integrálható függvények halmazát a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban. Ha $f(x)$ és $g(x) \in L^2_{\mu_0}$, akkor jelöljük

$$(6) \qquad (f, g)_{\mu_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot \bar{g}\, d\mu_0$$

(Az I.) részben értelmezett μ mérték egy abszolút folytonos függvény által volt meghatározva, így az ott szereplő integrálok átalakíthatók közönséges Lebesgue integrállá).

A továbbiakban csak oly $\mu_0(x)$ függvényekre szorítkozunk, melyekre az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, d\mu_0(x)$$

integrálok minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén végesek, sőt feltesszük, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu_0(x) = 1.$$

A fenti feltevés mellett $x^n \in L^2_{\mu_0}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Jelöljük

$$(7) \qquad \mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, d\mu_0(x), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

akkor ezekkel a $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ számokkal képezett (5) alatti momentumproblémának a fenti $\mu_0(x)$ függvény nyilvánvalóan egyik (de általában nem egyetlen) megoldása.

Jelentse $\{P_n(x)\}_0^{+\infty}$ az $1, x, x^2, \ldots x^n, \ldots$ polinomsorozatból a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással nyert ortonormált polinom sorozatot.

Felmerül az a probléma, hogy a $\{P_n(x)\}_0^{+\infty}$ polinomsorozat megkonstruálható-e pusztán a (7) alatti $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ számsorozat ismeretében (tehát a $\mu_0(x)$ függvény ismerete nélkül)?

Könnyen igazolható, hogy a (7) alatti $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ számsorozat, — amely Hamburger fent említett tétele alpján pozitív sorozat —, egyértelműen meghatározza a $\{P_n(x)\}_0^{+\infty}$ polinomsorozatot. Legyen ui. $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ tetszőleges pozitív sorozat (a (6) alatti sorozat ilyen), és definiáljunk a polinomok körében egy skalárszorzatot a következő módon:

Legyen

$$(x^i, x^k) = \mu_{i+k} \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

továbbá, ha $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ és $q(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ tetszőlegesen komplex együtthatós polinomok, akkor legyen

$$(8) \qquad (p, q) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_i \bar{b}_k \mu_{i+k}$$

A $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ sorozat pozitivitása folytán könnyen igazolható, hogy a fent definiált skalárszorzat kielégíti a szokásos követelményeket.

A polinomok körében a fenti módon értelmezett skalárszorzat segítségével a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás alapján az $1, x, x^2, \ldots$ $\ldots x^n, \ldots$ polinomsorozatból nyerünk egy $\{p_n(x)\}_0^{+\infty}$ ortonormált polinomsorozatot. Ha $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ a (6) alatti számsorozat, akkor

$$(x^i, x^k)_{\mu_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i \cdot x^k \, d\mu_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{i+k} \, d\mu_0(x) = \mu_{i+k} = (x^i, x^k),$$

ami azt jelenti, hogy a (6) alatti egyenlőséggel definiált skalárszorzat a polinomok körében megegyezik a (8) alatt értelmezett skalárszorzattal, amiből nyilvánvalóan következik, hogy

$$p_n(x) \equiv P_n(x), \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Fentiek alapján a $\{P_n(x)\}_0^{+\infty}$ ortonormált polinomsorozatot nevezhetjük a $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ pozitív sorozat által generált polinomsorozatnak.

Jelöljük $Q_n(x)$-szel a $p(\xi)=\dfrac{P_n(x)-P_n(\xi)}{x-\xi}$ polinomnak és a $q(\xi)\equiv 1$ polinomnak a skalárszorzatát, azaz

$$Q_n(x) = \left(\frac{P_n(x)-P_n(\xi)}{x-\xi}, 1 \right)$$

Nyilvánvaló, hogy $Q_n(x)$ legfeljebb $n-1$-ed fokú polinom és $Q_0(x)\equiv 0$. Legyen z tetszőleges oly komplex szám, melyre $\mathrm{Im}(z)\neq 0$ és jelöljük

$$w = w_n(z, t) = -\frac{Q_n(z)-tQ_{n-1}(z)}{P_n(z)-tP_{n-1}(z)}, \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

ahol t valós paraméter, $-\infty < t \leqq +\infty$.

Hellinger igazolta a következő eredményt (l. [7]): Legyen z tetszőleges rögzített komplex szám, melyre $\mathrm{Im}\,(z)\neq 0$, akkor a

$$w = w_n(z, t), \qquad -\infty < t \leqq +\infty$$

függvény a w komplex síkon egy kört ír le, melynek középpontja és

sugara a z pont megadásával egyértelműen meghatározható. Jelentse $L_n(z)$ a fenti körvonalat és $K_n(z)$ az $L_n(z)$ körvonal által határolt zárt körtartományt, akkor igazolható, hogy

$$K_1(z) \supset K_2(z) \supset \ldots \supset K_n(z) \supset \ldots .$$

Jelöljük $K_\infty(z) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(z)$, akkor nyilvánvaló, hogy $K_\infty(z)$ vagy egyetlen pont, vagy egy zárt kör.

Igazolható, hogy ha $K_\infty(z)$ valamely nem valós z esetén kör, akkor minden nem valós z esetén is kör.

Legyen ismét $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ egy tetszőleges pozitív sorozat és legyen $\mu(x)$ az (5) alatti momentumprobléma egy tetszőleges megoldása; jelöljük

$$w = w_\mu(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-z}\, d\mu(x). \tag{9}$$

Nevanlinna és Riesz Marcell igazolta a következő eredményt (l. [8] és [4]):

Legyen z tetszőleges rögzített komplex szám, melyre $\operatorname{Im}(z) \neq 0$, akkor adott $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ pozitív sorozat mellett az (5) alatti momentumprobléma összes lehetséges $\mu(x)$ megoldásaihoz tartozó $w = w_\mu(z)$ komplex számok halmaza azonos a $K_\infty(z)$ körrel (amely egyetlen pontból is állhat).

A fenti eredmény alapján könnyen igazolható, hogy annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az (5) alatti momentum problémának adott $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ sorozat esetén csak egyetlen megoldása legyen, — az, hogy $K_\infty(z)$ csak egyetlen pontból álljon.

Az (5) alatti momentumprobléma valamely $\mu(x)$ megoldását egy nem valós z pontban extremális megoldásnak nevezzük, ha e $\mu(x)$ függvénnyel képezett (9) alatti w komplex szám a $K_\infty(z)$ kör kerületére esik. Speciálisan, ha $\mu(x)$ az (5) alatti momentumprobléma egyetlen megoldása, akkor $\mu(x)$ extremális (ez esetben ui. $K_\infty(z)$ egyetlen pontból áll).

Igazolható, hogy ha $\mu(x)$ extremális valamely nem valós z pontban, akkor $\mu(x)$ minden nem valós z pontban is extremális, azaz a momentumprobléma valamely megoldásának extremalitása független a z ponttól.

Legyen most $\mu_0(x)$ az előbbiekben ismertetett tulajdonságú monoton növekedő függvény a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban és legyen ismét

$\{P_n(x)\}_0^{+\infty}$ a μ_0 Lebesgue-Stieltjes mértékre nézve ortonormált polinomsorozat az $L^2_{\mu_0}$ térben, azaz

$$(P_n, P_m)_{\mu_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x) P_m(x)\, d\mu_0(x) = \delta_{nm}$$

ahol δ_{nm} az ismert Kronecker-féle szimbólum. Az előbbiekben láttuk, hogy $\{P_n(x)\}_0^{+\infty}$ azonos a (7) alatti $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ sorozat által generált polinomsorozattal.

Riesz Marcell igazolta a következő nevezetes tételt: Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a $\{P_n(x)\}_0^{+\infty}$ ortonormált polinomsorozat az $L^2_{\mu_0}$ térben teljes legyen az, hogy a $\mu_0(x)$ függvény extremális megoldása legyen a (7) alatti számokkal képezett (5) alatti momentumproblémának.

E tételből következik, hogy, ha $\mu_n(x)$ az (5) alatti momentumprobléma egyetlen megoldása, akkor a $\{P_n(x)\}_0^{+\infty}$ polinomsorozat teljes ortonormált rendszert alkot.

III. A dolgozat I. pontjában elemi úton bizonyított tétel a fent ismertetett Riesz Marcell-féle tételből Carleman egy eredményének felhasználásával könnyen következik.

Carleman ui. kimutatta (l. [9]), hogy ha a $\{\mu_n\}_0^{+\infty}$ pozitív sorozatra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{\mu_{2n}}} = +\infty,$$

akkor az (5) alatti momentumproblémának csak egyetlen megoldása van.

Ha $\varrho(x)$ a (2) feltételnek eleget tevő súlyfüggvény a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban és $\mu_0(x) = \int_{-\infty}^{x} \varrho(t)\, dt$, akkor evvel a $\mu_0(x)$ függvénnyel képezett (7) alatti számokra:

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, d\mu_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \varrho(x)\, dx.$$

Figyelembe véve, hogy $\varrho(x) = \varrho_0(x) e^{2p|x|}$, ahol $\varrho_0(x)$ nem negatív integrálható függvény a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban, könnyen belátható, hogy

$$\mu_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} \varrho_0(x) e^{-2p|x|}\, dx = O\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-|x|}\, dx \right) =$$

$$= O((2n)!) = O((2n)^{2n}),$$

amiből Carleman fent ismertetett eredménye alapján következik, hogy a $\mu_0(x)$ függvény az (5) alatti momentumprobléma egyetlen megoldása. Így, Riesz Marcell tétele alapján a μ_0 Lebesgue—Stieltjes mértékre nézve ortonormált $\{P_n(x)\}_0^{+\infty}$ polinomsorozat teljes ortonormált rendszert alkot az $L^2_{\mu_0}$ térben.

Megjegyzés: a fent említett eredmények nagy részének bizonyítása megtalálható Ahiézer [10] alatti monográfiájában.

IRODALOM

[1] Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier Integrals.
[2] M. Riesz, Sur le problème des moments. (Ark. för mat., astr. och. fys. 16, 1921. Premiere Note.
[3] Sur le problème des moments. (ugyanott, 16, 1932. Deuxième Note).
[4] Sur le problème des moments. (ugyanott, 17, 1923. Troisième Note).
[5] Sur le problème des moments et le theorème de Parseval correspondant (Acta Litterarum ac Scientiarum, Szeged 1, 1922—23).
[6] Hamburger, H.: Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems. (Math. Ann. 81, 1920., 82, 1921).
[7] Hellinger, E.: Zur Stieltjesschen Kettenbruchtheorie (Math. Ann. 86, 1922).
[8] Nevanlinna, R.: Asymptotsche Entwickelungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem *(Ann. Acad. Sci. Fennicae* AI8, 1922).
[9] Carleman, T.: Les fonctions quasi-analytiques (Paris, 1926).
[10] Ahiézer, N. I.: Klasszikus momentumprobléma (oroszul) 1961.

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Ласло Цах

ON COMPLETNESS OF SYSTEMS OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

L. Czách

Descartes érintőszerkesztési módszere

VEKERDI LÁSZLÓ

Szinte hagyományossá vált már a matematikatörténetírásban, hogy DESCARTES matematikáját „anti infinitézimálisnak" tekintsék. Pedig a XVII. század nagy, egyedülálló matematikai élménye az infinitézimális számítás, a „kalkulus" megteremtése volt. S DESCARTES, akit minden matematikatörténész a legnagyobb XVII. századi matematikusok közé sorol, éppen a század legnagyobb matematikai vállalkozásából maradt volna ki? Miért, s hogyan lehet akkor a század csaknem minden nagy matematikusának tanítómestere, miért belőle indulnak ki s ellene és benne futnak össze a század szenvedélyes matematikai vitái? A legenda, amit — ha ugyan máig legnagyobb biográfusának Charles ADAMnak hinni lehet — már maga elkezdett szőni önmaga körül, nőttön nőtt a matematikatörténészek szorgos kutatásai következtében is.

Descartes matematikai műveinek beosztása

DESCARTES hatalmas matematikai munkásságát az ADAM—TANNERY-féle kiadás kötetei szerint lehet legkönnyebben beosztani. A VI. kötet tartalmazza azt a matematikát, amit sokáig hittek a *par excellence* cartesianus matematikának: a *Geometrie*-t. A X. kötetben van DESCARTES korai matematikai munkássága a *Regulae*-val bezárólag. Az első öt kötet tartalmazza szétszórva, levelezés formájában a DESCARTES-i matematika legérdekesebb részét, az infinitézimális problémákat, vagy ahogyan a modern kritika szereti nevezni: az infinitézimális számítás DESCARTES-i „pótlékait". A három rész szervesen egybefonódik és csak egymás segítségével érthető meg. A *Geometrie* algebrája nem érthető meg a *Regulae* gondolkozási szabályai nélkül, s a *Geometrie* jelentőségéből úgyszólván semmit sem lehet megérteni a levelezés hatalmas és széles körű alkalmazásai nélkül. A DESCARTES-i tudományt és filozófiát csak kiadói és didaktikai szempontokból lehet részekre osztani, ha valamit is meg akarunk érteni belőle, elkerülhetetlen az egész *Oeuvre* ismerete.

A cartesianus matematika megértéséhez a *Levelezés* a kulcs. DESCARTES *Levelezése* különleges gonddal felépített „tudományos dolgozatok" sorozata. DESCARTES szakmai természetű leveleit eleitől fogva nyilvánosságnak szánta, s míg egyébként idegenkedett a publikálástól, levelezését annyira közügynek tekinti, hogy akik nem voltak hajlandók leveleik kiadásába beleegyezni, azokkal egyáltalán nem levelezett. Amikor FERMAT huzódozott levelei kiadásától, kizárólag MERSENNE Atya nyomatékos kérésére folytatta vele tovább alapvető fontosságú matematikai vitáját. A *Levelezés* matematikáját leghelyesebb talán folyóirat pótló közleménysorozatként felfognunk, amelynek elterjedését a MERSENNE-féle levelezési szervezet biztosította, s az általa keltett viták során a kor egyik legfontosabb matematikai inspirátora lett.

A *Levelezés* matematikájának a hatása sokkal nagyobb volt, mint ma hisszük. A XVII. század közepén egyetlen matematikus sem volt mentes tőle. Elsősorban a *Levelezés*hez fűződtek a holland kommentátorok munkái, s ezek igen népszerűek voltak az új tudomány egyik legfontosabb műhelyében, Angliában. „Mr. MOORE-nak és másoknak igen nagy véleménye van HUDDENIUSnak DES CARTES végéhez írott jegyzeteiről"[1], írja a XVII. századi angol matematika páratlan ügyvívője, COLLINS. S mikor CLERSELIER kiadja DESCARTES *Levelezés*ét, a kötetek Angliában is azonnal keresettek lesznek. „Meg van nekem DES CARTES *Levelei*nek első két kötete franciául — írja COLLINS-nak egy levelezője — de hiányzik a harmadik; és ezt öntől kell kérnem. Mindegy franciául vagy angolul küldi . . ."[2]

Ez az olvasó nem tartozott a nagy matematikusok vagy filozófusok közé, egyszerű művelt ember volt, s ez a tény nagyon fontos DESCARTES hatásának a megértése szempontjából. A XVII. század második felében DESCARTES nem a válogatott kevesek olvasmánya volt, minden magát műveltnek tartó ember kötelességének vélte olvasni. A XVII. század gondolatvilága annyira telítve volt matematikával, hogy a matematikai ismeretek magától érthetően hozzá tartoztak a műveltség fogalmához. Érthető, hogy DESCARTES matematikájának a hatása sokkal mélyebb és szélesebb körű volt, mint azt ma a reá hivatkozó viszonylag kevés idézetből sejthetjük.

Ebből a szempontból igen fontos az a tény, hogy DESCARTES *Levelei*ben — ellentétben a század más nagy tudósaival — úgyszólván sohasem ír olyan dolgokról, amiket megjelent, készülő vagy tervezett

[1] *Correspondence of scientific men of the seventeenth century.* Ed. by Stephen Peter RIGAUD, 2 vols., Oxford, 1841. (Továbbiakban *Corr. Rigaud*) I, 50, Collins to Dr. Pell, April 9, 1667. 127.

[2] *Corr. Rigaud* I, 71, Towneley to Collins, Jan. 4., 1671/2. 184.

könyveiben tárgyal. 1629-től, amióta a *Geometrie*-n dolgozik, a könyv megjelenéséig (1637) alig fordul elő *Levelezés*ében matematika, a *Geometrie* megjelenését követő évek matematikája pedig már egészen másféle matematika, inkább alkalmazása és folytatása a *Geometrie* matematikájának.

A Levelezés *matematikájának beosztása*

A *Levelezés* matematikájának egyik nagy fejezete a ciklois körül csoportosul. Különösen a ciklois alatti terület kiszámítására végzett vizsgálatai fontosak, mert ezekben először határozta meg pontosan, s méghozzá konstruktív úton azt a fogalmat, amit évszázadokkal később „határozott integrálnak" nevezett a matematika.[3]

A *Levelezés* matematikájának második nagy csoportja az érintő szerkesztésre vonatkozó kérdésekből áll. Az érintőszerkesztés problémáját már a *Geometrie*-ben tárgyalta, azonban a modern matematikatörténetírás DESCARTES módszerét, s jelentőségét is teljesen félreismerte a XVII. századi matematika legnagyobb ismerőjének, J. E. HOFMANN-nak alapvető közleményeiig. HOFMANN mutatta meg, hogy a *Geometrie* egyik célja éppen az érintőszerkesztés megoldása a görbék egy egész osztálya, az algebrai görbék esetében.[4] A *Levelezés*ben FERMAT-val és híveivel folytatott szenvedélyes vita során ezt a módszert általánosítja és elmélyíti, a módszer pontos algoritmusának a kidolgozásán keresztül a differenciálszámítás egyik legkorábbi előfutára lesz.

A harmadik nagy problémakör, amit a *Levelezés* matematikája tárgyal az ún. „fordított érintő feladat". Ennek az a lényege, hogy meg kell keresni egész általánosságban valamely adott érintési feltételeket kielégítő görbét. DESCARTES felismeri, hogy ez a feladat csak a területszámítással rokon művelet segítségével oldható meg. Modern terminológiában kifejezve azt mondhatnánk, hogy DESCARTES egy konkrét esetben az ún. DE BEAUNE feladat esetében megkeresi a derivált függvény primitív függvényét, azonban ha valójában ezt végzi is el, az elnevezés anakronisztikus, mert DESCARTES sem a függvény, sem a határátmenet fogalmát nem ismeri. DESCARTES az antik kimeríthetetlenségi eljárást adaptálja a feladat megoldására. De ezt az eljárást addig kizárólagosan csak területszámításra alkalmazták, s a módszer új kontextusban való használata előkészítette az utat területszámítás és érintőszerkesztés közötti összefüggés felismeréséhez. Ahhoz a probléma kör-

[3] VEKERDI László: „Descartes infinitézimális módszere a ciklois-terület meghatározására", *Matematikai Lapok*, 15, 196—203, 1964.

[4] SCHOLZ, H.—KRATZER, A.—HOFMAN, J.: *Descartes. Drei Vorträge* Münster, Westfalen, 1951, 64—66.

höz, amit később „az integrál és differenciálszámítás alaptételének" neveztek el, s aminek a felfedezését BARROW-nak, LEIBNIZ-nak vagy NEWTOV-nak szokás tulajdonítani.[5]

Fermat és Descartes vitája az érintőszerkesztésről

Ezt a hosszú és elkeseredett vitát már MONTUCLA FERMAT javára döntötte el, s azóta több matematikatörténész ismételte véleményét. Moritz CANTOR szerint a „hiú" DESCARTES egyszerűen nem akarta megérteni FERMAT geniális módszerét, bosszúból, mert FERMAT lebecsülte *Dioptrique*-ját, amit MERSENNE még kéziratban odaadott volt neki.[6] Lényegében ugyanez a véleménye Jean ITARD-nak[7], de ugyanígy vélekedett már MILHAUD is és ezt vette át Yvon BELAVAL[8]. Szerinte DESCARTES FERMAT eljárását kritizáló leveleiben ugyanazt végzi el „amit FERMAT, csak FERMAT felismeri, hogy határátmenetről van szó" DESCARTES pedig „szokása szerint" megkerüli a határátmenetet.[9]

Helytálló-e az ez általánosan elfogadott interpretáció? Valóban nem érti DESCARTES a FERMAT féle eljárást? És mindenek előtt vajon szabad-e FERMAT eljárásával kapcsolatban „határátmenetről" beszélni? A kérdések megválaszolására analizáljuk először FERMAT eljárását, s azután vizsgáljuk meg a módszer DESCARTES általi kritikáját.

FERMAT érintőszerkesztési módszere maximum-minimum eljárásán alapul. A FERMAT-féle maximum-minimum eljárást Moritz CANTOR foglalja össze legvilágosabban: „Tegyünk a maximummá vagy minimummá teendő kifejezésben az A ismeretlen helyébe egy két ismeretlenből álló $A+E$ összeget és tekintsük a két kifejezést megközelítőleg egyenlőnek (adaequentur), ... Ezután a megközelítőleges egyenlővé tevés után töröljük mindkét oldalon ami törlendő, és ezáltal csupa E-t tartalmazó tagokat kapunk. E-vel osztva és újból egyszerűsítve, töröljük (elidantur) a még E-t tartalmazó tagokat. A fennmaradó egyenlet szolgáltatja A azon értékét, amely maximummá vagy minimummá teszi a kérdéses kifejezést."[10]

[5] VEKERDI László: „A newtoni infinitézimális analízis kialakulása a XX. századi matematikatörténetírás tükrében," *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*, 14, 35—70, 1964.

[6] CANTOR, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band, erster Halbband, von 1200—1650.* Leipzig, ² 1899, 374.

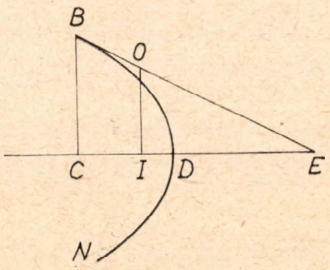
[7] Itard, J.: *Le XVIIe siecle, sciences mathématiques et physiques = Histoire générale des sciences poubliée sous la direction de R. Taton, II*, Paris, 1958, 207—276, 222.

[8] Belaval, Y.: *Leibniz, critique de Descartes*, Paris, 1960, 305.

[9] Uo. 307.

[10] CANTOR, M.: i. m. 858.

Ezt az elvet következőképpen alkalmazta FERMAT az érintőszerkesztésre: „Legyen adva pl. a *BDN* parabola, melynek *D* a csúcsa, *DC* a tengelye, legyen adva a parabolán egy *B* pont, húzzunk *B* ponton keresztül *BE* egyenest, amely érinti a parabolát és *E* pontban metszi *CD* egyenest. Vegyünk fel a *BE* egyenesen egy tetszőleges *O* pontot, húzzuk meg az *OI* ordinátát, *B* pontból pedig a *BC* ordinátát, akkor azt látjuk, hogy $CD/DI > BC^2/OI^2$, mert az *O* pont kívül esik a parabolán. De $BC^2/OI^2 = CE^2/IE^2$ a háromszögek hasonlósága miatt. Tehát $CD/DI > CE^2/IE^2$. Mármost *B* pont adott, tehát *BC* ordináta is, tehát *C* pont és *CD* szakasz is. Legyen tehát $CD = d$ adott. Vezessük be a $CE = a$ és $CI = e$ jelöléseket, akkor: $d/(d-e) > a^2/(a^2 + e^2 - 2ae)$. Képezzük a kültagok és a beltagok szorzatát:



1. ábra

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Tekintsük a fenti módszer szerint a két oldalt megközelítően egyenlőnek (adaequentur), akkor az azonos tagok törlése után

$$de^2 - 2dae = -a^2e$$

marad, vagy ami ugyanaz:

$$de^2 + a^2e = 2dae.$$

Osszunk minden tagot *e*-vel:

$$de + a^2 = 2da.$$

Hagyjuk el (elidatur) *de*-t, marad

$$a^2 = 2da \quad \text{tehát} \quad a = 2d.$$

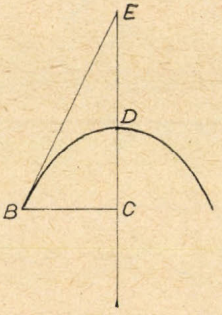
Így bebizonyítottuk, hogy *CE* kétszerese *CD*-nek ami megfelel az igazságnak."[11]

DESCARTES szerint azonban FERMAT semmit sem bizonyított be. Szabály és példa egyaránt hibás. 1638 januárjában ezt írta[12] erre vonat-

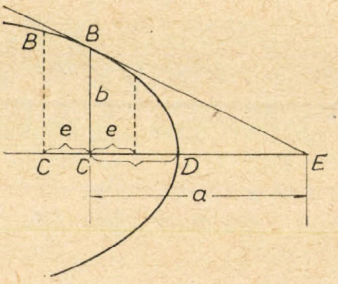
[11] Modern átírásban közöljük, J. ITARD szerint (i. m. 221). Eredeti formájában a régi jelölés miatt nagyon körülményes.

[12] Descartes levele Mersenne-hez 1638 januárban. DESCARTES, *Oeuvres*, ADAM—TANNERY-féle kiadás (továbbiakban AT) I, 487—488.

kozóan MERSENNEnek: „Legyen *BDN* az adott parabola, melynek *DC* a tengelye, és amelynek *B* pontjából kell húzni *BE* egyenest, amelyik *DC* egyenest *E* pontban metszi úgy, hogy *BE* egyenes leghosszabb legyen *E* pontból a parabolához húzható egyenesek között: sic enim proponitur quaerenda maxima (így tűzi ki ugyanis a maximum feladatot). Az ő szabálya így szól: ...” DESCARTES a következőkben körülményesen, FERMAT régi írásmódjában, helytelen következtetést vezet le. DESCARTES érvelése saját írásmódjába áttéve következőképpen szól:



2. ábra



3. ábra

Tekintsünk két esetet. Legyenek első esetben $BC=b$, $EC=a$, $CD=d$. Ekkor az *EBC* derékszögű háromszögből $BE^2=a^2+b^2$.

Legyen most második esetben (3. ábra szaggatott vonal) $EC = a-e$, vagy ami az eredmény szempontjából ugyanaz, $EC = a+e$ és ugyanígy legyen $CD = d+e$. Ennek a második esetnek megfelelő *BC* ordináta kiszámítható a parabola tulajdonságát kifejező $\frac{BC^2}{d+e}=\frac{b^2}{d}$ arányból:

$$BC^2 = \frac{b^2(d+e)}{d} = \frac{b^2d+b^2e}{d}.$$

Mármost hozzáadva $EC = a+e$ négyzetét, ebből a második (szaggatott vonallal jelölt) háromszögből is megkapjuk ennek az esetnek megfelelő BE^2-et. Ezt egyenlővé téve az első esetben kapott BE^2-tel:

$$a^2+b^2 = b^2+\frac{b^2e}{d}+a^2+2ae+e^2.$$

Osztva e vel

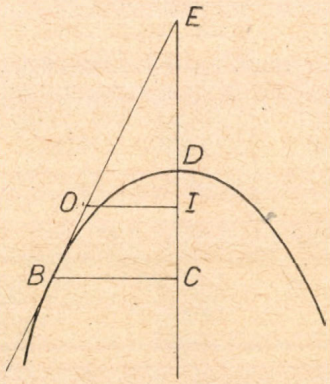
$$\frac{b^2}{d}+2a+e = 0$$

marad. Elhagyva (elidantur) e-t,

$$\frac{b^2}{d} + 2a = 0,$$

„ami egyáltalán nem adja meg az érintő értékét, mint a szerző állítja, következésképpen szabálya hamis."

DESCARTES tévedését azonnal észrevették FERMAT barátai: hevesen tiltakoztak DESCARTES érvelése ellen. A parabola érintőszerkesztésében — mondották — az a lényeges, hogy a második esetben a *BE* egyenesen vegyünk fel egy tetszőleges *O* pontot, aminek nem szabad, mint DESCARTES tette, a parabolán feküdni. Ugyanis az a fontos — érveltek —, hogy *CD* aránya *DI*-hez *nagyobb* legyen, mint *BC* aránya *OI*-hez, s ehhez az szükséges, hogy *OI* nagyobb legyen, mint a parabola *I* pontban emelt ordinátája.



4. ábra

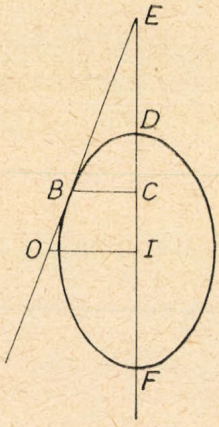
DESCARTES szerint[13] azonban ez sem segít. Ugyanis ugyanez az egyenlőtlenség felállítható a másik két kúpszelet, az ellipszis és a hiperbola esetében is, s mégis *ugyanaz* a számítás, amelyik a parabolánál helyes eredményre vezet, az ellipszis és a hiperbola esetében hibás értéket ad.

DESCARTES kritikájára ROBERVAL válaszolt[14], 1638 áprilisában. „Monsieur DESCARTES — írja — szokása szerint olyan okoskodást fabrikált, amelyikről azt akarja elhitetni, hogy Monsieur de FERMAT okfejtése." De helytelenül járt el, mert csak az *E* felé eső részen tekintette az ellipszisnél az *O* pontot az érintőn, pedig a *B* pont másik oldalán is kellett volna tekintenie az érintő pontjait, s akkor látta volna, hogy itt nem érvényes az, hogy CD/DI nagyobb mint BC^2/OI^2, és így az ellipszis esetében magától érthetően *nem* szabad alkalmazni ezt az arányt. A használt egyenlőtlenség specifikusan csak a parabolánál érvényes az érintési pont mindkét oldalán, éppen ezért használta a parabolánál FERMAT. Az ellipszis és hiperbola esetében más, csak ezekre érvényes specifikus tulajdonságokból kell kiindulni. DESCARTES tehát igen súlyos hibát követ el újra, ami „nagyon figyelemre méltó annál,

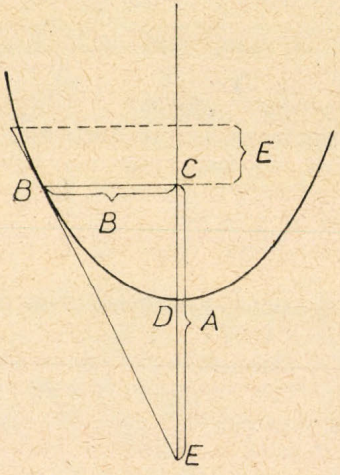
[13] Descartes levele Mersenne-hez 1638 március 1-én. AT II, 1—15.
[14] Reberval Descartes ellen, Paris, 1638 április. AT II, 103—115.

aki a helyes gondolkozás módszeréről értekezett, mert egyenesen ellentétben van a helyes gondolkozás és az igazi logika szabályaival, amely azt tanítja, hogy ahhoz, hogy valamely tárgy specifikus tulajdonságaira következtethessünk, azokban a propozíciókban, melyekből az okfejtés áll, ugyanazon tárgy legalább egy másik specifikus tulajdonságát kell alkalmaznunk, azaz a saját természetéből kell következtetnünk, ami csak hozzá tartozik." Ezzel szemben DESCARTES „szokása szerint gyárt egy okoskodást, amelyben csupa olyan általános tulajdonságot alkalmaz, amely tulajdonságok nem csak minden kúpszeletre, de még az egyenesre is állanak, anélkül, hogy bármiféle specifikus tulajdonságot alkalmazna."[15]

DESCARTES hangsúlyozza válaszában[16], hogy éppen maga FERMAT állította módszeréről, hogy az általános érvényű, minden görbénél alkalmazható. Az a feltétel pedig, hogy csak a parabola esetében áll az alapul szolgáló egyenlőtlenség az érintési pont mindkét oldalán, egyáltalán nem magától értetődő dolog, ha dolgozni akarunk vele, külön ki kell jelenteni. S éppen ezt mulasztja el FERMAT, aki a *B* pontot



5. ábra



6. ábra

az érintő *végpontjának* tekinti. A következőkben azután DESCARTES részletezi, mit csinált szerinte FERMAT. Eljárásának lényege az, hogy a kis *E* távolsággal megnövelt *A*-nak megfelelő *BC*-t *két* módon kell kifejezni: egyszer *BCE* és az *A* befogó *E*-vel való megnövelésével kapott

[15] Uo. 111—112.

[16] Descartes levele Mersenne-hez 1638 május 3-án. AT II, 122—132.

háromszögből azon az alapon, hogy A úgy aránylik B-hez, mint $A+E$ aránylik B megfelelő értékéhez; másodszor pedig a $BC=B$ távolságot mint a parabola ordinátáját kell kifejezni a parabola „specifikus tulajdonságából", egyenletéből.

A két módon kifejezett BC-t egyenlővé kell tenni, s a továbbiakban már teljes joggal alkalmazható a FERMAT által adott szabály. A *végeredményt* FERMAT is helyesen kapta meg, de elmulasztotta a fenti feltétel kimondását, s ami semmi egyéb — írja DESCARTES — mint amit ő a *Geometrie*-ben használt," és ez az az alap, amire Mr. F. szabályának is épülni kell. Abból, hogy elhagyta úgy látszik, hogy csak tapogatózás útján találta szabályát, vagy legalábbis az, hogy nem érti tisztán az elveit".[17]

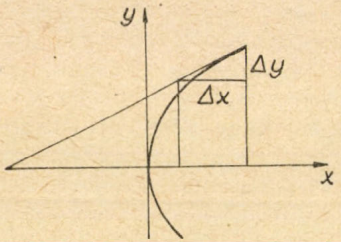
Matematikusok és matematikatörténészek már MONTUCLA óta szerették volna, ha FERMAT valamiféleképpen a szelő határhelyzeteként határozta volna meg az érintőt, előre megsejtvén vagy éppen megalkotva ezáltal a „differenciálhányados" fogalmát[18]. Éppen ezért írnak mindenütt „megközelítően egyenlőt" FERMAT kategorikus „tegyük egyenlővé"-je helyett, még az egyébként pontosan idéző ITARD is így fordította a szót FERMAT érintőszerkesztésének fentebb idézett modern átírásában. FERMAT azonban *ténylegesen* egyenlőségnek tekintett egy egyenlőtlenséget, s ez a határérték fogalmának az ismerete előtt két évszázaddal a matematikai pontossághoz ragaszkodó DESCARTES-nak joggal sérthette a szemét. Még másik szépséghibája is volt FERMAT eljárásának. Nem tudta pontosan meghatározni, miért és mire alkalmazza az érintő meghatározásánál „maximum-minimum" módszerét. (FERMAT módszerének erre a hiányosságára TURÁN professzor hívta fel a figyelmemet.) Egyenlőtlenségek alkalmazása maximum-minimum problémák megoldására ekkoriban már egyáltalán nem volt újság[19], de FERMAT éppen roppant szerencsés algoritmusával nagy egyszerűsítést tett lehetővé ezen az addig minden esetben külön, egyedi megfontolást igénylő területen. Ez magában véve is óriási dolog, függetlenül attól, hogy maximum-minimum algoritmusában "a határérték" fogalmát sejtette e meg, vagy sem. Érthető, hogy eljárását minél több területen igyekezett gyümölcsöztetni, valószínűleg ez a vágy vezette a fénytörés problémájához is a fizikai kérdésektől egyébként kissé idegenkedő nagy matematikust.

[17] Uo. 129.

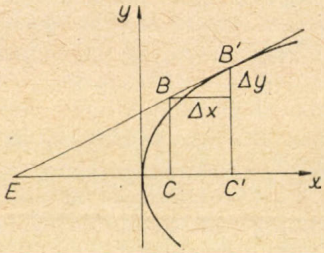
[18] L. pl. BELL, E. T.: *The development of mathematics* New York, ²1945, 143—145.

[19] Ez az egyenlőtlenséggel való megoldása szélsőérték problémáknak jól ismert volt az itáliai matematikában, gyakran alkalmazta pl. TORRICELLI. L. pl. HOFMANN, J. E.: *Geschichte der Methematik* II, Berlin, 1957, 28. Továbbá C. B. BOYER: *The history of the calculus* New York, ²1959, 157: „However, whereas Torricelli had made use of arguments by a reductio ad absurdum, Fermat's characteristic procedure resembles more closely the method of limiting values."

A módszer az érintő szerkesztésében is kiválóan alkalmazható volt, de alkalmazásának körülményeit FERMAT nem rögzítette. Éppen ebből a szempontból olyan fontos DESCARTES közbelépése. A helyzet könnyebb megértése kedvéért tekintsük át a vita eddigi lépéseinek



7. ábra



8. ábra

lényegét. Legyen adva egy másodfokú parabola csúcsával a koordinátarendszer kezdőpontjában. (7. ábra) B pontban az érintőt megtalálhatjuk a Δx és Δy befogójú „karakterisztikus háromszögből" illetve a parabola egyenletéből. Semmit nem kell „maximummá tenni", jóllehet ugyanazt az algoritmust kell használni, mint a szélsőértékfeladatoknál: a differenciálhányados kiszámítását. FERMAT és kortársai azonban ezt a fogalmat nem ismerték, annál inkább a maximumét. DESCARTES is elhiszi FERMAT-nak először, hogy valóban maximalizál valamit, s tévesen a görbe pontjainak meg az E pontnak a távolságára gondol, ezért veszi fel hibásan a számításhoz használt segédpontot az érintő helyett a görbén. (3. ábra.) FERMAT és barátai tiltakoznak: ebben az esetben nem írható fel a maximumfeladat, mert a kiinduló *egyenlőtlenség* nem érvényes. DESCARTES viszont szellemes ellenpéldát hoz: ugyanez az egyenlőtlenség *más* görbék esetében is felírható, nemcsak a tárgyalt parabolánál, azoknál viszont helytelen eredményre vezet. ROBERVAL most felismeri — talán éppen azért támad olyan mérgesen —, hogy a lényeg nem annyira az egyenlőtlenségen meg a „maximalizáláson" van, hanem a görbe „specifikus tulajdonságán", egyenletén. Most már DESCARTES világosan látja FERMAT eljárásának a lényegét: az érintőt a parabola egyenletéből meg az EBC és $EB'C'$ háromszögből kell meghatározni. Ahogyan ma mondanánk, a Δx, Δy által adott „karakterisztikus háromszögből" (8. ábra). Azután megmutatja, hogy ilyen körülmények között a FERMAT-féle számítás a görbék egy speciális osztályánál, az algebrai egyenlettel előállítható görbéknél egzakt módon elvégezhető.

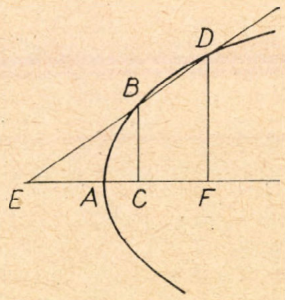
Az érintő és szelő viszonya

FERMAT szerint — mint DESCARTES-ig mindenki szerint — görbe és érintője egyetlen pontban találkozott, módszerének lényegéhez tartozott ez a fogalmazás. DESCARTES fedezte fel, hogy az érintési pontban görbének és érintőnek két közös pontja van, hogy „egybeejteni", s nem „törölni" kell valamit. Felfedezést és módszert pontosan megfogalmazta 1638 nyarán Cl. HARDY-nak írt levelében.[20] HARDY egyike volt azon kevés matematikusoknak, akikről feltételezte, hogy értik a *Geometrie*-t, ezért már saját új stílusában írt neki.

„Legyen tehát — írja — az adott görbe vonal ABD és legyen adva a vonal B pontja is, ti. megadom a $BC=b$ ordinátát és az $AC=c$ átmérőt, és keressünk ezen az átmérőn egy olyan E pontot, hogy az E ponton és B ponton át húzott egyenes messe a görbét még egy másik pontban, mondjuk D pontban úgy, hogy DF ordináta adott arányban legyen BC ordinátához, mondjuk mint g aránylik h-hoz. Jól tudja, hogy eme E pont megkeresésére először is azt mondhatjuk — $E=a$ és $CF=e$ jelölés bevezetésével — hogy az ECB és EFD háromszögek hasonlósága miatt $CE=a$ úgy aránylik $BC=b$-hez, mint $EF=a+e$ aránylik DF-hez, mely utóbbi ennek következtében $DF=\frac{ba+be}{a}$. Azután, mivel DF a görbe ordinátáinak egyike, megadható más tagokkal is, melyek különféle görbék esetében különbözőek lesznek. Pl. ha a görbe az első azok közül a vonalak közül, melyeket Monsieur de Fermat a parabola mintájára képzelt el, azaz az, melynél az átmérő egyes szakaszai úgy aránylanak egymáshoz, mint az ordináták köbei, akkor azt mondjuk, hogy $AC=c$ úgy aránylik $FA=c+e$-hez, mint BC köbe, ami b^3, aránylik DF köbéhez, ami a fentebb talált tagokkal kifejezve

$$\frac{b^3a^3+3b^3aae+3b^3aee+b^3e^3}{a^3},$$

mert ez $\frac{ba+be}{a}$ köbe."



9. ábra

Ebből az aránypárból azután kapunk egy egyenletet a és e-re:

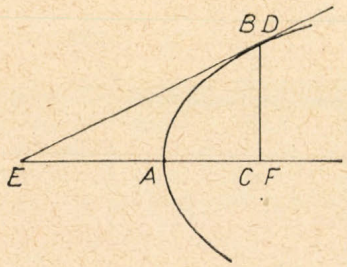
$$a^3 = 3caa+3ca+cee.$$

[20] Descartes levele Hardyhoz 1638 júniusban. AT II, 163—173.

Mivel egy egyenletünk van két ismeretlenre, szükség van még egy egyenletre. Ezt az egyenletet a $BC:DF = g:h$ aránypárból kapjuk. A két egyenletből meghatározható a két ismeretlen, a és e.

Mármost ha ezt a módszert az érintő megkeresésére akarjuk alkalmazni, „csupán azt kell tekintetbe venni, hogy amikor az EB egyenes érinti a görbét, akkor DF egybeesik BC-vel", azaz arányukból egyenlőség lesz, s ha az előbb, amikor EBD egyenes B és D pontokban metszette a görbét $BC:DF=g:h$ állott, most, mikor EB érintő lesz, $g=h$. S akkor a fenti $DF = \frac{ba+be}{a}$ kifejezést betéve $BC:DF = g:h$ aránypárba, mivel $BC=b$, a $bh = \frac{gba+gbe}{a}$ egyenletet kapjuk, azaz $ha = ga+ge$, „és mivel $h=g$, csupán $a = a+e$ marad, azaz e egyenlő zérussal. Ebből nyilvánvaló, hogy a értékének a megkeresésére nem kell egyebet tenni, mint az első egyenletben, ami $a^3 = 3cae+3cee+cee$, minden e-vel szorzott tag helyébe zérust helyettesíteni, azaz törölni. Mert egy valódi mennyiséget megszorozva egy másik képzelt mennyiséggel, amilyen a nulla, az eredmény mindig zérus. És ez Monsieur FERMAT homogének elisiója, ami így bevezetve semmiképpen sem gratis. Elvégezve az elisiot, egyenletünkből $a^3=3caa$ marad, azaz $a=3c$", ami valóban a harmadfokú parabola érintőjét adja meg.

„Íme a szabály alapja. Virtuálisan két egyenlet szerepel benne, jóllehet elegendő egyet említeni explicite, mivel a második csupán a homogének törlésére szolgál. De nagyon valószínű, hogy Monsieur FERMAT ezt a pontot nem értette meg; és csak próbálgatással jött rá, hiszen kihagyja a legfontosabb feltételt."



10. ábra

Foglaljuk össze DESCARTES eljárását. Az érintő két egyenlet két ismeretlenének a meghatározásából adódik. Az egyik egyenlet a görbe egyenlete, a másik egyenlet egy, a görbét metsző egyenes egyenlete. Érintő esetében a görbe és a szelő két metszéspontja egybeesik.

Nem „határhelyzete"[21] itt sem az érintő a szelőnek. De DESCARTES felismeri, s a görbék egy speciális csoportjánál, az algebrai egyenlettel

[21] Vö. C. B. BOYER, i. m.: 167: „In criticising FERMAT's method of tangents, DESCARTES attempted to correct the method by interpreting it in terms of equal roots and coincident points, a procedure which was practically equivalent to defining the tangent as the limit of a secant. DESCARTES did not express himself in this manner,

megadható görbéknél pontosan ki is fejezi az érintő és a szelő közötti összefüggést. Hasonlóan, a görbe és a görbét metsző kör egyenletéből határozta meg már a *Geometrie*-ben az érintőt. Ez az eljárás algebrailag éppen olyan kifogástalan volt, mint a *Levelezés* most ismertetett érintő-módszere. Hiányzott azonban belőle a továbbfejlődés lehetőségének az a magja, amelyet a FERMAT-módszer kritikája során született eljárás olyan világosan megfogalmaz: az érintő és a szelő viszonyának a felismerése. Ahhoz, hogy általános, nem csak algebrai görbék esetében érvényes módszer születhessen, meg kell majd mozdítani az ábrát. Akkor azután — mint LEIBNIZ felismeri — a szelő minden határon túl közelít az érintőhöz, s a g és h mennyiségek aránya pedig — ez NEWTON „végső arányok módszerének" a lényege — az egyhez.

DESCARTES azonban nem dolgozott átmenettel, nem mozdította meg ábráját. Talán azoktól a pontatlanságoktól félt, melyekbe — a határátmenet pontos fogalma nélkül — NEWTON és LEIBNIZ is belekeveredtek. Talán azért, mert azoknak a görbéknek az esetében, melyeket ő a matematika fejlődése szempontjából legfontosabbaknak tartott, az algebrai egyenletekkel kifejezhető görbék esetében, erre nem is volt szükség. A szelő ill. a megfelelő e mennyiség bevezetésével itt úgy kaphatunk érintési feltételt, hogy nincs szükség határátmenetre. De ebből nem következik, s éppen ez a felismerés DESCARTES nagy tette, hogy az érintőnek és görbének egy közös pontja lenne, mint FERMAT hitte, s így elég lenne *egy* egyenlet a meghatározására. Az érintőnek két közös pontja van a görbével, két egybeeső „metszéspontja", amit két egyenletből kell meghatározni, a görbe és a szelő egyenletéből. A görbének azért van érintője, mert ennek a két egybeeső pontnak a környezetében megközelítően egyenesnek tekinthető. Ma úgy mondanánk: kicsiben lineáris.

HOFFMANN vette észre, hogy LEIBNIZ a cartéziánus matematika „mélyebb intencióit"[22] ismeri fel s fejleszti ki infinitézimális számításában. Maga DESCARTES azonban a tiszta és pontos fogalmazás érdekében óvakodott az infinitézimális megfontolást igénylő problémáktól, holott ismerte és több helyen érintette. SZABÓ Árpád[23] mutatta meg, hogy

---

however, inasmuch as the concept of a limit was far from clear at this time. FERMAT, who was thinking of infinitesimals, could not see that his method had anything in common with the algebraic (limit) method of DESCARTES and so precipitated a quarrel as to priority..." A *mai* ismeretek szempontjából Boyer interpretációja nagyjából azonos azzal, amit a fentiekben kifejtettünk. De a történelmi fejlődés szempontjából az volt a fontos, hogy DESCARTES, ha csak a matematika szűk területén is, tiszta, modellként alkalmas eljárást teremtett az érintőszerkesztésre.

[22] SCHOLZ, H.—KRATZER, A.—HOFMANN, J.: i. m.: 73.

[23] SZABÓ, Á.: „The transformation of mathematics into deductive science and the beginning of its foundation on definitions and axioms," *Scripta Mathematica*, 27, 27—48*A*, 113—139, 1964.

az eleata filozófia nyomán tájékozódó görög matematika egyik legnagyobb tette a püthagoreus matematika naív infinitézimális fogalmainak a kritikája volt. S ugyanúgy, ahogyan az eleata ZÉNON ún. „végtelen ellenes" paradoxonai állanak a görög infinitézimális matematika, azaz az eudoxoszi arányelmélet és az exhauszciós módszer eredeténél, a nyugat-európai infinitézimális kalkulus kialakulását DESCARTES reformjai: jelölési módja, érintőmódszere és ún. „anti-infinitézimalizmusa" igen nagy mértékben determinálták. DESCARTES mérte fel elsőnek a végtelen szelő és érintő között tátongó szakadékát, mint egykor az eleata ZÉNON pontok végtelenségének megmérhetetlen örvényét rész és egész között. Így kell érteni DESCARTES kritikájának állandóan visszatérő mondatát.

A matematika fejlődése szempontjából nagyon lényeges volt, hogy DESCARTES olyan durván szétválasztotta a geometrikus és mechanikus, „pontos", algebrai egyenlettel megadható és meg nem adható problémákat. Ez által geometriai görbék esetében pontos kritériumát tudta adni az érintő létezésének. És ezzel a valóságba, azaz a létezők tiszta és világos fogalmakból álló világába, a cartéziánus létezés világába horgonyozta le az érintőt. Most már nyugodtan lehetett spekulálni azon, mi „történik" ha a szelő „közeledik" az érintőhöz.

DESCARTES még ennek a spekulációnak az irányát is megsejtette: olyasmi történik, ami — bármi is legyen a kérdéses görbe egyenlete — kicsiben egyszerű szorzásra és összeadásra vezethető vissza. Ezt csak LEIBNIZ fedezi majd fel a cartéziánus matematikában, maga DESCARTES elfordul a végtelen örvényétől, melyet éppen az ő tiszta és világos különbségtevése tett láthatóvá.

De az új matematika nyelvét, s legfontosabb alapfogalmaiból álló nyelvtanát, melyeken keresztül majd legyőzhetők lesznek a végtelen nehézségei ő teremtette meg olyan területen, ahol ezek a nehézségek nem léptek fel. Ez a nyelv a *Geometrie*, a harmadik a három nagy óriásesszé közül, melynek a *Discours* az előszava. A *Levelezés* matematikája bemutatja, hogyan kell az új nyelvet használni különféle — közöttük infinitézimális — esetekben, s hogyan kell az új matematikát fizikai kérdésekre alkalmazni.

О МЕТОДЕ ДЕКАРТА КОНСТРУИРОВАНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ

Ласло Векерды

A DIALOGE BETWEN FERMAT AND DESCARTES THE METHODS OF MAXIMA-MINIMA AND OF TANGENTS

L. Vekerdi

The discussion of Descartes and Fermat about the method of tangents of the latter is dealt with here from the point of view of the Leibnizian infinitesimal calculus. It will be suggested, that concept and method of the "characteristical triangle" is worked out by Descartes during the course of the debate, as he tries to give a "clear and distinct" definition of the applicability of Fermat's Maximum-Minimum method to the problem of the construction of tangents.

Lineáris függvényegyenletek, néhány általánosításuk és alkalmazásuk

LOSONCZI LÁSZLÓ

Előszó

Az

$$(1) \qquad f(ax+by+c)=Af(x)+Bf(y)+C \qquad (a\neq 0,\ b\neq 0)$$

egyenlet vizsgálata Jensenhez nyúlik vissza, aki ismert egyenlőtlensége speciális eseteként megoldotta az

$$f(ax+(1-a)y)=af(x)+(1-a)f(y) \qquad (a>0,\ 1-a>0)$$

függvényegyenletet. (1) folytonos megoldásait Aczél J. [2] határozta meg (de eljárása megadja pl. az összes mérhető megoldásokat is), míg Daróczy Z. [5] szükséges és elegendő feltételt adott (1) nemkonstans megoldásainak létezésére (folytonos $f(x)$-nél nemkonstans megoldás csak az $a=A$, $b=B$ esetben létezik ld. [2]).

Az 1. §-ban megoldjuk az (1)-nél általánosabb

$$(2) \qquad f(ax+by+c) = Qf(x)f(y)+Af(x)+Bf(y)+C \qquad (a\neq 0,\ b\neq 0)$$

függvényegyenletet $f(x)$ mérhetősége mellett, jelentősen egyszerűsítjük Daróczy Z. fenti kritériumának a bizonyítását, majd megadjuk (2) legáltalánosabb megoldását. Ez természetesen tartalmazza az (1)-re vonatkozó összes eddigi eredményt is. Érdekes, hogy a $Q=0$ és a $Q\neq 0$ esetekben (2) konstanstól különböző megoldása létezésének feltételei egészen eltérőek.

A 2. § az (1) egyenlet különböző általánosításait tárgyalja, többek között azt az esetet, amikor (1) csak a sík egy összefüggő **D** tartományából való (x, y) párokra teljesül, továbbá az

$$(3) \qquad f(x+\varepsilon(x,y)y) = f(x)+f(y) \qquad (\varepsilon(x,y)^2\equiv 1)$$

alternatív egyenletet (rokon egyenletekre nézve ld. Hosszú M. [8], Vincze E. [14]). A 2. § végén az

$$f(ax+by+c) = F(f(x),f(y))$$

egyenlet vizsgálata alapján algebrai jellegű eredményekre jutunk a biszimmetria és az asszociativitás közötti összefüggéssel kapcsolatban.

A 3. §-ban a 2. § eredményeit fogjuk alkalmazni az elliptikus geometria távolságképletének megalapozásánál szerepet játszó

$$g(x)+g(y)=g\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \tag{4}$$

egyenlet vizsgálatára.

1. §. A (2) függvényegyenlet vizsgálata

1. 1. Szükséges feltétel (2) *nemkonstans megoldásainak létezésére*

A (2) függvényegyenletet itt abban az esetben vizsgáljuk, amikor $f(x)$ valós függvény, x, y tetszőleges valós számok, a, b, c, Q, A, B, C az $a\neq 0$, $b\neq 0$ feltételtől eltekintve tetszőleges valós konstansok. Hasonló egyenlettel (az előszóban felsoroltakon kívül) többek között I. Stamate [12], Daróczy Z. [5] foglalkoztak.[1]

(2)-ből következik, hogy

$$Qf(ax+by+c)f(au+bv+c)+Af(ax+by+c)+Bf(au+bv+c)+C=$$

$$f\big(a(ax+by+c)+b(au+bv+c)+c\big)=$$

$$f\big(a(ax+bu+c)+b(ay+bv+c)+c\big)=$$

$$Qf(ax+bu+c)f(ay+bv+c)+Af(ax+bu+c)+Bf(ay+bv+c)+C.$$

A (2) egyenletet ismét felhasználva $f(x)=X, f(y)=Y, f(u)=U, f(v)=V$-vel kapjuk, hogy

$$Q(QXY+AX+BY+C)(QUV+AU+BV+C)+$$

$$+A(QXY+AX+BY+C)+B(QUV+AU+BV+C)+C=$$

$$=Q(QXU+AX+BU+C)(QYV+AY+BV+C)+$$

$$+A(QXU+AX+BU+C)+B(QYV+AY+BV+C)+C,$$

[1] I. Stamate az $f(x+y)=f(x)f(y)+f(x)+f(y)$ egyenletet vizsgálta. Daróczy Z. meghatározta az $f(ax+by+c)=k(x)l(y)+g(x)+h(y)$ függvényegyenlet általános megoldását. Bár az utóbbi egyenlet (2)-nél általánosabb, itt azzal a — függvényegyenletek elméletében nem ritka — jelenséggel találkozunk, hogy a speciálisabb egyenlet megoldása nehezebb, mint az általánosé, ill. a megoldás specializálása nehezebb, mint a speciális egyenlet megoldása.

ahonnan

$$(5)\quad (Y-U)\big(Q^2(B-A)XV+Q(QC+A-A^2)X+Q(B^2-B-QC)V+ \\ +QC(B-A)\big)=0$$

következik minden X, Y, U, V-re, mely az $\mathbf{M}=\{f(x)\}$ halmazban van. Ha (2)-nek létezik nemkonstans megoldása, úgy $\mathbf{M}$ legalább kételemű: $X_1, X_2 \in \mathbf{M}$, $X_1-X_2\neq 0$. Tegyünk (5)-be $Y=X_1$ $U=X_2$-t, úgy X_1-X_2-vel való osztás után

$$Q^2(B-A)XV+Q(QC+A-A^2)X+Q(B^2-B-QC)V+QC(B-A)=0.$$

Helyettesítsünk itt egymás után $X=V=X_1$; $X=V=X_2$; $X=X_1$, $V=X_2$ $X=X_2$, $V=X_1$-t:

$$(6)\quad Q^2(B-A)X^2+Q(QC+A-A^2)X_1+ \\ +Q(B^2-B-QC)X_2+QC(B-A)=0$$

$$Q^2(B-A)X^2+Q(QC+A-S^2)X_2+ \\ +Q(B^2-B-QC)X_2+QC(B-A)=0$$

$$Q^2(B-A)X_1X_2+Q(QC+A-A^2)X_1+ \\ +Q(B^2-B-QC)X_2+QC(B-A)=0$$

$$Q^2(B-A)X_2X_1+Q(QC+A-A^2)X_2+ \\ +Q(B^2-B-QC)X_1+QC(B-A)=0.$$

Mivel

$$\begin{vmatrix} X_1^2 & X_1 & X_1 & 1 \\ X_2^2 & X_2 & X_2 & 1 \\ X_1X_2 & X_1 & X_2 & 1 \\ X_2X_1 & X_2 & X_1 & 1 \end{vmatrix} = (X_2-X_1)^4 \neq 0,$$

a (6) egyenletrendszernek a $Q^2(B-A)$, $Q(QC+A-A^2)$, $Q(B^2-B-QC)$, $QC(B-A)$ „ismeretlenekre" nézve csak triviális megoldása van, azaz

$$(7)\quad Q^2(B-A)=0$$

$$Q(QC+A-A^2)=0$$

$$Q(B^2-B-QC)=0$$

$$QC(B-A)=0.$$

A (7) egyenletrendszer megoldása:

(8) $Q=0$, A, B, C tetszőlegesek, vagy

(9) $Q\neq 0$, A tetszőlegesek, $B=A$, $C=\dfrac{A^2-A}{Q}$.

Ezzel bizonyított az

1. TÉTEL. *A* (2) *függvényegyenletnek csak akkor létezik konstanstól különböző megoldása, ha a* Q, A, B, C *konstansok a* (8), *ill.* (9) *feltételt kielégítik.*

Látni fogjuk, hogy az 1. tétel nem fordítható meg. A továbbiakban külön vizsgáljuk a (8) és (9) feltételeknek megfelelő

(1) $$f(ax+by+c) = Af(x)+Bf(y)+C$$

és az

(10) $$f(ax+by+c) = Qf(x)f(y)+A\big(f(x)+f(y)\big)+\frac{A^2-A}{Q}$$

egyenleteket.

1.2. *Az* $f(ax+by+c)=Af(x)+Bf(y)+C$ *függvényegyenlet*[2]

(1)-ből $x=y=0$-val kapjuk, hogy

$$f(c)=(A+B)f(o)+C,$$

(1)-ből $x=y=0$-val kapjuk, hogy

$$f(c)=(A+B)f(0)+C,$$

azaz a $c=0$, $A+B=1$ esetben $C=0$. Helyettesítsünk (1)-be rendre

$$x=\frac{u}{a},\ y=\frac{v-c}{b};\quad x=\frac{u}{a},\ y=-\frac{c}{b};$$

$$x=0,\ y=\frac{v-c}{b};\quad x=0,\ y=-\frac{c}{b}\text{-t, úgy}$$

[2] E szakasz eredményeinek egy része megjelent „Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen" címmel (Acta Sci. Math. Szeged, 25 (1964), 250—254.)

$$f(u+v) = Af\left(\frac{u}{a}\right)+Bf\left(\frac{v-c}{b}\right)+C$$

$$f(u) = Af\left(\frac{u}{a}\right)+Bf\left(-\frac{c}{b}\right)+C$$

$$f(v) = Af(0)+Bf\left(\frac{v-c}{b}\right)+C$$

$$f(0) = Af(0)+Bf\left(-\frac{c}{b}\right)+C$$

adódik, amiből

$$f(u+v) = f(u)+f(v)-f(0)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a $g(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)-f(0)$ függvény kielégíti a Cauchy-féle

(11) $$g(u+v) = g(u)+g(v)$$

függvényegyenletet. (11) folytonos, egy pontban folytonos, mérhető stb. megoldásai $g(u)=\alpha u$ alakúak[3], így $f(0)=\beta$-val $f(x)=g(x)+f(0)=$ $=\alpha x+\beta$. Ezt (1)-be visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$\alpha(a-A)x+\alpha(b-B)y+\alpha c-C=\beta(A+B-1)$$

minden x, y-ra. Ez csak úgy lehetséges, hogy

(12) $$\alpha c-C=\beta(A+B-1) \quad \text{ha} \quad a=A,\ b=B,$$

vagy

(13) $$\alpha=0,\ -C=\beta(A+B-1) \quad \text{ha} \quad (a-A)^2+(b-B)^2>0.$$

Igaz tehát a

2. Tétel. *Az* (1) *függvényegyenlet folytonos, egy pontban folytonos mérhető stb. megoldásai* $f(x)=\alpha x+\beta$ *alakúak, ahol az* α, β *konstansokra* (12), *ill.* (13) *teljesül.*

(12) és (13)-ból azonnal következik, hogy az (1) egyenletnek nemkonstans folytonos stb. megoldása csak az $a=A$, $b=B$ esetben létezhet. A következő tétel azt mutatja, hogy az $f(x)$ függvényre vonatkozó feltevések elejtése mellett ez a feltétel általában nem érvényes.

3. Tétel. *Az* (1) *függvényegyenletnek csak akkor van nemkonstans megoldása, ha a racionális számok* $\mathbf{R}$ *testének az* a, b *illetve* A, B *elemekkel való* $\mathbf{R}(a, b)$ *és* $\mathbf{R}(A, B)$ *bővítési testei izomorfak úgy, hogy* $a \to A$, $b \to B$.

[3] Ld. Aczél J. [1]. (11) általános megoldása is ismert (G. Hamel [7]).

SEGÉDTÉTEL. (ld. Daróczy Z. [5] 81. o. 5. segédtétel). *Ha* $f(x)$ *kielégíti az* (1) *egyenletet, úgy a* $g(x) = f(x) - f(0)$ *függvényre érvényes a*

$$g(F(a, b)x) = F(A, B)g(x) \tag{14}$$

összefüggés, ahol $F(x, y) = \dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ *az* $(a, b), (A, B)$ *helyeken értelmezett* $(Q(a, b) \neq 0 \quad Q(A, B) \neq 0)$ *tetszőleges racionális törtfüggvény racionális együtthatókkal.*

A segédtétel bizonyításához helyettesítsünk (1)-be $y = -\dfrac{c}{b}$; $x = 0$, $y = -\dfrac{c}{b}$-t:

$$f(ax) = Af(x) + Bf\left(-\frac{c}{b}\right) + C$$

$$f(0) = Af(0) + Bf\left(-\frac{c}{b}\right) + C.$$

A második egyenletet az elsőből kivonva kapjuk, hogy

$$g(ax) = Ag(x).$$

Ebből következik, hogy

$$g(a^n x) = A^n g(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Tegyük fel ugyanis, hogy

$$g(a^k x) = A^k g(x),$$

akkor

$$g(a^{k+1}x) = g\big(a^k(ax)\big) = A^k g(ax) = A^k A g(x) = A^{k+1} g(x),$$

amivel (15)-öt bebizonyítottuk. Hasonlóan bizonyítható a

$$g(b^n x) = B^n g(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

egyenlőség is. Legyen $P(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} r_{ij} x^i y^j$ tetszőleges polinom racionális együtthatókkal $(r_{ij} \in \mathbf{R})$, akkor

$$g(P(a, b)x) = P(A, B)g(x) \tag{17}$$

ugyanis (15), (16) szerint[4]

$$g(P(a, b)x) = g\Big(\sum_{i,j} r_{ij} a^i b^j x\Big) = \sum_{i,j} r_{ij}\, g(a^i b^j x) =$$

$$= \sum_{i,j} r_{ij} A^i B^j g(x) = P(A, B)g(x)$$

[4] A (11) Cauchy egyenletet kielégítő $g(x)$ függvényekre érvényes a $g(r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_kx_k) = r_1g(x_1) + r_2g(x_2) + \ldots + r_kg(x_k)$ $(r_1, r_2, \ldots r_k \in \mathbf{R})$ egyenlőség.

Innen már következik (14), mivel

$$P(A, B)g(x) = g(P(a, b)x) = g\left(Q(a, b)\frac{P(a, b)}{Q(a, b)}x\right) =$$

$$= Q(A, B)g\left(\frac{P(a, b)}{Q(a, b)}x\right)$$

illetve

$$g\left(\frac{P(a, b)}{Q(a, b)}x\right) = \frac{P(A, B)}{Q(A, B)}g(x).$$

Megjegyzés. Ha $f(x)$ nemkonstans, akkor elegendő a segédtételben csak $Q(a, b) \neq 0$ (ill. $Q(A, B) \neq 0$)-t megkövetelni, mert (17) szerint

$$g(Q(a, b)x) = Q(A, B)g(x)$$

és így $Q(A, B) = 0$-ból $g(x)$ nemkonstans volta miatt $Q(a, b) = 0$ következik. Ezért, ha $Q(a, b) \neq 0$, akkor $Q(A, B) \neq 0$.

A 3. tétel *bizonyítása.* Tegyük fel, hogy az (1) függvényegyenletnek van egy nemkonstans megoldása. A φ leképezést a következőképpen értelmezzük:

$$\varphi(F(a, b)) = F(A, B). \tag{18}$$

Előbbi megjegyzésünk szerint minden (a, b) helyen értelmezett $F(x, y)$ egyúttal az (A, B) helyen is értelmezve van, és fordítva. Másrészt $\mathbf{R}(a, b) = \{F(a, b)\}$, $\mathbf{R}(A, B) = \{F(A, B)\}$, így (18) $\mathbf{R}(a, b)$-t $\mathbf{R}(A, B)$-re képezi le. Megmutatjuk, hogy φ $\mathbf{R}(a, b)$-nek $\mathbf{R}(A, B)$-re való izomorf leképezése. Ha

$$\varphi(F_1(a, b)) = F_1(A, B)$$

$$\varphi(F_2(a, b)) = F_2(A, B)$$

$$F_1(x, y) \circ F_2(x, y) = F(x, y),$$

(a „$\circ$” operáció az összeadást ill. a szorzást jelöli) akkor

$$\varphi(F_1(a, b) \circ F_2(a, b)) = \varphi(F(a, b)) = F(A, B) =$$

$$= F_1(A, B) \circ F_2(A, B) = \varphi(F_1(a, b)) \circ \varphi(F_2(a, b))$$

tehát a (18) leképezés *művelettartó.* φ *egy-egyértelmű*ségének bizonyításához elég megmutatni azt, hogy $F_1(A, B) = F_2(A, B)$-ből $F_1(a, b) = F_2(a, b)$ következik és fordítva. Ez valóban így van, mert ha $F_1(A, B) = F_2(A, B)$, úgy (14) szerint

$$g(F_1(a, b)x) = F_1(A, B)g(x) = F_2(A, B)g(x) = g(F_2(a, b)x)$$

vagy $g(x)$ additivitása miatt

$$g\big((F_1(a, b) - F_2(a, b)x\big) = 0.$$

Mivel $g(x)$ konstanstól különböző, így $F_1(a, b) - F_2(a, b) = 0$, azaz $F_1(a, b) = F_2(a, b)$. Fordítva, ha $F_1(a, b) = F_2(a, b)$ akkor ismét (14)-t használva

$$F_1(A, B)g(x) = g\big(F_1(a, b)x\big) = g\big(F_2(a, b)x\big) = F_2(A, B)g(x),$$

illetve

$$\big(F_1(A, B) - F_2(A, B)\big)g(x) = 0,$$

amiből $F_1(A, B) = F_2(A, B)$ következik. φ (18) értelmezése miatt $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$, ezzel a 3. tétel bizonyítása teljes.

A következő tétel azt mutatja, hogy (1) nemkonstans megoldása létezésének a 3. tételben megadott szükséges feltételei elegendőek is. Legyen $\mathbf{H} = \{h_i\}$ $(i \in \Gamma)$ a valós számoknak egy $\mathbf{R}(a, b)$ feletti bázisa, és

$$x = \sum_{i=1}^{t} R_i h_i \qquad \big(R_i \in \mathbf{R}(a, b), \quad h_i \in \mathbf{H}\big) \tag{19}$$

az x valós szám előállítása.

4. Tétel[5]. *Ha megadható* $\mathbf{R}(a, b)$*-nek* $\mathbf{R}(A, B)$*-re való olyan* φ *izomorf leképezése, hogy* $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$, *akkor az* (1) *egyenlet általános megoldása*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{t} \varphi(R_i)\big(f(h_i) - f(0)\big) + f(0), \tag{20}$$

ahol $x = \sum_{i=1}^{t} R_i h_i$, $R_i \in \mathbf{R}(a, b)$, $h_i \in \mathbf{H}$ *és* $f(0), f(h_i)$ *olyan, egyébként tetszőleges valós számok, hogy az*

$$f(c) = (A + B)f(0) + C \tag{21}$$

egyenlőség fennáll. Ha ilyen φ *izomorfizmus nem létezik, akkor* (1) *általános megoldása*

$$f(x) = \frac{C}{1 - (A + B)} \quad \text{ha} \quad A + B \neq 1$$

$f(x) = \beta$ (tetszőleges konstans) ha $A + B = 1$, $C = 0$

míg az $A + B = 1$, $C = 0$ *esetben* (1)-nek *egyáltalán nincs megoldása.*

[5] A 3. és 4. tételekből következik Daróczy Z.-nak az előszóban is említett következő tétele:

Az $f(ax + by) = Af(x) + Bf(y)$ függvényegyenletnek akkor és csakis akkor létezik konstanstól különböző megoldása, ha megadható $\mathbf{R}(a, b)$ és $\mathbf{R}(A, B)$ között olyan φ izomorfizmus, melyre $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$ teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{R}(a, b)$ és $\mathbf{R}(A, B)$ izomorfak úgy, hogy $\varphi(a)=A$, $\varphi(b)=B$. $\mathbf{R}$ közös primteste $\mathbf{R}(a, b)$ és $\mathbf{R}(A, B)$-nek, ezért tetszőleges $r\in\mathbf{R}$-re $\varphi(r)=r$. Az izomorfizmus művelettartása miatt

$$\varphi\big(F(a, b)\big)=F(A, B), \tag{22}$$

ahol $F(x, y)$ az (a, b) (vagy az (A, B)) helyen értelmezett tetszőleges racionális törtfüggvény racionális együtthatókkal. (22) felhasználásával a 3. tétel segédtételében szereplő (14) összefüggés a

$$g(Sx)=\varphi(S)g(x)$$

alakba írható át, ahol S tetszőleges eleme $\mathbf{R}(a, b)$-nek. Figyelembe véve $g(x)$ additivitását és x (19) alakját

$$g(x)=g\left(\sum_{i=1}^{t} R_i h_i\right)=\sum_{i=1}^{t} g(R_i h_i)=\sum_{i=1}^{t}\varphi(R_i)g(h_i)$$

ami $g(x)=f(x)-f(0)$ miatt éppen (20). Helyettesítsük a (20) függvényt (1)-be. Ha

$$y=\sum_{i=1}^{t} T_i h_i, \quad c=\sum_{i=1}^{t} Q_i h_i \qquad (T_i, Q_i\in\mathbf{R}(a, b), h_i\in\mathbf{H})$$

ugy

$$ax+by+c=\sum_{i=1}^{t}(aR_i+bT_i+Q_i)h_i$$

és itt $aR_i+bT_i+Q_i\in\mathbf{R}(a, b)$, tehát

$$f(ax+by+c)-Af(x)-Bf(y)-C=$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\varphi(aR_i+bT_i+Q_i)\big(f(h_i)-f(0)\big)+f(0)$$

$$-A\sum_{i=1}^{t}\varphi(R_i)\big(f(h_i)-f(0)\big)-Af(0)$$

$$-B\sum_{i=1}^{t}\varphi(T_i)\big(f(h_i)-f(0)\big)-Bf(0)-C.$$

Kihasználva a φ izomorfizmus tulajdonságait kapjuk, hogy

$$f(ax+by+c)-Af(x)-Bf(y)-C=$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\varphi(Q_i)\big(f(h_i)-f(0)\big)+f(0)-(A+B)f(0)-C,$$

azaz (20) miatt

$$f(ax+by+c)-Af(x)-Bf(y)-C = f(c)-(A+B)f(0)-C.$$

Innen látjuk, hogy a (20) függvény akkor és csakis akkor tesz eleget az (1) egyenletnek, ha (21) fennáll. A (21) összefüggés mindig kielégíthető az $f(h_i), f(0)$ értékek megfelelő megválasztásával.

Ha nem létezik olyan izomorfizmus $\mathbf{R}(a, b)$ és $\mathbf{R}(A, B)$ között mely az $a, b \in \mathbf{R}(a, b)$ elemeket az $A, B \in \mathbf{R}(A, B)$ elemekbe viszi át, akkor a 3. tétel szerint (1)-nek csak konstans megoldása lehet. (1)-be $f(x) = \beta$-t helyettesítve

$$\beta(1-(A+B)) = C, \tag{23}$$

innen $\beta = \dfrac{C}{1-(A+B)}$ ha $A+B \neq 1$, β tetszőleges, ha $A+B=1$, $C=0$,

végül az $A+B=1$, $C \neq 0$ esetben (23) nem elégíthető ki, tehát ekkor (1)-nek nincs megoldása. Q.e.d.

A 3. és 4. tételekben szereplő φ izomorfizmus létezésének eldöntésére a következő tétel egy — a konkrét egyenletek vizsgálatánál jól használható — kritériumot ad.

5. TÉTEL. *Az* $\mathbf{R}(a, b)$ *és* $\mathbf{R}(A, B)$ *bővítési testek akkor és csakis akkor izomorfak úgy, hogy* $a \to A$, $b \to B$, *ha* a *és* A *mindketten transzcendensek, vagy konjugált algebrai számok*[6] $\mathbf{R}$ *felett, továbbá* b *és* B *vagy mindketten transzcendensek* $\mathbf{R}(a)$ *ill.* $\mathbf{R}(A)$ *felett, vagy algebrai számok* $\mathbf{R}(a)$ *ill.* $\mathbf{R}(A)$ *felett úgy, hogy a B-hez rendelt irreducibilis főpolinom* $\mathbf{R}(A)$*-ban „ugyanolyan alakú", mint a b-hez rendelt irreducibilis főpolinom* $\mathbf{R}(a)$*-ban, azaz az együtthatók az* $\mathbf{R}(a)$ *és* $\mathbf{R}(A)$ *között fennálló izomorfia*[7] *értelmében mennek át egymásba*[8].

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathbf{R}(a, b)$ és $\mathbf{R}(A, B)$ izomorfak a φ leképezés által úgy, hogy $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$. A 4. tétel bizonyításánál láttuk, hogy ekkor

$$\varphi(F(a, b)) = F(A, B) \tag{22}$$

teljesül. Ha a algebrai $\mathbf{R}$ felett és kanonikus polinomja $P_a(x)$, úgy

$$P_a(A) = \varphi(P_a(a)) = \varphi(0) = 0$$

[6] Az a és A számokat konjugált algebrai számoknak nevezzük $\mathbf{R}$ felett, ha a hozzájuk egyértelműen hozzárendelhető $\mathbf{R}$ feletti irreducibilis főpolinomok megegyeznek.

[7] Az a, A-ra teljesülő feltételek miatt $\mathbf{R}(a)$ izomorf $\mathbf{R}(A)$-val.

[8] E tételben a, A és b, B szerepe felcserélhető.

miatt A is algebrai, és az A-hoz tartozó $P_A(x)$ irreducibilis főpolinomra $P_A(x)|P_a(x)$ teljesül. Mivel $P_a(x)$ irreducibilis főpolinom, innen

$$P_a(x) \equiv P_A(x) \tag{24}$$

adódik. Hasonlóan bizonyítható (24) akkor is, ha A algebrai **R** felett. Ebből már következik, hogy ha a, A egyike transzcendens, úgy a másik is az. A feltétel szükségességének b, B-re vonatkozó része is az előbbi gondolatmenet alapján bizonyítható.

Az 5. tétel feltételeinek elegendősége a testbővítések elméletéből ismert (ld. [11] 412—418 o.).

A 3. és 5. tételek alkalmazásával kapjuk például, hogy az

$$f\left(\pi x + \sqrt{\frac{\pi}{1+\pi^2}}\, y + 2\right) = ef(x) - \sqrt{\frac{e}{1+e^2}}\, f(y)$$

egyenletnek van, míg az

$$f(\pi x + e^2 y + \sqrt[5]{4}) = f(x) + (\sqrt[3]{3} - 1) f(y) + 11$$

egyenletnek nincs konstanstól különböző megoldása.

1. 3. Az $f(ax+by+c) = Qf(x)f(y) + A(f(x+f(y)) + \dfrac{A^2-A}{Q}$ *függvényegyenletet*

Szorozzuk meg a címben szereplő (10) egyenlet mindkét oldalát Q-val és adjunk mindkét oldalhoz A-t. $h(x) \overset{\text{def}}{=} Qf(x) + A$-val

$$h(ax+by+c) = h(x)h(y) \tag{25}$$

adódik.

(25) összes konstans megoldása $h(t) \equiv 0$, $h(t) \equiv 1$, melyeket egyelőre kizárunk. Állítjuk, hogy ekkor $h(t) > 0$.

$h(t)$ sehol sem lehet nulla, ugyanis $h(x_0) = 0$-ból (25) szerint $h(ax_0 + by + c) = h(x_0)h(y) = 0$, azaz $h(t) \equiv 0$ következik. $a+b$ nem lehet nulla, mert akkor (25)-ből az $x = t$, $y = 0$; $x = 0$, $y = -t$ helyettesítésekkel kapott

$$h(at+c) = h(t)h(0)$$

$$h(at+c) = h(0)h(-t)$$

egyenletek összehasonlításából $(h(0) \neq 0)$ $h(t)$ párossága, abból pedig ismét (25) szerint

$$h(ax-ay+c) = h(x)h(y) = h(x)h(-y) = h(ax+ay+c)$$

következik, így $h(t)$ konstans volna, amit kizártunk[9].

$x=y=\frac{t-c}{a+b}$-vel kapjuk (25)-ből, hogy $h(t)=h\left(\frac{t-c}{a+b}\right)^2$, ahonnan $h(t)>0$ következik, amint állítottuk (első észrevételünk szerint $h(t)$ sehol sem lehet nulla).

6. TÉTEL. *A* (10) *függvényegyenletnek csak akkor van nemkonstans megoldása, ha* $a=1$, $b=1$.

Bizonyítás. Ha (10)-nek van nemtriviális megoldása, úgy (25)-nek is van, és mint előbb láttuk $h(t)>0$. Vegyük a (25) egyenlet mindkét oldalának logaritmusát, és az

$$n(ax+by+c)=n(x)+n(y) \qquad (n(t)=\ln h(t)) \tag{26}$$

egyenletre alkalmazzuk a 3. és 5. tételt!

A következő tétel azt mutatja, hogy az $a=b=1$ feltétel elegendő is (10) nemkonstans megoldása létezéséhez.

7. TÉTEL. *Ha* $(a-1)^2+(b-1)^2>0$ *akkor a* (10) *egyenlet általános megoldása*

$$f(x)=-\frac{A}{Q} \tag{27}$$

$$f(x)=\frac{1-A}{Q}, \tag{28}$$

míg az $a=b=1$ $((a-1)^2+(b-1)^2=0)$ *esetben a* (27) *függvény és*

$$f(x)=\frac{e^{l(x+c)}-A}{Q}, \tag{29}$$

ahol $l(x)$ *tetszőleges megoldása az*

$$l(x+y)=l(x)+l(y) \tag{30}$$

Cauchy egyenletnek.

Bizonyítás. Ha $(a-1)^2+(b-1)^2>0$, akkor a 6. tétel szerint (10)-nek csak konstans megoldása lehet, és ezek a (27), (28) függvények ($h(x)\equiv 0$, $h(x)\equiv 1$-nek megfelelően).

[9] Hasonló eredményre jutunk Daróczy Z. egy tételének alkalmazásával is (ld. [5] 7. tétel 66—67. o.).

Ha $(a-1)^2+(b-1)^2=0$ akkor amint láttuk a nemkonstans megoldásoknál $h(x)=Qf(x)+A>0$, és az $n(x)=\ln h(x)=\ln\big(Qf(x)+A\big)$ függvény az

$$n(x+y+c) = n(x)+n(y) \tag{31}$$

egyenletnek tesz eleget. Legyen $l(x)=n(x-c)$, akkor (31) szerint

$$l(x+y) = n(x+y-c) = n\big((x-c)+(y-c)+c\big) =$$
$$= h(x-c)+h(y-c) = l(x)+l(y)$$

így

$$f(x) = \frac{e^{n(x)}-A}{Q} = \frac{e^{l(x+c)}-A}{Q}.$$

A konstans megoldások ekkor is (27) és (28), de utóbbit a (29) képlet is tartalmazza az $l(x)\equiv 0$ esetben. Q.e.d.

Felhasználva azt, hogy a (30) Cauchy-egyenlet általános folytonos, egy pontban folytonos, mérhető stb. megoldása $l(x)=\gamma x$ kapjuk, hogy (10) általános folytonos, egy pontban folytonos stb. megoldása: a (27) és (28) függvények ha $(a-1)^2+(b-1)^2>0$, míg az $a=b=1$ esetben (27) és az

$$f(x) = \frac{e^{\gamma(x+c)}-A}{Q} \tag{32}$$

függvény.

1. 4. A (2) függvényegyenlet megoldása

Térjünk vissza az eredeti problémához, az

$$f(ax+by+c) = Qf(x)f(y)+Af(x)+Bf(y)+C \tag{2}$$

egyenlethez. Eddigi eredményeink alapján kimondhatjuk a következő tételeket, melyek (2) teljes megoldását tartalmazzák.

8. TÉTEL. *A (2) függvényegyenlet általános folytonos, egy pontban folytonos, mérhető stb. megoldása*

$$f(x) = \alpha x+\beta \qquad \text{ha} \quad Q=0, \quad a=A, \quad b=B,$$

$$f(x) = \frac{e^{\gamma(x+c)}-A}{Q} \qquad \text{ha} \quad Q\neq 0, \quad B=A, \quad C=\frac{A^2-A}{Q},$$

$$f(x) = \delta$$

ha az előző két feltétel egyike sem teljesül. γ *tetszőleges, míg* α, β *az*

$$\alpha c - C = \beta(A + B - 1),$$

δ *a*

$$\delta = Q\delta^2 + (A + B)\delta + C \tag{33}$$

feltételt kielégítő valós konstans.

9. TÉTEL. *A* (2) *függvényegyenletnek csak akkor van nemkonstans megoldása, ha*

$Q = 0$ *és* $R(a, b)$ *izomorf* $R(A, B)$*-vel úgy, hogy* $a \to A, b \to B$ *vagy* (34)

$$Q \neq 0, \quad a = b = 1, \quad A = B, \quad C = \frac{A^2 - A}{Q} \tag{35}$$

teljesül.

10. TÉTEL. *A* (2) *egyenlet általános megoldása a* (20) *függvény a* (34) *esetben, a* (29) *függvény a* (35) *esetben, végül ha sem* (34), *sem* (35) *nem teljesül, úgy* $f(x) = \delta$, *ahol* δ (33)*-nak eleget tevő valós konstans.*

2. §. Az (1) egyenlet általánosításai

2. 1. *Az* (1) *egyenlet több változó, általánosabb definíciós tartomány és megengedett függvényosztály esetén*

Egy kézenfekvő általánosítása (1)-nek az

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + c) = A_1f(x_1) + \ldots + A_nf(x_n) + C \quad (n \geqq 2) \tag{36}$$

egyenlet, ahol most $x_1, x_2, \ldots x_n$ egy $\mathbf{K}_1$ test feletti $\mathbf{V}_1$ vektortér elemein futnak végig, $c \in \mathbf{V}_1$, $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{K}_1$ nullától különböző testelemek, míg $f(x)$, C egy $\mathbf{K}_2$ test feletti $\mathbf{V}_2$ vektortérből valók és $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathbf{K}_2$. $\mathbf{K}_1, \mathbf{V}_1$ elemeit lehetőleg kis betűkkel, $\mathbf{K}_2, \mathbf{V}_2$ elemeit nagy betűkkel fogjuk jelölni. Így $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ egységelemei e, E, nullelemei o, O, $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ zérusvektorai o, O lesznek.

$x_1 = x_2 = \ldots = x_4 = o$-val kapjuk (36)-ból, hogy

$$f(c) = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)f(o) + C,$$

azaz a $c = o$, $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = E$ esetben $C = O$ kell, hogy legyen.

A 11. tétel (36) konstanstól különböző megoldásainak létezésére ad szükséges feltételt, amely mint látni fogjuk elegendő is.

11. TÉTEL. *A* (36) *egyenletnek csak akkor van nemkonstans megoldása, ha a* $\mathbf{K}_1$ *és* $\mathbf{K}_2$ *testek* $\mathbf{P}_1$ *és* $\mathbf{P}_2$ *primtesteinek a* $\mathbf{P}_1(a_1, a_2, \ldots a_n)$ *és a* $\mathbf{P}_2(A_1, A_2, \ldots A_n)$ *bővítési testei izomorfak úgy, hogy* $a_i \to A_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

A *bizonyítás* hasonló a 3. tétel bizonyításához, ezért csak az eltérő részeket bizonyítjuk, és a bizonyítás gondolatmenetének közlésére szorítkozunk.

(36)-ból

$$x_1 = \frac{e}{a_1} u_1, \quad x_2 = \frac{e}{a_2}(u_2 - c), \quad x_3 = \ldots = x_n = o;$$

$$x_1 = \frac{e}{a_1} u_1, \quad x_2 = \frac{e}{a_2}(-c), \quad x_3 = \ldots = x_n = o;$$

$$x_1 = o, \quad x_2 = \frac{e}{a_2}(u_2 - c), \quad x_3 = \ldots = x_n = o;$$

$$x_1 = o, \quad x_2 = \frac{e}{a_2}(-c), \quad x_3 = \ldots = x_n = o$$

helyettesítésekkel nyert egyenletekből kiderül, hogy a $g(u) \overset{\text{def}}{=} f(u) - f(o)$ függvény a

(37) $$g(u_1 + u_2) = g(u_1) + g(u_2)$$

egyenletet kielégíti. Ebből teljes indukcióval

$$g(u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = g(u_1) + g(u_2) + \ldots + g(u_k),$$

vagy

$$u = u_1 = u_2 = \ldots = u_k, \quad \overset{1}{\smile} e + \overset{2}{\smile} e + \ldots + \overset{k}{\smile} e = ke \in \mathbf{P}_1$$

$$\overset{1}{\smile} E + \overset{2}{\smile} E + \overset{3}{\smile} E + \ldots + \overset{k}{\smile} E = kE \in \mathbf{P}_2\text{-vel}$$

$$g(ke \cdot u) = kE \cdot g(u).$$

Először megmutatjuk, hogy $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ izomorfak. Ehhez elegendő megmutatni azt, hogy $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ azonos karakterisztikájúak[10]. Ha $\mathbf{P}_1$

[10] Legyen $\mathbf{K}$ egy test, e az egységeleme. Ha van olyan k természetes szám, hogy $ke = \overset{1}{\smile} e + \overset{2}{\smile} e + \ldots + \overset{k}{\smile} e = 0$, úgy a legkisebb olyan tulajdonságú k számot $\mathbf{K}$ karakterisztikájának nevezzük (ez feltétlenül prímszám). Ha nincs olyan k természetes szám, hogy $ke = 0$, akkor a $\mathbf{K}$ testet nullkarakterisztikájúnak nevezzük. (ld. [13] 17. o.; [11] 407. o. 215. tétel).

karakterisztikája $p_1 > 1$ akkor $p_1 e = o$ és így $g(o) = g(o \cdot u) = g(p_1 e \cdot u) = p_1 E g(u)$ amiből $g(x)$ nemkonstans volta miatt $p_1 E = O$ és $p_2 | p_1$ következik, ahol p_2 $\mathbf{P}_2$ karakterisztikája. Mivel p_1 primszám (és $p_1 E = O$ miatt $\mathbf{P}_2$ nem nullkarakterisztikájú) így $p_1 = p_2$. Fordítva, ha $\mathbf{P}_2$ $p_2 > 1$ karakterisztikájú, akkor

$$O = O \cdot g(u) = p_2 E \cdot g(u) = g(p_2 e \cdot u)$$

és ebből $p_2 e = o$ következik, mivel $g(x)$ nemkonstans. Tehát ebben az esetben is $p_1 = p_2$. Előbbiekből már következik $p_1 = p_2$ nullkarakterisztika esetén is, ezzel $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ izomorfak. (37)-ből

$$g(ru) = Rg(u) \tag{38}$$

következik, ahol $r \in \mathbf{P}_1$, $R \in \mathbf{P}_2$ a $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ izomorfiájánál egymásnak megfelelő elemek, továbbá (36) miatt[11]

$$g(a_i^k u) = A_i^k g(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots). \tag{39}$$

Legyen $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ tetszőleges racionális törtfüggvény $\mathbf{P}_1$-beli együtthatókkal, $\bar{F}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ „ugyanaz" a racionális törtfüggvény a megfelelő $\mathbf{P}_2$-beli együtthatókkal (azaz F és $\bar{F}$ együtthatói a $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ között fennálló izomorfizmus értelmében mennek át egymásba).

(38) és (39) segítségével bizonyítható, hogy

$$g\big(F(a_1, a_2, \ldots a_n)u\big) = \bar{F}(A_1, A_2, \ldots A_n)g(u), \tag{40}$$

ha F az $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, $\bar{F}$ az $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ helyen értelmezve van (nemkonstans megoldások létezése esetén $F(a_1, a_2, \ldots a_n)$ és $\bar{F}(A_1, A_2, \ldots A_n)$ egyidejűleg vannak értelmezve).

A

$$\varphi\big(F(a_1, a_2, \ldots a_n)\big) = \bar{F}(A_1, A_2, \ldots A_n)$$

leképezésről megmutatható, hogy $\mathbf{P}_1(a_1, a_2, \ldots a_n)$-nek $\mathbf{P}_2(A_1, A_2, \ldots A_n)$-re való izomorf leképezése. φ definíciója miatt $\varphi(a_i) = A_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Q.e.d.

Legyen $\mathbf{B} = \{b_i\}$ $(i \in \Gamma)$ $\mathbf{V}_1$-nek egy $\mathbf{P}_1(a_1, a_2, \ldots a_n)$ feletti bázisa és

$$x = \sum_{i=1}^{t} T_i b_i \qquad \big(T_i \in \mathbf{P}_1(a_1, a_2, \ldots a_n),\ b_i \in \mathbf{B}\big)$$

az $x \in \mathbf{V}_1$ vektor előállítása a bázisvektorok segítségével. A 4. tétel megfelelője a

[11] Vö. (15), (16)!

12. TÉTEL. *Ha megadható a* $\mathbf{P}_1(a_1, a_2, \ldots a_n)$ *és* $\mathbf{P}_2(A_1, A_2, \ldots A_n)$ *bővítési testek között olyan* φ *izomorfizmus, hogy* $\varphi(a_i) = A_i$, $(i = 1, 2, \ldots n)$, *akkor* (36) *általános megoldása*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{t} \varphi(T_i)\,(f(b_i) - f(o)) + f(o),$$

ahol $x = \sum_{i=1}^{t} T_i b_i$, $T_i \in \mathbf{P}_1(a_1, \ldots a_n)$, $b_i \in \mathbf{B}$ *és* $f(o)$, $f(b_i)$ *olyan egyébként tetszőleges* $\mathbf{V}_2$*-beli vektorok, hogy az*

$$f(c) = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) f(o) + C$$

egyenlőség fennáll. Ha ilyen φ *izomorfizmus nem létezik, akkor* (36) *általános megoldása*

$$f(x) = \frac{E}{E - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)} C \quad \text{ha} \quad A + A_2 + \ldots + A_n \neq E,$$

$f(x) =$ tetszőleges konstans vektor, ha $A_1 + \ldots + A_n = E$, $C = O$, *míg az* $E = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, $C \neq O$ *esetben* (36)*-nak egyáltalán nincs megoldása.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}_1(a_1, a_2, \ldots a_n)$ és $\mathbf{P}_2(A_1, A_2, \ldots A_n)$ izomorfak úgy, hogy $\varphi(a_i) = A_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Az izomorfizmus a null- és egységelemeket egymásba viszi át, így

$$\varphi(\mathrm{o}) = \mathrm{O}$$

$$\varphi(e) = E.$$

A művelettartás miatt ebből $\varphi(ke) = kE$ következik, ami azt mutatja, hogy $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ azonos karakterisztikájúak, tehát izomorfak. Ismét a művelettartás miatt

$$\varphi(F(a_1, a_2, \ldots a_n)) = \bar{F}(A_1, A_2, \ldots A_n)$$

ahol F és $\bar{F}$ ugyanazt jelentik mint előbb. (40) ezért a következőképpen írható át[12]

$$g(Su) = \varphi(S)\, g(u),$$

ahol S tetszőleges eleme $\mathbf{P}_1(a_1, a_2, \ldots a_n)$-nek. A továbbiakban a bizonyítás teljesen analóg a 4. tétel bizonyításával.

[12] (40) bizonyításánál csak (36)-ot és $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ izomorfiáját használtuk fel, így ez itt is alkalmazható.

2. 2. Az (1) *egyenlet általánosabb érvényességi halmazon*

Ebben a szakaszban ismét az

$$(1) \qquad f(ax+by+c) = Af(x)+Bf(y)+C \qquad (a\neq 0,\ b\neq 0)$$

egyenletet tekintjük valós $a, b, c, A, B, C, x, y, f(x)$ esetén, azonban az eddigiekkel szemben (1) nem teljesül a sík valamennyi (x, y) pontjára, hanem a síknak csak egy nyílt, összefüggő **D** tartományából való (x, y) párokra. Természetesen ekkor $f(x)$-t sem tudjuk mindenütt meghatározni, hanem csak **D**-nek az x és y tengelyekre való $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ merőleges vetületein és azokon a $z\in\mathbf{D}_z$ helyeken, melyeket a $z=ax+by+c$ függvény **D**-beli (x, y)-okra felvesz.

Hasonló vizsgálatokat eddig csak az

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

Cauchy egyenletnél és az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Jensen egyenletnél végeztek (ld. [1] 49—52. o.), speciális alakú **D** tartományok esetén.

13. Tétel. *A nyílt, összefüggő* $\mathbf{D}=\{(x,y)\}$ *halmazon érvényes* (1) *függvényegyenlet általános,* $\mathbf{D}_x$ *és* $\mathbf{D}_y$*-on folytonos*[13] *megoldása*

$$(41) \qquad f(t)=\begin{cases}\alpha_1 t+\beta_1 & t\in\mathbf{D}_x\\ \alpha_2 t+\beta_2 & t\in\mathbf{D}_y\\ \alpha_1\dfrac{A}{a}(t-c)+A\beta_1+B\beta_2+C & t\in\mathbf{D}_z,\end{cases}$$

ahol $\alpha_1\dfrac{A}{a}=\alpha_2\dfrac{B}{b}$, *ettől eltekintve* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ *tetszőleges konstansok, ha a* $\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y, \mathbf{D}_z$ *halmazoknak nincs közös pontja*[14].

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y, \mathbf{D}_z$ nyílt intervallumok. Mivel **D** nyílt összefüggő halmaz, ez igaz $\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y$-ra. **D** összefüggősége és a $z=ax+by+c$ függvény folytonossága miatt $\mathbf{D}_z$ is össze-

[13] Ebből (1) segítségével következik, hogy $f(t)$ $\mathbf{D}_z$-n is folytonos.

[14] Ha a $\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y, \mathbf{D}_z$ halmazok nem páronként idegenek, akkor az $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ konstansokra még bizonyos feltételek teljesülnek, melyek $f(t)$-nek a $\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y, \mathbf{D}_z$ halmazokon érvényes alakjai összehasonlításával kaphatók meg, figyelembevéve, hogy $\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y, \mathbf{D}_z$ nyílt intervallumok.

függő (tehát intervallum). Legyen $z_0 = ax_0 + by_0 + c \in \mathbf{D}_z$. A $z = ax + by + c$ függvény $a \neq 0$, $b \neq 0$ miatt z_0-nál kisebb és nagyobb értékeket is felvesz az (x_0, y_0) pont tetszőleges környezetében. Így z_0-nak valamely környezete is $\mathbf{D}_z$-hez tartozik, tehát $\mathbf{D}_z$ nyílt.

Legyen $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$ egy $\mathbf{D}$ -ben fekvő[15] téglalap. Integráljuk az (1) egyenletet x szerint egy (x_1, x_2)-ben fekvő $[x_1', x_2']$ zárt intervallumon. $f(t)$ határozatlan integrálját $F(t)$-vel jelölve

$$\frac{1}{a}\big(F(ax_2' + by + c) - F(ax_1' + by + c)\big) = A\big(F(x_2') - F(x_1')\big) + \\ + \big(Bf(y) + C\big)(x_2' - x_1') \tag{42}$$

adódik. Differenciáljuk ezt az azonosságot y szerint[16], úgy

$$\frac{b}{a}\big(f(ax_2' + by + c) - f(ax_1' + by + c)\big) = B(x_2' - x_1')f'(y).$$

Az (1) egyenlet segítségével átalakítva a bal oldalt

$$f'(y) = \frac{b}{a}\frac{f(x_2') - f(x_1')}{x_2' - x_1'} \quad \text{ha} \quad y \in (y_1, y_2).$$

Mivel a jobb oldal y-tól nem függ, következik, hogy $f(y)$ az (y_1, y_2) intervallumban lineáris, azaz $f(t) = \alpha_2 t + \beta_2$, $t \in (y_1, y_2)$-re.

Most megmutatjuk, hogy $f(t) = \alpha_2 t + \beta_2$ az egész $\mathbf{D}_y = (\alpha, \beta)$ intervallumon. Legyen

$$\beta^* = \sup_{y \in (\alpha, \beta)} \{y : f(t) = \alpha_2 t + \beta_2 \; \forall \, t \in (y_1, y)\} \tag{43}$$

akkor $f(t) = \alpha_2 t + \beta_2$ ha $t \in (y_1, \beta^*)$. Ha $\beta^* \in (y_1, \beta)$ volna, akkor létezne két szám x^* és $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $(x^*, \beta^*) \in \mathbf{D}$, sőt $U_\varepsilon(x^*, \beta^*) \overset{\text{def}}{=} \{(x, y): |x - x^*| < \varepsilon, |y - \beta^*| < \varepsilon\} \subset \mathbf{D}$. A fenti gondolatmenetet az $U_\varepsilon(x^*, \beta^*)$ négyzetre alkalmazva kapnánk, hogy $f(t) = \alpha_2' t + \beta_2'$ ha $t \in (\beta^* - \varepsilon, \beta^* + \varepsilon)$. Mivel $(\beta^* - \varepsilon, \beta^* + \varepsilon) \cap (y_1, \beta^*) = (\max\{\beta^* - \varepsilon, y_1\}, \beta^*)$, így $\alpha_2 = \alpha_2'$, $\beta_2 = \beta_2'$ volna, ami azt jelentené, hogy

$$f(t) = \alpha_2 t + \beta_2 \quad \text{ha} \quad t \in (y_1, \beta^* + \varepsilon).$$

Ez azonban (43) miatt lehetetlen, így $\beta^* = \beta$. Ugyanígy lehet bizonyítani, hogy $\alpha^* \overset{\text{def}}{=} \inf\{y : f(t) = \alpha_2 t + \beta_2 \forall t \in (y, \beta)\}$ egyenlő α-val, ezért $f(t) = \alpha_2 t + \beta_2$ ha $t \in (\alpha, \beta) = \mathbf{D}_y$. Az $f(t) = \alpha_1 t + \beta_1$ $t \in \mathbf{D}_x$ képlet helyessége hasonlóan bizonyítható.

[15] Egy ilyen téglalap létezik, mivel $\mathbf{D}$ nyílt.

[16] Feltételeink mellett $F(t)$ differenciálható, így (42) bal oldala, tehát $f(y)$ is differenciálható.

Az (1) egyenletből $x \in \mathbf{D}_x$, $y \in \mathbf{D}_y$-ra

$$f(ax+by+c) = A\alpha_1 x + A\beta_1 + B\alpha_2 y + B\beta_2 + C,$$

vagy

$$z = ax+by+c \in \mathbf{D}_z \quad \left(\text{ill.} \quad x = \frac{z-by-c}{a}, \quad y = \frac{z-ax-c}{b}\right)\text{-vel}$$

$$(44) \qquad f(z) = \alpha_1 \frac{A}{a}(z-c) + \left(B\alpha_2 \frac{b}{a} A\alpha_1\right) y + A\beta_1 + B\beta_2 + C,$$

illetve

$$(45) \qquad f(z) = \alpha_2 \frac{B}{b}(z-c) + \left(A\alpha_1 - \frac{a}{b} B\alpha_2\right) x + A\beta_1 + B\beta_2 + C.$$

Mivel (44), (45) baloldalai csak z-től függenek

$$B\alpha_2 - \frac{b}{a} A\alpha_1 = A\alpha_1 - \frac{a}{b} B\alpha_2 = \mathrm{O},$$

amiből

$$\alpha_1 \frac{A}{a} = \alpha_2 \frac{B}{b}$$

és

$$f(t) = \alpha_1 \frac{A}{a}(t-c) + A\beta_1 + B\beta_2 + C \qquad (t \in \mathbf{D}_z)$$

következik[17]. Ezzel a 13. tétel bizonyítása teljes.

2. 3. *Az* $f(x+\varepsilon(x, y)y) = f(x)+f(y)$ *egyenlet*

A címben szereplő (3) függvényegyenlet alkalmazása miatt érdekes. $\varepsilon(x, y)$ olyan ismeretlen kétváltozós függvényt jelöl, melynek négyzete azonosan egy. $x = y = 0$ helyettesítéssel kapjuk (3)-ból, hogy $f(0) = 0$. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{A}_1 = \{x: \varepsilon(x, x) = 1\}, \qquad \mathbf{B}_1 = \{x: \varepsilon(x, -x) = 1\},$$

$$(46) \qquad \mathbf{A}_{-1} = \{x: \varepsilon(x, x) = -1\}, \qquad \mathbf{B}_{-1} = \{x: \varepsilon(x, -x) = -1\},$$

$$\mathbf{A} = \{x: f(x) \neq 0\}, \qquad \mathbf{B} = \{x: f(x) = 0\}.$$

[17] Egyúttal azt is látjuk, hogy $\alpha_1 \frac{A}{a} = \alpha_2 \frac{B}{b}$ miatt a (44) és (45) képletek egybeesnek.

Érvényesek az

(47) $$\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_{-1} = \mathbf{O} \qquad \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_{-1} = \mathbf{O} \qquad \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{O}$$
$$\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_{-1} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_{-1} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{I}$$

relációk, ahol $\mathbf{I}$ az egész x tengelyt jelenti.

$x = y = t$-vel (3)-ból

(48a) $$2f(t) = f(2t) \quad \text{ha} \quad t \in \mathbf{A}_1,$$

(48b) $$2f(t) = f(0) = 0 \quad \text{ha} \quad t \in \mathbf{A}_{-1},$$

míg az $x = -y = t$ helyettesítéssel

(49a) $$f(t) + f(-t) = f(0) = 0 \quad \text{ha} \quad t \in \mathbf{B}_1,$$

(49b) $$f(t) + f(-t) = f(2t) \quad \text{ha} \quad t \in \mathbf{B}_{-1}$$

adódik.

LEMMA. *Ha* $t \in \mathbf{A}$, *úgy* $n = 0, 1, 2$*-re érvényes az*

(50) $$f(nt) = nf(t)$$

egyenlőség.

A *bizonyítás* teljes indukcióval történik. $n = 0, 1$-re (50) helyes. Feltéve, hogy állításunk $n-1$ és n-re érvényes kapjuk, hogy

$$(n+1)f(t) = nf(t) + f(t) = f(nt) + f(t) = f\big(nt + \varepsilon(nt, t)t\big).$$

Ha $\varepsilon(nt, t) = -1$ volna, úgy

$$(n+1)f(t) = f\big((n-1)t\big) = (n-1)f(t),$$

azaz $f(t) = 0$ volna, ami lehetetlen $t \in \mathbf{A}$ miatt. Ezért $\varepsilon(nt, t) = 1$, és

$$(n+1)f(t) = f\big((n+1)t\big). \qquad \text{Q.e.d.}$$

14. TÉTEL. *Ha* $f(t)$ *a* (3) *egyenlet megoldása, úgy minden egész* n*-re*

(51) $$f(nt) = nf(t) \quad \text{ha} \quad t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1,$$

(52) $$f(nt) = |n| f(t) \quad \text{ha} \quad t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1}.$$

Bizonyítás. Nemnegatív egész n-ekre tételünk a lemma következménye. Legyen $t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1$ és vizsgáljuk meg, hogy $-t$ az $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1}$, $\mathbf{B}$ halmazok melyikébe esik[18].

[18] Az $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1}$, $\mathbf{B}$ halmazok páronként idegenek és egyesítésük

$$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1}) \cup \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cap (\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_{-1})) \cup \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{I}) \cup \mathbf{B} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{I}$$

így $-t$ e halmazok valamelyikében fekszik.

$-t$ nem lehet $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1}$-ben, mert akkor (49b), (50) szerint

$$f(-t)+f(t)=f(2(-t))=2f(-t),$$

azaz

$$-f(-t)=f(t).$$

(49a) szerint azonban $f(t)+f(-t)=0$, amiből $f(t)=0$ következik, ellentétben $t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1 \subset \mathbf{A}$-val.

$-t$ nem lehet $\mathbf{B}$-ben, mert akkor ismét (49a) segítségével $f(t) = -f(-t) = 0$, ami lehetetlen. Marad tehát az egyetlen lehetőség: $-t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1$. Negatív egész n-ekre (50), (49a) szerint

$$f(nt) = f((-n)(-t)) = (-n)f(-t) = (-n)(-f(t)) = nf(t)$$

amivel (51) bizonyított.

Legyen most $t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1}$. $-t$ nem lehet $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1$-ben (mert akkor $-(-t) = t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1$ volna) és $\mathbf{B}$-ben sem (mert akkor (49b)-ből (50) felhasználásával $f(t)+f(-t) = f(2t) = 2f(t)$, azaz $f(t) = f(-t) = 0$ volna, ami $t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1} \subset \mathbf{A}$ miatt lehetetlen), így $-t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1}$. Negatív egész n-ekre tehát (50), (49b) segítségével

$$f(nt) = f((-n)(-t)) = (-n)f(-t) = (-n)f(t) = |n|f(t)$$

ami éppen (52).

Következmény. Ha $t \in \mathbf{B}$, úgy $f\left(\frac{t}{n}\right)=0$ $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$-re. $\frac{t}{n}$ ugyanis (51), (52) miatt nem lehet $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1$ ill. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1}$-ben, így $\frac{t}{n} \in \mathbf{B}$.

15. TÉTEL. *A* (3) *függvényegyenlet általános folytonos és egyetlen zérushellyel rendelkező megoldása*

(53) $$f(x)=cx$$

és

(54) $$f(x)=c|x|.$$

Bizonyítás. Esetünkben $\mathbf{B}=\{0\}$. Az előző tétel segítségével megmutatjuk, hogy

(55) $$f\left(\frac{m}{n}t\right) = \frac{m}{n}f(t) \quad \text{ha} \quad t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1,$$

és

(56) $$f\left(\frac{m}{n}t\right) = \left|\frac{m}{n}\right| f(t) \quad \text{ha} \quad t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1},$$

tetszőleges $m, n \neq 0$ egészekre. Legyen pl. $t \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1$, akkor $\frac{t}{n}$ vagy $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1$-ben vagy $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1}$-ben van. Ha $\frac{t}{n} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1}$ volna, úgy (52) miatt

$$f(t) = f\left(n \frac{t}{n}\right) = |n| f\left(\frac{t}{n}\right),$$

azaz

$$f\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{1}{|n|} f(t). \tag{57}$$

(51), (52), (57) segítségével ez esetben

$$-f(t) = f(-t) = f\left(-n \frac{t}{n}\right) = |-n| f\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{|-n|}{|n|} f(t) = f(t),$$

amiből $f(t) = 0$ következne. Ez azonban lehetetlen, így t-vel együtt $\frac{t}{n}$ is $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1$-ben van. (51)-et alkalmazva

$$mf(t) = f(mt) = f\left(nm \frac{t}{n}\right) = nmf\left(\frac{t}{n}\right) = nf\left(\frac{m}{n} t\right)$$

vagy

$$f\left(\frac{m}{n} t\right) = \frac{m}{n} f(t),$$

így (55) bizonyított. (56) bizonyítása hasonló. Aszerint, hogy 1 az $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1$ vagy $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_{-1}$-ben van kapjuk (55), (56)-ból, hogy

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1),$$

illetve

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \left|\frac{m}{n}\right| f(1).$$

Innen $f(1) = c$-vel $f(x)$ folytonossága miatt (53) illetve (54) következik.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy az (53) és (54) függvények (alkalmas $\varepsilon(x, y)$-nal) valóban kielégítik a (3) függvényegyenletet.

16. Tétel. *Ha a* (3) *függvényegyenlet megoldása p szerint periodikus függvény, akkor* $f(rp) = 0$, *tetszőleges* $r = \frac{m}{n} (n > 0)$ *racionális szám esetén.*

Bizonyítás. Ha $f(rp) \neq 0$ akkor $rp \in \mathbf{A}$, így a periodicitás és (50) miatt

$$f(rp) = f\left(\frac{m}{n}p + n\frac{m}{n}p\right) = f\left((n+1)\frac{m}{n}p\right) = (n+1)f\left(\frac{m}{n}p\right) =$$
$$= (n+1)f(rp)$$

ahonnan ismét $f(rp) = 0$. Q.e.d.

A 16. tétel segítségével azonnal kapjuk, hogy (3) általános folytonos periodikus megoldása $f(t) \equiv 0$.

Alább arra szeretnénk példát mutatni, hogy (3)-nak létezik nemkonstans 2π szerint periodikus megoldása. Legyen $c(x)$ a

$$c(x+y) = c(x) + c(y)$$

egyenletnek egy 2π szerint periodikus nemkonstans megoldása[19]. Könnyű belátni, hogy az[20]

$$(58) \qquad \begin{cases} f(x) = |c(x)| \\ \varepsilon(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \operatorname{sg} c(x) = \operatorname{sg} c(y) \\ -1 & \text{ha} \quad \operatorname{sg} c(x) \neq \operatorname{sg} c(y) \end{cases} \end{cases}$$

függvények kielégítik (3)-at. Megjegyezzük még, hogy itt $f(x)$ páros, továbbá $\varepsilon(x, y)$ mindkét változójában 2π szerint periodikus és páratlan (kivéve azokat a pontokat[21], ahol a páratlanságot a periodicitás kizárja).

2. 4. A biszimmetria és az asszociativitás kapcsolatáról

Az

$$(59) \qquad f(ax+by+c) = F[f(x), f(y)] = f(x) \circ f(y)$$

függvényegyenletből (ld. [1], 68—72. o.) következik, hogy

$$F\{F[f(x), f(y)], F[f(u), f(v)]\} = f[a(ax+by+c)+b(au+bv+c)+c] =$$
$$= f[a(ax+bu+c)+b(ay+bv+c)+c] = F\{F[f(x), f(u)], F[f(y), f(v)]\},$$

azaz az $x \circ y$ művelet biszimmetrikus[22] az $\mathbf{M} = \{f(x)\}$ halmazon.

[19] Ilyen $c(x)$ függvény létezik.

[20] E dolgozatban a $\operatorname{sg} x$ függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$\operatorname{sg} x = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \geqq 0 \\ -1 & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$

[21] Az $x = n_1\pi$, $y = n_2\pi$ pontokban $\varepsilon(x, y)$ páratlansága és 2π szerinti periodicitása összeegyeztethetetlen.

[22] Az M halmazon értelmezett $x \circ y$ műveletet biszimmetrikusnak nevezzük, ha $(x \circ y) \circ (u \circ v) = (x \circ u) \circ (y \circ v)$ minden $x, y, u, v, \in M$-re.

Helyettesítsünk (59)-ben $x=\alpha$, $y=v$; $x=u$, $y=\beta$-t és tegyük fel, hogy a kapott egyenletek

$$f(a\alpha+bv+c)=f(\alpha)\circ f(v)$$

$$f(au+b\beta+c)=f(u)\circ f(\beta)$$

egyértelműen megoldhatók $f(v)$ ill. $f(u)$-ra. Jelöljük a megoldásokat

$$f(v)=f(\alpha)^{-1}\circ f(a\alpha+bv+c)$$

$$f(u)=f(au+b\beta+c)\circ f(\beta)^{-1}$$

-gyel. (59) miatt

(60) $$f(au+bv+c)=[f(au+b\beta+c)\circ f(\beta)^{-1}]\circ[f(\alpha)^{-1}\circ f(a\alpha+bv+c)],$$

azaz $au+b\beta+c=x$, $a\alpha+bv+c=y$, $a\alpha+b\beta+c=d$, $f(\beta)=q$, $f(\alpha)=p$, $x\triangle y=(x\circ q^{-1})\circ(p^{-1}\circ y)$-nal

$$f(x+y-d)=f(x)\triangle f(y)$$

érvényes. Ebből adódik, hogy

$$[f(x)\triangle f(y)]\triangle f(z)=f[(x+y-d)+z-d]=$$

$$=f[x+(y+z-d)-d]=f(x)\triangle[f(y)\triangle f(z)],$$

$$f(x)\triangle f(y)=f(x+y-d)=f(y+x-d)=f(y)\triangle f(x),$$

továbbá

$$f(x)\triangle f(d)=f(x),\quad f(d)\triangle f(y)=f(y),$$

azaz **M** egységelemes kommutatív félcsoport az $x\triangle y$ műveletre nézve.

Alább megmutatjuk, hogy a biszimmetria és az asszociativitás közötti összefüggés általában is érvényes. A következőkben a kvázicsoportok elméletében elterjedt elnevezéseket használjuk.[23]

A **H** nem-üres halmazt *grupoidnak* nevezzük, ha értelmezve van rajta egy (binér) művelet. Ha a **H**-n értelmezett művelet jele „$\cdot$", akkor a **H** grupoidot $(\mathbf{H},\cdot)$-tal jelöljük.

A $(\mathbf{H},\cdot)$ grupoid *egységelemes*, ha létezik olyan $e\in(\mathbf{H},\cdot)$, hogy bármely $h\in(\mathbf{H},\cdot)$-ra $e\cdot h=h\cdot e=h$.

A $(\mathbf{H},\cdot)$ grupoidot *biszimmetrikusnak* nevezzük, ha a „$\cdot$" művelet biszimmetrikus.

Az $a\in(\mathbf{H},\cdot)$ elemet *bal-* ill. *jobbregulárisnak* nevezzük, ha az

$$a\cdot x=y$$

illetve

$$x\cdot a=y$$

[23] Erre nézve ld. [4], [9].

egyenlet tetszőleges $y \in \mathbf{H}$ esetén egyértelműen megoldható x-re[24]. Ha egy elem egyidejűleg bal- és jobbreguláris, akkor *regulárisnak* nevezzük.

Legyen $(\mathbf{H}, \cdot)$ és $(\mathbf{H}, \circ)$ ugyanazon a $\mathbf{H}$ halmazon értelmezett két grupoid. Azt mondjuk, hogy $(\mathbf{H}, \circ)$ $(\mathbf{H}, \cdot)$-nak *főizotópja*, ha létezik $\mathbf{H}$-nak két olyan π, ϱ permutációja, hogy minden $x, y \in \mathbf{H}$-ra

$$x\pi \circ y\varrho = x \cdot y.$$

Ha $p, q \in (\mathbf{H}, \cdot)$ bal- ill. jobbreguláris elemek, akkor az

$$(x \cdot q) \circ (p \cdot y) = x \cdot y$$

által definiált $(\mathbf{H}, \circ)$ grupoid $(\mathbf{H}, \cdot)$-nak *egységelemes főizotópja*, ugyanis

$$(x \cdot q) \circ (p \cdot q) = x \cdot q$$

$$(p \cdot q) \circ (p \cdot y) = p \cdot y$$

miatt $p \cdot q \in (\mathbf{H}, \circ)$ egységelem $(\mathbf{H}, \circ)$-ben.

17. TÉTEL. *Ha a $(\mathbf{H}, \cdot)$ biszimmetrikus grupoidban p bal-, q jobbreguláris, r reguláris elem, továbbá a $q = r \cdot q_2$ (vagy $p = p_1 \cdot r$) által definiált q_2 (vagy p_1) elem jobbreguláris (balreguláris), akkor $(\mathbf{H}, \cdot)$-nak az*

$$(x \cdot q) \circ (p \cdot y) = x \cdot y \tag{61}$$

által definiált $(\mathbf{H}, \circ)$ főizotópja egységelemes Abel félcsoport.

Bizonyítás. p_1-et a $p = p_1 \cdot r$ egyenlettel definiáljuk. A „$\cdot$" művelet biszimmetriája miatt[25]

$$xy \cdot uv = xu \cdot yv$$

illetve

$$(xq \circ py)q \circ p(uq \circ pv) = (xq \circ pu)q \circ p(yq \circ pv). \tag{62}$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$(xq \circ py)q = xy \cdot q = xy \cdot rq_2 = xr \cdot yq_2 = (xr \cdot q) \circ (p \cdot yq_2),$$

$$p(uq \circ pv) = p \cdot uv = p_1 r \cdot uv = p_1 u \cdot rv = (p_1 u \cdot q) \circ (p \cdot rv).$$

(62) jobboldalát is hasonlóan átalakítva kapjuk, hogy

$$[(xr \cdot q) \circ (p \cdot yq_2)] \circ [(p_1 u \cdot q) \circ (p \cdot rv)] =$$

$$= [(xr \cdot q) \circ (p \cdot uq_2)] \circ [(p_1 y \cdot q) \circ (p \cdot rv)].$$

[24] Ez pontosan azt jelenti, hogy az a-val való balról (ill. jobbról) szorzás $\mathbf{H}$-nak egy permutációja.

[25] A „$\cdot$" ki nem írása zárójelet pótol. Így pl. $xy \cdot uv = (x \cdot y) \cdot (u \cdot v)$.

Mivel

$$p \cdot xq_2 = p_1 r \cdot xq_2 = p_1 x \cdot rq_2 = p_1 x \cdot q,$$

így az előző egyenlet $X = xr \cdot q$, $Y = p \cdot yq_2 = p_1 y \cdot q$, $U = p_1 u \cdot q = p \cdot uq_2$, $V = p \cdot rv$-vel az

$$(X \circ Y) \circ (U \circ V) = (X \circ U) \circ (Y \circ V)$$

-be megy át, vagyis „$\circ$" is biszimmetrikus. Feltételeink mellett X, Y, U, V minden **H**-beli értéket felvesznek, ha x, y, u, v végigfutnak **H** elemein. Láttuk, hogy $e = pq$ egységelem $(\mathbf{H}, \circ)$-ben.

$U = e$-vel a „$\circ$" művelet biszimmetriája miatt az

$$(X \circ Y) \circ V = X \circ (Y \circ V)$$

asszociativitást, míg $X = V = e$-vel az

$$Y \circ U = U \circ Y$$

kommutativitást kapjuk, így $(\mathbf{H}, \circ)$ valóban Abel félcsoport.

3. §. Alkalmazások az „arkuszkoszinusz-egyenletre"

Az $\arccos x$ függvény

$$g(x) + g(y) = g\left(xy - \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\right) \qquad (x, y \in [-1, 1]) \tag{4}$$

függvényegyenlete az elliptikus geometria távolságképletének megalapozásánál játszik szerepet (ld. [1] 76—80. o.). A (4) egyenletre vonatkozó eddigi vizsgálatok (pl. J. Aczél—O. Varga [3], M. Ghermanescu [6]) azonban figyelmen kívül hagyták azt, hogy az

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\right)$$

azonosságban az $\arccos x$ függvény és a négyzetgyök is többértékű. S. Gołąbnak az az észrevétele, hogy az egész

$$\mathbf{Q}: \begin{cases} -1 \leqq x \leqq 1 \\ -1 \leqq y \leqq 1 \end{cases}$$

négyzeten érvényes (4) egyenlet egyetlen (egyértékű) megoldása $g(x) \equiv 0$, vezetett a (4) egyenlet alaposabb vizsgálatához. **Q**-nak egy nyílt összefüggő **U** részhalmazán érvényes (4) egyenletet S. Gołąb oldotta meg $g(x)$ differenciálhatósága mellett.

3. 1.-ben S. Gołąb eredményét $g(x)$ folytonossága mellett kapjuk meg.

Ha (4)-ben a négyzetgyök többértékűségét megengedjük, úgy a

$$g(x)+g(y) = g\left(xy-\mu(x,y)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \tag{63}$$

egyenlethez jutunk, ahol $\mu(x,y)^2 \equiv 1$. A (63) egyenletről szerző bebizonyította, hogy általános folytonos megoldása $g(x) \equiv 0$, továbbá, hogy (63) tetszőleges megoldása a $\cos \frac{2l}{2^n+1}\pi$ és $\cos \frac{2k}{2^m-1}\pi$ helyeken a nulla értéket veszi fel. Egy további dolgozatban S. Gołąb megmutatta,* hogy (63) minden megoldása páros függvény, mely a $T_n(x) = T_m(x)$ ($T_n(x)$ az elsőfajú n-edfokú Csebisev-féle polinomot jelöli, $m \neq n$) egyenletek gyökein zérus értéket vesz fel. Mindeddig eldöntetlen volt az, hogy a (63) egyenletnek van-e triviálistól különböző megoldása.

3. 2.-ben az eddigi eredményeken túlmenően bebizonyítjuk azt, hogy (63) megoldása olyan páros függvény, melyre $g(\cos 2\pi r) = 0$ (r racionális), továbbá példát adunk nemtriviális megoldás létezésére.

Megjegyezzük még azt, hogy a többértékű függvényekre vonatkozó (4) egyenlettel H. Kiesewetter [10] foglalkozott.

3.1. A lokális megoldások

18. TÉTEL. *A* **Q***-nak egy nyílt összefüggő* **U** *részhalmazán érvényes* (4) *függvényegyenlet általános,* **U***-nak az* x *és* y *tengelyekre való* $\mathbf{U}_x$, $\mathbf{U}_y$ *merőleges vetületein folytonos megoldása*

$$g(t) = \begin{cases} \alpha_1 \operatorname{Arc}\cos t + \beta_1 & t \in \mathbf{U}_x \\ \alpha_1 \operatorname{Arc}\cos t + \beta_2 & t \in \mathbf{U}_y \\ \alpha_1 \operatorname{Arc}\cos t + \beta_1 + \beta_2 & t \in \mathbf{U}_F \end{cases} \tag{64}$$

ha minden $(x,y) \in \cup$*-ra* $x+y>0$,

$$g(t) = \begin{cases} \gamma_1 \operatorname{Arc}\cos t + \delta_1 & t \in \mathbf{U}_x \\ \gamma_1 \operatorname{Arc}\cos t + \delta_2 & t \in \mathbf{U}_y \\ \gamma_1(2\pi - \operatorname{Arc}\cos t) + \delta_1 + \delta_2 & t \in \mathbf{U}_F \end{cases} \tag{65}$$

ha minden $(x,y) \in \cup$*-ra* $x+y<0$,

$$g(t) = \begin{cases} \vartheta_1 & t \in \mathbf{U}_x \\ \vartheta_2 & t \in \mathbf{U}_y \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 & t \in \mathbf{U}_F \end{cases} \tag{66}$$

* S. Gołąb e dolgozatait külön nem publikálta, hanem szerzővel közös dolgozatot írt, mely Über die Funktionalgleichung der Funktion Arccosinus I., II. címmel jelent meg (Publ. Math. Derecen 12 (1965), 159-165, ill. 13 (1966).)

ha létezik egy $(x_0, y_0) \in \mathbf{U}$ *úgy, hogy* $x_0 + y_0 = 0$. $\mathbf{U}_F$ *az* $F(x, y) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ *függvény értékkészlete* **U**-*n*, Arc cos x *az* arc cos x *függvény főértéke. Az* $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \delta_1, \delta_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ *konstansok tetszőlegesek, ha* $\mathbf{U}_x, \mathbf{U}_y, \mathbf{U}_F$ *páronként idegenek, egyébként e konstansok között az alábbi összefüggések érvényesek:*

(67)

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta_2, \ \delta_1 = \delta_2, \ \vartheta_1 = \vartheta_2 \text{ ha } \mathbf{U}_x \cap \mathbf{U}_y \neq \mathbf{O}, \ \mathbf{U}_x \cap \mathbf{U}_F = \mathbf{U}_y \cap \mathbf{U}_F = \mathbf{O}, \\ \beta_2 = 0, \ \gamma_1 = \delta_2 = 0, \ \vartheta_2 = 0 \text{ ha } \mathbf{U}_x \cap \mathbf{U}_F \neq \mathbf{O}, \ \mathbf{U}_x \cap \mathbf{U}_y = \mathbf{U}_y \cap \mathbf{U}_F = \mathbf{O}, \\ \beta_1 = 0, \ \gamma_1 = \delta_1 = 0, \ \vartheta_1 = 0 \text{ ha } \mathbf{U}_y \cap \mathbf{U}_F \neq \mathbf{O}, \ \mathbf{U}_y \cap \mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x \cap \mathbf{U}_F = \mathbf{O}, \\ \beta_1 = \beta_2 = 0, \ \gamma_1 = \delta_1 = \delta_2 = 0, \ \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0 \text{ ha } \mathbf{U}_x \cap \mathbf{U}_y \neq \mathbf{O} \text{ és } \mathbf{U}_x \cap \mathbf{U}_F \neq \mathbf{O} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{vagy } \mathbf{U}_y \cap \mathbf{U}_F \neq \mathbf{O}. \end{cases}$$

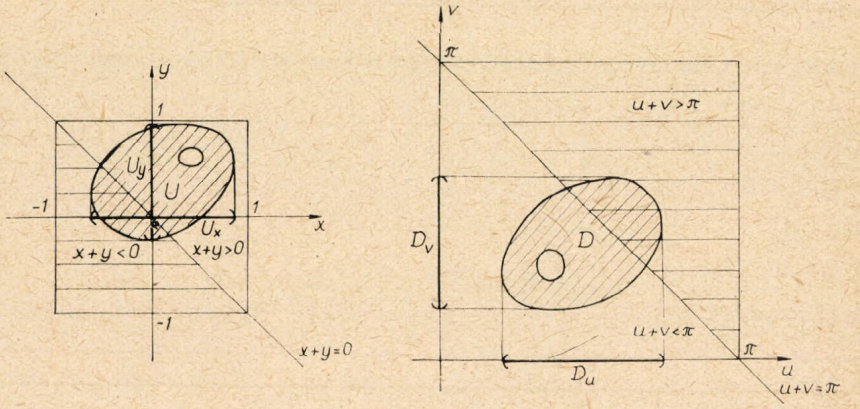
Bizonyítás. Az

(68)
$$x = \cos u \qquad 0 \leqq u \leqq \pi$$
$$y = \cos v \qquad 0 \leqq v \leqq \pi$$

transzformáció az $\mathbf{U} \subset \mathbf{Q}$ tartományt illetve az $\mathbf{U}_x$, $\mathbf{U}_y$ nyílt intervallumokat[26] kölcsönösen egyértelműen képezi le a

$$\mathbf{Q}^* : \begin{cases} 0 \leqq u \leqq \pi \\ 0 \leqq v \leqq \pi \end{cases}$$

négyzet egy nyílt összefüggő **D** résztartományára ill. **D**-nek az u, v tengelyekre való merőleges $\mathbf{D}_u$, $\mathbf{D}_v$ vetületeire.



1. ábra

[26] Mivel **U** nyílt összefüggő tartomány, $\mathbf{U}_x$, $\mathbf{U}_y$ nyílt intervallumok.

A (4) egyenlet (68) által

$$g(\cos u)+g(\cos v)\,g\left(\cos u\cos v-\sqrt{1-\cos^2 u}\,\sqrt{1-\cos^2 v}\right)$$

-be megy át. Mivel $\mathbf{Q}^*$-on

$$\sqrt{1-\cos^2 u}=\sqrt{\sin^2 u}=|\sin u|=\sin u$$

$$\sqrt{1-\cos^2 v}=\sqrt{\sin^2 v}=|\sin v|=\sin v$$

érvényes, kapjuk, hogy

$$g(\cos u)+g(\cos v)=g[\cos(u+v)]. \tag{69}$$

$[0, \pi]$-beli t értékekre legyen $f(t)\overset{\text{def}}{=}g(\cos t)$. Ha $u+v\in[0, \pi]$ akkor (69)-ből

$$f(u)+f(v)=f(u+v), \tag{70}$$

míg az $u+v\in[\pi, 2\pi]$ esetben

$$f(u)+f(v)=g[\cos(u+v)]=g\{\cos[2\pi-(u+v)]\}=f[2\pi-(u+v)] \tag{71}$$

következik.

(70) és (71) egységesen a következőképpen írhatók:

$$f(u)+f(v)=f[G(u, v)], \tag{72}$$

ahol

$$G(u, v)=\pi-|\pi-(u+v)|.$$

Jelölje $\mathbf{D}_G$ a $G(u, v)$ függvény értékkészletét $\mathbf{D}$-n. Mivel $\mathbf{D}$ összefüggő és $G(u,v)$ folytonos, $\mathbf{D}_G$ egy intervallum. $F(x, y)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=$ $=\cos G(u, v)$, $G(u, v)\in(0, \pi]$ miatt az $\mathbf{U}_F$ és $\mathbf{D}_G$ közötti kölcsönösen egyértelmű leképezést is a cos $G\in(0, \pi]$ függvény létesíti.

I. Ha minden $(x, y)\in\mathbf{U}$-ra $x+y>0$, *akkor* (68) miatt a $\mathbf{D}$-beli (u, v) párokra $u+v<\pi$, és így

$$f(u)+f(v)=f(u+v)$$

érvényes. Feltételeink mellett $f(u)$ folytonos $\mathbf{D}_u$, $\mathbf{D}_v$-n, így a 13. tétel szerint

$$f(t)=\begin{cases}\alpha_1 t+\beta_1 & t\in\mathbf{D}_u\\ \alpha_1 t+\beta_2 & t\in\mathbf{D}_v\\ \alpha_1 t+\beta_1+\beta_2 & t\in\mathbf{D}_G\end{cases}$$

ami (64)-gyel ekvivalens.

II. Ha az összes $(x, y) \in \mathbf{U}$ *párokra* $x+y<0$, *akkor* $(u, v) \in \mathbf{D}$-re (68) miatt $u+v>\pi$, és így

$$f(u)+f(v)=f[2\pi-(u+v)],$$

ahonnan ismét a 13. tételt alkalmazva kapjuk (65)-öt.

III. Ha $(x_0, y_0) \in \mathbf{U}$-*ra* $x_0+y_0=0$, akkor a megfelelő $(u_0, v_0) \in \mathbf{D}$ pontra $u_0+v_0=\pi$ teljesül. Legyen

$$\mathbf{D}_1 = \{(u, v): (u, v) \in \mathbf{D},\ u+v<\pi\},$$

$$\mathbf{D}_2 = \{(u, v): (u, v) \in \mathbf{D},\ u+v>\pi\},$$

$$\mathbf{D}_{12} = \{(u, v): (u, v) \in \mathbf{D},\ u+v=\pi\},$$

ezáltal $\mathbf{D}=\mathbf{D}_1 \cup \mathbf{D}_2 \cup \mathbf{D}_{12}$ és $\mathbf{D}_1$-en (70), $\mathbf{D}_2$-n (71) érvényes. A 13. tétel alapján

(73)

$$f(t)=\begin{cases}\eta_1 t+\vartheta_1 & t \in \mathbf{D}_{1u} \\ \eta_1 t+\vartheta_2 & t \in \mathbf{D}_{1v}, \\ \eta_1 t+\vartheta_1+\vartheta_2 & t \in \mathbf{D}_{1G}\end{cases} \qquad f(t)=\begin{cases}\varkappa_1 t+\lambda_1 & t \in \mathbf{D}_{2u} \\ \varkappa_1 t+\lambda_2 & t \in \mathbf{D}_{2v}, \\ \varkappa_1(2\pi-t)+\lambda_1+\lambda_2 & t \in \mathbf{D}_{2G}\end{cases}$$

ahol $\mathbf{D}_{iu}, \mathbf{D}_{iv}, \mathbf{D}_{iG}$ $(i=1, 2)$ a $\mathbf{D}_i$ tartományoknak az u, v tengelyekre való merőleges vetületei, illetve a $G(u, v)$ függvény értékkészlete $\mathbf{D}_i$-n. Mivel $\mathbf{D}$ nyílt, a $P_0(u_0, v_0)$ ponttal együtt P_0-nak valamely δ sugarú környezete is $\mathbf{D}$-ben fekszik. Megmutatható, hogy ekkor

$$\mathbf{D}_{1u} \cap \mathbf{D}_{2u} \supset \left(u_0-\frac{\delta}{2},\ u_0+\frac{\delta}{2}\right),$$

$$\mathbf{D}_{1v} \cap \mathbf{D}_{2v} \supset \left(v_0-\frac{\delta}{2},\ v_0+\frac{\delta}{2}\right),$$

$$\mathbf{D}_{1G} \cap \mathbf{D}_{2G} \supset (\pi-\delta, \pi),$$

így (73)-ból

$$\eta_1 t+\vartheta_1=\varkappa_1 t+\lambda_1$$

$$\eta_1 t+\vartheta_2=\varkappa_1 t+\lambda_2$$

$$\eta_1 t+\vartheta_1+\vartheta_2=\varkappa_1(2\pi-t)+\lambda_1+\lambda_2$$

következik. Ez csak úgy lehetséges, ha

$$\varkappa_1=\eta_1,\ \lambda_1=\vartheta_1,\ \lambda_2=\vartheta_2,\ \eta_1=0,$$

ezért (73) a következő alakba írható

$$f(t)=\begin{cases}\vartheta_1 & t\in(\mathbf{D}_{1u}\cup\mathbf{D}_{2u})\\ \vartheta_2 & t\in(\mathbf{D}_{1v}\cup\mathbf{D}_{2v})\\ \vartheta_1+\vartheta_2 & t\in(\mathbf{D}_{1G}\cup\mathbf{D}_{2G}).\end{cases}$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\mathbf{D}_u=\mathbf{D}_{1u}\cup\mathbf{D}_{2u}$$

$$\mathbf{D}_v=\mathbf{D}_{1v}\cup\mathbf{D}_{2v}$$

$$\mathbf{D}_G=\mathbf{D}_{1G}\cup\mathbf{D}_{2G}\cup\{\pi\}$$

és hogy $f(t)$ (a π pontban) folytonos, akkor

$$f(t)=\begin{cases}\vartheta_1 & t\in\mathbf{D}_u\\ \vartheta_2 & t\in\mathbf{D}_v\\ \vartheta_1+\vartheta_2 & t\in\mathbf{D}_G,\end{cases}$$

ami éppen (66) teljesülését jelenti.

A (67) feltételek a megoldások $\mathbf{U}_x$, $\mathbf{U}_y$, $\mathbf{U}_F$ halmazokon érvényes alakjainak összehasonlításával kaphatók meg figyelembevéve, hogy $\mathbf{U}_x$, $\mathbf{U}_y$ nyílt intervallumok, $\mathbf{U}_F$ pedig az I—II esetben nyílt, a III esetben balról nyílt, jobbról zárt intervallum.

3.2. Az alternatív egyenlet

19. TÉTEL. *Ha a $g(x)$ függvény a* (63) *egyenlet megoldása, akkor az*

$$f(u)=g(\cos u) \tag{74}$$

$$\varepsilon(u,v)=\operatorname{sg}(\sin u)\cdot\operatorname{sg}(\sin v)\,\mu(\cos u,\cos v) \tag{75}$$

függvények kielégítik a

$$f(u)+f(v)=f\big(u+\varepsilon(u,v)v\big)\qquad\big(\varepsilon(u,v)\equiv 1\big) \tag{3}$$

függvényegyenletet.

Bizonyítás. (63)-ból $x=\cos u$, $y=\cos v$-vel

$$\begin{aligned}&g(\cos u)+g(\cos v)=\\ &=g\big(\cos u\cos v-\mu(\cos u)\cos v\big)\sqrt{1-\cos^2 u}\,\sqrt{1-\cos^2 v}\end{aligned} \tag{76}$$

adódik. Mivel

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u| = \operatorname{sg}(\sin u)\cdot \sin u$$

$$\sqrt{1-\cos^2 v} = |\sin v| = \operatorname{sg}(\sin v)\cdot \sin v,$$

(76)-ból $f(t)=g(\cos t)$-re a

$$g(\cos u)+g(\cos v) = g\big(\cos u\cos v-\varepsilon(u,v)\sin u\sin v\big) =$$
$$= g\big[\cos\big(u+\varepsilon(u,v)v\big)\big]$$

egyenletet kapjuk, ami éppen állításunk.

Következmények. 1. A (63) egyenlet bármely megoldására nézve $g(\cos 2\pi r)=0$, ugyanis az $f(u)=g(\cos u)$ függvény 2π szerint periodikus, így a 16. tétel szerint $f(2\pi r)=0$.

2. A (63) egyenlet $g(x)$ megoldásai páros függvények, mert

$$g(\cos u) = g(\cos\pi)+g(\cos u) = f(\pi)+f(u) = f\big(\pi+\varepsilon(\pi,u)u\big) =$$

$$= g\big[\cos\big(\pi+\varepsilon(\pi,u)u\big)\big] = \begin{cases} g\big(\cos(\pi+u)\big) \\ g\big(\cos(\pi-u)\big) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g(-\cos u) & \text{ha} \quad \varepsilon(\pi,u)=1 \\ g(-\cos u) & \text{ha} \quad \varepsilon(\pi,u)=-1, \end{cases}$$

így $\cos u=x$-szel mindkét esetben

$$g(x)=g(-x).$$

A (74) és (75) képletekből látható, hogy $f(u)$ 2π szerint periodikus páros, $\varepsilon(u,v)$ mindkét változójában (2π szerint) periodikus és páratlan (kivéve az $u=n_1\pi$, $v=n_2\pi$ $n_1, n_2 = \pm 1, \pm 2, \ldots$ pontokat, ahol a periodicitás a páratlanságot kizárja) függvények. Nevezzük a fenti tulajdonságú függvénypárt „megfelelő" függvényeknek.

20. Tétel. *Ha az* $f(u)$, $\varepsilon(u,v)$ $(\varepsilon(u,v)^2\equiv 1)$ *„megfelelő" függvények az*

(3) $$f(u)+f(v)=f\big(u+\varepsilon(u,v)v\big)$$

egyenletet kielégítik, akkor a

(77) $$g(x)=f(\arccos x)$$

(78) $\mu(x,y)=\operatorname{sg}[\sin(\arccos x)]\operatorname{sg}[\sin(\arccos x)]\varepsilon(\arccos x, \arccos y)$

függvények kielégítik a (63) *egyenletet.*

Bizonyítás. Először is megjegyezzük, hogy $f(u)$, $\varepsilon(u, v)$ „megfelelősége" miatt (77), (78) ugyanazt a $g(x)$, $\mu(x, y)$-t adják függetlenül attól, hogy az arc cos x függvény melyik értékét helyettesítjük (77), (78)-ba.

Az ismert

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \operatorname{sg}(\sin u) \operatorname{sg}(\sin v) \sqrt{1-\cos^2 u}\ \sqrt{1-\cos^2 v}$$

azonosságból[27]

$$x = \cos u \qquad u = \arccos_u x$$
$$y = \cos v \qquad v = \arccos_v y$$

-vel

$$u \pm v = \arccos_u x \pm \arccos_v y =$$

$$= \arccos_{u \pm v}\left(xy \mp \operatorname{sg}[\sin(\arccos_u x)] \operatorname{sg}[\sin(\arccos_v y)] \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2}\right)$$

következik. Ezt felhasználva[28]

$$g(x)+g(y) = f(\arccos_u x)+f(\arccos_v y) =$$

$$= f[\arccos_u x + \varepsilon(\arccos_u x, \arccos_v y) \arccos_v y] =$$

$$= f\left(\arccos_{u+\varepsilon v}\{xy - \varepsilon(\arccos_u x, \arccos_v y) \operatorname{sg}[\sin(\arccos_u x)] \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \operatorname{sg}[\sin(\arccos_v y)] \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2}\}\right) =$$

$$= f[\arccos(xy - \mu(x, y)) \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2}] =$$

$$= g\left(xy - \mu(x, y) \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2}\right).$$

Q.e.d.

A 20. tétel miatt az (58) „megfelelő" függvényekből (77), (78) által kapott $g(x)$, $\mu(x, y)$ függvények a (63) egyenletnek megoldásai és itt $g(x) \not\equiv 0$.

A 19. és 20. tételek végeredményben azt állítják, hogy a (63) és (3) függvényegyenletek („megfelelő" $f(u)$, $\varepsilon(u, v)$ esetén) ekvivalensek.

A (63) egyenletre vonatkozó vizsgálatok ezzel még nincsenek lezárva. Hasonlóan ismeretlen a (3) egyenlet általános megoldása. Egy további probléma a 14. tétel folytonossági és a 17. tétel regularitási feltételeinek enyhítése.

[27] Az $u = \arccos_u x$ képletben az indexbe írt u azt jelenti, hogy az arc cos x-et egy u-tól függő ágon kell venni.

[28] Első megjegyzésünk miatt a (77) és (78) képletekben szereplő arkuszkoszinuszok tetszőlegesen indexelhetőek, illetve az indexek elhagyhatók.

IRODALOM

[1] J. ACZÉL, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Basel—Stuttgart, 1961.

[2] J. ACZÉL, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen. *Comment. math. Helv.* **21** (1948), 247—252.

[3] J. ACZÉL—O. VARGA, Bemerkung zur Cayley — Kleinschen Massbestimmung. *Publ. Math. Debrecen* **4** (1955—1956), 3—15.

[4] R. H. BRUCK, A survey of binary systems. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.

[5] DARÓCZY Z., A bilineáris függvényegyenletek egy osztályáról. *Mat. Lapok* **15** (1964), 52—86.

[6] M. GHERMANESCU, Sur la définition fonctionnelle des fonctions trigonométriques. *Publ. Math. Debrecen* **5** (1957—1958), 93—96.

[7] G. HAMEL, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$. *Math. Ann.* **60** (1905), 459—462.

[8] HOSSZÚ M., Egy alternatív függvényegyenletről. *Mat. Lapok* **14** (1963), 98—102.

[9] KERTÉSZ A., Kvázicsoportok. *Mat. Lapok* **15** (1964), 87—113.

[10] H. KIESEWETTER, Über die Funktionalgleichung der Funktion Arccosinus III. *Publ. Math. Debrecen* (megjelenés alatt).

[11] RÉDEI L., Algebra I. Budapest, 1954.

[12] STAMATE, Asupra ecuatiei functionale $f(x+y) = f(x)+f(y)+f(x)f(y)$. *Lucrari Inst. Polit. Cluj* **1** (1959), 111—118.

[13] E. STEINITZ, Algebraische Theorie der Körper. New York, 1950.

[14] VINCZE E., Alternatív függvényegyenletek megoldásairól. *Mat. Lapok* **15** (1964), 179—195.

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ; ИХ НЕКОТОРЫЕ ОБОБШЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Ласло Лошонци

EINIGE VERALLGEMEINERUNGEN UND ANWENDUNGEN VON LINEAREN FUNKTIONALGLEICHUNGEN

L. LOSONCZI

Die Arbeit besteht aus drei Teilen. Im § 1. wird die Funktionalgleichung (2) gelöst. Die allgemeine Lösung von (2) ist die Funktion (20), wenn 1. $Q=O$ und die Erweiterungskörper $\mathbf{R}(a, b)$ und $\mathbf{R}(A, B)$ des Körpers der rationalen Zahlen miteinander isomorph sind so, dass $a \leftrightarrow A$, $b \leftrightarrow B$ sind, die Funktion (29), wenn 2. $Q=0$, $a=b=1$, $B=A$, $C=\dfrac{A^2-A}{C}$ ist. Falls weder 1. noch 2. gilt, dann hat die Gleichung (2) nur konstante Lösungen.

Der zweite Paragraph beschäftigt sich mit verschiedenen Verallgemeinerungen der Gleichung (1), unter anderen mit der Gleichung (1), die nur auf einem offenen zusammenhängenden Bereich **D** der Ebene (x, y) erfüllt ist, ferner mit der alternativen Gleichung (3). Am Ende von § 2. zeigen wir, dass ein bisymmetrisches Gruppoid (unter gewissen Regularitätsbedingungen) immer ein Hauptisotop hat, das eine Abelsche Halbgruppe mit Eins ist.

Im letzten Paragraph werden die Gleichungen (4) (wieder auf einem offenen zusammenhängenden Bereich **U**) und (63) bei stetigen g gelöst.

Feladatrovat

Szerkeszti: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

Kitűzött feladatok

153. Legyen $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ reguláris a $|z|\leqq 1$ körlemezen s tegyük fel, hogy valamely $p\geqq 1$ mellett $\sum_{k=p}^{2p} |c_k|^2 \geqq 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor az egységkörnek a $w=f(z)$ leképezésnél származó képe tartalmaz egy $\frac{1}{32e^2}$ sugarú körlemezt.

Turán Pál

154. Jelölje M^* az M négyzetes mátrix transzponáltját, $r(M)$ pedig M rangját. Mutassuk meg, hogy $r(MM^*)=r(M)$.

Fried Ervin és *Tusnády Gábor*

155. Az $A\subset R^n$ Jordan-mérhető halmaz felosztásán értjük A előállítását véges számú páronként közös belső pont nélküli Jordan-mérhető halmaz egyesítéseként. Az ilyen felosztások egy sorozatát minden határon túl finomodónak mondjuk, ha a k-adik felosztásban fellépő tagok átmérőinek maximuma $k\to\infty$ esetén 0-hoz tart, és pontonként finomodónak, ha bármely $x\in A$ mellett a k-adik felosztás x-et tartalmazó tagjainak maximális átmérője tart 0-hoz. Mutassuk meg, hogy ha f Riemann-integrálható A-n, akkor pontonként finomodó felosztás-sorozat esetén s_k tart f-nek A-n vett integráljához, jóllehet a felosztás-sorozat pontonkénti finomodása nem feltétlenül jelenti minden határon túl való finomodását. Itt $s_k=\sum_{i=1}^{p} f(x_i)m(A_i)$, ahol $A_1, \ldots, A_p$ a k-adik felosztás tagjai, $m(A_i)$ jelenti A_i Jordan-mértékét, $x_i\in A_i$ pedig tetszőleges pontja A_i-nek.

Császár Ákos

Megoldott feladatok

141. feladat. Adott n mellett melyik az a legnagyobb k érték, amelyre teljesül a következő állítás: Akárhogyan írjuk is elő egy n soros és k oszlopos mátrix minden egyes elemének előjelét, az elemek abszolút értéke mindig megválasztható úgy, hogy a mátrix rangja n-nél kisebb legyen?

(Hajós György és Heppes Aladár)

Megoldás. Feltesszük, hogy a mátrix elemei között 0 nem fordulhat elő (azaz hogy az előírt előjelek mindegyike $+$ vagy $-$).

Megmutatjuk, hogy $k < 2^{n-1}$. A $+$ és $-$ elemekből alkotott n-edrendű ismétléses variációkat (melyeknek száma 2^n) csoportosíthatjuk ugyanis 2^{n-1} párban úgy, hogy egy párba soroljuk azt a két variációt, melyek úgy származnak egymásból, hogy a $+$ jelek helyébe $-$ jelet teszünk és megfordítva. Ha egy 2^{n-1} oszlopos mátrix egyes oszlopaiba az említett párok egy-egy tagját tesszük, akkor a mátrix rangja az abszolút értékek minden megválasztása mellett n lesz, hiszen sorvektorai lineárisan függetlenek, mert bármely nem csupa 0-ból álló valós $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sorozathoz található olyan oszlop, amelyben a 0-tól különböző λ_i számok mindegyike ugyanolyan előjelű, vagy ellentétes előjelű számmal van megszorozva.

Ha viszont az oszlopok száma legfeljebb $2^{n-1} - 1$, akkor legalább egy variációpárnak egyik tagja sem szerepel az oszlopok között. Legyen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ e pár egyik variációja. A mátrix bármelyik oszlopában álló előjeleket rendre megszorozva az ε_i számokkal legalább egy $+$ és legalább egy $-$ keletkezik. Az oszlop többi elemének abszolút értékét tetszőlegesen megválasztva nyilván választhatjuk e két elem abszolút értékét úgy, hogy az ε_i-kkel való szorzás és összeadás után 0 álljon elő. Az így nyert mátrix sorvektorai tehát lineárisan függenek és rangja $< n$.

Eszerint k lehetséges legnagyobb értéke $2^{n-1} - 1$.

Hack Frigyes

Megjegyzések. 1. Ha a feladatot úgy fogjuk fel, hogy az előírt előjelek között 0 is szerepelhet, akkor k lehető legnagyobb értéke $n - 1$. Valóban, $k < n$ esetén a mátrix rangja biztosan $< n$, viszont n oszlop esetén a főátlóba $+$ jeleket, máshová 0-t írva a rang szükségképpen n.

Császár Ákos

2. A feladat geometriai nyelven a következőképpen fogalmazható: Melyik a legnagyobb olyan k szám, hogy az R^n euklideszi tér 2^n „oktáns"-ából k számút tetszőlegesen előírva mindig legyen olyan origón áthaladó hipersík, amely az adott oktánsok mindegyikének metszi a belsejét.

Hack Frigyes, Sonnevend György

A 141. feladat megoldását beküldötte még CSÁSZÁR ÁKOS, CSISZÁR IMRE, GERGELY ERVIN, KISS ILDIKÓ és SONNEVEND GYÖRGY.

142. feladat. Határozzuk meg az összes olyan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

hatványsorokat, hogy a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$$

egyenlet megoldásai minden n-re az egységkör kerületén legyenek.

(Corrádi Keresztély és Kátai Imre)

Megoldás. A feltételnek megfelelő hatványsorban $a_0 \neq 0$, hiszen a részletösszegeknek $z=0$ nem lehet gyöke. Legyen

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1} = 0,\ a_p \neq 0 \quad (p \geqq 1)$$

és vezessük be az $a_0 = a$, $a_p/a_0 = q$ jelöléseket. Ekkor $|q| = 1$ a gyökök és együtthatók közötti összefüggés miatt.

Bebizonyítjuk a következő segédtételt:

Ha az

$$(1) \qquad a + aqz^p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k z^k \quad (a \neq 0,\ |q| = 1)$$

polinom minden részletösszegének minden zérushelye az egységkör kerületén fekszik, akkor a polinom ilyen alakú:

$$a + aqz^p + aq^2 z^{2p} + aq^3 z^{3p} + \ldots + aq^r z^{rp},$$

ahol $rp \leqq n$.

Ez $n = p$ esetén igaz. Tegyük fel, hogy igazolva van már n helyett $(n-1)$-re. Ha most $a_n = 0$, akkor az állítás teljesül, tegyük tehát fel, hogy $a_n \neq 0$. Ekkor az indukciófeltevés folytán

$$a + aqz^p + \sum_{k=p+1}^{n-1} a_k z^k = a \sum_{j=0}^{r} q^j z^{jp} \qquad (rp \leqq n-1).$$

Ha az (1) polinomban minden együtthatót a konjugáltjával helyettesítünk, akkor a polinom gyökei is a konjugáltjukba mennek át, ha pedig az együtthatókat fordított sorrendben írjuk, akkor a gyökök a reciprok értékükbe fognak átmenni. Egységnyi abszolút értékű gyökökről lévén szó, mindkét átalakítással ugyanarra az eredményre jutunk, úgyhogy a kétféle átalakítással nyert polinomok egyike a másiktól állandó

tényezőben különbözik csupán. Innen egyrészt $a_k = 0$, ha $n-p+1 \leqq k \leqq n-1$, úgyhogy $n-p+1 > rp$ és $n \geqq (r+1)p$, másrészt

$$\frac{a_{n-p}}{a_n} = \bar{q} \neq 0,$$

ami csak $n=(r+1)p$ esetén lehetséges, s akkor aztán

$$a_n = \frac{q^r}{\bar{q}} = q^{r+1},$$

hiszen $|q|=1$ miatt $\bar{q} = \frac{1}{q}$.

Segédtételünkből mármost azonnal következik, hogy a feladat kikötéseinek megfelelő hatványsorok nem mások, mint az

$$a \sum_{j=0}^{\infty} q^j z^{jp} \qquad (a \neq 0, \quad |q|=1, \quad p=1, 2, \ldots)$$

alakú sorok, valamint (véges hatványsort is megengedve) ezeknek részletösszegei.

Császár Ákos

A 142. feladat megoldását beküldötte még SZÜSZ PÉTER.

Megjegyzés. Ha a feladat kikötését úgy fogjuk fel, hogy a hatványsor n-edik részletösszegének pontosan n-edfokúnak kell lennie (mert különben a ∞ is a gyökök közé volna számítható), akkor az előbbi alak $p=1$ mellett adódó speciális esetére jutunk. A feladat megoldását ilyen megszorítással küldte be CSISZÁR IMRE, ELBERT ÁRPÁD, KELEMEN JÓZSEF és KISS ILDIKÓ.

143. feladat. Mutassuk meg, hogy bármely végtelen halmaz összes részhalmazain értelmezhető olyan véges értékű halmazfüggvény, amely a véges halmazokon eltűnik, additív, de nem σ-additív.

(Czách László)

I. megoldás. Szorítkozhatunk arra a speciális esetre, amikor megszámlálhatóan végtelen halmazról van szó. Ha ugyanis a tetszőleges végtelen H halmaz valamely megszámlálhatóan végtelen M részhalmazának összes részhalmazain értelmeztünk a feladat kikötéseinek megfelelő m halmazfüggvényt, akkor a

$$h(X) = m(X \cap M)$$

képlettel H összes részhalmazain értelmezett halmazfüggvény nyilván eleget tesz a kikötéseknek.

Legyen tehát $M=\{x_1, x_2, \ldots\}$ megszámlálhatóan végtelen halmaz. Az $M_n=\{x_1, \ldots, x_n\}$ jelöléssel értelmezzük az $X \subset M$ halmazokra az

$$m_n(X) = \frac{1}{n} |X \cap M_n| \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

halmazfüggvényeket, ahol az abszolút érték-jel a véges halmaz elemeinek számát jelenti. Nyilván $0 \leqq m_n(X) \leqq 1$.

Banach egy nevezetes tétele értelmében hozzá lehet rendelni minden korlátos valós $\{a_n\}$ számsorozathoz egy $\operatorname{Lim} a_n$ „általánosított határérték"-et úgy, hogy $\operatorname{Lim}(a_n+b_n)=\operatorname{Lim} a_n+\operatorname{Lim} b_n$, $\operatorname{Lim}(ca_n)=c \operatorname{Lim} a_n$ minden valós c-re, $\operatorname{Lim} a_n \geqq 0$, ha $a_n \geqq 0$ minden n-re, és $\operatorname{Lim} a_n = \lim a_n$, ha a közönséges limesz létezik.

Ennek felhasználásával legyen $X \subset M$ esetén

$$m(X) = \operatorname{Lim} m_n(X).$$

Ez eleget tesz a feladat kikötéseinek. Valóban, ha X véges, akkor $m(X) = \lim m_n(X) = 0$, közös elem nélküli X és X' halmazok esetében pedig nyilván $m_n(X \cup X') = m_n(X) + m_n(X')$ minden n-re, úgyhogy $m(X \cup X') = m(X) + m(X')$ is teljesül. Így m additív, de nem σ-additív, hiszen $m_n(M)=1$ folytán $m(M)=1$, úgyhogy

$$m(M) \neq \sum_{i=1}^{\infty} m(\{x_i\}) = 0.$$

Szőkefalvi-Nagy Béla

Megjegyzés. Az előző megoldás elején tett észrevétel értelmében a továbbiakban csak a megszámlálhatóan végtelen M halmaz esetével foglalkozunk.

II. megoldás. Jelöljük $\mathfrak{B}$-vel M ama részhalmazainak rendszerét, amelyek vagy végesek, vagy M-re vonatkozó komplementumuk véges. Könnyen látható, hogy ezek halmazalgebrát alkotnak. Értelmezzük $X \in \mathfrak{B}$ esetén az u halmazfüggvényt így:

$$u(X) = \begin{cases} 0, & \text{ha } X \text{ véges,} \\ 1, & \text{ha } M-X \text{ véges.} \end{cases}$$

Rögtön látható, hogy u additív $\mathfrak{B}$-n, hiszen két $\mathfrak{B}$-beli végtelen halmaz metszete nyilván nem lehet üres.

Ismeretes, hogy egy Boole-algebra valamely részalgebráján értelmezett véges értékű, nem-negatív, additív függvény értelmezését mindig ki lehet terjeszteni az egész algebrára a mondott tulajdonságok meg-

tartásával (l. D. Kappos: Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und -Räume, I. fejezet, 4. pont). Ezt felhasználva u értelmezése kiterjeszthető M összes részhalmazaira úgy, hogy additív maradjon, véges értékeket vegyen fel, a véges halmazokon persze továbbra is eltűnjék, s ne legyen σ-additív, hiszen $u(M)=1\neq\sum_{i=1}^{\infty}u(\{x_i\})=0$.

Gergely Ervin

III. megoldás. Tekintsük M ama részhalmazait, amelyeknek komplementuma véges. Ezek nyilván szűrőt alkotnak. Ismeretes, hogy minden szűrő kibővíthető ultraszűrővé; legyen tehát $\mathfrak{u}$ az előbbi szűrőt tartalmazó ultraszűrő.

Értelmezzük most $X\subset M$ esetén az m halmazfüggvényt így:

$$m(X)=\begin{cases}0, & \text{ha } X\notin\mathfrak{u},\\ 1, & \text{ha } X\in\mathfrak{u}.\end{cases}$$

Ha X véges, akkor $M-X\in\mathfrak{u}$, úgyhogy $X\notin\mathfrak{u}$ és $m(X)=0$. Az additivitás belátására egyrészt megmutatjuk, hogy $X\notin\mathfrak{u}$, $X'\notin\mathfrak{u}$ esetén $X\cup X'\notin\mathfrak{u}$, másrészt arra hivatkozunk, hogy $\mathfrak{u}$ szűrő lévén, $X\in\mathfrak{u}$, $X'\notin\mathfrak{u}$ esetén $X\cup X'\in\mathfrak{u}$, és $X\in\mathfrak{u}$, $X'\in\mathfrak{u}$ esetén $X\cap X'$ nem lehet üres. Mármost ha $X\notin\mathfrak{u}$, $X'\notin\mathfrak{u}$, akkor $\mathfrak{u}$ ultraszűrő volta miatt $M-X\in\mathfrak{u}$, $M-X'\in\mathfrak{u}$, tehát $(M-X)\cap(M-X')\in\mathfrak{u}$, azaz $M-(X\cup X')\in\mathfrak{u}$ és $X\cup X'\notin\mathfrak{u}$.

Végül az, hogy m nem σ-additív, az $m(M)=1$ egyenlőségből rögtön következik.

Csiszár Imre

IV. megoldás. M összes részhalmazainak Boole-algebrájában a véges halmazok ideált alkotnak. Tekintsük az ezen ideál szerinti kvóciensalgebrát (vagyis az ekvivalencia-osztályok halmazát azon ekvivalencia-reláció szerint, amelyben két halmaz akkor ekvivalens, ha a szimmetrikus különbségük véges, a hálóelméleti műveleteket reprezentánsok segítségével értelmezve).

Stone egy nevezetes tétele szerint ez a kvóciensalgebra izomorf egy halmazalgebrával (l. pl. Szász G.: Bevezetés a hálóelméletbe, 67. tétel). Az utóbbi álljon egy E halmazból s ennek bizonyos részhalmazaiból.

Legyen u tetszőleges véges értékű, nem azonosan eltűnő, additív halmazfüggvény ezen a halmazalgebrán. (Ilyen biztosan létezik; legyen például a E-nek tetszőleges eleme és $u(X)$ értéke 0 vagy 1 aszerint, hogy $a\notin X$ vagy $a\in X$.) Értelmezzük M részhalmazain az m halmazfüggvényt úgy, hogy ha az $Y\subset M$ halmazt tartalmazó ekvivalencia-osztálynak az izomorfizmus értelmében az $X\subset E$ halmaz felel meg, akkor

legyen $m(Y)=u(X)$. Azonnal látható, hogy ekkor m is véges értékű és additív, továbbá a véges halmazokon eltűnik, hiszen ezek a kvóciens-algebra 0-elemében vannak s ennek az izomorfizmusnál az üres halmaz felel meg. Végül m nem σ-additív, hiszen u nem tűnik el azonosan, így van oly $Y \subset M$, hogy $m(Y) \neq 0$ s akkor Y-t egyelemű halmazok egyesítéseként írva a σ-additivitás definíciójával ellentétbe jutunk.

Sonnevend György

Megjegyzések. 1. A II., III. és IV. megoldás mutatja, hogy a keresett halmazfüggvényt annak a további megszorításnak is alá lehet vetni, hogy csupán a 0 és 1 értékeket vegye fel. A III. megoldás az e kikötésnek is eleget tevő halmazfüggvények általános alakját adja meg, ugyanis közvetlenül látható, hogy ha egy additív halmazfüggvény M összes részhalmazain a csak 0 és 1 értékeket veszi fel, akkor azok a halmazok, amelyeken értéke 1, ultraszűrőt alkotnak, amely a véges komplementumú halmazokat mind tartalmazza, ha a halmazfüggvény a véges halmazokon eltűnik.

Az I. megoldásból viszont az tűnik ki, hogy a feladat kikötéseinek olyan halmazfüggvény is eleget tehet, amely a 0-n és 1-en kívül más értékeket is felvesz. Valóban, az ott definiált m függvényre pl. $X=\{x_2, x_4, x_6, \ldots\}$ esetén $m(X)=\frac{1}{2}$.

Végül nem nehéz belátni, hogy a IV. megoldás megszámlálható alaphalmaz esetén megadja a kikötéseknek megfelelő összes m halmazfüggvényeket (ha ti. u befutja a halmazalgebrán értelmezett összes véges értékű, nem azonosan eltűnő, additív halmazfüggvényeket).

Szerk.

2. Figyelemre méltó, hogy valamennyi megoldás támaszkodik olyan segédeszközre, amelynek bizonyításában felhasználják a kiválasztási axiómát, vagy valamely ezzel ekvivalens segédeszközt. Ezek rendre: a Banach-féle általánosított limesz létezése, az additív függvény kiterjeszthetősége a részalgebráról az egész algebrára, az adott szűrőt tartalmazó ultraszűrő létezése, ill. a Stone-féle tétel.

Szerk.

A 143. feladat megoldását beküldötte még Császár Ákos és Kiss Ildikó.

PROBLÈMES PROPOSÉS

153. Soit $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ holomorphe sur le disque $|z|\leqq 1$ et supposons que, pour un $p\geqq 1$, on a $\sum_{k=p}^{2p} |c_k|^2 \geqq 1$. Démontrer que l'image du disque $|z|\leqq 1$ par l'application $w=f(z)$ contient un disque de rayon $\frac{1}{32e^2}$.

P. Turán

154. Désignons par M^* la transposée de la matrice quadratique M et par $r(M)$ le rang de M. Démontrer que $r(MM^*)=r(M)$.

E. Fried et *G. Tusnády*

155. Nous entendons par décomposition d'un ensemble $A\subset R^n$ mesurable au sens de Jordan la représentation de A en somme d'une famille finie de parties mesurables aus sens de Jordan et ayant des intérieurs disjoints. Une suite de décompositions de ce type se raffine indéfiniment si le diamètre maximum des termes de la k-ième décomposition tend vers 0 pour $k\to\infty$, et la suite se raffine ponctuellement, si, pour $x\in A$ quelconque, le diamètre maximum des termes contenant x de la k-ième décomposition tend vers 0. Démontrer que si la fonction f est intégrable sur A au sens de Riemann et si une suite de décompositions se raffine ponctuellement, alors s_k tend vers l'intégrale de f sur A, quoique la suite de décomposition peut bien se raffiner ponctuellement sans se raffiner indéfiniment. Ici $s_k=\sum_{i=1}^{p} f(x_i)m(A_i)$ où $A_1,\ldots,A_p$ sont les termes de la k-ième décomposition, $m(A_i)$ désigne la mesure de Jordan de l'ensemble A_i et x_i est un point arbitraire de A_i.

Á. Császár

Társulati élet

Jelentés

a Beke Manó emlékdíj tizenötödik kiosztásáról

A Bolyai János Matematikai Társulat Választmánya az 1965. április 8-i ülésén a Beke Manó emlékdíj kiosztására a következő Bizottságot küldte ki: Berkes Jenő, Hnisz László, Imrecze Zoltánné, Láng Hugó, Soós Paula, Surányi János, Varga Tamás, Vikár István és Gádor Endréné előadó. A Bizottság az emlékdíj szabályzatának megfelelően megállapította, hogy a díjak odaítélésével a matematika oktatásában és népszerűsítésében kiváló eredményeket elért kartársak munkásságát kívánja jutalmazni.

A Bizottság 1965. április 27-i és május 20.-i ülésén tett javaslatok, valamint az Intéző Bizottságtól kapott irányelvek alapján a következő döntés született:

A Bizottság 3000 forintos díjjal tüntette ki Bakos Tibort, a Középiskolai Matematikai Lapok felelős szerkesztőjét; 1500—1500 forintos díjjal Danczkay Győzőt, a nagykőrösi gimnázium tanárát, Gencwein Ferenc középiskolai tanárt a Fővárosi Tanács Fazekas Mihály gyakorló iskolájának igazgató helyettesét, dr. Mester István Hajdú megyei középiskolai matematika szakfelügyelőt és Veress Jenő kővágóőrsi általános iskolai tanárt.

Indoklás

BAKOS TIBOR már középiskolai diák korában kitűnő feladatmegoldó, az Eötvös versenyen I. díjat nyert. Az ország számos városában tanított mint középiskolai tanár, majd gyakorlóiskolai vezetőtanár. Egyideig iskolaigazgató is volt. 1950-től a Szegedi Egyetem adjunktusa lett, 1958 óta a Középiskolai Matematikai Lapok felelős szerkesztője.

Mint középiskolai tanár fel tudta kelteni a nem matematikai érdeklődésű tanítványainak érdeklődését is. Tehetséges tanítványait feladatmegoldásra, önálló munkára ösztönözte. Észrevétlenül, de állandóan segítette, ösztönözte kollégái munkáját, önképzését is.

Ahol matematikai ismeretek nyújtására van szükség, rá mindig lehet számítani. Tanított szakérettségin, levelező tanfolyamokon, konzultáción segítette akinek szüksége volt rá, egyetemi előkészítő tanfolyamokat vezetett, ezekre feladatgyűjteményt állított össze, stb.

Már a 30-as évektől óraadóként működött főiskolán, egyetemen, továbbképző tanfolyamokon. A Szegedi Egyetemre kerülve nagy részt vállalt a szakérettségit végzettek átsegítésében a kezdeti nehézségeiken. Kitűnő eredményeket ért el a tanárjelöltek feladatmegoldó készségének fejlesztésében, a matematikai nyelv pontos használatra való nevelésében.

Gazdag módszertani tapasztalait igyekszik kartársainak rendelkezésére bocsátani. Gyakran tart tanári továbbképző előadásokat, Társulatunk rendezvényein, TIT szabadegyetemi előadásokat, aktív tagja a különböző versenyek szervezőbizott-

ságainak. Egy módszertani munkája akadémiai pályadíjban részesült. Módszertani cikkeivel számos kérdésben nyújtott segítséget kartársainak.

A Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztését igen nagy ambícióval és körültekintéssel végzi. A feladatkészítéssel mindig nagy kedvvel foglalkozott. Így érthető, hogy a feladatok témakörének változatossága az ő munkája nyomán kiszélesedett és állandóan szélesedik. Más forrásból is az elérendő célkitűzéseknek megfelelően alakítva vesz át feladatokat. A megoldásokon keresztül egyrészt a pontos matematikai kifejezésre és precizitásra igyekszik nevelni, ugyanakkor arra is tanít, hogyan lehet természetes úton eljutni megoldási alapötletekhez. A lap olvasói gyakran fordulnak hozzá problémáikkal és mindig segítőkészséggel találkoznak.

1955-ben az Oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetésben részesült.

DANCZKAY GYŐZŐ, a nagykőrösi gimnázium tanára. A matematikát igen jó módszerrel és jó eredménnyel tanítja. Meg tudja szerettetni a matematikát tanítványai jelentős részével. Óráin a tanulók bátran elmondják a feladott témával kapcsolatos elgondolásaikat, s ő ügyesen emeli ki a jót és mutat rá a helytelenre de úgy, hogy a tanuló továbbra is kezdeményező maradjon.

Iskolai munkája és szakkörök vezetése mellett részt vesz levelező oktatásban, előkészítő tanfolyamokat, valamint korrepetáló órákat vezet a felsőfokú technikumban. Minden intézmény szívesen kéri fel a matematika tanítására az elért jó eredmények miatt. Jelenleg szakmai munkaközösséget vezet.

Az ő kezdeményezésére indult Nagykőrösön a TIT támogatásával matematikai előadássorozat, amelyen a gimnáziumi tanulók kiváló előadók közreműködésével megismerkedtek a matematikának középiskolában nem tárgyalt elemi fejezeteivel.

Danczkay kartárs szívesen segíti fiatalabb munkatársait. Tanítványai, kartársai szeretik, részt vesz az ifjúság megmozdulásaiban.

Évtizedeken át végzett jó munkája elismeréseképpen kapta meg 1961-ben az Oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetést.

GENCWEIN FERENC a budapesti Pedagógiai Főiskola elvégzése után ott tanársegéd lett, közben levelező úton középiskolai tanári képesítést nyert. A Főiskola megszűnte után Tatabányán volt gimnáziumi tanár, majd egyetemi gyakorlóiskolai vezetőtanár lett. Jelenleg a Fővárosi Tanács Gyakorló Iskolájának tanára. Igazgatóhelyettesként ő irányítja az iskola gimnáziumi osztályainak a munkáját. 1960 óta vezeti a Közgazdasági Egyetem egyik diákotthonát. Előadóként működik a Műszaki és a Közgazdasági Egyetemen. Mikor az utóbbi Győrbe kihelyezett tagozatán hiány volt előadóban, vállalta az oda való lejárást. Egyetemi előkészítő tanfolyamon a legnehezebb munkát, a nem érettségizettek csoportját vállalta igen jó felvételi eredményekkel.

Tatabányán mint a matematikai munkaközösség vezetője számos továbbképző előadást tartott, továbbá népszerű matematikai előadásokat szervezett üzemi munkások részére. Gyakorló tanárjelöltek vezetése mellett kísérletet végzett az analízis elemeinek tanítására, erről több előadásban, valamint a „Matematika Tanítása" és a „Mathematik in der Schule" c. folyóiratok hasábjain is beszámolt. Más cikkeiben a tehetséges gyerekek neveléséhez és más módszertani kérdésekhez járult hozzá értékes szempontokkal. Jelenlegi munkakörében nagy gondot fordít az újonnan indult matematikai osztályok egészséges kifejlődésére. Az utánpótlás biztosítására előkészítő szakköröket szervez. Kiemelendő, hogy sokirányú munkáját szerényen, csendben végzi, az eredményei beszélnek helyette.

DR. MESTER ISTVÁN, szolgálatát mint díjtalan egyetemi gyakornok kezdte meg 1927-ben, majd 1931-től a debreceni Református Gimnázium tanára lett, 1952-től a Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban vezető tanár, pár évig igazgatói teendőket is ellátott, 1956-tól pedig középiskolai matematikai szakfelügyelő. Évek óta résztvesz az egyetemi szakmódszertani oktatásban. Jelenleg egy középiskolai tanárok számára készülő „Módszertani kézikönyvön" dolgozik.

Tanítványai közül több kiváló matematikus kutató került ki. Tevékenyen résztvett Debrecenben a Bolyai-délutánok szervezésében és irányításában. Gimnáziumi tanárként „Négyjegyű Logaritmus Könyvet" állított össze. Módszertani dolgozatai jelentek meg a Tanügyi Szemlében. Mint szakfelügyelő, matematikatanárok továbbképzésének irányítását jó szervező készséggel és nagy ügyszeretettel végzi.

Tanfolyamot tart a pedagógiai főiskolás levelező hallgatók számára, továbbá egyetemi felvételi vizsgára előkészítő tanfolyamot vezet.

Munkássága elismeréséül 1956-ban az Oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetést kapta.

Széles látókörű, munkáját nagyon szerető, hivatástudatból végző nevelő, aki emellett jó kolléga és melegszívű barát is.

VERESS JENŐ általános iskolai matematika—fizika szakos tanár. Három éve tanít a kővágóőrsi általános iskolában. Szaktárgyait igen nagy kedvvel, lelkesedéssel és igen jó felkészültséggel oktatja. Munkáját a legmesszebbmenő lelkiismeretességgel végzi. Különösen jó eredményt ér el tanítványainál a matematika megszerettetésében, a tanulók önállóságának, feladatmegoldó gondolkodásának fejlesztésében. Tanulóival szemben igényes, anélkül, hogy képességeiken felül megterhelné őket.

Tanítási óráin kívül szakkörön is foglalkozik a tanulókkal. Tanítványai feltűntek a Középiskolai Matematikai Lapok gyakorlatainak szép megoldásaival.

Középiskolai tanulóknak és felnőtteknek is vezet — a helyi kultúrotthon szervezésében — matematikai szakkört. Ezek a foglalkozások nagyon érdekesek, vonzók, a felnőttek érdeklődéséhez, gondolkodásához jól alkalmazkodnak.

Jelentés

a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Szakosztálya által meghirdetett filmpályázat eredményéről

A Társulat Oktatási Szakosztálya 1964 áprilisában pályázatot hirdetett matematikai oktatófilm forgatókönyvének megírására. A pályázati felhívás a témát nem kötötte meg csak azt kívánta, hogy az általános- vagy a középiskolai matematika anyagával kapcsolatban legyen.

A beérkezett pályamunkák elbírálására az Intéző Bizottság a következő bizottságot küldte ki:

A bizottság tagjai: Cser Andor,
Lőrincz Pál,
Varga Tamás,
előadó: Reményi Gusztáv.

A bíráló bizottság a pályamunkák áttanulmányozása alapján 1964. február 13-án tartott ülésén a következő határozatot fogadta el:

A bizottság megállapítja, hogy a pályázat eredménye alatta marad a várakozásnak. 5 pályázótól 8 pályamunka érkezett:

1. A háromszög nevezetes vonalai, pontjai;
2. Az irracionális számok keletkezése és ábrázolása;
3. Feladatok a sorozatok köréből;
4. Háromszögek;
5. Körrel kapcsolatos mértani helyek;
6. Mit kell tudni a gömbről az általános iskolában;
7. Munkában a középértékek;
8. Valós számok.

A bizottság „A háromszög nevezetes vonalai, pontjai" című pályamunkának a pályázati felhívásban közzétett három díj közül az 1000 Ft-os II. díjat ítéli oda, az I. és a III. díjat nem adja ki. Dícséretben részesíti ezenkívül a bizottság a „Valós számok" című pályamunkát. A II. díjas pályamű szerzője *dr. Kulin Györgyné* budapesti gimnáziumi tanár, a dícséretben részesített munkáé pedig *Csernyák Lászlóné* miskolci gimnáziumi tanár.

A háromszög nevezetes vonalai, pontja c. pályamű olyan témát dolgoz fel, amely valóban filmre kívánkozik. A háromszögre vonatkozó legnevezetesebb tételeket mutatja be, a középiskolában tárgyaltakon kívül is. A feldolgozás filmszerűnek mondható, bár ennek eszközeit még változatosabbá lehetett tenni. A valóságból absztrahált geometriai alakzatokon kívül igyekszik bemutatni a valóságot is, amelyből absztrahálunk, de az erre felsorakoztatott példák egyhangúak, nem elég sokrétűek, nem mutatják a háromszögek szerepét a gyakorlati alkalmazásokban. Jó a tételek történetére vonatkozó utalás. Bár a szerző tudatosan kerüli a bizonyítást, ennek teljes kikapcsolása nem látszik helyesnek. Megfelelő átdolgozással és kiegészítésekkel a pályamunkából jó filmet lehet készíteni.

A „Valós számok" c. munka témaválasztása nem szerencsés. Az elméleti és gyakorlati mérés között nem tesz különbséget, így a gyakorlati mérésről helytelen fogalmat alakít ki: azt állítja, hogy a gyakorlati mérés — ha nem is gyakran, de eredményezhet pontos racionális számot. — Dícséretet érdemel viszont azért, mert keresi a filmszerű kifejezési formákat és e téren vannak jó ötletei is.

A többi pályamunkában nem talált a bizottság elegendő számban pozitív vonást ahhoz, hogy kiemelésüket indokoltnak látta volna. Némelyik nem több egy tankönyvrészletnél; van amelyik egy — önmagában is vitatható — szakköri foglalkozást kíván filmre vinni. Kevés bennük a törekvés a film adta lehetőségek kihasználására, emellett többnyire témaválasztásuk sem mondható sikerültnek.

A bizottság megállapítja, hogy a Társulat helyesen járt el, amikor ezzel a filmpályázattal is ráirányította a figyelmet a matematikai oktatófilmek fontosságára. Mielőtt azonban újabb filmek elkészítéséhez fognánk, célszerű volna a meglevő magyar matematikai filmeken kívül a külföld jól sikerült filmjeit is beszerezni, vagy legalábbis behatóan tanulmányozni, hogy a tapasztalatokat felhasználhassuk jó filmek gyártására.

Elsősorban olyan filmek előállítása célszerű, amelyek ott segítenek, ahol a tanítási óra és a könyv lehetőségei természetüknél fogva korlátozottak, mint pl. geometriai alakzat folytonos változtatása, mozgatása; gyakorlati alkalmazások bemutatása.

Keresni kell emellett a bizonyítások filmszerű megvalósításának módjait is.

Jelentés

az 1965. évi Grünwald Géza-emlékdíj odaítéléséről

A Grünwald Géza-emlékdíj ez évi odaítélésére a Társulat Elnöksége által kiküldött bizottság 1965. november 15-én tartott ülésén megvitatta a Társulat Elnökségének tagjai által tett javaslatokat. A bizottság feladatát nehézzé tette az, hogy egyfelől nagyszámú alaposan indokolt javaslat érkezett — amit örömmel kell regisztrálni —, másfelől azonban a rendelkezésre álló összeg erősen korlátozott.

A bizottság alapos mérlegelés után úgy vélte, hogy a Grünwald Géza-emlékdíjjal való kitüntetés elsősorban erkölcsi értéket képvisel, és ezért a Grünwald Géza-emlékdíj II. fokozatával és egyenként 1300 forint jutalomban részesíti a következőket:

Bártfai Pál, Deák Ervin, Halász Gábor, Losonczi László, Peák István, Szemerédi Endre.

Indokolás

BÁRTFAI PÁL az elmúlt két évben három igen értékes új tudományos eredményt ért el. [2] dolgozatában egy R. Fortet vizsgálataival kapcsolatban Rényi Alfréd által felvetett problémát oldott meg, amely a sztochasztikus irányítás- és szabályozáselméletbe tartozik. Fortet mutatott rá először olyan típusú Markov-folyamatok vizsgálatának szükségességére, amelyeknél minden egyes véletlen állapotváltozást a rendszer irányításának egy döntése előz meg, amely a következő állapotváltozás eloszlásának megválasztására vonatkozik. Lényegében véve bármely gép vagy műszer beszabályozásakor ez történik. Fortet csak általánosságban vetette fel a kérdést; ezzel szemben Bártfai egy konkrét modell esetében a kérdés teljes diszkusszióját adja meg. Modellje egy irányított bolyongásra vonatkozik; ebben egy pont minden lépésben egész számú távolságot tesz meg, amelynek eloszlása adott, azonban a folyamat irányítója választja meg a lépés irányát, mégpedig úgy, hogy azt mindig a 0 pont felé irányítja. Bártfai bebizonyította, hogy ha egy lépés várható értéke véges, a bolyongó pont 1 valószínűséggel eljut a 0 pontba, és az ehhez szükséges lépésszám várható értéke is véges.

[3] dolgozatában Bártfai a topologikus csoportokra vonatkozó határeloszlástételek elméletét gazdagítja egy új eredménnyel, amennyiben szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy komplex értékű egységnyi abszolút értékű független valószínűségi változók végtelen sorozatának részszorzatai (ill. valós független valószínűségi változók végtelen sorozatának mod 1 vett részletösszegei) határeloszlásként egyenletes eloszlást adjanak. Eredményeit tetszőleges kompakt Abel-csoportokra is kiterjeszti. [4] dolgozata mind az eredmény jelentőségében, mind pedig a megoldott probléma nehézsége és a bizonyítás ötletessége tekintetében az előző két dolgozatot is túlszárnyalja. A probléma a következő, eddig — elméleti és gyakorlati jelentősége ellenére nem vizsgált — kérdéskörbe tartozik és ezen a téren az első komoly eredmény: ha egy sztochasztikus folyamat egyetlen realizációját tudjuk csak korlátlan hosszú ideig megfigyelni, azonban a folyamat értékét (a műszer korlátos pontossága miatt) csak kerekítve kapjuk meg, hogyan lehet e kerekített megfigyelésekből a folyamatot szabályozó törvényszerűséget meghatározni. Bártfai ebben az irányban a Rényi Alfréd által 10 éve felvetett és a „sztochasztikus gejzir" problémájának elnevezett problémát oldja meg olyan rekurrens folyamatokra, amelyeknél a konzekutív események eloszlásfüggvényének karakterisztikus függvénye egy a 0 pont körüli körben analitikus. Bizonyítása, amelynek során komoly nehézségeket kellett legyőznie, a nagy eltérések elméletén alapszik.

BÁRTFAI PÁL dolgozatai

[1] Egy közlekedési problémáról. *MTA III. Oszt. Közl.* **11** (1961), 263—271 (Dobó Andorral).

[2] Irrfahrtsprobleme mit einer spiegelnden Wand. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **8** (1963), 125—133.

[3] Grenzverteilungssätze auf der Kreisperipherie und auf kompakten Abelschen Gruppen. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* (sajtó alatt).

[4] Die Bestimmung der zu einem wiederkehrenden Prozess gehörenden Verteilungsfunktion aus den mit Fehlern behafteten Daten einer einzigen Realisation. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* (sajtó alatt).

DEÁK ERVIN az utóbbi években igen aktív és eredményes kutató munkát végzett, amelynek eredményeképpen 11 dolgozat kéziratával készült el (közülük 2 nyomtatásban már megjelent.)

Eredményei közül legjelentősebbek azok, amelyek az iránytér általa bevezetett fogalmával foglalkoznak; ez az euklideszi terek féltereinek összességére vonatkozó bizonyos tulajdonságok posztulálásával olyan struktúrához vezet, amely bármely topologikus térben bevezethető és a topologikus terek bizonyos osztályaira alkalmazva igen figyelemreméltó eredményekhez vezet. Főeredménye az n-dimenziós euklideszi tér altereinek egy topologikus jellemzése az iránytér fogalmán alapuló ún. irány-dimenzió segítségével; ennek bizonyítása sok igen finom részletkérdés tisztázását kívánta ([2], [3]). Másrészt az iránytér fogalma igen hasznosnak bizonyult vektorterekben is; ebben az irányban főeredménye a Krein—Milman-féle tételnek egy általánosítása ([6], [8], [9], [10]).

Ismételten foglalkozott továbbá és érdekes eredményeket ért el az egyenlőtlenségekkel jellemzett függvényosztályok (konvex, kvázikonvex, intern stb. függvények) elméletében is ([1], [4], [7]), amelyekben részben felhasználja az irányterekkel kapcsolatos eredményeit is.

Az [5] dolgozat egyszerű bizonyítását adja annak az ismert ténynek, hogy az euklideszi tér konvex halmazai Jordan-mérhetők, [11]-ben pedig Alexits Györgynek egy sejtésére ad negatív választ.

DEÁK ERVIN dolgozatai

[1] Über konvexe und interne Funktionen, sowie eine gemeinsame Verallgemeinerung von beiden. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **5** (1962), 109—154.

[2] Ein neuer topologischer Dimensionsbegriff. *Revue Roum. Math. Pures Appl.* **10** (1965), 31—42.

[3] Eine vollständige Charakterisierung der Teilräume eines euklidischen Raumes mittels der Richtungsdimension. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* (sajtó alatt).

[4] Über eine Aufgabe von A. Rényi. *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math. (sajtó alatt).

[5] Bemerkung zu einem Beweis der Quadrierbarkeit der n-dimensionalen konvexen Mengen. *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math. (sajtó alatt).

[6] Über die inwendigen Punkte konvexer Mengen in linearen Räumen.

[7] Über Abbildungen eines euklidischen Raumes in einem euklidischen Raum, deren inverse Abbildungen die Konvexität erhalten.

[8] Eine Verallgemeinerung des Begriffs des linearen Raumes und der Konvexität.

[9] Topologische Richtungsräume — eine Verallgemeinerung des Begriffs des lokalkonvexen Raumes mit der schwachen Topologie.

[10] Eine Verallgemeinerung des Krein—Milmanschen Satzes für topologische Richtungsräume.

[11] Egy approximációelméleti tétellel kapcsolatos elemi problémáról.

HALÁSZ GÁBOR munkái egy kivételével komplex függvénytani kérdésekre vonatkoznak. [4] dolgozata igen nehéz kérdést old meg Turán Pál azon tételével kapcsolatban, mely röviden kifejezve azt mondja ki, hogy a kerületi konvergencia nem konform invariáns. T. Sós Vera egy további kérdésére válaszolva Halász oly $f(z)$ függvényt konstruál, melynek 0 körüli $\sum_0^\infty a_n z^n$ hatványsora a $z=1$ helyen konvergál, de minden $0<|a|<1$ esetén $f\left(\frac{z-a}{1-az}\right)$ 0 körüli hatványsora divergál a $z=1$-nek megfelelő helyen. [3] dolgozata a fenti gondolatkörnek abszolút konvergenciával kap-

csolatos kérdéseire vonatkozik. Itt Halász Alpár László egy tételének szigorítása képpen megmutatja, hogy $\sum |a_n| < \infty$ és rögzített a mellett még az is lehetséges, hogy

$$f\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right) = \sum_0^\infty c_n(a) z^n$$

jelöléssel

$$\sum_0^\infty |c_n(a)|^{2-\frac{\omega(n)}{\log n}} = \infty,$$

hacsak $\omega(n) \to \infty$. Hasonló ellenpéldát talált A. Shieldsnek egy sejtésére, [1] dolgozata egy újabb nevezetes esetben mutatja meg multiplikatív és korlátos számelméleti függvények középértékének létezését, míg [5] dolgozatában (Mályusz Károllyal) egy a Dirichlet-sorok elméletéből ismert klasszikus Bohr-féle tételt terjeszt ki Laplace-integrálokra. [2] dolgozata Carleman egy Fourier-sorokra vonatkozó tételét általánosítja. Halász e dolgozatai máris jelentős analitikus erőt és invenciót mutatnak, komoly tudással párosulva.

HALÁSZ GÁBOR dolgozatai

[1] A note on the distribution of multiplicative number-theoretic functions. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* (sajtó alatt).
[2] Some remarks on Fourier series of analytic functions. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* (sajtó alatt).
[3] On Taylor series absolutely convergent on the periphery of the circle of convergence. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* (sajtó alatt).
[4] On the change in convergence of Taylor series under conformal mappings of the circle of convergence. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* (sajtó alatt).
[5] On the order of magnitude of Laplace transforms. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* (sajtó alatt) (Mályusz Károllyal).

LOSONCZI LÁSZLÓ figyelemre méltó eredményeket ért el a függvényegyenletek elméletében. Kiemelkedő eredményei a sokat tárgyalt

$$f(ax+by+c) = pf(x)+qf(y)+r$$

lineáris függvényegyenlet teljes megoldása [2], lokális folytonos megoldásainak meghatározása [4] és sokoldalú algebrai általánosítása [6], továbbá az arccos függvény függvényegyenletével kapcsolatban az általános folytonos lokális megoldások meghatározása. Meghatározta a

$$\sum_i \prod_i f_{ij}(x_i) = 0$$

egyenlet általános megoldását, amivel Bandyopadhay, Aczél és mások eredményeit általánosítja ([1], [3]) és két fontos alternatív egyenletet is vizsgált ([5], [6]). [5]-ben S. Golabbal együtt bebizonyítja, hogy az alternatív arccos-egyenletnek csak triviális folytonos ill. korlátos megoldása van, továbbá a általános megoldás néhány jellemző tulajdonságát határozza meg. [6]-ban megoldja az

$$f(ax+by+c) = Qf(x)f(y)+Af(x)+Bf(y)+c$$

függvényegyenletet, és megvizsgálja a $Q=0$ esetben adódó egyenlet több általánosítását. Kapcsolatot állapít meg az alternatív arccos-egyenlet és az alternatív Cauchy-egyenlet megoldásai között. Ennek segítségével kimutatja az alternatív arccos-egyenlet nemtriviális megoldásainak létezését.

LOSONCZI LÁSZLÓ dolgozatai

[1] Über eine multilineare Funktionalgleichung mit mehreren unbekannten Funktionen. *Publ. Inst. Math. Beograd* **17** (1963), 47—52.
[2] Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen. *Acta Sci. Math.* **25** (1965).
[3] A változók szétválasztása módszerének további általánosítása. *Mat. Lapok* **15** (1964).
[4] Über die Funktionalgleichung der Funktion arccos x. I. Die lokalen Lösungen. *Publ. Math.* (sajtó alatt) (S. Gołabbal).
[5] Über die Funktionalgleichung der Funktion arccos x. II. *Publ. Math.* (sajtó alatt) (S. Gołabbal).
[6] Lineáris függvényegyenletek, néhány általánosításuk és alkalmazásuk. *Mat. Lapok* XVII. 1—2 (1966).

PEÁK ISTVÁN első dolgozataiban félcsoportokkal kapcsolatos kérdéseket vizsgált: félcsoportok bizonyos kompatibilis osztályozásaira vonatkozó eredményeket ért el, továbbá egyes kritériumokat fogalmazott meg, amelyek teljesülése esetén a tekintett félcsoport csoport. A későbbiekben V. M. Gluskov irányításával az automaták algebrai elméletével kezdett foglalkozni. Idevágó munkáival elsősorban arra törekedett, hogy kapcsolatokat tárjon fel az automaták elmélete és a félcsoportelmélet között. Összefüggéseket állapított meg automaták félcsoportjai és a vizsgált automaták bizonyos kompozicionak félcsoportjai között. Kommutatív ciklikus, valamint ciklikus automaták endomorfizmus-félcsoportjait és automorfizmus-csoportjait vizsgálta a következő dolgozatokban. Egy további munkájában automaták bővítésének egy figyelemreméltó módszerét tárgyalja.

PEÁK ISTVÁN dolgozatai

[1] Ein Satz über Halbgruppen. *Publ. Math.* **6** (1959), 111—112.
[2] Über gewisse spezielle kompatible Klasseneinteilungen von Halbgruppen. *Acta Sci. Math.* **21** (1960), 346—349.
[3] Bemerkungen über die Halbgruppen mit Minimalbedingung. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **3—4** (1960—61), 223—225 (Pollák Gézával.)
[4] Az automaták matematikai elméletéről. MTSZ Évkönyv, Szeged, 1964. (Gécseg Ferenccel).
[5] Автоматы и полугруппы *Acta Sci. Math.* **25** (1964), 193—201.
[6] Автоааты и полугруппы *Acta Sci. Math.* **26** (1965).
[7] Автоматы с изоморфными полугруппами *Acta Sci. Math.* **26** (1965), 43—47 (Gécseg Ferenccel).
[8] О некоторы расширениях пòлупростых автомаров *Publ. Math.* (sajtó alatt).
[9] Az automaták algebrai elmélete. *Mat. Lapok* XVII. (1966) (Gécseg Ferenccel).

SZEMERÉDI ENDRE dolgozatai túlnyomó részben számelméleti kérdésekre vonatkoznak. Ezek megoldanak több Erdős Páltól származó problémát, amelyekkel Erdős hosszú időn át sikertelenül próbálkozott és Szemerédi szerepe a megoldásban igen számottevő. A bizonyítások igen sok nehézséggel jártak, amelyeket csak újabb és újabb ötletekkel lehetett legyőzni. A [2] dolgozatban azon Erdőstől és Mosertől származó sejtés kerül igen ötletes igazolásra, hogy adott $a_1, \ldots, a_k$ pozitív számokkal az

$$a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_k\varepsilon_k = n$$

egyenletnek legfeljebb $O(2^k/\sqrt{k})$ megoldása van, ahol az ε_i-k 0-val vagy 1-gyel egyenlők, ez könnyen láthatóan a lehető legjobb eredmény, Erdős és Moser csak jóval

kevesebbet tudott kimutatni. Az [1] dolgozat Turán Pál módszereinek mátrixok sajátértékeinek közelítő meghatározására való alkalmazásához ad értékes adalékot. Szemerédi valamennyi dolgozata igen erős aritmetikai és kombinatorikus érzéket és erőt mutat.

SZEMERÉDI ENDRE dolgozatai

[1] Komplex számok hatványösszegeiről. *Mat. Lapok* **15** (1964), 337—347 (Komlós Jánossal és Sárközy Andrádssal).
[2] Über ein Problem von Erdős und Moser. *Acta Arithmet.* (sajtó alatt) (Sárközy Andrással).
[3] A négyzetszámok sorozatáról. *Mat. Lapok* XVI. (1965) (Sárközy Andrással)
[4] On the solvability of the equations $(a_i, a_j)=a_s$ and $(a'_i, a'_j)=a'_r$ in sequences with positive density. Vandiver-kötet (sajtó alatt) (Erdős Pállal és Sárközy Andrással).
[5] On a theorem of Behrend. Austr. Journ. Math. (sajtó alatt). (Erdős Pállal és Sárközy Andrással).
[6] On divisibility properties of sequences of integers. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* (sajtó alatt) (Erdős Pállal és Sárközy Andrással).
[7] On the number of solutions of a_i/a_j in sequences of positive density, I. *Acta Arithmet.* (sajtó alatt) (Erdős Pállal és Sárközy Andrással).

Budapest, 1965. december 17.

A Grünwald Géza-emlékdíj 1965-ben való odaítélésére kiküldött bizottság:

CSÁSZÁR ÁKOS
FREY TAMÁS
HAJÓS GYÖRGY
KERTÉSZ ANDOR
PRÉKOPA ANDRÁS
RÉNYI ALFRÉD
TURÁN PÁL
VARGA OTTÓ

A Bolyai János Matematikai Társulat Budapesti Tagozatának előadásai 1965 évben

Január 15.

PELIKÁN JÓZSEF: *Gyűrűelmélet. I.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Január 15.

MOLNÁR JÓZSEF egyetemi tanár: *Vietnami élmények.*
Vetítettképes útibeszámoló.

Január 16.

BOGNÁR MÁTYÁS: *Színezési problémák.*
Középiskolai matematikai délután.

Január 22.

MOLNÁR JÓZSEF szakfelügyelő: *A síkidomok hasonlóságának tanítási kérdéseiről.*
Előadás középiskolai tanárok számára.

Január 29.

ALKALMAZOTT MATEMATIKUS TALÁLKOZÓ
Klubest, az 1965 évi tervek ismertetése.

Február 5.

PELIKÁN JÓZSEF: *Gyűrűelmélet. II.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Február 12.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *Néhány megoldatlan geometriai probléma.*

Február 13.

ROCKENBAUER MAGDA: *A lineáris algebra elemei, lineáris egyenletrendszerek.*
Középiskolai matematikai délután.

Február 19.

Az 1964. évi Schweitzer verseny eredményhirdetése. A feladatok megoldását SÁRKÖZY ANDRÁS ismertette.

Február 26.

L. SCHMETTERER (Wien): *Diszkrét csoportokon definiált valószínűségi mértékekről.*

Február 26.

LOVÁSZ LÁSZLÓ és PÓSA LAJOS: *Egy adott gráfelméleti probléma különböző megoldásai.*

Március 5.

ROLF SULANKE (NDK): *A Klein-féle terek integrálgeometriájához.*

Március 12.

SARLÓSKA VINCZE ERNŐ: *Újabb eredmények a Bolyaiakra vonatkozó kutatásban.*

Március 19.

PÁLFY SÁNDOR: *Közelítő számítások tanítása az általános iskolák V—VII. osztályában.*
Előadás általános iskolai tanárok részére.

Március 19.

IFJÚSÁGI MATEMATIKAI KÖR: *Feladatmegoldások.*

Március 23.

V. STRASSEN (NSZK): Az iterált logaritmustételről.
Az MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Március 23.

P. IVANESCU (Románia): *Boole algebrák alkalmazása operáció kutatásban.*
Az MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Március 26.

FREY TAMÁS: *Közelítő módszerek optimalizálásának és stabilitásának elvi és gyakorlati kérdései. I.*

Március 26.

REMÉNYI GUSZTÁVNÉ: *Szakkör általános iskolások részére.*

Március 27.

FANTA KATALIN: *Kombinatorika és Boole algebra elemei.*

Április 6—7.

Az Ifjúsági Matematikai Kör előadássorozata pesti és vidéki tagjai számára az alábbi programmal.:

Az IMK tagjainak kiselőadásai.

HAJÓS GYÖRGY: *A tetraéder síkmetszeteiről.*

Feladatmegoldások.

HAJNAL ANDRÁS: *Végtelen halmazokról.*

Április 9.

H. WIELANDT (NSZK): *Összetett csoportok struktúrájáról.*

Április 16.

K. A. H. GRAVETT (Anglia): *Formális hatványsorok.*

Április 24.

RASTIK ETELKA: *A modern valószínűségszámítás elemei.*

Középiskolai matematikai délután.

Április 30.

Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése. Versenyfeladatok megbeszélése.

Május 7.

ALEXITS GYÖRGY: *Az erős approximációról.*

Május 19.

H. SCHWERDTFEGER (Kanada): *A projektív illeszkedési tételek csoportelméleti interpretációja.*

Az MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Május 21.

A. BIGARD (Franciaország): *T-algebrák.*

Május 22.

KUTI JÓZSEF: *Csináljunk elemi geometriát a gömb felületén!*

Középiskolai matematikai délután.

Május 28.

P. R. HALMOS (USA): *Invariáns alterek problémájáról.*

Június 1.

LEE LORCH (Svédország): *Bizonyos egy paramétertől függő Sturm-Liouville függvények gyökeiről.*

Június 4.

H. S. SHAPIRO (USA): *Harmonikus függvények szintvonalairól.*

Június 4.

J. JAKUBIK (Csehszlovákia): *Eredmények a részben rendezett csoportok elméletéből.*

Június 5.

Az 1965 évi Arany Dániel verseny eredményhirdetése és díjkiosztása.

Középiskolai matematikai délután.

Június 16.

EMIL GROSSWALD (Franciaország): *Aritmetikai függvények oszcillációs tételei.*

Az MTA Matematikai Kutató Intézetével közös előadás.

Július 5., 6., 7.

VÁNDORGYŰLÉS Keszthelyen, az Agrártudományi Főiskolán a Társulat Oktatási Szakosztálya és az Országos Pedagógiai Intézet közös rendezésében „A középiskolai matematika tanterv új témáiról." az alábbi programmal:

Július 5.

MEGNYITÓ.
VARGA TAMÁS: *Az egyenlőtlenségekről.*
HOSSZÚ MIKLÓS: *Kombinatorika és valószínűségszámítás a középiskolában.*
Hajókirándulás Badacsonyba.

Július 6.

A BEKE MANÓ díj kiosztása, a filmpályázat eredményhirdetése.
CSER ANDOR: *Az analízis előkészítése az alsóbb osztályokban.*
CSÁSZÁR ÁKOS: *Az analízis elemei.*
HAJÓS GYÖRGY: *A vektorokról.*
Közös vacsora a hévízi Debrecen étteremben.
A. Z. KRYGOWSKA (Lengyelország): *A geometria tanítása a lengyel iskolákban.*

Július 7.

HORVAY KATALIN: *A térgeometria és alkalmazásai.*
PÁLMAY LORÁNT: *Közelítő számítások és hibaszámítás.*
ZÁRSZÓ.

Szeptember 13.

A. VÁZSONYI (USA): *Számítógépes tervezés és irányítás.*
Az MTESZ Információfeldolgozási, Kibernetikai és Operációkutatási Szakosztályval közös rendezésben.

Szeptember 14.

W. K. HAYMAN (Anglia): *On mean-values of analytic functions.*
Az MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Szeptember 14.

A. VÁZSONYI (USA): *Applied mathematics and computers in industry.*
Az MTESZ Információfeldolgozási, Kibernetikai és Operációkutatási Szakosztályával közös rendezésben.

Szeptember 15.

E. SEIDEN (USA): *On the problem of construction of finite Bolyai—Lobacsevsky planes.*
Az MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Szeptember 18.

CSÁSZÁR ÁKOSNÉ: *Nomogrammok.*
Középiskolai matematikai délután.

Szeptember 20.

A. CHARNES (USA): *Theory of Chance-Constrained Programming.*
Az MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Szeptember 24.

HÓDI ENDRE: *Beszámoló a VII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

Szeptember 27.

L. C. A. VAN LEEUWEN (Hollandia): *Gyűrűk holomorfjáról.*
Előadás a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetemen.

Október 1.

G. PICKERT (Giessen): *Algebraische Methoden in der Theorie der projektiven Ebenen.*

Október 4.

G. PICKERT (Giessen): *Allgemeine Gesichtspunkte der Erneuerung des Mathematikunterrichts.*
Az Oktatási Szakosztály előadása középiskolai tanárok részére.

Október 11.

MARIA COROI-NEDELCU (România): *Solutions des systemes linéaires des équations aux dérivées partielles dans l'espace écrites a l'aide des équations aux dérivées spatiales au sens de N. Theodorescu.*

Október 15.

LOVÁSZ LÁSZLÓ: *A számelmélet néhány alapvető problémája.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Október 16.

BAKOS TIBOR: *Érdekességek bűvös négyzetekről.*
Középiskolai matematikai délután. I.

Október 22

D. KAPPOS (Görögország): *Vervollständigung topologischer Verbandsgruppen.*
Topologikus hálószerűen rendezett csoportok teljessé tétele.

Október 25.

D. KAPPOS (Görögország): *Bemerkung zur Struktur stochastischer Räume.*
Sztochasztikus terek struktúrájáról.

Október 30.

A Kürschák József matematikai tanulóverseny megrendezése Budapesten és az ország 14 városában.

November 12.

FELADATMEGOLDÁSOK.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

November 13.

BAKOS TIBOR: *Érdekességek a bűvös négyzetekről. II.*
Középiskolai matematikai délután.

November 19.

GALLAI TIBOR: *Grötzsch egy színezési tételének általánosítása.*

November 26.

PRÉKOPA ANDRÁS: *Véletlen determinánsok.*

November 26.

G. MARINESCU (România): *Pseudotopologikus vektorterek.*

December 3.

BABAI LÁSZLÓ: *Egyenlőtlenségek.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

December 10.

A. G KUROS (Szovjetunió): *A csoportelmélet fejlődésének áttekintése az utóbbi 15 évben.*

December 17.

A Kürschák József matematikai tanulóverseny eredményhírdetése és díjkiosztása.
A versenyfeladatokat HAJÓS GYÖRGY ismertette.
A KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI LAPOK pontversenye díjainak kiosztása.

December 18.

SCHARNITZKY VIKTOR: *A lineáris programozásról.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Debreceni Tagozatának előadásai 1964 és 1965 évben

Február 3.

VIKÁR ISTVÁN: *Pólya György didaktikai elgondolásáról.*
Klubdélután.

Február 14.

EHLERS ELKE: *Die Riemannsche $\zeta(s)$-Funkton.*

Február 15.

RÖHR IRMTRAUD: *P csoportok.*

Március 5.

KÁNTOR SÁNDOR: *Versenyfeladatok megoldásának technikája.*
Matematikai délután

Április 16.

KÁNTOR SÁNDOR: *Az. 1964. évi országos matematika versenyek I. fordulója feladatainak megoldása.*
Matematikai délután.

Április 24.

RAPCSÁK ANDRÁS: *Bolyai geometria és térelmélet I.*
TIT-tel közös előadás.

Április 25.

GERHARD PAZDERSKI: *Über die maximalen Untergruppen einer endlichen Gruppe.*

Április 28.

N. I. KOVANCOV: *A geometria fejlődése a Szovjetunióban.*

Április 20.

N. I. KOVANCOV: *Egyenes komplexusok geometriája.*

Május 14.

RAPCSÁK ANDRÁS: *Bolyai geometria és térelmélet II.*
TIT-tel közösen.

Május 20.

PÉTER RÓZSA: *A matematikai grammatikák fogalmainak rekurzivitásáról.*

Május 26.

HAJÓS GYÖRGY: *Menger tételének új bizonyítása.*

Május 28.

T. SÓS VERA: *Egy gráfelméleti problémáról.*

Május 29.

TURÁN PÁL: *Az iker-prím problémáról.*

Június 5.

RAPCSÁK ANDRÁS: *Bolyai geometria és térelmélet III.*
TIT-tel közös előadás.

Június 13.

VARGA OTTÓ: *Finsler-féle terek Minkowski metrikával rendelkező hiperfelületeinek jellemzése.*

Június 23.

FENYŐ ISTVÁN: *Az analitikus funkcionálokról.*

Október 10.

AL. CLIMESCU: *Lineáris és kvadratikus programozás.*

Október 14.

LUCIAN TUDORA: *A másodrendű valós algebrák egy osztályozásáról.*

Október 14.

O. KELLER: *A homológia csoportok meghatározása projekciók segítségével.*

Október 19.

MOÓR ARTHUR: *Autoparalel görbék burkoló felületéről.*

November 10.

KÓNYA ISTVÁN: *A matematika helye a tudományok rendszerében.*

November 12.

SZÉNÁSSY BARNA: *Csehszlovákiai kísérletek a matematika középiskolai anyagának és módszerének korszerűsítésére.*
Tanári továbbképző előadás.

November 30.

CSÁKÁNY BÉLA: *Modulusok primitív osztályai.*

December 3.

SZ. D. BERMAN: *Véges csoportok egész gyűrű feletti előállításai.*

1965. Február 23.

MAHMUD BAJRAKTAREVIC: *Über die Vergleichbarkeit der mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte.*

Február 24.

FREUD GÉZA: *A próbafüggvények módszere az approximációelméletben.*

Március 6.

RÉNYI ALFRÉD: *Ekvivalens eseménysorozatokról.*

Március 6.

ROLF SULANKE: *Schnittpunkte zufälliger Geraden.*

Március 30.

ÁDÁM ANDRÁS: *Az automaták matematikai elmélete.*
MTESZ-szel közös előadás.

Március 30.

DARÓCZY ZOLTÁN: *Matematikai élet az osztrák egyetemeken.* MTESZ-szel közös előadás.

Április 16.

HAJÓS GYÖRGY: *A matematika fejlődése hazánkban a felszabadulás óta.* TIT-tel közös előadás.

Május 4.

ILIE POPA: *Kétszeresen metrizált terekről.*

Május 7.

STROMMER GYULA: *Szerkesztések hiperbolikus síkon.*

Május 15.

TURÁN PÁL: *Statisztikus csoportelmélet.*

Május 17/ 18/ 19.

H. LOS: *Horizon in Dynamic Programierung.*

Május 25.

KALMÁR LÁSZLÓ: *Filozófiai kérdések a kibernetikával kapcsolatban.* TIT-tel közös előadás.

Május 27.

KALMÁR LÁSZLÓ: *Egy bonyolult algebrai struktúráról, amelyben a nyelv valamennyi szintjét érintő problémák megfogalmazhatók.*

Május 28.

VARGA OTTÓ: *Mozgó n-él módszer a Finsler geometriában.*

Május 29.

P. VINCENSIN: *Laplace-féle differenciálegyenletek geometriája.*

Szeptember 16.

N. KAWAGUCHI: *Metrikus differenciálgeometria.*

Október 1.

TÓTH IMRE: *A nem euklideszi geometria története.*

Október 7—9.

Valószínűségszámítási kollokvium a Kossuth Lajos Tudományegyetem rendezésében.

Október 7.

Megnyitó a rektori tanácsteremben.

RÉVÉSZ PÁL: *Nagyszámok törvényei.*

CSISZÁR IMRE: *Lokálisan kompakt topologikus csoportok véletlen elemei szorzatának aszimptotikus viselkedése.*

PERGEL JÓZSEF: *Határeloszlás tételek számelméleti függvényekre.*

MOGYORÓDI JÓZSEF: *Valószínűségi változók véletlen indexű sorozatainak határeloszlásairól.*

Október 8.

RÉNYI ALFRÉD: *Matematikai statisztika és információelmélet.*

RICHTER WOLFGANG: *Bemerkungen zum Null-Eins Gesetz.*

REIMANN JÓZSEF: *Néhány újabb eredmény a bolyongási problémákra vonatkozóan.*

SARKADI KÁROLY: *A normalitásvizsgálatról.*
CSÁKI ENDRE: *Az arcus sin. törvénnyel kapcsolatos néhány kérdésről.*
FRIDRICH ILONA: *Egy tömegkiszolgálási algoritmusról.*
TOMKÓ JÓZSEF: *Egy útkereszteződési problémáról.*

Október 9.

ARATÓ MÁTYÁS: *A stacionárius folyamatok néhány statisztikai problémájáról.*
RUDOLF BARTOSZYNSKI: *On Branching Processes and the Theory of Epidemic.*
MEDGYESSY PÁL: *Sűrűségfüggvény keverékének felbontásával kapcsolatos vizsgálatok jelen állásáról.*
KOMLÓS JÁNOS: *Valószínűségi változók sorozatairól.*
GYIRES BÉLA: *A korlátlanul osztható eloszlások fogalmának kiterjesztése nem független valószínűségi változókra.*
BÁRTFAI PÁL: *Az általánosított gejzír probléma megoldásáról.*
ARATÓ MÁTYÁS: *Felismerési problémák statisztikai vizsgálatáról.*
DARÓCZY ZOLTÁN: *Ekvivalens eseménysorozatok entrópiájáról.*

Október 10.

Kirándulás Tokajba.
Kívánság szerint a Református Kollégium Könyvtárának megtekintése.
Látogatás a Déri Múzeumban.

Október 13.

REINER FRITSCHE: *Ein galoische Zuordnung in der Theorie der Modulfunktionen 2. Grades.*

Október 13.

GÜNTHER SIETMANN: *A matematikai oktatás módszereiről.*
Pedagógustovábbképző előadás.

Október 26.

D. A. KAPPOS: *Bemerkungen zur Struktur stochastischer Räume.*

December 4.

S. GOLAB: *Über die Funktionalgleichung der verallgemeinerten homogenen Funktionen und einige Anwendungen auf die Komitanten Theorie.*

December 7.

MANFRED: TASCHE: *Fixpont tételek.*

December 7.

BERND BUCHHOLZ: *Fixpont tételek alkalmazása a differenciálgeometriában.*

December 10.

G. GHEORGHIEV: *„Reper mobile" alkalmazása a geometriában.*

December 17.

A. G. KUROS: *Újabb eredmények az univerzális algebrában.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Borsod Megyei Tagozatának előadásai 1964 és 1965 évben

Február 6.

SZEKERES JÓZSEF (Gépipari Technikum tanulója): *Permutáció és kombináció.*
RAISZ PÉTER (Földes Gimnázium tanulója): *Variáció.*
A Diákosztály rendezésében KELEMEN JÓZSEF vezetésével.

Február 14.

DRAHOS ISTVÁN: *Konjugált, konvex-konkáv fogfelületek kialakításának geometriai lehetősége.*
A Műszaki Matematikai Szakosztály rendezése.

Február 27.

Kombinatorikai feladatok megbeszélése.
A „Miskolci Ifjú Matematikusok Köre" rendezése.

Február 28.

HUSZTHY LÁSZLÓ: *Bütykös vezérlés analitikus vizsgálata.*
Műszaki Matematikai Szakosztály előadása.

Március 6.

MOÓR ARTHUR: *Harmadrendű pályageometriák objektumairól.*
A Tudományos Szakosztály előadása.

Március 12.

REIMAN ISTVÁN: *Vektorszámítás a középfokú oktatásban.*
A Középiskolai Oktatási Szakosztály rendezése.

Március 19.

Szerkesztési és bizonyítási feladatok megoldása az elforgatás módszerével.
A „Miskolci Ifjú Matematikusok Köre" rendezvénye.

Április 16.

RAISZ PÉTER (Földes Gimnázium tanulója): *Inverzió.*
A Diákszakosztály rendezése.

Április 30.

Mértani helyek meghatározása.
Feladatmegoldások, a Diákszakosztály rendezvénye.

Május 6—7.

Tapasztalatcsere látogatás a Heves megyei tagozattal.

Május 14.

Beszámoló külföldi utakról és klubdélután a társulati élet problémáiról.
A Középiskolai Oktatási Szakosztály és a klubszakosztály rendezésében.

Május 22—23.

PETRICH GÉZA: *Torz négyszögek szerkesztése.*
Középiskolai Oktatási Szakosztály előadása.

Május 22.

SZABÓ JÁNOS: *Világnézeti nevelés a középiskolai fizika oktatásában.*
A Középiskolai Oktatási Szakosztály előadása Sárospatakon.
SZABÓ ÁRPÁD: *Az euklideszi arányelmélet kibontakozása.*
RAISZ IVÁN: *Táblázatok használata, lineáris interpolálhatóság.*

Május 22.

GÁSPÁR GYULA: *A műszaki matematikai reform célkitűzései és eddigi eredményei.*
(Az előadást RAISZ IVÁN olvasta fel az előadó betegsége miatt.)
KÁLMÁN LÁSZLÓ—HNISZ LÁSZLÓ: *Matematika tanításunk feladatai és törekvése a felsőfokú továbbtanulás szempontjából.*

Az előadássorozatot a Középiskolai Oktatási Szakosztály rendezte, Sárospatakon, a gimnáziumban.

Szeptember 24.

KELEMEN JÓZSEF: *Logikai feladatok.*
ERDÉLYI ZOLTÁN: *Számelméleti feladatok.*
A Diákosztály előadása, az MTESZ-ben.

Október 4.

Tapasztalat csere-látogatás Szerencsen, Tokajban, a tagozat helyi csoportjainál és Tolcsván.
Valamennyi Szakosztály közös rendezésében.

Október 15.

ERDÉLYI ZOLTÁN: *Számelméleti feladatok.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

Október 16.

BURÁNY JÁNOS: *Művelettervezés tipizálása és számológép alkalmazása szabadalakító kovácsolásra.*

Október 22.

KELEMEN JÓZSEF: *Faktoriális binomiális együtthatók, binomiális tétel.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

Október 23.

SZÉP JENŐ: *Egységelemes félcsoportokról.*
A Tudományos Szakosztály előadása.

November 5.

VINCZE ENDRE: *Inverz függvények és tulajdonságaik.*
A Középiskolai Oktatási Szakosztály előadása a MTESz-ben.

November 6.

BORBÉLY SAMU: *A felsőoktatás néhány jellegzetessége a Német Demokratikus Köztársaságban, különös tekintettel a matematika oktatására.*

Noevmber 8.

M. KUCHARZEWSKI (Lengyelország): *A J típusú homogén lineáris geometriai objektumok klasszifikációjáról.*
A Tudományos Szakosztály előadása.

November 13.

DARÓCZY ZOLTÁN: *Függvényegyenletek alkalmazása a valószínűségszámításban.*
A Tudományos Szakosztály rendezésében.

November 13.

HUSZTHY LÁSZLÓ: *Az „e" szám és néhány műszaki alkalmazása.*
A Diákszakosztály rendezése Sárospatakon a Rákóczi Gimnáziumban.

November 18.

KÁLMÁN LÁSZLÓ: *A gimnáziumok I. osztálya számára készülő új tankönnyvvel kapcsolatos problémák ismertetése.*
Az Általános iskolai Szakosztály rendezése a Nevelők Házában.

November 19.

ERDÉLYI ZOLTÁN: *A kombinatorika és a valószínűségszámítás elemei.*
A Diákszakosztály rendezése a Zrínyi Gimnáziumban.

November 20.

Közös klubdélután az Olajtermeléstani Tanszék munkatársaival.

November 26.

KELEMEN JÓZSEF: *Prímszámok.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

December 3.

HORVAY KATALIN: *A gimnázium I. osztálya számára készülő új matematikai tankönyv ismertetése.*
A Középiskolai Oktatási Szakosztály rendezése az MTESZ-ben.

December 9.

KISS BARNA: *Lineáris programozás.*
A Diákszakosztály előadása a sátoraljaújhelyi Közgazdasági Technikumban.

December 10.

ERDÉLYI ZOLTÁN: *A vektorokról.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

December 11.

PETRICH GÉZA: *Negyedrendű gömbi görbék kettős vetületei.*
A Tudományos Szakosztály előadása.

December 17.

KELEMEN JÓZSEF: *Oszthatóság.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

Január 21.

ERDÉLYI ZOLTÁN: *A gömbháromszögtan elemei.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

Január 28.

KELEMEN JÓZSEF: *Számrendszerek.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

Február 10.

RICHTENBACHER ÖDÖN: *Csoportos foglalkozás a matematika órákon.*
Az Általánosiskolai Oktatási Szakosztály előadása a Nevelők Házában.

Február 18.

ERDÉLYI ZOLTÁN: *Kúpszeletek néhány tulajdonsága.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

Február 19.

VINCZE ENDRE: *Alternatív függvényegyenletek néhány problémájáról.*
A Tudományos Szakosztály rendezése.

Február 25.

KELEMEN JÓZSEF: *Elsőfokú diofantoszi egyenletek.*
A Diákszakosztály rendezése a Zrínyi Gimnáziumban.

Február 26.

HARASZTI REZSŐ: *Összehasonlító szögsebességmérés takarási görbékkel.*
A Tudományos Szakosztály előadása.

Március 4.

CSER ANDOR: *Az analízis középiskolai tanításáról.*
A Középiskolai Oktatási Szakosztály rendezése az MTESZ-ben.

Március 10.

RADITS ERZSÉBET: *Közelítőszámítások tanítása a középiskolában.*
A Középiskolai Oktatási Szakosztály előadása Ózdon, a Gimnáziumban.

Március 18.

ERDÉLYI ZOLTÁN: *Elemi szélsőérték számítás.*
A Diákszakosztály rendezése a Zrínyi Gimnáziumban.

Március 19.

HUSTHY LÁSZLÓ: *Fogaskerekek szerkesztése minimális súrlódási munka alapján.*
A Műszaki Matematikai Szakosztály rendezése.

Március 23.

BATÁR ZOLTÁN: *Sorozatok és sorok.*
A Diákszakosztály rendezése a Gimnáziumban, Mezőkövesden.

Március 25.

KELEMEN JÓZSEF: *Diofantoszi egyenletek.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

Április 5.

RADITS ERZSÉBET: *Az oktatás és nevelés követelményeinek egysége a matematika órákon.*
A Középiskolai Oktatási Szakosztály előadása.
JÁNOSSY LAJOS: *Az új tanterv alapelveiről.*
KÁRTESZI FERENC: *Az új tanterv alapelveiről.*

Április 6.

URBÁN BARNA: *A matematika tanítás eredményességének főbb tapasztalatai.*
DARKÓ BÉLA: *Az érdeklődés felkeltése az órán feladott példákon keresztül.*
ÁCS PÁL: *Az új tanterv előkészületei.*
NAGY ANTAL: *A szemléltetésről.*
SZABÓ KÁLMÁN: *A matematika és fizika tantervének összefüggései.*
Az előadássorozatot a Középiskolai Oktatási Szakosztály rendezte.

Április 8.

FREY TAMÁS: *Közelítő módszerek optimalizálásának és stabilitásának elvi és gyakorlati módszere.*
A Tudományos Szakosztály rendezése.

Április 23.

KERTÉSZ ANDOR: *Univerzális algebrák.*
A Tudományos Szakosztály rendezése.

Április 29.

SARLÓSKA VINCZE ERNŐ: *A két Bolyai száz esztendő távlatából.*

Május 14.

HIDASI KÁROLY: *Térelemektől egyenlő távolságra levő térelemek mértani helyei.*
A Tudományos Szakosztály rendezése.

Május 28.

GÁSPÁR GYULA: *Tapasztalatok és elgondolások a Bányamérnöki Karon az Olajbányász Szakon bevezetett IX. féléves matematika oktatásról.*

Október 1.

CSŐSZ RÓZA: *Játék a számjegyekkel.*
A Diákszakosztály rendezése a Földes Ferenc Gimnáziumban.

Október 3.

Tapasztalatcsere-látogatás a debreceni tagozatnál.
KERTÉSZ ANDOR: *A Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézetének oktató nevelő-munkájáról.*
MESTER ISTVÁN: *A Debrecen város és Hajdú-Bihar megye középiskoláiban. folyó matematikai oktatásról.*

Október 5.

KISS BARNA: *Lineáris programozás. I.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

Október 7.

HUSZTHY LÁSZLÓ: *Köszörült csigafelület analitikus vizsgálata.*
A Műszaki Matematikai Szakosztály rendezése.

Október 22.

Logikai feladatok.
A Diákszakosztály rendezése a Földes Ferenc Gimnáziumban.

Október 22.

OBÁDOVICS J. GYULA: *A determináns értékének gyakorlati kiszámításáról.*
A Tudományos Szakosztály előadása.

Október 26.

KISS BARNA: *Lineáris programozás. II.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

November 5.

SALÁNKI JÓZSEF: *Gyakorlati foglalkozások matematikából a műszaki felsőoktatásban.*
A Műszaki Matematikai Szakosztály rendezése.

November 9.

ERDÉLYI ZOLTÁN: *Matematikai paradoxonok.*
A Diákszakosztály előadása a Zrínyi Gimnáziumban.

November 10.

RAISZ IVÁN: *Egyenlőtlenségek.*
A Középiskolai Oktatási Szakosztály előadása a MTESZ-ben.

November 11.

RÓZSA PÁL: *Periodikus kontinuáns mátrixokról és azok alkalmazásáról.*
A Tudományos Szakosztály előadása.

November 12.

CSŐSZ RÓZA: *Számrendszerek.*
A Diákszakosztály előadása a Földes Ferenc Gimnáziumban.

November 19.

MESZÉNA GYÖRGY: *Valószínűségszámítási és programozási modelek.*
A Tudományos Szakosztály előadása.

November 26.

A matematika és a műszaki tudományok.
Klubest.

December 3.

MAKAI ENDRE: *Hermite polinomok viselkedésének vizsgálata e polinomok differenciálegyenlete segítségével.*
A Tudományos Szakosztály előadása.

December 10.

CSŐSZ RÓZA: *Oszthatóság. I.*
A Diákszakosztály előadása a Földes Ferenc Gimnáziumban.

December 10.

KÓSA ANDRÁS: *A variációszámítás invariáns függvényeiről.*
A Tudományos Szakosztály előadása.

December 14.

VINCZE ENDRE: *Kis történetek nagy matematikusokról.*

December 17.

LOSONCZI LÁSZLÓ: *Lineáris függvényegyenletek és általánosításaik.*
A Tudományos Szakosztály előadása.

December 17.

HNISZ LÁSLÓ: *A pályaválasztással kapcsolatos tanácsadások.*
A Diákszakosztály előadása Szerencsen, a Gimnáziumban.

A Bolyai János Matematikai Társulat Pécsi Tagozatának előadásai 1964 és 1965 évben

Január 15.

VIGASSY LAJOS: *Geometriai transzformációk.*

Február 5.

SARLÓSKA ERNŐ: *Bolyai János száz esztendő távlatából.*
BAGYINKA MÁRIA: *A főiskolai felvételi vizsgák tapasztalatai.*

Április 14.

Tapasztalatcsere-látogatás a veszprémi kartársakkal.
Szakköri munka megfigyelése.
JÁNOSSY LAJOS: *A fény természetéről.*
(Városi szintű szakköri foglalkozás meglátogatása).
Pécsi Nemzeti Színház műsorának megtekintése.

Április 15.

Óralátogatások a pécsi középiskolák nappali tagozatán. Esti és levelező tagozati órák látogatása. Közös vacsora a Nádor Étteremben.

Április 16.

Városnézés, mecseki séta.

PRÉKOPA ANDRÁS: *Egyszerű módszerek bizonyítása gazdasági problémák megoldásához*

Klubdélután.

Közös vacsora az Olimpiában.

Április 17.

A tapaszlatacsere befejezése.

Óralátogatások a Leöwey és Janus Gimnáziumokban.

Május 20.

GÁDOR EDRÉNÉ: *A tantervvel kapcsolatos néhány probléma.*

HORVAY KATALIN: *Az új elsőosztályos gimnáziumi tankönyvről.*

A tanév folyamán KAMARÁS LAJOS kartárs tartott kéthetenként középiskolai matematikai délutánokat.

Szeptember 14.

DR. PÓDA BÉLA: *Az új tanév feladatai.*

Október 27.

CSER ANDOR: *Analízis tanítása a középiskolában.*

November 24.

GÁDOR ENDRÉNÉ: *A tanulók értékelése és osztályozása.*

HÓDI ENDRE: *Egyenlőtlenségek.*

December 7.

REMÉNYI GUSZTÁVNÉ: *Szakköri bemutató ált. isk. tanárok számára.*

December 28.

MÉSZÁROS LÁSZLÓ: *A szemléletes oktatásról.*

ÁCS PÁL: *Beszámoló az új tankönyv tanítása kapcsán szerzett tapasztalatokról.*

HITES FERENC: *Tapasztalatok a felnőttoktatásban.*

1965. Január 28.

PRÉKOPA ANDRÁS: *Optimális táplálási problémák megoldása matematikai módszerekkel.*

Február 12.

REIMAN ISTVÁN: *Szakköri bemutató. Szerkesztési feladatok.*

Február 17.

MARÓTH REZSŐ: *Paraméteres egyenletek megoldása, a diszkusszió fontossága.*

SIMON ISTVÁN: *Világnézeti nevelés a matematika órán.*

VÖRÖS GYÖRGY: *Geometriai szerkesztések* (Bemutató tanítás).

Február 24.

REMÉNYI GUSZTÁV: *Szakköri bemutató. Algebrai feladatok.*

Március 8 és 22.

REIMAN ISTVÁN: *Bolyai délutánok.*

Március 24.

PRÉKOPA ANDRÁS: *Valószínűségszámítás.*

Előadás Kaposvárott.

Április 5.

PÁLMAY LÓRÁND: *Az új elsőosztályos tankönyvről.*

Április 7.

HORVAY KATALIN: *Az új II. o. tankönyv.*
CSER ANDOR: *A tanítás eredményességének vizsgálata.*
SELÉNYI GÉZA: *Középiskolai anyag egy egységének programozása.*

Április 22.

REIMAN ISTVÁN: Szakköri bemutató, Kaposvár.

Április 27.

REIMAN ISTVÁN: *Bolyai délután.*

Május 20.

REMÉNYI GUSZTÁV: *Bolyai délután középiskolásoknak.*

Szeptember 20.

KALMÁR LÁSZLÓ: *A matematika oktatás szerepe a világnézeti nevelésben.*
KALMÁR LÁSZLÓ: *A kibernetika műszaki és természettudományi alkalmazásai.*

Október 29.

SZENDREI JÁNOS: *Logikai műveletek szemléltetése.*

November 2.

GÁDOR ENDRÉNÉ: *Beszámoló a francia és angol középiskolákban szerzett tapasztalatokról.*
HÓDI ENDRE: *Az egyenlőtlenségekről.*

November 9.

REIMAN ISTVÁN: *Bolyai Délután I.*

November 16.

REIMAN ISTVÁN: *Bolyai Délután II.*

December 30.

PÁLMAY LORÁNT: *Az I. oszt. tankönyv tanításának tapasztalatai.*
ERHARDT IMRE: *Korszerű módszerek ismertetése.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Veszprémi Tagozatának előadásai 1964 és 1965 évben

Január 20.

BALÁZS JÁNOS: *Előadás az approximációelmélet témaköréből.*

Március 5.

KNOLL JÁNOS: *Szöveges egyenletek megoldásának tanítása.*

Május 15.

MOLNÁR JÓZSEF: *Újabb eredmények a diszkrét geometriában.*

1965. Január 15.

SZABÓ ÁRPÁD: *Az aránylemélet kezdetei.*

Január 20.

MESZÉNA GYÖRGY: *Előadás a lineáris programozás témaköréből.*

Május 17.

KÓSA ANDRÁS: *Az analízis elemeinek oktatása a középiskolában.*

Május 24.

HORVAY KATALIN: *A vektorok tanítása a középiskolában.*
Február 27.

A Bolyai János Matematikai Társulat Győri Tagozatának előadásai 1964 és 1965 évben

HEPPES ALADÁR: *Izoperimetrikus problémákról.*

Március 4.

MOLNÁR ERNŐ: *Feladatmegoldások.*
Előadás a Bottyán János Gépipari Technikumban középiskolai tanárok és érdeklődő diákok számára, Esztergomban.

Március 19.

KÓSA ANDRÁS: *Néhány elemi variációs feladat.*
Diákdélután a Révai Miklós Gimnáziumban.

Április 29.

BODOCS ISTVÁN: *A bolygómozgás sebességének egyszerű levezetése és alkalmazása a fény gravitációs problémáinak elemi tárgyalására.*
GÁDOR ENDRÉNÉ: *A sík-és térmértan tanítása az új tanterv alapján.*
Egész napos rendezvény a Soproni Tagozat látogatása alkalmából.

Május 28.

Általános iskolai tanulmányi verseny.

Június 5.

MOLNÁR ERNŐ: *Beszámoló az általános iskolai matematikai tanulmányi versenyről*

Október 8.

BODOCS ISTVÁN: *A fény gravitációs problémái és Einstein relativitás elméletének vitás kérdése.*

Október 27.

MOLNÁR ERNŐ: *Feladatok a számelmélet köréből.*
Diákdélután a Révai Miklós Gimnáziumban.

November 11.

BÉKÉSSY ANDRÁS: *Elektronikus számológépek programozásának alapelvei.*

December 10.

SZAKÁL PÉTER: *Szakköri foglalkozás az általános iskolások részére.*

December 7.

MOLNÁR ERNŐ: *Élménybeszámoló az NDK-ban tett tapasztalatcsere-útról.*

December 16.

KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA: *A szállítási probléma egy speciális esete.*

Február 9.

MARÓT REZSŐ: *Paraméteres egyenletek.*
Diákdélután a Révai Miklós Gimnáziumban.

Március 2.

MOLNÁR ERNŐ: *Egyenlőtlenségek.*
Diákdélután a Révai Miklós Gimnáziumban.

Március 16.

MOLNÁR ERNŐ: *Egyenlőtlenségek.*
Diákdélután a tatabányai Technika Házában.

Március 18.

DOZMATI JÓZSEFNÉ, BARABÁS SAROLTA, MARÓT REZSŐ: *Az új matematikai tanterv és tankönyv.*
Továbbképzési nap az Oktatási Osztállyal közös rendezésben.

Május 25.

Általános iskolások matematikai versenye.

Május 31.

MOLNÁR ERNŐ: *Az általános iskola VIII. osztályos tanulói számára rendezett matematikai verseny kiértékelése.*

Október 13.

MOLNÁR ERNŐ: *Másodfokú diofantikus egyenletek.*
Diákdélután a Révai Miklós Gimnáziumban.

Október 18.

KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA: *Lineáris programozás.*
A TIT-tel és az Oktatási Osztállyal közös rendezésben.

Október 25.

MOLNÁR ERNŐ: *Másodfokú diofantikus egyenletek.*
Diákdélután az esztergomi I. István Gimnáziumban.

November 24.

MOLNÁR ERNŐ: *Az 1965. évi Kürschák-verseny feladatai.*
Diákdélután a Révai Miklós Gimnáziumban.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Könyvismertetés

PACH ZS. PÁLNÉ—FREY TAMÁS
Vektor és tenzoranalizis
(2. bővített kiadás)
Műszaki Könyvkiadó, 1964, 726 oldal.
KLÁRA PACH—TAMÁS FREY: **Vector and Tensor Analysis**
Terra, 1964, 596 pp.

A tudomány és technika fejlődése egyre több matematikai probléma elé állítja a tervező és kivitelező mérnököket. A műszaki kérdések matematikai megfogalmazása elsősorban a mérnökök feladata, azonban e feladatok megoldásához a matematikus nyújthat és nyújt segítséget. E gyümölcsöző együttműködést segíti elő kiválóan Pach Zs. Pálné és Frey Tamás könyve, amely a mérnöki gyakorlatban nagyon sokszor alkalmazható vektor- és tenzoranalízist foglalja össze oly módon, ahogyan az a (főleg mérnöki) gyakorlatban valóban előforduló problémáknak a legjobban megfelel.

A könyv hat fejezetből áll.

Az első fejezet a *Vektoralgebra* címet viseli, és három részre oszlik. Az első részben a vektoralgebra koordinátamentes felépítése, a második részben a vektoralgebra koordinátás összefoglalása található meg. A vektoralgebrának az analitikus geometriában való alkalmazását a harmadik rész ismerteti. Itt szóba kerülnek a különböző térelemekkel (pont, egyenes, sík) kapcsolatos metszési (metszéspont, döféspont, metszésvonal) és méretes (távolság, terület, térfogat, hajlásszög), valamint vetület és tükörkép feladatok.

A második fejezet a *vektor-skalár függvényekkel* foglalkozik. A vektor-skalár függvény értelmezése és szemléltetése után a legfontosabb alapfogalmak (határérték, folytonosság, differenciálhányados), a deriváltvektor geometriai (érintővektor, térgörbe ívhossza, görbülete, simulósík, torzió) valamint fizikai alkalmazásai (sebességvektor és ennek felbontása, néhány egyszerű mozgás tárgyalása stb.) kerülnek részletes tárgyalásra.

A skalár-vektor függvények (skalárterek) összefoglalása alkotja a harmadik fejezet anyagát. Az első részben a skalár-vektor függvények elemi vizsgálata (ábrázolás, határérték, folytonosság), a második részben a gradiens vektor értelmezése, tulajdonságai és fizikai alkalmazásai kerülnek sorra.

A vektor-vektor függvények című terjedelmes negyedik fejezet két részre oszlik. A vektormezők leíró jellemzése című részben az alapfogalmak után a különböző (skalár- illetve vektor értékű) vonalmenti és felületi integrálok definíciója, kiszámítása, majd a vektorterek jellemzőinek (divergencia, rotáció) és az integrálredukciós tételeknek (Stokes tétele, Gauss—Osztrogradszkij-tétel) bemutatása következik. A második részben a szerzők a tenzorszámítás eszközeivel vizsgálják a vektortereket. E célból először részletesen tárgyalják a tenzor fogalmát, a tenzoraritmetika és tenzoralgebra alapvető fogalmait és tételeit, majd a deriválttenzorral kapcsolatos ismereteket (differenciálási szabályok, szélsőértékek, differenciálgeometriai vizsgálatok). A fejezet végén többváltozós vektor-vektor függvényekről is szó esik.

Az ötödik fejezet *a tenzoranalízis* összefoglalását adja. Az első részben a tenzormezők definíciója és az alapfogalmak után az integrálfogalom különböző általánosításai, a tenzortér divergenciája és a harmadrendű tenzorok részletes tárgyalása szerepel. A második részben az integráltételek és következményeik, a harmadikban a nemstacionárius (időben változó) vektorterek és ezek hidrodinamikai, elektrotechnikai, szilárdságtani, valamint geometriai alkalmazása, az utolsó részben a potenciálelméleti (Green-tételek, potenciálelméleti feladatok megoldása) ismeretek kerülnek összefoglalásra.

A *Vektoranalízis több dimenziós és görbült terekben* című utolsó fejezet a transzformációk általános ismertetését, az affin és általános görbült terek tulajdonságait, ezeknek a tereknek az euklideszi térbe való beágyazását és az ezekben a terekben végezhető differenciálást és integrálást mutatja be. A fejezet végén a több dimenziós terekre történik rövid utalás.

A könyvet bőséges tárgymutató zárja.

A könyv a feldolgozott anyagot nagyon ügyes módon ismerteti. Minden nagyobb anyagrészben (legtöbbször a rész elején) egy-egy, a fogalmakat különböző szemszögből megvilágító, a nehézségekre és belső összefüggésekre rámutató, az alkalmazások szempontjából esetlegesen lényeges részeket kiemelő könnyed (szinte népszerű) stílusban megfogalmazott nagyon szemléletes bevezetés, illetve összefoglalás található. Ezek a maximális tömörségre nem törekvő bevezetések, illetve megjegyzések lényegesen emelik a könyv közérthetőségét és használhatóságát és ezen keresztül vonzóerejét és népszerűségét. Az anyag ismertetését, az egyes tételek és összefüggések kimondását mindenütt szigorú, pontos és teljesen szabatos bizonyítások követik, de ezek jó része (különösen a hosszabb és nehezebb bizonyítások szövege) apróbetűs szedésű, és így a tájékozódó jellegű olvasásnál vagy az alkalmazások tanulmányozásánál könnyen kihagyható.

Minden fejezethez (a fejezetbe beledolgozva vagy a fejezet végén) sok kidolgozott példa és kitűzött feladat tartozik (a könyvben összesen több mint 370 példa és feladat van). A kidolgozott példák tanulmányozása, illetve a kitűzött feladatok kidolgozása nagyban elősegíti a könyv anyagának még jobb megértését. A feladatok összeállítása olyan, hogy a megoldásokban eleinte a numerikus munka dominál, majd ez fokozatosan csökken, és növekszik az elméleti megfontolásokra nevelő feladatok száma. Kár, hogy a nehezebb anyagrészekhez egyre kevesebb kidolgozott példa tartozik.

A könyv beosztása, hangvétele és stílusa egyaránt — véleményem szerint — kézzel fogható jó példa arra, hogyan lehet egy aránylag nehéz matematikai anyagot a szigorú tudományos mérce megtartása mellett közérthető, sőt nemcsak a matematikus olvasók számára élvezetes módon előadni. Külön dicséret illeti a könyv 169 ábrájának (névtelen) kivitelezőjét, mert könnyen áttekinthető ábrákkal segítette a néha nehezen szemléltethető anyagrészek jobb megértését.

A könyv — amint arra már céloztunk — főleg a mérnökök mindennapi munkájához és a mérnökhallgatók eredményes matematikatanuláshoz kíván segítséget nyújtani, de eredményesen felhasználhatják tanulmányaikhoz a tudományegyetemek matematika, fizika és kémia szakos hallgatói is.

A könyv említett jó tulajdonságai joggal késztették arra az Akadémiai Kiadót, hogy a könyvet egy kis formai változtatással (nagyobb formátum; a terjedelmes negyedik fejezetet két részre osztották és így ez a kiadás hét fejezetet tartalmaz; a bizonyításokat, példákat és feladatokat nem szedték apró betűkkel) angol nyelven is kiadja a másodiknak említett címmel. Nem kell különösebb jóstehetség ahhoz, hogy az angol kiadásnak komoly nemzetközi sikert jósoljunk.

Scharnitzky Viktor

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Merkly László
A kézirat beérkezett: 1966. IV. 6. — Példányszám: 1400 — Terjedelem: 15,75 (A 5) ív

Szegedi Nyomda Vállalat 66-6244

ОГЛАВЛЕНИЕ

Иван Шереш: Неприводимость некоторых многочленов 1
Шолем Манделбройт и Лоран Шварц: Жак Адамар (1865—1963) ... 6
Пал Туран: О некоротых проблемах сравнительной теории простых чисел 19
Альфред Реньи: Применения конечных геометрий в комбинаторике I. 33
Ференц Гечег и Иштван Пэак: Алгебраическая теория автоматов .. 77
Пал Эрдёш: Примечания к теории чисел V. Экстремальные задачи в теории чисел II. 135
Ласло Цах: О полноте систем ортогональных многочленов 156
Ласло Векерды: О методе Декарта конструирования касательных ... 165
Ласло Лошонци: Линейные функциональные уравнения; их некоторые обобщения и приложения 180
Задачи 215
Из жизни общества 223
Рецензии книг 250

CONTENTS

I. Seres: On the irreducibility of certain polynomials 1
S. Mandelbrojt and L. Schwartz: Jacques Hadamard (1865—1963) 6
P. Turán: On some problems of the comparative prime-number theory 19
A. Rényi: Combinatorical applications of finite geometries I. 33
F. Gécseg and I. Peák: The algebraic theory of automates 77
P. Erdős: Remarks on number theory V. 135
L. Czách: On completeness of systems of orthogonal polynomials 156
L. Vekerdi: A dialogue between Fermat and Descartes: the methods of maxima-minima and of tangents 165
L. Losonczi: Applications and some generalizations of linear functional-equations 180
Problems 215
Activity of the Society 223
Book-review 250

Ára 12 Ft.
Előfizetés évi 20 Ft

INDEX: 25.564

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat, a kért különlenyomatok számának megjelölésével, feltétlenül jelentsék be.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda 1. számú Hírlapboltjában, Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76.

A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL,
Budapest V. József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban*
Csekkszámlaszám egyéni: 61.257, közületi: 61.066. MNB egyszámlaszám: 8.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest V., Alkotmány u. 21. telefon: 111-010.
Csekkbefizetési számla: 05,915,111-46. MNB egyszámlaszám: 46.
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest V., Váci u. 22. telefon: 185-612

312.046

MATEMATIKAI LAPOK

XVII. ÉVFOLYAM

3-4.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1966

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer. Budapest, 1966. november, XVII. évfolyam 3—4. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rapcsák András, Rényi Alfréd.
Szerkesztőség: Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest V., Alkotmány utca 21. III. Telefon: 111—010.
A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.
A kiadvány előfizethető vagy példányonként megvásárolható:
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest V., Alkotmány utca 21; telefon: 111-010; MNB egyszámlaszám: 46; csekkbefizetési számla: 05.915.111-46;
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, Budapest V., Váci u. 22; telefon: 185-612;
a POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODA 1. számú HÍRLAPBOLTJÁ-ban, Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76 és *bármely postahivatalban.* Csekkszámlaszám: egyéni 61.257, közületi: 61.066, MNB egyszámlaszám: 8.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

HAJNAL ANDRÁS: A kontinuum-problémára és a kiválasztási axiómára vonatkozó axiomatikus vizsgálatok történetéről és jelenlegi állásáról 253
VISKI MÁRIA: Szinguláris homológiák I. 261
SZÉNÁSSY BARNA: Társulatunk 75 éve 295
FENYŐ ISTVÁN: Disztribuciók, operátorok III. 309
DARÓCZY ZOLTÁN: Az $f[x+yf(x)]=f(x)f(y)$ függvényegyenlet folytonos megoldásairól Hilbert-terekben 339
Jelentés az 1965. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről 344
Feladatrovat 367
Hírek 373
Társulati élet 381
Könyvismertetés 406

A kontinuum-problémára és a kiválasztási axiómára vonatkozó axiomatikus vizsgálatok történetéről és jelenlegi állásáról

HAJNAL ANDRÁS

Ennek a dolgozatnak az a célja, hogy rövid történeti áttekintés után, az érdeklődő — de a szűkebb szakterületen nem jártas — olvasó számára ismertesse P. Cohen a kontinuum-probléma és a kiválasztási axióma függetlenségére vonatkozó új eredményeit.

Cohen dolgozata 1963-ban jelent meg és azóta hatásos módszerének számos alkalmazása született. Nem vállalkozunk arra, hogy ezek közül az eredmények közül akár csak a legjelentősebbekről is módszeres vagy teljes áttekintést adjunk. A Cohen-módszer hatását csak kiragadott példákkal tudjuk illusztrálni.

A halmazelmélet a matematika azon ritka ágai közé tartozik, melynek alapjait egyetlen zseniális gondolkodó alkotta meg és dolgozta ki. Georg Cantor a múlt század 70-es éveiben írott dolgozataiban definiálta a halmazelmélet alapfogalmait és bizonyította klasszikus tételeit. Munkásságának hatása felmérhetetlen, hiszen a halmazelméleti gondolkodásmód forradalmasította és megváltoztatta az egész matematikát és a matematikai szemléletet is. A modern matematika szinte valamennyi ága, felépítésében, problematikájában, módszereiben explicite vagy implicite használja a cantori gondolatokat.

Cantor egyik alapvető módszere, az ún. diagonális eljárás segítségével bebizonyította, hogy egy tetszőleges végtelen halmaz számossága mindig kisebb, mint hatványhalmazának (összes részhalmazai halmazának számossága) vagy másként, halmazelméleti jelöléseket használva: bármely m végtelen számosságra $m < 2^m$. Ha m speciálisan a természetes számok halmazának számossága, melyet $\aleph_0$-al szokás jelölni, akkor ez az állítás azt mondja, hogy

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

Ismeretes, hogy a $2^{\aleph_0}$ számosság a valós számok halmazának számossága. Ezt szokás index nélküli $\aleph$-el jelölni. Természetes, hogy már Cantor felvetette azt a problémát, hogy van-e $\aleph_0$ és $\aleph$ között más számosság. Ez a probléma számosság-jelölés nélkül így fogalmazható. Van-e a valós számok halmazának olyan részhalmaza, mely sem a természetes számok, sem a valós számok halmazával nem ekvivalens?

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

E problémát Cantor *kontinuum-problémá*nak nevezte és azt sejtette, hogy a válasz nem, azaz $\aleph_0$ és $\aleph$ között nincs számosság. Ezt a sejtést *Cantor*-sejtésnek nevezik.

Hamarosan kiderült azonban, hogy ez a probléma nem könnyű és valószínű, hogy a halmazelmélet új ideái, bármilyen hatalmas erejűek is, nem lesznek elegendők e probléma megoldásához.[1]

Kiderült az is, hogy egyetlen m végtelen számosságról sem tudják megállapítani, hogy m és 2^m között van-e számosság. Ez az általánosított *kontinuum-probléma.* Az a sejtés, hogy a válasz minden m-re tagadó, az *általánosított Cantor-sejtés.* Azt a feltevést, hogy m és 2^m között nincs számosság, *általánosított kontinuum-hipotézis*nek nevezik.

Abban az időszakban, amikor a kontinuum-problémát ún. „naív" halmazelméleti, tehát nem axiomatikus módszerekkel vizsgálták, kiderült, hogy e probléma nemcsak egyszerűségénél fogva alapvető jelentőségű, hanem számtalan más — a matematika különböző ágaiban felmerülő — problémával való ekvivalenciája miatt is. Ezekről az összefüggésekről szól W. Sierpinski [1] könyve és az [1] könyv megjelenése óta megjelent eredményekből még több újabb kötetet lehetne írni.

A halmazelmélet antinómiáinak felfedezése közben elvezetett a matematikai logika szabatos felépítéséhez, és a halmazelmélet axiomatizálásához. Zermelo, Fraenkel, Neumann, Bernays, Gödel és mások munkássága nyomán kialakultak a halmazelmélet olyan különböző — de lényegében egyenértékű — axiómarendszerei, melyekben a cantori halmazelmélet felépíthető, de az ismert antinomiák nem vezethetők le. Ezeknek két alaptípusa a Zermelo—Fraenkel-, illetőleg a Bernays—Gödel-féle axiómarendszer. Ezek közül az első két alapfogalommal, a „halmaz" és az „elem" reláció fogalmával dolgozik. A másodikban ezeken kívül még az osztály fogalma is szerepel.[2]

Szempontunkból itt most az a lényeges, hogy ezek az axiómarendszerek *gyakorlatilag* teljesek. Ez alatt most azt értjük, hogy minden olyan fogalom definiálható bennük és minden olyan tétel levezethető ezekre a fogalmakra vonatkozóan, amelyet valaha gyakorló matema-

[1] A „hamarosan" kifejezést történelmi értelemben használtuk. Nehéz volna határozott időpontot megállapítani. 15—40 éves periódusról lehet szó. Érdemes itt megemlíteni, hogy azon a problémán, hogy a valós számok halmaza megszámlálható-e, Cantor kb. 3 évig gondolkozott, és hosszú ideig azt akarta bizonyítani, hogy megszámlálható.

[2] A halmazelmélet különböző axiómarendszereiről a Matematikai Lapokban számos ismertető cikk jelent meg, lásd pl. [2], [3], [4].

tikus, meta-matematikai módszerek használata nélkül definiált, illetve bizonyított.[3]

Ez a tény és a matematikai logika módszerei együttesen lehetővé teszik annak a kérdésnek a vizsgálatát, hogy mai matematikánkon belül megoldható-e a kontinuumprobléma. A nemleges választ úgy kell szabatosan megfogalmaznunk, hogy ha a halmazelmélet szokásos axiómarendszerei egyáltalában ellentmondástalanok, akkor ellentmondástalanok maradnak akkor is, ha akár a kontinuum hipotézist, akár annak tagadását az axiómákhoz új axiómaként hozzávesszük.

Az első eredményt ebben az irányban Gödel érte el 1938-ban [5]. Mielőtt ennek az eredménynek az ismertetésére rátérnénk, térjünk vissza a naív (cantori) halmazelmélet egy másik problémájához. Ismeretes, hogy a halmazelméletben igen fontos szerepet játszik a jólrendezett halmazoknak és ezek rendtípusainak, a rendszámoknak az elmélete. Már Cantor bebizonyította, hogy a megszámlálható rendszámok halmazának számossága a legkisebb $\aleph_0$-nál nagyobb számosság (jele $\aleph_1$), és a kontinuum-probléma ekvivalens avval, hogy $2^{\aleph_0}$ egyenlő-e $\aleph_1$-el. Természetes emiatt, hogy a kontinuum-probléma eldöntéséhez nagy segítséget vártak annak eldöntésétől, hogy a valós számok halmazának van-e jólrendezése. Zermelo bizonyította be először szabatosan, hogy minden halmaznak van jólrendezése. Tétele nem hozta meg a kontinuum-probléma megoldását, de felvetett egy másik nagyon érdekes és fontos problémát. Bizonyítása ugyanis felhasználja a következő „szemléletesen világos" tényt. Ha H nem üres halmazok egy halmaza, akkor H minden elemének ki lehet választani egy elemét. Ha ezt pontosabban fogalmazzuk, akkor látszik, hogy a „szemléletesen világos" kifejezés egy kissé túlzott. A kiválasztásnak ugyanis *egyszerre* kell történnie és ez pontosan azt jelenti, hogy létezik olyan, a H halmazon értelmezett f függvény, mely H minden x eleméhez olyan $f(x)$ elemet rendel, melyre $f(x)$ eleme x-nek. Azt a feltevést, hogy ilyen f kiválasztási függvény minden fenti tulajdonságú H halmazhoz létezik, *kiválasztási axiómának* nevezik. Zermelo bizonyítása után hosszú vita indult meg a kiválasztási axióma elfogadhatóságáról. E vita részleteire itt nem térünk ki. Megjegyezzük azonban, hogy ezt az axiómát — nem tudatosan — már Zermelo előtt is használták és a matematika néhány nagyon egyszerű tételének közkeletű bizonyításaiban is felhasználásra kerül anélkül, hogy ez köztudomású volna. Cohen ered-

[3] Megjegyezzük, hogy ez a megállapítás ma már némileg vitatható a mérhető számosságokra vonatkozó, Tarski, Kiesler és Hanf féle eredmények miatt. Ezek az eredmények azonban mégis szoros kapcsolatban állnak meta-matematikai módszerekkel és így a továbbiak jobb megértése végett fogadjuk el ezt az egyszerűsítő megfogalmazást.

ményei, mint erre még visszatérünk, azt mutatják, hogy ez számos ponton nélkülözhetetlen.

A kiválasztási axiómáról már szabatos megfogalmazása után nyilvánvaló volt, hogy nem lesz bizonyítható a halmazelmélet többi axiómáiból. Fraenkel már a 20-as években bebizonyította, hogy nem mond ellent a halmazelmélet axiómáinak olyan halmazok létezésének feltételezése, melyek nem jólrendezhetőek. A valóban érdekes és nehéz probléma azonban, hogy a valós számok halmaza jólrendezhető-e, a kiválasztási axióma felhasználása nélkül hosszú időn keresztül megoldatlan maradt.

Mindkét probléma (a kontinuum-probléma és a kiválasztási axióma problémája) axiomatikus megoldása felé Gödel már említett 1938-as eredménye volt az első lépés. Gödel bebizonyította, hogy ha a halmazelmélet szokásos axiómarendszerei ellentmondástalanok, akkor ellentmondástalanok maradnak akkor is, ha a kiválasztási axiómát és az általánosított kontinuum-hipotézist új axiómaként hozzácsatoljuk.

A továbbiak megértéséhez szükségünk van e bizonyítás rövid vázlatára. Gödel definiál véges sok kétváltozós $f(x, y)$ operációt, melyeket alapoperációknak nevez, és amelyek az x, y halmazokhoz egy új konstruktívan definiált $f(x, y)$ halmazt rendelnek. A konstruktív szó itt azt jelenti, hogy az, hogy valamely z halmaz eleme-e $f(x, y)$-nak, egy adott formulával meghatározott módon, *csak* attól függ, hogy az elemének lenni reláció hogyan volt értelmezve az x és y halmazok elemein, illetve az elemek elemein, stb.

Ezután definiál transzfinit indukcióval egy minden α rendszámra értelmezett $F(\alpha)$ függvényt, melynek értékei halmazok, minden α-rendszámra $F(\alpha)$ vagy az előzően definiált $F(\beta)$-k halmaza vagy két előzően definiált halmazból keletkezik az alapoperációk valamelyikéből és amelyre bármely β-hoz és γ-hoz és bármely f alapoperációhoz van olyan α, melyre $F(\alpha) = f(F(\beta), F(\gamma))$. Azokat a halmazokat, melyeket az F függvény értékként felvesz, *konstruálható* halmazoknak nevezi. Megmutatja, hogy ha a halmaz fogalmát a konstruálható halmazzal interpretálja, az elemének lenni relációt változatlanul hagyva, akkor a halmazelmélet egy olyan modelljét kapja, melyen az összes szokásos axióma teljesül, és megmutatja, hogy ha ezen a modellen újra értelmezi a konstruálható halmazokat, akkor a model minden halmazát megkapja. Ezért az az axióma, hogy minden halmaz konstruálható (röviden *konstruálhatósági axióma*), nem mond ellent a halmazelmélet axiómáinak. Ezután bebizonyítja, hogy a konstruálhatósági axiómából (és a többi axiómákból) következik a kiválasztási axióma és az általánosított kontinuum-hipotézis.

Gödel eredménye után hosszú ideig nem született lényeges eredmény a probléma megoldására. Ennek egyik oka az volt, hogy már a

konstruálhatósági axióma függetlenségének bizonyítása is elvi nehézségekbe ütközött. Shepherdson bebizonyította, hogy az sem mond ellent a halmazelmélet szokásos axiómáinak, hogy a definiálható modelek egy széles osztályán is teljesül a konstruálhatósági axióma. Ebben az időszakban a szerző és A. Lévy ért el néhány úgynevezett relatív ellentmondástalansági eredményt. Ezek azonban Gödel módszerén alapultak és lényegében ugyanolyan „irányúak" voltak. Kiderült például, hogy ha az általánosított kontinuum-hipozétis bizonyos speciális számosságokra való függetlenségét *feltételezzük*, akkor abból, hogy e speciális számosságokra az általánosított kontinuum-hipotézis nem teljesül, nem következik az, hogy más számosságokra sem teljesül.

A döntő lépést a probléma megoldása felé P. Cohen tette meg [6] cikkében. E dolgozatban szinte valamennyi eddig felvetett problémára választ ad. Egy általános módszert dolgozott ki halmazelméleti modellek konstruálására és ennek segítségével a következőket bizonyította.

1. Létezik olyan modell, melyen a konstruálhatósági axióma *nem* teljesül, de igaz a kiválasztási axióma és az általánosított kontinuum-hipotézis.

2. Létezik olyan modell, melyen a valós számok halmaza nem jólrendezhető

3. Létezik olyan modell, melyen a kiválasztási axióma teljesül de a kontinuum nem $\aleph_1$, hanem $\aleph_2$, a második $\aleph_0$-nál nagyobb végtelen számosság. Ezen a modellen egyébként bármely $\aleph_0$-nál nagyobb m számosságra m és 2^m között nincs számosság.

A felsorolt állításokban szereplő modelleken természetesen teljesülnek a halmazelmélet többi szokásos axiómái.

Cohen bizonyításának gondolata röviden a következő:

Képzeljük el Gödel — a konstruálható halmazokat definiáló — F függvényét. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $F(n)$ az n nemnegatív egész számot reprezentáló halmaz és $F(\omega)=\omega$ a nemnegatív egészek halmaza. A Lövenheim—Skolem-féle tétel felhasználásával Cohen megmutatja, hogy bizonyításában felteheti, hogy van olyan α_0 *megszámlálható rendszám*, melyre az $\{F(\alpha)\}_{\alpha<\alpha_0}=M$ halmazokból álló halmaz is olyan modellje a halmazelméletnek, melyen a konstruálhatósági axióma teljesül. E modell megszámlálható lévén, mindenesetre van ω-nak olyan, a részhalmaza, mely nem tartozik M-hez. Képzeljünk most el egy olyan $G_a(\alpha)$ függvényt, melyre $G_a(\alpha)=F(\alpha)$, ha $\alpha\leqq\omega$ az $\omega+1$-edik lépésben $G_a(\omega+1)=a$ és a további lépésekben $G_a(\alpha)$ ugyanolyan operációkkal van definiálva, mint az $F(\alpha)$ függvény. Ekkor $\{G_a(\alpha)\}_{\alpha<\alpha_0}$ egy az M-nél bővebb N-halmaz lesz. Könnyen következik a konstruálható halmazokra vonatkozó ismereteinkből, hogy ha N is modell, akkor e modell konstruálható halmazai éppen M elemei

és így a az N modellben nem konstruálható, és ez mindenesetre bizonyítja a konstruálhatósági axióma függetlenségét.

A bizonyítás nehézsége ilyen a halmaz definíciójában rejlik. Az N halmaz elemei a $G_a(\alpha)$ halmazok. Az, hogy $G_a(\alpha) \in G_a(\beta)$ fennáll-e rögzített konstrukció mellett, végül is attól függ, hogy az a halmaznak mely természetes számok elemei és melyek nem azok. Legyen most P egy véges *feltétel* halmaz, mely azt mondja ki, hogy $n_1, \ldots, n_k$ elemei a-nak és $m_1, \ldots, m_l$ nem elemei a-nak, $n_i \neq m_j$. Cohen egy finom logikai gondolatmenettel definiál egy fogalmat, mely azt fejezi ki, hogy a P véges feltétel kikényszeríti *(forces)*[4] a $G_a(\alpha) \in G_a(\beta)$ reláció teljesülését. Kihasználva azt, hogy az összes formulák halmaza megszámlálható, továbbá, hogy az α_0-nál kisebb rendszámok halmaza megszámlálható indukcióval és egy átlós módszer segítségével definiál egy olyan bővülő $P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_n \subseteq \ldots$ megszámlálható feltételsorozatot, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

A P_n feltételek végül is minden természetes számról egyértelműen eldöntik, hogy az a halmazhoz tartozik-e vagy sem, és az a halmaz egyik $F(\alpha)$-val sem egyenlő $\alpha < \alpha_0$-ra.

A P_n-ek által meghatározott a-halmazhoz tartozó G_a függvény olyan N modellt határoz meg, melyre bármely az ε reláció segítségével felírható formula akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan n, hogy már a P_n véges feltételhalmaz „kikényszeríti" teljesülését.

A fent vázolt „kikényszerítési" vagy „forszolási" módszer Cohen módszerének lényege. Cohen bebizonyítja, hogy az így nyert N halmaz mindig modell a halmazelmélet szokásos axiómáira. Mint általában a jó matematikai módszerek, rendkívül „szerencsés" is. Az a különös jó tulajdonsága van, hogy az M modellhez *„forszolás"*-sal hozzávett halmazok nem változtatják meg lényegesen az M modell struktúráját. Az M és N modellben a számosságok például ugyanazok maradnak. Ez az oka annak, hogy pl. a 2. és 3. állítások bizonyításához már nincs szükség lényeges új ötletre.

Ha nem egy a halmazzal bővítjük az M halmazt, hanem egy $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ halmazsorozattal és ezek halmazával, b-vel, akkor szinte automatikusan adódik, hogy b az N modellben nem jólrendezhető, tehát a természetes számok részhalmazainak halmaza, azaz a valós számok halmaza nem jólrendezhető.

Ha az M modellhez végtelen sok a_ξ halmazt forszolunk és az a_ξ-k egy olyan δ-típusú jólrendezését, ahol a δ-rendszám az M modellben olyan kezdő szám, amelynek számossága nem állítható elő mint

[4] Ezek után könnyű definiálni azt is, hogy a P véges feltétel mikor kényszerít ki egy tetszőleges az $\in$ reláció segítségével felírható formula teljesülését.

megszámlálható sok nála kisebb M-beli számosság összege, ekkor a kapott modellben $2^{\aleph_0} = \bar{\delta}$ teljesül automatikusan.

Cohen módszerének számos változata alakult ki. Dana Scott és P. Vopenka dolgoztak ki más, de lényegében mégis a „forszolás" alapgondolatát felhasználó módszereket.

Cohen $2^{\aleph_0}$ számosságra vonatkozó eredményét R. Solovay általánosította először olyan $2^{\aleph_\alpha}$ alakú számosságokra, ahol $\aleph_\alpha$ reguláris. Jelölje $g(\alpha)$ azt a függvényt, melyre $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{g(\alpha)}$. Ekkor $g(\alpha)$ monoton növekedő, és $\aleph_{g(\alpha)}$ nem állítható elő mint legfeljebb $\aleph_\alpha$ $2^{\aleph_\alpha}$-nál kisebb számosság összege.

Legyen $g(\alpha)$ olyan függvény az M modellben, mely a fenti feltételeket teljesíti. W. B. Easton bebizonyította, hogy az M modellnek mindig van olyan N bővítése, melyben bármely reguláris $\aleph_\alpha$ számosságra $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{g(\alpha)}$. Ez azt jelenti, hogy az általánosított kontinuum hipotézis egyes speciális esetei olyan mértékben függetlenek az axiómáktól és egymástól, hogy az sem vezet ellentmondásra, ha pl. feltesszük, hogy

$$2^{\aleph_k} = \aleph_{p_k} \quad \text{minden} \quad k < \omega\text{-ra}$$

ahol p_k a k-adik prímszám.

Másirányú általánosításai Cohen eredményeknek a kiválasztási axiómára vonatkozó függetlenségi eredmények.

Már Cohen bebizonyította, hogy ha a kiválasztási axiómát elhagyjuk az axiómák közül, akkor megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése nem szükségképpen megszámlálható. Ezt az eredményt élesítették és megmutatták, hogy a kiválasztási axióma feltételezése nélkül a valós számok halmaza és az ω_1-nél kisebb rendszámok halmaza is lehet megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése. Megmutatták, hogy létezhet olyan nem véges halmaz, mely nem tartalmaz végtelen részsorozatot.[5]

R. Solovay bebizonyította, hogy a kiválasztási axióma elhagyásával lehetségessé válik, hogy minden halmaz Lebesgue-mérhető.

Alkalmazták Cohen módszerét más híres megoldatlan halmazelméleti problémákra is. R. Tennenbaum bebizonyította, hogy a Szuszlin-probléma megoldhatatlan a halmazelmélet szokásos axiómarendszereiben. Tennenbaum bizonyítása még nem jelent meg.

Nem tartozik a dolgozat keretei közé annak a matematikai filozófiai problémának tárgyalása, hogy milyen úton kell tovább haladni a halmazelméletnek és általában a matematikának a felsorolt eredmények ismeretében. Szabadjon azonban befejezésként idézni Kurt Gödel véleményét, mely szerint a feladat további plauzibilis állítások absztra-

[5] Ezek az eredmények igazolni látszanak a kiválasztási axióma feltevésének szükségességét a klasszikus matematikában.

hálása a valóságból (vagy a matematikai valóságból) és ezeknek axiómaként való felvétele. Gödel személyes véleménye az, hogy ilyen állítások vannak és hogy ezek végül is a kontinuum-hipotézis tagadását fogják igazolni.

ОБ ИСТОРИИ И НЫНЕЙШЕМ СОСТОЯНИИ АКСИОМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРОБЛЕМЫ КОНТИНУУМА И АКСИОМЫ ВЫБОРА

Андраш Хайнал

ON THE HISTORY AND PRESENT STATE OF AXIOMATIC RESEARCH CONCERNING THE CONTINUUM PROBLEM AND THE AXIOM OF CHOICE

A. Hajnal

IRODALOMJEGYZÉK

[1] W. Sierpiński, Hypothése du continu, Warszawa—Lwow 1934.
[2] Hajnal András és Kalmár László, Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez, Mat. Lapok 7 (1956), 26—42, 218—229
[3] Hajnal András, *Neumann János* axiomatikus halmazelméleti munkásságáról, Mat. Lapok 10 (1959), 5—11.
[4] Péter Rózsa, A halmazelmélet axiómarendszerei, Mat. Lapok 16 (1965) 185—228.
[5] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, Princeton, 1940 Annals of Mathematics Studies № 3 pp 66.
[6] P. Cohen, The independence of the continuum hypothesis I. II. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 50 (1963) pp 1143—1148 51 (1964) pp 105—110.

Szinguláris homológiák I.

VISKI MÁRIA

A jelen cikk célja az, hogy bemutassa a modern homológia-elmélet „szemléletes" gyökereit egy konkrét homológiaelméleten, a szinguláris homológiák elméletén keresztül. A történelmi fejlődés során a szimpliciális komplexusok homológiaelmélete alakult ki korábban, amely az úgynevezett háromszögelhető terekhez és azok folytonos leképezéseihez rendel homológiaelméletet. Ha azonban tetszőleges topologikus terekre és folytonos leképezéseikre akarunk áttérni, ennek az áttérésnek két legismertebb útja a spektrális és a szinguláris homológiák. Mi ezt az utóbbit azért választottuk, mert nem tételezi fel a szimpliciális komplexusok homológiaelméletének ismeretét. Nem tételezi fel, de nem tud nélkülözni bizonyos lényeges magot, mint majd az elmélet két legsúlyosabb tételénél, a homotóp leképezések tételénél és a kivágási tételnél látni fogjuk. (Persze csak akkor nyer értelmet az előbbi kijelentés, ha az olvasó rendelkezik némi ismerettel a szimpliciális komplexusok homológiaelméletéből. Ellenkező esetben is feltűnő azonban ezen bizonyítások eltérő jellege a cikk többi bizonyításaitól.) Ezt a két nagy tételt csak cikkünk második részében fogjuk bizonyítani, az első részben a kimondásuk után csupán alkalmazásukra fogunk rámutatni. A cikk maga fogja igazolni, hogy miért kényszerültünk erre a megoldásra. Viszonylag több elemi példát mutatunk be homológiacsoportok megkonstruálására, mint általában szokás és ezzel, lehet, hogy túlságosan is, de mindenesetre szándékosan szemléletessé tettük a homológiaelméletnek ezt a klasszikus fejezetét, amelynek fejlődése már Veblennél vette kezdetét.

1. Bevezető jellegű megjegyzések

Az R^n jelölést lefoglaljuk az n-dimenziós euklideszi tér jelölésére, amely az euklideszi topológiával van ellátva.

Legyen adva $r+1$ pont az R^n-ben: $p_0, p_1, \ldots, p_r$ és a p_i pont $(i=0, 1, \ldots, r)$ euklideszi koordinátái: $(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n)$. A $p_0, p_1, \ldots, p_r$

pontok lineárisan független pontrendszert alkotnak, ha az

$$\begin{pmatrix} x_1^0 & x_0^2 \dots x_0^n & 1 \\ x_1^1 & x_1^2 \dots x_1^n & 1 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ x_r^1 & x_r^2 \quad x_r^n & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix rangja $r+1$.

Legyen tehát $p_0, p_1, \dots, p_r$ lineárisan független pontrendszere R^n-nek, és így nyilván $0 \leqq r \leqq n$, és tekintsük azon R^n-beli pontok összességét, amelyek a következő alakban írhatók fel: $x = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r p_r$, ahol $\lambda_i \geqq 0$ $(i = 0, 1, \dots, r)$ valós számok és $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$. Ez a halmaz alkotja az r-dimenziós euklideszi szimplexet (ha nem okoz félreértést, r-dinenziós szimplexnek, illetve r-szimplexnek is fogjuk nevezni), amelynek pontjai ezen x-ek és a $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ számok (amelyek nyilván egyértelműen vannak meghatározva) az x pont baricentrikus koordinátái. A $p_0, p_1, \dots, p_r$ pontokat, amelyek szintén pontjai a szimplexnek, csúcsoknak fogjuk nevezni.

Egy szimplex belső pontja az olyan pont, amelynek minden baricentrikus koordinátája pozitív. Egy r-dimenziós szimplex q-dimenziós lapját pedig a következő módon definiáljuk: olyan q-szimplex, amelynek $p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_q}$ csúcsai a $p_0, p_1, \dots, p_r$ közül vannak kiválasztva.

Mivel a szimplex az euklideszi tér részhalmaza, ha ellátjuk az indukált topológiával, topologikus teret nyertünk. A továbbiakban az euklideszi szimplex és az indukált topológiával ellátott euklideszi szimplex fogalma között nem fogunk különbséget tenni. Az r-dimenziós euklideszi szimplex jelölésére alkalmazni fogjuk a $T^r = |p_0, p_1, \dots, p_r|$ vagy $|p_0, p_1, \dots, p_r|$, esetleg csak a T^r szimbólumokat. Megemlítjük T^r két elemi, de nagyon sokszor felhasználandó tulajdonságát: *a)* T^r konvex, *b)* T^r az euklideszi tér korlátos és zárt, azaz kompakt részhalmaza.

Tekintsünk most két szimplexet: $T^r = |p_0, p_1, \dots, p_r|$ az R^n-ben és $\overline{T}^r = |p_0', p_1', \dots, p_r'|$ az R^n-ben; azt az f leképezést, amely minden p_i-nek kölcsönösen egyértelműen megfeleltet egy p_j'-t és tetszőleges $x = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r p_r$-hez $\left(\sum_{1}^{r} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqq 0\right)$ az $f(x) = \lambda_0 f(p_0) + \lambda_1 f(p_1) + \dots + \lambda_r f(p_r)$ pontot rendeli hozzá (azaz a csúcsok leképezését a pontokra a baricentrikus koordinátákban lineárisan terjeszti ki) T^r-nek $\overline{T}^r$-re való lineáris leképezésének nevezzük.

Könnyen belátható a lineáris függetlenség kiaknázásával, hogy a fent definiált leképezés homeomorfizmus.

Az euklideszi szimplexek egy fajtája a következőkben nagyon fontos szerepet fog játszani, ez lesz az úgynevezett *kanonikus szimplex*. A kanonikus r-szimplex csúcsai az $(r+1)$-dimenziós euklideszi tér pozitív egységpontjai, mégpedig úgy, hogy p_i-nek választjuk $(i=0, 1, \ldots, r)$ azt a pontot, amelynek csupán az $(i+1)$-edik euklideszi koordinátája 1, a többi r koordináta pedig 0.

A kanonikus szimplex kitüntetett voltát az is indokolja, hogy ebben a speciális esetben az euklideszi és a baricentrikus koordináták megegyeznek.

Az r-dimenziós kanonikus szimplex részére lefoglaljuk a Δ_r jelölést.

2. A szinguláris homológiák csoportja

Jelölje tehát Δ_r az r-dinenziós kanonikus szimplexet, $f: E \to F$ pedig az E topologikus térnek az F topologikus térbe való leképetését. Legyen E tetszőleges topologikus tér; E-beli *r-dimenziós szinguláris szimplexnek* nevezzük az $f: \Delta_r \to E$ tetszőleges folytonos leképezést. A cikk során a σ jelölést lefoglaljuk a szinguláris szimplex jelölésére, σ tehát egy $\sigma: \Delta_r \to E$ folytonos leképezés. Néha, ha különös hangsúly van a dimenzión, σ helyett σ^r-t írunk.

Legyen *r-lánc* az olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya az r-dimenziós szinguláris szimplexek összessége, mégpedig úgy, hogy minden szinguláris r-szimplexhez hozzárendel egy egész számot, és véges sok kivétellel mindegyikhez 0-t. Ha az r-láncok összeadását, mint függvények összeadását a szokott módon definiáljuk, egy $C_r(E)$-vel jelölt szabad Abel-féle csoportot nyerünk, melyet az *r-dimenziós láncok csoportjának* nevezünk.

Egyszerűség kedvéért σ^r-rel jelöljük azt a láncot, amely a σ^r szinguláris szimplexen 1-et vesz fel, a többin 0-t. Így minden lánc egyértelműen felírható $\sum_1^k m_i \sigma_i^r$ alakban, m_i egész, σ_i^r r-dimenziós szinguláris szimplex $(i=1, 2, \ldots, k)$. A σ^r láncok generálják a $C_r(E)$ csoportot. Megjegyezzük: ha E nem üres, akkor minden dimenzióra $C_r(E)$ sem üres, ugyanis a $\sigma^r: \Delta_r \to P$, ahol $p \in E$ tetszőleges pont, r-dimenziós szinguláris szimplex. Az üres halmazból álló tér esetén pedig $C_r(0)$ legyen minden dimenzióban a triviális csoport. Továbbá: mivel Δ_r csak $r \geqq 0$ egész számra létezett, azért $C_r(E)$ is csak $r \geqq 0$-ra volt értelmezve, terjesszük azonban ki az értelmezést $r < 0$-ra is $C_r(E)$-t 0-csoportnak választva.

Legyen most $f: E \to F$ tetszőleges folytonos leképezés; ez meghatároz egy $f_1: C_r(E) \to C_r(F)$ homomorfizmust a következő definícióval: $f_1 \sigma = f\sigma$. A homomorfizmust szabad Abel-csoportokról lévén szó elég

a generátorelemekre megadni és az egész $C_r(E)$-re lineárisan kiterjeszteni, azaz az $\alpha = \sum_1^k m_i \sigma_i$ tetszőleges r-lánchoz az $f_1\alpha = \sum_1^k m_i f_1 \sigma_i$ láncot rendelni hozzá. Ez azért elégséges, mert az α definíció szerint egyértelműen áll elő a fenti összeg alakjában és ez biztosítja azt, hogy egyetlen $f_1\alpha$ létezik.

Az 1 indexet folytonos leképezések indexezéséhez a cikk folyamán lefoglaljuk a folytonos leképezés által a fenti módon meghatározott homomorfizmus jelölésére.

Szeretnénk felhívni a figyelmet, hogy a szokástól eltérően kénytelenek vagyunk két leképezést különbözőnek tekinteni minden olyan esetben, ha a tér, amelybe a leképezések történnek, megváltozik, még akkor is ha a felvett értékek minden pontban megegyeznek. Ugyanis, ha a képtér megváltozik, megváltozik a láncok csoportja és így más lesz a leképezéshez hozzárendelt homomorfizmus is.

Mégis tekintsük a következő speciális esetet: Legyen most F altere E-nek, $F \subset E$, és tekintsük az $i: F \to E$ injektív leképezést, azaz azt a leképezést, ahol $i(p) = p$ minden $p \in F$ pontra; az előbbi megjegyzés szerint a $\sigma: \Delta_r \to F$ és $i\sigma: \Delta_r \to E$ szinguláris szimplexek különbözők, és $i_1: C_r(F) \to C_r(E)$ csupán izomorfizmust szolgáltat $C_r(F)$ és $C_r(E)$ egy részcsoportja között a σ-hoz $i\sigma$ hozzárendeléssel. Ezen esetben elvégezzük $C_r(F)$ azonosítását a vele izomorf részcsoporttal, és $C_r(F)$-et $C_r(E)$ részcsoportjának fogjuk tekinteni. Ez az azonosítás egyszerűsíti egyes okoskodások menetét és példák megoldását, sőt még definíciók kimondását is.

Folytonos leképezések összetételére vonatkozik a következő elemi lemma.

(1) LEMMA: *Ha* $f: E \to F$ *és* $g: F \to G$ *folytonosak, akkor*

$$(gf)_1\alpha = g_1 f_1 \alpha, \quad \textit{ahol } \alpha \textit{ tetszőleges lánc.}$$

Az összefüggés belátását elég egy tetszőleges szinguláris szimplexre elvégezni, mivel a homomorfizmusok lineárisan voltak kiterjesztve. De σ-ra közvetlenül a folytonos leképezések által meghatározott homomorfizmus definíciója alapján:

$$(gf)_1\sigma = gf\sigma = g(f\sigma) = g_1(f\sigma) = g_1 f_1 \sigma.$$

A szinguláris szimplexek között kitüntetett szerepük van a *lineáris szimplex*eknek. Válasszuk E-nek az R^n euklideszi teret, vagy ennek egy konvex részhalmazát, és tekintsük az E-ben elhelyezkedő $x_0, x_1, \ldots, x_r$ lineárisan független pontrendszer által meghatározott $|x_0 x_1 \ldots x_r|$ euklideszi szimplexet. Δ_r-nek ezen euklideszi szimplexre való olyan lineáris leképezését, amely a kanonikus szimplex i-edik csúcsának x_i-t

felelteti meg, lineáris szimplexnek fogjuk nevezni és $(x_0\, x_1 \ldots x_r)$-rel jelölni. Az $|x_0\, x_1 \ldots x_r|$ euklideszi szimplex azon $(r-1)$-dimenziós lapját, amely a j-edik csúcs elhagyásával keletkezik, $|x_0\, x_1 \ldots \hat{x}_j, \ldots, x_r|$-rel jelölve, az előbbiek alapján az $(x_0 x_1 \ldots \hat{x}_j \ldots x_r)$ szimbólum azt a lineáris szimplexet jelöli, amely a Δ_{r-1} $(r-1)$-dimenziós kanonikus szimplex l-edik csúcsát $l<j$ esetén x_l-be viszi át, ha pedig $l \geqq j$, akkor x_{l+1}-be.

A lineáris szimplexek segítségével fogunk definiálni egy *d határoperátort*, egy $d: C_r(E) \to C_{r-1}(E)$ határhomomorfizmust.

A d homomorfizmus definíciója a következő:

a) Ha $r \leqq 0$, legyen $d=0$;

b) Ha a szinguláris szimplex lineáris szimplex, legyen

$$d(x_0 x_1 \ldots x_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (x_0 x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_r);$$

c) Tetszőleges szimguláris szimplexre $\sigma: \Delta_r \to E$ σ folytonos definíció szerint és így létezik az általa meghatározott $\sigma_1: C_{r-1}(\Delta_r) \to C_{r-1}(E)$ homomorfizmus, és definiálható a $d\sigma = \sigma_1 d(x_0 x_1 \ldots x_r)$ homomorfizmus is;

d) Ha pedig $\alpha = \sum_{j=1}^{k} m_j \sigma_j$ tetszőleges lánc, akkor lineáris kiterjesztéssel adódik d értéke, azaz $d\alpha = \sum_{j=1}^{k} m_j d\sigma_j$ (d helyett helyesebb lenne a dimenziót is feltüntető d_r jelölést alkalmazni, de ezt általában elhagyjuk, mint ahogy az f folytonos leképezés által meghatározott f_1-nél sem jelöltük a dimenziót). Nyilvánvaló, hogy d valóban egy $d: C_r(E) \to C_{r-1}(E)$ homomorfizmus.

(2) Lemma: *Legyen $f: E \to F$ folytonos leképezés és $\alpha \in C_r(E)$. Ekkor $f_1 d\alpha = df_1 \alpha$.* (Azaz szemléletesen: határ képe megegyezik a kép határával.)

Az összefüggést itt is elég csak egy tetszőleges σ szinguláris szimplexre belátni, hisz f_1 is és d is lineeris kiterjesztéssel adódott.

De: $f_1 d\sigma = f_1 \sigma_1 d(x_0 x_1 \ldots x_r)$ a d homomorfizmus definíciója miatt, $f_1 \sigma_1 d(x_0 x_1 \ldots x_r) = (f\sigma)_1 d(x_0 x_1 \ldots x_r)$ az (1) lemmát alkalmazva, és ismét d definíciója miatt $(f\sigma)_1 d(x_0 x_1 \ldots x_r) = d(f\sigma)$, végül f_1 definícióját alkalmazva kapjuk a $d(f\sigma) = df_1 \sigma$ összefüggést. Ebből adódik állításunk.

Homológiacsoportok konstruálását a következő tétel teszi lehetővé, ha a $dd = d^2$ jelölést alkalmazzuk:

(3) Tétel: *$d^2 \alpha = 0$ bármely α láncra.* (Szemléletes megfogalmazásban: határ határa nulla.)

A tétel bizonyítása:

a) Ha α dimenziója $\leqq 1$, akkor $d\alpha$ dimenziója $\leqq 0$, de ezen esetben $d^2\alpha$ definició szerint 0.

b) Lineáris szimplexre *a)* miatt feltehetjük, hogy $r \geqq 2$ és így $(x_0 x_1 \ldots x_r)$ legalább három csúccsal rendelkezik. De ekkor:

$$dd(x_0 x_1 \ldots x_r) = d \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (x_0 x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_r) =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\sum_{j<i} (-1)^j (x_0 x_1 \ldots \hat{x}_j \ldots \hat{x}_i \ldots x_r) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} (x_0 x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots \hat{x}_j \ldots x_r) \right) =$$

$$= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} (x_0 x_1 \ldots \hat{x}_j \ldots \hat{x}_i \ldots x_r) +$$

$$+ \sum_{j>i} (-1)^{i+j-1} (x_0 x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots \hat{x}_j \ldots x_r) = 0.$$

c) Ha pedig σ tetszőleges szinguláris szimplex: a $dd\sigma = d(\sigma_1 d(x_0 x_1 \ldots x_r))$ egyenlőség d definíciója szerint fennáll, de $d(\sigma_1 d(x_0 x_1 \ldots x_r)) = \sigma_1 dd(x_0 x_1 \ldots x_r)$ is igaz a (2) lemmát alkalmazva, és $\sigma_1 dd(x_0 x_1 \ldots x_r) = 0$ *b)* szerint.

d) Ha végül α tetszőleges szinguláris lánc, akkor, mint mindig, azt használjuk fel, hogy d lineárisan volt kiterjesztve.

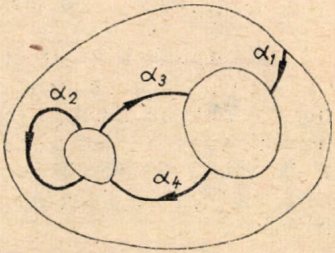
Egy r-dimenziós α láncot *ciklusnak* nevezünk, ha $d\alpha = 0$. Az r-dimenziós ciklusok (röviden r-ciklusok) $C_r(E)$-nek egy $Z_r(E)$ részcsoportját alkotják. Egy r-dimenziós α láncról azt mondjuk, hogy *homológ 0-val*, jelben $\alpha \sim 0$, ha létezik olyan β $(r+1)$-lánc, amelyre $d\beta = \alpha$ teljesül. Ilyenkor azt mondjuk, hogy α határa β-nak. A 0-val homológ láncok $C_r(E)$-nek egy $B_r(E)$ részcsoportját alkotják, sőt a (3) tétel alkalmazásaként azt kapjuk, hogy minden 0-val homológ lánc egyben ciklus, azaz $B_r(E)$ részcsoportja $Z_r(E)$-nek is. De akkor képezni tudjuk a $H_r(E) = \dfrac{Z_r(E)}{B_r(E)}$ faktorcsoportot, amelyet az *E topologikus tér r-dimenziós homológiacsoportjának* nevezünk. (A Betti-csoport nevet általában csak szimpliciális homológiáknál használják, de a Betti-féle szám elnevezését más homológia-elméletek esetén is. Itt az r-dimenziós Betti-féle szám a $H_r(E)$ csoport rangját[1] jelöli.)

[1] Az Abel-féle csoport rangjának fogalma eléggé közismert, de a definíció cikkünk 9. pontjában meg is található.

Megjegyezzük azt a triviális tényt, hogy bár $Z_r(E)$ (ha $Z_r(E) \neq 0$) és $B_r(E)$ is (ha $B_r(E) \neq 0$), mint egy szabad Abel-csoport részcsoportjai, maguk is szabad Abel-csoportok[2], a faktorcsoport általában nem lesz az. (És így például a Betti-számok még a homológiacsoportot sem határozzák meg.)

3. Relatív homológiák

Legyenek E és F olyan topologikus terek, hogy $F \subset E$, azaz F altere E-nek. Egy E-beli r-dimenziós α láncot *ciklus*nak nevezzünk *mod* F, ha $d\alpha = \beta$, ahol $\beta \in C_{r-1}(F)$. Az E-beli r-dimenziós α lánc pedig *homológ 0-val mod* F, azaz jelben: $\alpha \sim 0 (\text{mod } F)$, ha létezik hozzá egy E-beli $(r+1)$-dimenziós γ lánc és egy F-beli r-dimenziós β lánc a $d\gamma = \alpha + \beta$ összefüggéssel. (Megjegyezzük tehát, hogy itt is alkalmaztuk, mint a következőkben mindig, azt a megegyezésünket, hogy a $C_r(F)$ csoportot a $C_r(E)$ részcsoportjának fogtuk fel.)



1. ábra

A fogalmak szemléltetésére az 1. ábra szolgál. E-vel jelöljük azt a teret, amely úgy keletkezett, hogy a zárt körlapból kivágtunk két nyílt körlemezt, F pedig jelölje e három határgörbe alkotta alteret. α_1, α_2, α_3, α_4 pedig homeomorfizmusát $\Delta_1 = |e_0, e_1|$-nek az ábra vastagon húzott részeire, ahol a nyíl iránya e_0 képe felől e_1 képe felé mutat. Az ábrán egyszerűség kedvéért a leképezéseket azonosítottuk a képhalmazokkal. És így α_1, valamint α_2 ciklusok, $\alpha_3 + \alpha_4$ pedig homológ 0-val mod F.

Az E-beli mod F vett r-dimenziós ciklusok csoportot alkotnak, jelük: $Z_r(E, F)$, ugyancsak csoportot alkotnak az r-dimenziós 0-val homológ mod F vett láncok is, jelölésük $B_r(E, F)$. Triviálisan adódnak a következő tartalmazások: $Z_r(E, F)$ és $B_r(E, F)$ részcsoportjai $C_r(E)$-nek, sőt: $Z_r(E) \subset Z_r(E, F)$ és $B_r(E) \subset B_r(E, F)$, hisz az azonosan 0 lánc nyilván F-beli lánc is. A d operáció kétszeres alkalmazása után adódik a $B_r(E, F) \subset Z_r(E, F)$ összefüggés, ami lehetővé teszi a $H_r(E, F) = \dfrac{Z_r(E, F)}{B_r(E, F)}$ faktorcsoport megkonstruálását, amelyet az *E tér F alterére vonatkozó r-dimenziós relatív homológiacsoportjának* nevezünk. (Pontosabban a szinguláris relatív homológiák csoportja.)

Mivel az üres halmazhoz hozzárendelt láncok csoportja a triviális csoport volt, a $Z_r(E, 0)$ és $Z_r(E)$, valamint $B_r(E, 0)$ és $B_r(E)$ csoporto-

[2] Kuros: Csoportelmélet (Budapest 1955), Második rész: Abel-féle csoportok.

kat, sőt így a $H_r(E, 0)$ és $H_r(E)$ csoportokat is azonosíthatjuk egymással. Ilyenformán az előző pontban tárgyalt szinguláris homológiák a szinguláris relatív homológiák speciális eseteként adódnak, és a cikk hátralevő része mindig a relatív homológiák tulajdonságait fogja vizsgálni. Azonban $F=0$ esetére megtartjuk az előző pont elnevezéseit és ciklusokról és 0-val homológ ciklusokról beszélünk, nem pedig ciklusról mod 0 és 0-val homológ ciklusról mod 0.

$H_r(E, F)$ elemei a homológiaosztályok; ha az α és β mod F vett E-beli ciklusok ugyanazon maradékosztály elemei, azt mondjuk: α homológ β-val mod F, jelben $\alpha \sim \beta (\text{mod } F)$ az E-n. (Ha $F=0$, akkor egyszerűen $\alpha \sim \beta$.)

4. Indukált homomorfizmus

Szükségünk lesz két új jelölésre.

Az (E, F) szimbólum jelentése: E és F olyan topologikus terek, hogy F résztere E-nek; ilyenkor (E, F)-et topologikus párnak fogjuk nevezni, vagy röviden párnak. Viszont $f:(E, F) \to (E', F')$ olyan E-ből E'-be való f leképezést jelöl, amelyre az is teljesül, hogy $f(F) \subset F'$; neve: az (E, F) topologikus párnak az (E', F') topologikus párba való leképezése.

Ha $f:(E, F) \to (E', F')$ folytonos, amin azt értjük, hogy mint az E topologikus térből az E' topologikus térbe való leképezés folytonos, akkor meg tudjuk konstruálni az f által meghatározott $f_1: C_r(E) \to C_r(E')$ homomorfizmust. A (2) lemma biztosítja, hogy f, $Z_r(E, F)$-et $Z_r(E', F')$-be, $B_r(E, F)$-et $B_r(E', F')$-be viszi át. De ekkor meg tudjuk adni az $f_*: H_r(E, F) \to H_r(E', F')$ *indukált homomorfizmust* a következő módon: Ha $\bar{\alpha} \in H_r(E, F)$ és az α mod F vett E-beli ciklus eleme az $\bar{\alpha}$ homológiaosztálynak, akkor $f_*\bar{\alpha}$ legyen az $f_1\alpha$-t tartalmazó $H_r(E', F')$ beli maradékosztály.

A definíciókból triviálisan három igen fontos tétel adódik:

(4) Tétel: *Ha* $i:(E, F) \to (E, F)$ *az azonos leképezés, akkor* $l_*: H_r(E, F) \to H_r(E, F)$ *azonos izomorfizmus.*

(5) Tétel: *Ha* $f:(E, F) \to (E', F')$ *és* $g:(E', F') \to (E'', F'')$ *folytonosak, akkor* $(gf)_* = g_* f_*$.

Itt fel kell használni az (1) lemmát.

(6) Tétel: *Ha* (E, F) *és* (E', F') *homeomorfok, azaz létezik olyan* $f:(E, F) \to (E', F')$ *és olyan* $g:(E', F') \to (E, F)$ *folytonos leképezés, hogy* gf (E, F)*-nek,* fg *pedig* (E', F')*-nek önmagára való azonos leképezését adja, akkor* $H_r(E, F)$ *és* $H_r(E', F')$ *izomorfok.*

Ez utolsó az előző kettő következménye, ugyanis $g_* f_* = (gf)_*$ a $H_r(E, F)$ csoport azonos homomorfizmusa, $f_* g_* = (fg)_*$ pedig $H_r(E', F')$ azonos homomorfizmusa, és így g_* is és f_* is izomorfizmust szolgáltat.

Mielőtt a következő pontra térnénk, megjegyezzük, hogy az $(E, 0)$ jelölés helyett egyszerűen E-t fogunk írni.

5. A homológ sorok egzaktsága

Csoportok inverz sorozatán vagy *inverz csoportsorozaton* a következőt fogjuk érteni: minden egész q-hoz rendeljünk hozzá egy G_q csoportot és egy $\varphi_q : G_q \to G_{q-1}$ homomorfizmust. Jelölési mód: $\{G_q, \varphi_q\}$, illetve:

$$\dots \leftarrow G_{q-1} \xleftarrow{\varphi_q} G_q \xleftarrow{\varphi_{q+1}} G_{q+1} \leftarrow \dots .$$

A $\{G_q, \varphi_q\}$ sorozat *egzakt*, ha $\operatorname{Im} \varphi_q = \operatorname{Ker} \varphi_{q-1}$, ahol $\operatorname{Im} \varphi_q$ a G_q csoport képe a φ_q homomorfizmusnál, $\operatorname{Ker} \varphi_{q-1}$ pedig a G_{q-1} azon elemei alkotta csoport, amelyeket a φ_{q-1} homomorfizmus 0-ba visz át.

Félig egzakt sorozatra, azaz olyan sorozatra, amelyre $\varphi_{q-1} \varphi_q = 0$, már tudunk példát mondani:

$$\dots \leftarrow C_{q-2}(E) \xleftarrow{d_{q-1}} C_{q-1}(E) \xleftarrow{d_q} C_q(E) \leftarrow \dots ,$$

ahol $C_q(E)$ a q-dimenziós láncok csoportja, d_q pedig a 2. pontban definiált határhomomorfizmus. A félig egzaktság következik a (3) tételből.

Egzakt sorozatok konstruálása azonban a relatív homológiák bevezetése után vált lehetségessé. A relatív homológiák fogalmát, amely a határolt felületek tanulmányozásához is elengedhetetlenül szükséges, először Lefschetz vezette be. Az egzaktság viszont egyszerre több szerzőnél is fellépett, ámbár a most definiálandó homológ sornak első szabatos megfogalmazása és e sor egzaktságának kimutatása először Hurewicz által történt.

Ha $E \subset E'$ és $F \subset F'$, az $f : (E, F) \to (E', F')$ folytonos leképezések közül injekciónak fogjuk nevezni, azt amelyre $f(p) = p$, ahol $p \in E$ tetszőleges pont.

Az (E, F) *pár homológ során* értjük a következő inverz csoportsorozatot:

$$\dots \leftarrow H_{r-1}(F) \xleftarrow{\partial} H_r(E, F) \xleftarrow{j_*} H_r(E) \xleftarrow{i_*} H_r(F) \leftarrow \dots ,$$

ahol i_* és j_* az $i : F \to E$ és $j : E \to (E, F)$ injekciókhoz tartozó homomorfizmusok, a ∂ homomorfizmust pedig a d homomorfizmus segítségével most fogjuk definiálni.

Tekintsük a $d: C_r(E) \to C_{r-1}(E)$ homomorfizmusnak $Z_r(E, F)$-re való megszorítását; akkor $d(Z_r(E, F)) \subset Z_{r-1}(F)$, mert $\alpha \in Z_r(E, F)$ definíció szerint azt jelenti, hogy létezik olyan $\beta \in C_{r-1}(F)$, hogy $d\alpha = \beta$, és $d\beta = dd\alpha = 0$ miatt valóban teljesül $\beta \in Z_{r-1}(F)$. Ha pedig d-nek $B_r(E, F)$-re való megszorítását tekintjük, igaz, hogy $d(B_r(E, F)) \subset B_{r-1}(F)$, mert az, hogy az α' relatív ciklus mod F homológ 0-val, definíciószerint azt jelenti, hogy megadható oly $\beta' \in C_r(F)$ és oly $\gamma \in C_{r+1}(E)$, hogy $\alpha' = d\gamma + \beta'$ teljesüljön, de akkor $d\alpha' = dd\gamma + d\beta' = d\beta'$ miatt a d homomorfizmus α'-höz $d\beta'$-t rendeli hozzá és $d\beta' \in B_{r-1}(F)$.

Így, ha $\bar{\alpha} \in H_r(E, F)$ és α az $\bar{\alpha}$ maradékosztály tetszőleges ciklusa, $\bar{\alpha}$-hoz a $d\alpha$-t tartalmazó $H_{r-1}(F)$-beli maradékosztályt rendelve hozzá valóban homomorfizmust kaptunk; ezt jelöljük ∂-vel.

Még mielőtt kimondanánk azt a tételt, amelyet ez a pont címéül visel, megjegyezzük a következőket: ha az α elem az $\bar{\alpha} \in H_r(F)$ maradékosztály egy reprezentánsa, akkor az $i_*\bar{\alpha}$ maradékosztályt is α reprezentálja, hasonló módon: ha β a $\bar{\beta} \in H_r(E)$ reprezentánsa, akkor β reprezentálja a $j_*\bar{\beta}$ maradékosztályt is.

(7) Tétel: *Az* (E, F) *pár fent definiált*

$$\ldots \leftarrow H_{r-1}(E) \xleftarrow{i_*} H_{r-1}(F) \xleftarrow{\partial} H_r(E, F) \xleftarrow{j_*} H_r(E) \xleftarrow{i_*} H_r(F) \leftarrow \ldots$$

homológ sora egzakt.[3]

A tétel bizonyítása: Ha $r < 0$, akkor, mivel ez esetben a láncok csoportja 0-nak volt definiálva, a $H_r(F)$, $H_r(E)$ és $H_r(E, F)$ is 0-csoport, azaz a tétel triviális. $r = 0$ esetén: $\ldots \leftarrow 0 \xleftarrow{\partial} H_0(E, F) \xleftarrow{j_*} H_0(E) \leftarrow \ldots$ folytán $\operatorname{Ker} \partial = H_0(E, F)$, azaz $\operatorname{Ker} \partial = \operatorname{Im} j_*$ igazolva lesz, ha belátjuk, hogy j_* epimorfizmus,[4] de ez igaz, mert $r = 0$ esetén a ciklusok és a mod F vett ciklusok megegyeznek, hisz d-t minden 0-dimenziós láncra 0-nak definiáltuk.

Feltehetjük tehát, hogy $H_r(F)$ és $H_r(E)$-re $r \geqq 0$ és $H_r(E, F)$ esetén $r > 0$.

1. $\operatorname{Ker} j_* = \operatorname{Im} i_*$ bizonyítása.

a) $\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} j_*$, mert ha $\bar{\alpha} \in H_r(E)$ valamely i_*-nál származó kép, reprezentálható egy $\alpha \in Z_r(F)$ ciklussal; $\alpha \in B_r(E, F)$ teljesül, ha az $\alpha + \beta = d\gamma$ összefüggés valamely $\beta \in C_r(F)$ és $\gamma \in C_{r+1}(E)$ esetén igaz, de $\beta = -\alpha$ és $\gamma = 0$ választással máris találtunk megfelelő β-t és γ-t.

[3] Most válik értelmessé, hogy miért definiáltuk $r < 0$ esetére is a homológiacsoportokat. Csupán azért, hogy a tételek könnyen lefordíthatók legyenek az egzakt sorozatok nyelvére.

[4] Epimorfizmus az olyan $h: A \to B$ homomorfizmus (A és B tetszőleges csoportok), ahol minden $b \in B$ képe legalább egy $a \in A$ elemnek.

b) $\operatorname{Ker} j_* \subset \operatorname{Im} i_*$, mert ha az $\bar{\alpha} \in H_r(E)$ maradékosztály j_*-nál származó képe 0, ez azt jelenti, hogy bármely $\alpha \in \bar{\alpha}$ ciklusra egyben $\alpha \sim 0 (\mathrm{mod}\, F)$, azaz $\alpha + \beta = d\gamma$ teljesül $\beta \in C_r(F)$, $\gamma \in C_{r+1}(E)$ mellett, de akkor $d\alpha = 0$ folytán $d\beta = 0$, így $\beta \in Z_r(F)$ ciklus és $\alpha \sim -\beta$ is teljesül.

2. $\operatorname{Ker} \partial = \operatorname{Im} j_*$.

a) $\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker} \partial$ triviálisan teljesül, mert ha $\bar{\alpha} \in H_r(E, F)$ j_*-nál származó kép, akkor létezik olyan $\alpha \in \bar{\alpha}$, amely ciklus E-n, azaz $d\gamma = 0$.

b) $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} j_*$, mert

ha $\bar{\alpha} \in H_r(E, F)$ és $\alpha \in \bar{\alpha}$, akkor α ciklus mod F, azaz létezik $\beta \in C_{r-1}(F)$ úgy, hogy $d\alpha = \beta$, s ha még $\partial \bar{\alpha} = 0$, azaz $\beta = d\gamma$, ahol $\gamma \in C_r(F)$, akkor $d\alpha = d\gamma$; itt $\alpha - \gamma$ ciklus E-n, de $\alpha \sim \alpha - \gamma$ (mod F) is teljesül $\alpha - (\alpha - \gamma) - \gamma = 0$ miatt, tehát az $\bar{\alpha}$ homológiaosztályban létezik E-beli ciklus.

3. $\operatorname{Ker} i_* = \operatorname{Im} \partial$ azonnal adódik a definíciókból.

a) $\operatorname{Im} \partial \subset \operatorname{Ker} i_*$, mert

ha $\bar{\alpha} \in H_{r-1}(F)$ ∂-nél származó kép, létezik oly $\alpha \in \bar{\alpha}$, hogy $\alpha = d\beta$, $\beta \in C_r(E)$, így az α-t tartalmazó $H_{r-1}(E)$-beli maradékosztály $B_{r-1}(E)$.

b) $\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im} \partial$;

ha ugyanis $i_* \bar{\alpha} = 0$, $\alpha \in \bar{\alpha}$-ra, ahol $\bar{\alpha} \in H_{r-1}(F)$, $\alpha = d\beta$ teljesül, ahol $\beta \in C_r(E)$, tehát β az a mod F vett ciklus, amit kerestünk, amivel a (7) tételt bebizonyítottuk.

6. A homotóp leképezések tétele és a kivágási tétel

A homotóp leképezések tétele és a kivágási tétel a homológiaelmélet legalapvetőbb tételei közé tartoznak. A jelen cikk első részében nem fogjuk őket bizonyítani, csupán alkalmazhatóságukat bemutatni. Az ok a bizonyítások bonyolultságán és hosszadalmasságán kívül a bizonyítások módszerében van, amely lényegesen kihasználja a szimpliciális homológiáknál kialakult módszereket, és így feltűnő módon eltér a cikkben szereplő többi bizonyításoktól.

Először definiáljuk a homotóp leképezéseket.

I jelöli a zárt egységintervallumot, E pedig tetszőleges topologikus tér, ExI a topologikus szorzat. Két $f, g : (E, F) \to (E', F')$ folytonos leképezés *homotóp*, ha létezik olyan $H : (E \times I, F \times I) \to (E', F')$ folytonos leképezés, az úgynevezett homotópia más néven deformáció úgy, hogy $H(p, 0) = f(p)$ és $H(p, 1) = g(p)$ bármely $p \in E$ pontra. *A homotóp leképezések tétele a*

(8) Tétel: *Ha az $f, g : (E, F) \to (E', F')$ folytonos leképezések homotópok, akkor $f_* = g_*$, azaz az $f_*, g_* : H_r(E, F) \to H_r(E', F')$ homomorfizmusok, mint f és g által indukált homomorfizmusok, bármely*

$\overline{\alpha} \in H_r(E, F)$ *homológiaosztályhoz ugyanazt a* $\overline{\beta} \in H_r(E', F')$ *homológiaosztályt rendelik hozzá.*

A homotóp leképezések tételét Brouwer alkalmazta először.

A homotóp leképezések tételének egyik legfontosabb alkalmazása *homotóp ekvivalens* terekre történik. Homotóp ekvivalensnek nevezzük az (E, F) és (E', F') topologikus párokat, ha léteznek olyan $f:(E, F) \to (E', F')$ és $g:(E', F') \to (E, F)$ folytonos leképezések, hogy gf az (E, F) pár azonos leképezésével, fg pedig az (E', F') pár azonos leképezésével homotóp legyen, f és g neve homotóp ekvivalencia.

(9) Tétel: *Ha* (E, F) *és* (E', F') *homotóp ekvivalensek, és a homotóp ekvivalencia* f *és* g, *akkor* f_* *és* g_* *izomorfizmus.*

A tétel bizonyítása a homotóp leképezések tételének alkalmazásával adódik, a (6) tétel bizonyításának megismétlésével.

A homotóp ekvivalenciák között kitüntetett szerepet játszanak a *deformációs retrakciók*. Az (E', F') pár retraktuma (E, F)-nek, ha $E' \subset E$, $F' \subset F$ és létezik olyan $f:(E, F) \to (E', F')$ folytonos leképezés, az ún. retráció, amely E' pontjait fixen hagyja, azaz $f(p) = p$, ha $p \in E'$. Jelölje most $i:(E', F') \to (E. F)$ az injekciós leképezést; ekkor nyilvánvalóan fi az azonos leképezése az (E', F') párnak. Ha pedig az is teljesül, hogy if homotóp az (E, F) pár azonos leképezésével, akkor azt mondjuk, hogy (E', F') deformációs retraktuma (E, F)-nek. Ilyenformán i és f homotóp ekvivalenciák, azaz (E', F') és (E, F) homotóp ekvivalensek, és így a (9) tétel következményeként adódik a

(10) Tétel: *Ha az* (E', F') *pár deformációs retraktuma az* (E, F) *párnak, akkor az* $i:(E', F') \to (E, F)$ *injekció, sőt az* $f:(E, F) \to (E', F')$ *retrakció is a homológiacsoportok izomorfizmusát indukálja.*

Gyakran lesz szükségünk a (9) tétel egy másik következményére a

(10′) Tétel: *Legyen* $G \subset F \subset E$ *és* $f:(E, F) \to (E, F)$ *olyan folytonos leképezés, hogy létezzék hozzá egy* H *homotópia, amely* f*-et az* (E, F) *pár azonos leképezésével köti össze. Ha ezenkívül az is teljesül, hogy* $f(F) \subset G$ *és* $H(G \times I) \subset G$, *akkor* $H_r(E, G) \approx H_r(E, F)$.[5] (Mégpedig az izomorfizmust az $i:(E, G) \to (E, F)$ injekció indulákja, az inverz izomorfizmust pedig az az $f':(E, F) \to (E, G)$, amelyet úgy definiálunk, hogy $p \in E$ esetén legyen $f'(p) = f(p)$.

Mivel f'-t f felhasználásával határoztuk meg, folytonossága triviális. A tétel belátásához a (9) tétel miatt elég azt megmutatni, hogy (E, G) és (E, F) homotóp ekvivalensek, és ezt a tényt az i és f' homotóp ek-

[5] A $\approx$ jelet a szokástól eltérően lefoglaljuk csoportok izomorfiájának jelölésére, mivel a $\sim$ jel most a homológ szó rövidítésére szolgál.

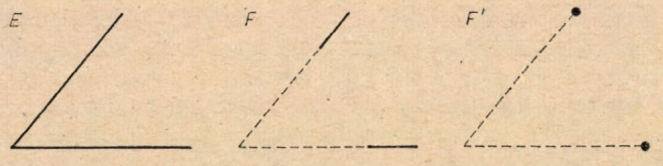
vivalenciák hozzák létre. Az $f = if'$ összefüggés miatt nemcsak f, hanem if' is homotóp (E, F)-nek azonos leképezésével. Tekintsük most az $f'i:(F, G) \to (E, G)$ leképezést; a $H(G \times I) \subset G$ feltétel miatt meg tudunk adni egy H' homotópiát $H'(p, t) = H(p, t)$ definícióval $(p \in E, 0 \leqq t \leqq 1)$, és H' lesz az a homotópia, amely $f'i$-t összeköti az (E, G) pár azonos leképezésével.

A (10) és (10′) tétel alkalmazására említünk néhány egyszerű példát.

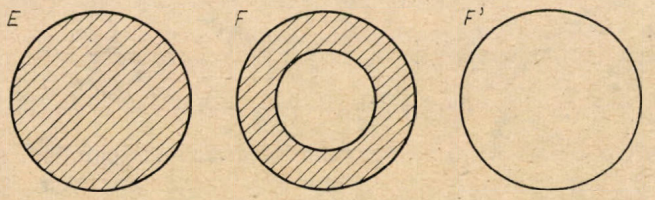
1. Ha E^n jelöli a zárt egységgömböt az n-dimenziós euklideszi térben, amelynek középpontja a c pont, továbbá $0 \leqq t \leqq 1$ és $p \in E^n$, a retrakció az a leképezés, amely bármely p pontnak a középpontot feleltetni meg, a $H(p, t) = (1-t)p + tc$ pedig a homotópia, amely a retrakciót összeköti az azonos leképezéssel. Így kaptuk: $H_r(E^n) \approx H_r(C)$, ahol most C a c által meghatározott egy pontból álló teret jelöli.

2. Hasonló módon „húzhatjuk" össze a zárt körgyűrűt a belső határkörére, vagy a tömör tóruszt a legszűkebb torokkörére. És így mindkettejük homológiacsoportjait ismerjük, ha a körvonal homológiacsoportjait kiszámítottuk.

3. Végül tekintjük a lenti 2. és 3. ábrát.



2. ábra



3. ábra

Megjegyezzük a következőket: a 2. ábrán a szaggatott vonalak csupán F és F' elhelyezkedését mutatják E-hez viszonyítva, továbbá mind a két esetben F-hez hozzávehetjük a belső szakasz végpontjait, illetve a körgyűrű belső kerületét, vagy el is hagyhatjuk azokat. Mindenképpen érvényes a $H_r(E, F) \approx H_r(E, F')$ összefüggés. Ugyanis a (10′)

tételt teljesítő f definíciója mind a két esetben: $\overline{E-F}$-on a megfelelő együtthatójú nagyítás úgy, hogy az egész E-t kitöltjük, F-en pedig az F'-re való vetítés (a nagyítási illetve vetítési centrum a szög csúcsa, illetve a kör középpontja). A deformáció pedig $H(p, t) = (1-t)p + tf(p)$, ahol $p \in E$ és f az előbb jellemzett leképezés,

Az 1. példa példát mutat olyan térre, amely homotóp ekvivalens a ponttal. Sőt példát szolgáltat az úgynevezett pontjukra zsugorítható terekre.

Legyen ugyanis az E topologikus tér minden pontjához egy rögzített $P \in E$ pont hozzárendelve; ha ezen f leképezés összetétele az $i: P \to E$ injekcióval homotóp E-nek azonos leképezésével, akkor az E teret *pontjára zsugorítható*nak nevezzük. Nyilván deformációs retrakciót állítottunk elő: $H_r(P) \approx H_r(E)$ és így szükségünk lesz a következő tételre:

(11) TÉTEL: *Ha P az egyetlen pontból álló tér, akkor $H_r(P) = 0$ $r \neq 0$ esetén, és $r = 0$ esetén $H_0(P)$ izomorf az egész számok additív csoportjával.*

A tétel bizonyítása: $r < 0$ esetén triviális; ha $r \geqq 0$, vegyük először figyelembe, hogy minden r-re egyetlen $\sigma^r: \Delta_r \to P$ szinguláris szimplex létezik, és így a láncok csoportja: $C_r(P)$, az $m\sigma^r$ alakú elemekből áll, ahol m tetszőleges egész és így $C_r(P)$ izomorf az egész számok additív csoportjával. A határoperációt tekintve $\sigma_1: C_{r-1}(\Delta_r) \to C_{r-1}(P)$ alapján a d homomorfizmusra a következő összefüggés áll: ha

$$r > 0,\ d\sigma^r = \sigma_1 d(x_0 x_1 \ldots x_r) = \sigma_1 \sum_0^r (-1)^i (x_0 x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_r) =$$

$$= \sum_0^r (-1)^i \sigma_1 (x_0 x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_r) = \sum_0^r (-1)^i \sigma^{r-1},$$

ami azt jelenti, hogy ha $r > 0$ és páros, akkor $d\sigma^r = \sigma^{r-1}$,

ha $r > 0$ páratlan, akkor $d\sigma^r = 0$.

Tekintsük most $C_r(P)$ $(r > 0)$ egy $m\sigma^r$ elemét; ha r páratlan, akkor ez $dm\sigma^r = 0$ miatt ciklus, azonban homológ 0-val, mert határa az $m\sigma^{r+1}$ ciklusnak és így $C_r(P) = Z_r(P) = B_r(P)$. Ha $r > 0$, de páros, akkor $d\sigma^r = \sigma^{r-1}$ miatt egyetlen lánc sem ciklus a 0-láncot kivéve, azaz $Z_r(P)$ és így $B_r(P)$ és 0-csoport. Az $r = 0$ esetben d-t 0-nak definiáltuk és így minden $m\sigma^0$ lánc ciklus, de $B_0(P)$, $d\sigma^1 = 0$ miatt, 0-csoport, és így $H_0(P) = Z_0(P) = C_0(P)$.

A kivágási tétel annyiban lesz rokon a (10) és (10′) tétellel, hogy itt is bizonyos injekciós leképezés fog izomorfizmust indukálni. A tétel pontos megfogalmazása a következő:

(12) TÉTEL: *Ha U olyan részhalmaza E-nek, hogy a lezárására, amit $\overline{U}$-sal jelölünk, teljesüljön, hogy $\overline{U} \subset \operatorname{Int} F$, akkor az $i:(E-U, F-U) \to (E, F)$ injekció a homológiacsoportok izomorfizmusát indukálja.*

Az alkalmazásra majd a 10 pontban fogunk példákat bemutatni. Most csak annyit jegyzünk meg, hogy a tétel nyilván csak abban az esetben mond valamit, amikor $F \neq 0$. A kivágási tétel felfedezése a relatív homológiák felfedezésével együtt Lefschetz nevéhez fűződik.

7. Axiomatikus felépítés

A homológiaelmélet axiomatikus felépítését, mint az általában történni szokott, különféle homológiaelméletek létrejötte tette szükségessé. Ezek közül az axiómarendszerek közül legismertebb, de nagyon nagy valószínűséggel a legnagyobb jelentőségű is az Eilenberg—Steenrod-féle felépítés. Ennek lényegét fogjuk most ismertetni.

Tekintsük az összes topologikus párokat és összes folytonos leképezéseiket. Ezekre fogunk definiálni három függvényt. Az első: minden r egészhez és minden (E, F) párhoz rendeljünk hozzá egy $H_r(E, F)$ Abel-csoportot. Második: minden $f:(E, F) \to (E', F')$ leképezéshez és minden r egészhez rendeljünk hozzá egy $f_{*r}: H_r(E, F) \to H_r(E', F')$ homomorfizmust. A harmadik pedig: minden egész r-re és minden (E, F)-re legyen értelmezve egy $\partial_r(E, F): H_r(E, F) \to H_{r-1}(F)$ homomorfizmus, az úgynevezett határhomomorfizmus.

Megjegyezzük, hogy az utóbbi két függvénynél, mint az általában szokás, az f_{*r} helyett az f_*, a $\partial_r(E, F)$ helyett pedig a ∂ jelölést alkalmazzuk.

Az axiómák ezekre a függvényekre fognak vonatkozni.

(1) axióma: Ha $f:(E, F) \to (E, F)$ azonos leképezés, akkor $f_*: H_r(E, F) \to H_r(E, F)$ az azonos homomorfizmus. [Nálunk (4) tétel.]

(2) axióma: Ha $f:(E, F) \to (E', F')$ és $g:(E', F') \to (E'', F'')$ akkor $(gf)_* = g_* f_*$.

[Nálunk (5) tétel.]

(3) axióma: Ha $f:(E, F) \to (E', F')$ és f-nek F-re való megszorítását $f|F$-el jelöljük, akkor $(f|F)_* \partial = \partial f_*$. [Azt a tényt, hogy a szinguláris homológiaelmélet a 3. axiómát kielégíti nem bizonyítottuk és nem is fogjuk bizonyítani.]

(4) axióma:

A következő csoportsorozat:

$$\ldots H_{r-1}(F) \xleftarrow{\partial} H_r(E, F) \xleftarrow{j_*} H_r(E) \xleftarrow{i_*} H_r(F) \leftarrow \ldots$$

ahol $i:F \to E$, $j:E \to (E, F)$ injekciós leképezések, egzakt.

[Azaz a homológ sor egzaktságának „tétele". Nálunk (7) tétel.]

(5) axióma: Ha $f, g:(E, F)\to(E', F')$ homotópok, akkor

$$f_*=g_*$$

[A homotópia-axióma. Nálunk a (8) tétel.]

(6) axióma: Ha U nyílt halmaza E-nek és $\overline{U}\subset \operatorname{Int} F$, akkor az $(E-U, F-U)\to(E, F)$ injekciós leképezéshez rendelt homomorfizmus izomorfizmus.

[Azaz a kivágási „tétel", így nálunk a (12) tétel.]

(7) axióma: Ha P az egyetlen pontból álló tér, akkor $r\neq 0$ esetén legyen $H_r(P)$ nullcsoport.

[Nálunk ez a (11) tétel egy része.]

A (6) axióma kiköti U nyílt voltát, de a (12) tételben ezt nem kötöttük ki, mert a szinguláris homológiák elméletében a kivágási tétel az $\overline{U}\subset \operatorname{Int} F$ feltétel mellett mindig érvényes. Mégis amikor példák bemutatására térünk majd át, mindig nyílt halmazt fogunk „kivágni".

A (7) axiómát dimenzióaxiómának is szokták nevezni. Ez az axióma $H_0(p)$-ről nem mond semmit. Azonban olyan homológiaelmélet, ahol $H_0(p)$ nullcsoport, nem túlságosan érdekes, mert a kivágás és a homotópia alkalmazásával terek széles osztályaihoz minden dimenzióra 0-csoportot rendelne hozzá; ez az ún. triviális homológiaelmélet. Nem triviális homológia elméletre példát adnak a szinguláris homológiák.

A (3) axióma tételként eddig még nem szerepelt. Nagyon sokszor alkalmazható és könnyen bizonyítható, de mivel a jelen cikkben nem fogjuk használni, elhagyjuk a bizonyítását.

Végül azt szeretném megjegyezni, hogy a jelen cikk 7. pont előtti része arra törekedett, hogy az axiómáknak megfelelő tételeket igazolja, illetőleg néhány azokból eredő elemi tételt is bemutasson. A cikk hátralevő részében szereplő tételek, lemmák és példák pedig az axiómákon kívül csak a szinguláros homológiák, az indukált homomorfizmus és a ∂ homomorfizmus konstrukcióját használják fel, illetve ezek kombinációjaként adódó tényeket. (Egyedül a (7) axiómát helyettesítjük a (11) tétellel.) Talán már az a tény is sejteti az Eilenberg—Steenrod-féle axiómarendszer hasznos voltát.

8. Lemmák ívszerűen összefüggő terekre

A lemmák, amelyek ebben a pontban szerepelnek, főleg arra lesznek jók, hogy segítsenek bennünket bizonyos terek homológiacsoportjainak kiszámításában.

*Ívszerűen összefüggő*nek[6] nevezzük az olyan E topologikus teret, amelynek bármely két pontja, p_1 és p_2 összeköthető egy folytonos görbével. Azaz létezik olyan $f: I \to E$ folytonos leképezése az I zárt egységintervallumnak, ahol $f(0) = p_1$ és $f(1) = p_2$.

(13) LEMMA: *Ha E ívszerűen összefüggő tér, akkor $H_0(E) \approx G$, ahol G-vel az egész számok additív csoportját jelöljük.*

Bizonyítás: *a)* előre bocsátjuk azokat a megjegyzéseket, amelyek bármely topologikus térre érvényesek. Ha $r = 0$, akkor $C_0(E) = Z_0(E)$, továbbá bármely 1-dimenziós $\alpha^1 = \sum_{j=1}^{k} m_j \sigma_j^1$ szinguláris láncra $d\alpha^1$ olyan 0-dimenziós lánc, ahol az együtthatók összege 0. Ezt a $d\alpha^1 = \sum_{j=1}^{k} m_j d\sigma_j^1$ összefüggés miatt elég egy tetszőleges σ^1 szinguláris szimplexre belátni, de ez esetben triviális. Azaz kimondhatjuk: ha egy 0-dimenziós lánc homológ 0-val, akkor együtthatóinak összege 0.

b) Legyen most E ívszerűen összefüggő is. Továbbá $\alpha^0 = \sum_{i=1}^{l} m_i \sigma_i^0$ ($\sigma_i^0: \Delta_0 \to P_i$, $P_i \in E$) tetszőleges 0-dimenziós lánc. Rögzítsünk egy $P \in E$ pontot és jelöljük σ^0-lal a $\Delta_0 \to P$ szinguláris szimplexet. Ha P_i-t P-vel összekötjük az $f_i: I \to E$ folytonos görbével, akkor h-val jelölve egy Δ_1-ről I-re való alkalmas homeomorfiát, az $f_i h$ szinguláris szimplexre teljesül: $dm_i(f_i h) = m_i \sigma^0 - m_i \sigma_i^0$, ami azt jelenti, hogy $m_i \sigma^0 \sim m_i \sigma_i^0$, de akkor $\left(\sum_{i=1}^{l} m_i\right) \sigma^0 \sim \sum_{i=1}^{l} m_i \sigma_i^0$; $\sum_{i=1}^{l} m_i = m$ jelöléssel így azt kaptuk, hogy minden homológiaosztály tartalmaz egy $m\sigma^0$ szimplexet, tehát ha az m tetszőleges egészhez hozzárendeljük az $m\sigma^0$-t tartalmazó homológiaosztályt, az így kapott homomorfizmus epimorfizmus, de monomorfizmus[7] is, mert $m\sigma^0 \in B_0(E)$ esetén *a)* miatt $m = 0$ igaz.

A (13) lemma segítségével adódik a következő két lemma.

(14) LEMMA: *Ha E ívszerűen összefüggő tér, akkor $F \neq 0$ esetére $H_0(E, F)$ nullcsoport.*

Bizonyítás: ha $\alpha \in Z_0(E, F)$, akkor $Z_0(E, F) = Z_0(E)$ miatt $\alpha \in Z_0(E)$, de az előző lemma szerint $\alpha \sim m\sigma^0$, ahol $\sigma^0: \Delta_0 \to P$ és $P \in F$; részleteseb-

[6] Ívszerűen összefüggő terekre egy szokottabb definíció a következő: Ívszerűen összefüggő az a topologikus tér, amelynek bármely két pontja ívvel összeköthető, azaz ha p_1, $p_2 \in E$ esetén létezik a zárt egységintervallum $g: I \to E$ homeomorf leképezése, ahol $g(0) = p_1$ és $g(1) = p_2$. A két definíció azonban ekvivalens és nekünk könnyebb az első definícióval dolgozni.

[7] Monomorfizmus az olyan $h: A \to B$ homomorfizmus (A és B tetszőleges additív csoportok), ahol $ha = 0$-ból ($a \in A$) következik, hogy $a = 0$.

ben: létezik $\alpha^1 \in C_1(E)$ úgy, hogy $\alpha - m\sigma^0 = d\alpha^1$ és ez $\alpha^1 \in C_1(E)$, $\sigma^0 \in C_0(F)$ miatt azt jelenti, hogy $\alpha \sim 0 (\mathrm{mod}\ F)$.

(15) LEMMA: *Ha E és F is ívszerűen összefüggő terek, $0 \neq F \subset E$, akkor az $i: F \to E$ injekciós leképezés a 0-dimenziós homológiacsoportok izomorfizmusát indukálja.*

A lemma onnan adódik, hogy a $H_0(E)$ és $H_0(F)$ végtelen ciklikus csoportok, ahol $\sigma^0 \in \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \in H_0(E)$ és $\sigma^0 \in \bar{\beta}$, $\bar{\beta} \in H_0(F)$, az $\bar{\alpha}$ illetve $\bar{\beta}$ homológiaosztállyal generálhatók és az i_* homomorfizmus σ^0-t tartalmazó maradékosztályhoz σ^0-t tartalmazót rendel hozzá. (Itt újra $\sigma^0: \Delta_0 \to P$, ahol $P \in F$ tetszőleges pont.)

Az előbbi három lemmával ellentétben, amelyek csak a 0-dimenziós homológiacsoportokra vonatkoznak, a következő minden dimenzióra érvényes lesz:

(16) LEMMA: *Ha E topologikus tér és $E = \bigcup_1^n E_i$, ahol $i \neq j$ esetén egyetlen E_i-beli pont sem köthető össze E_j-beli ponttal folytonos görbe segítségével, továbbá $F = \bigcup_1^n F_i$, ahol $F_i C E_i$, akkor $H_r(E, F) \approx \approx \sum_1 H_r(E_i, F_i)$.* (A $\sum$ jel a direkt összeg jelölésére szolgál.)

A (16) lemma bizonyítása a következő igen könnyen belátható algebrai lemmán alapul (ezt a lemmát itt nem bizonyítjuk[8]): Ha $A = \sum_1^n A_i$, és A' az A Abel-csoportnak olyan részcsoportja, hogy $A' = \sum_1^n A_i'$, A_i' részcsoportja A_i-nek ($i = 1, 2, \ldots, n$), akkor $A|A' \approx \sum_1^n A_i|A_i'$.

Ha ugyanis egy tetszőleges σ szinguláris szimplexet tekintünk, csak egyetlen E_i-ben lehetnek képpontjai a feltétel értelmében és így $Z_r(E, F) = \sum_1^n Z_r(E_i, F_i)$, $B_r(E, F) = \sum_1^n B_r(E_i, F_i)$, $B_r(E_i, F_i) \subset Z_r(E_i, F_i)$ teljesülése miatt igaz a homológiacsoportokra vonatkozó állításunk is.

Az utolsó egyszerű, de hasznos lemma ívszerűen összefüggő terekre:

(17) LEMMA: *Ha P tetszőleges pontja az E ívszerűen összefüggő térnek és $r \neq 0$, akkor $H_r(E) \approx H_r(E, P)$.*

[8] П. С. Александров: Комбинаторная топология (Москва, 1947) algebrai függelékében a bizonyítás megtalálható.

Bizonyítás: *a)* különválasztottuk azt a részt, amikor még nem használjuk ki az E topologikus tér ívszerű összefüggését. Ha $r<0$, minden csoport triviális, $r>1$-re pedig az (E, P) pár homológ sorát tekintjük, és ennek egzaktságát fogjuk felhasználni.

$$\ldots H_{r-1}(P) \xleftarrow{\partial} H_r(E, P) \xleftarrow{j_*} H_r(E) \xleftarrow{i_*} H_r(P) \leftarrow \ldots .$$

$r>1$ miatt $H_{r-1}(P)=0$ és $H_r(P)=0$ a (11)-es tétel miatt, de akkor $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} j_* = 0$, azaz j_* monomorfizmus, de epimorfizmus is, mert $\operatorname{Im} \partial = 0$, azaz

$$H_r(E, P) = \operatorname{Ker} \partial = \operatorname{Im} j_* .$$

Tehát: $r \neq 0$, 1-re minden topologikus térben $H_r(E, P) \approx H_r(E)$,

b) Legyen $r=1$, ismét felírjuk a homológ sor megfelelő szakaszát (itt már E ívszerűen összefüggő voltát is felhasználjuk): $\ldots \leftarrow H_0(E) \xleftarrow{i_*} H_0(P) \xleftarrow{\partial} H_1(E, P) \xleftarrow{j_*} H_1(E) \xleftarrow{i_*} H_1(P) \leftarrow \ldots$

Itt $H_1(P)$ nullcsoport és, mint előbb, j_* monomorfizmus. Az epimorfizmushoz azonban fel kell használni a (15)-ös lemmát, amelynek értelmében i_* izomorfizmus, és ebből $\operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} i_* = 0$, azaz $H_1(E, P) = \operatorname{Ker} \partial = \operatorname{Im} j_*$ és így j_* epimorfizmus is és monomorfizmus is, tehát izomorfizmus.

$r=0$ esetére nem áll az izomorfia, hisz a (13) lemmát tekintve $H_0(E)$ végtelen ciklikus csoport. $H_0(E, P)$ pedig a (12) lemma szerint nullcsoport.

9. Egzakt sorozatokra vonatkozó elemi lemmák

A cikk hátralevő részében fontos szerepet fognak játszani a végesen generált Abel-csoportok, és így néhány rájuk vonatkozó definíciót és tételt fel fogunk sorolni.[9]

(A definíciók és tételek átvihetők tetszőleges Abel-csoportokra is, kis részüket már alkalmaztuk is, mégis szükségesnek tartunk egy algebrai kiegészítést csupán végesen generált Abel-csoportokra szorítkozva.)

Az A Abel-csoport végesen generált, ha kiválasztható elemeinek egy véges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ S rendszere (a generátorelemek rendszere) úgy, hogy minden $a \in A$ előállítható $a = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ alakban (m_i egész). Ha minden $a \in A$, $a \neq 0$ egyértelműen írható fel az előbbi alakban, akkor A végesen generált szabad Abel-csoport és S neve bázis. Az A Abel-csoport $\varrho(A)$ rangja az a legnagyobb $k \geqq 0$ egész, amelyre létezik

[9] Kuros: Csoportelmélet (Budapest, 1955), Második rész: Abel-féle csoportok.

k számú A-beli lineárisan független elem (a lineáris függetlenség definíciója a szokásos: $\sum_{i=1}^{k} m_i a_i = 0$. ($m_i$ egész, $a_i \in A$, $i \equiv 1, 2, \ldots, k$) akkor és csak akkor, ha $m_i = 0$). Ha a végesen generált Abel-csoport szabad, akkor $\varrho(A) = n$, ahol n a báziselemek száma, így ezeket véges rangú szabad Abel-csoportoknak is fogjuk nevezni. (Tetszőleges végesen generált Abel-csoport esetén $\varrho(A) \leqq n$, itt n most a generátorelemek száma.) Véges rangú szabad Abel-csoportok a rangjuk ismeretében izomorfizmustól eltekintve egyértelműen meg vannak határozva. $\varrho(A)$ akkor és csakis akkor 0, ha A véges rendű elemekből áll.

Végesen generált Abel-csoportok rangjának egy az előzővel ekvivalens definíciója a következő: felhasználva a végesen generált Abel-csoportok alaptételét bontsuk fel A-t direkt felbonthatatlan ciklikus részcsoportjai direkt összegére, a felbontásban szereplő végtelen ciklikus csoportok száma a csoport rangja.

Szükségünk lesz a rangok összeadásának tételére is: Ha A végesen generált Abel-csoport és B valamely részcsoportja A-nak, akkor fennáll a $\varrho(A) = \varrho(B) + \varrho(A/B)$ összefüggés.

(18) LEMMA: *Ha* $\{G_q, \varphi_q\}$ *egzakt, minden* G_q *ha* $n \geqq q \geqq m$ *végesen generált Abel-csoport* G_{m-1} *és* G_{n+1} *nullcsoport, akkor*

$$\sum_{q=m}^{n} (-1)^q \varrho(G_q) = 0.$$

A bizonyításra fel kell használnunk a $G_q | \operatorname{Ker} \varphi_q \approx \operatorname{Im} \varphi_q$, valamint az $\operatorname{Im} \varphi_{q+1} = \operatorname{Ker} \varphi_q$ összefüggéseket és a rangok összeadásának tételét.

Tehát:

$$\varrho(G_q) = \varrho(G_q | \operatorname{Ker} \varphi_q) + \varrho(\operatorname{Ker} \varphi_q) = \varrho(\operatorname{Ker} \varphi_{q-1}) + \varrho(\operatorname{Ker} \varphi_q),$$

majd $(-1)^q$-val szorozva: $(-1)^q \varrho(G_q) = (-1)^q \varrho(\operatorname{Ker} \varphi_{q-1}) + (-1)^q \cdot \varrho(\operatorname{Ker} \varphi_q)$ és összegezve:

$$\sum_{q=m-1}^{n+1} (-1)^q \varrho(G_q) = (-1)^{m-1} \varrho(\operatorname{Ker} \varphi_{m-2}) + (-1)^{n+1} \varrho(\operatorname{Ker} \varphi_{n+1});$$

de ha $G_{m-1} = 0$, akkor $\operatorname{Ker} \varphi_{m-2} = \operatorname{Im} \varphi_{m-1} = 0$, továbbá $G_{n+1} = 0$ miatt $\operatorname{Ker} \varphi_{n+1} = 0$, azaz

$$\sum_{q=m}^{n} (-1)^q \varrho(G_q) = \sum_{q=m-1}^{n+1} (-1)^q \varrho(G_q) = 0$$

igazolva van.

Még következni fog néhány igen egyszerű lemma: nem is nagyon lemmák, inkább megjegyzések, de mivel több ízben fel fogom használni őket, lemmaként mondom ki.

(19) LEMMA: *Ha* $\{G_q, \varphi_q\}$ *egzakt és* G_{q+1} *és* G_{q-1} *is nullcsoport, akkor* G_q *is nullcsoport.*

Mert:

$$\dots \leftarrow 0 \xleftarrow{\varphi_q} G_q \leftarrow 0 \leftarrow \dots,$$

$$\operatorname{Im} \varphi_{q+1} = \operatorname{Ker} \varphi_q,$$

de $0 = \operatorname{Im} \varphi_q$ miatt $\operatorname{Ker} \varphi_q = G_q$ is igaz, ahonnan $G_q = 0$. A (18) lemmával összekapcsolva nagyon sokszor tudjuk alkalmazni a következő lemmát:

(20) LEMMA: *Ha* $\{G_q, \varphi_q\}$ *egzakt,* G_{q+1} *nullcsoport,* G_{q-1} *véges rangú szabad Abel-csoport, akkor* G_q *vagy nullcsoport, vagy véges rangú szabad Abel-csoport.* (És így, ha a rangját meghatároztuk, a csoportot is meghatároztuk.)

Belátásához csupán azt kell figyelembe vennünk, hogy $G_{q+1} = 0$ miatt $\operatorname{Ker} \varphi_q = 0$, ami azt jelenti, hogy φ_q izomorfizmust szolgáltat G_q és $\operatorname{Im} \varphi_q$ között. $\operatorname{Im} \varphi_q$ pedig mint egy véges rangú szabad Abel-csoport részcsoportja vagy 0-csoport, vagy véges rangú szabad Abel-csoport.

(21) LEMMA: *Ha* $\{G_q, \varphi_q\}$ *egzakt,* G_{q+2} *és* G_{q-1} *nullcsoport, akkor* φ_{q+1} G_{q+1} *és* G_q *izomorfizmusát adja.*

Ugyanis:

$$\dots \leftarrow 0 \xleftarrow{\varphi_q} G_q \xleftarrow{\varphi_{q+1}} G_{q+1} \xleftarrow{\varphi_{q+2}} 0 \leftarrow \dots,$$

$\operatorname{Ker} \varphi_{q+1} = \operatorname{Im} \varphi_{q+2} = 0$ és $\operatorname{Im} \varphi_{q+1} = \operatorname{Ker} \varphi_q = G_q$ miatt φ_{q+1} monomorfizmus is, epimorfizmus is.

10. Néhány elemi példa bemutatása

Az első három példa illusztrálja, hogy hogyan lehet gráfszerű alakzatok homológiacsoportjait meghatározni. A 4. és 5. példa kisegítő jellegű. A 6. példa a tóruszfelület, a 7. példa pedig a projektív sík homológiacsoportjainak meghatározása, a 7. példa lesz az itt bemutatott egyetlen példa, ahol a homológiacsoportok között szerepel végre egy, amely nem szabad csoport. A cikk második részében szerepelni fognak a szimpliciális komplexusok és a hozzájuk tartozó homológiacsoportok meghatározása. A módszer hasonlítani fog a 3. példa

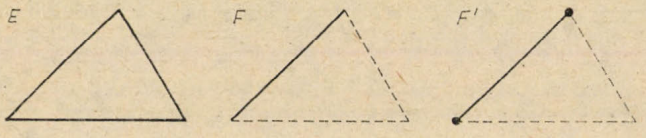
módszeréhez. A 6. és 7. példát vizsgálhatnánk a szimpliciális komplexusokra vonatkozó későbbi tételek segítségével is. Azonban az itt most bemutatott meghatározási mód elemibb és talán egyszerűbb is.

Mielőtt a példák kidolgozásához kezdenénk, néhány gyakorlati megjegyzést szeretnénk tenni.

1. Minden alakzatot (a 6. és 7. példa kivételével) az euklideszi tér részhalmazának tekintünk és az indukált topológiával látjuk el.

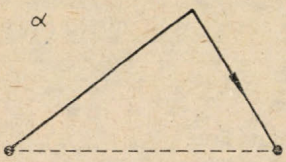
2. Ha egy egzakt sorozat szerepel: $\ldots \leftarrow \underset{\varrho_{q-1}}{G_{q-1}} \leftarrow \underset{\varrho_q}{G_q} \leftarrow \underset{\varrho_{q+1}}{G_{q+1}} \leftarrow \ldots$, a G_q alatt szereplő ϱ_q pozitív szám a csoport rangját jelöli, a 0 pedig azt jelenti, hogy G_q nullcsoport.

3. Ez a megjegyzés csupán gráfszerű alakzatokra, az 1., 2., 3. és 5. példák ábráira fog vonatkozni. Ha az eredeti E térnek valamely részhalmazát akarjuk kijelölni, mindig fel fogjuk tüntetni szaggatott vonallal az eredeti teret is; illusztrációt szolgáltat erre a 4. ábra: Ha E



4. ábra

egy háromszög éleiből áll, F illetve F' jelöli egy nyílt illetve zárt élét. Ha pedig az E valamely részhalmaza, mint az 5. ábra mutatja, nyíllal van ellátva és nem nyomtatott nagy betűvel, hanem görög betűvel jelölve, az olyan homeomorf leképezését jelöli a Δ_1 kanonikus szimplexnek, amely kitölti a jelzett halmazt és a nyíl az e_0 képétől az e_1 képe felé mutat, ha e_0 és e_1 jelöli Δ_1 csúcsait. Többi példánk ábráihoz a megfelelő helyen fűzünk megjegyzéseket, ha szükséges lesz.



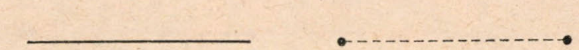
5. ábra

4. Nagyon gyakran fogjuk alkalmazni a deformációs retraktumokra vonatkozó (10) tételt valamint a (10′) tételt és a kivágási (12) tételt. A (10′) tétel alkalmazásakor azonban a tétel feltételeit kielégítő leképezést és deformációt nem fogjuk részletezni. Megadásuk nem lényegesen bonyolultabb, mint amelyeket a 6. pontban bemutattunk. Különösen fel szeretném hívni a figyelmet a 6. pont 3. példájára, ahol a leképezést nagyítás + vetítés szolgáltatta, a most következő példákban szereplő leképezések lényege és a homotópiák képlete is ugyanaz, mint a 6. pont 3. példájában.

5. Mivel $r < 0$-ra a homológiacsoportok triviálisak, fel is tehetjük, hogy $r < 0$-ra minden térre $H_r(E) = 0$.

1. PÉLDA. Ha E zárt intervallum, F pedig az az altér, amely E két végpontjából áll, $H_r(E, F)$-et keressük. (6. ábra.)

$r=0$-ra, mivel E ívszerűen összefüggő, F nem üres, a (14) lemma szerint $H_0(E, F)=0$.



6. ábra

Ha pedig $r>0$, segítségül vesszük az (E, F) pár homológ sorát:

$$\ldots \leftarrow H_{r-1}(F) \leftarrow H_r(E, F) \leftarrow H_r(E) \leftarrow H_r(F) \leftarrow \ldots$$

Mivel E homotóp ekvivalens a ponttal, azért $H_r(E) \approx H_r(P)$, továbbá $H_r(F) \approx H_r(P) + H_r(P)$ a (16) direkt összeg-lemma szerint és így $r>1$ esetén a homológ sor:

$\ldots \leftarrow 0 \leftarrow H_r(E, F) \leftarrow 0 \leftarrow \ldots$ és a (19) lemma miatt $H_r(E, F)=0$, $r=1$-re

$$\text{(I)} \qquad \underset{0}{\ldots \leftarrow H_0(E, F)} \leftarrow \underset{1}{H_0(E)} \overset{i_*}{\leftarrow} \underset{2}{H_0(F)} \overset{\partial}{\leftarrow} \underset{x}{H_1(E, F)} \leftarrow \underset{0}{H_1(E)} \leftarrow \ldots$$

itt a (18) lemma miatt $1-2+x=0$, azaz $x=1$, és $H_0(F)$ véges rangú szabad Abel-csoport volt, mint a $H_0(P)$ végtelen ciklikus csoportból alkotott direkt összeg, tehát $H_1(E, F)$ végtelen ciklikus csoport a (20) Lemma értelmében. Végeredmény: Ha $r \neq 1$, akkor $H_r(E, F)=0$ és $r=1$-re $H_1(E, F)$ végtelen ciklikus csoport.

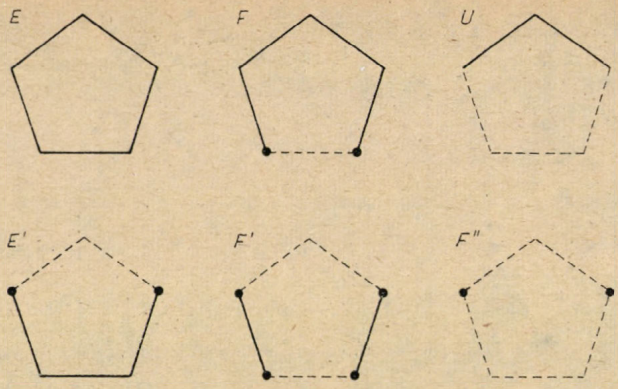
2. PÉLDA. Ha E a körkerület, F a félkör. (A félkör lezárását tekintve F-nek.) Határozzuk meg $H_r(E)$-t.

A kivágási tételt U-ra alkalmazva, majd a (10′) tételből kapjuk a következő izomorfizmusokat (7. ábra): $H_r(E, F) \approx H_r(E', F') \approx H_r(E', F'')$ de mivel E' homeomorf a zárt intervallummal, F'' pedig az E' végpontjaiból alkotott tér, az előző példa szerint ismert $H_r(E', F'')$.

Legyen $r>1$; ekkor a $\ldots \leftarrow H_r(E, F) \leftarrow H_r(E) \leftarrow H_r(F) \leftarrow \ldots$ homológ sorban $H_r(E, F)$ és $H_r(F)$ is nullcsoport, így $H_r(E)$ is az. Ha pedig $r=0$, 1, akkor

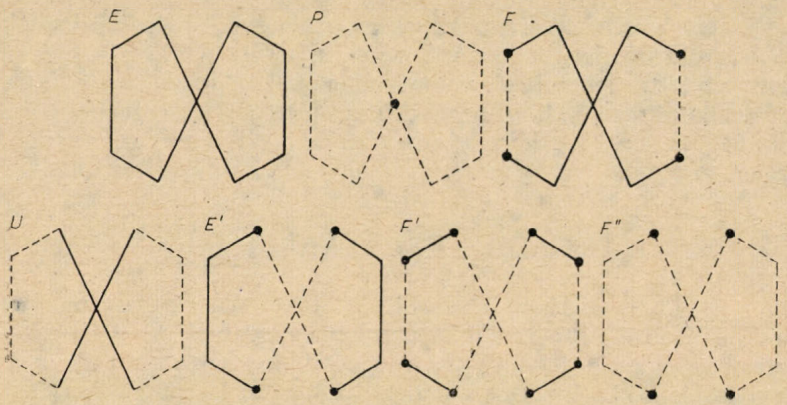
$$\text{(II)} \quad \underset{0}{\ldots \leftarrow H_0(E, F)} \leftarrow \underset{x}{H_0(E)} \overset{i_*}{\leftarrow} \underset{1}{H_0(F)} \overset{\partial}{\leftarrow} \underset{1}{H_1(E, F)} \overset{j_*}{\leftarrow} \underset{y}{H_1(E)} \leftarrow \underset{0}{H_1(F)} \leftarrow .$$

Mint az előbbi példánál, a rangokat régi ismereteink alapján fel tudtuk írni, sőt $x=1$-et is tudjuk a jelen esetben (13)-ból, mivel E ívszerűen összefüggő, és így $1-1+1-y=0$ miatt $y=1$, azaz végeredményül kaptuk: Ha E a körkerületet jelenti, akkor $r=0$, 1 kivételével $H_r(E)$ nullcsoport, $r=0$, 1-re pedig végtelen ciklikus csoport.



7. ábra

3. PÉLDA. A lemniszkáta homológiacsoportjainak meghatározása. Felhasználva a 8. ábrát, $H_0(E)$ végtelen ciklikus csoport, mivel E ívszerűen összefüggő. Legyen $r \neq 0$; ekkor a (17) lemma szerint $H_r(E) \approx H_r(E, P)$ és $H_r(E, P) \approx H_r(E, F)$ a (10′) tételből, $H_r(E, F) \approx$ $\approx H_r(E', F')$ ha egy kivágást alkalmazunk az U halmazzal, és $H_r(E', F') \approx$ $\approx H_r(E', F'')$, ha ismét alkalmazzuk a (10′) tételt. Kaptuk tehát: $H_r(E) \approx H_r(E', F'')$ ha $r \neq 0$, azonban E'-t fel tudjuk bontani két ívszerűen összefüggő komponensre, s felhasználva a direkt összegre vonatkozó (16) lemmát visszavezettük az első példára az egész feladatot. És így $H_r(E) = 0$, ha $r \neq 0$, 1. $H_0(E)$ végtelen icklikus, $H_1(E)$ pedig 2 elemmel generált szabad Abel-csoport.

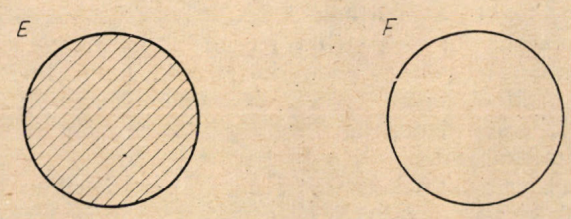


8. ábra

4. PÉLDA: E a zárt körlemez, F a körkerület. $H_r(E, F)$-et akarjuk meghatározni. Ha $r=0$, $H_0(E, F)=0$ a (14) lemmából. Ha $r>2$, a $\ldots \leftarrow H_{r-1}(F) \leftarrow H_r(E, F) \leftarrow H_r(E) \leftarrow \ldots$ homológ sorban $H_r(E)$ és $H_{r-1}(F)$ nullcsoport, s akkor $H_r(E, F)$ is az. Legyen $r=1, 2$:

(III)
$$\ldots \leftarrow \underset{0}{H_0(E, F)} \leftarrow \underset{1}{H_0(E)} \leftarrow \underset{1}{H_0(F)} \leftarrow$$
$$\leftarrow \underset{y}{H_1(E, F)} \leftarrow \underset{0}{H_1(E)} \leftarrow \underset{1}{H_1(F)} \overset{\partial}{\leftarrow} \underset{x}{H_2(E, F)} \leftarrow \underset{0}{H_2(E)} \leftarrow \ldots$$

A rangok kiszámítása az első két példánál ismertetett módszer szerint



9. ábra

történik, ugyanazokra a lemmákra hivatkozva, $x=1$ és $y=0$ adódik, és végeredménynek: $H_2(E, F)$ végtelen ciklikus csoport, $r \neq 2$ esetén pedig $H_r(E, F)=0$.

A most következő *5. példa* csupán segédfeladatokból áll. Az utána következő 6. és 7. példákhoz, valamint egyes későbbi tételekhez néha szükségünk lesz bizonyos homológiacsoportok generátorelemeinek a megkeresésére is.

5*a* PÉLDA. Az 1. példánál $H_1(E, F)$ generátorelemét akarjuk megkeresni, ahol tehát E a zárt intervallum, F-et pedig az intervallum két végpontja alkotja. Az 1. példánál szereplő (I) homológ sorból leolvashatjuk a következőket:

$$H_1(E, F) \approx \operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} i_*,$$

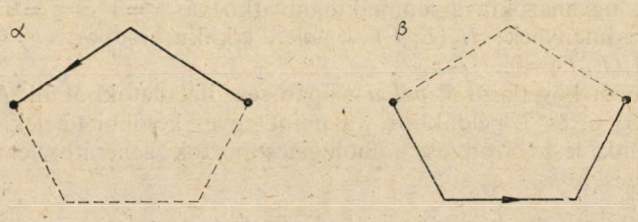
azaz ∂ izomorfizmust eredményez $H_1(E, F)$ és $\operatorname{Ker} i_*$ között, mivel pedig izomorfizmusnál a geneártorelemek egymásnak felelnek meg, elég $\operatorname{Ker} i_*$ generátorelemét meghatározni. Az intervallum egyik végpontját A-val, a másikat B-vel jelölve és felhasználva $H_0(F)$ direkt összegként való származtatását, $H_0(F)$ minden eleme $m\sigma_1+n\sigma_2$ alakban írható fel, ahol $\sigma_1: \Delta_0 \to A$ és $\sigma_2: \Delta_0 \to B$ szinguláris szimplexek,

$H_0(E)$-t pedig mint ívszerűen összefüggő tér 0-dimenziós homológiacsoportját bármely $\sigma_0 : \Delta_0 \to P$ generálja, ahol $P \in E$ tetszőleges pont. Az $m\sigma_1 + n\sigma_2$ elem osztályának képe i_*-nál az $(m+n)\sigma_0$-t tartalmazó maradékosztály, de ez akkor a 0 maradékosztály, ha $m+n = 0$, és így Ker i_* minden eleme $\sigma_1 - \sigma_2$ által generálható, ami azt jelenti, hogy $H_1(E, F)$ generátoreleme az a $\sigma : \Delta_1 \to E$, ahol $d\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$.

(Elkövettük azt a pongyolaságot, hogy ahelyett: valamely szimplex a generátor egy reprezentánsa, azt mondtuk, az illető szimplex generátorelem. Ezt a pongyolaságot néha ezután is megtesszük.)

5*b* PÉLDA. A 2. példában megállapítottuk, hogy ha E a körkerület, $H_1(E)$ végtelen ciklikus csoport. Ennek generátorelemét akarjuk meghatározni. Vizsgáljuk meg közelebbről a (II) homológ sort, amelyet a 2. példa megoldása során írtunk fel. E, F ívszerűen összefüggő volta miatt i_* izomorfizmus volt, tehát méginkább monomorfizmus, azaz Im ∂ = Ker i_* = 0 teljesül és ebből következik, hogy Im j_* = Ker ∂ = $= H_1(E, F)$ miatt j_* epimorfizmus, de monomorfizmus is $H_1(F) = 0$ miatt, azaz j_* izomorfizmus, így elég $H_1(E, F)$ generátorelemének reprezentánsát megkeresni.

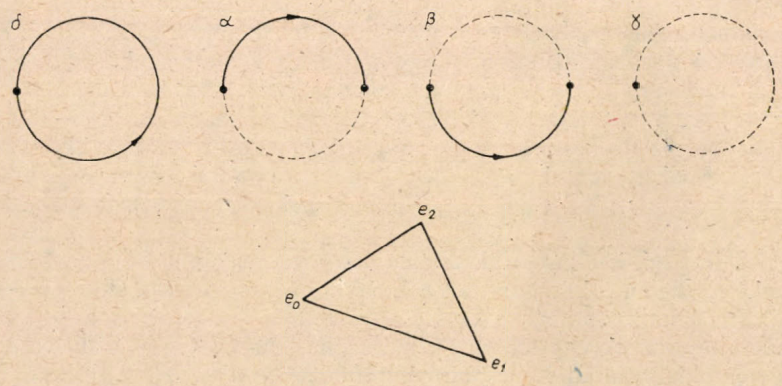
Tekintsük az $\alpha + \beta$ ciklust E-n (10. ábra). $\alpha + \beta$ ciklus E-n mod F is. Be fogjuk látni, hogy $H_1(E, F)$ generátoreleme az $(\alpha + \beta)$-t tartalmazó homológiaosztály. Ehhez pontosabban meg kell vizsgálni a 2. példa elején felhasznált izomorfizmusokat.



10. ábra

A 10. ábrát hasonlítsuk össze a 7. ábrával. Az 5*a* példa felhasználásával a β ciklus E'-n mod F'' a $H_1(E', F'')$ csoport egy generátorelemének reprezentánsa, de a $H_1(E', F'') \approx H_1(E', F')$ izomorfizmust az $(E', F'') \to (E', F')$ injekció hozta létre, így a β-t tartalmazó maradékosztálynak β-t tartalmazó felel meg. A kivágási izomorfizmust: $H_1(E', F') \approx H_1(E, F)$, szintén inkejció hozta létre. Így a két izomorfizmus összetételeként a β-t tartalmazó E-beli mod F homológiaosztályt kaptuk képnek, de $\beta \sim \alpha + \beta (\text{mod } F)$ (mert α F-beli lánc volt) és így $\alpha + \beta$ lesz $H_1(E, F)$ s egyúttal $H_1(E)$ egy generátorelemének reprezentánsa is.

5b' Ugyancsak $H_1(E)$, egy generátorelemét reprezentálja a 11. ábrán jelölt δ (E újra a körkerület). Tekintettel ugyanis a 11. ábrára és a Δ_2 kanonikus szimplexet az e_0, e_1, e_2 kitüntetett csúcssorrendű euklideszi szimplexszel szimbolizálva, meg tudunk adni egy σ-t, amely Δ_2-t E-be képezi le, úgy, hogy $d\sigma = \alpha + \beta - \delta$. σ szemléltetése a következő: vetítsük az $|e_0e_1e_2|$ szimplexet merőlegesen az e_1 csúcsból az $|e_0e_2|$ oldalra, majd ragasszuk össze az e_0 és e_2 csúcsokat.



11. ábra

5c PÉLDA. Legyen most E a körlap és F a körkerület; $H_2(E, F)$ generátorelemét keressük. (Megtartva a 11. ábra jelöléseit.) Állítás: az a σ, amely Δ_2-t E-be képezi le és amelyre $d\sigma = \alpha + \beta - \gamma$, adja meg a generátorelem reprezentánsát. (Ilyen σ még triviálisabb módon megadható, mint az előbb: most csak az $|e_0e_2|$ élt kell ponttá összehúzni.) Tekintve ugyanis a 4. példában a (III) homológ sort, $\partial : H_2(E, F) \approx H_1(F)$ adódik. Viszont $\alpha + \beta - \gamma$ homológ $\alpha + \beta$-val, mert $\gamma \sim 0$, ugyanis határa azon σ'-nek, amely Δ_2-t C-be képezi le, $\alpha + \beta$ pedig már generátoreleme az *5b* példa szerint $H_1(F)$-nek.

Az ígért példák közül hátra van még a *tóruszfelület* és a *projektív sík* homológiacsoportjainak meghatározása. Ennek a két példának azonban bizonyos részei együtt tárgyalhatók, és ezeket előre is fogjuk bocsátani. Először azt fogjuk tisztázni, hogy mit nevezünk tóruszfelületnek illetve projektív síknak.

A tóruszfelületet és a projektív síkot is a kvóciens terek segítségével fogjuk definiálni. Legyen $\mathcal{T}$ egy tetszőleges topologikus tér, amelyet valamilyen módon felbontottunk diszjunkt részhalmazai egyesítésére. Ezeket a diszjunkt részhalmazokat tekintjük a $\mathcal{T}/\mathfrak{R}$ kvóciens tér pont-

jainak, $\mathcal{T}/\mathfrak{R}$-beli nyílt halmazoknak pedig azokat és csak azokat a $\mathcal{T}/\mathfrak{R}$-beli halmazokat definiáljuk, amelyeknél a pontokat adó $\mathcal{T}$-beli halmazok egyesítése $\mathcal{T}$-ben nyílt. A definícióból triviális, hogy $\mathcal{T}/\mathfrak{R}$ valóban topologikus tér. Ha $\mathcal{T}$ minden pontjához hozzárendeljük $\mathcal{T}/\mathfrak{R}$-nek azt az elemét, amely ezt a pontot tartalmazza, akkor egy a $\mathcal{T}$-ből $\mathcal{T}/\mathfrak{R}$-re való folytonos leképezést nyertünk. Ezt a leképezést természetes leképezésnek fogom nevezni.

Legyen az $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ pár az olyan párral homeomorf, ahol a pár első tagja a zárt körlapból, a második pedig az ezt a körlapot határoló körvonalból áll. (A körlapot a sík által indukált topológiával látjuk el.) Ha $\mathcal{E}$-nek úgy tudunk megadni egy diszjunkt részhalmazokra való bontását, hogy az előbb leírt módon megszerkesztett $\mathcal{E}/\mathfrak{R}$ kvóciens térre és az $w: \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathfrak{R}$ természetes leképezésre teljesül az, hogy w az $(\mathcal{E} - \mathcal{F})$-en homeomorfizmus, csupán $\mathcal{F}$-beli pontok képe eshet össze, akkor w-et ragasztásnak nevezzük, $\mathcal{E}/\mathfrak{R}$-ről pedig azt mondjuk, hogy $\mathcal{E}$-ből állt elő ragasztás segítségével, vagy, hogy $\mathcal{E}$-nek a ragasztásnál származó képe.

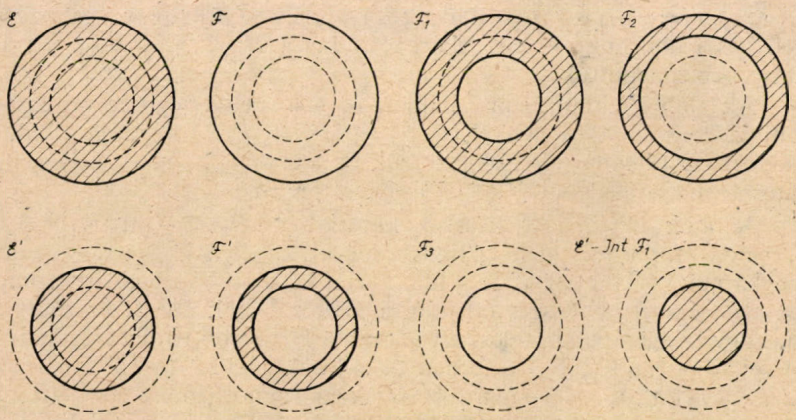
Válasszuk $\mathcal{E}$-t zárt téglalapnak, $\mathcal{F}$ pedig legyen $\mathcal{E}$ határa. $\mathcal{E}$ diszjunkt részhalmazokra bontását a következő módon definiáljuk: $\mathcal{E} - \mathcal{F}$ minden pontja önmaga alkosson egy felbontási halmazt, a téglalap csúcsait sorozzuk egy felbontási halmazba, ha pedig p és p' két szemköztes oldal pontjai (csúcsoktól különböző pontjai), p és p' akkor és csak akkor kerüljön ugyanabba a halmazba, ha p és p' a hozzájuk tartozó oldallal párhuzamos téglalaptengelyre vonatkoztatva egymás tükörképei. Ehhez a felbontáshoz tartozó kvóciens teret tóruszfelületnek fogjuk nevezni. Ha pedig $\mathcal{E}$ a zárt körlap $\mathcal{F}$ határkörrel a felbontási halmazokat a következő módon nyerjük: $\mathcal{E} - \mathcal{F}$ pontjai most is önmagukban alkossanak egy felbontási halmazt, $p, p' \in \mathcal{F}$ esetén p és p' akkor és csak akkor alkosson egy felbontási halmazt, ha ugyanazon körátmérő végpontjai. Ehhez a felbontáshoz tartozó kvóciens teret projektív síknak fogjuk nevezni. Így a tóruszfelület a téglalapból állt elő ragasztás segítségével a projektív sík pedig a körlapból, hiszen a ragasztás feltételei triviálisan teljesülnek.[10] Mind a két esetben $\mathcal{E}$-nek a ragasztásnál származó képet E-vel fogjuk jelölni, $\mathcal{F}$ képét pedig F-fel. Már most megjegyezzük, hogy a tóruszfelület esetén F homeomorf a lemniszkátával, a projektív sík esetén pedig a körvonallal.

Mind a két esetben érvényesek a következő triviálisan adódó tények: Mivel $\mathcal{E}$ kompaktum, w definíciója következtében E is kompakt Hausdorf tér és így w zárt leképezés. (w-et $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-ből (E, F)-re való leképezésnek fogjuk fel.)

[10] A felületek euklideszi térben való realizálásának kérdésével a cikk keretében nem foglalkozunk, mivel itt csak példák bemutatásához volt szükségünk rájuk.

A példamegoldásokhoz vezető első komoly lépés az lesz, hogy mind a két esetben be fogjuk látni a $H_r(E, F) \approx H_r(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ összefüggést.

Mivel az okoskodás mind a tóruszfelület, mind a projektív sík esetében ugyanaz, a könnyebb leírhatóság, de nehezebb elképzelés miatt a projektív sík esetére fogjuk szemléltetni a fenti izomorfizmus bizonyítását. Legyen $\mathscr{F}_1$ az a zárt körgyűrű, amelynek külső határköre $\mathscr{F}$, a belső pedig egy $\mathscr{F}$-fel koncentrikus tetszőleges kör (12. ábra), $\mathscr{F}_2$ pedig az a zárt körgyűrű, amelynek egyik határköre szintén $\mathscr{F}$, a másik pedig például az $\mathscr{F}_1$ középvonalát alkotó kör. $\mathscr{F}_1$-nek



12. ábra

w-nél származó képe legyen F_1, $\mathscr{F}_2$-nek w-nél származó képe pedig F_2. Fennáll a $w(\mathrm{Int}\,\mathscr{F}_\alpha) = \mathrm{Int}\,F_\alpha$ összefüggés ($\alpha = 1, 2$). Mivel ugyanis w zárt leképezés is, és fennállnak a $w(\mathrm{Int}\,\mathscr{F}_\alpha) \cap w(\mathscr{E} - \mathrm{Int}\,\mathscr{F}_\alpha) = 0$ valamint a $w(\mathrm{Int}\,\mathscr{F}_\alpha) \cup w(\mathscr{E} - \mathrm{Int}\,\mathscr{F}_\alpha) = E$ egyenlőségek, így $w(\mathrm{Int}\,\mathscr{F}_\alpha)$ nyílt halmaz, olyan nyílt halmaz, amely része F_α-nak, tehát azt kaptuk, hogy $w(\mathrm{Int}\,\mathscr{F}_\alpha) \subset \mathrm{Int}\,F_\alpha$. A fordított tartalmazás pedig fennáll w folytonossága és $w^{-1}(\mathrm{Int}\,F_\alpha) \subset \mathscr{F}_\alpha$ miatt. Alkalmazni fogunk egy kivágást az $(\mathscr{E}, \mathscr{F}_1)$ párra az $\mathrm{Int}\,\mathscr{F}_2$, az (E, F_1) párra pedig az $\mathrm{Int}\,F_2$ nyílt halmazokkal. Be kell látnunk a kivágási tétel alkalmazását lehetővé tevő $\overline{\mathrm{Int}\,\mathscr{F}_2} \subset \mathrm{Int}\,\mathscr{F}_1$ és az $\overline{\mathrm{Int}\,F_2} \subset \mathrm{Int}\,F_1$ tartalmazásokat; az első triviálisan teljesül $\mathscr{F}_2 = \overline{\mathrm{Int}\,\mathscr{F}_2}$ miatt, a másik pedig $\overline{\mathrm{Int}\,F_2} = \overline{w(\mathrm{Int}\,\mathscr{F}_2)} \subset$ $\subset \overline{w(\mathscr{F}_2)} = \bar{F}_2 = F_2 = w(\mathscr{F}_2) \subset w(\mathrm{Int}\,\mathscr{F}_1) = \mathrm{Int}\,F_1$ miatt. Bevezetve az $\mathscr{E}' = \mathscr{E} - \mathrm{Int}\,\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F}_1 - \mathrm{Int}\,\mathscr{F}_2$ és $E' = E - \mathrm{Int}\,F_2$, $F' =$ $= F_1 - \mathrm{Int}\,F_2$ jelöléseket azt kaptuk, hogy $H_r(\mathscr{E}', \mathscr{F}') \approx H_r(\mathscr{E}, \mathscr{F}_1)$ és $H_r(E', F') \approx H_r(E, F_1)$, s mivel w az $(\mathscr{E}', \mathscr{F}')$ és (E', F') párok között

homeomorfizmust létesít, fennáll $H_r(\mathscr{E}', \mathscr{F}') \approx H_r(E', F')$ is. Tehát: $H_r(\mathscr{E}, \mathscr{F}_1) \approx H_r(E, F_1)$. Meg tudjuk szerkeszteni a $H_r(\mathscr{E}, \mathscr{F}_1)$-et a $H_r(\mathscr{E}, \mathscr{F})$-fel összekötő izomorfizmust is a 6. pont 3. példája alapján, ott egy olyan f leképezést szerkesztettünk meg, amely eleget tett a (10′) tétel feltételeinek, azaz $f:(\mathscr{E}, \mathscr{F}_1) \to (\mathscr{E}, \mathscr{F}_1)$ olyan volt, hogy f-et valamely H homotópia kötötte össze az $(\mathscr{E}, \mathscr{F}_1)$ pár azonos leképezésével, és $f(\mathscr{F}_1) \subset \mathscr{F}$, valamint $H(\mathscr{F} \times I) \subset \mathscr{F}$ is teljesült, f segítségével tudunk olyan $\tilde{f}:(E, F_1) \to (E, F_1)$ leképezést konstruálni, amely eleget tesz a (10′) tétel követelményeinek: $\tilde{f}(w(p)) = w(f(p))$, $(p \in \mathscr{E})$, az $\tilde{f}$-ot az (E, F_1) pár azonos leképezésével összekötő homotópia pedig $\tilde{H}(w(p), t) = w(H(p, t))$, $p \in \mathscr{E}$, $0 \leqq t \leqq 1$. ($\tilde{f}$ és $\tilde{H}$ folytonosságához fel kell használni, hogy w zárt leképezés.) Így a $H_r(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \approx H_r(E, F)$ állítást bebizonyítottuk.

Az előbbi izomorfizmus alapján és a 4. példa segítségével azt is tudjuk, hogy $r \neq 2$ esetén $H_r(E, F) = 0$ és $H_2(E, F)$ végtelen ciklikus csoport. A példamegoldásokhoz szükség lesz $H_2(E, F)$ valamely generátorelemét is megadni $H_2(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ generátoreleme segítségével.

Jelöljük $\mathscr{F}_3$-mal $\mathscr{F}'$ belső határkörét. $H_2(\mathscr{E}' - \operatorname{Int} \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_3)$ a 4. példa szerint végtelen ciklikus csoport, amelynek generátorelemét megkapjuk például egy az 5c példa szerint készített σ' szinguláris szimplex segítségével (σ' összes tulajdonságai közül csak annyit használunk ki, hogy szinguláris szimplex, ezt is csak a könnyebb leírhatóság miatt). Mivel $(\mathscr{E}' - \operatorname{Int} \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_3)$ deformációs rektraktuma az $(\mathscr{E}', \mathscr{F}')$ párnak, az $i:(\mathscr{E}' - \operatorname{Int} \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_3) \to (\mathscr{E}', \mathscr{F}')$ injekció izomorfizmust hoz létre, és így ugyanaz a σ' lesz $H_2(\mathscr{E}', \mathscr{F}')$ generátorelemének reprezentánsa. A $H_2(\mathscr{E}', \mathscr{F}')$-ről $H_2(\mathscr{E}, \mathscr{F}_1)$-re vezető kivágási izomorfizmust is injekció indukálja és így $H_2(\mathscr{E}, \mathscr{F}_1)$ generátorelemét szintén σ' határozza meg. Mivel $(\mathscr{E}', \mathscr{F}')$-t w homeomorfizmussal vitte át (E', F')-re, $H_2(E', F')$ generátorelemét, de az előző gondolatmenet megismétlésével $H_2(E, F_1)$ generátorelemét is a $w\sigma'$ szinguláris szimplex reprezentálja. A $H_2(\mathscr{E}, \mathscr{F}_1)$-ről $H_2(\mathscr{E}, \mathscr{F})$-re való izomorfizmust f indukálta, így $f\sigma'$ lesz $H_2(\mathscr{E}. \mathscr{F})$ generátoreleme, $\tilde{f}$ definíciója miatt pedig $\tilde{f}w\sigma' = w(f\sigma)'$ lesz $H_2(E, F)$ generátoreleme. f megszorítása $(\mathscr{E}' - \operatorname{Int} \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_3)$-ra homeomorfizmus, így minden olyan szinguláris szimplex, amely $H_2(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ generátoreleme, felfogható valamely $H_2(\mathscr{E}' - \operatorname{Int} \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_3)$-beli olyan szinguláris szimplex f-nél származó képének, amely maga is generátorelem. Azt kaptuk tehát, hogy ha σ-val jelöltük azt a szinguláris szimplexet, amely $H_2(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ egy generátorelemének reprezentánsa, $w\sigma$ fogja szolgáltatni $H_2(E, F)$ generátorelemének egy repretenzánsát. A tóruszfelület és a projektív sík homológiacsoportjainak meghatározásánál ezeket a megjegyzéseket fogjuk figyelembe venni. Az itt szereplő minden bizonyítás nemcsak a projektív síkra, hanem a tóruszfelületre is (sőt sokkal általánosabb terekre is) vonatkozik, mert az alapul vett $\mathscr{E}$ terek homeomor-

fizmussal átvihetők egymásba, a ragasztás $\mathcal{F}$-en való definíciójából pedig csak a folytonosságot használtuk ki.[11]

A 6. és 7. példa során a most bevezetett jelöléseket megtartjuk.

6. PÉLDA. A tóruszfelület homológiacsoportjainak meghatározása. E tehát a tóruszfelület, F pedig E-nek olyan altere, amely homeomorf a lemniszkátával. Mivel $H_r(E, F)$ és $H_r(F)$ ismert, az (E, F) pár homológ sorát felírva $r>2$-re $H_r(E, F)=0$ és $H_r(F)=0$ miatt $H_r(E)$ is nullcsoport. $r=0$-ra, mivel E ívszerűen összefüggő, $H_0(E)$ végtelen ciklikus csoport. $r=1, 2$-re pedig tekintsük a homológ sor megfelelő szakaszát:

$$\underset{0}{\leftarrow} H_1(E, F) \leftarrow \underset{y}{H_1(E)} \xleftarrow{i_*} \underset{2}{H_1(F)} \xleftarrow{\partial} \underset{1}{H_2(E, F)} \xleftarrow{j_*} \underset{x}{H_2(E)} \leftarrow \underset{0}{H_2(F)} \leftarrow \dots .$$

A rangok összeadásával nem érünk el most lényeges eredményt, hisz x, y egyidejűleg ismeretlen.

Ellenben azt fogjuk belátni, hogy j_* izomorfizmus. Ha tudnánk ezt, akkor $H_2(E)$ végtelen ciklikus csoport lenne, sőt i_* is izomorfizmussá válnék, mert i_* epimorfizmus $H_1(E, F)=0$ miatt, de monomorfizmus is lenne, hisz: $\operatorname{Im} j_* = H_2(E, F) = \operatorname{Ker} \partial$ teljesülne, ami azt jelentené, hogy $\operatorname{Ker} i_* = \operatorname{Im} \partial = 0$, és így $H_1(E)$ két elemmel generált szabad Abel-csoport lenne.

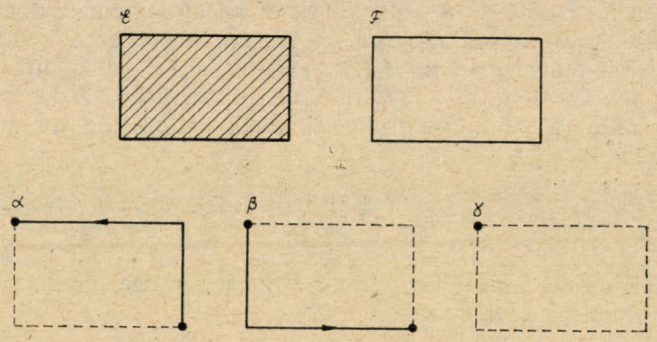
De j_* monomorfizmus volta $H_2(F)=0$ miatt triviális. Be kell látni, hogy epimorfizmus is. Ehhez elég találnunk egy olyan $\tilde{\omega} \in Z_2(E)$ ciklust, amely a $H_2(E, F)$ csoport generátorelemének is reprezentánsa.

Legyen σ olyan $\mathcal{E}$-beli szinguláris szimplex, amely rendelkezik az 5c példa alapján megkívánt tulajdonságokkal, azaz $d\sigma = \alpha+\beta-\gamma$ (13. ábra), és így $H_2(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ valamely generátorelemének egy reprezentánsa. Tekintsük azt a σ_1 és σ_2 $\mathcal{E}$-beli 2-dimenziós szimplexet, amelyre (a 14. ábra alapján) $d\sigma_1 = \alpha_1+\alpha_2-\varepsilon$, $d\sigma_2 = \beta_1+\beta_2-\varepsilon$.

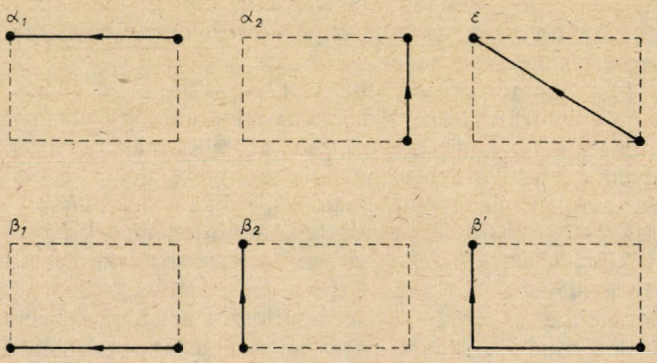
Tekintsük az $\omega = \sigma_1-\sigma_2$ láncot. Először azt fogjuk belátni, hogy $\sigma \sim \omega$ $\mathcal{E}$-ben mod $\mathcal{F}$, azaz ω is $H_2(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ generátorelemét reprezentálja. A 4. példa III. homológ sorában ∂ izomorfizmus volt, és így az előbbi állítás bizonyításához elég belátni, hogy $d\sigma \sim d\omega$ $\mathcal{F}$-en. Ez azonban triviális lépéseken keresztül adódik: $\alpha_1+\alpha_2 \sim \alpha$, $\beta_1+\beta_2 \sim \beta' \sim -\beta+\gamma$, azaz $d\omega = \alpha_1+\alpha_2-(\beta_1+\beta_2) \sim \alpha+\beta-\gamma = d\sigma$. Ha a σ és ω $\mathcal{E}$-beli mod $\mathcal{F}$ vett ciklusokra alkalmazzuk a w ragasztást, amely $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-ről (E, F)-re történő leképezés, a w által meghatározott w_1 homomor-

[11] A 6. és 7. példát előkészítő okoskodások során jelölésekkel nem különböztettünk meg két függvényt, amikor azok csak annyiban különböznek egymástól, hogy valamely tér minden pontjához ugyanezt a képpontot rendelik hozzá, de a tér, amelybe a leképezés történik, megváltozik. Jelen esetben ez a pongyolaság nem okoz félreértést, az áttekinthetőséget azonban fokozza.

fizmus ω-t és σ-t olyan E-beli mod F vett ciklusokba viszi át, ahol $w_1\sigma \sim w_1\omega (\text{mod } F)$, $w_1\omega = \tilde{\omega}$, de $w\sigma = w_1\sigma$-ról már láttuk, hogy $H_2(E, F)$ valamely generátorelemének reprezentánsa, s akkor ugyanez áll az $\tilde{\omega}$ E-beli mod F vett ciklusra is. Be fogjuk látni, hogy $\tilde{\omega}$ ciklus is E-n.



13. ábra



14. ábra

Ez azonban igaz, mert $w\alpha_1 = w\beta_1 = \tilde{\alpha}$, $w\alpha_2 = w\beta_2 = \tilde{\beta}$ miatt $d\tilde{\omega} = dw\omega = w_1(\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2) = 0$. Tehát $\tilde{\omega}$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal és így megkaptuk j_*, és ezzel i_* izomorfizmus voltát.

Azaz végeredménynek: $H_2(E)$ végtelen ciklikus csoport, $H_1(E)$ pedig két elemmel generált szabad Abel-csoport.

7. Példa. A projektív sík homológiacsoportjainak meghatározása. E tehát a projektív sík, F pedig E-nek olyan altere, amely homeomorf a körkerülettel. $H_r(E, F)$-et és $H_r(F)$-et ismerjük, így az (E, F)

pár homológ sorának segítségével $r>2$ esetén $H_r(E)=0$, mivel $H_r(E, F)$ és $H_r(F)$ is nullcsoport.

$H_0(E)$ végtelen ciklikus csoport E ívszerű összefüggése miatt. $r=1, 2$ esetén is a homológ sorral fogunk dolgozni, de először még néhány tényt előre kell bocsátanunk. Legyen $H_2(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ generátorelemének reprezentánsa az a σ szinguláris szimplex, amely az 5*c* példa szerint olyan, hogy $d\sigma = \alpha+\beta-\gamma$ (szemléltetés a 11. ábrán).

$\alpha+\beta\sim 0$ $\mathscr{E}-u$, hiszen $\gamma\sim 0$ (az 5*c* példa egy részlete volt). A w ragasztás (mint folytonos leképezés) által meghatározott w_1 homomorfizmus 0-val homológ ciklust 0-val homológ ciklusba visz át, és $w\alpha=$ $=w\beta=\delta'$ miatt $2\delta'\sim 0$ E-n, de δ' az 5*b* példa szerint $H_1(F)$ generátorelemének repretenzánsa. Ezek után tekintsük $r=1, 2$ esetén a homológ sort:

$$\ldots \leftarrow \underset{0}{H_1(E, F)} \leftarrow \underset{x}{H_1(E)} \xleftarrow{i_*} \underset{1}{H_1(F)} \xleftarrow{\partial} \underset{1}{H_2(E, F)} \xleftarrow{j_*} \underset{y}{H_2(E)} \leftarrow \underset{0}{H_2(F)} \leftarrow \ldots .$$

Első pillanatra úgy látszik, hogy a rangok összeadását itt sem lehet alkalmazni. $H_1(E)$-t azonban könnyen meg tudjuk határozni, $H_1(E, F)=0$ miatt ugyanis $H_1(E)=\operatorname{Im} i_*$, de a $H_1(F)$ végtelen ciklikus csoport δ' generátorelemére fennáll: $2\delta'\sim 0$ E-n. Ha be tudjuk látni, hogy $\delta'\not\sim 0$ E-n, akkor $\operatorname{Im} i_*$ a 0 és a δ' elemből álló másodrendű véges ciklikus csoport. Ez tehát az első eset, amikor példát adtunk arra, hogy a homológiacsoport nem szabad csoport.

Ha $\delta'\sim 0$ lenne E-n, akkor $\operatorname{Im} i_*=H_1(E)=0$ lenne, és például a rangok összeadásának lemmájából $y=0$-nak adódnék. Így nemcsak $H_1(E)$, de a (20) lemma miatt $H_2(E)$ is nullcsoport lenne és ez a (21) lemma következményeként ∂ izomorfizmusát indukálná. Ha viszont ∂ izomorfizmus volna, akkor a $H_2(E, F)$ generátorelemének $w\sigma$ reprezentánsát $H_1(F)$ valamely generátorelemének reprezentánsába kellene átvinni; de $dw\sigma = wd\sigma = 2\delta'-w\gamma\sim 2\delta'$, δ' $H_1(F)$-nek generátoreleme és így $\delta'\not\sim 2\delta'$ F-en, tehát ∂ nem lehet izomorfizmus és $\delta'\not\sim 0$ E-n.

$H_2(E)$ meghatározására most is használhatjuk a rangok összeadására vonatkozó (18) és (20) lemmát, mivel $H_1(E)$ véges ciklikus csoport volt, $\varrho(H_1(E))=0$, azaz $\varrho(H_2(E))$ is 0-nak adódik és így $H_2(E)$ nullcsoport.

Ezzel le is zártuk a példák bemutatását. Mielőtt e cikk első részét befejeznénk, még néhány megjegyzést teszünk. Az első az, hogy a 6. és 7. példa segítségével meg tudnánk határozni az egy- és kétoldalú felületek normáltípusainak és így az összes felületeknek homológiacsoportjait. Például úgy, hogy egy folytonos leképezést konstruálunk a tóruszra illetve a projektív síkra.

A második megjegyzés pedig az, hogy a gömbfelület homológiacsoportjait még nem határoztuk meg, de a cikk második részét ezzel

fogjuk kezdeni és meghatározzuk mint alapvető tételt az n-dimenziós gömbfelület homológiacsoportjait.

A cikk második részének tartalma: szimpliciális komplexusok homológiacsoportjainak megkonstruálása, és a két nagy tétel: a homotóp leképezések tétele és a kivágási tétel bizonyítása.

СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ I.

Мария Вишки

SINGULAR HOMOLOGIES I.

M. Viski

Társulatunk 75 éve

SZÉNÁSSY BARNA

A véletlen érdekes játéka, hogy tudományos életünk két jelentős évfordulót is ünnepel ebben az évben: a Természettudományi Társulat megalapításának 125., a Matematikai és Fizikai Társulat létesítésének 75. évfordulóját. Ennek — a számtani közepében — éppen egy évszázadot kitevő időnek a jelentőségét talán azzal fejezzük ki legtömörebben, hogy közben sikerült a hazai természettudományos kultúra évszázados elmaradottságát felszámolnunk, éspedig nem kis részben épp a két társulat működése révén. Pedig egyikük élete sem volt zavartalan: a gyermekbetegségek évtizedekig, a társadalmi gondokkal együttjáró bajok még hosszabb ideig fenyegették létüket.

És talán éppen ezért felemelő érzés Társulatunk 75 évének kezdeti emlékeit idézgetnünk. A múlt század utolsó harmadának sokat emlegetett, viszonylag nyugodtabb, Ferenc József-i évei peregtek ekkor. A kiegyezés nem hozta ugyan el a magyar néptömegek várvavárt felszabadulását, de annyi eredménye volt, hogy nálunk is meggyorsult a kapitalizmus kibontakozása, e társadalmi rend pedig már komolyabb követelményeket támasztott a tudományok képviselőivel szemben. A matematika terén is mutatkoztak bizonyos konjunkturális jelenségek, kezdetben azonban kevés mélyebb képzettségű szakemberrel rendelkeztünk. Fokozatosan kialakult a matematikai kultúra két centruma is, egyik a budapesti műszaki egyetem, másik az új létesítmény, a kolozsvári tudományegyetem falai között. Az erők összefogásának szükségességét, a társulati életben rejlő lehetőségeket a budapestiek ismerték fel elébb, nagyobb létszámuk alapján nekik lehetőségük is kínálkozott arra, hogy létrehozzák az együttműködés hasznot hajtó, valamilyen szabadabb keretét. A Magyar Tudományos Akadémia ilyen szempontból nem jöhetett számításba, részben működésének szigorúan kötött formája, részben az akadémikusok kis létszáma miatt.

Ilyen körülmények között határozták el 1885 őszén a budapesti matematikusok egy magánjellegű társaság alapítását, azzal a céllal, hogy összejöveteleiken kötetlen beszélgetések formájában tájékoztassák egymást eredményeikről, vagy egy-egy jelentősebb új témakörről. Korabeli adatok szerint a „Matematikai Társaság" havonként átlag-

ban két összejövetelt tartott, mindig valamelyik budapesti vendéglő különtermében, az előadást és a hozzászólásokat pedig közös vacsora, bor melletti barátságos szakmai beszélgetés követte. „Nem voltak e társaságnak — mondja *Kőnig* Dénes — sem elnökei, sem alapszabályai, és összejöveteleiket egy közönséges vacsorázó asztaltársaságtól csak az ünnepélyes fekete tábla jelenléte különböztette meg."

A résztvevők száma 20—30 között ingadozott, a törzsgárdát *Eötvös* Loránd, *Hunyady* Jenő, *Kőnig* Gyula, *Scholtz* Ágoston és id. *Szily* Kálmán alkotta. Az előadói pulpitusnál is leggyakrabban ők szerepeltek, de olykor-olykor a távoli Kolozsvárról is felrándult *Réthy* Mór, vagy a fiatal *Schlesinger* Lajos. Hazánkban a matematikusok társulati életének ez volt a kezdete. Ennek sikere és eredményessége csakhamar felkeltette a fizikusok érdeklődését is, bekapcsolódásuk a társulat munkájába tovább erősítette az összetartozás érzését, és az együttműködés hatékonyságát. Történelmi hűség kedvéért azonban itt meg kell jegyeznünk, hogy a *matematikus* és *fizikus* szó ekkor még korántsem jelentett két izolált kategóriát. Több tudósunkról nehéz is egyértelműen eldöntenünk, hogy hova kell sorolnunk. Matematikusaink közül pl. *Kőnig* Gyula, vagy *Réthy* Mór szívesen foglalkozott fizikai problémákkal is, *Eötvös* Loránd és *Szily* Kálmán pedig nem idegenkedett a matematikától sem. E körülmény magyarázatát részben a tudományok mainál kisebb mérvű differenciáltságában, részben a polihisztorságra való — még mindig divatos — törekvésekben találjuk.

Mindenesetre, midőn 1890. december 18-án *Eötvös* Loránd mintegy 100 hallgató előtt fölvetette egy matematikai és fizikai tárgyú folyóirat kiadásának, valamint annak a gondolatát, hogy e tudományok szakembereinek mostmár alapszabályok szerint működő egyesületbe kellene tömörülniük, a spontán lelkesedés oly nagy volt, hogy az eleve biztosította a sikert. Nem hangzatos, csalogató jelszavakkal fejezte ki *Eötvös* a szélesebb körű társulás célját: „Tanuljunk egymástól, hogy mennél jobban taníthassunk" — ezzel a mottóval adott életet, erkölcsöt javaslatának. A nagy tudós elgondolását szerényen fogalmazott következő mondatai részletezték: „A tudomány haladását rendes összejöveteleinken élő szóban előadni, és mindazt, ami a szakember figyelmére méltó, szakfolyóiratunkban megírni: ez a mi feladatunk. E feladat nem látszik nagynak; alig többnek egy önképzőkör feladatánál, és mégis, ha híven teljesítjük, érdemes munkát végzünk és nagy szolgálatot teszünk vele. Hiszen, ha elérjük azt, hogy mindenki, aki hazánkban physikát és mathematikát tanít, igazán physikus és mathematikus: akkor nagy szolgálatot tettünk nemcsak az iskolának, hanem hazánk tudományosságának is. Ha ezen önképző feladatot híven és komolyan teljesítjük, akkor az is lesz eredménye, hogy a mi körünkből fognak majd kiválni a tudomány önálló művelői és fejlesztői."

A társulati tagság előfeltételét pedig kezdettől fogva *Kőnig* Gyula elgondolása határozta meg: szerinte iparkodni kell „... nem ugyan mindenkit, de a mathematika és physika minden mívelőjét és terjesztőjét a tagok sorába vonni."

Ezeknek az irányelveknek a szellemében fogott hozzá egy bizottság a létesítendő társulat alapszabályának kidolgozásához. A belügyminiszteri jóváhagyás kelte 1891. augusztus 21.

A következő lépés a tagok toborzása volt. Gazdag eredménynek kell elkönyvelnünk, hogy a „Mathematikai és Physikai Társulat" 1891. november 5-iki — az egyetem fizikai intézetében tartott — közgyűlésen az elnökké választott *Eötvös* Loránd 298 személy jelentkezését regisztrálhatta. És a kezdeti lendület nem is bizonyult szalmalángnak: a tagok száma rövidesen 400 fölé emelkedett — nagyjából egyenlően megoszolva Budapest és a vidék között. Az alakuló közgyűlésen matematikus részről alelnökké *Kőnig* Gyulát, titkárrá *Rados* Gusztávot, és jegyzővé *Kopp* Lajost választották.

Ezt a matematikai életünkben kétségtelenül jelentős dátumot már nem érte meg az előkészítés egyik leglelkesebb, fáradhatatlan harcosa, *Hunyadi* Jenő, mert alkotó ereje teljében 1889. december 26-án elragadta a halál.

A jól átgondolt cél lehetővé tette, hogy egész rövid időn belül kiformálódjanak azok a terrénumok, melyek a társulati élet első 50 évének munkáját jellemezték.

Az egyik — talán a leglényegesebb — feladat a tervbevett matematikai és fizikai folyóiratnak a megindítása és fennmaradásának a biztosítása volt. Hasonló tárgyú és célú folyóiratot már előzőleg is adtak ki a műegyetem professzorai, azonban a „Műegyetemi Lapok" három év (1876—78) múltán anyagi okok miatt kénytelen volt búcsút venni áldozatkész, de kislétszámú olvasótáborától. A Magyar Tudományos Akadémia 1882-ben indított „Mathematikai és Természettudományi Értesítő"-je, és ennek német nyelvű változata, a „Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn" kifejezetten önálló eredmények közlését tűzte ki célul. Ezzel szemben a „Mathematikai és Physikai Lapok" beköszöntőjében *Eötvös* a következő irányt jelölte meg: „Célunk nem a tudomány népszerűsítése, s nem is önálló tudományos dolgozatok közlése: mások sikerrel vállalkoztak már e feladatok teljesítésére. Mi tudományosan ismertető czikkek alakjában fogjuk megadni a szakembernek azt a táplálékot, melyre szükség van, ha haladni akar ...". „A füzetek első lapjait önálló czikkek foglalják el. Ezekben a tudomány haladását ismertető — hosszabb, vagy rövidebb — dolgozatokat kívánunk közölni, valamint olyan közleményeket, melyek a mathematikának és physikának, mint iskolai tantárgyaknak egyes részeit a tanítást előmozdító új alakban fejtik ki." Ki-

derül ebből, hogy a szerkesztőség elsősorban a középiskolai tanárság tudásának és látókörének fokozását tekintette feladatának, és mintegy a középhelyet óhajtotta elfoglalni az Akadémia tisztán tudományos, és a Természettudományi Társulat elsősorban népszerűsítő kiadványai között.

Ezzel a programmal, a szerkesztők ügyszeretetével, és az olvasók megértésével (az első füzet 560 kinyomott példányából 405-re jelentkezett előfizető!) indultak el küzdelmes útjukra 1891-ben a „Matematikai és Fizikai Lapok". A folyóirat anyaga, beosztása egész életében lényegében változatlan is maradt: ismertető és önálló eredményeket közlő tanulmányok, feladatrovat, a kitűzött feladatok megoldása, könyvismertetések, a tanulóversenyek anyaga, a Társulat rendezvényei és közgyűlései. Ha olykor módosult ez a beosztás, az csak kényszerítő okok miatt történt. A Matematikai és Fizikai Lapok sok vészterhes időt megélt füzetei a magyar matematika erejének beszédes bizonyítékai. Az anyagi nehézségek, a gazdasági válságok, a cikkek hiánya többször is gúzsba kötötték. Az állam az első világháború végéig semmi, az Akadémia csekély támogatást nyújtott. És ezt is igen szigorú feltételekhez kötötte a 10-es évektől! Mily kesernyésen mondta ekkor *Kövesligethy* Radó egyik főtitkári beszámolójában: „Társulatunk ... a szülői házat elhagyó ifjú módjára kilép az életbe, hogy — amit eddig kegyelemből élvezett — saját érdemeivel vívja ki." A szegénység ezekben az időkben a társulat létét mindenestől fenyegette, az elnök, vagy a főtitkár gyakorta megismétlődő kérései a könyörgés, köszönetei a megalázó hálálkodás bizonyára nem könnyen kiejtett szavai voltak! Volt idő, mikor az alapításkor tervbevett évi nyolc füzet két év alatt megjelent egyetlen füzetre zsugorodott, 1919—20-ban pedig a kiadás mindenestől szünetelt. De a remény, az akarás sohasem halt el. Keskeny az a híd — mondta egy alkalommal *Fejér* Lipót, melyet a háború viszontagságai között építgetünk, de amelyről hisszük, hogy mégis csak át fogja vezetni Társulatunkat egy újabb békés fejlődés boldogabb korszakába.

A cikkírók között világhírű matematikusok mellett olyanokat is találunk, akik esetleg csak egyetlen szellemi termékükkel léptek a nyilvánosság elé a lap hasábjain. Ott olvashatjuk Felix *Klein* „erlangeni program"-ját, *Bolyai* János Appendixét — először magyar nyelven — *Gauss*nak a felületekre vonatkozó alapvető vizsgálatait. Itt jelent meg teljes terjedelmében *Fejér* Lipót híres doktori értekezése, *Riesz* Frigyes, *Geőcze* Zoárd, *Haar* Alfréd több úttörő eredménye — és ki tudná még felsorolni a sok jelentős vizsgálatot!

Idők folyamán változtak a lap matematikai szerkesztői, de azokat a mély nyomokat, melyeket *Kőnig* Gyula tevékenysége jelentett tudományunk életében, ezek a változások nem érintették. A matematikai

rész szerkesztését 1914-ig *Rados* Gusztáv végezte — ekkor, tehát igen nehéz időben vette át e munkát *Fejér* Lipót, és konszolidáltabb, de könnyűnek korántsem mondható viszonyok között adta tovább 1932-ben tragikus sorsú matematikusunknak, *Kőnig* Dénesnek. Az anyagi nehézségek miatti kesergés továbbra is állandó, szinte refrénszerűen visszatérő motívuma volt minden titkári beszámolónak. Önálló kiadványokra — amik pedig a tervekben szerepeltek — lényegében nem is gondolhatott a Társulat. Egyetlen — igen szerény — eredménye volt e törekvésnek *Erményi* Lajos *Petzval* Józsefről írott tanulmánya. Az első világháború után az írói tiszteletdíjakat is be kellett fokozatosan szüntetni. Viszont — főleg 1930-tól — fiatal tudósaink ügyét azzal támogatta a folyóirat, hogy a doktori értekezések közül többnek vállalta díjtalan publikálását.

Az események szerencsétlen összejátszása következtében 1918-ban *Eötvös* Loránd 70. születésnapját sem ünnepelhették zavartalanul: a tudományos munkásságát ismertető vaskos külön füzet már csak a halálos ágyon került az ünnepelt kezébe. De 1921-ben a Társulat címébe iktatták *Eötvös* nevét.

A folyóirat szüneteltetése — ami az első világháború után csak átmenetinek bizonyult, 1944 végefelé végérvényessé vált. Évek múltán új tartalommal és címmel, de a hagyományokat meg nem tagadva, a Matematikai Lapok vállalkozott az addigi eredményes munka folytatására.

A Társulat másik, ugyancsak igen eredményes tevékenysége a matematikai és fizikai versenyek megindítása, és az első világháború utáni három évtől (1919—1921) eltekintve, annak megrendezése volt. A versenyek kezdeményezésére az adott impulzust, hogy *Eötvös* Lorándot 1894-ben vallás- és közoktatásügyi miniszterré nevezték ki. A Társulatra is kitüntető eseményt megörökítendő, 1894. június 22-én a választmány a következő határozatot hozta:

„A mathematika s a physika tanításának és tanulásának sikeresség emelendő, a Mathematikai és Physikai Társulat minden év őszén az illető évben hazai nyilvános középiskolán érettségi vizsgálatot tett tanulók között Budapesten és Kolozsvárott mathematikai és physikai versenyt rendez, oly czélzattal, hogy a versenyzőknek a nevezett szaktárgyak művelésére való rátermettsége megállapíttassék". A választmány körvonalazta a verseny megrendezésének, a dolgozatok elbírálásának és a jutalmazásoknak módozatait is, továbbá úgy döntött, hogy a versenyről való tájékoztatás érdekében körirattal fordul az ország gimnáziumaihoz. A középiskolák nagy örömmel értesültek a rendezvényről, ezt az is bizonyítja, hogy számos helyen levélben tájékoztatták a versenyről a már szétszéledt tanulókat. A határidő lejártáig Budapesten 48-an, Kolozsváron 6-an jelentkeztek.

A matematikai versenyek története, a későbbi időkben világhírűvé lett versenygyőzteseknek a névsora jólismert. Az „Eötvös-versenyek" világviszonylatban nem a legrégibb eredetűek ugyan, de bízvást mondhatjuk, hogy a legeredményesebbek. És ez főként *Kőnig* Gyula, *Rados* Gusztáv és *Kürschák* József érdeme. Nekik sikerült rögtön az első verseny alkalmával a színvonalat, és a lebonyolítás kereteit úgy kijelölniük, hogy azon a későbbiek során nem kellett bármit is változtatni. Az évenként megismétlődő eredményhirdetés valóban a Társulat ünnepnapjai közé számított, melyen a fiatal győztesekkel örömmel szorítottak kezet a matematika legnagyobb magyar művelői is. Tudunk arról, hogy 1905-ben Felix *Klein* és *Darboux*, a *Bolyai-díj* kiosztása alkalmával Budapesten tartózkodván, külön is kifejezték az eredményhirdetésen való megjelenés iránti óhajukat.

Méltán örvendett nagy megbecsülésnek az első 32 országos verseny anyagát feldolgozó, és ügyes, rövid elméleti részekkel kiegészített *Kürschák*-féle feladatgyűjtemény is (Matematikai versenytételek, Szeged, 1929). Nyugodtan állíthatjuk, hogy ennek második kiadása (Budapest, 1955.), majd a folytatását képező, és az 1929—1955 közötti anyagot tartalmazó második kötete (Budapest, 1957) ma a középiskolai tanárság egyik leghasznosabb olvasmánya, emellett a felsőoktatásnak is ügyes segédkönyve. A *Kürschák*-féle feldolgozás színvonalát és időtálló voltát bizonyítja tetszetős külsejű angol nyelvű kiadása is (New York, 1953).

Tárgyilagosság kedvéért le kell azonban azt is szögeznünk, hogy a versenyek eredményességének másik, éspedig igen jelentős komponense, a „Középiskolai Matematikai Lapok" — legalább is jogszerűleg — a Társulat keretein kívül működött. A folyóiratot 1894-ben hívta életre a győri állami főreáliskola fiatal tanára, *Arany* Dániel. Kétségtelen, hogy a versenyek, és a Középiskolai Matematikai Lapok, de még továbbmenve, a Társulat, valamint a Matematikai és Fizikai Lapok megszületésében a dátumok közeleső volta a fejlődés egy bizonyos fokát tükrözi: a helyzet megérett ezek létesítésére, szerencse, hogy voltak lelkes, fiatal tudósok a helyzet megkívánta tettek végrehajtásához.

Mint említettem, a Középiskolai Matematikai Lapok „jogszerűleg" a Társulaton kívül élte életét (1939-ig), de csak „jogszerűleg". Ugyanis a különböző beszámolókból kitűnik, hogy a kettő kooperációja tökéletes volt. A Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztői elsőrangú szempontnak tekintették a versenyek igényeit, és a Társulat is leghatékonyabb segítőtársát látta a Középiskolai Matematikai Lapokban, valamint annak kérészéletű (1943—44) utódjában, a „Matematikai és Természettudományi Didaktikai Lapok"-ban.

Gondos és lelkiismeretes gazdájának bizonyult a Társulat a nagytekintélyű „Kőnig Gyula alapítvány"-nak is. Gazdájának, de nem tulaj-

donosának, mert az anyagi alapokat 10 000 Koronás, 6%-os hadikölcsön formájában *Kőnig* Gyula két fia, *György* és *Dénes* helyezte el. A Társulatot ennek az alapítványtevők elgondolása szerinti kezelése, és a díjak odaítélése illette. Az alapítvány létesítését 1918. május 6-án jelentette be *Eötvös* Loránd. A feltételek értelmében kétévenként — 1920-tól kezdődően — 1000 Koronás díjjal, valamint „Kőnig Gyula érem"-mel kell kitüntetni a „tiszta matematika terén végzett kutatásaiért" — egyetemi rendes és rendkívüli tanárok kizárásával — egy fiatal magyar matematikust, továbbá „Kőnig Gyula referátum" címmel rendszeresen ismertetni kell a magyar matematikusoktól származó főbb eredményeket. A referenst 300 Korona tiszteletdíj illette volna. Az eredeti elgondolás szerinti referátumok sohasem születtek meg, ezzel szemben a Kőnig-díj átadása, bár csak 1922-től, a Társulat kétévenként ismétlődő, igen felemelő ünnepsége volt 1944-ig. Sajnos a pénz elértéktelenedése következtében 1930-tól csupán érem jutott a díjazottaknak, azonban a kitüntetés ilyen szerény szimbólumának is nagy megbecsülést biztosított a díjazott tudósok nemzetközi téren is elismert munkássága. Álljon itt a *Kőnig-díjas*ok névsora: 1922 *Bauer* Mihály, 1924 *Szegő* Gábor, 1926 *Szőkefalvi-Nagy* Gyula, 1928 *Jordan* Károly, 1930 *Szász* Ottó, 1932 *Egerváry* Jenő, 1934 *Veress* Pál, 1936 *Kalmár* László, 1938 *Lipka* István, 1940 *Rédei* László, 1942 *Hajós* György, *Szőkefalvi-Nagy* Béla, 1944 *Varga* Ottó.

Amilyen fájdalmas, hogy a Kőnig-díjasok — az akkori fiatalok — közül sokan már örökre eltávoztak, épp oly örvendetes, hogy néhányukat jó egészségben üdvözölhetjük ma is körünkben.

A „Kőnig-díj" színesítette és gazdagította a Matematikai és Fizikai Lapokat is: a díjazott tudósok munkásságát ismertető referátumok összeállítására legjelesebb matematikusaink vállalkoztak, és ezek a harmincas évek végéig rendszeresen megjelentek a Lapokban. A beszámolók többsége ma már olyan történelmi dokumentumnak tekintendő, mely nem hagyható figyelmen kívül, ha valamelyik *Kőnig*-díjasról van szó.

Kissé színtelenebbnek és feltétlenül szegényesebbnek tűnik a Társulat tevékenysége a különféle ülések, előadások terén. Ezek színhelye mindig Budapest volt. Kezdetben egy összejövetelen két-három előadás is elhangzott — vegyest matematikai és fizikai —, később azonban ezt a számot *egyre* redukálták. Így évenként átlagban 5—10 matematikai előadás ismertette az elért új magyar eredményeket, vagy foglalta össze a matematika egy-egy modern fejezetét. A kevés alkalom ellenére még így is megjelent idők folyamán csaknem mindegyik jelesebb tudósunk az előadói asztalnál. Azonban a hallgatóság is inkább az önállóan alkotó matematikusokból tevődött ki, így az üléseknek a tagok — főleg a vidékiek — nagy többsége semmi hasznát sem látta. A tagság ténye

tehát inkább csak jólhangzó dekorum volt. Már az is nagy eredménynek számított, mikor a 10-es évektől a minisztérium néhány középiskolai tanár részére szabadságot engedélyezett az általában évenként megismétlődő közgyűlések egy-két napos tartamára. Így ezekben az időkben a Társulat és tagjai közötti egyetlen összekötő kapocsnak a Matematikai és Fizikai Lapokat tekinthetjük. Nem túlzás tehát, hogy első ötven éve idején a Társulat — minden jószándékú fáradozása ellenére — sem tudott a matematikusok tömegszervezetévé válni, és ennek oka nem a tagok létszámában rejlett. Ez az első világháború után természetszerűleg visszaesett ugyan, de ettől kezdve végig 200 körül stagnált.

A vezetők jól látták a helyzet hátrányait, *Kövesligethy* Radó már 1905-ben felvetette a kérdést, vajon nem lehetne-e a vidéki tagok számára is gyümölcsözőbbé tenni az együttműködést? Vagy hogyan karolhatná fel a Társulat néhány vidéki városunknak a 10-es években önálló kezdeményezésként létesült matematikai és fizikai „magánkör"-eit? A kérdések felvetődtek, de a válaszok — elsősorban anyagi okok miatt — elmaradtak.

Ezek után szinte természetes, hogy a nemzetközi matematikai kongresszus megrendezésének — ugyancsak a 10-es években felvetődött — gondolata is álomnak bizonyult, a külföldi vendégek listája pedig az igazán nagyok közül ötven év alatt csak Felix *Klein*, *Darboux*, *Rademacher*, *Sierpinski* és a hazalátogató *Neumann* János nevét tartalmazza.

*

Ha a Társulat életét átmentő híd keskennyé szűkült az első világháborúban, akkor vajon mit mondhatunk a másodikban történtekről? Büszkeséggel kell leszögeznünk, hogy a Társulat az országos és a sok egyéni tragédia közepette is meg tudott maradni a tiszta tudomány szigetének, sok tagjának a helytállása a hősiességnek kiemelkedő példája. Az országos tanulóversenyt még 1943. októberében is megrendezték — Budapesten, Kolozsvárott és Szegeden —, győztese a fasizmus sok áldozatának egyike, *Ádám* István volt. 1944. elején kikerült a nyomdából a Matematikai és Fizikai Lapok egy — az utolsó — füzete, 1943-ban még közölte két másik fiatal áldozat, *Krausz* József és *Waldapfel* László dolgozatát is. És alig ült el a fegyverzaj, mikor Szeged már is szót kért, sokszorosítva kiadva és az ifjúsághoz eljuttatva a feladatíveket. 1947. október 25-én sor került a háború utáni első országos középiskolai matematika-versenyre, november 1-én pedig kijött a nyomdából az újjáéledt „Középiskolai Matematikai Lapok" első (kettős) füzete. A folyóirat 1948. évi tartalomjegyzékén pedig már olvassuk a feliratot: „A Bolyai János Matematikai Társulat Középiskolai Folyóirata".

Időközben tehát megszületett — éspedig osztódással szaporodva — az Eötvös Társulat két utóda, a *Bolyai János Matematikai*, és az *Eötvös Loránd Fizikai Társulat*.

Ezzel elérkeztünk a matematikusok társulati életének utolsó harmadához. Ha mármost a különböző beszámolókból ennek a szakasznak a kezdeteit kutatjuk, akkor a párhuzam múlt a század 80-as éveivel nagyon is szembeötlő. A társulat létesítésének gondolata most is egy budapesti kávéházban vetődött fel 1947 januárjában. A gondolat megszületett, a lelkesedés most is megvolt, de a Társulat életrehívása — különböző okokból, de talán azért is, mert Budapestet nagyon megviselte a háború — mégis holtpontra jutott. Így aztán az alakuló közgyűlést nem a fővárosba, hanem 1947. június 21-én Szegedre hívták össze. Az adatok szerint ezen 41 matematikus jelent meg, rajtuk kívül mintegy 20-an levélben fejezték ki csatlakozási szándékukat. A közgyűlés azonnal felterjesztette az alapszabályokat (a jóváhagyás 1949. január 17-i keletű), és megválasztotta a tisztikart. Meghatódva olvassuk a díszelnökök névsorát: *Fejér* Lipót, *Riesz* Frigyes, *Egerváry* Jenő, *Szőkefalvi-Nagy* Gyula — ma már egyik sincs az élők sorában. Szerény keretek között rögtön megindult a munka is, az első társulati ülést Szeged tartotta 1947. szeptember 25-én. Azonban csakhamar jelentkeztek a nehézségek is. A legsúlyosabb az volt, hogy Szeged, periferikus fekvése miatt, nemigen vállalhatta a társulati munka tömegmozgalommá történő szélesítését, és kénytelen-kelletlen meg kellett volna elégednie a kutató-matematikusok egy szűkebb körének közreműködésével. Ez pedig sem az elképzeléseknek, sem a megindult társadalmi átalakulásnak nem felelt meg. Ezt belátva, közös megállapodás után fogadta el az elnökség a Bolyai János Matematikai Társulat Budapestre való költöztetését (1949. okt. 8.). „Költöztetését" a szó igazi értelmében, mert nem hosszú budapesti hontalanság után a Reáltanoda utcai tágas otthon várta az áttelepülőt.

Engedtessék meg, hogy a következőkben a fejlődés ezernyi mozzanatából dátumszerűleg csak néhányat említsek, és a Társulat életét a jelenlegi helyzet — mintegy statikus állapotából — nézzem. A jelenlegi helyzet szembetűnő vonása, hogy — eltérőleg az Eötvös Társulattól — a Bolyai Társulat nem budapesti matematikusok exkluzív társasága: a decentralizáltság képviselői — a vidéki tagozatok — az egész országot behálózzák. Mint említettük, legelébb Szegeden indult meg a munka, de Budapest is csak néhány hetet váratott magára, Debrecen 1949-ben kért szót, majd Miskolc, Eger, Székesfehérvár, Győr, Kecskemét, Nyíregyháza, Pécs, Sopron, Szombathely, Szolnok, Veszprém és Kaposvár kapcsolódott be a munkába. Közülük egyesek (Miskolc, Győr, újabban Debrecen) megyéjük egész területén kiépítették partikuláikat, ilyen módon matematikusaink szava még a kisebb vidéki városokban és községekben is hallhatóvá vált. A tagozatok munkáját a vezető szervek, az elnökség, a választmány, az intéző bizottság eszmei és anyagi eszközei, a mostanában megindult tapasztalatcserék, prémiumok és

vándorzászlók javítgatják, gazdagítják. Csak ezen az úton növekedhetett a tagok létszáma is a háború előttinek mintegy hétszeresére, ma ez a szám másfélezer körül állandósult. 1948. október 6-tól a Társulat a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének, mint nagyobb családnak, a tagja. Kezdetben ez a tény inkább a békés egymás mellett élés képét mutatta, csakhamar kitűnt azonban hasznos volta, és ma már bizton állíthatjuk, hogy a MTESZ nélkül aligha szélesülhetett volna úgy ki a Bolyai működési területe.

Ebből tekintélyes részt foglal el a tudományos, az oktatási, és újabban (1963-tól) a matematika alkalmazásai szakosztály által szervezett számos tudományos és pedagógiai előadás. Különös büszkeséggel tekinthetünk vissza néhány sikeres nagy rendezvényre — ilyenekre a múltban egyáltalán nem került sor. A Társulat kezdeményezte és rendezte — a Magyar Tudományos Akadémia védnöksége alatt — 1950. augusztus 27. és szeptember 2. között az I. Magyar Matematikai Kongresszust. Ennek vaskos „Közleményei" (Akadémiai Kiadó, 1952.) egyik legtekintélyesebb matematikai kiadványunk ma is. 1952-ben az ismertető cikkek és előadások egész sora idézte, születésének 150. évfordulója alkalmával, *Bolyai* János emlékét, az Akadémia és a Társulat közös rendezvénye, a december 11. és 18. között tartott ünnepi ülésszak pedig gazdag seregszemléje volt a hazai és külföldi matematikusoknak. A Társulat 1947. szeptember 21—23. között Szegeden tartott ülésszaka nem kis büszkeséggel regisztrálta az alapítástól eltelt 10 év gazdag eredményeit.

Bolyai János emlékének áldozott — halálának centenáriuma alkalmával — eddigi legnagyobb matematikai rendezvényünk, az 1960. augusztus 24—31. között tartott II. Magyar Matematikai Kongresszus. Ennek két gazdája, a Magyar Tudományos Akadémia, és a Társulat vállvetve dolgozott a siker érdekében, és ez nem is maradt el: a 130 magyar és 179 külföldi előadás, a szerény, de tetszetős *Bolyai-kiállítás*, a hazai és külföldi matematikakönyvek bemutatója, és a felüdülést, szórakozást szolgáló többi rendezvény kétségtelenül emlékezetessé tette a résztvevők számára a budapesti tartózkodást. A programban szereplő kötetlen formájú beszélgetések pedig a tudományos együttműködés igen hatékony módszerének bizonyultak.

Talán nem voltak ennyire látványosak, de eredményeikben bizonyára nem szegényebbek a kisebb létszámot mozgató, és éppen ezért meghittebb kollokviumok. Évenként hosszabb idő óta két-három kollokviumra kerül sor, éspedig — a matematikusok esztétikai érzékét is dicsérendő — nem is az ország legsívárabb vidékein. Kevés olyan fejezete van a klasszikus és modern matematikának, melynek időszerű problémáit ne vitathatták volna meg tudósaink — általában külföldiek jelenlétében — valamelyik konferencián.

A társulati tevékenység munkás hétköznapjait azonban nem az említett rendezvények, hanem azok az előadások töltik ki, melyek a nagyobb és kisebb városokban — azt mondhatjuk — nap mint nap elhangzanak. Reménytelen vállalkozás lenne ezek számát, tárgykörét, színhelyét részletezni. Egy azonban bizonyos: jelenleg egy átlagos évben — nem számítva a nagyobb rendezvényeket — több Bolyai-előadás hangzik el, mint az Eötvös Társulat ötven éve alatt együttesen. Feltételnélküli elismerést érdemel az a lelkesedés, mellyel ebből a munkából részt kérnek Kossuth-díjas akadémikusainktól a legfiatalabb kutatókig, egyetemi tanároktól az általános iskolák pedagógusaiig matematikusaink százai. Áldozatkészség, és az ügy őszinte szeretete kell ehhez, hisz az előadások legtöbb esetben utazási fáradalmakkal, időveszteséggel, és — mondjuk meg — anyagi megterheléssel járnak együtt. A Bolyai-társulati előadók a „társadalmi munka" élcsapatához sorolandók!

A tanári továbbképzés, és a matematika oktatásának ügye — az Eötvös Társulat hagyományaként — megalapítása óta egyik centrális problémája a Bolyai Társulatnak is. A különbség az, hogy most kedvezőbbek az anyagi körülmények, megértőbbek a kérdésben érdekelt többi szervek. Sűrűn követik egymást a közép- és általános iskolai oktatással foglalkozó megbeszélések, konferenciák, vándorgyűlések, az utóbbiak száma közel a harminchoz. Ki tudná vajon felmérni, hogy a Társulat illetékesei hány órát fordítottak különböző szinten és helyeken az utóbbi évek tantervi reformjának kidolgozására? A didaktikai célkitűzések egyik kiemelkedő állomása volt 1963. augusztus 27-től szeptember 8-ig az UNESCO megbízásából Budapesten tartott „Nemzetközi Matematikaoktatási Szimpózium", melynek előkészítő és érdemi munkájából a Művelődésügyi Minisztérium segítőjeként, sokat vállalt magára a Társulat is.

Ma már súlya van a Bolyai Társulatnak, véleményét — azt mondhatjuk — minden matematika-oktatási kérdésben kikérik, és szava sok esetben döntően esik a latba. Abban, hogy a pedagógusok anyagi helyzete ma már rendezettebb, hogy gyakoribbak a külföldi utazgatások, nekünk is szerepünk van. Talán nincs messze az az idő sem, mikor a még megoldatlan, fájó problémát, a kötelező heti óraszámok túl magasan álló közép- és általános iskolai normáját nyugvópontra sikerül juttatni.

A középiskolai tanulók továbbképzésében a kezdő lépést Debrecen tette meg 1950-ben, megindítva a „Matematikai Délután"-okat. A kezdeményezést gyorsan átvette Miskolc, Pécs, Budapest, Nyíregyháza, Szombathely és Szeged. Formájuk, gyakoriságuk, anyaguk helyenként más és más, de céljuk egy: a fiatal matematikai tehetségek felkutatása, érdeklődésük kielégítése, szélesítése. A Matematikai Délutá-

nok, és különböző szintű testvérei: az „Ifjúsági Matematikai Kör", a „Kis Matematikusok Klubja", az „Általános Iskolások Szakköre" is részese annak, hogy egy-egy nyilvános vetélkedő, vagy verseny alkalmával nemcsak a szakemberek, de a kívülállók is meglepődve figyelik sok fiatalunk egészen kimagasló feladatmegoldó készségét.

Ezzel el is érkeztünk a Társulatnak a múlthoz képest sokkal szélesebb keretek között folyó működési területéhez, a különféle matematikai versenyekhez. Több menetközbeni módosítás után ma már kialakultnak tekinthetjük ezek széles rendszerét. Közülük az egyfordulós *Kürschák József verseny* a régebbi *Eötvös*-verseny folytatása — és általában az abban az évben érettségizetteknek szól. Egyetemi hallgatók — kisebb létszámmal középiskolai tanulók — a résztvevői az 1949-ben indított *Schweitzer Miklós verseny*nek. Itt még az első vetélkedőt zárthelyi írásbeli formájában rendezte a Társulat Budapesten, Szegeden, Debrecenben és Pécsett. Zárthelyi volt a módja a következő versenynek is, de ezt 1951-ben megismételték, ekkor már egy hetet biztosítva a résztvevőknek az otthoni munkára. Ez a forma jól bevált, és azóta évenként rendezi a Társulat ezt a világviszonylatban is bizonyára egyik legmagasabbszintű versenyt, oly módon, hogy a rendezés négyéves ciklusából két évet vállalnak a budapesti, egyet-egyet a szegedi, illetve debreceni matematikai tanszékek.

Az ötletes feladatmegoldások, a lehetséges általánosítások nem egy tanulmánynak képezték már az anyagát, a Matematikai Lapokban közzétett *Schweitzer-beszámoló*k pedig nemzetközi viszonylatban is érdeklődést keltenek.

A *Kürschák*- és a *Schweitzer*-verseny gazdája a Bolyai Társulat. A középiskolák két alsóbb osztályosainak 1950-ben indított *Arany* Dániel, és a felsőbb osztályosok „Országos Középiskolai Tanulóversenye" a Művelődésügyi Minisztérium rendezvénye ugyan, de a feladatok kiválogatásának, és a dolgozatok elbírálásának nehéz munkája végső soron a társulati tagokból álló bizottságokra hárul.

De még korántsem teljes a versenyek listája: épp ebben az évben indult meg a tanárképző főiskolák versenye, a műszaki egyetemek, a különféle technikumok, sőt helyenként az általános iskolák tanulóinak is lehetőségük van, hogy tehetségüket ily módon bizonyítsák. Ha ezekhez még hozzávesszük a Középiskolai Matematikai Lapok feladatmegoldói között folyó pontversenyt, és néhány — ha nem is egészen rendszeres- helyi rendezvényt (Pécs: *Fejér* Lipót, Borsod: *Bede* Lajos, Debrecen: *Telkes* Béla verseny), akkor bizonyára nem találunk túlzást abban az állításban, hogy a világon hazánk a versenyek legszélesebb hálózatával rendelkező egyik ország. Nem kétséges, hogy ezeknek is jelentős szerepük van azokban a kimagasló sikerekben, miket fiataljaink az 1959-től rendszeressé vált nemzetközi olimpiászokon érnek el.

Külföldi útjainkon hányunktól kérdezték már a magyar sikerek titkát? A titok nagyon is nyílt: az érdeklődő fiatalok szorgalma és tehetsége, áldozatot vállaló pedagógusok szívós munkája a magyarázat.

Az *oktatási* és *tudományos* célkitűzéseknek megfelelően a Társulat két, évenként kiosztásra kerülő díjjal rendelkezik. Mindkettő létesítésére 1952-ben hozott határozatot a második közgyűlés, és kiosztásukra először 1953-ban került sor. A kiváló tudósról és pedagógusról, *Beke* Manóról elnevezett díjakat minden évben azoknak juttatja az alkalmanként életre hívott bizottság, akik kiemelkedő munkát végeznek a matematikát népszerűsítő könyvek, füzetek írásában, komoly eredményeket érnek el ilyen előadások tartásában, és általában a matematika oktatásában. A díjazottak névsorában egyaránt található akadémikus egyetemi tanár, és általános iskolában működő pedagógus. A tragikus sorsú fiatal matematikusról, *Grünwald* Gézáról elnevezett emlékdíjra 1952-ben még pályázatot írtak ki olyan fiatal kutatók számára, kik már figyelemreméltó eredményekkel rendelkeznek, éspedig az „önálló tudományos kutatómunkára való ösztönzés, valamint a magyar nyelvű irodalom fejlesztése érdekében". Az 5. közgyűlés olyan értelemben módosította a díj alapszabályzatát, hogy azóta az arra méltó fiatal kutatók pályázat beadása nélkül részesülnek évenként a díjban.

A Bolyai Társulat eseményeinek megbízható krónikásai a kezelésében levő matematikai folyóiratok. A Matematikai és Fizikai Lapok legszebb hagyományainak folytatója, a Matematikai Lapok 1950-ben történt megindítása óta rendszeresen megjelenik, legfeljebb — technikai okok miatt — olykor kisebb-nagyobb késéssel. Enciklopédikus cikkek, önálló eredményeket tartalmazó, vagy az oktatómunkát elősegítő tanulmányok, nagy matematikusaink tevékenységet summázó, a haladó hagyományokat ápoló értekezések, továbbá feladatrovat tölti ki ennek a nemzetközi téren is népszerű, kis formátumú folyóiratnak a hasábjait.

A Középiskolai Matematikai Lapok gazdája a Művelődésügyi Minisztérium, a Bolyai Társulat, és a fizikai rovattal 1959-ben történt bővítés óta, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Rendszeres megjelenését és terjesztését — a kezdeti nehézségek után — hosszabb ideje a függetlenített felelős szerkesztő személye garantálja.

1953-ban a Művelődésügyi Minisztérium indította útjára „A matematika tanítása" c. módszertani folyóiratot, de 1964. közepén társulatunk is bekapcsolódott a szerkesztés munkájába, a kiadvány életébe.

A folyóiratok mellett említendők azok a sokszorosítva kiadott brosúrák, melyek didaktikai anyaguk alapján elsősorban a tanári munka megjavítását célozzák. Figyelmet érdemel a Könyvbizottság tevékenysége is, hisz javaslatait — különösen az utóbbi években — már többször meghallgatták a kiadók. Egy ankéton még külön is foglalkozott a Társulat (1952) a szegediek által sokat szorgalmazott problémá-

val, a matematikai szövegek szedésének kérdésével. A régiek álma, a társulati könyvtár több mint 3000 kötetével, és 70 körüli csere-folyóiratával nyújt az érdeklődőknek segítséget, és újabban a didaktikai irányban való specializálódás országos hiányt van hivatva pótolni.

Említsük még meg a külföldi kapcsolatok nagymérvű bővülését. Ezt elősegítette a Társulatnak a Nemzetközi Matematikai Unióhoz való csatlakozása is (1955). A meghívások és kiküldetések koordinálását az 5. közgyűlés óta a Külügyi Bizottság végzi. Intézményes formája a nemzetközi együttműködésnek a Csehszlovák Matematikai és Fizikai, továbbá a Német Demokratikus Köztársaság Matematikai Társulatával kötött csereegyezményünk, reményekre jogosítottak az osztrákokkal közösen tartott kollokviumok.

És még sokáig folytathatnánk az események felsorolását, de a hosszadalmasság és az elaprózás veszélye fenyeget. A sok siker mellett nem beszéltünk a balsikerekről, az eredmények mellől kimaradtak a hibák. Ne legyünk azonban ez alkalommal ünneprontók, a hiányosságok egyébként is ismertek, felszámolásukon következetesen fáradozunk. Egyért azonban elnézést kell kérnünk: az utóbbi idők történetében neveket egyáltalában nem említettünk. Magyarázatként azonban elég, ha felhozzuk, hogy a mindenkori elnöktől vagy főtitkártól kezdve a vidéki tagozatok névtelen adminisztrátoraiig nem is tízek, hanem százak fáradoztak és fáradoznak a társulati munka sikerén. *Mikola* Sándor régen mondott szavai értelmében ez maga is társulati tradíció: „Annak, hogy az individuumok nagyobb halmaza együtt dolgozhassék, nem az a feltétele, hogy egyformák legyenek, még az sem, hogy egyetértsenek, csak az, hogy egymás véleményét és egymás személyét tiszteletben tartsák."

Szomorú, de a természet rendje, hogy a pionírok már nincsenek közöttünk, sőt, akik a második világháború után kezdték újra a munkát, maguk is általában túl az élet delén, jogosan igénylik a fiatalok mind hatékonyabb segítségét. Hinnünk kell, hogy a fiatalokban is él az a lelkesedés, mely a régi elődöket hevítette. És azt is hinnünk kell, hogy a periodicitás, mely eddig negyedszázadonként fegyverropogással halkította le a matematikusok szavát, mostmár megszakad. A matematika fegyverével ennek érdekében folytatott vérnélküli harc legyen Társulatunk következő évtizedeinek irányító eszméje, és legnemesebb célkitűzése.

75 ЛЕТ НАШЕГО ОБЩЕСТВА

Барна Сенаши

75 YEARS OF THE SOCIETY

B. Szénássy

Disztribúciók, operátorok III.

FENYŐ ISTVÁN

Tartalom

1. Bevezetés
2. Összehasonlítható és koordinált normák
3. Megszámlálhatóan normált terek
4. Példák megszámlálhatóan normált terekre
5. Megszámlálhatóan normált terek metrizálhatósága
6. Megszámlálhatóan normált terek normálhatósága
7. Megszámlálhatóan normált tereken értelmezett lineáris folytonos funkcionálok
8. Megszámlálhatóan normált tér konjugált tere
9. Alapfüggvények tere
10. Általánosított függvények definíciója
11. A $D\{M_p\}$ függvényterek
12. Tökéletes függvényterek
13. Elemi műveletek általánosított függvényekkel
14. Az általánosított függvények reprezentációs tétele
Irodalom.

1. Bevezetés

Cikksorozatunk első részében vázoltuk a disztribúciók elméletének alapjait abban a formában, ahogyan azt L. Schwartz kidolgozta. Ebben az elméletben az alaptér, az akárhányszor differenciálható és finit függvények halmaza (egy sorozattopológiával ellátva) önkényesnek tűnhet. Többek között ezzel is magyarázható, hogy többen az elméletnek olyan megalapozását adták, melyben ez az alaptér nem szerepel. Ezekkel a megalapozási elméletekkel cikksorozatunk második részében foglalkoztunk.

Kanyarodjunk most vissza a disztribúciók eredeti L. Schwartz—Szoboljev-féle definíciójához. Kiderült, hogy az alkalmazások szempontjából korántsem elegendő a fent említett függvénytér (melyet D-vel jelöltünk) felett definiált lineáris és folytonos funkcionálokat tekinteni. Már az aránylag egyszerűbb alkalmazások és a disztribúciók Fourier transzformáltjának definiálása is újabb függvényterek felett értelmezett lineáris funkcionálok bevezetését tette szükségessé. Kiderült, hogy a disztribúcióelmélet a parciális differenciálegyelnetek modern elméletének hathatós segédeszköze lehet — ha nem ragaszkodunk mindig ugyanahhoz a függvényalaptérhez. Sőt, mint ahogyan azt I. M. Gelfand

és G. E. Silov megmutatták [1], igazán jelentős és mélyreható eredményeket akkor nyerhetünk, ha mindig a szóban forgó probléma természetéhez szabott alaptéren értelmezett lineáris folytonos funkcionálokat használunk. Ilyen, a D-függvénytérnél általánosabb bizonyos típusú függvényhalmazon (melyeket megfelelő topológiával vagy pszeudótopológiával látunk el) értelmezett lineáris Ω folytonos funkcionálokat Gelfand és Silov *általánosított függvényeknek* — speciális alapterek esetén disztribúcióknak — neveztek.

Cikksorozatunk e harmadik részének célja az, hogy vázoljuk ezen általánosabb elmélet alapjait.

2. Összehasonlítható és koordinált normák

Tekintsünk egy X lineáris teret és tegyük fel, hogy e térben két (különböző) normát $\|x\|_1$-et és $\|x\|_2$-t vezetünk be ($x \in X$).

Azt mondjuk, hogy e két norma *összehasonlítható* és $\|\cdot\|_1$ norma *gyengébb* mint $\|\cdot\|_2$ norma, ha létezik olyan $C>0$ konstans, hogy minden $x \in X$ elemre

$$\|x\|_1 \leqq C\|x\|_2. \tag{1}$$

A két norma egymással ekvivalens, ha $\|\cdot\|_1$ gyengébb, mint $\|\cdot\|_2$ és $\|\cdot\|_2$ gyengébb mint $\|\cdot\|_1$; azaz léteznek olyan $C'>0$ és $C''>0$ konstansok, hogy minden $x \in X$ elemre

$$\|x\|_1 \leqq C'\|x\|_2 \leqq C''\|x\|_1, \tag{2}$$

érvényes.

Ha X mindkét normára nézve — melyekről feltesszük, hogy összehasonlíthatók — teljes, akkor Banach ismert tételéből könnyen ki lehet mutatni, hogy a két norma egymással ekvivalens. Jelöljük ugyanis X_1-gyel és X_2-vel az X lineáris térből az $\|\cdot\|_1$ illetve $\|\cdot\|_2$ normákkal származtatott lineáris normált tereket. Feltevésünk szerint e két tér teljes, mindkettő tehát Banach-tér. Legyen $\|\cdot\|_1$ gyengébb, mint $\|\cdot\|_2$ norma. Rendeljük az X_1 tér x eleméhez az X_2 térnek ugyancsak x elemét. Az X_1 Banach-térnek ez a leképezése az X_2 Banach-térbe nyilvánvalóan lineáris. Ezenkívül korlátos is, mert feltevésünk szerint bármely $x \in X$ elemre

$$\|x\|_1 \leqq C\|x\|_2,$$

Banach idézett tétele szerint az inverz leképezés is korlátos, azaz van olyan $C_1>0$ konstans, hogy

$$\|x\|_2 \leqq C_1\|x\|_1$$

érvényes minden $x \in X$ elemre. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Ha X a két bevezetett normára nézve nem teljes tér, akkor ki lehet egészíteni teljes térré. A továbbiakban X_1 és X_2 a fenti normákkal ellátott és teljes térré kiegészített tereket jelentik, melyeket az X lineáris halmazból nyerünk.

Az X lineáris téren értelmezett két normát *koordináltnak* nevezzük, ha a következő tulajdonság érvényes: tekintsünk egy tetszőleges, mindkét normára nézve Cauchy-sorozatot; ha e sorozat az egyik normára nézve 0-hoz tart ebből következik, hogy a másik szerint is nullához konvergál.

Példa: X legyen mindazoknak a $[0, 1]$ zárt intervallumban definiált függvények lineáris halmaza (a szokásos összeadás és konstanssal való szorzás műveleteire nézve), melyeknek folytonos deriváltjuk van.

E halmazon vezessük be a következő két normát:

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|; \quad \|x\|_2 = \max_{t\in[0,1]} [|x(t)| + |x'(t)|].$$

E normák, mint ahogyan az könnyen igazolható, koordináltak. Ha még egy harmadik normát is definiálunk:

$$\|x\|_3 = \max_{t\in[0,1]} [|x(t)| + |x'(0)|],$$

akkor $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_3$ nem koordináltak. Ugyanis, ha az X halmaz függvényeinek olyan $x_n(t)$ sorozatát tekintjük, melyre $x_n(t) \to 0$ egyenletesen $[0, 1]$-en és $x_n'(0) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor ez a sorozat az $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_3$ normákra nézve Cauchy-sorozat és a gyengébb $\|\cdot\|_1$ normára nézve 0-hoz tart, de nem tart 0-hoz az erősebb $\|\cdot\|_3$ normára nézve.

Tegyük fel, hogy az X-be bevezetett $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák összehasonlíthatók ($\|\cdot\|_1$ gyengébb norma $\|\cdot\|_2$-nél) és koordináltak. Ekkor X elemeiből alkotott $\|\cdot\|_2$ szerint Cauchy-sorozat $\|\cdot\|_1$ szerint is Cauchy-sorozatot alkot. A két norma segítségével képezett teljes tereket jelöljük X_1 illetve X_2-vel. Ha x az X_2 tér egy tetszőleges eleme, akkor létezik az X lineáris tér elemeinek olyan végtelen sorozata x_n, melyeket mint az X_2-normált-tér elemeit felfogva érvényes $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ az X_2-ben, azaz $\|x_n - x\|_2 \to 0$, ha $n \to \infty$. De akkor, mert $\|\cdot\|_1$ gyengébb mint $\|\cdot\|_2$, fennáll, hogy

$$\|x_n - x\|_1 \leqq C\|x_n - x\|_2 \to 0,$$

vagyis $x_n \to x$ az X_1-ben. Ez azt jelenti, hogy $x \in X_1$. Ezzel igazoltuk, hogy

$$X_1 \supset X_2 \supset X \tag{3}$$

érvényes.

Az $X_2 \subset X$ egyenlőtlenség nyilvánvaló.

3. Megszámlálhatóan normált terek

Tekintsük az X lineáris halmazt és tegyük fel, hogy ebben megszámlálhatóan végtelen sok norma definiálható:

$$\|x\|_1, \|x\|_2, \ldots, \|x\|_m, \ldots \qquad (x \in X).$$

X-ben egy topológiát lehet bevezetni úgy, hogy a zérus $U(m, \varepsilon)$ környezetét (m tetszőleges természetes egész, $\varepsilon > 0$) mindazok az $x \varepsilon X$ elemek képezik, mlyekre

$$\|x\|_1 < \varepsilon, \|x\|_2 < \varepsilon, \ldots, \|x\|_m < \varepsilon \tag{4}$$

érvényes.

Könnyen verifikálható, hogy ily módon X lineáris topologikus tér lett, melyben az első megszámlálhatósági axióma teljesül. Ha a normák páronként koordináltak, akkor X halmazt (az előbbi topológiával ellátva, melyet a végtelen sok norma indukál) *megszámlálhatóan normált tér*nek nevezzük. E topológia alapján az $\{x_n\}$ végtelen elemsorozat zérushoz konvergál, ha $\lim_{n \to \infty} \|x_n\|_m = 0$ *minden* m-re. Továbbá, az $\{x_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat, ha bármely m és $\varepsilon > 0$ esetében van olyan $N(m, \varepsilon)$ pozitív szám, úgy hogy

$$\|x_k - x_l\|_m < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad k, l > N(m, \varepsilon).$$

A továbbiakban feltehetjük, hogy a normák monoton növekedők, azaz tetszőleges $x \in X$ elemre

$$\|x\|_1 \leqq \|x\|_2 \leqq \ldots \leqq \|x\|_m \leqq \ldots \tag{5}$$

Ugyanis $\|x\|_m$-t helyettesítsük az $\|x\|'_m = \max \{\|x\|_1, \ldots, \|x\|_m\}$ értékkel. Könnyen beláthatjuk, hogy ily módon az eredetivel ekvivalens topológiát adó megszámlálhatóan normált teret nyerünk, és ebben a normák monoton növekedők.

Az X halmazt rendre az első, második, harmadik s. i. t. norma alapján egészítsük ki teljes térré, így a Banach-terek egy végtelen sorozatát kapjuk. Ezekre (5) miatt a (3) megállapítás szerint

$$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_m \supset \ldots \supset X$$

érvényes.

A jövőben feltesszük még, hogy X teljes tér vagyis minden Cauchy-sorozat X valamely eleméhez tart. Tehát megszámlálhatóan normált téren megszámlálhatóan végtelen sok norma által indukált lineáris topologikus, teljes teret értünk.

4. Példák megszámlálhatóan normált terekre

a) A $D[a, b]$-tér: azoknak az akárhányszor differenciálható függvényeknek a tere, melyek a véges (a, b) intervallumon kívül eltűnnek. E halmazon definiálunk végtelen sok normát az alábbi módon:

$$\|\varphi\|_m = \max_{\substack{x\in[a,b]\\ k=0,1,2,\ldots,m}} |\varphi^{(k)}(x)|. \tag{6}$$

A zérus környezetei az alábbi halmazok ((4) alapján)

$$U_{m,\varepsilon}(0) = \{\varphi(x)\in D[a, b]: \|\varphi\|_m < \varepsilon\}. \tag{6'}$$

Ugyanis a (6) normák monoton növekedő sorozatot alkotnak

$$\|\varphi\|_0 \leqq \|\varphi\|_1 \leqq \|\varphi\|_2 \leqq \ldots . \qquad (\varphi\in D[a, b])$$

Ezek páronként koordináltak is. Ehhez elegendő megmutatni, hogy $\|\cdot\|_m$ és $\|\cdot\|_{m+1}$ koordináltak.

Legyen ugyanis egy $\{\varphi_n(x)\}$ sorozat az m-edik normára nézve nullsorozat, az $(m+1)$-edikre nézve pedig Cauchy-sorozat. Ez azt jelenti, hogy a $\{\varphi_n(x), \{\varphi_n'(x)\}, \ldots\{\varphi_n^{(m)}(x)\}$ függvénysorozatok egyenletesen zérushoz konvergálnak, és a $\{\varphi_n^{(m+1)}(x)\}$ függvénysorozat közönséges értelemben egyenletes Cauchy-sorozat, így egy függvényhez konvergál (egyenletesen). Eszerint $\varphi_n^{(m)}(x)\to 0$ egyenletesen és $\varphi_n^{(m+1)}(x)$ szintén egyenletesen konvergens, ezért $\{\varphi_n^{(m+1)}(x)\}$ határfüggvénye is nyilvánvalóan azonosan zérus. De fordítva is, ha $\|\varphi_n(x)\|_{m+1}\to 0$, akkor $\|\varphi_n\|_m \leqq \|\varphi_n\|_{m+1}$ lévén $\|\varphi_n\|_m \to 0$.

Be lehet bizonyítani, hogy a $D[a, b]$-tér teljes is. Mert, válasszunk egy tetszőleges $\{\varphi_n\}$ Cauchy-sorozatot $D[a, b]$-ben; ez azt jelenti, hogy $\|\varphi_k - \varphi_l\|_m \to 0$, ha k és $l\to\infty$ minden rögzített m mellett. Ekkor létezik olyan $\varphi = \varphi(x)$ függvény, melyre $\varphi_n^{(m)} \to \varphi^{(m)}$ egyenletesen ($m = 0, 1, 2, ..$; rögzített érték) amiből egyrészt következik, hogy φ akárhányszor differenciálható és tartója $[a, b]$-ben van vagyis $\varphi\in D[a, b]$, másrészt $\|\varphi_n - \varphi\|_m \to 0$ $(n\to\infty)$.

A $D[a, b]$ függvényhalmazra tett megállapítások változatlanul érvényesek a $D(\bar{\Omega})$ függvénytérre is, vagyis azokra az akárhányszor differenciálható és finit függvények halmazára, melyek az n-dinenziós tér rögzített, korlátos, nyílt halmazán kívül eltűnnek.[1]

b) S-tér mindazon $\varphi(x)$ függvényekből áll, melyek akárhányszor differenciálhatók és melyekre

$$x^k\varphi^{(n)}(x)\to 0, \quad \text{ha} \quad |x|\to\infty. \qquad (k, n = 0, 1, 2, \ldots \text{ rögzített értékek})$$

[1] $\bar{\Omega}$ az Ω halmaz lezártját jelöli.

Itt is lehet definiálni megszámlálhatóan végtelen sok normát például az alábbi módon

$$\|\varphi\|_m = \max_{\substack{x\in(-\infty,+\infty)\\ k,n\leqq m}} |x^k\varphi^{(n)}(x)|. \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ezek a normák is monoton növekedő sorozatot alkotnak, melyek páronként koordináltak. Ezenkívül a tér teljes is. A bizonyítások hasonlóképpen végezhetők el, mint *a)* példában.

c) $G(a)$-tér. Tekintsük a komplex számsík $|z|<a$ nyílt körlapján definiált reguláris függvények halmazát. E függvényhalmazon a következőképpen vezethetünk be normákat:

$$\|f(z)\|_m = \max_{|z|\leqq a_m} |f(z)|,$$

ahol $0<a_m<a$, $\{a_m\}$ egy monoton növekedő és a-hoz konvergáló (egyébként tetszőleges) számsorozat. Nem nehéz belátni, hogy e normák által generált topológia független az $\{a_m\}$ számsorozat választásától. Az is világos, hogy a fenti normák nemcsökkenő sorozatot alkotnak és páronként koordináltak. A $G(a)$-tér lezárása az m-edik normára nézve a $|z|<a_m$ körben reguláris és a $|z|\leqq a_m$ körlapon folytonos függvények halmaza. Mivel $G(a)$ teljes tér is, azért megszámlálhatóan normált tér.

5. A megszámlálhatóan normált terek metrizálhatósága

Legyen X egy megszámlálhatóan normált tér. Megmutatjuk, hogy *X metrizálható.*

Ehhez nem kell mást tenni, mint az alábbi metrikát bevezetni

$$\varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n} \qquad (x,y\in X). \tag{7}$$

Hogy a (7) által definiált kétváltozós függvény tényleg metrika, könnyen igazolható. Tulajdonképpen csak az szorul bizonyításra, hogy a háromszögegyenlőtlenség teljesül. A $t/(1+t)$ függvény monotonitása miatt

$$\frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n} \leqq \frac{\|x\|_n+\|y\|_n}{1+\|x\|_n+\|y\|_n} = \frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n+\|y\|_n} +$$

$$+\frac{\|y\|_n}{1+\|x\|_n+\|y\|_n} \leqq \frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n}+\frac{\|y\|_n}{1+\|y\|_n},$$

amiből $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, 0) + \varrho(0, y)$ tüstént következik. A (7) által definiált metrika, a metrikák szokásos tulajdonságán kívül szemmel láthatóan a

(8) $$\varrho(x, y) = \varrho(x - y, 0)$$

tulajdonsággal is bír, amiből viszont $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ $(x, y, z \in X)$ adódik.

A (7) által megadott metrika, mint minden metrika, szintén indukál az X halmazon egy topológiát. Be lehet bizonyítani, hogy *a (7) távolságfüggvény által létrehozott topológia ekvivalens a megszámlálhatóan végtelen sok, páronként koordinált és összehasonlítható normák által indukált fenti topológiával.*

Bizonyítás. Ismét feltesszük, hogy a normák monoton módon, nemcsökkenően vannak rendezve. A megszámlálhatóan normált tér topológiáját jelöljük N-el és egy x pont környezetét az N-topológiában $U_N(x)$-el. A metrika által indukált topológia jele legyen M, ebben valamely x pont környezete $U_M(x)$. Tekintsük a zérus egy $U_N(0)$ környezetét, ez mindama x elemekből áll, melyekre $\|x\|_m < \varepsilon$. Ha bizonyos $\delta > 0$ számra

$$\varrho(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1 + \|x\|_n} < \delta,$$

akkor tetszőleges rögzített n-re

$$\frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1 + \|x\|_n} < \delta,$$

amiből

$$\|x\|_n < \frac{2^n \delta}{1 - 2^n \delta} < \varepsilon,$$

ha δ elég kicsi. Vagyis minden $U_N(0)$ tartalmaz egy $U_M(0)$-t.

Fordítva: minden $U_M(0)$ tartalmaz (mint részhalmazt) egy $U_N(0)$-t. Ugyanis legyen $U_M(0) = \{x : \varrho(x, 0) < \varepsilon\}$. Ha ez nem tartalmazna egy $U_N(0)$ környezetet, akkor volna olyan $\{x_\nu\}$ sorozat, mely nem tartozik az $U_M(0)$ gömbhöz és tagjaira az $\|x_\nu\|_\nu < \frac{1}{\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ egyenlőtlenségek érvényesek. Ez azt jelentené, hogy $x_\nu \to 0$ a megszámlálható normák topológiája szerint, de nem a metrika szerint, ez ellentétben van azzal, hogy a (7) által definiált metrika mindkét változójában a megszámlálható normák topológiája szerint folytonos.

Hogy ϱ valóban folytonos (a megszámlálható normák topológiája szerint) a következő módon látható be: Legyen $x_\nu \to 0$ (azaz $\|x_\nu\|_m \to 0$,

$\nu \to \infty$, m tetszőleges rögzített). Válasszuk az n_0 számot úgy, hogy $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ legyen, ezt rögzítve ν_0-t oly módon, hogy $\nu \geqq \nu_0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{\|x_\nu\|_n}{1+\|x_\nu\|_n} < \varepsilon$$

teljesüljön, ekkor

$$\varrho(x_\nu, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x_\nu\|_n}{1+\|x_\nu\|_n} < \varepsilon + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon + \frac{1}{2^{n_0}} < 2\varepsilon,$$

ha $\nu \geqq \nu_0$.

Ebből tüstént adódik, hogy ha $\{\lambda_\nu\}$ egy tetszőleges numerikus nullsorozat, akkor

$$\varrho(\lambda_\nu x, 0) \to 0, \quad \text{ha} \quad \lambda_\nu \to 0$$

és

$$\varrho(x_\nu, 0) \to 0 \quad \text{esetén} \quad \varrho(\lambda x_\nu, 0) \to 0 \qquad (\lambda \text{ tetszőleges szám}).$$

A most megmutatott tulajdonságok és (8) miatt megállapíthatjuk, hogy *a megszámlálhatóan normált terek (F) típusú terek.* [2. 25. old.]

6. A megszámlálhatóan normált terek normálhatósága

Egy tétel bebizonyításával kezdjük, melyből tüstént leolvasható a megszámlálhatóan normált terek helye a lineáris topologikus terek családjában.

Legyen X megszámlálhatóan normált tér, a normákat ismét monoton nem csökkenőnek tételezünk fel. Képezzük, mint előbb, X lezárását az m-edik normára nézve, ez legyen az X_m tér. *Ha az X_m Banach-terek páronként különbözőek, akkor a pozitív számok minden $c_1, c_2, \ldots$ sorozatához lehet találni egy $x \in X$ elemet, melyre*

$$\|x\|_m \geqq c_m$$

tetszőleges m mellett érvényes.

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy minden természetes m számhoz és bármilyen két pozitív számhoz c és c'-höz van olyan $x \in X$ elem, melyre

$$\|x\|_m < c \quad \text{és} \quad \|x\|_{m+1} > c'.$$

Valóban, ha ilyen elemet nem lehetne találni, akkor az $\|x\|_m < c$ feltételből következnék, hogy $\|x\|_{m+1} \leqq c'$. Ez azt jelentené, hogy a $\|\cdot\|_m$ és $\|\cdot\|_{m+1}$ normák egymással ekvivalensek, tehát a feltevéssel ellentétben X_m és X_{m+1} terek azonosak lennének.

Ezekután rendre válasszuk ki az $x_1, x_2, \ldots, \in X$ elemeket az alábbi előírásokkal előbbi megjegyzésünk alapján:

$$\|x_1\|_1 > c_1 + 1$$

$$\|x_2\|_1 < \frac{1}{2}; \quad \|x_2\|_2 > c_2 + 1 + \|x_1\|_2$$

$$\|x_3\|_2 < \frac{1}{2^2}; \quad \|x_3\|_3 > c_3 + 1 + \|x_1\|_3 + \|x_2\|_3$$

s. i. t.

Legyen $x = x_1 + x_2 + \ldots$,[2] akkor érvényes

$$\|x\|_m \geqq \|x_m\|_m - \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\|_m - \sum_{k=1}^{m-1} \|x_k\|_m \geqq$$

$$\geqq \{c_m + 1 + \|x_1\|_m + \ldots + \|x_{m-1}\|_m\} - 1 - \{\|x_1\|_m + \ldots + \|x_{m-1}\|_m\} \geqq c_m.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ezekután bebizonyítjuk azt a fontos tételt, miszerint ha X egy megszámlálhatóan normált tér és az imént definiált X_m Banach-terek páronként egymástól különbözőek, akkor *az X-tér topológiája egy norma bevezetésével nem származtatható*, vagyis X *nem normált tér* (bár metrikus tér!). Pontosabban: *ha a Banach-terek* $\{X_m\}$ *sorozata egy páronként különböző tereket tartalmazó részsorozatot tartalmaz, akkor nem lehet az X-térben normát úgy definiálni, hogy az az X-tér topológiáját indukálja. Ha az* $\{X_m\}$ *sorozat valamennyi tagja* (egy bizonyos n_0 indextől) *egymással egyenlő, akkor X normált tér* $(= X_{n_0})$.

A tétel második része triviális, mert $X_{n_0} = X_{n_0+1}$, továbbá a $\|\cdot\|_{n_0}$, $\|\cdot\|_{n_0+1}$ normák összehasonlíthatósága miatt e két tér egymással ekvivalens. A $\|\cdot\|_{n_0}$ szerinti konvergenciából tehát következik a $\|\cdot\|_m$ szerinti konvergencia $(m \geqq n_0)$, de ez éppen az X-tér topológiája szerinti konvergencia. Így X teljessége folytán teljes a $\|\cdot\|_{n_0}$-ra, ezért szükségképpen $X = X_{n_0}$, továbbá X topológiája ekvivalens X_{n_0} topológiájával.

Tételünk első része a következőképpen bizonyítható. A terek sorozatából kiválasztjuk azt a részsorozatot, melyben a terek páronként egymástól különbözőek, ezt jelöljük $\{X_m\}$-mel.

Ellentétben a tétel állításával tegyük fel, lenne olyan norma, $\|x\|$, mely az X lineáris topologikus teret az eredeti topológiával szolgál-

[2] $k > m$ esetén $\|x_k\|_m \leqq \|x_k\|_{k-1} < \frac{1}{2^{k-1}}$, ezért a sor konvergens X-ben.

tatná. Tekintsük az E egységgömböt

$$E = \{x : \|x\| \leqq 1\}.$$

Azt állítjuk, hogy valamennyi norma az E gömbön korlátos. Ha ugyanis $\|x\|_m$ az E gömbön nem volna korlátos, akkor létezne az E elemeinek olyan $\{x_n\}$ sorozata, melyre $\|x_n\|_p = \lambda_n \to \infty$, ha $n \to \infty$. Erre a sorozatra érvényes, hogy $\frac{x_n}{\lambda_n} \to 0$ az X-térben, amiből következik, hogy $\left\{\frac{x_n}{\lambda_n}\right\}$ egy nullsorozat minden norma szerint. Ez azonban ellentétben van λ_n definíciójával, mely szerint

$$\left\|\frac{x_n}{\lambda_n}\right\|_m = 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Így minden norma E-n korlátos, azaz létezik a pozitív számoknak olyan c_n sorozata, melyre

$$\|y\|_n \leqq c_n \qquad (y \in E, n = 1, 2, \ldots).$$

De akkor — előbbi tételünk alapján — van olyan $x \in X$ elem, melyre

$$\|x\|_n > nc_n.$$

Feltettük, hogy X normált tér, következésképpen lehet a most kiválasztott x elemhez olyan $\mu \neq 0$ valós számot találni, hogy μx az E egységgömbben legyen. De akkor egyrészt

$$\|\mu x\|_n > |\mu| nc_n$$

másrészt

$$\|\mu\| x_n \leqq c_n. \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

E két utóbbi egyenlőtlenség nyilván ellentmondásban van egymással, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

7. Megszámlálhatóan normált tereken értelmezett lineáris folytonos funkcionálok

Legyen X egy lineáris topologikus tér. E téren értelmzett f lineáris funkcionál az X-nek a valós (vagy komplex) számok R halmazába való olyan (f, x) leképezése $(x \in X)$, melyre

a) $(f, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 (f, x_1) + \alpha_2 (f, x_2)$,

ahol α_1 és α_2 tetszőleges valós vagy komplex számok és x_1, x_2 az X-tér tetszőleges elemei. E tulajdonságból következik, hogy $(f, 0) = 0$.

b) Minden $\varepsilon > 0$ számhoz található az X-tér nullelemének olyan U környezete, hogy

$$|(f, x)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x \in U$$

Az *a)* tulajdonság az f linearitását, *b)* pedig a 0 „pontban" levő folytonosságát fejezi ki.

Megjegyezzük, hogy ha f a nullelemnél folytonos, akkor folytonos minden x_0 elemnél is, ami azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van x_0-nek olyan $U(x_0)$ környezete, hogy

$$|(f, x) - (f, x_0)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x \in U(x_0).$$

Az *a)* tulajdonság miatt ugyanis

$$(f, x) - (f, x_0) = (f, (x - x_0))$$

és ha $x \in U(x_0)$, akkor $x - x_0$ a nullelem megfelelő környezetébe esik.

A *b)* tulajdonság úgy is kifejezhető: minden lineáris, és folytonos funkcionál a 0 bizonyos környezetében korlátos. Ez a tulajdonság meg is fordítható: ha egy lineáris funkcionál a 0 bizonyos környezetében korlátos, akkor folytonos is. Ha ugyanis az f az $U = U(0)$ halmazon korlátos, ez azt jelenti, hogy

$$|(f, x)| < M \qquad (x \in U(0))$$

Ha $\varepsilon > 0$ előre adott szám, akkor valóban

$$|(f, x)| < \varepsilon$$

minden a 0-nak $\frac{\varepsilon}{M} U(0)$ környezetébe eső x elemre.

Példaképpen tekintsük az $X = D[a, b]$ teret. Legyen

$$(f, \varphi) = \int_a^b \varphi^{(m)}(x)\, d\mu(x), \tag{9}$$

ahol $\varphi \in D[a, b]$, m előre adott, változatlan nemnegatív szám, $\mu(x)$ ugyancsak előre adott korlátos variációjú függvény. Az így definiált f folytonos funkcionál. (A linearitás nyilvánvaló.) A folytonosság is könnyen igazolható. Vegyük ui. a $\varphi \equiv 0$

$$T_{m,\varepsilon} = \{\varphi : \|\varphi\|_m = \max_{\substack{k=0,1,\ldots,m \\ x \in [a,b]}} |\varphi^{(k)}(x)| < \varepsilon\}$$

környezetét. Akkor minden $\varphi \in U_{m,\varepsilon}$ függvényre

$$|(f \cdot \varphi)| \leqq \max_{x \in [a,b]} |\varphi^{(m)}(x)| \cdot \operatorname{Var} \mu(x) < \varepsilon \cdot \operatorname{Var} \mu(x),$$

vagyis f az $U_{m,\varepsilon}$ környezeten korlátos, tehát folytonos is. Alább meg fogjuk mutatni, hogy (9) a $D[a, b]$ téren értelmezett lineáris funkcionál legáltalánosabb alakja.

Legyen X most egy megszámlálhatóan normált tér és f az X-en értelmezett lineáris folytonos funkcionál. f korlátossága az $U_{m,\varepsilon}(0)$ halmazon (definícióját *l.* (6′) alatt) — mint ismeretes — azt jelenti, hogy f korlátos az m-edik normára nézve, vagyis van oly $C > 0$ konstans, melyre

(10) $$|(f, \varphi)| < C\|\varphi\|_m.$$

Azt a legkisebb m nemnegatív egész számot, melyre (10) érvényes, az f funkcionál *rendjének* nevezzük.

Olyan X terekben, melyekben az első megszámlálhatósági axióma érvényes, az f lineáris funkcionál folytonosságának szükséges és elégséges feltétele, hogy minden, X topológiája szerinti $\{x_n\}$ nullsorozatra $(f, x_n) \to 0$ érvényes legyen.

Bizonyítás. α) Legyen $\{x_n\}$ egy az X-térben adott nullsorozat és legyen f folytonos. Ez azt jelenti, hogy adott $\varepsilon > 0$-hoz van 0-nak olyan $U_\varepsilon(0)$ környezete, melyre

$$|(f,\varphi)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \varphi \in U_\varepsilon(0).$$

De $\{x_n\}$ nullsorozat lévén található az ε-hoz olyan n_ε szám, hogy

$$x_n \in U_\varepsilon(0), \quad \text{ha} \quad n > n_\varepsilon,$$

vagyis $|(f, x_n)| < \varepsilon$, ha $n > n_\varepsilon$. Eszerint a feltétel szükséges.

β) Most tételezzük fel, hogy $x_n \to 0$ (X-ben) és $(f, x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Megmutatjuk, hogy f folytonos. Ha ui. f a tétel állításával ellentétben nem volna folytonos, akkor egy előbbi megjegyzésünk szerint, f nem volna korlátos a nullelem semmilyen környezetében. Vegyük a nullelem egy megszámlálható bázis környezetrendszerét

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$$

Mindegyik U_k halmazon van legalább egy x_k elem, melyre $|(f, x_k)| > 1$. $x_k \to 0$ $(k \to \infty)$ és feltevésünkkel ellentétben (f, x_k) nem tart zérushoz. Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat.

8. Megszámlálhatóan normált tér konjugált tere

Legyen X egy lineáris topologikus tér és X' az X-en értelmezett lineáris folytonos funkcionálok halmaza. X' halmazból egy lineáris teret képezünk az alábbi műveletekkel:

$$(11) \qquad ((f_1+f_2), x) = (f_1, x)+(f_2, x) \qquad (f_1, f_2 \in X', x \in X)$$

$$(\alpha f, x) = \alpha(f, x) \qquad (f \in X', x \in X, \alpha \text{ tetszőleges szám})$$

Az X' lineáris teret az X *konjugált terének* nevezzük.

Ha X normált tér, akkor, mint ismeretes X' Banach-tér, melyben a norma

$$(12) \qquad \|f\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} |(f, x)|.$$

Ha azonban X nem normált, hanem megszámlálhatóan normált tér, akkor X' struktúrája a következőképpen írható le:

Tekintsük mindazokat a lineáris funkcionálokat, melyek rendje legfeljebb p, vagyis melyekre

$$(13) \qquad |(f, x)| \leqq C\|x\|_p$$

érvényes. X'-nek ezt az alterét úgy lehet jellemezni, mint azoknak a funkcionáloknak a halmazát, melyek a p-edik normára nézve folytonosak. Ezt az alteret X'_p-vel jelöljük. Ez az X_p-hez konjugált tér és mivel X_p normált tér, azért X'_p Banach-tér. Nyilván

$$X' = \bigcup_{p=1}^{\infty} X'_p.$$

(13)-ból azonnal következik, hogy

$$|(f, x)| \leqq C\|x\|_m \qquad (m > p),$$

vagyis ha $f \in X'_p$, akkor $f \in X'_m$ $(m > p)$, így tehát

$$X'_p \subset X'_{p+1} \subset \dots .$$

Ez a monotonitási reláció minden p-re érvényes lévén, írható:

$$X'_1 \subset X'_2 \subset \dots \subset X'_p \subset \dots \subset X'$$

Ha $f \in X'_p$, akkor (12) alapján, mivel $\|x\|_p \leqq \|x\|_{p+1}$,

$$\|f\|_p \geqq \|f\|_{p+1}.$$

Másrészt, ha f rendje p, akkor f az $X_1, X_2, \dots, X_{p-1}$ terek egységgömbjén nem korlátos, ezért legyen (definíciószerűen) $\|f\|_1 = \|f\|_2 = \dots =$

$= \|f\|_{p-1} = \infty$, és ezzel a megállapodással azt kaptuk, hogy minden f lineáris folytonos funkcionálra

$$\|f\|_1 \geqq \|f\|_2 \geqq \ldots \geqq \|f\|_p \geqq \ldots .$$

Az eddigieket összefoglalva, azt mondhatjuk, hogy *egy X megszámlálhatóan normált tér X' konjugált tere normált terek monoton növekedő sorozatának egyesítése, melyekben a normák egy monoton fogyó sorozatot alkotnak.*

E tételből tüstént következik a disztribúcióelmélet ún. alaptétele (vagy reprezentációs tétele). Tekintsük ui. a $D[a, b]$ függvényteret (vö. 4. *a)* példáját). Ha $f \in D'[a, b]$ akkor az imént bebizonyított tétel alapján f egyúttal $D_p[a, b]$-n értelmezett lineáris folytonos funkcionál is, ahol p az f rendje. ($D_p[a, b]$ a $D[a, b]$ lezárása a (6) alatt definiált $\|\cdot\|_p$ norma alapján! Ebbe a térbe nyilván mindazok a függvények tartoznak, melyek legalább p-szer folytonosan differenciálhatók és tartójuk $[a, b]$-ben fekszik.) Képezzük le $D_p[a, b]$-t a $C[a, b]$-be azáltal, hogy minden $\varphi \in D_p[a, b]$-hez a $\psi = \varphi^{(p)}$ folytonos függvényt hozzárendeljük.

Érvényes az alábbi becslés

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{k=0,1,\ldots,p \\ x\in[a,b]}} |\varphi^{(k)}(x)| \leqq C \max_{x\in[a,b]} |\varphi^{(p)}(x)| = C \max_{x\in[a,b]} |\psi(x)| \leqq C\|\varphi\|_p,$$

amiből következik, hogy a fenti leképezés megfordítható és mindkét irányban folytonos. Ez a meggondolás arra vezet, hogy $D[a, b]$ a $C[a, b]$ egy zárt részhalmazával izomorf. Ebből következik, hogy a $D[a, b]$-n definiált (f, φ) lineáris funkcionálnak egyértelműen $C[a, b]$ felett értelmezett (g, ψ) lineáris funkcionál felel meg úgy, hogy

$$(f, \varphi) = (g, \varphi), \quad \text{ahol} \quad \varphi \to \psi.$$

A Hahn—Banach-tétel szerint ez a funkcionál kiterjeszthető az egész $C[a, b]$ térre (folytonos módon), mely a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint a

$$(g, \psi) = \int_a^b \psi(x)\, d\mu(x)$$

alakban állítható elő, ahol $\mu(x)$ egy, a g funkcionál által egyértelműen meghatározott korlátos variációjú függvény. Figyelembe véve ψ és f jelentését, írhatjuk:

$$(f, \varphi) = \int_a^b \varphi^{(p)}(x)\, d\mu(x),$$

amivel az alaptételt bebizonyítottuk.

9. Alapfüggvények tere

Alább olyan megszámlálhatóan normált függvénytereket,[3] vagy ilyen megszámlálhatóan normált terek egyesítéseit[4] fogjuk tekinteni, melyekben a $\{\varphi_n\}$ sorozat konvergenciájából (a tekintetbe vett tér topológiája szerint) $\{\varphi_n(x_0)\}$ számsorozat konvergenciája következik, ahol x_0 egy tetszőleges, de rögzített pont.

Az ilyen tereket *alaptereknek*, elemeit *alapfüggvényeknek* nevezzük. A leggyakoribb alapterek a következők:

1°. D_Ω, ahol Ω az R_n egy rögzített korlátos, nyílt halmaza tartománya. Topológiáját a (6) alatti normák indukálják. $\varphi_n \to 0$ a D_Ω topológiája szerint azt jelenti, hogy $D^k\varphi_n \to 0$ egyenletesen, ha $n \to \infty$ $(|k| = 0, 1, 2, \ldots)$.

2°. Az S-tér. Definícióját 1. 4. (b) alatt. Ebben is nyilván teljesül az alapterektől megkívánt tulajdonság.

3°. A D függvénytér:

$$D = \bigcup_\Omega D_\Omega,$$

ha Ω az R_n valamennyi zárt tartományát befutja.

4°. Az előbb felsorolt alapterek speciális esetei az alábbi tereknek:

Tekintsük az $M_0(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$, ... függvények monoton nemcsökkenő sorozatát, melyek az egész R_n téren definiálva vannak:

$$1 \leqq M_0(x) \leqq M_1(x) \leqq \ldots \leqq M_k(x) \leqq \ldots \qquad (x \in R_n).$$

Azt is megengedjük, hogy $M_k(x)$ végtelen értéket felvegyen. Ha valamely k-ra $M_k(x) = \infty$, akkor ugyanezen x mellett $M_m(x) = \infty$, ahol $m \geqq k$. E függvények legyenek továbbá folytonosak mindazokon a helyeken, ahol végesek.

A $D\{M_p\}$ alapteret a következő módon értelmezzük: $\varphi(x) \in D\{M_p\}$, ha φ az R_n-ben akárhányszor differenciálható, $M_p(x)D^q\varphi(x)$ korlátos

[3] A függvények az R_n n-dimenziós euklideszi térben vannak értelmezve.

[4] Megszámlálhatóan normált terek, még alkalmasabban: lineáris topologikus terek egyesítéseit a következőképpen definiáljuk. Legyen adva a lineáris topologikus terek egy $\{X_n\}$ sorozata, melyre

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$$

érvényes. Tegyük fel, hogy minden olyan végtelen $\{\varphi_k\}$ elemsorozat, mely X_n topológiája szerint nullához konvergál, mint X_{n+1} sorozata is nullához tart $(n = 1, 2, \ldots)$. X-el jelöljük az X_n-ek egyesítését, a szokásos műveletekkel X-ből lineáris tér lesz. Az $\{x_k\}$ X-beli elemsorozatot egy $x \in X$ elemhez konvergálónak nevezzük, ha az $\{x_k\}$ sorozat és x egy meghatározott X_n térhez tartoznak és e tér topológiája szerint $x_k \to x$. Ezzel a konvergenciafogalommal ellátott lineáris X teret az $\{X_n\}$ *terek egyesítésének* nevezzük. X általában nem topologikus tér (hanem csak pszeudotopologikus), mert X-ben sem a nyílt, sem a zárt halmazok rendszerét nem definiáltuk.

és folytonos (ahol $M_p(x)=\infty$ ott $D^q\varphi(x)=0$), ha $|q| \leqq p$ $(|q| = q_1+\ldots+q_n)$ $(x\in R_n)$. $D\{M_p\}$ térben normák sorozatát lehet definiálni az álabbi módon:

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{x\in R_n \\ |q|\leqq p}} M_p(x)|D^q\varphi(x)| \qquad (p=0,1,2,\ldots). \tag{14}$$

Példaképpen megemlítjük, hogy amennyiben

$$M_p(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x\in\Omega \\ 0, & \text{ha} \quad x\notin\Omega \end{cases} \qquad (p=0,1,2,\ldots),$$

akkor a D_Ω teret kapjuk.

Hogy ha

$$M_p(x) = \sup_{|q|\leqq p} |x^q| \qquad (p=0,1,2,\ldots),$$

akkor az S-tér adódik.

Az általánosított függvények definíciója

f-et *általánosított függvénynek* nevezzük, ha f egy Φ alapfüggvénytéren definiált lineáris folytonos funkcionál. A Φ függvénytéren definiált általánosított függvények halmazát Φ'-vel jelöljük.

Legyen $f(x)$ egy R_n-ben értelmezett függvény, melyre az

$$\int_{R_n} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{15}$$

a Φ alapfüggvénytér *minden* $\varphi(x)$ függvényére létezik. Akkor f a (15) alatti funkcionált definiálja. Fordítva is: belátható, hogy a (15) alatti lineáris funkcionál (nullmértékű halmaztól eltekintve) egyértelműen meghatározza $f(x)$-et, ha $D\subset\Phi$ (ez az állítás általában nem minden alapfüggvénytérre áll). Ennek alapján a (15) funkcionál identifikálható az $f(x)$ függvénnyel.

Ha $\Phi=D_\Omega$, akkor f gyanánt vehető minden Ω-ban lokálisan integrálható függvény.

A $\Phi=S$ térben a (15) integrál akkor és csak akkor létezik minden $\varphi\in S$ függvényre, ha

$$|f(x)| \leqq C(1+|x|)^k$$

valamilyen C pozitív konstans és k nemnegatív egész mellett.

A $D\{M_p\}$-térben a (15) alatti integrál létezésének elégséges feltétele, hogy f lokálisan integrálható legyen és

$$r(x) = \frac{|f(x)|}{M_p(x)} \tag{16}$$

az R_n-téren integrálható legyen.

Ha a (16) feltétel ui. teljesül, akkor

$$\left|\int f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqq \|\varphi\|_p \int |f(x)| \frac{dx}{M_p(x)} = \|\varphi\|_p \int r(x)\,dx \qquad (\varphi \in D\{M_p\}).$$

Ha $\varphi_n \to 0$ a $D\{M_p\}$ topológiája szerint, azaz $\|\varphi_n\|_p \to 0$ $(n \to \infty$, p rögzített), akkor

$$|(f,\varphi_n)| = \left|\int_{R_n} f(x)\varphi_n(x)\right| \leqq \|\varphi_n\|_p \int_{R_n} r(x)\,dx \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz ilyen f-re a (14) funkcionál folytonos.

Legyen $P(D) = \sum a_k D^k$ egy lineáris állandó együtthatós differenciáloperátor, akkor

$$(f,\varphi) = \int_{R_n} f(x) P(D)\varphi\,dx \tag{17}$$

általában nem állítható elő a (14) alakban. Egyébként (17) egy lineáris funkcionált állít elő, ha az

$$r_q(x) = \frac{|f(x)|}{M_q(x)} \qquad (q \leqq p)$$

függvények integrálhatók.

11. A $D\{M_p\}$ függvényterek

A $D\{M_p\}$-terekkel kapcsolatban felvetődik a következő kérdés: mikor definiálja két függvénysorozat, $\{M_p\}$ és $\{\tilde{M}_p\}$ egy és ugyanazon függvényteret? Feltesszük természetesen, hogy $\{M_p\}$ és $\{\tilde{M}_p\}$ eleget tesznek a 9. alatt kirótt feltételeknek. Könnyen igazolható, hogy ha $D\{M_p\}$ és $D\{\tilde{M}_p\}$ elemei ugyanazok, akkor topológiájuk is azonos egymással, vagyis ezeknél a tereknél az elemek topológiájukat egyértelműen meghatározzák.

Két függvénysorozatot, $\{M_p\}$-t és $\{\tilde{M}_p\}$-t egymással ekvivalensnek tekintünk, ha a $D\{M_p\}$ és $D\{\tilde{M}_p\}$ lineáris topologikus terek egymással ekvivalensek. Az $\{M_p\}$ és $\{\tilde{M}_p\}$ függvénysorozatok ekvivalen-

ciájának elégséges feltétele az, hogy létezzék két pozitív számsorozat, $\{C_p\}$ és $\{\Gamma_p\}$ úgy, hogy

$$0 < C_p \leqq \frac{M_p(x)}{\tilde{M}_p(x)} \leqq \Gamma_p \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots) \tag{18}$$

teljesüljön minden x ($\in R_n$) pontban, ahol $M_p(x)$ (s így $\tilde{M}_p(x)$ is) véges.

Legyen ui. $\varphi(x)$ akárhányszor differenciálható függvény, melyre

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{|q| \leqq p \\ x \in R_n}} M_p(x)|D^q\varphi(x)| < \infty,$$

akkor a

$$\|\varphi\|'_p = \sup_{\substack{|q| \leqq p \\ x \in R_n}} \tilde{M}_p(x)|D^q\varphi(x)| \leqq \frac{1}{C_p} \sup_{\substack{|q| \leqq p \\ x \in R_n}} M_p(x)|D^q\varphi(x)| = \frac{1}{C_p}\|\varphi\|_p$$

egyenlőtlenség miatt $\|\varphi\|'_p$ is véges. És megfordítva is, hasonlóan mint fent

$$\|\varphi\|_p \leqq \Gamma_p \|\varphi\|'_p,$$

azaz $\|\varphi\|'_p$ végességéből $\|\varphi\|'_p$ végessége adódik. Ez azt jelenti, hogy a $D\{M_p\}$ és $D\{\tilde{M}_p\}$ terek ugyanazokból a függvényekből állanak, továbbá a fentiek szerint a $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|'_p$ normák ekvivalensek, s ebből könnyen belátható, hogy a két tér topológiája is ekvivalens egymással.

Példaképpen tekintsük az

$$M_p(x) = \sup_{|k| \leqq p} |x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}| \qquad (|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$$

$$p = 0, 1, 2, \ldots$$

és

$$\tilde{M}_p(x) = (1 + |x_1|)^p \ldots (1 + |x_n|)^p \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

függvénysorozatokat.

Mint tudjuk, ezen $M_p(x)$ függvények az S-teret állítják elő.

$\{M_p\}$ és $\{\tilde{M}_p\}$ egymással ekvivalens függvényrendszerek, mert

$$1 + |x_i| \leqq \begin{cases} 2, & \text{ha} \quad |x_i| \leqq 1 \\ 2|x_i|, & \text{ha} \quad |x_i| \geqq 1, \end{cases}$$

ezért

$$\tilde{M}_p(x) \leqq 2^{np} M_p(x). \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

Másrészt

$$M_p(x) \leqq \tilde{M}_p(x) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

amiből következik, hogy $\tilde{M}_p(x)$ szintén az S-teret hozza létre.

A másik fontos tény, amit a $D\{M_p\}$ terekkel kapcsolatosan megállapítunk az az, hogy ezek *teljes terek, vagyis a (14) alatti normákkal megszámlálhatóan normált (teljes) terek.*

Jelöljük $\tilde{\Phi}_p$-vel ($p=0, 1, 2, \ldots$) a legalább p-szer folytonosan differenciálható ama függvények terét, melyekre a $M_p D^q\varphi(|q|\leqq p)$ függvények az egész térben korlátosak és folytonosak. Világos, hogy a (14) alatti normával $\tilde{\Phi}_p$ egy normált tér. Az is nyilvánvaló, hogy

$$D\{M_p\} = \bigcap_{p=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_p.$$

A tétel bizonyításához két, az általánosított függvények elméletében egyébként is fontos segédtételt kell előrebocsátanunk.

1. Segédtétel. Tekintsük a $\tilde{\Phi}_p$ térbe tartozó függvények olyan $\{\varphi_n\}$ sorozatát, melyre a $\{D^q\varphi_n\}$ függvénysorozatok egyenletesen konvergensek az R_n minden korlátos tartományában ($|q|\leqq p$). Ha a (14) alatti norma szerint $\|\varphi_n\|_p \leqq C$ (az n-től független korlát), akkor a $\{\varphi_n\}$ sorozat $\varphi_0(x)$ határfüggvénye szintén Φ_p-be tartozik és $\|\varphi_0\|_p \leqq C$.

Bizonyítás. $\varphi_0(x)$ definíciója szerint

$$\varphi_0(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

és ez a konvergencia R_n minden korlátos tartományában egyenletes. De ekkor a $\{D^q\varphi_n\}$ függvénysorozatokról tett feltevés miatt $\varphi_0(x)$ differenciálhányadosai (a p-edikig) léteznek és

$$D^q\varphi_0(x) = \lim_{n\to\infty} D^q\varphi_n(x) \qquad (|q| \leqq p).$$

Ezekután legyen x_0 az R_n-tér egy olyan pontja, melyre $M_p(x_0) < \infty$. Mivel az x_0 pontban $M_p(x)$ folytonos (az M_p függvények definíciója szerint), van az x_0-nak olyan környezete, melyben

$$|M_p(x) - M_p(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\varepsilon > 0 \text{ tetszés szerinti előre adott szám}).$$

x_0-nak egy ilyen környezetéhez található olyan n_0 index, hogy

$$M_p(x)|D^q\varphi_0(x)| \leqq M_p(x)|D^q\varphi_n(x)| + \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > n_0.$$

Az állítás premisszája szerint

$$\sup_{\substack{x\in R_n \\ |q|\leqq p}} M_p(x)|D^q\varphi_n(x)| = \|\varphi_n\|_p \leqq C,$$

így az x_0 pontnak előbb megállapított környezetében

$$M_p(x)|D^q\varphi_0(x)| \leqq C + \varepsilon.$$

Ez azt mondja ki, hogy minden olyan x pontban, melyben $M_p(x)$ véges,

$$\sup_{|q|\leqq p} M_p(x)|D^q\varphi_0(x)|$$

a C korlát alatt van.

Ha olyan x_0 pontot tekintünk, melyre $M_p(x_0)=\infty$, akkor ebben a pontban a $D^q\varphi_n(x)$ deriváltak eltűnnek $|q|\leqq p$, ezért a $D^q\varphi_0(x)$ értékek is eltűnnek az x_0 pontban. Így tehát a $\varphi_0(x)$ függvényre a (14) alatti norma létezik és a kívánt becslést is igazoltuk.

2. Segédtétel. A $\tilde{\Phi}_p$-nek legyen egy Cauchy-sorozata $\{\varphi_n\}$ (a (14) normára nézve). Ha ez a sorozat pontonként zérushoz konvergál, akkor a (14) normára nézve is konvergál a $\varphi_0(x)\equiv 0$ függvényhez.

Bizonyítás. $\{\varphi_n(x)\}$ egy Cauchy-sorozat, ezért

$$\|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)\|_p\to 0, \quad \text{ha} \quad n,m\to\infty,$$

azaz

$$\sup_{\substack{x\in R_n\\ |q|\leqq p}} M_p(x)|D^q\varphi_n(x)-D^q\varphi_m(x)|<\varepsilon,$$

ha n és m elegendő nagy. Ebből adódik, hogy $D^q\varphi_n\to D^q\varphi_0$ egyenletesen minden korlátos tartományban ($|q|\leqq p$) és a feltevés miatt $\varphi_0(x)\equiv 0$. Mivel

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|_p<\varepsilon,$$

ha $n,m>n_0$, azért $m\to\infty$ esetén az előbbi megjegyzés és az 1. segédtétel alapján:

$$\|\varphi_n\|_p<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad n>n_0,$$

amivel a segédtétel igazolást nyert.

Ezekután bebizonyítjuk, hogy $\tilde{\Phi}_p$ *a (14) normára nézve teljes tér.*

Bizonyítás. Ha $\{\varphi_n\}$ a Φ_p egy Cauchy-sorozata, akkor a $\{\varphi_n(x)\}$ és a $\{D^q\varphi_n(x)\}$ sorozatok ($|q|\leqq p$) — mint ahogy az a 2. segédtétel bizonyításából kitűnik — minden korlátos tartományban egyenletesen konvergálnak. Legyen

$$\varphi_0(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$$

és ez a konvergencia minden korlátos tartományban egyenletes. Ugyancsak a 2. segédtétel bizonyításából látható, hogy φ_0 deriváltjai (legalább a p-edikig) léteznek. Az 1. segédtétel alapján $\varphi_0(x)\in\tilde{\Phi}_p$. $\{\varphi_n-\varphi_0\}$ sorozat szintén a $\tilde{\Phi}_p$ egy Cauchy sorozata, mely minden pontban zérushoz konvergál, így a 2. segédtétel szerint $\|\varphi_n-\varphi_0\|_p\to 0$ $(n\to\infty)$, azaz $\varphi_0=\lim_{n\to\infty}\varphi_n$ a (14) norma szerint.

A bebizonyított tételből adódik, hogy a $\Phi = D\{M_p\}$ tér Φ_p lezárása a (14) norma alapján a $\tilde{\Phi}_p$ egy altere. Ebből következik, hogy

$$\Phi = D\{M_p\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p.$$

Megmutatjuk, hogy a $\Phi = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p$ *feltétel szükséges és elégséges a* Φ*-tér teljességéhez.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a $\Phi = \bigcap \Phi_p$ feltétel teljesül és $\{\Phi_\nu\}$ legyen Φ egy Cauchy-sorozata. De akkor $\{\Phi_\nu\}$ a Φ_p térnek is Cauchy-sorozata és mint ilyen Φ_p-ben egy x_p határértéke van $(p = 1, 2, \ldots)$. A Φ_p terekről tett feltevés alapján $\Phi_{p-1} \subset \Phi_p$ $(p = 2, 3, \ldots)$, tehát Φ_p tér elemei φ_{p-1}-tér bizonyos elemeivel identifikálhatók. Ezért az összes x_p elemek $(p = 1, 2, \ldots)$ egyenlők egymással és ezek minden Φ_p térhez tartoznak, tehát ezen x elemmel identifikálhatók a Φ-hez tartozók. Mivel azonban $\|\varphi_\nu - x_p\|_p \to 0$ $(\nu \to \infty;\ p = 1, 2, \ldots)$, ezért $\|\varphi_\nu - x\|_p \to 0$ minden p mellett. Ez azt jelenti, hogy

$$x = \lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu$$

a Φ topológiája szerint, vagyis Φ valóban teljes tér.

Megfordítva, tegyük fel, hogy Φ teljes tér. Legyen $x \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p$. Megmutatjuk, hogy x a Φ térhez tartozik. Φ_p a Φ lezárása a $\|\cdot\|_p$ normára nézve, ezért minden p-hez létezik egy Φ-térbeli elem φ_p úgy, hogy

$$|x - \varphi_p| < \frac{1}{p}.$$

Ha $k < p$, akkor érvényes

$$\|x - \varphi_p\|_k \leqq \|x - \varphi_p\|_p < \frac{1}{p},$$

vagyis

$$\|x - \varphi_p\|_k \to 0 \quad \text{ha} \quad p \to \infty.$$

Ebből következik, hogy $\{\varphi_p\}$ minden normára nézve Cauchy-sorozat így a Φ-térnek is Cauchy-sorozata.

A Φ topológiája szerint legyen

$$\bar{x} = \lim_{p \to \infty} \varphi_p,$$

vagyis

$$\|\bar{x} - \varphi_p\|_k \to 0 \quad \text{ha} \quad p \to \infty \quad \text{minden } k\text{-ra}$$

és mivel $\bar{x}$ és x a Φ_k-térhez tartozik, kell, hogy $x = \bar{x}$ legyen. De akkor valóban igaz az $x \in \Phi$ állítás.

Hátra van még megmutatni, hogy $D\{M_p\}$-ben bevezetett normák páronként koordináltak. Ezekből következik, hogy Φ teljes, megszámlálhatóan normált tér. Az utóbbihoz szükséges a

3. Segédtétel. A

$$\|\varphi\|_1 = \sup_{\substack{|q|\leqq p_1 \\ x\in R_n}} M_1(x)|D^q\varphi(x)|, \quad \|\varphi\|_2 = \sup_{\substack{|q|\leqq p_2 \\ x\in R_n}} M_2(x)|D^q\varphi(x)|$$

normák koordináltak.

Bizonyítás. Legyen $\{\varphi_n(x)\}$ egy, mindkét normára nézve Cauchy-sorozat és tegyük fel, hogy $\|\varphi_n\|_1 \to 0$ $(n\to\infty)$. Ez azt jelenti, hogy

$$\|\varphi_n\|_1 = \sup_{\substack{|q|\leqq p_1 \\ x\leqq R_n}} M_1(x)|D^q\varphi_n(x)| \to 0, \qquad (n\to\infty). \tag{19}$$

Másrészt

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|_2 = \sup_{\substack{|q|\leqq p_2 \\ x\in R_n}} M_2(x)|D^q[\varphi_n(x)-\varphi_m(x)]| \to 0, \text{ ha } n,m\to\infty. \tag{20}$$

A (19) alatti összefüggés $|q|=0$ esetre azt mondja, hogy $\varphi_n(x)\to 0$ minden $x\in R_n$ pontban. A 2. segédtételt alkalmazva a $\|\cdot\|_2$ normára adódik (20) alapján, hogy $\|\varphi_n\|_2\to 0$, ha $n\to\infty$. Ez volt az állítás.

Ilyenformán $D\{M_p\}$ normái páronként koordináltak. Ezzel állításunkat teljesen igazoltuk.

12. Tökéletes függvényterek

Egy absztrakt teret *tökéletesnek*[5] nevezünk, ha olyan teljes megszámlálhatóan normált tér, melyben minden korlátos halmaz kompakt. (Valamely Φ topologikus tér F halmazát kompaktnak nevezzük, ha minden végtelen részhalmazának van torlódási pontja Φ-ben).

Egy $D\{M_p\}$ függvénytér tökéletes, ha az őt definiáló $M_p(x)$ függvények az alábbi — ún. (P)-feltételnek — tesznek eleget:

(P) Minden p nemnegatív egészhez található olyan $p'>p$ egész, hogy minden $\varepsilon>0$ számhoz van $N(\varepsilon)$ úgy, hogy

$$M_p(x) < \varepsilon M_{p'}(x),$$

midőn x az alábbi egyenlőtlenségek közül legalább az egyiket kielégíti:

$$|x|>N(\varepsilon), \qquad M_p(x)>N(\varepsilon).$$

[5] parfait.

Ennek a fontos állításnak a bizonyítása több segédtételen alapszik:

1. Segédtétel. Ha a (P)-feltétel teljesül, akkor

$$M_p(x) D^q \varphi(x) \to 0 \qquad (|q| \leqq p)$$

hogyha $|x| \to \infty$ vagy $M_p(x) \to \infty$.

Bizonyítás. Tegyük fel az állítás ellenkezőjét. Ez azt jelenti, hogy bizonyos p és q indexekhez $(|q| \leqq p)$ van olyan $\{x_m\}$ sorozat, hogy

$$M_p(x_m) |D^q \varphi(x_m)| \geqq C > 0$$

és $|x_m| \to \infty$ vagy $M_p(x_m) \to \infty$ $(m \to \infty)$. A p' indexre a (P)-feltétel szerint érvényes

$$M_p(x_m) \leqq \varepsilon_m M_{p'}(x_m),$$

ahol $\varepsilon_m \to 0$. Ebből viszont az következik, hogy

$$M_{p'}(x_m) |D^q \varphi(x_m)| \geqq \frac{C}{\varepsilon_m} \to \infty \qquad (m \to \infty).$$

Ez a következmény ellenkezik azzal, hogy $\varphi(x) \in D\{M_p\}$.

2. Segédtétel. Tekintsük a $D\{M_p\}$-tér elemeinek egy $\{\varphi_\nu\}$ sorozatát, melyre

$$\|\varphi_\nu\|_p < A_p \qquad (p = 1, 2, \ldots;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

és $\varphi_\nu(x)$ konvergáljon szabályosan[6] zérushoz $(\nu \to \infty)$. Állítás: $\varphi_\nu(x)$ minden $\|\cdot\|_p$ norma szerint is zérushoz konvergál.

Bizonyítás. A rögzített p indexhez határozzuk meg a (P) fetlételben szereplő p' indexet. A feltevés szerint

$$\|\varphi_\nu\|_{p'} < A_p.$$

Minden $\varepsilon > 0$ számhoz meghatározható egy N szám, melyre

$$M_p(x) \leqq \frac{\varepsilon}{A_p} M_{p'}(x)$$

minden x pontban, melyben $M_p(x)$ és $M_{p'}(x)$ végesek, valahányszor az egyik

$$|x| > N, \qquad M_p(x) > N$$

[6] $\varphi_\nu(x)$ szabályosan (regelmäßig) konvergál zérushoz, ha minden q-ra a $\{D^q \varphi_\nu(x)\}$ sorozat minden korlátos tartományon egyenletesen zérushoz tart.

egyenlőtlenségek közül legalább az egyik fennáll. Ezekre az x pontokra érvényes:

$$M_p(x)|D^q\varphi_\nu(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{A_p} M_{p'}(x)|D^q\varphi_\nu(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{A_p}\|\varphi_\nu\|_{p'} < \varepsilon \qquad (|q| \leqq p).$$

Minden olyan x pontban, ahol $M(x) = M_p(x) = \infty$, ott

$$M_p(x)|D^q\varphi_\nu(x)| = 0.$$

Végül, minden x ponthoz, mely nem tartozik fenti halmazok egyikébe sem, van olyan ν_0, hogy minden $\nu > \nu_0$-ra

$$M_p(x)|D^q\varphi_\nu(x)| < \varepsilon. \qquad (|q| \leqq p)$$

Vagyis ez utóbbi egyenlőtlenség *minden* x-re teljesül, ha $\nu > \nu_0$. De akkor

$$\|\varphi_\nu\|_p = \sup_{\substack{x \in R_n \\ |q| \leqq p}} M_p(x)|D^q\varphi_\nu(x)| \leqq \varepsilon,$$

azaz

$$\|\varphi_\nu\|_p \to 0 \qquad (\nu \to \infty).$$

Segédtételünkből következik, mint ahogyan az könnyen igazolható, hogy amennyiben a $D\{M_p\}$-tér elemeinek valamely $\{\varphi_\nu\}$ sorozata minden rögzített normára nézve korlátos és szabályosan konvergál valamely $\varphi_0(x)$ függvényhez, akkor $\varphi_0 \in D\{M_\nu\}$ és $\lim_{\nu=\infty} \varphi_\nu(x) = \varphi_0(x)$ a $D\{M_p\}$ topológiája szerint.

A 11. fejezet 1. segédtétele szerint ugyanis $\varphi_0(x)$ minden Φ_p térhez hozzátartozik és így eleme $D\{M_p\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p$ térnek is. A $\{\varphi_0 - \varphi_\nu\}$ sorozat minden $\|\cdot\|_p$ normára nézve korlátos és szabályosan zérushoz tart. Az imént bebizonyított 2. segédtétel szerint $\|\varphi_\nu - \varphi_0\|_p \to 0$ $(\nu \to \infty,\ p = 1, 2, \ldots,)$ amivel állításunkat igazoltuk.

Ezzel mindent előkészítettünk annak igazolására, hogy a $D\{M_p\}$-*terek tökéletes terek, ha az* $\{M_p\}$ *függvénysorozat a (P)-feltételt kielégíti.*

Bizonyítás. A 11. pontban bebizonyítottuk, hogy a $D\{M_p\}$ terek teljes megszámlálhatóan normált terek. Eszerint most már csupán azt kell igazolni, hogy $D\{M_p\}$ minden korlátos $\mathfrak{A}$ halmaza kompakt.

E célból kiválasztunk $\mathfrak{A}$-ból egy korlátos[7] $\{\varphi_\nu\}$ elemsorozatot. A 2. segédtétel említett következménye alapján elegendő azt megmutatni, hogy $\{\varphi_\nu\}$-ból kiválasztható egy szabályosan konvergens részsorozat.

[7] Minden rögzített norma szerint korlátos

Feltevés szerint a $\{\|\varphi_\nu\|_1\}$ számsorozat korlátos, ezért a $\left|\frac{\partial \varphi_\nu(x)}{\partial x_i}\right|$ függvények egyenletesen korlátosak. Arzelà tétele szerint van a $\{\varphi_\nu\}$ sorozatnak olyan $\{\varphi_{1\nu}(x)\}$ részsorozata, mely az $|x| \leqq 1$ tartományban egyenletesen konvergens. De a $\{\|\varphi_{1,\nu}\|_2\}$ normasorozat korlátos, amiből következik, hogy $|D^2\varphi_{1,\nu}(x)|$ függvények egyenletesen korlátosak, így ismét Arzelà-tétele alapján a $\{\varphi_{1,\nu}\}$ sorozatnak megadható egy $\{\varphi_{2,\nu}\}$ részsorozata, melyre a $\{D\varphi_{2,\nu}(x)\}$ függvénysorozat az $|x| \leqq 2$ tartományban egyenletesen konvergens. Tehát $\{\varphi_{2,\nu}\}$ egyenletesen konvergál $|x| \leqq 1$ tartományban és $|D\varphi_{2\nu}|$ egyenletesen konvergens $|x| \leqq 2$ tartományban. De ebből következik, hogy $\{\varphi_{2\nu}(x)\}$ az $|x| \leqq 2$ gömbben is egyenletesen konvergens. A részsorozatok kiválasztását a leírt módon folytatjuk. A diagonáleljárás alapján a $\varphi_{11}(x)$, $\varphi_{22}(x)$, $\varphi_{33}(x)$, ... függvények minden korlátos tartományban minden deriváltjukkal együtt konvergensek (egyenletesen). A $\{\varphi_{k,k}(x)\}$ diagonális-sorozat határfüggvénye legyen $\varphi_0(x)$. Az előbbiekből adódik, hogy akkor $\{\varphi_{k,k}(x)\}$ a $D\{M_p\}$-tér topológiája szerint φ_0-hoz konvergál. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Hogyha az M_p függvények minden véges tartományon korlátosak, akkor a (P) feltétel így is írható: minden p indexhez van olyan p', hogy

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{M_p(x)}{M_{p'}(x)} = 0.$$

A (P) kritériummal könnyen verifikálható, hogy a D_Ω és S függvényterek tökéletesek.

A 9. pontban, D_Ω-t definiáló M_p függvényekről mondottak alapján a D_Ω-ra vonatkozó állítás triviális.

Ugyancsak a 9. fejezetben tett megállapítás miatt az S függvénytérre vonatkozó állításunk a következőképpen látható be: p-hez egy p' mindig meghatározható úgy, hogy

$$\sup_{k\leqq p} |x|^k = |x|^p \quad \text{és} \quad \sup_{k\leqq p'} |x|^k = |x|^{p'} \text{ lévén, ha } |x| > 1$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{M_p(x)}{M_{p'}(x)} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\sup\limits_{k\leqq p} |x|^k}{\sup\limits_{k\leqq p'} |x|^k} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p'-p}} = 0$$

legyen. (Ehhez elegendő a $p' = p+1$ választás.)

13. Elemi műveletek általánosított függvényekkel

Legyen Φ az alapfüggvények tere (l. 9.), a rajta definiált lineáris és folytonos funkcionálok halmazát Φ'-vel jelöljük. Φ' lineáris tér az alábbi műveletekkel:

$$(T_1+T_2, \varphi) = (T_1, \varphi)+(T_2, \varphi) \qquad (T_1, T_2 \in \Phi',\ \varphi \in \Phi)$$

$$(\alpha T, \varphi)=(T, \bar{\alpha}\varphi)=\bar{\alpha}(T, \varphi) \qquad (T \in \Phi',\ \varphi \in \Phi,\ \alpha \text{ komplex szám})$$

Határátmenetnél leginkább a gyenge konvergenciát tekintik: $T_n \to T$, ahol T szintén általánosított függvény, ha minden φ alapfüggvény mellett

$$(T_n, \varphi) \to (T, \varphi)$$

Pontosan úgy, mint a disztribúcióknál, be lehet bizonyítani, hogy az általánosított függvények tere a fenti limesrelációra nézve zárt.

Az affin transzformációkat és a differenciálhányadost is hasonlóan definiáljuk, mint a korábban.

Tegyük fel, hogy a $D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ parciális deriválás művelete a Φ alapfüggvények terében elvégezhető és folytonos operáció. Vagyis feltesszük, hogy ha $\varphi(x) \in \Phi$, akkor $D_j\varphi \in \varphi$ és ha $\varphi_\nu(x) \to 0$ $(\nu \to \infty)$ a Φ-tér topológiája szerint, akkor (rögzített j mellett) $D_j\varphi_\nu \to 0$ $(\nu \to \infty)$ ugyancsak a Φ-térben. A D_j parciális differenciálást a Φ' térben az alábbi módon definiáljuk

$$(D_jT, \varphi) = -(T, D_j\varphi) = (T, -D_j\varphi)$$

Ha T egy a Φ-n definiált reguláris funkcionál, melynek x_j szerinti parciális deriváltja létezik és Φ-n egy lineáris funkcionált definiál, akkor D_jT a közönséges parciális deriválást jelenti. Ez ugyanúgy látható be mint cikksorozatunk I. részében megmutatott állítás.

A D_j művelet a Φ-térben folytonos, D_j-hez adjungált operátor $-D_j$. Mint ilyen, Φ'-ben a D_j művelet is folytonos.

Az általánosított függvénynek egy akárhányszor differenciálható függvénnyel való szorzata sem definiálható olyan egyszerűen, mint korábban. Ha ui. $g(x)$ egy akárhányszor differenciálható függvény, akkor $g(x)\varphi(x)$ (φ egy alapfüggvény) általában nem alapfüggvény. Hogyha φ-vel együtt $g(x)\varphi(x) \in \Phi$, továbbá $\varphi_\nu \to 0$ esetén $g\varphi_\nu \to 0$ is teljesül a Φ-tér topológiájára nézve, akkor $g(x)$-et a Φ-tér egy *multiplikátorának* nevezzük. Egy $g(x)$ multiplikátorra (definíciószerűen) áll:

$$(gT, \varphi)=(T, g\varphi).$$

Minden $g \in C^\infty$ függvény a D-tér multiplikátora. Egy $D\{M_p\}$-térben a következő állítható. Ha egy $D\{M_p\}$-térben érvényes, hogy minden $p \geqq r$ indexpárhoz van olyan $s \geqq p$ index, hogy

$$M_p(x) M_r(x) \leqq C_{pr} M_s(x),$$

akkor minden $g(x) \in C^\infty$ függvény, melyre

$$|D^q g(x)| \leqq C_q M_{k_q}(x)$$

becslés minden q mellett érvényes, a $D\{M_p\}$-tér multiplikátora.

A bizonyításhoz csak azt kell részletezzük, hogy feltételeink mellett $g(x)\varphi(x) \in D\{M_p\}$, ha φ egy alapfüggvény. A multiindexekkel való hosszadalmas számítások elkerülése végett egyszerűség kedvéért szorítkozzunk egyváltozós függényekre. Érvényesek a következő becslések:

$$M_p(x)|D^q g(x)\varphi(x)| = M_p(x)\left|\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k} g^{(k)}(x)\varphi^{(q-k)}(x)\right| \leqq$$

$$= M_p(x)\sum_{(k)}\binom{q}{k}|g^{(k)}(x)|\,|\varphi^{(q-k)}(x)| \leqq$$

$$\leqq M_p(x)\sum_{(k)}\binom{q}{k} C_k M_{l_k}(x)|\varphi^{(q-k)}(x)| =$$

$$= \sum_{(k)}\binom{q}{k} C_k M_{l_k}(x) M_p(x)|\varphi^{q-k}(x)| \leqq \sum_{(k)}\binom{q}{k} C_k C_{pl_k} M_s(x)|\varphi^{(q-k)}(x)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{(k)}\binom{q}{k} C_k C_{pl_k} \sup_{(x)} M_s(x)|\varphi^{(q-k)}(x)| = \sum_{(k)} A_{qk}\|\varphi\|_s \leqq C\|\varphi\|_s.$$

Ebből adódik, hogy $M_p(x) D^q(g\varphi)$ korlátos, ami egyenértékű az állítással.

14. Az általánosított függvények reprezentációs tétele

Célunk az általánosított függvények általános alakját megadni, ahogyan cikksorozatunk I. részében speciális esetben (vö. A disztribúcióelmélet alaptétele) tettük.

A $D\{M_p\} = \bigcap_{p=0}^{\infty} \Phi_p$ feltételből — könnyen belátható — következik, hogy $D'\{M_p\} = \bigcup_{p=0}^{\infty} \Phi_p'$. Ezért elegendő valamely Φ_p téren értelmezett lineáris folytonos funkcionál általános alakját megadni. A 11. pontban láttuk, hogy $\Phi_p \subset \tilde{\Phi}_p$, a Hahn—Banach-tétel szerint a funk-

cionál kiterjeszthető $\tilde{\Phi}_p$-ra, így $\tilde{\Phi}_p$-n definiált lineáris folytonos funkcionál általános alakját keressük.

Elegendő tehát T legáltalánosabb alakját a Φ'_p térben meghatározni. A $\varphi(x) \in \Phi_p$ függvényhez az alábbi függvényeket rendeljük

$$\Phi_q(x) = M_p(x) D^q \varphi(x). \qquad |q| \leqq p$$

Ez a hozzárendelés, lévén a $\Phi_q(x)$ függvények folytonosak, a $\tilde{\Phi}_p$ függvényteret a folytonos függvények véges sok ($|q| \leqq p$) terének direkt szorzatába képezi le. Ez utóbbi teret jelöljük a Ψ_p szimbólummal. A definícióból világos, hogy ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű. Ha $\{\Phi_q(x)\}$-ben a normát a $\sup_{\substack{x \in R_n \\ |q| \leqq p}} |\Phi_q(x)|$ kifejezéssel definiáljuk, akkor a $\tilde{\Phi}_p \to \Phi_p$ leképezésnél a norma változatlan marad. Ennek alapján $\tilde{\Phi}_p$-t a Ψ_p (zárt) alterének tekinthetjük.

Legyen ezekután $T \in \tilde{\Phi}'_p$, akkor a Hahn—Banach-tétel szerint T folytonosan kiterjeszthető a ψ_p térre. De akkor ennek a funkcionálnak legáltalánosabb alakja a Riesz—Radon-tétel szerint

$$(21) \quad (T, \varphi) = \sum_{|q| \leqq p} \int_{R_n} \psi_q(x)\, d\sigma_q(x) = \sum_{|q| \leqq p} \int_{R_n} M_p(x) D^q \varphi(x)\, d\sigma_q(x),$$

ahol $\varphi \in D\{M_p\}$ és $\sigma_q(x)$ az R_n-térben értelmezett mérték, mely a tér azon x pontjaira van koncentrálva, melyben $M_p(x)$ véges ($p = 1, 2, \ldots$).

A (21) alatti nagyon általános reprezentáció nagymértékben egyszerűsíthető, ha az alapfüggvények teréről még egyes, a gyakorlatban leginkább megkövetelt feltételeket szabunk. Ilyen a következő ún. (N)-feltétel[8].

Az $\{M_p(x)\}$ függvénysorozat teljesíti az N-feltételt, ha minden p indexhez található olyan $p' > p$ index, hogy

$$\frac{M_p(x)}{M_{p'}(x)} = m_{pp'}(x) \subset L_1(R_n), \quad m_{pp'}(x) \to 0, \quad \text{ha} \quad |x| \to \infty.$$

(Azokban az x pontokban, melyekben $M_p(x) = M_{p'}(x) = \infty$, legyen per def. $m_{pp'}(x) = 0$. $M_{pp'}$ olyan, hogy a P feltétel is teljesül).

Tegyük továbbá fel, hogy az M_p-függvények az R_n minden olyan részében, melyben a koordináták előjelet nem váltanak, kvázimonotonak, azaz

$$M_p(\ldots x'_k \ldots) \geqq C_p M_p(\ldots x''_k \ldots)$$

valahányszor $|x'_k| > |x''_k|$.

[8] Ki lehet mutatni, hogy ha a $D\{M_p\}$ ennek a feltételnek eleget tesz, akkor a $D\{M_p\}$-tér nukleáris (nucléaire). Erre a tényre kíván a feltétel megjelölése utalni.

Érvényes az alábbi tétel:

Ha a $D\{M_p\}$-függvényteret előállító függvénysorozat az (N)-feltételt és a kvázimonotonitási feltételeket kielégíti, akkor a $D\{M_p\}$-n értelmezett T általánosított függvény általános alakja:

$$(T, \varphi) = \sum_{|q| \leq p} \int_{R_n} M_p(x) D^q \varphi(x) f_q(x)\, dx \qquad \varphi \in D\{M_p(x)\},$$

ahol az $f_q(x)$ korlátos, mérhető, T funkcionál által meghatározott függvény.

A tétel bizonyítása érdekében vezessünk be $D\{M_p\}$-ben új, $\| \|'_p$-vel jelölt normákat az alábbiak szerint:

$$\|\varphi\|'_p = \max_{|q| \leq p} \int_{R_n} M_p(x) |D^q \varphi(x)|\, dx. \tag{22}$$

A (22) képlet jobboldalán álló integrálok valóban léteznek. Az (N)-feltétel teljesülése miatt ugyanis

$$M_p(x)|D^q\varphi(x)| \leqq m_{pp'}(x) M_{p'}(x)|D^q\varphi(x)| \leqq m_{pp'}(x)\|\varphi\|_{p'},$$

amiből $m_{pp'}(x)$ integrálhatósága miatt (22) létezése következik.

Könnyű meggyőződni róla, hogy (22) valóban egy norma. Ezenkívül érvényes az alábbi becslés

$$\|\varphi\|'_p \leqq B_p \|\varphi\|_{p'}, \text{ ahol } B_p \text{ konstans } \left(B_p = \int_{R_n} m_{pp'}(x)\, dx\right).$$

Mivel $M_p(x)|D^q\varphi(x)| \to 0$, ha $|x| \to \infty$ (a (P)-feltétel teljesül) és ezek a függvények folytonosak, létezik olyan $x_0 \in R_n$ pont és egy q_0 multiindex, melyre $M_p(x)|D^q\varphi(x)|$ szupremumát felveszi. A kvázimonotonitási feltételből következik, hogy

$$\|\varphi\|_p = M_p(x_0)|D^{q_0}\varphi(x_0)| \leqq M_p(x_0) \int_{T_{x_0}} |D^{q_0+1}\varphi(\xi)|\, d\xi \leqq$$

$$= C_p \int_{T_{x_0}} M_p(\xi)|D^{q_0+1}\varphi(\xi)|\, d\xi \leqq$$

$$\leqq C_p \int_{T_{x_0}} M_{p+1}(\xi)|D^{q_0+1}\varphi(\xi)|\, d\xi \leqq C_p \|\varphi\|'_{p+1},$$

ahol T_{x_0} olyan végtelen intervallum, melyről a kvázimonotonitási feltételben említés tétetett és melynek (egyetlen) csúcsa az x_0 pontban van.

Az eddigieket összefoglalva, azt kapjuk tehát:

$$\|\varphi\|'_p \leqq B_p \|\varphi\|_p, \quad \text{és} \quad \|\varphi\|_p \leqq C_p \|\varphi\|'_{p+1} \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

Mivel $p' > p$, e két egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a $\{\|\cdot\|_p\}$ normarendszer a $\{\|\cdot\|'_p\}$ normarendszerrel ekvivalens. Ennek alapján

$$D\{M_p\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p,$$

ahol Φ_p a lezárása annak a normált térnek, mely $D\{M_p\}$ függvényekből a $\|\cdot\|'_p$ norma bevezetésével adódik. Ha tehát T egy folytonos, lineáris funkcionál a $D\{M_p\}$-n, akkor T-hez van olyan p, hogy T lineáris funkcionál Φ_p-n. Ezért elegendő T legáltalánosabb alakját Φ_p-ben meghatározni.

Legyen ezek után Φ_p^* azoknak a $\varphi(x)$ függvényeknek a normált tere, melyekre a (22) alatti $\|\varphi\|'_p$ mennyiség létezik. Világos, hogy Φ_p izometrikus Φ_p^* egy alterével. Másrészt Φ_p^* (zárt) altere véges sok oly függvényből álló függvénytér direkt összege lezárásának, melyek az $M_p(x)$ súlyfüggvényekkel integrálhatók. (E függvényterek száma egyenlő azoknak a q multiindexek számával, melyekre $|q| \leqq p$ érvényes.) Ezt a direkt-összeg-teret jelöljük $\sum_p$-vel. Ha tehát T egy folytonos lineáris funkcionál Φ_p-n, illetve Φ_p^*-n, akkor T a norma megtartása mellett folytatható a $\sum_p$-térre. Ez utóbbin pedig T a

$$\sum_{|q| \leqq p} \int_{R_n} M_p(x) D^q \varphi(x) f_q(x)\, dx$$

alakban állítható elő. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] I. M. Gelfand—G. E. Silov (Schilow): Verallgemeinerte Funktionen II., Berlin 1962.

[2] S. Banach: Théorie des opérations linéaires.

[3] H. A. Lauwerier: Topological foundations of the theory of distributions. Part II. Stichting Mathematisch Centrum. Amsterdam, 1961.

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, ОПЕРАТОРЫ III.

Иштван Феньё

DISTRIBUTIONS, OPERATORS III.

I. Fenyő

Az $f[x+yf(x)] = f(x)f(y)$ függvényegyenlet folytonos megoldásairól Hilbert-terekben

DARÓCZY ZOLTÁN (Debrecen)

Bevezetés. Legyen E lineáris tér a valós számok R teste felett. Az $f: E \to R$ egyértelmű leképezést *funkcionálnak* nevezzük. Feladatunk azon funkcionálok vizsgálata, amelyek eleget tesznek az

$$f[x+yf(x)] = f(x)f(y) \qquad (x, y \in E) \tag{1}$$

függvényegyenletnek.

Az *egydimenziós* esetben az (1) függvényegyenlettel S. Gołab és A. Schinzel foglalkozott behatóan [1]. Ekkor $E = \{\lambda e | \lambda \in R\}$, ahol e a tér bázisvektora. Legyen most $x, y \in E$, ekkor $x = \lambda e$ és $y = \mu e$ alakban írható, ahol $\lambda, \mu \in R$. Értelmezzük a $\varphi: R \to R$ valós függvényt a $\varphi(\lambda) = f(\lambda e)$ egyenlettel, ekkor az (1) egyenletből

$$\varphi[\lambda + \mu\varphi(\lambda)] = \varphi(\lambda)\varphi(\mu) \qquad (\lambda, \mu \in R) \tag{1'}$$

következik. [1]-ben a következő tétel lett bizonyítva:

Az (1') *függvényegyenlet összes folytonos és nemkonstans megoldásai a következők:*

$$\varphi(\lambda) = 1 + \alpha\lambda \qquad (\alpha \neq 0), \tag{2'}$$

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad \lambda \leqq \beta \\ 1 - \dfrac{\lambda}{\beta} & \text{ha} \quad \lambda > \beta \end{cases} \qquad (\beta < 0), \tag{3'}$$

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda}{\gamma} & \text{ha} \quad \lambda < \gamma \\ 0 & \text{ha} \quad \lambda \geqq \gamma \end{cases} \qquad (\gamma > 0). \tag{4'}$$

Ennek a dolgozatnak az a célja, hogy a fenti eredményt megfelelő formában Hilbert-tér esetére általánosítsa.

1. Az (1) egyenlet nemkonstans megoldásait keresve feltehetjük, hogy $f(0) = 1$. (Ugyanis (1)-ből $x = y = 0$ helyettesítéssel $f(0) = f(0)^2$, ahonnan $f(0) = 1$ vagy $f(0) = 0$. De ha $f(0) = 0$, akkor (1)-ben $y = 0$-át téve $f(x) = 0$ minden $x \in E$-re, azaz $f(x)$ konstans). A $p \in E$ (p lehet 0

is) elemet *f periódusának* nevezzük, ha $f(x+p) = f(x)$ minden $x \in E$-re. Ha f-nek nincs a nullaelemtől különböző periódusa, akkor *nemperiódikus*nak nevezzük.

1. Lemma. *Legyen f nemkonstans megoldása* (1)*-nek és jelölje Pf periódusainak halmazát. Ekkor*

$$P = \{x | x \in E,\ f(x) = 1\}.$$

Bizonyítás. Ha p periódus, akkor $f(0) = 1$ miatt $f(p) = f(0+p) = f(0) = 1$. Fordítva, ha $f(p) = 1$, akkor $f(x+p) = f[p + xf(p)] = f(p)f(x) = f(x)$ minden $x \in E$-re, azaz p periódus.

2. Lemma. *Legyen f nemkonstans megoldása* (1)*-nek. Ha* $x \neq y$ *és* $f(x) = f(y) \neq 0$, *akkor* $p = y - x$ *periódusa f-nek.*

Bizonyítás. Az 1. lemma alapján elég megmutatni, hogy $f(p) = 1$. Valóban (1)-et felhasználva

$$f(p) = f(y-x) = f\left[y - \frac{xf(y)}{f(x)}\right] = f(y)f\left[-\frac{x}{f(x)}\right] =$$

$$= f(x)f\left[-\frac{x}{f(x)}\right] = f\left[x - \frac{xf(x)}{f(x)}\right] = f(0) = 1.$$

2. A továbbiakban feltesszük, hogy E *topologikus* lineáris tér és $f: E \to R$ *folytonos* funkcionál.

3. Lemma. *Ha f nemkonstans folytonos megoldása* (1)*-nek, akkor P zárt lineáris altér.*

Bizonyítás. P nyilvánvalóan csoport az E-beli összeadásra nézve. Megmutatjuk, hogy $\lambda \in R$ és $p \in P$ esetén $\lambda p \in P$, azaz P lineáris altér. P zártsága f folytonossága miatt az 1. lemmából következik.

Legyen $p \in P$ $(p \neq 0)$ rögzített elem és tetszőleges $\lambda \in R$-re értelmezzük a $\varphi_p(\lambda)$ valós függvényt a

$$\varphi_p(\lambda) = f(\lambda p)$$

egyenlettel. Ez f folytonossága miatt folytonos, másrészt $\lambda, \mu \in R$-re

$$(2) \quad \varphi_p[\lambda + \mu\varphi_p(\lambda)] = f[\lambda p + \mu p f(\lambda p)] = f(\lambda p)f(\mu p) = \varphi_p(\lambda)\varphi_p(\mu),$$

azaz $\varphi_p: R \to R$ eleget tesz az (1′) egyenletnek. Továbbá $\varphi_p(0) = f(0) = f(p) = \varphi_p(1) = 1$ miatt a második lemma szerint $\varphi_p(\lambda)$ az $\omega = 1 - 0 = 1$ periódussal rendelkező folytonos megoldása (2)-nek, amely [1] eredménye alapján csak konstans lehet, azaz $\varphi_p(\lambda) \equiv 1$ $(\lambda \in R)$. Így $f(\lambda p) = 1$ $(\lambda \in R)$, azaz $\lambda p \in P$.

3. Az E topologikus lineáris tér legyen most egy *Hilbert-tér*, azaz $E=H$; s jelölje H-ban a belső szorzatot (x, y) $(x, y \in H)$.

Tétel. Ha $f: H \to R$ nemkonstans folytonos megoldása (1)*-nek, akkor f előállítható az*

$$f(x) = 1+(x, a) \tag{2}$$

vagy

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 1+(x, a) \leqq 0 \\ 1+(x, a) & \text{ha} \quad 1+(x, a) > 0 \end{cases} \tag{3}$$

alakban, ahol $a \neq 0$ rögzített eleme H-nak.

Bizonyítás. A P zárt altér ortogonális komplementere legyen $P^{\perp}$. Ekkor $H = P \oplus P^{\perp}$, azaz tetszőleges $x \in H$ egyértelmű módon felírható az

$$x = p + x' \qquad (p \in P, x' \in P^{\perp})$$

alakban, ahonnan

$$f(x) = f(p+x') = f(x'). \tag{4}$$

Nyilvánvaló, hogy az f funkcionál a $P^{\perp}$ zárt alteren eleget tesz (1)-nek és ott folytonos, nemkonstans; továbbá *nemperiodikus*, mert ha $p' \in P^{\perp}$ periódus lenne, akkor az 1. lemma miatt $f(p')=1$, azaz $p' \in P$ is teljesülne és $P \cap P^{\perp} = \{0\}$ miatt $p'=0$. Így (4) miatt elegendő az (1) egyenlet folytonos, nemkonstans és nemperiodikus megoldásait meghatározni a $P^{\perp}$ zárt alteren.

Legyen $A' = \{x' | x' \in P^{\perp}, f(x') \neq 0\}$ és B' az A' komplementere $P^{\perp}$-ra nézve. Ekkor a B' halmazon f nulla és a folytonosság miatt B' *zárt* halmaz, így A' *nyílt* (természetesen mindkettő $P^{\perp}$-ban). Megmutatjuk, hogy minden $x' \in A'$ $(x' \neq 0)$-ra

$$\frac{x'}{f(x')-1} = \frac{a}{\|a\|^2}, \tag{5}$$

ahol $a \neq 0$ egy rögzített eleme $P^{\perp}$-nak. (5) nyilván azt jelenti, hogy $x' \in A'$ $(x' \neq 0)$-ra $\dfrac{x'}{f(x')-1} =$ konstans vektor. (A továbbiakra való tekintettel jelöltük ezt $\dfrac{a}{\|a\|^2}$-tel). Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy létezik olyan $y' \in A'$ $(y' \neq 0)$, hogy

$$\frac{x'}{f(x')-1} \neq \frac{y'}{f(y')-1}.$$

Ekkor $x'+y'f(x') \neq y'+x'f(y')$ és

$$f[x'+y'f(x')] = f(x')f(y') = f[y'+x'f(y')] \neq 0,$$

ahonnan a 2. lemma szerint

$$x'+y'f(x') = y'+x'f(y'),$$

mivel f nemperiodikus. Ez viszont ellentmondás.

Szükségünk lesz még a következő megjegyzésre. Ha x_0' olyan torlódási pontja A'-nek, amely nincs benne A'-ben, akkor van olyan $x_n' \in A'$ $(x_n' \neq 0)$ sorozat, hogy $x_n' \to x_0' (n \to \infty)$, és így (5) miatt (továbbá $f(x_0')=0$ miatt)

$$x_0' = -\frac{a}{\|a\|^2},$$

azaz *A' olyan nyílt halmaz, amely egyetlen ponttal lezárható.*

Mármost megmutatjuk, hogy *$P^\perp$ egydimenziós altér*, amelyet nyilván az a vektor feszít fel. Ugyanis ha $P^\perp$ nem lenne egydimenziós, akkor az A' halmaz tetszőleges elemének bármely környezetében lenne a-tól lineárisan független elem és A' nyíltsága miatt A'-nek lenne a-tól lineárisan független eleme, de ez ellentmond (5)-nek. Így $P^\perp = \{\lambda a | -\infty < \lambda < \infty\}$. Mivel A' olyan nyílt halmaz $P^\perp$-ban, amely egyetlen ponttal $\left(-\frac{a}{\|a\|^2}\right)$ lezárható, továbbá $0 \in A'$, ezért A' a következő típus valamelyike:

$$A' = \left\{\lambda a | -\infty < \lambda < -\frac{1}{\|a\|^2}\right\} \cup \left\{\lambda a | -\frac{1}{\|a\|^2} < \lambda < \infty\right\}, \tag{6}$$

vagy

$$A' = \left\{\lambda a | -\frac{1}{\|a\|^2} < \lambda < \infty\right\}. \tag{7}$$

(5)-ből skalárisan szorozva mindkét oldalt a-val minden $x' \in A'$ $(x' \neq 0)$-ra

$$f(x') = 1+(x', a) \tag{8}$$

adódik, amely $f(0)=1$ miatt $x'=0$-ra is igaz. Ha most A' (6) típusú halmaz, akkor minden $x' \in P^\perp$-ra

$$f(x') = 1+(x', a). \tag{6'}$$

Ha pedig A' (7) típusú halmaz, akkor $\lambda = \frac{(x', a)}{\|a\|^2}$ miatt $(x' = \lambda a$ jelölés

mellett) (8)-ból minden $x' \in P^{\perp}$-ra

$$(7') \qquad f(x') = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 1+(x', a) \leqq 0 \\ 1+(x', a) & \text{ha} \quad 1+(x', a) > 0. \end{cases}$$

Visszatérve az egész H térre, (4) miatt (és $a \perp P$ miatt) (6')-ből adódik (2) és (7')-ből (3). Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy (2) és (3) valóban megoldásai (1)-nek. Így a bizonyított tétel általánosítása [1] 1. tételének, amelyet a bevezetésben idéztünk. Erről könnyű számolással meg lehet győződni. Lényegében a bizonyításnál felhasználható lett volna [1] eredménye (miután $P^{\perp}$-ról kimutattuk, hogy egydimenziós); de az itt közölt bizonyítás különbözik az [1]-ben közölt gondolatmenettől.

IRODALOM

[1] S. Gołab—A. Schinzel, Sur l'équation fonctionnelle $f[x+yf(x)] = f(x)f(y)$, Publ. Math. Debrecen *6* (1959), 113—125.

О НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $f[x+yf(x)] = f(x)f(y)$

Зольтан Дароци

ÜBER DIE STETIGEN LÖSUNGEN DER FUNKTIONALGLEICHUNG $f[x+yf(x)] = f(x)f(y)$ IM HILBERT-RAUM

Z. Daróczy

Es sei H ein reeller Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt (x, y). Es gilt der folgende Satz: *Ist* $f: H \to R$ (wobei R der Körper der reellen Zahlen ist) *eine nichtkonstante und stetige Lösung der Funktionalgleichung*

$$f[x+yf(x)] = f(x)f(y) \qquad (x, y \in H),$$

so kann man das Funktional f *in der Gestalt*

$$f(x) = 1+(x, a)$$

oder

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad 1+(x, a) \leqq 0 \\ 1+(x, a) & \text{falls} \quad 1+(x, a) > 0 \end{cases}$$

darstellen, wobei $a \neq 0$ *ein durch das Funktional* f *bestimmtes Element aus* H *ist.* Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von S. Gołab und A. Schinzel [1].

Jelentés az 1965. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 1965. november 20. és 30. között rendezte meg az 1965. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi és főiskolai hallgató, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1965-ben fejezték be.

A verseny feladatai az alábbiak voltak:

1. Legyen p primszám és n természetes szám. Valamely p^n elemű halmaznak legfeljebb hány olyan osztályozását lehet egyidejűleg megadni (üres osztályokat kizárva), hogy az összes fellépő osztályok páronként legfeljebb egy közös elemet tartalmazzanak és minden osztály elemszáma osztható legyen p-vel.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy véges kommutatív R gyűrűnek akkor és csak akkor van egységeleme, ha az R annullátora 0 (vagyis $aR=0$, $a\in R$, csak $a=0$-nál teljesül).

3. Legyenek $a, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ komplex számok, A komplex számokból felépített p-edrendű négyzetes matrix, E a p-edrendű egységmatrix. Az A sajátértékeinek ismeretében határozzuk meg a

$$B=\begin{pmatrix} b_0E & b_1A & b_2A^2 \ldots b_{n-1}A^{n-1} \\ ab_{n-1}A^{n-1} & b_0E & b_1A \ldots b_{n-2}A^{n-2} \\ ab_{n-2}A^{n-2} & ab_{n-1}A^{n-1} & b_0E \ldots b_{n-3}A^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ ab_1A & ab_2A^2 & ab_3A^3 \ldots b_0E \end{pmatrix}$$

hipermatrix sajátértékeit.

4. A síkot n ($n\geqq 3$) általános helyzetű egyenes (azaz nincsenek közöttük párhuzamosak és nincs három egy ponton áthaladó) tartományokra vágja fel. Határozzuk meg ezek közt a szögtartományok lehetséges számának minimumát és maximumát.

5. Az $A=A_1A_2A_3A_4$ tetraéder minden csúcsától kiindulva, minden élére a másik élvégpont felé irányított, ϱ hosszúságú szakaszt felrakva 12 pontot kapunk. Nevezzük az A_jA_k élen A_j-ből A_k felé tartó szakasz végpontját A_{jk}-nak, az $[A_{jk}A_{jl}A_{jm}]$ és $[A_kA_lA_m]$ sík metszés-

vonalát p_j-nek. Bizonyítandó, hogy a $p_1, p_2 \cdot p_3, p_4$ egyeneseknek végtelen sok közös szelőjük van.

6. Tekintsünk valamely felület egy tetszőleges P_0 pontjában két (a P_0-beli Dupin-féle indikatrixra vonatkozólag) egymáshoz konjugált irányt. Bizonyítsuk be, hogy ezekhez az irányokhoz tartozó előjeles normálgörbületi sugarak összege független a választott konjugált iránypártól (hiperbolikus pont aszimptota irányainak választását kizárjuk).

7. Bizonyítsuk be, hogy az n-dimenziós euklideszi tér minden nem-megszámlálható részhalmazának van olyan nem-megszámlálható részhalmaza, amelynek pontjai csupa különböző távolságra vannak egymástól (vagyis amelynek bármely $P_1 \neq P_2$ és $Q_1 \neq Q_2$ pontja esetén $\overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2}$ csak úgy teljesülhet, ha $P_1 = Q_1$ és $P_2 = Q_2$, vagy ha $P_1 = Q_2$ és $P_2 = Q_1$). Mutassuk meg, hogy hasonló állítás általában nem érvényes, ha n-dimenziós euklideszi terek helyett a (szeparábilis) Hilbert-teret tekintjük.

8. Az $[a, b]$ szakaszon értelmezett folytonos $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ függvények sorozata legyen olyan, hogy a szakasz minden x pontja gyöke az $f_n(x) = f_m(x)$ $(n \neq m)$ egyenletek valamelyikének. Mutassuk meg, hogy ekkor van $[a, b]$-nek olyan rész-szakasza, amelyben a függvénysorozat legalább két eleme azonosan egyenlő.

9. Legyen f folytonos nemkonstans valós függvény és létezzék olyan F, hogy minden valós x, y-ra $f(x+y) = F[f(x), f(y)]$. Bizonyítandó, hogy f szigorúan monoton.

10. Egy játékos fej vagy írást játszhat a következő játékszabály szerint: tetszőleges pozitív y összeget tehet meg és ez esetben y összeget $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyer, vagy y összeget $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszt. Játékosunk, akinek x forintja van $(0 < x < 2C)$, a következő rendszer szerint játszik. Mindaddig, amíg C forintnál nincs több pénze, egyszerre megteszi az egész pénzét; míg ha pénze több, mint C forint, csak annyit tesz meg a legközelebbi játszmában, hogy nyerés esetén pénze $2C$ forint legyen; ha pénze $2C$ forint lesz, a játékot abbahagyja. Jelölje ennek valószínűségét $f(x)$. Meghatározandó az $f(x)$ $(0 < x < 2C)$ függvény.

A kitűzött feladatokra 52 versenyző 321 megoldást nyújtott be. Ez a mennyiségi szempontból igen szép eredmény a versenyzők többségénél nem volt kellően alátámasztva minőségi munkával. Általában elmondható, hogy a versenyzők fogalmazási készsége igen gyenge, nem törekednek szabatos és világos okfejtésekre.

A versenybizottság a versenyzők munkáját értékelve, az alábbi döntést hozta:

Az I. díjat és ezzel együtt 800—800 Ft pénzjutalmat BOLLOBÁS BÉLA V. éves, FRITZ JÓZSEF IV. éves és SIMONOVITS MIKLÓS IV. éves matematikus (ELTE) hallgatóknak,

a II. díjat és ezzel együtt 500—500 Ft pénzjutalmat KÉRI GERZSON IV. éves matematikus (ELTE), MÁTÉ ATTILA III. éves matematikus (JATE) hallgatóknak és PELIKÁN JÓZSEF középiskolai tanulónak (Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, Budapest) ítéli oda.

A versenybizottság kiemelkedő munkájukért dicséretben részesíti a következő versenyzőket: GERENCSÉR LÁSZLÓ II. éves matematikus (ELTE), KNUTH ELŐD V. éves matematikus (ELTE), LOVÁSZ LÁSZLÓ középiskolai tanuló (Fazekas M. Gimnázium, Budapest), MÁTÉ EÖRS IV. éves matematikus (JATE), PÓSA LAJOS középiskolai tanuló (Fazekas M. Gimnázium, Budapest), VESZTERGOMBI GYÖRGY IV. éves fizikus (ELTE).

A versenybizottság döntését az alábbiakban indokolja:

Bollobás Béla valamennyi feladatra adott be helyes megoldást. Néhány feladatra több — ha nem is mindig teljes — megoldást ad. Több értékes megjegyzése van. Megoldásai módszeresek.

Fritz József valamennyi feladatra adott be megoldást. Fogalmazásai igen precízek és rövidek. Ő az egyetlen a díjazottak között, aki nagy súlyt fektetett az elegáns megoldásokra.

Simonovits Miklós valamennyi feladatot megoldotta. Fogalmazásai terjengősek és nehezen áttekinthetők, de előnyére válik az, hogy majdnem minden feladatnál megtalálja a lényeget.

Kéri Gerzson valamennyi feladatra adott be megoldást. A 7. feladatot nem oldja meg teljesen. Megoldásai hosszadalmasak, de alaposak.

Máté Attila valamennyi feladatra adott be megoldást. A 3. és 10. feladatra adott megoldása nem teljes. Megoldásai igen ötletesek.

Pelikán József kilenc feladatra (7. kivételével) adott be megoldást. Megoldásai szabatosak. Több feladatra meglepő módon talál elemi megoldást.

A versenybizottság:

Balogh Tibor, Barna Béla, Erdős Jenő, Gyarmathy László, Gyires Béla, Kertész Andor, Rapcsák András, Szénássy Barna, Tamássy Lajos, Daróczy Zoltán versenytitkár.

A feladatok megoldásai

1. feladat

I. megoldás: A kérdezett szám $\frac{p^n-1}{p-1}$. Legyen ugyanis H az adott halmaz, s tekintsük ennek k számú olyan $C_1, \ldots, C_k$ osztályozását, hogy a bennük fellépő osztályok páronként legfeljebb egy közös elemmel bírnak és minden osztály elemszáma osztható p-vel. Tekintsük

H-nak egyik h elemét s jelölje $C_i(h)$ a C_i osztályozásban a h által reprezentált osztályt ($i=1, \ldots, k$). Minthogy h közös eleme a $C_1(h), \ldots, C_k(h)$ osztályoknak, ezért a feltevés miatt a

$$C_1(h)\backslash\{h\}, \ldots, C_k(h)\backslash\{h\}$$

különbséghalmazok páronként idegenek, s mindegyikük legalább $p-1$ elemből áll, tehát

$$k(p-1) \leqq p^n - 1,$$

azaz $k \leqq \frac{p^n-1}{p-1}$. Még csak azt kell bizonyítani, hogy ez a becslés nem finomítható.

Evégből tekintsük a p elemű K primtest fölött a P_n n-dimenziós projektív teret (amely $\frac{p^{n+1}-1}{p-1}$ pontból áll), ennek egy σ hipersíkját, valamint a $P_n' = P_n\backslash\sigma$ affin teret. Tetszőleges $P \in \sigma$ ponthoz vegyük P_n-nek azokat az egyeneseit, amelyek a P ponton átmennek, de nem fekszenek σ-ban. Eme egyenesekből elhagyva a P pontot, a visszamaradó affin egyenesek (mint ponthalmazok) a P_n' affin térnek egy olyan C_P osztályozását alkotják, ahol minden osztály p elemű. Az összes C_P ($P \in \sigma$) osztályozások száma azonos a σ pontjainak számával, azaz $\frac{p^n-1}{p-1}$-gyel, másrészt a P_n' affin tér pontjainak száma p^n. Tehát igaz az állítás.

Rédei László

Megoldották: *Kéri Gerzson, Simonovits Miklós, Vesztergombi György.*

II. megoldás: Legyen H a p alapú számrendszerben az összes nem negatív n-jegyű egész számok halmaza. H elemeinek száma ekkor p^n.

Megadunk $\frac{p^n-1}{p-1}$ számú osztályozást úgy, hogy a bennük szereplő osztályok páronként legfeljebb egy közös elemet tartalmaznak, és minden osztályban p elem van. Az osztályozásokat H-n értelmezett függvényekkel fogjuk megadni oly módon, hogy $f(x)$ ($x \in H$) azt az osztályozását adja H-nak, ahol x_1 ekvivalens x_2-vel akkor és csak akkor érvényes, ha $f(x_1)=f(x_2)$.

Legyen

$$x = \xi_1\xi_2\ldots\xi_n = \xi_1 p^{n-1} + \xi_2 p^{n-2} + \ldots + \xi_n \quad (0 \leqq \xi_i \leqq p-1;\ i=1, \ldots, n)$$

H tetszőleges eleme, és

$$a_j = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_j = \alpha_1 p^{j-1} + \alpha_2 p^{j-2} + \ldots + \alpha_j \quad (0 \leqq \alpha_k \leqq p-1;\ k=1, \ldots, j)$$

egy rögzített $j \leqq n$ jegyű szám. Jelölje továbbá $[m]$ az m szám legkisebb nem negatív maradékát p-vel osztva.

Legyen ekkor

$$f_{a_0}(x) = \xi_2 \xi_3 \dots \xi_n,$$

és ha $j > 1$, akkor

$$f_{a_{j-1}}(x) = [\xi_1 + \xi_j \alpha_1][\xi_2 + \xi_j \alpha_2] \dots [\xi_{j-1} + \xi_j \alpha_{j-1}] \xi_{j+1} \dots \xi_n \qquad (j \leqq n).$$

Rögzített j mellett p^{j-1} különböző a_{j-1} nem negatív $j-1$ jegyű szám lehetséges, tehát ennyi a különböző függvények száma is. Ilyen módon tehát megadtunk összesen

$$1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1} = \frac{p^n - 1}{p - 1}$$

számú függvényt.

Az $f_{a_{j-1}}(x)$ által meghatározott osztályozás minden osztályában pontosan p különböző elem van. Ugyanis adott $y = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_{n-1}$ mellett a

$$[\xi_1 + \xi_j \alpha_1] \dots [\xi_{j-1} + \xi_j \alpha_{j-1}] \xi_{j+1} \dots \xi_n = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_{n-1}$$

egyenletnek rögzített ξ_j mellett csak egyetlen megoldása van, mert a

$$\xi_k = \eta_{k-1} \qquad (k = j+1, \dots, n)$$

egyenleteknek csak egy megoldása van, és p prim volta miatt a

$$\xi_i + \xi_j \alpha_i \equiv \eta_i \pmod{p} \qquad (i = 1, 2, \dots, j-1)$$

kongruenciák mindegyikének szintén csak egy megoldása van. Így $\xi_j = 0, 1, \dots, p-1$ esetén egy-egy megoldást kapunk, összesen p darabot. Ezek nyilván különbözőek.

Most kimutatjuk, hogy két tetszőleges, különböző osztályozásokhoz tartozó osztálynak legfeljebb egy közös eleme lehet. Legyen ez a két osztály az

(1) $$f_{a_{j-1}}(x) = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_{n-1}$$

és

(2) $$f_{\bar{a}_{j^*-1}}(x) = \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 \dots \bar{\eta}_{n-1}$$

egyenletekkel definiálva. A $j^* < j$ esetben $j = j^* + k$, ahol $k \geqq 1$, tehát a (2) egyenlet minden megoldásában $\xi_j = \xi_{j^*+k} = \bar{\eta}_{j^*+k-1}$. Ehhez a ξ_j-hez azonban az (1) egyenletnek csak egyetlen megoldása tartozik. Ha ez a megoldás kielégíti a (2) egyenletet is, akkor ez az egyetlen szám lesz a két osztály közös eleme; ellenkező esetben nincs a két osztálynak közös eleme.

A $j^*=j$ esetben $\bar{a}_{j-1} = a_{j-1}$ lehetőséget kizártuk. Ha

$$a_{j-1} = \alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots \alpha_{j-1} \neq \bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_k \ldots \bar{\alpha}_{j-1} = \bar{a}_{j-1},$$

akkor van olyan k index, amelyre $\alpha_k \neq \bar{\alpha}_k$. Ekkor a

$$\xi_k + \xi_j \alpha_k \equiv \eta_k \pmod{p}$$

$$\xi_k + \xi_j \bar{\alpha}_k \equiv \bar{\eta}_k \pmod{p}$$

kongruenciákból ξ_j egyértelműen meghatározható, és így az (1) és (2) egyenleteknek legfeljebb egy közös megoldása lehetséges.

Azt, hogy az itt megadott osztályozásoknál egyidejűleg több nem adható meg a kívánt tulajdonságok megtartása mellett, ugyanúgy bizonyítjuk, mint az I. megoldásban.

Máté Attila

Megoldották még: *Benczur András, Bollobás Béla, Fritz József, Knuth Előd, Laczkovich Miklós, Lovász László, Máté Eörs, Molnár Emil, Muszély György, Pelikán József.*

Nem teljes megoldást adott: *Dávid Gábor, Gerencsér László, Gerlits János, Gyárfás András, Kultsár Levente, Makai Endre, Pósa Lajos, Sebestyén Zoltán, Szabó Gyula, Szabó Zoltán, Szemerédi Endre, Szigeti Ferenc.*

2. feladat

I. megoldás: Ha e az R (véges, kommutatív) gyűrű egységeleme, akkor $aR=0$ $(a \in R)$-ból speciálisan $0=ae=a$ következik, tehát R annullátora 0.

Megfordítva, legyen az R véges és kommutatív gyűrű annullátora 0. Ez azt jelenti, hogy R tetszőleges a 0-tól különböző eleméhez mindig van R-nek olyan b eleme, hogy $ab \neq 0$. Ha $R=(0)$, akkor R egységelemes gyűrű, és így készen vagyunk. Legyen $R \neq (0)$ és a_0 az R tetszőleges 0-tól különböző eleme. Ekkor a fenti megjegyzés szerint minden n természetes számhoz hozzárendelhetünk egy $a_n (\in R)$ elemet úgy, hogy fennállnak az $a_0 a_1 \neq 0$, $a_0 a_1 a_2 \neq 0$, ..., $a_0 a_1 \ldots a_n \neq 0$, ... relációk. Minthogy R véges, van olyan m és n $(0 \leqq m < n)$, hogy

$$a_0 a_1 \ldots a_m = (a_0 a_1 \ldots a_m)(a_{m+1} \ldots a_n). \tag{3}$$

Eszerint az R gyűrű azon $e \neq 0$ elemeinek E halmaza, melyekhez van olyan $0 \neq d \in R$, hogy

$$de = d \tag{4}$$

teljesül, nem üres. Válasszuk E-ből az e elemet úgy, hogy a hozzátartozó (4) tulajdonságú $(0 \neq) d (\in R)$ elemek száma maximális legyen. (R végessége miatt ez nyilván lehetséges). Megmutatjuk, hogy e az R gyűrű

egységeleme. Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy valamely $a \in R$-re $ae - a \neq 0$. Ekkor (3) szerint léteznek olyan $r, s \in R$ elemek, hogy

$$0 \neq (ae - a)r = (ae - a)rs \tag{5}$$

teljesül. (Itt az az eset is meg van engedve, amikor r az üres faktor). Az (5) relációból

$$ar(e - es + s) = ar \neq 0 \tag{6}$$

adódik, következésképp $0 \neq e - es + s \in E$. Ha $de = d$, akkor

$$d(e - es + s) = de - des + ds = d - ds + ds = d, \tag{7}$$

továbbá

$$are - ar = (ae - a)r \neq 0. \tag{8}$$

A (6), (7) és (8) azt mutatja, hogy $e - es + s \in E$ több $d(\in R)$-re teljesíti a (4) feltételt mint e. Ez azt ellentmondás bizonyítja az egységelem létezését R-ben.

Sonnevend György

II. megoldás: A feltétel szükségessége úgy adódik, mint az I. megoldásban.

Legyen az n-elemű ($n \geqq 2$) kommutatív R gyűrű annullátora 0. Ekkor R nem lehet nilpotens. Ha ugyanis R nilpotens volna, akkor volna olyan $k \geqq 2$ természetes szám, amelyre $R^k = 0$, $R^{k-1} \neq 0$ teljesülne; ebből azonban az következne, hogy R^{k-1} az R gyűrű 0-tól különböző annullátora, ami nem lehetséges.

Most megmutatjuk, hogy R-nek van olyan a eleme, melynek egyetlen hatványa sem 0. Tegyük fel, hogy R minden a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) eleméhez létezik olyan l_i természetes szám, hogy $a_i^{l_i} = 0$. Legyen l az $l_i - k$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) maximuma. Ekkor R-ben csak olyan többtényezős szorzatok nem tűnhetnek el, melyekben minden a_i legfeljebb $(l-1)$-szer szerepel, tehát minden $n(l-1)+1$ tényezős szorzat eltűnik. Ez azt jelenti, hogy $R^{n(l-1)+1} = 0$, ami ellentmond annak, hogy R nem nilpotens.

Legyen tehát $a \in R$ olyan, hogy a^j ($j = 1, 2, \ldots$) egyike sem 0. Az R gyűrű végessége miatt e hatványok között kell lennie két azonosnak: $a^k = a^{k+l}$ ($l > 0$). Ekkor $a^k = a^{k+l} = a^{k+2l} = a^{k+3l} = \ldots$. Az m természetes számot olyan nagynak választva, hogy $ml > k$ legyen,

$$(a^{ml})^2 = a^{ml} \cdot a^{ml} = a^{k+ml} \cdot a^{ml-k} = a^k \cdot a^{ml-k} = a^{ml}$$

adódik, tehát a^{ml} az R gyűrű 0-tól különböző idempotens eleme.

Egyszerűség kedvéért írjuk $a^{ml} = e$. Az R gyűrű az A és B ideáljainak direkt összegeként áll elő:

$$R = A \oplus B, \tag{9}$$

ahol A az összes $re (r \in R)$, B pedig az összes $r - re$ $(r \in R)$ elemek halmaza. Hogy A és B az R-nek ideálja, nyilvánvaló. R tetszőleges r eleme $r = re + (r - re)$ alakban írható, tehát $R = A + B$. Továbbá $ea = a$ minden A-beli a és $eb = 0$ minden B-beli b elemre. Ennélfogva $A \cap B = 0$, tehát valóban fennáll (9). Ha $B = 0$, akkor $R = A$, tehát e az R keresett egységeleme. Ha $B \neq 0$, akkor $0 \neq e \in A$ miatt R két olyan gyűrű direkt összegeként áll elő, amelyek mindegyikének n-nél kevesebb eleme van.

Tekintsük most ezt az esetet, s tegyük fel, hogy minden olyan véges kommutatív gyűrűnek van egységeleme, amelynek annullátora 0, s amelynek n-nél kevesebb eleme van. (Az egyelemű gyűrű nyilván egységelemes.) Ha $z \in A$ olyan elem, hogy $zA = 0$, akkor $AB = 0$ miatt $zR = z(A + B) = zA + zB = 0$, amiből $z = 0$ következik. Hasonlóképpen adódik $w \in B$, $wB = 0$-ból $w = 0$. Ez azt jelenti, hogy A és B annullátora 0, tehát az indukciós feltevés szerint létezik A-nak egy-e_1, B-nek egy e_2 egységeleme. Ekkor $e_1 + e_2$ az $R = A \oplus B$ gyűrű egységeleme.

Kéri Gerzson—Simonovits Miklós—
Szemerédi Endre—Szigeti Ferenc

Megoldották még: *Bellay Ágnes, Bollobás Béla, Fritz József, Gerencsér László, Juhász István, Lovász László, Máté Attila, Pelikán József.*

Hiányos megoldást adott: *Máté Eörs, Pósa Lajos.*

Megjegyzés: A feladat állítása kommutatív Artin-gyűrűkre is igaz (lásd R. Baer, Inverses and zerodivisors, Bull. Amer. Math. Soc. *48* (1942), 630—638).

3. feladat

Megmutatjuk, hogy ha az A matrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, akkor a B matrix sajátértékei a

$\varphi(\alpha_k \lambda_j)$ $(k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, p)$ számok lesznek, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ a $z^n - a = 0$ egyenlet gyökei és

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}.$$

Mert ha $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ komplex számokból felépített p-edrendű négyzetes matrixok, a tetszés szerinti komplex szám és

$$C = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \ldots A_{n-1} \\ aA_{n-1} & A_0 & A_1 \ldots A_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \ \ldots \ \cdot \\ aA_1 & aA_2 & aA_3 \ldots A_0 \end{pmatrix},$$

akkor

$$\text{Det } C = \text{Det } M(\alpha_1) \ldots \text{Det } M(\alpha_n), \tag{10}$$

ahol

$$M(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}.$$

Ha $a = 0$, akkor e tétel állítása triviális. Ha $a \neq 0$, akkor e tétel érvényessége abból az egyszerű tényből adódik, hogy

$$C = W \begin{pmatrix} M(\alpha_1) & & & (0) \\ & M(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & M(\alpha_n) \end{pmatrix} W^{-1},$$

ahol W a $z^n = a$ egyenlet gyökeiből alkotott Vandermonde-matrixnak E-vel való Kronecker-féle szorzata, azaz

$$W = V \times E = \begin{pmatrix} E & \ldots & E \\ \alpha_1 E & \ldots & \alpha_n E \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} E & \ldots & \alpha_n^{n-1} E \end{pmatrix}.$$

Alkalmazzuk (10)-et a $B - \lambda\varepsilon$ (ε az np-edrendű egységmatrix) matrixra:

$$\text{Det } (B - \lambda\varepsilon) = \prod_{k=1}^{n} \text{Det } (\varphi(\alpha_k A) - \lambda E).$$

Másrészt közismert, hogy a

$$\varphi(\alpha_k A) = b_0 E + b_1 \alpha_k A + \ldots + b_{n-1} \alpha_k^{n-1} A^{n-1}$$

matrix sajátértékei

$$\varphi(\alpha_k \lambda_1), \ldots, \varphi(\alpha_k \lambda_p)$$

és ezzel állításunkat igazoltuk.

Gyires Béla

Megoldották: *Bollobás Béla, Fritz József, Kéri Gerzson, Knuth Előd, Lovász László, Máté Eörs, Pelikán József, Sebestyén Zoltán, Simonovits Miklós, Vesztergombi György.*

Nem teljes megoldást adott: *Máté Attila, Molnár Emil, Pósa Lajos, Sonnevend György.*

Megjegyzés: A megoldások egy másik csoportjának magva az a tétel, amelyet Bollobás Béla fogalmazott meg a legáltalánosabban, de nem bizonyított. E tétel a következőképp hangzik:

Ha a p-edrendű négyzetes A matrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $\max\limits_{j=1,\ldots,p} |\lambda_j| =$

$=\lambda$, továbbá $f_{ij}(z)$ $(i,j=1,\ldots,n)$ a $|z|\leqq\lambda$ körön reguláris függvények, akkor az

$$\begin{pmatrix} f_{11}(A) \ldots f_{1n}(A) \\ \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ f_{n1}(A) \ldots f_{nn}(A) \end{pmatrix}$$

matrix sajátértékeit az

$$\begin{pmatrix} f_{11}(\lambda_i) \ldots f_{1n}(\lambda_i) \\ \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ f_{n1}(\lambda_i) \ldots f_{nn}(\lambda_i) \end{pmatrix} \qquad (i=1,\ldots,p)$$

matrixok sajátértékei adják.

E tételt abban a speciálisabb esetben, amikor az $f_{ij}(z)$ függvények polinomok, Máté Eörs is bebizonyította; bizonyítása a Bollobás-féle általánosabb esetben is szóról szóra alkalmazható.

4. feladat

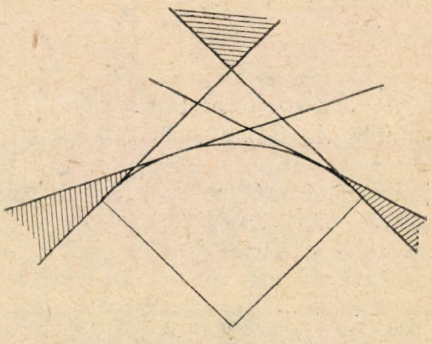
A szögtartományok minimális száma 3. Ugyanis az egyenesek metszéspontjainak konvex burka legalább 3 csúcsú konvex sokszög. Minden csúcsban két egyenes metszi egymást, s ezek burkon kívül haladó félegyenesei a felosztásban szereplő szögtartományt határolnak, hiszen a szárakon metszéspont nincs.

Másrészt $n>3$ számú egyenes elhelyezhető úgy, hogy a szögtartományok száma 3 legyen. Ilyen konstrukciót alkot pl. a negyedkörív n különböző érintője (lásd 1. ábrát).

A szögtartományok maximális száma

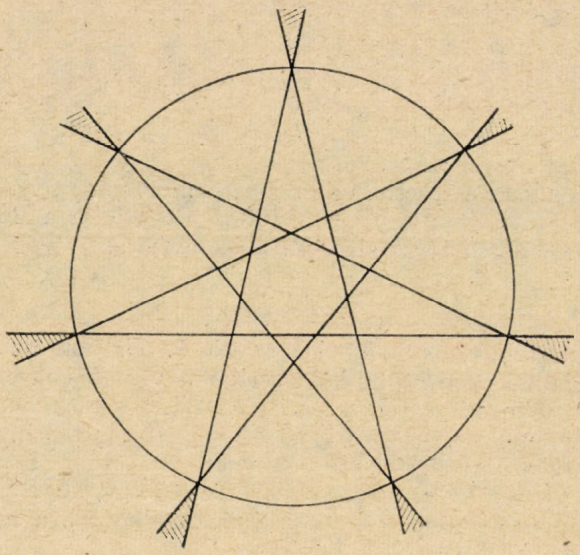
$$n+\frac{(-1)^{n+1}-1}{2},$$

azaz páratlan n esetén n, páros n esetén pedig $n-1$. Ugyanis mindegyik egyenest a többi 2 félegyenesre és szakaszokra darabolja fel. Így $2n$ számú félegyenes keletkezik. Szögtartományt csak ezek a félegyenesek határolhatnak, de minden félegyenes legfeljebb egy szögtartománynak lehet a határa. Ellenkező esetben ugyanis lenne olyan pont, amelyen három egyenes haladna át. $2n$ számú félegyenes tehát legfeljebb n szögtartományt határolhat.



1. ábra

Páratlan n esetén az n szögtartomány (egy és csak egyféleként) meg is valósítható: vegyünk egy n oldalú (n páratlan) szabályos sokszöget, és ennek minden csúcsát kössük össze a tőle legmesszebb eső másik kettővel. Így n számú olyan egyenest kapunk, melyek közül semelyik



2. ábra

kettő sem párhuzamos, és egy ponton csak kettő megy át. A sokszög minden csúcsánál keletkezik egy szögtartomány, a szögtartományok összes száma tehát n (lásd 2. ábrát). De az egyeneseknek a sokszögön belül eső szakaszai ilyen módon szükségképp egy záródó csillag n-szöget alkotnak. Ismeretes azonban, hogy ilyen csillag-sokszög csak páratlan n-re létezik.

Páros n esetén azonban elérhető az $n-1$ maximális szögtartományszám. Ez közvetlenül adódik a 2. ábrából: ha itt egy egyenest elhagyunk, akkor a szögtartományok száma 2-vel csökken.

Hajós György

Megoldották: *Bollobás Béla, Dávid Gábor, Feles Pál, Fritz József, Gerencsér László, Horváth Sándor, Juhász István, Kéri Gerzson, Knuth Előd, Kultsár Levente, Lajkó Károly, Lakó Ferenc, Lovász László, Lükő Gábor, Makai Endre, Máté Attila, Máté Eörs, Muszély György,*

Nagy Sándor, Pelikán József, Pósa Lajos, Ratkó István, Szigeti Ferenc, Sebestyén Zoltán, Simonovits Miklós, Sonnevend György, Tóth József, Vesztergombi György.

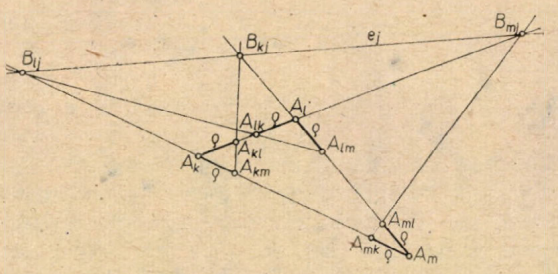
Nem teljes megoldást adott: *Bellay Ágnes, Benczur András, Gyárfás András, Kovács Margit, Kuty László, Laczkovich Miklós, Molnár Emil, Szemerédi Endre, Székely Jenő.*

5. feladat

A feladatot nyilvánvalóan az ideális térelemekkel bővített euklideszi térben kell érteni.

Tekintsünk el először a szinguláris esetektől, azaz a tetraédernek ne legyen egyetlen ϱ hosszúságú éle sem.

Legyen $j, k, l, m = 1, 2, 3, 4$. Jelölje az A_kA_l és $A_{jk}A_{jl}$ egyenesek metszéspontját B_{jm}. Ezen metszéspont biztosan létezik, mert ha a két egyenes azonos lenne, akkor az a kizárt esetet jelentené. Nyilvánvaló, hogy B_{jm} — az A_m-mel szemköztes — S_m sík és a p_j egyenes közös pontja. Tekintsük most valamelyik S_j síkot (lásd 3. ábrát). A B_{kj}, B_{lj}, B_{mj} pontok egy e_j egyenesre illeszkednek, ez a Menelaos tétel kétszeres alkalmazásával könnyen belátható. e_j tehát közös szelője a p_1, p_2, p_3, p_4 egyeneseknek (B_{kj}, B_{lj}, B_{mj} ugyanis rendre a p_k, p_l, p_m pontjai, p_j pedig egysíkú e_j-vel). e_j nem azonos a háromszög egyik oldalával sem, mert ez a kizárt esetre vezetne. Az e_1, e_2, e_3, e_4 egyenesek mind különbözőek, mert a tetraéder különböző síkjaiban vannak és egyik sem azonos valamelyik metszésvonallal.



3. ábra

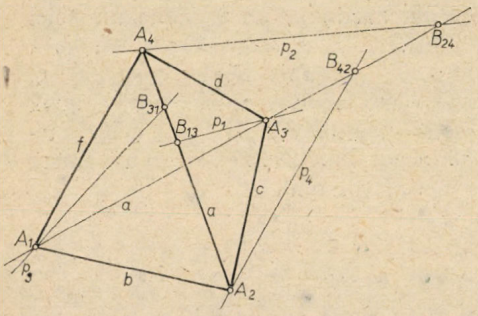
A p_1, p_2, p_3, p_4 egyeneseknek tehát négy különböző közös szelője van. Ha a p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) egyenesek között van két egymást metsző, akkor ennek alapján egyszerűen következik, hogy végtelen sok közös szelőjük is van, ugyanis a másik két egyenes ekkor egy a közös ponton átmenő síkban van.

Ha a p_1, p_2, p_3, p_4 egyenesek páronként kitérők, akkor válasszuk ki pl. p_1, p_2, p_3-at. Ismeretes, hogy e három egyenes közös szelői egy nem elfajuló kétvonalsereges másodrendű vonalfelületet alkotnak, melynek a közös szelők az egyik vonalseregét alkotják, a három eredeti egyenes pedig a másik vonalseregbe tartozik. Negyedik egyenesünknek kettőnél több közös pontja van a felülettel, így maga is annak alkotója és minden elsőseregbeli egyenes metszi.

Vizsgáljuk meg a szinguláris eseteket.

a) Ha van olyan A_k csúcs, melyből három ϱ hosszúságú oldal indul ki, ekkor p_k nincs egyértelműen meghatározva, a másik három egyenes pedig az A_k-ra illeszkedik. Erre az esetre — az egyik p egyenes határozatlansága miatt — a feladat állítása nem vonatkozik. Ha viszont a p_k-t úgy értelmezzük, mint meghatározó — és egybeeső — síkjainak tetszőleges egyenesét, akkor a feladat állítása ebben az esetben is igaz.

b) Ha egy A_k csúcsból két ϱ hosszúságú oldal indul ki, akkor jelölje A_l a negyedik — eddig nem szerepelt — csúcsot. Könnyen látható, hogy ekkor p_k az A_k ill. A_l-el szemköztes S_k ill. S_l lapsíkok metszésvonala, $p_l \in S_l$ és a másik két p egyenes A_k-ra illeszkedik. Ez pedig azt jelenti, hogy bármely $e \in A_k$, $e \in S_l$ egyenes közös szelőjük. — Ha a tetraédernek egyik lapja egyenlő oldalú háromszög, amelynek éle ϱ, akkor ez az eset szintén *b)*-hez tartozik.



4. ábra

c) Legyen a tetraédernek egyetlen ϱ hosszságú éle, ekkor az egyike egyenes egybeesik ezen éllel és ebben az esetben a p_1, p_2, p_3 egyeneseknek három különböző szelőjük van. Az általános esettel kapcsolatban elmondottak már három különböző szelő esetén is érvényesek. Így ekkor is végtelen sok szelője van a p_1, p_2, p_3, p_4 egyeneseknek.

d) Legyen a tetraéder két szemben levő élének hossza ϱ; pl. $A_2A_4 = A_1A_3 = \varrho = a$, továbbá $A_1A_2 = b$, $A_2A_3 = c$, $A_3A_4 = d$, $A_1A_4 = f$ (lásd 4. ábrát). Menelaos tételének alkalmazásával a következő osztóviszonyokat írhatjuk fel:

$$(A_1A_3B_{24}) = \frac{b-a}{a-c}, \quad (A_1A_3B_{42}) = \frac{f-a}{a-d},$$

$$(A_2A_4B_{31}) = \frac{c-a}{a-d}, \quad (A_2A_4B_{13}) = \frac{b-a}{a-f}.$$

Áttérve a kettősviszonyokra:

$$(A_1A_3B_{24}B_{42}) = \frac{(b-a)(a-d)}{(a-c)(f-a)} = (A_2A_4B_{13}B_{31});$$

de ekkor

(11) $$(A_1A_3B_{24}B_{42}) = (B_{31}B_{13}A_4A_2).$$

Vegyük figyelembe, hogy A_1 és B_{31} a p_3; A_3 és B_{13} a p_1; B_{24} és A_4 a p_2; és B_{42} és A_2 a p_4 egyenesen vannak. (11) azt jelenti, hogy p_1, p_2, p_3, p_4 két kitérő egyenesből az A_1A_3-ból és az A_2A_4-ből két egyenlő kettősviszonyú pontnégyest metsz ki, azaz a p_1, p_2, p_3, p_4 egyenesek egy kétvonalsereges másodrendű felület egyik vonalseregéhez tartoznak. Ebből pedig következik a feladat állításának helyessége.

Fritz József—Knuth Előd

Megoldották még: *Bollobás Béla, Fodor János, Gerencsér László, Kéri Gerzson, Máté Attila, Máté Eörs, Muszély György, Pelikán József, Simonovits Miklós, Sonnevend György, Szigeti Ferenc.*

Nem teljes (taglalás nélküli) megoldást adott: *Benczur András, Juhász István, Kultsár Levente, Lovász László, Molnár Emil, Nagy Sándor, Ratkó István, Sebestyén Zoltán, Szemerédi Endre.*

6. feladat

Ha P_0 parabolikus pont, akkor az indikátrix egy párhuzamos egyenespár, és bármely irányhoz az egyenesek iránya a konjugált. Az egyenesek irányában (az aszimptota irányában) azonban a normálgörbület zéró, és így a görbületi sugár végtelen. Minden más irányban véges. Tehát összegük mindig végtelen.

Ismeretes, hogy egy irányhoz tartozó R normálgörbületi sugár abszolút értéke a P_0-tól az illető irányban levő indikátorixpontig terjedő szakasz hosszának a négyzetgyöke. Így a fennmaradó esetekben azt kell megmutatni, hogy a Dupin-féle indikátrixnál a konjugált félátmérőhosszak négyzeteinek összege (elliptikus pontban) ill. különbsége (hiperbolikus pontban) független a választott konjugált átmérőpártól.

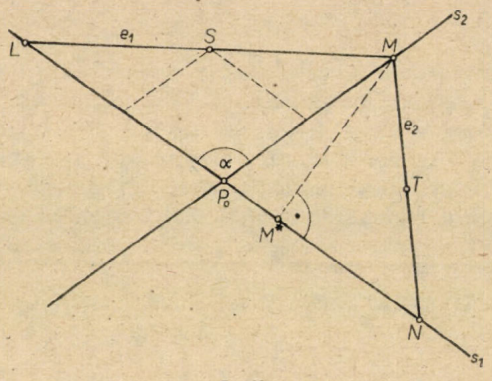
Elliptikus pontban, ahol az indikátrix ellipszis, ez Apollónius egyik tétele.

Legyen most P_0 hiperbolikus pont, tehát az indikátrix egy konjugált hiperbolapár, aminek az egyenlete egy megfelelően választott koordinátarendszerben

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Legyenek ezek közös aszimptotái s_1 és s_2 (lásd 5. ábrát). Legyen továbbá

S egy tetszőleges pont az egyik hiperbolán, és e_1 ezen hiperbola érintője S-ben. Ez az érintő az s_1-et egy L, az s_2-t egy M pontban metszi. Húzzunk M-ből a másik hiperbolához egy (s_2-től különböző) érintőt.



5. ábra

Ez a hiperbolát egy T pontban érinti, és s_1-et egy N pontban metszi. Ismeretes, hogy egy érintő és az aszimptoták által közbezárt terület ab. Így a P_0LM_Δ és a P_0MN_Δ háromszögek egyenlő területűek, amiből a közös MM^* magasság alapján $\overline{P_0L} = \overline{P_0N}$ következik. Ismeretes továbbá, hogy S az LM, T pedig az $\overline{MN}$ szakaszt felezi. Így P_0T és P_0S az LMN_Δ-nek középvonalai, tehát $P_0S \| e_2$; $P_0T \| e_1$. Ez viszont azt jelenti, hogy P_0S és P_0T konjugált félátmérők. Alkalmazva a P_0LM_Δ- és P_0MN_Δ-ben a cosinus tételt, és figyelembe véve a már bizonyított $\overline{P_0L} = \overline{P_0N}$ egyenlőséget

$$4(\overline{P_0T}^2 - \overline{P_0S}^2) = \overline{LM}^2 - \overline{NM}^2 = \overline{LP_0}^2 + \overline{P_0M}^2 - 2\overline{LP_0}\,\overline{P_0M}\cos\alpha -$$

$$-\left[\overline{NP_0}^2 + \overline{P_0M} - 2\overline{NP_0}\,\overline{P_0M}^2\cos(\pi-\alpha)\right] = -4\overline{LP_0}\,\overline{P_0M}\cos\alpha =$$

$$= -16\,\frac{\overline{PL_0}}{2}\cdot\frac{\overline{P_0M}}{2}\cos\alpha.$$

$\frac{\overline{P_0L}}{2}$ és $\frac{\overline{P_0M}}{2}$ azonban az S ferdeszögű koordinátái az aszimptotákra, mint koordinátatengelyekre vonatkozólag. Ezek szorzata pedig — mint ismeretes — nem függ a hiperbola választott pontjától. Így $\overline{P_0T}^2 - \overline{P_0S}^2$ független S-től, azaz a választott konjugált átmérőpártól.

Gerencsér László

Megoldották még: *Benczur András, Bollobás Béla, Fodor János, Fritz József, Gerlits János, Gyárfás András, Juhász István, Kéri Gerzson, Kiss Ildikó, Kovács Margit, Knuth Előd, Krámli András, Laczkovich Miklós, Lovász László, Máté Attila, Máté Eörs, Molnár Emil, Muszély György, Pelikán József, Pósa Lajos, Ratkó István, Sebestyén Zoltán, Simonovits Miklós, Sonnevend György, Szemerédi Endre, Székely Jenő, Szigeti Ferenc, Vesztergombi György.*

7. feladat

A feladat első állításának bizonyításához az n-dimenziós E_n euklideszi tér egy részhalmazát nevezzük röviden T-tulajdonságúnak, ha pontjai csupa különböző távolságra vannak egymástól. Bebizonyítjuk, n szerinti teljes indukcióval, hogy ha egy $H(\subseteq E_n)$ halmaznak minden T-tulajdonságú részhalmaza megszámlálható, akkor H is megszámlálható. Az $n=0$ eset triviális. Tegyük fel, hogy $n-1$ $(\geqq 0)$ esetén igaz az állítás. Legyen a H $(\subseteq E_n)$ halmaz minden T-tulajdonságú részhalmaza megszámlálható. TUKEY lemmája szerint létezik H-nak maximális T-tulajdonságú M részhalmaza. M maximalitása miatt $H \setminus M$ bármely pontja vagy egyenlő távolságra van M két különböző pontjától, vagy M egyik pontjától való távolsága egyenlő az M két pontjának távolságával. Ezért H-t lefedik az E_n olyan hipersíkjai, amelyekre szimmetrikus az M valamely két pontja, együttvéve az E_n olyan gömbjeinek felületeivel, amelyeknek középpontja M-ben van és sugara M valamely két pontjának távolságával egyenlő. Az itt említett F_i hipersíkok és S_i gömbfelületek halmaza megszámlálható $(i=1, 2, \ldots)$, mert M megszámlálható. Minden $H \cap S_j$ megszámlálható halmaz. Ugyanis a H-val kapcsolatban eddig elmondottak alkalmazhatók $H \cap S_j$-re (mert $H \cap S_j$ teljesíti azt, amit H-tól követeltünk), így az előbbi F_i-k és S_i-k helyébe lépő, $H \cap S_j$-t lefedő S_i'-k és F_i'-k halmaza megszámlálható; indukciós feltevés szerint $H \cap F_i'$ és (tekintve, hogy $S_j \cap S_i'$ részhalmaza az E_n valamely hipersíkjának) $H \cap S_j \cap S_i'$ megszámlálható halmazok; tehát $H \cap S_j$ valóban megszámlálható halmaz, mert lefedhető megszámlálható halmazok megszámlálható halmazával. Továbbá indukciós feltevés szerint, minden $H \cap F_j$ megszámlálható halmaz. Tehát H megszámlálható halmaz, mert lefedhető megszámlálható halmazok megszámlálható halmazával.

A feladat második állításának bizonyításához elegendő megadni az e_i $(i=1, 2, \ldots)$ ortonormált bázissal kifeszített Hilbert-térnek egy olyan nem-megszámlálható részhalmazát, hogy az abban levő pontok egymástól való távolságainak halmaza megszámlálható legyen. Evégett tekintsük természetes számok páronként véges metszetű végtelen részhalmazainak egy nem-megszámlálható $\mathfrak{A}$ halmazát. Ilyen $\mathfrak{A}$ létezése

ismert (közvetlenül is világos, mert pl. a racionális számok korlátos monoton sorozatainak halmaza hasonló tulajdonságú). Minden $A(\in \mathfrak{A})$ halmaz meghatározza a szóban forgó Hilbert-térnek egy $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_{\alpha_i}$ vektorát, ahol α_i növekvően átfutja A-t. E vektorok K halmaza egyrészt nem megszámlálható (mert $\mathfrak{A}$ nem-megszámlálható). Másrészt K bármely két elemének távolsága racionális szám négyzetgyöke; ugyanis bármely A $(\in \mathfrak{A})$ és A' $(\in \mathfrak{A})$ halmaz által meghatározott $a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_{\alpha_i}$ és $a' = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_{\alpha'_i}$ vektor esetén az

$$\|a-a'\|^2 = \|a\|^2 + \|a'\|^2 - 2(a, a') = \frac{2}{3} - 2 \sum_{\alpha_i = \alpha'_j} \frac{1}{2^{i+j}}$$

egyenlőségben szereplő utolsó összeg $A \cap A'$ véges volta miatt véges tagszámú.

Juhász István—Szemerédi Endre

Megoldották még: *Bollobás Béla, Fritz József, Krámli András, Máté Attila, Máté Eörs, Simonovits Miklós.*

Csak részleges vagy hiányos bizonyítást adtak: *Gerencsér László, Horváth Sándor, Kéri Gerzson, Knuth Előd, Lázár Zsolt, Lovász László, Muszély György, Nagy Sándor, Pósa Lajos, Sonnevend György.*

Megjegyzés: Juhász István és Bollobás Béla megállapítja, hogy hasonló gondolattal bizonyítható a feladat első állítása helyett a következő: ha m reguláris számosság, akkor az n-dimenziós euklideszi tér bármely m számosságú részhalmazának van olyan m számosságú részhalmaza, amelynek pontjai csupa különböző távolságra vannak egymástól; továbbá foglalkoznak az állításnak más metrikus terek esetére való kiterjesztésével is.

8. feladat

I. megoldás: Jelölje az $f_n(x) - f_m(x)$ $(n \neq m)$ függvény nullhelyeinek halmazát E_{nm}. Az összes ily halmazok rendszerének számossága megszámlálható, és így e halmazok sorozatba rendezhetők; legyen ez a sorozat

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_k, \ldots .$$

Ha M_1 sehol sem sűrű halmaz az $[a, b]$ szakaszban, akkor ennek megadható olyan $[a_1, b_1]$ része, amelyben M_1-nek nincs pontja. Ha M_2 sehol sem sűrű, akkor megadható az $[a_1, b_1]$ szakasznak olyan $[a_2, b_2]$

részszakasza, amelyben nincs M_2-beli pont. Eljárásunkat így vég nélkül folytathatjuk, ha az M_k halmazok mindegyike sehol sem sűrű $[a, b]$-ben. Az így nyert

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \ldots \supseteq [a_k, b_k] \supseteq \ldots$$

egymásba skatulyázott zárt szakaszoknak van nem üres közös része, s ennek bármely pontja — a konstrukció szerint — nem gyöke az $f_n(x) = f_m(x)$ $n \neq m$ egyenletek egyikének sem. Ez ellenkezik a feladat föltevésével. Van tehát az M_k halmazok között olyan $M_{\bar{k}}$, amelyik az $[a, b]$ egy $[c, d]$ részében sűrű. A megfelelő $f_{\bar{n}}(x) = f_{\bar{m}}(x)$ egyenlet gyökei tehát a $[c, d]$ szakaszon mindenütt sűrűn helyezkednek el, és a függvények folytonosságából most már következik, hogy e szakaszban $f_{\bar{n}}(x) = f_{\bar{m}}(x)$.

Knuth Előd—Máté Eörs—Vesztergombi György

Megoldották még: *Benczur András, Bollobás Béla, Fodor József, Horváth Sándor, Imreh Balázs, Kiss Ildikó, Kovács Margit, Lakó Ferenc, Lázár Zsolt, Lovász László, Makai Endre, Nagy Sándor, Pelikán József, Sonnevend György, Szemerédi Endre, Szigeti Ferenc.*

II. megoldás: Az I. megoldás E_{nm} halmazainak egyesítése — a föltevés szerint — az $[a, b]$ intervallum. Ha az E_{nm} halmazok egyike sem volna az $[a, b]$ valamely részintervallumán sűrű, akkor egyesítésük nem lehetne szakasz, hisz szakasz nem állítható elő megszámlálható sok, sehol sem sűrű ponthalmaz egyesítéseként. Van tehát olyan $E_{\bar{n}\bar{m}}$ halmaz, amely sűrű az $[a, b]$ valamely $[c, d]$ részszakaszán, s ezen az $f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{m}}(x)$ függvény nullhelyei mindenütt sűrűn feküsznek. A függvény folytonosságából most már következik, hogy a $[c, d]$ szakasz minden pontja nullhely. Igaz tehát az állítás.

Fritz József—Juhász István—Szabó Gyula

Megoldották még: *Bellay Ágnes, Bollobás Béla, Dávid Gábor, Gerencsér László, Gerlits János, Gyárfás András, Kéri Gerzson, Krámli András, Máté Attila, Muszély György, Simonovits Miklós, Szabó Zoltán.*

Megjegyzés: A megoldók közül többen hivatkoztak a teljes metrikus terekre érvényes Baire-féle kategória tételre, és ennek megfelelően általánosították a feladatot.

9. feladat

Tegyük fel, hogy f nem szigorúan monoton. Ekkor f folytonossága miatt léteznek olyan $s_1 < s_2$ valós számok, hogy $f(s_1) = f(s_2)$. Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor f folytonossága miatt az $[s_1, s_2]$ zárt intervallumban

léteznek olyan $t_1 < t_2$ értékek, hogy $t_2 - t_1 < \varepsilon$ és $f(t_1) = f(t_2)$. De ekkor minden valós t értékre

$$f[t+(t_2-t_1)] = f[(t-t_1)+t_2] = F[f(t-t_1), f(t_2)] =$$

$$F[f(t-t_1), f(t_1)] = f[(t-t_1)+t_1] = f(t),$$

azaz $\tau = t_2 - t_1$ periódusa f-nek. Mivel $\tau < \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért f tetszőleges kicsiny periódussal rendelkező folytonos függvény, tehát konstans, ellentétben feltevésünkkel.

Knuth Előd—Rosta János

Megoldották még: *Benczur András, Bollobás Béla, Fritz József, Gerencsér László, Gerlits János, Gyárfás András, Horváth Sándor, Imreh Balázs, Juhász István, Kéri Gerzson, Kultsár Levente, Krámli András, Laczkovich Miklós, Lajkó Károly, Lakó Ferenc, Lázár Zsolt, Lovász László, Lükő Gábor, Makai Endre, Máté Attila, Máté Eörs, Molnár Emil, Muszély György, Pelikán József, Pósa Lajos, Sebestyén Zoltán, Simonovits Miklós, Sonnevend György, Sövényházi Mária Judit, Szabó Gyula, Szabó Zoltán, Szemerédi Endre, Székely Jenő, Szigeti Ferenc, Szilágyi László, Vesztergombi György.*

Hiányos megoldást adott: *Bellay Ágnes, Kiss Ildikó, Nagy Sándor, Tőke Pál.*

10. feladat

I. megoldás: Bebizonyítjuk, hogy $f(x) = \frac{x}{2C}$ $(0 < x < 2C)$. Először megmutatjuk, hogy $f(x)$ monoton nemcsökkenő függvény. Legyen $0 < x_1 < x_2 < 2C$ és tegyük fel, hogy valamely dobássorozattal x_1-ből elérhető $2C$. Megmutatjuk, hogy akkor ugyanazon dobássorozattal x_2-ből is elérhető a $2C$ (esetleg már előbb is), amiből következik, hogy $f(x_2)$ legalább akkora, mint $f(x_1)$.

Vizsgáljuk meg a játékos pénzének alakulását egy dobás után:

a) ha $x_1 < x_2 < C$, akkor nyerés esetén $2x_1 < 2x_2$, vesztés esetén $0 \leqq 0$;

b) ha $x_1 < C < x_2$, akkor nyerés esetén $2x_1 < 2C$, vesztés esetén $0 < 2(x_2 - C)$;

c) ha $C < x_1 < x_2$, akkor nyerés esetén $2C \leqq 2C$, vesztés esetén $2(x_1 - C) < 2(x_2 - C)$. Vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor azonos dobássorozat esetén minden dobás után az új x_1' ill. x_2' pénzmennyiségekre $x_1' \leqq x_2'$, amiből állításunk következik.

Legyen most $x=\frac{a}{2^n}2C$ $(1\leqq a\leqq 2^n-1,\ a$ páratlan, $n=1, 2, \ldots)$.

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy ilyen alakú x-ekre $f(x)=\frac{a}{2^n}=\frac{x}{2C}$. Az állítás $n=1$ esetén triviális: $f(\frac{1}{2}2C)=f(C)=\frac{1}{2}$, ugyanis C-ből indulva a játékos 1 valószínűséggel éri el a $2C$-t. Tegyük fel, hogy az állítás $n=k$-ra $(k\geqq 1)$ igaz, azaz

$$f(x)=f\left(\frac{a}{2^k}2C\right)=\frac{a}{2^k}.$$

Ha $x=\frac{a}{2^{k+1}}2C$ és $a<2^k$, vagyis $x<C$, akkor a játékos $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyer $2x$ forintot és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 0 forinttal abbahagyja a játékot, így

$$f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{a}{2^k}2C\right)+\frac{1}{2}f(0)=\frac{a}{2^{k+1}}=\frac{x}{2C}.$$

Ha $x=\frac{a}{2^{k+1}}2C$ és $2^k<a<2^{k+1}$ $(a\neq 2^k$ mert a páratlan), akkor $x>C$ miatt

$$f(x)=\frac{1}{2}f(2C)+\frac{1}{2}f\left(\frac{a-2^k}{2^k}2C\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{a-2^k}{2^k}=\frac{a}{2^{k+1}}=\frac{x}{2C}.$$

Legyen most $x_0\neq\frac{a}{2^n}2C$ alakú $(1\leqq a\leqq 2^n-1, a$ páratlan) és tegyük fel, hogy $f(x_0)\neq\frac{x_0}{2C}$, hanem pl. $f(x_0)>\frac{x_0}{2C}$. Ekkor volna olyan $\frac{a}{2^n}$ alakú szám, melyre

$$\frac{x_0}{2C}<\frac{a}{2^n}<f(x_0) \tag{12}$$

állna fenn. Ez azonban ellentmond $f(x)$ monoton nemcsökkenő voltának. Ugyanis (12) szerint egyrészről $x_0<\frac{a}{2^n}2C$, másrészről

$$\frac{a}{2^n}=f\left(\frac{a}{2^n}2C\right)<f(x_0).$$

Hasonlóan látható be az ellentmondás $f(x_0)<\frac{x_0}{2C}$ esetében is, s ezzel bebizonyítottuk, hogy $f(x)=\frac{x}{2C}$ $(0<x<2C)$.

Pelikán József

II. megoldás: Legyen $g(x)=f(2Cx)$ $(0\leqq x\leqq 1)$. (Itt $f(0)=0$ és $f(2C)=1$ miatt $g(0)=0$ és $g(1)=1$ értendő). Ekkor

$$(13)\qquad g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}g(2x) & \text{ha } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}g(2x-1) & \text{ha } x\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

Ugyanis, ha $x\in[0,\frac{1}{2}]$, akkor a játékos $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyer vagy veszít x-et (pontosabban $2Cx$ forintot), tehát

$$g(x)=\frac{1}{2}g(2x)+\frac{1}{2}g(0)=\frac{1}{2}g(2x).$$

Ha pedig $x\in[\frac{1}{2},1]$, akkor $\frac{1}{2}$ valószínűséggel eléri az 1-et, ill. vesztés esetén $(2x-1)$-et, tehát

$$g(x)=\frac{1}{2}g(1)+\frac{1}{2}g(2x-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}g(2x-1).$$

Megmutatjuk, hogy a (13) függvényegyenlet egyetlen korlátos megoldása $g(x)=x$ (amiből következik az I. megoldás állítása).

Legyen ugyanis $h(x)=g(x)-x$. Egyszerűen belátható, hogy $h(x)$ korlátos és fennáll a

$$(14)\qquad h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}h(2x) & \text{ha } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \frac{1}{2}h(2x-1) & \text{ha } x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

egyenlet. Megmutatjuk, hogy $h(x)\equiv 0$ (amiből $g(x)=x$). $h(x)$ korlátossága miatt $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}h(x)$ és $m=\inf\limits_{x\in[0,1]}h(x)$ véges számok. Felhasználva a (14) egyenletet

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}h(2x) \leqq \frac{M}{2} & \text{ha } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \frac{1}{2}h(2x-1)\leqq\frac{M}{2} & \text{ha } x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\end{cases}$$

azaz $h(x)\leqq M$ és $h(x)\leqq\frac{M}{2}$ $(x\in[0,1])$. M végessége és pontossága miatt ebből $M\leqq 0$ következik. Hasonlóan bizonyítható, hogy $m\geqq 0$, amiből $h(x)\equiv 0$.

Rényi Alfréd

Megoldották még: *Bollobás Béla, Dávid Gábor, Fodor János, Fritz József, Gyárfás András, Horváth Sándor, Kéri Gerzson, Laczkovich Miklós, Pósa Lajos, Simonovits Miklós, Szabó Gyula, Székely Jenő, Vesztergombi György.*

Nem teljes megoldást adtak: *Feles Pál, Gerencsér László, Gerlits János, Juhász István, Krámli András, Lakó Ferenc, Lázár Zsolt, Lovász László, Máté Attila, Máté Eörs, Muszély György, Nagy Sándor, Rosta János, Sebestyén Zoltán, Sonnevend György, Sövényházi Mária Judit, Szabó Zoltán, Szemerédi Endre.*

ОТЧЁТ О МЕМОРИАЛЬНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ КОНКУРСЕ ИМЕНИ МИКЛОША ШВЕЙЦЕРА 1965 Г.

CONCOURS COMMÉMORATIF MIKLÓS SCHWEITZER POUR L'ANNÉE 1965

1. Soient p un nombre premier et n un nombre naturel. Quel est le nombre le plus élevé des répartitions simultanées en classes (les classes vides étant exclues) d'un ensemble de p^n éléments telles que toutes les classes intervenant possèdent deux à deux un élément commun au plus et que le nombre des éléments des chaque classe soit divisible par p?

2. Démontrer qu'un anneau commutatif fini R possède un élément unité, si et seulement si l'annulateur de R est égal à zéro (c'est que $aR=0$, $a \in R$ ne se réalise que pour $a=0$).

3. Soient $a, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ de nombres complexes, A une matrice carrée d'éléments complexes d'ordre p, E la matrice unité d'ordre p. Détérminer les valeurs propres de l'hypermatrice

$$B = \begin{pmatrix} b_0E & b_1A & b_2A^2 \ldots b_{n-1}A^{n-1} \\ ab_{n-1}A^{n-1} & b_0E & b_1A \ldots b_{n-2}A^{n-2} \\ ab_{n-2}A^{n-2} & ab_{n-1}A^{n-1} & b_0E \ldots b_{n-3}A^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ ab_1A & ab_2A^2 & ab_3A^3 \ldots b_0E \end{pmatrix},$$

en supposant celles de A connues.

4. Le plan est décomposé en domaines par n ($n \geqq 3$) droites de position générale (c'est-à-dire qu'il ne figure pas parmi elles de parallèles ou trois passant par le même point). Déterminer le maximum et le minimum du nombre possible des domaines angulaires.

5. Partant de chaque sommet du tétraèdre $A=A_1A_2A_3A_4$ appliquons le segment de longueur ϱ sur chaque arête de A dirigé vers l'autre extrémité de l'arête. On obtient ainsi douze points. Notons, sur l'arête A_jA_k, par A_{jk} l'extrémité du segment dirigé de A_j vers A_k et par p_j la droite d'intersection des plans $[A_{jk}, A_{jl}, A_{jm}]$ et $[A_k, A_l, A_m]$. Montrer que les droites p_1, p_2, p_3, p_4 ont une infinité de secants communs.

6. Considérons en un point quelconque P_0 d'une surface deux directions conjugées (par rapport à l'indicatrice de Dupin au point P_0). Prouver que la somme

des rayons de courbure normale doués de signe appartenant à ces directions est indépendante du choix du couple de directions conjugées (le choix des directions asymptotiques de point hyperbolique est exclu).

7. Démontrer que chaque sous-ensemble non dénombrable de l'espace euclidien à n-dimensions possède de sous-ensemble non dénombrable dont les points sont de l'un à l'autre à des distances toutes différentes (c'est-à-dire que pour deux couples de points arbitraires $P_1 \neq P_2$, $Q_1 = Q_2$, l'égalité $\overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2}$ se produit, si et seulement si $P_1 = Q_1$, $P_2 = Q_2$ ou bien si $P_1 = Q_2$, $P_2 = Q_1$). Prouver qu'une telle proposition ne subsiste pas en générale, si au lieu de l'espace euclidien à n-dimensions on considère l'espace de Hilbert (séparable).

8. La suite des fonctions continues $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ définies sur l'intervalle $[a, b]$ est telle que chaque point x de l'intervalle est une racine de l'une des équations $f_n(x) = f_m(x) (n \neq m)$. Démontrer que dans ce cas il existe un sous-intervalle de $[a, b]$ sur lequel deux éléments au moins de la suite de fonctions sont identiques.

9. Soit f une fonction continue, non constante, à valeur réelle et soit supposée l'existence d'une fonction F telle que l'on ait pour chaque x, y réels $f(x+y) = F[f(x), f(y)]$. Établir que f est strictement monotone.

10. Un joueur peut jouer le jeu pile ou face selon la règle de jeu suivante: il peut miser la somme positive arbitraire y et dans ce cas il gagne la somme y avec la probabilité 1/2 ou bien il perd la somme y avec la probabilité 1/2. Notre joueur, qui dispose de x Forints $(0 < x < 2C)$, joue selon le système suivant: tant que sont argent ne dépasse pas C Forints il mise à la fois toute son argent; tandis que lorsqu'il possède plus que C Forints il mise autant dans la partie suivante qu'au cas de gain son argent atteigne les $2C$ Forints; une fois les $2C$ Forints atteints il cesse le jeu. La probabilité de cet événement soit notée par $f(x)$. Déterminer la fonction $f(x)$ $(0 < x < 2C)$.

Feladatrovat

Szerkeszti: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest V., Szabadság tér 17. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

Kitűzött feladatok

156. Legyen adott $f(n)$ számelméleti függvény esetén

$$h(n) = \sum_{m=1}^{n-1} f(m)f(n-m).$$

Bizonyítandó, hogy létezik olyan $f(n)$ multiplikatív számelméleti függvény, amely csak ± 1 értékeket vesz fel,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqq x} f(n) = 0,$$

de $h(n)/n$ nem tart 0-hoz $n \to \infty$ esetén.

Corrádi Keresztély és *Kátai Imre*

157. Adjunk meg a [0, 1] intervallumban értelmezett monoton növekvő $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket úgy, hogy értékkészletük is a [0, 1] intervallum legyen, fennálljon

$$\min(f(g(x)), g(f(x))) = f(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

de ne legyen $g(x) \equiv x$.

Fried Ervin

158. Legyen m végtelen számosság. Konstruálandó olyan m számosságú, nem-diszkrét, normális topologikus tér, amelynek minden kompakt altere véges.

Juhász István

Megoldott feladatok

144. feladat. Bizonyítandó, hogy egy metrikus tér akkor és csak akkor szeparábilis, ha minden nem-megszámlálható H részhalmazának van H-ban levő torlódási pontja.

(Gehér László)

Megoldás. Ha E szeparábilis metrikus tér, akkor van megszámlálható bázisa. Ha E-ben egy H halmaz egyik pontja sem torlódási pontja H-nak, akkor H minden pontjához található a megszámlálható bázisnak olyan halmaza, amely H-nak ezt az egyetlen pontját tartalmazza. E megszámlálható sok bázishalmaz befedi H-t, úgyhogy ilyenkor H megszámlálható. Eszerint a feltétel szükséges.

Másrészt az E metrikus tér szeparábilis voltához elégséges az a kevesebbet kívánó feltétel is, hogy E-ben minden nem-megszámlálható halmaznak legyen (H-hoz tartozó vagy nem tartozó) torlódási pontja. Valóban, ha E ilyen tér, nevezzük E valamely részhalmazát adott $\varepsilon > 0$ mellett *ε-ritkának*, ha bármely két pontjának távolsága $\geqq \varepsilon$. Minthogy E bármely pontjának $\varepsilon/2$ sugarú környezetében egy ε-ritka halmaznak legfeljebb egy pontja fekhet, azért minden ε-ritka halmaz megszámlálható. A Teichmüller—Tukey-féle lemma segítségével azonnal látható, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz található maximális ε-ritka halmaz. Legyen tehát H_n maximális $1/n$-ritka halmaz ($n = 1, 2, \ldots$) és $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$. Az előbbiek szerint H_n és így H is megszámlálható, továbbá H mindenütt sűrű, hiszen E bármely pontjának $1/n$ sugarú környezetében van H_n-nek pontja. Ekkor tehát E szeparábilis.

Császár Ákos

Megjegyzés. Ugyanígy igazolható a következő általános tétel is: Legyen m végtelen számosság. Egy E metrikus térben akkor és csak akkor van legfeljebb m számosságú mindenütt sűrű részhalmaz, ha E-ben minden m-nél nagyobb számosságú H részhalmaznak van H-ban levő torlódási pontja. (Az elégségességhez itt is elég annyit feltenni, hogy az m-nél nagyobb számosságú részhalmazoknak egyáltalán van torlódási pontjuk.)

Gerlits János, Szenthe János

A 144. feladat megoldását beküldötte még GERLITS JÁNOS és SZENTHE JÁNOS.

145. feladat. Határozzuk meg az

$$ax^2+by^2 = (a+b)z^2$$

egyenlet egész megoldásait, ha a és b adott négyzetmentes számok.

(Kelemen József)

Megoldás. Szükség esetén a és b legnagyobb közös osztójával végigosztva rögtön feltehetjük, hogy az

(1) $$ax^2+by^2 = (a+b)z^2$$

egyenletben $(a, b)=1$. Ez az átalakítás nem változtat a és b négyzetmentességén. Zárjuk ki továbbá a triviális $a = -b = \pm 1$ esetet. Ekkor $a+b \neq 0$.

Legyen

(2) $$u = \frac{ax+by}{a+b}, \quad v = \frac{x-y}{a+b}.$$

Ekkor

(3) $$x = u+bv, \qquad y = u-av$$

és

$$ax^2+by^2 = au^2+2abuv+ab^2v^2+bu-2abuv+a^2bv^2 =$$

$$= (a+b)(u^2+abv^2).$$

Így x, y, z akkor és csak akkor megoldása (1)-nek, ha u, v, z eleget tesz az

(4) $$u^2+abv^2 = z^2$$

egyenletnek. Minthogy x és y egész értékeinek (2) alapján u és v racionális (de általában nem egész) értékei felelnek meg, foglalkozzunk (4) racionális megoldásaival. Ezek (4) homogenitása miatt az alapmegoldásokból állnak elő racionális számmal való végigszorzás révén, alapmegoldásnak nevezve a (4) egyenlet olyan megoldását, amelyben u, v, z egész számok és legnagyobb közös osztójuk 1. Az ab szám négyzetmentességéből könnyen következik, hogy (4)-nek ilyen alapmegoldásaiban u, v és z páronként is relatív prímek.

(4)-et

$$abv^2 = (z+u)(z-u)$$

alakban írva, tegyük fel először, hogy u és z különböző paritásúak. Ekkor $z+u$ és $z-u$ relatív prímek, és így ab négyzetmentessége miatt

(5) $$z+u = ps^2, \quad z-u = qt^2, \quad v=st, \quad ab=pq,$$

ahol p, q, s, t egész, $(p, q)=(s, t)=1$. Innen (3) alapján (1) megoldása

$$x = r(ps^2-qt^2+2bst),\quad y = r(ps^2-qt^2-2ast),$$

$$z = r(ps^2+qt^2) \tag{6}$$

alakban adódik, ahol r olyan racionális szám, amelynek nevezője osztója a három zárójel legnagyobb közös osztójának.

Ha viszont u és z egyenlő paritású (azaz mindkettő páratlan), akkor $(z+u, z-u) = 2$, és így most (5) helyett

$$z+u = 2ps^2,\quad z-u = 2qt^2,\quad v=2st,\quad ab=pq \tag{5'}$$

adódik, ahol ismét $(p, q)=(s, t)=1$. Az x, y, z változókra áttérve az itt szereplő 2 tényező beolvasztható az r szorzóba, úgyhogy ismét a (6) képletekre jutunk.

Fried Ervin

146. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a kettes számrendszerben végtelen sok olyan szám van, amely nem kettőnek (egész kitevőjű) hatványa s melynek köbe magával a számmal kezdődik.

(Fried Ervin)

Megoldás. Legyen az n számnak (amely nem hatványa 2-nek) 2-es számrendszerbeli alakja k-jegyű, azaz

$$2^{k-1} < n < 2^k. \tag{1}$$

A feladat olyan n számokról szól, amelyekre valamilyen m egész kitevővel

$$2^m n \leqq n^3 < 2^m(n+1). \tag{2}$$

(2) első és (1) második egyenlőtlenségéből

$$2^m \leqq n^2 < 2^{2k},$$

úgyhogy $m<2k$. Viszont $m \leqq 2k-2$ esetén (1) első és (2) második egyenlőtlenségéből

$$(2^k)^2 < (2n)^2 < \frac{n+1}{n} 2^{m+2} \leqq \frac{n+1}{n} 2^{2k} = 2^{2k}+\frac{2^{2k}}{n} <$$

$$< 2^{2k}+2^{k+1} < (2^k+1)^2,$$

ezt kielégítő n egész szám pedig nincs. Így csak $m=2k-1$ állhat. Esze-

rint (2)-ből (ahol most már = jel nem lehetséges) $n > \sqrt{2^{2k-1}}$, s ezt felhasználva

$$(3) \qquad \sqrt{2^{2k-1}} < n < \sqrt{2^{2k-1} + \frac{2^{2k-1}}{n}} < \sqrt{2^{2k-1} + \sqrt{2^{2k-1}}} < \sqrt{2^{2k-1}} + \frac{1}{2},$$

s innen

$$(4) \qquad \frac{n}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} < \sqrt{2} < \frac{n}{2^{k-1}}.$$

Ez azt jelenti, hogy csak a következő módon származtatható n-ek felelhetnek meg: $\sqrt{2}$ diadikus kifejtésében megállunk egy 1-es jegy előtt, az előtte levő jegysorozattal írt számot 2^{k-1}-gyel szorozzuk (ha a kérdéses 1-es a kettedesvessző utáni k-adik helyen állt), majd 1-gyel növeljük, s az így előálló szám lesz n. Megmutatjuk, hogy az ilyen n-ek meg is felelnek. Ezzel a feladatot megoldottuk, mert $\sqrt{2}$ irracionális, s így diadikus felírásában végtelen sok 1-es van.

Ha valamely n és k természetes számokra áll (4), akkor

$$(5) \qquad n - \frac{1}{2} < \sqrt{2^{2k-1}} < n,$$

azaz

$$n^2 - n + \frac{1}{4} < 2^{2k-1} < n^2,$$

és mivel n egész,

$$n^2 - n + 1 \leqq 2^{2k-1} < n^2.$$

Ebből (5) első egyenlőtlenségének felhasználásával

$$2^{2k-1}n < n^3 \leqq 2^{2k-1}n + n^2 - n < 2^{2k-1}n + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 < 2^{2k-1}(n+1).$$

Ekkor tehát teljesül (2) az $m = 2k-1$ választással.

Surányi János

A 146. feladat megoldását beküldötte még HAJNA JÁNOS, KISS ILDIKÓ és RÉNYI ALFRÉD.

PROBLÈMES PROPOSÉS

156. Soit $f(n)$ une fonction définie pour les entiers positifs et posons

$$h(n) = \sum_{m=1}^{n-1} f(m) f(n-m).$$

Démontrer qu'il existe une fonction $f(n)$ multiplicative, ne prenant que les valeurs ± 1, satisfaisant à

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqq x} f(n) = 0,$$

mais telle que $h(n)/n$ ne tend pas vers 0 pour $n \to \infty$.

K. Corrádi et *I. Kátai*

157. Construire des fonctions monotones croissantes $f(x)$ et $g(x)$, définies dans l'intervalle [0, 1], appliquant cet intervalle sur lui-même, satisfaisant à

$$\min\,(f(g(x)),\ g(f(x)))=f(x)\quad (0\leqq x\leqq 1),$$ mais telles que $g(x)\not\equiv x$.

E. Fried

158. Soit m un nombre cardinal infini. Construire un espace topologique de puissance m, non-discret et normal, dans lequel tout sous-espace compact est fini.

I. Juhász

Hírek

Külföldi utazások

ANGLIA

Csiszár Imre a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1965. április 14-től augusztus 3-ig tanulmányúton volt Angliában. Kinttartózkodása alatt három előadásban ismertette a topologikus csoportokon értelmezett valószínűségi mértékekre vonatkozó kutatásait.

Kalmár László a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1965. július 10-től 21-ig résztvett a British Society for the Philosophy of Science és a London School of Economics által az International Union for History and Philosophy of Science, Division for Logic, Methodology and Philosophy of Science támogatásával szervezett Nemzetközi Tudományfilozófiai Kollokviumon, továbbá a fenti nemzetközi szervezetek végrehajtó bizottságának ülésén. A kollokviumon a matematika alapjaival foglalkozó előadást tartott.

Szabó Árpád a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1965. július 11—17. között résztvett a Londonban megtartott filozófiai konferencián.

ARGENTÍNA

Révész Pál 1965 októberétől előadások tartása céljából három hónapot töltött a Bahia Blanca-i Egyetemen. Kinttartózkodása alatt egy matematikai statisztikai, valamint magasabb fokú ergodelméleti szemináriumot tartott.

AUSZTRÁLIA

Rényi Alfréd a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1965. január végétől kezdődően Canberraban nyolc előadásból álló előadássorozatot tartott újabb információelméleti eredményeiről az alábbi címekkel:

1—2. Az információmennyiség különböző mérőszámai.
3—4. Az információelmélet statisztikai alkalmazásai.
5—7. A keverés elmélete.
8. Információelmélet és sztochasztikus folyamatok.

AUSZTRIA

Kertész Andor a Bolyai Társulat kiküldetésében 1965. április 1—15-ig előadások tartása céljából Ausztriában tartózkodott.

Mikolás Miklós a Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik meghívására, a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében résztvett az 1965. április 20—25. között megtartott bécsi GAMM-kongresszuson, ahol „Die Benützung verallgemeinerter Funktionen in der Festigkeitslehre" címmel tartott előadást.

Mikolás Miklós az Osztrák Matematikai Társulat meghívására Bécsben „Über den Riesz-Fischerschen Satz und die Vollständigkeit der Funktionenräume L^p" címmel tartott előadást 1965 októberében.

Varga Ottó 1965. november 8—12. közötti ausztriai tartózkodása alatt résztvett a bécsi Műegyetem fennállásának 150. éves évfordulója alkalmából rendezett ünnepségeken.

A bécsi Műegyetem meghívására Rényi Alfréd, a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1965. november végén „Mathematische Statistik und Informationstheorie" címmel előadást tartott az Osztrák Matematikai Társulatban.

Szőkefalvi-Nagy Béla a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1966. március végén „Ein Satz von Beurling und verwandte Probleme" címmel előadást tartott a bécsi Műegyetem Matematikai Intézetében.

BULGÁRIA

Gergely József a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1965. szeptember 20-tól kezdődően 1 hónapos tanulmányutat tett Bulgáriában.

CSEHSZLOVÁKIA

Németh Géza 1965. március 15-től április 4-ig a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében csehszlovákiai tanulmányúton vett részt. Kinttartózkodása alatt „Bessel-függvények Csebisev sorfejtése" címmel előadást tartott.

Freud Géza a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében előadások tartása céljából 1965. március 24—30. között Csehszlovákiában tartózkodott, ahol a következő előadásokat tartotta:

Brno: „Über die Methode der Probefunktionen in der Approximationstheorie"

„Konvergenztheorie der Orthogonalpolynomreihen"

Bratislava: „Über das klassische Momentenproblem"

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Pollák György 1965. március 29-től 1 hónapos tanulmányúton tartózkodott Csehszlovákiában. Kiküldetése alatt a következő előadásokat tartotta: „A főideálfélcsoportok struktúrája",

„Szabad félcsoportok kongruenciái".

Csáki Endre a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett az 1965. június 1—6. között Liblicén megtartott „A matematikai statisztika ipari alkalmazásai" konferencián.

Bognár Jánosné a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1965. augusztus 31. és szeptember 12. között résztvett a Csehszlovákiában megtartott információelméleti konferencián.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Gyarmati László és Kárteszi Ferenc résztvett az 1965. szeptember 13—16. között Zsolnán megtartott ábrázoló geometriai konferencián.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1965. novemberében, illetve decemberében Achátz Imréné, Barra György, Fazekas Katalin, Kóváry Károly, Pándy Emil, Petruska György néhány napos csehszlovákiai tanulmányúton vett részt.

Varga Tamás a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1966. április 12-től 16-ig előadások tartása céljából Prágában tartózkodott.

DÁNIA

Fejes Tóth László a Magyar Tudományos Akadémia, Heppes Aladár a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében résztvettek az 1965. augusztus 12—15. között Koppenhágában megtartott „Konvexitás kollokviumon", ahol Fejes Tóth László a „Kétdimenziós elhelyezések és fedések" címmel tartott előadást.

FRANCIAORSZÁG

Frey Tamás a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében háromhetes tanulmányúton vett részt a CNRS-el kötött egyezmény keretében.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Rényi Alfréd résztvett a Franciaországban 1965. augusztus 26—szeptember 8. között megtartott információelméleti konferencián.

A Magyar Tudományos Akadémia és a CNRS közötti megállapodás alapján 1965. november 12. és december 10. között Corrádi Keresztély tanulmányúton tartózkodott Franciaországban.

GÖRÖGORSZÁG

Rényi Alfréd a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1965 februárjában „A Poisson-folyamat egy extrémumtulajdonsága" címmel előadást tartott az athéni egyetemen.

HOLLANDIA

A Holland Királyi Tudományos Akadémia kezdeményezésére a Magyar Tudományos Akadémia matematikusokból álló delegációja 1966. május 25. és június 8-a között a két ország matematikusai kapcsolatának fejlesztése céljából Hollandiában tartózkodott. Kinttartózkodásuk során látogatást tettek többek között Hollandia több egyetemén, ahol a következő előadásokat tartották:

Leiden:
Fejes Tóth László
„On the arrangement of houses in a housing estate".
Rózsa Pál
„Neuere Ergebnisse in der Theorie der Hypermatrizen und ihre Anwendungen".

Utrecht:
Arató Mátyás
„Distributions of sufficient statistics"
Szőkefalvi-Nagy Béla
„Invariante Unterräume von potenzbeschränkten Operatoren" (Invariant subspaces etc.)

Nijmegen:
Moór Artúr
„Über eine Verallgemeinerung der Schouten"
Szőkefalvi-Nagy Béla
„Invariant subspaces"

Amsterdam:
Fejes Tóth László
„On the arrangement of houses in a housing estate"
Turán Pál
„On some problems of the comparative theory of prime numbers"
Arató Mátyás
„Distributions of sufficient statistics"

Delft:
Moór Artúr
„Über das tensorielle Integral"
Turán Pál
„On some problems of the constructive function theory".

Eindhoven:
Moór Artúr
„Über das tensorielle Integral"
Szőkefalvi-Nagy Béla
„Invariant subspaces"

JUGOSZLÁVIA

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Hosszú Miklós 1965. április 27-től május 26-ig Jugoszláviában tartózkodott. Kinttartózkodása alatt Belgrádban két előadásban számolt be eredményeiről.

Szőkefalvi-Nagy Béla a Magyar Tudományos Akadémia, Varga Tamás a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében résztvett a Jugoszláv Matematikusok, Fizikusok és Csillagászok 1965. október 4—10, között Sarajevóban megtartott IV. Kongresszusán. Szőkefalvi-Nagy Béla a Kongresszuson „a Hilbert-tér olyan operátorairól, amelyek normája, vagy numerikus rádiusza 1-nél nem nagyobb" címmel tartott előadást.

KANADA

Adler György a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1965. június 28—augusztus 2. között résztvett a montreali egyetem matematikai szemináriumának nyári kurzusán.

LENGYELORSZÁG

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Hajtmann Béla három hónapos tanulmányúton volt Lengyelországban. Kinttartózkodása alatt a következő előadásokat tartotta:

Az EEG görbék értékelésére alkalmazott Fourier-analízisről

A hypothalamus szürke magjai kariometriai vizsgálatának matematikai problémáiról

Egy kombinatórikai problémáról

Az agy, az izom és a szövettenyészetek kariomatriai vizsgálatának matematikai módszereiről.

Kalmár László a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett 1965 augusztusában a Nemzetközi Tudománytörténeti és Tudományfilozófiai Unio Vezető Irodájának Krakkóban megtartott ülésén, továbbá a fenti nemzetközi szervezet XI. Nemzetközi Tudománytörténeti Kongresszusán.

Turán Pál a Lengyel Tudományos Akadémia Matematikai Intézetének meghívására 1965. október 24-től november 7-ig Lengyelországban tartózkodott. Előadásokat tartott Varsóban, Lódzban és Poznanban a statisztikus csoportelméletről és a racionális függvényekkel való approximáció különböző kérdéseiről.

Moór Artúr a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében háromhetes tanulmányúton volt Lengyelországban. Kiküldetése alatt Krakkóban, Katowicében és Wroclawban előadást tartott az ekvivalens variáció-problémák, valamint az általános differenciál-geometriai terek elméletének köréből.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Rényi Alfréd 1965. december 16—19 között résztvett a Lengyel Tudományos Akadémia Matematikai Intézete által rendezett szemináriumon, ahol két előadást tartott „A distribucióelmélet a valószínűségszámításban" és „Egy információelméleti paradoxonról" címmel.

Makkai Mihály a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében többhónapos tanulmányúton volt Lengyelországban. Kinttartózkodása alatt a következő előadásokat tartotta:

A modellek felszálló láncainak egyesítésére vonatkozó Los-Suszko-Chang tétel egy analogonja.

„On the transfinite induction in arithmetic"

„Über die transfinite Induktion in zahlentheoretischen Formalismen"

„A compactness result concerning direct products of models"

NÉMET DEMOKRATIKUS KÖZTÁRSASÁG

Mikolás Miklós a berlini Német Tudományos Akadémia meghívására résztvett 1964. május 25—30. között Berlinben megtartott „III. Nemlineáris rezgések szimpóziumon, ahol „Über die explizite Auflösung gewisser Differential- und Integralgleichungen und Rieszsche Potentiale" címmel tartott előadást.

Szőkefalvi-Nagy Béla a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében konzultánsként illetve bíráló tagként résztvett egy habilitációs kollokviumon.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Dömölki Bálint résztvett a szocialista országok akadémiái közötti együttműködés keretében működő GAMS munkabizottság 1965. március 21—28. között Berlinben megtartott IV. ülésén.

Bognár János a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében kéthetes tanulmányúton vett részt Drezdában, ahol előadásban számolt be kutatásairól.

Frey Tamás és Szelezsán János 1965. június 15—22. között Berlinben résztvett a szocialista országok tudományos akadémiái együttműködése keretében működő „A számítástechnika tudományos problémái" című témát koordináló bizottság ülésén, valamint az ezzel egyidejűleg megrendezett numerikus módszerekkel foglalkozó kollokviumon.

Frey Tamás kinttartózkodása alatt két előadást tartott.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Bánkövi György és Csáki Endre 1965. szeptember 29—október 3-a között résztvett a Berlinben megtartott X. statisztikai minőségellenőrzési kollokviumon. Csáki Endre az elektromos alkatrészek élettartam vizsgálatának statisztikai kérdéseiről tartott előadást.

Szőkefalvi-Nagy Béla és Turán Pál a berlini Német Tudományos Akadémia meghívására, Freud Géza a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében résztvettek a berlini Német Tudományos Akadémia által 1965. október 19—23. között megrendezett Weierstrass emlékünnepségeken. Itt a következő előadásokat tartották:

Szőkefalvi-Nagy Béla „Karaterisztikus operátor függvények"

Turán Pál „Neuere Entwickelungen in der Approximationstheorie stetiger Funktionen"

Szőkefalvi-Nagy Bélának az emlékünnepségek után Drezdában átnyújtották a Drezdai Műegyetem Matematikai és Természettudományi Karán a „Természettudományok díszdoktora" oklevelet. Ezt követőleg Szőkefalvi-Nagy Béla előadást tartott „Operátorok által származtatott pozitív definit függvényekről" címmel. Továbbá drezdai tartózkodása alatt beszámolt a Hilbert-tér operátorainak elméletébe vágó legújabb kutatási eredményeiről.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1965 decemberében Horváth Miklós, Molnár József, Rábai Imre tanulmányutat tett az NDK-ban.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Turán Pál, a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Deák Ervin, Rényi Alfréd és Varga Ottó résztvettek az NDK Matematikai Társulatának 1966 februárjában megtartott évi Közgyűlésén. Turán Pál a Közgyűlésen „Über einige Probleme der vergleichenden Primzahltheorie" címmel tartott előadást. Utána pedig „Über einige Probleme der statistischen Gruppentheorie" címmel tartott előadást az Erdős Pállal elért legújabb eredményeiről az ilmenaui Műegyetem Matematikai Intézetében.

NÉMET SZÖVETSÉGI KÖZTÁRSASÁG

Turán Pál és T. Sós Vera meghívásra 1965 januárjában előadások tartása céljából az NSZK-ban tartózkodott.

Péter Rózsa a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett a „Deutsche Vereinigung für Mathematische Logik und Grundlagenforschung der exakten Wissenschaften 1965. április 6—9. között megrendezett kollokviumán, ahol

„Berechenbarkeit rekursiver Wortfunktionen durch Kellerspeicher" címmel tartott előadást.

Vincze István a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett a aacheni Műszaki Főiskola matematikai kollokviumán, ahol a regresszióelmélettel kapcsolatos előadást tartott.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Szabó Árpád és Vekerdi László résztvett az 1965. január 2—8. között Oberwolfachban megtartott matematikatörténeti konferencián, ahol Szabó Árpád „Philologische Methode in der Erforschung der griechischen Mathematikgeschichte", Vekerdi László „Über van Schooten's Darstellung des Descartesschen Kurveneinteiler-Mechanismus" címmel előadást tartott. A kollokvium után Szabó Árpád két előadást tartott a frankfurti Egyetem meghívására „Die Quellen der voreuklidischen Proportionenlehre" és „Pythagoreische Musiktheorie" címmel.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Varga Ottó a kieli Tudományegyetem és az aacheni Műszaki Egyetem meghívására 1965. június 13—27. között előadást tartott a mozgó *n*-él módszerének alkalmazásáról a Finsler geometriában témáról.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Hosszú Miklós résztvett az 1965. július 5—10. között Oberwolfach-ban megtartott függvényegyenletek kollokviumon.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Rényi Alfréd és Révész Pál résztvett az 1965. VII. 26—31. között Oberwolfachban megtartott valószínűségszámítási konferencián.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Szőkefalvi-Nagy Béla résztvett az 1965. augusztus 3—10-ig Oberwolfachban „Harmonikus analízis és integráltranszformációk" témájú kollokviumon, ahol „Egyparaméteres operátor-félcsoportok a Hilbert-térben" címmel tartott előadást.

T. Sós Vera meghívásra résztvett az oberwolfachi Matematikai Intézet által 1965. szeptember 6—12-ig megrendezett számelméleti kollokviumon. „A lánctörtek metrikus elméletének egyes problémái" címmel tartott előadást.

Mikolás Miklós különböző egyetemek meghívására 1965. október és novemberében az alábbi előadásokat tartotta:

Giessen: Über ein neues Verfahren zur Auflösung von Differentialgleichungen.
Hamburg: Anwendungen der Differentiation und Integration nichtganzer Ordnung.
Tübingen: Neuere starke Summationsverfahren für trigonometrische Reihen.
Würzburg: Über einige neue Resultate in der Theorie der Zetafunktionen.

Prékopa András, Rényi Alfréd, Révész Pál a Bolyai János Matematikai Társulat, Vincze István a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett az 1966. április 17—24. között Oberwolfachban megtartott valószínűségszámítási és matematikai statisztikai kollokviumon.

Vincze István „Über einige Fragen der nichtparametrischen Zweistichprobentesten" címmel tartott előadást.

OLASZORSZÁG

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Adler György kéthónapos tanulmányúton vett részt Olaszországban.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Kornai János résztvett az Econometric Society Rómában megrendezett I. Kongresszusán, ahol „Matematikai programozás, mint a szocialista tervezés eszköze" címmel tartott előadást. A Kongresszus után 1965 szeptemberében résztvett a „Gazdasági és társadalmi kutatások" Intézete kollokviumán.

Reiman István a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében egyhónapos tanulmányúton vett részt a római Magyar Intézetben.

ROMÁNIA

Deák Ervin és Turán Pál meghívásra résztvettek a Cluj-i Egyetem által 1965. július 1—5. között „Konvex függvények és alkalmazásaik" című kollokviumon. Deák Ervin „Eine Verallgemeinerung des Begriffs der quasikonvexen Funktion", Turán Pál „Konvex függvények approximációja racionális függvényekkel" címmel tartott előadást.

Kardos Kálmán és Jámbor Antal a temesvári Egyetem meghívására 1965. november 23-tól december 6-ig tapasztalatátadás céljából látogatást tettek a temesvári Egyetemen.

Rényi Alfréd a Román Akadémia meghívására, a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében előadást tartott a bukaresti Egyetemen, illetve a kolozsvári Matematikai Intézetben a matematikai statisztika új, információelméleti megalapozásáról.

SVÁJC

Mikolás Miklós 1965 novemberében előadást tartott Genfben „Sur la sommation des séries de Fourier au moyen des intégrodérivées weyliennes" címmel.

Szőkefalvi-Nagy Béla a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett a svájci kutatófizikusok által szervezett, a Hilbert-tér spektrálelméletére vonatkozó kollokviumon. 1966 márciusi, illetve áprilisi svájci tartózkodása alatt előadássorozatot tartott a következő témákból:

„Sous-espaces invariants des opétareurs uniformément bornés"

„Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints dans l'espace de Hilbert".

SVÉDORSZÁG

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Kiefer Ferenc 1965. április 22—május 28. között hat előadást tartott a stockholmi Egyetemen az alábbi témákból: transzformációs grammatika, függési grammatika, a szovjet matematikai nyelvészet és a hagyományos nyelvészet.

SZOVJETUNIÓ

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Oláh Gyula matematikatörténeti kutatásokat végzett a Szovjetunióban 1964. augusztus 9-től 1965. február 24-ig terjedő kinttartózkodása alatt.

Kátai Imre a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében hathónapos tanulmányúton volt a Szovjetunióban. Kinttartózkodása alatt előadást tartott az összehasonlító prímszámelmélet téren végzett kutatásairól, továbbá „Omega típusú tételek a számelméletben" címmel.

1965 május végén, illetve június elején Kornai János, Kovács László és Ziermann Margit résztvett a Novoszibirszkben megtartott matematikai programozási konferencián. Kornai János a népgazdasági programozásról, Ziermann Margit „Egy sztochasztikus készletmodellel kapcsolatos hitel-kamat meggondolások" címmel tartott előadást.

Elbert Árpád és Szilárd Károly 1965. augusztus 30—szeptember 27. között Szovjetunióbeli tanulmányúton vettek részt.

A Jerevánban 1965. szeptember 6—14. között megrendezett komplex függvénytani kollokviumon Erdős Pál, Szilárd Károly, Turán Pál meghívásra, Alpár László és Elbert Árpád a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében vettek részt. A kollokviumon a következő előadásokat tartották:

Alpár László: „Convergence absolue et représentation conforme".

Erdős Pál: „On some applications of probability methods to function theory"

Szilárd Károly: „On a known generalisation of the notion of convexity for plan domains and its application to the derivation of distortion theorems in the theory of conformal mappings"

Turán Pál „On the approximation of piecewise analytic functions by rational ones".

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Csákány Béla és Schmidt Tamás résztvettek az 1965. szeptember 27—október 2. között a Szovjetunióban megtartott algebrai kollokviumon.

Tomkó József a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1965. október 18-tól hathónapos tanulmányúton volt a Szovjetunióban. Kinttartózkodása alatt Novoszibirszkben előadást tartott „Tömegkiszolgálási problémák" címmel.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1966. február 15-től Kovács Győző kéthetes tanulmányúton volt a Szovjetunióban.

USA

Prékopa András a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1965 április 13-tól szeptember 15-ig tanulmányúton volt az Egyesült Államokban. Kinttartózkodása alatt a következő konferenciákon vett részt:

First International Conference on Programming and Control, Colorado Springs.

IFIP Congress 65 (International Federation for Information Processing) New York City.

Fifth Berkeley Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics, Berkeley.

Rényi Alfréd és Vincze István a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvettek az 1965. június végén megtartott V. berkeley-i szimpóziumon, ahol Rényi Alfréd „On some basic problems of statistics from the point of view of information theory", Vincze István „On some questions concerning two-sample tests of Smirnov type" címmel tartott előadást. Vincze István a szimpózium után a Washington Egyetemen „Mathematical problems concerning probability theory" címmel tartott előadást.

Turán Pál és T. Sós Vera a columbusi Ohio State University meghívására 1965 július és augusztusában nyári matematikai szemináriumon vettek részt, ahol kutatásaikról előadást tartottak.

További meghívásokra Turán Pál előadásokat tartott a Pennsylvania State, az Ann-arbori Michigan State és a buffaloi New-York State University-n.

Társulati élet

BESZÁMOLÓ

A Bolyai János Matematikai Társulat 1966. július 1-én megtartott közgyűléséről

A közgyűlésen Hajós György elnökölt. Megnyitó beszédének szövegét az alábbiakban közöljük:

„Tisztelt Bolyai Társulat! Legyen szabad Társulatunk közgyűlését megnyitnom, s egészen röviden egy-két gondolatot megemlítenem.

Először is közgyűlésünk jubiláris közgyűlés. A Bolyai János Matematikai Társulat elődje az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatnak, amely a felszabadulás után két társulatra, egy matematikai és egy fizikai társulatra szakadt szét. Ha így tekintjük Társulatunk múltját, akkor 75 éves jubileumot ülünk. 75 éves jubileumot, ami tudományos társulat vonatkozásában igen magas érték és mutatja, hogy a múlt század végén milyen lendülettel indult meg a tudományos társulati összefogás a matematika és a fizika területén. Visszaemlékezhetünk a kiemelkedő nagyokra, köztük Eötvös Lorándra, akiről azután a Társulatot elnevezték. Emlékezhetünk König Gyulára, Kürschák Józsefre és a többiekre. Listát nem akarok elősorolni, hiszen előadás foglalkozik majd a Közgyűlés keretében Társulatunk bővebb értelemben vett múltjával is.

Ez a 75 éves jubiláris alkalom mindenképpen rányomja bélyegét a közgyűlésre. Mérföldkövet jelent a közgyűlés egészen más vonatkozásban is, de talán nem követ kell itt mondani, hanem talán mérföld-szakaszt, mert nem egyetlenegy pontról, nem egyetlenegy pillanatról, hanem egy időszakról van szó. Arról az időszakról, amikor a matematika belső kiterebélyesedése és kapcsolatai révén fontossága, elismertsége, szükségessége országszerte a gazdasági élet és a tudományos munka legkülönbözőbb területein egyre inkább előre tör. Ez igen sok feladatot ró a matematika művelőire, bármely szektorban dolgozzanak is.

Ez valóban nem pillanat, hanem évtizedre, vagy évtizedekre elnyúló változás, amelyben most benne élünk, s amely hangsúlyt ad a matematikával foglalkozók munkásságának, akár az oktatásban vagy a tudomány fejlesztésében, akár a matematika felhasználásának bármely területén működnek. Hangsúlyt ad és feladatokat ró ránk. Mindannyian tudatában vagyunk ezeknek a feladatoknak, s itt nem is annyira a feladatok nagyságát emelem ki, hanem inkább azt a tényt, hogy el kell hárítani minden nehézséget az elől, hogy a rengeteg feladat a matematikusok szerencsére bővülő száma, együttese révén mennél jobban elláthatő legyen.

Ez a feladat, illetőleg a feladat ellátását gátló nehézség elhárítása közvetlenül Társulatunkra is feladatokat ró és Társulatunknak is irányt szab. Igyekeztünk, igyekeznünk kell, igyekezni fogunk — azt hiszem mindannyiunk nevében mondhatom — arra, hogy mennél inkább a munkára, az oktatásra, az alkalmazásra, a tudomány fejlesztésére koncentráljuk igyekezetünket a Társulaton belül, s mennél kevesebb energiát, időt fecséreljünk olyan körülményekre, amelyek ettől visszatartanak.

Csak ezeket a gondolatokat akartam megnyitóul megemlíteni. Legyen szabad néhány adminisztratív jellegű bejelentést tennem:

Először is küldött-közgyűlésünkön az összes küldöttek száma 125. A megérkezett küldöttek az utolsó megkapott értesítés szerint a 125-ből 95.

Továbbá be kell jelentenem, hogy volt egy alapszabálymódosító közgyűlés a legutóbbi tisztségújító közgyűlés óta, amely új alapszabályunkat megvitatta, s végeredményben azt kell mondanom, hogy az jóváhagyást nyert. Az Akadémia elnöke, mint illetékes főhatóság, egy paragrafus kivételével jóváhagyta. Ez a 20. §, amely a választásokra vonatkozott. Erről itt most nem akarok beszélni, csak bejelentettem a Társulat alapszabályának jóváhagyását.

Mindenki megkapta a meghívóval a Társulat Közgyűlésének napirendjét.

Napirend

De. 10 órakor

1. Megnyitó (Hajós György, Valkó Endre)
2. Főtitkári beszámoló (Fuchs László)
3. Pénztárosi jelentés (Fried Ervin)
4. Az ellenőrző bizottság jelentése (Szilárd Károly)
5. A jelölőbizottság jelentése (Barna Béla)
6. A főtitkári beszámoló és a pénztárosi jelentés megvitatása.
7. Választás

Du. 1/2 3 órakor

8. Ünnepi megemlékezés a Mathematikai és Physikai Társulat megalakulásának 75. évfordulójáról. (Szénássy Barna)
9. A jelentések feletti vita folytatása
10. Határozathozatal a beérkezett javaslatokról.
11. A szavazatszedő bizottság jelentése.
12. Zárszó.

Kérdezem, hogy ezt elfogadja-e a Közgyűlés, van-e valami ellenvetés? (Nincs) Akkor megállapítom, hogy a napirendet elfogadtuk és felkérem Valkó Endre elvtársat, az MTESZ főtitkárát, tartsa meg beszédét."

Valkó Endre, az MTESZ főtitkára a Szövetség elnöksége nevében üdvözölte a Bolyai János Matematikai Társulatot. „A matematikát joggal tartják az emberiség kezében levő egyik leghatalmasabb termelőerőnek" — mondta. Ma már senki sem vonja kétségbe annak helyességét, hogy a matematikusok társulata — sok országtól eltérően — nálunk kezdettől fogva a műszaki tudományos egyesületekkel közös szervezetben van. A mérnökök általában mindig is tisztelték a matematikát; „amatőrként" gyakran űzik is. De a matematikának a többi tudományokhoz való szoros kapcsolata valójában az elmúlt évtizedekben fejlődött ki és vált közismertté. Ma már minden laikus tudja, hogy a matematikát senki sem tekintheti csupán a technika „segédtudományának".

Nekünk a matematikát, ezt a hatalmas termelőerőt, ennek képviselőit itt Magyarországon nagyon meg kell becsülnünk; nemcsak azért, mert általában nem bővelkedünk túlságosan termelőerőkben, hanem azért is, mert a magyar matematikusokat szerte a világon rendkívül nagyra értékelik. A Társulatnak, a matematika tudományának fejlesztésén túlmenően arra is törekedni kell, hogy olyan társadalmi atmoszférát teremtsen az országban — és a Társulaton belül is —, amelyben a matematikusok jól érzik magukat, érzik, hogy elismerik és megbecsülik őket".

Az elnök megköszönte Valkó Endre üdvözlő szavait és felkérte Fuchs László főtitkárt beszámolója megtartására. Az alábbiakban közöljük a főtitkári beszámoló előzetesen a küldöttek számára kiküldött írásbeli anyagának szövegét.

I. Bevezető

Ez a Társulat Elnöksége által jóváhagyott beszámoló az 1963-tól terjedő időszakot öleli fel, amióta a Társulat jelenlegi tisztikara működik.

Az 1963 óta eltelt időszakban a Társulat munkáját fokozódó aktivitás jellemezte. A megválasztott tisztikar arra törekedett, hogy a társulati munkába a tagság minél szélesebb rétegeit vonja be és hogy a társulati feladatokat a lehetőség szerint egyenletesen ossza el. Ezek az irányelvek vezették az Elnökséget a különböző munkabizottságok megalakításában is és abban a célkitűzésében, hogy a középiskolai tanárok minél szélesebb rétegeit vonja be a társulati munkába.

Az Elnökség és az Intéző Bizottság elsőrendű feladatának tekintette, hogy a társulati élet minden fontos területét állandó figyelemmel kísérje. Ennek érdekében a vezető szervek (Választmány, Elnökség, Intéző Bizottság) az elmúlt időszakban rendszeresen üléseztek, úgyhogy a nyári szünet kivételével majdnem minden hónapban összeült a vezetőszervek egyike és ezeken rendszeresen megvitatta a Társulat, illetőleg a Társulat szerveinek munkáját, a közben hozott intézkedéseket jóváhagyta, szükség esetén újabb határozatokat hozott. Ez a munkamódszer egyfelől biztosította a funkciókat betöltők munkájának állandó ellenőrzését, másfelől lehetővé tette, hogy az Elnökség tagjai, a vezető funkcionáriusok és főként a vidéki tagtársak az eddiginél nagyobb figyelemmel kísérhessék a Társulat egészének munkáját, tudomást szerezhessenek olyan intézkedésekről, amelyeket a vezető szervek vagy a bizottságok hoztak. Ez a munkamódszer fokozottabb mértékben biztosítja a Társulat kollektív vezetését és azt, hogy a lényeges kérdésekben a Társulat minél szélesebb rétegei, illetőleg ezek képviselői hozzanak határozatokat és ellenőrizhessék a Társulat működésének minden területét.

Az 1963-as küldöttközgyűlésnek rendkívül fontos határozata volt a „Matematika Alkalmazásai Szakosztály" megalakítása. Ez a szakosztály az elmúlt időszakban aktív tevékenységet fejtett ki és sikeres kollokviumokat szervezett. A szakosztály fő célkitűzései között szerepel a matematika alkalmazásaival foglalkozó tagtársak összefogása, támogatásuk problémáik megoldásában, tájékoztatásuk fontos alkalmazási módszerekről, de fontos feladatának tekinti a matematika alkalmazási lehetőségeinek ismertetését más terület szakembereivel, matematikusok és alkalmazási szakemberek együttműködésének elősegítését is.

II. A Társulat szervezete

A Társulat működésének nagy része a szakosztályok, a vidéki tagozatok és a különböző bizottságok keretében folyik. A Társulatnak három szakosztálya van:

a) Tudományos Szakosztály
b) Oktatási Szakosztály
c) Matematika Alkalmazásai Szakosztály

A Társulatnak 14 vidéki tagozata van, mégpedig:

1. Borsod
2. Debrecen
3. Eger
4. Győr
5. Kaposvár
6. Kecskemét
7. Nyíregyháza
8. Pécs
9. Sopron
10. Szeged
11. Székesfehérvár
12. Szolnok
13. Szombathely
14. Veszprém

III. Szakosztályok

A szakosztályok főbb működése előadások és rendezvények szervezése.

1. *A Matematika Alkalmazásai Szakosztály* a Tudományos Szakosztállyal együtt általában 2—3 hetenként szervez előadóüléseket Budapesten. Ezeknek tárgya a matematika valamely alkalmazási területe. A szakosztály számos alkalommal biztosít előadót vidéki tagozatok részére is. Az előadóüléseken hazai vagy külföldi előadók számolnak be a matematika különböző alkalmazásai során elért eredményekről és tartanak összefoglaló vagy ismertető előadást fontosabb matematikai módszerekről. Az előadóesteken alkalmazási kérdések, analóg számológépek, élelmiszeripari alkalmazások, számítástechnikai, sorbanállási problémák, biológiai alkalmazások stb. témák szerepeltek.

Megemlítendő a szakosztály keretében megszervezett tanfolyam: „Hibajelző és hibajavító kódok", amelyet Dénes József tagtársunk tartott, továbbá az 1966-ban szervezendő tanfolyam a műszaki matematika alkalmazásairól, amely S. Falk professzor előadásaira fog támaszkodni.

A Matematika Alkalmazásai Szakosztály javuló kapcsolatokat alakít ki a MTESZ Társegyesületekkel. Ezek a kapcsolatok részben közös rendezvények szervezésében, részben tagtársaink más egyesületben végzett munkájában nyilvánulnak meg.

2. *Tudományos Szakosztály* munkája az elmúlt években örvendetesen aktivizálódott. Nemcsak egyre több külföldi szakember látogatja meg Társulatunkat és ad elő érdeklődésre számottartó témákról, hanem fiatal hazai matematikusok is szép számmal jelentkeznek előadásra.

A szakosztály a tanév alatt általában kéthetenként szervez előadóüléseket a Társulat központjában, részben az MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezvény keretében. Rendszeresen tart tudományos előadásokat a szegedi, a debreceni és a borsodi tagozat. Az előadóülések látogatottsága a múlthoz képest megnövekedett, de a látogatottsággal még mindig nem lehetünk megelégedve. Különösen a fiatal matematikusok távolmaradása szembetűnő.

A Szakosztály évente megrendezi kollokviumait, amelyekről alább részletesebben lesz szó.

3. *Oktatási Szakosztály* is egyre aktívabbá válik. Örvendetes, hogy sikerült újabb középiskolai tanár kartársakat bevonni a munkába, annak ellenére, hogy kartársaink nagyon el vannak foglalva oktató munkájukkal. A budapesti tanár tagok közül még nem sokan működnek aktívan a társulati életben, de vidéken a helyzet jobb és javuló tendenciát mutat. Az Oktatási Szakosztály félévenként egy-két előadást és egy klubdélutánt szervez Budapesten az általános és középiskolai tanárok számára. A szakosztály számos alkalommal gondoskodik vidéki tagozatok előadóülésein előadókról, támogatja a budapesti matematikai tanári munkaközösségek munkáját és igen jól működik együtt az Országos Pedagógiai Intézettel.

Kiemelendő a Szakosztály tevékenysége az ifjúság körében. Igen jól és eredményesen működik az Ifjúsági Matematikai Kör Reiman István vezetésével és igen eredményesek a Középiskolai Matematikai Délutánok, amelyeket Tolnai Jenő szervez. Ezek havonta egyszer zajlanak le Budapesten, látogatottság 70—80 tanuló (és hasonló időközökben számos vidéki tagozatban (Debrecen, Győr, Pécs, Szeged stb.)

Több éve működik már az Általánosiskolai Szakkör, Reményi Gusztávné vezetésével; ezen VII—VIII. osztályos ált. iskolai tanulók vesznek részt. Ezek a szakkörök nagyon népszerűek és sajnálatos, hogy korlátozni kell a résztvevők számát, minthogy nem tudunk kellő számú szakmai vezetőt biztosítani a nagyon sok munkát igénylő szakköri vezetési tisztségre.

Ez évben a TIT-tel közös rendezésben megindult az általános iskolások számára a „Kis Matematikusok Klubja". Ez igen nagy sikerrel járt, úgyhogy a Szakosztály és a TIT továbbfejlesztését tervezi.

IV. Vidéki tagozatok

A vidéki tagozatok munkájában örvendetes fejlődés jeleit kell megállapítanunk. A tagozatok aktivitása fokozódott és vidéken is általában megnőtt a társulati munka iránti érdeklődés. A központ és a tagozatok kapcsolatában megjavult az együttműködés, de a vidéki tagozatok támogatásának további fokozására lenne szükség.

Új színfoltot jelentett a Társulat életében a vidéki tagozatok tapasztalatcseréjének megindítása. A háromnapos látogatások programját a vendéglátó tagozat vezetői a szakfelügyelőkkel karöltve állítják össze. A programban óralátogatások, szakkörön, vagy továbbképzési napon való részvétel szerepel. Az egriek Miskolcra, a miskolciak Egerbe, a pécsiek Veszprémbe, a Bács megyeiek Debrecenbe történő látogatása egy nagyszabású program első stádiuma. Sajnálatos, hogy a tanár tagtársak nagy elfoglaltsága akadályozza a program kibővítését.

A vidéki tagozatok rendezvényeinek nagyrésze a középiskolai és általános iskolai tanárok, illetőleg a diákok részére szól. Tudományos előadások rendszeresen a debreceni, a borsodi és a szegedi tagozatban folynak, de számos vidéki tagozatban hangzanak el a szakmai fejlődést elősegítő előadások.

A legaktívabb tagozat a borsodi tagozat. Ennek munkája mind tudományos, mind műszaki matematikai, mind oktatási vonalon igen eredményes. Munkája iránt nagy érdeklődés nyilvánul meg a műszaki értelmiség és a tanárok körében.

Egyes tagozatok a környező városokra is kiterjesztik működésüket, különösen eredményes ez a borsodi és győri tagozatnál. Sikeres működésük jól átgondolt, tervszerű munka és mintaszerű szervezés eredménye.

Igen eredményesen működik a debreceni, győri, pécsi, szegedi, szombathelyi tagozatunk, de jó munkát végez az egri, soproni, székesfehérvári, veszprémi és nyíregyházi tagozatunk is. A kecskeméti és a szolnoki tagozat működésével kapcsolatban nehézségek mutatkoznak. A kaposvári tagozat csak most kezdte el munkáját.

V. Bizottságok

1. *A Matematika Alkalmazásai Bizottság* időnként összeül és hasznos tanácsokkal támogatja a Matematika Alkalmazásai Szakosztály munkáját. Különösen a Szakosztály munkatervének összeállításában és az MTESZ Társegyesületekkel való kapcsolat kiépítésében nyújt hathatós támogatást.

2. *Az Oktatási Bizottság* hasonló szerepet tölt be az Oktatási Szakosztály vonatkozásában. Ez a bizottság rendkívül aktív, fontos elvi és gyakorlati kérdéseket vitat meg, amelyek a tanári oktató munkában merülnek fel. A bizottság foglalkozott többek között a matematikai osztályok problémáival, az érettségi vizsgákra vonatkozóan egy érdekes tervezetet készített a Művelődésügyi Minisztérium részére, és különösen hathatós segítséget nyújt a Szakosztály által szervezett vándorgyűlések célkitűzéseinek és programjának összeállításában.

3. *A Felsőoktatási Bizottság* feladata az egyetemeken folyó matematikaoktatás, a matematika felső oktatásának elvi és gyakorlati problémáinak megvitatása. Ez a bizottság csak ritkán ülésezik.

4. *A Külügyi Bizottság* rendkívül fontos feladatokat lát el. Ez a bizottság határoz a bekért javaslatok alapján a meghívandó külföldi előadók és a társulati kiküldetésben külföldre utazók személyét illetően. A bizottság a szükséghez mérten egy-két havonként ül össze. Évenként kb. 20 külföldi matematikus meghívásáról dönt, akik egy-egy előadásra, esetenként 500,— Ft előadói tiszteletdíjjal jönnek el. Ezek az előadók a szakosztályok ülésein, vagy vidéki tagozatokban tartanak előadást.

A kollokviumokra meghívandó külföldi szakemberekről az illetékes szervező bizottság hoz határozatot.

Nemcsak az ide látogató külföldi szakemberek létszámának növekedésében állt be örvendetes változás, hanem a kiutazók vonatkozásában is. Mindenek előtt megemlítendő a Csehszlovák Matematikai és Fizikai Társulattal, valamint az NDK Matematikai Társulatával fennálló csereszerződésünk, amelynek keretében (évi 50, illetőleg 20 nap) részben társulati tagjaink vehetnek részt a partner kollokviumain, részben pedig középiskolai tanár tagtársainkból álló delegáció látogat meg oktatási intézményeket. Más szocialista állammal kötendő csereegyezményre vonatkozóan történt kezdeményező lépés, de anyagi lehetőségeink nem teszik lehetővé további csereegyezmények kötését.

Devizakeretből kevés külföldi kiküldetésre van lehetőség és igen kevés tagtársunk vehetett részt tőkés államokban szervezett rendezvényeken. Kivétel az Osztrák Matematikai Társulat 1963-as Differenciál- és integrálegyenlet kollokviuma, amelyen 11 társulati tag vett részt az osztrák fél vendégeként.

Több esetben javasolta a Külügyi Bizottság az MTESZ Nemzetközi Kapcsolatok Osztályának egyes társulati tagok útiokmányainak beszerzését külföldi meghívás alapján történő kiutazásra. Ilyen esetekben a kiküldött maga fedezte kiutazásának költségeit. Ha a kiutazás a Társulat kezdeményezésére történik, akkor a kiküldöttek költségeik 30—50 %-át térítik.

5. *Könyvbizottság* feladata a matematikai kiadványok figyelemmel kísérése, a megjelent könyvek recenziójának biztosítása, illetőleg új könyvek kiadására való javaslattétel a különböző kiadóknál.

A Könyvbizottság számos könyvkiadó vállalattal vette fel a kapcsolatot, és ezeknek eredményeképpen több olyan könyv kiadására vonatkozó döntés született, amelyeket a Könyvbizottság javasolt. A Bizottság komoly programot állított össze, amelynek megvalósítása folyamatban van.

6. *Állami-díj Bizottság* feladata a társulati javaslat elkészítése a következő évi állami díjakra vonatkozóan. A személyi javaslatokat az elnökség tagjaitól és a tagozatoktól beérkező javaslatok alapján készíti el.

VI. Nagyrendezvények

A Társulat minden évben 2—3 kollokviumot, illetőleg vándorgyűlést szervez.

1963-ban: a Matematika Közgazdasági Alkalmazásairól és az IMU támogatásával az Abel-csoportok témaköréből folyt le kollokvium.

1964-ben: Topológiai, Matematikai Statisztika Ipari Alkalmazásai, Lineáris terek és lineáris operátorok kollokviumok voltak.

1965-ben: Geometria, Differenciál- és Integrálegyenletek és Alkalmazásaik kollokviumokat rendeztünk.

1966-os tervben a Gráfelmélet kollokvium szerepel. A Rekurzív Függvények és Alkalmazásaik kollokviumot, amelyet az IUHPS támogatásával szervezünk, 1967-re halasztottuk.

1967-ben: Információelméleti kollokvium van tervbe véve.

Minden évben az Oktatási Szakosztály szervezésében vándorgyűlést rendezünk. A vándorgyűlésen olyan kérdésekről hangzanak el előadások és folynak viták, amelyek elsősorban a középiskolai matematika tanárok érdeklődésére tartanak számot.

1963-ban Egerben: „A geometria tanítása a középiskolában".

1964-ben Miskolcon: „A matematika alkalmazásai".

1965-ben Keszthelyen: „A középiskolai matematika tanterv új témái".
1966-ban Szombathelyen: „Új irányok a matematika oktatásában".

Kollokviumaink kivétel nélkül igen sikeresek. A hazai és a külföldi érdeklődés kollokviumaink iránt örvendetesen emelkedik. A kollokviumok létszáma: 20—35 magyar és kb. ugyanannyi külföldi, akiknek egy része saját egyeteme, vagy saját maga költségén vesz részt. Kivétel a két alkalmazási kollokvium, amelyeken a résztvevők létszáma lényegesen nagyobb volt.

A kollokviumok költségeit nagyrészt Társulatunk költségvetéséből fedezzük. Régebben a Magyar Tudományos Akadémiától is kaptunk támogatást. A magyar résztvevők költségeinek egy részét munkahelyeik kiküldetési költségek címén térítik.

A vándorgyűlések látogatottsága évről évre emelkedik, a létszám 200-on felül van, az idén közel 300 résztvevőre számítunk. A résztvevők túlnyomó többsége középiskolai tanár, de számos egyetemi oktató is érdeklődik a vándorgyűlés iránt. Új színfoltot jelentett az elmúlt évben külföldi előadó szereplése. (A. Z. Krygowska, Lengyelország).

A vándorgyűlésen résztvevők költségei nagy részét kiküldetési költségek címén az illetékes tanácsok fedezik.

VII. Pályázatok, pályadíjak, versenyek

1. A Társulat számos matematikai tanulóversenyt szervez évenként. Ezek: Arany Dániel verseny, kezdő és haladó (középiskolák első, illetőleg második osztályai részére), a Művelődésügyi Minisztériummal közösen az Országos Középiskolai Tanulmányi verseny (középiskolák felső 2 osztálya részére), továbbá a régi hagyományokra visszatekintő Kürschák József-tanulóverseny.

Itt említhető meg a Társulat szerepe a Nemzetközi Matematikai Diák-olimpiászok előkészítésében is.

2. A Társulat évenként megrendezi az egyetemi hallgatók Schweitzer Miklós-emlékversenyét. A versenyt kétévenként a budapesti egyetemeken dolgozó tagtársaink szervezik, a fennmaradó években pedig váltakozva a szegedi, illetőleg a debreceni egyetemeken működő tagtársainkra hárul a verseny rendezésének feladata.

3. A Társulat évek óta szorgalmazza a főiskolai versenyek újraindítását, ez az idén meg is valósult.

4. A Társulat évenként kiadja a Beke Manó-emlékdíjat a matematika oktatásában és népszerűsítésében elért kimagasló eredmények elismeréseképpen.

5. Kiváló tudományos eredményeket elért fiatal matematikusok munkájának jutalmazására évenként Grünwald Géza-emlékdíjat adunk ki.

A Beke Manó és a Grünwald Géza-emlékdíjak odaítélésére az Elnökség évenként bizottságokat szervez. Ezek a beérkezett javaslatok alapján gondos körültekintéssel hoznak döntést a díjak odaítélésében. Sajnálatos, hogy anyagi kereteink nem teszik lehetővé, hogy a díjak összege a jutalmazás alapjául szolgáló érdemekhez méltó legyen.

VIII. Kiadványok

A Társulat szerkesztésében (részben a Művelődésügyi Minisztériummal közösen) 3 szakfolyóirat jelenik meg: Matematikai Lapok, Középiskolai Matematikai Lapok és a Matematika Tanítása.

A folyóiratok rendszeres megjelenését a szerkesztő bizottságok biztosítják. A szerkesztő bizottságok a szükségnek megfelelően tartják üléseiket. A folyóiratok fontos szerepet töltenek be a Társulat életében.

A középiskolai oktatómunka segítése céljából számos brosúrát készítettünk és küldtünk ki sokszorosítva a tagozatoknak, amelyek az érdeklődő középiskolai tanárok részére bocsátották a sokszorosított anyagot (pl. Pólya-cikk), számos esetben középiskolai matematikai feladatokat. Az Oktatási Szakosztály gondoskodik a sokszorosításra alkalmas anyagok kiválasztásáról.

IX. A vezetőszervek működése

A vezetőszervek a szükséghez képest rendszeresen üléseznek.

1. *Küldöttközgyűlést* 1963-ban és 1964-ben tartottunk. Az 1963-as közgyűlés megvitatta a lelépő tisztikar jelentését és megválasztotta az új tisztikart. Az 1964-es küldöttközgyűlésen az alapszabályok megvitatása volt a leglényegesebb napirendi pont.

2. *A Választmány* 1963-ban és 1965-ben tartott ülést. Ezeken meghallgatta a Matematika Alkalmazásai Szakosztály beszámolóját, a főtitkár jelentését az elmúlt időszak munkájáról és a készülő alapszabálytervezetet vitatta meg.

3. *Az Elnökség* évenként 3—4 ízben ült össze. Az Elnökség jelölte ki az állandó bizottságokat és hozott döntést a nagyrendezvényekről. Az Elnökség évenként döntött a jutalmak odaítéléséről; a jutalmazás alapja vagy hosszú időn át végzett aktív és eredményes társulati tevékenység, vagy pedig valamelyik nagyrendezvény lebonyolításában kifejtett igen intenzív és eredményes munka. Az Elnökség meghallgatta a Szakosztályok beszámolóit és döntött a Társulat költségvetésének felosztásáról és a munkatervről.

4. *Az Intéző Bizottság* évenkét 4—6 ízben ülésezett. Ülésein a folyamatos munka biztosítása érdekében intézkedett, továbbá fontos határozatokat is hozott. Így pl. kiemelendő az a fontos határozata, hogy az örvendetesen gyarapodó könyvtár fejlesztésénél elsősorban a matematikai didaktikai anyagok veendők figyelembe. Az Intéző Bizottság rendszeresen meghallgatta egy-egy vidéki tagozat vezetőségének beszámolóit e tagozatok munkáiról és problémáiról. Ezek a beszámolók rendkívül hasznosak, megvitatásuk igen termékeny és a beszámolók tapasztalatait a Társulat és a vidéki tagozatok igen jól tudják hasznosítani.

X. A társulati apparátus és az MTESZ kapcsolata

Az adminisztratív munka a Társulat működésének aktivizálódásával emelkedett és a jelenlegi munkatársak — áldozatkész és nagy hozzáértéssel végzett munkájuk ellenére — sem tudják biztosítani a zökkenőmentes működést. Sok feladatot ró ránk a kollokviumok szervezése, külföldi meghivottak és társulati kiküldöttek utazási ügyei, és ennek jónéhányszor a napi munka látja kárát. Szükségesnek látszik a munkatársak létszámának emelése: ezzel az MTESZ is egyetért, de státusz hiánya miatt nem tud segíteni. Társulatunk költségvetése terhére ideiglenesen működött egy könyvtáros, aki a nagyértékű könyvtárat kezelte.

A Társulat titkárságának minden munkatársát köszönet illeti meg, sokszor nagy áldozatokat követelő munkájukért. Nagyrészt az ő érdemük, hogy társulati rendezvényeink megfelelően előkészítve, jól zajlanak le.

Az MTESZ-szel való kapcsolatunk jó. Sok esetben vettük igénybe az MTESZ különböző szerveinek segítőkészségét, és általánosan mondható, hogy az MTESZ megfelelő szervei megértéssel fogadják kéréseinket. A Társulatnak juttatandó állami támogatás (260 ezer Ft) megállapításánál is messzemenően figyelembe veszik a Társulat sajátos szempontjait és igényeit.

XI. A Társulat kapcsolata a Magyar Tudományos Akadémiával és a Művelődésügyi Minisztériummal

Az MTA-val való kapcsolataink nagy része abban nyilvánul meg, hogy akadémikusok résztvesznek a társulati élet különböző területein. Régebben a közös kollokviumok, ill. az MTA támogatásával rendezett kollokviumok együttműködésre adtak alkalmat a III. Osztály apparátusával, ez a kapcsolat azonban a rendezvények különválása miatt megszűnt. Néhány alkalommal problémát jelentett az, hogy az Akadémia nem vállalta néhány matematikus utazási okmányainak beszerzését, az érdekeltek Társulatunkhoz fordultak és csak nagy utánjárással lehetett rövid idő alatt biztosítani a kiutazást.

A Művelődésügyi Minisztériummal főleg a középiskolai ügyekben van szoros együttműködés; ezen a vonalon jó kapcsolatok alakultak ki. Az egyetemi főosztállyal nagyon lazák a kapcsolatok, ebben a tekintetben sok javítanivaló van."

Az írásbeli beszámolót a főtitkár a helyszínen az alábbiakkal egészítette ki: „Tisztelt Közgyűlés! Abban a kellemes helyzetben vagyok, hogy a lelépő tisztikar tevékenységének három évéről szóló beszámolót rövidre foghatom, hiszen az Elnökség által jóváhagyott részletes és a szükséges adatokat tartalmazó jelentést a küldöttek sokszorosítva kézhezkapták és tanulmányozhatták. Legyen szabad ezért beszámolómban csupán néhány észrevételre szorítkoznom.

Azt hiszem, eléggé általános véleményt fejezek ki, amikor örömmel állapítom meg, hogy az elmúlt időszakban a Társulat tevékenysége, a tagságnak a társulati munkában való közreműködése tovább fokozódott. Sikerrel járt a tisztikarnak az az intenciója, hogy a társulati munkát lehetőleg egyenletesen ossza el, minél több tagot vonva be a társulati élet vérkeringésébe. A szakosztályok működése aktivizálódott; ez örvendetes módon nyilvánult meg az Oktatási Szakosztály vonatkozásában, de eredményes volt a legifjabb szakosztály: a Matematika Alkalmazásai Szakosztály tevékenysége is, különösen a megalakulást követő időszakban. Biztató jelenség a közép- és általános iskolai tanár kartársak és az alkalmazásokkal foglalkozó szakemberek érdeklődésének növekedése társulati rendezvényeink iránt. A megválasztandó új tisztikar feladata kell hogy legyen ezen érdeklődés ébrentartása és a növekedő igények kielégítése.

Az 1963-as Közgyűlésen több felszólalás foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy a társulati tagság zömét alkotó középiskolai tanárok szerepének fokozása szükséges a társulati életben. Ez az igen helyes elv az Elnökség számos intézkedésében megnyilvánult, és hogy nem járt még nagyobb eredménnyel, az csak a tanárok nagy elfoglaltságában keresendő. Kívánatos lenne megkeresni annak a módját, hogy a Társulat Pesten és vidéken egyaránt még tartalmasabb keretet adjon a tanárság rendszeres szakmai összejöveteleinek, Ennek céljaira megfelelő anyagi fedezetet kell biztosítani. Új jelenség a Társulat működésének kiterjesztése általános iskolai vonatkozásban. Ennek a tevékenységnek szervezett keretbe foglalása a jövő egyik fontos feladata.

A MTESZ társegyesületekkel való kapcsolataink kezdenek kialakulni, de ezek még nem elég szervezettek, nem elég rendszeresek. Kívánatos lenne e téren is lényeges javulást elérni. Ebben a vonatkozásban igen sokat várunk a Matematika Alkalmazásai Szakosztálytól és az alkalmazási területeken működő tagtársainktól.

A Bizottságok közül elsősorban a Külügyi és az Oktatási Bizottságok működését kell kiemelnem. A Külügyi Bizottság operatív jellegű, és sokrétű feladatát — számos nehézség ellenére — jól oldotta meg. Az Oktatási Bizottság több fontos elvi és gyakorlati jellegű problémát vitatott meg a matematika általános- és középiskolai oktatásával kapcsolatosan. (Utalok itt pl. az érettségi vizsgák rendjére vonatkozó javaslatra.) Az oktatási ügyeket érintő társulati feladatokat a középiskolai tanár tagtársak igen eredményesen látták el. Az Elnökség életre hívta a Felsőoktatási Bizottságot, amely sajnos kevéssé működött, bár reá is várt néhány feladat. A Mate-

matika Alkalmazásai Bizottság — jó kezdés után — az utóbbi időben alig fejtett ki tevékenységet.

A vezető szervek aktivitása az elmúlt 3 évben kedvező képet mutatott. A megválasztott tisztségviselők zöme aktívan vett részt a munkában. Akadtak olyanok is, akik elfoglaltságuk miatt alig, vagy kevéssé tudtak bekapcsolódni a társulati munkába. A vezető szervek által hozott intézkedések többsége helyesnek bizonyult. Egy kérdés: az alapszabály ügye túlzott mértékben vette igénybe a tagság egy részét, többször éles vitákra vezetett, amelyeknek elhúzódása miatt a vidéki tagság egyáltalában nem, vagy csak alig hallathatta szavát fontos kérdésekben. Kevéssé lényeges, ügyrendi kérdésekről hosszú vita folyt és fontos, a társulati tevékenység megvitatását célzó kérdések háttérbe szorultak. Ez a tény sajnos eléggé negatív vonása az elmúlt három évnek, túlzottan nagy szellemi és anyagi energiát emésztve fel. Nagyon bízom abban, hogy az új alapszabály életbeléptetésével ez az időszak lezárult. Társulatunkban a terméketlen vitákat az érdemi munka, a közös cél érdekében folytatott tevékenység váltja majd fel.

A vidéki tagozatok munkájában is örvendetes a fejlődés. Sajnálatos, hogy a tagság nagy elfoglaltsága vidéken is erős korlátot szab a társulati tevékenységnek. Aktivitás dolgában továbbra is a Borsodi Tagozat viszi el a pálmát: igen jó szervező munkával, jól átgondolt terv szerint aknázzák ki a lehetőségeket. De számos más tagozatunkban is jó eredményeket értünk el a társulati munka sok területén. Új színfolt volt a tapasztalatcsere-mozgalom tagozataink között; csak sajnálni lehet, hogy ennek a jó kezdeményezésnek nem volt folytatása, a helyettesítések megoldhatatlansága miatt.

Hadd szóljak néhány szót a központ és a vidék kapcsolatáról is. Úgy vélem, hogy ez nem volt rossz, bár egyes esetekben gyorsabb, vagy hathatósabb intézkedés kívánatos lett volna. A következő időszakban bizonyára tovább fejlődik majd a vidék támogatása a Társulat központja részéről; erre meglesz a lehetőség a két titkári funkció révén: a titkárok egyetlen, de annál fontosabb feladata a vidéki tagozatok ügyeinek intézése lesz.

Tisztelt Közgyűlés! A mai Közgyűlés keretében emlékezünk meg Társulatunk elődje megalakulásának háromnegyed évszázados fordulójáról. A Bolyai Társulat sokkal fiatalabb, de jelentőségében, tevékenységének extenzitásában és intenzitásában, társadalmi funkciójában lényegesen túlnőtte elődjét. Ma a matematikával foglalkozók és a matematika iránt érdeklődők száma sokszorosa a réginek, a matematika szerepe fokozatosan növekszik az oktatásban, a tudományos kutatásokban és a közvetlen alkalmazásokban, és ez tükröződik Társulatunk életében is. Társulatunk egyre fontosabb szerepet tölt be az általános fejlődésben, és ránk társulati tagokra, ez komoly feladatokat ró társulati tevékenységünkben. Mai Közgyűlésünkre két fontos feladat vár: elbírálni azt, hogy helyes úton járt-e a Társulat az elmúlt időszakban, helyesen használta-e fel nemcsak államunk hathatós anyagi és erkölcsi támogatását, hanem a társulati tagságban rejlő hatalmas erőtartalékokat is. De feladata lesz kijelölni azt az utat, amelyet a Társulat célkitűzéseinek minél eredményesebb megvalósítása érdekében kell követnünk a most következő ciklusban. Tisztelettel kérem beszámolóm elfogadását."

Az elnök megköszönte a főtitkári beszámoló megtartását és felkérte Fried Ervint jelentése megtartására.

PÉNZTÁROSI JELENTÉS

Az 1953., 1954. és 1955. költségvetési évekről

A Társulat *bevételei* három részből állnak:

1. Az MTESZ-en keresztül Társulatunk állami támogatásban részesül.
2. Társulatunk tagjai tagdíjat fizetnek.

3. Kollokviumok vagy más rendezvények céljaira állami szervektől anyagi támogatást kapunk, illetve a résztvevők részvételi díjat fizetnek.

Bevételek (ezer Ft-ban)

	1963.	*1964.*	*1965.*
Állami támogatás	187	230	220
Tagdíj	3	16	11
Jogi tagdíj	1	1	1
Rendezvények	78	155	95
Térítések	—	10	—
	269	412	327

A rendezvény támogatás részletezése:

1963-ban: Az Akadémia III. Osztályával közösen szervezett Abel-csoportok kollokvium költségvetése az MTA-nál szerepel. Az egri vándorgyűlés bevétele 18,6; A Matematika Közgazdasági Alkalmazásai kollokviumé: 58; Versenydíjak támogatása: 1,5.

1964-ben: Valószínűségszámítás fizikai alk. kollokviumé: 1,7; Topológiai kollokvium bevétele: 13,2; Miskolci vándorgyűlésé: 28,7; Lineáris terek koll.: 28,1; A Matematikai Statisztika Ipari Alkalmazásai: 83,8.

1965-ben: Keszthelyi vándorgyűlés bevétele: 30,1; Differenciálegyenletek kollokviumé: 38,1; Geometria kollokviumé: 27,1.

Társulatunk *kiadásai* az alábbiakból tevődnek össze:

1. A Társulat a 01-es és két 02-es adminisztratív és egy 07-es (könyvtáros) munkatársának fizetése.
2. A társulati helyiségek fenntartási költségei.
3. Működési kiadások.

Az 1. és 2. alatti kiadásokat az MTESZ központilag kezelt költségvetéséből közvetlenül utalja ki.

Az alábbiakban a működési kiadásokat részletezzük.

Kiadások (ezer Ft-ban)

	1963.	*1964.*	*1965.*
Belföldi kiküldetések	16	12	14
Külföldi kiküldetések	15	37	11
Külföldiek vendégül látása	18	10	13
Nagyobb rendezvények	97	209	141
Nyomtatvány, írószer, kiadv.	21	26	29
Reprezentáció	8	7	7
Posta, telefon, egyéb szolg.	18	20	15
Vidéki csoportok támog.	17	21	23
Alkalmi munkák	12	22	15
Pályadíjak	18	18	23
Jutalmazások	17	17	15
Társad. munk. meghaladó tev.	7	4	3
Berendezés pótlása	1	5	1
Könyvtár beszerzés	4	4	17
	269	412	327

A rendezvények kiadásainak részletezése:

1963-ban: Közgyűlés: 8,5; Ifjúsági Matematikai Kör Ankétja: 2,6; Egri vándorgyűlés: 25,8; A Matem. Közgazdasági Alk. Koll.: 57,9.

1964-ben: Ifjúsági Matematikai Kör Ankétja: 1,2; Valószínűségsz. fiz. alk. koll.: 1,2; Közgyűlés: 12,0; Topológiai koll. 31,0; Lineáris terek koll.: 63,4; A Mat. Stat. Koll.: 69,3; Miskolci vándorgyűlés: 30,1;.

1965-ben: Ifjúsági Matematikai Kör: 0,5; Keszthelyi vándorgyűlés 43,5; Differenciálegyenlet koll.: 46,9; Geometriai koll.: 47,0.

Ezután Szilárd Károly ismertette az Ellenőrző Bizottság jelentését. „A Bolyai János Matematikai Társulat Ellenőrző Bizottsága 1966. június 16-án tartott ülésén megvizsgálta Fried Ervin pénztárosnak a Közgyűlés elé terjesztendő jelentését és a jelentést alátámasztó bizonylatokat. A Bizottság vizsgálata megállapította, hogy a Társulat a rendelkezésére bocsátott anyagi eszközöket lényegében a költségvetési terveknek megfelelően használta fel. Az előirányzott kiadásokkal szemben 1965-ben kereken 35 000 Ft megtakarítás mutatkozik, aminek fő okai a következők: az előirányzathoz képest csökkentek a reprezentáció, a posta, a rendezvények költségei, a külföldiek vendégül látásának költsége és egyes vidéki tagozatok sem használták fel a rendelkezésükre bocsátott összegeket. A Bizottság a megtakarítás tényét általában kedvezően ítéli meg, azonban sajnálatosnak tekinti azt a körülményt, hogy a vidéki tagozatok nem mindig éltek a rendelkezésükre bocsátott anyagi eszközökkel.

A tagdíjmorál az 1966. évben némi javulást mutat, ami azonban még mindig nem kielégítő, hiszen kb. 1500 tag közül az év első felében nem egészen 500 fő fizetett tagdíjat. Ezen a téren gyökeres változásra van szükség. Az Ellenőrző Bizottság javasolja a Közgyűlésnek, hogy foglalkozzék a tagdíjmorál megjavításának kérdésével.

Az Ellenőrző Bizottság 1963. évi javaslata alapján a Társulat a könyvtár kezelésére függetlenített alkalmazottat vett fel. Ennek ellenére az értékes könyvtár katalogizálása ez ideig még el sem kezdődött, mert a könyvtári alkalmazottat egyéb adminisztrációs munkákra használták fel. Változatlanul szükségesnek tartjuk, hogy a könyvtár katalogizálása mielőbb megtörténjék.

A pályadíjak és a versenydíjak vizsgálata során megállapítottuk, hogy pl. 1965-ben a Grünwald Géza-díj kiosztott második díja 1300, a Schweitzer Miklós-díj első díja 800,—, második díja 500,—, a Kürschák József-verseny első díja 500,—, második díja 400,—, az Arany Dániel-verseny első díja 250,—, második díja 150 forintot tett ki. Ugyanakkor a Művelődésügyi Minisztérium által jutalmazott Országos Tanulmányi Verseny első díja 1000 Ft. Az a véleményünk, hogy a Társulat által kiosztott pálya- és versenydíjak a mai viszonyokhoz képest túl alacsonyak és kívánatos volna azok jelentős felemelése esetleg a Művelődésügyi Minisztériumtól nyert anyagi támogatás révén.

A Bizottság 1963. évi jelentése utal arra, hogy szükséges a középiskolai tanárok számára, hogy tapasztalatcsere céljából külföldi és belföldi oktatási intézményeket látogassanak meg. A Társulat Vezetősége ebben a vonatkozásban megfelelő intézkedéseket tett azóta az anyagi előfeltételek biztosítása révén. Sajnos a Társulaton kívül álló okok (pl. kerületi, megyei tanácsok engedélyének hiánya) miatt ezek a tapasztalatcserék csak részben valósulhattak meg. Szükségesnek látjuk, hogy az akadályok elhárítása érdekében a Társulat megválasztandó vezetősége kezdeményezzen tárgyalásokat az illetékes főhatósággal.

Az előadottak alapján a Bizottság javasolja a pénztárosi jelentés elfogadását és a felmentvény megadását.

Hajós György elnök felkérte Barna Bélát, a Jelölőbizottság elnökét, ismertesse a Jelölőbizottság javaslatát és egyben közölte a szavazással kapcsolatos tudni valókat.

Barna Béla, a Jelölőbizottság elnöke ismertette a küldötteknek előzetesen írásban kiküldött jelölőlistát. Ismertette továbbá a Társulathoz a Közgyűlés időpontja előtt 5 nappal beérkezett kiegészítő javaslatokat.

Több kérdés hangzott el a szavazás technikai részleteit illetően. E hozzászólásokra adott válasz után az elnök felkérte a szavazatszedő bizottság elnökéül Hosszú Miklóst és tagjaiul: Tandori Károlyt, Hnisz Lászlót, Katona Gyulát, Kővári Károlyt, Járosi Andrást és Szász Domokost. Ezután következett az elhangzott beszámolók megvitatása. A vita során felszólaltak: Pálfy Sándor, Szász Ferenc, Császár Ákos, Hnisz László, Székely Gábor, Alpár László, Göndöcs László, Alpár László, Valkó Endre, Szász Ferenc, Surányi János.

E felszólalások elhangzása után az elnök a délelőtti ülésszakot bezárta.

Szünet

Szünet után az elnök megnyitó szavaiban üdvözölte a Mathematikai és Physikai Társulat megalakulásának 75 éves évfordulója alkalmából társegyesületünk az Eötvös Loránd Fizikai Társulat itt megjelent képviselőit. Személy szerint üdvözölte Gyulai Zoltánt az Eötvös Társulat elnökét és Szigeti György főtitkárt. Megemlítette, hogy az Eötvös Loránd Fizikai Társulat ez év szeptemberében külön megemlékezést tart a két társulat elődjének 75 éves jubileuma alkalmából. Felkérte Szénássy Barnát, hogy tartsa meg megemlékező előadását. Szénássy Barna előadásának szövegét a Matematikai Lapok jelen száma közli.

Szénássy Barna ünnepi megemlékezése után Szigeti György akadémikus, a Társulat főtitkára, üdvözölte a Bolyai János Matematikai Társulat Közgyűlését és tagságát. Hajós György elnök megköszönte az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnökének, főtitkárának, valamint képviselőinek hozzájárulását a Közgyűléshez.

Néhány perces szünet után az elnök bejelentette a délelőtti vita folytatását. Minthogy a beszámolókhoz több hozzászólás már nem volt, Fuchs László főtitkár válaszolt a főtitkári beszámolóhoz elhangzott hozzászólásokra, kiegészítésekre. A Közgyűlés ezután elfogadta a főtitkári beszámolót, és a pénztárosi jelentést. Megadta a felmentvényt a lelépő tisztikarnak.

Az elnök felkérésére Császár Ákos ismertette az alapszabály kifogásolt 20. §-ára vonatkozó módosító javaslatát. Tájékoztatta a Közgyűlést az e célra kiküldött bizottság munkájáról.

Az alapszabály 20. §-ának kérdéséhez Hajós György, Surányi János és Fuchs László szóltak hozzá. A Közgyűlés ezután egyhangúlag elfogadta a 20. § javasolt szövegét. (A közgyűlési beszámolóhoz csatlakozik az alapszabály elfogadott és jóváhagyott szövege).

Fuchs László javaslatára a Közgyűlés felszólítja az Elnökséget és a Választmányt a Társulat ügyrendjének kidolgozására, lehetőleg egy éven belül.

Surányi János tagdíjmódosító javaslatot nyújtott be. Az erről való döntést a Közgyűlés az Elnökség hatáskörébe utalta.

A beadott javaslatok feletti szavazás után Hosszú Miklós, a szavazatszedő bizottság elnöke ismertette a szavazás eredményét, az egyes jelöltekre leadott szavazatok számát. A Társulat Közgyűlése tiszteletbeli elnökül megválasztotta

Szász Pált,

tisztségviselőkül pedig a következőket:

elnök: HAJÓS GYÖRGY
alelnök (budapesti): SURÁNYI JÁNOS *vidéki:* MARÓT REZSŐ
főtitkár: CSÁSZÁR ÁKOS
titkár: Dunán inneni: REMÉNYI GUSZTÁV *dunántúli:* CZAPÁRY ENDRE
pénztáros: SCHMIDT TAMÁS

Tudom. Szakosztály	*Mat. Alk. Szakosztály*	*Oktatási Szakosztály*
elnök: RAPCSÁK ANDRÁS	PRÉKOPA ANDRÁS	GÁDOR ENDRÉNÉ
alelnök: VINCZE ISTVÁN	HEPPES ALADÁR	REMÉNYI GUSZTÁV
titkár: SZÁSZ DOMOKOS	KATONA GYULA	KŐVÁRY KÁROLY

Külügyi Bizottság

elnök: RÉNYI ALFRÉD — *titkár:* RÉVÉSZ PÁL

8 tag:	CZÁCH LÁSZLÓ	FODOR GÉZA	SARKADI KÁROLY
	DEÁK ERVIN	GENZWEIN FERENC	VINCZE ENDRE
	FENYŐ ISTVÁN	GYIRES BÉLA	
3 póttag: (a behívás sorrendjében)			
	MOLNÁR JÓZSEF szkf.	JUHÁSZ ISTVÁN	RÓZSA PÁL

Ellenőrző Bizottság

elnök: TANDORI KÁROLY — *titkár:* ALPÁR LÁSZLÓ

3 tag:	MEDGYESSY PÁL	NEMETZ TIBOR	RÉDLING ELEMÉR
2 póttag: (a behívás sorrendjében)			
	MERZA JÓZSEF	PÁLMAY LORÁND	

Fegyelmi Bizottság

elnök: HOSSZÚ MIKLÓS — *titkár:* PETRUSKA GYÖRGY

2 tag:	DÉR ZOLTÁN	REIMAN ISTVÁN
2 póttag: (behívás sorrendjében)		
	BALÁZS JÁNOS	ERDŐS JENŐ

IMU Bizottság

elnök: VARGA OTTÓ — *titkár:* VARGA TAMÁS

10 tag:	CSÁSZÁR ÁKOS	KALMÁR LÁSZLÓ	SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA
	FEJES TÓTH LÁSZLÓ	RAPCSÁK ANDRÁS	TURÁN PÁL
	FUCHS LÁSZLÓ	RÉNYI ALFRÉD	
	HAJÓS GYÖRGY	SURÁNYI JÁNOS	

Választmány: 28 tag

ACHÁTZ IMRÉNÉ	IMRECZE ZOLTÁNNÉ	SZÁSZ GÁBOR
ÁCS PÁL	JÁROSI ANDRÁS	SZENDREI JÁNOS
BATÁR ZOLTÁN	KERTÉSZ ANDOR	SZÉKELY GÁBOR
BOKOR GÉZA	KONCZ KÁROLY	SZÉP JENŐ
CSÉBFALVI KÁROLY	KÁRTESZI FERENC	STEINFELD OTTÓ
FREY TAMÁS	LŐRINCZ PÁL	VERES JENŐ
FUCHS LÁSZLÓ	MAKAI ENDRE	
GALLAI TIBOR	MIKOLÁS MIKLÓS	
GÁSPÁR GYULA	NÉMETHY KATALIN	
HAJNAL ANDRÁS	POLLÁK GYÖRGY	
HÓDI ENDRE	REIMAN ISTVÁN	

pót'agok: (a behívás sorrendjében)

1. ANDRÁSFAI BÉLA	5. PELLE BÉLA
2. SCHARNICZKY VIKTOR	6. SZAMOSI JÓZSEFNÉ
3—4. DÖMÖLKI BÁLINT	7. SZELEZSÁN JÁNOS
3—4. KREKÓ BÉLA	8. URBÁN JÁNOS

A szavazatok eredményének ismertetése után Hajós György elnök megköszönte a Szavazatszedő Bizottság munkáját, továbbá a Társulat tagjainak, illetve küldötteinek részvételét a Közgyűlésen. Kiemelte az elmúlt időszakban eredményes munkát végzett főtitkár, Fuchs László munkáját, a tisztikar többi tagjának pedig együttesen mondott köszönetet. Felkérte a Társulat jelenlevő és jelen nem levő tagjait, hogy minden igyekezetükkel azon legyenek, hogy a Társulat további munkáját javítsák. Az elnök e gondolatokkal búcsúzott, megköszönte a részvételt és bezárta a Közgyűlést.

*

Az alábbiakban közöljük a Társulat jóváhagyott alapszabályát:

I. Általános rendelkezések

1. §.

1. A Társulat neve: Bolyai János Matematikai Társulat.
A Társulat neve angolul: János Bolyai Mathematical Society.
A Társulat neve franciául: Société Mathématique János Bolyai.
A Társulat neve németül: János Bolyai Mathematische Gesellschaft.
A Társulat neve oroszul: Математическое Общество им. János Bolyai.
2. A Társulat a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének (továbbiakban: Szövetség) tagegyesülete.
3. A Társulat a Nemzetközi Matematikai Unió (International Mathematical Union, továbbiakban: IMU) tagja.
4. A Társulat a Közgyűlés és a Szövetség hozzájárulásával tagja lehet más nemzetközi tudományos szervezeteknek is.
5. A Társulat az 1891-ben alapított „Mathematikai és Physikai Társulat" matematikai tevékenységét folytatja.
6. A Társulat pecsétje: köriratban „Bolyai János Matematikai Társulat, a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének tagja".
7. A Társulat székhelye: Budapest, működési területe a Magyar Népköztársaság.

II. A Társulat célja és tevékenysége

2. §.

1. A Társulat a Magyar Népköztársaság Alkotmányának szellemében az alábbi célokat követi:
elősegíti
a) a matematikai tudományos kutatásokat;
b) a matematika alkalmazásainak fokozottabb meghonosítását és széles körű elterjesztését;

c) a matematika oktatásával kapcsolatos kérdések megoldását;

d) a matematika népszerűsítését és mindezek keretében társadalmunk világnézeti nevelését.

2. E célok elérése érdekében a Társulat feladata tömöríteni mindazokat a magyar állampolgárokat, akik a matematikai tudomány művelésével, alkalmazásaival, oktatásával vagy népszerűsítésével foglalkoznak, vagy pedig a matematikával kapcsolatban tudománypolitikai tevékenységet fejtenek ki.

3. E célok és feladatok megvalósítása végett a Társulat

a) szervezett lehetőséget biztosít matematikai eredmények ismertetésére, népszerűsítésére, a matematika elvi kérdéseinek haladó szellemű tudományos világnézeten alapuló elemzésére, időszerű tudomány- és oktatáspolitikai kérdések megvitatására;

b) kongresszusokat, kollokviumokat stb. rendez önállóan vagy más szervekkel együtt;

c) matematikai folyóiratokat, szakkönyveket szerkeszt, támogatja a szakirodalmi tájékoztatást;

d) megvitatja és társadalmi úton elősegíti matematikai életünk kérdéseinek megoldását és ennek érdekében szükség esetén javaslatokat dolgoz ki állami szervek részére, illetve ezek felkérésére szakvéleményt ad;

e) felkutatja a matematikai tehetségeket, előmozdítja továbbképzésüket, tanulmányi és emlékversenyeket szervez, pályadíjakat és emlékdíjakat tűz ki;

f) kiépíti és ápolja a tudományos és pedagógiai kapcsolatokat külföldi hasonló egyesületekkel, intézményekkel.

III. A Társulat tagjai

3. §.

1. A Társulat tagjai rendes tagok, tiszteletbeli tagok vagy pártoló tagok.

2. A Társulat rendes tagja lehet minden olyan magyar állampolgár, aki elfogadja a Társulat célkitűzéseit, megvalósításukra képes, részt kíván venni a Társulat tevékenységében, elfogadja a Társulat Alapszabályát és vállalja, hogy rendszeresen fizeti a tagsági díjat.

3. A Társulat tiszteletbeli tagja lehet minden olyan külföldi állampolgár, aki elfogadja a Társulat célkitűzéseit és Alapszabályát.

4. A Társulat pártoló tagja lehet minden olyan természetes vagy jogi személy, aki elfogadja a Társulat célkitüzéseit, s erkölcsileg és anyagilag támogatja a Társulat tevékenységét.

5. A rendes és pártoló tagokat a megfelelő tagozat vezetőségének javaslatára az Elnökség veszi fel. Tiszteletbeli tagokat a Szövetség hozzájárulásával a Választmány vesz fel.

6. Tagfelvételi kérelem elutasítása ellen 15 napon belül a Választmányhoz lehet fellebezni.

4. §.

1. A rendes tagok jogai:

a) részt vehetnek a Társulat minden rendezvényén, továbbá a Társulat vagy a Szövetség megbízásából részt vehetnek külföldi tanulmányutakon, rendezvényeken stb.;

b) kérhetik a Társulat támogatását a Társulat céljaival összefüggő javaslatok megvalósítására;

c) felszólalhatnak a Társulat Közgyűlésén;
d) választójoguk van a Küldöttválasztó Értekezleten;
e) megválaszthatók bármely társulati tisztségre egy évi társulati tagság után;
f) javaslatot, beadványt, panaszt intézhetnek a Társulat bármely testületéhez;
g) megbírálhatják a Társulat bármely testületének vagy tagjának társulati tevékenységét.

2. A rendes tagok kötelességei:
a) megtartani a Társulat Alapszabályát és Fegyelmi Szabályzatát;
b) részt venni a Társulat céljainak megvalósításában;
c) megtartani a Társulat szerveinek határozatait;
d) rendszeresen fizetni a tagsági díjat, a felvétel évét is beleértve.

3. A tiszteletbeli tagok jogai megegyeznek a rendes tagok jogaival, kivéve a 4. § (1) bekezdés *d)* és *e)* pontjában felsorolt jogokat.

4. A tiszteletbeli tagokra a 4. § (2) bekezdés *a)* pontjában felsorolt kötelességek vonatkoznak.

5. §.

1. A természetes személy pártoló tag jogai megegyeznek a rendes tagok jogaival.

2. A jogi személy pártoló tag jogai:
a) képviseltetheti magát a Társulat és a Szövetség rendezvényein;
b) igényt tarthat arra, hogy dolgozói részére a Társulat rendezvényeket szervezzen;
c) kérheti a Társulat segítségét tudományos problémáinak megoldásához és dolgozóinak szakmai továbbképzéséhez.

3. A természetes személy és jogi személy pártoló tagok kötelességei ugyanazok, mint a rendes tagok kötelességei; tagsági díjukat velük egyetértésben az Elnökség külön állapítja meg.

IV. A társulati tagság megszűnése

6. §.

1. A társulati tagság a következő okok folytán szűnik meg:
a) haláleset;
b) kilépés;
c) a tagok sorából való törlés;
d) kizárás.

2. A Társulatból kilépni az Elnökséghez intézett írásbeli bejelentés útján lehet. A tagsági jogok és kötelességek a kilépés bejelentését követő hónap első napjával szűnnek meg.

3. A Társulati tagság szünetel, ha a tag legalább két évi tagsági díj befizetésével elmaradt, mindaddig, amíg tagsági díj tartozását nem rendezi.

4. Azt a tagot, aki legalább két évi tagsági díj hátralékát ismételt írásbeli felszólítás ellenére sem fizeti meg, a Választmány törli a tagok sorából.

5. A Társulatból kizárható az a tag, aki az alapszabályt megszegte, vagy társulati taghoz nem méltó magatartást vagy tevékenységet tanúsított. A kizárás csak fegyelmi határozat alapján történhet. (15. § (2) bekezdés.)

6. A Társulat tagjai sorából kizárt vagy törölt személy a Választmány határozata ellen 15 napon belül a Közgyűléshez fellebezhet. A Fegyelmi Bizottság kizárási javaslatától a fellebbezés elintézéséig a tagság szünetel.

7. Az érdekelt személyt tagságának megszüntetéséről vagy szüneteléséről a Társulat írásban értesíti.

8. A Társulatba való újrafelvétel indokolással kérhető a tagság megszűnését kimondó jogerős határozatot követő fél év elteltével.

V. A Társulat testületei

7. §.

1. A Társulat testületei:
a) a vezető szervek;
b) a központi szervek;
c) a szakosztályok;
d) a tagozatok;
e) a Választmány illetve az Elnökség által kiküldött állandó és időszaki bizottságok;
f) a Küldöttválasztó Értekezlet.
2. A Társulat vezető szervei:
a) a Közgyűlés;
b) a Választmány;
c) az Elnökség.
3. A Társulat központi szervei:
a) az Ellenőrző Bizottság;
b) a Fegyelmi Bizottság;
c) az IMU Bizottság;
d) a Külügyi Bizottság.

VI. A Társulat működésének és vezetésének jellege

8. §.

1. A Társulat a társulati demokrácia és a kollektív vezetés elve alapján működik.
2. A Társulat vezető és központi szerveinek minden tagját választják.
3. A választott szervek és tisztségviselő tagok tevékenységükről beszámolnak a Társulat magasabb vezető szerveinek.
4. A magasabb szerv határozatai kötelezők az alacsonyabb szervre.

VII. A Közgyűlés

9. §.

1. A Közgyűlés a Társulat legfőbb vezető szerve. A Társulatot érintő bármely kérdésben dönthet. A Társulat Közgyűlése küldöttközgyűlés.
2. A Közgyűlés
a) megalkotja és szükség esetén módosítja a Társulat Alapszabályát;
b) megvitatja a Társulatnak a legutóbbi Közgyűlés óta végzett munkáját, meghatározza a soron következő időszak legfontosabb feladatait;
c) felülvizsgálja a Választmány megfellebbezett határozatait, és dönt mindazokban a kérdésekben, amelyeket a Választmány vagy az Elnökség eléje terjeszt;

d) megtárgyalja a tagok által a Közgyűlés időpontja előtt legalább két héttel írásban beterjesztett javaslatokat, illetve dönt e javaslatok érdemi elintézésének előkészítésére vonatkozólag;

e) megvitathatja a Szövetség munkáját és erre vonatkozólag javaslatokat tehet;

f) megvitatja a Társulat pénztárosának jelentését, határoz fontosabb vagyoni jogügyletek, szerződések ügyében, illetve jóváhagyja a Választmánynak erre vonatkozó határozatait, javaslatot tesz a Szövetségnek a rendes tagok tagsági díjára vonatkozóan;

g) megadja a felmentvényt a leköszönő vezető és központi szerveknek, felelős tisztségviselő tagoknak; kellő indokolással visszahívhatja a Közgyűlés által megválasztott tisztségviselő tagokat;

h) megválasztja névre és tisztségekre szólóan három évre a vezető és központi szervek tagjait és behívási sorrendjük meghatározásával póttagjait, a szakosztályok vezetőit, megbízza a Társulat lapjainak szerkesztőbizottságát, javaslatot tesz a Művelődésügyi Minisztériumnak a közös lapok szerkesztőbizottságára, kijelöli azt a négy vidéki tagozatot, amely a következő évben az Elnökségbe képviselőt küld;

i) megválasztja határidő nélkül a Társulat tiszteletbeli elnökeit;

j) megválasztja a küldötteket a Szövetség Közgyűlésére, ezek megbízatása a Társulat legközelebbi Közgyűléséig tart;

k) dönt a Szövetségből való kilépés, más egyesületbe való be- és kilépés, egyesülés, részekre való szétválás és megszűnés kérdésében és javaslatot tesz a Szövetségnek az utóbbi két esetben a Társulat vagyonának további sorsa ügyében.

10. §.

1. Az Elnökség rendes Közgyűlést évente egyszer köteles összehívni. Ha a választott tisztségviselők megbízatása lejár, a Közgyűlés napirendjére kell tűzni a tisztújítást.

2. Az Elnökség rendkívüli Közgyűlést bármikor összehívhat. Ha a Társulat teljes taglétszámának legalább egyharmada vagy a Választmányának legalább fele — a cél megjelölésével — kéri rendkívüli Közgyűlés összehívását, akkor a rendkívüli Közgyűlést az Elnökség köteles összehívni és 60 napon belül megtartani.

3. Minden Közgyűlés előkészítése a Küldöttválasztó Értekezletek összehívásával kezdődik a tagozatok székhelyein. Ezen az értekezleten a tagozat bármely tagja felszólalhat és szavazhat.

4. A Küldöttválasztó Értekezleteket a Közgyűlés napja előtt legalább 3 héttel, de legfeljebb 6 héttel kell összehívni. A Küldöttválasztó Értekezletek időpontját és helyét az értekezlet napja előtt legalább 10 nappal kell írásban közölni a Társulat minden érdekelt rendes és pártoló tagjával.

5. A Küldöttválasztó Értekezleten a tagozatok minden tíz nem jogi személy tag után egy-egy küldöttet választanak.

6. A Küldöttválasztó Értekezleten a küldöttek megválasztása jelölt-lista alapján, titkos szavazással történik. A jelölőlistát a tagozat vezetősége által felkért jelölőbizottság készíti. A küldöttek megválasztására a 20. § szabályai vonatkoznak. A Küldöttválasztó Értekezlet határozatképességét az Ügyrend szabályozza.

7. A megválasztott küldöttek megbízatása egy Közgyűlésre érvényes.

8. A Közgyűlés időpontjáról, helyéről és napirendjéről a Társulat minden rendes és pártoló tagját a Közgyűlés időpontja előtt legalább 15 nappal írásban értesíteni kell.

9. Minden jogi személy pártoló tag egy megbízottal képviseltetheti magát a Közgyűlésen.

10. Ha a Közgyűlés napirendjén tisztújítás vagy alapszabálymódosítás is szerepel, akkor a Közgyűlés időpontját és helyét a napisajtóban is meg kell hirdetni.

11. §.

1. A Közgyűlést a Társulat elnöke vagy az Elnökség egyik tagja vezeti. Ő a Közgyűlés elnöke, előterjeszti a Közgyűlés tárgysorozatát, a beérkezett írásbeli indítványokat. Javaslatot tehet mandátumvizsgáló-, szavazatszedő stb. bizottságnak a kiküldésére.

2. A Közgyűlés tárgysorozatához és megvitatandó kérdéseihez bármely társulati tag hozzászólhat, de csak a megválasztott, küldött tagok szavazhatnak. A küldöttek szavazati jogukat csak személyesen gyakorolhatják.

3. A Közgyűlésen a választások titkos szavazással történnek. Kellő indokolással más kérdésben is elrendelhető titkos szavazás.

4. A Közgyűlés határozatképessége, határozatérvényessége, tisztségekre jelölés és választás tekintetében a 18. és 20. § irányadó.

VIII. A Választmány

12. §

1. A Választmány a Közgyűlésnek alárendelt, az Elnökségnek fölérendelt vezető szerv. Foglalkozik az Alapszabály szerint hatáskörébe tartozó, valamint a Társulat más szervei által eléje terjesztett ügyekkel.

2. A Választmány a Közgyűlés által megválasztott Elnökségből, a Közgyűlésen megválasztott 26—28 választmányi tagból, a Fegyelmi Bizottság, az IMU Bizottság és a Külügyi Bizottság elnökéből, a tagozatok egy-egy képviselőjéből és a társulati lapok felelős szerkesztőiből áll. A Közgyűlés az esetleg megüresedő választmányi tagsági helyek betöltésére 8—10 választmányi póttagot választ meg, meghatározott behívási sorrenddel. A póttagoknak a behívás előtt tanácskozási joguk van. Tanácskozási joggal részt vehetnek a Választmány ülésein további meghívott személyek is.

3. A Választmány

a) vezeti és ellenőrzi a Társulat munkáját két Közgyűlés között;

b) ellenőrzi — az Ellenőrző Bizottsággal együttműködésben — a Társulat alapszabályszerű működését;

c) kiküld állandó és időszaki bizottságokat, megszabja feladatukat és hatáskörüket, beszámoltatja őket tevékenységükről és szükség esetén visszahívhatja tagjaikat;

d) felvesz tiszteletbeli tagokat; dönt a vitás tagfelvételi ügyekben; töröl, fegyelmi eljárás alapján kizár a tagok sorából egyes személyeket;

e) határoz tagozatok kialakítása ügyében; jóváhagyja a tagozatok vezetőségválasztásait;

f) kidolgozza és jóváhagyás végett a Közgyűlés elé terjeszti a Társulat ügyrendjét;

g) jóváhagyja a Társulat Fegyelmi Szabályzatát és dönt a Fegyelmi Bizottság megfellebbezett határozataival kapcsolatban.

4. A Választmány határozatai ellen 15 napon belül a Közgyűléshez lehet fellebbezni. E fellebbezésnek halasztó hatálya. csak fegyelmi ügyben van; kizárási határozat esetén a 6. § (6) bekezdése irányadó.

5. A Választmányt az Elnökség évente legalább kétszer hívja össze. Össze kell hívni akkor is, ha ezt a Társulat tagjainak legalább negyede, vagy a Választmány tagjainak legalább a fele kéri.

IX. Az Elnökség

13. §

1. Az Elnökség a Közgyűlésnek és a Választmánynak alárendelt társulati vezető szerv. Foglalkozik az Alapszabály szerint tahászkörébe tartozó, továbbá a más társulati testületek által eléje terjesztett ügyekkel.

2. Az Elnökség összetétele: elnök, egy budapesti és egy vidéki alelnök, főtitkár, pénztáros, a szakosztályok elnökei és titkárai, a Külügyi Bizottság elnöke és titkára, egy-egy titkár a dunántúli és a Dunán inneni tagozatok ügyeinek intézésére, továbbá a vidéki tagozatok négy képviselője.

3. Az Elnökség tagjait a Közgyűlés választja meg, kivéve a vidéki tagozatok 4 képviselőjét. Ezeket a Közgyűlés által kijelölt 4 vidéki tagozat választja egy évi időtartamra. Törekedni kell arra, hogy az Elnökségben a Társulat tagságának minden rétege megfelelően képviselve legyen.

4. Az Elnökség

a) vezeti és ellenőrzi a Társulat munkáját két választmányi ülés között;

b) elkészíti a Társulat évi munkatervét;

c) megvitatja a Társulat éves pénzügyi tervét, megállapítja a pártoló tagok tagsági díját;

d) gondoskodik a vezető és központi szervek határozatainak végrehajtásáról;

e) irányítja és ellenőrzi a szakosztályok, tagozatok állandó és időszaki bizottságok munkáját;

f) segíti és ellenőrzi a Társulat lapjainak szerkesztését;

g) kiküld állandó és időszaki bizottságokat, megbízottakat, megszabja feladatukat és hatáskörüket, beszámoltatja őket tevékenységükről és szükség esetén visszahívhatja tagjaikat;

h) előkészíti a Közgyűlést és a Választmány üléseit;

i) javaslatot tesz a Közgyűlésnek és a Választmánynak a Szövetség munkájával kapcsolatosan;

j) felvesz a tagozatok vezetőségének javaslatára rendes és pártoló tagokat;

k) intézkedik az időközben megüresedett tisztségek betöltéséről a 13. § (5) bekezdés szerint;

l) dönt a társulati jutalmak kiosztásáról.

5. Olyan tisztség megüresedése esetén, amelyet a Közgyűlés névre szólóan töltött be, az Elnökség ideiglenesen megbíz egy tagot a tisztség ellátásával. A tisztséget a legközelebbi Közgyűlés választás útján tölti be a legközelebbi tisztújításig. Ha az így ideiglenesen megbízott tisztségviselők száma eléri a Közgyűlés által névre szólóan tisztségekre megválasztottak számának 25%-át, akkor 60 napon belül rendkívüli Közgyűlést kell összehívni tisztújítás céljából.

6. Az Elnökség határozatai ellen 15 napon belül a Választmányhoz lehet halasztó hatály nélkül fellebbezni.

7. Az Elnökséget az elnök vagy a főtitkár hívja össze.

8. Az Elnökség kéthavonként legalább egyszer ülésezik.

14. §

1. Az elnök vezeti a Társulat vezető szerveinek üléseit, képviseli a Társulatot más egyesületek, szervek stb. irányában. Felelős a Társulat alapszabályszerű működéséért. Felelősség terhe mellett utalványozhatja a Társulat kifizetéseit.

2. Az elnököt akadályoztatása esetén az általa felkért egyik alelnök helyettesíti.

3. A tiszteletbeli elnökök tudományos és közéleti tekintélyükkel támogatják a Társulat tevékenységét. Őket a Közgyűlés határidő nélkül választja. Számuk legfeljebb 5. A Társulat vezető szerveiben az e szervek választott tagjait megillető jogokat gyakorolhatják, a Közgyűlésen a küldöttek jogai illetik meg őket.

4. A főtitkár biztosítja a vezető szervek határozatainak végrehajtását, ellátja két elnökségi ülés között a Társulat folyamatos ügyintézését, elkészíti a vezető szervek elé terjesztendő beszámolókat, gondoskodik a Fegyelmi, az IMU és a Külügyi Bizottság, a szakosztályok, a tagozatok az állandó és időszaki bizottságok és megbízottak munkájának irányításáról és ellenőrzéséről. Eljár a Társulat ügyeiben különféle szervek előtt. Felelősség terhe mellett utalványozhatja a Társulat kifizetéseit és elkészíti a pénztárossal együtt a Társulat éves költségvetési tervét. Akadályoztatása esetén valamelyik általa felkért elnökségi tag helyettesíti.

5. A pénztáros felelősség terhe mellett intézi a Társulat pénzügyeit, utalványozza a Társulat kifizetéseit, elkészíti a főtitkárral együtt a Társulat évi költségvetési tervét, valamint a Közgyűlés elé terjesztendő jelentést. Okmányszerűen köteles igazolni a kifizetések jogosultságát. Működését az elnök, a főtitkár, az Ellenőrző Bizottság és a Szövetség bármikor ellenőrizheti.

6. A vidéki ügyeket intéző két titkár a főtitkár irányításával intézi a vidéki tagozatok szervezési ügyeit. Működésüket az Ügyrend szabályozza.

X. A központi szervek

15. §

1. Az Ellenőrző Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból, 3 tagból és 2 tanácskozási jogú póttagból áll. Tagjai a Társulatban semmilyen más tisztséget nem viselhetnek. Az Ellenőrző Bizottság a Társulat alapszabályszerű működését és a Társulat költségvetési tervének megtartását ellenőrzi. Betekintési joga van a Társulat vezető és központi szerveinek, szakosztályainak, tagozatainak, állandó és időszaki bizottságainak munkájába. Észrevételeiről szükség esetén tájékoztatja a Választmányt és az Elnökséget. Működéséről beszámol a Közgyűlésnek.

2. A Fegyelmi Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból, 2 tagból és 2 tanácskozási jogú póttagból áll. Kidolgozza és a Választmány elé terjeszti a Társulat Fegyelmi Szabályzatát. Az Alapszabályt vagy a Fegyelmi Szabályzatot megszegő társulati tagok ellen fegyelmi eljárást indít akár a vezető szervek, akár az Ellenőrző Bizottság utasítására. Ezekben az ügyekben határoz, kivéve ha kizárást tart szükségesnek; erre a Választmánynak tesz javaslatot. Határozatai ellen 15 napon belül halasztó hatállyal lehet a Választmányhoz fellebbezni.

3. Az IMU Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból és 6—10 tagból áll. Képviseli a Társulatot az IMU-ban. Munkájához tervet készít és tevékenységéről beszámol a Választmánynak.

4. A Külügyi Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból, 6—8 tagból és 3 tanácskozási jogú póttagból áll. Ápolja a Társulat külföldi kapcsolatait, határoz a Társulat külföldi rendezvényeken való képviseletéről és külföldi vendégek meghívásáról. Munkáját a Szövetség külföldi kapcsolatokat intéző osztályával egyetértésben végzi. Évi munkatervet készít és tevékenységéről beszámol a Választmánynak.

XI. A szakosztályok

16. §

1. A Közgyűlés a Társulat nagyobb, állandó feladatainak önálló intézésére szakosztályokat létesít. A szakosztályok a szakterületi adottságoknak megfelelő tagokat tömörítik és ellátják a Társulat céljainak megfelelő előadások, kollokviumok, vándorgyűlések, ankétok stb. szervezésével kapcsolatos teendőket.
2. A szakosztályokat a Közgyűlés által megválasztott elnökből, alelnökből és titkárból álló vezetőség irányítja. Működésüket az Ügyrend szabályozza.
3. A szakosztály vezetősége munkájáról évente legalább egyszer beszámol az Elnökségnek.

XII. A tagozatok, helyi csoportok

17. §

1. A Választmány tagozatokat létesíthet, ott, ahol erre igény merül fel, működési területük kijelölésével.
2. A tagozat működési területén helyi csoportokat alakíthat. Működési területüket kijelöli és tevékenységüket irányítja.
3. A tagozatok működését elnökből, alelnök(ök)ből és titkár(ok)ból álló vezetőség irányítja. Ezeket maga a tagozat választja meg, legfeljebb három évre, megválasztásukat a Választmány hagyja jóvá. A vezetőségválasztás módját az Ügyrend szabályozza. A vezetőség a tagozat munkájáról időközönként beszámol az Elnökségnek.

XIII. A testületek határozatképessége

18. §

1. A Társulat bármely testületének határozatképességére vonatkozó alábbi szabályokat a testület ülésének teljes időtartamára alkalmazni kell.
2. A Küldöttválasztó Értekezletek határozatképességét az Ügyrend szabályozza.
3. A Társulat minden egyéb testülete akkor határozatképes, ha a testület ülésén jelen van a testület szavazati joggal rendelkező tagjainak több, mint fele.
4. Határozatképtelenség esetén a testületet 30 napon belül újabb ülésre kell összehívni. Ennek tárgysorozatán az ülésen elintézetlenül maradt napirendi pontok szerepelnek. Ez az ülése mindenképpen határozatképes.

XIV. Határozathozatal

19. §

1. A testületek határozataikat általában nyílt szavazással, egyszerű szótöbbséggel hozzák. Az Ügyrend által meghatározott esetekben elrendelhető titkos szavazás is. Ugyancsak az Ügyrend szabályai alkalmazandók szavazategyenlőség esetén.
2. A Közgyűlés a 9. § (2) bekezdés *a)* és *k)* pontjaiban felsorolt kérdésekben legalább kétharmados szótöbbséggel dönt, és a döntés érvényességéhez az is szükséges, hogy a 10. § szerint megválasztott teljes küldöttlétszámnak legalább a fele megszavazza a javaslatot.

3. A testületek határozatainak megszavazásakor nem rendelkeznek szavazati joggal a testület olyan tagjai, akik a határozatban személy szerint közvetlenül érdekeltek. (Választásokra ez a rendelkezés nem vonatkozik.)

XV. Választások

20. §

1. A Küldöttválasztó Értekezleteken megválasztandó küldöttekre a tagozat vezetősége által felkért jelölőbizottság tesz javaslatot. A Küldöttválasztó értekezleteken a jelöltlistát bármely szavazásra jogosult tag javaslatára további nevekkel kell kiegészíteni.
2. A Közgyűlésen megválasztandó tisztségviselőkre a Választmány által felkért jelölőbizottság tesz javaslatot. Lehetőséget kell adni arra, hogy a küldöttek a jelölőbizottság javaslatát kiegészítsék.
3. A választások titkosak. A Közgyűlésen a szavazólapra új név is beírható.

XVI. A Társulat kiadványai

21. §

1. Céljainak hathatósabb előmozdítására a Társulat tudományos, didaktikai, népszerűsítő vagy kultúrpolitikai kérdéseket elemző kiadványokat, füzeteket, könyveket, folyóiratokat szerkeszthet vagy ilyenek kiadását kezdeményezheti.
2. A Társulat lapjainak szerkesztőbizottságait a Közgyűlés bízza meg; egyéb kiadványokhoz a szerkesztői megbízatást a Választmány adja. Feladatukat az Ügyrend szabja meg.

XVII. A függetlenített titkárság

22. §

1. A Társulat függetlenített titkárságának munkatársait (a társulati titkárt és további alkalmazottakat) a Szövetség alkalmazza. Ők látják el a Társulat és a Szövetség határozatainak végrehajtásával kapcsolatos folyamatos ügyintéző és szervező munkát.
2. Társulati munkájáért a függetlenített titkárság a Társulat Elnökségének és végső soron a Szövetség főtitkárának felelős.
3. A függetlenített titkárság munkáját a Társulat főtitkára közvetlenül irányítja.

XVIII. A Társulat pénzgazdálkodása

23. §

1. A Társulat jövedelmének forrásai:
a) a rendes és pártoló tagok által fizetett tagdíjak;
b) a Szövetség és állami szervek által biztosított pénzügyi támogatás;

c) a Társulat rendezvényeire befizetett hozzájárulások;
d) egyéb bevételek.

2. A Társulat pénzgazdálkodását éves költségvetés alapján végzi. Ezt a pénztáros készíti elő a főtitkárral egyetértésben, az Elnökség megvitatja és a Szövetség hagyja jóvá.

XIX. Felsőbb felügyelet

24. §

1. A Társulat felett a felügyeletet a Magyar Tudományos Akadémia elnöke a Szövetség főtitkára útján gyakorolja.

XX. Vegyes rendelkezések

25. §

1. Mindazokban a kérdésekben, amelyekről a Társulat Alapszabálya nem rendelkezik, a Társulat Ügyrendjét és Fegyelmi Szabályzatát és a Szövetség Alapszabályát kell figyelembe venni.

2. A jelen Alapszabály hatályba lépése után a korábbról visszamaradt elintézetlen ügyekben is a jelen Alapszabály szerint kell intézkedni.

26. §

Ezt az Alapszabályt a Társulat Közgyűlése 1966. július hó 1. napján elfogadta.

Könyvismertetés

D. O. Skljarszkij — N. N. Csencov — I. M. Jaglom:

Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből

I. kötet: Aritmetika és algebra

(Tankönyvkiadó 1966, 400 oldal)

Az elemi matematika az „elemi" jelző ellenére a matematika egyik legnehezebb ága. Nehézsége abban áll, hogy nagyon szerény, vagyis elemi eszközökkel fog hozzá néha egyszerűbb, sokszor nagyon is nehéz feladatok megoldásához, tételek bizonyításához. Mint ahogyan nem nagy dicsőség ágyúval verébre lőni, illetve komoly vadászsikernek számít, ha valaki egyetlen jól irányzott lövéssel leterít egy nagy vadat, éppen úgy csak matematikai rutinmunkának számít, ha valaki nagyhatású eszközökkel old meg egy feladatot, azonban figyelemre méltó teljesítménynek tekinthető sokszor az, hogy egy nehezebb problémát elemi úton oldott meg. Az elemi megoldások szépsége éppen abban rejlik, hogy a szerény fegyverzetet szellemes ötletekkel, éles logikával és sokszor meglepő fordulatokkal kell diadalra vinni. Nem véletlen, hanem éppen ez az oka annak, hogy a legnagyobb alkotó matematikusok is szívesen foglalkoztak problémák elemi megoldásával, és nevükhöz sok, esetleg más úton már megoldott kérdések elemi megoldása fűződik.

Az bizonyos, hogy egy-egy nehezebb probléma elemi megoldásához tehetségre és egyéni ötletre van szükség, azonban újabb ötleteket, illetve ügyes módszereket az tud könnyen produkálni, aki már sokféle szellemes ötletet látott, illetve felhasznált. E tapasztalatok megszerzéséhez és az önálló gondolkodás kifejlesztéséhez kíván segítséget nyújtani a most magyar nyelven is megjelent Válogatott fejezetek és tételek az elemi matematika köréből című háromrészes könyv első kötete.

Ez az első kötet az aritmetika és algebra köréből összesen 320 számozott feladatot tartalmaz. Mivel sok feladat több részből, vagy több hasonló szövegű önálló feladatból áll, a feladatok tényleges száma 429. A feladatokat témáik szerint a szerzők 12 csoportba osztották. Az egyes csoportok (ciklusok) összefoglaló címei (a zárójelben az illető csoportban található számozott feladatok számát tüntettük fel) a következő:

1. Bemelegítő feladatok (14)
2. Számjegyek változtatásával kapcsolatos feladatok (12)
3. Számok oszthatóságával kapcsolatos feladatok (45)
4. Különböző aritmetikai feladatok (38)
5. Egyenletek megoldása az egész számok körében (21)
6. Összegek és szorzatok meghatározása (29)
7. Különböző algebrai feladatok (36)
8. Polinómok algebrája (26)
9. Komplex számok (18)
10. Néhány számelméleti feladat (15)
11. Nevezetes egyenlőtlenségek (54)
12. Számsorok, sorozatok (12)

A felsorolás — *a feladatok változatosságát* tekintve — önmagáért beszél. A nem elég konkrétan megfogalmazott csoportcímek mögött rejlő feladatok jellegéről csak annyit, hogy a „Bemelegítő feladatok" többségükben ismert, csupán a logikus gondolkodást igénybevevő mérlegelési, kombinatorikai vagy különböző játékokkal (pl. a sakkal) kapcsolatos feladatok; a „Különböző aritmetikai feladatok" címszó főleg oszthatósági, kiválasztási, illetve sorozatokkal kapcsolatos feladatokat takar; a „Különböző algebrai feladatok" cím mögött pedig egyszerűsítendő algebrai kifejezések, megoldandó egyenletek és egyenletrendszerek állnak. Az egyes csoportok elkülönülése nem éles, sok feladatot ugyanolyan joggal több csoport bármelyikébe is sorolhatták volna. Ilyen esetekben többnyire a hasonló eszközöket, vagy gondolatmenetet felhasználó feladatok kerültek egy csoportba.

A feladatok jellegéről szólva azonnal megállapítható, hogy a feladatok döntő többsége nem sablonfeladat, megoldásukhoz a rutinmunka kevés. A feladatgyűjtemény nem a középiskolai anyag elmélyítését és megszilárdítását tűzte ki célul, hanem — amint az az előszóban olvasható — „inkább új módszerekkel és ötletekkel kívánja megismertetni az olvasókat, hogy megízleljék az önálló kutatás örömét". A feladatok összeválogatásánál a szerzők figyelmet fordítottak arra is, hogy az elemi matematika azon ágaiból is szerepeljenek feladatok, amelyeknek a folytatása a modern kutatásokban nagy szerepet játszik (pl. polinómok algebrája, poliéderek elmélete, differenciálegyenletek). Több feladatcsoport (különösen a Komplex számok, Néhány számelméleti feladat, Nevezetes egyenlőtlenségek és a Számsorok, sorozatok című csoport) komoly mennyiségű elméleti anyagot is tartalmaz, amelynek feldolgozása nélkül a feladatok nem oldhatók meg.

A feladatok nehézsége általában meghaladja a szokványos példatárak feladatainak nehézségét, és kb. 20%-uk kifejezetten nehéz feladat. Ezek többségét csillaggal látták el a szerzők. 76 feladat 1940 és 1952 között a moszkvai matematikai olimpiák versenyfeladata volt.

A kötet terjedelmének több mint háromnegyed részét a feladatok megoldása teszi ki. A szerzők egy ügyes ötlettel két részre bontották a megoldásokat. Az *Útbaigazítások és végeredmények* című rész az önálló megoldók számára munkájuk ellenőrzése céljából a feladatok végeredményét és esetleg egy-két utalást, irányító megjegyzést tartalmaznak. Azok, akik e rövid útbaigazítás segítségével nem tudják megoldani a feladatokat, a terjedelmes *Megoldások* című részben megtalálhatják a feladatok részletes megoldását is. A közölt megoldások általában igen részletesek, több feladatra két, vagy több megoldást is tartalmaznak. Az egyes feladatokhoz fűzött elméleti anyagrészek és megjegyzések is többségükben itt kaptak helyet.

Külön dicséret illeti a Tankönyvkiadót azért, hogy a kötetet a még megjelenés előtt álló második orosz kiadás kézirata alapján fordította le és adta ki.

A fordítás (Varga Dénes munkája) egy-két elírástól eltekintve általában pontos és szabatos. Ilyen hiba például a 29. feladat szövegében van, ahol a szöveg pontosan az ellenkezőjét állítja annak, mint amit a szerzők a megoldásban bebizonyítanak. Megjegyezhető, hogy a 170/b feladat megoldása hibás.

A feladatgyűjtemény elsősorban az egyetemi és főiskolai elemi matematika című tárgyak anyagához és a matematikai szakkörök munkájához kíván példaanyagot nyújtani, de nagy haszonnal forgathatja minden, a matematika után érdeklődő olvasó is.

Scharnitzky Viktor

EDWIN F. BECKENBACH: Modern matematika mérnököknek I—II.

(Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960 és 1965, 500 és 455 old.)

Az utóbbi években a műszaki tudományok rohamos fejlődése csak úgy valósulhatott meg, hogy a matematika szerepe a műszaki tudományokban jelentősen megnövekedett. Ez természetesen a matematika fejlődését is elősegítette, mert a tervezői munka alapját képező elméleti számítás és a korszerű gyártás, üzemszervezés, valamint üzemvezetés irányító munkája nélkülözhetetlenné teszi újszerű matematikai elvek és módszerek kidolgozását és felhasználását. Napjainkban a tudományos felfedezések és ezek műszaki felhasználása között eltelt idő egyre rövidül, ezért különösen fontos, hogy a mérnökök és közgazdászok megismerjék a matematika számukra fontos ágainak legújabb eredményeit is.

A matematika és a műszaki tudományok egyre szorosabbá váló összefonódásából származó előnyök úgy hasznosíthatók eredményesen, ha a kutató matematikusok és mérnökök egymás munkáját, eredményeit és problémáit jól ismerik, és egy-egy feladat megoldása érdekében együttműködnek.

Az együttműködés jelentőségét világszerte felismerték és több helyen a tapasztalatok és eredmények kicserélését szervezett formában kísérelték meg megvalósítani. Így például a Kaliforniai Egyetem több más egyetemmel és kutató intézettel együttműködve öt városban több éves tanfolyam-sorozatot szervezett matematikusok, fizikusok és mérnökök részére és közreműködésével, amely keretében a legnevesebb tudósok és kutatók ismertették a matematika legújabb ágainak korszerű alkalmazásait.

A Modern matematika mérnököknek című mű ezeknek a tanfolyamoknak az előadásait tartalmazza. A feldolgozott hatalmas, szerteágazó ismeretanyagra való tekintettel a könyv anyagának ismertetésekor csak a főbb részekre szorítkozhatunk.

A könyv *első kötete* három főrészre oszlik.

Az *első rész* a *Matematikai modellek* címet viseli és a lineáris és nem lineáris rezgések, az egyensúly-analízis, a külső ballisztika, a variációszámítás, a hiperbolikus és elliptikus parciális differenciálegyenletek és alkalmazásaik, valamint a rugalmasságtan peremérték-feladatai és megoldó módszerei problémakörét tárgyalja.

A *Valószínűségszámítási problémák* című *második részben* az extrapoláció elméletéről, a játékelméletről, az operáció-analízisben használt determinisztikus és sztochasztikus modellekről, a dinamikus programozás elméletéről és egyes alkalmazásairól (pénzkészletek optimális hovafordítása, aranybányászási probléma, szűk keresztmetszet problémák, „túlélési" játékok), a Monte Carlo-módszerekről és ezek egyes alkalmazásairól (integrálok kiszámítása, diffúziós folyamatok vizsgálata, mintavétel) olvashatunk részletesen.

A *Számítási módszerek* című *harmadik rész* anyaga a mátrixok és műszaki alkalmazásaik (a mátrixalgebra alapjai, differenciál- és integrálszámítás mátrixok körében, lineáris differenciálegyenletrendszerek integrálása, mátrixok alkalmazása rugalmas szerkezetekkel és rezgésekkel kapcsolatos valamint elektromos feladatokban), a függvénytranszformációk és alkalmazásaik a mérnöki tervezésben, a konformis leképezési módszerek, a nem lineáris módszerek (egyenletrendszerek megoldása különböző módszerekkel, funkcionál-egyenletek, vektoregyenletek megoldása), a relaxációs módszerek, a „gyors lecsökkenés" módszerek és a nagysebességű matematikai (analógiás és digitális) gépek és alkalmazásaik ismertetése.

A könyv *második kötete* ugyancsak három részből áll.

Az *első rész*, amelynek a címe *Matematikai módszerek*, a deltafüggvényekkel, az operátorszámítással, az általánosított függvények Mikusiński-féle elméletével, a disztribúciókkal és ezek alkalmazásával, a szétválasztható változójú differenciálegyenletekre vonatkozó operátormódszerekkel, az integráltranszformációkkal (in-

MTA Könyvtára
Periodika 2432/1967 sz.

verziós képletek és transzformáltpárok, a Laplace-transzformáció, a Fourier-transzformáció, a Hankel-transzformáció, a véges Fourier-transzformációk), a parciális differenciálegyenletek elméletében alkalmazott félcsoportmódszerekkel, az aszimptotikus képletekkel és sorokkal, valamint ezek alkalmazásával foglalkozik.

A *második rész* címe: *Statisztikai és tervezési problémák.*

Ebben a részben a sztochasztikus folyamatok és ingadozások, a sorbanállási problémák, az információelmélet, a determinisztikus, a sztochasztikus és az adaptív ellenőrzési folyamatok matematikai elmélete, a lineáris programozás és a készletgazdálkodási folyamatok matematikai elmélete és mindezek több gyakorlati alkalmazása kerül részletes tárgyalásra.

A *harmadik rész* fizikai jellegű problémák megoldását tartalmazza *Fizikai jelenségek* címmel. Ennek kapcsán szó esik a matematikai fizika problémáinál alkalmazható Monte Carlo-módszerekről, a tápvonalak elméletében szerepet játszó differenciálegyenletekről és függvényegyenletekről, a hidrodinamika és magneto-hidrodinamika elméletének sajátérték-problémáiról, a folyadékok mechanikájában alkalmazott parciális differenciálegyenletek elméletének problémáiról, az elliptikus és parabolikus parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásáról és a szimmetrizálás módszerének néhány klasszikus fizikai probléma megoldására való alkalmazásáról.

A második kötet több fejezetében megoldott gyakorló feladatok segítik az anyag alkalmazásának jobb megértését és begyakorlását.

Amint ez a felsorolás is bizonyítja, a könyv nem tankönyve a matematika egy vagy több ágának, hanem egy sor — egymással csak részben összefüggő — modern és hasznos matematikai elmélet és alkalmazás gyűjteménye. A könyv célja az, hogy megismertesse az olvasóval a modern matematika néhány különösen érdekes távlatú alkalmazási lehetőségét.

A könyv egyes fejezeteit más-más (összesen 33) a maga területén neves szakember írta. Ebből következik, hogy néhány probléma több helyen és többféle szempont alapján is tárgyalásra került, ami érdekes összehasonlításokra adhat alkalmat. Az egyes szerzők nem egyforma színvonalon és részletességgel tárgyalják az anyagot. Egyes fejezetek tanulmányozásához (pl. I. kötet 8, 18, II. kötet 4, 5, stb. fejezetek) magasabb matematikai képzettség szükséges, többségük azonban a mai műegyetemi matematika anyag ismeretében is jól érthető.

Meg kell említeni még azt a tényt is, hogy néhány fejezet anyaga magyar nyelven ebben a könyvben jelent meg először, és ezzel szélesebb körű felhasználása is lehetővé válik. Minden fejezet végén részletes és kimerítő irodalomjegyzék található, amely a további még részletesebb vagy speciálisabb tájékozódás szempontjából fontos.

Elismerés illeti a Műszaki Könyvkiadót, hogy a nagyjelentőségű könyv magyar kiadását lehetővé tette. A magyar kiadás szakmai előkészítésén sok (számszerint 12) szakember dolgozott, akik a fordítási és szerkesztési munkán kívül néhány, fejezetenként változó jelölés egységesítésével, több értelemzavaró hiba kiküszöbölésével és számos megjegyzéssel, lábjegyzettel járultak hozzá a magyar kiadás sikeréhez.

A könyv gondolatébresztő és hasznos olvasmánya lehet matematikusoknak, műszaki szakembereknek és minden olyan érdeklődőnek, aki a matematika és műszaki alkalmazásának fejlődésével lépést kíván tartani.

Scharnitzky Viktor

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Merkly László
A kézirat beérkezett: 1966. X. 5. — Példányszám: 1400 — Terjedelem: 10 (A 5) ív

Szegedi Nyomda Vállalat 66-6402

Rövidesen megjelenik
az AKADÉMIAI KIADÓ gondozásában

RÉNYI ALFRÉD

LEVELEK A VALÓSZÍNŰSÉGRŐL

(A Korunk Tudománya sorozatban)

E könyv irodalmi eszközökkel — *Pascal* által *Fermat*-hoz írt fiktív levelek formájában — ismerteti a valószínűség fogalmát és néhány azzal kapcsolatos alapvető elvi kérdést. Ezeknek az ismeretelméleti szempontból is jelentős elvi problémáknak különös aktualitást ad, hogy a valószínűségszámítás ma már a tudomány szinte minden ágában és a gazdasági élet számos területén felhasználásra kerül.

A „Levelek" matematikai előismeretek nélkül is érthető módon vezetik el az olvasót a modern tudomány e fontos kérdéseinek megértéséhez.

A valószínűségszámítás a matematikának viszonylag „fiatal" ága: Blaise *Pascal* és Pierre *Fermat* 1654-ben folytatott levelezésével vette kezdetét. A két nagy matematikus *de Méré* lovag által felvetett, szerencsejátékokra vonatkozó két valószínűségszámítási kérdés megoldásáról levelezett egymással. Reánk maradt leveleikben a valószínűség fogalmával kapcsolatos általános elvi kérdésekről egyáltalán nem esik szó. Kézenfekvő azonban az a feltevés, hogy a valószínűségszámítás e két nagy úttörője ezekről az elvi problémákról is gondolkodott. Így az sem tekinthető kizártnak, hogy levelezésük során később e kérdésekre is kitértek, csak e további leveleik nem maradtak fenn. Rényi Alfréd megkísérelte a kor barokk stílusában rekonstruálni ezeket az elveszett — vagy soha meg nem írt leveleket.

Kb. 80 oldal
Fűzve kb. 10,— Ft

SZELE TIBOR

BEVEZETÉS AZ ALGEBRÁBA
V. KIADÁS

(Tankönyvkiadó, 1967)

Ára fűzve 27,— Ft

B. G. KUROS

FELSŐBB ALGEBRA

(Tankönyvkiadó, 1967)

Ára kötve 53,— Ft

ОГЛАВЛЕНИЕ

Андраш Хайнал: Об истории и сегодняшнем состоянии аксиоматических исследований по проблеме континуума и аксиомы выбора 253
Мария Вишки: Сингулярные гомологии I. 261
Барна Сенаши: 75 лет нашего общества 295
Иштван Феньё: Обобщённые функции, операторы III. 309
Зольтан Дароци: О непрерывных решениях в Гильбертовых пространствах функционального уравнения $f[x+y\cdot f(x)]=f(x)\cdot f(y)$ 339
Отчёт о мемориальном математическом конкурсе имени Миклоша Швейцера 1965 г. 344
Задачи 367
Новости 373
Из жизни общества 381
Обзор новых книг 406

CONTENTS

A. Hajnal: On the history and present state of axiomatic research concerning the continuum problem and the axiom of choice 253
M. Viski: Singular homologies I. 261
B. Szénássy: 75 years of the Society 295
I. Fenyő: Distributions, operators III. 309
Z. Daróczy: On continuous solutions of the functional equation $f[x+y\,f(x)] = f(x)f(y)$ in Hilbert-spaces 339
The M. Schweitzer Mathematical Competition 344
Problems 367
News 373
Activity of the Society 381
Books review 406

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Ára 12 Ft.
Előfizetés évi 20 Ft

INDEX: 25.564

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg géppírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat, a kért különlenyomatok számának megjelölésével, feltétlenül jelentsék be.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda 1. számú Hírlapboltjában, Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76.

A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, Budapest V. József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban*

Csekkszámlaszám egyéni: 61.257, közületi: 61.066. MNB egyszámlaszám: 8.

Előfizethető és példányonként megvásárolható az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest V., Alkotmány u. 21. telefon: 111-010. Csekkbefizetési számla: 05.915.111-46. MNB egyszámlaszám: 46.

az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest V., Váci u. 22. telefon: 185-612