MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 22. évfolyam (2016), 1. szám

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12., I/4. Telefon: 225-8410.
E-mail: bolyai.tarsulat@renyi.mta.hu.

Ára:
– A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes;
– nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága. A folyóiratot az MTMT indexeli, és a REAL archiválja.

SZÁMTANI SOROZATOT NEM TARTALMAZÓ HALMAZOK

PACH PÉTER PÁL

1. Bevezetés

Ebben a cikkben a polinommódszer egy újszerű alkalmazását mutatjuk be, melynek segítségével bizonyos csoportokban háromtagú számtani sorozatot nem tartalmazó halmazok elemszámára a korábbiaknál lényegesen erősebb felső korlát adható, továbbá a módszernek az elmúlt hónapokban már más alkalmazásai is születtek. Az egyik ilyen eredmény a népszerű SET játék sokdimenziós változatához kapcsolódik.

A SET játékot 81 kártyalappal játsszák, mindegyiken egy, kettő vagy három szimbólum szerepel, ami háromféle lehet, a színére szintén három lehetőség van, és a kitöltés módja is háromféle lehet. Mindegyik kombinációhoz pontosan egy kártyalap tartozik, így adódik a $3^4 = 81$ kártyából álló készlet. Három kártya „set”-et alkot, ha mind a négyféle tulajdonságra (darabszám, forma, szín, kitöltés) teljesül, hogy az adott tulajdonságra vagy mindhárom lapon egyforma, vagy az adott tulajdonságra mindhárom lapon különböző. A játékot hagyományosan úgy játsszák, hogy 12 kártyalapot kitesznek az asztalra, és a játékosok célja set-et találni a lapok között. Elképzelhető ugyanakkor, hogy 12 lap közül semelyik három nem alkot set-et, ebben az esetben – miután hosszas szemlélődés után sem talál senki sem set-et – újabb lapokat helyeznek az asztalra a már ottlévő lapok mellé. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy legfeljebb hány lap esetén képzelhető el az, hogy közülük semelyik három nem alkot set-et. Pellegrino [10] bebizonyította, hogy a kérdésre a válasz: 20. Ha a SET játékot úgy módosítjuk, hogy ne csak 4, hanem n tulajdonság legyen, akkor a kérdés valójában úgy is megfogalmazható, hogy a három elemű test feletti n-dimenziós vektortérben, vagyis $\mathbb{F}_3^n$-ben legfeljebb hány vektor választható ki úgy, hogy semelyik háromra ne teljesüljön, hogy akárhanyadik koordinátáikat is tekintjük, vagy három egyforma, vagy három különböző értéket látunk. Ezzel szintén ekvivalens, ha azt követeljük meg, hogy semelyik három kiválasztott vektor összege ne legyen 0, vagy azt, hogy ne tartalmazzon (affin) egyenest a halmaz. Az eddigiekkel szintén egyenértékű – $\mathbb{F}_3^n$ esetében – az, hogy semelyik három elem ne alkosson számtani sorozatot.

Ebben a cikkben ezt a legutóbbi átfogalmazást fogjuk vizsgálni, vagyis számtani sorozatot nem tartalmazó részhalmazok elemszámára mutatunk majd felső becslést; azonban mielőtt rátérnénk $\mathbb{F}_3^n$-re, a kérdést a $\mathbb{Z}_4^n$ csoport esetében fogjuk vizsgálni. A cikknek a célja az új módszer bemutatása, így részletes bizonyítások helyett az alapötletek ismertetésére törekszünk, a teljes bizonyítások (valamivel általánosabb tételekre) $\mathbb{Z}_4^n$-re a [4], $\mathbb{F}_3^n$-re a [5] cikkekben olvashatók.

2. Előzmények

A számtani sorozatot nem tartalmazó halmazok lehetséges méretének vizsgálata az additív kombinatorika egyik fontos kérdése. Roth híres eredménye [11, 12] szerint ha az $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz nem tartalmaz három hosszú számtani sorozatot, akkor $|A| = O(n/\log\log n)$. Számos javítás után a jelenlegi „rekordot” Bloom tartja, aki belátta [2]-ben, hogy $|A| = O\big(N(\log\log N)^4/\log N\big)$ is igaz. Nem nehéz meggondolni, hogy Roth problémája lényegében ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy $\mathbb{Z}_n$-ben, vagyis az n elemű ciklikus csoportban legfeljebb mekkora lehet egy három hosszú számtani sorozatot nem tartalmazó halmaz mérete. Tetszőleges G véges Abel-csoport esetén jelölje $r_3(G)$ a legnagyobb, három hosszú számtani sorozatot nem tartalmazó $A \subseteq G$ halmaz méretét. Roth eredeti kérdése $r_3(\mathbb{Z}_n)$ vizsgálatával egyenértékű, így természetes $r_3(G)$-t más véges csoportok esetén is nézni. A páratlan rendű Abel-csoportok esetében Brown és Buhler [3], valamint tőlük függetlenül Frankl, Graham és Rödl [6] belátták, hogy $r_3(G) = o\big(|G|\big)$. Meshulam [8] ezt $r_3(G) \le 2|G|/\operatorname{rk}(G)$-re javította, ahol $\operatorname{rk}(G)$ a G Abel-csoport rangját jelöli, speciálisan, $G = \mathbb{Z}_m^n$-re ez az eredménye az $r_3(\mathbb{Z}_m^n) \le 2m^n/n$ felső becslést adja. Ezt az eredményt csak hosszabb, 17 éves szünet után sikerült megjavítani, amikor Bateman és Katz [1] belátták, hogy $r_3(\mathbb{Z}_3^n) = O(3^n/n^{1+\varepsilon})$, ahol $\varepsilon > 0$ egy abszolút konstans. Páros rendű Abel-csoportok esetén Lev [7] igazolta a $r_3(G) < 2|G|/\operatorname{rk}(2G)$ becslést, ahol $2G = \{2g : g \in G\}$. A $G = \mathbb{Z}_4^n$ esetben Sanders [13] ezt $r_3\big(\mathbb{Z}_4^n\big) = O\big(4^n/n(\log n)^\varepsilon\big)$-re javította (ahol $\varepsilon > 0$ egy abszolút konstans).

3. Számtani sorozatot nem tartalmazó halmazok

Azt vizsgáljuk tehát, hogy különböző véges csoportokban mekkora részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy az ne tartalmazzon három hosszú (nemkonstans) számtani sorozatot. Az előző fejezetben említett eredmények bizonyítása szinte kivétel nélkül a Fourier-analízist, és az úgynevezett *sűrűségnövelő módszert* használta, az általunk bemutatott eljárás azonban a polinommódszer egy újszerű alkalmazása. A polinommódszerrel számtalan területen elért eredmények ellenére ezidáig az ilyen típusú problémáknál (a test kicsi, a dimenzió pedig nagy) nem sikerült vele eredményt elérni, a legtöbben az eredmények további javulását a Fourier-analízisre alapuló módszerek fejlesztésétől várták. Azonban idén sikerült ezen a területen áttörést elérni, és a polinommódszer egy újszerű alkalmazásával $r_3(\mathbb{Z}_4^n)$ értékére a korábbiaknál sokkal erősebb, „exponenciálisan” kicsi felső becslést adni. A módszert és a bizonyítást tartalmazó [4] cikk májusban került fel az arXiv-ra, majd ezt követően sorra születtek újabb és újabb eredmények a módszer további alkalmazásával közeli és kevésbé közeli területeken.

Először $\mathbb{Z}_4^n$ esetét vizsgáljuk meg. Az alapötlet a következő lemma:

1. lemma. *Tegyük fel, hogy $n \geq 1$ és $d \geq 0$ egész számok, P egy n-változós multilineáris polinom az $\mathbb{F}$ test felett, melynek foka legfeljebb d, és $A \subseteq \mathbb{F}^n$ egy halmaz, melynek méretére $|A| > 2\sum_{0\leq i\leq d/2}\binom{n}{i}$ teljesül. Ha $P(a-b) = 0$ teljesül bármely $a, b \in A$ $(a \neq b)$ esetén, akkor $P(0) = 0$.*

Először is megjegyezzük, hogy a lemmát a kételemű $\mathbb{F}_2$ testre fogjuk majd alkalmazni, és mivel $\mathbb{F}_2$-ben minden elem idempotens, ezért az összes $\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ függvény előáll, mint egy multilineáris függvényhez tartozó polinomfüggvény.

A lemma bizonyítása csak elemi lineáris algebrát használ. A $P(a-b)$ polinomra gondolhatunk úgy is, mint egy $2n$-változós (multilineáris) polinomra. Ez a polinom olyan monomok összege, melyek mindegyike egy ($\mathbb{F}$-beli) együttható, valamint néhány a_i és néhány b_i szorzata (ahol az a_i és b_i számok az $a, b \in \mathbb{F}_2^n$ vektorok koordinátái). Az a_i és b_i változókból együttesen sem szerepelhet egy tagban d-nél több, hiszen a P polinom foka legfeljebb d volt. Csoportosíthatjuk tehát a tagokat a következő módon: először felsoroljuk azokat, amelyekben az a_i-kből legfeljebb $d/2$ szerepel, és ezeket csoportokba rendezzük aszerint, hogy pontosan melyik a_i-k szorzata alkotja ezt a részt. A megmaradó monomok mindegyikében több mint $d/2$ darab a_i szerepel, így ezekben a b_i-k száma mindenképpen kevesebb, mint $d/2$ lesz, ezeket a b_i-s rész szerint csoportosítjuk. Egy példán illusztrálva: legyen $n = 4$, $d = 3$ és $P(x) = x_1x_2x_3 + x_1x_4 + x_1 + x_4 + 1$. Ekkor $P(a-b) = (a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3) + (a_1-b_1)(a_4-b_4) + (a_1-b_1) + (a_4-b_4) + 1$. Az előbb vázolt csoportosítást elvégezve:

$$\begin{aligned} P(a-b) = 1 \cdot (-b_1b_2b_3 + b_1b_4 - b_1 - b_4 + 1) + a_1(b_2b_3 - b_4 + 1) + \\ + a_2(b_1b_3) + a_3(b_1b_2) + a_4(-b_1 + 1) + (a_1a_2a_3 + a_1a_4) \cdot 1 + \\ + (-a_2a_3)b_1 + (-a_1a_3)b_2 + (-a_1a_2)b_3 + 0 \cdot b_4. \end{aligned}$$

Erre az előállításra úgy is gondolhatunk, mint egy csak a-tól és egy csak b-től függő vektor skaláris szorzata:

$$P(a-b) = u(a)v(b),$$

ahol

$$u(a) = (1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_1a_2a_3 + a_1a_4, -a_2a_3, -a_1a_3, -a_1a_2, 0)$$

és

$$v(b) = (-b_1b_2b_3 + b_1b_4 - b_1 - b_4 + 1, b_2b_3 - b_4 + 1, b_1b_3, b_1b_2, -b_1 + 1, 1, b_1, b_2, b_3, b_4).$$

Általános esetben az $u(a)$ vektor első „fele" a legfeljebb $d/2$-fokú, csak a_i-k szorzataként kapott monomok felsorolása, $v(b)$ második fele pedig a legfeljebb $d/2$-fokú, csak b_i-k szorzataként kapott monomok felsorolása. Az $u(a)$ vektor második felét és a $v(b)$ vektor első felét pedig úgy „töltjük ki", hogy az $u(a)v(b)$ skaláris szorzat éppen $P(a-b)$-t állítsa elő; itt természetesen figyelni kell arra is, hogy az olyan monomokat is csak egyszer kapjuk meg, melyekben mind az a_i-s rész, mind a b_i-s rész legfeljebb $d/2$ tényezős.

Az általános esetben ebből az adódik, hogy $P(a-b) = u(a)v(b)$, ahol az $u(a)$, $v(b)$ vektorok $\mathbb{F}^{2m}$-ben vannak, ahol $m = \sum_{0\le i\le d/2}\binom{n}{i}$. A lemma feltétele szerint $|A| > 2m$, amiből azonnal következik, hogy $P(0) = 0$, különben az $u(a), v(a)$ vektorrendszer biortogonális rendszert alkotna, azonban egy ilyen rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint a tér dimenziója.

Legyen most $A \subseteq \mathbb{Z}_4^n$ egy olyan halmaz, ami nem tartalmaz három hosszú (nemkonstans) számtani sorozatot. A $\mathbb{Z}_4^n$ csoportban az involúciók az $F = \{0,2\}^n$ részcsoportot alkotják, amely izomorf $\mathbb{F}_2^n$-nel. Minden F szerinti mellékosztály reprezentálható egy $\{0,1\}^n$-beli vektorral. Az, hogy A-ban nincs három hosszú (nemkonstans) számtani sorozat, azzal ekvivalens, hogy az $a + c = 2b$ egyenletnek nincsen (különböző számokból álló) megoldása A-ban. Azért is érdemes az F szerinti mellékosztályokat tekinteni, mert az, hogy b melyik mellékosztályba tartozik, meghatározza $2b$ értékét, ami ráadásul egy F-beli elem lesz. Mindez azt is jelenti, hogy a-nak és c-nek ugyanabba a mellékosztályba kell esnie, ha az egyenlet teljesül. Hasonló megfontolásokból adódik, hogy a legnagyobb számtani sorozatot nem tartalmazó $\mathbb{Z}_4^n$-beli halmaz mérete, vagyis $r_3(\mathbb{Z}_4^n)$ értéke éppen annyi, mint amennyi a következő kérdésre a válasz:

1. probléma. *Legyen minden $x \in \mathbb{F}_2^n$-re $A(x) \subseteq \mathbb{F}_2^n$, továbbá legyen $Z = \{z \in \mathbb{F}_2^n : A(z) = \emptyset\}$. Legfeljebb mekkora lehet $\sum_{x\in\mathbb{F}_2^n} |A(x)|$, ha tudjuk, hogy $\bigcup_{x\in\mathbb{F}_2^n\setminus Z} x + A(x)\hat{+}A(x) \subseteq Z$? (Itt $x + A(x)\hat{+}A(x) = \{x+y+z : y,z \in A(x),\ y \ne z\}$, vagyis $\hat{+}$ a megszorított összeghalmazt jelöli.)*

Célunk tehát az 1. problémában szereplő feltételnek eleget tevő halmazrendszerek összméretét felülről becsülni. Minden x-re $|A(x)| \le 2^n$, és összesen 2^n lehetőség van x-re, így $\sum |A(x)| \le 2^n \cdot 2^n = 4^n$ (mindez azzal a triviális megállapítással egyenértékű, hogy az A halmaz mérete legfeljebb 4^n, hiszen $A \subseteq \mathbb{Z}_4^n$). Ahhoz, hogy erősebb becslést kapjunk, egy olyan jellegű állításra van szükségünk, hogy: „Csak *kevés* x-re lehet $A(x)$ *nagy*." Az állítás precíz megfogalmazásához vezessük be a bináris entrópia függvényt:

$$H(x) := -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x).$$

A H függvény segítségével hatékonyan becsülhető a binomiális együtthatók összege a következő módon:

$$\sum_{0\le i\le z}\binom{n}{i} < 2^{nH(z/n)} \tag{1}$$

érvényes bármely $n \ge 1$ egész szám és $0 < z \le n/2$ valós szám esetén. Az állítás a következőképpen szól:

2. állítás. *Tegyük fel, hogy $n \ge 1$ és az $\{A(x) : x \in \mathbb{F}_2^n\}$ halmazrendszer eleget tesz az 1. problémában szereplő feltételnek. Legyen $0 < \varepsilon < 1/4$ tetszőleges. Ekkor az olyan x-ek száma, melyekre $|A(x)| \ge 2^{nH(0,5-\varepsilon)+1}$ legfeljebb $2^{nH(2\varepsilon)}$.*

Az állítás bizonyítása az 1. lemmára épül. Tegyük fel indirekten, hogy az állítás hamis, ekkor a $T = \left\{x : \left|A(x)\right| < 2^{nH(0,5-\varepsilon)+1}\right\} \supseteq Z$ halmaz méretére $|T| < 2^n - 2^{nH(2\varepsilon)}$. Legyen $d = n - \lceil 2\varepsilon n\rceil$. Legyen $\mathcal{P}$ a legfeljebb d-edfokú ($\mathbb{F}_2$ feletti) multilineáris polinomok által alkotott vektortér. $\mathcal{P}$-ben a legfeljebb d-edfokú multilineáris monomok bázist alkotnak, így ennek a vektortérnek a dimenziója $\dim\mathcal{P} = \sum_{i=0}^{d}\binom{n}{i}$. Felhasználva, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorában a binomális együtthatók összege 2^n, az (1) becslés segítségével megmutatható, hogy ez nagyobb, mint $2^n - 2^{nH(2\varepsilon)}$:

$$\sum_{i=0}^{d}\binom{n}{i} = 2^n - \sum_{i=0}^{\lceil 2\varepsilon n\rceil - 1}\binom{n}{i} > 2^n - 2^{nH(2\varepsilon)} > |T|.$$

Legyen $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{F}_2^T$ az a lineáris leképezés, amely minden $\mathcal{P}$-beli vektorhoz (polinomhoz) azt a vektort rendeli hozzá, amelynek koordinátái a T-beli elemeken felvett értékek. Mivel a képtér dimenziója legfeljebb $|T| < \dim\mathcal{P}$, ezért a leképezés magtere nem csak a nullvektort tartalmazza, vagyis létezik olyan legfeljebb d-edfokú nem azonosan 0 multilineáris P polinom, ami T-n eltűnik: $P|_T \equiv 0$. Legyen most $a \notin T$ tetszőleges. Miután $a + A(a)\hat{+}A(a) \subseteq Z \subseteq T$, ezért $P(a + x) = 0$, ha $x \in A(a)\hat{+}A(a)$. Mivel $a \notin T$, ezért alkalmazható az 1. lemma, és azt kapjuk, hogy $P(a) = 0$ is teljesül. Ebből azonban $P \equiv 0$ következik, és ez az ellentmondás mutatja, hogy a kiindulási feltevésünk hamis volt. Ezzel igazoltuk a 2. állítást.

A 2. állításból a következő becslés vezethető le:

3. tétel (Croot, Lev, Pach). *Ha $n \geq 1$ és $A \subseteq \mathbb{Z}_4^n$ nem tartalmaz 3 hosszú számtani sorozatot, akkor*

$$|A| < 4^{\gamma n},$$

ahol

$$\gamma := \max\left\{\frac{1}{2}\big(H(1/2-\varepsilon) + H(2\varepsilon)\big) : 0 < \varepsilon < 1/4\right\} \approx 0{,}926,$$

és így $|A| < 3,62^n$.

Térjünk most rá a SET játékhoz is kapcsolódó kérdésre, vagyis annak vizsgálatára, hogy mekkora lehet $r_3(\mathbb{F}_3^n)$. Megjegyezzük, hogy bármely más véges $\mathbb{F}_q$ test esetén $r_3(\mathbb{F}_q^n)$-re hasonló becslés nyerhető. Ezt az eredményt az [5] cikk tartalmazza. Az 1. lemma szerepét itt a következő állítás veszi át, ami teljesen analóg módon igazolható:

4. lemma. *Tegyük fel, hogy $n \geq 1$ és $d \geq 0$ egész számok, P egy n-változós polinom az $\mathbb{F}_3$ test felett, melynek foka legfeljebb d, és minden változóban legfeljebb 2 a foka. Továbbá legyen $A \subseteq \mathbb{F}_3^n$ egy halmaz. Ha $P(a+b) = 0$ teljesül bármely $a, b \in A$ ($a \neq b$) esetén, akkor $P(2a) = 0$ is teljesül legfeljebb $2f\big(n, \lceil d/2\rceil\big)$ elem kivételével, ahol $f(n, D)$ az olyan legfeljebb D-edfokú n-változós monomok száma, amelyekben minden változó foka legfeljebb 2.*

Számunkra az lesz fontos, hogy mivel $\mathbb{F}_3$ bármely x elemére $x^3 = x$, ezért az összes $\mathbb{F}_3^n \to \mathbb{F}_3^n$ függvény előáll, mint egy olyan polinomhoz tartozó polinomfüggvény, melyben minden változó foka legfeljebb 2, ezért szorítkozhatunk az ilyen polinomokra. Ezekhez a polinomokhoz páronként különböző polinomfüggvény tartozik. Megjegyezzük, hogy ezek közül a legfeljebb D-edfokúak száma $f(n,D) = \sum_{2i+j\le D}\binom{n}{i}\binom{n-2i}{j}$, ami a multilineáris polinomok számához hasonlóan hatékonyan becsülhető; a számításokat most nem részletezzük.

Míg $\mathbb{Z}_4$ felett a problémát először le kellett „fordítani” $\mathbb{F}_2$ feletti kérdéssé, hogy test felett dolgozhassunk, itt erre nincsen szükség.

5. állítás. *Ha $A \subseteq \mathbb{F}_3^n$ nem tartalmaz 3 hosszú számtani sorozatot, akkor bármely $0 < d < 2n$ esetén*

$$|A| \le 2f\big(n, \lceil d/2\rceil\big) + f(n, 2n-d-1).$$

Legyen $B = 2 * A = \{2a : a \in A\}$. Legyen $\mathcal{P}$ a legfeljebb d-edfokú, minden egyes változóban legfeljebb másodfokú n-változós polinomok vektortere. Ezen belül legyen $\mathcal{P}_0 < \mathcal{P}$ az az altér, amely a B komplementerén azonosan 0 polinomokat tartalmazza. Legyen $\varphi : \mathcal{P}_0 \to \mathbb{F}_3^{\overline{B}}$ az a lineáris leképezés, amely minden $\mathcal{P}_0$-beli vektorhoz (polinomhoz) azt a vektort rendeli hozzá, aminek koordinátái a $\overline{B}$-beli elemeken felvett értékek. Mivel a φ lineáris leképezés képtere legfeljebb $|\overline{B}|$-dimenziós, ezért a dimenziótétel szerint

$$\dim \mathcal{P}_0 \ge \dim \mathcal{P} - |\overline{B}| = |A| - \big(3^n - f(n,d)\big) = |A| - f(n, 2n-d-1). \tag{2}$$

Másrészről viszont, mivel A nem tartalmaz 3 hosszú számtani sorozatot, ezért $A \hat{+} A \subseteq \overline{B}$, hiszen, ha $a' + a'' = a$ teljesülne valamely $a, a', a'' \in A$ $(a' \ne a'')$ mellett, akkor a, a', a'' nemkonstans számtani sorozatot alkotna. Így a 4. lemma szerint $\mathcal{P}_0$ minden eleme eltűnik az egész $\mathbb{F}_3^n$-en legfeljebb $2f(n, \lceil d/2\rceil)$ pont kivételével. Mivel egy k-dimenziós altér mindig tartalmaz olyan vektort, amelynek legalább k nemnulla koordinátája van, ezért ebből az következik, hogy

$$\dim \mathcal{P}_0 \le 2f(n, \lceil d/2\rceil). \tag{3}$$

Az 5. állítás rögtön adódik (2) és (3) egyenlőtlenségekből. Az optimális választás d értékére $d = \lceil 4n/3\rceil$, amiből azonnal következik az alábbi eredmény:

6. következmény (Ellenberg, Gijswijt)**.** *Ha $n \ge 1$ és $A \subseteq \mathbb{F}_3^n$ nem tartalmaz 3 hosszú számtani sorozatot, akkor*

$$|A| < c \cdot 2{,}756^n,$$

ahol $c > 0$ konstans.

Érdemes megfigyelni, hogy $\mathbb{F}_3^n$ esetében az új gondolat az, hogy egyetlen $\overline{B}$-n eltűnő polinom kiválasztása helyett az összes ilyen tulajdonságú polinom által alkotott alteret kell tekinteni.

4. További alkalmazások

A [4] cikkben szereplő új módszer alapötlete tehát az, hogy dimenzió megfontolások alapján tudunk venni egy *nem túl nagy* fokszámú (nem azonosan 0) polinomot, ami egy alkalmasan választott halmazon eltűnik, majd alkalmazzuk az 1. lemmát. A módszernek a májusi közzététele óta már számos további alkalmazása született – ezek az eredmények egyelőre az arXiv-on olvashatók –, amik közül most az Erdős–Szemerédi-féle „napraforgó-sejtés" megoldását emeljük ki. Azt mondjuk, hogy három halmaz napraforgót alkot, ha közülük bármely kettőnek ugyanaz a metszete. Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszert napraforgó-mentesnek nevezünk, ha semelyik három $\mathcal{F}$-beli halmaz nem alkot napraforgót. Az Erdős–Szemerédi-féle napraforgó-sejtés szerint ha $\mathcal{F}$ egy olyan napraforgó-mentes halmazrendszer, melyben az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz bizonyos részhalmazai szerepelnek, akkor alkalmas $c < 2$ konstans mellett $|\mathcal{F}| < c^n$. Ilyen $c < 2$ konstans létezése a 6. következményből is adódik, azonban Naslund és Sawin [9] a módszer közvetlen alkalmazásával megmutatták, hogy $c = 1{,}89$ választás mellett már teljesül a sejtés.

Köszönetnyilvánítás. A munkát az OTKA PD115978 és K108947, valamint az MTA Bolyai János Kutatói Ösztöndíja támogatta.

Irodalom

[1] M. Bateman and N. H. Katz, New bounds on cap sets, *J. Amer. Math. Soc.,* **25** (2012), no. 2, 585–613.

[2] T. F. Bloom, A quantitative improvement for Roth's theorem on arithmetic progressions, *submitted.*

[3] T. C. Brown and J. C. Buhler, A density version of a geometric Ramsey theorem, *J. Combin. Theory, Ser. A.,* **32** (1982), 20–34.

[4] E. Croot, V. F. Lev and P. P. Pach, Progression-free sets in $\mathbb{Z}_4^n$ are exponentially small, *Ann. of Math.,* közlésre elfogadva; arXiv:1605.01506.

[5] J. S. Ellenberg and D. Gijswijt, On large subsets of $\mathbb{F}_n^q$ with no three-term arithmetic progression, arXiv:1605.09223.

[6] P. Frankl, G. Graham and V. Rödl, On subsets of abelian groups with no 3-term arithmetic progression, *J. Combin. Theory, Ser. A.,* **45** (1987), 157–161.

[7] V. F. Lev, Progression-free sets in finite abelian groups, *J. Number Theory,* **104** (2004), no. 1, 162–169.

[8] R. Meshulam, On subsets of finite abelian groups with no 3-term arithmetic progressions, *J. Combin. Theory Ser. A.,* **71** (1995), no. 1, 168–172.

[9] E. Naslund and W. F. Sawin, Upper bounds for sunflower-free sets, arXiv:1606.09575.

[10] G. Pellegrino, Sul massimo ordine delle calotte in $S_{4,3}$, *Le Matematiche (Catania),* **25** (1971), 149–157.

[11] K. Roth, Sur quelques ensembles d'entiers, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **234** (1952), 388–390.

[12] K. Roth, On certain sets of integers, *J. London Math. Soc.,* **28** (1953), 104–109.

[13] T. Sanders, Roth's theorem in $\mathbb{Z}_n^4$, *Anal. PDE 2,* (2009), no. 2, 211–234.

A BOLYAI-KÉPLET HIPERBOLIZÁLÁSA

VARGA JÁNOS

Mottó: *Elhagyva félszöget, s kitevőt,*
és hiperbolikussá téve őt.

Bevezetés

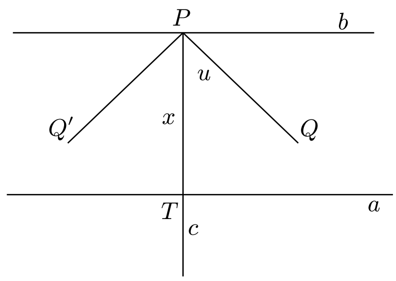
E módszertani tanulmány célja, hogy az Appendixnek a hiperbolikus geometriával kapcsolatos híres képletéről (1) *megmutassa, hogy a látszattal ellentétben valójában ez is hiperbolikus* (2)*, – ami ezek után egyáltalán nem meglepő – ugyanakkor közvetlen, egészszöges – nem félszöges – összefüggést vezessen le a párhuzamossági szög* (u) *és a párhuzamossági távolság* (x) *között, és ezzel együtt annak formailag is egyszerűbb alakját állítsa elő azáltal, hogy kiküszöböli a képlet bal oldalából a félszöget tartalmazó törtet és a jobb oldalából a kitevőt úgy, hogy közben matematikai tartalma nem változik, így lehetővé téve annak egyszerűbb alkalmazását. A másik fontos cél, hogy megadja a párhuzamossági szög összes szögfüggvényének az ismert szakirodalmakban eddig nem tárgyalt egyszerű levezetését és alakját, bizonyítva, hogy azok mindegyike szintén hiperbolikus, tovább segítve ezáltal a* (2) *főösszefüggés többcélú alkalmazását.*

1993. november 3-án Bolyai János-emléktábla avatásra került sor Temesváron, a Bolyai utcában, annak az épületnek a falán, amelynek helyén állt egykor az a tiszti lakás, ahol Bolyai János 1823. november 3-án ezeket a sorokat írta: *… semmiből egy új, más világot teremtettem."* Toró Tibor professzor javaslatára, Bolyai híres levele keltezésének 170. évfordulóján felavatott 100 cm × 160 cm méretű dombormű öt nyelven adja a világ tudomására a nemeulideszi geometria felfedezésének tényét.

Ezen az emléktáblán is látható az alábbi ábra és olvasható az APPENDIX híres képlete, a Bolyai által *S-rendszernek* nevezett – később hiperbolikusként emlegetett – geometria alapösszefüggése, amely a párhuzamossági szög (u) és a párhuzamossági távolság (x) közötti kapcsolatot írja le. Bolyai munkájában is így szerepel.

$$\operatorname{ctg}\frac{u}{2} = e^{\frac{x}{k}}, \tag{1}$$

u = párhuzamossági szög (ahol a két egyenes – Q és a – *„elpattan"* egymástól);
x = párhuzamossági távolság;



1. ábra: A Bolyai-féle párhuzamosság [2, 107. old.]

$e =$ az Euler-féle szám ($e = 2{,}718281828\ldots$)[1];
$k =$ a hiperbolikus teret jellemző pozitív valós szám.

(A történeti hűség kedvéért meg kell jegyezni, hogy Gauss a párhuzamosságot ugyanúgy értelmezte, mint Bolyai János.)

Sajnos a hiperbolikus egyenesek szemléltetésére az 1. ábrán látható euklideszi geometria szerinti ábrázolás hiperbolikus geometriai ábraként teljesen hibás, rendkívül megnehezíti az új párhuzamossági fogalom vizuális felfogását, mivel ez alapján nem lehet belátni, hogy a P pontból egyre nagyobb u szög alatt induló Q egyenes ugyan miért *„pattanna”* el az a egyenestől, mikor az ábra, és térszemléletünk szerint is – igaz, a T ponttól jobbra, egyre messzebb –, de mindig metszeni fogja azt. (Lám-lám, a tehetetlenség univerzális – nem csak tömegekre érvényes! – törvénye a gondolkodás területén, így a matematikában is érvényes és működik. Nehezen szabadulunk meg az euklideszi beidegződéstől. Ez még olyan neves matematikusokkal is megtörtént, mint Saccheri, Lambert, Taurinus, vagy Bolyai Farkas. „Lambert pl. elismerte, hogy a háromszögre vonatkozó $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$ $(2R)$ feltevésből kiinduló következtetései során nem sikerült ellentmondásra bukkannia, mégis kijelentette, hogy az euklideszi geometria az egyedül lehetséges. Némelyik megjegyzése olyan mélyre hatol, hogy ha nem riad meg saját eredményeitől, egy új térelmélet megteremtője lehetett volna [2, 16. old.].”)

E képlet szerint, ha $x \to 0$, akkor $\frac{u}{2} \to 45^\circ$, $u \to 90^\circ$. Hasonlóképpen, ha $k \to \infty$, akkor is $u \to 90^\circ$. Az euklideszi geometriában a párhuzamossági szög $u = 90^\circ$ bármely x-re, ezért a fenti két eredmény így értelmezhető: a hiperbolikus síkon „kicsiben” ($x \to 0$) közelítőleg az *euklideszi geometria* érvényesül, és a hiperbolikus geometria közeledik az euklideszi geometriához (amit Bolyai Σ rendszernek nevezett) ha annak állandója, $k \to \infty$.

Az (1) összefüggés „szépséghibája”, hogy nem közvetlenül a párhuzamossági szög (u), hanem csak a párhuzamossági *„félszög”* ($u/2$) és párhuzamossági távolság (x) közötti kapcsolatot fejezi ki – pedig ez volna a célszerűbb –, és ugyanakkor nem hiperbolikus.

[1] Szerző sejtése, amit bizonyítani nem tud, hogy az e számjegyei között a „18281828” számsorozat csak egyszer fordul elő.

A kör kerülete a hiperbolikus geometriában Bolyai jelölésével [5, 182. old.]: $O_r = 2\pi k \cdot \operatorname{ctg} u$. Íme, a példa, hogy Bolyai is a képlet teljesszöges változatát használja.

Vezessük le a közvetlen kapcsolatot kifejező összefüggést, vagyis határozzuk meg $\operatorname{ctg} u$ értékét. A trigonometria félszögekre vonatkozó ismert összefüggése szerint [3, 408. old.]

$$\operatorname{ctg} u = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{u}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{u}{2}},$$

ebbe az (1) szerinti összefüggést behelyettesítve

$$\operatorname{ctg} u = \frac{e^{\frac{2x}{k}} - 1}{2 \cdot e^{\frac{x}{k}}};$$

a számlálót és a nevezőt $e^{-\frac{x}{k}}$-val szorozva

$$\operatorname{ctg} u = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2} = \operatorname{sh} \frac{x}{k}.$$

Tehát megkaptuk az alábbi keresett összefüggést:

$$\operatorname{ctg} u = \operatorname{sh} \frac{x}{k}. \tag{2}$$

A mottóban megfogalmazottak tehát megvalósultak, a (2) összefüggés bal oldalán nincs tört (félszög), jobb oldalán nincs kitevő, matematikai tartalma teljesen megegyezik az eredeti összefüggésével, és ráadásul hiperbolikus, ami természetesen várható is volt, mivel a hiperbolikus geometria egyik fontos összefüggéséről van szó. A formula tovább már nem egyszerűsíthető.

Az átalakított összefüggés diszkutálása:

ha $x \to 0$, vagy $k \to \infty$, akkor $\frac{x}{k} \to 0$, $\operatorname{sh} \frac{x}{k} \to 0$, így $\operatorname{ctg} u \to 0$, $u = 90°$ ($\pi/2 \approx 1{,}57$);
ha $x \to \infty$, vagy $k \to 0$, akkor $\frac{x}{k} \to \infty$, $\operatorname{sh} \frac{x}{k} \to \infty$, így $\operatorname{ctg} u \to \infty$, $u = 0°$.

(2) alapján könnyű belátni, hogy ha x növekszik, akkor – mivel $\operatorname{sh} x$ szigorúan monoton növekvő függvény – $\operatorname{ctg} u$ is növekszik, vagyis – mivel $\operatorname{ctg} u$ szigorúan monoton csökkenő függvény – u csökken. A hiperbolikus geometriában tehát a nagyobb párhuzamossági távolsághoz (x) kisebb párhuzamossági szög (u), kisebb párhuzamossági szöghöz nagyobb párhuzamossági távolság tartozik [2, 144. o.]:

$$k = \frac{1}{\sqrt{-K}}, \quad \text{amelyben} \quad K = \text{Gauss-görbület} \quad (K < 0).$$

k-val összemérhető távolságokon nehéz felismerni, hogy a geometria nem euklideszi. A különböző Gauss-görbületű hiperbolikus síkok, terek hasonlóak, akár a különböző sugarú gömbök. Ez a k mennyiség a hiperbolikus geometria természetes hosszegysége, amit a hiperbolikus geometria paraméterének is neveznek. Többnyire ebben a mértékegységben mérik a távolságokat, mert így egyszerűbbek lesznek a képletek.

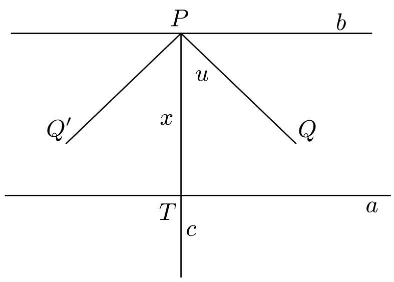
A (2) összefüggésből u-t kifejezve a párhuzamossági szög explicit alakú függvényét kapjuk:

$$u = \operatorname{arcctg} \operatorname{sh} \frac{x}{k} = \operatorname{ctg}^{-1} \operatorname{sh} \frac{x}{k}$$

(angol írásmóddal: $\cot^{-1}\left(\sinh\left(\frac{x}{k}\right)\right)$.

Esetleg ezt a formát is lehetne népszerűsíteni, bár a jobb oldal első ránézésre kissé összetettnek tűnik.

Néhány k esetre ábrázoljuk az $u(x)$ függvényt `www.wolframalpha.com` segítségével.



2. ábra: A párhuzamossági szög k-tól való függése

A *2. ábrán* $y = u(x)$. A párhuzamossági szög(u) néhány számított értékét az *1. táblázat* mutatja

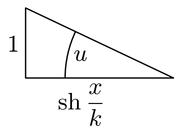
x	k	u	Megjegyzés
0,000 000 001		1,570 796 327	$u \approx \pi/2$
0		1,570 796 326	$u = \pi/2$
20	0,000 000 010	$1{,}818\,99 \cdot 10^{-12}$	$u \to 0$
20	1	$4{,}121\,83 \cdot 10^{-9}$	
20	1 000	$4{,}122\,3 \cdot 10^{-6}$	
20	1 000 000	$4{,}122\,284 \cdot 10^{-3}$	
20	100 000 000	0,391 005 438	
20	1 000 000 000	1,332 810 839	$u \to \pi/2$

1. táblázat: A párhuzamossági szög (u) néhány számított értéke

A fenti táblázat u oszlopát a BJMT Graphic Calculus (GC) programjával határoztuk meg $f(x) = \operatorname{arcctg} \sinh x/k$ függvény megadásával.

Fentieken felbuzdulva vezessük le a párhuzamossági szög összes többi szögfüggvényét is. $\operatorname{ctg} u = \operatorname{sh} \frac{x}{k}$ fentiek szerint levezetett összefüggés alapján az alábbi derékszögű háromszög konstruálható, melynek átfogója a Pitagorasz-tétel alapján

$$\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{k}}\,.$$



3. ábra

Így

$$\cos u = \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{k}}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{k}}},$$

mivel az ismert hiperbolikus összefüggés szerint $\operatorname{ch}^2\frac{x}{k} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{k} = 1$, így

$$\cos u = \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{k}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{x}{k} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{k} + \operatorname{sh}^2\frac{x}{k}}} = \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{k}}{\operatorname{ch}\frac{x}{k}} = \frac{x}{k},$$

tehát

$$\cos u = \frac{x}{k}. \tag{3}$$

(2) alapján

$$\operatorname{ctg} u = \frac{\cos u}{\sin u} = \operatorname{sh}\frac{x}{k},$$

innen

$$\sin u = \frac{\cos u}{\operatorname{sh}\frac{x}{k}},$$

ebbe (3) alapján $\cos u$-t behelyettesítve

$$\sin u = \frac{\frac{x}{k}}{\operatorname{sh}\frac{x}{k}} = \frac{\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{k}}{\operatorname{ch}\frac{x}{k}}}{\operatorname{sh}\frac{x}{k}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{k}}, \qquad \text{azaz} \qquad \sin u = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{k}},$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{\operatorname{ctg} u} = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{x}{k}}, \qquad \text{azaz} \qquad \operatorname{tg} u = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{x}{k}}.$$

Nézzünk egy számpéldát a fentiekben hiperbolizált (2) összefüggés alkalmazására. A kör kerülete a hiperbolikus geometriában Bolyai jelölésével [5, 182. old.]: $O_r = 2\pi k \cdot \operatorname{ctg} u$. Ebbe (2)-t behelyettesítve

$$O_r = 2\pi k \cdot \operatorname{sh}\frac{r}{k}. \tag{3}$$

Felhasználva, hogy $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

$$O_r = 2\pi k \cdot \frac{e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}}{2} = \pi k \cdot e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}. \tag{4}$$

„Gauss a nemeuklideszi geometriát tekintve is remek felfedezésekre jutott, így joggal tekintjük őt e geometria egyik felfedezőjének. Érdekes, hogy 1831. július 12-én írt levelében már szerepel a (4) szerinti összefüggés. Arról azonban nincs adat, hogy miképpen vezette le ezt a kifejezést. A k konstansra pedig már korábbi leveleiben utalt [2, 27–28. old]."

(Ennek ellenére nem tekintjük őt a nemeuklideszi geometria megalkotójának, mivel azt teljes mélységében nem dolgozta ki és nem publikálta.)

Határozzuk meg ez alapján a kör kerületét az euklideszi geometriában.

Bolyai János kimutatta, hogy ha az általa felfedezett geometriában (vagy ahogyan ő nevezte: S-*rendszerben*) k értéke a végtelenhez tart, akkor az euklideszi geometria (vagy ahogyan ő nevezte: Σ-*rendszer*) összefüggéseit kapjuk. (A történeti hűség kedvéért meg kell jegyezni, hogy Gauss Bolyaitól függetlenül is tudta, hogy efféle képletek esetén ha $k \to \infty$, akkor a nemeuklideszi geometriában érvényes összefüggések átmennek az euklideszi geometria megfelelő összefüggéseibe, valamint azt is, hogy ha egy alakzat képletben szereplő méretei az ismeretlen k-hoz képest elenyészően kicsinyek – pl. esetünkben $r \to 0-$, akkor is átmegy a képlet állítástartalma az euklideszi képletbe.) A kerület meghatározásához tehát az alábbi határértéket kell kiszámolni:

$$K = \lim_{k\to\infty} 2\pi \cdot k \cdot \operatorname{sh}\frac{r}{k} = 2\pi \cdot |\infty \cdot 0| = 2\pi \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{r}{k}}{\frac{1}{k}} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

(Bernoulli–L'Hospital-szabályt alkalmazva)

$$= 2\pi \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{ch}\frac{r}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)'} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)' \cdot r = 2\pi \cdot \lim_{k\to\infty} \operatorname{ch}\frac{r}{k} \cdot r = 2\pi \cdot 1 \cdot r = 2r\pi = d \cdot \pi,$$

ami valóban a kör kerülete az euklideszi geometriában. A mérnökök inkább ezt az alakot használják, mert mérhető adatot (d) tartalmaz, ellentétben a sugárral, ami közvetlenül nem mérhető.

Összefoglaló

Fentiekben a bevezetőben ismertetett összes kitűzött célt megvalósítottuk, bebizonyítottuk az Appendix híres képletének hiperbolikus voltát úgy, hogy az ráadásul még formailag is egyszerűbbé – teljesszögűvé – vált, levezettük a párhuzamossági szög szakirodalmakban nem tárgyalt összes szögfüggvényét, melyek összefoglalóan az alábbiak:

$$\sin u = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{k}}, \quad \cos u = \frac{x}{k}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{x}{k}}, \quad \operatorname{ctg} u = \operatorname{sh}\frac{x}{k}.$$

Ezekből jól látszik, hogy mindegyik szögfüggvény hiperbolikus. Mivel a hiperbolikus geometria egy helyes összefüggéséből kiindulva, az euklideszi geometria összefüggéseinek felhasználásával a hiperbolikus geometria újabb, helyes összefüggéseit kaptuk, akkor ebből logikailag következik, hogy az euklideszi geometria levezetések során felhasznált összefüggései a hiperbolikus geometriában is érvényesek. Mivel mindkét geometriában érvényesek, így ebből viszont az következik, hogy egyben az abszolút geometria összefüggései is, mivel az a mindkettőben érvényes tételeket, összefüggéseket tartalmazza.

Irodalom

[1] Holló Berta: *Bolyai János élete és munkássága,* Miskolci Egyetem.

[2] Bolyai János: *APPENDIX, A tér tudománya,* Akadémia Kiadó, Budapest (1973), 211 o.

[3] Obádovics József: *Matematika,* (1965), 808 o.

[4] Weszely Tibor: *BOLYAI JÁNOS matematikai munkássága,* Kritérion Kiadó, Bukarest (1981), 382. o.

[5] Böröczky Károly: *A hiperbolikus geometria (és kapcsolata a diszkrét geometriával),* In.: Bolyai EMLÉKKÖNYV, Vince kiadó, 2004, 182. o.

ALTERNATÍV UTAK AZ ELEMI FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉBEN

GECSE FRIGYES

Már az általános iskolában a tanulók megismerkednek a függvények fogalmával és legegyszerűbb példáival. A függvények bevezetése a *hozzárendelésen* mint alapfogalmon nyugszik. A természet, a mindennapi élet, a tudomány ágai bőséges lehetőséget nyújtanak e fogalom alapszintű magyarázatára. A középiskolában a függvények tanítására több figyelmet fordítanak, bevezetik az ún. elemi függvényeket, de korrekt definíciókat, bizonyításokat objektív okok miatt csak nagyon ritka esetben alkalmaznak. A felsőbb oktatásban csak kivételes szakokon foglalkoznak ezen függvények megalapozásával és részletes tanulmányozásával. Így a szakemberek többségének csak homályos elképzelése lehet e fontos függvények elméletéről. Szerintünk a matematika kezdeti fogalmait és állításait mindenképpen szükséges szilárd alapokra helyezni. Ilyen célt követtünk, amikor a [2, 3] tanulmányokat írtuk. Most az ismert elemi függvények problémáinak egzakt megoldásával fogunk foglalkozni. Több úton elindulva definiáljuk az exponenciális, logaritmus-, hatvány-, trigonometrikus, hiperbolikus függvényeket, megalapozzuk ezek tulajdonságait, elvégezzük a szükséges összefüggések bizonyítását, és néhány alkalmazásra is kitérünk.

A függvények bevezetésére műveleteket, sorozatok határértékét, hatványsorok összegét és függvényegyenleteket használunk. Nem támaszkodunk mélyebb, az analízisben tárgyalt fogalmakra és tényekre, de ismertnek tekintjük az induktív és rekurzív módszereket, a határérték és folytonosság alapjait, a kölcsönösen egyértelműség és az inverz függvény fogalmát, a sorok konvergenciáját és összegének főbb tulajdonságait.

A tanulmány szorosan kapcsolódik a Matematikai Lapokban megjelent [1]–[3] munkához, segédeszközként ajánljuk a [4]– [7] könyveket, amelyekben további ismereteket szerezhetünk.

Az exponenciális- és hatványfüggvény bevezetése a rendőrelv alkalmazásával

Az [1], [3] tanulmányokban több probléma megoldásában alkalmaztunk a valós számok kétoldali megközelítésére speciális sorozatokat. Így a valós kitevőjű hatvány bevezetésére és tulajdonságainak bizonyítására ajánlottunk egyszerű módszert a következőképpen.

Legyen x valós szám, p egy 1-nél nagyobb természetes szám, $q = q(x)$ pedig olyan természetes szám, hogy $q = 0$, ha $x < p$, és $p^q \le x < p^{q+1}$, ha $x \ge p$. Az egészrész segítségével vezetjük be az

$$u_n(x) := u_n(x,p) := [xp^n]p^{-n}, \quad v_n(x) := v_n(x,p) := u_n(x) + p^{-n} \tag{1}$$

sorozatokat a $\mathbb{Z}_{-q} := \{k \in \mathbb{Z} \mid k \ge -q\}$ halmazon. Ezek az x valós szám tizedes törtjével kapcsolatos olyan kétoldali racionális közelítései, melyekre igaz, hogy

$$u_n(x) \le x < v_n(x), \quad \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) = x,$$

$\big(u_n(x)\big)$ monoton növekvő, $\big(v_n(x)\big)$ monoton csökkenő sorozat $\mathbb{Q}$-ban, és

$$u_n(-x) = -u_n(x), \text{ ha } xp^n \in \mathbb{Z}, \quad u_n(-x) = -v_n(x) \text{ ha } xp^n \notin \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{Z}_{-q}.$$

1. definíció. Egy pozitív a valós szám x *kitevőjű hatványának* a következő számot nevezzük:

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{u_n(x)}.$$

[3]-ban és [4]-ben beláttuk, hogy

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{v_n(x)} = \lim_{n\to\infty} a^{u_n(x,p_1)} = \lim_{n\to\infty} a^{v_n(x,p_2)},$$

és racionális x esetén a^x megegyezik a rekurzív módon és gyök által bevezetett racionális kitevőjű hatvánnyal. Ezek után definiálhatjuk az *exponenciális-* és *hatványfüggvényt* a megfelelő hozzárendelési szabállyal: $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$; $x \mapsto x^a$, $x \in \mathbb{R}^+$. A hatványfüggvény kiterjesztésével később foglalkozunk. Az elemi függvények tárgyalását másképpen l. [13]-ban.

1. gyakorlat. a) Igazoljuk, hogy $a^x = \sup\{a^r \mid r \le x,\ r \in \mathbb{Q}\} = \inf\{a^r \mid r \ge x,\ r \in \mathbb{Q}\}$.

b) Bizonyítsuk be a hatvány ismert tulajdonságait a fenti definíció alapján.

Példa. Bemutatjuk az $(a^x)^y = a^{xy}$ egyenlőség bizonyítását tetszőleges pozitív x, y esetén. Vegyük figyelembe, hogy a racionális kitevőjű exponenciális függvény folytonos, és $u_n(xy) \le u_n(x) \cdot v_k(y)$, ha $x > 0$, $n, k \in \mathbb{N}^+$. Ekkor $a > 1$ esetén

$$a^{xy} = \lim_{n\to\infty} a^{u_n(xy)} \le \lim_{n\to\infty} a^{u_n(x)v_k(y)} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{u_n(x)}\right)^{v_k(y)} = (a^x)^{v_k(y)}.$$

Innen határátmenettel kapjuk (mikor $k \to \infty$), hogy $(a^x)^y \ge a^{xy}$. A fordított egyenlőtlenség hasonlóképpen igazolható $v_n(xy) \ge u_n(x) \cdot v_k(y)$ alapján. Az állítás kiterjesztése a $0 < a < 1$ esetre triviális.

Az exp függvény definíciója sorozattal és sorral

A [3] és [4] munkában alkalmazott módszereket követjük, exp-pel jelöljük az e alapú exponenciális függvényt, ahol

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{2}$$

az Euler-féle szám. Ezen sorozatok konvergenciája legegyszerűbben az $(1+h)^n \ge 1+nh$ ($h\in\mathbb{R}$, $h\ge -1$, $n\in\mathbb{N}^+$) Bernoulli-egyenlőtlenséggel bizonyítható a következőképpen. Legyen $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}^+$. Ekkor

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} >$$
$$> \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Ennélfogva az (f_n) sorozat csökkenő és korlátos alulról 1-gyel, ezért a (2) alatti második határérték létezik. Mivel $e_n = \frac{n}{n+1}f_n$, ezért a (2) alatti mindkét határérték létezik és egyenlő, méghozzá $1\le \mathrm{e} < 4$.

Ugyanilyen egyszerűen bizonyítható a következő egyenlőség minden olyan (c_n) számsorozatra, melyre $\lim c_n = 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c_n}{n}\right)^n = 1. \tag{3}$$

Valóban, bizonyos n_0-tól kezdve $|c_n| < 1$, és

$$\left(1+\frac{c_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{c_n}{n}\right)^n = \left(1-\left(\frac{c_n}{n}\right)^2\right)^n \le 1.$$

Ezt és a Bernoulli-egyenlőséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$1+c_n \le \left(1+\frac{c_n}{n}\right)^n \le \left(1-\frac{c_n}{n}\right)^{-n} \le \frac{1}{1-c_n}.$$

A rendőrelv szerint innen a (3) egyenlőség következik.

2. definíció. Adjuk meg az $\big(e_n(x)\big)$ sorozatot a következőképpen: $e_n(x) := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^+$, $x\in\mathbb{R}$.

1. tétel. *Minden valós x esetén bizonyos $n_0(x)$-től kezdve az $\big(e_n(x)\big)$ sorozat pozitív, monoton növekvő, és létezik az alábbi pozitív határérték:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{4}$$

Bizonyítás. A fenti jelölésekkel $e_n(1) = e_n$, és

$$\lim_{n\to\infty} e_n(0) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} e_n(1) = \mathrm{e}.$$

Legyen $x \neq 0$ és $n \geq n_0(x) := \big[|x|\big] + 2$. Világos, hogy $e_n(x) > 0$; igazoljuk, hogy $e_{n+1}(x) > e_n(x)$. Mivel $h := \frac{-x}{(n+1)(n+x)} > -1$, teljesül az $(1+h)^{(n+1)} > 1 + h(n+1)$ Bernoulli-féle egyenlőtlenség, ezért

$$\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} = \left(\frac{1 + x(n+1)^{-1}}{1 + xn^{-1}}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(\frac{n^2 + n + nx}{n^2 + n + nx + x}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+x}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+x}{n} > \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) \cdot \frac{n+x}{n} = 1.$$

A bizonyítottak alapján az $\Big(\big(e_n(x)\big)^{-1}\Big)$, $n \geq n_0$ sorozat pozitív és monoton csökkenő, ezért létezik a $\lim_{n\to\infty} \big(e_n(x)\big)^{-1} =: a$ véges nemnegatív határérték. Mivel a fentiekben x értéke tetszőleges volt, ezért létezik a $\lim_{n\to\infty} \big(e_n(-x)\big)^{-1} =: b$ véges nemnegatív határérték is. Alkalmazzuk a (3) egyenlőséget, amikor $c_n = -\frac{x^2}{n}$:

$$ab = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e_n(x)e_n(-x)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{-n} = 1.$$

A kapott $a \geq 0$, $b \geq 0$, $ab = 1$ összefüggésekből nyilván következik, hogy $a > 0$, $b > 0$, és $\lim_{n\to\infty} e_n(x) = \frac{1}{a} > 0$. ∎

3. definíció. A (4) határértékre vezessük be az $\exp x$ jelölést, és definiáljuk újra, a korábbitól eltérően az $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $x \mapsto \exp x$, $x \in \mathbb{R}$ hozzárendeléssel; így $\exp(x) = \exp x$. Az exp függvényt e*-alapú* vagy *standard exponenciális függvénynek* nevezzük. Az exp függvény két definíciójának ekvivalens voltát az alábbiakban az 1. állításban igazoljuk.

2. tétel. *Az* exp *függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

1. $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = \mathrm{e}$.
2. $\exp x > 0$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén.*
3. $\exp x > 1 + x$ *minden* $x \neq 0$ *esetén.*
4. $\exp x \to +\infty$, *ha* $x \to +\infty$.
5. $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$ *minden* x*-re.*
6. $\exp x \to 0$, *ha* $x \to -\infty$.
7. $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$, *ha* $x, y \in \mathbb{R}$.
8. *Az* exp *függvény szigorúan monoton növekvő.*
9. *Az* exp *függvény folytonos.*
10. $R_{\exp} =]0, +\infty[$.

11. *Az* exp *függvény injektív, az inverz függvénye szigorúan monoton növekvő és folytonos.*
12. *Fennáll az alábbi egyenlőség:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp x - 1}{x} = 1. \tag{5}$$

Bizonyítás. A részletes bizonyítás megtalálható [4]-ben. Az állítások többsége a 3. definíció és az 1. tétel egyszerű következménye, itt csak néhány állítás igazolását mutatjuk be.

A 7. állítás bizonyítása a (3) egyenlőség alapján történik.

A 8. állítás a 7. állítás következménye, mert $x_1 < x_2$, $d = x_2 - x_1$ esetén $\exp d > 1$, és $\exp x_1 < (\exp x_1)\exp d = \exp(x_1 + d) = \exp x_2$.

A 9. állítás igazolására lássuk be az 1., 3. és 5. állítások alapján, hogy

$$1 + z < \exp z \le \frac{1}{1-z}, \quad z \in \left]-\infty, 1\right[. \tag{6}$$

Innen határátmenettel kapjuk, hogy $\lim_{z\to 0}\exp z = 1 = \exp 0$, és tetszőleges x-re

$$\lim_{z\to 0}\exp(x+z) = \left(\lim_{z\to 0}\exp x\right)\lim_{z\to 0}\exp z = \exp x \lim_{z\to 0}\exp z = \exp x.$$

A 10. állítás az exp függvény növekedésének és folytonosságának következménye.

A 11. állítás igaz a folytonos, szigorúan növekvő függvényekre.

Az (5) egyenlőséget a rendőrelv alapján kapjuk, figyelembe véve, hogy (6) szerint

$$1 \le \frac{\exp x - 1}{x} \le \frac{1}{1-x}, \text{ ha } 0 < x < 1; \quad \text{és } \frac{1}{1-x} \le \frac{\exp x - 1}{x} \le 1, \text{ ha } x < 0. \blacksquare$$

Az exp függvény definiálható hatványsorral is, de tulajdonságai egyszerűbben vizsgálhatók a fenti módszerrel. A teljesség kedvéért közöljük az alábbi tétel bizonyítását, hasonló módszer [8]-ban is megtalálható ([8]-ban l. a 11. feladatokat, ahol több állításunk bizonyítása megtalálható sorozatokra geometriai módszerrel; l. a [12] tanulmányt is).

3. tétel. *A*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \tag{7}$$

sor konvergens minden valós x *esetén, és az összege* $\exp x$.

Bizonyítás. Rögzítsük tetszőlegesen x értékét, és vezessük be a (7) sor

$$S_k(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}$$

részletösszegét. Azt kell igazolni, hogy $\lim_{k\to\infty} S_k(x) = \exp x$. A Newton binomiális képlet alapján

$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{x^n}{n^n} =$$

$$= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Vezessük be az $a_k = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!}$, $1 < k \le n$ jelöléseket, és végezzünk becslést felülről. Rögzített $|x|$ értéknél válasszuk meg k és n értékét úgy, hogy $|x| < k < n$ legyen. Így $|a_k| \le \frac{|x|^k}{k!}$ és

$$|a_{k+1}| = |a_k|\left(1 - \frac{k}{n}\right)\frac{x}{k+1} < |a_k|\frac{|x|}{k},$$

$$|a_{k+2}| < |a_{k+1}|\frac{|x|}{k} < |a_k|\frac{|x|^2}{k^2},$$

$$|a_{k+3}| < |a_{k+2}|\frac{|x|}{k} < |a_k|\frac{|x|^3}{k^3}.$$

Ez így tovább folytatható, ezért

$$|a_{k+1}| + |a_{k+2}| + \ldots + |a_n| < |a_k|\left(\frac{|x|}{k} + \frac{|x|^2}{k^2} + \ldots + \frac{|x|^{n-k}}{k^{n-k}}\right) <$$

$$< |a_k|\frac{|x|}{k}\left(1 - \frac{|x|}{k}\right)^{-1} = \frac{|a_k|\cdot|x|}{k - |x|} \le \frac{|x|^{k+1}}{k!\big(k - |x|\big)}.$$

Ezek alapján

$$\big|e_n(x) - (1 + x + a_2 + \ldots + a_k)\big| = |a_{k+1} + \ldots + a_n| < \frac{|x|^{k+1}}{k!\big(k - |x|\big)}. \tag{8}$$

Minthogy

$$\lim_{n\to\infty} e_n(x) = \exp x \;\text{ és }\; \lim_{n\to\infty} a_k = \frac{x^k}{k!}, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{|x|^{k+1}}{k!\big(k - |x|\big)} = 0,$$

ezért (8)-ból határátmenettel, mikor $n \to \infty$, majd $k \to \infty$, megkapjuk a kívánt eredményt:

$$\big|\exp x - S_k(x)\big| \le \frac{|x|^{k+1}}{k!\big(k - |x|\big)}, \quad \lim_{k\to\infty}|S_k(x) - \exp x| = 0, \quad \lim_{k\to\infty} S_k(x) = \exp x. \; \blacksquare$$

2. (emelt szintű) **gyakorlat.** Elfogadva az exp függvény új definícióját a (7) sor összegével bizonyítsuk be a 2. tétel állításait az 1. tétel felhasználása nélkül.

Az exponenciális-, logaritmus- és hatványfüggvények

4. definíció. Az exp függvény inverz függvényét – amely létezik a 2. tétel 8. állítása szerint – *természetes logaritmusnak* nevezzük, és az ln szimbólummal jelöljük.

A 2. tétel alapján az $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan növekvő és folytonos, értéke az x helyen: $\ln(x) = \ln x$.

5. definíció. Legyen a olyan valós szám, hogy $a > 0$, $a \neq 1$. Az $x \mapsto \exp(x \ln a)$, $x \in \mathbb{R}$ hozzárendeléssel kapott függvényt *a alapú exponenciális függvénynek* nevezzük és $\exp_a$-val jelöljük; $\exp_a(x)$ helyett az $\exp_a x$, a^x szimbólumokat is használjuk.

Minthogy $\exp 1 = \mathrm{e}, \ln \mathrm{e} = 1$, ezért $\exp_{\mathrm{e}} = \exp$ és $1^x = \exp(x \ln 1) = \exp(x \cdot 0) = 1$, de ez utóbbi függvénnyel nem foglalkozunk, ez egy konstans függvény.

6. definíció. Legyenek b és x pozitív valós számok. A fentiek szerint

$$\exp(x \ln b) = \exp(\ln x^b) = x^b,$$

így az 1. szakaszban értelmezett $x \mapsto x^b$ hatványfüggvényre új definíciót nyertünk.

1. állítás. *A hatvány- és a-alapú exponenciális függvények fent bevezetett különböző definíciói ekvivalensek. Fennállnak az alábbi egyenlőségek:*

$$a^x = \exp(x \ln a) = \lim_{n\to\infty} a^{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} a^{v_n(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Az a szám x kitevőjű hatványát jelöljük megfelelően a^x-szel az 1. szakasz definíciója szerint és $\exp(x \ln a)$-val az 5. definíció szerint. Mivel az exp függvény folytonos, és alkalmazható a 3. tétel, ezért minden valós x-re

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \exp\big(u_n(x) \ln a\big) = \exp\Big(\lim_{n\to\infty} u_n(x) \ln a\Big) =$$

$$= \exp(x \ln a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n. \ \blacksquare$$

Az exp és $\exp_a$ függvények tulajdonságai hasonlóak, a 2. tétel általánosítása szinte triviálisan elvégezhető. A teljesség kedvéért közöljük a tételt, a bizonyítást önálló munkára ajánljuk.

4. tétel. *Legyenek a, b egytől különböző pozitív valós számok és $x, z \in \mathbb{R}$. Az $\exp_a$ függvénynek a következő tulajdonságai vannak:*

1. $D_{\exp_a} = \mathbb{R}$, $R_{\exp_a} =]0, +\infty[$.
2. $\exp_a 0 = 1$, $\exp_a 1 = a$.
3. $\exp_a(-x) = (\exp_a x)^{-1}$.
4. $\exp_a(x+z) = (\exp_a x)(\exp_a z)$, $\exp_a(x-z) = (\exp_a x)(\exp_a z)^{-1}$.
5. $\exp_{ab} = \exp_a \cdot \exp_b$, $\exp_{\frac{a}{b}} = (\exp_a)(\exp_b)^{-1}$.

6. $(a^x)^z = a^{xz} = (a^z)^x$.
7. *Az* $\exp_a$ *függvény szigorúan növekvő, ha* $a > 1$, *és szigorúan csökkenő, ha* $0 < a < 1$.
8. *Ha* $0 < a < b$, *akkor* $a^x < b^x$ *pozitív* x *esetén, és* $a^x > b^x$ *negatív* x *esetén.*
9. *Az* $\exp_a$ *függvény folytonos.*
10. $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, *ha* $0 < a < 1$;
    $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, *ha* $a > 1$.
11. *Az* $\exp_a$ *függvénynek* $a \neq 1$ *esetén létezik inverz függvénye, amely folytonos és szigorúan növekvő, ha* $a > 1$, *valamint szigorúan csökkenő, ha* $0 < a < 1$.
12. *Fennáll az alábbi egyenlőség:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

7. definíció. Az a-alapú exponenciális függvény inverzét *a-alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük és a $\log_a$ szimbólummal jelöljük; $a = \mathrm{e}$ és $a = 10$ esetén az ln, illetve lg jeleket használjuk. A [4] munkához hasonlóan tételbe foglaljuk ezen függvény tulajdonságait.

5. tétel. *Legyenek* a, b, u, v, x *pozitív számok, de* $a \neq 1$, $b \neq 1$, *továbbá* c, z *valós számok, de* $c \neq 0$. *Ekkor*

1. *a* $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos és szigorúan monoton, mégpedig növekvő, ha* $a > 1$, *és csökkenő, ha* $0 < a < 1$;
2. $\exp_a \circ \log_a = id_{\mathbb{R}^+}$, $\log_a \circ \exp_a = id_{\mathbb{R}}$, *azaz* $a^{\log_a x} = x$, $\log_a(a^z) = z$;
3. $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_e = \ln$;
4. $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$, $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$, $\log_a(u^z) = z \log_a u$;
5. $\log_a u = (\log_b u)(\log_b a)^{-1}$, $\log_a b = (\log_b a)^{-1}$, $\log_{a^c} u = \frac{1}{c} \log_a u$;
6. $\log_a x < \log_b x$, *ha* $a < b$, $x < 1$; $\log_a x > \log_b x$, *ha* $a < b$, $x > 1$; *itt* a, b *ugyanazon* $]0, 1[$ *vagy* $]1, +\infty[$ *intervallum elemei;*
7. *Fennáll az alábbi egyenlőség:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$$

Bizonyítás. A legtöbb állítás a logaritmusfüggvény definíciójának és az exponenciális függvény tulajdonságainak következménye, csak egyesek igazolását mutatjuk be.

4. Legyen $\log_a u = x$, $\log_a v = y$. Ekkor $a^x = u$, $a^y = v$, $uv = a^x a^y = a^{x+y}$, $\frac{u}{v} = a^{x-y}$, $u^z = (a^x)^z = a^{xz}$, ahonnan $x + y = \log_a(uv)$, $x - y = \log_a \left(\frac{u}{v}\right)$, $zx = \log_a(u^z)$. Ez megegyezik a bizonyítandó egyenlőségekkel.
5. Az első egyenlőséget az $u = a^{\log_a u}$ azonosság logaritmálásával kapjuk a 4. szabály szerint. A másodikat az elsőből kapjuk $u = b$ helyettesítéssel. A harmadik bizonyítása $u \neq 1$ esetén:

$$\log_{a^c} u = \frac{1}{\log_b(a^c)} = \frac{1}{c \log_b a} = \frac{1}{c} \log_a u.$$

Ha $u = 1$, akkor az egyenlőség azonos $0 = 0$-val.

6. Legyen $a < b < 1$ és $x < 1$. Ekkor az x-alapú $\log_x$ logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ennélfogva
$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a} < \frac{1}{\log_x b} = \log_b x.$$
A többi esetben a bizonyítás hasonló.
7. A 4. tétel 12. állítása szerint $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$, és az $x = \log_a(1+t)$ helyettesítéssel
$$a^x - 1 = t; \quad \ln a = \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)}.$$
Innen a 7. állítás adódik (hiszen $a \neq 1$, $\ln a \neq 0$): $\lim_{t\to 0} \frac{\log_a(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln a}$. ■

Eddig az $x \mapsto x^b$ hatványfüggvényt csak pozitív x, b értékeknél definiáltuk. Terjesszük ki most ezen függvényt a lehető legáltalánosabb módon, ahogyan az x^b kifejezésnek észszerű értelem adható.

8. definíció. *Hatványfüggvénynek* nevezzük azt az $\mathbb{R}$ legbővebb részhalmazán értelmezett H (vagy részletesebben H_b) függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $x \mapsto x^b$, pozitív x esetén $x^b = \exp(b \ln x)$, egyes b értékek esetén pedig a hozzárendelést páros vagy nempáros módon terjesztjük ki nempozitív x értékekre, ahogyan azt részletesen az alábbi tételben adjuk meg. A racionális b számot nem egyszerűsíthető $b = \frac{m}{n}$ alakban írjuk fel, ahol $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$.

6. tétel. *A H hatványfüggvény főbb tulajdonságai a következők:*

1. *Ha $b = 0$, akkor $H(x) = 1$, $x \in D_H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
2. *Ha $b > 0$; m, n páratlanok, akkor $D_H = R_H = \mathbb{R}$ és H páratlan, szigorúan növekvő.*
3. *Ha $b > 0$; m páros, akkor $D_H = \mathbb{R}$, $R_H = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$ és H páros, szigorúan növekvő $\mathbb{R}_0^+$-on.*
4. *Ha $b < 0$; m, n páratlanok, akkor $D_H = R_H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és H páratlan, szigorúan csökkenő $\mathbb{R}^+$-on, $\lim_{x\to 0+0} H(x) = +\infty$.*
5. *Ha $b < 0$; m páros, akkor $D_H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $R_H = \mathbb{R}^+$ és H páros, szigorúan csökkenő $\mathbb{R}^+$-on, $\lim_{x\to 0} H(x) = +\infty$.*
6. *Ha $b < 0$ és m páratlan, n páros vagy a irracionális, akkor $D_H = R_H = \mathbb{R}^+$ és H szigorúan csökkenő, $\lim_{x\to 0+0} H(x) = +\infty$.*
7. *Ha $b > 0$, m páratlan, n páros vagy b irracionális, akkor $D_H = R_H = \mathbb{R}_0^+$ és H szigorúan növekvő.*
8. *Minden b esetén H folytonos; ha $b < 0$, akkor 0 másodfajú szakadási hely; ha $b \neq 0$, akkor H leszűkítése $\mathbb{R}^+$-ra szigorúan monoton bijekció és $H(1) = 1$.*
9. *Fennáll az alábbi egyenlőség:*
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^b - 1}{x} = b.$$

Bizonyítás. A hatvány korábban bebizonyított tulajdonságai alapján minden állítás egyszerűen ellenőrizhető. Az utolsó egyenlőséget a 4. és 5. tétel alapján kapjuk meg a következőképpen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^b-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\Big(\exp\big(b\ln(1+x)\big)-1\Big)b\ln(1+x)}{bx\ln(1+x)}=$$

$$=b\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\exp\big(b\ln(1+x)\big)-1}{b\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=b.\ \blacksquare$$

A [4] könyvben számos kérdésre részletesebb információt kaphatunk, megismerkedhetünk a grafikonokkal, egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel és határértékkel kapcsolatos feladatok megoldási módszereivel is.

Függvényegyenletek

A függvényegyenletek tanulmányozásával a matematika egyik fontos ágazata foglalkozik [9]. Számos egyenlet megoldása a [10] könyvben is megtalálható. Az alábbiakban a fent tárgyalt függvényeket olyan egyenlettel írjuk le, melyben a függvény az ismeretlen egy megadott függvényosztályban (általában ez folytonos függvények osztálya egy adott kezdeti feltétellel). Kezdjük néhány egyszerű, az általános iskolában ismert függvénnyel.

Az $f(x)=c$, $x\in\mathbb{R}$ konstansfüggvény meghatározható úgy is, mint az $f(x)=f(ax)$, $(a\in\mathbb{R}\setminus\{1\})$ függvényegyenlet megoldása az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ típusú folytonos függvények osztályában az $f(0)=c$ kezdeti feltétellel. Valóban, egyrészt az $f(x)=c$ konstansfüggvény folytonos, $f(x)=c=f(ax)$ és $f(0)=c$. Másrészt, ha f megoldása a feladatnak, akkor $|a|>1$ esetén minden x-re

$$f(x)=f\left(\frac{x}{a}\right)=f\left(\frac{x}{a^2}\right)=\ldots=f\left(\frac{x}{a^n}\right),$$

és f folytonossága miatt $f(x)=\lim_{n\to\infty}f(xa^{-n})=f(0)=c$. Ha $0<|a|<1$, akkor az $f(x)=f(a^nx)$ egyenlőséget használjuk. Tehát a konstansfüggvény a megfogalmazott feladat egyetlen megoldása. De itt a függvényegyenlet a paramétert tartalmaz, így a konstansfüggvényre végtelen sok függvényegyenletet találtunk.

2. állítás. *Az $f(x)=cx$, $x\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$ egyenes arányosság függvénye (másképpen homogén lineáris függvény) definiálható mint az $f(x+y)=f(x)+f(y)$ függvényegyenlet megoldása a folytonos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ típusú függvények osztályában az $f(1)=c$ feltétellel. Az $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ inverz függvény létezik és folytonos.*

Bizonyítás. Csak az egyértelműséget igazoljuk, a többi állítás nyilvánvaló. Legyen f a feladat megoldása. Minden $x\in\mathbb{R}$ esetén $f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)$ miatt $f(0)=0$; $f\big(x+(-x)\big)=f(x)+f(-x)=f(0)=0$ miatt $f(-x)=-f(x)$. A teljes indukció szerint $f(nx)=nf(x)$, és $f\big(\frac{x}{n}\big)=\frac{1}{n}f(x)$, $n\in\mathbb{N}^+$, ezért minden $r=\frac{p}{q}$

racionális szám esetén $f(rx) = rf(x)$, $f(r) = rf(1) = cr$. Az f folytonossága következtében

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\big(u_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} cu_n(x) = cx. \ \blacksquare$$

3. gyakorlat. Oldjuk meg az $f\big(f(x+1)\big) = f\big(f(x)+1\big)$ függvényegyenletet a lineáris törtfüggvények osztályában, ha $f(0) = 1$.

4. gyakorlat. Írjunk fel függvényegyenletet:

a) az egészrész-függvény leszűkítésére $[0, 2[$-re;

b) az sgn jelfüggvényre ($\mathrm{sgn}(0) = 0$; $\mathrm{sgn}(x) = 1$, ha $x > 0$; $\mathrm{sgn}(x) = -1$, ha $x < 0$);

c) az $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$ másodfokú függvényre.

7. tétel. *Minden 1-től különböző pozitív a szám esetén létezik pontosan egy olyan folytonos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ típusú függvény, amelyre minden $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén $f(xy) = f(x) + f(y)$ és $f(a) = 1$. Ez a függvény a $\log_a$.*

Bizonyítás. Az 5. tétel szerint a $\log_a$ függvény eleget tesz a tétel feltételeinek, ezért csak az egyértelműséget kell bizonyítani. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olyan tetszőleges folytonos függvény, amelyre $f(xy) = f(x) + f(y)$ és $f(a) = 1$. Minthogy $f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$, ezért $f(1) = 0$. Ha $z \in \mathbb{R}^+$ és k pozitív egész szám, akkor indukcióval igazolható, hogy $f(z^k) = kf(z)$. Továbbá $0 = f(1) = f(z^{-k}z^k) = f(z^{-k}) + f(z^k)$ miatt $f(z^{-k}) = -f(z^k) = -kf(z)$, tehát $f(z^k) = kf(z)$, $f(a^k) = kf(a) = k$ minden egész k-ra. Hasonlóan minden pozitív egész m és tetszőleges egész k esetén

(9)
$$1 = f(a) = f\Big(\big(\sqrt[m]{a}\big)^m\Big) = mf\Big(a^{\frac{1}{m}}\Big), \quad f\Big(a^{\frac{1}{m}}\Big) = \frac{1}{m}, \quad f\Big(a^{\frac{k}{m}}\Big) = kf\Big(a^{\frac{1}{m}}\Big) = \frac{k}{m}.$$

Legyen x tetszőleges valós szám, és adjuk meg az 1. szakaszban bevezetett $u_n(x)$-et olyan nem egyszerűsíthető $\frac{k_n}{m_n}$ alakban, amelyben $k_n, m_n \in \mathbb{Z}$, $m_n > 0$ minden pozitív egész n esetén. Ekkor (9) szerint felírhatjuk az alábbi egyenlőségeket:

$$f\Big(a^{u_n(x)}\Big) = u_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{10}$$

Vegyünk határértéket a (10) egyenlőség mindkét oldalán, amikor $n \to \infty$, figyelembe véve az $u_n(x)$ sorozatnak az első szakaszban közölt tulajdonságait, valamint azt, hogy az f, $\exp_a$ függvények folytonosak. Így kapjuk, hogy $f(a^x) = x$. Ha $a^x = z$, akkor $x = \log_a z$, és $f(z) = \log_a z$ tetszőleges pozitív valós z-re. $\blacksquare$

5. gyakorlat. Igazoljuk, hogy a 7. tételben a folytonos megszorítás f-re felcserélhető szigorúan monoton feltételre.

8. tétel. *Minden 1-től különböző pozitív a szám esetén létezik pontosan egy olyan folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ típusú függvény, amelyre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+y) = f(x)f(y)$ és $f(1) = a$. Ez a függvény az $\exp_a$.*

Bizonyítás. A 4. tétel szerint az $\exp_a$ függvény eleget tesz a tétel feltételének. Legyen f is ilyen tulajdonsággal rendelkező függvény. Nézzük a $g = \log_a \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ összetett függvényt, amely folytonos,

$$g(x+y) = \log_a \big(f(x+y)\big) = \log_a \big(f(x)f(y)\big) = \log_a f(x) + \log_a f(y) = g(x) + g(y)$$

és $g(1) = \log_a \big(f(1)\big) = \log_a(a) = 1$. A 2. állítás szerint $g(x) = x$, hiszen $g(x) = cx$, $1 = g(1) = c \cdot 1$. Innen következik, hogy f azonos a $\log_a$ függvény inverzével, azaz $\exp_a$-val. ∎

9. tétel. *Minden olyan folytonos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre az $f(xy) = f(x)f(y)$ azonosság érvényes, hatványfüggvény, azaz létezik olyan pozitív b szám, hogy $f : x \mapsto x^b$, $x \in \mathbb{R}^+$.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításához hasonlóan a $g(x) = \log_c f(a^x)$, $x \in \mathbb{R}$ segédfüggvényt használjuk ($c > 0$, $c \neq 1$, $a > 1$). ∎

Megjegyzés. A 7.–9. tételek lehetőséget adnak arra, hogy az exponenciális-, loogaritmus- és hatványfüggvényeket függvényegyenletekkel definiáljuk.

6. gyakorlat. Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényre teljesülnek az $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ azonosságok, akkor $f(x) = cx$, $x \in \mathbb{R}$, ahol $c = 0$ vagy $c = 1$. Igazoljuk ezt az f folytonosságának kikötése nélkül (belátva, hogy f szigorúan növekvő)!

7. gyakorlat. Oldjuk meg az alábbi függvényegyenleteket megadott kezdeti feltétellel a polinomfüggvények osztályában:

a) $f(x) - 2f(x+1) + f(x+2) = 0$, $f(1) = 0$,

b) $xf(x+1) = (x+1)f(x)$, $f(1) = 10$.

Trigonometrikus függvények

A középiskolában a trigonometrikus függvényeket geometriai módszerrel tanítják. Ennek megalapozásával nem foglalkozunk. A koszinusz függvény bevezetését háromféle módszerrel oldjuk meg: sorozat segítségével, hatványsorral és függvényegyenlettel. Az [1] és [11] munkák tervét követjük, a részletek és bizonyítások ott megtalálhatók kisebb változásokkal. A π számot az alábbi határértékkel definiáljuk:

$$\pi := \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - 2\tau_{n-1}}, \tag{11}$$

a (τ_n) sorozat rekurzív megadása: $\tau_0 = 0$, $\tau_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\tau_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Az [1] cikkben és a [11] könyvben megtalálható ezen sorozat konvergenciájának bizonyítása, illetve a definíció geometria alapú magyarázata.

[1]-hez hasonlóan definiáljuk a $(C_{k,n}) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kétszeres sorozatot:

$$C_{0,n} = 1, \quad C_{1,n} = \tau_n, \quad C_{k+1,n} = 2\tau_n C_{k,n} - C_{k-1,n}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \ \ k > 0.$$

A fentiekben a függvények bevezetésében gyakran támaszkodtunk a racionális számok halmazára. Ezen halmaz szerepét most egy speciális Ω_γ halmaz tölti be, amelyet egy pozitív γ paramétertől függően vezetünk be a következőképpen:

$$\omega_n := \omega_n(\gamma) := \gamma 2^{-n}, \ \ n \in \mathbb{N}; \ \ \Omega_\gamma := \{k\omega_n \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}; \ \ \Omega_\gamma^\circ := \Omega_\gamma \cap \left]0, \gamma\right[.$$

Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy a [11], [1] munkákban a jelölések kissé eltérnek egymástól, az [1] cikk feltételeiben a $\frac{\gamma}{2}$-t γ-ra cseréltük, itt [1] jelöléseit követjük.

Az Ω_γ halmaz zárt az összeadás, kivonás, egész számmal és $\frac{1}{2}$-del történő szorzás műveletekre, valamint sűrű $\mathbb{R}$-ben. Most is az (1)-típusú sorozatokat alkalmazzuk azzal a különbséggel, hogy p^{-n} helyett ω_n-t használunk, a jelölést nem változtatjuk, csak p helyett γ-t írunk:

$$u_n(x) := u_n(x, \gamma) := \left[x(\omega_n)^{-1}\right]\omega_n, \quad v_n := (x) := v_n(x, \gamma) := u_n(x) + \omega_n, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Ezen sorozatok az (1) sorozatokkal hasonló tulajdonsággal rendelkeznek, tagjaik az Ω_γ halmaz elemei. Az Ω_γ halmazon megadunk egy Cos_γ függvényt a

$$\mathrm{Cos}_\gamma\big(k\omega_n(\gamma)\big) := \mathrm{Cos}_\gamma\big(-k\omega_n(\gamma)\big) := C_{k,n}, \quad k, n \in \mathbb{N}$$

egyenlőségekkel. A Cos_γ függvény folytonosan kiterjeszthető az $\mathbb{R}$ halmazra a következőképpen (a kiterjesztett függvényt $\cos_\gamma$-val jelöljük):

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cos}_\gamma\big(u_n(x,\gamma)\big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cos}_\gamma\big(v_n(x,\gamma)\big) =: \cos_\gamma(x), \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Az [1]-ben igazolt megfelelő állításokat tétel formájában fogalmazzuk meg.

10. tétel.

1. *A* $\cos_{\frac{\pi}{2}}$ *függvény azonos a geometriából ismert klasszikus* cos *függvénnyel;*

$$\cos_\gamma(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2\gamma}x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. *A* $\cos_\gamma$ *a*

$$C(x+y) + C(x-y) = 2C(x)C(y) \tag{13}$$

D'Alembert–Poisson-függvényegyenlet egyetlen megoldása olyan $C_{0,\gamma}(\mathbb{R})$ *függvényosztályban, amelynek elemei az* $\mathbb{R}$*-en definiált valós függvények az* $f(\gamma) = 0$*, valamint az* $f(x) > 0$ *feltétellel, amikor* $0 < x < \gamma$*.*

Ezek szerint a cos függvényre két új definíciót alkalmazhatunk, amelyek ekvivalensek a geometriából ismert definícióval. A sin függvény definiálható a $\sin x := \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ egyenlőséggel. A (13) egyenlet alapján könnyen igazolhatók a cos és sin tulajdonságai [4], [11], pl. a cos páros, a sin páratlan függvény, mindkettő 2π-periodikus, fennállnak a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ azonosságok.

8. gyakorlat. Adjunk meg olyan trigonometrikus függvényt, amely megoldása az $f(x-1) + f(x) + f(x+1) = 0$ függvényegyenletnek az $f\left(\frac{3}{4}\right) = 1$ kezdeti feltétellel.

Az exponenciális függvényhez hasonlóan a $\cos, \sin$ függvények is megadhatók hatványsorral.

11. tétel. *Az alábbi hatványsorok konvergensek minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, és összegük $\cos x$, illetve $\sin x$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \tag{14}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots. \tag{15}$$

Bizonyítás. Néhány ismert állítást közlünk a sorok konvergenciájáról.

Ha a sor tagjai nem negatívak, akkor a konvergencia kritériuma a részletösszegek sorozatának korlátossága.

Egy sor biztosan konvergens, ha a tagjainak abszolútértékével megadott sor konvergens.

Egy $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ sort *Leibnitz-típusúnak* neveznek, ha egy bizonyos n_0-tól kezdve $|a_{n+1}| \le |a_n|$, $a_n a_{n+1} < 0$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Minden Leibnitz-típusú sor konvergens, valamit az S összegére és az $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ részletösszegére fennáll az $|S - S_n| \le |a_{n+1}|$ egyenlőtlenség.

A (14), (15) sorok Leibnitz-típusúak minden x értékénél, mert pl. $(2n+1)(2n+2) \le x^2$ esetén

$$\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \le \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0.$$

Jelöljük a (14) sor összegét $\operatorname{Cos} x$-szel, és igazoljuk, hogy az $x \mapsto \operatorname{Cos} x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény folytonos minden x_0 helyen. Tetszőleges pozitív ε-ra adjuk meg az n_0 természetes számot úgy, hogy teljesüljenek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$(2n_0+1)(2n_0+2) \ge \big(|x_0|+1\big)^2, \quad \big(|x_0|+1\big)^{2n_0+2} < (2n_0+2)!\frac{\varepsilon}{3}.$$

Az $x \mapsto S_{n_0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ polinomfüggvény folytonos az x_0 helyen, ezért létezik olyan $\delta \in \,]0;1[$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $\big|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Mindezeket figyelembe véve alkalmazhatjuk a Leibnitz-típusú sor összegére közölt becslést, és azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\big|\operatorname{Cos}(x)-\operatorname{Cos}(x_0)\big|\le\\ &\le\big|\operatorname{Cos}(x)-S_{n_0}(x)\big|+\big|S_{n_0}(x)-S_{n_0}(x_0)\big|+\big|S_{n_0}(x_0)-\operatorname{Cos}(x_0)\big|\le\\ &\le\frac{x^{2n_0+2}}{(2n_0+2)!}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{x_0^{2n_0+2}}{(2n_0+2)!}\le\frac{\big(|x_0|+1\big)^{2n_0+2}}{(2n_0+2)!}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.\end{aligned}$$

Ennélfogva a Cos függvény folytonos x_0-ban, így $\mathbb{R}$-en is. Minthogy $\operatorname{Cos}(0)=1$, a folytonosság következtében $\operatorname{Cos}(x)>0$ az $x=0$ egy bizonyos környezetében. A Leibnitz-típusú sor összegére közölt becslést alkalmazva kapjuk, hogy $\operatorname{Cos}(2)=1-2+\frac{2^4}{4!}-\ldots<1-2+\frac{16}{24}<0$. Legyen A azon a pozitív számok halmaza, amelyekre $\operatorname{Cos}(x)>0$, ha $0\le x<a$. Ha $\gamma_0:=\sup A$, akkor a Cos folytonossága miatt $\operatorname{Cos}(\gamma_0)=0$.

Igazoljuk, hogy a Cos függvény a (13) egyenlet megoldása a $C_{0,\gamma_0}(\mathbb{R})$ osztályban.

Az $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ nem negatív tagú sor konvergens minden x esetén (a $\overline{S}(x)$ összeghez), mert ezen sor $\overline{S_n}(x):=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ részletösszegei korlátosak

$$\overline{S}_n(x)\le\overline{S}_{n_0-1}(x)+\frac{x^{2n_0}}{(2n_0)!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)=\overline{S}_{n_0}(x)+\frac{2x^{2n_0}}{(2n_0)!}$$

következtében, ha $(2n_0+1)(2n_0+2)\ge 2x^2$ és $n\ge n_0$.

Alkalmazzuk a Newton binomiális képletét és a $T_{2n}=\sum(-1)^{i+j}\frac{x^{2i}y^{2j}}{(2i)!(2j)!}$ jelölést, ahol az összegzés $\sum$ jele olyan i,j értékekre hat, amelyekre $0\le i,j\le 2n$, $2n<i+j\le 4n$. Így kapjuk a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\big(S_{2n}(x+y)+S_{2n}(x-y)\big)=\\ &=1-\frac{1}{2!}\big(x^2+y^2\big)+\frac{1}{4!}\left(x^4+\binom{4}{2}x^2y^2+y^4\right)+\ldots+\\ &\quad+\frac{1}{(4n)!}\left(x^{4n}+\binom{4n}{2}x^{4n-2}y^2+\binom{4n}{4}x^{4n-4}y^4+\ldots+y^{4n}\right)=\\ &=\sum{}'(-1)^{i+j}\frac{x^{2i}y^{2j}}{(2i)!(2j)!}=:Q_{2n},\end{aligned}$$

itt a Q_{2n} összegben $0\le i,j\le 2n$, $i+j\le 2n$;

$$S_{2n}(x)S_{2n}(y)=\left(\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}\right)\left(\sum_{j=0}^{2n}(-1)^j\frac{x^{2j}}{(2j)!}\right)=Q_{2n}+T_{2n},\tag{16}$$

$$S_{2n}(x)S_{2n}(y)=\frac{1}{2}\big(S_{2n}(x+y)+S_{2n}(x-y)\big)+T_{2n}.$$

Minthogy a T_{2n} kifejezésben $i > n$ vagy $j > n$, ezért

$$|T_{2n}| \le \overline{S}_{2n}(x)\big(\overline{S}_{2n}(y) - \overline{S}_n(y)\big) + \overline{S}_{2n}(y)\big(\overline{S}_{2n}(x) - \overline{S}_n(x)\big),$$

$$\lim_{n\to\infty} T_{2n} = \overline{S}(x)\cdot 0 + \overline{S}(y)\cdot 0 = 0.$$

Ennek figyelembevételével (16)-ból határátmenettel megkapjuk a szükséges egyenlőséget:

$$2\operatorname{Cos}(x)\operatorname{Cos}(y) = \operatorname{Cos}(x+y) + \operatorname{Cos}(x-y).$$

Tehát a Cos függvény a (13) egyenlet megoldása a $C_{0,\gamma_0}(\mathbb{R})$ osztályban. Lássuk be, hogy $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$. A fent említett becslést alkalmazzuk a (14) sor összegére $S_1(x)$ által, amikor $|x| < 1$: $\Big|\operatorname{Cos}(x) - \big(1 - \frac{x^2}{2}\big)\Big| \le \frac{x^4}{4!}$. Innen $x = 2z \ne 0$ esetén

$$\left|\frac{1-\operatorname{Cos}(2z)}{2z^2} - 1\right| \le \frac{z^2}{3}, \quad \lim_{z\to 0}\frac{1-\operatorname{Cos}(2z)}{2z^2} = 1. \tag{17}$$

Teljes indukcióval könnyen igazolható [11], hogy a (13) egyenlet $C_{0,\gamma_0}(\mathbb{R})$-beli megoldására $C(\omega_n) = \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$. A korábbiak alapján felírhatók a következő egyenlőségek:

$$\frac{1-\operatorname{Cos}(2\omega_n)}{2\omega_n^2} = \frac{1-\operatorname{Cos}(\omega_{n-1})}{2\omega_n^2} = \frac{(1-\tau_{n-1})2^{2n+1}}{4\gamma_0^2} = \left(\frac{\sqrt{2-2\tau_{n-1}}\,2^n}{2\gamma_0}\right)^2. \tag{18}$$

A (11), (17) és (18) egyenlőségek következtében $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-2\tau_{n-1}}\,2^n}{2\gamma_0} = 1$ és $2\gamma_0 = \pi$. A 10. tétel 2. állítása figyelembe vételével kapjuk, hogy $\operatorname{Cos} = \cos_{\frac{\pi}{2}} = \cos$.

A 11. tétel 2. állításának bizonyítását végezzük el önállóan (ez [11]-ben megtalálható). Útmutatásként közöljük, hogy a $\operatorname{Sin}^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)$ egyenlőség bizonyításával kell kezdeni a fent használt módszerrel, ahol $\operatorname{Sin} x$ a (15) sor összege, ebből a $\big|\operatorname{Sin}(x)\big| = \big|\sin(x)\big|$ egyenlőség következik. Ez alapján a $\operatorname{Sin}(x) = \sin(x)$ egyenlőség bizonyítása egyszerű a $[0,2]$ intervallumon. Indukciós módszerrel ezt az egyenlőséget kiterjesztjük az egész számtengelyre a $\operatorname{Sin}(2x) = 2\operatorname{Sin}(x)\cos(x)$ egyenlőség figyelembevételével. ■

A további trigonometrikus függvények definíciója a megszokott módon történik:

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}, \; x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}, \; x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\sec x := \frac{1}{\cos x}, \; x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \operatorname{cosec} x := \frac{1}{\sin x}, \; x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Az árkuszfüggvényeket mint inverz függvényeket definiáljuk a sin, cos, tg, ctg függvények leszűkítésére vonatkozóan megfelelően a $\big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$, $[0,\pi]$, $\big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big[$, $]0,\pi[$ intervallumokra [11].

Ezen függvények tulajdonságairól, a trigonometria feladatairól és legegyszerűbb alkalmazásairól a [11] könyvben olvashatunk. Szükségesnek tartjuk egy fontos állításról, a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{19}$$

egyenlőségről néhány megjegyzést tenni. A geometrián alapuló előadásokban ez könnyen bizonyítható, csakúgy mint a (15) egyenlőség alkalmazásával. De színvonalas előadásokban elvárható egy közvetlen analitikus bizonyítás. A [11] könyvben ezt az egyenlőséget bebizonyítottuk a szakasz elején alkalmazott módszerrel.

Hiperbolikus függvények

A *hiperbolikus függvények* bevezetésére is számos lehetőség nyílik. Az exponenciális függvények ismeretében a legegyszerűbb út az alábbi explicit képletekkel adódik (a jelölések és elnevezések ismertek, x értékei értelemszerűen választottak):

$$\operatorname{sh} x := \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch} x := \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

A sh, ch függvények egyszerűen megadhatók hatványsorokkal is a (14), (15) sorok alapján:

$$\operatorname{sh} x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots,\quad \operatorname{ch} x=1+\frac{2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots,$$

ezek konvergensek az $\mathbb{R}$ halmazon.

A hiperbolikus függvények közül csak a ch függvény nem injektív, így szükség van a $\operatorname{ch}|_{[0,+\infty[}$ leszűkítés alkalmazására. Ezután bevezethetjük a hiperbolikus függvények arsh, arch, arth, arcth inverz függvényeit, melyeknek közös nevük *áreafüggvények.* Ezek megadhatók az alábbi képletekkel is [4]:

$$\operatorname{arsh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in\mathbb{R};\quad \operatorname{arch} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in[1,+\infty[\,;$$

$$\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x\in\,]-1,1[\,;\quad \operatorname{arcth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\ x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,.$$

A fenti képletek segítségével könnyen megállapíthatók a hiperbolikus- és áreafüggvények tulajdonságai, segédeszközként a [4] könyvet is használhatjuk.

Az [1] cikkben bebizonyítottuk, hogy a ch függvény definiálható úgy is, mint a (13) alatti D'Alembert–Poisson-függvényegyenlet egyetlen megoldása a folytonos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények $C_{H,1}(\mathbb{R})$ osztályában, amelyekre $f(1)=H=:\frac{1}{2}(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1})$ teljesül.

Alkalmazásokról dióhéjban

Az egyszerű gyakorlati feladatok többsége olyan egyenletek, egyenlőtlenségek és ezek rendszereihez vezetnek, amelyek megoldásai elemi függvényekkel adhatók meg. A középiskolai matematika, fizika számos példát tartalmaz ennek alátámasztására. A bonyolultabb feladatok differenciál-, integrál- és függvényegyenletekkel oldhatók meg, amelyek ismeretlen függvényeket, azok deriváltjait és integráljait tartalmazzák. A fent bebizonyított 4. tétel 12., 5. tétel 7., 6. tétel 9. állítása és a (19) képlet segítségével könnyen megtaláljuk az elemi függvények deriváltjának képleteit. Például (19) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h} = \cos x.$$

Jól ismerjük a függvények egyszerű transzformációit az argumentumra alkalmazott összeadás, szorzás stb. műveletekkel, amelyek nagyban segítik a függvények elemzését. A felső matematikában hasonló módszerek messzemenő általánosításaival lépten-nyomon találkozunk. Pl. a trigonometrikus és exponenciális függvényekkel képzett Fourier-, Laplace-transzformációk a matematika legfontosabb módszereihez tartoznak, nemcsak fontos feladatok megoldásának lehetőségét, de új elméletek születését is nekik köszönhetjük.

Az elemi függvények kiterjesztése komplex tartományokra létrehozta a függvényelmélet klasszikus változatát, az analitikus függvények elméletét, amely nélkül elképzelhetetlen a modern matematika, fizika és számos természettudományi ágazat. Ezért is tartottuk szükségesnek az elemi függvények részletesebb és egységes ismertetését.

Irodalom

[1] Gecse, F., A D'Alembert–Poisson-függvényegyenlet paraméteres általánosításának folytonos megoldásai, *Mat. Lapok,* **1** (2011), 25–47.

[2] Gecse, F., A valós számok rendszerének felépítése, *Mat. Lapok,* **2** (2012), 8–25.

[3] Gecse, F., A valós számok elméletének összefoglalása deduktív módszerrel, *Mat. Lapok,* **2** (2013), 13–29.

[4] Gecse, F., *Matematikai alapok,* Z-press Kiadó Kft. (Miskolc, 2013).

[5] Székelyhidi, L., *Halmazok és függvények,* Palotadoktor Bt. (Debrecen, 2008).

[6] Rozgonyi, T., Toledo, R., *Halmazok és függvények,* Kézirat (Nyíregyháza, 2008).

[7] Katz, S., *Függvények korszerű felfogásban,* Tankönyvkiadó (Budapest, 1989).

[8] Hortobágyi, I., *Elemi matematika, IV,* Tankönyvkiadó (Budapest, 1991).

[9] Aczél, Z., *Vorlesungen über Funktioalgleihungen und ihre Anwendungen* (Basel–Stuttgart, 1961).

[10] Róka, S., *2000 feladat az elemi matematika köréből,* Typotex (Budapest, 2100).

[11] Gecse, F., *Trigonometria funkcionális alapon,* az Ungvári Nemzeti Egyetem Kiadója (Ungvár, 2008).

[12] Kós, R., Kós, G., Miért természetes az e?, *KöMaL,* **53/3** (2003), 258–264.

[13] Száz, Á., *Hatványozás és elemi függvények,* Debreceni Egyetem (Debrecen, 2001).

Frigyes Gecse: Alternative Paths in the Theory of Elementary Functions

The elementary functions are introduced and their properties and relations are studied with the help of special sequences, power series and functional equations.

Gecse Frigyes
Debreceni Egyetem
fgecse@gportal.hu

TÁRSULATI ÉLET – 2015

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2015. évi érmet **Rónyai Lajosnak** ítélte oda.

Indoklás: Rónyai Lajos 1979-ben szerzett matematikus diplomát az ELTE TTK-n. A diploma megszerzése óta az MTA SZTAKI a főállású munkahelye. Emellett 1994 óta oktat a BME-n, ahol 2001-től 2014-ig az Agebra Tanszék vezetője volt, jelenleg egyetemi tanár. Irányításával történt az alkalmazott matematikus szak *Algebra és alkalmazásai* szakirány kidolgozása, amelynek anyagában együtt van jelen a logika, a klasszikus algebra és a számítástudomány is.

Eddig 122 tudományos és felsőoktatási közleményt jelentetett meg, ezen felül két könyvnek, 3 könyvfejezetnek a társszerzője, egy további kötetnek pedig társszerkesztője. Független hivatkozásainak száma 780 fölött van. Nagy súlyt helyez a tudományos eredmények népszerűsítésére is; 10 ilyen jellegű írása van, és 2005. december 12-én emlékezetes előadást tartott a Mindentudás Egyetemén is *Elliptikus görbék – a geometriától a titkos kommunikációig* címmel. Több más fórumon, például a Rátz László-vándorgyűlésen, a Kossuth Klubban, a Galilei Fórumon, a Hajós-versenyen, a Kutatók Éjszakáján, a Bolyai Társulat Küldöttgyűlésén, a KöMaL Ifjúsági Ankétján és az Informatika OTDK-n is tartott népszerűsítő előadásokat.

Fontosabb tudományos eredményei között kiemelendő, hogy polinom idejű módszerek kidolgozásával megalapozta a véges dimenziós asszociatív algebrák algoritmikus elméletét, az általánosított Riemann-sejtés feltételezésével determinisztikus polinom idejű algoritmust adott véges testek feletti korlátos fokú polinomok felbontására.

Meghatározó szerepet játszott a BME egyik legnépszerűbb szakiránya, a műszaki informatika alapképzésnek a kialakításában, majd oktatásában. Az Ivanyos Gáborral és Szabó Rékával 1998-ban írt *Algoritmusok* című egyetemi tankönyvet kollégák és diákok egyaránt nagyra értékelik.

A utóbbi években Tapolcai Jánossal és Lendület-kutatócsoportjával kommunikációs mérnöki feladatokból származó matematikai problémákon is dolgozott, ennek eredménye egyebek között az *Internet Optical Infrastructure* című, 2015-ben a Springer kiadónál megjelent könyv.

Rónyai Lajos eredményes a tudományos utánpótlás nevelésében is. Ivanyos Gábor 1996-ban szerzett a témavezetésével kandidátusi címet. Tanítványai közül

Bodon Ferenc és Hegedűs Gábor 2006-ban, Felszeghy Bálint 2008-ban, Mészáros Tamás pedig 2015-ben szerzett PhD tudományos fokozatot. Ivanyos Gábor 2010-ben megszerezte az MTA doktora címet is, és jelenleg az MTA SZTAKI tudományos tanácsadója és a BME címzetes egyetemi tanára. Hegedűs Gábor az Óbudai Egyetem docense, Bodon Ferenc és Felszeghy Bálint nemzetközi pénzügyi cégeknél töltenek be fontos pozíciót, Mészáros Tamás pedig posztdoktori ösztöndíjas lesz Berlinben.

Rónyai Lajos nagy elméleti tudással rendelkező kutató, aki sokrétű matematikai ismereteit eredményesen alkalmazza számítástudományi problémák vizsgálatában is. A szakmai utánpótlás nevelésében egyetemi oktatóként, tudományos témavezetőként és sikeres szakkönyvek szerzőjeként is kiveszi a részét.

Beke Manó-emlékdíj

A Beke Manó-emlékdíj bizottság 2016-ban a Beke Manó-emlékdíj második fokozatában részesíti **Dr. Ökördi Péterné** tanárnőt, **Schultz János** tanár urat, **Udvarhelyiné Béres Irma** tanárnőt, **Fábián Istvánné** tanárnőt, **Csikósné Vörös Marianna** tanárnőt, **Lutzné Feszt Edit** tanárnőt, **Gosztomné Ivsics Eszter** tanárnőt és **Kis Gábort**.

Dr. Ökördi Péterné (szül: Kulcsár Katalin) 1973-ban szerezte diplomáját az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának matematika–fizika szakán. Szakmai életpályája teljes egészben a Budapesti Berzsenyi Dániel Gimnáziumhoz köti. Itt érettségizett, itt volt pályakezdő, és itt vált érett tanárrá. Kiválóan felkészült pedagógus. Kiemelkedő szerepe volt az 1993-tól megújuló és hatosztályossá váló speciális matematika tantervű osztály kialakításában, működtetésében.

Szinte minden évben jutottak be tanítványai a Varga Tamás Matematikaverseny, az Arany Dániel Matematikaverseny döntőjébe, és ugyanígy nagy számban és eredményesen vettek részt az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen és a KöMaL feladatmegoldó versenyeken is. Emellett diákjai szép teljesítményt nyújtottak az érettségin és felvételi vizsgákon egyaránt.

Nemcsak saját tanítványai körében volt fontos számára a tehetséggondozás, a versenyek. Kezdetétől fogva tagja a Matematika Határok Nélkül verseny magyar szervezőbizottságának.

Egész pályafutását a pedagógiai alázat, a gyerekekért és a tanárokért való tenni akarás, a szakmai igényesség jellemezte és jellemzi a mai napig. Generációk kerültek ki a Berzsenyi falai közül, akiknek életre szóló útmutatást adott emberségből, emberi tartásból, tudásból. Munkájának elismeréseként 2004-ben Graphisoft-díjat, 2008-ban Aranykatedra Emlékplakettet kapott.

Dr. Ökördi Péterné elhivatottsága, kiemelkedő pedagógiai, szakmai munkája, kimagasló tehetséggondozó tevékenysége és eredményessége alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Schultz János diplomáját 1994-ben szerezte a szegedi József Attila Tudományegyetem matematika–fizika szakán. Ugyanebben az évben pályakezdőként került a szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumba, ahol magas szintű tudását azóta is kamatoztatja a speciális matematika tagozat munkájában és a különböző korosztályoknak tartott versenyelőkészítő szakkörökön. 2007 óta rendszeres előadója, az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskolának.

Tehetségfelismerő és tehetséggondozó tevékenységének köszönhetően tanítványai közül többen a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia és a Közép-Európai Matematikai Diákolimpia magyar csapatának tagjai voltak. Tanítványai közül sokan kiemelkedően szerepeltek a Varga Tamás Matematikaversenyen, az Arany Dániel Matematikaversenyen, az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen és más országos illetve nemzetközi tanulmányi versenyeken. Tanítványai a Középiskolai Matematikai Lapok feladatmegoldó versenyében több feladattípusban is rendszeresen az élen állnak.

A matematika oktatásával kapcsolatos tevékenysége még ennél is szélesebb körű. Társszerzője a Maxim Kiadó gondozásában megjelent „Út a tudáshoz” tankönyvcsalád magas színvonalú matematika-tankönyveinek, több magas színvonalú matematikai versenyfelkészítő és tehetséggondozó feladatgyűjteménye is ismert. Schultz János tanár úr két éve tagja a matematikai OKTV II. kategória versenybizottságának.

1999-ben és 2008-ban Graphisoft-díjat kapott, 2007-ben Ericsson-díjban részesült, 2015-ben pedig Szeged Ifjú Tehetségéért díjjal jutalmazták munkáját.

Schultz János folyamatosan kiemelkedő pedagógiai, szakmai munkája és kimagasló tehetséggondozó tevékenysége, illetve annak eredményessége alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Udvarhelyiné Béres Irma a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola matematika–fizika szakán végzett. A főiskola elvégzése után Szegeden először a Zalka Máté Általános Iskolában, 1985-től a Makkosházi Általános Iskolában dolgozott, ahol az iskolavezetés felkérte az emelt óraszámú matematikaoktatás, a matematika tagozat megszervezésére, szakmai kidolgozására. 1990-től a szegedi Gutenberg János Általános Iskolában a matematika tagozat vezetőjeként folytatta munkáját. Az intézményben az ő vezetésével dolgozták ki a matematika tagozat speciális tantervét, tanmenetét, melynek hatására hamarosan tanítványai egyre jobban teljesítettek, a városi, megyei és országos versenyeken is.

A tehetséggondozás elkötelezett pedagógusává vált. Tanítványai évek óta eredményesen szerepelnek 13 különböző matematikaversenyen. Tanulóinak tehetséggondozását már alsó tagozatban elindítja, és ezt folytatja a felső tagozat matematika szakköri foglakozásain, ahol a diákok lelkesen készülnek a kolléganő irányításával különböző matematikaversenyekre, megmérettetésekre.

Iskolán kívüli tevékenységeivel is a matematika megszerettetésén fáradozik.

A Bonifert-versenyre való felkészítés mellett a kezdetektől bekapcsolódott a szervezésbe, és a beküldött feladatok javításába. Csongrád Megyei Matematika és Fizika Tanárok Alkotó Műhelyének tagjaként 1991-től 1999-ig részt vett a szervezet által nyáron megrendezett 7 napos Nemzetközi Matematika Fizika tábor munkájában. 2000-től az Ifjú Tehetségekért Jövőnk Érdekében Egyesület munkájában a tehetségek kibontakoztatásáért végez fáradhatatlan munkát.

1988-ban a Makkosházi Általános Iskola kiváló pedagógusa kitüntetést, 2010-ben Bolyai Matematika Csapatverseny Csongrád megyei tanári fődíját kapta meg.

Udvarhelyiné Béres Irma példás, igényes munkavégzése a matematika tanítása iránti elkötelezettsége, a tehetséggondozásban elért kiváló eredményei alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Fábián Istvánné 1982-ben végzett a Bajai Tanítóképző Főiskolán. Pályakezdő pedagógusként a Kecskeméti Belvárosi Zrínyi Ilona Általános Iskolában kezdett tanítani, ahol megszakítás nélkül immár 34 éve dolgozik a szülők és gyermekek legnagyobb örömére.

Magas színvonalú pedagógusi munkájából is kiemelkedik a matematika tanítása.

A gyermeki érdeklődést felkeltve, egyénre szabott haladási tempóval, ügyes munkaszervezéssel és végtelen lelkesedéssel tudta és tudja elérni, hogy osztályaiból ne csak 1-2 szerencsés gyermek tapasztalja meg a matematika adta örömöket és a versenyek izgalmát. Ennek eredményeként többször kápráztatta el a megye pedagógusait az eredményhirdetéseken azzal, hogy osztályából 3-5 tanuló is a díjazottak között szerepelt. A tartósan és sok tanulóval elért sikeres matematikatanítás megalapozta sok-sok gyerek jövőjét, és hozzájárult az iskolája hírnevéhez.

Fábián Istvánné tevékenyen részt vett abban a munkában, amely iskolájából elindította a ma már országos szintű Zrínyi Ilona Matematikaversenyt.

Tehetséggondozó tevékenysége kimagasló. Példaértékű hogy a Zrínyi Ilona Matematikaversenyen országos 2., 4., 5., és 9. helyet hoztak el egyazon évben tanítványai. Példaértékű, hogy Fábián Istvánné Zsuzsa úgy tanítja alsó tagozatban a matematikát, hogy tanulói évek óta országos 1–10. helyezéseket érhetnek el rangos matematikaversenyeken.

Fábián Istvánné gyermekcentrikussága és példaértékű tehetséggondozó tevékenysége alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Csikósné Vörös Marianna 1987-ben a bajai Tanítóképző Főiskola elvégzése után egykori iskolájában, a kalocsai Ének-Zenei Általános Iskolában kapott tanítói állást.

Óráira elhivatottan készül, erőssége a differenciálás és a tanulókkal való egyéni foglalkozás és a versenyeztetés.

Mindig harmadik-negyedik osztályban tanít, általában minden tantárgyat, de volt több olyan tanév, amikor tantárgycsoportokat hoztak létre, s Ő a matematikát tanította több osztályban is.

2009-ben az iskolavezetés felkérte az alsó tagozatos munkaközösség vezetésére, mellyel egy időben iskolai versenyeket indított, hogy azok a tanulók is versenyezhessenek, akiknek nagyobb versenyeken nincs esélyük a győzelemre. Sikerélményhez jutás, rutinszerzés, megmérettetés volt a cél.

Munkaközösség-vezetőként bevezette az iskolában a Kenguru, a Bátaszéki és a Kalmár László matematikaversenyt, melyek szervezését is Ő maga végzi. Évek óta az iskola minden matematikaversenyét koordinálja 2–12. évfolyamig.

Tanítványai rendszeresen az ország élmezőnyében szerepelnek a Zrínyi Ilona, a Harmatcsepp, a Dugonics András, a Kalmár László, a Bátaszéki, a Kenguru, a Bács-Kiskun megyei matematikaversenyeken, valamint a Genius Logicus Nemzetközi matematikaversenyen.

2010 óta az iskola igazgatóhelyettese. Ezt a feladatát is nagy odaadással, lelkesedéssel végzi.

Csikósné Vörös Marianna felkészültsége, elhivatottsága és tehetséggondozó tevékenysége alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Lutzné Feszt Edit a Ho Si Minh Tanárképző Főiskolán végzett 1979-ben, matematika–fizika szakon, ahol oktatástechnológusi képesítést is szerzett. 1981 óta dolgozik a Solymári Hunyadi Mátyás Német Nemzetiségi Általános és Alapfokú Művészeti Iskolában.

Folyamatosan fejlesztette szakmai tudását, 1994-ben az ELTE TTK-n számítástechnika szakos tanári diplomát is szerzett.

Osztályfőnökként, igazgatóhelyettesként, a minőségbiztosítási fejlesztési team vezetőjeként sokoldalú eredményes munkát végzett.

Különösen jelentős az a tevékenysége, amelyet a tanulók és pedagógusok munkájának folyamatos mérése, értékelése, fejlesztése érdekében fejtett ki.

Szakmai tevékenysége is kiemelkedő. Matematika-fizika-informatika szakos tanárként tanulóit eredményesen tanítja, és hosszú idő óta eredményesen készíti fel a különböző szakmai versenyekre. Az általa szervezett természettudományos projektek, kísérletek, versenyek különösen népszerűek a tanulók körében.

Egész szakmai munkáját, pedagógiai tevékenységét áthatja a kollégákkal való eredményes együttműködés és az iskolavezetés segítése. Szakmai életútját a folyamatos tanulás, továbbképzési lehetőségek kihasználása, a fejlődés érdekében végzett munka jellemzi.

Lutzné Feszt Edit felkészültsége, elhivatottsága, munkája és tehetséggondozó tevékenysége alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Gosztomné Ivsics Eszter 1992 óta tanít a Pécsi Művészeti Gimnázium és Szakközépiskolában. 2010 óta a Csányi Alapítvány mentora.

Gosztomné Ivsics Eszter igazi pedagógus személyiség. A tanítást egységben kezeli a támogatással, segítéssel. Mindig észreveszi, ha valaki lemarad, vagy ha többre volna képes.

Senki sem kéri, utasítja őt, hogy munkaidő után maradjon egy-egy diák kedvéért, aki a kimerítő szakmai munka vagy lelki terhek miatt nehezen tart lépést a társaival. Mégis marad, mert számítanak rá.

Nem csupán a felzárkóztatáshoz elengedhetetlen a többletmunka. A kiemelkedő képességű tanulók egyéni fejlesztése, adott esetben versenyeztetése ugyanígy áldozatot követel a tehetségsegítőtől. Gosztomné Ivsics Eszter ebben is eredményes. Számos növendéke jutott már el megyei és országos versenyek döntőibe. Közülük sokan dobogós helyezést értek el.

A sikereket ráadásul a legkülönbözőbb érdeklődésű és szakmai orientációjú tanulókkal érte el: képző- és iparművész növendékekkel, zenészekkel, táncosokkal, drámásokkal, kilencediktől egészen a végzős évfolyamokig. A Zipernowsky megyei versenyen, szinte minden évben dobogós helyezést, de az országos Zrínyi Ilona Matematikaversenyen is kiemelkedő eredményeket érnek el tanítványai.

Gosztomné Ivsics Eszter elhivatottsága, odaadó munkája és tehetséggondozó tevékenysége alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Kis Gábor tanulmányait a debreceni Fazekas Mihály Gimnáziumban végezte speciális matematika tagozaton, majd a Kossuth Lajos Tudományegyetemen folytatta. Jelenleg informatikusként dolgozik.

Kis Gábor a Fazekas Mihály Gimnázium tanáraival 1993 és 1998 között iskolai táborokat szervezett. Ezekből a táborokból nőtt ki és önállósodott a Medve Szabadtéri Matematikaverseny és a Medve Matektáborok jelenleg is virágzó sorozata.

A Medve Szabadtéri Matekverseny kategóriákra bontott csapatverseny. A résztvevők állomásról állomásra haladnak és feladatokat oldanak meg. Helyes válasz esetén főállomáshoz, helytelen esetén pedig mellékállomáshoz irányítják őket. A helyezést a megoldott főfeladatok száma, illetve az arra fordított idő dönti el. E konstrukció szellemi atyja Kis Gábor.

A Medve Matektáborok elsődleges célja nem a versenyfelkészítés. A foglalkozásokon egy-egy matematikai témát dolgoznak föl, melyeket logikai vetélkedők, versenyek, készségfejlesztő foglalkozások is színesítenek. A szakmai tartalom lényegében Kis Gábor ötleteiből és kezdeményezéseiből kristályosodott ki a jelenlegi formájában.

1999 és 2011 között Kis Gábor a rendezvények szervezésében is oroszlánrészt vállalt. Ezeket ma már A Matematika Összeköt Egyesület koordinálja, hiszen a rendezvények évente több ezer diákot mozgatnak meg.

Kis Gábor a matematika népszerűsítésében, elmélyítésében elért kimagasló eredményei alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Grünwald Géza-emlékérem

2015-ben a Grünwald Géza-emlékéremre tíz felterjesztés érkezett. Mind a jelöltek tudományos munkássága, mind pedig az oktatási és közéleti tevékenységük rendkívül magas színvonalat képviselt. Ez méltóan tükrözi a Grünwald-emlékérem tudományos és társadalmi presztízsét. Annak ellenére, hogy a Bolyai Társulat döntése értelmében a bizottság öt jelöltet honorálhatott, az elmúlt évek egyik legnehezebb feladatának bizonyult a rendkívül erős mezőnyből a díjazottak kiválasztása. Külön örömünkre szolgál, hogy lehetőségünkben állt az ország különböző egyetemeinek, illetve kutatóintézeteinek munkatársait kitüntetni. A bizottság szavazati alapján az idei díjazottak a következők: **Gehér György Pál, Maga Péter, Nagy Zoltán Lóránt, Pach Péter Pál,** és **Szokol Patrícia.**

Indoklás: *Gehér György Pál* 1987-ben született, 2010-ben szerzett matematikus diplomát a Szegedi Tudományegyetemen, majd 2015-ben PhD fokozatot ugyanott Kérchy László témavezetésével. Jelenleg a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének adjunktusa.

Gehér György Pálnak 8 megjelent és 5 elbírálás alatt levő dolgozata van. Legtöbb eredményét a funkcionálanalízis területén érte el. A klasszikus szegedi hagyományokat folytatva aszimptotikusan nem-eltűnő operátorok elméletét kutatta, amelyek doktori disszertációjának alapját képezték. Jellemezte a kontrakciókból aszimptotikusan nyerhető pozitív operátorokat, illetve általánosította a Szőkefalvi-Nagy hasonlósági tételt. 2013-tól a Molnár Lajos professzor által vezetett „Lendület” kutatócsoport munkájában is részt vesz, ahol a funkcionálanalízis egy másik területén, a megőrzési problémákkal kapcsolatban folytatott eredményes kutatásokat. Az Aleksandrov-féle konzervatív távolság probléma kapcsán az eddig ismert legerősebb eredményt adta a kétdimenziós esetben. Nagy érdeklődést váltott ki a matematikai fizikában fontos szerepet játszó, nevezetes Wigner-tételre adott ötletes, új bizonyítása is. Új metrikus jellemzését adta valós szigorúan konvex és belső szorzat tereknek. Emellett érdekes tételeket bizonyított a klasszikus geometria területén is.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Gehér György Pál a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Maga Péter 1985-ben született, az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett matematikus diplomát 2009-ben, majd a Central European University-n doktorált 2013-ban Harcos Gergely témavezetésével. Ezután 2 évig Göttingenben Valentin Bromerrel dolgozott posztdoktori kutatóként. 2015 szeptemberétől a Rényi Intézet MTA posztdoktori ösztöndíjas munkatársa.

Maga Péter 8 dolgozatot publikált. Kezdetben valós analízissel foglalkozott Keleti Tamás témavezetésével. Később érdeklődése a számelmélet, azon belül is az automorf formák elmélete felé irányult. Doktori disszertációjában általános szubkonvex becslést igazolt számtestek feletti csavart moduláris L-függvényekre, amely a Dirichlet L-függvényekre vonatkozó klasszikus becslések analogonjának tekinthető. Ezen eredményhez a neves Kuznyecov-formula egy jelentős általánosítását adta. Ezután a szubkonvexitási problémával szoros rokonságban álló szuprémum problémával foglalkozott, ahol nem az automorf L-függvények becslése a cél, hanem az automorf formák pontonkénti becslése. Tetszőleges dimenziós projektív síkokból származó Lie-csoportokra bizonyított olyan becsléseket, amelyek korábban csak véges sok Lie-csoportra voltak ismertek. Legújabb munkáiban fontos klasszikus tételeket terjeszt ki a 2 dimenziósról a 3 dimenziós esetre, például hatékony felső becslést ad a Ramanujan-sejtést megsértő automorf formák gyakoriságára.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Maga Péter a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Nagy Zoltán Lóránt 1985-ben született, 2008-ben szerzett az Eötvös Loránd Tudományegyetemen matematikus, majd 2013-ban matematika tanári diplomát. 2015-ben védte meg az ELTE-n doktori disszertációját, amelyet Szőnyi Tamás és Károlyi Gyula témavezetésével írt. 2011 és 2014 között a Rényi Intézet fiatal kutatója, jelenleg az MTA-ELTE Geometriai és algebrai kombinatorika kutatócsoport tagja.

Nagy Zoltán Lórántnak 12 dolgozata jelent meg nemzetközi folyóiratokban. Érdeklődésének középpontjában az extremális és az additív kombinatorika, valamint a véges geometriák állnak. Munkáiban eredményesen ötvöz különböző algebrai módszereket eredeti kombinatorikus gondolatokkal. Sikeresen vizsgált extremális élsűrűségre vonatkozó Turán-típusú gráfelméleti problémákat. Az additív kombinatorika területén nívós munkáiban véges testekben, illetve ciklikus csoportokban vizsgál zéró-összeg típusú problémákat. Az algebrai kombinatorika területén is fontos eredményeket bizonyított a Selberg-típusú integrálokkal kapcsolatban, amelyek központi szerepet játszanak a véletlen mátrixok elméletében. Társszerzőivel új, frappáns bizonyítást adott a Dyson-sejtés q-analógjára, illetve a Morris-azonosságra. Legfontosabb eredményében pedig igazolta a Forrester-sejtést, amelyet korábban csak igen speciális esetekben sikerült bizonyítani.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Nagy Zoltán Lóránt a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Pach Péter Pál 1985-ben született, 2009-ben szerzett matematikus diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, majd 2012-ben doktori fokozatot ugyanitt, Szabó Csaba témavezetésével. Jelenleg a Budapesti Műszaki Egyetem Számítástudományi és Információelméleti Tanszékének adjunktusa.

Pach Péter Pálnak 14 dolgozata jelent meg nemzetközi folyóiratokban. Mind a kutatásban, mind pedig az oktatásban és a tehetséggondozásban kiemelkedő teljesítményt nyújt: tagja a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztőbizottságának, a Kürschák József-verseny bizottságának, emellett diákolimpiai felkészítő szakköröket is tart. Kutatási érdeklődésének középpontjában a kombinatorika módszereinek és eszközeinek a számelmélet, univerzális algebra és a modellelmélet területén való alkalmazása áll. Szerzőtársaival együtt a véges részbenrendezett halmazok Fraïssé-limeszére igazolta Thomas véges nyelvek fölötti homogén struktúrákra vonatkozó sejtését. Meghatározták egy adott ábécé feletti szavak félcsoportjában a Simons-ekvivalencia-osztályok aszimptotikus számát. Legújabb munkájában az általánosított multiplikatív Sidon-halmazokkal foglalkozik: k és n függvényében nagyságrendileg meghatározta az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz legnagyobb olyan részhalmazának elemszámát, amelyben az $a_1 \ldots a_k = b_1 \ldots b_k$ egyenlet nem oldható meg különböző elemekkel.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Pach Péter Pál a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Szokol Patrícia 1986-ban született, 2010-ben szerzett matematikus diplomát a Debreceni Tudományegyetemen. Doktori disszertációját, amelyet a Debreceni Tudományegyetemen készített Molnár Lajos és Bessenyei Mihály témavezetésével, a közeljövőben fogja megvédeni. Jelenleg a Miskolci Tudományegyetem tanársegédje, valamint a Debreceni Tudományegyetemen is óraadó.

Szokol Patríciának 7 dolgozata jelent meg, és további két dolgozata került benyújtásra nemzetközi folyóiratokhoz. Kutatásaiban elsősorban operátorok, illetve függvények különböző struktúráinak megőrzési problémáit vizsgálja. Emellett a konvex és nem-sima analízis területén fontos szerepet játszó szeparációs tételekkel kapcsolatban is ért el szép eredményeket. Társzerzőivel együtt leírást adott a sűrűségoperátorok terének azon transzformációira, amelyek megőrzik a kvantum relatív entrópiát, illetve ezt az eredményt sikerült általánosítaniuk a kvantum f-divergencia speciális eseteire is. Vizsgálta az általánosított eloszlásfüggvények terének

Kolmogorov–Smirnov izometriáit, a pozitív definit mátrixok metrikai és differenciálgeometriai tulajdonságait, illetve a mátrixalgebrák ferde-morfizmusait. Témavezetőjével együtt meghatározták függvényterek bizonyos részalgebráinak pozitív részei közötti bijektív, egy adott közép normáját megőrző leképezések általános alakját is.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Szokol Patrícia a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Farkas Gyula-emlékdíj

A Bizottság, a beérkezett javaslatok alapján 2015-ben négy Farkas Gyula-emlékdíjat adományozott. A díjazottak: **Bekéné dr. Rácz Anett, Dénes Attila, Nagy Adrienn** és **Szalkai Balázs.**

Indoklás: *Bekéné dr. Rácz Anett* 2007-ben szerezte meg programtervező matematikusi diplomáját hallgatói emlékérem kitüntetéssel a Debreceni Egyetem Informatikai karán. Ezt követően 2010-ig az Informatikai Tudományok doktori iskola nappali tagozatos doktorandusza volt. 2010-ben kezdett tanársegédként dolgozni a Debreceni Egyetem Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás tanszékén. PhD fokozatát 2012-ben szerezte meg. Ebben az évben született gyermeke, akinek gondozásával töltötte az ezt követő két évet. 2014 szeptemberétől adjunktusként folytatta egyetemi munkáját. Oktatási tevékenysége középpontjában az operációkutatás áll, ezen belül tanterveket korszerűsített és oktatási anyagokat dolgozott ki. Szakmai rendezvények és konferenciák szervezésében is részt vett.

Kutatási területe az operációkutatás, és ehhez kapcsolódóan speciális függvényoptimalizálási módszerek kidolgozása magfizikai számításokhoz. Az előbbi területen legjelentősebb eredményeit bizonyos egész értékű optimalizálási feladatokra alkalmas ún. „sugár-módszer" kidolgozásában érte el. A kidolgozott eljárást valós problémákon tesztelte, amelyek során a piacvezető optimalizáló solver, az IBM CPLEX teljesítményét jelentősen megnövelte. Ez irányú kutatásait kiterjesztette általános vegyes egészértékű feladatokra is.

Kutatásainak másik, magfizikai számításokhoz kapcsolódó területén, az ún. szórásmátrix kiszámításával foglalkozott. Kiváló programozói, programtervezői technikával rendelkezik, és kellő mélységben megismerkedett a vonatkozó magfizikai feladatokkal és az azokban fellépő numerikus számítási problémákkal.

Szerzőtársaival elért eredményeiről nemzetközi konferenciákon, illetve vezető folyóiratokban, úgy mint a Physical Review, számolt be.

Dénes Attila 1982-ben született Békéscsabán. 2005-ben matematikus diplomát, majd 2011-ben doktori fokozatot szerzett a Szegedi Tudományegyetemen. Ezt követően az Európai Kutatási Tanács (ERC) által támogatott EPIDELAY kutatócsoportban dolgozott az Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében. 2014-ben OTKA posztdoktori ösztöndíjat nyert.

Kutatási területe elsősorban a populációdinamika nemlineáris modelljei, ebből 12 publikációja született. Ezen belül innovatív eredményeket ért el nem-autonóm rendszerek stabilitási tulajdonságainak vizsgálatában, és teljes analitikus leírást adott több nemlineáris rendszer globális attraktoráról.

Kísérleti matematikai és népszerűsítési tevékenysége között megemlítendő, hogy számítógépes algoritmust készített kaotikus dinamikai rendszerek attraktorainak és vonzási tartományainak vizualizálására.

Alkalmazási szempontból kiemelkedő az ún. SIR típusú járványterjedési modellekkel kapcsolatos vizsgálata, ezen belül a tömegrendezvények járványkockázatával, illetve az ebola terjedésével foglalkozó modellek elemzése.

Nagy Adrienn 1983-ban született Oroszlányon. Egyetemi tanulmányait a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem programtervező matematikus szakán végezte. Diplomamunkáját 2007-ben védte meg *Új típusú pivot módszerek numerikus összehasonlítása a lineáris programozásban* címmel. Doktori tanulmányait 2007 szeptemberében kezdte meg az ELTE Matematikai Doktori Iskola Alkalmazott Matematika programjában Illés Tibor és Kovács Margit témavezetésével. Doktori címét az *On the theory and applications of flexible anti-cycling index selection rules for linear optimization* című disszertációjának sikeres megvédése után ítélték oda neki 2015-ben.

Nagy Adrienn fő érdeklődési területe az operációkutatás, és ezen belül a pivot algoritmusok ciklizálás elleni technikái, végességük bizonyítása, és az algoritmusok numerikus hatékonyságának a vizsgálata, valamint hatékony új pivot algoritmusok kifejlesztése a lineáris optimalizálás számos területére. Kiváló programozói képességeit többször is kamatoztatta kutatásai során. Többek között elkészítette a megengedettséget növelő szimplex algoritmusoknak az egyik legjobb MATLAB implementációját. Egyik témavezetőjével közös dolgozatában lefektette a pivot algoritmusok számítógépes összehasonlításának minden eddiginél átfogóbb alapelveit.

Az operációkutatás területén szerzett komoly elméleti tudása, modellező készsége és kiváló programozói ismeretei, valamint gyakorlatorientált gondolkodása révén Nagy Adrienne a magyar operációkutatás XXI. századi fiatal generációjának kiemelkedő személyisége.

Szalkai Balázs kivételes tehetségű matematikus, aki már az egyetemi éveit megelőzően is számos versenyt nyert meg, illetve előkelő helyezést ért el. Kiemelendő a 2008-ban rendezett OKTV-n elért két, egyidejű első helyezése matematika, illetve informatika területén. Az ELTE matematikus szakán 2011-ben Szent-Györgyi Albert-ösztöndíjat kapott, 2012-ben pedig elnyerte a ELTE TTK Kar Kiváló Hallgatója címet. Eredményesen szerepelt számos nemzetközi ACM és BME Challenge24 programozói versenyen is.

Két kiemelendő kutatási területe az ún. metagenomika, illetve az emberi agy összeköttetéseinek gráfelméleti elemzése. A metagenomika a környezetünkben és a szervezetünkben élő mikrobák társulásaival foglalkozik. Kifejlődéséhez az a kísérleti felismerés vezetett, hogy sokkal több baktérium él velünk és körülöttünk, mint azt korábban gondoltuk. A metagenomok tanulmányozása segíthet eddig még ismeretlen működésű emberi fehérjék illetve enzimek funkciójának felfedezésében. Szalkai Balázs főszerepet játszott egy olyan nem-triviális bio-informatikai eszköz, az ún. metagenomikus teleszkóp létrehozásában, amellyel ezek a vizsgálatok hatékonyan elvégezhetők.

Az emberi agy összeköttetéseinek vizsgálatát Szalkai Balázs jó minőségű diffúziós MRI felvételek alapján, egy ún. traktográfia nevű eljárással előállított gráfok elemzése alapján végezte el. Ennek eredményeképpen született egy publikusan elérhető webszerver (`http://braingraph.org`), amelynek programozása és a vizualizációs komponens megalkotása Szalkai Balázs munkája. A díjazott világviszonylatban is úttörő tevékenységet végzett a nemek agygráfjainak összehasonlításában. Többek között megmutatta, hogy számos gráfelméleti paramétert tekintve a női agy „jobb összeköttetésekkel" rendelkezik, mint a férfiak agya. A fenti eredmények felkeltették a média érdeklődését is: élő TV interjúk és számos egyéb megjelenés is ezt igazolja.

Rényi Kató-emlékdíj

A Rényi Kató-emlékdíj I. fokozatában részesült **Bodor Bertalan,** az ELTE végzett matematikus MSc szakos hallgatója, **Kovács István,** a BME végzett matematikus MSc szakos hallgatója és **Mészáros András,** az ELTE végzett matematikus MSc szakos hallgatója.

Indoklás: *Bodor Bertalan* az [1–3, 5] dolgozatokban a prímelemű test feletti végtelendimenziós vektortér reduktjait karakterizálja, tehát azokat a struktúrákat, amelyeknek a relációi az eredeti struktúrákban elsőrendben definiálhatók. Részben sikerült leírni a megszámlálható atommentes Boole-algebra reduktjait is ([4, 6]). A [7] dolgozat a véges, egyszerű, irányítatlan, súlyozott gráfokon játszott Pirates-and-Treasure játékot elemzi, elsősorban komplexitáselméleti szempontból, ahol a két játékos hajói az élek mentén mozognak a szigetek (csúcsok) között, és összegyűjtik az elrejtett kincseket.

Bodor Bertalan dolgozatai:

[1] Bodor Bertalan, Kalina Kende: A projektív tér reduktjai, *Matematikai Lapok,* **20** (2014), 14–19.

[2] Bodor Bertalan, Kalina Kende: Az $\mathbb{F}_2^\infty$ vektortér reduktjai, *Matematikai Lapok,* **20** (2014), 20–28.

[3] Bodor Bertalan, Kalina Kende: Az F_p^ω vektortér reduktjai páratlan prímek esetén, *Matematikai Lapok,* **20** (2014), 29–56.

[4] Bodor Bertalan, Kalina Kende: Boole-algebrák funkcionális reduktjai, *Matematikai Lapok,* **20** (2014), 57–72.

[5] B. Bodor, K. Kalina, Cs. Szabó: *Permutation groups containing the infinite linear groups and reducts of infinite dimensional linear spaces over the two element field,* benyújtva.

[6] B. Bodor, K. Kalina, Cs. Szabó: *Functional reducts of Boolean algebras,* benyújtva.

[7] P. Árendás, Z. Blázsik, B. Bodor, Cs. Szabó: *On the complexity and topology of scoring games: of Pirates and Treasure,* benyújtva.

Kovács István egyik kutatási témája síkbeli fedések felbonthatóságának vizsgálata. Itt a fő kérdés az, hogy adott síkbeli alakzathoz van-e olyan k szám, hogy minden, az alakzat eltoltjaiból álló k-szoros fedés felbontható két fedésre. A számos korábbi (pozitív és negatív) eredmény mind nyílt halmazokra vonatkozott. Kovács és Tóth Géza zárt, középpontosan szimmetrikus konvex sokszögekre igazolta a fenti szám létezését ([1]). Kovács azt is belátta, hogy minden m számra és P sokszögre, amely konvex vagy konkáv, de nincsenek párhuzamos oldalai, a sík nem felbontható módon m-szeresen lefedhető P homotetikus példányaival ([2]).

Kovács másik munkaterülete a számítógépes geometriai tervezés és a digitális alakzatrekonstrukció. Ez utóbbinál mért ponthalmazokból kell tökéletes mérnöki modelleket létrehozni. Kovács munkája itt arra irányult, hogy a mérnöki határoló felületei között fennálló relációk (párhuzamos, merőleges stb.) felismerésével a modellt megjavítsa.

Kovács István dolgozatai:

[1] I. Kovács, G. Tóth: Multiple coverings of the plane with convex polygons, *Elect. Journ. Comb.,* **22/1** (2015), P1.18.

[2] I. Kovács: Indecomposable coverings with homotetic polygons, *Disc. Comp. Geo.,* **53** (2015), 817–824.

[3] I. Kovács, P. Salvi, T. Várady: Applying geometric constraints for perfecting CAD models in reverse engeneering, *Graphical Models,* (2015), megj. alatt.

[4] I. Kovács, T. Várady: Reconstructing swept surfaces from measured data, *14th IMA Conference on Mathematics on Surfaces* (2013), 327–344.

[5] I. Kovács, T. Várady: Applying engeneering constraints in digital shape reconstruction, *Proc. CESCG* (2014).

[6] I. Kovács, T. Várady: Perfecting 3D computer models constructed from measured data, *Proc. GRAFGEO* (2014).

[7] I. Kovács, T. Várady: Case studies for fitting B-spline curves with constraints, *Proc. WAIT* (2015).

[8] Kovács I., Várady T.: Söpört felületek rekonstrukciója mért adatok alapján, *KÉPAF Képfeldolgozók és Alakfelismerők 9. országos konferenciája* (2013), 1–14.

[9] Kovács I., Salvi P., Várady T.: Struktúrális adatsajátosságok érvényesítése CAD modellek rekonstrukciója során, *KÉPAF Képfeldolgozók és Alakfelismerők 10. országos konferenciája* (2015).

Mészáros András a Sperner lemma következő általánosításával foglalkozott. Legyen X n elemű halmaz, amit $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ alakban particionálunk, $|X_i| = n_i$. Jelölje $f(n_1, n_2, n_3) = \max|\mathcal{F}|$-t, ahol $\mathcal{F}$ X részhalmazaiból álló rendszer, hogy nincs $A, B \in \mathcal{F}$, amire $A \subset B$ és $B - A \subseteq X_i$ valamelyik i-re. Végül

$$f(n) = \max_{n_1+n_2+n_3=n} f(n_1, n_2, n_3).$$

$f(n)$ értékére az

$$1{,}036 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} < 1{,}131$$

becslés volt korábban ismert. Mészáros az [1] dolgozatban ezt a következőre javította:

$$1{,}05 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} < 1{,}072.$$

A bizonyításhoz Olson híres ötletét használva definiál egy algebrát, az adódó bonyolult képleteket integrálással közelíti, használja a lineáris programozás dualitás-tételét, végül számítógépes programot készít.

[2] cikkében igazolja, hogy ha q prímhatvány, adott egy $2(q-1)$-szeresen élösszefüggő gráf, akkor a gráf éleit tetszés szerint irányítva, az így kapott gráfban van q diszjunkt élhalmaz, melyek mindegyike minden irányított vágást lefog.

Mészáros András dolgozatai:

[1] A. Mészáros: New bounds for 3-part Sperner families, *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory,* **5** (2015).

[2] A. Mészáros: A note on disjoint dijoins, benyújtva.

Patai László Alapítvány díja

A Bolyai János Társulat elnöksége által kiküldött bizottság úgy döntött, hogy a Patai Alapítvány díját 2015-ban **Bazsó Andrásnak,** a Debreceni Egyetem adjunktusának és **Tassy Gergelynek,** a Veres Péter Gimnázium tanárának ítéli oda.

Indoklás: *Bazsó András* a Debreceni Egyetem matematikus szakán szerzett oklevelet 2006-ban, majd 2010-ben védte meg Binomial Thue equations, ternary equations and their applications című Ph.D. értekezését. Első cikke 2007-ben jelent meg norma forma egyenletek megoldásaiban előforduló számtani sorozatokról. Később társszerzőkkel az $Ax^n - Bx^n = C$ alakú egyenletek megoldását vizsgálta, amely vizsgálatok mély komputer számelméleti számításokat, továbbá a Fermat-sejtés megoldásában használt moduláris módszer alkalmazását is igényelték. Egy további cikkében Faulhaber tételét általánosítva meghatározta bizonyos polinomok összes felbontását. Számos eredménye szól speciális alakú diofantikus eredmények megoldásszámáról. Idén jelent meg a *J. Number Theory* című újságban azon eredménye, mely szerint bizonyos speciális módon kapott polinomok együtthatói kifejezhetők az elsőfajú Stirling-számokkal, továbbá a másodfajú r-Whitney-számok segítségével.

Tassy Gergely 2010-ben diplomázott az ELTE alkalmazott matematikus és matematikatanári szakán, 2009 óta a budapesti Veres Péter Gimnázium tanára. Diákkorában országos első helyeket ért el a Zrínyi Ilona, az Arany Dániel, a matematika OKTV, az informatika OKTV versenyeken. A Közép-Európai Informatika Diákolimpiáról, valamint a Nemzetközi Informatikai Diákolimpiáról egyaránt bronzéremmel tért haza. Az ELTE-n több éven át volt Köztársasági ösztöndíjas. 2006 és 2013 között rendszeresen vezetett gyakorlatokat az ELTE matematikus és a BME mérnökhallgatói számára. Munkájában nagy hangsúlyt fektet a tehetséggondozásra: iskolájában gimnazista kora óta szakkört vezet, tanárként és szervezőként bekapcsolódik tehetséggondozó táborokba, és a tehetséges tanulók intenzív versenyfelkészítése mellett időt szakít a lemaradók felzárkóztatására is. Évek óta segíti Pósa Lajos táborait, és a MaMuT tábort. A Bolyai Csapatverseny informatikai hátterének felelőse. Rovatvezetőként dolgozott az Abacus-nak, és munkatársa volt a KöMaL-nak is. Részt vesz a Pázmány Péter Katolikus Egyetemnek készülő tehetséggondozó anyag kidolgozásában. Sikeres előadásokat tartott az ELTE-n a Tanárklubban. 2011-ben Junior Prima díjat kapott a Magyar Oktatás és Köznevelés kategóriában.

JELENTÉS A 2015. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2015. október 22. és 2015. november 2. között rendezte meg a 2015. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 2015-ben egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére a következő bizottságot kérte fel: *Kérchy László* (elnök), *Nagy Gábor Péter* (titkár), *B. Szendrei Mária, Czédli Gábor, Fodor Ferenc, Gehér György Pál, Hajnal Péter, Hatvani László, Kincses János, Krámli András, Krisztin Tibor, Maróti Miklós, Major Péter, Makay Géza, Molnár Lajos, Móricz Ferenc, Nagy-György Judit, Pap Gyula, Röst Gergely, Szabó László Imre, Totik Vilmos, Vas Gabriella, Vígh Viktor, Waldhauser Tamás, Zádori László.*

A versenybizottság 11 feladatot tűzött ki, ezekre 18 versenyző összesen 102 megoldást nyújtott be, amik közül 86 volt lényegében hibátlan. Az alábbi összesítő táblázat jelzi az értékelhető megoldásokat.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ágoston Péter	ELTE		•	•				•				
Ágoston Tamás	ELTE	•	•	•		•	•	•	•	•		
Csizmadia Gábor	ELTE			•					•			
Damásdi Gábor	ELTE	•	•	•	•	•		•	•			
Dolecsek Máté	ELTE		•	•	•	•						
Fehér Zsombor	ELTE		•	•		•		•	•			
Frankl Nóra	ELTE	•	•	•	•	•			•			
Kaprinai Balázs	SZTE				•				•			
Kúsz Ágnes	ELTE								•			
Maga Balázs	ELTE	•		•	•	•			•			
Mészáros András	ELTE	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•
Nagy Donát	ELTE	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
Nagy János	ELTE	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
Poór Márk	ELTE	•	•	•		•	•	•	•	•		
Seress Dániel	ELTE		•		•		•					
Tardos Jakab	ELTE	•	•		•	•			•			
Williams Kada	RMG		•		•				•			
Zilahi Tamás	ELTE			•		•	•					

A versenybizottság a következő sorrendet állapította meg:

I. díjban és 80 000 Ft pénzjutalomban részesült **Nagy János** (ELTE) az 1–10. feladatok hibátlan, valamint a 11. feladat lényegében helyes megoldásáért.

II. díjban és fejenként 40 000 Ft pénzjutalomban részesült **Mészáros András** (ELTE) az 1–9. és a 11. feladatok helyes megoldásáért, valamint **Nagy Donát** (ELTE) az 1–9. feladatok hibátlan és a 11. feladat lényegében helyes megoldásáért.

III. díjban és fejenként 20 000 Ft pénzjutalomban részesült **Poór Márk** (ELTE) az 1–3. és 5–9. feladatok helyes megoldásáért, valamint **Ágoston Tamás** (ELTE) az 1–3. és 5–8. feladatok hibátlan megoldásáért, továbbá a 9. feladat lényegében helyes, de több hibát tartalmazó megoldásáért.

Kiemelt dicséretben részesült **Damásdi Gábor** (ELTE) az 1–5. és 7. feladatok helyes megoldásáért, továbbá a 8. feladat lényegében helyes megoldásáért, illetve **Frankl Nóra** (ELTE) az 1–5. feladatok és a 8. feladat helyes megoldásáért.

Dicséretben részesült **Fehér Zsombor** (ELTE) a 2., 3., 5., 7. és 8. feladatok helyes megoldásáért; **Maga Balázs** (ELTE) az 1., 3., 4., 5. és 8. feladatok helyes megoldásáért, illetve **Tardos Jakab** (ELTE) az 1., 2., 4., 5. és 8. feladat helyes megoldásáért.

A versenyt a Morgan Stanley Magyarország Elemző Kft. támogatta, ezért a versenybizottság köszönetét fejezi ki.

A feladatok és megoldásaik

1. feladat (Kitűző: Totik Vilmos). *Legyen K az R^3 zárt egységgömbjének egy zárt részhalmaza úgy, hogy az egységgömb-felület húrjainak egy sűrű rendszere diszjunkt K-tól. Igazoljuk, hogy van az egységgömb-felületen egy olyan sűrű H halmaz, hogy H bármely két pontját összekötő húr diszjunkt K-tól.*

1. megoldás. Legyen S az egységgömb-felület, és legyen $I_0, I_1, \ldots$ az S topológiájának egy bázisa.

A feltevésből következik, hogy ha $U, V \subset S$ nyíltak, akkor van olyan $P \in U$ pont és olyan $V_1 \subset V$ nyílt halmaz, hogy $\overline{V_1} \subset V$ és V_1 minden pontja látható P-ből abban az értelemben, hogy az őket összekötő húr diszjunkt K-tól. Ebből következik, hogy ha $V \subset S$ nyílt, akkor van olyan $Q \in V$, hogy Q-ból egy sűrű nyílt halmaz látszik. Valóban, alkalmazzuk az előzőt $U = I_0$-lal és V-vel, majd $U = I_1$-gyel és V_1-gyel stb. A V_j-k metszete nem üres, és ha Q a metszetben van, akkor Q-ból minden I_j valamelyik pontja látszik, tehát a Q-ból látható pontok halmaza sűrű és nyílt.

Ezek után egyesével válasszunk $Q_1, Q_2, \ldots$ pontokat úgy, hogy minden N-re a $Q_1, \ldots, Q_N$ pontok látszanak egymásból és egy G_N sűrű nyílt halmazból is. Ekkor az előzőt $V = G_N \cap I_N$-nel alkalmazva kapunk egy olyan $Q_{N+1} \in G_N \cap I_N$ pontot, amiből egy H_N sűrű nyílt halmaz látszik, és legyen a következő lépésben $G_{N+1} = G_N \cap H_N$.

A $H = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$ halmaz nyilván megfelel a feltételeknek.

Több versenyző megoldása alapján

2. megoldás. Legyen S a gömbfelület. Az alábbiakban mindig S-en dolgozunk, így a „nyílt" jelző az S topológiájában értendő, és „gömb" alatt is az S egy gömbsüvegét értjük.

A feladat feltételéből következik, hogy ha U, V nyílt halmazok, akkor vannak olyan U', V' nyílt gömbök, hogy lezártjaikra $\overline{U'} \subset U$, $\overline{V'} \subset V$ igaz, és az U'-ből, illetve V'-ből kiválasztott bármely pontpárra az őket összekötő húr diszjunkt K-tól. Ezt iterálva adódik, hogy ha $U_1, \ldots, U_n$ nyílt halmazok, akkor vannak olyan $U'_1, \ldots, U'_n$ nyílt gömbök, hogy lezártjaikra $\overline{U'_j} \subset U_j$ igaz, és ha $j \neq k$, akkor az U'_j-ből, illetve U'_k-ból kiválasztott bármely pontpárra az őket összekötő húr diszjunkt K-tól. Valóban, ha ezt már $(n-1)$ halmazra tudjuk, akkor alkalmazzuk az állítást az $U_1, \ldots, U_{n-1}$ halmazokra, így kapjuk az $U'_1, \ldots, U'_{n-1}$ gömböket, de a jobb érthetőség kedvéért írjunk ezek helyett $V_1, \ldots, V_{n-1}$-et. Most alkalmazzuk a két halmaz esetét a V_1 és U_n választással, így kapjuk a V'_1, $U'_{n,1}$ gömböket, majd alkalmazzuk a két halmaz esetét a V_2 és $U'_{n,1}$ halmazokra, így kapjuk a V'_2, $U'_{n,2}$ gömböket. Ezt folytatva, az utolsó lépésben a két halmaz esetét alkalmazzuk a V_{n-1} és $U'_{n,n-1}$ halmazokra, amivel kapjuk a V'_n, $U'_{n,n}$ gömböket. A $V'_1, V'_2, \ldots V'_{n-1}, U'_{n,n}$ rendszer (nevezzük ezeket $U'_1, \ldots, U'_n$-nek) kielégíti a feltételeket.

Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ egy különböző pontokból álló, S-ben sűrű sorozat, és legyen B_j az a_j körüli $1/j$ sugarú gömb. n-szerinti rekurzióval konstruálunk olyan $B_{i,n}$, $1 \leq i \leq n$, gömböket, hogy $B_{i,n} \subseteq B_{i,n-1} \subseteq \cdots \subseteq B_{i,i} \subseteq B_i$, mindegyik $B_{i,k}$ lezártja is még benne van $B_{i,k-1}$-ben, és tetszőlegesen kiválasztva 1-1 pontot a $B_{i,n}$ halmazokból (azaz összesen n pontot felvéve) egy K-tól diszjunkt húrrendszert kapunk. Azt is megköveteljük, hogy $B_{i,n}$ lezártja nem tartalmazza a_{n+1}-et semelyik $1 \leq i \leq n$-re.

Ha $n = 1$, akkor legyen egyszerűen $B_{1,1} \subset B_1$ olyan gömb, amely nem tartalmazza az a_2 pontot, és amelynek még a lezártja is része B_1-nek. A rekurzióhoz tegyük most fel, hogy valamely n-re már minden $1 \leq i \leq (n-1)$ esetén ismerjük a $B_{i,n-1}$ halmazokat. Legyen B^*_n olyan gömb, hogy a lezártja része B_n-nek, és diszjunkt a $B_{i,n-1}$, $1 \leq i \leq n-1$, halmazoktól (ilyen van, hiszen a_n nincs a $B_{i,n-1}$, $1 \leq i \leq n-1$, halmazok lezártjában, és B_n középpontja a_n). Ekkor az $U_j = B_{j,n-1}$, $U_n = B^*_n$ választással alkalmazzuk a megoldás elején mondottakat, és legyen $B_{j,n} = U'_j$, $1 \leq j \leq n-1$, és $B_{n,n} = U'_n$. Tovább szűkítve a $B_{j,n}$ gömböket azt is el tudjuk érni, hogy a_{n+1} egyik lezártjának se legyen eleme.

Ezzel a $B_{i,n}$ halmazokat rekurzív módon definiáltuk, és legyen $h_i \in \cap_{n=i}^{\infty} B_{i,n}$. Ez a metszet, mint egymásba skatulyázott kompakt halmazok metszete, nem üres, így h_i létezik. Állítjuk, hogy a $H = \{h_1, h_2, \ldots\}$ halmaz sűrű, és a pontjait összekötő húrok diszjunktak K-tól. A H halmaz sűrűsége világos, hiszen minden n-re az a_n pont $1/n$-sugarú környezete (amely B_n) tartalmazza a h_n pontot. Másrészről, ha $j \neq k$ és $n > \max\{j, k\}$, akkor a $B_{j,n}$ és $B_{k,n}$ halmazok léteznek, és bármely két pontjukat összekötő húr diszjunkt K-tól, márpedig $h_j \in B_{j,n}$ és $h_k \in B_{k,n}$.

Maga Balázs megoldása

2. feladat (Kitűző: Tardos Gábor). *Legyen $\{x_n\}$ a van der Korput sorozat, azaz ha a pozitív egész n bináris alakja $n = \sum_i a_i 2^i$ ($a_i \in \{0,1\}$), akkor $x_n = \sum_i a_i 2^{-i-1}$. Legyen V a síkbeli (n, x_n) pontok halmaza, ahol n pozitív egész. Legyen G az a gráf, melynek csúcshalmaza V, és amelyben két különböző csúcsot, p-t és q-t akkor és csak akkor kötjük össze éllel, ha van olyan – a koordinátatengelyekkel párhuzamos állású – R téglalap, melyre $R \cap V = \{p, q\}$. Igazoljuk, hogy G kromatikus száma véges.*

Megoldás. Néhány egyszerű megjegyzéssel kezdjük. A gráf egy (n, x_n) csúcsát azonosíthatjuk n bináris felírásában a számjegyek sorozatával, amelyet kezdő 0-kkal végtelen sorozattá egészítünk ki. Azaz gráfunk csúcsait kódoljuk azon $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ 0-1 sorozatokkal, amelyek véges sok 1-est tartalmaznak. A pozíciókat úgy képzeljük mint a helyi értékeket a bináris felírásban. Azaz a sorozat balra végtelen. Két pozíció közül az első a bal oldalibb, vagyis amelyik indexe nagyobb. Az (a_i) és (b_i) különböző sorozatoknak megfelelő pontok első koordinátájának nagyság szerinti rendezését az első eltérő bitjük dönti el (az olvasat balról jobbra történik, azaz az első eltérő bit pozíciója a legnagyobb i index, amelyre $a_i \neq b_i$). Annak a pontnak lesz nagyobb az első koordinátája, amelyik 1-est tartalmaz az első eltérés helyén. Hasonlóan egyszerű, hogy az (a_i) és (b_i) különböző sorozatoknak megfelelő pontok második koordinátájának nagyság szerinti rendezését az utolsó eltérő bitjük dönti el. Annak a pontnak lesz nagyobb a második koordinátája, amelyik 1-est tartalmaz az utolsó eltérés helyén.

Gráfunkban két csúcs ((a_i) és $(a_i{}')$) akkor és csak akkor nem összekötött, ha van olyan csúcs ((b_i)), amelyet (a_i)-val és $(a_i{}')$-vel első eltérésük szerint összevetve közéjük esik, és hasonlóan közéjük esik az utolsó eltérés szerinti összevetésben. Ekkor azt mondjuk, hogy (b_i) bizonyítja (a_i) és $(a_i{}')$ nem összekötöttségét.

Vegyünk két tetszőleges csúcsát gráfunknak, illetve az őket leíró két balra végtelen sorozatot. Ennek lesz egy első és utolsó eltérése. Ez vagy egybeesik ($\alpha 0 \omega$ és $\alpha 1 \omega$, ahol α egy balra végtelen 0-1 sorozat, míg ω egy véges 0-1 sorozat) vagy nem esik egybe ($\alpha 0 \kappa 0 \omega$ és $\alpha 1 \kappa' 1 \omega$, illetve $\alpha 0 \kappa 1 \omega$ és $\alpha 1 \kappa' 0 \omega$, ahol κ és κ' hossza ugyanaz az ℓ természetes szám, esetleg 0).

A bizonyítás első lépéseként azonosítjuk gráfunk néhány „nem élét”:

- $\alpha 00 \omega$ és $\alpha 11 \omega$ nem összekötött. Valóban, $\alpha 01 \omega$ bizonyítja ezt.
- $u = \alpha 0 \kappa 0 \omega$ és $v = \alpha 1 \kappa' 1 \omega$ nem összekötött, ha κ, κ' hossza ℓ és $\kappa \neq 1^\ell$. Valóban, $\alpha 0 1^\ell 0 \omega$ bizonyítja ezt.
- $u = \alpha 0 \kappa 0 \omega$ és $v = \alpha 1 \kappa' 1 \omega$ nem összekötött, ha κ, κ' hossza ℓ és $\kappa' \neq 0^\ell$. Valóban, $\alpha 1 0^\ell 1 \omega$ bizonyítja ezt.
- $u = \alpha 0 \kappa 1 \omega$ és $v = \alpha 1 \kappa' 0 \omega$ nem összekötött, ha κ, κ' hossza ℓ, és $\kappa, \kappa' \neq 0^\ell$. Valóban, $\alpha 1 0^\ell 1 \omega$ bizonyítja ezt.
- $u = \alpha 0 \kappa 1 \omega$ és $v = \alpha 1 \kappa' 0 \omega$ nem összekötött, ha κ, κ' hossza ℓ, és $\kappa, \kappa' \neq 1^\ell$. Valóban, $\alpha 0 1^\ell 0 \omega$ bizonyítja ezt.

A fenti megjegyzések után a lehetséges összekötött csúcspárok kódpárjaira a következő lehetőségek vannak:

- $\alpha 0\omega$ és $\alpha 1\omega$,
- $\alpha 01^{\ell}0\omega$ és $\alpha 10^{\ell}1\omega$ $(\ell > 0)$,
- $\alpha 00^{\ell}1\omega$ és $\alpha 11^{\ell}0\omega$,
- $\alpha 01^{\ell}1\omega$ és $\alpha 10^{\ell}0\omega$.

Ezek valójában élei is gráfunknak, de ennek igazolására nincs szükség a bizonyítás befejezéséhez.

Vegyük észre, minden esetben a két csúcs első koordinátái közötti számszerű különbség a $\{2^n, 2^n(2^m-3), 3\cdot 2^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ halmazból kerül ki. Elemi számelmélet adja, hogy ez nem lehet 7-tel osztható. Tehát az (n, x_n) csúcsot n (mod 7)-tel színezve egy jó színezést kapunk hét színnel.

Több versenyző megoldása alapján

3. feladat (Kitűző: Zádori László). *Legyen A véges halmaz és $\to$ olyan binér reláció A-n, hogy bármely $a, b, c \in A$ esetén, ha $a \neq b$, $a \to c$ és $b \to c$, akkor $a \to b$ vagy $b \to a$. Legyen $B \subseteq A$ minimális arra a tulajdonságra nézve, hogy bármely $a \in A \setminus B$ elemhez létezik $b \in B$ úgy, hogy $a \to b$ vagy $b \to a$. Tegyük fel, hogy A-nak legfeljebb k olyan eleme van, hogy közülük semelyik kettő sincs $\to$ relációban. Bizonyítsuk be, hogy B legfeljebb k elemű.*

Megoldás. Bevezetjük a következő jelölést: $a \sim b$ akkor és csak akkor, ha $a \to b$ vagy $b \to a$. Legyen $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Belátjuk, hogy $m \leq k$. A B-re kirótt feltételek szerint tetszőleges $i \leq m$-re vagy létezik $b_i' \in A \setminus B$, amelyre $b_i \sim b_i'$ és $b_i' \nsim b_j$ minden $j \neq i$-re, vagy különben $b_i \nsim b_j$ minden $j \neq i$-re. Feltehető, hogy ha $i \leq l$, akkor b_i-hez van az előzőekben leírt b_i', egyébként pedig nincs.

Minden $i \leq l$-re vegyünk egy a fenti feltételeket kielégítő b_i'-t. Tetszőleges $i \leq l$-re legyen b_i^* a b_i és b_i' közül az, amelyikbe megy a másikból él. (Ha $b_i \to b_i'$ és $b_i' \to b_i$ is teljesül, akkor $b_i^* = b_i$.) Világos, hogy bármely $i < j \leq l$-re $b_i^* \neq b_j^*$, hiszen $b_i, b_j \in B$, $b_i', b_j' \in A \setminus B$, $b_i \neq b_j$ és $b_i' \neq b_j'$.

Megmutatjuk, hogy minden $i \neq j$, $i, j \leq l$ esetén $b_i^* \nrightarrow b_j^*$. Tegyük fel, hogy $b_i^* \to b_j^*$. Legyen $\{b_j^\circ, b_j^*\} = \{b_j, b_j'\}$, ekkor persze $b_j^\circ \to b_j^*$. Hasonlóan világos, mint az előbb, hogy $b_i^* \neq b_j^\circ$. Tehát b_i^*, b_j^* és b_j° három páronként különböző eleme A-nak, melyekre a feladat első mondatában szereplő feltétel szerint $b_i^* \sim b_j^\circ$ is teljesül. Így a háromelemű $\{b_i^*, b_j^*, b_j^\circ\} \subseteq \{b_i, b_i', b_j, b_j'\}$ halmaz bármely két eleme között van él, ami ellentmond annak, hogy $b_t \nsim b_s'$ minden $s \neq t$-re, ha $s \leq l$.

Kaptuk tehát, hogy minden $i \neq j$, $i, j \leq l$-re $b_i^* \nrightarrow b_j^*$. Világos, hogy az l-nél nagyobb indexű b_i-k között nem megy él. Mivel a $\{b_1, \ldots, b_l, b_1', \ldots, b_l'\}$ és $\{b_{l+1}, \ldots, b_m\}$ halmazok diszjunktak, és nincs közöttük él, ezért az m-elemű $\{b_1^*, \ldots, b_l^*, b_{l+1}, \ldots, b_m\}$ halmaz semelyik két eleme sincs $\to$ relációban, és így $m \leq k$.

Több versenyző megoldása alapján

4. feladat (Kitűző: Ruzsa Imre). *Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív egész számok olyan sorozata, hogy $a_1 = 1$, és bármely p prímszámra $a_1, a_2, \ldots, a_p$ teljes maradékrendszert alkot modulo p. Bizonyítsuk be, hogy $\lim a_n/n = 1$.*

Megoldás. Először belátjuk, hogy minden p prímszámra teljesül, hogy

$$\{a_1, \dots, a_p\} = \{1, \dots, p\}.$$

A feltétel miatt $a_i \neq a_j$ minden $i \neq j$ egész számpárra. Jelölje p_i az i-edik prímszámot.

Indirekt módon tegyük fel, hogy vannak olyan $m > 0$, $i > 0$ egészek, amelyekre $m \leq p_i < a_m$. Feltehető, hogy m a legkisebb egész, amely ezt teljesíti, valamint

$$p_{i-1} < m \leq p_i < a_m$$

valamely $i > 1$-re. Mivel minden $n \leq p_{i-1}$-re $a_n \leq p_{i-1}$, így $\{a_1, \dots, a_{p_{i-1}}\} = \{1, \dots, p_{i-1}\}$.

Ha $a_m \leq p_{i-1} + p_i$, akkor $p_i \in \{a_m - a_1, a_m - a_2, \dots, a_m - a_{p_{i-1}}\} = D_m$, ami nem lehet, mivel $\{a_1, \dots, a_{p_i}\}$ teljes maradékrendszer modulo p_i.

Tehát $a_m > p_{i-1} + p_i \geq 2p_{i-1} + 1$. Alkalmazzuk a következő tételt:

Tétel (Sylvester–Schur)**.** *Ha $n \geq k > 0$ egész számok, akkor az $n+1, \dots, n+k$ számok valamelyikének van k-nál nagyobb prímosztója.*

Ez alapján, mivel $a_m - p_{i-1} > p_{i-1}$, létezik $j \geq i$, amelyre p_j osztja valamelyik D_m-beli számot, így $a_1, \dots, a_{p_j}$ nem lehet teljes maradékrendszer modulo p_j, ami ellentmondás, tehát beláttuk, hogy $\{a_1, \dots, a_p\} = \{1, \dots, p\}$ minden p prímszámra.

Tehát azt kaptuk, hogy ha $i > 1$ és $p_{i-1} < n \leq p_i$, akkor $p_{i-1} < a_n \leq p_i$, és így

$$\frac{p_{i-1}}{p_i} < \frac{a_n}{n} < \frac{p_i}{p_{i-1}}.$$

A bizonyítás befejezéséhez elegendő belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1.$$

A prímszámtétel következménye a következő

Állítás. *Minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n_\varepsilon > 0$, hogy ha $n > n_\varepsilon$, akkor van prím n és $n(1+\varepsilon)$ között.*

Tehát minden $p_n > n_\varepsilon$ esetén $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1 + \varepsilon$, amiből következik az állítás.

Több versenyző megoldása alapján

5. feladat (Kitűző: Pelikán József)**.** *Legyen $n \geq 1$ esetén $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1$. Mely n pozitív egész számokra találhatók olyan $g(x)$, $h(x)$ valós együtthatós, n-nél alacsonyabb fokú polinomok, amelyekkel $f(x) = g\big(h(x)\big)$?*

Megoldás. Válasz: ilyen g, h polinomok semmilyen n-re sem léteznek. Tegyük fel ugyanis, hogy lenne megfelelő g, h, $\deg(g) = k$, $\deg(h) = \ell$ $(k, \ell < n)$. Legyenek g komplex gyökei $r_1, r_2, \dots, r_k$. f gyökei a komplex $(n+1)$-edik egységgyökök, kivéve az 1-et. $f = g \circ h$ miatt ezek k darab ℓ-es csoportra oszlanak, a j-edik csoportban levő egységgyökökre h az r_j értéket veszi fel, más szóval ezek $h(x)-r_j$ gyökei. A $h(x)-r_j$ polinomok csak a konstans tagban különböznek, így $x^{\ell-1}$ együtthatója mindegyikben ugyanaz. Ez azt jelenti, hogy a j-edik csoportban levő ℓ darab egységgyök összege ugyanaz minden j-re. De mivel a szóban forgó n darab $(n+1)$-edik egységgyök összege -1, a k csoport mindegyikében az egységgyökök összege $-\frac{1}{k}$ lenne. Ez azonban lehetetlen, hiszen az egységgyökök algebrai egészek, $-\frac{1}{k}$ pedig $k>1$ miatt nem az.

A kitűző megoldása

6. feladat (Kitűző: Peter Müller és Nagy Gábor Péter)**.** *Legyen G az Ω véges halmazon ható permutációcsoport. Legyen $S \subseteq G$ olyan, hogy $1 \in S$ és bármely $x, y \in \Omega$ elemekhez pontosan egy $\sigma \in S$ elem létezik, melyre $\sigma(x)=y$. Mutassuk meg, hogy ha az $S \setminus \{1\}$-beli elemek konjugáltak G-ben, akkor a G csoport 2-tranzitívan hat Ω-n.*

Megoldás. A G csoport hat az $\Omega \times \Omega$ halmazon a $g(\alpha,\beta) = \big(g(\alpha), g(\beta)\big)$ hatással, legyenek ennek pályái $R_0 = \{(\omega,\omega) \mid \omega \in \Omega\}$, $R_1, \dots, R_r$. Belátjuk, hogy $n=|\Omega|$-ra $|R_1| = n(n-1)$ (és persze emiatt $r=1$), ez éppen azt jelenti, hogy G kétszeresen tranzitív Ω-n.

Legyen $\alpha, \beta \in \Omega$ és $s \in S$ olyan, hogy $s(\alpha)=\beta$. Ekkor s bijekcióba állítja R_1 azon elemeit, amiknek első tagja α, R_1 azon elemeivel, amelyek első tagja β. R_1 elemeit n részhalmazba sorolhatjuk az első elemük szerint. Az előző megjegyzésünk szerint bármely két ilyen halmaz azonos elemszámú, és így n osztja R_1 elemszámát.

Legyen $s \in S$ egy rögzített elem és legyen s ciklusfelbontásában $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ egy ciklus. (Itt $2 \le k \le n$ a ciklus hossza, $s(a_i) = a_{i+1}$ az $i = 1, 2, \dots, n$ egészekre az $a_{k+1} = a_1$ jelöléssel.) $S \setminus \{1\}$ elemei előállnak s-nek G-beli elemmel való konjugáltjaként; legyenek $c_1 = 1$, $c_2, \dots, c_{n-1}$ olyan G-beli elemek, amikre $S = \{1\} \cup \{c_j s c_j^{-1} \mid 1 \le j \le n-1\}$. Ha $(a_1, a_2) \in R_m$ valamely $1 \le m \le r$-re, akkor $(a_i, a_{i+1}) \in R_m$ minden $1 \le i \le k$-ra, mert $s^{i-1}(a_1, a_2) = (a_i, a_{i+1})$. Mivel a c_j elemek is G-ben vannak, ezért minden $1 \le i \le k$-ra és $1 \le j \le n-1$-re

$$\big(c_j(a_i), c_j(a_{i+1})\big) \in R_m.$$

Ezek valóban $k(n-1)$ különböző elemét fogják R_m-nek adni, mivel ha

$$\big(c_j(a_i), c_j(a_{i+1})\big) = \big(c_{j'}(a_{i'}), c_{j'}(a_{i'+1})\big)$$

lenne $(i,j) \ne (i',j')$ esetén, akkor a $c_j s c_j^{-1}$ és $c_{j'} s c_{j'}^{-1}$ S-beli permutációk értéke az $x = c_j(a_i) = c_{j'}(a_{i'})$ helyen $y = c_j(a_{i+1}) = c_{j'}(a_{i'+1})$ lenne, ami ellentmond a feladat feltételének.

Így s ciklusfelbontásának minden k hosszú C ciklusához hozzárendelhetjük $(\Omega \times \Omega) \setminus R_0$ egy $k(n-1)$ elemű H_C halmazát úgy, hogy létezzen olyan m, amelyre $H_C \subseteq R_m$. $(\Omega \times \Omega) \setminus R_0 = \bigcup_C H_C$, mert minden $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \ne \beta$ párra van olyan $t = c_j s c_j^{-1} \in S$, hogy $t(\alpha) = \beta$, és ekkor $(\alpha, \beta) \in H_C$ arra a C ciklusra, amiben $c_j^{-1}(\alpha)$ szerepel. Az elemszámok vizsgálatából adódik, hogy ez diszjunkt unió. Ebből viszont következik, hogy minden $1 \le m \le r$ esetén R_m előáll néhány H_C diszjunkt uniójaként. Speciálisan, R_1 elemszáma $n-1$ többszöröse.

Mivel n és $n-1$ relatív prímek, és mindkettő osztója $|R_1|$-nek, ezért a szorzatuk is osztója $|R_1|$-nek. Következésképpen $|R_1| \geq n(n-1)$, viszont $|R_1| \leq n(n-1)$ triviális, így készen vagyunk.

Nagy Donát megoldása

7. feladat (Kitűző: Bezdek András, Fodor Ferenc, Vígh Viktor és Zarnócz Tamás)**.** *A háromdimenziós, origó középpontú egységgömb S^2 határán egy w szélességű sávon egy w szélességű, origóra szimmetrikus gömbövet értünk. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $c > 0$ konstans, amelyre minden pozitív egész n esetén S^2 lefedhető n darab egyforma szélességű sávval úgy, hogy minden pontot legfeljebb $c \cdot \sqrt{n}$ sáv tartalmaz.*

1. megoldás.

Lemma. *Legyen $0 < \omega < \pi/2$, és $P_1, P_2, \dots, P_m$ egy maximális (telített) pontrendszer S^2-n úgy, hogy bármely két pont (gömbi) távolsága legalább ω. Ekkor*

$$\frac{4}{\omega^2} \leq m \leq \frac{32}{\omega^2}. \tag{1}$$

Bizonyítás. Rajzoljunk minden P_i köré $\omega/2$ (gömbi) sugarú k_i (gömbi) kört, és ω (gömbi) sugarú K_i (gömbi) kört. A P_i-k választása miatt a k_i körök diszjunktak, a K_i körök pedig lefedik S^2-t. A k_i körök területe $t_\omega = 4\pi\big(1-\cos(\omega/2)\big)/2$, a K_i körök területe $T_\omega = 4\pi(1-\cos\omega)/2$ (speciális gömbövek). Mivel a k_i körök diszjunktak, míg a K_i körök lefedik S^2-t, így

$$m \cdot t_\omega \leq 4\pi \leq m \cdot T_\omega,$$

ahonnan m-re rendezve

$$\frac{2}{1-\cos\omega} \leq m \leq \frac{2}{1-\cos\omega/2}.$$

Felhasználva, hogy $0 < x < 1$ esetén $x^2/4 < 1-\cos x < x^2/2$, adódik a lemma állítása. ■

Legyen most $n \geq 4$ adott, és legyen $\omega = 4\sqrt{2}/\sqrt{n}$. Tekintsünk egy a lemma feltételeinek eleget tevő maximális $P_1, P_2, \dots, P_m$ pontrendszert, így $n/8 \leq m \leq n$. Most egészítsük ki a $P_1, P_2, \dots, P_m$ pontrendszert $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontrendszerré úgy, hogy a $P_1, P_2, \dots, P_m$ pontok mindegyikét legfeljebb még hétszer megismételjük. Ez $n/8 \leq m$ miatt lehetséges. Végül tekintsük azt az n sávot, amelyek középfőkörének pólusa valamely P_i, és amelyek (gömbi) szélessége $2\sin\omega$.

Ezek a sávok egyrészről lefedik a gömböt; ugyanis ha $X \in S^2$ nem lenne lefedve, akkor az X pólusú, $2\sin\omega$ széles S_X sávban nem választottunk volna P_i pontot, ami ellentmond a $P_1, P_2, \dots, P_m$ pontrendszer maximalitásának.

Másrészről egy $X \in S^2$ pont pontosan annyi sávban van benne, ahány P_i ($1 \leq i \leq n$) pontot tartalmaz S_X; jelölje ezt n_X, ezt szeretnénk felülről becsülni. Ehhez először becsüljük meg, hogy a $P_1, \dots, P_m$ pontok közül mennyit tartalmaz S_X;

jelöljük ezt a számot m_X-szel. Vegyük észre, hogy ha $P_i \in S_X$, akkor a P_i középpontú, $\omega/2$ sugarú k_i körnek több mint a fele is S_X-be esik. A konstrukció miatt ezek a körök diszjunktak ($1 \le i \le m$), területük $t_\omega = 2\pi\big(1 - \cos(\omega/2)\big)$.

Az eddigiek szerint, a körök diszjunktsága miatt $m_X \cdot t_\omega/2 \le 4\pi \sin\omega$, ahol a jobb oldalon S_X (gömbi) területe áll. Innen kapjuk, hogy $\omega \le \pi/2$ esetén

$$m_X \le \frac{4\sin\omega}{1-\cos(\omega/2)} \le \frac{4\omega}{\frac{\omega^2}{16}} = 256\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}.$$

Világos, hogy $n_X \le 8m_X$, így a megadott konstrukció minden $n \ge 4$-re működik ($c = 2048\sqrt{2}$), amiből az állítás következik.

Több versenyző megoldása alapján

2. megoldás. Vázolunk egy második megoldást, amely a kitűzöttnél jóval erősebb, $c \cdot \ln^3 n$ felső korlátot bizonyít. A becslések további finomításával az $\ln n$ tényező kitevője még tovább csökkenthető, ezt az érdeklődő olvasóra bízzuk.

Legyen n adott, elegendően nagy, $\alpha = \ln n/n$. Legyen $Q_1, \dots, Q_N \in S^2$ egy maximális pontrendszer úgy, hogy bármely kettő (euklideszi) távolsága legalább $\alpha/2$. Ekkor az első megoldás lemmájához hasonlóan $N \le 500/\alpha^2 = 500n^2/\ln^2 n$.

Válasszunk az S^2-ről a normalizált felszínmérték szerint egyenletesen, egymástól függetlenül $X_1, \dots, X_n$ véletlen pontokat, és tekintsük az X_i pólusú, $y = 100\alpha$ (euklideszi) félszélességű S_i sávokat ($1 \le i \le n$). Megmutatjuk, hogy elég nagy n-re pozitív valószínűségű az az esemény, hogy ezek a sávok lefedik S^2-t és minden pont legfeljebb $\ln^3 n$-szer fedett. Ebből az állítás következik.

Ehhez először megbecsüljük, hogy mi annak a valószínűsége, hogy a választott sávok nem fedik le S^2-t. Jelölje S_i^- az X_i pólusú 99α (euklideszi) félszélességű sávot. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_i \text{ sávok nem fedik } S^2\text{-t}) &\le \mathbb{P}(\exists\, Q_j \text{ amit az } S_i^- \text{ sávok nem fednek le })\\
&\le N \cdot \mathbb{P}(Q_1\text{-t nem fedik az } S_i^- \text{ sávok})\\
&= N \cdot \mathbb{P}\big(Q_1 \notin S_1^-\big)^n\\
&= N(1-99\alpha)^n\\
&\le 500(1 - 99\ln n/n)^n \cdot n^2/\ln^2 n\\
&\le n^{-97},
\end{aligned}$$

ha n elegendően nagy.

Másodszor azt becsüljük, hogy van k-szorosan fedett pont. Ehhez jelölje S_i^+ az X_i pólusú 101α (euklideszi) félszélességű sávot.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\exists\, P \in S^2 \text{ amit az } S_i \text{ sávok legalább } k\text{-szor fednek})\\
&\qquad\qquad \le \mathbb{P}(\exists\, Q_j \text{ amit az } S_i^+ \text{ sávok legalább } k\text{-szor fednek})\\
&\qquad\qquad \le N \cdot \mathbb{P}(Q_1\text{-t az } S_i^+ \text{ sávok legalább } k\text{-szor fedik})\\
&\qquad\qquad \le N \cdot \binom{n}{k} \left(\frac{101 \ln n}{n}\right)^k\\
&\qquad\qquad \le \frac{500 n^2}{\ln^2 n} \cdot \frac{n^k}{k!} \left(\frac{101 \ln n}{n}\right)^k .
\end{aligned}$$

Most legyen $k = \ln^3 n$, és használjuk a $k! > (k/2)^{k/2}$ becslést.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\exists\, P \in S^2 \text{ amit az } S_i \text{ sávok legalább } \ln^3 n\text{-szer fednek})\\
&\qquad\qquad \le \frac{500 n^2}{\ln^2 n} \cdot \frac{n^k}{k!} \left(\frac{101 \ln n}{n}\right)^k\\
&\qquad\qquad \le \frac{500 n^2}{\ln^2 n} \cdot \frac{(101 \ln n)^{\ln^3 n}}{(\ln^3 n/2)^{\ln^3 n/2}}\\
&\qquad\qquad \le 500 \cdot \left(101\sqrt{2}\right)^{\ln^3 n} \cdot n^2 \cdot (\ln n)^{-\ln^3 n/2}\\
&\qquad\qquad \le 500 \cdot \left(\frac{101\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\ln n}}\right)^{\ln^3 n} \cdot \frac{n^2}{\sqrt[4]{\ln n^{\ln n}}}.
\end{aligned}$$

Mivel mindkét valószínűségre adott felső becslés nyilvánvalóan 0-hoz tart, amint n tart végtelenbe, ezért elég nagy n-re pozitív valószínűséggel egyik sem következik be. Ezt akartuk igazolni.

Nagy János megoldása alapján

8. feladat (Kitűző: Daróczy Zoltán és Totik Vilmos)**.** *Igazoljuk, hogy az*

$$[f(x) - f(y)]\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f\left(\sqrt{xy}\right)\right] \equiv 0, \qquad x, y \in (0,\infty), \tag{2}$$

függvényegyenlet minden folytonos megoldása konstans.

1. megoldás. Legyen $M(x,y) = \sqrt{xy}$, $N(x,y) = \frac{x+y}{2}$. Ezekre a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség miatt $M(x,y) < N(x,y)$ ha $x \ne y$.

Elegendő igazolni, hogy f konstans minden $[a,b] \subset (0,\infty)$ intervallumon. Tegyük fel, hogy nem ez a helyzet. Ekkor az f értékkészlete $[a,b]$-n egy nem elfajuló intervallum, és legyen A ennek egy olyan eleme, amely különbözik $f(a)$-tól is és

$f(b)$-től is, és amely az f-nek nem lokális szélsőértéke. (Van ilyen A, mivel bármely valós függvény lokális szélsőértékeinek halmaza megszámlálható, ld. a [P. Komjáth and V. Totik, *Problems and Theorems from Classical Set Theory,* Problem Books in Mathematics, Springer, 2006.] könyv 5. fejezetének 9. problémáját). Tegyük fel pl., hogy $f(a) < A$. Akkor az

$$\{x \in [a,b] \mid f(x) \geq A\}$$

nem üres halmaz, és legyen x_0 ennek legkisebb eleme. Nyilvánvalóan $f(x_0) = A$ és $a < x_0 < b$ (az A választása miatt), továbbá $f(x) < A$ minden $a \leq x < x_0$-ra.

Legyen $\delta > 0$ olyan kicsi, hogy $x_0 - \delta > a$ és $x_0 + \delta < b$ teljesülnek. Mivel $f(x) < A$, és ezért $f(x) \leq A$ az x_0 ponttól balra, ugyanez nem állhat fenn az x_0 egy jobb oldali környezetében (különben A lokális maximum-érték lenne), így vannak tetszőlegesen kicsi $0 < \varepsilon < \delta$ számok, amelyekre $f(x_0 + \varepsilon) > A$. Egy ilyen $0 < \varepsilon < \delta$-ra legyen $x = x_0 - \varepsilon$, $y = x_0 + \varepsilon$. Ezekre $f(x) < A < f(y)$, és mivel $M(x,y) < N(x,y) = x_0$ szintén igaz, $f\big(M(x,y)\big) < A = f\big(N(x,y)\big)$ is teljesül. Tehát ezekre az x, y értékekre a (2) függvényegyenlet nem áll fenn, és ez az ellentmondás igazolja, hogy f valóban konstans kell, hogy legyen.

A kitűzők megoldása

2. megoldás. Tegyük fel indirekt módon, hogy $f:\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos és kielégíti a függvényegyenletet, de valamely $0 < u < v$-re $f(u) \neq f(v)$. Legyen $a = \sup\big\{x \mid 0 < x < v,\ f(x) = f(u)\big\}$. Erre $u \leq a$, f folytonossága miatt $f(a) = f(u)$, és $a < v$. Hasonlóan, a $b = \inf\big\{y \mid a < y,\ f(y) = f(v)\big\}$ számra igaz, hogy $b \leq v$, $f(b) = f(v)$ és $a < b$.

Ezek szerint találtunk egy $[a,b] \subset (0,\infty)$ zárt intervallumot, amire $f(a) \neq f(b)$ és (a,b)-n f nem veszi fel sem $f(a)$-t, sem $f(b)$-t. A függvényegyenletet a-ra és b-re felírva kapjuk, mivel $f(a) - f(b) \neq 0$, hogy $f\big(\frac{a+b}{2}\big) = f\big(\sqrt{ab}\big)$. Legyen ez a közös érték t. Az előzők szerint ez különbözik $f(a)$-tól és $f(b)$-től.

Legyen $b_0 = b$ és $b_{n+1} = 2\sqrt{a \cdot b_n} - a$ minden n nemnegatív egészre. Ekkor n szerinti teljes indukcióval triviálisan látható, hogy $b_n > a$; a b_n sorozat szigorúan monoton csökkenő (mert $b_{n+1} < b_n$ ekvivalens $\sqrt{a \cdot b_n} < \frac{a+b_n}{2}$-vel, ez pedig a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből következik, mivel $b_n > a$). Ha β ezen (monoton csökkenő, alulról korlátos) sorozat határértéke, akkor $\beta = 2\sqrt{a \cdot \beta} - a$, és innen kapjuk, hogy $\beta = a$.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy $f\big(\frac{a+b_n}{2}\big) = t$. Ez $n = 0$-ra teljesül, és tegyük fel, hogy ezt az egyenlőséget valamilyen n-re már beláttuk. A b_{n+1} szám definíciója miatt $\frac{a+b_{n+1}}{2} = \sqrt{a \cdot b_n}$, és a függvényegyenlet szerint

$$\big[f(a) - f(b_n)\big]\left[f\big(\sqrt{a \cdot b_n}\,\big) - f\left(\frac{a+b_n}{2}\right)\right] = 0.$$

De itt $f(b_n) \neq f(a)$, hiszen $a < b_n < b$, tehát

$$t = f\left(\frac{a+b_n}{2}\right) = f\big(\sqrt{a \cdot b_n}\,\big) = f\left(\frac{a+b_{n+1}}{2}\right)$$

fenn kell, hogy álljon, amivel igazoltuk az indukciós lépést.

Azonban $f\left(\frac{a+b_n}{2}\right) = t$ minden n-re ellentmond f folytonosságának, hiszen $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ miatt $\lim_{n\to\infty} \frac{a+b_n}{2} = a$, de

$$t = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{a+b_n}{2}\right) \neq f(a).$$

Több versenyző megoldása alapján

9. feladat (Kitűző: Totik Vilmos)**.** *Egy $G \subseteq \mathbb{C}$ tartományon értelmezett u függvényre legyen $Z(u)$ az u zérushelyei halmazának 1 sugarú környezete. Igazoljuk, hogy minden $K \subset G$ kompakt halmazra van olyan C konstans, hogy ha u tetszőleges valós harmonikus függvény G-n, amely eltűnik a K valamelyik pontjában, akkor*

$$\sup_{z\in K} \left|u(z)\right| \leq C \sup_{z\in Z(u)\cap G} \left|u(z)\right|.$$

Megoldás. K kompaktsága miatt van olyan $1 > \delta > 0$ és T, hogy bármely $z, w \in K$ összeköthető legfeljebb T hosszú töröttvonallal, amelynek minden pontja legalább δ távolságra megy a G határától. Minden $z, w \in K$ párra rögzítsünk egy ilyen $L_{z,w}$ töröttvonalat.

Legyen $w \in K$ olyan, hogy $u(w) = 0$; legyen

$$q = \sup_{z\in Z(u)\cap G} \left|u(z)\right|,$$

és $z \in K$ tetszőleges. Ha $z \in \overline{Z(u)}$, akkor $\left|u(z)\right| \leq q$; egyébként $L_{z,w}$-n z-ből w felé haladva van egy legelső olyan z' pont, amely $\overline{Z(u)}$-ban van. Ha t tetszőleges pont $L_{z,w}$-n, amely z és z' között van, akkor a t pont δ sugarú $D_\delta(t)$ környezetében u-nak nincs zérushelye (különben $t \in \overline{Z(u)}$ lenne $\delta < 1$ miatt), ezért u vagy pozitív, vagy negatív $D_\delta(t)$-ben. Pl. a pozitív esetben (a negatív eset (-1)-gyel való beszorzással kapható) a $\overline{\Delta_\delta(t)}$ zárt körlapon u-ra felírva a Poisson-formulát kapjuk, hogy ha $t_1' = t + r_1 e^{i\theta_1}$, $|r_1| < \delta$, akkor

$$u(t_1') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\delta^2 - r_1^2}{\delta^2 - 2\delta r_1\cos(\theta_1 - \xi) + r_1^2} u(t + \delta e^{i\xi})d\xi,$$

és mivel az integrálban $|r_1| \leq \delta/2$ esetén

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\delta - r_1}{\delta + \rho_1} = \frac{\delta^2 - r_1^2}{\delta^2 + 2\delta r_1 + r_1^2} \leq \frac{\delta^2 - r_1^2}{\delta^2 - 2\delta r_1\cos(\theta_1 - \xi) + r_1^2} \leq \frac{\delta^2 - r_1^2}{\delta^2 - 2\delta r_1 + r_1^2} =$$

$$= \frac{\delta + r_1}{\delta - \rho_1} \leq 3,$$

illetve ugyancsak a Poisson-formula miatt

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t + \delta e^{i\xi})d\xi$$

is fennáll, az u pozitivitása adja, hogy

$$\frac{1}{3}u(t) \le u(t'_1) \le 3u(t)$$

(itt lényegében a klasszikus Harnack-egyenlőtlenséget igazoltuk).

Következményként kapjuk, hogy

$$1/9 \le u(t'_1)/u(t'_2) \le 9$$

minden $t'_1, t'_2 \in D_{\delta/2}(t)$-re. Válasszunk $t_0 = z, t_1, \dots, t_k, t_{k+1} = z'$ pontokat az $L_{z,w}$ görbén a z és z' között úgy, hogy t_j és t_{j+1} távolsága a görbén mérve $\delta/2$, kivéve esetleg a $\overline{t_k z'}$ távolságot, amely lehet ennél kisebb is. Ekkor egyrészt $\bigl|u(t_{j+1})/u(t_j)\bigr| \le 9$ minden j-re, másrészt $\bigl|u(t_{k+1})\bigr| \le q$, továbbá $k \le T/(\delta/2)$, és ezekből

$$\bigl|u(z)\bigr| \le q9^{T/(\delta/2)+1}$$

adódik. Mivel ez bármely $z \in K$-ra igaz, ez az egyenlőtlenség igazolja az állítást.

Több versenyző megoldása alapján

10. feladat (Kitűző: Molnár Lajos). *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, szigorúan konvex függvény. Legyen továbbá H komplex Hilbert-tér, A és B pedig önadjungált korlátos lineáris operátorok H-n. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(A) - f(B) = f'(B)(A - B)$, akkor $A = B$.*

Megoldás. A feladat megoldásának fő eszköze a spektráltétel, a továbbiakban erre vonatkozó alapismereteket használunk.

Adjungálva az $f(A) - f(B) = f'(B)(A - B)$ egyenlőséget, azonnal adódik, hogy $f'(B)A = Af'(B)$. Ismeretes, hogy felcserélhető önadjungált operátorok folytonos függvényei is felcserélhetőek. Ezért $g\bigl(f'(B)\bigr)A = Ag\bigl(f'(B)\bigr)$ teljesül minden folytonos g függvényre, így az f' szigorúan monoton növekvő folytonos függvény inverzére is, amiből adódik, hogy A és B felcserélhetőek.

Legyen az A spektrálmértéke az $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak σ-algebráján E, a B-é pedig F. Az A, B felcserélhetősége miatt E, F értékei, mint projekciók is felcserélhetőek.

Tegyük fel, hogy λ, μ olyan valós számok, melyekkel

$$E\bigl((\lambda - 1/n, \lambda + 1/n)\bigr) \cdot F\bigl((\mu - 1/n, \mu + 1/n)\bigr) \ne 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Nyilvánvalóan ekkor $\lambda \in \sigma(A)$ és $\mu \in \sigma(B)$ teljesül ($\sigma(\cdot)$ jelöli a spektrumot). Legyen $E_n := E\bigl((\lambda - 1/n, \lambda + 1/n)\bigr)$, $F_n := F\bigl((\mu - 1/n, \mu + 1/n)\bigr)$. A fentiek miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $x_n \in \operatorname{ran}(E_n) \cap \operatorname{ran}(F_n)$, $\|x_n\| = 1$ vektor. Könnyen látható, hogy $n \to \infty$ esetén $\bigl\|(A - \lambda I)E_n\bigr\| \to 0$ és $\bigl\|(B - \mu I)F_n\bigr\| \to 0$, s ezért $Ax_n - \lambda x_n \to 0$ és $Bx_n - \mu x_n \to 0$. Standard módon adódik, hogy $g(A)x_n - g(\lambda)x_n \to 0$ és $g(B)x_n - g(\mu)x_n \to 0$ igaz minden g folytonos valós függvényre (polinomokra egyszerű számolás, utána pedig g-t egyenletesen approximáljuk polinomokkal a spektrumokon). Mivel

$$f(A)x_n - f(B)x_n = f'(B)(Ax_n - Bx_n),$$

ezért

$$\big[f(A)x_n - f(B)x_n - f(\lambda)x_n + f(\mu)x_n\big] + \big(f(\lambda) - f(\mu)\big)x_n =$$

$$= \Big[f'(B)(Ax_n - Bx_n - \lambda x_n + \mu x_n) + (\lambda - \mu)\big(f'(B) - f'(\mu)\big)x_n\Big] +$$

$$+ (\lambda - \mu)f'(\mu)x_n.$$

Tudjuk, hogy ez minden n-re teljesül, és a szögletes zárójelben levő tagok normában nullához tartanak. Mindkét oldal belső szorzatát véve x_n-nel és n-nel végtelenhez tartva kapjuk, hogy

$$f(\lambda) - f(\mu) = f'(\mu)(\lambda - \mu).$$

Ebből viszont a szigorú konvexitás miatt adódik a $\lambda = \mu$ egyenlőség. Tehát, ha $\lambda \neq \mu$ valós számok, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$E\big((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\big) \cdot F\big((\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)\big) = 0,$$

azaz $E\big((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\big)$ és $F\big((\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)\big)$ merőlegesek (pontosabban képtereik merőlegesek) egymásra.

Azt állítjuk, hogy $E\big((-\infty, t]\big) = F\big((-\infty, t]\big)$ teljesül minden t valós számra. Ebből már következni fog, hogy $E = F$, s így $A = B$. Az állítás belátásához legyenek m, M olyan valós számok, hogy $\sigma(A) \cup \sigma(B) \subset (m, M)$. Nyilván elég megmutatni, hogy $E\big([m, t]\big) = F\big([m, t]\big)$ teljesül minden $m < t < M$ esetén. Az egyenlőséghez pedig elég belátni a kapcsolódó kétirányú egyenlőtlenséget. Megmutatjuk, hogy $E\big([m, t]\big) \leq F\big([m, t]\big)$ fennáll minden $m < t < M$ esetén. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges $t < t' < M$ számot, és rögzítsünk egy $t' \leq \mu < M$ számot. Minden $\lambda \in [m, t]$ esetén létezik olyan $\varepsilon_\lambda > 0$, hogy $E\big((\lambda - \varepsilon_\lambda, \lambda + \varepsilon_\lambda)\big)$ és $F\big((\mu - \varepsilon_\lambda, \mu + \varepsilon_\lambda)\big)$ merőlegesek egymásra. Kompaktsági megfontolásból kapjuk, hogy találhatóak $\lambda_1, \dots \lambda_k \in [m, t]$ számok úgy, hogy $[m, t] \subset \cup_{j=1}^k (\lambda_j - \varepsilon_{\lambda_j}, \lambda_j + \varepsilon_{\lambda_j})$, és $E\big((\lambda_j - \varepsilon_{\lambda_j}, \lambda_j + \varepsilon_{\lambda_j})\big)$ merőleges $F\big((\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)\big)$-re ($j = 1, \dots k$), ahol $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_k)$. Innen könnyen adódik, hogy $F\big((\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)\big)$ merőleges $E\big([m, t]\big)$-re. Mivel ez minden $\mu \in [t', M]$ számmal igaz, ezért egy újabb hasonló meggondolás adja, hogy $F\big([t', M]\big)$ és $E\big([m, t]\big)$ merőlegesek egymásra minden $t < t' < M$ esetén. Emiatt pedig $F\big((t, M]\big)$ és $E([m, t])$ is merőlegesek egymásra, ami pontosan azt jelenti, hogy $E\big([m, t]\big) \leq F\big([m, t]\big)$ teljesül. Innen kapjuk az állítást.

Megjegyezzük, hogy a feladatban szereplő, az f függvény deriváltjának folytonosságára vonatkozó feltétel elhagyható, az következik f differenciálhatóságából és konvexitásából.

A kitűző megoldása

11. feladat (Kitűző: Nagy Béla, Totik Vilmos és Varga Tamás). *Egy* $[0, 1] \subseteq E \subset [0, \infty)$ *véges sok zárt intervallumból álló halmazra indítsunk egy kétdimenziós Brown-mozgást valamely* $x < 0$ *pontból, amely akkor álljon meg, ha* E *egy pontjába ér. Legyen* $p(x)$ *annak a valószínűsége, hogy ez a megállás* $[0, 1]$*-en történik. Igazoljuk, hogy* $p(x)$ *növekszik a* $[-1, 0)$ *intervallumon.*

Megoldás. Legyen $E \subset \mathbb{R}$ véges sok intervallumból álló halmaz, és egy $x \in \mathbb{R} \setminus E$ pontból indítsunk egy Brown-mozgást, amely akkor álljon meg, ha E egy pontjába ér. Ismeretes Kakutani tétele, hogy E-n ennek a megállási valószínűségnek az eloszlása ugyanaz, mint az x pontnak a $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ halmazra vett harmonikus mértéke, és ez ugyanaz (ld. [E. B. Saff and V. Totik, *Logarithmic Potential with External Fields,* Springer Verlag, Appendix 3]), mint az x pontba helyezett egységnyi δ_x pontmérték E-re vett $\mathrm{Bal}(\delta_x, E)$ ún. balayage-mértéke. Ez utóbbi az egyetlen olyan valószínűségi μ mérték E-n, amelyre igaz, hogy valamilyen c konstanssal minden $z \in E$ pontra

$$\int_E \log|z-t|d\mu(t) = \log|z-t| + c.$$

Legyen a feladatbeli E halmaz a $[0,\beta]$ intervallumnak része. Ismeretes (ld. pl. a fenti könyvben a (4.47) formulát), hogy a δ_x balayage-mértéke a $[0,\beta]$ intervallumra (azaz az x pont harmonikus mértéke a $\overline{\mathbb{C}} \setminus [0,\beta]$ tartomány határán) a

$$\frac{d\mu_x(t)}{dt} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{|x-t|}\,\frac{\sqrt{x(x-\beta)}}{\sqrt{t(t-\beta)}}$$

sűrűségmértékkel adott mérték. Egyszerű számolás adja, hogy itt a jobb oldal minden $t \in [1,\beta]$ esetén x-ben csökken ($t \in [1,\beta]$-ben egyenletesen), ha $x \in [-1,0)$.

A balayage-mérték definíciójából azonnal adódik, hogy

$$\mathrm{Bal}(\delta_x, E) = \mu_x|_E + \int_{[0,\beta]\setminus E} \mathrm{Bal}(\delta_t, E)\, d\mu_x(t).$$

Itt a feltevés szerint $[0,\beta] \setminus E = (1,\beta] \setminus E$, ezért annak a valószínűsége, hogy a Brown-mozgás $[0,1]$-en kívül áll meg a következő:

$$\mathrm{Bal}(\delta_x, E)\big(E \setminus [0,1]\big) = \mu_x\big(E \cap (1,\beta]\big) + \int_{(1,\beta]\setminus E} \mathrm{Bal}(\delta_t, E)\big(E \cap (1,\beta]\big)\, d\mu_x(t).$$

Az integrandus független x-től, és az a mérték, ami szerint integrálunk, az csökken x-ben a $[-1,0)$ intervallumon, így a második tag csökken x-ben, ugyanúgy, mint az első tag (az előbb mondottak alapján). Emiatt $p(x)$ $\big(= 1 - \mathrm{Bal}(\delta_x, E)\big(E \setminus [0,1]\big)\big)$ növekszik a $[-1,0)$ intervallumon.

A kitűzők megoldása

Problems of the 2015 Miklós Schweitzer Memorial Competition in Mathematics

Problem 1. Let K be a closed subset of the closed unit ball in $\mathbb{R}^3$ such that a dense system of chords of the unit sphere is disjoint from K. Verify that there exists a set H such that H is dense in the unit sphere, and the chords connecting any two points of H are disjoint from K.

Problem 2. Let $\{x_n\}$ be the van der Korput sequence, that is, if the binary form of the positive integer n is $n = \sum_i a_i 2^i$ ($a_i \in \{0,1\}$), then $x_n = \sum_i a_i 2^{-i-1}$. Let V be the set of points (n, x_n) in the plane, where n is a positive integer. Let G be the graph for which the set of vertices is V, and two different vertices p and q are connected by an edge if and only if there is an axis-parallel rectangle R satisfying $R \cap V = \{p, q\}$. Prove that the chromatic number of G is finite.

Problem 3. Let A be a finite set and let $\to$ be a binary relation on A such that for any $a, b, c \in A$, if $a \neq b$, $a \to c$ and $b \to c$, then $a \to b$ or $b \to a$. Let $B \subseteq A$ be minimal regarding the property that to each element $a \in A \setminus B$ there corresponds $b \in B$ with $a \to b$ or $b \to a$. Assume that A has at most k elements among which no two elements are related by $\to$. Prove that B has at most k elements.

Problem 4. Let $a_1, a_2, \ldots$ be a sequence of positive integers such that $a_1 = 1$, and for any prime p the numbers $a_1, a_2, \ldots, a_p$ form a complete residue system modulo p. Show that $\lim a_n/n = 1$.

Problem 5. For $n \geq 1$ write $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1$. For which positive integer n can one find polynomials $g(x), h(x)$ with real coefficients and degree less than n such that $f(x) = g\big(h(x)\big)$ holds?

Problem 6. Let G be a permutation group acting on the finite set Ω. Let $S \subseteq G$ be such that $1 \in S$ and for any $x, y \in \Omega$ there is a unique $\sigma \in S$ with $\sigma(x) = y$. Show that if the elements of $S \setminus \{1\}$ are conjugated in G, then G acts doubly transitively on Ω.

Problem 7. Let S^2 denote the unit sphere centered at the origin in three-dimensional Euclidean space. A zone of width w on S^2 is an origin-symmetric spherical segment of width w. Show that there exists a constant $c > 0$ such that for any positive integer n the sphere S^2 can be covered by n zones of the same width in such a way that each point is contained in at most $c \cdot \sqrt{n}$ zones.

Problem 8. Prove that all continuous solutions of the functional equation

$$\big[f(x) - f(y)\big] \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f\big(\sqrt{xy}\,\big)\right] \equiv 0, \qquad x, y \in (0, \infty),$$

are constant.

Problem 9. Consider a harmonic function u defined on a domain $G \subset \mathbb{C}$ and denote the neighborhood of the zeros of u with radius 1 by $Z(u)$. Prove that for each compact set $K \subset G$ there exists a constant C such that if u is any harmonic function on G which vanishes at a point of K, then

$$\sup_{z \in K} \big|u(z)\big| \leq C \sup_{z \in Z(u) \cap G} \big|u(z)\big|.$$

Problem 10. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable, strictly convex function. Further, let H be a complex Hilbert space and A, B be bounded, selfadjoint linear operators on H. Prove that if $f(A) - f(B) = f'(B)(A - B)$, then $A = B$.

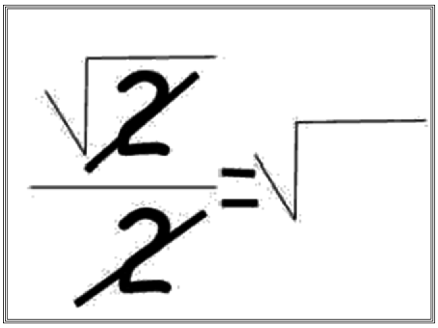
Problem 11. Consider a two-dimensional Brownian motion starting from $x < 0$ inside $\mathbb{C} \setminus E$ where $[0, 1] \subset E \subset [0, \infty)$ consists of finitely many intervals and stop it if it hits E. Denote by $p(x)$ the probability that it stops at a point of $[0, 1]$. Prove that $p(x)$ is increasing on $[-1, 0)$.

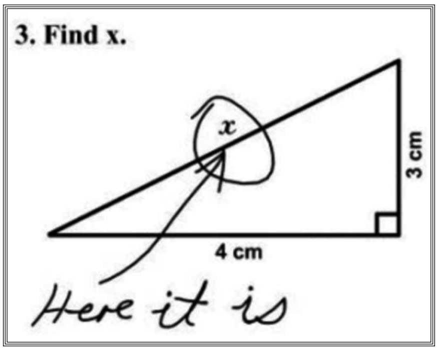
VICCES KÉPEK

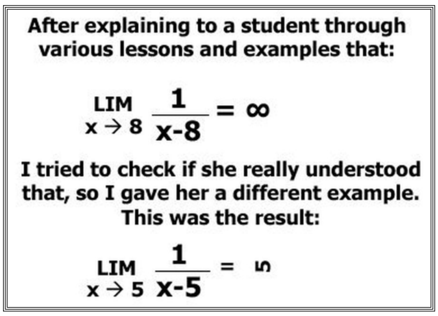
KATONA GYULA

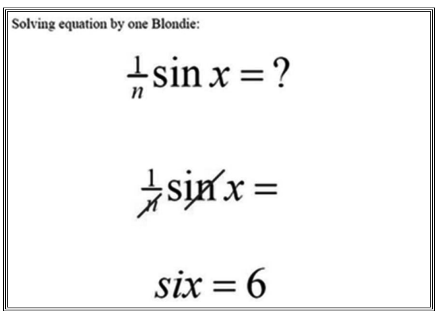
Az alábbi jópofaságokat találtuk. Ezek állítólag amerikai diákok dolgozataiból valók. Némelyik magyarra nem is lefordítható. Például az, amelyik az „expand” szó kétértelműségén alapszik. Jó mosolygást kívánunk hozzájuk!

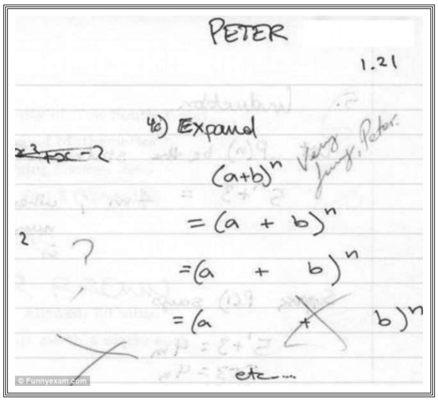
Bátorítjuk a kollégákat, hogy ha hasonló vagy egészen más természetű matematikai humort találnak, küldjék el nekünk.










PETER
1.21
4c) Expand
(a+b)^n
Very funny, Peter.
=(a + b)^n
=(a + b)^n
=(a + b)^n
etc....
© Funnyexam.com

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS