

# ACTA PHYSICA

## ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS  
Z. GYULAI, L. JÁNOSSY, I. KOVÁCS, K. NOVOBÁTZKY

REDIGIT  
P. GOMBÁS

TOMUS IV

FASCICULUS I



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
BUDAPEST, 1954

ACTA PHYS. HUNG.



# ACTA PHYSICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY-U. 21.

Az *Acta Physica* orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a fizika tárgyköréből.

Az *Acta Physica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az *Acta Physica* előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest, V., Alkotmány-u. 21. Bankszámla 04-878-111-46), a külföld számára pedig a »Kultúra« Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Bankszámla: 43-790-057-181 sz.) vagy külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

»*Acta Physica*« публикует трактаты из области физических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

»*Acta Physica*« выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу:

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена »*Acta Physica*« — 110 форинтов за том. Заказы принимает Akadémiai Kiadó (Budapest, V., Alkotmány-utca 21. Текущий счет № 04-878-111-46), а для заграницы, предприятие по внешней торговле книг и газет »*Kultúra*« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

# ACTA PHYSICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

Z. GYULAI, L. JÁNOSSY, I. KOVÁCS, K. NOVOBÁTZKY

REDIGIT

P. GOMBÁS

TOMUS IV

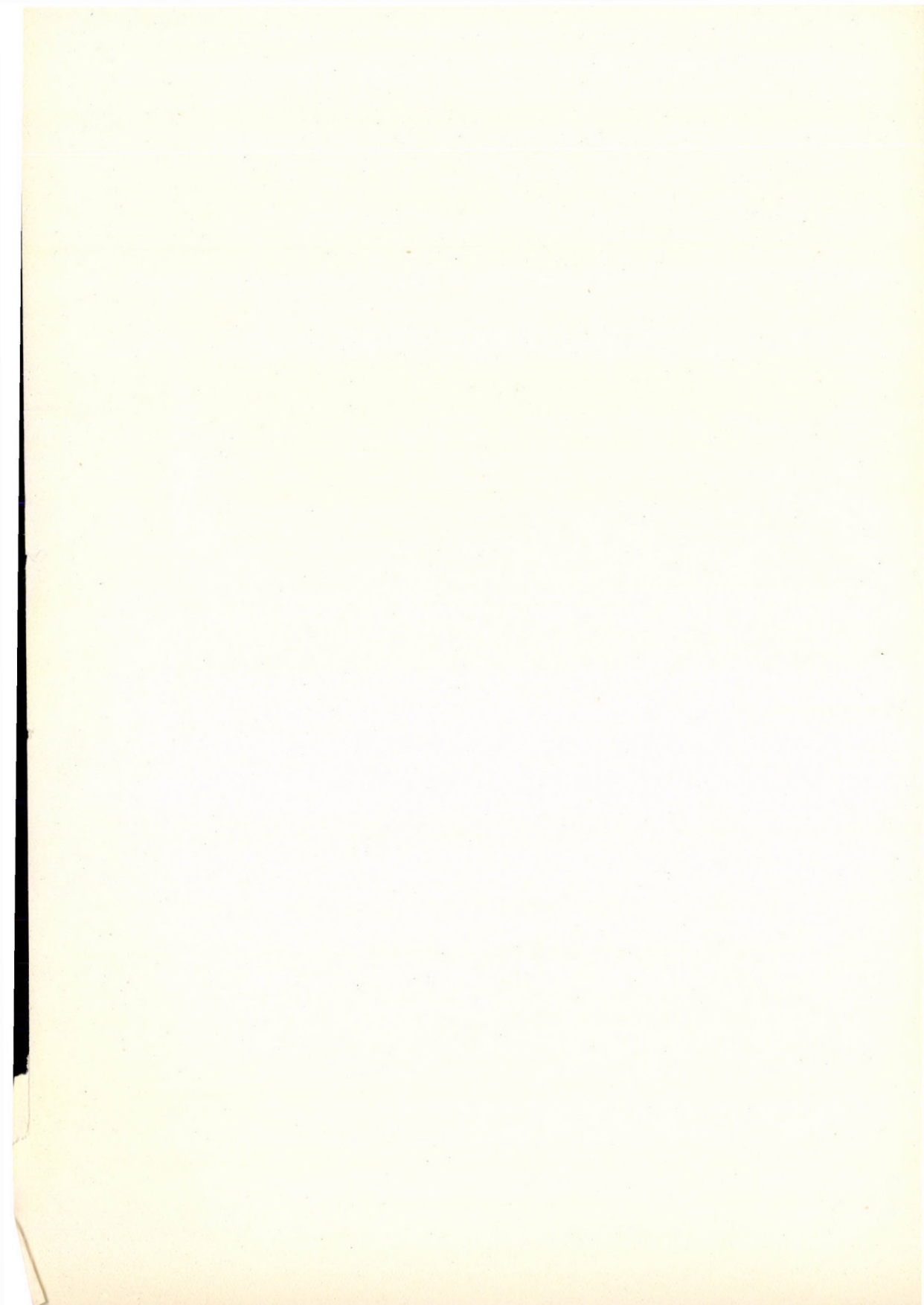


MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

BUDAPEST. 1955

ACTA PHYS. HUNG.





# INDEX

## Tomus IV

Z. Gyulai : P. Selényi .....	1
P. S. Faragó and G. Groma: Reflex Oscillators. — П. Ш. Фараго и Г. Грома: Отражательные осцилляторы .....	7
P. S. Faragó and G. Marx: Quantum Effects in the Interaction between Free Electrons and Electromagnetic Fields. — П. Ш. Фараго и Г. Маркс: Квантовые явления при взаимодействии свободных электронов с электромагнитными полями .....	23
Th. Neugebauer: Lichtzerstreuung und Hubbleeffekt. — Т. Нейгебауер: Рассеяние света и эффект Hubble .....	31
S. N. Biswas: Fredholm Theory of Heitler's Integral Equation. — С. Н. Бисвас: Применение теории Фредголма к интегральному уравнению Гейтлера .....	49
G. Szigeti, G. T. Bauer, J. Weiszburg: Mikrophotometrische Messungen an elektrolumineszenten Siliziumkarbidkristallen. — Г. Сигети, Г. Т. Бауер, Я. Вейсбург: Микрофотометрические измерения на электролюминесцентных кристаллах карбида кремния .....	57
G. Szigeti: Über die durch Gleichstrom angeregte Elektrolumineszenz von Siliziumkarbidkristallen — Г. Сигети: Об электролюминесценции кристаллов карбида возбужденной постоянным током .....	65
G. Györgyi: Die Theorie der Schwingungen der auf einen Torsionsdraht aufgehängten Waage nach Eötvös-Selényi. — Г. Дьёрдьи: Теория колебания крутильных весов (Установка Этвеша—Шеленьи) .....	79
Gy. Gergely: Band-Width Problems in the Investigation of Relaxation Processes ...	87
Á. Bardócz: Untersuchungen über Lichtquellen für Spektralanalyse IV. Ein elektrisch gesteuerter Funkenerzeuger. — А. Бардоц: Искровой возбудитель с электроническим управлением для целей спектрального анализа .....	91
G. Györgyi: Die Bewegung des Energiemittelpunktes und der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes in Dielektrika. — Г. Дьёрдьи: Движение энергетического центра и тензор импульса энергии в диэлектриках .....	121
I. Fényes: Über das Divergenzproblem der W. K. B. Methode. — И. Феньеш: О проблеме расходимости метода В. К. Б. ....	133
F. Berencz: A New Method for the Calculation of the Energy of the Hydrogen Molecule. — Ф. Беренц: Об одном новом методе вычисления энергии связи водородной молекулы .....	149
G. Szamosi: On the Quantum Statistics of Nucleons. — Г. Самоши: О квантовой статистике нуклеонов .....	155
Herbert W. Franke: Ein Strömungsmodell der Wellenmechanik. — Х. В. Франке: Гидродинамическая модель волновой механики .....	163
L. Jánossy and D. Kiss: On the Measurement of Efficiency of G.-M.-Counters. — Л. Яноши и Д. Яшиш: Измерение эффективности счетчиков Гейгера-Мюллера .....	173



<i>J. I. Horváth</i> : An Asymptotical Method for the Calculation of Eigenfunctions.....	183
<i>P. Gombás</i> : Erweiterung der Hartree—Fock'schen Gleichungen durch die Korrelation der Elektronen .....	187
<i>Z. Gyulai</i> : Durch Kristalle verursachte Zerstörungswirkungen in porösen Materialien. — <i>З. Дюлаи</i> : Разрушающее действие растущих кристаллитов в пористых материалах .....	189
<i>Z. Morlin</i> : Beitrag zur Untersuchung der Rekristallisationsvorgänge. — <i>З. Морлин</i> : Некоторые замечания к вопросу процессов рекристаллизации .....	197
<i>P. Román</i> : Quantelung des elektromagnetischen Feldes in einer neuartigen Darstellung. — <i>П. Роман</i> : Квантование электромагнитного поля в одном новом представлении .....	209
<i>G. Szamosi and G. Marx</i> : Classical Motion of the Nucleons in a Scalar Meson Field. — <i>Г. Самоши и Г. Маркс</i> : Движение нуклона в скалярном мезонном поле ...	219
<i>R. Pauncz</i> : Investigation of a New Quantum-Mechanical Method of Approximation. — <i>Р. Паунц</i> : Исследование эффективности одного нового квантово-механического приближенного метода .....	237
<i>Zs. Náray</i> : Determination of Cathode Sensitivity Distribution of Photomultipliers. — <i>Ж. Нарай</i> : Определение распределения чувствительности катодной поверхности фотомножителя .....	255
<i>P. Gombás, E. Mágori, B. Molnár, É. Szabó</i> : Die statistische Theorie des Atomkerns. III. Teil. — <i>П. Гомбаш, Э. Магори, Б. Мольнар, Э. Сабо</i> : Статистическая теория атомного ядра. ч. III. ....	267
<i>Á. Budó und I. Kovács</i> : Über den $^4\Pi$ -Zustand des $O_2^+$ -Moleküls — <i>А. Будо и И. Ковач</i> : О состоянии $^4\Pi$ молекулы $O_2^+$ .....	273
<i>M. A. Ziegler</i> : Calculation of Pairing Energy by Means of the Eigenfunctions of the Yukawa Potential .....	293
<i>G. Marx und K. Nagy</i> : Der Energie-Impuls-Tensor der Strahlung in Dielektrika .....	297
<i>A. Адам, Л. Яноши, П. Варга</i> : Исследование когерентных фотонных потоков методом совпадений. — <i>A. Ádám, L. Jánossy and P. Varga</i> : Coincidences between Photons Contained in Coherent Light Rays.....	301
<i>F. Berencz</i> : Bemerkungen zur Analyse der Absorptionskurven. — <i>Ф. Беренц</i> : Замечания к анализу кривых абсорбции .....	317
<i>K. Nagy</i> : Quantummechanical Forces Acting on Photons. — <i>К. Надь</i> : Действие квантово-механических сил на фотоны .....	327
<i>L. Jánossy</i> : Remarks on the Foundation of Probability Calculus. — <i>Л. Яноши</i> : Замечания относящиеся к основам теории вероятности .....	333
<i>J. Aczél</i> : A Solution of Some Problems of K. Borsuk and L. Jánossy. — <i>Я. Ацель</i> : Решение некоторых проблем К. Боршука и Л. Яноши .....	351
<i>E. Fenyves</i> : The Efficiency of Self-Quenching G. M. Counters for Cosmic Ray Particles. — <i>Э. Феньвеш</i> : Вероятность срабатывания самогасящихся счетчиков Г.-М. для частиц космического излучения .....	363
<i>É. Kisdi-Köszó</i> : On Some Problems of the Operation of Microtrons .....	377



## P. SELÉNYI



Am 21. März dieses Jahres trugen wir die sterbliche Hülle von P. Selényi, korrespondierendem Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, zu Grabe. Die symbolische Wertschätzung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften gelangte auch dadurch zum Ausdruck, dass sich die letzte Ruhestätte des hervorragenden Verstorbenen der ungarischen Physik neben dem Grab von Roland Eötvös befindet. Beim Begräbnis umstanden ausser seinen engeren Familienmitgliedern auch die Mitglieder seiner weiteren Familie sein Grab, von den ältesten Physikern bis zur jüngsten Generation, den Universitätshörern der Physik. Noch fällt es uns schwer, über ihn im objektiven Tone der Erinnerung zu sprechen.

Das Leben Selényis war das Leben des bescheidenen Gelehrten, doch blieb es nicht unberührt von den Auswirkungen der Politik. In dieser stürmischen Atmosphäre liess sich indessen stets das Gedicht von Horaz auf ihn anwenden :  
»Iustum et tenacem propositi virum . . .«



Paul Selényi wurde am 17. November 1884 in Adony, einer Ortschaft in Transdanubien, als Sohn einer bürgerlichen Familie geboren. Seine Mittelschulstudien absolvierte er in Budapest, im Barcsay-Gymnasium im VII. Bezirk, an dem damals hervorragende Lehrkräfte wirkten. Danach absolvierte er die Universität in Budapest, wo er im Jahre 1907 das Mittelschullehrerdiplom für Mathematik und Physik erlangte. Schon als Universittshrer zeigte sich bei ihm eine besondere Begabung und Neigung zur Physik, die von seinen Lehrern I. Fröhlich und J. Klupthy gepflegt und gefördert wurden. So wurde er schon 1907 zum Assistenten am II. Institut für Physik der Budapester Universität ernannt und behielt diese Stellung drei Jahre hindurch. Im Jahre 1910 bestand er sein Doktorexamen aus Philosophie. Da seine Begabung und sein Talent aufgefallen waren, verbrachte er das Studienjahr 1912–1913 auf Grund eines staatlichen Stipendiums in Göttingen und Berlin.

Die Jahrhundertwende darf als die Zeit bezeichnet werden, in der die Ausbildung der ersten ungarischen Physikergarde einsetzte. Dieser Prozess nahm unter dem Einfluss der grossen wissenschaftlichen Erfolge und der streng logischen und konsequenten wissenschaftlichen Persönlichkeit von Roland Eötvös seinen Anfang.

Bis dahin hatte in Ungarn der Gelehrte — in erster Linie der Naturwissenschaftler — eher als ein Sonderling gegolten. Die Ereignisse der politischen Geschichte verhinderten mit voller Absicht, dass sich auch in Ungarn das Bewusstsein über die Bedeutung der Beziehungen zwischen dem Wirtschaftsleben und den Wissenschaften entwickelte, obwohl die prophetischen Worte von Széchenyi mehr als fünfzig Jahre vorher über das Land hinweggebraust waren: Das Volk, das ohne Wissenschaft lebt, wird zugrunde gehen!«

Die monumentalen Erfolge Eötvös', die in 1906 am internationalen geodätischen Kongress in Budapest auch im Inland greifbare Formen annahmen, wirkten trotz seiner Verschlossenheit in suggestiver Weise auf die jungen Studenten der Physik und gestalteten in ihnen den Begriff und die Perspektive einer hohen — im europäischen Sinne genommenen — Wissenschaft aus. Diese Wirkungen fielen bei Selényi auf fruchtbaren Boden. Wer ihn in der letzten Zeit kennen lernte, war vom Reichtum seines Gemütes, das ihn ausser seinen exakten physikalischen Gedankengängen kennzeichnete, mit Recht beeindruckt. Diese edle Seite seiner Persönlichkeit offenbarte sich unter anderen auch in einigen Gedichten aus seiner Jugendzeit, von denen sich eines gerade auf Eötvös bezog, oder darin, dass er in der Bewegung eines vom Spiegel der Waage reflektierten Lichtfleckes im dunklen Zimmer den Geist Newtons zu erkennen glaubte. Er war eine wahre Knstlernatur, was auch in seinen zarten Aquarellen und in seiner grossen Liebe zur Musik zum Ausdruck kam.

Der Grundpfeiler seiner Persönlichkeit war aber seine grosse und tiefe Liebe zur Physik. Dies zeigte sich schon darin, dass er sich sofort nach seiner Diplomarbeit (die über die Polarität des diffraktierten Lichtes handelte) einem optischen



Problem zuwandte, das mit der Zeit zu einem der grundlegenden Probleme der modernen Quantenphysik wurde. Diese Arbeit erschien unter dem Titel »Über Lichtzerstreuung im Raume Wienerscher Interferenzen« in den »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichten aus Ungarn« (XXVII, 1909, Heft 1 und 2) sowie auszugsweise in den »Annalen der Physik« [(4), 35, 444, 1911]. Die von ihm in dieser Arbeit gewonnene Erkenntnis besteht darin, dass sich die Elementarstrahlung der Lichtquellen genau so verhält wie eine aus einem Hertzschen Dipol ausgehende, in jeder Richtung kohärente Kugelwelle. Diese Feststellung ist in der Quantentheorie — im Gegensatz zu dem Bilde der Einsteinschen Nadelstrahlung — von Bedeutung. Später stellte Kossel an Röntgenstrahlen eine ähnliche Erscheinung fest.

Im zweiten Jahrzehnt dieses Jahrhunderts begann sich die erste junge Generation der ungarischen physikalischen Forscher zu einer ersten, lockeren Organisation zusammenzuschließen. Den Anfang machte Gy. Zemplén, der in den Spalten der »Mathematikai és Fizikai Lapok« (Mathematische und Physikalische Blätter) einzelne jüngere Physiker zu Wort kommen liess, ihnen Aufgaben stellte und sie mit der Abfassung kleinerer Referate betraute. In dieser anfänglichen Entwicklung war Selényi der verheissungsvollste. Doch der erste Weltkrieg setzte diesen schönen Anfängen ein Ende. Zemplén fiel auf dem Schlachtfeld, der junge Bartoniek verscholl, Selényi wird nach 16 Monaten Frontdienst im Jahre 1917 aus gesundheitlichen Gründen in das Hinterland versetzt. Doch auch im Felde blieb Selényi Physiker und sendet von hier seinem Redakteur Arbeiten ein. An der italienischen Front beschäftigt er sich mit der Lichtreflexion negativ gekrümmter Flächen. Bei der Artillerie stellt er akustische Beobachtungen an und wird im Jahre 1918 an die Wiener Universität kommandiert, um seine eventuell auch für das Militär brauchbare akustische Erfindung auszuarbeiten.

Die nach Beendigung des ersten Weltkrieges auftretende politische Gestaltung liess auch in der Entwicklung der ungarischen Physik ihre Spuren zurück. Selényi kehrt an die Budapester Universität zurück. Er bewirbt sich um seine Habilitation als Privatdozent. Nach dem Tode Eötvös' wird er stellvertretenderweise mit der Abhaltung der Vorträge betraut.

Nach dem Sturze der Räterepublik bleibt das Gesuch seiner Habilitation unerledigt und er ist gezwungen, eine Stellung in der Industrie anzunehmen. Nach mehreren schwer durchgekämpften Jahren bei der Versuchstation der Post, bei der Firma Erdélyi und Szabó bildete sich in der Vereinigten Glühlampenfabrik in Ujpest unter der Leitung von I. Pfeiffer eine industrielle Forschungsgruppe, deren physikalischer Teil Selényi unterstellt wurde. Zwar war es für ihn schmerzlich, dem Unterricht entsagen zu müssen, doch gelangte er in weit bessere technische Arbeitsverhältnisse, als die damaligen Universitäten zu bieten vermochten. Natürlich bestand seine Hauptaufgabe in der Lösung industrieller Probleme. Nun offenbarte sich eine neue Seite der reichen Persön-



lichkeit Selényis, nämlich sein starker Wille. Trotzdem er sich in seinen politischen Idealen getäuscht und in seinen wissenschaftlichen Ambitionen gefährdet und behindert sah, rückte er nicht von seinen edlen Zielen ab. Er ging nicht ins Ausland, wie es viele in diesen Zeiten taten, sondern widmete sich ganz der produktiven Arbeit. Jetzt befand sich die Forschernatur Selényis sozusagen in ihrem Element. Er war es, der eigentlich die Grundlagen der industriellen physikalischen Forschung in Ungarn legte, wobei ihm die zahlreichen industriellen Probleme auch Gelegenheit zur Erkenntnis rein physikalischer Erscheinungen boten. Nahezu zwanzig Jahre arbeitete er in der Industrie und zog hierbei eine kleine Gruppe von Physikern auf.

Als hervorragender Forscher trug er mit seinen Ratschlägen zu vielen Verbesserungen in der Produktion der Fabrik bei. Das Hauptproblem war aber die Erzeugung der Glühlampe, so dass er sich am eingehendsten mit dieser Frage beschäftigte. So untersucht er die sich in der Glühlampe abspielenden Elektronen- und Ionenprozesse und arbeitet zusammen mit Rostás ein Schnellverfahren zur Untersuchung der Gas oder kein Gas enthaltenden Glühlampen aus.

Zusammen mit I. Patai konstruiert er einen Apparat zur Messung der Wärmeausdehnung des Glases.

Zu dieser Zeit war die Photozelle noch neu. Selényi bringt durch die Glaswand auf elektrolytischem Wege Natrium in das Vakuum ein, ein Verfahren, das sich in der Praxis gut bewährte. Solche Arbeiten von ihm, wie diese, wurden von der Fabrik patentiert. Wer mit Photozellen gearbeitet hat, weiss wie wichtig es ist, die Empfindlichkeit der Zellen ins Rote auszudehnen. Dies gelang auch mit Hilfe von Glimmentladungen, doch war die Wirkung gewöhnlich nicht beständig. Selényi erreichte, dass diese Ausdehnung der Empfindlichkeit beständig wurde. Bei solchen und ähnlichen Arbeiten wuchsen neben ihm neue Physiker auf, wie M. Forró, G. Vészi, F. Kőrösi.

Zu den grossen Erfindungen dieser Zeit gehören die Photoelemente, und unter seiner Leitung führt die Tungstam-Fabrik auch die Erzeugung von Selen-Photoelementen ein. Die Ausarbeitung des Wirkungsprinzips der Selen-Photoelemente fällt auf das Gebiet der reinen Forschung und hier dringt Selényi in die moderne Halbleiterforschung ein. Er befasst sich auch mit der Verbesserung der objektiven photometrischen Verfahren.

Zu dieser Zeit war das Problem der Television bereits ein viel diskutiertes Problem. Selényi hatte einen hervorragenden Einfall, um die Spur des Kathodenstrahles in einer Kathodenstrahlröhre sichtbar zu machen: er bringt eine Isolierplatte in die Röhre ein, streut auf diese Lycopodiumpulver, wodurch das Bild sichtbar wird. Eine andere Variante dieses Versuches ist, dass der Kathodenstrahl auf die Glaswand fällt, und dass das auf die äussere Wand gestreute Pulver das Bild sichtbar macht. Dieses Verfahren, das unter dem Namen »Elektrographierung« patentiert wurde, gehörte zu seinen Lieblingsthemen und er hielt es für seine beste Erfindung. Er hoffte, dass es mit diesem, allerdings



entsprechend weiterentwickelten Verfahren gelingen werde, das bei der Television entstandene Bild mit Hilfe einer künstlichen Lichtquelle lichtstark zu machen und dadurch entsprechend zu vergrössern. Mehr als zehn Arbeiten behandeln — ausser den diesbezüglichen Patentbeschreibungen — dieses Thema.

Den Reichtum und die Vielseitigkeit seiner Interessen kennzeichnet die Tatsache, dass er sich auch mit der Frage der Proportionalität der schweren und trägen Masse beschäftigte. Er hatte einen neuen Gedanken, um die Proportionalität der beiden Massen zu beweisen. Auf einem sich drehenden Himmelskörper muss sich nämlich ein auf einer Flüssigkeit schwimmender Körper bewegen, wenn zwischen den beiden Massen keine Proportionalität besteht.

Auf seine feine Beobachtungsgabe und analytischen Fähigkeiten weisen die zwei Arbeiten hin, die er über die auf die Elektronen wirkende mechanische Kraft veröffentlichte.

Die in der Glühlampenfabrik in Ujpest verbrachten achtzehn Jahre waren die Zeit seiner stillen schöpferischen Tätigkeit. Er hatte viel Sorgen im Familienkreise, da seine Frau während der Epidemie des Jahres 1918 an spanischer Grippe gestorben war und die Pflege und Erziehung seines Sohnes ihm viel Sorgen, aber auch viel Freude bereitete. Sein Sohn war äusserst begabt, er hoffte viel von ihm, leider fiel diese seine Hoffnung dem Faschismus zum Opfer.

Ebenfalls auf Grund politischer Massnahmen wurde er in seiner Stellung pensioniert. Er fand eine Anstellung in einer kleinen Fabrik, wo er die Erzeugung von Selengleichrichtern leitete, die auf Grund seines Patenten hergestellt wurden. Auch hier beschäftigte er sich wissenschaftlich mit dem vielseitigen Verhalten des Selen.

Mit der Befreiung veränderten sich auch seine Verhältnisse. Die Regierung und die Ungarische Akademie der Wissenschaften waren bemüht, ihn wo immer möglich für die erlittenen Ungerechtigkeiten zu entschädigen. Im Jahre 1948 wird er zum Privatdozenten ernannt und zum korrespondierenden Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften gewählt. Er erhält die Auszeichnung »Für hervorragende Arbeit«. Im Jahre 1950 wird ihm der Rang eines ausserordentlichen Universitätsprofessors verliehen und er nimmt am physikalischen Unterricht an der Universität teil. Hier hat er eine interessante Idee. Um die jungen Physiker mit den Ergebnissen der ungarischen Forscher vertraut zu machen, plante er die Veranstaltung von Vortragsreihen, wo die einzelnen Forscher über ihre eigenen Forschungen berichten und die interessanten Geheimnisse ihrer Werkstatt lüften. Hierbei sollten die Vortragenden auch noch darüber Rechenschaft ablegen, wo und wie sich ihre Arbeit an die grosse Front der physikalischen Gedankengänge anschliesst.

Jetzt ist sein Arbeitsplatz schon an der Universität, von der Gleichrichterfabrik hat er sich endgültig getrennt. Doch waren die raschen Veränderungen dieser fieberhaften Zeiten, die im Zeichen einer grossangelegten Neuorgani-



sation des ungarischen wissenschaftlichen Lebens standen, nicht geeignet, dass sich um Selényi eine entsprechende Arbeitsgruppe bildete. Während seines Wirkens an der Universität wendet er sein Elektrographierungsverfahren zum Hervorrufen der im Elektronenmikroskop entstandenen Bilder an. Er entdeckt die zerstörende Wirkung von Quecksilberdämpfen auf die Selengleichrichter und auf die Selenphotoelemente. Im Jahre 1952 wird ihm für seine Tätigkeit der Kossuthpreis verliehen.

Sein Gesundheitszustand verschlechtert sich. Es quälten ihn ständig Kopfschmerzen, er hat Schwindelanfälle. Dass er trotz des Verlustes seines Sohnes arbeitsfähig blieb, verdankt er dem Umstand, dass er sich im Jahre 1936 neu verheiratete und dass seine Frau solche Lebensverhältnisse und eine solche geistige Atmosphäre um ihn zu schaffen verstand, dass ihm das Leben trotz all seiner Tragik wieder lebenswert erschien. So war es denn möglich, dass er ständig arbeitete und wieder weitgreifende Pläne schmiedete. So stellt er das Eötvös-Gedenkbuch zusammen und schreibt eine Würdigung über Roland Eötvös. Das Erscheinen des Eötvös-Gedenkbuches war seine letzte Freude. Zu diesem Zeitpunkt befand sich seine Krankheit bereits in einem vorgerücktem Zustand. Nach einer vorübergehenden Besserung setzte eine unerwartete innere Blutung seinem Schaffen ein Ende.

Selényi verkörperte den Forschertyp, der in jeder praktischen Frage die Wissenschaft sah und aus jedem kleinen Detail die grossen Grundsätze heraus-schälte. Die Wissenschaft war für ihn die lebenspendende Luft, in der sein Geist, getragen von der Welle edler Gefühle, den Höhen zustrebte.

Die Zahl seiner Veröffentlichungen ist nahezu hundert, zusammen mit seinen Patentbeschreibungen weit mehr als hundert. Die im Druck befindliche Nummer der Zeitschrift »Fizikai Szemle« (Physikalische Rundschau) bringt eine Aufzählung seiner sämtlichen Arbeiten. Die Ungarische Akademie der Wissenschaften hat die Absicht, seine Werke in einem weiteren Rahmen der grossen Öffentlichkeit zugänglich zu machen.

*Z. Gyulai*



# REFLEX OSCILLATORS

By

P. S. FARAGÓ  
CENTRAL RESEARCH INSTITUTE  
FOR PHYSICS, BUDAPEST

and

G. GROMA  
UNIVERSITY INSTITUTE  
FOR PHYSICS, BUDAPEST

(Presented by L. Jánossy. — Received 10. XI. 1953)

Comparing the mechanism of reflex klystron and Barkhausen-Kurz oscillators, we found them principally to be the same. Both are feed-back oscillators, with one h. f. field producing the bunching of electrons and also converting (a fraction of) the kinetic energy of the electrons into h. f. power, with a feed-back mechanism maintained by a constant retarding field. All the differences in the behaviour of the two types of oscillators can be explained by the fact that in the reflex klystron the h. f. interaction space is separated from the constant retarding field, and in the Barkhausen-Kurz oscillator the two are superimposed. The main consequences are discussed quantitatively.

## *Introduction*

In an excellent paper Pierce [1] gave a mainly qualitative but very clear discussion of the essential principles of reflex klystrons. He defined reflex oscillators as »oscillators in which an electron stream passes through a longitudinal radio-frequency field across a 'gap' between two electrodes, then into a drift space in which there is a retarding electric field produced by a negative repeller electrode and finally returns through the radio-frequency field across the gap«. The paper included the Barkhausen-Kurz oscillator in this category as an example of an »early« reflex oscillator, the reflex klystron being a »modern« reflex oscillator. This view of Pierce caused considerable controversy among those working in the field at that time [2].

It is true — as Condon stated — that it would be difficult to trace a genetic connection between the two types in their historical development. »As a matter of fact« — emphasized Woodyard — «the development of the reflex klystron had nothing to do with the Barkhausen oscillator, but rather resulted from the idea of folding an ordinary two-resonator klystron back upon itself«. Nobody really means — nor did Pierce — that the reflex klystron arose merely as a development of the Barkhausen-Kurz oscillator.

Another repudiated view of Pierce was his speaking only of »a new terminology, that of velocity modulation, drift action and bunching, which makes it possible to explain the action of reflex oscillators in simple terms«. It was correctly pointed out by Harrison, that these principles are more than merely



a »new terminology«; the recognition and application of these principles made possible the development of a number of new and useful devices.

On the other hand, we must contradict Condon's opinion, according to which »the detailed operation of the two tubes is so different that their theory has very little in common«. Harrison, comparing the definition of the reflex oscillator given by Pierce and the usual explanation of the Barkhausen oscillator, found discrepancies which, according to him, make the analogy questionable. We think that it is not the analogy which is not valid, but rather that the definition is not general enough. Using a somewhat more general definition of reflex oscillators, basing it upon the fundamental function of the reversal of the electrons in the retarding field, one finds that the discrepancies referred to are not essential, but only of formal importance.

The analogy between the two types of oscillators is strikingly demonstrated by a special tube developed by Heil and Ebers [3]. This tube is fundamentally a Barkhausen oscillator, working, however, with an electron gun, i. e. a well collimated electron beam, and a cavity resonator, in contrast to the classical form of these devices. Also the theory of the tube was given by Ebers [4] considering velocity modulation, bunching, drifting, etc., as fundamental processes.

The purpose of this paper is to treat in parallel the elementary processes underlying the operation of the Barkhausen-Kurz oscillator and that of the reflex klystron respectively, showing thereby both their close resemblance and their essential differences which are responsible for their different operating characteristics.

### *General Description*

The operation of any kind of feed-back oscillator can be explained as follows: If electrons receive kinetic energy from an accelerating field sustained by a d. c. power source, a fraction of this energy can be transferred to the radio-frequency field caused by the potential drop across the output load of the electron tube, i. e. to the output load itself. The average power output throughout a complete cycle can be made positive by modulating the density of the electron beam in proper phase by an input power. Self-excited oscillations are obtained if the input power necessary for the proper density modulation of the beam, being a fraction of the output power, is fed back from the output circuit. Reflex oscillators can be considered as a class of feed-back oscillators characterized by having one resonant circuit, which produces a longitudinal h. f. field performing a double function (modulation of beam density and playing the role of load circuit), *feedback being performed by the electrons reversed by a constant retarding field*, and thus passing twice through the same high-frequency field.



This definition evidently applies to the reflex klystron oscillator, whose principle of operation is described by the »definition« given by Pierce quoted in the introduction. But our definition applies to the Barkhausen-Kurz oscillator as well.

First of all, it is worth mentioning that the original «Elektronentanz»-interpretation of the oscillations [5] is far from complete. If the role of the external (resonant) circuit is not taken into consideration, one can hardly find a reason for the correct phasing of electrons, which is necessary for a net power yield.

In a Barkhausen-Kurz oscillator there is also one resonant circuit, which may be connected between any two of the terminals of a triode. In practice it is either between the cathode and the grid, or between the grid and the anode, the two alternatives being perfectly equivalent in principle, although inconsiderable deviations in details of operating characteristics may occur.\* This single resonant circuit supplies the high-frequency field which produces the density modulation of the electron beam — variation of space charge density distribution as the function of time in general — and plays also the role of the external load. Also in this case the retarding field is responsible for the feedback action which results in self-sustained oscillation.

There is only one difference between the reflex klystron and the Barkhausen-Kurz oscillator, which is of fundamental importance. In the reflex klystron there are three separated regions: d. c. accelerating field, a short high-frequency field and the retarding field which is also the drift space. In the Barkhausen-Kurz oscillator, however, one of the d. c. fields — either the accelerating field or the retarding field — is superimposed on the high-frequency field. It is this difference that has the following considerable consequences for the behaviour of the two types of oscillators:

1. The transit angle of electrons in the retarding field for optimum condition of oscillation is  $2\pi \left( n - \frac{1}{4} \right)$  for reflex klystrons, and  $2\pi \left( n + \frac{1}{4} \right)$  for Barkhausen-Kurz oscillators.
2. The efficiency of reflex klystrons is much higher than that of Barkhausen-Kurz oscillators.
3. The frequency range in which a reflex klystron can be tuned is not so wide as that for Barkhausen-Kurz oscillators. This statement applies to electronic and mechanical tuning as well.

\* In some cases there is one resonant circuit between the cathode and the grid, and another between the grid and the anode. Thus this case might seem to contradict our definition. However, even in this case there is no coupling between the two resonant circuits, feedback is provided only by the returning electrons, and both circuits have the double function described above. This arrangement may have practical advantages and disadvantages, but the underlying principle is still the same as in the simpler cases, one of which will be treated quantitatively.



*The Motion of Electrons within the Tubes*

In this section we reproduce some results well-known from textbooks and part of the results derived by Ebers [4], this being the simplest way of showing the striking analogy between the reflex klystron and the Barkhausen-Kurz oscillator.

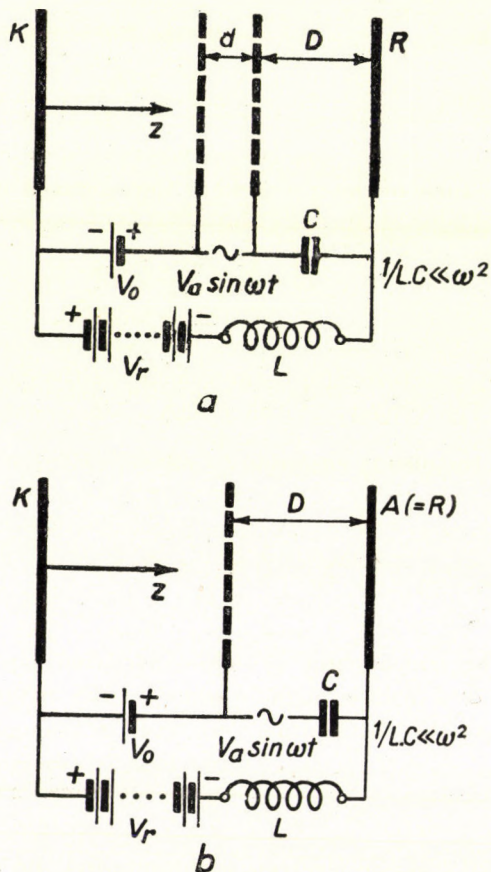


Fig. 1. To the discussion of the reflex klystron (a) and of the Barkhausen-Kurz oscillator (b)

Let us write down in parallel the equations of the motion for both oscillator tubes and compare their solutions. As to the Barkhausen-Kurz oscillator, we shall confine our considerations to the case where the external resonant circuit is connected between the grid and the anode of a triode. This is the case corresponding to the tube of Heil and Ebers, thus some of our later results can be tested by their experimental results.

For the sake of simplicity we consider the motion of electrons in the homogeneous field of plan parallel electrodes as a one-dimensional problem

without taking the interaction between electrons into consideration. We also suppose that electrons pass the high-frequency interaction space only once in the forward and once in the reverse direction.

Using the notations of Figs. 1/a and 1/b for the reflex klystron and the Barkhausen-Kurz oscillator respectively, the equations of motion in the retarding field are

for the reflex klystron :

$$m\ddot{z} = -e(V_r + V_0)/D,$$

for the Barkhausen-Kurz oscillator :

$$m\ddot{z} = -\frac{e}{D} [V_r + V_0 + V_a \sin(\omega t + \alpha)]$$

where  $\alpha$  is the phase-angle of the h. f. field at the entrance of the electron. From these we get the velocity of the electron :

$$\dot{z} = v'_0 - \frac{eV_1}{mD} t,$$

$$\dot{z} = v'_0 - \frac{e}{mD} \left[ V_1 t - \frac{V_a}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) \right],$$

where  $V_1 = V_0 + V_r$  and  $v'_0 = v(0)$  is the velocity of the electron when entering the retarding field. The velocity of the electron when entering the high-frequency field is (from the energy equation  $\frac{1}{2} mv^2 = eV$ )

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{e}{m} V_0}.$$

We suppose that the transit time of the electrons in the h. f. field is negligible compared to the oscillation period of the field.

No restriction can be made as to the transit time in the h. f. field, and we have to remember that the retarding field is superimposed on the h. f. field.

Thus the velocity of the electron when entering the retarding field (i. e.  $t = 0$ ) is (again from the energy equation) :

$$v'_0 = \sqrt{2 \frac{e}{m} (V_0 + V_a \sin \alpha)}$$

$$v'_0 = v_0$$

and using these expressions :

$$\dot{z} = v_0 \sqrt{1 + \frac{V_a}{V_0} \sin \alpha} - \frac{eV_1}{mD\omega} (\omega t)$$

(1a)

$$\dot{z} = v_0 - \frac{e}{mD\omega} \{ V_1 \omega t - V_a [\cos(\omega t + \alpha) - \cos \alpha] \}. \quad (1b)$$



These equations yield by integration :

$$z = v_0 t \sqrt{1 + \frac{V_a}{V_0} \sin \alpha} - \frac{eV_1}{2mD\omega^2} (\omega t)^2 \quad (2a)$$

$$z = v_0 t - \frac{e}{mD\omega^2} \left\{ \frac{V_1}{2} (\omega t)^2 - V_a [\sin(\omega t + \alpha) + \omega t \cdot \cos \alpha - \sin \alpha] \right\} \quad (2b)$$

We now introduce the transit angle of the electrons in the retarding space  $\Theta = \omega T$ ,  $T$  being the transit time in that region. In the absence of an h. f. field the transit angle of an electron entering with a velocity  $v_0$ , is :

$$\Theta_0 = \frac{2mDv_0\omega}{eV_1} \quad (3)$$

Substituting this expression into (2a) and (2b) resp., we obtain :

$$\frac{\Theta_0 \omega}{v_0} z = -(\omega t)^2 + (\omega t) \Theta_0 \sqrt{1 + k \sin \alpha} \quad \frac{\Theta_0 \omega}{v_0} z - 2K \sin(\omega t + \alpha) = -(\omega t)^2$$

$$+ (\omega t) (\Theta_0 - 2K \cos \alpha) - 2K \sin \alpha$$

with  $k = \frac{V_a}{V_0}$  with  $K = \frac{V_a}{V_1}$

Introducing the new variable :

$$Z = (\Theta_0 \omega / v_0) z \quad | \quad Z = (\Theta_0 \omega / v_0) z - 2K \sin(\omega t + \alpha) \quad (4b)$$

we find :

$$Z = -(\omega t)^2 + A_1 \omega t \quad (5a) \quad | \quad Z = -(\omega t)^2 + A_2 \omega t + B_2 \quad (5b)$$

with  $A_1 = \Theta_0 \sqrt{1 + k \cdot \sin \alpha}$  with  $A_2 = \Theta_0 - 2K \cdot \cos \alpha$   
 $B_2 = -2K \cdot \sin \alpha$

If we plot  $Z$  against  $\omega t$  for different values of the parameter  $\alpha$ , according to relation (5a), we obtain the Applegate-diagram of reflex klystrons (Fig. 2/a).

From this it is seen that 1. bunching occurs around an electron which crosses the h. f. interaction space when the field intensity is zero and increasing in such a direction as to decelerate the electrons; 2. optimum drift angles for the center of the bunch are  $2\pi\left(n - \frac{1}{4}\right)$ .

A similar family of parabolas is obtained for the Barkhausen-Kurz oscillator, if the function given by (5b) is plotted. (Of course the curves corresponding to the same value of  $a$  are different, because  $A_1 \neq A_2$  and  $B_2 \neq 0$ .) As the electrons enter the retarding field and leave it again at  $z = 0$ , the drift angle

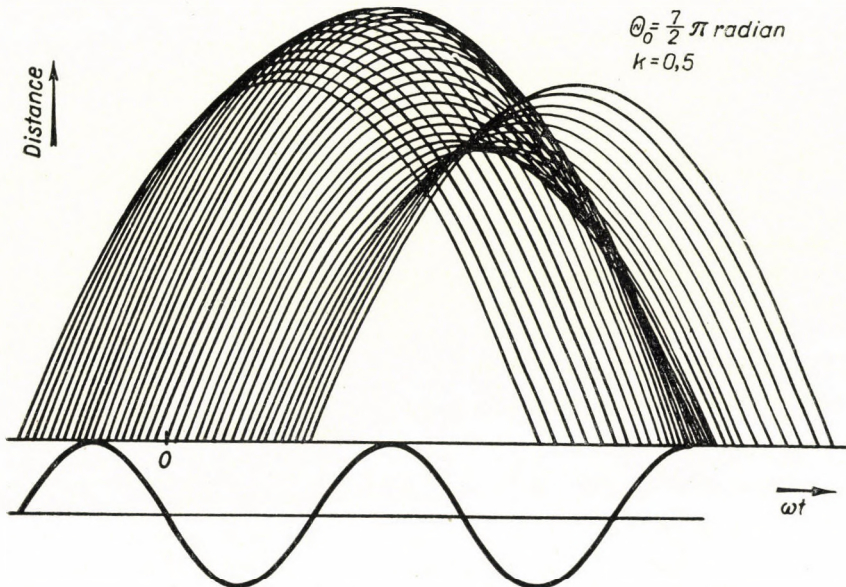


Fig. 2/a. Applegate-diagram of the reflex klystron

for a given value of  $a$  is represented by the interval between two intersections of the curves  $Z = -(\omega t)^2 + A_2 \omega t + B_2$  and  $Z = -2K \cdot \sin(\omega t + a)$ . Such a diagram is shown in Fig. 2/b.

It can be seen that upon entering the grid-plate region the electrons receive a velocity modulation and become bunched in space around one which enters at about the maximum value of the h. f. field. Under optimum conditions the bunch is formed after the electrons have reversed their direction, and the bunch drifts toward the grid when the h. f. field opposes its motion, leaving the interaction space when the h. f. field is zero and decreasing. Thus the optimum

drift angle for the center of the bunch is  $2\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)$ .



To get some more precise quantitative information we need the velocity of the returning electrons when leaving the h. f. field as a function of their entrance phase angle and their drift angle in the retarding field.

As the retarding field is constant the electrons are on the way considered under the influence of an accelerating potential :

$$V_0 + V_a \cdot \sin \alpha - V_a \cdot \sin (\alpha + \Theta).$$

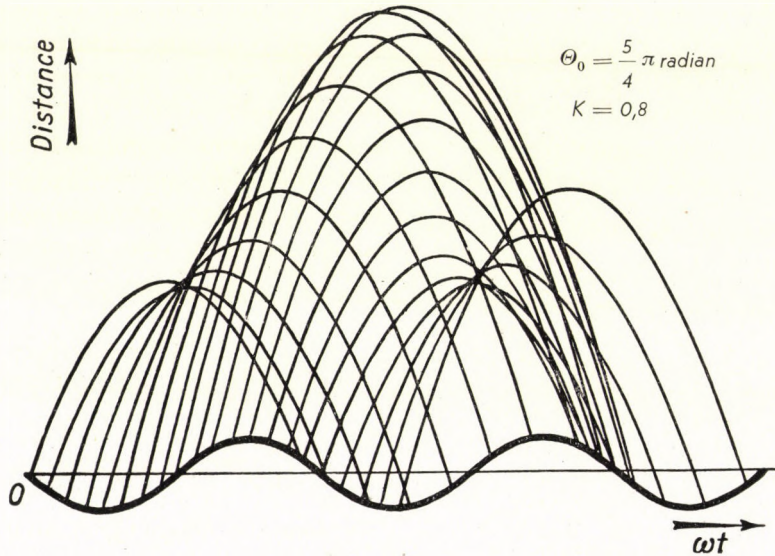


Fig. 2/b. Graphical representation of electron motion in a Barkhausen-Kurz oscillator, corresponding to the Applegate-diagram

The velocity of the electrons when leaving the h. f. field after reversal is

from the energy equation :

$$v_1 = v_0 \sqrt{1 + k [\sin \alpha - \sin (\alpha + \Theta)]} \quad (6a)$$

from (1b)

$$v_1 = v (\alpha + \Theta) = v_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\Theta_0} [\Theta + K \cos \alpha - \cos (\alpha + \Theta)] \right\} \quad (6b)$$

where (3) was used to eliminate  $V_1$ .

When the electron leaves the retarding field we have  $z = 0$ , thus we obtain from (2a) and (2b) respectively

$$\theta = \theta_0 \sqrt{1 + k \sin \alpha}.$$

Restricting our treatment to low-level operation, i. e.  $k \ll 1$ , we take

$$\theta \sim \theta_0 + \frac{1}{2} k \theta_0 \sin \alpha$$

which, substituted in (4a), gives

$$\frac{v_1}{v_0} = \sqrt{1 + k \left[ \sin \alpha - \sin \left( \alpha + \theta_0 + \frac{1}{2} k \theta_0 \sin \alpha \right) \right]}. \quad (7a)$$

$$\theta^2 - \theta(\theta_0 - 2K \cos \alpha) + 2K [\sin \alpha - \sin(\alpha + \theta)] = 0.$$

This transcendental equation in  $\theta$  can be solved, if the terms  $\sin \theta$  and  $\cos \theta$  are expanded in power series. As  $Z$  is in general large an expansion about  $\theta_0$  is used and terms of higher than the second order are neglected. If this is done, the above equation will be one of the second degree. As only low-level operation will be considered, i. e.  $K \ll 1$ , the solution of this equation can be approximated again by a power series, containing only zero, first, and second order terms in  $K$  (a first order approximation is very bad). If this approximate solution is substituted into (4b), we obtain\* :

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_0} = & -1 \\ & - \frac{2K}{\theta_0^2} \{ (\sin y - \sin \alpha) [-2 \\ & - \frac{2K}{\theta_0^2} (2\theta_0 \cos \alpha + 2\theta_0 \cos y \\ & + 4 \sin \alpha + \theta_0^2 \sin y)] + \cos \alpha [\theta_0 \\ & + \frac{2K}{\theta_0^2} (2\theta_0^2 \cos y + \theta_0^3 \sin y)] + \theta_0 \cos \gamma \} \\ & y = \alpha + \theta_0. \end{aligned} \quad (7b)$$

#### *Conversion Efficiency and Optimum Drift Angle*

We define the conversion efficiency of an oscillator by the ratio of the energy transferred by the electrons to the h. f. field to their kinetic energy before the interaction, averaged over a complete period of the h. f. field. —

If an electron on its forward path enters the h. f. field with the velocity  $v_0$  and on its reverse motion leaves it with the velocity  $v_1$ , the energy transferred by the electron to the h. f. field is

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_1^2.$$

\* This was calculated by J. Németh.



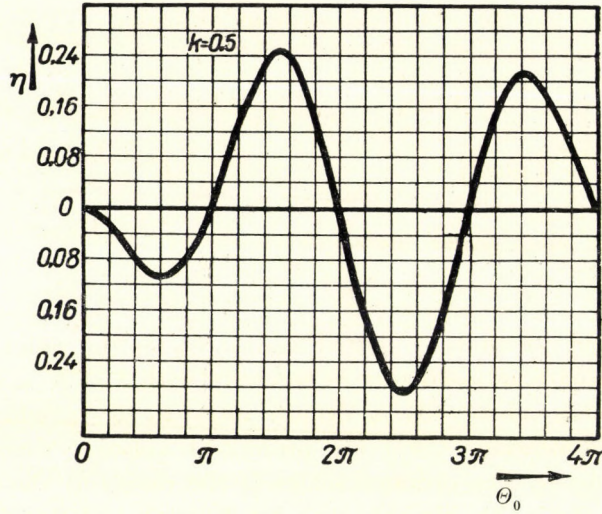


Fig. 3/a. Efficiency of the reflex klystron as a function of  $\theta_0$

As the kinetic energy obtained by the electrons from the d. c. power supply is  $mv_0^2/2$ , the conversion efficiency is

$$\eta = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{v_1}{v_0} \right)^2 d\alpha.$$

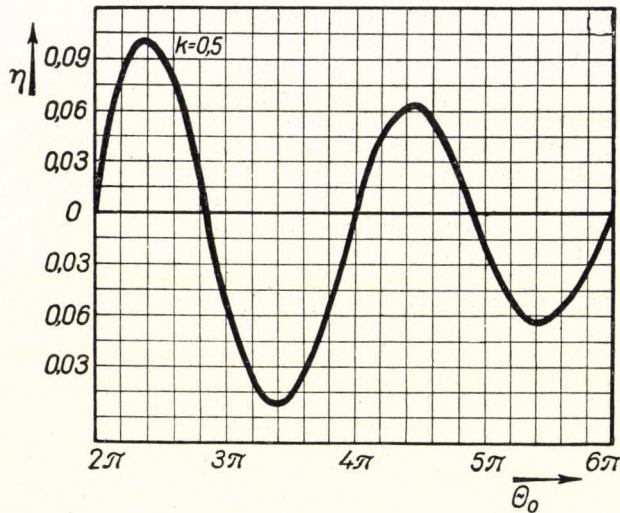


Fig. 3/b. Efficiency of the Barkhausen-Kurz oscillator as a function of  $\theta_0$

This integral can be evaluated without difficulty.

By substituting (5a), we obtain :

$$\eta = -k J \left( \frac{k \Theta_0}{2} \right) \sin \Theta_0 \quad (8a)$$

$J_1(x)$  being the first order Bessel function.

By substituting (5b), we obtain :

$$\eta = -4K^2 \frac{2(1 - \cos \Theta_0) - \Theta_0 \sin \Theta_0}{\Theta_0^2} \quad (8b)$$

Figs. 3/a and 3/b show  $\eta$  plotted against  $\Theta_0$  for the reflex klystron and for the Barkhausen-Kurz oscillator respectively with  $k = K = 0,5$ . It is seen that  $\eta$  has positive values only in definite intervals of  $\Theta_0$ , which means that with prescribed dimensions there are prescribed voltages where self-excited oscillations can occur. The ordinate scales of the diagrams show further that the efficiency of the reflex klystron may reach much higher values than that of the Barkhausen-Kurz oscillator. This is caused by the fact that the transit time through the h. f. interaction space is much shorter in the reflex klystron than in the Barkhausen-Kurz oscillator; as is well-known an increase of the transit time decreases the efficiency of the reflex klystron as well.

We may express the above results by considering the beam conductance in the two cases. As the d. c. input power is  $I_0 \cdot V_0$ ,  $I_0$  being the emission current, the h. f. output power is  $\eta \cdot I_0 V_0$ . The power output of a generator is  $P = -G \cdot V_a^2/2$ ,  $G$  being its inner conductance and  $V_a$  the voltage amplitude on its terminals. Thus the beam conductances of our oscillators are :

$$G = -\frac{2 \cdot I_0 \cdot V_0}{V_m^2} \eta,$$

i. e.

$$G = 2 \frac{I_0}{V_a} \frac{J_1(k\Theta_0/2)}{k} \sin \Theta_0.$$

(9a)

$$G = 8 \frac{I_0 V_0}{V_1^2} \frac{2(1 - \cos \Theta_0) - \Theta_0 \cdot \sin \Theta_0}{\Theta_0^2}.$$

(9b)

Self-excited oscillations can only occur if the sum of the beam conductance and the conductance  $1/r$  representing the losses of the external circuit is zero or negative. Such regions are marked in Figs. 4/a and 4/b. It can be seen also from these diagrams, that the optimum condition for self-excited oscillations is given by

$$\Theta_0 = 2\pi \left( n - \frac{1}{4} \right) \quad (10a)$$

$$\text{and} \quad \Theta_0 = 2\pi \left( n + \frac{1}{4} \right) \quad (n \text{ integer}) \quad (10b)$$



for the two types of oscillators respectively, in accordance with the qualitative results obtained from Figs. 2/a and 2/b. Different values of  $n$  yields the different modes of oscillation.

As to the Barkhausen-Kurz oscillator, our condition, given by (10b), does not agree with the one commonly given in the literature:  $2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$ .

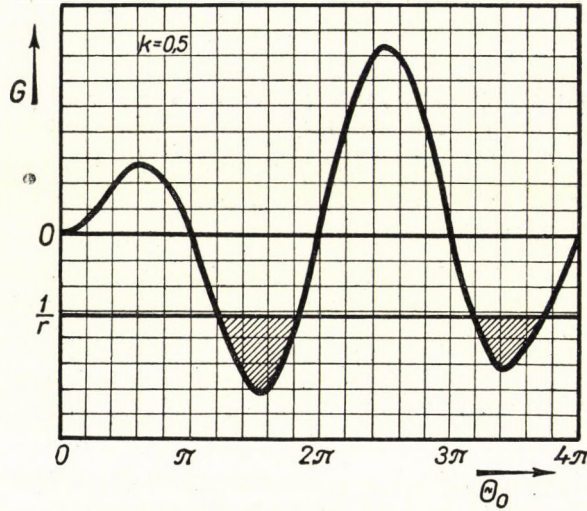


Fig. 4/a. Electronic conductance of the reflex klystron as a function of  $\theta_0$ . For a shunt load resistance  $r$  self-excited oscillations occur only in the shaded regions.

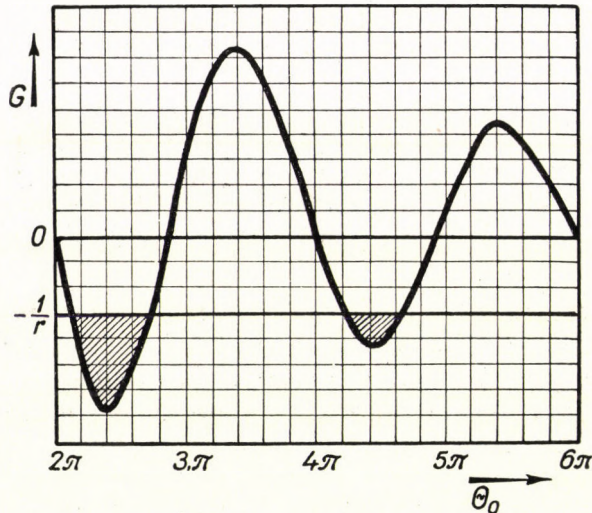


Fig. 4/b. Electronic conductance of the Barkhausen-Kurz oscillator as a function of  $\theta_0$ . For a shunt load resistance  $r$  self-excited oscillations occur only in the shaded regions.

This discrepancy is due to the fact that the original explanation of the oscillations assumed an oscillating space charge. However, the formation of such an oscillating space charge, or the storing out of correct-phase electrons, i. e. the bunching process can hardly be explained without considering the role of the external resonant circuit, which leads to our result, being confirmed by the experiences of Heil and Ebers.

### *Frequency Range of the Oscillators*

To explain the properties of an oscillator with respect to mechanical or electronic tuning, one has to know both the real and imaginary component of the beam-admittances  $G + jB$ . The derivation of this quantity for the reflex klystron is very simple and well-known [6], if  $k \ll 1$  the result is :

$$G = \frac{2I_0}{V_0} \frac{J_1(k\Theta_0/2)}{k} \sin \Theta_0, \quad (9a)$$

$$B = \frac{2I_0}{V_0} \frac{J_1(k\Theta_0/2)}{k} \cos \Theta_0. \quad (10a)$$

The situation is a little more complicated in the Barkhausen-Kurz oscillator because of the finite length of the h. f. interaction space. Thus the calculations are also a little more involved [7], they lead to the following results :

$$G = \frac{8I_0V_0}{V_1^2 \Theta_0^2} [2(1 - \cos \Theta_0) - \Theta_0 \sin \Theta_0], \quad (9b)$$

$$B = \frac{8I_0V_0}{V_1^2 \Theta_0^2} [2(\sin \Theta_0 - \Theta_0(1 + \cos \Theta_0))] \quad (10b)$$

if  $K \ll 1$ .

The condition for self-excited oscillations is as mentioned

$$\frac{1}{r} + \frac{2I_0}{V_0} \frac{J_1(k\Theta_0/2)}{k} \sin \Theta_0 = 0 \quad \left| \quad \frac{1}{r} + \frac{8I_0V_0}{V_1^2 \Theta_0^2} [2(1 - \cos \Theta_0) - \Theta_0 \sin \Theta_0] = 0 \right.$$

$1/r$  being the conductance of the external circuit. From these we have

$$\frac{2I_0}{V_0} \frac{I_1\left(\frac{k\Theta_0}{2}\right)}{k} = -\frac{1}{r \sin \Theta_0} \quad \left| \quad \frac{8I_0V_0}{V_1^2 \Theta_0^2} = -\frac{1}{r [2(1 - \cos \Theta_0) - \Theta_0 \sin \Theta_0]}$$



which substituted in (10a) and (10b) resp., gives

$$B = -\frac{\cotg \Theta_0}{r} \quad (11a) \quad \Bigg| \quad B = -\frac{\cotg (\Theta_0/2)}{r} \quad (11b)$$

The frequency of a self-excited oscillator is given by the resonance frequency of the whole oscillator system, consisting of the h. f. interaction space (characterized as circuit element by the beam-admittance) and an external circuit. If  $L$ , and  $C$  are the inductance and capacitance of the external parallel resonant circuit, the condition of resonance is :

$$-\frac{1}{\omega L} + \omega C + B = 0.$$

Introducing the resonant frequency  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$  of the external circuit and its quality-factor  $Q = r/\omega L$ , the above equation becomes

$$\left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) Q = -Br$$

or, if  $\omega \approx \omega_0$ , we obtain

$$2Q \frac{\Delta\nu}{\nu} = -Br \quad (12)$$

with  $\Delta\nu = \nu - \nu_0 = (\omega - \omega_0)/2\pi$

Substituting (11a) and (11b) resp. into (12), we get

$$2Q \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \cotg \Theta_0 \quad (13a) \quad \Bigg| \quad 2Q \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \cotg \frac{\Theta_0}{2} \quad (13b)$$

or introducing  $\Theta_0$  corresponding to optimum conditions :

$$\Theta_0 = 2\pi \left( n - \frac{1}{4} \right) + \Delta\Theta_0, \quad \Bigg| \quad \Theta_0 = 2\pi \left( n + \frac{1}{4} \right) + \Delta\Theta_0,$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{2Q} \cotg\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\theta_0\right). \quad (14a)$$

As is well known, under optimum conditions ( $\Delta\theta_0 = 0$ ) the frequency given by the reflex klystron oscillator is that of the resonant cavity, and a symmetrical variation of  $\theta_0$  yields a symmetrical detuning.

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{2Q} \cotg \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \Delta\theta_0 \right). \quad (14b)$$

It is seen that under optimum conditions, ( $\Delta\theta_0 = 0$ ) the frequency given by this oscillator deviates from that of the external circuit resonance frequency, the latter being somewhat lower ( $\Delta\nu > 0$ ) although detuning is small as  $Q$  is usually very large. The resonant frequency of the external circuit would be obtained with  $\Delta\theta_0 = -\pi/2$ , but at this value no oscillation occurs (Fig 3/b. or 4/b). Therefore  $\nu_0$  can be regarded as the lowest frequency limit. If, on the other hand,  $\theta_0$  is decreased ( $\Delta\theta_0 < 0$ ), the oscillation frequency increases rapidly. The dependence of oscillator frequency on  $\Delta\theta_0$  is thus asymmetrical with respect to  $\nu_0$ .

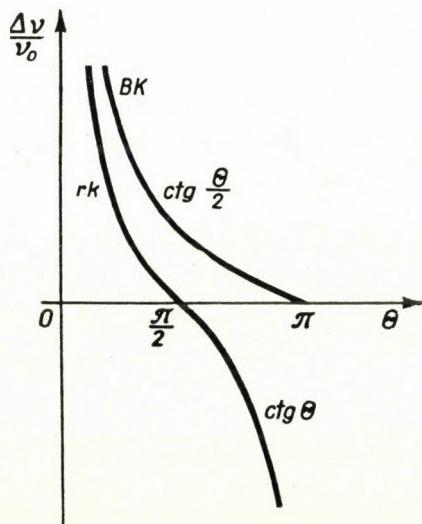


Fig. 5. To the comparison of the tuning properties of the two types of reflex oscillators



A comparison of (14a) and (14b) also shows that in general the Barkhausen-Kurz oscillator can be tuned in a much wider frequency range than the reflex klystron, for  $-\cotg x < \tg(x/2)$  in the interval  $0 < x < \pi$  (corresponding to  $+\frac{\pi}{2} > \Delta\theta_0 > -\frac{\pi}{2}$ ), (Fig 5).

The mechanical tuning possibilities are practically the same. The resonant frequency of the cavity is varied by its deformation in both types of oscillators. In the reflex klystron the variation of the resonator gap affects only the resonant frequency, other parameters remaining constant. (The change in transit time is usually not appreciable.) In the Heil-Ebers oscillator, however, a deformation of the cavity changes also the intensity of the retarding field, so that an electronic tuning is involved as well. It can be shown, however that this inherent electronic tuning can be neglected because of the high  $Q$ -value of the cavity.

#### REFERENCES

1. J. R. Pierce : Reflex Oscillator, Proc. I. R. E. **33**, 112, 1945.
2. Discussion on Reflex Oscillators, Proc. I. R. E. **33**, 483, 1945.
3. O. Heil and J. J. Ebers : A New Wide-Range High-Frequency Oscillator. Proc. I. R. E. **38**, 645, 1950.
4. J. J. Ebers : Retarding-Field Oscillators, Proc. I. R. E. **40**, 138, 1952.
5. H. Barkhausen and K. Kurz : Die kürzesten, mit Vakuumröhren herstellbaren Wellen. Phys. Zeitschr., **21**, 1, 1920.
6. A. E. Harrison : Klystron Tubes, McGraw-Hill Book Co. Inc. New-York, 1947.
7. F. W. Gundlach : Grundlagen der Höchsthfrequenztechnik, Springer-Verlag, Berlin, 1950.

#### ОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

П. С. Фараго и Г. Грома

#### Резюме

Если сравнить механизмы колебаний отражательного осциллятора и осциллятора Баркгаузена—Курца, то оказывается, что они по сути дела не отличаются друг от друга. Оба осцилляторы с обратной связью, в которых и фазовая фокусировка электронов и передача некоторой доли их кинетической энергии высокочастотному полю обуславливаются одним и тем же высокочастотным полем, а обратная связь осуществляется с помощью постоянного отражательного поля.

Вся разница между двумя осцилляторами объясняется тем, что в отражательном клистроне высокочастотное поле отделено от постоянного отражательного поля, а в осцилляторе Баркгаузена—Курца они не отделены.

Важнейшие следствия этих разниц рассмотрены количественно.



# QUANTUM EFFECTS IN THE INTERACTION BETWEEN FREE ELECTRONS AND ELECTROMAGNETIC FIELDS

By

P. S. FARAGÓ

and

G. MARX

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE  
FOR PHYSICS, BUDAPEST

UNIVERSITY INSTITUTE  
FOR PHYSICS, BUDAPEST

(Presented by L. Jánossy. — Received 11. I. 1954)

An electron beam shot through a transverse r. f. field suffers a direction spread. If experimental conditions are suitably chosen, the direction spread seems to be due only to the quantum dispersion of energy exchange between free electrons and r. f. field. A simple collector electrode system might allow not only the detection of the direction spread of the electrons, but the presence of a quantum effect might be checked by plotting the collector current versus r. f. field amplitude, the plot for the quantum effect being different from those for classical effects.

In recent years several papers [1—4] were published, dealing with a dispersion in energy exchange between free electrons and r. f. fields, which the classical theory cannot predict. One of them [3] reports to have succeeded in detecting such an effect by measuring the energy distribution of electrons shot through a longitudinal radio-frequency field in a wave guide. In such an experiment the energy distribution has three main sources: 1. emission velocity distribution in the electron beam, 2. a classical dispersion of energy exchange arising from the functional dependence of transit time on the entrance phase-angle of the electrons, and 3. the quantum effect sought. It can be shown that the quantum effect cannot be made larger than the effects (1) and (2), which under convenient experimental conditions are both of the same order of magnitude. The success of the experiment is largely due to the fact that if the current to a retarding electrode is calculated in terms of the r. f. field amplitude two separate factors are obtained: effect (2) appears only as a systematic velocity modulation which can be described by a Bessel function, while the typically statistical quantum effect is represented by an exponential factor. Thus the experimental results can be represented by a quantity which, plotted against the r. f. field amplitude, would show no dependence on it, in case there is no quantum dispersion while, if the quantum effect exists the plots would have to show a linear relationship in the r. f. field amplitude. The latter result was reported in the paper referred to.

In our opinion it would, however, be desirable to arrange the experiment in such a manner as to make the classical effects negligible relative to the quantum effect. The object of this paper is to show that this condition can be realized if the electrons are shot through a transverse r. f. field and the transit angle of the electrons is properly chosen. In this case there should be a dispersion in



the *direction* of electron velocities caused *only* by the quantum nature of the energy exchange.

\* \*  
\*

For the sake of simplicity we consider a rectangular cavity resonator excited in its  $TE_{012}$  mode. In this case the electrical field has only one component — say in the  $z$ -direction

$$E_z = E_0 \sin \frac{2\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \sin \omega t, \quad (1)$$

$a$  and  $b$  being the lengths of the cavity in the direction of the  $x$  and  $y$  axis resp., its resonance frequency is given by

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \pi c \left[ \left( \frac{2}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

If the free-space wavelength  $\lambda$  is given, one can always find such a cavity where an electron entering in the  $x$ -direction with a velocity  $v_0 = c/n$  ( $n > 1$ ) spends an integer number of periods. This will be the case if

$$a = \lambda \frac{k}{n} \quad \text{and} \quad b = \frac{a}{2} [(k/n)^2 - 1]^{-1/2}$$

$k$  being an integer and  $k/n > 1$ .

Using the first of these expressions and  $x = v_0(t - t_0)$  we find from (1) supposing the electron to enter at  $y = b/2$

$$E_z = E_0 \sin \frac{\omega}{k} (t - t_0) \sin \omega t. \quad (2)$$

Thus the equation of motion determining the displacement of the electron in the  $z$ -direction is

$$\ddot{z} = -\frac{e}{m} E_0 \sin \omega t \sin \frac{\omega}{k} (t - t_0). \quad (3)$$

By integration, and after simple rearrangement of our result we find

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \frac{eE_0}{2m\omega \left(1 + \frac{1}{k}\right)} \left\{ \sin \omega \left[ \left(1 + \frac{1}{k}\right)t + \frac{1}{k}t_0 \right] - \sin \omega t_0 \right\} - \\ & - \frac{eE_0}{2m\omega \left(1 - \frac{1}{k}\right)} \left\{ \sin \omega \left[ \left(1 - \frac{1}{k}\right)t + \frac{1}{k}t_0 \right] - \sin \omega t_0 \right\}; \end{aligned} \quad (4)$$

remembering that the transit time is  $t - t_0 = 2\pi k/\omega$  we obtain for the instant at which the electron leaves the cavity

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \frac{eE_0}{2m\omega \left(1 - \frac{1}{k}\right)} \left\{ \sin [\omega t_0 + 2\pi(k-1)] - \sin \omega t_0 \right\} - \\ & - \frac{eE_0}{2m\omega \left(1 + \frac{1}{k}\right)} \left\{ \sin [\omega t_0 + 2\pi(k-1)] - \sin \omega t_0 \right\}. \end{aligned} \quad (4a)$$

Equ. (4) shows that if  $k$  is an integer — as we supposed — then  $\dot{z} = 0$  when the electron leaves the cavity, independently of its entrance phase-angle. Consequently, if electrons entering the cavity parallel to the  $x$ -axis, show a dispersion in their direction after having traversed the field, this is caused by the quantum nature of the interaction only.

The size of this quantum dispersion of the direction of electrons can be estimated as follows. As the electrons spend  $k$  complete periods in the r. f. field, they gain an energy  $W_+$  during half of their transit time and lose an energy  $W_-$  during the other half of the transit time :

$$W_+ \sim W_- \sim eE_0 \bar{z} k\pi/\omega, \quad (5)$$

where  $\bar{z}$  means the average of  $\dot{z}$ . An inspection of equ. (4) shows that

$$\bar{z} \sim eE_0/m\omega.$$

Since the gain and loss of energy corresponds to the absorption and emission of photons respectively, we obtain for the number of photons absorbed and emitted from (5) and (4b)

$$N_{\pm} = W_{\pm}/\hbar\omega \sim \frac{e^2 E_0^2}{m\hbar\omega^3} k. \quad (6)$$



Further, the quantum nature of the interaction implies that the energy gained by the electrons fluctuates around the average value

$$\overline{W} = \hbar\omega (N_+ - N_-)$$

(zero in our special case) with a standard deviation\*

$$\Delta W = \hbar\omega (N_+ + N_-)^{1/2}, \quad (7)$$

which gives, by substituting (6) :

$$\Delta W \sim eE_0 (kh/m\omega)^{1/2}. \quad (7a)$$

The energy of the electrons when leaving the cavity is  $W = (1/2)mv_0^2 + (1/2)m\dot{z}^2$ . As there is no component of the field parallel to  $v_0$ , the energy dispersion is determined solely by the deviation  $\Delta\dot{z}$  of the velocity component  $\dot{z}$ , leading to the energy dispersion

$$\Delta W \sim (1/2)m(\Delta\dot{z})^2$$

and resulting in a dispersion of the directions

$$\Delta\varphi_q = \Delta\dot{z}/v_0 \sim (1/v_0) \cdot (2\Delta W/m)^{1/2}.$$

Remembering that  $v_0 = c/n$ , and substituting (7a), we obtain

$$\Delta\varphi_q \sim \frac{ne^{1/2}}{cm^{3/4}} \left(\frac{kh}{\omega}\right)^{1/4} E^{1/2} \quad (8)$$

With the numerical values for the constants and for example  $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$  c.p.s.  $n = 5$  (corresponding to a d.c. accelerating voltage of 10 kv) and  $k = 10$ , we obtain

$$\Delta\varphi_q \sim 10^{-4} E^{*1/2} \text{ rad}, \quad (8a)$$

where  $E^*$  is the amplitude of the field intensity in v/cm.

Such a dispersion of the direction can be detected, if the r. f. field within the cavity has a convenient but not too small amplitude and a reasonable, but

\* This implies the assumption that the absorption and emission of quanta obey the laws of classical statistics [1].

not too short drift space is allowed between the cavity and the collector electrode. However, to make our discussion complete, two disturbing effects have still to be considered.

\*

It is well-known that, if electrons pass through a transverse r. f. field and their transit time is an integer number of periods, then the path of the electrons is displaced parallel to the original one by an amount depending on the amplitude of the field and on the entrance phase-angle of the electrons. Thus a parallel beam remains parallel but its cross section is increased by the

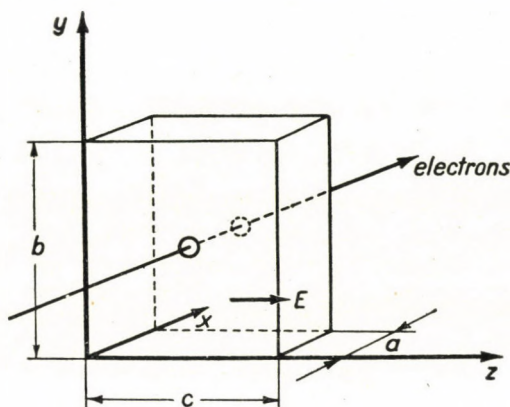


Fig. 1. To the discussion of the interaction in a transverse r. f. field

r. f. field. This increase of the diameter of the beam is  $\Delta z = \int_{t_0}^t \dot{z}(t') dt'$ , which with (4) roughly gives the order of magnitude

$$\Delta z \sim eE_0/m\omega^2 \sim 0,001 E^* \text{ microns}$$

at 10 kMc.p.s. Thus this effect can be neglected, as it is outweighed by the direction spread, if the length of the drift space between the cavity and the collector is  $L > \Delta z / \Delta \varphi_g \sim 10^{-3} E^{*1/2}$  cm, a condition which is always satisfied.

A more serious problem to be considered is the following: as the emission velocity of the electrons is not zero, their velocities when entering the cavity are not strictly the same. Consequently there is also a spread in the transit time of the electrons across the cavity and this causes a classical spread of the direction of the emerging electrons.

Let us suppose that the velocity of the electrons is

$$v = v_0(1 + \varepsilon),$$

so that the transit time is  $a/v = 2\pi k/\omega(1 + \varepsilon)$ . The easiest way to calculate



the transverse component  $\dot{z}$  of the velocity of the electrons when leaving the cavity is to substitute in equ. (4) for  $1/k$  and  $k(1+\varepsilon)/k$  and  $(1-\varepsilon)k$  resp. The latter is justified by the fact that the dispersion in the emission velocities is small relative to  $v_0$ , i. e.  $\varepsilon \ll 1$  and for this reason we may use a power series expansion neglecting terms of higher than the first order in  $\varepsilon$ . The calculation is straightforward and gives

$$\dot{z} = \frac{2\pi k^2}{k^2 - 1} \frac{eF_0}{m\omega} \varepsilon \cos \omega t_0$$

leading to a classical direction spread of the order of magnitude

$$\Delta\varphi_c = z/v \sim (2\pi neE_0/mc\omega) \varepsilon. \quad (9)$$

Comparing equ. (8) and (9) we find

$$\frac{\Delta\varphi_q}{\Delta\varphi_c} \sim \frac{(khm\omega^3)^{1/4}}{\pi(2e)^{1/2}} \frac{1}{E_0^{1/2}\varepsilon}. \quad (10)$$

Substituting the numerical values for the constants and taking for example — as earlier —  $k = 10$ , and  $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$  kMc.p.s., we find

$$\Delta\varphi_q/\Delta\varphi_c \sim E^{*-1/2} \varepsilon^{-1}. \quad (10a)$$

If the electron beam entering the cavity is monokinetic within  $1^0/00$ , which is a conservative assumption, we obtain

$$\Delta\varphi_q/\Delta\varphi_c \sim 1000 E^{*-1/2}. \quad (10b)$$

This result means that for reasonable values of the r. f. field amplitude the quantum effect is by far the most dominating factor.

In spite of the favourable results obtained, one more point has to be discussed. So far we have been dealing mainly with the relative importance of the quantum and the classical effects. If we turn now to the absolute value of the quantum effect, equ. (8a) suggests that in order to detect this effect directly from a visible increase of the cross-section of the beam, an extremely well-focussed beam and a very long drift space is wanted. However, by the following consideration we might ascertain the absolute size of the effect in an indirect way.

Electron beams have not really sharp boundaries, the current density as a function of the distance from the beam axis being given by the Gauss dis-

tribution law. If the total beam current is denoted by  $I_t$ , then the current outside a circle of the radius  $R$  (fig. 2) is given by

$$I_0 = I_t \exp [-(R/r_0)^2]. \tag{11}$$

Now the quantum effect sought makes the natural current density distribution — determined by the cathode temperature, the accelerating voltage and the optical properties of the electron gun — wider. Within the limits of our approximate estimates, we may suppose that the direction distribution due to the quantum effect is also Gaussian. In this case the resulting distribution of the current density will also be of the same type, with a resulting spread, which

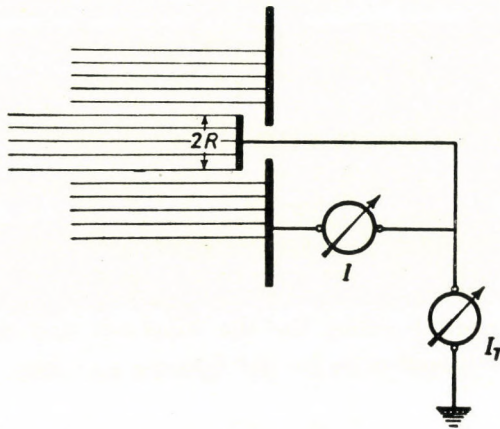


Fig. 2. Collector system for the detection of the effect

is the sum of the spreads of the two individual distributions. Thus the ratio of the currents outside a circle of radius  $R$ , with and without r. f. field is

$$\frac{I}{I_0} = 1 + 2 \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \frac{\delta r_0}{r_0} \sim 1 + 2 \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \frac{L \Delta\varphi_q}{r_0}, \tag{12}$$

where  $L$  is the length of the drift space. The increase of the spread can be detected the better the larger  $R$ , i. e. the central area of the beam cross section left out when measuring the beam current. As a numerical example let us take  $I_t = 10^{-4}$  A and  $I_0 = 10^{-8}$  A. In this case — from equ. (11) —  $(R/r_0)^2 \sim 10$ . If we take further  $r_0 \sim 0,05$  cm and  $L \sim 25$  cm, we obtain

$$I/I_0 \sim 1 + 0,5 (E^*)^{1/2}, \tag{13}$$

using equ. (8) for  $\Delta\varphi$ . If the spread of the beam were caused by some classical effect, the relation between  $I/I_0$  and  $E^*$  would be linear, as seen e. g. from equ.



[9]. Thus by plotting  $(I/I_0)$  *v.*  $E^*$  one can ascertain the quantum nature of the effect without ambiguity.

## REFERENCES

1. *L. P. Smith*, Phys. Rev. **69**, 195, 1946.
2. *J. C. Ward*, Phys. Rev. **80**, 119, 1950.
3. *C. Shulman*, Phys. Rev. **82**, 116, 1951; **83**, 4, 1951.
4. *I. R. Senitzky*, Phys. Rev. **86**, 595, 1952; **90**, 386, 1953.
5. *D. Gábor*, Phil. Mag. **41**, 1172, 1950.

КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ  
С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

П. С. Фараго и Г. Маркс

## Резюме

Если пучок электронов проходит через радиочастотное электромагнитное поле, перпендикулярное направлению распространения пучка, то электроны испытывают угловое рассеяние. Расчеты показали, что при разумно выбранных экспериментальных условиях это угловое рассеяние является результатом лишь квантового характера взаимодействия. С помощью простой системы электродов — как нам кажется — возможно наблюдать не только угловое рассеяние электронов, но, изображая интенсивность тока в зависимости от амплитуды радиочастотного электромагнитного поля, можем контролировать и квантовый характер явления.

В случае квантового эффекта эта кривая имеет другую форму, чем в классическом случае, а именно, в случае квантового эффекта она имеет параболическую, а в последнем случае линейную форму.

# LICHTZERSTREUUNG UND HUBBLEEFFEKT

Von

TH. NEUGEBAUER

PHYSIKALISCHES INSTITUT DER ROLAND EÖTVÖS-UNIVERSITÄT, BUDAPEST

(Vorgelegt von K. Novobátzky. — Eingegangen: 25. I. 1954)

Das Problem, ob es sich bei der Rotverschiebung der Spektrallinien der aussergalaktischen Nebel nicht doch um eine Art Lichtzerstreuungseffekt handelt, wird theoretisch untersucht. Die erste Bedingung einer solchen Deutung ist, dass ein Lichtquant sehr oft unter sehr kleinen Winkeln abgelenkt wird, und diese Ablenkungen sich deshalb herausmitteln. Es wird gezeigt, dass im intergalaktischen Raum tatsächlich solch ein bis jetzt in der Theorie der Lichtzerstreuung unberücksichtigter Effekt auftreten muss. Die Abschätzung der Grössenordnung zeigt jedoch, dass wenn man annimmt, dass die Beugung an Elektronen die Hauptrolle spielt, der zu erwartende Effekt immerhin zu klein wird bzw. dass man viel zu grosse Elektronendichten annehmen müsste. Diese Resultate beziehen sich a fortiori auf noch schwerere Teilchen (Mesonen, Atome usw.). Interessante Ergebnisse erhält man jedoch für Neutrinos. Erstens ist es leicht denkbar, dass Neutrinos tatsächlich in den intergalaktischen Raum hinauskommen können und zweitens wäre der Hubbleeffekt tatsächlich nach dem erwähnten Gedankengang deutbar, wenn man für die bis jetzt unbekannt Konstanten der Neutrinos Werte annehmen würde, die physikalisch recht plausibel sind. Solange wir also über Neutrinos nichts Näheres erfahren, kann die Möglichkeit der Deutung des Hubbleeffektes auf diesem Wege nicht grundsätzlich ausgeschlossen werden. Zuletzt folgen noch einige Bemerkungen über das Problem der Streuung von Licht an Licht im Zusammenhang mit dieser Frage.

## Einleitung

Bekannterweise wurden schon öfters Bedenken dagegen geäussert, dass man aus der Rotverschiebung der Spektrallinien der Spiralnebel [1] (also aus einem einzigen Effekt) Schlüsse auf die Kosmologie und Kosmogonie zieht bzw. daraus die tatsächliche Richtigkeit des Friedmann-Lemaitreschen Weltbildes ableitet. Ausserdem sind die Messergebnisse bezüglich des Hubbleeffektes noch bei weitem nicht so genau, dass sie zwischen den beiden Möglichkeiten, ob es sich um eine Art Dopplereffekt handelt, oder ob die Lichtquanten während ihrer Reise im intergalaktischen Raum (aus einer uns noch unbekannt Ursache) Energie verlieren, entscheiden könnten.<sup>1</sup> Dem Physiker gibt es jedenfalls zu

<sup>1</sup> Handelt es sich tatsächlich um einen Dopplereffekt, so scheint uns die Intensität der Spiralnebel aus zwei Ursachen geschwächt zu sein. Erstens wird die Energie eines jeden einfallenden Lichtquants infolge der Rotverschiebung geschwächt (Energieeffekt) und zweitens fallen infolge der von uns weggerichteten Bewegung weniger Lichtquanten in der Zeiteinheit ein als das der Fall wäre, wenn der Nebel unbeweglich sein würde (Anzahleffekt oder Verdünnungseffekt). Würde dagegen die Rotverschiebung davon herrühren, dass die Lichtquanten (aus einer uns unbekannt Ursache) Energie verlieren, so würde allein der Energieeffekt auftreten. Es ist jedoch bis jetzt nicht gelungen, aus Beobachtungsergebnissen zu entscheiden, welcher Fall tatsächlich vorliegt.



denken, dass es sich um eine Rotverschiebung handelt. Hätte man nämlich eine Violettverschiebung beobachtet, so wäre es unvermeidbar, dass man daraus ganz radikale Schlüsse bezüglich des Weltgebäudes zieht, weil es ja eine ganz abenteuerliche Hypothese wäre, anzunehmen, dass die Lichtquanten entlang ihrer Bahn Energie auflesen. Da man jedoch eine Rotverschiebung beobachtet hat, so wäre es schon denkbar, dass ein ganz kleiner Effekt, der zur Folge hat, dass die Lichtquanten Energie verlieren, uns bis jetzt entgangen ist. In unseren irdischen Experimenten existieren ja die Photonen nur während ganz kleiner Bruchteile einer Sekunde, bei dem Hubbleeffekt handelt es sich dagegen um solche, die vor Jahrmillionen entstanden sind.

Es ist schon ein alter Gedanke, dass es sich bei der betrachteten Erscheinung um eine Art Lichtzerstreuungseffekt handelt. Da das Lichtquant notwendigerweise auf die fragliche Partikel, an der es gestreut wird, einen Impuls überträgt, so nimmt seine Energie bei diesem Prozess ab. Der bekannte Einwand gegen diese Hypothese ist, dass die Lichtzerstreuung selbstverständlich mit einer Richtungsänderung verbunden ist. Würde es sich dagegen um solch eine Art Lichtzerstreuungseffekt handeln, bei dem die unter sehr kleinen Winkelablenkungen erfolgenden Streuungen die ausschlaggebenden sind, so könnten sich diese vielen kleinen Ablenkungen herausmitteln analog wie z. B. Korpuskularstrahlen durch Metallfolien ohne bemerkbare Richtungsänderung abgebremst werden können. Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die theoretische Möglichkeit eines solchen Effektes (ohne jede willkürliche Hypothese) zu untersuchen. Man könnte gleich einwenden, dass mangels einer ganz widerspruchsfreien Quantenelektrodynamik dieses Problem theoretisch überhaupt nicht zu behandeln ist; das ist jedoch nicht der Fall, die Resultate der klassischen Theorie der Lichtzerstreuung können ohne jede Zweideutigkeit in die Sprache der Quantenmechanik übersetzt werden.

§ 1. Zuerst betrachten wir die von einem einzigen Teilchen, dessen Polarisierbarkeit wir mit  $a$  bezeichnen, verursachte Lichtzerstreuung.  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu t$  sei der elektrische Vektor der einfallenden Lichtwelle am Orte des fraglichen Teilchens, dann haben wir für das darin induzierte Dipolmoment

$$= a\mathfrak{E} = a\mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu t. \quad (1)$$

Dieses alternierende Dipol verursacht bekannterweise in seiner Umgebung die elektrischen und magnetischen Feldstärken

$$|e(r, \vartheta)| = |h(r, \vartheta)| = \frac{1}{rc^2} \left| \frac{d^2 p'}{dt^2} \right| \sin \vartheta = \frac{a}{rc^2} \frac{d^2}{dt^2} (\mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu t) \cdot \sin \vartheta, \quad (2)$$

wo  $\vartheta$  den Winkel bedeutet, den die Dipolachse (Richtung des elektrischen Vektors der einfallenden Lichtwelle) und die Beobachtungsrichtung (Streurichtung)

miteinander einschliessen. Weiter folgt aus (2) mit Hilfe des Poyntingschen Vektors der Energiefluss in der Beobachtungsrichtung

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [e, \dot{h}], \quad (3)$$

und dessen Mittelwert nach der Zeit liefert die gestreute Lichtintensität

$$I = \overline{\mathfrak{S}} = \frac{c}{4\pi} \overline{[e, \dot{h}]}. \quad (4)$$

(2) und (4) enthalten die ganze klassische Theorie der Lichtzerstreuung von einer Partikel.

Handelt es sich um zwei Partikeln, so müssen wir die von diesen gestreuten elektrischen Vektoren addieren. Bezeichnen wir mit  $l$  den in der Beobachtungsrichtung auftretenden Gangunterschied der gestreuten Vektoren und ausserdem das Produkt von allen in (2) auftretenden zeitunabhängigen Konstanten mit  $a$ , so folgt für den von beiden Teilchen gestreuten elektrischen Vektor

$$e = a \left\{ \cos 2\pi\nu t + \cos 2\pi\nu \left( t - \frac{l}{c} \right) \right\} \quad (2a)$$

und weiter für die gestreute Lichtintensität nach (4)

$$\begin{aligned} I \text{ prop. } \overline{e^2} = a^2 & \left\{ \overline{\cos^2 2\pi\nu t} + \overline{\cos^2 2\pi\nu \left( t - \frac{l}{c} \right)} + \right. \\ & + \overline{\sin^2 2\pi\nu t} \cdot \overline{\sin^2 2\pi\nu \left( t - \frac{l}{c} \right)} + 2 \overline{\cos 2\pi\nu t} \overline{\cos 2\pi\nu \left( t - \frac{l}{c} \right)} + \\ & \left. + 2 \overline{\cos 2\pi\nu t} \cdot \overline{\sin 2\pi\nu \left( t - \frac{l}{c} \right)} \cdot \overline{\sin 2\pi\nu \left( t - \frac{l}{c} \right)} + 2 \overline{\cos 2\pi\nu t} \cdot \overline{\sin 2\pi\nu t} \cdot \overline{\cos 2\pi\nu \left( t - \frac{l}{c} \right)} \cdot \overline{\sin 2\pi\nu \left( t - \frac{l}{c} \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Berücksichtigen wir hier, dass

$$\overline{\cos^2 2\pi\nu t} = \overline{\sin^2 2\pi\nu t} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{\cos 2\pi\nu t} \cdot \overline{\sin 2\pi\nu t} = 0 \quad (6)$$

ist, so folgt

$$\overline{e^2} = a^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos 2\pi\nu \frac{l}{c} \right\}. \quad (7)$$



Die gestreute Intensität in einer vorgegebenen Richtung kann also in Abhängigkeit vom Argument der trigonometrischen Funktion in (7) alle Werte zwischen Null und der vierfachen von der von einer Partikel gestreuten Intensität  $\left(\frac{1}{2} a^2\right)$  annehmen.

Verallgemeinern wir jetzt die erhaltenen Resultate auf regellos verteilte Partikeln, so folgt analog zu (2a)

$$\begin{aligned} e &= a \sum_{n=1}^N \cos 2\pi\nu \left( t - \frac{l_n}{c} \right) = \\ &= a \sum_{n=1}^N \left( \cos 2\pi\nu t \cdot \cos 2\pi\nu \frac{l_n}{c} + \sin 2\pi\nu t \cdot \sin 2\pi\nu \frac{l_n}{c} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

wo  $l_n$  den Gangunterschied des vom  $n$ -ten Teilchen gestreuten Vektors gegenüber dem von einem willkürlich ausgewählten ersten Teilchen gestreuten Vektor bedeutet. Für die gestreute Intensität folgt weiter, wenn wir auch noch die in (6) angegebenen zeitlichen Mittelwerte berücksichtigen

$$\begin{aligned} I \text{ prop. } \overline{e^2} &= a^2 \overline{\left\{ \sum_{n=1}^N \left( \cos 2\pi\nu t \cdot \cos 2\pi\nu \frac{l_n}{c} + \sin 2\pi\nu t \cdot \sin 2\pi\nu \frac{l_n}{c} \right) \right\}^2} = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sum_{n=1}^N \left\{ \cos^2 2\pi\nu \frac{l_n}{c} + \sin^2 2\pi\nu \frac{l_n}{c} \right\} + \frac{1}{2} a^2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ n \neq m}}^N \cos 2\pi\nu \frac{l_n - l_m}{c}. \end{aligned} \quad (9)$$

Der Faktor in der geschweiften Klammer im ersten Gliede ist gleich eins, und da es sich um eine ganz regellose Verteilung der Teilchen handelt, und wir ausserdem annehmen wollen, dass  $N$  eine grosse Zahl ist, so können wir das zweite Glied wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{2} a^2 2 \binom{N}{2} \overline{\cos 2\pi\nu \frac{l_n - l_m}{c}}. \quad (10)$$

Endlich erhalten wir also

$$I \text{ prop. } \overline{e^2} = \frac{1}{2} a^2 N + a^2 \binom{N}{2} \overline{\cos 2\pi\nu \frac{l_n - l_m}{c}}. \quad (11)$$

Da wegen der regellosen Verteilung das Argument der trigonometrischen Funktion im zweiten Gliede alle möglichen Werte gleichmässig verteilt annehmen wird, so verschwindet deren Mittelwert, und wir erhalten

$$I \text{ prop. } \bar{c}^2 = \frac{1}{2} a^2 N, \quad (12)$$

also das bekannte Resultat, dass bei einer regellosen Verteilung einfach die aus den von den einzelnen Teilchen gestreuten Vektoren sich ergebenden Intensitäten addiert werden müssen.

Ein grundverschiedenes Resultat erhalten wir dagegen, wenn die fraglichen  $N$  Teilchen so nahe beieinander liegen, dass die Wegunterschiede  $l_n - l_m$  sehr klein im Verhältnis zu  $c/\nu = \lambda$  sind. Dann folgt aus (11)

$$I \text{ prop. } \bar{c}^2 = \frac{1}{2} a^2 N + a^2 \binom{N}{2} = \frac{1}{2} a^2 \{N + N(N-1)\} = \frac{1}{2} a^2 N^2. \quad (13)$$

In diesem Fall muss also die von einem Teilchen gestreute Intensität mit dem Quadrat der Zahl der Teilchen multipliziert werden, oder, anders ausgedrückt, im zuerst betrachteten Fall werden die Intensitäten, im letzteren dagegen die elektrischen Vektoren addiert.

Es gibt aber ausser dem betrachteten Fall, dass die streuenden Teilchen sehr nahe beieinander liegen, noch einen anderen, in dem das zweite Glied in (11) nicht verschwindet, und das ist der der Streurichtung, die einen sehr kleinen Winkel mit der Fortpflanzungsrichtung des einfallenden Lichtes einschliesst. In diesem Falle werden die Gangunterschiede  $l_n - l_m$  klein in Verhältnis zu  $\lambda$ , auch dann, wenn die Teilchen nicht nahe beieinander liegen und deshalb folgt wieder unser Resultat (13). Bei materiell zusammenhängenden grösseren Teilchen ist diese Erscheinung, dass nämlich wenn diese Teilchen nicht mehr ganz klein im Verhältnis zu  $\lambda$  sind, die Streuung nach vorne bevorzugt auftritt, unter dem Namen Mie-effekt schon längst bekannt.

Bezüglich unserer Betrachtungen ist jedoch die Feststellung sehr wichtig, dass wenn es sich um  $N$  regellos verteilte Partikeln handelt und  $N$  ausserdem eine recht grosse Zahl ist, die Streuung seitwärts, also unter grossen Ablenkungswinkeln, proportional zu  $N$ , dagegen nach vorne, also unter ganz kleinen Ablenkungswinkeln, proportional zu  $N^2$  erfolgt, d. h. dass die Streuung unter ganz kleinen Ablenkungswinkeln enorm stark bevorzugt wird und das ist der springende Punkt unserer ganzen Überlegung. In der Einleitung haben wir nämlich schon erwähnt, dass zur Deutung des Hubbleeffektes nur ein solcher Lichtzerstreuungseffekt in Frage kommen kann, bei dem Ablenkungen unter sehr kleinen Streuwinkeln sehr stark bevorzugt auftreten.



Man könnte hier einwenden, dass in einem Laboratoriumsversuch, in dem es sich um eine endliche Gasmasse handelt, die Verhältnisse tatsächlich so sein werden, im intergalaktischen Raum aber, wo es sich um eine unendlich ausgedehnte Gasmasse handelt, man den Ablenkungswinkel überhaupt nicht so klein wählen kann, dass der Mittelwert von

$$\cos 2\pi\nu \frac{l_n - l_m}{c} \quad (14)$$

nicht verschwindet. Das kann jedoch nicht der Fall sein. Wie wir sehen werden, muss die streuende Gasmasse den Rückstossimpuls übernehmen, und es ist aus rein theoretischen Gründen sehr unwahrscheinlich, dass das momentan im ganzen unendlich ausgedehnten Gasvolumen der Fall sein könnte. Wir müssen also unbedingt unser Gasvolumen in kleinere »Kohärenzgebiete« aufteilen. In diesem Punkt berührt unser Problem den ganzen Fragenkomplex über das Wesen des Lichtquants und der Quantenelektrodynamik. Abgesehen davon kann man aber auch schon deshalb nicht mit einer unendlichen Ausdehnung in diesem Falle rechnen, weil ja nur ein gewisser Teil einer Kugelwelle noch als eben betrachtet werden kann.

§ 2. Bezeichnen wir die Entfernung eines Spiralnebels mit  $L$ , die Zahl der streuenden Partikeln in der Volumeneinheit mit  $n$  und die im vorigen Paragraphen erwähnte lineare Ausbreitung des Kohärenzgebietes mit  $l$ . Bezüglich der Beschaffenheit der streuenden Partikeln wollen wir vorderhand noch keine Annahme einführen.

Da es sich in unseren Betrachtungen bloss um die Abschätzung der Grössenordnung handelt, so nehmen wir an, dass sich die mit einem Gangunterschiede von  $\lambda/4$  gestreuten Vektoren noch gegenseitig verstärken. Für den dazu gehörenden maximalen Ablenkungswinkel  $\vartheta$  folgt dann

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda/4}{l},$$

oder weil  $\vartheta$  sehr klein ist,

$$\vartheta = \frac{\lambda}{4l}. \quad (15)$$

Die Grösse des kohärent streuenden Volumens sei  $l^2\pi l$ . (Da es sich nämlich bloss um die Abschätzung von Grössenordnungen handelt, so wäre eine genauere Hypothese über die Form dieses Gebietes sowieso uninteressant.) Die davon gestreute Lichtintensität ist dann

$$J \text{ prop. } (l^2\pi l)^2 n^2 \quad (16)$$

d. h

$$J = Cl^6 \pi^2 n^2. \quad (17)$$

Es werden also  $J/h\nu = N^2$  Lichtquanten gestreut, wenn  $J$  die Intensität des gestreuten Lichtes bedeutet. Jedes Photon erleidet dabei einen Energieverlust. Zu dessen Berechnung bezeichnen wir mit  $m$  die Massen der streuenden Partikeln, die totale Masse, die im Kohärenzvolumen enthalten ist, wird dann  $ml^3\pi n$ . Aus der Erhaltung der Energie und des Impulses folgen die Gleichungen

$$h(\nu - \nu') = \frac{1}{2} ml^3 \pi n v^2, \quad (18)$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \vartheta + ml^3 \pi n v \cos \varphi, \quad (19)$$

und

$$\frac{h\nu'}{c} \sin \vartheta = ml^3 \pi n v \sin \varphi, \quad (20)$$

wo  $\nu$  und  $\nu'$  die Frequenzen des einfallenden und gestreuten Lichtquants,  $\vartheta$  den Ablenkungswinkel des letzteren und  $\varphi$  ebenfalls den Ablenkungswinkel der ganzen streuenden Gasmasse bedeuten.  $v$  bedeutet die Rückstossgeschwindigkeit der streuenden Partikel.

Da es sich um sehr kleine Ablenkungswinkel handelt, so können wir  $\sin \vartheta = \vartheta$  setzen, und da ausserdem das Lichtquant an der relativ sehr grossen Gasmasse fast wie an einer Wand reflektiert wird, so folgt

$$\varphi = \frac{180^\circ + \vartheta}{2} - \vartheta = 90^\circ - \frac{\vartheta}{2} \quad \text{also} \quad \sin \varphi = \cos \frac{1}{2} \vartheta.$$

Aus (20) erhalten wir also

$$\frac{h\nu'}{c} \vartheta = ml^3 \pi n v \cos \frac{1}{2} \vartheta = ml^3 \pi n v \left(1 - \frac{\vartheta^2}{8}\right) \quad (21)$$

und da  $\vartheta^2/8$  wieder sehr klein ist

$$v = \frac{h\nu'}{ml^3 \pi n c} \vartheta. \quad (22)$$

(22) setzen wir jetzt in (18) ein :

$$h(\nu - \nu') = \frac{(h\nu')^2}{2ml^3 \pi n c^2} \vartheta^2 \sim \frac{(h\nu)^2}{2ml^3 \pi n c^2} \vartheta^2. \quad (23)$$

Setzen wir hier den maximalen Wert von  $\vartheta$  aus (15) ein, so folgt für die grösste Frequenzänderung



$$h(\nu - \nu') = \frac{(h\nu)^2}{2ml^3\pi nc^2} \cdot \frac{\lambda^2}{16l^2}. \quad (24)$$

§ 3. Unsere nächste Aufgabe ist zu berechnen, wie oft ein Lichtquant gestreut wird. Für die Zahl der einfallenden Lichtquanten, die wir jetzt mit  $N$  bezeichnen, erhalten wir, wenn  $I$  die Intensität des einfallenden Lichtes bedeutet

$$N = \frac{Il^2\pi}{h\nu}. \quad (25)$$

Nach (2) erzeugt ein Volumen von der Grösse  $\pi l^3$ , in dessen Volumeneinheit  $n$  Partikeln enthalten sind, welche einzeln die Polarisierbarkeit  $\alpha$  besitzen, die Feldintensitäten

$$e(r) = \mathfrak{H}(r) = \frac{1}{rc^2} \left| \frac{d^2}{dt^2} (\pi l^3 n \alpha \mathfrak{E} \cdot \sin \vartheta_0) \right|. \quad (26)$$

$\vartheta_0$  bedeutet hier den Winkel, den die Dipolachse (Richtung des elektrischen Vektors der einfallenden Lichtwelle) und die Streurichtung miteinander einschliessen, und  $\mathfrak{E}$  ist der elektrische Vektor der einfallenden Lichtwelle:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu t. \quad (27)$$

Aus (27) und (4) folgt

$$I = \frac{c}{4\pi} [\overline{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}}] = \frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_0^2. \quad (28)$$

Weiter erhalten wir aus (26) analog zu (28) für die gestreute Intensität in einer Richtung, die mit dem elektrischen Vektor der einfallenden Welle den Winkel  $\vartheta_0$  einschliesst

$$J'' = \frac{1}{r^2 c^4} (4\pi^2 \nu^2 \pi l^3 n \alpha)^2 \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \mathfrak{E}_0^2 \sin^2 \vartheta_0, \quad (29)$$

und für die ganze von unserem Volumen  $\pi l^3$  kohärent gestreute Intensität, wenn wir ein räumliches Polarkoordinatensystem  $(\vartheta, \varphi)$  einführen, dessen Achse die Richtung des einfallenden Lichtes ist

$$J' = \frac{1}{r^2 c^4} [4\pi^3 l^3 \nu^2 n \alpha]^2 \frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_0^2 \int_{\vartheta=0}^{\lambda/4l} \int_{\varphi=4}^{2\pi} \sin^2 \vartheta_0 r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (30)$$



$\lambda/4l$  ist der in (15) berechnete Grenzwinkel für die hier betrachtete Art von Streuung. Führen wir ausserdem aus (28) den Wert von  $I$  ein, so folgt

$$\frac{J'}{I} = \frac{1}{c^4} [4\pi^3 l^3 \nu^2 n\alpha]^2 \int_{\vartheta=0}^{\lambda/4l} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 \vartheta_0 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (31)$$

Nehmen wir entsprechend den tatsächlich auftretenden Verhältnissen an, dass es sich nicht um linear polarisiertes sondern um natürliches Licht handelt, das wir durch zwei aufeinander senkrecht polarisierte Strahlen ersetzen und analog zur Definition von  $\vartheta_0$  jetzt die Winkel, den die elektrischen Vektoren der erwähnten zwei Teilstrahlen mit der Streurichtung einschliessen, mit  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  bezeichnen, so haben wir

$$\sin^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_2 = 2 - \cos^2 \vartheta_1 - \cos^2 \vartheta_2 = 1 + \cos^2 \vartheta, \quad (32)$$

weil ja die Richtungen der zwei elektrischen Vektoren und die Fortpflanzungsrichtung des einfallenden Lichtes aufeinander senkrecht stehen. Analog zu (27) haben wir jetzt

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_{0x} \cos 2\pi\nu t \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_{0y} \cos 2\pi\nu t, \quad (33)$$

$$|\mathfrak{E}_{0x}| = |\mathfrak{E}_{0y}| \quad (34)$$

und entsprechend (28)

$$I = \frac{c}{8\pi} (\mathfrak{E}_{0x}^2 + \mathfrak{E}_{0y}^2); \quad \frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_{0x}^2 = \frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_{0y}^2 = \frac{1}{2} I. \quad (35)$$

Statt (31) haben wir dann unter Berücksichtigung von (32)

$$\frac{J}{I} = \frac{1}{c^4} (4\pi^3 l^3 \nu^2 n\alpha)^2 \frac{1}{2} \int_0^{\lambda/4l} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (36)$$

Da jedoch  $\lambda/4l$  sehr klein ist, so folgt für das Integral

$$\int_0^{\lambda/4l} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi \cdot 2 \int_0^{\lambda/4l} \vartheta d\vartheta = \frac{\lambda^2 \pi}{8l^2}. \quad (37)$$

Endlich erhalten wir also aus (36) und (37) statt der auf linear polarisiertes



Licht sich beziehenden Formel (31), für einfallendes natürliches Licht

$$\frac{J}{I} = \frac{1}{c^4} (4\pi^3 l^3 \nu^2 n \alpha)^2 \frac{\lambda^2 \pi}{16l^2}, \quad (38)$$

oder wenn wir mit  $N = Il^2\pi/h\nu$  die Zahl der einfallenden und mit  $N' = J/h\nu$  die der gestreuten Lichtquanten bezeichnen

$$\frac{N'}{N} = \frac{\pi^5 l^2 \nu^4 n^2 \alpha^2 \lambda^2}{c^4} = \frac{\pi^5 l^2 n^2 \alpha^2}{\lambda^2}. \quad (39)$$

(39) gibt also die Zahl der von unserem betrachteten Kohärenzgebiet gestreuten Quanten im Verhältnis zu den der einfallenden an. Im ganzen Lichtweg von der Länge  $L$  ist dieses Gebiet jedoch  $L/l$ -mal enthalten; für die ganze Zahl der entlang des Lichtweges infolge des betrachteten Prozesses gestreuten Quanten haben wir also

$$\mathfrak{N} = N' \frac{L}{l} \quad (40)$$

und daher für das Verhältnis von  $\mathfrak{N}$  zu  $N$  aus (39) und (40)

$$\frac{\mathfrak{N}}{N} = \frac{\pi^5 l L \nu^4 n^2 \alpha^2 \lambda^2}{c^4} = \frac{\pi^5 l L n^2 \alpha^2}{\lambda^2}. \quad (41)$$

§ 4. Unsere Ergebnisse (24) und (41) wollen wir jetzt mit der Erfahrung vergleichen. Die erste Bedingung, die erfüllt sein muss, ist jedenfalls, dass  $\mathfrak{N}/N$  eine sehr grosse Zahl sein muss, weil sich ja nur in diesem Falle die vielen kleinen Richtungsablenkungen herausmitteln können. Zuerst wollen wir annehmen, dass die streuenden Teilchen freie Elektronen sind. Die optische »Polarisierbarkeit« dieser freien Elektronen, die wir für  $\alpha$  in (41) einsetzen müssen, erhält man bekannterweise am einfachsten, wenn man ein quasielastisch gebundenes Elektron betrachtet, auf das der elektrische Vektor der einfallenden Lichtwelle einwirkt. Wenn wir noch mit  $k^2$  die Konstante der quasielastischen Kraft bezeichnen, so erhalten wir die folgende Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e \mathfrak{E}_0 \cos 2\pi \nu t - k^2 x. \quad (42)$$

Löst man diese Differentialgleichung und nimmt dann an, dass  $k^2$  gegen Null geht, so folgt endlich für die gesuchte optische Polarisierbarkeit des freien Elektrons



$$\alpha = - \frac{e^2}{4\pi^2 m} \frac{1}{\nu^2}. \quad (43)$$

Die Abschätzung der Grösse von  $\alpha$  in der Umgebung der NaD-Linie liefert das Resultat

$$\alpha \sim - 2 \cdot 10^{-23}. \quad (44)$$

Für  $l$  setzen wir vorerst (mangels einer besseren Hypothese) den grössten Gangunterschied ein, bei dem man noch Interferenzen feststellen konnte, also etwa 1,5  $m$ , für  $L$  wollen wir eine Million Lichtjahre also rund  $10^{24}$  cm einsetzen, das ist die Grössenordnung der kleinsten im intergalaktischen Raum vorkommenden Entfernungen zwischen zwei Spiralnebeln. Für  $\lambda$  benutzen wir wieder die Wellenlänge der NaD-Linie. Eine schwierigere Frage ist die Grössenordnung von  $n$ . Nach einer Zusammenstellung von Dunham [2] beträgt die Elektrodichte im interstellaren Raum 14,4 Elektronen pro  $\text{cm}^3$ , diese Grösse wollen wir in (41) einsetzen, wir bemerken aber ausdrücklich, dass sich diese Angabe nicht auf den intergalaktischen, sondern auf den interstellaren Raum bezieht. Aus den angegebenen numerischen Werten folgt also endlich

$$\frac{\mathfrak{N}}{N} \sim 3,46 \cdot 10^{-6}. \quad (45)$$

Wir sehen also, dass dieser Wert viel zu klein ist, weil ja die erste Bedingung für die Herausmittlung der Richtungsablenkungen die sein müsste, dass  $\mathfrak{N}/N$  eine recht grosse Zahl ist.

Wir müssen noch die Frage beantworten, ob nicht die interstellaren Atome zu dem betrachteten Effekt noch einen bemerkbaren Beitrag liefern könnten. Nach den erwähnten Angaben von Dunham fallen auf ein  $\text{cm}^3$  bloss 0,7 Wasserstoffatome, und da deren Polarisierbarkeit  $6,63 \cdot 10^{-25}$  beträgt, so würde ihre Berücksichtigung unser Resultat (45) nur ganz unwesentlich beeinflussen. Ausserdem müssen entsprechend der Zahl der Elektronen, (da andere ionisierte Atome kaum eine Rolle spielen) ebenso viele Protonen vorhanden sein. Da jedoch nach (43) in der Formel der Polarisierbarkeit die Masse im Nenner steht, so ist deren Beitrag zu (45) ganz unbedeutend. Ebenfalls ganz unbedeutend sind die im interstellaren Raum vorhandenen Na, K, Ca und Ti Atome, wegen ihrer sehr geringen Zahl. Es sei ausserdem nochmals ausdrücklich hervorgehoben, dass sich die numerischen Angaben von Dunham nicht auf den intergalaktischen sondern auf den interstellaren Raum beziehen.

Vollständigkeitshalber wollen wir noch die Grössenordnung unserer Formel (24) abschätzen, die wir jetzt in der Form

$$\frac{h(\nu - \nu')}{h\nu} = \frac{h\nu}{2ml^3 \pi n c^2} \frac{\lambda^2}{16l^2} = \frac{h}{32ml^5 \pi n \nu} \quad (46)$$



schreiben. Setzen wir hier wieder für  $m$  die Masse eines Elektrons, für  $n$  die Elektronendichte 14,4 und für  $\nu$  die Frequenz der Na D-Linie ein, so folgt

$$\frac{h(\nu - \nu')}{h\nu} \sim 1,2 \cdot 10^{-28}. \quad (47)$$

Dieser Zahlenwert wäre selbstverständlich nicht zu klein, wenn dazu ein entsprechend grosser Wert von (41) bzw. (45) gehören würde, was jedoch, wie wir gesehen haben, nicht der Fall ist.

§ 5. Zuletzt berechnen wir noch die von einer Partikel in alle Richtungen gestreute Intensität, woraus wir mit Hilfe der Gesamtzahl der im Lichtweg enthaltenen Partikeln, die ganze Lichtschwächung erhalten. Diese Grösse hängt zwar nicht mit dem in dieser Arbeit besprochenen Problem unmittelbar zusammen, gibt jedoch diesbezüglich eine gewisse Aufklärung, wie gross überhaupt die Teilchendichte im intergalaktischen Raum sein könnte, weil ja selbstverständlich diese Lichtschwächung nicht zu gross angenommen werden kann.

Es sei also wieder  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos 2\pi\nu t$  der elektrische Vektor der einfallenden Lichtwelle, mit Hilfe von (2) und (3) folgt dann für die von einer Partikel allseitig gestreute Lichtintensität

$$i'' = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{c^4 r^2} \left[ \frac{d^2}{dt^2} (a\mathcal{E}) \right]^2 r^2 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 \vartheta_0 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \quad (48)$$

wo wir wieder die in der Formel (31) benützten Bezeichnungen einführen. Nach Durchführung der Derivationen nach der Zeit und Berechnung des zeitlichen Mittelwertes analog zu (28) folgt weiter

$$i'' = \frac{1}{4\pi c^3} (4\pi^2 \nu^2 a)^2 \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta_0 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (49)$$

Handelt es sich nicht um linear polarisiertes sondern um natürliches einfallendes Licht, so zerlegen wir dieses wieder analog zu (33) in zwei aufeinander senkrecht linear polarisierte Komponenten, schreiben also

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{0x} \cos 2\pi\nu t \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{0y} \cos 2\pi\nu t \quad (50)$$

und

$$|\mathcal{E}_{0x}| = |\mathcal{E}_{0y}|. \quad (51)$$

Statt des einen Winkels  $\vartheta_0$  führen wir jetzt wieder die Winkel  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  ein, die eine willkürliche Streurichtung mit den Richtungen der elektrischen Vek-

toren der zwei linear polarisierten Komponenten einschliesst. Mit Hilfe von (32) erhalten wir dann aus (49) für die von einer Partikel (deren Polarisierbarkeit wir mit  $\alpha$  bezeichnen) allseitig gestreute Lichtintensität im Falle von einfallendem natürlichen Licht

$$i' = \frac{1}{4\pi c^3} (4\pi^2 \nu^2 \alpha)^2 \frac{1}{2} \mathfrak{G}_{0x}^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (52)$$

Die Integrationen können jetzt schon durchgeführt werden und unter Berücksichtigung von (35) folgt

$$i' = \frac{1}{c^4} (4\pi^2 \nu^2 \alpha)^2 \frac{1}{2} I \left( 2 + \frac{2}{3} \right) 2\pi = \frac{128}{3} \frac{\pi^5 \alpha^2}{\lambda^4} I. \quad (53)$$

Bezeichnen wir wieder mit  $n$  die Zahl der fraglichen Partikeln in einem  $\text{cm}^3$  der intergalaktischen Materie, so folgt für den hier auftretenden scheinbaren Absorptionskoeffizienten (Turbiditätskoeffizienten)

$$\tau = \frac{128}{3} \frac{\pi^5 \alpha^2}{\lambda^4} n \quad (54)$$

und für die Lichtschwächung in einer Entfernung  $L$

$$I = I_0 e^{-\tau L} = I_0 e^{-\frac{128}{3} \frac{\pi^5 \alpha^2}{\lambda^4} n L}. \quad (55)$$

Zur Abschätzung der Grösse von  $\tau$  nehmen wir wieder an, dass die fraglichen Partikeln Elektronen sind, dann müssen wir für  $\alpha$  nach (44)  $-2 \cdot 10^{-23}$  einsetzen; benützen wir ausserdem wieder für  $n$  die im interstellaren Raum festgestellte Elektronendichte  $n = 14,4$ , so folgt für die Grössenordnung von  $\tau$

$$\tau \sim 6 \cdot 10^{-24}. \quad (56)$$

Setzen wir für  $L$  wieder eine Million Lichtjahre, also rund  $10^{24}$  cm ein, so folgt für den in (55) stehenden Exponenten

$$\tau L \sim 6 \quad (57)$$

also ein absurd grosser Wert. Wir sehen also, dass schon aus diesem Grund eine Elektronendichte im intergalaktischen Raum, von der Grössenordnung der im interstellaren Raum tatsächlich festgestellten, ganz unmöglich ist.



§ 8. Unsere Resultate wollen wir jetzt noch in die Form der bei der Besprechung des Hubbleeffektes benützten empirischen Zusammenhänge bringen, um die theoretischen Möglichkeiten zur Deutung der Rotverschiebung bequemer überblicken zu können.

Aus (41) und (46) folgt

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\mathfrak{N}}{N} \cdot \frac{h(v - v')}{hv} = \frac{\pi^5 L n \alpha^2 h}{32 m l^4 c \lambda} \quad (58)$$

Setzen wir hier wieder die für Elektronen schon bei der Abschätzung der Grösse von (41) und (46) benutzten numerischen Werte ein und nehmen wieder an, dass  $L$  gleich einer Million Lichtjahre also rund  $10^{24}$  cm ist, so folgt

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim 4,1 \cdot 10^{-34}, \quad (59)$$

was man aus (45) und (47) selbstverständlich auch unmittelbar erhält.

Fasst man den Hubbleeffekt tatsächlich als einen Dopplereffekt auf, so kann man ihn mit Hilfe der folgenden empirischen Formel beschreiben [3]:

$$V_{\frac{\text{km}}{\text{sec}}} = 580 \cdot 10^{-6} R_{pc}, \quad (60)$$

wo  $V$  die aus der Rotverschiebung berechnete radiale Geschwindigkeit in km und  $R_{pc}$  die Entfernung des fraglichen Spiralnebels ausgedrückt in Parsec bedeutet. (60) wollen wir jetzt in CGS-Einheiten umrechnen, es bedeute  $v$  die Radialgeschwindigkeit und  $L$  die Entfernung in diesen Einheiten, dann haben wir

$$v = 1,88 \cdot 10^{-17} L, \quad (61)$$

und da

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \quad (62)$$

ist, so folgt

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 6,29 \cdot 10^{-28} L. \quad (63)$$

Setzen wir hier noch  $L = 10^{24}$  cm ein, so haben wir

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 6,29 \cdot 10^{-4}. \quad (64)$$

Ein Vergleich von (59) und (64) zeigt gleich, dass der besprochene Effekt zur theoretischen Deutung des Hubbleeffektes viel zu klein ist, wie wir das ja schon



erwähnt haben. An Hand der Formel (58) können wir aber jetzt leicht entscheiden, ob der Hubbleeffekt auf diesem Wege deutbar wäre, wenn wir für die in (58) stehenden Grössen andere numerische Werte annehmen würden, selbstverständlich so, dass man deswegen nicht mit anderen Erfahrungen in Widerspruch gerät.

Die Elektronendichte  $n$  geht linear in (58) ein, und es wäre deshalb ganz unmöglich, eine so hohe Elektronendichte im intergalaktischen Raume anzunehmen, dass (58) und (63) von derselben Grössenordnung werden. Abgesehen von der Absurdität einer so grossen Dichte im intergalaktischen Raum, würde daraus nach (54) ein unmöglich grosser scheinbarer Absorptionskoeffizient folgen. Wie wir im §5 gesehen haben, ist das ja schon der Fall, wenn man bloss die im interstellaren Raum festgestellte Elektronendichte noch im intergalaktischen Raum als angenähert gültig annehmen würde. Eine weitere Möglichkeit wäre für  $l$  einen anderen Wert zu benützen. Wie wir schon am Anfang dieser Arbeit besprochen haben, ist die richtige Wahl der Grössenordnung von  $l$  der schwierigste Punkt unserer theoretischen Untersuchung. Doch müssten wir um eine grössenordnungsmässige Übereinstimmung von (58) und (63) erreichen zu können,  $l$  so klein wählen, dass das schon einfachen Laboratoriumsversuchen (z. B. der Beobachtung der Lichtzerstreuung von grösseren Teilchen) widersprechen würde. Davon abgesehen, würde aber auch eine entsprechende Wahl der Grösse von  $l$  nichts nützen, weil ja neben der verlangten numerischen Übereinstimmung von (58) und (63) die Formel (41) einen grossen numerischen Wert liefern müsste, in (41) steht jedoch  $l$  im Zähler. Die entgegengesetzte Möglichkeit wäre, anzunehmen, dass  $l$  recht gross, also etwa nahe der Grössenordnung von  $L$  wäre, auf diese Möglichkeit haben wir schon am Ende des §1 hingewiesen. Bezeichnen wir diesen neuen Wert von  $l$  mit  $L'$ , dann haben wir statt (41)

$$\frac{\mathfrak{N}}{N} = \frac{\pi^6 L' L n^2 a^2}{\lambda^2}. \quad (41a)$$

Bei dieser Wahl von  $l$  könnte also unsere Bedingung, dass (41) eine recht grosse Zahl sein soll, tatsächlich erfüllt sein. Wie wir ebenfalls schon erwähnt haben, entsteht aber jetzt die Schwierigkeit, dass es jedenfalls schwer denkbar ist, dass das Lichtquant auf alle Atome einer grossen Gasmasse gleichzeitig Impuls überträgt. Nehmen wir dagegen an, dass das fragliche Lichtquant nur einem Atom Impuls abgibt, so müssen wir unsere Formel (46) abändern, wie das aus der Herleitung dieser Formel unmittelbar erhellt. Erstens fällt dann das Produkt  $l^3 \pi n$  im Nenner des ersten Faktors weg bzw. wird gleich eins und im zweiten Faktor steht jetzt im Nenner  $L'^2$  statt  $l^2$ . Wir erhalten also

$$\frac{h(\nu - \nu')}{h\nu} = \frac{h\nu}{2mc^2} \frac{\lambda^2}{16L'^2}. \quad (46a)$$



Der erste Faktor wird zwar infolge des Wegbleibens des Produktes  $l^3\pi n$  im Nenner grösser, der zweite dagegen viel kleiner, so dass auf diesem Wege kaum eine bessere numerische Übereinstimmung zwischen (58) und (63) erreicht werden kann. Unsere jetzt besprochene Annahme über die Grösse von  $l$  könnte jedoch eine Bedeutung haben in der weiter unten zu besprechenden Rolle der Neutrinos bei der Verursachung des Hubbleeffektes.

Alles was wir bis jetzt in bezug auf Elektronen gesagt haben, muss sich a fortiori auch auf schwerere Teilchen (Mesonen, Atome usw.) beziehen. In (58) steht ja die Masse  $m$  im Nenner und das Quadrat der Polarisierbarkeit, die ja bei solchen Teilchen geringer ist, im Zähler. Abgesehen davon ist nach unserem heutigen Wissen, das Vorhandensein von Mesonen im intergalaktischen Raum sehr unwahrscheinlich. Damit haben wir also bewiesen, dass Elektronen oder noch schwerere Teilchen bei der Deutung des Hubbleeffektes keine Rolle spielen können. Die Verhältnisse sind jedoch ganz anders im Falle der Neutrinos. Erstens ist uns deren weiteres Schicksal, abgesehen vielleicht von einer ganz neuen Untersuchung von Reines und Cowan [4] ganz unbekannt. Da es jedoch bis jetzt nicht gelungen ist zu zeigen, dass jegliche Materie die Neutrinos bemerkbar absorbieren würde, so ist die Hypothese nicht von der Hand zu weisen, dass Neutrinos im intergalaktischen Raum vorhanden sein könnten. Zweitens können wir bis jetzt für die Masse und das magnetische Moment der Neutrinos nur obere Grenzen angeben, und es ist uns nicht bekannt, ob das elektromagnetische Feld auf Neutrinos überhaupt und wenn ja in welcher Masse einwirkt. Ist diese Einwirkung überhaupt nicht vorhanden, so ist  $\alpha = 0$ , und damit wäre die Rolle der Neutrinos bezüglich unserer theoretischen Untersuchung ganz bedeutungslos. Ist das jedoch nicht der Fall, so wäre es schon möglich, dass Neutrinos hier eine Bedeutung haben könnten. Dazu müssen wir folgendes beachten: (41) müsste, um den Hubbleeffekt auf diesem Wege deuten zu können, eine recht grosse Zahl sein, dagegen darf (54) nicht gross werden, weil ja dann der intergalaktische Raum überhaupt nicht durchsichtig wäre. In (41) steht das Produkt  $n^2a^2$  als Faktor, in (54) dagegen  $na^2$ . Durch entsprechende Wahl von  $a$  und  $n$  können wir tatsächlich erreichen, dass  $n^2a^2$  sehr gross wird,  $na^2$  dagegen klein bleibt, dazu muss nur  $a$  recht klein, dagegen  $n$  gross sein, was physikalisch garnicht unvernünftig ist. Der Faktor  $na^2$  steht ausserdem auch noch in unserem Endresultat (58) und da wir postuliert haben, dass dieser Faktor klein sein soll, so könnte man denken, dass diese Hypothese auch unser Endresultat viel zu klein macht. Das ist jedoch nicht der Fall, weil in (58) die Masse des Neutrinos ( $m$ ) im Nenner steht; wählen wir die als recht klein, was wieder physikalisch sehr plausibel ist, so kann (58) einen verhältnismässig grossen numerischen Wert annehmen. Unser Postulat, dass (54) klein sein soll, wird dadurch nicht beeinflusst, weil (54) von  $m$  unabhängig ist.

Solange wir also über die physikalischen Konstanten der Neutrinos nichts Näheres erfahren, kann die Möglichkeit, dass der Hubbleeffekt von Neutrinos



verursacht wird, nicht ausgeschlossen werden. Im Zusammenhang mit dieser Frage sei nur noch erwähnt, dass man eine gewisse Lichtschwächung im intergalaktischen Raume tatsächlich beobachtet hat. Statt der theoretischen Formel

$$\log N = 0,60 m + \text{konst}, \quad (65)$$

wo  $N$  die Anzahl der Nebel pro Quadratgrad bis zur scheinbaren Helligkeit  $m$  bedeutet, erhielt nämlich *Hubble* [5] aus seinen Beobachtungen die empirische Formel

$$\log N = 0,501 m - 7,371. \quad (66)$$

Eine weitere theoretische Möglichkeit zur Deutung des Hubbleeffektes, die wir nicht ganz unerwähnt lassen wollen, wäre anzunehmen, dass dieser Effekt eine Folge der Streuung von Licht an Licht ist. Dazu wäre notwendig, dass die verhältnismässig grossen Quanten des sichtbaren Lichtes sehr oft mit ganz kleinen Quanten »zusammenstossen«, und die vielen kleinen Richtungsablenkungen sich demzufolge herausmitteln. Bezüglich der Streuung von Licht an Licht liegen nur die theoretischen Arbeiten von *Euler* und *Gockel* [6] und *Karplus* und *Neuman* [7] vor, experimentell ist diesbezüglich garnichts bekannt. Die postulierten vielen kleinen Quanten könnten im intergalaktischen Raum dagegen tatsächlich vorhanden sein, weil ja nach den neuesten Untersuchungen die starken Radioquellen im Schwan und im Perseus von im Zusammenstoss sich befindenden Galaktiken herrühren [8]. Unsere Kenntnisse über diese letztere Deutungsmöglichkeit sind jedoch sowohl theoretisch wie empirisch viel zu mangelhaft, als dass wir darüber etwas Positives aussagen könnten. Man könnte übrigens auch die Frage umkehren und aus der Hypothese, dass der Hubbleeffekt eine Folge der Streuung von Licht an Licht ist, die Grösse dieser Wechselwirkung berechnen. Es sei nur noch erwähnt, dass nach dieser letzteren Auffassung der Hubbleeffekt eine (kleine) Näherung der Lichtquanten-Energie zur Äquipartition wäre.

#### *Zusatz bei der Korrektur*

Nach dem Einsenden dieser Arbeit (20. I. 1954.) ist eine Veröffentlichung von *E. Finlay-Freundlich* (Phil. Mag. 45, 303, 1954) erschienen, die bezüglich des hier besprochenen Problems nicht unerwähnt bleiben kann. Der genannte Verfasser findet, dass die Rotverschiebung der Spektrallinien der zur Gruppe des Orionnebels gehörenden B-Sterne rund zehnmal so gross ist, als das aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgen würde. *Finlay-Freundlich* vermutet, dass diese Rotverschiebung eine Folge des Energieverlustes der Photonen im Strahlungsfelde des Sternes ist und findet die folgende halbempirische Formel

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = - AT^l,$$

wo  $A$  eine Konstante,  $T$  die Temperatur des Strahlungsfeldes und  $l$  die Länge



des Lichtweges im Strahlungsfelde ist. Finlay—Freundlich zeigt, dass diese Formel auch in den anderen Spektraltypen gültig ist. Eine sehr wichtige Konsequenz dieser Untersuchung ist, dass wenn die oben stehende Formel tatsächlich richtig ist, man den Hubbleeffekt damit deuten kann, dazu muss nur eine Temperatur des Strahlungsfeldes im intergalaktischen Raum von  $1,9-6^1$  K angenommen werden.

D. ter Haar bespricht in einer darauffolgenden Arbeit (Phil. Mag. 45, 320, 1954) die Resultate von Finlay-Freundlich und kommt zu den Resultaten, dass weder der Compton-Effekt, noch die schon erwähnte von Euler und Gockel berechnete Wechselwirkung zwischen Photonen die erwähnten Ergebnisse erklären könnte. D. ter Haar hält es noch für das Wahrscheinlichste, dass es sich um eine (unbekannte) Wechselwirkung zwischen Photonen und Elektronen handelt.

Ausserdem sei es noch erwähnt, dass man nach neuen sich auf die Cephei Veränderlichen beziehenden Untersuchungen die Hubblesche Expansionskonstante wahrscheinlich halbieren muss (vgl. P. ten Bruggencate, Naturwiss. 41, 173, 1954), doch bleiben davon unsere Berechnungen, in denen es sich nur um die Abschätzung von Grössenordnungen handelt, unberührt.

#### LITERATUR

1. Vgl. E. Hubble, Das Reich der Nebel. Fr. Vieweg, Braunschweig 1938. (Deutsche Übersetzung des Werkes: The Realm of the Nebulae).
2. T. Dunham, Proc. Amer. Phil. Soc. 81, 227, 1939.
3. Vgl. W. Becker, Sterne und Sternsysteme. 2. Aufl. Th. Steinkopf, Dresden und Leipzig, 1950.
4. F. Reines u. C. L. Cowan, Phys. Rev. 92, 830, 1953.
5. E. Hubble, Astrophys. Journ. 84, 517, 1936.
6. H. Euler u. B. Gockel, Die Naturwiss. 23, 246, 1935.
7. R. Karplus u. M. Neuman, Phys. Rev. 83, 776, 1951.
8. Vgl. z. B. den zusammenfassenden Bericht von M. Laffineur, Onde Électrique, 33, 173, 1953.

#### РАССЕЯНИЕ СВЕТА И ЭФФЕКТ HUBBLE

Т. Нейгебауэр

#### Резюме

С теоретической точки зрения рассматривается вопрос о том, не обуславливается ли красное смещение спектральных линий спиральных туманностей все-таки каким-либо эффектом рассеяния света. Первое условие для такого рода теоретического истолкования это — малость угла рассеяния в отдельных актах и многократность актов рассеяния, вследствие которых отклонения светового кванта усредняются. В работе показано существование эффекта, не учтенного до настоящего времени, в теории рассеяния света, в межгалактическом пространстве. Оценка порядка величины эффекта показывает, что этот эффект весьма мал, если предположить, что рассеяния на электронах играют основную роль, или необходимо предполагать весьма большую электронную плотность. — Эти результаты а fortiori относятся и к более тяжелым частицам (мезонам, атомам и т. д.). Интересный результат получается в случае нейтрино. Во-первых весьма легко представить себе, что нейтрино могут находиться в межгалактическом пространстве и во-вторых легко объяснить эффект Hubble на основе изложенного представления, если соответствующим образом выбрать до настоящего времени неизвестные постоянные нейтрино. До тех пор, пока о нейтрино более подробные сведения не имеются, объяснение эффекта Hubble по этому пути нельзя исключить. В конце работы сделаны некоторые замечания, связанные с изложенными здесь вопросами, относительно рассеяния света на свете.



# FREDHOLM THEORY OF HEITLER'S INTEGRAL EQUATION

By

S. N. BISWAS

DEPARTMENT OF THEORETICAL PHYSICS, INDIAN ASSOCIATION FOR THE CULTIVATION OF SCIENCE, CALCUTTA

(Presented by L. Jánossy—Received 1. II. 1954)

The Fredholm theory of non-homogeneous integral equation has been applied to Heitler's integral equation for radiation damping in scattering processes which are beset with divergence difficulties. The general convergence of the solution has been discussed, from the mathematical point of view. The Fredholm solution has been obtained for various meson-nucleon scattering processes and it has been found that the results agree with those obtained otherwise.

## 1. Introduction

Various methods have been formulated by different authors to obtain an approximate solution of Heitler's integral equation. Of these, variational techniques [1] are of frequent use. But the serious objection to this technique is that it fails to account for the accuracy of the solution. To circumvent this difficulty an iterative procedure was developed by the author [2]. It was found that in some cases the solution agrees with the exact solution already known.

Since Heitler's integral equation is closely related to Fredholm's integral equation of the second kind, it is of particular interest to study Heitler's integral equation from the point of view of Fredholm's theory of solution.

In the following sections we have indicated the method of solution of the equation and then we have shown the applicability of the method in various scattering processes.

## 2. Fredholm Solution

In this section we obtain the Fredholm Solution [3] of Heitler's integral equation of radiation damping namely,

$$(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}_0) = g(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}_0) + \lambda \int g(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}') f(\boldsymbol{\kappa}', \boldsymbol{\kappa}_0) d\Omega'; \quad \lambda = \frac{i\kappa}{4\pi}, \quad (2.1)$$



where  $g(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}_0)$  is the scattering amplitude in Born's first approximation,  $g(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}')$  the kernel of the integral equation and  $f(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}_0)$  which we are to find out, the scattering amplitude including radiation reaction.

The Fredholm solution of (2.1) is given by

$$f(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}_0) = g(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}_0) + \lambda \int \frac{D(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{h}; \lambda)}{d(\lambda)} g(\mathbf{h}, \boldsymbol{\kappa}_0) d\Omega_{\mathbf{h}}, \quad (2.2)$$

where the Fredholm resolvent  $D(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{h}; \lambda)$  and Fredholm determinant  $d(\lambda)$  are given by

$$D(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{h}; \lambda) = g(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{h}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{\lambda^n}{n!} D_n(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{h}), \quad (2.3)$$

$$d(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{a_n}{n!} \lambda^n, \quad (2.4)$$

with

$$D_n(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{h}) = \int \dots \int \begin{vmatrix} g(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{h}) & g(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}_1) & \dots & g(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}_n) \\ g(\boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{h}) & g(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_1) & \dots & g(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(\boldsymbol{\kappa}_n, \mathbf{h}) & g(\boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\kappa}_1) & \dots & g(\boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\kappa}_n) \end{vmatrix} d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_n \quad (2.5)$$

and

$$a_n = \int \dots \int \begin{vmatrix} g(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_1) & g(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) & \dots & g(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_n) \\ g(\boldsymbol{\kappa}_2, \boldsymbol{\kappa}_1) & g(\boldsymbol{\kappa}_2, \boldsymbol{\kappa}_2) & \dots & g(\boldsymbol{\kappa}_2, \boldsymbol{\kappa}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(\boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\kappa}_1) & g(\boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\kappa}_2) & \dots & g(\boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\kappa}_n) \end{vmatrix} d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_n. \quad (2.6)$$

For the convergence of the Fredholm solution it is required to show that the series (2.3) and (2.4) are convergent.

For (2.4), we see that, as the scattering amplitude  $g(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}')$  is a continuous function of scattering angle, we have  $|g(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}')| < M$ , where  $M$  is independent of angle. Again with the aid of Hadamard's lemma [3] we have

$$|a_n| < n^{n/2} (2M)^n \pi^{2n};$$

writing

$$n^{n/2} (2M)^n \pi^{2n} = (n!) b_n$$

we see

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n \text{ is absolutely convergent,}$$

since

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1}/b_n) \rightarrow 0.$$

Thus the series  $d(\lambda)$  is convergent for all values of  $\lambda$  and an integral function of  $\lambda$ .

Likewise we can prove the convergence of  $D(\boldsymbol{x}, \mathbf{h}; \lambda)$ .

Now it can be easily verified [3] that if the kernel of the integral equation (2.1) namely,  $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ , be capable of expanding in the form

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{m=1}^n f_m(\boldsymbol{x}) g_m(\boldsymbol{x}'),$$

then  $d(\lambda)$  and  $D(\boldsymbol{x}, \mathbf{h}; \lambda)$  are polynomials in  $\lambda$  of degree  $n$ . Thus if

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = g_1(\boldsymbol{x}) g_2(\boldsymbol{x}'),$$

then

$$d(\lambda) = 1 - A\lambda$$

and

$$D(\boldsymbol{x}, \mathbf{h}; \lambda) = \lambda g_1(\boldsymbol{x}) g_2(\boldsymbol{x}'),$$

where

$$A = \int g_1(\boldsymbol{x}) g_2(\boldsymbol{x}) d\Omega.$$

The corresponding solution of the integral equation (2.1) is given by

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) + \frac{\lambda g_1(\boldsymbol{x})}{1 - A\lambda} \int g_2(\boldsymbol{x}') g(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}_0) d\Omega'. \quad (2.7)$$

In the following sections we will employ this method to find out solutions of the Heitler integral equation corresponding to meson-nucleon scattering processes.



## 3. Examples

(3.1) The scattering of negative  $\pi$ -meson by proton (using pseudoscalar meson field).

We will show here that the Fredholm solution (2.7) gives the exact solution as obtained previously [1, 2] by the variational or iterational processes.

The matrix element for this process may be written as

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\kappa} | G | \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\kappa}_0) = (\bar{u} (a_1 + a_2 \gamma_4) u_0) / (2\varepsilon_0 (W_0^2 - M^2)),$$

where  $\bar{u}$  and  $u_0$  are the usual Dirac spinors corresponding to the four momenta  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{p}_0$  respectively.  $\boldsymbol{\kappa}$  and  $\boldsymbol{\kappa}_0$  are the final and initial four-momenta of the meson, and  $\varepsilon_0 = (\mu^2 + q^2)^{1/2}$ , where  $q$  is the magnitude of the momentum of either particle and  $\mu$  the meson mass.  $W_0$  is the total energy of the system and  $M$  is the nucleon mass.

$$a_1 = f^2 M; \quad a_2 = f^2 W_0$$

in the case of pseudoscalar coupling.

Writing

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\kappa} | G | \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\kappa}_0) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \bar{u} g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) u_0,$$

the Heitler equation reduces to

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{iq}{32\pi^2 W_0} \int d\Omega' g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (-i\gamma_\mu p'_\mu + M) f(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0). \quad (3.11)$$

Here the kernel of the equation is  $g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Lambda(\mathbf{p}')$  which can be expressed as the product of two functions  $g_1(\mathbf{p}) g_2(\mathbf{p}')$ , where

$$g_1(\mathbf{p}) = (a_1 + a_2 \gamma_4) / (2\varepsilon_0 (W_0^2 - M^2)) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$$

and

$$g_2(\mathbf{p}') = (-i\gamma_\mu p'_\mu + M) = \Lambda(\mathbf{p}').$$

Thus the solution (2.7) can be easily applied to the solution of (3.11). Hence obtaining for  $A$

$$A = \int d\Omega g_1(\mathbf{p}) g_2(\mathbf{p}'),$$

we get

$$A = 4\pi g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (E_0 \gamma_4 + M);$$

writing

$$\lambda = iq / (32\pi^2 W_0)$$

we get the solution

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{\lambda g_1(\mathbf{p})}{1 - A\lambda} \int g_2(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) d\Omega' = \frac{g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)}{(1 - A\lambda)}, \quad (3.12)$$

noting that

$$g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = g_1(\mathbf{p}).$$

This is the solution as obtained by other methods. It may be mentioned that by actual substitution of the value (3.12) for  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$  in the equation (3.11) we easily show that it is the exact solution. The scattering cross-section is proportional to  $|f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)|^2$ .

(3.2). *The scattering of  $\pi^+$ -meson by proton*

We consider here the scattering of a charged scalar meson by a proton using scalar meson field with vector coupling.

The relevant matrix element for this process is given by

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\kappa} | G | \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\kappa}_0) = -i(g^2/\mu^2) \bar{u}(\gamma_4 \varepsilon - \gamma \mathbf{p}) u_0,$$

and in our reference system,

$$\mathbf{p} + \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\kappa}_0 = 0; \quad \varepsilon = (\mu^2 + q^2)^{1/2}; \quad q = |\mathbf{p}| = |\boldsymbol{\kappa}| = |\mathbf{p}_0| = |\boldsymbol{\kappa}_0|,$$

where  $\mathbf{p}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$ ,  $\mathbf{p}_0$ ,  $\boldsymbol{\kappa}_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  and  $q$  refer to the same values as in the last section.

Writing  $(\mathbf{p}, \boldsymbol{\kappa} | G | \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\kappa}_0) = (\bar{u} g u_0)$  and with a similar definition of  $(\bar{u} f u_0)$ , we have for the Heitler integral equation for this process the following:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{iq}{32\pi^2 W} \int d\Omega' g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (-i\gamma_\mu p'_\mu + M) f(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0). \quad (3.21)$$

Here the kernel of the equation is given by

$$i(g^2/\mu^2) (\gamma_4 \varepsilon - \gamma \mathbf{p}) (-i\gamma_\mu p'_\mu + M); \quad \mu = 1, \dots, 4,$$

which can be expressed as the product of two functions of  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{p}'$  as

$$g_1(\mathbf{p}) = (ig^2/\mu^2) (\gamma_4 \varepsilon - \gamma \mathbf{p}); \quad g_2(\mathbf{p}') = (-i\gamma_\mu p'_\mu + M).$$



Hence we may use (2.7) as the solution of (3.21). Writing

$$A = \int d\Omega g_1(\mathbf{p}) g_2(\mathbf{p})$$

we have the value of  $A$  :

$$A = 4\pi(-ig^2/\mu^2)(\gamma_4 \varepsilon)(\varepsilon_0 \gamma_4 + M) - g^2.$$

Putting  $\lambda = (iq/32\pi^2 W)$  we get the solution of the equation as follows :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) &= g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{\lambda g_1(\mathbf{p})}{(1 - A\lambda)} \int g_2(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) d\Omega' = \\ &= \frac{g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)}{(1 - A\lambda)}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

since the integral,  $\int g_2(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) d\Omega'$  gives the same value as that of  $A$  and noting that  $g_1(\mathbf{p})$  and  $g(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0)$  are identical. That this is the exact solution may easily be verified by actual substitution in the integral equation. We may also mention that using the variational technique [1] of Goldberger, we get the same solution.

Taking for the trial solution  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$  we have the following solution for  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) &= g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \\ &+ \frac{\lambda \left[ \int d\Omega' g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') A(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) \right]^2}{\int d\Omega' g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') A(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) - \lambda \int \int d\Omega' d\Omega'' g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') A(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') A(\mathbf{p}'') g(\mathbf{p}'', \mathbf{p}_0)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

with

$$\begin{aligned} \lambda &= (iq/32\pi^2 w) \quad \text{and} \quad A(\mathbf{p}') = (-i\gamma_\mu p'_\mu + M); \\ A(\mathbf{p}'') &= (-i\gamma_\mu p''_\mu + M). \end{aligned}$$

Writing

$$A = (-ig^2/\mu^2) \int d\Omega (\gamma_4 \varepsilon - \gamma \mathbf{p}) (-i\gamma_\mu p_\mu + M)$$

we see on putting the value of  $g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$  in the numerator and denominator of (3.23) that (3.23) reduces to

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{\lambda \cdot [g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) A]^2}{g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \cdot A - \lambda g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \cdot A^2} = \frac{g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)}{1 - A\lambda}$$

which is the same as (3.22).

The scattering cross-section is proportional to

$$|g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) / (1 - A\lambda)|^2.$$

(3.3) *Scattering of  $\pi^-$ -meson by neutron. (Non-relativistic limit.)*

We conclude the section by considering the scattering of a  $\pi^-$ -meson using pseudoscalar meson theory with pseudovector coupling in the non-relativistic limit.

The relevant matrix element for this process may be given by

$$g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = (\mathbf{p} | G | \mathbf{p}_0) = (g^2 / 2\mu^2 \varepsilon_0) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_0),$$

where  $\boldsymbol{\sigma}$  is the usual spin-matrix.

The corresponding Heitler integral equation may be written as

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = (g^2 / 2\mu^2 \varepsilon_0) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_0) + \lambda \int d\Omega' (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}') f(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0), \quad (3.31)$$

where

$$\lambda = (ig^2 q) / (16\pi^2 \mu^2 \varepsilon_0).$$

Hence the kernel of the equation,  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}')$ , can be expressed as the product of two functions, namely,

$$g_1(\mathbf{p}) = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \text{ and } g_2(\mathbf{p}') = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}').$$

Hence we can use (2.7) as the solution of (3.31).

Determining the value of  $A = \int d\Omega g_1(\mathbf{p}) g_2(\mathbf{p})$  we get  $A = 4\pi q^2$ , where  $q$  is the magnitude of the absolute value of the momentum. Now,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) &= (g^2 / 2\mu^2 \varepsilon_0) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_0) + \frac{\lambda (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{1 - A\lambda} \int (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}') (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}') d\Omega' (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_0) \\ &= (g^2 / 2\mu^2 \varepsilon_0) \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_0)}{1 - (ig^2 q^3 / 4\pi\mu^2 \varepsilon_0)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

That (3.32) is an exact solution may be verified by actual substitution in the integral equation (3.31).

It may be mentioned that the solution (3.32) is not in agreement with that obtained by Goldberger using the variational technique [1].

In conclusion the author wishes to record his sincere gratitude to Dr. D. Basu for his valuable counsel in the preparation of this paper.



## REFERENCES

1. *C. F. Hsueh* and *S. T. Ma*, *Phys. Rev.* **67**, 303, 1945; *M. L. Goldberger*, *Phys. Rev.* **84**, 929, 1951.
2. *S. N. Biswas*, *Phys. Rev.* **91**, 1026, 1953, *Phys. Rev.* **93**, 1767, 1954.
3. *E. T. Whittaker* and *G. N. Watson*, *Modern Analysis*, pp. 211, see also *Courant-Hilbert, Methoden der Math. Physik.* pp. 121—124.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФРЕДГОЛМА  
К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ГЕЙТЛЕРА

С. Н. Бисвас

## Резюме

Теория Фредголма для нелинейных интегральных уравнений была применена к интегральному уравнению Гейтлера, описывающему радиационное затухание в процессах рассеяния. В уравнении Гейтлера имеются большие трудности расходимости. С математической точки зрения была исследована сходимость решения. Решение, полученное на основе теории Фредголма, было применено к процессу рассеяния мезонов-нуклеонов. Результаты, полученные таким образом, хорошо согласуются с результатами, полученными с помощью других методов.

# MIKROPHOTOMETRISCHE MESSUNGEN AN ELEKTROLUMINESZENTEN SILIZIUMKARBID- KRISTALLEN\*

Von

G. SZIGETI, G. T. BAUER, J. WEISZBURG

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR DIE FERNMELEDETECHNISCHE INDUSTRIE, BUDAPEST

(Eingegangen: 17. II. 1954)

Die Verfasser arbeiteten ein Verfahren und ein Apparat aus, mit dessen Hilfe die Lichtintensität und das Spektrum der unter dem Mikroskop betrachteten elektrolumineszenten Kristalle mit einer Genauigkeit von etwa  $\pm 15\%$  ausgemessen werden kann.

## 1. Einleitung

Bei der Untersuchung von Fluoreszenzerscheinungen, insbesondere bei der Untersuchung der sogenannten elektrolumineszenten Kristalle, besteht die Notwendigkeit, die Lichterscheinung von einzelnen Kristallen zu untersuchen. Die Apparatur, welche bei der Aufnahme von Lumineszenzspektren vielfach verwendet wurde, eignete sich infolge Lichtmangels nicht für die Untersuchung von einzelnen Kristallen [1]. Wir mussten also ein Mikrospektrophotometer entwickeln, mit dem die Spektren einzelner Körnchen unter dem Mikroskop ausgemessen werden konnten. Zur Bestimmung des Wirkungsgrades des Leuchtens der Kristalle, mussten wir die einzelnen Mikrokristalle unter dem Mikroskop photometrieren. Für solche Untersuchungen wurde in unserem Institut bereits ein Mikrophotometer ausgearbeitet und von einem unserer Mitarbeiter beschrieben [2]. Diese letztgenannte Anordnung bewährte sich sehr gut bei der Aufnahme von Spektren von einzelnen lumineszenten Körnchen, war jedoch nicht geeignet für die Untersuchung von elektrolumineszenten Kristallen, da die elektrischen Kontakte und Zuleitungen die Beobachtung der Lichterscheinung stark störten.

## 2. Beschreibung der Apparatur

Anlehnend an die erwähnte Konstruktion wurde ein neues Mikrophotometer entwickelt, mit welchem die Kristalle in Durchsicht betrachtet werden konnten und die elektrischen Kontakte auf der unteren, vom Objektiv abgekehrten Seite angebracht wurden. Die neue Anordnung ist aus Abb. 1 und 2 ersichtlich.

Zwecks Untersuchung wurde der Kristall (7) mit Hilfe der Nadel (8) gegen die Bohrung des massiven Kupferstabes (6) geklemmt. Das andere Ende

\* Vorgetragen am I. Ungarischen Physikerkongress, Budapest, 1953.



des Kupferstabes (6) ragt in den Ofen (5). Der Stab war zwischen Ofen und Kristall mit Asbestschnur wärmeisoliert. Die Messung der Temperatur des Kristalls erfolgt mit Hilfe eines Thermoelementes (9) und die Ablesung am

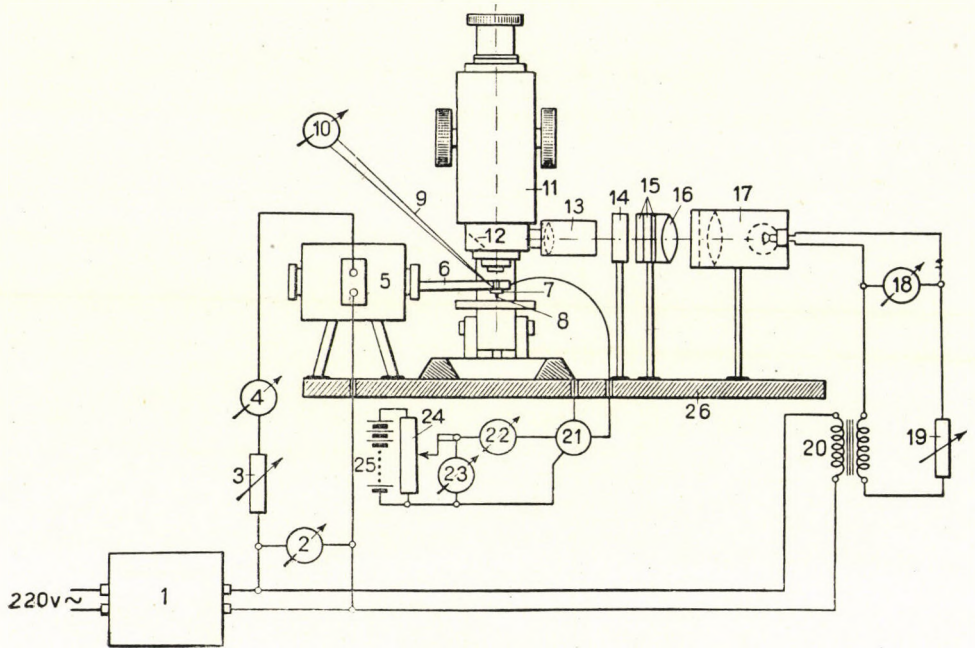


Abb. 1

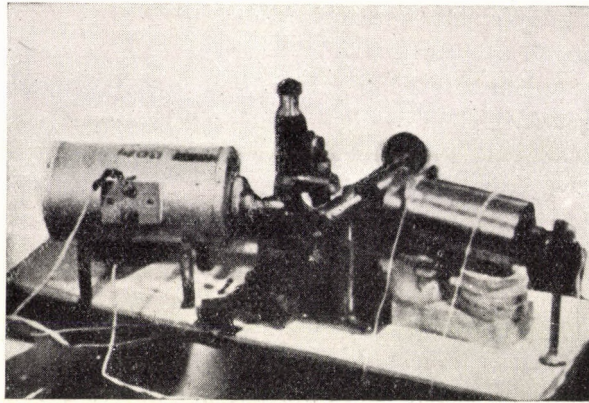


Abb. 2

Galvanometer (10). Die am Behrührungspunkt zwischen Kristall (7) und Nadel (8) entstehende Lumineszenzerscheinung kann durch die Bohrung im Stab (6) untersucht werden.

Die Messung des Lichtes geschah durch ein Mikroskop, dessen Sehfeld mit der Lichtquelle (17) beleuchtet wurde. Das Licht der Lichtquelle wurde durch das Linsensystem (13, 16) mit Hilfe eines Spiegels (12) innerhalb des Mikroskops zum Okular projiziert. Im Okular also sehen wir übereinander

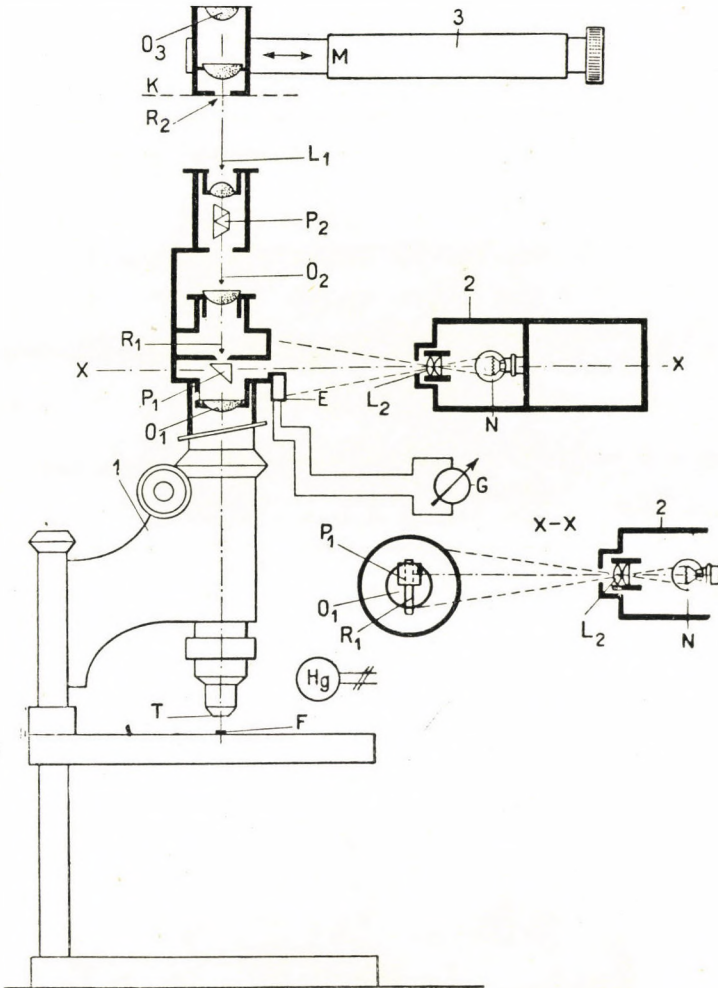


Abb. 3

superponiert den leuchtenden Kristall und den Hintergrund. Mit Hilfe eines Graukeils (14) konnte die Helligkeit des Hintergrundes und des Kristallbildes ausgeglichen werden, und so war die Lichtstärke der Lumineszenzerscheinung eindeutig bestimmbar. Die zur Untersuchung nötige Spannung wurde dem Kristall und der Nadel aus einer Batterie (25) über einen Spannungsteiler (24) zugeführt. Die Strom- und Spannungswerte wurden mit dem Mikroampermeter



(22) und mit dem Voltmeter (23) gemessen. Die Polarität der angelegten Spannung konnte während des Messens mit Hilfe eines Kommutators (21) umgepolt werden. Der Strom für die Normallampe und für den Ofen — welcher zur Regelung der Kristalltemperatur dient — wurde dem Spannungsstabilisator (1) entnommen.

Zur Aufnahme von Spektren mikroskopischer Lichtquellen oder anderer mikroskopischer Objekte, wurde von der Firma Zeiss ein Mikrospektralokular entwickelt. Mit diesem Gerät war die qualitative Beobachtung der Spektren möglich. Diese Apparatur wurde nun umgearbeitet für die subjektive Messung

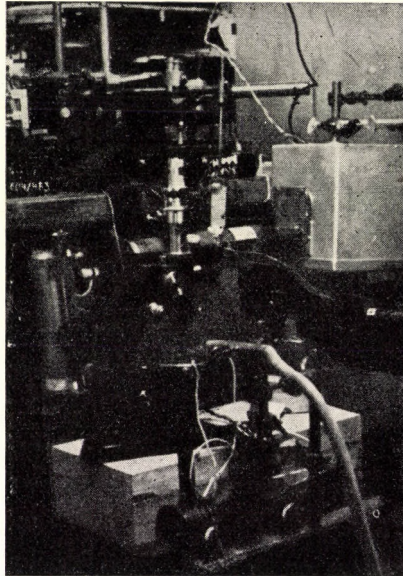


Abb. 4

der spektralen Energieverteilung der Strahlung von Kristallen. Das z. B. durch *König* und *Martens* angegebene Verfahren für den Ausgleich der Lichtstärke des Objektivs und einer Normallichtquelle durch Polarisation, wurde durch eine semiobjektive Methode ersetzt. Die Lichtstärke der Normallichtquelle wurde nämlich durch eine Irisblende soweit abgeblendet, bis die Intensität an dem beobachteten Spektralband der beiden Lichtquellen gleich gefunden wurde. In diesem Zustand wurde die Intensität der Normallichtquelle durch ein Lichtelement gemessen. Die Photographie des Photometers zeigt Abb. 4. Die Wirkungsweise des Apparates soll an Hand der Skizze 3 erläutert werden.

Die Apparatur besteht aus drei Teilen.

1. Mikroskop mit Okularspektroskop.
2. Normallampe mit Gehäuse.
3. Okularkopf mit Mikrometerverstellung.



Auf den Objektstisch des Mikroskops wird das zu beobachtende Körnchen ( $F$ ) aufgesetzt. Dieses wird mit Hilfe der Frontlinse ( $T$ ) und des Okulars ( $O_1$ ) am Spalt ( $R_1$ ) abgebildet. Das Okular ( $O_2$ ) dient als Kollimator, welcher die Lichtstrahlen parallel bündelt. Dieses Strahlenbündel wird durch ein Amici Prisma ( $P_2$ ) in die zunächst freie Öffnung der Linse ( $L_1$ ) geleitet, und mit dem — auf unendlich akkomodierten — freien Auge das Spektrum beobachtet. Nach Einsetzen der Linse ( $L_1$ ) wird das Strahlenbündel in der Ebene ( $K$ ) gesammelt, wo das reelle Bild des Spektrums erscheint. Dieses Bild wird durch das positive Okular ( $O_3$ ) vergrößert. In der Nähe des Brennpunktes von ( $O_3$ ) in der Ebene ( $K$ ) ist ein Spalt ( $R_2$ ) angeordnet und in einem Tubus eingebaut. Das Okular ( $O_3$ ) ist in der Richtung des Spektrums verschiebbar.

Das erwähnte Spektrumbild vom Punkt ( $F$ ) erscheint in der Hälfte des Spaltes ( $R_2$ ). In der anderen Hälfte sieht man als Fortsetzung dieses das Spektrum der Normallampe ( $N$ ). Der Spalt ( $R_2$ ) schneidet vom Spektrum im Durchschnitt ein Band von 30 Å Breite aus. Mittels einer Mikrometereinstellung — an der 0,1 mm 15 Å entspricht — kann der Spalt ( $R_2$ ) entlang des Spektrums verschoben werden. Die Eichung der Mikrometereinstellung in Ångström erfolgt mittels der sichtbaren Linien einer Hochdruck-Quecksilberdampf Lampe, bzw. mit der Linie 6708 Å des Lithiums.

Wie bereits oben beschrieben, wird das Bild der Normallampe ( $N$ ) mit Hilfe der Optik ( $L_2$ ) und Prisma ( $P_1$ ) in der anderen Hälfte der Spaltebene ( $R_1$ ) abgebildet. Die Lichtstärke dieses Bildes wird mit Hilfe einer Irisblende — welche in der Optik ( $L_2$ ) eingebaut ist — geregelt. Der Öffnungswinkel des Lichtkegels der Optik ( $L_2$ ) soll so gross sein, dass auch das Photoelement ( $E$ ) in der Nähe der Eintrittsöffnung belichtet wird. Mit Hilfe eines angeschlossenen Galvanometers ( $G$ ) kann also auch die Lichtstärke in Spalt ( $R_1$ ) kontrolliert werden.

Die Messung geht folgendermassen vor sich: mit Hilfe der Mikrometerschraube ( $M$ ) wird der Spalt ( $R_2$ ) des Okulars ( $O_3$ ) über das zu messende Gebiet des Spektrums geschoben und danach die Blende von ( $L_2$ ) solange geregelt, bis die beiden Spektrumbilder im Spalt gleich hell erscheinen.

### 3. Messergebnisse

Die Ergebnisse der mit den beschriebenen Apparaturen ausgeführten Messungen sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengefasst. Tabelle 1 enthält die gemessenen elektrischen Daten und Lichtintensitäten dargestellt als Funktion der Temperatur des Kristallkörnchens. Es ist zu erwähnen, dass der Wirkungsgrad der bisher zur Verfügung stehenden SiC-Kristallenexemplare noch ziemlich schlecht ist. In theoretischer Hinsicht ist die Abnahme des Lichtwirkungsgrades mit der Temperatur zu erwähnen.



TABELLE 1

V = 5 V			V = 8V			V = 10V		
T	I	R	T	I	R	T	I	R
C°	$\mu\text{A}$	$\text{k}\Omega$	C°	$\mu\text{A}$	$\text{k}\Omega$	C°	$\mu\text{A}$	$\text{k}\Omega$
180	90	55,5	30	80	100,0	20	250	40,00
190	140	35,7	55	60	133,0	40	230	43,50
235	270	18,7	85	170	47,0	57	235	42,50
250	280	17,9	95	170	47,0	85	285	34,70
295	300	16,7	100	160	50,0	110	600	16,60
320	420	11,9	150	180	44,4	170	775	12,90
330	460	10,8	200	360	22,2	200	1250	8,00
			270	750	10,6	220	1390	7,20
			290	1300	6,1	250	2440	4,10
			310	1650	4,8	275	5100	1,96
						315	100 000	0,10

V = 12V					
T	I	R	N	L	$\eta$
C°	$\mu\text{A}$	$\text{k}\Omega$	W	$\mu\text{Lm}$	$\mu\text{Lm}/\text{W}$
40	4000	3,00	0,048	0,170	3,54
50	4900	2,46	0,059	0,188	3,18
75	9100	1,32	0,109	0,264	2,42
90	7050	1,70	0,085	0,358	4,21
160	15800	0,76	0,190	0,610	3,21
170	17400	0,69	0,209	—	—
175	20000	0,60	0,240	0,705	2,94
190	28500	0,42	0,342	0,650	1,90
200	46000	0,26	0,552	0,640	1,16
210	51000	0,23	0,612	0,620	1,01
220	89000	0,13	1,070	0,800	0,75
230	200000	0,06	2,400	0,705	0,29
270	266000	0,04	3,200	0,750	0,23

Tabelle 2 enthält die Lichtintensität des Elektrolumineszenzspektrums als Funktion der Wellenlänge. Die nebeneinander geschriebenen Werte sind die Resultate von mehreren unabhängigen Messungen. Es ist ersichtlich, dass die Messgenauigkeit auch bei diesen kleinen Lichtintensitäten noch immer ziemlich gut ist.

TABELLE 2

Wellenlänge	Energie der Lichtquanten	Intensität in willkür. Einh.	Wellenlänge	Energie der Lichtquanten	Intensität in willkür. Einh.
Å	eV	E	Å	eV	E
6418	1,923	25	5332	2,314	81
6360	1,94	24, 33	5273	2,34	54,4 62
6200	1,99	29,5 37,6	5222	2,363	90,5
6165	2,005	43	5174	2,385	122,5 127,5
6100	2,023	53,5	5127	2,407	96 113
6079	2,03	48	5078	2,43	114,5 122,5
6049	2,04	44, 47	5036	2,45	79,5 86
5952	2,073	47,51	4966	2,485	137
5912	2,087	63,5	4926	2,505	150 169
5876	2,1	60, 65,5	4806	2,568	133,5
5793	2,13	53, 58	4692	2,63	103
5643	2,187	43,5 52,6	4641	2,658	99,6
5566	2,217	63,5	4594	2,687	90
5504	2,424	80,5	4562	2,705	76,5
5436	2,27	81,5	4509	2,737	68
5405	2,287	86,5 93,5	4447	2,775	58 65
5365	2,3	65,5	4384	2,815	52, 62,4

1. G. Szigeti, E. Nagy, Műegyetemi Közlemények, **1**, 117, 1948.

2. E. Nagy, MTA Matematikai és Természettudományi Osztályának Közleményei, **1/** 53, 1952.

#### МИКРОФОТОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ НА ЭЛЕКТРОЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ КРИСТАЛЛАХ КАРБИДА КРЕМНИЯ

Д. Сигети, Г. Т. Бауэр, Я. Вейсбург

#### Резюме

Авторами разработан метод и сконструирована измерительная установка, с помощью которой можно снять спектр свечения электролюминесцентных кристаллов, находящихся под микроскопом, точностью пр. (до)  $\pm 15\%$ .





# ÜBER DIE DURCH GLEICHSTROM ANGEREGTE ELEKTROLUMINESZENZ VON SILIZIUMKARBID- KRISTALLEN\*

Von

G. SZIGETI

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR DIE FERNMEDETECHNISCHE INDUSTRIE, BUDAPEST

(Eingegangen : 17. II. 1954)

Nach einer kurzen Zusammenfassung der bisherigen Literatur beschreibt der Verfasser seine Untersuchungen und Versuche zur Ausmessung des elektrolumineszenten Spektrums von Siliziumkarbid und zur Bestimmung der Abhängigkeit der elektrischen Eigenschaften dieser Lichterscheinung und des Kristalls von der Temperatur. Auf Grund der Messungen gelangt er zur Folgerung, dass die Lichterscheinung innerhalb der Sperrschicht durch beschleunigte Träger erregte Lumineszenz ist. Als Zentrum der Lumineszenz können die im Kristall vorhandenen, stöchiometrisch überflüssigen Kohlenstoffatome betrachtet werden. Auf Grund der spektralen und elektrischen Messungen war der Verfasser in der Lage, ein Termschema anzugeben.

Im Laufe unserer früheren Untersuchungen [1, 2] haben wir einen Zusammenhang zwischen den dielektrischen Verlusten der verschiedenen Zinksilikate und Zinkberylliumsilikate einerseits und zwischen der photolumineszenten Lichtemission andererseits gefunden.

Bei diesen Stoffen kann man die ohne Belichtung gemessenen dielektrischen Verluste als charakteristisch für ihre Leitfähigkeit betrachten, bzw. kann aus diesen Verlusten auf die Leitfähigkeit der einzelnen Elementarkörner gefolgert werden.

Wir haben gefunden, dass die Leitfähigkeit als Funktion der Temperatur aus zwei Komponenten besteht. Eine Komponente erwies sich als praktisch unabhängig von der Temperatur, zeigte aber Proportionalität mit der Lumineszenzfähigkeit des Materials. (Mit der Änderung der Aktivatorkonzentration bei demselben Ausgangsstoff, z. B. änderte sich diese Komponente der Leitfähigkeit parallel mit der Lumineszenzfähigkeit [3].)

Die andere Komponente der Leitfähigkeit wuchs aber sehr schnell mit steigender Temperatur. Für dieses Anwachsen der Leitfähigkeit fanden wir folgenden Ausdruck :

$$\sigma = \sigma_0 + A \exp(-E/kT).$$

Es wurde bei denselben Materialien im Falle von Ultravioletterregung auch die Temperaturabhängigkeit der emittierten Photonen geprüft, und es wurde gefunden, dass, solange die Leitfähigkeit des Materials von der Temperatur

\* Vorgetragen am I. Ungarischen Physikerkongress, Budapest, 1953, und auszugweise an der Conference on Luminescence in Cambridge, 1954.



unabhängig ist, auch der Wirkungsgrad der Lumineszenz praktisch als unverändert betrachtet werden kann.

Wurde aber mit der Temperatur jener Wert erreicht, bei welchem der steile Anstieg der Leitfähigkeit begann, so fanden wir, dass das Licht der Lumineszenz stark zu sinken begann. Wenn wir die Anzahl der emittierten Photonen

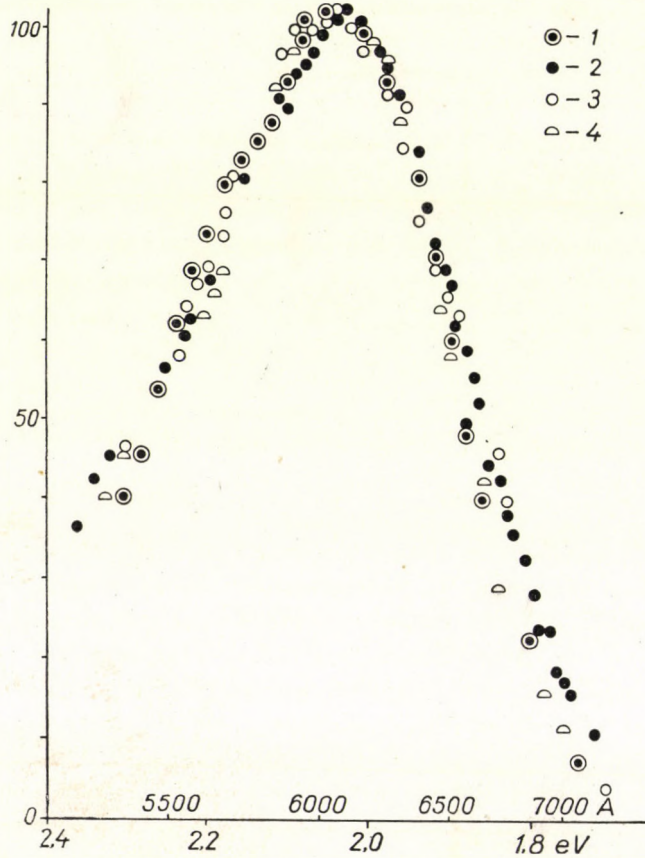


Abb. 1. Absorptionskoeffizient einer Kaliummanganatlösung als Funktion der Wellenlänge (Kurve 1) und die Emissionsspektren verschiedener mit Mangan aktivierter Leuchtstoffe. (Kurve 2 und 3 Zinkberylliumsilikate, Kurve 4 Zinkborat)

für die Lichtintensität als charakteristisch betrachten, so können wir den folgenden Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Änderung der Anzahl der emittierten Photonen aufschreiben:

$$N = N_0 \frac{1}{1 + C \exp(-E/kT)}$$

Diese Formel etwas umgestaltet ergibt :

$$E = -kT \ln \frac{N_0 - N}{CN}.$$

Wir halten es für notwendig zu bemerken, dass in den — für die Erhöhung der Leitfähigkeit, bzw. für die Schwächung des Lichtes — gefundenen beiden Ausdrücken die Aktivierungsenergie die gleiche ist.

Auf Grund unserer früheren Beobachtungen möchte ich noch auf eine andere, von uns erkannte Gesetzmässigkeit hinweisen [5, 6]. Bei der Prüfung von Spektren verschiedener Manganverbindungen haben wir merkwürdigerweise gefunden, dass die Form und der Platz der Spektralbande im Absorptionsspektrum der verschiedenen Lösungen von Manganationen ( $MnO_4$ ) mit der orangeroten Emissionslinie der Zinkberylliumsilikate und vieler anderer mit Mangan aktivierten fluoreszenten Materialien vollkommen übereinstimmen (Abb. 1).

Ähnlich konnte man bei mehreren anderen fluoreszenten Verbindungen eine Ähnlichkeit zwischen den Absorptionsbanden der Lösungen oder dünner Schichten des Aktivierungsmaterials und dem Emissionsspektrum der Lumineszenz des aktivierten Materials finden. Wir halten es für wahrscheinlich, dass in solchen Fällen die von dem Raumgitter etwas abgeschirmten Ionengruppen des Aktivators das emittierte Licht erzeugen.

Wir müssen annehmen, dass in solchen Fällen nur ein ganz kleiner Teil der als Aktivator dosierten Manganverbindung während der Glühbehandlung sich in die Form der höheren Valenz verwandelt, da unter normalen Umständen im Leuchtpulver das Absorptionsspektrum der vorausgesetzten Verbindungen nicht wahrnehmbar ist. (In einigen fluoreszenten Pulvern konnte man mit entsprechender Wärmebehandlung erreichen, dass ungefähr der 1/3 Teil des gesamt dosierten Mangans sich in die Form der höheren Valenz verwandelte. Die Farbe eines solchen Pulvers wird also sehr stark bemerkbar. Da dieses Absorptionsband genau dem emittierten Licht entspricht, leuchten diese Materialien nicht mehr.)

Nach dieser kurzen Zusammenfassung möchte ich die Resultate unserer neuesten Untersuchungen bekanntgeben. Der Ausgangspunkt dieser Versuche war eine Mitteilung des sowjetischen Physikers *Lossev* vom Jahre 1928 [7,8].

*Lossev* beobachtete bei Siliziumkarbidkristall, dass durch die Wirkung des Durchflussstromes, in der Nähe des Kontaktes eine Lichterscheinung auftritt. Er nahm das Spektrum dieses Lichtes auf, prüfte die Änderungen dieser Lichterscheinung bei verschiedenen Stromstärken und verschiedenen Stromrichtungen. Zur Zeit seiner ersten Publikation dachte er, dass die Lichterscheinung von den aus dem Kristall mit grosser Geschwindigkeit austretenden Elektronen verursacht wird, welche die Molekeln der umgebenden Luft zum Leuchten



erregen. Später wurde die Erscheinung von *Clauss* geprüft. Er stellte fest, dass es sich hier um eine, von den an der Sperrschicht sich abbremsenden Elektronen erregte, in das optische Gebiet fallende Bremsstrahlung handelt. Deshalb dachten er und auch spätere Verfasser (z. B. *Finkelnburg* [9]), dass mit dieser Erscheinung keine praktisch verwendbare Lichtquelle guten Wirkungsgrades verwirklicht werden kann. Die Erscheinung schien jedenfalls sehr interessant zu sein und beschäftigte oft die Forscher, jedoch ohne endgültiges Resultat. In der letzten Zeit erschienen mehrere Publikationen des Signal Corp. Eng. Lab. in den Vereinigten Staaten auf Grund der Ergebnisse der Arbeiten von *Lehovec*, *Accardo* und *Jamgochian* [10, 11, 12]. *Lehovec* und seine Mitarbeiter haben

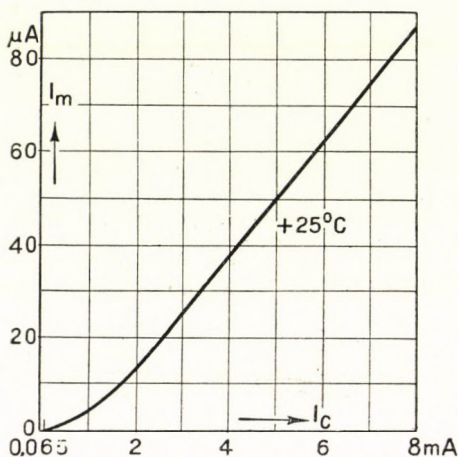


Abb. 2. Lichtstärke als Funktion des erregenden Stromes nach *Lehovec* [12] ( $I_m$  = Anodenstrom des Photomultipliers,  $I_c$  = Erregerstrom)

die annähernde Spektralverteilung des von dem Kristall emittierten Lichtes mittels Verwendung verschiedener Filtergläser aufgenommen. Sie konnten drei Spektralbanden nachweisen, und zwar mit einem Maximum bei 4750, 5250 und 6100 Å Wellenlängen. (Hier muss ich bemerken, dass infolge der von den Autoren angewandten Methode weder die genaue Form des Spektrums noch die Stelle der Maxima mit genügender Sicherheit bestimmt werden kann.)

Es wurde von ihnen die Änderung des Lichtes als Funktion der Stromstärke untersucht und der Zusammenhang gemäss Abb. 2 gefunden. Ausserdem wurde die Abhängigkeit der Lichtstärke von der Temperaturänderung bei verschiedenen Stromstärken zwischen Zimmertemperatur und  $-136^\circ\text{C}$  gemessen. Die Ergebnisse dieser Messungen von *Lehovec* und Mitarbeitern sind aus Abb. 3 und 4 ersichtlich.

Vom Standpunkt der weiteren Betrachtungen fand der Verfasser jene Beobachtung der erwähnten Forscher für die wichtigste, laut welcher sich das Licht bei niedriger Temperatur (zwischen Zimmertemperatur und  $-136^\circ\text{C}$ )

mit der Erhöhung der Temperatur nach einem Exponentialgesetz vermindert. Lehovec und seine Mitarbeiter fanden, dass die Aktivierungsenergie gleich 0,118 eV sei. Bemerkenswert ist ihre Feststellung, laut welcher der Wirkungs-

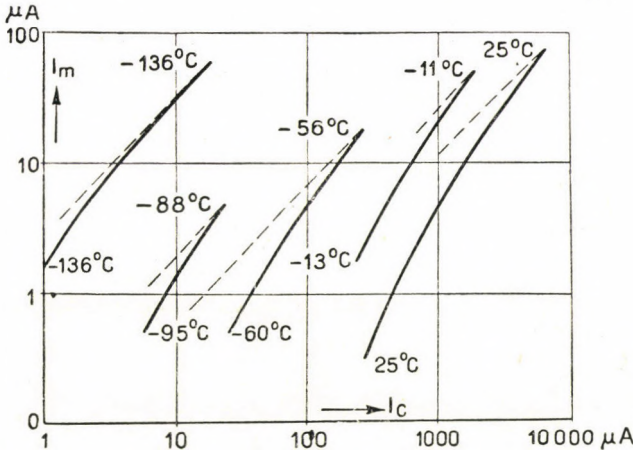


Abb. 3. Lichtstärke als Funktion des erregenden Stromes bei verschiedenen Temperaturen. (Nach Lehovec.)

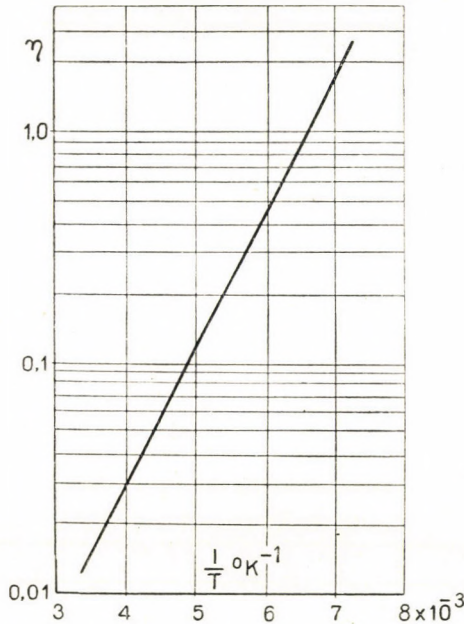


Abb. 4. Wirkungsgrad als Funktion der reziproken Temperatur ( $\eta$  in willkürlichen Einheiten). (Nach Lehovec.)

grad der Lichterregung bei Zimmertemperatur  $2,10^{-6}$  Quanten/Elektron beträgt und, die Messpunkte gegen niedrige Temperaturen weiter extrapoliert, der 100%-ige Wirkungsgrad bei etwa 80 K° zu erwarten ist. Weiters haben sie



auch das Nachleuchten der Lichterscheinung geprüft und dabei bemerkt, dass bei niedriger Temperatur das Nachleuchten exponentiell verläuft mit einer Zeitkonstante von  $80 \mu \text{ sec.}$ , bei Zimmertemperatur haben sie dagegen ein Nachleuchten von  $1,15 \mu \text{ sec.}$  gefunden. Auf Grund dieser Untersuchungen schlossen sie, dass der Prozess der Erregung bekannt aus der Theorie der Transistoren durch Injizieren der Träger geschieht, und der Mechanismus der Lichtemission im Grunde mit dem bei den anderen Leuchtstoffen bemerkten Mechanismus identisch ist.

Der letzterwähnte Teil dieser Folgerung unterstützt vollständig unsere eigenen Feststellungen, die wir auf Grund unserer früheren Untersuchungen bereits mitgeteilt haben [13, 14]. Wir fanden, dass kleine Mengen von Verunreinigungen den Wirkungsgrad der Lumineszenz ebenso vermindern, wie es bei den bekannten Phosphoren der Fall ist. In unserer Patentanmeldung vom Jahre 1939 [13] haben auch wir auf die von Lehovc und seinen Mitarbeitern erwähnten schädlichen Einflüsse der Eisenverunreinigung hingewiesen.

Wir haben unsere eigenen Untersuchungen mit zwei verschiedenen Stoffen durchgeführt. Eine Serie haben wir mit von einem durch das Karborundumwerk, Kempten, uns zur Verfügung gestellten Kristallaggregat abgetrennten Kristallen, die andere mit den von uns selbst hergestellten Siliziumkarbidkristallen durchgeführt.

Zwischen zwei beliebige Kristalle des Kristallagglomerates von Kempten haben wir grössenordnungsweise 100 V Spannung geschaltet; einzelne Kristalle des Agglomerates zeigten bei Einschaltung des Stromes grünliches Leuchten. Entsprechend der Stelle des Agglomerates auf der wir die beiden Elektroden anbrachten, leuchteten immer andere Kristalle auf, ohne dass eine bestimmte Gesetzmässigkeit festgestellt werden konnte. Als wir von dem Kristallagglomerat einzelne Kristalle abbrachen und zwischen zwei Nadeln oder zwischen eine Platte und eine Nadel einspannten, wies der Kristall ungefähr bei 6 V Spannung am Ort des Kontaktes eine Lichterscheinung auf. Diese Lichterscheinung war mit der von Lossev beschriebenen identisch. Auch hier zeigte sich die Veränderung der Farbe des Leuchtens bei Austauschen der Pole. Diese Erscheinung ist besonders gut bemerkbar bei einer Zusammenstellung mit zwei Nadeln. In der Umgebung der linken Nadel mit z. B. positiver Polarität zeigt die Lichterscheinung mehr gelbe, in der Nähe der rechten Nadel mit negativer Polarität bläuliche Farbe. Im Falle des Umpolens wechseln beide Erscheinungen. Wir haben bemerkt, dass bei solchen Kristallen, welche reiner sind (weniger farbig erscheinen) zur Erreichung der gleichen Lichtintensität eine geringere Stromstärke notwendig war. Auf Grund dieser Beobachtung haben wir angenommen, dass der Wirkungsgrad dieser Erscheinung durch die Reinheit der Kristalle stark beeinflusst werden kann.

Wir haben demgemäss versucht, möglichst reine Siliziumkarbidkristalle selbst herzustellen. Demzufolge glühten wir spektroskopischen Zwecken die-



nende, sogenannte homogen-gereinigte Kohlenstifte mittels Durchführung elektrischen Stromes. Der Kohlenstab wurde in eine Mischung von Kohle und Kieselsäure eingebettet. Die Kohle erhielten wir durch Verkohlung von Kristallzucker, die Kieselsäure war vorhanden in Form von Pulver, das wir aus dem in unserem Betriebe benutztem Merck purissimum Erzeugnis

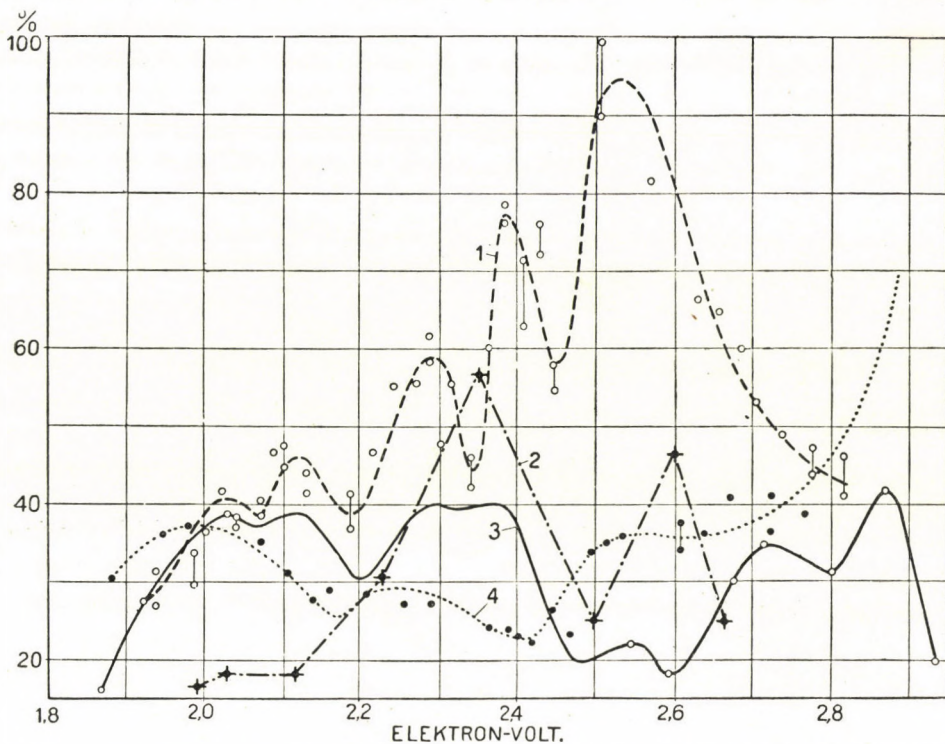


Abb. 5. Zusammenstellung der Emission und Absorptionsspektren von mit Kohle aktivierten Leuchtstoffen.

- Kurve 1. Elektrolumineszenzspektren des SiC nach *Szigeti, Bauer, Weisburg* [15]
- Kurve 2. Elektrolumineszenzspektren des SiC nach *Lehovec* [12]
- Kurve 3. Fluoreszenzspektren des mit Kohle aktivierten Bornitrids nach *Tiede und Tomaschek* [17]
- Kurve 4. Absorptionsspektrum desselben SiC wie in Kurve 1.

durch Kochen mit Königswasser reinigten und dann ausglühten. Wir mischten die Kohle und die Kieselsäure so, dass ihr Verhältnis der Reaktion  $\text{SiO}_2 + 3\text{C} = 2\text{CO} + \text{SiC}$  entsprach. Das Glühen wurde bis zur Durchbrennung des Kohlenstabes fortgesetzt. Nachher konnten wir aus der Mischung an der Stelle der höchsten Temperatur verhältnismässig viele hellgelbe SiC-Kristalle auswählen. Die Dimensionen der einzelnen Kristallkörner waren von der Grössenordnung von 0,1 mm. Diese Kristalle wurden mikroskopisch untersucht. Wir beobachteten, dass die mit Metallkontakt berührten und auf Metallplatte gestellten mikroskopischen Körner bei etwa einigen Volt Spannung und ungefähr 0,01—0,1



mA Strom in ihrer ganzen Grösse leuchteten, und zwar war die obenerwähnte gelbliche Farbe unabhängig von der Elektrodenpolarität vorherrschend. Wir fanden aber einige Körner, welche von der Polarität ebenfalls unabhängig, jedoch mit der vorher erwähnten bläulichen Farbe leuchteten. Mit der Erhöhung der Spannung änderte sich die Farbe des Lichtes nicht (ebenso, wie es auch bei den Kemptenschen Kristallen gefunden wurde), also im Gegensatz zu der angeführten Annahme von *Klaus* und *Finkelburg* [8], kann die Strahlung keine optische Bremsstrahlung sein. Wurden die einzelnen Körner in Vakuum der Wirkung von Kathodenstrahlen ausgesetzt, dann leuchteten sie dem während des Kontaktes beobachtetem blauen Lichte ähnlich. Die von uns untersuchten Kristalle wiesen bei Einwirkung einer Ultraviolettstrahlung von 2537 Å oder grösseren Wellenlängen, im Gegensatz zur Publikation von *Lehovec*, keine Lumineszenz auf.

Weiters haben wir versucht, zu den Ausgangsmaterialien Mangan zu dosieren in Form von ungefähr 1%  $\text{MnCO}_3$ , um zu entscheiden, ob man in Siliziumkarbid ein für Mangan charakteristisches Spektrum erregen kann, wie dies bei verschiedenen Silikaten, Boraten, Phosphaten oder einigen Sulfiden der Fall ist. Dieses Experiment endete mit negativem Resultat, vielleicht deshalb, weil das Mangan im Laufe des Glühprozesses sich verflüchtigte, es ist aber vielmehr wahrscheinlich, dass es in das Siliziumkarbidgitter nicht eingebaut werden konnte.

Im Interesse der genauen Untersuchung der Erscheinung hielten wir es für besonders wichtig, die Aufnahme des Spektrums genauer auszuführen, als dies von *Lehovec* angegeben wurde. Für diesen Zweck hat unser Mitarbeiter, *G. Bauer*, eine Einrichtung zusammengestellt, welche sich im Laufe unserer weiteren Untersuchungen sehr gut bewährt hat. Diese Einrichtung ist an einer anderen Stelle dieser Zeitschrift näher beschrieben [15].

Mittels dieser Einrichtung waren wir in der Lage das Spektrum schon eines einzelnen Körnchens mit ungefähr  $\pm 15\%$  Genauigkeit in bezug auf die Lichtintensität aufzunehmen.

Das Elektrolumineszenzspektrum (bläuliches Licht) des Kempten'schen Siliziumkarbids ist in Abb. 5 sichtbar (Kurve 1). Kurve 2 stellt die von *Lehovec* und seinen Mitarbeitern gefertigte Aufnahme des im Siliziumkarbid beobachteten Lichtes dar. Ihre Messpunkte sind mit + angedeutet. Wir sehen also, dass unsere Messung die Feinstruktur des Spektrums bedeutend besser enthüllt. Wenn wir die Lichtintensität als Funktion des Frequenz (resp. des in eV ausgedrückten  $h\nu$ ) darstellen, so bemerken wir an den folgenden Stellen die Maxima :

$h\nu$ in eV .....	2,535	2,385	2,285	2,125	2,025
Relative Intensität am Ort des Maximums .....	33,8	26,9	19,8	14,5	12,2

Die Ähnlichkeit dieses Spektrums mit dem von *Tiede* und *Tomaschek* [17] untersuchten durch Kathodenstrahlen erregten Spektrum des mit Kohlenstoff



aktivierten Bornitrids ist wirklich überraschend. Dieses Spektrum ist in Abb. 5 durch die Kurve 3 dargestellt. Wie daraus ersichtlich ist, fallen die bei 2,025, 2,125, 2,285 und 2,385 eV-s erscheinenden Maxima in den Spektren des Bornitrids und des Siliziumkarbids vollkommen zusammen. Bei höheren Frequenzen zeigt sich jedoch keine Übereinstimmung.

Ausserdem haben wir auch das Absorptionsspektrum des unsererseits untersuchten Siliziumkarbidkristalles aufgenommen. Wir haben gefunden, dass bei einer Bestrahlung mit grösserer Energie als 2,90 eV, das Siliziumkarbid vollständig undurchsichtig ist. Gegen niedrigere Frequenzen erschien an den folgenden Stellen ein Absorptionsmaximum: bei 2,68, 2,535, 2,275 eV ein verhältnismässig scharfes und zwischen 1,95 und 2,04 eV ein flaches Absorptionsmaximum. Die kurzwellige Grenze der Absorption stimmt mit den früheren Daten und auch mit den von Lehovcic mitgeteilten Werten überein. Im Siliziumkarbid ist also die Breite der verbotenen Bande annehmbar: 2,9 eV, während die dazwischenfallenden kleineren Absorptionsmaxima wahrscheinlich den eingebauten Verunreinigungen entsprechende Energieniveaus bedeuten.

Da die Emissions- und Absorptionsspektren bekannt waren, versuchten wir das Termschema des von uns geprüften Siliziumkarbids (siehe Abb. 6) zusammenzustellen.

Auf Grund des Vorzeichens des Gleichrichtereffektes ist anzunehmen, dass das von uns untersuchte, die erwähnte Lichterscheinung aufweisende Siliziumkarbidkristallexemplar ein Halbleiter von der Type p ist, d. h. dass die Verunreinigungsniveaus oberhalb des Valenzbandes unbesetzt sind.

Mit der grössten Intensität erscheint die Emissionsbande von 2,535 eV, die der im Absorptionsspektrum gefundenen Bande entspricht. Wir können annehmen, dass diese Bande durch einen Übergang vom Grundzustand zu den höchstliegenden Verunreinigungsniveaus entsteht. Ebenso ist die Emissions- und Absorptionsbande von 2,275 eV für einen Übergang vom Grundzustand auf ein höherliegendes Verunreinigungsniveau charakteristisch. Dadurch ist die Stelle der beiden höherliegenden Verunreinigungsniveaus bestimmt. Angenommen, dass den Banden, die sich nur in Emission zeigen und nicht in Absorption, ein Übergang von einem der höherliegenden zwei Verunreinigungsniveaus zu einem niedrigen Verunreinigungsniveau entspricht, müssen wir noch zwei — in der Nähe des Grundzustandes — bei 0,15 und 0,25 eV liegende Verunreinigungsniveaus voraussetzen. Wenn wir diese Niveaus aufzeichnen und die unter denselben möglichen Übergänge prüfen, so bekommen wir interessanterweise den Stellen aller in Emission erscheinenden Banden entsprechende Werte. Das Termschema gibt keine Erklärung für die Absorptionsbanden 2,68 und 1,95—2,04 eV.

Wenn wir die Form des Fluoreszenzspektrums des mit Kohle aktivierten Bornitrids mit dem Elektrolumineszenzspektrum des Siliziumkarbids vergleichen und die in der Einleitung im Zusammenhange mit den Manganverbindungen geschilderte Analogie in Betracht ziehen, so erscheint die Annahme sehr ver-



lockend, dass im Siliziumkarbid bei dem blauen Leuchten stöchiometrisch überflüssige Kohlenstoffatome als Aktivator dienen. Diese Annahme scheint auch noch dadurch begründet zu sein, dass unter den Siliziumkarbidkristallen verschiedener Herkunft und von verschiedenen Stoffen verunreinigt, man immer solche Exemplare finden konnte, welche die geschilderte, charakteristische bläuliche Lumineszenz aufwiesen.

Die Farbe des Spektrums wurde durch Veränderung der Menge der Verunreinigung nicht beeinflusst, die Erhöhung der Menge der Verunreinigungen im allgemeinen verminderte aber bedeutend die Lichtintensität.

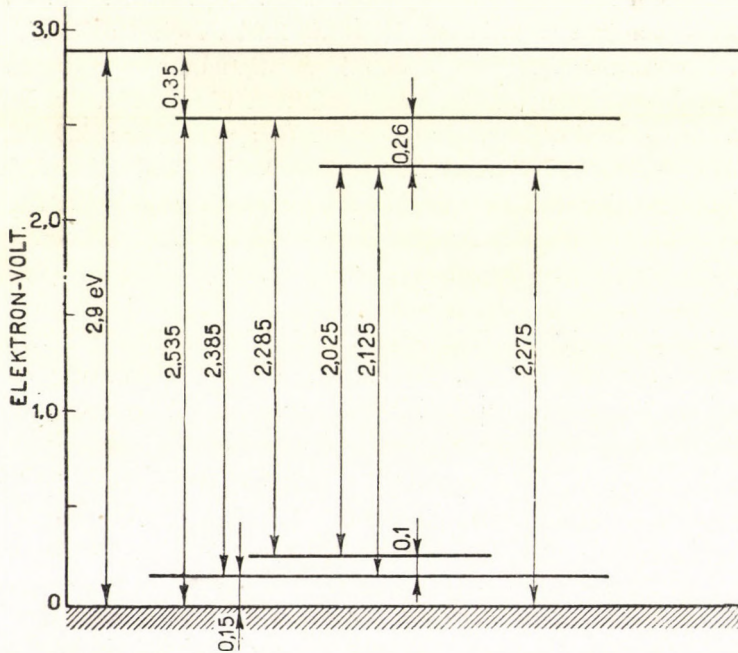


Abb. 6. Termschema der Elektrolumineszenz von SiC

Betreffs des Mechanismus der Lumineszenz können wir annehmen, dass die Erregung auf die von Lehovec geforderte Weise, durch Injizieren der Träger, im gegebenen Falle der Elektronen, in das Konduktionsband geschieht. Die Lichtemission entsteht auf solche Weise, dass die injizierten Elektronen in eine der beiden oberen Verunreinigungsbande (2,535 und 2,275 eV) geraten. Sie kommen von hier entweder durch einen Übergang ohne Ausstrahlung in den Grundzustand bzw. in eines der beiden unteren unbesetzten Verunreinigungsniveaus zurück, oder sie fallen mit Emission einer Strahlung entsprechender Wellenlänge in einen der niedrigeren Zustände zurück.

Wenn dieser Mechanismus richtig ist, so müssen die unteren Verunreinigungsniveaus bei Erhöhung der Temperatur durch die von dem Valenzbande



hingelangten Elektronen besetzt werden, d. h. bei niedrigen Temperaturen müsste das Licht der Aktivierungsenergie von ungefähr 0,16 resp. 0,25 eV entsprechend von der Temperatur sich abhängen.

Lehovec untersuchte die Änderung des Lichtes zwischen Zimmertemperatur und  $-136\text{ C}^\circ$  und fand eine Aktivierungsenergie von 0,118 eV.

Die elektrische Leitfähigkeit des Siliziumkarbids wurde von *Braun* und *Busch* [16] untersucht. Sie fanden, dass die Leitfähigkeit nach der Formel  $\sigma(T) = a T^{-n} \exp(-\Delta B/2kT)$  von der Temperatur abhängt. Die Aktivierungsenergie ist  $\Delta B = 0,3$  bzw. 2,3 eV.

Ähnlich unseren in der Einleitung erwähnten Untersuchungen haben wir versucht, einen Zusammenhang zwischen der Lichtintensität der Lumineszenz und der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes zu finden. Zu den Messungen benutzten wir eine von unserem Mitarbeiter *J. Weiszburg* verfertigte Einrichtung [15].

Es ist noch zu erwähnen, dass wir mittels der beschriebenen Einrichtung nicht den Widerstand des Kristallkörpers untersuchten; wir konnten nur die Widerstandsverhältnisse der für die Lichterregung massgebenden Berührungsstelle mit der Lichterregung gleichzeitig nachprüfen. Wir haben die Widerstandsmessungen in mehreren Serien, immer bei konstanter Spannung fortgesetzt. Während des Messens haben wir in allen Fällen bei unveränderter Spannung die Temperatur zwischen den gewünschten Grenzen variiert und die durch den Kristall fließende Strom- und Leuchtstärke gemessen.

Zur Deutung der Messergebnisse haben wir dieselben auf die in Abb. 7 ersichtliche Weise dargestellt. Als Abszisse haben wir den Reziprokwert der absoluten Temperatur, als Ordinate den Logarithmus des Widerstandes aufgetragen. Zwecks Vergleichbarkeit der Aktivierungsenergien haben wir auf dieselbe auch die Funktion

$$y = -\log\left(\frac{\eta_{\max}}{\eta} - 1\right)$$

aufgezeichnet, wo  $\eta_{\max}$  den höchsten gemessenen Wirkungsgrad in Lumen/Watt und  $\eta$  den bei der betreffenden Temperatur beobachteten Wirkungsgrad bedeutet.

In dem gewählten Koordinatensystem gibt die Steilheit der Kurve die Aktivierungsenergie der Temperaturabhängigkeit der Photonenzahl an.

Wir sehen, dass die für die Widerstandsänderung charakteristischen Kurven mit den für den Wirkungsgrad des Lichtes charakteristischen Kurven parallel verlaufen. Bei niedrigeren Temperaturen ergibt sich eine Aktivierungsenergie von etwa 0,2 eV, sie stimmt also grössenordnungsgemäss mit den von Lehovec für die Lichterregung und von Busch für den Widerstand im Verunreinigungs-



leitfähigkeitsgebiet gefundenen Aktivierungsenergien überein. Diese Aktivierungsenergie ist mit dem in Abb. 6. dargestellten Termschema sehr gut erklärbar. Die Elektronen gelangen nämlich aus dem Valenzband mit derselben Aktivie-

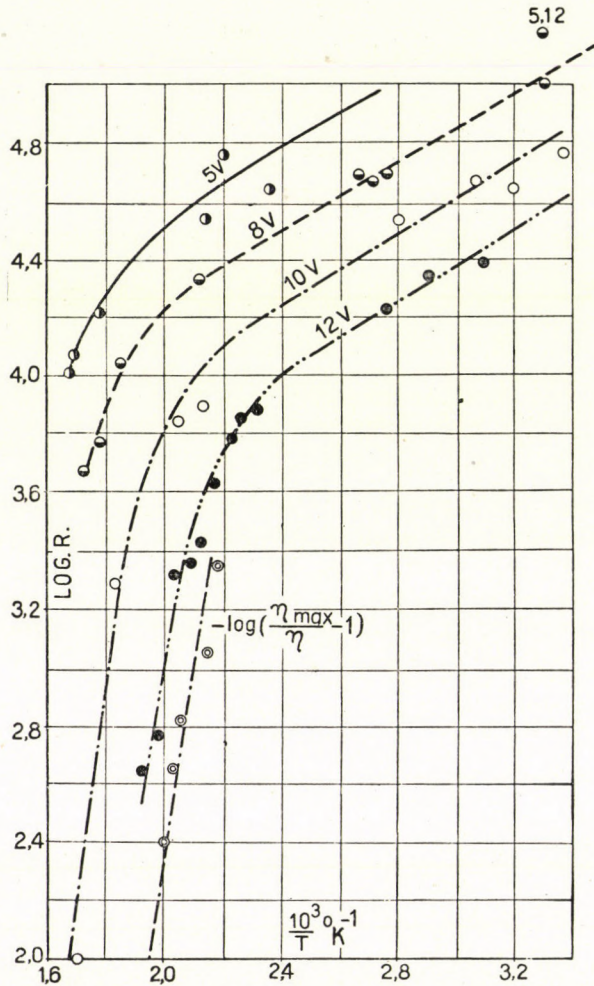


Abb. 7. Änderung des Widerstandes (R), des Wirkungsgrades ( $\eta$ ) und der Elektrolumineszenz als Funktion der reziproken Temperatur

rungsenergie auf die in der Höhe von 0,15 resp. 0,25 eV liegenden Akzeptorniveaus.

Die Anzahl der im Valenzband leer gebliebenen Löcher ergibt die bei niedrigen Temperaturen erscheinende Leitfähigkeit. Dementsprechend, in welchem Grade die zulässigen Zustände an den unteren Akzeptorniveaus besetzt werden, vermindert sich auch die Wahrscheinlichkeit der von den höheren

Niveaus entstammenden Übergänge. Dieser Umstand kann bei niedriger Temperatur die bei Erhöhung der Temperatur beobachtete Verminderung des Lichtes erklären.

1. G. Szigeti : Elektrotechnika, **39**, 61, 1947.
2. G. Szigeti—Nagy : Nature, **160**, 641, 1947.
3. E. Nagy : J. Opt. Soc. Am. **39**, 42, 1949.
4. G. Szigeti : Magy. Tud. Akad. Mat. és Term. Tud. Oszt. Közl. **1**, 30, 1951.
5. G. Szigeti—E. Nagy—E. Makai : J. Chem. Phys. **15**, 881, 1947.
6. E. Makai : Journ. Electrochem. Soc. **95**, 107, 1949.
7. O. V. Lossev, Phil. Mag. **6**, 1024, 1928.
8. O. V. Lossev, Phys. Zschrift, **32**, 695, 1931.
9. W. Finkelburg, Kontinuierliche Spektren, J. Springer, 1938, 91.
10. K. Lehovec, C. A. Accardo, E. Jamgochian, Phys. Rev. **82**, 330, 1951.
11. K. Lehovec, C. A. Accardo, E. Jamgochian, Phys. Rev. **83**, 603, 1951.
12. G. Lehovec, C. A. Accardo, E. Jamgochian, Phys. Rev. **89**, 20, 1953.
13. Ungarisches Patent No. 140547 angem.: 23, X. 1939. USA Patent No. 2 254 957 (Z. Bay. G. Szigeti)
14. G. Szigeti : Magy. Tud. Akad. Műsz. Oszt. Közl. **4**, 139, 1952.
15. G. Szigeti, G. T. Bauer, J. Weiszburg : Acta Phys. Hung. **4**, 57, 1954.
16. A. Braun und G. Busch : Helvetica Phys. Acta, **18**, 251, 1945.
17. E. Tiede, H. Tomaschok : Z. anorg. u. allg. Chem. **147**, 111, 1925.

ОБ ЭЛЕКТРОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ КРИСТАЛЛОВ КАРБИДА КРЕМНИЯ,  
ВОЗБУЖДЕННОЙ ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

Д. Сигети

Резюме

После краткого обзора литературы дано описание исследований по измерению спектра электролюминесценции карбида кремния и по определению зависимости свечения и электрических свойств кристалла от температуры. На основании результатов измерений сделано заключение, что свечение является люминесценцией, возбужденной носителями тока, ускоренными в запирающем слое. Центрами люминесценции можно считать атомы углерода, присутствующие в кристалле в количестве больше стехиометрического состава. В результате спектральных и электрических измерений предложена схема спектральных уровней.





# DIE THEORIE DER SCHWINGUNGEN DER AUF EINEN TORSIONSDRAHT AUFGEHÄNGTEN WAAGE NACH EÖTVÖS-SELÉNYI

Von

G. GYÖRGYI

ZENTRALFORSCHUNGSINSTITUT FÜR PHYSIK, BUDAPEST

(Vorgelegt von K. F. Novobátzky—Eingegangen: 6. III. 1954)

Nach der Beschreibung der von *Selényi* modifizierten Eötvösschen Drehwaage und der durch sie ermöglichten Kontrolle der Wirkung der Erdrotation gibt der Verfasser die mathematische Erklärung der bei diesem Versuch auftretenden störenden Erscheinung. Es werden die Bedingungen berechnet, bei denen diese störende Wirkung im Vergleich zu der zu messenden verschwindend klein ist und durch genaue Einstellung des Apparates ausgeschaltet werden kann.

Zum Nachweis der infolge der Erdrotation auf die sich bewegenden Körper wirkenden Corioliskraft wandte *Eötvös* in seiner bereits als klassisch anzusehenden Arbeit [1] eine Waage an, die sich um eine vertikale Achse drehte. In seiner unter [2] zitierten Abhandlung schlug *Selényi* eine Modifikation dieser Einrichtung laut Abb. 1 vor.

Demgemäss hängt die Waage mit horizontaler Achse an einem vertikalen Torsionsdraht. Der Waagebalken kann also in der horizontalen Ebene (anstatt einer Drehbewegung) Drehschwingungen ausführen und unabhängig davon ausserdem in der vertikalen Ebene auch um die Waagenachse schwingen. Über ihre Wirkungsweise kann man sich am leichtesten einen Begriff machen, wenn wir uns auf dem Äquator stehend und den Waagebalken in nord-südlicher Richtung befindlich vorstellen. Versetzt man nun den Waagebalken mit einer kleinen Auslenkung in Schwingung, so wird er offensichtlich denselben Wirkungen ausgesetzt sein wie ein im Polargebiet aufgehängter Foucaultscher Pendel. Wenn man den Ausschlagwinkel der Drehschwingungen mit  $\beta$  und die Waageschwingungen in der vertikalen Ebene mit  $\varepsilon$  bezeichnet, dann erhält man folgende Gleichungen für die Bewegungen des Waagebalkens [2] (zum Hervorrufen der Resonanz wird hier die Eigenfrequenz der zwei Freiheitsgrade des Schwingungssystems als gleich angenommen):

$$\ddot{\beta} + 2\Omega_0 \dot{\varepsilon} + \omega_0^2 \beta = 0, \quad (1)$$

$$\ddot{\varepsilon} - 2\Omega_0 \dot{\beta} + \omega_0^2 \varepsilon = 0.$$

Hier bedeuten  $\Omega_0$  die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und  $\omega_0$  die Eigenkreisfrequenz des Schwingungssystems. Diese Differentialgleichungen



beziehen sich auf jenen von *Selényi* beschriebenen idealen Fall, wo die Kante des Waagebalkens streng horizontal ist; ihre Lösungen beschreiben — in Übereinstimmung mit der Erfahrung — die Verdrehung der Schwingungsebene mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_0$ .

Die Bedeutung der von *Selényi* vorgeschlagenen Modifikation der Eötvös-schen Drehwaage besteht darin, dass man mit dieser modifizierten Einrichtung nachprüfen kann, ob die beobachteten Erscheinungen tatsächlich die Folge

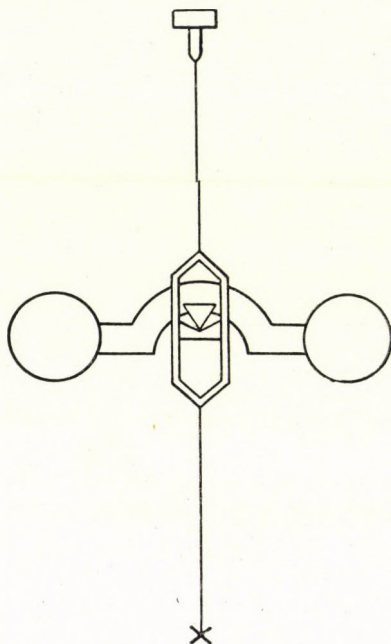


Abb. 1

der Erdrotation sind und nicht etwa infolge irgendeiner Störwirkung auftreten. Ein weiterer wichtiger Vorteil der modifizierten Einrichtung gegenüber der ursprünglichen ist, dass die Rolle des dort gebrauchten teureren Präzisionsuhrwerks hier vom Torsionsdraht übernommen wird.

Der obenerwähnte Kontrollversuch geschieht derart, dass man den Balken der auf dem Äquator gedachten Waage nicht aus der nord-südlichen, sondern aus der west-östlichen Ruhelage auslenkt. Die Schwingungen mögen in der horizontalen Ebene vor sich gehen. In diesem Falle werden die Bewegungen der an die Enden des Waagebalkens befestigten Massen  $m$  — bei kleinen Ausschlägen — in nord-südlicher Richtung erfolgen, wird die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  der Massen ungefähr parallel zur jener der Rotationsachse der Erde sein und so die auf sie wirkende Corioliskraft

$$2 m [\vec{v} \times \vec{\Omega}_0] \quad (2)$$

Null betragen. In diesem Falle behält die Waage zwangsläufig ihre Schwingungsebene bei. Nach der Mitteilung von *Selényi* wurde der erste Orientierungsversuch mit der ursprünglich von *Eötvös* benutzten Waage in der Weise durchgeführt, dass die ganze Waage auf einen Torsionsdraht aufgehängt wurde. Danach wurde dafür Sorge getragen, dass die Perioden der Drehschwingungen und der Schwingungen des Waagebalkens miteinander übereinstimmten und schliesslich wurden die Drehschwingungen durch eine Verdrehung des Torsionskopfes ausgelöst. Tatsächlich trat dann die erwartete Wirkung ein: der Waagebalken geriet in Schwingungen um seine Kante, doch in einem weit grösseren Ausmass, als man dies erwarten durfte und auch dann, als sich die Ruhelage des Waagebalkens in west-östlicher Richtung befand, als also keine Corioliskraft auftrat.

Im Laufe der Untersuchungen stellte sich dann heraus, dass die Ursache hierfür darin bestand, dass der Torsionsdraht und die Waagenachse, die im Laufe der Berechnungen als vertikal betrachtet wurden, in Wirklichkeit einen etwas von  $\pi/2$  abweichenden Winkel einschlossen. Dieser Umstand bewirkte eine Kopplung zwischen den zwei Freiheitsgraden des Schwingungssystems.

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist die mathematische Beschreibung dieser störenden Erscheinung. Auf Grund der hier abgeleiteten Ergebnisse sollen die Bedingungen angegeben werden, bei welchen die störende Wirkung verschwindend klein im Vergleich zu der zu messenden Wirkung ist.

Es sei nun die auf einen senkrechten Torsionsdraht aufgehängte Waage betrachtet, deren Achse mit der horizontalen Ebene einen kleinen Winkel  $\gamma$  einschliesst. Die Lage des Waagebalkens sei auch jetzt mit dem Winkel  $\beta$  der Drehschwingungen und dem Winkel  $\varepsilon$  der Waageschwingungen gekennzeichnet, wobei aber diesmal die beiden Schwingungsebenen nicht senkrecht aufeinander stehen, sondern den Winkel  $\pi/2 + \gamma$  einschliessen.

Bewegt sich der Waagebalken in der horizontalen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\beta}$ , so beträgt sein Drehimpuls  $\Theta\dot{\beta}$ . ( $\Theta$  bezeichnet das auf den Torsionsfaden bezogene Trägheitsmoment des Waagebalkens.) Die Komponente  $-\Theta\dot{\beta}\sin\gamma$  des Drehimpulses ist senkrecht zur Ebene der Waageschwingungen (Abb. 2). Laut des Erhaltungssatzes des Drehimpulses muss bei der Entstehung einer Bewegung von der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\beta}$  in der Ebene der Schwingungen  $\varepsilon$  der Drehimpuls  $\Theta\dot{\beta}\sin\gamma$  auftreten. Das Erscheinen dieses Drehimpulses steht im Zusammenhang mit einem Drehmoment  $\Theta\ddot{\beta}\sin\gamma$ .

Die Bewegungsgleichung der Schwingungen  $\varepsilon$  sei

$$\Theta\ddot{\varepsilon} = -D\varepsilon, \quad (3)$$

wo  $D = Mgs$  betragen würde ( $M$  ist die Masse des Waagebalkens,  $s$  der Abstand des Schwerpunktes von der Kante des Waagebalkenlagers), wenn die zwei Freiheitsgrade unabhängig voneinander wären. So aber muss neben dem zurück-



treibenden Drehmoment  $-D \varepsilon$  auch das infolge der Achsenschiefe auftretende Glied  $\Theta \ddot{\beta} \sin \gamma$  in Betracht gezogen werden. Die Bewegungsgleichung lautet also :

$$\Theta \ddot{\varepsilon} = -D \varepsilon + \Theta \ddot{\beta} \sin \gamma ,$$

oder wenn man die Kreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{D/\Theta}$  einführt :

$$\ddot{\varepsilon} - \ddot{\beta} \sin \gamma + \omega_0^2 \varepsilon = 0 . \quad (4a)$$

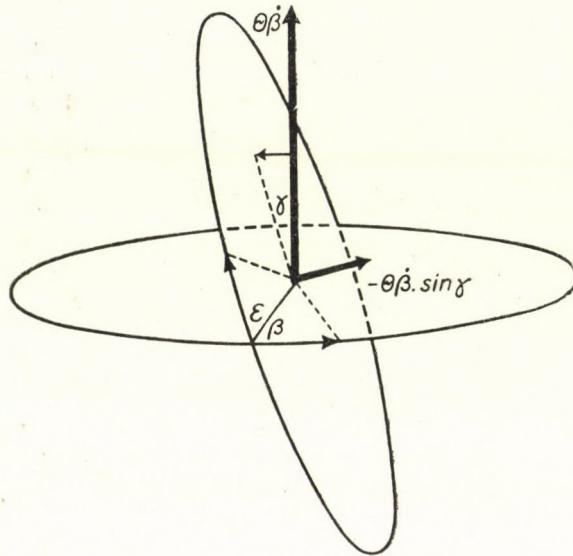


Abb. 2

Diese Überlegung könnte bei einem Rollentausch von  $\varepsilon$  und  $\beta$  wiederholt werden, wonach man den der vorigen Gleichung ähnlichen Ausdruck

$$\ddot{\beta} - \ddot{\varepsilon} \sin \gamma + \omega_0^2 \beta = 0 \quad (4b)$$

erhalten würde.

Diese Differentialgleichung beschreibt gekoppelte Schwingungen, doch weicht das vorliegende Problem insofern von den bisher in der Literatur behandelten gekoppelten Schwingungen ab, als hier die Kopplung durch die Winkelbeschleunigung hervorgerufen wird und nicht durch den Ausschlag oder durch die Winkelgeschwindigkeit, wie in den bekannten Fällen.

Die Lösung, welche die gegebenen Anfangsbedingungen des Differentialgleichungssystems

$$\ddot{\varepsilon} - \ddot{\beta} \sin \gamma + \omega_0^2 \varepsilon = 0 , \quad (4)$$

$$\ddot{\beta} - \ddot{\varepsilon} \sin \gamma + \omega_0^2 \beta = 0$$

befriedigt, kann am zweckmässigsten mit der Laplace-Transformation gefunden werden.

Die Laplace-Transformierte der Funktion  $\varepsilon$  sei mit  $e$ , die der Funktion  $\beta$  mit  $b$  bezeichnet :

$$e(p) = L[\varepsilon(t)] = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-pt} dt, \quad b(p) = L[\beta(t)] = \int_0^{\infty} \beta(t) e^{-pt} dt.$$

Die Waage sei nun im Momente  $t = 0$  aus der horizontalen Ebene um den Winkel  $\alpha$  ausgelenkt und dann ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen. Die Anfangsbedingungen sind demnach :

$$\begin{aligned} \beta(0) &= \alpha, & \dot{\beta}(0) &= 0, \\ \varepsilon(0) &= 0, & \dot{\varepsilon}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Unser Gleichungssystem geht nun nach Durchführung der Transformation in folgendes Gleichungssystem über :

$$\begin{aligned} (p^2 + \omega_0^2) \cdot e(p) - \sin \gamma \cdot p \cdot b(p) &= -pa \sin \gamma, \\ -\sin \gamma \cdot p^2 \cdot e(p) + (p^2 + \omega_0^2) b(p) &= pa. \end{aligned}$$

Aus diesen Zusammenhängen erhält man durch einfaches Eliminieren :

$$e(p) = -\frac{\alpha}{4} \left[ \frac{1}{p - i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 + \sin \gamma}} + \frac{1}{p + i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 + \sin \gamma}} - \frac{1}{p - i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin \gamma}} - \frac{1}{p + i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin \gamma}} \right],$$

und

$$b(p) = \frac{\alpha}{4} \left[ \frac{1}{p - i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 + \sin \gamma}} + \frac{1}{p + i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 + \sin \gamma}} - \frac{1}{p - i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin \gamma}} - \frac{1}{p + i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin \gamma}} \right].$$



Verwendet man den Zusammenhang

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right] = e^{at},$$

so ergibt sich :

$$\varepsilon = -\frac{a}{2} \left[ \cos\left(\frac{\omega_0}{\cos\gamma} \sqrt{1+\sin\gamma} \cdot t\right) - \cos\left(\frac{\omega_0}{\cos\gamma} \sqrt{1-\sin\gamma} \cdot t\right) \right],$$

$$\beta = \frac{a}{4} \left[ \cos\left(\frac{\omega_0}{\cos\gamma} \sqrt{1+\sin\gamma} \cdot t\right) + \cos\left(\frac{\omega_0}{\cos\gamma} \sqrt{1-\sin\gamma} \cdot t\right) \right].$$

Durch eine einfache trigonometrische Umgestaltung gelangt man zu

$$\frac{\omega_0}{\cos\gamma} [\sqrt{1+\sin\gamma} + \sqrt{1-\sin\gamma}] = \frac{\omega_0}{\cos\gamma} \cos \frac{\gamma}{2} = \omega \approx \omega_0, \quad (5)$$

$$\frac{\omega_0}{\cos\gamma} [\sqrt{1+\sin\gamma} - \sqrt{1-\sin\gamma}] = \frac{\omega_0}{\cos\gamma} \sin \frac{\gamma}{2} = \Omega \approx \omega_0 \frac{\gamma}{2}, \text{ wenn } \gamma \ll 1.$$

Werden nun diese Bezeichnungen eingesetzt, so erhält man die endgültige Form der gesuchten Lösung :

$$\varepsilon = -a \sin \omega t \sin \Omega t, \quad (6)$$

$$\beta = a \cos \omega t \cos \Omega t,$$

d. h., dass auf den Grundschwingungen mit der Frequenz  $\omega$  eine Modulation mit der Frequenz  $\Omega$  auftritt. Diese infolge der Achsenschiefe entstehende Bewegung soll nun mit den infolge der Corioliskraft auftretenden modulierten Schwingungen verglichen werden [2] :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{a} \sin \omega_0 t \cos \Omega_0 t, \quad (7)$$

$$\bar{\beta} = \bar{a} \sin \omega_0 t \sin \Omega_0 t.$$

[Diese sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems (1).]

Es ist ersichtlich, dass die nachzuweisende Wirkung der Corioliskraft die Modulation der Schwingungen mit einer Frequenz  $\Omega_0$  ist. Will man erreichen,

dass die durch die Achsenschiefe hervorgerufene Modulation deren Beobachtung nicht störe, so muss die Periode der letzteren Wirkung wesentlich grösser sein als die der Erdrotation

$$\Omega \ll \Omega_0,$$

oder im Falle von  $\gamma \ll 1$ , wenn man die Näherung (5) verwendet :

$$\gamma \ll 2 \frac{\Omega_0}{\omega_0}. \quad (8)$$

Zum gleichen Ergebnis führt auch die folgende, von *Selényi* angewandte einfache Überlegung, deren Richtigkeit durch die Übereinstimmung mit dem durch exakte Berechnung ermittelten Resultat bewiesen wird.

In der Gleichung (1) wird die Wirkung der Corioliskraft durch das Glied

$$2\Omega_0 \dot{\epsilon}$$

ausgedrückt. Die Wirkung der schiefen Waagenachse kommt dagegen in der Gleichung (4) durch das Glied

$$\ddot{\epsilon} \sin \gamma$$

zum Ausdruck. Es sei angenommen, dass beide Gleichungssysteme periodische Lösungen mit der Frequenz  $\omega_0$  geben. In diesem Falle kann man der Grössenordnung nach schreiben, dass

$$\ddot{\epsilon} \sim \omega_0 \dot{\epsilon}$$

Zieht man dies in Betracht, so ergibt sich, dass die Störung im Vergleich zur Corioliskraft dann verschwindend klein sein wird, wenn

$$\omega_0 \sin \gamma \ll 2\Omega_0$$

oder im Falle von  $\gamma \ll 1$  :

$$\gamma \ll 2 \frac{\Omega_0}{\omega_0},$$

was mit dem unter (8) erhaltenen Ergebnis übereinstimmt.

Es betrage z. B. die Schwingungszeit des Waagebalkens 20 sec, d. h.  $\omega_0 = 2\pi/20$ , dann muss, da ja

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{86\,400}$$



ist (die Rotationszeit der Erde beträgt bekanntlich 86 400 sec),

$$\gamma < 2 \frac{20}{86\,400}$$

sein, d. h. die Abweichung der Kante von der Horizontalen ist  $\gamma < 1/2000$ . Diese Genauigkeit kann mit einem entsprechenden Einstellwerk mit Sicherheit erreicht werden.

\*

Es sei hier Herrn Professor *P. Selényi*, korrespondierendem Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, für die Stellung des behandelten Problems und für seine wertvollen Hinweise der aufrichtige Dank des Verfassers ausgesprochen.

#### LITERATUR

1. R. Eötvös, Ann. Physik, **59**, 743, 1919.
2. P. Selényi, Acta Phys. Hung. **1**, 75, 1950.

#### ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЯ КРУТИЛЬНЫХ ВЕСОВ

(Установка Этвеша—Шеленьи)

Г. Дьёрдьи

Резюме

Исследуется колебание крутильных весов Этвеша—Шеленьи, с помощью которых можно наблюдать силу Кориолиса, действующую на тела, движущиеся на Земле. Если острие коромысла крутильных весов расположено не совсем горизонтально, то возникает некоторая модуляция колебаний, отличающаяся от модуляции, вызванной силой Кориолиса. Этот нежелательный эффект можно сделать достаточно малым, точной регулировкой горизонтальности.

# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

## KURZE MITTEILUNGEN — BRIEF REPORTS

### BAND-WIDTH PROBLEMS IN THE INVESTIGATION OF RELAXATION PROCESSES

By

GY. GERGELY

RESEARCH INSTITUTE FOR TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

(Received 5. IX. 1953)

In a previous paper [1] an electronic compensating method was described for investigating relaxation processes, especially for the case of the rise and decay of monomolecular luminescence.

One of the principal problems concerning the compensation method is the band-width [2] i. e. the frequency and phase distortion in the compensating device and in the amplifier of the oscilloscope used for monitoring the procedure of compensation.

The frequency spectra of the pulses on the multiplier's load resistance (light pulses of luminescence) and of the compensating signals may be easily determined by solving the differential equations of the processes by means of operational calculus.

As was described previously, short pulse and square wave excitations were applied for measuring the rise and decay of luminescence. The differential equation governing the relaxation process has the form :

$$\frac{df}{dt} + af = q(t),$$

$f$  denoting the relaxation function e.g. the brightness of luminescence of the compensating voltage,  $t$  the time,  $\frac{1}{a}$  the mean lifetime of the process,  $q(t)$  the excitation of luminescence or the control voltage of the compensating device.

In the course of the measurements  $q$  had the following values :

$$\text{and } \begin{aligned} q(t) &= A = \text{const. if } & 0 < t < \tau, \\ q(t) &= 0, \text{ if } & \tau < t < \tau + T. \end{aligned}$$

The excitation was periodical with the period  $\tau + T$ . Solving the differential equation we get :

$$f(t) = -\frac{A}{\alpha} \frac{1 - e^{\alpha\tau}}{(1 - e^{\alpha(\tau+T)})} e^{-\alpha t} + \frac{A}{\alpha} \frac{\tau}{\tau + T} + A \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-i\tau K\omega}}{(iK\omega + \alpha) iK\omega(\tau + T)} e^{iK\omega t}$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T + \tau}, \quad K = \pm 1, 2, 3, \dots$$

The first term of the solution represents the initial transient process, the second one the direct current component (the average brightness) and the sum gives the complex Fourier series of the process.

In the case of square-wave excitation we have  $\tau = T$ , and in the stationary state

$$\begin{aligned} f_s^{(t)} &= \frac{1}{2} \frac{A}{a} - A \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi a K \sqrt{1 + \left(\frac{\omega K}{a}\right)^2}} e^{i(K\omega t + \varphi_K)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{A}{a} - \frac{2A}{\pi a} \sum_1^{\infty} \gamma_K \cos(K\omega t + \varphi_K), \quad \gamma_K = \frac{1}{K \sqrt{1 + \left(\frac{\omega K}{a}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$\varphi_K = \operatorname{arctg} \frac{a}{K\omega}, \quad K = 1, 3, 5, \dots$$

Investigating  $\text{Zn}_2\text{SiO}_4$  phosphors, it was found that the luminescence may be described by the superposition of several relaxation processes, its exponents having the magnitudes:

$$\alpha_1 = 10^2, \quad \alpha_2 = 10^3, \quad \alpha_3 = 10^5.$$

For  $\omega = 314 \text{ sec}^{-1}$  Table I shows the principal values of  $\gamma_K$ . Using a 25 c — 5 Mc wide-band amplifier, the error — caused by the 5 Mc cut-off of the amplifier — for the most unfavourable case  $t = 0$  is given by ( $K$  being an odd number)

$$|R| = \left| \frac{2A}{\pi a} \sum_{10^5+1}^{\infty} \frac{1}{K \sqrt{1 + \left(\frac{\omega K}{a}\right)^2}} \cos \varphi_K \right|.$$

For  $\alpha_3 = 10^5$  and  $K > 10^5$  ( $K$  being an odd or even integer)

$$|R| < \frac{2A}{\pi \omega} \sum_{\frac{1}{2} 10^5+1}^{\infty} \frac{1}{(2K+1)^2} < \frac{2A}{\pi \omega} \int_{\frac{1}{2} 10^5}^{\infty} \frac{dK}{(2K+1)^2},$$

$$|R| < \frac{A}{\pi \omega} \frac{1}{10^5} = \frac{A}{\alpha_3} \frac{1}{\pi \omega} = \frac{A}{\alpha_3} \frac{1}{\pi^2 10^3}.$$

For  $\alpha_3 = 10^5$  the error is nearly 0,1%,  $\frac{A}{a}$  being the amplitude of a single

relaxation process. In the measurements, a 12 cm diameter oscilloscope was used for monitoring. Taking into account the experimental results published in the paper quoted [1], the error is thus smaller than the line thickness of the oscilloscope trace.

The error caused by the amplifier is much smaller for the luminescence relaxation process I:

$$|R| = \frac{A}{a_1} \frac{1}{\pi^2 10^5}.$$

One of the principal factors limiting the accuracy of luminescence decay measurements lies in the monitoring cathode-ray oscilloscope. Similar difficulties were encountered by *Nottingham* [3] and *Rivkin* [4].

#### REFERENCES

1. *I. P. Valkó, Gy. Gergely*, Acta Physica Hung. Tom. 1, p. 261 (1952).
2. *П. А. Тольстой, П. П. Теофилов*, Успехи Физических Наук, XLI 1, 44, (1950.)
3. *W. B. Nottingham*, Solid Luminescent Materials (Cornell Symposium) p. 301. John Wiley and Son, N. Y. 1948.
4. *С. М. Ривкин*, Известия Академии Наук, Серия Физическая, XV. 771 (1950).

TABLE I

Cycles	Harmonics	$\gamma_k$ for	
		Process I	Process III
50	1	1	1
550	11	$8,77 \times 10^{-3}$	$9,1 \times 10^{-2}$
1050	21	$2,41 \times 10^{-3}$	$4,3 \times 10^{-2}$
10 Kc + 1	201	$2,66 \times 10^{-5}$	$4,22 \times 10^{-3}$
100 Kc + 1	2001	$2,77 \times 10^{-7}$	$2,5 \times 10^{-4}$
1 Mc + 1	20001	$2,77 \times 10^{-9}$	$7,97 \times 10^{-7}$
5 Mc + 1	100001	$5,55 \times 10^{-11}$	$3,19 \times 10^{-8}$



A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Farkas Sándor

Kézirat beérkezett: 1954. V. 17. — Terjedelem: 8 (A/5) ív, 26 ábra

---

31554/54 — Akadémiai Nyomda, V., Gerlőczy-u. 2. — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

Les *Acta Physica* paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des travaux du domaine de la physique.

Les *Acta Physica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement par volume est de 110 forints (\$ 6,50).

On peut s'abonner à l'Entreprise du Commerce Extérieur des Livres et Journaux »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

The *Acta Physica* publish papers on physics, in Russian, French, English and German.

The *Acta Physica* appear in parts of various size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the *Acta Physica*, is 110 forints (\$ 6,50) a volume. Orders may be placed with »Kultúra« Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Die *Acta Physica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der Physik in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die *Acta Physica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 forint (\$ 6,50). Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Bankkonto: Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.



## INDEX

<i>Z. Gyulai</i> : P. Selényi .....	1
<i>P. S. Faragó and G. Groma</i> : Reflex Oscillators. — П. Ш. Фараго и Г. Грома Отражательные осцилляторы.....	7
<i>P. S. Faragó and G. Marx</i> : Quantum Effects in the Interaction between Free Electrons and Electromagnetic Fields. — П. Ш. Фараго и Г. Маркс: Квантовые явления при взаимодействии свободных электронов с электромагнитными полями.....	23
<i>Th. Neugebauer</i> : Lichtzerstreuung und Hubbleeffekt. — Т. Нейгебауер: Рассе- яние света и эффект Hubble .....	31
<i>S. N. Biswas</i> : Fredholm Theory of Heitler's Integral Equation. — С. Н. Бисвас: Применение теории Фредгольма к интегральному уравнению Гейтлера .....	49
<i>G. Szigeti, G. T. Bauer, J. Weiszburg</i> : Mikrophotometrische Messungen an elektrolumines- zenten Siliziumkarbidkristallen. — Г. Сигети, Г. Т. Бауер, Я. Вейсбург: Микрофотометрические измерения на электролюминесцентных кристаллах карбида кремния .....	57
<i>G. Szigeti</i> : Über die durch Gleichstrom angeregte Elektrolumineszenz von Silizium- karbidkristallen. — Г. Сигети: Об электролюминесценции кристаллов карбида, возбужденной постоянным током .....	65
<i>G. Györgyi</i> : Die Theorie der Schwingungen der auf einen Torsionsdraht aufgehängten Waage nach Eötvös—Selényi. — Г. Дьёрдьи: Теория колебания крутиль- ных весов (Установка Этвеша—Шеленьи) .....	79
Краткие сообщения — Brief Reports — Kurze Mitteilungen	
<i>Gy. Gergely</i> : Band-Width Problems in the Investigation of Relaxation Processes .....	87

ACTA  
PHYSICA  
ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS  
Z. GYULAI, L. JÁNOSY, I. KOVÁCS, K. NOVOBÁTZKY

REDIGIT  
P. GOMBÁS

TOMUS IV

FASCICULUS 2



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
BUDAPEST, 1954

ACTA PHYS. HUNG.



# ACTA PHYSICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY-U. 21.

Az *Acta Physica* orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a fizika tárgy köréből.

Az *Acta Physica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az *Acta Physica* előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest, V., Alkotmány-u. 21. Bankszámla 04-878-111-46), a külföld számára pedig a »Kultúra« Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Bankszámla: 43-790-057-181 sz.) vagy külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

»*Acta Physica*« публикует трактаты из области физических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

»*Acta Physica*« выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу:

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена »*Acta Physica*« — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет »*Kultúra*« (*Budapest, VI., Sztálin-út 21.* Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

# UNTERSUCHUNGEN ÜBER LICHTQUELLEN FÜR SPEKTRALANALYSE

## EIN ELEKTRONISCH GESTEUERTER FUNKENERZEUGER

Von

Á. BARDÓCZ

UNGARISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
ZENTRALFORSCHUNGSINSTITUT FÜR PHYSIK, SPEKTROSKOPISCHE ABTEILUNG, BUDAPEST,

(Vorgelegt von I. Kovács. — Eingegangen : 25. VI. 1953.)

Die Steuerung der in der Spektralanalyse gebrauchten Hochspannungsfunkenerzeuger kann man mit Elektronenröhren kleiner Leistung, wobei die gesteuerte Energie die Röhre nicht durchfließt sondern nur die Funkenentladung hervorruft, durchführen. In der vorliegenden Arbeit steuert eine Thyatronröhre die Funkenentladung. Das Wesentliche der elektronischen Steuerung besteht darin, dass zwei hintereinander geschaltete Funkenstrecken verwendet werden, deren eine ein, hinter eine Thyatronröhre geschalteter, ohmscher Widerstand überbrückt. Wenn das Gitter der übrigens durch negative Vorspannung gesperrten Thyatronröhre einen positiven Spannungsschoss erhält, wird erst die nicht überbrückte Funkenstrecke durchschlagen, dann die durch die Thyatronröhre und ohmschen Widerstand überbrückte, wodurch die Hauptentladung eingeleitet wird. Das elektronische Steuersystem vermindert die Unsicherheiten anderer Steuerungssysteme bedeutend, ausserdem kann die Zahl der Funken in der Zeiteinheit durch die elektronische Steuerung zwischen weiten Grenzen variiert werden. Dies bringt mit sich, dass auch der Takt des Abreissbogens und des Niederspannungsfunkens leicht geändert werden kann.

### EINLEITUNG

Bekanntlich wird bei der Spektralanalyse das Versuchsmaterial in der Lichtquelle verdampft, der Dampf zur Lichtemission angeregt, das entstandene Licht in einem Spektralapparat zerlegt und aus der Intensität der so erhaltenen Spektrallinien auf die prozentuelle Zusammensetzung des Stoffes gefolgert. Die Vorbedingung jedwelcher chemischen Spektralanalyse ist, den Verlauf der Lichtemission in der Lichtquelle reproduzierbar herstellen zu können.

Die ganz aussergewöhnlichen Erfolge, welche die Emissions-Spektralanalyse auf dem Gebiete der qualitativen und quantitativen Analyse in den letzten 20 Jahren erreichte, ist grösstenteils dem zuzuschreiben, dass es gelang die zur Analyse unentbehrliche Lichtemission in entsprechender Weise durchzuführen, solche Anregergeräte zu bereiten und reproduzierbare Anregungsverhältnisse zu schaffen, wodurch für die Wissenschaft und Industrie Analysen entsprechender Genauigkeit durchgeführt werden können.

In den verflossenen 25 Jahren erschienen im wissenschaftlichen und angewandten Schrifttum viele Arbeiten über die Anregungsgeräte der chemischen Spektralanalyse [1—72]. Die verhältnismässig grosse Zahl der diesbezüglichen Arbeiten weist auf die Wichtigkeit dieser Frage hin. In diesen Arbeiten werden teilweise neue Anregerinrichtungen oder ihre Anwendungsmethoden beschrieben, zum Teil werden deren Vor- und Nachteile diskutiert. Da die Anregung



eine der wichtigsten Faktoren der chemischen Spektralanalyse ist und eine bedeutende Fehlermöglichkeit der Spektralanalyse Folge der Unsicherheit der Anregung ist, wurde vielfach versucht, die Anregungseinrichtungen zu vervollkommen.

Unter den heute bekannten spektroskopischen Lichtquellen ist die best reproduzierbare die elektrische Funkenlichtquelle und diese bietet betreffs Vervollkommnung das meiste.

Da sich in der spektralanalytischen Praxis die direkten Lichtmessverfahren immer mehr verbreiten und die Zunahme der Genauigkeit als Folge der Vervollkommnung der Lichtquellen bei diesen Verfahren bedeutend grösser ist als bei dem photographischen Verfahren, kann man mit Sicherheit annehmen, dass die direkten Lichtmessverfahren die Vervollkommnung der spektroskopischen Lichtquellen mit sich bringen werden. Hieraus folgt, dass die Stabilisierung der spektroskopischen Lichtquellen schon jetzt wichtig ist, in der Zukunft aber noch wichtiger sein wird. Die Erhöhung der Genauigkeit der jetzigen Verfahren mit direkter Ablesung kann man nur von der Vervollkommnung der Anregung erwarten. Vollendete Lichtquellen haben den Vorteil, dass bei dem direkten Ableseverfahren Bezugslinien eventuell überflüssig sein werden [54].

Als Folge des bisher Diskutierten, hatte Verfasser Versuche ähnlichen Zweckes durchgeführt, worüber hier berichtet werden soll. Vorliegende Arbeit gibt einen Überblick über die gebräuchlichen Funkenerzeuger und gibt die Beschreibung eines prinzipiell neuen elektronisch gesteuerten spektroskopischen Anregersystems, dessen Anwendungsmöglichkeiten die der bisherigen Systeme übertreffen.

Es ist ebenfalls bekannt, dass der elektrische Funke nicht nur als selbstständige Lichtquelle grosser Energie verwendet wird, sondern auch mit kleiner Leistung zum Zünden des Abreissbogens und des kondensierten Niederspannungsfunkens [13, 15, 25, 26, 30, 35—38, 41, 42, 46, 48—52, 56—60, 65, 68, 70—72]. Diese Anwendung des Funkens wird in der Arbeit ebenfalls diskutiert.

## HISTORISCHER ÜBERBLICK

### *Ungesteuerte und mittels Hilfsfunkenstrecke gesteuerte Funkenerzeuger*

In Abb. 1a ist die Schaltung für die Erzeugung spektroskopischer Analysenfunkens in seiner klassischen Form, wie ihn die Bahnbrecher der Spektralanalyse (*Hartley, Pollok und Leonard, de Gramont* [2, 3, 5]) gebrauchten, abgebildet. Ein Transformator (früher Induktorium) [2, 3] lädt einen Kondensator soweit auf, wie dies die Entfernung der Elektroden der Analysenfunkensstrecke  $F$  bedingt. Hat die Ladung des Kondensators die zum Durchschlagen der Funken-



strecke  $F$  nötige Spannung erreicht, erfolgt die Entladung durch den Entladungskreis. Im Schaltungsschema ist links vom Kondensator der Ladekreis, rechts der Entladekreis angedeutet. Die in den Entladekreis eingebaute Selbstinduktion dient zum Einstellen der Entladungsverhältnisse, der ohmsche Widerstand im Ladestromkreis zur Einstellung der Ladungsverhältnisse.

Die Zahl der Funken in der Zeiteinheit sowie die Spannung des aufgeladenen Kondensators vor der Entladung wird bei den nach dem Schaltungs-

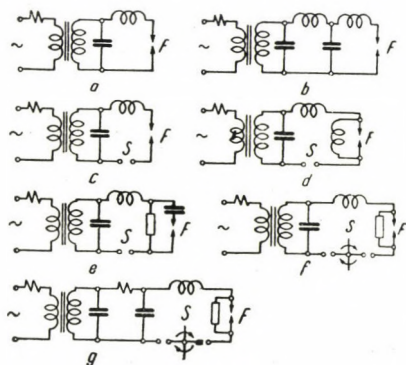


Abb. 1. Elektrische Schaltung verschiedener Funkenerzeuger. a — Einfacher, ungesteuerter Funkenerzeuger. b — Wolbanks Funkenerzeuger. c — Funkenerzeuger mit fester Steuerfunkenstrecke. d — Rajskijs Funkenerzeuger. e — Die von Lévy abgeänderte Rajskijsche Schaltung. f — Funkenerzeuger mit synchron rotierender Steuerfunkenstrecke. g — Vincent und Sawyer'scher Funkenerzeuger. F — Analysenfunkenstrecke. S — Steuerfunkenstrecke.

schema der Abb. 1a gebauten Funkenerzeuger nicht immer gleich sein. Bei entsprechender Einstellung der Schaltelemente kann man aber regelmässige Funkenfolgen erhalten. Diese Eigenschaft der Funkenerzeuger haben *Kaiser* und *Wallraff* [17] bzw. *Kaiser* [28] dann *Höfert* und *Keck* [34] ausführlich und gründlich diskutiert. Die Schaltung des von *Scheibe* und Mitarbeitern eingeführten Funkenerzeugers ist ähnlich [1, 9, 11, 22]. Bei diesen Anregern ist die Funkenzahl pro Sekunde gleich, nicht aber die Durchschlagsspannung der einzelnen Funken. *Boas* [4] verfertigte einen solchen Funkenerzeuger, welcher in der Zeiteinheit Funken stabiler Zahl liefert und bei dem alle Funken gleiche Durchschlagsspannung aufweisen. Dies wird mit Hilfe eines elektrostatischen Relais erreicht, welches die Elektroden immer in gleicher Entladungsspannung entsprechenden Abständen hält. Hier wollen wir auch den von *Wolbank* [18, 19] (Abb. 1b) eingeführten Funkenerzeuger erwähnen, wo sich dem gebräuchlichen, Kapazität und Selbstinduktion enthaltendem Teil ein weiterer, Selbstinduktion und Kapazität enthaltender Schwingungskreis anschliesst.



Will man die durch die Analysenverhältnisse bedingene, dem Abstand der Analysenfunkkenstrecke F entsprechende Ladespannung des Kondensators erhöhen, muss hinter die Analysenfunkkenstrecke eine zweite, feste oder rotierende Steuer- oder Hilfsfunkkenstrecke S geschaltet werden. Dieser Gedanke stammt von *Feussner* [6—8]; seine Ausführung mit stabiler Funkkenstrecke zeigt die Abb. 1c, die mit rotierender Funkkenstrecke Abb. 1f.<sup>1</sup>

Charakteristisch ist für die Schaltung der Abb. 1c. [23, 24], dass die Ladespannung des Kondensators zwar grösser ist als ohne Steuerfunkkenstrecke, diese ist jedoch Schwankungen unterworfen, da die Ladespannung des Kondensators durch die Verhältnisse der Analysenfunkkenstrecke beeinflusst wird. Diesen Einfluss kann man ausschalten, wenn man die Funkkenstrecke mit einer Selbstinduktion überbrückt (Abb. 1d.). Die erwähnte Selbstinduktion kann man auch durch einen ohmschen Widerstand ersetzen [29], wie dies heute bei den Funkkenerzeugern mit Steuerfunkkenstrecke allgemein üblich ist [56]. Die Anwendung dieser Schaltung für spektroskopische Zwecke stammt von *Raijskij* [20]. Das Schaltschema der Abb. 1e. ist die von *Lévy* [47] durchgeführte Abänderung des in Abb. 1d. angegebenen, wo der Durchgang der vom Transformator kommenden Niederfrequenzströme durch einen hinter die Analysenfunkkenstrecke geschalteten Kondensator behindert wird. Vollständig einflusslos ist die Analysenfunkkenstrecke auf die Ladespannung des Kondensators bei der *Feussnerschen* [6—8] Drehschalter-Steuerung (Abb. 1f), wo der Kondensator während dem Aufladen vom Entladungskreis abgeschaltet ist. Bei dieser Steuerung verteilt sich die Kondensatorenergie wegen der verschiedenen Längen der Steuerfunkkenstrecken nicht unbedingt gleichmässig auf die Steuerfunkken- und die Analysenfunkkenstrecke. Eine weitere Ausführung, des mittels Drehschalter gesteuerten Funkkenerzeugers zeigt Abb. 1g [40].

Durch Erhöhung der Funkkenzahl während einer halben Periode der zum Betrieb des Funkkenerzeugers benützten Wechselfspannung wird die Genauigkeit der Analyse gesteigert. Eine solche Entladungsweise wird gewöhnlich nach Schaltung 1d erzeugt [45, 53, 56], nur muss man durch Einblasen von Luft für Entionisierung der Steuerfunkkenstrecke zwischen den einzelnen Entladungen sorgen. *Fowler* und *Wolfe* [45] verwendeten erstmals Luftenblasen zur Steuerung spektroskopischer Lichtquellen. Eine ausführliche Besprechung dieser Frage befindet sich in den Arbeiten von *Enns* und *Wolfe* [53, 56].

Erwähnenswert sind auch die vielen Kunstgriffe, welche einen verlässlicheren Betrieb der schon beschriebenen Funkkenerzeuger bezweckten. Es wurde um gleichmässigeres Durchschlagen der Analysen- und Steuerfunkken in der Funkkenstrecke zu erreichen, ultraviolette Bestrahlung angewendet [16, 19, 44]. *Balz*, *Kaiser* und *Keck* [31] verwendeten zur Verbesserung der Zündung eine Lock-

<sup>1</sup> In sämtlichen Abbildungen sind die Elektroden der Steuerfunkkenstrecken S durch Kreise bezeichnet, zum Unterschiede von den mit Pfeilen bezeichneten Elektroden der Analysenfunkkenstrecke F.



spitze. Eine solche ist auch zur Verbesserung der Verhältnisse bei der Analysen- wie auch bei der Steuerfunkenstrecke anwendbar [43]. Die um eine isolierte Hochspannungsleitung entstehende Koronaentladung hat ebenfalls ionisierende Wirkung [43]. Diese Erscheinung verwendete *Balz* [43] zur Ionisierung der Analysenfunkenstrecke in der Weise, dass er in deren Nähe einen isolierten, auf Hochspannung liegenden Leiter anbrachte. Stark ionisierend wirkt eine stromdurchflossene glühende Spule oder Spirale unterhalb der Funkenstrecke um die untere Elektrode angebracht dadurch, dass die vom Draht austretenden Elektronen in die Funkenstrecke gelangen und so die Entladung erleichtern [63].

In einzelnen Fällen bläst man Luft in die Analysenfunkenstrecke um die Anregungsverhältnisse zu verbessern [7, 14, 21, 32, 33, 63, 69], die Meinungen betreffs Wirkung sind aber verschieden [17, 28, 39].

Um die doppelte Funktion des Funkens, Verdampfung sowie Anregung zu trennen, legte *Rouse* [73] das Material in einen Tiegel, verdampfte es durch Hochfrequenz-Heizung und erregte die Dämpfe durch Funken.

### *Elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger*

Die im vorgehenden Abschnitt besprochene Steuerung durch stabile oder rotierende Hilfsfunkenstrecken der spektroskopischen Funkenlichtquellen ist nicht die endgültige Lösung, sondern höchstens eine Annäherung der endgültigen Lösung des Problems. Die endgültige Lösung der Steuerung muss wahrscheinlich mit Hilfe der aus der Elektronik bekannten Methoden erreicht werden. Gegenwärtig können die elektronischen Schaltungselemente die in der Spektroskopie verwendeten verhältnismässig grossen Energien nur begrenzt und mit kostspieligem Betrieb steuern.

Die mit den gebräuchlichen Vakuumröhren arbeitenden Schwingungsanreger können höchstens die zum Zünden von Abreissbögen und Niederspannungs-Funkenentladung nötige Energie liefern. Mit einer solchen Ausführung erregt *Findeisen* [15] bei seinem Abreissbogenerzeuger die Hochspannungs-Zündströme mit induktiv rückgekoppelten Röhrengenerator (Abb. 2a). Die Überführung der Zündspannung auf die Bogenstrecke erfolgt mit Hilfe des Tesla-Transformators T. Die Anwendung von Thyatronröhren zur Erzeugung der Zündspannungen empfahl erstmals *Kemmler* [38]. Zur Erzeugung der Zündfunken für Abreissbögen verwendeten *Dwyer* [59] (Abb. 2b) bzw. *Bardócz* [70—72] (Abb. 2c) thyatrongesteuerte Schaltungen.

Einen elektronisch gesteuerten Funkenerzeuger für grosse Leistungen bauten zuerst *Mireless-Malpica* und *Berry* [27] laut Abb. 2d. Das Schaltelement ist hier Ignitron im primären Stromkreise eingebaut, welches zur Schaltung beträchtlicher Energien geeignet ist. Zur Schaltung und Übertragung grosser Energien geeigneter weiterer elektronischer Schalter dient die im letzten Kriege



entwickelte Trigatronröhre [74]. Abb. 2e zeigt das Schaltungsschema [50, 51] eines mit dieser Röhre aufgebauten Funkenerzeugers. Zu erwähnen ist noch, dass es üblich ist in einzelnen Fällen bei Hochspannungs-Funkenerzeugern auf der Hochspannungsseite zwischen Transformator und Kondensator Gleichrichter-Dioden einzubauen [64] (Abb. 2f). Dieses Verfahren benützte bei Niederspannungs-Funkenerzeugern als erster *Schmidt* [35]. Man kann auf diese Weise auch von der Steuerung des Ladekreises sprechen, was übrigens schon beim Anreger von *Mireless-Malpica* und *Berry* [27] der Fall ist.

Im spektralanalytischen Schrifttum findet man ausser den besprochenen Funkenerzeugern noch andere elektronische Hochfrequenz-Funkenerzeuger,

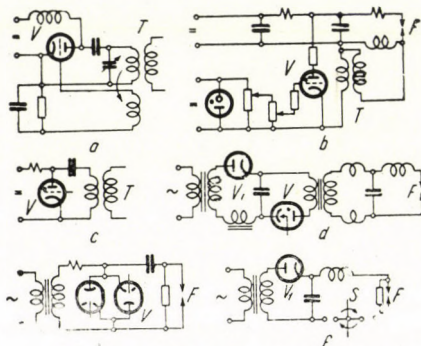


Abb. 2. Elektrische Schaltungen verschiedener elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger. a — Induktiv rückgekoppelter Vakuumröhrengenerator zur Zündspannungserzeugung (Find-eisen). b, c — Mit Thyatronröhre gesteuerter Zündfunkenerzeuger (Dwyer, Bardócz). d — Mit Ignitron gesteuerter Funkenerzeuger grosser Energie (Mireless-Malpica-Berry). e — Mit Trigatron gesteuerter Funkenerzeuger grosser Energie (Braudo und Clayton). f — Steuerung des Ladekreises am Funkenerzeuger mit rotierender Steuerfunkenstrecke (Rankin). F — Analysenfunkenstrecke. S — Steuerfunkenstrecke. T — Tesla Transformator. V — Die Entladung steuerndes Glied.  $V_1$  — Die Ladung steuerndes Glied.

welche zu lokaler Mikroanalyse oder anderen speziellen Zwecken verwendet wurden [75—80], jedoch bleiben die in diesen elektronisch geschalteten Stromstärken weit hinter den Stromstärken, welche mit den hier zur Erörterung gelangenden Funkenerzeugern geschaltet werden, zurück.

#### VORVERSUCHE ZUR AUSBILDUNG EINES NEUEN ELEKTRONISCH GESTEUERTEN FUNKENERZEUGERS

Vor der Ausbildung des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers, den wir im folgenden beschreiben wollen, führten wir einige erwähnenswerte Versuche durch. Als erstes versuchten wir, die Steuerfunkenstrecke eines Hochspannungs-Funkenerzeugers durch starke Koronaentladung fremder Herkunft zum Durchschlagen zu bringen. Aus diesem Grunde umgaben wir die Steuerfunkenstrecke



mit einem Ring, aus welchem in Richtung der Funkenstrecke 8—12 Grammophon-  
nadeln herausstanden. Der Abstand der Steuerfunkenstrecke wurde so gewählt,  
dass bei gegebener Ladespannung des Kondensators eben noch kein Durchschlag  
erfolgte. Den Hochspannungspol eines Tesla-Transformators verbanden wir  
mit dem Ring, die Hochspannung erzeugten wir nach dem Schaltungs-  
schema der Abb. 2c. Das Ergebnis war, dass die gewünschte Steuerung ausblieb, wenn die  
Nadeln von der Steuerfunkenstrecke entfernt waren. Wurden aber die Nadeln  
nahe an die Steuerfunkenstrecke gebracht, konnte die gewünschte Steuerung  
erreicht werden, die Entladung erfolgte jedoch von einer Elektrode der Steuer-  
funkenstrecke über die Grammophon-  
nadeln zur anderen Elektrode. Weitere Unter-  
suchungen ergaben, dass es ganz gleichgültig ist, ob das Überleiten der Hoch-  
spannungs- und Hochfrequenzströme zur Funkenstrecke mit Hilfe von Nadeln  
oder auf andere Weise erfolgt. Die Steuerung konnte auch durch Anwendung

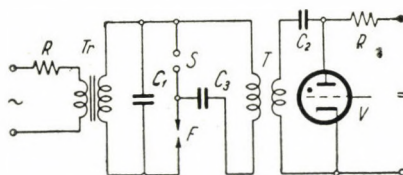


Abb. 3. Elektrische Schaltung des mittels Hochfrequenz gesteuerten Hochspannungsfunkener-  
zeugers.  $C_1, C_2, C_3$  — Kondensatoren. F — Analysenfunkenstrecke. R — ohmsche Widerstände.  
S — Steuerfunkenstrecke. Tr — Hochspannungstransformator. T — Tesla Transformator.

eines Bleches zwischen den beiden Elektroden der Steuerfunkenstrecke senk-  
recht zu deren Symmetrieachse aufrecht erhalten werden.

Die Steuerung war auch in dem Fall wirkungsvoll, wenn wir die Funken-  
strecke in zwei unabhängige Teile teilten, wodurch eine zur Steuer-, die andere  
zur Analysenfunkenstrecke wurde.

Auf diese Art konnte die Schaltung der Abb. 3 ausgebildet werden, wo  
S die Steuer-, F die Analysenfunkenstrecke bedeutet. Der Hochspannungs-  
transformator Tr ladet den Kondensator  $C_1$ . Die zur Zündung nötige Energie  
liefert der von einer Gleichstromquelle gespeiste Kondensator  $C_2$ . Die Gleich-  
strom-Speisung ist darum angezeigt, da hierdurch die Phaseneinstellung der  
Zündspannung und Ladespannung des Kondensators  $C_1$  überflüssig wird. Der  
aufgeladene Kondensator  $C_2$  wird über die Thyatronröhre V und Primärspule  
des Tesla Transformators T entladen, wodurch in die Sekundärspule des Tesla-  
Transformators Hochspannung induziert wird. Diese Hochspannung durch-  
schlägt die Steuerfunkenstrecke S. Der gesamte Abstand von S und F wird so  
eingestellt, dass über diese  $C_1$  sich eben noch nicht entladen kann. Sobald aber  
S durchschlägt, erscheint die gesamte Ladespannung von  $C_1$  bei F, und es erfolgt  
auch hier der Durchschlag.  $C_3$  ist ein Isolierkondensator, R ein ohmscher  
Widerstand. Die Thyatronröhre V steuert ein Impulsgenerator [70—72].



Mit einer Schaltung laut Abb. 3 beobachten wir, dass die Entladungen gut steuerbar sind, solange die Ladespannung des Kondensators  $C_1$ , 10 000 Volt nicht überschreitet. Mit dem Anwachsen der Ladespannung des Kondensators  $C_1$  muss gleichzeitig die Entfernung der Elektroden der Steuerfunkenstrecke vergrößert werden. Bei grösserem Abstand der Elektroden genügt die schwache Tesla-Entladung nicht mehr zum Einleiten der Entladung des Kondensators  $C_1$ . Dies ist nur dann möglich, wenn der Zündstromkreis grosse Energien liefert, wodurch die Anwendbarkeit der Schaltung in Frage gestellt wird.

## DER NEUE ELEKTRONISCH GESTEUERTE FUNKENERZEUGER

### *Funkenerzeuger mit Einfachsteuerfunkenstrecke*

Das Wesentliche des neuen elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers, den wir hier beschreiben wollen, besteht darin, dass die Entladung der im Kondensator aufgespeicherten Anregungsenergie durch eine Steuerfunkenstrecke erfolgt.

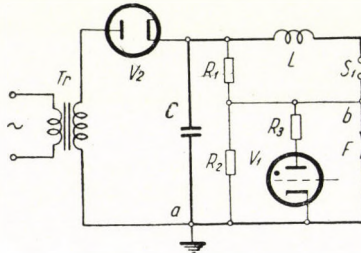


Abb. 4. Schaltungsschema des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkenstrecke. C — Kondensator.  $S_1$  — Einfachsteuerfunkenstrecke. F — Analysenfunkenstrecke. L — Selbstinduktionsspule.  $R_1$ ,  $R_2$  — Spannungsteiler, ohmsche Widerstände.  $R_3$  — ohmscher Widerstand. Tr — Hochspannungstransformator.  $V_1$  — Thyatronröhre.  $V_2$  — Gleichrichterdiode. Der dick gezeichnete Teil ist der Entladekreis.

Die Entladung wird durch eine Elektronenröhre eingeleitet, die Entladungsenergie fliesst jedoch nicht durch die Elektronenröhren, sondern über die schon erwähnte Funkenstrecke. Auf diese Weise können unbegrenzte Energien gesteuert werden unter Beibehaltung sämtlicher Vorteile der elektronischen Steuerung.

Die elektrische Schaltung des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers zeigt Abb. 4. Der Hochspannungstransformator Tr ladet den Kondensator C über die Diode  $V_2$ .  $S_1$  ist die Steuerfunkenstrecke, F die Analysenfunkenstrecke. Die Aufgabe der Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  ist, die an den Polen des Kondensators C herrschende Spannung auf die Funkenstrecken  $S_1$  und F gleichmässig zu verteilen. Aus diesem Grunde können die ohmschen Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  auch durch Kondensatoren ersetzt werden.  $V_1$  ist eine gasgefüllte Triode (Thyatron) welche durch negative Vorspannung gesperrt ist.



Die Wirkungsweise des gemäss Abb. 4. geschalteten Systems ist folgende: Nachdem der Kondensator auf die Scheitelspannung des Wechselstrom liefernden Transformators Tr aufgeladen ist, geben wir in der nächsten Halbperiode auf das Gitter der durch negative Vorspannung gesperrten Röhre  $V_1$  einen positiven Spannungsschoss, wodurch diese zündet. Infolgedessen gerät eine Elektrode der Funkenstrecke  $S_1$  praktisch auf das Potential des Punktes »a« der Schaltung, da  $R_3$  bedeutend kleiner ist als  $R_1$ , bzw.  $R_2$ . Die Funkenstrecken  $S_1$  und F müssen so eingestellt werden, dass zwischen ihnen auch bei voll aufgeladenem C sicher eben noch kein Durchschlag erfolgt. Indem wir die gemeinsame Elektrode der doppelten Funkenstrecke  $S_1 - F$  auf das Potential des Punktes »a« legen, wird die ganze Ladespannung des Kondensators C an den Elektroden des  $S_1$  erscheinen. Diese annähernd doppelte Spannung wird  $S_1$  durchschlagen. Hiernach beginnt die Entladung des Kondensators C über  $S_1$ , den ohmschen Widerstand  $R_3$  und Röhre  $V_1$ . Des durchfliessenden Stromes wegen, — da der Durchschlag und der darauffolgende Stromfluss für  $S_1$  einen Kurzschluss bedeutet — wird die an den Polen des Kondensators herrschende ganze Spannung an den Klemmen des  $R_3$  erscheinen, bzw. an der Funkenstrecke F, demzufolge auch diese durchschlagen wird. Nach dem Durchschlagen von F wird sich die Entladung des Kondensators C über  $S_1 - F$  fortsetzen. Nach dem Durchschlagen der Funkenstrecken  $S_1$  und F wird auf die Klemmen des ohmschen Widerstandes  $R_3$  nur die Bogenspannung fallen, mithin wird der Stromfluss hier gering sein. Je nach den elektrischen Daten des Stromkreises C —  $S_1 - F$ , in welchen man den Anforderungen der Analyse gemäss noch eine Selbstinduktion — allenfalls auch noch ohmschen Widerstand — einschalten kann, wird die Thyatronröhre  $V_1$  entweder am Ende der Entladung des Kondensators C, oder im Falle niedriger Schwingungszahl des Entladekreises, noch vor Beendigung der Entladung auslöschten.

Die zur Steuerung der Röhre  $V_1$  nötigen positiven Spannungsschösse kann man mittels mechanischen Schalters oder auf elektrischem Wege zuführen. Mit der in Abb. 4 angegebenen Anordnung kann man pro Sekunde, der Periodenzahl der Netzspannung entsprechend oder mit geringerer Häufigkeit, Funken erzeugen.

Die Wirkungsweise der Versuchseinrichtung veranschaulichen die Oszillogramme der Abb. 20 und 21, auf welche wir noch zurückkommen.

#### DIE VERSUCHSANORDNUNG

Bei sämtlichen Messungen waren die technischen Angaben der Versuchsanordnung die folgenden. Der Transformator Tr (Abb. 4, Abb. 10 u. 17) hat eine Übersetzung von 220/15 000 Volt, diesem ist ein Spannungsregler-Transformator vorgeschaltet, mit dessen Hilfe die Spannung an den Klemmen des Kondensators C auf den gewünschten Wert einstellbar ist. Zwischen dem Trans-



formator Tr und dem Spannungsregler-Transformator befindet sich ein Widerstand von 3 Ohm, welcher die Überlastung der Gleichrichterröhren verhindert, wenn die Funkenstrecken  $S_1$  bzw. F im Kurzschluss sind.  $V_2$  ist eine Gleichrichterdiode, mit einer Betriebsspannung von 20 000 Volt, höchste Belastung 1 Ampere, Inversspannung 40 000 Volt. C ist teilweise Minos, teilweise Dubilier-scher Kondensator mit Glimmerisolation und einer Kapazität von 1 000—20 000 pF.  $R_1 - R_2 = 100$  Megohm.  $V_1$  ist eine gasgefüllte Triode (Thyratron) mit 10 000 Volt Betriebsspannung, höchste Stossbelastung 16 Ampere.

Die Einfach- bzw. Doppelfunkenstrecken  $S_1$  und  $S_2$ , (siehe später) aus drei Zink- oder Kohlscheiben bestehend, waren symmetrisch angeordnet. Die mittlere Scheibehatte einen Durchmesser von 58 mm und war 27 mm dick, die beiden seitlichen Scheiben mit einem Durchmesser von 45 mm waren 23 mm dick. Die gegenüberstehenden Flächen der Zinkscheiben waren konzentrisch gerippt. Die Kohlscheiben hatten glatte Flächen. Die Entfernung der seitlichen Scheiben von den mittleren konnte eingestellt werden, mit entsprechender Vorrichtung auch unter Spannung. Zwecks Vermeidung der Erwärmung und damit Sicherung der Reproduzierbarkeit der Messungen, waren die Zinkscheiben so gestaltet, dass sie während dem Betrieb mit Wasser gekühlt werden konnten. Aus diesem Grunde waren die Zinkscheiben hohl und mit Rohrstützen zum Zu- und Ableiten vom Wasser versehen. Bei diesen Messungen waren in den Abb. 4, 10 und 17 die Punkte »b« geerdet, mithin konnte die mittlere Scheibe direkt an die Wasserleitung angeschlossen werden. Bei solcher Schaltung waren die unter Spannung stehenden Elektroden der Steuerfunkenstrecken  $S_1$  bzw.  $S_2$  mit Hilfe von isoliert aufgestellten Behältern gekühlt. Die Temperatur des Kühlwassers betrug 14—17° C. Bei dem Betrieb mit Einfachsteuerfunkenstrecke war die eine seitliche Scheibe mit der mittleren leitend verbunden. In den Abb. 5, 6, 7, 8 und 9 bezeichneten wir die Einzelfunkenstrecke mit zwei Scheiben (beziffert mit  $S_1$ ), in den Abb. 11, 12, 13, 14, 15 und 16 die Zweifachfunkenstrecke mit drei Scheiben (beziffert mit  $S_2$ ). Will man keine Wasserkühlung anwenden, sind die Zinkscheiben durch Kohlen- oder Graphitscheiben gut ersetzbar. Die Widerstandsketten  $R_1$  und  $R_2$  stellten wir aus je 30 Stück bis 5 Watt belastbaren Radiowiderständen zusammen, deren Einzelwiderstand 3·3 Megohm betrug.  $R_3$  und  $R_4$  (Abb. 4, 10, 17) sind bei niedrigeren Werten bis 100 Watt, bei grösseren Werten entsprechend weniger belastbare Widerstände. Die Elektroden der Analysen funkenstrecke bestanden immer aus spektralreiner Kohle von 6 mm Durchmesser mit ebenen Endflächen. Vertikal auf die Symmetrieachse der Elektroden waren Lockspitzen angebracht.

Das Gitter der steuernden Thyatronröhre  $V_1$  steuerte ein Impulsgenerator, in welchen auch die zum Absperrern der Röhre  $V_1$  nötige negative Vorspannung eingebaut ist. Der Impulsgenerator kann pro Sekunde 100 oder weniger positive Spannungsstösse erzeugen. Die Zahl der Spannungsstösse geringerer Häufigkeit pro Sekunde ist mit irgendeiner Subharmonischer der Frequenz der Netz-



spannung gleich. Selbstverständlich arbeitet der Impulsgenerator synchron mit der Netzspannung.

Während den Untersuchungen wurden richtige Einstellung und regelmässiges Arbeiten der Anordnung mittels Kathodenstrahl-Oszilloskop kontrolliert. Bei der Kontrolle beobachteten wir den Ablauf der Spannung an den Klemmen des Kondensators C.

### Charakteristische Eigenschaften des Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkenstrecke

Beim Bestimmen der elektrischen Eigenschaften des Funkenerzeugers neuen Systems untersuchten wir, welchen Einfluss die Kapazität des Kondensators C der

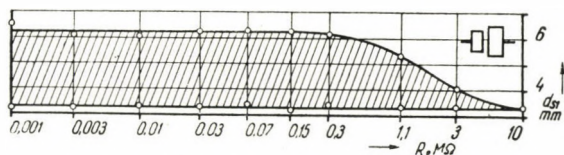


Abb. 5. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkenstrecke.  $d_{S_1}$  — Elektrodenabstand der Steuerfunkenstrecke.  $R_3$  — ohmscher Widerstand.  $d_F = 3 - 9$  mm,  $U_C = 18\ 000$  Volt.  $C = 10\ 000$  pF, Funkenhäufigkeit 50/s. Das Wirkungsgebiet ist gestrichelt.

Abb. 4, die Ladespannung  $U_C$ , der ohmsche Widerstand  $R_3$ , sowie der Abstand der Elektroden der Steuerfunkenstrecke  $S_1$  und der Analysfunkenstrecke F auf die Betriebsverhältnisse ausüben. Den Zusammenhang dieser fünf Parameter bestimmten wir durch Messungen.

Unser erstes Ziel war die Festsetzung des Einflusses des ohmschen Widerstandes  $R_3$  auf die Wirkungsweise des Systems, und nachher bei dem als optimalen Wert gefundenen Widerstandswert zu bestimmen inwiefern das System bei verschiedenen Einstellungen stabil ist.

Ändert man den Elektrodenabstand  $d_{S_1}$  der Steuerfunkenstrecke während dem Betrieb des Funkenerzeugers nach Abb. 4, so kann man feststellen, dass es einen solchen grössten und kleinsten Elektrodenabstand gibt, zwischen welchen das Anregersystem regelmässig arbeitet. Dieses Elektroden-Intervall  $\Delta d_{S_1}$  wollen wir in der Folge »Wirkungsgebiet« nennen.

Die Ergebnisse ähnlicher Messungen zeigt die Abb. 5. Auf dieser Abbildung sehen wir bei welchen Elektrodenabstand  $d_{S_1}$  der Steuerfunkenstrecke  $S_1$  das System regelmässig arbeitet, wenn man bei Elektrodenabstand  $d_F = 3.0, 6.0$  und  $9.0$  mm der Analysfunkenstrecke F, den Widerstand  $R_3$  ändert. Regel-



mässig arbeitend nennen wir die Wirkungsweise, wenn das Oszilloskop Abb. 20 entsprechende Bilder zeigt und weder ein Ausbleiben des Zündens, noch unregelmässiges Zünden ohne Steuerung der Funkenstrecken vorkommt. Die Analyseelektrodenabstände  $d_F = 3,0, 6,0$  und  $9,0$  mm sind übrigens bei den Versuchen immer beibehalten worden.

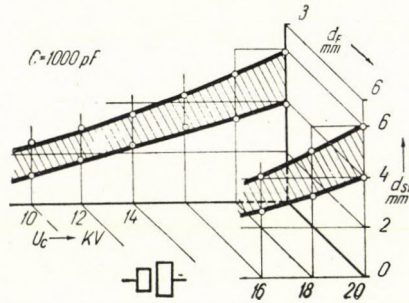


Abb. 6. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkenstrecke in Abhängigkeit von dem Elektrodenabstand  $d_{S1}$  der Steuerfunkenstrecke, von der Ladespannung  $U_C$  und von dem Abstand der Analyseelektroden  $d_F$ .  $C = 1\ 000$  pF,  $R_3 = 20\ 000$  Ohm, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

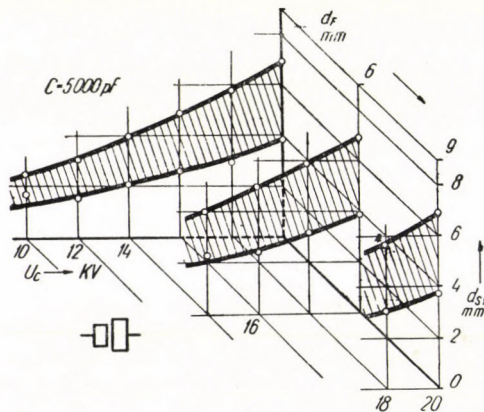


Abb. 7. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkenstrecke in Abhängigkeit von dem Elektrodenabstand  $d_{S1}$  der Steuerfunkenstrecke, von der Ladespannung  $U_C$  und von dem Abstand der Analyseelektroden  $d_F$ .  $C = 5\ 000$  pF,  $R_3 = 20\ 000$  Ohm, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

Auf der Abszisse der Abb. 5 sind die  $R_3$ -Werte im logarithmischen Massstab aufgetragen, auf der Ordinate der Abstand  $d_{S1}$  der Elektroden der Steuerfunkenstrecke  $S_1$ . Wenn die Ladespannung des Kondensators  $C = 18\ 000$  Volt beträgt,  $C = 10\ 000$  pF ist und der Abstand der Elektroden der Analysefunkenstrecke  $F$  zwischen  $3 - 9$  mm variiert, so ist bei der Änderung des Widerstandes  $R_3$  zwischen  $0,001 - 0,2$  Megohm ein betriebssicheres Wirkungsgebiet

in dem Falle erreichbar, wenn der Abstand der Elektroden  $d_{S1}$  der Steuerfunkenstrecke  $S_1$  zwischen  $3.3 - 6.2$  mm liegt. Wird der Wert von  $R_3$  weiter gesteigert, sinkt der höchste Wert  $d_{S1}$  und bei ungefähr 10 Megohm schrumpft

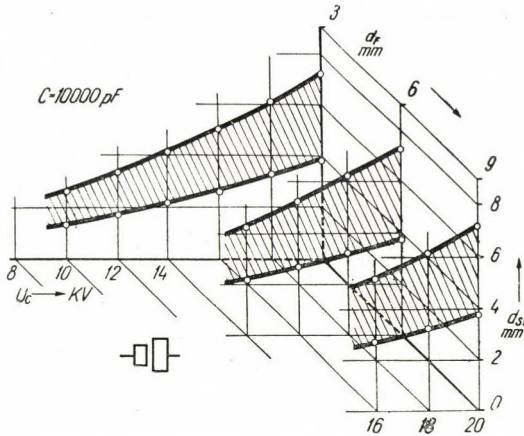


Abb. 8. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkenstrecke in Abhängigkeit von dem Elektrodenabstand  $d_{S1}$  der Steuerfunkenstrecke, von der Ladenspannung  $U_C$  und von dem Abstand der Analyseelektroden  $d_F$ .  $C = 10\ 000$  pF,  $R_3 = 20\ 000$  Ohm, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

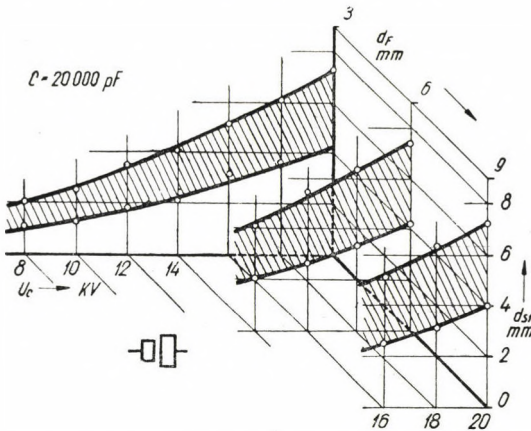


Abb. 9. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkenstrecke in Abhängigkeit von dem Elektrodenabstand  $d_{S1}$  der Steuerfunkenstrecke, von der Ladenspannung  $U_C$  und von dem Abstand der Analyseelektroden  $d_F$ .  $C = 20\ 000$  pF,  $R_3 = 20\ 000$  Ohm, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

das Wirkungsgebiet auf einen einzigen Punkt zusammen. Diese Ergebnisse weisen darauf hin, dass die Schaltung gemäss Abb. 4 nur dann betriebsfähig ist, wenn durch die Thyatronröhre  $V_1$  ein, die kleinste Stromstärke überschreitender Strom fließt.



Für  $R_3$  wählten wir keine 0,001 Megohm unterschreitenden Widerstände, um die Widerstände und die Thyatronröhre nicht zu überlasten. In Abb. 5 bezeichneten wir das Wirkungsgebiet  $\Delta d_{s_1}$  schraffiert.

Weitere Messungen bezweckten festzustellen, wie sich, bei dem mit Hilfe der Abb. 5 bestimmten Widerstandswert des  $R_3$  bei verschiedenen Elektrodenabständen  $d_F$  der Analysenfunkstrecke, das Wirkungsgebiet in Abhängigkeit der Ladespannung  $U_C$  und Kapazität des Kondensators C, ausbildet. Die Ergebnisse für die Werte  $C = 1\ 000, 5\ 000, 10\ 000$  und  $20\ 000$  pF Kapazität und  $R_3 = 0,02$  Megohm stellen die Abb. 6, 7, 8 und 9 dar. In diesen Abbildungen ist auf die eine waagrechte Achse die Kondensatorspannung  $U_C$ , auf die andere der Elektrodenabstand  $d_F$  der Analysenfunkstrecke aufgetragen. Die vertikale Achse zeigt die Elektrodenabstände  $d_{s_1}$  der Steuerfunkstrecke. Zur Erklärung gehen wir von der Abb. 8 aus, welche die Verhältnisse für die Kapazität  $C = 10\ 000$  pF zeigt. Abb. 8 enthält drei Kurven, eine für  $d_F = 3$  mm, eine weitere für  $d_F = 6$  mm und eine dritte für  $d_F = 9$  mm. Anfänglich sind die Kurven ganz gleich, jedoch bei grösseren Analysenfunkstrecken-Abständen endet das Wirkungsgebiet bei höheren Spannungswerten. Im allgemeinen kann man folgendes feststellen: Bei gegebenem Analyseelektroden-Abstand  $d_F$  und mit abnehmender Ladespannung  $U_C$  des Kondensators nimmt, wie schon erwähnt, der Elektrodenabstand  $d_{s_1}$  und auch die Breite des Wirkungsgebietes ab. Sobald die Ladespannung  $U_C$  des Kondensators C soweit abfällt, dass während dem Betrieb des Systems die Funkenstrecke  $d_{s_1}$  bzw.  $d_F$  nicht durchgeschlagen werden kann, kann auch der Kondensator sich nicht mehr entladen. Es gibt also bei gegebenem Analysenfunkstrecken-Abstand eine untere Spannungsgrenze unterhalb welcher das System unfähig ist zu arbeiten.

Aus den Abb. 6, 7, 8 und 9 geht hervor, dass der Verlauf der Kurven für jeden Kapazitätswert allgemein gleich ist. Als Unterschied ergibt sich jedoch dass das Wirkungsgebiet bei kleineren Kapazitätswerten des Kondensators C zusammenschrumpft und weiter, dass bei grösseren Analyseelektroden-Abständen  $d_F$  und kleineren Kapazitätswerten der Betrieb des Systems unmöglich wird.

#### *Elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger mit Doppelsteuerfunkenstrecke*

Die Anwendungsmöglichkeit des in Abb. 4 dargestellten Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkenstrecke ist eingeschränkt, da man den Abstand  $d_F$  der Analysenfunkstrecke F nicht unabhängig von der Ladespannung  $U_C$  des Kondensators C einstellen kann. Der kleinste Elektrodenabstand  $d_F$  der Analysenfunkstrecke F kann nur so gewählt werden, dass bei der an den Klemmen des Widerstandes  $R_2$  herrschenden Spannung kein Funke durchschlägt. Wie aus den Abb. 6, 7, 8 und 9 ersichtlich ist, hat dieser Umstand bis 20 000 Volt Ladespannung des Kondensators C und bei gewöhnlich verwendeten Analyseelektroden-Abständen keine praktisch unangenehmen Folgen, es können jedoch



solche entstehen, wenn bei solchen Ladespannungen der Elektrodenabstand sehr klein ist oder wenn bei gebräuchlichen Elektrodenabständen höhere Spannungen vorliegen.

Diesen Nachteil kann man in der Weise vermeiden, dass man anstelle der Einfachsteuerfunkenstrecke  $S_1$  der Abb. 4 eine Doppelsteuerfunkenstrecke  $S_2$ , wie in Abb. 10, verwendet, wodurch im Stromkreis mit der Analysenfunk-

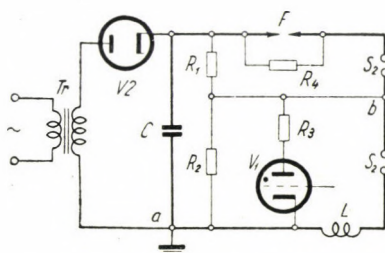


Abb. 10. Schaltungsschema des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkenstrecke. C — Kondensator. F — Analysenfunkstrecke. L — Selbstinduktionsspule.  $R_1, R_2$  — Spannungsteiler, ohmsche Widerstände.  $R_3, R_4$  — ohmsche Widerstände.  $S_2$  — Doppelsteuerfunkenstrecke. Tr — Hochspannungs-Transformator.  $V_1$  — Thyatronröhre.  $V_2$  — Gleichrichterdiode. Der dick gezeichnete Teil ist der Entladekreis.

strecke zusammen drei Funkenstrecken vorliegen. Die Einschaltung der dritten Funkenstrecke hat zur Folge, das gleichzeitig auch ein ohmscher Widerstand  $R_4$  zur Überbrückung der Analysenfunkstrecke F eingeschaltet werden muss. Bei dieser Schaltung sind die beiden Hälften der Doppelsteuerfunkenstrecke  $S_2$  geometrisch gleich. Die ohmschen Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  verteilen die Ladespannung des Kondensators C gleichmässig an die beiden Hälften der Steuerfunkenstrecke  $S_2$  trotz Einschaltung des ohmschen Widerstandes  $R_4$ , da dessen Wert neben  $R_1$  und  $R_2$  vernachlässigbar ist.

Wird in der Schaltung gemäss Abb. 10 die Analysenfunkstrecke F kurzgeschlossen, entsteht die Schaltung der Abb. 4. Bei geöffneter Analysenfunkstrecke F ist die Wirkungsweise des Schaltsystems folgende: Wenn wir auf das Gitter der übrigens durch negative Vorspannung gesperrten Thyatronröhre  $V_1$  einen positiven Spannungsschoss geben, zündet die Röhre und Punkt »b« der Schaltung gerät auf das Potential des Punktes »a«. Da vorher der Abstand der Doppelsteuerfunkenstrecke  $S_2$  so eingestellt war, dass bei gegebener Spannung eben kein Durchschlag erfolgt, entsteht auf der oberen Hälfte von  $S_2$  annähernd die doppelte Spannung, demzufolge die obere Hälfte von  $S_2$  durchschlagen wird. Nach dem Durchschlag fängt der Kondensator C an, sich über  $R_4$  — obere Hälfte von  $S_2$  —  $R_3$  zu entladen. Hiernach zeigt sich die Ladespannung des Kondensators an den Klemmen der Widerstände  $R_3$  und  $R_4$ . Wenn die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  voneinander wesentlich abweichen, wird



vorerst diejenige Funkenstrecke durchschlagen, welche von grösserem Widerstand überbrückt ist. Wenn der Widerstand  $R_4$  grösser ist als  $R_3$ , wird nach dem Durchschlagen der oberen Hälfte der Steuerfunkenstrecke  $S_2$  erst die Analysenfunkenstrecke  $F$  durchschlagen. Nach dem Durchschlagen der Analysenfunkenstrecke  $F$  ist der Entladungsweg des Kondensators  $F$  — obere Hälfte von  $S_2$  —  $R_3$ . In diesem Fall erscheint die ganze Ladenspannung des Kondensators  $C$  bei  $R_3$ , demzufolge auch die untere Hälfte der Steuerfunkenstrecke  $S_2$  durchschlagen wird. Nach diesem Verlauf entlädt sich der Kondensator über  $L$  —  $S_2$  —  $F$ . Ist  $R_3$  wesentlich grösser als  $R_4$ , wird der Durchschlag des unteren Teiles von  $S_2$  früher eintreten als der Durchschlag bei  $F$ . Den Fall  $R_3 = R_4$  werden wir später besprechen.

### Charakteristische Eigenschaften des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkenstrecke

Die ersten Untersuchungen bezweckten die optimalen Werte für die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  festzulegen. Abb. 11 und 12 stellen die Messergebnisse dar. Es ist aus diesen Abbildungen ersichtlich, wie sich bei Analyseelektroden-

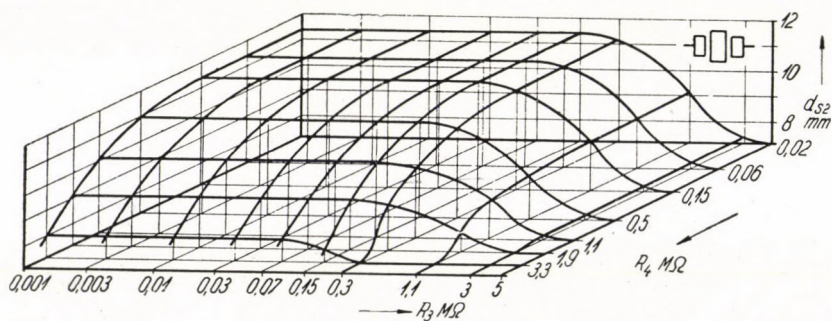


Abb. 11. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkenstrecke.  $d_{S_2}$  — Elektrodenabstand der Steuerfunkenstrecke.  $R_3$  und  $R_4$  — ohmsche Widerstände.  $d_F = 3$  mm,  $U_C = 18\,000$  Volt,  $C = 10\,000$  pF, Funkenhäufigkeit 50/s.

Abstände  $d_F = 3$  mm und  $d_F = 6$  mm und verschiedenen  $R_3$  und  $R_4$  Werten  $d_{S_2}$  bzw.  $\Delta d_{S_2}$  ändert. Wenn wir von Elektrodenabständen der Doppelsteuerfunkenstrecke sprechen, ist immer die Summe der beiden halben Funkenstrecken zu verstehen.

Auf die beiden waagrechten Achsen der Abb. 11 sind die  $R_3$  bzw.  $R_4$  Werte im logarithmischen Massstab, auf der senkrechten Achse  $d_{S_2}$  d. h. der Gesamt-

abstand der Elektroden der Doppelsteuerfunkenstrecke aufgetragen. Bei den Messungen waren  $C = 10\,000\text{ pF}$ ,  $U_C = 18\,000\text{ Volt}$ ,  $d_F = 3\text{ mm}$ . Aus der Abb. ergibt sich, dass  $R_3$  und  $R_4$  nie einen bestimmten Höchstwert überschreiten dürfen, damit  $\Delta d_{S_2}$  gross, d. h. das Wirkungsgebiet breit sei. Weiterhin zeigt die Abb. dass wenn der Wert von  $R_3$  zwischen  $0,001$  und  $0,15\text{ Megohm}$ , der Wert

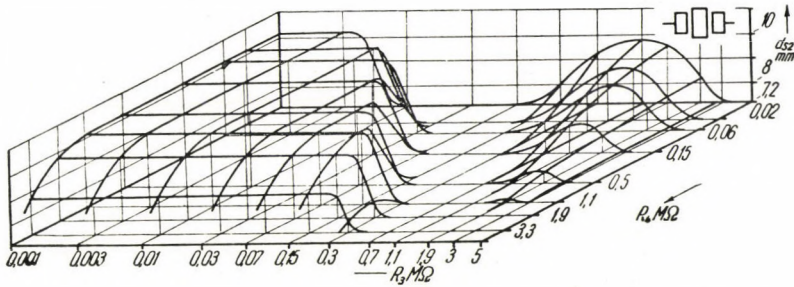


Abb. 12. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkenstrecke.  $d_{S_2}$  — Elektrodenabstand der Steuerfunkenstrecke.  $R_3$  und  $R_4$  — ohmsche Widerstände.  $d_F = 6\text{ mm}$ ,  $U_C = 18\,000\text{ Volt}$ ,  $C = 10\,000\text{ pF}$ , Funkenhäufigkeit 50/s.

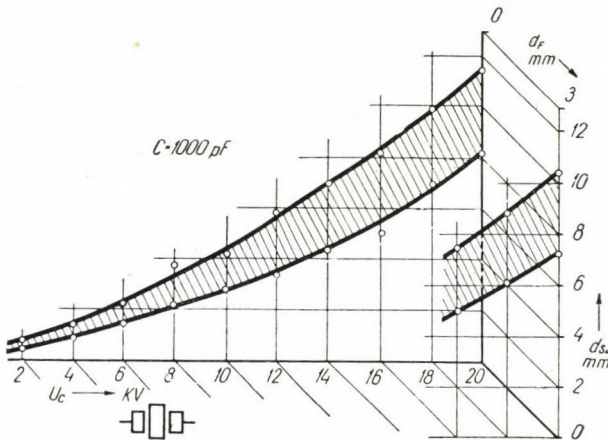


Abb. 13. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkenstrecke in Abhängigkeit von dem Steuerelektrodenabstand  $d_{S_2}$ , von der Ladespannung  $U_C$  und dem Analyselektrodenabstand  $d_F$ .  $C = 1\,000\text{ pF}$ ,  $R_3 = 0,02\text{ Megohm}$ ,  $R_4 = 0,5\text{ Megohm}$ , Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

von  $R_4$  zwischen  $0,02$  und  $0,15\text{ Megohm}$  liegt, die Fläche eine Hochebene hat, wo das Wirkungsgebiet am breitesten ist. Hier ändert sich der Wert von  $d_{S_2}$  von  $7,2$  bis  $12,0\text{ mm}$ . Ausserhalb dieses, mit Hochebene bedeckten Gebietes nimmt  $\Delta d_{S_2}$  ab.

Wenn man unter Beibehaltung obiger Versuchsverhältnisse den Abstand  $d_F$  der Analysefunkenstrecke von  $3\text{ mm}$  auf  $6\text{ mm}$  erhöht, gelangt man zu



den in Abb. 12 dargestellten Verhältnissen. Das erste, was man aus der Abb. entnehmen kann ist, dass bei  $d_F = 6$  mm das breiteste Wirkungsgebiet zwischen den Werten von  $d_{S_2} = 7.2 - 10.2$  mm liegt. Der Höchstwert von  $d_{S_2}$  war, bei  $d_F = 3$  mm, 12 mm. Als zweites ist auffallend, dass sich in der Fläche eine Mulde bildet, innerhalb welcher sich das Wirkungsgebiet soweit verengt, dass das System betriebsunfähig wird. Die Ausbildung dieser Mulde kann folgenderweise erklärt werden.

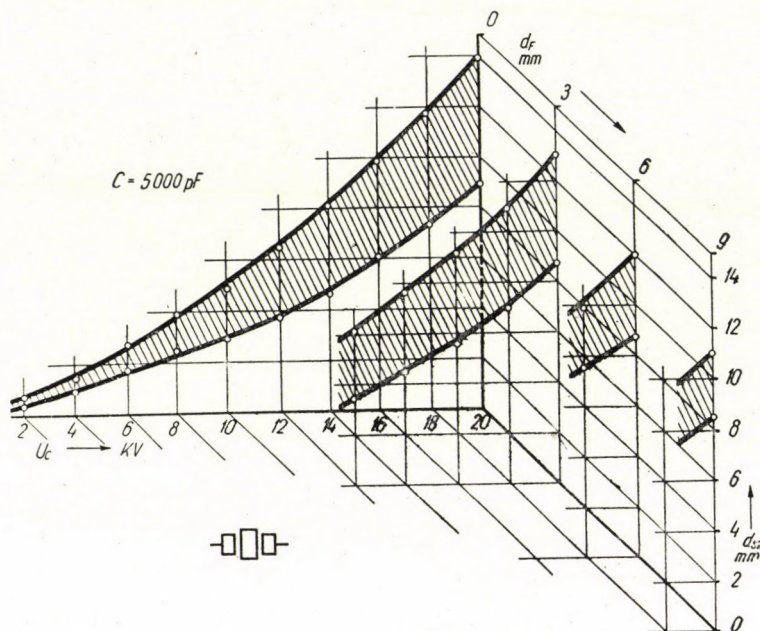


Abb. 14. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkenstrecke in Abhängigkeit von dem Steuerelektrodenabstand  $d_{S_2}$ , von der Ladespannung  $U_C$  und dem Analyseelektrodenabstand  $d_F$ .  $C = 5000 \text{ pF}$ ,  $R_3 = 0.02 \text{ Megohm}$ ,  $R_4 = 0.5 \text{ Megohm}$ , Funkenhäufigkeit  $50/\text{s}$ . Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

Wir erwähnten schon früher, dass, wenn beim Betrieb nach dem Schaltungsschema der Abb. 10 die obere Hälfte der Steuerfunkenstrecke  $S_2$  durchschlägt, die Spannung  $U_C$  des Kondensators sich an den Widerständen  $R_3$  und  $R_4$  verteilt. Aus Abb. 12 ist ersichtlich, dass der Minimalwert von  $d_{S_2} = 7.2$  mm ist und auf die untere Hälfte der Doppelfunkenstrecke  $S_2$ ,  $3.6$  mm entfällt. Da der Abstand der Analysefunkenstrecke  $d_F = 6$  mm ist, kann die Ladespannung  $U_C = 18000$  Volt des Kondensators  $C$  unter gegebenen Verhältnissen den Abstand  $6 + 3.6 = 9.6$  mm nicht durchschlagen, wenn die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$ , die Spannung  $U_C$  auf die beiden Funkenstrecken annähernd gleichmässig verteilen. Die Mulde in Abb. 12 ist in der Nähe derjenigen Widerstandswerte, bei denen  $R_3$  und  $R_4$  annähernd gleich sind. Damit nach dem Durchschlagen der oberen Hälfte der Steuerfunkenstrecke  $S_2$ , die untere Hälfte und

auch die Analysenfunkkenstrecke F durchschlage, müssen die Widerstandswerte von  $R_3$  und  $R_4$  wesentlich verschieden sein. Ist  $R_4$  grösser als  $R_3$ , gelangen wir auf der Abb. 12 in das links von der Mulde gelegene Gebiet, im entgegengesetzten Fall in das rechte. Im Gebiete links von der Mulde haben wir eine Hochebene beträchtlicher Ausdehnung, unter welcher sich das günstige Wirkungsgebiet ausbreitet.

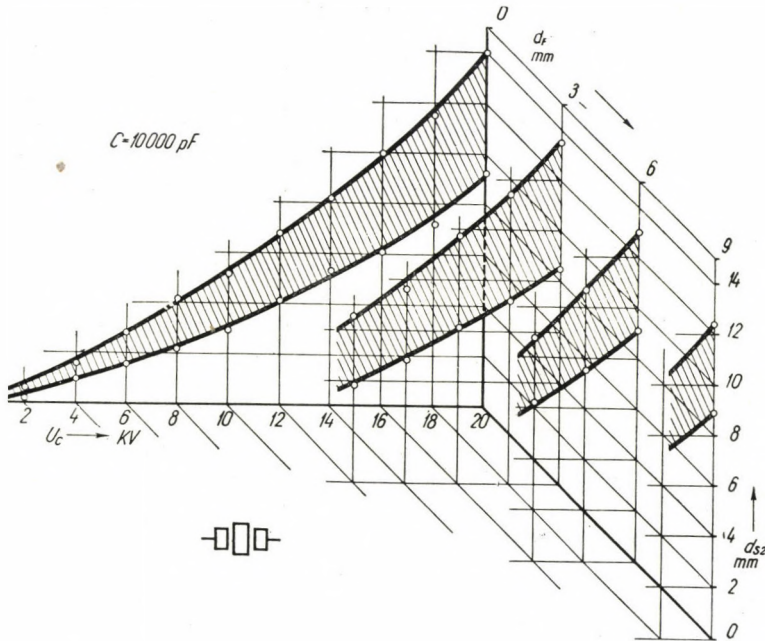


Abb. 15. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkenstrecke in Abhängigkeit von dem Steuerelektrodenabstand  $d_{s2}$ , von der Ladespannung  $U_C$  und dem Analysenelektrodenabstand  $d_F$ .  $C = 10\,000\text{ pF}$ ,  $R_3 = 0\cdot02\text{ Megohm}$ ,  $R_4 = 0\cdot5\text{ Megohm}$ , Funkenhäufigkeit  $50\text{,s}$ . Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

Nachdem die optimalen Werte von  $R_3$  und  $R_4$  bekannt waren, untersuchten wir bei verschiedenen Analysenelektrodenabständen  $d_F$  die Ausbildung der Elektrodenabstände  $d_{s2}$  der Steuerfunkenstrecke und mit diesen das richtige Wirkungsgebiet in Abhängigkeit von der Ladespannung  $U_C$  und der Kapazität des Kondensators  $C$ . Die Messungen führten wir bei  $R_3 = 0\cdot02\text{ Megohm}$ ,  $R_4 = 0\cdot5\text{ Megohm}$ ,  $C = 1000, 5\,000, 10\,000$  und  $20\,000\text{ pF}$  durch. Die Ergebnisse sind in den Abb. 13, 14, 15 und 16 dargestellt.

In sämtlichen Abbildungen beziehen sich die Kurven  $d_F = 0$  auf kurzgeschlossene Analysenfunkkenstrecke. Es ist zu bemerken, dass der Betrieb bei entsprechend kleinen Steuerelektrodenabständen noch bei  $2\,000\text{ Volt}$  möglich ist. Diese Tatsache ist bei den Zündfunken liefernden elektronisch gesteuerten Funkenerzeugern von Bedeutung. Bei auf  $d_F = 3\text{ mm}$  geöffneter Analysen-



funkenstrecke hört, laut Abb. 13, 14 und 15, der Betrieb bei ungefähr 12 kV auf, in der Abb. 16 schon bei 16 kV. Das Wirkungsgebiet nimmt bei  $d_F = 6$  bzw. 9 mm noch weiter ab. Je kleiner die C-Werte sind, umso grösser muss die Spannung sein, um den Betrieb des Systems aufrecht erhalten zu können. Im Falle einer Kapazität  $C = 1000$  pF und  $d_F = 6$  und 9 mm, besteht überhaupt keine Betriebsmöglichkeit. Mit abnehmenden Kapazitätswerten wird das Wirkungs-

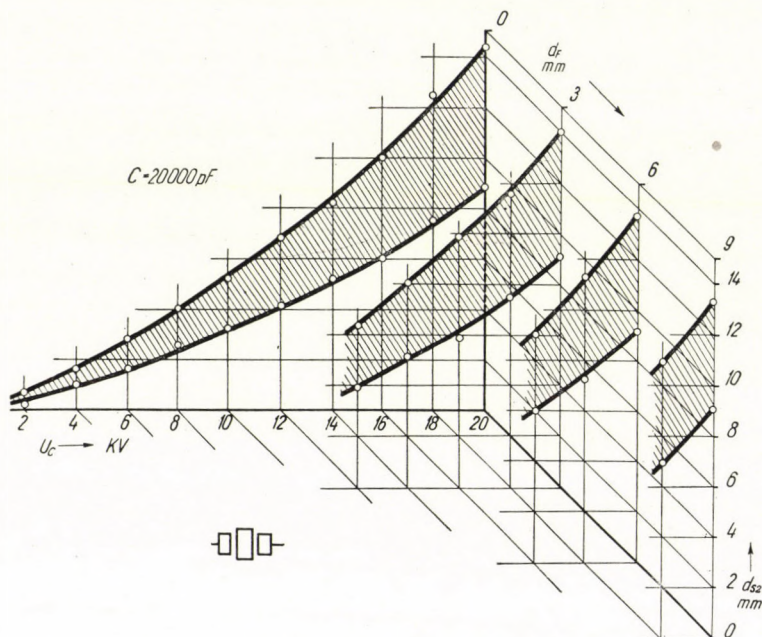


Abb. 16. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkenstrecke in Abhängigkeit von dem Steuerelektrodenabstand  $d_{s2}$ , von der Ladespannung  $U_C$  und dem Analyselektrodenabstand  $d_F$ .  $C = 20\,000$  pF,  $R_3 = 0.02$  Megohm,  $R_4 = 0.5$  Megohm, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

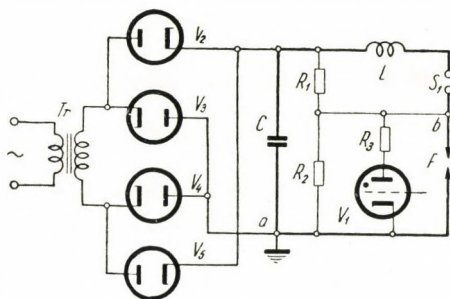
gebiet schmäler und verschiebt sich in der Richtung kleinerer Analyselektrodenabstände.

### Pro Sekunde 100 Funken liefernder elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger

Die in den Abb. 4 und 10 dargestellten Funkenerzeuger können bei Anschaltung an ein 50 Perioden-Netz nur 50 Funken pro Sekunde liefern. Mit Hilfe der Schaltung in Abb. 17 kann man 100 Funken pro Sekunde erzeugen. In dieser Schaltung ist der vom Kondensator C rechts liegende Teil identisch mit dem entsprechenden Teil der Abb. 4. Der Unterschied zwischen beiden ist

der, dass hier in Graetz-Schaltung Doppelweggleichrichtung erreicht wird. Wenn der positive Spannungsschoss, welcher das Gitter der Thyatronröhre  $V_1$  steuert, so erfolgt, dass der Funke stets beim Nullwert der Transformatorspannung entsteht, können regelmässige Funkenfolgen erzeugt werden. Solche Entladungsverhältnisse zeigt das Oszillogramm der Abb. 21.

Bei der 100 Funken pro Sekunde liefernden Anordnung (Abb. 17) ist die Zeit zur Entionisierung der Steuerfunkenstrecke  $S_1$  viel kleiner als im Falle von 50 Funken pro Sekunde. Bei den hier verwendeten Kapazitäts- und Spannungswerten und einer Entladungshäufigkeit von 50 Funken pro Sekunde ist die Entionisierung der Steuerfunkenstrecke  $S_1$  immer genügend, dies wird aber nicht der Fall sein, wenn bei grösseren Spannungs- und Kapazitätswerten die Häufigkeit auf 100 Funken pro Sekunde ansteigt. Die Verhältnisse gestalten



**Abb. 17.** Schaltungsschema des 100 Funken pro Sekunde liefernden elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers. C — Kondensator. F — Analysenfunkenstrecke. L — Selbstinduktionsspule.  $R_1$ ,  $R_2$  — Spannungsteiler ohmsche Widerstände.  $R_3$  — ohmscher Widerstand.  $S_1$  — Einfachsteuerfunkenstrecke. Tr — Hochspannungstransformator.  $V_1$  — Thyatronröhre.  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$ ,  $V_5$  — Gleichrichterdioden. Der dick gezeichnete Teil ist der Entladekreis.

sich nicht günstiger, wenn die Elektroden der Steuerfunkenstrecke nicht scheibenförmig sind, sondern aus 5—10 mm starken Stäben gefertigt werden. Den Betrieb eines solchen Funkenerzeugers kann man so aufrechterhalten, dass in die Steuerfunkenstrecke  $S_1$  Luft eingeblasen wird.

### *Zündfunken liefernder elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger*

Der kondensierte Hochspannungsfunke ist zu quantitativen Analysen sehr gut brauchbar, nachteilig ist jedoch die geringere Empfindlichkeit derselben. Um grössere Empfindlichkeit zu erreichen, wird zur Anregung der Abreissbogen oder kondensierte Niederspannungsfunke verwendet. Bei derartigen Lichtquellen wird die Bogen- bzw. Funkenentladung durch einen kondensierten Hochspannungsfunken kleiner Energie eingeleitet, und bei dieser Verwendung übertrifft der neue elektronisch gesteuerte Funkenerzeuger sämtliche anderen Einrichtungen.



Ein zur Zündung von Abreissbögen und kondensierten Niederspannungsfunken verwendbarer elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger ist in Abb. 18 dargestellt. Hier sind  $Tr$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $C_1$  und  $C_2$  die üblichen Schaltelemente eines Spannungsverdopplers. Der eigentliche Arbeitskondensator ist  $C_3$  und erhält seine Ladung von  $C_1$  und  $C_2$  über den ohmschen Widerstand  $R_4$ . Der übrige Teil des Schaltungsschemas ist mit den früheren identisch, nur ist im Entladungskreis noch die primäre Windung des Tesla Transformators  $A$  eingebaut. Die im Stromkreis  $C_3$ — $S_2$ — $A$  entstehenden Hochfrequenzentladungen werden im Tesla Autotransformator  $A$  transformiert und liefern die Zündfunken.

Bei Zündfunkenerzeugern ist die Gleichstromspeisung von ausgesprochenem Vorteil. Würde nämlich der Kondensator  $C_3$  der Abb. 18 besonders zur

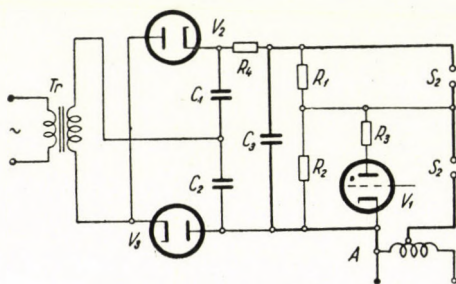


Abb. 18. Schaltungsschema des Zündfunken liefernden Funkenerzeugers.  $A$  — Tesla Autotransformator.  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  — Kondensatoren.  $R_1$ ,  $R_2$  — Spannungsteiler, ohmsche Widerstände.  $R_3$ ,  $R_4$  — ohmsche Widerstände.  $S_2$  — Doppelsteuerfunkenstrecke.  $Tr$  — Hochspannungstransformator.  $V_1$  — Thyatronröhre.  $V_2$ ,  $V_3$  Gleichrichterdioden. Der dick gezeichnete Teil ist der Entladekreis.

Zündung der kondensierten Niederspannungsfunken, mit Wechselstrom gespeist, so würde der Zeitpunkt der höchsten Ladespannung des Niederspannungskondensators und des Kondensators  $C_3$  nicht zusammenfallen. Analysenfunken und Zündfunken höchsten Nutzeffektes entstehen aber gerade dann, wenn die Ladespannung des Kondensators ihren Scheitelwert erreicht. Bei der Speisung des Kondensators mit Wechselstrom ist eben das Zusammenbringen der beiden Phasenlagen schwierig, wenn hingegen der Kondensator  $C_3$  mit Gleichstrom aufgeladen wird, kann die Zündung in der gewünschten Phasenstellung erfolgen, da die Einstellung der Phase des positiven Spannungsstosses, welcher das Gitter der Thyatronröhre  $V_1$  steuert, leicht gelingt.

#### Auftreten von Überspannungen

Der hier beschriebene Funkenerzeuger ist im wahren Sinne des Wortes ein absolut sicher arbeitender Apparat, welcher, nachdem der Elektrodenabstand der Steuerfunkenstrecke zur speisenden Spannung richtig angepasst ist,

ohne jede Störung unendlich lange Zeit regelmässig im Betrieb gehalten werden kann. Dies ist wahrscheinlich dem Umstand zu verdanken, dass bei der Zündung der Funkenstrecken beträchtliche Überspannungen auftreten und diese zum grossen Teil zum Erfolgen der sicheren Zündung beitragen.

Ähnliche Überspannungen beobachtete Kaiser [29] beim Feussner'schen Funkenerzeuger. Unser Funkenerzeuger zeigt hinsichtlich der Steuerfunkenstrecken grosse Ähnlichkeit mit dem Feussner'schen, besonders bei Anwendung der Doppelsteuerfunkenstrecke, da in diesem Falle ebenso drei Funkenstrecke

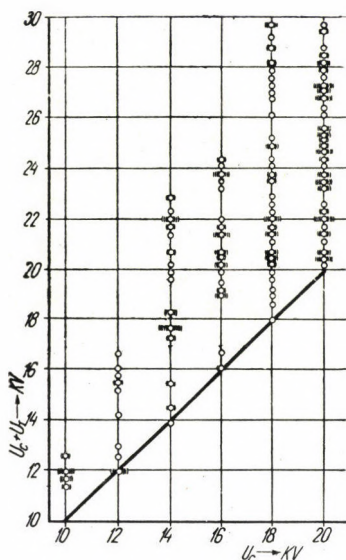


Abb. 19. Überspannungen im elektronisch gesteuerten Funkenerzeuger.  $C = 5000 \text{ pF}$ ,  $U_C =$  die Ladespannung des Kondensators C,  $U_T =$  Überspannung.

hintereinander geschaltet sind wie beim Feussner'schen Funkenerzeuger. Die Überspannungen schreibt Kaiser den an den Steuerfunkenstrecken beim Schaltungsverlauf entstehenden Wanderwellen zu.

Zur Messung der Überspannungen schalteten wir, parallel zur Doppelsteuerfunkenstrecke, ein Kugelpaar von 50 mm Durchmesser ein. Bei gegebener Einstellung und Betrieb des Funkenerzeugers näherten wir die Kugeln einander so lange, bis zwischen ihnen ein Durchschlag erfolgte. Aus der Entfernung der Kugeln bestimmten wir dann die Durchschlagsspannung.

Die Ergebnisse der Überspannungsmessungen geben wir in Abb. 19. Auf die waagrechte Achse ist die Ladespannung  $U_C$  des Kondensators C aufgetragen, auf die senkrechte Achse die an der Kugelfunkenstrecke gemessene Gesamtspannung. Letzterer Wert enthält die Ladespannung  $U_C$  und die Überspannung  $U_T$ . Die Entfernung der Punkte oberhalb der unter  $45^\circ$  gezogenen Geraden,



senkrecht von den Geraden gemessen, ist die Überspannung  $U_T$ . Die Messungen haben wir bei einer Kapazität von  $C = 5\,000\text{ pF}$  durchgeführt.

Die in der Abb. 19 eingezeichneten übereinander liegenden Punkte wurden bei konstanten Ladespannung  $U_C$  und verschiedenen Abstand  $d_{s2}$  der Elektroden der Steuerfunkenstrecke aufgenommen. Die Messergebnisse zeigen, dass je grösser der Elektrodenabstand der Steuerfunkenstrecke ist, umso grösser wird auch die beobachtete Überspannung. Bei den kleinsten zulässigen Steuerelektrodenabständen bei denen der Betrieb noch aufrecht erhalten werden kann, gibt es keine Überspannung oder aber ist diese sehr gering. Da wir im allgemeinen in der Mitte des durch den obersten und untersten Elektrodenabstand  $d_{s2}$  der Steuerfunkenstrecke bestimmten Wirkungsgebiet arbeiten, können wir ständig mit dem Auftreten von ungefähr 25%-igen Überspannungen rechnen. Die Untersuchungen bewiesen, dass das Auftreten von Überspannungen von dem Abstand  $d_F$  der Analysenfunkenstrecke unabhängig ist.

#### *Veranschaulichung der Wirkungsweise des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers*

Um den Betrieb des beschriebenen Funkenerzeugers zu veranschaulichen, geben wir in den Abb. 20, 21 und 22 einige Oszillogramme. Die Oszillogramme der Abb. 20 zeigen den Verlauf der Klemmspannung des Kondensators der Abb. 4 bei der Kapazität  $C = 10\,000\text{ pF}$ , Ladespannung  $U_C = 18\,000\text{ Volt}$  und verschiedenen Funkenhäufigkeiten. Die Oszillogramme sind mit einem Siemens'schen Schleifenoszillographen aufgenommen. Die Abb. 20b — 20f geben den Verlauf der Spannung an den Klemmen des Kondensators, wenn das Gitter der Thyatronröhre  $V_1$  der Abb. 4. mit positiven Spannungsstössen verschiedener Häufigkeit gesteuert wurde. Die Häufigkeit der Funken pro Sekunde ist in Abb. 20a, 50, in Abb. 20b  $\frac{1}{2} \times 50$ , in Abb. 20c  $\frac{1}{3} \times 50$ , in Abb. 20d  $\frac{1}{5} \times 50$ , in Abb. 20e  $\frac{1}{8} \times 50$ , und in Abb. 20f  $\frac{1}{16} \times 50$ . Die kleinen Unregelmässigkeiten der Oszillogramme der Abb. 20. sind der Selbstschwingung der Oszillographenschleife zuzuschreiben.

Das in der Abb. 21. gegebene Oszillogramm wurde bei der Schaltung der Abb. 17. aufgenommen und zeigt ebenfalls den Verlauf der Spannung an den Klemmen des Kondensators C. Die weiteren Betriebsangaben sind:  $C = 10\,000\text{ pF}$ ,  $U_C = 18\,000\text{ Volt}$ , Funkenhäufigkeit 100/s. Hier erfolgte also die Steuerung des Gitters der Thyatronröhre  $V_1$  der Abb. 17 pro Sekunde durch 100 positive Spannungsstösse.

Die Abbildungsgruppe 22 zeigt, wie es möglich ist, mit den nach Schaltung der Abb. 18 erzeugten Zündfunken, einen Abreissbogen-Betrieb aufrecht zu erhalten. Bei diesen Aufnahmen war der Tesla Transformator A der Abb. 18 an einen mit Wechselstrom gespeisten Bogenstromkreis angeschlossen. Das Gitter



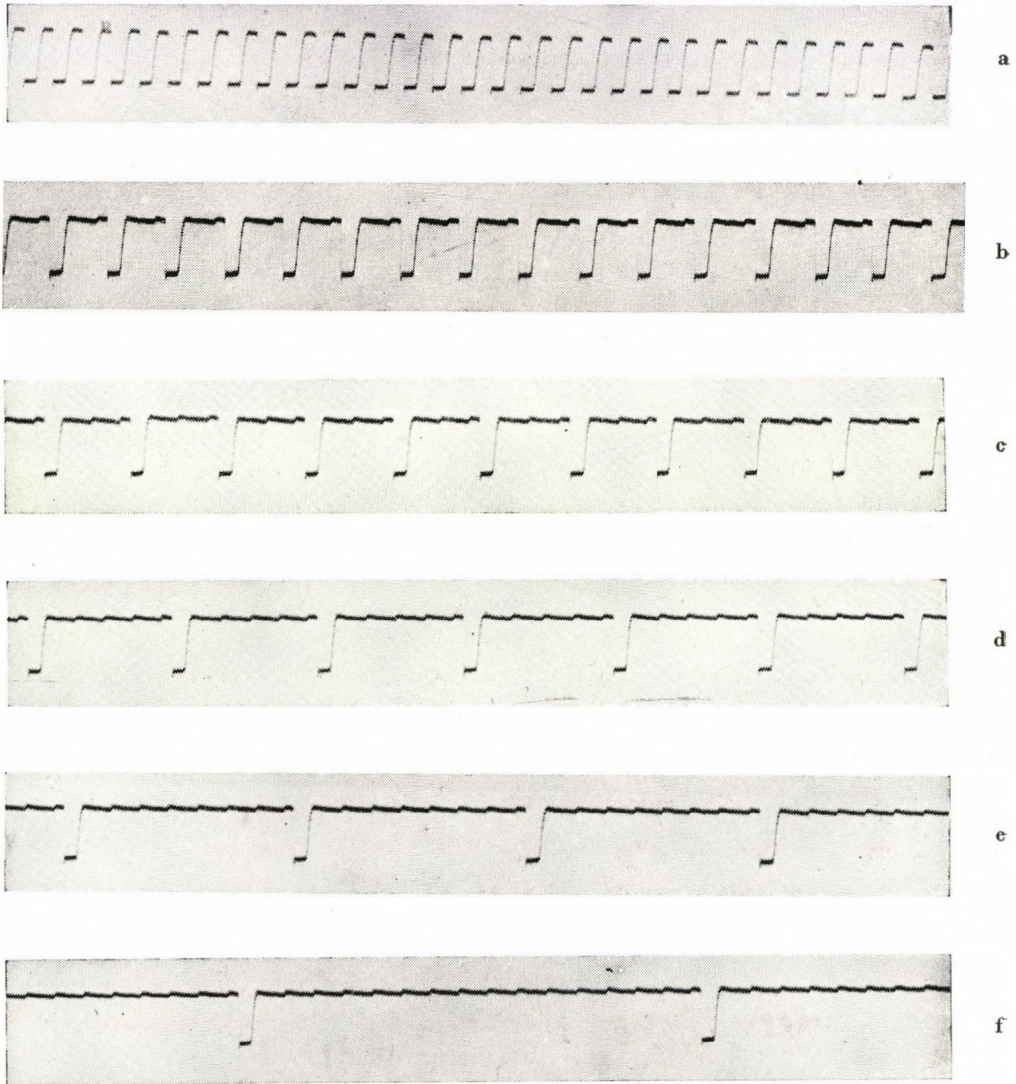


Abb. 20. Verlauf der Spannung an den Klemmen des Kondensators der Abb. 4 bei verschiedenen Funkenhäufigkeiten. Mit einem Schleifenszillographen hergestellte Oszillogramme. C — 10 000 pF, U — 18 000 Volt. Die Funkenhäufigkeit pro Sekunde: im Bilde »a« 50, im Bilde »b«  $\frac{1}{2} \times 50$ , im Bilde »c«  $\frac{1}{3} \times 50$ , im Bilde »d«  $\frac{1}{5} \times 50$ , im Bilde »e«  $\frac{1}{8} \times 50$ , im Bilde »f«  $\frac{1}{16} \times 50$ .

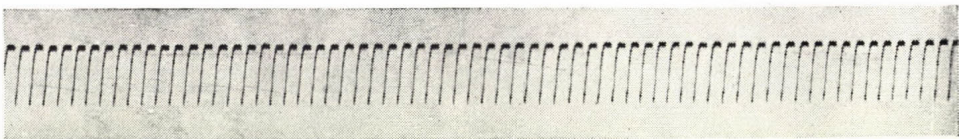


Abb. 21. Verlauf der Spannung an den Klemmen des Kondensators C der Abb. 17. C — 10 000 pF, U — 18 000 Volt. Funkenhäufigkeit 100/s.



der Thyratronröhre  $V_1$  der Abb. 18 wurde im gewünschten Tempo mit positiven Spannungstössen durch einen Impulsgenerator gesteuert. In sämtlichen Bildern der Abb. 22 zeigt das obere Oszillogramm den Verlauf der Spannung an den Elektroden der Analysenfunkkenstrecke, das untere ist die Stromkurve. In sämtlichen Bildern ist bei den oberen Kurven die Sinus-Grundkurve die Spannungskurve des 50-Perioden Wechselstromnetzes. Die Aufnahmen wurden mit einem Schleifenoszillographen gemacht.

Abb. 22a zeigt den Fall, wenn in jeder Halbperiode der Wechselfspannung ein Bogen entsteht. In der Abb. 22d entsteht der Bogen in jeder zweiten Halbperiode, hier haben wir einen gleichgerichteten Bogen. In der Abb. 22b entsteht der Bogen in zwei nacheinander folgenden Halbperioden, darauf folgt eine 4 Perioden lange Pause. In der Abb. 22e gibt es in jeder fünften Periode einen Bogen (gleichgerichtet), usw.

#### ALLGEMEINE BEMERKUNGEN

Die wissenschaftliche wie auch die praktische Spektroskopie ist in vielen Fällen bei der Funken- oder Bogenanregung wesentlichen Einschränkungen unterworfen, da die Häufigkeit der Funken bzw. Bögen pro Sekunde durch die Periodenzahl des Netzes gegeben ist. Demzufolge können, abgesehen von wenigen Ausnahmen, beinahe alle Hoch- und Niederspannungsfunkenerzeuger und Bogenerzeuger nur der Periodenzahl des Netzes entsprechend 100 oder 50 Funken bzw. Bögen pro Sekunde liefern. Die Folge dieser Einschränkung ist in vielen Fällen, dass die Anregung nicht den besten Anregungsverhältnissen entspricht, sondern die Anregungsverhältnisse müssen der erlaubten Erwärmung angepasst werden. In Bezug auf die Erwärmung sind kleinere Funken- bzw. Bogenhäufigkeiten erwünscht. Andererseits weisen die spektrochemischen Forschungen dahin, dass in vielen Fällen noch grössere Funkenhäufigkeiten erwünscht sind als die auf gebräuchliche Weise erreichbare Häufigkeit von 100 pro Sekunde, da auf diese Weise die Analysengenauigkeit ansteigt. Vom Standpunkte der Analysengenauigkeit sind also in einigen Fällen grössere Funkenhäufigkeiten erwünscht.

Um diesen beiden Anforderungen der praktischen Spektralanalyse Genüge zu leisten, wurden verschiedene Geräte eingeführt. Bei der Anwendung von Abreissbogen wird die schädliche Erwärmung in der Weise verhindert, dass zwischen zwei Brennperioden kürzere oder längere Pausen eingeschaltet werden. Dieses Intermittieren wird meistens durch in den Zündstromkreis, oder in den Bogenstromkreis, oder in beide eingebauten Drehschalter erreicht. Abgesehen von einigen ganz aussergewöhnlichen Fällen, ist diese Anordnung nicht ganz befriedigend, da bei sehr kurzer Brenndauer die Wiederholbarkeit lückenhaft werden kann. Diese Aufgabe kann mit dem elektronisch gesteuerten Funkenzeuger sehr einfach und vollkommen durch Steuerung des Gitters der



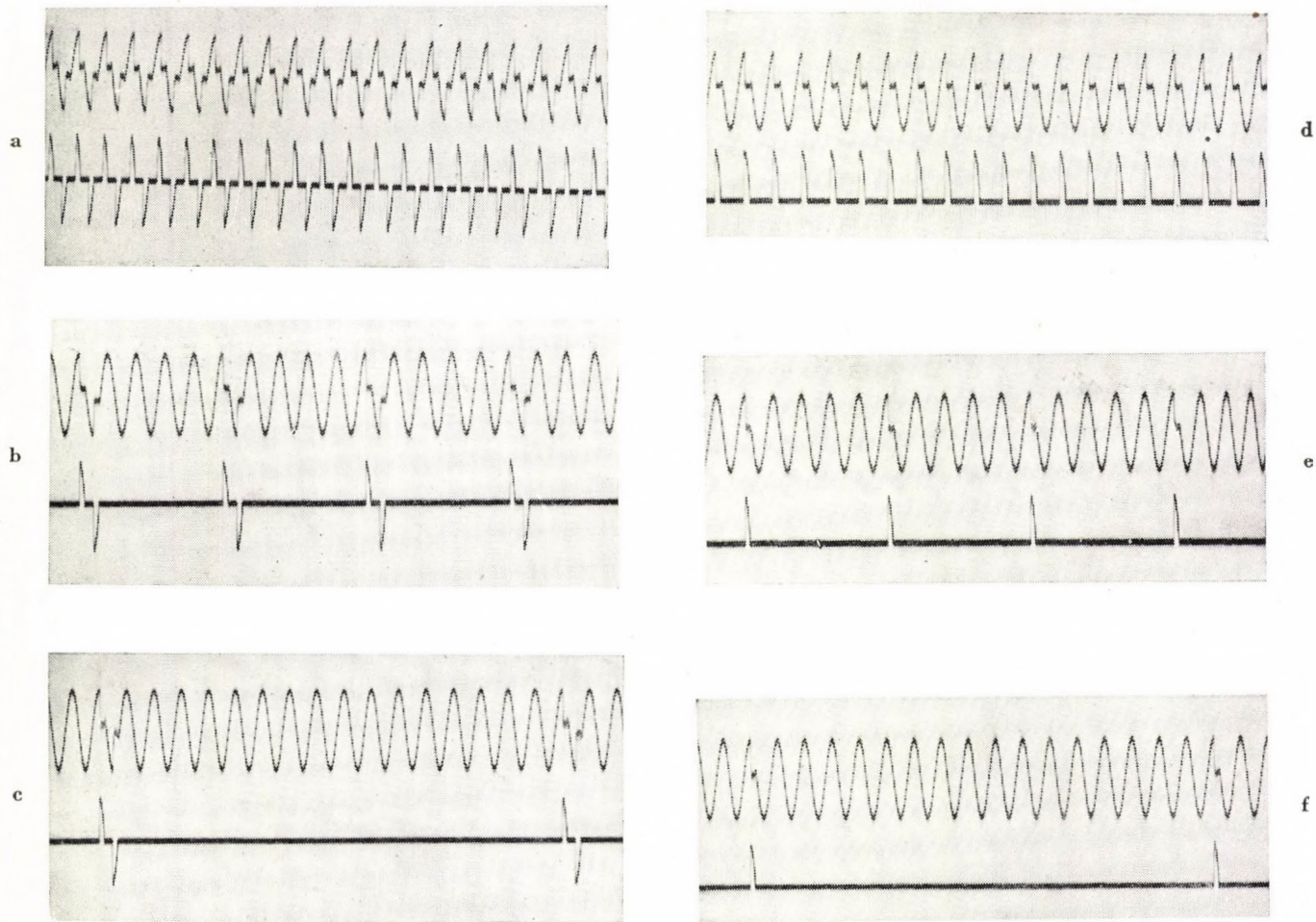


Abb. 22. Steuerung eines Abreissbogens mit Hilfe der Schaltung der Abb. 18. Die oberen Kurven sind die Spannungskurven, die unteren die Stromkurven. In den oberen Kurven ist die Sinusgrundkurve die Spannungskurve des Wechselstromnetzes. Bild »a«: Bogen in jeder Halbperiode. Bild »b«: Bogen in zwei nacheinander folgenden Halbperioden, nachher 4 Perioden lange Pause. Bild »c«: Bogen in zwei nacheinander folgenden Halbperioden, nachher 16 Perioden lange Pause. Bild »d«: Bogen in jeder zweiten Halbperiode (gleichgerichtet) Bild »e«: Bogen in jeder fünften Periode (gleichgerichtet). Bild »f«: Bogen in jeder siebenzehnten Periode (gleichgerichtet).





Thyratronröhre  $V_1$  der Abb. 18 erfüllt und auf diese Weise die Häufigkeit der Entladung, weitgehend verändert werden. Man kann also mit dieser Einrichtung die Anregungsenergie beliebig einstellen und somit durch Verminderung der Bogen- bzw. Funkenzahl pro Zeiteinheit die übermässige Erwärmung vermeiden.

Zur Zeit werden Funken grösserer Häufigkeit als 100 pro Sekunde so erzeugt, dass durch entsprechende Einstellung der Spannung und der Steuerfunkenstrecke je Halbperiode mehr als ein Funken entstehen [45, 53, 56]. Als Grund der so erreichten besseren Analysenergebnisse wird angenommen, dass infolge der grösseren Funkenhäufigkeit in der Funkenstrecke verbleibende Ionen die Feldstärke verändern, und darum die Funken nicht zwischen ausgezeichneten Punkten der Elektroden überspringen, sondern die Oberfläche der Elektroden unabhängig von deren Form in gewissem Grade gleichmässig bearbeiten [45]. Wenn diese Annahme richtig ist, müsste die Funkenpause beim Übergang von einer Halbperiode in die andere ungünstig sein und ein ununterbrochenes Funken erwünscht sein. Mit dem elektronisch gesteuerten Funkenerzeuger ist auch diese Aufgabe ohne weiteres erfüllbar, mit Gleichstromspeisung und Steuerung des Gitters der Thyratronröhre (Abb. 18) mit einer 100 pro Sekunde übersteigender Zahl von positiven Spannungstössen.

Wenn man die älteren, mit fester Steuerfunkenstrecke und die durch Synchronschalter gesteuerten mit den elektronisch gesteuerten Funkenerzeugern vergleicht, ergibt sich folgendes. Bei den mit festen Funkenstrecken gesteuerten Funkenerzeugern ist die Einstellung des Elektrodenabstandes der Steuerfunkenstrecke heikel und eine Abnützung derselben kann die Anregungsverhältnisse verändern. Prinzipiell wäre die Steuerung mit dem synchron Drehschalter vollkommen durchführbar, dessen Nachteil ist aber — wie im historischen Überblick schon besprochen wurde — dass infolge der ständig wechselnden Abstände der Steuerfunkenstrecke die Verteilung der Funkenenergie zwischen der Analysen- und Steuerfunkenstrecke sich ständig ändert. Bei den elektronisch gesteuerten Funkenerzeugern ist eine kleine Änderung im Abstand der Elektroden der Steuerfunkenstrecke ohne Belang, da innerhalb eines Gebietes von einigen mm die Arbeitsverhältnisse annähernd identisch bleiben. Ausserdem, da die Steuerfunkenstrecke feststehend ist, wird die Verteilung der Entladungsenergie zwischen der Steuerfunkenstrecke und Analysenfunkenstrecke in konstantem Verhältniss bleiben.

Laut der bisher Besprochenen sind bei den elektronisch gesteuerten Funkenerzeugern alle Vorteile der früheren Steuersysteme bei Beseitigung von deren Nachteilen, aufrecht erhalten.

Schliesslich seien noch die mit Einfach- und Doppelsteuerfunkenstrecke arbeitenden elektronisch gesteuerten Funkenerzeuger verglichen.

Wenn man die charakteristischen Kurven (Abb. 6, 7, 8 und 9) der Einfachsteuerfunkenstrecken-Schaltung (Abb. 4) mit den charakteristischen Kurven (Abb. 13, 14, 15 und 16) der Doppelsteuerfunkenstrecken-Schaltung (Abb. 10)



vergleicht, kann man feststellen, dass das Wirkungsgebiet des Doppelsteuerfunkenstrecken-Systems bei einem Abstand  $d_F = 3$  mm der Analysenfunkenstrecke grösser ist als bei der Einfachsteuerfunkenstrecke. Bei grösserem Elektrodenabstand ist das Wirkungsgebiet der beiden Systeme im allgemeinen gleich. Bei Einfachsteuerfunkenstrecke ist die mittlere Länge  $d_{S1}$  der Steuerfunken aber ungefähr nur die Hälfte der Länge der Doppelsteuerfunken.

Nachteilig für das Einfachsteuerfunkenstrecken-System ist, dass der Abstand der Analysenfunkenstrecke  $F$  von der Ladespannung  $U_C$  des Kondensators  $C$  nicht unabhängig ist. Praktisch ist, in beiden Fällen, die Länge der Steuerfunkenstrecken von der Länge der Analysenfunkenstrecke unabhängig.

\* \* \*

Für den Beitrag bei der Entwicklung des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers danke ich Herrn *Á. Klatsmányi*. Dank gebührt den Mitarbeitern Herrn *K. Berta*, *A. Boronkay*, *S. Éder*, *F. Mancz* und *Z. Sibalszky* für ihre Teilnahme an den Versuchen und der Durchführung der Messungen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

1. *G. Scheibe* und *A. Neuhäuser*, *Angew. Chem.* **41**, 1218, 1928.
2. *H. Lundegardh*, *Die quantitative Spektralanalyse der Elemente*. I. Gustav Fischer, Jena, 1929.
3. *W. Gerlach*, und *W. Gerlach*, *Die chemische Emissionsspektralanalyse*. Leopold Voss, Leipzig, 1930.
4. *H. Boas*, *Z. Phys.* **60**, 690, 1930.
5. *F. Twyman*, und *D. M. Smith*, *Wavelength tables for spectrum analysis*. A. Hilger Ltd., London, 1931.
6. *O. Feussner*, *Z. techn. Phys.* **13**, 573, 1932.
7. *O. Feussner*, *Arch. Eisenhüttenwes.* **6**, 551, 1932/33.
8. *O. Feussner*, *Z. Metallkunde* **25**, 73, 1933.
9. *G. Scheibe*, und *A. Schöntag*, *Arch. Eisenhüttenwes.* **8**, 533, 1934/35.
10. *T. Kosbahn*, *Ann. Phys. (5)*, **25**, 625, 1936.
11. *A. Schöntag*, *Diss.* 1936.
12. *O. Schliessmann*, und *K. Zänker*, *Arch. Eisenhüttenwes* **20**, 345, 1937.
13. *K. Pfeilsticker*, *Z. Elektrochem.* **43**, 719, 1937.
14. *H. B. Vincent*, und *R. A. Sawyer*, *J. appl. Phys.* **8**, 163, 1937.
15. *O. Findeisen*, *Z. Metallkunde* **30**, 213, 1938.
16. *F. Wolbank*, *Arch. Eisenhüttenwes.* **12**, 133, 1938/39.
17. *H. Kaiser*, und *A. Wallraff*, *Ann. Phys. (5)*, **34**, 297, 1939.
18. *F. Wolbank*, *Diss.* 1939.
19. *F. Wolbank*, *Z. Metallkunde* **31**, 257, 1939.
20. *S. M. Rajskej*, *J. techn. Phys. (russ.)* **9**, 1719, 1939.
21. *R. A. Sawyer*, *J. appl. Phys.* **10**, 741, 1939.
22. *A. Henrici*, und *G. Scheibe*, *Chemische Spektralanalyse*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1939.
23. *W. Zehden*, *J. Soc. Chem. Ind.* **59**, 236, 1940.
24. *F. Twyman* *F.*, *W. Zehden*, und *E. S. Dreblow*, *J. Soc. Chem. Ind.* **59**, 238, 1940.
25. *N. S. Sventitski*, *Zavod. Lab.*, **8**, 470, 1940.
26. *K. Pfeilsticker*, *Spectrochim. Acta* **1**, 242, 1940.
27. *J. T. Mireless Malpica*, und *T. M. Berry*, *Gen. Electr. Rev.* **44**, 563, 1941.
28. *H. Kaiser*, *Spectrochim. Acta* **1**, 477, 1941.
29. *H. Kaiser*, *Spectrochim. Acta* **2**, 98, 1941.
30. *H. Kaiser*, und *M. Sohm*, *Spectrochim. Acta* **2**, 81, 1941.

31. G. Balz, H. Kaiser, und P. H. Keck, *Spectrochim. Acta* **2**, 92, 1941.
32. H. Kaiser, *VDI-Zeitschrift* **85**, 40, 1941.
33. H. Kaiser, *Stahl u. Eisen* **61**, 35, 1941.
34. H. F. Höfert, und P. H. Keck, *Zeiss-Nachrichten* (4), Heft **2**, 37, 1941.
35. R. Schmidt, *Recueil Trav. Chim. Pays-Bas.* **60**, 378, 1941.
36. W. Meyer-Eppler und W. Koehler, *Arch. Elektrot.* **35**, 603, 1941.
37. N. S. Sventitski, *Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Fiz.* **5**, 222, 1941.
38. F. Kemmler, *Deutsche Patentschrift* No. 712 654.
39. H. Kaiser, und M. Sohm, *Spectrochim. Acta* **2**, 258, 1942.
40. H. B. Vincent, und R. A. Sawyer, *J. Opt. Soc. Amer.* **32**, 686, 1942.
41. M. F. Hasler, und H. W. Dietert, *J. Opt. Soc. Amer.* **33**, 218, 1943.
42. J. Mika, A. Schöntag, und S. Hartwig, *Z. wiss. Photogr.* **42**, 12, 1943.
43. G. Balz, *Aluminium* **26**, 60, 1944.
44. S. F. Simpson, *J. Opt. Soc. Amer.* **35**, 40, 1945.
45. R. G. Fowler, und R. A. Wolfe, *J. Opt. Soc. Amer.* **35**, 170, 1945.
46. R. Schmidt, und A. Schuringa, *Recueil Trav. Chim. Pays-Bas.* **64**, 349, 1945.
47. S. Levy, *J. Opt. Soc. Amer.* **35**, 221, 1945.
48. V. J. Caldecourt und I. L. Saunderson, *J. Opt. Soc. Amer.* **36**, 99, 1946.
49. A. Walsh, *Bull. Brit. Non-Ferrous Met. Res. Assoc. No.* **201**, 60, 1946.
50. C. Braudo, und H. R. Clayton, *Nature* **157**, 622, 1946.
51. C. Braudo, und H. R. Clayton, *J. Soc. Chem. Ind.* **66**, 259, 1947.
52. D. A. Sinclair, *J. Opt. Soc. Amer.* **38**, 547, 1948.
53. J. H. Enns, und R. A. Wolfe, *Symposium on spectrographic light sources. Spec. Tech. Publ. Am. Soc. Test. Mat. Philadelphia*, 1948.
54. J. L. Saunderson, *Symposium on spectrographic light sources. Spec. Techn. Publ. Am. Soc. Test. Mat., Philadelphia*, 1948.
55. E. Kaczor, und K. Chamberlain, *J. Opt. Soc. Amer.* **39**, 637, 1949.
56. H. J. Enns, und R. A. Wolfe, *J. Opt. Soc. Amer.* **39**, 298, 1949.
57. J. Mika, F. Macher, und B. Vorsatz, *Anal. Chim. Acta* **3**, 228, 1949.
58. T. Török, *Acta Chim. Hung.*, **2**, 289, 1950.
59. R. J. Dwyer, *J. Opt. Soc. Amer.* **40**, 180, 1950.
60. N. Marti, *Spectrochim. Acta* **4**, 430, 1950.
61. G. G. Carlsson, und T. M. Yü., *J. Iron Steel Inst. December*, 273, 1950.
62. H. T. Shirley, A. Oldfield, und H. Kitchen, *J. Iron Steel Inst. December*, 329, 1950.
63. V. K. Prokoffjev, *Photographische Methoden der quantitativen Spektralanalyse von Metallen und Legierungen. Gosztechizdat. Moszkva*, 1951.
64. C. W. Rankin, *Anal. Chem.* **23**, 1722, 1951.
65. J. van Calker, *Spectrochim. Acta* **5**, 19, 1952.
66. K. Laqua, *Spectrochim. Acta* **4**, 446, 1952.
67. J. van Calker, und W. Maass, *Z. angew. Phys.* **4**, 161, 1952.
68. H. Bückert, *Spectrochim. Acta* **4**, 525, 1952.
69. R. H. Steinberg, *Appl. Spectroscopy* **6**, 20, 1952.
70. Á. Bardócz, *J. Opt. Soc. Amer.* **42**, 357, 1952.
71. Á. Bardócz, *Acta Phys. Hung.*, **2**, 265, 1953.
72. Á. Bardócz, *Spectrochim. Acta* **5**, 397, 1953.
73. A. G. Rouse, *J. Opt. Soc. Amer.* **40**, 82, 1950.
74. J. D. Craggs, M. E. Haine, und J.M. Meek, *J. Inst. Electr. Eng.* **93**, III/A, 963, 1946.
75. J. J. Martin, *Diss.* 1937.
76. G. Scheibe, und J. Martin, *Spectrochim. Acta* **1**, 1941. 47.
77. W. M. Murray, B. Gettys, und S. E. Q. Ashley, *J. Opt. Soc. Amer.* **31**, 433, 1941.
78. A. Gatterer, und V. Frodl, *Ric. Spettroscopiche* **1**, 201, 1946.
79. F. R. Bryan, und G. A. Nahstoll, *J. Opt. Soc. Amer.* **37**, 311, 1947.
80. R. E. Keller, und L. Smith, *Anal. Chem.* **24**, 796, 1952.



## ИСКРОВОЙ ВОЗБУДИТЕЛЬ С ЭЛЕКТРОНИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ ДЛЯ ЦЕЛЕЙ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

А. БАРДОЦ

### Резюме

Управление искровым возбудителем, используемым для целей спектрального анализа, может быть осуществлено с помощью маломощных электронных ламп, через которые управляемая энергия не пропускается, но которые только вызывают искровой разряд. В настоящей работе искровой разряд управляется тиратроном. Сущность электронического управления заключается в том, что применяются два искровых промежутка, один из которых шунтируется омическим сопротивлением, включенным последовательно с тиратроном. Если сетка тиратрона, замкнутая с отрицательным предварительным напряжением, получает положительный импульс, то сначала в нешунтированном, а затем в шунтированном тиратроном и омическим сопротивлением искровом промежутке совершается пробой, который зажигает основной разряд. Электроническое управление значительно уменьшает неустойчивость других управляющих систем. Кроме того применение электронического управления позволяет в весьма большом интервале изменять число искр на 1 сек. Это дает возможность легко регулировать и частоту прерывистых низковольтных конденсированных искр.

# DIE BEWEGUNG DES ENERGIEMITTELPUNKTES UND DER ENERGIE-IMPULS-TENSOR DES ELEKTRO- MAGNETISCHEN FELDES IN DIELEKTRIKA

Von

G. GYÖRGYI

ZENTRALFORSCHUNGSINSTITUT FÜR PHYSIK, BUDAPEST

(Vorgelegt von K. F. Novobátsky. — Eingegangen: 18. II. 1954.)

Es werden die Bewegungsgesetze des Massenmittelpunktes der elektromagnetischen Energie und des mit dem elektromagnetischen Feld in Wechselwirkung stehenden Dielektrikums untersucht. Es ergibt sich, dass der Abrahamsche Energie-Impuls-Tensor mit den üblichen Begriffen der Mechanik und mit dem Satz von der gleichförmigen Bewegung des Massenmittelpunktes eines geschlossenen Systems in Einklang steht.

Die in isotropen Dielektrika gültige Form des Energie-Impuls-Tensors des elektromagnetischen Feldes stand im Mittelpunkt einer sich über mehrere Jahrzehnte hinziehenden Diskussion [1—7]. Einige Forscher traten für den von *Minkowski* [1] aufgestellten asymmetrischen Ausdruck

$$T_{ik}^M = \frac{1}{4\pi} \left( F_{iv} G_{kv} - \frac{1}{4} \delta_{ik} F_{vs} G_{vs} \right) \quad (1)$$

ein, während andere den von *Abraham* [2] vorgeschlagenen symmetrischen Tensor

$$T_{ik}^A = \frac{1}{8\pi} \left[ F_{iv} G_{kv} + G_{iv} F_{kv} - \frac{1}{2} \delta_{ik} F_{vs} G_{vs} - (\epsilon\mu - 1) (v_i \Omega_k + v_k \Omega_i) \right] \quad (2)$$

als den für die Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld und den Dielektrika charakteristischen, richtigen Energie-Impuls-Tensor anerkannten. Die gebrauchten Bezeichnungen sind:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{B}_z & -\mathfrak{B}_y & -i\mathfrak{E}_x \\ -\mathfrak{B}_z & 0 & \mathfrak{B}_x & -i\mathfrak{E}_y \\ \mathfrak{B}_y & -\mathfrak{B}_x & 0 & -i\mathfrak{E}_z \\ i\mathfrak{E}_x & i\mathfrak{E}_y & i\mathfrak{E}_z & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{D}_z & -\mathfrak{D}_y & -i\mathfrak{D}_x \\ -\mathfrak{D}_z & 0 & \mathfrak{D}_x & -i\mathfrak{D}_y \\ \mathfrak{D}_y & -\mathfrak{D}_x & 0 & -i\mathfrak{D}_z \\ i\mathfrak{D}_x & i\mathfrak{D}_y & i\mathfrak{D}_z & 0 \end{pmatrix}$$

für die zwei antisymmetrischen Tensoren, die das elektromagnetische Feld beschreiben bzw. die Feldgrößen  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  zusammenfassen,

$$\Omega_i = v_k v_r F_{lr} (G_{ik} v_l + G_{kl} v_i + G_{li} v_k), \quad \text{ferner ist } v_i = \frac{1}{c} \frac{dx_i}{dt}$$

die Vierergeschwindigkeit des Dielektrikums in Lichtgeschwindigkeitseinheiten,



und schliesslich bedeuten  $\varepsilon$  und  $\mu$  die Dielektrizitätskonstante bzw. die magnetische Permeabilität des Dielektrikums.

Lange Zeit hindurch erfreute sich die Auffassung von *Abraham* einer grösseren Verbreitung, vor einigen Jahren wandte sich jedoch das Interesse wieder dem Minkowskischen Tensor zu [7]. In einer früheren Arbeit [8] wurden die in der Diskussion vorgebrachten Argumente und Gesichtspunkte zusammengefasst; diese wiesen darauf hin, dass von den in Frage stehenden Energie-Impuls-Tensoren der von *Abraham* stammende Ausdruck (2) mit den für die Energie, den Impuls und den Drehimpuls gültigen Erhaltungssätzen, mit den Anforderungen der Relativitätstheorie und mit der in der Auffassung der Elektronentheorie wurzelnden Anschauung im Einklang steht.

Der richtige Energie-Impuls-Tensor hat aber nicht nur über die Erhaltung der Energie, des Impulses und des Drehimpulses Auskunft zu geben, sondern muss auch mit den richtigen Bewegungsgesetzen des Energie- bzw. Massenmittelpunktes übereinstimmen. (Diese Erhaltungssätze sind die Folge der homogenen und isotropen Beschaffenheit des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums; weitere solche, aus der Invarianz der Bewegungsgleichungen gegenüber den Translationen und Drehungen des Zeit-Raum-Kontinuums folgende Erhaltungssätze sind nicht vorhanden [9]).

Im letzten Jahre befassten sich zwei Forscher mit der Bewegung des Energiemittelpunktes des mit Dielektrika in Wechselwirkung stehenden elektromagnetischen Feldes.

*N. L. Balázs* [10] diskutierte einige interessante Gedankenexperimente. Er fand im Laufe seiner Berechnungen, dass wenn man sich der Auffassung *Abrahams* anschliesst, der Energiemittelpunkt eines geschlossenen Systems, das aus dem elektromagnetischen Feld und dem sich mit diesem in Wechselwirkung befindlichen Dielektrikum besteht, eine gleichförmige Bewegung ausführt. Rechnet man hingegen mit den Minkowskischen Ausdrücken, so treten gewisse Schwierigkeiten auf. Aus seinen Gedankenexperimenten zog deshalb *Balázs* die Folgerung, dass man im Interesse der Aufrechterhaltung des Satzes über die gleichförmige Bewegung des Energiemittelpunktes den *Abrahamschen* Tensor als richtig anzuerkennen habe.

In seiner Arbeit, deren Hauptziel darin bestand, den Planckschen Satz über die Trägheit der Energie und den asymmetrischen Energie-Impuls-Tensor von *Minkowski* in Einklang zu bringen, gelangt *Beck* [11] auf Grund der Minkowskischen Auffassung zum Ergebnis, dass der vollständige Energie-Impuls-Tensor des aus einem Dielektrikum und dem elektromagnetischen Feld bestehenden geschlossenen Systems symmetrisch und natürlich divergenzfrei ist, weshalb für ihn der Satz von der gleichförmigen Bewegung des Energiemittelpunktes Gültigkeit hat [12].

Diese zwei sich scheinbar widersprechenden Folgerungen gaben den Anstoss zur eingehenden Untersuchung der Frage, welcher der beiden Energie-

Impuls-Tensoren mit den richtigen Bewegungsgesetzen des Energiemittelpunktes übereinstimmt.

Es sei  $T_{ik}$  der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes,  $D_{ik}$  der des Dielektrikums und  $S_{ik}$  der vollständige Energie-Impuls-Tensor des aus dem Dielektrikum und dem elektromagnetischen Feld bestehenden Systems :

$$S_{ik} = T_{ik} + D_{ik}. \tag{3}$$

Der Energie-Impuls-Tensor  $S_{ik}$  des vollständigen, geschlossenen Systems ist sowohl nach der Auffassung *Minkowskis* [11] als auch nach der *Abrahams* [8] divergenzfrei und symmetrisch :

$$\partial_r S_{ir} = 0, \quad S_{ik} = S_{ki}. \tag{3a}$$

Aus diesen Zusammenhängen folgt, dass

$$T_{ik} - T_{ki} = -D_{ik} + D_{ki} \tag{4}$$

und

$$\partial_r D_{ir} = -\partial_r T_{ir} = k_i. \tag{4a}$$

Hier bedeutet  $k_i$  die vom elektromagnetischen Feld auf das Dielektrikum ausgeübte ponderomotorische Viererkräftdichte.

Es sei nun folgender Ausdruck berechnet, der die Bewegung des Energiemittelpunktes des elektromagnetischen Feldes beschreibt :

$$\begin{aligned} \frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int (x_k T_{i4} - x_i T_{k4}) dV &= \int \partial_4 (x_k T_{i4} - x_i T_{k4}) dV = \\ &= \int (x_k \partial_4 T_{i4} - x_i \partial_4 T_{k4}) dV + \int (\delta_{4k} T_{i4} - \delta_{4i} T_{k4}) dV. \end{aligned}$$

Der Bereich des Integrierens ist der ganze dreidimensionale Raum. Laut Gl. (4a) ist

$$\partial_4 T_{i4} = -\sum_{\alpha=1}^3 \partial_\alpha T_{i\alpha} - k_i,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int (x_k T_{i4} - x_i T_{k4}) dV &= -\int \sum_{\alpha=1}^3 (x_k \partial_\alpha T_{i\alpha} - x_i \partial_\alpha T_{k\alpha}) dV + \\ &+ \int (\delta_{4k} T_{i4} - \delta_{4i} T_{k4}) dV - \int (x_k k_i - x_i k_k) dV. \end{aligned}$$



Am ersten Glied der rechten Seite wird nun eine partielle Integration vorgenommen. Es wird vorausgesetzt, dass  $T_{ik}$  im Unendlichen so schnell verschwindet, dass das auftretende Oberflächenintegral Null ist. Als Ergebnis der Umgestaltungen gelangt man zu

$$\frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int (x_k T_{i4} - x_i T_{k4}) dV = \int (x_i k_k - x_k k_i) dV + \int (T_{ki} - T_{ik}) dV. \quad (5)$$

Es sei nun  $i = 1, 2, 3$  und  $k = 4$ . In diesem Falle lässt sich die Gl. (5) in jenem Koordinatensystem, in dem die Effektdichte der ponderomotorischen Kräfte momentan Null beträgt\*), folgendermassen schreiben :

$$\frac{d}{dt} \int \mathfrak{r} \frac{u}{c^2} dV = \mathfrak{t} \int \left( \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} + \mathfrak{f} \right) dV + \int \mathfrak{g} dV + \int \left( \frac{1}{c^2} \mathfrak{S} - \mathfrak{g} \right) dV. \quad (6)$$

Hier ist  $u = -T_{44}$ , nämlich die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes  $\mathfrak{g}$  ( $T_{14}/ic$ ,  $T_{24}/ic$ ,  $T_{34}/ic$ ) die Feldimpulsdichte,  $\mathfrak{S}$  ( $-icT_{41}$ ,  $-icT_{42}$ ,  $-icT_{43}$ ) die Stromdichte der Feldenergie und  $\mathfrak{f}$  ( $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ) die ponderomotorische Kraftdichte.

Das erste Integral der rechten Seite ist laut Gl. (4a) das Integral einer dreidimensionalen Divergenz, weshalb es zu einem auf die unendlich entfernte Fläche erstrecktes Integral umgestaltet werden kann. Da dort  $T_{ik}$  Null ist, verschwindet es. Es sei nun die zeitliche Ableitung des Ausdruckes (6) gebildet und an Stelle von  $\partial \mathfrak{g} / \partial t$  das sich von diesem nur in einer Divergenz unterscheidende  $\mathfrak{f}$  eingesetzt. Das Ergebnis lautet :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \frac{u}{c^2} \mathfrak{r} dV = - \int \left[ \mathfrak{f} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathfrak{g} - \frac{1}{c^2} \mathfrak{S} \right) \right] dV. \quad (7)$$

Dieser Zusammenhang besagt, dass der elektromagnetische Energie-mittelpunkt dann seine Geschwindigkeit ändert, wenn auf die im Raume befindliche Materie eine ponderomotorische Kraft wirkt (das erste Glied der rechten Seite ist deren Reaktionskraft) oder wenn sich die Grösse  $\mathfrak{g} - \mathfrak{S}/c^2$  mit der Zeit verändert. Diesem Gliede könnte man schwer eine physikalische Bedeutung zuschreiben.

Vor einer eingehenderen Untersuchung des erhaltenen Resultates sei der vorige Gedankengang anstatt mit dem Energie-Impuls-Tensor  $T_{ik}$  des elektromagnetischen Feldes auch mit dem die Energie und den Impuls des Dielektrikums beschreibenden Tensor  $D_{ik}$  ausgeführt.

\*) Dieses Koordinatensystem wurde zur Vereinfachung der Berechnungen gewählt. Im Falle der Benutzung eines anderen Koordinatensystems müsste wegen der vom Feld geleisteten Arbeit auch die Veränderung der Ruhmasse des Dielektrikums berücksichtigt werden [13].

Die Umgestaltung des Ausdruckes

$$\frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int (x_k D_{i4} - x_i D_{k4}) dV$$

führt bei Heranziehung der Zusammenhänge (4—4a) zu folgendem Ergebnis (es wird hierbei wieder das Koordinatensystem benutzt, in dem die momentane Effektdichte Null ist) :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \mu r dV = \int \left[ \mathfrak{f} + \frac{\partial}{\partial t} \left( g - \frac{1}{c^2} \mathfrak{E} \right) \right] dV. \quad (8)$$

Hier bedeuten  $\mathfrak{f}$ ,  $g$  und  $\mathfrak{E}$  dasselbe wie früher, während  $\mu = -D_{44}/c^2$  die Massendichte des Dielektrikums bezeichnet.

Jetzt sei auf die Besprechung der als Gl. (7) und (8) erhaltenen Ergebnisse übergegangen.

Addiert man die Gleichungen (7) und (8), so ergibt sich

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \left( \mu + \frac{u}{c^2} \right) r dV = 0, \quad (9)$$

d. h. dass sich der gemeinsame Massenmittelpunkt des Dielektrikums und der Energie des elektromagnetischen Feldes mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Dieses Ergebnis ist, wie aus der Herleitung hervorgeht, unabhängig davon, ob man sich der Auffassung von *Minkowski* oder von *Abraham* anschliesst und stimmt mit dem eingangs erwähnten Resultat von *Beck* überein.

Die Zusammenhänge (7) und (8) geben also die Bewegungsgesetze des Energiemittelpunktes des elektromagnetischen Feldes und des Energiemittelpunktes des Dielektrikums.

Es ist beachtenswert, dass man zu demselben Ergebnis für die rechte Seite des Ausdruckes (7) gelangt, ob man nun die Berechnung auf Grund des Abrahamschen oder aber des Minkowskischen Tensors durchführt. Die sich als Divergenz des Minkowskischen Tensors ergebende Kraftdichte lautet bei Beschränkung auf ein ladungs- und stromfreies, ruhendes isotropes Dielektrikum :

$$\mathfrak{f}^M = - \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 \text{ grad } \varepsilon + \mathfrak{H}^2 \text{ grad } \mu). \quad (10)$$

Die Ausdrücke für die Impulsdichte und den Energiestrom sind gemäss der Minkowskischen Auffassung

$$g^M = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{D} \times \mathfrak{B}, \quad (11)$$



$$\mathfrak{S}^M = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}. \quad (12)$$

Auf der rechten Seite der Gl. (7) ist also der Integrand laut der Auffassung *Minkowskis* :

$$\mathfrak{f}^M + \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathfrak{g}^M - \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^M \right) = - \frac{1}{8\pi} \left( \mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \mathfrak{H}^2 \operatorname{grad} \mu \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right). \quad (13)$$

Aus dem Abrahamschen Tensor erhält man dagegen für die Kraft, den Impuls und die Dichte des Energiestromes :

$$\mathfrak{f}^A = - \frac{1}{8\pi} \left( \mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \mathfrak{H}^2 \operatorname{grad} \mu \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right). \quad (14)$$

$$\mathfrak{g}^A = \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^A = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}. \quad (15)$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}^A + \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathfrak{g}^A - \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^A \right) &= \mathfrak{f}^A = \frac{1}{8\pi} \left( \mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \mathfrak{H}^2 \operatorname{grad} \mu \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right) = \mathfrak{f}^M + \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathfrak{g}^M - \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^M \right), \end{aligned} \quad (16)$$

somit tatsächlich der gleiche Ausdruck wie nach der *Minkowskischen* Auffassung. Die Bewegung des elektromagnetischen Energiemittelpunktes wird also — wie ja zu erwarten war — durch die Feldgrößen sowie durch den nach beiden Auffassungen übereinstimmenden Ausdruck der Feldenergie bestimmt, wobei die Wahl der übrigen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors keinen Einfluss auf ihre Grösse hat.

Der Unterschied zwischen den beiden Auffassungen tritt dann zutage, wenn man den die Bewegung des Massenmittelpunktes des Dielektrikums bestimmenden Zusammenhang (8) untersucht. Die rechte Seite der Gl. (8) sei bei Verwendung der Kontinuitätsgleichung der Materie

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = - \operatorname{div} (\mu \mathbf{v})$$

und der vektoranalytischen Identität

$$\mathbf{r} \operatorname{div} (\mu \mathbf{v}) = \operatorname{Div} (\mu \mathbf{r} \circ \mathbf{v}) - \mu \mathbf{v}$$

umgestaltet :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \mu x dV = \frac{d}{dt} \int \frac{\partial \mu}{\partial t} x dV = \frac{d}{dt} \int \mu v dV .$$

Das während der Umgestaltung aufgetretene Oberflächenintegral ist Null, wenn die Materie nur einen endlichen Raumteil ausfüllt. Hier soll nur dieser Fall behandelt werden.

Nach der Umgestaltung weist die Gl. (8) folgende Gestalt auf :

$$\frac{d}{dt} \int \mu v dV = \int \left[ \mathfrak{f} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathfrak{g} - \frac{1}{c^2} \mathfrak{E} \right) \right] dV . \quad (17)$$

Nimmt man nun die Minkowskischen Ausdrücke der ponderomotorischen Kraft, des Feldimpulses und der Energiestromdichte als richtig an, so gelangt man zu dem sonderbaren Ergebnis, dass sich der Impuls

$$\mathfrak{p} = \int \mu v dV \quad (18)$$

des Dielektrikums nicht nur infolge der Einwirkung der ponderomotorischen Kraft  $\int \mathfrak{f}^M dV$  verändert, sondern auch dann, wenn

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathfrak{g}^M - \frac{1}{c^2} \mathfrak{E}^M \right) dV \neq 0 ,$$

ein Fall, dem man schwer einen physikalischen Sinn wird geben können. Das auf Grund der Minkowskischen Auffassung erhaltene Ergebnis für den Gesamtimpuls  $\mathfrak{p}$  des Dielektrikums besagt also, dass die aus der Mechanik wohlbekannte Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \mathfrak{R} \quad (\mathfrak{R} = \int \mathfrak{f}^M dV) \quad (19)$$

keine Gültigkeit besitzt, sondern dass statt ihrer

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \mathfrak{R} + \int \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathfrak{g}^M - \frac{1}{c^2} \mathfrak{E}^M \right) dV \quad (20)$$

gilt. Dieser Zusammenhang, aus dem hervorgeht, dass die Veränderung des Impulses in der Zeiteinheit nicht der wirkenden Kraft gleich ist, stellt ein ebenso unannehmbares Ergebnis der Asymmetrie des Minkowskischen Tensors dar wie dasjenige, dass die Veränderung des Impulses in der Zeiteinheit nicht dem Drehmoment der ponderomotorischen Kräfte gleich ist [5, 8].



Der Zusammenhang (20) sowie die den gleichen Inhalt aufweisende Gl. (8) ist für die Befriedigung des Zusammenhanges (9) massgeblich, der über die gleichmässige Bewegung des Energiemittelpunktes des aus dem Dielektrikum und dem elektromagnetischen Feld bestehenden geschlossenen Systems Auskunft gibt. Die von Balázs [10] in seiner eingangs erwähnten Arbeit vorgeführten Beispiele zeigen gerade, dass sich der Energiemittelpunkt des vollständigen geschlossenen Systems, wenn man anstatt mit Gl. (20) mit der in der Mechanik üblichen Gl. (19) rechnet, nicht mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt.

Wie bei der Herleitung von Gl. (9) zu sehen war, führt der Minkowskische Energie-Impuls-Tensor nicht zu einem zur gleichförmigen Bewegung des Energiemittelpunktes geschlossener Systeme gegensätzlichen Ergebnis. Trotzdem wird man aber nicht sagen können, dass der Minkowskische Energie-Impuls-Tensor die naturgetreueste Beschreibung der Wechselwirkung zwischen den Dielektrika und dem elektromagnetischen Feld gibt. Die Akzeptierung dieses Tensors führt nämlich zu den Zusammenhängen (17—20), die — wie gezeigt wurde — im Gegensatz zur Gl. (19) der Mechanik stehen. Die Übereinstimmung der Gleichungen (17) und (19) mit den Gesetzen der Mechanik liesse sich höchstens so retten, dass man den Impuls des Dielektrikums von der Gewohnheit abweichend durch die Gleichung

$$p' = \int \left[ \mu v - \left( g^M - \frac{1}{c^2} \mathfrak{E}^M \right) \right] dV = \int \left( \mu v + \frac{1 - \varepsilon \mu}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right) dV \quad (21)$$

definiert. In diesem Falle könnte man den aus dem Minkowskischen Tensor erhaltenen Zusammenhang (17) in der dem Ausdruck (19) ähnlichen Form

$$\frac{dp'}{dt} = \mathfrak{F}$$

schreiben.

Die Definition (21) weicht aber vollständig von den üblichen Begriffsbildungen der Mechanik ab. Demgemäss würde der Impuls des in das elektromagnetische Feld gestellten Dielektrikums ausser vom Bewegungszustand auch von den Feldgrössen abhängen. So würde man z. B. für den Impuls eines von einer elektromagnetischen Welle durchstrahlten ruhenden Dielektrikums einen Wert erhalten, der von Null abweicht.

Aus Gl. (21) geht hervor, auf welche Weise man zu dem den Minkowskischen Tensor asymmetrisch machenden Feldimpulsdichte-Ausdruck

$$g^M = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{D} \times \mathfrak{B}$$

gelangt. Die vollständige Impulsdichte

$$\mu v + \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$$





was viel natürlicher ist als Gl. (22). Jetzt gilt auch für die elektromagnetische Energie der Plancksche Satz über die Trägheit der Energie

$$g^A = \frac{1}{c^2} \mathfrak{E}^A . \quad (24)$$

Auch die Gl. (17) gewinnt in der Abrahamschen Auffassung eine tiefere physikalische Bedeutung. Nach dieser Auffassung ist die ponderomotorische Kraftdichte

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}^A &= -\frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \mathfrak{H}^2 \operatorname{grad} \mu + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right) = \\ &= \mathfrak{f}^M + \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathfrak{g}^M - \frac{1}{c^2} \mathfrak{E}^M \right) . \end{aligned} \quad (25)$$

Wie in einer früheren Arbeit [8] nachgewiesen wurde, enthält das letzte Glied unter anderem auch die auf den Polarisationsstrom wirkende Lorentzsche Kraft, die sowohl auf Grund des Prinzips von Aktion und Reaktion als auch auf Grund der sich auf die Elektronentheorie stützenden Anschauung zu berücksichtigen ist. Dies lässt sich gut aus der folgenden Schreibweise des Kraftausdruckes (25) erkennen, der die Entstehungsursache der einzelnen Kräfte hervorhebt :

$$\mathfrak{f}^A = (\mathfrak{P} \operatorname{grad}) \mathfrak{E} + (\mathfrak{M} \operatorname{grad}) \mathfrak{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \mathfrak{H} + \frac{1}{c} \mathfrak{E} \times \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} - \operatorname{grad} \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{P} + \mathfrak{H} \mathfrak{M}) .$$

(Diese Form [8] ergibt sich aus dem allgemein bekannten Ausdruck (25) der Abrahamschen Kraftdichte, wenn man die Feldgleichungen und einige vektoranalytische Zusammenhänge heranzieht.)

Die Impulsänderung der Materie des Dielektrikums steht nun infolge der Befriedigung des Satzes von der Erhaltung der Energie (24) laut Gl. (17) bereits mit der aus der Mechanik wohlbekannten Formel

$$\frac{d}{dt} \int \mu v dV = \int \mathfrak{f}^A dV \quad (26)$$

im Einklang. Die Abrahamsche Trennung (23) der Gesamtimpulsdichte von Dielektrikum und elektromagnetischem Feld stimmt nicht nur mit der üblichen Form (26) der Bewegungsgleichung des Dielektrikums überein, sondern schaltet auch die übrigen erwähnten Schwierigkeiten aus.\*

\* Wenn man nach der Auffassung *Abrahams* rechnet, ergibt sich, dass der Impuls des Pothons ein zeitartiger Vektor und seine Ruhmasse reell ist.

Bei der in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchung der Bewegungsgesetze des Massenmittelpunktes der Energie des elektromagnetischen Feldes und des mit dem Felde in Wechselwirkung stehenden Dielektrikums ergab sich, dass bei Verwendung des für Dielektrika des elektromagnetischen Feldes gegebenen Minkowskischen Energie-Impuls-Tensors der Satz über die gleichmässige Bewegung des Energiemittelpunktes von geschlossenen Systemen nur dann erfüllt ist, wenn man für die Bewegungsgleichung des Dielektrikums die Form

$$\frac{d}{dt} \int \mu v dV = \int \mathfrak{k}^M dV + \int \frac{\partial}{\partial t} \left( g^M - \frac{1}{c^2} \gamma^M \right) dV$$

wählt. Die Akzeptierung dieses Zusammenhanges zieht zahlreiche Schwierigkeiten nach sich, die sich aber ausschalten lassen, wenn man den Abraham'schen Ausdruck (2) als den Energie-Impuls-Tensor ansieht, der die Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld und den Dielektrika beschreibt.

\* \* \*

Hier sei *G. Marx*, Kandidaten der physikalischen Wissenschaften, für sein ständiges Interesse an der vorliegenden Arbeit, für seine wertvollen Ratschläge und seine nützliche Kritik der aufrichtige Dank des Verfassers ausgesprochen.

#### LITERATUR

1. *H. Minkowski*, Göttinger Nachr. **53**, 1908.
2. *M. Abraham*, Rend. d. circ. mat. di Pal. **28**, 1, 1909.
3. *R. Grammel*, Ann. d. Phys. **41**, 570, 1913.
4. *H. Dällenbach*, Ann. d. Phys. **58**, 523, 1919.
5. *И. Е. Тамм*, Основы теории электричества, Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1949.
6. *K. F. Novobátzky*, Hung. Acta Phys. **1**, No. 5, 1949.
7. *M. v. Laue*, Z. Phys. **128**, 387, 1950.
8. *G. Marx—G. Györgyi*: Acta Phys. Hung. **3**, 213, 1954.
9. *E. Noether*, Göttinger Nachr. 253, 1918.
10. *N. L. Balázs*, Phys. Rev. **91**, 408, 1953.
11. *F. Beck*, Z. Phys. **134**, 136, 1953.
12. *Д. Иваненко—А. Соколов*, Квантовая теория поля, Москва, 1952.
13. *M. Abraham*, Phys. Zs. **10**, 737, 1909.

#### ДВИЖЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА И ТЕНЗОР ИМПУЛЬСА ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

Г. ДЬЕРДЫ

Резюме

В работе рассматривается движение центра масс электромагнитной энергии и диэлектрика, взаимодействующего с электромагнитным полем. Обычным понятиям классической механики и теореме о равномерном движении центра масс консервативной системы соответствует тензор импульса-энергии Абрагама.





# ÜBER DAS DIVERGENZPROBLEM DER W. K. B. METHODE

Von

I. FÉNYES

PHYSIKALISCHES INSTITUT DER ROLAND EÖTVÖS-UNIVERSITÄT, BUDAPEST

(Vorgelegt von P. Gombás. — Eingegangen: 23. IV. 1954.)

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass der divergente Charakter der W. K. B. Methode in einem inneren Widerspruch begründet ist. Dieser innere Widerspruch hängt damit zusammen, dass die W. K. B. Methode die Lösung der Schrödingerschen Gleichung von der klassischen Mechanik (als nullter Näherung) ausgehend sucht. Die Bewegung der klassischen Mechanik hat nämlich im allgemeinen einen anderen Wendepunkt als die irreguläre Bewegung der Quantenmechanik, und die sich daraus ergebende Abweichung kann auch durch Heranziehung höherer Näherungen nicht eliminiert werden. Mathematisch kommt dieser Widerspruch dadurch zum Ausdruck, dass die, bei der W. K. B. Methode angewandte Reihenentwicklung nicht existiert. Es wird gezeigt, dass durch Verwendung einer existierenden Reihenentwicklung und durch Berücksichtigung der Abhängigkeit des Eigenwertes  $E$  von  $\hbar$  die Methode divergenzfrei gemacht werden kann. Dabei wird auch der Grund dafür ersichtlich, dass die der W. K. B. Methode entsprechende erste Näherung in einem gewissen Bereich ein ziemlich gutes Resultat liefert. Endlich folgt eine Diskussion der Anwendbarkeit der allgemeinen Quantenbedingung, der sich dabei ergebenden Möglichkeiten und der gebotenen Einschränkungen.

1. Die Schrödingersche Gleichung der eindimensionalen Probleme kann in der Gestalt

$$\hbar^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + p^2 f = 0 \quad (1)$$

geschrieben werden, wobei  $p$  den klassischen Impuls bedeutet. Im einfachsten Falle gilt

$$p^2 = 2m(E - V). \quad (2)$$

In den Fällen, wo wir mehrdimensionale Probleme durch Trennung der Veränderlichen auf eindimensionale zurückführen, ist  $p^2$  im allgemeinen auf eine kompliziertere Weise als durch (2) gegeben. (Z. B. H-Atom,  $H_2^+$ -Molekül.)

Die Eigenfunktion  $f$  ist letzten Endes immer reell, kann aber als lineare Kombination zweier komplexen (im allgemeinen irregulären) Wellenfunktionen dargestellt werden. Dies ist der Umstand, den die W. K. B. Methode bei der angenäherten Lösung von (1) zu verwerten sucht. Wie bekannt, kann die Gleichung (1) durch Wellenfunktionen  $\varphi$  folgender Art befriedigt werden (die aber nur im Falle von entarteten Problemen Eigenfunktionen sein können):

$$\varphi = \exp \frac{i}{\hbar} \int y dx; \quad y = \frac{\hbar}{i} \frac{\varphi'}{\varphi}. \quad (3)$$



(3) ist immer eine Lösung von (1), falls  $y$  folgende Riccatische Gleichung befriedigt :

$$\frac{\hbar}{i} y' + y^2 - p^2 = 0. \quad (4)$$

Aus  $y$  gewinnt man die reelle Eigenfunktion folgendermassen :

$$f = a \left( \exp \frac{i}{\hbar} \int y dx + \exp -\frac{i}{\hbar} \int y^* dx \right), \quad (5)$$

wo  $y^*$  die Konjugierte von  $y$  bedeutet.

Den Annahmen der W. K. B. Methode gemäss<sup>1</sup> [1], [2], [3] können die Lösungen der Gleichung (4) durch folgende Reihe dargestellt werden :

$$y = \sum_{l=0}^{\infty} y_l \left( \frac{\hbar}{i} \right)^l. \quad (6)$$

Indem wir dies in (4) einsetzen, gelangen wir — durch Vergleichung der entsprechenden Potenzen von  $\frac{\hbar}{i}$  — zu folgenden Rekursionsformeln :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = \pm p, \\ y'_{l-1} + \sum_{n=0}^l y_{l-n} y_n = 0; \quad l = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (7)$$

Da  $p$  auch die Energieeigenwerte enthält, ist (7) nur dann praktisch brauchbar, wenn der Eigenwert  $E$  bekannt ist. Zur Bestimmung der Eigenwerte dient eine allgemeine Quantenbedingung, die als Spezialfall in der Bohr-Sommerfeldschen Bedingung enthalten ist.

Damit wäre das Problem auch schon gelöst, wäre die Reihe (6) an den Stellen, wo  $p^2 = 0$  ist, laut (7) augenscheinlich nicht divergent. Wir begnügen uns damit, die Untersuchungen [2], [4], [5], [6], die auf eine Elimination der Divergenz an den Stellen  $p^2 = 0$  hinzielen, bloss zu erwähnen, da wir in der vorliegenden Arbeit einen von dem ihren wesentlich verschiedenen Weg einschlagen.

Trotz der erwähnten Schwierigkeiten ist die W. K. B. Methode heute noch eine der anerkannten Näherungsmethoden der Quantenmechanik. Dies ist teil-

<sup>1</sup> Die angeführten Literaturangaben dienen nur zur Orientierung. Wir halten es nicht für nötig, Vollständigkeit anzustreben.

weise dadurch zu erklären, dass diese Methode von der Hamilton-Jacobischen Gleichung der klassischen Mechanik als nullter Näherung ausgeht, und teilweise dadurch, dass die mit dieser Methode erzielte erste Näherung oft ein befriedigendes Resultat liefert. Das wesentliche an der W. K. B. Methode wäre eben der Übergang, der sich durch sie von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik ergibt.

Da an den Stellen  $p^2 = 0$  die Reihe (6) divergent ist, obgleich die gewünschte Lösung es offenbar nicht sein kann, taucht die Frage nach der Ursache dieser Divergenz auf. Es ist augenscheinlich, dass die Divergenz nur von einem, der W. K. B. Methode innewohnenden, mathematischen Fehler herrühren kann. Die Reihe (6) ist nämlich (wie wir sehen werden) mit der Gleichung (4) im allgemeinen nicht vereinbar. Es ist nur selbstverständlich, dass in solchen Fällen Schwierigkeiten auftreten. Es scheint daher zweckmässig, statt die Schwierigkeiten zu umgehen, den Fehler aufzusuchen, und statt (6) eine wirklich existierende Reihenentwicklung zu verwenden. In diesem Sinne werden wir uns in der vorliegenden Arbeit mit dem Problem beschäftigen.

Genauer gesagt, werden wir die folgenden Fragen untersuchen: 1. Welches sind die mittels der W. K. B. Methode gemachten Aussagen, deren Gültigkeit von der Reihenentwicklung (6) unabhängig ist? 2. Was ist der Grund dafür, dass, trotz der Fehler, die erste Näherung der W. K. B. Methode oft auch praktisch befriedigende, brauchbare Resultate liefert? 3. Was für eine, mit (4) verträgliche, Reihenentwicklung muss man statt (6) anwenden?

2. Vor allem werden wir die Bedeutung jener Aussage kritisch untersuchen, wonach man von der Wellenmechanik durch den Übergang  $\hbar \rightarrow 0$  zur klassischen Punktmechanik gelangt. In letzter Zeit sind die prinzipiellen Fragen der Quantenmechanik in verschiedener Form erneut untersucht worden. Ein Teil dieser Untersuchungen geht in formaler Hinsicht auf eine frühere Idee von *De Broglie* [7] zurück. Diese Idee gründet sich auf die Tatsache, dass die Gleichung (1) durch die Substitution

$$\varphi = \varrho^{1/2} \exp \frac{i}{\hbar} \int u dx \tag{8}$$

in die zwei reellen Gleichungen

$$\frac{d}{dx} (\varrho u) = 0 \quad , \tag{9}$$

$$E = -\frac{1}{2m} u^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varrho^{1/2}} \frac{d^2 \varrho^{1/2}}{dx^2} \tag{10}$$

übergeht, wobei der Bornschen Hypothese entsprechend

$$\varphi^* \varphi = |\varphi|^2 = \varrho \tag{11}$$



die Wahrscheinlichkeitsdichte, und

$$\frac{u}{m} = c \quad (12)$$

die Geschwindigkeit des Wahrscheinlichkeitsstromes bedeutet. Im Hinblick auf unser gegenwärtiges Problem muss hervorgehoben werden, dass (9) und (10) einen statistischen Vorgang charakterisieren [8]. Neuerdings ist auch in anderer Beziehung nachdrücklich darauf hingewiesen worden [9], [10], dass das durch

$$u = \frac{dS}{dx} \quad (13)$$

definierte Potential  $S$  von der Wirkungsfunktion der klassischen Mechanik wesentlich verschieden ist. In der klassischen Mechanik spielen nämlich die vollständigen Lösungen eine Rolle, wogegen in der quantenmechanischen Wirkungsfunktion  $S$  keine Integrationskonstanten auftreten können. Diese Eigenschaft der Funktion  $S$  bleibt offenbar auch im Grenzfalle  $\hbar \rightarrow 0$  bestehen; auch ist es klar, dass auch die Gültigkeit von (9) vom Übergang  $\hbar \rightarrow 0$  unabhängig ist. Wir werden sogleich sehen, was für eine Bedeutung diesem Umstande zukommt. Bereits *L. A. Young* [11] hat darauf hingewiesen, dass im Falle von eindimensionalen stationären Problemen die Beziehung

$$\varrho u = \text{Konstante} = a^2, \quad \varrho = \frac{a^2}{u} \quad (14)$$

gilt, was man übrigens auf Grund von (9) auch unmittelbar einsehen kann. Der Quotient  $u/m$  spielt also in der Quantenmechanik diejenige Rolle, die in der klassischen Statistik dem Erwartungswert der Geschwindigkeit zukommt. Es ist nämlich bekannt, dass im Sinne der klassischen Statistik der stationären Prozesse die Wahrscheinlichkeit eines Treffers im Intervall  $dx$  der Zeitspanne des Aufenthaltes proportional ist:

$$dt = \frac{dx}{c}, \quad \left( \frac{dx}{dt} = c = \text{Geschwindigkeit} \right); \quad (15)$$

somit gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\varrho = \frac{1}{m} \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{u};$$

Der klassische Grenzfall der Quantenmechanik ist also nicht die klassische Punktmechanik, sondern die durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\rho u) = 0, \\ E = \frac{1}{2m}u^2 + V \end{cases} \quad (16)$$

charakterisierte Statistik. Wir können auch sagen, dass die Gleichungen (16) die Bewegung einer Flüssigkeit vom Druck Null beschreiben. Das durch (9) und (10) charakterisierte quantenmechanisches Problem unterscheidet sich vom klassischen Fall nur insofern, dass die Spannung nicht gleich Null ist. Dieser Umstand gelangt durch das Auftreten eines »Quantenpotentials« zum Ausdruck.

(Das Wort »Potential« deutet auf die Auffassung hin, bei welcher man — unter Ausserachtlassung der Bedeutung der Kontinuitätsgleichung (9) — sowohl (10) als auch (16) als Bewegungsgleichungen der Punktmechanik betrachtet. Nach dem Vorhergesagten entspricht diese Auffassung der Wirklichkeit untreu; in beiden Fällen handelt es sich um die Bewegung eines Kontinuums.)

Die quantenmechanische [s. (9) und (10)] und die klassische [s. (16)] Bewegung stimmen auch darin überein, dass sie beide im Falle  $u \neq 0$  einen Wendepunkt haben. Eine Ausnahme ist nur die zyklische Bewegung. Ist die Bewegung nicht zyklisch, so sind die Lösungen sowohl in der Quantenmechanik als auch im klassischen Falle irregulär. Die beiden Fälle unterscheiden sich dadurch, dass der quantenmechanische Wendepunkt am Rande des Gebietes liegt, während sich die klassischen Wendepunkte im Inneren des Gebietes befinden. Der quantenmechanische Wendepunkt wird durch das Auftreten des Quantenpotentials an den Rand des Gebietes hinausgeschoben.

Aus der Relation (14) folgt unmittelbar, dass in den Wendepunkten die Dichte unendlich wird. Daraus ersieht man aber, dass auch die Lösung (3) an den Rändern des Gebietes unendlich wird. Die mit der W. K. B. Methode erhaltene Lösung wird aber nicht an den Rändern des quantenmechanischen, sondern an denjenigen des klassischen Bahngebietes unendlich, d. h. an den Stellen mit  $p^2 = 0$ . Nun ist dieser Unterschied zwischen den beiden Fällen unüberbrückbar. Auch die höheren Näherungen der W. K. B. Methode können die Wendepunkte nicht weiter hinausschieben, und so ist das Verfahren an den Stellen  $p^2 = 0$  unvermeidlich divergent. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, müsste man bereits die nullte Näherung so wählen, dass sie an den Rändern des Gebietes unendlich wird. Wie wir sehen, wird also die Schwierigkeit gerade durch denjenigen Umstand verursacht, mit dem man die W. K. B. Methode zu motivieren pflegt, nämlich, dass der Näherung die klassische Mechanik zu Grunde liegt. Hierdurch wird es aber eindeutig klar, wie man die W. K. B. Methode divergenzfrei machen kann. Da wir nicht von dem klassischen Grenzfall ausgehen dürfen, können wir auch den Ansatz (6) offenbar nicht gebrauchen, da dieser zu der Rekursion (7) und somit zum klassischen Grenzfall führt.



3. Auf Grund des Vorhergesagten können wir bereits zwei der aufgeworfenen Fragen beantworten: 1. Welche Aussagen der W. K. B. Methode sind es, die von der Reihenentwicklung (6) unabhängig Gültigkeit haben? 2. Wie kann man die erste Näherung von der Reihenentwicklung (6) unabhängig theoretisch begründen? Die folgenden Tatsachen sind grösstenteils nicht neu, neu ist nur der Gesichtspunkt von dem wir sie untersuchen.

Es sei der Kürze halber

$$v = \frac{1}{2} \frac{\varrho'}{\varrho} . \quad (17)$$

dann gilt

$$y = u + \frac{\hbar}{i} v , \quad (18)$$

und (9) und (10) können in folgender Form geschrieben werden:

$$u' + 2uv = 0 , \quad (19)$$

$$\hbar^2 (v^2 + v') + p^2 - u^2 = 0 . \quad (20)$$

Den aus (19) gewonnenen Ausdruck für  $v$  [11] setzen wir jetzt in (20) ein:

$$E = \frac{u^2}{2m} + V + \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{u''}{u} - \frac{3}{2} \left( \frac{u'}{u} \right)^2 \right\} , \quad (21)$$

und wenn wir  $u$  gemäss (14) durch  $\varrho$  ausdrücken:

$$E = \frac{a^2}{2m} \frac{1}{\varrho^2} + V + \frac{\hbar^2}{4m} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\varrho'}{\varrho} \right)^2 - \frac{\varrho''}{\varrho} \right\} , \quad (22)$$

falls  $u \neq 0$  ist.

Offenbar kann man erreichen, dass  $E$  in (21) und (22) mit dem Eigenwert der Energie übereinstimmt. Wir haben schon erwähnt, dass die komplexen Lösungen  $\varphi$  — obwohl stationär — im allgemeinen keine Eigenfunktionen sind. Die zu untersuchenden Eigenwertprobleme können aber immer als die Resultierenden von einander entgegenlaufenden kohärenten Strömungen aufgefasst werden, wobei die resultierende Strömungsgeschwindigkeit gleich Null ist. Eine Ausnahme bilden nur die Fälle, in welchen  $x$  eine zyklische Koordinate bedeutet (z. B. ebener Rotator). Hier ist man formal berechtigt z. B. von einer Rotation nach rechts bzw. nach links zu sprechen, aber die reelle Lösung ist auch hier die Resultierende der verschieden gerichteten kohärenten Strömungen. Also

sind die Lösungen der zu untersuchenden Eigenwertprobleme durch reelle Eigenfunktionen der Form

$$f = \frac{a}{2} \frac{1}{u^{1/2}} \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \int u dx + \exp - \frac{i}{\hbar} \int u dx \right\},$$

d. h. der Form

$$f = \frac{a}{u^{1/2}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int u dx + \delta \right) = a \exp \int \eta dx \quad (23)$$

charakterisiert.

Zur Erklärung des Gesagten müssen wir noch folgendes hinzufügen: Da  $\varrho$  Wahrscheinlichkeitsdichte bedeutet, muss notwendigerweise

$$\varrho \geq 0$$

gelten. Auf Grund von (14) folgt aber hieraus, dass  $u$  das Vorzeichen nicht wechseln kann. Es sind also (19) und (20) die Gleichungen einer Wahrscheinlichkeitsströmung eindeutiger Richtung. (Die Strömung kann sowohl positiver als auch negativer Richtung sein.) Aus physikalischen Gründen folgt, dass  $u = 0$  (und  $\varrho = \infty$ ), vom Falle  $u \equiv 0$  abgesehen, nur an den Endpunkten des Gebietes möglich ist.

Die Eigenfunktion (23) repräsentiert schon eine statische Dichteverteilung. Dementsprechend kann das Eigenwertproblem immer durch statische Dichteverteilung verwirklicht werden. Für die statische Dichte, die natürlich von  $\varrho$  verschieden ist, haben wir die Formel

$$f^2 = \frac{a^2}{u} \cos^2 \left( \frac{1}{\hbar} \int u dx + \delta \right).$$

$\eta$  in (23) entspricht dem in (17) definierten  $v$ , also gilt

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{1}{f^2} \frac{df^2}{dx} = \frac{f'}{f}. \quad (24)$$

(Der statische Zustand wird dadurch hervorgerufen, dass auf Kosten der kinetischen Energi der einander entgegenlaufenden Strömungen das »Quantenpotential« zunimmt. Wir dürfen auch behaupten, dass die Interferenz der einander entgegenlaufenden kohärenten Wellen stehende Wellen zustande bringt. Auch die Interferenz wird also durch das Quantenpotential möglich gemacht. Der klassische Fall (16) kann auch auf den statischen Fall reduziert werden:

$$E = \frac{a^2}{2m} \frac{1}{\varrho^2} + V$$



wo jetzt das erste Glied rechts nicht die kinetische Energie, sondern die Energie der inneren Spannung des Kontinuums bedeutet. Natürlich gibt es in diesem Falle keine Interferenz. Dass das Quantenpotential Interferenz hervorrufen kann, liegt daran, dass es von  $\varrho'$  und von  $\varrho''$  abhängig ist, und somit die Oszillation von  $\varrho$  die Zunahme der Energie mit sich bringt.)

Auf Grund von (23) erhalten wir für das (statistische) Eigenwertproblem statt (20) die folgende Gleichung:

$$\hbar^2(\eta^2 + \eta') + p^2 = 0. \quad (25)$$

Mit Hilfe der Identität

$$-p^2 = -u^2 + \hbar^2(v^2 + v') \equiv \hbar^2(\eta^2 + \eta')$$

kann  $\eta$ , falls  $u$  (und  $v$ ) bekannt ist, leicht bestimmt werden. Hingegen ist die Bestimmung von  $u$  (und von  $v$ ), in Kenntnis vom  $\eta$  (bezw.  $f$ ) eine wesentlich kompliziertere Aufgabe, es muss nämlich die Gleichung

$$f^2 u + \frac{\hbar^2}{u^2} \left( \frac{dfu^{1/2}}{dx} \right)^2 = a^2$$

für  $u$  gelöst werden.

Wir haben schon erwähnt, dass  $u$  nicht Null (und  $\varrho$  nicht unendlich) sein kann. Jetzt weisen wir auch darauf hin, dass auch  $u$  nicht unendlich (und  $\varrho$  nicht Null) sein kann. Die ( $n$ -te) Eigenfunktion, (23), hat nämlich im endlichen Teil des Gebietes  $x$ ,  $n-1$  Nullstellen, und dies ist nur so möglich, dass die Funktion  $\cos \left( \frac{1}{\hbar} \int u dx + \delta \right)$  den Wert Null  $n-1$ -mal annimmt. Würde  $f$  infolge des Unendlichwerdens von  $u$  verschwinden, dann müsste zugleich die Funktion  $\cos \left( \frac{1}{\hbar} \int u dx + \delta \right)$  unendlich viele Nullstellen haben, da das Argument  $\frac{1}{\hbar} \int u dx$  unendlich viele Male die Periode  $\pi$  durchlaufen würde. Aus dieser Eigenschaft von (23) ergibt sich (nach *L. A. Young*) folgende Formulierung der Quantenbedingung [11]:

$$\int_a^\beta u dx = k\hbar\pi. \quad (26)$$

Hier bedeuten  $\alpha$  und  $\beta$  die Grenzpunkte des Gebietes.

Die Gleichungen (21) und (22), der Ausdruck (23) für die Eigenfunktion, sowie die Quantenbedingung (26) haben eine von der Reihenentwicklung (6) unabhängige, exakte Gültigkeit. Aus (23) wird ersichtlich, dass die erste Näherung der W. K. B. Methode, die (im Inneren des klassischen Bahngebietes) die Gestalt

$$f = \frac{a}{p^{1/2}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p dx + \delta \right) \quad (27)$$

hat, die exakte Eigenfunktion (23) in denjenigen Gebieten, wo

$$\frac{u}{p} \approx 1 \tag{28}$$

gilt, tatsächlich gut approximiert. (27) ist also von (6) unabhängig gültig, falls nur (28) gilt. Gleichzeitig sehen wir, dass im Inneren des erwähnten Gebietes auch keine höhere Näherung nötig ist, da zusammen mit  $u \rightarrow p$  auch (27) die exakte Eigenfunktion darstellt. Es ist also natürlich, dass die »erste Näherung« (27) oft besser ist als die »höheren« Näherungen. Andererseits aber gelangen wir zur Einsicht, dass (28) als recht unglücklich gewählt gelten muss, da  $u$  durch  $p$  nur auf einer verhältnissmässig kleinen Strecke mit befriedigender Genauigkeit approximiert wird. Eine (27) bei weitem übertreffende, für das ganze Gebiet  $x$  gültige Näherung können wir durch jeden Ansatz

$$u \approx P$$

erhalten, der im Inneren des klassischen Bahngebietes  $p$  nahe kommt, ausser diesem Gebiet aber monoton abnimmt und gegen Null konvergiert. Dabei setzen wir voraus, dass für  $P$  die Quantenbedingung (26) gültig ist. Was die Quantenbedingung (26) betrifft, ist hier die Anwendung von (28) viel berechtigter, da auf Grund des Vorhergesagten

$$\int_a^\beta u \, dx \approx \int_{x_1}^{x_2} p \, dx = k\hbar\pi \tag{29}$$

gilt, wo  $x_1$ , und  $x_2$  die Grenzen des klassischen Bahngebietes bedeuten ( $a \leq x_1 < x_2 \leq \beta$ ).

Wie kann man nun entscheiden, mit welcher Genauigkeit (28) innerhalb des klassischen Bahngebietes gültig ist? Wenn wir für den Punkt  $x_0$ ,  $u(x_0) = p(x_0)$  voraussetzen, dann gilt gemäss (20) in einer Umgebung von  $x_0$

$$v' = -v^2,$$

d. h.

$$v(x) = \frac{1}{\frac{1}{v(x_0)} - x_0 + x}.$$

Andererseits erhalten wir, indem wir hier den (19) entnommenen Ausdruck für  $v$  einsetzen

$$u = - \int \frac{2p \, dx}{\frac{1}{v(x_0)} - x_0 + x} \tag{30}$$



Falls  $x_0$  so gewählt werden kann, dass der aus (30) gewonnene Wert für  $u$  in einer Umgebung von  $x_0$  gut approximiert, so ist die Anwendung von (28) berechtigt.

4. Gehen wir jetzt zur Untersuchung der Existenz von (6) über. Nach (18) müssen für  $u$  und für  $v$  im Falle der Existenz von (6) offenbar folgende Reihenentwicklungen gültig sein:

$$\begin{cases} u = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha u_\alpha \hbar^{2\alpha}, \\ v = \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^\beta v_\beta \hbar^{2\beta}, \end{cases} \quad (31)$$

hier ist

$$u_\alpha = y_{2\alpha}, \quad v_\beta = y_{2\beta+1}; \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

Indem wir (31) in (19) einsetzen, erhalten wir die Relation

$$\sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^\beta v_\beta \hbar^{2\beta} = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha u'_\alpha \hbar^{2\alpha}}{\sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha u_\alpha \hbar^{2\alpha}}. \quad (33)$$

Da die  $u_\alpha$  und die  $v_\beta$  von  $\hbar$  unabhängig sind, kann (33) nur bestehen, falls  $u_0 = y_0 \neq 0$ , d. h.  $y_0 = \pm p \neq 0$  gilt. Ist  $u_0 = 0$ , so müssen in der Potenzreihe für  $v$  auch Potenzen mit negativen Exponenten auftreten, was mit dem Ansatz (6) bzw. mit dem Ansatz (31) in Widerspruch steht. Die Reihenentwicklung (6) kann also nur existieren, falls  $u_0$  nirgends verschwindet. Da aber  $u_0 = \pm p$  in Wirklichkeit auch Null sein kann, gelangen wir zu einem offensichtlichen Widerspruch. Die Schwierigkeit wird wieder dadurch verursacht, dass als »nullte Näherung« von  $u$  der klassische Impuls auftritt. Um die Relation (33) gültig zu erhalten, müssten wir Rekursionsformeln anwenden, die im Falle  $u_0 = 0$ ,  $u'_0 = 0$  ergeben. Natürlich erlaubt dies der Ansatz (6) nicht.

Aus den Elementen der Analysis ist es bekannt, dass die Reihe

$$y = \sum_{l=0}^{\infty} y_l \left( \frac{\hbar}{i} \right)^l, \quad (6)$$

in welcher  $y_l$  von  $\frac{\hbar}{c}$  unabhängig ist, notwendigerweise mit der MacLaurinschen Reihe von  $y$  übereinstimmt. Setzen wir  $y$  als bekannt voraus,

$$y = y \left( x, \frac{\hbar}{i} \right),$$

dann ergibt sich nach dem Gesagten

$$y_l(x) = \frac{d^l y \left( x, \frac{\hbar}{i} \right)}{d \left( \frac{\hbar}{i} \right)^l} \cdot \frac{1}{l!} \Big|_{\hbar=0}. \tag{34}$$

Da (34) nicht existiert, müssen wir das Verhalten von  $u$  und von  $v$  in der Umgebung von  $\hbar = 0$  untersuchen. Vor allem muss hier auch die Abhängigkeit von  $p^2$  von  $\hbar$  berücksichtigt werden, was man in dem Rahmen der W. K. B. Methode bisher ausser acht gelassen hat. Da  $u$  und  $u'$  auf die gleiche Weise von  $\hbar$  abhängig sind, sehen wir auf Grund von (19), dass  $v$  in der Umgebung von  $\hbar = 0$  sich wie eine Konstante  $v_0$  verhält. Gestattet also  $v$  eine Reihenentwicklung nach den Potenzen von  $\hbar$ , so haben wir

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \hbar^i. \tag{35}$$

Also gilt in (26)

$$\hbar^2 (v^2 + v') \rightarrow 0, \quad \text{falls} \quad \hbar \rightarrow 0.$$

In  $p^2$  kann  $\hbar$  auch mit negativem Exponenten auftreten, und dies muss auch in  $u$  zum Ausdruck kommen. Im allgemeinen kann man nicht  $u$ , sondern  $\hbar^n u$  in eine MacLaurinsche Reihe entwickeln :

$$u = \sum_{l=-n}^{\infty} u_l \hbar \tag{36}$$

und somit ist

$$E = \sum_{l=-2n}^{\infty} E_l \hbar^l. \tag{37}$$

Wir können verabreden, dass  $E_0 = 0$  sein soll, und dass (37) im Falle, wo wir statt  $2mE_0 : -2mV$  schreiben,  $p^2$  darstellen soll. Ausserdem werden wir zu  $E_l$  immer diejenigen Glieder von  $p^2$  hinzunehmen, die  $\hbar^l$  enthalten. Der Wert von  $u$  hängt von der kleinsten Potenz ab, mit welcher  $\hbar$  in  $p^2$  vorkommt. Die notwendige vorherige Information über die Abhängigkeit des  $E$  von  $\hbar$  können wir aus (29) erhalten. Aus (19) und aus (20) gewinnen wir auf Grund von (35)—(37) folgende Rekursionsformeln :

$$u'_l + 2 \sum_{j=0}^{l+n} u_{l-j} v_j = 0, \quad (l = -n, -(n-1), \dots, 0, 1, 2, \dots) \tag{38}$$



$$2mE_l - \sum_{j=-n}^{n+l} u_{l-j} u_j = 0, \quad (l = -2n, -(2n-1), \dots, 0, 1) \quad (39)$$

$$v'_{l-2} + \sum_{k=0}^{l-2} v_{l-k-2} v_k + 2mE_l - \sum_{j=-n}^{n+l} u_{l-j} u_j = 0, \quad (l = 2, 3, \dots) \quad (40)$$

Aus (39) folgt im Falle  $l = -2n$  die Relation

$$u_{-n}^2 - 2mE_{-2n} = 0,$$

wenn also  $E_{-2n}$  (d. h. der  $\hbar^{-2n}$  enthaltende Teil von  $p^2$ ) auch negative Werte annehmen kann, dann ist diese Methode nicht anwendbar. In diesem Falle wäre nämlich  $u_{-n}$  imaginär, und das widerspricht der Definition von  $u$ , ( $u$  ist nämlich der reelle Teil von  $y$ ). Das bedeutet, dass  $u$  in diesen Fällen an der Stelle  $\hbar = 0$  eine wesentliche Singularität hat, und so auf keine Weise in eine MacLaurinsche Reihe entwickelt werden kann. (Dies ist z. B. für den linearen Oszillator und für das H-Atom der Fall.) In solchen Fällen müssen wir darauf verzichten,  $u$  mit einer Methode vom W. K. B. Typus zu bestimmen. Trotzdem ist die Gleichung durch eine Reihenentwicklung vom W. K. B. Typus lösbar, falls wir unmittelbar die Lösung von (25) suchen. Indem wir an unserer, im Zusammenhang mit (37) getroffene Verabredung festhalten, haben wir

$$p^2 = 2m \sum_{i=-2(n-1)}^{\infty} E_i \hbar^i. \quad (41)$$

Die untere Grenze des Summationsindexes ist  $-2(n-1)$ , da  $\eta^2$  noch mit  $\hbar^2$  multipliziert ist. Es sei also

$$\eta = \sum_{i=-n}^{\infty} \eta_i \hbar^i. \quad (42)$$

Indem wir (41), (42) und die für  $\eta'$  aus (42) gewonnene Reihenentwicklung in (25) einsetzen, erhalten wir folgende Rekursionsformeln:

$$\sum_{j=-n}^{i+n} \eta_{i-j} \eta_j + 2mE_{i+2} = 0, \quad i = 2n, \dots, -(n-1). \quad (43)$$

$$\sum_{j=-n}^{i+n} \eta_{i-j} \eta_j + \eta'_i + 2mE_{i+2} = 0, \quad i \geq -n. \quad (44)$$

Das bei der Rekursion (38)–(40) auftretende Problem kann auch hier zum Vorschein kommen. Aus (43) erhalten wir nämlich im Falle  $i = -2n$ :

$$\eta_{-n}^2 = -2mE_{-2(n-1)},$$

woraus sich  $\eta_{-n}$  nur im Falle eines negativen  $E_{-2(n-1)}$  reell ergibt. Anderenfalls existiert die Rekursion (43)—(44) nicht. Wir sehen also, dass entweder nur  $u$  oder nur  $\eta$  mit Hilfe einer Reihenentwicklung vom W. K. B. Typus bestimmbar ist, dass also einer der beiden Grössen  $u$  und  $\eta$  an der Stelle  $\hbar = 0$  eine wesentliche Singularität hat. Eine der beiden Möglichkeiten ist aber immer vorhanden, und konvergiert zur exakten Lösung. Ist die Funktion  $u$ , mit deren Hilfe man die Quantelung durchführen kann, durch eine Reihenentwicklung des W. K. B. Typus nicht bestimmbar, so sind wir auf die Näherung (29) angewiesen. Mit deren Hilfe kann man zumindest entscheiden, für welche  $i$   $E_i = 0$  bzw.  $E_i \neq 0$  gilt. Es wird eine der wichtigsten Aufgaben der weiteren Forschungen sein, eine durch  $|p$  (oder etwa durch  $\eta$ ) formulierbare Quantenbedingung zu finden, die die quantenmechanischen Energieeigenwerte auch in quantitativ zutreffender Weise beschreibt.

5. Um den tatsächlich divergenzfreien Charakter der vorgeschlagenen Methode zu illustrieren, werden wir jetzt die Schrödingerschen Gleichungen des linearen Oszillators und des H-Atoms untersuchen. Wir wählen diese beiden Beispiele, weil diese auch einer exakten Lösung fähig sind, und darum auch in anderen Fällen zur Illustration der Leistungsfähigkeit von Methoden des W. K. B. Typus herangezogen werden.

Vor allem trachten wir danach, die zum Eigenwert  $\frac{1}{2}h\nu$  des linearen Oszillators gehörenden irregulären Lösungen zu bestimmen. Wegen

$$2mV = (2\pi m\nu x)^2$$

haben wir gemäss (39)

$$u_0 = \sqrt{-1} \cdot 2\pi m\nu x$$

und das widerspricht der Definition von  $u$ , wonach  $u$  reell ist. Ähnlich verhält es sich auch beim H-Atom:

$$u_{-1}^2 = 2mE_{-2} < 0.$$

$\eta$  hingegen kann in beiden Fällen leicht bestimmt werden.

Laut (29) gilt für den linearen Oszillator

$$\begin{cases} 2mE_0 = (2\pi m\nu x)^2, \\ 2mE_1 \neq 0, \\ E_i = 0, \quad i \neq 0, 1. \end{cases} \quad (45)$$

Auf Grund von (43)—(44) ist also



$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{-1}^2 = (2\pi m v x)^2, \\ 2\eta_{-1}\eta_0 + \eta'_{-1} + 2mE_1 = 0, \\ \eta_{i+1} = \frac{\sum_{j=0}^i \eta_{i-j}\eta_j + \eta'}{2\eta_{-1}}. \end{array} \right. \quad (46)$$

Hieraus können die  $\eta_i$  bestimmt werden :

$$\begin{aligned} \eta_{-1} &= \pm 2\pi m v x, & \eta'_{-1} &= \pm 2\pi m v, \\ \eta_0 &= \pm \frac{\pm 2\pi m v + 2mE_{-1}}{2\pi m v x}. \end{aligned}$$

Also wird  $\eta_0$  an der Stelle  $x = 0$  bereits im Grundzustand unendlich, was mit den Nebenbedingungen unvereinbar ist. Der Widerspruch fällt nur weg, falls wir den Zähler von  $\eta_0$  identisch gleich Null, also

$$\eta_0 = 0, \quad E_1 = \pm \pi v, \eta'_0 = 0$$

setzen. Aus dem Gesagten ist es ersichtlich, dass auch die anderen  $\eta_i$  verschwinden. Auch ist es offenbar, dass in dem Ausdruck für  $\eta_{-1}$  nur das negative Vorzeichen berücksichtigt werden darf. Somit haben wir schon die Lösung des Problems :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\eta_{-1}}{\hbar} = -\frac{2\pi m v x}{\hbar}, \\ E &= E_1 \hbar = \frac{h}{2} v. \end{aligned}$$

Im Grundzustand des H-Atoms spezialisiert sich (43)–(44) folgendermassen  $\left( n = -2, E_{-2} \neq 0, E_1 = 0, E_0 = \frac{Zc^2}{r}, E_i = 0 \right)$  :

$$\begin{aligned} \eta_{-2} + 2mE_{-2} &= 0, & \eta_{-2} &= \text{konst}, & \eta'_{-2} &= 0, \\ 2\eta_{-1}\eta_{-2} &= 0, & \eta_{-1} &= 0, & \eta'_{-1} &= 0, \\ 2\eta_{-2}\eta_0 + \frac{2mZe^2}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus entnimmt man für die, unseren Bedingungen genügende, Lösung

$$\eta_{-2} = -mZe^2,$$

$$\eta_0 = \frac{1}{r},$$

$$E_{-2} = -\frac{mZ^2e^4}{2},$$

d. h.

$$\eta = -\frac{mZe^2}{\hbar} + \frac{1}{r}, \quad E = -\frac{mZ^2e^4}{2} \frac{1}{\hbar^2}.$$

Diese beiden Beispiele zeigen, dass man unter Berücksichtigung der oben angeführten Gesichtspunkte tatsächlich ein konvergentes Verfahren erhält. Zugleich wird es aber klar, dass diese Methode viel mehr Umsicht verlangt, als die ursprüngliche W. K. B. Methode. Das neue Verfahren eignet sich viel weniger zu einer Zerlegung in mechanisch durchführbare Schritte. Dies ist aber kein Mangel der neuen Methode, sondern eine notwendige Folge der Beschaffenheit des Problems.

#### LITERATUR

1. G. Wentzel, Z. Phys. **38**, 518, 1926.
2. H. A. Kramers, Z. Phys. **39**, 828, 1926.
3. L. Brillouin, C. R. **183**, 24, (1926); Journ. Phys. **7**, 353, 1926.
4. A. Zwaan, Arch. Néerl. des Sciences **12**, 33 (1929).
5. E. C. Kemble, Phys. Rev. **47**, 426, 1935; Phys. Rev. **48**, 560, 1935.
6. R. E. Langer, Phys. Rev. **51**, 669, 1937.  
S. C. Miller, Jr—Good., R. H. Jr: Phys. Rev. **91**, 174, 1953.
7. L. De Broglie, Einführung in die Wellenmechanik. Leipzig, AVG, 1929.
8. I. Fényes, Z. Phys. **132**, 81, 1952.
9. K. Novobátzky, Ann. d. Phys. **9**, 406, 1951.
10. O. Halpern, Phys. Rev. **87**, 389, 1952.
11. L. A. Young, Phys. Rev. **38**, 1612, 1931.

#### О ПРОБЛЕМЕ РАСХОДИМОСТИ МЕТОДА В. К. Б.

И. ФЕНЬЕШ

#### Резюме

Автором было показано, что расходимость метода В. К. Б. обусловлена внутренним противоречием. Это внутреннее противоречие связано с тем, что метод В. К. Б. ищет решения уравнения Шредингера, исходя из классической механики (нулевое приближение). Движение по классической механике имеет «точку поворота», отличающуюся от «точки поворота» нерегулярного квантово-технического решения. Это различие не исключается учетом более высоких приближений. Противоречие выражается математически в том, что разложение в ряд по методу В. К. Б. не существует. Было показано, что, применяя разложение, имеющее существование, и обращая внимание на зависимость собственных значений  $E$  от  $\hbar$ , можно исключить расходимость метода. Было указано, почему получаются хорошие результаты в некотором интервале даже из первого приближения по методу В. К. Б. В заключение обсуждается вопрос о возможностях и пределах применимости общего правила квантования.





# A NEW METHOD FOR THE CALCULATION OF THE ENERGY OF THE HYDROGEN MOLECULE

By

F. BERENCZ

INSTITUTE OF THEORETICAL PHYSICS, UNIVERSITY OF SZEGED, SZEGED

(Presented by P. Gombás — Received 22. V. 1954.)

The binding energy of the normal hydrogen molecule has been calculated by means of the variational method modifying the correlated molecular orbital method by introducing into the wave function a new variational parameter determining the ratio between the atomic and ionic functions. The new wave function, in which both the atomic and ionic configurations are taken into account, has the following form

$$\psi = [a_1 b_2 + a_2 b_1 + \mu (a_1 a_2 + b_1 b_2)] (1 + p r_{12})$$

where  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  and  $b_2$  are 1s atomic wave functions of electrons 1 and 2 centered about nuclei  $a$  and  $b$ ,  $r_{12}$  is the interelectronic distance. The dissociation energy calculated by this method was found to be 4.14 eV with the values of parameters  $z = 1,248$ ,  $\mu = 0,356$  and  $p = 0,073$  in atomic units. Comparing this value with the result obtained by the correlated molecular orbital method, we see that the present calculation gives a better value by 0,03 eV. The deviation from the experimental value is about 12 per cent.

## Introduction

In the investigation of the structure of matter the most important task is to clear up the problem of the chemical binding of the molecule. One of the greatest successes of quantum mechanics consists in providing some fruitful methods for the theoretical investigation of molecules. In the case of more complicated molecules the calculations are extremely intricate because of the mathematical difficulties involved, therefore we are dependent on the use of relatively simple methods of approximation. So as to judge the reliability of the particular method of approximation used, it is best to carry out the calculations for the  $H_2$  molecule, because here the problem is relatively simple and thus the calculations can be carried out exactly. The most usual procedure for the theoretical determination of the dissociation energy is the variational method, which consists in the minimization of the expression

$$E = \frac{\int \psi^* H \psi d\tau}{\int \psi^* \psi d\tau}$$

by varying different parameters. Various authors used different wave functions and different variable parameters for their calculations. Table I contains the calculations carried out so far for the  $H_2$  molecule in the ground state. The names of the authors, the wave functions, and the variable parameters are listed.



TABLE I

Author	Wave function	D eV	R atomic	$z$	$p$	$\mu$
1. H. Hellmann . . . .	$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$	2,65	1,6	1,—		
2. Y. Sugiura . . . . .	$a_1 b_2 + a_2 b_1$	3,14	1,51	1,—		
3. C. W. Scherr . . . .	$a_1 b_2 + a_2 b_1 + \mu(a_1 a_2 + b_1 b_2)$ *(atomic $z = 1$ , ionic $z = 0,6875$ )	3,44	1,49	*		0,214
4. C. A. Coulson . . . .	$a_1 b_2 + a_2 b_1$	3,47	1,38	1,193		
5. C. A. Coulson . . . .	$e^{-\sigma\lambda}(1 + \alpha\mu^2 + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda\mu^2)$	3,60	1,38			
6. S. C. Wang . . . . .	$a_1 b_2 + a_2 b_1$	3,76	1,43	1,166		
7. S. Weinbaum . . . . .	$a_1 b_2 + a_2 b_1 + \mu(a_1 a_2 + b_1 b_2)$	4,—	1,46	1,193		0,256
8. N. Rosen . . . . .	$a_1 b_2(1 + \sigma Z_{a_1})(1 + \sigma Z_{b_2}) +$ $+ a_2 b_1(1 + \sigma Z_{a_2})(1 + \sigma Z_{b_1})$	4,02	1,46	1,190		
9. S. Weinbaum . . . . .	$a_1 b_2(1 + \sigma Z_{a_1})(1 + \sigma Z_{b_2}) +$ $+ a_2 b_1(1 + \sigma Z_{a_2})(1 + \sigma Z_{b_1}) +$ $+ \mu(a_1 a_2 + b_1 b_2)$	4,10	1,46	1,190		0,175
10. A. Frost—J. Braunstein . . . . .	$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(1 + pr_{12})$	4,11	1,34	1,285	0,28	
11. E. F. Gurnee—J. L. Magee . . . . .	$(z^3/\pi)^{1/2} [\exp(-zr_{c_1} - zr_{d_2}) +$ $+ \exp(-zr_{c_2} - zr_{d_1})]$	4,15	1,46	1,172		
12. C. R. Mueller—H. Eyring . . . . .	$(a_1 + \lambda b_1)(\lambda a_2 + b_2) +$ $+ (a_2 + \lambda b_2)(\lambda a_1 + b_1)$	4,20				
13. J. O. Hirschfelder—J. W. Linnet . . . . .	$a_1 b_2 [1 + (\alpha z^2)(x_{a_1} x_{b_2} + y_{a_1} y_{b_2}) +$ $+ (\beta z^2)(Z_{a_1} Z_{b_2})] +$ $+ a_2 b_1 [1 + (\alpha z^2)(x_{a_2} x_{b_1} +$ $+ y_{a_2} y_{b_1}) + (\beta z^2)(Z_{a_2} Z_{b_1})] +$ $+ \gamma(a_1 a_2 + b_1 b_2)$	4,25	1,43	1,195		
14. H. M. James—A. S. Coolidge . . . . .	$\exp[-\delta(\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{klmnp} C_{klmnp}$ $\left[ \lambda_1^k \lambda_2^l \mu_1^m \mu_2^n \left( \frac{2r_{12}}{R} \right) + \right.$ $\left. + \lambda_1^l \lambda_2^k \mu_1^m \mu_2^n \left( \frac{2r_{12}}{R} \right)^p \right]$	4,72	1,4			

### Method of calculation

Frost and Braunstein [I, 9] calculating the binding energy of the normal  $H_2$  molecule, introduce the interelectronic distance in the wave function in such a way that the molecular orbital was supplemented with the correlating factor and the calculations were performed with the correlated molecular orbitals. The wave function has therefore the following form

$$\psi = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(1 + pr_{12})$$

where  $a_1, a_2, b_1$  and  $b_2$  are 1s atomic wave functions of electrons 1 and 2 centered

about nuclei  $a$  and  $b$ ,  $r_{12}$  is the interelectronic distance,  $p$  is the varying parameter together with the effective charge  $z$ . With the correlated molecular orbitals the dissociation energy was found to be 4,11 eV.

We extended this method here using the idea of *Weinbaum* in so far as we employed a variational parameter, which gives the ratio of the homeopolar part to the ionic part in the wave function. The new wave function is therefore the following

$$\psi = (\varphi + \mu\chi)(1 + pr_{12}), \quad (1)$$

where  $\varphi$  means the homeopolar part of the wave function and  $\chi$  the ionic part

$$\varphi = a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad (2)$$

$$\chi = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

The number of variational parameters compared to the previous method is increased by the parameter  $u$ , thus we are working with a three parameter method in the determination of the binding energy. Varying the parameters  $p$ ,  $z$  and  $u$  we must determine the minimum of the following expression

$$E = \frac{\int (\varphi + \mu\chi)(1 + pr_{12}) H(\varphi + \mu\chi)(1 + pr_{12}) d\tau}{\int (\varphi + \mu\chi)^2 (1 + pr_{12}) d\tau}. \quad (3)$$

Taking into account the following form of the Hamiltonian

$$H = - \left[ \frac{1}{2} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{r_{a1}} + \frac{1}{r_{a2}} + \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{b2}} - \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{R} \right],$$

the above expression can be written as

$$E = \frac{A + 2pB + p^2C}{I_0 + 2pI_1 + p^2I_2} + \frac{1}{R}, \quad (4)$$

where

$$A = K_0 - P_0 + I_{-1},$$

$$B = K_1 - P_1 + I_0, \quad (5)$$

$$C = K_2 - P_2 + I_1;$$



$$\begin{aligned}
 K_0 &= -\frac{1}{2} \int (\varphi + \mu\chi) (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) (\varphi + \mu\chi) d\tau, \\
 K_1 &= -\frac{1}{2} \int (\varphi + \mu\chi) r_{12} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) (\varphi + \mu\chi) d\tau, \\
 K_2 &= -\frac{1}{2} \int (\varphi + \mu\chi) r_{12} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) (\varphi + \mu\chi) r_{12} d\tau;
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \int (\varphi + \mu\chi)^2 \left( \frac{1}{r_{a1}} + \frac{1}{r_{a2}} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{b2}} \right) d\tau, \\
 P_1 &= \int (\varphi + \mu\chi)^2 r_{12} \left( \frac{1}{r_{a1}} + \frac{1}{r_{a2}} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{t2}} \right) d\tau, \\
 P_2 &= \int (\varphi + \mu\chi)^2 r_{12}^2 \left( \frac{1}{r_{a1}} + \frac{1}{r_{a2}} + \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{b2}} \right) d\tau;
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$I_{-1} = \int (\varphi + \mu\chi)^2 \frac{1}{r_{12}} d\tau, \tag{8}$$

$$I_0 = \int (\varphi + \mu\chi)^2 d\tau,$$

$$I_1 = \int (\varphi + \mu\chi)^2 r_{12} d\tau, \tag{9}$$

$$I_2 = \int (\varphi + \mu\chi)^2 r_{12}^2 d\tau.$$

In order to find the minimum of  $E$  we first determined the value of  $p$  which minimizes  $E$  for fixed  $R$  and  $\mu$ . This is possible, because the values of  $A, B, C, I_0, I_1$  and  $I_2$  in the expression of  $E$  are functions of  $R$  and  $\mu$ , consequently for given  $R$  and  $\mu$  the value of  $p$  minimizing  $E$  can be ascertained by the determination of the extremum with respect to  $p$ . This procedure facilitates and accelerates the calculations because the third degree terms in  $p$  drop out of the expression  $\frac{\partial E}{\partial p} = 0$  and thus for given  $R$  and  $\mu$  we have the following mixed second degree equation

$$(CI_1 - BI_2)p^2 + (CI_0 - AI_2)p + BI_0 - AI_1 = 0, \tag{10}$$

from where

$$p = \frac{AI_2 - CI_0 \pm \sqrt{(CI_0 - AI_2)^2 - 4(CI_1 - BI_2)(BI_0 - AI_1)}}{2(CI_1 - BI_2)}. \tag{11}$$

The second step consists in the varying of  $z$  and  $\mu$  (for fixed  $R$ ) and subsequently the minimization with respect to  $p$  for each  $z$  and  $\mu$  value.

The minimum of  $E$  was to be expected about  $R = 1,35$ . Therefore we determined with the method mentioned above the smallest value of  $E$  in the neighbourhood of the expected minimum namely in the three points  $R = 1,31$ ,  $1,34$  and  $1,37$ . Then we plotted the following Morse curve through the three points :

$$\Delta E = D e^{-2a(R-R_m)} - 2D e^{-a(R-R_m)},$$

which gives exactly the dissociation energy  $D$  and the internuclear distance  $R_m$ .

### Results of calculations

The calculation with the correlated molecular orbitals modified by  $\mu$  gave for the energy of the  $H_2$  molecule in the ground state — 1,152 atomic units of energy. This corresponds to a binding energy of 4,14 electron volts. For the internuclear distance this method gave the value, 1,338 also in atomic units, the remaining two variational parameters were found to be  $\mu = 0,356$  and  $p = 0,073$ . Comparing the results obtained with the present method with those of Weinbaum and of Frost-Braunstein, we see that the wave function of the method used by us differs from that of Weinbaum in the correlated factor and from that of Frost-Braunstein in the variation of  $\mu$ . The results of the various methods are listed in table II.

TABLE II

	Dev	$R$ atomic	$z$	$\mu$	$p$
Weinbaum .....	4	1,46	1,193	0,256	0
Frost—Braunstein .....	4,11	1,34	1,825	1,—	0,28
Present paper .....	4,14	1,338	1,248	0,356	0,073
Experimental data [III] .....	4,72	1,4			

From Table II we see that the result of the present calculation is 0,14 eV better than that of Weinbaum and 0,03 eV than that of Frost—Braunstein. Considering that the variation of  $\mu$  improves the binding energy only by 0,03 eV, it follows that the introduction of  $r_{12}$  into the wave function is a very good idea, because this alone adds 0,11 eV to the dissociation energy compared to Weinbaum's result. Therefore it would be worth while to extend the calculations by completing the wave function of Weinbaum given in [I, 9] adding to it



the correlated factor. The result of the present calculations differs by 12 per cent from the experimental value. It is interesting to mention that the introduction of the correlated factor increases the ionic part in the wave function by 39 per cent, in the calculations of Weinbaum the value of  $\mu$  being 0,256, ours, however, 0,356. With the variation of  $\mu$  the correlated factor decreases to about a quarter of its former value. Without variation of  $\mu$  ( $\mu = 1$ ) Frost and Braunstein found the value of  $p$  to be 0,28, the present calculations give 0,073.

The writer wishes to thank Dozent *Rezső Pauncz* for suggesting the problem and *Géza Alló* for his help in carrying out the numerical calculations.

#### REFERENCES

- I. 1. *Hellman*, Einführung in die Quantumchemie (Franz Deuticke, Leipzig, 1937 P. 138).
2. *Y. Sugiura*, Z. Physik **45**, 484, 1927.
3. *C. W. Scherr*, J. Chem. Phys. **22**, 149, 1954.
4. *C. A. Coulson*, Trans. Faraday Soc. **33**, 1479, 1937.
5. *C. A. Coulson*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **34**, 204, 1938.
6. *S. C. Wang*, Phys. Rev. **31**, 579, 1928.
7. *9. S. Weinbaum*, J. Chem. Phys. **1**, 317, 593, 1933.
8. *N. Rosen*, Phys. Rev. **38**, 255, 2099, 1931.
10. *A. Frost—J. Braunstein*, J. Chem. Phys. **19**, 1133, 195.
11. *E. F. Gurnee—J. L. Magee*, J. Chem. Phys. **18**, 142, 1950.
12. *C. R. Mueller—H. Eyring*, J. Chem. Phys. **19**, 1495, 1951.
13. *J. O. Hirschfelder—J. W. Linnet*, J. Chem. Phys. **18**, 130, 1950.
14. *H. M. James—A. S. Coolidge*, J. Chem. Phys. **1**, 825, 1933.

#### ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ ВОДОРОДНОЙ МОЛЕКУЛЫ

Ф. БЕРЕНЦ

Резюме

Энергия связи нормальной водородной молекулы была вычислена с помощью вариационного метода. Введением нового вариационного параметра, определяющего отношение атомных и ионных волновых функций, было сделано некоторое видоизменение корреляционного метода молекулярных орбит. Новая волновая функция, в которой и атомная и ионная волновые функции были учтены, имеет следующий вид:

$$\psi = [a_1 b_2 + a_2 b_1 + \mu (a_1 a_2 + b_1 b_2)] (1 + pr_{12})$$

Энергия диссоциации, рассчитанная по этому методу, — 4,14 ЭВ при следующих значениях параметров:  $Z = 1,248$ ,  $\mu = 0,356$  и  $p = 0,073$  в атомных единицах. Сравнивая этот результат с результатами, полученными с помощью корреляционного метода молекулярных орбит, выясняется, что наш результат дает лучшее значение на 0,03 ЭВ. Отклонение от экспериментального значения составляет около 12 процентов.

# ON THE QUANTUM STATISTICS OF NUCLEONS

By

G. SZAMOSI

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS, BUDAPEST

(Presented by L. Jánossy. — Received 2. VI. 1954.)

A few characteristic details of the excited states of the nucleus are investigated in the simplest case. On the basis of the assumption of a repelling interaction of short range between the nucleons, a »self-volume« corresponds to the nucleon. The existence of the self-volume modifies the formulae of ordinary Fermi statistics. Better agreement with experience than hitherto is obtained for the excited states of nuclei.

## I

Ever since high energy scattering experiments yielded more detailed information on the character of the forces acting between nucleons, nuclear physics has faced two serious problems. These are the questions as to the reason for the saturation of binding energy and density of the nucleus, and the charge-independence of the nuclear forces. As is well-known, the assumption of a very intensive repulsion of short range between the nucleons brings us nearer to a solution of both these problems. This hypothesis was first put forward by *R. Jastrow* [1] on a completely phenomenological basis; recently *Werle* [2] showed with the help of relativistic mechanics that the appearance of such a repulsion can be accounted for theoretically as well.

A repelling interaction results in many remarkable consequences. First of all it considerably changes the kinetic energy of nucleons at absolute zero. It is in particular here that the effect of the repelling interaction on the saturation becomes evident. In an earlier paper [3] we pointed out this effect of the kinetic energy.

Our present aim is the examination of the influence of the repelling interaction on the excited states of the nucleus. First of all we summarize the formulae applying to the ground state. A simple calculation shows that, denoting with  $r_n$  the effective repulsion radius and with  $v_n$  the volume of the corresponding repulsive core, we have for the total kinetic energy of a fermion gas consisting of  $N$  particles contained in a volume  $V$  at absolute zero

$$E_{\text{kin}} = \frac{\kappa}{v_n^{2/3}} \int_0^N \log^{2/3} \left( 1 - \frac{nv_n}{V} \right) dn, \quad (1)$$



where

$$\kappa = \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{8m} \quad (2)$$

and  $m$  is the nucleon mass. (Here we took the mass of proton and neutron to be the same.) Introducing the new variable

$$x = \log \left( 1 - \frac{nv_n}{V} \right)$$

we have instead of (1)

$$E_{\text{kin}} = \frac{kV}{v_n^{5/3}} \int_0^{-\log \left( 1 - \frac{Nv_n}{V} \right)} x^{2/3} e^{-x} dx.$$

The integral here is an incomplete  $\Gamma$ -function. Assuming  $Nv_n \ll V$ , an assumption probably fulfilled by the conditions prevailing in the nucleus, we arrive with the help of an expansion at a simpler expression for the kinetic energy:

$$E_{\text{kin}} = \kappa \left( \frac{3}{5} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} + \frac{1}{8} \frac{v_n}{V} \frac{N^{8/3}}{V^{2/3}} \right).$$

From this equation is evident that for  $v_n \rightarrow 0$  we get the well-known expression for the kinetic energy of an ordinary Fermi gas at absolute zero.

For the sake of what follows later on we note a few characteristics expressions.

a) The number of particles out of  $n$  particles contained in a volume  $V$ , whose momenta are between  $p$  and  $p + dp$ , taking the spin into account, is given by

$$dn = \frac{8\pi}{h^3} (V - nv_n) p^2 dp.$$

From this we immediately obtain the maximum momentum as

$$p_{\text{max}} = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{h}{v_n^{1/3}} \log^{1/3} \left( 1 - \frac{Nv_n}{V} \right).$$

Thus for the maximum kinetic energy we have:

$$E_{k, \text{max}} = \frac{k}{V^{2/3}} \log^{2/3} \left( 1 - \frac{Nv_n}{V} \right). \quad (3)$$

This expressions becomes in the approximation used here :

$$E_{k, \max} = \approx \frac{N^{2/3}}{V^{2/3}} \left( 1 + \frac{v_n}{3} \frac{N}{V} \right).$$

b) We note further the following expression which can easily be derived for the kinetic energy

$$E_{\text{kin}} = \frac{2}{5} \beta V E_{k, \max}^{1/2} \left[ 1 - \frac{5}{12} \beta v_n E_{k, \max}^{3/2} \right], \quad (4)$$

where

$$\beta = 4\pi (2m)^{3/2} h^{-3}.$$

## II

In the following we consider arbitrary temperatures. Our considerations are somewhat simplified by the fact that the distribution function connecting the number of particles with the cells available in the phase space does not influence the finite value the »self-volume«  $v_n$  which represents the repulsion. We can thus simply apply the distribution function  $f(\varepsilon)$  for the energy distribution of the ordinary Fermi statistics :

$$f(\varepsilon) = \left[ \exp \frac{\varepsilon - \zeta}{\tau} + 1 \right]^{-1},$$

where  $\zeta$  is the usual thermodynamical potential and  $\tau$  the energy parameter corresponding to the temperature. Thus we obtain after a simple calculation for the number of particles :

$$N = \frac{V}{v_n} \left\{ 1 - \exp \left[ -\beta v_n \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon) d\varepsilon \right] \right\}.$$

Limiting ourselves to small exciting energies, we can expand the exponential function and get :

$$N = \beta V \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{V v_n}{2} \beta^2 \left[ \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon) d\varepsilon \right]^2.$$

(The justification for the expansion is evident from considerations further



below.) Restricting ourselves to low temperatures in the following as well we can use the well-known Sommerfeld formulae. With their help we can write for the number of particles :

$$N = \frac{2}{3} \beta V \zeta^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{\tau}{\zeta} \right)^2 \right] - \frac{2V}{9} v_n \beta^2 \zeta^2 \left[ 1 + \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{\tau}{\zeta} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

We mention here that if we express the potential  $\zeta$  by the value of  $E_{k, \max}$  obtained in the case of  $\tau = 0$ , with the approximation used here we get the same formula as in the ordinary Fermi statistics, i. e.

$$\zeta = E_{k, \max} \left( 1 - \frac{\pi^2 \tau^2}{12} \frac{1}{E_{k, \max}^3} \right). \quad (6)$$

Using this expression for  $\zeta$  the expression (5) becomes after a simple calculation :

$$N = \frac{2}{3} \beta V E_{k, \max}^{3/2} - \frac{2}{9} \beta^2 v_n E_{k, \max}^2.$$

Our next task is the calculation of the energy, for which the function  $n(\varepsilon)$ , i. e. the number of particles as function of energy must be known. A short calculation yields

$$n(\varepsilon) = \frac{V}{v_n} \left[ 1 - \exp \left( -\beta v_n \int_0^\varepsilon \eta^{1/2} f(\eta) d\eta \right) \right].$$

From this follows easily with the help of the above expansion :

$$E = \beta V \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} f(\varepsilon) d\varepsilon - \beta^2 V v_n \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} f(\varepsilon) \int_0^\varepsilon \eta^{1/2} f(\eta) d\eta d\varepsilon.$$

Sommerfeld estimated the first integral for the case of low temperatures. Using his approximation it is not difficult to give an estimate for the second integral as well. [4]. We obtain after a rather tedious though simple calculation with help of (6) the following expression for the energy in a suitable form :

$$E = \beta V \left\{ \frac{2}{5} E_{k, \max}^{5/2} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{\tau}{E_{k, \max}} \right)^2 \right] - \frac{\beta}{6} v_n E_{k, \max}^4 \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{\tau}{E_{k, \max}} \right)^2 \right] \right\}.$$

## III

We now turn to the determination of the number of niveaus belonging to a given energy interval. The excitation energy  $Q$  is defined by

$$Q(\tau) = E(\tau) - E(0).$$

Using (4) and (7) we obtain for  $Q(\tau)$ :

$$Q(\tau) = \beta V \frac{\pi^2}{6} \tau^2 \left( E_{k, \max}^{1/2} - \frac{2\beta}{3} v_n E_{k, \max}^2 \right).$$

For the entropy  $S$  we get thus,  $dS = \delta Q/T$ ,

$$S = k \left( \frac{2QV\beta}{3} \right)^{1/2} \pi \left( E_{k, \max}^{1/4} - \frac{\beta v_n}{3} E_{k, \max}^{7/4} \right), \quad (8)$$

where  $k$  is the Boltzmann constant.

With the expression for the entropy and the relation  $S = k \log J$ , we easily obtain for the thermodynamic probability  $J$  using (8):

$$J = \exp \left[ \pi \left( \frac{2QV\beta}{3} \right)^{1/2} \left( E_{k, \max}^{1/4} - \frac{\beta v_n}{3} E_{k, \max}^{7/4} \right) \right].$$

If we express  $\beta$  with help of (3) by the total number  $N$  of particles we get after some calculation:

$$J = \exp \left[ \pi (NQ)^{1/2} E_{k, \max}^{-1/2} \left( 1 - \frac{Nv_n}{4V} \right) \right].$$

We can now apply our results to the nucleus. Consider the nucleus to be a Fermi gas consisting of  $Z$  protons and  $N$  neutrons. The excitation energy  $Q$  is composed of the excitation energies of the neutrons and protons. Thus

$$Q = Q_Z + Q_N.$$

From this we get for the total level density [5]:

$$\varrho(Q) = \frac{1}{48} \int J_Z J_N \frac{dQ_Z}{Q_Z Q_N}.$$



As the result of a simple but rather lengthy calculation we obtain for the integral :

$$\varrho(Q) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{12} \frac{[(2Q)^{1/2}\gamma]^{-1/2}}{Q} e^{\sqrt{2Q}\gamma}, \quad (9)$$

where

$$\gamma = \pi \left( \frac{N}{E_{k,\max}^N} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{Nv_n}{4V} \right) \approx \pi \left( \frac{Z}{E_{k,\max}^Z} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{Zv_n}{4V} \right).$$

Here  $E_{k,\max}^Z$  and  $E_{k,\max}^N$  denote the maximum kinetic energy values of a Fermi gas at absolute zero consisting of protons or neutrons, respectively. We assume the value of  $v_n$  to be the same for every nucleon. Introducing

$$\xi = \sqrt{2Q}\gamma,$$

we obtain for  $\varrho(Q)$  with help of (9) :

$$\varrho(Q) = 0,209 \frac{1}{Q} \frac{e^\xi}{\sqrt{\xi}}.$$

For simplicity we consider symmetrical nuclei, where  $2N = 2Z = A$ . Taking further into account that according to experience for heavy nuclei

$$R = r_0 A^{1/3} \left[ R = \left( \frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}; \quad r_0 = 1,42 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \right],$$

we get for  $\varrho(Q)$ , denoting the ratio  $r_n/r_0$  by  $y$  :

$$\varrho(Q) = 0,209 \frac{1}{Q} \frac{\exp[\alpha(AQ)^{1/2}g(y)]}{[\alpha(AQ)^{1/2}g(y)]^{1/2}}, \quad (10)$$

where

$$g(y) = \left( 1 - \frac{y^3}{8} \right) \left( 1 - \frac{y^3}{3} \right)^{1/2}$$

and

$$\alpha = \frac{2^{1/3}\pi}{\kappa^{1/2}} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} r_0$$

or with help of (2) :

$$\alpha = 2 \left( \frac{\pi}{3} \right)^{2/3} \frac{(2m)^{1/2}}{\hbar} r_0.$$

## IV

The main purpose of our considerations was to determine equation (10). Experimental physics can already give the distances of excitation niveaus in a given energy interval for numerous nuclei. The mean niveau density naturally depends strongly on the nature of the reaction producing the excitation, if only because of the angular momentum relation. We have here taken no account of the angular momentum relation between incident particle and nucleus. There is no point in such an exact calculation because of our inexact knowledge of the repulsive core. We can, however, state that the mean niveau distance for medium heavy nuclei is of the order of magnitude eV. At a given energy we have the following connection between the mean niveau distance  $D$  and the niveau density:  $\rho D = 1$ .

As is well-known, *Bethe* in 1936 determined the mean niveau distance without considering the repelling interaction [5]. His calculations yielded for a medium heavy nucleus ( $A = 110$ ) at medium excitation energy ( $Q = 8$  MeV) for  $D$  0,4 eV. According to experience this value is too small, its real value being several eV. The following small table shows the values for  $D$  as a function of the repulsive core for the mentioned values of  $A$  and  $Q$ .

	$r_n \cdot 10^{13}$ cm	$D$ eV	$\xi$
	0,4	1,28	18,67
	0,6	1,73	18,37
	0,8	3,05	17,79
<i>Bethe:</i>	0,0	0,4	20,0

It is evident that the assumption of a repelling interaction leads, as regards the order of magnitude, to a better agreement with experience for the mean niveau distance.

## LITERATURE

1. *R. Jastrow*, Phys. Rev. **81**, 165, 1951.
2. *J. Werle*, Bull. Acad. Pologne I, 281, 1954.
3. *G. Szamosi*, First Hungarian Physical Congress. (Magyar Fizikai Folyóirat, to be published.)
4. *A. Békéssy*, KFKI Közlemények, 1954.
5. *H. A. Bethe*, Phys. Rev. **50**, 332, 1936.



## О КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ НУКЛЕОНОВ

Г. САМОШИ

## Резюме

В работе рассматриваются в простейшем случае характерные данные возбужденных атомных ядер. Основным предположением работы является существование короткодействующего отталкивающего взаимодействия между нуклеонами, которое учитывается с помощью «собственного объема» нуклеонов.

С существованием собственного объема изменяются формулы статистики Ферми. Для возбужденных состояний ядер получено лучшее согласие с опытом, чем в ранее известных работах.

# EIN STRÖMUNGSMODELL DER WELLENMECHANIK

Von

HERBERT W. FRANKE, Erlangen

(Vorgelegt von L. Jánossy. — Eingegangen: 31. VIII. 1954)

Es wird ein deterministisches Modell der Wellenmechanik, nämlich das hydrodynamische, betrachtet. Die Frage der in der Wellenmechanik auftretenden Operatoren und der ihnen entsprechenden physikalischen Grössen des hydrodynamischen Modells wird untersucht und es werden einige Zusammenhänge zwischen den physikalischen Grössen dieses Modells gegeben.

## I

Als *Schrödinger* 1926 mit den ersten Arbeiten zur Wellenmechanik an die Öffentlichkeit trat, war das Erstaunliche, ja das Erschreckende daran nicht so sehr die Quantisierung als der Anschein eines völligen Bruchs mit klassischen Anschauungen, der nicht nur in neuen Gesetzmässigkeiten sondern auch im Auftreten neuer Grössen, Wellenfunktionen und Operatoren, zum Ausdruck kam. Bisher war die physikalische Entwicklung einem steten Gang gefolgt; sogar die *Einsteinsche* Relativitätstheorie, die kurz zuvor noch die Gemüter erhitzt hatte, erwies sich zwar als eine grossartige Verallgemeinerung des physikalischen Weltbildes, aber eben doch nur als eine Erweiterung, in die sich das Althergebrachte widerstandslos einfügte. Ganz anders die ersten Schritte auf wellentheoretischem Grund. Es gelang zunächst weder — trotz angestrebter Bemühungen von kompetentester Seite — der Anschluss an die Endpunkte des bisherigen physikalischen Vordringens, noch waren die weiteren Gehversuche zum Straucheln verurteilt. Im Gegenteil: Schlag auf Schlag konnte man mit neuen Erfolgen aufwarten — die Vereinigung mit der *Heisenbergschen* Quantenmechanik die *Diracsche* Theorie. Dadurch waren die Grundfesten der Wellenmechanik so weit fundiert, dass es fast überflüssig wurde, auch weiterhin nach der Brücke zum klassischen Boden zu suchen. Die Trennungslinie blieb bestehen, wenn auch als Schönheitsfehler im Gebäude der exakten Naturwissenschaften.

Erst in den letzten Jahren hat sich die Sachlage geändert. Der Verwachsungsprozess setzte unbeachtet und im Stillen ein, aber dass — wie schon so oft in der Geschichte der Wissenschaften — mehrere Autoren fast gleichzeitig zum selben Ergebnis gekommen sind, [1, 2, 3, 4] beweist das Bedürfniss nach diesem Vereinigungsschritt.

Was ist gelungen? Nicht mehr und nicht weniger als eine Umformung der wellenmechanischen Grundgleichungen, die die Wellenmechanik als Erweiterung des klassischen Rechenapparates entlarven.



Folgen wir *W. Glaser*, dem die Verschmelzung wohl als erstem geglückt ist. Dies geschah durch Einführung eines dichteabhängigen Gliedes

$$Z = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \quad (1)$$

in die *Hamilton—Jacobische* Gleichung

$$\frac{1}{2m} (\text{grad } W + e\mathfrak{A})^2 + U + \frac{\delta W}{\delta t} = 0. \quad (2)$$

Die so entstandene Beziehung

$$\frac{1}{2m} (\text{grad } W + e\mathfrak{A})^2 + U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} + \frac{\delta W}{\delta t} = 0 \quad (3)$$

zusammen mit der *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{1}{m} \text{div} \{ \varrho (\text{grad } W + e\mathfrak{A}) \} + \frac{\delta \varrho}{\delta t} = 0 \quad (4)$$

ist mit der *Schrödingergleichung*

$$\Delta\psi + \frac{2i}{\hbar} e\mathfrak{A} \text{grad } \psi - \frac{e^2}{\hbar^2} \mathfrak{A}^2 \psi - \frac{2m}{\hbar^2} U\psi + \frac{2im}{\hbar} \frac{\delta\psi}{\delta t} = 0 \quad (5)$$

identisch, wenn man die Bezeichnung

$$\psi = \sqrt{\varrho} e^{i\frac{W}{\hbar}} \quad (6)$$

einführt. Zusätzlich gilt die *Normierungsbedingung*

$$\int \psi\bar{\psi}d\tau = \int \varrho d\tau = 1. \quad (7)$$

## II

Dies ist eine rein formale mathematische Umformung, die jedoch zu weiteren Schritten anregt. Die *Hamilton—Jacobische* Gleichung schliesst bekanntlich die Prinzipien der klassischen Mechanik in sich ein. Hat man einmal ihre Gültigkeit — wenn auch mit Zusatzglied — für die Wellenmechanik festgestellt, was liegt dann näher, als die erweiterte *Newtonsche* Bewegungsgleichung aufzustellen. Wir beschränken uns auf den rein elektrischen Fall und bilden mit *Novobátsky*[5] die Charakteristiken der Gleichung (3) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f_{w_x}}{f_{w_t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{f_{w_y}}{f_{w_t}}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{f_{w_z}}{f_{w_t}}; \quad (8)$$

$$-\frac{dW_x}{dt} = \frac{f_x}{f_{w_t}}, \quad -\frac{dW_y}{dt} = \frac{f_y}{f_{w_t}}, \quad -\frac{dW_z}{dt} = \frac{f_z}{f_{w_t}}; \quad (9)$$

dabei ist  $f$  der Differentialausdruck auf der linken Seite von (3) mit  $\mathfrak{A} = 0$ . Differenziert man (8) nach der Zeit und setzt (9) ein, so erhält man

$$m \frac{dv}{dt} = -\text{grad} \left( U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right), \quad (10)$$

eine Newtonsche Bewegungsgleichung mit dem dichteabhängigen Zusatzpotential (1), die auch *Glaser* und *Bohm* angegeben haben. Durch weitere Umformung entsteht

$$m \cdot \frac{\delta v}{\delta t} = -\frac{m}{2} \text{grad } v^2 - \text{grad} \left( U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right). \quad (11)$$

Diese Gleichung entspricht vollkommen der hydrodynamischen Grundgleichung für eine reibungslose Flüssigkeit, in der der Druck  $Z$  herrscht.  $Z$  hängt von der Grösse  $\varrho$  ab, die die Kontinuitätsgleichung (4) befriedigt und gemäss (7) normiert ist.

Dies gibt zu denken. Es bedeutet nichts anderes, als dass sich die Materie, der wir die Dichte  $m\varrho$  zugeschrieben haben, wie eine Flüssigkeit verhält, auf die ausser der Kraft des Potentials  $U$  noch die eines Zusatzpotentials einwirkt. Alle Unterschiede zum Verhalten normaler Flüssigkeiten, einschliesslich der der Quantisierung resultieren aus dieser Zusatzkraft, die — und das ist das charakteristische daran — dichteabhängig ist. Diese Dichteabhängigkeit ist die Ursache für das Zustandekommen der sogenannten Interferenzerscheinungen der Materie und damit ihres «optischen» Verhaltens.

Die Analogie zur Strömung verleiht natürlich keineswegs ein Recht dazu, die wellenmechanisch behandelten Systeme als Gase oder Flüssigkeiten variabler Dichten aufzufassen, genausowenig, wie die gewohnte Interpretation es erlaubt, die Materie als Wellen zu betrachten. Solche Vorstellungen können nur Modelle sein, die nicht durch Beweise gerechtfertigt werden, sondern einzig und allein durch ihre Brauchbarkeit als Anschauungshilfen, anhand deren man sich auf das analoge Verhalten stützend einen Überblick über die Situation verschafft, die der exakten Rechnung vorausgeht.

Es liegt nahe, zu untersuchen, wie weit sich die Beschreibung wellenmechanischer Systeme durch der Strömungslehre entnommene Gesetzmässigkeiten weitertreiben lässt.



Der Einfachheit halber soll die Massendichte  $m\varrho$  einer fiktiven Schrödingermaterie (in Anlehnung an *Falk* und *Marschall*[6]) zugesprochen werden; ihr Bewegungszustand ist bis auf die notwendigen Anfangs- oder Randbedingungen durch (11) bestimmt. Führt man die in (8) angedeuteten Operationen aus und fasst zusammen,

$$m\mathfrak{v} = \text{grad } W, \quad (12)$$

so sieht man, dass sich die Schrödingermaterie wirbelfrei bewegt — das Geschwindigkeitspotential ist  $W/m$ . (11) kann daher auch in Form

$$m \frac{\delta \mathfrak{v}}{\delta t} = \mathfrak{v} \text{ grad } \mathfrak{v} - \text{grad} \left( U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right) \quad (13)$$

geschrieben werden.

Spezialisiert man (11) für den stationären Zustand  $\left( \frac{\delta \mathfrak{v}}{\delta t} = 0 \right)$  und integriert längs einer beliebigen Kurve, so erhält man den Energiesatz

$$\frac{m\mathfrak{v}^2}{2} + U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} = \text{const.} \quad (14)$$

in Form der *Bernoullischen* Gleichung.

### III

Da beim Strömungsmodell in jedem Raumelement nicht nur die Dichte, sondern auch alle anderen charakteristischen physikalischen Eigenschaften definierte Werte haben, ist es nicht mehr notwendig, diese durch Operatoren zu ersetzen. Für den Zusammenhang mit diesen gilt die Bedingung, dass die statistischen Mittelwerte über die Operatoren gleich den Integralen der den Strömungszustand beschreibenden Grössen über den Gesamtraum sein müssen. Es sei  $l$  eine physikalische Grösse,  $\mathbf{I}$  der entsprechende Operator; dann muss

$$\int \overline{\psi \mathbf{I} \psi} d\tau = \int l \varrho d\tau. \quad (15)$$

Diese Gleichung war bisher zugleich das einzige Kriterium für die Bildung der Operatoren auf Grund des direkten formalen Vergleiches der Schrödingergleichung mit der klassischen *Hamilton—Jacobischen* Gleichung. Beim Übergang zu differentiellen Grössen lässt sie eine Willkür im Divergenzanteil zu. Schon die Gegenüberstellung von Impuls und Drehimpuls und den zugeordneten Operatoren macht dies deutlich:

$$p = \text{grad } W = \frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\text{grad } \psi}{\psi} - \frac{\text{grad } \bar{\psi}}{\bar{\psi}} \right), \quad \mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \text{grad}; \quad (16)$$

$$\mathbf{q} = [r \text{ grad } W] = \frac{\hbar}{2i} \left[ r \left( \frac{\text{grad } \psi}{\psi} - \frac{\text{grad } \bar{\psi}}{\bar{\psi}} \right) \right], \quad \mathbf{q} = \frac{\hbar}{i} [r \text{ grad}]; \quad (17)$$

und legt eine Symmetrisierung durch Addition eines Divergenzanteils nahe. Besondere Beachtung verdient die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2m} \text{grad}^2 W = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\psi \bar{\psi}}}{\sqrt{\psi \bar{\psi}}} - \frac{\hbar^2}{4m} \left( \frac{\Delta \psi}{\psi} + \frac{\Delta \bar{\psi}}{\bar{\psi}} \right) \quad (18)$$

für die man den Operator

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad (19)$$

zu verwenden pflegt. Diese Zuordnung erfüllt nicht die Forderung (15). Grund dafür ist, dass man dabei das Zusatzpotential (1) stillschweigend in die kinetische Energie einbezogen hat, der Operator  $T$  entspricht also der Energiesumme  $T + Z$ . Manche Autoren haben dadurch einen Ausweg aus den sich daraus ergebenden Unstimmigkeiten zu schaffen versucht, dass sie diese Summe als eine kinetische Nullpunktsenergie ansahen, durch die die gewöhnliche kinetische Energie bei wellenmechanischen Problemen zu ersetzen sei[7].

#### IV

Auf Grund der letzten Überlegungen kann auch die Schrödingergleichung für den elektrostatischen Fall von einer anderen Seite betrachtet werden. Teilt man sie durch  $2\psi$  und addiert die entsprechende Gleichung für die konjugiert komplexe Funktion  $\psi$ , so erhält man eine symmetrisierte Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left( \frac{\Delta \psi}{\psi} + \frac{\Delta \bar{\psi}}{\bar{\psi}} \right) + U + \frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\dot{\psi}}{\psi} - \frac{\dot{\bar{\psi}}}{\bar{\psi}} \right) = 0, \quad (20)$$

die wegen

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left( \frac{\Delta \psi}{\psi} + \frac{\Delta \bar{\psi}}{\bar{\psi}} \right) = T + Z \quad (21)$$

und

$$\frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\dot{\psi}}{\psi} - \frac{\dot{\bar{\psi}}}{\bar{\psi}} \right) = \frac{\delta W}{\delta t} \quad (22)$$



mit der erweiterten *Hamilton—Jacobischen* Gleichung identisch ist. Aus der Subtraktion der beiden Gleichungen für  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  folgt

$$\frac{\hbar}{2im} \operatorname{div} (\bar{\psi} \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \bar{\psi}) + \frac{\delta(\psi\bar{\psi})}{\delta t} = 0, \quad (23)$$

also die Kontinuitätsgleichung. Verfährt man ebenso mit der zeitunabhängigen *Schrödingergleichung*, so ergibt sich neben der Kontinuitätsgleichung die *Bernoullische* Gleichung.

Durch diese Betrachtung wird auch das Variationsprinzip der Wellenmechanik

$$\delta \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \bar{\psi} + (U - E) \psi \bar{\psi} \right\} d\tau = 0 \quad (24)$$

in ein anderes Licht gerückt. Formt man das Integral der linken Seite durch Subtraktion des Terms

$$\frac{1}{2} \int \operatorname{div} (\psi \operatorname{grad} \bar{\psi} + \bar{\psi} \operatorname{grad} \psi) d\tau = 0 \quad (25)$$

um, so erhält man

$$\delta \int \left\{ -\frac{\hbar^2}{4m} (\psi \Delta \bar{\psi} + \bar{\psi} \Delta \psi) + (U - E) \psi \bar{\psi} \right\} d\tau = 0. \quad (26)$$

Wegen

$$\delta \int E \psi \bar{\psi} d\tau \equiv 0 \quad (27)$$

und (21) wird dies

$$\delta \int \{ T + U + Z \} d\tau = 0. \quad (28)$$

Das Variationsprinzip (24) fordert also, dass die Gesamtenergie der Schrödingermaterie in den stationären Zuständen Extremwerte annimmt.

Die Rückkehr von den Operatoren zu definierten physikalischen Grössen, eine Konsequenz des Strömungsbildes, schafft äusserst durchsichtige Verhältnisse im Sinn der klassischen Anschauungen. Sie hat aber noch einen weiteren Vorteil. Es war bisher nicht gleichgültig, in welchem Koordinatensystem man bei der Einführung der Operatoren arbeitete; je nach dessen Wahl erhielt man voneinander abweichende Ergebnisse. Dieser Unsicherheitsfaktor ist bei der diskutierten Anschauungsweise ausgeschaltet.

## Das Auftreten von Druckkräften

$$\mathfrak{R} = -\frac{\hbar^2}{2m} \text{grad} \frac{\Delta\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \quad (29)$$

zeigt, dass die Schrödingermaterie sich in einem Spannungszustand befindet. Man kann ihn durch einen Tensor beschreiben, dessen Divergenz der Kraftdichte von (29) gleich sein muss:

$$\text{Div } T \equiv \frac{\delta T_{ik}}{\delta x_i} = -\frac{\hbar^2}{2m} \varrho \frac{\delta}{\delta x_k} \left( \frac{\Delta\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right). \quad (30)$$

Wegen der Identität

$$\varrho \frac{\delta}{\delta x_i} \frac{\Delta\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \equiv \frac{\delta}{\delta x_k} \left( \sqrt{\varrho} \frac{\delta^2 \sqrt{\varrho}}{\delta x_i \delta x_k} \right) - \frac{\delta}{\delta x_k} \left( \frac{\delta\sqrt{\varrho}}{\delta x_i} \frac{\delta\sqrt{\varrho}}{\delta x_k} \right) \quad (31)$$

gelangt man zum symmetrischen Spannungstensor

$$T_{ik} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\delta\sqrt{\varrho}}{\delta x_i} \frac{\delta\sqrt{\varrho}}{\delta x_k} - \sqrt{\varrho} \frac{\delta^2 \sqrt{\varrho}}{\delta x_i \delta x_k} \right). \quad (32)$$

Man kann ihn in die *Newtonsche* Bewegungsgleichung (10) einführen und erhält

$$m\varrho \frac{dv}{dt} = -\varrho \text{grad } U - \text{Div } T. \quad (33)$$

Diese Form ist gut geeignet, um die Gültigkeit einiger allgemeiner mechanischer Prinzipien auch für die Schrödingermaterie nachzuweisen. Bei der Integration von (33) verschwindet nach dem *Gaus'schen* Satz das Integral über die Tensordivergenz und man kommt direkt zum Schwerpunktsatz

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = -\overline{\text{grad } U}, \quad (34)$$

der für die Wellenmechanik erstmalig von *Ehrenfest*[8] bewiesen wurde.

Setzt man in

$$\varrho \frac{d}{dt} [r\varrho] = \varrho \left[ r \frac{d\varrho}{dt} \right] \quad (35)$$



den Ausdruck für  $\varrho \frac{d\mathfrak{p}}{dt}$  nach (33) ein und integriert,

$$\int \frac{d}{dt} [\mathfrak{r}\mathfrak{p}] \varrho d\tau = - \int [\mathfrak{r}\varrho \operatorname{grad} U + \mathfrak{r} \operatorname{Div} T] d\tau, \quad (36)$$

so findet man wegen

$$\int [\mathfrak{r} \operatorname{Div} T] d\tau = - \int [T_{ki} - T_{ik}] d\tau = 0 \quad (37)$$

den Flächensatz

$$\overline{\frac{d}{dt} [\mathfrak{r}\mathfrak{p}]} = - \overline{[\mathfrak{r} \operatorname{grad} U]}. \quad (38)$$

Die inneren, vom Zusatzpotential stammenden Kräfte beeinflussen also weder die Schwerpunktsbewegung noch den Drehimpuls der Partikel.

Auch der Virialsatz ist für die *Schrödinger*materie gültig. Zum Beweis bildet man

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{r}\mathfrak{p}) = \frac{1}{m} \mathfrak{p}^2 + \left( \mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{p}}{dt} \right). \quad (39)$$

Dies wird unter Berücksichtigung von (10) durch Integration zum Virialsatz

$$\overline{\frac{d}{dt} (\mathfrak{r}\mathfrak{p})} = 2\bar{T} - \overline{\mathfrak{r} \operatorname{grad} \left( U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right)}. \quad (40)$$

Nach (30) und durch Beachtung der Identität

$$\int (\mathfrak{r} \operatorname{Div} T) dt = - \int T_{ii} d\tau \quad (41)$$

kann (40) mit Hilfe des *Gaus*'schen Satzes in die Form

$$\overline{\frac{d}{dt} (\mathfrak{r}\mathfrak{p})} = 2\bar{T} - \overline{\mathfrak{r} \operatorname{grad} U} - \frac{\hbar^2}{m} \overline{\operatorname{grad}^2 \sqrt{\varrho}} \quad (42)$$

oder

$$\overline{\frac{d}{dt} (\mathfrak{r}\mathfrak{p})} = 2\bar{T} - \overline{\mathfrak{r} \operatorname{grad} U} + \frac{\hbar^2}{m} \overline{\sqrt{\varrho} \Delta\sqrt{\varrho}} \quad (43)$$

gebracht werden.

## VI

Das Bemerkenswerte an den Arbeiten von *Glaser* und seinen Nachfolgern ist, dass darin der Formalismus der Quantenphysik auf das bewährte Fundament klassischer Theoreme aufgebaut und diese selbst als deren Erweiterung dargestellt wird. Über die Bedeutung dieses Verdienstes braucht kein Wort verloren werden.

Demgegenüber fällt viel weniger ins Gewicht, dass damit gleichzeitig eine neue Modellvorstellung auftaucht, die im Gegensatz zur herkömmlichen optischen einige bemerkenswerte Vorteile aufweist. Bekanntlich versagt das Wellenbild bereits beim Hinausgehen über die kräftefreie Bewegung, während hier das Strömungsmodell voll einsatzfähig ist; es bewährt sich übrigens genauso bei der Anwesenheit von magnetischen Kräften. Ebenso kann die *Klein—Gordon*-sche Gleichung in diesem Sinn interpretiert werden. Die Schwierigkeiten, die bei der *Diracschen* Gleichung auftreten, dürften dagegen in deren Unzulänglichkeit selbst zu suchen sein.

Man darf von einer Modellvorstellung nicht mehr verlangen, als sie ihrem Wesen nach geben kann. Es wäre unbillig, von einem Anschauungsbild zu fordern, es sollte neue Wege für die Behandlung der Mehrteilchenprobleme weisen. Auch hier bleibt seine Bewährung auf den Sektor der Veranschaulichung beschränkt. Wie man sich leicht überzeugt, ist es auf seinem Boden möglich, Partikelsysteme im normalen dreidimensionalen Raum zu betrachten. Dadurch wird allerdings die mathematische Behandlung nicht einfacher — das rechnerische Problem bleibt dasselbe, in welchen Parametern man auch rechnet, und auf eine Transformation in diesen kommt das Strömungsmodell praktisch heraus.

Auch das Dilemma, das zur statistischen Auffassung der Wellenmechanik geführt hat, wird durch das Strömungsbild in keiner Weise berührt — dieselben Gründe, die bisher zum Ausweg über die Wahrscheinlichkeitsdichte trieben, tun es auch hier. Es sind — kurz gesagt — die Tatsachen, die gegen eine nach aussen hin zwar abklingende aber doch beliebig weit endliche Masse und Ladung sprechen. Es soll auch nachdrücklich darauf hingewiesen werden, dass auch das statistische Verhalten nur eine Modellvorstellung ist. Mit demselben Recht könnte man annehmen, dass Massen- und Dichteverteilung bis ins Unendliche bestanden, dass es jedoch Kontraktionsmechanismen [9] gibt, die das »verschmierte« Teilchen zwingen, sich mit Überlichtgeschwindigkeit in einem Punkt zusammenzuziehen und dort z. B. als Elektron zu erscheinen. Im Endeffekt kommt beides auf dasselbe hinaus.

Die Vorteile des Strömungsbildes sind Anschaulichkeit und eine klar zum Ausdruck kommende Korrespondenz mit dem klassischen Theorem; das äussert sich besonders dadurch, dass das Rechnen mit Operatoren vermieden wird und dass sämtliche physikalisch sinnvollen Folgerungen aus der *Schrö-*



*dünger*gleichung auch ohne Verwendung von physikalisch bedeutungslosen komplexen Grössen gezogen werden können, wenn auch der Weg über diese meist mathematisch einfacher ist. Man braucht dazu nur statt der *Schrödinger*-gleichung die beiden entsprechenden gekoppelten Differentialgleichungen (*Newtonsche* Bewegungsgleichung und Kontinuitätsgleichung) zu lösen.

Besonders gute Dienste leistet das Strömungsbild dort, wo es sich darum handelt, die allgemeinen Prinzipien der klassischen Mechanik auf wellenmechanische Vorgänge anzuwenden oder zu erweitern. Ihre Gültigkeit lässt sich zwanglos und meist bedeutend einfacher als im gewohnten Formalismus der Wellenmechanik nachweisen; dadurch werden die gemeinsamen Grundlagen der klassischen Mechanik und der Quantenphysik festgelegt, aber auch die Unterschiede vergleichbar.

Herrn Prof. Dr. *Walter Glaser*, der mir seine Methode des Übergangs von der klassischen Mechanik zur Wellenmechanik schon vor der Veröffentlichung zugänglich machte, bin ich dafür zu grossem Dank verpflichtet. Weiter danke ich Herrn *Hellmut W. Hofmann* für wertvolle Anregungen und Diskussionen.

#### LITERATUR

1. *W. Glaser*, Zur Herleitung der Schrödingerschen Wellengleichung, Vortrag bei der Österr. Physiker-Tagung in Graz, 8. und 9. Dez. 1950.
- W. Glaser*, Grundlagen der Elektronenoptik, Springer Verlag, Wien (1952): 498 ff.
2. *D. Bohm*, Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of »Hidden« Variables, *Phys. Rev.* **85**, 166, 180, 1952.
3. *I. Fényes*, Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik, *Ztschr. f. Physik* **132**, 81, 1952.
4. Siehe auch *W. Weizel*, Ableitung der Quantentheorie aus einem klassischen, kausal determinierten Modell, *Ztschr. f. Physik* **134**, 264, 1953.
5. *K. F. Novobátzky*, Das klassische Modell der Quantentheorie, *Ann. d. Phys.* **9**, 406, 1951.
6. *G. Falk* und *H. Marschall*, Das Schrödinger-Wellenfeld, *Ztschr. f. Naturforschung* **4a** 131, 1949.
7. *H. Hellmann*, Einführung in die Quantenchemie, Franz Deuticke, Leipzig und Wien (1937): 47.
- P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, Springer-Verlag Wien (1949): 110.
8. *P. Ehrenfest*, Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik, *Ztschr. f. Physik* **45**, 455, 1927.
9. Vergl. *L. Jánossy*, Die physikalische Problematik des Teilchen—Wellen Problems der Quantenmechanik, *Ann. d. Phys.* **11**, 323, 1953.

#### ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ

Х. В. ФРАНКЕ

#### Резюме

Была рассмотрена детерминистическая, именно гидродинамическая модель волновой механики. Вопрос об операторах волновой механики и им соответствующих физических величин гидродинамической модели был изучен, и были даны некоторые соотношения физических величин этой модели.

# ON THE MEASUREMENT OF EFFICIENCY OF G.M.-COUNTERS

by

L. JÁNOSSY and D. KISS

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS, DEPARTMENT FOR COSMIC RAYS, BUDAPEST

(Received 1. IX. 1954.)

An improved method is given for the determination of the efficiencies of G. M.-counters. Special care has been taken to reduce spurious events resulting from cosmic showers and accidental coincidences. With help of the above method the efficiencies of G. M.-counters used in the authors' laboratory has been found in most cases to be about 99,3%.

In cosmic ray experiments G. M.-counters are used almost exclusively in coincidence or in anticoincidence arrangements. For such use the actual number of single discharges of a counter is immaterial; and thus for cosmic ray work only the *efficiency* of a counter is of importance. Efficiency of a counter is to be understood as the probability that it responds when struck by a cosmic ray particle.

Thus, in checking counters before use in cosmic ray experiments, it is essential to determine their efficiency as function of the applied voltage. If a counter is highly efficient in a not too narrow voltage interval, it can be safely used in any counter arrangement.

We constructed for the purpose of checking counters an apparatus employing the method described by *Jánossy* and *Rochester*[1]. We were able to improve to some extent upon the older technique, greater care being taken now than previously to eliminate spurious events. Thus the time needed for checking the efficiency of one counter has been somewhat reduced as compared to the time necessary with the older arrangement.

The principle of the arrangement is as follows. Vertical cosmic ray particles are registered by means of threefold coincidences (1, 2, 3), recorded with the arrangement consisting of the counters 1, 2, 3 placed vertically above each other. A gap is provided between the second and third counter for the counter X under investigation (see Fig. 1, the counter X is marked with a cross). Counters 1, 2, 3 are chosen in such a way that a particle moving along a straight line passing through each of them must necessarily pass also through the counter X; moreover, for safety the beam defined by 1, 2, 3 is somewhat narrower than the counter X. Thus if a single cosmic ray particle gives rise to a coincidence (1, 2, 3), then this particle must necessarily traverse also the counter X and thus each such coincidence (1, 2, 3) should normally be accompanied by the discharge of the counter X. Thus each coincidence (1, 2, 3) should at the same



time be a coincidence (1, 2, 3, X), provided the counter X responds to every particle passing through its sensitive volume.

The above consideration is, however, somewhat oversimplified. Coin-

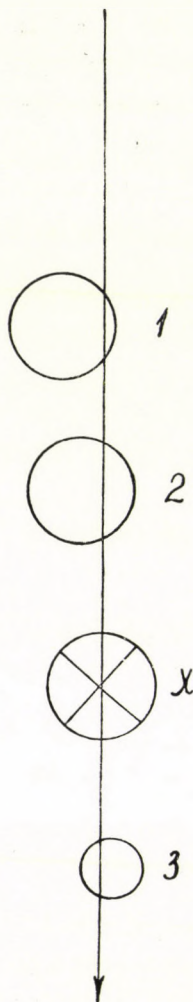


Fig. 1. Scheme of arrangement for the measurement of counter efficiency

cidences (1, 2, 3) are not only caused by single particles passing through the three counters, but such coincidences may also be caused by showers of simultaneous particles and they may also occur accidentally through the incidence of unconnected particles upon the counters 1, 2, 3 inside a sufficiently short interval of time. We may write

$$N'_3 = N_3 + n_3, \quad (1)$$

where  $N'_3$  denotes the total number of coincidences (1, 2, 3) registered per unit time,  $N_3$  the number of threefold coincidences, each one caused by a single particle moving along a straight line,  $n_3$  the number of threefold coincidences caused otherwise.

An ideally good counter X would respond to every event  $N_3$  and to some of the events  $n_3$ . If the counter X responds to a particle passing through it with a probability

$$p = 1 - a,$$

then the rate of fourfold coincidences  $N'_4$  caused by the discharges (1, 2, 3, X) is given by

$$N'_4 = (1-a)N_3 + n_4, \quad (2)$$

where  $n_4 < n_3$  is the number of events of the type  $n_3$  which discharge not only the counters 1, 2, 3 but also the counter X. Subtracting (2) from (1) we find

$$N'_3 - N'_4 = aN_3 + n_3 - n_4.$$

Neglecting for the moment  $n_3$  and  $n_4$ , we can put as a first approximation ( $N_3 = N'_3$ ,  $n_3 \sim n_4 \sim 0$ ), thus

$$a \approx \frac{N'_3 - N'_4}{N'_3} = \beta \quad (\text{say}).$$

The value of  $\beta$  can thus be obtained from the observation of threefold and fourfold coincidences;  $\beta$  is rather larger than  $a$ , we have namely

$$\beta \approx a + \frac{n_3 - n_4}{N'_3},$$

nevertheless  $\beta$  can be taken as first approximation of the »inefficiency« of the counter. (The exact inefficiency is given by  $a$ .)

The difference  $A'_{34} = N'_3 - N'_4$  can be measured by counting separately the coincidences (1, 2, 3) and the coincidences (1, 2, 3, X). This procedure leads, however, to very inaccurate results, since the value of the difference is small compared with the values  $N'_3$  and  $N'_4$  themselves. So as to avoid this difficulty it is convenient to count *directly* those threefold coincidences which are not at the same time fourfold coincidences; thus it is convenient to measure the small difference  $A'_{34}$  directly. In other words, it is convenient to register simultaneously the coincidences (1, 2, 3) and the anticoincidences (1, 2, 3, — X); the rates of these coincidences and anticoincidences give directly the values of  $N'_3$  and  $A'_{34}$ , respectively.

Varying the voltage of the counter X, we may measure  $\beta$  as a function of the voltage applied on the counter as far as we take  $\beta$  as the approximate



value of the inefficiency, we get thus the desired characteristic of the counter. For too small or too high voltages the counter X does not work satisfactorily, in both cases  $\alpha$  and therefore also  $\beta$  will have appreciable values. For a good counter there exists a working region where  $\beta$  will not depend appreciably on the applied voltage and thus it can be presumed that in this region  $\alpha$  does not depend either on the applied voltage. The purpose of the test is to ascertain for each counter, whether such a region exists, and if so, the extent of this region.

Applying to a given counter two voltages  $V_1$  and  $V_2$  in succession, we get, say

$$\left( \frac{A'_{34}}{N'_3} \right)_{V=V_1} = \beta_1, \quad \left( \frac{A'_{34}}{N'_3} \right)_{V=V_2} = \beta_2.$$

If  $\beta_1 \sim \beta_2$ , we see that the change of voltage from  $V_1$  to  $V_2$  does not affect the working of the counter and this region can be regarded as part of the plateau of the counter.

Since

$$\beta = \frac{A'_{34}}{N'_3},$$

we have for the statistical error of  $\beta$  caused by the statistical fluctuation of  $A'_{34}$  and  $N'_3$

$$\delta\beta = \beta \sqrt{\frac{1}{tA'_{34}} + \frac{1}{tN'_3}};$$

since  $N'_3 \gg A'_{34}$ , we have approximately

$$\delta\beta \sim \frac{\beta}{\sqrt{tA'_{34}}} = \sqrt{\frac{\beta}{tN'_3}}.$$

So as to establish whether there is a significant difference between the values  $\beta_1$  and  $\beta_2$  obtained at voltages  $V_1$  and  $V_2$ , we have to form

$$\delta(\beta_1 - \beta_2) = \sqrt{(\delta\beta_1)^2 + (\delta\beta_2)^2} = \sqrt{\frac{\beta_1 + \beta_2}{tN'_3}}. \quad (3)$$

Even if the numerical values of  $\beta_1$  and  $\beta_2$  obtained by a measurement differ only little, it cannot be excluded that they do differ in fact and the difference is merely covered by fluctuation. Thus a difference of the order of the expression (3) cannot be excluded. Thus in order to ascertain that the counter X is essen-

tially insensitive to a change of voltage from  $V_1$  to  $V_2$ , one has to measure for a sufficiently long time so as to make  $\sqrt{(\beta_1 + \beta_2)/tN'_3}$  sufficiently small. This is necessarily a slow procedure since the error  $\delta(\beta_1 - \beta_2)$  decreases only with  $\sqrt{t}$ . So as to accelerate the process of measurement as much as possible, it is important to reduce the background  $n_3$  and thus to reduce the value of  $\beta$ . If we succeed e. g. in reducing the  $\beta$ -values to half their original values, we can reduce the time of measurement by a factor 2 without loss of accuracy.

The  $\beta$ -values can be reduced by reducing  $n_3$  and thus  $n_3 - n_4$ ; this reduction has not only the advantage of speeding up the measurement, but the smaller  $n_3$ , the better  $\beta$  approximates the physically interesting quantity  $\alpha$  itself.

For the sake of illustration we give a numerical example.

X = counter No 300

V	1000+50	1000+100	1000+150	1000+200	Volt*
$N'_3 - N'_4$	49	43	28	41	} per 20 minutes
$N'_3$	1219	1283	1260	1311	

\* 1000 V being the starting potential

Here the number of anticoincidences is too high to allow any useful conclusion to be drawn from the material. Thus it was necessary to improve the method and to reduce the events  $n_3$ . The events  $n_3$  are partly caused by accidental coincidences, partly by air showers. We discuss these events separately.

#### *Accidental coincidences*

Accidental coincidences may arise chiefly as follows.

(1) Three independent discharges take place in the counters 1, 2, 3; the rate of these events is

$$n_3^{(1)} = 3M_1 M_2 M_3 \tau^2,$$

where  $M_1$ ,  $M_2$  and  $M_3$  are the rates of discharges of the three counters and

$$\tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$$



is the resolving time of the coincidence arrangement. Putting  $M_1 \approx M_2 \approx M_3 = 10/\text{sec}$ , we find

$$n_3^{(1)} = 1,2 \cdot 10^{-8}/\text{sec} = 1,4 \times 10^{-5}/20 \text{ minutes},$$

thus the latter effect is altogether negligible. More important but still negligible is the effect due to particles passing through 1 and 2 but not X, accompanied

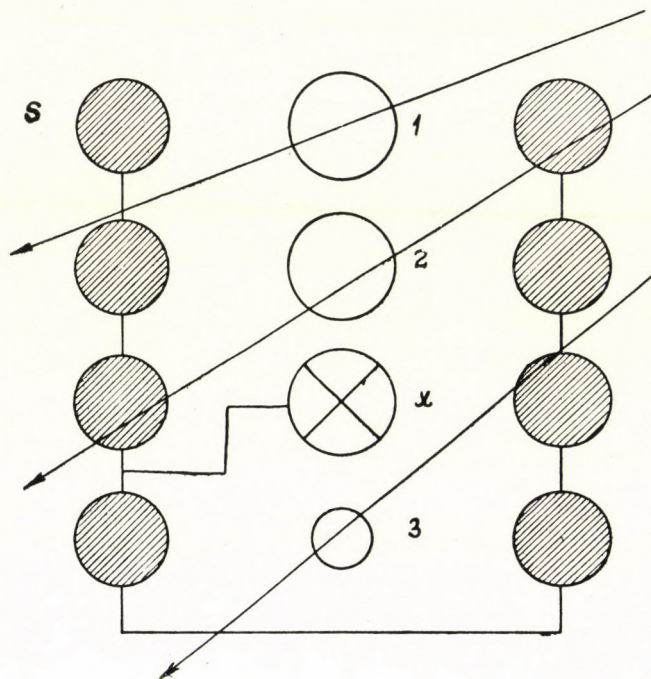


Fig. 2. With the help of side counters showers are eliminated.

by an independent discharge of 3, the latter also unaccompanied by a discharge of X. The rates are

$$\bar{M}_1 = (1, 2, - X) = 1,22/\text{sec}$$

$$\bar{M}_2 = (3, - X) = 4,91/\text{sec},$$

and the rate of accidentals due to this cause

$$2\tau\bar{M}_1\bar{M}_2 = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ per 20 minutes.}$$

Thus we conclude that the effects of accidental coincidences in our arrangement are negligible.

*Showers*

So as to reduce the effects of showers, we surrounded the vertical arrangement with a number of side counters  $S$  connected all in parallel (see Fig. 2). The discharges of these counters are fed into the anticoincidence channel and thus we record anticoincidences

$$\bar{A}_{34} = (1, 2, 3, -X, -S)$$

and anticoincidences

$$\bar{N}_3 = (1, 2, 3, -S).$$

Since a particle passing through 1, 2, 3 cannot possibly reach any of the counters  $S$ , the anticoincidences  $\bar{N}_3$  contain all those coincidences caused by single particles passing through 1, 2, 3. On the other hand the shield  $S$  consisting of 8 counters (see Fig. 2) is so extensive that showers will hardly fail to discharge at least one of them; thus anticoincidences  $(1, 2, 3, -S)$  will hardly contain showers. In good approximation we may thus assume (compare equ. (1))

$$\bar{N}_3 \approx N_3$$

and

$$\bar{A}_{34} \approx aN_3,$$

thus

$$a \approx \frac{\bar{A}_{34}}{\bar{N}_3} = \bar{\beta},$$

where  $\bar{\beta}$  obtained in this way gives a distinctly better approximation for the value of  $a$  (the insensitivity of the counter) than does  $\beta$ .

We give an example of the results obtained with the improved set.

V	1000+50	1000+100	1000+150	1000+200	Volt
(1, 2, 3, -X, -S)	11	5	6	15	} per 20 minutes
(1, 2, 3, -S)	1262	1269	1267	1215	
$\bar{\beta}$	0,0087	0,0039	0,0047	0,0123	



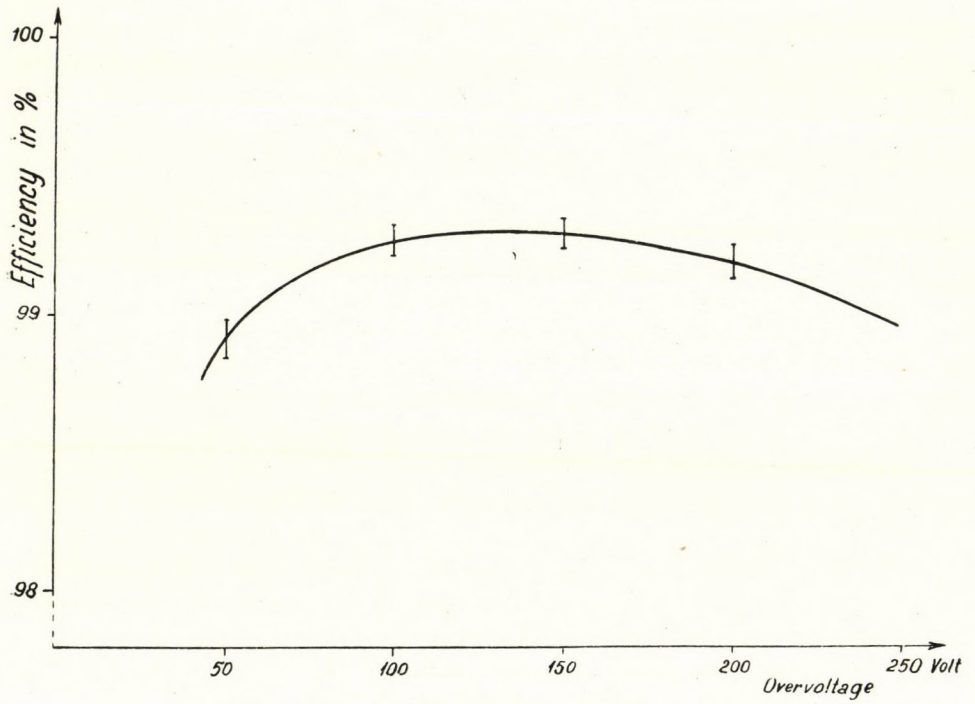


Fig. 3. Characteristics averaged over 50 counters

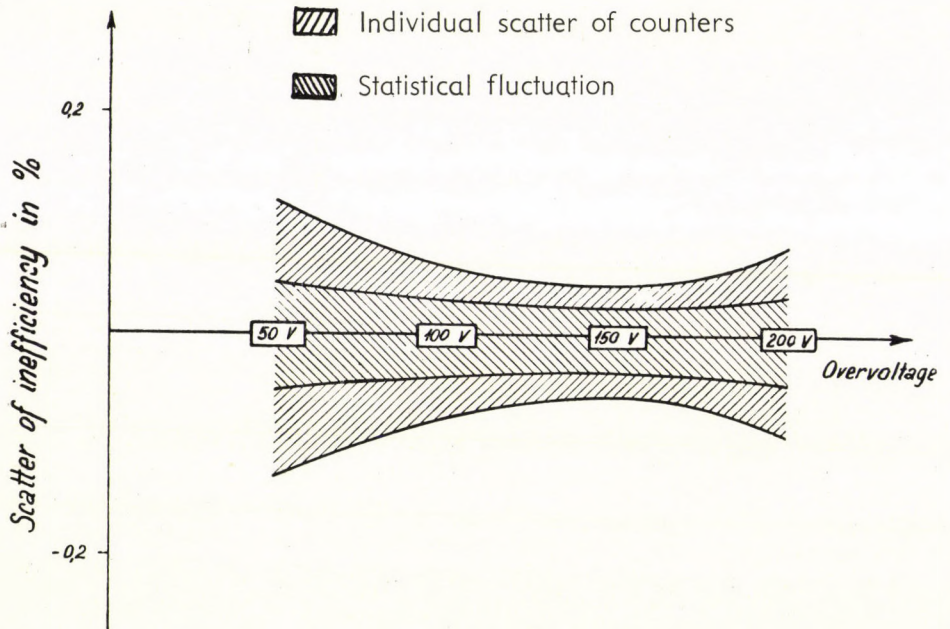


Fig. 4. Comparison of the individual scatter of 50 counters with the statistical fluctuation of average efficiency

From the above table we see that  $V = 50$  is somewhat low,  $V = 200$  on the other hand is rather high for the counter under investigation. Further, comparing  $V_1 = 100$  and  $V_2 = 150$ , we have

$$\beta_1 - \beta_2 = 0,0008 \pm 0,0026.$$

Thus allowing for a deviation as much as three times the standard error, the efficiency of the counter may change as much as 0,86%, although it is likely that it changes somewhat less.

Since  $\alpha \leq \bar{\beta}$ , we see that the counter in question shows an efficiency of at least 99,5% in the region of 100—150 Volt. The fact that the efficiency of the counters is less than 100% is partly due to the dead time of the quenching circuit. Here, however, we do not deal with this question.

The apparatus described above is in permanent use in our laboratory, and counters are rejected if they show less than 99,00% efficiency in a region of 100 Volt.

So as to ascertain whether or not the efficiencies of individual counters obtained by our arrangement, scatter more than is to be expected from the statistical uncertainties of the individual data, we averaged the efficiencies over 50 counters. The result thus obtained is shown in Fig. 3. It is seen that for voltages near the middle of the plateau the data scatter around

$$0,7\%$$

inefficiency. Fig. 4 shows that the scatter is not more than is to be expected from the fluctuation of the individual data. For larger and smaller voltages, however, the individual data give a larger scatter, showing that outside the centre region of the plateau there are systematic differences in the behaviour of individual counters.

A detailed description of the apparatus and of our results has been given by us in the Communications of our Institute [2].

#### REFERENCES

1. L. Jánossy and G. D. Rochester, Phys. Rev. **63**, 52, 1943.
2. L. Jánossy and D. Kiss, Központi Fizikai Kutató Intézet Kiadványai, **1**, 36, 1953.



## ИЗМЕРЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СЧЕТЧИКОВ ГЕЙГЕРА-МЮЛЛЕРА

Л. ЯНОШИ и Д. КИШ

## Резюме

Авторами был совершенствован метод измерения эффективности счетчиков Гейгера-Мюллера. Особое внимание уделялось исключению ложных импульсов, вызванных космическими ливнями и случайными совпадениями. С применением этого метода эффективность счетчиков Г. М., применяемых в лаборатории авторов, в большинстве случаев составляет около 99,3 процентов.

# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

## BRIEF REPORTS — KURZE MITTEILUNGEN

### AN ASYMPTOTICAL METHOD FOR THE CALCULATION OF EIGENFUNCTIONS

By

J. I. HORVÁTH

DEPARTMENT OF THEORETICAL PHYSICS, UNIVERSITY OF SZEGED, SZEGED

(Received 8. VI. 1954.)

Some months ago a variational method was reported by *L. G. Biedenharn* and *J. M. Blatt* for the calculation of eigenfunctions [1]. Their investigations may be deemed to be of great interest because in the case of approximative solutions of the wave equation of the quantum mechanical many-body problems it would be necessary, time after time, to calculate the eigenfunctions in the same order of approximation as the eigenvalues themselves. It is namely well known that by applying the usual perturbation methods in an approximation of first order the eigenvalues can be determined on the basis of the knowledge of the eigenfunctions in zero order. However, in practice the calculation of the eigenfunctions in first order is a very difficult problem for which the knowledge of the spectrum of the Hamiltonian in zero order is needed.

The variational method, which is a very useful and simple approximative method for the calculation of the eigenvalues, gives for example in the case of eigenfunctions a very bad approximation [3] and what is more, it may also occur that the sequence of the approximate functions does not converge towards the correct eigenfunction even if the sequence of the corresponding approximate eigenvalues converges very well towards the correct eigenvalue [2].

Hence it would be a very interesting and important problem to carry out the programme proposed in the paper of *Biedenharn* and *Blatt*. Their proposition seems to be very fundamental and useful, but the formulation of their method, as it is given in the paper mentioned, is not successful and is disputable from some points of view. In the following I shall not criticize the paper in detail, but I should like to formulate their method in a more acceptable manner and to supplement it with some further remarks.

Consider the eigenvalue problem

$$H\psi = \lambda\psi,$$

where  $H$  is the Hamiltonian of the system considered. Let the eigenvalues of  $H$  be  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  and the corresponding eigenfunctions  $\psi_1, \psi_2, \dots$ . Let us assume that  $H$  has a discrete spectrum; the formulation of the results does not cause any difficulties in the general case. The set of eigenfunctions  $\{\psi_u\}$  is



then an orthonormal and complete set of functions  $\psi_n$  in the usual way :

$$(\psi_k, \psi_l) = \delta_{kl}; \quad (\psi_k, H\psi_l) = \lambda_l \delta_{kl}.$$

Let us now suppose that an arbitrary complete-orthonormal set of functions  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  is given and, furthermore, that the functions of the set  $\vec{\Phi} = \{\varphi_u\}$  can be deduced from the set  $\vec{\psi} = \{\psi_n\}$  by an infinitesimal transformation  $Q$  as follows :

$$\Phi_k = \psi_k + \sum_{i=1}^{\infty} q_{ki} \psi_i, \quad (1)$$

where the squares and the products of the components of the matrix  $Q$  are negligible in second order.

Equation (1) can also be written in the form

$$\vec{\Phi} = (1 + Q) \vec{\psi}, \quad (1')$$

and

$$\vec{\psi} = (1 + Q)^{-1} \vec{\Phi} = \vec{\Phi} - Q\vec{\Phi} + O(Q^2), \quad (2)$$

respectively.

The set of functions  $\{\Phi_n\}$  was supposed to be an orthonormal one so that

$$\begin{aligned} (\Phi_k, \Phi_l) &= \left( \left[ \psi_k + \sum_{i=1}^{\infty} q_{ki} \psi_i \right], \left[ \psi_l + \sum_{j=1}^{\infty} p_{lj} \psi_j \right] \right) = (\psi_k, \psi_k) + (\psi_l, \sum_{j=1}^{\infty} q_{lj} \psi_j) + \\ &+ \left( \sum_{j=1}^{\infty} q_{kj} \psi_j, \psi_l \right) + \sum_{j=1}^{\infty} q_{ki} \psi_i \sum_{j=1}^{\infty} q_{lj} \psi_j = (\psi_k, \psi_l) + q_{lk} + q_{kl}^* + O(Q^2); \end{aligned}$$

consequently

$$q_{kl}^* = -q_{lk},$$

therefore

$$Q^+ = -Q. \quad (3)$$

Using these results it can be deduced elementarily that

$$\psi_k = \Phi_k - \sum_{U \neq k} \frac{(\Phi_U, H\Phi_k)}{\omega_U - \omega_k} \Phi_U + O(Q^2), \quad (4)$$

where

$$(\Phi_k, H\Phi_k) = \omega_k + O(Q^2),$$

assuming that the operators  $H$  and  $Q$  are commutative.

The formulation of the method given by *Biedenharn* and *Blatt* diverges from the one mentioned above in two points. First of all they use a finite set of functions; secondly our equation (1') is given in their paper as

$$\varphi_k = (1 + Q) \psi_k.$$

It is easily seen that using two finite sets of functions  $\vec{\Phi}$  and  $\vec{\psi}$ , it cannot be taken for granted that the conditions made above can be fulfilled.

Our result (4) — as *Biedenharn* and *Blatt* also remark — seems to be very similar to the familiar formula of the ordinary perturbation theory. Nevertheless our point of view is different. In the case of the ordinary perturbation theory the trial Hamiltonian is reduced — often in an arbitrary way — as follows:

$$H = H_0 + W,$$

where  $W$  is the operator of the perturbation. Then, in the formula for  $\psi_k$ , which is formally the same as our equation (4), we have in the denominator instead of the  $\omega$ 's the eigenvalues and instead of our trial functions  $\Phi_n$  the exact eigenfunctions of the Hamiltonian  $H$ . *Biedenharn* and *Blatt*'s method, on the other hand, has the advantage that the Hamiltonian of the system need not be reduced for the calculation of the approximate eigenfunctions in first order.

Of course, it is well known that in the case of any complete-orthonormal set of functions there exists a linear and self-adjoint operator  $L$ , the eigenfunctions of which are the given functions  $\Phi_n$ ; consequently the corresponding »operator of perturbation«  $W' = H - L$  can be defined; the circumstance that this reduction of the Hamiltonian is not based on any physical considerations has often considerable advantages.

In the paper of *Biedenharn* and *Blatt* the generalizations of the results discussed above are also given for a non-orthogonal set of the trial functions  $\{\Phi_n\}$  and also for the degenerate case of the eigenvalue problems. In our case such a generalization does not present any new problem, hence these cases are not discussed in detail.

Finally, we should like to propose a procedure for the construction of the trial set of functions  $\{\Phi_n\}$ . This construction has no importance from the point of view of the method discussed, neither is it given in the cited paper of *Biedenharn* and *Blatt*. Nevertheless, it seems desirable to give the method of the construction using the variational method.

Let us take as starting-point of our method, a suitable function  $\Phi'_1$  which contains some variational parameters and determine the parameters in such a manner that  $\omega_1 = (\Phi'_1, H\Phi'_1)$  should be minimal. In the second step we use a second function  $\Phi'_2$ , which contains some variational parameters and determine the parameters of  $\Phi'_2$ , so that on the one hand  $\omega_2 = (\Phi'_2, H\Phi'_2)$  should



be minimal and on the other  $\Phi'_2$  should be orthogonal to  $\Phi'_1$ , etc. Thus by normalization of the functions  $\Phi'_k$  we obtain a suitable trial set of functions  $\{\Phi_k\}$  and our quantities  $\omega_k$  give the first approximation of the eigenvalues  $\lambda_k$ .

The applicability of the method depends on the rapidity of the convergence of the series in equation (4).

#### REFERENCES

1. *L. C. Biedenharn and J. M. Blatt*, Phys. Rev. **93**, 230, 1954.
2. *P. Gombás*, Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik. Birkhäuser, Basel, 1950. P. 153.
3. *J. I. Horváth*, Acta Phys. Hung. **3**, 323, 1954.

# ERWEITERUNG DER HARTREE--FOCKSCHEN GLEICHUNGEN DURCH DIE KORRELATION DER ELEKTRONEN

Von

P. GOMBÁS

PHYSIKALISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

(Eingegangen : 10. IX. 1954)

Ein Mangel der Hartree-Fockschens Methode des self-consistent field ist das Fehlen des Korrelation-Anteils der Elektronen. Mit dem zuerst von *Wigner*[1] und später von *Macke*[2] hergeleiteten Ausdruck der Korrelationsenergie eines Elektronengases freier Elektronen könnte man — wenn die Abhängigkeit der Korrelationswechselwirkung vom Quantenzustand, d. h. vom Impulsvektor der Elektronen in einer brauchbaren analytischen Form dargestellt werden könnte — ganz ähnlich wie dies *Slater*[3] für die Austauschwechselwirkung der Elektronen getan hat, die Korrelationswechselwirkung der Elektronen durch ein mittleres Potential darstellen, indem man das Korrelationspotential oder die Korrelationsenergie zwischen zwei herausgegriffenen Elektronen über alle möglichen Elektronenzustände eines Elektrons hinwegmittelt.

Von Macke wurde zwar die Abhängigkeit der Korrelationsenergie vom Impulsvektor der freien Elektronen in analytischer Form angegeben, doch ist der Ausdruck sehr kompliziert, so dass die Mittelung zu mathematischen Schwierigkeiten führen würde, oder aber müsste man Vernachlässigungen vornehmen, durch die das Resultat voraussichtlich stark beeinflusst würde.

In einem Fall und zwar für ein Valenzelektron in einem Atom, das sich ausserhalb eines Rumpfes mit abgeschlossenen Elektronenschalen befindet, lässt sich jedoch das Korrelationspotential einfach angeben. Man kann dann folgendermassen verfahren.

Man behandelt den Atomrumpf statistisch und beschreibt diesen als ein einfach geladenes positives Ion mit der Elektronendichte  $\varrho$ . Im neutralen Atom ist nun zum Atomrumpf das wellenmechanisch behandelte Valenzelektron mit der Dichte  $\delta\varrho = \psi\psi^*$  hinzuzufügen, wo  $\psi$  die Eigenfunktion des wellenmechanisch behandelten Valenzelektrons und  $\psi^*$  deren konjugiert Komplexe bezeichnet. Die gesamte Elektronendichte im Atom wird also  $\varrho' = \varrho + \delta\varrho$ . Für die durch die Hinzufügung des Valenzelektrons entstehende Änderung der Korrelationsenergie  $E_w$  ergibt sich durch eine Reihenentwicklung nach der kleinen Grösse  $\delta\varrho$  und Vernachlässigung der Glieder, die von zweiter und höherer Ordnung klein sind

$$\delta E_w = \int \frac{\partial W}{\partial \varrho} \delta \varrho dv, \quad (1)$$



wo  $W$  die Dichte der Korrelationsenergie bezeichnet. Hieraus erhält man für das Korrelationspotential in Bezug auf das Valenzelektron, d. h. das Elektron mit der höchstmöglichen Energie

$$V_w = -\frac{1}{e} \frac{\partial W}{\partial \rho}. \quad (2)$$

Für  $W$  wurde von *Wigner*[4] der Ausdruck

$$W = -\frac{\alpha_1 e \rho^{1/3}}{\rho^{1/3} + \alpha_2} \rho \quad (3)$$

mit

$$\alpha_1 = 0,05647 \frac{e}{a_0} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 0,1216 \frac{1}{a_0} \quad (4)$$

hergeleitet, wo  $e$  die positive Elementarladung und  $a_0$  den ersten Bohrschen Wasserstoffradius bezeichnet. Mit diesem Ausdruck ergibt sich für das Korrelationspotential aus (2)

$$V_w = \alpha_1 \frac{\rho^{1/3}}{\rho^{1/3} + \alpha_2} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{3} \frac{\rho^{1/3}}{(\rho^{1/3} + \alpha_2)^2}. \quad (5)$$

Durch Heranziehen des Korrelationspotentials in den Hartree-Fockschen Gleichungen des self-consistent field für ein Valenzelektron in einem Atom lässt sich eine über diese Gleichungen hinausgehende Näherung erzielen. Da die Korrelationskorrektur klein ist, kann man die Korrelationskorrektur  $\varepsilon$  der Hartree-Fockschen Energierterme durch die wellenmechanische Formel für die Störungsenergie erster Ordnung

$$\varepsilon = - \int V_w e \psi \psi^* dv$$

bestimmen.

Auf diese Weise haben wir die Korrelationskorrektur der Grundterme des Valenzelektrons in Alkaliatomen abgeschätzt und erhielten Energien von etwa  $-0,2$  e-Volt, die die richtige Grössenordnung haben.

#### LITERATUR

1. *E. Wigner*, Phys. Rev. (2) **46**, 1002, 1934.
2. *W. Macke*, ZS. f. Naturforschung, **5a**, 192, 1950.
3. *J. C. Slater*, Phys. Rev. (2) **81**, 385, 1951.
4. *E. Wigner*, l. c.; man vgl. auch *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, S. 27 ff., Springer, Wien, 1949.

Les *Acta Physica* paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des travaux du domaine de la physique.

Les *Acta Physica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement par volume est de 110 forints.

On peut s'abonner à l'Entreprise du Commerce Extérieur de Livres et Journaux »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

The *Acta Physica* publish papers on physics, in Russian, French, English and German. The *Acta Physica* appear in parts of varying size, making up one volume. Manuscripts should be typed and addressed to :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the *Acta Physica* is 110 forints a volume. Orders may be placed with »Kultúra« Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Die *Acta Physica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der Physik in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die *Acta Physica* erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Bankkonto : Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.



## INDEX

- A. Bardócz*: Untersuchungen über Lichtquellen für Spektralanalyse. Ein elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger. — *A. Бардоу*: Искровой возбудитель с электроническим управлением для целей спектрального анализа ..... 91
- G. Györgyi*: Die Bewegung des Energiemittelpunktes und der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes in Dielektrika — *Г. Дьёрдьи*: Движение энергетического центра и тензор импульса энергии в диэлектриках..... 121
- I. Fényes*: Über das Divergenzproblem der W. K. B. Methode — *И. Феньеш*: О проблеме расходимости метода В. К. Б. .... 133
- F. Berencz.*: A New Method for the Calculation of the Energy of the Hydrogen Molecule — *Ф. Беренц*: Об одном новом методе вычисления энергии связи водородной молекулы ..... 149
- G. Szamosi*: On the Quantum Statistics of Nucleons — *Г. Самоши*: О квантовой статистике нуклеонов ..... 155
- Herbert W. Franke*: Ein Strömungsmodell der Wellenmechanik — *Х. В. Франке*: Гидродинамическая модель волновой механики ..... 163
- J. Jánossy and D. Kiss*: On the Measurement of Efficiency of G.-M.-Counters — *Л. Яноши и Д. Киш*: Измерение эффективности счетчиков Гейгера-Мюллера ..... 173
- Крамки сообщения — Brief Reports — Kurze Mitteilungen
- J. I. Horváth*: An Asymptotical Method for the Calculation of Eigenfunctions .. 183
- P. Gombás*: Erweiterung der Hartree—Fock'schen Gleichungen durch die Korrelation der Elektronen ..... 187

ACTA  
PHYSICA  
ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS  
Z. GYULAI, L. JÁNOSSY, I. KOVÁCS, K. NOVOBÁTZKY

REDIGIT  
P. GOMBÁS

TOMUS IV

FASCICULUS 3



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
BUDAPEST, 1955

ACTA PHYS. HUNG.



# ACTA PHYSICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az *Acta Physica* orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a fizika tárgyköréből.

Az *Acta Physica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az *Acta Physica* előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest, V., Alkotmány-u. 21. Bankszámla 04-878-111-46), a külföld számára pedig a »Kultúra« Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankszámla: 43-790-057-181 sz.) vagy külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

»*Acta Physica*« публикует трактаты из области физических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

»*Acta Physica*« выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машине виде) следует направлять по адресу:

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена »*Acta Physica*« — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет »*Kultúra*« (Budapest, VI., Sztálin út 21. Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.



# DURCH KRISTALLE VERURSACHTE ZERSTÖRUNGSWIRKUNGEN IN PORÖSEN MATERIALIEN

Von  
Z. GYULAI

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE PHYSIK DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT  
FÜR DIE BAUINDUSTRIE, BUDAPEST

(Eingegangen: 25. VI. 1954)

An porösen Körpern — so an gewissen Porzellanen, Fayencen, keramischen Materialien — wachsen nach Aufsaugung der NaCl-Lösung nadelförmige und wollartige NaCl-Kristalle. Steht der Probekörper sehr lange Zeit (mehr als 2 Jahre) an freier Luft, so entstehen an gewissen Stellen Aufquellungen, Abbröckelungen und Sprünge. Diese Zerstörung des Probekörpers kann durch die Entstehung von Kristallen erklärt werden, die in den Porenräumen zu wachsen beginnen. Es wird auch auf die Bedeutung dieser Erscheinung bei der zeitlichen Verwitterung der Baumaterialien (Ziegel, Steine, Zemente) hingewiesen.

1. Am I. Kongress der Ungarischen Physiker im August 1953 berichtete der Verfasser über die künstliche Züchtung von nadelförmigen und wollartigen NaCl-Kristallen. Diese Züchtungsversuche sind seit mehreren Jahren im Gange, und es wurden verschiedene Materialien ausprobiert, ehe es gelang, die heutige sog. Massenproduktion zu erreichen. Der Ausdruck »Massenproduktion« wird hier deshalb gebraucht, weil es sehr schwierig ist, mit Nadelkristallen zu arbeiten, deren Dickenabmessungen in einen Bereich von 1–10  $\mu$  fallen, und weil genügend Kristallmaterial zur Verfügung stehen muss, wenn man vermeiden will, dass die während des Versuches auftretenden Brüche usw. eine Verzögerung der Arbeit hervorrufen.

Im nachstehenden soll — gleichsam als Nebenergebnis — über gewisse Zerstörungs- bzw. Zerbröckelungserscheinungen berichtet werden, die auf dem als Grundmaterial dienenden porösen Stoff auftreten. Diese Beobachtungen bilden auch eine Erweiterung des auf dem Kongress gehaltenen Berichtes in eine andere Richtung. Es wurde nämlich angenommen, dass das Kristallwachstum nur an der Oberfläche eines porösen Stoffes vor sich gehen kann, da die Lösung dort zu verdunsten vermag. Eingehende Beobachtungen ergaben jedoch, dass der Verdunstungsprozess etwas komplizierter ist, als ursprünglich angenommen wurde.

2. Die bei diesen Versuchen gemachten Beobachtungen sind folgende: es wurde in einen Fayenceteller gesättigte Kochsalzlösung gegossen und ungefähr 24 Stunden im Teller stehen gelassen, worauf der Teller mit einem Tuch getrocknet wurde. Auf der Innenseite des Tellers begannen nach einigen Monaten die normalen wollartigen Kristalle zu wachsen. Nach zwei Jahren — während denen der Teller ständig in trockener Zimmerluft gehalten wurde — zeigten sich jedoch an seiner Oberfläche grössere Erhabenheiten bzw. Aufquellungen.



Ein solcher Fall ist in Abb. 1 zu sehen. Abb. 1/a zeigt den ganzen Teller, am Rande an einigen Stellen mit den Kristallbündeln, die selbst nach zeitweiligem Abbrechen seit zwei Jahren ein ständiges Wachstum aufweisen. Am Boden des Tellers ist eine Fläche von der Grösse einer 1-Forint-Münze aufgequollen,

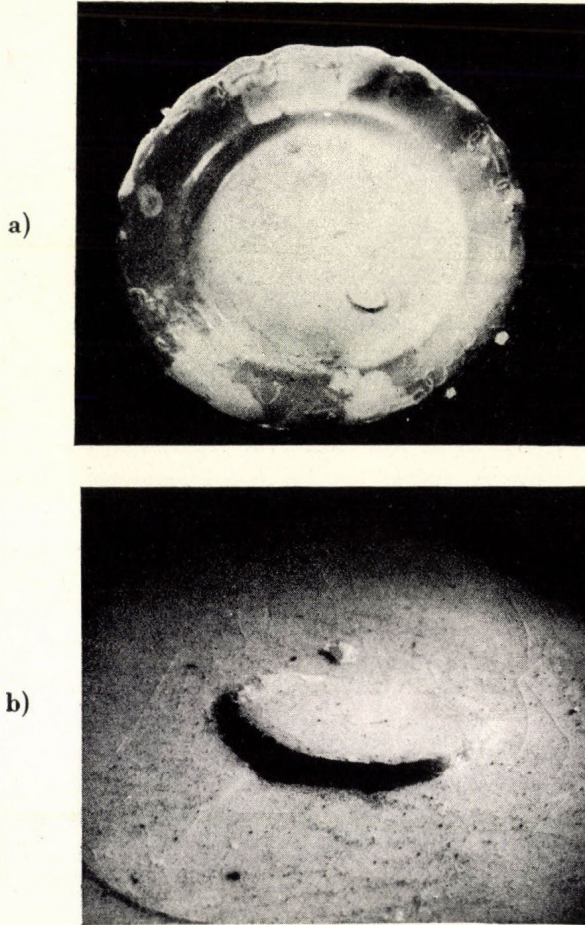


Abb. 1. Fayenceteller mit aufgequollenem Teil. a) Rand des Tellers mit Kristallhaufen, in der Mitte ein aufgequollener Teil. b) Aufgequollener Teil in stärkerer Vergrößerung, neben der grössten Erhebung noch ein kleinerer Teil ausgebrochen.

daneben sind an zwei kleineren Teilen und auch an anderen Stellen des Tellers ausgesprochene Erhebungen zu sehen. Am Teller ist auch ein Sprung entstanden, der erst in der letzten Zeit festgestellt werden konnte.

Diese Sprung- bzw. Spalterscheinungen dürften auf die sich im Inneren der Fayence bildenden Kristalle zurückzuführen sein.

Auf welche Weise können im Inneren der Fayence Kristalle wachsen? Hier sind aller kleinste Öffnungen vorhanden, deren Abmessungen wahrschein-



lich in einer Grössenordnung von  $1 \mu$  bis  $0,1 \mu$  und vielleicht sogar bis  $0,01 \mu$  liegen. Wenn eine als kreisförmig angenommene Öffnung  $0,01 \mu$  gross ist, d. h. einen Durchmesser von  $100 \text{ \AA}$  aufweist, dann steht den Wassermolekülen noch immer reichlich Raum zur Verfügung. Setzt man also an der Wand der inneren Poren eine adsorbierte Flüssigkeitsschicht von der Dicke eines oder mehrerer Moleküle voraus, so ist über dieser Schicht ein freier Raum von etwa 100 Moleküle Höhe zur Verdunstung der Wassermoleküle vorhanden. Dieser Raum füllt sich mit gesättigtem Wasserdampf, wobei die Salzionen an der Seitenwand der Poren eine Flächenwanderung ausführen können. Obwohl besonders zu betonen ist — was auch bereits im Vortrag auf dem Kongress kurz gestreift wurde —, dass die Angaben der adsorbierten Schicht (Ionenkonzentration, Dampfdruck) andere sind als die für die gesättigte NaCl-Lösung geltenden betreffenden Angaben, so unterliegt es keinem Zweifel, dass sich bei Übersättigung der adsorbierten Schicht die Ionen aus ihr in Form von Kristallen ausscheiden. Es besteht somit keinerlei Hindernis, dass Kristalle auch in solchen Poren wachsen.

Dieser Prozess nimmt natürlich eine lange Zeit vom Versuchsbeginn an gerechnet, d. h. vom Bedecken der Fayence mit Salzlösung, in Anspruch. Wahrscheinlich füllt sich am Anfang ein Teil der Poren vollständig mit Lösung an, während in einem anderen Teil von ihnen Luft einschliesse zurückbleiben, weil gewisse Teile infolge der in die übrigen Poren auf Grund der Kapillarität eindringenden Flüssigkeit abgesperrt werden.

Nach Ansetzen des Versuches wurde — wie bereits erwähnt — der Fayenceteller mit einem Tuch abgetrocknet. Von diesem Zeitpunkt an beginnt in den Poren eine überaus verwickelte Bewegung der Flüssigkeit und ihres Dampfes. Es ist offenbar, dass sich infolge der Oberflächenwanderung auch an den Wänden der leeren Poren eine adsorbierte Schicht ausbildet. Infolge der Temperaturänderung treten Volumveränderungen auf, was gleichfalls die Bewegung der Flüssigkeit und des Dampfes in den Poren fördert. Die Temperaturänderungen bewirken eine Veränderung der Dampfspannung und zugleich damit auch der Dampfdichte: es setzt also ein Spiel von Verdunstung und Niederschlag ein. Auch die Veränderung des Aussenluftdruckes spielt eine Rolle, indem sie ebenfalls die Bewegung der Flüssigkeit und des Dampfes auslöst. Alle diese Prozesse haben zur Folge, dass sich der Ort und die Konzentration der Gesamtheit der Ionen verändern.

Nach all dem ist es also offenkundig, dass die Wassermoleküle an den freien Enden der Poren — gleichgültig ob sich der Fayence-Probekörper in einer feuchten oder trockenen Umgebung befindet\* — aus dem Porensystem austreten, während die zu ihnen gehörenden Ionen dort bleiben. In den bisherigen Versuchen wurden nur jene Ionen untersucht, die sich an der Oberfläche des

\* Ausführlicher s.: Z. Gyulai: Magyar Fizikai Folyóirat, 2. 1954. 371—391.



Probekörpers in Form von nadelförmigen, geraden oder wollartigen, krummen Kristallen ausgeschieden hatten.

Es ist offenbar, dass diese an der Oberfläche ausgeschiedene Substanz die Mehrzahl der vom Probekörper aufgenommenen Salzionen darstellt. Die jetzt geschilderte neue Erscheinung beweist jedoch, dass sich im Inneren der Poren auch noch ein anderer Vorgang abspielt. Dieser andere Vorgang besteht darin, dass auch im Inneren der Poren, wenn sich ein grosser Teil der Lösung von dort entfernt hat, eine Kristallisation erfolgen kann.

Dieses Stadium der Kristallisation kann man sich folgendermassen vorstellen: es sei angenommen, dass sich ein so grosser Teil der Lösung entfernt



Abb. 2. Unterteil des in Abb. 1 gezeigten Fayencetellers mit einer Reihe kleiner Sprünge.

hat, dass sich an den Innenwänden sämtlicher Poren eine adsorbierte Schicht von einer Dicke von nur wenigen Molekülen befindet. Man hat es also in diesem Falle — wie bereits oben erwähnt — mit leeren Röhrchen zu tun, in denen die Lösung nur in Form einer dünnen, an der Wand adsorbierten Schicht vorhanden ist. Das Röhrsystem der Poren stellt ein grosses Labyrinth dar, das vielerlei Verbindungen mit der Aussenluft besitzt. Es kann somit Stellen geben, wo im Inneren der Poren eine starke Verdunstung einsetzt, weil von dem betreffenden Punkt ein kurzer Weg an die Oberfläche bzw. ins Freie führt. Es können sich aber an einzelnen Stellen im Inneren des Probekörpers auch grössere Hohlräume befinden, von denen ein ganzes Porensystem ausgeht, das seine ins Freie führenden Kanäle besitzt. An solchen Stellen kann also eine intensivere Verdunstung auftreten und als deren Folge das Wachstum einzelner Kristalle einsetzen, was schliesslich zum Aufquellen eines Teiles des Probekörpers führt. Die Tatsache, dass es Stellen im Inneren gibt, wo solche grössere Hohlräume vorhanden sind, wird durch das System von Aufquellungen angezeigt, dass dieser Tage an der Unterseite des in Rede stehenden Fayencetellers entstanden ist. Die in Abb. 2 sichtbaren Aufquellungen sind regelmässig am



Rand der Unterseite des Tellers angeordnet, hängen also mit der Herstellung des Tellers zusammen. Bei der Herstellung des Tellers dürfte sich nämlich ein Hohlraumsystem gebildet haben, vermutlich dadurch, dass eine im ursprünglichen Material befindliche Luftblase zu vielen kleinen Bläschen zerquetscht wurde.

Die geschilderten Aufquellungen zeigen in augenfälliger Weise, dass sich im porösen Stoff, wenn er einmal mit Lösung angefüllt wurde, eine lange Zeit hindurch Prozesse abspielen, die auch mit einem bedeutenden Stofftransport und einer Veränderung der Innenstruktur einhergehen. Vielleicht darf man hierzu noch bemerken, dass diese Prozesse, die sich an den Porenwänden des



Abb. 3. Feuerfestes Rohr mit Kristallen und Spuren von Ausbröckelung.

porösen Stoffes abspielen, niemals zum Stillstand kommen, da an den porösen Wänden stets aus der Luft adsorbierbares Wasser zur Verfügung steht, das infolge der Temperatur- und Luftdruckveränderungen — unabhängig von der niemals stillstehenden Wärmebewegung — ständig in Bewegung gehalten wird.

3. Die hier geschilderte Erscheinung tritt nicht nur bei Fayence auf, sondern wahrscheinlich bei jedem porösen Material. Im nachstehenden werden auf einigen Lichtbildern Beispiele hierfür auf verschiedenen porösen Stoffen gezeigt.

Abb. 3 zeigt ein feuerfestes Rohr, auf dem wollartige NaCl-Kristalle sichtbar sind und sich das Material im Stadium eines ziemlich fortgeschrittenen Verfalles befindet. Bei Versuchsbeginn bildete die obere Öffnung des senkrecht aufgestellten Rohres einen regelmässigen Kreis, doch sind jetzt dort infolge der Abbröckelung ziemlich grosse Stücke ausgebrochen. An der Seite des Zylinders sind unterhalb der Kristalle auch die starke Schatten werfenden Vertiefungen zu sehen.

In Abb. 4 wird ein gewöhnlicher Blumentopf gezeigt. Nach nicht langer Zeit brachen aus dem Topf grosse Stücke aus und traten, wie aus Abb. 4/a



ersichtlich, beträchtliche Sprünge auf. Neben den auf dem Probekörper befindlichen Kristallen ist ebenfalls die aufgeraute Oberfläche des Vasenkörpers zu sehen.

In Abb. 5 wird eine kleine emaillierte Blumenvase bzw. eine kleine Schale vorgeführt. Auch diese Gefässe bestehen aus grobkörnigem Material, wie es von den Töpfern auf dem Dorfe zur Herstellung von billigen Gebrauchsgegenständen

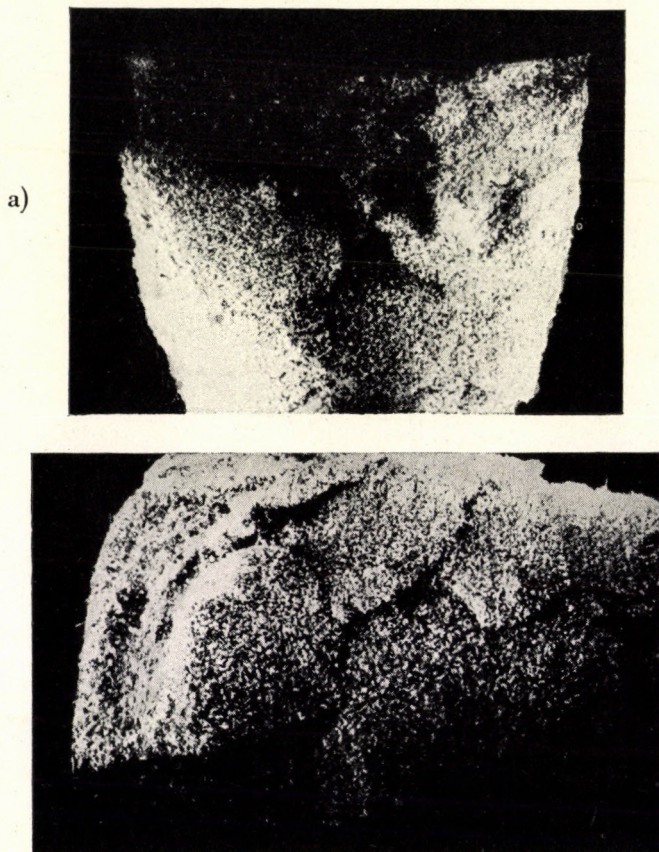


Abb. 4. Gewöhnlicher Blumentopf mit Spuren von Aufquellungen und Sprüngen.

benutzt wird. Am Rande der Schale ist gut ersichtlich, wie sich ein grosser Teil zusammen mit der Glasur in die Höhe gehoben hat.

In Abb. 6 ist ein Tiegel aus Aluminiumoxyd zu sehen, der eigens für unser Institut zum Schmelzen und Züchten von Alkalihalogenidkristallen angefertigt wurde. Indessen konnten die Tiegel nicht für diesen Zweck verwendet werden, da ihr Porendurchmesser so gross war, dass das geschmolzene NaCl oder andere Salze aus ihnen ausflossen. So wurden einige noch unbenutzte Tiegel zur Züchtung von Nadelkristallen erprobt. (Wir mussten nämlich systematisch poröse Materia-



lien suchen und an solchen, von der Industrie erhältlichen Gegenständen Proben vornehmen.) In Abb. 6/a sind die Salzkristalle sowie die Aufquellungen und einige Löcher zu sehen. Abb. 6/b zeigt einen Tiegel, von dem das Salz abgewaschen wurde, damit die Verletzungen des Probekörpers gut sichtbar werden. Hier ist erkennbar, dass die fehlenden Teile so aussehen, als ob sie von unten

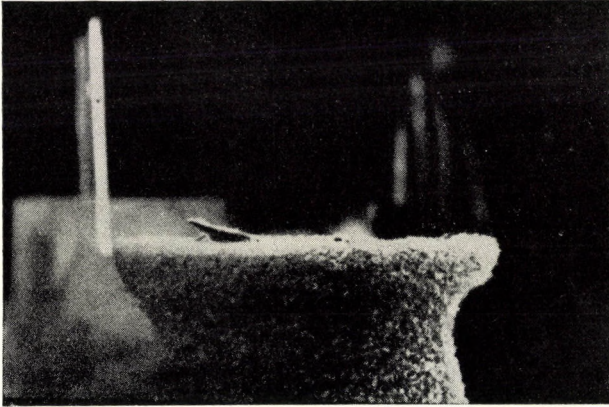


Abb. 5. Grünlasierte Schale mit einem aufgequollenen Teil.

her von einem einzigen Punkt aus ausgebrochen worden wären. Abb. 6/c zeigt einen kleineren Oberflächenteil mit den Salzkristallen und den Sprüngen in einer stärkeren Vergrößerung. Aus allen diesen Bildern geht hervor, dass auch die an der Oberfläche entstandenen Salzblüten einzelne zentrale Rosetten bilden, wodurch sie anzeigen, dass an einigen Punkten der Stoffnachschub grösser ist.

Ähnliche Beobachtungen konnten auch an Bimsstein gemacht werden. Auch hier riefen die Salzkristalle Ausbröckelungen hervor.

4. Die zerstörende und verwitternde Wirkung des gefrierenden Wassers in der Natur ist bekannt. Hier handelt es sich also darum, dass diese Erscheinung auch bei anderen Stoffen, u. zw. bei der Auskristallisation von gelösten Substanzen auftritt, und es unterliegt keinem Zweifel, dass dies in der Natur häufig vorkommt.

Anlässlich eines Besuches in unserem Institut äusserte Prof. *J. D. Bernal* (London) die Meinung, dass die hier mitgeteilten Beobachtungen eine Erklärung für die allmähliche Verwitterung und Zerbröckelung der Baumaterialien bieten. Er fügte noch hinzu, dass man auf Grund systematischer Untersuchungen hoffen könne, eine Methode zur Verhinderung dieser zerstörenden Wirkung zu finden, was von grosser praktischer Bedeutung wäre. Es scheint, dass man nach der Erforschung der Einzelheiten des in den Materialien vorkommenden Kristallwachstums auch daran denken kann, entsprechende Methoden eben zur Verhinderung der Ausbildung von zerstörenden Kristallen auszuarbeiten. Für diese Anregung sei auch an dieser Stelle Prof. Bernal der beste Dank ausgesprochen.



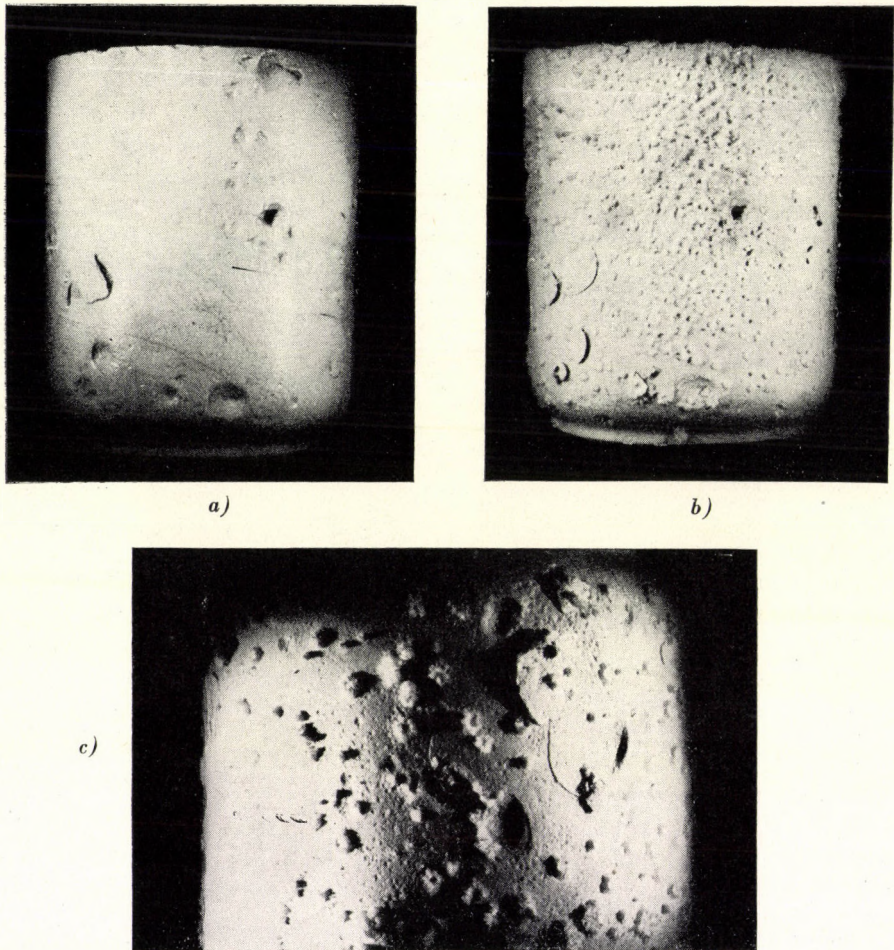


Abb. 6. Tiegel aus Aluminiumoxyd: a) mit Kristallen und Sprüngen, b) dasselbe nach Abwaschen der Kristalle, c) ein Teil davon vergrößert.

Bei den hier beschriebenen Versuchen waren Adjunkt *F. Fáthy* und Laborantin *K. Kuch* behilflich. Die Kosten der Versuche wurden von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften getragen.

#### РАЗРУШАЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ РАСТУЩИХ КРИСТАЛЛИТОВ В ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ

З. ДЬЮЛАИ

*Резюме*

В пористых материалах, как например фарфор, фаянс и керамические материалы после впитывания раствора NaCl вырастают игольчатые и шерстяно-волокнистые кристаллиты. Если образец долго (2 года) стоит на свободном воздухе, то в некоторых местах образуются разбухания, осыпания, а также разрывы.

Это разрушение образца можно объяснить растущими кристаллитами в порах материала. Автор указывает на то, что это явление играет роль в износе строительных материалов (кирпича, камня, цемента).



# BEITRAG ZUR UNTERSUCHUNG DER REKRISTALLISATIONSVORGÄNGE

Von  
Z. MORLIN

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE PHYSIK DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT  
FÜR DIE BAUINDUSTRIE, BUDAPEST

(Vorgelegt von Z. Gyulai. — Eingegangen: 25. VI. 1954)

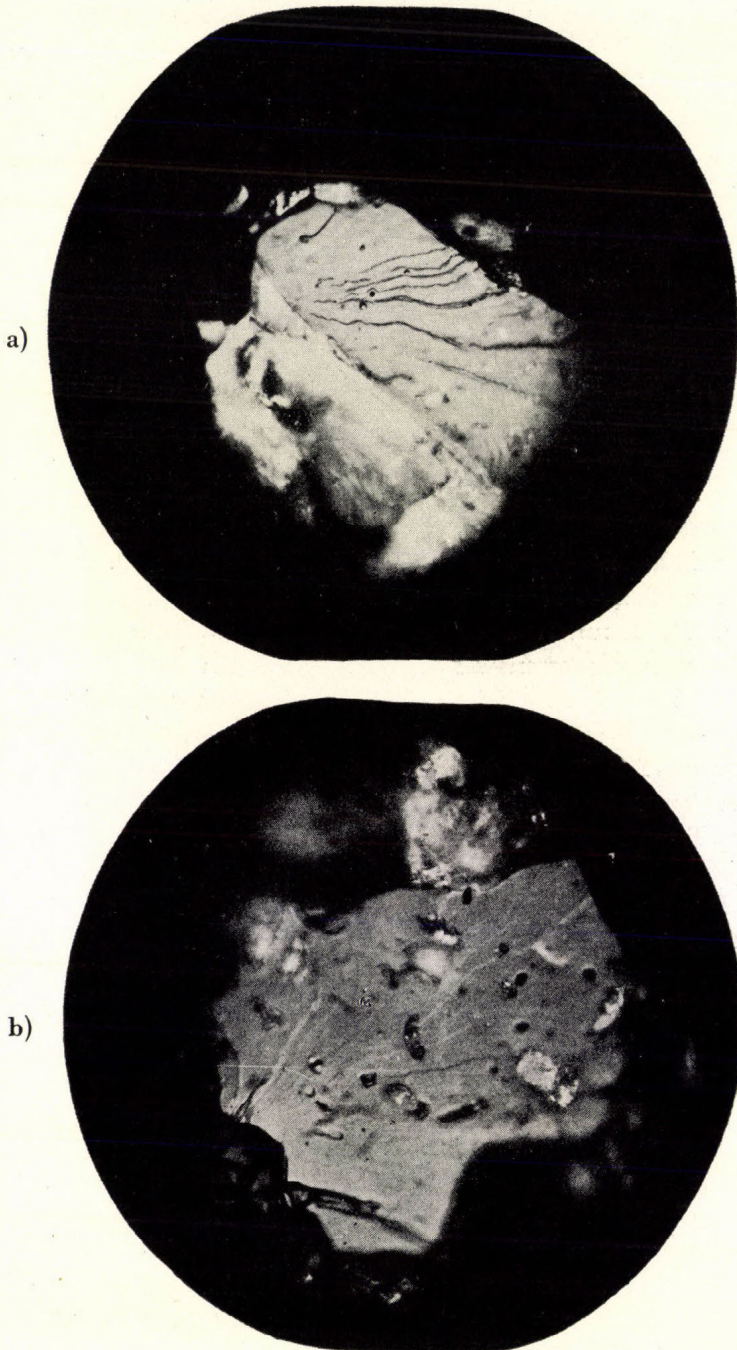
1. Es wurde der Rekrystallisationsmechanismus von NaCl-Pastillen mikroskopisch untersucht.
2. Es bilden sich verhältnismässig grosse und gut reflektierende Kristalle, deren Flächen eine feinere Struktur aufweisen.
3. Versuche zur Deutung der beobachteten Feinstruktur wurden unternommen.
4. Die Frage der Korngrenzen wurde kurz besprochen.

In einer früheren Arbeit wurde über Rekrystallisationsversuche an NaCl-Pastillen, die aus feinem NaCl-Pulver unter hohem Druck hergestellt wurden, berichtet [1]. Es konnten Erholungserscheinungen auf elektrischem und optischem Wege ausgemessen werden, ferner wurden mikroskopische Kornzählungen vorgenommen. Es zeigte sich, dass das durchschnittliche Mass der Rekrystallisation vom angewandten Pressdruck und von der Presstemperatur abhängt. Es wurde festgestellt, dass schon eine kurze Pressdauer (die Herstellung der Pastillen dauerte 60 Sekunden) zu einem bedeutenden Kristallwachstum führt. Höhere Presstemperatur begünstigt den Vorgang. Diese Untersuchungen wurden fortgesetzt. Vom Standpunkt des Kristallwachstummechanismus erhebt sich nun die Frage, auf welche Weise die vielen verschieden orientierten einzelnen Kristalle zu einem einzigen grösseren zusammenwachsen.

1. Wenn man nun das Kristallwachstum aus der festen Phase untersucht, so ist die Tatsache zu berücksichtigen, dass sich bei der Rekrystallisation die Wachstumsbedingungen anders gestalten als beim Wachstum aus der Lösung, der Schmelze oder der Dampfphase. Im letzteren Falle wird der wachsende Kristall von freien, sehr beweglichen Ionen oder Ionenpaaren umgeben, im Falle der Rekrystallisation geht man hingegen von einem Kristallhaufen aus, in dem die Ionendichte annähernd dieselbe ist wie beim Einkristall. Der schnelle Verlauf des Kristallwachstums bei den Pastillen ist nun dadurch erklärbar, dass die Ionen hier in entsprechender Dichte vorhanden sind, und die einzelnen Ionen sich nur einige Ionenentfernungen zu verrücken brauchen, damit die notwendige geometrische Ordnung hergestellt wird.

Das Ausgangsmaterial wurde ebenso behandelt, wie früher. Das im Achatmörser zerriebene NaCl-Pulver wurde in einem Druckbereich von 1000–20 000 kg/cm<sup>2</sup> mit einer Presstemperatur von 20–750 °C zu Pastillen gepresst. Die





*Abb. 1.* Flächen rekristallisierter Einkristalle an frisch gespalteten Pastillenoberflächen.  
1a. Pastille Nr. 26. Pressdruck  $3000 \text{ kg/cm}^2$ , Presstemperatur  $750^\circ \text{ C}$  200x.  
2b. Pastille Nr. 27. Pressdruck  $5000 \text{ kg/cm}^2$ , Presstemperatur  $750^\circ \text{ C}$  200x.



fertigen Pastillen wurden auf dreierlei Weise untersucht. Auf den Pastillenoberflächen wurden gut reflektierende Flächen beobachtet. Wenn diese Flächen mit Oberflächen frisch gespalteter Einkristalle verglichen werden, sieht man, dass die gut reflektierenden Flächen rekristallisierte Einkristalle in der Pastille sind [2]. Dafür sprechen jene feinen Linien, die nur bei Einkristallen beobachtet werden können. Abb. 1a und 1b zeigen solche Flächen, die bei jedem Druck, und bei jeder Presstemperatur zu beobachten sind. Bei Anwendung höheren Druckes und höherer Presstemperatur nimmt jedoch die Zahl und der



Abb. 2. Pastille Nr. 20. Fläche eines rekristallisierten Einkristalles an einer frisch gespalteten Pastillenoberfläche. Pressdruck  $3000 \text{ kg/cm}^2$ , Temperatur  $300^\circ \text{ C}$  800x.

Umfang dieser Flächen zu, dabei werden die rekristallisierten Körner nicht nur grösser, sondern es bilden sich auch bessere Kristalle, hierbei spielt die Presstemperatur eine wichtige Rolle. Abb. 2 zeigt die Fläche eines rekristallisierten Kristalls aus einer Pastille, die mit  $300^\circ \text{ C}$  und  $3000 \text{ kg/cm}^2$  Druck hergestellt wurde. Die Fläche ist nicht so gut wie die Fläche auf Abb. 1a oder 1b. Hingegen zeigt Abb. 3 einen grossen Kristall, der bei einer Presstemperatur von  $750^\circ \text{ C}$  mit  $6000 \text{ kg/cm}^2$  Druck hergestellt wurde.

Zur Untersuchung der Korngrenzen wurden die Pastillen nach dem Spalten poliert, dann in 94%-en Alkohol geätzt. Abb. 4 (4a und 4b) zeigt zwei Pastillenflächen, die poliert und dann geätzt wurden. Diese Behandlung brachte die Korngrenzen, d. h. die Konturen der rekristallisierten Einkristalle gut zum Vorschein. Es ist bemerkenswert, dass die einzelnen Kristallite der Pastille,



die mit  $3000 \text{ kg/cm}^2$  und  $20^\circ \text{ C}$  gepresst wurden viel kleiner sind (Abb. 4a) als die Kristalle jener Pastille (4b), die mit  $10\,000 \text{ kg/cm}^2$  und  $100^\circ \text{ C}$  hergestellt wurde.

2. Zu den weiteren Untersuchungen wurden die Spaltflächen der Pastillen gleich nach dem Spalten in 94%-en Alkohol geätzt. Nach einer solchen Behandlung zeigen die ursprünglich strukturlosen Kristallflächen in der Pastille eine feine Struktur (Abb. 5, 6, 7, 8). Zur Herstellung der diesbezüglichen Mikrophotographien ist zu erwähnen, dass die Spaltflächen der Proben nur selten

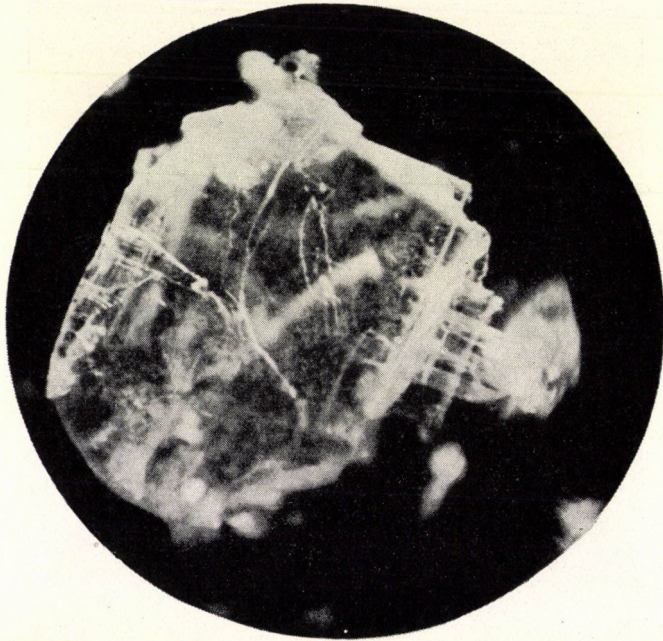
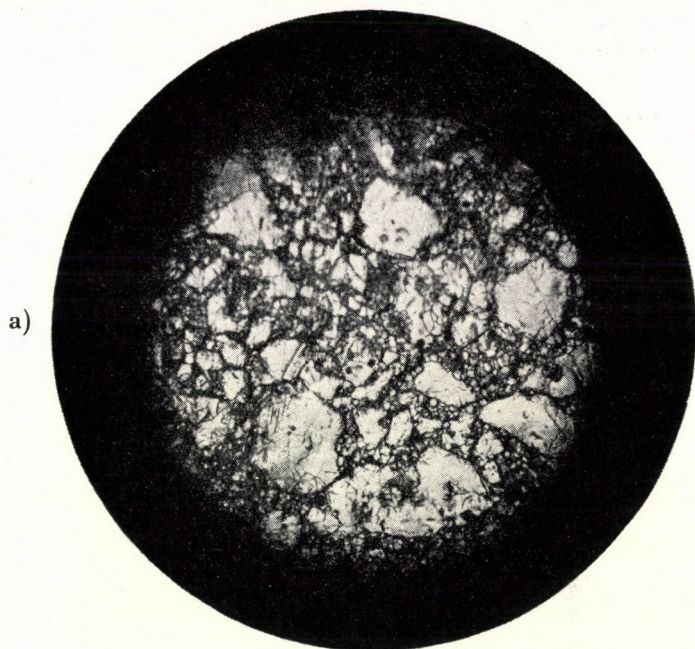


Abb. 3. Pastille Nr. 29. Rekrystallisierter Kristallit nach einstündigem Pressen. Der Kristall wurde aus der Pastille herausgebrochen. Pressdruck  $6000 \text{ kg/cm}^2$ , Presstemperatur  $750^\circ \text{ C}$  65x.

ganz eben waren, daher konnte immer nur ein Teil der beobachteten Pastillenoberflächen scharf eingestellt werden. Die abgebildeten Flächen sahen ursprünglich vor der Ätzbehandlung ganz so aus wie jene, die in den Abb. 1a und 1b wiedergegeben sind. Dass es sich hierbei um Einkristalle handelt, ist durch das einheitliche Reflektieren der Flächen erkennbar. Nach der Ätzbehandlung zeigen diese Flächen feine Ätzfiguren, welche die feinen Verschiedenartigkeiten in der Struktur der Oberflächen zum Vorschein bringen. Die Ätzfiguren bestehen aus kleineren und grösseren quadratischen Flächen, deren Diagonallinien scharf hervortreten. Die quadratischen Flächen sind zueinander parallel gelagert; also sowohl die Seitenlängen wie die Diagonallinien sind zueinander parallel. Die ganze Fläche eines Einkristalls ist mit diesen einheitlich gelagerten quadra-





*Abb. 4.* Polierte und geätzte Pastillenoberflächen.

4a. Pastille Nr. 23. Pressdruck  $3000 \text{ kg/cm}^2$ , Presstemperatur  $20^\circ \text{ C}$  200x.

4b. Pastille Nr. 24. Pressdruck  $10,000 \text{ kg/cm}^2$ , Presstemperatur  $100^\circ \text{ C}$  200x.



tischen Figuren bedeckt. In den photographischen Aufnahmen (z. B. in Abb. 5a) sieht man neben einigen scharf hervortretenden Quadraten teilweise verschwommene Linien, die wegen Unebenheiten der Fläche nicht scharf hervortreten, und die ahnen lassen, dass die ganze Fläche diese feine Struktur enthält.

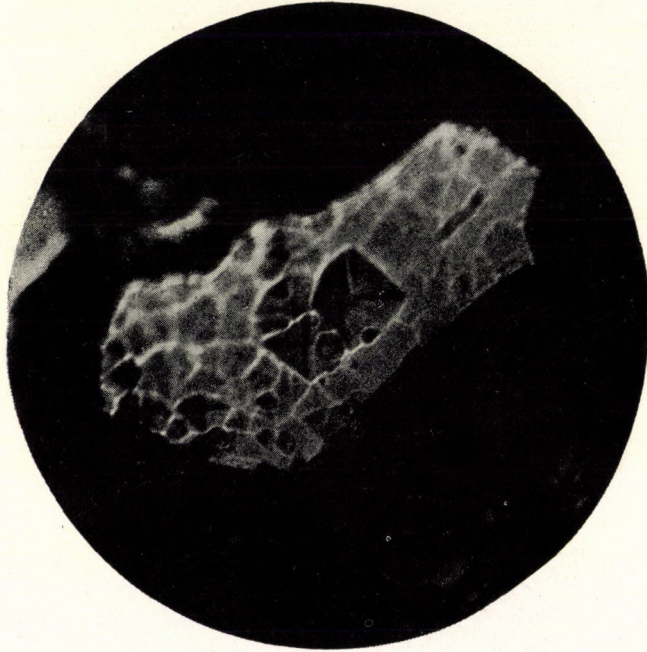


Abb. 5a. Pastille Nr. 25. Oberfläche eines neu gebildeten Kristalls nach Ätzung der Pastillenoberfläche. Die Feinstruktur wird sichtbar, es zeigen sich Würfelflächen mit Querstreifen und Konturen eines Netzsystems. Pressdruck  $3000 \text{ kg/cm}^2$ , Presstemperatur  $700^\circ \text{ C}$   $480\times$ .

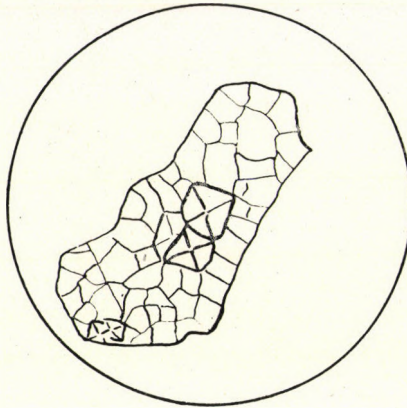
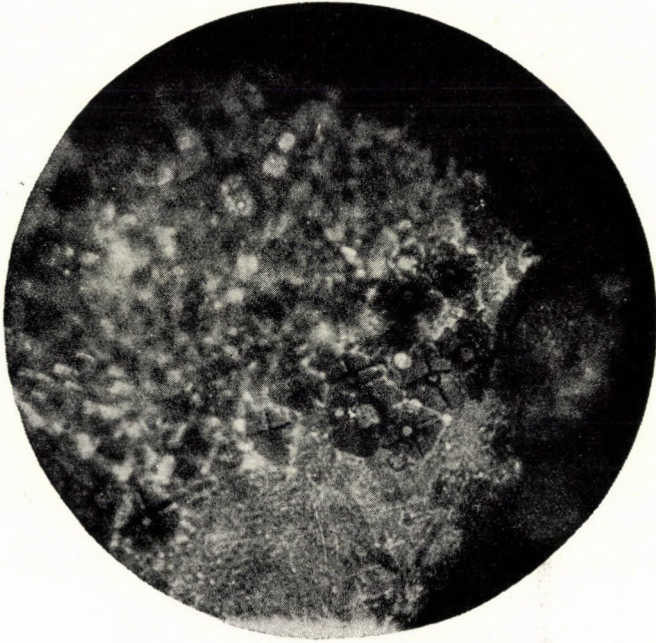
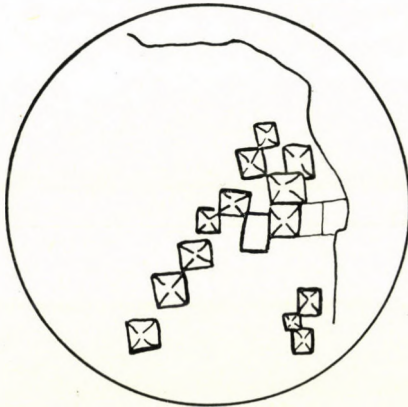


Abb. 5b. Zeichnerische Abbildung der Aufnahme 5a zur richtigen Orientierung.

In Abb. 5b, die die in Abb. 5a wiedergegebene mikroskopische Beobachtung zeichnerisch darstellt, wurden diese nicht allzu dominierenden Linien hervorgehoben. Eine ähnliche Struktur zeigt Abb. 6a und die dazu gehörende Zeichnung Abb. 6b. Abb. 7 und 8 zeigen Einkristalle, die dieselbe Struktur aufweisen.



*Abb. 6a.* Pastille Nr. 42. Weiteres Beispiel der Feinstruktur der neugebildeten Kristallite. Das Bild zeigt einen Flächenteil eines rekristallisierten Einkristalls in der Pastille. Neben den scharf eingestellten Konturen sieht man weitere Konturen ähnlicher Form. *Pressdruck 5000 kg/cm<sup>2</sup>, Presstemperatur 750° C 780x.*



*Abb. 6b.* Zeichnerische Abbildung der Aufnahme 6a zur richtigen Orientierung.



Die besprochenen Abbildungen sind ähnlich einer von *Gyulai* beobachteten Wachstumsfigur [3], die in Abb. 9 wieder abgedruckt ist. Diese Wachstumsfigur stellt die Ausbildung eines Kristallskeletts dar, das aus einer Lösung bei sehr raschem Wachsen entstanden ist. Das Wachsen begann am Rande des Tropfens. Man sieht, dass einzelne Kristalle sich zueinander ordnen, dabei wird die diagonale Richtung der quadratischen Kristalle beibehalten. Man sieht ferner, dass jedes Eck ein wachstumsfähiger Punkt ist an den neue Kristallite mit ihren Diagonalrichtungen anwachsen.

Die Ähnlichkeit der Abb. 9 mit den vier früheren Abbildungen legt den Gedanken nahe, dass wir in den Abb. 5, 6, 7 und 8 die Wachstumsfiguren der

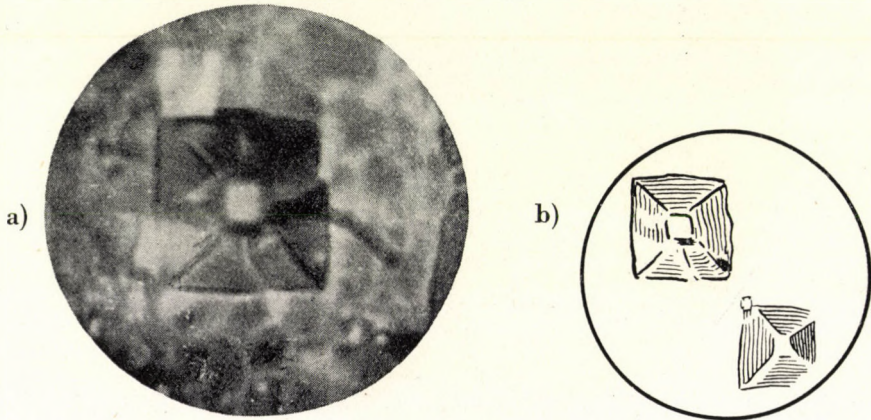


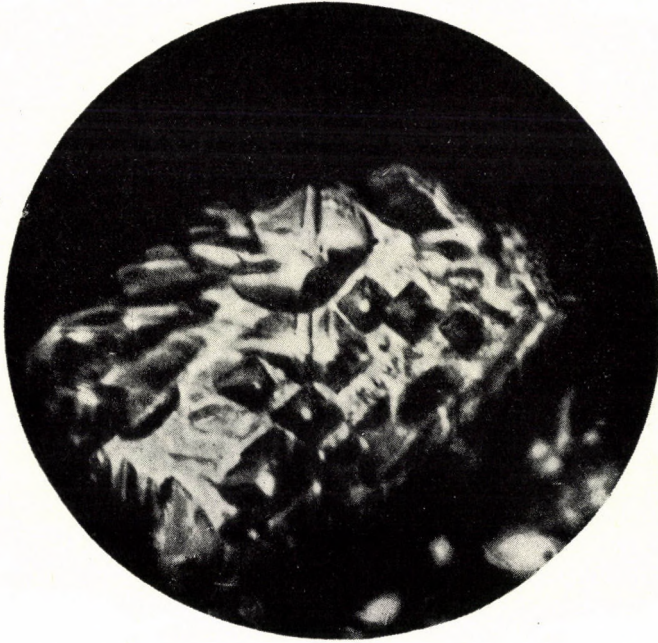
Abb. 7a. Pastille Nr. 40. Abbildung einer typischen Würfelfläche mit Querstreifen. Die beige-fügte Zeichnung zeigt als Fortsetzung in der einen Diagonalrichtung eine ähnliche Fläche. An der Photographie ist nur die linke obere Spitze der letzteren sichtbar. Die ganze Fläche bildet ein Netzsystem, deren einzelne Elemente sich lückenlos zusammenfügen. Pressdruck 3000 kg/cm<sup>2</sup>, Presstemperatur 750° C 780x.

Abb. 7b. Zeichnerische Abbildung der Aufnahme 7a.

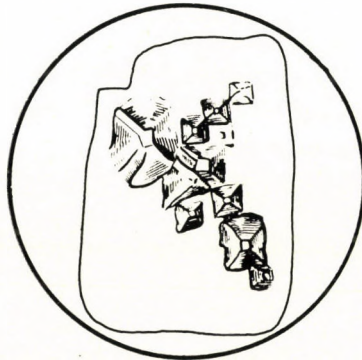
rekristallisierten Einkriställchen vor uns haben. Selbstredend können bei der Rekristallisation nicht einzelne Kristallreihen entstehen, da hier der ganze Raum voll mit Ionen ist, also an jedes Korn von allen Seiten andere Kristallite anwachsen. Man könnte sagen, dass der in Abb. 9 dargestellte Vorgang, der sich quasi immer in linearer Richtung abspielt, bei der Rekristallisation zweidimensional sichtbar wird. In Wirklichkeit spielt sich die Rekristallisation dreidimensional ab, davon ist aber in der Spaltfläche nur der zweidimensionale Teil sichtbar. Bei eingehender Untersuchung der photographischen Aufnahmen sieht man, wie dies schon hervorgehoben wurde, dass die ganze Fläche eines Einkristalles mit den Spuren quadratischer Figuren übersät ist, die aber in den Aufnahmen nicht scharf genug hervortreten. Schliesslich ist es nur eine Frage der Beobachtungstechnik, die besprochene Struktur in jedem einzelnen Ein-



kristall einer rekristallisierten Pastille nachzuweisen. Man kann folglich mit einer gewissen Annäherung behaupten, dass das Wachstum eines Einkristalles in einer Pastille von einem Kern ausgehend schrittweise vor sich geht. Die Rekrystallisation geht vom ersten Kern aus, im weiteren wachsen dann an jedes



*Abb. 8a.* Pastille Nr. 38. Oberfläche eines neu gebildeten Kristalls nach Ätzung der Pastillenoberfläche. Die Feinstruktur zeigt Hauptwachstumsrichtungen, Fortsetzung einer Diagonale, Flächen mit Querstreifen und Zeichen schichtenweisen Wachstums. Pressdruck  $5000 \text{ kg/cm}^2$ , Presstemperatur  $750^\circ \text{ C}$  780x.



*Abb. 8b.* Zeichnerische Darstellung der Aufnahme 8a zur richtigen Orientierung.

Kriställchen gleichgerichtete Nachbarkristallite lückenlos und gleichorientiert an. Der Vorgang spielt sich auch hier sehr rasch ab. Der Pressdruck wurde nur



einige Minuten angelegt, es wurden aber auch Proben mit einer Pressdauer von einigen Sekunden hergestellt. Die Pastillen sehen in jedem Fall gleich aus. Die für später geplanten quantitativen Versuche dürften in dieser Richtung vermutlich unsere Kenntnisse vertiefen; soviel kann jedoch schon jetzt behauptet werden, dass die Ausbildung eines Einkristalles in einer Pastille in raschen, aufeinander folgenden Schritten vor sich geht, und zwar so, dass die kleinen quadratischen Gebilde (wobei es sich um dreidimensionale Gebilde handelt) sich sprungartig nebeneinander reihen. Dieses Bild entspricht — im drei-dimensionalen Vorgang — der *Kossel—Stranskischen* molekulartheoretischen Betrachtung. Beobachten wir jene Wachstumsfiguren von *Gyulai*, die Kristallisation aus Dampf und Lösung zeigen [3] und vergleichen wir dieselben mit den

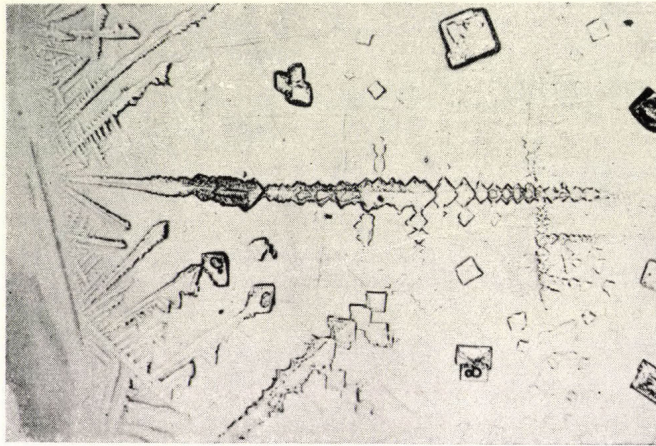


Abb. 9. Diese Abbildung ist der Arbeit *Z. Gyulais*, *Z. Kristallogr.* (A) 91/ 142, 1935, Seite 146 entnommen.

Abb. 5, 6, 7 und 8, die die Wachstumsfiguren bei der Rekristallisation darstellen, so ist die Ähnlichkeit der Abbildung auffallend. Man kann diese Ähnlichkeit dahin deuten, dass das Wachstum in jeder Form (Lösung, Dampf, fester Zustand) nach denselben Regeln vor sich geht, und zwar gemäss den *Kossel—Stranskischen* Regeln. Wir sind uns dabei der Tatsache bewusst, dass sich die *Kossel—Stranskische* Theorie auf einzelne molekulare Vorgänge bezieht, während das Wachsen bei der Rekristallisation schichtenweise vor sich geht. Jedoch muss hier in Betracht gezogen werden, dass, wie *Gyulai* gezeigt hat, die *Kosselsche* Regel auch das schichtenweise Angliedern der Moleküle wiedergibt [4].

3. Es sei noch eine Beobachtung kurz besprochen. In den Abb. 4a und 4b sind Pastillenflächen wiedergegeben, an denen die einzelnen Einkristalle, in der schon besprochenen Weise sichtbar gemacht wurden. Zwischen den einzelnen Kristalliten sieht man kleine Zwischenräume. Man sieht, dass die einzelnen



Kristalle nicht unmittelbar aneinander grenzen, sondern dass zwischen den einzelnen Kristalliten ein gewisser Abstand vorhanden ist. Dies ist bei jedem Druck und bei jeder Temperatur zu beobachten. In der diesbezüglichen Literatur wird nun die Frage vielfach besprochen, dass die Zwischenräume eines polykristallinen Aggregates aus amorphem Material bestehen, bzw. dass den Raum zwischen den einzelnen Körnern unter Umständen eine etwa 100 Atome umfassende Schicht ausfüllt, die wegen der in ihr herrschenden starken Spannung als quasi amorph betrachtet werden kann [5]. In den Abb. 4a und 4b sieht man die einzelnen Einkristalle je einer Pastille. Zwischen den einzelnen Körnern sind die erwähnten Zwischenräume sichtbar. Zur Entstehung der Zwischenräume sei nun folgende Bemerkung gemacht. Aus eigenen noch nicht veröffentlichten Dichtemessungen wissen wir, dass die Dichte der Pastillen geringer ist als die der Einkristalle. Die Dichte der mit grösserem Pressdruck hergestellten Pastillen ist grösser als die Dichte jener Proben, die mit geringerem Druck hergestellt wurden. Bei dem Vorgang der Rekrystallisation, also im Bereich der einzelnen Einkristalle, dichtet sich das Material zusammen, demzufolge zwischen den einzelnen Körnern kleine Zwischenräume entstehen und zwar dort, wo infolge der Schrumpfung des Materials die innere Spannung gleich Null wird. Dort, wo die Spannung aufhört bzw. unter eine gewisse Grenze gefallen ist, hört die intensive innere Berührung zwischen Einkristall und Umgebung auf, und das Wachsen des Einkristalls kommt zum Stillstand. In den Zwischenräumen bleibt also eine grosse Anzahl Kristallsplitter angehäuft, die miteinander nur locker verbunden sind und den Raum lose ausfüllen. Da nun das Ätzen zunächst die schwächsten Teile der Pastillenoberflächen angreift; werden zuerst die lockeren Splitter aufgezehrt, die zwischen den rekrystallisierten Körnern eine Schicht bilden, welche zu keinem der rekrystallisierten Kristalliten gehört. Daher die beobachteten Zwischenräume. Aus diesen Betrachtungen folgt, dass das Vorhandensein einer amorphen oder quasi-amorphen Schicht zwischen den Korngrenzen bei NaCl-Pastillen als unwahrscheinlich betrachtet werden kann.

Die Arbeit wurde im Institut für Experimentelle Physik der Technischen Universität in Budapest mit Mitteln durchgeführt, die die Ungarische Akademie der Wissenschaften zur Verfügung stellte. Aufrichtiger Dank sei dem Leiter des Instituts, Herrn Prof. *Gyulai* für die Anregung der Arbeit und stetige Leitung derselben ausgesprochen. Ebenso danke ich Herrn Mechaniker Karl *Wallentin* für die Herstellung der Pressformen.



## LITERATUR

1. Z. Gyulai—Z. Morlin : Fizikai Szemle, **2**, 4, 1952.
2. Imperfections in Nearly Perfect Crystals. Symposium Held at Pocono Manor. Chapman and Hall, London, 1952. S. 402 und 490.
3. Z. Gyulai : Z. Kristallogr. (A) **91**, 142, 1935 ; Z. Physik, **125**, 1, 1948.
4. Z. Gyulai—S. Bieleck : Acta Phys. Hung. **1**, 199, 1952.
5. R. King—B. Chalmers : Progress in Metal Physics I. Butterworth's Scientific Publications, London, 1949.  
P. Forsyth—G. J. Metcalf—R. King—B. Chalmer : Nature, **158**, 875, 1946.  
A. H. Cottrell : Dislocations and Plastic Flow in Crystals. The International Series of Monographs on Physics. Oxford, Clarendon Press, 1953.

## НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ВОПРОСУ ПРОЦЕССОВ РЕКРИСТАЛЛИЗАЦИИ

З. МОРЛИН

*Резюме*

1. Автор исследовал механизм рекристаллизации таблеток NaCl с помощью микроскопа.
2. Автор установил, что большие хорошо отражающие кристаллы образуются, поверхности которых показывают тонкую структуру.
3. Для исследования тонкой структуры были предприняты новые эксперименты.
4. Вопрос о границах зерен кратко рассматривается.

# QUANTELUNG DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES IN EINER NEUARTIGEN DARSTELLUNG

Von  
P. ROMÁN

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK DER ROLAND EÖTVÖS UNIVERSITÄT,  
BUDAPEST

(Vorgelegt von K. F. Novobáztzy. — Eingegangen: 9. VII. 1954.)

Durch Kombination verschiedener Methoden wird das elektromagnetische Feld mit Hilfe einer einzigen komplexen Grösse beschrieben und gequantelt. Die mit der Erfahrung übereinstimmenden Resultate lassen sich anschaulich leicht deuten.

Es ist bekannt, dass die Quantelung des elektromagnetischen Feldes mehrere Schwierigkeiten in sich birgt. Zu deren Eliminierung wurden verschiedene Versuche gemacht. (S. z. B. *Heisenberg—Pauli* [1], *Fermi* [2], *Chang* [3] u. s. w.) 1938 gab *Novobáztzy* [4] eine sehr erfolgreiche Methode an, die im wesentlichen darauf beruht, dass das skalare Potential im Fourier-Raum durch das Vektorpotential eliminiert wird. Vor kurzem gelang es *Green* und *Wolf* [5] mittels komplexer Kombinationen des Vektorpotentials, die Lagrange-Funktion des elektromagnetischen Feldes auf eine äusserst einfache Form zu bringen. Dieses Verfahren ist aber nur im Falle eines reinen Strahlungsfeldes anwendbar. Im nachstehenden werden wir zeigen, dass das Green und Wolfsche Verfahren mit der Methode von *Novobáztzy* kombiniert es ermöglicht, den kanonischen Formalismus auch im Falle des allgemeinen, auch Ladungen enthaltenden elektromagnetischen Feldes in einer erstaunlich einfachen Form auszuarbeiten. Die nachfolgende Quantelung bietet keine Schwierigkeiten.

Ohne Benützung der Lorentzschen Bedingung kann man die Maxwell'schen Gleichungen in folgende Form bringen:

$$\Delta\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{A} = -4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\Delta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}. \quad (2)$$

Entwickeln wir die Potentiale und die Ladungs- und Stromdichte in üblicher Weise in eine Fourier-Reihe:

$$\Phi = \Omega^{-1/2} \sum_k f_k e^{i\mathfrak{r} \cdot \mathbf{k}} \quad (3)$$

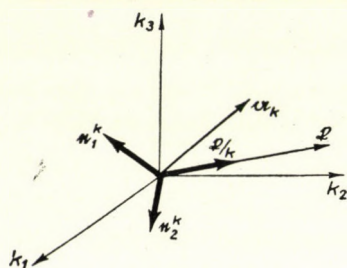


$$\mathfrak{A} = \Omega^{-1/2} \sum_k a_k e^{i\mathfrak{r}r} \quad (4)$$

$$\varrho = \Omega^{-1/2} \sum_k s_k e^{i\mathfrak{r}r}, \quad (5)$$

$$\mathfrak{i} = \Omega^{-1/2} \sum_k i_k e^{i\mathfrak{r}r}. \quad (6)$$

Für das Folgende ist eine spezielle Komponentendarstellung des Koeffizienten  $a_k$  sehr zweckmässig. Wählen wir zwei aufeinander und auf  $\mathfrak{f}$  orthogonale Einheitsvektoren so, dass  $e_1^k$ ,  $e_2^k$  und  $\mathfrak{f}$  ein Rechtssystem bilden. In diesem System hat  $a_k$  die folgende Gestalt:



$$a_k = a_1^k e_1^k + a_2^k e_2^k + a_3^k \frac{\mathfrak{f}}{k}. \quad (7)$$

Unsere erste Aufgabe besteht in einer Umformung des skalaren Potentials im Fourier-Raum. Das können wir nach Novobátzky erreichen. Aus (1) haben wir nämlich

$$f_k = \frac{i}{k^2 c} (\mathfrak{f} \hat{a}_k) + \frac{4\pi}{k^2} s_k,$$

also statt (3) schreiben wir:

$$\Phi = \Omega^{-1/2} \sum_k \left\{ \frac{i}{c k^2} (\mathfrak{f} \hat{a}_k) + \frac{4\pi}{k^2} s_k \right\}. \quad (3')$$

Als nächstes folgt die Eliminierung von  $a_3^k$ , des longitudinalen Anteils in  $a_k$ . Dazu bietet die Eichinvarianz der Feldgleichungen eine Möglichkeit. Diese sind nämlich invariant gegenüber der Transformation

$$\Phi \rightarrow \Phi + \frac{1}{c} \dot{G},$$

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} - \text{grad } G,$$

wo

$$G = \Omega^{-1/2} \sum_k g_k e^{i\mathfrak{k}r}$$

sei. Deshalb haben wir mit (7)

$$\mathfrak{A} \rightarrow \sum_k \left\{ a_1^k e_1^k + a_2^k e_2^k + (a_3^k - i\mathfrak{k}g_k) \frac{\mathfrak{k}}{k} \right\} e^{i\mathfrak{k}r}$$

Es sei

$$g_k = \frac{1}{i\mathfrak{k}} a_3^k,$$

dann treten in der Reihe von  $\mathfrak{A}$  nur die transversalen Komponenten auf, nämlich es wird jetzt

$$a_k = a_1^k e_1^k + a_2^k e_2^k. \tag{8}$$

Wir bemerken, dass die obige Transformation von  $\mathfrak{A}$  in (3') auch schon die richtige Transformation von  $\Phi$  zur Folge hat, wie man leicht nachprüft.

Nach Eliminieren des longitudinalen Feldes bekommt  $\Phi$  selbst eine einfache Gestalt. Nach (8) ist

$$(\mathfrak{k}a_k) = 0, \tag{9}$$

und deswegen kann man das skalare Potential durch die gegebenen Quellen ausdrücken:

$$\Phi = \Omega^{-1/2} \sum_k \frac{4\pi}{k^2} s_k = \int \frac{\rho}{r} dV. \tag{3''}$$

Nun haben wir also zwei unabhängige Veränderliche  $a_1^k$  und  $a_2^k$ , die sich wie Vektorkomponenten transformieren. Wegen der Realität von  $\mathfrak{A}$  gilt

$$a_{-k} = a_k^* \tag{10}$$

das heisst

$$\left. \begin{aligned} a_1^{-k} &= a_1^{k*}, \\ a_2^{-k} &= a_2^{k*}, \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

falls wir verabreden, dass wir zu  $-\mathfrak{k}$  ein Linkssystem zuordnen, also, dass

$$e_1^{-k} = e_1^k; \quad e_2^{-k} = e_2^k.$$

ist.



Definieren wir jetzt, Green und Wolf folgend, die Grösse

$$a_k = a_1^k + ia_2^k \quad (12)$$

Mittels (11) und (12) lauten die inversen Formeln:

$$\left. \begin{aligned} a_1^k &= \frac{1}{2} (a_k + a_{-k}^*), \\ a_2^k &= \frac{1}{2i} (a_k - a_{-k}^*). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Wir konstruieren nun aus den  $a_k$ -s eine einzige Feldfunktion. Es sei

$$\varphi = \Omega^{-1/2} \sum_k a_k e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}. \quad (14)$$

Diese Funktion charakterisiert das Feld eindeutig, da aus ihr rückwärts die elektromagnetischen Potentiale rekonstruierbar sind.

Bevor wir weitergehen, zerlegen wir auch die Fourier-Komponenten der Stromdichte:

$$i_k = j_1^k e_1^k + j_2^k e_2^k + j_3^k e_3^k. \quad (15)$$

Es sei

$$\lambda_k = j_1^k + ij_2^k \quad (16)$$

Mit Hilfe der Realität von  $j$  haben wir in analoger Weise

$$\left. \begin{aligned} j_1^k &= \frac{1}{2} (\lambda_k + \lambda_{-k}^*), \\ j_2^k &= \frac{1}{2i} (\lambda_k - \lambda_{-k}^*). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Definieren wir noch die Grösse

$$I = \Omega^{-1/2} \sum_k \lambda_k e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}. \quad (18)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir die vollständige Lagrange-Funktion konstruieren. Bekanntlich ergeben sich die Feldgleichungen (1), (2) aus

$$L = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{c^2} \dot{\mathfrak{A}}^2 + \frac{2}{c} \dot{\mathfrak{A}} \text{grad } \Phi + \text{grad}^2 \Phi - \text{rot}^2 \mathfrak{A} \right) + \frac{1}{c} j\mathfrak{A} - \rho\Phi \right\} dV. \quad (19)$$

Hierin die Reihenentwicklungen (3''), (4), (5), (6) eingesetzt, erhalten wir mit Rücksicht auf die Realitätseigenschaften der Fourier-Komponenten sowie mit Hilfe von (8) bzw. (15) und (13) bzw. (17), ferner den Definitionen (14) bzw. (18) das äusserst einfache Ergebnis

$$L = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} \dot{\varphi}^* - \text{grad } \varphi \text{ grad } \varphi^* \right) + \frac{1}{2c} (I\varphi^* + I^*\varphi) - \right. \\ \left. - \Omega^{-1} \sum_{k, k'} 2\pi \frac{s_k s_{k'}}{k k'} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \right\} dV. \tag{20}$$

Diese Lagrange-Funktion stimmt, wenigstens äusserlich, mit der Lagrange-Funktion des komplexen skalaren Feldes mit der Ruhmasse Null überein, abgesehen von der letzten unwesentlichen additiven Konstante. Die Feldgleichungen lauten :

und

$$\left. \begin{aligned} \square \varphi &= -\frac{4\pi}{c} I, \\ \square \varphi^* &= -\frac{4\pi}{c} I^*. \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

Die kanonisch konjugierten Feldgrössen sind :

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{8\pi c^2} \dot{\varphi}^* \\ \Pi^* &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^*} = \frac{1}{8\pi c^2} \dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

Die Hamilton-Funktion lautet also :

$$H = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} + \text{grad } \varphi \text{ grad } \varphi^* \right) - \frac{1}{2c} (I\varphi^* + I^*\varphi) \right\} dV + 2\pi \sum_k \frac{s_k s_k^*}{k^2}. \tag{23}$$

Das letzte, von den Feldgrössen unabhängige Glied ergibt die Coulombenergie. Es ist nämlich

$$s_k = \Omega^{-1/2} \int \varrho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dV,$$



und daher

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_k \frac{s_k s_k^*}{k^2} &= 2\pi \Omega^{-1} \iint \varrho(\mathbf{r}) \varrho(\mathbf{r}') \sum_k \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}}{k^2} dV dV' = \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \iiint \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}}{k^2} d\mathbf{k} \varrho(\mathbf{r}) \varrho(\mathbf{r}') dV dV' = \frac{1}{2} \iint \frac{\varrho(\mathbf{r}) \varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV dV', \end{aligned}$$

w. z. b. w.

In ganz ähnlicher Weise können wir auch beliebige andere integrale Feldfunktionen, z. B. den Feldimpuls, mit Hilfe von  $\varphi$  allein eindeutig konstruieren. Als sehr interessant erweist sich z. B. die Berechnung des Spins. Nach der allgemeinen Definition (s. z. B. [6]) ist

$$S_2 = \int \Pi I^{12} \psi dV, \quad (24)$$

worin  $I^{12}$  den Infinitesimaloperator der Drehung um die Z-Achse bedeutet. Zunächst wollen wir diesen berechnen. Da  $a_1^k$  und  $a_2^k$  Vektorkomponenten sind, transformieren sie sich bei der genannten Drehung wie folgt :

$$\left. \begin{aligned} a_1^{k'} &= a_1^k + a_2^k \delta\epsilon, \\ a_2^{k'} &= a_2^k - a_1^k \delta\epsilon. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Also ist

$$a_k' = a_1^k + i a_2^k + (a_2^k - i a_1^k) \delta\epsilon = a_k - i a_k \delta\epsilon, \quad (26a)$$

und ähnlich

$$a_k^{*'} = a_k^* + i a_k^* \delta\epsilon. \quad (26b)$$

Wenn wir jetzt im  $\mathfrak{k}$ -Raum bei jeder einzelnen Partialwelle eine Drehung um die  $\mathfrak{k}$ -Richtung um ein und denselben Winkel  $\delta\epsilon$  vollführen, so transformiert sich  $\varphi$  selbst folgendermassen :

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} \varphi' &= \varphi - i\varphi \delta\epsilon, \\ \varphi^{*'} &= \varphi^* + i\delta\epsilon \cdot \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Übrigens lauten diese Transformationsgleichungen in integrierter Form :

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \varphi e^{-i\epsilon}, \\ \varphi^{*'} &= \varphi^* e^{i\epsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (27')$$

Konstruieren wir aus  $\varphi$  und  $\varphi^*$  eine zweireihige Matrix

$$\psi = \begin{vmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{vmatrix},$$

so sehen wir, dass

$$\psi' = \psi + i \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \psi \delta\varepsilon,$$

also

$$I^2 = i \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (28)$$

ist. Nach (24) ist also :

$$S_k = \int \Pi \Pi^* \begin{vmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{vmatrix} I^2 \begin{vmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{vmatrix} dV = i \int (\Pi^* \varphi^* - \Pi \varphi) dV. \quad (29)$$

Wir bemerken, dass die  $X$  und  $Y$  Komponente des Spins Null ist. Wenn wir nämlich die Drehung nicht um die  $\mathfrak{k}$ , sondern z. B. um die  $e_1^k$  Achse vollziehen, so ist

$$a_1^{k'} = a_1^k,$$

$$a_2^{k'} = a_2^k + a_3^k \delta\varepsilon.$$

Daraus folgt aber, dass diejenigen Matrixelemente von  $I^{23}$ , die auf  $\varphi$  und  $\varphi^*$  wirken, gleich Null sind.

Diese Berechnung des Spins steht in Einklang mit den Resultaten von *Pauli* [7] und *Shirokov* [8], denen zufolge der Spin eines Teilchens mit verschwindender Ruhmasse immer in die Fortpflanzungsrichtung hinweist.

Da das  $\varphi$ -Feld komplex und gegenüber Eichtransformation erster Art invariant ist, erhebt sich die Frage, ob eine «Feldladung» existiert. In bekannter Weise ist

$$e = -i\eta \int (\dot{\varphi}^* \varphi - \dot{\varphi} \varphi^*) dV, \quad (30)$$

dies stimmt aber, abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor mit dem Spin überein, also bekommen wir keine neue Feldgrösse. Dies müssen wir ja auch von vornherein erwarten da, wie z. B. aus (27') ersichtlich ist, bei uns die Drehungsformation mit der Eichtransformation übereinstimmt.

Es ist noch bemerkenswert, dass im vorliegenden Fall der Spin selbst einem Erhaltungsgesetz gehorcht, wenigstens in Abwesenheit von Quellen. Das hängt damit zusammen, dass die Feldgleichungen gegenüber der Trans-



formation (27) auch dann invariant sind, wenn wir die Argumente der Feldfunktionen nicht transformieren.

Im nachfolgenden wollen wir noch kurz die Quantelung des Feldes erledigen. Die Vertauschungsrelationen lauten :

$$[H(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r}')] \equiv \frac{1}{8\pi c^2} [\dot{\varphi}^*, \varphi] = \frac{\hbar}{i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (31)$$

Diese sind erfüllt, falls

$$[a_k^*, a_{k'}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{kk'}, 8\pi c^2.$$

Es sei

$$\gamma = \frac{1}{8\pi c^2} \dot{a}_k^* \quad (32)$$

sodann ist

$$[\gamma_k, a_{k'}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{kk'}. \quad (33)$$

Bestimmen wir jetzt z. B. die Eigenwerte des Strahlungsanteils von  $H$ . Es wird nach (23), (14) und (32)

$$H_0 = \sum_k \left\{ (8\pi c^2) \gamma_k \gamma_k^* + \frac{k^2}{8\pi} a_k a_k^* \right\}.$$

Zur Darstellung der Operatoren  $a_k$  und  $\gamma_k$  führen wir die Operatoren  $c_k$  und  $d_k$  ein, die den Vertauschungsrelationen

$$[c_k, c_{k'}^*] = \delta_{kk'}; \quad [d_k, d_{k'}^*] = \delta_{kk'} \quad (34)$$

genügen (die gemischten Kommutatoren verschwinden). Mit diesen ist

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar c}{|k|}} \left( c_k + d_k^* \right), \\ \gamma_k &= \sqrt{\frac{\hbar |k|}{16\pi c}} i (c_k^* - d_k), \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

und daher

$$H_0 = \frac{\hbar |k| c}{2} \sum_k (c_k^* c_k + d_k^* d_k + c_k c_k^* + d_k d_k^*).$$

Nach (34) ist aber

$$\begin{array}{rcccccl}
 \text{der Eigenwert von } & c_k^* c_k & \text{gleich} & N_k^{(1)}, \\
 \ll & \ll & \ll & c_k c_k^* & \ll & N_k^{(1)} + 1, \\
 \ll & \ll & \ll & d_k^* d_k & \ll & N_k^{(2)}, \\
 \ll & \ll & \ll & d_k d_k^* & \ll & N_k^{(2)} + 1
 \end{array}$$

und deshalb

$$H_0 = \sum_k \hbar |k| c (N_k^{(1)} + N_k^{(2)}) + E_0. \tag{36}$$

Hier sind  $N_k^{(1)}$  und  $N_k^{(2)}$  die Besetzungszahlen von zwei verschiedenartigen Photonenzuständen.

Jetzt folgt die Quantelung des Spins. Gemäss (29), (14), (22) und (35) haben wir

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \sum_k (c_k^* c_k - d_k^* d_k + c_k c_k^* - d_k d_k^*),$$

also ist

$$S'_z = \sum \hbar (N_k^{(1)} - N_k^{(2)}). \tag{37}$$

Wir sehen, dass der Spin geradzahlig ist, wie es sein muss. Ferner bemerken wir, dass die obengenannten zwei verschiedenartigen Photonensorten sich eben im Vorzeichen des Spins unterscheiden. Weiter können wir noch zeigen, dass diese «Polarisation» der Photonenzustände gerade mit der optischen Polarisation der Partialwellen übereinstimmt. Es sei nämlich eine links zirkularpolarisierte Welle durch

$$a_1^k = u_k \cos |k| ct,$$

$$a_2^k = u_k \sin |k| ct$$

dargestellt. Dann ist nach (12) b. z. w. (32), sowie (35)

$$c_k = 0$$

$$d_k = \sqrt{\frac{|k|}{4\pi\hbar c^2}} u_k^* e^{-i|k| ct} \neq 0.$$

Im Falle einer rechts-zirkularpolarisierten Welle gilt alles mutatis mutandis. Daraus sehen wir, dass  $N_k^{(1)}$  die Zahl der rechts-,  $N_k^{(2)}$  die Zahl der links-zirkularpolarisierten Zustände bedeutet w. z. b. w.



Endlich können wir noch den Feldoperatoren  $\varphi$  und  $\varphi^*$  eine sehr anschauliche Bedeutung geben. Man überzeugt sich nämlich mit Hilfe von (29) und der Vertauschungsrelation (31) leicht davon, dass, wenn  $\chi$  einen Zustand mit dem Spineigenwert  $S'_z$  bedeutet, so gehört zum Zustand  $(\varphi\chi)$  ein um  $\hbar$  verminderter Spineigenwert. Ähnlicherweise gilt für  $\varphi^*$  das entgegengesetzte. Also vermehrt der Operator  $\varphi^*$  den Spinwert um 1, und  $\varphi$  erniedrigt ihn um eins. Dies ist schon auch aus der Tatsache zu erwarten, dass, wie gesagt, bei uns der Spin- und der «Ladungsoperator» zusammenfallen.\*

Zusammenfassend wollen wir herausheben, dass das obige Verfahren zur Darstellung und Quantelung des elektromagnetischen Feldes eine bewundernswert einfache und übersichtliche Methode ist, mit sehr übersichtlichen und anschaulich leicht deutbaren Resultaten, und zwar ohne Heranziehung von lästigen Nebenbedingungen. Natürlich erhebt unsere Methode keinen Anspruch auf Lorentzinvarianz.

Abschliessend spreche ich Herrn Dozenten *G. Marx* meinen innigsten Dank aus für die Anregung vorstehender Arbeit und für sehr wertvolle Diskussionen.

#### LITERATUR

1. *W. Heisenberg—W. Pauli*, Z. Phys. **56**, 1, 1929.
2. *E. Fermi*, Rev. Mod. Phys. **4**, 87, 1932.
3. *T. S. Chang*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **43**, 196, 1947.
4. *K. F. Novobátzky*, Z. Phys. **111**, 292, 1938.
5. *H. S. Green—E. Wolf*, Proc. Phys. Soc. A. **66**, 1129, 1953.
6. *G. Marx*, Acta Phys. Hung. **1**, 209, 1952.
7. *W. Pauli*, Handb. d. Phys. XXIV/1, 260.
8. *Л. Ф. Широков*, ЖЭТФ, **21**, 748, 1951.

#### КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОДНОМ НОВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

П. РОМАН

*Резюме*

С помощью сочетания различных методов электромагнитное поле может быть описано и квантовано одной комплексной величиной. Результаты, совпадающие с опытом, могут быть получены наглядно.

\* Die letzten zwei Bemerkungen verdanke ich Herrn Dozenten *G. Marx*.

# CLASSICAL MOTION OF THE NUCLEONS IN A SCALAR MESON FIELD

By

G. SZAMOSI and G. MARX

INSTITUTE FOR PHYSICS OF THE ROLAND EÖTVÖS UNIVERSITY, BUDAPEST

(Presented by K. F. Novobátzky. — Received 29. VII. 1954)

The present paper deals with the classical motion of a point nucleon in a scalar meson field. The motion in a static field can be subjected to exact treatment. The calculations confirm Werle's results obtained for small energy approximation according to which a purely attractive (e. g. Yukawa) potential will lead to repulsion if the absolute value of the potential energy becomes greater than the proper energy. The existence of a repulsive sphere of a radius approximately equal to the nucleon's Compton-wavelength around the nucleon is thereby proved without recourse to any special assumption. A study of the course of motion in time leads, among others, to the result that the particle crosses the boundary of the repulsive region with the velocity of light. In the case of the interaction of several nucleons effects analogous to three-body forces take place.

## 1. Introduction

It is a generally accepted view that relativistic effects play no significant role under the conditions prevailing in the nucleus. This is based on the fact that the binding energy of a nucleon is relatively small compared with the proper energy of it. However, no specified statements on this question are justified until after an examination of the exact relativistic equation of motion of the nucleons in the nuclear field (meson field). At first, the solution must be obviously sought for within the framework of classical theory.

Several authors dealt with the setting up of the equations of motion [1]; in addition to the force exerted on the nucleon by the incoming field they determined the terms arising from the reaction of self-field. Accordingly, the classical relativistic equation of motion is exactly known. Less attention has, however, been paid to the solution of the equations, i. e. to the actual course of the space-time motion. In discussing the relativistic Hamilton-Jacobi equation *Werle* [2] recently pointed out that as long as the sum of the kinetic and potential energies of a particle is small relative to the proper energy, the motion of the particle corresponds to a motion in a potential field with a strong short-range repulsive potential added to the common attractive nuclear potential. This result is most interesting because if it is confirmed the attractive nuclear force must turn into repulsion at a very small distance merely for relativistic reasons. This means that the nucleons are surrounded by a small repulsive sphere which prevents them from approaching each other unlimitedly. It is known that the



existence of such a repulsive sphere was also made probable by *Lévy's* quantum-theoretical considerations [3]. The existence of this short-range repulsion seems to be in agreement with experiment, for by the phenomenological introduction of it *Jastrow* and others [4] were able to explain the results of nucleon-nucleon scattering experiments and other nuclear-physical observations.

By discussing rigorously the solutions of the equation of motion of a nucleon in the classical scalar meson field, this study aims at ascertaining whether in a certain region the meson potential gives rise to repulsion for relativistic reasons. The problems of nuclear physics are typical many-body problems, wherefore the interaction of nucleons too should be investigated as a many-body problem. But as no satisfactory solution of the classical relativistic many-body problem is known, our examination shall also refer to a single point nucleon in a given external meson field. This means that the reaction of the self-field will not be taken into account; a procedure, which, from the point of view of the problems considered, seems permissible.

## 2. The equations of motion with three-dimensional notation

The equation of the meson field generated by nucleons of nucleon charge  $g$ , and described by density-function  $\varrho$  is

$$\square \varphi - \mu^2 \varphi = 4\pi \varrho g. \quad (1)$$

As is known, the energy-momentum-tensor of the meson field is :

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{\delta_{ik}}{8\pi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + \mu^2 \varphi^2 \right).$$

The density of the ponderomotive force acting on the nucleon is

$$f_i = - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = - g \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

whence we obtain for the four-vector of the force acting on the point nucleon

$$F_i = - g \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Taking this into account the equation of motion of the nucleon is :

$$\frac{d}{d\tau} (Mu_i) = - g \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad u_i u_i = -c^2, \quad (2)$$

where  $M$  is the proper mass,  $u_i = dx_i / d\tau$  the four-velocity of the nucleon,  $x_4 = ict$ ,  $c$  denotes the velocity of light, and  $\tau$  a scalar parameter, which is mostly known as «proper time». Introducing the (scalar) potential energy  $g\varphi = V$ , we may write:

$$\frac{d}{d\tau}(Mu_i) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (3)$$

*Novobátzky* [5] has shown that in the case of a force described by a scalar potential energy the rest mass cannot be constant during the motion, for by differentiating and thereafter multiplying the equation of motion (3) by  $u_i / c^2$ , we obtain:

$$\frac{dM}{d\tau} = \frac{1}{c^2} \frac{dV}{d\tau}, \quad M = m + \frac{V}{c^2}. \quad (4)$$

This permits substituting into the equation of motion the constant nucleon mass  $m$  known from mass spectrographic measurements:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \left( m + \frac{V}{c^2} \right) u_i \right] = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (5)$$

Let us rewrite this equation in three dimensional notation. The first three components ( $i = 1, 2, 3$ ) are:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m + \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \right) = -\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{grad } V. \quad (6)$$

The fourth component ( $i = 4$ ) multiplied by  $(-ic)$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2 + V}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (7)$$

Let us assume for a moment that  $V$  is not explicitly dependent on time (the field is static). Then the quantity

$$E = \frac{mc^2 + V}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (8)$$



is constant in time and it is this value which is to be regarded as the energy of the nucleon. In nonrelativistic approximation

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (E - mc^2) = \frac{1}{2} m v^2 + V ,$$

which is precisely the energy expression of the non-relativistic mechanics. In a field depending on time the energy also varies :

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial V}{\partial t} . \quad (9)$$

On taking into account (8) the space components of the equations of motion (7) may be written as follows

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} v \right) = - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{grad } V$$

or on taking (9) into account

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{V}{mc^2}} \left( \text{grad } V + \frac{1}{c^2} v \frac{\partial V}{\partial t} \right) , \quad (10)$$

or in a slightly different form :

$$m \frac{dv}{dt} = - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left( \text{grad} + \frac{1}{c^2} v \frac{\partial}{\partial t} \right) mc^2 \log \left( 1 + \frac{V}{mc^2} \right) .$$

It follows that in the case of small velocities the motion takes place as if the particle moved in a field described by a potential

$$V^* = mc^2 \log \left( 1 + \frac{V}{mc^2} \right) .$$

(This was first pointed out by *Plebansky* [1].) The equation of motion valid for arbitrary energies and velocities is given in (10).

### 3. Motion in a static scalar field

In the case important in actual practice when in the system of reference here employed  $V$  is independent of time, the exact equation of motion (10) can be greatly simplified. Let us use equation (8) to eliminate the velocity, and take into account that owing to (9)  $E$  is now constant. Then (10) can be reduced to the following simple form :

$$m \frac{dv}{dt} = - \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \left( 1 + \frac{V}{mc^2} \right) \text{grad } V, \quad (11)$$

i. e.

$$m \frac{dv}{dt} = - \text{grad } W \quad (12)$$

where

$$W = \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \left( V + \frac{V^2}{2mc^2} \right). \quad (13)$$

This shows that in a static field the nucleon moves exactly as if the Newton force resulting from the potential energy  $W$  were acting on it. Starting from the Hamilton-Jacobi equation in the approximation  $E^* = E - mc^2 \ll mc^2$  this potential expression was first derived by *Werle* [2] in the form :

$$W = V + \frac{V^2}{2mc^2}. \quad (14)$$

The present derivation on the one hand supports *Werle's* result by starting from the equation of motion, on the other abolishes the approximating character of that result by generalizing it over arbitrary energies.

Expression (13) cannot be regarded as a potential in the classical sense since it already contains  $E$ , one of the constants of motion. Yet, the total energy being easily determinable from the experimental conditions in scattering experiments and by measurements in other cases, the simple equation of motion (12) lends itself readily to the discussion of motion, the more as it is identical in form with the equation of motion in classical mechanics, and in addition contains no approximation, but describes motion exactly, relativistically.

From equation of motion (12) one of the integrals of motion is easily obtainable in the form

$$E_W = \frac{1}{2} mv^2 + W, \quad (15)$$

this being, however, perfectly equivalent to the energy integral expressed in (8).



The calculation is further simplified if it is assumed that  $\varphi$  is merely a function of distance  $r$  from the force centre. Then the equivalent potential  $W$  also depends on that distance, and the angular momentum is constant. This means on the one hand that the motion takes place in the plane, and on the other that the absolute value of the angular momentum (which can be expressed by polar coordinates) is constant:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h = \text{const.} \quad (16)$$

Taking this into account, from (8)

$$\frac{dr}{dt} = c \sqrt{1 - \left( \frac{mc^2 + V(r)}{E} \right)^2 - \frac{h^2}{c^2 r^2}} \quad (17)$$

whence the function  $r(t)$  can be readily determined by simple integration. Thus the result is that in a scalar static central field the motion of the nucleon can be subjected to perfectly exact treatment.

From the results obtained interesting conclusions can be drawn. Let us assume that the potential  $V$  is of a purely attractive character, i. e. decreases with decreasing of  $r$ . Then it is obvious from equation (11) that the acceleration in the region  $V > -mc^2$  tends towards the centre of attraction. However, at the point  $r_0$  determined by equation

$$V(r_0) = -mc^2 \quad (18)$$

where according to (4) the proper mass vanishes, the acceleration becomes zero and within this point for values  $r < r_0$ ,  $V < -mc^2$  will then be of opposite direction. Thus we see that in the case of a potential of perfectly attractive character the force centre is likewise surrounded by a repulsive region of a radius  $r_0$ , which is quite independent of the energy or of any other initial condition. (A repulsive region exists only if  $V$  takes a negative value sufficiently great.)

Let us express the velocity from the energy equation (8):

$$|v| = c \sqrt{1 - \left( \frac{mc^2 + V}{E} \right)^2}. \quad (19)$$

Hence we can see that at the point  $r = r_0$  the velocity of the nucleon reaches the velocity of light. This, however, will not cause any difficulty as owing to the simultaneous vanishing of the proper mass the value of inertial mass  $M(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  remains finite and constant.

The nucleon arriving from outside (e. g. in scattering experiments, from the infinite), enters the repulsive zone with the velocity of light. In the repulsive zone the velocity begins to decrease and if the absolute value of the potential becomes great enough it reaches the value :

$$V(r) = -mc^2 - E. \quad (20)$$

Then, in the case of radial motion, the velocity of the particle becomes zero, i. e. at this point the particle turns back. Accordingly, the motion takes place in the following way : the nucleon arriving from the infinite begins to accelerate

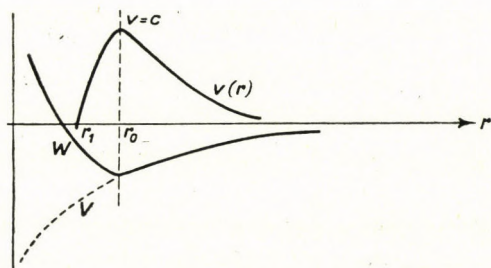


Fig. 1

rapidly as it approaches the force centre, it crosses the boundary of the repulsive sphere with the velocity of light ; in the repulsive zone its velocity decreases and in radial motion if the potential becomes deep enough, it even reaches the value zero. At this point under the influence of acceleration tending outward the particle turns back and recedes into the infinite. The turning point of the nucleon of greater energy lies nearer to the centre of attraction. (See fig. 1.)

#### 4. Examples

Let us first consider the case when the meson field acting on a moving particle is generated by a resting nucleon. Using a scalar meson field we find:

$$\varphi = -g \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad V = -g^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}.$$

On the analogy of «classical electron radius» interpreted by the definition

$$\frac{e^2}{r_e} = m_e c^2$$



let us now introduce the concept of the «classical nucleon radius»\*  $r_0$  according to the definition

$$\frac{g^2}{r_0} e^{-\mu r_0} = mc^2. \quad (21)$$

Considering that  $g > e$ ,  $r_0$  is much smaller than the nuclear force range  $\mu^{-1}$ , wherefore its value is

$$r_0 = \frac{g^2}{mc^2} e^{-\mu r_0} \simeq \frac{g^2}{mc^2} = \frac{g^2}{\hbar c} \frac{\hbar}{mc}. \quad (22)$$

As the observed value of  $g^2 / \hbar c$  is approximately 1,  $r_0$  approximately equals the Compton wavelength of the nucleon, i. e.  $2.10^{-14}$  cm. It will be expedient to calculate in  $r_0$  units.

The velocity of the nucleon as the function of  $r$  is determined by the formula (19). In nucleon-nucleon scattering problems the initial kinetic energy of the nucleon is very small as compared to the proper energy,  $E \simeq mc^2$ , thus we can write :

$$v(r) = c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{g^2}{mc^2} \frac{e^{-\mu r}}{r}\right)}. \quad (23)$$

(If in the infinite the initial velocity  $v_0 = 0$ , the formula is exact.) The boundary of the repulsive zone, where the velocity of light is reached, is at the point characterised by the equation

$$g^2 \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} = mc^2, \quad (24)$$

that is, just at the classical nucleon radius, at a distance of  $2.10^{-14}$  cm from the nucleon regarded as fixed, thus affording additional justification of the denomination «classical nucleon radius». (This is about  $1/6$  part of the range of the nuclear force.) The radially moving nucleon approaches the fixed nucleon over the distance defined by the equation :

$$g^2 \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} = 2mc^2$$

which, according to

$$r_1 = \frac{1}{2} r_0 e^{\mu(r_0 - r_1)} \simeq \frac{1}{2} r_0,$$

\* In fact, to be more consistent,  $r_0$  should be denominated double nucleon radius.

is about one half of the classical nucleon radius. Evidently, in the case of non-relativistic velocities two nucleons can never approach each other nearer than the half of the classical nucleon radius.

The motion therefore proceeds as follows. Travelling towards the nucleon regarded as fixed the incident nucleon being attracted begins to accelerate at about  $10^{-12}$  cm. Within  $10^{-13}$  cm the rate of acceleration increases intensely until at about  $2 \cdot 10^{-14}$  cm the nucleon reaches the velocity of light. Here acceleration must of course stop; on arrival in the repulsive zone the nucleon loses its velocity and at  $10^{-14}$  cm turns back and once more traverses the region of the velocity of light. Gradually losing its velocity it finally recedes into the infinite. We can easily form a notion of motion in time if we consider that in the  $r \leq r_0$  region  $e^{-\mu r} < 1$ . Taking (21) into account we can therefore write:

$$v(r) = \frac{dr}{dt} = c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2}.$$

Hence we obtain by simple integration:

$$t = t_0 \pm \frac{r_0}{2c} \left[ \left( \frac{2r}{r_0} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \left( \frac{2r}{r_0} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

( $t_0$  means the instant of arriving at the turning point  $r_1 = r_0/2$ .) From this we can see that the time of staying in the repulsive zone is considerably less than  $10^{-23}$  sec; during this short time the velocity of the nucleon changes from  $c$  to 0, and again to  $c$ . (If the motion is not radial the particle has an initial angular momentum and of course reversion sets in sooner, e. g. in  $p$ -scattering, at about the boundary of the repulsive zone.)

\*

As a second example let us consider the motion of a nucleon in the field of an extensive nucleus. Assuming again a scalar meson field, the potential energy in the field of a nucleus regarded as being of constant density, mass number  $A$  and radius  $R$ , will on the basis of (1) be

$$V(r) = - \frac{3Ag^2}{\mu^2 R^3} \left[ 1 - (1 + \mu R) e^{-\mu R} \frac{sh\mu r}{\mu r} \right].$$

In good approximation it is  $\mu R \simeq A^{1/3}$ . In the case of  $g = 20e$  the repulsive zone occupies a considerable part of field in the inside of a heavy nucleus. In the case of  $g \simeq 5e$ , however, the repulsive zone does not exist, the equivalent



potential (10) does not differ from the potential  $V(r)$  and relativistic effects do not yield considerable correction.

\*

In the previous example we assumed the nucleons to be uniformly distributed in the nucleus. Let us now examine the motion of a nucleon in a field which is generated by other fixed point nucleons. The potential energy of the moving nucleon at the point  $r$  in the field of the nucleons fixed at  $r_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) is:

$$V(r) = -g^2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\mu |r-r_i|}}{|r-r_i|}.$$

According to 3, the nucleon moves as if in a field described in classical mechanics by a potential

$$\begin{aligned} W(r) = & \sum_{i=1}^n \left( -g^2 \frac{e^{-\mu |r-r_i|}}{|r-r_i|} + \frac{g^4}{2mc^2} \frac{e^{-2\mu |r-r_i|}}{|r-r_i|^2} + \right. \\ & \left. + \sum_{i \neq j} \frac{g^4}{mc^2} \frac{e^{-\mu |r-r_i|}}{|r-r_i|} \frac{e^{-\mu |r-r_j|}}{|r-r_j|} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Hence we obtain the important result that the relativistic motion in a static meson-field is equivalent to a classical motion in which, in addition to two-body forces, there arise three-body-forces: the presence of a third nucleon weakens the attraction between the two. (However, this effect is only significant at distances less than  $10^{-13}$  cm.)

Incidentally, a simple calculation can prove that if applied quantum-mechanically in the Hartree or Hartree-Fock approximation the relativistic effects treated herein lead to three-body forces without any further assumption.

### 5. Role of the proper time parameter

In the basic equation of motion (3) the derivatives of the coordinates with respect to the parameter  $\tau$  are involved. The relation of  $\tau$  to the coordinate time  $t$  is:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (26)$$

Hence we see that at the boundary of the repulsive zone at a distance equivalent to the classical nucleon radius, where  $|v| = c$ ,  $d\tau/dt$  becomes zero, thus at this



point the equation of motion becomes indeterminate. The question arises whether this indeterminateness might not be concealing the fact that the nucleon does not enter the repulsive zone  $r < r_0$  at all. To decide it, let us introduce the four-momentum  $p_i = Mu_i$ , the components of which may be written as :

$$p = (p_1, p_2, p_3) = \frac{E}{c^2} v, \quad p_4 = \frac{i}{c} E .$$

Although in the case of  $r = r_0$ ,  $u_i$  becomes divergent,  $p_i$  does not so because in the static field  $E = \text{const}$ . Let us write the equation of motion (5) in the form

$$dp_i = F_i d\tau.$$

This form does not contain any more singularity, but shows that the nucleon traverses the boundary point  $r = r_0$  with a constant momentum; here  $d\tau$  being zero. This means that the nucleon enters the repulsive zone with inertial motion without acceleration, as we have assumed on the basis of (11) in 3.

According to (26) the parameter  $\tau$  is to be taken equivalent to the proper time of the particle, i. e. the time measured by the clocks in the inertial system of reference instantaneously moving with the particle. The differential quotient of (26) is in general positive, but if the nucleon enters the repulsive zone the numerator in the expression of the energy constant in formula (8) previously becomes zero. The denominator must likewise become zero. This means that (26) is negative in the repulsive zone,  $\tau$  decreases with the increase of  $t$ . This paradoxical result would appear to show that in the repulsive zone the clock of the nucleon goes backwards, which would lead to absurdities in reasoning, to the inversion of cause and effect. Let us, however, consider the following: we cannot speak of the clock of the accelerating nucleon but only of the clock of the inertial system of reference, the velocity of which is equal to the instantaneous velocity  $v$  of the nucleon. According to the universally valid formula of the Lorentz transformation the relation between the time  $\tau^*$  measured by this clock and between our time  $t$  is :

$$\frac{d\tau^*}{dt} = \left| \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right| .$$

This  $\tau^*$  is to be called proper time, which is always the monotonous function of  $t$  and generally agrees with the parameter  $\tau$  of the equation of motion ( $\frac{d\tau^*}{d\tau} = 1$ ); at the boundary of the repulsive zone  $\frac{d\tau^*}{d\tau}$  becomes indefinite (0) and



within the repulsive zone  $\tau^*$  differs from  $\tau$ , ( $d\tau^*/d\tau = -1$ ). The equation of motion can also be written with  $\tau^*$  :

$$\frac{d}{d\tau^*} \left( M \frac{dx_i}{d\tau^*} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

This form has the disadvantage that the definition  $p'_i = M \frac{dx_i}{d\tau^*}$  cannot be used because when the nucleon passes through the repulsive zone it would result in changing the sign of the energy  $E' = \frac{c}{i} p'_i$  in static field too, which is always constant otherwise. The equation of motion can also be written in the following form :

$$p_i = |M| \frac{dx_i}{d\tau^*}, \quad \frac{dp_i}{d\tau^*} = - (\text{sign } M) \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

This clearly reveals the cause of the repulsion occurring despite the attractive potential: the repulsion is the result of the rest mass becoming negative.

## 6. The Hamiltonian

The Hamiltonian theorem [1] underlying the equation of motion is :

$$\delta \int (-mc^2 - V) d\tau = 0.$$

Proceeding to the system time, we obtain the following Lagrangian :

$$L = -(mc^2 + V) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (27)$$

Hence the canonical momentum (which is equal to the dynamical momentum) :

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{m + \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v.$$

Finally setting up the Hamiltonian in the usual way :

$$H = pv - L = \frac{mc^2 - V}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{(mc^2 + V)^2 + (pc)^2}. \quad (28)$$

$H$  is equal to the total energy  $E$ . The canonical equations naturally lead to the equations of motion (10). On the other hand we have seen that with the Werle approximation ( $E^* = E - mc^2 \ll mc^2$ , but  $v$  and  $V$  are arbitrary) the field equations are equivalent to the equation of motion (12), (14) of non-relativistic form, the Hamiltonian of which can be readily obtained :

$$H_W = \frac{p^2}{2m} + W, \quad H_W = E_W.$$

Of course, the two Hamiltonians are not independent of each other, there exists the following relation :

$$H = mc^2 \sqrt{1 + \frac{2H_W}{mc^2}},$$

thus in the Werle approximation :

$$H = mc^2 + H_W + \dots = mc^2 + \left( \frac{p^2}{2m} + W \right) + \dots,$$

Evidently the Hamiltonian leads likewise to the equivalent potential, a recognition particularly important from the viewpoint of the transition to quantum mechanics. (See also appendix.) It is essential to know that this is a concomitant to the Werle approximation. If we take the usual non-relativistic approximation ( $v^2 \ll c^2$ ,  $V \ll mc^2$ ), then

$$H = mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{V}{mc^2}\right)^2 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} = mc^2 + V + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{8m^3 c^2} - \frac{1}{2} \frac{pVp}{m^2 c^2} + \dots$$

$$L = -mc^2 \left[ 1 - \frac{V}{mc^2} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{v^2 V}{2mc^4} - \frac{1}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right].$$

(The ... mean terms of order  $c^{-4}$ .) In this approximation the potential term  $V^2/2mc^2$  resulting in repulsion no longer appears.

(It is interesting to note that the last term is equivalent to one of the terms in the Hamiltonian obtainable from the Dirac-equation by means of non-relativistic approximation, which has no classical analogue in the case of electromagnetic field).

\*

It is worth while to consider the equations of motion resulting from the Lagrangian (27) in non-relativistic approximation. Thereby we may



obtain an illustrative picture of the phenomenon of mass defect. Expanding the Lagrangian (27) in a power series of  $v^2/c^2$  and, as usual, keeping only the terms  $c^{-2}$ , we get

$$L = -mc^2 \left[ 1 + \frac{V}{mc^2} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{v^2 V}{2mc^4} - \frac{1}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right].$$

Hence the second-order equations in the approximation used :

$$\frac{m + \frac{V}{c^2} + \frac{1}{2} m \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{2c^2}} \ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } V,$$

or

$$M' \ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } V$$

where :

$$M' = m \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{V}{mc^2} \right),$$

which expression gives a demonstrative picture of the mass defects arising in the attractive zone of nuclear forces and of the role of kinetic energy.

## 7. Motion in a combined electromagnetic and meson field

Let us consider a particle acted upon by a scalar field and an electromagnetic field (proton). The covariant equation of motion is :

$$\frac{d}{d\tau} (Mu_i) = -g \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{e}{c} F_{ik} u_k.$$

Hence we obtain again :

$$M = m + \frac{g\varphi}{c^2}, \quad m = \text{const.}$$

We consider the motion in a static field, which is described by a time-independent meson-potential  $\varphi$  and an electric potential  $\Phi$ , the vector potential

is vanishing. Thus the first three components of the equations of motion are :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m + \frac{g\varphi}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \right) = - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} g \text{ grad } \varphi - e \text{ grad } \Phi, \quad (29)$$

whereas the fourth component accounts for the conservation of energy

$$E = \frac{mc^2 + g\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\Phi, \quad \frac{dE}{dt} = 0. \quad (30)$$

From the latter equation :

$$|v| = c \sqrt{1 - \left( \frac{mc^2 + g\varphi}{E - e\Phi} \right)^2}.$$

Hence it is evident that the presence of electromagnetic field does not influence the occurrence of characteristic relativistic repulsion. The nucleon may accelerate until it attains the velocity of light, in the point  $g\varphi = -mc^2$ , whence it goes over to the repulsive zone. In radial motion the turning point is at the distance determined by the equation

$$g\varphi - e\Phi = -mc^2 - E.$$

With the aid of the energy formula (30) the equation of motion (29) can also be written in the following form :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E - e\Phi}{c^2} v \right) = - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} g \text{ grad } \varphi - e \text{ grad } \Phi.$$

It is rather striking to observe that while the expression of mass proceeding that of velocity under the sign of differentiation with respect to time contains the mass equivalents of the rest and kinetic energies as well as of the meson potential energy, but there does not appear in it the mass equivalent to the electric potential energy. In contrast to the other energy forms, in this case the Coulomb energy does not lead to mass-defects.\*

\*

\* Exact treatment of the problem of mass-defect is possible only within the ranges of the relativistic many-body-problem.



Effects similar to those treated here arise in the case of a nucleon moving in a pseudoscalar meson field. We shall revert to them in a subsequent paper, where we also wish to treat the problem of radiative reaction.

\*

We wish to express our thanks to Doz. *J. Werle* and Doz. *J. Plebanski* (in Warsaw) for valuable discussions initiating the above investigations. We are also indebted to Prof. *K. F. Novobátzky* and to Prof. *L. Jánossy* for valuable help in solving important problems of principle which arose during the calculations.

### Appendix

#### *Equivalent potential in quantum mechanics*

On the basis of the relativistic Hamilton-operator (27) we can readily obtain the quantum-mechanical equation of state of a particle of zero spin, which moves in the scalar-field :

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{1}{\hbar^2 c^2} (mc^2 + V)^2 \psi = 0. \quad (31)$$

Let us proceed to the stationary energy-eigenvalue equation. Taking into account that in a stationary state  $\psi$  depends on time in the form

$$\psi(xyzt) = \psi(xyz) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \quad (32)$$

and introducing the non-relativistic energy according to

$$E^* = E - mc^2 \quad (33)$$

after simple substitution we get :

$$E^* \left( 1 + \frac{E^*}{2mc^2} \right) \psi = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \left( V + \frac{V^2}{2mc^2} \right) \right] \psi.$$

Passing over to the Werle-approximation ( $E^* \ll mc^2$ ,  $\mathfrak{v}$  and  $V$  are arbitrary) :

$$E^* \psi = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + W \right] \psi, \quad (34)$$

which is the non-relativistic Schrödinger equation with the Werle potential in place of the potential energy.

For the description of a particle (nucleon) of  $\frac{1}{2}$  spin moving in the scalar field we can use the Dirac equation resulting as the «linearisation» of (31):

$$\left[ \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\hbar c} (mc^2 + V) \right] \psi = 0.$$

The equation can be transformed to non-relativistic form in the well-known manner by setting up the following equation:

$$\frac{1}{2m} \left[ \gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{\hbar c} (mc^2 + V) \right] \left[ \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\hbar c} (mc^2 + V) \right] \psi = 0.$$

Taking into account the commutation relation of the  $\gamma_i$ -s, and equations (32) and (33), we get:

$$E^* \left( 1 + \frac{E^*}{2mc^2} \right) \psi = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \left( V + \frac{V^2}{2mc^2} \right) - \frac{g\hbar}{2mc} \gamma_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] \psi. \quad (34)$$

Returning to the Werle-approximation this again leads to the classical energy-eigenvalue equation of the form of (34) containing the equivalent potential  $W$  instead of  $V$ , apart from a new energy-term depending on the spin. This term, the existence of which was first pointed out by *Plebanski* [1], is in the meson-field the analogue of the energy-term leading to the magnetic moment of the electron and it results in spin-orbit interaction.

Thus it is evident that the relativistic term leading to short-range repulsion also occurs in quantum mechanics.

#### REFERENCES

1. *H. J. Bhabha*, Proc. Roy. Soc. A **178**, 314, 1941.  
*H. J. Bhabha—Harish-Chandra*, Proc. Roy. Soc. A. **185**, 250, 1946.  
*P. Havas*, Phys. Rev. **87**, 309, 1952; **93**, 882, 1954.  
*J. Plebanski*, private communication.
2. *J. Werle*, Bull. Acad. Sci. Polon. III. **1**, 281, 1953.
3. *M. M. Lévy*, Phys. Rev. **84**, 441, 1951.
4. *R. Jastrow*, Phys. Rev. **81**, 165, 1951.  
*G. Szamosi*, Acta Phys. Hung. **4**, 155, 1954.
5. *K. F. Novobátzky*, Ann. Phys. VI. **11**, 285, 1953.



## ДВИЖЕНИЕ НУКЛЕОНА В СКАЛЯРНОМ МЕЗОННОМ ПОЛЕ

Г. САМОШИ и Г. МАРКС

*Резюме*

В работе рассмотрено классическое движение точечного нуклеона в скалярном мезонном поле. Уравнение движения в статическом поле может быть решено совершенно точно. Расчеты подтверждают результаты Верле, относящиеся к приближению малых энергий. Эти результаты показывают, что и в случае чисто притягивающего потенциала (например, в случае потенциала Юкава), возникают отталкивающие силы, если значение потенциальной энергии становится больше, чем энергия покоя. Таким образом, без всякого специального предположения получается существование отталкивающих сил, радиус действия которых совпадает с комптоновской длиной волны. Исследование временного хода движения приводит к тому, что частица должна проходить через границу отталкивающей области со скоростью света. В случае взаимодействия многих нуклеонов появляются эффекты, связанные с силами типа трех тел.

# INVESTIGATION OF A NEW QUANTUM-MECHANICAL METHOD OF APPROXIMATION

By

R. PAUNCZ

INSTITUTE OF THEORETICAL PHYSICS OF THE UNIVERSITY, SZEGED

(Presented by P. Gombás. — Received 10. IX. 1954)

*Moffitt's* quantum-chemical approximate method was investigated on hand of a simple model compound ( $H_2$ -molecule). The application of *Moffitt's* correction to a weaker approximate function gives good results, however, the use of a more correct approximate function which corresponds to the basic idea of the method, gives a much worse result. We can draw no decisive conclusion regarding the method; the example, however, shows that we must regard the results obtained by the method with some caution. On the basis of the calculations it was evident that the use of a more correct ionic function gives a much weaker result, thus it is not correct to interpret the ground state of the  $H_2$ -molecule as a superposition of homopolar and ionic states.

## Introduction

The central problem of quantum chemistry is the search for function types from which by use of the variation method we can get functions well approximating the wave-function of the molecule. In principle all complete orthogonal series of functions which satisfy the prescribed symmetry and boundary conditions, are equally suited, because by applying the Ritz-method, and selecting sufficient members, the eigenvalue or eigenfunction can be approximated to the desired accuracy. From the practical point of view, however, particularly in the case of complicated molecules, the speed of convergence of the series is extremely important. In the selection of the suitable form of the function, considerations based on physical or chemical experience can give useful hints.

Recently a new method gained in importance in the theoretical investigation of atoms and molecules, in which the wave function is approximated by the linear combination of given configurations. This method was applied by *Jucis* [1] and *Boys* [2] with success to the case of atoms by improving the *Hartree-Fock* method. In the investigation of molecules, a further development of the molecular orbital method lead to a similar result. [3], [4] In the simplest version of the latter the function of the molecule is given as a product of one-electron functions (molecular orbital). A further step is achieved if, conforming to the wave mechanical Pauli-principle, antisymmetry is required in the coordinates of all electrons. The condition can automatically be fulfilled if we search for the function of the molecule in form of *Slater-determinants*; each determinant corresponds to a configuration, that is the electrons are dis-



tributed in molecular spin-orbitals. Generally one determinant corresponding to a single configuration is not sufficient for a good approximation of the wave-function, thus the task is the investigation of the linear combination of different configurations. If we search for the molecular orbital in the form of a linear combination of atomic orbitals, then the method in this form is totally equivalent to that version of the electron-pair method, in which beside the homopolar function types, functions corresponding to different degree of ionicity are also used.

In the use of the linear-combination of configurations (configuration-interaction method) a serious drawback arises from the fact that the number of configurations increases extremely rapidly with increasing numbers of electrons and we have no criterion as to which configurations are important and which can be neglected. The practical use of the method is greatly affected by its weak convergence.

In this situation the initiative of *W. Moffitt* is very interesting, who proposes a new method modifying in some respect the configuration interaction method, and improving its convergence.

#### Outline of the Moffitt method

Using thermochemical data *Moffitt* points out that the total energy of the molecule differs but little from the sum of the energies of the atoms constituting the molecule. Therefore the use of a perturbation calculation is justified, which starts from the states of the atoms as being infinitely far from each other so that their interaction can be treated as a perturbation. The state of the molecule is approximated in the following manner by the linear combination of functions constructed from the different states (including the different ionicity) of the atoms which are very remote from each other.

Let us denote the wave function corresponding to the states of the  $i$ -th atom by  $\Phi_i^\alpha$ ,  $\Phi_i^\beta$ , . . . In the starting state the atoms are infinitely far from each other, at the  $i$ -th atom there are  $n_i$  electrons ( $n_i \geq Z_i$ , because we take into account ionic states too,  $Z_i$  is the charge of the nucleus). Let atom  $a$  be in the state  $\alpha$ , atom  $b$  in the state  $\beta$  etc., ( $\alpha$ ,  $\beta$  . . . denote the totality of quantum numbers characterizing a state), then the wave-function, representing this state of the system is :

$$\Pi_{ab\dots e}^{\alpha\beta\dots\epsilon} = \Phi_a^\alpha(1\dots n_a) \Phi_b^\beta(n_a + 1\dots n_a + n_b) \dots \Phi_e^\epsilon(\dots n). \quad (1)$$

The eigenfunction of the Hamiltonian of the starting state is then :

$$H^\circ = H_a + H_b + \dots + H_e, \quad (2)$$



where  $H_i$  means the Hamiltonian of the  $i$ -th atom. We have

$$H^\circ \Pi_{ab\dots e}^{\alpha\beta\dots\epsilon} = W_{ab\dots e}^{\alpha\beta\dots\epsilon} \Pi_{ab\dots e}^{\alpha\beta\dots\epsilon}, \quad (3)$$

$$H_a \Phi_a^\alpha = w_a^\alpha \Phi_a^\alpha \quad (4)$$

and

$$W_{ab\dots e}^{\alpha\beta\dots\epsilon} = w_a^\alpha + w_b^\beta + \dots + w_e^\epsilon. \quad (5)$$

We call the functions obtained by the antisymmetrization of the product functions «composite atomic functions» and denote them by  $\Psi_{ab\dots e}^{\alpha\beta\dots\epsilon}$ . In the following we denote the single composite atomic functions briefly by  $\Psi_A, \Psi_B, \dots$ .

The program outlined above cannot be fulfilled in practice, because, apart from the H atom, we do not know the exact atomic wave functions. We are forced to use approximate atomic functions, in connection with them, however, serious problems arise. The best atomic functions at present available (*Hartree-Fock* method) give very well the values of physical quantities connected with the density distribution of the atom, but the term values are reproduced less exactly and reliably. The error connected with the latter is 2–5 eV and this is of the same order of magnitude as the binding energy of the molecule. So if we calculate the elements of the energy matrix ( $H_{AB} = \int \Psi_A^* H \Psi_B d\tau$ ) by means of «composite» functions constructed from the approximate atomic functions, the same order of deviation is possible in the matrix elements from those calculated by means of exact atomic functions, and this fact will strongly affect the convergence of the method.

To overcome this difficulty *Moffitt* separates the energy matrix into atomic and interaction parts. If we use composite functions constructed from exact atomic functions, this separation is the following:

$$H_{AB} = H_{AB}^\circ + V_{AB}, \quad (6)$$

where  $H^\circ$  is the Hamiltonian corresponding to the starting state,  $V$  the part representing the interaction term  $V = H - H^\circ$ . Taking into account that  $H^\circ \Psi_B = W_B \Psi_B$  this can be written as follows:

$$H_{AB} = M_{AB} W_B + V_{AB} \quad (7),$$

where

$$M_{AB} = \int \Psi_A^* \Psi_B d\tau.$$

*Moffitt* remarks that the approximate atomic functions give the density distribution fairly well, only the atomic term values cannot be calculated correctly. He points out that the correlation effects which are the main cause of this deviation are much stronger in the atomic than in the interaction part. On this basis he suggests that the  $W_B$  values should be given from atomic spectroscopy and the approximate atomic functions used only in the calculation of  $V_{AB}$  and  $M_{AB}$ . (We denote the matrix elements calculated by means of the



approximate atomic functions with  $\sim$  to distinguish them from the exact values.)

$$\bar{H}_{AB} = \tilde{M}_{AB} W_B + \tilde{V}_{AB}. \quad (8)$$

The  $H_{AB}$  obtained is not Hermitian, thus we must construct the following matrix :

$$\bar{\bar{H}}_{AB} = \frac{1}{2} (\bar{H}_{AB} + \bar{H}_{BA}^*). \quad (9)$$

The determination of the coefficients of the linear combination can be carried out by solving the following secular equations :

$$\sum C_B (\bar{\bar{H}}_{AB} - E \tilde{M}_{AB}) = 0. \quad (10)$$

The possible energy values are determined by the roots of the secular determinant :

$$|\bar{\bar{H}}_{AB} - E \tilde{M}_{AB}| = 0. \quad (11)$$

The separation outlined above is not favourable because it does not permit the use of the spatial symmetry of the molecule for the possible factorization of the secular equations or the secular determinant. To eliminate this defects *Moffitt* suggests an alternative separation :

$$\tilde{V}_{AB} = \tilde{H}_{AB} - \tilde{M}_{AB} \tilde{W}_B. \quad (12)$$

By  $\tilde{H}_{AB}$  is meant the matrix element of the energy matrix calculated by means of the approximate functions,  $\tilde{W}_B$  is the element of the asymptotic energy matrix obtainable from the former if the atoms are infinitely separated. By substituting into (8) and (9) and taking into account that  $\tilde{H}_{AB}$  and  $\tilde{M}_{AB}$  are elements of a Hermitian matrix, we calculate in the secular equations with the following energy matrix :

$$H_{AB} = \tilde{H}_{AB} + [\tilde{M}_{AB} (W_B - \tilde{W}_B) + (W_A - \tilde{W}_A) \tilde{M}_{AB}]. \quad (13)$$

This method has the special advantage that it permits an immediate connection with the calculations performed up till now, because the  $\tilde{W}_A, \dots$  can be made to correspond to the starting functions of the method of *Heitler-London-Slater-Pauling*, to that end we must correct the  $\tilde{H}_{AB}$  matrix relating to them by supplementary members. In the latter, besides the elements of the metric matrix



( $\tilde{M}_{AB}$ ), the  $W_B$  taken from atomic spectroscopy and the  $\tilde{W}_B$  calculated by means of the approximate functions are necessary.

Moffitt applied the new method with success to the investigation of the oxygene, ethylene and benzene molecules [7], [8], [9]. In these cases, however, it was necessary to use additional simplifications which are independent of the basis of the method and which are difficult to control. (Core electrons, the potential due to  $\sigma$  electrons, etc.) It seems interesting therefore to see the applicability of the method in a case, where all the necessary calculations can be performed accurately. For this purpose of model-compound the  $H_2$ -molecule seems to be the best.

### Application of Moffitt's method to the $H_2$ -molecule

From the point of view of the application of Moffitt's method the ratio of the binding energy to the total energy of the molecule is decisive. In the case of the  $H_2$ -molecule the binding energy is 4,74 eV and the total energy 31,93 eV, the ratio is approximately equal to 15%, thus the method could be applied. In the case of greater molecules this fraction is smaller, and the use of the perturbation calculation is more justified. This means that the investigation relating to the  $H_2$ -molecule refers to the limit of the applicability of Moffitt's method.

According to the basic idea of the method we must construct the starting functions from the eigenfunctions of the different states of the atoms thought as infinitely separated. The case of the  $H_2$ -molecule is special insofar as here both the ground and the excited states possess exact atomic functions and as regards the ionic state we have approximate functions, which give the energy of the  $H^-$ -ion very correctly. As the function of the ionic state needs special examination, we select first an approximate function for the ionic state which figures in the literature and examine the results obtained by the application of Moffitt's correction to this case.

The simplest possibility is to follow in our investigation the calculation of Weinbaum [15], where the state of the molecule is approximated by the homopolar + ionic functions :

$$\psi = c_1 [u_a(1) u_b(2) + u_a(2) u_b(1)] + c_{11} [u_a(1) u_a(2) + u_b(1) u_b(2)], \quad (14)$$

where

$$u_a(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-a_1}, \quad u_b(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-b_1}. \quad (15)$$

$a_1, a_2$  mean the distances from nucleus  $a, b_1, b_2$  the same from nucleus  $b$ , relating to the first or second electron. We are using in the following atomic units. Let us introduce the following notations :



$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1 &= u_a(1) u_b(2), & \tilde{\psi}_2 &= u_a(1) u_a(2), \\ \tilde{\psi}_3 &= u_a(1) u_a(2), & \psi_4 &= u_b(1) u_b(2).\end{aligned}\quad (16)$$

$\tilde{\psi}_1$  and  $\tilde{\psi}_2$  are exact eigenfunctions of the Hamiltonian of the starting state in which the two atoms are infinitely separated and the 1 electron can be found at atom  $a$ , the 2 at atom  $b$ , or the electrons exchange their places. The corresponding Hamiltonians are as follows:

$$H^{01} = -\frac{1}{2} \Delta_1 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{2} \Delta_2 - \frac{1}{b_2} \quad (17)$$

$$H^{02} = -\frac{1}{2} \Delta_1 - \frac{1}{b_1} - \frac{1}{2} \Delta_2 - \frac{1}{a_2}. \quad (18)$$

$\tilde{\psi}_3$  and  $\tilde{\psi}_4$ , however, are not eigenfunctions even in the case of infinite distance of the atoms. If for example both electrons are at atom  $a$  and atom  $b$  infinitely remote, then the energy calculated by means of the  $\tilde{\psi}_3 = u_a(1) u_a(2)$  function and with the Hamiltonian

$$H^{0a} = -\frac{1}{2} \Delta_1 - \frac{1}{2} \Delta_2 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{r_{12}} \quad (19)$$

deviates by 4,5 eV from the exact energy value of the  $H^-$  ion representing the ionic state.

The application of the twofold version of Moffitt's method to this case means the following:

a.) Corresponding to each  $\tilde{\psi}_i$  the Hamiltonian of the  $H_2$ -molecule can be separated in the following form:  $H^{0i} + V^{0i}$ . The explicit form of  $H^{01}$ ,  $H^{02}$  and  $H^{0a}$  was given further above,  $H^{0b}$  can be constructed in an analogous manner. We calculate the elements of the energy matrix figuring in the secular equations using formulae (8) and (9).  $W$  is a diagonal matrix, its elements are as follows:

$$W_1 = W_2 = 2E_H = -1 \text{ (a. u.)}, \quad W_3 = W_4 = -0,52641 \text{ (a. u.)}^*$$

b.) We must use formula (13), the elements of  $W$  are given above. The elements of the asymptotic energy matrix calculated from the approximate atomic functions are the following:  $\tilde{W}_1 = \tilde{W}_2 = -1 \text{ (a. u.)}$ ,  $\tilde{W}_3 = \tilde{W}_4 = -0,375 \text{ (a. u.)}$ . After determining the elements of the energy matrix, the calculation is carried out in the conventional manner. The results of the calculation are collected in Fig. 1 and Table 1. In the Figure there are given besides the experi-

\* In the case of the  $H^-$  ion it is customary to regard as exact value  $(-0,52641 \text{ a. u.})$  [11] that calculated quantum-mechanically by *Hylleraas*, the experimental value being very uncertain.

mental potential curve the results of the uncorrected calculation of Weinbaum and the results obtained by the twofold version of Moffitt's method.

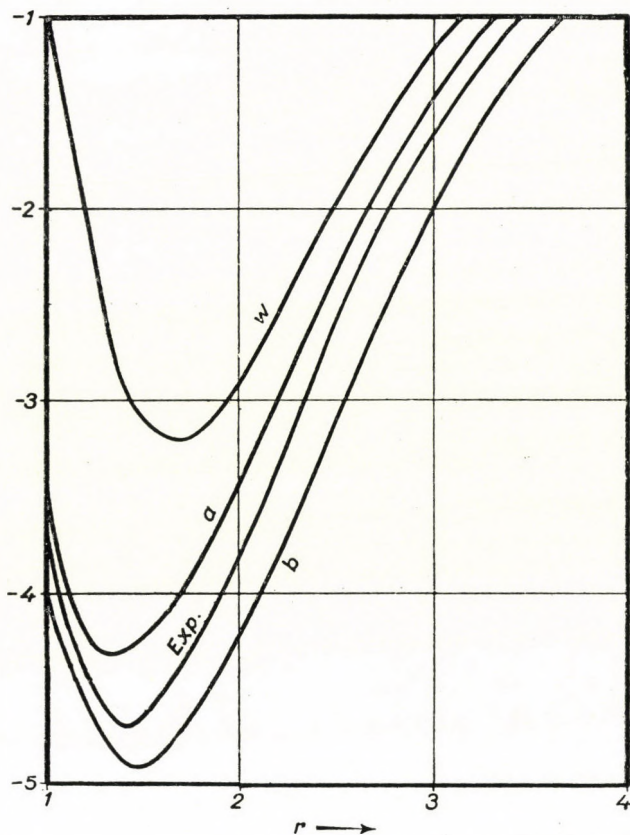


Fig. 1.

TABLE I

	$R_m$ (a. u.)	$D$ (eV)
Weinbaum .....	1,677	3,218
Moffitt <sup>a</sup> .....	1,400	4,346
Moffitt <sup>b</sup> .....	1,50	4,940
Exper. ....	1,40	4,740

The inspection of the results shows, that the application of Moffitt's method improved the result significantly. Both potential curves approximate very well the experimental one. Particularly close is the result obtained with version *b*. The fact that the energy value lies lower than the experimental one, does not mean a contradiction to the basic principle of the variation calculus



insofar as our calculation is not an exact variation method as we have modified single matrix elements.

The question can be raised, however, whether our good result is a consequence of the fact that we have taken into account the right energy value in the ionic term or whether it is fortuitous. We can decide the question as we know an approximate function referring to the  $H^-$  ion, the corresponding energy of which deviates only by 0,06 eV from the exact value. This function is the following [12]:

$$\psi_a(1, 2) = \frac{z^3}{\pi} e^{-z(a_1+a_2)} [1 + c_1 r_{12} + c_2 (a_1 - a_2)^2]. \quad (20)$$

Thus if we use in the ionic part  $\psi_a(1, 2)$  for  $u_a(1)u_a(2)$  both conditions to get the ionic energy term with good approximation are fulfilled, and we can perform exact variation calculations.

The calculation can be carried out along conventional lines, the only difficulty consisting in the new integrals presenting themselves in great numbers. We give in the appendix the formulae for the integrals not figuring hitherto in the literature.

The results of the calculation are collected in Table II. For the purpose of comparison we give the results of two other calculations (from these the first is due to Scherr [13]) in which the ionic function is substituted by relatively simpler ones which give a relatively weaker energy value for the  $H^-$  ion.

TABLE II

$\psi_a(2)$ (ionic part of the approximate wave function)	$R_m$ (a · u)	$D$ (eV)	
	H <sub>2</sub> molecule		
$\frac{z^3}{\pi} e^{-z(a_1+a_2)}$	1,491	3,436	I
$\frac{z^3}{\pi} e^{-z(a_1+a_2)} [1 + c_1 r_{12}]$	1,558	3,254	II
$\frac{z^3}{\pi} e^{-z(a_1+a_2)} [1 + c_1 r_{12} + c_2 (a_1 - a_2)^2]$	1,589	3,230	III

An inspection of the results reveal many interesting features. In spite of the use of functions properly approximating the ionic energy, the value obtained for the binding energy is but a little better than the results of Weinbaum's calculation, in which he used  $z = 1$  both in the homopolar and in the ionic member.

\* As preliminary calculations had shown that the values of the single integrals depend very sensitively on the value of the exponent, it was necessary to obtain the value of the exponents and that of the coefficients  $c_1$  and  $c_2$  with higher accuracy than they were known. Table III collects these values.

TABLE III

$\psi_a(1, 2)$	$z$	$c_1$	$c_2$	H <sup>-</sup> energy (eV)
$\frac{z^3}{\pi} e^{-z(a_1+a_2)}$	0,6875	—	—	- 12,859
$\frac{z^3}{\pi} e^{-z(a_1-a_2)} (1 + c_1 r_{12})$	0,8257264	0,4933512	—	- 13,842
$\frac{z^3}{\pi} e^{-z(a_1-a_2)} [1 + c_1 r_{12} + c_2 (a_1-a_2)^2]$	0,76885	0,318013	0,124718	- 14,291
$\frac{1^3}{\pi} e^{-(a_1+a_2)} \equiv u_a(1) u_a(2)$	1	—	—	-9,52
Exact value :				- 14,352

We can compare the results of our calculation with the variation calculations using one or two variable parameters, in which the function form is completely analogous. These values are shown in Table IV.

TABLE IV

$$u_a^z(1) = \frac{z^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-za_1}, \quad \psi = [u_a^z(1) u_b^z(2) + u_a^z(2) u_b^z(1)] + \mu [u_a^z(1) u_a^z(2) + u_b^z(1) u_b^z(2)]$$

		$z$	$\mu$	$R_m$ (a.u.)	$D$ (eV)
<i>Heitler-London-Sugiura</i>	[14]	1	0	1,68	3,216
<i>Wang</i>	[15]	1,159	0	1,45	3,75
<i>Weinbaum</i>	[16]	1,193	1	1,38	3,455
<i>Weinbaum</i>	[10]	1,193	0,256	1,417	4,026
Experiment		—	—	1,40	4,74

The variation method using the correct ionic member gives a result a little better than the method of *Heitler-London-Sugiura*, or the simplest version of the homopolar+ionic method due to *Weinbaum*. In both cases the  $z$  figuring in the exponential is equal to one.

The result is essentially weaker than in those cases where  $z$  (effective nuclear charge) figures as a variation parameter. Among the calculations using one parameter *Wang's* calculation gives a better result. With the given function form the best value is obtained by that calculation of *Weinbaum*, in which  $z$  and  $\mu$  are variation parameters.



### Discussion of the results of calculations; conclusions

We can draw no unambiguous conclusions from the results of the calculations as regards the applicability of Moffitt's method. If we take namely into account the original idea of the method, we must use besides the ground and ionic states the excited states too. This is especially plausible in the case on the  $H_2$ -molecule, where the energy of that starting state, where the one electron is in the lowest atomic orbital and the other is in the first excited orbital, is  $-0,625$  (a.u) thus it is lower than the energy of the ionic state  $-0,52641$  (a.u) which we have taken into account. We intend to return to the investigation of this problem in a subsequent communication.

Although we can make no decisive statement as regards the method, still we can draw some conclusions from the calculations made.

We can state that the results of Moffitt's method must be regarded with some caution. Our result shows that applying the correction to a much worse approximate function we get an astonishingly good result, in the case, however, where we used a good approximate function conforming to the original idea of the method, our result was much weaker.

The result of this investigation throws some light upon the real role the ionic member plays in the approximate function. In the quantum-chemical literature the idea appears very often according to which the ground state of the  $H_2$ -molecule can be explained as the superposition of homopolar and ionic states. If we compare the results obtained by the three ionic functions, we see that the last result was the weaker, the most correct was the  $H^-$  function. From this we must conclude that the idea mentioned above cannot be correct as the function better approximating the ionic state gives the worse result as regards the binding energy of the  $H_2$ -molecule.

Comparing the data of Table IV the question arises whether it is worth while to adopt as starting functions the eigenfunctions of atoms which are infinitely separated. The fact that the variation of the effective nuclear charge improves the results in both cases so effectively, draws the attention to the possibility that in quantum-chemical calculations one must to a greater degree than hitherto make use of the effective nuclear charge as variational parameter. In the single orbitals figuring in different configurations one has to use different effective nuclear charges and although this implies considerable difficulties in the evaluation of the integrals, one has to examine, whether this method does not lead to a faster convergence in the approximation of the function of the molecule. We hope to return to investigations of this kind.

\*

I would like to express my sincere gratitude to docent *J. I. Horváth* for the discussion of the conclusion drawn from the results of the calculations, to

*E. Szelei, G. Álló and L. Vasvári* for their help in the numerical computation, to *L. Varga and J. Wilhelm* for controlling the formulae of the integrals.

### Appendix

The new integrals occurring in the computations can be divided into three groups :

a)  $\int [u_a^z(1) u_a^z(2)]^2 r_{12}^n f(a_1 a_2 b_1 b_2) d\tau, d\tau_2$ .      Notation : "D"

b)  $\int u_a^z(1) u_b^z(1) u_a^z(2) u_b^z(2) r_{12}^n f(a_1 a_2 b_1 b_2) d\tau, d\tau_2$ .      Notation : "E"

c)  $\int u_a(1) u_b(2) u_a^z(1) u_a^z(2) r_{12}^n f(a_1 a_2 b_1 b_2) d\tau, d\tau_2$ .      Notation : "M"

In all the three integral types we denote the  $f(a_1 a_2 b_1 b_2)$  in the following manner : the factors figuring in the numerator are written at the right top beside the sign of the integral type, and the ones in the denominator are put at the bottom.

$$\left. \begin{matrix} (a_1 - a_2)^2 \\ (b_1 - b_2)^2 \end{matrix} \right\} \text{ are denoted briefly by } \left. \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} \text{ For example :}$$

$$\int u_a^z(1) u_b^z(1) u_a^z(2) u_b^z(2) \frac{a_1 (b_1 - b_2)^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 = {}^{-1} E^{a_1 B} .$$

Moreover we use the following notations :

$$\varrho = Rz , \quad a = \frac{R}{2} (1 + z) , \quad \beta = \frac{R}{2} (1 - z) ,$$

$$\gamma = 1 + z , \quad r = 1 + R , \quad \bar{r} = 1 - R .$$

The evaluation of the integrals can be carried out in two ways :

a.) In the integrals, which contain only three out of the variables  $a_1, a_2, b_1$  and  $b_2, r_{12}$  can figure as the 4-th integration variable.

b.) In the other integrals we can use *Neumann's* expansion series

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{2}{R} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\infty} D_{\tau\nu} Q_{\tau}^{\nu}(\lambda_+) P_{\tau}^{\nu}(\lambda_-) P_{\tau}^{\nu}(\mu_1) P_{\tau}^{\nu}(\mu_2) \cos \nu (\varphi_1 - \varphi_2) ,$$



where

$$D_{\tau 0} = 2\tau + 1 \quad D_{\tau \nu} = (-1)^\nu 2(2\tau + 1) \left\{ \frac{(\tau - \nu)!}{(\tau + \nu)!} \right\}^2.$$

$\lambda_+$  and  $\lambda_-$  is the bigger or the smaller resp. of the  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ ,  $\lambda$  and  $\mu$  are ellipsoidal coordinates.

$$\lambda = \frac{a+b}{R}, \quad \mu = \frac{a-b}{R}.$$

$P_\tau^v$  and  $Q_\tau^v$  mean Legendre polynomials of the first and second kind. Carrying out the integration we use the following auxiliary quantities:

$$W_\tau^v(m, n, a) = \int_1^\infty \int_1^\infty e^{-\alpha(\lambda_1 + \lambda_2)} Q_\tau^v(\lambda_+) P_\tau^v(\lambda_-) \lambda_1^m \lambda_2^n (\lambda_1^2 - 1)^{\frac{v}{2}} (\lambda_2^2 - 1)^{\frac{v}{2}} d\lambda_1 d\lambda_2,$$

$$G_\tau^v(m, a) = \int_{-1}^1 e^{-\alpha x} x^m P_\tau^v(x) (1 - x^2)^{\frac{v}{2}} dx,$$

$$B_n(a) = \int_{-1}^1 e^{-\alpha x} x^n dx, \quad A_n(a) = \int_1^\infty e^{-\alpha x} x^n dx,$$

$$C_n(aR) = \int_0^R e^{\alpha x} x^n dx, \quad D_n(aR) = \int_0^R e^{-\alpha x} x^n dx,$$

The values of the integrals  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $G_\tau^v(m, a)$  and  $W_\tau^v(n, m, a)$  can be found in tables [17].

The new integrals that are necessary for carrying out the calculation, are as follows:

$$1. \quad {}^1D_{b_1}^A = \frac{1}{z^2} \frac{1}{8y} \left\{ 77 - e^{-y} [y^4 + 2y^3 + 16y^2 + 12y + 112] + e^{-2y} [5y + 35] \right\}, \quad y = 2\varrho.$$

$$2. \quad {}^{-1}E^A = \frac{1}{z} \frac{\varrho^7}{6300} \left\{ 105 W_0^0(0,0) - 315 W_0^0(0,2) - 525 W_0^0(0,4) - \right. \\ \left. - 175 W_0^0(1,1) + 1050 W_0^0(1,3) + 1575 W_0^0(2,4) - 1575 W_0^0(3,3) - \right. \\ \left. - 189 W_1^0(0,0) + 630 W_1^0(0,2) - 525 W_1^0(2,2) + 120 W_2^0(0,0) - \right. \\ \left. - 140 W_2^0(1,1) - 36 W_3^0(0,0) \right\}.$$

$$3. {}^{-1}E^{a_1} = \frac{\varrho^6}{180} \left\{ 5 W_0^0(0,1) - 15 W_0^0(0,3) - 15 W_0^0(1,2) + 45 W_0^0(2,3) + 4 W_2^0(0,1) \right\}.$$

$$4. {}^{-1}E^{a_1 \cos \gamma_a} = \frac{\varrho^6}{180} \left\{ (-10 W_0^0(0,1) + 30 W_0^0(1,2) + 9 W_1^0(0,1) - 15 W_1^0(0,3) - 9 W_1^0(1,2) + 15 W_1^0(2,3) + 4 W_2^0(0,1) - 3 W_1^1(0,1) - 15 W_1^1(1,2)) \right\}.$$

$$5. {}^{-1}E^{Aa_1} = \frac{\varrho^8}{z^2 25200} \left\{ (210 W_0^0(0,1) - 35 W_0^0(0,3) - 945 W_0^0(1,2) - 525 W_0^0(0,5) + 525 W_0^0(1,4) + 1050 W_0^0(2,3) + 1575 W_0^0(2,5) - 1575 W_0^0(3,4) - 378 W_1^0(0,1) + 630 W_1^0(0,3) + 630 W_1^0(1,2) - 1050 W_1^0(2,3) + 240 W_2^0(0,1) - 280 W_2^0(0,3) - 72 W_3^0(0,1)) \right\}.$$

$$6. {}^{-1}E^{Ba_1} = \frac{1}{z^2} \frac{\varrho^8}{25200} \left\{ 210 W_0^0(0,1) - 595 W_0^0(0,3) - 525 W_0^0(0,5) - 385 W_0^0(1,2) + 525 W_0^0(1,4) + 1050 W_0^0(2,3) + 1575 W_0^0(2,5) - 1575 W_0^0(3,4) - 378 W_1^0(0,1) + 630 W_1^0(0,3) + 630 W_1^0(1,2) - 1050 W_1^0(2,3) + 240 W_2^0(0,1) + 280 W_2^0(0,3) - 560 W_2^0(1,2) - 72 W_3^0(0,1) \right\}.$$

$$7. {}^{-1}E^{Aa_1 \cos \gamma_a} = \frac{1}{z^2} \frac{\varrho^3}{25200} \left\{ -490 W_0^0(0,1) + 700 W_0^0(0,3) + 420 W_0^0(1,2) + 1750 W_0^0(1,4) - 2100 W_0^0(2,3) + 666 W_1^0(0,1) - 735 W_1^0(0,3) - 525 W_1^0(0,5) - 729 W_1^0(1,2) + 315 W_1^0(1,4) + 840 W_1^0(2,3) + 525 W_1^0(2,5) - 525 W_1^0(3,4) - 140 W_2^0(0,1) + 140 W_2^0(0,3) + 240 W_2^0(1,2) - 280 W_2^0(1,4) - 36 W_3^0(0,1) - 36 W_3^0(1,2) + 66 W_1^1(0,1) - 105 W_1^1(0,3) - 525 W_1^1(1,4) + 525 W_1^1(2,3) - 30 W_2^1(0,1) + 70 W_2^1(0,3) + 4 W_3^1(0,1) \right\}.$$



$$\begin{aligned}
 8. \quad {}^{-1}E^{Ba_1 \cos \gamma_a} = \frac{1}{z^2} \frac{\varrho^8}{25200} \left\{ -490 W_0^0(0,1) - 700 W_0^0(0,3) + 1820 W_0^0(1,2) + \right. \\
 + 350 W_0^0(1,4) - 700 W_0^0(2,3) + 666 W_1^0(0,1) + 105 W_1^0(0,3) - \\
 - 525 W_1^0(0,5) - 1569 W_1^0(1,2) + 1155 W_1^0(4,1) + 525 W_1^0(2,5) - \\
 - 525 W_1^0(3,4) - 140 W_2^0(0,1) + 700 W_2^0(0,3) - 320 W_2^0(1,2) + \\
 + 280 W_2^0(1,4) - 560 W_2^0(2,3) - 36 W_3^0(0,1) - 36 W_3^0(1,2) + \\
 + 66 W_1^1(0,1) + 315 W_1^1(0,3) - 525 W_1^1(1,2) - 525 W_1^1(1,4) + \\
 + 525 W_1^1(2,3) - 30 W_2^1(0,1) - 70 W_2^1(0,3) + 140 W_2^1(1,2) + \\
 \left. + 4 W_3^1(0,1) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad {}^{-1}E^{AB} = \frac{1}{z^3} \frac{\varrho^9}{176400} \left\{ 1848 W_0^0(0,0) - 9660 W_0^0(0,2) + 8085 W_0^0(0,4) - \right. \\
 - 3675 W_0^0(0,6) + 2940 W_0^0(1,1) - 18620 W_0^0(1,3) + 14700 W_0^0(1,5) - \\
 - 16415 W_0^0(2,2) - 40425 W_0^0(2,4) + 11025 W_0^0(2,6) + \\
 + 29400 W_0^0(3,3) - 44100 W_0^0(3,5) + 33075 W_0^0(4,4) - \\
 - 3780 W_1^0(0,0) + 16884 W_1^0(0,2) - 8820 W_1^0(0,4) - 5292 W_1^0(1,1) + \\
 + 17640 W_1^0(1,3) - 17640 W_1^0(2,2) + 14700 W_1^0(2,4) - \\
 - 14700 W_1^0(3,3) + 2860 W_2^0(0,0) - 9240 W_2^0(0,2) + 2940 W_2^0(0,4) + \\
 + 3360 W_2^0(1,1) - 7840 W_2^0(1,3) + 7840 W_2^0(2,2) - 1120 W_3^0(0,0) + \\
 \left. + 2016 W_3^0(0,2) - 1008 W_3^0(1,1) + 192 W_4^0(0,0) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad {}^1E^A = \frac{1}{z^3} \frac{\varrho^9}{529200} \left\{ -1512 W_0^0(0,0) + 10710 W_0^0(0,2) + \right. \\
 + 5145 W_0^0(0,4) - 11025 W_0^0(0,6) + 5586 W_0^0(1,1) - 39690 W_0^0(1,3) + \\
 + 22050 W_0^0(1,5) - 6615 W_0^0(2,2) - 55125 W_0^0(2,4) + 73500 W_0^0(3,3) - \\
 + 33075 W_0^0(2,6) - 66150 W_0^0(3,5) + 33075 W_0^0(4,4) + 2268 W_1^0(0,0) - \\
 - 17010 W_1^0(0,2) + 13230 W_1^0(0,4) - 5670 W_1^0(1,1) + 9450 W_1^0(1,3) + \\
 + 13230 W_1^0(1,5) + 29988 W_1^0(2,2) - 48510 W_1^0(2,4) - 22050 W_1^0(3,5) + \\
 + 22050 W_1^0(4,4) - 780 W_2^0(0,0) + 2520 W_2^0(0,2) - 2940 W_2^0(0,4) + \\
 \left. + 5160 W_2^0(1,1) - 10080 W_2^0(1,3) + 5880 W_2^0(3,3) - 168 W_3^0(0,0) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 1680 W_3^0(1,1) + 1512 W_3^0(2,2) + 192 W_4^0(0,0) + 384 W_4^0(1,1) + \\
 & + 378 W_1^1(0,0) - 4410 W_1^1(0,4) - 882 W_1^1(1,1) + 8820 W_1^1(1,3) + \\
 & + 22050 W_1^1(2,4) - 22050 W_1^1(3,3) - 1890 W_1^1(0,2) - 270 W_2^1(0,0) + \\
 & + 1260 W_2^1(0,2) - 1470 W_2^1(2,2) + 112 W_3^1(0,0) - 168 W_3^1(1,1) - \\
 & \quad - 24 W^1(0,0) \Big\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad {}^1E_{a_1}^A + {}^1E_{a_1}^B &= \frac{1}{z^2} \frac{\varrho^8}{12600} \Big\{ 440 W_0^0(0,1) + 70 W_0^0(0,3) - 525 W_0^0(0,5) - \\
 & - 2590 W_0^0(1,2) - 525 W_0^0(1,4) + 1575 W_0^0(1,6) + 3850 W_0^0(2,3) - \\
 & - 1575 W_0^0(2,5) - 432 W_1^0(0,1) + 630 W_1^0(0,3) + 2298 W_1^0(1,2) - \\
 & - 420 W_1^0(1,4) - 2940 W_1^0(2,3) - 1050 W_1^0(2,5) + 1050 W_1^0(3,4) - \\
 & - 80 W_2^0(0,1) - 280 W_2^0(0,3) - 200 W_2^0(1,2) + 560 W_2^0(2,3) + \\
 & + 72 W_3^0(0,1) + 72 W_3^0(1,2) - 132 W_1^1(0,1) - 210 W_1^1(0,3) + \\
 & + 630 W_1^1(1,2) + 1050 W_1^1(1,4) - 1050 W_1^1(2,3) + 60 W_2^1(0,1) - \\
 & - 140 W_2^1(1,2) - 8 W_3^1(0,1) \Big\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad {}^1E_{a_2}^{a_1} + {}^1E_{a_1}^{a_2} &= \frac{1}{z} \frac{\varrho^7}{12600} \Big\{ 700 W_0^0(1,1) - 5600 W_0^0(1,3) + 3150 W_0^0(1,5) + \\
 & + 3150 W_0^0(3,3) - 432 W_1^0(0,0) + 2100 W_1^0(0,2) - 1050 W_1^0(0,4) + \\
 & + 210 W_1^0(2,2) - 2100 W_1^0(2,4) - 760 W_2^0(1,1) + 560 W_2^0(1,3) + \\
 & + 72 W_3^0(0,0) - 420 W_1^1(1,1) + 2100 W_1^1(1,3) + 60 W_2^1(0,0) - \\
 & \quad - 140 W_2^1(0,2) \Big\}.
 \end{aligned}$$

The argument of the  $W(n, m)$  in 1-12 is always  $\varrho$

$$\begin{aligned}
 13. \quad {}^1M_{b1} &= \frac{R^3 \varrho^3}{16} \Big\{ \sum_{\tau=0}^{\infty} (-1)^\tau (2\tau+1) \sum_{i=1}^4 G_\tau^0(i, \beta) m_\tau^0(i, \alpha) + \\
 & \quad \sum_{\tau=1}^{\infty} (-1)^{\tau+1} \frac{2(2\tau+1)}{\tau^2(\tau+1)^2} \sum_{i=0,2} G_\tau^1(i, \beta) m_\tau^1(i, \alpha) \Big\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_\tau^0(0, \alpha) &= G_\tau^0(0) [W_\tau^0(2,3) + W_\tau^0(1,4) - 2W_\tau^0(1,2)] + G_\tau^0(2) W_\tau^0(1,2) + \\
 & + G_\tau^0(1) [W_\tau^0(2,2) + W_\tau^0(0,4) - 2W_\tau^0(0,2)] + G_\tau^0(3) W_\tau^0(0,2),
 \end{aligned}$$



$$m_{\tau}^0(1, a) = 2 [G_{\tau}^0(1) W_{\tau}^0(2,3) + G_{\tau}^0(2) W_{\tau}^0(1,3)],$$

$$m_{\tau}^0(2, a) = G_{\tau}^0(0) [2 W_{\tau}^0(0,1) - W_{\tau}^0(0,3)] - G_{\tau}^0(2) W_{\tau}^0(0,1) + \\ + G_{\tau}^0(1) [2 W_{\tau}^0(0,0) - W_{\tau}^0(0,2)] - G_{\tau}^0(3) W_{\tau}^0(0,0),$$

$$m_{\tau}^0(3, a) = -2 [G_{\tau}^0(1) W_{\tau}^0(1,2) + G_{\tau}^0(2) W_{\tau}^0(1,1)],$$

$$m_{\tau}^0(4, a) = - [G_{\tau}^0(0) W_{\tau}^0(0,1) + G_{\tau}^0(1) W_{\tau}^0(0,0)],$$

$$m_{\tau}^1(0, a) = G_{\tau}^1(0) W_{\tau}^1(1,2) + G_{\tau}^1(1) W_{\tau}^1(0,2),$$

$$m_{\tau}^1(2, a) = - [G_{\tau}^1(0) W_{\tau}^1(0,1) + G_{\tau}^1(1) W_{\tau}^1(0,0)].$$

The argument of  $G$  and  $W$  figuring in the  $m$ 's is  $a$ .

$$14. {}^1M_{b_2} = \frac{16 z^3}{R \gamma^5} \left\{ e^{-R} \left[ 4 C_0(2\beta) + \gamma^2 C_2(2\beta) - \gamma D_1(2\varrho) - 4 D_0(2\varrho) - \right. \right. \\ \left. \left. - 15/4\gamma \right\} + e^R \left\{ 4 R A_0(2a) + \gamma^2 R^3 A_2(2a) - \gamma R^2 A_1(4a) - 4 R A_0(4a) \right\} \right\}.$$

$$15. {}^{-1}M = \frac{8 z^3}{R \gamma^3} \left\{ e^{-R} \left\{ 2 r C_0(2\beta) - 2 C_1(2\beta) - 2 r D_0(2\varrho) - r \gamma D_1(2\varrho) + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma D_2(2\varrho) + 2 D_1(2\varrho) - (3 r \gamma + 5) / 4\gamma^2 \right\} + e^R \left\{ 2 \bar{r} R A_0(2a) + 2 R^2 A_1(2a) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \bar{r} R A_0(4a) - \bar{r} \gamma R^2 A_1(4a) - 2 R^2 A_1(4a) - \gamma R^3 A_2(4a) \right\} \right\}.$$

$$16. {}^{-1}M^A = \frac{16 z^3}{R \gamma^5} \left\{ e^{-R} \left\{ r [12 C_0(2\beta) - 6 \gamma C_1(2\beta) + \gamma^2 C_2(2\beta)] - 12 C_1(2\beta) + \right. \right. \\ \left. \left. + 6 \gamma C_2(2\beta) - \gamma^2 C_3(2\beta) - (5 \gamma r + 9) / 4\gamma^2 - r [3 \gamma D_1(2\varrho) + 12 D_0(2\varrho)] + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \gamma D_2(2\varrho) + 12 D_1(2\varrho) \right\} \right. \\ \left. + e^R \left\{ \bar{r} 12 R A_0(2a) - 6 \gamma R^2 A_1(2a) + \gamma^2 R^3 A_2(2a) \right\} \right. \\ \left. + 12 R^2 A_1(2a) - 6 \gamma R^3 A_2(2a) + \gamma^2 R^4 A_3(2a) \right. \\ \left. - \bar{r} [3 \gamma R^2 A_1(4a) + 12 R A_0(4a)] - [3 \gamma R^3 A_2(4a) + 12 R^2 A_1(4a)] \right\} \left. \right\}.$$

$$17. {}^1M_{a_2} = \frac{16 z^3}{R \gamma^5} \left\{ e^{-R} \left\{ 4 r [\bar{E}i(2\beta) - Ei(-2\varrho) + \ln z / (1 - z)] \right. \right. \\ \left. \left. - 4 C_0(2\beta) + r \gamma^2 C_1(2\beta) - \gamma^2 C_2(2\beta) + 4 D_0(2\varrho) - r \gamma D_0(2\varrho) \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma D_1(2\varrho) - (15 + 2 r \gamma) / 4\gamma \right\} + e^R \left\{ 4 \bar{r} [Ei(-4a) - Ei(-2a)] \right. \right. \\ \left. \left. + 4 R A_0(2a) + \bar{r} \gamma^2 R^2 A_1(2a) + \gamma^2 R^3 A_2(2a) - 4 R A_0(4a) \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{r} \gamma R A_0(4a) - \gamma R^2 A_1(4a) \right\} \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 18. {}^1M = & \frac{16 z^3}{R \gamma^5} \left\{ e^{-R} \{ 4 r C_0(2\beta) + r \gamma^2 C_2(2\beta) - 4 C_1(2\beta) \right. \\
 & - \gamma^2 C_3(2\beta) - [ 4 r D_0(2\alpha) + r \gamma D_1(2\alpha) - 4 D_1(2\alpha) - \gamma D_2(2\alpha) ] \\
 & - 5 (3 \gamma r + 7) / 4 \gamma^2 \} + e^R \{ 4 \bar{r} R A_0(2a) + r \gamma^2 R^3 A_2(2a) \\
 & + 4 R^2 A_1(2a) + \gamma^2 R^1 A_3(2a) - [ 4 \bar{r} R A_0(4a) + \bar{r} \gamma^2 R^2 A_1(4a) \\
 & \left. + 4 R^2 A_1(4a) + \gamma R^3 A_2(4a) \} \right\}.
 \end{aligned}$$

## REFERENCES

1. Y. Jucisz, J. Exp. Theor. Phys. U. S. S. R. **19**, 565, 1949.
2. S. F. Boys, Proc. Roy. Soc. A. **200**, 542, 1950.
3. D. P. Craig, Proc. Roy. Soc. A. **200**, 474, 1950.
4. C. A. Coulson, D. P. Craig, J. Jacobs, Proc. Roy. Soc. A. **206**, 297, 1951.
5. H. C. Longuet-Higgins, Proc. Phys. Soc. A. **60**, 270, 1948.
6. W. Moffitt, Proc. Roy. Soc. A **210**, 245, 1952.
7. W. Moffitt, Proc. Roy. Soc. A **210**, 225, 1952.
8. W. Moffitt, J. Scanlan, Proc. Roy. Soc. A **218**, 464, 1953.
9. W. Moffitt, J. Scanlan, Proc. Roy. Soc. A. **220**, 530, 1953.
10. S. Weinbaum, J. Chem. Phys. **1**, 593, 1953.
11. P. Gombás, Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik. VI. Birkhäuser, Basel, 1950. P. 170.
12. E. A. Hylleraas, Z. Phys. **60**, 624 1930.
13. C. W. Scherr, J. Chem. Phys. **22**, 149, 1954.
14. a) W. Heitler, F. London, Z. Phys. **44**, 455, 1927. b) Y. Sugiura, Z. Phys. **45**, 484, 1927.
15. S. C. Wang, Phys. Rev. **31**, 579, 1928.
16. S. Weinbaum, Thesis, California Inst. of Techn. 1933.
17. M. Kotani, A. Amemiya, T. Simose, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **20**, Extra number 1, 1938.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОДНОГО НОВОГО КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА

Р. ПАУНЦ

## Резюме

Автор исследовал квантово-химический метод В. Моффита для случая молекулы ( $H_2$ ). Применение поправки Моффита в случае не совсем точной приближенной функции дает относительно хороший результат, а применение более точной функции, составленной на основе идеи В. Моффита, приводит к ухудшению результатов. На основе этих результатов, конечно, нельзя сделать окончательный вывод относительно предлагаемого метода, но данный пример, во всяком случае, показывает, что необходимо проявить должную осторожность к результатам данного метода. Расчеты показали, что применение более точной ионной функции дает слабый результат, т. е. нельзя рассматривать основное состояние молекулы водорода как суперпозицию гомеоплярных и ионных состояний.





# DETERMINATION OF CATHODE SENSITIVITY DISTRIBUTION OF PHOTOMULTIPLIERS

By  
ZS. NÁRAY

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS, BUDAPEST

(Presented by L. Jánossy. — Received 15. IX. 1954)

In this paper a method for the determination of the sensitivity distribution of photocathodes is described. The purpose of the investigations was to overcome the difficulties experienced in reproducing measurements carried out by means of photocells or photomultipliers. The variation of the cathode sensitivity in photomultipliers is determined as a function of location on cathode and of direction of incident light.

## I. Introduction

In measurements of the intensity of electromagnetic radiation by means of photocells or photo-multipliers, the results are often difficult to reproduce. This difficulty can be attributed to the following reasons: the temperature-dependence of the signal-to-noise ratio of the photocathode, fatigue effects of the photocathode [1] and the local dependence of cathode sensitivity. It can also be assumed that the photocathode sensitivity is influenced by changes in the direction of incident light too.

In the following we shall at first restrict ourselves to the determination of the sensitivity distribution of multiplier photocathodes; further below our measurements will also be extended to the dependence of photocathode sensitivity distribution on the direction of incidence of light.

The photocathode sensitivity distribution is determined essentially by two components: on the one hand by the local dependence of the sensitivity of the cathode surface in relation to the photoelectric effect, (this being due for the most part to the inhomogeneous photoelectric properties of the cathode) and on the other hand, by the electron optics of the multiplier. In what follows the resultant of these two components will be called effective cathode sensitivity.

The fluctuations occurring in sensitivity distribution play an important part especially when the lightcurrent to be measured acts on a comparatively small part of the total cathode surface. (The multiplier is used in such a manner e. g. in certain astronomical investigations.) In this case the increased difficulty arises that the adjustment of the light spot to a definite point of the cathode must be reproduced. We note that if the total cathode surface is exposed to incident light the role of the sensitivity distribution is less important because the local



differences in sensitivity on the illuminated surface of the photocathode compensate each other.

## 2. Description of the measuring procedure

For the investigation of sensitivity distribution the following procedure has been developed.

The photocathode is illuminated over a comparatively small area of its total surface by a point-like source. The voltage on the anode resistance of the multiplier is proportional to the product of the sensitivity shown by the illuminated cathode point and the incident light intensity. If we keep the intensity of the illuminating light source constant the sensitivity on the total cathode surface can be determined from point to point. This procedure, however, is tedious and its accuracy is not satisfactory. To eliminate this difficulty the light spot is moved along a straight line on the cathode surface. Connecting the voltage proportional to the displacement of the light spot to one of the deflection plate pairs of the cathode-ray tube and the voltage on the anode resistance of the multiplier to the other, the photocathode sensitivity distribution along a straight line can be directly observed on the screen of the cathode-ray tube. During the investigations only constant intensity of the scanning ray has to be ensured, as we are only interested in the relative sensitivity of the individual cathode points. The intensity of the light beam, however, may vary within certain limits.

The block-diagram of the measuring apparatus is shown in Fig. 1. The moving point-like source mentioned above has been obtained by exciting the screen of cathode-ray tube CRT 1 by an electron beam focussed to about 0,5 mm diameter and moving the electron beam along the straight line by the deflection generator DG connected to one of the deflection plate pairs.

A moving point-like source developed in the above manner completely satisfied our requirements. In addition, its preparation and use is much simpler than a corresponding mechanical arrangement would be.

The image of the light spot moving over the screen of cathode-ray tube CRT 1 with an amplitude  $A$  is formed on the photocathode of the multiplier M with a magnification of  $N$ -times.

For direct plotting of the effective cathode sensitivity curve cathode-ray tube CRT 2 is used, one of the deflection plate pairs of which is connected to the voltage produced on anode resistor  $R_M$  of multiplier M through the wide-band amplifier A, while the other plate pair is connected in parallel to the corresponding plate-pair of cathode-ray tube CRT 1. By means of the moving point-like light source produced by cathode-ray tube CRT 1 the sensitivity of the photocathode is scanned along a straight line. The effective sensitivity distribution for the total surface of the photocathode is determined in such



a way that by the double potentiometer  $P$  a suitable d. c. voltage is connected to the other deflection plate pair of cathode-ray tube CRT 1 and on the photocathode the ray is shifted in a direction perpendicular to the direction of scanning. Having thus determined the effective sensitivity distribution along several parallel straight lines it can also be plotted perpendicular to the direction of scanning. This plotting work can be avoided by connecting the deflection generator to the other deflection plate pair of tube CRT 1, which enables the

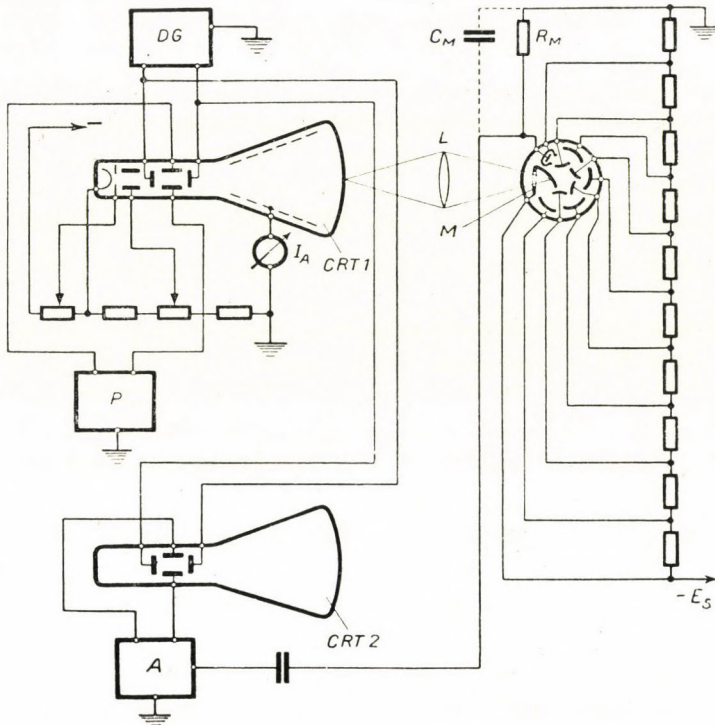


Fig. 1. CRT 1: 5BP type cathode-ray tube of a persistence time of  $10 \mu\text{sec}$ , with special blue screen. CRT 2: Double-ray cathode-ray tube (only one of the rays was directly used in the measurements). M: 931-A type multiplier. L: Mayer Trioplan 1:2,9,  $f = 7,5 \text{ cm}$ .  $R_m = 130 \text{ kohms}$

sensitivity distribution perpendicular to the former scanning direction to be directly observed on oscillograph tube CRT 2.

During the course of measurements the angle formed by the scanning ray and the normal to the surface of the photocathode varies somewhat. Owing to this the effective sensitivity distribution may undergo some modification as compared to scanning at constant incidence direction. As has been mentioned above, our measurements serve, among other purposes, for the determination of this effect, a detailed account of which will be given in section 3c. We note



here that the variation of the incidence angle does practically not affect the results of the measurements.

Having assumed the scanning light spot to fall with equal intensity on any point of the photocathode it seems to be necessary to investigate the factors influencing our assumption in detail.

First of all, we must point out that the intensity of the light emitted by the screen of cathode-ray tube CRT 1 towards the photocathode depends on the position of the light spot on the phosphorescent screen. This dependence is due partly to the inhomogeneity of the screen and partly to direction-dependence of light emission.

To determine the local dependence of the intensity of the scanning ray (intensity-distribution) we have performed a checking measurement described briefly in the following.

The light spot moving on cathode-ray tube CRT 1 with an amplitude  $A$  is focused on to the photocathode, its image thereby being strongly reduced. If the sensitivity of the photocathode can be regarded as constant in the region corresponding to the reduced amplitude, the oscillogram on the tube CRT 2 directly gives the intensity distribution.

In the arrangement of Fig. 1 with a deflecting voltage corresponding to an amplitude  $A = 100$  mm the magnification of the optical system has been selected to be  $N \simeq \frac{1}{40}$ . In this case the amplitude of the displacement of the scanning light spot on the photocathode is only 2,5 mm. However, as the sensitivity of the photocathode cannot be regarded as constant even along a straight section 2,5 mm long (see below) we do not employ optical imaging on the cathode, decreasing thus the effect of the sensitivity change of the cathode as much as possible. The result of the measurement is shown in the photograph taken of the screen of oscillograph tube CRT 2 (Fig. 2). In order to determine the relative change in intensity distribution the zero level of the intensity is fixed by covering up the screen of the oscillograph tube CRT 1 in a width of about 1 mm perpendicular to the direction of motion of the light spot.

As the focusing conditions of the cathode ray tube show a certain dependence on the anode current the intensity distribution was determined at the anode current value used in the determination of the effective cathode sensitivity.

In measuring the effective cathode sensitivity the value of the anode current  $I_A$  of cathode-ray tube CRT 1 is limited owing to fatigue effects appearing in consequence of the large currents arising in the last stages of the multiplier [1]. In the measurement of the intensity distribution, owing to the reduction necessary to eliminate the photocathode sensitivity distribution the light energy falling on the multiplier is thus for geometrical reasons much smaller than in the investigation of the effective cathode sensitivity. Under such circumstances stronger amplification of the anode signal of the multiplier



is necessary in amplifier A. The latter fact accounts for the higher noise component value in Fig. 2. As can be seen in Fig. 2 the emitted intensity along one of the diameters of the screen of tube CRT 1 shows a fluctuation less than 8%. It must be noted that the latter value sets an upper limit to the fluctuation of the intensity distribution because, on the one hand, the photocathode

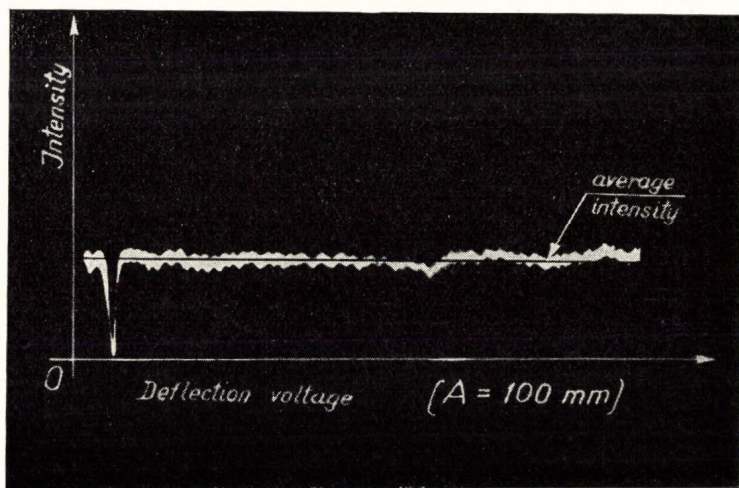


Fig. 2.

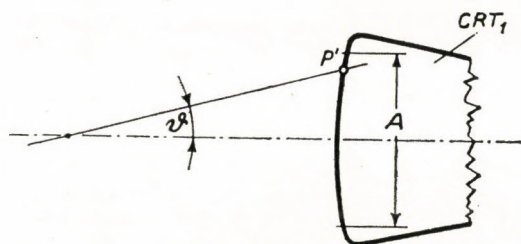


Fig. 3.

sensitivity cannot be regarded as constant even in the 2,5 mm range, and on the other, the noise component also contributes to the increase of the measured intensity fluctuation.

The variation of the intensity of the scanning light spot, however, is also influenced by the optical system. The effective aperture size of the optical system depends on the position  $P'$  of the light spot on the screen. Thus with the angle  $\delta$  defined in Fig. 3 the intensity  $i$  varies according to

$$i = \text{const.} \cos^4 \delta .$$

In measuring the cathode sensitivity distribution we replaced the optical system



employed in the investigation of intensity distribution, the magnification of which was  $N \simeq \frac{1}{40}$ , by an optical system of a magnification  $N \simeq \frac{1}{3}$  especially tested for the purpose. In the arrangement used for the effective cathode sensitivity measurement  $(\delta)_{\max} = 6,5^\circ$ , the resulting intensity decrease is at most 2,5%, i. e. it is smaller than the combined effect of the factors investigated in the previous control measurement. The size of the fluctuation of the intensity due to the above reason and to lens imperfections can be checked with the help of the blackening of an emulsion replacing the photocathode.

We note that the influence of this effect on the results of measurements is smaller than the given rate of error as the amplitude  $A$  has been determined so that even the reduced amplitude  $NA$  is larger than the geometrical size of the photocathode in the direction of scanning and the maximum intensity decrease is obtained on the edges of the photocathode.

Thus, by means of the above checking measurements we found that the assumption for constant intensity underlying the measuring procedure is satisfied with an inaccuracy of about 8%.

In what follows we shall briefly summarize the aspects decisive for the selection of the data of the electronical arrangement shown in Fig. 1.

The anode circuit time constant of the multiplier and the repetition frequency  $f$  of the deflection generator were determined on the basis of the accuracy requirements of the measurement and so were the frequency and phase characteristics of the employed amplifier.

Let us assume that the effective cathode sensitivity rapidly decreases in the direction of scanning over a section of length  $s$ , correspondingly the voltage on the anode resistance of the multiplier decreases exponentially with a time constant  $\tau = R_M \cdot C_M$ , where  $C_M$  is the total capacity of the anode point to earth. Knowing the constant deflecting velocity  $v$  of the point-like source on the cathode-ray screen the scanning time corresponding to the distance  $s$  is

$$T = \frac{s}{Nv} \sim \frac{s}{N \cdot A \cdot f}.$$

To attain the purpose of our measurements we require

$$T > \tau.$$

In the choice of  $f$  it must be kept in mind that owing to the focusing conditions of the cathode-ray tube the mean diameter of the scanning ray on the photocathode is about 0,18 mm, i. e. it does not seem suitable to select for  $s$  a value smaller than 0,2 mm, for the given magnification. Accordingly, we have chosen  $f = 215$  Hz,  $R_M = 130$  kohms at a capacity of about  $C_M \leq 40$  pF.



In order to check the complete electrical system in the arrangement shown in Fig. 1 (and at a magnification of  $N \simeq \frac{1}{3}$ ) the scanning light spot on the screen of cathode-ray tube CRT 1 is periodically extinguished by means of an impulse generator connected to the grid of the cathode-ray tube and synchronized by the deflection generator DG. The image then appearing on the screen of cathode-ray tube CRT 2 is shown in Fig. 4. The latter method

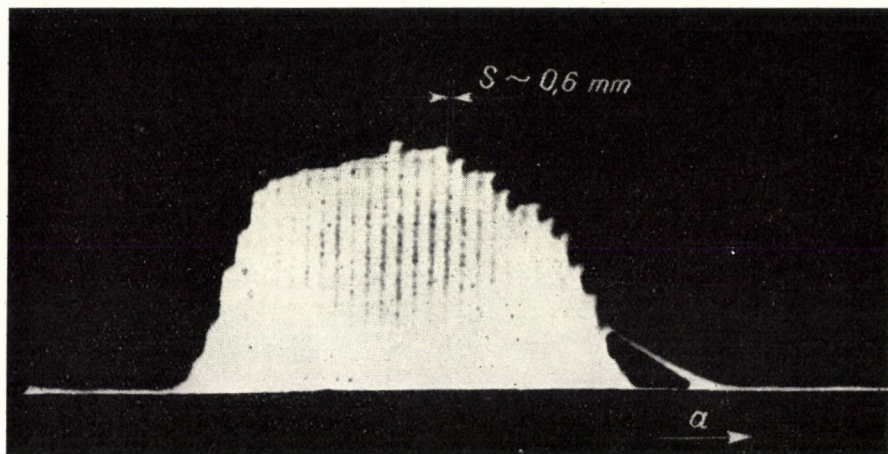


Fig. 4.

also serves to check to what extent our conditions for the neglecting of the persistence of the screen in connection with the point-like light source are fulfilled.

As the oscillogram shows the electrical circuit satisfies our requirements, as an intensity decrease corresponding to  $s = 0,6$  mm is reproduced almost without distortion on the screen of cathode-ray tube CRT 2.

The procedure described above essentially satisfies the requirements for a measuring procedure suitable for the determination of cathode sensitivity distribution. These requirements are

- a.) short measuring time
- b.) recording of the result of measurements by registration.

Our procedure had to be developed in view of the time instability of commercially available multipliers and light sources, and because if, for any reason, a multiplier of definite cathode sensitivity distribution is needed, owing to differences in manufacture many multipliers would have to be tested for selection.



### 3. Results of measurements

The investigation carried out by the measuring procedure described in section 2 can be divided into three groups.

a.) Scanning of the photocathode of the 931-A type multiplier in parallel with the axis of the multiplier (see fig. 5a, direction *a*).

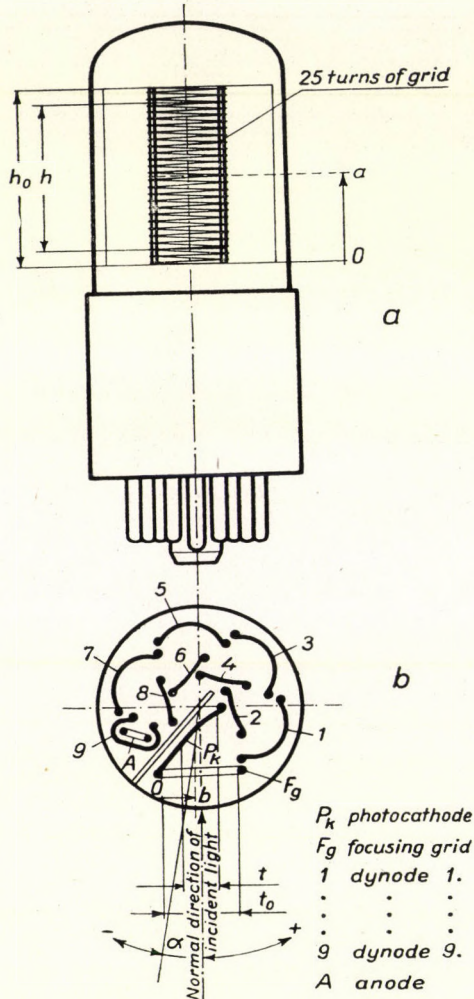


Fig. 5a and 5b

b.) Scanning of the photocathode of the 931-A type multiplier perpendicular to the axis of the multiplier (see fig. 5b, direction *b*).

c.) Investigation of the dependence of the effective cathode sensitivity of the multiplier on the direction of the incident light.

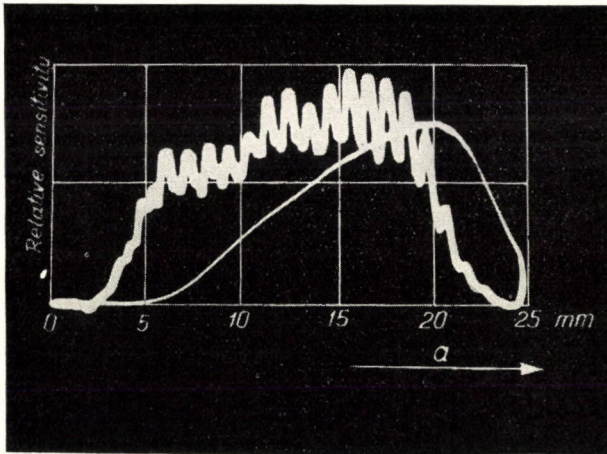


Fig. 6a

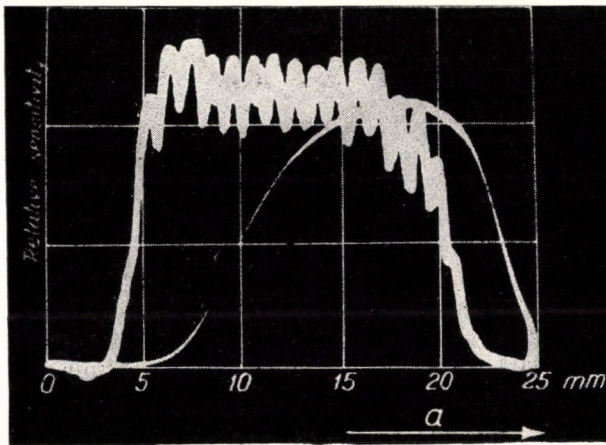


Fig. 6b

We note that the investigation in c.) is needed not only in connection with the use of the multiplier but it is also of importance in checking the accuracy of the a.) and b.) type measurements.

To a.) The measurements have been carried out in an arrangement corresponding to Fig. 1 at a magnification of  $N = 0,31$  by connecting the voltage supplied by generator DG to a deflection parallel to the axis of the multiplier on cathode-ray tube CRT1. In this case the image is formed on photocathode  $P_k$



of the multiplier (see fig. 5b) in such a way that the light spot is imaged on a clouded glass replacing the photocathode. The effective cathode sensitivity curves for two different 931-A type multipliers are shown in the photograph taken of oscillograph tube CRT2 (fig. 6a and 6b resp.), where the scatter of the sensitivity distributions of the two multipliers can be well distinguished. From several measurements we have obtained for the size  $h$  of the sensitive surface of the photocathode parallel to the axis of the multiplier on the average 20 mm, while the geometrical size is  $h_j \simeq 25$  mm.

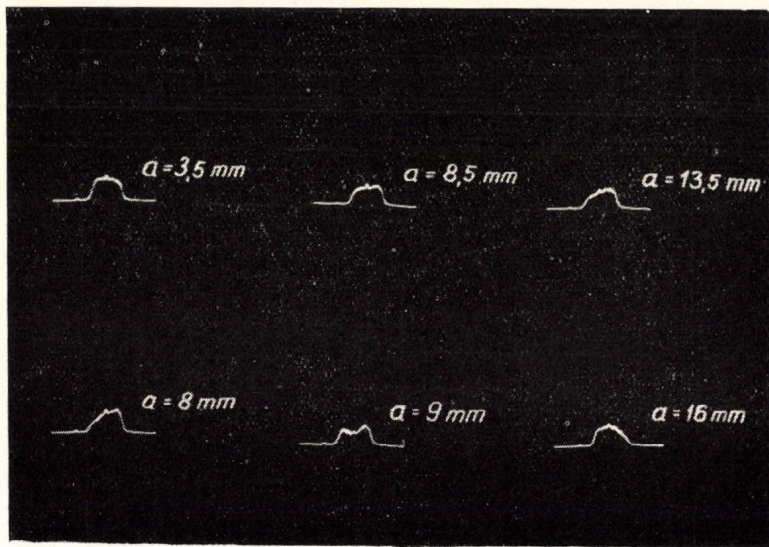


Fig. 7.

As can be seen in the oscillograms the effective cathode sensitivity as a function of longitudinal size shows strong fluctuation. The effect of the electrostatic focusing grid placed in front of the cathode of the multiplier (see fig. 5a) can be well distinguished in the figures, the number of minima of the cathode sensitivity curve being in good agreement with the number of grid windings.

To b.) The measurements have been carried out with an arrangement similar to that used in a.) with the difference that the roles of the vertical and horizontal deflection plates of cathode-ray tube CRT1 are interchanged and for the amplitude the value 45 mm is chosen. We have obtained for the projection of the sensitive cathode surface size perpendicular to the symmetry axis of the multiplier  $t = 6$  mm (see fig. 5b) whereas the corresponding geometrical size is  $t_0 \simeq 9$  mm. The measurements resulted in the oscillograms of oscillograph tube CRT2 presented in Fig. 7 at various  $a$  values (see fig. 5a). The variation of the curve shapes with a comparatively small change in the value  $a$  is due to the effect of the grid windings forming a small angle with the scanning direction. In the



latter measurement the focusing is aimed at approximately the bisecting point of the cathode surface size perpendicular to the symmetry axis of the multiplier. The geometrical size  $t_0$  of the cathode projection being comparatively small, greater defocusing does not occur. We note that for the estimation of the error thus committed the b.) type sensitivity curve can be plotted from the a.) type measurements.

To c.) The measurement is carried out with an arrangement similar to that in b.) with the difference that the multiplier is turned about its symmetry

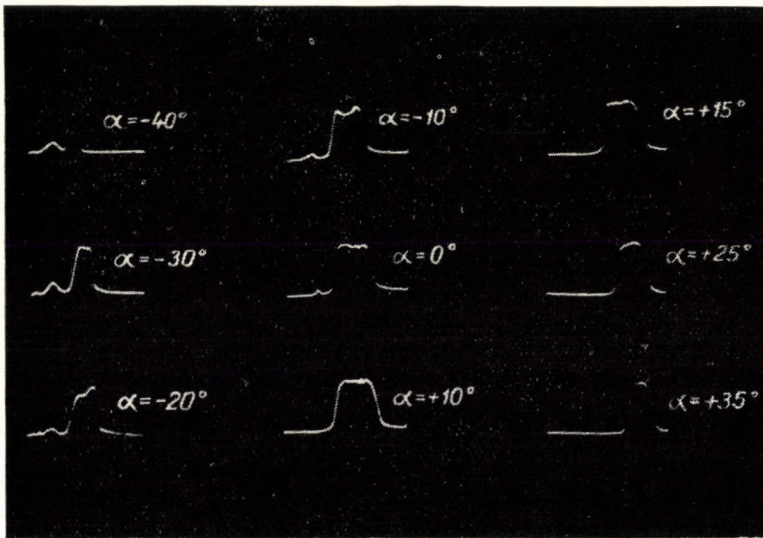


Fig. 8.

axis by an angle  $\alpha$  (see fig. 5B). The photographs taken of the effective cathode sensitivity curve at various values of  $\alpha$  are shown in Fig. 8. With the aid of these photographs the angle-dependence of the effective sensitivity for a definite point of the cathode surface can be approximately determined (Fig. 9). The determination of the accurate angle-dependence of the effective sensitivity is made very difficult by the electrostatic focusing grid.

As in measurement b.) the scanning ray and the given direction of incident light form a maximum angle of  $4^\circ$  the variation of the effective aperture size influences our measurements by 1%.

In measurements a.) the direction of the scanning ray and the normal to the surface of the cathode form a maximum angle of  $6,5^\circ$ . In the checking of our measurements of the intensity distribution the effect of this varying angle of incident light was also investigated. It can be seen that the accuracy of our measurements was not influenced by the change in the direction of incident light.



By means of the measuring method described above, in addition to the cathode sensitivity investigation of the various types of photomultipliers and photocells, other optical adjustment and control problems can as well be solved.

My thanks are due to Prof. *L. Jánossy* for valuable direction during the course of these investigations as well as to the Industrial Research Institute

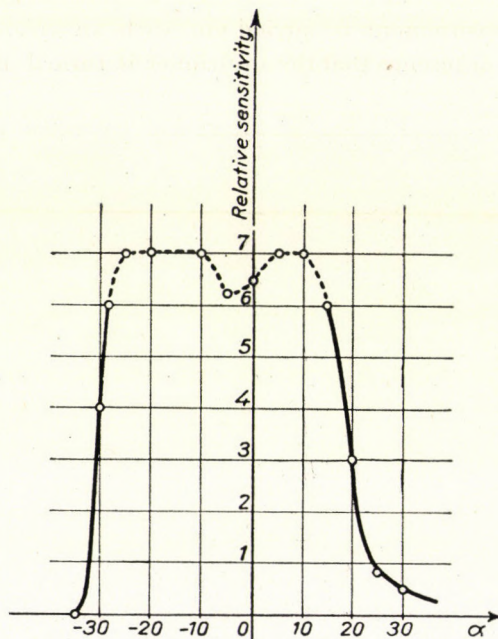


Fig. 9.

for Telecommunication and especially to Academician *G. Szigeti* for having prepared the short-persistence screen cathode-ray tube used in our measurements. I am also indebted to *J. Kmetyó* for help in building the measuring equipment and to *B. Lendvay* and *Maria Tassaly* for excellent measuring work.

#### REFERENCES

1. *R. W. Engström*, J. Opt. Soc. Am. **37**, 420, 1947.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КАТОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФОТОУМНОЖИТЕЛЯ

Ж. НАРАИ

Резюме

Автором был разработан метод, подходящий для определения распределения чувствительности фотокатодных поверхностей. Целью разработки этого метода было выяснение трудностей, возникающих в связи с повторяемостью измерений фотоэлементом или фотоумножителем. С помощью этого метода автор определил изменение чувствительности в зависимости от места и от направления падающего света.

# DIE STATISTISCHE THEORIE DES ATOMKERNS

III. Teil

Von

P. GOMBÁS, E. MÁGORI, B. MOLNÁR und É. SZABÓ

PHYSIKALISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

(Eingegangen : 1. X. 1954)

Während in den vorangehenden Arbeiten die statistische Theorie des Atomkerns für die skalare Yukawasche Nucleonen-Wechselwirkungsenergie vom Typ  $J = -\gamma e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/r_0} / |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  entwickelt wurde, wird hier die statistische Theorie des Atomkerns für die skalaren Nucleonen-Wechselwirkungsenergien  $J = -\varepsilon e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/r_0}$ , sowie  $J = -\varepsilon e^{-(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/r_0)^2}$  weiter ausgebaut. Es zeigt sich, dass die mit dem empirischen Befund am besten übereinstimmenden Resultate mit der Wechselwirkung  $J = -\varepsilon e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/r_0}$  erzielt werden.

In zwei vorangehenden Arbeiten wurde von einem der Verfasser unter Voraussetzung einer skalaren Yukawaschen Wechselwirkungsenergie zwischen den Nucleonen von der Form

$$J = -\gamma \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/r_0}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (1)$$

das statistische Modell des Atomkerns entwickelt<sup>1</sup> und die Energie des Kerns, sowie die Nucleonendichte im Kern mit Hilfe des Ritzschen Variationsverfahrens in erster, zweiter und dritter Näherung bestimmt. Diese Näherungen unterscheiden sich darin, dass in der ersten Näherung eine Gaussche Dichteverteilung mit einem einzelnen Variationsparameter, in zweiter Näherung ein verallgemeinerter Dichteverlauf mit zwei Variationsparametern angesetzt wurde, der sich vom Gausschen Verlauf beliebig unterscheiden kann, und in dritter Näherung die Neutronen- und Protonendichte voneinander unabhängig variiert wurden. Im Falle der genannten Yukawaschen Wechselwirkung führt die zweite und dritte Näherung praktisch zu keinerlei Änderung gegenüber der ersten und für die Nucleonenverteilung ergibt sich nicht nur für die leichten sondern auch für die schwersten Kerne eine Gaussche Verteilung, die sich nur darin unterscheiden, dass die Dichteverteilung der schweren Kerne mit wachsendem  $r$  bedeutend langsamer abklingt als die der leichten.

In der vorliegenden Arbeit soll nun mit demselben Verfahren wie in den genannten Arbeiten die Energie und Nucleonendichte für die skalaren Wechsel-

<sup>1</sup> P. Gombás, Acta Phys. Hung. 1, 329, 1952 im folgenden als I zitiert und Acta Phys. Hung. 2, 223, 1952 im folgenden als II zitiert. Man vgl. weiterhin P. Gombás, Nature (London) 170, 362, 1952; 171, 979, 1953; Ann. d. Phys. (6) 10, 253, 1952; 12, 156, 1953. — Alle Bezeichnungen der vorliegenden Arbeit sind dieselben wie in I und II.



wirkungsenergien von der Form

$$J = -\varepsilon e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/r_0}, \quad (2)$$

$$J = -\varepsilon e^{-(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/r_0)^2} \quad (3)$$

berechnet werden, wo  $\varepsilon$  hier eine Konstante von der Dimension einer Energie bezeichnet;  $r_0$  ist wieder eine Konstante von der Dimension einer Länge, über die wir hier noch verfügen könnten, wir wählen sie jedoch wieder so wie in I, d. h. wir setzen sie mit der durch  $2\pi$  dividierten Comptonschen Wellenlänge der  $\pi$ -Mesonen gleich. In der vorliegenden Arbeit sollen nun die Berechnungen für diese Wechselwirkungsenergien in erster und zweiter Näherung auf genau dieselbe Weise wie in den genannten vorangehenden Arbeiten durchgeführt werden. Alle Bezeichnungen sind dieselben wie dort, so dass wir uns durchweg auf diese beziehen und uns sehr kurz fassen können.

Der einzige Unterschied gegenüber I besteht darin, dass jetzt in der Dichte der Austauschenergie statt der Funktion  $f(\omega_n, \omega_p)$  von I die folgenden Funktionen stehen.

Für den Fall der Wechselwirkung (2)

$$f(\omega_n, \omega_p) = \frac{r_0}{24\pi^3} \left\{ 4\omega_n \omega_p - [1 + 3(\omega_n^2 + \omega_p^2)] \left\{ \ln [1 + (\omega_n + \omega_p)^2] - \right. \right. \\ \left. \left. - \ln [1 + (\omega_n - \omega_p)^2] \right\} + 4(\omega_n^3 + \omega_p^3) \operatorname{arctg} (\omega_n + \omega_p) - \right. \\ \left. - 4(\omega_n^3 - \omega_p^3) \varepsilon \operatorname{rctg} (\omega_n - \omega_p) \right\}$$

und für die Wechselwirkung (3)

$$f(\omega_n, \omega_p) = \frac{r_0}{6\pi^{3/2}} \left[ \frac{\pi^{1/2}}{2} (\omega_n^3 + \omega_p^3) \Phi \left( \frac{\omega_n + \omega_p}{2} \right) + \right. \\ \left. (\omega_n^2 + \omega_p^2 - \omega_n \omega_p - 2) e^{-\left(\frac{\omega_n + \omega_p}{2}\right)^2} - \frac{\pi^{1/2}}{2} (\omega_n^3 - \omega_p^3) \Phi \left( \frac{\omega_n - \omega_p}{2} \right) - \right. \\ \left. - (\omega_n^2 + \omega_p^2 + \omega_n \omega_p - 2) e^{-\left(\frac{\omega_n - \omega_p}{2}\right)^2} \right],$$

wo  $\Phi(x)$  die Gausssche Transzendent

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

bezeichnet;  $\omega_n$  und  $\omega_p$  haben dieselbe Bedeutung wie in I.

Die Berechnung der Kernenergien wurde in zweiter Näherung für die Kerne  $A = 16, 80$  und  $200$  durchgeführt. Die Resultate sind zusammen mit dem Wert von  $\lambda$  in den Tabellen 1 und 2 dargestellt. Für die Kernladungszahl  $Z$  wurde hierbei ganz analog zu I jeweils der Wert gesetzt, den wir in erster Näherung aus der Minimumsforderung der Energie erhielten. Die Resultate sind zum Vergleich mit den in I erhaltenen und den experimentellen in Fig. 1 auch graphisch dargestellt.

Wie zu sehen ist, erhält man für die Kernenergien für die beiden Wechselwirkungen (2) und (3) mit dem experimentellen Befund etwas besser über-

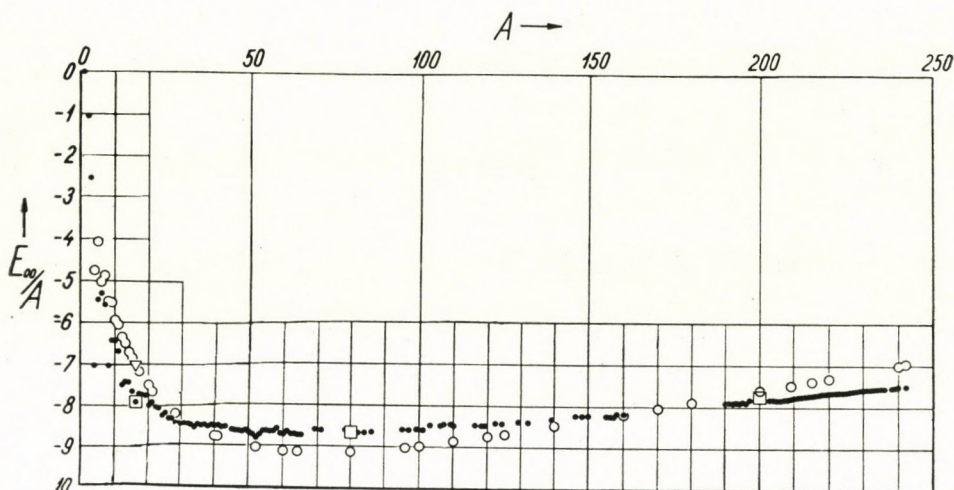


Fig. 1. Die auf ein Teilchen entfallende Kernenergie  $E_{00}/A$  in zweiter Näherung (in MeV-Einheiten) als Funktion von  $A$ , für die Kerne, die für ein vorgegebenes  $A$  die tiefste Energie besitzen

- mit der Wechselwirkung (1) berechnet,
- mit der Wechselwirkung (2) berechnet,
- ▽ mit der Wechselwirkung (3) berechnet,
- empirische Werte.

Die mit der Wechselwirkung (3) berechneten Energien (▽) für  $A = 80$  und  $200$  fallen praktisch mit den Stellen □ zusammen und wurden der besseren Übersicht halber nicht eingezeichnet.

einstimmende Werte als mit der Yukawaschen Wechselwirkung. Besonders hervorzuheben ist, dass für die Wechselwirkung (2) die Energie der leichten Kerne bedeutend tiefer liegt als im Falle der Yukawaschen Wechselwirkung, wodurch sich für diese Kerne insbesondere im Falle der Wechselwirkung (2) eine bedeutend bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Werten ergibt als für die Yukawasche Wechselwirkung.

Die Lage der Isobaren mit tiefster Energie im  $(A, Z)$ -Diagramm erweist sich für die Wechselwirkung (3) und insbesondere für die Wechselwirkung (2) ebenfalls als etwas besser als mit der Yukawaschen Wechselwirkung (1).



TABELLE 1

Kernenergien und Werte der Variationsparameter in erster und zweiter Näherung für einige Kerne im Falle der Wechselwirkungsenergie (2). ( $\lambda = 5,36$ ).  
Alle Energien in MeV-Einheiten.

$A$	16	80	200
$Z$	8	36	82
Erste Näherung ( $\gamma = 0$ ) $c_0$	3,78	3,90	3,85
Zweite Näherung $\left\{ \begin{array}{l} c_0 \\ \gamma_0 \end{array} \right.$	4,73 0,54	5,85 1,4	5,95 1,8
$E_{00}/A$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{erste Näherung} \\ \text{zweite Näherung} \end{array} \right.$	7,857 7,908	8,177 8,651	7,064 7,735

TABELLE 2

Kernenergien und Werte der Variationsparameter in erster und zweiter Näherung für einige Kerne im Falle der Wechselwirkungsenergie (3). ( $\lambda = 6,13$ ).  
Alle Energien in MeV-Einheiten.

$A$	16	80	200
$Z$	8	36	83
Erste Näherung ( $\gamma = 0$ ) $c_0$	5	5,2	5,15
Zweite Näherung $\left\{ \begin{array}{l} c_0 \\ \gamma_0 \end{array} \right.$	6,1 0,43	7,97 1,4	8,3 1,9
$E_{00}/A$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{erste Näherung} \\ \text{zweite Näherung} \end{array} \right.$	6,987 7,007	7,955 8,728	6,660 7,807

Gemäss dem Ansatz für die Nucleonendichte [man vgl. I (135)] ergibt sich für die Nucleonendichte für die beiden Wechselwirkungsenergien (2) und (3) in erster Näherung eine Gauss'sche Verteilung und zwar durchweg für alle Kerne. Im Gegensatz zu I und II erfährt jedoch die Nucleonendichte der mittelschweren und schweren Kerne in zweiter Näherung eine wesentliche Änderung und zeigt für diese Kerne mehr keinen Gauss'schen Verlauf, während die Nucleonendichte der leichten Kerne auch für diese Wechselwirkungen einen Gauss'schen Verlauf aufweist. Für mittelschwere Kerne ergibt sich im Kerninneren ein konstanter Dichteverlauf, während der Dichteverlauf der schweren Kerne im Kernmittelpunkt eine Mulde aufweist (man vgl. Fig. 2), die darauf zurückzuführen ist,



dass die Coulombsche Protonenabstossung für die schweren Kerne so beträchtlich wird, dass die Protonen durch diese Abstossung an den Kernrand gedrängt werden und zufolge der starken Anziehungskräfte zwischen Protonen und Neutronen auch einen Bruchteil der Neutronen mit sich ziehen. Als Folge dessen entsteht am Kernrand eine geringe Erhöhung und im Kernmittelpunkt eine geringe Verminderung der Nucleonendichte.

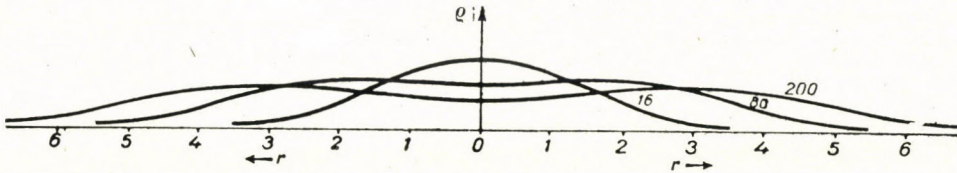


Fig. 2. Verlauf der Nucleonendichte  $\rho = \rho_n + \rho_p$  in zweiter Näherung für die Isobaren tiefster Energie mit der Massenzahl  $A = 16, 80$  und  $200$  im Falle der Wechselwirkung (2). in  $r_0$  Einheiten.

Mit den Dichteverteilungen der zweiten Näherung wurde auf dieselbe Weise wie in I und II mit dem Zusammenhang (210) in I ( $\eta = 1/2$ ) der Kernradius  $R$  berechnet. Die Resultate befinden sich für die zweite Näherung in den Tabellen 3 und 4.

TABELLE 3

Kernradius in der zweiten Näherung für einige Kerne im Falle der Wechselwirkungsenergie (2).  $R$  in  $r_0$ -Einheiten.

$A$	Theoretisch		$R$ empirisch
	$Z$	$R$ in zweiter Näherung	
16	8	3,5	2,65
80	36	6	4,52
200	82	8	6,14

TABELLE 4

Kernradien in der zweiten Näherung für einige Kerne im Falle der Wechselwirkungsenergie (3).  $R$  in  $r_0$  Einheiten.

$A$	Theoretisch		$R$ empirisch
	$Z$	$R$ in zweiter Näherung	
16	8	2,8	2,65
80	36	4,5	4,52
200	83	6,5	6,14

Der Unterschied zwischen dem Verlauf der Nucleonendichten, die sich für die Yukawasche Wechselwirkung einerseits und für die Wechselwirkungen



(2) und (3) andererseits ergeben, ist darauf zurückzuführen, dass die Yukawasche Wechselwirkung für verschwindende gegenseitige Entfernung zweier Nucleonen singulär wird, während dies bei den Wechselwirkungsenergien (2) und (3) nicht der Fall ist. Zuzufolge dieses Unterschiedes ergibt sich auch zwischen den in all' diesen Arbeiten zugrunde gelegten Austauschwechselwirkungsenergien der Nucleonen ein beträchtlicher Unterschied, der für den Fall einer konstanten Nucleonendichte und  $N = Z = A/2$  aus Fig. 1 in I ersichtlich ist. Aus dieser Figur ist klar zu sehen, dass für diesen Fall die auf Grund der Wechselwirkungen (2) und (3) berechneten Austauschwechselwirkungsenergien der Nucleonen für grosse Nucleonendichten in eine Konstante übergehen, d. h. dass diese Wechselwirkungen einen Absättigungscharakter besitzen. Im Gegensatz hierzu verläuft die auf Grund der Yukawaschen Wechselwirkung der Nucleonen berechnete Austauschwechselwirkungsenergie für grosse Nucleonendichten wesentlich anders, und zwar geht sie in eine steil abfallende Gerade über, woraus ersichtlich ist, dass für die Yukawasche Wechselwirkung keine vollständige Absättigung der Kräfte besteht.

### СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АТОМНОГО ЯДРА III.

П. ГОМБАШ, Э. МАГОРИ, Б. МОЛЬНАР, Е. САБО

#### Резюме

В предыдущих работах была развита статистическая теория атомного ядра для скалярного потенциала нуклонного взаимодействия типа Юкава  $J = -\gamma e^{-|r-r'|/r_0}/|r-r'|$ . В этой же работе была построена статистическая теория для скалярного потенциала взаимодействия типа  $J = -\epsilon e^{-|r-r'|/r_0}$ , а также для типа  $J = -\epsilon e^{-(|r-r'|/r_0)^2}$ . Оказывается, что результаты, наиболее совпадающие с экспериментом, получаются в случае следующего потенциала взаимодействия  $J = -\epsilon e^{-|r-r'|/r_0}$ .

# ÜBER DEN ${}^4\Pi$ -ZUSTAND DES $\text{O}_2^+$ -MOLEKÜLS

Von

Á. BUDÓ und I. KOVÁCS

(Eingegangen : 8. XI. 1954)

SPEKTROSKOPISCHE ABTEILUNG DES PHYSIKALISCHEN ZENTRALFORSCHUNGSINSTITUTES  
DER UNG. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

Die am  ${}^4\Pi_u$ -Zustand des  $\text{O}_2^+$  Moleküls beobachtete Multiplettaufspaltung, die als Funktion der Rotationsquantenzahl von den auf Grund der van Vleckschen Theorie abgeleiteten Formeln abweicht, kann durch eine Störung des  ${}^4\Pi$ -Zustandes von zwei  ${}^2\Pi$ -Zuständen in hinreichend guter Übereinstimmung mit den Messergebnissen gedeutet werden. Aus der Theorie dieser Störung lassen sich die angenäherte Lage und die Multiplettkonstante des einen, bisher noch nicht beobachteten  ${}^2\Pi$ -Termes angeben.

Unter den Elektronenzuständen der zweiatomigen Moleküle kennt man bisher nur einen  ${}^4\Pi$ -Zustand, dessen Feinstruktur genauer untersucht wurde; das ist der  ${}^4\Pi_u$ -Zustand des  $\text{O}_2^+$  Moleküls, das untere Elektronenniveau der von *Nevin* analysierten ersten negativen ( ${}^4\Sigma_g^- - {}^4\Pi_u$ ) Banden [1]. Die experimentell gefundene Multiplettaufspaltung dieses  ${}^4\Pi$ -Termes zeigt in ihrer Abhängigkeit von der Rotationsquantenzahl  $J$  keine gute Übereinstimmung mit den Formeln, die *Brandt* von der van Vleckschen Theorie ausgehend abgeleitet hat [2], [3], sondern es ergibt sich eine Abweichung von einigen  $\text{cm}^{-1}$ , im wesentlichen von solcher Art, dass die mittleren zwei Komponenten der eine von den äusseren näher kommen, als es theoretisch zu erwarten wäre.

Diese Abweichungen sind nicht dadurch bedingt, dass die *Brandtschen* Formeln die ersten Glieder einer Reihenentwicklung sind; rechnet man nämlich auf Grund der erweiterten Formeln

$$\begin{aligned}
 W_1 \equiv F_4(J) &= B \left[ J(J+1) + \frac{3}{2} \left\{ y_1 + 4J(J+1) + \frac{23}{9} + \frac{2\delta}{9} \right\}^{1/2} - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{y_2 - 2J(J+1)}{y_1 + 4J(J+1)} - \frac{14}{3} \cdot \frac{[y_2 - 2J(J+1)]^2}{[y_1 + 4J(J+1)]^{3/2}} \right], \\
 W_2 \equiv F_3(J) &= B \left[ J(J+1) + \frac{1}{2} \left\{ y_1 + 4J(J+1) - 5 - 2\delta \right\}^{1/2} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{y_2 - 2J(J+1)}{y_1 + 4J(J+1)} + 6 \frac{[y_2 - 2J(J+1)]^2}{[y_1 + 4J(J+1)]^{3/2}} \right], \quad (1)
 \end{aligned}$$



$$W_3 \equiv F_2(J) = B \left[ J(J+1) - \frac{1}{2} \left\{ y_1 + 4J(J+1) - 5 - 2\delta \right\}^{1/2} + \right. \\ \left. + 2 \frac{y_2 - 2J(J+1)}{y_1 + 4J(J+1)} - 6 \frac{[y_2 - 2J(J+1)]^2}{[y_1 + 4J(J+1)]^{3/2}} \right],$$

$$W_4 \equiv F_1(J) = B \left[ J(J+1) - \frac{3}{2} \left\{ y_1 + 4J(J+1) + \frac{23}{9} + \frac{2\delta}{9} \right\}^{1/2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{y_2 - 2J(J+1)}{y_1 + 4J(J+1)} + \frac{14}{3} \frac{[y_2 - 2J(J+1)]^2}{[y_1 + 4J(J+1)]^{3/2}} \right],$$

$$[\text{wo } y_1 = Y(Y-4), y_2 = Y(Y-1), Y = \frac{A}{B}, \delta = \frac{6Y(Y+4)}{2y_1 + 8J(J+1) + 7}]$$

ist und  $B$  die Rotationskonstante,  $A$  die Multiplettkonstante bedeuten], oder löst man die entsprechende Säkulargleichung für einzelne  $J$ -Werte numerisch auf, so bedeutet dies nur ganz unwesentliche Änderungen. Die Diskrepanz zwischen den experimentellen und theoretischen Werten ist umso bemerkenswerter, weil sich die van Vlecksche Theorie im Falle der  $II$ -Terme niedrigerer Multiplizität recht gut bewährt hat.

Für die Erklärung der Abweichung kann die Wechselwirkung der  $4II$ -Termkomponenten mit anderen Molekülzuständen in Betracht kommen. Durch die Berücksichtigung der Wechselwirkung mit einem  $4\Sigma$ -Zustand gelang es den Verfassern, die  $A$ -Aufspaltungen bei dem in Rede stehenden  $4II$ -Term in Übereinstimmung mit den Messungen zu deuten [4], und dieselbe Rechnungen ergeben auch Verschiebungen in der gegenseitigen Lage der Termkomponenten, doch sind diese Verschiebungen gegen die genannten Abweichungen viel zu klein (sie bleiben unter  $0,1 \text{ cm}^{-1}$ ). Es zeigte sich, dass die Wechselwirkungen mit einem anderen  $4II$ - und mit einem  $4A$ -Zustand ebenfalls zu vernachlässigbar kleinen Verschiebungen führen.

Es gibt aber Wechselwirkungen auch zwischen Termen verschiedener Multiplizität, die durch den Operator  $\sum a_i (\mathbf{l}_i \mathbf{s}_i)$  der Bahn-Spin-Kopplung der einzelnen Elektronen vermittelt werden [5], so dass zur Deutung des fraglichen Problems die Wechselwirkungen des  $4II$ -Zustandes mit  $2\Sigma$ -,  $2II$ - und  $2A$ -Termen in Frage kommen. Unter Beachtung der entsprechenden Auswahlregeln [s. die spätere Gl. (24)] ergibt sich, dass nur der  $2II$ -Term eine Verschiebung der beschriebenen Art in der gegenseitigen Lage der  $4II$ -Komponenten bewirken kann. Das wird auch dadurch unterstützt, dass im Termschema des  $O_2^+$  auch mehrere  $2II$ -Terme zu finden sind, die verhältnismässig nahe an dem betrachteten  $4II$ -Zustand liegen.

Zur Erläuterung und mit Rücksicht auf das Folgende sind die Term-schemata von  $O_2$  und  $O_2^+$  — nach *Mulliken* [6], aber durch die neueren Ergebnissen ergänzt — in Abb. 1 dargestellt.

Da nach dem Obigen die beobachtete anomale Verschiebung der  ${}^4\Pi$ -Term-komponenten durch ihre Wechselwirkung mit einem  ${}^2\Pi$ -Term (bzw. mit mehreren  ${}^2\Pi$ -Termen) verursacht werden kann, wollen wir im folgenden diese Wechsel-wirkung näher untersuchen.

Die Lösung der Wellengleichung des zweiatomigen Moleküls hat bekannt-lich unter Vernachlässigung gewisser (die Separation hindernden) Glieder in der Gleichung die Form

$$\Psi = \Phi Ru ; \tag{2}$$

dabei ist  $\Phi$  die Lösung der Wellengleichung

$$[\mathbf{H} - V(r)] \Phi = 0 \tag{3}$$

des Zweizentrensystems,  $u$  und  $R$  sind die Eigenfunktionen der Wellengleichung des symmetrischen Kreisels bzw. des anharmonischen Oszillators. Wir wollen den Teil des *Hamilton*-Operators  $\mathbf{H}$  in (3), in dem Spinglieder nicht vorkommen, mit  $\mathbf{H}_0$ , die entsprechenden Eigenfunktionen mit  $\Phi_0$  bezeichnen :

$$[\mathbf{H}_0 - V(r)] \Phi_0 = 0, \tag{4}$$

und den erwähnten Operator

$$\mathbf{H}_p = \sum a_i (\mathbf{I}_i \mathbf{s}_i) \tag{5}$$

der Bahn-Spin Wechselwirkung als Störung betrachten ; die im allgemeinen viel kleineren gemischten Glieder mit  $\mathbf{I}_i \mathbf{s}_j$  und die Spin-Spin-Wechselwirkung können hier ausser acht bleiben.

Die erste Aufgabe ist die Bestimmung der Eigenfunktionen  $\Phi_0$  derjenigen Elektronenzustände von  $O_2^+$ , die bei unserem Problem eine Rolle spielen. Das sind fünf  $\Pi$ -Zustände, die wir im folgenden der Kürze halber mit

$${}^2\Pi^a, {}^4\Pi, {}^2\Pi^b, {}^2\Pi^c, {}^2\Pi^d \tag{6}$$

bezeichnen. Den Grundzustand  ${}^2\Pi^a$  — nach der Mullikenschen Bezeichnung ...  $(w\pi)^4 (v\pi) X^2\Pi_g^-$  — kann man nach Mulliken aus dem Grundzustand ...  $(w\pi)^4 (v\pi)^2 {}^3\Sigma_g^-$  des  $O_2$  entstanden denken, indem man ein Elektron aus der äusseren  $v$ -Schale entfernt. Ähnlich gehen die übrigen vier Zustände von (6)



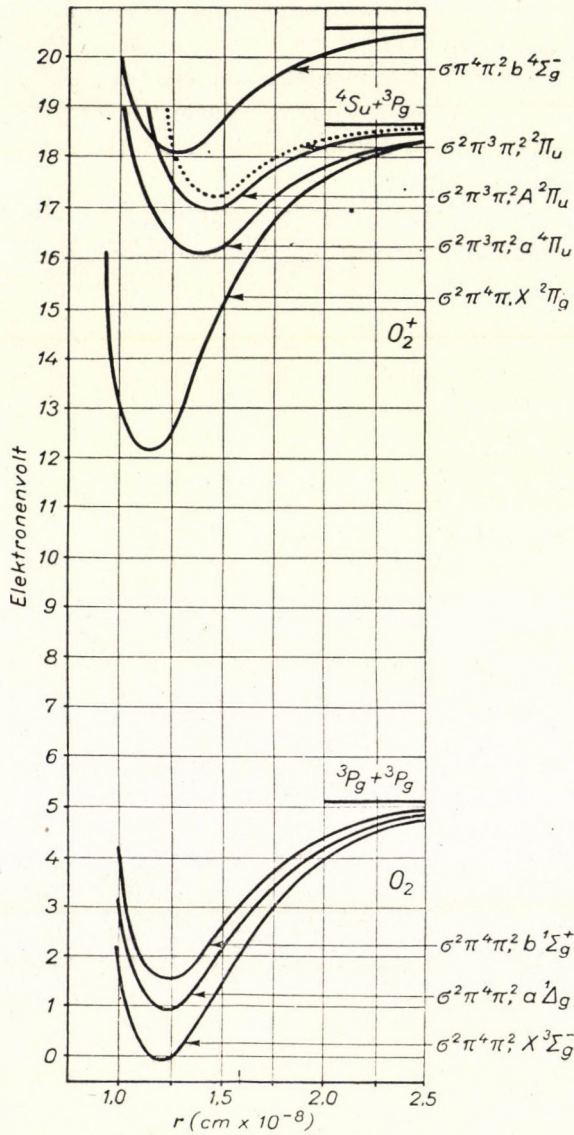


Abb. 1. Ein Teil von den Termschemata (Potentialkurven) des  $O_2$  und  $O_2^+$ -Moleküls. Die Zustände  $X^2\Pi_g$ ,  $A^2\Pi_g$  und der gestrichelt eingezeichnete, bisher noch nicht beobachtete  $^2\Pi$  Term von  $O_2$  entsprechen der Reihe nach den später im Text mit  $^2\Pi^a$ ,  $^2\Pi^b$ ,  $^2\Pi^c$  bezeichneten Zuständen.

aus der  $(w\pi)^4(v\pi)^2$ -Konfiguration des  $O_2$  durch Entfernen eines [je nach den einzelnen Zuständen verschiedenen] Elektrons aus der  $w$ -Schale hervor — alle vier Zustände haben also die Konfiguration . . .  $(w\pi)^3(v\pi)^2$  —, und zwar sollen die bekannten  ${}^4\Pi$ - und  ${}^2\Pi^b$ -Terme in diesem Sinne dem Term  ${}^3\Sigma_g^-$  von  $O_2$ , die unbekanntenen  ${}^2\Pi^c$ - und  ${}^2\Pi^d$ -Terme den metastabilen  ${}^1\Sigma_g^+$  bzw.  ${}^1\Delta_g$  von  $O_2$  entsprechen (vgl. auch Abb. 1).

Bei der Bestimmung von  $\Phi_0$  gehen wir von den Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen aus, die in Zylinderkoordinaten  $\varrho, z, \varphi$  die Form  $p(z, \varrho) e^{i\lambda\varphi} \alpha$ , bzw.  $p(z, \varrho) e^{i\lambda\varphi} \beta$  haben.  $\alpha$  und  $\beta$  sind die zu den Werten  $+\frac{1}{2}$  bzw.  $-\frac{1}{2}$  der Spinquantenzahl  $\sigma$  gehörenden Spineigenfunktionen, für  $\pi$ -Elektronen ist  $\lambda = \pm 1$ ; die Funktion  $p$  beziehe sich auf die  $w$ -Schale, die entsprechende Funktion für die  $v$ -Schale sei  $r$ . Die vier möglichen Eigenfunktionen der Elektronen der  $w$ -Schale sind also  $p e^{i\varphi} \alpha, p e^{-i\varphi} \alpha, p e^{i\varphi} \beta, p e^{-i\varphi} \beta$ , diejenigen der  $v$ -Schale:  $r e^{i\varphi} \alpha$  usw.

Sieht man zunächst in (4) von der elektrostatischen Wechselwirkung zwischen den Elektronen ab, so lassen sich bekanntlich Eigenfunktionen für die einzelnen Konfigurationen in Determinantenform angeben. Betrachten wir z. B. die Zustände mit  $\Lambda = \Sigma \lambda_i = +1, \Sigma = \Sigma \sigma_i = +\frac{1}{2}$  (also mit  $\Omega = \Lambda + \Sigma = \frac{3}{2}$ ), so ist die entsprechende Eigenfunktion für die Konfiguration  $(w\pi)^4(v\pi)$  (unter Fortlassen der Elektronen der inneren abgeschlossenen Schalen) :

$$D_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} p_1 e^{i\varphi_1} \alpha_1 & p_2 e^{i\varphi_2} \alpha_2 & p_3 e^{i\varphi_3} \alpha_3 & p_4 e^{i\varphi_4} \alpha_4 & p_5 e^{i\varphi_5} \alpha_5 \\ p_1 e^{i\varphi_1} \beta_1 & p_2 e^{i\varphi_2} \beta_2 & p_3 e^{i\varphi_3} \beta_3 & p_4 e^{i\varphi_4} \beta_4 & p_5 e^{i\varphi_5} \beta_5 \\ p_1 e^{-i\varphi_1} \alpha_1 & p_2 e^{-i\varphi_2} \alpha_2 & p_3 e^{-i\varphi_3} \alpha_3 & p_4 e^{-i\varphi_4} \alpha_4 & p_5 e^{-i\varphi_5} \alpha_5 \\ p_1 e^{-i\varphi_1} \beta_1 & p_2 e^{-i\varphi_2} \beta_2 & p_3 e^{-i\varphi_3} \beta_3 & p_4 e^{-i\varphi_4} \beta_4 & p_5 e^{-i\varphi_5} \beta_5 \\ r_1 e^{i\varphi_1} \alpha_1 & r_2 e^{i\varphi_2} \alpha_2 & r_3 e^{i\varphi_3} \alpha_3 & r_4 e^{i\varphi_4} \alpha_4 & r_5 e^{i\varphi_5} \alpha_5 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{5!}} \left[ \begin{matrix} (+ & + & - & -) \\ (a_1 & \beta_2 & a_3 & \beta_4) \end{matrix} \begin{matrix} (+ \\ a_5) \end{matrix} \right] \quad (7)$$

[In der leicht verständlichen abgekürzten Bezeichnung [ ] der Determinante bezieht sich also die erste runde Klammer auf die  $w$ -, die zweite auf die  $v$ -Schale.]

Für die Konfiguration (ebenfalls mit  $\Lambda = +1, \Sigma = +\frac{1}{2}$ ) ergeben sich vier Eigenfunktionen, und zwar mit den abgekürzten Bezeichnungen die folgenden :

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{5!}} \left[ \begin{matrix} (+ & + & -) \\ (a_1 & \beta_2 & a_3) \end{matrix} \begin{matrix} (+ & -) \\ (a_4 & \beta_5) \end{matrix} \right], \quad D_2 = \frac{1}{\sqrt{5!}} \left[ \begin{matrix} (+ & + & -) \\ (a_1 & \beta_2 & a_3) \end{matrix} \begin{matrix} (+ \\ \beta_4 & a_5) \end{matrix} \right], \quad (8)$$

$$D_3 = \frac{1}{\sqrt{5!}} \left[ \begin{matrix} (+ & + & -) \\ (a_1 & \beta_2 & \beta_3) \end{matrix} \begin{matrix} (+ & -) \\ (a_4 & a_5) \end{matrix} \right], \quad D_4 = \frac{1}{\sqrt{5!}} \begin{matrix} (- & + & -) \\ (a_1 & a_2 & \beta_3) \end{matrix} \begin{matrix} (+ & +) \\ (a_4 & \beta_5) \end{matrix}.$$



Die fünf zueinander orthogonalen Eigenfunktionen  $D_i$  sind, wie man leicht nachweist, zugleich Eigenfunktionen des Operators  $\mathbf{L}_z = \Sigma \mathbf{l}_{zi}$  mit dem Eigenwert  $\Lambda = 1$  und die des Operators  $\mathbf{S}_z = \Sigma \mathbf{s}_{zi}$  mit dem Eigenwert  $\Sigma = \frac{1}{2}$ . Die Eigenfunktionen der Zustände (6) müssen aber ausserdem auch Eigenfunktionen des Operators  $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}_x^2 + \mathbf{S}_y^2 + \mathbf{S}_z^2$  mit den entsprechenden, die Multiplizität der Terme bestimmenden Eigenwerten  $S(S+1)$  sein. Die Eigenfunktionen, die auch der letzteren Forderung genügen, die also schon den Zuständen (6) zugeordnet werden können, seien mit  $B_i$  bezeichnet. Nun ergibt die Anwendung des Operators  $\mathbf{S}^2$  auf die  $D_i$  folgendes:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^2 D_0 &= \hbar^2 \cdot \frac{3}{4} D_0 = \hbar^2 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) D_0, \text{ also } ({}^2\Pi_{3/2}^a): B_0 = D_0; \\ \mathbf{S}^2 D_1 &= \hbar^2 \left( \frac{7}{4} D_1 + D_2 + D_3 \right); \\ \mathbf{S}^2 D_2 &= \hbar^2 \left( D_1 + \frac{7}{4} D_2 + D_3 \right); \\ \mathbf{S}^2 D_3 &= \hbar^2 \left( D_1 + D_2 + \frac{7}{4} D_3 \right); \\ \mathbf{S}^2 D_4 &= \hbar^2 \cdot \frac{3}{4} D_4, \text{ also } ({}^2\Pi_{3/2}^d): B_4 = D_4. \end{aligned} \tag{9}$$

Während also  $D_0$  und  $D_4$  die Eigenfunktionen der Zustände  ${}^2\Pi_{3/2}^a$  und  ${}^2\Pi_{3/2}^d$  darstellen (wie erwähnt, ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung der Elektronen), hat man die Eigenfunktionen von  ${}^4\Pi$ ,  ${}^2\Pi^b$  und  ${}^2\Pi^c$  als Linearkombinationen  $\sum_1^3 c_i D_i$  aus der Forderung

$$\mathbf{S}^2 \sum_1^3 c_i D_i = \hbar^2 \lambda \sum_1^3 c_i D_i \quad [\text{mit } \lambda = S(S+1)] \tag{10}$$

zu bestimmen. Dies führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \left( \frac{7}{4} - \lambda \right) c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ c_1 + \left( \frac{7}{4} - \lambda \right) c_2 + c_3 &= 0, \\ c_1 + c_2 + \left( \frac{7}{4} - \lambda \right) c_3 &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Wurzeln der Säkular determinante und die entsprechenden S-Werte sind :

$$\lambda^{(1)} = \frac{15}{4}, S^{(1)} = \frac{3}{2}; \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = \frac{3}{4}, S^{(2)} = S^{(3)} = \frac{1}{2}.$$

Die Wurzel  $\lambda^{(1)}$ , zu der die Lösung  $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = c_3^{(1)}$  gehört, entspricht also dem  ${}^4\Pi_{3/2}$ -Zustand, mithin ist seine normierte Eigenfunktion :

$$({}^4\Pi_{3/2}) : B_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(D_1 + D_2 + D_3). \quad (12)$$

Für die zur Doppelwurzel  $\lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$  gehörenden Zustände  ${}^2\Pi^b$  und  ${}^2\Pi^c$  folgt nur :  $c_3^{(2)} = -(c_1^{(2)} + c_2^{(2)})$ ,  $c_3^{(3)} = -(c_1^{(3)} + c_2^{(3)})$ , d. h. [mit  $c_i^{(2)} = c_i$ ,  $c_i^{(3)} = c_i'$ ] :

$$({}^2\Pi_{3/2}^b) : B_2 = c_1 D_1 + c_2 D_2 - (c_1 + c_2) D_3; \quad (13)$$

$$({}^2\Pi_{3/2}^c) : B_3 = c_1' D_1 + c_2' D_2 - (c_1' + c_2') D_3. \quad (14)$$

Die Eigenfunktionen dieser Zustände bleiben also nach diesem Verfahren noch unbestimmt, und die Berücksichtigung der elektrostatischen Wechselwirkung der Elektronen, durch die die Entartung aufgehoben wäre, lässt sich quantitativ kaum durchführen. Wenn wir aber die Mullikensche Zuordnung zu Hilfe nehmen [nach der der  ${}^2\Pi^b$ -Zustand in dem erwähnten Sinne dem  ${}^3\Sigma$ -Zustand von  $O_2$ , und  ${}^2\Pi^c$  dem  ${}^1\Sigma$ -Zustand des  $O_2$  entspricht] und beachten, dass zur  $(v\pi)^2$ -Schale beim  ${}^1\Sigma(O_2)$  nur die Bestandteile  $\binom{+-}{\alpha\beta}$  und  $\binom{+-}{\beta\alpha}$  gehören, die nach (8) nur in  $D_1$  und  $D_2$  auftreten, so können wir annehmen, dass die Eigenfunktion des dem  ${}^1\Sigma(O_2)$  entsprechenden  ${}^2\Pi_{3/2}^c$ -Zustandes nur  $D_1$ - und  $D_2$ -Anteile und keinen  $D_3$ -Anteil haben kann. Setzt man dementsprechend in (14)  $c_1 + c_2 = 0$ , d. h.  $c_2 = -c_1$ , so ist die normierte Eigenfunktion

$$({}^2\Pi_{3/2}^c) : B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_1 - D_2).$$

Die Eigenfunktion  $B_2$  von  ${}^2\Pi^b$  ergibt sich daraus, dass  $B_2$  und  $B_3$  zueinander orthogonal sein müssen ; das führt zu  $c_1 = c_2$  und nach Normierung zu

$$({}^2\Pi_{3/2}^b) : B_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(D_1 + D_2 - 2D_3).$$



Ähnlich kann man auch die  $B$ -Funktionen der anderen Komponenten der in (6) stehenden Terme erhalten. Wir fassen die Resultate zusammen :

$$\begin{aligned}
 ({}^2\Pi_{3/2}^a): B_0 &= D_0; & ({}^2\Pi_{1/2}^a): B'_0 &= D'_0; \\
 ({}^4\Pi_{5/2}): B_5 &= D_5; & ({}^4\Pi_{-1/2}): B'_5 &= D'_5; \\
 ({}^4\Pi_{3/2}): B_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(D_1 + D_2 + D_3); & ({}^4\Pi_{1/2}): B'_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(D'_1 + D'_2 + D'_3); \\
 ({}^2\Pi_{3/2}^b): B_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(D_1 + D_2 - 2D_3); & ({}^2\Pi_{1/2}^b): B'_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(D'_1 + D'_2 - 2D'_3); \\
 ({}^2\Pi_{3/2}^c): B_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(D_1 - D_2); & ({}^2\Pi_{1/2}^c): B'_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(D'_1 - D'_2); \\
 ({}^2\Pi_{3/2}^d): B_4 &= D_4; & ({}^2\Pi_{1/2}^d): B'_4 &= D'_4;
 \end{aligned} \tag{15}$$

dabei ist

$$D_5 = \frac{1}{\sqrt{5!}} \left[ \begin{matrix} + & + & - \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} + & - \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{matrix} \right], \tag{16}$$

und die Funktionen  $D_i$  gehen aus den entsprechenden  $D_i$  durch «Spiegelung» der Spinfunktionen — d. h. Ersetzen jedes  $\alpha_k$  durch  $\beta_k$  und jedes  $\beta_k$  durch  $\alpha_k$  — hervor. Sämtliche  $B$ -Funktionen sind orthogonal zueinander und normiert.

Die Funktionen  $B_i$  würden, wie erwähnt, im Falle der Vernachlässigung der gegenseitigen Wechselwirkung der Elektronen die Eigenfunktionen  $\Phi_0$  von (4) darstellen. Wir betrachten die  $B_i$  als Näherungseigenfunktionen und berechnen mit ihnen die Matrixelemente des Operators  $\mathbf{H}_p = \Sigma a_i (\mathbf{l}_i \mathbf{s}_i)$ , und zwar zuerst die Diagonalelemente für die Termkomponenten

$${}^2\Pi_{3/2}^a, {}^4\Pi_{3/2}, {}^2\Pi_{3/2}^b, {}^2\Pi_{3/2}^c, {}^2\Pi_{3/2}^d.$$

Die Diagonalelemente haben bekanntlich die Form  $A\Lambda\Sigma$ , wo die Multiplikkonstanten  $A$  bei mehreren Termen aus Messungen bekannt sind. Auf Grund der folgenden Rechnungen werden eben diese Konstanten mit gewissen Mittelwerten der im  $\mathbf{H}_p$  stehenden  $a_i$  in Beziehung gesetzt, wodurch auch die Bestimmung der nichtdiagonalen Matrixelemente von  $\mathbf{H}_p$  möglich wird. Für die Diagonalelemente ergeben sich auf Grund der bekannten Eigenschaften der Operatoren  $\mathbf{l}_i$  und  $\mathbf{s}_i$  die folgenden Resultate.

$$\begin{aligned}
 1) \quad {}^2\Pi^a (\Lambda = +1, \Sigma = +1) : A^2\Pi^a \Lambda\Sigma &= \frac{1}{2} A^2\Pi^a = \int B_0^* \Sigma a_i (\mathbf{l}_i \mathbf{s}_i) B_0 d\tau = \\
 &= \frac{1}{5!} \int \left[ \begin{pmatrix} + & + & - & - \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \right]^* \Sigma a_i \mathbf{l}_{2i} \mathbf{s}_{2i} \left[ \begin{pmatrix} + & + & - & - \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \right] d\tau = \frac{1}{2 \cdot 5!} \Sigma P ( - \overline{p_i^* a_i p_i} - \\
 - \overline{p_k^* a_k p_k} + \overline{p_l^* a_l p_l} + \overline{p_m^* a_m p_m} + \overline{r_n^* a_n r_n} ) &= \frac{1}{2} (-a_p - a_p + a_p + a_p + a_r) = \\
 &= \frac{1}{2} a_r; \tag{17}
 \end{aligned}$$

die Bezeichnung  $\Sigma P( )$  bedeutet dabei das Summieren des in der ( ) stehenden Ausdruckes über alle Permutationen von  $(iklmn) = (12345)$ , ferner ist

$$a_r = \overline{r_n^* a_n r_n} = \hbar^2 \int r^* (\varrho_n, z_n) a (\varrho_n, z_n) r (\varrho_n, z_n) \varrho_n d\varrho_n dz_n \tag{18}$$

und entsprechend  $a_p$ . Unter Verwendung des experimentellen Wertes von  $A^2\Pi^a$  [8] besagt also (17) :

$$A^2\Pi^a = a_r = 195 \text{ cm}^{-1}. \tag{19}$$

Zum gleichen Resultat gelangt man natürlich durch die Betrachtung der  ${}^2\Pi_{1/2}^a$  Komponente mit Hilfe der Eigenfunktion  $B_0'$  in (15).

2)  ${}^4\Pi$ -Zustand. Hier (und bei den folgenden zwei Zuständen) lässt sich die Berechnung der Diagonalelemente nach (15) auf die Integrale

$$\begin{aligned}
 \int D_1^* \mathbf{H}_p D_1 d\tau &= \frac{1}{2} (-a_p + 2a_r), & \int D_2^* \mathbf{H}_p D_2 d\tau &= \frac{1}{2} (-a_p - 2a_r), \\
 \int D_3^* \mathbf{H}_p D_3 d\tau &= \frac{1}{2} a_p, & \int D_i^* \mathbf{H}_p D_k d\tau &= 0 \quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k)
 \end{aligned} \tag{20}$$

zurückführen. Die erhaltene Beziehung nebst dem beobachteten Wert von  $A_{4\Pi}$  [8] lautet :

$$A_{4\Pi} = -\frac{1}{3} a_p = -48 \text{ cm}^{-1}, \text{ also } a_p = +144 \text{ cm}^{-1}. \tag{21}$$

3) Bei dem  ${}^2\Pi^b$ -Zustand ergibt sich

$$A^2\Pi^b = \frac{1}{3} a_p, \tag{22}$$

d. h. nach (21) sollte  $A^2\Pi^b = +48 \text{ cm}^{-1}$  sein, während der experimentelle Wert  $8,2 \text{ cm}^{-1}$  beträgt [8].



4) und 5) Bei den unbekanntem  ${}^2\Pi^c$  und  ${}^2\Pi^d$ -Zuständen führen die Rechnungen zu

$$A_{2\Pi^c} = -a_p, \quad A_{2\Pi^d} = +a_p. \quad (23)$$

Unter den nichtdiagonalen Matrixelementen von  $\mathbf{H}_p = \sum a_i (\mathbf{l}_i \mathbf{s}_i)$  können bekanntlich nur diejenigen von Null verschieden sein, die den Übergängen

$$\Delta\Omega = 0, \quad \Delta L = 0, \pm 1, \quad \Delta S = 0, \pm 1 \quad (24)$$

entsprechen. Die Rechnung ergibt, dass in unserem Fall auch einige von diesen Elementen verschwinden; die von Null verschiedenen sind:

$$\begin{aligned} H_p ({}^4\Pi_{3/2}, {}^2\Pi_{3/2}^b) &= -H_p ({}^4\Pi_{1/2}, {}^2\Pi_{1/2}^b) = -\frac{\sqrt{2}}{3} a_p = -67,88, \\ H_p ({}^4\Pi_{3/2}, {}^2\Pi_{3/2}^c) &= -H_p ({}^4\Pi_{1/2}, {}^2\Pi_{1/2}^c) = \sqrt{\frac{2}{3}} a_r = +159,22, \\ H_p ({}^2\Pi_{3/2}^b, {}^2\Pi_{3/2}^c) &= -H_p ({}^2\Pi_{1/2}^b, {}^2\Pi_{1/2}^c) = \frac{1}{\sqrt{3}} a_r = +112,58. \end{aligned} \quad (25)$$

Die Zahlenwerte der Matrixelemente (25), die für das Spätere von Wichtigkeit sind, können aber nicht hinreichend zuverlässig erscheinen, da die Abweichung des theoretischen Wertes ( $48 \text{ cm}^{-1}$ ) von  $A_{4\Pi^b}$  in (22) vom beobachteten Wert ( $8,2 \text{ cm}^{-1}$ ) darauf hinweist, dass die ohne Berücksichtigung der gegenseitigen elektrostatischen Wechselwirkung der Elektronen erhaltenen Eigenfunktionen (15) modifiziert werden müssen. Die elektrostatische Wechselwirkung bewirkt, dass die richtigen Eigenfunktionen (bei einigen von den betrachteten Zuständen) die Linearkombinationen der Funktionen  $B_i$  werden. Da bekanntlich die elektrostatische Wechselwirkung schon in viel einfacheren Fällen nicht genau in Rechnung zu tragen ist, suchen wir die Koeffizienten der Linearkombinationen aus der Forderung zu gewinnen, dass der theoretische Wert von  $A_{2\Pi^b}$  mit dem beobachteten übereinstimme.

Die elektrostatische Wechselwirkung ergibt bekanntlich Matrixelemente nur zwischen solchen Zuständen bzw. Funktionen  $B_i$  einer gegebenen Elektronenkonfiguration, zu denen dieselben Quantenzahlen  $L$ ,  $S$  und  $S$  gehören, in unserem Fall also zwischen den Termkomponenten  ${}^2\Pi_{3/2}^b$ ,  ${}^2\Pi_{3/2}^c$ ,  ${}^2\Pi_{3/2}^d$  (und zwischen  ${}^2\Pi_{1/2}^b$ ,  ${}^2\Pi_{1/2}^c$ ,  ${}^2\Pi_{1/2}^d$ ). Daher hat die Eigenfunktion  $\Phi_0$  von  ${}^2\Pi_{3/2}^b$  die Form [vgl. (15)]:  $\Phi_0 ({}^2\Pi_{3/2}^b) = S_{2b} B_2 + S_{3b} B_3 + S_{4b} B_4$ , und ähnliche Form haben auch  $\Phi_0 ({}^2\Pi_{3/2}^c)$  und  $\Phi_0 ({}^2\Pi_{3/2}^d)$ . ( $S_{2b}, S_{3b}, \dots$  sind die Koeffizienten der Linearkombination.) Zur Bestimmung von  $S_{2b}, S_{3b}, \dots$  reicht offenbar die Kenntnis der erwähnten Konstante  $A_{2\Pi^b}$  allein nicht aus, und es liegt keine andere verwendbare Grösse vor. Wählt man nun nur einen von den beiden Zuständen  ${}^2\Pi_{3/2}^c$  und  ${}^2\Pi_{3/2}^d$ , so

führt — wie leicht zu zeigen ist — die Wechselwirkung des  ${}^2\Pi_{3/2}^b$  Zustandes mit dem  ${}^2\Pi_{3/2}^d$  zu dem der Beobachtung widersprechenden Wert  $A_{2\Pi^b} > \frac{1}{3} a_p$ . Mit Rücksicht hierauf nehmen wir eine Wechselwirkung nur zwischen den  ${}^2\Pi^b$  und  ${}^2\Pi^c$ -Zuständen an, d. h. wir setzen :

$$\Phi_0({}^2\Pi_{3/2}^b) = S_{2b}B_2 + S_{3b}B_3, \tag{26}$$

$$\Phi_0({}^2\Pi_{3/2}^c) = S_{2c}B_2 + S_{3c}B_3.$$

Die Koeffizienten  $S$  lassen sich aus den Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen ( $S_{2b}S_{2c} + S_{3b}S_{3c} = 0$ ,  $S_{2b}^2 + S_{3b}^2 = 1$ ,  $S_{2c}^2 + S_{3c}^2 = 1$ ) und aus der erwähnten Bedingung

$$\begin{aligned} \int \Phi_0^*({}^2\Pi_{3/2}^b) \mathbf{H}_p \Phi_0({}^2\Pi_{3/2}^c) d\tau &= S_{2b}^2 \left( \frac{1}{6} a_p \right) + S_{3b}^2 \left( -\frac{1}{2} a_p \right) + 2S_{2b}S_{3b} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} a_r \right) = \\ &= A_{2\Pi^b} A \Sigma = \frac{1}{2} A_{2\Pi^b} = 4,1 \end{aligned} \tag{27}$$

bestimmen; wir geben gleich ihre Zahlenwerte an :

$$S_{2b} = S_{3c} = 0,99633, \quad S_{3b} = -S_{2c} = -0,08557. \tag{28}$$

Mit diesen  $S$ -Werten hat man ausser (26) auch die Eigenfunktionen

$$\Phi_0({}^2\Pi_{1/2}^b) = S_{2b}B_2' + S_{3b}B_3'; \quad \Phi_0({}^2\Pi_{1/2}^c) = S_{2c}B_2' + S_{3c}B_3' \tag{29}$$

zu bilden, die  $\Phi_0$ -Eigenfunktionen der übrigen Zustände sind nach unserer Annahme mit den entsprechenden  $B$ -Funktionen identisch.

Mit den Eigenfunktionen  $\Phi_0$  gerechnet, bleiben die Werte von  $A_{2\Pi^b}$ ,  $A_{\Pi}$ ,  $A_{2\Pi^d}$  ungeändert, für  $A_{2\Pi^b}$  und  $A_{2\Pi^c}$  gilt (27) bzw.

$$A_{2\Pi^c} = S_{2c}^2 \left( \frac{1}{3} a_p \right) + S_{3c}^2 (-a_p) + 4 S_{2c} S_{3c} \left( \frac{a_r}{\sqrt{3}} \right) = -104,2, \tag{30}$$

und für die nichtdiagonalen Matrixelemente ergibt sich statt (25) :

$$H_p({}^4\Pi_{3/2}, {}^2\Pi_{3/2}^b) = -H_p({}^4\Pi_{3/2}, {}^2\Pi_{3/2}^c) = S_{3b} \sqrt{\frac{2}{3}} a_r - S_{2b} \frac{\sqrt{2}}{3} a_p \equiv \varrho = -81,26,$$



$$H_p({}^4\Pi_{3/2}, {}^2\Pi_{3/2}^c) = -H_p({}^4\Pi_{1/2}, {}^2\Pi_{1/2}^c) = S_{3c} \sqrt{\frac{2}{3}} a_r - S_{2c} \frac{\sqrt{2}}{3} a_p \equiv \sigma = + 152,82 ,$$

$$H_p({}^2\Pi_{3/2}^b, {}^2\Pi_{3/2}^c) = -H_p({}^2\Pi_{1/2}^b, {}^2\Pi_{1/2}^c) = S_{2c} S_{2c} \left( \frac{1}{3} a_p \right) - S_{3c} S_{3c} a_p + \quad (31)$$

$$+ (S_{2c} S_{3c} + S_{3c} S_{2c}) \frac{1}{\sqrt{3}} a_r \equiv \tau = + 127,30 ,$$

d. h. die kleinen  $B_3$ - bzw.  $B_2$ -Anteile der Eigenfunktionen (26) rufen nur verhältnismässig kleine Änderungen in den Werten der nichtdiagonalen Matrixelemente vor.

Wir gehen nun von dem bisher betrachteten Zweizentrensystem zu dem schwingenden und rotierenden Molekül über. Als seine ungestörten Eigenfunktionen wählen wir mit Rücksicht auf (2)–(4) die Funktionen

$$\Psi_0 = \Phi_0 R u , \quad (32)$$

und betrachten  $\mathbf{H}_p + \mathbf{H}_1$  als Störung, wo der Operator  $\mathbf{H}_1$  die bei der Separation der vollständigen Wellengleichung vernachlässigten Glieder [2] repräsentiert. Dann ergibt sich, dass die hier untersuchte Wechselwirkung der  ${}^4\Pi$ -Termkomponenten mit den  ${}^2\Pi$ -Termen in erster Näherung durch die Säkulargleichung

$$\begin{array}{l} {}^4\Pi_{3/2} \\ {}^4\Pi_{3/2} \\ {}^4\Pi_{1/2} \\ {}^4\Pi_{-1/2} \\ {}^2\Pi_{3/2}^b \\ {}^2\Pi_{1/2}^b \\ {}^2\Pi_{3/2}^c \\ {}^2\Pi_{1/2}^c \end{array} \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccccccc} W_1^0 - W & H_{12}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{21}^0 & W_2^0 - W & H_{23}^0 & 0 & H_{25}^0 & 0 & H_{27}^0 & 0 \\ 0 & H_{32}^0 & W_3^0 - W & H_{34}^0 & 0 & H_{36}^0 & 0 & H_{38}^0 \\ 0 & 0 & H_{43}^0 & W_4^0 - W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{52}^0 & 0 & 0 & W_5^0 - W & H_{56}^0 & H_{57}^0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{63}^0 & 0 & H_{65}^0 & W_6^0 - W & 0 & H_{68}^0 \\ 0 & H_{72}^0 & 0 & 0 & H_{75}^0 & 0 & W_7^0 - W & H_{78}^0 \\ 0 & 0 & H_{83}^0 & 0 & 0 & H_{86}^0 & H_{87}^0 & W_8^0 - W \end{array} \right. \\ \end{array} = 0 \quad (33)$$

beschrieben wird; hier bedeuten:

$$W_1^0 = B^4 \Pi \left( x - \frac{19}{4} \right) + \frac{3}{2} A^4 \Pi; \quad W_5^0 = \nu ({}^4\Pi; {}^2\Pi^b) + B^2 \Pi^b \left( x - \frac{7}{4} \right) + \frac{1}{2} A^2 \Pi^b;$$

$$\begin{aligned}
 W_2^0 &= B_{1\Pi} \left( x + \frac{5}{4} \right) + \frac{1}{2} A_{1\Pi}; & W_6^0 &= \nu(^4\Pi; ^2\Pi^b) + B_{2\Pi^b} \left( x + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} A_{2\Pi^b}; \\
 W_3^0 &= B_{1\Pi} \left( x + \frac{13}{4} \right) - \frac{1}{2} A_{1\Pi}; & W_7^0 &= \nu(^4\Pi; ^2\Pi^c) + B_{2\Pi^c} \left( x - \frac{7}{4} \right) + \frac{1}{2} A_{2\Pi^c}; \\
 W_4^0 &= B_{1\Pi} \left( x + \frac{5}{4} \right) - \frac{3}{2} A_{1\Pi}; & W_8^0 &= \nu(^4\Pi; ^2\Pi^c) + B_{2\Pi^c} \left( x + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} A_{2\Pi^c};
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

$$H_{12}^0 = B_{1\Pi} \sqrt{3 \left( x - \frac{15}{4} \right)}; \quad H_{56}^0 = B_{2\Pi^b} \sqrt{x - \frac{3}{4}};$$

$$H_{23}^0 = 2 B_{1\Pi} \sqrt{x - \frac{3}{4}}; \quad H_{78}^0 = B_{2\Pi^c} \sqrt{x - \frac{3}{4}};$$

$$H_{34}^0 = B_{1\Pi} \sqrt{3 \left( x + \frac{1}{4} \right)}; \quad H_{57}^0 = -H_{68}^0 = \tau;$$

$$H_{25}^0 = -H_{36}^0 = \varrho; \quad H_{27}^0 = -H_{38}^0 = \sigma; \quad H_{ik}^{0*} = H_{ki}^0,$$

und  $x = J(J + 1)$ . Von den Abständen  $\nu(^4\Pi, ^2\Pi^b)$  und  $\nu(^4\Pi, ^2\Pi^c)$  der entsprechenden Terme ist der erstere  $-6900 \text{ cm}^{-1}$ ; der letztere sowie  $B_{2\Pi^c}$  sind nicht bekannt. Die für die entsprechenden Terme mit  $\lambda = -1$  gültige Determinantengleichung ist mit (33) identisch.

Die Diagonalelemente von (33) sind die Energiewerte, die sich aus der separierten Wellengleichung des Moleküls ergeben und die dem Hundschen Fall a) entsprechen; bei ihnen ist die infolge der Rotation auftretende gegenseitige Wechselwirkung der Multipllett-komponenten nicht berücksichtigt. Diesen Wechselwirkungen entsprechen die Matrixelemente innerhalb der durch gestrichelte Linien getrennten Quadrate; die übrigen Matrixelemente ergeben sich dadurch, dass der Operator  $\mathbf{H}_p = \sum a_i (\mathbf{l}_i \mathbf{s}_i)$  in die bei der Separation der Wellengleichung vernachlässigten Glieder aufgenommen wurde, bzw. dass wir von den Eigenfunktionen (32) ausgegangen sind.

Transformiert man die Matrix  $\mathbf{H}^0$  von (33) mit einer solchen unitären Matrix  $\mathbf{S}$ , dass die  $^4\Pi$  und  $^2\Pi$ -Anteile von  $\mathbf{H}^0$  Diagonalf orm annehmen, so stellen in der transformierten Matrix



$W_1$	0	0	0	$H_{15}$	$H_{16}$	$H_{17}$	$H_{18}$
0	$W_2$	0	0	$H_{25}$	$H_{26}$	$H_{27}$	$H_{28}$
0	0	$W_3$	0	$H_{35}$	$H_{36}$	$H_{37}$	$H_{38}$
0	0	0	$W_4$	$H_{45}$	$H_{46}$	$H_{47}$	$H_{48}$
$H_{51}$	$H_{52}$	$H_{53}$	$H_{54}$	$W_5$	0	$H_{57}$	$H_{58}$
$H_{61}$	$H_{62}$	$H_{63}$	$H_{64}$	0	$W_6$	$H_{67}$	$H_{68}$
$H_{71}$	$H_{72}$	$H_{73}$	$H_{74}$	$H_{75}$	$H_{76}$	$W_7$	0
$H_{81}$	$H_{82}$	$H_{83}$	$H_{84}$	$H_{85}$	$H_{86}$	0	$W_8$

(35)

die Diagonalelemente  $W_1, W_2, W_3, W_4$  gerade die Brandtschen Energieausdrücke (1), die Diagonalelemente  $W_5, W_6$  und  $W_7, W_8$  die bekannten Hill-van Vleckschen Formeln [2] für die  ${}^2\Pi^b$ - und  ${}^2\Pi^c$ -Terme dar, ferner sind

$$\begin{aligned}
 H_{k5} &= S_{2k} S_{55} H_{25}^0 + S_{3k} S_{65} H_{36}^0; & H_{k7} &= S_{2k} S_{77} H_{27}^0 + S_{3k} S_{87} H_{38}^0; \\
 H_{k6} &= S_{2k} S_{56} H_{25}^0 + S_{3k} S_{66} H_{36}^0; & H_{k8} &= S_{2k} S_{78} H_{27}^0 + S_{3k} S_{88} H_{38}^0; & (36) \\
 & & & & (k = 1, \dots, 4) \\
 H_{l7} &= S_{5l} S_{77} S_{57}^0 + S_{6l} S_{87} H_{68}^0; & H_{l8} &= S_{5l} S_{78} H_{57}^0 + S_{6l} S_{88} H_{68}^0 \\
 & & & & (l = 5, 6).
 \end{aligned}$$

Für die Elemente von  $S$  gilt [4], [9]

$$\begin{aligned}
 s_{ik} &= [s_{1k}^2 + s_{2k}^2 + s_{3k}^2 + s_{4k}^2]^{-1/2} s_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \\
 s_{1k} &= \left[ 3 \left( J - \frac{3}{2} \right) \left( J + \frac{5}{2} \right) \right]^{1/2} \left| (W_3^0 - W_k)(W_4^0 - W_k) - 3 \left( J + \frac{1}{2} \right)^2 \right|, \\
 s_{2k} &= - (W_1^0 - W_k) \left[ (W_3^0 - W_k)(W_4^0 - W_k) - 3 \left( J + \frac{1}{2} \right)^2 \right], & (37) \\
 s_{3k} &= 2 \left[ \left( J - \frac{1}{2} \right) \left( J + \frac{3}{2} \right) \right]^{1/2} (W_1^0 - W_k)(W_4^0 - W_k), \\
 s_{4k} &= - 2 \left[ 3 \left( J - \frac{1}{2} \right) \left( J + \frac{3}{2} \right) \right]^{1/2} \left( J + \frac{1}{2} \right) (W_1^0 - W_k).
 \end{aligned}$$

Von  $(S_{55}, S_{56}, S_{65}, S_{66})$  und  $(S_{77}, S_{78}, S_{87}, S_{88})$  genügt es für das Folgende nur soviel zu wissen, dass sie je eine unitäre Teilmatrix bilden; die übrigen Elemente von  $S$  sind Null.

Wendet man nun auf die Matrix (35) die üblichen Formeln der Störungstheorie von nichtentarteten Systemen an und bedenkt, dass die gegen die Multipliettaufspaltung grossen Termdifferenzen  $\nu(^4II, ^2II^b)$  und  $\nu(^4II, ^2II^c)$  für alle Termkomponenten als gleich genommen werden können, so erhält man für die Energiewerte der  $^4II$ -Komponenten :

$$W'_k = W_k + \alpha (S_{2k}^2 + S_{3k}^2) \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (38)$$

mit

$$\alpha = \frac{\varrho^2}{\nu(^4II, ^2II^b)} + \frac{\sigma^2}{\nu(^4II, ^2II^c)} \quad (39)$$

Nach dem Obigen ruft also die Wechselwirkung des  $^4II$ -Zustandes mit den  $^2II$ -Termen in dem gegenseitigen Abstand der  $^4II$ -Komponenten die Abweichungen

$$\Delta W'_{ki} - \Delta W_{ki} = (W'_k - W'_i) - (W_k - W_i) = \alpha (S_{2k}^2 + S_{3k}^2 - S_{2i}^2 - S_{3i}^2) \quad (40)$$

von den auf Grund der Brandtschen Formeln (1) erwarteten Werten vor. Die beobachteten Abweichungen sind für den Schwingungszustand  $v = 0$  des  $^4II$ -Termes, nach der Tabelle XX der Nevinschen Arbeit, in Abb. 2 durch Kreise dargestellt; die ausgezogenen Kurven zeigen die theoretischen Werte, die aus (40) mit der Konstante  $\alpha = -3,712 \text{ cm}^{-1}$  [nach numerischer Berechnung von  $S_{ik}$ ] gewonnen wurden. Man sieht, dass die beobachteten Abweichungen durch die untersuchte Wechselwirkung im wesentlichen erklärt werden können.

Wir bemerken, dass die Gültigkeit der Resultate von (38) bzw. (40) von den unter (14) und bei (26) gemachten Annahmen nicht berührt wird; ohne diese würden nur in der Konstante  $\alpha$  in (39) auch andere Grössen auftreten. Den mit diesen Annahmen erhaltenen Ausdruck von  $\alpha$  können wir aber dazu benützen, um gewisse Aussagen über die Lage des bisher nicht beobachteten  $^2II^b$ -Termes zu machen.

Zunächst folgt aus der Richtung der beobachteten Abweichungen [die mittleren Komponenten von  $^4II$  kommen der tiefsten näher], dass  $\alpha < 0$  ist. Da nach der Analyse der  $^2II^b$ - $^2II^a$ -Banden [7] der  $^2II^b$ -Term über dem  $^4II$  liegt [d. h.  $\nu(^4II, ^2II^b) < 0$  ist], gilt nach (39):  $\nu(^4II, ^2II^c) < 0$ . Bei der Bestimmung von  $\nu(^4II, ^2II^c)$  beachten wir, dass das  $v=0$ -Niveau des  $^4II$ -Termes von allen Schwingungsniveaus von  $^2II^b$  und  $^2II^c$  gestört werden kann. Dementsprechend schreibt man genauer statt des ersten Gliedes von  $\alpha$ :

$$\sum_{v'=0}^n \frac{[\int R_0^* \varrho(r) R_v dr \int u^* u d\tau_{rot}]^2}{\nu(^4II_{v=0}; ^2II_{v'}^b)} \approx \sum_{v'=0}^n \frac{\varrho^2 [\int R_0^* R_v dr]^2}{\nu(^4II_{v=0}; ^2II_{v'}^b)} \equiv \beta, \quad (41)$$



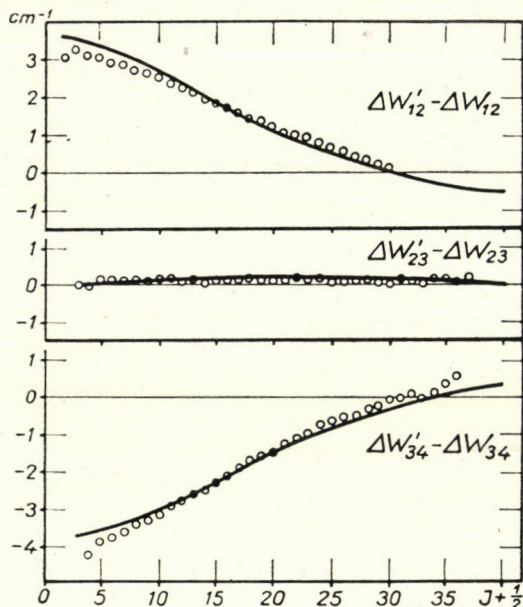


Abb. 2. Die Kreise bedeuten die in den gegenseitigen Abständen der  $4II$ -Komponenten beobachteten Abweichungen von den nach der bisherigen Theorie erwarteten Werten, also der Reihe nach die aus der Tabelle XX der Nevinschen Arbeit [1] entnommenen Differenzen  $\Delta F_{43, \text{obs}}(J) - \Delta F_{43, \text{calc}}(J)$ ,  $\Delta F_{32, \text{obs}}(J) - \Delta F_{32, \text{calc}}(J)$ ,  $\Delta F_{21, \text{obs}}(J) - \Delta F_{21, \text{calc}}(J)$ . Die ausgezogenen Kurven stellen die durch die Störung des  $4II$ -Zustandes von zwei  $2II$ -Termen verursachten, aus der theoretischen Formel (40) berechneten Verschiebungen  $\Delta W'_{12}(J) - \Delta W_{12}(J)$ ,  $\Delta W'_{23}(J) - \Delta W_{23}(J)$  und  $\Delta W'_{34}(J) - \Delta W_{34}(J)$  dar.

wo  $R_0$  und  $R_v$ , die Schwingungseigenfunktionen von  $4II$  ( $v'' = 0$ ) bzw.  $2II^b(v')$  bedeuten und

$$\begin{aligned} \nu(4II_{v=0}; 2II^b_{v'}) &= \nu_e(4II; 2II^b) + \frac{1}{2} \omega_e'' - \frac{1}{4} \omega_e'' x_e'' - \omega_e'(v' + \frac{1}{2}) + \\ &+ \omega_e' x_e' \left(v' + \frac{1}{2}\right)^2, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \nu_e(4II; 2II^b) &= -6895 \text{ cm}^{-1}, \omega_e'' = 1035,69 \text{ cm}^{-1}, \omega_e'' x_e'' = 10,39 \text{ cm}^{-1}, \omega_e' = \\ &= 900 \text{ cm}^{-1}, \omega_e' x_e' = 13,4 \text{ cm}^{-1} \end{aligned}$$

sind [8].

Da sich die Kernabstände der  $4II$  und  $2II^b$ -Zustände in der Gleichgewichtslage ( $r_e = 1,3813$  bzw.  $1,409 \text{ \AA}$ ) sowie ihre Schwingungskonstanten  $\omega_e$  nur relativ wenig voneinander unterscheiden, kann man annehmen, dass das Schwingungsniveau  $v'' = 0$  des  $4II$  hauptsächlich vom Niveau  $v' = 0$  des  $2II^b$  gestört wird. Im Falle von kleinen Schwingungsquantenzahlen  $v'$  können die Eigenfunktionen  $R_0, R_v$  des anharmonischen Oszillators angenähert durch diejenigen



des harmonischen Oszillators ersetzt werden. Die mit den letzteren nach den Hutchisson'schen Formeln [10]\* berechneten Integrale  $\int R_0^* R_v dr$  führen zu

$$\beta \approx \sum_{v'=0}^5 \varrho^2 \frac{[\int R_0^* R_{v'} dr]^2}{v({}^4\Pi_{v=0}; {}^2\Pi_{v'}^b)} = - (0,8598 + 0,0942 + 0,0010 + 0,0001 + 0,0003 + 0,0003) = - 0,96. \quad (43)$$

Was nun den unbekanntem  ${}^2\Pi^c$ -Term betrifft, können wir annehmen, dass bei ihm der Kernabstand und die Schwingungskonstante nicht wesentlich von denjenigen der  ${}^4\Pi$ - und  ${}^2\Pi^b$ -Terme abweichen, da ja alle drei Terme zu derselben Elektronenkonfiguration gehören. Das bedeutet, dass das Niveau  $v'' = 0$  des  ${}^4\Pi$ -Termes im wesentlichen ebenfalls nur vom Niveau  $v' = 0$  des  ${}^2\Pi^c$  gestört wird. Der Abstand des letzteren von dem  ${}^4\Pi_{v=0}$  Niveau ergibt sich aus (41) und nach dem Obigen zu

$$v({}^4\Pi_{v=0}, {}^2\Pi_{v=0}^c) = \frac{\sigma^2}{\alpha - \beta} \approx - 8500 \text{ cm}^{-1}. \quad (44)$$

Nach unseren Überlegungen sollte also der bisher nicht beobachtete  ${}^2\Pi^c$  Zustand (in der Abb. 1. gestrichelt eingezeichnet) um etwa  $8500 \text{ cm}^{-1}$  über dem  ${}^4\Pi_{v=0}$ -Niveau, oder [nach (42)] um etwa  $1700 \text{ cm}^{-1}$  über dem bekannten  ${}^2\Pi_{v=0}^b$ -Niveau liegen; seine Multiplettkonstante beträgt nach (30) etwa  $- 104 \text{ cm}^{-1}$ .

#### LITERATUR

1. T. E. Nevin, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), **237**, 471, 1938.
2. J. H. van Vleck, Phys. Rev., **33**, 467, 1929; E. Hill, J. H. van Vleck, Phys. Rev., **32**, 250, 1928.
3. W. H. Brandt, Phys. Rev., **50**, 778, 1936.
4. Á. Budó, I. Kovács, Phys. Zeitschr., **45**, 122, 1944.
5. J. H. van Vleck, Phys. Rev., **40**, 544, 1932; Á. Budó, I. Kovács, Zeitschr. f. Phys. **109**, 393, 1938; **111**, 633, 1939.
6. R. S. Mulliken, Rev. Mod. Phys. **4**, 51, 1932.
7. L. Bozóky, R. Schmid, Phys. Rev. **48**, 465, 1935; L. Bozóky, Zeitschr. f. Phys. **104**, 275, 1937; D. S. Stevens, Phys. Rev., **38**, 1292, 1931.
8. G. Herzberg, Molecular Spectra and Molecular Structure. I. Spectra of Diatomic Molecules. Van Nostrand, New York. 1951. S. 560–561.
9. Á. Budó, I. Kovács, Act. Phys. Hung., **1**, 84, 1951.
10. E. Hutchisson, Phys. Rev., **36**, 410, 1930.

\* Die Formel für die Konstante  $C_3$  in der Hutchisson'schen Arbeit S. 415 oben ist nicht richtig; sie muss lauten (im Falle von auf 1 normierten Schwingungseigenfunktionen):

$$C_3 = \sqrt{\frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}} e^{-\frac{\delta^2}{2(1 + \alpha^2)}}.$$



О СОСТОЯНИИ  ${}^4\Pi$  МОЛЕКУЛЫ  $O_2^+$ 

А. БУДО и И. КОВАЧ

*Резюме*

Мультиплетное расщепление спектральной линии молекулы  $O_2^+$ , наблюдаемое в состоянии  ${}^4\Pi_u$ , которое, как функция вращательного квантового числа отличается от формулы, выведенной на основе теории Ван-Флека, настоящей работой объясняется возмущением состояния  ${}^4\Pi$  двумя состояниями  ${}^2\Pi$ , что дает хорошее совпадение с экспериментальными данными. Из теории данного возмущения можно задать приближенное положение и мультиплетную константу до сих пор неизвестного  ${}^2\Pi$ -терма.

*КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ*  
*BRIEF REPORTS*  
*KURZE MITTEILUNGEN*





# CALCULATION OF PAIRING ENERGY BY MEANS OF THE EIGENFUNCTIONS OF THE YUKAWA POTENTIAL

By  
M. A. ZIEGLER

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS, BUDAPEST

(Received 23. IV. 1954)

*M. G. Mayer* [1] explained the empirical nuclear spin values by assuming that of two orbits in the same nucleus that of higher angular momentum has the higher (less negative) pairing energy. In her calculations to check this hypothesis, the potential between two nucleons being assumed in the shape of a  $\delta$  function she obtained for the absolute value of the pairing energy belonging to the orbit determined by

$$P_{nlj} = (2j + 1) I_{nl} \quad (1)$$

where

$$I_{nl} = \int_0^{\infty} R_{nl}^4(r) r^2 dr \quad (2)$$

and  $R_{nl}(r)$  and  $r$  denote the normalized radial eigenfunction and the radius vector, respectively.

(In what follows we shall neglect the factors independent of  $n$ ,  $l$ ,  $j$ , as we are only interested in the relative value of the pairing energies belonging to the individual energy levels.)

Thus, to determine the pairing energy we need to know the energy eigenfunctions belonging to the individual quantum states.

Hitherto the calculations have been carried out in two different ways. *M. G. Mayer* [1] estimated the value of the integral (2), whereas *A. J. M. Hitcock* [3] used oscillator eigenfunctions; i. e. in his calculation the integral in the pairing energy actually depends only on the value of  $n$ ,  $l$ , but not on the value of  $j$ . In this way the increase with  $j$  of the pairing energy in the case of identical  $l$  is trivial.

Thus a strong spin-orbit interaction seems a suitable assumption for our calculations, as in this case the energy eigenvalues and, at the same time, the eigenfunctions depend not only on  $n$ ,  $l$  but also on  $j$ . Thus we obtain for the integral (2):



$$I_{nlj} = \int_0^{\infty} R_{nlj}^4(r) r^2 dr . \quad (3)$$

In our calculations we used *G. Szamosi's* results [4]. Calculating the potential of the nucleus, which was assumed to be of constant density, from a Yukawa interaction potential the expression for the potential becomes

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{3gA}{\mu^2 R^3} \left[ 1 - (1 + \mu R) e^{-\mu R} \frac{sh \mu r}{\mu r} \right] & \text{if } r < R \\ -\frac{3gA}{\mu R^2} \left[ e^{\mu R} - (1 + \mu R) \frac{sh \mu R}{uR} \right] \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} & \text{if } r > R \end{cases}$$

where  $A$  is the number of nucleons, and  $g$  the coupling constant of the meson field.  $\mu$  is related to the mass of the  $\pi$  meson in the well-known manner. In the Hartree approximation the one-particle Schrödinger equation belonging to the quantum number  $(n, l, j)$  is of the form

$$\Delta \psi_{nlj} + \frac{2M}{\hbar^2} \left[ E_{nlj} + \frac{1}{2} gV' \right] \psi_{nlj} = 0 .$$

Assuming a spin-orbit interaction the potential becomes

$$V'(r) = \begin{cases} V(r) + \kappa \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} l & \text{if } j = l + \frac{1}{2} \\ V(r) - \kappa \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (l+1) & \text{if } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

where

$$\kappa = \left( \frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \lambda .$$

In the above expressions  $\psi_{nlj}$  and  $E_{nlj}$  denote the one-particle energy eigenfunction and the energy eigenvalue, respectively.  $M$  is the mass of the particle and  $\lambda$  a numerical factor characteristic of the strength of the spin-orbit interaction. Separating angular and radial part in  $\psi$  the differential equation obtained for the function

$$\Phi_{nlj}(r) = r R_{nlj}(r)$$

can be solved numerically if  $g$  and  $\lambda$  are given.

Taking into account that the radial eigenfunctions in the integral are normalized we obtain for the absolute value of the pairing energy from (1) and (3)

$$P_{nj} = (2j + 1) \frac{\int_0^{\infty} \Phi_{nlj}^4(r) r^2 dr}{\left[ \int_0^{\infty} \Phi_{nlj}^2(r) dr \right]^2}.$$

The calculations were carried out for the nucleus with  $Z = 60$  and  $N = 83$  ( $Z$  number of protons,  $N$  number of neutrons), the parameter values being  $g = 5e$  and  $\lambda = 10$ . The results of the calculation are listed in the Table.

TABLE

(The »competing« levels are marked by { ).

Level	$I_{nej}$	$P_{nej}$
1 $s_{1/2}$	1,105	0,230
2 $p_{3/2}$	0,059	0,237
1 $p_{1/2}$	0,061	0,122
{ 1 $d_{5/2}$	0,042	0,251
{ 2 $s_{1/2}$	0,121	0,243
1 $d_{3/2}$	0,045	0,180
1 $f_{7/2}$	0,033	0,264
2 $p_{3/2}$	0,058	0,233
1 $f_{5/2}$	0,038	0,229
{ 2 $p_{1/2}$	0,062	0,124
{ 1 $g_{9/2}$	0,029	0,289
{ 2 $d_{5/2}$	0,040	0,238
{ 3 $s_{1/2}$	0,126	0,251
{ 1 $g_{7/2}$	0,033	0,264
2 $d_{3/2}$	0,043	0,172
1 $h_{1/2}$	0,026	0,308
2 $f_{7/2}$	0,030	0,243
1 $h_{9/2}$	0,029	0,297

The results show that the assumption for the pairing energy was justified : of orbits of the same azimuthal quantum number that of higher angular momentum has indeed the higher pairing energy.

The same result, i. e. that it is really the orbit of higher angular momentum which has a higher pairing energy, was obtained in the case of levels



which are, according to experiment «competing» [5]. Thus it is possible that the orbit of higher angular momentum lies energetically lower, namely

$$P_{1d_{5/2}} > P_{1s_{1/2}}, \quad P_{1g_{9/2}} > P_{2p_{1/2}}, \quad P_{1g_{7/2}} > P_{2d_{5/2}}$$

There are only two exceptions to this rule, the levels  $2p_{1/2}$  and  $1f_{5/2}$ . Calculating, however, the level order without taking into account the pairing energy, it was already found that these levels were interchanged as compared to the experimental results. Besides, the difference between the two pairing energies is so slight that it does not exceed the error limit of the calculation.

These calculations are of mere informational character as in the derivation of (1) the interaction potential of the two nucleons was supposed to be a  $\delta$ -function. It can be assumed, however, that the application of the Yukawa potential, apart from some constant factors, would yield essentially the same results.

I take this opportunity to thank *G. Szamosi* for having called my attention to this problem.

#### REFERENCES

1. *M. G. Mayer*, Phys. Rev. **78**, 16, 1950.
2. *M. G. Mayer*, Phys. Rev. **78**, 22, 1950.
3. *A. J. M. Hitchcock*, Phil. Mag. **44**, 766, 1953.
4. *G. Szamosi*, Naturwiss. **3**, 105, 1953.
5. *O. Haxel, J. H. D. Jensen, H. E. Suess*, Ergebn. exact. Naturwiss. **290**, 244, 1952



# DER ENERGIE-IMPULS-TENSOR DER STRALUNG IN DIELEKTRIKA

Von

G. MARX und K. NAGY

INSTITUT FÜR PHYSIK DER ROLAND EÖTVÖS UNIVERSITÄT, BUDAPEST

(Vorgelegt von K. F. Novobátzky — Eingegangen: 29. VI. 1954)

Die elektromagnetische Strahlung steht selbst in völlig durchsichtigen Medien in einer ständigen Wechselwirkung mit der polarisierbaren Materie: das elektromagnetische Feld ruft eine wechselnde elektrische und magnetische Polarisation hervor, während die Strahlung der entstehenden Dipole die Eigenschaften der primär einfallenden Strahlung verändert. Hieraus folgt, dass die aus dem Vakuum einfallende Strahlungsenergie auch in Medien, die nicht ständig Energie absorbieren, in einem gegebenen Augenblick nur teilweise in Form von elektromagnetischer Energie anwesend ist, während sie teilweise als die potentielle und kinetische Energie der polarisierten (deformierten) Moleküle, also vom makroskopischen Gesichtspunkt als mechanische Energie erscheint. Mehrere Forscher wiesen darauf hin, dass der die Erhaltungssätze befriedigende, vollständige Strahlungs-Energie-Impuls-Tensor  $S_{ik}$  eben mit Rücksicht auf die obigen Ausführungen im Inneren der polarisierbaren Materie vom Energie-Impuls-Tensor  $T_{ik}$  des elektromagnetischen Feldes zu unterscheiden ist: zu  $T_{ik}$  muss man nämlich jenen Teil  $t_{ik}$  des mechanischen Energie-Impuls-Tensors addieren, der die vom elektromagnetischen Feld erregten Spannungen beschreibt. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Herleitung der durch die Feldstärken ausgedrückten kovarianten Form dieses Tensors.

Mit der Bestimmung des vollständigen Strahlungstensors  $S_{ik}$  haben sich bereits mehrere Forscher befasst. *H. Ott* [1] und *F. Beck* [2] bildeten den Strahlungstensor  $S_{ik}$  auf Grund des Minkowskischen Energie-Impuls-Tensors (um dessen Asymmetrie zu beseitigen), während *G. Marx* und *G. Györgyi* [3] vom Abrahamschen Energie-Impuls-Tensor ausgingen und auf Grund der ponderomotorischen Kräfte zu der auf ruhende Medien und ebene Wellen beschänkten Form von  $S_{ik}$  gelangten. *K. Nagy* [4] verallgemeinerte dann diese Form mit einer Lorentz-Transformation auch auf den Fall bewegter Dielektrika. Die Untersuchungen von *Beck* und *Marx* führten trotz des verschiedenen Ausgangspunktes zu einem im Wesen gleichen Ergebnis, was für die Richtigkeit ihrer Überlegungen spricht.

Bei der Herleitung des vollständigen Strahlungs-Energie-Impuls-Tensors sei von dem Abrahamschen Energie-Impuls-Tensor ausgegangen, der auch die



auf die im Dielektrikum entstehenden Polarisationsströme wirkenden Lorentz'schen Kräfte berücksichtigt. Seine Form ist

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ F_{ir} G_{kr} - \frac{\delta_{ik}}{4} F_{rs} G_{rs} - \frac{n^2 - 1}{\mu} (F_{ir} F_r - F_r F_r u_i) u_k \right]. \quad (1)$$

Es werden die üblichen Bezeichnungen verwendet:  $F_{ik}$  steht für den aus den Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{B}$  gebildeten Tensor,  $G_{ik}$  für den aus den Vektoren  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  gebildeten Tensor,  $u_i$  ist die in Lichtgeschwindigkeitseinheiten gemessene konstante Vierergeschwindigkeit des Dielektrikums,  $n$  der Brechungsindex des Mediums,  $\mu$  die magnetische Permeabilität des Mediums,  $s_i$  die Viererstromdichte und  $F_i = F_{ir} u_r$ . Die Maxwell'schen Feldgleichungen lauten:

$$\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_k} = 4\pi s_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0. \quad (3)$$

Die die Feldgrößen miteinander verknüpfenden materiellen Gleichungen sind:

$$G_{ik} = \frac{1}{\mu} [F_{ik} + (n^2 - 1)(u_i F_k + u_k F_i)]. \quad (4)$$

Die nachstehenden Überlegungen sollen sich zunächst auf ruhende Dielektrika beschränken. Bezeichnet man die aus den raumartigen Komponenten des Tensors  $-T_{ik}$  gebildeten Maxwell'schen Spannungen mit  $\mathfrak{T}$ , so gelangt man in einem homogenen, ladungs- und stromfreien (also durchsichtigen) Medium bekanntlich zu

$$Div \mathfrak{T} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{n^2}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right). \quad (5)$$

Man erhält die Kraftdichte, wenn man auch die aus den Komponenten von  $T_{i4}$  gebildete Feldimpulsdichte

$$g = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$$

in Betracht zieht:

$$\mathfrak{f} = Div \mathfrak{T} - \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{n^2 - 1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right).$$

Diese Kraft wird vom Feld auf das polarisierte Dielektrikum ausgeübt. Wenn das Dielektrikum befestigt ist, dann vermag die ponderomotorische Kraft weder den Impuls des Dielektrikums zu erhöhen noch eine Arbeit an ihm zu verrichten. In diesem Falle muss also die im Dielektrikum erregte mechanische Spannung  $t$  die elektromagnetische Kraftwirkung gemäss dem Zusammenhange

$$- \text{Div } t = \ddot{\mathfrak{r}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{n^2 - 1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{S} \right) \tag{6}$$

kompensieren. Der mechanische Spannungstensor  $t$  hat also einerseits die Gleichung (6) zu befriedigen und andererseits natürlich symmetrisch zu sein. Wenn man dies berücksichtigt, dann kann man ganz einfach durch einen Vergleich der Gl. (5) und (6) den Spannungstensor durch die Feldstärken ausdrücken:

$$t = - \frac{n^2 - 1}{n^2} \mathfrak{T} . \tag{7}$$

Die Komponenten von  $t$  bilden hierbei die raumartigen Komponenten von  $-t_{ik}$ . Die übrigen Komponenten haben im Sinne der obigen Ausführungen in einem starr befestigten Dielektrikum zu verschwinden. Zieht man die Verknüpfung von  $\mathfrak{T}$  und  $T_{ik}$  sowie von  $t$  und  $t_{ik}$  in Betracht, so lässt sich schreiben :

$$t_{ik} = - \frac{n^2 - 1}{n^2} T_{ik} , \text{ wenn } i, k = 1, 2, 3, t_{i4} = t_{4i} = 0 .$$

Diese für ein ruhendes Dielektrikum gültige Relation kann zusammenfassend auch folgendermassen geschrieben werden :

$$t_{ik} = - \frac{n^2 - 1}{n^2} (\delta_{ir} + u_i u_r) (\delta_{ks} + u_k u_s) T_{rs} . \tag{8}$$

Der jetzt erhaltene Zusammenhang ist also für ruhende Medien gültig, drückt aber daneben auch einen Tensorzusammenhang aus, so dass er in jedem Inertialsystem Gültigkeit besitzen muss. Durch die Gl. (8) wurde also die allgemeingültige kovariante Form von  $t_{ik}$  erhalten. Hieraus lässt sich durch Heranziehung von

$$S_{ik} = T_{ik} + t_{ik} \tag{9}$$

auch der vollständige Strahlungs-Energie-Impuls-Tensor gewinnen, u. zw. sowohl für den Fall einer beliebigen elektromagnetischen Strahlung als auch für den Fall eines sich mit beliebiger Geschwindigkeit fortbewegenden Dielektrikums.

Bei Anwendung der Gl. (1), (8) und (9) kann  $S_{ik}$  auch als Funktion der Feldstärken ausgedrückt werden. Durch einfache Substitution ergibt sich



$$S_{ik} = \frac{1}{4\pi n^2} \left( F_{ir} G_{kr} - \frac{\delta_{ik}}{4} F_{rs} G_{rs} \right) + \frac{1}{4\pi \mu} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \left\{ u_i F_{kr} F_r + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} u_i u_k \left[ (n^2 - 1) F_r F_r + \frac{1}{2} F_{rs} F_{rs} \right] \right\}. \quad (10)$$

(Durch Übergang auf dreidimensionale Bezeichnungen kann bestätigt werden, dass dieser Zusammenhang mit der in [4] benutzten Form übereinstimmt.) Die Spur des Tensors beträgt nun — im Gegensatz zu der von  $T_{ik}$  — nicht mehr Null, wodurch zum Ausdruck gebracht wird, dass ein Teil der Strahlungsenergie bereits als Energie einer über eine Ruhemasse verfügenden Materie anwesend ist :

$$u_0 = -S_{rr} = \frac{n^2 - 1}{4\pi \mu n^2} \left[ \frac{1}{4} F_{rs} F_{rs} + \frac{n^2 + 1}{2} F_r F_r \right] > 0.$$

Bei Anwendung der Gl. (10) und der Feldgleichungen (2) und (3) kann auch unmittelbar durch Differenzieren bewiesen werden, dass  $S_{ik}$  in einem durchsichtigen, homogenen Medium divergenzfrei ist. An den inhomogenen und leitfähigen Stellen des Dielektrikums ( $n \neq \text{const}$ ,  $\mu \neq \text{const}$ ,  $s_i \neq 0$ ) weisen die Strahlungsenergie und der Impuls Senken auf :

$$-\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{n^2} [F_{ir} + (n^2 - 1) u_i F_r] s_r - \frac{1}{8\pi n^2} F_r F_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - \\ - \frac{1}{8\pi n^2 \mu^2} \left( \frac{1}{2} F_{rs} F_{rs} + F_r F_r \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_i}.$$

In diesem Falle haben aber die Abtrennung von  $t_{ik}$  vom mechanischen Energie-Impuls-Tensor und infolgedessen auch der Strahlungstensor  $S_{ik}$  bereits ihre Bedeutung verloren. Wo indessen die Energie nicht permanent absorbiert wird, sondern nur zwischen dem Feld und der polarisierten Materie oszilliert, kann  $S_{ik}$  zur Beschreibung der dynamischen Eigenschaften der durch das Dielektrikum hindurchgehenden Strahlung (so z. B. der sich im Dielektrikum bewegenden Photone [4]) benutzt werden.

#### LITERATUR

1. H. Ott : Ann. Phys. (6), **11**, 33, 1953.
2. F. Beck : Z. Phys. **134**, 580, 1953.
3. G. Marx, G. Györgyi, Acta Phys. Hung. **3**, 213, 1954.
4. K. Nagy, Az elektromágneses sugárzás kvantumelmélete dielektrikumokban. (Die-Quantentheorie der elektromagnetischen Strahlung in Dielektrika.) Dissertation 1954.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója. — Műszaki felelős: Farkas Sándor  
A kézirat beérkezett: 1954. XII. 14. — Terjedelem: 9<sup>3</sup>/<sub>4</sub> (A5) ív, 43 ábra.

34806. — Akadémia nyomda. — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc



Les *Acta Physica* paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des travaux du domaine de la physique.

Les *Acta Physica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix l'abonnement par volume est de 110 forints.

On peut s'abonner à l'Entreprise du Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

The *Acta Physica* publish papers on physics, in Russian, French, English and German.

The *Acta Physica* appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the *Acta Physica* is 110 forints a volume. Orders may be placed with »Kultúra« Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Die *Acta Physica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der Physik in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die *Acta Physica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankkonto : Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.



## INDEX

- Z. Gyulai: Durch Kristalle verursachte Zerstörungswirkungen in porösen Materialien. — З. Дюлаи: Разрушающее действие растущих кристаллитов в пористых материалах ..... 189
- Z. Morlin: Beitrag zur Untersuchung der Rekristallisationsvorgänge. — З. Морлин: Некоторые замечания к вопросу процессов рекристаллизации ..... 197
- P. Román: Quantelung des elektromagnetischen Feldes in einer neuartigen Darstellung. — П. Роман: Квантование электромагнитного поля в одном новом представлении ..... 209
- G. Szamosi and G. Marx: Classical motion of the nucleons in a scalar meson field. — Г. Самоши и Г. Маркс: Движение нуклона в скалярном мезонном поле ... 219
- R. Pauncz: Investigation of a New Quantum-Mechanical Method of Approximation. — Р. Паунц: Исследование эффективности одного нового квантово-химического приближенного метода ..... 237
- Zs. Náray: Determination of Cathode Sensitivity Distribution of Photomultipliers. — Ж. Нарай: Определение распределения чувствительности катодной поверхности фотомножителя ..... 255
- P. Gombás, E. Mágóri, B. Molnár, É. Szabó: Die statistische Theorie des Atomkerns. III. Teil. — П. Гомбаш, Э. Магори, Б. Мольнар, Э. Сабо: Статистическая теория атомного ядра ч. III. .... 267
- Á. Budó und I. Kovács: Über den  $4\Pi$ -Zustand des  $O_2^+$ -Moleküls. — А. Будо и И. Ковач: О состоянии  $4\pi$  молекулы  $O_2^+$  ..... 273
- Краткие сообщения — Brief Reports — Kurze Mitteilungen*
- M. A. Ziegler: Calculation of Pairing Energy by Means of the eigenfunctions of the Yukawa Potential ..... 293
- G. Marx und K. Nagy: Der Energie-Impuls-Tensor der Strahlung in Dielektrika ..... 297

# ACTA PHYSICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS  
Z. GYULAI, L. JÁNOSSY, I. KOVÁCS, K. NOVOBÁTZKY

REDIGIT  
P. GOMBÁS

TOMUS IV

FASCICULUS 4



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
BUDAPEST. 1955

ACTA PHYS. HUNG.



# ACTA PHYSICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az *Acta Physica* orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a fizika tárgyköréből.

Az *Acta Physica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az *Acta Physica* előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest, V., Alkotmány u. 21. Bankszámla 04-878-111-46), a külföld számára pedig a »Kultúra« Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankszámla: 43-790-057-181 sz.) vagy külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

»*Acta Physica*« публикует трактаты из области физических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

»*Acta Physica*« выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу:

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена »*Acta Physica*« — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет »*Kultúra*« (*Budapest, VI., Sztálin út 21.* Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

# ИССЛЕДОВАНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ ФОТОННЫХ ПОТОКОВ МЕТОДОМ СОВПАДЕНИЙ

А. АДАМ, Л. ЯНОШИ, П. ВАРГА

ОТДЕЛ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ ЦЕНТРАЛЬНОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА ФИЗИКИ, БУДАПЕШТ

(Поступило 28. IX. 1954)

В этой статье исследуется вопрос, являются фотоны, принадлежащие к двум когерентным световым пучкам, независимыми. Два когерентных световых пучка, осуществленных с помощью полупрозрачного зеркала, падали на фотоэлектронные умножители. Задача заключалась в том, чтобы определить существуют ли истинные совпадения между импульсами фотоумножителей. Для этого сравнивались число совпадений полученных при когерентном освещении с числом случайных совпадений полученных при некогерентном освещении.

Произведенные нами исследования показывают что истинных совпадений нет. Точнее говоря, если принимать во внимание статическую погрешность, то не больше 0,6% фотонов могли бы дать истинные совпадения.

## I.

### § 1. Введение

Наше исследование было предпринято с целью установить, независимы ли фотоны в когерентных световых пучках. Согласно квантовой теории, такие фотоны независимы в следующем смысле: если поставить на пути

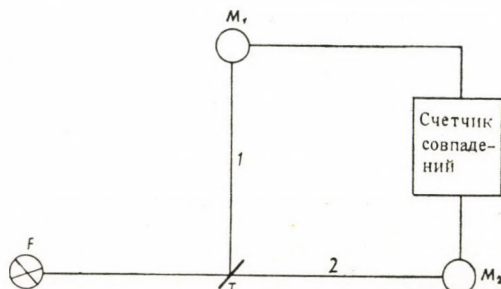


Рис. 1. Схема опыта

светового потока полупрозрачное зеркало, разделяющее его на отраженный и проходящий пучки, а затем улавливать эти пучки счётчиками фотонов, то счётчики будут срабатывать независимо друг от друга, т. е. всякий раз будет срабатывать лишь один из них. Для проверки этого утверждения был поставлен опыт по следующей схеме (рис. 1):



Свет от источника  $F$  падает на полупрозрачное зеркало  $T$ . Отраженный пучок 1 падает на фотоэлектронный умножитель  $M_1$ , а прошедший через зеркало пучок 2 — на фотоумножитель  $M_2$ . С помощью соответствующей аппаратуры мы регистрируем т. н. совпадения, т. е. те случаи, когда оба фотоумножителя срабатывают одновременно.

Связь данного опыта с проблемами квантовой механики, — т. е. с вопросом о корпускулярно-волновом характере элементарных частиц подробно освещена Л. Яноши [1, 2]. В тех же статьях автор указывает на важность экспериментального изучения данного вопроса.

## § 2. Случайные совпадения и подбор разрешающего времени аппаратуры, регистрирующей совпадения

Вышеприведенная схема неизбежно считает как истинные, так и случайные совпадения, т. е. совпадения импульсов двух фотоумножителей, вызванных двумя фотонами, приходящими друг за другом через короткий промежуток времени, не превышающий так называемое разрешающее время  $\tau$ .

Наш эксперимент должен выяснить, не отмечает ли установка при освещении фотоэлектронных умножителей когерентными пучками света больше совпадений, чем ожидаемое число случайных совпадений.

Прежде всего, необходимо определить, возможно ли с уверенностью установить различие между числами систематических и случайных совпадений, несмотря на то, что вероятность срабатывания умножителей мала.

Если обозначить вероятность срабатывания умножителя через  $p$ , средний поток падающего на умножитель света через  $n$  фотонов в секунду, а число импульсов фона (в темноте) через  $N_s$ , то анод умножителя в секунду

$$N = p \cdot n + N_s \quad (1)$$

будет поступать импульсов. При наших измерениях мы охлаждали умножители жидким воздухом. Благодаря этому, число импульсов фона было ничтожно малым по сравнению с числом импульсов, вызванных светом, и им можно было пренебречь. В таком случае

$$N = pn.$$

Как известно, среднее число случайных совпадений при продолжительности измерения  $t$  можно определить по формуле

$$K_v = 2 N^2 \tau t, \quad (2)$$

где  $\tau$  обозначает разрешающее время аппаратуры. (Простоты ради мы предположили, что вероятность срабатывания умножителей одинакова, одинаковы и поступающие на них световые потоки. Ход расчета не меня-



ется, если принять во внимание разные вероятности срабатывания и разницу световых потоков).

Общее число отмеченных совпадений равно числу случайных совпадений, плюс число истинных совпадений. При определении числа истинных совпадений необходимо различать те случаи, когда фотон не вызывает срабатывания обоих умножителей потому, что катод одного из них случайно не испустил электрона (вероятность того, что эмиссия произойдет в обоих умножителях, равна  $p^2$ ), и те случаи, когда фотон вообще не способен вызвать срабатывание обоих умножителей, ибо движется исключительно в одном из пучков.

Если предположить, что истинные совпадения способна вызвать  $\varepsilon$ -ная доля фотонов, т. е. всего  $\varepsilon n$  фотонов, то число таких совпадений составит  $\varepsilon p^2 nt$ . Общее же число совпадений будет равно:

$$K = K_v + \varepsilon p^2 nt = 2 N^2 \tau t + \varepsilon p N t. \quad (3)$$

Если бы истинные совпадения вызывались значительной частью фотонов, т. е. если  $\varepsilon \approx 1$ , за сравнительно короткое время можно было установить, имеются ли среди совпадений истинные. Расхождение между числами совпадений можно назвать существенным, если

$$K > K_v + 3 \Delta K_v, \quad (4)$$

(где через  $\Delta K_v$  обозначена средняя квадратическая ошибка числа случайных совпадений). Дело в том, что вероятностью появления отклонений, превышающих трехкратную среднюю квадратическую ошибку, можно пренебречь. Если в выражение (4) подставить ожидаемую по распределению Пуассона ошибку:  $(\Delta K_v)^2 = K_v$ , то результат покажет нам, сколько времени должно длиться измерение.

$$\varepsilon p N t > 3 \sqrt{2 N^2 \tau t}$$

и

$$t > \frac{18}{\varepsilon^2 p^2} \tau. \quad (5)$$

Уже обычный счётчик совпадений легко настроить на разрешающее время  $\tau = 2,10^{-6}$  сек. Если подставить это — вместе с  $\varepsilon = 1$  и  $p = 3,10^{-3}$ , — в формулу (5), мы получим требуемое время:  $t > 4$  сек.

Из вышесказанного явствует, что, если бы значительная часть фотонов приводила к истинным совпадениям, это можно было бы установить путем измерения продолжительностью в несколько секунд.

Если только очень малая часть фотонов дает истинные совпадения, т. е. если  $\varepsilon \ll 1$ , то для установления наличия таких истинных совпадений измерение должно быть довольно продолжительным. Спрашивается, каких результатов можно добиться в случае реально допустимой продолжитель-



ности измерения. Это определяется погрешностью фактора  $\varepsilon$ . Из формулы (3) следует :

$$\varepsilon = \frac{K - K_v}{pNt} \quad (6)$$

и

$$\Delta\varepsilon = \pm \frac{1}{pNt} \Delta(K - K_v) = \pm \frac{\sqrt{2K_v}}{pNt} = \pm \frac{2}{p} \sqrt{\frac{\tau}{t}}. \quad (7)$$

При выводе выражения (7) мы подставили на основе свойств распределения Пуассона вместо средней квадратичной ошибки корень среднего значения и произвели вследствие  $\varepsilon \ll 1$  подстановку  $K \approx K_v$ . Если подставить в формулу (6) вышеприведенные значения и  $t = 5$  часов, мы получим для погрешности  $\varepsilon$  значение  $\Delta\varepsilon = \pm 7,10^{-3}$ , иными словами : путем пятичасового измерения можно будет установить, вызывает ли истинные совпадения более 2 процентов фотонов.

Отсюда видно, что даже при сравнительно малой вероятности срабатывания фотоэлектронного умножителя можно с помощью обычной установки для регистрации совпадений ( $\tau \approx 2,10^{-6}$  сек.) определить, превышает ли общее число совпадений число случайных — иными словами, отмечаются ли истинные совпадения.

### § 3. Метод измерения

Чтобы установить, отмечаются ли истинные совпадения, необходимо точно знать число случайных совпадений. Целесообразно поставить опыт

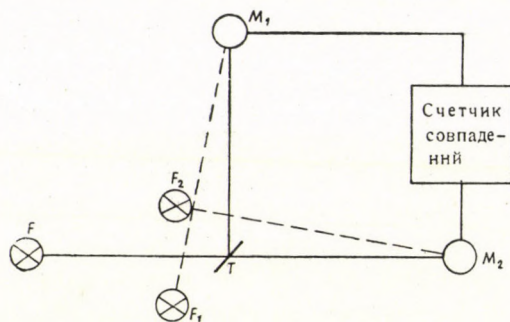


Рис. 2. Установка для счёта истинных и случайных совпадений

так, чтобы число случайных совпадений измерялось непосредственно. Если осветить фотоэлектронные умножители двумя разными источниками света, мы обязательно получим один лишь случайные совпадения. Целесообразно чередовать когерентное и некогерентное освещение и непосредственно сравнивать числа совпадений. (См. рис. 2. Попеременно горят либо источник света  $F$ , либо источники света  $F_1$  и  $F_2$ .)

## II.

## § 4. Оптическая часть устройства

Оптическое оборудование, применявшееся для нашего опыта, изображено на рис. 3.

Из спектра источника света  $F$  мы с помощью призменного монохроматора выделили полосу с длиной волны около  $5000 \text{ \AA}$ . Свет проходит через линзу  $L$  и отражается зеркалом  $T$  на фотоэлектронные умножители  $M_1$  и  $M_2$ . Свет от источников  $F_1$  и  $F_2$  попадает соответственно на фотоэлектронные умножители  $M_1$  и  $M_2$ , минуя зеркало  $T$ . Перед фотоэлектронными умножи-

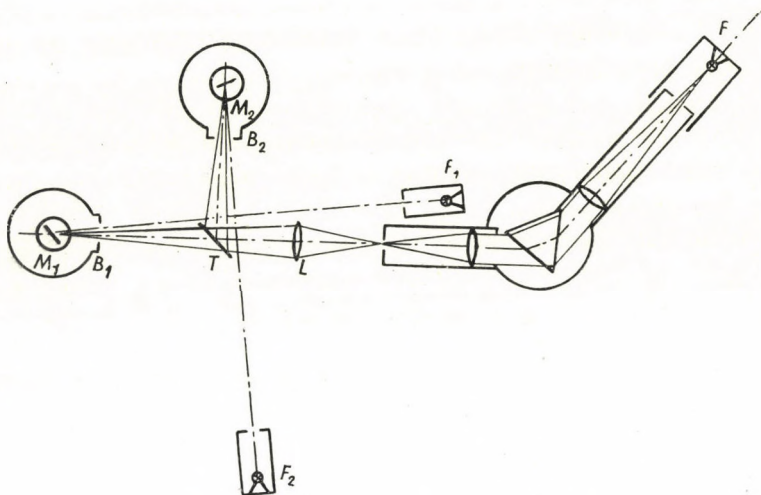


Рис. 3. Оптическая часть устройства

телями в кожухе термостата-охладителя были проделаны отверстия  $B_1$  и  $B_2$  диаметром в 6 миллиметров. В качестве источников света были применены лампы тлеющего разряда типа  $K_2-12-12$ . Измерение велось с фотонным потоком в  $13\,000-130\,000$  фотонов в секунду. Достижение столь слабого потока не представляло затруднений, ибо: а) мы использовали лишь узкую полосу всего спектра, так что интенсивность освещения была и сама по себе невелика, и б) перед монохроматором и за ним мы поставили диафрагмы. Тонкая регулировка интенсивности освещения осуществлялась путем изменения тока питания лампочек.

При отрегулировании оптики надо было следить за тем, чтобы с зеркала  $T$  весь свет падал на фотокатоды электронных умножителей, ибо в противном случае часть света не могла бы вызывать совпадений. В то же время мы не могли убедиться в правильности наладки установки зрительным путем, вследствие малой интенсивности света и особенностей конструк-



ции охладителя. Поэтому наладка велась в следующей последовательности: источник света  $F$  был заменен другим, мощным. Затем мы навели на центры диафрагм  $B$  изображения выходного зрачка монохроматора. Эта регулировка велась путем визуального наблюдения. После этого мы снова ставили на место первоначальный источник света и путем передвигания фотоэлектронного умножителя выискивали то положение, в котором счётчик отмечал наибольшее число импульсов. Фотоэлектронный умножитель, а также весь термостат можно было передвигать в вертикальном и поперечном направлениях и вращать в горизонтальной плоскости вокруг зрачка  $B$ .

Расположение источников света  $F_1$  и  $F_2$  и точность получения их изображения на фотокатодах не имели особого значения, ибо их роль заключалась лишь в том, чтобы вызывать срабатывание обоих фотоумножителей независимо друг от друга с известной частотой.

Пропускную и отражательную способность зеркала  $T$  мы определили с помощью фотометра, калиброванного в микролюменах. Зеркало пропускает 40% падающего на него света и отражает 60%.

### § 5. Регистрирующее устройство

Регистрирующее устройство состояло из фотонных счётчиков, описания которых даны в статьях [3] и [4], и из счётчика совпадений (рис. 4).



Рис. 4. Схема регистрирующего устройства

Усиленные импульсы электронных умножителей  $M_1$  и  $M_2$  с одной стороны подсчитывались, с другой же поступали на счетчик совпадений. Импульсы совпадений регистрировались механическим регистратором, работавшим от управляющего каскада. В электрической схеме счетчика совпадений мы применили пентод, на управляющую и ускоряющую сетки которого поступали приходящие с обеих сторон сигналы.



## § 6. Контрольные измерения

Мы тщательно проверили электронную часть нашего оборудования с помощью методов, описанных в статьях [3] и [4]. Особое внимание уделили мы проверке счетчика совпадений: не пропускает ли он совпадений и не отмечает ли он ложных совпадений. Правда, оборудование было ограждено от внешних помех, но ложные совпадения могут отмечаться и таким путем, что одна сторона нашей установки сработает от импульса электронного умножителя, а усиленный сигнал заставит сработать, в силу ее чрезвычайно высокой чувствительности, и вторую сторону. Чтобы проверить это, мы включили всю электронную часть нашей установки. На одной стороне работал и фотоэлектронный умножитель, а на другой мы прервали питающую цепь электронного умножителя конденсатором большой емкости. Таким образом, на эту сторону могли поступать всякие ложные импульсы, могли возникать ложные совпадения.

Ложные совпадения нам удалось полностью устранить.

Обе стороны мы настроили так, чтобы при равной интенсивности освещения отсчеты на счетчиках были приблизительно равны.

Важным контрольным измерением явилось установление того, сходится ли разрешающее время, исчисленное на основе формулы (2) из числа случайных совпадений и числа отсчитанных импульсов на обеих сторонах, с непосредственно измеренным разрешающим временем. Последнее замерялось так, что на счетчик совпадений сигналы подавались с одного и того же электронного умножителя, но один из сигналов пропускался через линию задержки. При определенном значении задержки совпадения уже не должны отмечаться. Таким путем мы получили для разрешающего времени значение  $\tau = 2,3 + 0,2 \cdot 10^{-6}$  сек. ( $0,2 \cdot 10^{-6}$  сек. — интервал перехода). Полученное значение хорошо согласуется со значением, исчисленным из случайных совпадений.

### III.

## § 7. Измерения

При измерениях мы через каждые две минуты чередовали когерентное и некогерентное освещение. При каждой замене мы отсчитывали показания счетчиков обоих электронных умножителей ( $N_1$  и  $N_2$ ) и счетчика совпадений ( $K$ ). В ходе измерения выявились колебания числа срабатываний. На практике нам удалось получать 20—100 двухминутных периодов отсчета при неизменном числе срабатываний. Изменение частоты срабатывания было невелико, но было бы всё же затруднительно восстанавливать первоначальные значения после каждого такого изменения. Гораздо целесообразнее



было продолжать измерение, несмотря на изменившуюся интенсивность, и обрабатывать полученные данные таким методом, чтобы сравнение данных, полученных при когерентном и некогерентном освещении, оказалось независимым от изменения частоты срабатывания.

### § 8. Метод обработки наблюдений

Чтобы сделать обработку наблюдений независимой от изменений интенсивности, целесообразно положить в основу обработки разрешающее время  $\tau$ , — ведь при освещении некогерентным светом возникают лишь случайные совпадения [Формула (2)]. Здесь  $\tau$  является константой данной установки и не зависит от интенсивности. Число совпадений можно и для случая освещения когерентным светом привести к виду, сходному с формулой (2):

$$K = 2 N^2 \tau^{(k)} t. \quad (8)$$

Из формул (2) и (8) следует:

$$\tau^{(k)} = \tau + \frac{\varepsilon P}{2 N}. \quad (9)$$

Из формулы (9) видно, что, если происходят истинные совпадения, то  $\tau^{(k)} > \tau$  — независимо от колебаний частоты срабатываний во время измерения.

Численная обработка полученных данным происходила следующим образом: мы вели расчёт отдельно для каждой серии наблюдений, в пределах которой частота срабатываний оставалась постоянной, т. е. наблюдались только статистические колебания ее. После этого мы сводили результаты, полученные от отдельных серий, в сводный итог.

Данные каждой серии обрабатывались так: из числа срабатываний за каждый двухминутный период как при когерентном, так и при некогерентном освещении мы рассчитывали разрешающее время  $\tau^{(i)}$  или — при когерентном освещении — соответствующее ему кажущееся разрешающее время  $\tau^{(k)}$ . (В дальнейшем индекс  $(i)$  относится к данным, полученным при некогерентном освещении, а индекс  $(k)$  — к полученным при когерентном освещении.)

$$\tau_{\nu}^{(k)} = \frac{K_{\nu}^{(k)} T}{2 N_{1\nu}^{(k)} N_{2\nu}^{(k)}}. \quad (10)$$

(Индексом  $\nu$  мы различаем данные, полученные за отдельные двухминутные периоды —  $T = 120$  сек.) Разумеется,

$$\tau^{(i)} = \tau, \quad (11)$$

т. е. равнозначно действительному разрешающему времени.

Затем мы рассчитали средние значения для каждой серии наблюдений, т. е.:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}^{(k)} &= \frac{\tau_1^{(k)} + \tau_2^{(k)} + \dots + \tau_m^{(k)}}{m}, \\ \bar{\tau} = \bar{\tau}^{(i)} &= \frac{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_m}{m},\end{aligned}\quad (12)$$

где  $m$  обозначает число наблюдений в каждой серии. Далее, были рассчитаны средние квадратичные ошибки:

$$\Delta\bar{\tau}^{(k)} = \left[ \frac{(\tau_1^{(k)} - \bar{\tau}^{(k)})^2 + (\tau_2^{(k)} - \bar{\tau}^{(k)})^2 + \dots}{m(m-1)} \right]^{1/2} \quad (13)$$

$$\Delta\bar{\tau} = \left[ \frac{(\tau_1 - \bar{\tau})^2 + (\tau_2 - \bar{\tau})^2 + \dots}{m(m-1)} \right]^{1/2}$$

В случае, если

$$\bar{\tau}^{(k)} - \tau < 3 [(\Delta\bar{\tau}^{(k)})^2 + (\Delta\bar{\tau})^2]^{1/2} \quad (14)$$

то отклонение  $\bar{\tau}^{(k)}$  от разрешающего времени  $\bar{\tau}$  не является существенным и истинных совпадений нет, — вернее, их число не выходит за пределы допустимой погрешности измерений.

Для проверки того, действительно ли колебания в пределах серии наблюдений были только статистическими, мы рассчитали разрешающее время и из среднего числа импульсов  $K$ ,  $N_1$  и  $N_2$  за серию

$$\bar{\tau}^{(k)} = \frac{\bar{K}^{(k)} T}{2 \bar{N}_1^{(k)} \bar{N}_2^{(k)}} \quad \text{и} \quad \bar{\tau}^{(i)} = \frac{\bar{K}^{(i)} T}{2 \bar{N}_1^{(i)} \bar{N}_2^{(i)}}, \quad (15)$$

где  $\bar{K}^{(k)} = \frac{\sum K_v^{(k)}}{m}$  и т. д. ...

Мы рассчитали средние квадратические ошибки рассчитанных таким путем значений  $\bar{\tau}^{(k)}$  и  $\bar{\tau}$ :

$$\Delta\bar{\tau}^{(k)} = \pm \bar{\tau}^{(k)} \sqrt{\frac{1}{m \bar{K}^{(k)}}} \quad \text{и} \quad \Delta\bar{\tau} = \pm \bar{\tau} \sqrt{\frac{1}{m \bar{K}^{(i)}}}. \quad (16)$$



При выводе формулы (16) мы выразили, в соответствии со свойствами распределения Пуассона, среднюю квадратическую ошибку числа совпадений с помощью среднего значения. Для наглядности мы прилагаем таблицу обработки данных короткой серии (таблица 1).

Таблица 1  
Образец обработки серии наблюдений  
 $T = 120$  сек.  $l = 256$

$\nu$	Когерентные					Некогерентные				
	$N_1/l$	$N_2/l$	$K$	$10^3 \tau_p$	$10^{10} (\Delta \tau_p)$	$N_1/l$	$N_2/l$	$K$	$10^3 \tau_p$	$10^{10} (\Delta \tau_p)^2$
1	183	173	84	2429	00324	187	182	93	2502	31360
2	179	174	96	2822	11289	185	183	99	2677	01254
3	183	178	94	2642	02433	186	185	107	2847	07952
4	181	181	96	2683	03880	187	186	88	2316	06200
5	179	180	85	2415	00504	185	185	101	2702	01876
6	178	181	93	2643	02464	188	185	84	2211	12532
7	185	181	103	2816	10890	189	186	114	2969	16322
8	178	183	90	2529	00184	186	184	92	2461	01082
9	176	183	92	2615	01664	188	187	77	2005	31360
10	180	186	74	2024	21344	191	189	119	3018	20521
11	180	177	91	2615	01664	187	184	91	2421	02074
12	177	176	81	2381	01102	185	179	110	3041	22658
13	176	181	90	2587	01020	185	183	102	2758	03725
14	178	177	73	2156	10758	194	183	80	2063	25200
15	180	181	65	1827	43428	189	182	89	2369	03842
16	176	179	89	2586	01000	184	184	99	2677	01254
$\Sigma$	2866	2781	1396	39772	113948	2996	2947	1545	41037	189212
	$\bar{N}_1/l$	$\bar{N}_2/l$	$\bar{K}$	$\bar{\tau}$	$\Delta \bar{\tau}$	$\bar{N}_1/l$	$\bar{N}_2/l$	$\bar{K}$	$\bar{\tau}$	$\Delta \bar{\tau}$
	179,13	179,44	87,25	2,486	$\pm 0,069$	187,25	184,19	96,56	8,565	$\pm 0,088$
				$\Delta \bar{\tau}$	$\Delta \bar{\tau}$				$\bar{\tau}$	$\Delta \bar{\tau}$
				2,485	$\pm 0,065$				2,563	$\pm 0,062$
				$\mu\text{сек}$	$\mu\text{сек}$				$\mu\text{сек}$	$\mu\text{сек}$

### § 9. Результаты измерений

Мы выполнили общим счётом по 119 двухминутных измерений как при когерентном свете, так и при некогерентном. Интенсивность во время измерений была порядка  $N = 400$  импульсов в секунду, т. е.  $n = 130\,000$  фотонов в сек.

Обработка наблюдений привела к следующим значениям :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^{(k)} &= 2,484 \pm 0,022 \quad \mu\text{сек.} \\ \text{при когерентном освещении :} \quad \bar{\tau}^{(k)} &= 2,484 \pm 0,022 \quad \mu\text{сек.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= 2,425 \pm 0,022 \quad \mu\text{сек.} \\ \text{при некогерентном освещении :} \quad \bar{\tau} &= 2,434 \pm 0,022 \quad \mu\text{сек.} \end{aligned}$$

Здесь усреднены уже *все* полученные данные.

Видно, что рассчитанные для контроля значения  $\bar{\tau}^{(k)}$  и  $\bar{\tau}$  хорошо согласуются соответственно со значениями  $\bar{\tau}^{(k)}$  и  $\bar{\tau}$ . Хорошо согласуются и соответствующие ошибки, и это показывает, что колебание числа совпадений в пределах отдельных серий не превышало отклонений, ожидаемых по распределению Пуассона.

Из вышеприведенных данных мы рассчитали  $\varepsilon$  и  $\Delta\varepsilon$ . Из формулы (9) :

$$\varepsilon = \frac{2N}{p} (\bar{\tau}^{(k)} - \bar{\tau}) \quad (17)$$

и

$$\Delta\varepsilon = \pm \frac{2N}{p} [(\Delta\bar{\tau}^{(k)})^2 + (\Delta\bar{\tau})^2]^{1/2}. \quad (18)$$

Подставив результаты измерений в выражения (9) и (10) вместе со значением  $p = 3,10^{-3}$  [3], [4], мы получили результат :

$$\varepsilon = 0,0076 \pm 0,0040.$$

Видно, что значение  $\varepsilon$  близко к значению ошибки. Это означает, что истинных совпадений не наблюдалось; точнее, что истинные совпадения давало не более 2% фотонов.

#### IV.

### § 10. Метод частой перемены освещения

В ходе нападки экспериментального оборудования много затруднений доставило обеспечение устойчивости числа срабатываний. В ходе измерений, описанных в разделе III, удалось добиться постоянства частоты срабатывания на протяжении 20—100 двухминутных циклов. Но мы всё же



сочли целесообразным разработать и такой метод, с помощью которого удастся совершенно устранить зависимость измерения от колебаний интенсивности освещения. Сущность этого метода заключается в столь частой перемене обоих циклов (освещение то когерентным, то некогерентным светом), чтобы колебаниями освещенности за каждый такой период можно было пренебречь. Чтобы наверняка добиться этой цели, потребовалось

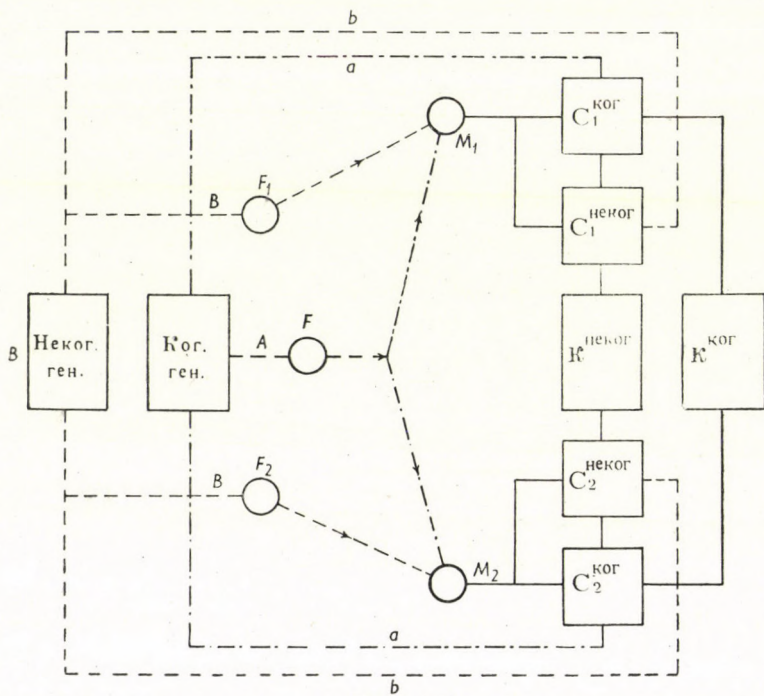


Рис. 5. Схема измерительного устройства, работающего в режиме частой перемены когерентного и некогерентного освещения

переключать освещение по несколько раз в секунду. Эту задачу мы решили с помощью электронного устройства, и с помощью электронного же устройства осуществлялся подсчет с различием импульсов, вызываемых когерентным и некогерентным светом. Работа аппаратуры при быстрой перемене когерентного и некогерентного освещения представлена на рис. 5.

Источник света  $F$ , служащий для когерентного освещения, зажигается с помощью генератора  $A$ , а служащие для некогерентного освещения источники света  $F_1$  и  $F_2$  — с помощью генератора  $B$ . Генераторы работают попеременно, поэтому и лампочки  $F$  и  $F_1$ ,  $F_2$  горят также попеременно. Поступающие с электронных умножителей импульсы и совпадения

мы подсчитываем отдельно для когерентного и некогерентного освещения. Счётчики  $C_1^{\text{ког.}}$  и  $C_2^{\text{ког.}}$  работают лишь тогда, когда горит лампа  $F$ . Этому мы добились с помощью сигнала  $a$ , поступающего от генератора для когерентного света. Точно так же включаются с помощью сигнала  $b$  счётчики  $C_1^{\text{неког.}}$  и  $C_2^{\text{неког.}}$ . Попеременно же подсчитываются и сигналы совпадений, поступающие при когерентном и некогерентном освещении.

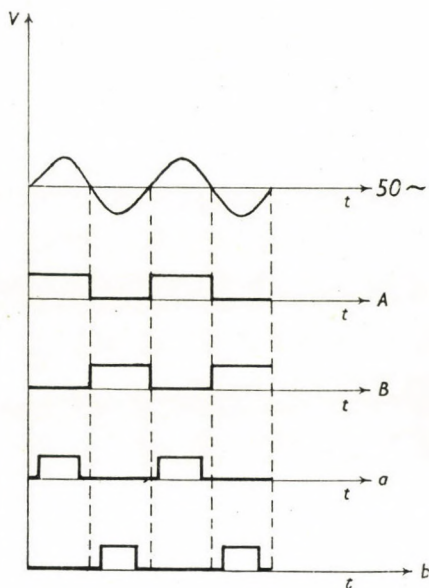


Рис. 6. График сигналов управления и освещения в функции времени

Генератор, служивший для зажигания лампочек и управления счётчиками, был синхронизирован с сетью переменного тока частотой в 50 пер./сек., обеспечивая в течение одного полупериода когерентное, в течение другого полупериода — некогерентное освещение. Сигналы управления электронно-ламповой аппаратурой начинались немного позднее и кончались немного раньше сигналов, зажигающих лампы. График вида сигналов дан на рис. 6.

### § 11. Контрольные измерения

Проверку оборудования мы произвели по методам, описанным в статье [3], и в § 6.

При обработке данных важно знать точную продолжительность сигналов  $a$  и  $b$ . Не менее важно, чтобы отношение продолжительности этих



сигналов  $\left(\frac{a}{b}\right)$  оставалось во время измерения неизменным. Для проверки этого, мы после каждый 5 измерений замеряли значение  $\frac{a}{b}$ . Это производилось путем освещения электронных умножителей постоянно горящим источником света и подсчета числа срабатываний. Отношение  $\frac{a}{b}$  равно отношению чисел срабатываний счётчиков, принадлежащих одному из электронных умножителей и управляемых сигналами  $a$  и  $b$ . При обработке наблюдений мы использовали среднее значение, полученное из этих измерений. По полученным нами данным,  $\frac{a}{b}$  равнялось 0,987.

Сходным способом мы измерили и продолжительность управляющих сигналов. Отсюда  $a = 8,16 \cdot 10^{-3}$  сек.

## § 12. Результаты измерений

В условиях частопеременного освещения мы произвели 306 трехминутных измерений при интенсивности  $N = 300$  импульсов, т. е.  $\approx 100\,000$  фотонов в секунду. Трехминутные периоды были нужны нам для статистической обработки наблюдений. Мы получили следующие результаты:

$$\begin{aligned} \text{при когерентном освещении: } \bar{\tau}^{(k)} &= 2,362 \pm 0,026 \quad \mu\text{сек.} \\ \bar{\tau}^{(k)} &= 2,364 \pm 0,030 \quad \mu\text{сек.} \\ \text{при некогерентном освещении: } \bar{\tau} &= 2,398 \pm 0,027 \quad \mu\text{сек.} \\ \bar{\tau} &= 2,405 \pm 0,031 \quad \mu\text{сек.} \end{aligned}$$

Значения  $\Delta\bar{\tau}$  и  $\Delta\bar{\tau}$  здесь тоже весьма хорошо сходятся.

Из вышеприведенных данных мы вычислили значения  $\varepsilon$  и  $\Delta\varepsilon$ , получив следующий результат:

$$\varepsilon = -0,0029 \pm 0,0030.$$

Как видим — в сравнении с результатом, приведенным в § 10 — мы получили здесь даже отрицательное значение для  $\varepsilon$ , так что действительно невозможно приписать ему значение, отличное от нуля.

Мы проводили измерения и при меньшей интенсивности, с частотой срабатывания  $N = 42$  импульса в секунду, что соответствует 13 000 фотонов в секунду. В результате 159 трехминутных измерений мы получили для  $\varepsilon$  и  $\Delta\varepsilon$  следующие значения:

$$\varepsilon = -0,0017 \pm 0,0036.$$



Сравнивая приведенные в настоящем параграфе результаты с результатом, приведенным в § 10, мы получаем из трех серий измерений следующее значение средней квадратичной ошибки  $\varepsilon$ :

$$\Delta\varepsilon = 0,002.$$

Отсюда видно, что истинных совпадений не было; точнее, что истинные совпадения могло дать не более 0,6% в всех фотонах. Таким образом, наши результаты сходятся с утверждениями квантовой теории.

Мы хотели бы выразить *Петеру Фараго* и *Жолту Нараи* нашу благодарность за полученные от них ценные советы. Мы должны поблагодарить также наших сотрудников *Шандора Конца* и *Арпада Надь*, участвовавших в проектировании и постройке аппаратуры и в самих измерениях, а также *Ференца Деака*, выполнившего нужные цифровые вычисления.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. Jánosy, Acta Phys. Hung., **1**, 423, 1952.
2. L. Jánosy, Ann. d. Phys., **11**, 323, 1953.
3. A. Ádám—P. Varga, KFKI Közlemények, **2**, 313, 1954.

#### COINCIDENCES BETWEEN PHOTONS CONTAINED IN COHERENT LIGHT RAYS

By

A. ÁDÁM, L. JÁNOSSY and P. VARGA

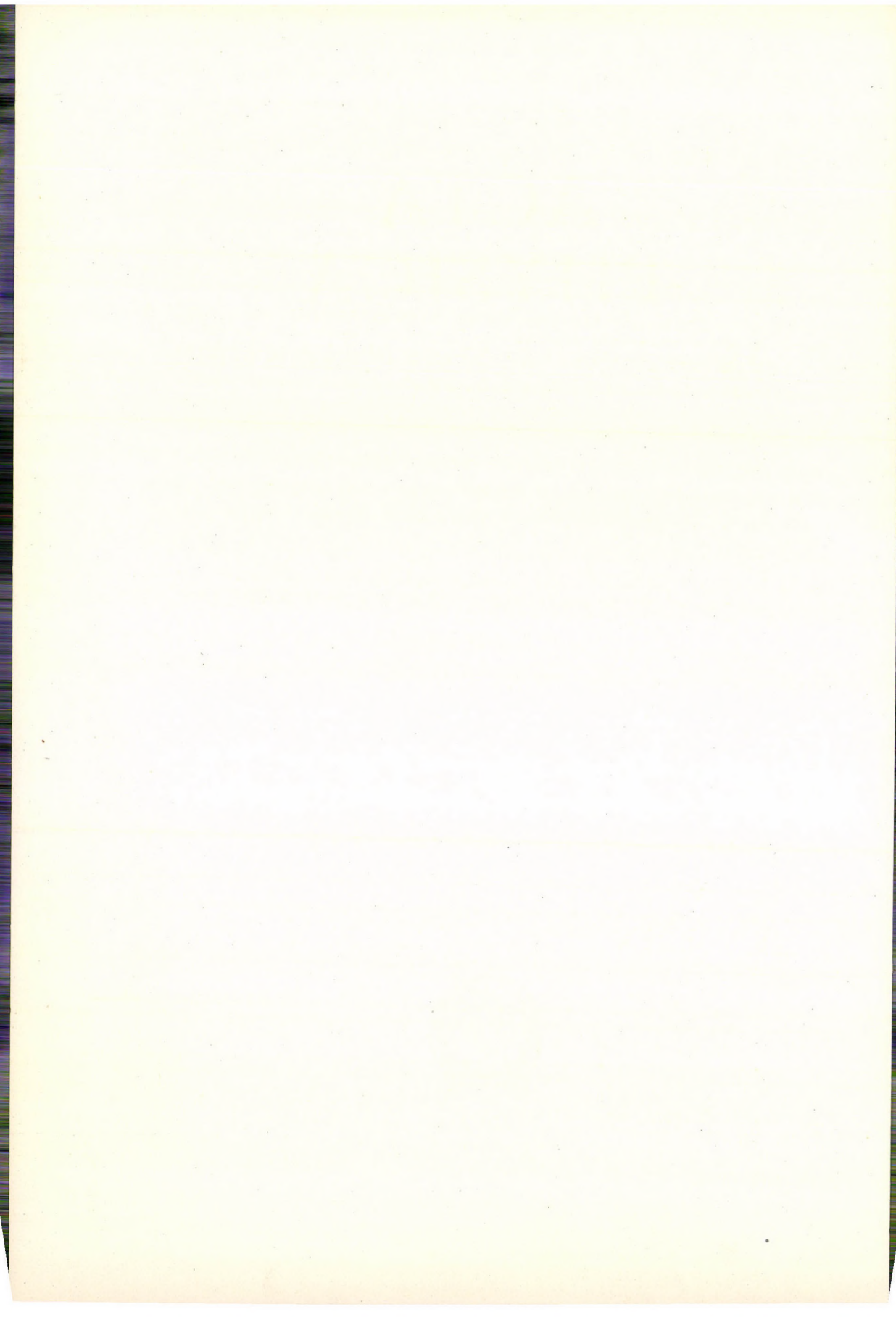
#### Summary

The authors investigated whether or not photons contained in coherent rays are independent. A light ray falling on a semi-transparent mirror splits into two coherent components. Registering the photons of these components by two electron multipliers, it was investigated, whether or not the electron multipliers do give rise to coincidence discharges. It was shown that making use of an amplifier of usual resolving power, that is, of the order of 2  $\mu$ sec, the arrangement is suitable for detecting systematic coincidences if such coincidences occur.

In the actual experiment the numbers of coincidences obtained with the multipliers were compared 1) when the multipliers were illuminated by coherent beams, and 2) when they were illuminated by equally strong incoherent beams. The coherent and incoherent illumination was changed in the first experiments in two-minute intervals, in the later experiments by an automatic arrangement at every 1/100 of a second. This fast interchange was employed in order to eliminate as far as possible the effect of slow variations of the sensitivity of the apparatus.

The experiments did not show any difference between the effects of coherent and incoherent light. Thus it can be safely assumed that all the coincidences recorded were accidental coincidences. Moreover, allowing even for fluctuations amounting to three times the standard error, the measurements would be incompatible with an assumption that more than 0,6% of the photons behaved in an anomalous way.





# BEMERKUNGEN ZUR ANALYSE DER ABSORPTIONSKURVEN

Von

F. BERENCZ

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK DER UNIVERSITÄT, SZEGED

(Vorgelegt von P. Gombás. — Eingegangen 1. X. 1954.)

Die Leistungsfähigkeit der von *Doetsch* und *Medgyessy* zur Analyse der Absorptionskurven gegebenen, auf Fourier-Reihen fussenden Näherungsmethode wurde am Spektrum des Fe-Bogenlichtes geprüft. Es konnte festgestellt werden, dass die einmalige Anwendung des Verfahrens im Falle gut gewählter Streuabklingsparameter sowohl für qualitative (Anzahl der Streifen) wie für quantitative (Wellenlänge) Bestimmungen zum Ziel führt, für die Bestimmung der Intensität dagegen muss das Verfahren wiederholt werden.

Die in der Spektroskopie erhaltenen Absorptionskurven können auf mehrere Weise analysiert werden. Jenes Verfahren, welches die zu analysierende Kurve als Superposition Gausscher Fehlerkurven auffasst und von dieser Grundannahme ausgehend alle (zufällig verborgenen) Komponenten bestimmt, nennt man Gaussche Analyse. Wir wollen uns innerhalb der Gausschen Analyse mit der von *Doetsch* abstammenden sogenannten Streuabklingsmethode beschäftigen [1], [2], für die *P. Medgyessy* eine zur numerischen Rechnung sehr brauchbare Näherungsmethode ausgearbeitet hat [3], [4].

Die zu analysierende Funktion sei eine Superposition der Gausschen Funktionen der Form

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}} \quad (1)$$

und habe die folgende Gestalt

$$f(x) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}, \quad (2)$$

wo  $m_k$  die Stelle der Maxima der Gausschen Kurven und  $\sigma_k$  die Streuung ist. (Ihre anschauliche Bedeutung: Halbwertbreite von zwei Wendepunkten der Gausschen Kurve.)

Nehmen wir an, dass wir von  $f(x)$  ausgehend die folgende Funktion bestimmt haben:



$$f^*(x) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}, \quad (3)$$

wo  $\lambda$  ein geeignet gewählter reeller Wert ist. Infolge des Hineinbauens von  $\lambda$  in die Funktion werden die Gausschen Kurven, welche  $f^*(x)$  zusammensetzen, schmaler und höher als die Komponenten von  $f(x)$ , die Stellen der Maxima bleiben aber dieselben. Wenn man  $\lambda$  so wählt, dass sein Wert kleiner ist als die geringste Streuung der  $f(x)$  bildenden Komponenten, dann unterscheiden sich die Komponenten von  $f^*(x)$  genügend voneinander um sie zur Bestimmung von spektroskopischen Daten benützen zu können.

Die Frage ist nun, wie man von der Funktion  $f(x)$  zu  $f^*(x)$  kommen kann. Doetsch arbeitete dafür zuerst eine Methode aus, welche sich aber nur auf den Fall von gleicher Streuung bezog. Seine Methode kann man aber verallgemeinern. Bilden wir die Fourier-Transformierte  $\varphi(t)$  bzw.  $\varphi^*(t)$  von  $f(x)$  bzw.  $f^*(x)$ :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sqrt{2\pi} \sigma_k} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}} \right) e^{itx} dx, \quad (4)$$

$$\varphi^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}} \right) e^{itx} dx. \quad (5)$$

Die Berechnung dieser Integrale ergibt (siehe [5])

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{im_k t - \frac{\sigma_k^2}{2} t^2}, \quad (6)$$

$$\varphi^*(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{im_k t - \frac{(\sigma_k^2 - \lambda^2)}{2} t^2} = \varphi(t) e^{\frac{\lambda^2}{2} t^2}. \quad (7)$$

Aus (7) erhalten wir wegen der Gültigkeit des Eindeutigkeitsatzes  $f^*(x)$ , indem wir auf  $\varphi^*(t)$  die inverse Fourier-Transformation anwenden. Das von  $f(x)$  nach  $f^*(x)$  führende Verfahren ist dann das folgende: man bildet die Fourier-Transformierte  $\varphi(t)$  von  $f(x)$ , diese multipliziert man mit  $e^{\frac{\lambda^2}{2} t^2}$  und wendet auf diese Funktion die Umkehrung der Fourier-Transformation an.

Diese Methode ist für den praktischen Gebrauch ziemlich schwierig. Im Hinblick auf die uns zur Verfügung stehenden Möglichkeiten für numerisches Rechnen ist jenes Verfahren viel geeigneter, dessen detaillierte Ausarbeitung und Fehlerabschätzung von Medgyessy stammt und welches anstatt mit den in der vorigen Methode auftretenden Fourier-Integralen mit Fourier-Reihen operiert. Das Wesen dieses Verfahrens besteht darin, dass man die im Intervall  $(0, l)$  folgendermassen definierten Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sqrt{2\pi} \sigma_k} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}, & \text{wenn } 0 \leq x \leq l, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases} \quad (8)$$

$$f^*(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}, & \text{wenn } 0 \leq x \leq l, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9)$$

im Intervall  $(-l, 0)$  gerade fortsetzt und im Intervall  $(-l, l)$  die so gewonnenen Funktionen  $\overline{f(x)}$  bzw.  $\overline{f^*(x)}$  — von welchen man periodische Wiederholung annimmt — in eine Fouriersche cosinus Reihe entwickelt :

$$\overline{f^*(x)} = \frac{Q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad (10)$$

wo

$$Q_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \overline{f(x)} dx = \frac{2}{l} \int_0^l \left( \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sqrt{2\pi} \sigma_k} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}} \right) dx, \quad (11)$$

$$Q_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \overline{f(x)} \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^l \left( \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sqrt{2\pi} \sigma_k} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}} \right) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (12)$$

$$\overline{f^*(x)} = \frac{R_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos \frac{n\pi}{l} x. \quad (13)$$

Hier wiederum ist

$$R_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \overline{f^*(x)} dx = \frac{2}{l} \int_0^l \left( \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}} \right) dx, \quad (14)$$



$$R_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^*(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \left( \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}} \right) \cos \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (15)$$

Man sieht aus einem Vergleich der in (12) und (15) stehenden Werte von  $Q_n$  bzw.  $R_n$  mit den (4) bzw. (5) auftretenden Ausdrücken von  $\varphi(t)$  bzw.  $\varphi^*(t)$  dass man die Werte von  $Q_n$  bzw.  $R_n$ , abgesehen von einer Konstante mit annähernder Genauigkeit, als reellen Teil der Fourier-Transformierten von  $f(x)$  bzw.  $f^*(x)$  an der Stelle  $t = \frac{n\pi}{l}$  auffassen kann, da die Ausdehnung der Integrationsgrenze ins Unendliche im Ausdruck von  $Q_n$  bzw.  $R_n$  das Integral nicht wesentlich modifiziert.  $f(x)$  ist nämlich nach Definition und also in der Praxis an den Endpunkten des Intervalls klein, ausserhalb des Intervalls aber praktisch Null. So ist nach (7) mit annähernder Genauigkeit:

$$R_n = Q_n e^{\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2 l^2}},$$

d. h. man erhält  $\overline{f^*(x)}$  aus  $\overline{f(x)}$  (und so  $f^*(x)$  aus  $f(x)$ , wenn man die Fourier-Koeffizienten von  $f(x)$  mit  $e^{\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2 l^2}}$  multipliziert und mit diesen (13) bildet, natürlich nur bis zu einem gewissen  $n = M$ . Die ausführlichen Rechnungen teilen wir hier nicht mit, wir geben weiter unten nur die Fehlerschätzung der Näherung an. Da  $f^*(x)$  (mit annähernder Genauigkeit) durch den trigonometrischen Reihenschnitt, gebildet mit  $R_n$ , gegeben ist, muss zu ihrer Bestimmung eine Fourier-Synthese durchgeführt werden. Weil die kleinste Streuung nicht bekannt ist, muss man im allgemeinen das Verfahren mit etlichen, wachsenden  $\lambda$  Werten wiederholen und von Fall zu Fall untersuchen wie sich die Komponenten trennen.

Unser nächstes Ziel war, die Leistungsfähigkeit der im vorangehenden besprochenen auf Fourier-Reihen beruhenden Näherungsmethode von Medgyessy in der Praxis zu prüfen. Zu diesem Zweck liessen wir von der spektroskopischen Abteilung des Zentralforschungsinstitutes für Physik in Budapest zwei Spektrogramme des Fe-Bogenlichtes aufnehmen mit 20,000 bzw. 200,000-stel Auflösungsvermögen. Wir analysierten das Spektrogramm, aufgenommen mit kleinem Auflösungsvermögen, mit der obigen Methode und verglichen unsere Resultate mit dem Spektrogramm, das mit grossem Ausflösungsvermögen aufgenommen worden war.



Wir verfügten also über die experimentell gefundene Kurve der zu analysierenden Funktion. Von dieser Kurve analysierten wir jene 3 Abschnitte, deren Aufarbeitung am lehrreichsten war. Diese Abschnitte sind durch kontinuierliche Kurven in den Figuren 1a, 2a, und 3a dargestellt.

Bei dem ersten Abschnitt wollten wir untersuchen, ob mittels der Analyse jene 4 Maxima errechnet werden können, welche dem mit «a» bezeichneten scharfen Maximum folgen, bei der Aufarbeitung des 2. und 3. Abschnittes interessierte uns besonders, ob das Verfahren jene 2 Maxima, welche zwischen dem mit «b» und «c» bezeichneten scharfen Maxima liegen, bzw. jenes Maximum, welches zwischen den mit «d» und «f» bezeichneten Maxima liegt, aufweisen kann.

Unsere erste Aufgabe war es, den analytischen Ausdruck der Funktionen aufzuschreiben, welche die einzelnen Abschnitte der Kurve darstellen und zwar der Näherungsmethode gemäss in Fourier-Reihen. Die Fourier-Koeffizienten wurden mit dem Analysator von Mader-Ott bestimmt. In allen drei Fällen waren die höheren Koeffizienten kleiner als der Fehler des Apparates, darum genügte es, 33 Fourier-Koeffizienten zu bestimmen.

	I	II	III
0 .....	3,12	2,94	4,07
1 .....	- 0,34	- 0,51	0,27
2 .....	- 1,19	- 2,18	- 0,99
3 .....	0,68	1,35	0,36
4 .....	- 3,23	- 0,82	- 1,78
5 .....	- 1,04	0,78	- 2,57
6 .....	1,05	1,61	- 1,01
7 .....	0,42	- 1,50	1,26
8 .....	2,04	- 0,32	- 0,78
9 .....	- 0,08	0,46	0,90
10 .....	- 1,04	- 0,45	0,68
11 .....	- 0,43	0,37	1,03
12 .....	- 1,08	- 0,27	0,06
13 .....	0,29	- 0,64	- 0,75
14 .....	0,64	0,11	0,11
15 .....	0,49	- 0,08	- 0,53
16 .....	0,53	- 0,13	- 0,12
17 .....	- 0,61	0,04	0,19
18 .....	- 0,54	- 0,13	0,25
19 .....	0,—	0,08	- 0,06
20 .....	- 0,15	- 0,09	0,08
21 .....	0,41	- 0,08	- 0,15
22 .....	0,17	0,10	- 0,18
23 .....	0,11	- 0,05	0,07
24 .....	- 0,17	0,02	- 0,05
25 .....	- 0,24	0,01	0,01
26 .....	- 0,02	- 0,07	- 0,01
27 .....	0,02	0,06	0,08
28 .....	0,13	- 0,02	- 0,01
29 .....	0,07	- 0,01	- 0,01
30 .....	- 0,09	0,—	0,—
31 .....	- 0,13	- 0,04	0,01
32 .....	- 0,07	0,01	0,05
33 .....	0,07	- 0,01	0,06



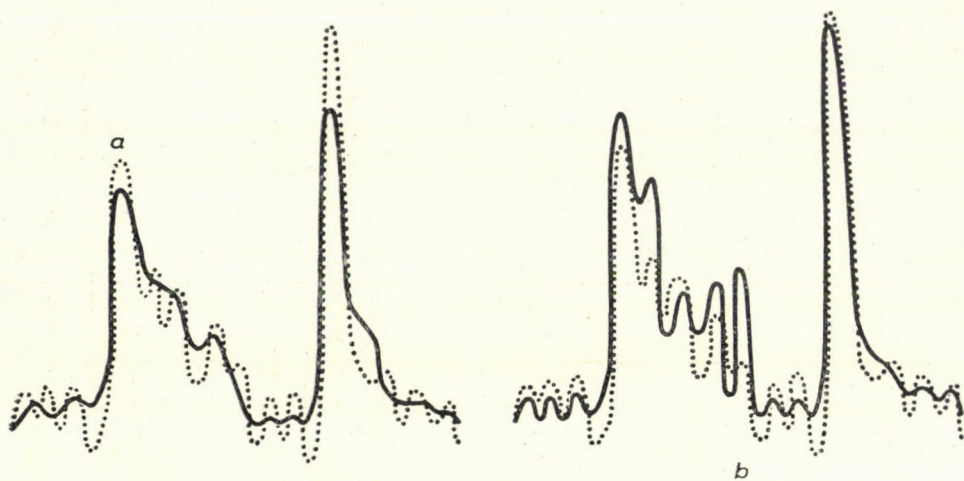


Fig. 1

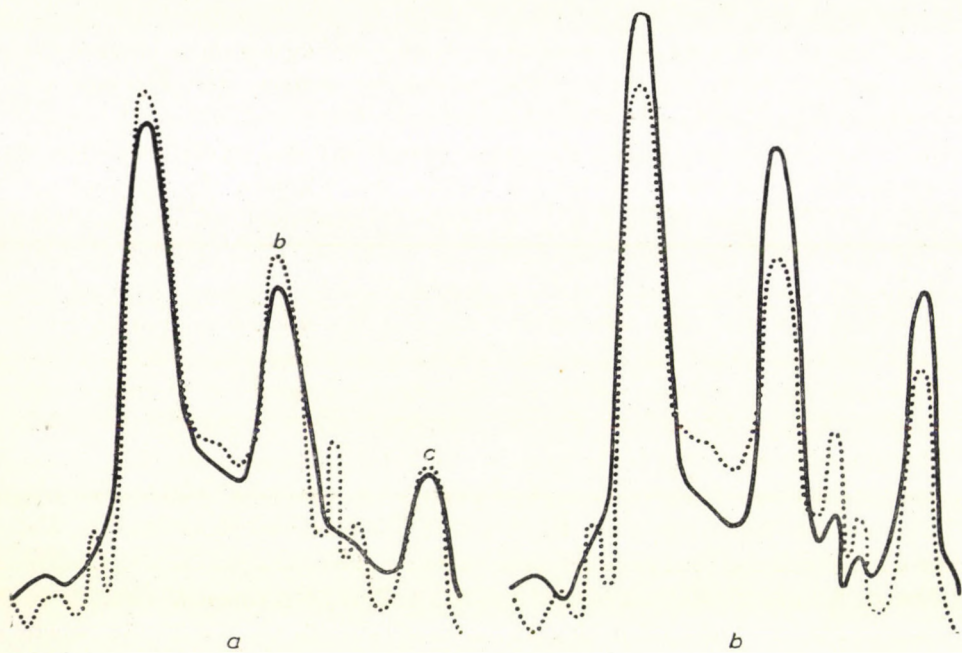


Fig. 2

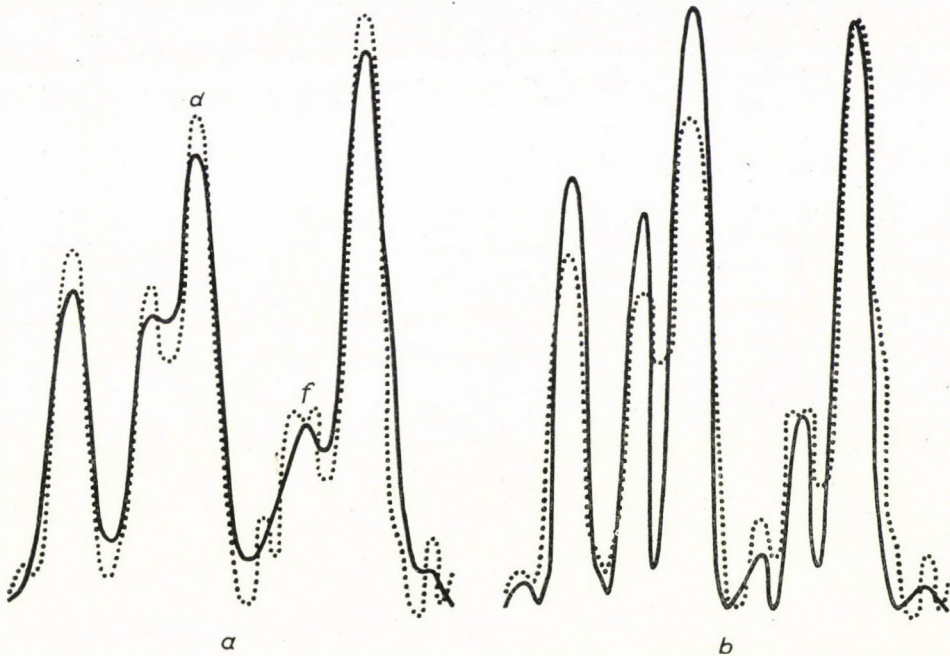


Fig. 3

Bei dem Übergang von  $Q_n$  nach  $R_n$  wählten wir für den Streuabklingungsparameter den Wert  $\lambda = 0,447$  ( $\lambda^2 = 0,2$ ). Dieser bewährte sich nicht gut, weil sich in  $f^*(x)$  sehr grosse negative Komponenten ergaben. Dann rechneten wir mit  $\lambda = 0,316$  ( $\lambda^2 = 0,1$ ). Die punktierte Kurve der Figuren 1a, 2a, und 3a zeigt das Resultat der Synthese.

Um die theoretischen Resultate besser mit den experimentellen Daten vergleichen zu können, zeicheten wir in den Figuren 1b, 2b und 3b die durch Analyse gewonnene Kurve mit einer punktierten Linie und das mit grossem Auflösungsvermögen aufgenommene Spektrum mit einer kontinuierlichen Linie ein. Aus dem Vergleich dieser Kurven kann man sehen, dass im Inneren des Intervalls die analysierte Kurve alle jene Komponenten enthält, welche in dem Spektrum, das mit grossem Auflösungsvermögen aufgenommen war, vorkommen, die Analyse mit Hilfe der Näherungsmethode von Medgyessy konnte also alle Komponenten ausweisen, die uns interessierten. Die Stellen der Maxima der analysierten Kurve im Inneren des Intervalls stimmen ebenfalls genau mit den Stellen des Spektrums, aufgenommen mit grossem Auflösungsvermögen überein. An den Grenzen des Intervalls ist die Übereinstimmung nicht mehr so genau; die Abweichung erklärt sich dadurch, dass man  $f(x)$  an den Grenzen des Intervalls, den Bedingungen der Näherungsmethode gemäss, praktisch zu Null abgerundet hat, obwohl doch  $f(x)$  an diesen Stellen gewisse kleine Werte hat. Das gute Übereinstimmen der Stellen der Maxima unserer Kurven verleiht



der Methode grosses Gewicht, da man praktisch vor allem die sichere Bestimmung der Stellen der Maxima benötigt (Spektroskopie). Die Form (Stelle der Maxima, Höhe) der Kurve, gewonnen mit der Gausschen Analyse stimmt nicht mit der aufgenommenen Kurve überein, weil die Masstäbe verschieden sind. Man kann aber nachweisen, dass das Verhältnis der Fläche unter den Komponenten (das Intensitätsverhältnis der einzelnen Linien) dasselbe ist, wie das, das man aus der Aufnahme des Spektrogramms bei grossem Auflösungsvermögen des Apparates erhält. Wir wollen darauf hier aber nicht weiter eingehen.

Da man in der Entwicklung in Fourier-Reihen bei der Bestimmung der Koeffizienten nur endliche, und zwar  $M$  Glieder, beachtet hat, wurde  $f^*(x)$  auch nur in einer gewissen Näherung erhalten, für diesen Fehler gibt Medgyessy die folgende Formel an:

$$|A| < \frac{\left(\sum_{k=1}^N A_k\right)}{\sqrt{\min(\sigma_k^2 - \lambda^2)}} 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{M \sqrt{\min(\sigma_k^2 - \lambda^2) \pi}}{l} \right) \right],$$

wo

$$\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dr.$$

Die numerischen Werte für die einzelnen Kurvenabschnitte sind die folgenden, unabhängig von der Stelle:

$$|A_1| < 1,05 \quad |A_2| < 1,31 \quad |A_3| < 0,99.$$

Durch Vergrösserung von  $M$  kann man den Fehler weiter herabmindern.

Nach einer Prüfung unserer Resultate kann man also feststellen, dass schon das einmalige Anwenden der Näherungsmethode von Medgyessy mit gut gewählten Streuabklingungsparametern zu qualitativen (Anzahl der Streifen) und quantitativen (Wellenlänge) Bestimmungen gleicherweise geeignet ist; auf Grund der allgemeinen Theorie der Methode bemerken wir hier nur, dass man zur Bestimmung der Intensität das Verfahren in der Weise wiederholen muss, dass man die am meisten herausragende Komponente von der analysierten Kurve graphisch subtrahiert und am Rest die Analyse wiederum ausführt, bis alle Komponenten verzerrungslos erscheinen. Die Gaussche Analyse des Spektrums, das bei kleineren Auflösungsvermögen des Apparates aufgenommen wird, gibt also im grossen und ganzen dasselbe Resultat wie der Apparat bei grösserem Auflösungsvermögen. Dieser Gedanke wurde zuerst von Medgyessy aufgeworfen.



Zum Schluss möchte ich noch folgendes erwähnen. Bei Atomspektren nähert die Dichte-Funktion von Cauchy die Intensitätsverteilung der einzelnen Linien besser an, als die von Gauss. Die Streuabklümmungsmethode kann aber nach den Untersuchungen von Medgyessy auch hier angewendet werden.

Das Verfahren beruht auf der Kenntnis des mathematischen Ausdruckes der Intensitätsverteilung. Eine weitere Verbesserung der Methode kann man also nur dann erwarten, wenn die mathematische Gestalt der Intensitätsverteilung genauer bestimmt wird.

Das Verfahren kann schnell nur mit mathematischen Maschinen ausgeführt werden.

Ich danke auch an dieser Stelle aufrichtig Dozenten *J. Horváth*, der mich auf das vorliegende Problem aufmerksam machte und mich beriet. Er ermöglichte die Zusammenarbeit mit dem Institut für Angewandte Mathematik und dem Zentralforschungsinstitut für Physik, diesen sei auch hier mein Dank ausgesprochen, insbesondere für die Zurverfügungstellung des harmonischen Analysators. Ich danke ferner *P. Medgyessy* für seine lehrreichen Hinweise, *T. Mátrai* für die Aufnahme der Spektren, *J. Dombi* für das Registrieren der Spektren und *J. Gyulai* für die Hilfe bei den numerischen Rechnungen.

#### LITERATUR

1. *G. Doetsch*, Z. Physik, **49**, 705, 1928.
2. *G. Doetsch*, Mathematische Z., **41**, 283, 1936.
3. *P. Medgyessy*, Kand. Dissertation, 1954.
4. *P. Medgyessy*, MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, **2**, 165, 1954.
5. *B. V. Gnedenko* — *A. N. Kolmogorov*, Független valószínűségi változók összgeinek határeloszlásai, S. 52, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951 (Übersetzung).

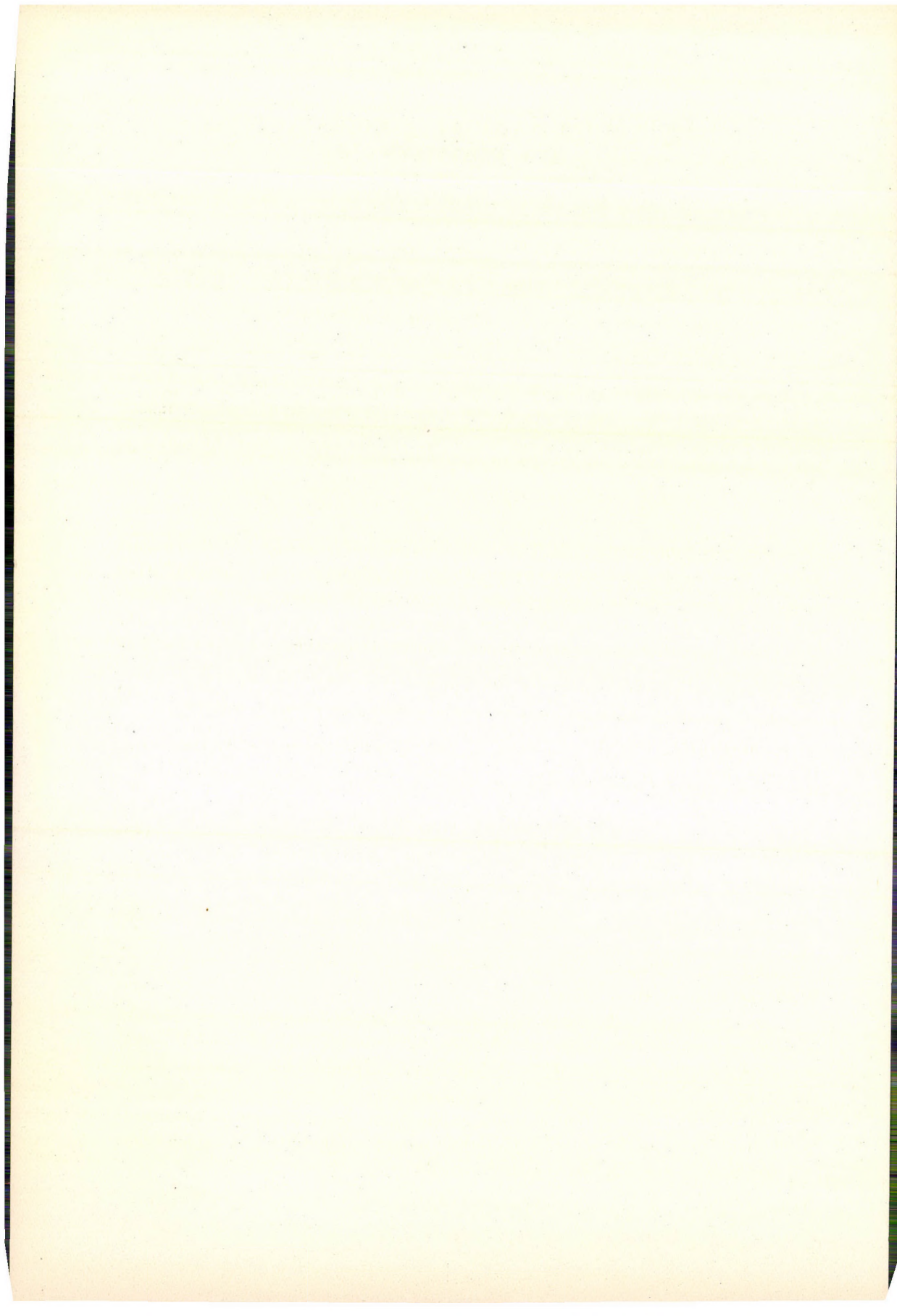
#### ЗАМЕЧАНИЯ К АНАЛИЗУ КРИВЫХ АБСОРБЦИИ

Ф. БЕРЕНЦ

Резюме

Автором была исследована способность приближенного метода с помощью рядов Фурье, данного Дейчем и Медьешки к анализу кривых абсорбции, в случае спектра от Fe-дуги. Было установлено, что применение метода один раз, — в случае хорошо выбранного параметра, уменьшающего разброс, — уже дает годный результат и для качественных (число полос) и для количественных (длина волн) определений, а для определения интенсивности необходимо применять метод повторно.





# QUANTUMMECHANICAL FORCES ACTING ON PHOTONS

By

KÁZMÉR NAGY

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS, DEPARTMENT FOR COSMIC RAYS, BUDAPEST

(Presented by L. Jánossy. — Received 23. X. 1954)

By the aid of the scalar representation of the electromagnetic field we construct a statistical ensemble which describes the statistical behaviour of photons. Following D. Bohm's interpretation of quantummechanics we show that here also the motion of a single photon is affected by quantummechanical forces. Finally we call attention to some difficulties of this interpretation.

\*

The electromagnetic field free from charges and currents is fully characterized by a vector potential which satisfies the homogeneous wave equation  $\square \mathfrak{A} = 0$  and also the condition  $div \mathfrak{A} = 0$ . *H. S. Green* and *E. Wolf* [1] constructed from  $\mathfrak{A}$  a complex scalar wave function  $V$  from which inversely the vector potential can be determined. The field equation expressed by  $V$  is

$$\square V = 0. \quad (1)$$

After substituting  $V(x, t) = a(x, t) e^{i\Phi(x, t)}$  ( $a, \Phi$  real), we can readily verify that the equations for  $a$  and  $\Phi$  are

$$\sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\square a}{a} = 0, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (2b)$$

With the help of these equations we can

a) construct a relativistic but classical statistical ensemble, the motion of which is described by (2), as was done by *K. Novobátzky* [2], [3] and *T. Takabayasi* [4], [5] for the case of the Schrödinger and Schrödinger—Gordon equations, and

b) interpret the motion of a single photon as being guided by quantummechanical forces in the sense of *D. Bohm's* interpretation [6], [7], which origi-



nally refers to electrons only. Here we shall not deal with the general problems of such an interpretation.

First of all we shall determine the quantities describing the statistical ensemble. Introducing  $\varphi = \hbar\Phi$  we have, corresponding to (2a) and (2b) respectively:

$$\sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 - \hbar^2 \frac{\square a}{a} = 0, \quad (2a')$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{a^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (2b')$$

The latter equation can be regarded as the equation of continuity. Thus we get

$$\alpha a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varrho_0 u_i, \quad (3)$$

where  $\varrho_0$  is the density in the rest system,  $u_i$  the four-velocity and  $\alpha = \text{const}$ . After squaring and summing equ. (3) we get, using the identity  $\sum_{i=1}^4 u_i^2 = -c^2$ :

$$\varrho_0^2 = -\frac{\alpha^2 a^4}{c^2} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2.$$

Introducing the notation

$$m_0 = \frac{\hbar}{c} \sqrt{-\frac{\square a}{a}} \quad (4)$$

we get

$$\varrho_0 = \alpha a^2 m_0. \quad (5)$$

The numerical value of  $\alpha$  can be determined by normalization, its dimension from the dimensions of  $a$ ,  $m_0$  and  $\zeta_0$ . Substituting now (5) into (3) we get

$$u_i = \frac{1}{m_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (6)$$

After introducing  $m_0$  we can write (2a') as follows:

$$\sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0, \quad (7)$$

(7) having the form of a Hamilton—Jacobi equation for a particle with the rest mass  $m_0$ . Thus interpreting  $m_0$  as a real rest mass, we get ; dividing equ. (5) by  $m_0$ , the probability density function for a particle :

$$w_0 = \alpha a^2. \tag{8}$$

Writing the first characteristic equation of equ. (7) in the following form :

$$p_i = m_0 u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \tag{9}$$

and eliminating from the second one the  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ , we get the equation of motion as:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\hbar c \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{-\frac{\square a}{a}}. \tag{10}$$

In the stationary case, where  $\varphi = \varphi_0(x_1, x_2, x_3) - \delta x_4$  and  $\frac{\partial a}{\partial x_4} = 0$  we get in particular

$$E = -ic p_4 = ic\delta,$$

where  $E$  is the (constant) energy of the particle.

Equations (2b') and (7) allow us to discuss the motion of the photons mutatis mutandis using the interpretation of Bohm. According to this interpretation and to the above equations we can attribute the following characteristic features to a photon.

1. The real rest mass of a photon equals 0.

2. The quantummechanical potential  $U(x, t) = \hbar c \sqrt{-\frac{\square a}{a}}$ , which can be determined from the field equations by means of suitable initial and boundary conditions, produces according to the equation  $U = m_0 c^2$  a space-time dependent quantummechanical rest mass. (The expression «quantummechanical» means that the respective quantity vanishes for  $\hbar \rightarrow 0$ .)

3. The motion of the photon is described by a usual relativistic equation of motion for a point particle. The force acting on the photon can be determined from the quantummechanical potential.

4. The initial four-momentum of a photon in a space-time point  $x_0$  cannot be chosen arbitrarily ; it is  $p_i^0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_{x_0}$ . If this photon, moving according to equ. (10), arrives in the point  $x$ , its four-momentum will be  $p_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_x$ . 1-4



constitute the main features of the mechanics of photons. The double meaning of  $a(x, t)$  (square root of probability density and quantummechanical potential) is acceptable as well under certain conditions (see in [8]). Under the assumption of quantummechanical forces we obtain a statistical theory which has the character of a classical one.

We illustrate our interpretation on two cases.

a) *Circular polarized plane wave.*  $A_x = 0$ ,  $A_y = A_0 \cos \omega \left( \frac{x}{c} - t \right)$ ,  $A_z = A_0 \sin \omega \left( \frac{x}{c} - t \right)$ . By the help of the transformation described in paper [1] we get:

$V(x, t) = A_0 e^{i\omega \left( \frac{x}{c} - t \right)}$ , from which  $a = A_0$ ,  $\varphi = \hbar\omega \left( \frac{x}{c} - t \right)$ . We see from equ.

(4) that the «generated» rest mass is zero. The components of the impulse are  $p_x = \frac{\hbar\omega}{c}$ ,  $p_y = p_z = 0$ , the energy  $E = \hbar\omega$ , wherever the photon is. The four-velocity is  $\infty$ ; the photon moves with light velocity in the direction of the positive  $x$  axis. The probability of finding the photon is the same everywhere.

b) *Diffraction problem.* Instead of transforming the exact solution of the problem obtained from Maxwell's equations into complex form, we treat this phenomenon in a more simple way. We directly determine the solution of equ. (1) with suitable boundary conditions as superposition of circular polarized plane waves. We use a simple approximation taken from [9] p. 6. According to this solution we get for a diffraction caused by a circular slit of radius about  $a$  ( $a \gg \lambda$ ) which stands perpendicular to the  $x$  axis :

$$V(x, \varrho, t) = a(x, \varrho) e^{i\Phi(x, \varrho, t)},$$

where

$$a^2 = \frac{A_0^2 a^4 \omega^2}{\omega^2 a^4 + 4 c^2 x^2} \exp \left\{ - \frac{2 a^2 \omega^2 \varrho^2}{\omega^2 a^4 + 4 c^2 x^2} \right\},$$

$$\Phi = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 cx}{\omega a^2} + \frac{\omega}{c} x + \frac{2 c \omega \varrho^2 x}{\omega^2 a^4 + 4 c^2 x^2} - \omega t.$$

Here  $x$  and  $\varrho$  are cylindrical coordinates having their origin in the middle of the slit. After simple calculation we get  $p_\varrho \neq 0$ ; that is, the quantummechanical potential  $U \neq 0$  diverts the photons from their original paths along the  $x$  axis.

We want now to call attention to some difficulties of the above picture on account of which the former formalism is hardly acceptable as a full description of the relevant phenomena, even if the solution of the wave-corpuscule problem is such as Bohm proposed. Above all we note that from our equations



we cannot infer directly the existence of the spin. In the first case we discussed above *e. g.* the stream is laminar, *i. e.* there is no circulation. It seems that the fact that the momentum for a linear polarized wave vanishes is connected as well with the difficulty concerning the spin. The model cannot distinguish between the circular and linear polarized cases according to the spin, it distinguishes them according to the momentum. The «vanishing» of the spin in this model certainly does not follow from the transformation of the field equations to complex form. *P. Román* [10] proved namely that by means of second quantization the existence of the spin follows from the complex field equations too.<sup>1</sup>

The above interpretation is reasonable only in the case  $\frac{\square a}{a} \leq 0$  [see equ. (4)]. The problem of the imaginary rest mass occurs in the analogous interpretation of the Schrödinger—Gordon equation as well. (See [5], p. 199.) Therefore it is not a problem relating to photons only.

Finally we note that equ. (2) allows us to interpret the mechanics of photons also hydrodynamically.

#### REFERENCES

1. *H. S. Green* and *E. Wolf*, Proc. Phys. Soc., A **65**, 1129, 1953.
2. *K. Novobátzky*, Ann. d. Phys., (6) **9**, 406, 1951.
3. *K. Novobátzky*, Ann. d. Phys., (6) **11**, 285, 1953.
4. *T. Takabayasi*, Prog. Theor. Phys., **8**, 143, 1952.
5. *T. Takabayasi*, Prog. Theor. Phys., **9**, 187, 1953.
6. *D. Bohm*, Phys. Rev., **85**, 166, 180, 1952.
7. *D. Bohm*, Phys. Rev., **89**, 458, 1953.
8. *J. B. Kelder*, Phys. Rev., **89**, 1040, 1953.
9. *N. F. Mott—H. S. W. Massey*, The Theory of Atomic Collisions, Oxford, 1950.
10. *P. Román*, Acta Phys. Hung., **4**, 211, 1955.

#### КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СИЛЫ ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ФОТОНЫ

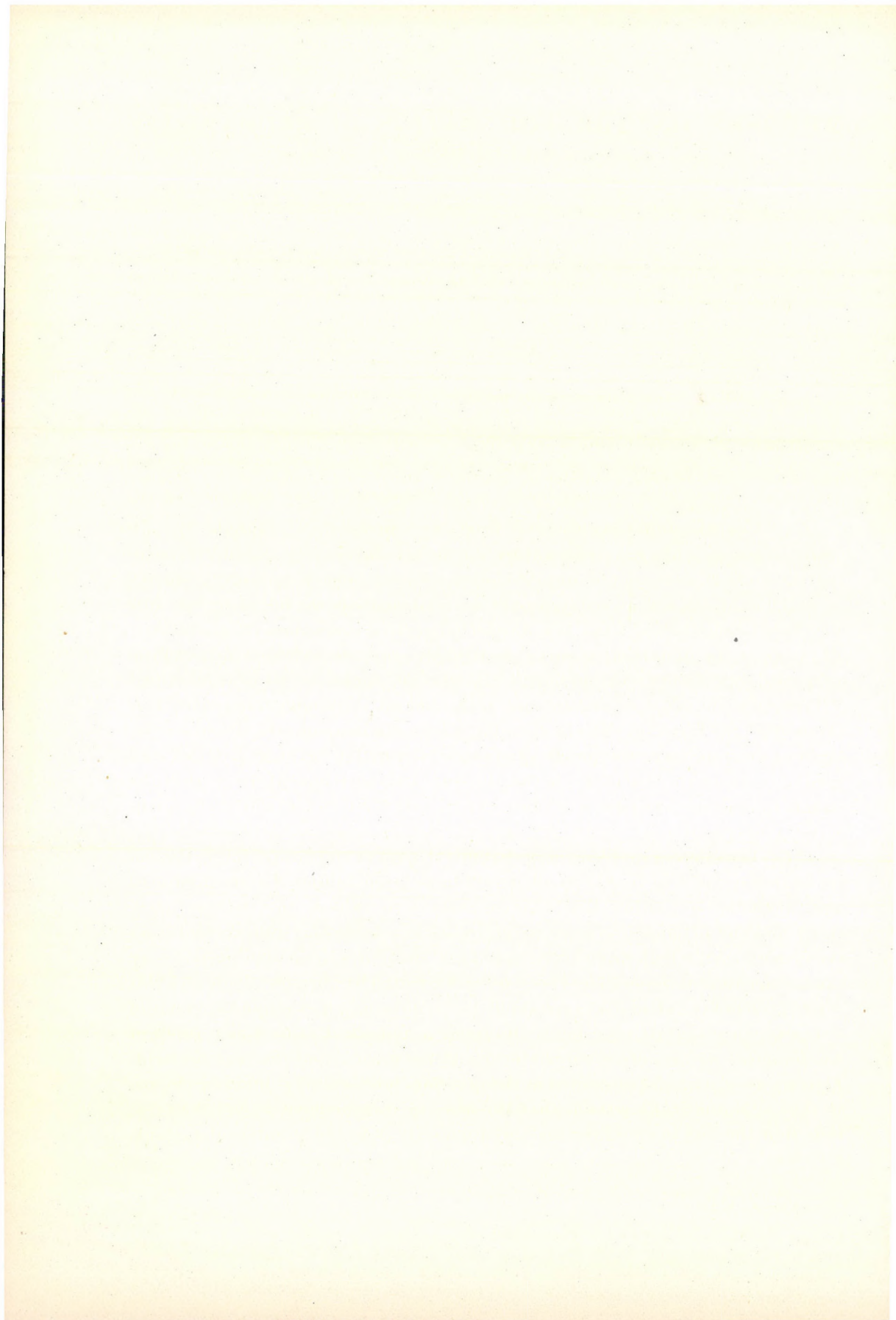
К. НАДЬ

Резюме

Используя скалярное представление электромагнитного поля автором был построен статистический ансамбль, который описывает статистическое поведение фотонов. Следуя интерпретации квантовой механики по Д. Бому, видно, что квантово-механические силы здесь тоже оказывают влияние на движение фотона. Наконец, автор обращает внимание на некоторые трудности этой интерпретации.

<sup>1</sup> I would like to thank *G. Marx* for drawing my attention to this fact.





# REMARKS ON THE FOUNDATION OF PROBABILITY CALCULUS

By

L. JÁNOSSY

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS, DEPARTMENT FOR COSMIC RAYS, BUDAPEST

(Received 16. XI. 1954.)

The addition and multiplication axioms of probability calculations are deduced from a number of qualitative assumptions about the way of composition of independent and of excluding events. It is shown that from these assumptions a somewhat generalized addition and multiplication rule can be derived. It turns out, however, that this generalization corresponds only to a possible deformation of scale of probability and thus the generalized scheme does not lead to any results differing from those obtained in the usual way. Furthermore, the ordinary addition and multiplication rules are contained as specialized cases of a more generalized scheme.

§ 1. In the following we start from the conception of probability as a physical quantity like e. g. temperature, energy etc. In a purely qualitative manner there exists a conception of probability: To say something is «very likely» or «very unlikely» has a good meaning. We investigate in the following how it is possible, when starting from this purely qualitative conception of probability, to arrive at the quantitative use of probability and the well-known formalism of probability theory. The problem is somewhat analogous to the following: All investigations of temperature and in the end all thermodynamics took their origin from the fact that one can distinguish between hot and cold. The scientific analysis starting from the purely qualitative distinction between hot and cold gradually led to the discovery of the absolute scale of temperature — thus the scientific analysis succeeded in finding out the objective factor behind the qualitative concepts.

§ 2. Considering problems of probability, I wish to emphasize that in the end we are interested only in very small or very large probabilities. We are interested only in finding out either that a given event is so unlikely that we can safely count on it not to happen — or we are interested in establishing that certain other events have such a high probability to happen, that for all practical purposes we can assume them to be certain. This can be illustrated by examples from all fields where probability calculations are applied: We take as an example the result of a measurement and its error limit. Obtaining a numerical value  $x$  as a result of measurement we are interested in the size of the error  $\Delta x$  of the measurement. Thus we are essentially interested in the question, how large  $\Delta x$  must be chosen, so that it is *practically certain* that the error of measurement is less than  $\Delta x$ , thus that the real value of the measured quantity is inside an interval  $x + \Delta x$ ,  $x - \Delta x$ .



So as to avoid misconceptions from the beginning, we make two remarks.

1. Often one gives as the error of a quantity its standard deviation  $\delta x$ . In that case the probability for the error to exceed  $\delta x$  is by no means small. However, in the latter case the probability that the error exceeds  $3\delta x$  is small; if we want to be on the safe side, we can choose as limits of error  $4\delta x$  or even  $5\delta x$ . The probability of the actual error exceeding the latter limits is very small. When we give the standard deviation of a measured quantity we follow a convention and imply that the error is *very likely* less than say  $4\delta x$ . The convention of giving  $\delta x$  and not say  $4\delta x$  as the standard error, has, of course, its good justification as the quantity  $\delta x$  itself plays an important role in the theory of probabilities.

2. We meet statements of the kind that an event has a probability of say 30%. 30% is neither a very small nor a very large probability and thus this seems to contradict our statement at the beginning that we are as a rule interested in very small or large probabilities only. However, if we analyse the statement further, we see that in effect the statement of 30% probability implies also a statement of extreme probability in the following manner. In the case of one event only the fact that this event happens with 30% probability is of little interest. What is of interest is simply this. If we repeat the circumstances of the event very often, say  $N$  times, then the number of cases where the event will take place is *almost certain* to be near  $n \sim 0,3 N$ ; similarly one can for practical purposes safely exclude the possibility that the number of events deviates much from  $0,3 N$ . This means that the statement of 30% probability ultimately refers to certain events which have very high probability (i. e.  $n \sim 0,3 N$ ) and to other cases with very low probability (i. e.  $|n - 0,3 N| \gg 1$ ).

We have given the above example merely as illustration, so as to emphasize our statement about extreme probabilities. The relation  $n \sim 0,3 N$  or the corresponding more general one  $n \sim pN$  ( $p$  probability) shall not be taken for granted in the following considerations, we shall obtain this relation as a result of our analysis.

§ 3. So as to be able to express ourselves conveniently, we shall make use of the following terms. Considering certain types of events, we say that they form a probability field. We use the term in the usual sense. E. g. suppose as events the numbers of counts obtained by a Geiger-Müller counting arrangement during a period of  $t$  seconds. For a fixed  $t$  the number may be  $0, 1, 2, \dots, k$  (where  $k$  is the maximum number the arrangement can count during the time  $t$ ). Thus our probability field contains  $k + 1$  points, representing the possible events.

We shall use the following expression: We *expose* the field, i. e. we switch on the apparatus for a time  $t$ . As the result of the *exposition* of the field we get one of the possible events, i. e. one of the points of the field. We ascribe probabilities  $p(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, k$  to the various points of the field. This means that in case of an exposition of the field the result  $n$  is obtained with a probability  $p(n)$ . The probabilities are for the time being introduced in a purely quali-



tative manner. We say that if  $p(n) \sim 0$ , then it is very unlikely that the event  $n$  happens as the result of the exposition. Further we assume that the more likely a result the larger the numerical value of its probability, and for an event which nearly necessarily occurs as the results of an exposition, the probability approaches some limiting value  $M$ .

§ 4. *Exclusive events.* To proceed further, we have to classify events. For our purpose it is important to consider *exclusive* events. We call two events contained in the same probability field *exclusive*, if an exposition of the field can lead only to one event or to the other, but not to both. To go back to our example of counting apparatus, the events where the apparatus has counted during a given interval a specified number of times, are *exclusive* events. If  $k_1 \neq k_2$ , then the apparatus, when switched on, may count  $k_1$  or it may count  $k_2$ ; but if it counts  $k_1$ , then it certainly does not count (during the same exposition)  $k_2$  — and vice versa. It is seen that for events to be *exclusive* it is of importance to specify them properly. If we were to take as one event that the apparatus has counted anything between 0 and 9, as another event that the apparatus has counted anything between 5–14, then the events thus specified are not *exclusive*, although we can from the same material also specify *exclusive* events by taking each number of counts as an event, or by specifying non-overlapping groups as events.

*Independent events.* Independent events are non-*exclusive* and in such a way that the happening of the one event does by no means prejudice the happening or not happening of the other event. Events are independent if there is no causal connection between them. It must be emphasized, however, that there is no formal way of establishing for certain that two types of events are independent. Firstly, absolutely independent events hardly exist, thus describing two events as independent we always idealize to some extent. This idealization is, however, necessary. Any successful application of the theory of probability depends on the good idealization of the material. This, by the way, is correct not only for the theory of probability but also for the application of any theory to natural events.

As an important example for independent events we mention the following. We can take the exposition of our counting apparatus (mentioned above) as an event, and we may specify the event by the number of counts obtained. Thus we take as an event the switching on of our apparatus for a time  $t$ . Switching on the apparatus several times in succession, we get different events in as much as we obtain different counts. These events can be taken, in a good approximation, as independent events. — More generally the subsequent exposures of a probability field can be taken as events of a more general field and often these events can be assumed to be independent ones.

§ 5. Consider a probability field; the events contained in the field should be *exclusive*. Denote the elements of the field with  $a, b, c, \dots$ , the corresponding



probabilities by  $p, q, r, \dots$ . We can modify the field by changing the classification of the events. Denoting e. g. by  $A$  the event which consists in either the event  $a$  or the event  $b$ , we have a new field containing  $A, c; \dots$ ; the probability of  $A$  may be denoted  $P$ . The latter probability must necessarily be a function of the probabilities  $p$  and  $q$ , thus we may write

$$P = f(p, q). \quad (1)$$

Thus  $P$  is the probability that an exposition of the original field leads either to  $a$  or to  $b$ .  $P$  is also the probability that the modified field in which  $a$  and  $b$  are joined to the event  $A$ , gives the event  $A$  as the result of exposure.

We investigate the function  $f(p, q)$ . We can postulate the following properties of this function :

$$f(p, q) = f(q, p). \quad (2)$$

This relation expresses the fact that no importance can be attached to the order of the events  $a, b$ .

Further, if one of the events  $a, b$ , say  $b$ , cannot occur at all, then we have  $q = 0$ , and the probability of  $A$  is the same as that of  $a$ . Thus we may put

$$f(p, 0) = p. \quad (3)$$

We may further assume that  $A$  is the more likely, the more likely its components  $a$  and  $b$  are, thus we can postulate

$$f(p, q) \text{ increases monotonously and is continuous in } p \text{ and } q. \quad (4)$$

We can give another important property of the function  $f$  by considering three exclusive events of the field. Denote the event in which  $a, b$  or  $c$  happens  $A$ , and the corresponding probability  $P$ . We have at least two possible ways to arrive at the probability  $P$ .

1. We modify the original probability field by joining the three events  $a, b, c$  to one event  $A$ , thus the event  $A$  of the new field happens, whenever  $a$  or  $b$  or  $c$  of the original field happen. The probability  $P$  is some function of  $p, q, r$ , we may write say

$$P = F(p, q, r), \quad (5)$$

where, as before

$$F(p, q, r) = \text{symmetric in } p, q, r. \quad (6)$$

2. We can arrive at the field  $A, \dots$  also in two steps. As the first step we join  $a, b \rightarrow A$  and arrive at the field  $A, c, \dots$ . As a second step we join  $A, c$  to  $A$  and thus arrive at the final field  $A, \dots$ . The probability for  $A$  or  $c$  to happen is obtained according to (1) as

$$P = f(P, r), \quad (7)$$

where

$$P = f(p, q) \quad (8)$$

is the probability for  $A$  to happen and  $r$  is the probability for  $c$  to happen. From (6), (7) and (8) we get

$$f(f(p, q), r) = F(p, q, r) = \text{symmetric in } p, q, r. \quad (9)$$

Thus e. g.

$$f(f(p, q), r) = f(f(r, p), q) = \text{expressions obtained through other permutations in } p, q, r. \quad (10)$$

Equations (1)–(10) give all properties of the function  $f(p, q)$  which can be derived on general grounds. In particular, considering groups of more than three events, no further conditions will be imposed on the function  $f(p, q)$ .

We note that all the above equations are satisfied by the relation

$$f(p, q) = p + q, \quad (11)$$

but they are also satisfied by the more general relation

$$f(p, q) = \psi^{-1}(\psi(p) + \psi(q)), \quad (12)^*$$

where  $\psi(x)$  is a function with the following properties

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(x) \text{ monotonous for } 0 \leq x \leq M$$

and  $\psi^{-1}(y)$  the inverse of  $\psi(x)$  exists in the interval

$$0 \leq y \leq \psi(M)$$

and is also increasing monotonously. Further both  $\psi(x)$  and  $\psi^{-1}(y)$  must be single valued.

§ 6. With slight modifications we can consider independent events in a way analogous to that used in the preceding § 5 for exclusive events. Thus consider a field of independent events  $a, b, c, d, \dots$ . The probabilities for these events to happen can be written  $p, q, r, s, \dots$ . We may now modify the above field by joining the events  $a, b$  to  $A$ , so that we say  $A = a + b$ , thus we consider the event  $A$  to have happened if during the same exposition of the field

\* I am indebted to *A. Békéssy* for drawing my attention to this solution.



both  $a$  and  $b$  happen. The probability  $P$  for  $A$  to happen can be composed out of the probabilities  $p$  and  $q$  as follows :

$$P = g(p, q), \quad p, q \text{ independent.} \quad (1a)$$

We have

$$g(p, q) = g(q, p) \quad (2a)$$

because of lack of order between the events. Further

$$g(p, 0) = 0. \quad (3a)$$

The latter condition implies that, if the event  $b$  cannot happen, the combined event  $a + b$  must also be excluded.

We have also for the  $g$ -function the condition

$$g(M, p) = p; \quad (3a')$$

the latter condition expresses that provided  $a$  is certain to happen, the probability of  $a + b$  to happen is equal to the probability of  $b$  to happen.

In analogy to (4) we can postulate

$$g(p, q) \text{ increases monotonously with } p \text{ and } q \text{ and is continuous in } p \text{ and } q. \quad (4a)$$

Further we may consider the event  $A = a + b + c$  where  $A$  happens if all the three independent events  $a$ ,  $b$  and  $c$  happen during the same exposition.

Writing for the corresponding probability

$$P = G(p, q, r), \quad (5a)$$

where, as in the case of the  $F$ -function, we must postulate for the  $G$ -function

$$G(p, q, r) = \text{symmetric in } p, q, r, \quad (6a)$$

grouping again  $a + b = A$  and  $A + c = A$ , we have

$$P = g(P, r) \quad (7a)$$

with

$$P = g(p, q), \quad (8a)$$

thus

$$g(g(p, q), r) = G(p, q, r) = \text{symmetric in } p, q, r \quad (9a)$$

and

$$g(g(p, q), r) = g(g(r, p), q) = \text{expression obtained through other permutations of } p, q, r. \quad (10a)$$

The equations (1a)—(10a) give all possible restrictions on the  $g$ -function. All the conditions are compatible with the following

$$g(p, q) = p q \quad (11a)$$

with

$$M = 1. \quad (11a')$$

The restriction (11a') is made necessary by the condition (3a'). The conditions (1a)—(10a) can also be satisfied by the more general expression

$$g(p, q) = \varphi^{-1}(\varphi(p) \varphi(q)), \quad (12a)$$

$$\varphi^{-1}(M) = 1, \quad (12a')$$

where (12a') is made necessary by (3a'). The function  $\varphi$  must obey the same conditions as those we had to impose on the function  $\psi$ .

§ 7. We have to consider the connection between the functions  $f$  and  $g$ . For this purpose it is necessary to consider the combination of exclusive events and independent events. Thus consider a field which contains among others the events  $a, b, \gamma, \dots$ , suppose that  $a$  and  $b$  are exclusive and that both  $a$  and  $b$  are independent of  $\gamma$ . The corresponding probabilities may be denoted  $p, q, \varrho$ . We consider now the probability that an event

$$A = (a, b) + \gamma \quad (13)$$

occurs; the event  $A$  consists in either  $a$  or  $b$  happening and also  $\gamma$  happening. Thus we may write for  $A$  instead of (13) also

$$A = (a + \gamma, b + \gamma) \quad (14)$$

where (14) expresses the fact that  $A$  consists of either the event  $a + \gamma$  i. e.  $a$  happening and  $\gamma$  happening, or alternatively of  $b + \gamma$  i. e.  $b$  happening and  $\gamma$  happening. Denoting the probability for  $A$  to happen by  $Q$ , we have

$$Q = h(p, q, \varrho),$$

where the function  $h$  can be expressed in terms of  $f$  and  $g$ . Indeed, if we regard  $A$  as composed out of  $a, b, \gamma$  according to (13), we have the probability for the event  $A = a, b$  to happen

$$P = f(p, q),$$



the probability for the event  $A$  and the event  $\gamma$  to happen is thus

$$Q = g(p, \varrho) = g(f(p, q), \varrho). \quad (15)$$

Alternatively, if we consider  $A$  as composed of its components according to (14) we may write the following :

$$Q_1 = g(p, \varrho), \quad Q_2 = g(q, \varrho),$$

where  $Q_1$  is the probability for the event  $B_1 = a + \gamma$  to happen,  $Q_2$  the probability for the event  $B_2 = b + \gamma$  to happen. Since  $B_1$  and  $B_2$  are exclusive events, we have thus for the probability that either  $B_1$  or  $B_2$  happens

$$Q = f(g(p, \varrho), g(q, \varrho)). \quad (16)$$

Comparing (15) and (16) we get a condition connecting  $f$  and  $g$ , namely :

$$g(f(p, q), \varrho) = f(g(p, \varrho), g(q, \varrho)). \quad (17)$$

§ 8. The condition (17) is compatible with the conditions (1)–(10) and (1a)–(10a) as can easily be seen. If we were to choose  $f$  and  $g$  according to (11) and (11a) together with (11a'), (17) would automatically be fulfilled. If we take the more general forms of  $f$  and  $g$  as given by (12), (12a) and (12a'), (17) is fulfilled if

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq M. \quad (18)$$

§ 9. Summarizing, we find thus, if  $p$  and  $q$  are the probabilities of two exclusive events  $a, b$ , and if further  $P$  is the probability for one of the events to happen, we are led to suppose that  $P$  is given by

$$P = \psi^{-1}(\psi(p) + \psi(q)). \quad (19)$$

Further, if  $a, b$  are not exclusive but independent events, the probability of both events to happen is

$$P = \psi^{-1}(\psi(p)\psi(q)) \quad (20)$$

with

$$\psi(M) = 1, \quad (21)$$

where  $p \sim 0$  expresses unlikely events,  $p \sim M$  expresses almost certain events. The function  $\psi$  is monotonous and continuous, obeying, apart from (21)

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(p_1) < \psi(p_2) \quad \text{if} \quad p_1 < p_2. \quad (22)$$

The equations (19), (20), (21) and (22) are obtained from a number of qualitative postulates about probabilities of groups of events; these postulates are dealt with in § 5, 6 and 7. The considerations in § 5, 6 and 7 do not lead directly to (19), (20), (21) and (22), but to a number of conditions which are all fulfilled if we postulate those equations; I have the impression that the latter equations give also the most general relation satisfying the conditions imposed on probabilities.\*

The particular assumption

$$\psi(p) = p \quad (23)$$

leads to the usual laws of addition and multiplication of probabilities, so far there appears, however, no necessity to specialize in this way.

§ 10. Let us generalize equations (19), (20) for the case of more than two events.

Suppose thus that the events  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  are all exclusive and appear with probabilities  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ .

The probability  $P_n$  that either  $a_1$  or  $a_2$  happens, is given by

$$P_{12} = \psi_{-1} \left( (\psi(p_1) + \psi(p_2)) \right). \quad (24)$$

We call the corresponding event the event  $A_{12}$ . The probability  $P_{123}$  that either  $a_1$  or  $a_2$  or  $a_3$  happens, is thus the same as the probability that either  $A_{12}$  happens or that  $a_3$  happens, thus we have

$$P_{123} = \psi_{-1} \left( \psi(P_{12}) + \psi(p_3) \right), \quad (25)$$

but according to (26) we have

$$\psi(P_{12}) = \psi(p_1) + \psi(p_2).$$

\* The problem of functional equation of the type used above was dealt with in detail by *J. Aczél* [1]. In a paper published in the same issue of this journal [2] *Aczél* has shown that the above impression is indeed correct, provided we assume the functions  $\varphi$  and  $\psi$  to be strictly monotonous and continuous. Furthermore, it is shown that not all the conditions imposed upon  $f$  and  $g$  are necessary. It is e. g. possible to drop some of the conditions imposed upon the probabilities of the independent events without affecting the result.



Therefore

$$P_{123} = \psi_{-1} \left( \psi(p_1) + \psi(p_2) + \psi(p_3) \right). \quad (26)$$

The probability is thus a symmetric function of  $p_1, p_2, p_3$  as it must be.

Extending this procedure to  $k$  events, we find the probability  $P_{123\dots k}$  for an event  $A_{123\dots k} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  to happen, given by

$$P_{123\dots k} = \psi_{-1} \left( \sum_{i=1}^k \psi(p_i) \right), \quad (27)$$

where  $A_{123\dots k}$  is that event, where one of the exclusive events  $a_1, a_2, \dots, a_k$  happens.

In a completely analogous manner we can get expressions for the probability for many independent events to happen simultaneously. Consider thus events  $b_1, b_2, \dots, b_k$  which are independent and denote the corresponding probabilities by  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , then we have

$$Q_{12} = \psi_{-1} \left( \psi(q_1) \psi(q_2) \right), \quad (28)$$

where  $Q_{12}$  is the probability of the event  $B_{12} = b_1 + b_2$ , i. e.  $Q_{12}$  is the probability of  $b_1$  and  $b_2$  happening at the same exposure. Further we have

$$Q_{123} = \psi_{-1} \left( \psi(Q_{12}) \psi(q_3) \right),$$

where  $Q_{123}$  is the probability for the event  $B_{123} = b_1 + b_2 + b_3$  to happen. From (28) we get

$$\psi(Q_{12}) = \psi(q_1) \psi(q_2),$$

thus we have

$$Q_{123} = \psi_{-1} \left( \psi(q_1) \psi(q_2) \psi(q_3) \right).$$

We find further for  $k$  events

$$Q_{123\dots k} = \psi_{-1} \left( \prod_{i=1}^k \psi(q_i) \right), \quad (29)$$

where  $Q_{123\dots k}$  is the probability for the event  $B_{123\dots k} = b_1 + b_2 + \dots + b_k$  to happen; i. e.  $Q_{123\dots k}$  is the probability for all the  $k$  events  $b_1, b_2, \dots, b_k$  to happen at the same exposure.

We give a further relation. Consider an alternative, i. e. two exclusive events  $a, \bar{a}$ , one of which is bound to happen at the exposition. The probabilities for  $a$  to happen may be denoted by  $p$ , the probability for  $\bar{a}$  to happen (which is the same as the probability for  $a$  not to happen) may be denoted by  $\bar{p}$ . As one of the events is bound to happen, the probability for  $a$  or  $\bar{a}$  to happen is the maximum probability  $M$ . Thus

$$M = \psi_{-1} \left( \psi(p) + \psi(\bar{p}) \right).$$

Applying the function  $\psi$  on both sides of the above equation, we find with help of (21)

$$\psi(p) = 1 - \psi(\bar{p}) \quad \text{or} \quad p = \psi_{-1} \left( 1 - \psi(\bar{p}) \right). \quad (30)$$

§ 11. We apply now the above formulae to find the probability in our formalism for the following: Consider a field  $a, b, c, \dots$  of exclusive events with corresponding probabilities  $p, q, r, \dots$ . At each exposition of the field we get one of the events of the field. Consider now  $N \gg 1$  expositions of the field and suppose that these expositions are independent events. Let us determine the probability that out of the  $N$  exposures  $k$  give the event  $a$  and the remaining  $N - k$  expositions give different events. Thus we derive the analogon to the Bernouilli distribution in our modified formalism.

The probability of finding  $a$  at one particular exposition is  $p$ . According to (29) the probability of getting  $a$   $k$ -times subsequently in  $k$  expositions is

$$p_k = \psi_{-1} \left( [\psi(p)]^k \right).$$

The probability of getting  $N - k$  times a result different from  $a$  in  $N - k$  subsequent expositions is obtained from (29) and (30) as

$$\bar{p}_{N-k} = \psi_{-1} \left( [1 - \psi(p)]^{N-k} \right)$$

and the probability for finding  $a$  in  $k$  specified expositions out of a total of  $N$  is thus

$$P_{k, N-k} = \psi_{-1} \left( \psi(p_k) \psi(p_{N-k}) \right) = \psi_{-1} \left( [\psi(p)]^k [1 - \psi(p)]^{N-k} \right). \quad (32)$$

We regard now in the following as one event  $N$  subsequent expositions. For sake of distinction we call such an event an « $N$ -fold event». The  $N$ -fold event is



characterized by the results of the  $N$  expositions of the field. We regard now all those  $N$ -fold events which contain exactly  $k$ -times the result  $a$ . There are  $\binom{N}{k}$  such  $N$ -fold events; the probability connected with each of these  $N$ -fold events is the same, namely  $P_{k, N-k}$ ; further these events are exclusive, thus the probability that any of the  $\binom{N}{k}$  events, each containing exactly  $k$  times the event  $a$ , occurs, is according to (27)

$$P_N(k) = \psi_{-1} \left( \binom{N}{k} \psi(P_{k, N-k}) \right)$$

and introducing  $P_{k, N-k}$  from (32) we have

$$P_N(k) = \psi_{-1} \left( \binom{N}{k} [\psi(p)]^k [1 - \psi(p)]^{N-k} \right). \quad (33)$$

Equation (33) is very similar in form to the Bernoulli distribution.

§ 12. To analyse (33) we determine the most probable value of  $k$  for fixed  $N$  and  $p$ . As both  $\psi$  and  $\psi_{-1}$  increase monotonously with their argument, we find in the usual way

$$P_N(k) = \text{maximum for } k = k_0$$

with

$$k_0 = [N \psi(p)]. \quad (34)$$

(The bracket  $[x]$  denotes the largest integer less than  $x$ .) For large values of  $N$  we may write

$$k_0 \sim N \psi(p).$$

Further we determine the probability  $P_N(k_1, k_2)$  to find the number of exposures leading to  $k$ ,  $k$  being inside the interval  $k_1, k_2$  ( $k_1 < k_2$ ). So as to get  $k$  exposures leading to  $a$  with  $k_1 \leq k \leq k_2$  we can regard the  $N$ -fold events corresponding to different  $k$ -values in the specified interval as exclusive ones, thus we may write according to (27)

$$P_N(k_1, k_2) = \psi_{-1} \left( \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} \psi(P_N(k)) \right) \quad (35)$$

and with help of (33) we find

$$P_N(k_1, k_2) = \psi_{-1} \left( \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} \binom{N}{k} [\psi(p)]^k [1 - \psi(p)]^{N-k} \right). \quad (36)$$

As is well known, the Bernoulli distribution has a sharp maximum at  $k = k_0$ , such that the sum of the terms around this maximum value is nearly equal to 1. Thus

$$\sum_{k_1 \leq k \leq k_2} \binom{N}{k} P^k (1 - P)^{N-k} = \Delta_P(k_1, k_2),$$

where

$$\Delta_P(k_1, k_2) \sim \begin{cases} 1 & \text{if the interval } k_1, k_2 \text{ is not too narrow, and contains} \\ & k_0 \text{ in the middle;} \\ 0 & \text{if } k_1, k_2 \text{ does not contain } k_0 \text{ and is not too near } k_0. \end{cases} \quad (37)$$

We may thus write for (36)

$$P_N(k_1, k_2) = \psi_{-1} \left( \Delta_{\psi(p)}(k_1, k_2) \right),$$

and thus we find

$$P_N(k_1, k_2) \sim \begin{cases} M \\ 0 \end{cases} \text{ conditions as in (37)}. \quad (38)$$

We can express our result thus: Among  $N$  exposures we shall almost certainly find  $k$  expositions leading to the event  $a$ , where  $k$  is a number in the vicinity of  $N\psi(p)$ . As in the ordinary treatment we can show e. g. that with increasing  $N$  the probability tends towards zero for  $k$  to fall outside

$$N(\psi(p) \pm \varepsilon),$$

where  $\varepsilon$  is an arbitrarily small quantity.

§ 13. We are now in a position to introduce the ordinary rules of probability calculation. We saw that from purely qualitative assumptions, which themselves are nearly trivial, we could derive the result that repeating an exposure a very large number  $N$  of times, an event  $a$  of the exposed field will nearly certainly appear about

$$k \approx N\psi(p) \quad (39)$$

times;  $N$  is the number of repetitions and  $p$  the qualitatively defined probability of the single event. The important feature of this result is that it shows

$$k \propto N \text{ for large } N.$$



Thus, without having introduced any quantitative definition of the probability, we could show by the purely qualitative considerations that the number of events leading to  $a$  increases about proportional to  $N$ . Expressing this result more precisely we say that the ratio

$$P_N \approx \frac{k_N}{N}$$

with increasing  $N$  has a tendency to approach a constant value.  $k_N$  is the actual number of results leading to  $a$ . This «tendency» can be formulated in different ways, e. g. by saying that for any arbitrarily small  $\varepsilon > 0$  the relation

$$|P_N - P_M| < \varepsilon$$

is almost certainly fulfilled for fixed  $N$  and  $M$  provided  $1 \ll N \ll M$ .

Of course, we have to treat the above equation carefully, if we determine successively differences

$$|P_N - P_{M_1}|, |P_N - P_{M_2}|, \dots \text{ etc.},^1$$

thus after a sufficiently large number of such determinations, it is almost certain that we shall find cases where the difference is not small but large. Therefore another formulation of the case is preferable: The value of  $k_N/N$  with increasing  $N$  shows a tendency to fluctuate more and more closely around a fixed value. This fluctuation is of course such that any of the actual values in the series may deviate even by large amounts from the fixed value around which the fluctuation is taking place. However, the larger  $N$  the smaller the probability of a large deviation — and for a sufficiently large value of  $N$  we can for practical purposes take  $k_N/N$  as a good approximation of  $\psi(p)$  the value around which the ratio fluctuates. The risk involved in putting

$$\psi(p) \approx k_N/N$$

for sufficiently large  $N$  is exactly of the same type as the risk generally involved when relying on the results of any physical measurement.

§ 14. So far we could not fix the function  $\psi(p)$  itself. From the foregoing considerations it appears that all essential results of probability theory can be obtained *without* specifying  $\psi(p)$ , in fact the results are completely independent of the actual choice of  $\psi(p)$  as we have shown in the case of the Bernoulli distribution. It is therefore admissible and at the same time useful to make the simplest choice of  $\psi(p)$ , compatible with the conditions imposed in § 5, namely

$$\psi(p) = \psi_{-1}(p) = p \quad \text{and} \quad M = 1. \quad (40)$$

( $M = 1$  follows necessarily from the choice of  $\psi(p)$  since  $\psi(M) = 1$  according to (21).)

Assuming (40), we have

$$p \approx k_N/N \quad (41)$$

or

$$k \approx pN.$$

The latter relations must by no means be regarded as definition of probability. We have shown from purely qualitative considerations, without assuming anything of the kind of equation (41), that the right hand side of (41) fluctuates around a fixed value, the latter being a monotonous function of the probability  $p$ . By postulating (40) we do nothing else but fix quantitatively the scale of probabilities. We may express this also in the following manner.

From general considerations, without introducing any quantitative scale for probabilities we come to the conclusion that the number of cases  $k_N$  is about proportional to  $N$  («about» is to be understood as explained further above).  $k_N$  will be in general the larger, the larger the probability  $p$  of the event  $a$ . We are free to postulate that the proportionality constant is *equal* to the probability. This postulate merely fixes the quantitative *scale* of probabilities, without effecting any essential result of the theory.

Thus postulating in this sense (40), we have

$$P = \sum p_k \quad \text{instead of} \quad P = \psi_{-1} \left( \sum \psi(p_k) \right),$$

$$Q = \prod q_k \quad \ll \quad \ll \quad Q = \psi_{-1} \left( \prod \psi(q_k) \right),$$

thus we get the ordinary rules of probability calculation.

§ 15. The above considerations were inspired by a paper of *Schrölinger* [3], although our considerations are not identical with those in the latter paper.

*A. Rényi* has drawn my attention to the fact that *Bernstein*, 1917, has given considerations somewhat similar to those given here. I was unable to obtain Bernstein's original paper [4], however, judging from Bernstein's book [5] on the theory of probability (Moscow, 1946) Bernstein's considerations, although showing a remarkable similarity to our considerations, are by no means identical.

We discuss shortly the connection between our considerations explained above and the well-known axiomatic system of probability theory given by *Kolmogorof*. We note first that there is complete agreement between our considerations and those of Kolmogorof. In fact our considerations complete in a certain sense Kolmogorof's axiomatic theory. While Kolmogorof introduces addition and



multiplication of probabilities as axiom connected with properties of sets, we give considerations which justify these axioms from purely physical considerations, at least in the case of discrete probability distributions.

To see these connections in some more detail, we sketch very briefly Kolmogorof's system and point out the connections.

Kolmogorof considers a set  $U$ , the elements of which may be called elementary events. These elementary events can be regarded as what we have described in this article «exposures of a field». Further, a set  $F$  is considered, the elements of which are all the sub-sets of  $U$ . The properties of  $F$  are as follows.

1.  $F$  should contain  $U$  as element,
2. if  $A$  and  $B$  are sub-sets of  $U$ , then  $A + B$  and  $A \cdot B$  and also  $\bar{A}$  and  $\bar{B}$ , should be elements of  $F$ ,
3. if  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  are elements of  $U$ , then  $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$  and  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots$  should also be elements of  $F$ . The elements of  $F$  play the role of the statistical events.

1. If among the elements of the sets  $A$  and  $B$  are no common elements, then we denote the events corresponding to  $A$  and  $B$  exclusive events. Further, we call the  $U$ -events *certain* events, and the  $\bar{U}$ -events (empty set) *excluded* events.

To every set  $A$  a non-negative number  $P(A)$  corresponds and this number is called the probability attached to the event  $A$ .

The following axioms are postulated for the probabilities thus obtained :

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
2.  $P(U) = 1$ .
3. If  $A$  and  $B$  are mutually exclusive events, then

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Instead of the above axioms we have in our considerations further above the functional relation (12).

2. If in a series of events we are restricting ourselves to those events  $A$  which can only occur provided one of the events  $B$  has occurred, then we use for the events  $A$  the symbol  $A/B$ . We call the latter kind of events *conditional* events and make to correspond to these conditional events non-negative numbers  $P(A/B)$  which we call conditional probabilities.

We consider the series of events belonging to the sets  $A$  and  $B$  and form out of the conditional events a new set  $F$ . The elements of this new set are those events where simultaneously, one event each, of the set  $A$  and the set  $B$  has occurred. We make to correspond again to this latter series of events non-negative

numbers denoted by  $P(A \cdot B)$ . It is easy to show that for two events  $A$  and  $B$  the following relation exists :

$$P(A \cdot B) = P(B) P(A/B).$$

We call the events  $A$  and  $B$  *independent* events provided we have

$$P(A) = P(A/B).$$

In our considerations the above equations are replaced by the equation (12a), which appears in a somewhat more general form, but has essentially the same contents as Kolmogorof's relation.

I am greatly indebted to *L. Pál* for discussions and in particular for helping to clarify the connection between the contents of the above article and Kolmogorof's theory.

*Note added in proof.* After the manuscript of the above paper was submitted for publication, *A. Rényi* drew my attention to *I. J. Good's* book »Probability and the Weighing of Evidence«, Charles Griffin & Co., London 1950. In an Appendix (page 105) *J. Good* sketches ideas which seem to be nearly identical with those worked out in the present paper in some more detail. It is interesting that *Good* refers also to *Schrödinger* in his Appendix.

#### REFERENCES

1. *J. Aczél*, Bulletin de la Société Mathématique de France, **76**, 1948.
2. *J. Aczél*, Acta Phys. Hung., **4**, 351, 1955.
3. *E. Schrödinger*, Proc. Roy. Ir. Acad., **51**, 51, 1947; **51**, 141, 1947.
4. *С. Н. Бернштейн*, Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей, Сообщения Харьковского матем. о-ва 1917 г.
5. *С. Н. Бернштейн*, Теория вероятностей, Москва 1946.

#### ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСЯЩИЕСЯ К ОСНОВАМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

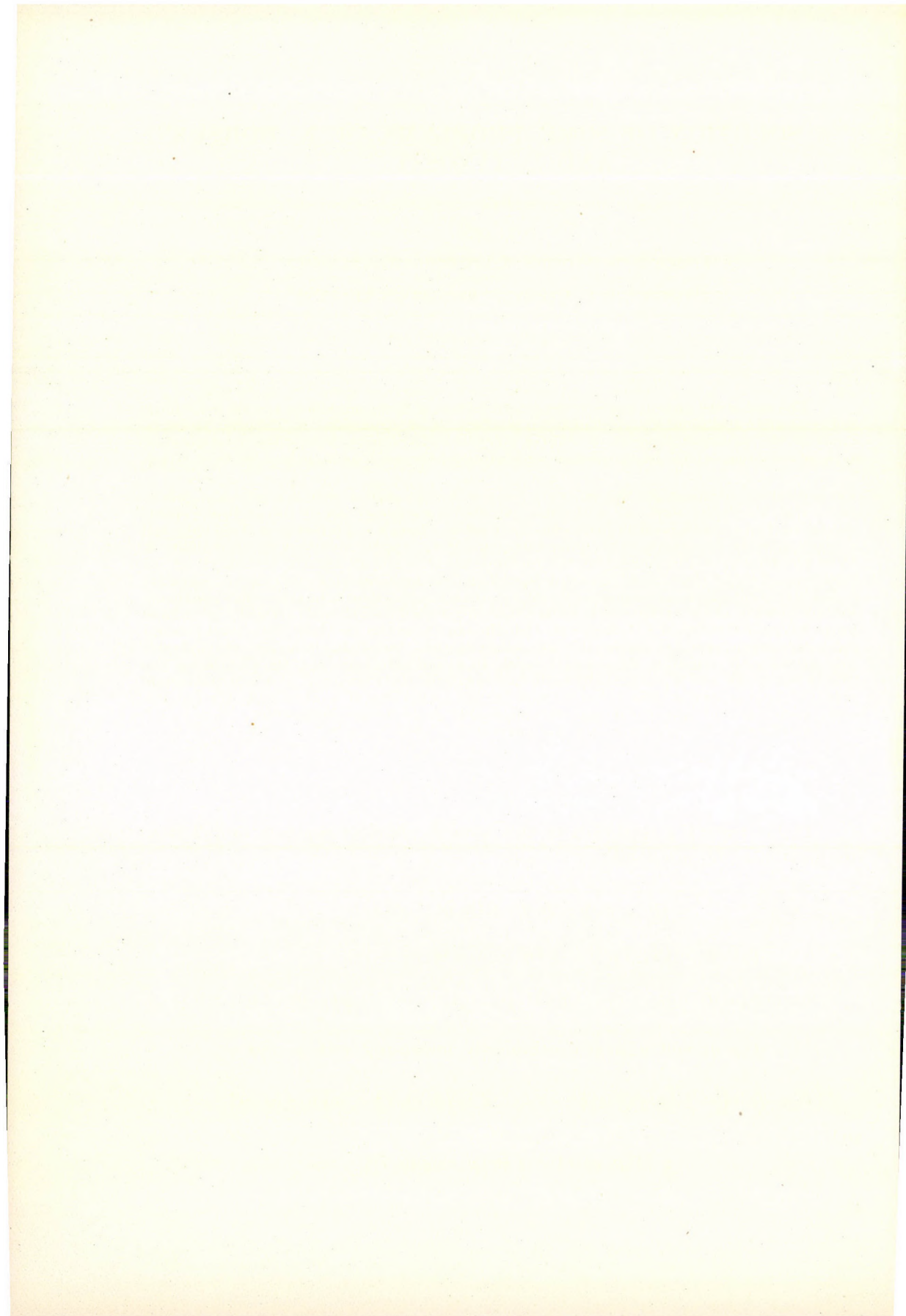
Л. ЯНСИ

Резюме

Аксиомы сложения и умножения теории вероятности были выведены из нескольких качественных предположений, связанных с независимыми и исключаящими друг друга событиями.

Покажем, что из этих предположений могут быть установлены обобщенные, до некоторой степени, теоремы сложения и умножения. Однако оказывается, что это обобщение соответствует лишь одной возможной деформации шкалы вероятностей, и таким образом, результаты, полученные на основе обобщенной схемы, не отличаются от результатов, полученных обычным путем. Далее, обычные теоремы сложения и умножения содержатся как специальные случаи более общих схем.





# A SOLUTION OF SOME PROBLEMS OF K. BORSUK AND L. JÁNOSY

By

J. ACZÉL

MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE UNIVERSITY, DEBRECEN

(Presented by L. Jánossy. — Received 29. XII. 1954)

The aim of the present paper is the determination of those continuous strictly monotonic and associative operations for which addition (problem of *A. Gruzewski—K. Borsuk*), multiplication or the quasimultiplication  $\psi^{-1} [\psi(x) \psi(y)]$  are distributive, further the determination of those operations which are distributive for addition or the quasi-addition  $\psi^{-1} [\psi(x) + \psi(y)]$ .

The respective operations are  ${}^a\log(a^x + a^y)$ ,  $\sqrt[k]{x^k + y^k}$ ,  $\psi^{-1} \left[ \sqrt[k]{\psi(x)^k + \psi(y)^k} \right]$ ,  $cxy$ ,  $\psi^{-1} [c\psi(x)\psi(y)]$ . From this we derive that the probability of the occurrence of one of two exclusive events resp. of both of two independent events has the form  $\psi^{-1} [\psi(p) + \psi(q)]$  resp.  $\psi^{-1} [\psi(p) \psi(q)]$  as was suggested by *Jánossy* in the preceding paper if we suppose only that the probability of (A or B) increases continuously with the probabilities of A and B, and the probability of the happening of one of three events does not depend on their arrangement, further the non-negative probability of the simultaneous occurrence of two events does not depend on their order and finally the probability of (A or B) and C equal that of (A and C) or (B and C). On the other hand by modifying a theorem of *S. Golab* we see that the same formulas are valid (the second even for not-independent events) if besides this last condition these probability functions are derivable (the second with respect to its second variable in a continuous manner) the first being also strictly monotonic and if the probability of A or the impossible event resp. of A and the certain event (without regard to their order) is equal to the probability of A, and finally the simultaneous occurrence of any event with the impossible event is also impossible.

Further similar statements are also proved.

## § 1

In his paper [7] appearing in this issue *L. Jánossy* suggests in § 9 that his postulates for probability :

$$0 \leq p, q, f(p, q), g(p, q) \leq M;$$

$$f(p, q) = f(q, p), \quad g(p, q) = g(q, p);$$

$$f(p, 0) = p, \quad g(M, p) = p, \quad g(p, 0) = 0;$$

$$f(p, q) \text{ and } g(p, q) \text{ continuously increasing with } p \text{ and } q$$

$$f[f(p, q), r] = f[p, f(q, r)] = \dots; \quad g[g(p, q), r] = g[p, g(q, r)] = \dots$$

and

$$g[f(p, q), r] = f[g(p, r), g(q, r)]$$



imply

$$f(p, q) = \psi^{-1} [\psi(p) + \psi(q)], \quad (1)$$

$$g(p, q) = \psi^{-1} [\psi(p) \cdot \psi(q)]. \quad (2)$$

( $f(p, q)$  resp.  $g(p, q)$  are the probabilities for the occurrence of one of two exclusive resp. of both of two independent events with the probabilities  $p$  and  $q$ .)

We will show that already a few of these properties are sufficient for the characterization of the functions (1) and (2). In §§ 3, 5 and 6 we prove three theorems containing three such systems of postulates. This will be facilitated by investigating the more direct questions, as to those operations which are distributive with respect to addition and those which are distributive with respect to multiplication. An analogous question in regard to operations with respect to which addition is distributive was raised by *A. Gruzewski* and *K. Borsuk* (oral communication of *K. Borsuk*). §§ 2, 4 and 6 contain the answers to these questions.

Our problems are related to those investigated by *M. Hosszu* in his paper on distributivity [6]. Here we will, however, (besides other special features) in theorems 1–5 at most suppose continuity, while *Hosszu* needs derivability for his solution. (Similar problems which are nearer to our special case, though also with conditions of derivability were treated by *S. Golab* [5], see § 6.)

## § 2

*A. Gruzewski* was interested in the question as to which operations  $F(x, y)$  can be called «pre-additions», in the sense that addition is distributive with respect to these operations :

$$F(x, y) + z = F(x + z, y + z). \quad (3)$$

In this sense every  $f(x, y) = x + \varphi(y - x)$  would do, or if we want also commutativity (symmetry) then  $f(x, y) = \frac{x + y}{2} + \varphi(|x - y|)$ . Thus the problem modified by *Borsuk* is to find all *associative* (continuous) operations satisfying (3) and ordering to real numbers of an interval real numbers of the same interval. It might be verified, that

$$F(x, y) = {}^a \log(a^x + a^y)$$

satisfies these conditions.

If  $F(x, y)$  is supposed to be increasing [2] or what is equivalent ([3], [10]) the cancellation law [ $F(x, t) \equiv F(x, u)$  resp.  $F(t, y) \equiv F(u, y)$  implies  $t = u$ ] holds, then the associativity

$$F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)] \quad (4)$$

implies the existence of a strictly monotonic and continuous function  $\varphi$  such that

$$F(x, y) = \varphi^{-1}[\varphi(x) + \varphi(y)]. \quad (5)$$

This function  $\varphi$  is determined but for a constant factor, that is

$$\varphi^{-1}[\varphi(x) + \varphi(y)] = \psi^{-1}[\psi(x) + \psi(y)] \quad (6)$$

if and only if

$$\psi(x) = a\varphi(x).$$

(See e. g. [1]). If we substitute (5) into (3), we have

$$\varphi^{-1}[\varphi(x) + \varphi(y)] = \varphi^{-1}[\psi(x+z) + \psi(y+z)] - z.$$

By keeping  $z$  constant we see that this is an equation of the form (6) with  $\psi(x) = \varphi(x+z)$  and thus

$$\varphi(x+z) = a(z)\varphi(x), \quad (7)$$

where together with  $\varphi(z)$  also  $a(z)$  is continuous. By putting  $x=0$ ,  $\varphi(0) = a$  we get [9]

$$\varphi(z) = a a(z)$$

$$a a(x+z) = a a(x) a(z), \quad a(x+z) = a(x) a(z)$$

and this is an equation of the Cauchy-type [4],

$$a(z) = a^z, \quad \varphi(z) = a a^z,$$

$$F(x, y) = \varphi^{-1}[\varphi(x) + \varphi(y)] = {}^a \log(a^x + a^y).$$

Thus we have the

*Theorem 1.* If  $F(x, y)$  is associative, continuous and increasing (resp. the cancellation law holds) and if the distributivity-equation (3) is satisfied then and only then

$$F(x, y) = {}^a \log(a^x + a^y).$$

An equivalent of this is the

*Theorem 2.* If  $F(x, y)$  is associative, continuous and increasing (resp. the cancellation law holds) and if multiplication is distributive with respect to this operation i. e.

$$F(x, y) z = F(xz, yz) \quad (8)$$

(homogeneity with exponent 1) then and only then

$$F(x, y) = \sqrt[k]{x^k + y^k}.$$



The problem to which this theorem gives an answer is yet more natural, as it asks for all operations with respect to which multiplication is distributive.  $k = 1$  gives of course the addition.

Theorem 2 can be reduced by logarithmisation to theorem 1, but because of the importance of this theorem for the problem of L. Jánossy we give a direct proof, this being of course a variant of the proof of theorem 1.

We have again from the associativity continuity and monotony

$$F(x, y) = \varphi^{-1} [\varphi(x) + \varphi(y)]$$

and from (8):

$$\varphi^{-1} [\varphi(x) + \varphi(y)] = \frac{\varphi^{-1} [\varphi(xz) + \varphi(yz)]}{z}$$

This is again an equation of type (6) with  $\psi(x) = \varphi(xz)$  and thus

$$\varphi(xz) = a(z) \varphi(x),$$

the solution of which can be reduced in the same way as (7) to another Cauchy-type equation

$$a(xz) = a(x) a(z).$$

So finally

$$\varphi(z) = az^k, F(x, y) = \sqrt[k]{x^k + y^k},$$

q. e. d.

### § 3

Theorem 2 helps us to find a first answer to Jánossy's problem:

*Theorem 3. If  $f(p, q)$  and  $g(p, r)$  are continuous, increasing and associative and  $g$  is distributive from the right with respect to  $f$ :*

$$g[f(p, q), r] = f[g(p, r), g(q, r)], \quad (9)$$

*then and only then there exists a continuous and strictly monotonic function  $\psi(p)$  such that*

$$f(p, q) = \psi^{-1} [\psi(p) + \psi(q)], \quad g(p, r) = \psi^{-1} [\psi(p) \psi(r)].$$

*If*

$$f(p, o) = p, \quad g(p, M) = p, \quad \text{then } \psi(o) = 0, \quad \psi(M) = 1.$$

*Proof:* Because of the assumptions for  $g$  it is

$$g(p, r) = \varphi^{-1} [\varphi(p) + \varphi(r)]$$

or with the notation  $\Phi(p) = e^{\varphi(p)}$

$$g(p, r) = \Phi^{-1} [\Phi(p) \cdot \Phi(r)]. \quad (10)$$

By substituting this in (9) we have

$$\Phi^{-1} \{ \Phi [f(p, q)] \cdot \Phi (r) \} = f \{ \Phi^{-1} [\Phi (p) \Phi (r)], \Phi^{-1} [\Phi (q) \Phi (r)] \}$$

or by introducing the notations

$x = \Phi (p)$ ,  $y = \Phi (q)$ ,  $z = \Phi (r)$ ,  $F(x, y) = \Phi \{ f [\Phi^{-1}(x), \Phi^{-1}(y)] \}$   
we get

$$F(x, y) z = F(xz, yz),$$

but this is equation (8). As  $F(x, y)$  together with  $f(p, q)$  is associative, increasing and continuous, theorem 2 gives

$$F(x, y) = \sqrt[k]{x^k + y^k},$$

that is

$$f(p, q) = \Phi^{-1} \{ F[\Phi(p), \Phi(q)] \} = \Phi^{-1} \left[ \sqrt[k]{\Phi(p)^k + \Phi(q)^k} \right]$$

or with  $\Phi(p)^k = \psi(p)$

$$f(p, q) = \psi^{-1} [\psi(p) + \psi(q)].$$

On the other hand (10) can be written

$$g(p, r) = \Phi^{-1} \left[ \sqrt[k]{\Phi(p)^k \Phi(r)^k} \right] = \psi^{-1} [\psi(p) \cdot \psi(r)].$$

q. e. d.

#### § 4

We obtain a stronger theorem by reversing the problem of theorem 2, that is by looking for operations which are distributive with respect to addition. These are ruled by

*Theorem 4. All functions  $G(x, z)$  non-negative in a positive interval (or monotonic or continuous or measurable or bounded from one side, etc.) which are distributive from the right with respect to addition:*

$$G(x + y, z) = G(x, z) + G(y, z) \quad (11)$$

are of the form

$$G(x, z) = c(z)x, \quad (12)$$

and if  $G(x, z)$  is also symmetric (commutative) at least for a  $z = a$ :  $G(x, a) = G(a, x)$  (or distributive with respect to addition also from the left) then and only then

$$G(x, z) = cxz.$$



The first statement is an evident consequence of the fact ([8]) that the most general non-negative (or monotonic etc.) solution of the Cauchy-equation

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

is

$$f(x) = cx.$$

On the other hand if  $G$  is also commutative for  $z = a$ , then (12) gives

$$c(x) a = G(x, a) = G(a, x) = c(a) x, \quad \frac{c(x)}{x} = \frac{c(a)}{a} = c \quad (\text{constant})$$

i. e.

$$G(x, z) = cxz,$$

q. e. d.

(If instead of commutativity, distributivity on the other side is supposed, then the same follows from

$$G(x, z) = c(z) x = d(x) z, \quad \frac{c(z)}{z} = \frac{d(x)}{x} = \text{constant.})$$

## § 5

Our second, somewhat stronger answer to Jánosy's problem is contained in the following

*Theorem 5.* If  $f(p, q)$  is continuous increasing and associative and  $g(p, r)$  is non-negative commutative [at least for one  $r$ , e. g.  $r = M$ :  $g(p, M) = g(M, p)$ ] and (9) distributive from the right with respect to  $f(p, q)$ , then and only then

$$f(p, q) = \psi^{-1} [\psi(p) + \psi(q)], \quad g(p, r) = \psi^{-1} [\psi(p) \cdot \psi(r)].$$

The commutativity of  $g$  can be replaced by the distributivity from the left side. -- Also here  $\psi(o) = 0$ ,  $\psi(M) = 1$ , [ $f(p, o) = p$ ,  $g(p, M) = p$ ].

*Proof:* The assumptions for  $f$  imply

$$f(p, q) = \varphi^{-1} [\varphi(p) + \varphi(q)]. \quad (5')$$

By substituting this into (9) we have

$$g\{\varphi^{-1} [\varphi(p) + \varphi(q)], r\} = \varphi^{-1} \{\varphi [g(p, r)] + \varphi [g(q, r)]\}$$

or with the notations

$$x = \varphi(p), y = \varphi(q), z = \varphi(r), \varphi \{g[\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(z)]\} = G(x, z):$$

$$G(x + y, z) = G(x, z) + G(y, z)$$

and thus from theorem 4 [as  $G(x, a) = G(a, x)$  for  $a = \varphi(M)$  from  $g(p, M) = g(M, p)$ ]:

$$G(x, z) = cxz,$$

$$g(p, r) = \varphi^{-1}[c\varphi(p)\varphi(r)] = \varphi^{-1}\left[\frac{c\varphi(p) \cdot c\varphi(r)}{c}\right]$$

or with  $\psi(p) = c\varphi(p)$

$$g(p, r) = \varphi^{-1}[\psi(p)\psi(r)].$$

At the same time (5') can be written also

$$f(p, q) = \varphi^{-1}\left[\frac{c\varphi(p) + c\varphi(q)}{c}\right] = \varphi^{-1}[\psi(p) + \psi(q)],$$

q. e. d.

Theorems 3 and 5 can be interpreted as follows: The probabilities of the occurrence of one of two exclusive events and of both of two independent events can be expressed by the probabilities  $p, q$  of the original events by formulas (1) and (2); and only if one of the following two systems of conditions is satisfied: A) These two composed probabilities are continuous and increasing with  $p$  and  $q$ , the probability of the happening of one of three exclusive events and of all the three independent events does not depend on how these events are arranged and finally the probability of the events  $A$  or  $B$  and the event  $C$  is equal to that of the events ( $A$  and  $C$ ) or ( $B$  and  $C$ ). Or B) the probability of ( $A$  or  $B$ ) increases continuously with the probabilities of  $A$  and  $B$  and the probability of the occurrence of one of three events does not depend on how they are arranged, further the probability of the simultaneous occurrence of two independent events is non-negative and does not depend on the order of the events (one of which might be the certain event) and finally again the probability of ( $A$  or  $B$ ) and  $C$  equals that of ( $A$  and  $C$ ) or ( $B$  and  $C$ ).

The second system of conditions might be preferred because it postulates less about the more difficult concept of independent events and can be modified, as we shall see in the next §, so that independence needs not to be postulated at all.

## § 6

We see that our theorems are all connected with the questions: which are the operations which are distributive with respect to addition or «quasi-addition» (1) or which are the operations with respect to which addition or



multiplication or the «quasi-multiplication» (2) is distributive. Our results can be condensed in the typical distributive pair

$$f(x, y) = \sqrt[k]{x^k + y^k}, \quad g(x, y) = cxy.$$

Our theorems are strongly connected. Not only theorems 1, 2, 3 are related to each other and similarly theorems 4 and 5 but also e. g. theorem 3 can be derived — as one sees immediately — also from theorem 4 instead of from theorem 2. Moreover theorem 1 (and similarly theorem 2) can also be proved in an analogous way as theorems 4 and 5 in the following manner:

$F(x, y)$  being continuous, increasing and associative we have again

$$F(x, y) = \varphi^{-1} [\varphi(x) + \varphi(y)]$$

and with help of (3)

$$\varphi^{-1} [\varphi(x) + \varphi(y)] + z = \varphi^{-1} [\varphi(x + z) + \varphi(y + z)]$$

or with the notations  $\xi = \varphi(x)$ ,  $\eta = \varphi(y)$ ,  $\zeta = \varphi(z)$ ,

$$G(\xi, \zeta) = \varphi [\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\zeta)] \text{ (commutative!)}$$

$$G(\xi + \eta, \zeta) = G(\xi, \zeta) + G(\eta, \zeta),$$

but this is equation (11) and so with theorem 4

$$G(\xi, \zeta) = c\xi\zeta = \frac{1}{c} e^{\ln c \xi + \ln c \zeta} = \varphi [\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\zeta)].$$

This is an equation of the type (6) and thus

$$\varphi^{-1}(\xi) = a \ln c \xi, \quad \varphi(x) = \frac{1}{c} e^{\frac{x}{a}} = \beta a^x$$

$$F(x, y) = {}^a \log (a^x + a^y),$$

q. e. d.

The proof of theorem 2 goes on the same lines.

A theorem which characterizes the solutions

$$f(p, q) = \psi^{-1} [\psi(p) + \psi(q)], \tag{1}$$

$$g(p, q) = \psi^{-1} [\psi(p) \psi(q)] \tag{2}$$

of

$$g [f(p, q), r] = f [g(p, r), g(q, r)] \tag{9}$$

without privileging either of them, but which supposes also derivability, was proved — as we have already mentioned — by S. Golab [5]. He proved that, if in (9)  $f$  and  $g$  are continuously derivable,

$$f(p, o) = f(o, p) = p, \quad g(M, p) = p, \quad g(o, p) = g(p, o) = 0$$

are satisfied and also  $\frac{\partial^2}{\partial p \partial q} g(p, o)$  exists and  $f(b, p) = c$  can be solved for  $p$  with every pair  $b, c$ , then  $f$  and  $g$  are of the form (1), (2). As for our purposes the last condition (the solvability of  $f(b, p) = c$ ) is not suitable (it would involve probabilities  $p < o$ ), we give here a variant of this theorem in which the remaining conditions are also a little alleviated. — The first part of the proof is identic with that of S. Golab [5].

*Theorem 6.* If  $f(p, q)$  is an increasing function of  $q$  and derivable in  $(o, o)$  and  $g(p, q)$  has in  $q = o$ , a derivative with respect to  $q$  which is continuous in  $p$  where

$$f(p, o) = f(o, p) = p, \tag{13}$$

$$g(M, p) = p, \tag{14}$$

$$g(p, o) = o, \tag{15}$$

then  $f$  and  $g$  are of the form (1), (2) with  $\psi(o) = 0, \psi(M) = 1$ .

*Proof:* From the derivability conditions supposed and taking also (15) into account we can derive (9) with respect to  $r$  in  $r = 0$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial p} f(p, q) = f_1(p, q), \frac{\partial}{\partial q} f(p, q) = f_2(p, q), \frac{\partial}{\partial q} g(p, q) = g_2(p, q) \right]:$$

$$g_2[f(p, q), o] = f_1(o, o) g_2(p, o) + f_2(o, o) g_2(q, o).$$

But from (13) and the derivability of  $f$  in  $(o, o)$

$$f_1(o, o) = f_2(o, o) = 1$$

follows and thus by defining

$$\psi(p) = g_2(p, o),$$

we have

$$\psi[f(p, q)] = \psi(p) + \psi(q). \tag{16}$$

The function  $\psi(p) = g_2(p, o)$  is, with our conditions, continuous. We will show that it is also strictly monotonic and thus prove (1). If there were a pair  $p_I < p_{II}$  such that  $\psi(p_I) = \psi(p_{II})$  then by the continuity of  $\psi(p)$  there would be also pairs  $p_1 < p_2$  arbitrarily near to each other such that



$$\psi(p_1) = \psi(p_2).$$

But then from (16) also

$$\psi[f(p_1, q)] = \psi[f(p_2, q)].$$

If we let  $q$  take all values  $q > o$  we see that after  $p_2 = f(p_2, o)$  the behaviour of  $\psi(p)$  after  $p_1 = f(p_1, o)$  must repeat (possibly in a distorted way). As  $p_1$  and  $p_2$  are arbitrarily near to each other this is only possible if  $\psi(p)$  is constant and according to (16) this constant must be 0. — But  $g_2(p, o) = 0$  is in contradiction with

$$g_2(M, o) = 1,$$

which follows from (14). Thus  $\psi(p)$  is (continuous and) strictly monotonic and thus from (16) the assertion (1) follows.

We have also

$$\psi(M) = g_2(M, o) = 1. \quad (17)$$

Substituting (1) into (9) we can proceed as in theorems 4 and 5:

$$\begin{aligned} g\{\psi^{-1}[\psi(p) + \psi(q)], r\} &= \psi^{-1}\{g[\psi(p, r)], g[\psi(q, r)]\}, \\ \psi(p) = x, \psi(q) = y, \quad \psi\{g[\psi^{-1}(x), r]\} &= G(x, r), \\ G(x + y, r) &= G(x, r) + G(y, r) \text{ (Cauchy [4])}, \quad G(x, r) = c(r)x, \\ g(p, r) &= \psi^{-1}[c(r)\psi(p)]. \end{aligned} \quad (18)$$

If we substitute  $p = M$  in this equation, we have from (14) and (17)

$$r = \psi^{-1}[c(r)], \quad c(r) = \psi(r)$$

and thus (18) becomes

$$g(p, r) = \psi^{-1}[\psi(p)\psi(r)], \quad (2)$$

q. e. d.

The derivability conditions present here a rather strong restriction. They exclude e. g.  $f(x, y) = \sqrt[k]{x^k + y^k}$ , ( $k \neq 1$ ). Moreover the example  $f(x, y) = x + y + \sqrt{xy}$ ,  $g(x, y) = xy$  shows that if instead of derivability only increasing continuity is supposed but (13), (14), (15) are satisfied (even from both sides) moreover  $f$  and  $g$  are commutative and  $g$  even of the form (2),  $f$  must not be of the form (1). On the other hand this theorem is in a certain sense a complementary of theorems 3 and 5, as here neither commutativity nor associativity are assumed and instead of them the existence of unity- and zero-elements (i. e. the other half of Jánossy's system of axioms) is postulated.

If we suppose also  $g(p, M) = p$ . then

$$g [f, (p, q), r] = h [g (p, r), g (q, r)]$$

can be reduced immediately to (9) by putting  $r = M$ .

The probability interpretation of this result states that the probabilities  $f(p, q)$  resp.  $g(p, q)$  of the occurrence of two exclusive events resp. the simultaneous occurrence of two events can be expressed by the formulas (1), (2) from the probabilities  $q$  and  $p$  of the original exclusive events resp. of the probability  $q$  of the first event and the probability  $p$  of the second under the supposition that the first has happened, — if the probability-function  $f(p, q)$  is increasing with  $q$  and derivable in  $(o, o)$  ( $o$  is the probability of the impossible event) and  $g(p, q)$  has in  $q = o$  a derivative with respect to  $q$  which is continuous in  $p$  and if the probability of the impossible event or an other event  $A$  resp. of the certain event and  $A$  (without regard to their order), is equal to the probability of  $A$ , further if the simultaneous occurrence of any event with the impossible event is also impossible and if finally the probability of ( $A$  or  $B$ ) and  $C$  equals to that of ( $A$  and  $C$ ) or ( $B$  and  $C$ ).

We see that here the independence of the two events which occur simultaneously must not be supposed, because neither commutativity, nor distributivity from both sides was supposed. — Thus besides

$$\psi [\text{prob } (A \text{ or } B)] = \psi [\text{prob } A] + \psi [\text{prob } B]$$

also

$$\psi [\text{prob } (A \text{ and } B)] = \psi [\text{prob } B] \cdot \psi [(\text{prob } A) \text{ under the condition } B]$$

holds. Theorem 5 shows that analogously the same result follows if instead of the derivability-conditions and the statements on impossible events above,  $g$  is supposed to be non-negative and  $f$  continuous increasing and associative (the probability of the occurrence of one of three events does not depend on their arrangement).

*Note added in proof:* *A. Rényi* has kindly called my attention to a remark in a work of *I. J. Good* (Probability and the weighing of evidence, London 1950, Appendix III., pp. 105—106.), which shows that the author was acquainted with the theorems 2,3 of the present paper. I wish to seize the opportunity to point out that in contrast to the statement of *I. J. Good* my paper[2] does not »rediscover» a result of *N. H. Abel*. The difference is that *Abel* has supposed symmetry and derivability while in the paper[2] these assumptions are not made, instead of them we suppose only continuity. — We make here another remark too: Our considerations at the end of § 6. can be applied also to the system of conditional probabilities introduced by *A. Rényi* (Valószínűségszámítás, Budapest, 1954., 3. függelék, 667—672.). This causes no new difficulties, so we leave the details to the reader.



## REFERENCES

1. J. Aczél, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **21**, 247, 1948.
2. J. Aczél, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **76**, 59, 1948.
3. J. Aczél, Lösung der Vektor-Funktionalgleichung der homogenen und inhomogenen einparametrischen «Translation», der erzeugenden Funktion von Kettenreaktionen und der stationären und nicht-stationären Bewegungsintegrale, *Acta Math. Hung.* (to be published.)
4. A. L. Cauchy, *Analyse algébrique, Oeuvres* (2) **3**, 98—113, Paris, 1897.
5. S. Golab, Przyczynek do algebry dzialan w ciele liczb rzeczywistych, *Wyzsza szkola pedagogiczna w Krakowie, Rocznik naukowo dydaktyczny, Zeszyt 1, Matematyka*, 3—10, Krakow, 1954.
6. M. Hosszu, On the functional equation of distributivity, *Acta Math. Hung.*, **4**, 159, 1953.
7. L. Jánossy, Remarks on the foundation of probability-calculus, *Acta Phys. Hung.* **4**, 333, 1955.
8. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, **30**, 175, 1906; esp. p. 189.
9. H. W. Pexider, Notiz über Funktionaltheoreme, *Monatsh. f. Math. u. Phys.*, **14**, 293, 1903.
10. D. Tamari, Caractérisation des semi-groupes à un paramètre, *Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. Paris*, **228**, 1092, 1949.

## РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМ К. БОРШУКА и Л. ЯНОШИ

Я. АЦЕЛЬ

Резюме

В работе было исследовано какие непрерывные, строго монотонные, ассоциативные действия существуют, относительно которых сложение (проблема А. Грузевского — К. Боршука), умножение или квазиумножение  $\psi^{-1}[\psi(x)\psi(y)]$  являются дистрибутивными или которые дистрибутивны относительно сложения или квазисложения  $\psi^{-1}[\psi(x) + \psi(y)]$

Эти действия соответственно :

$$a \log (a^x + a^y), \sqrt[k]{x^k + y^k}, \psi^{-1} \left[ \sqrt[k]{\psi(x)^k + \psi(y)^k} \right], cxy, \psi^{-1} [c\psi(x)\psi(y)].$$

Отсюда следует, что можно получить правило сложения или умножения вероятностей в форме по Яноши  $\psi^{-1}[\psi(x) + \psi(y)]$ ;  $\psi^{-1}[\psi(x)\psi(y)]$  предполагая из его условий лишь некоторые, а именно: сумма вероятностей непрерывно возрастает со слагаемыми вероятностями, сумма вероятностей трех событий не зависит от их группировки, произведение вероятностей двух событий положительно и не зависит от их последовательности, и, наконец, вероятность (А либо В) и С равняется вероятности (А и С) либо (В и С). С другой стороны с помощью преобразования одной теоремы С. Голаба получим, что эти же формулы справедливы и в том случае, если кроме последнего условия предположим еще следующее:

Функции, полученные умножением или сложением вероятностей, являются дифференцируемыми (в случае умножения — непрерывно по второй переменной); сумма вероятностей — возрастающая; далее, что сумма вероятностей некоторого события А и некоторого невозможного события имеет такое же значение, как и произведение события А на некоторое достоверное событие (в любой последовательности), причем они равны вероятности события А; и наконец, совместное осуществление любого события с невозможным событием тоже невозможно. При этой последней теореме в случае произведения вероятностей не обязательно ограничиваться независимыми событиями. Доказываются дальнейшие подобные теоремы.



# THE EFFICIENCY OF SELF-QUENCHING G. M.- COUNTERS FOR COSMIC RAY PARTICLES

By

E. FENYVES

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS, DEPARTMENT FOR COSMIC RAYS, BUDAPEST

(Presented by L. Jánosy. — Received 10. XII. 1954)

The efficiency of G. M.-counters for cosmic ray particles obtained experimentally was previously found to be smaller than the value expected theoretically. It is shown here that this discrepancy is due to the method employed in the determination of the efficiency. Using dead-time shortening circuits and an apparatus which is sensitive only to the penetrating component of cosmic rays, the efficiency of self-quenching G. M.-counters is found to be greater than 99,9% in good agreement with the value expected theoretically.

## Introduction

The efficiency of G. M.-counters for cosmic ray particles is of great importance in the investigations of cosmic rays carried out with counters. The efficiency of G. M.-counters commonly used for cosmic ray work is nearly 100% but can never reach this value.

The error caused by the inefficiency of G. M.-counters must generally be taken into account in all experiments, although in many cases it can be neglected compared to other experimental errors. Since the efficiencies of the individual counters connected in coincidence are almost independent, the efficiency of the coincidence arrangement is given by the product of the efficiencies of all coincidence counters or counter trays. If the multiplicity of the coincidence arrangement is great this error may be very significant.

Knowledge of the counter efficiency and the use of G. M.-counters of great efficiency is especially important in measurements of non-ionizing particles with anticoincidence arrangements, particularly if the intensity of the non-ionizing component is relatively small compared to that of the ionizing component.

The use of G. M.-counters of great efficiency is not only important in view of a decrease in the size of the corrections in coincidence and anticoincidence measurements and a reduction of background effects, but also so as to decrease the systematic fluctuation of the measurements.

The accuracy of cosmic ray measurements is determined by two parameters: The statistical fluctuations of cosmic rays and the systematic fluctuations of the measured values due either to defects of the electronic apparatus or to the variations of the efficiencies of G. M.-counters.



Measurements of very small effects can be carried out only if the systematic variations are smaller by an order of magnitude than the effect to be measured. Variations due to the electronics can be eliminated only by using an apparatus planned and executed with special care. More difficult is the problem concerning the efficiency of G. M.-counters.

The efficiency of G. M.-counters depends on many parameters and its value changes e. g. with the variation of the counter voltage, of the rate of discharges etc. It must be emphasized that in most cases those parameters vary which may cause inefficiency of the counters and thus we have to speak rather about the variations of the inefficiency. If we can strongly increase the efficiency of counters, i. e. strongly reduce the inefficiency, the fluctuations of this relatively small inefficiency will be smaller, and thus the systematic error of the measurements will be smaller and the limit for the smallest measurable variation will also be lowered. For instance, if we can decrease the inefficiency by one order of magnitude we can measure cosmic ray effects smaller also by one order of magnitude than those measured before.

It can be seen clearly from the above considerations that it is important to know exactly the efficiency of G. M.-counters and to develop such counters and circuits that secure great counter efficiencies.

Measurements carried out with great accuracy to determine the efficiency of G. M.-counters [1], [2], [3], [4] gave a value for the efficiency significantly smaller than the value expected theoretically. The aim of our investigations was to solve the problem of this discrepancy and to determine the real efficiency of G. M.-counters.

### The causes of the inefficiency of G. M.-counters

Let us consider the causes of the inefficiency of counters. Counters commonly used — filled with rare gases and organic vapours — give a discharge whenever at least one ion pair is formed in their sensitive volume and during their sensitive time [5]. A particle traversing the sensitive volume of a counter does thus not cause a discharge in the following two cases: 1. The particle does not produce any ion pairs in the gas, 2. The particle traverses the counter during the dead time of the counter.

Let us consider the probability for an ionizing cosmic ray particle traversing the counter not to produce any ion pairs. This probability may be calculated from the value of the primary specific ionization.

Let  $l$  be the length of the path of the particle in the gas,  $\rho$  the density of the gas and  $j_p$  the primary specific ionization. The distribution of the ionizing collisions is a Poisson distribution and therefore the probability that the particle traverses the path of length  $l$  in the gas without producing any ion pairs is

$$w = e^{-j_p \rho l}$$

and thus the probability that the particle produces at least one ion pair is

$$1 - w = 1 - e^{-j_p \rho l},$$

If the rate of discharge is small enough so that the dead time of the G. M.-counter can be neglected,  $1-w$  is just equal to  $p$ , the efficiency of the counter

$$p = 1 - w = 1 - e^{-j_p \rho l}.$$

The different particles have different path lengths in the counter and therefore the probability for them to cause a discharge in the counter varies accordingly. Thus particles traversing the very edge of the counter travel a shorter way in the gas and therefore the probability for them to cause a discharge in the counter will be significantly smaller than for particles traversing the middle part of the counter. We can get the effective efficiency of the counter by computing the integral mean value of the different efficiencies.

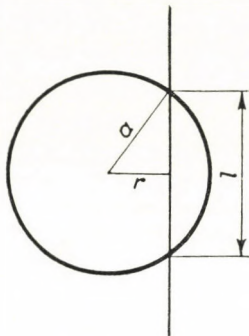


Fig. 1. The length of the path of the particle in the counter

Let  $a$  be the radius of the G. M.-counter and  $r$  the shortest distance between the path of the traversing particle and the wire of the counter, then the projection of the path in a plane perpendicular to the counter axis has the length (Fig. 1)

$$l = 2(a^2 - r^2)^{1/2},$$

which is smaller than or at most equal to the real path length.

Let us consider this projection in first approximation as the length of path in the counter. In this case the probability for the particle to cause a discharge of the counter (i. e. the efficiency of the counter) is according to (1)

$$p_r = 1 - e^{-2j_p \rho (a^2 - r^2)^{1/2}}.$$

This expression gives only the lower limit of the real efficiency, because  $2(a^2 - r^2)^{1/2}$ , the projection, is also only a lower limit of the real path length.



Integrating this expression from 0 to  $a$  and dividing by  $a$ , we get the lower limit of the effective efficiency of the counter for isotropic radiation :

$$p_{eff} > 1 - \frac{1}{a} \int_0^a e^{-2j_p \rho (a^2 - r^2)^{1/2}} dr. \quad (2)$$

If for reasons of the geometry of the arrangement we need consider only particles passing through the counter inside a certain distance  $r_1$  from the wire, i. e. if we exclude particles passing the edge of the counter, we have to extend the integration only to  $r_1$

$$p_{eff} > 1 - \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} e^{-2j_p \rho (a^2 - r^2)^{1/2}} dr. \quad (2a)$$

In this case the effective efficiency will be increased in consequence of the exclusion of particles traversing the edge of the counter. Integrals (2) and (2a) may be evaluated approximately by numerical quadrature. Under given geometrical conditions we may have to consider also the anisotropy of the particles.

It can be shown easily by help of expression (2a) that with appropriate choice of the geometrical conditions using G. M.-counters of customary filling and neglecting dead-time effects it is possible theoretically in all cases to get efficiencies greater than 99,9%.

The other reason for counter inefficiency may be that an ionizing cosmic ray particle passes through the counter during dead time. The dead time of counters normally used is of the order of  $10^{-4}$  sec. The probability that a particle should not pass through the counter during the dead time following on the discharge of the counter i. e. the probability that the counter responds to the particle is, as cosmic ray particles are distributed according to a Poisson law,

$$w' = e^{-N\tau},$$

where  $\tau$  is the dead time of the counter and  $N$  the rate of discharge. If  $N\tau \ll 1$  which is generally the case in all cosmic ray experiments, then

$$w' = e^{-N\tau} \cong 1 - N\tau.$$

Therefore the efficiency of the counter taking into consideration only the dead-time effect is given by

$$p = 1 - N\tau. \quad (3)$$

The dead-time effect may often be very significant. The discharge rate of counters of 80 cm length used in our experiments was 20/sec and the dead time was  $2 \cdot 10^{-4}$  sec and therefore

$$p = 1 - N\tau = 0,996,$$

i. e., the efficiency is decreased to 99,6% in consequence of the dead time effect.

The inefficiency due to the dead time may be decreased by using electronic dead time shortening circuits.

The simplest method for shortening the dead time of counters is to use multivibrators that reduce very rapidly the voltage of the counter below the threshold voltage directly the discharge has started and thus prevent the spread of the discharge through the whole tube [6], [7], [8].

If the multivibrator reduces the dead time by one order of magnitude, i. e. if the dead time is  $\tau = 2 \cdot 10^{-5}$  sec, then in the case of counters of 80 cm length the efficiency will be greater than 99,9%, namely

$$p = 1 - N\tau = 0,9996.$$

To sum up, we can say that by proper choice of the geometrical conditions and by the help of suitable dead time shortening circuits, it is theoretically possible to construct sets of G. M.-counters having efficiencies greater than 99,9%.

#### Method for measuring the efficiency of counters

An exact method for measuring the efficiency of counters was developed by *Jánossy* and *Rochester* [1] and later by *Jánossy* and *Kiss*. [2, 3]. The principle of the method is as follows (Fig. 2). The counters 1, 2 and 3 are connected in coincidence and the counter X the efficiency of which is to be measured is in



Fig. 2. The principle of the method for measuring the efficiency of counters



anticoincidence. The apparatus measures the number of coincidences (1, 2, 3) and of anticoincidences (1, 2, 3, - X) simultaneously.

The coincidences (1, 2, 3) are in general produced by particles traversing all the three coincidence counters and therefore passing also through the counter to be measured. Thus the number of anticoincidences (1, 2, 3, - X) immediately shows those events in which the counter to be measured fails to respond; the ratio of the rate of anticoincidences (1, 2, 3, - X) and of coincidences (1, 2, 3) represents the inefficiency of the counter. Therefore the efficiency of the counter is given by

$$p = 1 - \frac{(1, 2, 3, - X)}{(1, 2, 3)} . \quad (4)$$

However, coincidences (1, 2, 3) are not only produced by particles traversing the three coincidence counters as well as counter X. There are effects in which particles pass through counters 1, 2 and 3 without traversing counter X. These effects increase the rate of anticoincidences (1, 2, 3, - X) and therefore cause the measured value of the efficiency to be smaller than the real one. Among such effects side showers are of the greatest importance (Fig. 3).

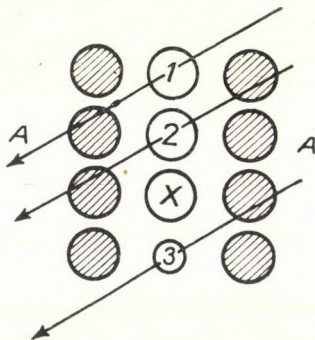


Fig. 3. Anticoincidence counters for eliminating side showers

For the elimination of the disturbing effects due to side showers Jánossy and Rochester, and later Jánossy and Kiss used side counters connected in anticoincidence. Counters A in Fig. 3 are connected in anticoincidence, thus the value of the efficiency in the actual arrangement is given by the following expression

$$p = 1 - \frac{(1, 2, 3, - A, - X)}{(1, 2, 3, - A)} . \quad (5)$$

By the help of this method the efficiency of G. M. counters has been found in most cases to be 99,3%, although in the case of a few very good counters the

efficiency reached a value of 99,6%. The efficiency measured was thus significantly smaller than expected theoretically.

The probable reason for this discrepancy may be the occurrence — apart from side showers — of other processes producing also anticoincidences (1, 2, 3, — X). Processes of this kind may be :

1. The scattering of particles,
2. Showers containing electrons as well as photons.

Particles scattered in the frame holding the apparatus or in the counter walls may cause discharges in the coincidence counters 1, 2 and 3 without passing through counter X (Fig. 4.). The scattering of penetrating particles, i. e. mesons, is in general negligible [4] but the scattering of soft particles, i. e. electrons may be significant.

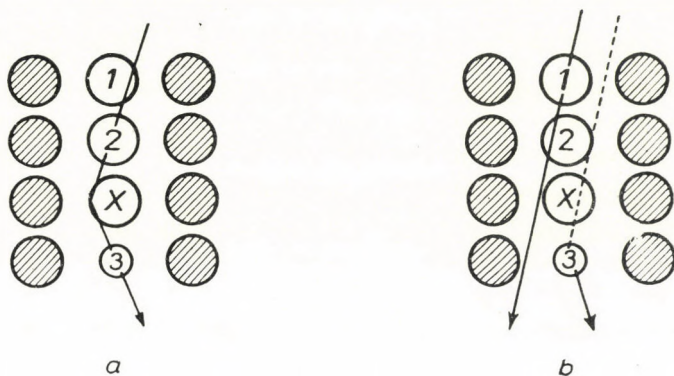


Fig. 4. Effects causing the decrease of the measured value of the counter efficiency : a) The scattering of particles, b) Showers containing electrons as well as photons

Showers coming from above containing electrons as well as photons can produce anticoincidences (1, 2, 3, — X) if an electron of the shower causes discharges in counters 1 and 2 and at the same time a photon of the shower produces in the lower wall of the counter to be measured or in the wall of counter 3 an electron which initiates a discharge in counter 3 (Fig. 4/b). The probability that a high-energy photon produces an electron in the case of copper counter walls of 1 mm thickness is, roughly estimated, about 10%.

Our interpretation of the discrepancy between the efficiency measured by Jánossy and Kiss and the efficiency expected theoretically is thus that the arrangement employed was not suitable for the exclusion of the above two effects.

### Preliminary experiments

The fact that the comparatively great inefficiency found with the arrangement employed by Jánossy and Kiss was not a consequence of the real inefficiency of the counters measured but rather due to the imperfectness of the measu-



ring method, can be proved by using a counter unit of «100%» efficiency in the place of the counter to be measured. This counter unit of «100%» efficiency consists of two G. M.-counters connected in parallel (Fig. 5).

Both counters have an efficiency greater than 99% and therefore the two counters connected in parallel have an efficiency of practically 100%. The efficiency of this unit was found with the arrangement employed by Jánossy and Kiss to be  $(99,54 \pm 0,03\%)$  i. e. approximately the efficiency found for the best single counters. Our experiment showed beyond doubt the imperfectness of the measuring method.

The elimination of scattered particles and showers containing photons may be attained in a simple way as follows. Since the strongly scattered particles

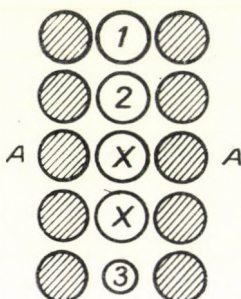


Fig. 5. Arrangement for measuring the efficiency of two counters connected in parallel

are electrons and the showers containing photons are closely connected with the soft component of cosmic rays containing the electrons, the two disturbing effects may be eliminated in one step by screening out the soft component of cosmic rays. Thus the measurements have to be carried out only with the penetrating component, i. e. with mesons.

The elimination of the soft component may be achieved simply by means of Pb absorbers placed between the G. M.-counters. The arrangement used is shown in Fig. 6. This arrangement was at first also checked with a counter unit consisting of two counters connected in parallel.

The efficiency of this unit was found to be  $(99,97 \pm 0,01\%)$  in good agreement with the value expected. Thus it was shown that this arrangement was suitable for the exact determination of the efficiency of counters.

### Experiments and results

We carried out our measurements with the apparatus sketched in Fig. 6. The 10 cm Pb absorber was placed between the counters for the purpose of screening out the soft component. The counters 3 were connected in parallel thus increasing the solid angle of the arrangement.

The counters used in the apparatus and those to be measured had copper cathodes and tungsten wires of 0,1 mm thickness and were filled with argon of 90 mm Hg and alcohol of 10 mm Hg. The diameter of the counters was 4 cm and their length 80 cm.

The anticoincidence arrangement was the same as that used by Jánossy and Kiss [2] the only difference being that the pulse shaping circuit connected to the counter to be measured was a special dead-time shortening circuit (s. c.\*). The block diagram of the whole apparatus is shown in Fig. 6.

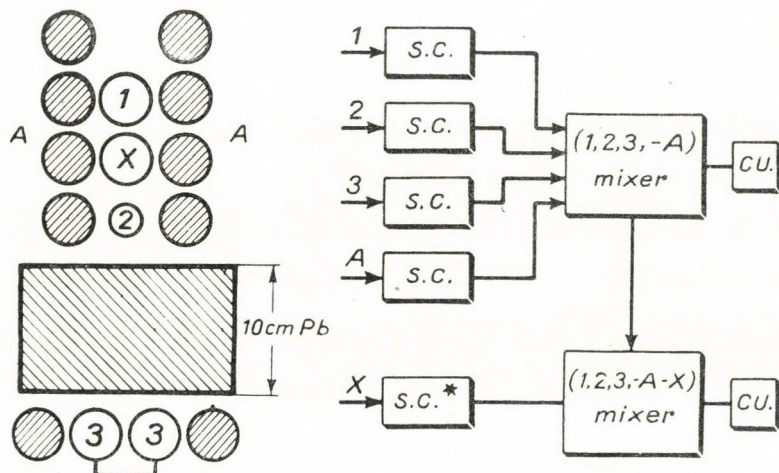


Fig. 6. Arrangement for measuring the efficiency of counters and the block diagram of the anticoincidence circuit. s. c. = shaping circuit, s. c.\* = special shaping circuit for dead-time shortening, c. u. = counter unit

The resolving time of the coincidence arrangement was  $2 \mu\text{sec}$ . The dead-time shortening circuit reduced the dead time of the counter to  $30 \mu\text{sec}$ , and its output pulse was  $10 \mu\text{sec}$  wide. During these  $10 \mu\text{sec}$ -s the anticoincidence circuit was cut off for incoming coincidence impulses. Therefore calculating the dead-time effect we need consider only  $\tau = 20 \mu\text{sec}$ , i. e. the part of the dead-time beginning after the output pulse.

In the case of G. M.-counters of 80 cm length and a rate of discharge of 20/sec the efficiency is, taking into account only the dead-time effect, according to (3)

$$p = 0,9996,$$

i. e. the efficiency is 99,96%.

The counters to be measured were placed between two counters of diameters 4 cm and 3,5 cm resp. With the geometry defined by these two counters the lower limit of the effective efficiency of the counter to be measured, taking into account only the ionization effect, was according to (2a)



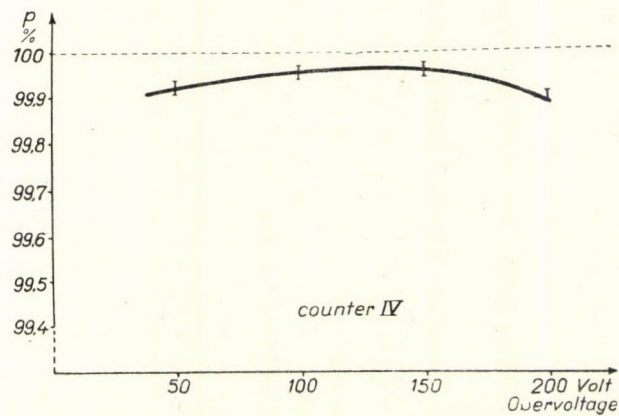
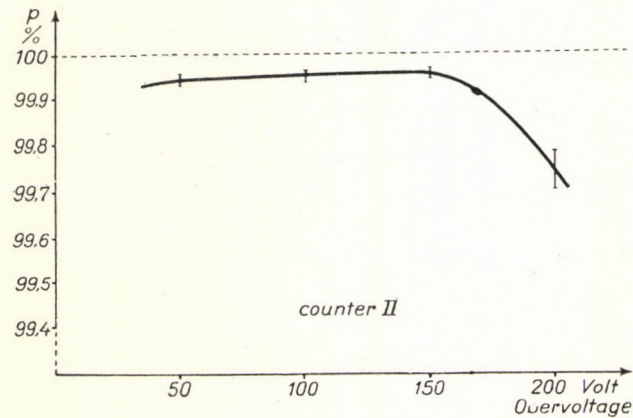
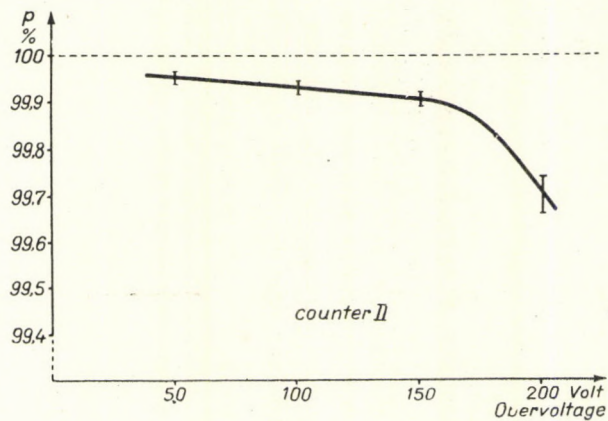
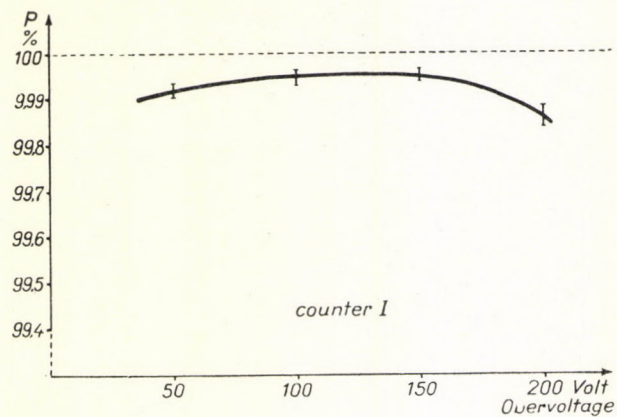


Fig. 7. The efficiencies of four counters as functions of the overvoltages

$$p_{eff} > 0,9999,$$

i. e. greater than 99,99%.

Thus under the conditions described above we expect theoretically the efficiency of G. M.-counters to be about 99,95%.

We measured the efficiency of 28 G. M.-counters at overvoltages of 50, 100, 150 and 200 V and plotted the efficiency as a function of the overvoltage.

The mean value of the efficiency of 19 G. M.-counters out of the 28 measured was about 99,9% in contrast to the value of 99,3% found by Jánosy and Kiss. These 19 G. M.-counters were qualified as «good» counters and the efficiency of 4 of these «good» counters was determined very exactly. (Table I, Fig. 7).

TABLE I

Overvoltage	50V	100V	150V	200V
Efficiency %				
Counter I .....	99,92 ± 0,01	99,94 ± 0,01	99,95 ± 0,01	99,86 ± 0,02
Counter II .....	99,94 ± 0,01	99,94 ± 0,01	99,95 ± 0,01	99,74 ± 0,04
Counter III .....	99,96 ± 0,01	99,94 ± 0,01	99,92 ± 0,01	99,71 ± 0,04
Counter IV .....	99,93 ± 0,01	99,95 ± 0,01	99,95 ± 0,01	99,88 ± 0,02

It is clear from the Table and the graphs, that the efficiency of each counter is significantly greater than 99,9% at one or more values of overvoltages, and the maximum values of their efficiencies are close to 99,95%, the value theoretically expected. By the term «significantly greater than 99,9%» we mean that considering even a fluctuation as great as three times the standard error, the efficiency will be greater than 99,9%.

As a result of our measurements we can state that using dead-time shortening circuits the efficiency of self-quenching counters for ionizing cosmic ray particles is greater than 99,9%. This result is in good agreement with the efficiency evaluated theoretically.

I am indebted to Prof. *L. Jánosy* who raised the problem and helped my work with valuable discussions. My thanks are due to *G. Bozóki* who helped to build the apparatus. I am also indebted to him and to *Erika Halmos* for their assistance in the course of the measurements.



## REFERENCES

1. *L. Jánossy and G. D. Rochester*, Phys. Rev., **63**, 52, 1943.
2. *L. Jánossy and D. Kiss*, KFKI Közlemények, **1**, 36, 1953.
3. *L. Jánossy and D. Kiss*, Acta Phys., Hung. **4**, 173, 1954.
4. *K. Greisen and N. Nereson*, Phys. Rev., **62**, 316, 1942.
5. *W. E. Danforth and W. E. Ramsey*, Phys. Rev., **49**, 854, 1936.
6. *H. Elliot*, Proc. Phys. Soc. (A), **62**, 369, 1949.
7. *B. Collinge*, Proc. Phys. Soc. (B), **63**, 15, 1950.
8. *E. Fenyves and O. Haiman*, MTA III. Osztály Közleményei **2**, 351, 1952.

ВЕРОЯТНОСТЬ СРАБАТЫВАНИЯ САМОГАСАЮЩИХСЯ СЧЕТЧИКОВ Г.—М.  
ДЛЯ ЧАСТИЦ КОСМИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Э. ФЕНЬВЕШ

## Резюме

Величина вероятности срабатывания самогасающих счетчиков Гейгера—Моллера для частиц космического излучения на основе произведенных до сих пор измерений оказалась меньше, чем ожидаемое значение, вытекающее из теоретических рассуждений. Можно показать, что это расхождение является следствием примененного метода измерений. Если при измерении применять схему, укорачивающую мертвое время счетчиков Г.—М., и вести измерение вероятности срабатывания только проходящим компонентом космического излучения, то вероятность срабатывания самогасающих счетчиков Гейгера—Моллера будет больше, чем 99,9%, что хорошо совпадает с теоретически ожидаемым значением.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
BRIEF REPORTS  
KURZE MITTEILUNGEN





# ON SOME PROBLEMS OF THE OPERATION OF MICROTRONS

By

ÉVA KISDI-KOSZÓ

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS, BUDAPEST

(Received 18. XI. 1954)

A microtron operates in the following manner. A microwave resonant cavity is placed near the edge of a steady, uniform magnetic field, with its axis of symmetry perpendicular to the direction of the magnetic field. The resonator is excited so that the peak voltage across the lips is slightly larger than the voltage corresponding to the rest mass of the electron (about 0,511 MeV). Electrons are emitted from one of the lips by field emission and those which cross the gap at the appropriate phase of the electric field emerge from the cavity with a total energy of two rest masses. The values of the magnetic field and the operating frequency of the cavity are adjusted so that such electrons require a time corresponding to two cycles of the radio-frequency field to complete their first orbit. They will then make the next transit of the cavity at the correct phase for each electron to gain one additional rest mass of energy. Since the time needed for an electron to complete an orbit is proportional to its total energy, the corresponding time interval is now three cycles of the radiofrequency field. Thus the electrons under consideration once more arrive at the cavity at the appropriate phase for each to receive again one rest mass of energy; etc.

The most important characteristics of an accelerator are the final energy, the energy spread and the intensity of the accelerated beam. The final energy in a microtron [1], [2], can be easily calculated in terms of the diameter of the magnet by using the resonance conditions for accelerating voltage and magnetic field:

$$V_r = \frac{m_0 c^2 + E_0}{e} \frac{n}{l - n},$$
$$B_r = \frac{2\pi (m_0 c^2 + E_0)}{ec} \frac{1}{l - n},$$

where  $l > n$ ,  $l$  and  $n$  are arbitrary integers,  $E_0$  is the kinetic energy of the electron at start,  $B_r$  the magnetic flux density, and  $\lambda$  the wave-length.

The energy spread and the current intensity can be obtained only by a detailed examination of the motion of electrons. Such studies have been carried



out by *Schmelzer* [3] and *Henderson et al.* [4], who determined by a graphical method a phase region with the following features: electrons starting within this phase interval are being accelerated each time they traverse the r.-f. field and never encounter a decelerating field so that they can travel indefinitely in their orbit. The phase region thus determined is narrower than necessary from a practical point of view. On the one hand electrons reach their final energy and leave the accelerator after a relatively small number of turns and on the other hand it is also possible that electrons become well phased by losing energy on one occasion and that they will thus be accelerated to the desired energy. Therefore the only possible way to approach the problem of energy spread is to follow the motion of single electrons throughout their orbits and determine at each turn their entering phase and energy. This can be done by a simple graphical method similar in some respects to that due to *Slater and Terrall* [5], for linear accelerators.

If an electron enters the r.-f. gap for the  $k$ -th acceleration at the phase  $\varphi_k$  with an energy  $\varepsilon_k$  (measured in units of the rest energy  $m_0c^2$ ), then the next entrance will occur at the phase:

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + 2\pi \frac{V_0}{V_r} \sin \varphi_k + 2\pi \frac{m_0 c^2}{eV_r} \varepsilon_k,$$

with the energy:

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \frac{eV_0}{m_0 c^2} \sin \varphi_k.$$

$V_r$  is the «resonance voltage» satisfying the resonance conditions,  $V_0$  the amplitude of the accelerating voltage.

Plotting the curves  $\varphi_{k+1} = C_1 = \text{constant}$  and  $\varepsilon_{k+1} = C_2 = \text{constant}$  in the  $(\varphi_k, \varepsilon_k)$  coordinate system we can read off the entering phases and energies of the electron. Since the curves corresponding to various values of the constants  $C_1, C_2$  can be obtained by shifting the curve along the  $\varepsilon$ -axis, it is sufficient to plot one  $\varphi_{k+1}$  — and one  $\varepsilon_{k+1}$  — curve, the next values of  $\varepsilon$  and  $\varphi$  can be determined step by step by proper translation of the curves  $\varepsilon_{k+1}$  and  $\varphi_{k+1}$ . (The constants  $C_1$  and  $C_2$  are given by the point of intersection of the respective curves with the  $\varepsilon$  axis.)

In this manner taking for example a 4 MeV accelerator ( $V_r = 0,5$  MV,  $B_r = 1070$  gauss, magnet diameter 30 cm) and choosing the optimum value  $V_r/V_0 = 0,98$ , we obtained as probable energy spread 1,2% and mean electron current intensity 10  $\mu$ A.

Although no details are available concerning the operational conditions of microtrons actually in use, our results seem to be in good agreement with the experimental data we found in the literature. For example *Henderson* [6],

obtained  $4,5 \pm 0,07$  MeV (1,5% energy spread) and *Redhead* [2], obtained  $\frac{1}{2}$   $\mu$ A electron current.

The discrepancy in the beam current intensity can be accounted for by defocusing effects of various origin.

The above considerations show that the energy homogeneity of the beam depends on the operational conditions of the microtron. It can be shown that the microtron is capable of yielding much narrower energy spectra than linear accelerators of the same final energy, which is a further advantage of microtrons.

The author wishes to thank Dr. *P. Faragó* for his valuable advice.

#### REFERENCES

1. *V. Veksler*, J. Phys. U. S. S. R., **9**, 153, 1945.
2. *P. A. Redhead*, *H. Le Caine* and *W. J. Henderson*, Canad. J. Res. Sect., A, **28**, 73, 1950.
3. *C. Schmelzer*, Z. Naturforsch., **7a**, 808, 1952.
4. *W. J. Henderson*, *F. F. Heymann* and *R. E. Jennings*, Proc. Phys. Soc. B, **66**, 41, 1953.
5. *J. R. Terrall* and *J. C. Slater*, Journ. Appl. Phys., **23**, 66, 1952.
6. *W. J. Henderson*, *F. F. Heymann* and *R. E. Jennings*, Proc. Phys. Soc., **66**, 654, 1953.



A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat beérkezett 1955. III. 11. — Terjedelem: 7 (A/5) ív, 22 ábra

---

Akadémiai nyomda, Gerlóczy u. 2. — 35773/55 — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

Les *Acta Physica* paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des travaux du domaine de la physique.

Les *Acta Physica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix l'abonnement par volume est de 110 forints.

On peut s'abonner à l'Entreprise du Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

The *Acta Physica* publish papers on physics, in Russian, French, English and German.

The *Acta Physica* appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the *Acta Physica* is 110 forints a volume. Orders may be placed with «Kultúra» Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Die *Acta Physica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der Physik in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die *Acta Physica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden :

*Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.*

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankkonto Nr. : 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.



## INDEX

- A. Адам, Л. Яноши, П. Варга: Исследование когерентных фотонных потоков методом совпадений. — A. *Ádám*, L. *Jánossy* and P. *Varga*: Coincidences between Photons Contained in Coherent Light Rays ..... 301
- F. *Berencz*: Bemerkungen zur Analyse der Absorptionskurven. — Ф. Беренц: Замечания к анализу кривых абсорбции ..... 317
- Kázmér Nagy*: Quantummechanical Forces Acting on Photons. — Казмер Надь: Действие квантово-механических сил на фотоны ..... 327
- L. *Jánossy*: Remarks on the Foundation of Probability Calculus. — Л. Яноши: Замечания относящиеся к основам теории вероятности ..... 333
- J. *Aczél*: A Solution of Some Problems of K. Borsuk and L. Jánossy. — Я. Ацель: Решение некоторых проблем К. Боршука и Л. Яноши ..... 351
- E. *Fenyves*: The Efficiency of Self-Quenching G. M. Counters for Cosmic Ray Particles. — Э. Феньвеш: Вероятность срабатывания самогасящихся счетчиков Г.—М. для частиц космического излучения ..... 363
- Краткие сообщения — Brief Reports — Kurze Mitteilungen*
- Éva *Kisdi-Koszó*: On Some Problems of the Operation of Microtrons ..... 377