312.046
14
1963

MATEMATIKAI LAPOK

XIV. ÉVFOLYAM

1-2.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1963

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer
Budapest, 1963. december, XIV. évfolyam 1—2 szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd
Szerkesztőség: Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21. III. Telefon: 111—010.
A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.
Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat, Budapest, V., József nádor tér 1. Telefon: 180—850. Csekkszámlaszám: 61 257.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat: József nádor tér 1. Üzlethelyiség Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Turán Pál: Erdős Pál 50 éves 1
Erdős Pál: Ramsey és Van der Waerden tételével kapcsolatos kombinatorikai kérdésekről 29
Kárteszi Ferenc: Néhány témakör fejlődéstörténete az algebrai görbék elméletében 38
Szász Ferenc: A topologikus algebrákról és gyűrűkről II. 74
Galambos János: Egy számelméleti eloszlásprobléma 88
Hosszú Miklós: Egy alternatív függvényegyenletről 98
Fried Ervin: Megjegyzések a komplex számok bevezetéséhez 103
Frivaldszky Sándor: Általánosított deriváltakkal rendelkező függvények adott tartományról való kiterjesztésének kérdéséről 107
Tomor Benedek: Konvex alakzatok egy rögzítési problémája 120
Heppes Aladár: Egy egydimenziós probléma 124
Hódi Endre: Összefüggés az elsőfajú, 0-indexű Bessel-féle függvény és az integrálszinusz függvény között 128
Karanikoloff Christo: Egy Eneström—Kakeya típusú tételről 133
Kántor Sándor: Megjegyzés a konvergencia fogalmának axiomatikus bevezetéséhez 137
Dobó Andor és Szajcz Sándor: Megjegyzés Gesztelyi Ernő egy dolgozatához 140
Hódi Endre: Beszámoló a IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról 145
Feladatrovat 163
Társulati élet 175
Könyvismertetés 206

Erdős Pál 50 éves

TURÁN PÁL

Nem könnyű a feladata annak, aki Erdős Pál matematikai munkáinak akár csak vázlatos ismertetésére vállalkozik azon alkalomból, hogy 1963. március 26-án lesz 50 éves. Nem könnyű még akkor sem, ha a krónikás több, mint harminc éve ismeri őt (vagy épp azért). Nehézzé teszi először is az, hogy eddig megjelent vagy megjelenés alatt álló tudományos dolgozatainak száma közel 400 (melyek között nincs ismertető jellegű, magyar nyelven is megjelent bölcsészdoktori értekezésén kívül nincs duplikált; a referáló folyóiratokba írott rövid recenziói nincsenek seholse nyilvántartva), tehát egy mozartinak nevezhető termékenység és e cikk szükségképpen korlátozott terjedelme. Még nehezebbé teszi az, hogy a dolgozatok témaköre a matematika oly távoleső területeit foglalja magában, melyre Erdősön kívül nehezen találni bennük egyenlően kompetens matematikust. Ezért szerzőnek oly szakértőkhöz kellett fordulnia, mint Gallai Tibor és Rényi Alfréd, kiknek szerző ezúton fejezi ki köszönetét; mély és sokoldalú halmazelméleti munkásságának kimaradása így is az ismertetés súlyos hiányossága. De főleg nehézzé tette az írást az, hogy munkáinak és hatásának ismertetése nehezen választható el matematikusi egyéniségétől. Ez az egyéniség állandó matematikai lobogásban van, állandó problémafelvetésben, megoldásban, továbbadásban, mások problémáiba való, gyakran bámulatosan gyors bekapcsolódásban. Ezt részben sejteti talán az a körülmény is, hogy kb. 90 szerzővel van közösen írott dolgozata négy világrészből. Akik látták vaskos matematikai jegyzetfüzeteit, tudják, hogy publikált dolgozatai csak egy tört részét teszik ki meglevő eredményeinek. Bizonyos értelemben egy occidentális Ramanujan ő, annak erejével és korlátaival, szinguláris és egyszeri jelenség; ha a rengeteg közül egyes problémáinak fontosságát lehet is vitatni, munkáinak szellemességét, bizonyító erejét és egyénisége szuggesztivitását nem.

Eddig publikált munkái nagyjából a következő témakörökre vonatkoznak:

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

1. Aritmetika,
2. Valószínűségszámítás, ergodelmélet,
3. Gráf-elmélet, aszimptotikus kombinatorika,
4. Konstruktív függvénytan,
5. Halmazelmélet, halmazelméleti topológia,
6. Sorelmélet,
7. Komplex függvénytan,
8. Geometria.

Munkái részletes ismertetése, mint mondottam, e cikk keretei között teljesen lehetetlen; így be kell érnünk azzal, hogy a figyelmet néhány centrális pontra fokuszáljuk.

Munkássága Csebisev azon klasszikus tételének nagyon leegyszerűsített bizonyításával indult meg elsőéves egyetemi hallgató korában, mely szerint, ha $x>1$, akkor x és $2x$ közé mindig esik prímszám. Bölcsészdoktori disszertációját másodéves korában írta; ebben Csebisev előbb mondott tételét egyes számtani sorokra, így például $x>6{,}5$ mellett a $(4k+1)$ alakúra terjesztette ki; e tételeket előzőleg R. Breusch analitikus módszerrel bizonyította be I. Schur, a nagy berlini matematikus vezetése alatt írott disszertációjában. E tény, valamint az ún. abundáns számokról szóló Schur-sejtés bizonyítása és egy további, a későbbiekben nem részletezendő Schur-probléma megoldása indították Schurt arra, hogy az alig húszéves Erdőst egy levélben „der Zauber von Budapest" megjelöléssel illesse. Az abundáns számok problémáját Schur számelméleti előadásaiban vetette fel. Ez az ún. tökéletes számok ókorból fennmaradt problémájával kapcsolatban, mely a $\frac{\sigma(n)}{n}=2$ feltételt kielégítő számokra vonatkozik (ahol $\sigma(n)$ az n pozitív egész szám pozitív osztóinak összegét jelenti), azon további kérdést vetette fel, mi mondható ki azon n számokról, melyekre $\frac{\sigma(n)}{n}\geqq 2$? Ezen számokat abundáns számoknak nevezve Schur azon sejtését fejezte ki, hogy $A(x)$-el jelölve az x-et meg nem haladó abundáns számok sűrűségét, a $\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}$ határérték létezik. Erdős igen szellemes „elemi" (tehát teljesen a valósban maradó, még a folytonosság felhasználását is minimálisra szorító, aritmetikus-kombinatorikus gondolatokkal operáló) bizonyítást talált Schur sejtésére. E bizonyítása egyenes úton vezette a valósértékű additiv $f(n)$ számelméleti függvények értékeloszlási problémájához*, mely Hardy és Ramanujan 1917-ből származó izolált első eredménye után éppen ezidőtájt került többek érdeklődésének előterébe. Kiderült, hogy

* Additív a számelméleti függvény, ha $(a, b)=1$ mellett $f(ab)=f(a)+f(b)$.

az abundáns számokéval analóg a tényállás, ha a következő három sor konvergens:

$$(1) \qquad \sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqq 1} \frac{f(p)}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqq 1} \frac{f(p)^2}{p}.$$

Pontosabban, az (1) alatti sorok mindegyikének konvergenciája a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy minden valós c-re az

$$f(n)<c \qquad n\leqq x$$

feltételeket kielégítő n egészek $A_c(x)$ számára $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} A_c(x)$ létezzen, mint azt Wintnerrel 1939-ben megmutatták. Azon esetben, mikor a $\sum_p \frac{f(p)^2}{p}$ sor divergens, a helyzet egész más, mint azt már Hardy—Ramanujan tétele mutatja; mint Kac-cal 1940-ben megjelent dolgozatukban bebizonyították, ez esetben, ha még* $|f(p)|<c_1$, akkor tetszőleges valós α mellett azon x-et meg nem haladó n egészek $A_\alpha(x)$-számára, melyekre

$$f(n)<\sum_{p<x} \frac{f(p)}{p}+\alpha \sum_{p<x} \frac{f(p)^2}{p},$$

fennáll a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A_\alpha(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

reláció. E tételek bizonyításai már felhasználnak valószínűségszámítási segédeszközöket is; irodalmi hatásuk változatlanul nagy.

Erdős az additív és multiplikatív függvények elméletének majdnem minden kérdéséhez jelentősen hozzájárult; helyhiány miatt csak egyetlen további idevágó eredményét említem, mivel annak több váratlan alkalmazását találták újabban. Ezek azt mondják ki, hogy az egyetlen additív függvény $f(n)=c \log n$, mely a következő két tulajdonság valamelyikével bír:

a) monoton,

b) $f(n+1)-f(n)\to 0$.

E tételekhez csatlakozó további kérdések már eddig is jelentős irodalmi visszhangot váltottak ki.

Nem kétséges, hogy mindezek az eredmények a Brunnal és Snirelmannal kezdődő „elemi" aritmetikai irányzat újabb lényeges diadalai voltak. Ezen irányzatnak Erdős első dolgozatai után hamarosan egy

* A c_ν számok mindig pozitív numerikus állandókat jelentenek, p mindig prímszámot.

másik dolgozatával is egyik élharcosává lett. Az aritmetikus világ a harmincas évek elején Snirelman két dolgozatának bűvölete alatt állott, melyek új lehetőségeket tártak fel a Goldbach-probléma vizsgálatában. Fontos segédeszköznek bizonyult e vizsgálatokban az ún. Snirelman-sűrűség fogalma; a pozitív egészek egy $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ sorozatáról akkor mondjuk, hogy Snirelman-sűrűsége β, ha

$$\inf_{x \geqq 1} \frac{1}{x} \sum_{a_\nu \leqq x} 1 = \beta$$

(Ha tehát pl. $a_1 \neq 1$, akkor $\beta = 0$). Ezzel kapcsolatban Hincsin azon meglepő tényt fedezte fel, hogy ha egy tetszőleges olyan sorozat elemeihez, melyek Snirelman-sűrűsége egy 0 és 1 közötti β-val β, hozzáadogatjuk rendre a $0^2, 1^2, 2^2, \ldots$ sorozat elemeit (tehát egy olyanét, melynek Snirelman-sűrűsége 0), az új „összeg"-sorozat Snirelman-sűrűsége *nőtt*. Erre Hincsin eredeti bizonyítása, bár „elemi", de igen komplikált volt; ezt Buchstab és Landau valamelyest egyszerűsítették. Landau 1935-ben Cambridge-ben, ahol Erdős akkoriban tartózkodott, e bizonyítást előadta; Erdőssel előadás után beszélgetvén Erdős nem csinált titkot belőle, hogy nem nagyon tetszik neki a hallott bizonyítás. „Hát, ha nem tetszik, csináljon egy jobbat" felelte erre Landau. Erdős másnapra tényleg megtalálta a tétel „valódi" bizonyítását, amely „elemi" és az eredetinél jóval rövidebb volt, továbbá felelt azon kézenfekvő kérdésre is, mi köze a tételnek a négyzetszámokhoz. Tétele szerint a négyzetszámoknak a szóban forgó tétel szempontjából egyedül lényeges tulajdonsága az, hogy legfeljebb 4 négyzetszám összegeként minden pozitív egész előállítható; ha a négyzetszámok helyett a pozitív egészeknek bármely olyan $b_1 < b_2 < \ldots$ sorozatát vesszük, melyekhez van oly univerzális c szám, hogy minden pozitív egész előállítható, mint legfeljebb c számú b_j összege (más szóval a b_ν-sorozat egy c-edrendű bázis), akkor már igaz, hogy a β Snirelman-sűrűségű a_ν-sorozathoz tekintjük az

$$a_\nu \text{ és } a_\nu + b_j$$

alakú egészek összességét, akkor ezek Snirelman-sűrűsége

$$\leqq \beta + \frac{\beta(1-\beta)}{2c}.$$

Egy ecsetvonás Landau portréjához az a tény, hogy a tételt (némi hozzátétellel) rögtön felvette 1937-ben megjelent „Neuere Ergebnisse der additiven Zahlentheorie" című, Cambridge Tracts sorozatban megjelent könyvébe. Erdős ezen dolgozata nagy irodalmi visszhangot keltett; ezen dolgozatok közül csak Linnik azon eredményét említjük meg,

hogy megadható pozitív egészeknek oly speciális $b_1' < b_2' < \ldots$ sorozata is, mely semmilyen pozitív egész $c \geqq 2$-vel nem c-edrendű bázis, mégis bármely β Snirelman-sűrűségű a_ν-sorozatra $(0 < \beta < 1)$ az

$$a_\nu \text{ és } a_\nu + b_j'$$

alakú egészek Snirelman-sűrűsége β-nál *nagyobb.*

Az „elemi" módszerek ezen előretörésének ideje alatt az analitikus módszerek nem értek el ilyen látványos eredményeket, eltekintve Ingham azon tételétől, hogy $n > c_2$-re n^3 és $(n+1)^3$ között van prímszám (és eltekintve persze a húszas évek elején Hardy—Littlwood—Ramanujan hatalmas erejű analitikus additív számelméleti módszerétől*). Az egyetlen kérdéskör, mely makacsul ellenállott az „elemi" módszereknek, a prímszámeloszlás finomabb kérdéseinek köre volt, melynek vizsgálatában az analitikus módszerek már 60 éve learatták az első győzelmeket. A módszerek erejének összehasonlítása mellett azért is látszott fontosnak pl. a prímszámtételre egy „elemi" bizonyítást találni, mert sokan (így Hardy is) azt gondolták, hogy egy ilyen bizonyítás egyben a Riemann-sejtés igazolásához is fog vezetni. A sok ezirányú sikertelenség miatt egyre inkább lábot kapott az a hiedelem, hogy a prímszámtétel ilyen úton nem bizonyítható be. E hiedelmet az álláspont kényelmességén kívül az is alátámasztani látszott, hogy N. Wiener 1930-ban megmutatta, hogy a prímszámtétel *ekvivalens* azon ténnyel, hogy a Riemann-féle $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ függvény a $\sigma = 1$ egyenesen nem tűnik el; márpedig azt valóban nem volt könnyű elképzelni, hogyan lehetne valósban maradó operációkkal $\zeta(s)$ komplex gyökeire bármely mélyebb következtetést levonni. Erdős kora ifjúságától kezdve próbálkozott e kérdés megoldásával éppúgy, mint Dirichlet klasszikus tételének** „elemi" bizonyításával. E „Jugendtraum" csak 1948-ban teljesült be, miután Dirichlet tételét A. Selberg a posztulált úton bebizonyította; a prímszámtétel e bizonyítását a matematikai világ Erdős—A. Selberg féle bizonyítás néven tartja számon, érte Selberg kongresszusi aranyérmet, Erdős pedig a négyévenként amerikai folyóiratban megjelent legjelentősebb algebra-számelméleti munka jutalmazására kiadott Cole-prize-t nyerte el. A bizonyításról itt csak annyit, hogy egy Selbergtől származó meglepően egyszerű és „elemien" igazolható formula leszármaztatásából („fundamental inequality") és egy erre alkalmazott sajátságos Tauber-típusú okoskodásból áll; utóbbihoz hasonló ideák lényegileg szerepelnek már egy 1941-ben megjelent dolgozatában az Annals of Math.-ban, melynek

* Vinogradov bizonyítása 1935-ből a „páratlan" Goldbach-problémára az analitikus és aritmetikus módszerek *együttműködésének* eredménye.

** E tétel azt mondja ki, hogy ha $(l, k) = 1$, akkor végtelen sok p prim van, melyre $p \equiv l \bmod k$.

címe „On some asymptotic formulas in the theory of factorisatio numerorum". Mindenesetre a csatlakozó irodalom máris igen nagy és a variánsok száma kezd a quadratikus reciprocitási tételeihez közeledni, bár már bizonyosra vehető, hogy a Riemann-sejtés *ezúton* való bizonyítása nem megy és a nyerhető maradéktag még akkor is messze az analitikus módszerekkel nyerhető mögött marad, ha az „elemi" bizonyítás fogalmában drasztikus koncessziókat teszünk.

A prímszámeloszlás elmélete még két igen nevezetes eredményt köszönhet Erdősnek. Az ikerprímszám probléma* egyike a prímszámeloszlás megoldatlan problémáinak. Nagy eredmény volna az is, ha egyáltalán egy oly c_3 létezését ki lehetne mutatni, hogy végtelen sok prímszámpár adható meg, melyek különbsége abszolút értékben $\leqq c_3$; de még azon gyengébb állítást sem sikerült eddig igazolni, hogy, ha $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ az összes prímszámok, akkor

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{p_{\nu+1} - p_\nu}{\log p_\nu} = 0.$$

Triviális viszont a prímszámtételből, hogy

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{p_{\nu+1} - p_\nu}{\log p_\nu} \leqq 1.$$

Erdős volt az első, aki legalább egy 1-nél *kisebb* numerikus létezését be tudta bizonyítani azaz, hogy

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{p_{\nu+1} - p_\nu}{\log p_\nu} \leqq \vartheta.$$

ϑ értékére Rankin $\frac{59}{60}$-ot, A. Selberg $\frac{15}{16}$-ot talált; ez tekinthető tehát jelenleg az ikerprímszámprobléma irányában (direkt értelemben) a legerősebb ismert eredménynek.

A második nevezetes eredmény éppen „nagy" prímszámmentes intervallumok megadására vonatkozik. Triviális a pírmszámtételből csak az, hogy

$$\overline{\lim_{\nu + \infty}} \frac{p_{\nu+1} - p_\nu}{\log p_\nu} \geqq 1.$$

* Tehát az a kérdés, vajon van-e végtelen sok p, q primszám úgy, hogy $p - q = 2$.

Erdős 1934-ben azt találta, hogy*

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{p_{\nu+1}-p_\nu}{\left(\frac{\log p_\nu \log_2 p_\nu}{(\log_3 p_\nu)^2}\right)} \geqq c_4;$$

ezen eredményét csak Rankin múlta felül, a nevezőhöz egy $\log_4 p_\nu$ faktor hozzátételével; módszere Erdős bizonyításának gondolatain alapszik. A javítás minden bizonnyal azért nehéz, mert az eredmény aránylag közel van a „legjobb"-hoz; erre vannak bizonyos indítékok.

Említettük Hardy—Littlewood—Ramanujan analitikus additív számelméleti módszerét. Ennek első nevezetes sikere az ún. partícióproblémára vonatkozott, mely azt kérdezi, hányféleképpen állítható elő az n pozitív egész szám pozitív egészek összegeként; itt két előállítás, mely csak az összeadandók sorrendjében különböznek egymástól, *nem* tekintendők különbözőnek. Hardy és Ramanujan módszerükkel megmutatták, hogy $n\to\infty$-re

$$p(n)\sim\frac{1}{4n\sqrt{3}}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}.$$

Erdős, konzekvensen keresztülvive programját, itt is felmérte az „elemi" módszerek erejét; 1942-beli Annals of Math.-cikkében megmutatta, hogy ezen aszimptotikus formula — az $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ faktor számértéke híján — még az „elemi "módszerek hatókörébe esik, (persze ez nem vonatkozik Hardy és Ramanujan általánosabb formulájára, mely ily módon nem remélhető).

Erdős a partícióproblémához két további érdekes adalékkal járult hozzá. J. Lehnerrel 1941-ben a Duke Journal-ben megmutatták, hogy — analóg módon, mint Hardy—Ramanujan az egész számok prímfaktorainak eloszlásánál találtak — az n pozitív egész szám additív előállításai „majdnem mind" olyanok, hogy „körülbelül"

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{n}\log n \stackrel{\text{def}}{=} A(n)$$

összeadandót tartalmaznak. Pontosabban szólva megmutatták, hogy $p_k(n)$ az n azon additív előállításai száma, melyek legfeljebb k pozitív összeadandót tartalmaznak, akkor

$$k = A(n) + x\sqrt{n}$$

* $\log_\nu x$ ν-szörösen iterált logaritmust jelent.

mellett

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_k(n)}{p(n)}=e^{-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}x}}$$

Ha tehát minden n-hez $k_0(n)$-et a

$$p_{k_0}(n)=\max_k p_k(n)$$

-el értelmezzük, akkor pl.

$$A(n)-\sqrt{n}\log_4 n\leqq k_0(n)\leqq A(n)+\sqrt{n}\log_4(n).$$

Ezen továbbmenve 1946-ban megmutatta, hogy $n\to\infty$-re

$$k_0(n)=A(n)+\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}\log\frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{n}+o(\sqrt{n}).$$

Később Szekeres megmutatta, hogy ezen $k_0(n)$ *egyértelműen* van meghatározva, tehát fix n mellett $p_k(n)$ nő $k\leqq k_0$-ra, azután fogy.

Számos egyéb additív számelméleti tétele közül még csak két típust említenék meg. Hardy és Landau kimutatták, hogy ha $r(n)$ jelenti az $x^2+y^2\leqq n$ körben rácspontok számát, akkor

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|r(n)-\pi n|}{(n\log n)^{1/4}}>0.$$

Erdős és W. J. H. Fuchs 1956-ban a Journal of Lond. Math. Soc.-ban megjelent cikkükben megmutatták, hogy ha $0\leqq a_1\leqq a_2\leqq\ldots$ *tetszőleges* egészek és $r^*(n)$ jelenti az $a_i+a_j\leqq n$ megoldás számát, akkor alkalmas pozitív numerikus b-vel

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|r^*(n)-bn|}{(n\log^{-2}n)^{1/4}}>0,$$

tehát a Hardy—Landau-féle határ (mely a körprobléma esetén valószínűleg nincs messze a legjobbtól) lényegileg *minden* sorozatban elérhető, mintha csak a körlap volna az a tartomány, melyben a „hibatag" a „legkisebb".

A második típusúak közül egy tételt említenék meg explicite. Szidon Simon, a tragikus sorsú magyar matematikus*, trigonometrikus sorokra vonatkozó vizsgálataiban azon érdekes additív számelméleti kérdéshez jutott, vajon létezik-e oly $a_1<a_2<\ldots$ sorozata a pozitív

* Idegen nyelvű dolgozataiban S. Sidon-nak írta nevét.

egészeknek, hogy tetszőleges pozitív egész n-re az

$$a_i + a_k = n$$

egyenlet megoldható, de megoldásszámát $f(n)$-el jelölve tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^\varepsilon} = 0.$$

Erdős 1954-ben a Szegedi Actában megjelent dolgozatában nemcsak hogy megoldotta e nehéz feladatot, hanem ezen messze túlmenően azt is megmutatta, hogy bizonyos értelemben „majdnem minden" sorozata a pozitív egészeknek olyan tulajdonságú, hogy előbbi $f(n)$-el minden pozitív egész n-re

$$1 \leqq f(n) \leqq c_6 \log (n+1)$$

Erdős előbb is felhasznált bizonyításaiban valószínűségszámítási módszereket; talán ezen dolgozattól kezdődően egyre gyakoribb ez nála. Persze így nyitva maradt azon, továbbra is érdekes kérdés, *explicite* megadni egy ilyen tulajdonságú a_n sorozatot.

Erdősnek a diofantikus approximáció körébe vágó dolgozatai közül is csak néhányról referálhatok ehelyütt. Ezek elsője az egyenletes eloszlás H. Weyl-től eredő elméletére vonatkozik.* Weyl az α_n-sorozatnak mod 1 egyenletes eloszlása szükséges és elégséges feltétele gyanánt a minden fix egész $r \neq 0$-ra fennálló

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu \leqq n} e^{2\pi i r \alpha_\nu} = 0$$

relációkat adta meg. Ez azonban nem alkalmas „maradéktag" nyerésére, azaz a

$$\sup_{\alpha,\beta} \Big| \sum_{\substack{\nu \leqq n \\ \alpha \leqq \alpha_\nu \leqq \beta \bmod 1}} 1 - (\beta - \alpha) n \Big|$$

differenciák felső korlátozására. Ilyen „végesítés" szükségessége már Van der Corput és Koksma vizsgálataiban felmerült; egy tétel ez irány-

* Az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ valós tagú sorozat mod 1 egyenletesen eloszlott, ha minden $0 \leqq \alpha < \beta < 1$-re

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{\nu \leqq n \\ \alpha \leqq \alpha_\nu \leqq \beta \bmod 1}} 1 = (\beta - \alpha)$$

E sorozat D_n diszkrepanciája alatt a $\sup_{\alpha,\beta,n \geqq N} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{\substack{\nu \leqq n \\ \alpha \leqq \alpha_\nu \leqq \beta}} 1 - (\beta - \alpha) \right\}$ kifejezést értjük.

ban áll is Koksma „Diophantische Approximationen" c. Ergebnisse-füzetében bizonyítás nélkül, a nehézségre való utalásokkal. Erdős és e sorok írója az Indagationes Mathem.-ban 1948-ban megjelent dolgozatukban megoldották e feladatot megmutatván, hogy tetszőleges egész m és $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$ mellett

$$\left| \sum_{\substack{\nu \leqq n \\ \alpha \leqq \alpha_\nu \leqq \beta \bmod 1}} 1 - (\beta - \alpha)n \right| \leqq c_6 \left\{ \frac{n}{m+1} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \left| \sum_{\mu=1}^{n} e^{2\pi i j \alpha \mu} \right| \right\}.$$

E tétel alkalmazhatóságát — melyet Koksma és Szüsz rögtön 1950-ben több dimenzióra kiterjesztettek, ahogy azt Koksma 1936-os Ergebnisse-füzetében posztulálta — három példával illusztrálhatjuk. Az elsőt Erdős és referens most említett dolgozatukban találták; erre alapozták azon látszólag nagyon távolláló tételük egy bizonyítását, hogy, ha az

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

polinomnak az $|z| = 1$ körön vett abszolút maximuma $\sqrt{|a_0 a_n|}$-hez képest „nem túl nagy", akkor gyökei az origóból kiinduló szögterekben egyenletesen vannak eloszolva (e tárgyra még visszatérünk). A másodikat Egerváry és e sorok írója találták, akik ennek segítségével egy, a kinetikus gázelmélet alapjaira vonatkozó feladatot oldottak meg. A harmadik Környei Imre egy megjelenés alatt álló dolgozatából van véve, aki ennek segítségével mutatta ki Dirichlet és Hecke nevezetes tételeinek szigorítá-saként, hogy, ha az $U = ax^2 + bxy + cy^2$ kvadratikus alak primitiv és definit, akkor minden $0 \leqq \alpha < 2\pi$-re az

$$|\arc z - \alpha| \leqq e^{-c_7 \sqrt{\log(|z|+2)}}$$

tartomány végtelen sok rácspontjára U prímszámot állít elő (Hecke tételében csak tetszőleges kis szögtér szerepel).

Két további nevezetes idevágó tétele irracionális számoknak racionálissal való approximációjára vonatkozik. Hincsin egy klasszikus tétele szerint, ha $h(x)$ $x > 0$-ra pozitív, monoton nemnövekvő és a $\sum_n \frac{1}{nh(n)}$ sor divergens, akkor az

$$\left| \alpha - \frac{u}{v} \right| \leqq \frac{1}{v^2 h(v)}, \qquad (u, v) = 1$$

egyenlőtlenség egy nullhalmaz α-értékei kivételével végtelen sok (u, v)-párra megoldható. Erdős — és tőle függetlenül Le Veque és W. Schmidt — azon kérdéssel foglalkoztak, mi mondható ki ezen megoldások eloszlására. Erdős 1959-ben az Acta Arith.-ban azon meglepő tételt közölte, hogy ismét egy nullhalmaz α-értékei híján a megoldásszám

aszimptotikusan uralható; ha az előbbi egyenlőtlenséget $v \leqq N$-ben eleget tevő v-k száma $g(\alpha, N)$, akkor majdnem minden α-ra

$$\lim_{N\to\infty} \frac{g(\alpha, N)}{\sum_{v\leqq N} \frac{1}{vh(v)}} = \frac{12}{\pi^2}.$$

E tételt újabban Szüsz terjesztette ki doktori értekezésében. Ugyanezen dolgozatában — előzőleg Szüsszel és referenssel publikált dolgozatuk egy nyitva maradt problémájának megoldásaként — megmutatta, hogy ha $\omega(n)$ n-el együtt tart ∞-hez, akkor azon [0, 1]-be eső α-k mértéke m_n-mértéke, melyre az

$$\left|\alpha - \frac{u}{v}\right| \leqq \frac{1}{v^2}, \quad (u, v) = 1$$

egyenlőtlenség az $n \leqq v \leqq n\omega(n)$ közben megoldható, 1-hez tart, ha $n \to \infty$.

Csupán megemlítve sok szép eredményét az euklideszi algoritmus, diofantikus egyenletek, a kvadratikus alakok, a polinom-aritmetika, a lánctörtfejtés és a klasszikus számelméleti függvények értékeloszlása terén, mely utóbbiak egy része szerepel Surányi Jánossal írott „Bevezetés a számelméletbe" c. szép könyvükben, térjünk rá a valószínűségszámítással kapcsolatos munkássága ismertetésére, mely már az eddigiekben is érintve volt. Egyik nevezetes dolgozata az Annals of Math. 194-es kötetében Hincsin, Kolmogorov és P. Lévynek az iterált logaritmustételre vonatkozó eredményeit fejleszti lényegesen tovább és a véletlen fluktuációk törvényszerűségeinek mélyebb megértése terén jelentős lépést jelentett előre. A probléma maga igen egyszerűen megfogalmazható a fej-írás játék modellje segítségével. Jelölje δ_n egy szabályos pénzdarab n-szeri feldobásánál a fej és írás-dobások számának különbségét. Hincsin bizonyította be elsőnek (majd Kolmogorov lényegesen általánosította), hogy 1 valószínűséggel

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1.$$

Egy $\varphi(n)$ monoton növekvő pozitív függvényt P. Lévy nyomán a *felső osztályba* tartozónak nevezünk, ha a $\delta_n > \varphi(n)$ egyenlőtlenség 1 valószínűséggel csak véges sok n-re teljesül, és az *alsó osztályba* tartozónak, ha a $\delta_n > \varphi(n)$ egyenlőtlenség 1 valószínűséggel teljesül végtelen sok n-re. Hincsin tétele e terminológiával úgy fogalmazható, hogy minden pozitív ε-ra $(1+\varepsilon)\sqrt{2n \log\log n}$ a felső, $(1-\varepsilon)\sqrt{2n \log\log n}$ az alsó osztályba tartozik. (A 0 — 1 törvény szerint minden $\varphi(n)$ függvény vagy a

felső, vagy az alsó osztályba tartozik). Erdős Pál e tételt lényegesen élesítette. Kimutatta pl. hogy ha $k>3$ tetszőleges nagy pozitív egész, a

$$\sqrt{\frac{2n}{\log\log n}}\left(\log_2 n+\frac{3}{4}\log_3 n+\frac{1}{2}\log_4 n+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{2}\log_{k-1} n+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\log_k n\right)$$

függvény (ahol $\log_k n$ k-szor iterált logaritmust jelent), bármely pozitív ε-ra a felső osztályba, bármely negatív ε-ra az alsó osztályba tartozik. Arra az esetre, ha $\varphi(n)=\sqrt{2n}\ \psi(n)$ ahol $\psi(n)$ monoton növő, Erdős szükséges és elégséges feltételt talált arra, hogy $\varphi(n)$ a felső ill. alsó osztályba tartozzék. Feltétele ekvivalens azzal a Kolmogorov által bizonyítás nélkül közölttel, hogy $\varphi(n)=\sqrt{2n}\,\psi(n)$ monoton ψ mellett akkor és csak akkor tartozik az alsó osztályba, ha az

$$\int^{\infty}\frac{1}{\lambda}\psi(\lambda)e^{-\psi(\lambda)^2}d\lambda$$

integrál divergens. A dolgozat eredményei könnyen átvihetők a Brown-mozgás esetére is; így Erdős tétele a Brown-mozgás mélyebb megértését is lényegesen előbbre vitte. Erdős eredményeit Feller fejlesztette tovább és zárta le. Az iterált logaritmus-tétel egy, ellenkező irányba mutató kiegészítését Erdős K. L. Chung-gal írott egy dolgozatában adta meg.

Két, M. Kac-cal írott dolgozatában a valószínűségszámítás újszerű határeloszlási tételeivel foglalkoztak: Legyenek $x_1, \ldots, x_n$, független és egyforma eloszlású valószínűségi változók, 0 várható értékkel és 1 szórással. Legyen

$$S_n = x_1+\ldots+x_n.$$

Első dolgozatukban meghatározták a

$$\max_{1\leqq k\leqq n} S_k \quad \text{és} \quad \max_{1\leqq k\leqq n}|S_k|$$

határeloszlását, mely nem függ az x_n változók eloszlásától. A másodikban a P. Lévy által egy speciális esetben felfedezett ún. arcus-sinus törvény általános érvényét állapították meg, kimutatván, hogy ha N_n jelöli $S_1, S_2, \ldots, S_n$ számok közül a pozitívok számát, akkor $\frac{N_n}{n}$ eloszlása konvergál a

$$\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$$

eloszlásfüggvényű határeloszláshoz; ez esetben nem is kell feltenni, hogy az x_n változók egyforma eloszlásúak, hanem csak annyit, hogy oly 0 várható értékű és 1 szórású független változók, melyekre érvényes a centrális határeloszlástétel. Az x_n változók egyforma eloszlásának feltevése az előbbi dolgozattal kapcsolatban is enyhíthető (l. Rényi A. „On the theory of order statistics", Acta Math. Hung. (1953) p. 191—231). Erdős és Kac e két dolgozatának nemcsak eredménye lényeges, hanem a bizonyítás módszere is, mely az ún. invariancia-elven alapul; ezen elv e két dolgozatban lett először megfogalmazva és alkalmazva. Ezen elv azóta a valószínűségszámítási kutatás gyakran használt módszerévé vált; különösen M. D. Donsker fejlesztette tovább e módszert. Az invariancia-elv lényege az, hogy az említett és analóg problémáknál kimutatható, hogy ha egy speciális esetben (az x_n változók alkalmas speciális eloszlása esetén) létezik a keresett határeloszlás, akkor ez minden esetben létezik és független a szóban forgó x_n változók eloszlásától.

Rokon témával foglalkozik egy Hunt-tal írott dolgozata, mely a sign S_k számsorozattal foglalkozik. Többek között kimutatják, hogy ha az x_n változók függetlenek és ugyanazon folytonos és 0-ra szimmetrikus eloszlással bírnak, akkor 1 valószínűséggel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sign} S_k}{k} = 0.$$

E tényt a fej vagy írás modell speciális esetében P. Lévy fedezte fel.

Jelentősek azon, Chung-gal írott dolgozatai, melyekben a nagy számok erős törvényének mélyenfekvő általánosításait mutatják meg, továbbá több társszerzővel az egy- és többdimenziós bolyongási problémákra és Brown-mozgásra vonatkozó dolgozatai. Különösen figyelemre méltók azon eredményei, amelyek a véletlen bolyongást végző pont által leírt út jellegének a tér dimenziószámától való függését domborítják ki. E tételek úgy jellemezhetők, hogy a véletlen bolyongást (ill. Brown-mozgást) végző pont pályájának jellege a tér struktúráját tükrözi vissza. Ilyen jellegű eredményt elsőnek Pólya György ért el 1921-ben. Erdős és munkatársai vizsgálatai eredményeképp Pólya kérdésfeltevéséből egy általános elmélet alakult ki.

Erdősnek Rényivel írott egy további dolgozata a véges sokaságokból vett minta középértéke eloszlásának a normális eloszláshoz való konvergenciájára ad általános (a Lindeberg-feltételekkel analóg) elégséges feltételt; azóta J. Hájek megmutatta, hogy e feltétel nemcsak elégséges, hanem szükséges is.

[illegible] modja élenken mutatkozik még oly látszólag egész távoleső területen is, mint a gráfelmélet. Ezen el-

méletbe minden bizonnyal ő hozott be először valószínűségszámítási elemeket. Így pl. mindmáig csak az ő, valószínűségszámítással nyert bizonyítása ismert olyan G_0 gráf létezésére, melynek $\left[2^{\frac{k}{2}}\right]$-nyi sok szögpontja van és se G_0-ban, se a komplementerjében nincs k-szögpontú teljes részgráf. Az ilyen típusú tételek (tehát általában oly tételek, melyeknél adott H és K gráfok mellett keressük azon minimális $g(H, K)$ szögpontszámot, mely mellett már garantálható, hogy vagy a gráf tartalmazza H-t vagy a komplementer tartalmazza K-t) sok dolgozatának tárgyát képezik. (Ramsey-típusú problémakör). Így tudta megmutatni, hogy alkalmas numerikus c_1 állandóval létezik olyan $\left[c_1 \frac{l^2}{\log^2 l}\right]$ szögpontú G'-gráf, melyben nincs háromszög és a $\overline{G}'$ komplementerben nincs teljes l-szög. Így tudta oly G''-gráf létezését megmutatni, melynek előírt k és $l > l_0(k)$ mellett $\left[l^{1+\frac{2}{2k}}\right]$-szögpontja van és sem G'' nem tartalmaz k vagy kevesebb élből álló „kört", sem $\overline{G}''$ nem tartalmaz teljes l-szöget, ami — gráfszínezési megfogalmazásban — egy régi kérdés volt. Ezen eredmény nehézsége abból is megítélhető, hogy már $\left[l^{1+\frac{1}{\left[\frac{k-1}{2}\right]}}\right]$-szögpontszámú gráfra, mint megmutatta, analóg tétel már nem igaz. További ilyen vizsgálataira még visszatérek. E típusú vizsgálataira az első indítékot azon, Szekeres Györgygyel talált eredményei adták, melyek egy látszólag távolálló, Klein Eszter által felvetett, igen szép probléma megoldására vonatkoznak. E probléma, melyet magamnak „geometriai Waring-probléma" néven tartottam nyilván, $k \geqq 4$ mellett oly $g = g(k)$ létezését állította, hogy bárhogy adva meg a síkon $g(k)$ számú pontot, ezek közül kiválasztható k számú olyan, melyek egy konvex k-szöget alkotnak. (Klein Eszter maga megmutatta, hogy $g(4) = 5$). Az első bizonyítás Ramsey egy tételének újra felfedezéséből és alkalmazásából állott; e bizonyításból a megfelelő tétel az l-dimenziós térre is kimondható lett volna. Meglepő, hogy a tétel mennyire inkább kombinatorikus jellegű, mint geometriai; más jelek is mutatják, hogy ez gyakoribb jelenség, mint gondolnánk.

Gráfelméleti vizsgálatainak egy további csoportja véges gráfoknak végtelenekre való kiterjesztésére vonatkozik. E tételek javarésze erősen érintkezik a halmazelmélettel. Nem ilyenek Menger tételének végtelen gráfokra való kiterjesztése, további Gallai és Vázsonyival talált feltételük végtelen gráfok Euler-vonalainak létezésére. Itt említhetjük meg végtelen gráfokra vonatkozó, sokat idézett tételét, mely szerint ha egy végtelen G gráf minden véges részgráfja k színnel megszínezhető, akkor maga G is.

Vizsgálataink egy harmadik csoportja azon problémakörre vonatkozik, melyet Erdős és Gallai e sorok írójának nevével jeleznek, ha röviden akarják magukat kifejezni. E problémakör előírt H gráftípus esetén azt vizsgálja, egy n-szögpontú (hurok és többszörös él nélküli, irányítatlan) G gráfnál hány él létezése mellett garantálható G-ben egy H-val izomorf részgráf vagy, ami ugyanaz, az n-szögpontú G gráfok közül milyen maximális élszám mellett lehetséges, hogy G-ben még ne legyen H-val izomorf részgráf és ezen maximális élszám milyen speciális gráfok (ún. extremális gráfok) esetén érhető el. E problémakör eredményeinek sok alkalmazása várható, hiszen ez lényegileg logika, kérdései részben a skatulya-elv általánosításaiként foghatók fel. Erdős az első idevágó eredményeket egy szép koherens elméletté építette ki, részint egyedül, részint társszerzőkkel írott dolgozataiban. Mutatóban álljon egy Gallaival talált szép tételük: ha $n \geqq \frac{1}{2}(k+1)^3$, $k \geqq 1$ és az n szögpontú G-gráfnak nincs se $2k$ élből álló nyílt útja, se $2k$ élű köre, akkor a maximális élszám egyedül azon G_0 gráfnál áll elő, mely egy $P_1, P_2, \ldots P_k$ teljes k-szögből, további $Q_1, \ldots, Q_{n-k}$ szögpontokból és a $P_\mu Q_\nu$ élekből áll. Idevágó eredményeinek jórésze nincs publikálva; ezek akadémiai székfoglalójában lesznek közölve. Ami ezekben főleg megkapó, az a problémalátás és az extremális gráfok változatossága.

Erdős e téren is kapcsolatba jutott a valószínűségszámítással. Ő kezdeményezte és Rényivel együtt elméletté fejlesztették a „véletlen gráfok" problémáját. Ez az előbbi problémakörnek azon módosítása, hogy előírt N gráftulajdonság esetén milyen élszám mellett állítható 1 *valószínűséggel*, hogy az n-szögpontú gráfnak N tulajdonságú. Az ilyen módon adódó tételek a gráfokat mintegy mozgásukban mutatják be, az emelkedő élszámok mellett egyre bonyolódottabb gráfok létzése garantálható 1 valószínűséggel. Az egyes gráftípusok „valószínűségi küszöbszámait" igen sok érdekes N-gráftulajdonságra sikerült meghatározniok; ez azt jelenti, hogy megadni az n-szögpontú G_n gráfban azon minimális élszámot, mely mellett G_n 1 valószínűséggel N tulajdonságú. Ezen valószínűségi küszöbszám néha meglepően alacsony. Így pl. azt találták, hogy annak valószínűsége, hogy G_n-ben $(\frac{1}{2}n \log n + Cn)$ él jelenlétében a gráf összefüggő,

$$e^{-e^{-C}}$$

ami $\to 1$, ha $C \to \infty$; azaz pl. $(\frac{1}{2}+\varepsilon)n \log n$ számú él már 1 valószínűséggel garantálja, hogy G_n összefüggő!

A valószínűségszámítási módszerek alkalmazása vörös fonalként húzódik végig Erdős egész munkásságán és ez analizisbeli munkáira is áll. Itt e vonatkozásban elsősorban azon három dolgozatára gondolok, melyek elsőjét Offord-dal a Proc. Lond. Math.-ban 1956-ban, másodikat Dvoretzky-vel 1959-ben a Mich. Math. Journ.-ban publikálták, a

harmadikat Rényivel a Pólya György 75. születésnapja ünneplésére kiadandó kötetben fogják publikálni. Az elsőben megmutatták, hogy ha $\varepsilon_\nu = \pm 1$, akkor a 2^n számú

$$1 + \varepsilon_1 x + \ldots + \varepsilon_n x^n = 0$$

egyenletnek, legfeljebb $o\left(\frac{2^n}{\sqrt{\log \log n}}\right)$-nyi sok kivételével

$$\frac{2}{\pi} \log n + o(\log^{\frac{2}{3}} n \log \log n)$$

nyi sok valós gyöke van. A második dolgozat azon szép tételre ad *ekszisztenciabizonyítást*, hogy létezik pl. oly $\sum_0^\infty \frac{e^{i\alpha_n}}{\sqrt{n}} z^n$ alakú hatványsor valós α_n-ekkel, mely a *teljes* egységkörvonalon divergál (hogy ezt e körvonal $\mathfrak{cg}\,/$ nullhalmaza híján megteszi, az ismert volt.). A harmadikban egy, N. Wiener egy tételéhez csatlakozó régi Zygmund-féle problémát oldanak meg negatív értelemben. Wiener szóban forgó tétele (enyhített formában) azt állítja, hogy ha a

$$\sum_\nu (a_\nu \cos l_\nu x + b_\nu \sin l_\nu x)$$

sor pozitív egész l_ν-kkel, melyekre

$$\lim_{\nu \to \infty} (l_{\nu+1} - l_\nu) = \infty$$

egy tetszőleges kis (a, b)-intervallumban pl. Abel-szummálható egy L_2-beli $f(x)$-függvényhez, akkor $\sum (a_\nu^2 + b_\nu^2) < \infty$ és így a sor az egész $[0, 2\pi]$-ben L_2-höz tartozó függvény Fourier-sora, azaz $f(x)$ kiterjeszthető $[0,2\pi]$-ben L_2-belivé úgy, hogy az adott trigonometrikus sor Fourier-sora legyen. Ingham, Zygmund és Marczinkiewicz és e sorok írója az eredetinél jóval egyszerűbb bizonyításokat adtak e tételre; Zygmund vagy 20 éve azon kérdést vetette fel, vajon igaz marad-e a tétel L_2-osztály helyett L_q-osztályt véve $q > 2$-vel. Mármost Erdős és Rényi minden $q > 2$-re megmutatták olyan, a hézagfeltételnek elegettevő trigonometrikus sor *létezését* valószínűségszámítási módszerekkel, melyek minden $0 < a < b < 2\pi$-vel (a, b)-ben folytonos függvényhez szummálhatók, de a sor mégsem egy $[0, 2\pi]$-ben L_q-beli függvény Fourier-sora.

Már az eddigiekből is kitűnik erős példakonstruáló képessége; ez távolról sem merül ki valószínűségszámítási konstrukciókban. Itt csak egy tételt említek meg, melyet az Annals of Math. 1941. kötetében közölt. Ez a $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$-függvények azon $L_n(f, T)$

Lagrange-interpolációs polinomjaira vonatkozik, melyeknél az interpoláció alappontjait azon T-háromszögmátrix alkotja, ahol az n-edik sor elemei

$$\xi_{\nu n}=\cos\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}$$

Más szóval, $n=1, 2, \ldots$-re $L_n(f, T)$ azon legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, amelyre

$$L_n(f, T)_{\substack{x=\xi_{\nu n}\\ \nu=1,2,\ldots,n}}=f(\xi_{\nu n})$$

Mint jól ismert, e polinomok írhatók oly alakba is, melyek igen erősen emlékeztetnek $f(\cos\vartheta)$ Fourier-sorára, úgy, hogy sokáig az a vélekedés alakult ki, hogy ezen interpolációs polinomok sorozata nagyban és egészében úgy viselkedik, mint a Fourier-sor részletösszegeinek sorozata. Erre Faber és mások előzetes megjegyzései után Erdős azáltal mért döntő csapást, hogy alkalmas példán megmutatta, hogy ezek sorozata alkalmas $[-1, +1]$-ben folytonos $f_0(x)$-re pl. az $x=\frac{1}{2}$-re *tarthat* $+\infty$-hez, amit a Fourier-sor, mint jól ismert, nem tud.

Az interpoláció évszázados elmélete sok nevezetes eredményt köszönhet Erdős Pál munkásságának. Faber mutatta meg elsőnek a század elején, hogy bárhogyan is választjuk meg pl. a $[-1, +1]$ körben az interpoláció A alappontrendszerét, megadható olyan, a $[-1, +1]$ közben folytonos $f_0(x)$ függvény, melynek A-hoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomjai korlátlanok $[-1, +1]$-ben; ebben a lényeges az, hogy az A-hoz tartozó Lagrange-interpoláció $l_\nu(x, A)=l_{\nu n}(x, A)$ alapfüggvényeire *bármely* A mellett

$$M_n(A)\overset{\text{def}}{=}\max_{-1\leqq x\leqq+1}\sum_{\nu=1}^{n}|l_{\nu n}(x, A)|>\frac{1}{6}\log n.$$

Az „optimális" alappontrendszer nyilván azon $A=A_0$ alappontrendszer volna, amelyre $M_n(A)$ minimális. Ennek ismeretétől messze vagyunk; Erdős e sorok írójával — majd a módszert javítva egyedül — legalább aszimptotikusan megoldotta e nem könnyű feladatot, megmutatván, hogy

$$M_n(A)>\frac{2}{\pi}\log n-O(1).$$

Ettől még lehetne igaz az, hogy — bár $M_n(A)\to\infty$, ha $n\to\infty$ — mégis „kis" x-halmaztól eltekintve $\sum_{\nu=1}^{n}|l_{\nu n}(x, A)|$ „nem nagy". Ezt megcáfolva Erdős kimutatta 1958-as Acta Hung. dolgozatában, hogy bármely

A alappontrendszer esetén

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x, A)| = +\infty$$

legfeljebb egy $[-1, +1]$-beli nullmértékű x-halmaz híján.

A Lagrange-interpolációs polinomokat Newton óta használták integrálok közelítő meghatározására, de Csebisev és A. Markov előmunkálatai nyomán Stieltjes volt az első, aki az

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} L_n(f, L^*)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

relációt a múlt század legvégén be tudta bizonyítani; itt az L^* pontrendszer az, melynek n-ik sorát az n-ik Legendre-polinom gyökei alkotják és $f(x)$ tetszőleges korlátos és R-integrálható függvény. A bizonyítást és a tételt főleg Fejér és Szegő munkái lényegesen egyszerűsítették és általánosították oly pontrendszerekre, melyeknél az n-ik sort bizonyos paraméterekhez tartozó Jacobi-polinomok gyökei alkotják (melyek közé tartozik a Legendre-polinomok esete is). Ezen polinomokat az jellemzi, hogy $[-1, +1]$-ben bizonyos α, β értékekkel képezett $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$-súlyfüggvényre orthogonális polinomsorozatot alkotnak. Nem volt azonban ismert egyetlen *általános* osztálya sem a $p(x)$ súlyfüggvényeknek, melyre hasonló konvergenciatétel bebizonyítható lett volna; a legklasszikusabb L^*-pontrendszer esetén sem volt ismert, hogy vajon Stieltjes előbb említett konvergenciatétele „interferenciatétel"-e vagy javítható-e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |L_n(f, L^*) - f(x)|\, dx = 0$$

alakú relációvá. Erdős e sorok írójával írott, 1937-ben az Annals of Math.-ban megjelent dolgozatukban egycsapásra megoldották mindkét feladatot, megmutatván, hogy alappontrendszerül tetszőleges $[-1, +1]$-ben L-integrálható és itt a $p(x) \geqq M(>0)$ feltételt kielégítő súlyra orthogonális $\omega_n(x)$-polinomsorozat P-gyökrendszerét véve

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} [f(x) - L_n(f, P)]^2\, dx = 0$$

hacsak $f(x)$ korlátos és R-integrálható. Sőt, a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} [f(x) - L_n(f, P)]^2 p(x)\,dx = 0$$

relációt ugyanezen $f(x)$-ekre már minden nemnegatív és R-integrálható $p(x)$ súlyfüggvény mellett kimutatták.* E tétel egy rövid bizonyítását már 1934. májusában előadták a Matematikai Társulatban; dolgozatukban mégsem ez a bizonyítás szerepel, mert a tételt időközben azon még általánosabb alappontrendszerekre is kimutatták, melynél az n-edik sort az $\omega_n(x) + a_n\omega_{n-1}(x) + b_n\omega_{n-2}(x) = 0$ egyenlet gyökei szolgáltatják, ahol a_n, b_n valósak és $b_n \leqq 0$. A speciális eset 1934-es bizonyítását Kuzmin és Natanson 1939-ben újra megtalálták. Erdős és Feldheim 1936-ban egy Comptes Rendus-cikkben még azt is kimutatták, hogy speciálisan a T alappontrenszer esetén tetszőleges nagy pozitív egész r esetére

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} [f(x) - L_n(f, T)]^{2r} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Ilyen tétel más alappontrendszerre nem ismert; a nehézségekre jellemző, hogy az ún. U-alappontrendszer esetére, mikor is az n-edik alappontokat az $U_n(x) = 0$ egyenlet gyökei szolgáltatják, ahol

$$U_n(\cos\vartheta) = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta},$$

mint Feldheim megmutatta, alkalmas $[-1, +1]$-ben folytonos $f_0(x)$-re

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-1}^{1} [f_0(x) - L_n(f_0, U)]^4 \sqrt{1-x^2}\,dx = \infty.$$

Fejértől származik azon észrevétel, hogy nemcsak az alappontrendszer tulajdonságaiból lehet az interpolációs polinomok tulajdonságaira következtetni, hanem bizonyos esetekben egyes interpolációs tulajdonságok igazolhatók elegánsan és ebből lehet visszakövetkeztetni az alappontrendszer egyes tulajdonságaira. Így nyerte egyik legelegánsabb bizonyítását azon ténynek, hogy az n-edik Legendre-polinom két konzekutív gyökének maximális távolsága 0-hoz tart, ha $n \to \infty$. Erdős e sorok írójával írott két további Annals-cikkükben e szép megjegyzést az orthogonális polinomok egy általános vizsgálati elvévé építették ki, mellyel más úton eddig el nem érhető eredmények is bizo-

* Ez van *bizonyítva*; a tételt *kimondásában* sajtóhiba folytán $p(x) \equiv M(>0)$ szerepel.

nyíthatók voltak. Egy ilyen pl. azon tétel, hogy — nem ragaszkodva a tétel legélesebb formájához — ha a súlyfüggvény $[-1, +1]$-ben csupán folytonos, *minden további megkötés nélkül*, úgy a hozzátartozó n-edik orthogonális polinom két egymásra következő gyökét $\cos \vartheta_\nu^{(n)}$, ill. $\cos \vartheta_{\nu+1}^{(n)}$ alakba írva

$$n(\vartheta_{\nu+1}^{(n)} - \vartheta_\nu^{(n)}) \to \pi$$

éspedig egyenletesen, ha tetszőleges kis pozitív ε-al $\varepsilon \leqq \vartheta_\nu^{(n)} < \vartheta_{\nu+1}^{(n)} \leqq \pi - \varepsilon$. A Fejér-elv fontossága valószínűleg még lényegesebben fog a végtelen intervallumban orthogonális polinomokra megmutatkozni, melyekre vonatkozólag — szemben a véges intervallumra vonatkozó Szegő—S. Bernstein féle elmélettel — általános elméletnek eddig nyoma sincs, viszont Balázs János és e sorok írója, valamint Freud Géza nemrégen találtak általános tételeket a végtelen intervallumhoz tartozó interpolációs alakzatokra.

Az interpoláció elméletével kapcsolatban vetette fel e sorok írója azon kérdést, hogy ha a $[0, 1]$ intervallum minden α pontjához a köz véges sok, α-tól különböző pontját rendeljük hozzá, akkor biztosítható-e oly végtelen ponthalmaz $[0, 1]$-ben, melyek egyike sem „képpontja" a másiknak. Az ezen kérdésből kifejlődött elmélet kifejlesztésében Erdős egyik előharcos volt, részint egyedül, részint Fodor Gézával és Hajnal Andrással írott dolgozataiban.

Térjünk vissza analízisbeli munkáira, éspedig sorelméleti munkáinak egy rövid szemléjére. Ezek talán leglényegesebbjei ún. Tauber-típusú tételekre vonatkoznak, tehát olyanokra, melyek azt kérdezik, hogy ha egy sor egy bizonyos szummációs eljárással szummálható, akkor a sor szerkezetére vonatkozó milyen feltevés mellett lehet a sor konvergenciájára vagy legalább egy, az eredetinél „gyengébb" eljárással való szummálhatóságára visszakövetkeztetni. Magának a primszámtétel elemi bizonyításának egész második része egy ilyen természetű feladat megoldása volt, mint mondottuk. Ez még világosabban tűnik ki 1949-es az Indian Journ. of Math.-ban közölt dolgozatából, melyben azon kérdéssel foglalkozik, hogy vajon a prímszámeloszlás elemi elméletéből elegendő-e *egyedül* az (elemien bizonyítható) Selberg-féle alapformulát felhasználni,* vagy *kell*-e egyéb, az eredeti bizonyításokban szereplő, elemien bizonyítható prímszámeloszlási tételeket is használni? Kimutatja, hogy elegendő a Selberg-formula egyedül is; ennek alapja a következő, ezen elméletben szokatlan alakú tétel.

* E formula szerint, ha $\alpha = p_1 < p_2 < \ldots$ az összes prímek, akkor $x \to \infty$-re

$$\sum_{p_i \leqq x} \log p_i + \sum_{p_i p_j \leqq x} \log p_i \log p_j = 2x \log x + O(x).$$

Ha $a_\nu \geqq 0$ és $S_m = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu$ jelöléssel $n \to \infty$ -re

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (S_{n-k} + k) = n^2 + O(n)$$

akkor

$$S_n = n + O(1).$$

Ennek bizonyitása egyike legmerészebb bizonyitásainak és — ezen elméletben egész szokatlanul — régebbi, a Snirelman-sűrűségnél felhasznált ideáihoz is visszanyúl. Orientációkép megjegyzem, hogy az $O(1)$ helyett $o(n)$-el sem egész egyszerű a bizonyítás; a bizonyítás fokozatosan javítja a hibatagot $O(n^\varepsilon)$-ra, majd $O(\log n)$-re, fokozódó nehézségekkel. A legnehezebb persze az utolsó lépés, a hibatag $O(1)$-re való javítása; itt használja aritmetikai ideáit. E dolgozat is jelentékeny irodalmi visszhangot váltott ki. Azóta ismeretes egyszerűbb bizonyítás is.

További nevezetes eredményei e téren a Hardy és Littlewood által felfedezett „ritka-index"-jelenségre* vonatkoznak. A Tauber-típusú tételek előbb mondott megjelölésénél „a sor szerkezetére vonatkozó feltevés" legtöbbször az egyes tagok abszolút értékére vonatkozó felső korlátozás szokott lenni. Hardy és Littlewood voltak az elsők, akik más típusú szerkezeti feltételek szükségességére jutottak és ezirányú tételt be is tudtak bizonyítani. A Σa_n sor Abel-szummálhatóságát feltéve azt fedezték fel, hogy ha a sorban csak „kevés" 0-tól különböző tag van, akkor minden nagysági megkötés nélkül következik a Σa_n sor konvergenciája. A „kevés" megjelölés azt jelenti, hogy a sort Σa_{n_ν} alakba írjuk úgy, hogy abban már csak a sor el nem tűnő tagjai szerepelnek, akkor

$$\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} \geqq q > 1$$

ahol q persze nem függ ν-től és e feltétel nem nagyon javítható. Más szummációs eljárásokra ilyen tétel alig van az irodalomban. Meyer—König mondta ki azon szép sejtést 1943-ban, hogy az Euler-szummációra** ritka-index-tétel fennáll már akkor, ha a „ritkasági" feltétel

$$n_{\nu+1} - n_\nu > A\sqrt{n_\nu}$$

* Ez hevenyészett fordítása a „high-indices theorems" elnevezésüknek.

** Ezen eljárás a $\sum_{0}^{\infty} b_\nu$ sorhoz az $S_n = \sum_{0}^{n} b_\nu$ részletösszegekkel „szumma" gyanánt az esetleg létező $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$ határértéket adja meg.

minden fix pozitív A mellett, hacsak ν elég nagy; nem nehéz példát konstruálni, hogy e tételben, ha igaz, a hézagfeltétel tovább nem enyhíthető. Erdős e sejtést 1952-ben „majdnem" bebizonyította, megmutatván a tétel helyességét, ha a hézagfeltételben szereplő A *elég nagy* numerikus állandó. Analóg tételt publikált 1956-ban az Acta Math. Hung.-ban a Borel-szummációra*. Itt hézagfeltétel gyanánt a Meyer—König sejtésében szereplő hézagfeltétel mellett a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_{k+1}-n_k} < \infty$$

feltételt is ki kell kötnie; *enélkül* ismét, mint az Euler-szummáció esetén, az $n_{\nu+1}-n_\nu > A\sqrt{n_\nu}$ feltételt elég nagy pozitív A-val kell megkövetelnie.

Egy további nevezetes Tauber-típusú tétele, melyet Fellerrel és Pollarddal együtt közöltek, nevezetes szerepet játszik a Markov-láncok elméletében. Eszerint, ha p_k nemnegatív, $\Sigma p_k = 1$ és $m = \Sigma k p_k$, továbbá

$$P(x) = \sum_{1}^{\infty} p_k x^k$$

olyan, hogy azon k-exponensek legnagyobb közös osztója 1, melyekre $p_k > 0$, akkor $(1 - P(z) \neq 0$ ha $|z| < 1$ és$)$ az u_k-kat

$$\frac{1}{1-P(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$$

-al definiálva

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \frac{1}{m}.$$

Ha $m = \infty$, akkor $\frac{1}{m}$ alatt 0 értendő.

Egy teljesen kivizsgálatlan területet nyitott meg egy, Bagemihl-lal az Acta Math-.ban közölt dolgozata. Még Riemanntól származik azon megjegyzés, hogy egy valós tagú konvergens sor átrendezése által nyerhető konvergens sorok összegei vagy egyetlen (valós) számot adnak,

* A Borel-szummáció több alakja közül itt arról van szó, amelyik a $\sum_{0}^{\infty} b_\nu$ sorhoz az $S_n = \sum_{0}^{n} b_\nu$ részletösszegekkel „szumma" gyanánt az esetleg létező $\lim_{r\to\infty} e^{-r} \sum_{0}^{\infty} \frac{S_n}{n!} r^n$ határértéket adja meg.

vagy kitöltik a teljes valós tengelyt. Különösképp Bagemihl—Erdős említett dolgozatáig alig volt nyoma az irodalomban azon természetes kérdés kutatásának, hogyan alakulnak e viszonyok, ha konvergencia helyett egy előírt szummációs eljárást veszünk. Hogy e vizsgálatok meglepetéseket adhatnak, azt már e dolgozat jelzi; ebben a „legegyszerűbb", a $(C, 1)$-szummáció* esetére már megmutatják, hogy Riemann-féle alternatíván túl még azon eset is előállhat, mikor az összes, $(C, 1)$-szummálható átrendezések szummái fix α és β-vel és egész ν-kkel az $\alpha+\beta\nu$ alakú számok és csak ezek. Szóba kerülhetnének még Piraniannal és Rosenbloom-mal írott általános szummációelméleti dolgozatai is.

Az előbb említett $\sum \frac{1}{n_{k+1}-n_k} < \infty$ hézagfeltétel egészen másirányú vizsgálataiban merült fel. Pólya 1929-es klasszikus Math. Zeitschrift-dolgozatában fejtette ki egyebek közt azon elméletét, hogy hézagos hatványsorok által adott egész függvények az origóból kiinduló tetszőlegesen kicsi szögterekben „lényegileg ugyanúgy" viselkednek, mint az egész síkon. E tényállás egyik kifejezése azon tétele, hogy ha

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k}$$

pozitív egész λ_k-kitevőkkel bíró egész függvény, melyre

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log(\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\log \lambda_n} > \frac{1}{2}$$

hézagfeltétel teljesül, úgy

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(r)}{M(r)} = 1;$$

itt, mint szokás,

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = M(r)$$

$$\min_{|z|=r} |f(z)| = m(r).$$

Erdős Macintyre-val írott, 1954-ben az Edinburgh Math. Proc.-ben megjelent dolgozatukban e szép tételt jóval enyhébb hézagfeltételből,

* Mint szokás, $S_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$-vel a $\sum a_\nu$ sor $(C, 1)$-szummabilis, ha a $\lim_{n\to\infty} \frac{S_0+\ldots+S_n}{n+1}$ határérték létezik, e határérték a sor $(C, 1)$-szummája.

éspedig épp a $\sum \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} < \infty$ feltételből már le tudják vezetni, és e feltétel már szükséges is!

A Fejér-féle hézagfeltételnek, mely a $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ sor konvergenciáját követeli, egy egészen más területen való lényeges szerepét fedezték fel Clarkson-nal 1943-ban a Duke Journ.-ben közölt dolgozatukban. Ismeretes azon S. Bernstein által sejtett, Müntz és Szász Ottó által először bizonyított tétel, hogy ha a λ_k-k pozitiv egészek és $\sum \frac{1}{\lambda_k} = \infty$, akkor minden $0 \leqq x \leqq 1$-ben folytonos $f(x)$ egyenletesen approximálható $a + \Sigma\, a_k x^{\lambda_k}$ alakú polinomokkal. Mármost Erdős és Clarkson azt a természetes kérdést vetették fel, milyen függvényosztályra igaz hasonló approximációtétel a Fejér-féle hézagfeltétel esetén. Azon meglepő tételt találták, hogy ezen függvények analitikusan folytathatók a nyílt egységkörben. Érdekes dolog, hogy e teljesen váratlan tényt tőlük függetlenül Laurent Schwartz is felfedezte és velük egyidőben közölte.

Nevezetes tételt tartalmaz Gillis-sel 1937-ben a Journ. of Lond. Math. Soc.-ban publikált dolgozatuk. Ez R. Nevanlinnának 1936-ban egy a Springer-sorozatban megjelent „Eindeutige analytische Funktionen" c. könyvében felvetett problémához (p. 145) ad lényeges adalékot. E sejtés — egy dimenzióra redukálva, ami nem jelent lényeges megszorítást — azt mondja ki, hogy ha egy oly mértékfüggvényre*, melyre

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{c} \frac{h(t)}{t} = +\infty$$

egy lineáris zárt ponthalmaz h-mértéke véges, akkor transzfinit** átmérője 0. Ha fordítva a lineáris zárt ponthalmazról azt tesszük fel, hogy transzfinit átmérője 0 (ami végeredményben, mint jól ismert, a konformis leképezéssel kapcsolatos mennyiség), akkor Nevanlinna kimutatta komplex függvénytani módszerekkel, hogy a ponthalmaz h-mértéke 0 mindazon $h(t)$ mértékfüggvényekre, melyekre $\int_0^c \frac{h(t)}{t}\, dt$

* $h(t)$ ilyen, ha $h(0)=0$ és valamely pozitív c-vel $0 \leqq t \leqq c$-ben $h(t)$ pozitív és alulról konvex.

** Tetszőleges fix egész n-re egy zárt korlátos tartományban mindig van n pont $(x_{1n}, \ldots, x_{nn})$, melyre $d_n = \prod_{1 \leqq \mu < \nu \leqq n} |x_{\mu n} - x_{\nu n}|$ maximum. Ekkor, mint Fekete kimutatta, a $d_n^{\binom{n}{2}^{-1}}$ értéke n-el monoton fogy, tehát van határérték; ez a tartomány transzfinit átmérője.

létezik. Ha tehát egy lineáris zárt ponthalmaznak *ilyen* h-kkal valós h-mértéke véges pozitív, akkor transzfinit átmérője >0. Fenti sejtés tehát ahhoz kell, hogy állíthassuk, hogy az $\int_0^c \frac{h(t)}{t}\,dt$ integrál divergenciája szükséges és elégséges ahhoz, hogy egy lineáris zárt ponthalmaz h mértékének véges-pozitív voltából a transzfinit átmérő eltűnésére következtethessünk. A $h(t)=\log^{-1}\frac{1}{t}$ esetben, mely a legegyszerűbb új eset, Lindeberg egy régebbi tételéből következett, hogy ha ezen speciális h mérték (röviden logaritmikus mérték) 0, akkor a transzfinit átmérő is az. Mármost Erdős és Gillis-nek sikerült ezen $h(t)=\log^{-1}\frac{1}{t}$ esetben Nevanlinna teljes sejtését igazolni, tehát már a logaritmikus mérték *végességéből* a transzfinit átmérő eltűnésére következtetni, még hozzá szellemes elemi ponthalmazelméleti meggondolásokkal. Ezen eset jelentőségét még csak aláhúzza azon körülmény, hogy, mint Ursell később kimutatta, Nevanlinna sejtése általában nem igaz és a $h(t)=\log^{-1}\frac{1}{t}$ eset épp határeset; ha a $h(t)$ mértékfüggvény $\eta(t)\log^{-1}\frac{1}{t}$ alakú, ahol $\eta(t)$ az $\frac{1}{t}$-vel tart 0-hoz, de úgy, hogy még

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{c}\frac{h(t)}{t}\,dt=+\infty$$

akkor van oly zárt lineáris ponthalmaz, melynek h-mértéke véges és transzfinit átmérője pozitív.

A komplex függvénytan egy nevezetes irányzata az, amely az általános tételekhez polinomok vizsgálatán keresztül jut. Ez és a geometriával való kapcsolat ad még sok egyéb mozzanat mellett különös érdekességet és jelentőséget a racionális és általánosabban a trigonometrikus polinomok elméletének. Erdős sok dolgozata foglalkozik — a már említetteken felül — e polinomok elméletének különféle kérdéseivel, így pl. a csupa valós gyökkel bíró racionális polinomok Laguerre által megindított elméletével (amely előtt mint végcél, a Riemann-sejtés lebeghetett). Idevágó eredményei közül — mintegy áthajlásként geometriai tárgyú dolgozataihoz — csak a Gallaival az Annals of Math.-ban, ill. Niven-nel 1948-ban a Bull. of Amer. Math. Soc.-ban 1948-ban publikáltakat említem itt meg, azok közül is csak a legfrappánsabbat.

Ez azon kérdésre ad választ, hogy rögzítve egy csupa valós gyökkel bíró polinom két konzekutív $a<b$ gyökét és úgy normálva, hogy e két gyök közötti (egyetlen) extremum értéke 1 legyen, mi $\int_a^b f(t)\,dt$ maximuma. Elegánsan kimutatták, hogy ez akkor és csak akkor következik be, ha

$$f(t)=\frac{(b-t)(t-a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}.$$

E tétel tehát azt mondja, hogy ha egy valós együtthatós polinom integrálja két konzekutív valós $a<b$-gyöke között $> \frac{(b-a)^3}{6}$, akkor van komplex gyöke is. A Niven-nel írott dolgozatban pl. megmutatják, hogy ha egy n-edfokú $f(z)=0$ egyenlet gyökei $z_1, \ldots, z_n$, a deriváltjáé $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, akkor tetszőleges komplex ξ-ra

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu-\xi| \geqq \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1}|\xi_\nu-\xi|.$$

Szorosabb értelemben vett geometriai dolgozatai a már említetteken kívül az elemi geometria legkülönbözőbb kérdéseire vonatkoznak; problémalátó képessége talán éppen ezen évezredes témakörben csillog legfényesebben. Még élénken emlékszem a harmincas évek elején azon sejtésére, hogy az $ABC\triangle$ síkjában P egy tetszőleges pont és P-ből e háromszög csúcsaira bocsátott merőlegesek talppontjai A_1, B_1 és C_1, úgy

$$\frac{\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}}{\overline{PA_1}+\overline{PB_1}+\overline{PC_1}} \geqq 2$$

és az egyenlőség jele csak ha $ABC\triangle$ szabályos és P a súlypontja. Ezt hosszú ideig senki se tudta bebizonyítani. Egy nagyhírű, jelenleg cambridge-i professzor megfogadta, hogy letesz a matematikáról, ha nem bizonyítja be e sejtést; a matematika egy sereg nevezetes értekezéssel lenne szegényebb, ha meggondolatlan igéretét beváltotta volna. Évekkel később találta csak Mordell az első bizonyítást, melyet azóta több további követett. De ez csak egy a rengeteg sok szép feladat közül, melyek részben a Math. Monthly, az Elemente der Mathematik, a Matematikai Lapok hasábjain jelentek meg, részint — új műfajként — probléma-cikkek formájában, melyek egyike-másika olyanrendű matematikusokat is indított dolgozatírásra, mint Littlewood. Nem utolsó sorban sokat köszönhetnek neki matematikai versenyeink, melyek sok

szép feladata származik tőle és egyáltalán fiataljaink, akiknek tartott változatos előadásaiért nyert 1961-ben Beke-díjat.

Munkái hatásának illusztrálására ide iktatok egy (bizonyára nem teljes) listáját azon könyveknek, melyek Erdős dolgozataival foglalkoznak.

1. G. H. Hardy and E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers.
2. G. Szegő: Orthogonal polynomials.
3. R. Nevanlinna: Eindeutige analytische Funktionen, II. Auflage.
4. K. Prachar: Primzahlverteilung.
5. E. Landau: Neuere Ergebnisse der additiven Zahlentheorie.
6. M. Kac: Statistical independence in probability, analysis and number theory.
7. J. W. S. Cassels: An introduction to diophantine approximation.
8. I. P. Kubiljus: Verojatnosztie metodi v tyeorii csiszel.
9. Ja. L. Geronimusz: Mnogocsleni, ortogonalnie na okruzsnoszti i na otrezke.
10. A. Zygmund: Trigonometrical series, II. kiadás.
11. K. Zeller, Theorie der Limitierungsverfahren.
12. A. I. Timan, Tyeorija priblizsenia funkcii.
13. Hua Lo Ken: Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie (Enciklopédia-cikk).
14. Ju. V. Linnik: Diszperszionnimi metod v binarnih additivnyich zadacsah.
15. I. P. Natanszon: Konsztruktyivnaja tyeorija funkcii.
16. E. Feldheim: Theorie de la convergence des procedés d'interpolation et de quadrature mcanique.
17. L. Bieberbach: Analytische Forsetzung.
18. J. Riordan: An introduction to combinatorical analysis.
19. O. Ore: Theory of graphs.
20. N. Bari: Trigonometricseszkie rjadi.
21. C. Berge: Théorie des graphes et ses applications.
22. R. P. Boas jr.: Entire functions.
23. L. Fejes Tóth: Lagerungen auf der Ebene, auf der Kugel und im Raume.
24. A. G. Posztnyikov: Arifmeticseszkoje modelirovanie szlucsajnich processzov.
25. A. Hurewicz and H. Wallmann: Dimensiontheory.
26. W. Sierpinski: Teoria liczb.
27. W. Sierpinski: Transfinit numbers.
28. F. Bachmann: Transfinite Zahlen (Ergebnisse d. Math.).
29. H. Davenport: An introduction to the theory of numbers.
30. G. N. Ringel: Färbungsprobleme und Flächen und Graphen.
31. Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás.
32. E. Trost: Primzahlen.
33. K. Kuratowski: Topologie.
34. P. Turán: Eine neue Methode in der Methode in der Analysis und deren Anwendungen.
35. W. J. LeVeque: Topics in number theory.
36. Hardy: Ramanujan.

Népköztársaságunk nem tagadta meg tőle az elismerés külső jeleinek egyikét sem. 1958-ban Kossuth-díjjal lett kitüntetve, 1956-ban a Magyar Tudományos Akadémia levelező-, majd 1961-ben rendes tagja lett. De hagyjuk a felsorolást; Erdős matematikusi pályája felfelé ível, ha ma már másod- vagy harmadnaponként is ír „csak" egy dolgozatot.

Hatása erősebb, mint valaha; ő a jelenkori magyar matematika egyik legerősebb stimulátora. Kívánjuk neki, hogy dolgozatainak száma szigorúan monoton növekedjék, olvasóinak pedig, hogy sajtóhibáinak száma szigorúan monoton fogyjon.

ПАЛУ ЭРДЕШ ИСПОЛНУЛОСЬ 50 ЛЕТ

П. Туран

THE WORK OF P. ERDŐS

P. TURÁN

Ramsey és Van der Waerden tételével kapcsolatos kombinatorikai kérdésekről

ERDŐS PÁL

RAMSEY[1] egy ismert tétele szerint minden $i \leqq k$ és $i \leqq l$ egész számokhoz létezik egy legkisebb $f(i, k, l)$ szám, melyre ha egy $n \geqq f(i, k, l)$ elemű halmaz i-ed osztályú kombinációit két osztályba osztjuk, akkor vagy van k elem, melynek összes i-ed osztályú kombinációja az első osztályban van, vagy van l elem, melynek összes i-ed osztályú kombinációja a második osztályban van. E cikkben csak az $i=2$ esettel fogunk foglalkozni, s $f(2, k, l)$ helyett $f(k, l)$-et fogunk írni. $i=2$ esetre RAMSEY tétele így is fogalmazható: $f(k, l)$ az a legkisebb szám, melyre ha egy $f(k, l)$ szögpontú teljes gráf éleit két osztályba soroljuk vagy az első osztály tartalmaz egy k szögpontú teljes részgráfot vagy a második osztály egy l szögpontú teljes részgráfot. Triviális, hogy $f(2, l)=l$, $f(k, 2)=k$. Fennáll továbbá [1, 2] ($c_1, c_2, \ldots$ pozitív konstansok)

$$l\binom{k+l-2}{k-1}^{c_1} < f(k, l) < \binom{k+l-2}{k-1} \qquad (0 < c_1 < 1).$$

A legérdekesebb esetek $k=l$ és $l=3$. Ha $k=l$, akkor[3]

$$2^{k/2} < f(k, k) \leqq \binom{2k-2}{k-1} \tag{1}$$

$f(k, k)$ pontos értékét nagyon nehéz lesz meghatározni, még azt se sikerült bebizonyítani, hogy $\lim_{k\to\infty} f(k, k)^{1/k}$ létezik.

Ha $l=3$, akkor[4]

$$\frac{c_2 k^2}{\log k} < f(k, 3) \leqq \binom{k+1}{c}.$$

Nem sikerült eldöntenem vajon $f(k, 3) > c_3 k^2$ igaz-e?

Célszerű lesz RAMSEY tételét a következőképpen átfogalmazni: Jelentse $g(n)$ azt a legnagyobb egész számot, melyre ha egy n szögpontú gráf éleit két osztályba osztjuk mindig van egy $G^{g(n)}$ ($G^{(r)}$ egy r szögpontú teljes részgráfot fog jelölni), melynek élei ugyanabban az osztályban vannak. (1)-ből azonnal nyerjük, hogy

$$\frac{\log n}{2 \log 2} < g(n) < \frac{2 \log n}{\log 2}. \tag{2}$$

Nem tudom bebizonyítani, hogy

$$\lim_{n=\infty} g(n)/\log n$$

létezik (könnyű belátni, hogy ez equivalens $\lim_{k\to\infty} f(k, k)^{1/k}$ létezésével).

Vizsgáljuk mármost a következő kérdést: Egy n szögpontú teljes gráf éleit két osztályba osztjuk. Létezik-e egy $k = k(n)$ szögpontú részgráf ($k = k(n)$ csak n-től függ, s nem függ a beosztástól), melyre vagy az első osztály élei, vagy a második osztály élei túlsúlyban vannak? (hogy mit jelent „túlsúlyban vannak" azt persze még precizírozni kell). Ily tétel persze csak akkor érdekes, ha $k(n)$-re jobb alsó becslést kapunk, mint amit (2) ad.

Jelöljön $G(n)$ egy n szögpontú teljes gráfot, $x_1, \ldots, x_n$ legyenek szögpontjai s $e(i, j)$ jelölje az x_i és x_j pontokat összekötő élet. Legyen $h(i, j) = +1$, ha az $e(i, j)$ él az első osztályban van, s $h(i, j) = -1$ ha a másodikban van. $G(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ jelölje az $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ pontok által feszített teljes részgráfot s

$$H(G^{(r)}) = H(x_1, \ldots, x_{i_r}) = \Sigma h(i_{j_1}, i_{j_2}),$$

ahol az összegezés $G(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ összes élére ki van terjesztve.

Legyen $0 < \varepsilon < 1$, jelölje $g(\varepsilon, n)$ azt a legnagyobb számot, melyre ha egy n szögpontú gráf éleit két osztályba osztom, akkor mindig van egy $G^{(r)}$, $r \geqq g(\varepsilon, n)$, melyre

$$|H(G(r))| > \varepsilon \binom{r}{2}. \tag{3}$$

I. Tétel.

$$\frac{\log n}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} 100 \log 2} < g(\varepsilon, n) < \frac{10\,000 \log n}{\varepsilon^2}. \tag{4}$$

Látjuk, hogy (4) $g(\varepsilon, n)$-re a helyes nagyságrendet adja. (4)-et könnyű lenne élesíteni. Valószínűleg igaz, hogy

$$\lim_{n=\infty} g(\varepsilon, n)/\log n = F(\varepsilon) \tag{5}$$

ahol $F(\varepsilon)$ a $(0, 1)$ intervallumban monoton csökkenő függvény. (5) bizonyítása nem látszik könnyűnek. A tétel csak ε kis értékeire érdekes s érdemes lenne (4) alsó és felső becslését ε-tól függően javítani. Ez eddig nem sikerült nekem.

Legyen

$$H(n)=\min \max_{1\leqq r\leqq n} |H(G^{(r)})|$$

ahol a maximumot $G^{(n)}$ összes r szögpontú teljes részgráfjaira kell venni, s a minimumot az élek összes két részre való osztályozására kell venni. Ekkor fennáll a

II. Tétel.

$$\frac{n}{4}\leqq H(n)<C_4 n^{3/2}.$$

Valószínűnek látszik, hogy a felső becslés igen rossz, talán az alsó becslés sincs túlságosan messze $H(n)$ valódi nagyságrendjétől, de $\frac{1}{4}$ biztosan helyettesíthető lesz nagyobb értékkel.

Az I. és II. tételeknél a felső becslés bizonyításához egyszerű valószínűségszámítási módszereket fogunk használni.

Általánosabban jelentse $g(i, \varepsilon, n)$ azt a legnagyobb számot, melyre ha egy n elemű halmaz összes i elemű részhalmazait két osztályba osztjuk, akkor mindig van egy $r\geqq g(i, \varepsilon, n)$ elemű halmaz $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$, melyre

$$|H_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})|<\varepsilon\binom{r}{i}$$

($H_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ a következőképpen van definiálva: $h_i(x_{u_1}, \ldots, x_{u_i})=1$ ha $x_{u_1}, \ldots, x_{u_i}$ az első osztályban van, különben h_i értéke -1. $H_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})=\Sigma h_i$ ahol az összegezés az ösres i elemű részhalmazokra van kiterjesztve.) Egyszerű valószínűségszámítási módszerekkel be tudom bizonyítani, hogy

$$g(i, \varepsilon, n)<C_5^{(i)}(\varepsilon)(\log n)^{1/i-1} \tag{6}$$

(6) bizonyítását nem részletezem, mert hasonló az I. és II. tételek bizonyításához, (lásd még a [3] alatt idézett cikk módszerét). Könnyű lenne $C_5^{(i)}(\varepsilon)$-ra i és ε-tól függő explicit becslést adni.

Lehetséges, hogy

$$g(i, \varepsilon, n)>C_6^{(i)}(\varepsilon)(\log n)^{1/i-1} \tag{7}$$

(7) ha igaz, főleg azért lenne érdekes, mert mint ismeretes[5] $f(i, k, l)$ $i>3$-ra sokkal gyorsabban tart a végtelenhez, mint $f(2, k, l)=f(k, l)$ (ez valószínűleg $i=3$-ra is igaz) s érdekes lenne, ha $g(i, \varepsilon, n)$ minden i-re nagyjából egyformán viselkedne. (7)-et azonban nem tudom bebizonyítani.

Van der Waerden egy ismert tétele szerint létezik egy legkisebb $A(k)$, melyre ha az $1 \leqq t \leqq A(k)$ intervallumban az egész számokat két osztályba osztjuk, akkor legalább az egyik rész tartalmaz k tagú számtani sort. $A(k)$-ra csak nagyon gyenge felső becslés ismeretes. RADÓ s a szerző bebizonyították, hogy

$$A(k) > 2^{k/2}(k-1)^{1/2}. \tag{8}$$

SCHMIDT e becslést javította, kimutatta, hogy

$$A(k) > 2^{k - C_6(k \log k)^{1/2}}.$$

Jelentse $B(n)$ azt a legnagyobb egész számot, melyre ha az $1 \leqq t \leqq n$ intervallum számait két osztályba osztom, legalább az egyik osztály tartalmaz $B(n)$ tagú számtani sort. Van der Waerden tétele miatt $\lim_{n \to \infty} B(n) = \infty$ és Schmidt eredménye miatt

$$B(n) < (1-\eta)\frac{\log n}{\log 2}$$

minden $\eta > 0$-ra ha $n > n_0(\eta)$.

Legyen $h(m) = +1$ ha m az első osztályban van, s $h(m) = -1$ ha m a második osztályban van. Legyen $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$. $B(\varepsilon, n)$ jelentse azt a legnagyobb számot, melyre ha az $1 \leqq t \leqq n$ intervallum számait két részre osztom, akkor mindig van egy $l \geqq B(\varepsilon, n)$ tagú számtani sor $0 < a < a+d < \ldots < a+(l-1)d \leqq n$, melyre

$$\left| \sum_{u=0}^{l-1} h(a+ud) \right| \geqq \varepsilon l.$$

Nyilván $B(1, n) = B(n)$.

III. Tétel.

$$B(\varepsilon, n) < \frac{100\,000 \log n}{\varepsilon^2}. \tag{9}$$

A III. Tétel bizonyítását csak vázolni fogjuk, mert nagyon hasonlít az I. és II. tételek, valamint (8) bizonyításához. Lehetséges, hogy (9) $B(\varepsilon, n)$-re már helyes nagyságrendet adja, sőt talán $B(\varepsilon, n)/\log n$ minden ε-ra létezik. Talán $\varepsilon = 1$-re e limes 0.

Az $\varepsilon = 0$ esetre vonatkozik a következő kérdés: Legyen $D(k)$ az a legkisebb szám, melyre, ha az $1 \leqq t \leqq D(k)$ intervallum számait két részre osztjuk, akkor mindig van egy $2k$ tagú számtani sor $a, a+d, \ldots$ $\ldots, a+(2k-1)d$, $0 < a$, $a+(2k-1)d \leqq D(k)$, melyre

$$\sum_{u=0}^{2k-1} h(a+ud) \neq 0.$$

Könnyű belátni, hogy $D(k) < C_7 k^2$, de talán $D(k) < C_8 k$. Az analog kérdés gráfokra nem érdekes. Könnyű ugyanis belátni, hogy minden $G^{(n)}$ tartalmaz egy $G^{(n-1)}$-et, melyre $H(G^{(n-1)}) \neq 0$.

I. Tétel bizonyítása. Először (9)-ben alsó becslést igazoljuk. (2) miatt nyilván az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $G^{(n)}$-nek van oly $2k$ szögpontú részgráfja $G^{(2k)}$, melyre $k = \left[\frac{\log n}{4 \log 2}\right]$ és melynek minden éle az első osztályban van. Legyenek $G^{(2k)}$ szögpontjai $x_1, \ldots, x_{2k}$ és legyen $y_1, \ldots, y_t$

$$t = \left[\frac{k}{20\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right] \tag{10}$$

$G^{(n)}$ t tetszőleges az x-ektől különböző pontja. Ha tételünk nem lenne igaz, akkor nyilván

$$|H(y_1, \ldots, y_t)| \leqq \varepsilon \binom{t}{2}. \tag{11}$$

Továbbá

$$|H(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_t)| =$$

$$= \left| \binom{k}{2} + \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq k \\ 1 \leqq j \leqq t}} h(x_i, y_j) + H(y_1, \ldots, y_t) \right| \leqq \varepsilon \binom{k+t}{2} \tag{12}$$

és hasonlóképpen

$$|H(x_{k+1}, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_t)| =$$

$$= \left| \binom{k}{2} + \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq k \\ 1 \leqq j \leqq t}} h(x_i, y_j) H(y_1, \ldots, y_t) \right| \leqq \varepsilon \binom{k+t}{2} \tag{13}$$

$$|H(x_1, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_t)| =$$

$$= \left| \binom{2k}{2} + \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq 2k \\ 1 \leqq j \leqq i}} h(x_i, y_j) + H(y_1, \ldots, y_t) \right| \leqq \varepsilon \binom{k+2t}{2} \tag{14}$$

(11), (12), (13) és (14)-ből nyerjük, hogy

$$\begin{cases} H(x_1, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_t) - H(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_t) - \\ - H(x_{k+1}, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_t) + H(y_1, \ldots, y_t = \\ = \binom{2k}{2} - 2\binom{k}{2} = k^2 \leqq 4\varepsilon \binom{k+2t}{2} < 2\varepsilon(k+2t)^2. \end{cases} \tag{15}$$

Ha $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{4}$, akkor azonban (15) (10)-nek ellentmond, s ezzel ha $\varepsilon<\frac{1}{4}$ (4)-ben az alsó becslés igazolva van. Ha $\varepsilon\geqq\frac{1}{4}$, akkor $H(x_1, \ldots, x_{2k})=\binom{2k}{2}$ igazolja állításunkat. A 100 constanst könnyű lenne egy kisebb konstanssal helyettesíteni.

Most rátérünk (4) felső becslésének bebizonyítására. A $G^{(n)}$ gráf élein definiált különböző $h(i,j)$, $1\leqq i\leqq j\leqq n$ függvények száma nyilván $2^{\binom{n}{2}}$, ugyanis minden (i,j) élpárra $h(i,j)$ értékét $+1$-nek vagy -1-nek választhatjuk. Legyen $G^{(r)}$ egy fix r szögpontú teljes részgráfja. Meghatározzuk, hogy hány olyan $h(i,j)$, $1\leqq i\leqq j\leqq n$ függvény van, melyre

$$|H(G^{(r)})|<\varepsilon\binom{r}{2} \tag{16}$$

$G^{(n)}$ azon $\binom{n}{2}-\binom{r}{2}$ élei, melyek nincsenek $G^{(r)}$-ben nyilván $2^{\binom{n}{2}-\binom{r}{2}}$ ily függvényt adnak. $G^{(r)}$ élein viszont (16) miatt mint könnyű belátni

$$\Sigma_1\left(\binom{\binom{r}{2}}{u}\right)+\Sigma_2\left(\binom{\binom{r}{2}}{u}\right)$$

ily függvény van, ahol Σ_1-ben $0\leqq u\leqq\binom{r}{2}\frac{1-\varepsilon}{2}$ és Σ_2-ben $\binom{r}{2}\frac{1+\varepsilon}{2}\leqq u\leqq\binom{r}{2}$. Azon $G^{(r)}$ élein definiált $h(i,j)$ függvények száma ugyanis, melyekre pontosan u él van, melyre $h(i,j)=1$ nyilván $\binom{\binom{r}{2}}{u}$. (16) miatt viszont vagy $0\leqq u\leqq\frac{1-\varepsilon}{2}\binom{r}{2}$ vagy $\frac{1+\varepsilon}{2}\binom{r}{2}\geqq u\geqq$ $\geqq\binom{r}{2}$.

Keresett függvényeink száma tehát

$$2^{\binom{n}{2}-\binom{r}{2}}\left(\Sigma_1\left(\binom{\binom{r}{2}}{u}\right)+\Sigma_2\left(\binom{\binom{r}{2}}{u}\right)\right) \tag{17}$$

Egyszerű számolással nyerjük, hogy (a részleteket itt az olvasóra bízzuk)

$$\Sigma_1\left(\binom{\binom{r}{2}}{u}\right)+\Sigma_2\left(\binom{\binom{r}{2}}{u}\right)<2^{\binom{r}{2}}e^{-\frac{\varepsilon^2r^2}{10\,000}} \tag{18}$$

$G^{(n)}$ $G^{(r)}$ típusú részgráfjainak száma nyilván $\binom{n}{r}$. (17) és (18)-ból

tehát nyerjük, hogy $G^{(n)}$ élein definiált azon $h(i,j)$ függvények száma, melyekhez van egy $G^{(r)}$, melyre (16) teljesül kisebb mint

$$2^{\binom{n}{2}}\binom{n}{r}e^{-\varepsilon^2 r^2/10\,000} < 2^{\binom{n}{2}} n^r e^{-\varepsilon^2 r^2/10\,000} \leqq 2^{\binom{n}{2}}$$

ha

$$r \geqq \frac{10\,000 \log n}{\varepsilon^2}. \tag{19}$$

Tehát ha (19) fennáll van oly $h(i,j)$ függvény, melyre (16) $G^{(n)}$ egyetlen r szögpontú részgráfra se áll fenn. Ekkor azonban minden $l \geqq r$ esetén is fennáll, hogy

$$|H(G^{(l)})| \leqq \varepsilon\binom{l}{2} \tag{20}$$

Fennáll ugyanis (az összegezést $G^{(l)}$ összes r szögpontú részgráfjára kell kiterjeszteni)

$$H(G^{(l)}) = \sum H(G^{(r)}) \Big/ \binom{l-2}{r-2} \tag{21}$$

$G^{(l)}$ minden éle ugyanis $\binom{l-2}{r-2}$ $G^{(r)}$-ben fordul elő. (21)-ből $|H(G^{(r)})| \leqq \varepsilon\binom{r}{2}$ miatt

$$|H(G^{(l)})| \leqq \binom{l}{r}\varepsilon\binom{r}{2}\left(\binom{l-2}{r-2}\right)^{-1} = \varepsilon\binom{l}{2},$$

azaz (21) be van bizonyítva.

(4) $G(\varepsilon, n)$ valódi nagyságrendjét megadva, de $G(\varepsilon, n)$-nek ε-tól való pontos függését nem adja meg. A tétel ezen hiányosságán egyelőre nem tudok segíteni. 10000 helyett persze könnyű lenne kisebb constanst találni, de $\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}$ és $\frac{1}{\varepsilon^2}$ tényezőket nem tudom gyorsabban, illetve lassabban a végtelenhez tartó függvényekkel helyettesíteni.

II. Tétel bizonyítása. Először az alsó becslést bizonyítjuk. Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $h(1,i) = 1$ i-nek legalább $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ értékére s hogy ezek $i = 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Ha $H\left(x_2, \ldots, x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right) \leqq$ $\leqq -\frac{n}{4}$, akkor készen vagyunk. Ha $H\left(x_2, \ldots, x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right) > -\frac{n}{4}$, akkor viszont $H\left(x_1, \ldots, x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right) \geqq \frac{n}{4}$, s ezzel állításunk igazolva van.

$H(n$-re vonatkozó felső becslés bizonyítását nem részletezzük, mert hasonlít az I. Tétel bizonyításához. Ugyanúgy, mint (17) és (18)-ban egyszerű számolással adódik hogy ha $G^{(r)}$ $G^{(n)}$ egy tetszőleges r szögpontú teljes részgráfja, akkor azon $h(i,j)$ függvények száma, melyekre $|H(G^{(r)})| \leqq C_4 n^{3/2}$ kisebb, mint $2^{\binom{n}{2}-n}$ (ha C_4 egy elég nagy abszolút constanst). Minthogy $G^{(n)}$-nek 2^n teljes részgráfja van, van oly h függvény, melyre minden $G^{(r)}$-re $|H(G^{(r)})| \leqq C_4 n^{3/2}$ s ezzel a II. Tétel igazolva van.

III. Tétel bizonyítása. Legyen $a, a+d, \ldots, a+(l-1)d$, $0<a$, $a+(l-1)d \leqq n$ egy fix l tagú számtani sor. Azon h függvények száma melyekre

$$\left| \sum_{u=0}^{l-1} h(a+ud) \right| \geqq \varepsilon_1 l \tag{22}$$

nem nagyobb mint

$$2^{n-l}\left(\Sigma_1\binom{l}{r}+\Sigma_2\binom{l}{r}\right)<2^n e^{-\varepsilon^2 l/10\,000} \tag{23}$$

ahol Σ_1-ben $0 \leqq r \leqq \frac{l(1-\varepsilon)}{2}$ és Σ_2-ben $\frac{l(1+\varepsilon)}{2} \leqq r \leqq l$, (23) bizonyítása ugyanúgy történik, mint (17) és (18) bizonyítása. Az $1 \leqq t \leqq n$ intervallum l tagú számtani sorainak száma nyilván $<n^2$. Tehát (23) miatt azon h függvények száma, melyekhez van legalább egy $l \geqq \frac{100\,000 \log n}{\varepsilon^2}$ tagú számtani sor, melyre (22) teljesül, kisebb mint

$$2^n n^2 \sum_l{}' e^{-\varepsilon^2 l/10\,000} > 2^n \tag{24}$$

Σ'-ben $l > \frac{100000 \log n}{\varepsilon^2}$. (24) miatt van legalább egy h függvény melyre (23) egyetlen $l \geqq \frac{100\,000 \log n}{e^2}$ tagú számtani sorra se teljesül, s ezzel (9) azaz a III. Tétel igazolva van.

IRODALOM

[1] P. Erdős and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, Compositio Math. 2 (1935), 463–470.

[2] P. Erdős, Graph theory and probability, Canad. Journal of Math. 11 (1959), 34–38.

[3] P. Erdős, Some remarks on the theory of graphs, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 292–299.

[4] P. Erdős, Graph theory and probability II. Canad. Journal of Math. 13 (1961), 346–352.
[5] P. Erdős and R. Rado, Combinatorial theorems on classifications of subset of a given set, Proc. London Math. Soc. (3) 2 (1952), 438–939 és Hajnal András előadása Dobogókői gráfelméleti kollokviumon „A particiokalkulus egy véges halmazokra vonatkozó tételéről", Mat. Lapok XI. (1960), 209–210.
[6] W. M. Schmidt, Two combinatorial theorems on arithmetic progressions, Duke Math. Journal, 29 (1962), 129–140.

О КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧАХ СВЯЗАННЫХ С ТЕОРЕМОЙ РАМСЕЙЯ — ВАН ДЕР ВАРДЕНА

П. Эрдёш

ON COMBINATORIAL PROBLEMS CONCERNING A THEOREM OF RAMSEY AND VAN DER WAERDEN

P. Erdős

Denote by $G^{(n)}$ the complete graph of n vertices $x_1,\dots,x_n$. The edge connecting x_i and x_j is denoted by (i,j). Let $h(i,j)$, $1\leqq i\leqq j\leqq n$ be an arbitrary function which takes on the values ± 1. $H(G^{(r)})=\Sigma h(i,j)$ where the summation is extended over all the edges of the subgraph $G^{(r)}$ of $G^{(n)}$ and

$$H(n) = \min_{1\leqq r\leqq n} \max |H(G^{(r)})|$$

where the maximum is to be taken over all subgraphs of $G^{(n)}$ and the minimum over all functions $h(i,j)$.

Let $0<\varepsilon<1$. Denote by $g(\varepsilon, n)$ the largest integer for which there exists for every function h a subgraphs $G^{(r)}$ or $G^{(n)}$ satisfying $r\geqq g(\varepsilon, n)$ and $H(G^{(r)}) \geqq \varepsilon\binom{r}{2}$.

The author proves that

$$\frac{\log n}{100\varepsilon^{\frac{1}{2}}\log 2} < g(\varepsilon, n) < \frac{10\,000\log n}{\varepsilon^2} \tag{1}$$

and

$$\frac{n}{4} < H(n) < cn^{3/2}. \tag{2}$$

It would be interesting to improve the inequalities (1) and (2).

Let $h_1(m)$ be an arbitrary function defined on the integers which takes on the values ± 1. Let $B(\varepsilon, n)$ be the largest integer for which for every function h there always exists an arithmetic progression $0<a<a+d<\dots<a+(l-1)d<n$ of $l\geqq B(\varepsilon, n)$ terms for which $\left|\sum_{u=0}^{l-1} h(a+ud)\right| \geqq \varepsilon l$.

I proved

$$B(\varepsilon, n) < \frac{100\,000\log n}{\varepsilon^2}. \tag{3}$$

No satisfactory lower estimation is known for $B(\varepsilon, n)$. The proof of the upper bounds in the inequalities (1), (2) and (3) use simple probabilistic arguments.

Néhány témakör fejlődéstörténete az algebrai görbék elméletében

KÁRTESZI FERENC

Kezdő matematikusaink az algebrai görbék elméletéből általában csak a másodrendű görbék elméletét ismerik behatóbban, sőt azt is csak abban az esetben, ha a koordinátatest a valós számok teste, kevésbé ismerik a komplex számok teste esetében, s egyáltalán nem ismerik abban az esetben, ha a koordináta-test egy GALOIS-test. (A GALOIS-testtel mint koordináta-testtel dolgozó GALOIS-geometria alig egy-két esztendős kutatási témakör, korántsem mondható közismertnek.) Ezért vettem tervbe egy olyan ismeretterjesztő jellegű, közleménysorozat megírását, mely az algebrai görbék elmélete fejlődéstörténetének során haladva, bevezet a legújabb problémák és módszerek ismeretébe.

A klasszikus témakörök fejlődéstörténeti ismertetésében nem a teljességre való törekvés vezet, hanem bizonyos válogatás. Azokat a témákat kísérem nyomon, amelyek érthetővé teszik, hogy a mai kutatási témáknak végső soron hol volt a forrásuk. Eleinte a történeti ismertetések nagyobb szerepet kapnak, s azoknak a fonalán vezetem be a szükséges és továbbfejlődő fogalmakat, tételeket. Bizonyításokat csak olyan esetben ismertetek, ha a fejlődéstörténeti kép teljesebbé válik általa, vagyis a bizonyítás módja is egy fejlődési stádiumot jellemez.

Első közleményem főtémája az algebrai görbe meghatározása adott pontjaiból, illetve egyszerű struktúrájú pontrendszerek tanulmányozása algebrai görbén.

1. Az n-edrendű síkgörbék

Tekintsük a valós együtthatós

$$g(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^l = 0 \tag{1.1}$$

egyenletet, ahol i, j, k nem-negatív egész számok és $i+j+k = n$.

Továbbá x_1, x_2, x_3 legyenek homogén koordinátái ama (akár valós, akár képzetes) $P(x_1, x_2, x_3)$ pontnak, melynek koordinátái kielégítik az (1. 1) egyenletet. Az így definiált P pontok alakzatát nevezzük *n-edrendű algebrai síkgörbének*. Azt mondjuk, hogy a görbe pontja rajta van a görbén és a görbe átmegy e ponton.

Ha a görbe egyenletének baloldala fölbontható $n_1, n_2, \ldots, n_r$-edfokú ternér formák szorzatára:

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_r = 0 \tag{1. 2}$$

akkor azt mondjuk, hogy a görbe *reducibilis*, más szóval *degenerált* (széthasad n_1-, n_2-, ..., n_r-edrendű *részekre*). Ellenkező esetben *irreducibilis* görbéről beszélünk.

Az (x_1, x_2, x_3) homogén koordinátahármasról az (y_1, y_2, y_3) homogén koordinátahármasra való áttérést, röviden az (x)-ről (y)-ra való áttérést, ha egy

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \varrho y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \varrho y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{array}\right. \qquad \det(a_{jk}) = A \neq 0 \tag{1. 3}$$

lineáris transzformáció jellemzi, akár koordináta-transzformációnak, akár leképezésnek (*kollineációnak*, vagyis projektív leképezésnek) tekinthetjük, aszerint, hogy ugyanannak a pontnak különböző rendszerekben adódó koordináta-hármasairól van szó, avagy ugyanabban a koordinátarendszerben értjük az (x) és az (y) pontot. A következőkben röviden csak „az $(y) = A(x)$ lineáris transzformáció" kifejezést használjuk.

A görbe rendje (vagyis a definícióban mondott $n = i + j + k$, ha az együtthatók közt van 0-tól különböző is), továbbá irreducibilis, avagy reducibilis jellege (az utóbbi esetben a részgörbék száma és egyenkénti rendje) a lineáris transzformációval szemben invariáns. (Projektív invariánsok.) Az algebrai görbék projektív invariánsainak tanulmányozása hosszú időn át — mondhatnók NEWTON vizsgálataitól fogva — az érdeklődés homlokterében volt, s CREMONA nevezetes publikációinak kezdetéig lényegében véve már le is zárult. (L. CREMONA a bolognai egyetem professzora volt. A jelzett időpont 1861.) Ettől fogva a biracionális transzformáció — más néven CREMONA-féle transzformáció — invariáns elméletének kidolgozása indult meg nagy intenzitással. Maradjunk egyelőre csak az 1861. előtti idők alapvető és legelemibb fogalom körében.

A többszörös pontok fogalmának bevezetése előtt az algebrai görbe és egyenes metszéspontjait értelmezzük, midőn a metszéspont képzetes pontot is jelenthet. Metszésponton mindkét görbe egyenletét kielégítő pontot értünk.

Az egyenes pontjait a

$$P(\alpha_1\lambda+\beta_1\mu, \alpha_2\lambda+\beta_2\mu, \alpha_3\lambda+\beta_3\mu) \tag{1.4}$$

alakban is előállíthatjuk, ahol az α és β számok rögzítettek, és a (λ, μ) homogén paraméterpár változó. Az ilyen koordinátahármasokkal a $g(x_1, x_2, x_3)$ forma átmegy egy ugyancsak homogén n-edrendű binér formába, $G(\lambda, \mu)$-be. Az algebra alaptétele folytán a

$$G(\lambda, \mu)=0 \tag{1.5}$$

homogén-edfokú egyenletnek vagy pontosan n megoldása van, vagy az összes $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ számpárok azok, feltéve, hogy a megoldásokat multiplicitásuk szerint számláljuk meg és a komplex számokból álló számpárt mint megoldást megengedjük. (Az összes számpárok mint megoldások akkor lépnek fel, ha a $G(\lambda, \mu)=0$ egyenlet mindegyik együtthatója 0.) Hogyha a (λ, μ) és a konjugált komplexek alkotta $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ számpárok egyike megoldása az egyenletnek, akkor a másik is az. Ennek megfelelően azt mondjuk, hogy az (1. 4) definiálta egyenes n pontban metszi a görbét; többszörösen számító metszéspontok is felléphetnek, de a metszéspontszámban multiplicitásuk szerint számlálandók s képzetes pontok is felléphetnek, de párosával, a pont és képzetes konjugáltja.

Rögzítsük a görbe egy P pontját és tekintsük e ponton átmenő egyenesek metszéspont -n-eseit. Ha véges számú egyenestől eltekintve, az összes metszéspont -n-eseknek maga a P pont egy r multiplicitású eleme, akkor ezt a pontot a görbe *r-szeres pontjának* nevezzük ($r=1$ és $r=2$ esetén a görbe *egyszerű pontjáról*, illetve *duplapontjáról* beszélünk). Tekintsük például a DESCARTES-féle koordinátákkal

$$x^3+y^3-xy=0 \quad \text{és} \quad y^3-x^2=0 \tag{1.6}$$

egyenletű görbéket. (Homogén koordinátákra térve át, $x_1^3+x_2^3-x_1x_2x_3=0$ és $x_2^3-x_1^2x_3=0$ az egyenletük. (Az origón átmenő egyenesek metszéspontjai között az origó — általában — kétszeres multiplicitású, és az egyenesen még egy további (ebben az értelemben harmadik) metszéspont lép fel. Az origón átmenő egyenesek közül kivételes állásúak azok, amelyeknek a harmadik metszéspontja is az origóban van, vagyis olyan egyenes, mely a görbét csak az origóban metszi, de e pontnak a metszési multiplicitása 3. Az első görbe esetében éppen a két koordinátatengely, a másik görbénél pedig csak az y-tengely az ilyen kivételes állású egyenes. Az előbbi esetben *közönseges duplapontról*, az utóbbi esetben *csúcspontról* beszélünk. (A többszörös pont és csúcspont definíciója később szerepel.)

MACLAURIN (1720-ban) megállapította a következőket. *Az irreducibilis n-edrendű algebrai görbének a projektív síkon legfeljebb* $\binom{n-1}{2}$

duplapontja van. Ez a tétel akkor is érvényes, ha többszörös pontok lépnek fel, és egy s multiplicitású pontot mint $\binom{s}{2}$ *számú duplapontot számlálunk.* — Így például az ötödrendű síkgörbénél felléphet 3 különböző duplapont és még azonkívül egy háromszoros pont is. (Itt most nem kívánjuk az összes típusokat felsorolni.) *Ha* $\binom{n-1}{2}$*-nél több duplapont lép fel, akkor a görbe alacsonyabb rendű részgörbékre hasad.* — Így például a harmadrendű görbe tartalmazhat 2,3 és végtelen sok duplapontot, de akkor — az eseteknek megfelelően — a következőképpen degenerálódik: *a)* egy kúpszeletből és egy egyenesből áll; *b)* három egyenesből áll; *c)* két egyenesből áll, de az egyik kétszeresen számítandó.

Az algebrai görbék esetében az érintő definiálásához geometriai határátmenetet nem használunk. Az egyenes és görbe metszési multiplicitásának bevezetése teszi ezt lehetővé. (Persze a geometriai határátmenettel definiált érintő ugyanazt az egyenest jelenti, mint az, ami következő definíciónak felel meg.)

A görbe egy egyszerű pontján egyetlen olyan egyenes megy át, melynek e pontban multiplicitása legalább 2; ezt az egyenest a *görbe érintőjének* nevezzük a szóban forgó *érintési pontban.* Ezt a definíciót többszörös pontra is átvihetjük, ámde akkor az ilyen ponton átmenő egyenesek mindegyikét érintőnek kell tekinteni. Itt célszerű bevezetni a *főérintők* fogalmát. Ha a görbe egy *s*-szeres pontja a *P* pont és egy ezen átmenő egyenes metszési multiplicitása legalább $s+1$, akkor ezt az egyenest főérintőnek nevezzük. — Így például az (1. 6) által definiált két görbére nézve a főérintők a következők. Az első görbe esetében az $x=0$ és az $y=0$ egyenesek; a másodikében az $y=0$ egyenes.

Az algebrai görbe egy duplapontjában két főérintő lép fel. Aszerint, hogy e két egyenes különböző és valós, egybeeső és valós, képzetes egyenespár — *közönséges* duplapontról, *csúcspontról*, *izolált* pontról beszélünk.

Példaként álljon még itt a

$$p^2x_1^2x_3^2+(x_1-qx_3)^2(x_1^2+x_2^2)=0 \qquad (p \text{ és } q \text{ valós}) \tag{1.7}$$

egyenletű görbék családja. Ezekre nézve az A_3 (0, 0, 1) alappont közönséges duplapont, csúcspont, izolált pont aszerint, hogy a $p>q$, $p=q$, $p<q$ reláció érvényes.

Az algebrai görbe indukálta polaritások fogalmának kialakulása bizonyos metrikus relációk felfedezése során ért el az itt szóba kerülő megfogalmazás stádiumába. Egy évszázadnál hosszabb — NEWTON vizsgálatával kezdődő — időszakról van szó. COTES (1722), MAC-

LAURIN (1748), CRAMER (1750), BOBILLIER (1828), PLÜCKER (1835), CREMONA (1866) eredményei jelentik a fejlődés lényegét. A polarizálás fogalmának a projektív síkra vonatkozó első definícióját PLÜCKER adta. CREMONA zárja le a sokáig tartó fejlődést.

A $g(x_1, x_2, x_3)=0$ görbe (y) pontra *(pólusra)* vonatkozó *polárisán* az $(n-1)$-edrendű,

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial g}{\partial x_2}y_2+\frac{\partial g}{\partial x_3}y_3=0 \tag{1.8}$$

egyenletű görbét értjük. A magasabb rendű polárisok fogalmát — az $(n-1)$-edik polárissal bezárólag — rekurzív módon definiáljuk: az $(r-1)$-edik poláris első polárisát r-edik polárisnak nevezzük. — Így például, hogyha

$$g_{jk}=\frac{\partial^2 g(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j\, \partial x_k}$$

jelölést használjuk, az (y) pont második polárisa a

$$\sum_{j,k} g_{jk}\cdot y_1 y_2=0$$

egyenletű görbe.

Az első és az r-edik poláris szokásos jelölése:

$$\Delta_y g(x_1, x_2, x_3) \quad \text{és} \quad \Delta_y^r g(x_1, x_2, x_3)$$

vagy rövidebben $\Delta_y^r g(x)$, és ezzel a rekurzív definíció így fejezhető ki

$$\Delta_y^r g(x)=\Delta_y \Delta_y^{r-1} g(x) \qquad (1<r<n)$$

Az n-edrendű görbének a polárisaival való metszéspontjait jellemzendő, előbb a görbe osztályának fogalmát (a görbe rendjének duálisát) kell bevezetnünk.

Az n-edrendű, $g(x)=0$ egyenletű algebrai görbe egy (y) pontjában az érintő vonalkoordinátái — hacsak nem többszörös pontokról van szó —

$$\varrho u_k=\frac{\partial g(y)}{\partial y_k} \qquad (k=1, 2, 3)$$

Ezekből az egyenletekből és az

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

egyenletből ϱ, y_1, y_2, y_3 eliminálásával (rezultánsként) egy az (u)-ban homogén egyenlet adódik. Ezt az egyenletet azonban a többszörös pontokon mint sorozó pontokon átmenő egyenesek alkotta sugársorok

elemei is kielégítik; ezért a szóban forgó egyenlet baloldala még (u)-ban lineáris tényezőket is tartalmaz — vagyis lineáris tényezőkkel osztható — sőt e tényezők az őket indukáló többszörös pontok multiplicitásának megfelelő hatványokon lépnek fel. Az eliminációfolytán rezultásként nyert egyenletet e tényezők mondott hatványaival osztva, egy az (u)-ban homogén algebrai egyenlet — a $g(x)=0$ pontegyenletnek megfelelő —, $\gamma(u)=0$ vonalegyenlet adódik. Ezt az egyenletet a pontegyenlettel definiált görbe érintői, s csakis ezek az egyenesek elégítik ki (a többszörös pontokban a görbe érintőin, itt most a főérintők értendők). Ha a görbe $\gamma(u)=0$ vonalegyenlete m-edfokú, akkor a görbét m-edosztályúnak nevezzük.

A görbének ezt kettős szemléletét — vagyis azt, hogy a görbét n-edrendű algebrai pontgörbének és egyúttal m-edosztályú algebrai vonalgörbének (egyenesek burkolta görbének) tekintjük — PLÜCKER vezette be (1835). Érdekes tény az, hogy a többszörös pontot nem tartalmazó n-edrendű görbe osztályának, m-nek a meghatározása (noha egy név szerint ismeretlen szerző művében már 1756-ban helyesen szerepelt) milyen sokáig váratott magára. WARING (1762) még csak azt állapította meg, hogy $m \leqq n^2$. PONCELET (1818) egy dolgozatában szerepel (a korabeli matematikusok szerint először) a helyes

$$m = n(n-1) \tag{1.9}$$

összefüggés. Ebben az időben merült fel az ún. PONCELET-féle paradoxon. A paradoxon feloldása magától PONCELET-től ered. Részletezzük.

„Az n-edrendű görbe általában $m = n(n-1)$-edosztályú. A dualitás elvénél fogva az m-edosztályú görbe $m(m-1)$-edrendű. Következésképpen

$$n = n(n-1)\,[n(n-1)-1].$$"

Persze az $n = m(m-1)$ formula csak akkor volna helyes, ha az „általában" elnevezésű esetben többszörös érintő nem lépne fel, hiszen a többszörös pont duálisa többszörös pont duálisa többszörös érintő, és az $m = n(n-1)$ formula is csak akkor érvényes, ha a görbének nincs többszörös pontja. A többszörös pontot nem tartalmazó görbének azonban mindig van többszörös érintője.

Még PONCELET magyarázata (1818) után is előfordult, hogy GERGONNE (1827) — nyilván a kúpszeletre érvényes $n=m=2$-re gondolva, és a dualitás elvét helytelenül alkalmazva — azt hitte, hogy mindig $m=n$.

PLÜCKER tovább bővíti az m és n közötti összefüggések ismeretét (1834 és 1839), bebizonyítván a róla elnevezett három, alapvető formula helyességét. Az első PLÜCKER-féle formula:

$$m = n(n-1)-2d-3c \tag{1.10}$$

ahol d a duplapontok és c a csúcspontok számát jelenti. (Az ilyen irányú további általánosításra irányuló vizsgálatok a múlt század végén fejeződtek be.)

RIEMANN (1857) bevezeti a *génusz* (a görbe fajszáma) fogalmát:

$$p=\binom{n-1}{2}-d-c \tag{1.11}$$

ez a szám nem negatív. A génusz lényeges fogalomnak bizonyult és ama transzformációk felfedezése felé terelte a kutatókat, amelyekkel szemben a génusz invariáns. (A biracionális transzformációkról van szó.)

Most már visszatérhetünk a görbe és polárisai geometriai viszonyainak jellemzésére. Főként azokra az összefüggésekre térünk ki, melyek már PLÜCKERnél is szerepelnek.

A többszörös pontnélküli n-edrendű görbét egy (y) pontnak e görbére vonatkozó első polárisa $n(n-1)$ pontban metszi. Az (y) pontból a görbéhez ugyancsak $n(n-1)$ érintő húzható, és ezeknek az érintési pontjai éppen az előbbi metszéspontok.

Közbevetőleg megjegyezzük, hogy az n-edrendű görbe $(n-1)$-edik és $(n-2)$-edik polárisát — feltéve, hogy $n>1$, illetve $n>2$ — *poláris-egyenesnek*, illetve *poláris-kúpszeletnek* is szokták nevezni.

Hogyha az (y) rajta van egy n-edrendű görbén és ennek egyszerű pontja, akkor az első, második-, ..., $(n-1)$-edik polárisai mindannyian átmennek az (y) ponton, mégpedig úgy, hogy az eredeti görbét az (y)-ban érintik. (Ennélfogva a görbe egyszerű pontjában az érintő nem más, mint e pontnak a polárisegyenese.)

Hogyha a görbének egy r-szeres pontja az (y) pont, akkor a sík bármely (z) pontja s-edik polárisának az (y) pont egy $(r-s)$-szeres pontja.

Legyen az (y) pont a görbének egy duplapontja, és az e ponthoz tartozó főérintői a p, q egyenesek. Legyen a sík egy tetszőleges (z) pontja első polárisának az (y) pontban az érintője u és az (y) és (z) összekötő egyenese v. E négy egyenes harmonikus négyest alkot: $(pquv)=-1$. Hogyha a duplapont speciálisan egy csúcspont, vagyis $p=q$, akkor a csúcsérintő a polárisnak is érintője az (y) pontban, vagyis $p=q=u$. A szóban forgó (y) duplapont, vagy csúcspont és a (z) pont poláris kúpszeletének a viszonyát is érdemes megemlíteni: a mondott kúpszelet degenerál, mégpedig a p és q egyenesekből áll; csúcspont esetében a kétszeresen számítandó $p=q$ egyenes alkotja.

Végezetül megemlítjük „a kúpszeletre vonatkozólag konjugált (y), (z) pontpár" megfelelelkezés általánosítását, más, algebrai görbék esetére nézve. Kúpszelet esetében a pont polárisát — a tankönyvekben —

vagy tiszta geometriai úton, vagy algebrai úton (amint az algebrai görbékre nézve mi is tettük) szokták bevezetni. Az elsőként említett eljárás a kúpszeletre nézve konjugált pontpár fogalmából indul ki — sőt először a kúpszelettel szétválasztott pontpár esetéből kiindulva halad az általánosítás felé — a polárist pedig a konjugált pontpár közvetítésével definiálja. A másik eljárásban a pont polárisa az elsődleges fogalom, s a konjugáltság fogalma a polárisra támaszkodik. Evégből azonban előbb egy tétel szükséges: Ha egy A pont polárisa átmegy egy B ponton, akkor a B pont polárisa is átmegy az A ponton. Az ilyen tulajdonságú pontpárt nevezzük a kúpszeletre nézve konjugáltnak. Az itt idézett tétel általánosítása a következő.

Ha az (y) pont valamely n-edrendű algebrai görbére vonatkozó s-edik polárisa átmegy egy (z) ponton, akkor a (z) pont $(n-s)$-edik polárisa is átmegy az (y) ponton. Ezt a tételt speciálisabb esetben már CRAMER (1750) is említi, azonban ebben az általános alakban először BOBILLIER (1827) és PLÜCKER (1828) műveiben szerepel és nyer kifogástalan bizonyítást.

A polarizálással kapcsolatos fogalmak és tételek ismertetését egy elnevezés történeti megvilágításával zárjuk.

A projektív geometria természetes koordinátarendszere olyan alaphároms zögből, egységpontból és egységegyenesből áll, hogy az egységegyenes éppen az egységpont polárisa az alaphároms zögre nézve. — A háromszögre való polarizálást a következő, geometriai (szerkesztési) utasítással szokták definiálni. Legyen az A_1, A_2, A_3 csúcspontoknak a polarizálandó E pontból való vetülete a csúcsokkal szemközti oldalegyeneseken rendre A_1', A_2', A_3'. Az $A_k \rightleftarrows A_k'$ $(k=1, 2, 3)$ megfelelkezés centrális megfelelkezés az E centrumra nézve, így a DESARGUES-tétel szerint tengelyes is, és az így adódó e tengelyt rendeli a polarizálás az E ponthoz. E konfiguráció speciális kirovásaiból azonnal következik, hogy az A_k-val szemközti oldalegyenesen elhelyezkedő csúcsokat az A_k' és A_k'' harmonikusan választják el egymástól, ha A_k'' jelenti az e tengelynek a szóban forgó oldalegyenessel való metszéspontját. — E hozzárendelés „polarizálásnak" való elnevezése a következőkből kivilágló származtatásból ered.

Válasszuk $A_1A_2A_3$-at koordinátarendszerünk alaphároms zögének, E-t egységpontnak, e-t egységegyenesnek. Tekintsük az $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ alapegyenesek alkotta alakzatot (degenerált és három duplaponttal rendelkező) harmadrendű görbének. E görbe egyenlete

$$x_1x_2x_3=0$$

Az (y) pontnak a görbére vonatkozó második polárisa az

$$y_2y_3x_1+y_3y_1x_2+y_1y_2x_3=0$$

egyenes (az x-ek a változók, az y-ok rögzítettek). Ha az (y) szerepébe az $E(1, 1, 1)$ egységpont lép, ahhoz az

$$x_1+x_2+x_3=0$$

póláris egyenes tartozik, ami pedig nem más, mint választott koordinátarendszerünk egységegyenese.

2. A Bézout-tétel alkalmazásai

Az algebrai geometria kezdeti fejlődésében nagy szerepet játszott annak a problémának a tisztázása, hogy egy h-adrendű és egy k-adrendű algebrai görbének hány közös pontja van. Már MACLAURIN (1720-ban) azt állítja, hogy hk. Ennek az állításnak első „bizonyítása" (nem kellő szigorúsággal) csak később, EULER (1748) és CRAMER (1750) művében szerepel, ama algebrai probléma kapcsán, hogy az $f(x, y) = 0$ és $\varphi(x, y) = 0$ algebrai egyenletekből álló rendszerből tessék az y-t eliminálni. BÉZOUT (1764-ben) a következő tétellé egészíti ki (helyesbíti) a szóban forgó állítást.

Ha egy h-adrendű és egy k-adrendű algebrai görbének nincs közös része, akkor hk számú pontban metszik egymást. (E pontszám olyan számlálással adódik, hogy az egynél nagyobb metszési multiplicitású pontokat multiplicitásuk szerint vesszük számba, és a fellépő képzetes metszéspontokat is számláljuk.)

Ez az ún. BÉZOUT-tétel, csak LAGRANGE és GAUSS műveiben éri el a bizonyítás kellő szigorúságának fokát. Monográfiákban s tankönyvekben lényegében véve CHASLES (1873) bizonyítását közlik. Persze maga a „metszési multiplicitás" fogalmának — a határátmeneti meggondolásokat mellőző — definíciója is hosszabb fejtegetést kívánna. Ilyen definíció azonban — éppen úgy, mint az algebrai görbe és egyenes metszéspontjai esetében, most itt is — lehetséges.

A BÉZOUT-tétel egyik, az algebrai geometriában gyakran alkalmazott folyománya a következő:

Hogyha egy h-adrendű és egy k-adrendű algebrai görbének legalább $hk + 1$ közös pontja van, akkor végtelen sok közös pontja van. Ebben az esetben vagy azonos a két görbe, vagy legalább az egyikük részgörbékre hasad és e részek egyike teljes egészében a másik görbének is része.

Az algebrai geometria kezdeti fejlődése idején a BÉZOUT-tétel erősnek és hasznosnak bizonyult. Hasznossága két irányban mutatkozott.

1. Ismert tételeket új megvilágításba helyező, egyszerű bizonyítások számára adott módszert.

2. A szemléletből eredő intuició számára rejtett összefüggések felismerését, módszeres vizsgálatát tette lehetővé.

Mindkettőre egy-egy egyszerű példát mutatunk most be.

(A) Legyen hat egyenes valamely ciklikus sorrendje

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6;$$

de ne találkozzék kettőnél több egy pontban. Legyenek az

$$a_1, a_4;\ a_2, a_5;\ a_3, a_6$$

egyenespárok létesítette metszéspontok rendre P, Q, R, és helyezkedjenek el ezek a pontok egy p egyenesen. Végül még kössük ki azt is, hogy az

$$A_{12},\ A_{23}, A_{34}, A_{45}, A_{56}, A_{61}$$

pontok közül kettőnél több ne essék egy egyenesre (ahol A_{jk} az a_j és a_k egyenesek közös pontját jelöli). Ha most a λ, μ homogén paraméterpárt tetszőlegesen rögzítjük, továbbá az $a_k(x)=0$ lineáris egyenlet az a_k egyenesnek az egyenlete, akkor tekintsük a

$$\lambda \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 + \mu \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = 0$$

egyenlettel definiált harmadrendű görbét. Világos dolog, hogy a görbe a hat A_{jk} ponton, továbbá a P, Q, R pontokon is átmegy. Hogyha a P, Q, R pontokon átmenő p egyenesnek még egy negyedik $S(y_1, y_2, y_3)$ pontját is kijelöljük, alkalmas λ, μ paraméterpárral olyan harmadrendű görbét definiálhatunk, mely e tizedik ponton is, az S-en átmegy. A szóban forgó paraméterpár nyilvánvalóan

$$\frac{\lambda_0}{\mu_0} = -\frac{a_2(y)\cdot a_4(y)\cdot a_6(y)}{a_1(y)\cdot a_3(y)\cdot a_5(y)}$$

kifejezésből adódik, ahol a jobb oldali tört nevezője — az a_k egyenesekre tett kirovások szerint — nem veheti fel 0 értéket. Ámde a (λ_0, μ_0)-hoz tartozó harmadrendű görbén a $p(x)=0$ egyenletű p egyenesnek négy különböző pontja van, következésképpen a görbének része a p egyenes, tehát

$$\lambda_0 \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 + \mu_0 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = q(x) \cdot p(x) = 0.$$

Minthogy $p(x)$ lineáris, $q(x)$-nek másodfokú polinomnak kell lennie. Az A_{jk} pontok nincsenek rajta a p egyenesen, ennélfogva a $q(x)=0$ egyenletet tartoznak kielégíteni.

Vegyük észre, hogy így a — nem elfajuló kúpszeletre vonatkozó — PASCAL-tétel megfordításának bizonyítását nyertük. Hiszen kikötöttük, hogy az A_{jk} pontok kettejét összekötő egyenes ne tartalmazzon harmadik ilyen pontot, ennélfogva nyilvánvaló, hogy $q(x)$ irreducibilis.

(B) Tekintsük a $g(x)=0$ harmadrendű görbét valamely P pontjában érintő p egyenesnek a görbével való további (általában a P-től különböző) metszéspontját, a P' pontot. Ezt a P' pontot az eredeti P pont *tangenciális pontjának* nevezzük.

Nyomban bebizonyítjuk a következő, már MACLAURIN (1748) által felfedezett tételt.

Hogyha a harmadrendű görbe A, B és C pontjai egy p egyenesen vannak, akkor e pontokhoz tartozó A', B', és C' tangenciális pontok ugyancsak egy p egyenesen vannak ezt a p' egyenest az eredeti p egyenes kísérőegyenesének nevezzük. — E tétel alapján a vonalsíknak egy önmagára való (egyeneskénti) leképezése, a $K(p)=p'$ leképezés fogalma is fölmerül.

BIZONYÍTÁS. Legyen a szóban forgó görbe és a tételben mondott A, B és C pontokban érintő egyenesek egyenlete rendre $g(x)=0$, $a(x)=0$, $b(x)=0$ és $c(x)=0$. Tekintsük a λ, μ homogén paraméterpárral létesített

$$f = \lambda \cdot g + \mu \cdot a \cdot b \cdot c = 0$$

harmadrendű görbéket. E görbék mindegyike metszi a $g=0$ görbét A', B', C' és az A, B, C, pontokban, mégpedig az első háromban egyszeres, a másik háromban kétszeres multiplicitással. A $p=0$ egyenes egy az A-, B- és C-től különböző $Y(y_1, y_2, y_3)$ pontján is átmenő $f=0$ görbe létezik, mégpedig pontosan egy ilyen görbe van. Ezt a görbét előállító λ_0, μ_0 paraméterpár a

$$\frac{\lambda_0}{\mu_0} = -\frac{a(y)\cdot b(y)\cdot c(y)}{g(y)}$$

kirovásnak tesz eleget. Világos, hogy az

$$f_0 = \lambda_0 \cdot g + \mu_0 \cdot a \cdot b \cdot c = 0$$

harmadrendű görbe elfajuló, hiszen az A, B, C, Y egyenesvonalú pontnégyest tartalmazza. Ennélfogva

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3)\cdot q(x_1, x_2, x_3)$$

ahol $p=0$ az ABC egyenes egyenlete, vagyis a p elsőfokú, tehát a q másodfokú polinom. Az $f_0=0$ azonban csak akkor metszi a $g=0$ görbét az A, B és C pontokban 2 multiplicitással, ha e pontokon a $q=0$ másodrendű görbe is átmegy. (Hiszen e három pontot összekötő egyenes metszési multiplicitása e pontok mindegyikében 1, különben A, B és C nem lehetne három különböző pont.) A másodrendű $q=0$ görbe azonban csak úgy tartalmazhatja a $p=0$ egyenes A, B és C pontjait, ha a q polinom két lineáris polinom szorzata: $q=p\cdot r$ Tehát

$$f_0 = p^2 \cdot r$$

Az $f_0=0$ tartalmazza az A', B' és C' tangenciális pontokat, így, hogyha a $p=0$ nem tartalmazza őket, akkor az $r=0$ egyenesen kell elhelyezkedniük. Ez az $r=0$ az eredeti $p=0$ egyenesnek a kísérőegyenese.

A már említett algebrai leképezésre, a $K(p)=p'$ leképezésre mutatunk egy konkrét példát.

Vegyük a leképezést létesítő görbe szerepében a (már fentebb említett) $x_2^3 - x_1^2 x_3 = 0$ görbét. Ezzel ekvivalens a λ, μ homogén paraméterpárral létesített

$$P(y_1, y_2, y_3) = P(\lambda^3, \lambda^2\mu, \mu^3)$$

pontok alakzata. — Ez a paraméteres előállítás, a maga sajátos módján, egyszerűsíti a geometriai kérdés algebrai kezelését. —

Könnyű igazolni, hogy a λ_k, μ_k létesítette P_k pontok ($k=1, 2, 3$) egy egyenesbe esése ekvivalens a

$$\lambda_1\lambda_2\mu_3 + \lambda_2\lambda_3\mu_1 + \lambda_3\lambda_1\mu_2 = 0$$

kirovással. Következésképpen a λ, μ létesítette pontnak a λ', μ' létesítette pont akkor tangenciális pontja, ha

$$\left.\begin{aligned} \tau\lambda' &= \lambda^2 \\ \tau\mu' &= -2\lambda\mu \end{aligned}\right\} \quad (\tau \neq 0)$$

Ezekre támaszkodva, az (u) egyenes és kísérő egyenese, az (u') egyenes homogén vonalkoordinátái közt fellépő kapcsolat:

$$\sigma u_1' = 8u_1 \quad \sigma u_2' = 4u_2 \quad \sigma u_3' = -u_3; \qquad (\sigma \neq 0)$$

Ez a leképezés pedig nem más, mint egy projektív leképezés, melynek — az $x_2^3 - x_1^2 x_3 = 0$ görbeegyenlethez használt — koordinátarendszerünk alapegyenesei a fixegyenesei. Tehát a szóban forgó $K(p) = p'$ leképezés egy projektív leképezés. —

Csinosabbnál csinosabb geometriai tételekkel és bizonyítással illusztrálhatnánk még a BÉZOUT-tétel átfogó erejét és hasznosságát. A továbbiakban egy vele kapcsolatos paradoxont említünk. A matematika története arra tanít, hogy egy-egy témakörben felbukkanó paradoxon a továbbfejlődés kirobbantója. Egy elképesztő paradoxon a legszebb tételnél is erősebben ragadja meg a matematikusok érdeklődését, sőt — sajnos — a laikusokét is. — CRAMER (1750) paradoxonáról lesz szó, melynek megnyugtató és szigorú feloldása először G. LAMÉ egy lényegesen későbbi dolgozatában szerepel. Ez a paradoxon az n-edrendű görbét meghatározó pontok számára vonatkozik.

Minthogy az (1. 1) együtthatóinak száma nyilvánvalóan

$$\nu = \binom{n+2}{2}$$

továbbá mert az együtthatók számértékét egy ismeretlen közös tényező erejéig meghatározni az egyenlet meghatározását jelenti, éppen ezért

$$\nu - 1 = \frac{1}{2} n(n+3) \tag{2. 1}$$

számú olyan homogén lineáris egyenletre van szükségünk, melyben az a_{ijk}-k az ismeretlenek. Ilyen egyenleteket kapunk, ha ismerjük a görbe $\nu - 1$ számú pontját, a $P_1, P_2, \ldots, P_{\nu-1}$ pontokat (vagyis e pontokat reprezentáló számhármasokat).

No már most tekintsük az (1. 1)-ből egy sorba kirakott

$$x_1^n, x_1^{n-1} x_2, \ldots, x_1^i x_1^j x_3^k, \ldots, x_2 x_3^{n-1}, x_3^n$$

hatványszorzatokat. (E sorban ν számú hatványsorozat van.) Írjuk fel egymás után azt a $\nu - 1$ különböző sort, mely ebből a formálisan felírtból adódik, ha abba rendre behelyettesítjük az adott pontok koordinátáit. Így egy $(\nu - 1)$-soros ν-oszlopos numerikus mátrix, a Π_ν mátrix adódik. Ennek a $(\nu - 1)$-edrendű determinánsai (váltakozó előjellel) a keresett a_{ijk} együtthatókkal arányosak. Tehát — miként már CRAMER korában is tudták — az n-edrendű görbét $\nu - 1$ számú különböző pontjából meg lehet határozni. Mielőtt azonban ezt tételként rögzítenénk, lássunk csak két példát. (A pontok koordinátáit táblázatában közöljük, s mindkét esetben harmadrendű görbét kívánunk e pontokkal előírni.)

(2. 2)

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
x_1	1	0	0	0	1	2	2	−2	1
x_2	0	1	0	1	0	1	−1	1	1
x_3	0	0	1	1	1	0	4	2	2

(2. 3)

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
x_1	1	0	0	0	1	2	4	2	1
x_2	0	1	0	1	0	1	1	2	1
x_3	0	0	1	1	1	0	2	1	2

(A két példa pontadatai, két pontot kivéve, ugyanazok.)

Némi számolással a (2. 3)-ról kiderül, hogy valóban egyértelműen meghatároz egy harmadrendű görbét:

$$g(x) = 2x_1x_2(x_1-2x_2)+4x_2x_3(x_2-x_3)+2x_3x_1(x_3-x_1)+3x_1x_2x_3=0$$

A (2. 2) azonban olyan Π_{10} mátrixra, vagyis egyenletrendszerre vezet, melynek sorai, illetve egyenletei nem függetlenek egymástól. Ezeknek az adatoknak az alapján nyert egyenletrendszer csak egy (λ, μ) paraméter erejéig határozza meg ama harmadrendű görbe egyenletét, mely az adott 9 pont mindegyikén átmegy. Az ilyen fokig határozatlan görbeegyenlet (némi számolási ügyeskedéssel) a következő alakban állítható elő:

$$f(\lambda,\mu)=2\lambda x_1^2x_2+\mu x_1^2x_3-4\lambda x_1x_2^2+3(\lambda+\mu)x_1x_2x_3-\mu x_1x_3^2+$$
$$+2(\lambda+\mu)x_2^2x_3-2(\lambda+\mu)x_2x_3^2-0.$$

E szerint a (2. 2) által előírt 9 ponton át nem egy, hanem végtelen sok harmadrendű görbe megy. Mondhatjuk ez az egyenlet a görbehalmaz görbéi és egy projektív egyenes pontjai között — vagyis $f(\lambda, \mu)$ és $Q(\lambda, \mu)$ között — egyértelmű $\varphi(Q)=f$ megfeleltetést létesít. (Erre a φ leképezésre később még visszatérünk.)

E példák után megfogalmazhatjuk azt a görbe meghatározásra vonatkozó pontszámtételt, amely CRAMER korában már ismeretes volt ugyan, ámde szabatos értelmezés hiányában gyakran hibás módon alkalmazták és ilyen módon paradoxonra vezetett.

Egy n-edrendű görbét — $N = n(n+3)/2$ számú pontból álló — adott „általános" pont-N-es egyértelműen meghatároz.

Itt az „általános" pont-N-es az a kényes, fogalom, ami nélkül a tétel semmivé válik, aminek pontos értelmezése nélkül az alkalmazás hamis útra siklik. Az „általános" jelző itt arra utal, hogy a pont-N-es egy *algebrai* (vagyis nem tiszta geometriai fogalmakkal kifejezhető) feltételt teljesít. Nevezetesen azt, hogy a pont-N-eshez tartozó Π_v mátrix N-edrendű determinánsai közül legalább az egyik nem egyenlő zérussal. Igaz az, hogy ez a tulajdonság a pont-N-esnek egy belső tulajdonsága, vagyis a használt koordinátarendszertől független. Más szóval — könnyen bizonyítható — ez a tulajdonság az (1. 3) transzformációval szemben invariáns. Ámde még a „belső tulajdonsága" állítás se árulja el, hogy milyen a pont-N-es geometriai struktúrája.

CRAMER korában még így okoskodtak: „Adott N pont az n-edrendű görbét egyértelműen meghatározza. Két n-edrendű görbe metszéspontjainak a száma n^2. Az ilyen n^2 pont a görbét nem határozza meg egyértelműen, pedig $n^2 < N$ csak $n = 1, 2$ esetén következik be; $n = 3$ és $n > 3$ esetén $n^2 = N$, illetve $n^2 > N$". Ez az ún. CRAMER-féle paradoxon.

Feloldja a paradoxont az a kitétel, hogy az n-edrendű görbét csak az „általános" pont-N-es határozza meg egyértelműen, a két görbe metszéseként előállított n^2 számú pont közül (ha $n^2 > N$) bármely N számút kiragadva, azok „speciális" pont-N-est alkotnak. Feloldja a paradoxont, de nem világít a geometriai viszonyok mélyére. EULER (1748) szintén beleütközik a metszési pont n^2-es geometriai struktúrájának a problémájába, de nem tisztázza.

LAMÉ (1818) a lineáris görberendszerre vonatkozólag állapít meg olyan tételt, amely a szóban forgó metszéspont-N-es geometriai struktúrájára is erősebben rávilágít. *Az n-edrendű algebrai görbék p-dimenziós és q-indexű algebrai rendszere* a görbék (1. 1) által definiált halmaza, hogyha az összes a_{ijk} együtthatók a homogén $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ paraméterek q-adfokú polinomjai. Ha a rendszer összes görbéi átmennek egy fix P ponton, e pontot a rendszer *bázispontjának* nevezzük. — Erre vonatkozó példát szolgáltat a (2. 2) által definiált $f(\lambda, \mu)$ görbék halmaza is. Itt $n = 3, p = 1$ és $q = 1$; továbbá e rendszernek 9 bázispontja van: $P_1, P_2, \ldots, P_9$. — LAMÉ tételét PLÜCKER (1827) és JACOBI (1836) erősen általánosítják*; mi viszont itt csak a LAMÉ-tétel egy speciális változatát alkalmazzuk.

Tekintsünk evégből két egyeneshármast, az

$$a_1, a_2, a_3 \text{ és } b_1, b_2, b_3$$

* REISS (1867) és MÉRAY (1885) foglalkoztak azzal a problémával, hogy minő összefüggések állnak fenn ama háromszögek területei között, amelyeket egy n-edrendű görbe $1+n(n+3)/2$ számú pontjából kiragadható összes ponthármasok szolgáltatnak. Ebbe a témakörbe vágó dolgozatok még a jelen század elején is megjelentek és érdeklődést ébresztettek.

egyenesek alkotta hármasokat, mégpedig a következő értelemben „általános" esetben: semelyik vegyeshármas se legyen egy sugársor három eleme. (Vegyeshármas két eleme az adott hármasok közül az egyikhez és a harmadik a másikhoz tartozik.) Jelöljük az (a_j, b_k) metszéspontot R_{jk}-val. Kilenc ilyen metszéspont van:

$$\begin{matrix} R_{11}, & R_{12}, & R_{13}; \\ R_{21}, & R_{22}, & R_{23}; \\ R_{31}, & R_{32}, & R_{33}. \end{matrix} \tag{2.4}$$

A speciális LAMÉ-tétel — joggal nevezhető annak — így fogalmazható:

Ha a (2. 4) *definiálta pontkilences (röviden az R-alakzat) nyolc pontján átmegy egy harmadrendű görbe, akkor átmegy a kilencediken is.*

Ez a speciális tétel egyszerű következménye a következő általános tételnek.

Tekintsük az $N=\frac{1}{2}n(n+3)$ *számú* $P_1, P_2, \ldots, P_N$ *pontot; vagy van egyetlenegy n-edrendű görbe, mely e pontok mindegyikén átmegy, vagy pedig bármelyik* $N-1$ *számú pontot kiragadva, az ezeken átmenő n-edrendű görbe átmegy a (ki nem ragadott) N-edik ponton is. Az utóbbi esetben azonban feltételezendő, hogy nincs a kiragadott* $N-1$ *számú pont között olyan, amelyen átmegy minden, a többi* $N-2$ *számú pontot tartalmazó n-edrendű görbe.*

A kilencponttétel speciális esetének tekinthető az a MACLAURIN-tétel is, mely arról szól, hogy az egy egyeneshez illeszkedő három pont tangenciális társai is egy egyeneshez, a kísérő egyeneshez illeszkednek. Ez pedig még speciálisabb tételre is vezet, ha az olyan nem többszörös pontra is gondolunk, melyet az a tulajdonsága definiál, hogy a pont egybeesik a tangenciális társával (vagyis az ilyen pontban a görbe és érintőjének metszési multiplicitása: 3.) Ez az ún. *inflexiós pont.* A speciális tétel pedig: *két inflexiós pont összekötő egyenese* — a harmadrendű görbe esetében — még egy harmadik *inflexiós pontban metszi a görbét.*

A kilencponttétel bizonyos speciális esetét *nyolcponttételnek* fogjuk nevezni; ebből egy érintőszerkesztés következik. *Hogyha a harmadrendű görbe* $P_1, P_2, \ldots, P_8$ *pontjaiból alkotott* $P_1P_2P_5$, $P_1P_3P_4$, $P_2P_3P_6$, $P_4P_5P_7$, $P_6P_7P_8$ *ponthármasok egy-egy egyenesen helyezkednek el, akkor a* P_1P_8 *egyenes a görbe érintője a* P_1 *pontban.*

3. A harmadrendű görbék kanonikus egyenlete és paraméteres előállítása

A görbe geometriai tulajdonságainak a koordináták közvetítésével való tanulmányozását és áttekinthető tárgyalását nagyon megkönnyíti a görbe egyenletének esetleges egyszerűsége, valamint — különösen ha a görbén elhelyezkedő pontcsoportok tanulmányozásáról van szó — a görbe (pontjainak) paraméteres előállítása. Ilyesmiről az $x_2^3 - x_1^2 x_3 = 0$ egyenletű görbe, s annak paraméteres előállítása kapcsán, egy példánk tárgyalása során már meggyőződhettünk. Általában is felmerül a kérdés, hogy miként függ össze a koordinátarendszer a görbével, ha a lehető legegyszerűbb görbe egyenlet lép fel, illetve a legegyszerűbb paraméteres előállítás céljából milyen (a görbéhez viszonyított helyzetét tekintve) az alkalmas koordinátarendszer? E kérdés tisztázása csak a görbe geometria tulajdonságának behatóbb megismerése után járt sikerrel. Elsősorban O. HESSE (1848), S. ARONHOLD (1850), G. SALMON (1852), A. CLEBSCH (1864) és F. DINGELDEY (1888) kutatásai tisztázták e kérdést. A legfontosabb tudnivalókat nyomban felsoroljuk.

A görbe inflexiós pontjai, és ha vannak olyanok, akkor a többszörös pontjaiban fellépő főérintői szabják meg a legalkalmasabb koordinátarendszer helyzetét. A harmadrendű (el nem fajuló) görbék egy természetes osztályozása válik itt szükségessé. Az osztályokhoz egy-egy kanonikus egyenlet tartozik — a görbéhez alkalmasan választott koordinátarendszerrel az osztály bármely görbéjére nézve ez az egyenlet adódik —, Más szóval: bármely, az x_1, x_2, x_3 koordinátákra nézve homogén harmadfokú irreducibilis polinom egy alkalmas $(y) = A(x)$ lineáris transzformáció segítségével az egyik kanonikus alakba vihető át.

Az osztályozás egy módja a következő.

1. A görbének többszörös pontja nincs. 2. Egy duplapontja van, valós főérintőkkel. 3. Egy izolált pontja van (ez tulajdonképpen olyan duplapont, amelyben a főérintők konjugált képzetes egyenespárt alkotnak; van e pontot belsejében tartalmazó olyan környezet, melyben a görbének más valós pontja — mint az izolált pont — nincs). 4. Egy csúcspontja van.

Az 1. esetet egyelőre kihagyva, a 2. 3. és 4. görbéhez mindig találhatunk alkalmas koordinátarendszert, melyre vonatkozólag a görbe egyenlete rendre az

$$(3.1)\quad x_1^3 + x_2^3 - x_1 x_2 x_3 = 0,\quad x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 - x_3^2 = 0,\quad x_1^2 x_3 - x_2^3 = 0$$

alakot ölti. A koordinátarendszer helyzete pedig (ezeknek az egyenleteknek megfelelő sorrendben) a következő.

A duplaponthoz tartozó főérintők, valamint két konjugált képzetes inflexiós pontját összekötő egyenes (ez pedig okvetlenül valós egyenes)

a koordináta háromszög oldalegyenesei, az egységpont pedig egy alkalmasan választott pont.

A koordináta háromszög egyik csúcsa az izolált pont, az abban találkozó oldalegyenesek egyike ezt a pontot a valós inflexiós ponttal köti össze, a másik pedig abban a valós pontban metszi a görbét, melynek tangenciális pontja éppen a mondott inflexiós pont és az inflexiós érintő a harmadik oldalegyenest szolgáltatja. Az egységpont alkalmasan választott pont.

A csúcspontos görbe egyetlen (valós) inflexiós ponttal rendelkezik. Az inflexiós pontban érintő egyenes, a *csúcsérintő* (a csúcsponthoz tartozó, egybeeső főérintők), valamint a csúcs- és inflexiós pontot összekötő egyenes alkotják a koordináta-háromszöget. Az egységpont itt is alkalmasan választott pont, mégpedig magán a görbén helyezkedik el.

Most pedig a (3. 1) egyenleteinek sorrendjében haladva, a görbe pontjainak paraméteres előállítását soroljuk fel:

$$(3.2)\quad P(\lambda\mu^2, \lambda^2\mu, \lambda^3+\mu^3),\ P(\lambda^3, \lambda^2\mu+\mu^3, \lambda^3+\lambda\mu^2),\ P(\lambda^3, \lambda^2\mu, \mu^3).$$

Ha most a $\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2; \lambda_3, \mu_3$ homogén paraméterpárokkal definiált pontok egy egyenesbe esésének feltételét a paraméterek segítségével fejezzük ki, akkor az esetek előbbi sorrendjének megfelelően rendre a

$$(3.3)\quad \begin{aligned} \lambda_1\lambda_2\lambda_3+\mu_1\mu_2\mu_3 &= 0 \\ \lambda_1\mu_2\mu_3+\lambda_2\mu_3\mu_1+\lambda_3\mu_1\mu_2 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_1\mu_2\mu_3+\lambda_2\mu_3\mu_1+\lambda_3\mu_1\mu_2 &= 0 \end{aligned}$$

adódik.

Hogyha most a λ, μ paraméterekkel definiált pont tangenciális pontjának a paraméterei λ', μ', akkor a (3.3)-ból nyomban adódik a görbe pontjaira értelmezett $(\lambda, \mu) \to (\lambda', \mu')$ transzformáció. Előbb azonban térjünk át inhomogén paraméterekre: $t = \lambda/\mu$. Így a szóban forgó transzformáció:

$$(3.4)\quad t' = -\frac{1}{t^2},\quad t' = \frac{2t}{t^2-1},\quad t' = -2t.$$

Most a paraméteres előállítás két klasszikus feladat megoldására való alkalmazását vázoljuk. Az egyik feladat J. STEINER (1846), a másik H. PICQUET (1884) nevéhez fűződik — ezekkel kapcsolatos a magyar VÁLYI GY. néhány dolgozata (1889—1891) —.

STEINER feladata: Legyen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ egy harmadrendű görbébe beírt poligon. Változhat-e az a poligon oly módon, hogy a változó $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_nP_1$ oldalegyenesek rendre a görbe $Q_{12}, Q_{23}, \ldots, Q_{n1}$ változatlan pontjain menjenek át a változás folyamán? Speciálisan,

hogyha $n=2k$ egy páros szám, lehetséges-e az, hogy a

$$Q^{(1)}=Q_{12}=Q_{34}=\ldots=Q_{n-1,n} \quad \text{és} \quad Q^{(2)}=Q_{23}=Q_{45}=\ldots=Q_{n1}$$

kirovások teljesüljenek? — Ez utóbbi feladatot megoldó poligont STEINER-*n-szögnek* nevezik.

A feladat megoldása a (3.1) alatti egyenleteknek megfelelő görbék esetében lényegében véve egyformán történik, de a leírás szempontjából az elsőnek az esetében a legrövidebb, azért csak erre szorítkozunk.

Célszerű itt inhomogén koordinátákkal dolgozni. Jelölje a P_k és Q_{jk} pont inhomogén paraméterét p_k, illetve u_{jk}. A feladat **P** és **Q** poligonjának kapcsolatát a (3.3)-ból adódó

$$p_1p_2u_{12}=-1, \quad p_2p_3u_{23}=-1,\ldots,p_np_1u_{n1}=-1$$

egyenletek fejezik ki. (Kizárjuk az elfajuló esetre vezető 0 paraméterű pontokat.) Innen pedig, az n páros vagy páratlan értékének megfelelően

$$u_{12}u_{34}\ldots u_{n-1,n}-u_{23}u_{45}\ldots u_{n1}=0$$

vagy

$$p_1^2u_{12}u_{34}\ldots u_{n1}-u_{23}u_{45}\ldots u_{n-1,n}=0.$$

Ezekből és a fentebbi egyenletrendszerből a feladat megoldása kiolvasható; a következőket szögezhetjük le.

(A) Ha n páros szám, akkor a **Q** poligonhoz vagy egyetlen **P** poligon sem tartozik, vagy végtelen sok **P** poligon adódik. Az utóbbi eset akkor következik be, ha a **Q** csúcsainak paraméterei az utolsóelőtti egyenletet kielégítik. Ebben az esetben a P_1 kezdőpont a görbe bármelyik pontja lehet, az a további $P_2, P_3,\ldots, P_n$-et egyértelműen meghatározza.

(B) Ha n páratlan szám, akkor a görbébe beírt **Q** poligon tetszőleges, és mindig tartozik hozzá (legfeljebb) két **P** poligon, de lehet, hogy ezek képzetesek (ami az utolsó egyenletből nyilvánvaló).

A csúcspontos görbe esetében a (*B*)-nek megfelelő eredmény módosul, mégpedig a **Q**-hoz tartozó **P** realitási viszonya, illetve száma tekintetében. Itt **Q**-hoz mindig egy és csakis egy **P** tartozik, és ez mindig valós (persze, ha Q is valós).

Az izolált ponttal rendelkező görbe esetében a paraméteres módszer egyszerre nehézkessé válik, noha az eredmények a duplapontos görbére vonatkozó (*A*)- és (*B*)-vel megegyeznek.

Persze, ha például csak az (*A*) levezetése volna a cél, fölösleges a parametrikus előállítások különbözőségéből eredő, több ágú diszkusszióba belemenni. Az 1–4. görbék mindegyikére egyaránt érvényes bizonyítás a kilencponttétel többszöri alkalmazásával könnyen adódik.

PICQUET feladata: Létezik-e olyan $P_1P_2\ldots P_n$ poligon mely egyszerre beírt és köré írt n-szöge egy harmadrendű görbének? Úgy is mondhatjuk a poligon és görbe viszonyát, hogy a görbe ciklikusan felsorolt $P_1, P_2, \ldots$ $\ldots, P_n$ pontjai bármelyikének tangenciális társa a közvetlenül utána következő pont.

Most a csúcspontos görbe esetét vesszük elsőnek. A feladatban definiált PICQUET-*n*-szög az inhomogén paraméterekkel írt

$$2p_1=-p_2, \quad 2p_2=-p_3,\ldots, \quad 2p_n=-p_1$$

egyenletrendszernek felel meg. Ebből azonban e poligon létezésének feltételeként

$$p_1=(-2)^n p_1$$

adódik. Eszerint a csúcspontos harmadrendű görbének PICQUET-n-szöge nincs.

A duplapontos görbe $P_1P_2\ldots P_n$ PICQUET-n-szöge a

$$-\frac{1}{P_1^2}=p_2,\quad -\frac{1}{P_2^2}=p_3,\ldots,\quad -\frac{1}{P_n^2}=p_1$$

egyenletrendszernek felel meg. Ebből pedig

$$p_1^r=-1,\quad r=2^n-(-1)^n$$

adódik. Eszerint, ha $n\geq 3$, akkor valós PICQUET-n-szög, mely nem zsugorodik egyetlen ponttá, nincs.

Az izolált ponttal rendelkező harmadrendű görbe esetében a paraméteres módszer ugyancsak nehézkessé válik. Ezt most nem is részletezzük, csak annyit mondunk, hogy a PICQUET-n-szög lehet valós is. Könnyen ellenőrízhető ugyanis, hogy például

$$p^8-36p^6+126p^4-84p^2+9=0$$

egyenlet gyökei olyan paraméterértékek, melyek egy-egy PICQUET-háromszög egy-egy csúcsát definiálják. Minden háromszögcsúcs — a pont és tangenciálisa közti összefüggés alapján — a következő két csúcsot is meghatározza. Nyilvánvaló, hogy valós gyök valós háromszöget létesít. Az itt mondott egyenletnek pedig van valós gyöke, például az $(1, 2)$ intervalumban.

Végére hagytuk azt a harmadrendű görbét, melynek se dupla pontja, se csúcspontja nincs. PLÜCKER (1835), állapította meg először, hogy ennek a görbének 9 inflexiós pontja van, melyek közül 3, de csak 3 valós. Hesse (1844) vette észre, hogy alkalmas koordinátaháromszögre vonatkoztatva, alkalmasan választott egységpontot használva, a görbe egyenlete a következő alakot veszi fel:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-kx_1x_2x_3=0 \tag{3.5}$$

ahol $k\neq 0$ egy valós szám. Ebből tüstént felírható a 9 inflexiós pont nevezetes táblázata homogén koordinátákkal:

$$\begin{array}{lll} P_{11}(0,1,-1) & P_{12}(0,1,-\omega) & P_{13}(0,1,-\omega^2) \\ P_{21}(-\omega^2,0,1) & P_{22}(-1,0,1) & P_{23}(-\omega,0,1) \\ P_{31}(1,-\omega,0) & P_{32}(1,-\omega^2,0) & P_{33}(1,-1,0) \end{array} \tag{3.6}$$

ahol $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. Könnyen ellenőrizheti az olvasó azt a tényt, hogy e 9 pont hármasával 12 egyenesen helyezkedik el, mégpedig úgy, hogy bármelyik inflexiós ponthoz a mondott egyenesek közül négy-négy illeszkedik. Ezeket az egyeneseket *inflexiós tengelyeknek* ne-

vezzük. Az inflexiós tengelyekről áttekinthető képet a következő módon kaphatunk. Tekintsük a

$$\begin{vmatrix} P_{11} P_{12} P_{13} \\ P_{21} P_{22} P_{23} \\ P_{31} P_{32} P_{33} \end{vmatrix}$$

„determináns" soraiban, oszlopaiban és kifejtési tagjaiban fellépő pontharmasokat (elemharmasokat). Az így definiált $3+3+6 = 12$ ponthármas a 12 inflexiós tengelynek felel meg. — Mondhatjuk, hogy az inflexiós pontok és tengelyek egy $\{9_4, 12_3\}$ típusú, nem valós konfigurációt alkotnak. A későbbiek során a konfiguráció fogalmára még visszatérünk.

A szóban forgó görbe paraméteres előállítása a (3. 5) kanonikus egyenlet felfedezése után sem sikerült. Sőt CLEBSCH (1864) megmutatta, hogy — az eddigi előállítások mintájára — nem is sikerülhet.

Pontosabban megfogalmazzuk a problémát és vázoljuk tisztázásának módszerét. Tekintsük a λ és μ paraméterekben homogén harmadfokú $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ polinomokat, még azt is kikötve, hogy nincs egy (legalább elsőfokú) $\psi(\lambda, \mu)$ közös osztójuk. A (3.5) nem állítható elő

$$(3.7) \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = \varphi_1(\lambda, \mu) \\ \varrho x_2 = \varphi_2(\lambda, \mu) \\ \varrho x_3 = \varphi_3(\lambda, \mu) \end{cases}$$

paraméteres alakban; megfordítva pedig az áll, hogy a (3,7) definiálta görbének okvetlenül van többszörös pontja.

Az állítás második fele mondja meg, hogy a (3.5) miért nem paramétrizálható a szóban forgó módon. Az állítás e második felét bizonyítandó, eliminájuk (3.7)-ből a paramétereket, és jelölje $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ az így kapott egyenletet. Ez az egyenlet egy görbének felel meg. E görbe $P(x_1, x_2, x_3)$ pontjában vegyük az érintőt. Az érintő vonalkoordinátáira

$$u_1 : u_2 : u_3 = f_1 : f_2 : f_3 \quad \left(f_k = \frac{\partial f}{\partial x_k};\ k = 1, 2, 3 \right)$$

áll; hacsak a jobboldalon nem 0:0:0 adódik, ami csak többszöröspontnál következik be. Tegyük hát fel, hogy $(f_1, f_2, f_3) \neq (0, 0, 0)$

Tekintsük most a JACOBI-féle

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu} \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ha a jk sorrendben j-edik és k-adik oszlopból alkotott determinánst a (jk) jellel jelöljük, akkor

$$f_1 : f_2 : f_3 = (23) : (31) : (12)$$

Most világos, hogy a (jk) a λ és μ paraméterek homogén 4-edfokú polinomja, jelölje ezt a polinomot $\psi_1(\lambda, \mu)$. Tehát az érintők vonalkoordinátáinak a paraméteres előállítása adódik:

$$\begin{cases} \sigma u_1 = \psi_1(\lambda, \mu) \\ \sigma u_2 = \psi_2(\lambda, \mu) \\ \sigma u_3 = \psi_3(\lambda, \mu) \end{cases}.$$

Lehet, hogy a jobboldali polinomoknak még egy $\omega(\lambda, \mu)$ közösosztójuk is van. Eszerint a szóban forgó görbe (mint osztálygörbe) legfeljebb negyedosztályú, s abból indultunk ki, hogy harmadrendű. Ebből és a PLÜCKER-féle 1.10 formulából következik, hogy görbénknek vagy duplapontja, vagy csúcspontja van, vagy elfajul (reducibilis). Ezt kívántuk bizonyítani.

CLEBSCH azonban azt is megmutatta, hogy van a parametrizálásnak egy másfajta követelményekkel definiált módja, mely éppen a (3. 5) egyenletű gürbe vizsgálatában mutatkozott roppant gyümölcsözőnek. Ennek a bemutatását a következő szakaszban vesszük sorra.

4. Az elsőfajú harmadrendű görbe leképezése négyzetre

Az eddigiekből is kitűnik, hogy a (3. 5) egyenletű görbe behatóbb tanulmányozásra szorul. Ha a RIEMANN-féle, az (1. 11) által definiált p fajszám szerint osztályozzuk a harmadrendű görbéket, akkor — a következő táblázat szerinti — három görbefajta megkülönböztetése logikusan kínálkozik:

	n	m	d	c	p
I.	3	6	0	0	1
II.	3	4	1	0	0
III.	3	3	0	1	0

Az elsőt, melynek éppen a (3. 5) a kanonikus egyenlete, *elsőfajú* harmadrendű görbének nevezik. A másodikat és a harmadikat — minthogy a fajszám nem megkülönböztető — többszöröspontjuk alkata szerint duplapontos, illetve csúcspontos harmadrendű görbének nevezni logikus dolog. Miként azonban a kanonikus egyenletnél is tettük, s minthogy a valós elemekre tekintve a geometriai tulajdonságaik különbözősége is indokolja, a II. fajtát két alfajra osztjuk: a valós főérintőkkel rendelező duplapontos görbe az egyik, az izoláltpontos görbe a másik. Így az előző szakaszban az 1—4. görbefajtákról beszéltünk. A parametrizálásból is ered egy szokásos elnevezés: a *racionális görbék*. Ha ugyanis inhomogén koordinátákra és paraméterekre térünk át,

mégpedig

$$\frac{x_1}{x_3}=x, \quad \frac{x_2}{x_3}=y; \quad \frac{\lambda}{\mu}=t$$

szerint, akkor a (3. 1) alatti egyenleteknek megfelelő görbék bármelyikét tekintve, a görbe pontjainak koordinátái a t racionális függvényei.

Eszerint a nulladfajúak racionálisak, s amint az előző szakasz végén megállapítottuk, az elsőfajú görbe nem racionális.

Az ABEL-féle integrálok elmélete és az elliptikus függvények elméletében nagy szerepet játszó WEIERSTRASS-féle $p(u)$ függvény tanulmányozása vezette rá CLEBSCH-et egy másfajta parametrizálás gondolatára.

A CLEBSCH-féle módszer lényege az, hogy az elsőfajú harmadrendű görbét mint pontjainak halmazát olyan felfogásban tekintjük, melyben a görbe valós pontjainak a halmaza nem játszik megkülönböztetett szerepet. Így lehetővé válik, hogy a görbe pontjai alkotta halmaz és egy négyzet (tartomány) valós pontjai alkotta halmaz közt egy egyértelmű megfelelkezést létesítsünk. — Itt most az egyik halmaz elemei képzetesek, valósak, de minőségük megkülönböztetése nem jut szóhoz; viszont a másik halmaz csakis valós pontokból áll. — A négyzettartomány — legyünk pontosak — „félig nyílt" négyzetet jelent itt, abban az értelemben, hogy valamelyik két szomszédos oldalegyenese pontjait eltöröljük, tehát a megmaradó „négyzet" csupán egyetlen csúccsal rendelkezik. Az egy-egyértelmű megfelelkezés éppen egy elliptikus függvény, a WEIERSTRASS-féle $p(u)$ függvény közvetítésével adódik. Maga a leképezés nem az algebrai geometriai témakörébe tartozik, az algebrai geometria szempontjából csak az a tény érdekes, hogy egy ilyen leképezés konstruálható és e leképezés alkalmazása nagyon gyümölcsöző.

Mégis vázolnunk kell magát a szóban forgó leképezést is, hogy az alkalmazhatását világosan lássuk.

A $p(u)$ függvény kétszeres periodicitású. Primitív periódus-paralelogrammáját két vektor mint oldalvektorai feszítik ki; reprezentálja e két vektort az a és a b komplex szám. A λ, μ egész számpár összességét tekintve, állítsuk elő a $\lambda a+\mu b$ komplex számok összességét. Feleltessük meg a $\xi a+\eta b = u$ komplex számnak egy euklideszi sík derékszögű koordinátarendszerében azt a pontot, melynek $x=\xi$ és $y=\eta$ a koordinátái. Így az előbb mondott $\lambda a+\mu b$ komplex számokat a koordinátarendszer síkján mint képsíkon egy pontrács ábrázolja. Tüntessük ki e képsík (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) rácspontokkal, mint csúcspontokkal meghatározott ama félig nyílt Ω négyzetét, melyhez csak a (0, 0) csúcspont tartozik hozzá. A $p(u)$ függvény $p(u+\lambda a+\mu b) = p(u)$ tulajdonsága célszerűvé teszi az $u' \equiv u$ kongruencia-fogalom

bevezetését. Azt a tényt kívánjuk az

$$u' \equiv u \quad \text{és} \quad u' \not\equiv u$$

jelöléssel kifejezni, hogy található olyan λ, μ egész számpár, melyre nézve

$$u' - u = \lambda a + \mu b$$

teljesül, illetve nincs ilyen egész szám-pár. Kövessük most a kongruencia értelmét az imént definiált képsíkon, mégpedig az ott létesített (λ, μ) pontok alkotta **E** pontrács segítségével. Nevezzük az u-hoz tartozó (ξ, η) képpontot rövidség kedvéért u pontnak. Az u-val kongruens u' pontokat u-ból ennek rácsvektorokkal való eltolásával származtathatjuk.

Így az Ω két különböző pontja inkongruens, és a képsík egészét tekintve, annak bármely pontja egyetlenegy az Ω-hoz tartozó ponttal kongurens. Ezt a pontot az előbbi pont *redukált reprezentáns*ának nevezzük.

Ezek szerint a $p(u)$ számok és az Ω-hoz tartozó képpontok között egy-egyértelmű megfelelkezést létesítettünk. Ezt majd a CLEBSCH-féle parametrizálásnál felhasználjuk.

A $p(u)$ függvény következő tulajdonságaira támaszkodik a parametrizálás. Ha

$$p\left(\frac{a}{2}\right) = e_1, \quad p\left(\frac{a+b}{2}\right) = e_2, \quad p\left(\frac{b}{2}\right) = e_3,$$

akkor

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

továbbá

$$p'^2(u) = \left(\frac{dp}{du}\right)^2 = 4p^3(u) - g_2 \cdot p(u) - g_3.$$

ahol

$$g_3 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1), \quad g_3 = 4\, e_1e_2e_3.$$

CLEBSCH bebizonyította, hogy *az elsőfajú görbéhez úgy választhatunk koordinátaháromszöget és egységpontot, hogy a görbe pontjainak koordinátáti a*

$$\text{(4. 1)} \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = p(u) \\ \varrho x_2 = p'(u) \\ \varrho x_3 = 1 \end{cases}$$

paraméteres előállítás szolgáltatja. Az u-t a görbe $P(x_1, x_2, x_3)$ pontja paraméterének nevezzük.

Ilyen módon a görbe (valós és képzetes) pontjai és az Ω pontjai közt egy-egyértelmű megfelelkezést létesítettünk.

CLEBSCH a (4. 1) előállítás gyümölcsöző alkalmazását egy remek tétellel biztosította. ABEL egy 1826-ban publikált tételéből kiindulva, a következő tételt vezette le:

Ha a (4. 1)*-gyel definiált görbe és egy n-edrendű algebrai görbe metszéspontjainak redukált reprezentánsai az*

$$u_1, u_2, \ldots, u_{3n}$$

képpontok, akkor

$$u_1+u_2+\ldots+u_{3n} \equiv 0 \tag{4. 2}$$

(Ha egy metszéspont többszörös multiplicitással lép fel, akkor a baloldali $3n$ tagú összegben a mondott metszéspontnak megfelelő redukált reprezentáns a multiplicitással egyező együtthatóval szerepel, de akkor nyilván nem a tagok száma, hanem az együtthatók összege lesz $3n$.)

Minthogy az egyenes algebrai görbe, azért az u_1, u_2, u_3 redukált reprezentánsokhoz akkor tartozik az elsőfajú görbének három, egy egyenesbe eső pontja, hogyha

$$u_1+u_2+u_3 \equiv 0 \tag{4. 3}$$

A továbbiakban csak erre a legspeciálisabb CLEBSCH-féle formulára lesz szükségünk.

Talán kívánatos a (4. 3) rajzos értelmezését is közölni, sőt általában is az

$$u_1+u_2+\ldots+u_k \equiv s$$

értelmét. Az origóból mint közös kezdőpontból vektorok tartanak az $u_1+u_2+\ldots+u_k$ végpontokig. E vektorok összegét az origóból mint kezdőpontból felrajzoljuk. Ha az így rajzolt vektor végpontja Ω-hoz tartozik, akkor ez a végpont az s pont. Ha pedig a végpont az **E** pontrács egy olyan elemei négyzetéhez tartozik, mely az Ω-ból egy rácsvektorral való eltolással származtatható, akkor s az Ω ama pontját jelenti, mely a mondott eltolással a szóban forgó összeg-vektor végpontjába lép.

Szükségünk lesz még az Ω összes olyan u pontjainak a meghatározására is, amelyek a

$$\lambda u \equiv 0 \qquad (\lambda \text{ természetes szám}) \tag{4. 4}$$

kongruenciáknak tesznek eleget. Tekintsük a képsík gyanánt használt koordinátasík

$$x=\frac{\varrho}{\lambda}, \quad y=\frac{\sigma}{\lambda} \qquad (\varrho, \sigma=0, 1, 2, \ldots, \lambda-1) \tag{4. 5}$$

koordinátapárokkal jellemzett pontjait. Így összesen λ^2 számú pontról van szó, ezek a szóban forgó feladat összes megoldásai.

Egyelőre csak egy példán mutatjuk be a CLEBSCH-féle módszer erejét. Megvizsgáljuk az elsőfajú harmadrendű görbe inflexiós pontjainak alakzatát.

Az inflexiós pontok Ω-n való képeit a (4.3) alapján a

$$3u \equiv 0$$

jellemzi. E kirovásnak kilenc pont felel meg, derékszögű koordináták szerint felsorolva:

$$u_{11} \sim (0, 0), \quad u_{12} \sim (\tfrac{1}{3}, 0), \quad u_{13} \sim (\tfrac{2}{3}, 0);$$

$$u_{21} \sim (0, \tfrac{1}{3}), \quad u_{22} \sim (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}), \quad u_{23} \sim (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3});$$

$$u_{31} \sim (0, \tfrac{2}{3}), \quad u_{23} \sim (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), \quad u_{33} \sim (\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}).$$

E redukált pontokkal reprezentált paramétereket (4.1)-be helyettesítve, a görbe inflexiós pontjait állítottuk elő. Tehát 9 inflexiós pontja van.

A redukált reprezentánsok koordinátáit tekintve világos, hogy például

$$u_{12} + u_{23} + u_{31} \equiv 0,$$

ami pedig (4.3) szerint azt jelenti, hogy a görbének az u_{12}, u_{23}, u_{31} redukált reprezentánsokhoz tartozó pontjai, vagyis bizonyos három inflexiós pont egy egyenesbe esik. Hasonló módon intézhető el a többi 11 ilyen tulajdonságú ponthármas is.

Ez a példa is megmutatta, nem a függvénytan fogalmai nyomulnak be az algebrai geometriába ezzel a módszerrel, hanem a (4.1) tette lehetővé a (4.2)-nek mint eszköznek a geometriai alkalmazását.

A CLEBSCH-tétel — a (4. 2)-höz fűzött állítást ezután e néven nevezzük — a leginspirálóbb, erős és szép tétele az algebrai görbék elméletének. Az algebrai geometria fejlődésére, az algebrai görbén elhelyezkedő pontcsoportok vizsgálata terén, három irányban is hatott:

(A) — Ismert tételek egységes, a CLEBSCH-féle tételre támaszkodó, új bizonyítására ad módot. Így régi tételek új megvilágításba kerülnek.

(B) — Új utat nyit új tételek felfedezésére.

(C) — Később arra ösztönözte a kutatókat, hogy a (végső soron a függvénytan erejéből táplálkozó) CLEBSCH-féle módszerrel feltárt geometriai eredményeket tiszta geometriai módszerekkel is elérhetővé tegyék.

E hatásirányokat példákon szemléltetjük. Az (A)-ra a fentebbi, az inflexiós pontok számával és kölcsönös helyzetével foglalkozó szakasz a példa.

A (B) illusztrálására a PICQUET-n-szögek meghatározását mutatjuk be az elsőfajú harmadrendű görbe esetében. Ezzel még adósok is vagyunk, hiszen csak a racionális görbék esetében intéztük el a feladatot.

Az u redukált reprezentánshoz tartozó pont tangenciális pontja az u' reprezentánshoz tartozó pont, ha az u és u' közt a (3.4) szerint, a következő összefüggés áll fenn:

$$u' \equiv -2u$$

Következésképpen egy a görbébebeírt PICQUET-n-szög a redukált reprezentánsok

$$u(=u_1), -2u, 4u, -8u, \ldots, (-2)^{n-1}u$$

n-elemű sorozatának felel meg, feltéve azt, hogy

$$(-2)^n u \equiv u$$

és az n elemű sorozatnak nincs más két kongruens eleme. Az u kezdő elem tehát a

$$[(-2)^n - 1]u \equiv 0 \tag{4. 6}$$

olyan megoldásaként adódik, mely nem megoldása egy olyan

$$[(-2)^m - 1]u \equiv 0 \tag{4. 7}$$

kongruenciának sem, ahol $0<m<n$. Ha a páronként inkongruens megoldásokat, az

$$u_1, u_2, \ldots, u_N$$

redukált reprezentánsokat tekintjük, e sorozat bármely elemével egy PICQUET-n-szög ciklikus rendben sorakozó csúcsainak redukált reprezentánsait előállíthatjuk:

$$u_k, -2u_k, 4u_k, \ldots, (-2)^{n-1}u_k$$

Ennek a sorozatnak minden eleme fellép az előző sorozatban is, hiszen a PICQUET-n-szög bármely szögpontja a kezdő szögpont szerepét játszhatja, és mint kezdőpont ugyanazt a PICQUET-n-szöget indukálja. Eszerint belátható, hogy N osztható n-el, s a PICQUET-n-szögek száma N/n. Persze az N szám n-ből való kiszámítása még hátra van.

Az N kiszámítása, ha n primosztói $p_1, p_2, \ldots, p_r$ a következő formula szerint végezhető:

$$N(n) = S(n) - \sum_j S\left(\frac{n}{p_j}\right) + \sum_{j,k} S\left(\frac{n}{p_j p_k}\right) - \ldots + (-1)^r S\left(\frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_r}\right) \tag{4. 7}$$

ahol az $S(q)$ értelme:

$$S(q) = [(-2)^q - 1]^2. \tag{4. 8}$$

Ennek igazolásául először az $S(q)$ szám értelmezését vesszük sorra. A (4.4), (4.5) és (4.6) formulákkal kapcsolatban mondottakból világos, hogy $S(q)$ a

$$[(-2)^q - 1]u \equiv 0$$

kongruenciát kielégítő redukált reprezentánsok száma.

Második megjegyzésként egy könnyen igazolható segédtételt említünk: Ha m és n legnagyobb közös osztója d, akkor a (4.6) és (4.7) minden közös megoldása a

$$[(-2)^d - 1]u \equiv 0$$

kongruenciának is megoldása, és ennek a kongruenciának minden megoldása a (4.6)-nak és a (4.7)-nek is eleget tesz.

Végül abból, hogy a (4.6) megoldásai közül minden (4.7)-nek is eleget tevőt törölni kell, továbbá a segédtétel alapján a (4.7) jobboldalán álló kifejezés már könnyen adódik.

A (C) illusztrálására példaként RIESZ FRIGYES (1902) doktori értekezését említjük. Némi kitérőt kell tennünk, hogy e dolgozat témáját ismertethessük.

Az elsőfajú negyedrendű térgörbe (két másodrendű felület metszésvonala) és egy másodrendű felület metszéspontjainak száma 8. Az ilyen pontok alakzatát REYE-féle pontnyolcasnak nevezzük. (Persze többszörösen számítandó és képzetes pontok is felléphetnek, az előb-

bieket multiplicitásuk szerint számláljuk.) Ez a pontnyolcas sok szép tulajdonsággal rendelkezik. (Például ha a 8 pontja közül 7 meg van adva, akkor azokból a nyolcadikat pusztán vonalzóval meg lehet szerkeszteni.)

Az elsőfajú negyedrendű térgörbébe beírt REYE-féle pontnyolcasok vizsgálatára is kidolgozta CLEBSCH a $p(u)$ függvénnyel kapcsolatos módszert. Hogyha a szóban forgó görbe irreducibilis, található hozzá alkalmas koordináta-tetraéder és egységpont úgy, hogy a görbe pontjainak koordinátáit ebben a rendszerben az

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = p(u) : p'(u) : p''(u) : 1$$

paraméteres előállítás szolgáltatja. Egy elsőfajú negyedrendű görbe és egy n-edrendű algebrai felület metszéspontjainak száma $4n$, a metszéspontok redukált reprezentánsaira nézve itt is érvényes a (4. 2)-höz rokon

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{4n} \equiv 0$$

CLEBSCH-féle reláció. A másodrendű felületre, illetve síkra alkalmazva a REYE-féle pontnyolcast, illetve a komplanáris pontnégyest jellemző

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_8 \equiv 0 \quad \text{illetve} \quad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0$$

relációkat kapjuk.

A húszesztendős RIESZ a REYE-féle pontnyolcas vizsgálata kapcsán a CLEBSCH-féle módszerrel egyenértékű tiszta geometriai módszert dolgozott ki. Ez a gondolatokban gazdag és felfogásban modern dolgozata nem vonta magára a közfigyelmet, talán azért, mert csak magyar nyelven publikálta. Témaválasztásából, problémafelvetéséből, a használt magyar szakkifejezésekből én Vályi hatására merek következtetni. Vályi századvégi publikációi, remek előadásai az elliptikus függvények elmélete köréből (az utóbbiakról HAAR ALFRÉD sok év multán is nagy elismeréssel emlékezett meg) alkalmasak voltak egy kiváló fiatal matematikus érdeklődésének megragadására.

Közleményünknek ezt a szakaszát azzal a megjegyzéssel zárjuk, hogy CLEBSCH remek módszerének van egy gyöngéje: a vizsgált pontrendszerek realitási viszonyainak tisztázására közvetlen módot nem ad. Valamint az sem derül ki, hogy az elsőfajú harmadrendű görbe valós pontjai által alkotott vonalnak mi a (szemléletes) képe az Ω képlemezen.

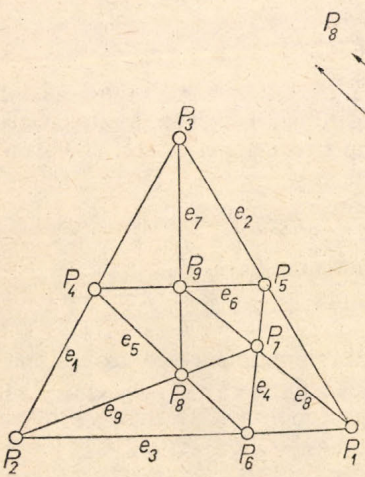
5. Kétféle $\{9_3, 9_3\}$ valós konfiguráció elhelyezése az elsőfajú harmadrendű görbén

Ha a valós projektív sík n számú pontja és m számú egyenese úgy helyezkedik el, hogy minden egyes egyneshez ν számú pont és minden egyes ponthoz μ számú egyenes illeszkedik, akkor ezek az elemek egy

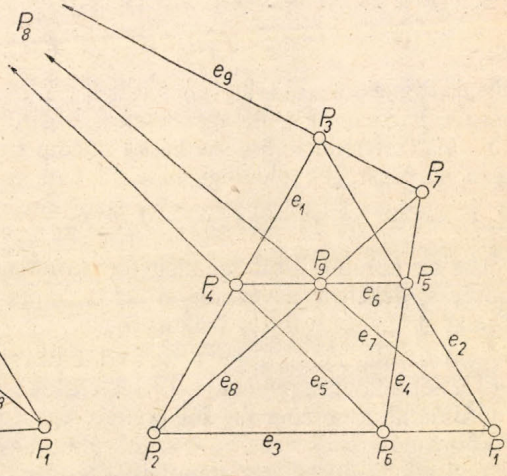
valós projektív $\{n_\mu, m_\nu\}$ típusú *konfigurációt* alkotnak. Nyilvánvaló, hogy

(5. 1) $$n\mu = m\nu$$

Ha $m=n$, akkor $\mu=\nu$, és a konfigurációt *szimmetrikusnak* mondjuk. A típus még nem határozza meg a konfigurációt. Ezt az 1. és a 2. ábra által realizált két $\{9_3, 9_3\}$ típusú szimmetrikus konfiguráció mint példa



1. ábra



2. ábra

is mutatja. Mit értünk azon, hogy két $\{n_\mu, m_\nu\}$ konfiguráció különböző fajta, avagy nem különbözнek egymástól? Azt értjük, hogy a két konfiguráció között olyan, a ponthoz pontot, az egyeneshez egyenest rendelő, egy-egyértelmű megfelelkezés létesíthető, avagy nem létesíthető, mely a következő kikötésnek felel meg:

Tekintsük a két konfiguráció bármelyikének bármelyik pont-egyenes párját; aszerint, hogy ezek illeszkednek egymáshoz vagy nem, a másik konfigurációban nekik megfelelő elemek is illeszkedjenek egymáshoz, illetve ne illeszkejenek.

Minthogy két azonos típusú konfiguráció közt az összes lehetséges egy-egyértelmű megfelelkezések száma $n!\cdot m!$ — az 1. és 2. ábra esetében 130961894400 —, vagyis konkrét példák esetében óriási számokról van szó, nem könnyű eldönteni, hogy van-e ezek között a kikötésnek eleget tevő megfelelkezés vagy nincs.

Ábráink esetében az egyik konfiguráció „komplementáris egyenesei" és eredeti pontjai együttes alakzatának a másik együttes alakzatá-

val való egybevetése segít a különbözőség megállapításában. (Komplementáris egyenesek: a konfiguráció pontpárjait összekötő ama egyenesek, melyek nem egyenesei a konfigurációnak.) Világos dolog, hogy az ekvivalens konfigurációk komplementáris alakzatának a struktúrája nem lehet egymástól különböző.

Berajzolva mind az 1., mind a 2. ábra komplementáris egyeneseit, nyomban észrevehető, hogy más-más a struktúrájuk. Az előbbi 9 egyenes a zárt és ciklikus sorrendben leírt

$$(5.2) \qquad P_1P_4P_7P_3P_6P_9P_2P_5P_8$$

kilencszögnek az oldalegyeneseit képezi. Az utóbbi 9 egyenes pedig három háromszög oldalegyeneseit szolgáltatja, vagyis a komplementáris alakzat reducibilis, széthasad három irreducibilis részre. A következő háromszögek oldalegyeneseiről van szó:

$$(5.3) \qquad P_1P_4P_7, \quad P_2P_5P_8, \quad P_3P_6P_9.$$

Tehát az ábráink által szemléltetett konfigurációk különbözők. A rövidség érdekében nevezzük el az 1. ábrával realizált konfigurációt Γ-nak, a 2. ábrával realizáltat Π-nek.

Most eláruljuk, hogy a (2. 3) táblázat pontkilencesét az 1. ábra, a (2. 2)-ét a 2. ábra realizálja. Tessék csak az ábrák $P_1P_2P_3$ háromszögét koordinátaháromszögnek, súlypontját egységpontnak tekinteni. Ebben a koordinátarendszerben — az ábrákat úgy szerkesztettük meg — a Π pontjainak, illetve a Γ pontjainak éppen a (2. 2), illetve a (2. 3) táblázatban olvasható koordináták felelnek meg.

Nem célunk itt a konfigurációk elméletét ismertetni, csupán a Γ és Π konfigurációkkal kapcsolatban érintjük e témakört.

A Π és Γ különböző voltát más, közvetlenebb módon is megállapíthattuk volna, mint fentebb. A Π egyenesei közül kiválaszthatunk hármat úgy, hogy páronként ne tartalmazzanak közös konfiguráció-pontot, vagyis a hozzájuk illeszkedő pontok a konfiguráció összes pontjait kimerítik. Ilyen egyeneshármas — például — az e_3, e_6, e_9. A Γ-nak viszont nincs ilyen egyeneshármasa.

A Π és Γ közös definíciója a következő: *Három olyan háromszög csúcspontjainak és oldalegyeneseinek az alakzata, amelyek sorszámozhatók úgy, hogy a második az elsőbe, a harmadik a másodikba és az első a harmadikba van beírva.* (Úgy is mondhatnánk, hogy bármelyik a másik kettő közül egyikbe be van írva és a másik köré van írva.) A definícióban mondott háromszögek mind a két ábra esetében rendre a

$$(5.4) \qquad P_1P_2P_3, \quad P_4P_5P_6, \quad P_7P_8P_9$$

Könnyen igazolható, hogy e definíciók csak a Γ és a Π alakzat felel meg.

A Π konfigurációnak sajátos tulajdonsága — például a következő.

A Π konfiguráció pontjai olyan három háromszög csúcsait alkotják, amelyek bármelyikének bármelyik csúcsából a másik kettő egymásba vetíthető.(Ezt úgy is elmondhatjuk, hogy a három háromszög bármelyik ketteje háromszorosan perspektív párt alkot, e három perspektivitás centruma pedig a harmadik háromszög három

csúcsa.) A 2. ábrán a mondott háromszögek a

$$P_1P_4P_7, \quad P_2P_5P_8, \quad P_3P_6P_9$$

háromszögek. Az állítás helyességét az ábra közvetlenül megmutatja.

Tekintsük a következő

$$P_1P_8P_6P_7P_2P_3$$

ciklikus sorrendben felsorolt csúcsokhoz tartozó hatszöget. Csúcsai hármasával az e_3 és e_9 egyenesen helyezkednek el, következésképpen az átellenes oldalegyenespárok párjai szolgáltatta P_4, P_5, P_9 pontok a hatszög PASCAL-féle egyenesén, itt az e_6 egyenesen helyezkednek el.

Tehát a Π konfiguráció a jól ismert PAPPUS—PASCAL*-féle konfiguráció.*

Most még azt is közöljük, hogy a ciklikus sorrendben felsorolt

$$P_1P_2P_3, \quad P_4P_5P_6, \quad P_7P_8P_9$$

háromszögek csúcsait milyen szabadsági fokkal tűzhetjük ki avégből, hogy teljesüljön a közös definícióban mondott kirovás, hogy e háromszögek bármelyike legyen a ciklikus értelemben közvetlenül megelőzőbe beírva.

Akár a Π, akár a Γ előállításáról van szó a rajz síkján — amely most az euklideszi síkból az ideális elemekkel való bővítés által származtatott projektív síknak tekintendő —, az első háromszög teljesen szabadon választható és a beírt, második háromszög még mint az elsőnek beírt háromszögbe választható szabadon.

A harmadik háromszög már kettős követelménynek tesz eleget: a másodikba be van írva és az elsőnek köré van írva. A harmadik első köré való írásának rendje, vagyis az, hogy melyik oldalegyenese melyik csúcson megy át, dönti el, hogy Π vagy Γ konfigurációvá egészítjük ki a megkezdett ábrát.

Ha Π-vé kívánjuk kiegészíteni, akkor a harmadik háromszögnek egyik csúcsa még szabadon választható a második háromszög megfelelő oldalegyenesén, például a P_9 pont a $P_4P_5 = e_6$ oldalegyenesen. — Hiszen a 2. ábra segítségével azonnal belátható: a $P_1P_5P_6P_4P_2P_9$ hatszög a P_6 pontnak az e_6 egyenesen való mozgása folyamán állandóan PAPPUS—PASCAL-féle hatszög marad, melynek PASCAL-egyenese a változó P_7 és P_8 pontot köti össze, de állandóan átmegy a változatlan P_3 ponton. — Ez a csúcspont, azonban a további kettőt már egyértelműen meghatározza. Ebben az értelemben az első két háromszög és a harmadiknak egy csúcsa egyértelműen meghatározza a Π konfigurációt.

Ha pedig az első két háromszöget Γ-vá kívánjuk kiegészíteni, a harmadik háromszögből már egyetlen csúcsot se vehetünk fel szabadon. — Ha például az 1. ábra $P_4P_5 = e_6$ egyenesén szabadon mozgatjuk a P_9 pontot, akkor a $P_3P_7 = e_7$ egyenes egy ugyancsak változó P_8 pontban metszi a $P_6P_4 = e_5$ egyenest. Legyen P_7 a $P_2P_8 = e_9$ és $P_1P_9 = e_8$ változó egyenesek metszéspontja. Világos, hogy a (végső soron P_9 mozgása miatt változó) P_7 kúpszeletet ír le, hiszen a leírt vonalat projektív sugársorok képződményeként nyertük. Világos továbbá az is, hogy az így változó $P_7P_8P_9$ háromszög akkor felel meg a Γ-t definiáló kettős követelménynek, ha a kúpszeleten futó P_7 pont az e_4 egyenesre lép, vagyis legfeljebb kétszer. — Ebben az értelemben az első két háromszög már meghatározza a Γ konfigurációit (ha nem is egyértelműen, de legfeljebb két ilyen konfigurációt határoz meg).

A legutóbbi két megállapítás lényegét foglaljuk össze a következőképpen: *a Γ pontjainak kapcsolata kötöttebb, mint a Π pontjaié.* (Ez az 1. és 2. ábrán élesen fejeződik ki, mert csupán az első két háromszögből összetett alakzatot tekintve, a két ábra még egybevágó is.)

Figyeljünk csak fel a következő okoskodásra.

Tekintsünk egy tetszőleges négyszöget és egy — akár azéval egyező nagyságú oldalakból álló — olyan konvex négyszöget, melynek két szemközti szöge összege 180°. A csúcspontokat tekintve az utóbbi nyilván kötöttebb pontnégyes, mint az előbbi. A kötöttebb négy pontot összekötő körök száma 1, a szabadabb négy pontot összekötő körök száma 0.

Az előbbi mintára tekintsük most a kötöttebb Γ pontkilencesen átmenő, valamint a szabadabb Π pontkilencesen átmenő harmadrendű görbék számát. Az előbbi most is 1, az utóbbi azonban ∞. (Emlékezzünk vissza a (2.3) és (2.2) példákra.) E pillanatnyilag meghökkentő észrevételnek az elemzését az olvasóra bízzuk.

Felmerül azonban az 1. és 2. ábrák, vagyis a (2. 3) és (2. 2) példák kapcsán tárgyaltak általánosításának kérdése: mit tudunk mondani a Γ, illetve Π kilenc pontját összekötő görbékről általában?

Most ezzel a kérdéssel részletesen foglalkozunk.

Azt már tudjuk, hogy 9 pontot mindig össze lehet kötni harmadrendű görbével, esetleg kettővel is. Ha kettővel is, akkor többel is és a kettő egyenletéből — mondjuk a $g=0$ és $f=0$ egyenletekből — más összekötő harmadrendű görbék egyenletét is származtathatjuk egy homogén paraméterpár segítségével:

$$\lambda g+\mu f=0 \tag{5. 5}$$

Legyen ugyanis egy az $f=0$ és $g=0$ görbék egyikére sem illeszkedő pont a P_0, akkor ennek koordinátáit a harmadrendű f és g polinomba behelyettesítve, azok bizonyos, a 0-tól különböző φ, illetve γ értéket vesznek fel. Világos, hogy a

$$\varphi g-\gamma f=0$$

egyenlettel definiált harmadrendű görbe az eredetileg mondott 9 ponton is átmegy és a P_0-on is, tehát g-től is és f-től is különbözik. A szóban forgó P_0 ponton átmenő két irreducibilis harmadrendű görbének e pontok egyikében se lehet közös az érintőjük; különben az érintkezési pontot 2 multiplicitással kellene számbavenni, és a BÉZOUT-tételnek ellentmondva az adódik, hogy a két irreducibibilis görbe közös pontjainak száma 10.

E mindkét konfigurációra nézve hasznosítható észrevétel. A további fejtegetést már kettéválasztjuk.

A Π konfiguráció esete.

A Π konfiguráció 9 pontját összekötő harmadrendű görbék száma végtelen. Bármely P_0 ponton, mely a 9 pont semelyik párját összekötő egyeneshez se illeszkedik, a mondott görbék közül pontosan egy megy át.

Legyen ugyanis a konfiguráció e_k egyenesének megfelelő lineáris egyenlet $e_k=0$, akkor a harmadfokú

$$g=\lambda e_1 e_4 e_7+\mu e_2 e_5 e_8=0$$

egyenletnek megfelelő görbe átmegy a konfiguráció pontjain, mert hiszen e pontok koordinátahármasai a homogén lineáris

$$\left.\begin{matrix} e_k=0 \\ e_l=0 \end{matrix}\right\} \quad k=1, 4, 7;\ l=2, 5, 8$$

egyenletpárok megoldásaival azonosak.

Legyen továbbá az e_k lineáris polinom értéke a P_0 pontban $\omega_k \neq 0$, (ez a P_0-ra vonatkozó kirovásból folyik), akkor a

$$g_0 = \omega_2\omega_5\omega_8 \cdot e_1e_4e_7 - \omega_1\omega_4\omega_7 \cdot e_2e_5e_8 = 0$$

egyenletű görbe a Π konfiguráció pontjain kívül még a P_0 ponton is átmegy.

A szóban forgó 10 ponton más, a g_0-tól különböző g_0^* harmadrendű görbe nem megy át. Különben a BÉZOUT-tétel szerint már a g_0 polinomot is elő lehetne állítani egy lineáris p polinom és egy kvadratikus q polinom szorzataként. A $p=0$ és $q=0$ egyenlet egy p egyenest, illetve egy q kúpszeletet definiál. Visszapillantva a 2. ábra három-három konfigurációpontot tartalmazó e_3, e_6 és e_9 egyeneseire, és gondolva még arra is, hogy a P_0P_k egyenesek száma 9, a szóban forgó 10 pont közül a p egyenes nyilván nem tartalmazhat többet 3-nál, tehát a q sem tartalmazhat kevesebbet 7-nél. Ámde ekkor a harmadrendű g_0^* és másodrendű q görbének legalább 7 közös pontja van. Ebből a BÉZOUT-tétel szerint vagy az következik, hogy q irreducibilis és része a g_0^* görbének, vagy tovább bontatjuk a q-t egyenesekre.

Hogyha g_0^*-nak a q irreducibilis görbe egy része, akkor van még egy r egyenes része is. Feltevésünk szerint $g_0 \neq g_0^*$ ámde a q görbe közös részük, következésképpen $p \neq r$. Minthogy Π-nek legfeljebb egyik pontja van a p és r egyenesen egyaránt, legalább 8 pontjának kell az irreducibilis q görbén lennie. Ez azonban lehetetlen, hiszen a nyolc közül három vagy az e_3, vagy az e_6, vagy az e_9 egyenesen van. A diszkusszionak ez az ága ellentmondásra vezet.

Hogyha pedig a q is egyenesekből (vagy egy kétszeres egyenesből) áll, vagyis a

$$g_0 = p \cdot q_1 \cdot q_2 = 0$$

egyenletet tekintve q_1 és q_2 lineáris polinomok, akkor a p, q_1, q_2 egyenesek egyike tartalmazza a P_0 pontot és még legfeljebb egyet a Π pontjai közül. Ámde akkor a másik két egyenesen helyezkedik el még legalább 8 a konfiguráció pontjai közül. Márpedig ez a Π struktúrája miatt lehetetlen. A diszkusszió e másik ága is ellentmondásra vezetett.

Az ellentmondások bizonyítandó állításunkat igazolják.

A Γ konfiguráció esete.

A konfiguráció 9 pontját egyetlen egy harmadrendű görbe köti össze, mely nem degenerált és egy PICQUET-*n-szögét éppen a* $P_1P_4P_7P_3P_6P_9$ $P_2P_5P_8$ *ciklikus elrendezésben vett pont-9-es szolgáltatja.*

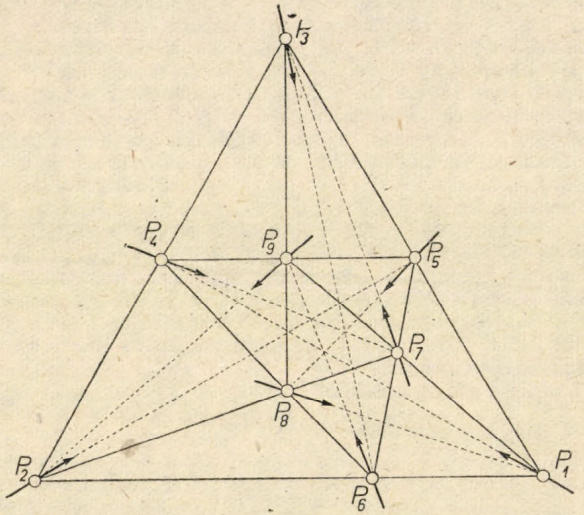
A Γ konfigurációinak legfeljebb három pontja esik egy egyenesbe — ami a definíciójában szereplő három háromszög segítségével könnyen belátható —, sőt három pontja csak akkor, ha az e_k egyenesek valamelyike köti őket össze. Törölve a konfigurációnak a sík egy tetszőleges egyenesére eső pontjait, a megmaradó pontok között mindenesetre van három egy egyenesbe eső pont. Éppen ezért a Γ pontjait összekötő harmadrendű görbe nem állhat egy p egyenesből és egy irreducibilis q kúpszeletből. Ámde három egyenesből se állhat, mert a konfiguráció semelyik három egyenese sem fűzi fel a konfiguráció összes pontjait. Tehát a Γ összes pontjain átmenő harmadrendű görbe irreducibilis.

Alkalmazzuk most e görbe $P_1P_5P_7P_6P_3P_9P_8P_4$ pont-8-asára a nyolcponttételt. A 3. ábra szerint

$$P_1P_5P_3, \quad P_1P_7P_9, \quad P_5P_7P_6, \quad P_3P_9P_8, \quad P_6P_8P_4$$

mindegyike egyenesvonalú ponthármas, a tétel valóban alkalmazható, s aszerint a P_4P_1 egyenes a görbének érintője a P_1 pontban. Vagyis a P_1 pont tangenciális pontja éppen a P_4 pont. Hasonló módon igazolhatjuk azt is, hogy a $P_4, P_7, P_3, \ldots, P_8$ pontok tangenciális pontja rendre a $P_7, P_3, P_6, \ldots, P_1$ pontok.

Minthogy a Γ pontjain átmenő harmadrendű görbe irreducibilis, és a konfiguráció 9 pontja — például — a P_1 pontbeli érintőt is egyértelműen meghatározza, a BÉZOUT-tétel szerint csak egyetlenegy összekötő görbe van. Ezzel a bizonyítást be is fejeztük.



3. ábra

Közleményünk egyik főtémáját — az algebrai görbe adott pontjaiból való meghatározása — be is fejeztük. A másik főtémáról — pontrendszerek az algebrai görbén, speciálisan a CLEBSCH-féle módszer alkalmazása —, még van mondanivalónk.

Eddig az adott Π, illetve Γ pontkilencest összekötő harmadrendű görbéket vizsgáltuk. Most a fordított feladatra térünk át. Adva van egy harmadrendű görbe és előállítandók a görbébe pontjaiknál fogva beírt Π és Γ konfigurációk. Itt azonban már csak az elsőfajú harmadrendű görbe esetére hivatkozunk, s megengedjük, hogy a konfiguráció elemei képzetes pontok és egyenesek is lehessenek. Ennek a részletes kifejtésével a következő szakaszban foglalkozunk.

6. Az elsőfajú harmadrendű görbén elhelyezkedő Π és Γ konfigurációk meghatározása

A következőkben állandóan az elsőfajú harmadrendű görbéről beszélünk, azért célszerű lesz ismét a CLEBSCH-féle módszerrel dolgozni, s a görbe pontját redukált reprezentánsával megnevezni.

A Π konfigurációval kezdjük, s a pontok reprezentánsainak indexezését a 2. ábrához igazítjuk. A konfiguráció alkatát a következő 9 kongruencia fejezi ki.:

$$\begin{array}{lll} u_1+u_2+u_6\equiv 0 & u_4+u_5+u_9\equiv 0 & u_7+u_8+u_3\equiv 0 \\ u_2+u_3+u_4\equiv 0 & u_5+u_6+u_7\equiv 0 & u_8+u_9+u_1\equiv 0 \\ u_3+u_1+u_5\equiv 0 & u_6+u_4+u_8\equiv 0 & u_9+u_7+u_2\equiv 0 \end{array} \tag{6. 1}$$

Az első oszlopból az u_4, u_5, u_6 reprezentánsokat az u_1, u_2, u_3 reprezentánsokkal kifejezhetjük. Ezeket felhasználva, a második oszlopból az u_7, u_8, u_9 reprezentánsokat ugyancsak kifejezhetjük az u_1, u_2, u_3 segítségével. Ezeket felhasználva, a harmadik oszlop bármelyik sorából

$$3(u_1+u_2+u_3)\equiv 0 \tag{6.2}$$

adódik; itt nyomatékosan kiemeljük, hogy legyen a $P_1P_2P_3$ valódi háromszög, vagyis

$$s\equiv u_1+u_2+u_3\not\equiv 0. \tag{6. 3}$$

Tekintsük most a

$$3s\equiv 0,\ s\not\equiv 0 \tag{6.4}$$

kirovásokkal definiált redukált reprezentánsokat. Már tudjuk, hogy ezek száma $9-1=8$, s ezek a görbe egy-egy inflexiós pontját reprezentálják.

Ragadjuk ki a (6. 4) definiálta nyolc s reprezentáns egy bármelyikét, és a kiragadottat bontsuk fel három redukált reprezentáns összegére:

$$s\equiv u_1+u_2+u_3$$

Az első két tag nyilván szabadon választható, a harmadikat e kettő már egyértelműen meghatározza. Így egy $P_1P_2P_3$ háromszöget tűztünk ki a görbén, szabadon választván két csúcsát, a P_1-et és P_2-t. Ebből a háromszögből kiindulva, tűzzük ki az

$$u_4\equiv u_1+2s,\quad u_5\equiv u_2+2s,\quad u_6\equiv u_3+2s$$

továbbá az

$$u_7\equiv u_1+s,\quad u_8\equiv u_2+s,\quad u_9\equiv u_3+s$$

definíciónak megfelelő, a görbébe beírt P_4, P_5, P_6 és P_7, P_8, P_9 háromszögeket. A leírt processzus szolgáltatta $P_1P_2\ldots P_9$ beírt pont-9-es egy Π konfigurációt szolgáltat, mely a kiindulási s-hez tartozó inflexiós ponthoz van hozzárendelve. Ezt az inflexiós pontot a szóban forgó Π konfiguráció *forrásának* nevezzük. Egy forráshoz azonban nem egy Π tartozik, hanem a Π konfigurációknak egy *kétparaméteres serege* — gondoljunk csak a szabadon választott u_1, u_2 párra —, melynek konfigurációi belepik a görbét. A görbe a Π konfigurációknak 8 ilyen seregét tartalmazza.

Most áttérünk a görbébe beírható Γ pontkilencesek előállítására.

Kiaknázzuk azt a tényt, sőt abból indulunk ki, amit a 3. ábrával is igyekeztünk kifejezésre jutattni, hogy a ciklikus $P_1P_4P_7P_3P_6P_9P_2P_5P_8$ sorrendben minden pontnak a rákövetkező a tangenciális pontja. Induljunk ki egy u redukált reprezentánsból és legyen

$$u_1 \equiv u,\ u_4 \equiv -2u,\ u_7 \equiv 4u,\ u_3 \equiv -8u,\ u_6 \equiv 16u,\ u_9 \equiv -32u,\ u_2 \equiv 64u,\ u_5 \equiv -128\,u,$$
$$u_8 \equiv 256\,u,\ u_1 \equiv -512\,u \equiv u.$$

A konfiguráció e_8 egyenesen (1. ábra) rajta vannak a $P_1P_7P_9$ pontok, tehát $u_1+u_7+u_9 \equiv 0$, vagyis $u+4u-32\,u \equiv 0$. Ebből pedig

$$27u \equiv 0. \tag{6. 5}$$

Vegyük tekintetbe még azt is, hogy például a $P_1P_2P_4$ egy valódi háromszöget feszít ki, tehát $u_1+u_2+u_4<0$, és ha ugyanezt az u segítségével írjuk, $u+64u-2u<0$ adódik. Ezt még a (6.5)-ből folyó $54u \equiv 0$ relációval egybevetve, azt kapjuk, hogy

$$9u \not\equiv 0. \tag{6. 6}$$

Ezeket felhasználva, az u_k elemek u-val való kifejezéseiben kisebb és pozitív együtthatókat írhatunk:

$$\begin{cases} u_1 \equiv u\ , & u_2 \equiv 10u, & u_3 \equiv 19u; \\ u_4 \equiv 25u, & u_5 \equiv\ 7u, & u_6 \equiv 16u; \\ u_7 \equiv\ 4u, & u_8 \equiv 12u, & u_9 \equiv 22u. \end{cases} \tag{6. 7}$$

Azoknak az u redukált reprezentánsoknak bármelyikéből kiindulva, melyeket a (6. 5) és (6. 6) definiál, a (6. 7) eljárással olyan $u_1, u_2, \ldots, u_9$ adódik, hogy a megfelelő $P_1, P_2, \ldots, P_9$ pontok éppen egy Γ konfigurációt alkotnak.

Az eddigiekre támaszkodva a görbébe beírható Γ konfigurációk számát könnyen meghatározhatjuk. Ez a szám

$$\frac{1}{9}(27^2-9^2) = 72$$

ennek igazolását az olvasóra bízzuk.

* * *

Az algebrai geometria fejlődés-történet kapcsán való ismertetésének első részét ezzel be is fejeztük. Egy következő közleményben — ha a jelen sorok érdeklődést ébresztenek — az algebrai görbék aritmetikai tulajdonságainak ismertetését adnánk hasonló feldolgozásban. Ez a témakör DIOPHANTOS nevéhez fűződik, a későbbi korban pedig FERMAT tereli rá ismét a közfigyelmet. Ebben a témakörben is találkozunk eredményesen dolgozott magyar matematikus nevével, SZŐKEFALVI-NAGY GYULÁéval.

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ КРУГА ТЕМ В ТЕОРИИ АЛГЕБРИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Ф. Картеси

Автор желает ознакомить читателей с классическими темами и методами алгебрической геометрии путем рассмотрения истории развития некоторого круга вопросов теории алгебрических крывых. Он старается ввести своих читателей в тематику — обсуждаемую в дальнейших публикациях — стоящую в настоящее время в центре внимания.

Для пояснения рассматриваемого материала детально изучаются типы Г и П конфигурации $\{9_3, 9_3\}$ представленных на фиг. I и 2, а также и вопрос о том, сколько подобных конфигураций можно вписать в плоскую кривую третей степени, т. е. сколько кривых третей степени определяются 9 точками подобной конфигурации.

ON THE HISTORICAL DEVELOPMENT OF SOME TOPICS IN THE THEORY OF ALGEBRAIC CURVES

F. Kárteszi

A topologikus algebrákról és gyűrűkről II.

SZÁSZ FERENC

4. §. Lokálisan bikompakt gyűrűk és rokon kérdések

A gyűrűk szerkezetét a gyűrű additív csoportjának a szerkezete általában erősen befolyásolja, persze az utóbbi ismeretéből általában nem következik az előbbi ismerete.

A lokálisan bikompakt gyűrűk tanulmányozását elősegíti a lokálisan bikompakt Abel-csoportok elmélete (lásd Pontrjagin [186] és Weil [238] könyveit). E gyűrűkről igen fontos a következő általánosabb eredmény (Kaplansky [113]): Ha A lokálisan bikompakt gyűrű, C a nullának a komponense és B jobbkorlátos additív alcsoport A-ban, akkor $C \cdot B = 0$. Ugyanis A^+ egy f tetszőleges, rögzített karakterére nézve legyen $I(f)$ az összes olyan $a \in A$ elem halmaza, hogy $f(aB) = 0$. Világos, hogy A^+-ban $I(f)$ zárt alcsoport. Legyen most U a nulla olyan környezete, hogy $f(U) < \frac{1}{2}$ és legyen V a nulla olyan környezete, hogy $VB \subseteq U$. Ekkor tetszőleges n egész számmal és tetszőleges $x \in V$ elemmel $x(nB) = nx \cdot B = 0$, ezért bármely $b \in B$ elemmel $f(nxb) \in f(U) < \frac{1}{2}$, tehát $nf(xb) = 0$. Minthogy $f(y) \geqq 0$ ezért $n \to \infty$ esetén $f(xb) = 0$. Tehát $f(V \cdot B) = 0$ és $x \in V \subseteq I(f)$ miatt $I(f)$ nyílt. Ezért $I(f)$ egyszerre nyílt és zárt, továbbá $0 \in I(f)$, így $C \subseteq I(f)$ és $f(CB) = 0$. De f tetszőleges, ezért a Peter—Weyl-tétel ([184], 110 oldal) szerint $CB = 0$, mert elegendő sok karakter létezik. (Minden $a \neq 0$ elemhez van olyan $f \neq 0$, hogy $f(a) \neq 0$.)

Ez az eredmény a lokális bikompaktság feltétele helyett igaz ama enyhébb feltétellel is, hogy elegendő sok additív homomorfizmus van egy olyan csoportba, amelyben nincsenek tetszőleges alcsoportok.

Mármost idézzük Weil [238]-ból azt a struktúra-tételt, amely szerint egy A additív, lokálisan bikompakt csoport direkt összege egy N valós, véges rangú vektorcsoportnak és egy olyan M csoportnak,

amelyben a nullának a P komponense bikompakt. Ezért az A gyűrű esetében $P^2 = PN = NP = 0$. Ha speciálisan A bikompakt és összefüggő, akkor $A^2 = 0$. Ha tehát A nem tartalmaz kétoldali annulátorelemet, akkor $P = 0$ és $A = N$, tehát A végesrangú algebra a valós test felett. Ha A asszociatív ferdetest, akkor a Pontrjagin-féle, ill. Frobenius-féle tétel alkalmazható, ha pedig A nemasszociatív ferdetest, akkor A a Cayley-féle számok teste is lehet. Ezt a négy algebrát Albert [3] egyébként úgy jellemezte, mint az összes olyan valós algebrát, amelynek létezik értékelése.

Ha vannak A-ban kétoldali annulátorok, akkor a lokálisan bikompakt gyűrű szerkezete bonyolultabb, a részletekre azonban nem térünk ki, mert az eredmények egyébként sem elég explicitek ahhoz, hogy konkrét esetekben jól alkalmazhatók legyenek. Mindenesetre nullának a C komponense összefüggő, és az A/C faktorgyűrű teljesen nemösszefüggő, amelyek KAPLANSKY [113] szerint részleteiben jobban kivizsgálható esetek.

A továbbiakban átmenetileg feltesszük, hogy A teljesen nemösszefüggő. Ekkor a bikompakt, teljesen nemösszefüggő esetben van Kampen szerint létezik A-nak alcsoportokból álló környezetbázisa, és a bikompaktság miatt áttérhetünk 0-nak ideálokból álló környezetbázisára is. Ha ugyanis U egy alcsoport-környezet, van olyan V nyílt alcsoport, hogy a $W = V + AV + VA + AVA$ ideál U-nak része. Így van Dantzig [44] definíciója szerint egy bikompakt, teljesen nemösszefüggő gyűrű b_v-adikus. Ez a tény lehetővé teszi a radikál és félig egyszerűség elméletének a hathatósabb kidolgozását. Egy I ideált A-ban topologikusan nilpotensnek nevezünk, ha 0 minden U környezetéhez van olyan n kitevő, hogy $I^n \subseteq U$. Mármost bikompakt és teljesen nemösszefüggő A gyűrű radikálja topologikusan nilpotens és zárt. Továbbá a féligegyszerű bikompakt topologikus gyűrűk véges testek feletti teljes mátrixgyűrűknek a komplett direktösszegei, amelyek topológiája a diszkrét véges komponensek Descartes-féle szorzattere. Ez az elméletnek az egyik legszebb struktúra-tétele. A bizonyítások megtalálhatók Kaplansky [112] dolgozatában. A bikompakt, teljesen nemösszefüggő gyűrűk esetében az alcsoport-környezetek létezése biztosítja azt, hogy az $x^2 + x = y \in J$ egyenleteknek van $x \in J$ megoldása, ahol J a radikál. A megoldás sorbafejtéssel adható meg, amely a topológiában konvergens, és az x-szel pontosan csak azok az elemek lesznek felcserélhetők, amelyek y-nal is felcserélhetők. Ezért a bikompakt, teljesen nemösszefüggő gyűrűk ún. „S. B. I.-gyűrűk" (vö. Jacobson [96], III. fejezet). Ezek alapján a bikompakt féligegyszerű gyűrűk struktúrájának ismeretében bizonyos eredmények kimondhatók a nem féligegyszerű esetben is. Ezeket úgy kapjuk, hogy a klasszikus eljárással [96], amely lényegében még Wedderburn-tól származik, áttérünk az A/J gyűrű idempotenseiről az A gyűrű idempotenseire, ahol J az A radikálja. A Banach-

algebrák Q-gyűrűk, tehát *SBI*-gyűrűk is, viszont a p-hez relatív prím nevezőjű (irreducibilis alakú) racionális számok gyűrűje a természetes p-adikus topológiában nem komplett és nem is *SBI*-gyűrű. Az *SBI*-gyűrűkben, így speciálisan a bikompakt, teljesen nemösszefüggő gyűrűkben is érvényesek bizonyos struktúra-tételek, az idempotensek konstruálhatósága alapján. A nevezett egységelemes gyűrűk ugyanis teljesen primer gyűrűk feletti teljes mátrixgyűrűknek a direkt összegei, ahol a teljesen primer gyűrűn olyan egységelemes gyűrű értendő, amelynek a radikálja szerint vett faktorgyűrű ferdetest. Kaplansky [113] felsorol egy olyan topologikus axióma-rendszert is, amelyen belül egyidejűleg közös mederben tárgyalható a jobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűknek és a lokálisan bikompakt gyűrűknek az analóg elmélete. Kaplansky [112] és [113] dolgozatai egyébként még sok más érdekes eredményt tartalmaznak és egyszersmind jó előkészületet jelentenek e szakterület általános tanulmányozásához is.

A lokálisan bikompakt, teljesen nemösszefüggő gyűrűk esetében a nulla teljes környezetrendszere ideálok helyett általában csak részgyűrűkből választható meg. Ha ugyanis U egy bikompakt, nyílt alcsoport, akkor van olyan V nyílt alcsoport, hogy $V \subseteqq U$ és $VU \subseteqq U$. Ekkor $W = V + V^2 + V^3 + \ldots$ nyílt, bikompakt részgyűrű A-ban. Továbbá zérusosztómentes lokálisan bikompakt gyűrű Kaplansky [112] szerint vagy összefüggő vagy teljesen nemösszefüggő, és Jacobson—Taussky [95] szerint a nulla C komponense vagy 0, vagy a valós testet tartalmazó ferdetest. Ezt az utóbbi tényt felhasználja [112] bizonyítása is. A zérusosztómentes bikompakt gyűrűk vagy radikálgyűrűk, vagy teljesen primér gyűrűk. Továbbá zérusosztómentes, és a második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő lokálisan bikompakt gyűrűben van a 0-nak topologikusan nilpotens elemekből álló környezete. Megadhatók elég enyhe elegendő feltételek, hogy egy lokálisan bikompakt gyűrű Q-gyűrű legyen, és a radikál zárt legyen.

Zelinsky [249] ún. lineáris topológiát, vagy pedig van Dantzig elnevezésével b_v-adikus topológiát vizsgált gyűrűkben: ez olyan topológia, amelyben 0 környezetei zárt jobbideálok. [249] megtárgyalására még visszatérünk. Zelinsky [251] megmutatta, hogy a [249]-ben tett megszámlálhatósági feltétele a bikompaktság feltételezésével mellőzhető. Leptin [146] a lineárisan topológizált bikompakt gyűrűket vizsgálta, és bebizonyította, hogy a gyűrű ilyen topológiája gyengíthető egy egyetlen, leggyengébb lineárisan bikompakt topológiává a gyűrűn, miközben a zárt jobbideálok halmaza nem változik meg. Vizsgálta a nyílt jobbideált tartalmazó jobbideálokra nézve minimum feltételű gyűrűket is. Továbbá legyen A féligegyszerű, és a maximális jobbideálok alkossanak 0-nál egy szubbázist a topológiához. Ekkor A komplett lezárása szintén féligegyszerű és lineárisan bikompaktul to-

pológizált. Vizsgálta Leptin általában a lineárisan bikompakt operátormodulusokat és ezek direkt felbontásait is. Leptin a [146] dolgozat második folytatásában pedig vizsgálta a diszkrét, jobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűk inverz limeszeit (lásd pl. Eilenberg—Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton, 1952, Chapter VIII). Leptin tanulmányozta [146]-ban a Loewy-sorozatok hosszát és a szereplő gyűrűk mátrixelőállításait és direkt felbontásait.

FLEISCHER [60] a lineárisan topologizált operátormodulusok körében tárgyal dualitási kérdéseket. ISEKI [91] megmutatta, hogy ha a teljesen nemösszefüggő A-ban 0 minden környezete tartalmaz egy nyílt bikompakt ideált, akkor A véges A_α gyűrűk inverz limesze. Továbbá ekkor $x \in A$ pontosan akkor kvázireguláris, ha X képe mindegyik A_α-ban kvázireguláris. A pontosan akkor egységelemes, ha mindegyik A_α is egységelemes, és X-nek pontosan akkor van inverze, ha X minden vetületének van inverze.

Ugyancsak lineárisan topologizált bikompakt gyűrűket tárgyal Ballier [21]. Különféle eredményeket ad meg a radikálról, és igazolja, hogy a lineárisan bikompakt gyűrű a féligegyszerű esetben véges rangú egyszerű algebrák komplett direkt összege. Felteszi azt is, hogy létezik elegendő sok folytonos homomorfizmus az algebrákról az alaptestbe, és ekkor a Banach-algebrákról és lokálisan konvex algebrákról szóló bizonyos tételekhez analóg igen általános eredményekhez jut. WARNER [236] a lokális gyűrűk szempontjából tárgyalja a Noether-féle bikompakt gyűrűket. Közben vizsgál lokális gyűrű feletti többváltozós formális hatványsorokból álló gyűrűket is.

Warner [235] dolgozata olyan jellegű kérdéseket vizsgál, hogy egy gyűrűnek mikor van legalább egy, vagy legfeljebb egy olyan bikompakt topológiája, amely az algebrai struktúrával összeegyeztethető (azaz topologikus gyűrűt eredményez). Különösen figyelemre méltó Warner [237] új dolgozata. Legyen A bikompakt gyűrű és J az A radikálja. A összes ideálja pontosan akkor zárt, ha A-ban teljesül a kétoldali ideálok maximum feltétele és minden főideál zárt. Ekkor A topológiája J-adikus, azaz 0 minden U nyílt környezetéhez van olyan n, hogy $J^n \subseteq U$. Továbbá ekkor A/J véges és A-ban csak véges sok reguláris (moduláris) maximális ideál, jobbideál, balideál van. Egy egységelemes, topologikus A gyűrűre nézve, amelynek radikálja J, ekvivalens az alábbi négy feltétel:

1. A bikompakt és minden jobbideál zárt;
2. A bikompakt és jobbideáljaira teljesül a maximum feltétel;
3. A bikompakt és zárt jobbideálokra nézve maximum feltételű;
4. A a jobbideálokra maximum feltételű, A/J véges, A topológiája J-adikus, amelyben A komplett topologikus gyűrű.

Továbbá egy bikompakt gyűrűben bármely nemzérus ideál pontosan akkor nyílt, ha minden ideál zárt és minden nemzéró valódi prímideál reguláris maximális ideál. (Tehát ekkor a Baer-féle alsó nilradikál és a Brown—McCoy-féle radikál, valamint a köztük levő láncban valamennyi más radikál egymással egybeesik.) Warner [237]

szerint egy bikompakt A gyűrűben bármely nemzéró jobbideál pontosan akkor nyílt, ha A zérusosztómentes, és ha bármely nemzéró jobbideál tartalmaz egy nemzéró ideált, és ha teljesül 1. vagy 2.:

1. A a jobbideálokra maximum feltételű, A/J véges test és J az A egyetlen nemzéró valódi prímideálja;

2. A a jobbideálokra maximum feltételű radikálgyűrű és A valódi prímideálok nélküli gyűrű.

WARNER megállapított még hosszasabban részletezhető kritériumokat arra, hogy egy nemdiszkrét topologikus gyűrű nyílt részgyűrűként ferdetestbe beágyazható legyen; ezeket a terjedelem miatt nem részletezzük [237].

NUMAKURA [178] cikke első közleményében ASANO [13] egy eredményének a bikompakt topologikus gyűrűkre való átvitele található, és azonkívül a kommutativitást is gyengíti ASANOhoz képest. NUMAKURA eredménye arra vonatkozik, hogy a véges főideálgyűrűkön kívül még milyen topológikus gyűrűk (végtelen) direkt összegére bomlik egy olyan A nemkommutatív topologikus gyűrű, amelyben az egyoldali ideálok egymással felcserélhetők és A nyílt maximális M ideálja és M^2 közt nincs egyoldali ideál. NUMAKURA a második közleményben a primér és féligprimér, egységelemes bikompakt gyűrűket vizsgálja. (Félig primer gyűrűben modulo a radikál teljesül a jobbideálok minimum feltétele.) Egy A bikompakt egységelemes gyűrű pontosan akkor lesz bikompakt primér gyűrűknek a komplett direktösszege, ha bármely két maximális nyílt prímideál pontosan akkor egymással felcserélhető, ha minden olyan ideál egységelemes, amely a négyzetének a topologikus lezártjával egyenlő. Ha pedig A teljesen primér bikompakt gyűrű, és ha nincs egyoldali ideál a J radikál és J^2 közt, akkor A minden ideálja J egy hatványa. Az utóbbi esetben J főideál. Egy primér bikompakt gyűrűben J egyébként pontosan akkor főideál, ha minden jobbideál főjobbideál, minden balideál pedig főbalideál.

Legyen A topologikus gyűrű, J a Jacobson-radikál. A-ban akkor teljesül egy Wedderburn-felbontás, ha van olyan S zárt részgyűrű, hogy $A^+ = I \oplus S$. Mármost Yen [241] igazolta azt, hogy ha A lineárisan bikompakt algebra egy K test felett és ha vagy *a)* A kommutatív és A/M az A minden M zárt maximális ideálja mellett szeparáltan generált K felett, vagy ha *b)* A/M minden M zárt maximális ideállal K feletti teljes mátrix-algebra; akkor érvényes A-ban egy Wedderburn-féle felbontás. Jans [100] vizsgálta a Wedderburn-féle felbontást akkor, ha A teljesen nemösszefüggő bikompakt gyűrű, amelyben a J radikál nyílt. Az $A^+ = J \oplus S$ felbontásban bármely két S' és S'' Wedderburn faktor szükségképpen izomorf. Ekkor az alábbi három feltétel egymással ekvivalens:

1. A-ban teljesül a Wedderburn-felbontás;

2. J-nek van A-ban komplementer alcsoportja;

3. ha $\bar{e}$ az A/J egységeleme, akkor van olyan $e \in A$ hogy $e \in \bar{e}$ és az e és $\bar{e}$ elemek additív rendjei egymással egyenlők.

Ha A egységelemes is, A-nak pontosan akkor van Wedderburn-féle felbontása, ha A véges testek feletti véges sok algebrának a gyűrűelméleti direkt összege. — Ha J nyílt, akkor J transzfinit hatványai

A-ban 0 környezetbázisául vehetők. Van olyan F szabad bikompakt gyűrű, amelynek homomorf képe minden olyan A gyűrű, amelyre a J radikállal 0-ban teljesül egy Wedderburn-felbontás és J is nyílt A-ban. Ezeknek az eredményeknek a kiterjesztése található meg Numakura [177] dolgozatában, amelynek a részletezésére már nem térünk ki.

5. §. Vegyes kérdések topologikus gyűrűkre vonatkozólag

Isaku Ikushima [88] még 1950-ben átvitte a diszkrét gyűrűkben fontos szerepet játszó Brown—McCoy-féle radikálnak a fogalmát és vizsgálatát az egységelemes topologikus gyűrűkre. Nevezzük ugyanis az A egységelemes topologikus gyűrűnek egy x elemét G-elemnek, ha az x elemmel generált (x) (kétoldali) főideál maga A. Az A gyűrűt pedig G-gyűrűnek nevezzük, ha létezik az 1 egységelemnek A-ban olyan nyílt környezete, amely csupa G-elemből áll. Mármost G-gyűrűben az összes G-elem halmaza nyílt és A-nak a Brown—McCoy-féle radikálja pedig zárt. Vizsgálta Ikushima [88] a korlátos G-gyűrűket is.

Ugyanezek az eredmények, ill. ezek egy része megtalálható még K. Iseki [89], [90] dolgozataiban (1952, 1953), valamint Andrunákievics [6] még későbbi dolgozatában is, aki megjegyezte azonban egy lábjegyzetben, hogy csak utólag értesült Iseki eredményeiről.

Érdekes eredményeket ért el Maharadze [153], [154]. Megjegyzendő ugyanis, hogy Szele [222] eredménye szerint egy diszkrét, nilpotens gyűrűben a kétoldali ideálok minimum-feltételéből folyik az additív alcsoportok minimum feltétele. Mármost [153]-ban ennek egy topologikus megfelelője szerepel. Álljon az A topologikus gyűrűben 0 környezetbázisa additív alcsoportokból, és legyen A topologikusan nilpotens abban a módosított értelemben, hogy 0 minden A_α környezetéhez van olyan n kitevő, hogy A^n-nek a lezártjára $A^n \subseteq A_\alpha$ érvényes. A minimum-feltételt is módosítva definiálja [153]. Az A gyűrűben az alcsoportokra akkor teljesül a minimum-feltétel, ha 0 minden A_α (alcsoport-)környezetéhez és minden $H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq \ldots$ fogyó alcsoportlánchoz létezik egy olyan n index, hogy $H_n \subseteq A_\alpha$. (Itt n függ a lánctól és α-tól.) Mármost [153] indukcióval igazolja azt, hogy az olyan topologikus nilpotens gyűrűkben, amelyekben 0 környezetbázisa additív alcsoportokból áll, a kétoldali ideáloknak és az additív alcsoportoknak a minimum-feltételei egymással ekvivalensek.

Vizsgálta [153] a lokálisan bikompakt, teljesen nem összefüggő topologikusan nilpotens és a kétoldali ideálokra vonatkozólag minimum-feltételű gyűrűknek a nyílt bikompakt részgyűrűit és a mondott gyűrűknek egy leírását, miközben felhasználta Vilenkin egy eredményét (A topologikus csoportok elmélete, Uszpehi Mat. Nauk 5 (38) (1950) 19—74.)

Továbbá Maharadze [154] a diszkrét gyűrűk Levitzki-radikáljának a topologikus megfelelőjét is tárgyalta. (Ez a diszkrét esetben a lokálisan nilpotens ideálok összege; és egy gyűrű lokálisan nilpotens, ha minden végesen generált részgyűrűje nilpotens.) Mármost [154] három feltételt tárgyal:

I. 0-nak van zárt jobbideálokból álló $\{A_\alpha\}$ környezetbázisa az A topologikus gyűrűben;

II. 0-nak van A-ban olyan A_α környezete, hogy létezik minden A_β környezethez olyan A_γ környezet, hogy $A_\alpha \cdot A_\gamma \subseteq A_\beta$ teljesül;

III. 0-nak létezik A-ban egy lokálisan nilpotens környezete.

Itt a nilpotencia természetesen a fenti [153]-beli topologikus nilpotenciát jelenti, a lezárási műveletet felhasználva, továbbá a B részhalmaz A-ban lokálisan nilpotens, ha B bármely végesen generált részgyűrűjének a lezártja topologikusan nilpotens. Mármost legyen $N(A)$ az összes, A-beli, lokálisan nilpotens ideál összege. [154] az alábbi állításokat mondja ki:

1. Ha teljesül I. és II., akkor $N(A)$ lokálisan nilpotens.
2. Ha teljesül I., II és III, akkor $N(A)$ tartalmazza az összes lokálisan nilpotens zárt jobbideált és balideált.
3. Ha teljesül I., II. és III., akkor $N \cdot (A/N(A)) = 0$.
4. Ha teljesül III., akkor $N(A)$ nyílt, tehát zárt is. Egyébként ugyanis $N(A)$ nem feltétlenül zárt ideál A-ban.

EHRLICH [52] vizsgálta, hogy két egységelemes, topologikus, Neumann-reguláris gyűrűben a multiplikatív invertálható elemek G_1 és G_2 csoportja mikor lesz egymással izomorf.

Jennings [101] egy G végesen generált, torziómentes, nilpotens csoportnak egy nullkarakterisztikájú K test feletti Γ csoportgyűrűjében vezetett be topológiát. Legyen ugyanis Δ az összes $g-1$ alakú elemmel felfeszített ideál Γ-ban, ahol g befutja G elemeit. Igazolható, hogy Δ összes természetes kitevőjű hatványának a metszete nulla, így a $\Delta^n (\neq 0)$ ideálok, mint a 0 környezetbázisa, egy topológiát értelmeznek Γ-ban, amelyben Γ általában nem komplett. Jennings vette a Γ topologikus gyűrű Γ^* komplett lezárását. Ebben értelmezhető $\log(1+x)$ tehát $g \in G$ esetén $\log g$ is. A további eredményei a Lie-algebrákhoz kapcsolódnak.

Szele [223] a tetszőleges G (additív) Abel-csoportok endomorfizmus-gyűrűjében vezetett be egy sajátos topológiát. Bármely A egységelemes gyűrű előáll úgy, mint az A^+ additív csoport $E(A^+)$ endomorfizmus gyűrűjében a Θ balszorzások centralizátorával izomorf gyűrű. Ez az A gyűrű kanonikus előállítása. Ha mármost $P = E_\Theta(A^+)$ az A gyűrű kanonikus előállítása $(1 \in A)$ és B egy tetszőleges (esetleg üres)

részhalmaz A-ban, akkor B-nek a $\overline{B}$ lezártja az összes olyan $\gamma \in P$ halmaza, hogy $\gamma \in B$ és az összes olyan γ elem halmaza is $\overline{B}$ része, hogy bármely $x \in A^+$ elemhez létezik végtelen sok olyan $\beta_\mu \in B$ elem, hogy $x\gamma = x\beta_\mu$ érvényes. Igazolható, hogy a lezárási operáció axiómái valóban teljesülnek, és így P egy T_1-tér lesz. Legyen most $\Phi = \{\varphi_\nu\}$ $(\varphi_\nu \in P)$ egy elemrendszer. Ezt 0-rendszernek nevezte Szele, ha a 0 elemet nem tartalmazó zárt C részhalmazokra $\varphi_\nu \in C$ csak véges sok ν index mellett teljesül. Igazolható, hogy Φ pontosan akkor 0-rendszer, ha bármely $x \in A^+$ esetén $x\varphi_\nu = 0$ csak véges sok ν indexre teljesül. Ha $\Phi' = \{\varphi'_\nu\}$ egy tetszőleges elemrendszer, és φ' olyan elem P-ben, hogy $\Phi'' = \{\varphi'_\nu - \varphi\}$ már 0-rendszer, akkor azt mondjuk, hogy Φ konvergál a φ elemhez, azaz $\varphi' = \lim \varphi'_\nu$. Minthogy P egy T_1-tér, a φ' limesz egyértelműen van meghatározva. Szokásosan értelmezve P-ben a konvergens elemrendszerek $\Phi_1 + \Phi_2$ összegét és Φ_1, Φ_2 szorzatát, igazolható, hogy P topologikus gyűrű lesz.

Egy $\Phi = \{\varphi_\nu\}$ $(\nu \in N)$ elemrendszer P-ben Cauchy-rendszer, ha minden $x \in A^+$ elemhez létezik olyan véges N_x részhalmaz N-ben, hogy $x(\varphi_{\nu_1} - \varphi_{\nu_2}) = 0$ teljesül minden $\nu_1, \nu_2 \in N \setminus N_x$ esetén. Igazolható, hogy P komplett, azaz minden Cauchy-rendszernek van P-ben határértéke. P-ben a $\Phi = \{\varphi_\nu\}$ elemrendszer „összegezhető", éspedig összege φ ha minden $x \in A^+$ elemhez létezik az N indexhalmaznak olyan N_x véges részhalmaza, hogy bármely olyan V véges részhalmazra, amely tartalmazza az N_x halmazt, teljesül $x(\varphi - \sum_{\nu \in F} \varphi_\nu) = 0$. SZELE azt is megmutatta, hogy az „összegezhető" elemrendszerek P-ben pontosan a 0-rendszerek.

Gacsályi Sándor [63] tovább folytatta ennek a P topologikus gyűrűnek a Szele-féle vizsgálatát. Gacsályi definiálta egy kétindexes $\{\varphi_{\mu\nu}\}$ elemrenszernek a φ kettős határértékét, továbbá az iterált határértékeit, ilyen utóbbi kétféle is lehet. Ha a kettős határérték létezik, akkor az iterált határértékek is léteznek, és ez a három elem P-ben egymással egybeesik. Vizsgálta annak szükséges és elegendő feltételét is, hogy a két iterált limesz a P gyűrűben létezzék és egybeessék. Gacsályi definiálta és vizsgálta a kétindexes $\{\varphi_{\mu\nu}\}$ elemrendszer egyenletes konvergenciáját is.

MAURER GYULA [156] az Abel-csoportok endomorfizmus-gyűrűjében ugyancsak bevezetett egy topológiát, amely általában különbözik a SZELE-féle topológizálástól. MAURER lényegében azt a topológiát viszi át gyűrűkre, amelyet korábban egy végtelen halmaz permutációcsoportjában vezetett be.

Steinfeld Ottó [219] a Cauchy-féle sorozatokkal kapcsolatban igazolja Kalmár László [106] egy sejtését. Legyen ugyanis K az R valós számtestének egy részteste és legyen B az összes olyan korlátos sorozat gyűrűje, amelyek elemei K-ból valók, továbbá legyen C a B-ben az összes Cauchy-sorozat részgyűrűje és N pedig a B-ben azoknak a sorozatoknak a halmazából álló ideál, amelyek nullához konvergálnak. Kalmár

[106] sejtése, amelyet Steinfeld [219] bebizonyított, az volt, hogy ha D olyan gyűrű, hogy $C \subseteq D \subseteq B$ és $C \neq D$, akkor N nem maximális ideál D-ben.

M. Strauss (Wiss. Zeitschrift, Humboldt Univ. 5 (1955/56) 93–97) vizsgálta a valós testben az

$$(E) \qquad a \dot{+} b = \frac{a+b}{1+ab}; \qquad (G) \qquad a \hat{+} b = a+b-ab$$

binér műveleteket, és megmutatta, hogy nincs olyan g invertálható függvény, hogy $(G)g=E$, azaz nincs olyan invertálható g függvény, amely az (E)-be áttranszformálná (E)-t. Mármost Aczél János [2] megmutatta, hogy létezik olyan g invertálható függvény, amelyre $g^{-1}(G)g=(E)$ teljesül. Az ilyen függvényekre szükségképpen érvényes az alábbi

$$g\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = g(a)+g(b)-g(a)\cdot g(b)$$

függvényegyenlet, amelynek összes megoldásai [2] szerint

$$g(a) = \frac{2a}{1+a} \quad \text{és} \quad g(a) = 1-\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^k,$$

ahol $k \neq 0$.

Kaplansky [118] topologikus módszerekkel igazolta azt, hogy ha egy diszkrét algebra polinom-azonosságnak tesz eleget, és hogy ha minden elem végesrangú részalgebrát generál, akkor bármely véges elemrendszer is véges rangú részalgebrát generál tetszőleges alaptest felett. Megjegyzendő, hogy ez a Kuros-féle problémának a részleges megoldása, amelyet Kuros ama feltétel nélkül kérdezett, hogy az algebra polinom-azonosságnak eleget tesz. Minthogy kommutatív algebrákban $x_1x_2 - x_2x_1 = 0$, vagy n-nilpotenciafokú algebrákban $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = 0$ azonosan teljesül ezért ezek az algebrák polinom-azonosságnak tesznek eleget, és rájuk nézve igenlő a Kuros-probléma megoldása.

Megjegyzendő, hogy Kaplanskynak ezt az eredményét később topológiai módszerek nélkül, tisztán algebrailag Amitsur és Levitzki is igazolta.

Arens és Kaplansky [12] vizsgálják többek közt azoknak a folytonos függvényeknek az A gyűrűjét, amelyeknek az értelmezési tartománya egy X lokálisan bikompakt, teljesen nemösszefüggő halmaz, értékkészletük pedig egy egységelemes, diszkrét, egyszerű R gyűrű, és egy bikompakt halmazon kívül nulla e függvények értéke. Egy ilyen A gyűrű egységelemes és bireguláris, azaz bármely kétoldali főideálnak van kétoldali egységeleme, és benne a főideálok komplett, komplementumos, moduláris hálót alkotnak. Továbbá az A bármely M maximális ideáljával $A/M \cong R$ kanonikusan fennáll. Eme [12] cikk anyaga bizonyos részeinek nem-asszociatív általánosításait Behrens [26] adta meg, miközben a szereplő függvények értékei pl. a Cayley-féle számok.

Kaplansky [111] a topologikus gyűrűk közül az ún. „duális" gyűrűket vizsgálja. Legyen I az A topologikus gyűrűben egy tetszőleges részhalmaz, és legyen $L(I)$ az I összes balannulátorának a halmaza. Ekkor $L(I)$ az A-nak zárt balideálja. Hasonlóan, az $R(I)$ jobbannulátor pedig zárt jobbideál lesz A-ban. Az A topologikus gyűrűt Kaplansky duálisnak nevezi, ha $L(R(I))=I$ illetve $R(L(I))=I$ teljesül A-ban minden I zárt balideálra és zárt jobbideálra.

Ha A duális gyűrű, és benne a zárt reguláris (moduláris) maximális jobbideálok metszete nulla (amely a féligegyszerűségnél erősebb feltétel), akkor A-ban létezik egy olyan mindenütt sűrű részgyűrű, amely egyszerű duális gyűrűknek a (végtelen) direkt összege. E felbontásban mindenik egyszerű duális gyűrűben van egy olyan mindenütt sűrű részgyűrű, amelyek ferdetestek feletti olyan végtelen mátrixokból álló gyűrűk, hogy mindenik mátrixban csak véges sok koordináta nem nulla. Bármely bikompakt féligegyszerű gyűrű duális gyűrű. Ugyancsak duális gyűrű bármely olyan primitív gyűrű, amelyben vannak minimális jobbideálok, és amely úgy van topologizálva, hoogy a nulla környezetei a „socle" elemei balannulátorainak és jobbannulátorainak a véges metszetei. A duális Banach-algebrák pedig szükségképpen Ambrose-féle H^*-algebrák; ezek olyan algebrák, melyek egyszersmind Hilbert-terek, és éppen az utóbbi belső szorzata szolgáltatja az előbbihez a normát, továbbá van egy konjugált-lineáris $*$ involució, amelyre az alábbi axiómák teljesülnek:

$$(xy, z)=(y, x^* z),\ (yz, z)=(y, zx^*),$$

ahol (a, b) a Hilbert-tér belső szorzatának a jele. (Gyakran felteszik azt is, hogy ez az algebra balannullátormentes.) Kaplansky azt is újra megmutatja, hogy bármely G bikompakt csoporton a folytonos valós függvények C algebrája, valamint G-n a megfelelő L_2 és L_p algebrák szintén duális, mégpedig féligegyszerű gyűrűk, és vizsgálja eme algebrákban az ideálokat is.

Megjegyezzük azt is, hogy bármely A diszkrét gyűrűhöz hozzárendelhető egy T topologikus tér az A gyűrű prímideáljainak a halmazán. Ezáltal A persze nem válik topologikus gyűrűvé, viszont figyelemreméltó kapcsolat lehet az A gyűrű algebrai és a T tér topológiai szerkezete közt. Legyen ugyanis T az összes A-beli prímideál halmaza. Legyen továbbá $S \subseteq T$. Ekkor S-nek az $\overline{S}$ lezártját úgy definiáljuk, mint az S-hez tartozó prímideálok metszetét tartalmazó összes prímideál halmazát. Az üres metszeten maga A értendő. Ha P_1 és P_2 két különböző prímideál, akkor $\overline{\{P_1\}} \neq \overline{\{P_2\}}$, tehát T egy T_0-tér. Viszont T nem lesz általában T_1-tér, mert egy prímideál lehet valódi része egy másik prímideálnak. Hasonló konstrukció végezhető el általánosabban bizonyos primideálok U halmazán is, és ekkor $S(\subseteq U)$-nak az $\overline{S}$ lezártjánál is csak az U-beli primideálokat használjuk fel a metszetképzéshez. Minden primitív ideál prímideál, és Jacobson a primitív ideálok halmazán definiált ilyen topológiát.

Ezt a teret az A gyűrű Stone-terének, vagy struktúra-terének nevezik. Ez részletesen tárgyalva van JACOBSON [96] könyve 9. fejezetében. Egységelemes gyűrű struktúra-tere bikompakt. Bireguláris gyűrű struktúra-tere lokálisan bikompakt és tel-

jesen nemösszefüggő. Hasonló eredményeket illetően megemlítendő még Gillman [74], KOHL [135] és a nemasszociatív gyűrűk esetében háromfajta Stone-térre: BEHRENS [25] dolgozata.

Zelinsky [249] olyan A topologikus gyűrűket vizsgál, amelyek komplettek, szeparáltak és amelyekben 0 teljes környezetrendszere A_α nyílt kétoldali ideálokból áll. (Az utóbbi feltétel szerint A egy b_v-adikus, tehát lineárisan topologizált gyűrű.) Feltesszük, hogy $A_\alpha \subseteq A_\beta$ esetén A/A_α-nak mindig a természetes homomorfizmusát tekintjük A/A_β-ra. Ezek a faktorgyűrűk diszkrétek, és Zelinsky az A gyűrűt mint az A/A_α gyűrűk projektív limeszét vizsgálja (Eilenberg—Steenrod, Princeton, 1952, vagy pedig Kowalsky [139], 7. fejezet). Ha A kommutatív és mindenik A/A_α minimum-feltételű gyűrű, akkor Zelinsky megállapítja, hogy A-nak milyen topologikus felbomlása van egy radikálgyűrűre és primér gyűrűkre.

6. §. A normált algebrák bizonyos klasszikus kérdéseiről

Minthogy terv szerint a Banach-algebrákról egy részletesebb ismertetés fog e lapokban megjelenni, ezért most csak a régebbi, klaszszikusabb irodalmat, és ebből is csak a struktúra-tételekkel kapcsolatos eredményeket tekintjük át. Megjegyezzük, hogy a jelen ismertetés 3. §-ában már szóltunk az olyan Banach-algebrákról, amelyek ferdetestek, vagy pedig Neumann-reguláris gyűrűk.

Gelfand [64] alapvető eredménye megállapítja, hogy egy Banach-algebra radikálja éppen a nilideálok összege, ahol nilideál olyan ideált jelent, amelynek minden eleme topologikus nilpotens. (Lásd még Jacobson, The radival and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. Jour, Math. 67/1945 (300—320). Ez a tény azon az általánosabb tényen múlik, hogy egy A nem feltétlenül egységelemes, komplex Banach-algebrában egy $x \in A$ elemre teljesül:

$$\text{supremum} \,|\, \text{spektrum}\,(x) \,| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

ahol az x spektruma úgy értendő, mint azoknak a λ komplex számoknak a halmaza, amelyekre nincs a $(-\lambda^{-1}x)$ elemnek kváziinverze. Ennek az általánosabb ténynek az igazolása elvégezhető $(-\lambda^{-1}x)$ kváziinverzének λ szerinti hatványsorba való fejtésével, és a konvergencia-sugár megbecslésével. A valós test feletti Banach-algebrák radikálja is hasonlóan viselkedik.

Miként a radikálok topologikus nilideál-jellege tekintetében a Banach-algebrák és a bizonyos végesség jellegű gyűrűk (diszkrét Artin-féle gyűrűk, és diszkrét, főjobbideálokra minimum feltételű gyűrűk („MHR-gyűrűk"), másfelől pedig a bi-

kompakt topologikus gyűrűk) közt bizonyos analógia áll fenn, úgy a féligegyszerű Banach-algebrák bizonyos osztályainál is várható valamilyen explicitebb struktúra-tétel, amint ez a helyzet a féligegyszerű, végességi-feltételt kielégítő legtöbb gyűrűnél is. (Egy gyűrű valamilyen végességi feltétele olyan feltétel, amely megvan minden véges gyűrűnek, de nincs meg legalább egy végtelen gyűrűnek.) Különösen akkor várhatók struktúra-tételek a féligegyszerű Banach-algebrákra, ha az $x \to ax$ és $x \to xa$ leképezések bármely a rögzített elemmel teljesen folytonosak. Ilyen algebrák szerepelnek FREUNDLICH [61] és KAPLANSKY [115] dolgozatában.

Gelfand és Najmark [68] igen szép és hatékony struktúra-tételhez jutott a kommutatív, egységelemes, féligegyszerű, komplex test feletti Banach-algebrákra vonatkozólag. Legyen egy ilyen A algebrában adva még egy $*$ involució is, amely konjugált lineáris és amelyre $\|x \cdot x^*\| = \|x\| \, \|x^*\|$. Akkor a struktúra-tétel szerint A izomorf egy bikompakt Hausdorff-téren (nevezetesen lényegében A összes maximális ideáljának a halmazán) folytonos összes komplex-értékű függvénynek az algebrájával, ahol a norma az abszolút érték szuprémuma, és a $*$ involució pedig azonosítható a konjugált komplex értékének a képzésével.

ARENS [8] megjegyzéseket fűzött GELFAND és NAJMARK bizonyításához, és ARENS [11] vizsgálta az egységelem nélküli esetet is. A valós függvényekből álló féligegyszerű algebrák hasonló jellemzései ARENS [11] és SEGAL [215] dolgozatában szerepelnek, továbbá ARENS és KAPLANSKY [12] dolgozatában a valós és komplex eset tárgyalása egyesítve szerepel. A folytonos függvények gyűrűi ilyen jellemzéseinek szép alkalmazásai vannak. (Egy teljesen reguláris topologikus térnek zárt részhalmazként való Stone-Cech-féle beágyazása egy bikompakt térbe; vagy a Hilbert-tér korlátos, normális operátorainak spektrál-tétele; vagy pedig az a Stone [220] és Eidelheit [53]-féle tétel, amely szerint egy bikompakt Hausdorff-téren folytonos összes függvény algebrájának egy zárt részalgebrája önmaga is egy alkalmas bikompakt Hausdorff-téren folytonos összes függvénynek az algebrája. A szakirodalomban elég sok további ilyen jellegű eredmény szerepel.)

A nemkommutatív féligegyszerű, egységelemes Banach-algebrákról Gelfand és Najmark [68] megmutatta, hogy ha az A-beli $*$ involúcióra $\|x^*\| = \|x\|$ teljesül, és ha létezik az $1 + x \cdot x^*$ elemnek minden x elem mellett multiplikatív inverze, akkor az A Banach-algebra izomorf egy Hilbert-tér összes korlátos operátora Banach-algebrájának egy zárt, önadjungált részalgebrájával.

Ennek a fontos és elegáns struktúra-tételnek azonban sok alkalmazásnál az a hátránya, hogy ennek a zárt önadjungált részalgebrának a körülhatárolása nem eléggé határozott, tehát csak zárt beágyazás exisztenciája szerepel, de a beágyazás közelebbi módja nem.

Ambrose [4] vizsgálta a H^*-algebrákat. Miként már említettük (az 5. végén, Kaplansky [111] cikkével kapcsolatban), ezek olyan Hilbert-terek, amelyek Banach-algebrák is az (x, y) belső szorzatból származtatott normával, továbbá van bennük egy $*$ involúció, amelyre $(x, y, z) = (y, x^* z)$ és $(yx, z) = (y, zx^*)$ teljesül, és amely természetesen konjugált lineáris. Mármost Ambrose a féligegyszerűség helyett az A

algebra balannulátor-mentességét tételezte fel, és megállapította, hogy ekkor az A H^*-algebra egyszerű H^*-algebráknak a *Hilbert-térben értelmezett* direkt összege. Az egyszerű H^*-algebrák pedig az összes olyan komplex-koordinátájú végtelen $a=(a_{ij})$ mátrix gyűrűjével izomorfok, amelyekre $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < \infty$, továbbá a szorzás a mátrix-szorzás, valamint $a^* = (a'_{ji})$, tehát a transzponáltnak a konjugált komplexe, és

$$(a, b) = \alpha \cdot \Sigma\, a_{ij} b'_{ij}, \quad (\alpha \text{ szám}),$$

ahol x' jelenti x konjugáltját. Ennek az Ambrose-féle eredménynek meglepő alkalmazása van egy G bikompakt csoporton vett $L_2(G)$ algebrára, amelyből következik a Peter—Weyl-tétel [184] és a vele kapcsolatos tények. Legyen ugyanis G bikompakt topologikus csoport és A pedig a G-beli Haar-mértékre vonatkozólag négyzetesen integrálható komplex függvényeknek az algebrája, ahol a gyűrűszorzás az

$$(\Delta) \qquad (f \cdot g)(x) = \int f(y) g(y^{-1} \cdot x)\, dy$$

általánosított konvolúció révén van értelmezve és az $*$ involúció pedig az $f^*(x) = (f(x^{-1}))'$ képlet által, ahol z' a z komplex szám konjugáltját jelenti. Akkor igazolható, hogy ez az A algebra H^*-algebra. Megjegyzendő, hogy Koethe [133] a G csoporton korábban az A algebra helyett az összes folytonos függvény algebráját tanulmányozta. A Peter—Weyl-tétel abból folyik, hogy megmutatható az, hogy a G bikompakt csoport feletti L_2 (konvolúciós, involúciós) Banach-algebra egyszerű gyűrűkből álló komponensei mind végesdimenziójúak a komplex számtest felett, amely számolással vezethető le a feltételekből.

Legyen most G lokálisan bikompakt topologikus csoport, és A a G-beli Haar-mértékre vonatkozólag az L_1-algebra, vagyis az integrálható komplex függvények algebrája, ahol a Banach-algebra szorzása a (Δ) alatti konvolúció G-n. Segal [213] igazolta, hogy ez az L_1-algebra Jacobson-értelemben, sőt bizonyos esetekben erősebben még Brown—McCoy-értelemben is féligegyszerű, azaz benne a moduláris maximális kétoldali ideálok metszete nulla.

Ha egy Hilbert-tér korlátos önadjungált operátorának a spektruma csak a nulla, akkor maga az operátor is nulla. Ezért A hűen ábrázolható bizonyos $L_2(G)$-beli operátorokkal, és a Hilbert-tér korlátos operátorainak minden önadjungált részalgebrája féligegyszerű. Rajkov [193] más módon bizonyította be $L_1(G)$ féligegyszerűségét. $L_1(G)$ féligegyszerűségéből folyik, hogy létezik a G egy Banach-tér operátoraival való irreducibilis reprezentációnak a teljes rendszere. Ezeket a reprezentációkat Segal [213] B-reprezentációknak nevezte. Ha G bikompakt vagy kommutatív, akkor a B-reprezentációk véges-dimenziósok és ezért unitérok. Gelfand—Rajkov [70] és Segal [214] igazolták, hogy lokálisan bikompakt G csoport esetében is van irreducibilis unitér reprezentációknak egy teljes rendszere.

Legyen most G kommutatív, lokálisan bikompakt csoport. Ekkor $L_1(G)$ is kommutatív. Ekkor $L_1(G)$-nek minden I zárt valódi ideálja beágyazható egy moduláris (reguláris) maximális ideálba. Ez a beágyazhatóság szoros kapcsolatban áll egy abszolút konvergens trigonometrikus sor reciprokának az abszolút konvergenciájáról szóló N. Wiener-féle eredménnyel. Ha G nem diszkrét, akkor I beágyazásának vizsgálata megtalálható Godement [77] és Segal [213] dolgozatában.

Az I zárt ideál speciális megválasztásával az $L_1(G)/I$ faktorgyűrű radikáljának a vizsgálata parciális eredményeket adott WIENER és PITT „Tauber-típusú" tételeinek általánosításához, amelyek DITKIN [47] és SEGAL [213] dolgozatában vannak. VARSAVSKY is végzett ilyen jellegű általánosabb vizsgálatokat [229].

Ha G nemkommutatív, lokálisan bikompakt csoport, akkor az $L_2(G)$ Hilbert-tér nem feltétlenül lesz Banach-algebra, mert $L_2(G)$ nem zárt általában a konvolúciós szorzásra. Ehhez a problémakörhöz hasonló parciális eredményeket ért el Mautner [157] miközben a G csoportra további feltételt szabott ki.

Megjegyzendő még, hogy Milman [160] vizsgálta a topologikus gyűrűk normálhatóságának a feltételeit, továbbá Michael [159] pedig bizonyos, speciális topologikus algebrákra sok olyan eredményt általánosított, amelyek eredetileg csak a Banach-algebrákra vonatkozólag voltak bebizonyítva.

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ И КОЛЬЦАХ II.

Ф. Сас

ON TOPOLOGICAL ALGEBRAS AND RINGS II.

F. Szász

Egy számelméleti eloszlásprobléma

Írta:

GALAMBOS JÁNOS

I.

Tekintsük mod n a redukált maradék rendszer $(0, n)$-beli reprezentáns rendszerét, legyen ez

$$1 = a_{1,n} < a_{2,n} < \ldots < a_{\varphi(n),n} \tag{1}$$

Képezzük az

$$a_{k+1,n} - a_{k,n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varphi(n) - 1) \tag{2}$$

differenciákat. ERDŐS PÁL professzor „Megoldatlan problémák" című előadásán merült fel, hogy bizonyos típusú n-ekre a (2)-beli differenciáknak van-e határeloszlása? Az könnyen látható, hogy tetszőleges n-re ez a határeloszlás nem létezik, ugyanis prímekre

$$\frac{\sum_{a_{k+1,p} - a_{k,p} = 1} 1}{\varphi(p) - 1} = \frac{p-2}{p-2} = 1$$

s így a limesz is 1, s minden más differenciára a tört értéke 0. Ha pedig csak $n = 2^l$ alakú számokra szorítkozunk, úgy minden páratlan szám relatív prím lesz n-hez ,a párosak pedig nem, így

$$\frac{\sum_{a_{k+1,2^l} - a_{k,2^l} = 2} 1}{\varphi(2^l) - 1} = 1$$

és minden más differenciára a határérték 0.

RÉNYI ALFRÉD professzor vetette fel, hogy érdekes bizonyos értelemben szummálva vizsgálni a problémát. Pontosan; legyen

$$F(n,d)=\sum_{\substack{a_{k+1,n}-a_{k,n}=d \\ 0<k<\varphi(n)}} 1 \tag{3}$$

Kérdés, hogy a

$$\lim_{N=+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} F(n,d)}{\sum_{n=1}^{N} (\varphi(n)-1)} \tag{4}$$

létezik-e, s ha igen, akkor mi az értéke?

Vagy felhasználva, hogy

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} N^2 + o(N^2) \tag{5}$$

kérdés, hogy a

$$\lim_{N=+\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} F(n,d)$$

létezik-e, s ha igen, akkor mi az értéke?

Tetszőleges d-re megmutatom, hogy a limesz létezik, és megadom értékét.

II.

Az, hogy

$$a_{k+1,n} - a_{k,n} = d$$

másként azt jelenti, hogy egy alkalmas j természetes számra

$$(j,n) = (j+d,n) = 1 \text{ és ha } 0<r<d, \text{ akkor } (j+r,n)>1.$$

Ennek alapján felhasználva még azt a könnyen látható tényt, hogy a $(b_1,n)=(b_2,n)=\ldots=(b_s,n)=1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(b_1 b_2 \ldots b_s, n)=1$, a (3)-beli $F(n,d)$-re a szokásos szitálási módszerrel kapjuk, hogy

$$F(n,d) = \sum_{\substack{(j(j+d),n)=1 \\ 0<j<n-d}} 1 + \sum_{l=1}^{d-1} (-1)^l \sum_{\substack{(j(j+k_1)\ldots(j+k_l)(j+d)_1 n)=1 \\ 0<k_1<\ldots<k_l<d,\ 0<j<n=d}} 1$$

Így

$$\sum_{n=1}^{N} F(n,d) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{(j(j+d),n)=1 \\ 0<j<n-d}} 1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{l=1}^{d-1} (-1)^l \sum_{\substack{(j(j+k_1)\ldots(j+k_l)(j+d),n)=1 \\ 0<k_1<\ldots<k_l<d,\ 0<j<n-d}} 1$$

s itt az összegezés sorrendjét felcserélve

$$\sum_{n=1}^{N} F(n,d) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{(j(j+d),\,n)=1 \\ j+d<n\leqq N}} 1 + \sum_{l=1}^{d-1} (-1)^l \sum_{j=1}^{N-d} \sum_{\substack{(j(j+k_1)\ldots(j+k_l)(j+d),\,n)=1 \\ 0<k_1<\ldots<k_l<d,\; j+d<n\leqq N}} 1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{N-d} \sum_{\substack{(j(j+d),\,n)=1 \\ n\leqq N}} 1 - \sum_{j=1}^{N-d} \sum_{\substack{(j(j+d),\,n)=1 \\ n\leqq j+d}} 1 +$$

(6)

$$+ \sum_{l=1}^{d-1} (-1)^l \sum_{j=1}^{N-d} \sum_{\substack{(j(j+k_1)\ldots(j=k_l)(j+d),\,n)=1 \\ 0<k_1<\ldots<k_l<d,\; n\leqq N}} 1 -$$

$$- \sum_{l=1}^{d-1} (-1)^l \sum_{j=1}^{N-d} \sum_{\substack{(j(j+k_1)\ldots(j+k_l)(j+d),\,n)=1 \\ 0<k_1<\ldots<k_l<d,\; n\leqq j+d}} 1$$

Legyen

(7)
$$\alpha^{(l)} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) \qquad \alpha_i \geqq 0 \text{ egész szám}$$
$$f(x, \alpha^{(l)}) = (x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_l)$$

(8)
$$G(N, \alpha^{(l)}, d) = \sum_{j=1}^{N-d} \sum_{\substack{(f(j,\alpha^{(l)}),\,n)=1 \\ n\leqq N}} 1 \quad (d \geqq 0 \text{ rögzített egész})$$

(9)
$$H(N,, \alpha^{(l)}, d) = \sum_{j=1}^{N-d} \sum_{\substack{(f(j,\alpha^{(l)}),\,n)=1 \\ n\leqq j+d}} 1 \quad (d \geqq 0 \text{ rögzített egész})$$

(6), (7), (8) és (9)-ből

(10)
$$\sum_{n=1}^{N} F(n,d) = G\big(N, \alpha^{(2)} = (0,d), d\big) - H\big(N, \alpha^{(2)} = (0,d), d\big) +$$
$$+ \sum_{l=3}^{d+1} (-1)^l \sum_{0=\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_l=d} \big(G(N, \alpha^{(l)}, d) - H(N, \alpha^{(l)}, d)\big)$$

Nyilvánvalóan elég a G és H függvényeket vizsgálni.

A továbbiakban szükségünk lesz a következőkre:

1. Segédtétel: Jelölje $d(n)$ az n természetes szám osztóinak a számát, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, akkor

(11)
$$d(n) < c(\varepsilon) n^{\varepsilon}$$

ahol $c(\varepsilon) > 0$ ε-tól függő állandó. (l. [1] 218. old.)

2. Segédtétel:

(12)
$$\sum_{p\leqq N} \frac{1}{p} < c \log\log N$$

ahol $c > 0$ állandó. (l. [1] 226. old.)

3. Segédtétel: Ha $m_1, m_2, \ldots, m_k$ egész számok páronként relatív prímek, akkor az

$$x \equiv b_1 (\mathrm{mod}\, m_1),\quad x \equiv b_2 (\mathrm{mod}\, m_2),\ \ldots,\ x \equiv b_k (\mathrm{mod}\, m_k)\quad (b_i \text{ egész})$$

kongruencia rendszernek egy és csak egy megoldása van mod $m_1 m_2 \ldots m_k$ (l. [2] 44. old.)

$G(N, \alpha^{(l)}, d)$ vizsgálatára térünk.

Legyen $\mu(m)$ az ismert MOEBIUS féle függvény, azaz

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = 1 \\ (-1)^r, & \text{ha } m = p_1 p_2 \cdots p_r,\ p_i \neq p_j, \text{ ha } i \neq j \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \tag{13}$$

Nyilvánvalóan

$$\sum_{\substack{(f(j,\alpha^{(l)}),n)=1 \\ n \leqq N}} 1 - \sum_{m \mid f(j,\alpha^{(l)})} \mu(m) \left[\frac{N}{m}\right] = N \sum_{m \mid f(j,\alpha^{(l)})} \frac{\mu(m)}{m} + \tag{14}$$

$$+ \vartheta_{f(j,\alpha^{(l)})} \cdot d\left(f(j,\alpha^{(l)})\right), \quad |\vartheta_{f(j,\alpha^{(l)})}| \leqq 1$$

azaz

$$G(N, \alpha^{(l)}, d) = N \sum_{j=1}^{N-d} \sum_{m \mid f(j,\alpha^{(l)})} \frac{\mu(m)}{m} + 0\left(\sum_{j=1}^{N} d\left(f(j,\alpha^{(l)})\right)\right) =$$

$$= N \sum_{m=1}^{f(N-d,\alpha^{(l)})} \frac{\mu(m)}{m} \sum_{\substack{m \mid f(j,\alpha^{(l)}) \\ j \leqq N-d}} 1 + 0\left(\sum_{j=1}^{N} d\left(f(j,\alpha^{(l)})\right)\right) \tag{15}$$

A továbbiakban a $\mu(m)$ fellépése miatt szorítkozhatunk csupán négyzetmentes m-ekre.

Határozzuk meg a

$$\sum_{\substack{m \mid f(j,\alpha^{(l)}) \\ j \leqq N-\alpha}} 1 - \sum_{\substack{m \mid (j+\alpha_l) \\ j \leqq N-\alpha}} 1 \tag{16}$$

összeget.*

Vizsgáljuk, milyen felbontások vezetnek ekvivalens kongruenciarendszerekhez. Ha van olyan $p \mid m$, hogy valamilyen $i \neq k$-ra $p \mid \alpha_i - \alpha_k$, akkor $p \mid d_i$ és $p \mid d_k$ nem különböző kikötés, hiszen ekkor, ha

* Itt a

$$j \equiv -\alpha_1 (\mathrm{mod}\, d_1),\quad j \equiv -\alpha_2 (\mathrm{mod}\, d_2), \ldots,\quad j \equiv -\alpha_l (\mathrm{mod}\, d_l)$$

kongruencia rendszerek különböző j megoldásainak számát kell keresni, ahol $j \leqq N-d$, az összes $m = d_1 d_2 \ldots d_l$ esetén.

Mivel a négyzetmentes, $(d_i, d_k) = 1 (i \neq k)$, így a 3. segédtétel értelmében mod m egy és csak egy megoldása van (17)-nek egy rögzített $m = d_1 d_2 \ldots d_l$ esetén, s így m-nek csak azon szorzatfelbontásai jönnek számításba, amelyek nem ekvivalens kongruencia rendszerekhez vezetnek.

$j+\alpha_i \equiv 0 \pmod p$, úgy mindezen j-re $j+\alpha_k \equiv 0 \pmod p$ nyilván teljesül Megfordítva is, ha (17) ekvivalens a

$$j \equiv -\alpha_1 (\text{mod } d_1'), \ldots, j = -\alpha_l (\text{mod } d_l') \qquad (m = d_1' d_2' \ldots d_l')$$

kongruencia-rendszerrel, úgy a közös j megoldásra (ami mod m egyértelműen meghatározott a 3. Segédtétel értelmében)

$$j \equiv -\alpha_1 (\text{mod } [d_1, d_1']), \ldots, j \equiv -\alpha_l (\text{mod } [d_l, d_l'])$$

($[a, b]$ az a és b számok legkisebb közös többszöröse) nyilvánvalóan teljesül. Így, ha van i, hogy $d_i \neq d_i'$, így van p prímszám, hogy például $p | d_i$ és $p \nmid d_i'$, de $p | m$, így valamely $k \neq i$-re $p | d_k'$, azaz $p | j+\alpha_i$ és $p | j+\alpha_k$, így különbségükre is, azaz $p | \alpha_i - \alpha_k$. Innen már nyilvánvaló, ha

$$\gamma(p, \alpha^{(l)}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_{i,p} \tag{18}$$

ahol

$$\varepsilon_{i,p} = \begin{cases} 1, & \text{ha van } j > i, \text{ hogy } p | \alpha_i - \alpha_j \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \tag{19}$$

és

$$a(m, \alpha^{(l)}) \overset{\text{def}}{=} \prod_{p|m} (l - \gamma(p, \alpha^{(l)})) \tag{20}$$

akkor a nem ekvivalens kongruencia-rendszerhez vezető $m = d_1 \ldots d_l$ felbontásszám $a(m, \alpha^{(l)})$, rögzített felbontás esetén pedig (17) megoldásszáma $j \leqq N - d$ kikötéssel

$$\left[\frac{N-d}{m}\right] + \vartheta_m$$

ahol $\vartheta_m = 0$ vagy 1, így

$$\sum_{\substack{m | f(j, \alpha^{(l)}) \\ j \leqq N-d}} 1 = a(m, \alpha^{(l)}) \left(\left[\frac{N-d}{m}\right] + \vartheta_m \right) = \tag{21}$$

$$= (N-d) \frac{a(m, \alpha^{(l)})}{m} + \vartheta_m' \cdot a(m, \alpha^{(l)})$$

ahol

$$|\vartheta_m'| \leqq 2 \tag{22}$$

(15), (21) és (22) alapján

$$G(N, \alpha^{(l)}, d) = N(N-d) \sum_{m=1}^{f(N-d, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m) a(m, \alpha^{(l)})}{m^2} + \tag{23}$$

$$+ N \sum_{m=1}^{f(N-d, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m) a(m, \alpha^{(l)})}{m} \cdot \vartheta_m' + O\left(\sum_{j=1}^{N} d(f(j \alpha^{(l)})) \right)$$

Legyen $\eta > 0$ tetszőleges szám. Az első segédtételben legyen $\varepsilon = \frac{\eta}{l+1}$, így

$$\sum_{j=1}^{N} d\left(f(j, \alpha^{(l)})\right) < c(\varepsilon) \sum_{j=1}^{N} \left(f(j, \alpha^{(l)})\right)^{\varepsilon} < c(\varepsilon) \cdot c_1 \sum_{j=1}^{N} (j^{l+1})^{\varepsilon} =$$

(24)

$$= c(\varepsilon) \cdot c_1 \sum_{j=1}^{N} j^{\eta} < c_2 N^{1+\eta}$$

ugyanis

$$f(j, \alpha^{(l)}) = (j+\alpha_1)(j+\alpha_2)\ldots(j+\alpha_l) < c_1' \cdot j^{l+1}$$

és (20)-ból

$$a(m, \alpha^{(l)}) \leqq l^{U(m)} \tag{25}$$

ahol $U(m)$ az m prímszámfaktorainak a száma, s így

$$\left| \sum_{m=1}^{f(N-d, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m) a(m, \alpha^{(l)}) \cdot \vartheta_m'}{m} \right| <$$

(26)

$$< 2 \sum_{m=1}^{N^{l+1}} \frac{\mu(m)^2 \cdot l^{U(m)}}{m} < 2 \prod_{p \leqq N^{l+1}} \left(1 + \frac{l}{p}\right)$$

mivel $x > 0$ esetén $1 + x < e^x$, így

$$\prod_{p \leqq N^{l+1}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) < e^{l \sum_{p \leqq N^{l+1}} \frac{1}{p}} \tag{27}$$

(12), (26) és (27)-ből

$$\left| \sum_{m=1}^{f(N-d, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m)\, a(m, \alpha^{(l)})}{m} \cdot \vartheta_m' \right| <$$

(28)

$$< 2e^{cl \log\log N^{l+1}} = 2\left((l+1)\log N\right)^{cl}$$

(23), (24) és (28)-ból:

$$G(N, \alpha^{(l)}, d) = N^2 \sum_{m=1}^{f(N-d, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m) a(m, \alpha^{(l)})}{m^2} + O(N^{1+\eta}) \tag{29}$$

s mivel négyzetmentes m esetén $2^{U(m)} = d(m)$, ezért (25)-ből és az 1. segédtételből következik, hogy a (29)-ben fellépő sor abszolút konvergens, és így (29)-ből közvetlenül nyerjük a következőt:

1. Lemma:

$$\lim_{N=+\infty} \frac{1}{N^2} G(N, \alpha^{(l)}, d)$$

létezik, és

$$\lim_{N=+\infty} \frac{1}{N^2} G(N, \alpha^{(l)}, d) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu(m) a(m, \alpha^{(l)})}{m^2} \tag{30}$$

2. Lemma:

$$\lim_{N=+\infty} \frac{1}{N^2} H(N, \alpha^{(l)}, d) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu(m) a(m, \alpha^{(l)})}{m^2} \tag{31}$$

Bizonyítás: (9)-ből (a belső összeget (14)-hez hasonlóan számolva ki):

$$H(N, \alpha^{(l)}, d) = \sum_{j=1}^{N-d} (j+d) \sum_{m \mid f(j, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m)}{m} + O\left(\sum_{j=1}^{N} d(f(j\alpha^{(l)})) \right) = \tag{32}$$

$$= \sum_{j=1}^{N-d} j \sum_{m \mid f(j, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m)}{m} + d \sum_{j=1}^{N-d} \sum_{m \mid f(j, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m)}{m} + O\left(\sum_{j=1}^{N} d(f(j\alpha^{(l)})) \right)$$

(15)-ből

$$\sum_{j=1}^{N-d} \sum_{m \mid f(j, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m)}{m} = \frac{1}{N} G(N, \alpha^{(l)}, d) + O\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} d(f(j, \alpha^{(l)})) \right) \tag{33}$$

(24), (29) és (33) alapján:

$$\sum_{j=1}^{N-d} \sum_{m \mid f(j, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m)}{m} = O(N) \tag{34}$$

(32)-ben az összegezés sorrendjét felcserélve, továbbá (24) és (34) alapján:

$$H(N, \alpha^{(l)}, d) = \sum_{m=1}^{f(N-d, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m)}{m} \sum_{\substack{m \mid f(j, \alpha^{(l)}) \\ j \leqq N-d}} j + O(N^{1+\eta}) \tag{35}$$

$$(\eta > 0 \text{ tetsz.})$$

(16) kiszámításánál láttuk, hogy $a(m, \alpha^{(l)})$ számú j van, amelyre $m \mid f(j, \alpha^{(l)})$ és $0 < j \leqq m$; legyenek ezek $j_1, j_2, \ldots, j_{a(m, \alpha^{(l)})}$, így: ha $m \leqq N$, akkor

$$\sum_{\substack{m \mid f(j, \alpha^{(l)}) \\ j \leqq N-d}} j = \sum_{k=1}^{a(m, \alpha^{(l)})} \sum_{r=0}^{\left[\frac{N-d-j_k}{m}\right]} (j_k + rm) = \tag{36}$$

$$= N^2 \frac{a(m, \alpha^{(l)})}{2m} + O(N \cdot a(m, \alpha^{(l)}))$$

és, ha $m>N$, akkor:

$$\sum_{\substack{m \mid f(j,\alpha^{(l)}) \\ j \leqq N-d}} j = O\left(N \cdot a(m, \alpha^{(l)})\right) \tag{37}$$

ahol mindkét $0(\ldots)$-ban a konstans m-től független.

Így (35), (36) és (37) alapján

$$H(N, \alpha^{(l)}, d) = \frac{N^2}{2} \sum_{m=1}^{N} \frac{\mu(m) a(m, \alpha^{(l)})}{m^2} +$$

$$+ O\left(N \sum_{m=1}^{f(N-d, \alpha^{(l)})} \frac{\mu(m)^2 a(m, \alpha^{(l)})}{m}\right) + O(N^{1+\eta}) \tag{38}$$

(ahol $\eta>0$, tetszőleges szám.) (28) és (38) alapján

$$H(N, \alpha^{(l)}, d) = \frac{N^2}{2} \sum_{m+1}^{N} \frac{\mu(m) a(m, \alpha^{(l)})}{m^2} + O(N^{1+\eta}) \tag{39}$$

($\eta>0$ tetszőleges)

(39)-ből adódik, hogy

$$\lim_{N=+\infty} \frac{1}{N^2} H(N, \alpha^{(l)}, d) \tag{40}$$

létezik, s egyúttal adódik (31) is, amivel a 2. Lemmát igazoltuk. (10), (29) és (39) alapján nyerjük a probléma megoldását:

Tétel:

$$\lim_{N=+\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} F(n, d) \tag{41}$$

létezik bármely $d>0$ egész számra, és

$$\lim_{N=+\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} F(n, d) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu(m) a(m, \alpha^{(2)}=(0, d))}{m^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l=3}^{d+1} (-1)^l \sum_{0=\alpha_1<\ldots<\alpha_l=d} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu(m) a(m, \alpha^{(l)})}{m^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \prod_{p} \left(1 - \frac{l - \gamma(p, \alpha^{(2)}=(0, d))}{p^2}\right) + \tag{42}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l=3}^{d+1} (-1)^l \sum_{0=\alpha_1<\ldots<\alpha_l=d} \prod_{p} \left(1 - \frac{l - \gamma(p, \alpha^{(l)})}{p^2}\right)$$

III.

Speciálisan $d=1$ és $d=2$-re kiszámoljuk (42)-t.

I. A $d=1$ eset.

Ekkor (42)-ben az $a(m,\alpha^{(1)})$-n keresztül csak az

$$f(x) = x(x+1)$$

polinom lép fel, azaz

$$\alpha^{1} = \alpha^{(2)} = (0,1)$$

s így minden p prímszámra (18) és (19) alapján $\gamma(p, \alpha^{(2)}) = 0$, így (42)-ből

$$\lim_{N=+\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} F(n,1) = \frac{1}{2} \prod_{P} \left(1 - \frac{2}{p^2}\right) \tag{43}$$

ahol p prímszám, s így (5) és (43) alapján:

$$\lim_{N=+\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N} F(n,1)}{\sum_{n=1}^{N} (\varphi(n)-1)} = \frac{\pi^2}{6} \prod_{p} \left(1 - \frac{2}{p^2}\right) \quad (p \text{ prímszám}) \tag{44}$$

2. A $d=2$ eset.

Ekkor a szóbajövő $f(x, \alpha^{(l)})$ polinomok az

$$f(x, \alpha^{(2)}) = x(x+2) \quad f(x, \alpha^{(3)}) = x(x+1)(x+2)$$

és így (18)-ból és (19)-ből

$$\gamma(2, \alpha^{(2)}) = \gamma(2, \alpha^{(3)}) = 1; \quad \gamma(p, \alpha^{(2)}) = \gamma(p, \alpha^{(3)}) = 0, \quad \text{ha} \quad p \neq 2 \tag{45}$$

azaz (42)-ből

$$\lim_{N=+\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} F(n,2) = \frac{3}{8} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{2}{p^2}\right) -$$

$$- \frac{1}{4} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{3}{p^2}\right) \quad (p \text{ prímszám})$$

Végül szeretnék köszönetet mondani Rényi Alfréd professzor úrnak a cikkel kapcsolatos értékes megjegyzéseiért.

IRODALOM

[1] ERDŐS P.—SURÁNYI J.: Válogatott fejezetek a számelméletből, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.
[2] I. M. VINOGRADOV: A számelmélet alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Я. Галамбош

ON A DISTRIBUTION-PROBLEM IN THE THEORY OF NUMBERS

J. GALAMBOS

Egy alternatív függvényegyenletről

Obláth Richárd emlékének ajánlva

HOSSZÚ MIKLÓS

Gyakran előfordul, hogy valós egyváltozós függvényegyenletek megoldása közben a Cauchy-féle függvényegyenlet

$$f(x+y)^2=[f(x)+f(y)]^2$$

általánosításához jutunk. (Lásd pl. [2]). Ilyenkor gyökvonással az ismeretlen függvényről csak annyit tudunk mondani, hogy az

(1) $$e(x, y)f(x+y)=f(x)+f(y), \qquad e(x, y)^2=1$$

egyenletet elégíti ki.

Itt az (1) függvényegyenlettel kapcsolatban teszünk néhány megjegyzést, megmutatjuk, hogy $f(x)=cx$ a legáltalánosabb folytonos megoldás, ahol c tetszőleges állandó. Ha $e(x, y)$ csak egyik változótól függ, akkor az $e^2=1$ megszorítás nélkül is visszavezethető (1) a Cauchy-féle egyenletre.

Sorban az alábbi megállapításokat tehetjük:

I. $f(0)=0$.

Ez nyilvánvaló (1)-ből az $x=y=0$ helyettesítéssel.

II. $f(-x)=-f(x)$.

Ez következik az $x+y=0$ helyettesítéssel I. alapján (1)-ből.

III. *Ha n egész, akkor $f(nx)=N(n, x)f(x)$, ahol N is egész.*

A bizonyítás teljes indukcióval végezhető. Ha $n=k$-ra fennáll III., akkor az

$$\begin{aligned} f[(k+1)x] &= e(x, kx)[f(x)+f(kx)] = \\ &= e(x, kx)[f(x)+N(k, x)f(x)] = N(k+1, x)f(x) \end{aligned}$$

egyenlőség mutatja, hogy $n = k + 1$-re is fennáll. Minthogy pedig $k = 0$-ra I. alapján fennáll III., ezért minden nem negatív egészre is fennáll, sőt II. alapján negatív egész értékekre is belátható.

IV. *Ha* $f(z_1) = f(z_2) = 0$, *akkor* $f(nz_1 - mz_2) = 0$ *minden egész* n, m-re.

Ez következik (1) és III-ból.

V. *Ha egy* $z_1 \leqq z \leqq z_2$ *intervallumon* $f(z) = 0$, *akkor* $f(x) \equiv 0$.

Ugyanis tetszőleges valós x-hez lehet találni úgy x_i értékeket a z_1, z_2 intervallumon és n, m egész számokat, hogy $x = nx_1 - mx_2$ legyen.

A továbbiakban tehát kizárjuk azt az esetet, midőn $f(x)$ egy intervallumon zérussá válik, az azonosan nulla triviális megoldása az (1) egyenletnek. A megoldás érdekében a következőkben feltesszük azt is, hogy $f(x)$ folytonos. Így az alábbi megállapításokat tehetjük:

VI. *Ha* $f(x) \not\equiv 0$ *folytonos, akkor a zérushelyeknek nincs torlódási pontja.*

Ugyanis ellenkező esetben a z_i, z_j zérushelyek $nz_i = mz_j$ lineáris kombinációi változó n, m egész számok mellett mindenütt sűrűn kitöltenék a számegyenest, tehát IV. alapján a zérushelyek mindenütt sűrű halmazt alkotnának, s akkor a folytonosság miatt $f(x) \equiv 0$ lenne.

VI. miatt a későbbiekben feltesszük, hogy 0-tól jobbra z_1-ig van egy zérushelyeket nem tartalmazó intervallum.

VII. *Ha* $f(x)$ *folytonos, és a* $0 < z < z_1$ *intervallumon* $f(z) \neq 0$, *akkor ott* $N(k, z)$ *független z-től és* $k \neq 0$*-ra* $N(k, z) \neq 0$.

Bizonyítás: III. alapján $N(k, z) = f(kz)/f(z)$, s minthogy a jobboldal z változtatásával folytonosan változik, ezért az egész értékű $N(k, z)$ nem változhat, vagyis $N(k, z) = N(k)$ csak k-tól függ. Ha ezután $N(k) = 0$ lenne valamilyen $k \neq 0$ esetén, akkor

$$f(y) = f(kz) = N(k) f(z) = 0$$

következne be a 0 és kz_1 közti y-okra, vagyis V. szerint akkor $f(x) \equiv 0$ volna.

VIII. *Ha* $f(x)$ *folytonos és* $0 < z < z_1$*-re* $f(z) \neq 0$, *akkor* $x = 0$ *az* $f(x)$ *egyetlen zérushelye.*

Ugyanis egyébként alkalmas $n \neq 0$-val $x = nz$, $0 < z < z_1$ esetén

$$0 = f(x) = f(nz) = N(n) f(z)$$

volna, holott $N(n), f(z) \neq 0$.

IX. *Ha* $f(x) \not\equiv 0$ *folytonos, akkor* $e(x, y)$ *az* $x+y=0$ *egyenes által kettévágott sík egy-egy félsíkjában állandó:*

$$e(x, y) = \begin{cases} e^+, & \text{ha} \quad x+y>0; \\ e^-, & \text{ha} \quad x+y<0. \end{cases}$$

A bizonyítás nyilvánvaló annak alapján, hogy

$$e(x, y) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x+y)}$$

csak egész értéket vehet fel és folytonos $x+y \neq 0$ esetén, hiszen V. és VIII. szerint akkor $f(x+y) \neq 0$.

X. *Ha* $f(x) \not\equiv 0$ *folytonos, akkor* $e(x, y) \equiv 1$ *minden* $x+y \neq 0$*-ra.*

(1) szerint ugyanis

$$e(x, 0) f(x) = f(x)+f(0),$$

$$e(-x, 0) f(-x) = f(-x)+f(0),$$

tehát I., II. és VIII. alapján

$$e(x, 0) = e(-x, 0) = e^+ = e^- = 1.$$

XI. *Ha* $f(x)$ *folytonos, akkor* $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

$f(x) \equiv 0$ esetén ez nyilván fennáll. Egyébként X. szerint $e(x, y) = 1$, ha $x+y \neq 0$, tehát ez esetben is fennáll. Végül $x+y=0$ esetén I, II szerint

$$f(x+y) = 0 = f(x) - f(x) = f(x) + f(-x) = f(x) + f(y),$$

miáltal XI minden esetben bizonyítva van.

XI. alapján a Cauchy-féle függvényegyenlet megoldása ([1]) ismeretében a következő tétel érvényes:

1. Tétel. *Az* (1) *függvényegyenlet legáltalánosabb folytonos valós megoldása* $f(x) = cx$, $e(x, y) \equiv 1$ *ahol* c *tetszőleges állandó.*

Megjegyzések: 1. Hasonló probléma vethető fel az

$$f[G(x, y)]^2 = F[f(x), f(y)]^2$$

egyenlet megoldásával kapcsolatban, ahol F, G adott függvények.

Az $F(x, y) = G(x, y) = x-y$ speciális esetben merült fel eredetileg ([2]) a probléma. A követett gondolatmenet minden fennakadás nélkül alkalmazható ekkor is, csupán $x+y \gtrless 0$ helyett az $x-y \gtrless 0$ esetszétválasztást kell alkalmazni IX. alatt.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

2. Az $e(x, y) = e(x)$ speciális eset, midőn tehát $e(x, y)$ független az y változótól, folytonossági feltétel és az $e^2 = 1$ megszorítás nélkül is megoldható könnyen.

2. TÉTEL. *A*

$$e(x)f(x+y) = f(x)+f(y) \tag{2}$$

függvényegyenlet legáltalánosabb (valós, vagy komplex) megoldása

$$f(x) \equiv c, \qquad e(x) \equiv 2,$$

vagy

$$f(x) \equiv 0, \qquad e(x) \text{ tetszőleges},$$

vagy

$$f(x) = a(x), \qquad e(x) \equiv 1,$$

ahol c tetszőleges állandó, $a(x)$ tetszőleges additív függvény.

Ugyanis az $x = y = 0$ helyettesítéssel a (2) egyenletből az látszik, hogy $[e(0)-2]f(0) = 0$, tehát ha $f(0) \neq 0$, akkor $e(0) = 2$, és az $x = 0$ helyettesítéssel (2)-ből láthatóan

$$2f(y) = f(0)+f(y),$$

azaz $f(y) \equiv c$ állandó, miközben ugyanakkor (2)-ből láthatóan $e(x) \equiv 2$, mivel $c \neq 0$. ($f(0) \neq 0$). Ha viszont $f(0) = 0$, akkor $y = 0$-val

$$f(x)[e(x)-1] \equiv 0, \tag{3}$$

tehát rögzített x esetén $f(x) = 0$, vagy $e(x) = 1$. Innen már következik, hogy akkor $f(t) \equiv 0$, vagy $e(t) \equiv 1$. Ugyanis ellenkező esetben, ha létezne olyan x, y érték, melyre $e(x) \neq 1$, $f(y) \neq 0$, akkor (3) alapján ugyanott $f(x) = 0$, $e(y) = 1$ lenne, tehát

$$e(x)f(x+y) = f(x)+f(y) = f(y)+f(x) = e(y)f(y+x) = f(y+x),$$

vagyis

$$[e(x)-1]f(y+x) = 0, \; f(y+x) = 0$$

teljesülne, holott $f(y+x) = f(y)+f(x) = f(y) \neq 0$.

$f(x) \equiv 0$ esetén $e(x)$ tetszőleges és $e(x) \equiv 1$ esetén $f(x)$ éppen a Cauchy-féle egyenletet elégíti ki. Így a 2. tétel bizonyítva van.

A (2) egyenlet egyébként speciális esete az [1]-ben vizsgált

$$f(x+y) = f(x)\,g(y)+h(y)$$

egyenletnek. Ugyanis (2)-ből

$$f(y) = e(x)f(x+y)-f(x),$$

tehát a $t = -x$, $z = x + y$ változóval

$$f(z+t) = f(z)\,e(x) - f(x) = f(z)\,e(-t) - f(-t) -$$
$$= f(z)\,g(t) + h(t).$$

3. Valószínűnek látszik, hogy (1)-ben nem folytonos $f(x)$ esetén $e(x, y) \not\equiv 1$ is előfordulhat.

IRODALOM

[1] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Basel—Stuttgart, 1961.
[2] Hosszú M., Észrevételek a relativitáselméleti időfogalom Reichenbach-féle értelmezéséhez, MTA Mat. Kut. Int. Közleményei,...

ОБ ОДНОМ АЛЬТЕРНАТИВНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

(Статья посвящена памяти Ризарда Облата)

М. Хоссу

Самым общим непрерывным решением функционального уравнения (I) является $f(x) = cx$, где c произвольная постоянная. Функциональное уравнение (2) может быть приведено к уравнению Коши, без каких-либо предположений о непрерывности.

ON AN ALTERNATIVE FUNCTIONAL EQUATION

TO THE MEMORY OF RICHARD OBLÁTH

M. Hosszú

The most general continuous solution of the functional equation (1) is $f(x) = cx$ where c is an arbitrary constant. The functional equation (2) can be reduced to the Cauchy equation without any continuity suppositions.

Megjegyzések a komplex számok bevezetéséhez

FRIED ERVIN

A komplex számoknak számos olyan bevezetésmódja ismeretes, melynél ezeket, mint síkvektorokat fogták fel. (Lásd az irodalomjegyzéket.) Ezen bevezetéseknél a következő szempont érvényesült: A síkvektorokra vonatkozóan lehetőleg minél kevesebb számolási szabályt tegyünk fel. Ezen feltételeket azonban úgy válasszuk meg, hogy, ha a síkvektorok kielégítik ezen feltételeket, akkor ebből már következzék, hogy a síkvektorokkal úgy kell számolni, mint a komplex számokkal. Ezen dolgozatnak hasonló a célkitűzése. Szintén a síkvektorokkal akarunk számolni, szintén lehetőleg minél kevesebb számolási szabály feltevésével. Ezen számolási szabályok azonban csupán azt a célt szolgálják, hogy a síkvektorokkal való számolás ésszerű legyen. Az így adódó lehetőségek közül aztán megkeressük, hogy milyen helyet foglalnak el a komplex számok.

A dolgozatban a valós számokat nyomtatott kisbetűkkel, a vektorokat pedig nyomtatott nagybetűkkel fogjuk jelölni.

(i) A síkvektorokról tegyük fel, hogy körükben az összeadás a szokásos vektorösszeadás.

(ii) A valósszámmal való szorzáson is a szokásos szorzást, vagyis a nyújtást értsük, és emellett teljesüljön az $aA = Aa$ egyenlőség, tetszőleges a valós számra és A vektorra.

(iii) Feltesszük, hogy a sík tartalmazza a valós számokat, illetve az azoknak megfelelő vektorokat, és az 1 valós számnak megfelelő vektort E-vel jelöljük, melyre tehát minden A vektor esetén teljesül az $EA = AE = A$ egyenlőség*.

* Tekintettel arra, hogy a síkvektorokat, mint a valós számoknál bővebb számkört akarjuk felfogni, ezért a valós számokat is síkvektoroknak kell tekinteni. Ezt ugyanúgy megtehetjük, mint ahogy a síkvektorokat is tekinthetjük speciális térbeli vektoroknak, hiszen a valós számokat egydimenziós (egy egyenesbe eső) vektoroknak foghatjuk fel.

(iv) Feltesszük, hogy a valós számmal való szorzás (mint nyújtás) rendelkezik az $(ab)A = a(bA)$ tulajdonsággal, tetszőleges a és b valós számok és A vektor esetén.

(v) Végülis a szorzásról feltesszük, hogy az összeadásra vonatkozóan disztributív, vagyis tetszőleges A, B és C vektorokra $A(B+C) = AB+AC$ és $(B+C)A = BA+CA$.

A síkvektoroknak ezen öt feltételt kielégítő rendszerét *komplex rendszer*nek fogjuk nevezni.

Ezekre vonatkozóan bebizonyítjuk, hogy érvényes a következő

LEMMA: *Bármely komplex rendszerben létezik oly I vektor, melyre a következők teljesülnek:*

(vi) *E-vel együtt kifeszíti a síkot*

(vii) $I^2 = eE$, *ahol* $e = +1, 0$ *vagy* -1.

Bizonyítás: Tekintsünk egy tetszőleges A vektort, mely E-vel együtt kifeszíti az egész síkot. Ilyen vektor az (i) és (ii) követelmények alapján létezik. Mivel ezen A vektor négyzete is egy vektor, megfelelő együtthatókkal írható az $A^2 = 2aA+bE$ alakban. Mármost a $B = A-aE$ vektorra a disztributivitás felhasználásával $B^2 = cE$ adódik, megfelelő c valós számmal. Ha az itt szereplő $c \neq 0$, akkor legyen c abszolút értéke d^2, továbbá $B = dI$. A $c = 0$ esetben pedig legyen $B = I$. Nem lehet E-vel egyirányú B és így I sem, mert akkor $A = B+aE$ is E-vel egyirányú lenne, feltevésünkkel ellentétben. Továbbá I-re a (vii) feltétel is teljesül, annak megfelelően, hogy c pozitív, 0, vagy negatív volt.

Ebből nyilvánvalóan adódik az

1. *Következmény:*

(viii) Egy komplex rendszer minden A vektora felírható $A = aE+bI$ alakban.

(ix) Egy komplex rendszer vektorait következőképpen adhatjuk össze: $(aE+bI)+(cE+dI) = (a+c)E+(b+d)I$.

(x) Egy komplex rendszer vektorait a következőképpen szorozhatjuk össze: $(aE+bI)(cE+dI) = (ac+bde)E+(ad+bc)I$.

Egyelőre még nem láttuk, hogy minden komplex rendszerben érvényes a disztributivitás, de most ezt is kimutatjuk.

2. *Következmény:* Minden komplex rendszer kommutatív, asszociatív és disztributív.

Bizonyítás: (x)-ből azonnal következik, hogy a szorzás kommutatív. Így elég az egyik oldali disztributivitást kimutatni:

$$(uE+vI)\big((aE+bI)+(cE+dI)\big) = (uE+vI)\big((a+c)E+(b+d)I\big) =$$
$$= \big(u(a+c)+v(b+d)e\big)E+\big(u(b+d)+v(a+c)\big)I,$$

Másrészt

$$(uE+vI)(aE+bI) + (uE+vI)(cE+dI) = ((ua+vbe)E+(va+ub)I) +$$
$$((uc+vde)E+(ud+vc)I) = (ua+vbe+uc+vde)E+(va+ub+ud+vc)I,$$

ami azonnal látható, hogy megegyezik az előző eredménnyel. Mivel érvényes a disztributivitás, így az asszociativitást elég olyan szorzatra bizonyítani, melynek minden tényezője E vagy I. Ha legalább két tényező E (és csak legfeljebb egy I), akkor az asszociatívitás nyilvánvaló. Ha két faktor I, és egy E, akkor a szorzat értéke könnyen láthatóan eE, míg, ha mindhárom tényező I, akkor a szorzat értéke mindig eI lesz.

A komplex számoknak megfelelően itt is definiálhatjuk a konjugáltat és a normát. Az $aE+bI$ vektor *konjugáltján* az $aE-bI$ vektort, normáján az a^2-eb^2 valós számot (vagyis konjugáltjával való szorzatát) értjük.

Egy komplex rendszer *alapgörbéjén* azon pontok összességét értjük, amelyekbe mutató vektorok normája 1.

Egy komplex rendszert *elliptikus*nak, *parabolikus*nak, ill. *hiperbolikus*nak nevezünk, ha alapgörbéje elliptikus (ellipszis) parabolikus (párhuzamos egyenespár), ill. hiperbolikus (hiperbola).

Nyilvánvaló a következő állítás:

Egy komplex rendszer elliptikus, hiperbolikus, ill. parabolikus, aszerint, hogy $e=-1, +1,$ *ill.* $0.$

Mármost ezekből világos, hogy egy komplex rendszer pontosan akkor egyezik meg a komplex számokkal, ha az alapgörbéje kör.

Nézzük meg, hogy milyen újabb feltételeket kell még az eddigiekhez hozzávenni, ha a komplex számokat akarjuk megkapni. Parabolikus rendszer esetében $I^2=0$, hiperbolikus rendszerben pedig $(E+I)(E-I)=0$. Így, ha a komplex rendszertől megköveteljük, hogy az nullosztómentes legyen, vagyis az $AB=0$ egyenlőségből következzék, hogy $A=O$, vagy $B=O$, akkor a szereplő komplex rendszer már csak elliptikus lehet. Ezzel az esettel foglalkozik a [2] dolgozat, kimutatva, hogy minden ilyen rendszer affin transzformációval átvihető a komplex számokba. Az elliptikus esetben egy vektor abszolút értékén értsük e vektor hosszát. Ha az I hossza nem 1, akkor az I^2 abszolút értéke nem egyenlő az I abszolút értékének négyzetével. Amennyiben az I hossza egy, de az E-vel bezárt szöge nem derékszög, akkor az $E+I$ és $E-I$ vektorok szorzatának abszolút értéke nem egyenlő abszolút értékük szorzatával. Így, ha az előbbiekhez még azt is hozzávesszük, hogy két vektor szorzatának hossza hosszuk szorzatával legyen egyenlő, akkor éppen a komplex számokat kapjuk. Így tárgyalja a komplex számok bevezetését az [1] dolgozat. Ugyanezen dolgozatban található annak a

bizonyítása, hogy ez esetben a szorzat argumentuma a tényezők argumentumainak összegével egyenlő. Másrészt viszont, ha az abszolút értékre vonatkozó feltétel helyett ezt követeljük meg, akkor is a komplex számok adódnak. Ugyanis, ha az I és E nem volnának merőlegesek, akkor ez a feltétel nem teljesülne, az II szorzatra, ha pedig a merőlegesség fennállna, de I hossza nem lenne egységnyi, akkor az $E+I$ és $E-I$ szorzatára nem teljesülne e feltétel. Sőt kimutatjuk, hogy ez a szögekre vonatkozó feltétel teljes egészében helyettesíti a nullosztómentességre vonatkozó feltételt is.

A hiperbolikus esetben ugyanis az $I^2=E$ feltételből, amennyiben az argumentumokra vonatkozó feltételt elfogadjuk, az következnék, hogy I és E egy egyenesbe esnének. Nézzük most a parabolikus esetet. Ekkor $(E+I)(E-I)=E$, amiből egyszerű geometriai meggondolással az adódik, hogy I hossza 1. Ez esetben viszont az $(E+I)^2=E+2I$ alapján azt kapnánk, hogy $E+2I$ és I egyirányúak, ami szintén lehetetlen.

Ezzel tehát igazolva van a

3. *Következmény:* Ha egy komplex rendszerben a szorzat argumentuma megegyezik a tényezők argumentumainak összegével, akkor ez a komplex számtest.

IRODALOM

[1] Ervin Fried und Tamás Varga: Über die Frage der Einführung der komplexen Zahlen; Publ. Math. 4 (1956) 484–487.

[2] L. Fuchs and T. Szele: Introduction of complex numbers as vectors of the plane; Amer. Math. Monthly LIX 628–631.

[3] Szele Tibor: A komplex számok bevezetése vektoralgebrai alapon; Matematikai Lapok 1 (1950) 349–362.

ЗАМЕЧАНИЯ О ВВЕДЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Эрвин Фрид

REMARKS TO THE INTRODUCTION OF COMPLEX NUMBERS

E. Fried

Általánosított deriváltakkal rendelkező függvények adott tartományról való kiterjesztésének kérdéséről

FRIVALDSZKY SÁNDOR

1. Bevezetés

A jelen cikkben a következő problémával fogunk foglalkozni: adott az n dimenziós euklidesi térben egy φ függvény, mely az adott tartományon rendelkezik a Szoboljev értelemben vett általánosított deriváltakkal. Keresendő olyan feltétel, amely mellett a φ függvény az egész térre kiterjeszthető a deriválhatóság megtartásával. A közönséges értelemben vett deriváltak esetén ilyen feltételt a [2] és [3] alatti cikkek adnak. Általánosított deriváltak esetén a [3] cikk gondolatmenete alkalmazható, egy lemma kivételével. A hiányzó lemma a [4] alatti cikkben található. A szerző itt ismertnek tételezi fel a Gauss—Osztrogradszkij tételt általánosított deriváltak esetén. A tétel valóban igazolható hosszabb úton, az [1] alatti könyv egy súlyos tételének felhasználásával, azonban a bizonyítás leírása a jelenlegi irodalomból még hiányzik. A lemmára ezért a jelen cikkben egy új bizonyítást adunk, amely elemi segédeszközökkel és a Szoboljev-féle disztribució elmélet egyszerűbb tételeinek felhasználásával adódik (1. 5. §). A bizonyításhoz azonban szükség volt az ún. Szoboljev-féle középfüggvény általánosítására (l. 4. §). Mindezek előtt a használt fogalmakat és tételeket fogjuk ismertetni (l. 2. 3. §). Végül a 6. §-ban kiegészítést adunk az [1] alatti könyvhöz. A 12. tételnél csak a feltételeket és az állítást mondjuk ki, mert a bizonyítás lényegében a fenti könyvben megtalálható, csak a feltételek pontos kimondása nem. A 13. tétel már az [1] könyvtől független munka; az eddigiekből egyszerűen következő általános érvényű állítás.

2. §. Definíciók és jelölések

E §-ban felsoroljuk a továbbiakban felhasznált legfontosabb definíciókat és jelöléseket.

Jelöljük Ω-val az R_n n-dimenziós euklidesi tér egy korlátos nyílt halmazát, melyet a továbbiakban röviden tartománynak nevezünk.

Jelentse S az Ω tartomány határpontjainak halmazát, melyet röviden Ω peremének nevezünk.

Tetszőleges $h>0$ esetén jelentse Ω_h az Ω azon pontjainak halmazát, melyek távolsága S-től nagyobb h-nál.

Jelentse $C_k(\Omega)$ az Ω-ban k-szor folytonosan differenciálható függvények halmazát, $C_k^0(\Omega)$ pedig jelentse azon $\varphi \in C_k(\Omega)$ függvények halmazát, melyekhez létezik $h=h(\varphi)>0$ hogy $\varphi(x)=0$, ha $x \notin \Omega_h$.

Az Ω tartomány peremének egy S^* darabját regulárisnak nevezzük, ha S^* előállítható $S^*=\bigcup_1^n S_i^*$ alakban, ahol $S_i^* \cap S_j^* = \emptyset (i \neq j)$ és minden S_i^* darabhoz van oly $(x_1^{(i)}, \ldots x_{n-1}^{(i)}, z^{(i)})$ helyi koordináta rendszer, továbbá oly $\Omega^{(i)} \subset R_{n-1}$ tartomány és $f_i(x_1^{(i)}, \ldots x_{n-1}^{(i)}) \in C_1(\Omega^{(i)})$ függvény, hogy $\Omega^{(i)}$ része az $(x_1^{(i)}, \ldots x_{n-1}^{(i)})$ síknak, továbbá, ha $(x_1^{(i)}, \ldots x_{n-1}^{(i)})$ befut valamely $A^{(i)}$ halmazt, melyre $\overline{A}^{(i)} \subset \Omega^{(i)}$ akkor az $(x_1^{(i)}, \ldots x_{n-1}^{(i)}, z^{(i)}=f_i)$ pont befutja S_i^*-t.

A továbbiakban minden, az Ω-ban értelmezett $\varphi \in L_p(\Omega)$ függvényt kiterjesztünk az egész R_n térre, $\varphi(x)=0$, téve ha $x \notin \Omega$.

Egy $\varphi \in L_p(\Omega)$ $(1 \leqq p \leqq +\infty)$ függvény középfüggvényén a

$$\varphi_h = \int_{R_n} \omega_h(r_{xy}) \varphi(y) dy$$

függvényt értjük, ahol $h>0$. r_{xy} jelenti az $x=(x_1, \ldots x_n)$ és $y=(y_1, \ldots y_n)$ pontok távolságát,

$$\omega_h(r_{xy}) = \begin{cases} k^{-1} h^{-n} e^{-\frac{h^2}{h^2 - r_{xy}^2}} & \text{ha } r_{xy} < h \\ 0 & \text{ha } r_{xy} \geqq h \end{cases}, \qquad k = \int_{r_{0\xi}<1} e^{-\frac{1}{1-r_{0\xi}^2}} d\xi.$$

Ha valamely $\varphi \in L_1(\Omega)$ függvényhez létezik oly $\Phi_{k_1 \ldots k_n}^{(k)} \in L_1(\Omega)$ függvény, melyre a

$$\int_\Omega \varphi \frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} dx = (-1)^k \int_\Omega \Phi_{k_1 \ldots k_n}^{(k)} \psi dx$$

egyenlőség fennáll minden $\psi \in C_k^0(\Omega)$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy

φ-nek létezik $\partial^k/\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}$ típusú, — vagy röviden $(k_1, \ldots k_n)$ típusú, — általánosított deriváltja, mely azonos $\Phi^{(k)}_{k_1\ldots k_n}$-el.

Egy φ függvény $(k_1, \ldots k_n)$ típusú általánosított deriváltját $D^k_{k_1\ldots k_n}\varphi$-vel, vagy röviden $D^k\varphi$-vel jelöljük.

$1 < p < +\infty$ esetén jelöljük $W_p^{(k)}(\Omega)$-val azon $\varphi \in L_1(\Omega)$ függvények halmazát, melyeknek az Ω tartományban létezik az összes k-adik általánosított deriváltja, és ezek $L_p(\Omega)$-beliek.

Jelöljük $G(x; r)$-rel egy x középpontú $r > 0$ sugarú n-dimenziós gömböt.

Legyen $G(x_0; r_0) = G_0$ tetszőleges gömb, x tetszőleges pont; jelöljük K_x^0-al azon kúptartományt, melyet az x pontból a G_0 gömbhöz húzott érintők és a G_0 gömb határol; ha $x \in G_0$, úgy legyen $K_x^0 = G_0$. Valamely Ω tartományt a $G_0 \subset \Omega$ gömbre nézve csillagtartománynak nevezünk, ha bármely $x \in \Omega$ pont esetén $K_x^0 \subset \Omega$. Egy $\Omega^{(1)}$ és $\Omega^{(2)}$ tartománypárt szummálhatónak* nevezünk, ha bármely $\delta > 0$ számhoz található oly $0 < \delta' < \delta$ szám, melyre

$$(\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)})_\delta \subset \Omega^{(1)}_{\delta'} \cup \Omega^{(2)}_{\delta'}$$

3. §. A Szoboljev-féle disztribucióelmélet legfontosabb tételei

E §-ban összefoglaljuk az általánosított deriváltakra vonatkozó legfontosabb tételeket, melyek bizonyítása az [1] alatti könyvben található.

1. Tétel: Ha $\varphi \in L_1(\Omega)$, akkor minden $h > 0$ esetén $\varphi_h \in C_\infty(R_n)$.

2. Tétel: Ha $1 \leqq p < +\infty$ és $\varphi \in L_p(\Omega)$ akkor

$$\|\varphi - \varphi_h\|_{L_p(\Omega)} \to 0 \text{ ha } h \to 0$$

Kimutatható, hogy egy $\varphi \in L_1(\Omega)$ függvénynek legfeljebb egyetlen $(k_1, \ldots k_n)$-típusú általánosított deriváltja lehet, továbbá, hogy az általánosított deriváltakra is fennállnak az ismert differenciálási szabályok.

3. Tétel: Legyen $1 \leqq p < +\infty$ és legyen $\Phi^{(k)}_{k_1\ldots k_n} \in L_p(\Omega)$ a $\varphi \in L_1(\Omega)$ függvény $(k_1, \ldots k_n)$ típusú általánosított deriváltja, akkor minden oly Ω' tartományra, melyre $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ fennáll, hogy

$$\left\| \frac{\partial^k \varphi_h}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} - \Phi^{(k)}_{k_1\ldots,k_n} \right\|_{L_p(\Omega')} \to 0 \quad \text{ha} \quad h \to 0$$

* A fogalom Szoboljevtől származik, azonban Bognár Mátyás szóbeli közlése alapján minden tartománypár szummálható.

4. Tétel: Legyenek $\Omega^{(1)}$ és $\Omega^{(2)}$ szummálható* tartományok és legyenek a $\varphi \in L_1(\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)})$ függvény $(k_1, \dots k_n)$ típusú általánosított deriváltjai az $\Omega^{(i)}$ $(i=1,2)$ halmazokon $\Phi^{(k),i}_{k_1 \dots k_n} \in L_1(\Omega^{(i)})$ $(i=1,2)$, akkor a φ függvénynek az $\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$ halmazon is létezik $(k_1, \dots k_n)$ típusú általánosított deriváltja.

A továbbiakban tegyük fel, hogy Ω csillagtartomány, és legyen $1 < p < +\infty$.

5. Tétel: A $W_p^{(k)}(\Omega)$ tér a

$$\|\varphi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \{\|\varphi\|^p_{L_p(\Omega)} + \sum_{\Sigma k_i = k} \|D^k_{k_1 \dots k_n} \varphi\|^p_{L_p(\Omega)}\}^{1/p}$$

normára nézve Banach teret alkot.

6. Tétel: $W_p^{(k)}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$.

7. Tétel: $W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_p^{(l)}(\Omega) \quad l = 1, \dots (k-1)$.

8. Tétel: Létezik oly M állandó, hogy minden $0 \leqq i < k$ egész szám $(i_1, \dots i_n)$ felbontása esetén bármely $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ függvényre fennáll:

$$\|D^i_{i_1 \dots i_n} \varphi\|_{L_p(\Omega)} \leqq M \|\varphi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}$$

Minden $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ függvény és legfeljebb $(k-1)$-edrendű általánosított deriváltjai a $\lambda^{(n)}$ Lebesgue mértékben 0-mértékű halmazon megváltoztathatók úgy, hogy a φ függvény és legfeljebb $(k-1)$-edrendű deriváltjai már mindenütt definiáltak legyenek az $\bar{\Omega}$ halmazon és az így megváltoztatott φ függvényekre fennálljanak a következő tételek:

9. Tétel: Ha $k > n/p$ és $0 \leqq i < k - n/p$ tetszőleges egész szám, akkor $W_p^{(k)}(\Omega) \subset C_i(\bar{\Omega})$, továbbá létezik oly M állandó, hogy i minden $(i_1, \dots i_n)$ felbontása és bármely $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ esetén fennáll:

$$\left\| \frac{\partial^i \varphi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right\|_{C_0(\bar{\Omega})} \leqq M \|\varphi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}$$

10. Tétel: Ha a $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ függvény olyan, hogy k minden $(k_1, \dots k_n)$ felbontására $D^k \varphi$ legfeljebb 0-mértékű halmazon megváltoztatható úgy, hogy $D^k \varphi \in C_0(\bar{\Omega})$ legyen, akkor $\varphi \in C_{k-1}(\bar{\Omega})$. (A tétel nem szerepel az [1] könyvben, de annak egyszerű folyománya.)

11. Tétel: Legyen n' oly természetes szám, melyre $n > n' > n - (k-i)p$. Legyen egy $\Omega^* \subset R_{n'+1}$ tartomány peremének egy S^* darabja

* L. a 2. §. lábjegyzetét.

reguláris és $S^* \subset \bar{\Omega}$; akkor, ha $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$, úgy a $0 \leqq i < k$ egész szám minden $(i_1, \ldots i_n)$ felbontására $D^i_{i_1 \ldots i_n}\varphi \in L_p(S^*)$ és létezik oly M — a φ-től független — állandó, hogy

$$\|D^i_{i_1 \ldots i_n}\varphi\|_{L_p(S^*)} \leqq M\|\varphi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}$$

4. §. A Szoboljev-féle középfüggvény általánosítása

Definiáljuk

$$\varrho_{xy}(\underline{a}) = \{a_1^2(x_1 - y_1)^2 + \ldots + a_n^2(x_n - y_n)^2\}^{1/2}, a_i > 0$$

elliptikus euklidesi távolságot. Legyen továbbá

$$\omega_h(\varrho_{xy}(\underline{a})) = \begin{cases} \dfrac{a_1 \ldots a_n}{k \cdot h^n} e^{-\frac{h^2}{h^2 - \varrho^2_{xy}(\underline{a})}} & \text{ha} \quad \varrho_{xy}(\underline{a}) < h \\ 0 & \text{ha} \quad \varrho_{xy}(\underline{a}) \geqq h \end{cases}$$

ahol k a már ismert szám.

Legyen $\varphi \in L_p(\Omega)$ $(1 \leqq p \leqq +\infty)$ függvény. A φ általánosított középfüggvényén a következő függvényt értjük:

$$\varphi_{h,a}(x) = \int_{R_n} \omega_h(\varrho_{xy}(a))\varphi(y)\,dy$$

Belátható, ha $(a_1, \ldots a_n)$ fix számok és $h \to 0$, akkor fennáll az 1., 2 és a 3. tétel erre a középfüggvényre is.

5. §. A kiterjesztési tétel $W_p^{(k)}(\Omega)$ függvényekre

Alább bizonyítjuk be a kérdéses lemmát:

Lemma: Legyen $\Omega_{n-1} = \{\bar{x}\} = \{(x_1, \ldots x_{n-1})\}$ egy $(n-1)$ dimenziós csillagtartomány és „a" véges szám. Legyen $\Omega = \Omega_{n-1} \times (0, a)$ és $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$. Legyen $\Omega^* = \Omega_{n-1} \times (-a, a)$. Állítás: létezik φ-nek φ^* kiterjesztése Ω^*-ra, hogy $\varphi^* \in W_p^{(k)}(\Omega^*)$ legyen.

Bizonyítás: legyen λ_i $(i = 1, \ldots k)$ megoldása a

$$(1) \qquad (-1)^l\lambda_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^l \lambda_2 + \ldots + \left(-\frac{1}{k}\right)^l \lambda_k = 1 \qquad (l = 0, \ldots (k-1))$$

egyenletrendszernek. Ez egyértelműen létezik, mert az egyenletrendszer determinánsa el nem tűnő Wandermonde-féle determináns.

Az általánosított derivált alaptulajdonságaiból következik, hogy $\varphi\left(\bar{x}, -\frac{x_n}{i}\right) \in W_p^{(k)}((\Omega^* - \bar{\Omega})i)$, ahol $(\Omega^* - \bar{\Omega})i = \Omega_{n-1} \times (-ai, 0)$.

Legyen

$$\bar{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi\left(\bar{x}, -\frac{x_n}{i}\right) \tag{2}$$

ekkor $\bar{\varphi} \in W_p^{(k)}(\Omega^* - \bar{\Omega})$

Legyen

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{ha} \quad x \in \Omega \\ \bar{\varphi}(x) & \text{ha} \quad x \in \Omega^* - \Omega \end{cases}$$

Ez $\varphi(x)$ kiterjesztése. Igazoljuk, hogy $\varphi^* \in W_p^{(k)}(\Omega^*)$.

Legyen $\psi(x) \in \overset{\circ}{C}_k(\Omega^*)$ tetszőleges, de fix függvény. Ekkor van ε_0 szám, hogy $\psi(x) = 0$, ha $x \in \Omega^* - \Omega^*_{\varepsilon_0}$ $(\varepsilon_0 > 0)$. Definiáljunk egy tetszőleges, de a továbbiakban fix $\delta = \delta(\varepsilon)$ függvényt, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

$$0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon/k, \quad \text{ha} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Vegyük ilyen ε mellett Ω_ε-t. Ez $\Omega_\varepsilon = (\Omega_{n-1})_\varepsilon \times (\varepsilon, a - \varepsilon)$ alakú, míg $\Omega^*_{\varepsilon_0} = (\Omega_{n-1})_{\varepsilon_0} \times (-a + \varepsilon_0, a - \varepsilon_0)$. Ehhez van olyan $\Omega' = \Omega'_{(\varepsilon)}$ tartomány, amelyre $\Omega_\varepsilon \subset \Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$ továbbá Ω' pereme $S' = S'_{(\varepsilon)}$ elsőrendben sima, végül S' olyan, hogy

$$S' \cap \Omega^*_{\varepsilon_0} = (\Omega_{n-1})_{\varepsilon_0} x \delta$$

Jelöljük ezt S'_0-lal. Ekkor minden $h > 0$-ra φ_h, $\psi \in C_1(\bar{\Omega})$ és alkalmazva a Gauss Osztrogradszkij formulát az Ω' tartományra; nyerjük minden h és ε-ra:

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \psi \, dx = -\int_{\Omega'} \varphi_h \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx + \int_{S'} \varphi_h \psi \cos(\underline{n}, x_i) \, dS$$

ahol $\underline{n}(x)$ az S' külső normálisa. $\psi(x)$ eltűnik $S' - S'_0$-on, S'_0-on pedig $\underline{n}(x)$ ellentétes irányú az x_n tengellyel, azaz $\cos(\underline{n}, x_i) = -\delta_{in}$*. Ezért

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \psi \, dx = -\int_{\Omega'} \varphi_h \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx - \delta_{in} \int_{S'_0} \varphi_h \psi \, dS$$

vagy

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \psi \, dx = -\int_{\Omega'} \varphi_h \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx - \delta_{in} \int_{(\Omega_{n-1})_{\varepsilon_0}} \varphi_h \psi \Big|_{x_n = \delta} d\bar{x} \tag{3}$$

* δ_{in} a Kronecker-féle szimbólum.

Mivel φ_h, $\psi \in C_k(\bar{\Omega})$ ezért (3) alkalmazható k-szor egymás után ψ és $\partial^k \varphi_h / \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}$-re, ahol $(k_1, \dots k_n)$ tetszőleges felbontása k-nak. Először az x_n szerinti, majd a többi deriváltakra elvégezve a (3) átalakítást kapjuk, hogy

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial^k \varphi_h}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \psi \, dx = (-1)^k \int_{\Omega'} \varphi_h \frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} dx + \sum_{l=1}^{k_n}$$

(4)

$$(-1)^l \int_{(\Omega_{n-1})\varepsilon_0} \frac{\partial^{k-l} \varphi_h}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}} \partial x_n^{k_n - l}} \frac{\partial^{l-1} \psi}{\partial x_n^{l-1}} \Bigg|_{x_n = \delta} d\bar{x}$$

figyelembe véve δ_{in} értékét. Ha $h \to 0$, akkor $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ miatt a baloldalnak és a jobboldal első tagjának van határértéke a 2. és 3. tétel szerint. Ezt formailag úgy kapjuk, hogy φ_h helyébe φ-t írunk. A 11. tétel szerint $l = 1, \dots, k_n$-re:

$$\left\| \frac{\partial^{k-l} \varphi_h}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}} \partial x_n^{k_n - l}} - D^{k-l}_{k_1 \dots k_{n-1} k_n - l} \varphi \right\|_{L_p((\Omega_{n-1})\varepsilon_0 x \delta)} \leqq$$

$$\leqq M \| \varphi - \varphi_h \|_{W_p^{(k)}((\Omega_{n-1})\varepsilon_0 x (\delta_1 a - \varepsilon_0))}$$

Mivel $\delta > 0$ azért ismét alkalmazható a 2. és a 3. tétel. E szerint $h \to 0$-ra a jobboldal $\to 0$. Így a (4)-ből $h \to 0$-ra azt kapjuk, hogy

$$\int_{\Omega'} D^k_{k_1 \dots k_n} \varphi \psi \, dx = (-1)^k \int_{\Omega'} \varphi \frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} dx + \sum_{l=1}^{k_n} (-1)^l$$

$$\int_{(\Omega_{n-1})\varepsilon_0} D^{k-l}_{k_1 \dots k_{n-1} k_n - l} \varphi \Bigg|_{x_n = \delta} \frac{\partial^{l-1} \psi}{\partial x_n^{l-1}} \Bigg|_{x_n = \delta} d\bar{x}$$

Ha $\varepsilon \to 0$, akkor a baloldalnak és a jobboldal első tagjának határértékét úgy kapjuk, hogy Ω' helyébe Ω-t írunk.

Az összes többi tagnak külön-külön van határértéke $\varepsilon \to 0$-ra. Erről úgy győződhetünk meg, hogy ψ és $\partial^k \varphi_h / \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}$-re először csak egyszer alkalmazzuk a (3) formulát, majd határértékre térünk $h \to 0$ utána $\varepsilon \to 0$. Majd a fenti függvényekre kétszer alkalmazzuk (3)-at és határátékre térünk stb. Kapjuk, hogy

$$\int_{\Omega} D^k_{k_1 \dots k_n} \varphi \psi \, dx = (-1)^k \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} dx + \sum_{l=1}^{k_n} (-1)^l$$

(5)

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{(\Omega_{n-1})\varepsilon_0} D^{k-l}_{k_1 \dots k_{n-1} k_n - l} \varphi \Bigg|_{x_n = \delta} \frac{\partial^{l-1}}{\partial x_n^{l-1}} \Bigg|_{x_n = \delta} d\bar{x}$$

Végezzük el ezt az eljárást $\varphi(\bar{x}, -x_n/i)$-re, csekély módosítással. Ekkor $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$-hoz van $\Omega_i' = \Omega_{i,(\varepsilon)}'$, hogy $(\Omega^* - \overline{\Omega})_\varepsilon \subset \Omega_i' \subset \overline{\Omega_i'} \subset \Omega^* - \overline{\Omega}$, pereme elsőrendben sima, amelynek metszete $\Omega_{\varepsilon_0}^*$-lal $(\Omega_{n-1})_{\varepsilon_0} \times (-i\delta)$ alakú, $(\delta i < \varepsilon)$ ahol δ a fent rögzített függvény. Vegyük $\varphi(\bar{x}, -x_n/i)$ középfüggvényét az $(\Omega^* - \overline{\Omega})i \supset \Omega^* - \overline{\Omega}$ tartományra. Ekkor figyelembe véve, hogy itt a külső normális ellentett lesz, felírhatjuk $\varphi(\bar{x}, -x_n/i)$-re a (4) összefüggést:

$$\int_{\Omega_i'} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \varphi_h\left(\bar{x}, -\frac{x_n}{i}\right) \psi \, dx =$$

$$= (-1)^k \int_{\Omega_i'} \varphi_h\left(\bar{x}, -\frac{x_n}{i}\right) \frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} dx - \tag{6}$$

$$- \sum_{l=1}^{k_n} (-1)^l \int_{(\Omega_{n-1})\varepsilon_0} \frac{\partial^{k-l}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}} \partial x_n^{k_n - l}} \varphi_h\left(\bar{x}, -\frac{x_n}{i}\right)\Big|_{x_n = -i\delta} \left| \frac{\partial^{l-1}}{\partial x_n^{l-1}} \right|_{x_n = -i\delta} d\bar{x}$$

Írjuk fel $\varphi_h(\bar{x}, -x_n/i)$-t és az integrálban végezzük el az $y_n' = -y_n/i$, $y_j' = y_j$ $(j = 1, \dots (n-1))$ helyettesítést. Legyen $y' = (y_1', \dots y_n')$, ekkor

$$\varphi_h\left(\bar{x}, -\frac{x_n}{i}\right) = \int_{(\Omega^* - \overline{\Omega})i} \omega_h(r_{xy}) \varphi\left(\bar{y}, -\frac{y_n}{i}\right) dy =$$

$$= i \int_{\Omega} \omega_h(\tilde{r}_{xy'}) \varphi(y') dy'$$

Helyettesítsük ezt be a (6) jobboldalán levő Σ jel alatti általános tagba. A deriválás és az $(\Omega_{n-1})_{\varepsilon_0}$-ra vett integrálás jelét felcserélve, majd $x_n' = -x_n/i$, $x_j' = x_j$ $(j = 1, \dots (n-1))$ transzformációt elvégezve kapjuk, hogy

$$\int_{(\Omega_{n-1})\varepsilon_0} \frac{\partial^{k-l}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}} \partial x_n^{k_n - l}} \varphi_h\left(\bar{x}, -\frac{x_n}{i}\right)\Big|_{x_n = -i\delta} \left| \frac{\partial^{l-1} \psi}{\partial x_n^{l-1}} \right|_{x_n = -i\delta} d\bar{x} =$$

$$= \left(-\frac{1}{i}\right)^{k_n - l} \int_{(\Omega_{n-1})\varepsilon_0} i \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-l}}{\partial x_1'^{k_1} \dots \partial x_{n-1}'^{k_{n-1}} \partial x_n'^{k_n - l}} \tag{7}$$

$$\omega_h(\tilde{\tilde{r}}_{x'y'}) \varphi(y') dy' \Big|_{x_n' = \delta} \left| \frac{\partial^{l-1} \psi(x)}{\partial x_n^{l-1}} \right|_{x_n = -i\delta} d\bar{x}'$$

ahol $x'=(x_1', \ldots x_n')$. Itt már ω_h deriválása az x' változó szerint megy. Írjuk fel $\tilde{\tilde{r}}_{x'y'}$-t:

$$\tilde{\tilde{r}}_{x'y'} = \{(x_1'-y_1')^2 + \ldots + (x_{n-1}'-y_{n-1}')^2 + i^2(x_n'-y_n')^2\}^{1/2} = \varrho_{x'y'}(i)$$

A 4. §. szerint $l=1, \ldots, k_n$-re

$$\left\| \frac{\partial^{k-l}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}} \partial x_n^{k_n-l}} i \int_{\Omega} \omega_h(\varrho_{xy}(i))\varphi(y)\,dy - D^{k-l}_{k_1 \ldots k_{n-1} k_n - l}\varphi \right\|_{L_p((\Omega_{n-1})_{\varepsilon_0} x \delta)} \leqq$$

$$\leqq M \|\varphi - \varphi_{h,i}\|_{W_p^{(k)}((\Omega_{n-1})_{\varepsilon_0} x (\delta, a-\varepsilon_0))} \to 0 \quad \text{ha} \quad h \to 0$$

A (7) baloldalának $h \to 0$-ra van határértéke, s ez:

$$(8) \qquad \left(-\frac{1}{i}\right)^{k_n-l} \int_{(\Omega_{n-1})\varepsilon_0} D^{k-l}_{k_1 \ldots k_{n-1} k_n - l}\varphi \left|_{x_n=\delta} \frac{\partial^{l-1}\psi}{\partial x_n^{l-1}}\right|_{x_n=-i\delta} d\bar{x}$$

A (6)-ban $h \to 0$-ra térve és felhasználva (8)-at, adódik:

$$\int_{\Omega_i'} D^k_{k_1 \ldots k_n}\varphi\left(\bar{x}, -\frac{x_n}{i}\right)\psi\,dx =$$

$$= (-1)^k \int_{\Omega_i'} \varphi\left(\bar{x}, -\frac{x_n}{i}\right) \frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\,dx - \sum_{l=1}^{k_n} (-1)^l$$

$$\left(-\frac{1}{i}\right)^{k_n-l} \int_{(\Omega_{n-1})\varepsilon_0} D^{k-l}_{k_1 \ldots k_{n-1} k_n - l}\varphi \left|_{x_n=\delta} \frac{\partial^{l-1}\psi}{\partial x_n^{l-1}}\right|_{x_n=-i\delta} d\bar{x}$$

ahol $\varphi(\bar{x}, -x_n/i)$ deriváltja, mint összetett függvény deriváltja értendő. Itt minden tagnak van határértéke ismét $\varepsilon \to 0$-ra. Végezzük ezt el, majd szorozzunk végig λ_i-vel, s az így nyert egyenlőségeket adjuk össze i-re. A (2)-ből kapjuk

$$\int_{\Omega^* - \bar{\Omega}} D^k_{k_1 \ldots k_n}\bar{\varphi}\,\psi\,dx = (-1)^k \int_{\Omega^* - \bar{\Omega}} \bar{\varphi} \frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\,dx - \sum_{l=1}^{k_n} (-1)^l \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$

$$(9) \qquad \left(-\frac{1}{i}\right)^{k_n-l} \lim_{\varepsilon=0} \int_{(\Omega_{n-1})\varepsilon_0} D^{k-l}_{k_1 \ldots k_{n-1} k_n - l}\varphi \left|_{x_n=\delta} \frac{\partial^{l-1}\psi}{\partial x_n^{l-1}}\right|_{x_n=-i\delta} d\bar{x}$$

felcserélve a két Σ jelet.

Az (5) egyenlőség nem függ i-től, ezért (5)-ben közvetlenül a lim jel elé beírható: $\sum_{i=1}^{k}(-1/i)^{k_n-l}\cdot\lambda_i$ figyelembe véve (1)-et, mivel $k_n-l\leqq \leqq k-1$. Az így módosított (5)-öt adjuk hozzá (9)-hez:

$$\int_{\Omega} D^k_{k_1\dots k_n}\varphi\,\psi\,dx+\int_{\Omega^*-\bar{\Omega}} D^k_{k_1\dots k_n}\bar{\varphi}\,\psi\,dx=$$

$$(10)\qquad =(-1)^k\int_{\Omega^*}\varphi^*\frac{\partial^k\psi}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\,dx+\sum_{l=1}^{k_n}(-1)^l$$

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(-\frac{1}{i}\right)^{k_n-l}\lim_{\varepsilon=0}\int_{(\Omega_{n-1})\varepsilon_0} D^{k-l}_{k_1\dots k_{n-1}k_n-l}\varphi\Big|_{x_n=\delta}\left\{\frac{\partial^{l-1}}{\partial x_n^{l-1}}\Big|_{x_n=\delta}-\frac{\partial^{l-1}\psi}{\partial x_n^{l-1}}\Big|_{x_n=-i\delta}\right\}d\bar{x}$$

Számítsuk ki a határértéket. $\partial^{l-1}\psi/\partial x_n^{l-1}$ egyenletes $\bar{\Omega}^*$-beli folytonossága miatt

$$\frac{\partial^{l-1}\psi}{\partial x_n^{l-1}}\Big|_{x_n=\delta}-\frac{\partial^{l-1}\psi}{\partial x_n^{l-1}}\Big|_{x_n=-i\delta}\Rightarrow 0,\quad \text{ha}\quad \varepsilon\to 0\quad \text{egyenletesen } x\text{-re.}$$

Továbbá a 11. tétel szerint és a Hölder egyenlőtlenségből:

$$\|D^{k-l}_{k_1\dots k_{n-1}k_n-l}\varphi\|_{L_1((\Omega_{n-1})\varepsilon_0\times\delta)}\leqq\lambda\big((\Omega_{n-1})_{\varepsilon_0}\big)^{1/q}M(\delta).$$

$$\|\varphi\|_{W_p^{(k)}((\Omega_{n-1}\varepsilon_0)\times(\delta,a-\varepsilon))}\leqq\lambda\big((\Omega_{n-1})_{\varepsilon_0}\big)^{1/q}M(\delta)\|\varphi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}$$

ahol λ az $(n-1)$ dimenziós mérték. Itt $M=M(\delta)$-t szükséges kiírni, mert $\varepsilon\to 0$-t fogjuk elvégezni. Azonban a 11. tétel bizonyításából kiderül, hogy ilyen speciális felületdarab sorozatra $M(\delta)$ nem függ a δ-tól; így mindezekből az adódik, hogy (10)-ben minden lim 0-val egyenlő. Az eredmény:

$$(11)\qquad \int_{\Omega} D^k_{k_1\dots k_n}\varphi\psi\,dx+\int_{\Omega^*-\bar{\Omega}} D^k_{k_1\dots k_n}\bar{\varphi}\psi\,dx=(-1)^k\int_{\Omega^*}\varphi^*\frac{\partial^k\psi}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}$$

Végül a

$$\varphi^k_{k_1\dots k_n}=\begin{cases} D^k_{k_1\dots k_n}\varphi & \text{ha}\quad x\in\Omega\\ D^k_{k_1\dots k_n}\bar{\varphi} & \text{ha}\quad x\in\Omega^*-\Omega\end{cases}$$

függvényre $\varphi^k_{k_1\dots k_n}\in L_p(\Omega^*)$, ezért $\varphi^*\in W_p^{(k)}(\Omega^*)$ q. e. d.

6. §. Kiegészítés a Szoboljev-féle disztribúció elmélethez

Legyen Ω tetszőleges tartomány és $1<p<+\infty$. A $W_p^{(k)}(\Omega)$ térbe bevezethető az alábbi norma:

$$\|\varphi\|_{W_{p,1}^{(k)}(\Omega)}=\{\|\varphi\|_{L_1(\Omega)}^p+\sum_{\Sigma k_i=k}\|D_{k_1\ldots k_n}^k\varphi\|_{L_p(\Omega)}^p\}^{1/p} \tag{12}$$

melyre a tér teljes. Ezentúl a $W_p^{(k)}(\Omega)$ teret ezzel a normával tekintjük.

Definíció: egy Ω tartományt kvázi csillagtartománynak nevezzük, ha fennáll rá a 6—11. tétel.

Mivel csillagtartomány esetén a (12) alatti norma ekvivalens az eredeti $W_p^{(k)}(\Omega)$-beli normával, ezért minden csillagtartomány egyben kvázi csillagtartomány is.

12. Tétel: Legyen $\Omega^{(1)}$ és $\Omega^{(2)}$ kvázi csillagtartomány.

Legyen továbbá vagy

a) $\overline{\Omega}^{(1)}\cap\overline{\Omega}^{(2)}=\emptyset$ vagy

b) $\Omega^{(1)}$ és $\Omega^{(2)}$ szummálható* és

$$\overline{\Omega}^{(1)}\cap\overline{\Omega}^{(2)}=\overline{\Omega^{(1)}\cap\Omega^{(2)}}$$

Ekkor $\Omega^{(1)}\cup\Omega^{(2)}$ is kvázi csillagtartomány. (A bizonyításra vonatkozókkal l. a bevezetésben mondottakat).

13. Tétel: Legyen Ω tetszőleges tartomány, $1<p<+\infty$ és $\varphi\in W_p^{(k)}(\Omega)$ tetszőleges függvény. Legyen Ω^0 tetszőleges olyan tartomány, amelyre $\overline{\Omega^0}\subset\Omega$. Ekkor fennáll, hogy

1. $\varphi\in L_p(\Omega^0)$
2. $\varphi\in W_p^{(l)}(\Omega^0)\quad l=1,\ldots,(k-1)$.
3. $0\leqq i\leqq k$ egész szám bármely $(i_1,\ldots i_n)$ felbontására

$$\|D_{i_1\ldots i_n}^i\varphi\|_{L_p(\Omega^0)}\leqq M\|\varphi\|_{W_{p,1}^{(k)}(\Omega)}$$

4. Mind a φ függvény mind annak legfeljebb $(k-1)$-edrendű általánosított deriváltjai a $\lambda^{(n)}$ mértékben 0 mértékű halmazon megváltoztathatók úgy, hogy mind a φ függvény, mind annak legfeljebb $(k-1)$-edrendű általánosított deriváltjai mindenütt értelmezve legyenek, $\overline{\Omega}$-on és ezekre a függvényértékekre fennálljanak az 5—7. alatti állítások:

* L. a 2. §. lábjegyzetét.

5. Ha $k > n/p$ és $0 \leqq i < k - n/p$ egész szám, akkor $\varphi \in C_i(\Omega)$ és az i szám minden $(i_1, \ldots, i_n)$ felbontására

$$\left\| \frac{\partial^i \varphi}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right\|_{C_0(\bar{\Omega}^0)} \leqq M \|\varphi\|_{W_{p,1}^{(k)}(\Omega)}$$

6. Ha k minden $(k_1, \ldots k_n)$ felbontására $D^k\varphi$ legfeljebb 0 mértékű halmazon megváltoztatható úgy, hogy $D^k\varphi \in C_0(\bar{\Omega})$ legyen, akkor $\varphi \in C_{k-1}(\Omega)$.

7. Legyen n' természetes szám és $n > n' > n - (k-i)p$. Legyen egy $\Omega^* \subset R_{n'+1}$ tartomány peremének egy S^* darabja reguláris és $S^* \subset \bar{\Omega}^0$. Ekkor a $0 \leqq i < k$ egész szám minden $(i_1, \ldots i_n)$ felbontására $D^i_{i_1 \ldots i_n}\varphi \in L_p(S^*)$ és

$$\|D^i_{i_1 \ldots i_n}\varphi\|_{L_p(S^*)} \leqq M \|\varphi\|_{W_{p,1}^{(k)}(\Omega)}$$

Megjegyzendő, hogy az M szám független a φ függvénytől, de függ az Ω^0 tartománytól.

Bizonyítás: Minden $x \in \bar{\Omega}^0$ ponthoz van olyan $G'_x = G(x, 2h_x)$ gömb, amelyre $G'_x \subset \Omega$. A $G''_x = G(x, h_x)$ nyílt halmazok rendszere lefedi a korlátos és zárt $\bar{\Omega}^0$ halmazt, tehát Borel-tétele szerint véges sok és lefedi azt. Rendezzük ezt sorozatba: $G''_1, \ldots, G''_m$ és vegyük a $G_i = G_i(x_i, r_i)$ gömböket, ahol $h_{x_i} \leqq r_i \leqq 2h_{x_i}$ számok egyelőre meghatározatlanok. Valamely ilyen r_1 mellett válasszuk meg az r_2 számot úgy, hogy a G_1 és G_2 gömbre a 12. tétel feltételei fennálljanak. Legyen $H_{12} = G_1 \cup G_2$ és válasszuk az r_3 számot úgy, hogy a H_{12} és a G_3 halmazra a 12. tétel feltételei fennálljanak, stb. Az r_i-k ilyen megválasztása mindig lehetséges. Végül a $H_{1 \ldots m}$ tartományt kapjuk, amely kvázi csillagtartomány és amelyre

$$\bar{\Omega}^0 \subset H_{1 \ldots m} \subset \Omega$$

Ezért $H_{1 \ldots m}$ halmazhoz tartozik a 9—11. tételek előtt említett 0 mértékű megváltoztatás, és így $\bar{\Omega}^0$-hoz is. Mivel

$$\Omega = \left(\bigcup_1^{+\infty} \Omega_{\frac{1}{m}} \right) \cup \bar{\Omega}^0,$$

ezért, ha $x \in \Omega$ és $x \in \bar{\Omega}^0$ akkor x pontban a 0 mértékű megváltoztatást az $\bar{\Omega}^0$ halmaz létesítheti. Ha $x \in \Omega$ de $x \notin \bar{\Omega}^0$ akkor van olyan m szám, amelyre

$$x \in \Omega_{\frac{1}{m}} - \Omega_{\frac{1}{m+1}}$$

Ebben az esetben az x pontban a függvényeket az $\Omega_{\frac{1}{m}}$ halmaz által fogjuk definiálni, ami megtehető $\overline{\Omega}_{\frac{1}{m}} \subset \Omega$ miatt. Végül $\overline{\Omega} - \Omega$ pontjaiban mind φ mind legfeljebb $(k-1)$-edrendű deriváltjai legyenek 0-k.

Ez legfeljebb 0 mértékű halmazon történő megváltoztatás. Ekkor fennáll a 4. pont.

A 12. tétel szerint ezekre a függvényértékekre a többi állítás nyilván fennáll. q. e. d.

IRODALOM

[1] С. Л. Соболев: Некоторые применения функционалного анализа в математической физике. [1950]

[2] Hassler Withney: Extension of differentiable functions. Transaction of the American Mathematical Society v. 36. (1934) 63—89 p.

[3] M. R. Hestenes: Extension of the range of a differentiable function. Duke Matematical Journal. *v. 8.* (1941) 183—192. p.

[4] Бабич: К вопросу о распространении функций. Успехи математических наук. т. 8. вып. 2. (54) [1953] 111-113.

О ВОПРОСЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИМЕЮЩИХ ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, ВНЕ ЗАДАННООЙ ОБЛАСТИ

Ш. Фривалдский

В данной работе изучается теория обобщенных функций Соболева. Дается новое обоснование работы (4), необходимой для теоремы о продолжении функций с обобщенными производными. Кроме того теорема 13. высказывает положение, действительное также и для не звездообразных областей.

ON EXTENSION FROM A GIVEN DOMAIN OF FUNCTIONS WITH GENERALIZED DERIVATIVES

S. Frivaldszky

This paper deals with distribution theory of Soboliev. A new proof for the statement of the paper [4] is given, wich is needed for the extension theorema of generalized differentiable function. Moreover, Theorem 13. contains a statement, which is valid for every, non star region too.

Konvex alakzatok egy rögzítési problémája

TOMOR BENEDEK

Helyezzünk egy kétforintost egy rajztáblára. Szúrjunk kerületének két-két átellenes pontjához egy-egy gombostűt; ezzel eltolással szemben rögzítettük a pénzdarabot. Ha e négy tű közül bármelyiket elvesszük, a kétforintost már el lehet tolni.

Általában tekintsünk egy konvex lemezt és egy pontrendszert, amely azt eltolással szemben rögzíti. A rögzítő pontrendszert *primitív*-nek nevezzük, ha bármelyik pont elhagyása esetén a lemez eltolható. Ilyen rendszert alkotnak pl. a szabályos hatszög csúcsai is a hatszögre vonatkozóan.

Felvethetjük a következő kérdést: legfeljebb hány pontból állhat egy tetszés szerinti konvex lemez primitív rögzítő rendszere? Más szóval: a „legügyetlenebb" rögzítéshez is legfeljebb hány pontra van szükségünk? Bebizonyítjuk a következő tételt:

Egy konvex lemezt eltolással szemben rögzítő primitív pontrendszer legfeljebb 6 pontból állhat. Ha pedig a lemez olyan, hogy kerületének minden pontjához csak egy támaszegyenes húzható, akkor a kérdéses szám 4.

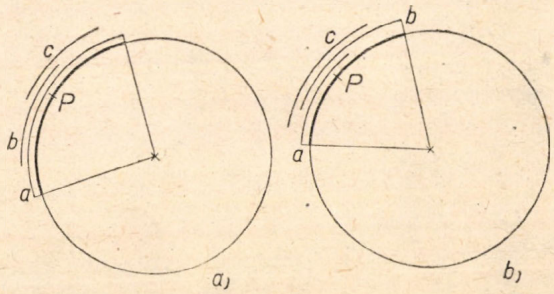
Ennek alapján 6-nál több („sima" görbe által határolt lemez esetén 4-nél több) rögzítő pont esetében tehát mindig van olyan pont, amelyet elhagyva a lemez rögzített marad. Az említett két példa mutatja, hogy 6, ill. 4 pontra viszont szükség lehet.

Bizonyításunk a következő segédtételen alapul:

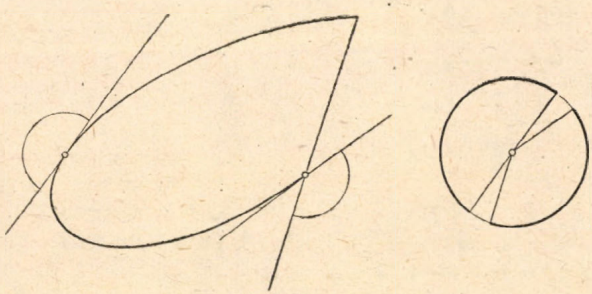
*Ha egy kör kerületét félkörnél nem nagyobb, nyílt íveinek egy rendszere lefedi úgy, hogy a körnek van legalább háromszorosan fedett pontja, akkor e körívek közül kevesebb is lefedi a körvonalat.**

* Ez a segédtétel általánosabb feltételek mellett is igaz, a továbbiakban azonban csak ebben a formájában lesz rá szükségünk.

Fedje le ugyanis a P pontot az a, b, és c körív. Tekintsük ezek egyesítését. Ha az így nyert körív határpontjai az a, b, c ívek valamelyikének (pl. a-nak) határpontjaival egybeesnek, akkor a másik két körív elhagyható. (1a ábra). Ha pedig az egyesítés határpontjai két különböző (pl. a és b) körív egy-egy határpontjával esnek egybe, akkor a harmadik hagyható el. (1b ábra.)



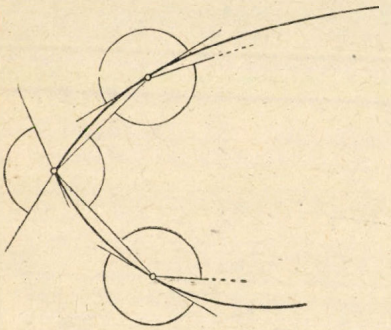
1. ábra



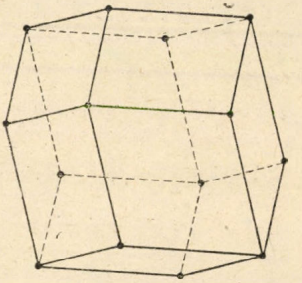
2. ábra

Lássuk most tételünk bizonyítását. Az eltolások irányát egy tetszőleges középpontú egységkör pontjainak a középpontra vonatkoztatott helyvektoraival jellemezhetjük. Minden rögzítő pont egy bizonyos szögtartományba eső eltolási irányokat zár ki, és ezeknek a szögtartományoknak az egységkörön egy-egy nyílt körív felel meg. Ha a kerület kérdéses pontjához csak egy támaszegyenes tartozik, akkor a kizárt szögtartomány az a nyílt félsík, amelyek a pontbeli támaszegyenes a konvex lemeztől elválaszt, a megfelelő körív hossza π. A Ha pedig a kérdéses pontba több támaszegyenes húzható, akkor a kizárt szögtartomány a támaszegyenesek által szabadon hagyott nyílt szögtartományok közül az, amelyik a lemezt nem tartalmazza: a megfelelő körív hossza ebben az esetben kisebb π-nél. (2. ábra.) Ha egy pontrendszer rögzítő rendszer, akkor az így meghatározott körívek rendszere lefedi a kört.

Jelöljük a rögzítő pontok számát n-nel, és tekintsük ezek konvex burkát. E sokszög belső szögei nem nagyobbak, mint a megfelelő pontok által kizárt szögtartományok. (3. ábra.) $n > 6$ esetén a sokszög szögeinek összege és így a kizárt szögtartományoknak megfelelő ívek összhossza nagyobb 4π-nél. Ez azt jelenti, hogy az egységkörön van háromszorosan fedett pont, és így segédtételünk értelmében van elhagyható körív, illetve elhagyható rögzítő pont. Ha a kerület minden pontjához csak egy támaszegyenes húzható, akkor már $n > 4$ esetén is van elhagyható pont, hiszen ebben az esetben minden körív π hosszúságú, és így az ívek összhossza nagyobb 4π-nél. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.



3. ábra



4. ábra

Látható a fenti bizonyításból, az is, hogy a primitív rögzítő pontrendszer pontszáma akkor is legfeljebb 4, ha a lemeznek legfeljebb egy csúcsa van, továbbá minden olyan lemezre legfeljebb 5, amely nem hatszög.

Bebizonyítható*, hogy a térben „sima" felület által határolt konvex test esetén 6, és sejthető, hogy tetszőleges konvex test esetén 14 a kérdéses szám. Hogy 14 pontra szükség lehet, azt a csúcsaiban rögzített rombdodekaéder példája mutatja. (4. ábra.) Lényegesen nehezebb problémákhoz jutunk, ha nemcsak eltolást, hanem tetszőleges mozgást is megengedünk.

* Fejes Tóth L.: On primitive polyhedra, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 13 (1962)

ПРОБЛЕМА ФИКСАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР

Б. Томор

Выпуклая плоская фигура зафиксируется против трансляции при помощи шести неподвижных крайных точек. Доказывается, что одна из этих точек излишна.

ÜBER DIE FIXIERUNG KONVEXER SCHEIBEN

B. Томок

Wir betrachten in der Euklidischen Ebene ein konvexes Gebiet und n Randpunkte, die das Gebiet gegen Verschiebungen fixieren. Es wird gezeigt, dass im Falle $n>6$ ein Punkt überflüssig ist.

Egy egydimenziós probléma

HEPPES ALADÁR

Ha egy hosszú, lámpákkal megvilágított úton végigmegyünk, általában azt tapasztaljuk, hogy a lámpák egyenlő távolságban követik egymást. Ha valakit megkérdeznénk, miért van ez így, valószínűleg azt felelné, azért, mert a szóban forgó útszakaszt az adott számú lámpa ilyen elrendezés mellett világítja meg a legegyenletesebben, (két különböző lámpaelrendezés által szolgáltatott megvilágítás közül azt nevezve egyenletesebbnek, amelynél az út legsötétebb pontja jobban van megvilágítva). Látni fogjuk, hogy ez a kérdés távolról sem olyan egyszerű, mint ahogy első pillanatra tűnik, s a nehézségekkel alighanem a lámpák elhelyezésének tervezői sincsenek tisztában.

Az optimális lámpaelosztás feladatát a következőképpen fogalmazhatjuk meg matematikailag: Jelölje $f(t)$ az alkalmazott lámpatípus *megvilágítási függvényét*, amely megadja, hogy egy lámpa a felállítási helyétől $t \geqq 0$ távolságban milyen megvilágítást hoz létre. Reális feltevés, hogy $f(t)$ monoton fogyó függvény, amelyre $\int_0^\infty f(t)\,dt < \infty$, hiszen az egyes lámpák nem sugároznak ki végtelen sok fényt. Ilyen feltevések mellett a számegyenes s sűrűségű[1] $\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ pontrendszerének pontjaiba helyezve a lámpákat, az egyenes bármely x pontjának $m(x) = \sum_{-\infty < i < +\infty} f(|x - x_i|)$ *megvilágítása* is véges érték lesz. Legyen $M_s = \sup[\inf_{-\infty < x < \infty} m(x)]$, azaz a különböző, s sűrűségű lámpaelrendezésekhez tartozó megvilágítások alsó határainak felső határa,

[1] Az egyenes valamely végtelen pontrendszerének sűrűségén a $\lim_{R \to \infty} \frac{N_R}{2R}$ határértéket értjük — amennyiben ez létezik —, ahol N_R a pontrendszer pontjainak számát jelenti az egyenes egy rögzített 0 pontjának R sugarú környezetében. Könnyű kimutatni, hogy a határérték létezése és értéke független az O pont választásától.

m_s pedig az s sűrűségű „ekvidisztáns" lámpaelosztáshoz tartozó megvilágítás alsó határa. Kérdés, hogy *adott $f(t)$ megvilágítási függvény és adott s sűrűség mellett mekkora M_s értéke, elérhető-e és ha igen, milyen lámpaelosztásra?*

Ezt a kérdést Fejes Tóth László vetette fel a közelmúltban. Elsőként L. Danzer[2] mutatott rá arra a meglepő tényre, hogy nem mindig az ekvidisztáns lámpaelrendezés a legkedvezőbb. Itt most egy egyszerű és eléggé általános konstrukciót adunk olyan megvilágítási függvények készítésére, amelyekre — legalábbis bizonyos sűrűség mellett — nem az ekvidisztáns lámpaelrendezés a legjobb, azaz amelyekre $M_s > m_s$.

Legyen $g(t)$ folytonos és monoton fogyó függvény, amelyre

$$g(0) = 1$$
$$g(1) = \tfrac{1}{2}$$
$$g(t) = 1 - g(2-t) \qquad 1 < t < 2$$

egyébként tetszőleges, és válasszunk megvilágítási függvénynek olyan folytonos és monoton fogyó függvényt, amelyre a

$$h(t) = g(t) \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$
$$h(t) > g(t) \qquad 1 < t < 2$$
$$h(t) = 0 \qquad 2 \leqq t$$

feltételek teljesülnek. Ha ilyen megvilágítási függvénnyel rendelkező lámpákat helyezünk el a számegyenes páros egész koordinátájú pontjaiban, akkor az eredő megvilágítás értéke az egész koordinátájú pontokban 1 lesz, másutt 1-nél nagyobb. Készítsünk most két ilyen 1/2 sűrűségű ekvidisztáns lámparendszerből egy 1 sűrűségűt. Ha a második rendszert az elsőből egységnyi eltolással nyerjük, azaz, ha az 1 sűrűségű egyesített rendszer is ekvidisztáns, az eredő megvilágítás minimális értéke 2 lesz, míg minden olyan eltolás esetén, amelynek hossza 0 és 1 közé esik, a két rendszer minimumhelyei nem esnek egybe, következésképp a megvilágítás minimuma > 2. Ez a konstrukció lehetőséget ad olyan megvilágítási függvények szerkesztésére is, amelyekről könnyen elképzelhető, hogy ma is használatos lámpafajtákat jellemeznek.

Újabb hasonló feladatokhoz jutunk, ha a legegyenletesebb megvilágítást az „egyenletesség" valamilyen más definíciója mellett keressük. Kiindulhatunk például abból, hogy két lámpaelrendezés közül annak a megvilágítását nevezzük egyenletesebbnek, amelyre

a) a megvilágítás alsó határa nagyobb (eredeti feladat),

b) a megvilágítás alsó és felső határa közti különbség kisebb,

[2] Diszkrét geometriai kollokvium, 1962. Obervolfach.

c) a megvilágítás átlagértékétől[3] való eltérés átlaga kisebb,
d) a megvilágítás átlagértékétől való eltérés négyzetének átlaga kisebb, stb.

A következőkben olyan megvilágítási függvényeket mutatunk, amelyekre — bizonyos s sűrűség esetén — a megvilágítás egyenletességének bármely értelmes definíciója mellett van az ekvidisztánsnál kedvezőbb lámpaelrendezés.

Tekintsük például egységnyi lámpasűrűség mellett az

$$f_1(t)=\begin{cases}1 & \text{ha} \quad 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}-t & \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1\\ 1-\frac{t}{2} & 1 \leqq t \leqq 2\\ 0 & 2 \leqq t\end{cases}$$

megvilágítási függvényt, amely a fentebb megadott típusba tartozik, következésképp ekvidisztáns elrendezés esetén a megvilágítás minimumhelyei egybeesnek a lámpák talppontjaival, ahol a megvilágítás értéke 2. Ha azonban a lámpákat a számegyenes $x=2k$ és $x=2k+\frac{1}{2}$ alakú helyeire tesszük (k egész), akkor a megvilágítás az egész számegyenesen állandó, ($M_{\cdot}=\frac{7}{4}$), ez pedig bármilyen értelmes egyenletességi definíció mellett egyenletesebb az ekvidisztáns elrendezés által szolgáltatott nemállandó megvilágításnál.

Hasonló a helyzet az

$$f_2(t)=\begin{cases}1-\frac{t}{2} & \text{ha} \quad 0 \leqq t \leqq 1\\ \frac{3}{2}-t & 1 \leqq t \leqq \frac{3}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} \leqq t\end{cases}$$

függvény esetében is, csupán a maximum és minimumhelyek szerepe

[3] A megvilágítás átlagértékén a $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} m(t)\,dt$ határértéket értjük, ahol $m(x)$ a megvilágítást jelöli.

cserélkődik fel. Ez a függvény azonban már nem tartozik a $h(t)$ típusú függvények közé.

Az ismertetett problémával kapcsolatban felvetődik még néhány további kérdés. *Van-e olyan megvilágítási függvény, s ha igen, melyek azok, amelyek bármely sűrűség mellett az ekvidisztáns elrendezés esetén szolgáltatják a legegyenletesebb megvilágítást?* A „lineáris megvilágítási függvények", amelyeknél a megvilágítás a távolság függvényében lineárisan csökken 0-ig, végtelen sok sűrűségértéknél teljesen egyenletes megvilágítást eredményeznek, ha egymástól egyenlő távolságra helyezzük el őket, nem ismeretes azonban, hogy milyen elrendezés mellett szolgáltatják a legegyenletesebb megvilágítást a többi sűrűségnél.

Fejes Tóth egy másik kérdése, vajon *nagy-e az eltérés az ekvidisztáns és a legkedvezőbb elrendezés megvilágításának egyenletessége között, illetve mi ennek az eltérésnek a maximuma?* Az a) típusú egyenletesség kérdését vizsgálva például lehet-e a legkedvezőbb és az ekvidisztáns lámpaelosztás adta megvilágítás minimumainak aránya nagyobb mint az

$$f_3(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \\ \frac{3}{2}-t & 1 \leqq t \leqq \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \leqq t \end{cases}$$

függvény esetében, ahol ez az arány 3/2?

ОБ ОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ

Аладар Хеппеш

Изучается вопрос, поставленный впервые Фейеш Тот, при каком порядке размещения ламп получается по прямой наиболее равномерное освещение лампами, расположенными вдоль прямой с заданной густотой „S" и каким образом зависит оптимальное размещение от функции освещния ламп $f(t)$, определяющей степень освещения на расстоянии t от основания лампы.

ON A ONE-DIMENSIONAL GEOMETRICAL PROBLEM

A. Heppes

Összefüggés az elsőfajú, 0-indexű Bessel-féle függvény és az integrálszinusz függvény között

HÓDI ENDRE

Az elsőfajú, 0-indexű Bessel-féle függvény és az integrálszinusz függvény között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)d\varphi = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}\,|x|. \tag{1}$$

A következőkben levezetjük az (1) alatti formulát. A levezetés azon a gondolaton alapszik, hogy kétféleképpen is kiszámítjuk egy koherens megvilágítású félsík kör alakú kilépő pupillával rendelkező, aberrációmentes optikai rendszer által létrehozott képében a fényrezgés (komplex amplitúdó) eloszlását, majd a két, különböző alakban kapott eredményt egyenlővé tesszük egymással.

Ha számításainkat a Kirchhoff-féle formulára alapozzuk, akkor [1] szerint a kép komplex amplitúdójának eloszlását a

$$C(y',z') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(y'-y, z'-z)\,\Omega(y,z)\,dy\,dz \tag{2}$$

integrálképlet írja le, ahol y és z a tárgysíkbeli, míg y' és z' a képsíkbeli derékszögű koordinátákat jelentik, mégpedig úgy, hogy a konjugált pontok koordinátái rendre megegyeznek egymással.

Továbbá:

$$A(y', z') = \frac{iR}{\lambda} e^{-ikR} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\beta,\gamma)\,e^{-ik(\beta y' + \gamma z')}\,d\beta\,d\gamma \tag{3}$$

a leképező rendszer ún. szórásfüggvénye, amely megadja a tárgysík kezdőpontjában levő egyetlen fényes pont képében a komplex amplitúdó eloszlását.

A (3)-ban szereplő többi szimbólum jelentése: β és γ a kilépő pupilla ún. szögkoordinátái, melyek a megfelelő η és ζ derékszögű koordinátákkal a következő kapcsolatban vannak:

$$\beta = \frac{\eta}{R}, \qquad \gamma = \frac{\zeta}{R}, \tag{4}$$

ahol R aberrációmentes képalkotó rendszerünk gyújtótávolsága.

Az ugyancsak (3) alatt található $F(\beta, \gamma)$ az ún. pupillafüggvény, amely aberrációmentes optikai rendszer esetén az

$$F(\beta, \gamma) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \beta^2 + \gamma^2 \leqq \dfrac{a^2}{R^2} = \alpha'^2, \\ 0, & \text{„} \quad \beta^2 + \gamma^2 > \dfrac{a^2}{R^2} = \alpha'^2 \end{cases} \tag{5}$$

képlettel van definiálva, ahol a a kilépő pupilla sugarát jelenti.

Ezenkívül λ az alkalmazott monokromatikus fény hullámhosszát jelöli, és $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Nem beszéltünk még a (2)-ben fellépő $\Omega(y, z)$ ún. tárgyfüggvényről. Ez a tárgy komplex amplitúdó-eloszlását jellemzi, esetünkben tehát célszerűen így definiálható:

$$\Omega(y, z) = \Omega(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -\infty < y \leqq 0, \\ 1, & \text{„} \quad 0 < y < \infty. \end{cases} \tag{6}$$

Végül megjegyezzük még, hogy a (2) és (3) formulák felírásakor hallgatólagosan azt is feltételeztük, hogy a képtérben egységnyi a törésmutató.

Ezek után lássunk hozzá a (2) alatti integrál kiszámításához! Tekintettel (3)-ra és (6)-ra, továbbá figyelmen kívül hagyva a jelentéktelen e^{-ikR} fázistényezőt, írhatjuk, hogy

$$C(y', z') = \frac{iR}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta, \gamma) e^{-ik[\beta(y'-y)+\gamma(z'-z)]} d\beta \, d\gamma \right\} \Omega(y) \, dy \, dz, \tag{7}$$

illetőleg a

$$y' - y = Y, \quad z' - z = Z \tag{8}$$

helyettesítések bevezetésével és az egyes változók szerinti integrálások sorrendjének célszerű kijelölésével:

$$(9)\quad C(y',z') = \frac{iR}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(y'-Y)\,dY\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik\beta Y}\,d\beta\int_{-\infty}^{\infty}F(\beta,\gamma)\,d\gamma\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik\gamma Z}\,dZ.$$

Mivel (9) jobb oldalán z' egyáltalán nem lép fel, ebből következik, hogy $C(y', z')$ valójában független z'-től. Indokolt tehát, hogy ezentúl egyszerűen csak $C(y')$-t írjunk helyette.

A Z szerinti integrál a Dirac-féle δ-függvény segítségével a következőképpen fejezhető ki [2]:

$$(10)\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{ik\gamma Z}\,dZ = 2\pi\delta(k\gamma) = \frac{2\pi}{k}\,\delta(\gamma) = \lambda\delta(\gamma).$$

Ennek figyelembevételével azután a γ szerinti integrál (l. ugyancsak [2]-t!):

$$(11)\quad \lambda\int_{-\infty}^{\infty}F(\beta,\gamma)\delta(\gamma)\,d\gamma = \lambda\cdot F(\beta,0).$$

(11) alapján mármost $C(y')$ így írható fel:

$$(12)\quad C(y') = iR\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(y'-Y)\,dY\int_{-\infty}^{\infty}F(\beta,0)e^{-ik\beta Y}\,d\beta.$$

Ami a hátralevő két változó szerinti integrálást illeti, (5)-öt és (6)-ot felhasználva azt minden nehézség nélkül el lehet végezni, úgyhogy eredményül ezt kapjuk:

$$(13)\quad C(y') = iR\lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}\,k\alpha' y'\right).$$

Megjegyezzük, hogy (13)-hoz a δ-függvény alkalmazása nélkül, pusztán Fourier-transzformációk útján is eljuthatunk, amint az [1]-ben is található.

Most ugyancsak a bennünket érdeklő speciális esetben, vagyis amikor $\Omega(y, z)$-re a (6) alatti definíció-egyenlet érvényes, másképpen is elő fogjuk állítani a (2) integrált. Mindenekelőtt azt állítjuk, hogy

$$(14)\quad A(y',z') = iR\alpha'\cdot\frac{J_1(k\alpha'\sqrt{y'^2+z'^2})}{\sqrt{y'^2+z'^2}},$$

ahol J_1 az elsőfajú, 1-indexű Bessel-féle függvényt jelöli. A (14) alatti formula helyességének igazolása, — melyben ismét figyelmen kívül hagytuk a jelentéktelen e^{-ikR} fázistényezőt, — (3)-ból kiindulva polárkoordináták bevezetésével, az elsőfajú, 0-indexű Bessel-féle függvény egy ismert integrál-előállításának felhasználásával és egy, ugyanerre a függvényre vonatkozó, szintén meglehetősen ismert integrálformula segítségével történhetik, éppen ezért eltekintünk annak további részletezésétől.

(6) és (14) alapján tehát

$$(15) \qquad C(y', z') = iR\alpha' \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1[k\alpha'\sqrt{(y'-y)^2+(z'-z)^2}]}{\sqrt{(y'-y)^2+(z'-z)^2}} dy\, dz,$$

ami a (8) alatti helyettesítések bevezetésével a következő alakot ölti:

$$(16) \qquad C(y', z') = iR\alpha' \int_{-\infty}^{y'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(k\alpha'\sqrt{Y^2+Z^2})}{\sqrt{Y^2+Z^2}} dY\, dZ = C(y').$$

Legyen először $y' = 0$, és számítsuk ki ebben az esetben a (16) integrált! A

$$(17) \qquad Y = \varrho \cos\varphi, \quad Z = \varrho \sin\varphi$$

egyenletekkel polárkoordinátákra térve át, azt kapjuk, hogy

$$(18) \qquad C(0) = iR\alpha' \int_0^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} J_1(k\alpha'\varrho)\, d\varrho\, d\varphi,$$

amit a szokásos módon kiszámítva, az alábbi eredményhez jutunk:

$$(19) \qquad C(0) = \frac{1}{2} iR\lambda.$$

$y' > 0$ esetén (16) így alakul:

$$(20) \qquad C(y') = \frac{1}{2} iR\lambda + iR\alpha' \int_0^{y'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(k\alpha'\sqrt{Y^2+Z^2})}{\sqrt{Y^2+Z^2}} dY\, dZ,$$

illetőleg ismét polárkoordinátákra térve át:

$$C(y')=\frac{1}{2}iR\lambda+iR\alpha'\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{0}^{\frac{y'}{\cos\varphi}}J_1(k\alpha'\varrho)\,d\varrho, \tag{21}$$

ahonnan végül is

$$C(y')=iR\lambda\left[1-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}J_0\left(\frac{k\alpha'y'}{\cos\varphi}\right)d\varphi\right]. \tag{22}$$

Hasonló okoskodással nyerjük, hogy ha $y'<0$, akkor

$$C(y')=\frac{iR\lambda}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}J_0\left(\frac{k\alpha'y'}{\cos\varphi}\right)d\varphi. \tag{23}$$

(22), illetőleg (23) és (13) egybevetéséből, valamint a $k\alpha'y'=x$ rövidebb jelölés felhasználásával adódik azután (1).

IRODALOM

[1] André Maréchal: Contraste des images de quelques objets types dans un instrument stigmatique. Revue d'Optique. 32 (1953): Pp. 649–660.
[2] A. N. Tyihonov – A. A. Szamarszkij: A matematikai fizika differenciálegyenletei. Akadémiai Kiadó. Budapest, 1956.

О СВЯЗИ МЕЖДУ ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА С ИНДЕКСОМ 0 И ФУНКЦИЕЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО СИНУСА

Э. Ходи

CONNECTION BETWEEN BESSEL FUNCTIONS OF FIRST ORDER AND INDEX 0, AND THE INTEGRAL SINE FUNCTION

E. Hódi

Egy Eneström—Kakeya típusú tételről

CHRISTO KARANICOLOFF

VINCZE ISTVÁNtól [1] származik a következő tétel, amely analóg ENESTRÖM—KAKEYA speciális polinomokra vonatkozó gyökelhatárolási tételével:

Ha az $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *komplex számokhoz található olyan* (φ, ψ) *szögpár, hogy* $|\varphi - \psi| < \pi$

$$\alpha_k = a_k e^{i\varphi} + b_k e^{i\psi}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots n$$

és

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq 0,$$

(1)

$$b_0 \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n \geqq 0,$$

akkor a

(2) $$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n$$

egyenletnek nincs gyöke a

$$\varrho_0 = \frac{|\alpha_0|}{a_0 + b_0}$$

sugarú körön belül. A $\varphi = \psi$ esetben az Eneström—Kakeya tételt kapjuk.

Vincze István felvetette dolgozatában azt a kérdést, hogy vajon a ϱ_0 pontos határ-e a $\varphi - \psi \neq 0$ esetben. Ezt a kérdést most negatív értelemben válaszoljuk meg, amennyiben *megmutatjuk, hogy a tételben adott feltétel mellett, ha*

(3) $$n \geqq 2 \quad \text{és} \quad a_n + b_n \neq 0,$$

akkor a (2) *egyenlet egyetlen gyöke sem fekhet azon* ϱ_1 *sugarú körön belül,*

amelyre

$$\varrho_1 = \frac{-(a_0+b_0-a_1-b_1)+\sqrt{(a_0+b_0-a_1-b_1)^2+4|\alpha_0|(a_1+b_1)}}{2(a_1+b_1)} \tag{4}$$

és $1>\varrho_1>\varrho_0$ *érvényesek.*

Bizonyítás: Az [1] dolgozatban is alkalmazott Hurwitz-féle egyenlőtlenségből indulunk ki; ha $|z|<1$, akkor

$$|(1-z)\varphi(z)| = |\alpha_0-(\alpha_0-\alpha_1)z-(\alpha_1-\alpha_2)z^2-\ldots-(\alpha_{n-1}-\alpha_n)z^n-\alpha_n z^{n+1}| =$$

$$= |\alpha_0 - e^{i\varphi}[(a_0-a_1)z+(a_1-a_2)z^2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)z^n+a_n z^{n+1}] -$$

$$-e^{i\psi}[(b_0-b_1)z+(b_1-b_2)z^2+\ldots+(b_{n-1}-b_n)z^n+b_n z^{n+1}]| \geqq$$

$$\geqq |\alpha_0| - (|a_0-a_1|\,|z|+|a_1-a_2|\,|z|^2+\ldots+|a_{n-1}-a_n|\,|z|^n+|a_n|\,|z|^{n+1}) -$$

$$-(|b_0-b_1|\,|z|+|b_1-b_2|\,|z|^2+\ldots+|b_{n-1}-b_n|\,|z|^n+|b_n|\,|z|^{n+1}).$$

Ha itt $|z|$-nek kettőnél magasabb hatványait $|z|^2$-el helyettesítjük, ami által a jobboldalt nem növeljük, akkor ezen egyenlőtlenségből — az (1) és (3) feltételek figyelembevételével — a következőt nyerjük:

$$|(1-z)\varphi(z)| > |\alpha_0| - (a_0+b_0-a_1-b_1)\varrho-(a_1+b_1)\varrho^2, \tag{5}$$

ahol az $|z|=\varrho$ jelölést használtuk.

Vizsgálva az

$$f(\varrho)\equiv|\alpha_0|-(a_0+b_0-a_1-b_1)\varrho-(a_1+b_1)\varrho^2 = 0$$

egyenletet, megállapíthatjuk, hogy egyetlen pozitív gyöke van: a (4) alatti ϱ_1 érték, továbbá $f(\varrho)>0$, ha $0\leqq\varrho<\varrho_1$.

A mondottakból azonnal következik, hogy az (5) miatt a $\varphi(z)=0$ egyenletnek nem lehet gyöke a $|z|\leqq\varrho_1$ körlemezen; továbbá mivel egyrészt

$$f(\varrho_0)=f\left(\frac{|\alpha_0|}{a_0+b_0}\right)=\frac{(a_1+b_1)|\alpha_0|}{a_0+b_0}\left(1-\frac{|\alpha_0|}{a_0+b_0}\right)>0,$$

ennélfogva $\varrho_0<\varrho_1$, másrészt

$$f(1)=(a_0+b_0)\left[\frac{|\alpha_0|}{a_0+b_0}-1\right]<0$$

és így $1>\varrho_1$. Ezzel állításunkat $n\geqq 2$-re bebizonyítottuk.

Azonban a ϱ_0 határ $n=1$ esetben sem pontos. Ugyanis az

$$\alpha_0+\alpha_1 z = 0$$

egyenlet gyökére feltételeink szerint a

$$\left|-\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right| > \varrho_0 = \frac{|\alpha_0|}{a_0 + b_0}$$

reláció érvényes.

Megjegyzés: Továbbmenően, minthogy

$$f(\varrho_0) > 0, \quad f\left(\left|\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right|\right) < 0$$

a ϱ_1 érték a ϱ_0, $\left|\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right|$ nyitott intervallumba esik, vagyis

$$\left|\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right| > \varrho_1 .$$

(Megjegyezzük, hogy feltételeink szerint az $|\alpha_0| < |\alpha_1|$ eset is fennállhat, pl. $\alpha_0 = 1 + e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $\alpha_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$).

IRODALOM

[1] Vincze István: Az Eneström-Kakeya tételről. Matematikai Lapok, 10 (1959) 127–132.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТИПА ЭНЕСТРЁМА–КАКЕЙЯ

Х. Караниколов

Иштван Винце в его работе (1) распространяет теоремы Энестрёма–Какейя на случай комплексных коэффициентов и устанавливает теорему:

Уравнение

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n = 0 \tag{1}$$

не имеет корня внутри круга радиуса

$$\varrho_0 = \frac{|\alpha_0|}{a_0 + b_0} \geqq \left|\cos\frac{\varphi - \psi}{2}\right|$$

где

$$\alpha_k = a_k e^{i\varphi} + b_k e^{i\psi} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n);$$

$$|\varphi - \psi| < \pi;$$

$$a_0 \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq 0; \qquad (a_n + b_n > 0)$$

$$b_0 \geqq b_1 \geqq \ldots \geqq b_n \geqq 0.$$

и, наконец, он сообщает, что остается открытым вопрос, является ли радиус ϱ_0 найбольшим в случае $\varphi \neq \psi$.

Автор настоящей статьи дает отрицательный ответ на этот вопрос, а именно, он устанавливает, что уравнение (1) не имеет корня внутри круга радиуса

$$\varrho_1 = \frac{-(a_0+b_0-a_1-b_1)+\sqrt{(a_0+b_0-a_1-b_1)^2+4|a_0|\,(a_1+b_1)}}{2(a_1+b_1)} > \varrho_0.$$

ON A THEOREM OF TYPE ENESTRÖM–KAKEYA

CH. KARANICOLOFF

VINCZE ISTVÁN [1] considered an analogon of the theorem of ENESTRÖM–KAKEYA for complex coefficients. He proved the following theorem.

The equation

$$(1) \qquad a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n=0$$

with

$$a_k=a_ke^{i\varphi}+b_ke^{i\psi}, \qquad k=0,1,2,\ldots,n$$

and

$$|\varphi-\psi|<\pi,$$

$$a_0\geqq a_1\geqq\ldots\geqq a_n\geqq 0 \qquad (a_n+b_n>0)$$

$$b_0\geqq b_1\geqq\ldots\geqq b_n\geqq 0$$

has no roots inside the circle $|z|<\varrho_0$, where

$$\varrho_0=\frac{|a_0|}{a_0+b_0}\geqq\left|\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\right|.$$

Finally, he stated as an open question, whether the limit ϱ_0 is exact in the case $\varphi\neq\psi$.

The author of this paper gave a negative answer to the latter question, by proving that the equation (1) has no roots inside the circle $|z|\leqq\varrho_1$, where

$$\varrho_1=\frac{-(a_0+b_0-a_1-b_1)+\sqrt{(a_0+b_0-a_1-b_1)^2+4|a_0|\,(a_1+b_1)}}{2(a_1+b_1)}>\varrho_0.$$

Megjegyzések a konvergencia fogalmának axiómatikus bevezetéséhez

KÁNTOR SÁNDOR

E folyóirat előző számában[1] Gesztelyi Ernő a nullsorozatok halmazát a következőképpen definiálta:

„A korlátos sorozatok R_0 halmazát a nullsorozatok halmazának nevezzük, ha a benne levő — nullsorozatoknak nevezendő — sorozatokra teljesülnek a következő tulajdonságok (axiómák):

I. Valamely $\{c\}=(c, c, \ldots)$ konstans sorozat akkor és csak akkor nullsorozat, ha $c=0$. Ezenkívül az R_0 tartalmaz legalább egy olyan $\{a_n\}$ sorozatot, melynek minden tagja különbözik zérustól.

II. Ha $\{c_n\}=(c_1, c_2, \ldots)$ tetszőleges korlátos sorozat, és $\{a_n\}=(a_1, a_2, \ldots)$ nullsorozat, akkor a $\{c_n a_n\}=(c_1 a_1, c_2 a_2, \ldots)$ sorozat nullsorozat.

III. Nullsorozatnak bármely részsorozata is nullsorozat.

IV. Ha egy sorozatról tudjuk, hogy bármely részsorozatából kiválasztható egy nullsorozat, akkor az adott sorozat is nullsorozat."

Ezt a definíciót némiképp egyszerűsíthetjük anélkül, hogy nehezebben kezelhető lenne, vagy más fogalmat definiálna. Ugyanis a nullsorozatok korlátosságát bizonyítani lehet; s a nehézkes IV. axióma helyett elgendő azt megkívánni, hogy a sorozathalmaz legbővebb legyen. A nullsorozatok halmazának definíciója tehát a következő:

Az olyan sorozathalmazok közül, amelyek — elemeiket nullsorozatnak nevezve — kielégítik az I—II—III axiómákat, a legbővebbet a nullsorozatok halmazának nevezzük és S_0-lal jelöljük[2].

Ettől a definíciótól is eljuthatunk lényegében az [1]-ben követett módszerrel egyrészt annak bizonyításáig, hogy $S_0=C$, ahol C a Cauchy-féle értelemben vett nullsorozatok halmazát jelöli; másrészt az alkal-

[1] [1] GESZTELYI ERNŐ, A konvergencia fogalmának egy axiomatikus bevezetéséről, Mat. Lapok 12 (1961) 190—195.

[2] Ezt úgy értjük, hogy az I—II—III axiómáknak eleget tevő bármely sorozathalmaz része S_0-nak; az S_0 létezését a 4. tétel biztosítja.

mazást jelentő tételekig, mint pl. nullsorozat korlátos, vagy nullsorozatok összege és szorzata is nullsorozat. Röviden vázoljuk ezt a két utat.

1. tétel. $\{a_n\}$ akkor és csak akkor nullsorozat, ha $\{|a_n|\}$ nullsorozat.

2. tétel. Ha $\{a_n\}$ nullsorozat és $0 \leqq b_n \leqq a_n$, akkor $\{b_n\}$ is nullsorozat.

3. tétel. Az I—II—III axiómának eleget tevő bármely halmaz része C-nek.

Ezeknek a tételeknek [1]-ben az 1., 2., ill. 5. számú tételek felelnek meg, s mivel ott a bizonyításhoz csak az I—II—III axiómákra volt szükség, ezért az új definíció mellett is igazak. [1] 4. tétele alapján C kielégíti az I—II—III axiómákat, így a 3. tétel alapján érvényes a

4. tétel. S_0 létezik és egyenlő C-vel.[3]

Az alkalmazás szempontjából fontos tételek:

5. tétel. Minden nullsorozat korlátos.

Ha $\{a_n\} \in S_0$ és nem korlátos, akkor egy $\{a_{n_k}\}$ végtelen részsorozatának tagjaira $|a_{n_k}| \geqq 1$ teljesül. A III. axióma alapján $\{a_{n_k}\} \in S_0$, tehát az 1. tételből $\{|a_{n_k}|\} \in S_0$, és így a 2. tételből $\{1\} \in S_0$ következik. De ez ellenkezik az I. axiómával, tehát $\{a_n\}$ korlátos.

6. tétel. Ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ nullsorozat, akkor $\{a_n + b_n\}$ is az.

S_0-t bővítsük ki $\bar{S}_0$ halmazzá az $\{(a_{n_k} + b_{n_k})c_k\}$ sorozatokkal, ahol $\{a_{n_k}\}$ és $\{b_{n_k}\}$ az $\{a_n\}$, ill. $\{b_n\}$ valamilyen részsorozata, és $\{c_k\}$ egy korlátos sorozat. Kimutatjuk, hogy S_0 kielégíti az I—II—III axiómákat.

Az I. axióma teljesül, mert $(a_{n_k} + b_{n_k})c_k = c$ esetén végtelen sok n_k-ra vagy $|a_{n_k} \cdot c_k| \geqq \frac{|c|}{2}$, vagy $|b_{n_k} c_k| \geqq \frac{|c|}{2}$ érvényes. a_n vagy b_n ezen részsorozata $\{c_k\}$-val szorozva a III. axióma, ill. a II. axióma miatt S_0-ben van, tehát a 2. tétel miatt $\frac{|c|}{2}$ is nullsorozat, így az I. axióma miatt $c = 0$. $\bar{S}_0$-nak zérustól különböző sorozata nyilván van.

[3] Egyedül a 4. tétel bizonyításánál szerepelt az, hogy S_0 legbővebb, és [1]-ben is egyedül a $C = R_0$ bizonyításához nélkülözhetetlen $C \subseteq R_0$ indokolásához kell a IV. axióma. A $C \subseteq R_0$ azonban nem azonos [1] 4. tételével, de könnyen igazolható.

Ugyanis az I. axióma miatt van olyan $\{a_n\} \in R_0$ sorozat, melynek elemei különböznek zérustól. Az 1. tétel miatt $\{|a_n|\} \in R_0$.

Ha $\{c_n\} \in C$, akkor $\{c_n\}$ egy tetszőleges $\{c_{n_k}\}$ részsorozatának vannak olyan különböző indexű c_{m_n} elemei, amelyekre $|c_{m_n}| < |a_n|$ teljesül, tehát a fenti 2. tételből $\{|c_{m_n}|\} \in R_0$, az 1. tételből $\{c_{m_n}\} \in R_0$, s a IV. axióma alapján $\{c_n\} \in R_0$ következik.

A II. axióma teljesül, mert ha $\{c'_k\}$ korlátos, akkor $\{c_k \cdot c'_k\}$ is az, és így $[(a_{n_k}+b_{n_k})c_k]c'_k = (a_{n_k}+b_{n_k})(c_k c'_k) \in \bar{S}_0$.

A III. axióma triviálisan teljesül.

S_0 maximális volt, tehát $S_0 = \bar{S}_0$ s így $\{a_n+b_n\} \in S_0$.

A további alkalmazások szempontjából már nincs különbség a kétféle definíció között. Bizonyítással együtt átvehetők [1]-ből a 7—11. számú tételek, pl. az, hogy nullsorozatok szorzata is nullsorozat.

Végül bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy az I—II—III. axiómák függetlenek. Az alábbi S_I, S_II, ill. S_III sorozathalmaz nem teljesíti az I, II, ill. III. axiómákat, de a másik kettőt igen:

S_I az az összes sorozatok halmaza.

S_II elemei Cauchy-sorozatok és a $\left\{c_n + \frac{1}{c_n}\right\}$ alakú sorozatok, ahol c_n olyan Cauchy-sorozat, melynek elemei különböznek zérustól.

S_III elemei a Cauchy-sorozatok, továbbá az $\{[1+(-1)^n]na_n\}$ alakú sorozatok, ahol $\{a_n\}$ korlátos sorozat.

ПРИМЕЧАНИЕ К АКСИОМАТИЧЕСКОМУ ВВЕДЕНИЮ ПОНЯТИЯ СХОДИМОСТИ

Ш. Кантор

NOTE ON THE AXIOMATIC INTRODUCTION OF THE NOTION OF CONVERGENCE

S. Kántor

Megjegyzés Gesztelyi Ernő egy dolgozatához

DOBÓ ANDOR—SZAJCZ SÁNDOR*

Gesztelyi Ernő „A konvergencia fogalmának egy axiomatikus bevezetéséről" című, a Matematikai Lapok 12/1961/3—4. számában megjelent dolgozatában a konvergencia fogalmának felépítését a korlátos nullsorozatok halmazának alábbi tulajdonságaival tárgyalja.

A szerző szövegezését és jelölését használva, a korlátos sorozatok R_0 halmazát akkor nevezzük a nullsorozatok halmazának, ha a benne levő — nullsorozatoknak nevezendő — sorozatokra teljesülnek a következő tulajdonságok (axiómák):

I. Valamely $\{c\}=(c, c, \ldots)$ konstans sorozat akkor és csak akkor nullsorozat, ha $c=0$. Ezenkívül az R_0 tartalmaz legalább egy olyan $\{\alpha_n\}$ sorozatot, melynek minden tagja különbözik zérustól.

II. Ha $\{c_n\}=(c_1, c_2, \ldots)$ tetszőleges korlátos sorozat és $\{a_n\}=$ $=(a_1, a_2, \ldots)$ nullsorozat, akkor a $\{c_n a_n\}=(c_1 a_1, c_2 a_2, \ldots)$ sorozat is nullsorozat.

III. Nullsorozatnak bármely részsorozata is nullsorozat.

IV. Ha egy sorozatról tudjuk, hogy bármely részsorozatából kiválasztható egy nullsorozat, akkor az adott sorozat is nullsorozat.

Ezt követően a szerző megmutatja, hogy ez az I—IV tulajdonság teljesen jellemzi a Cauchy-féle értelemben vett nullsorozatokat.[1]

Végezetül rámutat arra, hogyan kerülhető el a Cauchy-féle értelemben vett nullsorozatok definíciójának alkalmazása.

Ezúton elsőnek arra kívánunk rámutatni, hogy a Gesztelyi Ernő által kimondott 6. tétel a 4. és 5. tételnek nem egyszerű átfogalmazása,

* Szerkesztőség megjegyzése: E dolgozat, valamint az előtte álló dolgozat eredményei ha sok tekintetben fedik is egymást, függetlenül keletkeztek. A szerkesztőség mindkét cikknek helyet ad azon megjegyzéssel, hogy Kántor dolgozata 1962. ápr. 6.-án érkezett be, míg a fenti cikk máj. 11.-én.

[1] Cauchy-féle értelemben nullsorozatnak nevezzük az $\{a_n\}$ sorozatot, ha tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van olyan $N(\varepsilon)$, hogy ha $n>N(\varepsilon)$, akkor $|a_n|<\varepsilon$.

mint ahogyan azt a szerző dolgozatában állítja, hiszen erre könnyű ellenpéldát mondani. Ahelyett azonban, hogy ellenpéldát közölnénk, itt bizonyítást adunk a 6. tételre, mely szerint:

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\{a_n\}$ nullsorozat legyen az, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz legyen olyan N, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n| < \varepsilon$. (6. tétel.)

Bár a tétel igaz, de mivel ez lényegében a dolgozat központi tétele és bizonyítva nincs, (nem a 4. és 5. tételnek egyszerű átfogalmazása), ezért úgy gondoljuk, mindenképpen igazolásra szorul.

Bizonyítás: Jelöljük C-vel mindazon sorozatok halmazát, melyek Cauchy-féle értelemben nullsorozatok. Akkor a szerző által definiált $R_0 = C$. Ugyanis ha tetszőleges $\{a_n\} \in R_0$, akkor az 5. tétel értelmében Cauchy-féle értelemben nullsorozat, azaz

$$\{a_n\} \in C.$$

Ebből következik, hogy $R_0 \subseteq C$. Gesztelyi E. dolgozata végén (4. pont) bizonyította, hogy $\left\{\frac{1}{n}\right\} \in R_0$-nak. Tekintsünk egy tetszésszerinti $\{c_k\} \in C$ sorozatot. Választva a $\{c_k\}$ sorozat $\{c_{k_i}\}$ tetszésszerinti részsorozatát, akkor $\{c_{k_i}\} \in C$.

Ebből következik, hogy tetszőleges n-hez található olyan c_{k_i}, melyre $0 \leqq |c_{k_{i_n}}| \leqq \frac{1}{n}$. Ekkor viszont a szerző 2. tétele értelmében[2] a $\{c_{k_{i_n}}\} \in R_0$-nak, s így a IV. axióma szerint $\{c_k\} \in R_0$. Ez viszont azt jelenti, hogy $C \subseteq R_0$, vagyis $C = R_0$. Q. e. d.

Itt kívánjuk megjegyezni, hogy mivel a 6. tételt a 4. tétel felhasználása nélkül bizonyítottuk, így a 4. tétel egyszerű következménye a 6. tételnek.

A következőkben megmutatjuk még, hogy a III. axióma egy gyengébb megfogalmazásban is elégséges a vizsgálatokhoz, valamint azt, hogy ha a korlátos sorozatok R halmaza mindazon — nullsorozatnak nevezendő — sorozatokat tartalmazza és csak azokat, amelyek eleget tesznek a következő tulajdonságoknak:

I°. Valamely $\{c\} = (c, c, \ldots)$ konstans sorozat akkor és csak akkor nullsorozat, ha $c = 0$. Ezenkívül az R tartalmaz legalább egy olyan $\{\alpha_n\}$ sorozatot, amelynek minden tagja különbözik zérustól.

II°. Ha $\{c_n\} = (c_1, c_2, \ldots)$ tetszőleges korlátos sorozat, és $\{a_n\} = (a_1, a_2, \ldots)$ nullsorozat, akkor a $\{c_n a_n\} = (c_1 a_1, c_2 a_2, \ldots)$ sorozat is nullsorozat.

[2] Megjegyezzük, hogy G. E. dolgozatának 2. tétele az alábbi általánosabb esetben is fennáll. Ha $\{a_n\}$ nullsorozat, $\{b_n\}$ pedig olyan sorozat, melynek minden tagjára $0 \leqq |b_n| \leqq |a_n|$, $(n = 1, 2, \ldots)$ akkor $\{b_n\}$ nullsorozat.

III°. Nullsorozat bármely részsorozata is nullsorozat, ha a részsorozatot a nulltagok elhagyásával nyerjük az eredeti sorozatból,[3] akkor a IV. axióma tételként bizonyítható. Természetesen ha R ilyen értelmezését axiómának tekintjük, (bár ez nem indokolt) akkor itt a különben eléggé erősnek és nehézkesen kezelhetőnek mondható IV. axióma egy újabb axiómával való helyettesítéséről van szó.

A II°. és III°. axiómákból már következik az alábbi

1. *Tétel:* Nullsorozat bármely részsorozata is nullsorozat.

Bizonyítás: Jelölje $\{\alpha_n\}$ az $\{a_n\}$ nullsorozat egy tetszőleges részsorozatát. Legyen

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad a_n \in \{\alpha_n\} \\ 0 & \text{ha} \quad a_n \notin \{\alpha_n\} \end{cases}$$

Minthogy c_n korlátos sorozat, így

$$\{c_n a_n\} = (c_1 a_1, c_2 a_2, \ldots) = (\beta_1, \beta_2, \ldots) = \{\beta_n\}$$

A II°. axióma értelmében $\{\beta_n\}$ nullsorozat, mivel pedig $\{\alpha_n\}$ olyan részsorozata a $\{\beta_n\}$ nullsorozatnak, melyet nulltagok elhagyásával nyerünk, ezért a III°. axióma értelmében $\{\alpha_n\}$ nullsorozat. Q. e. d.

Az R közölt értelmezése mellett a IV. axióma bizonyítása a következő tétel felhasználásával történik.

2. *Tétel:* A fent definiált R halmaz azonos a Cauchy-féle értelemben vett nullsorozatok C halmazával.

Bizonyítás: Ha tetszőleges $\{a_n\} \in R$ halmaznak, akkor Gesztelyi E. 5. tételéből, — melyben a IV. axióma nincs kihasználva — következik, hogy $\{a_n\} \in C$. Ez azt jelenti, hogy $R \subseteq C$. Viszont a szerző 4. tétele kimondja, hogy a Cauchy-féle értelemben vett nullsorozatok halmaza eleget tesz az I°—III°. axiómáknak. Ebből következik, hogy $C \subseteq R$, azaz $C = R$. A fentieknek már következménye, hogy a IV. axióma teljesül az R-ben, ugyanis a C-ben a 4. tétel értelmében teljesül. Fennáll tehát a következő

3. *Tétel:* Ha egy sorozatról tudjuk, hogy bármely részsorozatából kiválasztható egy nullsorozat, akkor az adott sorozat is nullsorozat.

A nullsorozatok egy további számolási szabályaként bizonyítjuk az alábbi tételt.

4. *Tétel:* Ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ nullsorozat, akkor az ezek „egyesítésével" keletkező $\{c_n\}$ sorozat is nullsorozat, ahol bármely c_n vagy az $\{a_n\}$, vagy a $\{b_n\}$ sorozatnak eleme.

[3] Mint látható az I°. és II°. tulajdonság azonos az I. és II. tulajdonsággal, eltérés csak a III. és III°. között van.

Bizonyítás: Legyen $\{\gamma_n\}$ egy tetszésszerinti részsorozata a $\{c_n\}$ sorozatnak. Minthogy a $\{c_n\}$ bármely részsorozatában az $\{a_n\}$ vagy a $\{b_n\}$ sorozatnak végtelen sok tagja van, — mindkettőből nem lehet véges sok, mert akkor a $\{c_n\}$ részsorozata véges lenne, — ezért a $\{\gamma_n\}$ részsorozat az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok közül legalább az egyikből — tegyük fel $\{a_n\}$-ből — végtelen sok tagot tartalmaz, mely részsorozata $\{a_n\}$-nek. De akkor az *1. tétel* értelmében az a részsorozat egyben nullsorozat is, s így a *3. tétel* (Gesztelyinél IV. axióma) alapján $\{c_n\}$ nullsorozat.

Itt említjük meg, hogy a Gesztelyi-féle tárgyalásban például az *1. tétel*-ből igen egyszerűen következik a konvergens sorozatoknak az a jólismert tulajdonsága, mely szerint konvergens sorozat bármely részsorozata is konvergens és határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.

Tudniillik a Gesztelyi-féle értelemben konvergensnek mondjuk az $\{a_n\}$ sorozatot, ha van olyan a szám, hogy az $\{a_n - a\}$ nullsorozat. Az a számot az $\{a_n\}$ sorozat határértékének nevevzük és így jelöljük:

$$\lim a_n = a$$

Ha már most tekintjük az $\{a_n - a\}$ nullsorozatának egy tetszés szerinti részsorozatát, vagyis az $\{\alpha_n - a\}$ sorozatot, akkor az *1. tétel* értelmében ez is nullsorozat, ebből pedig állításunk már kiolvasható.

Hasonlóképpen a *4. tétel* felhasználásával könnyen belátható, hogy ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ konvergens sorozatok mindegyikének ugyanaz az A a határértéke, akkor az ezek „egyesítésével" keletkező $\{c_n\}$ sorozat is konvergens és határértéke A.

A feltétel szerint ugyanis $\{a_n - A\}$ és $\{b_n - A\}$ nullsorozat, tehát a *4. tétel* szerint $\{c_n - A\}$ is nullsorozat, s ez éppen állításunk bizonyítását jelenti.

Befejezésül ezúton is hálás köszönetet mondunk Gesztelyi Ernőnek azért, hogy a kéziratunkban felmerült félreértések tisztázását elősegítette.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ СТАТЬЕ Э. ГЕСТЕЙИ

А. Добо — Ш. Сайц

Авторы дают обоснование теоремы 6. работы Э. Гестейи „Об одном аксиоматическом введении понятия сходимости" — ввиду того, что она там не доказана.

В дальнейшей части работы излагается упрощение аксиом и применение некоторых результатов.

NOTES ON A PAPER OF E. GESZTELYI

A. DOBÓ—S. SZAJCZ

The author give a proof of theorem 6 of a paper of E. GESZTELYI: „An axiomatic introduction of the notion of convergence" since the proof of this theorem is missing there. The rest of the paper contains simplification of the axioms and some applications of the results.

Beszámoló a IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

HÓDI ENDRE

1.

A IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát a Csehszlovák Szocialista Köztársaság Művelődésügyi Minisztériuma rendezte meg 1962. július 4—16. között. A verseny lebonyolítását a dél-csehországi tartományi nemzeti bizottság és a Csehszlovák Ifjúsági Szövetség tevékeny közreműködésével a Csehszlovák Matematikai és Fizikai Társulat végezte, amely ebben az esztendőben ünnepelte fennállásának 100. évfordulóját.

A vendéglátók a IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára a következő államok 8—8 középiskolai, illetve középfokú szakiskolai tanulóját, továbbá 2—2 kísérőjét hívták meg:

Albán Népköztársaság,
Bulgár Népköztársaság,
Lengyel Népköztársaság,
Magyar Népköztársaság,
Német Demokratikus Köztársaság,
Román Népköztársaság,
Szovjet Szocialista Köztársaságok Szövetsége.

Mivel albán részről a meghívásra nem is válaszoltak, a többi állam viszont készséggel tett eleget a meghívásnak, ennélfogva ezen a nemzetközi matematikai tanulmányi versenyen a vendéglátókkal együtt összesen 7 ország 56 diákja vett részt. Az előző Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák egyikének sem volt ilyen sok résztvevője. A versenyzők között 4 leány volt: egy-egy bulgár, lengyel, német és szovjet diáklány.

2.

A Diákolimpián részt vevő magyar küldöttség vezetőjéül a Bolyai János Matematikai Társulat javaslatára a Művelődésügyi Minisztérium

HÓDI Endrét, a Magyar Optikai Művek Kutató Laboratóriumának tudományos munkatársát jelölte ki, míg a küldöttség pedagógiai vezetője KÉSEDI Ferenc, a Művelődésügyi Minisztérium főelőadója volt.

Ami a magyar tanulók kijelölését illeti, erre ugyancsak a Bolyai Társulat külön e célból létrehívott bizottsága tett javaslatot a Művelődésügyi Minisztérium Közoktatásügyi Főosztályának. Az említett bizottság elnöke SURÁNYI János egyetemi tanár, a Bolyai Társulat főtitkára, tagjai pedig BAKOS Tibor, GÁDOR Endréné, HÓDI Endre, KÉSEDI Ferenc és REIMAN István voltak.

A bizottság eddigi teljesítményeik alapján a következő tanulókat javasolta a Diákolimpián való részvételre:

KÉRY Gerzson, a soproni Széchenyi István gimnázium IV. osztályának tanulója (M 1);

KÓTA József, a tatabányai Árpád gimnázium IV. osztályának tanulója (M 2);

GÁLFI László, a budapesti I. István gimnázium IV. osztályának tanulója (M 3);

SIMONOVITS Miklós, a budapesti Radnóti Miklós gyakorló gimnázium IV. osztályának tanulója (M 4);

BENCZUR András, a budapesti Fazekas Mihály gyakorló gimnázium IV. osztályának tanulója (M 5);

GYÁRFÁS András, a budapesti Toldy Ferenc gimnázium III. osztályának tanulója (M 6);

SEBESTYÉN Zoltán, a celldömölki Berzsenyi Dániel gimnázium IV. osztályának tanulója (M 7);

SZIDAROVSZKY Ferenc, a budapesti Fazekas Mihály gyakorló gimnázium III. osztályának tanulója (M 8).

Az osztályok megjelölése az 1961—62. tanévre vonatkozik. A Művelődésügyi Minisztérium Közoktatásügyi Főosztálya elfogadta a bizottság javaslatát.

3.

A többi résztvevő ország küldöttségének vezetői, illetve pedagógiai vezetői az alábbiak voltak:

Bulgár Népköztársaság: Alipi Nikolov MATEEV egyetemi tanár (Szófia) és Dimitrov Stoian BUDUROV szakfelügyelő (Szófia).

Csehszlovák Szocialista Köztársaság: Rudolf ZELINKA, a Csehszlovák Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének igazgatóhelyettese (Prága) és Jan VYŠÍN egyetemi docens (Prága).

Lengyel Népköztársaság: Edward OTTO műegyetemi tanár (Varsó) és Andrzej MĄKOWSKI egyetemi tanársegéd (Varsó).

Német Demokratikus Köztársaság: Herbert TITZE docens (Berlin) és Johannes GRONITZ középiskolai tanár (Karl-Marx-Stadt).

Román Népköztársaság: Gheorghe D. SIMIONESCU egyetemi docens (Bukarest) és Petrisor MIHAILESCU középiskolai tanár (Bukarest).

Szovjet Szocialista Köztársaságok Szövetsége: Jelena Alekszandrovna MOROZOVA egyetemi docens (Moszkva) és Ivan Szemjonovics PETRAKOV a Matematika v skole c. folyóirat szerkesztőségének tagja (Moszkva).

4.

A versenyfeladatok kitűzése a következőképpen történt:

Először minden résztvevő állam elküldte a Diákolimpia Előkészítő Bizottságának saját feladatjavaslatait. A magyar részről javasolt 8 feladatot HÓDI Endre válogatta össze az Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny Központi Bizottságának tagjaitól és SURÁNYI Jánostól beérkezett példák közül, majd a kiválasztott feladatok szövegének és megoldásának általa elkészített magyar nyelvű megfogalmazását KÉSEDI Ferenc fordította cseh nyelvre, s ezt a fordítást kapta meg a Diákolimpia Előkészítő Bizottsága.

A többi résztvevő ország közül a Bulgár Népköztársaság 5, a Lengyel Népköztársaság 7, a Német Demokratikus Köztársaság 4, a Román Népköztársaság 7 és a Szovjetunió 8 feladatot bocsátott az Előkészítő Bizottság rendelkezésére.

Az Előkészítő Bizottság négy tagja, név szerint: Josef NOVÁK akadémikus, az Előkészítő Bizottság elnöke, Rudolf ZELIŇKA, Jan VYŠÍN és Miroslav FIEDLER, az Előkészítő Bizottság titkára, átvizsgálta a beérkezett, összesen 39 feladatot, amelyeknek tárgykör szerinti megoszlása a következő volt: számelméleti 3, algebrai és elemi függvénytani 10, síkmértani 16, térmértani 7, végül trigonometriai 3. Ez a szűkebb bizottság 10 feladatot választott ki továbbterjesztés céljából, kiegészítette azokat még két más, csehszlovák részről javasolt feladattal, s az így adódó 12 feladatot megoldással együtt elkészítette francia, német és orosz fordításban.

A Diákolimpián megoldásra kitűzött feladatok végső kiválasztása ebből a 12 feladatból történt, és azt a Josef NOVÁK akadémikusból mint elnökből, továbbá a küldöttségvezetőkből mint tagokból összetevődő nemzetközi bizottság végezte el Prágában, 1962. július 5-én és 6-án folyamatosan tartott ülésén. Meg kell jegyeznünk, hogy ezen az értekezleten a román küldöttség vezetője utazási nehézségek miatt nem tudott jelen lenni, viszont a nemzetközi bizottság munkájában — tanácskozási joggal — Jan VYŠÍN és Miroslav FIEDLER is részt vett.

5.

A nemzetközi bizottság az előterjesztett feladatok és megoldásuk beható elemzése után úgy határozott, hogy a verseny résztvevőinek az

első napon 4 órai munkaidő alatt 3, a második napon pedig 5 órai munkaidő alatt 4 feladatot kell megoldaniok. A kitűzött feladatok mindegyik résztvevő állam javaslatából tartalmaztak egyet-egyet. Az alábbiakban közöljük e feladatok szövegének magyar nyelvű megfogalmazását, megjelölve mindegyik mellett a javaslatot tevő országot is.

1. Keressük meg azt a legkisebb n természetes számot, amelynek tízes számrendszerben felírt alakja 6-ra végződik, és ha ezt az utolsó 6-os számjegyet töröljük, de egyidejűleg a többi megmaradt számjegy elé egy 6-ost írunk, akkor n-nek négyszeresét kapjuk.

(A lengyel küldöttségtől.)

2. Határozzuk meg az összes olyan x valós számot, amely kielégíti a

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget.

(A magyar küldöttségtől.)

3. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka; két szemben levő lapja $ABCD$ és $A'B'C'D'$, ahol $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Az X pont állandó sebességgel futja be az $ABCD$ négyzet kerületét a felírt körüljárási irányban, míg az Y pont ugyanakkora sebességgel a $B'C'CB$ négyzet kerületét futja be, szintén az itt felírt körüljárási értelemben. Az X és az Y pont ugyanabban a pillanatban indul el az A, illetve a B' pontból. Mi az XY szakasz Z felezőpontjának mértani helye?

(A csehszlovák küldöttségtől.)

4. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x = 1.$$

(A román küldöttségtől.)

5. Adott egy k kör három különböző pontja: A, B és C. Jelöljük ki szerkesztéssel ennek a körnek azt a D pontját, amelyre az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög. (A szerkesztéshez csak körző és vonalzó használható.)

(A bulgár küldöttségtől.)

6. Jelentse r egy tetszőleges egyenlő szárú háromszög köré írható kör sugarát, ϱ pedig a bele írható kör sugarát. Bizonyítsuk be, hogy a két kör középpontja

$$d=\sqrt{r(r-2\varrho)}$$

távolságra esik egymástól.

(A német küldöttségtől.)

7. Az $SABC$ tetraéderről annyit tudunk, hogy öt olyan gömb van, amelyek mindegyike érinti a tetraéder valamennyi élét, illetőleg azok meghosszabbítását. Bizonyítsuk be, hogy

a) az *SABC* tetraéder szabályos;

b) megfordítva: bármely szabályos tetraéder esetén létezik öt olyan gömb, amely az említett tulajdonsággal rendelkezik.

(A szovjet küldöttségtől.)

Az első három feladat szólt a verseny első napjára, a többi pedig a második napra.

6.

Maga a nemzetközi tanulmányi verseny a dél-csehországi tartomány székhelyétől, České Budějovicetől 11 km-nyire északra fekvő Hluboká várkastélyának szép környezetében került lebonyolításra július 10-én és 11-én. Az első napon a verseny megkezdése előtt Josef NOVÁK akadémikus mondott rövid megnyitó beszédet. Ebben üdvözölte a IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia valamennyi résztvevőjét, köszönetet mondott a vendéglátóknak: a České Budějovice-i tartományi nemzeti bizottságnak és a Csehszlovák Ifjúsági Szövetségnek, vázolta a verseny időrendi beosztását, végül sok sikert kívánt a versenyzők munkájához. Ezt követően mindegyik vendégküldöttség vezetője anyanyelvén tolmácsolta Josef NOVÁK akadémikus megnyitó szavait.

A verseny színhelyének megválasztása és a tanulók munkájának zavartalanságáról való gondoskodás minden elismerést megérdemel.

7.

A versenyfeladatok elbírálását illetően előre kell bocsátanunk, hogy a Josef NOVÁK akadémikus vezetésével működő nemzetközi bizottság, amelynek munkájában a küldöttségek vezetőin és Miroslav FIEDLERen kívül most már valamennyi pedagógiai vezető is részt vett, még a verseny megkezdése előtt egyhangúlag megállapodott az egyes feladatok megoldására adható maximális pontszámban. Ennek értelmében az a tanuló, aki az első feladatot hibátlanul oldja meg, 6 pontot kap, a második feladat hibátlan megoldásáért is 6 pont jár, a harmadikért 8, a negyedikért 5, az ötödikért 7, a hatodikért ismét 6, míg a hetedikért 8 pont. A pontozás ilyen értelmű megállapításakor azt is szem előtt tartotta a bizottság, hogy igen nagy különbségek ne legyenek az egyes feladatokra adható maximális pontszámok között, mert ellenkező esetben egyik vagy másik résztvevő ország tanulói nem kívánt előnyhöz juthatnának.

A vendégküldöttségek tanulóinak feladatait az illetékes küldöttségvezető vagy pedagógiai vezető (esetleg mindketten) egy-egy csehszlovák ún. koordinátor közreműködésével javította ki és értékelte. Egy koordinátor általában két különböző feladat javítási munkáiban vett részt, és három résztvevő küldöttségnek valamennyi ilyen feladatát látva, az volt a szerepe, hogy az előző Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon

követett gyakorlathoz képest jobban biztosítsa a feladatok elbírálásának egyöntetű voltát. Ugyanakkor a csehszlovák tanulók feladatainak átvizsgálásánál a vendégküldöttségek egyikének vezetője vagy pedagógiai vezetője (esetleg mindketten) is jelen volt, mégpedig rendszerint azé az államé, amely az illető feladatot javasolta. Egyetértés hiányában vagy egyéb vitás esetben a feladat végső értékelés céljából a fentebb említett nemzetközi bizottság elé került.

Ez a bizottság azután július 12-én és 13-án a České Budějovice-i diákotthonban három részletben megtartott hosszú ülésezésen végleges döntést hozott a versenyfeladatok értékelésére vonatkozólag.

8.

A végső elbírálás értelmében a Diákolimpia versenyzői a kitűzött feladatok megoldásával az alábbi pontszámokat érték el:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Σ
B 1	6	6	4	5	6	4	2	33
B 2	6	6	8	5	7	4	1	37
B 3	6	1	4	5	7	4	5	32
B 4	6	3	0	5	7	4	1	26
B 5	6	3	0	4	7	5	0	25
B 6	6	2	0	4	0	1	0	13
B 7	6	3	4	2	0	0	0	15
B 8	6	5	0	2	0	0	2	15
C 1	6	6	8	4	0	0	6	30
C 2	6	5	3	1	4	0	0	19
C 3	6	6	8	4	7	4	0	35
C 4	6	6	8	5	4	4	0	33
C 5	1	4	6	4	5	0	0	20
C 6	6	4	7	2	4	0	0	23
C 7	2	6	7	5	6	2	1	29
C 8	5	5	8	5	0	0	0	23
L 1	6	3	6	2	0	3	0	20
L 2	5	5	5	4	4	6	1	30
L 3	6	6	7	5	7	6	2	39
L 4	6	4	7	5	5	5	0	32
L 5	5	0	0	0	4	2	0	11
L 6	6	4	0	5	0	4	0	19
L 7	6	6	6	5	6	3	1	33
L 8	6	6	8	0	6	2	0	28
M 1	6	6	8	5	7	6	7	45
M 2	6	6	6	5	5	6	5	39
M 3	6	6	6	5	5	5	6	39
M 4	6	4	4	4	6	4	4	32
M 5	4	6	7	5	0	5	5	32
M 6	6	3	1	3	6	4	0	23
M 7	6	6	8	5	7	4	5	41
M 8	5	6	7	5	4	5	6	38

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Σ
N 1	6	3	2	2	0	1	0	14
N 2	6	6	5	3	1	0	0	21
N 3	5	2	5	1	1	4	0	18
N 4	6	1	3	5	2	1	0	18
N 5	6	5	3	5	1	0	1	21
N 6	6	4	4	4	0	3	0	21
N 7	6	4	7	5	3	4	5	34
N 8	1	0	1	4	0	0	0	6
R 1	6	5	5	5	0	5	6	32
R 2	6	5	8	5	5	4	5	38
R 3	6	5	8	5	2	6	7	39
R 4	0	2	4	5	6	6	5	28
R 5	6	3	8	4	6	4	1	32
R 6	6	2	4	5	6	6	6	35
R 7	4	5	3	5	6	5	2	30
R 8	6	5	2	5	1	4	0	23
S 1	6	6	8	5	7	6	8	46
S 2	6	6	6	5	7	4	8	42
S 3	6	3	8	5	6	3	0	31
S 4	6	6	4	5	7	6	2	36
S 5	6	3	7	5	7	0	2	30
S 6	6	6	5	5	0	0	0	22
S 7	6	6	8	5	6	5	1	37
S 8	6	5	5	3	0	0	0	19

Az első oszlopban álló nagybetűk jelentése rendre:

B = Bulgár Népköztársaság,
C = Csehszlovák Szocialista Köztársaság,
L = Lengyel Népköztársaság,
M = Magyar Népköztársaság,
N = Német Demokratikus Köztársaság,
R = Román Népköztársaság,
S = Szovjet Szocialista Köztársaságok Szövetsége.

A felsorolt nagybetűk mellett levő számok a megfelelő állam tanulóinak (előre rögzített) sorszámára utalnak. A magyar tanulókat illetően l. e beszámoló 2. pontját! Az első sorban található számok a kitűzött feladatok sorszámát jelölik, míg a Σ fejrovatú oszlopban rendre az egyes versenyzők által elért összpontszámot tüntettük fel.

A következő táblázat a résztvevő államok egyes tanulóinak pontszámokban kifejezett eredményét tartalmazza:

	1	2	3	4	5	6	7	8
B	33	37	32	26	25	13	15	15
C	30	19	35	33	20	23	29	23
L	20	30	39	32	11	19	33	28
M	45	39	39	32	32	23	41	38
N	14	21	18	18	21	21	34	6
R	32	38	39	28	32	35	30	23
S	46	42	31	36	30	22	37	19

9.

A fentebb említett nemzetközi bizottság egyhangú határozatot hozott arra vonatkozólag, hogy a versenyen 41—46 pontot elért tanulók I. díjban, azok, akik 35—40 pontot szereztek, II. díjban, végül pedig azok a versenyzők, akiknek teljesítménye 29—34 pont között volt (a határokat is beleértve), III. díjban részesüljenek. Ugyancsak egyhangúlag került elfogadásra az a módosító javaslat is, hogy a legjobban szerepelt német tanuló (Karl-Heinz TETSCH, N 7), aki a versenyben egyedül szerzett 34 pontot, és így szorosan azok mögött állt, akik az előbbi határozat szerint II. díjat kapnak, szintén II. díjban részesüljön. Ennek következtében összesen 4 első, 12 második és 15 harmadik díj került kiosztásra.

A IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia díjazottjainak névsora a következő:

I. díjasok:

1.	Joszif BERNSTYEJN	S 1	46 pont
2.	KÉRY Gerzson	M 1	45 „
3.	Ligyija GONCSAROVA	S 2	42 „
4.	SEBESTYÉN Zoltán	M 7	41 „

II. díjasok:

1.	Marcin KUCZMA	L 3	39 pont
2.	KÓTA József	M 2	39 „
3.	GÁLFI László	M 3	39 „
4.	Gheorghe ECKSTEIN	R 3	39 „
5.	SZIDAROVSZKY Ferenc	M 8	38 „
6.	Alexandru BUIMOVICI	R 2	38 „
7.	Boian Marinov BONEV	B 2	37 „
8.	Alekszej POTYEPUN	S 7	37 „
9.	Grigorij MARGULISZ	S 4	36 „
10.	Peter HATALA	C 3	35 „
11.	Gheorghe LUSTIG	R 6	35 „
12.	Karl-Heinz TETSCH	N 7	34 „

III. díjasok:

1.	M. Szvetloszlavov TANUSEV	B 1	33 „
2.	Jaroslav JEŽEK	C 4	33 „
3.	Jacek WOŁEJSZO	L 7	33 „
4.	Bozsidar Dimitrov KACAROV	B 3	32 „
5.	Jan REMPAŁA	L 4	32 „
6.	SIMONOVITS Miklós	M 4	32 „
7.	BENCZUR András	M 5	32 „
8.	Lucian BĂDESCU	R 1	32 „
9.	Florea HANTILA	R 5	32 „
10.	Gennagyij KURANOV	S 3	31 „
11.	Josef DANEŠ	C 1	30 „
12.	Ewa HENSZ	L 2	30 „
13.	Radu PUHA	R 7	30 „
14.	Danyijar MUSTARI	S 5	30 „
15.	Karel VESELÝ	C 7	29 „

Megjegyzendő, hogy a díjnyertesek hivatalos jegyzéke — nagyon helyesen — sem sorszámot, sem pontszámot nem tüntetett fel, és az itt közölthöz képest néhány lényegtelen sorrendi változást tartalmazott az egyes díjkategóriákon belül.

A díjak nemzetek szerinti megoszlását tünteti fel alábbi táblázatunk.

	I.	II.	III.	Σ
B	—	1	2	3
C	—	1	3	4
L	—	1	3	4
M	2	3	2	7
N	—	1	—	1
R	—	3	3	6
S	2	2	2	6
	4	12	15	31

10.

A verseny eredményének kihirdetése és az ünnepélyes díjkiosztás július 14-én zajlott le a Hluboká-i várkastély lovagtermében, ahol a versenyt is rendezték.

Harsonák hangja jelezte a Diákolimpia záróünnepségének kezdetét. Ezután Josef NOVÁK akadémikus tartotta meg záróbeszédét. Bevezetőben üdvözölte az ünnepi ülés résztvevőit, elsősorban a Művelődésügyi Minisztérium képviseletében megjelent Josef HENDRYCH miniszterhelyettest, a Csehszlovák Kommunista Párt tartományi bizottságának és

a tartományi nemzeti bizottság képviselőit, valamint a Csehszlovák Ifjúsági Szövetség részéről megjelent J. MÜLLEROVÁ tanárnőt. NOVÁK akadémikus ezután röviden áttekintette az eddig megrendezett Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákat, majd rámutatott a matematika egyre növekvő szerepére a tudományos és a gazdasági élet úgyszólván minden területén. Ezzel kapcsolatban valamennyi országban komoly gondot okoz megfelelő számú és képességű új matematikus szakember biztosítása, akik alkalmasak arra, hogy eredményesen oldják meg a rájuk háruló nehéz feladatokat. A nemzeti és nemzetközi tanulmányi versenyek jó szolgálatot tesznek a fiatal nemzedék matematika iránti érdeklődésének felkeltésében s kifejlesztésében. Az ilyen önkéntes vetélkedések azzal az előnnyel rendelkeznek az iskolai matematikatanulással szemben, hogy a megoldásra kitűzött problémák révén a diákok jobban megismerkedhetnek a matematikai gondolkodás hasznosságával és szépségével. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák ezenfelül arra is kitűnő alkalmat szolgáltatnak, hogy a szocialista tábor ifjú matematikusai személyes baráti kapcsolatokat létesítsenek egymással. Befejezésül NOVÁK akadémikus szerencsekívánatait fejezte ki a verseny győzteseinek kiemelkedő teljesítményeikért és sok sikert kívánt valamennyi résztvevőnek a matematika szép tudományának további tanulmányozásához. Ezt a záróbeszédet is mindegyik vendégküldöttség vezetője anyanyelvén tolmácsolta.

Ezután Josef HENDRYCH művelődésügyi miniszterhelyettes üdvözölte a Diákolimpia résztvevőit, majd NOVÁK akadémikus kiosztotta a díjakat. A díjnyertesek a tárgyi jutalmak (könyvek, képzőművészeti és népművészeti ajándéktárgyak) mellett a csehszlovák művelődésügyi miniszter (František KAHUDA) által aláírt oklevelet is kaptak. Abból a meggondolásból, hogy a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián való részvétel magában véve is nagy megtiszteltetést és kitüntetést jelent, ugyancsak oklevelet adtak a többi versenyzőnek is. Ez utóbbi okleveleket NOVÁK akadémikus, a nemzetközi bizottság elnöke írta alá.

A Diákolimpia résztvevői nevében az I. díjas szovjet Ligyija GONCSAROVA mondott köszönetet a szíves vendéglátásért és a kitüntető bánásmódért, amelyben a verseny vendégei egész csehszlovákiai tartózkodásuk folyamán részesültek. Ezt követőleg a vendégküldöttségek vezetői közül Gheorghe D. SIMIONESCU egyetemi docens, a román küldöttség vezetője szólalt fel, majd néhány zeneszám előadása színezte az ünnepély műsorát, amelynek végén még a Csehszlovák Kommunista Párt délcsehországi Központi Bizottságának elnöke mondott rövid beszédet.

Az ünnepi ülést NOVÁK akadémikus zárószavai rekesztették be. Utána a vendéglátók értékes ajándékokkal kedveskedtek a vendégküldöttségek tagjainak és vezetőinek, akik kisebb-nagyobb mértékben

szintén hoztak magukkal ajándékokat s azokat ugyancsak főleg ekkor osztották szét. A vendégek ajándékozásai közül kiemelkedett a román küldöttségé, amely valamennyi többi küldöttség vezetőinek juttatott egy-egy kedves emléktárgyat. A magyarok a Diákolimpia szervezésében és lebonyolításában legtöbb munkát végzett csehszlovák kollégáikat ajándékozták meg a Művelődésügyi Minisztérium és a Bolyai Társulat által küldött könyvekkel, illetőleg dísztárgyakkal.

Itt említjük meg, hogy több küldöttségtől az iskolai matematikatanítással kapcsolatos könyveket és egyéb kiadványokat (tanterveket, ifjúsági matematikai folyóiratokat, a mi szakköri füzeteinknek megfelelő munkákat, tanulmányi versenyekről szóló beszámolókat) is kaptunk. Leggazdagabb volt a szovjet küldöttség ilyen adománya.

A Diákolimpia ünnepélyes eredményhirdetését díszebéd követte a České Budějovice-i diákotthonban, amelyen részt vett Josef HENDRYCH művelődésügyi miniszterhelyettes is.

11.

Vendéglátóink igen tartalmas programot állítottak össze a versennyel kapcsolatban annak érdekében, hogy a résztvevőknek minél több módjuk legyen megismerni Csehszlovákia, elsősorban Dél-Csehország természeti szépségekben bővelkedő tájait, a történelmi nevezetességű és műkincsekben gazdag várkastélyokat (Hluboká, Český Krumlov, Třeboň stb.), nem beszélve a főváros soha eléggé meg nem csodálható látnivalóiról és České Budějovicenek ugyancsak a múltat idéző városközpontjáról. A Laterna Magika és a prágai Nemzeti Színház Libusa-előadásának megtekintésével bepillantást nyerhettünk a mai Csehszlovákia kulturális életébe. (A Laterna Magika előadását ugyan csak a vendégküldöttségek vezetői látták, de az ifjúság ehelyett másik színelőadást nézett meg, Shakespeare: Vízkereszt vagy amit akartok c. művét, sőt egy tánccal egybekötött műsoros esten is részt vett.)

Tartalmazott a Diákolimpia kulturális programja gyárlátogatásokat (a 112 éve fennálló České Budějovice-i Koh-i-noor Művek, ugyanitt a Čezeta karosszéria-gyár és a Strakonicei Jawa—ČZ gyár megtekintése, utóbbi kettőben csak a tanulók voltak), az Orlik duzzasztógát megszemlélését (ezt is csupán a diákok számára), továbbá ifjúsági sporttalálkozót és strandolási lehetőséget is.

Megjegyzem, hogy a verseny tartama alatt a kísérő tanároknak igen kevés alkalmuk volt együtt lenni a gondjaikra bízott tanulókkal — lényegesen kevesebb, mint az előző Diákolimpiák bármelyikén. Amikor nem voltunk diákjaink mellett, akkor egy magyarul is jól beszélő csehszlovák tanárnő felügyelt rájuk, aki így egyszersmind a tolmács szerepét is ellátta. A tanulók mellé csehszlovák fiatalokat is

beosztottak. Mindegyik küldöttségnek 3—4 ilyen kísérője volt; ezek a České Budějovice-i középiskolák tanulói, illetve üzemek dolgozói közül kerültek ki és a Csehszlovák Ifjúsági Szövetségnek is tagjai voltak.

12.

A magyar diákoknak ezen a versenyen elért eredményeivel — akár egyéni, akár csoportos teljesítményüket nézve — elégedettek lehetünk. Ha összehasonlítást teszünk az előző évi helyzettel, akkor megállapíthatjuk, hogy ezúttal tanulóinknak lényegesen kedvezőtlenebb körülmények között és lényegesen nehezebb küzdelemben kellett helytálaniok.

A körülmények annyiban voltak kedvezőtlenebbek, mint tavaly, hogy most külföldön volt a verseny, tanulóinknak nem a megszokott környezetben kellett megbírkózniok a kitűzött feladatokkal, ami általában nem jó irányban befolyásolja kedélyállapotukat, fokozza izgalmukat. Az előzetes vélemények birtokában a mostani együttest nem is tartottuk olyan jó képességűnek és főleg olyan rutinosnak, mint a tavalyit. Hozzájárul ehhez, hogy — miként már említettük — alig volt alkalmunk arra, hogy a versenyek előtt beszélgessünk a küldöttségünkhöz tartozó tanulókkal s taktikai tanácsokkal lássuk el őket.

Nehezebb pedig azért volt az idei Diákolimpia az előző évinél, mivel egyrészt most a Szovjetunió kiváló diákjai is jelen voltak s így a komoly vetélytársak száma erősen megnövekedett, másrészt idén 7 feladatot kellett a versenyzőknek megoldaniok a tavalyi hattal szemben. Igaz ugyan, hogy a kitűzött feladatok színvonalában nem fedezhetünk fel számottevő emelkedést, de a sok különféle probléma a maga sajátos „buktatóival" igen komoly szellemi erőkifejtésre késztette a versenyzőket, akik közül a magyarok a második írásbeli dolgozat négy példájának megoldása során főként „erőnlétből és állóképességből" valóban kitűnőre vizsgáztak.

Emeli tanulóink eredményeinek értékét az a körülmény, hogy az elbírálás először alkalmazott, ellenőrzött rendszere kizárja annak lehetőségét, hogy bárki is az elbírálás esetleges enyhe mértékének tulajdonítsa az elért jó eredményeket.

Mint ismeretes, a Magyarországon megrendezett III. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián tanulóink igen nagy sikerrel szerepeltek és fölényük döntő volt a többi résztvevővel szemben. Még arra is gondolhatott egyik vagy másik vendégünk, hogy az Előkészítő Bizottság nem tartotta teljesen titokban a résztvevő államokból előre beküldött feladatjavaslatokat, és ez is oka a magyar tanulók kiugró sikerének. Az Előkészítő Bizottság természetesen nem szegte meg a titoktartást, de egy ilyen gyanúnak csak azzal lehetett igazán elejét venni, ha tanulóink a következő és már más országokban lebonyolított versenyen hasonlóan

kiváló eredményt érnek el. Mondhatjuk, hogy szerencsére, lényegében sikerült megismételni a tavalyi eredményes szereplést, ha idén nem is volt olyan nagy a különbség a magyar tanulók és a többiek között.

Érdemes néhány szóval arra is kitérni, mivel magyarázható tanulóink ismételt jó teljesítménye. Talán legcélszerűbb annak előre bocsátásával kezdeni, hogy a IV. Diákolimpián részt vett magyar küldöttség négy tanulója már az előző évi hasonló versenyen is szerepelt, így ezek nyilván megfelelő rutinnal rendelkeztek. Kétségtelen azonban, hogy a jó eredmények nem vezethetők vissza egy vagy néhány okra, hanem azok létrejöttében egész sereg összetevő jelentős szerepet játszik.

A felsorolást minden bizonnyal a tanulók velük született tehetségével, a matematika iránt érzett spontán érdeklődésével és az ilyen jellegű problémák megoldásában tanúsított készségével kell kezdeni. Az utóbbi tulajdonságok felébresztéséhez, illetve kifejlesztéséhez sokban hozzájárulhat az általános és még inkább a középiskolai matematikatanítás, különösen az oktatás egyes, tanórán kívüli formáival (pl. szakköri foglalkozások). Jelentős segítséget nyújthat továbbá megfelelő szakirodalom kézbeadása, a középiskolai anyag kereteit meghaladó problémák területén a helyes szakmai irányítás. Nagyon jó gyakorlatot jelent a különböző tanulmányi versenyeken (Arany Dániel, Országos Középiskolai, Kürschák József, a Középiskolai Matematikai Lapok pontversenye) való részvétel és az imént említett folyóirat rendszeres olvasása. Eredményes tevékenységet fejt ki a versenykészség kifejlesztésében a Bolyai Társulat Ifjúsági Matematikai Köre is, amely Reiman István egyetemi adjunktus vezetésével működik. Mindezekre az a speciális versenyelőkészítő tanfolyam teszi rá a koronát, amelyet ugyancsak Reiman István tart nagy hozzáértéssel és lelkesedéssel már tanév elejétől kezdve az egész ország legjobbnak ismert matematikus diákjai részére, először szélesebb, majd egyre szűkülő körben.

Nagyon fontos természetesen, hogy a Diákolimpiákra kiküldendő tanulók kiválogatása az összes tekintetbe veendő körülmény gondos mérlegelésével történjék, végül hogy a jelölő bizottság idevágó javaslata a Művelődésügyi Minisztérium Közoktatásügyi Főosztálya részéről jóváhagyást nyerjen. Ami a III. és IV. Diákolimpián részt vett magyar tanulók kiválasztását illeti, azt sikeresnek minősíthetjük.

Tanulóink szereplése az eddig lezajlott Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon szinte parancsolólag írja elő számunkra a következő ilyen versenyre való igen alapos felkészülést. Az előkészületek fentebb vázolt rendszerét, annak gyakorlati lebonyolítását elvileg helyesnek és a jövőben is követhetőnek, sőt követendőnek tartjuk. Csupán egy ötletet vetünk fel: véleményünk szerint az V. Diákolimpia hazai előkészületeit a IV. feladatmegoldásainak áttekintésével volna célszerű kezdeni, amelynek során az egyes példák helyes megoldásának megkövetelésén kívül

részletesen ki kellene elemezni a megoldások kényes pontjait, kitérni a gyakran elkövetett hibákra, a sűrűn tapasztalt hiányosságokra is.

13.

A IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia Előkészítő, illetve Szervező Bizottságának összetétele a következő volt: Josef NOVÁK akadémikus, elnök; Rudolf ZELINKA, a Csehszlovák Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének igazgatóhelyettese és Jan VYŠÍN egyetemi docens, a Szervező Bizottság elnökének helyettesei; Miroslav FIEDLER titkár; továbbá Miloš JELÍNEK, a Művelődésügyi Minisztérium képviselője; František VEJSADA, České Budějovice-i középiskolai tanár és J. MÜLLEROVÁ középiskolai tanárnő, a Csehszlovák Ifjúsági Szövetség Központi Bizottságának képviselője, tagok.

A Szervező Bizottság az előző Diákolimpiák tapasztalatainak nagymértékű tekintetbevételével és hasznosításával, mondhatni mindenre kiterjedő figyelemmel, igen nagy gonddal és körültekintéssel, komoly apparátussal és jelentős anyagi bázisra támaszkodva végezte munkáját mind az előkészítés, mind pedig a lebonyolítás időszakában. Külön ki kell emelnünk azt a tényt, hogy a Szervező Bizottság, amely valójában a Csehszlovák Matematikai és Fizikai Társulat keretében fejtette ki tevékenységét, lényegesen nagyobb és hathatósabb támogatást kapott az illetékes állami és társadalmi szervektől, mint annak idején a mienk.

Véleményünk szerint a vendéglátók ezen a Diákolimpián voltak a legbőkezűbbek, úgyhogy ettől a lengyel küldöttség vezetője kissé meg is ijedt, megjegyezve, hogy amennyiben jövőre ők rendezik a Diákolimpiát, akkor is csak szerényebb keretek között tudják ezt megtenni, s a külsőségekre nem tudnak olyan mértékű anyagi fedezetet biztosítani, mint ahogyan az a IV. Diákolimpia alkalmával történt.

Talán éppen az összeállított program kissé zsúfolt volta az, amit esetleg szóvá tehetünk. Természetesen kiderült, hogy emiatt nem is lehetett mindent megvalósítani. Sajnos, néha olyan programrészletek is elmaradtak, amelyekre pedig érdemi szempontból igen nagy szükség lett volna. Egy ilyenre alább még kissé bővebben ki fogunk térni. Vendéglátóink a Diákolimpia tartama alatt annyi mindennel meg akartak ismertetni bennünket, amellett a szakmai megbeszéléseket is oly protokollszerűen vezették, hogy ezért a részvétel — bár kétségtelenül élménydús volt és sokáig emlékezetes marad — főleg a kísérő tanárokat meglehetősen kimerítette. Mindezek az apró észrevételek nem csökkentik azonban annak a rengeteg energiának az értékét, amelyet vendéglátóink a verseny Szervező Bizottságának irányításával a rendezési és lebonyolítási munkákba belefektettek.

Legyen szabad ezen a helyen még egyszer visszatérni a versenydolgozatok most első ízben alkalmazott elbírálási módjára: az ún. koordinátor-rendszerre. Az első három Diákolimpián minden küldöttség vezetője, illetőleg vezetői — az értékelés szempontjai tekintetében előzetesen történt megállapodás figyelembevételével — önállóan javították saját tanulóik dolgozatát, és amennyiben e munka során olyan új problémák merültek fel, amelyek megoldása közös megtárgyalást igényelt, azokat előterjesztették a végső értékelést megállapító értekezleten, ott a résztvevők egyhangúlag, ritkábban szótöbbséges döntéssel határoztak a vitás kérdésekben. Ennek alapján történt meg azután a versenyzők által elért pontszámok végérvényes rögzítése.

A dolgozatok értékelésének ez a módja nagymértékben a küldöttségvezetők közötti kölcsönös bizalmon alapult, és bár semmi olyan momentum nem adódott, amely indokolttá tette volna e kölcsönös bizalom megvonását, mégis megvolt a lehetősége annak, hogy az egyes küldöttségvezetők — egyéniségükből kifolyólag, jóhiszeműen — más mércét alkalmazzanak ugyanazon feladat megoldásának elbírálásában. Ezért a III. Diákolimpián részt vett lengyel küldöttség vezetői olyan értékelési eljárásra tettek utalást, hogy a későbbiek folyamán — megfelelő matematikai logikai szimbólumokat tartalmazó „nemzetközi szótár" bevezetésével — mód nyílik a versenyfeladatok egységesebb elbírálására. A szótárkulcs felhasználásával pl. úgy lehetne megszervezni a javítási munkát, hogy valamennyi résztvevő azonos feladatának megoldását egy és ugyanazon küldöttség vezetője (vezetői) bírálná el, egy másik feladat összes megoldása egy másik küldöttség vezetőjéhez (vezetőihez) kerülne javításra s í. t.

Az értekezlet résztvevői a lengyeleknek ezt a távlati javaslatát elvben elfogadták, ugyanakkor megbízták a javaslattevőket, hogy az új elbírálási módszer megvalósítása és bevezetése céljából folytassanak kísérleteket. Jelen pillanatban még nincs értesülésünk arról, hogy lengyel kollégáink egyáltalán végeztek-e ilyen kísérleteket, és ha igen, akkor azok milyen eredménnyel jártak. A felvetett ötlet alapján azonban a IV. Diákolimpia szervezői kidolgoztak egy új értékelési módszert, amely bár eléggé költséges és a javításhoz szükséges időt is jelentékenyen megnöveli (hiszen mindegyik feladatmegoldást lényegében le kell fordítani a javításban közreműködő koordinátor számára), viszont már a most lezajlott verseny alkalmával megvalósítható volt, és az is kétségtelen, hogy ezzel jobban lehetett biztosítani a különböző nemzetiségű tanulók anyanyelvén megírt munkájának egyöntetű elbírálását.

Hogy ennek ellenére nem aratott általános tetszést, annak okát elsősorban a mindenféle új iniciatívával szükségképpen velejáró kezdeti nehézségeknek tulajdonítjuk. Mindenesetre hiba volt, hogy ezúttal nem állapodtunk meg előzetesen a javítás főbb szempontjaiban, amit vélemé-

nyünk szerint a koordinátor-rendszer sem tesz feleslegessé, és még nagyobb bajt okozott az, hogy az ugyanarra a feladatra beállított két koordinátor között sem volt meg mindig a szükséges egyetértés, ezért éppen a legkényesebb példák (a 3. és 7.) megoldásának értékelése folyamán több ízben került sor második koordinációra, ráadásul olyan időpontban, amikor a küldöttségek vezetői az előzőleg végzett fárasztó munka következtében már nagyon kimerültek voltak. Tárgyilagosan azonban azt kell mondanunk, hogy az első esetben tapasztalt hibák és kellemetlenségek ellenére is a koordinátor-rendszer alkalmazása elvileg nem rossz, persze megvalósítása — a koordinátor szerepének ellátására megfelelő szakemberek munkába állítása — nem éppen olcsó mulatság. Ugyanakkor nem zárkózunk el más, ettől különböző olyan eljárások elfogadása elől sem, amelyeket esetleg az ezután megrendezésre kerülő Diákolimpiák szervezői javasolnak a versenydolgozatok egyöntetű elbírálása céljából.

Ugyanebbe a témakörbe tartozik még egy probléma, amely szintén már nem ezen a versenyen vetődött fel először. A dolgozatok pontszám alapján történő értékelése nyilván eléggé mechanikus: a hazai és általában az egyes nemzeti tanulmányi versenyek dolgozatainak elbírálásakor követett gyakorlattal ellentétben a Diákolimpiákon eddig nem vettük tekintetbe a megoldások egyszerű voltát, eleganciáját, a megoldásokhoz fűzött kiegészítéseket, általánosításokat, esetleg több különféle megoldást, egyszóval a versenyzők semminemű többletteljesítményét, holott a nemzeti tanulmányi versenyeken nem egyszer éppen a különböző értékűnek minősített többletmunkák alakítják ki a győztesek végső sorrendjét. Ezért már a III. Diákolimpián több küldöttségvezető nyilatkozott olyan értelemben, hogy célszerű lenne, ha az egyes versenyzők többletteljesítményét a nemzetközi versenyeken is figyelembe vennék. Az akkori résztvevők általában helyeselték ezt a véleményt, legalább is nem szólt ellene senki, mindmáig nem készült azonban semmiféle olyan javaslat, amely arra vonatkoznék, hogyan valósítható meg gyakorlatilag és részleteiben is a Diákolimpiák versenyzői által a feladatmegoldások során nyújtott többletteljesítmény értékelése.

Ebben a kérdésben álláspontunk a következő. Ameddig nincs megvalósítható és a résztvevő államok által elfogadott javaslat a versenyzők többletteljesítményének értékelésére, addig ezt nem kell nálunk szorgalmazni, nehogy emiatt egyes feladatokat — idő hiányában — hibásan vagy hézagosan tudjanak csak megoldani. A többletteljesítmény értékelése kérdésének megoldását mindaddig nem tartjuk égetően sürgősnek, amíg 5—6 pontnyi különbség is előfordulhat két ugyanolyan díjat nyert tanuló eredménye között, ezért mi magunk, legalább is egyelőre, nem szándékozunk foglalkozni efféle javaslat készítésével. Ugyanakkor nem zárkózunk el más által előterjesztett, hasonló jellegű indítvány meg-

vitatása elől. Annyi bizonyos, hogy aki idevágó javaslattal óhajt előállni, annak tekintettel kell lennie a nyelvi és tantervi különbségekre, melyek még jobban megnehezítik az e téren egyébként sem könnyű összehasonlítások megtételét, másfelől arra is gondolnia kell, hogy ezzel ismét növekszik a versenydolgozatok elbírálásának a koordinátorrendszer bevezetésével amúgy is jelentékenyen fárasztóbbá vált munkája.

14.

Mivel az eddig megtartott négy Nemzetközi Matematikai Diákolimpia lebonyolítása kapcsán már elegendő tapasztalati anyag gyűlt össze, a IV. Diákolimpia Szervező Bizottsága elérkezettnek látta az időt arra, hogy ezt rendszerezve, elkészítse a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák Alapszabályának tervezetét. Ezt a tervezetet lefordították francia, német és orosz nyelvre, s mindegyik vendégküldöttség vezetőjének átadtak belőle egy példányt olyan nyelven, amilyenen az illető vezető azt kérte. Így mi egy német nyelvű példányt kaptunk. Ezzel kapcsolatban csehszlovák kollégáink azt kívánják, hogy írjuk meg a tervezetre vonatkozó észrevételeinket.

15.

Csehszlovákiában igen nagy volt az érdeklődés a IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia eseményei iránt mind az állami, mind a társadalmi szervek, mind pedig a közvélemény részéről. A művelődésügyi miniszter egy alkalommal fogadta a küldöttségek vezetőit, egy másik alkalommal meglátogatta České Budějoviceben a verseny résztvevőit, elbeszélgetett velük, majd jelen volt közös vacsorájukon, és azon beszédet is mondott. A Diákolimpia záróünnepségére azért nem tudott eljönni, mert abban az időpontban hivatalos úton, külföldön tartózkodott. A küldöttségek vezetőit a dél-csehországi tartományi nemzeti bizottság elnöke is fogadta. A különböző állami és társadalmi szervek részvételéről a Diákolimpia egyes ünnepélyes aktusain már szó esett a beszámoló előbbi pontjaiban. A napi sajtó több cikkben foglalkozott a verseny eseményeivel, méltatta annak jelentőségét és ezzel kapcsolatban kitért a csehszlovák középiskolai matematika-tanítás időszerű kérdéseire is. A Diákolimpia első díjasainak nevét közölte a Rudé Právo és bemondta a csehszlovák rádió is.

Annál nagyobb meglepetéssel olvastuk hazaérkezésünk napján a magyar napilapok pontatlan tájékoztatását a verseny nyerteseiről. Nem tudni, honnan szerezte értesüléseit hírszolgálatunk, mert az általunk ismert csehszlovák kommünikék teljesen hibátlanul és a helyes sorrendben közölték a versenynyertesek nevét. Igaz ugyan, hogy közbenjárásunkra másnap már javított szövegű hír jelent meg az újságokban a

Diákolimpiáról, de különösnek tartjuk, hogy nem helyreigazításképpen, hanem „legújabb jelentésre" hivatkozva.

Ezenkívül az Esti Hírlap július 19-i száma közölt egy riportot a Diákolimpiáról, írójának KÉSEDI Ferenccel, KÉRY Gerzsonnal és SEBESTYÉN Zoltánnal folytatott beszélgetése alapján. A cikk értékét emelte volna, ha a riporter gondosabban ügyel a szokásos újságírói túlzások elkerülésére. Ugyancsak KÉSEDI Ferenc tájékoztatása nyomán jelent meg beszámoló a versenyről a Népszabadságban is, továbbá szintén ő írt cikket erről a témáról A Matematika Tanítása c. folyóirat számára is.

A Diákolimpia ügye irányában tanúsított hazai érdeklődés és megbecsülés fokozódására utal az a tény, hogy a Művelődésügyi Minisztérium augusztus 30-án megjutalmazta a versenyen kiemelkedően szerepelt magyar fiatalokat. Az I. díjasok 1200—1200, a II. díjasok 800—800 és a III. díjasok 600—600 Ft összegű pénzjutalomban részesültek. A jutalomkiosztásra — nyilván véletlenül — elfelejtették meghívni a magyar küldöttség vezetőjét.

Beszámolóm végén szeretnék köszönetet mondani KÉSEDI Ferencnek azért az értékes segítségéért, amellyel munkámat a Diákolimpiával kapcsolatban az előkészítéstől kezdve mindvégig támogatta. Véleményem szerint együttműködésünk harmonikus volt; az ő lendületes munkatempója, határozottsága, kitűnő cseh és szlovák nyelvtudása nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy a magyar küldöttség vezetői eleget tudtak tenni feladatuknak. Ha nem is sorolom fel őket újra név szerint, de ugyancsak köszönet illeti a Bolyai Társulatnak azokat a tagjait, akik munkájukkal elősegítették küldöttségünk sikeres szereplését a IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián. Ugyanez vonatkozik a Társulat titkárságának tagjaira is.

ОТЧЕТ О IV МЕЖДУНАРОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ СТУДЕНТОВ

Э. Ходи

REPORT ON THE IV. INTERNATIONAL OLYMPIADE OF HIGH-SCHOOL-STUDENTS

E. HÓDI

Feladatrovat

Rovatvezető: Császár Ákos

Olvasóink 13 évig látták a feladatrovat alatt, hogy „Szerkeszti: Hajós György". Ez alatt az idő alatt e rovat a lap egyik főérdekessége volt; a közölt megoldások rendkívül gondos kidolgozása mögött nagyon sok munka rejlett, a leközölt megoldás eredeti formájának erős csiszolása, gyakran további ötletek hozzáadása. E rovatvezetői munka komoly tudományos teljesítménynek volt mindig tekinthető, amit a külföldi érdeklődés is világosan mutat.

Most, hogy sokirányú egyéb elfoglaltsága miatt Hajós György e rovat vezetését tovább nem tudja vállalni, e sorokkal a szerkesztőbizottság és — úgy véljük — az egész magyar matematikai közvélemény köszönetét szeretnénk kifejezni ezen munkájáért; utódjának, Császár Ákosnak, nem is tudunk jobbat kívánni, minthogy a rovat színvonalát azon szinten tudja tartani, melyen azt Hajós György tartotta.

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

Az előző szám lezárása és megjelenése között a 121. feladat megoldását beküldötte *Hajna János.*

Kitűzött feladatok

134. Bizonyítsuk be, hogy az $1, 2, \ldots, n$ elemekből képezhető azon permutációk száma, amelyekben éppen i számú inverzió van, $i \leqq n$ esetén

$$\sum (-1)^s \binom{n-1+i-\frac{3s^2+s}{2}}{n-1},$$

ahol s a $0 \leqq \frac{3s^2+s}{2} \leqq i$ feltételnek eleget tevő egész számokon fut át.

Turán Pál

135. Ha $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots$ természetes számokból álló szigorúan növekvő sorozat és $A(x) = \sum_{a_k \leqq x} 1$, akkor

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} \quad \text{és} \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x}$$

a sorozat alsó és felső sűrűsége; ha ezek megegyeznek, közös értékük a sorozat sűrűsége. Konstruáljuk meg az ilyen sorozatoknak kontinuum számosságú halmazát úgy, hogy a halmazból vett bármelyik sorozat sűrűsége $\frac{1}{2}$ és bármely két sorozat közös részének alsó sűrűsége 0 legyen.

Erdős Pál

136. Legyen $q > 3$ egész szám, $n = q^2+q+1$, $m = q+1$, K egy (konvex) szabályos n-szög, P pedig olyan konvex m-szög, melynek csúcsai K-nak is csúcsai, és oldalai és átlói között nincs két egyenlő hosszú szakasz. Mutassuk meg, hogy K középpontja P belsejében van.

Kárteszi Ferenc

137. Bebizonyítandó, hogy egy K test feletti zérusosztómentes A unitér algebra akkor és csak akkor egységelemes, ha tartalmaz véges-rangú részalgebrát. Mit jelent ez a feltétel véges karakterisztikájú zérus-osztómentes gyűrű esetén?

Fried Ervin és *Wiegandt Richárd*

Megoldott feladatok

123. feladat. Egy térbeli egyszerű ívnek (egy szakasz topológikus képének) az A végpontjában van érintője, azaz ha P a görbén A-hoz konvergál (és A-val nem azonos), akkor az AP félegyenes határhelyzethez tart. Lehet-e ezt az ívet úgy parametrizálni, hogy a helyvektor az A-nak megfelelő helyen az új paraméter szerint zérustól különböző (egyoldali) deriváltvektorral rendelkezzék?.

(Császár Ákos)

Megoldás. A feladat kérdésére a válasz általában tagadó, amint az alábbi síkgörbe példája mutatja. Legyen

$$r(t) = \left(1 + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{t}\right)t \qquad (t > 0),$$

$$r(0) = 0,$$

és tekintsük a komplex síkban a

$$z(t)=r(t)e^{i\pi t} \qquad (0\leqq t\leqq 1)$$

egyszerű ívet, amelynek a $z(0)=0$ pontban nyilván a valós tengely pozitív része az érintője. Legyen f valamely $a\leqq u\leqq b$ intervallumnak erre a görbére való olyan topológikus leképezése, hogy a $z=0$-nak megfelelő u_0 helyen $f'(u_0)$ létezik; megmutatjuk, hogy ekkor $f'(u_0)=0$. Feltehető, hogy $a=0$, $b=1$ és $u_0=0$. Ekkor $g(t)=f^{-1}(z(t))$ szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény [0, 1]-ben, melyre $g(0)=0$, $g(1)=1$. Így az $u_n=g\left(\frac{1}{n}\right)$ számok szigorúan monoton fogyólag 0-hoz tartanak. Ennélfogva

$$\left|\frac{f(u_{2n-1})/u_{2n-1}}{f(u_{2n})/u_{2n}}\right|=\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}\,\frac{2n}{2n-1}\,\frac{1}{3}<\frac{2}{3} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

$'(0)\neq 0$ esetén a baloldal $n\to\infty$ mellett 1-hez tartana; így tehát $f'(0)=0$.

Czipszer János

Megjegyzés. Ha az előbbi megoldást úgy módosítjuk, hogy $t>0$ esetén

$$r(t)=\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{t}\right)t^2$$

legyen, kitűnik, hogy a feladat kérdésére még rektifikálható egyszerű ív esetén is tagadó a válasz. Eszerint a differenciálgeometriában szokásos feltevés, amellyel az érintő létezését el nem tűnő deriváltvektor létezésével biztosítják, csupán az analitikus tárgyalás megkönnyítésével indokolható, geometriai szempontból lényeges megszorítást jelent.

Szerk.

124. feladat. Ha az x, y valós számokat kettes számrendszerben írjuk fel, és a megfelelő jegyeket összeszorozzuk, akkor a kettes számrendszerben felírt $x\circ y$ diadikus szorzat jegyeihez jutunk. Meghatározandók azok a valós változós, valós vagy komplex értékű függvények, amelyekre

$$f(x\circ y)=f(x)f(y).$$

(Kalmár László)

Megjegyzés. A feladatban szereplő diadikus szorzat definíciója nem egyértelmű, mert bizonyos számok kétféleképpen is felírhatók kettes számrendszerben, s a negatív számok kettes számrendszerbeli felírására nincs egyöntetű megállapodás. Ennek megfelelően a feladat többféleképpen is értelmezhető, az itt következő két megoldás éppen a feladat

értelmezésében tér el egymástól s ezért vezet különböző eredményre. A negatív számok felírásában mindkettő azt a — meglehetősen természetes — megállapodást fogadja el, hogy $x>0$ esetén $-x$ kettes számrendszerbeli felírása x-éből minden jegynek (-1)-gyel való szorzása útján keletkezik. Ebben az esetben a diadikus szorzás a közönséges szorzás előjelszabályait követi, azaz

$$x \circ y = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y \cdot (|x| \circ |y|). \tag{1}$$

I. megoldás. A feladatot úgy fogjuk fel, hogy ha x vagy y kétféleképpen írható fel kettes számrendszerben és emiatt diadikus szorzatuk is több értéket vehet fel, akkor $x \circ y$ minden lehetséges értékére teljesüljön

$$f(x \circ y) = f(x) f(y). \tag{2}$$

Minthogy bármely valós x-re $x \circ 0 = 0$, azért $f(0) = f(x) f(0)$, s innen $x = 0$ mellett $f(0) = 0$, vagy $f(0) = 1$ adódik; az utóbbi esetben ugyaninnen $f(x) \equiv 1$. Tegyük fel tehát, hogy $f(0) = 0$; megmutatjuk, hogy ekkor $f(x) \equiv 0$.

Először is $f(x) = 0$, ha x felírható kettes számrendszerben egyetlen egyes jeggyel is. Valóban, ekkor az egyik tényezőben ezt, a másikban a másik (végtelen sok egyest tartalmazó) előállítást használva, látható, hogy $x \circ x$ egyik értéke 0, így $f(x) f(x) = 0$ és $f(x) = 0$.

Ha most x tetszőleges valós szám, legyen y olyan szám, amelynek kettes számrendszerbeli előállításában az első olyan helyen, ahol x előállításában nem 0 áll, és minden későbbi helyen is egyes szerepel, az egyesek előtt pedig csupa 0. Ekkor y felírható egyetlen egyessel is, így $f(y) = 0$; másfelől y-nak végtelen előállítását használva $x \circ y = x$, így $f(x) = f(x) f(y) = 0$.

Koncz Károly

II. megoldás. Fogjuk fel a feladatot úgy, hogy a kétféleképpen is felírható számoknak csak a véges számú egyest tartalmazó előállítását engedjük meg s ezt alkalmazzuk a diadikus szorzat értelmezésében; így $x \circ y$ mindig egyértelműen meg van határozva.

Ugyanúgy, mint az I. megoldásban, most is látható, hogy $f(0)$ csak 0 vagy 1 lehet, és $f(0) = 1$ esetén $f(x) \equiv 1$. Ezért tegyük fel, hogy $f(0) = 0$.

Vizsgáljuk egyelőre a pozitív x-eket. Ekkor $x \circ x = x$ miatt $f(x) f(x) = f(x)$, úgyhogy $f(x)$ is csak a 0 vagy 1 értékét veheti fel. Tegyük fel, hogy van olyan $x>0$, melyre $f(x) = 1$. Jelöljük $x \geqq 0$ esetén $H(x)$-szel azon k egész számok halmazát, amelyekre x kettes számrendszerbeli (ha lehet, véges számú egyest tartalmazó) előállításában a k-adik helyen egyes áll. Világos, hogy $H(x \circ y) = H(x) \cap H(y)$. Legyen továbbá **H** az összes pozitív x-eknek megfelelő $H(x)$ halmazok rendszere, **E** pedig

azon $H(x)$-eké, amelyek az $f(x)=1$ tulajdonságú x-eknek felelnek meg. Feltevésünk szerint $\mathbf{E}$ nem üres, továbbá két halmazzal együtt tartalmazza ezek metszetét, végül $x, y \geqq 0$, $H(x) \subset H(y)$, $H(x) \in \mathbf{E}$ esetén $H(y) \in \mathbf{E}$. Így az egész számok E halmazának azok a részhalmazai, amelyek tartalmaznak egy $\mathbf{E}$-hez tartozó részhalmazt, egy $\mathbf{F}$ szűrőt alkotnak és $\mathbf{E}=\mathbf{F} \cap \mathbf{H}$. Megfordítva, ha $\mathbf{F}$ tetszőleges szűrő az E halmazban és $\mathbf{E}$-vel jelöljük az $\mathbf{F} \cap \mathbf{H}$ halmazrendszert, s megállapodunk abban, hogy $x \geqq 0$ esetén $f(x)=1$ legyen, ha $H(x) \in \mathbf{E}$, egyébként $f(x)=0$, akkor az így értelmezett f függvény (egyelőre $x, y \geqq 0$ mellett) eleget tesz (2)-nek.

Így áttekintve (2)-nek megoldásait a nemnegatív helyekre, legyen $(0)=0$ és $x>0$. Ekkor $(-x) \circ (-x) = x$ folytán $f(-x)^2 = f(x)$, tehát $(x)=0$ esetén $f(-x) = 0, f(x)=1$ esetén pedig vagy $f(-x) = 1$, vagy $(-x) = -1$. Ha $x, y>0, f(-x) = 1, f(-y) = -1$ volna, akkor $(-x) \circ (-y) = x \circ y$ folytán (2)-vel ellentétben $f(x \circ y) = 1 \neq -1$ adódnék, úgyhogy az előbbi lehetőségek közül vagy mindig az első, vagy mindig a második teljesül. Eszerint f vagy páros függvény, vagy páratlan függvény, s könnyű belátni, hogy ha f (2)-nek megoldása nemnegatív x és y esetén és negatív x-ekre úgy értelmezzük, hogy vagy páros, vagy dáratlan legyen, akkor mindenütt eleget tesz (2)-nek. Így (az $f(x) \equiv 1$ és $f(x) \equiv 0$ megoldásokat is figyelembe véve) (2) minden megoldását áttekintettük.

Wiegandt Richárd

A 124. feladat megoldását beküldötte még CSÁSZÁR ÁKOS.

125. feladat. Ha az n-edrendű A determináns i-edik oszlopát az ugyancsak n-edrendű B determináns k-adik oszlopával pótoljuk, az A_{ik} determinánshoz jutunk. Mi annak az n-edrendű determinánsnak az értéke, amelynek i-edik $(i=1, \ldots, n)$ sorában a k-adik $(k=1, \ldots, n)$ helyen A_{ik} áll?

(Turán Pál)

Megoldás. Az A_{ik} determinánst i-edik oszlopa szerint kifejtve látható, hogy A_{ik} egyenlő A reciprok determinánsa i-edik és B k-adik oszlopának belső szorzatával. A determinánsok szorzástétele szerint $|A_{ik}|$ az A determináns reciprok determinánsának és B-nek a szorzata. Mivel az előbbinek az értéke A^{n-1}, azért

$$|A_{ik}| = A^{n-1} B.$$

Majthay Antal

A 125. feladat megoldását beküldötte még BOGDÁN ZOLTÁN, HAJNA JÁNOS, HETYEI GÁBOR és WIEGANDT RICHÁRD.

126. feladat. Keressük meg azokat a négyjegyű számokat, amelyeknek első három jegye egyenlő, s amelyek egy egész szám egészkitevős (legalábbis második) hatványai.

(Surányi János)

Megoldás. Legyen a keresett szám x^n. Nyilván $x<100$, tehát $x = 10u+v$, ahol $u=0, 1, \ldots, 9$, $v=1, 2, \ldots, 9$. Másrészt $10^4<2^{14}$ folytán $n=2, 3, \ldots, 13$ jöhet szóba.

Ha $n=2$, akkor $x\geqq 32$ miatt $u\geqq 3$. Ekkor x^2 első három számjegye a $v=1, 2, 3$, $v=4$, $v=5, \ldots$, $v=9$ esetekben rendre

$$10u^2+2uv = 2u(5u+v), \tag{1}$$

$$10u^2+8u+1 = 3u(3u+2)+(u+1)^2, \tag{2}$$

$$10u^2+10u+2 = 2(5(u+1)u+1), \tag{3}$$

$$10u^2+12u+3 = 10u^2+3(4u+1), \tag{4}$$

$$10u^2+14u+4 = 2(u+1)(5u+2), \tag{5}$$

$$10u^2+16u+6 = 2(u+1)(5u+3), \tag{6}$$

$$10u^2+18u+8 = 2(u+1)(5u+4). \tag{7}$$

Ennek oszthatónak kell lennie $111=3\cdot 37$-tel. Az (1), (5), (6), (7) kifejezésekben csak az utolsó tényező lehet 37-tel osztható, azaz 37-tel egyenlő, amiből $u=7$ adódnék s a 3-mal való oszthatóság nem állna fenn. (2)-ben $(u+1)$-nek oszthatónak kell lennie 3-mal, azaz $u=5$ vagy 8 és nem teljesül a 37-tel való oszthatóság. (3)-ban a második tényező 1-re végződik, tehát csak $3\cdot 37$-tel vagy $13\cdot 37$-tel lehetne egyenlő, de az utóbbi nem osztható 3-mal, az előbbiből pedig $(u+1)u = 22$ adódnék, ami lehetetlen. (4)-ben u-nak oszthatónak kell lennie 3-mal s a lehetséges $u=3, 6, 9$ esetekben nem áll fenn a 37-tel való oszthatóság.

Ha $n=3$, akkor $11\leqq x\leqq 21$ és x^3 első három jegye

$$100u^3+30u^2v+3uv^2+s, \tag{8}$$

ahol $s=\left[\frac{v^3}{10}\right]$. Az $u=1$ esetben eszerint $s+1$ osztható 3-mal, ami csak a $v=3$ esetben következik be, akkor pedig (8) nem osztható 37-tel. Az $u=2$, $v=1$, $s=0$ esetben (8) 3-mal sem osztható.

Ezekután kizárhatjuk az $n=4, 6, 8, 9, 10, 12$ eseteket is. Ha $n=5$, akkor $x<10$ és x^5 ugyanolyan számjegyre végződik, mint x, úgyhogy

$$x^5-x = x(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

osztható $3\cdot 37$-tel. Nyilván csak az utolsó tényező lehet 37-tel osztható,

és az $x=6$ esetben (és csak ebben) az is. Ekkor a 3-mal való oszthatóság is bekövetkezik, így $6^5=7776$ megfelel a feladat követelményeinek.

A hátralevő $n=7, 11, 13$ esetekben csak $x=2, 3$ jöhet számításba (az utóbbi csak az $n=7$ esetben), de újabb megoldáshoz nem vezet.

Surányi János

A 126. feladat megoldását beküldötte még BOGDÁN ZOLTÁN és WIEGANDT RICHÁRD.

PROBLÈMES PROPOSÉS

134. Démontrer que le nombre des permutations formées des éléments $1, 2, \ldots, n$ et contenant exactement i inversions, est égal pour $i \leqq n$ à

$$\Sigma(-1)^s \binom{n-1+i-\frac{3s^2+s}{2}}{n-1},$$

où s parcourt les entiers satisfaisant à la condition $0 \leqq \frac{3s^2+s}{2} \leqq i$.

P. Turán

135. Si $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots$ est une suite strictement croissante de nombres naturels et $A(x) = \sum_{a_k \leqq x} 1$, on appelle densités inférieure et supérieure de cette suite les nombres

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} \quad \text{et} \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x}$$

respectivement; si ces nombres coïncident, leur valeur commune est la densité de la suite. Construire un ensemble de la puissance du continu de telles suites de la manière que chaque suite de cet ensemble possède la densité égale à $\frac{1}{2}$ et que la partie commune de deux quelconques de ces suites possède la densité inférieure 0.

P. Erdős

136. Soient $q>3$ un entier, $n=q^2+q+1$, $m=q+1$, K un polygone régulier (convexe) à n côtés, et P un polygone convexe à m côtés dont les sommets sont des sommets de K et tel que parmi ses côtés et ses diagonales il n'y a pas deux segments de même longueur. Démontrer que le centre de K est situé à l'intérieur de P.

F. Kárteszi

137. Démontrer qu'une algèbre unitaire A sur un corps K, dépourvue de diviseurs de zéro, contient d'élément unité si et seulement si elle contient une algèbre partielle de rang fini. Que signifie cette condition lorsqu'il s'agit d'un anneau de caractéristique finie et dépourvu de diviseurs de zéro?

E. Fried et *R. Wiegandt*

Jelentés az 1962. évi Grünwald Géza emlékdíj odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat az 1962. évi Grünwald Géza emlékdíj odaítélésére vonatkozó javaslattétel céljából hattagú bizottságot küldött ki, amelynek tagjai: Császár Ákos, Fuchs László, Hajós György, Rényi Alfréd, Turán Pál és Varga Ottó. A kiküldött bizottság 1962. november 5-én és november 22-én tartott ülésein megvitatta az elnökség tagjaitól érkezett javaslatokat és a javasolt személyek munkásságának alapos tanulmányozása alapján a következő határozatot hozta:

A bizottság örömmel állapítja meg, hogy ebben az évben is több fiatal matematikus vehető figyelembe az emlékdíj odaítélésénél eredményes tudományos munkáik alapján. Alaposan mérlegelve a szóba jövő személyeket, a bizottság úgy döntött, hogy az első Grünwald Géza emlékdíjat ebben az évben nem adja ki, viszont öt fiatal matematikust jutalmaz *második* Grünwald Géza emlékdíjjal és ezzel együtt 1000—1000 Ft jutalommal. A jutalmazottak a következők:

Csiszár Imre, a MTA Matematikai Kutató Intézetének munkatársa, valószínűségszámítási munkáiért,

Daróczi Zoltán, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem tanársegéde függvényegyenletek elméletébe vágó munkáiért,

Máté László, a budapesti Műszaki Egyetem adjunktusa, az ortogonális polinomokról és az operátorszámításról írt dolgozataiért,

Merza József, az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem tanársegéde, differenciálgeometriai munkáiért,

Molnár Ferenc, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem néhai tanársegéde, geometriai tárgyú dolgozataiért.

A jutalmazottak munkásságát az alábbiakban ismertetjük.

Csiszár Imrének eddig két dolgozata jelent meg és további öt van sajtó alatt. Az információelmélet alapjaival foglalkozó dolgozatában [1] az entrópiafogalomra vonatkozólag ér el értékes eredményeket. Már ebben az első munkájában is érett matematikusként mutatkozott be. A sajtó alatt levő [6] dolgozatában az előbbi dolgozatban közölt vizsgálatait folytatja eredményesen. Többi dolgozata közül kiemelkedik a sajtó alatt levő [4] dolgozata, amely Ju. V. Linnik egy nemrégiben közölt jelentős munkájához csatlakozik. Linnik megmutatta, hogy a valószínűségszámítás centrális határeloszlástétele bebizonyítható információelméleti úton. Csiszár a határeloszlástételek információelméleti módszerrel való bizonyításának általános és rendszeres elméletét fejleszti ki, kimerítően tisztázza az ezzel kapcsolatban felmerülő konvergenciafogalmak egymáshoz való viszonyát. E témához kapcsolódik egy Fischer Jánossal közösen írt [5], valamint a prágai információelméleti kollokviumon előadott [7] dolgozata is. Kiemelkedő e munkákkal kapcsolatosan egyrészt a bizonyítások

ötletessége, továbbá az, hogy Csiszár a valószínűségszámítás és mértékelmélet módszerei mellett a topologikus terek elméletében is alapos jártasságot mutat.

CSISZÁR IMRE dolgozatainak jegyzéke:

[1] Some remarks on the dimension and entropy of random variables, *Acta Math. Ac. Scie. Hung.* 12 (1961), 399—408.

[2] Megjegyzések a csonkagúla és a gömb térfogatáról, *A Matematika Tanítása*, 1961.

[3] Szisztematikus hibák kiküszöbölésének egy módszeréről. Dobó Andorral közösen. *A MTA III. Oszt. Közl.*, 12 (1962), 124—132.

[4] Informationstheoretische Konvergenzbegriffe im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.*, 7 (1962), A sorozat, 137—158. (sajtó alatt).

[5] Informationsentfernungen im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Fischer Jánossal közösen. *A MTA Mat. Kut. Int. Közl.*, 7 (1962), A. sorozat, 159—180. (sajtó alatt).

[6] On the dimension and entropy of order α of the mixture of probability distributions, *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, 13 (1962), 245—256. (sajtó alatt).

[7] Über topologische und metrische Eigenschaften der relativen Information von Ordnung α, *Transactions of the Third Prague Conference*, 1962. (sajtó alatt).

DARÓCZY ZOLTÁNnak eddig három dolgozata jelent meg és további négy van sajtó alatt. Megjelent dolgozatai közül az [1] az $f(ax+by)=pf(x)+qf(y)+r$ függvényegyenlet teljes diszkusszióját adja, míg a [2] dolgozat az $f(x+y)=g(x)+h(y)+k(x)l(y)$ függvényegyenlet megoldásairól ad kimerítő áttekintést. Mindkét dolgozat Aczél János munkásságához csatlakozik és ő általa felvetett problémát old meg. A bizonyítások ötletesek és eredetiek, az eredmények lényegesen túlmennek a szóbanforgó függvényegyenletekre vonatkozólag előzőleg ismert eredményeken. Sajtó alatt levő dolgozatai közül kiemeljük az Aczél Jánossal közösen írt [6] és a sajtó alatt levő [7] dolgozatait. Ezekben egy Rényi Alfréd által felvetett információelméleti vonatkozású függvényegyenletekre vonatkozó problémával foglalkozik; a második dolgozat Rényi sejtésének igazolását tartalmazza és ezzel lényeges előrehaladást ér el az információmennyiségek axiomatikus jellemzése terén.

DARÓCZY ZOLTÁN dolgozatainak jegyzéke:

[1] Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math., Szeged*, 22 (1961), 31—41.

[2] Elementare Lösung einer mehrere unbekannte Funktionen enthaltenden Funktionalgleichung. *Publicationes Math., Debrecen*, 8 (1961), 160—168.

[3] Megjegyzések függvényegyenletekről, *Publications du Deuxième Congrès des Mathematiciens Hongrois*, Vol. II., Budapest, 1961, 71—72.

[4] A bilineáris függvényegyenletek egy osztályáról, *Mat. Lapok*, 13 (1962).

[5] Über die Funktionalgleichung $\varphi(\varphi(x)y) = \varphi(x)\varphi(y)$. *Acta Universitatis Debreceniensis*, 8 (1962).

[6] Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie, Aczél Jánossal közösen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 13 (1962).

[7] Über die gemeinsame Charakterisierung der zu den nicht vollständigen Verteilungen gehörigen Entropien von Shannon und Rényi, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 1 (1962).

MÁTÉ LÁSZLÓ első dolgozataiban a klasszikus ortogonális polinomoknak ama sajátságuk által történő jellemzésével foglalkozik, hogy bizonyos típusú másodrendű

lineáris differenciálegyenleteknek megoldásai az egyenletben szereplő bizonyos paraméter különböző értékei mellett; e vizsgálatainak kiindulópontja egy Aczél János által felvetett probléma volt. Az [1] dolgozat főeredménye szerint elég a jellemzéshez az, hogy a megfelelő alakú egyenletnek pozitív paraméterértékek mellett minden n-re legyen pontosan n-edfokú polinom-megoldása, a [2] (és ezzel lényegében véve megegyező [3]) dolgozat szerint pedig a különböző paraméterértékekhez tartozó polinom-megoldások ortogonalitása, sőt az is, hogy a polinomok gyökei olyanféleképpen helyezkednek el, mint az ortogonális polinomok gyökei. A [4] dolgozat a Mikusinski-féle operátorszámítást a lineáris differencia-egyenletek egy típusának megoldására használja s az eredmény elektrotechnikai alkalmazásával foglalkozik. Ugyancsak a Mikusinski-féle operátorszámítás körébe vág a sajtó alatt levő [7] dolgozat is. Végül az [5] és [6] dolgozatban a Banach-terekre vonatkozó Hille—Yosida—Phillips-féle tételnek Fréchet-féle terek operátorfélcsoportjaira való átvitelére tesz kísérletet.

Máté a funkcionálanalízis modern és világszerte erősen művelt területeit tanulmányozta eredménnyel és gyarapította sikeres vizsgálatokkal.

MÁTÉ LÁSZLÓ dolgozatainak jegyzéke:

[1] Über durch Sturm-Liouvillesche Differentialgleichungen charakterisierte orthogonale Polynomsysteme, *Publ. Math., 3* (1954), 297—304.

[2] A klasszikus ortogonális polinomrendszerek egy jellemzéséről, *MTA. III. Oszt. Közl., 6* (1956), 87—92.

[3] On a characterization of the classical orthogonal polynomials, *Acta Sci. Math., 17* (1956), 129—133.

[4] On linear difference equations with constant coefficients, *Period. Polytechn., 3* (1959), 247—257.

[5] Operátorfélcsoportok kiterjesztéséről, *MTA III. Oszt. Közl., 12* (1962), 217—222.

[6] On the problem of Mikusinski's logarithm. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* (Sajtó alatt).

MERZA JÓZSEF eddig hat dolgozatot írt. Az [1] dolgozat az invariáns deriválás műveletére ad szemléletes geometriai interpretációt affin térbe ágyazott felületek esetén. Módszere segítségével azonnal és természetesen adódik a Blaschke által „általánosítottnak" nevezett differenciálási eljárás, és megvilágítást nyer az összefüggési objektumok geometriai tartalma. Az unimoduláris és centro-affin sík és tér görbéinek invariánsait vizsgálják a következő dolgozatok. A [2] és [3] dolgozatban a formálisan értelmezett görbületi és torzió mennyiségek kapnak geometriai értelmet. Ezáltal több ismert affin geometriai fogalom nyer új megvilágítást. A [4] dolgozat W. Haack és L. Santaló vizsgálataihoz kapcsolódik. A térgörbéhez csatlakozó simulókúp felhasználásával sikerül geometriai szerkesztés révén származtatni az I. Popa által a centro-affin geometriában definiált minimális rendű görbület duális görbületét.

Az [5] dolgozat az affin tér felületein fekvő görbékkel foglalkozik. A kísérő triéder felhasználásával a felület első affin alapfogalmának eddig ismeretlen jellemzését adja, ezenkívül a görbe néhány vetületének görbületét hasonlítja össze a görbe térbeli görbületével. Az eredmények centro-affin megfelelői is megtalálhatók. [6] dolgozatában a felületi görbék affin geodetikus görbülete nyer igen egyszerű jellemzést mint a görbének az őt érintő autoparallel görbétől való eltérésének mértéke.

A klasszikus affin felületelméletben sok olyan eredmény található, amely puszta formális meggondolások eredménye; geometriai úton való levezetésük és interpretálásuk hiányzik. Merza érdeme éppen abban áll, hogy néhány tény geometrikumát tisztázta.

MERZA JÓZSEF dolgozatainak jegyzéke:

[1] L'introduction de la différentiation absolue dans l'espace affine, *Publ. Math. Debrecen*, 5 (1958), 330—337.

[2] Sur la courbure affine des courbes, *Publ. Math. Debrecen*, 7 (1960), 65—71.

[3] Sur la courbure centro-affine des courbes, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 53 (1961), 345—355.

[4] Quelques invariants centro-affines des courbes, *Annales Polonici Mathematici*. (Sajtó alatt).

[5] Sur les trièdres affines associés aux courbes, *Annales Polonici Mathematici*. (Sajtó alatt).

[6] Une interprétation de la courbure géodésique affine, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (Sajtó alatt).

MOLNÁR FERENC [1] dolgozata a tetraéderre vonatkozó elemi geometriai ismereteket foglalja egybe középiskolás diákok számára, az egyszerű és világos tárgyalás egyéni ötleteket is felhasznál. Társszerzővel készült [2] dolgozata Szőkefalvi-Nagy Gyula dolgozataihoz kapcsolódik. Ez a dolgozat a Tschirnhaus-féle görbék és felületek fogalmát általánosítva az olyan pontok mértani helyével foglalkozik, amelyeknek véges sok megadott ponttól, egyenestől és síktól mért távolságát összeszorozva állandó eredmény adódik, és ezekre általánosítja a Tschirnhaus-féle esetben ismert eredmények egy részét.

Több dolgozatában foglalkozik síkgeometriai tételek n-dimenziós megfelelőivel. [3] dolgozata, amely az [5] anyagát is felöleli, Ceva és Menelaos tételeit általánosítja így. Általánosítása túlnyúlik a korábban ismert, Nádeniktől és Beszkintől származó ilyen irányú eredményeken. Eredményei a háromdimenziós esetben is nyújtanak újat. [4] dolgozatában az n-dimenziós szimplex Euler-egyenesét és Feuerbach-gömbjeit vizsgálja. Az ortocentrikus esetben korábban használt vektoriális módszert sikerül az általános esetre átültetnie. Eredményei közül a Monge-féle pont általánosításaira vonatkozó új megállapításokat kell kiemelni. A [6] dolgozatban Stewart tételét sikerül a baricentrikus koordináták ügyes felhasználásával az n-dimenziós esetre általánosítania.

Utolsó három dolgozata a direkt tenzorkalkulus jól ismert eredményeit általánosítja különböző irányokban. [7] a háromdimenziós tér harmadrendű tenzoraira általánosítja a másodrendű tenzorok ismert direkt tárgyalását. Különösen e tenzorok vektor- és tenzorinvariánsaira vonatkozó eredményeit kell itt kiemelni, amelyeket a vektortól függő tenzorértékű függvények differenciálására, divergenciájuk és rotációjuk tárgyalására is felhasznál. [8] dolgozata a tenzortól függő skalárértékű és vektorértékű függvények körében tárgyalja hasonló módon a deriváltat. Utolsó, egyetemi doktori disszertációnak szánt [9] dolgozata az n-dimenziós másodrendű tenzorokra állapít meg különböző módszerekkel teljes invariánsrendszereket, és vizsgálja kapcsolataikat. Tárgyalása a háromdimenziós eset analóg tételeit tartja szem előtt, eredményei azonban lényegesen bonyolultabb viszonyokról adnak számot, s ezért módszerei is messze túlnyúlnak a háromdimenziós esetben ismert eljárásokon.

Molnár Ferenc 1961. január 18-án bekövetkezett váratlan és korai halála kettévágta tudományos munkásságát. Utolsó dolgozata is csak kéziratban maradt meg utána. Valamennyi dolgozata igen világos és szabatos, sok szép eredményük szerzőjük elmélyedéséről, ötletességéről és tudományos alkotókészségéről tanuskodik. Majdnem minden dolgozatát egybefűzi a több dimenzióra való általánosítás alapgondolata. Molnár Ferenc korai halála fájdalmas vesztesége tudományos életünknek is.

MOLNÁR FERENC dolgozatainak jegyzéke:

[1] A tetraéder nevezetes pontjairól, *Középisk. Mat. Lapok, 16* (1958), 1–6, 33–38.

[2] Über eine Verallgemeinerung der Tschirnhausschen Flächen und Kurven (Molnár Józseffel közösen), *Acta Math. Acad. Sci. Hung., 10* (1959), 269–276.

[3] Ceva és Menelaos tételeinek általánosításáról, *Mat. Lapok, 10* (1959), 231–248.

[4] Az n-dimenziós szimplex Euler-egyeneséről és Feuerbach-görbéjéről, *Mat. Lapok.* 11 (1960), 68–74.

[5] Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ceva, *Annales Univ. Sci. Budapest,* 3–4 (1960–61), 197–199.

[6] Stewart tételének egy általánosításáról, *Mat. Lapok, 12* (1961), 215–221.

[7] Harmadrendű tenzorok és tenzor-vektor függvények direkt tárgyalása, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl., 11* (1961), 371–398.

[8] Tenzorváltozós függvények differenciálása, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl., 12* (1962), 1–5.

[9] Az n-dimenziós másodrendű tenzorok invariánsairól (sajtó alatt).

Társulati élet

„A matematika alapjai, matematikai gépek, és alkalmazásaik" kollokvium programja

TIHANY, 1962. Szeptember 11—15

Kedd, szeptember 11. délután

A terem — Automaták és számológépek absztrakt elmélete.

Elnök — J. SURÁNYI

15.00 M. A. GAVRILOV: Некоторые вопроси построения конечных автоматов.
15.40 G. MOISIL: *Sur la definition des automates finies.*
16.20 R. PÉTER: *Programmierung und partial rekursive Funktionen.*
17.15 G. ASSER: *Über die algebraischen Theorie der Automata.*
18.15 L. KALMÁR: *On an algebraic theory of automatical digital computers.*
19.00 T. FREY: *Über den Zusammenhang der Kalmárschen und Gluschkowschen Fassung des Begriffes der Rechenautomaten.*

Szerda, szeptember 12. délelőtt

A terem — Matematika alapjai, matematikai logika I.

Elnök — H. RASIOWA

9.30 P. ERDŐS: *Problems and results on set theory.*
10.15 E. J. THIELE: *Über starke Ersetzungsaxiome in der Mengenlehre.*
10.45 A. HAJNAL: *Some remarks on problems concerning inaccesible cardinals.*
11.15 G. GRÄTZER: *A generalization of Stone's representation theorem for Boolean algebras .*
11.45 L. RIEGER: *Über die algebraische Struktur des Prädikatenkalküls.*

B terem — Áramkörök elmélete I

Elnök — G. MOISIL

10.15 H. ROHLEDER: *Über eine Halbordnung und ihre Bedeutung für die Schaltalgebra*
10.45 I. BERECZKI: *Boole-féle függvények zárójeles minimalizálására vonatkozó vizsgálatokról.*
11.15 M. COROI—NEDELCU: *Considérations sur l'analyse et la synthése des schémas a tubes electroniques.*

Szerda, szeptember 12, délután

A terem — Matematika alapjai, matematikai logika II.

Elnök — L. KALMÁR

16.00 A. CHURCH: *An independence question in recursive arithmetic.*

16.45 J. BECVAR: Eine *universelle Turing Maschine mit Programmband.*
17.15 M. MAKKAI: *Über die transfinite Induktion in zahlentheoretischen Formalismen.*
17.45 G. MÜLLER: *Charakterisierung einer Klasse von rekursiven Funktionen.*

B terem — Áramkörök elmélete II.

Elnök — M. A. GAVRILOV

16.45 I. FENYŐ: *Ein Analogierechner mit Speicher.*
17.15 A. ÁDÁM: *The quasi-series decomposition of two-terminal graphs .*
17.45 J. BARÁT: Анализ и синтех непримитивных схем
18.15 S. SZÉKELY—DOBY: *Jelfogós logikai szerkezetek műszaki alkalmazásai.*

Csütörtök, szeptember 13, délelőtt

A terem — Matematika alapjai, matematikai logika III.

Elnök — R. PÉTER

9.30 H. B. CURRY: *Two examples of algorithms.*
10.15 K. HÄRTIG: *Über einen Quantifikator mit zwei Wirkungsbereichen.*
10.45 V. VUCKOVIC: *On some Possibilities in the Foundation of Recursive Arithmetics of Words.*
11.15 H. THIELE: *Über einige wissenschaftsteoretische Problemen in algoritmischen Sprachen.*
11.45 H. RASIOWA: *Non-classical theory of classes.*

B terem — Matematikai nyelvészet, gépi fordítás.

Elnök — Zs. TELEGDI

10.15 R. B. LEES: *Automatic Generation of Natural-Language Sentences.*
11.00 GY. HELL: *Prinzipieller Aufbau der russisch-ungarischen Maschinerübersetzung.*
11.30 P. SGALL: *Über internationale Zusammenarbeit in der Maschinerübersetzung.*
11.45 P. KIEFER: *Bemerkungen zur Verwendung der Mengenlehre in der Sprachwissenschaft.*
12.15 S. ABRAHAM: *On machine recognition of synonymy.*

Csütörtök, szeptember 13, délután

A terem — Matematikai nyelvészet, gépi fordítás II.

Elnök — R. B. LEES

15.30 Y. BAR—HILLEL: *Recent developments in algebraic and computational linguistics.*
16.30 M. BIERWISCH: *Über die Bedingungen und Probleme bei der Anwendung mathematischer Theorien in der Sprachwissenschaft.*
17.00 S. MARCUS: *Typologie des langues et modeles logiques.*
(Présenté par G. Moisil).
17.30 GY. SIPŐCZI: *Problems of programming some grammaticaly homonym forms.*
17.50 L. DEZSŐ: Заметки о сьязи МП с типологией

B terem — Digitális számológépek és programozás

Elnök — M. A. KARCEV

16.30 J. MC CARTHY: *A basis for a Mathematical Theory of Computation.*
17.00 E. L. JUSCSENKO: О полноте средств адресного языка
17.30 GY. RÉVÉSZ: *Über Experimente der automatischen Programmierung auf der Maschine M-3 im Rechenzentrum der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.*
18.00 H. HERMES: *Induktion und Wahrscheinlichkeit.*
18.30 Z. PAWLAK: *New class of mathematical languages and organisation of addressless computers.*

Péntek, szeptember 14, délelőtt

A terem — Digitális számológépek és programozás II

Elnök — J. Mc Carthy

9.30 M. S. Watanabe: *Inductive Inference and its Computer Simulation.*
10.15 T. Popoviciu: *Sur un modification du polynome d'interpolation de Lagrange.*
10.45 M. A. Karcev: Дробные основания системы с числения и их использование для ускорения операций в цифровых машинах.
11.15 I. Fris—P. Liebl: *Über die Konstruktion formaler Sprachen von Typus Algol-60.*
11.45 B. Dömölki: Об одном методе для распознавания синтаксической структуры последовательностей символов.

B terem — Számológépek gazdasági alkalmazásai.

Elnök — P. Destouches

10.15 Sz. A. Aleskerov: Применение вычислительных машин для исследования потенциальних полей.
10.45 B. Kreko: *Über ein diskretes Programmierungsproblem.*
11.15 B. Martos: *Die Planung der Energiewirtschaft, als ein verallgemeinertes Transportproblem, und dessen suboptimale Lösung.*
11.45 S. Ganczer: *Ártípus számítások.*

Péntek, szeptember 14, délután

A terem — Mesterséges intelligencia, gépi tanulás

Elnök — Z. Pawlak

17.00 H. Gelernter: *A computer program for the proof of theorems in elementary Euclidean plane geometry.*
18.00 M. A. Ajzerman: Проблема моделирования на машинах процесса обучения распознавания образов.
18.30 A. A. Sztognij: Об одной самообучающийся алгоритмической системе.

B terem — Számológépek gazdasági alkalmazásai

Elnök — B. Krekó

17.15 P. Destouches: *Sur certains aspects du probleme de l'automatisation des systemes industriels.*
17.45 I. Kiss: *Termelésprogramozás elektronikus számológéppel.*
18.15 J. Piehler: *Die Anwendung elektronischer Rechenautomaten in der chemischen Industrie.*

Szombat, szeptember 15, délelőtt

Kötetlen megbeszélés

Elnök: G. H. Müller

Számelméleti kollokvium

A Bolyai János Matematikai Társulat 1962. május 31-től június 2-ig számelméleti kollokviumot rendezett Balatonvilágoson a Magyar Tudományos Akadémia Üdülőjében. Az alábbiakban ismertettjük a kollokvium programját, illetve az elhangzott előadások rövid kivonatait

Május 31. délután.

A. O. Gelfond: *Bizonyos számosztályok transzcendens voltának elemi bizonyítása.* Az előadó bizonyos értelemben eleminek mondható, csupán a Rolle-tételt felhasználó bizonyítást adott arra a tételre, hogy minden α^{β} alakú szám $\alpha \neq 0,1,$

$\beta \neq 0$ és e^{ω}, $\omega \neq 0$ transzcendens, ha $\alpha > 0$, β, ω algebrai és valós számok és β azonkívül még irracionális is.

A bizonyításnál felhasznált lemma a transzcendens számok elméletének más tételeinél is alkalmazható, segítségével bizonyítható az $a^{\sqrt[3]{p}}$, $a^{p^{\frac{2}{3}}}$ ($a \neq 0,1$, a algebrai és valós, $p > 0$ egész) alakú számok algebrai függetlensége. π transzcendens volta azonban ezen módszerrel közvetlenül nem bizonyítható.

L. SCHMETTERER: *Számelmélet a Riemann-féle integrál elméletében.*

Legyen f egy az (ε, N) intervallumban Lebesgue-integrálható függvény l_i nemnegatív valós számoknak egy szigorúan monoton növekedő sorozata, amelyre $l_i \to \infty$, $d_i = l_i - l_{i-1}$, $l_{i-1} \leqq \lambda_i \leqq l_i$. Az előadó azt a kérdést tárgyalta, hogy $\lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i h) d_i$ és $\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to 0}} \int_{\varepsilon}^{N} f dx$ milyen vonatkozásban vannak egymással. Azt a kérdést, mikor következik a sorok sorozatának konvergenciájából az integrál konvergenciája, elsősorban Ingham vizsgálta. Ez a kérdés szoros kapcsolatban van bizonyos Dirichlet sorok zéróhelyeinek a kérdéseivel.

$h \sum_{i=1}^{\infty} d_i f(\lambda_i h) - \int_{h}^{\infty} f dx$ hibájának megbecslésére vonatkozóan alig ismeretes eredmény. Az f-re vonatkozó gyenge differenciálhatósági feltételek, valamint az l_i sorozatra vonatkozó nagyságrendi feltételek esetén lehetséges hibabecslést adni. Végül az előadó néhány eredményről számolt be, amelyek Szász Ottó és J. Todd egy munkájához kapcsolódnak.

P. FLOR: *Pisot-féle sorozatokról.*

A Pisot-féle sorozat a természetes számok egy olyan u_n sorozata, amelyre $-\frac{1}{2} < u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \leqq \frac{1}{2}$. Ebben az előadásban az előadó feltételeket adott meg lineáris rekurziós vonatkozásokra, amelyeknek a megoldásai között Pisot-féle sorozatok szerepelnek. Kimondja továbbá a következő sejtést: Legyen egy Pisot-sorozat, amelynél a definiáló relációban az egyenlőség jele ki van zárva.

Legyen $f = \sum_{0}^{\infty} u_n x^{n+1}$ a generátorfüggvény. Akkor $\frac{f}{1-f}$ szintén egy Pisot-sorozat generátor függvénye.

MIKOLÁS MIKLÓS: *Hardy és Littlewood egy problémájáról.*

A szóban forgó probléma, amely HARDYnak és LITTLEWOODnak nevezetes geometriai számelméleti vizsgálataihoz kapcsolódik, $\sum_{\nu=1}^{N} B_r(\{n_\nu x\})$ alakú összegek, ill. ezek (0,1)-re vonatkozó négyzetes integrálközepének $N \to \infty$ melletti aszimptotikus becslését igényli ($B_r(u)$ az r-edfokú Bernoulli-polinomot jelenti, $n_1 < n_2 < \ldots$ pozitív egész számoknak valamely sorozata, $\{u\}$ u törtrésze) és az

$$(*) \qquad \int_0^1 \left(\{au\} - \frac{1}{2}\right)\left(\{bu\} - \frac{1}{2}\right) du = \frac{1}{12}\langle a, b\rangle \left(\leqq \frac{1}{12}\right)$$

LANDAU-formula kiterjesztése révén — ahol $\langle a, b\rangle$ az a, b természetes számok

legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének hányadosa — szoros kapcsolatban áll az analitikus számelméletben gyakran fellépő, de eddig csak speciális esetekben vizsgált

$$(**) \qquad \mathfrak{A}^{N,\varrho}_{\sigma_1,\sigma_2}(\tilde{n_\nu}) = \sum_{k,l=1}^{N} \frac{(n_k, n_l)^\varrho}{n_k^{\sigma_1} n_l^{\sigma_2}}$$

((n_k, n_l) legnagyobb közös osztó, $\varrho, \sigma_1, \sigma_2$ valós paraméterek) típusú kettős összegekkel. Ha $\varrho=2$, $\sigma_1=\sigma_2=1$, (**) legjobb megbecslése alapvető bizonyos diofantoszi approximációk elméletébe vágó kérdések szempontjából is. (Erdős, Koksma, 1947); ez utóbbi feladatot teljesen Gál oldotta meg (1949).
Az előadó — utalással a Publ. Math.-ben 1957-ben és 1960-ban közölt két dolgozatára és ezeknek irodalmi visszhangjára (Carlitz, Mordell, Van der Pol, Romanov, 1958—60) — megmutatta, hogy 1.(*) legmesszebb menő „természetes" általánosítása egy a $\zeta(s, u)$ Hurwitz-féle zeta-függvényre vonatkozó konvolució-reláció, amelynek egészen más, általános függvénytani problémáknál is vannak alkalmazásai (Acta Math. Hung., 1959); 2. (**)-nak egy újszerű előállítása és bizonyos Wigert—Gronwall-féle eredmények alapján éles felső becslés, ill. sok esetben pontos aszimptotikus formulák megadása válik lehetővé.

Június 1. délelőtt.

H. Hornich: *Számelméleti feltételek bizonyos parciális differenciálegyenletek reguláris megoldhatóságára vonatkozóan.*

A $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f$ differenciálegyenlet minden az origóban reguláris f függvényre csak akkor rendelkezik egy, az origóban reguláris u megoldással, ha az a_i állandókra egy bizonyos számelméleti feltétel teljesül, amely feltételt az előadó megadta és diszkutálta.

J. Cigler: *Néhány metrikus tétel, halmazokról, amelyek számjegytulajdonságokkal vannak jellemezve.*

Az előadó rövid áttekintést adott néhány Eggleston, Volkmann, Salat és saját eredményéről, amelyeket a szerzők olyan valós számokból álló halmazok Hausdorff dimenziójára vonatkozóan értek el, amely számok g-adikus kifejtése bizonyos számjegytulajdonságoknak tesz eleget. Különösen kiemelte az előadó Kisney és Billingsley elegáns bizonyítási módszerét.

W. Philipp: *H. Weyl egy mod. 1 vett egyenletes eloszlásra vonatkozó metrikus tételének egy többdimenziós analogonja.*

Ha A egy valós szimmetrikus mátrix, amelynek összes λ_i sajátértékei 1-nél nagyobbak és $\{l_n\}$ egy valós számokból álló sorozat, amely nem növekszik túlságosan lassan, akkor a $\{A^{l_n}\varphi\}$ vektorok majdnem minden φ-re mod. 1 egyenletesen vannak eloszolva. Nemszimmetrikus négyzetes mátrixokra hasonló tétel érvényes.

Aczél János—Daróczy Zoltán: *Multiplikatív számelméleti függvények alkalmazása az információelméletben és a statisztikus termodinamikában.*

Erdős Pálnak 1946-ban (Ann. of Math. (2) 47,1—20) közölt és azóta sokak által bebizonyított két tételét — amelyek $f(n+1)-f(n) \cong 0$ ill. $f(n+1)-f(n) \to 0$ esetén határozzák meg az additív számelméleti függvények általános alakját — a szerzők átalakították, majd két újabb alkalmazását adták az információelméletben (egy régebbihez vö. pl. D. K. Faddeev, Uszpechi Mat. Nauk 11 (1956), No. 1 (67), 227—231). Az egyik Rényi Alfréd egy sejtésének bizonyítása, miszerint a Shannon-féle és a pozitív rendű entrópiák együttesen egyértelműen karakterizálva vannak azáltal, hogy

független eloszlások direkt szorzatának entrópiája az eredeti entrópiák összege (additív), eloszlás entrópiája kvázilineáris közepe az egyes események entrópiáinak és bizonyos feltételes entrópia kisebb a feltétel nélkülinél. A másik T. W. Chaundy—J. B. McLeod (Edinburgh Math. Notes 43 (1960) 7—8) tételének kiterjesztését, módosítását és új bizonyítását adja; ez úgy értelmezhető, hogy az egyes események folytonos járulékainak összegeként előálló egyetlen olyan entrópia, amely független eloszlásokra additív, éppen a Shannon-féle.

O. EMERSLEBEN: *Egynemű rácstartományok sajátpotenciáljairól.*

Kristályok, különösképpen ionkristályok rácsenergiájának meghatározásánál, amelyek ionjai között Newton potenciál áll fenn, számelméleti kérdések merülnek fel, pl. hibabecsléseknél.
Az előadó példaként sajátpotenciálok meghatározására idézi „Würfeleckentetraeder eines kubischen Raumgitters," Math. Nachr. 24, 121—136 (1962) alatti munkáját.

Június 1. délután.

K. PRACHAR:

Az előadó a következő tétel bizonyítását ismerteti:

Legyen N egy nagy szám és $\varepsilon>0$ tetszőleges. Akkor minden $n \leqq N$-re legfeljebb εN kivétellel az $n=q+x^k$ egyenlet, — k rögzített, q négyzetmentes, $x>c$, — ahol a c állandó ε-tól függhet, megoldható. Előadó úgy véli, hogy x^k helyett 2^x-nel a megfelelő tétel valószínűleg nehezen bizonyítható.

E. WIRSING: *Elementarer Beweis des Primzahlsatzes mit Restglied.*

Előadó az Erdős- A. Selberg féle elemi módszer egy elegáns geometriai javításával a prímszámtétel $\sum_{n \leqq x} \Lambda(n)=x+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$ alakját bizonyította be.

ERDŐS PÁL: *Rankin egy problémájáról.*

Jelölje $f_k(n)$ azon pozitiv egész számok maximális számát n-ig, amelyek nem tartalmaznak k-tagú mértani sort. Ha $\alpha_k=\lim_{n=\infty} f_k(n)/n$, úgy α_k tetszés szerinti pontosságig való meghatározására adott az előadó eljárást (α_k értékét nem tudja egyszerű formulával kifejezni); megcáfolta továbbá Rankin egy sejtését.

SZÜSZ PÉTER: *A diofantikus approximációk metrikus elméletéről.*

Legyen $f(k)$ monoton csökkenő pozitív függvény, amelyre teljesülnek a következő relációk: $f(k) \leqq \frac{1}{2}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k}=\infty$.

Legyen továbbá r adott természetes szám. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$N^*_{\alpha,f,k}(n)=\sum_{\substack{|\alpha m-s| \leqq \frac{f(m)}{m} \\ m \equiv k \pmod r \\ (m,\,s)=1 \\ m \leqq n}} 1, \qquad N_{\alpha,f,k}(n)=\sum_{\substack{\|\alpha m\| \leqq \frac{f(m)}{m} \\ m \equiv k \pmod r \\ m \leqq n}} 1,$$

ahol $\|z\|$ z-nek a legközelebbi egésztől való távolságát jelenti.
Előadó a következő két tétel bizonyítását vázolta:

1. tétel.
Majdnem minden α-ra

$$N^*_{\alpha,f,k}(n) \sim K_1(r,k) \sum_{m=1}^{n} \frac{f(m)}{m} \qquad (n \to \infty),$$

továbbá
2. tétel.
Majdnem minden α-ra fennáll

$$N_{\alpha,f,k}(n) \sim K_2(r,k) \sum_{m=1}^{n} \frac{f(m)}{m} \qquad (n \to \infty).$$

Itt $K_1(r,k)$ és $K_2(r,k)$ csak r-től és k-tól függő állandókat jelentenek:

$$K_1(r,k) = \frac{12}{\pi^2} \frac{r}{C(r)} \frac{\varphi(r,k)}{(r,k)},$$

$$K_2(r,k) = \frac{12}{\pi^2} \frac{r}{C(r)} \sum_{\substack{0 \leqq d < r \\ (d,r)/k}} \frac{\varphi(d,r)}{(d,r)} \sum_{\substack{dm \equiv k \pmod r, \\ m \geqq 1}} m^{-1}$$

ahol

$$C(r) = r^2 \prod_{p/r} (1 - p^{-2}).$$

SÁRKÖZY ANDRÁS: *Totálprimitív sorozatokról.*

Sorozaton nemnegatív egész számokból álló sorozatot fogunk érteni. Az $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ sorozat $[0, x]$ intervallumba eső elemeinek számát $A(x)$-szel fogjuk jelölni.

Legyenek $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ és $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}$ tetszőleges véges, vagy végtelen sorozatok. Akkor az $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ összegen az $a_i + b_j$ $(i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots)$ alakban írható számokból álló sorozatot értjük. Ha egy adott $\mathfrak{A}$ sorozathoz találhatók olyan legalább két-két elemből álló $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ sorozatok, amelyekre $\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \mathfrak{A}$ teljesül, akkor az $\mathfrak{A}$ sorozatot reducibilisnek, ellenkező esetben primitívnek nevezzük. Az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sorozatokat aszimptotikusan egyenlőknek mondjuk, ha elég nagy n-re $\mathfrak{A} \cap [n, +\infty) = \mathfrak{B} \cap [n, +\infty]$ teljesül. Egy primitív sorozatot totálprimitívnek nevezünk, ha minden vele aszimptotikusan egyenlő sorozat primitív.

Turán Páltól származik a következő probléma: egy tetszőleges $\mathfrak{A}$ végtelen sorozatot megadva, elérhető-e mindig a sorozat $o(A(n))$ elemének megváltoztatásával, hogy a megváltoztatott sorozat totálprimitív legyen?

E problémából kiindulva, előadó a következő tételeket bizonyította:

1. tétel. Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges végtelen sorozat. A sorozat $O\left(\frac{A(n)}{\sqrt{\log \log A(n)}}\right)$ elemének megváltoztatásával mindig elérhető, hogy a megváltoztatott sorozat totálprimitív legyen.

2. tétel. Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges végtelen sorozat. A sorozat $O\left(\frac{n \log \log n}{\log n}\right)$ elemének megváltoztatásával mindig elérhető, hogy a megváltoztatott sorozat totálprimitív legyen.

3. tétel. Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges végtelen sorozat. A sorozat $o(A(n))$ elemének elhagyásával mindig elérhető, hogy a megmaradt sorozat totálprimitív legyen.

4. tétel. Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges végtelen sorozat, amelyre alkalmas $\varepsilon > 0$-sal

$$n - A(n) = o\left(n^{\frac{1}{3} - \varepsilon}\right)$$

teljesül. Akkor az $\mathfrak{A}$ sorozat véges sok elem hozzátételével reducibilissé tehető. (tehát egy ilyen tulajdonságú $\mathfrak{A}$ sorozat nem totálprimitív).

H. REICHARDT: *Über diophantische Gleichungen vom Geschlecht 1.*

Előadó a Crelle Journalban a harmincas évek végén megjelent két dolgozatát és azok egyes újabb fejleményeit ismertette.

J. W. S. CASSELS: *Szimultán approximációról.*

Az előadó egy Davenport által nemrég bizonyított tételt tárgyalt. Legyenek $(\lambda, \mu), \ldots, (\lambda_k, \mu_k)$ valós számokból álló párok. Akkor megadható kontinuum-sok valós számokból álló (α, β) pár olymódon, hogy

$$\max\left\{\left|\lambda_j+\alpha-\frac{r}{t}\right|, \left|\mu_j+\beta-\frac{r}{t}\right|\right\} \geqq K/t^{3/2}$$

minden egész r, s, t-re, amelyre $t>0$, ahol K konstans csak k-tól függ. A bizonyítás elképesztően egyszerű és több dimenzióra is átvihető. Korábban a $k=1$, $\lambda_1=\mu_1=0$ speciális eset is csak meglehetősen komplikált módon volt bizonyítható. Ugyanezekkel a módszerekkel többek között bebizonyítható, hogy „rosszul approximálható" (α, β) számpárok léteznek úgy is, hogy az egyes α, β számok maguk is rosszul approximálhatóak.

W. NÖBAUER: *Számelméletileg definiált permutációs csoportok.*

Az $1, 2, \ldots n$ jegyek olyan permutációit tárgyalta az előadó, amelyek egy egészértékű $f(x)$ polinommal az $i \to f(i) \bmod n$, $i=1, 2, \ldots n$ alakban állíthatóak elő. Ilyen permutációkra vonatkozó különféle problémákat tárgyalt, különös tekintettel az összes ilyen permutációk csoportjára.

H. KOCH: *p-adikus számtestek multiplikatív csoportja és Galois-elmélete.*

p legyen páratlan primszám, P_p racionális p-adikus számok teste, k P_p-nek egy véges bővítése. k egy $\bar{k}$ Galois-bővítésének multiplikatív csoportjában két kiegészítő struktúra létezik: $\bar{k}/k$-nak a Galois csoportja és a p-edik hatványhoz tartozó ún. „Normenrestsymbol". Az előadó ezen két struktúra összefüggését abban az esetben vizsgálta, amikor $\bar{k}/k$ egy egyszerűen szétágazó bővítés.

Június 2. délután.

KOROBOV: *A számelmélet alkalmazása közelítő számításoknál.*
(Előadta A. O. Gelfond).

Előadó ismertette, hogyan számítható ki többszörös határozott integrálok közelítő értéke számelméleti meggondolások segítségével, éspedig a térben az optimális pontok megválasztását illetően, amelyekben az egyszerű kvadratúra-értékeket venni kell. Az integrálegyenletek közelítő megoldása is határozott integrálok kiszámítására vezet. Előadó ismertette még az ún. optimális koefficiensek különböző tulajdonságait és azok kapcsolatát az egyenletes eloszlás bizonyos numerikus problémáival.

S. KNAPOWSKI—P. TURÁN: *Összehasonlító primszámelmélet.*

Előadók azon eredményeik egy részét ismertették, amelyek „Comparative prime-number theory" című, az Acta Math. Hung.-ban megjelenendő, 8 dolgozatból álló cikksorozatuk tárgyát képezik.

E. HLAWKA: *A számelmélet alkalmazása a numerikus matematikában.*

Az előadó egy módszert fejtett ki, amelynek segítségével többszörös integrálok közelítőleg meghatározhatók, a diofantikus approximáció elméletének alkalmazásával. Speciálisan Erdős és Turán-nak a diszkrepanciára vonatkozó formulája kerül alkalmazásra. A részletes kifejtés megjelent a Monatshefte für Mathematik 66. kötetében.

W. STAS: *Egy Ramanujan-féle sorról.*

Legyen $\mu(n)$ a Möbius féle μ függvény. Hardy és Littlewood bizonyították be, hogy a

$$S(\beta) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{-\left(\frac{\beta}{n}\right)^2} = o\left(\beta^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad \beta \to \infty$$

feltétel ekvivalens a Riemann-féle sejtéssel. Az előadó a Turán-féle módszerek segítségével egy alsó becslést ad $S(\beta)$-ra. Érvényes a következő tétel: Ha a Riemann sejtés igaz, és a Riemann-féle ζ függvény gyökei egyszeresek, akkor $T > c$-re

$$\max_{T^{1-o(1)} \leqq \beta \leqq T} |S(\beta)| > T^{-\frac{1}{2}-o(1)}$$

ahol c egy állandó.

Június 3. délelőtt

Kötetlen problémafelvető délelőtt, melyen S. Hartmann, Erdős Pál és Turán Pál adtak elő.

A Bolyai János Matematikai Társulat Budapesti Tagozatának előadásai 1962. január 1-től december 31-ig

Január 12.

JU. M. BEREZANSZKIJ (Kiev): *Önadjungált operátorok felbontása sajátfüggvények szerint és ennek alkalmazása.*
(Összefoglaló előadás).

Január 13.

BEREZNAI GYULA: *Inverzió és szerkesztés.*
Középiskolai matematikai délután.

Január 17.

RÉNYI GUSZTÁV: *Közelítő számítások. II.*
Előadás általánosiskolai tanárok számára a Fővárosi Pedagógiai Szemináriummal közös rendezésben.

Január 19.

A statisztikai minőségellenőrzésről szóló NDK oktató film bemutatása. Bevezetőt mondott VAS GYÖRGYNÉ, a MTA Matematikai Kutató Intézete tudományos munkatársa.

Február 2.

SZÁSZ FERENC: *Szele Tibor és Rédei László egy gyűrűelméleti problémájának a megoldása.*

Február 9.

FARKAS MIKLÓS: *Irak.*
(Útibeszámoló).

Február 10.

KÁRTESZI FERENC: *Geometriai konfigurációk.*
Középiskolai matematikai délután.

Március 2.

Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása. Előre kiküldött feladatok megbeszélése.

Március 7.

RUZSA IMRE: *Egyenlőtlenségek.*
Előadás tanárok számára a Fővárosi Pedagógiai Szemináriummal közös rendezésben.

Március 10.

HORVAY KATALIN: *Néhány, kúpszeletekkel kapcsolatos feladat.*
Középiskolai délután.

Március 12.

SCHIPP FERENC: *Feladatmegoldások.*
Középiskolai délután a Nagykátai Gimnáziumban.

Március 13.

CZAPÁRY ENDRE: *Feladatmegoldások.*
Ünnepi szakköri ülés az Apáczai Csere Gimnáziumban.

Március 19.

GÁDOR ENDRÉNÉ: *A lengyel matenmatikai diákolimpia feladataiból.*
Ünnepi szakköri ülés a Móricz Zsigmond Általános Gimnáziumban.

Március 22.

HILBERT emlékest, születésének 100. évfordulója alkalmából. A megemlékezést SZŐKEFALVI NAGY BÉLA tartotta.
A Tudományos Ismeretterjesztő Társulattal közös rendezésben.

Március 20.

CZAPÁRY ENDRE: *Feladatmegoldások.*
Ünnepi szakköri ülés az Épületgépészeti Technikumban.

Március 30.

CSÁSZÁR ÁKOS: *Függvények monotonításának kritériumairól.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör kétnapos összejövetele:

Április 9.

RUZSA IMRE: *A matematikai logikáról.*
Feladatmegoldások. A kiküldött feladatok és az 1962 évi versenyek első fordulói feladatainak megbeszélése.

Április 10.

NAGY DÉNES LAJOS: *A játékok matematikájáról.*
SIMONOVITS MIKLÓS: *Feladatok a konvex síkalakzatok köréből.*

Április 19.

E. LUKÁCS (Washington): *Az eloszlásfüggvények terének egy leképezéséről.*
A MTA Matematikai Kutató Intézetének Valószínűségszámítási Osztályával közös rendezésben.

Április 21.

FREY TAMÁS és RÓZSA PÁL: *A matematika modern alkalmazási területe.*
Középiskolai délután.

Április 25.

CSER ANDOR: *Mit és hogyan tanítsunk a közelítő számítások köréből az általános iskola új tanterve szerint?*

(Előadás általános iskolai tanárok részére a Fővárosi Pedagógiai Szemináriummal közös rendezésben).

Április 27.

RÉNYI ALFRÉD: *Megfigyeléssorozatok kiemelkedő elemeiről.*

Egy megfigyéléssorozat egy elemét kiemelkedőnek nevezzük, ha az összes őt megelőző megfigyeléseknél nagyobb. Ha egy megfigyeléssorozat első n elemét nagyságszerint csökkenő sorozattá rendezzük át, és e sorozatban az n-edik (vagyis az időrendben utolsó) megfigyelés a k-adik helyet foglalja el, azt mondjuk, hogy az n-edik elem rangszáma k-val egyenlő. A kiemelkedő elemek rangszáma tehát 1-gyel egyenlő.

Az előadás kiindulópontját az a meglepő és következményeit tekintve alapvető megállapítás alkotja, hogy független (vagy nem független, de ekvivalens) elemekből álló megfigyeléssorozatok elemeinek rangszámai teljesen függetlenek. E tény számos érdekes következménye közül kiemeljük a következőt: egy megfigyeléssorozat n-edik kiemelkedő eleme sorszámának n-edik gyöke 1 valószínűséggel az e számhoz konvergál.

Ezenkívül sikerült az említett alapvető tényből kiindulva a kiemelkedő elemekre vonatkozólag centrális határeloszlástételt és iterált logaritmus tételt is nyerni. Az előadás kitért a módszer további lehetséges alkalmazásaira is, és rámutatott néhány nyitott megoldandó problémára. Így például a módszer új statisztikai kritériumok felállítását teszi lehetővé, pl. két minta összehasonlítására, valamint a statisztikai gyakorlatban felmerülő más problémák eldöntésére.

Május 11.

Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

1. KÓTA JÓZSEF: *A Bjezikovics-féle tű-problémáról.*
2. *Az Országos Tanulmányi Verseny döntőjének feladatai.*

Május 12.

HÁMORI MIKLÓS: *A matematikai logika elemei és néhány gyakorlati alkalmazása.* Középiskolai matematikai délután.

Május 18.

BÁNKÖVI GYÖRGY: *Egydimenziós véletlen térkitöltési problémákról.*

Véletlen térkitöltési problémáknak olyan feladatokat nevezünk, amelyek ismert nagyság és alak szerinti megoszlású idomoknak egy térbeli tartományban való véletlenszerű elhelyezésével kapcsolatosak. Ilyen kérdések lehetnek: az elhelyezett idomok várható számának vagy össztérfogatának meghatározása, az idomok közti távolságok statisztikai jellemzése. A többdimenziós problémák általában igen nehezek.

Az előadás egydimenziós problémákkal, azaz a $(0, x)$ intervallumnak szakaszokkal való kitöltésével foglalkozik. Alapproblémaként egységnyi szakaszok bizonyos egyszerű szabályok szerinti elhelyezését tekintjük; ezzel a problémával Rényi Alfréd foglalkozott egy 1958-ban megjelent dolgozatában. Ezeket az eredményeket az előadó továbbfejlesztette az alábbi irányokban:

1. Az egységnyi szakaszok közti „hézagok" vizsgálata.
2. Véletlen hosszúságú szakaszok elhelyezése.
3. A véletlen térkitöltés felhasználása modellként az ún. Monte Carlo-módszer alkalmazásában.

Május 25.

A prágai „Matematikai statisztika alkalmazása a gépiparban" konferencián járt delegáció rövid beszámolója. Ezt követte FREUD GÉZA előadása: *Ortogonális polinomsorok Fejér-féle közepeiről.*

Az előadó áttekintést adott a Fourier-sorok Fejér-közepei néhány fontosabb tulajdonságáról. Korábbi saját és más szerzőktől származó eredmények folytatásaként az alábbi kérdésekkel foglalkozott a valós tengelyen adott elosztásra ortogonális polinomsorok (C, 1)-szummáival kapcsolatban:

a) folytonos függvény egyenletes megközelítése a Fejér-közepekkel,

b) a közelítés mértéke, ha a függvény Lipschitz-feltételnek tesz eleget,

c) a Fejér-közép deriváltjának konvergenciája a kifejtett függvény differenciálhányadosához.

Eredményei szerint fenti szempontokból igen általános valós tengely menti eloszlásra vonatkozó ortogonális polinomsor ugyanúgy viselkedik, mint a Fourier-sor. Figyelemreméltó, hogy ebbe az általános klasszisba nemcsak a Jacobi-polinomok szerinti sorfejtések tartoznak bele, hanem a Hermite-polinomok szerinti sorfejtések is.

Június 8.

H. FREUDENTHAL (Utrecht): *Entwurf einer kosmischen Verkehrssprache.*
A MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Június 9.

Az 1962. évi Arany Dániel tanulmányi verseny eredményhirdetése és díjkiosztása.
Az I. osztályos feladatokat ismertette: FRIED ERVIN.
A II. osztályos feladatokat ismertette: LŐRINCZ PÁL.

Június 15.

SZEGŐ GÁBOR (Stanford): *Biortogonális trigonometrikus polinomokról.*
Megadott, $(0,2\pi)$-ben értelmezett súlyfüggvényhez a trigonometrikus polinomoknak egy biortogonális rendszere képezhető. Ezek a trigonometrikus polinomok szoros kapcsolatban vannak az egységkörön, illetve a $(-1, +1)$ intervallumon ortogonális polinomokkal. — Gyökeloszlás, rekurzió és kifejtési problémák. A kifejtés a közönséges Fourier-sor természetes általánosítása.
Ekvikonvergencia tételek.

Június 13.

ERDŐS PÁL: *Elemi számelméleti problémák.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör kibővített ülése.

Június 22.

MILAN SEKANINA (Brno): *Adott halmazon értelmezett topológiák rendszerének algebrai tulajdonságai.*
Legyen P adott halmaz, 2^P a P halmaz részhalmazainak rendszere. A 2^P halmaz önmagába való összes leképezéseinek halmazában vizsgáljuk különböző burokképzési műveleteknek és topológiáknak algebrai tulajdonságait. Megadjuk az úgynevezett Čech-féle topológiák rendszerének algebrai struktúráját, továbbá ennek a Kuratowski-féle és a pszeudometrizálható topológiákkal való kapcsolatait.

Július 13.

DOUGLAS DERRY (Vancouver): *Polygon Methods in Juel Geometry.*

Július 20.

LEE LORCH (és PETER SZEGŐ) Alberta University, Edmonton: *Bizonyos Sturm—Liouville függvények magasabbrendű monotonitási tulajdonságai.*
Legyen $y_i(x)$ egy adott Sturm—Liouville típusú differenciálegyenlet oszcilláló megoldása, x_{in} az $y_i(x)$ egymás után következő zérushelyeiből álló sorozat, $\lambda > -1$

állandó. Bebizonyítjuk, hogy alkalmas feltételek mellett a megoldás-függvény abszolút értéke λ-adik hatványának két szomszédos gyök közötti integráljai, továbbá bizonyos esetben az $(x_{1n}-x_{2n})$ sorozat is teljesen monoton. Speciális esetként adódik pl., hogy teljesen monoton sorozat képezhető a Bessel-függvények gyökeivel.

Július 27.

DIRAC GÁBOR: *Gráfok homomorfia tulajdonságai és rokon problémák.*

Augusztus 3.

E. HEWITT (University Washington Seattle): *A Haar mérték néhány új tulajdonságáról.*

Legyen G egy lokálisan kompakt csoport. Jelölje a G Borel részhalmazainak összességét, azaz G összes zárt részhalmazai által generált σ-algebrát. Jelölje továbbá $\mathbf{B}_a$ a G Baire részhalmazainak összességét azaz bizonyos $\{x \in G : f(x)=0\}$ zárt részhalmazok által generált σ-algebrát, ahol f végigfut a G-n értelmezett összes, folytonos, valós értékű függvényen. Világos, hogy $\mathbf{B}_a \leqq \mathbf{B}_0$ továbbá $\mathbf{B}_a \subsetneqq \mathbf{B}_0$ akkor és csakis akkor áll fenn, ha G-re teljesül a megszámlálhatóság első axiómája.

Mi G-n új módon értelmezzünk egy Haar-mértéket — kiindulva mint mindig egy I funkcionálból (Haar funkcionál), amely az összes G-n értelmezett nem negatív, folytonos valós-értékű függvények L^* terén, úgy hogy valamennyi eltűnik G egy kompakt részhalmazán kívül. Az I funkcionál rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+(SI(g))$$

ahol $f, g, \in L^*$ és α, β nem negatív valós számok;

$I(f) \geqq 0$	minden $f \in L^*$-ra
$I(f_0) > 0$	valamilyen $f_0 \in L^*$-ra
$I(af)=I(f)$	minden $f \in L^*$-ra és $a \in G$-re

ahol $af(x)=f(ax)$. I-t a következőképp terjesztjük ki. Egy alulról félig folytonos g függvényre $(0 \leqq g \leqq \alpha)$ legyen

$$\bar{I}(g) \text{ supremum } \{I(f): f \in L^*,\ f \leqq g\}.$$

Egy tetszőleges nem negatív függvényre h-ra $(0 \leqq h \leqq \infty)$ legyen

$$\bar{\bar{I}}(h) \text{ infimum } \{\bar{I}(g): g \text{ mint fent, } g \geqq h\}$$

Ha $A \subset G$ legyen $\lambda(A)=\bar{\bar{I}}(\xi_A)$. Ekkor λ egy Carathéodory külső mérték, és láthatjuk hogy minden B_0-beli halmaz λ-mérhető. Jelölje M az összes λ-mérhető halmazok összességét.

Ezen előzmények után kimondhatjuk a főtételünket, amely Kakutani és Kodaira (Proc. Imp. Acad. Tokyo 1943) egy eredményének az általánosítása.

Tétel. Legyen A egy M-beli halmaz. Ekkor léteznek olyan B és C a $\mathbf{B}_a$-ökből vett halmazok, hogy $B \subset A \subset C$ és $(C \cap B' \cap F)=0$ minden G-beli kompakt F halmazra.

Lehet példákat konstruálni, hogy a tételben szereplő F kompakt halmazt nem lehet kicserélni az egész G csoporttal.

Egy korollárium ként bizonyítjuk a következő eredményt. Legyen $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ egy nem megszámlálható végtelen összessége végtelen kompakt csoportoknak. Minden $\gamma \in \Gamma$-ra legyen A_γ egy részhalmaza G_γ-nak úgy, hogy $A_\gamma \subsetneqq G_\gamma$ és $\lambda_\gamma(A_\gamma)=1$ (λ_γ a normalizált Haar mérték G-n). A szorzathalmaz PA_γ nem mérhető a Haar mértékre nézve a PG_γ csoporton.
$\gamma \in \Gamma$ $\gamma \in \Gamma$

Augusztus 13.

V. S. KRISHNAN (Madras) General Uniform Spaces.
A szerző megvizsgálta, hogy mi mondható ki abban az esetben, ha az uniform struktúra definíciójából elhagyjuk a szimmetria axiómát. Ekkor a tér nem szükségképp teljesen reguláris, mégis definiálható a tér minimális teljes lezártja.

Augusztus 27—szeptember 3.

Matematikaoktatási szimpózium.
Az UNESCO támogatásával, a Művelődésügyi Minisztérium megbízásából.
A szimpózium programjában az alábbi előre kiküldött vitaindító anyagok megbeszélése szerepelt:
1. Az iskolai matematikatanítás néhány tantervi problémájáról.
2. A matematika tanulás néhány problémájáról.
3. A matematika tanítása, a nevelői hivatás, a reform és a közvélemény kialakításának néhány kérdése.

A szimpóziumon a következők vettek részt:

Ausztrália: Dienes, Z. P.
Belgium: Papy, M. G., Servais, M. W.
Csehszlovákia: Vysin, J.
Dánia: Christiansen, B.
Egyesült Államok: Stone, M. H.
Franciaország: Gilbert, H.
Hollandia: Leeman, H. Th.
Japán: Akizuki, Y.
Lengyelország: Krygowska, A S., Zieba, A.
Magyarország: Hajós György, Faragó László, Kárteszi Ferenc, Késedi Ferenc, Surányi János, Varga Tamás.
Nagybritannia: Matthews, M. G., Skemp, R. R.
Olaszország: Pescarini, A.
Románia: Nicolescu, M.
Svájc: Pauli, M, L.
Svédország: Hastad, M.
Szovjetunió: Tcherkasov, R, S.
Az UNESCO Központ kiküldöttei: Bandyopadhyay, P. C., Hunwald, A., Layard, I.

Megfigyelők:

Japán: Fukuhara, M.
Kanada: Lemire, L.
Magyarország: Berkes Jenő, Cser Andor, Gábor Endréné, Kalmár László, Nagy Ferenc, Ördögh László, Székely Jenő, Túri Istvánné.
Svájc: Seylaz, I.

Szeptember 14.

V. G. BOLTJANSZKIJ (Moszkva): *Optimális folyamatok elméletéről.*

Szeptember 22.

KÁRTESZI FERENC: *Egy Erdős-féle sejtésről.*
Középiskolai matematikai délután.

Október 5.

HÓDI ENDRE: *Beszámoló a IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

Október 20.

RÁCZ JÁNOS: *Apollonius köre és néhány erre vonatkozó feladat.*
Középiskolai délután.

Október 19.

Beszámoló a stockolmi matematikai kongresszusról.

Október 26.

SZIDAROVSZKY FERENC: *A prímszámok néhány nevezetesebb tulajdonságáról.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

Október 26.

FRIVALDSZKY SÁNDOR: *A derivált fogalom Szoboljev-féle általánosításáról.*
Az előadó a Szoboljev-féle általánosított deriváltak elméletéhez kapcsolódóan vizsgálja az összefüggéseket a régi és az új értelemben vett deriváltak között, nem „csillagtartományok" esetén, továbbá az általánosított deriváltakkal rendelkező függvények adott tartományról való terjeszthetőségének feltételét, ha a deriválhatóságot akarjuk tartani. Az utóbbi problémát Hestenes és Babics megoldotta mély segédeszközök felhasználásával. Az előadás egy közvetlenebb utat választ.

Október 26.

A. BAEZ (Paris) az Alaptudományok Felsőoktatási Osztályának vezetője az UNESCO Központjában:

Új technika a természettudományok oktatásában.
(Az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezésben).

November 2.

MÁTÉ LÁSZLÓ: *Absztrakt Cauchy probléma általános lineáris terekben.*
Az előadó a lineáris, topológikus és metrikus térnek egy-egy olyan bővítését mutatta meg, amely tartalmazza a tér lineáris operátorainak egy kommutatív részgyűrűjét. A bővítés majdnem analóg az intervallumon folytonos függvények Fréchet-terének beágyazásával a WESTON-féle perfekt operátorok gyűrűjébe.
Az előadás azzal foglalkozott, hogy bizonyos, operátor-differenciálegyenletek tárgyalása egyszerűbbé és általánosabbá tehető a bővített struktúra felhasználásával.

November 9.

MAGYARI ENDRE: *Grafikus számítások meggyőző szemléletessége.*

November 10.

SOLT GYÖRGY: *Komplex számok. I.*
Középiskolai matematikai délután.

November 16.

F. RÜHS (Freiberg): *Über lineare Volterrasche Integralgleichungen vom Faltungstypus.*
A. HAIMOVICI: (Iasi). *Sur l'équivalence des espaces a connexion affine.*

November 16.

FÖLDES ANTONIA: *Számelméleti kongruenciák.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

November 29.

M. HAIMOVICI: *Über die Zerlegung der Systeme partieller Differentialgleichungen.*

November 30.

GYIRES BÉLA: *Megemlékezés* RADOS GUSZTÁV-*ról.*
Előadás a TIT-tel közös rendezésben, a Kossuth Klubban.

December 7.

J. L. DESTOUCHES (Paris): Néhány francia tudóssal kapcsolatos személyes emlékeim. (Emile BOREL, Elie CARTAN, Louis de BROGLIE, Marie CURIE, Fréderic et Iréne JOLIOT-CURIE, Paul LANGEVIN, Paul MONTEL, Jean PERRIN). Az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezésben.

December 14.

Az 1962. évi GRÜNWALD GÉZA díj kiosztása.
Az 1962 évi KÜRSCHÁK JÓZSEF verseny eredményhirdetése és díjkiosztása.
A versenyfeladatokat HAJÓS GYÖRGY ismertette.

December 15.

ERDŐS PÁL: *Elemi geometriai eredmények és problémák.*
Középiskolai matematikai délután.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szegedi Tagozatának előadásai 1962. január 1-től 1962. december 31-ig

Január 11.

J. M. BEREZANSZKIJ (Kiev): *Pozitív definit magok integrálelőállításairól.*

Március 17.

ERDŐS JENŐ: *Az 1961. évi Schweitzer Miklós emlékverseny feladatainak megoldása*

Április 14.

FREUD GÉZA: *Valós függvények lokális magasabbrendű differenciálásáról.*

Május 5.

ACZÉL JÁNOS: *Az információ különböző mértékeiről.*

Június 5.

H. J. WEINERT (Potsdam): *Über die Holomorphentheorie der Ringe.*

Július 13.

J. MEDER: (Szczecin): *Über die Nörlundsche Summierbarkeit der Orthogonalreihen*

Szeptember 15.

M. H. STONE (Chicago): *Hilbert Space Methods in Conformal Mapping.*

Szeptember 18.

V. G. BOLTJANSZKIJ (Moszkva): *Optimális folyamatok elméletéről.*

Szeptember 19.

G. ASSER (Greifswald): *Über eine Klasse von Algorithmen.*

November 9.

A. HAIMOVICI (Iasi): *Über eine Verallgemeinerung des Problems von Cauchy.*

November 10.

GRAETZER GYÖRGY: *Szabad algebrák.*
Az előadó vázlatosan ismertette szabad algebrákkal kapcsolatos eredményeit. Egy adott (az elsőrendű függvénykalkulusban kifejezett) Σ axiómarendszer feletti

szabad algebrák definíciója szerepelt először. Ha Σ az ítéletkalkulusban van kifejezve, akkor a szabad algebra létezésére Σ-ra megfogalmazható szükséges és elegendő feltétel adható. Az általános esetben egyik fontos eredmény az unicitás tétel, amely Gödel teljességi tételéből adódik. A szabad algebra létezésének szükséges és elegendő feltétele ebben az esetben is megadható.

November 13.

F. RÜHS (Freiberg): *Über lineare Integralgleichungen vom Faltungstypus.*

November 16.

A. JA. LERNER (Moszkva): *Emberekből és gépekből álló rendszerekkel kapcsolatos tudományos problémák.*

December 11.

J. L. DESTOUCHES (Páris): *Logique mathématique et la théorie de la physique quantique.*

December 12.

J. L. DESTOUCHES (Páris): *Problémes d'analyse fonctionelle posès par la microphysique.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Debreceni Tagozatának előadásai 1962. január 1-től 1962. december 31-ig

Január 8.

JU. BEREZANSZKIJ (Kiev): *Önadjungált operátorok felbontása sajátfüggvények szerint és ennek alkalmazása.*

Január 16.

SZÁSZ FERENC: *A teljesen reducibilis operátormodulusokról.*

Előadó vázlatos bizonyítással ismertette azt a tételt, hogy tetszőleges A asszociatív gyűrű felett bármely M teljesen reducibilis A — jobbmodulusnak az $E(M)$ teljes operátor-endomorfizmusgyűrűje Neumann-reguláris gyűrű. Korábban Kertész Andor megmutatta ugyanis azt, hogy $E(M)$ Jacobson-radikálmentes, de vannak olyan Jacobson-radikálmentes gyűrűk, amelyek nem Neumann reguláris gyűrűk, ezért az előadás első eredménye valódi élesítése Kertész Andor eredményének. — Az előadás második témaköre az $E(M)$ gyűrű kétoldali ideáljai hálójának a vizsgálata, ha M homogén. — A harmadik eredmény a teljesen redukált modulusoknak a segítségével és a modulusok Kertész-radikáljainak a segítségével az Artin-féle féligegyszerű gyűrűknek egy új modulus-elméleti jellemzése az egységeleme „MHR-gyűrűk" osztályán belül. — Végül az előadó megemlítette azt a legújabb eredményét, hogy miképpen konstruált Szelének (1949) és Rédeinek (1959) egy problémáját megoldva olyan gyűrűt, amelynek csak véges sok jobbideálja, de végtelen sok balideálja van. Ilyen konstrukciók további élesebb alakban és tetszőleges sok nemizomorfpéldányban megadhatók. Az előadó felvetett néhány nyitott kérdést is az előadás anyagához kapcsolódóan.

Február 9.

MOÓR ARTHUR: *Rekurrens kovariáns differenciálról.*

Legyen adva $k_\nu(x)$ és $T^\varkappa(x)$ két vektormező. Az előadás azt a problémát vizsgálta, hogy melyek a szükséges és elégséges feltételei annak, hogy $T^\varkappa$ kovariáns differenciáljaira a

$$(*) \qquad \nabla_\nu T^\varkappa \equiv \partial_\nu T^\varkappa + \Gamma_{\varrho}{}^{\varkappa}{}_{\nu} T^\varrho = k_\nu T^\varkappa$$

reláció fennálljon, ahol ∇_ν a kovariáns differenciált jelenti, azaz T^α-nak rekurrens kovariáns differenciálja legyen. (*) relációban T^α tenzormezővel is pótolható és másodrendű $T_{\alpha\beta}$ tenzormező esetében $I^{\beta}_{\alpha\gamma}$ eltolási paraméterek az adott tenzormezőből illetve az adott k_ν vektormezőből meghatározhatók.

Március 14.

BARNA BÉLA: *Egyenletek megoldásáról.*
Tanári továbbképző előadás.

Március 15.

BARNA BÉLA: *Diofantoszi egyenletek megoldása.*
Középiskolai matematikai délután.

Március 16.

KÁNTOR SÁNDOR: *Függvények lokális tulajdonságai.*
Fiatalok klubja.
A határérték, a folytonosság, a szélsőértékek elhelyezkedése közötti kapcsolat néhány problémájáról. Problémafelvetések, sejtések.

Március 23.

ERDŐS PÁL: *Extrémum problémák a gráfelméletben.*

Március 30.

N. NEGOESCU: *Tudományos kutatásokról.*

Április 1.

GESZTELYI ERNŐ: *Operátorszámítás alkalmazása polinomegyüttható lineáris differenciál egyenletek megoldására.*

Az algebrai deriválást a MIKUSIŃSKI-féle operátorszámításban a következőképpen értelmezik: $D\{f(t)\}=\{-tf(t)\}$, ha $f(t)$ a $[0, \infty]$ intervallumban folytonos függvény, és $D_a=\dfrac{vDu-uDv}{v}$ ha $a=\dfrac{u}{v}$, ahol a a MIKUSIŃSKI-féle operátor test egy eleme és $u, v, \in, C$. Ha az ebből következő $D^n f(f)=\{(-t)^n F(f)\}$ formulát alkalmazzuk, akkor bármely polinomegyüttható lineáris differenciálegyenlet átalakítható egy operátoregyenletté. Az így kapott operátoregyenlet nem differenciálegyenlet, mégis bizonyos esetekben a differenciálegyenletekhez hasonló módon oldható meg. Ehhez az szükséges, hogy értelmezzük az algebrai deriválás inverzét, az ún. algebrai integrálást, amely a határozatlan integrál analogonja. Az előadásban sor került annak igazolására, hogy az s operátor racionális kifejezései algebrailag integrálhatók. Továbbá, ha $f(t)$ a $[0, \infty]$-ben tetszőleges folytonos függvény, akkor az $\{f(t)\}$ operátor algebrai integrálja létezik. Így a $\left\{\dfrac{f(t)}{-t}\right\}$ alakú függvények is az operátorok közé sorolhatók. Az előadó néhány példán bemutatta a módszer alkalmazhatóságát.

Április 6.

SZÁSZ PÁL: *Különböző típusú lépcsőparabólákról.*

Az előadó először egy általa bevezetett *általánosított kvázi-lépcsőparabolára* vonatkozó régebbi és újabb eredményeit ismertette, azután vázolta az itt bevezetett *általánosított majdnem-lépcsőparabolára* vonatkozó alábbi tétel bizonyítását, amely válasz volt *Turán Pál* egy kérdésére. E tételben az $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$ paraméterérté-

kekhez tartozó Jacobi-polinom gyökei szerepelnek. Ez a polinom konstans faktortól eltekintve

$$\omega_n(x)=\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right] \qquad x=\cos\vartheta$$

tehát a szóban forgó gyökök

$$x_{n\nu}=\cos\frac{2\nu\pi}{2n+1} \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

Tétel. Legyen $f(x)$ folytonos függvény a $-1\leqq x\leqq 1$ intervallumban. Válasszuk alappontokul a fenti jelölés mellett az $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}, 1$ helyeket s legyenek az első n helyhez tetszés szerint előírva rendre az

$$y'_{n1}, y'_{n2}, \ldots y'_{nn}$$

deriváltértékek azzal a megszorítással, hogy

$$|y'_{n\nu}|\leqq \Delta$$

ahol Δ az n és ν-től független állandó. Akkor $S_n(x)$-szel jelölve az $f(x)$ függvénynek megfelelő legfölj̈ebb $2n$-edfokú általánosított majdnem-lépcsőparabolát, vagyis amelyre

$$\varrho_n(x_{n\nu})=f(x_{n\nu}), \quad \varrho_n(x)=f(1), \quad \varrho'_n(x_{n\nu})=y'_{n\nu}$$
$$(\nu=1,2,\ldots,n;\ n=1,2,3,\ldots).$$

$n\to\infty$ esetén

$$\varrho_n(x)\to f(x),$$

egyenletesen áll fenn ebben a számközben.

Április 19.

BUZÁSI KÁROLY: *A véges csoportok egy moduláris előállítása.*
A véges csoportok olyan osztályát vizsgálta az előadás, amely tartalmaz prímindexű normálosztót. Az ilyen csoportok olyan test feletti csoportalgebrának direktösszegre (kétoldali ideálok direktösszegére, majd azok balideálok direktösszegére) való felbontásának megoldásáról számol be a dolgozat, amelynek karakterisztikája nem osztja a csoport rendjét.

Április 26.

KÁNTOR SÁNDOR: *Feladatmegoldási módszerek.*
Matematikai délután.

Április 28.

RÉNYI ALFRÉD: *Megfigyeléssorozatok kiemelkedő elemeiről.*
(l. az április 27-i budapesti előadás kivonatát).

Május 7.

SURÁNYI JÁNOS: *Geometriai számelméleti kérdésekről.*
SURÁNYI JÁNOS: *Beszélgetés a matematikatanítás iránti nemzetközi érdeklődésről.*
Tanári továbbképző előadás.

Május 12.

H MICHEL (Halle a. S.): *Charakterisierung von Iterationsgruppen reeller Funktionen durch ihre Elemente.*

Május 15.

TAMÁSSY LAJOS: *Érintőterek szorzattereinek affin összefüggéséről.*
Előadó tárgyalta az érintőterek szorzatterei között létesített affin összefüggést, és elsősorban ezen terek ekvivalenciáját. Ennek bevezetéseképpen ismertette az ekvivalencia fogalmát és az annak tárgyalásánál felhasznált differenciálegyenlet rendszerekre vonatkozó eredményeket.

Május 17.

CSÁSZÁR ÁKOS: *Függvények monotonításának kritériumairól.*

Június 6.

A. O. GELFOND: *Irreducibilis pontsorozatokon értelmezett analitikus függvények értékeinek aritmetikai tulajdonságairól.*

Június 25.

SZEGŐ GÁBOR (Stanford): *Biortogonális trigonometrikus polinomokról.*

Szeptember 16.

M. H. STONE (Chicago): *Hilbert Space Methods in Conformal Mapping.*

Szeptember 19.

Y. BAR-HILLEL (Jerusalem): *A gépi fordítás és a matematikai nyelvészet legújabb eredményei.*

Október 16.

ERDŐS JENŐ: *A matematikai logikáról.*
Tanári továbbképző előadás.

Október 18.

DARÓCZY ZOLTÁN: *Vektorok és alkalmazásaik feladatmegoldásokban.*
Matematikai délután a Fazekas Gimnáziumban.

November 14.

F. RÜHS (Freiberg): *Über reelle Umkehrformulen zur Laplace-Transformation.*

November 13.

A. HAIMOVICI (Iasi): *Über die Aequivalenz zweier affinzusammenhängender Räume.*

November 15.

KÁNTOR SÁNDOR: *A Kürschák verseny feladatainak megoldása.*
Matematikai délután a Fazekas gimnáziumban.

November 30.

A. KOTZAUER: *Elliptische Funktionen als Turánsche Folgen.*

November 30.

K. v. BÜLOW: *Über den Charakterkörper von p-Gruppen.*

December 6.

VARGA OTTÓ: *Az invariáns differenciáloperátor előállítása Finsler-terekben.*
Az előadó két Riemann-féle oszkuláló metrika segítségével egy olyan konnexiót vezet le, amely az E. Cartan által bevezetett konnexióval azonos. A konnexió segítségével az invariáns derivált ismert módon vezethető le.

December 6.

SOÓS GYULA: *A Finsler-nyaláb görbületelmélete.*
A differenciálható sokaság érintő nyalábján, mint példán keresztül az előadó ismertette a differenciálható fibrált tér fogalmát. A Finsler-féle nyaláb ennek alapján olyan principiális 'fibrált tér, amelynek alapsokasága az érintő nyaláb. Az összefüggés globális módszerekkel történő bevezetése után előadó vázolta azt az eljárást, amely elvezet az ismert görbületi és torziómennyiségekhez.

December 18.

VINCZE ISTVÁN: *Kombinatorikus módszerek a valószínűségszámításban.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Borsodi Tagozatának előadásai 1962. január 1-től 1962. december 31-ig

Február 9.

OBÁDOVICS J. GYULA: *Sajátértékproblémák.*
(A Tudományos Szakosztály rendezésében).

Február 9.

VINCZE ENDRE: *Függvényegyenletekről.*
Az előadó a trigonometria függvényegyenletekre adott megoldásait továbbfejlesztve egy általános módszert mutatott be az

$$f(u * v) = \sum_{k=1}^{n} g_k(u)\, h_k(v) \quad [u, v, u * v \in Q_0;\ f, g_k, h_k : Q_0 \to Q]$$

típusú függvényegyenletek megoldására, ahol q_0 tetszőleges Abel-féle félcsoport, q pedig tetszőleges kommutatív gyűrű. Az előadás anyaga „Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen" címen a *Publ. Math. Debrecen* 9 (1962) kötetében jelenik meg.

Február 16.

SZARKA ZOLTÁN: *A síkbeli feszültségfüggvény megadása komplex változókkal.*
Az előadó röviden igazolta, hogy a síkbeli feszültségprobléma megoldása harmonikus egyenlet megoldására vezet, majd igazolta, hogy a feszültségfüggvény előállítható egy komplex változós függvény valós részeként. A feszültségek és az elmozdulások meghatározása után egy kétszeresen összefüggő végtelen tartomány esetében mutatta be az eljárás menetét. (Műszaki Szakoszt. előadása).

Február 21.

FÓNYAD ZOLTÁN: *Az inverz függvény fogalma és ábrázolása.*
(A diákszakosztály előadása a miskolci Hermann Ottó Leánygimnáziumban).

Február 21.

EVVA LEONA: *A matematika tanítás korszerűbbé tétele az általános iskolában.*
(Az Általánosiskolai Szakosztály rendezése a miskolci Hermann Ottó Leánygimnáziumban).

Március 2.

SZARKA ZOLTÁN: *Beszámoló németországi (NDK) utamról.*

VINCZE ENDRE: *Beszámoló németországi (NDK) utamról.*
Klubest.

Március 5.

SALÁNKI JÓZSEF: *Számológépek.*
(Előadás a Földes Ferenc Gimnáziumban, Miskolc, diákok részére).

Március 16.

PETRICH GÉZA: *Torz egyeneshármas metszői, tekintettel a bányafolyosók szerkesztésére.*
(A Műszaki Szakosztály előadása).

Március 23.

RÓZSA PÁL: *A Poisson-egyenlet közelítő megoldásáról, mátrixszámítás alkalmazásával.*
A másodrendű parciális differenciálegyenletek a rácsmódszer segítségével parciális differencia egyenletekkel közelíthetők. Az általánosan használt módszerrel a közelítés hibája a rácstávolság négyzetével arányos. Mikeladze és mások munkáiból ismeretes, hogy a módszer bizonyos módosításával elérhető az, hogy a hiba a rácstávolságnak a hatodik hatványával legyen arányos. Az így nyert differenciaegyenlet téglalapalakú tartomány esetén olyan algebrai egyenletrendszerre vezet, amelynek az együttható mátrixa, alkalmas particionálás révén, egyszerű szerkezetű hipermátrixnak tekinthető. Felírható u. i. úgy, mint egy egyszerű kontinuáns mátrix direkt polinomja, amelynek az invertálása Stéphanos tételének Egerváry-tól származó általánosítása révén explicit alakban elvégezhető. Hasonló eredmény nyerhető, ha a feladatot mátrixegyenletként tekintjük.

Április 2.

ACZÉL JÁNOS: *Az információ különböző mértékei.*
Az előadó az információ fogalmának axiomatikus értelmezését ismertette, s különösen a magyar matematikusok e téren elért eredményeit. Vázolta az információ elmélet kialakulását és alkalmazási lehetőségeit is. (Tudományos Szakosztály előadása).

Április 3.

BURÁNY JÁNOS: *Függvények vizsgálata.*
(Klubest, a Közgazdasági Technikum Ipari és Mezőgazdasági Tagozatában, Miskolcon.)

Április 6.

SALÁNKI JÓZSEF: *Elektronikus számológépek.*
(A Műszaki Szakosztály rendezése a Mechanikai Tanszék felkérésére.)

Április 12.

HUSZTHLY LÁSZLÓ: *Műszaki vonatkozású feladatok.*
(Előadás tanárok számára a Kossuth Lajos Gimnáziumban, Sátoraljaújhelyen).

Április 13.

SURÁNYI JÁNOS: *A matematika alapjaira vonatkozó vizsgálatokról.*
Minden tudomány, így a matematika fejlődése is kettős jelleget mutat. Egyfelől új eredményeket kutat fel, másfelől viszont a meglevő eredmények hátterét vizsgálja. Az ilyen visszatekintő alapokat tisztázó munkát szükségessé tette az, hogy ismételten merültek fel ellentmondások a matematika újabb ágaiban. Különösen a halmazelméletben a matematika fejlett fokán felmerült ellentmondások irányították a figyelmet az ellentmondásmentesség kutatására. Ezek a vizsgálatok az egyes tudományágak axiomatizálásával nyert rendszerekre vonatkoznak és főként az ellentmondástalanság és teljesség kérdésére vonatkoznak. Az előbbi nem bizo-

nyítható az axiómarendszeren belül (Gödel). Mint Gentzen-nek az aritmetika ellentmondástalanságára adott bizonyítása mutatja, ez mégsem zárja ki az ellentmondástalanság bizonyítását. Az analízis ill. halmazelmélet ellentmondástalanságának bizonyítása még nyitott kérdés. A teljesség részben az axiómarendszerben megfogalmazható állítások bizonyítható vagy cáfolható voltát jelentheti. Erre Gödel megmutatta, hogy minden elég kifejező axiómarendszernek van az axiómarendszerben megoldhatatlan problémája. Vonatkozhat a kérdés arra is, hogy lehet-e lényegesen különböző, pl. különböző számosságú modellje egy axiómarendszernek. Erre Th. Skolem adott igenlő választ. — Az a kérdés, hogy egy adott tétel következménye-e egy axiómarendszernek vagy sem, annak eldöntésére vezethető vissza, hogy egy logikai formula azonosan igaz-e vagy sem. Erre az eldöntésre az „általános eljárás" fogalmának egy plauzibilis konkretizálása mellett ilyen eljárás nem adható, noha a kérdés pl. egy elég egyszerűen hangzó gráfelméleti probléma megoldhatóságára redukálható.

Április 18.

OBÁDOVICS J. GYULA: *Feladatok a felvételi vizsga matematika anyagából.*
(Klubdélután a szerencsi Bocskai Gimnáziumban).

Április 20.

VINCZE ENDRE: *Euler-tétele, szabályos testek vizsgálata.*
(Előadás diákok számára a Kilián Gimnáziumban, Miskolcon).

Április 25.

FÓNYAD ZOLTÁN: *Egyetemi felvételi feladatok, különös tekintettel a gyakori hibákra.*
(Előadás diákok számára Sátoraljaújhelyen, a Kossuth Gimnáziumban.)

Április 25.

FÓNYAD ZOLTÁN: *Szemelvények a felvételi vizsgák tapasztalataiból.*
(Előadás diákok részére Sárospatakon, a Rákóczi Gimnáziumban).

Április 25.

KISS BARNA: *Néhány érdekesebb egyetemi felvételi feladat megoldása.*
(Előadás diákok számára a Zrínyi Ilona Leánygimnáziumban, Miskolcon).

Április 26.

BATÁR ZOLTÁN: *Bolyai Farkas.*
SZÉNÁSSY BARNA: *Történeti megjegyzések a szögharmadolás és a körnégyszögesítés problémájáról.*
(Előadás tanárok számára).

Május 4.

NIKODÉMUSZ ANTAL: *Grafikus módszer a $\Delta u = 0$ egyenlet első peremérték problémájának megoldásához.*
Az előadó rámutatott arra, hogy ha a $\Delta u = 0$ egyenletet differenciálegyenletté alakítjuk, adott peremértékből kiindulva az alapul vett tartomány belső pontjaiban ismert numerikus iterációs eljárás segítségével kiszámíthatjuk a meghatározandó u függvényt. Az új eljárás ennek a módszernek grafikus kivitelezése. Az előadó kettő, lényegében hasonló módszert mutatott be. Az eljárásnak előnye az, hogy rendkívül gyors és egyszerű.

Május 10.

BATÁR ZOLTÁN: *Szemelvények a lengyel matematikai olimpiász feladataiból.*
(Előadás diákoknak a Kilián Gimnáziumban, Miskolcon).

Május 16.

HNISZ LÁSZLÓ: *Az exakt gondolkodásra való nevelés a matematikában.*
(Előadás tanárok számára a Földes Ferenc Gimnáziumban, Miskolcon).

Május 18.

KIRÁLY BÉLA: *Nem lineáris lengések.*
(A Műszaki Szakosztály rendezésében).

Május 25.

BATÁR ZOLTÁN: *Titkári beszámoló a Borsodi Tagozat 1961. évi munkájáról.*
GÁSPÁR GYULA: *Új feladatok a matematika tanításával kapcsolatosan az oktatási reform tükrében..*
HOSSZÚ MIKLÓS: *Beszámoló romániai utamról.*
Klubest.

Október 25.

SZARKA ZOLTÁN: *Beszámoló a Német Demokratikus Köztársaságban tett utamról.*
RAISZ IVÁN: *Beszámoló romániai utamról.*
Klubest.

November 2.

GÁSPÁR GYULA: *Mátrixszámítás I.*
Az előadó korábban bebizonyította, hogy a determinánsfüggvény a következő axiómákkal jellemezhető:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \varphi(A+B) = \Sigma\,\varphi(C) \\ (2) & \varphi(AB) \;\; = \varphi(A)\cdot\varphi(B), \\ (3) & \varphi(aA) \;\; = a^n\cdot\varphi(A), \end{array}\right\} (A, B, C \in \mathfrak{K};\quad \varphi(A):\mathfrak{K}\to K$$

ahol tehát A, B, C olyan $n\times n$ méretű mátrixok, amelyek elemeiket a komplex számok halmazából (még általánosabban tetszőleges p karakterisztikájú testből) K-ból veszik, $\varphi(A)$ K-beli „skalár" függvény. (1)-ben az összegezés kiterjesztendő minden olyan C mátrixra, amely A és B összes sor- (vagy oszlop) kombinációjából adódik.

Jelen előadásban bizonyos ellenpéldákon keresztül bizonyítást nyert, hogy az (1), (2) és (3) axiómák egymástól függetlenek; azaz van olyan $\varphi_{12}(A)$ függvény, amely az (1) és (2)-öt igen, de a (3)-at nem és olyan $\varphi_{13}(A)$, amely az (1) és (3)-at igen, de a (2) axiomát nem elégíti ki, és olyan $\varphi_{23}(A)$ amely a (2) és (3)-at igen, de az (1) axiomát nem elégíti ki.

November 5.

KISS BARNA: *Lineáris programozás (síkbeli esetben).*
(Előadás diákoknak a Közgazdasági Technikum Mezőgazdasági Tagozatán, Miskolcon).

November 9.

ACZÉL JÁNOS: *Mátrixszámítás II.*

Az előadó néhány bevezető jellegű előismeret közlése után bizonyos invariancia kérdésekkel foglalkozott néhány olyan függvényegyenlet kapcsán, amely Gáspár, Hosszú, Zajta és mások eredményeihez kapcsolódott. Részletesen beszélt az $f(XYZ)=f(XZY)$ függvényegyenletről, ahol X, Y, Z tetszőleges mátrixok az $f(x)$ függvény pedig tetszőleges halmazból veszi értékeit.

November 10.

A miskolci „Ifjúsági Matematikai Kör" alakuló ülése.
Az ülést KISS BARNA vezette, a Diákszakosztály részéről.

November 15.

HUSZTHY LÁSZLÓ: *A matematika egyes fejezeteinek összefüggése néhány nevezetes példán keresztül.*
(Előadás tanárok számára a Földes Ferenc Gimnáziumban, Miskolcon).

November 22.

HUSZTHY LÁSZLÓ: *Egyenletrendszerek megoldása determinánssal.*
(Előadás diákok számára a József Attila Gimnáziumban, Ózdon).

November 23.

TEVAN GYÖRGY: *Másodrendű tenzorok Jordan-féle normál alakjának „szemléletes" bizonyítása.*
Az előadó bevezetőben összefoglalta az absztrakt vektorterekre jellemző főbb sajátosságokat, beleértve az absztrakt vektortérbeli másodrendű tenzorok főbb tulajdonságait is. A tenzor 0 terének és szorzat alterének, valamint az invariáns-altérnek definíciója után néhány segédtételt bizonyított be. Ezután a fenti segédtételeket felhasználva először a karakterisztikus egyenlet különböző gyökeinek megfelelő alterekre bontotta a teret, majd ezeket az altereket bontotta fel további alterekre. Ez utóbbiakban megfelelő bázisvektorok megválasztásával a tenzor mátrixa az ismert alakú lett.

November 30.

BAJCSAY PÁL: *Mátrixszámítás IV.*
Az előadó elsőrendű változó együtthatójú differenciálegyenletrendszer megoldására mutatott be egy módszert a mátrixszámítás felhasználásával. Az egyenletrendszert kanonikus alakban írta fel és a szukcesszív approximáció elvét alkalmazva bebizonyította az eljárás konvergenciáját. Bevezette a matrizáns fogalmát és rámutatott annak néhány tulajdonságára. A homogén egyenletrendszer megoldása után megmutatta, hogyan lehet az inhomogén rendszer partikuláris megoldását megtalálni. Végül a megoldást a Taylor-polinom felhasználásával is származtatta.

December 4.

BURÁNY JÁNOS: *A függvény határértéke, folytonossága, differenciálhányados fogalma.*
(Előadás diákoknak, a Hermann Ottó Leánygimnáziumban, Miskolcon).

December 5.

SZABÓ FERENCNÉ: *A gondolkodás fejlesztése a matematika oktatásában.*
(Előadás általános iskolai tanárok részére).

December 7.

KALMÁR LÁSZLÓ: A *kibernetika tárgya, problémái, módszerei és eredményei.*

December 10.

TÖRŐ BÉLA: *A kombinatorika elemei.*
(Előadás diákok részére a Gépipari Technikumban, Miskolcon).

December 12.

SALÁNKI JÓZSEF: *A magyar kibernetika eredményei.*
(Előadás diákok részére a Bányaipari Technikum Diákotthonában, Miskolcon).

December 13.

HNISZ LÁSZLÓ: *Módszertani problémák a gimnázium IV. oszt. matematikai anyagának ismétlésénél.*
(Előadás tanárok részére Miskolcon a Földes Ferenc Gimnáziumban).

December 20.

DÖMÖTÖR FERENC, HOSSZÚ MIKLÓS, OBÁDOVICS J. GYULA, VINCZE ENDRE: *Beszámoló külföldi tanulmányutról.*
Klubest.

A Bolyai János Matematikai Társulat Pécsi Tagozatának előadásai 1962. január 1-től december 31-ig

Március 9.

BAKOS TIBOR: *Közelítő számítások.*

Április 25.

VÖRÖS GYÖRGY: *Közelítő pontosságú számítások gyakorlati feladatokkal.*
Vándorgyűlés.
Kb. 200 matematika-fizika szakos középiskolai tanár részvételével. Az előadásokat a Nagy Lajos gimnázium dísztermében tartották.

Július 2. Délelőtt.

Megnyitás. A megnyitó beszédet SURÁNYI JÁNOS, a Társulat főtitkára tartotta.
TOLNAI JENŐ: *Megemlékezés Beke Manóról.*
Az 1962. évi Beke Manó díj kiosztása.
KASZÁS IMRE: *Fizikai feladatok matematikai igénye.*

Délután.

BAGYINKA MÁRIA: *Gyakorlati feladatok.*

Este.

Közös vacsora az uránvárosi Olimpia vendéglőben.

Július 3. Délelőtt.

FARAGÓ LÁSZLÓ: *Feladatmegoldásokkal kapcsolatos módszertani problémák.*
VARGA TAMÁS: *Algebrai feladatok megoldása.*
CSER ANDOR: *Történeti és szórakoztató feladatok.*

Délután.

Kirándulás Sikonda-Abaligetre autóbuszon,

Este.

Közös vacsora a Nádor szállóban.

Július 4, Délelőtt.

PÁLMAY LORÁND: *Numerikus és grafikus feladatok.*
LŐRINCZ PÁL: *Geometriai feladatok megoldása.*
Zárszó.

November 27.

PÁLMAY LORÁND: *Nomogrammok.*

December 12.

BAKOS TIBOR: *A sík- és térgeometria párhuzamos tanítása.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Veszprémi Tagozatának előadásai: 1962. január 1-től december 31-ig

Január 18.

DOMINYÁK IMRE: *Az izoperimetrikus problémáról.*
Előadás a veszprémi egyetemen.

Február 22.

LÁSZLÓ ZOLTÁN: *Gömbfelhőkről.*
Előadás a veszprémi egyetemen.

Március 6.

KENDE REZSŐ: *Feladatmegoldások.*
Előadás Keszthelyen a Vajda János Gimnáziumban.

Március 22.

DR. FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *A diszkrét geometria új problémái.*
Előadás a veszprémi egyetemen.

Május 12.

SURÁNYI JÁNOS: *Egyenlőtlenségek.*
Előadás Sümegen.

Május 24.

DOMINYÁK IMRÉNÉ: *Stabilis körrendszerek az euklideszi síkban.*
Előadás a veszprémi egyetemen.

Október 23.

PÁLMAY LORÁND: *Feladatmegoldások.*
Előadás Sümegen, a Kisfaludy Sándor Gimnáziumban.

Október 25.

TOMOR BENEDEK: *Síkidomok rögzítő rendszeréről.*
Előadás a veszprémi egyetemen.

December 6.

Klubest, tantervi vitával egybekötve.
Veszprémi Egyetemen.

A Bolyai János Matematikai Társulat Egri Tagozatának előadásai 1962. január 1-től 1962. december 31-ig

Március 22.

SZÁSZ FERENC: *Az általános és középiskolai algebra anyag a modern algebra tükrében.*

Április 28.

EGYED ANTAL: *Az 1961/62 évi lengyel matematikai olimpia feladatai.*
Ünnepi szakköri ülés a Gyöngyösi Gimnáziumban.

Június 20.

VINCZE ISTVÁN: *A játékelméletről.*
A TIT-tel közös előadás.

November 14.

KISS PÉTER: *Az 1961/62 évi lengyel matematikai diákolimpia feladatai.*
Előadás diákoknak a Gárdonyi Géza Gimnáziumban, Egerben.

December 1.

PÁL LÁSZLÓ: *A harmonikus analízis elemei.*
Előadás tanároknak és főiskolai hallgatóknak.

December 7.

SZABÓ ÁRPÁD: *Új módszer a matematika-történet kutatásában.*
A TIT-tel közös előadás.

December 14.

CSISZÁR IMRE: *Információ az információ-elméletről.*
A TIT-tel közös előadás.

A Bolyai János Matematikai Társulat Győri Tagozatának előadásai 1962. január 1-től december 31-ig

Február 2.

MOLNÁR ERNŐ: *Bizonyítás a húrnégyszögek módszerével.*
Diákdélután az Eötvös Gimnáziumban, Tatán.

Február 6.

MÁRKUS TIBOR: *Ortocentrikus tetraéderek.*
Diákdélután a Révai Gimnáziumban.

Február 20.

Ünnepi ülés a Tagozat megalakulásának 10 éves évfordulója alkalmából.
1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári beszámoló.
3. TURÁN PÁL: *Egy háromszöggeometriai feladatról.*
4. HÓDI ENDRE: *Másodrendű görbék jellemzése szélsőértéktulajdonságaik alapján.*
5. GÁDOR ENDRÉNÉ: *Középiskolai matematikatanításunk néhány időszerű kérdése.*

Március 21.

MOLNÁR ERNŐ: *Válogatott feladatok a Matematika v Skole c. folyóiratból.*
Klubdélután.

Március 27.

NÉMETH BÉLÁNÉ: *A lengyel matematikai diákolimpia feladataiból.*
Diákdélután a Révai Gimnáziumban, Győrött.

Április 29.

MARÓTH REZSŐ: 1. *Az általános iskolai tanterv.* 2. *A felnőtt oktatás problémái.*
Továbbképzési nap a Kazinczy Gimnáziumban, Győrött, az Oktatási Osztállyal közös rendezésben.

Október 24.

SZELIÁNSZKY FERENC: *Számelméleti kérdések és feladatok.*
Diákdélután a Révai Gimnáziumban.

Október 31.

VARGA TAMÁS: *Külföldi matematikatanítási kísérletek.*
Előadás tanároknak a Révai Gimnáziumban.

November 28.

HORVAY KATALIN: *Az 1962 évi Kürschák verseny feladatainak ismertetése.*
Előadás tanároknak a Révai Gimnáziumban.

December 12.

MUNKÁCSY ISTVÁN: *Csak körzős (Mohr—Mascheroni-féle) szerkesztések.*
Diákdélután a Révai Gimnáziumban.

A Bolyai János Matematikai Társulat Soproni Tagozatának előadásai 1962. január 1-től 1962. december 31-ig

Február 27.

DÉR ZOLTÁN: *Topológiai problémák.*

Március 31.

ZIERMANN MARGIT: *Matematikai módszerek a gazdasági életben.*

Április 17.

VINCZE ISTVÁN: *Útibeszámoló.*
Klubest.

Május 16.

GÁL MÁRIA: *Egyetemi felvételi vizsgára való előkészítés.*

Május 17.

CSER ANDOR: *Az általános iskola matematika tantervéről.*

Október 24.

MARÓTH REZSŐ: *Az ismétlés szerepe a matematikai készség kialakításában.*

December 1.

Ünnepi ülés a Tagozat megalakulásának 10 éves évfordulója alkalmából.
KISS IGNÁCZ: *Elnöki megnyitó.*
HORVÁTH KÁLMÁN: *Titkári beszámoló.*
TURÁN PÁL: *Végtelen műveletsorozatok.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Nyíregyházi Tagozatának előadásai 1962. január 1-től 1962. december 31-ig

Január 8.

BEREZNAI GYULA: *A középiskolai matematikatanítás korszerűsítésének kérdései.*

Február 16.

VÉRTESI GÉZA: *A felnőttoktatás problémái.*

Február 23.

BEREZNAI GYULA: *Szerkesztések elhatárolt síkon.*

Április 13.

ÖKRÖS ISTVÁN: *Válogatott feladatok a Matematika v Skole-ből.*

Április 17.

FODOR ILONA: *Feladatmegoldások.*
Diákdélután a kisvárdai Bessenyei Gimnáziumban.

Április 17.

ROMÁN ILONA: *Feladatmegoldások.*
Diákdélután a nyíregyházi Zrínyi Ilona Gimnáziumban.

Április 18.

KOVÁCS MAGDOLNA: *Feladatmegoldások.*
Előadás a Leánygimnáziumban, Kisvárdán.

Április 18.

DEÁK JUDIT: *Feladatmegoldások.*
Diákdélután a nyirbátori Gimnáziumban.

Április 19.

BEREZNAI GYULA: *Az analízis elemei a középiskola tananyagában.*

Május 3.

KELEMEN JÓZSEF: *A magyar matematika történetéből.*

Június 1.

Klubdélután. Vezette ÖVEGES JÓZSEF.

Június 4.

RÉNYI ALFRÉD: *Dialógus a matematikáról.* (Hangszalagról).

Június 23.

MEDGYESSY PÁL: *Mérési eredmények matematikai feldolgozása.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Szombathelyi Tagozatának előadásai 1962. január 1-től 1962. december 31-ig

Január 25.

SZÁSZ FERENC: *A középiskolai algebrai tananyag az absztrakt algebra tükrében.*

Március 20.

BOGNÁR STEFÁNIA: *Válogatott feladatok.*
Előadás a Balogh Ádám Áll. Ált. Gimnáziumban, Vasváron.

Március 26.

MIHÓS JÓZSEF: *A szocialista államok matematikai versenyfeladatai.*
Előadás a Szentgotthárdi Gimnáziumban.

Március 27., 29.

PÁSZTHORY ANTAL: *A nomográfia elemei.*
Előadás a szombathelyi Közgazdasági Technikum Ipari és Mezőgazdasági Tagozatán.

Március 29.

Nyilvános szakköri ülés a szombathelyi Kanizsai Dorottya Áll. Ált. Leánygimnáziumban.
Vezető: HEIGL ISTVÁN.

Március 30.

LÁNYI TIBOR: *Válogatott feladatok.*
Nyilvános szakköri ülés a körmendi Kölcsey Ferenc Gimnáziumban.

Április 17.

HORVÁTH BÉLA: *Feladatmegoldások.*
Előadás a szombathelyi Kanizsai Dorottya Áll. Ált. Leánygimnáziumban.

Május 12.

GÁDOR ENDRÉNÉ: *A függvénytan tanításának problémái.*
HÓDI ENDRE: *Tanulmányi verseny-feladatok.*
Előadás a kőszegi gimnáziumban.

Szeptember 25.

BOKOR GÉZA: *A középiskolai matematikatanítás feladatai.*
HARGITAI SÁNDOR: *A matematikai és a politechnikai oktatás kapcsolata.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Kecskeméti Tagozatának előadásai 1962. január 1-től december 31-ig

November 9.

SZABÓ ÁRPÁD: *A matematikatörténet kutatásának új módszerei és eredményei.*
A TIT-tel közös előadás.

A Bolyai János Matematikai Társulat Székesfehérvári Tagozatának előadásai megalakulásától (1961) 1962. december 31-ig

December 12.

HÓDI ENDRE: *Szélsőérték feladatok.*

Február 8.

Találkozó műszaki vezetők és matematikusok között.

Március 20.

SZÉNÁSY MIHÁLY: *Az 1962. évi Országos Tanulmányi Verseny első fordulójának feladatai.*
Diákelőadás a József Attila Gimnáziumban.

Március 23.

LÁNG HUGÓ: *Irracionális függvények vizsgálata.*
Előadás középiskolai tanárok részére.

Május 19.

Általánosiskolai matematika verseny a megye diákjai részére, a járási székhelyeken.

Október 25.

REIMAN ISTVÁN: *Beszámoló a vektorok tanításával kapcsolatos kísérletről.*
Előadás tanárok részére.

Október 25.

REIMAN ISTVÁN: *Geometriai versenyfeladatok.*
Előadás középiskolai diákok részére.

November 21.

Ankét a középiskolai matematika tantervről.
Vitavezető: GÁDOR ENDRÉNÉ.

December 1.

LÁNG HUGÓ: *A matematika tárgya.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör alakuló ülése.

December 12.

LÁNG HUGÓ: *A lineáris programozás elemei.*
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

Könyvismertetés

J. ACZÉL

VORLESUNGEN ÜBER FUNKTIONALGLEICHUNGEN UND IHRE ANWENDUNGEN

(Birkhäuser Verlag, Basel und VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1961, 331. o.)

Aczél János professzor könyve az első átfogó monográfia e tárgykörből. Az a tény, hogy a függvényegyenletekről 1961-ig nem jelent meg összefoglaló könyv, különösen feltűnő, ha figyelembevesszük, hogy olyan témakörről van szó, amely több mint 200 éves múltra tekinthet vissza. Aczél János könyve tehát kétségtelenül hézagpótló jelentőségű. Ami egyébként a tárgykör történetét illeti, ezt a könyv példaszerű alapossággal dolgozza fel. A könyvben található — 60 oldalt kitevő — igen alapos bibliográfia (amely maga is első e téren) összesen közel 1200 munkát sorol fel, amelyek vagy függvényegyenletekkel foglalkoznak vagy amelyekben a függvényegyenletek lényeges szerepet játszanak. E tekintélyes számú munka időrendben, évenkénti csoportosításban (egy-egy éven belül betűrendben) van elrendezve, és így áttekintést nyújt a tárgykör irodalmának fejlődéséről. (E mellett a könyv minden tárgyalt függvényegyenlettel kapcsolatban hivatkozik a bibliográfiában felsorolt megfelelő munkákra.) Az irodalomjegyzéket d'Alembert két 1747-es munkája nyitja meg; a XVIII. századból 5 további munka szerepel (D'Alemberten kívül Euler és Legendre neveivel találkozunk itt). A XIX. századból kereken 80 munkát sorol fel a bibliográfia. Szerzőik között megtaláljuk a XIX. század legkiemelkedőbb matematikusainak jelentős részét: így találkozunk itt Abel, Bolyai János, Cayley, Cauchy, Darboux, Gauss, Grassman, Goursat, Lobacsevszkij, Poisson, Stokes, H. A. Schwarz, de la Vallée Poussin, Weierstrass és mások neveivel. A bibliográfia kereken 450 olyan munkát sorol fel, amelyek 1901—1945 között jelentek meg. A szerzők névsorában itt is olyan nagy nevekkel találkozunk mint pl. Banach, Brouwer, Caratheodory, Hardy, Hilbert, Hurwitz, Koebe, Kronecker, Lebesgue, Levi-Civita, Neumann János, Peano, Picard, Schur, vagy a ma élők közül: Fréchet, Hadamard, Kolmogoroff, P. Lévy, Littlewood, Pólya, Sierpinski, Wiener. Az 1945 és 1960 között megjelent, a bibliográfiában szereplő munkák száma az összes felsorolt munkáknak több mint a felét teszi ki. Ezek szerzői között is megtaláljuk — a függvényegyenletek specialistái mellett — a matematika más ágai számos vezető kutatóját. Ha az ember átlapozza a bibliográfiát, az a benyomása támad, hogy a XVIII. századtól napjainkig a matematikusok jelentős része foglalkozott valamilyen formában függvényegyenletekkel. Ugyanez az összkép alakul ki akkor is, ha a könyvben idézett magyar matematikusok névsorát állítjuk össze.

A bibliográfiában természetesen tekintélyes számban szerepelnek magának Aczél Jánosnak a munkái (számuk meghaladja a 80-at), valamint közvetlenül belföldi és külföldi munkatársainak, mint pl. Hosszú Miklósnak és S. Gołabnak a dolgozatai. Az irodalomjegyzék nem választja külön a kifejezetten függvényegyenleteket tárgyaló munkákat, az olyan más tárgyú munkáktól, amelyekre a szerző azért hivatkozik, mert szerepel bennük valamelyik nevezetes függvényegyenlet felhasználása a matematika egy más ágában. De még ha e munkáktól eltekintünk is, akkor is hatalmas anyaggal állunk szemben. A szerző vitathatatlanul igen értékes munkát végzett ennek a nagy és szerteágazó anyagnak a feldolgozásával és élvezetes, áttekinthető formában való összefoglalásával. Ez nem volt könnyű feladat; mégpedig nemcsak azért, mert elődök hiányában úttörő munkát kellett végeznie, hanem azért is, mert a rendszerezést, a tankönyvszerű feldolgozást igen nehezíti, hogy a függvényegyenleteknek — mint arra maga a szerző igen nyomatékosan rámutat — ma még nincs szisztematikus elmélete. Befejező megjegyzéseiben a szerző a függvényegyenletek terén a legfontosabb aktuális megoldatlan problémaként éppen ennek a hiányzó általános elméletnek a létrehozását említi. Tulajdonképpen még általános módszerekről is csak korlátozott értelemben lehet beszélni: a tárgykörre inkább az jellemző, hogy minden egyes egyenlet tárgyalásánál ad hoc módszereket alkalmaznak; legfeljebb annyit lehet megállapítani, hogy e módszerekben van több-kevesebb hasonlóság. Kevés olyan módszer van, amellyel függvényegyenletek egész osztályát lehetne közösen tárgyalni és egycsapásra megoldani. Igen jellemző például, hogy látszólag igen hasonló egyenletek megoldásai lényegesen eltérnek egymástól (pl. a bennük szereplő szabadon választható paraméterek számát, illetve — többváltozós függvények esetében — a megoldásban szereplő szabadon választható egyváltozós függvények számát illetőleg).

A szerző a gazdag anyagot a következőképpen csoportosította: az első rész egyváltozós függvényekre, a második rész pedig többváltozós függvényekre vonatkozó egyenletekkel foglalkozik. Ezen belül az első részben külön fejezet tárgyalja az olyan egyenleteket, amelyekben a változók nemcsak az ismeretlen függvényen belül, ill. csak ott szerepelnek, továbbá az olyan egyenleteket, amelyekben több (egyváltozós) ismeretlen függvény szerepel; végül külön fejezet foglalkozik a függvényegyenletek differenciál- és integrálegyenletekre való visszavezetésével. A második részben külön fejezet foglalkozik az egyszerű- és összetett egyenletekkel, a több ismeretlen függvényt tartalmazó egyenletekkel és parciális differenciálegyenletekre való visszavezetéssel, végül vektor és mátrix- függvényegyenletekkel.

A könyv olvasójában önkéntelenül is felvetődnek a következő kérdések: Hogyan határolható körül a matematikán belül a függvényegyenletek elmélete? Milyen viszonyban áll a matematika más ágaival, különösen az analízissel és az algebrával? Miben áll a fejezet jelentősége? Merre halad a függvényegyenletek elmélete?

E kérdésekre azok természeténél fogva aligha adható egyértelmű válasz, hiszen már a tárgykör körülhatárolására is többé kevésbé tisztázatlan kérdés, amelyről a vélemények erősen eltérhetnek, és ettől függ a válasz a többi kérdésre is. Tágabb értelemben függvényegyenleten olyan egyenletet értünk, amely egy vagy több ismeretlen függvényt tartalmaz, és amelynek megoldása azt jelenti, hogy megkeressük mindazokat a függvényeket, amelyek az egyenletet kielégítik. Ebben az értelemben a differenciál- integrál- és integrodifferenciálegyenletek stb. mind függvényegyenletek. Szűkebb értelemben ezeket azonban nem nevezik függvényegyenletnek, hanem csak azokat, amelyeket nagyjából úgy lehet jellemezni, hogy az ismeretlen függvényekre valamint a változóikra vonatkozólag csak elemi műveletek és helyettesítések szerepelnek. (A könyvben tárgyalt függvényegyenletek pontos körülhatárolása a könyv bevezetésében megtalálható.) Még e definíció is túlságosan tág, hiszen magába foglalná pl. a differenciálegyenleteket, az iterációelméletet stb. E tárgyköröket a szerző azáltal zárja ki, hogy felteszi, hogy az egyenletben több változó szerepeljen, mint ahány változója a keresett függvénynek (illetve több ismeretlen függvény esetében:

a függvények közül a legkevesebb változót tartalmazó függvénynek) van. Még e határokon belül is elsősorban a valós változójú, valós értékű függvényekkel foglalkozik, másodsorban olyan függvényekkel melyek változói és értéke vektorok ill. matrixok. A tárgyalt függvényegyenletek körének ilyenfele leszűkítésére kétségtelenül szükség volt, hiszen e nélkül egy könyvben nem is lehetett volna az óriási anyagot feldolgozni. A tárgyalásmod bizonyos egységet is csak ezen korlátozások mellett volt lehetséges megvalósítani. A tárgykör ilyen körülhatárolása mellett szinte magától értetődőnek látszik, hogy a függvényegyenletek elmélete az analízis — mégpedig a klasszikus analízis — egy fejezete. Ha azonban a megoldási módszereket és a tételek jelleget vizsgáljuk, szembe tűnik, hogy módszereit és kérdésfeltevéseit illetőleg a függvényegyenletek elmélete inkább az algebrával rokon. A függvényegyenletek elméletének a matematika más ágaival való kapcsolatának kérdését úgy hiszem végérvényesen majd csak akkor lehet tisztázni, ha megvalósul a könyv szerzője által kitűzött program és létrejön a függvényegyenletek általános és szisztematikus elmélete. Várható azonban, hogy a fejlődés a függvényegyenletek elméletének az algebrával való szoros kapcsolatát fogja elsősorban még jobban kidomborítani. Az ilyen irányú fejlődés többek között azért is látszik valószínűnek, mert az algebrán belül ma éppen egy olyan tendencia bontakozik ki (gondolok itt az univerzális algebrára), amely az algebra módszereit és kérdésfeltevéseit a klasszikus struktúráknál jóval általánosabb körben alkalmazza.

Ami a függvényegyenletek jelentőségét illeti, csak egy szempontra kívánom a figyelmet felhívni. A függvényegyenletek alkalmazására legtöbbször bizonyos axiomatikus jellegű vizsgálatoknál kerül sor. Például egy matematikai fogalom, mennyiség, mértékszám stb. használatos definíciója adekvát voltának igazolásánál gyakran úgy járnak el, hogy bizonyos posztulátumokat állítanak fel, amelyek kifejezik azokat az ésszerű követelményeket, amelyeknek a szóban forgó kifejezés mértékszám stb. eleget kell, hogy tegyen, és ezután azt vizsgálják, hogy a felállított posztulátumoknak milyen mennyiségek, függvények stb. tesznek eleget. Az ilyen vizsgálatok gyakran vezetnek függvényegyenletekre. Tipikus példa erre a skaláris és vektoriális szorzás definíciójának a könyvben is szereplő példája, de említhetném a függvényegyenletek a könyvben tárgyalt más alkalmazásai közül a kamatos-kamat formulát, a normális eloszlás jellemzését, azon eröterek meghatározását, amelyekben súlypont értelmezhető, az eroparallelogram-problémát, vagy pedig egy a könyvben nem tárgyalt kérdést: az információ-fogalom posztulátumokkal való jellemzését.

Általában megállapítható, hogy az axiomatikus módszer térhódítása gyakran maga után vonja a függvényegyenletek felhasználását. Ez egyik fő oka annak, hogy ma a függvényegyenletek iránt az érdeklődés határozottan növekvőben van.

A könyv igen változatos és gazdag anyagot tartalmaz a függvényegyenletek a geometriában a nomográfiában, a mechanikában, a valószínűségszámításban való alkalmazásait illetőleg. Ezek az alkalmazások, azon túlmenőleg, hogy a matematika egy-egy jelentős, alapvető kérdését érdekesen világítják meg, azért is érdekesek, mert a matematika távoleső ágai közötti kapcsolatokra is fényt vetnek. Nem foglalkozik a könyv a függvényegyenleteknek a geometriai objektumok elméletében való alkalmazásával, mivel erről a szerző külön monográfiát írt S. Gołąb-bal együtt.*

A könyv stílusa, tárgyalásmódja, világos és szabatos, ugyanakkor élvezetes és könnyen érthető. Különösen ki szeretném emelni, hogy a könyv nagy része viszonylag kevés matematikai előképzettség mellett is megérthető. Ezért is kívánatos, hogy a könyv magyar nyelven mielőbb hozzáférhetővé váljék. Célszerű volna azonban, hogy a magyar kiadás ne egyszerűen a német szöveg fordítása legyen, hanem olyan értelemben való átdolgozása, amely minél szélesebb kör számára teszi azt hozzáfér-

* J. Aczél—S. Gołąb, Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte. Monografie Matematyczne No. 39, Warszawa 1960.

hetővé. Ennek érdekében a magyar kiadásban az anyag feldolgozásának teljessége tekintetében lényeges engedményeket lehetne tenni. Kívánatos volna azonban, hogy a magyar kiadás a válogatott anyagot még részletesebben tárgyalja. A függvényegyenletek alkalmazásainak széles spektrumát persze nem volna helyes leszűkíteni (azonban e részeknél különösen szükség lesz kiegészítésekre, hogy azok még kevesebb előismeretet tételezzenek fel), sőt még bővíteni is lehetne az alkalmazások körét, például Aczél János és munkatársai a könyv megjelenése óta a függvényegyenleteknek az információelméletben való alkalmazásaira vonatkozólag végzett érdekes vizsgálataival. Úgy gondolom, hogy Aczél János könyvének egy a fent vázolt szempontok alapján átdolgozott magyar kiadása alkalmas volna arra is, hogy azt a tanárok a matematika iránt érdeklődő tehetséges diákjaik kezébe adják.

Rényi Alfréd

GERHARD RINGEL:

FÄRBUNGSPROBLEME AUF FLÄCHEN UND GRAPHEN

(VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1959. VI+132 oldal)

Az idestova 100 éve eldöntetlen négyszín-sejtés a gráfelmélet egyik jelentős ágának, a gráfszínezési feladatok problémakörének kialakulásához vezetett. A gráfszínezési kérdésekkel kapcsolatos vizsgálatok jelenleg a gráfelmélet egyik legjobban kidolgozott és igen sok értékes eredményt felmutató fejezetét alkotják. Ringel könyvében nem vállalkozik a színezési problémák teljes, részletes feldolgozására. E helyett a következő kettős célt tűzi ki maga elé: bemutatni a kérdéskör fontosabb, nem túl bonyolult problémáit és részletesen ismertetni azokat a mélyebben fekvő eredményeket, melyeket a szerző az utolsó évtizedben a magasabb rendszámú felületek színezési feladataival kapcsolatban elért.

Az 1. §-ban a könyv a gráfelméleti alapfogalmakat ismerteti és néhány egyszerű gráftételt igazol (pl. Euler-tétel). A 2. §-ban részletesen foglalkozik a négyszín-problémával, igazolja az ötszín-tételt és megmutatja, hogy a négyszín-tétel ekvivalens egy-egy az élek ill. a csúcsok színezésére vonatkozó három- ill. kétszín-tétellel. A 3. §-ban tetszőleges gráfok csúcsszínezési problémáit tárgyalja. Néhány, kritikus gráfokra vonatkozó egyszerűbb tételt igazol, s ezek segítségével egy 12-színtételt bizonyít olyan gömbi térképekre, amelyekben az országok össze nem függő területekből állnak. Részletesen tárgyalja Hajósnak az n színnel nem színezhető gráfok megszerkeszthetőségére vonatkozó nevezetes tételét és e gráfokkal kapcsolatos, a négyszín-sejtést tartalmazó, Hadwiger-féle sejtést. A 4. és 5. §-ban, Kőnig könyvét követően, élszínezési (más néven: faktorizációs) problémákkal foglalkozik. Igazolja a párosfokú és a 3-adfokú reguláris gráfokra vonatkozó Petersen-tételeket, valamint a reguláris páros gráfokra vonatkozó König-tételt. A 6. § a felületi topológia elemeinek igen ügyes tárgyalását tartalmazza. A 7. §-ban a magasabb nemszámú felületek színezésével kapcsolatos alapvető eredményeket (Heawood-tétel, Heawood-sejtés) találjuk. A 8. §-ban a torusz és néhány más speciális felület színezési problémáit tárgyalja. Itt vezeti be a további fejezetek fő bizonyítási eljárását a „számsémák módszerét". A 9. és 10. §-ban a magasabb nemszámú felületeknek maximális számú páronként szomszédos országra való felbontásait vizsgálja és bebizonyítja azt (a szerzőtől származó) mélyen fekvő tételt, amely szerint a szóbanforgó maximális országszám és a színezésekhez szükséges minimális színszámra vonatkozó Heawood-féle felső határ közti eltérés legfeljebb 2. A 11. §-ban igazolja, hogy a gömbtől eltekintve minden felületre az említett maximális országszám megegyezik a színezésekhez szükséges minimális színszámmal. Végül a 12. §-ban (a szerzőtől származó) azt a nevezetes tételt igazolja, amely szerint a Heawood-féle sejtés valamennyi nem irányítható felületre igaz.

A könyv olvasásához különleges előismeret nem szükséges, a felhasznált gráfelméleti és topológia fogalmaknak mindenütt világos értelmezését találjuk. Stílusa gördülékeny, nem vezet be túl sok fogalmat és jelölést. Mindez nem megy azonban a pontosság rovására, tárgyalásmódját mindvégig gondosság jellemzi. A megértést a sok jól szerkesztett ábra is elősegíti.

Mind a tartalom, mind a feldolgozás módját illetően a könyvet sikerült alkotásnak tartjuk. Az első hét paragrafus kitűnő bevezető a gráfelméletbe és a felületek topológiájába. Ugyancsak jelentős érdeme ennek a résznek, hogy számos, az irodalomban csak elszórtan található eredményt könnyen hozzáférhetővé tesz. A könyv második fele részletes és gondos feldolgozásban a topológikus gráfelméletnek egy új módszerével és több új és jelentős eredményével ismerteti meg az olvasót. A könyvet melegen ajánljuk mind a gráfelméletben jártas kutatóknak, mind a gráfokkal megismerkedni szándékozó érdeklődőknek.

Gallai Tibor

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Vidosa László
A kézirat beérkezett: 1963. V. 24. – Példányszám: 1250. – Terjedelem: 13,25 (A/5) ív – 7 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 13-2291

ОГЛАВЛЕНИЕ

П. Туран: Палу Эрдеш исполнилось 50 лет 1
П. Эрдёш: О комбинаторных задачех связанных с теоремой Рамсейя — ван дер Вардена 29
Ф. Картеси: История развития круга тем в теории алгебрических кривых 38
Ф. Сас: О топологических алгебрах и кольцах II. 74
Й. Галамбош: Об одной проблеме распределения в теории чисел 88
М. Хоссу: Об одном алттернативном функциональном уравнении 98
Э. Фрид: Замечания к введеню комплексных чисел 103
Ш. Фривалдски: О вопросе продолжения функций, имеющих обобщенные производные, вне заданной области 107
Б. Томор: Проблема фиксации выпуклых фигур 120
А. Хеппеш: Об одной одномерной геометрической проблеме 124
Э. Ходи: О связи между функцией Бесселя первого рода с индексом о и функцей интегрального синуса 128
Х. Караниколов: Об одной теореме типа Энесрёма — Какейя 133
Ш. Кантор: Примечания к аксиоматическому введению понятия сходимости 137
А. Добо — Ш. Сайц: Замечания к одной сшашье Э. Гестейи 140
Э. Ходи: Отчет о IV международной математической олимпиаде студентов 145
Задачи 163
Из жизни общества 175
Обзор книг 206

CONTENTS

P. Turán: The work of P. Erdős 1
P. Erdős: On combinatorial problems concerning a theorem of Ramsey and Van der Waerden 29
F. Kárteszi: On the historical development of some topics in the theory of algebraic curves 38
F. Szász: On topological algebras and rings II. 74
J. Galambos: On a distribution-problem in the theory of numbers 88
M. Hosszú: On an alternative functional equation .....
E. Fried: Remarks to the introduction of complex numbers 98
S. Frivaldszky: On the extension from a given domains of functions with generalized derivatives 103
B. Tomor: On a fixing problem of convex bodies 107
A. Heppes: On a one-dimensional geometrical problem 120
E. Hódi: Connection between Bessel functions of first order and index 0, and the integral sine function 128
Ch. Karanikoloff: On a theorem of type Eneström—Kakeya 133
S. Kántor: Note on the axiomatic introduction of the notion of convergence 137
A. Dobó and S. Szajcz: On a paper of E. Gesztelyi 140
E. Hódi: Report on the IV. International Olympiade of high-school students 145
Problems 163
Activity of the Society 175
Book reviews 206

Ára 12 Ft.
Előfizetés évi 20 Ft.

INDEX: 25.564

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor eziránvú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb. szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.

312.046

MATEMATIKAI LAPOK

XIV. ÉVFOLYAM

3-4.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1963

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer
Budapest, 1964. május, XIV. évfolyam 3—4 szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd
Szerkesztőség: Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21. III. Telefon: 111—010.
A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.
Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat, Budapest, V., József nádor tér 1. Telefon: 180—850. Csekkszámlaszám: 61 257.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat: József nádor tér 1. Üzlethelyiség Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

FENYŐ ISTVÁN: Disztribúciók, operátorok I. 213
KÁRTESZI FERENC: Incidenciageometria 246
TURÁN PÁL: Diofantikus approximáció és alkalmazott matematika 264
SZABÓ ÁRPÁD: A „négyzetérték" fogalma és az ún. „geometriai közép" 277
ZNÁM ISTVÁN: Megjegyzések Turán Pál egy publikálatlan eredményéhez 307
BOLLOBÁS BÉLA: Két független kört nem tartalmazó gráfokról 311
GYŐRY KÁLMÁN: A $\binom{n}{2}=a^l$ és $\binom{n}{3}=a^l$ diophantoszi egyenletekről 322
VARGA TAMÁS: Nemzetközi Matematikaoktatási Szimpózium 330
Jelentés az 1962. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről 346
Feladatrovat 372
Hírek 380
Társulati élet 389
Könyvismertetés (Fenyő I.) 407

Disztribúciók, operátorok I.

FENYŐ ISTVÁN

Tartalomjegyzék

Bevezetés 213
A D függvénytér 215
Disztribúciók Szoboljev—Schwartz-féle definíciója 218
Disztribúciók, függvények, mértékek 220
A disztribúciók néhány lokális tulajdonsága 221
A disztribúciók közötti alapműveletek 222
Disztribúciók affin transzformációi 223
Disztribúciósorozatokról 224
Disztribúciók differenciálhányadosa 227
Lokálisan nem integrálható függvényhez tartozó disztribúciók 236
A disztribúcióelmélet alaptétele 241
Alapvető fogalmak és definíciók jegyzéke 244
Irodalomjegyzék 245

Bevezetés: A fizika és a technika rohamos fejlődése a matematikát új követelmények elé állította. Ez nemcsak abban nyilvánul meg, hogy mind több és több matematikai diszciplína kerül közvetlenül alkalmazásra, hanem számos matematikai fogalom lényeges általánosítását követeli meg. Így a függvény megszokott fogalmát is erősen általánosítani kellett ahhoz, hogy számos fizikai-technikai jelenséget helyesen, szabatosan, matematikai nyelven ki lehessen fejezni. A kvantummechanikában és az elektrotechnikában például olyan függvény bevezetése vált szükségessé, mely a 0 pont kivételével mindenütt 0, a 0 helyen a függő változó értéke végtelen és ennek ellenére bármely folytonos függvénnyel való szorzat integrálja (valamely szokásos integrálfogalmat véve) létezik, ha az integrál az egész számegyenesre vonatkozik. E függvényt Dirac-féle delta-függvénynek nevezik és $\delta(x)$-el jelölik. Látjuk, hogy a $\delta(x)$ definíciója ellentmondásos, nincs olyan — klasszikus értelemben vett — függvény, mely fenti követelményeknek eleget tenne. Megkísérelték a δ-t mint olyan Gauss-függvények, melyek alatti terület 1, sorozatának határértékeként értelmezni. Csakhogy ilyen Gauss-függvények sorozatának nincsen a klasszikus értelemben vett limese.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

A fizikusnak és technikusnak ilyenszerű függvényre szüksége volt, sőt további követelményként valahogyan még deriváltját is értelmeznie kellett a 0 helyen, hogy jelenségeit leírhassa. Nem tehetett mást, mint e függvényt és deriváltját formálisan definiálni és azt mint heurisztikus segédeszközt használni. E heurisztikus segédeszközzel sikerült olyan fizikai és technikai elméleteket kidolgozni, mely a tapasztalatokkal jól megegyeztek. A matematikus feladatává vált e heurisztikus segédeszközt szabatosan, szigorúan tudományos alapra helyezni. Ezt a feladatot a matematika meg is oldotta, sikerült a $\delta(x)$-re szabatos definíciót adni. De alig oldódott meg ez a probléma, máris újabb, még a $\delta(x)$-nál is „vadabb" függvények bevezetésére került sor. Ezért vált aktuálissá a függvényfogalom általánosítása.

A disztribúciók elmélete az előbb mondott igény kielégítéséből származott; célja tehát a klasszikus függvényfogalom erős általánosítása. Éppen ezért, főleg a szovjet irodalomban, a disztribúciók elnevezés helyett az általánosított függvények elnevezés terjedt el.

Mivel a disztribúcióelmélet kiépítése, ha úgy tetszik, társadalmi problémává (mindenesetre a termelőerőkkel szoros összefüggésben levő kérdéssé) vált, érthető, hogy sokan foglalkoztak vele. Az első, aki a függvény fogalmát úgy általánosította, hogy segítségével a matematika fizika néhány parciális differenciálegyenlete általánosabban tárgyalható legyen mint a klasszikus mederben, S. SZOBOLJEV [1] volt.* SZOBOLJEV gondolatait általános elméletté L. SCHWARTZ dolgozta ki. L. SCHWARTZ disztribúcióelméletről szóló [2] kétkötetes monográfiájának megjelenése után gyorsan elterjedt ez az elmélet. Ma az általánosított függvényeknek nagyon sok definíciója és megalapozása létezik. Szinte lehetetlen valamennyit felsorolni. Hogy csak néhány fontosabbat említsünk, J. KOREVAAR [3], MIKUSIŃSKI és SIKORSKI [4], H. KÖNIG [5], SIKORSKI [6], J. MIKUSIŃSKI [7], LIGHTHILL [8] és sokan mások elméleteit idézzük. Ezek a megalapozások részben ekvivalensek egymással, részben azonban eltérnek egymástól. Történeti hűség kedvéért meg kell említeni J. KOREVAAR és J. MIKUSIŃSKI egyes gondolatai lényegben már V. VOLTERRA [9] műveiben is megtalálhatók. VOLTERRA e gondolatai feledésbe mentek, aminek egyik oka talán az, hogy VOLTERRA úgy látszik nem egészen volt tisztában felfedezésének jelentőségével.

A disztribúcióelmélet kiépítésével egyidőben, de attól teljesen függetlenül egy másik kutatási irány is megindult. Ez az irány J. MIKUSIŃKI nevéhez fűződik, aki elsősorban a Heaviside-féle operátorszámítást — amely létét ismét csak bizonyos elektrotechnikai jelenségek leírásának köszönheti — kívánta szigorú matematikai alapra helyezni. Ilyen megalapozások persze már voltak, például az egy- és kétoldali

* A számok a dolgozat végén található irodalomjegyzékre utalnak.

Laplace-transzformáción alapuló felépítések is ilyenek, de ezek nehézkesek és fő hátrányuk, hogy a függvények aránylag szűk körére szorítkoztak, olyanokra, melyekre bizonyos integrál-transzformációk alkalmazhatók. Ezért az elektrotechnikusok nagy része kénytelen volt pl. a Laplace-transzformációs módszert is teljesen formálisan heurisztikusan alkalmazni (és ebből számos hiba is fakadt), aminek értéke persze semmivel sem több, mint az eredeti Heaviside-féle volt. J. MIKUSIŃSKI több elméletet is kidolgozott az operátorszámítás megalapozására, átütő sikert az aratott, melyet könyvében tett közé. MIKUSIŃSKI által definiált operátorok látszólag függetlenek a disztribúció fogalmától, azonban a behatóbb vizsgálatok kiderítették, hogy e két fogalom nagyon szoros kapcsolatban áll egymással. A függvény fogalmának általánosítása egy további irányban is haladt. Ez az irány főleg FANTAPPIÉ, F. PELLEGRINO és SEBASTIANO e SILVA [13], [14], [15] nevéhez fűződik. Ők dolgozták ki az ún. analitikus funkcionálok elméletét, ez az elmélet is sok szép eredményre vezetett elsősorban a differenciálegyenletek elméletében. Az analitikus funkcionálok elméletével az operátorszámítás megalapozása is lehetővé válik.

Néhány esztendővel ezelőtt e sorok szerzője írt már egy rövidebb referáló tanulmányt a disztribucióelmélet alapfogalmairól [16]. Az ottani szűkreszabott keretek miatt azonban csak az alapfogalmak ismertetésére kerülhetett sor, az alkalmazásokra nem lehetett kitérni. E tanulmány célja egyrészt, amennyiben a keretek megengedik, az eredeti disztribúció fogalmon kívül ismertetni még néhány fontos megalapozást, tárgyalni ezeknek egymáshoz való viszonyát, különösen az operátorszámításhoz való kapcsolatot kiemelni és bemutatni néhány alkalmazást. E cikksorozat nem tételezi fel, hogy az olvasó ismeri a [16] alatti dolgozatot.

A D függvénytér. Tekintsük az R_n n-dimenziós euklidesi-térben definiált $\varphi(x)=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (egyszerűség kedvéért valós értékű) függvények halmazát, melyek a tér minden x helyén végtelen sokszor differenciálhatók (akárhányad rendű parciális differenciálhányadosai mindenütt léteznek) és melyek finitek, ami azt jelenti, hogy a szóban forgó függvények mindegyike az R_n tér valamely korlátos tartományán kívül azonosan eltűnők. Az a tartomány, melyen kívül $\varphi(x)$ azonosan eltűnik, általában a φ függvénytől függ. A fenti tulajdonsággal rendelkező függvények halmazát jelöljük D-vel.

D lineáris tér, mert, ha $\varphi_1 \in D$ és $\varphi_2 \in D$, akkor nyilván $\varphi_1 + \varphi_2 \in D$ és ha $\varphi \in D$ és c egy tetszőleges állandó, akkor $c\varphi \in D$.

Bevezetünk egy konvergencia fogalmat is a D térben. Tekintsük a $\varphi_\lambda(x)$ függvények osztályát, ahol minden λ mellett $\varphi_\lambda(x) \in D$ és λ valamely végtelen Λ indexhalmaz fut be. Azt mondjuk, hogy $\varphi_\lambda(x) \underset{D}{\to} 0$ midőn $\lambda \to \lambda_0$, ha

a) valamennyi $\varphi_\lambda(x)$ egy és ugyanazon M korlátos tartományon kívül azonosan eltűnő, midőn λ a λ_0 bizonyos környezetéhez tartozik,

b) $D^p\varphi_\lambda \to 0$ egyenletesen az M tartományban minden rögzített $p=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ mellett, ha $\lambda \to \lambda_0$. $D^p\varphi$ a $\dfrac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_n}\varphi}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\ldots\partial x_n^{p_n}}$ rövidített jele, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tetszőleges nem negatív egész számok. (Az egyenletesség p-ben nincs követelve!)

Hogy a D függvénytér nem csupán a $\varphi(x)\equiv 0$ függvényből áll, arra példa a következő függvény

$$\varphi(x;a)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{a^2}{a^2-r^2}\right), & \text{ha } |x|=r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2}<a\\ 0, & \text{ha } r\geqq a\end{cases}$$

$c\varphi(x;a)$ nyilván szintén D függvény, ha c tetszőleges állandó. Nem nehéz megmutatni, hogy $\varphi(x;a)$-nak bármely, mindenütt folytonos, finit* függvénnyel képezett konvolúciója

$$\varphi * f=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t;a)f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,-t_1,\ldots,x_n-t_n;a)\cdot$$

$$f(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,dt_1dt_2\ldots dt_n$$

ugyancsak D-függvény. Ilyen módon $\varphi(x;a)$-ból kiindulva végtelen sok D függvény állítható elő.

Ha a

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{k}\varphi(x;a)\qquad (k=1,2,\ldots)$$

végtelen függvénysorozatot tekintjük, akkor nyilvánvalóan

$$\varphi_k(x)\underset{D}{\to}0,\quad \text{ha}\quad k\to\infty$$

a D függvénytérben, hiszen $\varphi(x;a)$ és valamennyi parciális deriváltja az a sugarú gömbben korlátos és valamennyi $\varphi_k(x)$ az a sugarú gömbön kívül azonosan eltűnő.

Ezzel szemben például a

$$\psi_k(x)=\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k};a\right)$$

a D függvénytérben *nem tart* 0-*hoz*, annak ellenére, hogy minden p-re

*Finitnek nevezünk olyan függvényt, mely egy kompakt halmazon kívül azonosan elűnik.

$D^p\psi_k \to 0$ egyenletesen az ak sugarú gömbben. Ennek oka, hogy nincs olyan korlátos tartomány, melyen kívül (bizonyos k-tól) *valamennyi* ψ_k azonosnak eltűnő lenne.

Fontos és érdekes a következő *tétel:* Jelöljük C-vel mindenütt folytonos és finit függvények halmazát. Világos, hogy $D \subset C$. Állítás: *D mindenütt sűrű C-ben.* Ez azt jelenti, hogy bármely adott $f(x) \in C$ és $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\varphi \in D$, hogy

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

legyen.

Bizonyítás: Válasszuk a K számot úgy, hogy

$$\Phi(x; a) = K\varphi(x; a)$$

függvény integrálja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x; a)\,dx = 1$$

legyen.

Tekintsük most már az

$$|\Phi * f - f| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-t; a) f(t)\,dt - f(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-t;\ a) f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-t; a) f(x)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-t; a)[f(t) - f(x)]\,dt \right| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-t; a)\,|f(t) - f(x)|\,dt$$

eltérést (a Φ mindenütt nem negatív!) Válasszuk a a-t elegendő kicsinynek, úgyhogy az O középpontú, a sugarú gömbben

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

legyen. Mivel az előbbi gömbön kívül Φ azonosan eltűnik, ezért

$$|f(x) - \Phi * f| \leqq \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-t; a)\,dt = \varepsilon.$$

Ha még figyelembe vesszük, hogy $\Phi * f \in D$, akkor tételünk bizonyítást nyert.

Tekintsünk valamilyen $f(x)$ függvényt és vegyük értelmezési tartományának azon pontjait, melyek minden környezete legalább egy olyan pontot tartalmaz, ahol $f(x) \neq 0$. E pontok halmaza nyilván zárt halmaz, melyet $f(x)$ *tartójának* szokás nevezni.

A következőkben a D halmaz azon részhalmazát is tekintenünk kell, mely tartalmazza mindazokat a D-függvényeket, melyek tartói valamilyen rögzített Δ tartományba esnek. Ezeket D_Δ-val fogjuk jelölni.

A disztribúciók Szoboljev—Schwartz-féle definíciója

T legyen egy lineáris és folytonos funkcionál definiálva a D függvénytéren. Vagyis T legyen olyan függvény, melynek értelmezési tartománya a D függvénytér, függő változója (egyszerűség kedvéért valós) szám és mely az alábbi feltételeket teljesíti:

1°. $T\cdot(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\alpha T(\varphi_1)+\beta T(\varphi_2)$,

ahol $\varphi_1, \varphi_2 \in D$; α, β tetszőleges állandók;

2°. folytonos, vagyis ha $\varphi_k \underset{D}{\to} 0$, akkor $T(\varphi_k)\to 0$.

Az ilyen lineáris és folytonos funkcionált *disztribúciónak* nevezzük. Ha T egy disztribúció és $\varphi \in D$, akkor $T(\varphi)$ helyett, ahol félreértés veszélye nem forog fenn, $T\cdot\varphi$-t fogunk írni és a T disztribúciónak φ-vel való *skaláris (belső) szorzatának* nevezzük. (Ezen elnevezés jogosultságát a későbbiekben látni fogjuk.)

Ha a T lineáris, folytonos funkcionál a D_Δ téren van értelmezve, akkor azt mondjuk, hogy a T disztribúció a Δ tartományon van értelmezve, vagy Δ-ra van lokalizálva.

Valamennyi disztribúció halmazát D'-vel (ill. D'_Δ-vel) fogjuk jelölni.

Lássunk néhány példát!

1. Legyen $f(x)$ valamely tetszőleges, lokálisan integrálható függvény, vagyis olyan, mely R_n minden véges tartományában integrálható. Akkor ez definiál egy, ugyancsak f-fel jelölt lineáris és folytonos funkcionált a következő módon:

$$f\cdot\varphi=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \qquad (\varphi\in D) \tag{1}$$

Hogy ez az 1°. és 2°. feltételeket kielégíti, könnyen igazolható. Minden lokálisan integrálható függvény tehát egy disztribúciót, éspedig az (1) alakban felírható disztribúciót definiálja. Ha egy disztribúcióról megállapítjuk, hogy az az (1) alakban előállítható, akkor azt az $f(x)$ függvénnyel identifikáljuk, azonosítjuk.*

* Hogy ez az azonosítás jogosan következik abból, hogy ha f_1 és f_2 két pozitív mértékű halmazon különböző lokálisan integrálható függvény, akkor f_1 és f_2 különböző disztribuciókat definiálnak. Ezt a tényt a következő fejezetben bizonyítjuk be.

A lokálisan integrálható függvényekkel azonosítható, tehát (1) alakban előállítható disztribúciókat *reguláris disztribúcióknak* nevezzük, szemben az (1) alakban nem írható, ún. *szinguláris disztribúciókkal.*

Az (1) egyúttal igazolja azt az elnevezést, hogy a T funkcionált $\varphi \in D$-re alkalmazva, vagyis a $T \cdot \varphi$ számot T és φ *skaláris szorzatának* nevezzük.

2. A Dirac δ-disztribúció. Ezt a δ-val jelölt disztribúciót a következő módon definiáljuk:

$$\delta\varphi = \varphi(0) \qquad (\varphi \in D) \tag{2}$$

Világos, hogy ez is kielégíti az 1° és 2° követelményeket, tehát disztribúció.

A δ-disztribúció *szinguláris disztribúció*, vagyis nem lehet olyan lokálisan integrálható függvényt találni, mellyel (2) az (1) alakban előállítható lenne.

Mert, az állítással ellentétben, tegyük fel, hogy volna olyan $f(x)$ mellyel δ az (1) alakban felírható lenne. Akkor $\varphi \in D$ gyanánt válasszuk a korábban már szerepeltetett $\varphi(x; a)$ függvényt. De akkor (1) és (2) alapján

$$\delta \cdot \varphi(x; a) = \varphi(0; a) = e^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x; a)\, dx. \tag{3}$$

Ha azonban $a \to 0$, akkor (3) jobboldalán álló integrál konvergál a 0-hoz, mert az integrandus korlátos és az az intervallum, ahol az integrálandó nem zérus tart 0-hoz. De a (3) integrál a minden értéke mellett $e^{-1} \neq 0$; ez az ellenmondás bizonyítja, hogy δ nem írható az (1) alakba.

Hogy a δ-disztribució a bevezetésben már említett Dirac δ „függvény" gyanánt használható, ezt később látni fogjuk. Mindenesetre legyen $n = 1$ és szorítkozzunk az $x > 0$ tartományra, ami azt jelenti, hogy a D függvénytér helyett a D_+-al jelölt függvényteret tekintjük. Ebbe mindazon végtelen sokszor differenciálható függvények tartoznak, melyek a pozitív félegyenes valamely véges intervallumán kívül eltűnnek, akkor itt $\delta \equiv 0$, ami azt jelenti, hogy az $x > 0$ tartományban δ-t minden $\varphi \in D_+$ függvényre alkalmazva 0-t ad, mert

$$\delta \cdot \varphi = \varphi(0) = 0 \qquad (\varphi \in D_+).$$

A pozitív félegyenesen tehát a δ disztribúció reguláris és az azonosan 0 függvénnyel azonosítható. Teljesen hasonló módon látható be, hogy δ a negatív félegyenesen is az azonosan 0 függvénnyel azonosítható.

Megállapításunk ekvivalens azzal, hogy a δ a 0 komplementer tartományában, az azonosan eltűnő függvénnyel azonos. E tulajdonsága megvan az eredetileg definiált δ „függvény"-nek is.

A δ szinguláris disztribúció az *egész* térben, de a 0 pontot nem tartalmazó tartományokban már reguláris.

x_0 legyen az R_n valamely pontja, szokásos az előbbin kívül δ_{x_0} vagy $\delta(x-x_0)$-al jelölt disztribúciót is használni, melynek definíciója:

$$\delta_{x_0}\cdot\varphi=\delta(x-x_0)\cdot\varphi=\varphi(x_0) \qquad (\varphi\in D) \tag{4}$$

Disztribúciók, függvények, mértékek

Az előbbi meggondolásokból látható, hogy a disztribució a függvény, legalábbis a lokálisan integrálható függvény fogalmának az általánosítása, ti. a reguláris disztribúciók a D' halmaznak valódi részhalmazát képezik, amint azt az előző fejezet 2. példája igazol.

Ehhez még hozzá kell tenni azt, hogy ha f_1 és f_2 két különböző függvény, (vagyis egymástól pozitív mértékű halmazon térnek el), akkor f_1 és f_2 különböző disztribúciókat definiálnak. Ez az állítás egyenértékű azzal, hogy ha valamely T disztribúcióra $T\cdot\varphi=0$ minden $\varphi\in D$ mellett, akkor T reguláris és az azonosan 0 (pontosabban: legfeljebb nullmértékű halmazon nullától különböző) függvénnyel azonos.

Állításunk bizonyításánál $n=1$ esetre szorítkozunk. Válasszuk ki az X-tengely valamely (a, b) intervallumát és megmutatjuk, hogy ha

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=0$$

minden $\varphi\in D_{[a,b]}$-re, akkor $f(x)\equiv 0$. Legyen ugyanis

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

$F(x)$ majdnem mindenütt differenciálható és differenciálhányadosa (m.m.) $f(x)$. A parciális integrálás elve alapján

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=-\int_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx=0. \qquad (\varphi\in D_{[a,b]})$$

Mivel $F(x)$ folytonos és $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, alkalmazhatjuk a variációszámításból közismert du Bois—Reymond-féle lemmát (l. pl. [22] 54. old.), melynek alapján $F(x)$ állandó. Így tehát $f(x)=F'(x)=0$. Ez az okoskodás bármely (a, b) számközre elvégezhető; állításunk tehát igazolást nyert.

A disztribúció fogalma a *mérték* fogalmával is szoros kapcsolatban áll. A D-tér helyett a C teret tekintjük. Ebben a következő konvergencia

fogalmat definiáljuk: $\gamma_k(x) \to 0$ ha elegendő nagy k-tól valamennyi γ_k ugyanazon korlátos tartományon kívül eltűnik és $\gamma_k(x) \to 0$ egyenletesen e közös tartományban. Mármost tekintsünk egy μ mértéket (egy teljesen additív halmazfüggvényt). Ez nyilván definiál egy lineáris és folytonos funkcionált a C függvénytéren éspedig az alábbi Stieltjes-integrállal:

$$\mu \cdot \gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) d\mu. \qquad (\gamma \in C)$$

De fordítva is igaz, RIESZ FRIGYES alapvető tétele szerint [17], hogy minden C-n definiált L lineáris és folytonos funkcionálhoz van olyan μ mérték, hogy

$$L(\gamma) = \mu \cdot \gamma$$

érvényes legyen.

A C függvénytéren lehet definiálni a Dirac δ-*mértéket* is az alábbi módon:

$$\delta\gamma = \gamma(0).$$

Így tehát a Dirac-δ nem függvény, hanem vagy mérték, vagy disztribúció, aszerint, hogy azt a C vagy D téren definiáljuk.

A mértékek halmazát C'-vel szokás jelölni.

Ha $d\mu = f(x)dx$, akkor a μ mértéknek egy függvény felel meg.

A mérték és disztribúció fogalmai mindketten a függvény fogalmának általánosításaiként foghatók fel. A két általánosítás helyett rendszerint (különösen a matematikai-fizika egyes problémáinak általános tárgyalásánál) célszerűbb a disztribució fogalmát használni. Mindenesetre $D \subset C$ és $D' \subset C'$.

A disztribúciók néhány lokális tulajdonsága

A T disztribúcióról azt mondjuk, hogy az x_0 pont $\varkappa$ környezetében eltűnik, ha $T \cdot \varphi = 0$ minden $D_\varkappa$-hoz tartozó φ mellett ($D_\varkappa$ azoknak a D-beli függvényeknek a halmaza, melyeknek tartója $\varkappa$-ba esik.)

A δ-disztribució az $x = 0$ pont kivételével minden pont környezetében eltűnik.

A T disztribúció a G tartományban eltűnik, ha G minden pontjának van olyan környezete, ahol $T = 0$. Be lehet bizonyítani, hogy ha T fenti értelemben, G-ben „lokálisan" eltűnő, akkor „nagyban" is eltűnő, ami azt jelenti, hogy $T \cdot \varphi = 0$ minden D_G-hez tartozó φ-re (fordítva az állítás triviális).

Szokásos az x_0 pontot a T disztribúció *lényeges pontjának* nevezni, ha T az x_0-nek semmilyen környezetében sem eltűnő.

Tekintsük példaképpen az $f(x)=x$ függvényt, illetve az általa generált disztribúciót (az x függvényt „mint disztribúciót"). Az $x=0$ pont ennek a disztribúciónak lényeges pontja, jólehet az $x=0$ helyen $f(x)$ eltűnik. T lényeges pontjainak halmaza zárt és a T *tartóját* adja.

Ha $T=f(x)$ (egy szakaszonként folytonos függvény), akkor $f(x)$ tartója azon pontok halmazának lezárt burka, melyekben $f(x)\neq 0$.

A Dirac-δ tartója a 0 pont.

Ha valamely G halmaz tartalmazza a T disztribúció tartóját, akkor azt mondjuk T a G-be *koncentrálva* van.

A disztribúció a függvény fogalmát általánosítja, de a függvényt mint globális egészet fogja fel. Ennek ellenére bizonyos disztribúcióknak egyes pontokban lehet lokális értéket is tulajdonítani, mint ahogyan azt S. Łojasiewicz [18] megmutatta. Minden disztribúciónál és minden pontban ez nyilván lehetetlen, hiszen akkor minden disztribúció egy közönséges függvénnyel lenne azonos.

A disztribúciók közötti alapműveletek

Legyen $T, S\in D'$, akkor $T+S$ az a disztribúció, melyet az alábbi módon definiálunk:

$$(T+S)\cdot\varphi \overset{\text{Def}}{=} T\cdot\varphi + S\cdot\varphi \qquad (\varphi\in D) \tag{5}$$

Ha α tetszőleges állandó, és $T\in D'$, akkor αT disztribuciót az

$$(\alpha T)\cdot\varphi \overset{\text{Def}}{=} T\cdot(\alpha\varphi)=\alpha T\cdot\varphi \qquad (\varphi\in 0) \tag{6}$$

előírással definiáljuk.

Jelöljük E-vel a mindenütt végtelen sokszor differenciálható függvények halmazát. Legyen $a(x)\in E$, akkor $a(x)$ T szorzatot az előbbihez hasonlóan definiáljuk:

$$a(x)T\cdot\varphi \overset{\text{Def}}{=} T\cdot(\alpha(x)\varphi(x)). \qquad (\varphi\in D) \tag{7}$$

Be kellene bizonyítani még, hogy (5), (6) és (7) alatt definiált lineáris funkcionálok valóban disztribúciók. E bizonyítások nagyon könnyűek, ezeket az olvasóra bízzuk.

Lehetséges egy disztribúciónak, valamely véges sokszor, de legalább egyszer differenciálható függvénnyel való szorzatát is értelmezni. Disztribuciónak valamely (akár integrálható) függvénnyel, vagy még inkább két disztribúciónak a szorzatát azonban általában nem lehet értelmezni. Ez abból is planzibilis, ha meggondoljuk, hogy két, lokálisan integrálható függvény egy-egy disztribúciót definiál, de már szorzatuk nem feltételenül lokálisan integrálható és így nem is definiál általában disztribúciót.

Disztribúciók affin transzformációi

Legyen u az R_n térnek egy egyértelmű affin leképezése saját magára és u^{-1} ezen leképezés inverze. $|u|$-al jelöljük e leképezés mátrixának determinánsát (nyilván $|u| \neq 0$).

Ezekután legyen $T \in D'$, akkor uT disztribúciót az alábbi módon definiáljuk:

$$(8) \qquad (uT)\cdot\varphi \overset{\text{Def}}{=} |u|\, T\cdot\varphi(ux) \qquad (\varphi \in D).$$

Hogy a (8) jobboldalán levő kifejezésnek van értelme, kitűnik abból, hogy ha $\varphi \in D$, akkor $\varphi(ux)$ is $\in D$. De (8) jobboldalán valóban disztribúció áll, mert ha $\varphi_k \underset{D}{\to} 0$, akkor $\varphi_k(ux) \underset{D}{\to} 0$.

Hogy uT disztribúciót éppen a (8) alatti képlettel definiáltuk, magyarázatát abban leli, hogy ha $T = f(x)$, ahol $f(x)$ lokálisan integrálható függvény, akkor $uf(x) \overset{\text{Def}}{=} f(u^{-1}x)$, ennek folytán

$$(uf)\cdot\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} (uf)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u^{-1}x)\varphi(x)\,dx = |u| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(ut)\,dt,$$

ha az x változó helyett az $u^{-1}x = t$ integrációs változót vezetjük be.

Lássunk néhány példát:

1. Legyen u egy h vektorral való transzláció: $ux = x + h$. Jelen esetben nyilván $|u| = 1$. Ha $T \in D'$, akkor (8) alapján T-nek h-val való transzlatáltja az alábbi $\tau_h T$-vel jelölt disztribúció:

$$(9) \qquad (\tau_h T)\cdot\varphi = T\cdot\varphi(x+h).$$

A későbbiekben be fogjuk bizonyítani, hogy ha valamely T disztribúció valamennyi transzlációval szemben invariáns, akkor T a konstans függvénnyel azonosítható. Ha $T \in D'$ valamely rögzített h mellett τ_h-val szemben invariáns, akkor T-t h szerint periodikusnak nevezzük.

2. Tükrözés a koordinátarendszer kezdőpontján. Legyen $ux = -x$ $(|u| = (-1)^n)$, akkor

$$(10) \qquad (uT)\cdot\varphi \overset{\text{Def}}{=} \check{T}\cdot\varphi \overset{\text{Def}}{=} (-1)^n T\cdot\varphi(-x) \overset{\text{Def}}{=} (-1)^n T\cdot\check{\varphi}.$$

Ha valamely disztribúció e tükrözési transzformációval szemben invariáns, vagyis, ha

$$T = \check{T},$$

akkor T-t *centrálszimmetrikus disztribucionak* nevezzük.

3. Hasonlósági transzformáció esetében $ux = \alpha x$, ahol α valamilyen konstans. Ezesetben $|u| = \alpha^n$ és

$$(11) \qquad (uT)\cdot\varphi \overset{\text{Def}}{=} \sigma_\alpha T\cdot\varphi \overset{\text{Def}}{=} \alpha^n T\cdot(\alpha x).$$

Legyen T disztribució, és $\beta \neq 0$ tetszőleges szám. $T_{\beta x}$ disztribúción értjük a következőt

(12) $$T_{\beta x} \overset{\text{Def}}{=} \sigma_{\frac{1}{\beta}} T.$$

Ha valamely λ reális számra és minden $\beta > 0$ mellett

(13) $$T_{\beta x} = \beta^{\lambda} T,$$

akkor a T disztribúciót λ-fokú homogén disztribúciónak nevezzük.

(14) $$T_{\beta x}\varphi = (\sigma_{\frac{1}{\beta}} T)\varphi = \beta^{-n} T\varphi\left(\frac{x}{\beta}\right), \qquad (\varphi \in D)$$

Ha T homogén, akkor (13) alapján

$$T_{\beta x}\varphi = \beta^{\lambda} T \cdot \varphi.$$

Ezt az egyenletet (14)-gyel összevetve, azt kapjuk, hogy

(15) $$T\varphi\left(\frac{x}{\beta}\right) = \beta^{n+\lambda} T\varphi.$$

Ez a feltétele annak, hogy T λ-ad fokú homogén legyen.

A $\delta(x) = \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ például $-n$-ed fokú homogén disztribúció, mert

$$\delta \cdot \varphi = \varphi(0, 0, \ldots, 0) = \delta \cdot \varphi\left(\frac{x}{\beta}\right)$$

itt tehát $1 = \beta^{\lambda+n}$, azaz $\lambda = -n$.

Disztribúciósorozatokról

Tekintsük a disztribúcióknak egy T_λ osztályát, ha λ az indexek egy Λ halmazához tartozik. T_λ tehát a λ valós (vagy komplex) változótól függ.

Azt mondjuk, hogy $T_\lambda \to T$ midőn $\lambda \to \lambda_0$, ha minden $\varphi \in D$ függvényre $T_\lambda \varphi$ konvergens.

A disztribúciók sorát konvergensnek nevezzük, ha a részletösszegek sorozata az előbbi értelemben konvergens.

Példaképpen tekintsük a lokálisan integrálható függvények $\{f_n\}$ sorozatát és tegyük fel, hogy

vagy: $f_n \to f$ m.m, továbbá $|f_n(x)| < F(x)$, ahol $F(x)$ lokálisan integrálható;

vagy: $f_n \nearrow f$ ($f_n \searrow f$) és $f(x)$ lokálisan integrálható. Állítás, hogy ezekben az esetekben

$$f_n \xrightarrow{D'} f,$$

vagyis f_n függvényeket disztribúcióknak tekintve, ezek disztribúció értelemben konvergens sorozatot alkotnak.

Az állítás evidens, mert ha $\varphi \in D$ tartója a korlátos G tartomány, akkor a valós függvénytan közismert tétele értelmében

$$f_\nu \cdot \varphi = \int_G f_\nu(x)\varphi(x)\,dx \to \int_G f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Sőt eszerint az első esetben is az f_ν mint disztribúciósorozat egy disztribúcióhoz konvergál.

E megállapításunkkal függ össze az alábbi fontos tétel: *minden disztribúció határértéke korlátos tartományokra koncentrált disztribúciók sorozatának.* Más szóval: ha d'-vel jelöljük a korlátos tartományokra koncentrált disztribúciók halmazát, akkor megállapíthatjuk, hogy $d'(\subset D')$ a D'-ben mindenütt sűrű.

Bizonyítás: legyen $g_n(x) \in D$ az alábbi módon definiálva:

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| < n \\ 0, & \text{ha } |x| > 2n. \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ha φ a D függvénytér egy tetszőleges további eleme, akkor elég nagy n mellett nyilván

$$g_n(x)\,\varphi(x) = \varphi(x).$$

T legyen ezekután tetszőleges disztribúció, akkor nyilván $g_n T$ is disztribúció. A $g_n T$ disztribúció az $|x| < 2n$ tartományra van koncentrálva és $g_n T \xrightarrow{D'} T$, mert bármely $\varphi \in D$ függvényre $(g_n T)\cdot\varphi = T\cdot(g_n\varphi) = T\cdot\varphi$, (elég nagy n mellett) vagyis $\lim_{n\to\infty} (g_n T)\cdot\varphi = T\cdot\varphi$. Sőt, még több is igaz: *a D' tér teljes*, vagyis disztribúciók határértéke ismét disztribúció.

Ezt a tételt az alábbi módon lehet bizonyítani: Legyen T_n a disztribuciók egy konvergens sorozata, ami azt jelenti, hogy minden $\varphi \in D$ függvényre $\lim_{n\to\infty} T_n\cdot\varphi = T\cdot\varphi$ létezik. (A határérték egy szám, mely φ-től függ, ez tehát a D téren értelmezett $T\cdot\varphi$ funkcionál). Be kell bizonyítani, hogy T is disztribúció.

Hogy T lineáris, nagyon könnyen belátható; ennek meggondolását az olvasóra bízzuk.

Azt kell tehát igazolni, hogy T folytonos is; másképpen, azt kell igazolni, hogy ha $\varphi_n \xrightarrow{D} 0$, akkor $T\varphi_n \to 0$.

Tegyük fel ennek az ellenkezőjét. Ez azt jelenti: létezik a $\{\varphi_n\}$ sorozatnak olyan végtelen részsorozata, melyre $|T\cdot\varphi_n| \geqq c > 0$. (Ezt a részsorozatot szintén jelöljük $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$-el.)

A φ_n függvénysorozatnak létezik olyan végtelen részsorozata, hogy minden n-re a

$$|D^p\varphi_n| \leqq \frac{1}{4^n} \qquad (p=0, 1, 2, \ldots, n)$$

becslés érvényes legyen. Hogy $\varphi_n \underset{D}{\to} 0$ azt jelenti, hogy egy és ugyanazon korlátos tartományon kívül valamennyi φ_n eltűnik, és φ_n, valamint összes deriváltjaik az egész térben egyenletesen tartanak zérushoz.

Ebből a részsorozatból (melyet megintcsak átindexelés után $\{\varphi_n\}$-el jelölünk) készítsük a $\psi_n(x) = 2^n\varphi_n(x)$ függvénysorozatot. Világos, hogy $\psi_n(x) \in D$ (minden n-re) és $\psi_n \to 0$ a D térben, hiszen minden rögzített k mellett $D^k\varphi_n$ függvénysorozat abszolút értéke a k-ik tagból kezdve $\frac{1}{2^n}$-el majorizálható, tehát $D^k\varphi_n \to 0$ egyenletesen. A feltevésünk miatt

$$|T\cdot\psi_n| = |T\cdot 2^n\varphi_n| = 2^n |T\cdot\varphi_n| \geqq 2^n c,$$

vagyis $|T\cdot\psi_n| \to \infty$. A bizonyítandó állítással ellentétes feltevésből következik, hogy van D-ben olyan ψ_n nullsorozat, mely mellett $|T\psi_n| \to \infty$.

De ha $|T\psi_n| \to \infty$, akkor van olyan $\psi_{n'}(x)$ függvény, melyre $|T\cdot\psi_{n'}| > 1$ és miután $T_{n''}\psi_{n'} \to T\cdot\psi_{n'}$, létezik olyan $T_{n''}$ úgy, hogy $|T_{n''}\psi_{n'}| > 1$ legyen. Legyen $\psi_{n'} = \psi_1^*$ és $T_{n''} = T_1^*$. A ψ_1^* és T_1^* elemekből kiindulva válasszuk ki a ψ_ν^* és T_ν^* elemeket úgy, hogy

$$1^\circ. \quad |T_k^*\cdot\psi_\nu^*| < \frac{1}{2^{\nu-k}} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, \nu-1)$$

$$2^\circ. \quad |T\cdot\psi_\nu^*| > \sum_{s=1}^{\nu-1} |T\cdot\psi_s^*| + \nu$$

teljesüljenek.

Az 1° feltétel nyilván kielégíthető, mert hiszen ψ_n^* is nullsorozat D-ben. De a második feltétel is kielégíthető, mert hiszen $|T\psi_n| \to \infty$ így ez a reláció $\psi_n(x)$ minden végtelen részsorozatára is igaz. Mivel azonban $T_k\cdot\psi_\nu^* \to T\psi_\nu^*$, ha $k \to \infty$, azért T_ν^* megválaszolható úgy, hogy

$$(16) \qquad |T_\nu^*\cdot\psi_\nu^*| > \sum_{s-1}^{\nu-1} |T_s^*\cdot\psi_k^*| + \nu.$$

Ilyen módon képezzük a T_ν^* és ψ_ν^* sorozatokat.

Ezekután nézzük a

$$\psi(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\psi_s^*(x)$$

sort, mely a D térben konvergens és így $\psi(x)\in D$. Ha most v tetszőleges természetes szám, akkor

$$T_v^*\psi=T_v^*\cdot\left(\sum_{s=1}^{\infty}\psi_s^*(x)\right)=\sum_{s=1}^{v-1}T_v^*\cdot\psi_s^*+T_v^*\psi_v^*+\sum_{s=v+1}^{\infty}T_v^*\cdot\psi_s^*.$$

A T_k^* és ψ_k^* sorozatok konstrukciója miatt

$$\sum_{s=v+1}^{\infty}T_v^*\cdot\psi_s^*<\sum_{s=v+1}^{\infty}\frac{1}{2^{s-v}}=1,$$

ezért

$$|T_v^*\cdot\psi|>|T_v^*\psi_v^*|-|\sum_{s=1}^{v-1}T_v^*\cdot\psi_s^*|-|\sum_{s=v+1}^{\infty}T_s^*\cdot\psi_s^*|>|T_v^*\cdot\psi_v^*|-\sum_{s=1}^{v-1}|T_v^*\cdot T_v^*|-1.$$

Ha most a (16) alatti becslést figyelembe vesszük, azt kapjuk, hogy

$$|T_v^*\cdot\psi|>v-1.$$

Ha $v\to\infty$, akkor $|T_v^*\cdot\psi|\to\infty$, ellentétben azzal, hogy $T_v^*\psi$ számsorozat konvergens. Ez az ellentmondás bizonyítja feltevésünk helytelenségét, tehát a tételt.

Disztribúciók differenciálhányadosa

Legyen adva $T\in D'$, akkor ennek az x_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ változó szerinti parciális differenciálhányadosán a $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}$-val jelölt alábbi disztribúciót értjük:

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}\cdot\varphi\overset{\text{Def}}{=}-T\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right). \qquad (\varphi\in D) \tag{17}$$

Hogy a (17) alatti definíciós képletnek van értelme, kitűnik abból, hogy ha $\varphi\in D$, akkor $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ is $\in D$. De világos, hogy a (17) jobboldalán szereplő kifejezés disztribúció, mert az φ lineáris és folytonos funkcionálja.

Hogy miért éppen a (17) alatti képlettel célszerű definiálni valamely T disztribúció deriváltját magyarázható azzal, hogy ha $T=f(x)$ egy teljesen folytonos függvény x_k-ban, akkor $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ is egy disztribuciót

definiál éspedig a következőt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\varphi=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x_k}\varphi\,dx_1\dots dx_n=-\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}f\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}dx_1\dots dx_n$$

tekintettel arra, hogy $\varphi\equiv 0$, ha $|x|$ elegendő nagy.

Eszerint minden disztribúció akárhányszor differenciálható.

A disztribúció differenciálhányadosának adható egy további, „topologikus" értelmezése is, mely a (17) alattival ekvivalens.

Legyen $h=(0,\dots,0,\Delta x_k,0,\dots,0)$ és ezzel a vektorral képezzük a $\tau_{-h}T$ disztribúciót (9) alapján:

$$\tau_{-h}T\cdot\varphi = T\cdot\varphi(\dots,x_k-\Delta x_k,\dots).$$

Világos, hogy

$$\frac{\tau_{-h}T-T}{h} \tag{18}$$

ismét disztribúció. Bebizonyítjuk, hogy (18)-nak mindig van limese, ha $\Delta x_k\to 0$. Legyen ugyanis $\varphi\in D$, akkor

$$\frac{\tau_{-h}T-T}{\Delta x_k}\cdot\varphi=\frac{1}{\Delta x_k}[T\cdot(\dots,x_k-\Delta x_k,\dots)-T(\dots,x_k,)]=$$

$$=T\cdot\left[\frac{\varphi(\dots,x_k-\Delta x_k,\dots)-\varphi(\dots,x_k,\dots)}{\Delta x_k}\right].$$

Ha $\Delta x_k\to 0$, akkor

$$\frac{\varphi(\dots,x_k-\Delta x_k,\dots)-\varphi(\dots,x_k,\dots)}{\Delta x_k}\xrightarrow[D]{}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$$

és így

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}\cdot\varphi=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\tau_{-h}T-T}{\Delta x_k}=-T\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial k}\right).$$

Hogy a deriváltat éppen a (18) alatti kifejezés határértékeként definiáljuk, annak oka, hogy $\tau_{-h}T$ az $f(\dots,x_k+\Delta x_k,\dots)$ függvényértéknek felel meg.

Az elmondottakból következik, hogy minden lokálisan integrálható függvénynek — ha nem is differenciálható — van *mint disztribúciónak* akárhányadrendű differenciálhányadosa (ún. *d*-differenciálhányados). Ha $f(x)$-nek van közönséges differenciálhányadosa, akkor ez nem feltételenül azonos f-nek a *d*-differenciálhányadosával. Ez kitűnik abból is, hogy ha f differenciálható, nem biztos, hogy f'-höz is tar-

tozik disztribúció; de f-nek *mint disztribúciónak* a differenciálhányadosa mindig disztribúció. Egy további példa, mely az előbbi állítást igazolja: ha $T \in D'$, akkor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i},$$

mert a parciálisok felcserélhetőségéről szóló ismert tétel szerint

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \varphi = T \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = T \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i} \cdot \varphi.$$

Ha most $T = f$, ahol f valamely függvény, melyre közönséges értelemben vett parciális differenciálhányadosokra általában

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

érvényesek, ennek a d-differenciálhányadosaira e vegyes másodrendű differenciálhányadosok egymással mégis egyenlők, vagyis a közönséges és d-differenciálhányadosok nem azonosíthatók egymással.

Az elmondottakkal szemben, ha $f(x)$ lokálisan integrálható, továbbá $f'(x)$ mindenütt létezik és folytonos, akkor $f(x)$ d-differenciálhányadosa egyenlő az $f'(x)$-hez tartozó disztribúcióval. Ez a d-disztribúció definíciójából következik. Képezzük f'-höz tartozó disztribúciót:

$$f' \cdot \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} f' \cdot \varphi \, dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot \varphi' dx.$$

A jobboldal nem más, mint f-hez tartozó disztribúció differenciálhányadosának (-1)-szerese.

A mondott gondolatmenetből következik, hogy ahhoz, hogy a kétféle differenciálhányados (ti. d-differenciálhányados és közönséges) azonosságát állíthassuk, nem kell f' folytonosságát megkövetelni. Elegendő például $f(x)$ teljes folytonosságát megkövetelni.

Lássunk most néhány példát a disztribuciók differenciálhányadosaira.

1. Tekintsük R_1-ben az ún. Heaviside-féle függvényt

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0 \\ 1, & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

H'-vel a $H(x)$ d-differenciálhányadosát jelöljük. Ez pedig:

$$H' \cdot \varphi = -H \cdot \varphi' = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = -[\varphi(x)]_0^\infty = \varphi(0) = \delta \cdot \varphi$$

vagyis

$$H' = \delta,$$

ami a régi, heurisztikus, fizikusok által használt „definícióval" megegyezik.

Hasonló módon

$$H_\tau(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < \tau, \\ 1, & \text{ha} \quad x > \tau \end{cases}$$

differenciálhányadosa

$$H'_\tau = \delta_\tau.$$

Képezhetjük természetesen δ differenciálhányadosát is:

$$\delta' \cdot \varphi = -\delta \cdot \varphi' = -\varphi'(0).$$

A δ magasabb rendű differenciálhányadosainak képzése sem okoz semmilyen nehézséget.

2. Legyen $f(x)$ szakaszonként folytonos függvény, melynek szakaszonként folytonos differenciálhányadosa $f'(x)$ van és tegyük fel, hogy $f(x)$-nek az a_i helyeken véges nagyságú ugrása van:

$$h_k = f(a_k + 0) - f(a_k - 0).$$

Képezzük az

$$f_1(x) = f(x) - \sum_{(k)} h_k H(x - a_k)$$

függvényt, ahol H a már definiált Heaviside-féle függvény. $f_1(x)$ nyilván folytonos és szakaszonként folytonos deriváltja van. Képezzük mindkét oldal d-differenciálhányadosát:

$$f'_1 = f' - \sum_{(k)} h_k \delta_{a_k},$$

ebből

$$f' = f'_1 + \sum_{(k)} h_k \delta_{a_k},$$

f'-nek megfelelő disztribúció tehát ezen f'_1-nek megfelelő disztribúció + a derivált ugráshelyeihez tartozó Dirac δ-k lineáris kompozíciója.

3. Legyen $f(x) = f(x_1, x_2)$ egy G egyszeresen összefüggő tartományban folytonos parciális deriváltakkal bíró függvény. A G tartomány Γ határa legyen egy szakaszonként sima görbe. Tegyük fel, hogy $f(x) \equiv 0$, ha x a G tartományon kívül van. (Az $f(x)$ ugráshelyei tehát Γ-n legyenek).

Akkor a Green-tétel szerint

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\varphi = -f\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\iint\limits_G f(x_1, x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx,\,dx_2 =$$

$$= -\int\limits_\Gamma f(x)\,\varphi(x)\,\cos(nx_2)\,ds + \iint\limits_G \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\varphi\,dx_1\,dx_2, \qquad (\varphi\in D)$$

ahol ds a Γ ívelemét jelenti.

E képlet összefüggést ad f-nek x_1 szerinti disztribúció-differenciálhányadosa és közönséges differenciálhányadosához tartozó disztribúció között.

Ha f-et (mint disztribúciót) a G belsejében tekintjük (tehát csak olyan D-függvényeket veszünk figyelembe, melyek tartói G belsejébe esnek), akkor fenti képlet jobboldalán szereplő első tag eltűnik. Ez esetben f-nek x_1 szerinti d-differenciálhányadosa a közönséges differenciálhányadoshoz tartozó disztribúcióval azonos.

4. Legyen $f(x)=f(x_1, x_2)$ a G tartományon kívül azonosan eltűnő, G-n belül kétszer differenciálható függvény (feltesszük, hogy Δf lokálisan integrálható; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$).

Állítsuk elő $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$-nek megfelelő disztribúciót:

$$\Delta f\cdot\varphi = f\cdot\Delta\varphi.$$

Ismét a Green-formula alapján írhatjuk, hogy

$$f\cdot\Delta\varphi = \iint\limits_G f(x_1, x_2)\Delta\varphi(x_1, x_2,)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \iint\limits_G \Delta f(x_1, x_2)\cdot\varphi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 + \int\limits_\Gamma\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{\partial f}{\partial n}\cdot\varphi\right)ds,$$

A jobboldalon fellépő második funkcionállal vesszük számba a Γ peremen fellépő ugráshelyeket. Ha a Δf-et mint disztribúciót a G *belsejében* tekintjük, vagyis $\varphi\in D_G$, akkor φ és deriváltjai a Γ-n eltűnnek, azaz, előbbi formulánk jobboldalán levő második tag eltűnik és érvényes a

$$\iint\limits_G f\cdot\Delta\varphi\,dx_1\,dx = \iint\limits_G \Delta f\cdot\varphi\,dx_1\,dx_2$$

reláció, azaz Δf-nek megfelelő disztribució a Δf függvénnyel azonosítható.

5. Legyen

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

és képezzük az

$$f(x)=\frac{1}{r}$$

függvényt. Vegyük figyelembe, hogy $\frac{1}{r}$ nem lokálisan integrálható, legalábbis nem, egy, az origót tartalmazó tartományban. Meg fogjuk mutatni, $\Delta\frac{1}{r}$-et mégis lehet disztribucióként értelmezni. Olyan tartományban, mely az $r=0$ pontot nem tartalmazza, természetesen $\Delta\frac{1}{r}=0$.

Legyen $\varphi\in D$ és $\varepsilon>0$, akkor

$$\Delta\frac{1}{r}\cdot\varphi=\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\Delta\varphi \overset{\text{Def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{r\geqq\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{r}\,dx.$$

Válasszuk az a számot olyan nagyra, hogy az $r>a$ tartományban a választott $\varphi(x)$ azonosan eltűnjék. Akkor, ismét a Green-formula alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\Delta\frac{1}{r}(\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{r\geqq\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{r}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{\varepsilon\leqq r\leqq a}\frac{\Delta\varphi}{r}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{r\geqq\varepsilon}\Delta\frac{1}{r}\cdot\varphi\,dx-\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{r=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\,d\sigma+\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{r=\varepsilon}\varphi\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}\,d\sigma=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{r\to\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\,d\sigma-\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{r=\varepsilon}\varphi\,\frac{a}{r^2}\,d\sigma,$$

ahol $d\sigma$ az ε sugarú gömb felületeleme. Itt figyelembe vettük, hogy $r\geqq\varepsilon>0$ tartományban $\Delta\frac{1}{r}=0$. Ámde

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{r\to\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{1}{r}\,d\sigma=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{r=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,d\sigma=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]_P 4\pi\varepsilon^2=0$$

a középértéktétel szerint (P az $r=\varepsilon$ gömbfelület alkalmas pontja).

Másrészt viszont

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{r=\varepsilon}\varphi\frac{1}{r}d\sigma=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{r=\varepsilon}\varphi d\sigma=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi(P')4\pi\varepsilon^2=4\pi\varphi(0),$$

ahol P' ugyancsak alkalmas pontja az $r=\varepsilon$ gömbnek. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\Delta\frac{1}{r}(\varphi)=-4\pi\varphi(0)=-4\pi\delta\cdot\varphi. \qquad (\varphi\in D)$$

Végeredményünk tehát:

$$\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta; \tag{19}$$

Hasonló módon bizonyítható be, hogy $n\geqq 3$ esetben

$$\Delta\frac{1}{r^{n-2}}=-(n-2)\Omega_n\delta, \tag{20}$$

ahol Ω_n az R_n egységgömbjének felszínét jelöli.

$n=2$ esetben a

$$\Delta\log\frac{1}{r}=-2\pi\delta \tag{21}$$

reláció érvényes, melyet az előbbihez hasonló módon nyerhetünk.

6. Legyen α mindenütt végtelen sokszor differenciálható függvény és T tetszőleges disztribúció, akkor

$$(\alpha T)'=\alpha' T+\alpha T'.$$

Legyen ugyanis $\varphi\in D$, akkor

$$(\alpha T)'\cdot\varphi=-(\alpha T)\cdot\varphi'=-T\cdot(\alpha\varphi')=-T\cdot[(\alpha\varphi)'-\alpha'\varphi]=$$

$$=-T\cdot(\alpha\varphi)'+T(\alpha'\varphi)=T'\cdot(\alpha\varphi)+(\alpha' T)\cdot\varphi=(\alpha' T'+\alpha' T)\cdot\varphi.$$

A differenciálás D'-ben folytonos művelet.

Legyen $T_n\in D'$ $(n=1, 2, \ldots)$ és tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty}T_n=T\in D'$$

létezik, *akkor* $\lim_{n\to\infty}T_n'$ *is létezik és* T'*-vel egyenlő*. Vagyis konvergens disztribúciósorozatot szabad tagonként differenciálni.

Bizonyítás:

$$T_n' \cdot \varphi = -T_n \cdot \varphi' \to -T \cdot \varphi' = T' \cdot \varphi \qquad (\varphi \in D)$$

a disztribúciósorozat konvergenciájának definíciója alapján. Ebből természetesen következik, hogy ha

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots \qquad (S_n \in D')$$

konvergens és összege $S(\in D')$, akkor

$$\sum_{n=7}^{\infty} S_n' = S'.$$

Bármilyen egyszerű is e tétel érdekes és fontos következményei vannak. Így például:

1. $\dfrac{\sin nx}{n} \to 0$ egyenletesen, ha $n \to \infty$, de nyilván $\left(\dfrac{\sin nx}{n}\right)' = \cos nx \not\to 0$. Azonban $\dfrac{\sin nx}{n}$-et disztribúcióként felfogva az általános tétel értelmében

$$\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' \overset{D'}{\to} 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' \cdot \varphi = -\frac{\sin nx}{n} \cdot \varphi' = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} \varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{n} \int_a^b \sin nx \cdot \varphi'(x)\, dx,$$

ahol (a, b) az az intervallum, melyen kívül φ eltűnik. De ez valóban tart 0-hoz, ha $n \to \infty$.

2. Legyen $f(x)$ valamely 2π szerint periodikus, lokálisan integrálható függvény. Képezzük Fourier együtthatóit:

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

és ezekkel $f(x)$ Fourier-sorát. Állítás:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

Fourier sora mindig disztribúció-konvergens és $f(x)$-nek megfelelő disztribúciót állítja elő.

Bizonyítás: az analízis ismert tétele szerint

$$c_0 x + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

egy $F(x)$-függvényhez konvergál, melynek deriváltja majdnem mindenütt $f(x)$-el egyenlő:

$$F(x) = c_0 x + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx}.$$

De akkor bebizonyított tételünk szerint

$$f(x) \overset{D'}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

3. Közismert, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

a $(0, 2\pi)$ számközben és $(0, 2\pi)$-n kívül az előbbiből periodikusan folytatott függvénnyel egyenlő. A felírt sor természetesen disztribúció értelemben is konvergens, tételünk szerint tehát tagonkénti d-differenciálással nyert sor disztribúció értelemben konvergens:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi n}, \tag{22}$$

újból differenciálva:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} n \sin nx = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta'_{2\pi n}$$

s. í. t.

(22)-ből következik, hogy

$$1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{-ix} + e^{-2ix} + \ldots = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi n}. \tag{23}$$

Ha $\varphi \in D$, akkor

$$e^{inx} \cdot \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{e^{inx}} \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-inx} \varphi(x)\, dx = \psi(-x)$$

és így (23) képlet alapján

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(2n\pi)$$

adódik, ami nem más, mint a Poisson-féle szummációs képlet $\varphi \in D$ függvény esetében.

Lokálisan nem integrálható függvényekhez tartozó disztribúciók

Az eddigieknek van egy szépséghibája, éspedig az, hogy míg minden lokálisan integrálható függvényhez hozzárendelhető disztribúció, addig a lokálisan nem integrálható függvényekről nem tudunk semmit. Ez pedig azért baj, mert ha — mondjuk — az $\frac{1}{x}$ vagy más hasonló függvényhez nem tartozna disztribúció, úgy az az elmélet használhatóságát erősen korlátozná. Vagy: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ függvényhez bár tartozik disztribúció, így tehát van d-differenciálhányadosa is; az $x = 0$ hely kivételével e függvénynek van közönséges értelemben deriváltja is, ez $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{|x|^{3/2}}$ ami nem lokálisan integrálható, tehát ez utóbbinak nem felelne meg disztribúció. Az a helyzet állana elő, tehát hogy ennek a nagyon is „szelíd" függvénynek a d-differenciálhányadosa nem lenne azonos a rendes differenciálhányadoshoz rendelt disztribúcióval (ami nem is létezne). Ez ismét csak az elmélet szűk korlátaira utalna.

Szerencsére azonban nem az a helyzet. Számos lokálisan nem integrálható függvényhez is rendelhető a D téren definiált lineáris és folytonos funkcionál az improprius integrálok elméletében közismert Hadamard-féle „véges rész" („partie finie") segítségével, melyet HADAMARD jóval a disztribúcióelmélet megalkotása előtt, a parciális differenciálegyenletek elméletének néhány problémájával kapcsolatban alkotott [19. 184—215 old.).

Legyen $f(x)$ lokálisan integrálható az $x = 0$ pont kivételével, ahol $f(x)$-nek olyan szingularitása van, mely $f(x)$-et a 0 hely környezetében nem integrálhatóvá teszi. Ha azonban van olyan $m > 0$ szám, melyre $f(x) r^m$ $(r = |x|)$ már integrálható a 0 pont környezetében is, akkor $f(x)$-hez az alábbi funkcionált lehet rendelni:

(24)

$$f \cdot \varphi = \int_{R_n} f(x) \left\{ \varphi(x) - \left[\varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\bigg|_0 x_1 + \ldots + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_n^m}\bigg|_0 x_n^m \right] H(1-r) \right\} dx,$$

ahol $\varphi \in D$ és $H(z)$ a már szerepelt Heaviside-féle függvény. Könnyen belátható, hogy (24) valóban disztribúció. Aki ismeri az Hadamard-féle elméletet, az könnyen felismeri, hogy (24) nem egyéb mint a következő:

$$f \cdot \varphi = Pf \cdot \int_{R_n} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

ahol Pf jelenti az utána következő integrál véges részét.

Meg kell azonban jegyezni, hogy egyes pontok környezetében lokálisan nem integrálható függvényekhez — ha egyáltalában lehet — végtelen sok féleképpen rendelhetünk disztribúciót úgy, hogy e disztribúció a szinguláris pontot nem tartalmazó intervallumokban a szóbanforgó függvénnyel azonosítható legyen. Nem kell mást csinálni, mint a (24) képletben szereplő $H(1-r)$ szorzót $H(1-\alpha r)$-el helyettesíteni ahol α tetszőleges pozitív szám. Ha pedig $f(x)$ elegendő gyorsan eltűnik a végtelenben, a $H(1-r)$ szorzó el is hagyható.

Bizonyos szinguláris pontokkal bíró lokálisan nem integrálható függvényekhez hozzárendelt olyan disztribúciókat, melyek e pontokat nem tartalmazó tartományokban a függvénnyel azonosíthatók, a szóban forgó függvény *regularizációinak* nevezzük [23. 21. old.]. Ha tehát valamely függvénynek van egy regularizációja, akkor végtelen sok is létezik. Ezekre vonatkozik a következő *tétel* (melyet egyszerűség kedvéért olyan $f(x)$ függvényekre fogalmazunk meg, melyeknek az $x=0$ helyen olyan szingularitásuk van, mely miatt ezek a 0 pont környezetében nem integrálhatók): *$f(x)$ két különböző regularizáltja a 0 pontra koncentrált disztribúcióban különbözik egymástól.*

Legyen ugyanis $f(x)$ egyik regularizációja T és P egy a 0 pontra koncentrált tetszőleges disztribúció. Akkor $T+P$ is az $f(x)$ egyik regularizációja. Mert: legyen $\varphi \in D$ olyan, hogy a 0 pontot tartalmazó tartományban azonosan eltűnik. Akkor

$$(T+P)\cdot\varphi = T\cdot\varphi + P\cdot\varphi = T\cdot\varphi = f\cdot\varphi.$$

Fordítva: jelölje T és S az $f(x)$ két regularizációját és legyen φ olyan D-térbeli függvény, mely az előbbi tulajdonsággal rendelkezik. Akkor

$$(T-S)\cdot\varphi = T\cdot\varphi - S\cdot\varphi = f\cdot\varphi - f\cdot\varphi = 0,$$

vagyis $T-S$ az 0 pont komplementer tartományában eltűnik, e disztribució tartója tehát csakis az 0 pont lehet.

Vegyük például az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvényt (R_1-ben). Ehhez tartozó

disztribúció (24) alapján:

$$\frac{1}{x}(\varphi)=Pf\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\{\varphi(x)-[\varphi(0)+\varphi'(0)x]H(1-|x|)\}\,dx=$$

$$(25)\quad =\int_{-\infty}^{-1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)\,x}{x}\,dx+\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx+\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx-2\varphi'(0).$$

Képezzük $\frac{1}{x}$ d-differenciálhányadosát:

$$\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\varphi=-\frac{1}{x}(\varphi')=-Pf\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\varphi'(x)\,dx=$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\{\varphi'(x)-[\varphi'(0)+\varphi''(0)\,x]H(1-|x|)\}\,dx=$$

$$=-\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x}\varphi'(x)\,dx-\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}\,dx-\int_{+1}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi'(x)\,dx+2\varphi''(0)=$$

$$=-\left[\frac{1}{x}\varphi(x)\right]_{-\infty}^{-1}-\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\varphi(x)\,dx-\left[\frac{1}{x}(\varphi(x)-\varphi'(0)\,x-\varphi(0))\right]_{-1}^{+1}-$$

$$-\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)\,x}{x^2}\,dx-\left[\frac{1}{x}\varphi(x)\right]_{1}^{\infty}-\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx+2\varphi''(0)=$$

$$=-\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\varphi(x)\,dx-\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)\,x-\varphi''(0)\frac{x^2}{2}}{x^2}\,dx-$$

$$-\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\varphi(x)\,dx+\varphi''(0)+2\varphi(0)=$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left\{\varphi(x) - \left[\varphi(0) + \varphi'(0)\,x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2\right] H(1-|x|)\right\} \cdot$$

$$\cdot dx + \varphi''(0) + 2\varphi(0) = \varphi''(0) + 2\varphi(0) - Pf \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x^2}(\varphi) + 2\delta\cdot\varphi + \delta''\cdot\varphi.$$

A $2\delta + \delta''$ disztribúció a 0 pontra van koncentrálva. Így tehát a disztribúciók körében érvényes az $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ (+ a 0 pontra koncentrált disztribúció) differenciálási szabály.

Az előbbihez hasonló számolással meggyőződhetünk az $\left(\frac{1}{x^n}\right)' =$ $= -n\frac{1}{x^{n+1}}$ (+ a 0 pontra koncentrált disztribúció) differenciálási szabály érvényességéről. ($n = 1, 2, \ldots$).

Az alkalmazásokban elfoglalt szerepük miatt még további két speciális esetet tekintünk.

Az első az x_+^λ-val jelölt függvény:

$$x_+^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0 \\ x^\lambda, & \text{ha} \quad x > 0. \end{cases} \qquad (-1 < \lambda < 0),$$

Az x_+^λ függvény lokálisan integrálható, d-differenciálhányadosa is létezik. Létezik természetesen közönséges értelemben vett deriváltja is $\lambda x_+^{\lambda-1}$, ami azonban lokálisan nem integrálható. Megmutatjuk, hogy $\lambda x_+^{\lambda-1}$ függvénynek is meg lehet feleltetni egy disztribúciót és az x_+^λ differenciálhányadosával egyenlő.

$$(x_+^\lambda)' \cdot \varphi = -x_+^\lambda \cdot (\varphi) = -\int_0^\infty x^\lambda \varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty x^\lambda \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^\lambda \varphi'(x)\,dx - \int_1^\infty x^\lambda \varphi'(x)\,dx.$$

Parciális integrálással

$$(x_+^\lambda)' \cdot \varphi = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ [x^\lambda(\varphi(x)-\varphi(0))]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx \right\} -$$

$$-[\lambda x^\lambda \varphi(x)]_1^\infty + \int_1^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx = -\varphi(1)+\varphi(0)+$$

$$+\int_0^1 x^{\lambda-1}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx+\varphi(1)+\int_1^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx =$$

$$=\int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x)-\varphi(0)\,H(1-x)]\,dx+\varphi(0) =$$

$$=Pf\cdot\int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx+\delta\cdot\varphi.$$

Itt ismét egy additív, a 0 pontra koncentrált disztribúció, a δ lép fel. Így tehát

$$(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1} \quad (+ \text{ a 0 pontra koncentrált disztribúció}),$$

Megjegyezzük, hogy ha $\int_\varepsilon^\infty x^\lambda \varphi'(x)\,dx$ integrálra közvetlenül alkalmaztuk volna a parciális integrálás elvét, a $\lambda x^{\lambda-1}$-nek egy másik regularizációját kaptuk volna.

A másik, az előbbihez hasonló példa az alábbi

$$\log_+ x = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0 \\ \log x, & \text{ha} \quad x > 0. \end{cases}$$

$$(\log_+ x)' \cdot (\varphi) = -\log_+ x \cdot \varphi' = -\int_0^\infty \log x\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \log x\,\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ [\varphi(x)\log x]_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right\} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\varphi(\varepsilon)\log\varepsilon - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right] = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\varphi(0)\log\varepsilon - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right],$$

mert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)]\log\varepsilon = 0.$$

Ámde $$-\varphi(0)\log\varepsilon=\int_{\varepsilon}^{\infty 1}\frac{\varphi(0)}{x}\,dx=\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(0)\,H(1-x)}{x}\,dx,$$

és ezért

$$(\log_+ x)'\cdot(\varphi)=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(0)H(1-x)}{x}\,dx-\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right]=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)\,H(1-x)}{x}\,dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)\,H(1-x)}{x}\,dx=$$

$$=Pf\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x}\,\varphi(x)\,dx.$$

Így tehát D'-ben is érvényes a $(\log_+ x)'=\frac{1}{x}$ (+ a 0 pontra koncentrált disztribúció) differenciálási szabály.

A disztribúció alaptétele

Valamely T disztribúcióról azt mondjuk, hogy egy tartományban *véges rendű*, ha van olyan, a tartományban folytonos f függvény és n nemnegatív egész, hogy az

$$f^{(n)}=T$$

reláció fennálljon. Az f deriváltját természetesen disztribucióértelemben kell érteni.

Az „alaptételnek" mondott tétel azt mondja ki, hogy *minden, valamely zárt tartományban adott T disztribúció véges rendű.* Vagyis zárt tartományban minden disztribúció egy folytonos függvény deriváltja. [2. I. köt. 82. old.]

A tétel bizonyítását csupán R_1 térre végezzük el, R_n-ben a bizonyításhoz újabb gondolat szükségtelen, csupán több és bonyolultabb írás szükséges.

A bizonyítást több lépésben végezzük el. (E bizonyítás gondolatmenetét l. [21. 10. old.])

a) Létezik olyan n nemnegatív, csupán T-től függő szám, hogy minden $0\leqq\nu\leqq n$ egész számra ha kiválasztunk olyan $\varphi_k(x)$ sorozatot, melyre, $\varphi_k^{(\nu)}\to 0$, akkor $T\cdot\varphi_k\to 0$, ahol $\varphi_k\in D_{[a,b]}$ ($[a, b]$ zárt intervallum, melyben T adott).

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy állításunk nem igaz. Ez azt jelenti, hogy van olyan T_0 disztribúció, melyhez nem lehet az állításban közölt tulajdonságú természetes egész számot találni. De akkor lennie kell olyan $\{\varphi_{n,k}(x)\}$ $D_{[a,b]}$-beli függvénysorozatoknak, melyekre

$$\varphi_{n,k}^{(\nu)}(x) \to 0 \quad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, 3, \ldots, \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

egyenletesen $[a, b]$-ben és

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} T_0 \cdot \varphi_{n,k} \geqq \delta > 0.$$

E függvényekből válasszuk ki a $\tilde{\varphi}_k(x) = \varphi_{k,k}(x)$ függvénysorozatot, mely azzal a tulajdonsággal bír, hogy

$$\tilde{\varphi}_k^{(n)} \to 0$$

minden n és k mellett. Ennek viszont van olyan részsorozata (átindexelés után ezt is $\tilde{\varphi}_k$-val jelöljük), hogy $T_0 \cdot \tilde{\varphi}_k \geqq \delta > 0$ legyen. Ez viszont ellentmondásban van T_0-nak D-beli folytonosságával. Ez az ellentmondás igazolja az állítást.

b) Az *a)* állításból következik, hogy T-hez és $[a, b]$-hez van olyan n szám, hogy ha

$$\varphi_k^{(n)} \to 0$$

egyenletesen $[a, b]$-ben, akkor ebből már

$$T \cdot \varphi_k \to 0$$

következik. Legyen ugyanis $\nu < n$, akkor, mint ismert

$$\varphi^{(\nu)}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\nu-1}}{(n-\nu-1)!} \varphi^{(n)}(t) x \, dt.$$

Ebből viszont

$$|\varphi^{(\nu)}(x)| \leqq K \max_{t\in[a,\,b]} |\varphi^{(n)}(t)|,$$

ahol k csakis n-től függ. Ha tehát $\varphi_k^{(n)} \to 0$ egyenletesen $[a, b]$-ben, akkor $\varphi_k^{(\nu)}(x)$ is egyenletesen tart ν-höz. De akkor *a)* állítás alapján az állításunk be van bizonyítva.

c) Ha $\varphi \in D_{[a,b]}$, akkor előbbi n-el

$$|T \cdot \varphi| < A_p \max_{t\in[a,\,b]} |\varphi^{(n)}(t)|.$$

Ennek az állításnak igazolása indirekt módon történik. Az állítás ellenkezője azt jelenti, hogy van olyan T_0 és $\varphi_k \in D_{[a,b]}$ függvénysorozat, hogy

$$|T_0 \cdot \varphi_k| \geqq k \max_{t \in [a,\, b]} |\varphi_k^{(n)}(t)|.$$

Képezzük ebből a

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{k \max\limits_{t \in [a,\, b]} |\varphi_k^{(n)}(t)|} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

függvénysorozatot. Nyilván $\psi_k(x) \in D_{[a,\,b]}$ és

$$|T_0 \cdot \psi_k| \geqq 1. \tag{26}$$

Másrészt

$$|\psi_k^{(n)}(x)| < \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

vagyis $\psi_k^{(n)}(x) \to 0$ egyenletesen $[a, b]$-ben, így *b)* alapján $T \cdot \psi_k \to 0$, ellentétben (26)-al.

d) Az előbbiekben T és $[a, b]$-hez tartozó n számot tartsuk rögzítve és képezzük a $\varphi^{(n)}(x)$ függvényekből álló függvényteret, ahol $\varphi \in D_{[a,b]}$. E lineáris függvényteret jelöljük $D^{(n)}_{[a,\,b]}$-vel. Vezessünk be e függvénytéren egy normát:

$$||\varphi^{(n)}|| = \max_{t \in [a,\, b]} |\varphi^{(n)}(t)|.$$

E tér ezen kívül teljes is.($D^{(n)}_{[a,\,b]}$ tehát Banach-tér). E tér függvényein definiáljuk az L lineáris funkcionált a következő módon

$$L \cdot \varphi^{(n)} = T \cdot \varphi.$$

c) értelmében az L lineáris funkcionál korlátos is, mert

$$|L \cdot \varphi^{(n)}| = |T \cdot \varphi| \leqq A_n \max_{t \in [a,\, b]} |\varphi^{(n)}(t)|.$$

Ebből következik, hogy L folytonos is. De akkor a Hahn—Banach-tétel értelmében [20. 116. old.] L értelmezése kiterjeszthető az $[a, b]$-ben folytonos függvények terére, anélkül, hogy L normája növekednék. Erre a kiterjesztett funkcionálra alkalmazzuk a Riesz-féle reprezentációs tételt, [20. 110. old.]. Eszerint létezik $[a, b]$-ben definiált korlátos variációjú $f(x)$ függvény úgy, hogy

$$L \cdot \varphi^{(n)} = \int_a^b \varphi^{(n)}(x)\, df(x)$$

legyen, továbbá $f(x)$ teljes variációja ne legyen nagyobb A_n-nél. De akkor

$$T\cdot\varphi = L\cdot\varphi^{(n)} = \int_a^b \varphi^{(n)}(x)\, df(x) = (-1)^{n+1} \int_a^b f(x)\varphi^{(n+1)}(x)\, dx,$$

ami nem jelent egyebet mint azt, hogy T az $f(x)$ függvénynek $(n+1)$-ik d-deriváltja.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ha a T valamely véges vagy végtelen nyílt intervallumban adott disztribúció, akkor nem feltétlenül véges rendű.

Tekintsük például a

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(k)}$$

disztribúciót R_1-en. Ha $\varphi \in D$, akkor $T\cdot\varphi$ kifejezése mindig csak véges sok tagot tartalmaz. Ha $[a, b]$ tetszőleges intervallum, akkor ezen T rendje az a legnagyobb n pozitív egész, melyre $n \leqq b$ érvényes. De ha $b \to \infty$, akkor n is $\to \infty$. Vagyis T az R_1-en nem véges rendű. Ezzel szemben $(-\infty, b]$ nyílt tartományban T már véges rendű.

Könnyű példát konstruálni véges, nyílt tartományban definiált nem véges rendű disztribúcióra is.

Mint már a bevezetésben említettük, a disztribúciónak sokféle definíciója létezik. Nagyrészük az alaptétel állításából indul ki, vagyis abból, hogy zárt tartományban a disztribució egy folytonos függvény n-ik formális deriváltja és ezek alapján definiáljuk a disztribúciókat. Ezek ismertetése e dolgozat következő részének tárgya.

Alapvető fogalmak és definíciók jegyzéke

Affin transzformáció
Alaptétel
Centrálszimmetrikus disztribúció
C′-tér
D-függvény
D′-tér
δ
Differenciálhányados
d-differenciálhányados
Dirac-δ
Disztribúció Szoboljev–Schwartz-féle definíciója
Hadamard-féle „véges rész”
Halmazra koncentrált disztribúció
Heaviside-féle függvény
Homogén disztribúció
Lényeges pont
Periodikus disztribúció
Pf. $\int$
Reguláris disztribúció

Skaláris szorzat
Szinguláris disztribúció
Tartó
Transzláció
Tükrözés

IRODALOMJEGYZÉK

[1] S. Soboljev: Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales. Mat. Szbornyik. l. 1936. 39—71. old.
[2] L. Schwartz: Théorie des distributions. Paris. I. 1950. II. 1951.
[3] J. Korevaar: Distributions defined from the point of view of applied Mathematics. Indagationes Mathematicae. 17. 1955. I. rész: 368—378. old. II. rész: 379—389. old. III. rész: 483—493. old. IV. rész: 494—503. old.
[4] J. Mikusiński—R. Sikorski: The elementary theory of distributions. Warsawa 1957.
[5] H. König: Neue Begründung der Theorie der „Distributionen" von L. Schwartz. Math. Nachrichten. 9. 1953. 130—148. old.
[6] R. Sikorski: A definition of the Notion of Distribution. Bull. de l'Akad. Polon. Cl. III. 2. 1954. 209—211. old.
[7] J. Mikusiński: Operátorszámítás. Budapest 1961.
[8] Lighthill: An introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions. 1958.
[9] V. Volterra: Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione. Atti. Lincei. V. 11. kötet 1916.
[10] St. Fenyő: Über den Zusammenhang zwischen den Distributionen und Operatoren. Math. Nachrichten. 19. 1958. 161—164. old.
[11] J. Wloka: Distributionen und Operatoren. Math. Am. 140. 1960. 227—244. old.
[12] J, Mikusiński: Distributions à valeurs dans les réunious d'espaces de Banach. Studia. Math. 19. 1960. 251—285. old.
[13] F. Péllegrino: La théorie des fonctionnelles analitiques et ses applications. Paris. 1951.
[14] L. Fantappié: Le funzionali lineari analitiche e le loro singolarita. Rend. Lencei. I. 1925.
[15] J. S. Silva: Sull' analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche. Rend. Lincei. I. 1946.
[16] Fenyő I.: A disztribúció-elmélet alapjai. MTA; Mat. Fiz. Oszt. Közleményei. 6. 1956. 231—248. old.
[17] F. Riesz: Sur les opérations fonctionnelles linéaires. C. R. 149. 1909. 974—976. old.
[18] S. Łojasewicz: Sur la fixation des variables dans une distribution. Studia Math. 17. 1958. 1—64. old.
[19] J. Hadamard: Le probleme de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Paris. 1902.
[20] F. Riesz—B. Sz. Nagy: Lecons d'Analyse Fonctionnelle. Budapest. 1952.
[21] J. Halperin: Introduction to the Theory of Distributions Toronto. 1952.
[22] M. A. Lavrentyev—L. A. Ljuszternik: Variációszámítás. Budapest. 1953.
[23] I. M. Gelfand—G. E. Schilow: Verallgemerte Funktionen (Distributionen). Bd. I. Berlin. 1960.

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, ОПЕРАТОРЫ I.

И. Феньё

ON DISTRIBUTIONS I.

I. Fenyő

Incidenciageometria

KÁRTESZI FERENC

A projektív síkgeometria megalapozására szolgáló axiómarendszerek vizsgálata a legutóbbi három évtized folyamán oly gazdag és terjedelmes irodalmat hozott létre, amelyet ma már nehéz áttekinteni. Egy új, érdekes tárgykör bontakozott ki, az incidenciageometria. — Joggal vonja kétségbe nem egy geométer, hogy indokolt-e ezt a tárgykört a geometriához sorolnunk. — Izgató, még megoldásra váró, kisebb-nagyobb problémák bőven akadnak ebben a tárgykörben. Megkísérlem a tárgyban nem otthonos olvasót rövid úton bevezetni az incidenciageometriába, legalábbis olyan fokig, hogy különösebb előtanulmány nékül képes legyen az e tárgykörbe vágó legújabb dolgozatokat elolvasni.

1. A projektív sík fogalmának fokozatos általánosítása

Az euklideszi síkot röviden **E** *síknak* fogjuk nevezni. Ha az **E** síkot a végtelen távoli pontokkal és az őket tartalmazó végtelen távoli egyenessel bővítjük, akkor a projektív sík — történeti sorrendben első — modelljét nyerjük. Ezt a síkot röviden **PE** síknak fogjuk nevezni. Ismeretes, hogy ezen a síkon érvényesek a következő tételek:

I(1): *Bármely két ponthoz van egy, de csak egy egyenes, mely mindkét ponthoz egyaránt illeszkedik.*

I(2): *Bármely két egyeneshez van (legalább) egy pont, mely mindkét egyeneshez egyaránt illeszkedik.*

I(3): *Létezik négy olyan pont, hogy azok páronként* — az *I*(1) értelmében — *hat különböző egyenest határoznak meg.*

Ismeretes az is, hogy a **PE** síkon érvényes a — két háromszögre vonatkozó — Desargues-féle tétel, továbbá a — hármasával két egyenesen elhelyezkedő hat pontra vonatkozó — Pascal-féle tétel is. A következőkben ezeket röviden *D*-tételnek és *P*-tételnek fogjuk nevezni (sőt még rövidebben csak *D*- és *P*-nek).

Már HILBERT elintézte azt a kérdést, hogy az $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$, D, P tételekből mint axiómákból — röviden az IDP axiómarendszerből — miféle projektív síkgeometria vezethető le. Megmutatta, hogy a szegényebb ID axiómarendszerből a P mint tétel nem következik; HESSENBERG pedig azt mutatta meg, hogy az IP axiómarendszerből a D mint tétel levezethető. Tehát az IDP axiómarendszer az IP axiómarendszerrel ekvivalens. Az IP axiómarendszernek megfelelő síkot **P** *síknak* fogjuk mondani; az általánosabb ID axiómarendszernek megfelelő síkot pedig **D** *síknak*.

HILBERT azt is megmutatta, hogy a pont- és vonalkoordináták (homogén koordináták) bevezetése már az ID axiómarendszer alapján is megvalósítható, persze a koordináta-fogalom némi általánosítása árán. A **D** síkra ilyen módon olyan analitikus geometriát kapott, mely a **PE** sík homogén koordinátákkal dolgozó analitikus geometriájától csupán abban különbözik, hogy a koordináták szorzata nem okvetlenül kommutatív. (A P-tétel érvényessége azzal a kikötéssel ekvivalens, hogy a koordináták szorzata is kommutatív legyen). ([6].)

A **D** sík koordinátarendszerét a következő ötlet alapján vezeti be. A D sík bármely l egyenesét tekintve, annak egy V pontját töröljük. Kitüntetünk az egyenes megmaradó pontjai közül kettőt, a zéruspontot és az egységpontot. Nevezzük őket O- és E-nek. Legyen X és Y az egyenes két tetszőleges — a V ponttól különböző, de egymástól nem okvetlenül különböző — pontja. HILBERT két szerkesztést definiál, amelyek egyike az O, V, X, Y, a másik az O, E, V, X, Y pontok felhasználásával az X (első) és Y (második) ponthoz egy-egy egyértelműen meghatározott pontot rendel; az elsőt $X+Y$ *pontnak*, a másodikat $X \cdot Y$ *pontnak* nevezi. — A mondott szerkesztések a „két pont összekötő egyenese" és a „két egyenes metszéspontja" előállításának mint a szerkesztés megengedett lépéseinek a **D** síkon való véges számú kombinációiból állnak. — Az ID axiómarendszerből levezethető, hogy a *Hilbert-féle pontösszeadás és pontszorzás a maradék pontok halmazában a ferdetestet jellemző axiómáknak megfelel.*

A Hilbert-féle eljárás úgy rendel homogén koordinátahármast mind a ponthoz, mind az egyeneshez a **D** síkon, hogy a koordináták egy — közelebbről meg nem határozott — ferdetestet alkotnak, mint annak elemei, az ún. koordinátatestet, s jelölje ezt **K**. Az (x_1, x_2, x_3) és $[u_1, u_2, u_3]$ koordinátahármasok definiálta pont és egyenes illeszkedése az

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

egyenlőséggel ekvivalens. — Ebből általában még nem következik az

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$$

érvényessége.

Hogyha pedig egy tetszőleges **K** ferdetestből indulunk ki, annak alapján egy **D** síkot értelmezhetünk. Ponton és egyenesen egyaránt a **K** elemeiből alkotott elemhármast értünk, s bármely — (0, 0, 0)-tól különböző — elemhármas akár pontnak, akár egyenesnek tekinthető. Egyenesre az $[u_1, u_2, u_3]$, pontra az (x_1, x_2, x_3) jelölésmóddal utalunk. Az $[u_1, u_2, u_3]$ és $[v_1, v_2, v_3]$ egyenes aszerint azonos vagy különböző, hogy van-e vagy nincs olyan 0-tól különböző ϱ eleme a **K**-nak, amelyre nézve

$$v_1 = \varrho u_1, \quad v_2 = \varrho u_2, \quad v_3 = \varrho u_3.$$

Az (x_1, x_2, x_3) és (y_1, y_2, y_3) pontokra nézve hasonlóképpen egy $0 \neq \sigma \in \mathbf{K}$ elemmel definiáljuk az azonosságot, de a másik oldali szorzással:

$$y_1 = x_1\sigma, \quad y_2 = x_2\sigma, \quad y_3 = x_3\sigma.$$

Az $[u]$ egyenes és az (x) pont illeszkedésén vagy nem illeszkedésén azt értjük, hogy az

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

fennáll vagy nem. Könnyen igazolható, hogy ez az aritmetikai modell az *ID* axiómarendszernek mind a négy axiómáját teljesíti; továbbá könnyen igazolható az is, hogy ezen a síkon a Hilbert-féle eljárással úgy vezethetünk be homogén pont- és vonalkoordinátákat, hogy a sík koordinátateste az aritmetikai modell létesítéséhez szolgáló **K**-val egyezzék meg.

Eszerint minden egyes **K** ferdetestnek megfelel egy-egy **D** sík. A speciális **D** síkok közül különös érdeklődést váltottak ki azok, melyeknek koordinátateste Galois-test. Ezek a síkok — az ún. *Galois-síkok*, röviden **G** síkok — *véges számú pontból és egyenesből állnak*. A **G** síkon mindig érvényes a *P*-tétel is; tehát tulajdonképpen a **D** sík speciális fajtájának, a **P** síknak is speciális fajtája a **G** sík. Ha két **D** sík pontjai közt, valamint egyenesei közt olyan egy-egyértelmű megfelelkezést létesíthetünk, hogy az egyik sík egymáshoz illeszkedő (vagy nem-illeszkedő) pont-egyenes párjának a másik síkon ugyancsak illeszkedő (illetve nem-illeszkedő) pont-egyenes pár felel meg, akkor az egyik sík a másikkal *izomorf*. Izomorf síkok koordinátatestei közt is izomorfia áll fenn és viszont. A Galois-test elemeinek száma prímszámhatvány, $n = p^h$, ezért célszerű $\mathbf{G}(p^h)$-val jelölni. A $\mathbf{GF}(p^h)$ koordinátatest definiálta **G** síkot *n-edrendűnek* mondjuk. Az *n*-edrendű **G** sík pontjainak és egyeneseinek a száma egyaránt $N = n^2 + n + 1$; az egy pontjához illeszkedő egyenesek és az egy egyeneséhez illeszkedő pontok száma egyaránt $n + 1$. Mindezekből világos, hogyha az izomorf síkok közt nem teszünk különbséget, akkor a **G** sík rendje egyértelműen meg-

határozza a **G** síkot. Ezek szerint a **G** síkok elmélete a konfigurációk elméletébe torkollik, vagyis a kombinatorika egy témakörébe. ([13].)

Tekintsünk ugyanis két véges halmazt, s álljon az egyik l, a másik m elemből. Mindkét halmazból ragadjunk ki egy-egy tetszőleges elemet. Minden ilyen két elem közt egy szimmetrikus R reláció van definiálva, mely vagy fennáll, vagy nem. Ha az első halmaz minden egyes eleme a másiknak pontosan μ számú elemével, s a másik halmaz minden egyes eleme az elsőnek pontosan λ számú elemével van R relációban, akkor a két halmaz az R kapcsolatra nézve egy

$$\{l_\mu, m_\lambda\}$$

típusú konfigurációt alkot. Nyilvánvaló, hogy

$$l\mu - m\lambda = 0.$$

Ha most a **G** sík pontjainak a halmaza és egyeneseinek a halmaza veszi fel a mondott halmazok szerepét, az R reláció pedig az incidenciát (illeszkedést) jelenti, akkor a **G** sík egy

$$\{N_{n+1}, N_{n+1}\}$$

típusú (szimmetrikus) konfiguráció.

A **G** síkok geometriája (más néven GALOIS geometria) az utóbbi években sok szerzőt foglalkoztatott és szoros kapcsolatba került a matematikai statisztikával, továbbá az információelmélettel. ([14], [16].)

Mégy egy fogalmat említünk a **G** síkkal kapcsolatban, a faktorsík fogalmát. Ha egy **G** síkból úgy törölhetünk pontokat és egyeneseket, hogy a megmaradó pontok és egyenesek összességére nézve teljesülnek az $I(1), I(2), I(3)$ axiómák — a maradék elemek illeszkedésén, vagy nem-illeszkedésén az eredeti **G** síkon való ilyen kapcsolatuk értendő — akkor ezt az összességet a **G** *sík faktorsíkjának* nevezzük. Pl. a **GF**(4) Galois-testre mint koordinátatestre vonatkozó **G** síknak van olyan faktorsíkja, mely maga is **G** sík, mégpedig a **GF**(2) Galois-test definiálta **G** síkkal izomorf.

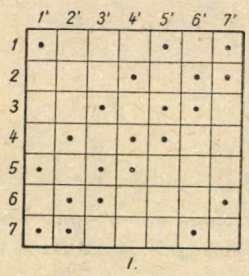
A GALOIS geometria fejlődése tulajdonképpen a jelen század elején vette kezdetét. ([13], [14].)

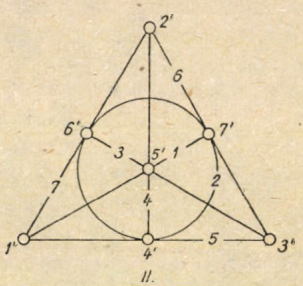
2. *Az incidenciageometria kialakulása*

Korán felmerült az a természetes kérdés, hogy a D-tétel vajon nem következik-e az I axiómarendszerből. (Már PEANO is és HILBERT is megállapították, hogy nem, vagyis D az I-től független.) MOULTON egy szellemes és szemléletes modell segítségével bizonyította be, hogy D az I-től független. FANO pedig megmutatta, hogy az I axiómarendszer még annak a — **PE** síkon triviális — tételnek a levezetéséhez se elégsé-

ges, amely szerint „*a teljes négyszög átlóspontjai nem esnek egy egyenesbe*", (ezt a tételt röviden csak *F*-tételnek fogjuk mondani).

Azt, hogy *I*-ből az *F* nem vezethető le — FANO nyomán — egy tanulságos modell segítségével igazoljuk. (1. ábra, I. rész.) Előbb az *incidencia táblázatot* definiáljuk:





I. ábra

Egy *m* sorú *n* oszlopú táblázat *sorait egyeneseknek*, *oszlopait pontoknak* tekintjük; a *j*-vel jelölt egyenes és *k'*-vel jelölt pont *illeszkedő* vagy *nem-illeszkedő* viszonyát az fejezi ki, hogy a táblázat *j*-vel jelölt sora és *k'*-vel jelölt oszlopa kereszteződési mezejét pontozással megjelöljük, illetve üresen hagyjuk. (Ilyen pl. az 1. ábra I. fele.)

Gyorsan ellenőrizhető, hogy az ábrán szereplő 7×7 mezős incidencia táblázat az $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$ axiómák mindegyikének eleget tesz, tehát egy modell az *I* axiómarendszerhez. Ezen az *F* tétel nem érvényes, mert például az $1'\,2'\,3'\,4'$ teljesnégyszögnek $4'$, $6'$, 7. az átlóspontjai, s ezek egy egyenesbe esnek (a 2 egyeneshez illeszkedik mind a három).

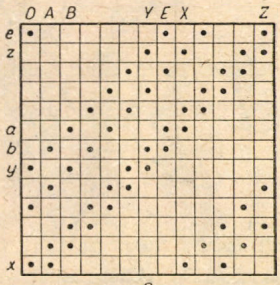
Az ábra II. fele a táblázattal izomorf modell.

Könnyen bebizonyítható, hogy a legkisebb incidencia táblázat, mely az *I*-nek eleget tesz, 7×7 mezőből áll. Több ilyen minimális modell szerkeszthető, a mezők pontozása más-más mintát szolgáltat. Ezek bármelyikét azonban — a sorok, valamint az oszlopok megfelelő permutálásával — az ábrán adott alakra lehet átrendezni. (Izomorf táblázatok.)

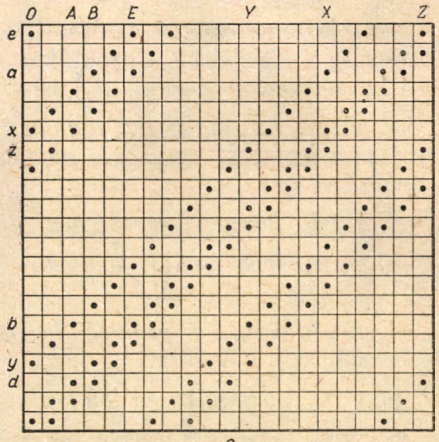
E minimális modell ismeretében triviálissá válik az, hogy *a D-tétel az I axiómarendszertől független.* Hiszen a modell létezése mutatja, *I*-ből még az se következik, hogy a síknak 7-nél több pontja és 7-nél több egyenese van. Márpedig a *D*-tétel 10 egyenes és 10 pont helyzetviszonyáról szól.

Tekintsük most az olyan incidencia táblázatokat, melyek az $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$ axiómákat kielégítik. Így azt találjuk, hogy ha megkíséreljük a mondott tulajdonságú incidencia táblázatokat nagyság szerint elren-

dezni, kezdetben — noha nem könnyű feladat — magvasabb probléma nem is merül fel. Rendre 13×13, 21×21, 31×31, 57×57, 73×73 nagyságú táblázatok adódnak. Ezek — ha az izomorf táblázatok közt nem teszünk különbséget — egyenként csak egyfélék, mégpedig rendre a **GF**(3), **GF**(4), **GF**(5), **GF**(7), **GF**(8) Galois-test mint koordinátatest definiálta **G** sík incidencia táblázatai. Éppen ezért e felsorolt táblázatok az *I* axiómarendszert kielégítő olyan modellek, amelyekre nézve a *D*-tétel is érvényes. Az első kettőt, a 13×13 és a 21×21 típusút közöljük is:



G_{13}

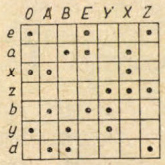


G_{21}

Megjegyezzük, hogy a $\mathbf{G}_{13}$ modellen az *F*-tétel is érvényes, viszont a $\mathbf{G}_{21}$ modellen nem érvényes.

Gleason 1956-ben bebizonyította, hogy *I-ből és abból a követelményből, hogy minden teljes négyszög átlóspontjai egy egyenesbe essenek, feltéve még azt is, hogy a síknak véges számú pontja és egyenese van, a D-tétel levezethető.*

A $\mathbf{G}_{21}$ modellen az *OAEB* teljesnégyszög átlóspontjai az *X*, *Y*, *Z* pontok; e pontok mindegyike illeszkedik a *z* egyeneshez. Ha a szóban forgó incidencia táblázat meg nem betűzött sorait és oszlopait töröljük, előáll a következő maradék táblázat:



Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez az incidencia táblázat az *I* mindhárom axiómájának eleget tesz. Következésképpen az 1. ábrán közölt táblázattal izomorf. Így példát láttunk a faktorsíkra.

Természetes módon kínálkozik a sík további általánosításának igénye. Tekintsük a pontoknak és egyeneseknek nevezett elemek halmazát, melyekből alkotott minden pont-egyenespárra nézve ismeretes, hogy egy bizonyos illeszkedésnek nevezett reláció fennáll vagy nem. Hogyha e halmazban az *I* teljesül, akkor e pontok és egyenesek egy **I** *síkot* alkotnak.

Az *I* axiómarendszer axiómáit rendre *az összekötés*, *a metszés* és a *négyszög axiómájának* is szokták nevezni. Ezeknek könnyen levezethető következményeit most itt felsoroljuk:

1. TÉTEL. *Az I*(1) *és I*(2) *alapján következik, hogy két* (különböző) *egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van. — Tehát az I*(1) állításnak a duálisa is igaz.

2. TÉTEL. *Bármely egyeneshez legalább három pont illeszkedik.*

3. TÉTEL. *Igaz az I*(3) *duálisa.* — A teljesnégyoldal és hat szögpontjának létezéséről szól.

4. TÉTEL. *Bármely ponthoz legalább három egyenes illeszkedik.* — Ez a 2.-nek a duálisa.

5. TÉTEL. *A síknak legalább hat pontja és legalább hat egyenese van.*

6. TÉTEL. *Akár két pontsor, akár két sugársor, akár egy pontsor és egy sugársor elemei közt egy-egyértelmű megfelelkezés létesíthető.*

7. TÉTEL. *A sík pontjai és egyenesei közt egy-egyértelmű megfelelkezés létesíthető.*

Most pedig a lehetséges **I** síkok valamilyen áttekintésére törekedve, természetesnek tűnik, hogy az egyeneshez illeszkedő pontok számosságát vegyük alapul.

Ilyen módon a *véges* **I** *síkok*, röviden véges síkok, vagyis azok, melyekre nézve az *I* axiómák mellett még a következő, *V* axióma is teljesül, különös nyomatékot kapnak.

V axióma: a sík valamelyik egyeneséhez pontosan $n+1$ *pont illeszkedik és n egy természetes szám és* $n \geqq 2$.

Az *I* (1), *I* (2), *I* (3), *V* axiómarendszert kielégítő sikot *n-edrendű véges síknak* fogjuk nevezni, röviden csak $\mathbf{S}^{(n)}$-nek.

Az 5. és 6. tétel alapján nyilvánvaló a következő tétel:

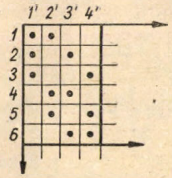
Az n-edrendű véges sík bármely pontjához illeszkedő egyenesek száma és bármely egyeneséhez illeszkedő pontok száma egyaránt $n+1$; *e sík pontjainak száma és egyeneseinek a száma egyaránt* $N = n^2+n+1$.

A véges síkok incidenciageometriája bővelkedik a megoldatlan, súlyos problémákban, éppen ezért számos matematikust foglalkoztat. (Pl. [2], [3], [5], [7], [8], [9], [10], [12].)

3. *A Hall-féle szabad sík*

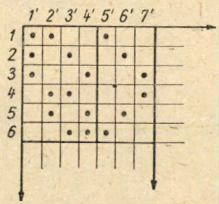
M. HALL 1943-ban a nem véges **I** síkra egy igen tanulságos modellt konstruált, az ún. *szabad síkot*. A következőkben ennek egyszerű ismertetését adjuk. ([2].)

Az **I** axiómarendszernek csak az utolsó axiómája fejez ki egzisztenciát, mégpedig közvetlenül 4 pont és 6 egyenes létezését. Ha az **I** sík elemeinek megszámozását ezeken a pontokon és egyeneseken kezdjük, akkor elérhetjük azt, hogy e sík incidencia táblázatának az első 6 sorából és első 4 oszlopából álló része a következő:



Világos, hogy ez a rész nem realizál **I** síkot, mert az 1 és 6 nevű egyeneseknek nincs közös pontja, hiszen nincs olyan oszlop, mely mind az első, mind a hatodik sort egyaránt pontozott mezőben keresztezi. Viszont bármely két oszlopot pontosan egy-egy sor a hat közül egyaránt pontozott mezőben keresztez; ez pedig azt jelenti, hogy a résztáblázat nemcsak az $I(3)$, hanem az $I(1)$ axiómának is megfelel.

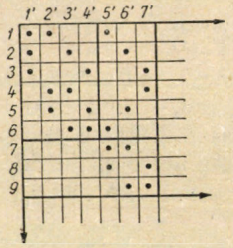
Most ezt a táblázatot annyi új oszloppal bővítjük, ahány még egymást nem metsző egyenespárt reprezentáló sorpár van. Azután az új oszlopoknak rendre azt a két mezejét pontozzuk, melyben az őt létesítő sorpárt az új oszlop keresztezi. Ilyen sorpárok az 1,6; 2,5; 3,4. Ezek miatt vezetjük be rendre az 5', 6', 7' oszlopokat. Ezeket megpontozzuk, mégpedig ott, ahol őket rendre az 1 és 6; 2 és 5; 3 és 4 sor keresztezi. Az így kapott bővebb incidencia táblázat a következő:



Az triviális, hogy ez a bővített táblázat kielégíti az $I(3)$ axiómát. Kielégíti továbbá az $I(2)$ axiómát is, hiszen a bővítést éppen evégett eszközöltük.

Azonban éppen a bővítés következtében az $I(1)$ érvényét vesztette; például az $5'$, $6'$ oszlopok mindkettejét pontozott mezőben keresztező sor nincs.

Most pedig — az oszlopokkal való bővítés mintájára — annyi új sorral bővítjük a táblázatot, ahány olyan oszloppár van, melyhez eddig nem volt mindkét oszlopát pontozott mezőben metsző sor. Így a következő bővített incidencia táblázat áll elő:

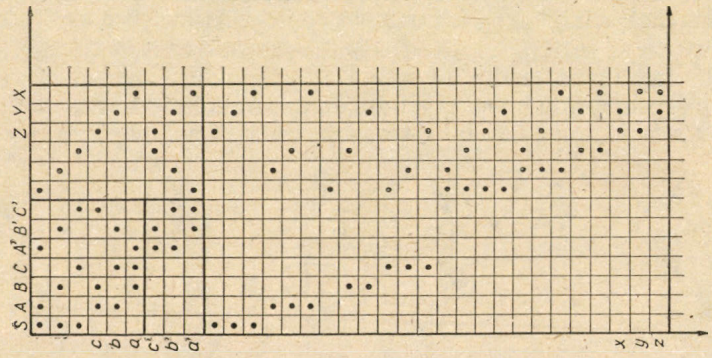


Ez a táblázat kielégíti az $I(1)$, $I(3)$ axiómarendszert, de nem elégíti ki az $I(2)$-t.

Ez a váltakozva oszlopokkal-sorokkal való bővítési processzus egyértelműen és ad infinitum folytatható. — Ez következik abból, hogy a bővítésül szolgáló új sorban vagy oszlopban csak két pontozott mező lép fel. — Az egyre bővebb táblázatok váltakozva, hol az $I(1)$, $I(3)$, hol az $I(2)$, $I(3)$ axiómarendszernek tesznek eleget. Tekintsük most az eredeti 6×4-es táblázatnak és az egymás utáni bővítményeknek az egyesített halmazát, az ún. **H** síkot. Az így definiált **H** — Hall-féle szabad sík — az $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$ axiómák mindegyikének eleget tesz.

A **H** *síkon a D-tétel nem érvényes.*

Ez a tétel könnyen belátható, ha a szukcesszív bővítés során az első 33 sort és első 13 oszlopot kialakítjuk*:



* Az ábra nyomdatechnikai okokból fektetve van; továbbá a C és A' közötti egyenes hat egység hosszúságban vastag.

közvetlenül megállapítható, hogy az ABC és $A'B'C.$ háromszögek az S centrumra nézve perspektívek. Mégis az áll fenn, hogy a megfelelő oldalpárok létesítette $BC \cdot B'C' = X$, $CA \cdot C'A' = Y$, $AB \cdot A'B' = Z$ metszéspontok nem esnek egy egyenesbe, hanem páronként három különböző egyenes köti őket össze: x, y, z.

Újabban LOMBARDO—RADICE (1955), majd az ő nyomán mások is az incidenciageometria bizonyos záródási problémáinak tisztázását a **H** sík segítségével intézték el. ([7].)

4. *A kombinatorika módszereinek alkalmazása*

Az incidenciageometria az algebra és a kombinatorika módszereit mélyen kiaknázza. Az algebrai módszer HILBERT kutatásaiban alakul ki. Főként a **D** síkok, a **P** síkok és a **G** síkok struktúrájának vizsgálatában bizonyult hasznosnak. Az $\mathbf{S}^{(n)}$ síkok struktúrájának vizsgálata pedig a kombinatorikai módszerek előtérbe nyomulásának köszönhet sokat.

A kombinatorika módszerei alkalmazásának ismertetése előtt néhány, a kombinatorika körébe vágó fogalmat említünk.

Tekintsük a $0, 1, 2, \ldots, n-1$ elemek összes permutációit. Ragadjunk ki ezek közül n különböző példányt, s írjuk őket egymás alá. Ilyen módon egy n-sorú és n-oszlopú számtáblázat áll elő. Hogyha olyan ez a számtáblázat, hogy az oszlopai is mindannyian a $0, 1, 2, \ldots, n-1$ elemek permutációi, akkor *latin négyzetnek* nevezik.

Ha valamely n-edrendű csoport elemeit a $0, 1, 2, \ldots, n-1$ számokkal nevezzük meg, és a 0-t használjuk az egységelem megnevezésére, akkor a csoport Cayley-féle táblázata éppen egy latin négyzet.

Tekintsünk két latin négyzetet — mondjuk a következő I és II. példát:

I.

0	1	2
1	2	0
2	0	1

A

2	1	0
1	0	2
0	2	1

B

II.

2	1	0
1	0	2
0	2	1

A

2	0	1
1	2	0
0	1	2

B

Mind az I, mind a II példa esetében rendeljünk hozzá az **A**, **B** párhoz egy ugyancsak 3×3-as táblázatot, melynek minden mezejében számpár álljon, mégpedig úgy, hogy egy ilyen számpár első elemét az **A**, a másodikat a **B** megfelelő mezejében álló szám szolgáltassa:

I.

02	11	20
11	20	02
20	02	11

II.

22	10	01
11	02	20
00	21	12

A két leszármaztatott táblázat lényegesen különböző tulajdonsága a következő.

A 0, 1, 2 elemek összes másodosztályú ismétléses variációi megtalálhatók a II. táblázatban, az I-ben azonban nem mindegyik. A leírt származtatási móddal nyert számpáros táblázat ama esetében, ha abban az eredeti táblázatpárhoz használt $0, 1, 2, \ldots, n-1$ elemek *összes másodosztályú ismétléses variációi* fellépnek, azt mondjuk, hogy az eredeti **A**, **B** *latin négyzetek ortogonális párt alkotnak.*

EULER már 1782-ben bebizonyította, hogy ha a 6×6 típusú latin négyzetek összességét tekintjük, azokból ortogonális pár nem alkotható.

Könnyen igazolható, hogy az $n\times n$ típusú latin négyzetek összességéből ortogonális pár mindig kiválasztható, ha $n=3, 4, 5, 7, 8$.

Annak, hogy n-edrendű ortogonális latin négyzet pár létezzék, midőn

$$n\equiv 1, 2 \pmod 4,$$

szükséges feltétele az, hogy n legyen két egész szám négyzetének összegeként előállítható.

Tekintsük most a $0, 1, 2, \ldots, n-1$ elemekből alkotott n-edrendű latin négyzetek olyan

$$\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{A}^{(m)} \qquad (m<n)$$

sorozatát, melyben bármelyik elem bármelyik utána következővel ortogonális párt alkot. Az ilyen sorozatot *ortogonális rendszernek* nevezzük.

A definíció szerint $m\leqq n-1$; ismeretes, hogy $m = n-1$ előfordul, s ebben az esetben *teljes* ortogonális rendszerről beszélünk.

Az $\mathbf{A}^{(l)}$ latin négyzet j-edik sorának k-adik elemét jelölje $a_{jk}^{(l)}$. Legyen p egy tetszőleges páratlan törzsszám, továbbá $n=p$. Ismeretes, hogy ebben az esetben létezik az n-edrendű latin négyzetek egy teljes ortogonális rendszere. Könnyű belátni, hogy ilyen a következő konstrukcióval adódik:

Legyen az $a_{jk}^{(l)}$ elem a $j+kl$ szám $n=p$ törzsszámra mint osztóra vonatkozó maradéka.

Egy más konkrét példa — midőn $n=4$ — a következő:

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

$= \underline{\underline{A}}^{(1)}$,

1	3	4	2
2	4	3	1
3	1	2	4
4	2	1	3

$= \underline{\underline{A}}^{(2)}$,

1	4	2	3
2	3	1	4
3	2	4	1
4	1	3	2

$= \underline{\underline{A}}^{(3)}$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez is teljes ortogonális rendszer.

Most pedig az n-edrendű latin négyzetek teljes ortogonális rendszere és az $S^{(n)}$ sík kapcsolatát ismertetjük.

Az $S^{(n)}$ sík egy tetszőleges u egyenesén $n+1$ pont van. Nevezzük el ezeket rendre $X, Y, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n-1)}$ pontoknak. E pontok mindegyikéhez egyenként n számú, az u egyenestől különböző, tehát összesen $(n+1)n$ egyenes megy át. A mondott $n+1$ számú egyenes -n-esek közül ragadjuk ki az X ponthoz és az Y ponthoz illeszkedőket, s nevezzük el — valamely tetszőleges rendben — az előbbieket *sorvonalaknak*, az utóbbiakat *oszlopvonalaknak*, továbbá a j indexű sorvonal és l indexű oszlopvonal metszéspontját (j, k) *rácspontnak*. A rácspontok halmaza n^2 rácspontból áll, és az u egyeneshez tartozó *pontrácsnak* nevezzük. Az u-tól, a sorvonalaktól és az oszlopvonalaktól különböző — $(n-1)n$ számú — egyeneseket *diagonálisvonalaknak* nevezzük. Minden egyes diagonálisvonalhoz n számú rácspont (és természetesen egy A pont is) illeszkedik. A diagonális vonalak az A pontok szerint egybefoglalva *diagonálissorokat* alkotnak. A diagonálissorok száma $n-1$, megnevezésükre a megfelelő $A^{(l)}$ sorozópont szolgál.

Legyen egy az $A^{(l)}$-hez tartozó **r**-rel megnevezett diagonálisvonal rácspont-n-ese (a hozzá illeszkedő rácspontok halmaza):

$$(j_1, k_1), (j_2, k_2), \ldots, (j_n, k_n).$$

E rácspont-n-es bármelyik két elemét tekintve, azoknak sem az első, sem a második indexük nem lehet megegyező. Ha tehát a felírt sorozatot az első indexek természetes sorrendjére permutáljuk, az

$$(1, k_1'), (2, k_2'), \ldots, (n, k_n')$$

sorozat második indexeinek $k_1'k_2'\ldots k_n'$ sorozata az $1\,2\ldots n$-nek egy (az r-hez tartozó) permutációja. Most az $r=1, 2, \ldots, n$ diagonálisvonalaknak rendre megfelelő, így előállított $k_1'k_2'\ldots k_n'$ permutációkat mint sorokat egymás alá írva, egy az $A^{(l)}$ ponthoz tartozó $\mathbf{A}^{(l)}$ latin négyzet adódik. Eleve úgy sorszámozhatjuk az $A^{(l)}$ ponton átmenő diagonálisokat, hogy azok $r=1, 2, \ldots, n$ sorszámozása következtében az $\mathbf{A}^{(l)}$ első oszlopában — felülről lefelé haladva — az elemek $1\,2\ldots n$ sorrendje álljon elő. Végül tekintsük az $A^{(l)}$ pontok $l=1, 2, \ldots, n-1$ sorozatához ilyen módon hozzárendelt

$$\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \ldots, \mathbf{A}^{(n-1)}$$

latin négyzeteket. *Ezek egy teljes ortogonális rendszert alkotnak.* (*L*-tétel.)

Fordított sorrendben okoskodhatunk, ha adva van az n-edrendű latin négyzetek egy konkrét, teljes ortogonális rendszere, — jelölje $\{\mathbf{A}\}^n$. — Az adódik, hogy *az* $\{\mathbf{A}\}^n$ *egy* $S^{(n)}$ *síkot határoz meg.* (*L'*-tétel.)

Az $n=9$ a legkisebb érték, melyhez tartozik *olyan* teljes ortogonális rendszer *is*, hogy az azzal előállított $S^{(9)}$-ben a *D*-tétel nem érvényes. [9].

5. Az algebra módszereinek újabb behatolása

Ama tény felismerésével, hogy a Galois-testre mint koordinátatestre véges **D** sík, sőt akárhány dimenziós tér építhető, valamint abból, hogy a háromdimenziós és incidencia axiómákkal definiált térben a *D*-tétel levezethető, egyrészt egy zökkenőmentes út nyílt a lineáris GALOIS geometria kidolgozására, másrészt egy újabb probléma merült fel, az, hogy létezik-e olyan véges sík, melyben a *D*-tétel nem érvényes, tehát nem is lehet síkja egy háromdimenziós térnek.

A **G** sík struktúrájának egyszerű jellemzését tette lehetővé J. SINGER egy 1938-ban publikált tétele, mely a **G** sík incidencia táblázatára vonatkozik. ([4], [5], [15].)

SINGER szóban forgó tételéhez a *ciklikus* incidencia táblázatot kell értelmeznünk. Ha a táblázat második sorától fogva bármely sor a közvetlenül előtte állónak egy mezővel való ciklikus — mondjuk — balra tolásával származtatható, akkor ciklikus incidencia táblázatnak nevezzük. SINGER tétele azt mondja, hogy *a* **G** *sík incidencia táblázata — a sorok permutálásával és az oszlopok permutálásával — ciklikussá rendezhető.*

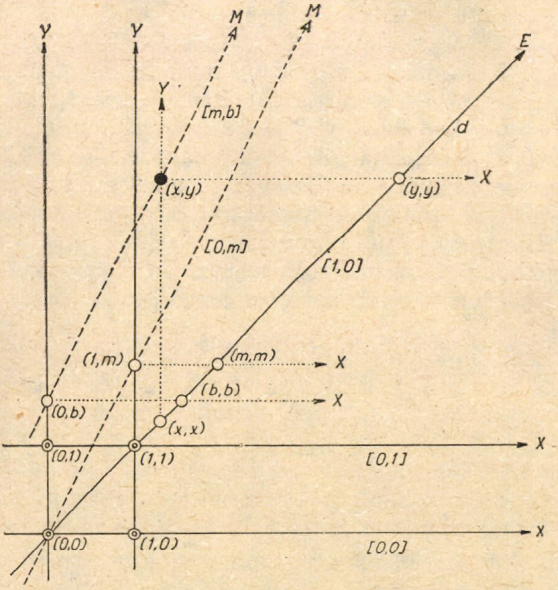
(*Az* $I(1), I(2), I(3)$ *axiómáknak megfelelő (véges) ciklikus incidencia táblázat pedig* **I** *síkot definiál, melyre nézve* — ROSATI konstruálta példák szerint — *van eset, hogy a D tétel nem is teljesül.*)

Az incidenliageometria mind máig csak részben tisztázott problémája:„Az n mely (véges) értékeihez tartozik az $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$ axiómáknak megfelelő incidenciatáblázat, melyre nézve a *D* tétel nem igaz?" — Tudjuk, hogy csak $N \times N$ típusú táblázat lehet ilyen, melynek minden egyes sorában és oszlopában $n+1$ pontozott mező lép fel és $N = n^2+n+1$. A latin négyzetek módszerével kapcsolatban már említettük, hogy $n \geqq 9$ az ilyen táblázat létezésének szükséges feltétele, és a minimális modell 1907 óta ismeretes. HUGHES pedig ötven év múlva — e minimális példát is tartalmazó — egy osztályát határozta meg az ilyen incidencia táblázatoknak. ([3].)

Az eddig ismert példák alapján az a még máig sem igazolt *sejtés* támadt, hogy *ha egy* $S^{(n)}$ *síkra nézve a D-tétel nem érvényes, az n értéke akkor is csak törzsszámhatvány lehet.* (*S*-sejtés.)

E sejtés igazolására, illetve cáfolására irányuló kutatások során talán legtöbbet ígérőnek látszik a koordináta-fogalom egy olyan erős általánosítása, mely lehetővé teszi, hogy az $S^{(n)}$ pontjait és egyeneseit úgy jellemezzük, „pontkoordinátákkal" és „vonalkoordinátákkal" hogy

a **PE** sík analitikus geometriájához — az *I* axiómarendszernél nem többet feltételező — maximálisan hasonló „analitikus geometria" adódjék. Ez az elalgebraizáló probléma-kezelés nyilván általánosabb koordináta-struktúrára vezet, mint a koordináta-test, melyre a koordináta-fogalom Hilbert-féle általánosítása vezetett. A most ismertetésre kerülő algebrai módszer* tulajdonképpen a koordináta-fogalom mondott általánosításából fejlődik ki.



2 ábra

Az **E** sík közönséges koordináta-geometriájából indulunk ki, melyben az *y*-tengellyel párhuzamos egyeneseket kivéve, az egyenes és pont illeszkedését az

$$y = mx + b$$

fejezi ki. A valós számok alkotta számpárok halmaza és az **E** sík pontjainak halmaza, illetve a mondott egyeneseitől megfosztott **E** sík egyeneseinek a halmaza közt egy-egyértelmű megfelelkezést létesíthetünk az *E*

* Algebrai módszer helyett talán azt is mondhatnók — a szónak kissé szokatlan értelmében — hogy a függvényegyenletek nyelvére való átfogalmazás válik itt hasznossá. Nem ez az első eset abban a tekintetben, hogy geometriai axiómákkal definiált sík koordináta-geometriájának kialakításában a függvényegyenletek előnyösen juttathatók szóhoz. ([1].)

axiómarendszer alapján. (Ugyancsak az E axiómarendszerből vezethető le az illeszkedés mondott feltétele.) A szóban forgó számpárokat az első esetben (x, y)-nal, a másodikban $[m, b]$-vel jelöljük, s *pontkoordinátáknak*, illetve *vonalkoordinátáknak* nevezzük.

Az **E** síkon való koordináta hozzárendelés az E axiómarendszer következtében — úgy is jellemezhető, ahogyan most, a 2. ábrára hivatkozva leírjuk. A sík egy tetszőleges d egyenesének két tetszőleges pontját, a (0, 0) és (1, 1) elnevezésű pontot mint *zéruspontot* és *egységpontot* tekintve, az euklideszi metrika alapján a valós számok halmaza (a **K** halmaz) és a d egyenes pontjai közt egy-egyértelmű megfelelkezés létesíthető. Az $x \in \mathbf{K}$ számnak megfelelő pontot (x, x) pontnak nevezzük. A zéruspont és az egységpont mint átellenes csúcsok egy négyzetet határoznak meg, a koordinátarendszer *alapnégyzetét;* az ábrán a (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) csúcsokkal rendelkező négyzetről van szó. Az **E** sík egy tetszőleges pontjából — az ábra (x, y) nevű pontja — az alapnégyzet oldalaival párhuzamos egyeneseket húzva, azok a d egyenest egy (x, x) nevű és egy (y, y) nevű pontban metszik. Így az **E** pontjai és a valós számokból álló számpárok halmaza közt egy-egyértelmű megfelelkezés létesül, mely szerint a szóban forgó pontnak az (x, y) számpár felel meg.

Az egyenes $[m, b]$ vonalkoordinátái mármost a következőképpen értelmezhetők. Az $[m, b]$ valós számpárnak megfelelő egyenes a $(0, b)$ ponton átmegy és a (0, 0), $(1, m)$ pontokat összekötő egyenessel párhuzamos.

Most a leírt koordináta-hozzárendelést az **I** síkra általánosítjuk, mégpedig az eddig közölt mintát úgy tartva szem előtt, hogy az I axiómarendszer szabta korlátokon belül a maximális analógiára törekszünk.

Az **I** sík $I(3)$ axiómának megfelelő négy pontját nevezzük el (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) pontoknak. A sík (0, 0) és (0, 1) pontját összekötő egyenes az (1, 0) és (1, 1) összekötő egyenesét egy Y pontban metszi. Hasonlóképpen a (0, 0), (1, 0) és (0, 1), (1, 1) pontpárok összekötő egyenesei egy X pontban találkoznak. Az XY összekötő egyenest a (0, 0) és (1, 1) pontot összekötő d egyenes egy E pontban metszi. Tudjuk, hogy az eddig mondott 7 pont létezik és páronként különbözők, valamint az eddig mondott 6 egyenes is. Ezzel a koordináta-rendszer *alapalakzata* rendelkezésünkre áll.

Most megbontjuk az **I** sík pontjainak, valamint az egyeneseinek az egyenjogúságát. Kiemeljük az XY egyenes összes pontjait, valamint az Y ponton átmenő összes egyeneseket. A kiemelt elemekhez nem fogunk koordinátákat hozzárendelni.

Tekintsünk egy olyan **K** halmazt, melynek elemei és az E pontjától megfosztott d egyenes pontjai közt egy-egyértelmű megfelelkezés létesíthető. Az $x(\in \mathbf{K})$ elemhez tartozó pont neve legyen (x, x).

Hogyha most az **E** sík párhuzamos egyeneseinek a szerepét az **I** sík XY egyenesének egy pontjában találkozó egyenesek veszik át, továbbá az **E** sík alapnégyzetéét az **I** sík (0, 0) (1, 0) (1, 1) (0, 1) négyszöge, akkor a 2. ábrához fűzött koordinátaértelmezés az **I** síkra is átfogalmazható. — A metszéspont és összekötő egyenes fogalmával kell a koordináta-hozzárendelés minden mozzanatát átfogalmazni. —

Legyen mármost egy tetszőleges elemhármas (x, m, b), melyben a sorrend nem cserélhető fel — vagyis legyen $x \in \mathbf{K}$, $m \in \mathbf{K}$, $b \in \mathbf{K}$ — akkor a koordináták értelmezéséből az **I** axiómarendszer alapján az következik, hogy pontosan egy olyan $y(\in \mathbf{K})$ létezik, melyre nézve a következő reláció áll fenn: az (x, y) pont az $[m, b]$ egyenesre illeszkedik. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a rendezett (x, m, b) elemhármasok mindegyikére értelmezhetünk egy

$$F(x, m, b) = y$$

egyértelmű leképezést. Ezzé általánosodott az euklideszi $mx + b = y$ egyenlet. A **K** koordinátahalmaz F leképezés szerinti struktúrája a *ternér gyűrű.* (E közhasználatúvá lett elnevezés nem mondható szerencsésnek.)

Az F jellemző tulajdonságai az I axiómarendszerből könnyen levezethetők. Hogyha ezután egy **K** halmazra vonatkozólag az $F(x, m, b) = y$ mibenlétét a geometriai származtatást mellőzve, közvetlenül a mondott jellemző tulajdonságokkal mint axiómákkal definiáljuk, akkor átvittük a kérdést a modern algebra területére. ([8].)

6. *A ternér gyűrűk elméletének geometriától függetlenített tárgyalása*

Valamely **K** halmaz minden rendezett (a, b, c) elemhármasára nézve értelmezve van egy egyértelmű *ternér művelet*, az

$$F(a, b, c) = d \qquad (d \in \mathbf{K})$$

és **K**-nak egy eleme a 0 (zéruselem), s egy attól különböző eleme az 1 (egységelem). A **K** elemei akkor alkotnak *ternér gyűrűt*, ha teljesülnek a következő axiómák:

$H(1)$ — *Bármely* $u, v \in \mathbf{K}$ *elempárra nézve fennáll:*

$$F(0, u, v) = F(u, 0, v) = v.$$

$H(2)$ — *Bármely* $u \in \mathbf{K}$ *elemre nézve fennáll:*

$$F(1, u, 0) = F(u, 1, 0) = u$$

$H(3)$ — *Bármely* $a, b, d \in \mathbf{K}$ *elemhármashoz pontosan egy* $c \in \mathbf{K}$ *elem tartozik, melyre nézve az*

$$F(a, b, c) = d$$

teljesül.

$H(4)$ — *A* **K***-nak bármely* $b_1 \neq b_2$ *és* c_1, c_2 *elemeihez pontosan egy olyan a eleme tartozik, melyre nézve az*

$$F(a, b_1, c_1) = F(a, b_2, c_2)$$

teljesül.

$H(5)$ — *A* **K** *bármely* $a_1 \neq a_2$ *és* d_1, d_2 *elemeihez pontosan egy olyan b, c elempárja létezik, amelyre nézve az*

$$\left.\begin{aligned} F(a_1, b, c) &= d_1 \\ F(a_2, b, c) &= d_2 \end{aligned}\right\}$$

tejesül.

Az előző szakaszokban tárgyaltak után nyilván nem lesz meglepő az, amiket a következőkben mint a H axiómarendszerből levezethető következményeket fogunk ismertetni.

A ternér gyűrű mint új struktúra nem mond újat az $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ elemszámú **K** esetében, mert nem más, mint az ugyanakkora elemszámú Galois-test. Továbbá az $n = p^k$ elemű ternér gyűrű (ha p törzsszámot és k természetes számot jelent) minden esetben Galois-test. Az $n = 9$ esetén többféle ternér gyűrű is létezik; ezek egyike már újfajta struktúra (nem ferde test), LOMBARDO—RADICE nyomán *valódi ternér testnek* nevezzük az ilyen struktúrát.

Az $n = 9$ eset ismert példája, valamint a HUGHES meghatározta példák osztálya megmutatta, hogy a valódi ternér test nem üres szó, ilyenek vannak, ámde a mondott példák osztályán kívül más, véges elemszámút nem ismerünk.

Fölmerül a kérdés, hogy végtelen elemszámosságú valódi ternér test létezik-e. A felelet igenlő, ezt elegendő egyetlen példával igazolni.

Tekintsük evégből a már ismertett **H** síkot. Ha e sík koordinátarendszerének alapalakzatát az ott *SABC*-nek nevezett négyszöggel létesítjük, akkor az előbbi szakaszban ismertetett általános koordinátafogalomnak megfelelő koordináta-struktúra éppen ilyen példát szolgáltat.

IRODALOM

Nem célunk a teljességre törekvés, csupán a jelen dolgozatban ismertetett tudnivalók elmélyedőbb tanulmányozását kívánjuk elősegíteni.

[1] ACZÉL J., *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel, Stuttgart und Berlin, 1961. (Például l. 41—44. és 76—84. old.)

[2] HALL M., *Projective* planes, Trans, Amer. Math. Soc. **54.** (1943), 229–277.
[3] HUGHES, D. R., *A class of non-Desarguesian projective planes*, Can. J. Math. **9** (1957), 378–388. old.
[4] KÁRTESZI F., *Egy kombinatorikus minimum problémáról*, Mat. Lapok, **11** (1960), 223–229 old.
[5] ———, *Piani finiti ciclici come risoluzioni di un certo problema di minimo*, Boll. U. M. I. (3) **15** (1960), 522–528. old.
[6] KERÉKJÁRTÓ B., *Projektív geometria*, Budapest, 1944, (L. 509–605. old.)
[7] LOMBARDO–RADICE, L., *Su alcuni caratteri dei piani grafici*, Rend. Sem. Mat. Padova, **24** (1955), 312–345. old.
[8] ———, *Anelli ternari e corpi generalizzati*, Atti del VI Congr. dell' U. M. I. 145–163. old.
[9] PICKERT, G., *Projektive Ebenen*, Berlin, 1955, összesen 343 old.
[10] , *Ebene Inzidenzgeometrie*, Hamburg, 1958, összesen 92. old.
[11] REIMAN, J., *Über ein Problem von* K. ZARANKIEWICZ, Acta Math. A. Sci. Hung. **9** (1958) 269–273. old.
[12] ———, *Egy gráfokkal kapcsolatos szélsőérték feladatról*, Mat. Lapok, **12** (1961), 44–53. old.
[13] SEGRE, B., *Lezioni di geometria moderna*, Bologna, 1948, összesen 195. old.
[14] ———, *Le geometrie di* GALOIS, Ann, di Mat. (4), **48** (1959), 1–97. old.
[15] SINGER, J., *A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory*, Trans Amer. Math. Soc. **43** (1938), 377–385.
[16] TALLINI, G., *Le geometrie di* GALOIS *e le loro applicazioni alla statistica e alla teoria dell'informazione*, Rend. di Mat. (5) vol. **19** (1960), 379–400. old.

ГЕОМЕТРИЯ НИЦИДЕНТНОСТЕЙ

Ф. Картеси

INCIDENCE–GEOMETRY

F. KÁRTESZI

Diofantikus approximáció és alkalmazott matematika*

TURÁN PÁL

... Sokat lehetne és kellene beszélni a matematika és alkalmazásai kapcsolatáról, egymásra gyakorolt hatásáról. Ha ezt tenném, sokat markolnék és keveset fognék. Nem jutna időm a címben jelzett téma valamelyest teljes kifejtéséhez sem és így azok az alkalmazott matematikusok, akiket esetleg a cím ide vonzott, azzal az érzéssel távoznának, hogy „no megint egy előadó, aki csak szaval az alkalmazások fontosságáról, mint olyan sokan és mesteri ügyességgel palástolja, hogy soha egy gondolat sem bántotta konkrét alkalmazásokra vonatkozólag". Így ezekről csak annyit, hogy a matematika talán legfejlődőképesebb problémáit és olykor megoldási módszerei heurisztikus gondolatát kapta más tudományoktól; ő maga pedig egyfelől bizonyító, másfelől kiszámító lévén más tudományágakban egyfelől elméleti támasz, másfelől adatmeghatározó számító segédeszköz tud lenni. Mindkettőre fogunk példát látni a diofantikus approximáció alkalmazásai között.

Tárgyamra térve az első kapcsolatot diofantikus approximáció és gyakorlat között a lánctörtek** elmélete vette fel, mely Brahmagupta előtt ismert volt a hinduknál az i. e. VII. században. Európában Huygens ezekhez és általánosabban a szimultán approximáció problémájához egyenesen egy technikai probléma, egy planetarium megszerkesztése

* 1962. október 30-án az Osztrák Matematikai Társulat meghívására Bécsben tartott előadás magyar fordítása. A lábjegyzetek utólagos megjegyzések vagy idézetek.

** Egy pozitív α szám lánctörtfejtése alatt a következőt értjük. Ha $[x]$ jelenti az x-et meg nem haladó legnagyobb egészet, úgy $[\alpha] \overset{\text{def}}{=} a_0$-al $\alpha \overset{\text{def}}{=} a_0 + \vartheta_1$-el $0 \leqq \vartheta_1 < 1$ és legyen $a_1 = \left[\frac{1}{\vartheta_1}\right]$. Ekkor $\alpha \overset{\text{def}}{=} a_0 + \frac{1}{a_1 + \vartheta_2}$, ahol $0 \leqq \vartheta_2 = \frac{1}{\vartheta_1} - a_1 < 1$ és legyen $a_2 = \left[\frac{1}{\vartheta_2}\right]$. S. i. t. Pl. $\alpha = \sqrt{2}$-re az első 3 lépés elvégzése az $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$ törthöz vezet és ez már $\sqrt{2}$-t $\frac{1}{50}$-nél jobban közelíti.

során jutott.* Már ezen tény is sejtteti, hogy még az előadás cím által szűkebbre korlátozott témának is hosszú előélete van; még e témán belül is reménytelen vállalkozás volna teljességre törekednem. Ez azonban már csak azért is felesleges, mert ebben Önöknek oly kiváló szakértőjük van, mint Hlawka professzor, aki újabban a többszörös integrálok közelítő meghatározásának gyakorlatilag oly fontos problémájára tudta alkalmazni a diofantikus approximáció módszereit.** Így hát inkább kevésbé ismert alkalmazásokról fogok beszélni, egyesek közülük azért oly kevéssé ismertek, mivel még nincsenek publikálva. Az érintendő tárgykörök a következők lesznek.

I. A kinetikus gázelmélet alapjai.

II. Közönséges differenciálegyenletrendszerek stabilitáselmélete.

III. A műszaki alkalmazásokban újabban igen fontossá vált transzcendens egyenletek gyökeloszlása.

IV. Algebrai egyenletek közelítő megoldása, mátrixok sajátértékeinek közelítő meghatározása, alkalmazás az aerodinamikai stabilitás elméletére.***

* Az egyes bolygókat mozgató egyenlő sugarú körökre rendre m_1, m_2, ... fogat téve a keringési idők hányadosai (pl. a legbelsőhöz, a Merkur-hoz viszonyítva) rendre nyilván $\frac{m_2}{m_1}, \frac{m_3}{m_1}, \ldots$. Ha a valóságos keringési idők $T_1, T_2, \ldots$, akkor az $\frac{m_v}{m_1}$ hányadosoknak a $\frac{T_v}{T_1}$ értékeket kell rendre közelíteniök éspedig, mivel egy kerékre túlsok fog nem tehető, lehetőleg kis m_v-kkel. Másszóval adott $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ számokat kell azonos, „nem túl nagy" nevezőjű törtekkel egyidejűleg „jól" approximálni.Ez persze mutatja a kérdés fontosságát általában a fogaskerekezésre.

** Így pl. A. Weil egy igen mély aritmetikai tételének és (2)-nek felhasználásával megmutatta, — N. M. Korobov egy eredménye javításaként, — hogy, ha $s \geqq 2$-re $f(x_1, \ldots x_s)$ a K egységkockában véges variációjú és ez $V(f)$, akkor f-et periodikusan folytatva bármely p prímre

$$\left| \int_K f dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}, \frac{k^2}{p}, \ldots, \frac{k^s}{p}\right) \right| < V(f) \frac{(70 \log p)^s}{\sqrt{p}}.$$

„Aránylag kevés" számú operációval oly $(g_1, \ldots, g_s)$ egészeket is meg tud adni, hogy

$$\left| \int_K f dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{kg_1}{p}, \frac{kg_2}{p}, \ldots, \frac{kg_s}{p}\right) \right| < V(f) \frac{(1000 \log p)^s}{p},$$

ami a többi ismereteknél jóval gyorsabb közelítés. L. Hlawka cikkét a Monatshefte der Math. 66. köteté-ben.

*** Azóta ötödik pontként a hővezetési egyenletre való alkalmazás járulhatott volna hozzá ehhez a listához. Erről említést tettem egy előadásban, ugyancsak Bécsben az 1963. okt. 23—26. között az Osztrák Matem. Társ. által rendezett differenciálegyenletek kollokviumon.

Az időhiány miatt bizonyításokat még vázolni sem fogom tudni; ezért elnézést kérek.

A kinetikus gázelméletre vonatkozó alkalmazást még Egerváry Jenővel találtuk. Legyen adva egy E kockaalakú edény, melynek élhossza a hosszegység alkalmas megválasztásával π és melyben gáz van. A kinetikus gázelmélet egy alapfeltevése az, hogy az edényben levő N gázmolekula úgy mozog a gáztérben, hogy E-nek bármely élparallel helyzetű A-rész kockájában a gázmolekulák száma, „kevés" időtől eltekintve

$$\frac{|A|}{\pi^3} N, \tag{1}$$

ahol $|A|$ az A köbtartalmát jelenti. E ténynek *elvileg* a mechanika alaptényeiből levezethetőnek kell lennie, legalábbis azon nagyon leegyszerűsített modell esetén, mikor a molekulák pontszerűek, tömegük 0, egymást nem vonzzák, nem ütköznek egymással, az edényfalán a rugalmas ütközés szabálya szerint verődnek vissza és külső erő nem hat. Mégis 1948-ig semmi eredmény nem volt ezirányban, pedig a tét egy determinisztikus természetszemlélet elvi lehetősége volt. Ezen eredménytelenség oka talán az a hiedelem lehetett, hogy (1)-típusú eloszlás, ha egyáltalán levezethető, csak nagyon speciális kezdeti értékek és sebességek esetén állhat elő. 1948-ban Steinhaus az ún. független függvények segítségével legalább annyit bebizonyított, hogy az adott körülmények mellett a molekulák tömegközéppontja az edény középpontja közelében marad a „nagy" $(0, T)$ időköznek „T-hez képest kis" időközeitől eltekintve; éspedig ez fennáll *minden* kezdeti helyzet és lineárisan független kezdősebességek mellett. Ugyanezen évben Erdőssel H. Weyl klaszszikus egyenletes-eloszlási tételét „végesítő" következő tételt találtuk.

Ha $x_1, \ldots, x_n$ tetszőleges valós számok, m pozitív egész, akkor tetszőleges $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$ mellett alkalmas pozitív numerikus K-val

$$\left| \sum_{\substack{j \leqq n \\ \alpha \leqq x_j \leqq \beta \bmod 1}} 1 - (\beta - \alpha) n \right| \leqq K \left\{ \frac{n}{m+1} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu} \left| \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i \nu x_j} \right| \right\}. \tag{2}$$

E tételt 1950-ben Szüsz Péter és Koksma egymástól függetlenül kiterjesztették k-dimenziós pontsorozatokra. Rényi Alfréd 1949-ben a Matematikai Lapokban megjelent dolgozatából tudomást szerezve Steinhaus munkájáról és Egerváry nak Steinhaussal folytatott direkt beszélgetéseitől aktívabb érdeklődést nyerve nem volt nehéz felismernünk, hogy a $k = 3$ eset eredménye alkalmas legalább annak bizonyítására, hogy a kezdősebességek bizonyos megválasztásaira — bármely kezdőhelyzet mellett — a gázmolekulák „kis időtartam híjján" való egyenletes eloszlása a gáztérben valóban levezethető. A kezdősebességek az e tárgyú dol-

gozatainkban tárgyaltaknál sokkal reálisabban és általánosabban választhatók lettek volna, pl. a Maxwell-féle sebességeloszlás is imitálható lett volna; valószínű, hogy a „jó" kezdősebességek „igen sűrűn" vannak. Utólag visszatekintve e dolgozatokra ezek odavetett volta egyre nyilvánvalóbb; pl. a benne szereplő abszolútérték-integrál helyett négyzetintegrált véve a kivételes időtartam becslése jóval jobb lett volna.*

Mielőtt a második tárgykör diszkutálására térnék, emlékeztetnem kell röviden a diofantikus approximáció elméletének egy új irányzatára, abból csak az itt alkalmazásokra kerülő tételekre szorítkozva.** Ezek elsője szerint ha m adott pozitív egész, a b_j-k adott komplex számok, akkor***

$$(3)\qquad \max_{\nu=m+1,\ldots,m+n} \frac{\left|\sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\nu}\right|}{\left(\min_{j=1,\ldots,n} |z_j|\right)^{\nu}} \geqq \left(\frac{n}{2e\,(m+n)}\right)^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} b_j\right|.$$

A második szerint, ha a z_j komplex változók a

$$(4)\qquad \frac{\min_{\mu\neq\nu} |z_\mu - z_\nu|}{\max_{\mu} |z_\mu|} \geqq \delta$$

mellékfeltétellel vannak megkötve, a b_j-k tetszőleges komplex számok és m pozitív egész, akkor

$$(5)\qquad \max_{\substack{m+1\leqq\nu\leqq m+n\\ \nu \text{ egész}}} \frac{\left|\sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\nu}\right|}{\sum_{j=1}^{n} |b_j|\,|z_j|^{\nu}} \geqq \frac{1}{2n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1}.$$

A harmadik és negyedik gyengébb formában szintén áll fentemlített könyvben; jelenlegi formájuk Cassels ill. Atkinsontól származik és azt mondja ki, hogy ha

$$\max_{j=1,\ldots,n} |z_j| = 1,$$

* Igazán csodálni lehet, hogy mégis volt valami irodalmi hatása. L. M. Lipschitz Jevick dolgozatát az Amer. Journ. of Phys. 1957-es kötetében „Probability and determinism" címmel.

** Ennek az első kidolgozását „Eine neue Metode in der Analysis und deren Anwendungen" c. könyvemben adtam 1953-ban; jóval teljesebb az 1956-os kínai kiadás. Egy ehhez képest is lényegesen továbbfejlesztett és bővített kiadás fog angolul az Interscience Tracts sorozatban megjelenni.

*** Mint Makai és de Bruijn egymástól függetlenül kimutatták, az $\left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^{n}$ faktor helyett $\left\{\sum_{l=0}^{n-1} 2^{l}\binom{m+l}{l}\right\}^{-1}$ a „legjobb" állandó. Az alkalmazásokhoz (3) kényelmesebb.

akkor

$$\max_{\nu=1,\ldots,(2n-1)} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| \geqq 1 \tag{6}$$

és*

$$\max_{\nu=1,\ldots,n} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| > \frac{1}{6}. \tag{7}$$

Röviden csak arra szeretnék emlékeztetni, miért tekintendők ezen tételek a diofantikus approximáció elméletéhez tartozó tételeknek. Kronecker és Dirichlet alapvető tételei a diofantikus approximáció klasszikus elméletéből** megfogalmazhatók (5)-el analóg formában, csak a ν-kitevő vagy egyáltalán nem, vagy az alkalmazásokhoz túl gyengén lokalizálható. Mindkét tétel ezen alakban is bebizonyítható többé-kevésbé teljes formában, viszont a (3)—(5)—(6)—(7) tételek a klasszikus elméletben meg sem fogalmazhatók. Mindkét alapvető tétel az új elméletnek bizonyos értelemben határeseteinek tekinthető.

Most térjünk a jelzett második tárgykörre. Tekintsük a vizsgálandó rendszert a szokásos normálalakban, tehát a

$$\frac{dY(t)}{dt} = \mathbf{A}Y(t) + W(Y, t) \tag{8}$$

egyenletet, ahol $\mathbf{A}$ $n \times n$-es komplex elemű számmátrix, $Y(t)$ és $W(Y, t)$ n-elemű oszlopvektorok és

$$W(0, t) \equiv 0$$

úgy, hogy $Y(t) \equiv 0$ kielégíti (8)-at. Mint Ljapunov és Perron megmutatták, (8) mindazon megoldásaira, melyekre $|Y(0)|$ elég kicsi, $Y(t) \not\equiv 0$ és $\lim_{t \to +\infty} |Y(t)| = 0$, alkalmas j-index-el fennáll a

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \log |Y(t)| = \operatorname{Re} \varrho_j \tag{9}$$

reláció, hacsak a $W(Z, t)$-függvényre egy

$$|Z| \leqq c_1, \quad t \geqq 0 \tag{10}$$

* Atkinson levélbeli közlése szerint az 1/6 állandót 1/3-ra javította újabban. A legjobb állandó meghatározása igen nehéz feladatnak látszik.

** Dirichlet szóbanforgó tétele azt mondja ki, hogy ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pl. pozitívok továbbá $q \geqq 3$ és egész, úgy létezik olyan ν egész, melyre $1 \leqq \nu \leqq q^n$ és $\nu\alpha_1, \ldots, \nu\alpha_n$ *mindegyike* a hozzá legközelebbi egészhez legfeljebb $1/q$-nyira van. Kronecker említett tétele azt mondja ki, hogy, ha az $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számok racionálisan függetlenek, (azaz racionális $c_0, c_1, \ldots, c_n$ számokkal $c_0 + c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n = 0$ csak úgy állhat, ha $c_0 = \ldots = c_n = 0$), $\beta_1, \ldots \beta_n$ valósak és ε tetszőleges kis pozitív szám, úgy van oly ν egész szám, hogy $(\nu\alpha_1 - \beta_1), \ldots, (\nu\alpha_n - \beta_n)$ *mindegyike* a hozzá legközelebbi egészhez legfeljebb ε-nyira van.

„félhenger"-ben az

$$|W(Z,t)| \leqq c_2|Z|, \tag{11}$$

továbbá tetszőleges kis pozitív ε-nal a

$$|z| \leqq \delta(\varepsilon), \quad t > \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \qquad (\delta(\varepsilon) \text{ elég kicsi})$$

félhengerben az

$$|W(Z,t)| \leqq \varepsilon|Z| \tag{12}$$

egyenlőtlenségek fennállanak; itt a ϱ_j számok az **A**-mátrix bizonyos (szükségképpen a Re $z<0$ félsíkban fekvő) sajátértékei, c_1 és c_2 állandók. A (9) reláció jelentése a stabilitásra vonatkozólag nyilván az, hogy *elvi alsó* korlátot ad a stabilitás mértékére. Mivel a (9)-et realizáló t-értékek eloszlására a tétel semmilyen felvilágosítást nem ad, még annak lehetőségét sem tudja kizárni, hogy tetszőleges hosszú közökben „exponenciálisnál erősebben hal el" a megoldás. Mármost a (3)-tétel módot ad annak igazolására, hogy (9) már minden „elég nagy" intervallumban realizáltatik, teljesebb képet adva a megoldások „véglefutásáról".

Pontosabban szólva, ha L a

$$\min_j \operatorname{Re} \varrho_j = L(<0) \tag{13}$$

által van értelmezve, továbbá $\Delta > 1$ oly nagy, hogy

$$5n\{2e(n+1)\}^{2n}e^{2L\Delta} < 1$$

és a (8)-ban szereplő $W(Z,t)$ függvény valamely (10) alakú félhengerben explicit megadható $g=g(\mathbf{A}, \Delta, L, n)$-el a

$$|W(Z,t)| \leqq g|Z|$$

egyenlőtlenséget kielégíti, akkor minden nem identikusan eltűnő, de 0-hoz tartó $Y(t)$-megoldásra

$$\max_{\alpha \leqq t \leqq \alpha + 2\Delta^2} |Y(t)|e^{\left(1+\frac{2}{\Delta}\right)|L|t} > c_3 \qquad (c_3 \text{ nem függ } \alpha\text{-tól}) \tag{14}$$

minden elég nagy α-ra és ez (9) miatt lényegileg nem is javítható. semelyik (8)—(11)—(12) alakú egyenletre. Hasonló tétel mutatható ki, ha (13) helyett

$$\min_j R\varrho_j = L > 0 \tag{15}$$

áll fenn; ekkor (14) helyett *minden* $Y(t) \not\equiv 0$ megoldásra, *minden* $\alpha \geqq 0$ mellett a

$$\max_{\alpha \leqq t \leqq \alpha + 2\Delta^2} |Y(t)| e^{-\left(1+\frac{2}{\Delta}\right)Lt} \geqq |Y(0)| \tag{16}$$

egyenlőtlenség érvényes. Orientáció végett jegyezzük meg, hogy újabb általános tételekből *minden* $t > 0$-ra nyerhető csupán (11) mellett egy (14)-nél jóval gyengébb

$$|Y(t)| \geqq |Y(0)| e^{-Mt}$$

alakú egyenlőség, ahol M „lényegileg" $\max_j |\varrho_j|$. A (3)-tétel (14) és (16) bizonyítására a belőle könnyen leszármaztatható

$$\max_{a \leqq t \leqq a+d} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j e^{\alpha_j t} \right| \geqq \left(\frac{d}{2e(a+d)} \right)^n \left| \sum_{j=n}^{n} b_j \right| \tag{17}$$

alakban lesz alkalmazva, itt a és d tetszőleges pozitív, a b_j-k tetszőleges komplex számok, a komplex α_j-számok csupán a

$$\operatorname{Re} \alpha_j \geqq 0, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{18}$$

normálásnak van alávetve.*

A harmadik említett tárgykör a

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(z) e^{\omega_j z} = 0 \tag{21}$$

* Mint azóta észrevettem, ebből könnyen nyerhető az

$$\int_a^{a+d} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j e^{\alpha_j t} \right|^2 dt \geqq \left(\frac{d}{2e(2a+d)} \right)^{n^2} \int_0^{\frac{d}{2}} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j e^{\alpha_j t} \right|^2 dt \tag{19}$$

egyenlőtlenség a (17) normálás mellett. Mivel ezen egyenlőtlenség nem függ az α-k konfigurációjától, triviális határátmenet és elemi átalakítások az

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\delta} |f(t)|^2 dt \geqq U(\delta, \alpha - \beta, \Lambda, n) \int_{\beta}^{\beta+\frac{\delta}{2}} |f(t)|^2 dt \tag{20}$$

egyenlőtlenséget adják; itt $f(t)$ tetszőleges állandó együtthatós n-edrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása, melynél a karakterisztikus egyenlet gyökei a $\operatorname{Re} z \geqq \Lambda$ félsíkban vannak, $\alpha > \beta$, $\delta > 0$ és U az argumentumainak *explicite* adott függvénye. Ebből az együtthatófüggvények „lépcsőkkel" való L_2-approximációjával igen általános típusú egyenletek megoldásaira (20) jellegű egyenlőtlenség és egyértelműségi tétel nyerhető. Valószínű, hogy (19) -ben az n^2-kitevő cn-nel helyettesíthető.

Dancs István készülő disszertációjában az említett új irányzat egy „egyoldalú" tételéből differenciálegyenletekre vonatkozó oszcillációs tételeket vezetett le.

alakú egyenletek gyökeinek a komplex síkon való eloszlására vonatkozik; itt $P_j(z)$ legfeljebb $(p-1)$-edfokú polinomokat, ω_j tetszőleges komplex számokat jelentenek. E kérdésnek a hővezetéssel való kapcsolatát már Fourier, Cauchy és Poincaré vizsgálták; újabban a szervomechanizmusok elméletében, retardeált differenciálegyenletek fellépése miatt került az érdeklődés előterébe.* Már a legegyszerűbb példa, az

$$y'(t) = y(t-a) \tag{22}$$

egyenlet mutatja a (21) alakú egyenletek szerepét. $y = e^{\lambda t}$ alakú megoldással kísérletezvén λ-nak nyilván a

$$\lambda e^{a\lambda} = 1 \tag{23}$$

transzcendens egyenletét kell kielégítenie. Ha (23) gyökei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, akkor formálisan a

$$\sum_j c_j e^{\lambda_j t} \tag{24}$$

alakú sorral értelmezett függvények kielégítik a (21) egyenletet; a c_j-k alkalmas megválasztásával várható, hogy $0 \leqq t < a$-ra egy előírt függvényt „állítanak elő". Már az a tény, hogy a közönséges differenciálegyenleteknél előírható kezdeti *értékek* helyett előírható kezdeti *függvények* lépnek fel, jelzi, hogy pl. ezen egyenletek stabilitáselmélete a közönséges differenciálegyenletekénél (mely az ő határesete), jóval sokszínűbb lesz. Gyakorlati — és ebből kifolyólag a dolog természete miatt elméleti — vonalon, úgy látszik, ezen egyenleteké a jövő. Nem nehéz elképzelni (24) után, hogy (21) alatti egyenlet gyökeloszlásának vizsgálata az alkalmazások egész sorára fontos feladat.** E kérdés már eddig is sok vizsgálat tárgya volt; a mondottakon kívül csak Ritt, Tamarkin, Titchmarsh, Pólya és tanítványainak dolgozataira, valamint Langer és B. Levin összefoglaló referátumára, ill. könyvére kell gondolni. Mégis új volt a $p = 1$ esetre vonatkozó tétel, mely (4) segítségével volt bizonyítható.

Az $f(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\omega_j z}$ függvény gyökei száma egy d-oldalú tengelyparallel négyzetben multiplicitás szerint véve

$$< \psi(d, n, \Delta, \delta) \tag{25}$$

* Az előadás idejében erről csak S. Sherman „A note on stability calculations and time lag" c. értekezéséből tudtam (Quart J. of appl. math. 1947). Azóta R. Bellman és K. Cooke „Differential–difference equations" c. könyvéből az alkalmazások jóval tágabb köréről értesültem; ezek közül csak a matematikai közgazdaságtant és a quantitatív biológiát említem meg, a matematikán belüli alkalmazásokról nem is szólva.

** Ezt Bellman–Cooke explicite is mondják könyvükben (p. 113).

ahol

$$\Delta = \max_{\mu,\nu} |\omega_\mu - \omega_\nu|$$

$$\delta = \min_{\mu \neq \nu} |\omega_\mu - \omega_\nu|,$$

tehát függetlenül a négyzet helyzetétől, a c_ν-együtthatóktól és csak „lazán" függve az ω_ν-kitevőktől. Példákkal igazolható, hogy d, n, és Δ-tól való függés elengedhetetlen; δ-ra vonatkozólag, ezt nem sikerült eddig bebizonyítanom. A (25) alatti ψ-függvényre az

$$5\Delta d + \log(2n) + n \log\left(2 + \frac{2n^3}{d\delta}\right) \tag{26}$$

kifejezést találtam; ezt szükség esetén a becslések gondosabb keresztülvitelével javítani lehet. Újabban Dancs Istvánnal újra felvettük a (21) egyenlet kérdését teljes általánosságban; (5) egy továbbfejlesztésével valószínűleg ki tudjuk mutatni, hogy (21) alatti egyenletnek egy tengelyparallel négyzetben levő gyökei száma multiplicitás szerint véve*

$$< \psi_1(d, n, \Delta, d, p).$$

Végezetül rátérek a negyedik alkalmazási területre. Az ún. Bernoulli—Lobacsevszkij—Graeffe módszer ma is bőségesen lesz alkalmazva a technikai gyakorlatban, ismertetése minden numerikus-analízis könyvben szerepel, legtöbbször egy numerikus példán bemutatva csupán. Bölcsen hallgatnak azonban arról, hogy a módszer a szokásos formájában arra sem ad garanciát, hogy, ha

$$f(x) \overset{\text{def}}{\equiv} f_0(x) \overset{\text{def}}{\equiv} a_0 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0 \tag{28}$$

a megoldandó egyenlet és az

$$f_{\nu+1}(x) = (-1)^n f_\nu(\sqrt{x}) f_\nu(-\sqrt{x})$$

* Ezt azóta

$$\psi_1 = 9p^2 \log(2np) + 5pn + d\Delta\left(4 + \frac{p}{10n}\right) + p(2n+p) \log\left(1 + \frac{5n^2 p}{d\delta}\right) \tag{27}$$

-vel be is bizonyítottuk; itt is csak a δ-tól való függés lényeges volta kérdéses. Hasonló vizsgálat van folyamatban oly függvények értékeloszlására vonatkozólag, melyek elég általános típusú differenciálegyenletet elégítenek ki. A (27) alatti felső korlát nyilván alkalmazható Bellman—Cooke könyvében említett általánosabb

$$\det\left\{\sum_{j=1}^{n} (A_j z + B_j) e^{\omega_j z}\right\} = 0$$

egyenlet gyökeinek hasonló vizsgálatára is; itt A_j ill. B_j $n \times n$-es komplexelemű mátrixok.

rekurzióval képezett sorozat elemeit röviden $f(x)$ transzformáltjainak nevezzük, akkor akár az első 10^{10} transzformált képzése után sem lehetünk biztosak, hogy a közelítés jósága eléri-e pl. az 50%-ot, mivel a szokásos forma egy limesztételen alapszik, hibatag nélkül. Bölcsen hallgatnak e könyvek arról is, hogy, ha (28) egyenlet gyökei $z_1, \ldots, z_n$, ahol

$$|z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n| \tag{29}$$

akkor a módszer szokásos formájában *csak* akkor használható, ha

$$|z_1| > |z_2|$$

és ennek teljesülése semmilyen ismert módon algoritmikusan nem dönthető el. Arról is hallgatnak, mint lehetne ebből kiutat találni, pedig több, mint 200 évvel Bernoulli után, 1940-ben Ostrowski egy 150 oldalas dolgozatban az Acta Matematicaban megtalálta az első kiutat, ha ez nem is praktikus és mátrixok sajátértékmeghatározására teljességgel keresztülvihetetlen. Még 1950-ben vettem észre, hogy (6) és (7) egyenlőtlenségek akkor létező gyengébb formái szintén adnak az Ostrowskiétől teljesen különböző kiutat, mely mátrixok sajátértékeire még rövidebben fogalmazható. (6) és (7) jelenlegi alakjában a gyakorlatilag legfontosabb maximális (ill. minimális) abszolútértékű sajátértékre a következő két szabály adható meg (elég lesz a maximálisra megfogalmazni).

Legyen A egy komplex elemű $n \times n$-es mátrix és k tetszőleges pozitív egész szám. Készítsük el ismételt négyzetreemelésekkel az

$$A, A^2, A^{2^2}, \ldots, A^{2^k} \stackrel{\text{def}}{=} B, \tag{30}$$

továbbá szorzásokkal a

$$B, B^2, B^3, B^4, \ldots, B^{2n-1} \tag{31}$$

mátrixokat. Ha λ jelenti az A mátrix egy maximális abszolútértékű sajátértékét, úgy fennáll az

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2^k}} \leqq \frac{|\lambda|}{\left(\max_{\nu=1,2,\ldots(2n-1)} |\mathrm{sp}\, B^\nu|^{\frac{1}{\nu \cdot 2^k}}\right)} \leqq 1 \tag{32}$$

egyenlőtlenség.*

Ez (6)-ból következik néhány sorban. (6) helyett a (7) egyenlőtlenség módot ad arra, hogy a (31) sorozat elemei számát drasztikusan csökkentsük, amivel a numerikus műveletek számát egész lényegesen redu-

* Ha C egy tetszőleges $n \times n$-es mátrix, akkor spC jelenti szokás szerint a főátlóban levő elemek összegét.

káltuk. Ekkor (32) helyébe az

$$(33)\qquad \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2k}} \leqq \frac{|\lambda|}{\left(\max\limits_{\nu=1,2,\ldots,n} |\mathrm{sp}\, B^{\nu}|^{\frac{1}{\nu\cdot 2k}}\right)} \leqq 6^{\frac{1}{2k}}$$

egyenlőtlenség lép.*

A közelítő kifejezéseink alakjából világos, hogy a szükséges műveletek könnyen programozhatók. De egy másik nevezetes következtetés is levonható belőlük. Ha előírunk egy percentuális relatív hibát, pl. 1%-nak, akkor k, mint n függvénye egyszersmindenkorra meghatározható úgy, hogy

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2k}} \geqq 0{,}99 \quad \text{és} \quad 6^{\frac{1}{2k}} \leqq 1{,}01.$$

De ez (32) és (33)-ból nyilván azt jelenti, hogy 1%-os relatívhiba elérhető úgy, hogy a szükséges lépések száma csak n-től függ, az A mátrix együtthatóitól nem! Ha (28) alakba írt algebrai egyenlet közelítő megoldásáról van szó, a (30)—(31) sorozat helyébe k transzformált képzés és az első $(2n-1)$, ill. n Newton—Girard-formula képzése lép.

Pozitívelemű mátrix esetén Perron tétele szerint a maximális abszolútértékű sajátérték pozitív, azaz előbbi módszerek magát egy maximális abszolútértékű sajátértéket határoznak meg közelítőleg. Módosíthatók-e fenti eljárások úgy, hogy az általános esetben is magát, egy maximális abszolútértékű sajátértéket határozzanak meg közelítőleg? Újabban azt találtam, hogy (32) és (33)-ból kiindulólag megadható oly algoritmus, mely teljes egészében automatizálható és előírt ε relatívhiba mellett csak n és ε-tól függő lépésszámban *valamely* λ^*-sajátértékhez megad oly D-számértéket, melyre

$$(34)\qquad \left|\frac{\lambda^*}{D} - 1\right| \leqq \varepsilon.$$

Valószínűleg módosítható lesz ezen algoritmus úgy, hogy λ^* a *maximális* abszolútértékű sajátértékek közül való legyen.

A (32)—(33) egyenlőtlenségek nyilván lehetőséget nyújtanak alkalmas határátmenettel a

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\varphi(t)\,dt = 0$$

* Atkinson említett levélbeli közlését felhasználva a jobboldal $3^{\frac{1}{2k}}$-al helyettesíthető.

integrálegyenlet legkisebb abszolútértékű sajátértékének közelítő meghatározására. E lehetőséget eddig közelebbről még nem vizsgáltam meg.

A sajátértékek az

$$\det(A-\lambda E_n)=0$$

egyenlet megoldásai voltak, ahol E_n az $n\times n$-es egységmátrix. Az aerodinamikai egyensúly elméletében fellépnek általánosabb, (A_ν $n\times n$-es számmátrixok)

$$G_0(\lambda)\overset{\text{def}}{=}\det H_0(\lambda)\overset{\text{def}}{=}\det(\lambda^r E_n-\lambda^{r-1}A_{1\ldots}-\lambda A_{r-1}-A_r)=0 \tag{35}$$

alakú egyenletek. Az előzőleg említett elvek, kombinálva Franklin* egy eredményével pl. a következő két szabályhoz vezettek.

Ha a $H_\nu(\lambda)$ $n\times n$-es mátrixok, melyek a

$$H_{\nu+1}(\lambda)\overset{\text{def}}{=}(-1)^{nr}H_\nu(\sqrt{\lambda})H_\nu(-\sqrt{\lambda})\qquad(\nu=0,1,\ldots)$$

rekurzióval vannak értelmezve és fix $k\geqq 1$-el

$$H_k(\lambda)\overset{\text{def}}{=}\lambda^r E_n-\lambda^{r-1}B_1-\quad-\lambda B_{r-1}-B_r,$$

értelmezzük a (successive meghatározható) $S_1, S_2, \ldots, n\times n$-es mátrixokat az

$$S_\nu=S_{\nu-1}B_1+\ldots+S_1B_{\nu-1}+\nu B_\nu\qquad\nu=1,2,\ldots,r \tag{36}$$

és $\nu>r$-re

$$S_\nu=S_{\nu-1}B_1+\ldots+S_{\nu-r}B_r \tag{37}$$

rekurzióval. Ha $\lambda_1,\ldots,\lambda_{nr}$ a (35) egyenlet gyökei és

$$\max_j|\lambda_j|=|\lambda|$$

úgy fennállanak** az

$$\left(\frac{1}{rn}\right)^{\frac{1}{2k}}\leqq\frac{|\lambda|}{\max\limits_{\nu=1,2,\ldots,2rn-1}\left(|\mathrm{sp}\,S_\nu|^{\frac{1}{\nu\cdot 2k}}\right)}\leqq 1 \tag{38}$$

és

$$\left(\frac{1}{rn}\right)^{\frac{1}{2k}}\leqq\frac{|\lambda|}{\max\limits_{\nu=1,2,\ldots,rn}\left(|\mathrm{sp}\,S_\nu|^{\frac{1}{\nu\cdot 2k}}\right)}\leqq 6^{\frac{1}{2k}} \tag{39}$$

egyenlőtlenségek...

* J. N. Franklin „On numerical solution of characteristic equations in flutter analysis" Journ. Assoc. Comp. Math. *5* (1958) p. 45–51.

** E szabályok „On eigenvalues of matrices" c. dolgozatomban (Annali di Mat. pura ed appl. 1961. p. 397–402) elírásokkal jelentek meg.

DIOPHANTINE APPROXIMATION AND APPLIED MATHEMATICS

P. TURÁN

The subjects touched are kinetic gas-theory, stability-theory of ordinary differential-equations, retarded differential-equations and approximative determination of eigenvalues of matrices.

(Translation of a lecture held in Vienna an Oct. 30. 1962.)

ДИФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА.

П. Туран

Речь идёт о вопросах кинетической теории газов, теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и о приближенном определений собственных значений матриксов.

(Перевод доклада, читанного в Вене 30-ого октября 1962 г.)

A „négyzetérték" fogalma és az ún. „geometriai közép"

SZABÓ ÁRPÁD

Bevezetés .....
I. A δύναμις szó matematikai használata .....
II. A „Theaitétos" c. dialógus egyik részlete (147 D—148) .....
III. A δύνασθαι kifejezés eredete .....
IV. Területátalakítás és quadratura .....
V. A quadratura és a „geometriai közép" .....

E dolgozat az antik matematikatörténetnek egyik gazdag és még kiaknázatlan forrására, a *terminológiatörténetre* hívja fel a figyelmet. Konkrét példán mutatom be, hogyan világíthatja meg egy adott szakkifejezés eredetének vizsgálata a matematikatörténetnek egy olyan szakaszát, amelyet más forrásból nem ismerünk.

Induljunk ki a magyar matematikai szaknyelv „*hatvány*" szavából. Nem kell hozzá különösebb nyelvtörténeti tájékozottság, hogy akárki rögtön rájöjjön: bizonyára a nyelvújítás korában nevezték el ezzel a magyar szóval — „*hatvány*" — a latinul „*potentia*" néven ismert fogalmat. Csakugyan, SZILY KÁLMÁN szerint[1] e szavunk először GYŐRY SÁNDORnál bukkan föl 1833-ban, kéziszótárainkba pedig csak 1846 körül veszik be. Régebben más fordításokkal kísérleteztek. Mint érdekességet megemlíti a szótár, hogy ugyanennek a fogalomnak *(potentia)* DUGONICSnál és BRESZTYENSZKYnél *kar*, PETHEnél *hatalom*, BOLYAInál pedig *emelet* volt a neve. — E kísérletek közül tulajdonképpen BOLYAI próbálkozása a legérdekesebb. Mert BOLYAI, amikor „emelet"-nek mondja a *potentia*-t, elkerüli nemcsak azt, hogy egyszerűen a latin szót fordítsa magyarra — amint ezt azok tették, akik a „*potentia*" helyett a „*hatalom*" vagy „*hatvány*" szót használták —, hanem ugyanakkor elkerüli azt is, hogy magyar megfelelőt keressen egy olyan feltételezett elgondolásra, amelyet legfeljebb csak gyanítani lehet a latin „*potentia*" mögött; ezt az utóbbit tették ti. azok, akik a „*potentia*"-t a magyar „*kar*" szóval tolmácsolták.

[1] SZILY KÁLMÁN, A magyar nyelvújítás szótára (Első rész), Budapest, 1902, 125.

Ha mármost összehasonlításul megnézzük az ismertebb európai nyelveket, akkor azt látjuk, hogy ezek a *hatvány* megnevezésére mind a latin „*potentia*" szó fordításait használják (pl. olasz *potenza*, német *Potenz*, orosz потенция, francia *puissance*, angol *power*, holland *macht* stb.). De fordítás tulajdonképpen már a latin megjelölés, a „*potentia*" név maga is. Mert ez meg nem egyéb, mint a görög δύναμις latin formája. A kérdés csak az, hogy vajon a görög δύναμις — mint matematikai terminus — csakugyan „*hatalmat*" jelentett-e?

Az alábbiakból kiderül majd, hogy a δύναμις szó, mint a görög matematika terminusa, igazában nem „*hatalmat*", hanem valami egyebet jelentett. Minthogy azonban a köznapi görög nyelv ezt a szót (δύναμις) „*erő, hatalom, képesség*" jelentésben ismerte, az a valaki, aki először fordította le ezt a matematikai kifejezést latinra,[2] félreértvén a görög terminus konkrét szaknyelvi jelentését, ugyanennek a szónak a mindennapi használatból ismert jelentésére gondolt; így lett a matematikai δύναμις = „*potentia*" = „*hatalom*", ill. „*hatvány*".

Az itt következő első fejezetben mindenekelőtt olyan matematikai tartalmú görög szöveghelyekből indulok ki, amelyek félreérthetetlenül megvilágítják e szó matematikai jelentését. Megtalálja az olvasó a legfontosabb ilyen antik szöveghelyek gyűjteményét összeállítva az ismert matematikatörténésznek, Heathnek műveiben.[3]

I.

A legfontosabb matematikai tárgyú antik szöveghelyek áttekintése a következő két megállapítást teszi lehetővé a δύναμις szó használatát illetően:

1. Legrégibb forrásunk, amelynek alapján kimutathatjuk, hogy ez a szó csakugyan a matematikai szaknyelv terminus technicusa volt: Platón (i. e. 427—347). De úgy látszik, közismert matematikai szakkifejezés volt ugyanez a szó már a Platónt megelőző időkben is. Platóntól kezdve mindenesetre konkréten is láthatjuk a δύναμις kifejezés

[2] Nem sikerült eddig megállapítanom, hogy vajon a görög „dynamis"-nak, mint matematikai terminusnak a latin *potentia* szóval való fordítása megvolt-e már az ókorban is. Kétségtelen azonban, hogy az arisztotelészi „dynamis"-t, mint az „energeia" vagy „entelecheia" ellentétét — *amely szóhasználat véleményem szerint valószínűleg éppen a matematikai „dynamis" terminusból fejlődött ki* — már Boetius *potentia*-nak fordítja. Erre az utóbbira lásd: „Boetius, De inst. arith. et De inst. mus. ed. G. Friedlein, 1867. Index s. v. és „Boetius, Commentarii in librum Aristoteleis *Peri hermeneias*" ed. C. Meiser, I—II. 1877—1880 Index s. v.

[3] Th. L. Heath, „Archimedes" (1. ed. 1897; 2. ed. with Supplement 1912; Dover Publication, év nélkül). — The Thirteen Books of Euclid's Elements I., II., III." (1. ed. 1908; 2. ed. 1926; Dover Publication é. n.). — „A History of Greek Mathematics I—II." Oxford 1921.

használatát az antik görög matematika bármelyik korszakában. Az antikvitás késői századaiban pedig — pl. az alexandriai DIOPHANTOSnál[4] — már olyan újabb szakkifejezésekkel is találkozunk, amelyeket nyilvánvalóan a régi *δύναμις* terminusból képeztek tovább, pl. *δυναμοδύναμις*, *δυναμόκυβος* stb.[5]

2. Másik megállapításunk viszont, amelyet azonnal igazolhat az antik szöveghelyek vizsgálata, a következő: Feltűnő, hogy ókori matematikai tárgyú szövegeinkben *a δύναμις kifejezés mindig csak második hatványt jelöl, de sohasem fordul elő az, hogy a δύναμις elnevezésen harmadik, negyedik vagy magasabb hatványt értenének.*[6] A szónak ez a jelentése — *δύναμις* = „*második hatvány*" tulajdonképpen mindig érvényben maradt az ókori matematikában. Ezt igazolják azok az újabb keletű kifejezések is, amelyekre DIOPHANTOSszal kapcsolatban épp az előbb utaltam. Mert DIOPHANTOSnál a *δυναμοδύναμις* kifejezés pl. valamely mennyiségnek a „negyedik hatványát" jelenti. Nyilvánvaló, hogy a *δύναμις* szót azért kellett ebben az esetben megduplázni, mert a „dynamis" önmagában nem jelent többet, mint „második hatvány"; a negyedik hatvány viszont: $x^4 = x^2 \cdot x^2$ („dynamis" szorozva „dynamis"-szal). Ugyanígy értendő az előbb idézett másik diophantoszi terminus, a *δυναμόκυβος* is: $x^5 = x^2 \cdot x^3$, „második hatvány" szorozva „harmadik hatvánnyal"; a görög *κύβος* szó ti. ugyanúgy a „*harmadik hatványt*" — azaz tkp. a „*kockát*" — jelenti, mint ugyanennek a szónak latin és magyar formája, a *cubus*, ill. a *köb*.

Ha ezek után gondosan mérlegeljük az utóbbi megállapítást — ti. azt, hogy a görög *δύναμις* mindig csak a „második hatványt" jelenthette —, akkor mindjárt be kell látnunk azt is, hogy *a görög matematika „dynamis" fogalma igazában nem is azonos a mi „potentia" fogalmunkkal.* Mert bár úgy látszik, mintha a latin „*potentia*", mint szakkifejezés, jelentésében pontos tükörképe volna a görög *δύναμις*-nak, mégis a matematikai „*potentia*" fogalma sokkal tágabb, mint a görög matema-

[4] Reá vonatkozóan lásd B. L. v. d. WAERDEN, Erwachende Wissenschaft, Basel—Stuttgart 1956, 457 sk.

[5] TH. L. HEATH, A History ... II. 457—458.

[6] Az „Elemek" X. könyvében a 2. definíció a következő szavakkal kezdődik: *εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν κτλ.* Magyarra ezt a következőképpen fordíthatnánk: „Négyzetesen összemérhetők az egyenes szakaszok akkor, ha stb.". EUKLIDÉS szövegének modern kiadója, J. L. HEIBERG latin nyelvű parafrázisában az idézett görög mondatot így fordítja: „Rectae *potentia* commensurabiles sunt, ubi etc.". Félrevezető ebben a fordításban a „*potentia*" szó használata. Helyesen jegyezte meg éppen az ilyen fordításokra TH. L. HEATH: „*Commensurable in square* is in the Greek *δυνάμει σύμμετρος*. In earlier translations (e. g. Wiliamson's) *δυνάμει* has been translated „*in power*", but as the particular *power* represented by *δύναμις* in Greek geometry is *square*, I have thought it best to use the latter word throughout" („The Thirteen Books ..." III 11.

tikában a *δύναμις* fogalma. Akkor, amikor a görög *δύναμις*-t latinra a „*potentia*" szóval fordították, egyszersmind ki is bővítették az eredeti fogalmat olyan mértékben, amilyenre a görög matematikából nem ismerek példát. Mert megtaláljuk ugyan a görög matematikában a következő hatványformák neveit: „második hatvány" = *δύναμις*, „harmadik hatvány" = *κύβος*, „negyedik hatvány" = *δυναμοδύναμις*, „ötödik hatvány" = *δυναμόκυβος*, „hatodik hatvány" = *κυβόκυβος*,[7] de úgy látszik, *nem volt* a görög matematikában olyan általánosan használt összefoglaló terminus magának a *hatvány* fogalmának a megnevezésére, mint amilyen a mi latin eredetű „*potentia*" szavunk.[8]

Miután megállapítottuk a matematikai *δύναμις* terminus jelentésére vonatkozóan az első fontos tényt — *a δύναμις szó csak „második hatványt" jelölhet* — érdemes lesz jobban megfigyelnünk ugyanennek a terminusnak egy olyan jelentésbeli árnyalatát is, amely azonnal szembeötlik, pl. akkor, ha összehasonlítjuk PLATÓN dialógusaiból az alább tárgyalandó két szövegrészletet.

Az egyik platóni szövegrészlet, amely a matematikai *δύναμις* kifejezés használatát illusztrálhatja, az „Állam" c. dialógusban olvasható.[9] PLATÓN a kérdéses helyen két számról beszél, a 81-ről és a 729-ről. Mint látjuk, mind a kettő 9-nek a hatványa, mert $81 = 9^2$ és $729 = 9^3$. Ezért használja PLATÓN az előbbire azt a görög megjelölést, hogy *κατὰ δύναμιν*, az utóbbira pedig azt, hogy *κατὰ τρίτην ἀύξην*. A két görög kifejezés az adott összefüggésben ugyanazt jelenti, mint amit a magyar „*második hatvány szerint*", illetőleg: „*harmadik hatvány szerint*" kifejezések jelentenének.[10] — Könnyen azt hihetnénk tehát e platóni szövegrészlet vizsgálata alapján, hogy a magyar „második hatvány" formula megfelel a görög *δύναμις* terminusnak. De némileg módosítja ezt a megállapításunkat egy másik platóni szövegrész közelebbi vizsgálata. Ezt a másik szövegrészt a „Politikos" c. dialógusban találjuk.[11]

E másik helyen PLATÓN egy olyan négyzetről beszél, amelynek oldala *1 láb hosszú*. Az ilyen négyzet átlójáról mondja a következő görög szavakat: *ἡ διάμετρος ἡ δυνάμει δίπους*. E szavak — a görög eredetinek megfelelő sorrendben — a következőt jelentik: „*az átló, amely dynamis-ával kétláb*". Jobban megértjük ezeknek az első pillantásra kissé talán különös szavaknak a jelentését akkor, ha arra gondolunk: *milyen hosszú az egységnyi oldalú négyzet átlója?* — Mi ezt a

[7] Lásd föntebb az 5. jegyzetet.

[8] PLATÓN használja ugyan a mi „hatvány" fogalmunk értelmében az *αὔξη* szót — lásd erre vonatkozóan fönt a dolgozat szövegét —, de, úgy látszik, ez mégsem volt általánosan elfogadott matematikai terminus.

[9] Resp. 587 D.

[10] Vö. TH. L. HEATH, A History . . . I. 297.

[11] Politikos 266 B 3.

hosszúságot $\sqrt{2}$-nek mondjuk. De nem így gondolkoztak a görög matematikusok. Ők ti. a $\sqrt{2}$-t egyáltalán nem ismerték el számnak. Azt állították, hogy az egységnyi oldalú négyzet átlójának hosszát *nem mérhetjük meg*, mert ez „nem mérhető az egységgel", inkommenzurábilis mennyiség, de könnyen megmérhetünk ebben az esetben a hosszúság helyett valami mást. Hiszen az a másik négyzet, amelyet az egységnyi oldalú négyzet átlójára emelünk, éppen kétszerese az eredeti négyzetnek.[12] Ezért mondja PLATÓN az egységnyi oldalú négyzettel kapcsolatban — amint ezt az előbb görögül is idéztem: *„az átló, amely a reá emelt négyzettel* — ezt jelenti görögül az a kifejezés, hogy : *„dynamis"*-ával — *kétláb"*. — Azt hiszem, elég világosan kitűnhetik e bemutatott magyarázatból legalább annyi, hogy a most tárgyalt platóni szövegrészlet a δύναμις szót *„négyzet"* értelemben használja.

Módosítanunk kell tehát e másodjára vizsgált platóni szövegrész alapján a δύναμις terminus jelentésére vonatkozó korábbi megállípításunkat. Mert igaz ugyan, hogy ez a szakkifejezés mindig csak „második hatványt" jelöl, és nem lehet ez a szó valamely más, magasabb fokú hatvány neve, de mégis jobban megközelítjük a görög szó értelmét akkor, ha azt állítjuk, hogy ez a matematikai terminus egyszerűen a négyzet-et jelenti. Természetesen adekvátabb ez a szójelentés a görög eredetivel még azokban az esetekben is, amelyekben megnyugtatónak érezzük a szöveg értelmét úgy is, ha a δύναμις terminust nem „négyzet"-nek, hanem modern algebrai szokás szerint „második hatványnak" fordíthatjuk.

II.

Miután sikerült megállapítanunk e dolgozat első fejezetében a δύναμις terminus pontos matematikai értelmét: „négyzet", tulajdonképpen már át is térhetnénk annak a másik, sokkal fontosabb kérdésnek a tárgyalására: vajon mi lehetett az oka annak, hogy a görög matematikusok nem elégedtek meg a közismert τετράγωνον terminussal, hanem bevezettek még egy másik terminust is (δύναμις) ugyanannak a fogalomnak, a „négyzet"-nek a megnevezésére? — De mielőtt áttérnénk ennek a másik kérdésnek a tárgyalására, közbe kell itt még iktatnom egy egész fejezetet a platóni „Theaitétos" c. dialógus egyik részletéről. Foglalkoznom kell ebben az összefüggésben e platóni szövegrésszel főként azért, mert PLATÓN e helyen[13] több ízben használja a δύναμις szót, mint matematikai terminust. Előrebocsáthatom, hogy e szó jelentése a most megbeszélendő platóni szövegösszefüggésben is

[12] Vö. PLATÓN, „Menón" 82 B — 85 E, és dolgozatomat: ANTIK TANULMÁNYOK (STUDIA ANTIQUA) V 1958, 25—43.

[13] „Theaitetos" 147 D — 148 B.

ugyanaz lesz, mint amit e dolgozat első fejezete után várhatunk: „*négyzet*". De mégis újra kell itt bizonyítanom ezt a szójelentést, mivel a matematikatörténészek általában nem úgy magyarázzák a kérdéses platóni szöveget, mint ahogy én fogom. — Mielőtt rátérnék a kérdéses dialógus-részlet ismertetésére, összefoglalom itt három pontban azokat a legismertebb és széles körben elterjedt *téves nézeteket*, amelyeket — a megbeszélendő platóni dialógus-résszel kapcsolatban — szinte bármelyik olyan történeti kézikönyvben megtalálhat az olvasó, amely részletesebben kitér az antik matematikára.

1. *Tévesen* azt állítják, hogy PLATÓN a „Theaitétos" c. dialógusban a δύναμις terminust „négyzetgyök" értelemben használta volna.

2. Főként e részletesen megtárgyalandó platóni szöveg *téves magyrázata* vezetett arra az elképzelésre, amely szerint a kyrénéi THEODÓROS nevű matematikus továbbfejlesztette az irracionalitás elméletét, *bebizonyítván*, hogy nemcsak a már régebben ismert $\sqrt{2}$, hanem a $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ stb. is mind irracionális szám egészen $\sqrt{17}$-ig.

3. THEODÓROSnak az előbbi pontban említett, „félbenmaradt" elméletét építette volna tovább a „nagy matematikus" THEAITETOS.

Ki fogom mutatni, hogy e három pontban összefoglalt állítások a platóni szöveg félreértésén alapulnak, s mint ilyenek, tévesek. — Mellékesen megjegyzem még, hogy a 3. pontban említett állítás része az ún. „Theaitétos-legendának".[14] „Theaitétos-legenda" néven foglaljuk össze azt a történeti problémát, hogy vajon csakugyan élt-e PLATÓN korában egy olyan THEAITÉTOS nevű nagy matematikus, akiről PLATÓN ugyanilyen nevű dialógusát elnevezte? — Ezt az utóbbi kérdést dolgozatom igazában *nem dönti el még*. Csak annyi fog kiderülni az alábbiakból minden kétséget kizáróan, hogy az a részlete a platóni „Theaitétos" c. dialógusnak, amelyet tárgyalni fogok, *semmi esetre sem lehet pozitív értelmű bizonyíték a „Theaitétos-legenda" kérdésében*. — Ezek után pedig lássuk a problematikus dialógus-részletet.

Ha meg akarjuk érteni a „Theaitétos" c. dialógusnak azokat a részeit, amelyekben a δύναμις szó egymásután többször is előfordul mint matematikai terminus, a következőkre kell visszaemlékeznünk a szöveg előzményeiből:

A dialógus SÓKRATÉS beszélgetése az ifjú THEAITÉTOSszal arról a kérdésről, hogy mi a tudás. THEAITÉTOSra a szintén jelenlevő matematikus, THEODÓROS hívta fel SÓKRATÉS figyelmét, mint olyan fiatalemberre, aki rendkívül tehetségesnek bizonyult a matematika tanulásá-

[14] Ez a megjelölés K. REIDEMEISTERtől származik. Ő írta „Das exakte Denken der Griechen" c. könyvében (Hamburg 1949, 24): „... ich kann mich des Verdachts nicht erwehren, dass THEÄTET der Mathematiker nur eine Legende ist, die sich um den THEÄTET des Platonischen Dialogs krsitallisiert hat".

ban. Ilyen előzmények után teszi fel SÓKRATÉS THEAITÉTOSnak a kérdést: „mi a tudás?" (*τί σοι δοκεῖ εἶναι ἐπιστήμη*, 146 C 3). De THEAITÉTOS nem tud felelni erre a kérdésre, illetőleg válasza meglepően gyerekes, primitív. Ahelyett ugyanis, hogy megpróbálná definiálni a kérdezett fogalmat, egyszerűen felsorolásba kezd, felsorolja azokat a dolgokat, amelyeket tudásnak tart: először is mindazt, amit THEODÓROStól tanulhat az ember (geometria, asztronómia, zene, számolás stb.); de tudás ezeken kívül még a cipőkészítő meg a többi kézműves mestersége is, stb. stb. SÓKRATÉS természetesen nincs megelégedve ezzel a válasszal. Mert ő nem felsorolást akart, hanem általános, összefoglaló meghatározást szeretett volna hallani arról, hogy mi a tudás. Mindjárt példán is illusztrálja a THEAITÉTOS által elkövetett hibát. THEAITÉTOS válasza a feltett kérdésre éppenolyan nevetséges (147 B 10—11), mint pl. az volna, ha arra a kérdésre, hogy „mi a sár," ilyenfajta felsorolásba kezdenénk: van kőműves-sár, fazekas-sár, vályogvető-sár stb. A helyes válasz ezzel szemben valami ilyesmi volna: a sár egyfajta vízzel kevert föld. — THEAITÉTOS igazában csak ez után a magyarázat után érti meg, mit is kérdezett voltaképpen SÓKRATÉS az előbb. Igen, most már tudja, miről van szó. Hiszen ugyanilyen feladat előtt álltak, ő, THEAITÉTOS, meg szintén jelenlevő egykorú barátja — akit ugyanúgy SÓKRATÉSnek hívnak, mint a dialógus vezetőjét — mesterüknek, THEODÓROSnak egyik matematika-órája után. — Erre a dialógus vezetője, SÓKRATÉS, természetesen elmesélteti THEAITÉTOSszal, miből is állott matematikai tapasztalata, amelyre célzott, mert igazában csak ebből derülhet ki most, érti-e már THEAITÉTOS SÓKRATÉS kérdését.[15] — Nagyjából ez a kerete annak a szövegrésznek, amellyel a következőkben részletesebben foglalkozom. THEAITÉTOS ugyanis így folytatja elbeszélését:

„THEODÓROS, akit itt látsz, rajzolt elénk valamit a négyzetekre vonatkozóan (*περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν ... ἔγραφε* 147 D 2 kk.) a három négyzetlábnyi meg az öt négyzetlábnyi területűről (*τῆς τε τριποδος πέρι καὶ πεντέποδος*), megvilágítván előttünk, hogy ezek oldalaikat tekintve nem összemérhetőek az egységlábnyi négyzet oldalával (*ἀποφαίνων ὅτι μῆκει οὐ συμμέτροι τῇ ποδιαίᾳ*); így vette sorba a négyzeteket egymásután mind egészen a 17 négyzetláb területűig. Ennél aztán abbahagyta." — Álljunk meg e mondatnál egy pillanatra, mert

[15] Arra vonatkozóan, hogyan magyarázták a matematika történetírói a dialógus egészét, jellemző lehet pl. a következő: „PLATON gibt im Dialog auch ein Beispiel *einer mathematischen Untersuchung des Jungen* THEAITETOS (?). Das Beispiel ist ziemlich *an den Haaren herbeigezogen* (?): Es sollte als Einleitung zu einer philosophischen Diskussion dienen, *passt aber nicht recht dazu* (?)" (B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 272). — Kiemeltem és megkérdőjeleztem ebből az idézetből azokat az állításokat, amelyeket dolgozatom az alábbiakban cáfolni fog.

fordításomat — legalább egyik-másik részletében — közelebbről is meg kell okolnom.

Idézetem első mondatában a *δύναμις* szót természetesen „négyzet"-nek fordítottam, minthogy véleményem szerint ez az egyetlen lehetséges és helyes fordítás. De nem így fordítják ugyanezt a mondatot a matematika történetírói.[16] Ők ugyanis úgy gondolják, hogy THEODÓROS igazában mégsem az említett négyzetekről, hanem e négyzetek *oldalairól* tanított valamit, és hogy éppen ezért az idézett szövegben a *δύναμις* szó nem is magát a négyzetet, hanem a négyzet *oldalát* jelentené. — Rá fogok mutatni később arra, miért téves ez az állítás. (A *δύναμις* szó *nem jelentheti* természetesen ebben a szövegben sem a négyzet *oldalát*.) Mielőtt azonban rátérnék ennek a bizonyítására, nem lesz talán fölösleges visszapillantanom arra a másik kérdésre: mi lehet az oka annak, hogy a legutóbbi száz év során a matematika legkiválóbb történetírói úgyszólván mind, kivétel nélkül, következetesen félreértették ezt a platóni szövegrészt.

Tudomásom szerint az első, aki szövegünket a legújabb korban félreértette, P. TANNERY volt. Neki támadt még 1876-ban az a téves ötlete, hogy a *δύναμις* szó a „Theiatétos" c. dialógusban a „négyzetgyök"-öt jelenti.[17] Nyolc évvel később TANNERY egy másik dolgozatában[18] belátta ugyan már tévedését — a *δύναμις* szó *nem jelenthet* „négyzetgyök"-öt — és ezúttal inkább azt javasolta már: javítsuk ki a tárgyalt szövegrészben a *δύναμις* szót mindenütt *δυναμένη*-re, mert így könnyebben érthető mindaz, amit THEAITÉTOS elmond. De ezzel az újabb tévedésével nem volt már olyan „szerencséje" TANNERYnak, mint a megelőzővel; a történészek nem fogadták el javaslatát.[19] Ami viszont korábbi ötletét illeti, hiába tagadta meg ezt TANNERY még

[16] Az általam ismert helytelen fordítások közül megemlítem egyelőre a következőket: B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 234; TH. L. HEATH, A History ... I 203; A. FRAJESE, La matematica nel mondo antico, Roma 108—109; M. T. CARDINI, Pitagorici, Testimonianze e Frammenti, Firenze 1962 75 kk. stb. — Ezekkel szemben nyomatékosan fel kell hívnom a figyelmet O. APELT hibátlan fordítására: „Platons Dialog Theätet, übers. u. erl. von O. A., Leipzig 1911, zweite der neuen Übersetzung erste Auflage". — A gyűjteményes magyar Platón-fordítás („Platón Összes Művei I—II. Magyar Filozófiai Társaság, Budapest 1943) HALASY—NAGY J. Theaitétos-fordítását publikálta. Úgy látszik, a magyar fordító O. APELT német szövegét követhette, mert bár a magyar fordítás egésze bosszantóan rossz, a bennünket érdeklő rész mégis *több szempontból* feltűnően jól sikerült.

[17] „Le nombre nuptial dans Platon", Revue Philosophique 1876, I 170—188--Mémoires Scientifiques (J. L. HEIBERG—H. G. ZEUTHEN, Toulouse—Paris 1912 I 12—38. — A mellékes megjegyzés, amelyre fönt utalok: Mém. Scient. I 33 not. 2.

[18] „Sur la langue mathématique de Platon", Annales de la Faculté des lettres de Bordeaux 1884, I. 95—105=Mém. Scient. II. 91—104.

[19] Vö. pl. B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 234: „es ist nicht nötig, mit TANNERY das Wort *δύναμις* durch *δυναμένη* (Erzeugende) zu ersetzen".

később is újra (pl. 1899-ben[20]), az egyszer leírt téves gondolat halhatatlannak bizonyult szinte mind e mai napig.[21] Sőt, annyira szívós életű volt TANNERYnek e többször visszavont tévedése, hogy később *öntudatlanul* még ő maga is újra megismételte, pl. egyik 1902-ben közölt dolgozatában.[22]

Lássuk ezek után mindenekelőtt azt a kérdést: miért *nem* jelentheti a δύναμις szó a vizsgált platóni szövegben a négyzet *oldalát* (vagy más szóval: a „négyzetgyök"-öt). Két érvem erre a következő.

1. Tudomásom szerint a δύναμις kifejezés az ókori matematikai irodalomban soha mást nem jelentett, mint „*négyzet*"-et.

2. Mind a grammatika, mind pedig a szöveg tartalma (Theait. 147 D 3 kk.) egyformán amellett szólnak, hogy a δύναμις kifejezés a most vizsgált összefüggésben is csak „négyzet"-et jelenthet. Mert ha megpróbálnánk a kérdéses mondatban a δύναμις-t „négyzet*oldal*"-nak fordítani, egyszerre értelmetlenné (hamissá) válnék a mondanivaló maga. A kérdéses mondatrészek ugyanis görögül így hangzanak: περὶ δυνάμεων... Θεόδωρος ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος καὶ πεντέποδος... Azt kell mármost eldöntenünk, hogy vajon a többes genitivusban álló szót (δυνάμεων) „négyzet"-nek vagy „négyzet*oldal*"-nak fordítsuk-e? De mielőtt lefordítanánk ezt a kifejezést, vegyük észre azt is, hogy van ennek a problematikus szónak két appositioja. Hiszen a másik két szó mellette azért áll egyes genitivusban — τρίποδο· és πεντέποδος — mert ezek az előrebocsátott többes genitivusnak az appositioi. Ebből viszont az következik, hogy ha „négyzet*oldal*"-nak fordítjuk a többes genitivusban álló szót, akkor „négyzet*oldal*"-ra kell vonatkoznia a két appositionak is. Csakhogy mit jelent ebben az esetben az egész mondat? — Nyilván a következőt: „THEODÓROS rajzolt elénk valamit a négyzet*oldalakról*, ti. *a három- és ötláb hosszú négyzetoldalról, megvilágítván előttünk, hogy ezek (az oldalak) összemérhetetlenek az egységlábnyi négyzetoldallal*". — Mint látjuk, a mondat így értelmetlen, sőt hamis, hisz olyasmit állít, ami nem igaz! *Ugyan miért volna összemérhetetlen a három- és ötláb hosszú négyzetoldal az egyláb hosszúval?* Pedig más értelemben a szöveget — ha csakugyan „négyzet*oldal*"-t jelent a δύναμις szó, és ha tekintettel vagyunk a grammatikára[23] — egyáltalán nem is

[20] „L'hypothèse géométrique du Ménon du Platon", Archiv f. Gesch. d. Philosophie II. 509—514 = Mém. Scient. II. 400—406.

[21] Vö. pl. TH. L. HEATH, The Thirteen Books ... II. 288; A History ... I. 209 n. 2; vagy B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 234, 272 stb.

[22] „Du rôle de la musique Grecque dans le développement de la mathématique pure", Bibliotheca Mathematica, 3. Folge III. 1902. 161—175 = Mém. Scient. III. 68—69. (Lásd alább a 39, 40 és 41. jegyzetekhez kapcsolódó szövegrészt is!)

[23] Természetesen észrevették a matematikatörténészek is, hogy a δύναμις szó általuk adott téves értelmezése az adott helyen tönkreteszi a görög szöveget. Ezért túltéve magukat a grammatikán, úgy fordították PLATÓN szövegét, hogy az

fordíthatjuk. — A félreértésre nyilván az adta az okot, hogy a *τρίπους* és *πεντέπους* szavak egyformán jelölhetnek hosszúságot is meg területmértéket is. Hogy e két szó az adott mondatban területmértéket és *nem* hosszúságmértéket jelöl, az következik egyszerűen abból, hogy a mondat a „háromlábnyi és ötlábnyi" *valamiknek* az inkommenzurábilitásáról beszél. Világos, hogy azok a „három- és ötlábnyi *valamik*", amikről itt szó van, csak a *négyzetek* maguk lehetnek, de összemérhetetlenek *nem* e „három és ötlábnyi valamik", hanem oldalaik. Ha viszont a *τρίποις* és *πεντέπους* szavak az adott összefüggésben *nem* hosszúság-, hanem területmértéket jelölnek, akkor ebből szükségszerűen következik, hogy az a szó, amelyre e két appositio vonatkozik, a *δύναμις* maga az adott mondatban csak „*négyzet*"-et jelenthet, és semmi esetre sem lehet: „négyzet*oldal*".

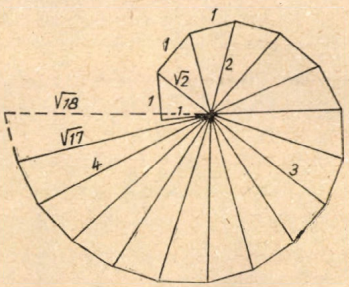
Túlságosan messzire vezetne, ha kitérnék itt még annak a megmutatására is, milyen károsan befolyásolta a platóni szövegkiadást az a körülmény, hogy nem értették meg világosan az éppen most interpretált mondat matematikai tartalmát.[24] Megelégedhetünk ebben az összefüggésben annak a ténynek a leszögezésével, hogy a *δύναμις* szó ezen a helyen is egyértelműen „négyzet"-et jelent. — Fontos azonban, hogy világosan megértsük: miről is beszélt tulajdonképpen THEODÓROS a tanítványai előtt?

Mindenekelőtt állapítsuk meg: úgy látszik, olyan négyzetekkel foglalkozott, amelyeknek területe *egész számú négyzetlábakban* kifejezhető, hiszen szövegünk a három- és öt négyzetlábnyi területű négyzeteket említi példaként, és azt mondja, hogy THEODÓROS ez után a két négyzet után a többit is mind sorra vette a 17 négyzetláb területű négyzetig. Világos tehát, hogy csupa olyan négyzetről beszélt THEODÓROS, amelyeknek területe egész számú négyzetlábakban megadható. — Érdemes lesz talán megemlítenünk azt is — bár PLATÓN szövege erre a kérdésre *nem* tér ki — hogyan szerkeszthetünk ilyen négyzeteket. Legkézenfekvőbbnek az látszik, hogy az ún. Pythagoras-tételből induljunk ki és olyan derékszögű háromszögeket konstruáljunk, amelyeknél a befogók négyzetösszege a kívánt számot adja. Ha pl. azt a négyzetet keressük, amelynek területe *öt négyzetláb*, akkor kiindulhatunk abból a derékszögű háromszögből, amelynek egyik befogója 1, másik befo-

— matematikai tartalmát tekintve — nagyjából helyes maradt ugyan, de nyelvi szempontból egyszerűen hajmeresztő. Ilyen nyelvi szempontból elfogadhatatlan fordítás pl. a következő: „THEODORUS was proving to us a certain thing about *square roots* (*δυνάμεις*), I mean *(the square roots i. e. sides)* of *three square feet and five square feet*, namely that these roots are not commensurable in length with the footlength etc." (TH. L. HEATH, A History ... I. 203).

[24] Erre vonatkozóan inkább utalok dolgozatomra a MAIA c. folyóiratban: XV. 1963. 219—256

gója pedig 2 láb; az ilyen derékszögű háromszög átfogójára emelt négyzet öt négyzetláb területű lesz, mert $1^2+2^2 = 5$. — Vagy egy másik módja volna a Pythagoras-tétel alkalmazásának — amellyel mindjárt sorozatosan is előállíthatjuk azokat a négyzeteket, amelyekről THEODÓROS beszélt — a következő: Induljunk ki abból a négyzetből, amelynek oldala 1 láb hosszú. Ennek a négyzetnek az átlója adja azt a második négyzetet, amelynek területe 2 négyzetláb. (Azaz modern terminológiával élve: a kiindulásul vett négyzet átlója a $\sqrt{2}$.) Ha viszont utána a felhasznált második derékszögű háromszög átfogóját tekintem egy olyan újabb derékszögű háromszög hosszabb befogójának, amelynek rövidebb befogója újra az egység, akkor e harmadik derékszögű háromszög átfogója megadja a harmadik négyzetnek az oldalát, azét, amelynek területe 3 négyzetláb ($1^2+(\sqrt{2})^2 = 3$), illetőleg oldala: $\sqrt{3}$. — Ezt a műveletet — amint az alábbi ábra mutatja — éppen a 17. négyzetig (a $\sqrt{17}$-ig) folytathatjuk. Ezért volt feltehető, hogy talán éppen ilyen ábrán illusztrálta THEODÓROS a tanítását THEAITÉTOS és tanulótársai előtt.[25]



Érdekesek mármost a THEODÓROS által bemutatott négyzetek a következő szempontból. Vegyük pl. a *három* és az *öt* négyzetláb területűt, tehát éppen azt a kettőt, amelyet THEAITÉTOS is kiemel beszámolójában. E két négyzet, területét tekintve, többszöröse a négyzetegységnek, azaz minden további nélkül összemérhető a területmérés egységével. Ugyanakkor azonban e két négyzet oldala nem mérhető a hosszúság egységével, vagyis görög felfogás szerint nincs olyan két szám, amellyel meg lehetne határozni e két négyzet oldalának hosszát. — Minthogy a beszámoló szerint THEODÓROS ezután sorra vette a négyzeteket mind a 17 négyzetláb területűig, nyilvánvaló, hogy az előbbi kettőn kívül még további tíz olyan négyzetet tudott bemutatni, amelyeknek oldala hasonlóképpen inkommenzurábilis a hosszúság egységével. (Ezek ti. a következő négyzetláb területű négyzetek: 6, 7, 8, 10, 11, 12,

[25] Vö. B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 235.

13, 14, 15, 17.) Kérdés azonban: *vajon* THEODÓROS *kihagyta-e közben a 4, a 9 és a 16 négyzetláb területű négyzeteket?* — Természetesen: *nem!* Hiszen demonstrációjának célja — mint majd látni fogjuk — igazában csak az lehetett, hogy felhívja a figyelmet a kétféle négyzet különbségére: arra, amelynek csak a területe kommenzurábilis, de nem kommenzurábilis az oldala, és arra a másikra, amelynek mind a területe, mind pedig az oldala kommenzurábilis.

De mielőtt továbbfolytatnám a Platón-szöveg interpretációját, érdemes lesz itt közbevetőleg emlékeztetnem arra, hogyan magyarázzák ugyanezt a szöveget a matematika történetírói általában.

Súlyos tévedés volt TANNERY részéről még 1884-ben a következő magyarázat: „Nem kétséges, hogy PLATÓN ezen a helyen két értekezésre céloz. Az egyik, a régebbi, a kyrénéi THEODÓROSÉ, a másik, az újabb, barátjáé, THEAITÉTOSÉ. Éppen azt meséli el, hogyan született meg az utóbbi értekezés egyik alapvető gondolata. Minthogy pedig ennek az alapvető gondolatnak a megtalálásában segítségére volt THEAITÉTOSnak — az elbeszélés szerint — egy ifjú barátja is, akit SÓKRATÉSnek hívnak, eléggé kézenfekvő arra gondolnunk, hogy ezzel az utóbbi személlyel, az „ifjú SÓKRATÉS"-szel PLATÓN tkp. önmagára céloz."[26] — Szinte azt mondhatnám: TANNERYnek ezekkel a szavaival kezdődött a „Theaitétos-legenda" modern változata.

Mert világos, hogy TANNERY hatása alatt állnak azok a történészek, akik még ma is azt hiszik, hogy a vizsgált Platón-szöveg igazában két dologról szól:

1. THEODÓROS *bebizonyította* a $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}$ irracionalitását, anélkül, hogy általános tételt tudott volna fölállítani és *bebizonyítani* magáról az irracionalitásról.[27] (Jóllehet PLATÓN egyáltalán nem említi THEODÓROS bizonyításait, mégis, mint az előbbi ábrán láttuk, szellemes sejtéseket állíthatunk fel arra vonatkozóan is, hogyan demonstrálhatott THEODÓROS.[28])

2. Úgy gondolják, hogy THEODÓROS félbemaradt elméletét THEAITÉTOS tökéletesítette. Sőt azt hiszik, PLATÓN szövegéből rekonstruálhatjuk azt a tételt is, amelyben THEAITÉTOS elmélete kulminált; ez az utóbbi valahogy így hangzott volna: „*Azok a szakaszok, amelyek olyan négyzetet alkotnak, hogy a felület kifejezhető ugyan egész számban, de nem négyzetszámban, nem mérhetők a hosszúság egységével.*"[29]

[26] Lásd föntebb a 18. jegyzetet. Mém. Scient. II. 93.

[27] TH. L. HEATH, A History ... I 203: "It does not appear, however, that he had reached any definition of a surd in general or proved any general proposition about all surds etc."

[28] Lásd föntebb a 25. jegyzetet.

[29] B. L. v. d. WAERDEN (o. c. 273) így rekonstruálja THEAITÉTOS tételét: „Strecken, die ein Quadrat erzeugen, dessen Flächeninhalt wohl eine ganze Zahl, jedoch keine Quadratzahl ist, haben kein gemeinsames Mass mit der Längeneinheit."

Az éppen felsorolt két ponttal szemben a következőkre kell felhívnom a figyelmet:

a) Valószínű ugyan, hogy THEODÓROS be is tudta bizonyítani az általa vizsgált négyzetoldalak inkommenzurábilitását. Hiszen, ha arra gondolunk, hogy a görög matematikusok ebben az időben már nagyon is tisztában voltak a matematikai bizonyítás jelentőségével, minden további nélkül feltehető, hogy THEODÓROS csakugyan bizonyítással adta elő tételeit. De PLATÓN szövege mégsem említi egy szóval sem THEODÓROS *bizonyításait*. (A matematikai *bizonyítás* terminus technicusa — a δείκνυμι szó — egyáltalán elő sem fordul vizsgált szövegünkben.) Ha tehát az 1. pontban említett interpretáció mégis THEODÓROS *bizonyításait* állítja az érdeklődés középpontjába, ezzel máris elősegíti egy olyan szövegnek a félreértését, amely a *bizonyítás* kérdését egyáltalán nem említi, hanem valami egészen mást állít előtérbe.

b) Még kevésbé lehet szó arról, hogy a platóni dialógusban szereplő THEAITÉTOS — függetlenül attól a kérdéstől, hogy csakugyan élt-e ez idő tájt egy THEAITÉTOS nevű matematikus, akinek emlékét PLATÓN a dialógusában meg akarta volna örökíteni — *továbbfejlesztette vagy tökéletesítette volna* THEODÓROS *elméletét*. Aki ilyesmit olvas ki PLATÓN művéből, az egyszerűen *félreérti a görög szöveget*. Mert ebben semmi többről nincs szó, mint arról, hogy THEAITÉTOS *megértette* THEODÓROS tanítását. Figyeljük csak meg jól, mit is mond a platóni THEAITÉTOS. — Miután megemlítette, hogy THEODÓROS a 17 lábnyi területű négyzetnél abbahagyta demonstrációját, így folytatja:

„Mi mármost a következőre gondoltunk (*ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον*). Miután nyilván végtelen sok négyzet van (*ἔπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο*), meg kellene kísérelnünk, hogy ezeket mind egybefogjuk (*πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν*); mi szerint nevezhetnénk el az összes négyzeteket mind (*ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις*)?"

Úgy látszik tehát: THEAITÉTOS és barátja tudják, hogy *végtelen* sok olyan négyzet van, amelyek közül THEODÓROS csak egynéhányat mutatott be. Mert THEODÓROS tulajdonképpen a *számokat* vette elő 3-tól 17-ig, hozzárendelvén minden számhoz egy-egy négyzetet oly módon, hogy bármelyik szám ne csak a hozzárendelt négyzet sorszámát jelölje, hanem megadja egyszersmind ennek a négyzetnek a területét is. Minthogy viszont a számok sora végtelen, nyilván végtelen lesz azoknak a négyzeteknek a sora is, amelyek a számokhoz az előbbi módon hozzárendelhetők. THEAITÉTOS és barátja tehát e végtelen sok (egész számban kifejezhető területű) négyzetre keres összefoglaló nevet. (Közben hallgatólagosan magától értetődőnek tartják — THEAITÉTOS és barátja —, hogy e végtelen sok négyzet mindegyikének meglesz a kettő közül az egyik olyan tulajdonsága, amely két tulajdonságot THEODÓROS a 3-tól

17-ig terjedő négyzeteken illusztrált!) — Mellékesen megjegyzem még, hogy a görög szöveg alapján az első pillantásra az lehetne talán a benyomásunk, mintha THEAITÉTOS és társa *egy* ilyen összefoglaló nevet keresnének. A valóságban, természetesen, nem *egy*, hanem *két* ilyen nevet kell találniok — és fognak is találni —, mint ahogy THEODÓROS is a 3-tól 17-ig terjedő négyzeteknek *kétféle* tulajdonságát mutatta be.

Közbevetőleg fel kell azonban tennünk a kérdést: mi köze THEAITÉTOS egész elbeszélésének SÓKRATÉS eredeti kérdéséhez? Hogyan függ össze ez a „matematikai kitérés" a dialógus egészével? Vagy talán azoknak volna igazuk, akik azt állítják, hogy ennek az exkurzusnak alig van valami köze a dialógus igazi témájához, SÓKRATÉS ismeretelméleti kérdéséhez?[30] — Azt hiszem, ezt az utóbbi elméletet határozottan vissza kell utasítanunk. Az összefüggés nyilván a következő: SÓKRATÉSnek arra a kérdésére, hogy „mi a tudás?" — THEAITÉTOS *felsorolással* válaszolt; megpróbálta felsorolni mindazt, amit tudásnak tart. De SÓKRATÉS nem volt megelégedve a válasszal, a *felsorolás* helyett *összefoglaló jellemzést* kívánt. (Arra a kérdésre, hogy „mi a sár?" — szintén nem felelhetünk *felsorolással;* ebben az esetben is *összefoglaló jellemzésre* kell törekednünk.) — Nagyjából ugyanez történt THEODÓROS matematika-óráján is. THEODÓROS ugyanis egész számokban megadható területű négyzeteket mutatott be tanítványainak, 3-tól 17-ig — miközben felhívta figyelmüket e négyzetek egyik érdekes tulajdonságára (kommenzurábilis, illetőleg inkommenzurábilis négyzetoldalak). E négyzetek bemutatása alig volt több, mint puszta *felsorolás*. Mivel azonban THEODÓROS felsorolás közben utalt is a bemutatott négyzetek egyik tulajdonságára, a tanítványoknak — bizonyos számú példa után — a bemutatott négyzetek *összefoglaló jellemzésével* kellett dokumentálniok, hogy csakugyan megértették a mester tanítását.

Kétségtelen, hogy van PLATÓN szövegében egy olyan kitétel, amely az első pillantásra azt a gyanút ébresztheti bennünk, hátha mégis volt THEODÓROS tanítványaiban némi *önálló kezdeményezés:* „mi mármost arra gondoltunk, hogy *(ἡμῖν οὖν εἰσῆλθε . . .)* stb." Mintha ezek a fiatalok mégiscsak *kiegészítették volna* bizonyos értelemben THEODÓROS tanítását a kétfajta négyzetoldalról — legalább annyiban, hogy találó neveket adtak e négyzetoldalaknak. De ha jobban meggondoljuk, be kell látnunk: THEODÓROS tanítása olyan szorosan összefügg azzal, ami a THEAITÉTOS által „megtalált" elnevezésekben jut kifejezésre, hogy a kyrénéi tanítómester nyilván előre, magától is tisztában lehetett azzal, amit jó pedagógus módjára tanítványaival fedeztetett fel.[31]

[30] Lásd föntebb a 15. jegyzetet.

[31] Jellemző egyébként, hogy maga TANNERY is érezte a „THEAITÉTOS felfedezéséről" szóló elméletének a gyengéjét. Erre mutatnak következő szavai: „le singulier, à nos yeux, est que cette généralisation (vagyis a platóni THEAITÉTOS állítólagos

THEAITÉTOS így folytatja beszámolóját:

„A számokat mind két csoportra osztottuk. Azokat, amelyek felfoghatók két egyenlő tényező szorzataként, a geometriai négyzetalakhoz hasonlítottuk és elneveztük őket *egyenlő oldalú és négyzetszámoknak*... Azokat a számokat viszont, amelyek az előbb említettek közé esnek — mint a 3, az 5, és általában mindazok a számok, amelyek nem bonthatók fel két egyenlő, hanem csak két egyenlőtlen tényező szorzatára —, ezeket a téglalaphoz hasonlítottuk és elneveztük őket *egyenlőtlen oldalú (oblongum) számoknak*."

A számoknak ezzel a két csoportra osztásával párhuzamos a hozzájuk rendelt négyzeteknek (illetőleg pontosabban: e négyzetek *oldalainak*) két csoportra osztása. Mint folytatólag olvassuk:

„Azokat a szakaszokat, amelyek az egyenlő oldalú négyzetszámoknak megfelelő négyzeteket határolják, a „*hosszúság*" (*μῆκος*) szóval jelöltük meg; azoknak a szakaszoknak viszont, amelyek az egyenlőtlen oldalú számoknak megfelelő négyzeteket határolják, a „*négyzet*" (*δύναμις*) nevet adtuk, minthogy ezek az utóbbi szakaszok hosszúságukat tekintve inkommenzurábilis mennyiségek ugyan, de mégis mérhető, kommenzurábilis mennyiségek ugyanezek a szakaszok azok szerint a *négyzetfelületek* szerint, amelyeket határolnak."[32]

Ezzel tulajdonképpen már le is zárhatnám a szöveg parafrázisát. (THEAITÉTOSnak az a kiegészítő megjegyzése, hogy ő és társa, az ifjabb SÓKRATÉS, hasonló elnevezéseket vezettek be a *testekkel* kapcsolatban is, számunkra e dolgozat szempontjából nem lényeges most.) Valójában csak egy pontban kell még jobban megvilágítanom az előbbi parafrázist.

Amint a fordításból látható: THEAITÉTOS a *δύναμις* szót egyfajta négyzet*oldal* megjelölésére is használja. Mert azoknak a négyzeteknek az oldalait, amelyek a 4, 9, 16, 25, 36, ... négyzetlábnyi felületeket határolják, a *hosszúság* (*μῆκος*) szóval jelölték meg THEODÓROS tanítványai; a másikfajta négyzetek oldalai viszont — tehát pl. a 12 vagy 13 négyzetlábnyi négyzet oldala, vagyis azoknak a négyzeteknek az oldalai, amelyeknek területe egész számban kifejezhető ugyan, de ez az egész szám *nem négyzetszám* — az ilyen négyzetek oldalai a „*δύναμις*" elnevezést kapták. — Ezt a tényt a matematika történetírói eddig a következő-

---

műve), *qui n'offrait aucune difficulté sérieuse, n'ait pas été faite par* THÉODORE *de Cyrène, que celui ci se soit borné á montrer, sur un grand nombre de cas particuliers, comment se traitait la question de la commensurabilité ou de l'incommensurabilité d'une racine* etc." (Mém. Scient. II. 96).

[32] Nyomatékosan hangsúlyoznom kell, hogy e fordítás, tartalmát tekintve, *kínosan pontos*. Egy hajszállal sem mond többet vagy kevesebbet, mint PLATÓN szövege. De fordításom *mégsem szó szerinti*. A szó szerinti fordításból ugyanis — ebben az adott esetben — a mai olvasó egyszerűen semmit sem érthetett volna meg.

képpen értékelték: íme, a konkrét bizonyíték arra, hogy a *δύναμις* szó, mint matematikai terminus, „négyzet*oldalt*" is jelenthet![33] — Végtelen sajnálatomra a leghatározottabban el kell utasítanom ezt az elhamarkodott következtetést. Ha jobban megnézzük a görög szöveget, mindjárt belátjuk majd, hogy a *δύναμις* szó ebben az esetben sem „négyzet*oldalt*", hanem — minden kétséget kizáróan — „*négyzet*"-et jelent. (Hangsúlyoznom kell itt azt is, hogy a szöveg pontos megértéséhez való ragaszkodás távolról sem „filológus szőrszálhasogatás" részemről. Hiszen látni fogjuk majd, hogy többek között éppen a szónak felületes, csak nagyjából való megértése volt az egyik oka annak is, hogy azok a kiváló matematikusok és történészek, akik már többször foglalkoztak ugyanezzel a platóni szövegrésszel, nem érthették meg a görög matematika *δύναμις* fogalmát!)

Mindenekelőtt döntsük el a következő kérdést: vajon miért jelöli THEAITÉTOS és társa az egyik fajta négyzetek (4, 9, 16, 25, . . .) oldalait a *hosszúság* (*μῆ ος*) szóval? — Nyilván azért, mert ezek a négyzetoldalak (2, 3, 4, 5, . . .) hosszúságuk szerint is (*μήκει*) mérhetők a hosszúság egységével. Helyesen jegyezték meg a történészek, hogy az itt használt theatétoszi megjelölés (*μῆκος*) nyilván ugyanaz, mint az euklidészi „Elemek" X. könyvének közismert terminusa: *μήκει σύμμετροι* = „mérhető a hosszúság egységével" (lineárisan kommenzurábilis).[34] Valóban, a theaitétoszi név — *μῆκος* = „*hosszúság*" — egyszerűen csak rövidített formája az idézett euklidészi terminusnak. — De hiszen akkor ugyanez a megállapítás érvényes kell hogy legyen a THEAITÉTOS és társa által használt másik megjelölésre is! A másikfajta négyzetek oldalai nyilván azért kapják a „*négyzet*" = *δύναμις* elnevezést, mert ezek a négyzetoldalak nem mérhetőek ugyan a hosszúság egységével, de mérhetőek ebben az esetben nem maguk a szakaszok, hanem az általuk határolt *négyzetek* (a „dynamis"-ok és nem a „mékos"-ok) a területmérés egységével. THEAITÉTOS megjelölése ezúttal sem lehet más, mint rövidített formája ennek a másik terminusnak: *δυνάμει σύμμετρος* = „*mérhető (kommenzurábilis) aszerint a négyzet szerint, amelyet határol, illetőleg: amelyet reá emelünk*". Csakugyan, az éppen rekonstruált matematikai terminust megtaláljuk — ugyanúgy mint az előbbit — az „Elemek" X. könyvében; pl. a 2. definíció ebben a könyvben így kezdődik: *εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν κτλ.* = „*Négyzetesen összemérhetők az egyenes szakaszok akkor, ha* stb."[35]

[33] TH. L. HEATH, A History ... I 209 n 2: „... the *δύναμις* of THEAETETUS's definition is undoubtedly *the square root of a non-square number, a surd*". — Ugyanebben az értelemben ír B. L. v. d. WAERDEN is (o. c. 234).

[34] Vö. B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 234.

[35] Helyesen fordítja C. THAER (Die Elemente von Euklid, I—V. Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Leipzig 1933—1937) az idézett görög kifejezést németül a „*quadriert kommensurabel*" terminussal.

Azt hiszem, a bemutatott gondolatmenet bárkit meggyőzhet arról, hogy a δύναμις szó, mint matematikai terminus, a „Theaitétos" c. dialógus megvizsgált részében is egyértelműen „*négyzet*"-et jelent.

III.

Miután az eddigiek többé-kevésbé meggyőzhették már az olvasót arról, hogy a δύναμις kifejezés, mint matematikai terminus, úgy látszik, csakugyan mindig „*négyzet*"-et jelentett, vizsgáljuk meg most azt a másik kérdést: vajon mi lehetett az oka annak, hogy a görög matematikusok bevezették, illetőleg: *megteremtették* ezt a különös szakkifejezést? Hiszen van a görög matematikának világos, mindenki számára azonnal érthető szava, terminus technicusa a „négyzet" megnevezésére; ez a másik közönséges, jólismert terminus a τετράγωνον szó. E mellett a gyakran használt geometriai kifejezés mellett — τετράγωνον — a δύναμις megjelölés, amely sokkal ritkábban és — talán — *csak bizonyos esetekben* (?) használatos „négyzet" jelentésben, akárhogy is vesszük, kissé meglepő, sőt *érthetetlen* valami. Hogyan lehetséges, hogy ugyanaz a szó, amely a köznapi beszédben „*erő, hatalom, képesség*" jelentésben volt ismeretes, mint matematikai szakkifejezés, a „*négyzet*" neve lett? — Tudomásom szerint erre a kérdésre a történeti kutatás eddig még nem adott elfogadható választ. Bár többször megkísérelték már, hogy megvilágítsák a δύναμις terminus eredetét, azt hiszem, e korábbi kísérleteket nem vehetjük komolyan. Az alábbiakban — mielőtt bemutatnám a probléma megoldását — inkább csak kuriózumként regisztrálok néhány régebbi magyarázó kísérletet.

A legrégibb általam ismert magyarázó kísérlet P. TANNERYnek abban a már föntebb is említett dolgozatában[36] olvasható, amelyben a szerző először korrigálta régebbi tévedését, ti. azt a feltevést, hogy a δύναμις szó a platóni „Theaitétos" c. dialógusban a „négyzet*gyököt*" jelentené. Ugyanebben a cikkében TANNERY emlékeztet arra, hogy nemcsak a δύναμις főnév volt a görögöknél matematikai terminus, hanem ugyanígy a δύνασθαι ige és a δυναμένη participium is. Bár a megfigyelés helyes, sőt — mint később látni fogjuk — csakugyan ebből a tényből kell a magyarázatnak is kiindulnia, mégis: az a következtetés, ill. „magyarázat", amelyet TANNERY megfigyeléséhez fűz, számomra annyira érthetetlen, hogy nem is vállalkozhatom szavainak magyar nyelven való tolmácsolására. TANNERY ugyanis szó szerint a következőket írja:

„Soit un carré dont l'aire soit déterminée, de *trois pieds* par exemple, le côté de ce carré est, dans la langue mathématique classique, la

[36] Lásd föntebb a 18. jegyzetet.

δυναμένη (la ligne qui peut) cette aire de trois pieds. *Pouvoir une aire* (*δύνασθαί τι χωρίον*) c'est, de même, pour une ligne droite limitée, être telle que le carré construit sur elle ait précisément cette aire."[37]

Kétségtelenül igaza volt ugyan TANNERYnek akkor, amikor azt állította, hogy valamely meghatározott területű négyzetnek az oldalát görögül a *δυναμένη* szóval jelölhették. Nagy egészében jól körvonalazta a *δύνασθαί τι χωρίον* görög kifejezés matematikai jelentését is. — De mégis van az előbbi francia idézetben két olyan kitétel, amelyet egyszerűen nem értek; mert sejtelmem sincs róla, mit jelent franciául: „*la ligne qui peut*" és „*pouvoir une aire*"? — Lehet azonban, hogy a kiváló matematikus és történész, B. L. v. d. WAERDEN, egy alkalommal éppen az én számomra érthetetlen francia szavakat tolmácsolta németül. Ő ugyanis már többször idézett könyvének egyik helyén[38] éppen TANNERY szóban forgó cikkére hivatkozik, miközben a görög *δυναμένη* kifejezést a német „*Erzeugende*" főnévvel fordítja és ennek megfelelően a *δύναμις*-t mint „*erzeugende Kraft*"-ot írja körül. (Lehetségesnek tartom tehát, hogy a német „*Erzeugende*" a francia „*la ligne qui peut*" kifejezés fordítása!) — Bár e magyarázat németül is elhibázott, de talán érthető — legalábbis némi fejtörés után. Miért lehet ugyanis a görög *δυναμένη*-t a német „*Erzeugende*" szóval fordítani? — Az, aki ezt a fordítást megkockáztatta, feltehetően így gondolkozott: ha igaz az, hogy *δύναμις* = „*potentia*", akkor a participium *δυναμένη* csak „*potens*" (femininum) lehet. A „*potens*" pedig — mint mindenki tudja — ellentéte az „*impotens*"-nek. Ezért lesz *δυναμένη* = „*Erzeugende*", és *δύναμις* = „*erzeugende Kraft*". — Kár, hogy ezzel a magyarázattal szemben a következő két súlyos kifogást kell bejelentenem: Egyrészt nem értem: mi köze a „*nemző erő*"-nek a „*négyzet*"-hez? Hogyan lehet *δύναμις* egyszerre „*erzeugende Kraft*" és „*négyzet*"? Hogyan tud valamely egyenes szakasz „*négyzetet nemzeni*", azaz: hogyan lehet *δυναμένη* egyszerre „*die Erzeugende*" és „*négyzetoldal*"? — Másrészt viszont biztosan tudom, hogy a görög *δύνασθαι*, *δυναμένη* és *δύναμις* szavak a klasszikus korban soha ilyesmit — „*erzeugen*", „*die Erzeugende*" és „*die erzeugende Kraft*" — *nem* jelentettek. Az, aki ebbe a gondolatkörbe tévedt, nem a görög terminusokból indult ki, hanem a latin *potens* és *potentia* szavak *nem-matematikai értelmét* vetítette vissza tévesen a görög matematika kifejezéseibe.

De volt TANNERYnek egy másik kísérlete is a matematikai *δύναμις* megmagyarázására. Ennek az utóbbinak legfőbb hibáját a *következetlenségben* látom. — Említettem föntebb, hogy TANNERY 1884 óta mindenesetre tudta már: a matematikai *δύναμις* terminus *nem jelenthet* „négyzet-

[37] Mém. Scient. II. 93.
[38] B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 234.

gyököt".[39] Mégis egyik későbbi, 1902-ben publikált dolgozata[40] tulajdonképpen azt magyarázná meg: miért hívhatták (?) görögül a „négyzetgyököt" δύναμις-nak. TANNERY ezt a másik magyarázatát tudomásom szerint sohasem fejtette ki részletesen, inkább csak célzott rá alkalomadtán, ugyanúgy mint az előbbire. (Ezért kell majd szövegét újra franciául idéznem!) Hogy érthető legyen a gondolatmenet, emlékeztetnem kell arra: a cikk valójában arról szól: hogyan számították ki a görögök valamely nem-négyzetszámnak a közelítő négyzetgyökét. Ennek a módszernek a leírásában olvassuk a következő szavakat:[41]

„... en exprimant de plus en plus près la valeur de cette moyenne, si l'on ne peut la construire que géométriquement, si elle n'existe pas qu'en *puissance*, non en *acte*, pour employer le langage des Grecs."

Bennünket ebből az idézetből most csak a két kiemelt szó érdekel. Mint a francia szövegből kiderül: TANNERY azt hitte, hogy e két szó használatával sikerül felvillantania a speciálisan „görög észjárást". Fordítsuk hát vissza e két szót görögre, s mindjárt világosabban megértjük majd TANNERY gondolatmenetét — amelynek egyébként a „görög észjáráshoz" ezúttal édes-kevés köze volt. A francia *puissance* görög eredetije: δύναμις, az *acte* pedig görögül: ἐνέργεια vagy ἐντελέχεια. TANNERY e két fogalmat ARISTOTELÉS nyomán állítja szembe egymással és nyilván azt hiszi: a görögök azért nevezték δύναμις-nak az irracionális négyzetgyököt (pl. a $\sqrt{2}$-öt vagy a $\sqrt{3}$-at), mert az ilyen szám csak mint „lehetőség" (δύναμις) és nem mint „megvalósulás" (ἐντελέχεια) létezik, mert ezt csak megközelíteni tudjuk, de teljes egészében mindig elérhetetlen marad. (Legfeljebb geometriailag lehet még megkonstruálni — mondja tovább TANNERY.) — Szinte fölösleges volna részleteiben is cáfolnom ezt az elgondolást, hiszen ennek már a kiindulása is téves. Mert mielőtt megmagyaráznánk, hogy miért nevezték a görögök δύναμις-nak a „négyzetgyököt", *előbb ismernünk kellene legalább egy olyan antik szöveghelyet, amelyik azt mutatná, hogy csakugyan volt ilyen jelentése a görög δύναμις szónak.* Én ilyen antik szöveghelyet nem ismerek. Az a „Theaitétos"-részlet pedig, amelyre ezzel kapcsolatban hívatkozni szoktak, mint az előbbi fejezetben kimutattam: *nem bizonyíték a feltételezett szójelentésre.* — De elhibázott TANNERYnek ez a másik magyarázó kísérlete még egy további okból is. TANNERY ugyanis a matematikai szóhasználatot az arisztotelészi ellentétpárral (δύναμις ~ ἐντελέχεια) akarná megmagyarázni, és nem veszi észre azt — amit e dolgozat elolvasása után talán magától is megállapíthat majd az olvasó —, hogy éppen megfordítva: az előbbi arisztotelészi ellentétpár csak akkor

[39] Lásd föntebb a 18. jegyzetet.
[40] Lásd föntebb a 22. jegyzetet.
[41] Mém. Scient. III. 82.

lesz igazán érthető, ha teljes egészében értjük már a matematika *δύναμις* fogalmát.[42]

Természetesen nyomot hagyott a későbbi tudománytörténeti irodalomban P. TANNERYnek ez az utóbbi téves magyarázó kísérlete is. Ezért írhatta pl. TH. L. HEATH egy alkalommal szó szerint a következőket: "In geometrical language it is the dative singular *δυνάμει* which is mostly used; thus a straight line is said to be *potentially equal*, *δυνάμει ἴσα* to a certain rectangle where the meaning is that *the square on the straight line is equal* to a rectangle etc."[43] Angolul kellett idéznem e szavakat, hogy az olvasó is azonnal meggyőződhessék róla: a "*potentially equal*" kifejezésnek — amelyet egyébként a szerző, HEATH maga emelt ki — az idézett kontextusban *nyilván semmi elfogadható értelme sincs!* Valóban, a „*potentially*" szó az adott esetben csak arra jó, hogy elárulja: HEATH is átvette TANNERY előbb említett konfúzus elméletét[44] a matematikai *δύναμις* összefüggéséről az arisztotelészi *δύναμις—ἐντελέχεια* ellentétpárral. (Csak mellékesen említem meg: ha kihagyjuk a két értelmetlen szót ["*potentially equal*"] az előbbi angol idézetből, HEATH leírása hibátlan megállapítás!)

*

A matematikai *δύναμις* terminus eredetének helyes magyarázata — véleményem szerint — a következő:

Mindenekelőtt nem a *δύναμις* főnévnek, hanem a *δύνασθαι* igének matematikai használatából kell kiindulnunk. Mert, ha sikerül megértenünk ennek az igének a jelentésfejlődését, egyszerre, világos lesz előttünk a vele párhuzamos főnévnek a jelentésfejlődése is. Azokat a legfontosabb antik szöveghelyeket viszont, amelyekből a keresett jelentésfejlődés kiolvasható, megtaláljuk készen, összegyűjtve a következő három kézikönyvben:

F. RUDIO: Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates, Leipzig 1907 (Index s. v.).

[42] Nem térek ki ebben a dolgozatban az említett arisztotelészi ellentétpárnak a megmagyarázására, mert ez már nem matematika-, hanem filozófia-történeti és filológiai kérdés. Csak mellékesen jegyzem meg — annak a föltételezett érdeklődő olvasónak a kedvéért, aki az egész dolgozat áttanulmányozása *után* esetleg visszalapoz majd erre jegyzetre: Véleményem szerint az arisztotelészi ellentétpárban a „dynamis" szó jelentése a következőképpen fejlődött: „dynamis" = „négyzetérték" → → „négyzet*lehetőség*" (tehát nem valóságos, hanem csak *lehetséges* négyzet, amelynek értékét pontosan kiszámíthatjuk) stb.

[43] „Archimedes" p. CLXI.

[44] Szeretném legalább e jegyzetben félreérthetetlenül leszögezni: bármennyire gyakran és bármilyen keményen kritizálom is P. TANNERYt, tisztában vagyok *rendkívüli érdemeivel.* Tudom azt is, hogy különösen az antik tudománytörténet ma is — csaknem 60 évvel TANNERY halála után — még mindig az általa elhullatott morzsákból éldegél.

TH. L. HEATH: „Archimedes" p. CLXI,

és

TH. L. HEATH: A History of Greek Mathematics (Index s. v.).

F. RUDIO pl. így magyarázza az említett ige matematikai jelentését: „In der mathematischen Sprache bedeutet *δύνασθαι gelten, wert sein, ausmachen, betragen*, und geiment ist wieder: *im Quadrate*". Nem kellett egyebet tennem, mint hogy kiemeljem e szómagyarázatból a lényeget: „im Quadrate wert sein" = „négyzetben érni valamennyit". Ugyanígy olvassuk HEATHnél is: „*δύνασθαι*, to be equivalent *in square* to . . . etc."

Az említett három kézikönyv több antik szöveghelyet sorol fel az előbbi szómagyarázatra. A példák közül csak a következő stilisztikai fordulatra kell nyomatékosan felhívnom a figyelmet: *ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ* . . . TH. L. HEATH ezt a stilisztikai fordulatot „Archimedes" c. könyvében a következő szavakkal magyarázza: „The verb *δύνασθαι* (with or without *ἴσον*) has the sense of being *δυνάμει ἴσα*, and, when *δύνασθαι* is used alone, it is followed by the accusative: thus *the square (on a straight line) is equal to the rectangle contained by*. . . is: *(εὐθεῖα) ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ*. . ."

Úgy látszik, TH. L. HEATH magyarázata pontosan írja le a tényeket. A *δύνασθαι* igét akkor használják, amikor azt akarják kifejezni, hogy „valamely egyenes szakasz *(εὐθεῖα)*, ha négyzetet emelünk reá, *ugyanannyit ér (ἴσον δύναται)*, mint valamely *téglalap (τῷ περιεχομένῳ...)*". Eszerint tehát a *δύνασθαι* ige matematikai jelentése: „*négyzetben ugyanannyit érni, mint valamely téglalap*".

A következőkben egyelőre elfogadjuk munkahipotézisként azt az állítást, hogy a *δύναμις* szó éppen az előbbi stilisztikai fordulatból kiindulva lett matematikai terminus technicus-szá: „*négyzetben annyit érni, mint valamely téglalap*". (A következő fejezetben igyekszem majd azt is megvilágítani: hogyan függött össze a matematika fejlődésével ennek a stilisztikai fordulatnak a felbukkanása?) További kérdésünk pedig így hangzik: milyen konkrét tárgyi összefüggésben használhatták ezt a stilisztikai fordulatot? — A keresett konkrét tárgyi összefüggés nyilván csak ez lehetett: valamely téglalapot átalakítottak vele egyenlő területű négyzetté, és a megtalált négyzet oldaláról azt mondták, hogy ez a szakasz „négyzetben ugyanannyit ér" *(ἴσον δύναται)*, mint az előbbi téglalap. — De hogyan tett szert a *δύνασθαι* ige, amely a mindennapi nyelvben annyit jelentett, mint „*erősnek lenni, képesnek lenni valamire*", erre a különös geometriai jelentésre: „*négyzetben ugyanannyit érni, mint* . . ."? Vagy volt talán egy olyan szféra, amelyen belül ennek az igének a jelentése már nagyon közel állt az éppen most tárgyalt geometriai jelentéshez?

Azt hiszem, a *δύνασθαι* ige matematikai jelentésfejlődése e szónak olyan köznapi jelentéseiből indult ki, amelyekre az alábbiakban emlékeztetek.

XENOPHONnál egy alkalommal a következő görög mondatot olvassuk[45] *ὁ σίγλος δύναται ἕπτα ὀβολοὺς καί ἡμιωβέλιον Ἀττικούς* = „a: *σίγλος* (egy ázsiai pénznem, ugyanaz mint a héber *sékel*) hét és fél attikai oboloszt *ér*". Pontosan ugyanezt a szójelentést találjuk DÉMOSTHENÉS következő mondatában is:[46] a *ὁ κυζικηνὸς ἐδύνατο ἐκεῖ κη'δραχμὰς* = „a kyzikoszi sztatér ott 28 drachmát *ért*". — Hasonlóképpen sorolhatnánk föl még számos példát ugyanerre a szójelentésre a klasszikus ókor mindennapi nyelvéből. De megállapíthatjuk már e két legutóbbi idézet alapján is: a *δύνασθαι* igét a görög pénzügyi nyelvben az *érték* kifejezésére használták. (Csak mellékesen említem meg, hogy kimutatható hasonló jelentésfejlődés a latin *valeo*, „erősnek lenni", ige esetében is; hiszen ebből az utóbbiból származik a közismert *valuta* szó.)

Természetesen volt a görögök pénzügyi nyelvében nemcsak a *δύνασθαι* igének, hanem a vele párhuzamos *δύναμις* főnévnek is az előbbihez hasonló speciális jelentése. PLUTARCHOSnál pl. azt olvassuk LYKURGOSról:[47] *δύναμιν ὀλίγην τῷ νομίσματι ἔδωκε* = „a pénznek kevés *értéket* engedélyezett". — Ugyanakkor ez a szójelentés nem is korlátozódott csak a pénzügyi nyelvre. Már HÉRODOTOS ugyanebben az értelemben használja a *δύνασθαι* igét, amikor ezt mondja:[48] *τριηκόσιαι ἀνδρῶν γενεαὶ δυνέαται μύρια ἔτη* = „300 emberöltő 10 000 évet *ér*". Nyilván ebben az esetben is olyan kifejezéssel van dolgunk, amelyet a pénzügyi nyelvből kölcsönöztek: ugyanúgy számították át az emberöltőket évekre, mint ahogy az egyik valutát átszámítják a másikra.

Magyarázatom szerint a görög geometerek a *δύνασθαι* ige speciális jelentését a *pénzügyi nyelvből* vették át. Amiképpen ezt az igét használták általában az *érték* megjelölésére akkor, amikor az egyik pénznemet átszámították valamely más pénznemre, ugyanúgy a *δύνασθαι* igét használták a geometerek is akkor, amikor valamely téglalap területét számították át a vele egyenlő területű négyzetére. Ezért lett a matematikában a *δύνασθαι* ige jelentése: *„négyzetben ugyanannyit érni mint valamely téglalap"*.

Tulajdonképpen csak egyetlenegy lényeges különbségre kell még felhívnom a figyelmet ezzel a szómagyarázattal kapcsolatban. — Amint az előbbi példákból is láthatjuk: a *δύνασθαι* és *δύναμις* kifejezések a görög pénzügyi nyelvben *csak általában* jelölték az „érték"-et — anél-

[45] Anab. I. 5, 6.
[46] Dem. 34, 24.
[47] Plut., Lyc. 9; vö. Solon 15.
[48] Her. II. 142.

kül, hogy egyszersmind azt is kifejezték volna, *melyik pénznemben kifejezett értékről van szó.* Ezzel szemben ugyanez a két szó a matematika nyelvén mindig ugyanazt a pontosan megjelölt értéket, a „*négyzet*-értéket" jelenti. Mi lehet mármost az oka annak, hogy a szójelentés a matematikán belül így tovább specializálódott? — Azt hiszem, a magyarázat kézenfekvő. Nem specializálódhatott a vizsgált kifejezés jelentése a pénzügyi nyelvben, egyszerűen azért nem, mert a görög társadalmi és gazdasági élet fejlettségi fokán *nem volt még olyan egységes valuta,* amelyre a különféle pénznemeket mindig átszámították volna; illetőleg: az a valuta, amelyre a különböző pénznemeket átszámították, városonként, gazdasági egységenként mindig más és más volt. Ezért a δύνασθαι szó az ilyen átszámításoknál *csak általában az értéket jelölhette,* de mindig külön meg kellett mondani az ilyen esetekben azt is: milyen pénznemben kifejezett értékről van szó. — A geometriában viszont a területet — úgy látszik — mindig négyzetértékre számították át, azaz pontosabban: *igyekeztek minden egyenes és görbe vonalú idomot átalakítani vele egyenlő területű négyzetté.* Minthogy pedig az egyes felületeknek (téglalap, sokszög, kör stb.) mindig csak a „négyzetérték"-ére voltak kíváncsiak, a mellé a szó mellé, amely az átszámított terület „érték"-ét jelölte, nem kellett már külön kitenniök azt is, hogy ez az „érték", *négyzetben* értendő. Így specializálódhatott a területszámítással kapcsolatban az a kifejezés, amely különben csak „érték"-et jelentett, a matematika nyelvén a „*négyzetérték*" (δύναμις) jelentésre.

Összefoglalva az előbbi szómagyarázatot, megállapíthatjuk, hogy a matematikai δύναμις terminus pontos jelentése tulajdonképpen nem is „négyzet", hanem: „*négyzetérték*". Minthogy pedig a négyzet területét úgy számítjuk ki, hogy oldalát szorozzuk önmagával, a „dynamis" terminus idővel az „*önmagával való szorzás*" értelem felé közeledhetett. Így alakulhatott ki *később* a görög matematika „dynamis" fogalmából a mi *potencia* fogalmunk. — Láttuk már egy korábbi fejezetben, hogy akkor, amikor a görög „dynamis" terminust a latin „potentia" szóval fordították, igazában kibővítették az eredeti fogalmat, mert a „potentia" a későbbi szóhasználat szerint már nemcsak „*négyzet*"-et (= „*második hatvány*"-t), hanem magasabb hatványt is jelölhet. Kiegészíthetjük ezt a régebbi megállapításunkat most azzal: a „dynamis" terminusnak a latin „potentia" szóval való fordítása nemcsak az eredeti fogalom kibővítésével, hanem egyszersmind a régi görög szójelentés félreértésével is járt. Hiszen a görög δύναμις a matematika használatában nem „hatalmat", hanem „*négyzetérték*"-et jelentett. Az a valaki viszont, aki a görög matematika δύναμις-át először tolmácsolta a latin „potentia"-val, nem ismerte már a szónak ezt a speciális matematikai értelmét, ő a δύναμις szónak már csak a köznapi jelentésére gondolt. Ezért lett a δύναμις latinul „*potentia*".

Lezárván a szómagyarázatot, megjegyezhetjük még, hogy az itt vázolt történeti fejlődés pontos és megnyugtató magyarázatot ad arra a δυναμένη terminusra is, amelyet P. TANNERY franciául a „*ligne qui peut*" kifejezéssel, B. L. v. d. WAERDEN pedig németül az „*Erzeugende*" szóval próbált tolmácsolni. Minthogy a δύνασθαι matematikai kifejezés pontos értelme: „*négyzetben ugyanannyit érni mint valamely téglalap*", a δύναμις pedig: „*négyzetérték*", a δυναμένη nem lehet más, mint „*a keresett négyzetértéket megadó szakasz*". Csakugyan EUKLIDÉS „Elemei" X. könyvének 4. definíciójában szószerint ezt olvassuk: *αἱ δυναμέναι..., εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί, εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.* Fordítás helyett ezúttal inkább pontosan tolmácsolom az idézett görög szavak értelmét: „*a δυναμένη-k. . ., ha négyzetekről van szó, maguk az oldalak, ha pedig más egyenes vonalú idomokról beszélünk, a velük egyenlő területű négyzeteket megadó szakaszok*".

IV.

Az előbbi fejezetben a „dynamis" terminus történeti magyarázata abból a munka-hipotézisből indult ki, hogy az *eredeti* stilisztikai fordulatban — amelyből levezethető a terminus fejlődése — a δύνασθαι ige jelentése így hangzott: „*négyzetben ugyanannyit érni, mint valamely téglalap*". Csakugyan, számos példát idézhetnénk arra, hogy ezt a stilisztikai fordulatot — pontosan ebben a jelentésben — később is gyakran használták a görög matematikusok. De egyelőre továbbra is csak munkahipotézis még az a feltevésem, hogy éppen ez a fordulat volt az *eredeti*. Bár véleményem szerint a bemutatott szómagyarázat önmagában is meggyőző lehet, mégis azt hiszem: a matematikus-olvasó kívánatosnak fogja tartani annak a kimutatását is, hogy az idézett stilisztikai fordulat a tudomány fejlődésének egy bizonyos szakaszában valóban annyira fontos és gyakran alkalmazott műveletet írt körül, hogy joggal feltehető: ebből a műveletből indult ki a vázolt szófejlődés. Ez más szóval azt jelenti: meg kell világítanom még azt is, miért volt a görög matematikában a téglalapnak négyzetté való átalakítása olyan fontos művelet, hogy ezzel kapcsolatban kialakult a „*négyzetérték*" fogalma? — Mielőtt rátérnék a feltett kérdés tárgyalására, a teljesség kedvéért közbevetőleg két példán bemutatom a δύνασθαι terminus olyan matematikai használatát, amely magyarázatom szerint már nem az eredeti, hanem a *későbbi szóhasználatot* illusztrálja.

Első példám az ún. Pythagoras-tételnek ATHÉNAIOSnál olvasható megfogalmazása.[49] Ez görögül így hangzik: *τριγώνου ὀρθογωνίου ἡ*

[49] Ath. X. 418 sk.

τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις, azaz: „a derékszögű háromszög átfogója *négyzetben ugyanannyit ér* (*ἴσον δύναται*), mint a két befogó ⟨négyzetben!⟩". Mint látjuk, itt már nincs szó területátalakításról, hanem két négyzetnek — a befogók négyzeteinek — az összegezéséről. De a *δύνασθαι* ige akkor, amikor így is megfogalmazhatták a Pythagoras-tételt, már annyira közismert volt a *„négyzetben ugyanannyit érni, mint . . .*" jelentésben, hogy minden további nélkül használhatták ezt ebben az esetben is. Hogy ebből a viszonylag *késői* szóhasználatból mennyire nem derül már ki a szó régebbi jelentése, azt láthatjuk abból is, ahogyan a szótárak — éppen az idézett Athénaios-helyre hívatkozva — próbálják megállapítani a *δύνασθαι* jelentését: *ein Quadrat ergeben*". Az a szótáríró,[50] aki így határozta meg a szójelentést, nyilván ismerte a Pythagoras-tételt és innen tudta, hogy a kérdéses szónak ezen a helyen ezt *kell* jelentenie, de ugyanakkor fogalma sem volt a jelentésfejlődésről.

Másik példám a *δύνασθαι* igének *későbbi eredetű* matematikai használatára SIMPLICIUSnak a chioszi HIPPOKRATÉS quadraturáiról szóló beszámolójában olvasható.[51] Itt ugyanis egy alkalommal ezt olvassuk: *ἡ διάμετρος τετράπλασιον δύναται τῆς τοῦ ἑξαγωνίου (πλευρᾶς)*. Ennek a görög mondatnak grammatikailag pontos (szó szerinti) fordításából a matematikus-olvasó legfeljebb csak sejthetné a valóságos értelmet; mert ez a fordítás így hangzanék: „az átmérő a *négyszeresét éri négyzetben (τετράπλασιον δύναται)* a hatszög oldalának". De ebből a fordításból valóban már csak értelem szerint következik az, hogy a hatszög oldalát is „négyzetben" kell értenünk, azaz arra a másik négyzetre kell gondolnunk, amely a hatszög oldalára emelhető, valamint hogy a kör átmérőjéről és az *ugyanabba a körbe írt* szabályos hatszög oldaláról van szó, vagyis hogy az idézett görög szavak a mi matematikánk nyelvén tulajdonképpen csak ezt jelentik: $(2r)^2 = 4r^2$. — Ez az utóbbi példa is azt mutatja tehát, hogy a *δύνασθαι* igét matematikai értelemben *később* — ez a „később" pedig már a chioszi HIPPOKRATÉS kora, az i. e. 5 század második fele is lehet! — nemcsak a téglalapnak négyzetté való átalakításakor, hanem bármilyen „négyzetérték"-ben való számolásnál is használhatták.

Dehát hol van nyoma annak, hogy az EUKLIDÉS *előtti* görög matematikában a négyzetté való átalakítás, az ún. „négyzetérték" meghatározása csakugyan olyan fontos művelet volt, mint amilyennek azt az előbb feltettem? Hiszen erre eddig csak egyetlenegy nyelvi formulából, abból a stilisztikai fordulatból következtettem, amelyből sikerült levezetnem a *δύναμις* terminus plauzibilis történeti magyarázatát.

[50] Pl. PAPE, Griechisch—Deutsches Wörterbuch. Erster Band, Braunschweig 1849, 577 lap.

[51] F. RUDIO, op. cit. 70, 15.

A négyzetté való átalakítás, azaz a „négyzetérték" megállapítása — véleményem szerint — olyan geometriai művelet, amelyet részletesen tárgyal EUKLIDÉS is. Legfeljebb csak arról lehet szó, hogy erre eddig sem a történeti sem a kommentár irodalom nem figyelt föl még eléggé. Emlékeztetek itt EUKLIDÉS „Elemei" II. könyvének 14. tételére. Ez a tétel ugyanis azt a feladatot tűzi ki:

„*Szerkesszünk valamely adott egyenes vonalú idommal egyenlő területű négyzetet.*"

Amint látjuk, ez a tétel éppen azt a négyzetté való átalakítást tárgyalja, amelynek célja előbbi magyarázatom szerint a „négyzetérték" megállapítása volt. Kitűnik a tétel euklideszi tárgyalásából az is, hogy azt a „tetszőleges egyenes vonalúi domot", amellyel egyenlő területű négyzetet kell szerkeszteni, előbb *téglalappá* alakították át, és csak *azután keresték azt a négyzetet, amely egyenlő területű a talált téglalappal.* Az a művelet tehát, amelyet az előbbi fejezetben egy stilisztikai fordulatból kiindulva rekonstruáltam, ismeretes magából EUKLIDÉSből is.

Még tovább vezet bennünket — történeti szempontból — a következő megfigyelés.

Tagadhatatlan, hogy az imént említett euklideszi tétel (Elemek II. 14), amelyet a tudománytörténeti irodalom eddig egyszerűen csak mint „területátalakítási problémát" tartott számon,[52] igazában az egyenes vonalú idomoknak négyzetté való átalakítását tárgyalja. A „négyzetté való átalakítás" neve görögül: τετραγωνισμός, latinul pedig: *quadratura.* Közismert, hogy milyen nagy szerepet játszott a korai görög tudományban a *quadratura*, közelebbről pedig: *a kör quadraturája*[53]. Feltehető, hogy ez a probléma még a chioszi HIPPOKRATÉST *megelőző* időkből származik. Hiszen HIPPOKRATÉS már sikerrel oldja meg, ha nem is éppen a kör, hanem a holdacskák quadraturáját. De vajon elképzelhető-e történeti szempontból, hogy a görögök mindjárt kezdetben a megoldhatatlan problémát, a kör quadraturáját fedezték volna fel és ezen kezdték volna törni a fejüket? Nem sokkal valószínűbb-e, hogy mielőtt egyáltalán fölmerült volna a kör quadrálhatóságának vagy quadrálhatatlanságának a kérdése, jól kellett már ismerniök az egyenes vonalú idomok quadrálhatóságának problémakörét?

Azt hiszem, előbbi kérdésemből önként adódik egy nagyon valószínű kronológiai következtetés. EUKLIDÉS „Elemei" II. könyvének 14. tétele, amely az egyenes vonalú idomoknak téglalappá, illetőleg ezen keresztül négyzetté való átalakítását, quadraturáját tárgyalja — valamint mindazok az euklideszi tételek, amelyek éppen ezt készítik elő —, fel-

[52] TH. L. HEATH, The Thirteen Books ... I 410.
[53] B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 214 sk.

tehetően még az i. e. 5. század első felében, mindenesetre még a chioszi HIPPOKRATÉS korát megelőző időben keletkezhettek. De ugyanebben az időben kellett hogy kialakuljon már a „négyzetérték", a δύναμις fogalma is.

V.

A „négyzetérték" (δύναμις) fogalmának történeti vizsgálata elvezetett bennünket az egyenes vonalú idomok quadraturájának problémájához, amelyet az euklideszi „Elemek" II. könyvének 14. tétele tárgyal. Még tovább jutunk a δύναμις fogalom eredetének megértésében akkor, ha figyelembe vesszük azokat a tényeket is, amelyeket sikerült megállapítania már a régebbi történeti kutatásnak az említett euklidészi tétellel kapcsolatban. Ezért ezt az új fejezetet azzal kezdem, hogy összefoglalom az „Elemek" II. könyvének 14. tételére vonatkozó eddigi történeti ismereteinket.

A II. 14. tétel a kitűzött feladatot — valamely egyenes vonalú idom átalakítását vele egyenlő területű négyzetté — két lépésben oldja meg. Előbb átalakítjuk az adott egyenes vonalú idomot téglalappá, majd pedig a kapott téglalapot vele egyenlő területű négyzetté. A téglalapnak négyzetté való átalakításakor EUKLIDÉS egy olyan konstrukciót alkalmaz, amellyel nemcsak itt (II. 14) találkozunk az „Elemek"-ben, hanem később még egyszer, egy másik helyen is (VI. 13), amikor ti. két adott szakasznak a geometriai középarányosát kell megtalálnunk. Ismétlem: a konstrukció mind a két esetben — II. 14 és VI. 13 — azonos, de különböző e két esetben a bizonyítás, a konstrukció helyességének a megokolása. EUKLIDÉS ugyanis a VI. könyvben az *aránye lmélettel* okolja meg a konstrukciót, a II. könyvben viszont még nem hivatkozik az aránye lméletre. Fölmerült mármost ezzel kapcsolatban az a történeti kérdés, hogy vajon a két bizonyítás közül melyik a régebbi?

Megkönnyíti a legutóbbi kérdésre adandó választ az a körülmény, hogy találunk ARISTOTELÉS műveiben két ízben is[54] egy olyan kijelentést a quadraturára vonatkozóan, amelyből egyértelműen kiderül, hogy a téglalapnak négyzetté való átalakítását régebben az aránye lmélettel okolták meg. Éppen erre a két Aristotelés-helyre hivatkozott J. L. HEIBERG,[55] amikor meggyőzően kimutatta, hogy az euklidészi „Elemek" II. könyve 14. tételének *régebbi* bizonyítása az volt, amelyet mai szövegünkben a VI. 13. tétel bizonyításában olvasunk. Minthogy azonban véleményem szerint az említett arisztotelészi kijelentésből még további történeti következtetéseket is levonhatunk, az alábbiakban közelebbről ismertetem a kérdéses arisztotelészi helyet.

[54] De anima II. 2, 413 a 19 és Metaph. 996 b 21.

[55] J. L. HEIBERG, Mathematisches bei Aristoteles 20; vö. TH. L. HEATH, The Thirteen Books ... I. 410.

ARISTOTELÉS a „De anima" c. munkájában egy alkalommal arról beszél, hogy a definíciók általában ún. *zárótételek*. Ilyen „zárótétel" pl. az, ha arra a kérdésre, hogy mi a quadratura *(τετραγωνισμός)* azt feleljük, hogy ez a téglalapnak négyzetté való átalakítása. Az viszont, aki azt állítja, hogy a quadratura a geometriai középarányos megtalálása — folytatja ARISTOTELÉS — a dolog lényegét is megmondja *(ὁ δὲ λέγων, ὅτι ἐστιν ὁ τετραγωνισμὸς μέσης εὕρεσις, τοῦ πράγματος λέγει τὸ αἴτιον)*. Nagyjából ugyanezt az állítást olvassuk ARISTOTELÉSnél egy másik alkalommal is, a Metaphysikában.

Kiderül tehát ARISTOTELÉS szövegéből egyrészt az, hogy a görögök quadraturán főként a téglalapnak négyzetté való átalakítását értették — említettem már, hogy a kör quadraturája csak viszonylag *később* fölmerült probléma lehetett —, másrészt pedig az, hogy a téglalapnak négyzetté való átalakítását a geometriai középarányos megszerkesztésével érték el (mert ha valamely téglalap oldalai *a* és *b* szakaszok, akkor e két mennyiség középarányosának a négyzete (x^2) egyenlő a téglalappal, azaz ha $a:x=x:b$, akkor $x^2=ab$). — Ez az utóbbi megállapítás — tehát az, hogy a téglalapnak négyzetté való átalakítását eredetileg a geometriai középarányos megszerkesztésével érték el — érdekes fényt vet az euklidészi II. 14. tétel eredeti történeti jelentőségére is. Mielőtt megpróbálnék reávilágítani erre, nézzük meg, milyen összefüggésben tárgyalja EUKLIDÉS a II. 14. tételt.

A II. 14. tétel euklidészi összefüggését legegyszerűbben úgy állapíthatjuk meg, ha összeállítjuk mindazokat a tételeket, amelyeket EUKLIDÉS mai szövegében a II. 14. tétel előkészítésének, „előzményének" tekinthetünk. Ilyen előkészítő tétel pl. az I. 45: „*Szerkesszünk valamely adott egyenes vonalú idom területével egyenlő területű parallelogrammát*"; vagy: I. 42: „*Szerkesszünk valamely adott háromszöggel egyenlő területű parallelogrammát*". — Nem sok értelme volna, ha össze akarnám itt állítani a II. 14. tétel minden ilyen euklidészi „előzményét", inkább csak összefoglalóan jellemzem őket.

A II. 14. tétel euklidészi előzményei mind olyan tételek, amelyek területátalakítási problémákat oldanak meg, illetőleg amelyek bizonyos idomok között a területek egyenlőségét mondják ki. Könnyű volna megállapítanunk azt is, hogy ezek a tételek a *gyakorlatban* nyilván a területmérés szempontjából voltak fontosak. A különféle egyenes vonalú idomokat bizonyára azért alakították át velük egyenlő területű téglalapokká, mert így állapíthatták meg legkönnyebben a vizsgált idomok területét. — De mi szükségük volt arra, hogy az ily módon nyert téglalapokat még tovább átalakítsák *négyzetekké?* — A gyakorlati területmérés szempontjából ennek az utóbbinak már aligha lehetett jelentősége. A quadratura, már az egyenes vonalú idomok esetében is, olyan geometriai probléma, amely túlmutat a pusztán gyakorlati terület-

számításon. Talán jobban megértjük ennek a jelentőségét akkor, ha a következőkre gondolunk.

Úgy látszik, az egészen korai görög, az ún. pythagoreus tudományban nem vált még el élesen egymástól az *aritmetika* és a *geometria*. Nemcsak az aritmetikai alapműveleteket (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) végezték ún. számoló kövekkel *(ψῆφοι)*, hanem ugyanilyen egyforma nagyságú és alakú kövekből rakták ki a geometriai idomokat is, különösen a síkidomokat.[56] Fennmaradt ennek a kezdetleges szemléletnek az emléke nemcsak az olyan későbbi korból hagyományozott pythagoreus szám-elnevezésekben, mint *háromszög-*, *négyzet-*, *oblongum-*, *ötszög-*, *hatszög-* stb. *számok*, hanem még az euklidészi aritmetika terminológiájában is. Hiszen a *„tényező"* (faktor) neve EUKLIDÉSnél is *πλευρά* (vö. „Elemek" VII. 17. definíció), márpedig ez a szó tulajdonképpen valamely geometriai síkidomnak (különösen a *téglalapnak*) az *„oldalát"* jelenti. Valamely szorzat két *tényezőjét* nyilván azért nevezhették *πλευρά*-knak, mert a szorzatot mint *téglalapot* ábrázolták. Ebben az értelemben beszél EUKLIDÉS *síkszámokról* is. *Síkszám* az olyan, amely felbontható két tényező szorzatára, vagyis az 1-en kívül tulajdonképpen bármely szám. (Ennek megfelelően *testszám* viszont az olyan, amely felbontható három tényező szorzatára.)

Induljunk ki mármost abból, hogy így ábrázolván a szorzást „geometrikusan", nagyon hamar észre kellett venniök a következőt is: ugyanaz a szám gyakran többféleképpen is ábrázolható téglalap-formában. A *12* számból pl. három különböző téglalapot készíthettek: 1×12 (egy olyan hosszú téglalap, amelynek egyik oldala 1, másik oldala pedig 12!), vagy $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$. Még több ábrázolási lehetőséget adott a 36 szám, mert $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$. Különösen érdekes volt ebből a legutóbbi ábrázolás: 6×6, egy olyan téglalap, amelynek mind a két oldala egyenlő, tehát egy négyzet. Ezek után mármost csak azt kellett kérdezniök: minthogy minden egész szám ábrázolható mint téglalap, vajon minden téglalap (illetőleg pontosabban: minden téglalap-formában ábrázolt szám) ábrázolható-e egyszersmind négyzet-formában is? — Világos, hogy erre a kérdésre *nem*-mel kellett válaszolniok — mindaddig, amíg pusztán az aritmetika körében maradtak. De egyszerre megváltozott a helyzet akkor, *amikor a téglalap két oldalát már nem mint két számot, hanem egyszerűen mint két szakaszt kezdtek kezelni.* Most már a geometriai középarányos segítségével bármely téglalap átalakítható volt négyzetté. De mikortól fogva kezdték a téglalap 2 oldalát már nem mint két számot, hanem mint két szakaszt kezelni? — Ezt nyilván csak azóta tehették, amióta tudták már, hogy *vannak inkommenzurábilis szakaszok is.* Erre, úgy

[56] O. BECKER, Das mathematische Denken der Antike, Göttingen 1957 40 sk.

látszik, éppen a négyzet átlójával kapcsolatban jöttek rá, amikor ti. a négyzet oldalára és átlójára alkalmazták az ún. páros és páratlan elméletét.[57] Ez más szóval azt jelenti, hogy a *geometriai középarányos* felfedezése és a *téglalap quadraturájának a problémája*, illetőleg a *„téglalap négyzetértéke"* (δύναμις) fogalom megalkotása nagyjából egykorú kell hogy legyen az inkommenzurábilis mennyiségek létezésének a felismerésével.

ПОНЯТИЕ „ЗНАЧЕНИЯ КВАДРАТА"
И ТАК НАЗ. „ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ"

A. Сабо

THE NOTION „QUADRATIC VALUE" AND THE „GEOMETRIC MEAN"

Á. Szabó

[57] Vö. Matematikai Lapok VIII 1957 8—36, 232—247 és X 1959 72—121.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

Megjegyzések Turán Pál egy publikálatlan eredményéhez

ZNÁM ISTVÁN

ERDŐS PÁL említi az [1]-ben (233. old.) TURÁN egy publikálatlan eredményét: ha az $n \leqq m \leqq 5n+3$ számokat beosztjuk két részre, akkor legalább az egyik részben

$$x+y=z \quad x<y<z \tag{1}$$

megoldható; az $5n+3$ nem javítható.

Az első megjegyzés a tétel egy igen egyszerű alapokon épített bizonyítását tartalmazza. A második részben bebizonyítjuk, hogy az $n \leqq m \leqq 5n+2$ számokat lényegében csak egy módon lehet úgy két részre osztani, hogy az (1) nem megoldható egyikben sem. A harmadik részben megmutatjuk a második részben használt metódus lehetséges alkalmazását az általánosabb probléma megoldására.

1. Nevezzük „ritkának" a természetes számok olyan halmazát, amelyben az (1) nem megoldható. Próbáljuk az m számokat két ritka részre osztani. A és B jelölje a két részt. Tehát ha például $a, b \in A$, úgy $a \pm b \in B$ (ha $a+b \leqq 5n+3$). A jelölést mindig választhatjuk úgy, hogy $n \in A$. Elég tehát négy különböző esetet megvizsgálnunk:

I.
$$\left.\begin{matrix} n \in A \\ n+1 \in A \\ n+2 \in B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2n+1 \in B \\ n+2 \in B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3n+3 \in A \\ n+1 \in A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2n+1 \in B \\ 2n+2 \in B \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4n+3 \in A$$

$n, 3n+3, 4n+3 \in A$ és $n+(3n+3) = 4n+3$, tehát az A nem ritka. (Itt és a következőkben is néhány helyen szükséges feltételezni, hogy az $n \geqq 2$; az $n=1$ esetet könnyen bebizonyíthatjuk más módszerrel.)

II.
$$\left.\begin{matrix} \underline{n \in A} \\ n+1 \in B \\ n+2 \in A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2n+2 \in B \\ n+1 \in B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \underline{3n+3 \in A} \\ n+2 \in A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2n+2 \in B \\ 2n+1 \in B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{4n+3 \in A}$$

Tehát az A (az aláhúzott elemek révén) nem ritka.

III. $$\left.\begin{array}{r} n\in A \\ \underline{n+1\in B} \\ n+2\in B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2n+3\in A \\ n\in A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \underline{3n+3\in B} \\ n+2\in B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2n+3\in A \\ 2n+1\in A \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{4n+4\in B}$$

Tehát a B nem ritka.

IV. $$\left.\begin{array}{r} \underline{n\in A} \\ n+1\in A \\ n+2\in A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2n+1\in B \\ 2n+2\in B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \underline{4n+3\in A} \\ n+1\in A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3n+2\in B \\ 2n+1\in B \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{5n+3\in A}$$

Tehát az A nem ritka. Ezzel kimerítettük az összes lényegesen különböző esetet és bebizonyítottuk a tételt.

2. Osszuk az $n\leqq m\leqq 5n+2$ számokat két részre, a következő módon:

$$\begin{array}{c} n, \ldots, 2n, 4n+3, \ldots, 5n+2\in A \\ 2n+1, \ldots, 4n+2\in B \end{array} \tag{2}$$

Könnyen belátható, hogy mind a két rész ritka, tehát az $5n+3$ nem javítható. A fenti módszerrel bebizonyítható a következő tétel:

Az $n\leqq m\leqq 5n+2$ számokat csak a (2)*-ben leírt módon lehet két ritka részre osztani.*

Bizonyítás: A $(*)$ jelölje az $n\leqq m\leqq 5n+2$ számok olyan elosztását, amelyben mind a két rész ritka. A részeket jelöljük A és B $(n\in A)$. Tehát nem lehet $n+1\in B$, mert akkor a II és III alapján vagy az A vagy a B nem volna ritka. Az $n+1\in A$ viszont nincsen ellentétben a IV-gyel, mivel mi csak az $m\leqq 5n+2$ számokat vizsgáljuk. Tehát $n+1\in A$.

Legyen az $1\leqq k<n$ és feltételezzük, hogy a $(*)$ elosztás az első $(k+1)$ helyen azonos a (2)-vel, de a $(k+2)$-ik helyen eltér a (2)-től.

$$\left.\begin{array}{r} n\in A \\ n+1\in A \\ \vdots \\ n+k\in A \\ n+k+1\in B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2n+1\in B \\ 2n+k+1\in B \\ n+k+1\in B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 4n+k+2\in A \\ 3n+k+2\in A \end{array} \qquad (n+k+1\neq 2n+1)$$

$n, 3n+k+2, 4n+k+2\in A$ és $(4n+k+2)=(3n+k+2)+n$.

Ez nem lehetséges, tehát a $(*)$ azonos a (2)-vel az $n+1$ első helyen, vagyis:

$$n, n+1, \ldots, 2n\in A \tag{3}$$

Ebből következik:

(4) $$2n+1, \ldots, 4n-1 \in B$$

és ebből, hogy:

(5) $$4n+3, \ldots, 5n+2 \in A$$

Meg kell még mutatni, hogy $4n+j \in B$, ahol $j=0, 1, 2$. Feltételezzük, hogy $4n+j \in A$. Akkor az $5n+j \in B$, de fennáll:

(6) $$5n+j = (2n+1)+(3n+j-1) \text{ és } 2n+1, 3n+j-1 \in B,$$

tehát a B nem ritka.

A (3), (4), (5), (6) alapján a $(*)$ azonos a (2)-vel. Ezzel a tétel be van bizonyítva.

3. Az $n \leqq m \leqq 5n+2$ számokat tehát csak a következő módon lehet két ritka részre osztani: az n-t az A-ba helyezzük; továbbá az A-ba helyezzük a növekedő sorrendben következő számokat addig, amíg az A ritka marad; az első olyan számot, amely megzavarná az A „ritkaságát" a B-be helyezzük; a B-be helyezzük a következő számokat is ameddig nem zavarják a B „ritkaságát". Röviden: csak akkor térünk át egyik részből a másikba, ha arra a „ritkaság" megtartása kényszerít. Ebből a módszerből kiindulva kapjuk a következő tételt: Az

(7) $$n \leqq m \leqq \frac{3^p+1}{2} \cdot n + \sum_{k=0}^{p-2} (4-p+k)3^k = a_p n + b_p = t(p,n)$$

számokat el lehet osztani p „ritka" részre.

Bizonyítás: Jelöljük a részeket A_k-val $(k=1, 2, \ldots, p)$. A részeket a következő szabály szerint szerkesszük:

I. $n \in A_1$.

II. Akkor és csak akkor térjünk át egyik csoportból a másikba, ha arra a „ritkaság" megtartása kényszerít.

III. Mindig a lehető legkisebb indexű részbe térjünk át.

Könnyen belátható, hogy az így szerkesztett részek „ritkák" lesznek. Továbbá világos, hogy:

(8) $$a_1=2, b_1=0, \quad a_p=3a_{p-1}-1, \quad b_p=3a_{p-1}+3-(p-1), \text{ ha } p>1$$

A (8)-ból könnyen kapjuk a (7)-et.

Három rész esetén a $t(3, n) = 14n+7$ eredményt kapjuk. Ebben az esetben a szerkesztés módszerét az alábbi séma szemlélteti:

A_1: $n \ldots 2n \quad 4n+3 \ldots 5n+2 \quad 10n+7 \ldots 11n+6 \quad 13n+8 \ldots 14n+7$

A_2: $2n+1 \ldots 4n+2 \quad 11n+7 \ldots 13n+7$

A_3: $5n+3 \ldots 10n+6$

Megjegyzés: Hogy a $t(p, n)$ a legnagyobb ilyen szám-e, az a mi módszerünkkel nem bizonyítható általánosan, de valószínűnek látszik.

IRODALOM

[1] ERDŐS PÁL: Számelméleti megjegyzések IV. (Matematikai Lapok XIII (3—4), 228—255).

ПРИМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ ИЗ НЕОПУБЛИКОВАННЫХ ТЕОРЕМ ПАЛА ТУРАНА

И. ЗНАМ

NOTES ON AN UNPUBLISHED THEOREM OF TURÁN

I. ZNÁM

The theorem in question asserts that dividing the numbers $n \leqq m \leqq 5n+3$ into two classes in whatever way, the equation $x+y=z$ is soluble in one class in *different* integers.

Két független kört nem tartalmazó gráfokról

BOLLOBÁS BÉLA

G^n jelentsen n pontú, G_k^n pedig n pontú és k élű gráfot (többszörös éleket és hurkokat nem engedünk meg), és jelentse $v(G)$ a G gráf éleinek, $\pi(G)$ pedig pontjainak számát. ERDŐS és PÓSA bebizonyították [1], hogy ha $n > 24p$, akkor $f(n,p) = (2p-1)n - 2p^2 + p$ esetén minden $G^n_{f(n,p)+1}$ gráf tartalmaz p független — vagyis páronként közös pont nélküli — kört (n és p természetes számok). Kimutatták továbbá, hogyha $n \geqq 4p$, akkor minden $G^n_{(2p-1)n-(2p-1)^2+1}$, mely nem tartalmaz háromszöget, tartalmaz p független kört (melyek mindegyike természetesen legalább négy élt tartalmaz).

E problémák általánosításaként ERDŐS PÁL vetette fel azt a kérdést, hogy legfeljebb hány éle lehet egy gráfnak, ha nincs benne p számú független kör, és bármely kör legalább $q(\geqq 3)$ élt tartalmaz. Az alábbiakban $p = 2$ esetén minden q értékre megoldjuk a feladatot, ha n elegendően nagy.

Mindenekelőtt tisztáznunk kell az itt felhasználható jelölések és fogalmak pontos jelentését. Egy pont fokán a pontra illeszkedő élek számát értjük. A kört és utat a szokásos értelemben használjuk. (L. pl. [2]). *ab-út* egy olyan út, melynek a és b végpontjai. Egy ilyen út az a és b pontokat *összeköti*. Utakat akkor nevezünk egymástól függetlennek, ha bármelyik, több útban előforduló pont ezen utak mindegyikének végpontja. A G gráfot *topologikus teljes k-szögnek* ($k \geqq 3$) nevezzük, ha kijelölhetőek G-ben a különböző $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pontok és az a_i és a_j pontokat ($i, j = 1, 2, \ldots, k$; $i \neq j$) összekötő, egymástól független u_{ij} utak oly módon, hogy G ezen u_{ij} utak egyesítése legyen. Az $a_1, \ldots, a_k$ pontokat a topologikus teljes k-szög *csúcsainak*, az u_{ij} utakat pedig *oldalainak*, mégpedig az u_{ij} utat a G gráf a_ia_j *oldalának* nevezünk. Ha $k > 3$, akkor a csúcsok és oldalak egyértelműen meg vannak határozva. A *topologikus n-szög* ($n \geqq 3$) olyan kör, melynek n pontja ki van tüntetve. E pontok a topologikus n-szög csúcsai, a csúcsokat összekötő, s végpontjaitól különböző csúcspontot nem tartalmazó körívek pedig az oldalai. Egy

G gráfot K_l-*alakzatnak* nevezünk, ha ki lehet benne jelölni a különböző a_1, a_2, a_3; $b_1, b_2, \ldots, b_l$ pontokat és az a_i és b_j $(i=1, 2, 3; j=1, 2, \ldots, l)$ pontokat összekötő, egymástól független u_{ij} utakat úgy, hogy G ezen utak egyesítése legyen. Az a_i és b_j pontokat a K_l-alakzat *csúcsainak*, az a_i, ill. b_j pontok összességét a csúcsok egy-egy *osztályának*, az u_{ij} utakat pedig az alakzat *oldalainak* — nevezetesen u_{ij}-t a K_l-alakzat a_ib_j oldalának — mondjuk. Egy K_l-alakzat csúcsai és oldalai egyértelműen meg vannak határozva; $K_l(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, \ldots, b_l)$-lel egy olyan K_l-alakzatot jelölünk, amelyben a_1, a_2, a_3 és $b_1, b_2, \ldots, b_l$ a csúcsok két osztálya. A továbbiakban a különleges szerepet játszó K_3-alakzatot *H-alakzatnak* is nevezzük.

A későbbiekben felhasználjuk a következő két könnyen belátható állítást: bármely topologikus teljes ötszögnek öttel, bármely H-alakzatnak hárommal több éle van, mint pontja.

Ha G egy topologikus teljes sokszög, vagy egy K_l-alakzat, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ G-nek különböző pontjai, továbbá léteznek G-ben a $c_1c_2, c_2c_3, \ldots, c_{n-1}c_n, c_nc_1$ oldalak, akkor azt a topologikus n-szöget, melynek oldalai a felsorolt oldalak, a G gráf egy topologikus n-szögének nevezzük és $c_1c_2\ldots c_n$-nel jelöljük.

A tárgyalás során a mod 4 különböző q értékekre külön-külön kellene bizonyítanunk állításainkat, mert bizonyításaink nem egészen azonosak, a rövidség kedvéért mégis csak a $q \equiv 0 \pmod 4$ esetben végezzük el részletesebben a bizonyítást, majd röviden utalunk arra, hogy a többi eset miben tér el ettől.

I. TÉTEL. *Legyenek k és l természetes számok $(k \geqq 3)$ és legyen $\varphi(k, l) = k(3l-2)+3$. Ha a $G^{\varphi(k,l)}$ gráf olyan, hogy*

(1) *nincs benne két idegen kör,*

(2) *bármely köre legalább $4l$ élet tartalmaz, akkor $G^{\varphi(k,l)}$ éleinek száma:*

$$v(G^{\varphi(k,l)}) \geqq 3kl.$$

Az (1) *és* (2) *feltételeknek eleget tevő $G_{3kl}^{\varphi(k,l)}$ gráf olyan K_k-alakzat, melynek minden oldala l élből áll.*

Tételünk tisztán kombinatorikus jellegű, bizonyításunkban mégis topologikus eszközöket (síkra rajzolhatóság, Euler poliéder-tétele, stb.) is felhasználunk. Úgy véljük, éppen ezen eszközök teszik lehetővé problémáink viszonylagosan egyszerű tárgyalását.

Bizonyításainkban említés nélkül is gyakran kihasználjuk azt a triviális tényt, hogy egy gráffal együtt annak minden részgráfja is kielégíti az (1) és (2) feltételeket.

1. LEMMA: *Azok a $G^{\varphi(k,l)}$ $(k \geqq 3)$ gráfok, melyek eleget tesznek a* (2) *feltételnek és legalább $3kl$ élet tartalmaznak, nem rajzolhatóak síkra.*

Az igazoláshoz előbb c szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy ha egy síkra rajzolható G_e^c gráf eleget tesz (2)-nek, akkor $c \geqq 4l$ esetén

$$e \leqq \frac{2l(c-2)}{2l-1}. \tag{3}$$

A továbbiakban jelöljön G_e^c olyan gráfot, mely kielégíti a (2) feltételt.

Ha $c < 4l$, G_e^c-ben nem lehet kör, ezért ekkor

$$e \leqq c-1. \tag{4}$$

A (3) és (4) egyenlőtlenségből következik, hogy bármely c-re fennáll az

$$e \leqq \frac{2i(c-1)}{2l-1} \tag{5}$$

egyenlőtlenség.

Ha G_e^{4l}-ben nincs kör, teljesül a (3) egyenlőtlenség. Ha pedig G_e^{4l}-ben van kör, akkor (2) miatt G_e^{4l} egy $4l$ élű kör, és ekkor szintén teljesül (3), vagyis $c = 4l$-re állításunk igaz.

Tegyük fel, hogy $c > 4l$ és hogy állításunk igaz minden $G_e^{c'}$-re, ahol $4l \leqq c' < c$. Bizonyítjuk, hogy ekkor bármely G_e^c-re is igaz.

Először belátjuk, hogy ha G_e^c nem összefüggő, vagy van artikulációs pontja, akkor az állítás igaz.

Valóban, ha G_e^c olyan $G_{e_1}^{c_1}$ és $G_{e_2}^{c_2}$ gráfok egyesítése, melyeknek legfeljebb egy közös pontjuk van, akkor $c_1 + c_2 - \leqq c$ és $e_1 + e_2 = e$. Ha c_1 és c_2 egyaránt kisebb $4l$-nél, a (4) egyenlőtlenség alapján:

$$e \leqq c_1 - 1 + c_2 - 1 \leqq c - 1 < \frac{2l}{2l-1}(c-2).$$

Ha pedig c_1 és c_2 egyike legalább $4l$, pl. $c_1 \geqq 4l$, akkor a (3) és (5) egyenlőtlenségek alkalmazásával:

$$e \leqq \frac{2l}{2l-1}(c_1-2) + \frac{2l}{2l-1}(c_1-1) \leqq \frac{2l}{2l-1}(c-2).$$

Ha viszont G_e^c összefüggő és nem tartalmaz artikulációs pontot, e gráf gömbre rajzolva a gömb felületét olyan egyszerű tartományokra osztja, melyeknek határa kör (L. pl. [3] 104. old.). Mivel minden kör legalább $4l$ élet tartalmaz, a tartományok számát f-fel jelölve: $e \geqq 2lf$, $f \leqq \frac{e}{2l}$. Másrészt Euler poliédertétele szerint

$$e + 2 = f + c,$$

s igy

$$e \leqq \frac{2l(c-2)}{2l-1}.$$

Ebből most már közvetlenül adódik, hogy ha egy $G_m^{\varphi(k,l)}$ gráf eleget tesz a (2) feltételnek, és $m \geqq 3kl$, akkor e gráf nem lehet síkra rajzolható, hiszen ekkor

$$3kl > \frac{2l[k(3l-2)+1]}{2l-1}.$$

2. LEMMA. *Ha egy* $G^{\varphi(k,l)}$ *gráf* ($k \geqq 3$) *legalább* $3kl$ *élet tartalmaz, és eleget tesz az* (1) *és* (2) *feltételeknek, akkor tartalmaz H-alakzatot.*

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben G olyan, — az (1) és (2) feltételeknek eleget tevő — gráf, melyre $\pi(G) = \varphi(k, l)$, $\nu(G) \geqq 3kl$ ($k \geqq 3$) és amelyben nincs H-alakzat.

Az 1. lemmából következik, hogy G nem lehet síkra rajzolható, KURATOVSKI tétele szerint tehát vagy tartalmaz egy topologikus teljes ötszöget, vagy pedig egy H-alakzatot (esetleg mindkét fajta alakzatot tartalmaz). Állításunk igazolására tehát elég bizonyítanunk, hogy G nem tartalmazhat topologikus teljes ötszöget.

Tegyük fel, hogy G-ben van egy topologikus teljes ötszög: P. Jelöljük P csúcsait a, b, c, d és e-vel. Könnyen belátható, hogy G-ben nem lehet P-től független kör, s olyan kör sem lehet, melynek P-vel csak egy közös x pontja van, hiszen e kör független lenne P-nek olyan topologikus háromszögétől, mely nem tartalmazza x-et, s ilyen háromszög mindig van. Az is igazolható, hogy P nem tartalmazhat két olyan pontot, melyek az ötszögtől független úttal vannak összekötve. Ha ui. lenne ilyen út, ez P oldalainak megfelelő szakaszaival olyan kört határozna meg, mely P egy topologikus háromszögétől idegen volna.

Ezekből következik, hogy a G gráfból P pontjait, s a belőlük kiinduló éleket elhagyva a megmaradó gráf kört nem tartalmazó komponensekre, vagyis fákra hullik szét, mégpedig úgy, hogy G-ben e fák bármelyikét legfeljebb egy él köti össze P-vel. Mivel egy fának eggyel kevesebb éle van, mint pontja, G-ben egy-egy ilyen fa pontjaira legfeljebb annyi él illeszkedik, ahány pontja van. Mivel pedig P-nek öttel több éle van, mint pontja, a fentiek szerint

$$\nu(G) \leqq \pi(G) + 5. \tag{6}$$

A $k > 4$ esetben (6) közvetlenül ellentmond $\nu(G)$ és $\pi(G)$-re tett kikötéseinknek, a $k = 3$ és $k = 4$ esetekben pedig következőképpen hozhatunk létre (6)-nak ellentmondó állítást:

Legyen $\pi(P) = p$. Ekkor $\nu(P) = p + 5$ $(\leqq \nu(G))$. Tegyük fel, hogy P legkevesebb élet tartalmazó oldala (mondjuk ab) μ élből, legkevesebb

élből álló topologikus háromszöge λ élből áll ($3\mu \leqq \lambda$, $4l \leqq \lambda$). Ekkor P-ben az ab oldalra illeszkedő topologikus háromszögek másik két oldala legalább $\lambda - \mu$ élből áll, a cde topologikus háromszög legalább λ élet tartalmaz, ezért

$$v(P) \geqq \mu + 3(\lambda - \mu) + \lambda = 4\lambda - 2\mu \geqq 4\lambda - 2\left[\frac{\lambda}{3}\right] \geqq 16l - 2\left[\frac{4l}{3}\right] > 13l.$$

Ennélfogva

$$v(G) > 13l > \varphi(4, l) + 5.$$

Ezzel a 2. lemma bizonyítását befejeztük.

3. LEMMA. *Ha egy H-alakzat eleget tesz az* (1) *és* (2) *feltételeknek, akkor legalább $9l-3$ pontot s legalább $9l$ élet tartalmaz. E határok bármelyike akkor és csak akkor érhető el, ha a H-alakzat minden oldala l élből áll.*

Legyen ui. $H_1 = H(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3)$ egy olyan H-alakzat, mely eleget tesz az (1) és (2) feltételeknek. Jelöljük a H_1 gráf a_ib_j $(i, j = 1, 2, 3)$ oldala által tartalmazott élek számát $v(a_ib_j)$-vel, s tegyük fel, hogy $\xi = v(a_1b_1) \leqq v(a_ib_j)$ $(i, j = 1, 2, 3)$. A H_1 gráf $a_1b_1a_ib_j$ $(i, j = 2, 3)$ topologikus négyszögének legalább $4l$ élet kell tartalmaznia, ezért

$$v(a_1b_j) + v(b_ja_i) + v(a_ib_1) \geqq 4l - \xi.$$

Ezen egyenlőtlenségeket az összes lehetséges i, j értékekre összegezve, majd hozzáadva a H_1-beli $a_2b_2a_3b_3$ topologikus négyszög létezése miatt fennálló

$$v(a_2b_2) + v(b_2a_3) + v(a_3b_3) + v(b_3a_2) \geqq 4l$$

és a

$$2v(a_1b_1) \geqq 2\xi$$

egyenlőtlenségeket, olyan egyenlőtlenségeket kapunk, melynek bal oldalán H_1 minden oldalának élszáma pontosan kétszer szerepel, tehát

$$2v(H_1) \geqq 20l - 2\xi.$$

Ebből és a ξ definícióból következő $v(H_1) \geqq 9\xi$ egyenlőtlenségből

$$v(H_1) \geqq 9l$$

adódik. Mivel H_1 H-alakzat, $\pi(H_1) = v(H_1) - 3 \geqq 9l - 3$.

Látható, hogy egyenlőség csak a $\xi = l$ esetben következhet be, mégpedig akkor, ha H_1 olyan H-alakzat, melynek minden oldala l élből áll. Az is könnyen igazolható, hogy az ilyen H-alakzat valóban kielégíti az (1) és (2) feltételt.

4. LEMMA. *Ha egy* G^{9l-3} *gráf eleget tesz az* (1) *és* (2) *feltételeknek, akkor legfeljebb* $9l$ *élet tartalmaz. Az* (1) *és* (2) *feltételeknek eleget tevő* G_{9l}^{9l-3} *gráf olyan H-alakzat, melynek minden oldala l élből áll.*

Tekintsünk egy $G = G_e^{9l-3}$ $(e \geqq 9l)$ gráfot, mely kielégíti az (1) és (2) feltételt.

G a 2. lemma szerint tartalmaz egy H_1 H-alakzatot, melynek a 3. lemma szerint legalább $9l-3$ pontja van. Mivel

$$\pi(H_1) \leqq \pi(G) = 9l-3,$$

$$\pi(H_1) = 9l-3 \tag{6}$$

s ezért a H_1 gráf olyan H-alakzat, melynek minden oldala l élből áll.

G-ben nem létezhet H_1-hez nem tartozó él, mert (6) miatt ez két H_1-hez tartozó pontot kötne össze, s az ilyen él H_1 oldalainak megfelelő szakaszaival $4l$-nél kevesebb élből álló kört alkotna. Ebből következik, hogy $G \equiv H$, q. e. d.

Most rátérünk az *I. tétel* állításának k-ra vonatkozó teljes indukcióval történő bizonyítására.

$k = 3$ esetén az I. tétel állítása a 4. lemma állításával azonos, tehát igaz. Tegyük fel, hogy $k-1$-ig is igaz $(k > 3)$. Bizonyítani fogjuk, hogy ekkor k-ra is igaz.

Tekintsünk egy olyan $G_m^{\varphi(k,l)}$ gráfot, melyre $m \geqq 3kl$ és amely eleget tesz az (1) és (2) feltételeknek. A 2. lemma szerint ez a gráf tartalmaz egy H_0 H-alakzatot; jelöljük egyik oldalát a_1b_1-gyel, s ezen oldalon az a_1-re illeszkedő él másik végpontját c_1-gyel.

Ha G-nek vannak izolált vagy elsőfokú pontjai, alkalmazzuk a következő eljárást: tekintsünk egy izolált, vagy elsőfokú x_1 pontot. Mivel egy H-alakzat bármely pontjának foka legalább kettő, x_1 nem pontja H_0-nak. Hagyjuk el az x_1-ből esetleg kiinduló élet az a_1c_1 éllel együtt, s helyettük húzzuk be az a_1x_1 és x_1c_1 éleket. Ily módon H_0-ból egy új H-alakzat: H_1 jött létre. H_1 és H_0 csúcsai egybeesnek és csak a_1b_1 oldalukban különböznek egymástól: H_1-nek eggyel több pontja és éle van, mint H_0-nak. G-ből pedig olyan G_1 gráf jön létre, melynek ugyanannyi pontja, s legalább annyi éle van, mint G-nek. Ha G_1-ben van izolált vagy elsőfokú pont, akkor ismételjük meg eljárásunkat egy ilyen ponttal és H_1-gyel, s folytassuk ezt mindaddig, amíg egy izolált és elsőfokú pont nélküli G^* gráfhoz nem jutunk. (Mivel a konstrukciónkban szereplő H-alakzatok pontszáma lépésenként eggyel nő, eljárásunk véges számú lépésben véget ér.) Jelöljük a H_0-ból létrejövő G^*-beli H-alakzatot H^*-gal. Ha G-ben minden pont foka legalább kettő, akkor $G^* \equiv G$ és $H^* \equiv H_0$. Legyen $H^* = H(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3)$. Az eljárásból következően $\pi(G^*) = \pi(G) = n$, $\nu(G^*) \geqq \nu(G) \geqq 3kl$ és G^* is kielégíti

az (1) és (2) feltételeket, hiszen az eljárás során két független kör nem keletkezhet, s a körök éleinek száma is legfeljebb nő.

A továbbiakban — ha mást nem mondunk — *oldalon*, ill. *topologikus sokszögön* mindig H^* oldalát, ill. topologikus sokszögét értjük.

Hagyjuk el a G^* gráfból H^* pontjait, s a hozzájuk illeszkedő éleket. Tekintsük az így kapott G' gráf komponenseit. Nyilvánvalóan nem lehet bennük kör, mert ha lenne, független lenne pl. az $a_1b_1a_2b_2$ topologikus négyszögtől. A komponensek tehát fák. Állítjuk, hogy a G^* gráfban G' komponensei közül mindegyiket legalább két él köti össze H^*-beli pontokkal. Valóban, válasszunk ki egy C komponenst. Ha ez izolált pont, akkor állításunk abból következik, hogy G^*-ban minden pont foka legalább kettő. Ha pedig C egynél több pontot tartalmaz, akkor e fának legalább két végpontja (elsőfokú pontja) van, s így G^*-ban ezekből legalább egy-egy élnek H^*-hoz kell futni.

Ebből következik, hogy minden egyes komponens a belőle H^*-ba induló élekkel együtt vagy tartalmaz olyan kört, melynek csak egy közös pontja van H^*-gal, vagy pedig olyan utat, mely két H^*-beli pontot köt össze és független H^*-tól. E lehetőségek közül az első nem állhat fenn, hiszen ha a kör és H^* közös pontja pl. az a_1b_1 oldal egyik pontja lenne, akkor e kör független lenne az $a_2b_2a_3b_3$ topologikus négyszögtől, s ez ellentmondana (1)-nek. A második esetnek kell tehát fennállnia.

Kimutatjuk, hogy az (1) tulajdonság miatt H^*-nak csak az ugyanazon osztályba tartozó *csúcspontjai* lehetnek H^*-tól független úttal összekötve. Ehhez szimmetria miatt elegendő kimutatnunk, hogy a két összekötött pont nem lehet a_1 és b_1, másrészt az út egyik végpontja sem lehet az a_1b_1 oldal valamelyik x belső pontja.

Az első állítás majdnem triviális: ha lenne H^*-tól független a_1b_1-út, ez az a_1b_1 oldallal az $a_2b_2a_3b_3$ topologikus négyszögtől független kört alkotna, s ez ellentmondana (1)-nek.

Ha pedig lenne H^*-tól független xy-út, ahol x az a_1b_1 oldal belső pontja, a H^* gráf szerkezetének szimmetriája miatt feltehetjük, hogy y vagy az a_1b_1 vagy az a_1b_2 oldal pontja, vagy pedig az a_2b_2 oldal belső pontja. Egyik eset sem állhatna azonban fenn, hiszen az elsőben az xy-út és az a_1b_1 oldal xy szakasza az $a_2b_2a_3b_3$ topologikus négyszögtől független kört alkotna, a második esetben az xy-út az a_1b_1 oldal a_1x szakasza és az a_1b_2 oldal a_1y szakasza által alkotott kör lenne független a $b_1a_2b_3a_3$ topologikus négyszögtől, s végül a harmadik esetben az xy-út, az a_2b_2 oldal yb_2 szakasza alkotna a $b_1a_2b_3a_3$ topologikus négyszögtől idegen kört.

Ezzel bizonyítottuk, hogy minden egyes komponens vagy az a_1, a_2, a_3, vagy a b_1, b_2, b_3 pontokra illeszkedő élekkel kapcsolódik a H^* alakzathoz. Bizonyításunkból az is következik, hogy a H^* alakzat

pontjai közül csak az a_1, a_2, a_3, ill. b_1, b_2, b_3 pontok lehetnek H^*-hoz nem tartozó éllel összekötve (hiszen az ilyen él H^*-tól független, annak két pontját összekötő utat jelent).

Most kimutatjuk, hogy vagy az a_1, a_2, a_3, vagy a b_1, b_2, b_3 pontokból csak H^*-hoz tartozó élek indulnak ki.

Ha ui. ez nem állna fenn, a betűzés megfelelő megváltoztatásával elérhetnénk, hogy G^*-ban létezzenek olyan U' és U'', H^*-tól független utak, hogy U' egy a_1a_2-út, U'' pedig egy b_1b_2-út legyen. U' és U''-nek nem lehetne közös pontja, mert ekkor ezen utak megfelelő szakaszaiból H^*-tól idegen a_1b_1-utat hozhatnánk létre. Azonban U' és U'' függetlensége is ellentmondáshoz vezet, hiszen ekkor U', az a_1b_3 oldal és a b_3a_2 oldal által alkotott kör idegen lenne az U'' és a b_1a_3, a_3b_2 oldalak alkotta körtől.

Feltehetjük tehát, hogy a b_1, b_2, b_3 pontokból csak H^*-hoz tartozó élek indulnak ki. Bizonyítani fogjuk, hogy valamely i-re nem lehet a b_ia_1, b_ia_2, b_ia_3 oldalak élszámának összege $3l$-nél nagyobb. Tegyük fel ui., hogy pl. $v(b_1a_1)+v(b_1a_2)+v(b_1a_3) \geqq 3l+d$, ahol d természetes szám. Hagyjuk el a G gráfból ezen oldalak éleit és pontjait az a_1, a_2, a_3 pontok kivételével. Az így keletkező G'' gráfra $\pi(G'') = \varphi(k, l)+2-(3l+d) = \varphi(k-1, l)-d$ és $v(G'') = v(G^*)-(3l+d) \geqq 3(k-1)l-d$. Vegyünk most újabb d számú pontot, s ezek mindegyikét kössük össze a G'' gráf egyik pontjával. Az így adódó G''' gráfra $\pi(G''') = \varphi(k-1, l)$, $v(G''') \geqq 3(k-1)l$ és G''' eleget tesz az (1) és (2) feltételeknek. Az indukciós feltevés szerint tehát G'''-nek egy K_{k-1} -alakzatnak kell lennie. Ez azonban ellentmondás, hiszen a most készített gráfnak $d (\geqq 1)$ számú elsőfokú pontja van.

Ha viszont a b_ia_1, b_ia_2, b_ia_3 oldalak élszámának összege minden lehetséges i-re ($i=1, 2, 3$) legfeljebb $3l$, a 3. lemmából következik, hogy H^* olyan H-alakzat, melynek minden oldala l élből áll. Ekkor G^*-ból elhagyva a b_1a_1, b_1a_2, b_1a_3 oldalak éleit, és — a_1, a_2 és a_3 kivételével — pontjait, $3l-2$ ponttal és $3l$ éllel kevesebbet tartalmazó gráfot kapunk. Erre indukciós feltevésünk alkalmazható, tehát ez a gráf egy K_{k-1}-alakzat: $K^* = K_{k-1}(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, \ldots, y_{k-1})$, ahol $k-1 \geqq 3$ és K^* minden oldala l élből áll. Mivel K^*-nak kettőnél magasabb fokú pontjai K^*-nak csúcsai, b_2 és b_3 K^*-nak csúcsai, mégpedig ugyanazon osztályba tartozó csúcsai, hiszen a H^* gráf b_2a_1 és a_1b_3 oldalaiból keletkező b_2b_3-út $2l$ élből áll (K^* különböző pontosztályaiba tartozó két pontot összekötő bármely út élszáma l-nek páratlan sokszorosa). Ebből következik, hogy a_1, a_2, a_3 szintén csúcsai K^*-nak — s ugyancsak egy osztályba tartozó csúcsok (K^*-ban a csúcsokból kiinduló utak l-edik élének végpontja szükségképpen szintén csúcs). Ha $k=4$, K^* valójában H-alakzat, s ekkor az eddig elmondottakból következik, hogy G^* olyan K_4-alakzat, melynek minden oldala l élet tartal-

maz, s melynek a_1, a_2, a_3, ill. b_1, b_2, b_3 különböző osztályokba tartozó csúcsai. Ha $k>4$, x_1, x_2 és x_3 legalább negyedfokú pontok, s ezért ezek csak az a_1, a_2, a_3 pontokkal lehetnek azonosak, hiszen b_2 és b_3 harmadfokúak. Ennélfogva G^* ebben az esetben is olyan K_k-alakzat, melynek minden oldala l élet tartalmaz, s melynek a_1, a_2, a_3, ill. b_1, b_2, b_3 különböző osztályokba tartozó pontjai.

Tételünk bizonyításához tehát már csak azt kell igazolnunk, hogy $G^* \equiv G$. Ha G^* és G nem egyeznének meg, ez azt jelentené, hogy a G-t G^*-gá átalakító eljárást valóban alkalmaznunk kellett. Ekkor H_0 a_1b_1 oldala kevesebb élt tartalmazna, mint H^* a_1b_1 oldala. Ez azonban lehetetlen, ugyanis H_0 és H^* csak az a_1b_1 oldalukban különböznek, s így H_0-ban létezne $4l$-nél kevesebb élből álló kör.

Tételünk bizonyítását ezzel befejeztük.

E tétel bizonyításához hasonlóan igazolhatjuk azt, hogy ha $n = \varphi(k, l)+2l-1$, akkor az n pontú, az (1) és (2) feltételeknek eleget tevő gráf legfeljebb $m = 3kl+2l$ élet tartalmaz. Az (1) és (2) feltételeknek eleget tevő G_m^n gráf unicitása is hasonlóan mutatható ki, s az extrém gráf egy K_k-alakzatból: $K_k^* = K_k(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, \ldots, b_k)$-ból és az ettől független a_1a_2-útból áll, ahol K_k^* minden oldala l élből, az a_1a_2-út pedig $2l$ élből áll.

Jelöljük $f_q(n)$-nel az n pontú gráf éleinek maximális számát, ha a gráfban nincs két független kör és a gráf bármely köre legalább q számú ($q \geqq 3$) élből áll. Az eddig kimondott állítások felhasználásával $n \geqq 9l-3$, $l \geqq 1$ esetén minden egész l, n értékre meghatározzuk $f_{4l}(n)$ értékét:

II. TÉTEL. *Legyenek k, l és n természetes számok ($k \geqq 3$), s legyen $\varphi(k, l) = k(3l-2)+3$. Ha $n = \varphi(k, l)+r$, akkor $0 \leqq r < 2l-1$ esetén $f_{4l}(n) = 3kl+r$, $2l-1 \leqq r < 3l-2$ esetén pedig $f_{4l}(n) = 3kl+r+1$.*

Mivel $\varphi(k, l)+3l-2 = \varphi(k+1, l)$, a fenti tétel $n \geqq \varphi(3, l) = 9l-3$ esetén valóban minden n, l természetes számra megadja $f_{4l}(n)$ értékét.

A bizonyítás előtt mindössze egy kézenfekvő megjegyzést teszünk: ha egy G_v^u gráf eleget tesz az (1) és (2) feltételeknek, $s \geqq 1$, akkor van olyan $G_{v \dagger s}^{u \dagger s}$ gráf, mely szintén eleget tesz az (1) és (2) feltételeknek, s melynek elsőfokú pontja is van. Valóban, ha G_v^u-hez hozzávesszünk s számú újabb pontot, s mindegyiket összekötjük G_v^u egyik pontjával, a mondott tulajdonsággal rendelkező gráfot kapunk.

E megjegyzésből az I. tétel, és az $n = \varphi(k, l)+2l-1$ értékre vonatkozó állítás alapján közvetlenül adódik, hogy

$$f_{4l}(n) \geqq 3kl+r, \text{ ha } 0 \leqq r \leqq 2l-2$$

és

$$f_{4l}(n) \geqq 3kl+r+1, \text{ ha } 2l-1 \leqq r < 3l-2.$$

Másrészt, ha lenne olyan $G^n_{f_{4l}(n)}+1$ gráf, mely eleget tesz az (1) és (2) feltételeknek, $0 \leqq r \leqq 2l-2$ esetén $s = 2l-1-r$-re, ill. $2l-1 \leqq r < 3l-2$ esetén $s = 3l-2-r$-re alkalmazva a fenti megjegyzést, ellentmondásra jutnánk az $n = \varphi(k, l)+2l-1$ értékre vonatkozó állítással, ill. az I. tétellel.

A most bizonyított tételhez hasonló állítások bizonyíthatóak a $q \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$ esetekre is.

III. TÉTEL

$$q = 4l+1 \quad és \quad n = 3kl+r \qquad (l \geqq 1, k \geqq 3, 0 \leqq r < 3l)$$

esetén

$$f_g(n) = 3kl+2k-3+r, \quad ha \quad 0 \leqq r \leqq 2l-1,$$

és

$$f_g(n) = 3kl+2k-2+r, \quad ha \quad 2l \leqq r < 3l.$$

IV. TÉTEL

$$q = 4l+2 \quad és \quad n = 3kl+2+r \qquad (l \geqq 1, k \geqq 3, 0 \leqq r < 3l)$$

esetén

$$f_g(n) = 3kl+2k-1+r, \quad ha \quad 0 \leqq r \leqq 2l-1$$

és

$$f_g(n) = 3kl+2k+r, \qquad ha \quad 2l \leqq r < 3l.$$

V. TÉTEL

$$q = 4l+3 \quad és \quad n = (3l+1)k+2+r \qquad (l \geqq 0, k \geqq 3, 0 \leqq r < 3l+1)$$

esetén

$$f_q(n) = 3kl+2k-1+r, \quad ha \quad 0 \leqq r \leqq 2l-1$$

és

$$f_q(n) = 3kl+2k+r, \qquad ha \quad 2l \leqq r < 3l.$$

Ezen állításokat ugyanazon lépéseken keresztül igazolhatjuk, mint a II. tételt. A számításbeli eltéréseket nem tekintve, az egyetlen eltérés az — mely kicsit bonyolítja a diszkussziót —, hogy az $r=0$ esetben fellépő speciális K_k-alakzat nem olyan egységes felépítésű, mint a $q \equiv 0 \pmod 4$ esetben. $q = 4l+1, n = 3kl$ esetén például az extrém gráf egy K_k-alakzat: $K^* = K_k(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, \ldots, b_k)$ melyben az a_ib_i $(i=1, 2, 3)$ oldal $l+1$, az a_ib_j $(i, j=1, 2, 3; i \neq j)$ oldal l élből áll, s a b_i $(i=4, 5, \ldots, k)$ pontból induló három oldal közül kettő $1+1$, egy pedig l számú élet tartalmaz.

IRODALOM

[1] P. ERDŐS and L. PÓSA: On maximal number of disjoint circuits of a graph, Publ. Math. 9 (1962), 3–12.

[2] KŐNIG: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.

[3] W. T. TUTTE: A theorem on planar graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956) 99–116.

О ГРАФАХ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ КРУГОВ

Б. Боллобаш

Автором обсуждается специальный случай одной из проблем П. Ердёша. Максимальное число рёбер графа с n вершинами определяется, если в графе нет двух кругов, не содержащих общей вершины, и если любой круг графа содержат не менее $q(q \geqq 3)$ рёбор. Автор определяет и экстремальныый граф для специальнго значения n. Он получется наиболее простым для случая

$$q=4l, \quad n = k(3l-2)+3(k \geqq 3, \quad l=1),$$

когда можно ее сконструировать следующим образом:

Возьмем разные точки $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, \ldots, b_k$, где точки a_i и b_j соединяются путями состоящими из l рёбер u_{ij} $(i=1,2,3; j=1,2,\ldots,k)$, которые-попарнокроме конечных точек, не имеют общих точек.

ON GRAPHS WHICH DO NOT CONTAIN TWO INDEPENDENT CIRCUITS

B. Bollobás

The present paper deals with a special case of a problem of P. Erdős. The maximal number of edges of a graph with n vertices is determined, if the graph does not contain two independent circuits, and every circuit of the graphs has at least q edges $(q \geqq 3)$. For special n the extreme graph is also given, which is the simplest for $q=4l$, $n=k(3l-2)+3$ $(k \geqq 3, l \geqq 1)$; in this case the extreme graph can be obtained by the following construction:

Let be $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, \ldots, b_k$ different points and connect the points a_i and b_j with the paths u_{ij} $(i=1,2,3; j=1,2,\ldots,k)$ which consist of l edges and no two paths have (apart from the endpoints) points in common.

Az $\binom{n}{2}=a^l$ és $\binom{n}{3}=a^l$ diophantoszi egyenletekről

GYŐRY KÁLMÁN

1. Ismeretes a következő[1]:

TÉTEL. *Legyenek k és n olyan egész számok, amelyekre $n>k\geqq 4$, ekkor $\binom{n}{k}$ semmilyen egynél nagyobb l kitevővel nem lehet egy egész szám l-edik hatványa.*

Viszont $k=l=2$-re az $\binom{n}{2}=a^2$ egyenletnek végtelen sok egész megoldása lehet, mivel $(n, n-1)=1$ miatt $n=2y^2, n-1=x^2$ vagy $n=x^2, n-1=2y^2$ megválasztással az

$$x^2 \pm 1 = 2y^2$$

egyenletek adódnak. Ennek megoldásai rekurzive megadhatók:

$$x_{k+1}=4y_k+3x_k, \quad y_{k+1}=3y_k+2x_k$$

az $x_0=y_0=1$, másrészt az $x_0=1, y_0=0$ kezdőértékekből kiindulva.

Az $\binom{n}{3}=a^2$ egyenlet egyetlen triviálistól különböző megoldása[2]:

$$\binom{50}{3}=\frac{50\cdot 49\cdot 48}{1\cdot 2\cdot 3}=25\cdot 49\cdot 16=140^2$$

OBLÁTH RICHÁRD bizonyította, hogy az $\binom{n}{2}=a^l$ és $\binom{n}{3}=a^l$ megoldhatatlan, ha $l=3, 4$ vagy 5.

A továbbiakban ezen két egyenlet megoldhatóságával foglalkozunk az $l>5$ esetben.

2. Az $\binom{n}{2}=a^l$ egyenletre vonatkozóan belátjuk a következőt:

1. TÉTEL. $\binom{n}{2}$ *nem lehet egész szám 2-nél nagyobb páros kitevőjű hatványa, ha* $n>2$.

Feltéve, hogy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = a^{2l}$ $(l>1)$, ugy $(n, n-1) = 1$ alapján

$$n = x^{2l},\ n-1 = 2y^{2l},$$

vagy

$$n = 2y^{2l},\ n-1 = x^{2l}$$

adódik.

Innen az (1) $x^{2l}-1 = 2y^{2l}$, valamint a (2) $x^{2l}+1 = 2y^{2l}$ egyenleteket nyerjük.

Az első egyenletet tekintve:

$$x^{2l}-1 = (x^l+1)(x^l-1) = 2y^{2l},$$

ahonnan az egyik tényező csak 2 első hatványával osztható, tehát

$$x^l+1 = 2u^{2l},\ x^l-1 = 2^{2l}v^{2l} = (4v^2)^l$$

vagy

$$x^l+1 = 2^{2l}u^{2l} = (4u^2)^l,\ x^l-1 = 2v^{2l}.$$

Itt viszont az utóbbi, ill. előbbi egyenletnek nincs triviálistól különböző megoldása, azaz (1) az egész számok körében lehetetlen.

A (2) egyenlet, $x^{2l}+1 = 2y^{2l}$ szintén nem oldható meg, ugyanis STÖRMER bizonyította[3], hogy $x^2+1 = 2y^n$ nem teljesülhet, ha $n>2$.

Eszerint nemcsak (2), hanem $x^2+1 = 2y^{2l}$ sem állhat, ahol $l>1$. Ezzel állításunkat igazoltuk.

A tétel érdekessége, hogy az $\binom{n}{2} = a^2$ egyenletnek végtelen sok megoldása van ugyan, azonban a nem lehet teljes hatvány.

A következőkben páratlan prímszám kitevőkre szorítkozunk, bár a $p=3, 5$ esetek elintézettek.

SEGÉDTÉTEL. *Az* $x^p \pm 1 = 2y^p$ *egyenletekben* $p|x$ *csak akkor, ha* $2^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$.

Ugyanis, ha $p|x$, úgy $\pm 1 \equiv 2y \bmod p$, amiből $y \equiv \pm 2^{p-2} \bmod p$, azaz $y = pk \pm 2^{p-2}$.

Mármost $p^2|x^p$, ezért $\pm 1 \equiv 2y^p \bmod p^2$, hová az előbb nyert értéket helyettesítve:

$$\pm 1 \equiv 2y^p = 2(pk \pm 2^{p-2})^p \equiv \pm 2^{(p-2)p+1} = \pm 2^{(p-1)^2} \bmod p^2$$

Azonban $2^{(p-1)^2}-1 = (2^{p-1}-1)(2^{(p-1)(p-2)}+\ldots+2^{p-1}+1)$, itt pedig a második tényező $\equiv p-1 \not\equiv 0 \bmod p$, ezért szükségképpen következik $2^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$.

3. Áttérünk az $\binom{n}{3} = a^p$ egyenlet vizsgálatára, mégpedig ekvivalens feltételi egyenletrendszerekkel helyettesítjük.

Megjegyezhető, hogy $\binom{n}{3}$ nem lehet egész szám 2-nél nagyobb páros kitevőjű hatványa, mert mint láttuk, az $l=2$ melletti egyetlen megoldás, 140 nem teljes hatvány.

Induljunk ki az $\binom{n}{3}=a^p$ feltevésből, mely más alakban írva

$$n(n-1)(n-2) = 6a^p$$

Különböztessünk meg három esetet aszerint, hogy $n, n-1$ vagy $n-2$ osztható 3-mal. Ezen belül a három szám párosságát is figyelembe vesszük, felhasználva, hogy egymás utáni páros számok közül csak az egyik osztható 2 magasabb hatványával. Így a 2 és 3 számoktól eltekintve a három szám páronként relatív prím, tehát egy-egy p-ik hatványként áll elő.

Ennek megfelelően az esetek:

a) $n=3u^p, \quad n-1=2v^p, \quad n-2=w^p,$

honnan $\binom{n-1}{2}=(vw)^p$ és $n-1>2.$

$n=3\cdot 2^p u^p, \quad n-1=v^p, \quad n-2=2w^p,$

azaz $\binom{n-1}{2}=(vw)^p$

$n=6u^p, \quad n-1=v^p, \quad n-2=2^p w^p,$

amiből $v^p-1=(2w)^p$, ez pedig $|v|>1$-re megolhatatlan.

b) $n=u^p, \quad n-1=2v^p, \quad n-2=3w^p$

ebből $\binom{n}{2}=(uv)^p$ és $n>2$

$n=2u^p, \quad n-1=v^p, \quad n-2=3\cdot 2^p\cdot w^p$

igy $\binom{n}{2}=(uv)^p.$

$n=2^p u^p, \quad n-1=v^p, \quad n-2=6w^p,$

azaz $v^p+1=(2u)^p,$

ami $|v|>1$-re hasonlóan lehetetlen

Végül az utolsó eset:

c) $n=2w^p, \quad n-1=3v^p, \quad n-2=2^p u^p$

ebből pedig a $2(w^p-1) = 3v^p-1 = 2^p u^p$ egyenletrendszer adódik. Hasonlóan $n = 2^p u^p$, $n-1 = 3v^p$, $n-2 = 2w^p$, vagyis a $2(w^p+1) = 3v^p+1 = 2^p u^p$ egyenletrendszerre jutunk. Ha pedig $n = u^p$, $n-1 = 6v^p$, $n-2 = w^p$, úgy $u^p = w^p+2$ és ez lehetetlen.

Végeredményben tehát azt nyertük, hogy $\binom{n}{3} = a^p$ megoldhatatlan, ha $\binom{n}{2} = a^p$ is megoldhatatlan és a *c)* pontbeli egyenletrendszerek legalább egy-egy egyenlete nem teljesül. Ezt az eredményt a későbbiekben kihasználjuk, amennyiben megmutatjuk, hogy $2^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$ esetén ezen két egyenletrendszer megoldhatatlan.

4. Néhány segédtételt bizonyítunk ezen egyenletrendszerre, egyes egyenleteire vonatkozóan, melyekből egyszerűen következik majd az előzőleg már említett eredmény.

I. SEGÉDTÉTEL. *Legyenek* $a>1$ *és* $k \geqq 1$ *p-vel nem osztható egész számok.* a^k *akkor és csak akkor p-ik hatványmaradék* $\bmod p^2$, *ha* $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$.

Feltéve, hogy a^k p-ik hatványmaradék $\bmod p^2$, úgy létezik x, melyre $x^p \equiv a^k \bmod p^2$.

Ekkor viszont méginkább $x^p \equiv x \equiv a^k \bmod p$, tehát $x = pl + a^k$.

Így

$$(pl + a^k)^p \equiv a^{kp} \equiv a^k \bmod p^2$$

vagy

$$a^{(p-1)k} \equiv 1 \bmod p^2.$$

Ha most $k=1$, úgy állításunk igazolt, $k>1$-re pedig

$$a^{(p-1)k} - 1 = (a^{p-1}-1)(a^{(p-1)(k-1)} + \ldots + a^{p-1} + 1) \equiv 0 \bmod p^2,$$

ám a második tényező $\equiv k \not\equiv 0 \bmod p$, ezzel a szükségességet bizonyítottuk.

Tekintve, hogy az adott feltételek mellett $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$-ből kiindulva az eljárás teljes egészében megfordítható, vagyis következik, hogy a^k p-ik hatványmaradék $\bmod p^2$, ezért az elégségesség is igazolt.

II. SEGÉDTÉTEL. *Az* $x^p \pm 1 = 2^k y^p$ *egyenletnek* $(k>1$ *egész szám és* $k \not\equiv 0,1 \bmod p)$ *amennyiben* $2^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$, *csak úgy lehet triviálistól különböző megoldása az egész számok körében, ha* $p \mid y$.

A bizonyításhoz LUBELSKI következő ismert tételét használjuk fel[4]:

Ha p valamely páratlan prímszám, c valamely tetszőleges páros, p-hez relatív prím egész szám, melynek nincs $ap+1$ alakú prímtényezője és amely $c/2$-lel együtt p-ik hatvány-nem-maradék $\bmod p^2$, akkor az

$$x^p + y^p = cz^p: \quad p \nmid z$$

egyenlet egész számokban nem megoldható.

Az I. segédtétel alapján, ha $2^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$, úgy egyenletünkre a Lubelski tétel összes feltételei teljesülnek, csupán $p \nmid y$-ról nem mondhatunk semmit, ezért egyenletünk az adott feltétel mellett csak úgy oldható meg, ha $p \mid y$.

III. SEGÉDTÉTEL. *A* $3v^p = u^p \pm 1$ *egyenletek megoldhatatlanok, amennyiben* $3^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$ *és* $2^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$.

A bizonyításhoz LUBELSKInek az előbbihez hasonló eredményét használjuk fel[5].

Ha c-nek egyetlen $ap+1$ alakú prímtényezője sincs és c p-ik hatványmaradék $\bmod p^2$,

$$x^p + y^p = cz^p$$

csak úgy oldahtó meg, ha $2^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$.

Mivel egyenletünkben az I. segédtétel alapján 3 csak akkor p-ik hatványmaradék $\bmod p^2$, ha $3^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$, így $2^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$ mellett a LUBELSKI tétel szerint állításunk igazolt.

IV. SEGÉDTÉTEL. *A* $3v^p = u^p \pm 1$ *egyenletek megoldhatatlanok, ha* $p \mid u$ *és* $3^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$.

A megoldhatóságot $p \mid u$ mellett feltételezve:

$$3v^p \equiv 3v \equiv \pm 1 \bmod p$$

honnan $v \equiv \pm 3^{p-2} \bmod p$ vagy $v = pl \pm 3^{p-2}$.

Ekkor egyenletünk $\bmod p^2$ tekintve:

$$\pm 1 \equiv 3v^p = 3(pl \pm 3^{p-2})^p \equiv \pm 3^{(p-2)p+1} \equiv \pm 3^{(p-1)^2} \bmod p^2,$$

azaz

$$3^{(p-1)^2} - 1 = (3^{p-1} - 1)(3^{(p-1)(p-2)} + \ldots + 3^{p-1} + 1) \equiv 0 \bmod p^2,$$

ám a második tényező $\equiv p - 1 \not\equiv 0 \bmod p$, így szükségképpen következik $3^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$ mellett az egyenletek megoldhatatlansága.

A segédtételek felhasználásával azonnal adódik a következő eredmény:

II. TÉTEL. *Legyen* p *páratlan prímszám, melyre* $2^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$. *Ekkor az* $\binom{n}{3} = a^p$ *egyenlet az egész számok körében megoldhatatlan* $(n > 3)$, *ha* $\binom{n}{2} = a^p$ *is megoldhatatlan.*

Ugyanis, ha $2^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$, úgy a $3c$) pontbeli feltételi egyenletrendszereknek nincs megoldása.

Ekkor a II. segédtétel értelmében az egyenletrendszerek $w^p \pm 1 = 2^{p-1}u^p$ egyenletei csak $p \mid u$ mellett megoldhatók, ami azt jelenti,

hogy a $3v^p = (2u)^p \pm 1$ egyenletekben $p|2u$. Ez viszont így a IV. segédtétel értelmében nem megoldható, ha $3^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$. A III. segédtétel szerint pedig $3v^p = (2u)^p \pm 1$ a $2^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$ és $3^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$ egyidejű teljesülése mellett sem állhat, ezért állításunk igazolt.

Megjegyezhető, hogy az 1093 és 3511 kivételektől eltekintve 80 000-ig nincs olyan p prímszám, melyre $2^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$ teljesül. Az eredményt GOLDBERG elektronikus számológép segítségével nyerte, nagyobb primszámokra az oszthatósági reláció fennállása vagy lehetetlensége ismeretlen.

5. Végezetül a kiinduló egyenleteinknek egy rögzített p páratlan prímszám melletti esetleges megoldhatósága esetén, a megoldások számáról látjuk be az alábbiakat:

III. TÉTEL. *Egy tetszőleges p páratlan prímszám esetén az* $\binom{n}{2} = a^p$ *és az* $\binom{n}{3} = a^p$ *egyenleteknek legfeljebb véges sok megoldása lehet az egész számok körében.*

Felhasználjuk ROTH egy híres tételét[6], melynek a magasabb fokú diophantoszi egyenletek megoldásainak számára vonatkozó megfogalmazása a következő:

Legyen $f(x, y) = b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \ldots + b_ny^n$ $n \geqq 3$-adfokú irreducibilis polinom racionális egész együtthatókkal és legyen $g(x, y) = \sum_{r+s \leqq n-3} g_{rs}x^ry^s$ legfeljebb $(n-3)$-adfokú polinom racionális egész együtthatókkal.

Akkor az

$$f(x, y) = g(x, y)$$

megoldásainak a száma kisebb, mint

$$(4B)^{2n^2}G^3 + \exp(643n^2)$$

ahol

$$B = \max |b_r|, \quad G = \max |g_{rs}|$$

Az eddigiek alapján állításunk igazolásához elég kimutatni, hogy az $x^p \pm 1 = 2y^p$ és $x^p \pm 1 = 3y^p$ feltételi egyenleteknek külön-külön legfeljebb véges sok megoldása lehet.

Válasszuk

$$f_1(x, y) = x^p - 2y^p \quad \text{és} \quad g_1(x, y) = \mp 1$$

$$f_2(x, y) = x^p - 3y^p \quad \text{és} \quad g_2(x, y) = \mp 1.$$

Tekintve, hogy $p \geqq 3$, így a ROTH-tétel fokszámra vonatkozó feltétele teljesül. Ezenkívül $f_1(x, y)$ és $f_2(x, y)$ irreducibilis, mert ellenkező esetben figyelembe véve szerkezetüket, $f_1(x, 1) = x^p - 2$ és $f_2(x, 1) =$

$= x^p - 3$ is reducibilisek lennének, ami az Eisentein-tétel miatt lehetetlen.

Ezzel tételünk bizonyított.

IV. TÉTEL. *Az* $x^p \pm 1 = 2^{p-1}y^p$ *egyenletnek* $p \geqq 29$ *prímszámra nézve legfeljebb egy triviálistól különböző megoldása lehet.*

A bizonyítás SIEGEL nevezetes tételén alapszik [7], mely szerint az $|ax^n - by^n| \leqq k$ egyenlőtlenségnek legfeljebb egy nem triviális egész számú megoldása van, ha $n \geqq 3$ és

$$|ab|^{\frac{1}{2}} > 188\, nk^4.$$

Az $n = p$, $k = a = 1$ és $b = 2^{p-1}$ megválasztással egyenletünknek tehát legfeljebb egy triviálistól különböző megoldása van, ha

$$2^{\frac{p-1}{2}} > 188p,$$

mely $p = 29$-re teljesül, $p = 23$-ra viszont nem.

Mivel pedig $2^{\frac{p-1}{2}}/p$ szigorúan monoton növekvő sorozat, amit deriválással könnyen beláthatunk, így $p > 29$-re méginkább teljesül a feltétel, $p < 29$-re, pedig nem, ezért állításunk bizonyítást nyert.

Érdekes megjegyezni egyrészt, hogy a IV. tétel ismeretében a III. tételt elég lett volna az $\binom{n}{2} = a^p$-re igazolni.

Másrészt a IV. tétel a II. tétellel együtt azt is jelenti, hogy az $\binom{n}{3} = a^p$ egyenlet 3*c)* pontbeli feltételi egyenletrendszerei megoldhatatlanok, ha $2^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2$, míg ellenkező esetben legfeljebb egy megoldásuk lehet.

IRODALOM

[1–2] ERDŐS–SURÁNYI: Válogatott fejezetek a számelméletből, 194–198.

[3] C. STÖRMER: Solution complete en nombres entiers de l'équation $m \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$ Bull. de la Soc. Math. de France 27 (1889) 160–170.

[4–5] S. LUBELSKI: Studien über den grossen Fermatschen Satz. Prace Matematyczne-Fizyczne 42 (1935), 11–44.

[6] K. F. ROTH: Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika 2 (1955), 1–20.

[7] C. SIEGEL: Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Akad. d. Wiss. Phys-Math. (1930), 1–70.

О ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЯХ $\binom{n}{2}=a^l$ И $\binom{n}{3}=a^l$

К. Дёри

ON THE DIOPHANTINE EQUATIONS $\binom{n}{2}=a^l$ AND $\binom{n}{3}=a^l$

K. Győry

P. Erdős has proved that $\binom{n}{k}$ can not be represented in the form a^l ($l>1$), if $n>k\geqq 4$.

In the remaining cases $k=2$, 3 it is known that $\binom{n}{2}=a^2$ is solvable for infinitely many values of n, and on the other hand $\binom{n}{3}=a^2$ is satisfied only by $n=50$, $a=140$.

This implies also that $\binom{n}{3}$ cannot be of the form a^{2l} ($l>1$).

The insolvability of the equations $\binom{n}{2}=a^l$ and $\binom{n}{3}=a^l$ for $l=3$, 4, 5 was proved by R. Oblath.

In the present paper we prove that $\binom{n}{2}$ can not be of the form a^{2l} ($l>1$). Moreover if p is an odd prime for which $2^{p-1}\not\equiv 1 \bmod p^2$ holds then the insolvability of $\binom{n}{2}=a^p$ implies the insolvability of $\binom{n}{3}=a^p$.

Finally we show that for an arbitrary fixed odd prime p the equation $\binom{n}{2}=a^p$ and similarly $\binom{n}{3}=a^p$ has only a finite number of solutions n, a.

Nemzetközi Matematikaoktatási Szimpózium

(Budapest, 1963. augusztus 27—szeptember 8)

VARGA TAMÁS

Sokan megállapították már, teljes joggal, hogy a matematika általános és középiskolai tananyaga nem tart lépést a korral, elavult, sokkal inkább, mint például a fizika, a kémia vagy a biológia tananyaga. Ezt az elmaradást tarthatatlanná kezdi tenni magának a matematikának a gyors fejlődése, alkalmazási területeinek bővülése; olyan értelemben tarthatatlanná, hogy amelyik országban nem veszik eléggé komolyan ezt a problémát, annak a gazdasági fejlődése is súlyosan megsínyli — még ha több évtizedes fáziseltolódással is — ezt a szűklátókörűséget. A tudományok, a technika és a népgazdaság egyre több ágában volna ugyanis égető szükség például a matematikai statisztika, az információelmélet, a lineáris programozás, a játékelmélet, a matematikai gépek alkalmazására, de ehhez a matematika említett ágaiban tájékozott matematikusokon kívül arra is szükség van, hogy a legkülönfélébb területeken dolgozó szakemberek és középkáderek többé-kevésbé tisztában legyenek a matematikai módszerek horderejével, alkalmazhatóságával, hozzájáruljanak a matematikailag megfogható problémák feltárásához és megfogalmazásához. Bizonyos ismeretekre és az ismeretek alkalmazni tudására azoknak is szükségük van — még inkább lesz már a közeljövőben — a matematika újabb eredményei köréből, akik csak középiskolát végeznek és a matematika régebbi ágaival is más felfogásban, más súlyozással kell megismerkedniük, mint azelőtt. (Elég arra utalni, hogy a numerikus számolás szerepe nem csökken, de a különféle matematikai gépek és egyéb eszközök — például logarléc — elterjedése révén egészen más hangsúlyt kap az iskolában is, mint eddig.) A felsőoktatás sem tud azonban megbírkózni a különböző szakterületeken a matematizálódás folytán ráháruló feladatokkal, ha az általános és középiskola rosszul használja fel vagy éppen elvesztegeti azokat az éveket, amelyek a legfogékonyabbak a matematikai fogalmak kialakítása, a problémalátás és -megoldás képességének kifejlesztése, általában a matematikai gondolkozás kibontakoztatása szempontjából.

A matematika *tananyagának* korszerűsítése azonban, bármilyen sürgős és fontos feladat is, megoldhatatlan a matematika hagyományos tanítási *módszereinek* alapos felülvizsgálata nélkül. Az egyetemi tananyag egyszerű lejjebb hozására irányuló törekvések katasztrofális következményekkel járhatnak és nem egyszer járnak is. Viszont alkalmas módon megközelítve esetleg általános iskolai fokon is hozzáférhetővé válnak olyan tárgykörök alapelemei, amelyeknek a tanítására azelőtt még középiskolában sem gondoltak volna.

Végül: a tananyag és a tanítási módszerek korszerűbbé tételének elengedhetetlen feltétele, hogy a matematikát tanító *pedagógusok* matematikai és pedagógiai gondolkozása egyaránt lépést tartson a mai idők követelményeivel és elgondolásaikat képesek legyenek a mindennapos tanítási munkában is megvalósítani.

*

A budapesti Nemzetközi Matematikaoktatási Szimpózium terve abból a felismerésből született, hogy az említett problémák elválaszthatatlanul összefüggenek egymással: a tananyag, a tanítási módszerek és a pedagógusképzés, valamint továbbképzés kérdéseit együtt kell megvizsgálni. Ez az elgondolás a következő munkaprogram kialakításához vezetett:

I. Tananyagproblémák

1. Mit nyújtson a matematika iskolai tanterve a következő nevelési célok vonatkozásában:
   a) a matematika, mint kulturánk egy része — matematika mindenki számára,
   b) a matematika, mint az élet és a munka alapja, — szükséges eszköz az iskolából kikerülők nagy része számára,
   c) a matematika, mint előkészítés, — mint alap a felsőfokú oktatáshoz.
2. A jelenlegi helyzet elemzése:
   a) a tanítási idő,
   b) a tanterv tartalma és szerkezete,
   c) a matematika tanításának hatásossága.
3. Új tantervek bevezetésének lehetőségei,
   a) beszámoló kísérletekről és kísérlettervekről,
   b) egységes szempontokon nyugvó tantervek alapelvei és körvonalai.

II. Tanítási módszerek problémái

1. Tanulási folyamat,
   a) a tapasztalatoktól az elvont fogalmakig és általánosításokig, valamint az általános matematikai ismeretek széleskörű alkalmazásáig vezető út,

b) fogalmak és megfelelő készségek kialakítása,
c) szimbólumok szerepe,
d) konstrukció és logikai elemzés,
e) egyéni különbségek,
f) motiváció.

2. A mai tanítási módszerek összehasonlító vizsgálata:
   a) az osztálymunka különböző formái,
   b) az egyéni és csoportmunka különböző formái.
3. Beszámoló új módszertani kísérletekről és kísérlettervekről.
4. A tanulási folyamatra vonatkozó kutatás hatása a tananyag problémáira.

III. A nevelőképzés és továbbképzés problémái

1. A nevelői hivatás:
   a) a pedagógus szerepe az oktatási folyamatban,
   b) a pedagógussal szemben támasztandó követelmények,
   c) a fiatalság megnyerése a nevelői pályára.
2. A nevelőképzés matematikai, lélektani és pedagógiai vonatkozásai:
   a) az 1—4. (vagy 1—6.) osztályok számára,
   b) az 5. (vagy 7.) és magasabb osztályok számára.
3. A pedagógus-továbbképzés:
   a) a továbbképzés formái (levelező tagozat, tanfolyamok stb.)
   b) a továbbképzés anyaga.
4. A pedagógusok megnyerése a reformok számára. Kedvező közvélemény kialakítása.
5. Nemzetközi együttműködés további problémák megoldására.

*

A Szimpózium a Magyar Népköztársaság Kormányának javaslata alapján, az UNESCO támogatásával, a Művelődésügyi Minisztérium szervezésében folyt. Társulatunk aktivái a terv felmerülésétől kezdve bekapcsolódtak az előkészítés, majd a lebonyolítás munkájába; erre később hivatalosan is felkérték a Bolyai Társulatot. Surányi János főtitkáron kívül, akire a legnagyobb teher hárult ezen a téren, elsősorban a következők nevét lehet ezzel kapcsolatban megemlíteni: Cser Andor, Faragó László, Gádor Endréné, Hajós György, Kalmár László, Kárteszi Ferenc, Késedi Ferenc, Túri Istvánné, Varga Tamás. Igen értékes segítséget jelentett a Külügyminisztérium érdeklődése és aktív támogatása, személy szerint elsősorban Újlaki Kálmán tanácsos közreműködése. Bäder Andorné és Lastovka Istvánné szerződéses munkatársak időt és fáradságot nem kímélő munkája és körültekintő gondossága biztosította a sok akadály ellenére is zökkenőmentes, minden vendég elismerését kivívó lebonyolítást. A fordító és leíró iroda meg-

szervezéséért köszönet illeti meg Szentgyörgyvári Artur egyetemi lektort. A Művelődésügyi Minisztérium részéről nagy segítséget jelentett Bencédy József főosztályvezető személyes érdeklődése és tanácsai.

*

A Szimpóziumon 18 országból 35 résztvevő és megfigyelő vett részt. A megnyitó ülésen a résztvevők maguk közül a következő tisztikart választották:

Elnök: Hajós György (Magyarország).

Alelnökök: Y. Akizuki (Japán), R. Sz. Cserkaszov (Szovjetunió), A. Z. Krygowska (Lengyelország), M. H. Stone (Egyesült Államok).

Főjegyző: W. Servais (Belgium).

Jegyzők: R. Sz. Cserkaszov (Szovjetunió), Z. P. Dienes (Ausztrália), H. Gilbert (Franciaország), Késedi Ferenc (Magyrország), G. Matthews (Nagy-Britannia), L. Pauli (Svájc).

Az egyes témakörökkel kapcsolatban a résztvevők több előkészítő anyagot kaptak kézhez jóval a Szimpózium megkezdése előtt, ezek képezték a viták alapját. Bár a viták során időnként erősen ellentétes nézetek is megütköztek, sikerült megfogalmazni azokat a pontokat, amelyekben teljes összhang alakult ki. A megfogalmazásból a legnagyobb részt W. Servais vállalta magára. A Szimpózium megfogható eredményeként végül a következő dokumentum született, amelyet az UNESCO javaslatként tagállamainak kormánya elé terjeszt:

Megállapítások és javaslatok

Különböző országok képviselői, akik részt vettek az UNESCO Magyar Nemzeti Bizottsága és a Művelődésügyi Minisztérium által a Bolyai János Matematikai Társulat közreműködésével és az UNESCO támogatásával 1962. augusztus 27-től szeptember 8-ig Budapesten rendezett Nemzetközi Matematikaoktatási Szimpóziumon, munkájuk végeztével az alábbi megállapításokat és javaslatokat teszik.

A matematika egyetemessége

A matematika napjainkban a modern emberi lét alapvető alkotóelemévé vált. Ezt tanúsítja szakadatlan, szükségszerű megjelenése a korszerű gondolkodás, tudomány és technika legkülönbözőbb területein.

Alapelemeit, alkalmazásra képes formában, minden gyermeknek meg kell tanítanunk.

Nyilvánvalóvá vált, hogy a matematikát vonzóbbá tehetjük a gyermekek számára, ha kezdettől fogva a mai szemléletnek megfelelően tárjuk eléjük.

1. A tananyag

1.1 *A korszerű matematikatanítás szervezési formái*

1.11 A matematikatanításra szánt idő

1.111 A matematika eredményes tanítása elegendő időt kíván. A résztvevők kérik, hogy erre az igen fontos tantárgyra a középiskola általánosan képző osztályaiban 4—6 óra jusson hetenként — mint már a legtöbb országban jut is —, kivéve a természettudományi vagy tecnikai szakirányú osztályokat, ahol magasabb óraszámra van szükség.

1.112 Kísérleti úton kell megállapítani, hogy — a tanulók életkorát, az osztály tudásszintjét, az alkalmazott módszereket és az iskolatípust figyelembe véve — a tanulmányi idő milyen felbontása teszi lehetővé a tananyag legjobb elsajátítását a tanulók túlterhelése nélkül.

1.12 Az osztályban folyó munka

1.121 Olyan emberi kapcsolatokat kell teremtenünk, amelyek a matematikaórák légkörét a legnagyobb mértékben ösztönzővé teszik.

1.122 Az osztálylétszámnak ésszerű korlátok között kell maradnia. A legkedvezőbb osztálylétszám 15—25 fő. Ha tanárhiány miatt vagy más okok folytán ez nem volna megvalósítható, javasoljuk az osztály kisebb csoportokra bontását bizonyos órákon.

1.123 Tanulmányozni kell az egyéni és a csoportmunka hatékonyságát, amelyek lehetővé teszik, hogy az osztályközösségen belül minden tanuló a maga egyéni ritmusában haladhasson előre.

1.2 *Tananyag*

1.21 Törzsanyag

1.211 Fontos, hogy a tanulmányok kezdetén a matematika alapvető fogalmait minden gyermeknek megtanítsuk.

1.212 Célszerű az alapfokú oktatás számára lehetőleg minden országban egységes tantervet állapítani meg, úgy azonban, hogy ez ne akadályozza az új tantervekkel való kísérletezést, amely esetleg egy új egységes tanterv fokozatos bevezetéséhez vezet.

1.213 Ebből a törzsanyagból ágaznak azután el a további anyagrészek és a speciális kiegészítő fejezetek.

1.22 Eddig elért eredmények az alapvető fogalmak tanításában

1.221 Sok kísérlet megmutatta már, hogy az elemi halmazelmélet nyelvét, fogalmait és műveleteit, a reláció és a függvény fogalmát bevezethetjük 12 éves kortól kezdve (sőt már előbb is). Ajánlatos alkalmazni ezeket a fogalmakat, amelyek megkönnyítik a topológia és az analízis elemeinek későbbi tanulását.

1.222 A kísérletek azt is megmutatták, hogy lehetséges és ajánlatos 12 éves kortól bevezetni azokat az ismereteket, amelyek szükségesek és hasznosak a vektortér struktúrájának megismertetése szempontjából (ekvivalencia, vektor és csoport fogalma stb.), olyan módon, hogy 15 éves kortól sor kerülhessen a vektortér tanulmányozására és alkalmazására.

1.23 A tananyagra vonatkozó kutató munka

1.231 A halmaz, a vektortér és más rokon fogalmak tanítására vonatkozó kutatások elmélyítése mellett kísérletezni kell a következő témáknak a modern matematika kereteibe illő tanításával:

a topológia elemei,
elemi geometria,
statisztikai és valószínőségszámítási ismeretek,
differenciál- és integrálszámítás,
matematikai logika.

1.232 Mindezen témakörök tanításával különböző életkorokban és különböző iskolatípusokban kell kísérletezni, hogy megállapíthassuk, mikor és milyen módszerekkel lesznek bevezethetők.

1.233 Fontos megvizsgálni, hogy milyen mértékben lehet bevezetni az axiomatikus módszert, a tudományos kutatásnak ezt az alapvető eszközét.

1.234 A matematika gyakorlati polivalenciáját* nyilvánvalóvá kell tenni sokféle konkrét alkalmazás bemutatásán keresztül. Igen hasznos volna szakemberek közreműködésével a korszerű technikához, fizikai, biológiai és társadalmi tudományokhoz kapcsolódó feladatok gyűjteményeit állítani össze.

1.3 *Kísérletek*

1.31 A kísérletezés szükségessége

1.311 Kicsiben és nagyban végzett kísérletek egész skálájára van szükség, hogy minél előbb eljuthassunk a tanterv megjavításához.

1.312 A kísérleteknek sokféle témára kell kiterjedniük. Ezzel elősegítjük a tananyag objektív szempontok szerinti kiválasztását és a tantervben való elhelyezésüket.

1.32 Kísérleti osztályok

1.321 Feltétlenül szükség van az alsó osztályoktól kezdve minden fokon különféle iskolatípusokban kísérleti osztályok létesítésére.

1.322 Ezekben az osztályokban kedvező feltételeket kell teremteni mind a tanárok kiválasztása, mind a tanterv és a módszerek, mind pedig a kísérleti munkához szükséges légkör tekintetében.

* Ugyanazon struktúráknak sok különböző formában való alkalmazhatóságát (Ford.).

1.323 A jól végzett kísérlet mindig hasznos eredményt ad, akár pozitív, akár negatív kimenetelű. Az utóbbi esetben a kísérletezőket meg kell védeni minden indokolatlan szemrehányástól, nehogy kockára tegyük a kísérletezés tudományos objektivitását.

1.324 Különös figyelmet kell fordítani a kísérletben résztvett tanulók további fejlődésére. Gondoskodni kell számukra további tantervről, hogy biztosítsuk tanulmányaik folyamatosságát. Figyelemmel kell lenni a kísérleti osztályok létezésére a vizsgák anyagának megállapításában, különös tekintettel az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgákra.

1.33 Beszámolók a kísérletekről

1.331 Feltétlenül szükség van a tanítási kísérletekről szóló objektív beszámolókra.
A kapott eredmények alapján megállapítható, hogy milyen utat lehet tovább követni és milyen hibákat kell elkerülni.

1.332 Fontos, hogy az erre vonatkozó alapvető dokumentációs anyag nyilvánosságra kerüljön és eljusson az UNESCO tagállamaiba.

2. A matematikatanulás elmélete

2.1 *A matematika tanulásának mozzanatai*

A matematika megtanulása különféle gondolkodási folyamatokat feltételez, s ezekre a tanulókat képessé kell tennünk:

matematikai struktúrák elsajátítása,
ezek egymáshoz viszonyított tulajdonságainak felismerése,
e tulajdonságok különféle módokban való kifejezése (rajzban, szavakban, matematikai jelekkel stb.),
logikai kapcsolatok felismerése és létesítése,
a struktúrák deduktív rendszerré való egybeillesztése,
matematikai problémák megoldása,
a struktúráknak matematikai modellként való alkalmazása konkrét helyzetekben,
a teremtő képzelet működése a matematikában.

2.2 *A matematika tanulása számára kedvező feltételek*

Tanári tapasztalatok és pedagógiai kísérleti vizsgálatok alapozták meg a következő megállapításokat:

2.21 Az oktatásban a tanulók természetes intelligenciájára kell építenünk, ahelyett, hogy rutin-eljárásokra idomítanánk őket, amelyeket könnyen elfelejtenek és nehezen alkalmaznak új helyzetekben.

2.22 A tanuló személyes aktivitása a benne szunnyadó adottságok kibontakozásának nélkülözhetetlen feltétele.

2.23 A tanulás eredményességét fokozhatjuk, ha a tanulót számára ismert helyzetek elé állítjuk, amelyekből kivonhatja a matematikai lényeget saját felfedezésein keresztül, saját egyéni ritmusában dolgozva.

2.24 Egy oly mértékben differenciált tudomány tanulásában, mint a matematika, úgy kell kiválasztani és elosztani a tanulási helyzeteket, hogy a tanulók fokozatosan eljussanak a struktúrált gondolkodásig és hatékony gondolkodási dinamizmus alakuljon ki bennük.

2.3 *A tanulásra ösztönző tényezők*

2.31 Az aktív tanulás mozgatóereje a kellő motiváció.

2.32 Kutatásokat kell kezdeni annak tisztázása érdekében, hogy melyek azok a tényezők, amelyek — egyéni adottságaiktól és életkoruktól függően — matematikai aktivitásra serkentik a tanulókat:

a játékosság,
az egyéni döntésből fakadó érdeklődés,
a matematika sokféle érdekes alkalmazási lehetősége,
a megoldásra váró problémák ösztönző hatása,
egy probléma önálló megoldásakor érzett elégedettség,
a versengés szelleme (versenyek, olimpiák),
a matematikai gondolatokba való behatolás,
a gondolatok történeti fejlődésének felismerése,
a matematika racionális szépsége.

2.33 Ezekben a különféle motivációkban, a matematikán kívüliekben és belüliekben egyaránt, az érzelmi tényezőknek is nagy szerepük van.

2.34 Jó volna tanulmányozni az érzelmi elemek szerepét a matematikatanulásban. Máris megállapíthatjuk, hogy ahol a kedvező érzelmi feltételek biztosítva vannak, és ahol a tanuló örömet lel a matematikai tevékenységben, ott ez a tevékenység önmagában is megtalálja ösztönzőjét.

2.4 *A tanulás módjai*

A matematika tanulása sokféle módon folyhat:

konkrét tárgyakon végzett tevékenység vagy grafikus munka (írás, rajzolás),
a pedagógus magyarázata,
egyéni vagy csoportonkénti problémamegoldás,
egyéni kutatómunka,
megbeszélés, vita,
matematikai szövegek olvasása, filmek megtekintése,
tanulás tanítógépek útján,
televíziós tanfolyam.

Jó volna tanulmányozni ezeknek a tanulási módoknak az előnyeit és veszélyeit, és megvizsgálni, hogy a tanulók értelmi színvonalának, a tananyagnak és a körülményeknek megfelelően melyiket hogyan lehet alkalmazni.

2.5 *A matematikai gondolkozás fejlődése*

2.51 A fogalmak kialakulása

A tanítási tapasztalatok azt mutatják, hogy egy-egy új matematikai fogalom bevezetésekor a tanulók számára ismert (konkrét vagy absztrakt) helyzetből (példákból, élményekből) kell kiindulnunk. Ezeket vagy az életből merítjük, vagy e célra készült eszközök (rudak és tömbök, filmek, matematikai játékok stb.) révén biztosítjuk.

2.512 A kialakítandó fogalom pontos körülhatárolása céljából ajánlatos elegendő számú olyan esetet mutatni a tanulóknak, amelyek arra a fogalomra példákat és ellenpéldákat adnak.

2.513 A különféle helyzeteket jellemző sémák felvázolása (Venn-diagrammok, gráfok, táblázatok stb.) jó eszköz arra, hogy a diákok eljussanak általuk bizonyos elvont matematikai fogalmakhoz, és ezeket a nyelvi formáktól függetlenül is ki tudják fejezni.

2.514 A tanulók által elkövetett hibákban megmutatkoznak a matematikai gondolatok egységben látása körüli hiányosságok. Ezeknek a hibáknak az elemzése gyakran megmutatja, hogy milyen utat kövessünk a továbbiakban.

2.515 Jó volna tanulmányozni a fogalomalakítás dinamizmusának lélektani vonatkozásait (általánosítás, specializálás, analízis, szintézis stb.).

2.52 A bizonyítások

Különös gondot kell fordítanunk annak tisztázására, hogyan vezessük be a tanulókat a matematikai bizonyítások problematikájába.

Kutatásokat kell végeznünk, hogy válaszolhassunk többek között a következő kérdésekre:

2.521 Hogyan világítsunk rá egyrészt a bizonyítást kereső, találó és megfogalmazó személy aktív szerepére, másrészt arra a folyamatra, amely a bizonyítási feladat felmerülésétől az elemzésig terjed?

Hogyan mutassuk be a bizonyításokat? A megszokott nyelven, vagy filmek útján, vagy színes ábrák sorozatán keresztül, amelyek kiemelik és támogatják a bizonyítás közben az egyes gondolati lépéseket?

Milyen előnyei vagy hátrányai vannak azoknak a szemléleti elemeknek, amelyeket bizonyítás közben alkalmazunk? Vannak-e

olyan tárgykörök, amelyekben egyszerűbben, matematikailag áttekinthető formában mutathatjuk be az első bizonyításokat?

2.522 Hogyan vonhatjuk be a tanulókat a bizonyítások végzésébe? Vannak-e olyan területek, ahol már kezdő fokon is találhatnak bizonyításokat ők maguk?
Hogyan vezessük be a tanulókat az induktív gondolkodás módszereibe? Hogyan indítsuk el őket az analitikus gondolkodás terén? Hogyan tegyük világossá a szintézis szerepét?

2.523 Hogyan érjük el, hogy a tanulók megértsék az implikáció és az ekvivalencia logikai fogalmát és szerepüket a következtetésekben? Hogyan tanítsuk meg őket a kvantorok használatára?
Hogyan vezessük rá őket a reductio ad absurdum és az indirekt bizonyítás módszereire?

2.524 Hogyan vezessük be a mai értelemben vett axiomatikus módszert?

2.53 A feladatok szerepe

2.531 A feladatmegoldás alapvető fontosságú mind a gyakorlati alkalmazások, mind a matematikán belüli alkalmazások szempontjából. A feladatmegoldás a matematikai gondolkodás fontos tényezőit hívja életre (megfogalmazás, feltevés igazolása, analízis, szintézis, általánosítás, specializálás stb.).
Rendkívül fontos, hogy még az egyes matematikai struktúrákkal való megismerkedés előtt feladatokon keresztül jussanak el a tanulók a szükséges tapasztalati anyaghoz.

2.532 A hagyományos tanításban a feladatok gyakran zárt jellegűek: nemcsak az adott és a keresett mennyiségek vagy alakzatok vannak bennük pontosan meghatározva, hanem gyakran még a megoldás módja is kiderül abból, hogy milyen anyagrészben szerepelnek. Így azután már csak formálisan alkalmazni kell egy eljárást, és a teremtő képzelet szerepe megszűnik. Ugyanezt mondhatjuk sok gyakorlati eredetű feladatról is.
Alkotóerejük kibontakoztatása érdekében célszerű a tanulókat gyakrabban állítani nyitott problémahelyzetek elé, amelyekben a feladatok megfogalmazásából és a megoldási módszerek kiválasztásából egyaránt kiveszik a részüket.
Tanulmányozni kellene az ilyen feladatok szerepét a tanulásban.

2.533 A heurisztikus módszerekre vonatkozó kutatások azzal az eredménnyel is járhatnak, hogy a tanulók tudatosabban alkalmazzák a feladatmegoldás eredményes mozzanatait.

2.6 *Eszközök*

2.61 Konkrét eszközök és játékok

Bizonyos matematikai struktúrákkal való megismerkedés céljára konkrét eszközöket és játékokat terveztek (rudak, tömbök, fil-

mek, geoplánok*, modellek, építődobozok stb.). Össze kell írni a számításba jövő eszközöket, és ki kell vizsgálni, hogy melyik milyen eredménnyel alkalmazható. A vizsgálatok terjedjenek ki annak megállapítására is, hogy egy-egy matematikai struktúra alkalmazási körének kiterjesztését elősegíti-e a struktúrát bemutató eszközök variálása. Másrészt olyan irányban is érdemes kutatásokat folytatni, hogy egy-egy eszköz milyen struktúrák bevezetésére alkalmas.

2.62 Grafikus eszközök

2.621 Tanítási tapasztalatok mutatják, hogy grafikus eszközök útján (Euler-körök, Venn-diagrammok, gráfok, táblázatok stb.) elemi úton megismertethetjük a tanulókat a matematika nehéznek tartott fejezeteivel, ha aktívan bevonjuk őket a munkába.

2.622 Érdemes tanulmányozni ezeknek a grafikus eszközöknek és egyes jellemzőiknek (alak, szín méret stb.) lélektani szerepét, valamint a szemléleti alátámasztás és a fogalmi jelentés közti kapcsolatot. Ez már csak azért is fontos kérdés, mert a grafikus eszközöknek nemcsak a fogalmak bevezetésében van szerepe, hanem a tiszta és az alkalmazott matematikában is állandóan használják őket.

2.63 Jelölés

A tanítás eredményességének növelése érdekében jó volna neveléslélektani vizsgálatokat végezni azoknak a jelöléseknek a szerepéről, és alkalmazásáról, amelyek matematikai fogalmakat (objektumokat, halmazokat, relációkat, függvényeket, műveleteket stb.) fejeznek ki. Igen hasznos volna feleletet kapni többek között a következő kérdésekre:

2.631 Mi a jelölés szerepe a fogalmak kialakításában? A tanulás milyen fokán érdemes bevezetni egy-egy jelölést?

2.632 Milyen mértékben segíti elő a jelekként használt konkrét eszközökkel folyó tevékenység magukkal a jelekkel való bánásnak, pl. a bizonyítások lejegyzésének megértését?

2.633 Milyen lélektani kapcsolat van a jelekkel folytatott tevékenység és az általuk jelölt fogalmak kombinálása közt? Nem okoznak-e ebből a szempontból nehézséget a kezdőknek bizonyos hagyományos jelölési megállapodások (pl. kihagyások)?

2.634 Ragaszkodjunk-e a jeleknek jelentésükhöz közvetlenül hozzákapcsolt alkalmazásához, vagy jussunk el hamar a jelölés formáli-

* A geoplán egy síkból kiemelkedő négyzetrácsnak megfelelően elhelyezkedő pálcikákból vagy szögekből áll, amelyekre pl. gumikarikákat lehet feszíteni. Ezzel bizonyos geometriai alakzatokat gyorsabban lehet bemutatni, változásaikat szemléletesebbé tenni, mint rajzokkal.

sabb felfogásához, és használjuk fel a jelekkel és a jelölt dolgokkal végzett műveletek közötti analógiákat?

2.635 Alkalmas-e ez a formálisabb felfogás arra, hogy a tanulók megragadják a jelekkel kifejezett struktúrákat?

2.7 *Együttműködés a matematikusok, pedagógusok és pszichológusok közt*

2.71 Annak érdekében, hogy előbbre vigyük a matematika tanításának ügyét, rendkívül fontos szoros együttműködést alakítani ki matematikusok és a modern matematika terén alaposan tájékozott gyakorlati és elméleti pedagógusok és pszichológusok közt.

2.72 Érdemes ráirányítani a pszichológusok érdeklődését olyan problémákra, amelyeket a matematikának és korszerű alkalmazásainak elsajátítása vet fel, és amelyek az új tanítási módszerekből adódnak.

2.73 Az ilyen kutatásoktól nemcsak olyan megállapítások tudományos igazolását várhatjuk, amelyek pedagógiai tapasztalatok révén amúgyis ismertek, hanem főképpen olyan pszichológiai vonatkozások felismerését, amelyekhez a gyakorlati pedagógia eszközeivel és technikájával sejtés formájában sem lehet eljutni. Az ilyen eredményeknek a kutatások jelenlegi állása mellett feltételenül kedvező hatásuk lesz a matematika tanítására magára is.

2.74 Az ilyen kutatások kvantitatív és kvalitatív eredményei a matematikatanítás módszertanának tudományos megalapozását is lehetővé tennék.

3. A pedagógusok képzése és továbbképzése

3.1 *A pedagógusok matematikai képzése*

3.11 A pedagógusképzésnek a középiskolai végzettségre kell ráépülnie.

3.12 A leendő pedagógusoknak korszerű matematikai képzést kell adnunk.
El kell érnünk, hogy urai legyenek annak az anyagnak, amit majd tanítanunk kell.

3.13 Ha biztosítani akarjuk, hogy a nevelés szilárd alapokon nyugodjék, a leendő tanítókat olyan matematikai képzésben kell részesítenünk, amely elmélyíti a korszerűsített középiskolai tananyagban szerzett ismereteiket és előkészíti őket az előttük álló feladatokra.

3.14 A felső tagozatra és a középiskolába kerülő tanárjelölteknek korszerű speciális képzést kell kapniuk. Ennek a képzésnek magában kell foglalnia a következőket:

3.141 általános matematikai képzés, amely többek között kiterjed az alábbi alapvető tárgykörökre és alkalmazásaikra:
halmazelmélet és logika,

absztrakt algebra,
topológia,
geometria (axiomatikus tárgyalás, amely felhasználja a vektortereket és az absztrakt algebra, valamint a topológia más fogalmait),
analízis,
valószínűségszámítás és statisztika,
a matematikai gondolkodás története;

3.142 egy (vagy két) természettudományos tárgy tanulása (fizika, kémia, biológia, matematikai közgazdaságtan, pszichológia, stb.).

3.143 Azoknak, akik középiskolában fognak tanítani, az alapvető tárgykörökben mélyebb ismeretekre kell szert tenniük, és amellett speciális kiegészítő tárgyakkal is foglalkozniuk kell (pl. közönséges és parciális differenciálegyenletek, integrálegyenletek, lineáris programmozás, információelmélet, játékelmélet, számelmélet stb.).

3.15 A középiskolai matematikatanárok képzése elvben nem lehet rövidebb időtartamú, mint a középiskola elvégzésétől számított négy év.

3.2 *A matematikatanárok pedagógiai képzése*

3.21 Minden tanárnak olyan pedagógiai műveltségre van szüksége, amely nem korlátozódik általános módszertani, didaktikai és neveléstörténeti ismeretekre. Mindenekelőtt fogékonynak kell lennie a pedagógia korszerű problémái iránt.

3.22 A leendő pedagógusoknak kielégítő mértékben ismerniük kell a fejlődéslélektan alapvető tényeit. Olyan ismeretekkel is rendelkezniük kell, amelyek képesítik őket a tanulók közötti egyéni különbségek számbavételére, a csoportdinamika törvényeinek és az osztályban való magatartásuk kedvező vagy káros hatásának figyelembevételére.

3.23 A leendő tanárnak tájékozottnak kell lennie a gondolkodáslélektan terén, különösen ami a korszerű matematikai ismeretek elsajátításának folyamatát illeti. Tudatában kell lennie a motiváció különféle módjainak, és annak, hogy milyen szerepe van az érzelmi elemeknek a tanulásban. El kell érnünk, hogy a matematikatanár bele tudja élni magát a gyermekek matematikai gondolkozásába.

3.24 A leendő tanárnak tanulmányoznia kell azon alapvető tárgykörök tanításának legújabb módszertani irodalmát, amelyeket tanítania kell. Ezeket a tárgyköröket a modern matematika szemszögéből kell látnia. Gyakorolnia kell magát speciális tanítási módszerekben. Ezeket olyan szemináriumokon kell megvitatni, amelyek célja fejleszteni a pedagógiai kezdeményezést és a teremtő képzeletet didaktikai problémák megoldásában.

3.25 Az iskolák életével kapcsolatot teremtenek számára a kvalifikált tanárok vezetésével folyó hospitálások.

3.26 A pedagógusképzés során fel kell tárni a hallgatók előtt a tudományos kutatómunka lehetőségeit a didaktikában és a neveléslélektanban. El kell érnünk, hogy felismerjék a megoldásra váró problémákat, és el kell látnunk őket a kutatómunka módszereivel és technikájával, valamint a szükséges segédeszközökkel (könyvek, folyóiratok, taneszközök, kísérleti eszközök stb.).

3.3 *A pedagógusok folyamatos képzése*

3.31 Ha biztosítani akarjuk, hogy a tanárok már a jelenlegi átmeneti időszakban is új tanterv alapján tanítsanak, sürgősen el kell kezdenünk vagy folytatnunk kell alapvető korszerű ismeretanyaggal való ellátásukat.

3.32 Ennek a továbbképzési anyagnak ki kell terjednie az új tantervek helyes végrehajtásához nélkülözhetetlenül szükséges új matematikai elméletekre és a tantervek megvalósítását lehetővé tevő módszertani útmutatásokra.

3.33 A pedagógusok továbbképzésének különféle szervezeti formáit lehet találni; számos országban már meg is valósultak a hetenkénti rendszeres továbbképzési alkalmak és a néhány napos vagy hosszabb periódusok az egész évben elosztva.

3.34 A matematikatanítás megújításának munkájába az egyes országokban be kell vonni minden rendelkezésre álló intézményt: egyetemeket, tanárképző főiskolákat, tanítóképző intézményeket, tanáregyesületeket, didaktikai centrumokat, pedagógiai intézeteket stb.

3.35 Minden rendelkezésre álló eszközt igénybe kell vennünk, hogy ellássuk a tanárokat a mai értelemben vett matematikáról és ennek tanításáról szóló dokumentációval: alsó- és felsőfokú tankönyvekkel, és jegyzetekkel, tanítási tapasztalatokról szóló beszámolókkal, különböző országok folyóirataiban megjelenő cikkekkel stb. Azonkívül minél előbb iratni kell a pedagógusok számára olyan könyveket, amelyek igényeikhez alkalmazott formában megismertetik őket a modern matematika főbb gondolataival, megvilágítják ezek horderejét és tanításuk módszertanát.

3.36 Ha meg akarjuk győzni a pedagógusokat és elérni, hogy sokan képezzék magukat tovább matematikában, tárgyilagos képet kell adnunk nekik a matematikatanítás megújítására irányuló nemzetközi mozgalomról és ezen belül saját országuk helyzetéről, rá kell mutatnunk arra, milyen fontos az egybehangolt munka, milyen felelősséggel tartoznak tanítványaiknak és milyen tudományos fontossága van az új gondolatoknak. Ezenfelül azonban minden lehetőséget meg kell ragadnunk, hogy a továbbképzésben résztvevő

pedagógusok óraszámát és órarendjét munkájuknak megfelelően módosítsuk, költségeikhez hozzájáruljunk és végzett munkájukat tekintetbe vegyük a fizetésben, előlépésben és jutalmazásokban is.

3.37 Azoknak, akik matematikát tanítanak, a jövőben is állandóan korszerű szinten kell tartaniuk matematikai és módszertani ismereteiket, hogy munkájukat eredményesen láthassák el. Fontos, hogy minden országban létesítsünk és fenntartsunk olyan intézményeket, amelyek alkalmasak arra, hogy biztosítsák a pedagógusok folyamatos továbbképzését. Ez a folyamatos továbbképzés ma már a nevelői munka elengedhetetlen szerves része.

3.4 *A matematikatanárok hiánya*

3.41 A matematikatanár-hiány elhárítása érdekében el kell érnünk, hogy többen jelentkezzenek erre a pályára, számításba véve azt is, hogy a nevelés egyre nagyobb tömegekre terjed ki.

3.42 Több ország úgy igyekszik ideiglenesen megbirkózni evvel a problémával, hogy más területekről irányít oda munkaerőket, rövid pedagógiai képzés után. Egyes országokban a televíziós oktatást vették igénybe ilyen célra.

3.43 A jobb utánpótlás érdekében hangsúlyozni kell a pedagógus pályára vonatkozó tényezőket:

kapcsolat az ifjúsággal,
a pálya alapvető társadalmi fontossága.

3.44 Vissza kell adni a tanári hivatás méltóságát tudományos vonatkozásban

színvonalasabb matematikai képzés útján,
a pálya új hivatástudatának megteremtésével,
a pedagógiai kutatómunka kibontakoztatása útján.

3.45 Ezzel párhuzamosan alapvetően fontos, hogy a matematikatanár méltó helyet kapjon a ma társadalmában, kivegye részét a tudományos, kulturális és szociális fejlődésből és megkapja azt a megbecsülést és azt a társadalmi helyzetet, amelyre nevelői felelőssége és hivatása érdemesíti.

3.46 A tanárhiány egyik oka a túlságosan alacsony fizetés.

Nemzetközi információs központ

A Szimpózium munkája megint meggyőzően igazolta, mennyire nélkülözhetetlen, hogy a különböző helyeken folyó kísérletekről szóló dokumentumok eljussanak az UNESCO tagállamaihoz, azért, hogy ösztönözzék és egybehangolják a matematikatanítás terén folyó kutatásokat. Úgy gondoljuk, olyan pontra érkeztünk, amikor már szükség van egy olyan szervezet felállítására és fenntartására, amelynek célja

biztosítani az együttműködést a kísérleti tanítással, tankönyvekkel és tanárképzéssel foglalkozó kutatási centrumok között.

A gyors információcsere lehetővé teszi, hogy a tagállamok időt, erőt és anyagi eszközöket megtakarítva szerezzenek tudomást a másutt folyó munkáról és elért eredményekről.

A Szimpózium résztvevői azzal a határozott kéréssel fordulnak az UNESCO-hoz, gyorsítsa meg a Művelődési Minisztériumok XIX. Nemzetközi Konferenciáján hozott ilyen irányú határozatok végrehajtását, és tegye meg a szükséges lépéseket egy matematikatanítási információs központ felállítására és fenntartására.

МЕЖДУНАРОДЫЙ СИМПОЗИУМ О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

T. Варга

INTERNATIONAL SYMPOSION OF TEACHING OF MATHEMATICS

T. Varga

Jelentés az 1962. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 1962. november 23. és december 3. között rendezte meg az 1962. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyt. A versenyen az egyetemek és főiskolák jelenlegi, valamint tanulmányaikat 1962-ben befejezett hallgatói vehettek részt.

A verseny feladatai az alábbiak voltak:

1. Jelöljük az $f(x)$, ill. $g(x)$ racionális együtthatós polinom racionális helyeken felvett értékeinek halmazát F-fel, ill. G-vel. Bizonyítsuk be, hogy $F=G$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x) = g(ax+b)$ alkalmas $a\neq 0$ és b racionális számokkal.

2. Meghatározandók a p-adikus számtest egységgyökei.

3. Az A Abel-csoportnak a B Abel-csoportba való homomorfizmusai egy H Abel-csoportot alkotnak, ha az η és χ homomorfizmusok összegén azt az $\eta+\chi$ homomorfizmust értjük, amely tetszőleges A-beli a elemet az $a(\eta+\chi) = a\eta + a\chi$ elemre képez le. Bizonyítsuk be, hogy ha A p-csoport (p prímszám), akkor H topologikus csoport lesz, amennyiben 0 környezetrendszerének a p^kH ($k=1, 2, \ldots$) részcsoportokat választjuk. Mutassuk ki, hogy H ebben a topológiában teljes és minden komponense egyetlen pontból áll. Mikor lesz H e topológiában kompakt?

4. Mutassuk ki, hogy tetszőleges $4k+3$ alakú p prímszámra:

$$\prod_{1\leqq x<y\leqq \frac{p-1}{2}} (x^2+y^2) \equiv (-1)^{\left[\frac{p+1}{8}\right]} \pmod p.$$

5. Legyen f véges értékű, egyváltozós valós függvény; Df és $\underline{D}f$ ennek felső és alsó deriváltszáma, azaz

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{\substack{h,\,k\to 0\\ h,\,k\geqq 0\\ h+k>0}} \frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k} \qquad \underline{D}f(x) = \liminf_{\substack{h,\,k\to 0\\ h,\,k\geqq 0\\ h+k>0}} \frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k}$$

Mutassuk meg, hogy $\overline{D}f(x)$ és $\underline{D}f(x)$ Borel-mérhető függvények.

6. Legyen E a számegyenes korlátos részhalmaza, és Ω (nem elfajult) zárt intervallumok olyan rendszere, hogy minden $x \in E$-hez van egy $I \in \Omega$, amelynek baloldali végpontja x. Mutassuk meg, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz megadható véges sok páronként egymásba nem nyúló Ω-hoz tartozó intervallum úgy, hogy ezek E-t egy ε-nál kisebb külső mértékű részhalmaz kivételével lefedik.

7. Bizonyítsuk be, hogy a gyök pozitív értéke mellett az

$$f(\vartheta) = \int_1^{\frac{1}{\vartheta}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-\vartheta^2 x^2)}}$$

függvény a $0 < \vartheta < 1$ intervallumban monoton fogy.

8. Jelöljük az $f(z)$ transzcendens egész függvény abszolút-érték-maximumát a $|z| = r$ körön $M(r,f)$-fel, $f(z)$ hatványsora n-ik részlet-összegéét pedig $M_n(r,f)$-fel. Mutassuk meg, hogy létezik oly $f_0(z)$ egész függvény és hozzá $(0 <) \; r_1 < r_2 < \ldots \to +\infty$ számsorozat úgy, hogy

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{M_n(r_n, f_0)}{M(r_n, f_0)} = +\infty.$$

9. Azon hasábok közül, amelyeknek élei az egységsugarú gömbnek érintői, melyeknél lesz az élek hosszának összege minimális?

10. Egy egységnyi területű háromszögben találomra (egyenletes eloszlással) és egymástól függetlenül választunk két pontot; az ezeket összekötő egyenes a háromszöget 1 valószínűséggel egy háromszögre és egy négyszögre bontja. Kiszámítandók e részek területeinek várható értékei.

Az 1. feladatot FRIED ERVIN, a 2. feladatot FUCHS LÁSZLÓ, a 3. feladatot FUCHS LÁSZLÓ, a 4. feladatot SURÁNYI JÁNOS, az 5. feladatot CSÁSZÁR ÁKOS, a 6. feladatot CZIPSZER JÁNOS, a 7. feladatot TURÁN PÁL, a 8. feladatot TURÁN PÁL, a 9. feladatot DR. MÜLLER-PFEIFFER (Jena), a 10. feladatot RÉNYI ALFRÉD bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére.

A verseny feladataira 23 résztvevő küldött be — összesen 93 megoldást, melyek közül 50 volt elfogadható. Egy résztvevő dolgozatát a bizottság figyelmen kívül hagyta, mivel a megoldásokat késve adta be. A beküldők közül 15 a budapesti, 6 a szegedi és 2 a debreceni egyetem jelenlegi vagy volt hallgatója. A bizottságnak tudomására jutott, hogy több hallgató számos feladatot megoldott, mégsem nyújtotta be megoldásait. A bizottság helyesli a kitűzött feladatok megoldásában a teljességre való törekvést, az egészséges versenyszellemmel ellentétesnek tartja

azonban, hogy vannak hallgatók, akik csak az I. díj elnyerését tűzik ki célul és egyes feladatok esetleg szép és elegáns megoldásaival nem is pályáznak.

Sajnálatos, hogy a kitűzött feladatok nem arányosan tették próbára a hallgatók felkészültségét. Ennek következtében míg a 7. ill. a 9. feladatra 15 ill. 13 helyes megoldás érkezett be, a 6. és 8. feladatra csupán 1, a 10. feladatra pedig egy sem.

A versenybizottság a versenyzők munkáját értékelve az alábbi döntést hozta:

Az 1962. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny első díját, s ezzel együtt 1000 Ft jutalmat

Halász Gábornak, az ELTE IV. éves matematikaszakos hallgatójának ítéli oda. Második díjat nem ad ki a bizottság. Dicséretben és 300—300 Ft pénzjutalomban részesíti

Bollobás Béla II. éves,

Elbert Árpád V. éves,

Juhász István II. éves,

Petruska György IV. éves,

Szász Domokos IV. éves hallgatókat, akik valamennyien az ELTE matematika-szakos hallgatói.

A versenybizottság döntését az alábbiakban indokolja:

Halász Gábor 7 feladatra adott megoldást. Ezek közül a 2. feladatra adott megoldása nem teljes ugyan, de a 4., 5., 6., 7., 8., 9., feladatokra adott megoldása kifogástalan, szövegezése szabatos és világos. A 6. és 8. feladatokra egyedül ő adott helyes megoldást.

A többi versenyző egyike sem adott be négynél több helyes megoldást s mindegyiküknél több-kevesebb hiányosság észlelhető. Ezért a második díj nem kerül kiosztásra. A dicséretben részesültek munkája:

Bollobás Béla az 1., 4., 7. és 9. feladatokra adott be hibátlan megoldást. Kitűnt tiszta szabatos szövegezésével, valamint azzal, hogy minden beadott megoldása hibátlan. Ezzel szemben megoldásai körülményesek.

Elbert Árpád a 4. és 7. feladatokra adott be teljes megoldást, melyek közül a 4. feladatra adott megoldása igen eredeti és szép. A 3. feladatra is majdnem teljes megoldást ad. Csupán a kompaktság bizonyítása hiányzik, ezzel szemben egyedül ő bizonyítja be a teljességet. Kár, hogy több feladatra részleges, egyre pedig hibás bizonyítást adott be.

Juhász István a 2., 3., 7. és 9. feladatokra adott be hibátlan megoldást. A 2. feladatra egyedül az ő megoldása teljes, a 3. feladatnál a kompaktságra csak ő ad feltételt, de nála a teljesség bizonyítása nem teljes.

PETRUSKA GYÖRGY a 3., 4., 5., 7. és 9. feladatokra adott be megoldást. Az 5. feladatot Halász Gáboron kívül csak ő oldja meg. A 3. és 9. feladatokra adott megoldásai azonban hiányosak.

SZÁSZ DOMOKOS nyolc feladatra adott be megoldást. Kitűnik a versenyzők közül azzal, hogy sok feladatnál egyedül ő látja a feladat hátterét, még akkor is, ha a feladatra hibás megoldást ad. Ezzel szemben megoldásai igen körülményesek, s benyújtott megoldásainak csak a fele helyes, az 1., 3., 4. és 7. feladatok.

CSÁSZÁR ÁKOS
FRIED ERVIN a bizottság titkára
FUCHS LÁSZLÓ
HAJÓS GYÖRGY
RÉNYI ALFRÉD
TURÁN PÁL

1. Feladat megoldása: A megoldás során polinomon mindig racionális együtthatós polinomot értünk, és egy polinom értékkészletén a racionális helyeken felvett értékeinek halmazát.

A feladatban a polinomokat kétféleképpen osztályoztuk:

Legyen $f(x) \sim g(x)$, ha a két polinom értékkészlete megegyezik, és jelentse $f(x) \approx g(x)$ az $f(x) = g(ax+b)$ összefüggést ($a \neq 0$, b racionális számok). Világos, hogy mindkét módon ekvivalenciarelációt kaptunk, mely a számmal való szorzással kompatibilis, azaz ha $f(x) \sim g(x)$, ill. $f(x) \approx g(x)$, akkor $cf(x) \sim cg(x)$, ill. $cf(x) \approx cg(x)$ teljesül. Feladatunk a két ekvivalenciareláció azonosságának kimutatása. Ennek egyik része világos, hisz ha $f(x) \approx g(x)$, akkor értékkészletük nyilván azonos, azaz $f(x) \sim g(x)$.

Az állítás megfordítását több lépésben bizonyítjuk.

1. Elegendő az állítást egész együtthatós polinomokra igazolni. Legyen ugyanis $f(x) \sim g(x)$, és c e két polinom együtthatói nevezőinek legkisebb közös többese. Ekkor $cf(x) \sim cg(x)$ egész együtthatós polinomok, s ha ezekre igaz az állítás, azaz $cf(x) \approx cg(x)$, akkor ($c \neq 0$ miatt) c reciprokával szorozva $f(x) \approx g(x)$ adódik.

2. Ha $f(x) \sim g(x)$ egész együtthatós polinomok, akkor egyenlő fokúak. Legyen $f(x) = ax^n + \ldots$ és $g(x) = bx^k + \ldots$, ahol $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $n \leqq k$. Válasszunk egy olyan p prímszámot, mely sem a-nak, sem b-nek nem osztója. Ekkor $f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{c}{p^n}$, ahol p nem osztója c-nek. A feltétel szerint $g(x)$ is felveszi ezt az értéket valamely $\frac{u}{v}$ helyen, ahol $(u, v) = 1$. Mármost, ha v nem osztható p-vel, akkor a megfelelő helyettesítési érték nevezője sem lehet p-vel osztható. Ellenkező esetben pedig $(p, b) = 1$ miatt a behelyettesítés és összevonás után p-vel nem lehet egyszerűsíteni,

s így a nevező (redukált alakban) p-nek legalább k-ik hatványával osztható, azaz $n \geqq k$, amit a feltétellel összevetve $n = k$ adódik, mint állítottuk.

3. Elegendő az állítást oly egészegyütthatós polinomokra igazolni, melyek egyikében a főegyüttható 1. Legyenek $f(x) \sim g(x)$ egész együtthatós polinomok, és $f(x) = ax^n + \ldots$. Ekkor $a^{n-1} f\left(\frac{x}{a}\right) \sim a^{n-1} f(x) \sim a^{n-1} g(x)$, ahol $a^{n-1} f\left(\frac{x}{a}\right)$ oly egészegyütthatós polinom, melyben a legmagasabb fokú tag együtthatója 1. A feltétel szerint ebből $a^{n-1} f\left(\frac{x}{a}\right) \approx a^{n-1}\, g(x)$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $f(x) \approx f\left(\frac{x}{a}\right) \approx g(x)$.

4. Ha $f(x) \sim g(x)$ egészegyütthatós polinomok, és $f(x) = x^n + \ldots$, $g(x) = bx^n + \ldots$, akkor b-ben minden prímosztó legalább n-ik hatványon szerepel. Legyen $p \mid b$, és tekintsük az

$$f_1(x) = p^{n(n-1)} f\left(\frac{x}{p^{n-1}}\right) \sim p^{n(n-1)} f\left(\frac{x}{p^n}\right) \sim p^{n(n-1)} g\left(\frac{x}{p^n}\right) = g_1(x)$$

polinomokat. Az $f_1(x)$ minden együtthatójáról és $g_1(x)$-ben a legmagasabbfokú tag együtthatóját $\left(\frac{b}{p^n}\right)$-t kivéve minden együtthatóról tudjuk, hogy egész; és $f_1(x)$ legmagasabb fokú tagjának együtthatója 1. Így $f_1(x)$ minden helyettesítési értékében (redukált alakban) ha a nevező osztható p-vel, akkor osztható p^n-nel is. $f_1(x) \sim g_1(x)$ alapján ugyanez igaz $g_1(x)$-re is. Mármost $g_1(1) = \frac{b}{p^n} + c$ alakú, ahol c egész, és $p \mid b$ miatt a nevező nem osztható p^n-nel, s így nem lehet osztható p-vel sem, azaz $p^n \mid b$, mint állítottuk.

5. Elegendő az állítást oly egészegyütthatós polinomokra kimutatni, melyek mindegyikében a főegyüttható 1. Legyenek $f(x) = x^n + \ldots$ és $g(x) = bx^n + \ldots$ egészegyütthatós polinomok, melyekre $f(x) \sim g(x)$. Tegyük fel, hogy c^n a legnagyobb n-ik hatvány, mely osztja b-t. Ekkor az

$$f_1(x) = c^{n(n-1)} f\left(\frac{x}{c^{n-1}}\right) = x^n + \ldots$$

és

$$g_1(x) = c^{n(n-1)} g\left(\frac{x}{c^n}\right) = \frac{b}{c^n} x^n + \ldots$$

polinomokra $f_1(x) \sim g_1(x)$. Ekkor viszont 4. alapján, ha egy prímszám osztja a $g_1(x)$ legmagasabb fokú tagjának együtthatóját, akkor ezt ezen prímszám n-ik hatványa is osztja, s így ezen együttható — c választása folytán csak 1 vagy -1 lehet. Ha ez az együttható -1 lenne, akkor n nem lehet páros, mert különben az egyik polinom alulról, a másik felülről lenne korlátos (azaz értékkészleteik nem egyezhetnének meg). Amennyiben viszont -1-es együttható esetén n páratlan, akkor c helyett választhatjuk a $-c$-t. Végeredményben tehát elérhető, hogy $g_1(x)$ legmagasabb fokú tagjának együtthatója is 1 legyen. Ha viszont ilyen polinomokra már igazoltuk az állítást, akkor $f_1(x) \approx g_1(x)$ alapján $f(x) = c^{n(1-n)} f_1(c^{n-1}x) \approx c^{n(1-n)} g_1(c^n x) = g(x)$.

6. Elegendő oly egész együtthatós polinomokra szorítkozni, melyekben a legmagasabb fokú tag együtthatója 1, és az eggyel alacsonyabb fokú tag együtthatója 0. Legyenek ugyanis $x^n + ax^{n-1} + \ldots = f(x) \sim$ $\sim g(x) = x^n + bx^{n-1} + \ldots$ egészegyütthatós polinomok. Ekkor $f_1(x) =$ $= n^n f\left(\frac{x}{n} - a\right) \sim n^n g\left(\frac{x}{n} - b\right) = g_1(x)$ polinomok rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal, s amennyiben $f_1(x) \approx g_1(x)$, akkor $f(x) = n^{-n} f_1(nx + na) \approx$ $\approx n^{-n} g_1(nx + nb) = g(x)$.

7. Ha $f(x) = x^n + ax^{n-2} + \ldots$ és $g(x) = x^n + bx^{n-2} + \ldots$ egészegyütthatós polinomok, melyekre $f(x) \sim g(x)$, akkor $f(x) \approx g(x)$. Pontosabban azt fogjuk kimutatni, hogy $f(x)$ és $f(-x)$ valamelyike megegyezik $g(x)$ és $g(-x)$ valamelyikével. Ebből a kívánt állítás azonnal adódik. Páros kitevő esetén válasszuk az x határozatlan előjelét úgy, hogy $f(x) - f(-x)$ és $g(x) - g(-x)$ polinomokban, ha van 0-tól különböző tag, az első ilyen pozitív legyen. (Páratlan kitevőre ez nyilván teljesül.) Feltehető ugyanez az $f(x) - g(x)$ polinomról is. Tekintsük most a $g(x) - f(x-1) = nx^{n-1} + \ldots$ polinomot. E polinomban a legmagasabbfokú tag együtthatója pozitív, eltekintve a triviális 0 kitevő esetétől, amely eset nyilván az egyetlen, mikor az értékkészlet egy számból áll. Páros kitevő esetén még az $f(-x) - f(x-1) = nx^{n-1} + \ldots$ polinom legmagasabb fokú tagjának együtthatója is pozitív. Így, ha x elég nagy pozitív értéket vesz fel, akkor:

$$f(x-1) < g(x) \leqq f(x),$$

és páros kitevő esetén emellett

$$f(x-1) < f(-x) \leqq f(x).$$

Tekintettel arra, hogy a két polinom mindegyike egészegyütthatós, és a legmagasabbfokú tag együtthatója mindkettőnél 1, ezért racionális helyettesítés esetén akkor és csak akkor kapunk egész értéket, ha a behelyettesített szám is egész volt. Mármost legyen x elég nagy egész

szám. A feltétel alapján ehhez található egy ugyancsak egész y, melyre $g(x)=f(x)$. Ezt a fenti egyenlőtlenségekbe behelyettesítve:

$$f(x-1)<f(y) \leqq f(x).$$

Mármost, ha y pozitív akkor elég nagy x-re a polinom monotonitásából $x-1<y\leqq x$, és mivel e számok mind egészek $y=x$ adódik. Azaz ez esetben $g(x)=f(x)$, az adott x helyen. Páratlan kitevő esetében a szereplő y csak pozitív lehet, mivel ez esetben a polinom egy véges intervallum kivételével $-\infty$-től $+\infty$-ig monoton nő. Ha y negatív, akkor a második egyenlőlenséget felhasználva:

$$f(-x+1) \leqq f(x-1)<f(y) \leqq f(x)<f(-x-1).$$

Mivel ekkor a kitevő feltétlenül páros, ezért nagy negatív értékekre a polinom monoton csökken, amiből:

$$-x+1<y<-x-1$$

és tekintetbe véve, hogy a szereplő számok egészek $y=-x$, azaz $g(x)=f(-x)$ adódik.

Végeredményben tehát elég nagy egész x értékre $g(x)$ vagy $f(x)$-szel vagy $f(-x)$-szel egyenlő. E két eset közül valamelyik így végtelen sokszor előfordul, amiből a megfelelő polinomok egyenlősége, s így állításunk adódik.

BOLLOBÁS BÉLA—TUSNÁDY GÁBOR—FRIED ERVIN

Megoldották még: MUSZÉLY GYÖRGY, SZÁSZ DOMOKOS (nem teljes).

2. Feladat megoldása: Az $a_{-m}p^{-m}+\ldots+a_{-1}p^{-1}+a_0+a_1p+\ldots$ $\ldots+a_np^n+\ldots$ p-adikus szám (ahol $0\leqq a_i<p$), akkor p-adikus egész, ha a negatív indexű együtthatók 0-val egyenlők, és akkor p-adikus egység, ha ezenfelül $a_0\neq 0$ is teljesül. Világos, hogy minden α p-adikus szám felírható $\alpha=\beta p^r$ alakban, ahol β p-adikus egység, és r egész szám. Mivel p-adikus egységek szorzata is p-adikus egység, így egy p-adikus szám csak akkor lehet egységgyök, ha p-adikus egység.

Emellett egy egységgyök nem lehet racionális egész szám, s így minden egységgyök felírható $\varepsilon=a+\alpha p^r$ alakban, ahol r természetes szám, α p-adikus szám és $0<a<p$. Mármost, ha $\varepsilon^n=1$, akkor $a^n\equiv 1 \pmod p$ is fennáll. Így a exponense osztója n-nek. Vizsgáljuk most a $p\neq 2$ esetet. Legyen $\exp(a)=k$; kimutatjuk, hogy $k=n$. Legyen $\beta=\varepsilon^k$, ha $\beta\neq 1$, akkor $\beta=1+\gamma p^s$ alakú, ahol γ p-adikus egység. Amennyiben $k\neq n$ volna, akkor β-nak valamely hatványa 1 lenne. Hogy ez lehetetlen, ahhoz elég kimutatni, hogy $\beta=1+\gamma p^s$ alakú számnak prímkitevőjű hatványa nem lehet 1 (γ p-adikus egység). Legyen q prím-

szám; ekkor a binomiális tétel alapján

$$\beta^q = 1 + q\gamma p^s + \delta p^{2s} = 1 + \varphi p^s, \quad \text{ha} \quad q \neq p$$

míg $q = p$ esetén, felhasználva, hogy $p > 2$:

$$\beta^p = 1 + \gamma p^{s+1} + \delta p^{2s+1} = 1 + \varphi p^{s+1},$$

ahol γ p-adikus egész, és φ-ről könnyen látható, hogy p-adikus egység. Ennek alapján β^q feltétlenül különbözik 1-től. Ezzel kimutattuk, hogy a p-adikus számtestben csak $p-1$-edik egységgyök létezhet. Kimutatjuk, hogy ilyen viszont létezik is.

Legyen g_0 primitív gyök mod p. Kimutatjuk, hogy meghatározhatók a $(0 \leqq) a_i (< p)$ egészek úgy, hogy az

$$\varepsilon = g_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n + \ldots$$

p-adikus szám $p-1$-edik primitív egységgyök legyen. Az világos, hogy ε-nak $p-1$-nél alacsonyabb hatványa nem lehet 1. Így elég kimutatni azt, hogy az a_j-k alkalmas választása esetén a $g_j = g_0 + a_1 p + \ldots + a_j p^j$ természetes számokra $g_j^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{j+1}}$ teljesül. Ezt az állítást teljes indukcióval igazoljuk. $j = 0$ esetén az állítás igaz, mert g_0 primitív gyök. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely j-re, azaz:

$$g_j^{p-1} = 1 + c_j p^{j+1}.$$

Legyen a_{j+1} a $g_0 x \equiv c_j \pmod{p}$ kongruencia megoldása. Ekkor:

$$g_{j+1}^{p-1} \equiv (g_j + a_{j+1} p^{j+1})^{p-1} \equiv 1 + c_j p^{j+1} - g_j a_{j+1} p^{j+1} \equiv$$

$$\equiv 1 + (c_j - g_j a_{j+1}) p^{j+1} \equiv 1 \pmod{p^{j+2}}$$

Így tehát ε és hatványai különböző $p-1$-ik egységgyökök, ezek száma $p-1$. Több egységgyök nem létezik, mert az $x^{p-1} - 1$ polinomnak kommutatív testben legfeljebb $p-1$ gyöke van.

Most nézzük a $p = 2$ esetet. Ugyanúgy, mint ahogy páratlan prímszámok esetében tettük, belátható, hogy $1 + \ldots$ alakú diadikus számnak páratlan kitevőjű hatványa csak úgy lehet 1, ha maga a szám is 1. Ezért, ha egy diadikus szám n-ik primitív egységgyök, akkor n-nek nem lehet páratlan prímosztója. Második gyök itt kettő van; az 1-en kívül a $-1 = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^r + \ldots$. Több nem is lehet, mert az $x^2 - 1$ polinomnak kommutatív testben legfeljebb két megoldása lehet. Kimutatjuk, hogy a diadikus számtestben nincs több egységgyök. Ha lenne, akkor ez valamilyen 2-hatványhoz tartozó primitív egységgyök lenne, azaz, ha a fentiektől különböző egységgyök lenne, akkor lenne primitív negyedik egységgyök is, azaz oly η diadikus szám, melyre $\eta^2 = -1$.

Világos, hogy az η csak $\eta = 1+2^r+\ldots$ alakú lehet, ahol $r \geqq 1$. Ebből:

$$-1 \equiv (1+2^r)^2 \equiv 1+2^{r+1}+2^{2r} (\mathrm{mod}\, 2^{r+2}),$$

amiből:

$$-2 \equiv 2^{r+1}+2^{2r} (\mathrm{mod}\, 4) \quad \text{azaz} \quad 2^r+2^{2r-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2),$$

ami lehetetlen. Ezzel az állítást kimutattuk.

JUHÁSZ ISTVÁN

Megoldották még: GYÖRY KÁLMÁN (nem teljes), részben: ELBERT ÁRPÁD, HALÁSZ GÁBOR, SZEMERÉDI ENDRE.

3. Feladat megoldása:

1. Először kimutatjuk, hogy H kommutatív csoport:

Az összeadás definiálva van, és B kommutativitása és asszociativitása alapján H művelete is kommutatív és asszociatív. A H 0-eleme az a leképezés lesz, mely minden elemet 0-ra képez le, és $\eta\,(\in H)$ inverze az a $-\eta$ leképezés, melyre $a(-\eta) = -a\eta$.

2. H topologikus csoport az adott környezetrendszer választása mellett. (Lásd Pontrjagin: Folytonos csoportok c. könyvét.)

(i) 0 környezeteinek egyetlen közös pontja a 0. Legyen ugyanis $\eta \in p^k H$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Mivel A p-csoport, azért tetszőleges $a\,(\in A)$ rendje p^n alakú, valamilyen a-tól függő n-re; mármost $\eta \in p^n H$ alapján $\eta = p^n\chi$ alakú $(\chi \in H)$, és így $a\eta = a(p^n\chi) = (p^n a)\chi = 0\chi = 0$, amiből $\eta = 0$ adódik, mint állítottuk.

(ii) 0 bármely U környezetéhez van oly V környezet, melyre $V+(-V) \subseteq U$. Ez $V = U$ választással teljesül.

(iii) Ha a eleme a 0 valamely U környezetének, akkor van oly V környezet, melyre $a+V \subseteq U$. Ez is teljesül a $V = U$ választás esetén.

(iv) Bármely két környezet közös része tartalmaz környezetet. Ez abból adódik, hogy bármely két környezet közül egyik tartalmazza a másikat.

3. Bizonyítjuk a teljességet. Ehhez azt kell bizonyítani, hogy ha egy $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ sorozat eleget tesz a Cauchy-féle kritériumnak, akkor konvergens. A sorozat egyes tagjainak esetleges többszöri felírásával elérhető, hogy $\eta_{i+1} - \eta_i \in p^i H$ azaz $\eta_{i+1} = \eta_i + p^i\vartheta_i$ legyen. Válasszuk emellett speciálisan η_0-t 0-nak.

Definiálunk most egy χ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ leképezést a következőképpen:

ha $a\,(\in A)$ rendje p^k, akkor legyen

$$a\chi_i = a(\vartheta_i + p\vartheta_{i+1} + \ldots + p^{k-1}\vartheta_{i+k-1}).$$

Könnyen látható, hogy χ_i valóban A-nak B-be való homomorfizmusa, és

$$\chi_i = \vartheta_i + p\chi_{i+1}.$$

Kimutatjuk, hogy az $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ sorozat határértéke χ_0. Ehhez elég a $\chi_0 - \eta_i \in p^i H$, illetve a $\chi_0 - \eta_i = p^i \chi_i$ igazolása, amit i-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

$$i = 0\text{-ra} \quad \chi_0 - \eta_0 = \chi_0 - 0 = \chi_0 = p^0 \chi_0.$$

Felhasználva az $\eta_{i+1} = \eta_i + p^i \vartheta_i$ egyenlőséget, majd a teljes indukciós feltevést és végül a $\chi_i = \vartheta_i + p\chi_{i+1}$ összefüggést:

$$\chi_0 - \eta_{i+1} = \chi_0 - \eta_i - p^i \vartheta_i = p^i \chi_i - p^i \vartheta_i = p^i(\chi_i - \vartheta_i) = p^{i+1} \chi_{i+1};$$

ami a teljességet bizonyítja.

4. Kimutatjuk, hogy a 0 komponense csak a 0-ból áll; ehhez elég azt bizonyítani, hogy a 0-t tartalmazó összes nyílt-zárt halmazok metszete 0. Tekintettel arra, hogy $p^k H$ nyílt részcsoport, ezért zárt is, és mivel már ezek metszete is csak a 0-t tartalmazza ($k = 1, 2, \ldots$) ezért az összes nyílt-zárt 0-t tartalmazó halmaz metszete sem tartalmazhat 0-n kívül mást.

5. A kompaktságra a következő feltétel adódik: H akkor és csak akkor kompakt, ha $p^k H$ minden k-ra véges indexű a H-ban.

Tegyük fel először, hogy H kompakt. Ekkor tetszőleges rögzített k esetén a $\chi + p^k H$ mellékosztályok lefedik H-t, ha χ végigfut H elemein. A kompaktság alapján ekkor ezen (nyílt) mellékosztályok közül már véges sok is lefedi H-t, ami éppen azt jelenti, hogy $p^k H$ véges indexű H-ban.

Tegyük fel most, hogy a $p^k H$ részcsoportok véges indexűek. Kimutatjuk, hogy ha bizonyos zárt részhalmazok közül bármely véges soknak van közös pontja, akkor az összesnek is van. Természetesen feltehető, hogy a szereplő részhalmazok száma végtelen.

Kimutatjuk először a következőket: Legyenek U_λ-k egy H halmaz részhalmazai, melyek közül bármely véges sok metszi egymást (λ végigfut valamely Λ indexhalmazon). Tegyük fel, hogy H az S és T diszjunkt halmazok egyesítése. Ekkor az $S \cap U_\lambda$ vagy a $T \cap U_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) halmazok ugyancsak rendelkeznek az U_λ-kra megkövetelt tulajdonsággal. (Speciálisan vagy az S, vagy a T az összes U_λ-t metszi.) Tegyük fel ugyanis, hogy a két állítás egyike sem teljesül. Ekkor létezne oly $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ és oly $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_{r+s}$, hogy mind az $S \cap U_\lambda$-k, mind a $T \cap U_{\lambda_{r+j}}$-k metszete üres ($i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$). Más szóval az

$$\bigcap_{i=1}^{r} U_{\lambda_i} \cap S \quad \text{és} \quad \bigcap_{j=1}^{r} U_{\lambda_{r+j}} \cap T$$

halmazok üresek, azaz $H = S \cup T$ alapján

$$\bigcap_{i=1}^{r} \cup U_{\lambda_i} \subseteq T \quad \text{és} \quad \bigcap_{j=1}^{r} \cup U_{\lambda_{r+j}} \subseteq S,$$

és igy

$$\bigcap_{t=1}^{r} U_{\lambda_t} = \bigcap_{i=1}^{r} U_{\lambda_i} \cap \bigcap_{j=1}^{s} U_{\lambda_{r+j}} \subseteq T \cap S,$$

azaz T és S diszjunktsága alapján $\bigcap_{t=1}^{r+s} U_{\lambda_t}$ üres, a feltétellel ellentétben. Teljes indukcióval igazolható az állítás H bármely véges sok diszjunkthalmazra való felbontása esetén.

Tekintsük most a H topologikus csoport zárt U_λ részhalmazait, melyek a feltételnek eleget tesznek. Ekkor a fenti eljárás egymásutáni alkalmazásával a következőket kapjuk: Létezik a H elemeinek oly $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots$ sorozata, melyekre:

$$\eta_1 + pH \supseteq \eta_2 + p^2H \supseteq \ldots \supseteq \eta_k + p^kH \supseteq \ldots$$

teljesül, és az U_λ-knak bármely $\eta_k + p^kH$-val való metszetei kielégítik a szereplő feltételt, speciálisan mindegyik $\eta_k + p^kH$-nak és minden U_λ-nak van legalább egy $\chi_{k,\lambda}$ közös eleme.

Az $\eta_k + p^kH$ mellékosztályokra vonatkozó tartalmazási reláció és a teljesség alapján az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots$ sorozatnak van egy η határértéke, melyre $\eta_k + p^kH = \eta + p^kH$. Tekintettel arra, hogy tetszőleges λ index esetén $\chi_{k,\lambda} \in \eta + p^kH$, ezért a $\chi_{1,\lambda}, \chi_{2,\lambda}, \ldots, \chi_{k,\lambda}, \ldots$ sorozatnak η a határértéke. Mivel rögzített λ esetén minden k-ra $\chi_{k,\lambda} \in U_\lambda$, és U_λ zárt, ezért $\eta \in U_\lambda$ is fennáll minden λ-ra, azaz η az összes U_λ közös eleme, amivel állításunkat maradéktalanul igazoltuk.

Megjegyzés: A feladatban szereplő állítás tulajdonképpen az, hogy ha A p-csoport, akkor $Hom(A, B)$ redukált és algebrailag kompakt. A kompaktságra vonatkozó eredmény egyik fele — hogy a kompaktságból következik a p^kH részcsoportok indexének végessége — könnyű. A fordított állítást a következőképpen lehet belátni.

Igaz a következő tétel:

Legyen a H kommutatív p-csoport algebrailag kompakt abban a topológiában, melyben az egységelem környezetei a p^kH részcsoportok, és legyen $\bigcap_{k=1}^{\infty} p^kH = 0$. Ha H/pH véges, akkor H felbomlik oly végestagú direkt összegre, melyben a direkt összeadandók vagy prímhatványrendű ciklikus csoportok, vagy izomorfok a p-adikus egészek additív csoportjával.

Mármost ezen csoportok mindegyike kompakt a p-adikus topológiában. Tekintettel arra, hogy a direkt összegben a p-adikus topológia az egyes tagok p-adikus topológiájának Tyihonov-féle szorzata, ezért — Tyihonov ismert tétele alapján maga H is kompakt.

Mivel a feladatban szereplő H csoportra a feltételek — H/pH végessége esetén — teljesülnek, ezért ez esetben H kompakt.

Megoldották: ELBERT ÁRPÁD, JUHÁSZ ISTVÁN, PETRUSKA GYÖRGY, SZÁSZ DOMOKOS, TUSNÁDY GÁBOR.

4. Feladat, első megoldás: Legyen $p = 4k+3$. Tekintsük az x^2+y^2 értékeket ($1 \leqq x \leqq 2k+1$, $1 \leqq y \leqq 2k+1$). Kimutatjuk először, hogy ezek közül (mod p) a (-1)-gyel kongruensek száma eggyel több, mint az 1-gyel kongruensek száma. $4k+3$ alakú prímszámról lévén szó minden kvadratikus maradék (ill. nemmaradék) egyértelműen írható x^2 (ill. $-x^2$) alakba, ahol $1 \leqq x \leqq 2k+1$. Az $x^2+y^2 = x^2-(-y^2)$ alapján az $x^2+y^2 = 1$, ill. $x^2+y^2 = -1$ azt jelenti, hogy a (mod p) vett maradékok $1, 2, \ldots, p-2, p-1$ sorozatában nem maradék után ill. előtt maradék áll, más szóval, ha nem maradék után maradék, ill. maradék után nem maradék következik. Mivel az $1, 2, \ldots, p-2, p-1$, sorozat maradékkal kezdődik, és $-4k+3$ alakú prímszámról lévén szó — nem maradékkal fejeződik be, ezért az utóbbi eset eggyel többször lép fel.

A következő két állítást fogjuk bizonyítani: 1. az x^2+y^2 alakú számok közt, ahol $1 \leqq x, y \leqq \frac{p-1}{2}$ eggyel több -1-gyel kongruens van, mint 1-gyel kongruens; 2. e számok közül minden kvadratikus maradékkal annyi kongruens, mint az 1-gyel és minden nem maradékkal annyi, mint -1-gyel.

Ezekből a feladat állítása már következik, ugyanis a mondott számok száma $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Legyen köztük az 1-gyel kongruensek száma r, akkor 2. szerint minden kvadratikus maradékkal ennyi kongruens van és 1. és 2. szerint minden nem maradékkal $r+1$ kongruens. Mivel mind a maradékok mind a nem maradékok száma $\frac{p-1}{2}$, így

$$\left(\frac{p-1}{2}\right) = (r+r+1) \quad \frac{p-1}{2} \quad r = \frac{p-3}{4}$$

A vizsgált x^2+y^2 alakú számok között azonban a kérdéses szorzat minden tényezője pontosan kétszer lép fel, és ezenkívül szerepelnek az x^2+x^2 alakú számok is. Mármost, aszerint, hogy $\left(\frac{2}{p}\right)$ 1-gyel vagy (-1)-gyel egyenlő, az x^2+x^2 alakú számok az összes maradékot, illetve az összes nem maradékot állítják elő. Így a kérdéses szorzatban ha $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ minden maradék $\frac{k-1}{2}$-ször és minden nem maradék

$\frac{k+1}{2}$-ször szerepel, ha pedig $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, akkor minden maradék és minden nem maradék $\frac{k}{2}$-szer szerepel. Mivel $4k+3$ alakú prímek esetében a kvadratikus maradékok x^2 alakban a nem-maradékok $-x^2$ alakban írhatók mod p, ahol $1 \leqq x \leqq \frac{p-1}{2}$, így az összes maradék szorzata a következővel kongruens:

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

és az összes nem maradéké:

$$(-1^2)(-2^2)\cdot\ldots\cdot\left(-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{p},$$

ezért a kérdéses szorzat értéke megfelelően $(-1)^{\frac{k+1}{2}}$, ill. $(-1)^{\frac{k}{2}}$. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ alapján az első eset akkor lép fel, ha k páratlan, s a második, ha k páros, azaz a kitevő $\left[\frac{k+1}{2}\right]$. Így a kérdéses szorzat $(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}$ azaz mivel $p = 4k+3$ $(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} = (-1)^{\left[\frac{4k+4}{8}\right]} =$ $= (-1)^{\left[\frac{p+1}{8}\right]}$, amit bizonyítani kell.

Az 1. állítás belátására helyettesítsük az $x^2+y^2 = x^2-(-y^2)$ különbségben x^2-et és y^2-et legkisebb pozitív maradékával:

$$x^2-(-y^2) \equiv a-b \pmod{p},$$

ahol a kvadratikus maradék b nem maradék és mindkettő 1 és $p-1$ közti szám. Így $a-b$ akkor és csak akkor kongruens 1-gyel, ill. -1-gyel, ha egyenlő is vele. Az $x^2+y^2 \equiv 1$, ill. $\equiv -1 \pmod{p}$ kongruenciának tehát annyi megoldása van, ahányszor az $1, 2, \ldots, p-2, p-1$ számsorozatban egy kvadratikus maradék előtt, ill. után egy nem maradék áll. A számsor első eleme kvadratikus maradék az utolsó — $4k+3$ alakú prímszámról lévén szó — nem maradék, így az utóbbi eggyel többször következik be, mint az előbbi. Ezzel az 1. állítást igazoltuk.

Az $x^2+y^2 \equiv 1 \pmod{p}$ $\left(1 \leqq x, y \leqq \frac{p-1}{2}\right)$ kongruenciát a^2-tel szorozva (ahol $p \nmid a$) jelöljük ax és ay legkisebb abszolút értékű maradé-

kának abszolút értékét x_1-gyel, ill. y_1-gyel; ezekre

$$x_1^2+y_1^2 \equiv a^2 \pmod p \quad \text{és} \quad 1 \leqq x_1, y_1 \leqq \frac{p-1}{2}.$$

Fordítva, ha az utóbbi kongruenciának van egy megoldása és a' az az 1 és $p-1$ közti szám, melyre $aa' \equiv 1 \pmod p$, akkor $a'x_1$ és $a'y_1$ legkisebb abszolútértékű maradékának x és y abszolút értéke az első kongruenciának egy megoldása (mégpedig az, amelyikre $ax \equiv \pm x_1$; $ay \equiv \pm y_1 \pmod p$). Így a két kongruenciának ugyanannyi megoldása van, és ugyanúgy látható ez be az $x^2+y^2 \equiv -1 \pmod p$ és $x_1^2+y_1^2 \equiv -a^2 \pmod p$ kongruenciákra is. Ezzel a 2. állítást is igazoltuk.

BOLLOBÁS BÉLA

Megoldották még: ELBERT ÁRPÁD, GALAMBOS JÁNOS, HALÁSZ GÁBOR, PETRUSKA GYÖRGY, SZÁSZ DOMOKOS, SZEMERÉDI ENDRE.

Második megoldás: Legyen

$$P = \prod_{1 \leqq x < y \leqq \frac{p-1}{2}} (x^2+y^2),$$

ahol $p = 4k+3$. A fenti szorzatban az összes különböző kvadratikus maradékokból álló párok szerepelnek. Ezt a szorzatot másképpen is előállíthatjuk. Legyen g primitív gyök $\pmod p$, és $h=g^2$. Mivel $p = 4k+3$ alakú, ezért minden kvadratikus maradék egyértelműen felírható $\pmod p$, mint h-nak legfeljebb $2k$-ik hatványa ($h^{2k+1} \equiv g^{4k+2} \equiv g^{p-1} \equiv 1 \pmod p$). Így a kérdéses sorzatot felírhatjuk a következő alakba is:

$$P \equiv \prod_{0 \leqq i < j \leqq 2k} (h^i+h^j) \pmod p.$$

Ebből

$$P \cdot \prod_{0 \leqq i < j \leqq 2k} (h^i-h^j) \equiv \prod_{0 \leqq i < j \leqq 2k} (h^{2i}-h^{2j}) \pmod p$$

adódik, ahol a szereplő szorzatok egy-egy 0-tól különböző Vandermonde-determináns értékei.

$$P \cdot V(1, h, h^2, \ldots, h^{2k-1}, h^{2k}) \equiv V(1, h^2, \ldots, h^{4k-2}, h^{4k}) \pmod p.$$

A második Vandermonde-determináns generátorelemei $h^{2k+1} \equiv 1 \pmod p$ folytán a következőkkel kongruensek:

$$1, h^2, \ldots, h^{2k}, h, h^3, \ldots, h^{2k-1}.$$

Így ahhoz, hogy a második Vandermonde-determinánsból az elsőt meg-

kaphassuk $k+(k-1)+\ldots+2+1=\frac{k(k+1)}{2}$ sorcserét kell végezni, amiből a determinánsok tulajdonsága alapján:

$$P\equiv(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\equiv(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\equiv(-1)^{\left[\frac{p+1}{8}\right]}\pmod p.$$

FRIED ERVIN

5. Feladat megoldása:

Nyilván elég a $\bar{D}f$-re vonatkozó állítást igazolni. Világos, hogy minden valós c-re

$$\{x:\bar{D}f(x)>c\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{ik},$$

ahol A_{ik} azoknak az $\frac{1}{k}$-nál rövidebb $[a,b]$ intervallumoknak egyesítése, melyekre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>c+\frac{1}{i}$. Megmutatjuk, hogy A_{ik} F_σ-típusú halmaz, amivel az állítás igazolva lesz.

Legyen általánosabban $\{I_\gamma\}$ a nyílt intervallumoknak egy rendszere $(\gamma\in\Gamma)$ és $A=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\bar{I}_\gamma$ (itt $\bar{I}_\gamma$ jelenti I_γ lezárását). Nyilván

$$A=B\cup C\cup D,$$

ahol $B=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}I_\gamma$, C azon pontok halmaza, amelyek legalább egy I_γ-nak baloldali végpontja, de egyiknek sem belső pontjai. D pedig azoké, melyek legalább egy I_γ-nek jobboldali végpontjai s egyiknek sincsenek a belsejében. Világos, hogy B nyílt halmaz. Ha $x\in C$, legyen r_x egy racionális hely azon I_γ belsejéből, amelynek x baloldali végpontja. Különböző x-ekhez különböző r_x-ek tartoznak, hiszen $x<y$ $r_x=r_y$ esetén y az x-nél kezdődő I_γ belsejében volna. Emiatt C és ugyanúgy D megszámlálható. Így a B, C, D halmazok mindegyike s velük A is F_σ típusú.

Megjegyzés. A feladat érdekességét az adja meg, hogy az egyoldali deriváltszámokra hasonló tétel nem mondható ki. Pl. ha E olyan nemmérhető halmaz, amely maga is, komplementer halmaza is mindenütt sűrű, és $f(x)$ E-nek karakterisztikus függvénye, akkor $\overline{D}^+f(x)=0$ vagy $+\infty$ aszerint, hogy $x\in E$ vagy $x\notin E$, s így akkor $\overline{D^+}f(x)$ nem-mérhető.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megoldották: HALÁSZ GÁBOR, PETRUSKA GYÖRGY.

Egyébként J. Saks: Theory the integral jóval súlyosabb segédeszközökkel (Vitali-féle befedési tétel) csak $\overline{Df}$ és $\underline{Df}$ Lebesgue-mérhetőségét bizonyítja (112—113. o.); igaz, hogy akárhány dimenzióra általánosítva.

6. Feladat megoldása:

Foglaljuk be E-t egy Δ véges nyílt intervallumba. Jelöljük S_n-nel Δ azon pontjainak halmazát, amelyeknek van olyan környezetük, amibe nem esnek E-nek olyan pontjai, amelyek egy $\frac{1}{n}$-nél hosszabb Ω-beli intervallum kezdőpontjai. S_n nyilván nyílt halmaz, $S_{n+1} \subset S_n$ továbbá $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right) \cap E = 0$, hiszen E minden pontjából kiindul jobbra legalább egy nem elfajult Ω-beli intervallum és ha már $\frac{1}{n}$ kisebb, mint ennek a hossza, akkor a pont nem lehet S_n-nek eleme. A külső mérték egy ismeret tulajdonsága, hogy tetszőleges A halmaz esetén a $\lambda^*(x \cap A)$ külső mérték, mint X függvénye, a Lebesgue-mérhető halmazon mérték. Ennek alapján, $A = E$-vel $S_{n+1} \subset S_n$ és E külső mértékének végessége miatt:

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda^*(S_n \cap E) = \lambda^*\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right) \cap E\right) = \lambda^*(0) = 0.$$

Rögzítsünk egy n_0-t úgy, hogy $\lambda^*(S_{n_0} \cap E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha az $E_1 = E - (S_{n_0} \cap E)$ halmaz nem üres, amit feltehetünk, akkor minden pontjának minden környezetében van olyan E-beli pont, ami egyszersmind E_1-beli is, amelyből $\frac{1}{n_0}$-nál hosszabb intervallum indul ki. Van olyan $a_1 \in E_1$ pont, hogy $\lambda^*((-\infty, a_1) \cap E_1) < \frac{\varepsilon}{2(n_0 \lambda(\Delta) + 1)}$ és az előzők alapján mindjárt feltehető, hogy egy a_1-ből kiinduló Ω-beli $[a_1, b_1]$ intervallum hosszabb, mint $\frac{1}{n_0}$. Ezután választunk egy $a_2 \in E_1$ pontot (ha még ehet) úgy, hogy $a_2 > b_1$,

$$\lambda^*((b_1, a_2) \cap E_1) < \frac{\varepsilon}{2(n_0 \lambda(\Delta) + 1)} \quad \text{és} \quad [a_2, b_2] \in \Omega, b_2 - a_2 > \frac{1}{n_0}$$

És így tovább, az eljárás véges sok lépés után véget ér, mégpedig legfeljebb $n_0 \lambda(\Delta) + 1$ ilyen $[a_k, b_k]$ intervallumot konstruálhatunk ily

módon $\left(\text{mivel } b_k - a_k > \frac{1}{n_0}\right)$. Amit ezen intervallumok kihagynak E-ből, azt befedi $S_{n_0} \cap E$ és a legfeljebb $n_0\lambda(\Delta)+1$ számú, legfeljebb $\frac{\varepsilon}{2(n_0\lambda(\Delta)+1)}$ külső mértékű $(b_{k-1}, a_k) \cap E_1$ $(b_0 = -\infty)$ halmaz. Ezek össz-külsőmértéke kisebb, mint ε, amivel a bizonyítást befejeztük.

HALÁSZ GÁBOR

Megjegyzések: 1. A kiválasztott intervallumok nemcsak hogy nem nyúlnak egymásba, de még diszjunktak is.

2. Az állítás nem helyettesíthető azzal az erősebb állítással, hogy kiválasztható legfeljebb megszámlálható sok egymásba nem nyúló intervallum úgy, hogy a le nem fedett rész 0-mértékű legyen, mint azt a következő egyszerű példa mutatja: $E=(0, 1)$ $\Omega=\{[x, 1]: x \in (0, 1)\}$.

HALÁSZ GÁBOR

A verseny lezárása után derült ki, hogy a feladat állítása lényegében ugyanezzel a bizonyítással megtalálható a következő dolgozatban: *W. Sierpinski*, Un lemma métrique. Fund. Math. *4* (1923), 201—203. Erre alapozza azután A. Rajchman és S. Saks a monoton függvény m. m. differenciálhatóságáról szóló tételnek egy bizonyítását.

A feladat állítása (és az itteni bizonyítás is) helyes marad, ha ahelyett, hogy minden $x \in E$ baloldali végpontja egy Ω-beli intervallumnak, azt tesszük fel, hogy minden $x \in E$-hez és $\delta > 0$-hoz tartozik olyan $[a, b] \in \Omega$ intervallum, hogy

$$x - \delta < a \leqq x \leqq b.$$

Ez a többet mondó állítás a feladat állításán kívül a Vitali-féle befedési tétel egydimenziós alakját is tartalmazza.

7. Feladat első megoldása:

Alkalmazzuk a

$$t = \sqrt{\frac{x^2-1}{1-\vartheta^2 x^2}}$$

helyettesítést. Miközben x az $\left(1, \frac{1}{\vartheta}\right)$ intervallumban monoton nő, addig t ugyancsak monoton nő a $(0, +\infty)$ intervallumban. Ekkor a

$$\vartheta^2 t^2 x^2 - t^2 + x^2 - 1 = 0$$

deriválásából

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t(1-\vartheta^2 x^2)}{x(1+\vartheta^2 t^2)},$$

és így

$$f(\vartheta)=\int_1^{\frac{1}{\vartheta}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-\vartheta^2x^2)}}=\int_1^{\frac{1}{\vartheta}}\frac{dx}{t(1-\vartheta^2x^2)}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{t(1-\vartheta^2x^2)}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{x(1+\vartheta^2t^2)}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2)(1+\vartheta^2t^2)}}$$

Mármost, ha ϑ monoton nő, az integrandus monoton fogy; és mivel a határok ϑ-tól függetlenek, ezért maga az integrál is monoton fogy.

Második megoldás: Képezzük le a z-sík első negyedét (a $z=1$ és $z=\frac{1}{\vartheta}$ pontokat felfelé buktatott félkörökkel kizárva), a $w=\int_0^z\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\vartheta^2\zeta^2)}}$ függvény által a w-síkra (a gyök azon értékét véve, mely a pozitív tengelyen pozitív). Míg $z=x+iy$ befutja 0-ból kiindulva a $0\leqq z\leqq 1$ egyenesszakaszt, addig $w=u+iv$ nyilván befutja 0-ból kiindulva a $0\leqq w\leqq\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\vartheta^2x^2)}}=A$ egyenes szakaszt.

Ha $1\leqq z\leqq\frac{1}{\vartheta}$ úgy w nyilván befutja az

$$u=A,\qquad 0\leqq v\leqq\int_1^{\frac{1}{\vartheta}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-\vartheta^2x^2)}}=B$$

egyenesszakaszt. Míg z befutja az $\frac{1}{\vartheta}\leqq z<\infty$ egyenesszakaszt, addig w az $A+Bi$ pontból kiindulva a $v=B$ vízszintes egyenesen eljut az $(A-C)+Bi$ pontba, ahol

$$C=\int_{\frac{1}{\vartheta}}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(\vartheta^2x^2-1)}}.$$

Másrészt, míg z befutja 0-ból kiindulva a képzetes tengely pozitív részét, addig w a 0-ból kiindulva az

$$u=0, \quad 0 \leqq v \leqq D$$

szakaszt, ahol

$$D=\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+\vartheta^2 y^2)}}.$$

Mint hogy a leképezés tartományhű, tehát

$$A=C, \quad B=D,$$

melynek másodikából az állítás következik.

TURÁN PÁL

Megoldották: BÓDY BENCE, BOLLOBÁS BÉLA, ELBERT ÁRPÁD, FISCHER PÁL, GYÖRY KÁLMÁN, HALÁSZ GÁBOR, JUHÁSZ ISTVÁN, LOSONCZI LÁSZLÓ, MIHÁLYFFY LÁSZLÓ, MUSZÉLY GYÖRGY, PETRUSKA GYÖRGY, SZÁSZ DOMOKOS, SZEMERÉDI ENDRE, TUSNÁDY GÁBOR.

8. Feladat megoldása:

Ismeretes Fejér egy tétele, mely szerint létezik oly

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

hatványsor, mely $|z|<1$ körben reguláris függvényt állít elő, melyre $|f(z)| \leqq 1$; és az

$$s_r(z)=\sum_{n=0}^{r} a_n z^n$$

részletösszegek sorozata nem korlátos a $z=1$ pontban.

Ezen $f(z)$ függvény segítségével fogunk egy, a feladat követelményeinek megfelelő $f_0(z)$ függvényt konstruálni.

Definiálunk egy n_k, egy m_k és egy c_k sorozatot a következőképpen:

1. Legyen $n_0=m_0=c_0=0$.

2. Tegyük fel, hogy n_{k-1}, m_{k-1} és c_{k-1} már definiálva van.

Először meghatározzuk m_k-t:

Mivel $\overline{\lim_{n \to +\infty}} s_n(1)=\infty$, ezért van oly m_k, melyre

$$|s_{m_k}(1)|>k \sum_{l=0}^{k-1} \max_{|z|=k} |s_{n_l}(z)|;$$

és emellett $m_k > n_{k-1}$ is feltehető.

Másodszor a c_k-t határozzuk meg:
Mivel $s_{m_k}(z)$ folytonos, ezért ha c_k elég közel van az 1-hez, az

$$|s_{m_k}(c_k)| > k \sum_{l=0}^{k-1} \max_{|z|=k} |s_{n_l}(z)|$$

egyenlőtlenség is teljesül. Emellett feltehető, hogy c_k valós és

$$c_k > c_{k-s} \quad \text{valamint} \quad c_k \geqq 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Végül az n_k meghatározása következőképpen történik:
Mivel $s_n(z)$ a $|z| < 1$ körben konvergál $f(z)$-hez, ezért elég nagy n_k-ra

(i) $$\max_{|z|=c_k} |s_{n_k}(z)| < 1.$$

Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| c_k^n$ sor konvergens az $f(z)$ hatványsorának abszolút konvergenciája miatt, ezért elég nagy n_k-ra

(ii) $$\sum_{n>n_k} |a_n| c_k^n < 1.$$

Válasszuk n_k-t, úgy hogy ezek mellett $n_k > m_k$ is teljesüljön.
Tekintsük most a következő hatványsort:

$$\sum_{n=1}^{n_1} a_n z^n + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n \left(\frac{z}{2}\right)^n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_n \left(\frac{z}{k}\right)^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ s_{n_k}\left(\frac{z}{k}\right) - s_{n_{k-1}}\left(\frac{z}{k}\right) \right\}.$$

Kimutatjuk, hogy ezen hatványsor által előállított $f_0(z)$ függvény rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.
Először is a tetszőleges nagy pozitív R-et előírva, ha $k > 2R$, akkor $|z| \leqq R$-re $\left|a_n \left(\frac{z}{k}\right)^n\right| \leqq |a_n| \frac{1}{2^n}$; és $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{1}{2^n}$ konvergenciája miatt $f_0(z)$ hatványsora a $|z| < R$ körben abszolút konvergens, azaz $f_0(z)$ transzcendens egészfüggvény.

Az $f_0(z)$-t felülről becsüljük a $|z|=kc_k$ körön.

$$|f_0(z)| \leqq \left| \sum_{l=1}^{k-1} \left\{ s_{n_l}\left(\frac{z}{k}\right) - s_{n_{l-1}}\left(\frac{z}{k}\right) \right\} - s_{n_{k-1}}\left(\frac{z}{k}\right) \right| + \left| s_{n_k}\left(\frac{z}{k}\right) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{l=k+1}^{\infty} \sum_{n=n_{l-1}+1}^{n_k} a_n \left(\frac{z}{k}\right)^n \right| \leqq 2 \sum_{l=0}^{k-1} \max_{|z|=k\,c_k} |s_{n_l}(z)| + \max_{|z|=c_k} |s_{n_k}(z)| +$$

$$+ \sum_{l=k+1}^{\infty} \sum_{n=n_{l-1}+1}^{n_k} |a_n| \left(\frac{kc_k}{l}\right)^n \leqq 2 \sum_{l=0}^{k-1} \max_{|z|=k} |s_{n_l}(z)| + \max_{|z|=c_k} |s_{n_k}(z) +$$

$$+ \sum_{n>n_k} |a_n| c_k^n \leqq 2 \sum_{l=0}^{k-1} \max_{|z|=k} |s_{n_l}(z)| + 1 + 1$$

az előzőekben megállapítottak figyelembevételével.

A $\sum_{l=0}^{k-1} \max_{|z|=k} |s_{n_l}(z)| = T_k$ jelöléssel az adódik, hogy

$$M(kc_k, f_0) \leqq 2T_k + 2.$$

Most a megfelelő részletösszegre adunk alsó becslést a $|z|=kc_k$ körön; de mivel a maximumról van szó, ezért elég a $z=kc_k$ pontban.

Az m_k-ik részletösszeg abszolút értéke =

$$= \left| s_{m_k}\left(\frac{z}{k}\right) - s_{n_{k-1}}\left(\frac{z}{k}\right) + \sum_{l=1}^{k-1} \left\{ s_{n_l}\left(\frac{z}{l}\right) - s_{n_{l-1}}\left(\frac{z}{l}\right) \right\} \right| \geqq$$

$$\geqq |s_{m_k}(c_k)| - 2 \sum_{l=0}^{k-1} \max_{|z|=k} |s_{n_l}(z)| \geqq (k-2)\,T_k; \quad \text{azaz}$$

$$M_{m_k}(kc_k, f_0) \geqq (k-2)\,T_k.$$

Mármost $\overline{\lim_{l\to+\infty}} |s_{n_l}(1)| = +\infty$ alapján

$$T_k = \sum_{l=0}^{k-1} \max_{|z|=k} |s_{n_l}(z)|$$

$+\infty$-hez tart, azaz elég nagy k-ra $T_k > 1$, és így

$$\frac{M_{m_k}(kc_k, f_0)}{M(kc_k, f_0)} \geqq \frac{(k-2)\,T_k}{2(T_k+1)} > \frac{k-2}{4}.$$

Így $r_{m_k}=kc_k$ választás mellett, ha az m_k-tól különböző n-ekre r_n-t a monotonitás figyelembevételével, de egyébként tetszőlegesen választjuk:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{M_n(r_n,f_0)}{M(r_n,f_0)}\geqq\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{M_{m_k}(r_{m_k},f_0)}{M(r_{m_k},f_0)}\geqq\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{k-2}{4}=+\infty.$$

HALÁSZ GÁBOR

9. Feladat megoldása:

Ha a hasáb minden éle érinti a gömböt, akkor minden lapsíkja olyan kört metsz ki a gömbből, amely érinti annak a lapnak minden oldalát. Eszerint minden lap érintő sokszög.

Minthogy alkotó irányú eltolással az alapsokszög a fedősokszögbe vihető át, ez az eltolás e sokszögek beírt köreit is egymásra fekteti. Ezek a körök az alapok párhuzamossága és egybevágósága miatt párhuzamos síkúak és egybevágók. Minthogy a gömb ilyen köreit a síkjukra merőleges eltolás viszi át egymásba, az alkotók iránya az alapsíkokra merőleges, a vizsgált hasáb tehát egyenes hasáb.

Egyenes hasáb oldallapjai téglalapok. Minthogy ezek is érintő sokszögek, és a téglalapok között csak a négyzetek érintősokszögek, hasábunk minden oldallapja négyzet. Ebből következik, hogy az alapélek is egyenlők az oldalélekkel, hogy tehát az alapsokszögek egyenlő oldalúak, és a hasáb teljes élösszege az alapkerület háromszorosa.

Messük el a hasábot és a gömböt a gömb középpontján át fektetett, az alapsíkokkal párhuzamos síkkal. Ez a sík a hasábot az alaplapokkal egybevágó sokszögben, a gömböt pedig egy főkörben metszi. Ez a főkör tartalmazza a síkjára merőleges, a gömböt érintő egyenesek érintési pontját. Tartalmazza tehát az oldalélek egy-egy pontját is. Eszerint az alapsokszög húrsokszög, melynek körülírt köre a gömbbel egyenlő sugarú. Minthogy ez a húrsokszög egyenlő oldalú, szabályos is. A feladat követelményét kielégítő hasábok tehát olyan szabályos hasábok, amelyeknek alkotói is egyenlők az alapélekkel.

Minden ilyen szabályos hasáb kielégíti a feladat követelményét, mert középpontja egyenlő távolságra van az oldalélektől, és ugyanekkora távolságra van az alapélektől is, hiszen bármely oldallap négyzet és a hasáb középpontja a négyzet középpontjában a síkjára emelt merőlegesen helyezkedik el, tehát a négyzet minden oldalától ugyanakkora távolságra van.

A vizsgált hasábok élösszegéhez ezek szerint úgy jutunk, hogy a gömb sugarát egységnek választva — az egységsugarú körbe tetszőleges szabályos sokszöget írunk, és ennek kerületét 3-mal szorozzuk. Már csak ezt kell tehát megvizsgálnunk, hogy az egységsugarú körbe írt szabályos sokszögek melyikének legkisebb a kerülete.

Az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög kerülete $\frac{\pi}{n}=\alpha$ jelöléssel

$$2n\sin\frac{\pi}{n}=2\pi\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Minthogy $\sin x$ a $(0, \pi)$ intervallumban felülről konvex, a kezdőpontot az $(x, \sin x)$ ponttal összekötő húr irányszöge x növekedtével csökken, tehát $\frac{\sin x}{x}$ ebben az intervallumban monoton fogy. Eszerint $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ akkor legkisebb, amikor $\alpha=\frac{\pi}{n}$ a legnagyobb, azaz n a legkisebb. Így tehát a beírt szabályos háromszög kerülete a legkisebb.

A vizsgált minimum ezek szerint olyan szabályos háromoldalú hasábnál lép fel, amelynek oldallapjai négyzetek, s a minimum értéke $3\cdot 6\sin 60^\circ=9\sqrt{3}$.

HAJÓS GYÖRGY

Megoldották: BÓDY BENCE, BOLLOBÁS BÉLA, GYÖRY KÁLMÁN, HALÁSZ GÁBOR, JUHÁSZ ISTVÁN, LÁZÁR ZSUZSANNA, MEGYESI LÁSZLÓ, MIHÁLYFFY LÁSZLÓ, MUSZÉLY GYÖRGY, SZÓDA LAJOS, SZŰCS JÓZSEF, TUSNÁDY GÁBOR.

10. Feladat megoldása:

Először is megjegyezzük, hogy affin transzformáció esetén a területek aránya nem változik. Így nem változik meg a területek arányának várható értéke sem. Ezt a tényt úgy fogjuk felhasználni, hogy a háromszöget mindig céljainknak megfelelő alakúra választjuk.

Legyenek a háromszög csúcspontjai A_1, A_2, A_3 és jelöljük a találomra felvett pontokat X, Y-nal.

Annak a valószínűsége, hogy az X és Y pontok által meghatározott e egyenes a háromszög valamelyik csúcsán átmenjen, a pontok függetlensége folytán nyilván 0. Így az e egyenes a háromszöget valóban 1 valószínűséggel egy háromszögre és egy négyszögre bontja. Jelöljük A_i-vel azt az eseményt, hogy az egyenes által lemetszett háromszögnek A_i a csúcsa. Az A_i események teljes eseményrendszert alkotnak, így a teljes várható értékre vonatkozó tétel alapján:

$$M\left(\frac{t}{T}\right)=\sum_{i=1}^{3}M\left(\frac{t}{T}\,\middle|\,A_i\right)P(A_i),$$

ahol t az e egyenes által lemetszett, és T az egész háromszög területe. (A többi jelölést ismertnek tételezzük fel.)

Mármost, ha a háromszög szabályos, akkor $M\left(\frac{t}{T}\middle| A_i\right)$ nyilván i-től független (persze $P(A_i)$ is), s így

$$M\left(\frac{t}{T}\right)=M\left(\frac{t}{T}\middle| A_1\right)\sum_{i=1}^{3}P(A_i)=M\left(\frac{t}{T}\middle| A_1\right).$$

Tegyük most fel, hogy a háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög, melynek szárai egységnyi hosszúak, és legyen A_1 a derékszögnél fekvő csúcs.

Jelöljük $F(a, b)$-vel annak a (feltételes) valószínűségét, hogy az e egyenes által lemetszett ξ, η szakaszokra $\xi<a$ és $\eta<b$ teljesül, ha egyáltalában $\xi<1, \eta<1$.

Azaz

$$F(a, b) = P(\xi<a, \eta<b|\xi<1, n<1).$$

Mivel a feltevés szerint a $a<1, b<1$, ezért

$$F(a,b)=\frac{P(\xi<a, \eta<b)}{P(\xi<1, \eta<1)},$$

ahol $a<1, b<1$. Legyen $X(x_1, x_2)$ és $Y(y_1, y_2)$, ekkor

$$P(\xi<a, \eta<b)=c\int_{\Delta(a, b)} dx_1dx_2dy_1dy_2,$$

ahol c az a és b-től független állandó és $\Delta(a, b)$ a 4-dimenziós tér azon tartománya, melyekre a megfelelő egyenes kielégíti a $\xi<a$ és $\eta<b$ feltételt. Mármost az $x_i=ax_i'$ és $y_i=by_i'$ helyettesítés esetén $\Delta(a, b)$ $\Delta(1,1)$-be megy át, és így

$$P(\xi<a, \eta<b)=ca^2b^2\int_{\Delta(1,1)} dx_1'dx_2'dy_1'dy_2'=a^2b^2P(\xi<1, \eta<1),$$

azaz

$$F(a, b)=a^2b^2.$$

Így a sűrűségfüggvény

$$f(a, b)=\frac{\partial^2F(a, b)}{\partial a\,\partial b}=4ab,$$

míg a vizsgálandó függvény — azaz a háromszögek területaránya

$$g(a, b)=\frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1}=ab.$$

A várható értékre ekkor a következő adódik:

$$M\left(\frac{t}{T}\right)=M(g(a,b))=\int_0^1\int_0^1 g(a,b)f(a,b)dadb=\int_0^1\int_0^1 4a^2b^2dadb=\frac{4}{9}.$$

Így az egyenes által lemetszett háromszög és négyszög területének várható értéke $\frac{4}{9}$, illetve $\frac{5}{9}$.

RÉNYI ALFRÉD

Részben megoldotta: TUSNÁDY GÁBOR.

CONCOURS COMMÉMORATIF MIKLÓS SCHWEITZER DE L'ANNÉE 1962

1. Désignons par F resp. G l'ensemble des valeurs admises par le polynôme aux coefficients rationnels $f(x)$ resp. $g(x)$ pour des valeurs rationnelles de x. Démontrer que la relation $F=G$ se realise si, et seulement si $f(x)=g(ax+b)$ avec des nombres rationnels convenables $a\neq 0$ et b.

2. Déterminer les racines de l'unité du corps des nombres p-adique.

3. Les homomorphisme du groupe d'Abel A dans le groupe d'Abel B forment un groupe d'Abel H, si l'en entend par la somme des homomorphismes η et χ l'Homomorphisme $\eta+\chi$ qui applique un élément arbitraire a de A sur l'élément $a(\eta+\chi)=a\eta+a\chi$. Démontrer que si A est un groupe $p(p$ nombre premier), alors H devient un groupe topologique si l'on choisit pour système de voisinage de 0 les sous-groupes p^kH $(k=1,2,\ldots)$. Démontrer que H est complète dans cette topologie et que chacun de ses composants consiste d'un seul point. Sous quelles conditions sera-t-il H compacte dans cette topologie?

4. Démontrer que pour un nombre premier quelconque de la forme $4k+3$, on a

$$\prod_{1\leqq x<y\leqq\frac{p-1}{8}}(x^2+y^2)\equiv(-1)^{\left[\frac{p+1}{8}\right]}\pmod p$$

5. Soit f une fonction réelle, à une variable et à valeur finie, $\bar{D}f$ et $\underline{D}f$ ses nombres dérivés supérieurs et inférieurs, c'est-à-dire que

$$\bar{D}f(x)=\limsup_{\substack{h,\,k\to 0\\ h,\,k\geqq 0\\ h+k>0}}\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k},\qquad \underline{D}f(x)=\liminf_{\substack{h,\,k\to 0\\ h,\,k\geqq 0\\ h+k>0}}\frac{f(n+h)-f(x-k)}{h+k}$$

Démontrer que $\bar{D}f(x)$ et $\underline{D}f(x)$ sont des fonctions mesurables Borel.

6. Soit E un sous-ensemble borné de la droite des nombres et Ω un système fermé d'intervalles (non dégénérés) tel que pour tout $x\in E$ existe un $\varepsilon\in\Omega$ dont l'extrémité gauche soit x. Démonterer que pour tout $\varepsilon>0$ on peut donner en nombre fini des intervalles appartenant à Ω et deux à deux disjoints tels qu'ils recouvrent E excepté un sous-ensemble de mesure inférieur à ε.

7. Démontrer que pour la valeur positive de la racine carrée, la fonction

$$f(\vartheta)=\int_1^{\frac{1}{\vartheta}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)\,(1-\vartheta^2x^2)}}$$

est monotone decroissante dans l'intervalle $0<\vartheta<1$.

8) Désignons par $M(r,f)$ le maximum de la valeur absolue admise sur la circonférence $|z|=r$ par la fonctíon entière $f(z)$ et par $M_n(r,f)$ celui de la n-ième somme partielle de la série de puissance de $f(z)$. Démontrer qu'il existe une fonctin particulière $f_0(z)$ et une suite convenable $(0<)r_1<r_2<\ldots\to\infty$, telle que l'on ait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{M_n(r_n,f_0)}{M(r_n,f_0)}=+\infty.$$

9. Quel est le prisme avec la somme minimum longueures de ses arrêts parmi les prismes dont les arrêts sont tangentes à la sphère unité?

10. Dans un triangle d'aire d'unité on choisit deux points aux hasard (avec la distribution uniforme) et indépendemment l'un de l'autre; la droite qui lie ces points partage le triangle en un triangle et un quadrangle avec la probabilité 1. Déterminer la valeur de l'espérence mathématique de l'air de ces parties.

Feladatrovat

Szerkeszti: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

Az előző szám lezárása és megjelenése között a 126. feladat megoldását beküldötte *Kelemen József.*

Kitűzött feladatok

138. Mutassuk meg, hogy minden komplex z helyen

$$\sin \pi z = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi z(1-z))^n}{n!} J_{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

ahol J_p a p-edrendű Bessel-függvény.

Szegő Gábor

139. Legyen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

$$|a_0| = |a_1| = \ldots = |a_{n-1}|,$$

továbbá

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Mutassuk meg, hogy az $f(1), f(\varepsilon), f(\varepsilon^2), \ldots, f(\varepsilon^{n-1})$ számokból alkotott ciklikus mátrix ortogonális abban az értelemben, hogy bármely sorának vagy oszlopának egy másik sor, ill. oszlop konjugáltjával való skaláris szorzata 0.

Corrádi Keresztély

140. Egy valós négyzetes mátrixot ortogonálisnak mondunk, ha bármely két sorának vagy oszlopának skaláris szorzata 0, bármely sornak vagy oszlopnak önmagával alkotott skaláris szorzata pedig 1. Bizonyítandó, hogy minden n-edrendű valós ortogonális mátrix legfeljebb n szimmetrikus ortogonális mátrix szorzata.

Császár Ákos és *Hajós György*

Megoldott feladatok

127. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n szögpontú (hurok és többszörös él nélküli) gráfnak legalább $2n-3$ éle van, akkor tartalmaz olyan körutat, amelynek két nem szomszédos szögpontját él köti össze.

(Pósa Lajos)

Megoldás: A feladat állítása $n=1, 2, 3$ esetén nyilván hamis. Ha $n=4$, akkor az A_1, A_2, A_3, A_4 szögpontokkal rendelkező és legalább $2\cdot 4-3 = 5$ élt tartalmazó gráf tartalmazza a lehetséges hat él mindegyikét legfeljebb egy, mondjuk A_1A_3 kivételével. Ekkor tartalmazza az $A_1A_2A_3A_4A_1$ körutat és ennek A_2A_4 „átlóját". Így a feladat állítása $n=4$ esetén igaz.

Tegyük most fel, hogy $n>4$ és hogy a feladat állítása n helyett $n-1$ szögpontú gráfokra teljesül. Ha az n szögpontot és legalább $2n-3$ élt tartalmazó G gráf valamely szögpontjából legfeljebb két él indul ki, akkor ezt a szögpontot és a belőle kiinduló éleket elhagyva olyan G' részgráfhoz jutunk, amely $n-1$ szögpontot és legalább $2n-5 = 2(n-1)-3$ élt tartalmaz. Feltevésünk szerint így G' tartalmaz egy körutat és ennek egy átlóját, ugyanez méginkább G-re is fennáll tehát.

Tegyük most fel, hogy egy G gráf minden szögpontjából legalább három él indul ki. Legyen $A_0 \ldots A_m$ a gráfban fekvő maximális hosszúságú egyszerű út. Ennek maximális hosszúsága miatt A_0 az $A_1, \ldots, A_m$ szögpontoktól különböző szögponttal nem lehet összekötve, így az $A_2, \ldots, A_m$ szögpontok közül legalább kettővel, mondjuk A_i-vel és A_j-vel össze van kötve, $2 \leqq i < j \leqq m$. Ekkor azonban $A_0A_1 \ldots A_i \ldots A_jA_0$ a gráfnak olyan körvonala, amelynek nem szomszédos A_0 és A_i szögpontjait él köti össze.

Így a feladat állítását $n \geqq 4$ esetére n szerinti teljes indukcióval igazoltuk.

Czipszer János

Megjegyzések. 1. Minden $n \geqq 4$ természetes számhoz megadható egy n szögpontú és $2n-4$ élt tartalmazó gráf, amely nem tartalmaz olyan körutat, amelynek két nem szomszédos szögpontját él köti össze.

Ilyenre példa az $A, B, C_1, \ldots, C_{n-2}$ szögpontokat és az AC_i és BC_i $(1 \leqq i \leqq n-2)$ éleket tartalmazó gráf.

Czipszer János

2. Az előző megoldás harmadik bekezdésében A_0 helyett az A_m szögponttal is okoskodhattunk volna. Így a következő állítás adódik: Ha egy gráf minden szögpontjából legfeljebb egynek a kivételével legalább három él indul ki, akkor a gráf tartalmaz olyan körutat, amelynek két nem szomszédos szögpontját él köti össze.

Szerk.

A 127. feladat megoldását beküldötte még CSÁSZÁR ÁKOS, HETYEI GÁBOR és KONCZ KÁROLY.

128. feladat. Mutassuk meg, hogy van olyan teljes metrikus tér, amelyben zárt gömbök monoton csökkenő sorozatának metszete lehet üres is.

(Császár Ákos és Pál László)

I. megoldás. Legyen E a természetes számok halmaza és $x, y \in E$ esetén

$$\varrho(x, y) = 0, \quad \text{ha} \quad x = y,$$

$$\varrho(x, y) = 1 + \frac{1}{x} = \varrho(y, x), \quad \text{ha} \quad x < y.$$

Megmutatjuk, hogy ϱ távolság az E halmazon. Ehhez csak a háromszög-egyenlőtlenséget kell igazolnunk. Ez triviálisan teljesül olyan x, y, z számhármasra, amelynek elemei közül kettő egyenlő. Ha viszont $x < y < z$, akkor

$$\varrho(x, y) = 1 + \frac{1}{x}, \quad \varrho(y, z) = 1 + \frac{1}{y}, \quad \varrho(x, z) = 1 + \frac{1}{x}$$

és az $1 + \frac{1}{x}$, $1 + \frac{1}{y}$, $1 + \frac{1}{x}$ számok közül bármelyik kisebb, mint a másik kettő összege.

Az E halmaz a ϱ távolsággal felruházva teljes metrikus tér, mert $\varrho(x, y) < 1$ csak $x = y$ esetén teljesül, így minden Cauchy-sorozat bizonyos indextől kezdve csupa megegyező tagból áll. Tekintsük most az

$$S_n = \left\{ x : \varrho(x, n) \leqq 1 + \frac{1}{n} \right\}$$

zárt gömböket. Nyilván $S_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Ennélfogva $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots$ és $\bigcap_1^\infty S_n = 0$.

Czipszer János

II. megoldás. Legyen E_0 az $[1, +\infty)$ intervallumban értelmezett valós függvények halmaza, $f, g \in E_0, f=g$ esetén $\varrho(f, g)=0, f \neq g$ esetén pedig

$$\frac{1}{\varrho(f,g)} = \inf\{x : x \geqq 1, f(x) \neq g(x)\}.$$

Eszerint $0<\varepsilon<1$ esetén $\varrho(f, g) \leqq \varepsilon$ akkor és csak akkor áll, ha az $1 \leqq x < \frac{1}{\varepsilon}$ intervallumban $f(x)=g(x)$. Ebből könnyen következik, hogy E_0 teljes metrikus tér. Legyen $E \subset E_0$ az $[1, +\infty)$ minden véges részintervallumában korlátos valós függvények halmaza. Világos, hogy E zárt E_0-ban, így a ϱ távolsággal E is teljes metrikus tér. Ez megfelel a feladat feltételeinek.

Valóban, legyen $1=a_0<a_1<\ldots$, $a_n \to a < +\infty$, továbbá

$$f_n(x) = \begin{cases} k, & \text{ha} \quad a_{k-1} \leqq x < a_k, \quad k \leqq n, \\ n, & \text{ha} \quad x \geqq a_n. \end{cases}$$

Jelentse S_n az f_n középpontú, $\frac{1}{a_n}$ sugarú zárt gömböt E-ben. Nyilvánvaló, hogy $S_n \subset S_{n-1}$ és $f \in \bigcap_1^\infty S_n$ esetén $f(x)=k$ az $a_{k-1} \leqq x < a_k$ intervallumban minden k-ra. Ez azonban egyetlen $f \in E$ függvényre sem állhat, hiszen az $[1, a)$ intervallumban nem volna ez a függvény korlátos.

Császár Ákos

Megjegyzés. A feladat forrása az a *Czách Lászlótól* származó észrevétel, hogy teljes normált térben zárt gömbök monoton csökkenő sorozatának metszete sohasem lehet üres. Alkalmazzuk ugyanis az $S(x, r) = \{y : \|y-x\| \leqq r\}$ jelölést. Ha $x \notin S(y, r) \subset S(x, q)$, akkor $\|y-x\| > r$ és $z = y + \frac{r}{\|y-x\|}(y-x) \in S(y, r)$ miatt $\|z-x\| =$

$$= \left(1 + \frac{r}{\|y-x\|}\right)\|y-x\| \leqq q, \quad \text{azaz} \quad 2r < \|y-x\| + r \leqq q \quad \text{és} \quad r < \frac{q}{2}.$$

Ebből könnyen következik, hogy zárt gömbök monoton csökkenő sorozatának metszete csak akkor lehetne üres, ha a gömbök sugarai 0-hoz tartanának, amikor is a tér teljessége jól ismert módon biztosítja a metszet nem-üres voltát.

Ezt figyelembe véve tanulságosabb a II. megoldás példája, mert ez hasonlít a teljes normált terekhez annyiban, hogy itt is vektortérről van szó, amelyben a távolság eltolással szemben invariáns. Ez a vektor-

tér topologikus vektortér a valós számok diszkrét topológiával ellátott teste fellett. Érdekes volna olyan példát keresni a feladat megoldására, amely a valós számoknak a szokásos topológiával ellátott teste felett is topologikus vektortér (és esetleg még jobban hasonlít a normált terekhez, pl. lokálisan konvex).

Megemlíthető még, hogy az I. megoldás példájának topológiája diszkrét.

A 128. feladat megoldását beküldötte még CZÁCH LÁSZLÓ és SZŰCS JÓZSEF.

129. feladat. Bebizonyítandó, hogy ha a valós változós, L-integrálható $f(t)$ függvényre, továbbá a pozitív M, b állandókra

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}\,dt\right| \leqq \frac{M}{1+4\pi^2x^2}e^{-bx^2},$$

akkor minden pozitív egész k-ra

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^k e^{-ixt}\,dt\right| \leqq \frac{M^k}{1+4\pi^2x^2}e^{\frac{-b}{k}x^2}.$$

(Turán Pál)

Megoldás. Bevezetjük az

$$F(g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ixt}\,dt,\quad F^*(g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{ixt}\,dt,$$

$$F(f^k)=f_k$$

jelöléseket. A bizonyítandó egyenlőtlenséget teljes indukcióval igazoljuk. A feltevés szerint az egyenlőtlenség $k=1$-re igaz, vagyis

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_1(x)\right| \leqq \frac{M}{1+4\pi^2x^2}e^{-bx^2}. \tag{1}$$

Feltesszük, hogy igaz még valamely $k\geqq 1$-re is, azaz

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_k(x)\right| \leqq \frac{M^k}{1+4\pi^2x^2}e^{\frac{-b}{k}x^2} \tag{2}$$

és bebizonyítjuk, hogy igaz $k+1$ mellett is, azaz

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_{k+1}(x)\right| \leqq \frac{M^{k+1}}{1+4\pi^2x^2}e^{\frac{-b}{k+1}x^2}. \tag{3}$$

(1) és (2) szerint az integrálható f és f^k függvények Fourier-transzformáltjai is integrálhatók, ennek folytán érvényesek az

$$F^*(f_1)=f, \quad F^*(f_k)=f^k \text{ m. m.}$$

inverziós formulák. Innen f_1 és f_k konvolúciójára

$$F^*(f_1 * f^k)=\sqrt{2\pi}\, f^{k+1}$$

adódik. Az f_1 és f_k függvényekkel együtt f és f^k is négyzetesen integrálható, így f^{k+1} integrálható. Újra alkalmazva az inverziós formulát

$$\sqrt{2\pi} f_{k+1}=f_1 * f_k \quad \text{m.m.} \tag{4}$$

(1) és (2) alapján $f_1 * f_k$ a következőképpen becsülhető meg:

$$|f_1 * f_k| \leqq 2\pi M^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-b(x-t)^2} e^{\frac{-b}{k} t^2}}{(1+4\pi^2(x-t)^2)(1+4\pi^2 t^2)}\, dt =$$

$$= 2\pi M^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-b\left(\frac{x^2}{k+1}+\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\, x-\sqrt{\frac{k+1}{k}}\, t\right)^2\right)}}{(1+4\pi^2(x-t)^2)(1+4\pi^2 t^2)}\, dt <$$

$$< 2\pi M^{k+1} e^{-\frac{b}{k+1} x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+4\pi^2(x-t)^2)(1+4\pi^2 t^2)} =$$

$$= 2\pi \frac{M^{k+1}}{4(1+\pi^2 x^2)} e^{-\frac{b}{k+1} x^2} < 2\pi \frac{M^{k+1}}{1+4^2 x^2} e^{-\frac{b}{k+1} x^2}.$$

Innen és (4)-ből következik (3).

Czipszer János

A 129. feladat megoldását beküldötte még MEDGYESSY PÁL.

130. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $(n-1)$-edfokú

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$$

polinomnak az $e^{2\pi k i/n}$ helyeken $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ felvett értékei akkor és csak akkor egyenlő abszolút értékűek, ha az

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-2} \end{pmatrix}$$

mátrix ortogonális abban az értelemben, hogy bármely sorának vagy oszlopának egy másik sor, ill. oszlop konjugáltjával való skaláris szorzata 0.

Corrádi Keresztély

Megoldás. Ha $\varepsilon^n = 1$, akkor

$$|f(\varepsilon)|^2 = f(\varepsilon)\overline{f(\varepsilon)} = \sum_{h=0}^{n-1} A_h \varepsilon^h,$$

ahol

$$A_h = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \bar{a}_{j-h}, \quad a_{-m} = a_{n-m}$$

$$(m = 1, \ldots, n-1;\ h = 0, \ldots, n-1).$$

Az $\varepsilon_k = e^{2\pi k i/n}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ jelöléssel eszerint

$$|f(\varepsilon_0)| = |f(\varepsilon_1)| = \ldots = |f(\varepsilon_{n-1})| \tag{1}$$

akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$F(\varepsilon_0) = F(\varepsilon_1) = \ldots = F(\varepsilon_{n-1}), \tag{2}$$

ahol

$$F(z) = \sum_{h=0}^{n-1} A_h z^h$$

legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom. A (2) alatti közös értéket c-vel jelölve, a legfeljebb $(n-1)$-edfokú $F(z) - c$ polinom eltűnik az $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ helyeken, ha (1) fennáll, s így ekkor $F(z) - c \equiv 0$ és $A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} = 0$, $c = A_0$. Megfordítva, $A_1 = \ldots = A_{n-1} = 0$ esetén (2) s így (1) is teljesül. Ez éppen a feladat állítását fejezi ki.

Czipszer János

A 130. feladat megoldását beküldte még CSÁSZÁR ÁKOS, HAJNA JÁNOS, HETYEI GÁBOR és TAR LÁSZLÓ.

PROBLÈMES PROPOSÉS

138. Démontrer l'égalité

$$\sin \pi z = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi z(1-z))^n}{n!} J_{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

pour toutes les valeurs complexes de z, J_p désignant la fonction de Bessel d'ordre p

G. Szegő

139. Soient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

$$|a_0| = |a_1| = \ldots = |a_{n-1}|$$

et

$$\varepsilon = e^{2\pi i/n}.$$

Démontrer que la matrice cyclique composée des nombres $f(1), f(\varepsilon), f(\varepsilon^2), \ldots, f(\varepsilon^{n-1})$ est orthogonale en ce sens que le produit scalaire de chacune de ses lignes resp. colonnes avec le conjugué d'une autre ligne resp. colonne est égal à zéro.

K. Corrádi

140. Une matrice réelle quadratique est dite orthogonale si le produit scalaire de deux de ses lignes ou de deux de ses colonnes s'annule, le produit scalaire d'une ligne ou d'une colonne par elle-même est égal à 1. Démontrer que chaque matrice réelle orthogonale d'ordre n est le produit de n matrices orthogonales symétriques.

Á. Császár et G. Hajós

Hírek

Külföldi utazások

Anglia

Turán Pál a londoni egyetem meghívására 1963. jan. 14., 15. és 16-án három előadást tartott „Analysis and diophantine approximations I—II" és „Comparative prime-number theory" címmel. Utóbbit meghívásra Cambridge-ben megismételte jan. 18-án.

Hajnal András a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében tudományos megbeszélések folytatása céljából 1963. április 3—30. között Angliában tartózkodott. Kinttartózkodása alatt különböző angliai városokban a következő előadásokat tartotta:

Some problems in measure theory,
On maximal number of independent circuits of a graphs,
On chromatic number of graphs.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Kornai János 1963. június 28—július 20. közötti angliai tartózkodása alatt résztvett az International Economic Association által rendezett tudományos konferencián. Kinttartózkodása alatt előadást tartott „A távlati tervek matematikai programozása Magyarországon" témáról.

Dr. Juvancz Iréneusz a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett a Biometric Society 1963. szeptemberében Cambridge-ben megtartott V. nemzetközi konferenciáján, ahol „Evaluation of reaction curves by the use of extreme values" címmel (társszerzők: Fischer János, Csáki Péter) bevezető előadást tartott

Ausztria

Freud Géza az Osztrák Matematikai Társulat meghívására „Valós függvények magasabb rendű lokális differenciálhányadosáról" címmel 1962. február 9-én előadást tartott a bécsi műegyetemen.

Az Osztrák Matematikai Társulat meghívására Fenyő István 1962. május 28-án Bécsben a „Disztribúció elmélet néhány alkalmazása" címmel előadást tartott.

Turán Pál az Osztrák Matematikai Társulat meghívására 1962. október 28—31-i bécsi tartózkodása alatt „Diophantische Approximation und angewandte Mathematik" címmel előadást tartott.

Rényi Alfréd az Osztrák Matematikai Társulat meghívására 1962. december 14-én Bécsben „Über die konvexe Hülle zufälliger Punktsysteme" címmel előadást tartott.

Bulgária

Akadémiai egyezmény keretében Tandori Károly 1962. október 3-tól 15-ig Szófiában tartózkodott tudományos megbeszélések folytatása céljából. Tartózkodása alatt két előadást tartott az ortogonális sorok konvergenciájáról, illetve szummációjáról.

Csehszlovákia

Fenyő István és Turán Pál a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében csereegyezmény létesítése céljából 1962. április 17—19. között Csehszlovákiában tartózkodtak.

A Csehszlovák Állami Hőtechnikai Kutató Intézet rendezésében 1962. május 15—17-ig konferenciát tartottak Liblicén „A matematikai statisztika alkalmazása a gépgyártásban" címmel. A rendezvényen a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Sarkadi Károly és Csáki Endre, a Magyar Tudományos Akadémia képviseletében Vincze István vettek részt.

1962. június 5—13. között tartották meg Csehszlovákiában a Harmadik Prágai Konferenciát. A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának kiküldetésében Bártfai Pál, Csiszár Imre és Prékopa András vettek részt. Csiszár Imre „Über topologische und metrische Eigenschaften der relativen Information α-ter Ordnung" és Prékopa András „On stochastic programming" címmel tartottak előadást.

Rózsa Pál egyezményes tanulmányút során két hetet töltött 1962. júniusában Csehszlovákiában, ahol többek között előadást tartott bizonyos szabályos szerkezetű kontinuáns mátrix spektrálfelbontásának redukciójáról.

„EQUADIFF" címmel differenciálegyenletekkel, illetve azok alkalmazásaival foglalkozó konferenciát tartottak 1962. szeptember 5—11. között Prágában, amelyen a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett Fényes Tamás, a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében pedig Ádler György, Bihari Imre és Pintér Lajos.

Szász Ferenc külföldi utazása során 1962. november 10-én „Verbindungsgruppoide in der Radikaltheorie der nicht notwendig assoziativen Ringe" és "Ringe mit verschiedenen Minimalbedingungen" címmel két előadást tartott Bratislavában.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Bereznai Gyula 1962. december 13—19. között tapasztalatcsere és főiskolák látogatása céljából tanulmányutat tett Csehszlovákiában.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Gallai Tibor résztvett az 1963. június 16—21. között Szmolenicében megtartott harmadik gráfelméleti szimpóziumon és ott „Kritische Graphen" címmel előadást tartott.

Rózsa Pál 1963 elején a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében konferencia előkészítés céljából Csehszlovákiában néhány napos tárgyalást folytatott.

Dánia

Rényi Alfréd 1962. augusztus 1—10-ig résztvett az Aarhusi Egyetem „Kombinatorikus módszerek a valószínűségszámításban" tárgykörű kollokviumán, ahol „Theory of outstanding elements of a sequence of observations" címmel előadást tartott.

Finnország

Kalmár László a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett a Természettudományok Története és Filozófiája Nemzetközi Unió Logikai, Metodológiai és Természettudomány-filozófiai Osztályának a nem klasszikus (modális

és többértékű) logikákról 1962. augusztus 22—26. között megtartott nemzetközi konferenciáján.

Bognár János 1962. aug. 25-én Önadjungált operátorok nemnegativitási tulajdonságairól indefinit metrikájú terekben címen előadást tartott Helsinkiben.

Franciaország

Blaise Pascal halálának 300. évfordulója alkalmából rendezett ünnepségek keretében 1962. június 4—8-ig matematikai kollokviumot rendeztek Clermont—Ferrand-ban. A rendezőbizottság meghívására a kollokviumon résztvett Rényi Alfréd és „Sur les elements saillants d'une série d'observatíons" címmel előadást tartott a kollokvium valószínűségszámítási szekciójában.

A párizsi egyetem meghívására Rényi Alfréd 1962. november 30-án és december 4. és 5-én „Sur les graphes aléatoires, I." (L'évolution des graphes aléatoires), „Sur l'enveloppe convexe d'une systême des points aléatoires", „Sur les graphes aléatoires, II. (Symétrie et asymétrie") címmel tartott előadásokat. 1962. december 6-án a párizsi Magyar Intézetbe meghívott francia matematikusok előtt felolvasta „Dialogue des mathématiques" c. előadását.

Kanada

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Rényi Alfréd 1963. augusztus 4—szeptember 11. között kanadai tartózkodása alatt résztvett a Canadian Mathematical Congress szemináriumán, ahol egy kombinatorikai kollokviumot vezetett, az International Statistical Institute ülésszakán, valamint az Institute of Mathematical Statistics konferenciáján. Kinttartózkodása alatt a következő előadásokat tartotta:

On some problems of information theory (Canadian Mathematical Congress szemináriumán),
On the foundations of information theory (International Statistical Institute, Ottawa) ülésszakán,
On stable sequences of events (Institute of Matematical Statistics ülésszakán, Ottava)
Dialogue on mathematics (American Society of Physicists és a Canadian Association of Physicists közös konferenciáján, Edmonton),
On two problems of information theory (Alberta-i egyetem).

Kína

Freud Géza akadémiai egyezmény keretében 1962. november 11—december 5-ig előadástartás céljából Kínában tartózkodott. Pekingben, Shanghaiban és Hangcsoiban a következő előadásokat tartotta:

Lineáris approximációs eljárásokról,
Trigonometrikus approximáció és Fourier sorok,
Ortogonális polinomsorok konvergencia elmélete,
Újtípusú hővezetési feladat.

Lengyelország

Kalmár László és Frey Tamás a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1961. szeptember 4—24. között résztvettek és előadásokat tartottak a Lengyel Tudományos Akadémia Matematikai Készülékek Intézete által az automatikus programozás módszereiről rendezett konferencián. Ezenkívül Kalmár László részt-

vett a Lengyel Tudományos Akadémiai Filozófiai és Szocilógiai Intézete által az International Union of History and Phylosophy of Sciences támogatásával a természettudományok metodologiájáról rendezett nemzetközi kollokviumon Varsóban.

A szocialista országok termelés és munkagazdaságtanával és szervezésével foglalkozó intézetek és intézmények 1962. július 9—14. között nemzetközi konferenciát rendeztek Varsóban. A konferencián a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Martos Béla és Kornai János vettek részt.

Rényi Kató a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett a Krakkóban 1962. augusztus 30—szeptember 4. között megtartott komplex függvénytani konferencián, ahol „Sur quelques problèmes concernant les séries de Taylor lacunaires à une et deux variables complexes" címmel előadást tartott.

Gergely József résztvett a Lengyel Tudományos Akadémia Matematikai Gépek Intézete által 1963. május 16—17-ig megrendezett „Közönséges differenciálegyenletek megoldási módszerei számológépeken" című szimpóziumon.

NDK

Fenyő István és Kalmár László 1962. június 1—6. között résztvettek a drezdai műszaki egyetem Gépi Számítástechnikai Intézete által a számítástechnika időszerű problémáiról rendezett II. nemzetközi kollokviumon. Kalmár László „Vereinfachte Wendung eines Rechenautomaten, der ohne Programmierung arbeitet" címmel előadást tartott. Ezenkívül előadást tartott a lipcsei egyetem Filozófiai Intézetében.

Fenyő István előadásának címe: „Matematikai módszerek az orvosi diagnosztikában."

Különböző német intézmények meghívására Varga Ottó 1962. június 5—24-ig előadások tartása céljából az NDK-ban tartózkodott. A következő előadásokat tartotta:

Humboldt Egyetemen „Über die Cartansche Übertragung in Finslerschen Räumen",

Greifswaldi Egyetemen „Begründung der Finslerschen Geometrie", „Hyperflächen in Finslerschen Räumen",

Rostocki Egyetemen „F. Kleins Erlanger Programm und Übertragungsgeometrie".

A Berlini Német Tudományos Akadémia 1962. szeptember 4—8. között matematikai statisztikai konferenciát rendezett Berlinben.

A konferencián résztvevő magyar kiküldöttek a következő előadásokat tartották:

Fischer János: „Erfahrungen mit einigen in Ungarn ausgearbeiteten biometrischen Verfahren",

Dr. Juvancz Iréneusz: „Einige biometrische Probleme bei der Auswertung der chinesischen traditionellen Heilverfahren",

Rényi Alfréd: „Hervorragende Elemente in Beobachtungsreihen",

Sarkadi Károly: „Prüfung des Verteilungstyps im Falle zusammengesetzter Gesamtheiten",

Vincze István: „Über einige Verteilungssätze in der Theorie der geordneten Stichproben".

A konferencián magyar részről résztvett még Csukás Andrásné.

Kiss Imre és Podhradszky Sándor a Magyar—Német Műszaki—Tudományos Együttműködés keretében 1962. október 1—14-ig tanulmányúton voltak Berlinben és Karl Marx-Stadtban.

Szász Ferenc a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében és Turán Pál a Berlini Német Tudományos Akadémia meghívására résztvettek az 1962. október 22—27. között rendezett „Neuere Probleme der Algebra und Zahlentheorie" című szimpóziumon, ahol Turán Pál „Über neuere Probleme und Anwendungen

der Theorie der diophantischen Approximation", Szász Ferenc pedig „Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale" címmel tartott előadást.

NDK-beli tartózkodása során Szász Ferenc előadást tartott még a Rostocki Egyetemen „Ringe mit verschiedenen Minimalbedingungen" címmel.

1962. november 15—16-ig Drezdában „Ipari minőségellenőrzés statisztikai módszerei" tárgyú konferenciát rendeztek. A konferencián magyar részről többek között résztvettek Bártfai Pál, Csiszár Imre és Vincze István. A konferencián a szerzők távollétében ismertették Bánkövi György és Vas Györgyné „Erfahrungen bei der statistischen Auswertung in der Schraubenfertigung" című előadását.

Dr. Szabó Árpád a Berlini Német Tudományos Akadémia meghívására 1962. november 19-től egyhetes tanulmányutat tett az NDK-ban. Kinttartózkodása során „Neue Methoden in der Erforschung der Antiken Mathematikgeschichte" címmel előadást tartott legújabb kutatásairól.

A Rostocki Egyetem meghívására Freud Géza 1963. március 8-tól augusztus 30-ig, mint meghívott egyetemi tanár előadásokat tartott az Egyetemen.

Meghívás alapján Szőkefalvi-Nagy Béla 1963. április 30 és május 8. között a Humboldt Egyetemen „Ein Funktionalkalkül für Operatoren im Hilbertraum", a magdeburgi Matematikai Intézetben „Geometrische Eigenschaften von Operatoren im Hilbertraum", a Drezdai Műegyetemen „Über die Struktur unitärer Dilatationen" címmel tartott előadást.

Fuchs László és Tamássy Lajos a Berlini Német Tudományos Akadémia meghívására 1963. május hó végén résztvettek és előadást tartottak az „Újabb kutatási irányok a tiszta matematikában" címmel megrendezett berlini konferencián.

NSZK

Szép Jenő a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett az 1961. évi oberwohlfachi csoportelméleti kollokviumon, ahol „Über Quasinormalteilern von endlichen Gruppen" címmel előadást tartott.

Szőkefalvi-Nagy Béla különböző NSZK-beli és osztrák intézmények meghívására előadó körutat tett az NSZK-ban és Ausztriában. Utazása során a következő helyeken tartott előadást:

Osztrák Matematikai Társulat, Wien,
Műegyetem Matematikai Intézete, München,
Tudományegyetem Matematikai Intézete, München,
Tudományegyetem Matematikai Intézete, Erlangen,
Tudományegyetem Matematikai Intézete, Würzburg,
Tudományegyetem Matematikai Intézete, Frankfurt,
Tudományegyetem Matematikai Intézete, Mainz,
Tudományegyetem Matematikai Intézete, Giessen,
Műegyetem Matematikai Intézete, Karlsruhe.

Előadásainak címei:

A Hilbert-tér általános típusú operátoraira vonatkozó függvénykalkulusról.
A Hilbert-tér operátorainak tört kitevőjű hatványairól.
Az ún. „Külső függvények" és szerepük a Hilbert-tér operátoraira vonatkozó függvénykalkulusban.
Operátorok unitér dilatációiról.

Erdős Jenő, Fejes-Tóth László és Molnár József 1962. augusztus 23—28. között résztvettek az oberwohlfachi „Diszkrét geometriai kollokviumon", ahol mindegyikük egy-egy előadást tartott.

A heidelbergi Egyetem meghívására 1963. március 1-én Rényi Alfréd „Über die konvexe Hülle zufälliger Punktsysteme" címmel előadást tartott az Egyetem Alkalmazott Matematikai Intézetében.

Utána résztvett a március 3—10-ig megtartott oberwohlfachi matematikai statisztikai kollokviumon, amelyen „Über stabile Folgen von Erreignissen und Zufallsveränderlichen" címmel előadást tartott.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Császár Ákos résztvett és „Allgemeine Approximationssätze" címmel előadást tartott a bonni egyetem 1963. júniusában megtartott topológiai konferenciáján. Ezenkívül még Giessenben „Neuere Strukturen in der allgemeinen Topologie" címmel tartott előadást.

Alexits György 1963 áprilisától augsztusáig a Giessen-i és a Marburg-i egyetemen ortogonális sorokról tartott előadásokat. Közben résztvett az augusztusban Oberwolfachban rendezett kollokviumon, ahol „Erős értelembe vett approximáció" címen tartott előadást. Az Aachen-i egyetem meghívására júliusban „Ortogonális sorok erős szummációja" címen adott elő.

Olaszország

Sallay Melánia a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1962. május 7-től háromhetes tanulmányúton vett részt a Római Magyar Intézetben.

Ádler György a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1962. december 14-től 1963. június 7-ig terjedő olaszországi tartózkodása alatt résztvett a római Istituto Nazionale di Alta Matematica szemináriumán, amelynek témája a diffferenciál egyenletek voltak. Kinttartózkodása során a „Rugalmas testben fellépő feszültségek becslése a felületi elmozdulások segítségével" címmel előadást tartott a fenti intézetben.

Dr. Szabó Árpád 1963. március 10-től április 17-ig terjedő olaszországi tartózkodása alatt 16 előadást tartott olasz egyetemeken, illetve főiskolákon, ezenkívül különböző tanulmányokat és megbeszéléseket folytatott matematikatörténeti kérdésekben.

Szőkefalvi-Nagy Béla 1963. III. 6—27. között az Istituto Nazionale de Alta Matematica meghívására két előadást tartott az Intézetben a következő témakörben:

„A Hilbert-tér operátorai unitér dilatációinak szerkezetéről",

„Kontrakció-operátorokra vonatkozó függvénykalkulusról".

Ezenkívül előadást tartott még a genovai egyetemen „Néhány alapvető tétel a Hilbert-tér kontrakcióra és ezek unitér dilatációira", a milánói egyetemen „A Hilbert-tér kontrakció-operátoraira vonatkozó függvénykalkulus elemei" címmel.

Románia

Szász Gábor háromhetes egyezményes tanulmányutat tett Romániában 1962. május 17-től. Bukarestben két, Jasiban egy előadásban számolt be kutatásainak eredményeiről.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Gehér László, Kovács István és Szőkefalvi-Nagy Béla résztvettek a Bukarestben 1962. szeptember 21—27. között megtartott „Függvénytan és Funkcionálanalízis Kollokvium"-on.

A magyar kiküldöttek a kollokviumon a következő előadásokat tartották:

Kovács István: „Sur une caractérisation nouvelles des algebres de von Neumann finies" és „La théorie ergodique dans les algebres de von Neumann.

Szőkefalvi-Nagy Béla: „Dilatations unitaires de familles de contractions."

1962. október 22—26. között a Román Népköztársaság Akadémiája valószínűségszámítási és matematikai statisztikai kollokviumot rendezett Brassóban. A kollokvium szervező bizottságának meghívása alapján magyar részről résztvettek: Bánkövi György, Bognár Jánosné, Csáki Endre, Csáki Péter, Éltető Ödön, Prékopa András, Rényi Alfréd, Székely Gábor, Vas Györgyné és Vincze István.

A kollokviumon a következő magyar előadások hangzottak el:
Prékopa András: „On random determinants",
Rényi Alfréd: „On the convex hull of random point sets",
Vincze István: „On some combinatorial relations concerning the symmetric random walk".

Svédország

A Nemzetközi Matematikai Unió 1962. augusztus 15—22. között rendezett kongresszusán hazánkat 40 matematikus képviselte. Magyar részről a következő előadások hangzottak el:

Aczél János: Some recent results and problems on functional equations,
Alpár László: Sur certaines transformées des séries de puissances absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence,
Bognár János: On the existence of square-roots of J-selfadjoint operators,
Császár Ákos: Complétion d'espaces non-séparés,
Faragó László: Difficulties of the analytical operation of thinking in the learning of mathematics,
Farkas Miklós: On differential geometric investigation of ordinary differential equations,
Fenyő István: Über eine Anwendung der algebraischen Derivierten,
Freud Géza: On local differentiability of higher order of functions,
Frey Tamás: Abschätzungs- und Entwicklungsmethoden der Eigenwertaufgaben von Differentialgleichungssystemen,
Fried Ervin: Isomorphism theorems for abstract algebras,
Gyires Béla: A generalization of a theorem of Szegő,
Kalmár László: Some heuristical ideas about a qualitative theory of information,
Molnár József: Über Kreislagerungen,
Palásti Ilona: Threshold functions for subgraphs of given type of the bichromatic random graph,
Prékopa András: On stochastic programming,
Rényi Alfréd: On the theory of outstanding observations,
Seres Iván (bemutatta Erdős Pál): Irreducibility of certain polynomials,
Szász Pál: On generalized quasi-step parabolas
Szendrei János: Über die Quasi-Ideale von Ringen,
Szilárd Károly: Die Analoga der ganzen rationalen Funktionen in verallgemeinerten Funktionenklassen,
Szőkefalvi-Nagy Béla: The "outer functions" and their role in functional calculus,
Tandori Károly: Über die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen,
Turán Pál: A comparative theory of prime numbers,
Vincze Endre: Eine neuere elementare Lösungsmethode der Funktionalgelichungen von Typen.

A Stockholmi Matematikai Kongresszus után Alexits György „Ortogonális sorok szummációja" és Freud Géza „On the moment problem of Hamburger-Stieltjes" címmel előadást tartott a Göteborgi Egyetemen. Freud Géza „On the (C, 1)-sums of series of orthogonal polynomials" címmel a Lengyel Matematikai Társaság poznani tagozatában is előadott.

Ugyancsak a Stockholmi Matematikai Kongresszus után Rédei László két előadást tartott Uppsalában „A végesen generálható kommutatív félcsoportok elmélete", illetve „Véges ábel-csoportok Hajós-féle faktorizációi" címmel.

Szovjetunió

Molnár Imre és Podhradszky Sándor 1961. november 24—december 15. között tanulmányúton vett részt a Szovjetunióban.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Ladányi József kéthetes tanulmányutat tett 1962. szeptember 4—18-ig különböző szovjet számítástechnikai laboratóriumokban.

1962. szeptember 24-től Bereczki Ilona a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében háromhetes tanulmányúton vett részt Moszkvában és Leningrádban.

1962. szeptember 24—október 2. között Moszkvában tartotta meg az IFAC (International Federation of Automatic Controll) nemzetközi szimpóziumát a jelfogós rendszerek és véges automaták elméletéről. A rendezvényen résztvett Kalmár László, aki „On the incorporation of the theory of automatical digital computors into the algebraic theory of automata by Moore, Mealy and Glushkov" címmel tartott előadást. Ezenkívül előadást tartott a Grúz Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központjában.

Hosszú Miklós 1962. október 16-tól 10 napos tanulmányutat tett Moszkvában és Leningrádban. Útja során „Kvázicsoportokon és gruppoidokon értelmezett függvényegyenletek" címmel előadást tartott a Lomonoszov Egyetemen.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Dr. Juvancz Iréneusz 1962. október 23—november 2. között tanulmányutat tett a Szovjetunióban.

Veidinger László egyezményes tanulmányútja során különböző szovjet akadémiai intézetekben és egyetemeken 1963. április 26 és július 18. között tapasztalatcserét folytatott és tanulmányokat végzett a numerikus analízis terén.

Szász Ferenc egyezményes tanulmányútja során a Szovjetunióban 1963. május 20 és június 10. között tanulmányokat és konzultációkat folytatott a Banach-algebrák elméletének és alkalmazásainak terén.

Dömölki Bálint, Frey Tamás és Kalmár László résztvettek a szocialista akadémiák együttműködése keretében Kievben 1963. június elején megtartott „Automatikus programozás módszerei és gépi nyelvek" című konferencián és közös beszámolót tartottak a programozás automatizálására, belső gépi nyelvekre és az elektronikus számológépek logikai szerkezetére vonatkozó hazai munkákról.

Moór Arthur 1963. június 13—20. között a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett a Balti Köztársaság okelső differenciálgeometriai konferenciáján, ahol az „Általános vonalelemterek oszkuláló ponttereiről" címmel előadást tartott.

Arató Mátyás és Rényi Alfréd részt vettek az 1963. október 7—12-ig Tbilisziben tartott VII. Össz-szövetségi Valószínűségszámítási konferencián. Arató Mátyás „Markov-folyamatok paraméterei konfidencia-intervallumairól" címen, Rényi Alfréd „A keresés elmélete" címen tartott előadást.

USA

Turán Pál az 1962—63. tanév második felében a kaliforniai Stanford-Egyetem vendégprofesszora volt, ahol az új összehasonlító primszámelméletről tartott heti 3 órás kollégiumot. Meghívásra előadásokat tartott továbbá a new yorki Courant Institute-ban, az ann-arbori, berkeley-i, detroiti, losangelesi, madisoni, milwaukee-i, neworleansi, pasadenai, tucsoni, syracuse-i egyetemeken, az University of Southern California-n, a kanadai vancouveri, edmontoni és kingstoni egyetemeken, az Ann-Arborban és az indianai Notre Dame egyetemeken parallel rendezett két nyári számelméleti szemináriumon. Több további meghívásnak időhiány miatt nem tudott eleget tenni. Az előadások tárgyai módszereinek különböző alkalmazásai voltak.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Hajnal András 1963. július 3—14. között résztvett a Kaliforniai Állami Egyetem által rendezett Theory of Models című szimpóziumon.

Doktori és kandidátusi értekezések vitája:

1. *Heppes Aladár* „Körök és gömbök többrétű elhelyezésével kapcsolatos problémák" című kandidátusi értekezését 1962. VI. 26-án védte meg.
Opponensek voltak: Hajós György akadémikus, Fejes Tóth László, az MTA levelező tagja.
2. *Szénássy Barna* „A magyar matematikai kutatások múltja és főbb eredményei (a legrégibb időktől a 20. század elejéig)" című kandidátusi értekezését 1962. június 28-án védte meg.
Opponensek voltak: Fenyő István, a mat. tud. kandidátusa, Kárteszi Ferenc, a mat. tud. kandidátusa, Makkai László a történelemtud. kandidátusa.
3. *Leindler László* „Konvergencia- és szummálhatósági vizsgálatok az általános ortogonális sorok elméletében" című kandidátusi értekezését 1962. október 31-én védte meg.
Opponensek voltak: Alexits György akadémikus, Császár Ákos, a mat. tud. doktora.
4. *Szüsz Péter* „A lánctörtek metrikus elméletéről" című doktori értekezését 1962. november 6-án védte meg.
Opponensek voltak: Erdős Pál akadémikus, Rényi Alfréd akadémikus, Turán Pál akadémikus.
5. *Tamássy Lajos* „Érintőterek szorzattereinek affin összefüggéséről" című kandidátusi értekezését 1962. november 26-án védte meg.
Opponensek voltak: Varga Ottó, az MTA levelező tagja, Soós Gyula, a matematikai tud. doktora.
6. *Hajnal András* „Vizsgálatok a kombinatórikus halmazelmélet köréből" című doktori értekezését 1962. december 20-án védte meg.
Opponensek voltak: Erdős Pál akadémikus, Surányi János, a mat. tud. doktora, Fodor Géza, a matematikai tud. kandidátusa.
7. *Grätzer György* „Szabad algebrák" című doktori értekezését 1963. augusztus 30-án védte meg.
Opponensek voltak: Rédei László akadémikus, Fuchs László, a matematikai tud. doktora, Hajnal András, a matematikai tud. doktora.
8. *Andrásfai Béla* „Gráfelméleti szélsőérték problémák" című kandidátusi értekezését 1963. szeptember 12-én védte meg.
Opponensek voltak: Erdős Pál akadémikus, Hajós György akadémikus.

Társulati élet

„A matematika közgazdasági alkalmazásai" kollokvium programja
Budapest, 1963. június 18—22

Június 18, kedd

Elnök: CZELIUSKYN

A terem

10h Megnyítóülés

11h—13h

H. W. KUHN, Locational problems and mathematical programming.

R. BELLMAN, (Bemutatta: Prékopa András) Dynamic programming and mathematical economics

T. DALENIUS, Potential research objects in sample survey theory and methods.

B terem

Elnök: J. STEFANOV

15³⁰—18h

E. THEISS, Interrelations of programming and demographic models.

K. KÁDAS, Die mathematische Begründung der — Verkehrsrentabilität hebenden — Transporttarifermässigungen.

B. BLUMENTHAL, Zu einigen wichtigen Problemen bei der praktischen Anwendung wirtschaftsmathematischer Verfahren.

J. SEBESTYÉN, A model of planning of agricultural production and resource use.

I. KÁDÁR—L. NÉMETH, Mathematische Modelle für Standortbestimmung komplexer industrielle Grrossbetrieben.

C terem

15³⁰—18h

Elnök: B. IVANOVIĆ

У. Х. Малков: Решение задач линейного программирования больших размерностей на электронных вычислительных машинах.

Gy. RÉVÉSZ, Über eine Ausschneidungsaufgabe mit vielen Veränderlichen.

H. SCHOCH, Erfahrungen beim Einsatz mittlerer elektronischer Rechenautomaten zur Lösung ökonimischer Probleme (Matrizenmodelle, Transportprobleme, u. a.)

E. VINCZE, Eine mathematische Maschine für die dynamische Programmierung

Június 19, szerda

A terem
$9-10^{45h}$

Elnök: O. MORGENSTERN

Ю. А. Олейник: Опыт внедрения математических методов и вычислительных машин для решения экономических задач.
В. Ф. Пугачёв: Модель: многоступечнатой системы оптимального планирования.

B terem
$11^{h}-13^{h}$

Elnök: R. THEODORESCU

M. RESH—P. NAOR, An inventory problem with discrete time review and replanishement by batches of fixed size. (Bemutatta Sarkadi Károly.)
A. GHOSAL, Stochastic treatment of inventory problems. Conjugate dams. (Bemutatta Sarkadi Károly)
M. ARATÓ: О математических проблемах стохастических дифференциальных уравнений в экономическом приложении.

B terem
$15^{30}-18^{h}$

Elnök: T. DALENIUS

M. IOSIFESCU—R. THEODORESCU, Linear programming under uncertainty.
R. J. AUMANN, A survey of games with many players.
T. LIPTÁK, Two-level programming.
J. STÁHL, A dual program concerning polyhedral games.

C terem
$11^{h}-13^{h}$

Elnök: W. DINKELBACH

J. ABRHAM, An application of the multiplex method to concave programming.
L. BITTNER, Eine Verallgemeinerung des Verfahrens des logarithmischen Potentials von Frisch für nichtlineare Programmierungsprobleme.
L. B. KOVÁCS, The gradient projection method for quasi-concave programming.
G. JÁNDY, Die quadratische Programmierung mit zyklischer Annäherung.

C terem
$15^{30}-18^{h}$

Elnök: H. W. KUHN

B. KORDA, Ein spezieller Algorithm zur Lösung einfacher Standort Verteilungsmodelle.
P. IVĂNESCU—I. ROSENBERG—S. RUDEANU, Problems of pseudo-boolean programming.
E. BALAS—P. IVANESCU, A parametric linear programming model.
B. PENKOV—B. L. SENDOV, On distance matrices.
E. FERENCZY, On partitioning graphs into equally weighted trees.

Június 20, csütörtök

Egésznapos kirándulás a Balatonra.

Június 21, péntek

A terem

$9-10^{45h}$

Elnök: C. MACK

A. PRÉKOPA—M. ZIERMANN, On the determination of the minimal stock amount ensuring the continuous production

G. CIUCU—G. MIHOC, Sur un problème de file d'attante.

B. KREKÓ, Über einige neue Untersuchungen in der Theorie der mathematischen Optimierung.

B terem

11^h-13^h

Elnök: P. NAOR

A. RÉNYI, On a mathematical model of the traffic on a divided highway.

C. MACK, On the equivalence of assuming exponential service-times to an unrealistic queue discipline and how to take advantage of this.

E. SEIFFART, Ein Reihenfolgeproblem

$15^{30}-17^{30}$

Elnök: K. MANNTEUFEL

B. IVANOVIĆ, Application de la méthode de la I-distance pour faire un plan optimal des investissements.

20^h

Bankett a Margitszigeten, a Nagyszállóban.

Június 21, péntek

B terem

$15^{30}-17^{30h}$

И. Стефанов и П. Шапкарёв: Применение математико-статистических и математических методов в экономических исследования в Болгарии.

G. BÁNKÖVI—K. SARKADI, 5/16 replication of a 4^4 factorial experiment.

Június 21, péntek

C terem

11^h-13^h

Elnök: B. KORDA

G. WINTGEN, Über den Zusammenhang der Uzawa-methode der linearen Optimierung mit der Methode der vollständigen Beschreibung von Motzkin, Raiffa, Thompson und Thrall.

P. BOD, Über lineare Optimierung gemäss simultan gegebenen Zielfunktionen.

B. MARTOS, Programming problems involving sums of absolute value of linear forms.

$15^{30}-17^{30h}$

Elnök: B. KREKÓ

W. DINKELBACH, Zur konvexen ganzzahligen Programmierung.

G. KONDOR, Remark on the solution of the integer linear programming problem.

B. DÖMÖLKI: О транспортной задаче.

C terem
$15^{30}-17^{30}$h

F. FAZEKAS, Recursive formulas for mathematical programming in archibasical production.

19h *Társasvacsora a Margitszigeti Nagyszálló Éttermében.*

Június 22, szombat

A terem
9h—11h

Elnök: W. SADOWSKY

PH. WOLFE, New methods in nonlinear programming.

Л. В. Канторович: Математические проблемы оптимального планирования.

O. MORGENSTERN, Sensitivity of economic models.

A Bolyai János Matematikai Társulat 1963. IX. 2—7. között *Abel-csoportok* témakörből kollokviumot rendezett Tihanyban a Magyar Tudományos Akadémiával közösen, a Nemzetközi Matematikai Unió megbízásából.

Az alábbiakban közöljük a kollokvium programját és az elhangzott előadások címeit. Az előadások anyaga az Akadémiai Kiadó gondozásában 1964. év végén fog előreláthatólag megjelenni.

Szeptember 2.

Fogadás a kollokvium résztvevőinek tiszteletére a tihanyi Motelben.

Szeptember 3.
délelőtti ülés:

J. M. MARANDA (Canada): Injective structures.
L. FUCHS (Hungary): Some generalizations of the exact sequences concerning Hom. and Ext.
F. LOONSTRA (Netherlands): The ordering of the group Ext (B, A).
délutáni ülés:
R. J. NUNKE (USA): On the structure of the torsion product.
E. A. WALKER (USA): Applications of quotient categories to abelian groups.
S. BALCERZYK (Poland): On classes of abelian groups.

Szeptember 4.
délelőtti ülés:

R. S. PIERCE (USA): Some questions about primary groups.
R. A. BEAUMONT (USA): Quasi-isomorphism of p-groups.
K. HONDA (Japán): On the structure of abelian p-groups.

Szeptember 4.
délutáni ülés:

L. JA. KULIKOV (Szovjetunió): On the structure of Ext.
J. M. IRWIN (USA): On Σ^2-cyclic groups and Fuchs Problem 5.
A. HULANICKI (Poland): On the factor group of the complete direct sum modulo the discrete direct sum.
Vacsora a balatonfüredi Tölgyfa Csárdában.

Szeptember 5.
délelőtti ülés:

W. KRULL (Germany): Endomorphismenringe direkter Modulsummen.
E. POGÁNY (Hungary): On the endomorphism ring of abelian p-groups.
A. L. S. COMER (England): Groups with prescribed endomorphism rings.
E. SASAIDA (Poland): Bemerkungen über das Problem von Whitehead.
Délután kirándulás, borkóstoló Badacsonytomajban.

Szeptember 6.
délelőtti ülés:

E. S. LJAPIN (Szovjetunió): On the ordering of endomorphisms of certain p-groups.
A. D. SANDS (Great Britain): Factorization of cyclic groups.
J. ROTMAN (USA): On the Grothendieck group of torsion-free groups of finite rank.
S. A. KHABBAZ (USA): The role of tensor products in the splitting of abelian groups.

délutáni ülés:

M. I. KARGAPOLOV (USSR): Classification of ordered abelian groups by elementary properties.
C. P. WALKER (USA): A generalization of purity.
P. HAIMO (USA): Word preserving subgroups of the symmetric group on the set of an abelian group.
E. FRIED (Hungary): Über Untergruppen abelscher Gruppen, die in jedem Ringe Ideale sind.

Szeptember 7.
délelőtti ülés:

B. CHARLES (France): Méthodes topologiques en théorie des groups abéliens.
J. de GROOT (Netherlands): Additive groups of integer-valued functions over topological spaces.
A. KERTÉSZ (Hungary): Ein Rangbegriff für Moduln.
V. DLAB (Csehszlovákia): Generalization of independence relations.
Délután a Csontváry kiállítás megtekintése Székesfehérvárott. Este a Magyar Tudományos Akadémia fogadása a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége klubjában.

Szeptember 8.
Városnézés.

Beszámoló a Bolyai János Matematikai Társulat 1963. július 4-én megtartott VI. küldöttközgyűléséről.

A közgyűlésen Hajós György elnökölt. Megnyitó szavai után Valkó Endre a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége nevében üdvözölte a közgyűlés résztvevőit. A társegyesületek szempontjából foglalkozott a matematika alkalmazásainak jelentőségével, ugyanakkor felhívta a figyelmet a tiszta matematika művelésére is.

Ezután került sor Surányi János főtitkári beszámolójára, amelynek rövidített szövegét az alábbiakban közöljük:

Tisztelt Közgyűlés!
Kedves Vendégeink! Kedves Tagtársak!

Ezúttal örvendetes módon lényegesen rövidebb időszakról számolok be, mint az előző alkalmakkor, amennyiben az elmúlt közgyűlés óta két és fél év telt el.

Mint azt már az előző közgyűlésen jeleztem, a közgyűléshez nem szerveztünk kísérő programot, mert az korábban az Oktatási Szakosztály hiányzó nagyrendezvényét volt hivatva pótolni, de ez mostmár rendszeresen megrendezésre kerül. Korábban az előző beszámolómban említett 1957-es jubileumi vándorgyűlés oktatási szekciója, az 1959-es budapesti kétnapos nagyrendezvény és a II. Magyar Matematikai Kongresszus oktatási szekciója tekinthetők ilyen rendezvénynek, a mostani beszámoló időszakában pedig 1961-ben VI. 29—VII. 1. közt Debrecenben, 1962. VII. 2—4-ig Pécsett, az idén pedig az előző három napban Egerben volt oktatási vándorgyűlés 100, 200, illetve 150 körüli résztvevővel. A debrecenin 6 előadás szerepelt, főleg a közelítőszámítás és határértékfogalom témaköréből; a pécsin elhangzott 7 előadás, fő témaköre a feladatmegoldások, illetve azok tanítása volt, az egri 9 előadás pedig elsősorban a geometriatanítás körül csoportosult. Az előadások nagyobb részét csatlakozó viták tették még gyümölcsözőbbé.

A vándorgyűléseken osztották ki az azévi Beke-díjakat is, továbbá a pécsi vándorgyűlésen emlékeztünk meg Beke Manó születésének 100. éves évfordulójáról is. Az igen meleghangú megemlékezést Beke egy volt tanítványa, Tolnai Jenő tartotta. A pécsi és egri vándorgyűlést jó hangulatú kísérő műsorok tették még változatosabbá és örömmel állapítható meg, hogy e rendezvények minden tekintetben a résztvevők teljes megelégedésével találkoztak.

Mindhárom vándorgyűlés szervezését Gádor Endréné irányította, az Oktatási Bizottság és a technikai feltételek tekintetében Pásztor István és a társulati apparátus hathatós támogatásával. Nagy segítséget nyújtott mindenkor a helyi tagozat a megfelelő feltételek biztosításában.

A vándorgyűlések mellett évközben is rendszeresen folytak — évi munkatervek alapján — az előadások Pesten és vidéken. A pesti előadásokat továbbra is a Fővárosi Pedagógiai Szemináriummal, illetve annak megszűnte óta a Fővárosi Tanács Oktatási Osztályával együttes rendezésben tartjuk. Az előző közgyűlés előtti gyakorlattól eltérően helyileg visszahoztuk az előadásokat a Társulatba, ami egyben a Társulat részvételét is aktívabbá tette. Tanévenként 4 előadásra került sor. A résztvevők száma növekedett, 40-es átlag körül mozgott, ez azonban semmiképpen sem tekinthető kielégítőnek, figyelembe véve a fővárosi matematikatanárok számát.

Továbbra is változatos programmal és állandó érdeklődés mellett folynak a tanév alatt havonta a diákdélutánok Tolnai Jenő kartársunk rendezésében.

Az Ifjúsági Matematikai Kör változatlan lekesedéssel folytatja munkáját. Első vezetője, Molnár József egyetemi tanár más irányú elfoglaltsága miatt kénytelen volt megválni a körtől, de hasonló lelkes utódot sikerült találni helyébe Reiman István adjunktus személyében. A Kör rendszeres kapcsolatban van vidéki tagjaival és a két nagyobb tanévközi szünetben többnapos rendezvényt tart az ő részvételükkel. A Kör ülésein főként előadások és feladatmegoldások szerepelnek. Utóbbiak a versenyekre, különösen a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára való felkészülést is szolgálják. Olimpiai előkészítő megbeszéléseket a résztvevők kiválasztása után külön is tart Reiman a csapat tagjainak. Ennek a gondos előkészítésnek nagy része van a magyarok rendszeres jó szereplésében az Olimpiákon.

Ezek az Olimpiák, mint ismeretes, a Román Matematikai és Fizikai Társulat kezdeményezésére indultak meg, amely két egymásutáni évben, 1959 és 1960-ban rendezte azt meg. A harmadikat 1961-ben Társulatunk és a Művelődésügyi Minisztérium rendezte meg Veszprémben, míg a díjak ünnepélyes kiosztása — egy balatoni körutazás után — Budapesten került sorra. A szakmai előkészítést és lebonyolítást egy előkészítő bizottság intézte Hódi Endre mintaszerűen körültekintő, alapos irányí-

tásával, ami kivívta a külföldi résztvevők elismerését is. A veszprémi tagozat nagy segítséget nyújtott a verseny lebonyolításában és komoly érdeklődést tanusított. Számosan vettek részt egy, az első napi versennyel párhuzamosan folyt módszertani megbeszélésen is. A technikai lebonyolítás már nem mindenben volt nemzetközi színvonalú, főleg egy túlerőltetett takarékossági követelés folytán, de végül is igen jó összbenyomással távoztak vendégeink. Ez a verseny jó szolgálatot tett az egymás jobb megismerése tekintetében. Versenyzőink kiemelkedő teljesítményt nyújtottak és megismételték jó szereplésüket a tavalyi, Csehszlovákiában rendezett IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián is lényegesen erősebb mezőnyben, amennyiben itt 2 évi szünet után megjelentek újra a Szovjetunió képviselői is teljes létszámú csapattal.

Az idei Olimpiára éppen ma reggel indult útnak csapatunk Lengyelországba. Érdekessége, hogy 2—2 első, második, harmadik, ill. negyedik gimnazista vesz benne részt, helyesebben egy másodikos és három negyedikes, amennyiben egyikük ez év végén három osztályból vizsgázott és leérettségizett.

Évről évre komoly és felelős munkát végez a Társulat a hazai versenyek rendezésében. Ezen a területen zökkenőmentes az együttműködés a Művelődésügyi Minisztériummal is. Egyre nagyobb anyagi támogatást is kapunk versenydíjak és dolgozatjavító munka honorálása tekintetében. A Minisztérium felvételekre vonatkozó új rendeletében megvalósult Társulatunknak az a többször elhangzott javaslata is, hogy a versenyeken elért jó eredményeket lényegesen nagyobb mértékben vegyék tekintetbe az egyetemi felvételeknél, mint az eddig történt. A rendelet az országos versenyen kívül a Kürschák versenyre is vonatkozik, ami szintén a Társulatnak és a verseny jelentőségének újabb elismerését jelenti.

A tavalyi választmányi ülésen merült fel javaslatként, hogy az országos versenyek nem díjazott, de még érdemleges dolgozatait kapják vissza a helyi tagozatok, legalábbis azok, amelyek területén helyi kulturális ünnepségek szoktak folyni, hogy ezek keretében matematikai versenyként kiértékelhessék. Kétségtelenül kívánatos, hogy ezeken a kultúrnapokon a matematika is szóhoz jusson; viszont a versenyek számának szaporítása sem célszerű, de felmerülnek nehézségek is: a Minisztérium hozzájárulása is szükséges, így megoldás még nem született.

Az általános iskolai oktatás kérdéseivel foglalkozott 1961-ben egy, az Akadémiai Matematikai Kutató Intézettel közösen rendezett egyhetes szeminárium, amelyen egyrészt Z. P. Dienes számolt be bemutatók kapcsán az alsó tagozatú matematikatanulásra kidolgozott rendszeréről, másrészt a felső tagozat néhány tárgykörének tanításáról hangzottak el előadások, főként Varga Tamás kartárstól. A szemináriumra néhány vidéki kartárs is felutazott. Az alsó tagozati tanítási módszer hazai megvalósítási lehetőségeinek vizsgálására az 1961/62-es tanévben kísérletek is folytak, amelyeket a következő tanévben az Országos Pedagógiai Intézet irányításával újra megindítanak.

Egy másik, az általános iskolával kapcsolatos kezdeményezés volt, hogy általános iskolai matematikai szakkört indítottunk az 1961/62-es tanévben az V. kerületi úttörőházban, amit Reményi Gusztávné tagtársunk vezetett. Igen kívánatos volna ezt a kezdeményezést folytatni és szélesíteni esetleg több kerület érdeklődő diákjait fogva össze és esetleg a tapasztalatokat idővel közre is adni.

Változások következnek be a Középiskolai Matematikai Lapokkal kapcsolatban, amely ebben a naptári évben a Tankönyvkiadó kezeléséből a Lapkiadó Vállalathoz került át. Ezzel időben egybeesett, hogy az Akadémiai Nyomda viszont végleg felmondta a lap nyomását. Ezek zökkenőt okoztak a lap életében, amiket azonban sikerült áthidalni azáltal, hogy a kényszermegoldásként összefont április—májusi szám áprilisi feladatait sokszorosítva előre kiadtuk az iskoláknak és várható, hogy a változás a továbbiakban lényeges előnyökkel fog járni a lapra nézve. Az eddiginél lényegesen rövidebb nyomdai átfutásra és rendszeres megjelenésre van kilá-

tás és a kiadó részéről a problémák ismeretére, megértő segítő készségre. Tartalmi vonatkozásban az általános iskolás megoldók számának növekedése örvendetes. Ez sem teszi azonban fölöslegessé azokat a törekvéseket, hogy valamelyik úttörőlapban indítsunk számtanpéldasorozatot. Ebben a tekintetben tovább fogja folytatni erőfeszítését az Oktatási Szakosztály.

Az 1962. évi stockholmi Nemzetközi Matematikai Kongresszus oktatási szekcióján előre kitűzött témákhoz az Oktatási Szakosztály korreferátumokat készített és azokat az Oktatási Bizottság megvitatta. Ezek: az aritmetika és az algebra kapcsolata; az algebrai alapfogalmak és az algebrai gondolkodás előkészítése a magyar általános iskolák aritmetika-tanításában; (mindkettő az aritmetika és az algebra kapcsolata című témához) a modern matematika milyen tárgykörei és milyen alkalmazásai vehetők fel a középfokú matematikatanítás programjába?; a matematikatanárok képzése és továbbképzése Magyarországon. A kongresszuson résztvett a Szakosztály részéről Reiman István és Varga Tamás.

1962. aug. 23-tól szept. 8-ig Nemzetközi matematikaoktatási Szimpóziumot rendezett a Társulat a Művelődésügyi Minisztérium felkérésére, a Minisztérium és a Magyar UNESCO Bizottság támogatásával. A Szimpózium 18 külföldi és 6 magyar tag és számos megfigyelő részvételével előre megküldött írásos vitaanyag alapján folytatta tanácskozásait és az UNESCO tagállamai elé terjesztendő javaslatokat készített. Ezekről számos bel- és külföldi lap számolt már be, az elfogadott javaslatok meg fognak jelenni a Matematikai Lapokban.

Az előkészítés komoly erőfeszítést igényelt, sajnos olyanokat is, amik elkerülhetők lettek volna és még utólag is hárultak bizonyos terhek a Társulatra. Ennek nagy részben a Művelődésügyi Minisztérium, de részben több szerv koordinálatlan közreműködése is volt az oka. Mindezek ellenére is sikerült a szimpóziumot igen sikeresen lebonyolítani.

Az Oktatási Szakosztály külföldi kapcsolatainak bővítésére komoly lehetőséget teremtett egy csereegyezmény, amit a Csehszlovák Matematikai és Fizikai Társulattal kötött Társulatunk. Ennek keretében a pécsi vándorgyűlésre egy csehszlovák résztvevő is érkezett, a Társulatunknak pedig lehetősége nyílott a múlt évben két, idén pedig 5 középiskolai tanár kiküldésére Csehszlovákiába.

A Társulat megnövekedett nemzetközi tevékenysége lebonyolítására az Elnökség a múlt közgyűlés után Külügyi Bizottságot hozott létre. A Bizottság feladatai a meghívások és kiküldések koordinálása és a külföldi kapcsolatok kiépítése.

Meghívások történtek kollokviumokra, ezek a meghívottak egyre nagyobb mértékben saját költségen vesznek részt, — ezenkívül hívunk meg külföldi matematikusokat előadás tartására, amiért 500 forint tiszteletdíjat fizetünk, továbbá tudományos megbeszélésekre, amely esetben csak az útiokmányok megszerzésében nyújtunk segítséget. Saját meghívottainkon kívül számos külföldi előadó kerül ki a kultúrcsere egyezményekkel hazánkban járó matematikusok közül is. Az idegen szerzők előadásai különösen az idén erősen megszaporodtak, ami örvendezes jelenség, ha már némi szelektálást szükségessé is tesz, hogy az előadások kellő hasznonal járjanak a magyar matematikánál és ne haladják meg erőinket.

Külföldi kiküldetéseknél általában az MTESZ igen szerény keretéből ránk jutó részre voltunk utalva. Ezt újabban Csehszlovákiát illetően egy csereegyezmény bővítette lényegesen. Visszatérek még rá, hogy emellett a könyvtár révén nyílott lehetőség a stockholmi nemzetközi kongresszuson nagy arányú részvételre.

Említettem, hogy csereegyezményt kötöttünk a Csehszlovák Matematikai és Fizikai Társulattal. Ennek alapján évi 50 napos keretben látja vendégül mindegyik társulat a másik tagjait. Ennek a keretében hívnak ők résztvevőket újabban szép számmal rendezett kollokviumokra, mi viszont elsősorban tanárainknak igyekszünk tapasztalatcsere lehetőséget biztosítani. Hasonló egyezmény megkötésére tettünk javaslatot az NDK-nak és a lengyel társulatnak is. A keletnémet matematikusok örömmel vették a javaslatot és kilátásba helyezték, hogy a most alakuló keletnémet

társulat napirendre tűzi a kérdést, a lengyelekkel viszont nem haladtak előre a tárgyalások.

Visszatérve az Oktatási Szakosztály munkájára a beszámoló időszakában folyt — és még nem is fejeződött be — az oktatás megreformálása közép- és felsőoktatási vonatkozásban.

Társulatunk a középiskolai reform tervezetet középiskolai és egyetemi kartársak részvételével vitatta meg igen részletesen, a tanárképzés reformjára vonatkozóan pedig elsősorban a középiskolai kartársak véleményét kérte ki és juttatta el illetékes helyre. Sajnálatos, hogy a műszaki oktatási reformmal kapcsolatban rossz szervezés miatt csak elkésve kapcsolódott be Társulatunk, de Soós Gyula kartársunk irányításával utólagosan is összeállítja észrevételeit és továbbítani fogja.

A Tudományos Szakosztály Budapesten, az 1960. évi közgyűlés óta eltelt időszak alatt a korábbi hagyományoknak megfelelően — a nyári hónapoktól eltekintve — rendszeresen mintegy kéthetenként rendezett előadóülést. Az üléseken magyar és külföldi előadók tudományos előadásai, útibeszámolók, ismeretterjesztő előadások, ill. matematikai filmvetítések szerepeltek.

1962 nyarán — különös tekintettel a stockholmi kongresszus alkalmából Európába jött neves tengerentúli matematikusok kedvező meghívási lehetőségére — „nyári szemináriumot" is rendeztünk, az MTA Matematikai Kutató Intézetével közösen, az előadások lebonyolítására.

A Matematika alapjai, matematikai gépek és alkalmazásaik kollokvium szervezőbizottsága részben az MTA Matematika iKutató Intézete anyagi támogatásával a kollokvium előkészítésére szemináriumot szervezett Kalmár László vezetésével, amely értékes segítséget nyújtott az újabb kutatási irányok felőli tájékozódásban. Esetleg meggondolandó: nem lehetnek-e hasonló rendezvények kollokviumoktól függetlenül is hasznosak.

Már előző beszámolómban komoly problémaként jeleztem a budapesti előadások igen gyér látogatottságát és különösen a fiatalok távolmaradását az előadásokról. Ezzel a kérdéssel a Tudományos Szakosztály és az Elnökség is több ízben foglalkozott és számos ötlet merült fel, a helyzet azóta sem javult lényegesen. A Szakosztály most az Elnökségen lefolyt legutóbbi vita alapján újabb intézkedéseket dolgoz ki a helyzet javítására, de e helyről is kéri a tagság támogatását a társulati élet élénkebbé tételéhez. Néhány előadást más szervekkel (MTA Matematikai Kutató Intézete, Eötvös Loránd Fizikai Társulat, Tudományos Ismeretterjesztő Társulat) közösen rendeztünk meg.

A pesti előadásokhoz hasonlóan Szegeden is jelentkezik a látogatottság csökkenése, az érdeklődési körök túlzott specializálódása miatt. Örvendetes viszont, hogy rendszeressé váltak a tagozatban a közép, sőt az általános iskolai tanárok számára rendezett továbbképző előadások is.

Előző beszámolómban említettem a debreceniek új kezdeményezését a Fiatalok Klubjának megalakításával; ez igen eredményesnek bizonyult és a Klub rendszeresen folytatja munkáját azóta is. Ugyancsak eredményes és gazdag a tudományos előadások programja Debrecenben. Majdnem minden vidéki tagozatban a helyi adottságnak megfelelő gyakorisággal, de rendszeresen folynak a Diákdélutánok. A Fejér megyei és a borsodi tagozat középiskolai diákokból Ifjúsági Kört is alakított. A rendszeresen folyó pécsi Fejér Lipót-verseny és borsodi Bede-emlékverseny (mindkettő középiskolások részére) mellett a Fejér megyei tagozat megyei versenyt szervezett már második éve: általános iskolások részére.

A Fejér megyei tagozatot a tavalyi választmányi ülés határozata alapján szervezte át az Elnökség helyi csoportból tagozattá és ennek indokoltságát eddigi működésük messzemenően igazolja. Az említett kezdeményezések mellett kapcsolatot teremtettek műszaki vonatkozásban is és általában jó kapcsolatokat építettek ki a helyi szervekkel.

A borsodi tagozatban több mint 10 éves igen agilis munka után felmentését kérte a titkári teendők alól Batár Zoltán tagtársunk. Munkája elismeréséül „Szocialista kultúráért" kitüntetésben részesült ez alkalommal. A tagozat munkájának irányítását Kiss Barna titkár vette át és örömmel számolhatok be róla, hogy a tagozat tevékenysége változatlan lendülettel folyik és továbbra is igen sokoldalúan. Sajnos még itt is jelentkezik — amiről minden tagozat beszámolója említést tesz — a pedagógusok továbbra is növekvő elfoglaltsága, ami a társulati munka egyre súlyosabb akadályává válik. Ennek ellenére a legtöbb tagozat, ha különböző gyakorisággal is, de rendszeresen rendez előadásokat. Több tagozat egy-egy továbbképző nap formájában gyűjti össze a pedagógusokat a székhelyen kívül a környékből is. Nyíregyháza például a Megyei Tanáccsal együttműködve nyári előadássorozatot tervez a közeli Sóstón.

Több tagozatunk alakulásának 10 éves jubileumát ülte az elmúlt időszakban. Győr és Sopron bensőséges ünnepi ülés keretében emlékezett meg a jubileumról.

Igen komoly munkát végez és nagy segítséget nyújt mindegyik tagozat a középfokú versenyek lebonyolításában a megyei dolgozatok elbírálásában.

Az említett általánosan felmerült problémák mellett néhány tagozatban helyi problémák is merülnek fel. Nem sikerült teljesen egyenletes munkát megvalósítani Veszprémben, a társulati tagok szétszórtsága miatt a megye területén és nagyarányú elfoglaltságuk folytán. A kecskeméti tagozat munkája lényegében kimerül elvétve egy-egy előadás megrendezésében. Legsúlyosabb azonban a szolnoki tagozat problémája. Itt minden, a tagozat megerősítésére tett kísérlet hatástalan maradt, még egy beszámolót sem sikerült a tagozattól kapni. Úgy gondolom, az új elnökségnek fontolóra kellene vennie a tagozat megszüntetésének kérdését.

Az elmúlt időszakban is igen sikeresnek mondhatók a Tudományos Szakosztály kollokviumai. Új színt jelentett, hogy megindultak az előző beszámolóban már jelzett osztrák társulattal közösen rendezett kollokviumok. 1961-ben az osztrákok rendeztek ilyet Eisenstadtban, 1962-ben a Bolyai János Matematikai Társulat Balatonvilágoson, az idén ismét az osztrákok rendezik Bécsben. Ezekre a rendező társulat a másik társulat kb. tíz tagját látja vendégül.

Néhány nagyobb előadásszámú kollokvium előadásanyagának kiadása is folyamatban van, így a tavalyi „Matematika alapjai, matematikai gépek és alkalmazásaik" kollokviumé, a közel múltban lezajlott „Matematika közgazdasági alkalmazásai" kollokviumé és meg fog jelenni a Nemzetközi Matematikai Unió támogatásával rendezendő „Abel-csoportok" kollokvium anyaga is.

Ugyancsak új színt jelent az utoljára említett kollokvium is, amely a Nemzetközi Matematikai Unió támogatásával kerül megrendezésre. A témát az Unió a Társulat három alternatív javaslata közül választotta ki.

A Társulat Elnöksége elhatározta a kollokviumok témáinak tervszerűbb kiválasztását és bizottságot küldött ki a témaválasztás szempontjainak kidolgozására. Az Elnökség a Bizottság javaslatát elfogadta és az 1963-as kollokviumi tervet már ennek szellemében állította össze. A beszámoló időszakában megrendezett, illetőleg előkészített kollokviumok — a lezajlott kollokviumokról lapunkszámolót közöl — és adataik a következők:

1961. *Differenciál-, integrál- és függvényegyenletek*, Balatonvilágos.
Geometria. Balatonvilágos.
Valószínűségszámítási és matematikai statisztika. (Az Osztrák Matematikai Társulattal közös rendezésben) Eisenstadt.

1962. *Számelmélet*. (Az Osztrák Mat. Társulattal közös rendezésben.) Balatonvilágos.
Matematika alapjai, matematikai gépek, és alkalmazásaik. Tihany.

1963. *A matematika közgazdasági alkalmazásai*. Budapest.

Előkészületben:
Abel-csoportok. (A Nemzetközi Matematikai Unió támogatásával, a Tudományos Akadémiával közös rendezésben) Tihany.

Valószínűségszámítási módszerek alkalmazása fizikai problémák megoldására. (Az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezésben Mátrafüreden.) *Differenciálegyenletek.* (Az Osztrák Matematikai Társulattal közös rendezésben Bécsben.)

A közgazdasági kollokviumnál csak a szervezési munka hárult a Társulatra. A rendkívül agilis szervezőbizottság az anyagi fedezetet az Országos Tervhivataltól, az Országos Statisztikai Hivataltól, a Kohó- és Gépipari Minisztériumtól, a Közgazdasági Egyetemtől és az Építésügyi Minisztériumtól szerezte meg. A kollokviumot Osztrovszki György, az Országos Tervhivatal elnökhelyettese és a Társulat részéről Rényi Alfréd ügyvezető alelnök nyitotta meg.

Ugyancsak komoly támogatást kapott a „Matematika alapjai, matematikai gépek, és alkalmazásaik" kollokvium is a Magyar Tudományos Akadémiától, valamint a Számítás Technikai Központtól. Ez utóbbi a kivonatok sokszorosítása révén volt a kollokvium segítségére.

Mindezek az intézmények fogadják e helyről is a Társulat köszönetét a hathatós támogatásért.

A kollokviumok általában folytatták a II. Magyar Matematikai Kongresszuson jól bevált gyakorlatot, hogy az előadások és megvitatásuk mellett problémamegbeszélő, kötetlen témájú ülést is tartottak.

A Tudományos Szakosztály feladata volt idáig a matematika alkalmazásaival való foglalkozás is. Ilyen tárgyú előadások szerepeltek is időnként, de igen elszórtan. Nagyobb súlyt kaptak már az alkalmazások a kollokviumok keretében. Valószínűségszámítási, statisztikai tárgyú kollokviumok már hosszú idő óta komoly súllyal foglalkoztak a gyakorlati alkalmazásokkal, rendeztünk kollokviumot a mátrixszámítás és alkalmazásairól, 2 differenciál- integrál- és függvényegyenletek kollokvium is kitért az alkalmazásokra, 2 kollokvium számottevő részben foglalkozott matematikai gépekkel, a Biometriai szimpózium és a közelmúltban lefolyt közgazdasági alkalmazásokkal foglalkozó kollokvium, továbbá 2, az Eötvös Társulattal közösen rendezett kollokvium pedig teljes mértékben az alkalmazásoknak volt szentelve.

Többízben hívott létre a Társulat műszaki matematikai bizottságot egy ilyen tárgyú szakosztály munkájának előkészítésére gondolva, a munka azonban ismételten abbamaradt.

A múlt évi választmányi ülés határozata alapján az elnökség egy matematika alkalmazásaival foglalkozó bizottságot küldött ki. Ez két klubestet és egy, a további teendőket megvitató ankéttal egybekötött előadást rendezett. Az ankét, különösen a működési terület kiszélesítésére hívta fel a figyelmet. Az ennek megvalósítására kibővített bizottság elsősorban arra koncentrálta a tevékenységét, hogy az ősszel induló idényre dolgozzon ki részletes programot. Az elnökség többízben foglalkozott a bizottság munkájával. Legutóbbi ülésén úgy határozott: javasolja a közgyűlésnek az eddigi munka alapján egy önálló, matematika alkalmazásai szakosztály megalakítását.

Előző beszámolómban említettem, hogy az elnökség átdolgoztatta a kutató munka kezdetén állók ösztönzésére alapított Grünwald-díj szabályzatát. Azóta a díjat évente rendszeresen kiosztja a Társulat és megállapítható, hogy az jelen formájában valóban jól megfelel rendeltetésének. Ugyancsak rendszeresen megrendezi a Társulat az egyetemi hallgatók Schweitzer Miklós-emlékversenyét is, amely minden évben komoly erőfeszítésre serkenti a kiváló hallgatókat.

Az elnökség a múlt közgyűlés határozatának megfelelően felújította a Könyvbizottság munkáját és azzal több ízben foglalkozott. A bizottság igyekezett felmérni, hogy a magyar matematika mely területeken igényel elsősorban irodalmi támogatást, mind a tudományos munkák, mind a tankönyvek, mind pedig a népszerűsítő irodalom tekintetében. Ennek alapján javaslataival az egyes kiadókhoz fordult és számos javaslatát a kiadók magukévá is tették. A bizottság minden tagja igen eredményesen vesz

részt a munkában, amelynek lelkes irányításáért Szőkefalvi-Nagy Béla elnököt és Koncz Károly titkárt külön is köszönet illeti. További munkatervükben szerepel a matematikai szakirodalom szervezettebb ismertetése és a megjelenő művekről adandó folyamatos tájékoztatás. A Társulat pártaktivája javasolta — és ezt bizonyára a Könyvbizottság is örömmel fogja magáévá tenni — egy ankét összehívását a kiadók részvételével.

Beszámolómnak egy visszatérő örvendetes pontja a könyvtár állandó erőteljes fejlődése. Ennek anyagi alapjait is Székely Gábor könyvtáros működése teremtette meg a rendelkezésre álló és más könyvtárak részéről átadott duplumok értékesítésével. Ebből a forrásból számottevő devizaigény is származott és ez tette lehetővé, hogy illetékes szervek engedélyével a Társulat 8 matematikus kiküldetését tudta támogatni a stockholmi Nemzetközi Matematikai Kongresszusra és egy személy esetében az Akadémiának is segítséget nyújtott deviza tekintetében.

Az egyre fejlődő könyvtár beszerzési, nyilvántartási és kezelési munkáinak ellátására a pártaktíva több kartárs bevonását ajánlotta.

Változások következtek be a Társulat adminisztratív apparátusában is, amennyiben dr. Balázs Dezsőné több mint 10 évi odaadó, fáradhatatlan társulati munka után a múlt évben nyugalomba vonult. Lelkiismeretes munkája a Társulat részéről meleg köszönetet érdemel. Teljesen nem vált meg Társulatunktól, amennyiben alkalmi munkában továbbra is gyakran közreműködik. Jelenleg a feladatkört Rónai Anna Mária látja el. Ugyanakkor nem szabad megfeledkezni szervezőtitkárunk, Pál Lénárdné Danóci Angéla igen értékes munkájáról, aki változatlanul komoly segítséget jelent a vezetőségnek az egyre növekedő sokoldalú tevékenység szervezett lebonyolításában, körültekintő lelkiismeretes munkájával.

Szervezeti kérdéseknél tartva egy igen örvendetes eseményről kell még beszámolnom: belépett Társulatunkba az első jogi tag: az Elektronikus Mérőműszerek Gyára. A Társulat az üzemet kérésüknek megfelelően gráfelméleti előadások tartásával támogatja.

Beszámolóm során több helyen tettem már említést más szervekkel való kapcsolatokról. Az MTESZ-szel való kapcsolataink változatlanul igen jók, segítőkész figyelemmel kísérik a Társulat munkáját és több ízben támogatták más szervekkel, különösen a Művelődésügyi Minisztériummal fennálló problémák rendezésében. Változatlanul értékes segítséget kapunk Szövetség Nemzetközi Kapcsolatok Osztályától és a Gazdasági Osztálytól is. Előző beszámolómban panaszkodtam a társegyesületekkel való kapcsolatokról. Az utóbbi időben ezen a területen is kezd jelentkezni némi javulás és a matematika alkalmazásai szakosztály munkatervében komoly súllyal szerepel más egyesületekkel közös rendezvények terve. Ugyancsak változatlanul jók a kapcsolatok a TIT-tel, amit többek közt egyre több közös rendezvény is mutat mind Budapesten, mind vidéken. A Művelődésügyi Minisztériummal, mint erről több helyen szó volt, számos érintkezési területünk van, de az együttműködés továbbra sem minden területen egyformán kielégítő.

A főtitkári beszámolót Fuchs László pénztárosi jelentése követte:

A folyó év első feléről szóló jelentés csak a következő közgyűlésen lesz tárgyalható. Kéri annak tudomásulvételét, hogy a folyó évi pénzügyeket a megválasztandó pénztárosnak fogja átadni.

A Társulat *bevételei* három részből állnak:

1. A MTESZ-en keresztül Társulatunk állami támogatásban részesül.

2. Társulatunk tagjai tagdíjat fizetnek.

3. Kollokviumok vagy más rendezvények céljaira állami szervek támogatásban részesítenek.

Bevételek: (ezer Ft-ban)	1961-ben	1962-ben
állami támogatás	157,3	162,2
tagdíj	8,0	8,7
rendezvény támogatás	147,3	120,5
térítések	4,6	16,8
	317,2	308,3

A rendezvény támogatás részletezése:

1961-ben a Geometriai és a Differenciál-, integrál- és függvényegyenlet kollokvium bevétele 58,3; a Diákolimpiáé 89,0 ezer Ft.

1962-ben a pécsi vándorgyűlés bevétele 22,3, a Számelméleti kollokviumé 27,6; A matematikai gépek és alkalmazásaik kollokviumé 58,3 és az UNESCO rendezvényé 9,6; a 61-es áthozat 2,7 ezer Ft.

Társulatunk kiadásai szintén három részből tevődnek össze:

1. A Társulat két adminisztratív munkatársának és újabban egy nyugdíjas kisegítő munkatársának fizetése.

2. A társulati helyiségek fenntartási költségei.

3. Működési kiadások.

Az 1. és 2. alatti kiadásokat az MTESZ központilag kezelt költségvetéséből közvetlenül utalja ki.

A 3. alatti kiadások felosztására — az MTESZ által adott irányelveknek megfelelően — Társulatunk évenként költségvetést készít, amelyben a Társulat célkitűzéseinek szellemében a munkaterv alapján készít tervet a rendelkezésre álló összeg felosztására. az MTESZ Gazdasági Osztálya fizeti ki a Társulat által folyósított összegeket és ellenőrzi a pénzügyi előírások betartását. Az alábbiakban a működési kiadásokat részletezzük.

Kiadások: (ezer Ft-ban)	1961-ben	1962-ben
belföldi kiküldetés	17,8	19,1
külföldi „	17,5	25,0
külföldiek vendégüll látása	4,2	3,9
nagyobb rendezvények	167,3	145,1
írószer, nyomtatvány, karbantartás	21,2	24,0
reprezentáció	5,2	9,4
posta, telefon	10,0	11,4
vidéki támogatás	10,3	13,2
alkalmi munkák	4,9	10,7
pályadíjak	20,5	15,1
jutalmak	12,9	15,0
társadalmi munkát meghaladó tevékenység	11,2	8,1
könyvtár	14,2	8,2
	317,2	308,2

A rendezvények kiadásainak részletezése:

1961-ben: a Geometriai és a Differenciál- integrál- és függvényegyenlet kollokvium kiadása 57,3; a Diákolimpiáé 104,6; a debreceni vándorgyűlésé 5,2 ezer Ft.

1962-ben: a pécsi vándorgyűlés kiadása 34,6; a Számelméleti kollokviumé 27,2; a matematikai gépeké 70,7; az UNESCO rendezvényé 12,6 ezer Ft.

A fentiekhez a következőket fűzte hozzá:

1. A könyvtár viszonylag csekély összeggel szerepel a kiadások közt. Valójában a könyvtár — elsősorban Székely Gábor fáradhatatlan agilis tevékenysége nyo-

mán — igen nagy mértékben gyarapodott. A könyvtár gyarapodása egyrészt folyóiratcsere útján (a csere céljából több példányban rendeljük meg a Társulat folyóiratait; ennek költségei a nyomtatványrovatot terhelik); másrészt duplumok cseréje útján (ez a Kultúrán és az Állami Könyvterjesztőn keresztül közvetlenül bonyolódik le és ez nem jelentkezik a költségvetésben).

2. Örvendetes a külföldi kiküldetések növekedése. A feltüntetett összegen kívül még a duplumok eladásából származó összeg terhére is alkalom nyílt kiküldetésekre a stockholmi matematikai kongresszusra; ezek a Kultúrával kötött egyezmény keretében a Kultúra kiküldetésében vettek részt a kongresszuson.

3. A reprezentáció növekedéséből 2400 Ft-ot az Ifjúsági Matematikai Kör tagjainak ebédeltetésére, uzsonnáztatására fordítottunk, mikor a Kör tagjai (részben vidékiek) több napon át együtt készültek a Diákolimpiára.

Kéri pénztárosi jelentése elfogadását és a felmentvény megadását.

Göndöcs László az ellenőrző bizottság nevében mondta el jelentését.

A Bolyai János Matematikai Társulat Ellenőrző Bizottsága 1963. június 24-én tartott ülésén megvizsgálta Fuchs László pénztárosnak a közgyűlés számára készített jelentését. A Bizottság megállapította, hogy a rendelkezésre álló összegeket a Társulat rendeltetésüknek megfelelően használta fel. Annak érdekében, hogy a közgyűlés jobb áttekintést nyerjen a felhasználás módjáról, a jelentésben feltüntetett egyes tételek átcsoportosítását javasolta. A Bizottság javaslataival Fuchs László pénztáros egyetértett és a pénztárosi jelentést ennek megfelelően terjeszti a Közgyűlés elé.

Az Ellenőrző Bizottság szükségesnek tartja megjegyezni, hogy a jutalmazásoknál a jövőben az elnökség nagyobb mértékben törekedjék arra, hogy a jutalmazottak száma növekedjék, anélkül azonban, hogy az a jutalmak elaprózódásához vezessen.

A Bizottság örömmel állapítja meg, hogy a Társulat egyre több tagjának tudja biztosítani külföldi rendezvényeken való részvételét, és ezen belül középiskolai tanárok számára is lehetőség nyílik külföldi oktatási intézmények meglátogatására és tapasztalatcserére. Kívánatosnak tartjuk, hogy a jövőben ezeknek a lehetőségeknek a számát tovább növeljék.

A Bizottság javasolja továbbá, hogy a megválasztandó elnökség a Társulat nagy értéket képviselő és örvendetesen szaporodó könyvállománya kezelésének a megoldására tegyen megfelelő intézkedést. Ezt a javaslatot az indokolja, hogy egyetlen ember ma már nem képes társadalmi munkában a könyvbeszerzés, csere — és a kezelés sokrétű feladatát ellátni.

A fentiek alapján a Bizottság javasolja a pénztárosi jelentés elfogadását és részére a felmentés megadását.

Az ellenőrző bizottsági jelentés elhangzása után *Császár Ákos* vette át a közgyűlés elnöki tisztét.

A főtitkári beszámolót számos hozzászólás követte.

A vita alatt Surányi János főtitkár beszámolóját a következőkkel egészítette ki.

„Minden alkalommal kényes és nehéz kérdés a vándorzászlók odaítéléséről javaslatot tenni és az egyaránt jól dolgozó tagozatok közül kiválasztani a legjobbat. Hozzájárul ehhez az is, hogy a munka eredményessége nem mindig csak a vezetőség jószándékán és igyekezetén múlik. Úgy gondolom, hogy méltó helyre kerülnek a vándorzászlók, ha a következő javaslat szerint osztjuk ki őket:

A legjobban működő tagozat részére alapított vándorzászlót ez alkalommal a borsodi tagozatnak javaslom juttatni. A legjobb tudományos munkát végző tagozatnak járó vándorzászlót ugyanúgy, mint a múlt közgyűlésen, Debrecennek javasoljuk adni. Végül az oktatási munka területén kiemelkedő munkát végző tagozatnak szóló vándorzászlót javaslom a Fejér megyei tagozatnak juttatni."

A beszámolók elfogadása, illetve a vita után a Közgyűlés a következő vezetőséget választotta meg:

Elnök	Hajós György
Ügyvezető alelnök	Surányi János
Alelnökök	Marót Rezső
	Rapcsák András
	Tandori Károly
	Turán Pál
Főtitkár	Fuchs László
Titkár	Reményi Gusztáv
Pénztáros	Schmidt Tamás
Elnökség	Achátz Imréné
	Czapáry Endre
	Gyires Béla
	Hosszú Miklós
	Kalmár László
	Krekó Béla
	Molnár József e. t.
	Prékopa András
	Reiman István
	Szász Gábor
	Szendrei János
	Szép Jenő
	Tolnai Jenő
	Varga Ottó
	Vigassy Lajos
Póttagok	Csébfalvy Károly
	Fenyő István
	Reményi Gusztávné
	Knoll János
Ellenőrző Bizottság	Alpár László
	Göndöcs László
	Szilárd Károly
Póttagok	Éltető Ödön
	Fried Ervin
Fegyelmi Bizottság	Bognár Mátyás
	Szász Pál
	Szép Jenő
Póttag	Steinfeld Ottó
IMU Bizottság	Aczél János
	Alexits György
	Erdős Pál
	Fejes Tóth László
	Fenyő István
	Fodor Géza
	Fuchs László
	Hajós György
	Kalmár László
	Molnár József e. t.
	Rapcsák András
	Rédei László
	Rényi Alfréd
	Steinfeld Ottó

Surányi János
Szőkefalvi-Nagy Béla
Turán Pál
Varga Ottó

Szakosztályok vezetősége

Matematikai Alkalmazásai Szakosztály

Elnök	Frey Tamás*
Alelnök	Prékopa András
Titkár	Heppes Aladár

Oktatási Szakosztály

Elnök	Gádor Endréné
Alelnök	Reményi Gusztávné
Titkár	Kőváry Károly

Tudományos Szakosztály

Elnök	Császár Ákos*
Alelnök	Vincze István
Titkár	Soós Gyula
Választmány	Batár Zoltán, Miskolc
	Bognár János
	Barna Béla, Debrecen
	Cser Andor
	Dér Zoltán, Sopron
	Dombi Béla, Pécs
	Erdős Jenő, Debrecen
	Dancs István
	Fodor Géza, Szeged
	Gazsó István, Szeged
	Gyarmati László, Debrecen
Választmány	Horvay Katalin
	Kárteszi Ferenc
	Késedi Ferenc
	Kovács István, Szeged
	Makai Endre
	Mester István, Debrecen
	Mikolás Miklós
	Mogyoródi József
	Molnár József szkf.
	Mosoni György
	Pál László
	Reimann József
	Rieger Richárd
	Soós Paula, Szeged
	Schnell Lászlóné
	Szabó Jenő, Miskolc
	Szelezsán János
	Székely Jenő, Pécs
	Szeliánszky Ferenc, Győr
	Tóth Imre

* Az Elnökség utólagos döntésének figyelembevételével.

	Tóth Lajosné, Debrecen
	Varga Tamás
	Vértesi Géza, Nyíregyháza
	Ziermann Margit
Póttagok	Corrádi Keresztély
	Danyi Pál, Pécs
	Dömölki Bálint
	Koncz Károly
	Rábai Imre
	Wiegandt Richárd, Orosháza

A közgyűlés az alábbiak szerint jóváhagyta a vidéki tagozatok vezetőségét

BORSODI TAGOZAT

Elnök	Gáspár Gyula
Alelnökök	Raisz Iván
	Szabó Jenő
Titkár	Kiss Barna

DEBRECENI TAGOZAT

Elnök	Gyires Béla
Alelnökök	Aczél János
	Rapcsák András
	Mester István
Titkárok	Szénássy Barna
	Gesztelyi Ernő

EGRI TAGOZAT

Elnök	Nagy Ferenc
Alelnök	Bakó Jenő
Titkár	Járosi András

FEJÉR MEGYEI TAGOZAT

Elnök	Harza László
Alelnök	Szénássy Mihály
Titkár	Láng Hugó

GYŐRI TAGOZAT

Elnök	Marót Rezső
Alelnök	Barabás Sarolta
Titkár	Molnár Ernő

KECSKEMÉTI TAGOZAT

Elnök	Szemerey Andor
Titkár	Hadi István

NYÍREGYHÁZI TAGOZAT

Elnök	Lakatos István
Alelnök	Ambrózy Géza
Titkár	Bereznai Gyula

PÉCSI TAGOZAT

Elnök	Achátz Imréné
Alelnök	Bagyinka Mária
Titkár	Póda Béla

SOPRONI TAGOZAT

Elnök	Kiss Ignác
Alelnök	Dér Zoltán
Titkár	Horváth Kálmán

SZEGEDI TAGOZAT

Elnök	Rédei László
Alelnök	Szőkefalvi-Nagy Béla
Titkár	Szendrei János

SZOMBATHELYI TAGOZAT

Elnök	Varga Árpád
Alelnök	Pászthory Antal
Titkár	Bokor Géza

VESZPRÉMI TAGOZAT

Elnök	Knoll János
Titkár	László Zoltán
Titkárhelyettes	Tomor Benedek

Matematikai Lapok felelős szerkesztője: Turán Pál

Középiskolai Matematikai Lapok felelős szerkesztője: Bakos Tibor.

A megválasztott új vezetőség nevében Hajós György elnök köszönte meg a közgyűlés bizalmát. Kérte a küldötteket és a közgyűlés résztvevőit, hogy a jelen alkalommal tanúsított buzgalommal vegyék ki részüket a jövőben a Társulat munkájából.

Császár Ákos, a közgyűlés elnöke ezután megköszönte a jelenlevők figyelmét és az ülést bezárta.

Könyvismertetés

Egy megjegyzés az alkalmazott matematika problémájához

FENYŐ ISTVÁN

A Magyar Tudományos Akadémia 1962 őszén nyílvános ankéton vitatta meg az alkalmazott matematika hazai helyzetét. Ezen a fontos értekezleten többen elmondották, hogy a matematika alkalmazásainak centrális területén, ti. a műszaki tudományokban és a technikai praxisban talán a leglassúbb az előrehaladás az új, modern matematikai módszerek alkalmazásaiban. Ennek okát többen abban látták, hogy a mérnökök viszonylag hosszabb ideig tanulnak felsőbb matematikát és meg vannak győződve arról, hogy a matematikai módszereket egyedül, matematikus közreműködése nélkül is szakmájukra alkalmazni tudják. A műszaki egyetemek matematika-oktatása, főleg tárgyában elavult és úgy van felépítve, hogy a mérnökhallgató olyan képet nyer, mintha műegyetemeinken előadott matematikaanyag nagyjából az egész, az alkalmazások szempontjából fontos matematikának keresztmetszetét tartalmazná.

Ezeket a többek által hangoztatott véleményeket látszik megerősíteni Fodor György műegyetemi adjunktus nemrégen megjelent A Laplace-transzformáció műszaki alkalmazása c. monográfiája. E könyv matematikai fejezetei a műszakiaknak matematikával kapcsolatos nézeteire és a műegyetemi matematika-oktatás problémáira hívják fel az ezzel foglalkozók figyelmét és ebből a szempontból kívánunk a könyv néhány megállapításával foglalkozni.

A szóbanforgó könyv matematikai része (a könyvnek csaknem a fele) az operátorszámításnak a szokásos és jólismert Laplace-transzformáción alapuló megalapozását adja. Tárgyalásmódjának stílusa, színvonala is olyan, mint a hasonló tárgyú, nem matematikusok által írt könyveké. Tele pongyola definíciókkal, látszatbizonyításokkal és sajnos, tárgyi hibákkal is.

A matematika a mérnök számára, bár alapvetően fontos, de mégiscsak — segédeszköz, szerszám. Nem helytelen tehát, ha egy a műszakiaknak szánt matematika könyvben egyes matematikai elméleteket ebből a szempontból tárgyalunk, sőt ez szükséges a műszaki gyakorlat szempontjából. Mit jelent ez? Azt, hogy teljesen megengedhető és helyes, ha egyes matematikai fogalmakat és tételeket csupán olyan általánosságban mondunk ki, amennyire azt az alkalmazások megkívánják. Teljesen megengedhető, hogy a kimondott tételek bizonyításait mellőzzük és a vonatkozó matematikai irodalomra hivatkozunk. Helyén való a szemléletre fokozottabb támaszkodás és szám példákkal való bő illusztrálás.

Ezt azért szögezzük le, nehogy az a vád érjen, hogy a műszakiaktól valamiféle túlprecízkedést kérünk számon. Ez nemhogy felesleges, hanem káros is lehet. Azt azonban meg kell követelni, hogy a leírt szöveg értelmes legyen, meg lehessen belőle érteni, miről van szó. Gondolom, az sem szorul bővebb igazolásra, ha azt követeljük,

hogy a kimondott állítások igazak legyenek. Hamis állításból semmilyen területen sem lehet értelmes következtetéseket levonni.

Fodor György könyvének matematikai fejezetei sajnos eme alapvető követelménynek sem tesznek eleget. Itt van például a számos alkalmazásra találó Dirac-féle δ. Ezt a szerző az alábbi módon „definiálja" (29. old.): legyen $\delta(t, T)=0$ ha $t<0$ és $t>T$ és $\delta(t, T)=\frac{1}{T}$, ha $0<t<T$. Ezután szó szerint a következőket mondja: „Vezessük be ezek alapján a $\delta(t)=\lim_{T\to 0}\delta(t, T)$ definícióval a $\delta(t)$ Dirac-impulzust". És hogy még cifrább legyen az ügy, azonnal hozzáteszi: „Ez tehát ... egyértelműen definiálva van ...".

A $\delta(t)$ definíciója alapjául szolgáló határérték nem létezik, tehát a $\delta(t)$-t egy nemlétező valamivel definiálja. Ez teljes értelmetlenség és ezzel bizonyos fizikai jelenségeket magyarázni pontosan olyan értékű, mint a szelet például a mondai Aeolus hárfázásával indokolni. De tudja — vagy sejti — ezt a szerző is, hiszen ugyanezen az oldalon a következőket mondja: „Megjegyezzük, hogy a $\delta(t)$ Dirac-impulzus szigorúan véve nem függvény és matematikailag az (5. 8) összefüggés (ez a $\delta(t)=\lim_{T\to 0}\delta(t, T)$ reláció) semmitmondó". Ez a magyarázómondat még csak ront a helyzeten, mert: először is, a $\delta(t)$ sem „szigorúan", sem pedig „nem szigorúan" nem függvény a függvény klasszikus értelmében; másodszor az (5.8) reláció nem semmitmondó, hanem: értelmetlenség.

Lehetséges, hogy Fodor György feltételezi olvasójától, hogy tudja mi a $\delta(t)$; akkor azonban mi szükség van a vele kapcsolatos „fejtegetésekre"? Vagy pedig ezt nem tételezi fel, akkor pedig az olvasónak ebből kellene megérteni, mi a Dirac-féle δ. Ebből pedig csak azt értheti meg, hogy az olyasvalami, ami nincsen! Ekkor persze az olvasó azt kérdezi, ha nincs, mit lehet kezdeni vele? Erre is megadja Fodor a választ imígyen: „A továbbiakban azonban a Dirac-impulzust közönséges függényként kezeljük, aminek számos előnye van." De még milyen közönséges az a függvény, amely gyanánt ezt a nemlétező dolgot kezeli: például abszolút folytonos is! És miért teszi ezt? Mert: „számos előnye van".

Fodor György megalapozatlan definíciója egészen abszurd eredményekre is vezet. A 63—64. oldalakon a következő tételt mondja ki: ha $f(t)$ a $t>0$ tartományban, Laplace transzformálható differenciálhányadossal bír, akkor

$$L\{f'\} = pL\{f\}-f(-0).$$

Először olvasván sajtóhibára gondoltam, de kiderült, hogy szó sincs róla! A szerző állítását „bebizonyítja" az általa bevezetett általánosított derivált segítségével, melyhez pedig a $\delta(t)$ is fel van használva! Fodor tételének konzekvenciája például az, hogy minden szám egyenlő egymással. Legyen ugyanis $f_1(t)$ és $f_2(t)$ két, Laplace transzformálható deriválttal bíró függvény, melyek a pozitív félegyenesen azonosak. Világos, hogy ezekre $L\{f_1\}=L\{f_2\}$ és $L\{f_1'\}=L\{f_2'\}$, tehát a Fodor-féle tétel szerint $f_1(-0)=f_2(-0)$. Miután pedig $f_1(-0)$ és $f_2(-0)$ tetszőlegesen választhatók meg, következik, hogy bármely két szám egyenlő egymással.

Teljesen érthetőek lennének a szerző fejtegetései mondjuk a XIX. században, amikor egy sereg fogalom, melyre a fizikai jelenségek leírásához kellettek, még nem voltak meg. Ekkor a fizikus valóban kényszerűségből, heurisztikus módszerekhez folyamodott, még akkor is, ha néha számítási módszerei ellentmondásra vezettek. De Fodor György könyve a XX. második felében jelent meg, amikor az általánosított derivált és vele kapcsolatos fogalmak teljesen precizírozottak, sőt az elmélet nem is egyféleképpen építhető fel! Az operátorszámítás egyik legkiválóbb művelőjének, J. Mikusinskinek magyarul is megjelent könyve egyenesen mérnökökhöz szól, számos gyakorlati példa és alkalmazás részletes kidolgozását tartalmazza.

MTA Könyvtára
Periodika 2864/1964 sz.

A Dirac δ, az általánosított derivált, az operátorszámítás tényleg tudományos megalapozásai általában nem nehezek, ha azokat olyan általánosságban tárgyaljuk, amennyire azok az alkalmazásokhoz szükségesek. Természetesen minden mérnök által is könnyen megérthetők. De ugyanakkor az is biztos, hogy meg kell szokni azt, hogy a limes fogalma nem apriorisztikusan az, amit a műegyetemeken tanítani szoktak, hogy meg kell barátkozni az absztrakt algebra egyes alapfogalmaival és a szemléletességet is úgy kell értékelni ahogyan azt az megérdemli! Ma azonban a műegyetemi matematika-oktatás ugyanazokkal a fogalmakkal dolgozik, mint amelyekkel a XIX. sz. végén dolgozott, sőt anyaga, sem tartalmában, sem szellemében nem sokat változott 60—70 év óta. Ez természetesen hatással van mérnökeink matematikai kultúrájára, szemléletmódjára és ez az oka annak, hogy műszaki értelmiségünk értetlenül áll a matematikának újabb és az alkalmazások szempontjából fontos ágaival szemben.

A szóban forgó könyv matematikai részének csaknem minden oldalán van egy-egy igen komoly hiba, logikai ellentmondás, vagy értelmetlenség. Ezekkel nem kívánunk foglalkozni, hiszen nem recenziót akarunk e könyvről írni, hanem bizonyos következtetéseket alátámasztani. De ezek a hibák nagyon tipikusak és komolyan figyelmeztetnek a bevezetésben felsorolt jelenségre.

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Vidosa László
A kézirat beérkezett: 1963. XII. 5. — Példányszám: 1300. — Terjedelem: 12,50 (A/5) ív — 14 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 64-4293

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

СОДЕРЖАНИЕ

И. Феньё: Обобщённые функции, операторы 1. 213
Ф. Картеси: Геометрия инцидентностей 246
П. Туран: Диофантовы приближения и прикладная математика..... 264
А. Сабо: Понятие „значения квадрата" и так наз. „геометическое среднее 277
И. Знам: Примечания к одной из неопубликованных теорем Пала Турана 307
Б. Боллобаш: О графах не содержащих двух независимых кругов .. 311
К. Дьёри: О Диофантовых уравнениях $\binom{n}{2}=a^l$ и $\binom{n}{3}=a^l$ 322
Т. Варга: Международный симпозиум о преподавании математики 330
Доклад о математическом конкурсе имени Миклоша Швейтцера в 1962 году 346
Задачи 372
Новости 380
Жизнь общества..... 389
Обзор книг (И. Феньё) 407

CONTENTS

I. Fenyő: On distributions I. 213
F. Kárteszi: Incidence-geometry 246
P. Turán: Diophantine approximation and applied mathematics..... 264
Á. Szabó: The notion "quadratic value" and the "geometric mean" 277
I. Znám: Notes on an unpublished theorem of Turán 307
B. Bollobás: On graphs which do not contain two independent circuits ... 311
K. Győry: On the diophantine equations $\binom{n}{2}=a^l$ and $\binom{n}{3}=a^l$ 322
T. Varga: International symposion of teaching of mathematics 330
Report on the N. Schweitzer competition 1962. 346
Problems 372
News 380
Activity of the Society..... 389
Book-review 407

Ára 12 Ft.
Előfizetés évi 20 Ft.

INDEX: 25.564

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb. szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.