KEDVES OLVASÓK!

Valószínűleg meg vannak lepve, hogy az ez évi harmadik számot kapták kézhez, hiszen egy ideje már csak két számunk jelenik meg évente. Az ok egyszerű: (hál' Istennek) sok publikálandó anyag gyűlt össze. De nem ígérjük, hogy a jövőben is évente háromszor jelenik meg lapunk, ez szerzőink szorgalmától függ.

2011. január 20. A Szerkesztők

FRIED ERVIN GÖMBJE (RÉSZLETEK A SZTOCHASZTIKA CÍMŰ KÖNYVEM FOLYTATÁSÁBÓL [RÉSZLETEK A KRÓNIKÁBÓL {DE AMI MINDENNÉL FONTOSABB: ERVINCI KÖSZÖNTÉSE ABBÓL AZ ALKALOMBÓL, HOGY NYOLCVANÉVES LETT!!!}])

TUSNÁDY GÁBOR

Párhuzamos kéziratok. Nagyon nehéz nagyon sok kéziraton dolgozni párhuzamosan. Ennek a szövegnek az elemei búvópatakként rejtezkedtek eddig jó öreg gépemben. Most az alkalomhoz illően igyekszem egybekovácsolni ezeket a saját sorssal rendelkező részeket. 1959-ben érettségiztem Sátoraljaújhelyen, osztályomról írom a Krónikát. Kesza a legjobb barátom, abban az időben fiú és leány, reál és humán osztályok voltak. Szigyu reál leány volt. Gyuszi az én osztályomban volt az első. Jó sógorom Szilágyi Ferenc. Lovas tanár úr édesapja rajzot tanított nekem (Gibiszert beraktuk egy uborkás üvegbe) ő maga földrajzot tanított, aztán lett némi időre igazgató is, na de aztán pap lett, miután az unokája apja fekete lett. Könyvem mottója az, hogy szememre belülről lebbensz. Simonovits Miki a Rényiben kollégám. Könyvemben Chick a virtuális partnerem, ebből a figurából a folytatásból Kicsi Szolga lett. Ezek után talán érthető az alábbi intonáció.

A titok. 2008. szeptember másodikán, kedden délután négy órára mentem Fried Ervinhez vendégségbe. Májusban a kozmikus csoportomban Poincarè négydimenziós dodekaéderéről beszélgettünk mint az Univerzum lehetséges modelljéről; ennek híre Ervinhez is eljutott. Látszólag erről akart velem beszélni Ervin, de valójában azért hívott magához, hogy átadja Rubik-kockás titkát. Azóta többnyire ezzel foglalkozom. Munkám során találkoztam egy Hungarian Globe nevű konstrukcióval, és ezzel kapcsolatban beszéltem Keszával. Sok mindent megtudtam Szigyuról. Világos volt előttem, hogy Ervin gömbjét csakis Gyuszi alkothatja meg. Jó sógorommal múlt kedden jártunk Gyuszinál (ma: 2008. október 9. csütörtök [a folyamatos írás alapvető baja az, hogy közben múlik az idő {pocsék volt a folyamatos írásom ezért az 1951 körüli pedagógiatudomány arra kényszerített hogy individuálisan vessem a papírra betűimet (a pedagógiával az az alapvető baj, hogy elmélete sohasem találkozhat a gyakorlatával [mert a generációk láncolatában nevelők és neveltek viszonya gyorsabban változik annál, hogy a változásokból fakadó kilengéseket kompenzálni tudhatnánk])}]), akkor ott minden világos volt. Ma viszont beszéltem Mérő Lacival, és horizontunkat elfedték a sötét felhők. Nincs mese, kapcsolatba kell lépnem Tom Kremerrel, aki a világ legnagyobb játékgyárosa. Rubik Ernő már nem tulajdonos, és nagyon nehéz vele kapcsolatot kialakítani. Mondta Mérő Laci. Gyuszi viszont azt mondta, hogy Lovas tanár úr két hónapja meghalt. Egy hete nálunk volt Laci bátyám, most úgy emlékezem, ezt ő is tudta. Talán már akkor is tudta, amikor ezen év augusztus 22-én fölmentünk a Király-kúthoz; útközben meglehet Laci bátyám elmesélte, hogy a néger gyermek nagyapja meghalt. Most pedig elmesélem Neked Kicsi Szolga, milyen is az eredeti konstrukció. Simonovits Miki szerint ezekről a dolgokról nem volna szabad ábra nélkül beszélni. Na de neki fogalma sincs a mottónkról.

Rubik kockája. Vegyünk egy kockát, és vágjuk az éleit három egyenlő részre a lapokkal párhuzamos síkokkal. 27 kicsi kockát kapunk, az angolban ezek neve Rubik, cube és puby keveredéseként cuby, többes számban cubies; nem tudom van-e magyar nevük, nevezzük őket cukroknak. Négyféle cukor van: a legbelső, ezt rögtön megesszük, a sarkok, ezekre majd befelé újabb kicsi sarkok nőnek amelyek feleakkorák mint a cukrok, de még nem tudjuk, hogyan illeszkednek egymáshoz. Nyolc sarka van egy kockának és hat lapja, a lapok közepén ülő cukrokat kettévágjuk azzal a lappal párhuzamos síkkal, amelyen ülnek, és a belső felüket megesszük. A negyedik típus az eredeti kocka éleinek a felezője, ezekre lapátokat teszünk, de azok konstruálása még messze van.

A lapokkal párhuzamos síkok rétegekre vágják az eredeti kockát. Két réteg szélső, ezekben 4 sarok, 4 élközép és egy lapközép cukor van, a belső rétegben 4 élközép, 4 lapközép van, és itt volt a legbelső cukor. Távolítsuk el az egyik szélső réteget, marad két réteg benne 17 cukor. Helyezzük a két réteget úgy asztalunkra, hogy a visszamaradó szélső réteg feküdjön az asztalra; ekkor a középső réteg kerül felülre. Felülnézetben 3×3 rajzolatú négyzethálót látunk. Rajzoljuk meg azt a kört, amelynek a centruma a középső négyzet centruma, és átmegy a lapközép négyzetek centrumain. Ennek a sugara egyenlő a cukrok élével. Ha már kettévágtuk a lapközepeket, ez a kör érinti azokat, viszont belemetsz a saroknégyzetekbe. Ez a kör az asztal síkjára merőleges henger felülete; messünk ezzel a hengerrel a középső réteg sarkán ülő élközép cukrokba. Vágjuk három részre a középső négyzetet az oldalaival párhuzamos vonalakkal. Vonalaink kicsi keresztet formáznak; hosszabbítsuk meg őket a kettévágott lapközepekig. A kereszteken kívül négy saroknégyzet marad: ezek a lapközepekhez csatolt lapocskák vetületei. Most a lapocskák hiányzó határai vízszintesek, távolságuk a cukor élének fele, és a cukor vízszintes felezősíkjára szimmetrikusan helyezkednek el. Afféle kis kampók, amelyekkel az élközepek a lapközepek alatti szabad helybe kapaszkodnak. De most vetületben kitölteni látszanak a rendelkezésükre álló térrészt.

Van tehát az ábránknak egy nagy négyzet pereme, abban négy sarokbástya amelyekbe belülről egy kör harap. A körben egy kereszt áll, szárai a körön kicsit túlnyúlva a saroknégyzeteket összekötő félnégyzetekig futnak, azokkal T betűt formázva. Ez a világ felosztása az eredeti kocka centrumán átmenő vízszintes síkban. A négy sarok a lapokkal együtt az élközép kockák végleges alapjának vetülete. A kereszt szárai a valóságban hengerek, azok mentén a kettévágott lapközepek elforgathatók. Ha teljesen szétszedjük a Rubik-kockát egy térkereszt marad, amelyen ott ül a hat kettévágott lapközép őrizvén a lapok színét.

A sarkokhoz kicsinyített másukat úgy csatoljuk, hogy azok fele benne üljön az eredeti cukrokban. De ezekbe a pici darabokba is bele kell metszenünk a hengerekkel, hogy a szabad forgathatóságot biztosítsuk. Most már láthatod, Kicsi Szolga, hogy ez miért nem tetszett Ervincinek. Nézzük, ő mit javasol. Ervin eredeti szövegét azzal különböztetem meg saját szövegemtől, hogy bennük az egyes fejezetek címében arab sorszámok is vannak.

0. Kritika. A Rubik-kocka forgatása úgy érzékelhető legjobban, ha a körülírt gömbben tekintjük. Legyenek a kocka csúcsai egy lapján A, B, C, D ebben a sorrendben, és legyenek az átellenes csúcsok rendre A', B', C', D'. Kövessük a gömbön azt az elforgatást, amelyben az eredeti lap minden csúcsa a következőbe fordul: $A \to B \to C \to D \to A$. Ekkor az A csúcs e négyzetnek a gömbön köré írt körén mozdul el. Ha most az A, B, D', C' négyzetet forgatjuk úgy, hogy mindegyik csúcs a következőbe megy át, akkor az A csúcs ezen lap köré írt gömbön mozdul el; s a két körnek A és B között egyetlen közös pontja sincs. Ez az oka annak, hogy a Rubik-kocka ügyetlenül és nem egyenletesen forog.

Meg lehet kísérelni, hogy az A csúcs (illetve a rajta átmenő testátló) körül forgatunk. Ekkor a B csúcs átmegy (például) a D-be. Eközben az AB él teljesen kilép a kockából. Hasonló a helyzet akkor, ha a pentagon-dodekaédert forgatjuk. Ennek is az az oka, hogy a lapoknak háromnál több csúcsuk van. Más a helyzet akkor, ha a vizsgált szabályos test lapjai háromszögek.

1. Az oktaéder-forgatás geometriája. Az oktaédert úgy kaphatjuk, hogy egy kocka lapközéppontjait vesszük: ezek lesznek az oktaéder csúcsai. Tekintettel arra, hogy használni fogjuk az oktaéder köré írt gömböt, ezért számunkra az lesz a célszerű, ha eleve ebből a gömbből indulunk ki. Legyenek az a, b, c körök ennek a gömbnek egymásra merőleges főkörei, és A, A' a b és c, B, B' az a és c, C, C' pedig az a és b metszéspontjai. Tartsuk úgy a gömböt, hogy az AA' átmérő függőleges legyen, és A legyen alul. Képzeljük el, hogy az oktaédert 90 fokkal elforgatjuk az AA' tengely körül úgy, hogy B a C-be kerül; ez a $B \to C \to B' \to C' \to B$ forgatás. Ezáltal a B csúcs nem lép ki az oktaéder $BCB'C'$ síkjából. (Ez a sík vízszintes.) Ez azt jelenti, hogy az ABC háromszög úgy fordul el, hogy folyamatosan csúszik ezen sík alatt. Ennek a mozgásnak a gömbfelszínen megjelenített képében a fenti sík alatti félgömb önmagába fordul el. Természetesen ugyanez a helyzet akkor, ha bármelyik másik tengely körül forgatunk. Tekintettel arra, hogy az elért helyzetek száma ugyanannyi, mint a kockaforgatásnál, ezért a lehetőségek száma itt is

$$\frac{1}{2}\,12!\,8! = 9\ 656\ 672\ 256\ 000.$$

(Jó ez?) Hasonló a helyzet a tetraédernél, ahol a lehetőségek száma $\frac{1}{2}\,6!\,4! = 8640$. Az ikozaéder esetében ez a szám $\frac{1}{2}\,30!\,20! \approx 3{,}22667 \cdot 10^{50}$.

A forgatást (elvileg) most úgy képzelhetjük el, hogy a felszabdalt gömbfelszín darabkáit forgatjuk. Kiindulunk egy adott gömbből, amelynek a sugarát rögzítjük, legyen ez mondjuk $r = 4$ centiméter. (Egy ilyen gömb jól tartható egy ember markában, még akkor is, ha – mint látni fogjuk – egy kicsit növeljük a sugarat.) Tekintsük ezen a gömbön a már adott a, b, c főköröket és ezek A, B, C, A', B', C' metszéspontjait. Tekintsük – mondjuk – az A pontot, és a B, C, B', C' síkkal párhuzamosan vegyünk egy gömbi kört, amely az A-t tartalmazó félgömbön van, és az AB ívet a B-hez közelebbi $\frac{1}{12}$-én metszi. Az M metszéspontra tehát a BM ív $\frac{2r\pi}{4\cdot 12} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}5236$ centiméter. (A kör – térbeli – sugara $r\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 4 \cdot 0{,}991445 = 3{,}96578$ centiméter. Ez a kör az egyenlítő alatt húzódik, azzal párhuzamos, mint a földgömbön a Baktérítő.) Ezt az adott hat pont mindegyikével hasonlóan megtesszük. Ez három párhuzamos körpár. A párhuzamos körök nem metszik egymást, de mindegyik metszi a négy másik kört, nevezetesen két-két pontban.

Jelölje A_{BC} azt a pontot, amelyik a B, illetve C középpontú köröknek az a metszéspontja, amelyik a B, C, B', C' síkkal lemetszett A-t tartalmazó félgömbön van. (Mivel a metsző körök sorrendje nem számít, ezért A_{CB} ugyanezt a pontot jelöli. Ez a pont A-hoz elég közel van.) Az A_{BC}, $A_{CB'}$, $A_{B'C'}$, $A_{C'B}$ pontnégyes olyan gömbi négyzetet határoz meg, amelyik belsejében tartalmazza az A pontot. Ezt nevezzük az A csúcshoz tartozó *csúcslapkának.* (Durván a Déli-sark környékén helyezkedik el, ha a gömbre a Föld térképét képzeljük.) Mind a hat ponthoz tartozik egy-egy csúcslapka, amelyek egybevágóak. Tekintsük most az AB élt, illetve az általa meghatározott A_{BC}, B_{AC}, $B_{C'A}$, $A_{C'B}$ gömbi téglalapot, amely belsejében a kijelölt pontok egyikét sem tartalmazza. Ezt az AB élhez tartozó *éllapkának* fogjuk nevezni. Mind a 12 élhez tartozik – hasonlóan – egy-egy éllapka, amelyek egybevágóak. Ezeknek az éllapkáknak a rövidebbik oldala egy-egy csúcslapka oldala is, és minden csúcslapka oldal előáll ilyen módon. Tekintsük végezetül az A_{BC}, B_{AC}, C_{AB} pontokat. Ezek egy olyan gömháromszöget határoznak meg, amely belsejében egyetlen egy kijelölt pontot sem tartalmaz. Ezt az ABC laphoz tartozó *laplapkának* fogjuk nevezni. Minden laphoz tartozik egy ilyen laplapka, amelynek oldalai pontosan a megfelelő éllapka hosszabbik oldalával egyeznek meg. A laplapkák is egybevágóak. A kapott lapkák egyrétűen és hézagtalanul fedik a gömböt.

Nézzük most meg, mi történik, ha elkezdjük forgatni az A körüli csúcslapkát. Tekintettel arra, hogy, hogy ez a gömbi négyzet homorú, hiszen az oldalközéppontok a gömbi távolságban közelebb vannak A-hoz, mint a négyzet csúcsai, ezért elforgatják az AB-hez, az AC-hez, az AB'-höz, és az AC'-höz tartozó éllapkákat is. Ezzel viszont elfordulnak a közbezárt ABC, ACB', $AB'C'$, $AC'B$ laplapkák is. Ezeknek az A-tól távolabbi ívei mind rajta vannak az A körül rajzolt, a $BCB'C'$ síkkal párhuzamos körön; így további lapkák elfordulása már nem következik be.

Ezzel a kívánt tulajdonságú gömb már létrejött, csak az a baj, hogy a lapkákat a gömbre helyezve azok leesnének róla. A 3. pontban leírt színezéssel számítógépes szimulációra viszont már alkalmas modellt kapunk.

2. Az akadálymentes mozgás technikai megvalósítása. Most azt fogjuk leírni, hogy milyen technikai eljárással biztosítható, hogy a lapkák ne essenek le.

Magát a golyót 4 centiméter sugarúnak, üregesnek és 3 milliméter falvastagságúnak készítjük, kemény, de rugalmas műanyagból. Az A, B, C, A', B', C' pontok helyén 3 milliméter átmérőjű lyukkal. (A lyukak közepe legyen a pontok helyén.) Növeljük a gömb sugarát 1, illetve 2 milliméterrel. A középpontból kivetített pontokat felső indexszel látjuk el (mintha kitevő lenne). Így például a gömb O középpontját összekötve az A ponttal, ennek az egyenesnek az 1 milliméterrel nagyobb sugarú gömbbel való metszéspontja az A^1 pont a 2 milliméterrel nagyobb sugarú gömbbel való metszéspontja pedig az A^2 pont. Hasonló módon kapható az A^1_{BC}, A^2_{BC} stb. pont. Ebből a 2 milliméterrel nagyobb sugarú gömbből kivágva képzeljük a lapkákat. Természetesen a fizikai készítés nem így történik, hanem minden egyes lapkát külön készítünk, ugyanabból a műanyagból, amiből az eredeti gömb készült. A lapkáknak az 1 milliméterrel nagyobb sugarú gömbön létrejövő részét a lapka *földszintjének,* a 2 milliméterrel nagyobb sugarú gömbön létrejövő részét a lapka *emeletének* nevezzük. A lapkák sugárra merőleges méretei sem a földszinten, sem az emeleten nem változnak. (P.D. Nekem ez gyanús, picikével nagyobbnak kellene lenniük – Tr.)

A lapkák formája attól függ, hogy csúcshoz, élhez vagy laphoz tartoznak:

1. A csúcshoz tartozó lapka:

Tekintsük az A_{BC}, $A_{CB'}$, $A_{B'C'}$, $A_{C'B}$ lapkát. Az A^2_{BC}, $A^2_{CB'}$, $A^2_{B'C'}$, $A^2_{C'B}$ lapka méretein nem változtatunk. Az A^1_{BC}, $A^1_{CB'}$, $A^1_{B'C'}$, $A^1_{C'B}$ lapkán az éleket eltoljuk az A^1 irányába 1–1 milliméterrel. Így egy olyan peremet kapunk, amelyik megakadályozza, hogy az alulról érintkező rész leessen. Ez a lapka ugyanis egy – az eredeti gömb irányába kinyúló – nyéllel rendelkezik. Ez a nyél a lapka közepén helyezkedik el, vastagsága 3 milliméter, hossza 2 milliméter. Ezáltal pontosan beleillik az eredeti gömbön levő lyukakba. A végén azonban 1 milliméterrel megtoldva olyan vastagítás szerepel, amelynek a közepén üreg van. A vastagítás nem folyamatos, hanem négy helyen meg van szakítva. Ennek következtében a csúcslapka a nyélnél benyomható az eredeti gömbbe, ott megmarad, nem esik ki; de ha szükséges erővel kihúzható.

2. Az élhez tartozó lapka:

Tekintsük az A_{BC}, B_{AC}, $B_{C'A}$, $A_{C'B}$ élhez tartozó lapkát. Avégett, hogy ezt a lapkát az A és B csúcshoz tartozó lapkák az eredeti gömbhöz tudják szorítani, az A^1_{BC}, B^1_{AC}, $B^1_{C'A}$ és $A^1_{C'B}$ lapkán az A^1_{BC}, $A^1_{C'B}$ ívet az A^1 irányába, míg a B^1_{AC}, $B^1_{C'A}$ ívet az B^1 irányába (tehát kifelé) 1 milliméterrel el kell tolni. Az A^2_{BC}, B^2_{AC}, $B^2_{C'A}$, $A^2_{C'B}$ lapkán a csúcslapkákhoz viszonyítva nem szükséges változtatás, ezért az A^2_{BC}, $A^2_{C'B}$ ív és a B^2_{AC}, $B^2_{C'A}$ ív is a helyén marad. A továbbiakban az éllapkák feladata lesz a laplapkáknak az eredeti gömbhöz való leszorítása. Ezért mind az A^2_{BC}, $A^2_{C'B}$, mind az B^2_{AC}, $B^2_{C'A}$ íveket irányukra merőlegesen 1 milliméterrel kifelé toljuk.

3. A laphoz tartozó lapka:

Ezeket a lapkákat az élhez tartozó lapkáknak kell leszorítaniuk. Ennek megfelelően az emeleten nem történik változás, a földszinten viszont minden ívet rá merőlegesen 1 milliméterrel el kell tolni.

3. A lapkák színezése. Természetesen csak a második emeleten kell színezni. Az A, B, C, A', B', C' betűk mindegyikéhez egy színt rendelünk. A csúcslapkákat ezzel a színnel színezzük. Az AB élhez tartozó lapka esetén a lapka A irányába eső felét az A-hoz, a B irányába eső felét a B-hez tartozó színnel színezzük. A háromszög lapkáknál a színezés a középpontban változik: minden harmadot úgy színezünk, hogy a megfelelő éllapkával azonos színű legyen.

A forgatás sokkal nehezebbé válik, ha az emeletre a földgolyó térképét rajzoljuk.

4. Összerakás és szétszedés. Ha a golyó és a lapkák külön kerülnek a kézbe, akkor először egy csúcslapkát helyezünk el; ez akkor már rögzítve van. Ezután illesztjük be a szomszédos éllapkákat és velük együtt az éllel szomszédos csúcslapkát, amik az éllapkákat már megtartják. A hiányzó részekbe becsúsztathatók az oda való laplapkák. Végezetül a megmaradt csúcslapkát beillesztve és a gömbbe benyomva összeállítottuk a játékot. Szétszedésnél fordítva járunk el, de az első csúcslapka kiszedéséhez ügyesség kell.

5. A csúszás megakadályozása. Az összeállított golyó kis elforgatással olyan helyzetbe kerül, amelynél nem világos az állás. A kis forgatások megakadályozására a következőképpen kell eljárni: Az eredeti golyón azokat a helyeket, ahová a lapkák kerülnek középen leegyenesítjük, a lapkákat viszont középen megvastagítjuk. Ezért a forgatás közben a súrlódás miatt egészen addig kissé nehezített a mozgás, amíg a laplapka el nem foglalja a helyét.

6. Változtatások a tetraédernél és az ikozaédernél. Mivel a tetraéder minden csúcsából három él indul ki, ezért itt a csúcslapkák háromszögűek. Az ikozaéder esetében a csúcsokba öt él fut be, ezért a csúcslapkák ötszögek.

Az összerakás elve az ikozaédernél változatlan, a tetraédernél viszont nem lehet lappal befejezni, ezért a következőképpen kell eljárni: A és B csúcs, az AB él ABC lap, C csúcs, AD él, ABD lap, ACD lap, BCD lap, BD él, CD él, D csúcs.

A színezés a tetraéder esetében természetesen egyszerűbb, mert csak négy csúcs van. Az ikozaédernél viszont bonyolultabb, mert tizenkét csúcs van. Tizenkét lényegesen eltérő színt találni szinte lehetetlen. Létezik egy olyan eljárás, amikor csak hat színt használunk, de a csúcsokba futó éleket (és a kapcsolódó lapokat) ravaszul színezve csak egyféle helyreállítás lehet. Ez viszont annyira bonyolítja a helyreállítási eljárást, hogy nem célszerű, mert úgyis nagyon sok lehetőség van. A következő színezés látszik célszerűnek: Legyenek az A csúcs szomszédai B, C, D, E, F és a megfelelő szemköztes csúcsok A', B', C', D', E', F'. Ha az A csúcs színe mondjuk piros, akkor legyen piros az A' csúcsé is; de tegyünk bele egy fekete pettyet. Hasonlóképpen járhatunk el a többi esetében is (ha van BD' él, akkor ennek a D' felőli végén van petty stb.). Mindkét esetben lehet a golyóra a földgömböt rajzolni.

A tetraéder esetében lehet a gömböt kisebbre venni, de ez nem fontos. Ez a formáció a kezdő játékosoknak ajánlott. Ezzel elegendő rutinra tehetünk szert az oktaéder-forgatáshoz. Az ikozaédergömböt kétszer akkorára célszerű venni, hogy a lapkák ne legyenek túl kicsik. Ennek a forgatásával csak az igazán gyakorlott játékosok foglalkozzanak.

Megemlítjük, hogy az ikozaéder esetében ha hat színt használunk, maga az összerakás is nehéz.

7. A jobb kezelhetőség. A „sima” golyó megfogásánál nem tudjuk, melyik rész van a kezünkben. Éppen ezért célszerű a csúcslapkákat úgy készíteni, hogy a „kifelé” eső részükön egy kis dudor legyen; csak akkora, hogy megfogáskor érezzük, hogy ezek azok a részek, amelyek mozgatáskor csak fordulhatnak. Ezáltal a golyó is könnyebben kézben tartható, és a mozgatása is egyszerűbb.

8. Kiegészítők.

I. Mint már írtuk, számítógépes szimuláció is lehetséges. Ez úgy valósítandó meg, hogy az egész golyó is forgatható legyen, és a lapoknak az egyes tengelyekre való elforgatása is (ez programozás kérdése). Más funkciókat is célszerű belevenni. Az is megvalósítható, hogy a játékot egy kézi célgépen adjuk meg. Azt nem látom, hogy ezt golyó alakú formában realizáljuk-e, mert a kezelőgombok elhelyezése gondot okozhat. Az egyetlen, amit el tudok képzelni, hogy itt is vannak „dudorok”, és ezekben vannak a kezelőgombok.

II. Helyreállítási utasítások is megadhatók. Egy kis füzetben – rajzok segítségével – elmondhatók, hogy milyen esetben milyen eljárással végezhetők a visszaállítások.

III. Egy kis könyv is készíthető, amelyben megtalálható a geometriai háttér. Ez bevezetést adhat a csoportelméletbe, kristályok szerkezetébe stb.

Irodalom

[1] `http://nationmaster.com/encyclopedia/Magic-polyhedron`
A Rubik-család áttekintése.

[2] `http://www.calormen.com/TwistyPuzzles/Photos`
Itt az Sphere úgy néz ki, mint az Ervin konstrukciója.

[3] Joshua Bell: *Magic polyhedra patents.*
`http://www.calormen.com/TwistyPuzzles/twisty.htm`
Itt az US4452454 jelű Equator nevű Wilton R. Greene által 1982. július 30-án beadott és 1984 június 5-én engedélyezett szabadalom tűnik a legközelebbinek, illetve DE3144834 Hungarian Globe Molnár Ferenc 1982. október 14. még közelebbi (a feltaláló az Elzett Műveknél dolgozott) magyar szabadalom: HU186541, angol: GB2088728, megtalálható a következő helyen is:
`http://www.geocities.com/jaapsch/puzzles/equator.htm`
`http://www.abstractstrategy.com/2-puzzle-designers.html`
Itt a feltalálók listája van találmányaikkal.

A pillanatnyi helyzet (valamikor 2008 ősze). Sem az nem világos előttem, hogy Ervin terve reális-e, sem az, hogy valaki megelőzte-e. Nem találtam részletes leírást, a látszat megtévesztthet. Ervin tervében azt nem látom, forgatáskor mi tartja egyben a különböző elemeket. Meg kell növelni az 1 millimétert, ha valamit pontosan látni akarunk. És persze jó műszaki rajzokat kell készíteni. Most a fizikai megvalósításról fogok beszélni; nem használom Ervin méretezését, és a betűzésést is csak kis mértékben veszem át.

Kúpszoknyák. Legyen a gömb sugara egységnyi, de tartsuk úgy a gömböt, mint eddig, földgömbnek képzelve. Kicsit másképp veszem kézbe a gömböt, mint Ervin: legyen C az Északi-sark, C' a Déli; ekkor a c kör az Egyenlítő. Legyen A az Egyenlítő nulla hosszúságú pontja, B a $90°$-os, A' a $180°$-os, B' a $270°$-os. Legyen a koordináta-rendszer origója a gömb O középpontja, x, y, z tengelyei pedig az OA, OB, OC félegyenesek. Tekintsük azt a kúpot, amelynek csúcsa az Északi-sark, és alkotói ezt a pontot az egyenlítő pontjaival kötik össze. Legyen

$$1 < R < R_{\max} = \sqrt{3}\big(1 + \sqrt{2}\,\big),$$

és nevezzük az eredeti egységsugarú gömböt *alap*gömbnek, a vele koncentrikus, R sugarú gömböt *nagy* gömbnek. Vegyük a kúp palástján a két gömb közé eső részét, és nevezzük azt *szoknyának.* Ez a szoknya kettévágja a két gömb közti gömbhéjat úgy, hogy a két sarkot összekötő függőleges tengely körül egymáshoz viszonyítva el lehet forgatni a darabokat. Nevezzük a kisebbik darabot *magnak,* a nagyobbik darabot *kucsmának.*

Árkok. Tükrözzük a szoknyát az Egyenlítő síkjára. Az új szoknya kettévágja a kucsmát, az új darabok közül az egyik egybevágó a maggal, a másik egy *árok,* amely körbefut az Egyenlítő körül. Tegyünk hasonló árkokat az a, b körökre; ezek az A, A' csúcsú b-n átmenő, illetve B, B' csúcsú, a-n átmenő kúpok palástjának a két gömb közé eső részei. Az eredeti szoknya egyenlete:

$$x^2 + y^2 = (z-1)^2, \quad 1 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2,$$

a B csúcsú szoknyáé

$$x^2+z^2=(y-1)^2, \quad 1<x^2+y^2+z^2<R^2.$$

A két szoknya metszésvonala benne van az $y=z$ síkban, és az egyenlete

$$x^2=1-2y, \quad y=z, \quad 1<x^2+y^2+z^2<R^2,$$

ami egy parabola két darabja: az egyik A és az $A_{B'C'}$ pontok között fut, ahol az utóbbi koordinátái

$$\sqrt{1+2\Delta}, -\Delta, -\Delta, \quad \text{ahol} \quad \Delta=0{,}5\Big(\sqrt{2R^2-1}-1\Big),$$

a másik ennek a BC síkra vonatkozó tükörképe.

Süvegek és küllők. Ha ezeket a darabokat az Egyenlítő síkjára és az AC síkra tükrözzük, megkapjuk az a, c körök feletti árkok metszésvonalait. A két árok metszete két *süveg,* amelyek a BC síkra szimmetrikusak. Hasonló süvegekben metszik egymást az a és b, valamint a b és c feletti árkok. Nevezzük az árkok süvegeken túli részeit *küllőknek.* Az árkok a két gömb közötti gömbhéjat hat süvegre, tizenkét küllőre és nyolc gömbi háromszög alapú részre vágják. Ha az A, B, C, A', B', C' pontokhoz elforgathatóan rögzítjük a süvegeket, azok a többi részt nem engedik leesni az alapgömbről, és ha egy-egy süveget forgatunk, az a hozzá csatlakozó négy küllőt is és az azok közti négy gömbi háromszög alapú részt is elforgatják. Ez a kilenc rész egy maggá áll össze. Emiatt a süvegek forgatása zökkenőmentes.

Lapkák. A süvegek Ervin csúcslapkáinak, az árkok az éllapkáknak és a gömbi háromszög alapú részek a laplapkáknak felelnek meg. A szoknyák funkciója a szabad forgások biztosítása. A kezdetben mondott $R<R_{\max}$ feltétel azt biztosítja, hogy a süvegek diszjunktak legyenek. Az, hogy a süvegek egyetlen ponton érintik az alapgömböt, csak a forgathatóság megértéséig hasznos. A fizikai megvalósításhoz jobb egy $1<r<R$ sugarú gömbre cserélni az alapgömböt. Most az $r=1{,}25$, $R=1{,}5$ értékek a legszimpatikusabbak. Szerintem a szemközti süvegeket rugalmasan lenne célszerű egymáshoz fűzni, és a szétszedést csak valami kinyitásszerű lépés után kellene lehetővé tenni.

Gyártás. Laikusként azt képzelem, magokat gyártani aránylag egyszerű, ha már vannak félgömbhéjaink. Maguknak az árkoknak a gyártása sem reménytelen: ezek gyűrűk. Elvileg erre nincs is szükség, hiszen ha egy magot szét tudunk vágni kilenc komponensére, már mindenféle elemünk van, esetleg nem a kívánt számban. Azt képzelem, ha ügyesen fogjuk meg a magot, ugyanaz a kúpos forgácsolás, ami egy félgömbhéjból magot farag, a magot alkotórészeire vágja. Minden darab eredetileg benne volt egy magban: annak a centrumát kell egy pánttal rekonstruálni, és azt kell a forgástengelybe befogni.

Térnyomtatás. Gyuszi másként tervezte a gyártást: azt javasolta, hogy a VARINEX céget kérjük erre fel. Ötlete gyümölcsözőnek bizonyult: a munka során volt alkalmam megismerni Falk Györgyöt, akitől nagyon sokat tanultam. Elküldtem a fenti szöveg rövidített angol változatát a Mathematical Monthlynak, de hamar elutasították mondván, hogy jó szöveg, de náluk ennél jobbak jelennek meg. Majdnem sírva fakadtam, amikor a dolog szétesett a kezemben. Merthogy a küllőket nem tartják meg a süvegek. Még nem tudom, ez csak a választott r, R mellett van-e így a nem teljes egymásnak feszítettség miatt, de más arányokkal nincsen kedvem kísérletezni. Teszünk átlátszó kör alakú sapkákat a zsámolyokra, azok majd lefogják a küllőket amelyek persze lefogják a háromszögeket.

2009. február 14-én kitettem az Északi-sarkot a külső gömbre. Kacérkodtam a gondolattal, hogy a négyzet-téglalap arány látószögben mérve lehetne-e aranymetszés. Némi töprengés után lettek a szögek 36° és 54°. Az új terv alapján készült gömböt 2009. június 9-én kedden a szokott időben vehettem kézbe Gyuszinál; Feri sógorom és Palcsi lányom is ott volt. Lassan mindenki megtanulta, hogyan lehet összerakni a gömböt, és hogyan kell a hüvelykujj és a mutatóujj harapófogójában tartva a pólusokat, elforgatni a kúpszoknyákat. Tervezgettük, hogyan fogjuk össze az arktikus süvegeket úgy, hogy szét is lehessen szedni a gömböt. De az az anyag, amiből a prototípus készül sokkal merevebb, mint a valódi Rubik-kocka anyaga. Talán nem is kellene a prototípusokat üzemeltetni, mégis úgy határoztunk, hogy gyártatunk egy jobban lekerekített verziót. Ez van most folyamatban. Elképzelhető, hogy Rubik eredeti konstrukciójának van valamilyen (ormótlanságából fakadó?) hibajavító képessége. Figyelmetlenül tekergetvén mindig talpon marad. Gondot okoz nekünk az, hogy az eddigi tapasztalatok alapján a vágyaink szerint olajozottabban működő szerkezet sérülékenyebb. Sajnálom Ervinci, hogy csak ennyire tellett az erőmből, de ígérem, legközelebb jobb diákod leszek. Addig is és azon túl is az Isten éltessen Tégedet!

IN MEMORIAM GÁCS ANDRÁS (1969–2009)

SZEGŐ LÁSZLÓ

GA40plusz

2009 januárjában írtam egy szép hosszú köszöntőt Andris 40-edik születésnapjára; GA40, így neveztük, Zselyke meglepetésként játszotta le hangfelvételről az ünnepi ebéden. Akkor azt hittem, hogy most legalább egy évig nyugtom lesz. De aztán szeptemberben kérdezte Andris, hogy na hogy állok a GB0-val. Gács Bori 0-val.

Aztán azt is írta Andris, hogy:

„Képzeld, az egyetemre jövet a buszon a te köszöntődet olvastam, és annyira tetszett, hogy egy piros lámpánál majdnem felolvastam a körülöttem állóknak. De aztán rájöttem, hogy úgyis a te telefonszámodat kérnék el, mikor befejezem, úgyhogy végül csendben maradtam.”

A legjobb az lenne, ha most kizárólag Andris emailjeiből idézgethetnék: az ő egyedülállóan szeretetteli és humoros történeteiből, meglátásaiból, szurkapiszkáiból. Mert az biztos, hogy nem fogom tudni elmondani, amit szeretnék. Nem fogom tudni elmondani, amit érzek. Nem fogom tudni elmondani azt sem, amit ha máskor nem is, de legalább most el kellene mondani, mert fontos lenne.

Persze aki ismerte Andrist, nyilván tudja is, hogy mit szeretnék mondani, így hát felmentést is kaphatok ennek megfogalmazása alól. Mint ahogy azt szoktam gondolni, hogy nekem az élet értelmének keresése alól is felmentésem van, mivel lett néhány gyerekem, és az egy egyértelmű helyzet. Ez szerintem nem egy egyházi szertartás, de az az érzésem, hogy a Jóisten is úgy érzi, mintha neki is felmentése lenne ezen kérdés megválaszolása alól. Azért itt reklamálnék neki.

– Andris, annak, hogy ki ír korábban emailt a másiknak (esetünkben én), nem tulajdonítanék nagyobb jelentőséget. Ahhoz lehet mindössze köze, hogy melyikünknek fontosabb a másik, vagy hogy melyikünk is szereti a másikat igazán. Semmi több. Nem érdemes rágódni rajta.

– Lacikám, ennek ellentmond az, hogy egyáltalán írok neked néha – volt Andris válasza.

Nem mehetünk el szó nélkül amellett sem, hogy Andris matematikus volt. Na és persze itt van ez a múlt idő. A jelen jelen, a jövő jövő.

„Lacikám, te, aki mindig is messze előttem jártál a teremtés ősi misztériumának megértésében, hogy ítéled meg a csatolt felvételt?”

A csatolt fényképfelvételen két párhuzamos piros csík volt látható. Ezek a párhuzamos csíkok egészen odáig vezettek, amikor a szülőszobán Andris az utolsó tolófájás előtt meg találta jegyezni:

– Ez eddig még mindig kevésbé durva, mint egy szülői értekezlet.

Ez itt most egy szülői értekezlet.

Drága barátom, Andris, az elmúlt 10 évem minden fontosabb mozzanatáról tudtál. Az utóbbi három hetemről azonban nem tudsz. Pedig elkelne a segítséged. Nagyon hiányzik a véleményed, vagy ha legalább meghallgathatnál.

A te utóbbi három hetedről azonban még többet kéne mesélnem. Mert itt maradt nekünk az életed, a derűd viszont valahogy most nem látszik kristálytisztán. Pedig te mindent megtettél, hogy átragasszad ránk.

De miért fáj ennyire? Azért, mert valami pótolhatatlant veszítettünk el. Értem, én is túlértékelem a jelent a múlt gazdagságával szemben, hiba. De ez egy emberi hiba.

Most egy olyan rész következne, amit szépen megírtam, mindenki szépen sírt volna, de Andris meg mindenképpen kihúzatta volna, nem engedte volna adásba. A mondókám végén is lett volna egy „dalban mondom el" rész, Andris azt is kihúzatta volna, nem is mondom el dalban, még csak dúdolva sem. Akkor ugorjunk egy kicsit, egészen odáig, hogy… Mi volt Andrisban az egészen különleges? A lebilincselő személyiségén túl számomra egyértelműen a szeretteihez való feltétlen ragaszkodása és páratlan humora. Márpedig nagyon sokakat szeretett.

Számos olyan nehéz baráti, szakmai, tanári terhet vállalt fel önként és áldozatkészen, amelyekért mindig is csodáltam. Amikor én méricskélni kezdtem, hogy valaki milyen hülye és megérdemli-e, ő rendre emlékeztetett, hogy

1. egyrészt nem hülye (vagy ha igen, nem ránk tartozik),
2. másrészt meg segíteni akkor is kell.

Andris tartotta az egyetemi évfolyamomnak a Szimmetrikus struktúrák című előadást, matematikus ugye, és akkor ismertem meg. Már akkor a matematikus James Bondnak tartottam: egyrészt a lefegyverző előadásmód, másrészt a szuperjó ingjei miatt. Nemrégiben írta, hogy

„Kaptam egy CD-t. A zene elég jó, de a fényképek az énekesnőről kiábrándítóak. Szerinted direkt, hogy a zenére koncentráljon az ember? Én például szándékosan ezzel a külsővel tartom az előadásaimat, hogy ne figyeljen senki a matematikára."

Idézet következik a GB0 subjectű email-ből:

„Sziasztok, megszületett Gács Bori. Minden rendben, éppen 16-szor olyan hosszú centiméterben, mint amilyen nehéz kilogrammban. Ha én ezt utána akarnám csinálni, akkor vagy 10 méter 40 centisre kéne nőnöm, vagy 11,3 kilósra fogynom."

Később: „Bori érdekes módon oldotta meg azt a látszólagos ellentmondást, hogy szép is legyen, és rám is hasonlítson."

A Bori nemcsak hogy az apukáját nem fogja ismerni kellőképpen, de egy csodálatos embert sem, aki nagyban hozzájárult ahhoz, hogy a világ maga csodálatosnak látsszék, és most a világ nem látszik ám olyan csodálatosnak. Ennek nem így kellett volna történnie, a napnál világosabb. Vagyis hát az Androméda-ködnél.

Nekem nagyon sokat segített a lelki túléléshez az elmúlt három hétben a következő szimpla trükk: mielőtt valamit gondoltam vagy cselekedtem volna, felolvastam volna, megkérdeztem magamtól, hogy vajon Andris mit szólna hozzá, hogyan vélekedne, mit tanácsolna, mit kérdezne. Ennél valamivel derűlátóbb beszédet rendelt volna, azt értem.

„Lacikám, egy heveny házassági ajánlattal sikerült jóvátennem mindazt, amit [a szilveszteri bulin] néhány óra alatt elrontottál."

Emlékszem, amikor Andris lelkendezve mesélte, hogy dőlni fog a pénz, mert észrevette, hogy amikor tologatja a babakocsit Zuglóban, akkor 10%-kal felmennek ott az ingatlanárak, ahol elhalad Borival. Andris, azt, hogy a Bori csodacuki gyerek, már tudod, de most üzenne is neked valamit:

– Drága jó Apa! Elmondhatatlanul örülök, hogy az első hat hetemet veled együtt tölthettem. Ahányszor nevetni vagy sírni fogok, abban te is benne leszel. Kislányod, Bori.

Amikor egyszer jóllakott ez a Bori a múlt héten, csodacuki gyerek, nagyon okosan és érdeklődően gügyögött és beszélgetett velem, bár igen nagy vetélytársamnak bizonyult egy fekete lámpa a fehér falon. Te azt mondanád, hogy most nem világos, hogy engem vagy a lámpát keverte össze veled, de inkább azt gyanítod, hogy a lámpát.

Kedves Andris! Kedves Andris. Nyugodj békében. Nyugodj békében! És ezért a békéért sokan és sokat fogunk tenni. És mivel nincs más választásunk, kénytelenek vagyunk a világnak hálásnak lenni azért az időért, amit megoszthattunk veled. Bár lehetett volna több… Szervusz Andris, emlékeinkben örökké fogunk őrizni, de cselekedeteinkben is. Szervusz…

Még egy dolog a végére. Andris egy 2009. október 26-ai keltezésű email-jéből szeretnék idézni valamit a kísérőszöveggel együtt.

„Szia Laci, arra gondoltam, hogy az alábbi szöveget felteszem az iwiw-es adatlapomra oda, hogy „magamról" (eddig semmi nem volt ott). Mit gondolsz, szellemes egyáltalán? És még ha igen is, nem kockáztatom azt, hogy gyakorlatilag minden ismerősömet és rokonomat megsértem? Kérlek, kíméletlenül írd meg, mit gondolsz. Kösz – A."

És most jön a szöveg, amit aztán a szomorú október 28-án délelőtt 10 óra 38 perckor Andris fel is tett a Magamról cikkelybe:

„Kedves [Ismerősöm és] (leendő) Ismerősöm!
Mostanában nem írtam regényt vagy verseket, nem rendeztem filmet, nem kezdtem el festeni, fotózni vagy rajzolni, nem lettem tagja amatőr tánc- vagy színjátszó csoportnak, énekkarnak vagy rockzenekarnak, nem írtam blogot, és nem kezdtem semmilyen divatos sportot űzni. Így aztán neked sem kell a közeljövőben könyv- vagy filmbemutatóra, dedikálásra vagy kiállításmegnyitóra menned, nem kell az interneten szavaznod a fotóimra, blogomra vagy filmemre, sem a youtube-on megnézni, amint egy rosszul megvilágított színpadon énekelek, táncolok vagy verset

mondok, esetleg kiugrom egy repülőből, vagy lemerülök a tenger fenekére. Ha te is úgy gondolod, hogy ezzel rengeteg időt, pénzt és energiát spóroltam meg neked, kérlek, fontold meg, nem válna-e be neked is ez az életforma."

Budapest, 2009. november 18.

n-PONT HALMAZOK A SÍKBAN*

STRENNER BALÁZS

Bevezetés

Minden pozitív egész n esetén n-pont halmazoknak nevezzük azokat a síkbeli halmazokat, melyeket minden síkbeli egyenes pontosan n pontban metsz. Transzfinit rekurzióval könnyen megmutatható, hogy minden $n \geq 2$ esetén létezik n-pont halmaz. Arról azonban, hogy egy n-pont halmaz lehet-e valamilyen értelemben „szép", a mai napig alig ismert valami.

Nagyon nehéz megoldatlan kérdés, hogy egy n-pont halmaz lehet-e Borel-halmaz, de még az sem ismert, hogy lehet-e G_δ. Ami ismert, az az, hogy egy n-pont halmaz nem lehet F_σ [5], valamint hogy Gödel konstruálhatósági axiómájából, $V = L$-ből következik koanalitikus n-pont halmaz létezése [15]. Ez utóbbi talán az olyan egyetlen lényeges eredmény a témakörben, amit nem fogunk részletesen tárgyalni.

Az 1. fejezetben megvizsgáljuk az n-pont halmazok néhány alapvető tulajdonságát: létezését, Hausdorff-dimenzióját és Hausdorff-mértékét. Továbbá megmutatjuk, hogy minden analitikus n-pont halmaz Borel, és hogy egy Borel n-pont halmaz első kategóriájú, egy G_δ n-pont halmaz pedig sehol sem sűrű.

Mauldin foglalkozott először a görbeszerűség kérdésével [13]. Bebizonyította, hogy egy $\mathcal{H}^1$-mérhető n-pont halmaz nem lehet görbeszerű, majd ezt felhasználva visszavezette egy geometriai mértékelméleti sejtésre azt a kérdést, hogy létezik-e Borel n-pont halmaz. Ezen eredmények tárgyalásához meglehetősen sokat kell tudni a görbék, illetve a görbeszerű halmazok általános tulajdonságairól, ezért a 2. fejezetben részletesen foglalkozunk ezzel a témakörrel. Mauldin eredményeit a 3. fejezetben ismertetjük.

A 4. fejezetet az F_σ-halmazok terén elért eredményeknek szenteljük. Az első bizonyítási kísérlet arra vonatkozóan, hogy egy 2-pont halmaz nem lehet F_σ, Larmantól [11] származik. A bizonyítása két részből tevődik össze: az egyik, hogy egy 2-pont halmaz nem tartalmazhat ívet, a másik pedig, hogy egy F_σ 2-pont halmaz tartalmaz ívet. Bár Larman bizonyítása hibás volt, Baston és Bostock [3] ugyanezt az ötletet használva helyes bizonyítást adott az állításra. Később Bouhjar, Dijkstra

*Ez a cikk a szerző 2010-ben, az ELTE TTK matematikus szakán írt szakdolgozatának [19] átirata.

és van Mill [4] hasonló gondolatmenettel igazolta, hogy egy 3-pont halmaz sem lehet F_σ. Azonban ki fog derülni, hogy $n \geq 4$ esetén egy n-pont halmaz tartalmazhat ívet, így ilyenkor Larman bizonyítási sémája nem működik. A korábbi eredményeket ügyesen összerakva Bouhjar, Dijkstra, és Mauldin mégis talált frappáns bizonyítást arra, hogy egy n-pont halmaz semmilyen n esetén nem lehet F_σ-halmaz. A fejezetet ezzel a bizonyítással zárjuk.

Az 5. fejezetben olyan – természetesen kiválasztási axiómát használó – konstrukciókat ismertetünk, melyek azt mutatják, hogy sok tételünkben a feltételek valóban szükségesek. Megmutatjuk, hogy egy n-pont halmaz lehet sűrű, lehet sehol sem sűrű, és lehet második kategóriájú (így nem Baire-tulajdonságú). Továbbá egy n-pont halmaz Hausdorff-dimenziója lehet 2, és ha $n \geq 4$, akkor egy n-pont halmaz tartalmazhat kört. Nem tudjuk azonban, hogy Mauldin említett tételéből elhagyható-e a $\mathcal{H}^1$-mérhetőség feltétele, azaz hogy létezik-e görbeszerű n-pont halmaz.

1. Egyszerűbb állítások n-pont halmazokról

1.1. n-pont halmazok létezése.

1.1.1. definíció. Legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ és $n \in \mathbf{N}$. A H halmazt n-pont halmaznak nevezzük, ha a sík minden egyenese pontosan n pontban metszi.

Mazurkiewicz [14] bizonyította be 1914-ben, hogy létezik 2-pont halmaz. A bizonyítás egyszerű transzfinit indukciót használ, és a gondolatmenet könnyen átvihető általános n-pont halmazok esetére. Bagemihl [1], Sierpiński [18], illetve Bagemihl és Erdős [2] cikkeiben találhatók a kérdéshez kapcsolódó különböző jellegű általánosítások. A teljesség kedvéért közlünk egy bizonyítást n-pont halmazok létezésére.

1.1.2. állítás. *Minden $n \geq 2$ esetén létezik n-pont halmaz.*

Bizonyítás. Legyen κ a legkisebb kontinuum számosságú rendszám. A sík egyenesei és a szintén kontinuum számosságú $\{\alpha : 1 \leq \alpha < \kappa\}$ halmaz között létesítsünk bijekciót, így kapjuk a sík egyeneseinek egy $\{l_\alpha : 1 \leq \alpha < \kappa\}$ jólrendezését.

Minden $\alpha < \kappa$-hoz hozzárendelünk egy $H_\alpha \subset \mathbf{R}^2$ halmazt, melynek számossága legfeljebb ω és α számosságának a maximuma, speciálisan kisebb, mint kontinuum. $H_0 \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$. Tegyük fel, hogy α rákövetkező rendszám, és $\alpha = \beta + 1$. Az l_α-n fekvő pontok kontinuum számosságú halmazt alkotnak, míg azon – l_α-tól különböző – egyenesek száma, melyek legalább 2 pontban metszik H_β-t, kisebb, mint kontinuum. Következésképp l_α-n van kontinuum sok pont, mely az előbb említett egyenesek egyikén sincs rajta. Ha $|H_\beta \cap l_\alpha| = k \leq n$, akkor válasszunk ki $n - k$ ilyen pontot, és H_α-t definiáljuk úgy, mint H_β és ezen pontok egyesítését.

Ha $\alpha < \kappa$ limeszrendszám, akkor legyen $H'_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta$, és H_α legyen H'_α és véges sok l_α-n fekvő pont uniója, melyeket az előző gondolatmenet szó szerinti alkalmazásával kapunk, ha az ottani H_β-t H'_α-re cseréljük. Végül legyen

$$H = \bigcup_{\beta<\kappa} H_\beta.$$

Látható, hogy az a tulajdonság, hogy egy adott l egyenesre $|H_\alpha \cap l| \leq n$, $\alpha = 0$-ra teljesül, utána pedig semelyik lépésben nem változik, tehát $|H \cap l| \leq n$ is fennáll. Azt pedig, hogy itt valójában minden l egyenes esetén egyenlőség áll, az biztosítja, hogy minden l-hez létezik β, hogy $l = l_\beta$, és H_β definíciója szerint $|H \cap l| \geq |H_\beta \cap l| = |H_\beta \cap l_\beta| = n$. ■

1.2. Analitikus n-pont halmazok tulajdonságai. A következőkben n-pont halmazok Hausdorff-dimenziójával kapcsolatosan bizonyítunk néhány állítást. A Hausdorff-mérték és -dimenzió definícióját ismertnek vesszük. Egy H halmaz s-dimenziós Hausdorff-mértékét $\mathcal{H}^s(H)$-val, a Hausdorff-dimenzióját egyszerűen $\dim(H)$-val jelöljük. Megjegyezzük továbbá, hogy minden Borel, sőt, minden analitikus halmaz mérhető bármilyen dimenziós Hausdorff-mértékre nézve.

Egy $\mathcal{H}^s$-mérhető, pozitív és véges $\mathcal{H}^s$-mértékű halmazt *s-halmaznak* nevezünk. A most következő tételt többször is fogjuk használni. A tétel bizonyítással együtt, analitikus halmazok helyett Borel-halmazokra kimondva, szerepel [12] 8. fejezetében. Az analitikus eset megtalálható Federer [7, 2.10.47–48] és Rogers [16, 2.7. fejezet, 57. tétel] könyvében.

1.2.1. tétel. *Legyen $n \geq 1$ egész, $0 \leq s \leq n$, és legyen $A \subset \mathbf{R}^n$ analitikus, melyre $\mathcal{H}^s(A) > 0$. Ekkor létezik $K \subset A$ kompakt s-halmaz.*

Mielőtt tovább mennénk, bizonyítás nélkül közlünk néhány tételt, melyekre később szükségünk lesz.

1.2.2. tétel ([12], 7.5. tétel)**.** *Ha $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ Lipschitz-leképezés L konstanssal, $0 \leq s \leq m$, és $H \subset \mathbf{R}^m$, akkor*

$$\mathcal{H}^s\big(f(H)\big) \leq L^s \mathcal{H}^s(H).$$

Speciálisan

$$\dim\big(f(H)\big) \leq \dim(H).$$

1.2.3. tétel ([12], 10.11. tétel speciális esete)**.** *Ha $1 < s < 2$, $A \subset \mathbf{R}^2$ $\mathcal{H}^s$-mérhető és $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, akkor*

$$\dim\big(A \cap (W + x)\big) = s - 1 \quad \textit{és} \quad \mathcal{H}^{s-1}\big(A \cap (W + x)\big) < \infty$$

$\mathcal{H}^s$-m. m. x esetén m. m. W origón áthaladó egyenesre. (Szavakban: az A halmaz m. m. pontján áthaladó m. m. egyenes akkora halmazban metszi A-t, amekkorában azt elvárjuk.)

1.2.4. állítás. *Ha $A \subset \mathbf{R}^2$ analitikus n-pont halmaz, akkor* $\dim(A) = 1$.

Bizonyítás. Az 1.2.2. tételt egy egyenesre való merőleges vetítésre, mint f függvényre alkalmazva adódik, hogy $\dim(A) \geq 1$.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben $\dim(A) = s > 1$. Ekkor tetszőleges $1 < t < s$ esetén $\mathcal{H}^t(A) = \infty$, tehát létezik $K \subset A$ kompakt halmaz, melyre $0 < \mathcal{H}^t(K) < \infty$, és az 1.2.3. tétel szerint van olyan egyenes, ami K-t $t-1>0$ dimenziós, tehát végtelen halmazban metszi. A-t még inkább, ami ellentmond annak, hogy A n-pont halmaz. ■

1.2.5. megjegyzés. Az 5.1.1. tétel szerint A-ról valóban szükséges feltenni, hogy analitikus.

1.2.6. állítás. *Ha az $A \subset \mathbf{R}^2$ halmaz n-pont halmaz, akkor $\mathcal{H}^1(A) = \infty$.*

Bizonyítás. Használjuk az 1.2.2. tételt. ■

Miller [15] vette észre, hogy a következő állítás igaz:

1.2.7. állítás. *Analitikus n-pont halmaz Borel is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A n-pont halmaz. Ekkor az (x, y) pont pontosan akkor van A komplementerében, ha léteznek $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{R}$ valós számok, hogy $u_1, \ldots, u_n, y$ páronként különbözőek, és $(x, u_1), \ldots, (x, u_n) \in A$. Tehát az $\mathbf{R}^2 \setminus A$ halmaz a

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \big\{(x, y, u_1, \ldots, u_n) : y \neq u_i \ (i = 1, \ldots, n), \\ u_i \neq u_j \ (1 \leq i < j \leq n), \ (x, u_i) \in A \ (i = 1, \ldots, n)\big\}$$

halmaz vetülete az első két koordinátára vett vetítés által. Ha A analitikus, akkor C is analitikus, és annak vetülete, $\mathbf{R}^2 \setminus A$ is az. Ha pedig A maga és a komplementere is analitikus, akkor Borel. (Ezek az analitikus halmazokról szóló állítások megtalálhatók Laczkovich Miklós jegyzetének [10] II. részében, a 6. és 7. fejezetben.) ■

1.3. *n*-pont halmazok és a Kuratowski–Ulam-tétel.

Ebben az alfejezetben az n-pont halmazokat „kategóriaelméleti” szempontból vizsgáljuk, amin most nem a „szokásos” kategóriaelméletet, hanem a Baire Kategória Tételhez kapcsolódó témakört értjük. E dolgozat szerzője nem tud arról, hogy az irodalomban szerepelne az n-pont halmazok ilyen irányú megközelítése, ezért itt bebizonyítunk néhány egyszerű állítást.

Először röviden emlékeztetünk néhány fogalomra és tételre, melyek az itteninél általánosabban is tárgyalhatók (lásd [10]). Legyen (X, d) metrikus tér. Egy $Y \subset X$ halmaz

- *sehol sem sűrű,* ha $\bar{Y}$ nem tartalmaz gömböt;

- *első kategóriájú,* ha előáll megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként;
- *második kategóriájú,* ha nem első kategóriájú;
- *reziduális,* ha a komplementere első kategóriájú;
- *Baire-tulajdonságú,* ha létezik $U \subset X$ nyílt halmaz, hogy az $Y \,\Delta\, U$ szimmetrikus differencia első kategóriájú.

A Baire Kategória Tétel azt mondja ki, hogy ha (X, d) teljes, akkor minden $U \subset X$ nemüres, nyílt halmaz második kategóriájú. Könnyen belátható továbbá, hogy első kategóriájú G_δ-halmaz sehol sem sűrű, valamint hogy minden Borel-halmaz Baire-tulajdonságú.

1.3.1. tétel (Kuratowski–Ulam)**.** *Ha X és Y teljes metrikus terek, és $H \subset X \times Y$ sehol sem sűrű, első kategóriájú, reziduális vagy Baire-tulajdonságú, akkor első kategóriájú sok $x \in X$ kivételével H_x is rendre sehol sem sűrű, első kategóriájú, reziduális vagy Baire-tulajdonságú Y-ban $\Big(H_x = \big\{y : (x, y) \in H\big\}\Big)$.*

Továbbá ha H Baire-tulajdonságú, és első kategóriájú sok $x \in X$ kivételével H_x első kategóriájú, akkor H is első kategóriájú.

1.3.2. tétel. *Legyen $n \geq 2$, és legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ Baire-tulajdonságú n-pont halmaz. Ekkor H első kategóriájú.*

Bizonyítás. Mivel H-nak minden függőleges szelete n elemű és így első kategóriájú, a Kuratowski–Ulam-tétel szerint H is első kategóriájú. ∎

1.3.3. következmény. *Borel n-pont halmaz első kategóriájú.*

1.3.4. tétel. *Legyen $n \geq 2$, és legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ G_δ n-pont halmaz. Ekkor H sehol sem sűrű.*

Bizonyítás. Az 1.3.3. következmény szerint H első kategóriájú, de G_δ is, így sehol sem sűrű. ∎

Az 5. fejezetben megmutatjuk, hogy a H-ra tett feltételek valóban szükségesek, ugyanis létezik második kategóriájú n-pont halmaz. Az 1.3.2. tétel fényében ez a halmaz ráadásul nem is Baire-tulajdonságú.

Ha netán az Olvasót csábítaná a gondolat, hogy ha sikerülne belátni, hogy egy n-pont halmaz nem lehet sehol sem sűrű, akkor abból következne, hogy nem létezik G_δ n-pont halmaz, akkor sajnos ki kell hogy ábrándítsuk, ugyanis sehol sem sűrű n-pont halmaz létezését is igazolni fogjuk.

2. Általános tudnivalók rektifikálható halmazokról

2.1. A rektifikálhatóság ekvivalens definíciói.

2.1.1. definíció. Egy $H \subset \mathbf{R}^2$ halmazt *görbeszerűnek* vagy *rektifikálhatónak* nevezünk, ha léteznek $f_i : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ $(i = 1, 2, \ldots)$ folytonosan differenciálható leképezések, melyekre

$$\mathcal{H}^1\left(H \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i\big([0,1]\big)\right) = 0.$$

2.1.2. definíció. Egy $H \subset \mathbf{R}^2$ halmazt *görbementesnek* vagy *teljesen rektifikálhatatlannak* nevezünk, ha bármely folytonosan differenciálható $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ leképezés esetén

$$\mathcal{H}^1\Big(H \cap f\big([0,1]\big)\Big) = 0.$$

A rektifikálhatóságnak számos ekvivalens definíciója van. Sokszor a folytonosan differenciálhatóság (más néven C^1-tulajdonság) helyett a nála gyengébb Lipschitz-folytonosságot követelik meg. Azt, hogy ez a két definíció ekvivalens, sehol sem fogjuk használni, mindig C^1-leképezésekkel fogunk számolni. Az ekvivalencia bizonyításához azonban egy olyan technikai jellegű tétel szükséges, amelyre később is szükségünk lesz, így érdekességképpen erre is kitérünk.

2.1.3. tétel (Whitney kiterjesztési tétele)**.** *Legyen $P \subset \mathbf{R}$ perfekt, kompakt halmaz, és legyen $f : P \to \mathbf{R}$ differenciálható. Az f függvény akkor és csak akkor terjeszthető ki $\mathbf{R}$-re C^1-függvényként, ha f' folytonos P-n, és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $x, y \in P$, $|x - y| \le \delta$ esetén*

$$\big|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\big| \le \varepsilon |y - x|.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvény kiterjeszthető a számegyenesre C^1-függvényként, és jelöljük $\tilde{f}$-mal egy kiterjesztését. Ekkor $\tilde{f}'$ folytonos $\mathbf{R}$-en, így P-n is, de ott megegyezik f'-vel, ezért f' valóban folytonos P-n. Továbbá $\tilde{f}$ egyenletesen folytonos $[\min P, \max P]$-n, tehát minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $x, y \in [\min P, \max P]$, $|x - y| \le \delta$ esetén $\big|\tilde{f}'(y) - \tilde{f}'(x)\big| \le \varepsilon$. Tehát ha $x, y \in P$, $x < y$ és $|y - x| \le \delta$, akkor a Lagrange-középértéktétel szerint létezik $\xi \in (x, y)$, hogy $\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) = \tilde{f}'(\xi)(y - x)$, és

$$\begin{aligned}\big|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\big| &= \big|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) - \tilde{f}'(x)(y - x)\big| = \\ &= \big|\tilde{f}'(\xi) - \tilde{f}'(x)\big| \cdot |y - x| \le \varepsilon |y - x|.\end{aligned}$$

Most rátérünk az elégségesség bizonyítására. Legyen $\min P = a$, $\max P = b$. Belátjuk, hogy ha (c, d) kiegészítő intervalluma P-nek, akkor van olyan folytonos $h : [c, d] \to \mathbf{R}$ függvény, hogy $h(c) = f'(c)$, $h(d) = f'(d)$, $\int_c^d h = f(d) - f(c)$, és

$$\max_{[c,d]} \big|h - f'(c)\big| \le 2 \cdot \max\left(\big|f'(d) - f'(c)\big|, \left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c} - f'(c)\right|\right).$$

Legyen $m = \big(f(d) - f(c)\big)/(d - c)$. Ha $h \equiv m$, akkor az $\int_c^d h = f(d) - f(c)$ feltétel teljesül, de h nem feltétlenül folytonos a végpontokban. Ezért az azonosan m függvényt úgy módosítjuk, hogy a $[c, c + \eta]$ intervallumban helyettesítjük egy olyan lineáris függvénnyel, amely $f'(c)$-től m-ig halad, a $[d - \eta, d]$ intervallumban pedig helyettesítjük egy olyan lineáris függvénnyel, amely m-től $f'(d)$-ig halad. Az így kapott h_1 függvényre $\int_c^d h_1$ csak kevéssel tér el $f(d) - f(c)$-től, ha η elég kicsi, ráadásul a h_1 által felvett értékek az $f'(c)$, $f'(d)$, m pontok konvex burkában vannak, így

$$\max_{[c,d]} \big|h_1 - f'(c)\big| \le \max\left(\big|f'(d) - f'(c)\big|, \left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c} - f'(c)\right|\right).$$

Tehát h_1-hez hozzáadva egy alkalmas kis abszolút értékű, c-ben és d-ben eltűnő függvényt, egy megfelelő h függvényt kapunk.

A P halmaz mindegyik I_i kiegészítő intervallumához készítsünk el egy $h_i : I_i \to \mathbf{R}$ függvényt, mely rendelkezik a fenti tulajdonságokkal. Legyen $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ az f' függvény P-ről való olyan kiterjesztése, amely P mindegyik I_i kiegészítő intervallumán megegyezik h_i-vel. Belátjuk, hogy g folytonos $[a, b]$-n. Az $[a, b] \setminus P$ halmaz pontjaiban ez nyilvánvaló. Legyen most $x \in P$. Ha x nem bal oldali torlódási pont P-ben, akkor g balról folytonos x-ben, hiszen vagy $x = a$, vagy x egy kiegészítő intervallum jobb végpontja. Hasonlóan, ha x nem jobb oldali torlódási pont P-ben, akkor g jobbról folytonos x-ben.

Tegyük fel most, hogy x bal oldali torlódási pontja P-nek. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és legyen $\delta > 0$ olyan, hogy $y, z \in P$, $|y - z| \le \delta$ esetén $\big|f'(y) - f'(z)\big| \le \varepsilon$ és $\big|f(y) - f(z) - f'(z)(y - z)\big| \le \varepsilon|y - z|$. Legyen $u \overset{\text{def}}{=} \min\big(P \cap [x - \delta, x]\big) < x$.

Megmutatjuk, hogy ha $z \in (u, x)$, akkor $\big|g(z) - g(x)\big| \le 3\varepsilon$. Ha $z \in P$, akkor ez nyilvánvaló. Ha $z \notin P$, akkor z egy (c, d) kiegészítő intervallumban van, ahol $u \le c < d < x$, ezért

$$\big|g(z) - g(x)\big| \le \big|g(z) - g(c)\big| + \big|g(c) - g(x)\big| = \big|g(z) - f'(c)\big| + \big|f'(c) - f'(x)\big| <$$

$$\le 2 \cdot \max\left(\big|f'(d) - f'(c)\big|, \left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c} - f'(c)\right|\right) + \varepsilon \le 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Hasonlóan igazolható az is, hogy ha x jobb oldali torlódási pont, akkor g jobbról folytonos x-ben.

A kapott g függvény tehát folytonos. Utolsó lépésként azt mutatjuk meg, hogy g-nek az

$$\tilde{f}(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x g + f(a)$$

integrálfüggvénye megegyezik f-fel P pontjaiban. Vegyük észre, hogy az f-re tett feltételekből következik, hogy f Lipschitz, ezért kiterjeszthető $[a, b]$-re Lipschitz-függvényként, például a kiegészítő intervallumokon való lineáris kiterjesztéssel. Jelöljük a kiterjesztett függvényt F-fel. Így azonban P pontjaiban elromolhat a differenciálhatóság. Szerencsére ez azonban csak nullmértékű halmazon történhet meg, ugyanis F Lipschitz, így korlátos változású, tehát majdnem minden pontban differenciálható. Azon P-beli pontokban pedig, ahol F is differenciálható, F' meg kell hogy egyezzen f'-vel. (Valójában a differenciálhatóság csak azokban a pontokban romolhat el, amelyek csak egyoldali torlódási pontjai P-nek, mint azt könnyen ellenőrizhetnénk, ilyenből pedig csak megszámlálhatóan sok van.) Tehát $F'(x) = f'(x)$ majdnem minden $x \in P$-re.

Továbbá az F függvény abszolút folytonos (mivel Lipschitz), így minden $u, v \in [a, b]$, $u < v$-re $F(v) - F(u) = \int_u^v F'$.

Vegyünk egy $x \in P$ pontot, melyre $x > a$, és jelöljük $I_i = (c_i, d_i)$-vel P-nek az $[a, x]$-beli kiegészítő intervallumait, h_i-vel pedig az azokon konstruált függvényeket. Ekkor

$$\tilde{f}(x) - f(a) = \int_a^x g = \int_{[a,x]\cap P} g + \int_{[a,x]\setminus P} g = \int_{[a,x]\cap P} f' + \sum_i \int_{I_i} h_i =$$

$$= \int_{[a,x]\cap P} f' + \sum_i \big(f(d_i) - f(c_i)\big) = \int_{[a,x]\cap P} F' + \sum_i \big(F(d_i) - F(c_i)\big) =$$

$$= \int_{[a,x]\cap P} F' + \sum_i \int_{c_i}^{d_i} F' = \int_a^x F' = F(x) - F(a) = f(x) - f(a),$$

tehát $\tilde{f}$ valóban kiterjesztése f-nek. ■

2.1.4. tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ majdnem mindenütt differenciálható, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $F \subset [a, b]$ zárt halmaz, hogy $\lambda\big([a, b] \setminus F\big) < \varepsilon$, és $f|_F$ kiterjeszthető $[a, b]$-re C^1-függvényként.*

Bizonyítás. Legyen H azon (a, b)-beli pontok halmaza, amelyekben f differenciálható. A feltétel szerint $\lambda\big([a, b] \setminus H\big) = 0$. Könnyen látható, hogy f' mérhető H-n. Adott $\eta > 0$-ra és n pozitív egészre legyen $H_{\eta,n}$ azon H-beli pontok halmaza, melyekre teljesül, hogy $y \in [a, b]$ és $|y - x| \le 1/n$ esetén $\big|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\big| \le \eta|y - x|$. Világos, hogy $H_{\eta,1} \subset H_{\eta,2} \subset \dots$, és $\bigcup_n H_{\eta,n} = H$. Könnyű ellenőrizni, hogy mindegyik $H_{\eta,n}$ halmaz mérhető. Így minden $\gamma > 0$-ra van olyan n, hogy a $H_\eta^\gamma \overset{\text{def}}{=} H_{\eta,n}$ halmazra $\lambda(H_\eta^\gamma) > 1 - \gamma$.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és tekintsük az $A \overset{\text{def}}{=} \bigcap_n H_{1/n}^{\varepsilon/2^n}$ halmazt. Ekkor $\lambda(A) > 1 - \varepsilon$, és minden $\eta > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x, y \in A$, $|y - x| \le \delta$ esetén $\big|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\big| \le \eta|y - x|$. Létezik $K \subset A$ kompakt halmaz, melyre $\lambda(K) > 1 - \varepsilon$, és létezik $P \subset K$ perfekt halmaz, hogy $\lambda(P) = \lambda(K)$, mert minden zárt halmaz előáll egy perfekt és egy megszámlálható halmaz uniójaként. Ezt a P perfekt halmazt választhatjuk F-nek, ugyanis a 2.1.3. tétel szerint f kiterjeszthető P-ről C^1-függvényként. ■

2.1.5. állítás. *Mindegy, hogy a rektifikálhatóság definícióját Lipschitz vagy folytonosan differenciálható függvényekkel fogalmazzuk meg, ugyanazok lesznek a görbeszerű halmazok.*

Bizonyítás. Az egyik irány triviális, mert egy C^1-függvény Lipschitz is. A másik irányhoz legyen $H \subset \mathbf{R}^2$, és legyenek $f_i : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ Lipschitz-függvények, hogy

$$\mathcal{H}^1\left(H \Big\backslash \bigcup_i f_i\big([0,1]\big)\right) = 0.$$

Legyen $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbf{N}}$ pozitív számokból álló, nullához tartó sorozat. Jelöljük f_i^1-gyel illetve f_i^2-vel f_i első és második koordináta-függvényét. A 2.1.4. tétel szerint minden i-re és j-re léteznek $g_{ij}^1, g_{ij}^2 : [0,1] \to \mathbf{R}$ C^1-függvények, hogy $\lambda\Big(\big[g_{ij}^k \neq f_i^k\big]\Big) < \varepsilon_j$ $(k = 1,2)$. Ekkor minden i-re és j-re a $g_{ij} = (g_{ij}^1, g_{ij}^2)$ görbére igaz, hogy $\lambda\big([g_{ij} \neq f_i]\big) < 2\varepsilon_j$, tehát az $f_i\big([0,1]\big) \setminus \bigcup_j g_{ij}\big([0,1]\big)$ halmaz egy nullmértékű halmaz f_i általi képe, következésképp $\mathcal{H}^1$-nullmértékű, mert f_i Lipschitz (1.2.2. tétel). A g_{ij} C^1-görbék tehát szintén lefedik H-t $\mathcal{H}^1$-nullhalmaztól eltekintve. ∎

2.2. C^1-ívek. Még mindig a definícióknál maradva, a következőkben azon fáradozunk, hogy megmutassuk, hogy akkor is ekvivalens definíciót kapunk, ha a rektifikálhatóság definíciójában kikötjük, hogy az f_i görbéknek semelyik pontban se legyen 0 a deriváltjuk, és kölcsönösen egyértelműek legyenek. Az ilyen görbéknek nevet is adunk:

2.2.1. definíció. Egy C^1-osztályú, kölcsönösen egyértelmű $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ leképezést, melyre f' sehol sem 0, *C^1-ívnek* nevezünk.

Mielőtt hozzáfognánk a következő lemmák bizonyításához, megemlítünk néhány, külső mértékekkel kapcsolatos definíciót és egyszerű állítást. Az X téren egy μ külső mértéket *regulárisnak* nevezünk, ha bármely $H \subset X$ halmazhoz van olyan $A \subset X$ μ-mérhető halmaz, hogy $H \subset A$ és $\mu(H) = \mu(A)$. Egyszerűen belátható, hogy ha μ reguláris külső mérték X-en, akkor monoton folytonos, azaz ha $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ bővülő X-beli halmazsorozat, akkor

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(H_n).$$

A mi vizsgálatainkban kétféle külső mérték fog szerepelni: a Lebesgue külső mérték a számegyenesen (λ), illetve a lineáris Hausdorff-mérték a síkon ($\mathcal{H}^1$). Mindkettőről tudjuk, hogy reguláris, ezért monoton folytonos.

Legyenek I és J olyan intervallumok a számegyenesen, hogy I jobb végpontja megegyezik J bal végpontjával. Ha $A \subset I$ és $B \subset J$ nem feltétlenül mérhető halmazok, akkor $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$, hiszen I mérhető, így jól vágja ketté az $A \cup B$ halmazt.

2.2.2. lemma. *Legyen $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ tetszőleges függvény, és legyen $N = \big\{x \in [0,1] : f'(x) = 0\big\}$. Ekkor az $f(N)$ halmaz nullmértékű.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Minden n pozitív egészre definiáljuk az alábbi halmazt:

$$N_n \overset{\text{def}}{=} \Big\{x \in N : \big|f(y) - f(x)\big| \leq \varepsilon|y - x|, \text{ ha } |y - x| \leq 1/n\Big\}.$$

Világos, hogy $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$, és $\bigcup_n N_n = N$, hiszen N pontjaiban a derivált eltűnik. Tudjuk, hogy $\lambda(N_n) \to \lambda(N)$ és $\lambda\big(f(N_n)\big) \to \lambda\big(f(N)\big)$. Mivel ε tetszőleges volt, elég belátnunk, hogy $\lambda\big(f(N)\big) \leq \varepsilon$, ehhez pedig azt, hogy $\lambda\big(f(N_n)\big) \leq \varepsilon$ minden n-re. Rögzítsünk egy n-et.

Legyen $I_{i,n} = \big[(i-1)/n, i/n\big]$, ha $i = 1, 2, \ldots, n$. Ekkor

$$f(N_n) = \bigcup_{i=1}^{n} f(N_n \cap I_{i,n}),$$

így

$$\lambda\big(f(N_n)\big) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda\big(f(N_n \cap I_{i,n})\big).$$

Vegyük észre, hogy minden i-re $f|_{N_n \cap I_{i,n}}$ Lipschitz ε konstanssal az N_n halmaz definíciója miatt, így minden i-re $\lambda\big(f(N_n \cap I_{i,n})\big) \leq \varepsilon\lambda(N_n \cap I_{i,n})$. E lemma előtti megjegyzésünk szerint tehát

$$\lambda\big(f(N_n)\big) \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\lambda(N_n \cap I_{i,n}) = \varepsilon\lambda(N_n) \leq \varepsilon.$$

Ezt akartuk bizonyítani. ∎

2.2.3. következmény. *Legyen* $h : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ C^1*-ív, és jelöljük a képét* Γ*-val. Legyen továbbá* $E = \{p \in \Gamma : \Gamma\text{-nak függőleges az érintője } p\text{-ben}\}$*. Ekkor* $\lambda\big(\mathrm{pr}_1(E)\big) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $h = (h_1, h_2)$. A Γ görbének a $p = h(x)$ pontban pontosan akkor függőleges az érintője, ha $h_1'(x) = 0$. Az $N \overset{\text{def}}{=} \big\{x \in [0,1] : h_1'(x) = 0\big\}$ jelölést bevezetve, világos, hogy $\mathrm{pr}_1(E) = h_1(N)$. A 2.2.2. tétel pedig pontosan azt mondja, hogy ez nullmértékű. ∎

2.2.4. lemma. *Legyen* $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ *tetszőleges leképezés, és legyen* $N = \big\{x \in [0,1] : f'(x) = (0,0)\big\}$*. Ekkor* $\mathcal{H}^1\big(f(N)\big) = 0$.

Bizonyítás. A bizonyítás szó szerint ugyanúgy történik, mint a 2.2.2. lemmánál. Csupán annyi a különbség, hogy az f függvény most $\mathbf{R}^2$-be képez, és ott a $\mathcal{H}^1$ külső mértéket tekintjük. ∎

2.2.5. állítás. *Legyen* $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ *folytonosan differenciálható görbe. Ekkor* $f\big([0,1]\big)$ *lefedhető megszámlálható sok* C^1*-ívvel* $\mathcal{H}^1$*-nullmértékű halmaztól eltekintve.*

Bizonyítás. Legyen $N \overset{\text{def}}{=} \{x \in [0,1] : f'(x) = (0,0)\}$. Az N halmaz zárt, így $[0,1] \setminus N$ előáll megszámlálható sok diszjunkt intervallum uniójaként, melyeken f-nek sehol sem nulla a deriváltja. Ezeket az intervallumokat esetleg kisebb részekre bontva elérhetjük azt is, hogy $[0,1] \setminus N$ megszámlálható sok olyan intervallum uniója legyen, melyeken f kölcsönösen egyértelmű. Mindegyik ilyen intervallumot megszámlálható sok zárt intervallum uniójaként felírva kapjuk $f\big([0,1] \setminus N\big)$ megszámlálható sok C^1-ívvel való fedését. A kimaradó $f(N)$ halmaz a 2.2.4. tétel szerint $\mathcal{H}^1$-nullmértékű, így készen vagyunk. ■

2.2.6. következmény. *A rektifikálhatóság definíciójában feltehető, hogy a fedő görbék C^1-ívek.*

2.3. Görbeszerű halmazok C^1-grafikonokkal való fedése. A következő tétel azt állítja, hogy egy görbeszerű halmaz nemcsak C^1-ívekkel, hanem C^1-függvények grafikonjaival is viszonylag jól fedhető.

2.3.1. tétel. *Legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ tetszőleges görbeszerű halmaz. Ekkor léteznek $g_i : [a_i, b_i] \to \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \dots)$ C^1-függvények, hogy*

$$\lambda\Bigg(\mathrm{pr}_1\Bigg(H \Big\backslash \bigcup_i \mathrm{Gr}\,(g_i)\Bigg)\Bigg) = 0.$$

Bizonyítás. Legyenek $h_j : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ $(j = 1, 2, \dots)$ olyan C^1-ívek, hogy $\mathcal{H}^1\Big(H \setminus \bigcup_j \Gamma_j\Big) = 0$, ahol Γ_j jelöli h_j képét. Vetítés során a Hausdorff-mérték nem nő, így $\lambda\Big(\mathrm{pr}_1(H \setminus \bigcup_j \Gamma_j)\Big) = 0$. Ezért elegendő bizonyítani, hogy minden j-re Γ_j-hez találhatók C^1-függvények, melyek grafikonjai azt „jól" fedik, azaz az állításunkat görbeszerű halmaz helyett elég C^1-ívekre bizonyítani.

Legyen tehát $h = (\varphi_1, \varphi_2) : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ C^1-ív, és jelöljük Γ-val h képét. Vezessük be a következő jelölést:

$$E \overset{\text{def}}{=} \{p \in \Gamma : \Gamma\text{-nak függőleges az érintője } p\text{-ben}\}.$$

A 2.2.3. következmény szerint $\lambda\big(\mathrm{pr}_1(E)\big) = 0$, így elég megmutatni, hogy $\Gamma \setminus E$ lefedhető megszámlálható sok C^1-függvény grafikonjával.

Ha $p \in \Gamma \setminus E$, akkor legyen $t_p = h^{-1}(p)$ és $\delta_p > 0$ olyan, hogy $|s - t_p| \le \delta_p$ esetén a Γ görbe $h(s)$-beli érintőjének meredeksége abszolút értékben legfeljebb $|M_p| + 1$, ahol M_p-vel a $h(t_p)$-beli érintő meredekségét jelöljük. Világos, hogy $\varphi_1'(s) \ne 0$, ha $s \in [t_p - \delta_p, t_p + \delta_p] \overset{\text{def}}{=} J_p$. Legyen továbbá $[a_p, b_p] \overset{\text{def}}{=} \varphi_1(J_p)$. Az is világos, hogy $\varphi_1|_{J_p}$ C^1-diffeomorfizmus J_p és $[a_p, b_p]$ között. Végül legyen $g_p : [a_p, b_p] \to \mathbf{R}$, $u \mapsto \varphi_2\big(\varphi_1|_{J_p}^{-1}(u)\big)$ minden $p \in \Gamma \setminus E$-re. Világos, hogy g_p folytonosan differenciálható.

Ezzel megkaptuk a $\Gamma \setminus E$ halmaz C^1-függvények grafikonjai általi fedését. Ebből azért lehet megszámlálható fedést kiválasztani, mert a $\{J_p\}_{p \in \Gamma \setminus E}$ intervallumrendszer uniója a $h^{-1}(\Gamma \setminus E)$ halmaz, ennek a fedésnek tehát létezik $\{J_{p_i}\}_{i \in \mathbf{N}}$ megszámlálható részfedése, és az ezekhez a p_i-khez tartozó g_{p_i} függvények grafikonjai lefedik $\Gamma \setminus E$-t. ■

2.3.2. következmény. *Egy $H \subset \mathbf{R}^2$ görbeszerű halmazt majdnem minden függőleges egyenes megszámlálható sok pontban metsz.*

3. Rektifikálhatóság és n-pont halmazok

Az ebben a fejezetben ismertetett eredmények Mauldin nevéhez fűződnek. Nem olyan részletes bizonyításokkal ugyan, mint ebben a fejezetben, de mind megtalálhatók Mauldin cikkében [13].

3.1. Több grafikon elmetszése egy egyenessel. Ha $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ és $v \neq 0$, akkor jelölje $T_{(u,v)}$ az (u,v) pontból az x-tengelyre történő vetítést, azaz minden (x,y) pontra, ahol $y \neq v$, legyen $T_{(u,v)}(x,y) = z$ olyan, hogy az (x,y), (u,v) és $(z,0)$ pontok egy egyenesen vannak. Az, hogy C *pozitív kúp,* jelentse azt, hogy létezik $w \in \mathbf{R}$ és egy $0 < \theta < \pi/2$ szög, hogy C azon $p \in \mathbf{R}^2$ pontokból áll, melyekre a $p - (0,w)$ vektor és a pozitív y-tengely által bezárt szög kisebb, mint θ.

3.1.1. tétel. *Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható, és $\left|f'(x)\right| \leq M$ minden $x \in [a,b]$-re. Legyen továbbá $E \subset [a,b]$ Borel, melyre $\lambda(E) > 0$, és jelöljük G-vel f grafikonját. Ekkor minden $0 < \tau < 1$ esetén létezik C pozitív kúp, hogy ha $(u,v) \in C$, akkor $\lambda\Big(T_{(u,v)}\big(G \cap (E \times \mathbf{R})\big) \cap [a,b]\Big) > \tau\lambda(E)$.*

Bizonyítás. Ha $v > \max f$, akkor $T_{(u,v)}\big(x, f(x)\big)$-re képlet is adható:

$$T_{(u,v)}\big(x, f(x)\big) = x - f(x)\frac{u - x}{v - f(x)}.$$

Legyen $g_{(u,v)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} T_{(u,v)}\big(x, f(x)\big)$ minden $x \in [a,b]$-re. Ekkor

$$g'_{(u,v)}(x) = 1 - \frac{f'(x)(u-x)}{v - f(x)} + \frac{f(x)}{v - f(x)} - \frac{f(x)f'(x)(u-x)}{\big(v - f(x)\big)^2}.$$

Ha $v \to \infty$ miközben $|u/v| \to 0$, akkor $g'_{(u,v)}(x)$ x-ben egyenletesen tart 1-hez. Tehát minden $0 < \varepsilon$-ra létezik C pozitív kúp, hogy $(u,v) \in C$ esetén $1 - \varepsilon < g'_{(u,v)}(x) < 1 + \varepsilon$ minden $x \in [a,b]$-re, speciálisan $g_{(u,v)}$ kölcsönösen egyértelmű. Mivel $v \to \infty$, $|u/v| \to 0$ esetén $g_{(u,v)}(a) \to a$, a derivált becslését is használva, a C kúpról az is feltehető, hogy $(u,v) \in C$ esetén $g_{(u,v)}$ az $\big[a - (1-\tau)\lambda(E)/4, b + (1-\tau)\lambda(E)/4\big]$ intervallumba képez.

Még $\lambda\Big(g_{(u,v)}(E)\Big)$-re kellene alsó becslést adni. Az integráltranszformáció tételéből következik, hogy

$$\lambda\Big(g_{(u,v)}(E)\Big) = \int_{g_{(u,v)}(E)} 1 = \int_E g'_{(u,v)}(x)\,dx > \left(\frac{1+\tau}{2}\right)\lambda(E),$$

ha $g'_{(u,v)}(x) > (1+\tau)/2$ minden $x \in [a,b]$-re. Ha az integráltranszformáció tételét csak nyílt E-re ismerjük, okoskodhatunk a következőképpen. A $\mu(B) \overset{\text{def}}{=} \lambda\big(g(B)\big)$ halmazfüggvény értelmes $[a,b]$ Borel-halmazain, mert g – homeomorfizmus lévén – Borelt Borelbe visz, és az is világos, hogy μ mérték a Borel-halmazokon. Nyílt U-kra tudjuk, hogy $\mu(U) = \int_U g'(x)\,dx$, a Borel-halmazokra való kiterjesztés pedig egyértelmű, tehát $\mu(B) = \int_B g'(x)\,dx$ fennáll minden B Borel-halmazra is.

Összerakva eddigi eredményeinket, adódik, hogy létezik C pozitív kúp, hogy $(u,v) \in C$ esetén

$$\lambda\Big(T_{(u,v)}\big(G \cap (E \times \mathbf{R})\big) \cap [a,b]\Big) = \lambda\Big(g_{(u,v)}(E) \cap [a,b]\Big) > \tau\lambda(E). \ \blacksquare$$

3.1.2. tétel. *Legyenek $f_i : [c,d] \to \mathbf{R}$ $(i = 1,\dots,n)$ C^1-függvények, és legyen $E \subset [c,d]$ Borel, melyre $\lambda(E) > 0$. Legyen továbbá $G_i = \operatorname{Gr}\left(f_i|_E\right)$ $(i = 1,\dots,n)$. Ekkor létezik C pozitív kúp, hogy minden $(u,v) \in C$ esetén létezik (u,v)-n átmenő egyenes, mely metszi mindegyik G_i-t.*

Bizonyítás. Legyen az x pont E-nek sűrűségi pontja. Vegyünk egy olyan x középpontú $[a,b]$ intervallumot, amelyre $\lambda\big(E \cap [a,b]\big) > \left(\frac{n-1}{n}\right)(b-a)$. A 3.1.1. tételből következik, hogy létezik C pozitív kúp, hogy minden $(u,v) \in C$-re és minden $i = 1,\dots,n$-re

$$\lambda\Big(T_{(u,v)}(G_i) \cap [a,b]\Big) > \left(\frac{n-1}{n}\right)(b-a).$$

Tehát ha $(u,v) \in C$, akkor $\bigcap_{i=1}^n T_{(u,v)}(G_i) \cap [a,b] \neq \emptyset$, ez pedig pont azt jelenti, hogy van (u,v)-n áthaladó egyenes, amely mindegyik G_i-t metszi. $\blacksquare$

3.2. Görbeszerű n-pont halmazok.

3.2.1. tétel. *Legyen $n \geq 2$ egész. Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbf{R}^2$ halmaz olyan, hogy minden derékszögű koordináta-rendszerben létezik egy $[a,b]$ intervallum, léteznek folytonosan differenciálható $f_i : [a,b] \to \mathbf{R}$ $(i = 1,\dots,n)$ függvények, és létezik egy $E \subset [a,b]$ Borel-halmaz úgy, hogy $\lambda(E) > 0$, és az f_i függvények E feletti grafikonjai H-nak páronként diszjunkt részhalmazai. Ekkor H vagy korlátos, vagy van olyan egyenes, amely legalább $n+1$ pontban metszi.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy H-t egyetlen egyenes sem metszi n-nél több pontban. Jelöljük K_r-rel az origó középpontú, r sugarú körvonalat. Vegyünk egy $u \in K_1$ vektort, és tekintsük azt a derékszögű koordináta-rendszert, melynek y-tengelyének pozitív félegyenese u irányába néz. A tételünk feltételei szerint ennek a koordinátarendszernek az x-tengelyén létezik $[a,b]$ intervallum, azon f_i folytonosan differenciálható függvények, és $E \subset [a,b]$ pozitív mértékű Borel-halmaz, hogy az f_i függvények grafikonjai H-nak páronként diszjunkt részhalmazai.

Mivel feltettük, hogy H-t minden egyenes legfeljebb n pontban metszi, a 3.1.2. tétel szerint létezik $r_u > 1$ és $0 < \theta_u < \pi/4$, hogy H-nak egyetlen pontja sem esik abba a C_u kúpba, melynek csúcsa $r_u u$, és azon z pontokból áll, melyekre a $z - r_u u$ és u vektorok által bezárt szög kisebb, mint θ_u.

Minden $u \in K_1$-re legyen A_u a K_{r_u+1} körvonalnak azon maximális nyílt részíve, mely C_u-ba esik. Az A_u íveket vetítsük le az origóból a K_1 körvonalra: így kapjuk K_1-nek I_u nyílt ívekből álló fedését. Ebből válasszunk ki $I_{u_1}, \dots, I_{u_m}$ véges részfedést. Világos, hogy a $K_{\max_i \{r_{u_i}+1\}}$ körvonalat teljes egészében fedik a C_{u_i} kúpok. Ekkor viszont a teljes $\{z \in \mathbf{R}^2 : \|z\| \geq \max_i \{r_{u_i} + 1\}\}$ körkülsőt is, H tehát valóban korlátos. ■

3.2.2. tétel. *Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbf{R}^2$ halmaz $\mathcal{H}^1$-mérhető és görbeszerű, továbbá a $\widetilde{H} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : |H_x| \geq n\}$ halmaz pozitív Lebesgue-mértékű. Ekkor létezik $[c, d]$ intervallum, azon folytonosan differenciálható $f_i : [c, d] \to \mathbf{R}$ függvények $(i = 1, \dots, n)$ és egy $E \subset [c, d]$ pozitív mértékű Borel-halmaz, hogy az f_i függvények E feletti grafikonjai H-nak páronként diszjunkt részhalmazai.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy abból, hogy a H halmaz $\mathcal{H}^1$-mérhető és görbeszerű, már következik, hogy $\widetilde{H}$ Lebesgue-mérhető. Fedjük le H-t $\mathcal{H}^1$-nullhalmaz kivételével megszámlálható sok C^1-görbével, jelöljük őket g_i-vel. A $H_i \stackrel{\text{def}}{=} H \cap g_i([0, 1])$ jelöléssel ekkor H felírható $H = N \cup \bigcup_i H_i$ alakban, ahol $N = H \setminus \bigcup_i H_i$, $\mathcal{H}^1(N) = 0$, és $\mathcal{H}^1(H_i) < \infty$. Mivel a $\mathcal{H}^1$ külső mérték Borel-reguláris, léteznek B_i Borel-halmazok, hogy $H_i \subset B_i$ és $\mathcal{H}^1(H_i) = \mathcal{H}^1(B_i)$, következésképpen – a H_i halmaz $\mathcal{H}^1$-mérhetősége miatt – $\mathcal{H}^1(B_i \setminus H_i) = 0$ minden i-re. Ebből azt kapjuk, hogy $\mathcal{H}^1(H \,\Delta\, B) = 0$, ahol Δ a szimmetrikus differenciát jelöli, és $B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i B_i$ Borel. Legyen $M \stackrel{\text{def}}{=} H \,\Delta\, B$.

A $\widetilde{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : |B_x| \geq n\}$ halmaz analitikus, hiszen a

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1} : (x, y_i) \in B \ (i = 1, \dots, n), \ y_1 < \dots < y_n\}$$

halmaz Borel $\mathbf{R}^{n+1}$-ben, $\widetilde{B}$ pedig ennek folytonos képe az első koordinátára való vetítés által. A $\widetilde{B}$ halmaz tehát mérhető, így $\widetilde{H}$ is, hiszen $\widetilde{B} \,\Delta\, \widetilde{H} \subset \mathrm{pr}_1(B \,\Delta\, H) = \mathrm{pr}_1(M)$, utóbbi pedig nullhalmaz. Vegyük észre, hogy az $Y \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{B} \setminus \mathrm{pr}_1(M) = \widetilde{H} \setminus \mathrm{pr}_1(M)$ pontosan azon $x \in \mathbf{R}$ pontok halmaza, melyekre $B_x = H_x$, és $|B_x| = |H_x| \geq n$. Azt is tudjuk, hogy Y mérhető, és $\lambda(Y) = \lambda(\widetilde{B}) = \lambda(\widetilde{H}) > 0$.

Vegyünk egy $D \subset Y$ pozitív mértékű Borel-halmazt, és legyen $B' \stackrel{\text{def}}{=} B \cap (D \times \mathbf{R})$, mely szintén Borel. A következő állításunk az, hogy létezik egy $T \subset D$ pozitív mértékű kompakt halmaz, és léteznek $k_i : T \to \mathbf{R}$ folytonos függvények $(i = 1, \dots, n)$, hogy ezek G_i grafikonjai B'-nek (így H-nak is) páronként diszjunkt részhalmazai. A Jankov–von Neumann uniformizációs tétel [9, 18.1. tétel] azt mondja ki, hogy a sík minden A analitikus részhalmazához van olyan $f : \mathrm{pr}_1(A) \to \mathbf{R}$ függvény, mely mérhető az analitikus halmazok által generált σ-algebra szerint, és a grafikonja A-nak részhalmaza. Tehát, mivel a B' halmaz analitikus (sőt Borel), létezik olyan $g : D \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $\mathrm{Gr}\,(g) \subset B'$, és amely mérhető az analitikus függvények által generált σ-algebrára. Speciálisan Lebesgue-mérhető. Luzin tételét g-re alkalmazva kapjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $K_1 \subset D$ kompakt halmaz és $h_1 : K_1 \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, hogy $\lambda(D \setminus K_1) < \varepsilon$, és $g|_{K_1} = h_1$.

Ezután tekintsük B' helyett a $B' \setminus \mathrm{Gr}\,(h_1)$, szintén Borel-halmazt, melynek D feletti szeletei legalább $n-1$ eleműek, és az előző gondolatmenet ismétlésével válasszunk olyan $K_2 \subset D$ kompakt halmazt és $h_2 : K_2 \to \mathbf{R}$ folytonos függvényt, hogy $\lambda(D \setminus K_2) < \varepsilon$, és $\mathrm{Gr}\,(h_2) \subset B' \setminus \mathrm{Gr}\,(h_1)$. Az eljárást folytatva kapunk $K_1, \ldots, K_n \subset D$ kompakt halmazokat és $h_i : K_i \to \mathbf{R}$ folytonos függvényeket, hogy $\lambda(D \setminus K_i) < \varepsilon$ minden $i = 1, \ldots, n$-re, és a h_i függvények grafikonjai B' páronként diszjunkt részhalmazai. Ha $\varepsilon < \lambda(D)/n$, akkor $\lambda(K_1 \cap \ldots \cap K_n) > 0$, így $T \stackrel{\mathrm{def}}{=} K_1 \cap \ldots \cap K_n$ és $k_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} h_i|_T$ jó választás, azaz $T \subset \widetilde{H}$ pozitív mértékű kompakt halmaz és $k_i : T \to \mathbf{R}$ folytonos függvények, melyekre a k_i függvények G_i grafikonjai H-nak páronként diszjunkt részhalmazai ($i = 1, \ldots, n$).

Nyilvánvalóan mindegyik G_i görbeszerű, hiszen a görbeszerű H halmaznak a részhalmazai, ezért a 2.3.1. tétel szerint minden $i = 1, \ldots, n$-re léteznek $g_{ij} : [a_{ij}, b_{ij}] \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvények, hogy

$$\lambda\Big(\mathrm{pr}_1\Big(G_i \Big\backslash \bigcup_j \mathrm{Gr}\,(g_{ij})\Big)\Big) = 0.$$

Mindegyik G_i kompakt, így $G_i \cap \mathrm{Gr}\,(g_{ij})$ is az. Jelöljük a $\mathrm{pr}_1\big(G_i \cap \mathrm{Gr}\,(g_{ij})\big)$ halmazt E_{ij}-vel. Ezzel a jelöléssel tehát minden i-re $\lambda\Big(T \setminus \bigcup_j E_{ij}\Big) = 0$. Ebből, valamint abból, hogy az E_{ij}-knek m. m. pontja sűrűségi pont, következik, hogy rögzített i-re m. m. $x \in T$-hez létezik j, hogy x sűrűségi pontja E_{ij}-nek. Következésképpen létezik $x \in T$, és léteznek $j_1, \ldots, j_n$ indexek, hogy x sűrűségi pontja E_{ij_i}-nek minden $i = 1, \ldots, n$ esetén.

A $\bigcap_{i=1}^n [a_{ij_i}, b_{ij_i}]$ intervallumot választhatjuk $[c, d]$ intervallumnak, $g_{ij_i}|_{[c,d]}$-t f_i-nek, a $[c, d] \cap \bigcap_{i=1}^n E_{ij_i}$ halmazt pedig E-nek. Már csak azt kell belátnunk, hogy $\lambda(E) > 0$, de ez következik abból, hogy x sűrűségi pontja E_{ij_i}-nek minden i-re.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

A 3.2.1. és 3.2.2. tétel közvetlen következménye az alábbi tétel:

3.2.3. tétel. *Legyen $n \geq 2$ egész, és legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ n-pont halmaz. Ekkor H nem lehet $\mathcal{H}^1$-mérhető görbeszerű halmaz.*

3.3. Egy érdekes sejtés. Mauldin észrevette, hogy a következő geometriai mértékelméleti sejtés (lásd [12, 258. oldal]) szoros kapcsolatban van az n-pont halmazok témakörével.

(P2) *Minden síkbeli görbementes kompakt* 1*-halmazhoz van olyan egyenes, amely azt legalább* 3 *pontban metszi.*

Nehéz megmondani, hogy mennyire megalapozott a sejtés. Mindenesetre ha igaz lenne, az azzal a rendkívül érdekes következménnyel járna, hogy nem létezik Borel 2-pont halmaz, amint azt hamarosan belátjuk. Ennek a sejtésnek van egy általánosabb változata is:

(Pn) *Minden síkbeli görbementes kompakt* 1-*halmazhoz van olyan egyenes, amely azt legalább* $n+1$ *pontban metszi.*

A következő tétel egy klasszikus vetítési tétel, nem bizonyítjuk.

3.3.1. tétel ([6, 84. oldal]). *Legyen* $B \subset \mathbf{R}^2$ *görbeszerű Borel-halmaz, melyre* $\mathcal{H}^1(B) > 0$. *Ekkor legfeljebb egy kivételével minden origón áthaladó* W *egyenes esetén* $\lambda\big(\mathrm{pr}_W(B)\big) > 0$, *ahol* pr_W *a* W *egyenesre való merőleges vetítést jelöli.*

Megjegyezzük még azt a közismert tényt, hogy tetszőleges, nem feltétlenül $\mathcal{H}^1$-mérhető, de véges külső mértékű $H \subset \mathbf{R}^2$ felbontható egy görbeszerű és egy görbementes halmaz diszjunkt uniójára, sőt, a felbontás $\mathcal{H}^1$-nullhalmaztól eltekintve egyértelmű [12, 15.6. tétel]. Ha H Borel, akkor a görbeszerű és a görbementes komponens is vehető Borelnek.

3.3.2. tétel. *Legyen* $n \geq 2$, *és tegyük fel, hogy* (Pn) *igaz. Legyen* $A \subset \mathbf{R}^2$ *analitikus, továbbá tegyük fel, hogy* $\mathcal{H}^1(A) > 0$, *és minden egyenes legfeljebb* n *pontban metszi* A-*t. Ekkor* A *felírható*

$$A = N \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

alakban, ahol minden E_i *görbeszerű kompakt 1-halmaz és* $\mathcal{H}^1(N) = 0$. *Speciálisan* A *görbeszerű.*

Bizonyítás. Világos, hogy minden $E \subset A$ kompakt 1-halmaz görbeszerű. Egy ilyen E ugyanis felbomlik egy görbeszerű és egy görbementes Borel-halmaz uniójára. Ha a görbementes komponens nem lenne $\mathcal{H}^1$-nullmértékű, akkor azt (Pn) szerint több mint n pontban metszené egy egyenes, de ez nem fordulhat elő.

Ha a tétel állítása nem lenne igaz, akkor – az 1.2.1. tételt használva – transzfinit rekurzióval konstruálhatnánk több mint megszámlálható sok E_α $(\alpha < \omega_1)$ páronként diszjunkt A-ban fekvő kompakt 1-halmazt. Tudjuk, hogy E_α görbeszerű, tehát a 3.3.1. tétel szerint egy kivételével minden W origón áthaladó egyenesre $\lambda\big(\mathrm{pr}_W(E_\alpha)\big) > 0$.

Vegyünk két különböző, origón áthaladó egyenest, W_1-et és W_2-t. Ha megszámlálhatóan sok α kivételével $\lambda\big(\mathrm{pr}_{W_1}(E_\alpha)\big) = 0$, akkor ez a több mint megszámlálhatóan sok kivételes α W_2-re nézve már nem lehet kivételes. Tehát létezik olyan W origón áthaladó egyenes, hogy $\lambda\big(\mathrm{pr}_W(E_\alpha)\big) > 0$ áll fenn megszámlálhatónál több α-ra. Feltehető, hogy ez az egyenes az x-tengely, a pr_W jelölés helyett pedig használhatjuk a már megszokott pr_1-et.

Azt állítjuk, hogy elég nagy K egész esetén megszámlálhatónál több α-ra $\lambda\big(\mathrm{pr}_1(E_\alpha) \cap [-K, K]\big) > 0$. Valóban,

$$\Big\{\alpha : \lambda\big(\mathrm{pr}_1(E_\alpha)\big) > 0\Big\} = \bigcup_{K=1}^{\infty} \Big\{\alpha : \lambda\Big(\mathrm{pr}_1\left(E_\alpha \cap [-K, K]\right)\Big) > 0\Big\},$$

így, mivel a bal oldal nem megszámlálható, a jobb oldalon álló halmazok között is van nem megszámlálható. Sőt, hasonlóan belátható, hogy létezik $c > 0$, hogy megszámlálhatónál több α-ra $\lambda\big(\mathrm{pr}_1(E_\alpha) \cap [-K, K]\big) > c$.

Világos, hogy ekkor létezik $x \in [-K, K]$, hogy $x \in \mathrm{pr}_1(E_\alpha)$ n-nél több α-ra teljesül. Következésképpen az x-en áthaladó függőleges egyenes A-t n-nél több pontban metszi, ami ellentmondás. ■

A 3.2.3. és 3.3.2. tételekből azonnal következik az alábbi tétel:

3.3.3. tétel. *Legyen $n \geq 2$. Ha* (Pn) *igaz, akkor nem létezik analitikus n-pont halmaz.*

4. F_σ-halmazok

4.1. Ívek 2-pont halmazokban. A bevezetésben említettük, hogy ívek létezését 2-pont halmazokban először Larman [11] vizsgálta, azzal a motivációval, hogy megmutassa, hogy nem létezik n-pont halmaz, mely F_σ. Hogy pontosan mit értünk *ív* alatt, arról még nem beszéltünk.

4.1.1. definíció. Egy $C \subset \mathbf{R}^2$ halmazt *ívnek* nevezünk, ha homeomorf a $[0, 1]$ intervallummal.

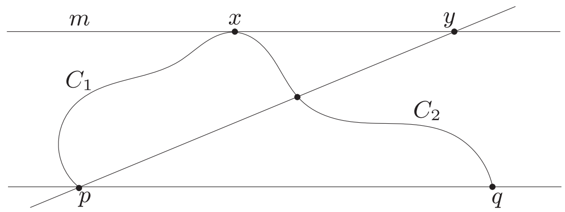
Egy C ívnek értelemszerűen definiáljuk a végpontjait és a belső pontjait: egy $x \in C$ pont belső pont, ha $C \setminus \{x\}$ nem összefüggő, és végpont, ha összefüggő. Ha x és y a síknak két különböző pontja, akkor $L(x, y)$-nal jelöljük az x-en és y-on áthaladó egyenest. A síkban egy egyenes komplementere két komponensre esik szét. Azt mondjuk, hogy két pont az egyenesnek ugyanazon az oldalán van, ha ugyanabban a komponensben vannak.

Bevezetésképpen adunk egy egyszerű bizonyítást arra, hogy egy 2-pont halmaz nem tartalmazhat ívet.

4.1.2. tétel. *Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbf{R}^2$ halmazt minden egyenes legalább két pontban metszi, és H tartalmaz egy C ívet. Ekkor van olyan egyenes, ami H-t legalább három pontban metszi.*

Bizonyítás. Legyen $f : [0, 1] \to C$ homeomorfizmus, és legyen $p = f(0)$ és $q = f(1)$ a C ív két végpontja. Ha $C \subset L(p, q)$, akkor nincs mit bizonyítani, egyébként pedig legyen x a C ívnek $L(p, q)$-tól (egyik) legtávolabb eső pontja, és legyen m az x-en áthaladó, $L(p, q)$-val párhuzamos egyenes (*1. ábra*). Könnyen ellenőrizhető, hogy ha az m egyenes x-en kívül még egy pontban metszené C-t, akkor egy m-mel párhuzamos, $L(p, q)$-hoz kicsit közelebbi egyenesnek legalább négy közös pontja lenne C-vel. Feltehetjük tehát, hogy $m \cap C = \{x\}$.

Azt is tudjuk, hogy m-nek van x-en kívül még egy közös pontja H-val, nevezzük ezt a pontot y-nak. A C ívnek p és x közötti részét jelöljük C_1-gyel, a q és x közötti



1. ábra

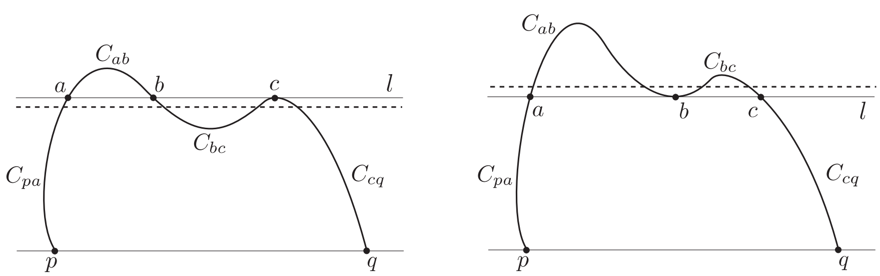
részét C_2-vel. Ha y az $\{x + t(p-q) : t > 0\}$ félegyenesen van, akkor $L(y, q)$ metszi C_1-et, ha pedig az $\{x + t(p-q) : t < 0\}$ félegyenesen van, akkor $L(y, p)$ metszi C_2-t. Mindkét esetben találtunk tehát egy egyenest, amely legalább három pontban metszi C-t. ■

4.1.3. következmény. *Egy 2-pont halmaz nem tartalmazhat ívet.*

4.2. Ívek 3-pont halmazokban. Nem sokkal nehezebb az sem, hogy egy 3-pont halmaz sem tartalmazhat ívet. Először egy segédtételt bizonyítunk.

4.2.1. lemma. *Tegyük fel, hogy a C ív végpontjai, p és q egy l egyenesnek ugyanarra az oldalára esnek, és l legalább három pontban metszi C-t. Ekkor van olyan egyenes, ami C-t legalább négy pontban metszi.*

Bizonyítás. Először is feltehetjük, hogy l pontosan 3 pontban metszi C-t, legyenek ezek a, b és c (*2. ábra*). Legyen $f : [0,1] \to C$ homeomorfizmus, hogy $p = f(0)$, $a = f(x_a)$, $b = f(x_b)$, $c = f(x_c)$ és $q = f(1)$. Feltehető, hogy $x_a < x_b < x_c$. A C ívnek



2. ábra

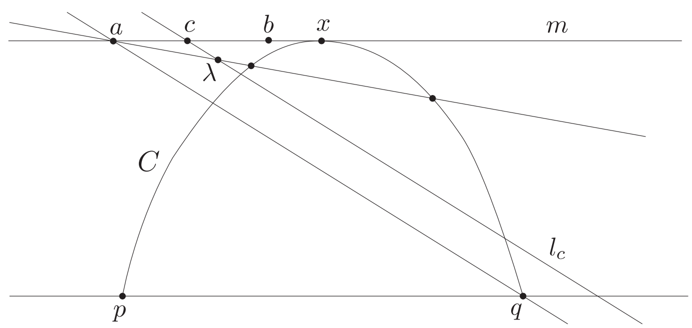
ez az öt pontja négy nyílt részívre bontja C-t, jelöljük ezeket rendre C_{pa}, C_{ab}, C_{bc}, C_{cq}-val. Jelöljük az l egyenes komplementerét alkotó két félsíkkomponenst F_1-gyel és F_2-vel, és tegyük fel, hogy $p, q \in F_1$.

Világos, hogy $C_{pa} \subset F_1$ és $C_{cq} \subset F_1$. Ha C_{ab} és C_{bc} közül az legalább az egyik F_1-be esik, akkor egy l-lel párhuzamos, p-hez kicsit közelebbi egyenes, ha pedig C_{ab} és C_{bc} is F_2-be esik, akkor pedig egy p-től kicsit távolabbi egyenes metszi C-t legalább négy pontban. ■

4.2.2. tétel. *Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbf{R}^2$ halmazt minden egyenes legalább három pontban metszi, és H tartalmaz egy C ívet. Ekkor van olyan egyenes, amely H-t legalább négy pontban metszi.*

Bizonyítás. Legyen f, p, q, x és m, mint a 4.1.2. tétel bizonyításában, és megint kizárhatjuk azt az esetet, amikor $C \subset L(p,q)$. Feltehetjük, hogy $p = (0,0)$, $q = (1,0)$, így ha $x = (x_1, x_2)$, akkor $m = \mathbf{R} \times \{x_2\}$. Legyen $a = (a_1, x_2)$ és $b = (b_1, x_2)$ két másik m-en fekvő pontja H-nak, és tegyük fel, hogy $a_1 < b_1$. Két esetet különböztetünk meg:

1. Az m egyenesen x-nek ugyanazon az oldalán van a és b is. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $b_1 < x_1$. Legyen $c \in (a_1, b_1) \times \{x_2\}$, és jelölje l_c a c-n áthaladó, $L(a,q)$-val párhuzamos egyenest. A 4.2.1. lemma szerint feltehetjük, hogy l_c legfeljebb két pontban metszi C-t, így létezik $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in l_c \cap (H \setminus C)$. Ezen az eseten belül is három eset van:
   (a) $\lambda_2 < x_2$. Ekkor az $L(a,\lambda)$ egyenes elválasztja x-et p-től és q-tól, ezért a-n és λ-n kívül még két C-beli pontot is tartalmaz (*3. ábra*).



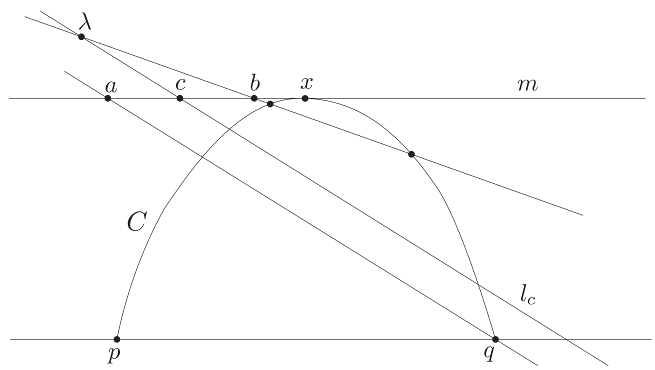
3. ábra

   (b) $\lambda_2 = x_2$. Ekkor m-en találtunk négy H-beli pontot.
   (c) $\lambda_2 > x_2$. Ebben az esetben az $L(b,\lambda)$ egyenes választja el x-et p-től és q-tól, ezért most $L(b,\lambda)$ metszi H-t legalább négy pontban (*4. ábra*).

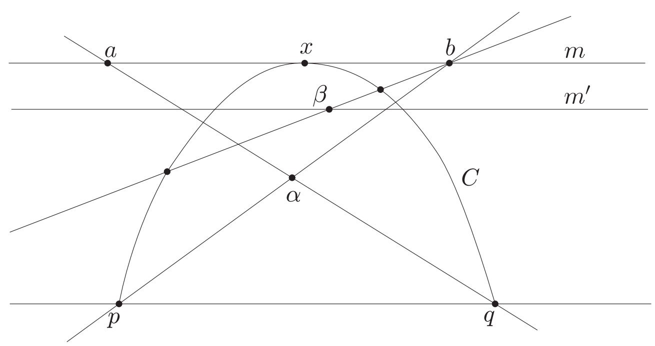
2. $a_1 < x_1 < b_1$. Az $L(a,q)$ és $L(b,p)$ egyenesek metszéspontja (nevezzük α-nak) az x-tengely és az m egyenes közti sávban fekszik (*5. ábra*). Legyen m' egy olyan, m-mel párhuzamos egyenes, mely szigorúan α és m között van. A 4.2.1. lemma szerint feltehetjük, hogy m' legfeljebb két pontban metszi C-t, és így létezik $\beta \in m' \cap (H \setminus C)$. Szimmetriaokok miatt feltehető, hogy β és x az $L(p,b)$ egyenesnek ugyanarra az oldalára esik. Ekkor viszont az $L(\beta,b)$ egyenes elválasztja x-et p-től és q-tól, ezért C-t is metszi legalább két pontban. Megint megvan a négy pont.

Megmutattuk tehát, hogy bármely esetben van olyan egyenes, amely legalább négy pontban metszi H-t. ■

4.2.3. következmény. *Egy 3-pont halmaz nem tartalmazhat ívet.*



4. ábra



5. ábra

4.3. Ívek F_σ-halmazokban. A következő lépés annak bizonyítása, hogy ha egy n-pont halmaz F_σ, akkor tartalmaz ívet. A most következő tételekhez bevezetünk néhány jelölést. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített pozitív valós szám, $H \subset \mathbf{R}^2$ tetszőleges halmaz, és $n \in \mathbf{N}$. Legyen

$$P_n^\varepsilon(H) \overset{\text{def}}{=} \big\{x \in \mathbf{R} : |H_x| = n, \text{ és}$$
$$\text{ha } (x,a),(x,b) \in H,\ a \neq b,\ \text{akkor } |a-b| \geq \varepsilon\big\}.$$

Az $y_i : P_n^\varepsilon(H) \to \mathbf{R}$ ($1 \leq i \leq n$) függvényeket a következőképpen definiáljuk: az y_i függvények grafikonjainak uniója legyen $(P_n^\varepsilon(H) \times \mathbf{R}) \cap H$, és minden $x \in P_n^\varepsilon(H)$ esetén legyen $y_1(x) < y_2(x) < \ldots < y_n(x)$. Vegyük észre, hogy $P_n^\varepsilon(H)$ definíciója miatt $y_{i+1}(x) \geq y_i(x) + \varepsilon$ minden $i = 1, \ldots, n-1$-re.

4.3.1. lemma. *Legyen $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}$, és legyen $F \subset \mathbf{R}^2$ olyan kompakt halmaz, melyet minden függőleges egyenes legfeljebb n pontban metsz. Ekkor $P_n^\varepsilon(F)$ kompakt, és $y_i : P_n^\varepsilon(F) \to \mathbf{R}$ folytonos minden $i = 1, \ldots, n$ esetén.*

Bizonyítás. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor a $P_1^\varepsilon(F)$ halmaz F-nek az x-tengelyre vett merőleges vetülete, így kompakt. Másrészt legyen $x \in P_1^\varepsilon(F)$, és $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ olyan, $P_1^\varepsilon(F)$-ben haladó sorozat, mely x-hez konvergál. Az $\big(y_1(x_m)\big)_{m\in\mathbf{N}}$ sorozat korlátos F korlátossága miatt, így $\limsup_{m\to\infty} y_1(x_m) = a$ és $\liminf_{m\to\infty} y_1(x_m) = b$ véges. Mivel F zárt is, (x,a) és (x,b) is eleme F-nek, ami csak úgy lehet, hogy $a = b$, és ez éppen azt jelenti, hogy y_i folytonos az x pontban. Az $n = 1$ esettel tehát készen vagyunk.

Tegyük fel most, hogy az állítás igaz valamely $n \ge 1$-re, és vegyünk egy F kompakt halmazt, amelyet minden függőleges egyenes legfeljebb $n+1$ pontban metsz. Legyen $(x_m)_{m\in\mathbf{N}}$ egy $G \overset{\text{def}}{=} P^{\varepsilon}_{n+1}(F)$-ben haladó sorozat, mely konvergál egy $x \in \mathbf{R}$ ponthoz. Legyen továbbá $\liminf_{m\to\infty} y_{n+1}(x_m) = b$. Vegyük észre, hogy $(x,b) \in F$. Az $(x_m)_{m\in\mathbf{N}}$ sorozatnak létezik olyan $(x_{m_j})_{j\in\mathbf{N}}$ részsorozata, hogy

$$\big|y_{n+1}(x_{m_j}) - b\big| < \varepsilon/2$$

teljesül minden $j \in \mathbf{N}$-re, és

$$\lim_{j\to\infty} y_{n+1}(x_{m_j}) = b.$$

Definiáljuk a következő kompakt halmazt:

$$F' \overset{\text{def}}{=} F \cap \Big(\big(\{x\} \cup \{x_{m_j} : j \in \mathbf{N}\}\big) \times (-\infty, b - \varepsilon/2]\Big).$$

Mivel

$$b - \varepsilon/2 < y_{n+1}(x_{m_j}) < b + \varepsilon/2,$$

minden $j \in \mathbf{N}$-re, $\big(x_{m_j}, y_{n+1}(x_{m_j})\big) \notin F'$, de $\big(x_{m_j}, y_n(x_{m_j})\big) \in F'$. Következésképpen minden $j \in \mathbf{N}$-re $\big|F'_{x_{m_j}}\big| = n$, amiből azt kapjuk, hogy $x_{m_j} \in P^{\varepsilon}_n(F')$. Vegyük észre, hogy $(x,b) \in F \setminus F'$, így $|F'_x| \le n$, tehát F'-nek minden függőleges szelete legfeljebb n elemű. Ezért alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, miszerint $P^{\varepsilon}_n(F')$ kompakt, és emiatt $x \in P^{\varepsilon}_n(F')$. Ugyancsak az indukciós feltevés szerint

$$\lim_{j\to\infty} y_n(x_{m_j}) = y_n(x),$$

így

$$b - y_n(x) \ge \varepsilon,$$

hiszen minden j-re $y_{n+1}(x_{m_j}) - y_n(x_{m_j}) \ge \varepsilon$ és $\lim_{j\to\infty} y_{n+1}(x_{m_j}) = b$. Következésképpen $x \in G$. Ezzel megmutattuk, hogy G kompakt.

(G kompaktságát elegánsabban úgy is bizonyíthattuk volna, hogy tekintjük az

$$\big\{(x, y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+2} : x \in \mathbf{R},\ (x, y_i) \in F \text{ minden } i = 1, \dots, n+1\text{-re},$$
$$\text{és } y_{i+1} - y_i \ge \varepsilon \text{ minden } i = 1, \dots, n\text{-re}\big\}$$

halmazt, mely zárt, mert csupa zárt feltétellel adtuk meg, és korlátos is, tehát kompakt, a G halmaz pedig pont ennek a kompakt halmaznak az első koordinátára vett vetülete. Azonban a fentiekhez hasonló okoskodásra akkor is szükség lenne az y_i függvények folytonosságának igazolásához.)

Legyen $\limsup_{m\to\infty} y_{n+1}(x_m) = a$, és tegyük fel, hogy $a > b$. Ekkor (x, a) és (x, b) is eleme F-nek, továbbá $a > b > y_n(x) > \ldots > y_1(x)$, ami ellentmond annak, hogy F-nek minden függőleges szelete legfeljebb $n+1$ elemű. Ezért $a = b$, tehát y_{n+1} folytonos.

Tekintsük az

$$F'' \stackrel{\text{def}}{=} \big\{(x, y) \in (G \times \mathbf{R}) \cap F : \, y \leq y_{n+1}(x) - \varepsilon\big\}$$

halmazt, amely y_{n+1} folytonosságából következően kompakt. Világos, hogy F'' kielégíti az éppen bizonyítandó lemma feltételeit n-re, továbbá $P_n^\varepsilon(F'') = P_{n+1}^\varepsilon(F') = G$ és az F'-re illetve F''-re definiált $y_1, \ldots, y_n$ függvények egybeesnek. Az indukciós feltevés szerint tehát $y_1, \ldots, y_n$ is folytonosak, és készen vagyunk. ∎

4.3.2. tétel. *Legyen H a síknak egy F_σ-részhalmaza, és legyen $n \in \mathbf{N}$ olyan, hogy H-nak minden függőleges szelete pontosan n elemű. Ekkor létezik olyan nem elfajuló $[a, b]$ intervallum, és léteznek az $[a, b]$ intervallumon értelmezett $f_1 < f_2 < \ldots < f_n$ folytonos függvények úgy, hogy H tartalmazza mindegyik f_i-nek a grafikonját. Speciálisan H tartalmaz ívet.*

Bizonyítás. Legyen $H = \bigcup_{i=1}^\infty F_i$, ahol $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$, és mindegyik F_i kompakt. Minden $i \in \mathbf{N}$-re definiáljuk a következő halmazt:

$$H_i \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{x \in \mathbf{R} : \, \big|(F_i)_x\big| = n, \text{ és ha } (x, a), (x, b) \in F_i, \ a \neq b, \\ \text{akkor } |a - b| \geq 1/i\Big\}.$$

A 4.3.1. lemma szerint H_i kompakt minden $i \in \mathbf{N}$ esetén. Vegyük észre, hogy $\bigcup_{i=1}^\infty H_i = \mathbf{R}$, így a Baire Kategória Tétel szerint létezik $i_0 \in \mathbf{N}$, hogy H_{i_0} tartalmaz egy nem elfajuló $[a, b]$ intervallumot. Megint a 4.3.1. lemma szerint a H_{i_0}-hoz tartozó $y_k|_{[a,b]}$ függvények folytonosak ($1 \leq k \leq n$), és ezen függvények grafikonjai H-ban fekszenek. ∎

4.3.3. tétel. *Egy n-pont halmaz nem lehet F_σ, ha $n = 2, 3$.*

Bizonyítás. Használjuk a 4.1.3. és a 4.2.3. következményeket, és a 4.3.2. tételt. ∎

4.3.4. megjegyzés. A 4.2.2. tétel bizonyítása Bouhjar, Dijkstra és van Mill nevéhez fűződik [4]. Ugyanebben a cikkben szerepel a 4.3.1. lemma és a 4.3.2. tétel is, de a szerzők megjegyzik, hogy a bizonyítás nem tőlük, hanem Mauldintól származik.

4.4. Nem létezik n-pont halmaz, amely F_σ. Ha $n \geq 4$, akkor a fenti módszerrel nem lehet belátni, hogy egy n-pont halmaz nem lehet F_σ, ugyanis már egy 4-pont halmaz is tartalmazhat ívet, mint azt az 5. fejezetben majd belátjuk. Tehát más módszert kell keresnünk.

Az az igazság, hogy – egyáltalán nem nyilvánvaló, de – tulajdonképpen már minden részlet a rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy egy bizonyítást összerakjunk. Mivel az eddig tárgyalt eredményeken kívül gyakorlatilag semmilyen új tétel vagy lemma nem szükséges, Mauldin, Bouhjar és Dijkstra ezt a bizonyítást egy – bevezetéssel és hivatkozásokkal együtt – másfél oldalas cikkben közölte [5]. Íme a bizonyítás:

4.4.1. tétel. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor nem létezik n-pont halmaz, mely a síknak F_σ-részhalmaza.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A egy F_σ n-pont halmaz. Vegyünk egy tetszőleges derékszögű koordináta-rendszert a síkon. A 4.3.2. tétel szerint létezik egy nem elfajuló $[a, b]$ intervallum, és léteznek $[a, b]$ intervallumon értelmezett $f_1 < f_2 < \ldots < f_n$ folytonos függvények úgy, hogy ezen függvények G_i grafikonjai A-nak részhalmazai. A G_i halmazokat mindegyik vízszintes egyenes legfeljebb n pontban metszi, ezért a Banach Indikátrix Tétel [8, 17.17. tétel] szerint az f_i függvények korlátos változásúak. (Konkrétan f_i teljes változása legfeljebb $n(M - m)$, ahol m és M az f_i minimumát és maximumát jelöli. Valójában olyan speciális esetben alkalmazzunk a Banach Indikátrix Tételt, hogy az állításunk a teljes változás definícióját felírva gyakorlatilag azonnal látszik.) A 2.1.4. tétel szerint léteznek g_i folytonosan differenciálható függvények, és létezik egy $C \subset [a, b]$ pozitív mértékű kompakt halmaz, hogy $f_i|_C = g_i|_C$ minden i-re. Mivel ilyen tulajdonságú C halmaz és g_i függvények minden koordináta-rendszerben léteznek, a 3.2.1. tétel szerint az A halmaz vagy korlátos, vagy van olyan egyenes, mely legalább $n + 1$ pontban metszi. Egy n-pont halmaz viszont egyik tulajdonsággal sem rendelkezhet. ■

5. Ellenpéldák, konstrukciók

5.1. 2 dimenziós n-pont halmaz létezése. Az 1.2.4. tételben megmutattuk, hogy egy analitikus n-pont halmaz Hausdorff-dimenziója 1. Általánosságban azonban ez nem igaz.

5.1.1. tétel. *Ha $n \geq 2$, akkor létezik H n-pont halmaz, melyre* $\dim(H) = 2$, *sőt* $\mathcal{H}^2(H) > 0$.

Bizonyítás. Az 1.1.2. állítás bizonyításának módosításával, transzfinit rekurzióval konstruálunk ilyen halmazt. Legyen κ megint a legkisebb kontinuum számosságú rendszám, és vegyük a sík egyeneseinek egy $\{l_\alpha : \alpha < \kappa\}$ jólrendezését. Továbbá készítsük el a sík Borel $\mathcal{H}^2$-nullhalmazainak (azaz a síkbeli Lebesgue-mérték szerint nullmértékű Borel-halmazoknak) egy $\{B_\alpha : 0 < \alpha < \kappa\}$ felsorolását.

Minden α-ra definiálunk egy kontinuumnál kisebb számosságú H_α halmazt. Legyen $H_0 = \emptyset$. Ha $\alpha = \beta + 1$, akkor H'_α legyen H_β és néhány l_α-n fekvő pont egyesítése, ahol a véges sok hozzávett pontot l_α-n úgy választjuk meg, hogy egyikük se essen olyan – l_α-tól különböző – egyenesre, melyen H_β-nak legalább 2 pontja van. Annyi pontot választunk, hogy $|H'_\alpha \cap l_\alpha| = n$ legyen. Azt, hogy ezt meg lehet csinálni, már láttuk az 1.1.2. állítás bizonyításában.

H'_α-ból úgy kapjuk H_α-t, hogy hozzáveszünk egy B_α-n kívüli pontot, hogy H_α-ra még mindig igaz legyen, hogy minden egyenes legfeljebb n pontban metszi. Ahhoz, hogy ez lehetséges, azt kell megmutatni, hogy a H'_α-beli pontpárok által meghatározott (kontinuumnál kevesebb) egyenes nem fedheti le B_α komplementerét.

Van olyan irány, mely nincs a H'_α-beli pontpárok által meghatározott irányok között, pontosabban van olyan egyenes, mellyel párhuzamos egyenesek mindegyike legfeljebb egy pontban metszi H'_α-t. Alkalmazva ebben az irányban a Fubini-tételt a B_α halmazra, az adódik, hogy van ilyen irányú egyenes, melynek B_α-val vett metszete $\mathcal{H}^1$-nullmértékű (sőt, majdnem mindegyik egyenes ilyen). Elég tehát azt igazolnunk, hogy a számegyenesen egy pozitív Lebesgue-mértékű Borel-halmaz kontinuum számosságú. Ez pedig következik abból, hogy egy ilyen halmaz tartalmaz pozitív mértékű zárt halmazt is, ami – mint a számegyenes minden nem megszámlálható zárt részhalmaza – felírható egy megszámlálható és egy nemüres, perfekt, következésképpen kontinuum számosságú halmaz egyesítéseként.

Ha α limeszrendszám, akkor ugyanezt csináljuk, miután vettük az α-nál kisebb indexű halmazok egyesítését. Végül legyen

$$H = \bigcup_{\beta<\kappa} H_\beta.$$

Csak az szorul némi magyarázatra, hogy $\mathcal{H}^2(H) > 0$. Ha ugyanis $\mathcal{H}^2(H) = 0$ lenne, akkor $\mathcal{H}^2$ Borel-regularitása szerint létezne B Borel-halmaz, melyre $H \subset B$ és $\mathcal{H}^2(B) = 0$. Ez viszont lehetetlen, mert B is szerepelt a B_α-k között, tehát H-nak van B-n kívüli pontja. ■

A fejezet további részében szereplő tételek bizonyítására gyakorlatilag ugyanez a recept működik (jólrendezzük az egyeneseket, és megfelelő módon minden lépésben beválasztunk néhány új pontot). Ezért ezentúl nem fogjuk ennyire részletezni a bizonyításokat, csak a lényeges elemekről beszélünk.

5.2. Halmazok kiterjesztése n-pont halmazzá.

5.2.1. tétel. *Legyen $n \geq 2$, $k \geq n+2$, és legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ olyan halmaz, melyet minden egyenes legfeljebb n pontban metsz. Ekkor létezik $\widetilde{H}$ k-pont halmaz, melyre $H \subset \widetilde{H}$.*

Bizonyítás. Mint mondtuk, a bizonyítás szinte szó szerint ugyanúgy történik, mint az n-pont halmazok létezésének bizonyításánál, az 1.1.2. állításban. Csak annyit jegyzünk meg, hogy azon múlik a bizonyítás, hogy minden lépésben kontinuumnál kevesebb egyenes lesz, amely k pontban metszi az aktuális halmazunkat, így azon az egyenesen, amelyen éppen új pontokat választunk, mindig kontinuumnál kevesebb tiltott pont lesz. ■

5.2.2. megjegyzés. A tétel nem igaz $k = n + 1$-re. Ha ugyanis H egy n-pont halmaz, $\widetilde{H}$ egy $n + 1$-halmaz, melyre $H \subset \widetilde{H}$, akkor $\widetilde{H} \setminus H$ egy 1-pont halmaz, de ilyen nyilvánvalóan nem létezik.

5.2.3. megjegyzés. A tétel Bouhjar, Dijkstra és van Mill észrevétele [4].

5.2.4. következmény. *Minden $k \geq 4$ esetén létezik k-pont halmaz, mely tartalmaz kört.*

5.3. Sűrű és sehol sem sűrű n-pont halmaz létezése.

5.3.1. tétel. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor létezik n-pont halmaz, amely sűrű a síkon.*

Bizonyítás. Gyakorlatilag ugyanazt kell csinálni, mint az 5.1.1. bizonyításában. Kontinuum sok nemüres, nyílt halmaz van, vegyük ezek egy jólrendezését. Minden lépésben vegyünk be annyi pontot az aktuális egyenesről, amennyi hiányzik ahhoz, hogy n legyen rajta, majd vegyünk be még egy olyan pontot is, amely benne van az aktuális nyílt halmazban, de a bevételével nem keletkezik olyan egyenes, amelyen n-nél több pont lesz. Ezt azért tehetjük meg, mert egy nemüres, nyílt halmazt nem fedhet le kontinuumnál kevesebb egyenes.

Valóban, legyen U nemüres, nyílt halmaz, és legyen L kontinuumnál kevesebb egyenesből álló halmaz. Vegyünk egy olyan l egyenest, amely nem párhuzamos az L-beli egyenesek egyikével sem, és U-val van közös pontja. Az $l \cap U$ metszet kontinuum számosságú, továbbá l minden L-beli egyenest pontosan egy pontban metsz, ezért $l \cap U$-ban valóban lesz olyan pont, amilyet kerestünk. ■

Az 1.3.4. tételben beláttuk, hogy egy G_δ n-pont halmaz sehol sem sűrű. Felmerül a kérdés, hogy létezhet-e egyáltalán sehol sem sűrű n-pont halmaz. Sajnos igen.

5.3.2. tétel. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor létezik sehol sem sűrű n-pont halmaz.*

Bizonyítás. Az eddigi tételekben mindig úgy irányítottuk a transzfinit rekurziót, hogy a halmazunk kifelé terjeszkedjen: legyen nagy a dimenziója, legyen sűrű, vagy éppen előírtunk egy halmazt, amelyet tartalmaznia kell. Most ennek pont a fordítottját csináljuk: úgy tartjuk kordában a halmazunkat, hogy csak a sík egy részhalmazából engedünk pontokat választani.

Jelöljük C-vel a Cantor-halmazt. A Cantor-halmaz sehol sem sűrű $\mathbf{R}$-ben, tehát a $C \times \mathbf{R}$ halmaz sehol sem sűrű $\mathbf{R}^2$-ben. Az $\mathbf{R} \times C$ halmaz is sehol sem sűrű, így az uniójuk, $D \stackrel{\text{def}}{=} (C \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times C)$ is az. Elegendő belátni, hogy D tartalmaz n-pont halmazt.

A szokásos transzfinit rekurziós építkezést folytatjuk, azzal a megkötéssel, hogy csak D-ből választhatunk pontot. Ez valóban működik, hiszen D-nek megvan az a szerencsés tulajdonsága, hogy minden egyenest kontinuum számosságú halmazban metsz. ■

5.4. $\mathcal{H}^1$-mérhető és görbeszerű n-pont halmazok. A 3.2.3. tétel szerint nem létezik $\mathcal{H}^1$-mérhető görbeszerű n-pont halmaz. Jogosan merül fel a kérdés, hogy szükséges-e a tételben feltenni a $\mathcal{H}^1$-mérhetőséget. A választ nem tudjuk. A 3.2.3. tétel ismertetett bizonyítása részben a 3.2.2. tételre épül, ott viszont egyáltalán nem látszik, hogy hogyan lehetne megszabadulni a $\mathcal{H}^1$-mérhetőség feltételétől.

Másrészt görbeszerű n-pont halmazt konstruálni sem tűnik egyszerűnek. Nyilvánvaló, hogy minden görbeszerű halmaz belefoglalható egy F_σ görbeszerű halmazba $\mathcal{H}^1$-nullhalmaztól eltekintve. Logikusnak tűnik tehát egy olyan transzfinit rekurzióval próbálkozni, amely mindig csak egy rögzített, „elég nagy" görbeszerű halmazból választ pontokat. A 2.3.2. következmény viszont éppen azt állítja, hogy nincs olyan „nagy" görbeszerű halmaz, amellyel a szokásos recept működik: alig van olyan egyenes, amely megszámlálhatónál több pontban metsz egy görbeszerű halmazt.

Természetesen merül fel az a kérdés is, hogy létezik-e $\mathcal{H}^1$-mérhető n-pont halmaz. Erre a kérdésre sem ismerjük a választ, de annyit legalább tudunk, hogy konzisztens $\mathcal{H}^1$-mérhető halmaz létezése. Miller [15] ugyanis bebizonyította, hogy ha a $V = L$ axióma igaz, akkor létezik koanalitikus n-pont halmaz. Laczkovich Miklós ötlete alapján mutatunk egy ennél jóval egyszerűbb bizonyítást arra, hogy $\mathcal{H}^1$-mérhető halmaz létezése konzisztens.

5.4.1. lemma. *Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbf{R}^2$ halmazt minden $B \subset \mathbf{R}^2$ véges lineáris mértékű Borel-halmaz nulla lineáris mértékű halmazban metszi. Ekkor a H halmaz $\mathcal{H}^1$-mérhető.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy H minden halmazt „jól vág ketté", azaz hogy minden $A \subset \mathbf{R}^2$ halmazra $\mathcal{H}^1(A) = \mathcal{H}^1(A \cap H) + \mathcal{H}^1(A \setminus H)$. A bal oldal mindig legfeljebb akkora, mint a jobb oldal, ezért elég csak a fordított irányú egyenlőtlenséggel foglalkozni. Ez $\mathcal{H}^1(A) = \infty$ esetén nyilván fennáll, ezért feltehető, hogy $\mathcal{H}^1(A) < \infty$.

Legyen B az a A halmaz Borel-burka, azaz olyan, hogy $\mathcal{H}^1(B) = \mathcal{H}^1(A)$. A feltételünk szerint $\mathcal{H}^1(B \cap H) = 0$, ezért az is igaz, hogy $\mathcal{H}^1(A \cap H) = 0$. Ebből pedig

$$\mathcal{H}^1(A) \geq \mathcal{H}^1(A \setminus H) = \mathcal{H}^1(A \setminus H) + \mathcal{H}^1(A \cap H).$$

Ezt akartuk bizonyítani. ■

5.4.2. tétel. *Legyen $n \geq 2$, és tegyük fel, hogy kontinuumnál kevesebb nulla lineáris mértékű halmaz egyesítése is nulla lineáris mértékű. (Ez következménye például a kontinuum hipotézisnek.) Ekkor létezik $\mathcal{H}^1$-mérhető n-pont halmaz.*

Bizonyítás. Az 5.4.1. lemma szerint elég megmutatni, hogy létezik olyan n-pont halmaz, melyet minden véges lineáris mértékű Borel-halmaz nullmértékűben metsz.

Legyen κ a legkisebb kontinuum számosságú rendszám, és legyen $\{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ a sík véges lineáris mértékű Borel-halmazainak egy κ típusú jólrendezése. A H_α

halmazokat válasszuk a következőképpen. Álljon az R_α halmaz azon $\beta < \alpha$ rendszámokból, melyekre $l_\alpha \cap B_\beta$ nulla lineáris mértékű. A feltételünk szerint $l_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in R_\alpha} B_\beta$ is nullmértékű, tehát az α-adik lépésben az új pontokat választhatjuk az $l_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in R_\alpha} B_\beta$ halmazból.

Belátjuk, hogy az így konstruált halmaz mindegyik B_β halmazt nullmértékűben metszi. A konstrukció első β lépésében kiválasztott pontok halmaza összesen is csak nullmértékű (mert kontinuumnál kisebb számosságú). Másrészt azon $\alpha > \beta$ rendszámok halmaza, amelyekre az α-adik lépésben választottunk pontot B_β-ból, csak megszámlálható. Ez világos abból, hogy B_β véges mértékű, minden ilyen α-ra $l_\alpha \cap B_\beta$ pozitív mértékű, és az $l_\alpha \cap B_\beta$ halmazok közül bármely kettőnek a metszete legfeljebb egyelemű (tehát nullmértékű). ■

5.5. Második kategóriájú n-pont halmaz létezése.

5.5.1. tétel. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor létezik második kategóriájú n-pont halmaz.*

Bizonyítás. Egy halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha tartalmazza egy első kategóriájú F_σ-halmaz, ugyanis sehol sem sűrű halmaz lezártja is sehol sem sűrű. Elég tehát egy olyan n-pont halmazt konstruálni, amely kilóg minden első kategóriájú F_σ-halmazból.

A konstrukció az 5.1.1. és 5.3.1. tételek bizonyításának mintájára történik. Csak annyit kell megmutatnunk, hogy egy első kategóriájú F_σ-halmaz komplementerét nem fedheti le kontinuumnál kevesebb egyenes.

Legyen tehát G egy reziduális G_δ-halmaz a síkon és legyen L kontinuumnál kevesebb egyenesből álló halmaz. Válasszunk egy l egyenest, amely nem párhuzamos egyik L-beli egyenessel sem. A Kuratowski–Ulam-tétel (1.3.1. tétel) szerint létezik olyan olyan l-lel párhuzamos m egyenes, melyre $m \cap G$ reziduális G_δ-részhalmaza m-nek. Az m egyenest minden L-beli egyenes pontosan egy pontban metszi, ezért elegendő azt megmutatni, hogy egy $\mathbf{R}$-beli reziduális G_δ-halmaz kontinuum számosságú.

Ismeretes, hogy teljes metrikus tér G_δ altere homeomorf egy teljes metrikus térrel ([10], I. rész, 5.8. tétel), valamint hogy egy nem megszámlálható lengyel tér kontinuum számosságú, ugyanis tartalmaz a Cantor-halmazzal homeomorf példányt ([10], I. rész, 6.4. tétel). Ebből a két tételből adódik az állításunk. ■

5.5.2. megjegyzés. Mint már korábban említettük, a Kuratowski–Ulam-tétel szerint egy második kategóriájú n-pont halmaz nem lehet Baire-tulajdonságú.

Irodalom

[1] F. Bagemihl, A theorem on intersections of prescribed cardinality, *Ann. of Math.,* **55** (1952), 34–37.

[2] F. Bagemihl and P. Erdős, Intersections of prescribed power, type or measure, *Fund. Math.,* **41** (1957), 57–67.

[3] V. J. Baston and F. A. Bostock, On a theorem of Larman, *J. London Math. Soc. (2),* **5** (1972), 715–718.

[4] K. Bouhjar, J. J. Dijkstra and J. van Mill, Three-point sets, *Topology Appl.,* **112** (2001), 215–227.

[5] K. Bouhjar, J. J. Dijkstra and R. D. Mauldin, No n-point set is σ-compact, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **129** (2001), 621–622.

[6] K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets* (Cambridge University Press, 1990).

[7] H. Federer, *Geometric Measure Theory* (Springer-Verlag, 1969).

[8] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis* (Springer-Verlag, 1965).

[9] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory* (Graduate Texts in Mathematics 156, Springer-Verlag, 1995).

[10] Laczkovich Miklós, *Valós függvénytan* (egyetemi jegyzet) (ELTE, Budapest, 1995).

[11] D. G. Larman, A problem of incidence, *J. London Math. Soc.* **43** (1968), 407–409.

[12] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces* (Cambridge University Press, 1995).

[13] R. D. Mauldin, On sets which meet each line in exactly two points, *Bull. London Math. Soc.,* **30** (1998), 397–403.

[14] S. Mazurkiewicz, O pewnej mnogości płaskiej, która ma z każda prosta dwa i tylko dwa punkty wspólne (Lengyel), *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et Lettres de Varsovie* **7** (1914), 382–384; Francia ford.: Sur un ensemble plan qui a avec chaque droite deux et seulement deux points communs, *Traveaux de Topologie et es Applications* (Szerk.: K. Borsuk *et al.,* PWN, Varsó, 1969), 46–47.

[15] A. Miller, Infinite combinatorics and definability, *Ann. Pure Appl. Logic,* **41** (1989), 179–203.

[16] C. A. Rogers, *Hausdorff Measures* (Cambridge University Press, 1970).

[17] S. Saks, *Theory of the Integral* (Dover, New York, 1964).

[18] W. Sierpiński, Une généralisation des théorèmes de S. Mazurkiewicz et F. Bagemihl, *Fund. Math.,* **40** (1953), 1–2.

[19] Strenner Balázs, *n-pont halmazok a síkban* (szakdolgozat) (ELTE TTK, Budapest, 2010).

k-ELEMŰ HALMAZOK ASZIMPTOTIKUS PAKOLÁSA, AHOL NINCS KÉTSZERESEN FEDETT PÁR

PÉTER M. GERGELY

1. Bevezetés

Használjuk az n-elemű halmazra a következő jelölést: $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ (bár többnyire nem lesz szükségünk arra, hogy az elemek természetes számok). Legyen továbbá $k \geq 3$ egész szám, és $\binom{[n]}{k}$ az n-elemű halmaz összes k-elemű részhalmazaiból álló család. k-elemű halmazok egy családját, $\mathcal{P}(n,k)$-t (ahol tehát $\mathcal{P}(n,k) \subset \binom{[n]}{k}$) *pakolásnak* nevezzük, ha $F, G \in \mathcal{P}(n,k)$ $(F \neq G)$-ből következik $|F \cap G| < 2$, más szóval, ha a halmazok páronkénti metszetei 0 vagy 1 eleműek, azaz, ha minden elempár legfeljebb egy ilyen halmazban van benne (van *lefedve*).

Egy pakolásról akkor mondjuk, hogy pontos, ha minden $a, b \in [n]$ $(a \neq b)$ párra pontosan egy H halmaz van $\mathcal{P}(n,k)$-ban, amire $a, b \in H$ teljesül; másképpen mondva, ha $\mathcal{P}(n,k)$ minden elempárt pontosan egyszer *fed le.* Az ilyen halmazrendszereket *Steiner-rendszereknek* is nevezzük, és $\mathcal{S}(n,k)$-vel jelöljük. Felírható néhány egyszerű oszthatósági feltétel n-re és k-ra, amelyek szükségesek ahhoz, hogy $\mathcal{S}(n,k)$ létezzék. Richard Wilson klasszikus tétele [6] azt mondja ki, hogy ezek a feltételek elégségesek is, ha n elég nagy. A bizonyítás azonban hosszú és bonyolult.

Mivel egy k-elemű halmazban $\binom{k}{2}$ elempár van, és a $\mathcal{P}(n,k)$-ból vett halmazok által fedett párok különböznek, az összes fedett párok száma pontosan

$$\left|\mathcal{P}(n,k)\right|\binom{k}{2}$$

(az abszolút érték a halmaz nagyságát jelöli), ami nem lehet több mint $\binom{n}{2}$. A kapott egyenlőtlenséget átosztva ezt kapjuk:

$$\left|\mathcal{P}(n,k)\right| \leq \frac{\binom{n}{2}}{\binom{k}{2}}. \tag{1}$$

Persze, ha a pakolás pontos, $\mathcal{P}(n,k) = \mathcal{S}(n,k)$, akkor itt egyenlőség van. Vagyis Wilson tétele n-ek egy olyan végtelen sorozatát adja meg (k rögzített), amelyekre létezik $\mathcal{P}(n,k)$ pontos pakolás. Kriptológiai (titokosztás) kutatásaim közben, melléktermékként találtam egy, a Wilsonénál sokkal szerényebb eredményt, konstruáltam minden n-re egy olyan $\mathcal{P}(n,k)$ pakolást, amelyek sorozatára az (1) egyenlőtlenség aszimptotikusan teljesül, azaz ha

$$f_k(n) = \max \bigl|\mathcal{P}(n,k)\bigr|,$$

akkor rögzített k-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_k(n)\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = 1. \tag{2}$$

Utólag kiderült, hogy ez már 1963-ban ismert volt, Erdős és Hanani bizonyította [3], de a bizonyításban egy korábbi cikk eredményét használták, amiben egy olyan Turán-gráf pontos pakolása volt megadva, ahol az osztályok mérete elég általános. Az általam itt leírt bizonyításban viszont csak olyan Turán-gráf pontos pakolása szükséges, ahol az osztályok mérete prím. Ennek bizonyítása sokkal egyszerűbb, mint a [3]-ban használt eseté (lásd a második részt). Az ebből aszimptotikusan jó konstrukció készítése már ugyanaz, mint [3]-ban. Az újnak tekinthető észrevétel az, hogy már ebből is következik az aszimptotikus tulajdonság. Persze mélyebb (de közismert) számelméleti eszközöket kell használnunk. Ily módon a teljes konstrukció kevesebb mint 2 oldalon leírható. Viszont az aszimptotikus tulajdonság bizonyítása további 3 oldalt igényel.

2. A Turán-gráf pontos lefedése

A $\mathcal{P}(n,k)$ pakolás definiál egy $G = \bigl([n], E\bigr)$ gráfot, ahol a gráf pontjainak halmaza $[n]$, éleinek halmaza pedig E, ami azon $\{a,b\}$ $(a \neq b)$ párokból áll, amelyek $\mathcal{P}(n,k)$ által le vannak fedve, azaz valamelyik $\mathcal{P}(n,k)$-beli halmazban kételemű részhalmazok. Ezt a gráfot $G\bigl(\mathcal{P}(n,k)\bigr)$-vel jelöljük.

A $T(p,k)$ Turán-gráfnak pk pontja van, amelyek k „kupacba” vannak osztva: $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ ahol $|V_1| = \ldots = |V_k| = p$. Az a és b pontok akkor és csak akkor vannak éllel összekötve, ha a és b különböző kupacokban vannak: $a \in V_i$, $b \in V_j$ $(i \neq j)$.

1. tétel. *Ha p prím, $k \leq p$ akkor létezik egy $\mathcal{P}(pk,k)$ pakolás, amire $G\bigl(\mathcal{P}(pk,k)\bigr) = T(p,k)$ fennáll.*

Bizonyítás. Legyenek a Turán-gráf pontjai az (i,j) (rendezett) párok, ahol $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq p$. A pontok kupacai $V_i = \bigl\{(i,j) :\ 1 \leq j \leq p\bigr\}$ $(1 \leq i \leq k)$. Ha c és d olyan egészek, amelyekre fennáll $1 \leq c, d \leq p$, akkor definiáljuk az

$$F(c,d) = \bigl\{(i, ci+d) :\ 1 \leq i \leq k\bigr\}$$

halmazt, ahol a $ci + d$ számok mod p értendők. Nyilvánvaló, hogy $F(c,d)$-nek pontosan egy eleme van minden V_i-ben, így $\bigl|F(c,d)\bigr| = k$. Világos, hogy a bennük lévő párok végei különböző kupacokban lesznek, azaz az $F(c,d)$-beli párok a Turán-gráf élei közül kerülnek ki.

Most belátjuk, hogy a Turán-gráf minden $\bigl\{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\bigr\}$ $(i_1 \neq i_2)$ éle pontosan egy $F(c,d)$ halmaz része. Ez a tartalmazás akkor és csak akkor állhat fenn, ha a következő egyenlőségek teljesülnek:

$$ci_1 + d \equiv j_1 \pmod{p},$$

$$ci_2 + d \equiv j_2 \pmod{p}.$$

Ennek a c-re és d-re vonatkozó egyenlőségrendszernek pontosan egy megoldása van, ha $i_1 \neq i_2$, mert a mátrixa nem szinguláris (azaz a mod p testben nem nulla).

Ez már azt bizonyítja, hogy

$$\mathcal{P}(pk,k) = \bigl\{F(c,d):\ 1 \leq c,d \leq p\bigr\}$$

egy olyan pakolás, ami kielégíti a tétel feltételeit. ■

3. Aszimptotikusan pontos pakolás

Legyen $p_1(n,k)$ a legnagyobb prím, amire $p_1(n,k)k \leq n$ teljesül. Legyen továbbá $p_2(n,k)$ a legnagyobb olyan prím, amire $p_2(n,k)k \leq p_1$. Általában, ha már $p_i(1 \leq i)$ megvan, akkor válasszuk $p_{i+1}(n,k)$-t a legnagyobb prímnek, amire $p_{i+1}(n,k)k \leq p_i$ igaz. Ezt addig csináljuk, amíg már nincs megfelelő további prím, azaz a lehető legkisebb prím, 2 is rossz: $2k > p_u(n,k)$. Ekkor p_u az utolsó a sorozatunkban. Tulajdonképpen nagyjából k-val osztunk minden lépésben. Azért nem lehet egyszerűen a k-val való maradékos osztást használni, mert a „hányadosnak” prímnek kell lennie.

Az előző részben szereplő, a Turán-gráfot pontosan lefedő konstrukciót használjuk ismételten.

Legyen $\mathcal{R}_u(n,k) = \mathcal{P}(p_u k, k)$. Mivel $G\bigl(\mathcal{P}(p_{u-1}k,k)\bigr)$ egy Turán-gráf p_{u-1} $(\geq p_u k)$ nagyságú osztályokkal, s azok belsejében lévő párokat nem fedi le $\mathcal{P}(p_{u-1}k,k)$, így oda mindegyikbe belehelyezhetjük $\mathcal{R}_u(n,k)$ egy-egy példányát. A k-elemű halmazok így kapott rendszere, ami tehát $\mathcal{P}(p_{u-1}k,k)$-ból és k darab $\mathcal{P}(p_u k,k)$-ból áll, legyen $\mathcal{R}_{u-1}(n,k)$. Ez a $[p_{u-1}k]$ halmazon egy pakolás. Ugyanígy folytathatjuk. Tegyük fel, hogy már megvan az $\mathcal{R}_i(n,k)$ pakolás a $[p_i k]$ halmazon. Mivel a $G\bigl(\mathcal{P}(p_{i-1}k,k)\bigr)$ ismét egy Turán-gráf, most már $p_{i-1}(\geq p_i k)$ nagyságú osztályokkal, minden osztályba belehelyezhetjük $\mathcal{R}_i(n,k)$ egy-egy példányát. Végül megérkezünk $\mathcal{R}_1(n,k)$-hoz, ami már $[p_1 k]$-n egy pakolás. Mivel $p_1 k \leq n$, így ezt a halmazrendszert el tudjuk helyezni $[n]$-en is, ekkor nevezzük $\mathcal{R}(n,k)$-nak. Ez az a pakolás, amiről be fogjuk látni, hogy aszimptotikusan pontos.

4. A konstrukció valóban aszimptotikusan pontos

Jelöljük $h_i(n,k)$-val azon párok számát, amelyeket nem fednek a $\mathcal{R}_i(n,k)$-beli halmazok, más szóval $G\big(\mathcal{R}_i(n,k)\big)$ (a $[p_ik]$ halmazra vonatkozó) komplementergráfjának élszámát. Legyen továbbá $h(n,k)$ ugyanaz, mint $h_1(n,k)$, az $[n]$ halmazra véve. A bizonyítás lényege a következő lemma, ami azt állítja, hogy a fedetlen párok száma elenyésző.

1. lemma.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(n,k)}{\binom{n}{2}} = 0.$$

Bizonyítás. $h_u(n,k) = k\binom{p_u}{2}$ nyilvánvaló, hiszen éppen az egy kupacban lévő élek maradnak ki. Tegyük fel, hogy $h_i(n,k)$ már ismert, próbáljuk kifejezni $h_{i-1}(n,k)$-t. $\mathcal{R}_{i-1}(n,k)$ egy osztályában nem fedett párok vagy benne vannak az ide betett $\mathcal{R}_i(n,k)$-ben, vagy legalább egyik végpontjuk a $(p_{i-1}-p_ik)$-elemű „kis" halmazban van, ami kimaradt $\mathcal{R}_i(n,k)$ berakása után. Az előbbi típusú élek száma $h_i(n,k)$, míg a második típusúaké legfeljebb $p_{i-1}(p_{i-1}-p_ik)$. Ez igaz mindegyik osztályra, tehát

$$h_{i-1}(n,k) \le k\big(h_i(n,k) + p_{i-1}(p_{i-1}-p_ik)\big). \tag{3}$$

Itt kell kihasználnunk azt a fontos tényt, hogy p_i-t úgy választottuk, hogy a legnagyobb prím legyen, amire $p_ik \le p_{i-1}$ fennáll. Ha a prímszámok elég sűrűn vannak, akkor p_i nem lesz sokkal kisebb $\frac{p_{i-1}}{k}$-nél. Ezért kell a következő tételt felhasználnunk ahhoz, hogy (3) jobb oldalára jó felső becslést tudjunk adni. A tétel a prímszámtétel könnyű következménye (lásd pl. [1]). Ha az olvasó nem tájékozott a számelméletben, akkor is könnyen elhiheti.

Prímsűrűségi tétel. *Legyen $0 < \varepsilon$ rögzített (kis) valós szám. Ha r elég nagy, azaz $r > r(\varepsilon)$, akkor létezik prím $r(1-\varepsilon)$ és r között.*

Az alábbi állítás ennél kisebb sűrűséget állít, viszont ez nem csak nagy számokra igaz. Erre is szükségünk lesz.

Csebisev tétel. *Ha $2 \le N$ egy természetes szám, akkor létezik prím N és $2N$ között.*

(Erdős szellemes bizonyítása a Csebisev-tételre [2]-ben jelent meg, de [4]-ben könnyebben hozzáférhető.)

Mivel p_1 a legnagyobb olyan prím, amire $p_1 \le \frac{n}{k}$ fennáll, az $\frac{n}{2k} \le p_1$ egyenlőtlenség teljesül Csebisev tétele miatt. Hasonló okok miatt $\frac{p_i}{2k} \le p_{i+1}$ is igaz. Tehát $\frac{n}{(2k)^u} \le p_u < 2k$, továbbá $\frac{n}{(2k)^u} < 2k$ teljesül. Ebből látszik, hogy u, mint n függvénye n-nel a végtelenhez tart. Csebisev tétele csupán ehhez kellett.

A p_i-k definíciójából könnyen következik a

$$k^a p_b \le p_{b-a} \quad (a < b). \tag{4}$$

egyenlőtlenség. Ezért $k^{u-v}p_u \le p_v$ is igaz. Legyen $v = \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor$, ami szintén tart a végtelenhez n-nel. Persze ekkor p_v is tart a végtelenhez. Ha tehát n-et nagynak választjuk, akkor p_v is nagy lesz. Ha rögzítünk egy $0 < \varepsilon$ számot, akkor kell lenni olyan $n(\varepsilon)$ küszöbindexnek, hogy ha n legalább ekkora, akkor $r(\varepsilon) \le p_v$ (emlékeztetőül: v függ n-től és k-tól, $r(\varepsilon)$ a prímsűrűségi tételből való). Ha n elég nagy, akkor

$$\frac{1}{k^{v-1}} \le \varepsilon \tag{5}$$

is teljesül. Mindjárt vegyük $n(\varepsilon)$-et úgy, hogy (5) is fennálljon $n \ge n(\varepsilon)$ esetén. Ekkor persze $r(\varepsilon) \le p_i$ is teljesül minden kisebb i-re is ($i \le v$). A prímsűrűségi tételt az $r = \frac{p_{i-1}}{k} (\ge p_i)$ értékre alkalmazva azt kapjuk, hogy $(1-\varepsilon)\frac{p_{i-1}}{k} \le p_i$ teljesül, ha $i \le v$. Ez viszont ekvivalens a következővel: $p_{i-1} - p_i k \le \varepsilon p_{i-1}$. A (3) egyenlőtlenségből

$$h_{i-1}(n,k) \le k\big(h_i(n,k) + \varepsilon p_{i-1}^2\big) \quad \text{ha} \quad i \le v \tag{6}$$

következik. j-re vonatkozó indukcióval kapjuk (6) nyilvánvaló általánosítását:

$$h_{i-j}(n,k) \le k^j h_i(n,k) + \varepsilon \sum_{\ell=1}^{j-1} k^{j+1-\ell} p_{i-\ell}^2 + \varepsilon k p_{i-j}^2 \quad (1 \le j < i). \tag{7}$$

Alakítsuk át (7) középső, szummás tagját (4) segítségével:

$$h_{i-j}(n,k) \le k^j h_i(n,k) + \varepsilon \sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{1}{k^{j-1-\ell}} p_{i-j}^2 + \varepsilon k p_{i-j}^2 =$$

$$= k^j h_i(n,k) + \varepsilon p_{i-j}^2 k \sum_{\ell=1}^{j} \frac{1}{k^{j-\ell}} \le k^j h_i(n,k) + \varepsilon p_{i-j}^2 \frac{k^2}{k-1} \quad (i \le v).$$

Ezt az egyenlőtlenséget tulajdonképpen csak az $i = v, j = v-1$ esetben fogjuk használni:

$$h_1(n,k) \le k^{v-1} h_v(n,k) + \varepsilon p_1^2 \frac{k^2}{k-1}. \tag{8}$$

A (3) és (6) egyenlőtlenségek nyilvánvaló analógjai a

$$h(n,k) \le k\big(h_1(n,k) + n(n - p_1 k)\big)$$

és

$$h(n,k) \le k(h_1(n,k) + \varepsilon n^2)$$

egyenlőtlenségek. Az utóbbit (8)-cal összevetve a következőt kapjuk:

$$h(n,k) \le k^v h_v(n,k) + \varepsilon p_1^2 \frac{k^3}{k-1} + \varepsilon k n^2 \le \tag{9}$$

$$\le k^v h_v(n,k) + \varepsilon \left(\frac{n}{k}\right)^2 \frac{k^3}{k-1} + \varepsilon k n^2 = k^v h_v(n,k) + \varepsilon n^2 \frac{k^2}{k-1}.$$

Emlékezzünk, hogy $\mathcal{R}(n,k)$ az $[n]$ halmaz k-elemű részhalmazainak egy családja. Az itt levő párok (potenciális élek) száma $\binom{n}{2}$. A fedetlen párok és az összes lehetséges pár hányadosa $\mathcal{R}(n,k)$-ban (9)-cel becsülhető felülről.

$$\frac{h(n,k)}{\binom{n}{2}} \leq \frac{k^v h_v(n,k)}{\binom{n}{2}} + \frac{\varepsilon n^2 \frac{k^2}{k-1}}{\binom{n}{2}}. \tag{10}$$

Adjunk most egy felső becslést a jobb oldal első tagjára (4) segítségével, felhasználva azt, hogy $n \geq p_1$.

$$\frac{k^v h_v(n,k)}{\binom{n}{2}} \leq \frac{k^v h_v(n,k)}{\binom{k^{v-1}p_v k}{2}} = k \cdot \frac{h_v(n,k)}{\binom{p_v k}{2}} \cdot \frac{kp_v - 1}{k^v p_v - 1}.$$

A második tényező legfeljebb 1, a harmadik (5) miatt legfeljebb ε. Tehát (10) jobb oldalának első tagja legfeljebb εk, ha $n \geq n(\varepsilon)$. (10) jobb oldalának második tagja viszont legfeljebb $3\varepsilon\frac{k^2}{k-1}$, ha $n \geq 3$. Ez már bizonyítja, hogy (10) legfeljebb $\varepsilon\Big(k + 3\frac{k^2}{k-1}\Big)$, ha $n(\varepsilon) \leq n$. ■

Most már könnyen tudjuk bizonyítani fő állításunkat.

2. tétel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\big|\mathcal{R}(n,k)\big|\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = 1.$$

Az 1. lemmából következik, hogy $\mathcal{R}(n,k)$ tagjaiban lévő élek száma

$$\Big|G\big(\mathcal{R}(n,k)\big)\Big| = \binom{n}{2} - o\left(\binom{n}{2}\right).$$

Minden tag pontosan $\binom{k}{2}$ párt tartalmaz, így

$$\big|\mathcal{R}(n,k)\big| = \frac{\binom{n}{2} - o\left(\binom{n}{2}\right)}{\binom{k}{2}}$$

bizonyítja a tételt. ■

Az érdeklődő olvasó kedvéért jegyezzük meg, hogy ha olyan pakolásokat tekintünk, ahol minden ℓ-elemű halmaz legfeljebb egy k-eleműben részhalmaz, akkor már $\ell = 3$-ra sincs Wilson tételének megfelelő állítás bizonyítva. Viszont az aszimptotikusan pontos pakolások területén ilyen általánosságban is nagy fejlődés történt az utóbbi években. A legutóbbi eredmény [5]-ben olvasható.

Köszönetnyilvánítás. Köszönöm a segítséget témavezetőmnek, Katona O.H. Gyulának, továbbá Füredi Zoltánnak azért, hogy felhívta figyelmemet a [3] cikkre.

Irodalom

[1] Davenport, Harold, *Multiplicative number theory,* Graduate Text in Mathematics, 3rd edition, Springer, 2000.

[2] Erdős P., A theorem of Sylvester and Schur, *J. London Math. Soc.,* **9** (1934), 283–288.

[3] Erdős P. and Hanani, H., On a limit theorem in combinatorial analysis, *Publ. Math. Debrecen,* **10** (1963), 10–13.

[4] Erdős Pál és Surányi János, *Válogatott fejezetek a számelméletből,* 2-ik kiadás, Polygon, Szeged, 2004.

[5] Martin, Daniel m. and Rödl, Vojtěch, Note on asymptotically good packings, *J. Combin. Des.,* **17** (2009), 448–455.

[6] Wilson, Richard M., An existence theory for pairwise balanced designs, I: Composition theorems and morphisms, *J. Combin. Theory,* **13** (1972), 220–245.

Gergely Péter M.: Asymptotically maximal packing of k-sets without double covered pairs. Let $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ be an n-element set, $k \geq 3$ an integer. The family $\mathcal{P}(n,k) \subset \binom{[n]}{k}$ is called a packing if every pair of elements of $[n]$ is covered by at most one member of the family. The Turán graph $T(p,k)$ has pk vertices, $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ and $|V_1| = \ldots = |V_k| = p$. The vertices a and b are joined by an edge if and only if $a \in V_i$, $b \in V_j$ and $i \neq j$. First we prove that there is a packing which covers exactly the edges of the Turán graph if p is a prime. We give a construction, nesting such packings, which is proved to be asymptotically maximal for every n (and fixed k). The construction is similar to that of [3], but it can be fully given in the paper, since it is much easier for prime numbers, than in the more general case. On the other hand the proof of the asymptotic property is longer, since number theory must be used.

Péter M. Gergely

Középeurópai Egyetem
Budapest, Nádor utca 9

gergely.peter.miklos@gmail.com

MINDEN GONDOLKODÓ EMBER CÉLJA, SZELLEMI ERŐFESZÍTÉSÉNEK INDÍTÉKA: MEGÉRTENI VALAMIT

KOVÁCS KLÁRA

Bár sokunk ismeri mind a hozzá vezető folyamatot, mind az élményt, érdemes megfontolni a vele kapcsolatos furcsaságokat és következményüket mindennapi életünkre. Az iskolában pl. gyakran használt kifejezés, tisztázatlan jelentéssel.

Milyen helyzetben hangzik el?

Régen használták a hadseregben is. Mikor a katona parancsot kapott, azt válaszolta:

– Értettem.

Mai napság is használják gyermekek esetében, mikor utasítást, leginkább tiltást adnak nekik, és a nevelő, kissé fenyegető hangnemben azt kérdezi:

– Érted?!

Pl.

– Kisfiam, a konnektorba nem szabad belenyúlni! Érted?!

Ezekben a helyzetekben nem megértésről van szó, hanem arról, hogy az alárendelt helyzetben lévő kész a kapott parancsot végrehajtani. Iskolában és egyebütt is előfordul, hogy a nevelő megpróbálja ellenőrizni az úgymond, megértést. Az előző párbeszéd kibővítve:

– Kisfiam, a konnektorba nem szabad belenyúlni! Érted?

– Igen, mama.

– Akkor halljam, mit mondtam az előbb?

Iskolában (1):

– Értitek?

– Igen, tanító néni.

– Ki tudja elmondani nekem, mit mondtam?

Iskolában (2):

– Mit tanultunk tegnap?

– Pitagorasz tételét.

– Mit mond ki a tétel?

Elmondják.

– Hogyan bizonyítottuk?

Elmondják.

– Ki nem érti?

Senki.

– Szóval, értitek?

– Igen.

– No akkor, ha a teherautó 1 méterre áll meg a járdaszegélytől, a plató 0,5 m-rel van magasabban, mint a járdaszegély, milyen hosszú deszkát kell szerezni, hogy a plató és a járda közé téve le lehessen rajta hordani a rakományt?

Összefoglalva, ha valóban a megértésre kíváncsi a nevelő, és nem csak engedelmességi nyilatkozatot akar hallani, akkor vagy visszakérdezi az elmondottakat, vagy az alkalmazására szólít fel. Egyik sem megértés. A visszamondás inkább csak emlékezés, az alkalmazni tudás viszont több, mint megértés.

Esetem az algebratétellel

Katona Gyula nevű, kedves, jókedvű matematikus tartotta az algebra gyakorlatokat. Hogy hol volt állományban, nem tudom, de ha meg akartuk találni, a Matematikai Kutatóintézet épületébe kellett menni. Ott tartott konzultációt is. Mókás, jókedvű ember volt, minden zárthelyi után eredményt hirdetett, és jutalmat osztott a jobb megoldásokért. Sokszor vicceltünk, hogy a Gyula úgy néz ki, mint aki kirabolt egy édességboltot, és most akarja eltüntetni a bűnjeleket. Rengeteg csokit osztott. Egyszer nekem valahogy nem jutott, és hogy ne legyek elkeseredve, csak nekem kézen állt a tanári asztalon.

Nos, egy kollokvium előtt sehogy sem boldogultam az egyik tétellel, és elmentem konzultációra. Mivel az algebra általában eléggé jól ment nekem, mindenesetre jobban, mint a számelmélet, nagyon zavart, hogy az algebratételt nem értem. Tehát beállítottam Gyula szobájába, és a következő történt:

– Gyuszi, képzeld, nem értem a tételt.

– Melyiket?

Megmondtam a nevét.

– De azért foglalkoztál vele?

– Igen.

– Mondd el a tételt!

Elmondtam.

– Menj a táblához, és írd fel!

Megtettem.

– Emlékszel valamire a bizonyításból?

– Igen.

– Mondd el!

– Na tudod, ha ezt holnap is így elmondod, jelest fogsz kapni.

– Az engem nem vígasztal.

– Melyik részét nem érted?

– Nem tudom, az egészet.

– Akkor haladjunk lépésenként!

– Első lépés.

Elmondtam.

– Érted?

– Igen.

– Félmondatonként átrágtuk az egészet.

– Minden lépés rendben volt.

– Akkor most jó?

– Nem.

– De hát mi vele a gond?

– Hát én nem is értem, de ha rágondolok, csak egy borzasztó nagy sötétséget érzek a fejemben.

– Minden lépést értesz, mindent fel tudsz mondani, oda-vissza, az egész mégis sötét?

– Igen, valahogy így.

– Te, figyelj, nem lehet, hogy az a baj, hogy ez az egész olyan nyilvánvaló, hogy azt nem érted, mit kell rajta bizonyítani?

Végül nem oldottuk meg a kérdést, nem jöttünk rá, mi a bajom. Ettől még másnap valóban levizsgáztam sikeresen, ahogy azt Gyuszi megjósolta. Viszont keletkezett egy új probléma: Mi az, hogy valamit megérteni? Azt hiszem, az egy érzés. Egy jóleső érzés, ami akkor lép fel, mikor az új ismeret az eddigiek rendszerébe beilleszkedik. De! Ha ez egy érzés, akkor hogyan lehet megbizonyosodni arról, hogy egy másik ember érzi-e?

A másik gond, hogy ha ez az új ismeret beilleszkedésekor lép fel akkor csak olyan személy érezheti, akinek már vannak ismeretei, méghozzá rendszerezetten. Feltételezhetjük, hogy minden ép emberre, méghozzá bármely életkorban igaz, hogy rendszerezett ismeretei vannak. Fel is szoktuk tenni, de ami sokszor gondot okoz, az az, hogy feltételezésekkel élünk a meglévő ismereteiről konkrétan. A leggyakoribb, és sokszor helytálló feltételezésünk a magyar nyelv ismeretének szintjére vonatkozik. Miből jöttem rá, hogy ez egy meggondolást érdemlő tény, ami nem olyan magától értetődő, mint gondolnánk?

Amikor a nyelvi ismeretekre vonatkozó feltevés helyes volt

Általában sikeres voltam olyan szituációkban, mikor valakit négyszemközt kellett tanítanom. Voltak tehetségesebb és kevésbé ügyes tanítványaim, pl. vakokat is korrepetáltam, pl. geometriai szerkesztések témakörből, de szinte minden esetben sikerrel vettük az akadályokat.

Egy alkalommal éreztem csak úgy, hogy hatástalan a tevékenységem.

Amikor a nyelvi ismeretekre vonatkozó feltevés helytelen volt

Egy gazdag cigány család nyolcadikos fiúgyermekét kellett korrepetálnom fizikából, és néha matematikából. A gyerek a Horváth Mihály térre járt, a közelben is lakott. Édesanyja a gyermek cigánysága miatti hátrányos megkülönböztetésre panaszkodott. Lehet, hogy a pedagógus-társadalom iránti túlzott lojalitás, de nem hittem el a panaszt, és kérdezősködtem is hogy mire alapozza, illetve hogy nem érthet-e félre valamit. Jóleső érzés, hogy igazam volt. A gyerek produkciója tényleg olyan volt, amilyennek a tanárai értékelték. Viszont a mama értetlensége is teljesen megalapozott volt. Hihetetlen, hogy egy gyerek, aki szemmel láthatólag igyekszik a szülői és nevelői igényeknek megfelelni, otthoni körülmények között dolgos, segítőkész, egyszerűen nullát produkál az iskolában.

Próbáltam a gyereknek valahogy szemléletesebb képet adni a tudnivalókról, és így kiderült, hogy a szülei arra is rábírták, hogy a TV ismeretterjesztő műsorait megnézze. Sokat el is tudott mesélni. Pl. a Holdra szállásról készült filmet. Sajnos, ennek ellenére a tananyag, mint tananyag reménytelennek tűnt. Olyan érzésem volt, mintha futóhomokra próbálnék felhőkarcolót építeni. Egy-egy lépést megtett, és máris kifutott alóla az alap.

Egyre bizonyosabbá vált, hogy a gyereknek a magyar nyelvvel vannak problémái. Annyira, hogy megkérdeztem az édesanyját, ők maguk között milyen nyelven beszélnek? Azt válaszolta, hogy sajnos, magyarul. Igazából azért hittem el neki, mert látszott rajta, tényleg őszintén sajnálja, hogy a gyermekei nem használják az ősök nyelvét még a nagyszüleikkel beszélgetve sem. A 14 éves gyerek nem ismert fel, és természetesen nem használt olyan nyelvi szerkezeteket, amilyeneket az én környezetemben élő 6–10 évesek könnyedén kezeltek. Legnagyobb gondja a tagadással és általánosítással volt. Gondot okozott neki a minden, semmi, néhány, van olyan … kifejezések értelmezése. A tagadást alapesetben természetesen ismerte, de nem tudott különbséget tenni pl. a következő mondatok jelentése között:

Ma nem sütök palacsintát.

Ma nem palacsintát sütök.

Nem ma sütök palacsintát.

Az egészségbiztosításról szóló népszavazás kérdései jellemzően olyan módon voltak megfogalmazva, amit nem értett.

Mit lehet tenni?

Sajnos, ez a kérdés az, amire nem ismerem a választ. Bizonyos vagyok abban, hogy a gyerek azért nem értette ezeket a szerkezeteket, mert a környezetében élők nem használtak bonyolult szerkezetű magyar mondatokat, és az én ismeretségi köröm sokkal fiatalabb gyermekei azért ismerték, mert a szülői beszélgetésekben, az esténként mondott mesékben, találós kérdésekben előfordultak.

Gyermekversikék bonyolultsága

Lehet, ostobának tűnik, hogy matematikai kifejezések meg nem értését a gyermekmondókák nem ismerésére vezetem vissza, de az én körömben egész pici gyerekek is ismerik, és mondogatják:

„Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár."

Arról nem is szólva, hogy:

„Nem minden tarka szarka farka tarka,
Csak a tarka farkú tarka szarka farka tarka".

Aki az utóbbit végiggondolja, érti, hogy ez nem csak nyelvtörő.

Ez bizony a „minden", „nem minden", „van olyan" töményen, versikében. Kissé nagyképűen ez matematikai logika négyéveseknek. Annál inkább, mert ilyen hosszú és bonyolult szövegből egy-két „tarka" időnként kimarad, és ilyenkor a jelenlévő felnőtt rögtön szól, hogy az mást jelent, és elkezdődik az elemzés, mi van, ha a szarkának csak a farka tarka, a többi nem, vagy fordítva. Mit jelent, ha ezt a szót hagyom ki, mit, ha azt.

Azt tanácsoltam, hogy mivel a szóban forgó fiú, jó gyermek lévén, sokszor felügyelt kicsiny rokon gyermekekre, foglalkozzon velük úgy, hogy mesét olvas nekik. Abban reménykedtem, hogy a mesék terén valószínűleg létező elmaradása így behozható. Sajnos, nem tudom, mi lett vele később.

Vajon hány magyar állampolgár él ilyen hiánnyal?

Pillanatnyilag attól tartok, ez a kisgyermekkori hiány (a bonyolult szerkezetű mesék, mondókák, találós kérdések meg nem ismerése) behozhatatlan. Az ilyet nem ismerő családok gyermekei végleg lemaradásra vannak ítélve? Hiszen a család nem képes őket megtanítani beszélni.

Természetesen az sem megoldás, hogy a gyermeket a családtól elszakítva képezzék! (Ilyen próbálkozásba buktak bele az ausztrálok, akik most fizetik a kárpótlást az őslakók „elveszett nemzedékéért".)

Attól tartok, amíg erre a kérdésre nem lelünk elfogadható választ, addig együtt élünk a „cigánykérdéssel".

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS